

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Μελέτη της εξάρτησης τυχαίων μεταβλητών
στην ανανεωτική θεωρία, με εφαρμογές σε
τυχαίους περιπάτους

Σωτήριος Ι. Λοσίδης

Διδακτορική διατριβή

Υποβλήθηκε στο
τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς
Ιούνιος 2018

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

Study of the dependence among random
variables in renewal theory, with
applications in random walks

Sotirios I. Losidis

PhD Thesis

Submitted to
Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus

Piraeus
June 2018

Στη Σοφία την Κατερίνα και τον Γιάννη

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή Κωνσταντίνο Πολίτη με τον οποίο ανταλλάξαμε σκέψεις και ιδέες κατά τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών. Οι συζητήσεις μας μέσω Skype που πολλές φορές κρατούσαν ώρες ήταν ιδιαίτερα ουσιαστικές για την περάτωση αυτής της έρευνας. Επίσης θέλω να τον ευχαριστήσω για την συμπαράσταση του, την θετική του ενέργεια και την υπομονή του κατά τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον άνθρωπο που πίστεψε σε εμένα περισσότερο από όλους, την σύζυγο μου Σοφία η οποία ήταν δίπλα μου σε κάθε στιγμή κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Υπήρξαν στιγμές που η παρουσία της λειτούργησε καταλυτικά ώστε να ολοκληρώσω την έρευνα αυτή. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα παιδιά μου, την Κατερίνα και τον Γιάννη και να τους ζητήσω συγνώμη που δεν αφιέρωσα περισσότερο χρόνο μαζί τους τα τελευταία δύο χρόνια.

Αν και είναι αυτονόητο θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που με έμαθαν να προσπαθώ και να δίνω πάντα τον καλύτερο μου εαυτό σε ότι κάνω. Σε αυτό το σημείο ας μου επιτραπεί να αναφερθώ σε δύο ανθρώπους που δεν βρίσκονται πια ανάμεσα μας, τον πατέρα μου Ιωαννή Λοσίδα και την γιαγιά μου Μαρία Δεδεγκίκα που ήταν δίπλα μου κατά τη διάρκεια αυτής της διαδρομής, αλλά δεν κατάφεραν να δουν την ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ επίσης στον κύριο Γεώργιο Ζωίδα για τις συμβουλές και την στήριξη του.

Περίληψη

Στη διατριβή αυτή γίνεται αρχικά αναφορά στο Κεφάλαιο 1 σε βασικά αποτελέσματα της ανανεωτικής θεωρίας τα οποία αποτέλεσαν τα βασικά εργαλεία για την εκπόνηση της διατριβής. Ένα από τα βασικά αντικείμενα μελέτης της ανανεωτικής θεωρίας είναι η μελέτη της ανανεωτικής συνάρτησης και η κατασκευή φραγμάτων για την ποσότητα αυτή.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε βελτιώσεις αυτών των φραγμάτων. Μια άλλη ποσότητα με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την ανανεωτική θεωρία είναι ο αριθμός των ανανεώσεων που συμβαίνουν σε ένα χρονικό διάστημα $(t, t + x)$. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε φράγματα για αυτή την ποσότητα που βελτιώνουν τα ήδη υπάρχοντα. Οι ίδιες ποσότητες μελετώνται σε ένα πιο γενικό πεδίο εφαρμογών, στους τυχαίους περιπάτους στο Κεφάλαιο 9.

Στο Κεφάλαιο 7 μελετάμε τις ροπές βασικών μεταβλητών της ανανεωτικής θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται τύποι υπολογισμού ροπών οποιασδήποτε τάξεως και φράγματα για τις ροπές κάτω από συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών.

Αυτά τα αποτελέσματα τα μεταφέρουμε στο πεδίο των τυχαίων περιπάτων στο Κεφάλαιο 8. Η μελέτη των δεξιών ουρών των παραπάνω ποσοτήτων αποτελεί βασικό εργαλείο για την μελέτη της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής την οποία μελετάμε στα κεφάλαια 3,4,5 και 6 της παρούσας διατριβής. Το πρόσημο αλλά και η μονοτονία της συνδιακύμανσης συνδέονται με συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών αλλά και με σχέσεις εξάρτησης για πεπερασμένο χρόνο και για την περίπτωση όπου ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

Abstract

Chapter 1 makes reference to certain results in renewal theory herein used as primary tools for completion of this thesis.

Studying the renewal function and creating bounds for this quantity are in the core of renewal theory studies. Improvements of these bounds are discussed in Chapter 2. The number of renewals occurring within a period $(t, t + x)$ is a quantity of special interest in renewal theory. The bounds presented for this quantity in Chapter 2 serve to improve the already existing ones.

Chapter 9 studies these same quantities in a more generic application context, namely for random walks.

As the number of renewals occurring within a period $(t, t + x)$ is linked to the right tail of the remaining life, it makes sense to study the right tail of the remaining life as well as the joint right tail of the current and the remaining life.

We use right tails to study the higher moments for those times studied by renewal theory, which we in turn discuss in Chapter 7. The formulae given in this chapter enable us to calculate the moments of the recurrence times in any class and to create bounds under specific distribution classes.

These results are then used in the context of random walks as discussed in Chapter 8. Studying the right tails for the aforementioned quantities helps study the covariance between the current and the remaining life as per chapters 3,4 and 5 of this thesis. Both the sign and the monotonicity of the covariance are linked to specific distribution classes and are relation- dependent for both finite and infinite times.

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| Εισαγωγή | 7 |
| 1 Ανανεωτικές Ανελιξίες | 9 |
| 1.1 Εισαγωγή | 9 |
| 1.2 Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας | 9 |
| 1.3 Ανέλιξη Poisson | 20 |
| 1.4 Ανανεωτική Στοχαστική Διαδικασία με καθυστέρηση | 22 |
| 1.5 Κλάσεις κατανομών | 24 |
| 2 Φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση | 27 |
| 2.1 Εισαγωγή | 27 |
| 2.2 Γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση | 28 |
| 2.3 Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση | 31 |
| 2.3.1 Υπολειπόμενος όρος | 31 |
| 2.3.2 Βελτιωμένα φράγματα για την συνάρτηση $L(t)$ | 33 |
| 2.4 Βελτίωση φραγμάτων της $L(t)$ για την κλάση $IMRL$ | 41 |
| 2.5 Ένα διπλό φράγμα για την $u(t)$. | 44 |
| 2.6 Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$ | 45 |
| 2.6.1 Φράγματα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ και μονοτονία της $L(t)$ | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.6.2 | Φράγματα της διαφοράς $U(t + x) - U(t)$ και κοιλότητα- κυρτότητα ανανεωτικής πυκνότητας | 47 |
| 2.6.3 | Φράγματα για τη διαφορά $U(t + x) - U(t)$ που προκύπτουν από τα φράγματα της ανανεωτικής συνάρτησης | 49 |
| 2.7 | Φράγματα για την δεξιά ουρά του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. | 53 |
| 2.8 | Παραδείγματα | 55 |
| 3 | Μελέτη της συνδιακύμανσης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπό- μενης ζωής | 59 |
| 3.1 | Εισαγωγή | 59 |
| 3.2 | Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής | 60 |
| 3.3 | Φράγματα για την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής | 70 |
| 3.3.1 | Φράγματα μέσω τιμών και κλάση IMRL | 70 |
| 3.4 | Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιαμέσους χρόνους. | 72 |
| 4 | Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής | 77 |
| 4.1 | Εισαγωγή | 77 |
| 4.2 | Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία | 78 |
| 4.3 | Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s | 82 |
| 5 | Συνδιακύμανση μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία | 85 |
| 5.1 | Εισαγωγή | 85 |
| 5.2 | Μια διαφορετική προσέγγιση | 88 |
| 5.2.1 | Μονοτονία συνδιακύμανσης | 88 |
| 5.3 | Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία | 90 |
| 5.3.1 | Συντελεστής συσχέτισης | 92 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Σχέση εξάρτησης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής | 95 |
| 6.1 | Εισαγωγή | 95 |
| 6.2 | Πρόσημο συνδιακύμανσης | 100 |
| 6.3 | Σχέση συσχέτισης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής όταν $t \rightarrow \infty$ | 102 |
| 6.4 | Σχέση εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s | 104 |
| 7 | Ροπές ανωτέρας τάξεως | 107 |
| 7.1 | Εισαγωγή | 107 |
| 7.2 | Η συνάρτηση κατανομής G_{w-1} | 109 |
| 7.3 | Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία | 112 |
| 7.4 | Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης | 118 |
| 7.5 | Απόδοση φραγμάτων | 123 |
| 7.6 | Διακύμανση υπολειπόμενης ζωής | 126 |
| 7.6.1 | Μονοτονία διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής. | 127 |
| 7.6.2 | Μονοτονία ροπών υπολειπόμενης ζωής και κλάση <i>IMRL</i> | 129 |
| 7.7 | Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων | 130 |
| 8 | Τυχαίος περίπατος με θετική τάση | 135 |
| 8.1 | Εισαγωγή | 135 |
| 8.2 | Τυχαίος περίπατος και βασικές διαφορές με ανανεωτική θεωρία | 136 |
| 8.3 | Κλιμακωτά ύψη | 137 |
| 8.4 | Αποτελέσματα από την ανανεωτική θεωρία | 138 |
| 8.5 | Δεξιά ουρά υπέρβασης του σημείου t (Overshoot) | 140 |
| 8.6 | Ροπές της τυχαίας μεταβλητής γ_t | 142 |
| 8.7 | Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$ | 144 |
| 8.8 | Τυποποιημένη εκθετική οικογένεια κατανομών και τυχαίος περίπατος | 149 |
| 9 | Ανανεωτική συνάρτηση και τυχαίος περίπατος | 153 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 9.1 | Εισαγωγή | 153 |
| 9.2 | Γνωστά φράγματα για την $U(t)$ | 154 |
| 9.3 | Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση | 155 |
| 9.3.1 | Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση βασισζόμενα στο φράγμα του <i>Stone</i> | 158 |
| | Βιβλιογραφία | 161 |

Εισαγωγή

Με την τυποποίηση και την βιομηχανοποίηση των προϊόντων δημιουργήθηκε η ανάγκη βελτιστοποίησης των διεργασιών ώστε να μειωθεί το κόστος και ο χρόνος παραγωγής. Η λύση αυτών των πολύπλοκων προβλημάτων επιτεύχθηκε με την χρήση μαθηματικών μοντέλων, και θεωρίες όπως η θεωρία ουρών και η ανανεωτική θεωρία αναπτύχθηκαν.

Η ανανεωτική θεωρία έχοντας ως αντικείμενο μελέτης την ανανέωση ενός συστήματος βρήκε άμεση εφαρμογή στην παραγωγική διαδικασία και στην ουσία αναπτύχθηκε παράλληλα με την μεγάλη βιομηχανική επανάσταση του δεύτερου μισού του εικοστού αιώνα.

Κατά τη δεκαετία του εβδομήντα και του ογδόντα μονοπώλησε το ενδιαφέρον η ανανεωτική συνάρτηση και κυρίως η κατασκευή φραγμάτων και η ασυμπτωτική της συμπεριφορά. Αποτελέσματα σταθμοί στην ανανεωτική θεωρία είναι αυτά του Lorden (1970), ο οποίος παρουσιάζει ένα γενικό άνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση και ένα φράγμα για τον αριθμό ανανεώσεων που πραγματοποιούνται σε ένα χρονικό διάστημα $(t, t + x)$. Οι Barlow και Proschan (1975) μελετώντας την αναμενόμενη υπολειπόμενη ζωή δίνουν ένα γενικό κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση. Ο Brown (1980, 1981, 1987) αφιέρωσε παραπάνω από μια δεκαετία στην μελέτη της ανανεωτικής συνάρτησης και τα φράγματα που παρουσίασε αποτελούν αντικείμενο αναφοράς σε νεώτερες εργασίες. Οι Politis και Koutras (2006) βελτιώνουν το φράγμα του Lorden (1970) για την ανανεωτική συνάρτηση κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

Εκτός από την ανανεωτική συνάρτηση αντικείμενο μελέτης αποτέλεσε η κατανομή της υπολειπόμενης ζωής. Ο τύπος υπολογισμού της δεξιάς ουράς της υπολειπόμενης ζωής αλλά και της τρέχουσας ζωής είναι γνωστός (βλ. Feller (1971), Gakis και Sivazlian (1994)) και φράγματα για την δεξιά ουρά έχουν κατασκευαστεί (Chang (1994)).

Όσον αφορά τη συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, φαίνεται ότι δεν έχει μελετηθεί διεξοδικά, ειδικά σε πεπερασμένο χρόνο και οι μοναδικές αναφορές σε αυτή γίνονται από τους Gakis και Sivazlian (1994) και Gupta (1984). Τα τελευταία χρόνια πέρα από διάφορες εφαρμογές που έχουν μελετηθεί στο παρελθόν, σε τομείς όπως αυτούς της ανανεωτικής θεωρίας (reliability), της

δημογραφίας (demography), και του αναλογισμού (actuarial), υπάρχουν εφαρμογές και στους τομείς της ιατρικής και της βιοστατιστικής. Μάλιστα ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν η ανανεωτική συνάρτηση, η διαφορά $U(t+x)-U(t)$ και η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Πολλά από τα αντικείμενα μελέτης στην ανανεωτική θεωρία γενικεύονται στους τυχαίους περιπάτους, έτσι ποσότητες όπως η ανανεωτική συνάρτηση μελετώνται και στους τυχαίους περιπάτους (βλ. Gut (1983), Stone (1972), Daley (1980)).

Τέλος, σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών έχουν μελετηθεί διεξοδικά στους τομείς των πιθανοτήτων και της στατιστικής και κάθε στατιστικό μοντέλο θα πρέπει να στηρίζεται σε κάποιες υποθέσεις σχετικά με την σχέση εξάρτησης των μεταβλητών του.

Σε αυτή τη διατριβή γίνεται μια προσπάθεια σύνδεσης διαφορετικών γνωστικών πεδίων όπως της ανανεωτικής θεωρίας, των τυχαίων περιπάτων και των σχέσεων εξάρτησης.

Κεφάλαιο 1

Ανανεωτικές Ανελίξεις

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αναφέρουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα της ανανεωτικής θεωρίας τα οποία αποτέλεσαν τα βασικά εργαλεία για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν θεμέλιους λίθους της ανανεωτικής θεωρίας και μπορεί κάποιος να τα βρεί σε συγγράμματα γνωστών συγγραφέων, ενδεικτικά αναφέρουμε τους Feller (1971), Asmussen (2003), Tijms (2003).

Η ανανεωτική θεωρία μελετάει όλες εκείνες τις μεταβλητές που σχετίζονται με την ανανέωση μιας κατάστασης, όπως ο αριθμός ανανεώσεων ενός συστήματος, ο χρόνος που απαιτείται για να συμβεί μια ανανέωση του συστήματος, ο χρόνος που έχει περάσει από την τελευταία ανανέωση ή ακόμη και ο χρόνος που απαιτείται από μια δεδομένη χρονική στιγμή μέχρι την επόμενη ανανέωση του συστήματος.

Για να κατανοήσουμε τον όρο ανανέωση αναφέρουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Σε έναν αγώνα Μπάσκετ κάθε μια από τις δύο διαγωνιζόμενες ομάδες αποτελείται από έξι (και όχι δώδεκα) παίκτες εκ των οποίων οι πέντε βρίσκονται μέσα στο γήπεδο και ένας είναι αναπληρωματικός. Με T_j θα συμβολίζουμε τον χρόνο που παίζει ο κάθε παίκτης μέχρι ο προπονητής να τον βγάλει από το παιχνίδι. Η ομάδα σε αυτό το παράδειγμα είναι το σύστημα, οι παίκτες είναι οι μονάδες του συστήματος και η ανανέωση του συστήματος συμβαίνει όταν ένας παίκτης καθίσει στον πάγκο και ένας άλλος πάρει την θέση του στο παρκέ.

1.2 Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

Μια από τις βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας είναι ο αριθμός των ανανεώσεων ενός συστήματος, ο οποίος συνήθως συμβολίζεται με $N(t)$ και περιγράφει το πλήθος

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

των ανανεώσεων που έχουν συμβεί μέχρι την χρονική στιγμή t . Πρόκειται στην ουσία για μια διακριτή, μη αρνητική τυχαία μεταβλητή.

Βασικό στοιχείο της ανανεωτικής θεωρίας είναι ο χρόνος, ο οποίος μπορεί να εκφράζει την διάρκεια που απαιτείται μέχρι να συμβεί μια ανανέωση ή να εκφράζει τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ανανεώσεων ή τέλος ακόμη και τον συνολικό χρόνο που απαιτείται μέχρι να συμβεί συγκεκριμένος αριθμός ανανεώσεων. Θα ορίσουμε με Y_1, Y_2, \dots τους χρόνους άφιξης (arrival times) με τον παρακάτω τρόπο:

$$Y_i = \inf\{t : N(t) = i\}.$$

Με την βοήθεια των χρόνων άφιξης θα εκφράσουμε τους χρόνους **αναμονής** ή **ενδιάμεσους** χρόνους (interarrival times). Θα συμβολίζουμε με T_i τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ της $i - 1$ και i ανανέωσης του συστήματος ως εξής

$$T_i = Y_i - Y_{i-1},$$

για $i \geq 2$ και $T_1 = Y_1$.

Θα ορίσουμε επίσης με $F(x) = P(T_i \leq x)$ για $i = 1, 2, \dots$ την συνάρτηση κατανομής του χρόνου που απαιτείται από την $i - 1$ πραγματοποίηση μιας ανανέωσης μέχρι την στιγμή της i ανανέωσης.

Η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ συνδέεται με την τυχαία μεταβλητή Y_i μέσω της σχέσης

$$N(t) = \max\{n : Y_n \leq t\}. \quad t \geq 0$$

Κεντρικό ρόλο στην ανανεωτική θεωρία έχει η ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη.

Ορισμός 1.2.1 Η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς η οποία καταγράφει τις διαδοχικές πραγματοποιήσεις ενός ενδεχομένου στο χρονικό διάστημα $(0, t]$ όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών πραγματοποιήσεων είναι μη αρνητικές ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καλείται ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη και είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη.

Το γεγονός ότι η $N(t)$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, σημαίνει ότι είναι σταθερή κατά διαστήματα με άλματα (ασυνέχειες) ύψους 1 στα σημεία επέλευσης μιας νέας ανανέωσης (χρόνοι άφιξης). Ένα θεμελιώδες πρώτο ερώτημα που εγείρεται είναι πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των ανανεώσεων $N(t)$. Η απάντηση δίνεται από την επόμενη σχέση

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) = F_n(t) - F_{n+1}(t). \quad (1.1)$$

Το παραπάνω προκύπτει από το γεγονός ότι το ενδεχόμενο $\{N(t) \geq n\}$ είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{Y_n \leq t\}$. Εδώ $F_n(t)$ συμβολίζει την n -ιοστή συνέλιξη

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

της συνάρτησης κατανομής F με τον εαυτό της. Γενικότερα μια συνέλιξη n -οστής τάξης της F ορίζεται ως εξής :

$$F_n(t) = P(Y_n \leq t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)dF(x),$$

με $F_1(t) = F(t)$. Στην ουσία η συνάρτηση κατανομής του χρόνου που απαιτείται να συμβούν n το πλήθος ανανεώσεις ισούται με την n -οστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής F με τον εαυτό της.

Εξαιτίας των συνελίξεων στη σχέση (1.1) δεν είναι πάντα εύκολο να υπολογιστεί η ακριβής κατανομή του αριθμού των ανανεώσεων σε ένα διάστημα $(0, t]$. Για αυτό τον λόγο μελετάμε τον μέσο αριθμό ανανεώσεων που συμβαίνουν σε αυτό το διάστημα. Στη βιβλιογραφία ο μέσος (ή αναμενόμενος) χρόνος ανανεώσεων σε ένα χρονικό διάστημα $(0, t]$ αναφέρεται ως ανανεωτική συνάρτηση και συνήθως συμβολίζεται με $U(t)$ (συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε στην διατριβή). Εύκολα κάποιος μπορεί να διαπιστώσει ότι η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(N(t) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(F_k(t) - F_{k+1}(t)) = \\ &= F(t) - F_2(t) + 2F_2(t) - 2F_3(t) + 3F_3(t) - 3F_4(t) \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) = F(t) + F(t) * \left(F(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(t) \right) \\ &= F(t) + [F * U](t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Δηλαδή η ανανεωτική συνάρτηση ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$U(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dU(x), \quad (1.3)$$

η οποία είναι μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης κατηγορίας εξισώσεων που ονομάζονται "εξισώσεις ανανεωτικού τύπου". Οι εξισώσεις ανανεωτικού τύπου έχουν την μορφή

$$C(t) = g(t) + \alpha \int_0^t C(t-x)dF(x). \quad (1.4)$$

Εδώ α είναι μια σταθερά που παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1]$, η g είναι μια φραγμένη συνάρτηση, η F είναι η συνάρτηση κατανομής και C είναι η άγνωστη συνάρτηση. Οι εξισώσεις ανανεωτικού τύπου διακρίνονται σε:

- (i) Ελλειμματικές (defective) όταν $0 < \alpha < 1$.

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

(ii) Μη ελλειμματικές ή κανονικές (proper) όταν $\alpha = 1$.

Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στον Asmussen (2003).

Η γενική λύση μιας εξίσωσης ανανεωτικού τύπου δίνεται από την σχέση

$$C(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x)dW(x), \quad (1.5)$$

όπου $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k F_k(t)$. Η παραπάνω εξίσωση είναι η μοναδική λύση της (1.4) η οποία είναι φραγμένη σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα. Αν η ανανεωτική εξίσωση είναι κανονική τότε $W(t) = U(t)$.

Η παράγωγος της ανανεωτικής συνάρτησης ονομάζεται ανανεωτική πυκνότητα (renewal density), συμβολίζεται με $u(t)$ και θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$u(t) = f(t) + \int_0^t f(t-x)u(x)dx. \quad (1.6)$$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται όταν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής $F(t)$, δηλαδή η $F(t)$ έχει πυκνότητα $f(t)$.

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει (κυρίως στα Κεφάλαια 2 και 7) σημαντικό ρόλο έχει η συνάρτηση $L(t)$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$L(t) = U(t) - \frac{t}{\mu}. \quad (1.7)$$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση αποτελεί βασικό εργαλείο σε πληθώρα φραγμάτων για τον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων που έχουν διατυπωθεί τα τελευταία πενήντα χρόνια με τα κυριότερα των Lorden (1970) και Brown (1980) και στα οποία θα αναφερθούμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2.

Πρόταση 1.2.2 Σε μια ανανεωτική διαδικασία για $t \rightarrow \infty$ ισχύει

$$L(t) \rightarrow \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1.$$

Απόδειξη Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον Feller (1971) σελίδα 366. \square

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $L(t)$ θα συμβολίζεται με $l(t)$ και ισούται με

$$l(t) = u(t) - \frac{1}{\mu}. \quad (1.8)$$

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

Λήμμα 1.2.3 Η συνάρτηση $l(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω κανονική ανανεωτική εξίσωση

$$l(t) = f(t) - \frac{\bar{F}(t)}{\mu} + \int_0^t f(x)l(t-x)dx. \quad (1.9)$$

Απόδειξη Αφαιρώντας και από τα δύο μέλη της σχέσης (1.6) την ποσότητα $\mu^{-1} \int_0^t f(x)dx = \mu^{-1} (1 - \bar{F}(t))$ προκύπτει ότι

$$u(t) - \frac{1 - \bar{F}(t)}{\mu} = f(t) + \int_0^t f(x)l(t-x)dx.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με αναδιάταξη των όρων στην παραπάνω σχέση. \square

Μια κατανομή που έχει σημαντικό ρόλο στην ανανεωτική θεωρία είναι η κατανομή ισορροπίας η οποία συμβολίζεται με F_e και ισούται με

$$F_e(t) = \int_0^t \frac{\bar{F}(z)}{\mu} dz. \quad (1.10)$$

Στο Κεφάλαιο 7 εισάγουμε μια γενικότερη οικογένεια κατανομών, ειδική περίπτωση της οποίας είναι η κατανομή ισορροπίας $F_e(t)$. Μια άλλη ποσότητα που θα μας βοηθήσει στο να εξάγουμε συμπεράσματα για το πρόσημο της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης (Κεφάλαιο 4) είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας ο οποίος θα συμβολίζεται με CV_e . Οι Psarrakos και Politis(2012) αναφέρουν ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής F_e ισούται με

$$CV_e = \frac{\sqrt{\frac{\mu_3}{3\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}}}{\frac{\mu_2}{2\mu}}, \quad (1.11)$$

όπου $\mu_k = \int_0^\infty x^k dF(x)$ είναι η ροπή k -τάξης της F .

Λήμμα 1.2.4 Σε μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία ισχύει

$$\int_0^t \bar{F}(x)l(t-x)dx = \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t). \quad (1.12)$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε την απόδειξή μας προσπαθώντας να υπολογίσουμε την

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

διαφορά $\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)$ με την βοήθεια της σχέσης (1.3) ως εξής

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) &= F(t) - F_e(t) \\
 &= U(t) - \int_0^t F(t-x)u(x)dx - F_e(t) \\
 &= U(t) - \int_0^t (1 - \bar{F}(t-x))u(x)dx - \int_0^t \frac{\bar{F}(x)}{\mu}dx \\
 &= \int_0^t \bar{F}(t-x)u(x)dx - \int_0^t \frac{\bar{F}(x)}{\mu}dx \\
 &= \int_0^t \bar{F}(t-x) \left(u(x) - \frac{1}{\mu} \right) dx \\
 &= \int_0^t \bar{F}(t-x)l(x)dx.
 \end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Μια άλλη συνάρτηση που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα μας απασχολήσει στην συνέχεια είναι η βαθμίδα αποτυχίας, η οποία θα συμβολίζεται με $\lambda(t)$. Για μια απόλυτα συνεχή συνάρτηση κατανομής F με πυκνότητα f , αυτή ορίζεται από τη σχέση

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (1.13)$$

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι η βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της παραγώγου της συνάρτησης $l(t)$ (εφόσον αυτή υπάρχει), πιο συγκεκριμένα:

Πρόταση 1.2.5 Σε μια ανανεωτική ανέλιξη με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων F , η βαθμίδα αποτυχίας της F μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της $l(t)$ ως εξής

$$\lambda(t) = f(0) + \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_0^t \bar{F}(t-x)l'(x)dx,$$

υποθέτοντας ότι η l είναι παραγωγίσιμη.

Απόδειξη Η συνάρτηση (1.6) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned}
 u(t) &= f(t) + \int_0^t f(x)u(t-x)dx = f(t) + \int_0^t \bar{F}'(t-x)u(x)dx \\
 &= f(t) + u(t) - \bar{F}(t)u(0) - \int_0^t \bar{F}(t-x)u'(x)dx \\
 &= f(t) + u(t) - \bar{F}(t)u(0) - \int_0^t \bar{F}(t-x)l'(x)dx.
 \end{aligned}$$

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

Αναδιατάσσοντας τους όρους της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$\bar{F}(t)(\lambda(t) - u(0)) = \int_0^t \bar{F}(t-x)l'(x)dx. \quad (1.14)$$

Από τη σχέση (1.6) για $t = 0$ προκύπτει ότι $u(0) = f(0)$.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (1.14) και αναδιατάσσοντας τους όρους της. \square

Πόρισμα 1.2.6 Αν η $l(t)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του χρόνου t και $\lambda(t)$ είναι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής F , τότε

$$u(t) \geq (\leq)\lambda(t). \quad (1.15)$$

Απόδειξη Αν $l(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση τότε από την σχέση (1.9) προκύπτει η ανισότητα

$$l(t) \geq (\leq)f(t) - \frac{\bar{F}(t)}{\mu} + l(t) \int_0^t f(x)dx.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της τελευταίας σχέσης προκύπτει ότι

$$l(t)\bar{F}(t) \geq (\leq)f(t) - \frac{\bar{F}(t)}{\mu} \Rightarrow l(t) \geq (\leq)\lambda(t) - \frac{1}{\mu} \Rightarrow u(t) \geq (\leq)\lambda(t). \quad \square$$

Δύο έννοιες οι οποίες αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης στην ανανεωτική θεωρία είναι η υπολειπόμενη ζωή (forward recurrence time ή excess lifetime) η οποία θα συμβολίζεται με γ_t και η τρέχουσα ζωή ή ηλικία (backward recurrence time ή shortage) η οποία θα συμβολίζεται με δ_t . Η μεταβλητή γ_t δίνει τον χρόνο από τη χρονική στιγμή t μέχρι την επόμενη ανανέωση και η μεταβλητή δ_t δίνει τον χρόνο από την τελευταία ανανέωση μέχρι τη χρονική στιγμή t . Η υπολειπόμενη διάρκεια ζωής ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma_t = S_{N(t)+1} - t \quad (1.16)$$

και η τρέχουσα διάρκεια ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\delta_t = t - S_{N(t)}. \quad (1.17)$$

Γνωστό αποτέλεσμα από τα πρώτα χρόνια ζωής της ανανεωτικής θεωρίας είναι ο τύπος υπολογισμού της από κοινού δεξιάς ουράς της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

Θεώρημα 1.2.7 Η από κοινού δεξιά ουρά της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$P(\gamma_t > y, \delta_t > x) = \bar{F}(t+y) + \int_0^{t-x} \bar{F}(t+y-s)dU(s), \quad 0 \leq x \leq t, y \geq 0. \quad (1.18)$$

Απόδειξη Παραπέμπουμε τους αναγνώστες στους Janssen και Manca (2005) (σελίδα 81) ή στους Gakis και Sivazlian(1994). \square

Από τη σχέση (1.18) μπορούμε να εξάγουμε τις περιθώριες δεξιές ουρές της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής αν θέσουμε $x = 0$ και $y = 0$ αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα :

$$P(\gamma_t > y) = \bar{F}(t+y) + \int_0^t \bar{F}(t+y-s)dU(s) \quad (1.19)$$

και

$$P(\delta_t > x) = \bar{F}(t) + \int_0^{t-x} \bar{F}(t-s)dU(s). \quad (1.20)$$

Στο επόμενο αποτέλεσμα παρουσιάζουμε μια διαφορετική σχέση για την από κοινού δεξιά ουρά της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής η οποία εκφράζεται με την βοήθεια της κατανομής ισορροπίας F_e και την συνάρτηση $l(t)$. Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια της διατριβής για λόγους σύγκρισης της από κοινού συνάρτησης κατανομής της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια συνήθη και σε μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία. Θα την χρησιμοποιήσουμε επίσης στο Κεφάλαιο 7 για τον αναλυτικό υπολογισμό ροπών ανώτερης τάξης της τρέχουσας ζωής, της υπολειπόμενης ζωής αλλά και για τον υπολογισμό ροπών του γινομένου τους. Για ευκολία στην παραπέρα ανάλυση μας θα ορίσουμε την συνάρτηση $\phi(x, y; t)$ ως εξής

$$\phi(x, y; t) = \int_0^{x+y} \bar{F}(z)l(t+y-z)dz. \quad (1.21)$$

Από τη σχέση (1.21) για $x = 0$ και $y = 0$ αντίστοιχα προκύπτει ότι

$$\phi(0, y; t) = \int_0^y \bar{F}(z)l(t+y-z)dz \quad (1.22)$$

και

$$\phi(x, 0; t) = \int_0^x \bar{F}(z)l(t-z)dz. \quad (1.23)$$

Λήμμα 1.2.8 Η από κοινού δεξιά ουρά της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία δίνεται από τη σχέση

$$P(\gamma_t > y, \delta_t > x) = \bar{F}_e(x+y) - \phi(x, y; t). \quad (1.24)$$

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

Απόδειξη Εισάγοντας τη σχέση (1.8) στη σχέση (1.18) έχουμε

$$\begin{aligned} P(\gamma_t > y, \delta_t > x) &= \bar{F}(t+y) + \int_x^t \bar{F}(u+y) \left(l(t-u) + \frac{1}{\mu} \right) du \\ &= \bar{F}(t+y) + \bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(t+y) + \int_x^t \bar{F}(u+y) l(t-u) du \\ &= \bar{F}(t+y) + \bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(t+y) + \int_{x+y}^{t+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Όμως το ολοκλήρωμα $\int_{x+y}^{t+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz$ που υπάρχει στην παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\int_{x+y}^{t+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz = \int_0^{t+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz - \int_0^{x+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz. \quad (1.26)$$

Εισάγοντας τη σχέση (1.12) στη σχέση (1.26) προκύπτει ότι

$$\int_{x+y}^{t+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz = \bar{F}_e(t+y) - \bar{F}(t+y) - \int_0^{x+y} \bar{F}(z) l(t+y-z) dz. \quad (1.27)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την εισαγωγή των σχέσεων (1.27) και (1.21) στη σχέση (1.25). \square

Η σχέση (1.24) που μόλις αποδείξαμε θα διαδραματίσει ένα ιδιαίτερα ουσιαστικό ρόλο στο Κεφάλαιο 7 για την κατασκευή φραγμάτων για ροπές ανωτέρας τάξης τόσο του γινομένου μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής όσο και τις ροπές ανωτέρας τάξης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, αντίστοιχα.

Μια τυχαία μεταβλητή που συνδέεται άμεσα με την τρέχουσα και την υπολειπόμενη ζωή, είναι ο χρόνος μεταξύ δύο ανανεώσεων που περιλαμβάνει την χρονική στιγμή t (spread). Ουσιαστικά πρόκειται για το άθροισμα της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Στην παρούσα διατριβή θα συμβολίζεται με $X_{N(t)+1}$.

Οι Janssen και Manca (2005) (σελίδα 76) αποδεικνύουν ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X_{N(t)+1}$ ισούται με

$$F_{N(t)+1}(x) = \begin{cases} \int_{t-x}^t (F(x) - F(t-z)) dU(z) & \text{για κάθε } x \leq t, \\ F(x) - F(t) + \int_0^t (F(x) - F(t-z)) dU(z) & \text{για κάθε } x > t. \end{cases} \quad (1.28)$$

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

Με την βοήθεια της σχέσης (1.12) μπορούμε να διατυπώσουμε μια διαφορετική σχέση για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X_{N(t)+1}$. Πιο συγκεκριμένα

Πόρισμα 1.2.9 Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X_{N(t)+1}$ δίνεται από τη σχέση

$$F_{X_{N(t)+1}}(x) = \begin{cases} F(t) - \bar{F}(x)(U(x) - U(t-x)) - \int_0^{t-x} \bar{F}(t-z)dU(z) & \text{για } x \leq t, \\ F(x) - \bar{F}(x)U(t) & \text{για } x > t. \end{cases} \quad (1.29)$$

Απόδειξη Αρχικά θα αποδείξουμε την περίπτωση όπου $x \leq t$. Το ολοκλήρωμα στο πάνω κλάδο της σχέσης (1.28) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_{t-x}^t (F(x) - F(t-z))dU(z) &= \int_{t-x}^t \bar{F}(t-z)dU(z) - \bar{F}(x) \int_{t-x}^t dU(z) \\ &= \int_{t-x}^t \bar{F}(t-z)dU(z) - \bar{F}(x)(U(t) - U(t-x)). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης γράφεται ως εξής

$$\int_{t-x}^t \bar{F}(t-z)dU(z) = \int_0^t \bar{F}(t-z)dU(z) - \int_0^{t-x} \bar{F}(t-z)dU(z),$$

και προσθέτοντας και αφαιρώντας την ποσότητα $\mu^{-1} \int_0^t \bar{F}(t-z)dz$ έχουμε

$$\int_{t-x}^t \bar{F}(t-z)dU(z) = \int_0^t \bar{F}(t-z)l(z)dz + F_e(t) - \int_0^{t-x} \bar{F}(t-z)dU(z).$$

Με την βοήθεια της σχέσης (1.12) η παραπάνω σχέση ισούται με

$$\int_{t-x}^t \bar{F}(t-z)dU(z) = F(t) - \int_0^{t-x} \bar{F}(t-z)dU(z). \quad (1.31)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.31) στη σχέση (1.30) προκύπτει ο πάνω κλάδος της σχέσης (1.28).

Για την περίπτωση όπου $x > t$ αρκεί να γράψουμε το ολοκλήρωμα του κάτω κλάδου

1.2. Βασικές έννοιες της ανανεωτικής θεωρίας

της σχέσης (1.28) ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^t (F(x) - F(t-z))dU(z) &= \int_0^t (\bar{F}(t-z) - \bar{F}(x))dU(z) \\ &= \int_0^t \bar{F}(t-z)u(z)dz - \bar{F}(x) \int_0^t dU(z) \\ &= \int_0^t \bar{F}(t-z)u(z)dz - \bar{F}(x)U(t). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας στην παραπάνω σχέση την ποσότητα $\mu^{-1} \int_0^t \bar{F}(t-z)dz$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.12) προκύπτει ότι

$$\int_0^t (F(x) - F(t-z))dU(z) = F(t) - \bar{F}(x)U(t).$$

Πλέον μπορούμε να γράψουμε τον κάτω κλάδο της σχέσης (1.28) ως εξής

$$F_{N(t)+1}(x) = \bar{F}(t) - \bar{F}(x) + F(t) - \bar{F}(x)U(t) = F(x) - \bar{F}(x)U(t).$$

□

Γενικότερα όπως συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία, οι τυχαίες μεταβλητές γ_t, δ_t και $X_{N(t)+1}$ αποτελούν το κλειδί για την κατανόηση της ανανεωτικής θεωρίας (παραπέμπουμε στους Asmussen (2003), Tijms (2003)). Ο Serfozo (2009, σελίδα 124) συγκεκριμένα αναφέρεται σε αυτές και τις αποκαλεί τριάδα της ανανεωτικής θεωρίας (renewal process trinity).

Ενδιαφέρον έχει επίσης και ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται η τρέχουσα ζωή και η υπολειπόμενη ζωή. Ένα ερώτημα που γεννιέται είναι πώς επηρεάζεται η υπολειπόμενη ζωή από μια μεταβολή της τρέχουσας ζωής. Απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μελετώντας τη συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Οι Gakis και Sivazlian (1994) στην προσπάθειά τους να διατυπώσουν μια σχέση για την συνδιακύμανση απέδειξαν ότι

$$E(\gamma_t \cdot \delta_t) = t\mu\bar{F}_e(t) + [t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t) \quad (1.32)$$

$$E(\delta_t) = t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] * u(t) = t - E(S_{N(t)}) \quad (1.33)$$

$$E(\gamma_t) = \mu[1 + U(t)] - t = \mu\bar{F}_e(t) + \mu\bar{F}_e(t) * u(t) = E(S_{N(t)+1}) - t. \quad (1.34)$$

Αναφέρουμε ότι η πρώτη ισότητα στη σχέση (1.34) προκύπτει από την ταυτότητα του Wald (Feller 1971).

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής θα ισούται με

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) = t\mu\bar{F}_e(t) + [t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t) - (\mu[1 + U(t)] - t)(t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] * u(t)). \quad (1.35)$$

1.3. Ανέλιξη Poisson

Στην συνέχεια της διατριβής θα μελετήσουμε την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία τόσο για πεπερασμένο χρόνο (Κεφάλαιο 3), όσο και για $t \rightarrow \infty$ (Κεφάλαιο 4) και σε μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία (Κεφάλαιο 5).

1.3 Ανέλιξη Poisson

Η απλούστερη μορφή μιας στοχαστικής ανέλιξης σε συνεχή χρόνο είναι η ανέλιξη Poisson. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ καλείται ανέλιξη Poisson αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- (i) Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια απαριθμητρία ανέλιξη με $N(0) = 0$.
- (ii) Σε ένα πολύ μικρό διάστημα πλάτους h μπορεί να συμβεί το πολύ μια ανανέωση με πιθανότητα ανάλογη του πλάτους h .
- (iii) Ο αριθμός των ανανεώσεων που συμβαίνουν σε ένα φραγμένο διάστημα μετά από μια δεδομένη και σταθερή χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των ανανεώσεων που συνέβησαν έως την χρονική στιγμή t .

Μια βασική ιδιότητα είναι ότι για κάθε σταθερό t η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt .

Βασικό χαρακτηριστικό της ανέλιξης Poisson είναι ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ που είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson (πρόκειται για μια σταθερή θετική ποσότητα). Δηλαδή ισχύει ότι

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (1.36)$$

Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού γίνεται με την βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής (Πολίτης (2012)).

Η n -οστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής F με τον εαυτό της σε μια ανέλιξη Poisson ισούται με

$$F_n(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (1.37)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.37) στη σχέση (1.1) προκύπτει ότι

$$P(N(t) = n) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1 + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (1.38)$$

1.3. Ανέλιξη Poisson

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι ο αριθμός των ανανεώσεων $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt (όπου t είναι μια σταθερή χρονική στιγμή). Με τη βοήθεια της σχέσης (1.38) μπορούμε να υπολογίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση για την ανέλιξη Poisson. Πιο συγκεκριμένα

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda t. \quad (1.39)$$

Για τον υπολογισμό της από κοινού δεξιάς ουράς της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής αρκεί να παρατηρήσουμε πως το ενδεχόμενο $\{\gamma_t > y, \delta_t > x\}$ είναι ισοπίθανο με το ενδεχόμενο $\{N(t+y) - N(t-x) = 0\}$, το οποίο λόγω της ιδιότητας των ανεξάρτητων προσauζήσεων που έχει η ανέλιξη Poisson είναι ισοδύναμο με $\{N(x+y) = 0\}$. Κάνοντας χρήση της σχέσης (1.38) καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως

$$P(\gamma_t > y, \delta_t > x) = e^{-\lambda(x+y)}.$$

Από την τελευταία σχέση για $y = 0$ και $x = 0$ προκύπτουν οι περιθώριες δεξιές ουρές της υπολειπόμενης και της τρέχουσας ζωής. Πιο συγκεκριμένα

$$P(\gamma_t > y) = e^{-\lambda y}$$

και

$$P(\delta_t > x) = e^{-\lambda x}, \quad x \leq t.$$

Παρατηρούμε πως οι τυχαίες μεταβλητές γ_t και δ_t είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή ισχύει

$$P(\gamma_t > y, \delta_t > x) = P(\gamma_t > y)P(\delta_t > x).$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) = 0.$$

Επίσης με ολοκλήρωση της δεξιάς ουράς της υπολειπόμενης και τρέχουσας ζωής ως προς y και x αντίστοιχα προκύπτουν οι μέσες τιμές τους. Πιο συγκεκριμένα

$$E(\gamma_t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda}$$

και

$$E(\delta_t) = \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Ο μέσος ολικός χρόνος ζωής ισούται με

$$E(X_{N(t)+1}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

1.4. Ανανεωτική Στοχαστική Διαδικασία με καθυστέρηση

Παρατηρούμε ότι ο μέσος ολικός χρόνος ζωής είναι αισθητά μεγαλύτερος από τον μέσο χρόνο ζωής που ισούται με λ^{-1} . Για $t \rightarrow \infty$ ο μέσος συνολικός χρόνος ζωής τείνει να είναι ο διπλάσιος. Αυτό είναι γνωστό ως παράδοξο χρόνων αναμονής (waiting time paradox).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.28) βλέπουμε ότι η συνάρτηση κατανομής του ολικού χρόνου ζωής όταν οι ενδιαμέσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ υπολογίζεται ως εξής:

$$F_{N(t)+1}(x) = \begin{cases} \lambda \int_{t-x}^t (e^{-\lambda(t-z)} - e^{-\lambda x}) dz & \text{εάν } x \leq t, \\ e^{-\lambda t} - e^{-\lambda x} + \lambda \int_0^t (e^{-\lambda(t-z)} - e^{-\lambda x}) dz & \text{εάν } x > t. \end{cases} \quad (1.40)$$

Όμως

$$\lambda \int_{t-x}^t (e^{-\lambda(t-z)} - e^{-\lambda x}) dz = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x} \quad (1.41)$$

και

$$\lambda \int_0^t (e^{-\lambda(t-z)} - e^{-\lambda x}) dz = \lambda \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} - e^{-\lambda x} t \right). \quad (1.42)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.41) και (1.42) στη σχέση (1.40) προκύπτει η ακόλουθη δίκλαδη σχέση

$$F_{N(t)+1}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x} & \text{για } x \leq t, \\ 1 - \lambda^2 t e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} & \text{για } x > t. \end{cases} \quad (1.43)$$

1.4 Ανανεωτική Στοχαστική Διαδικασία με καθυστέρηση

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε στις στοχαστικές εκείνες διαδικασίες στις οποίες οι ενδιαμέσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F .

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε σε ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες στις οποίες οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων είναι μεν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αλλά όχι όλες ισόνομες μεταξύ τους, και πιο συγκεκριμένα ο χρόνος που απαιτείται για την πρώτη ανανέωση του συστήματος ακολουθεί μια κατανομή G και όλοι οι υπόλοιποι χρόνοι ανανεώσεων ακολουθούν μια κατανομή F . Θα συμβολίζουμε με $\{N_G(t) : t \geq 0\}$ την ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με

1.4. Ανανεωτική Στοχαστική Διαδικασία με καθυστέρηση

καθυστέρηση (delayed renewal process). Κάτω από αυτές τις συνθήκες η σχέση (1.1) γράφεται

$$P(N_G(t) = n) = G * F_{n-1}(t) - G * F_n(t).$$

Αντίστοιχα με τη σχέση (1.2) η ανανεωτική συνάρτηση σε μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με καθυστέρηση θα ισούται με

$$M_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G * F_{n-1}(t). \quad (1.44)$$

Για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού ανανεώσεων σε μια τέτοια στοχαστική ανανεωτική διαδικασία θα δεσμεύσουμε τον μέσο αριθμό ανανεώσεων ως προς τον χρόνο της πρώτης ανανέωσης. Δεσμεύοντας τον μέσο αριθμό ανανεώσεων ως προς τον χρόνο που απαιτείται για την πρώτη ανανέωση του συστήματος προκύπτει πως

$$\begin{aligned} M_G(t) &= \int_0^{\infty} E(N_G(t) | X_1 = x) dG(x) \\ &= \int_0^t E(N_G(t) | X_1 = x) dG(x) + \int_t^{\infty} E(N_G(t) | X_1 = x) dG(x). \end{aligned}$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή του αριθμού των ανανεώσεων σε ισούται με

$$E(N_G(t) | X_1 = x) = \begin{cases} 1 + U(t - x) & \text{εάν } x \leq t, \\ 0 & \text{εάν } x > t. \end{cases}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις άμεσα προκύπτει πως

$$M_G(t) = \int_0^t (1 + U(t - x)) dG(x) = G(t) + \int_0^t U(t - x) dG(x). \quad (1.45)$$

Η (1.45) είναι αντίστοιχη της σχέσης (1.3) στην συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Πρόκειται για ένα απολύτως λογικό αποτέλεσμα αν σκεφτούμε πως η βασική και θεμελιώδης διαφορά μεταξύ της συνήθους στοχαστικής διαδικασίας και της ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας με καθυστέρηση είναι πως η κατανομή του χρόνου που απαιτείται για την πρώτη ανανέωση είναι διαφορετική από την κατανομή όλων των άλλων ενδιάμεσων χρόνων.

Ειδική περίπτωση της ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας με καθυστέρηση είναι η στάσιμη στοχαστική διαδικασία (stationary renewal process). Σε αυτή την περίπτωση αν μεταφέρουμε τον χρόνο που αρχίζουμε να μελετάμε τη στοχαστική διαδικασία από τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t (για $t > 0$) τότε $\{N_{s+t}\}_{s \geq 0} = \{N_s\}_{s \geq 0}$. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει η κατανομή της υπολειπόμενης ζωής γ_t να μην εξαρτάται από τον χρονική στιγμή t . Αξίζει

1.5. Κλάσεις κατανομών

να σημειωθεί πως στη στάσιμη στοχαστική διαδικασία η αρχική κατανομή G είναι η κατανομή ισορροπίας που αντιστοιχεί στην κατανομή F . Πιο συγκεκριμένα σε μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία η αρχική κατανομή G ισούται με την κατανομή ισορροπίας F_e . Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στους Asmussen (2003) και Janssen και Manca (2005).

1.5 Κλάσεις κατανομών

Οι κλάσεις αξιοπιστίας κατανομών (reliability classes) αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης κατά το δεύτερο μισό του προηγούμενου αιώνα με άμεση εφαρμογή στη θεωρία αξιοπιστίας, τη δημογραφία, την ανανεωτική θεωρία και σε μοντέλα συντήρησης εξαρτημάτων ή μηχανημάτων. Πολλοί ερευνητές προσπάθησαν να κατηγοριοποιήσουν τις διάφορες κατανομές σε επιμέρους ομάδες (κλάσεις) με κοινές ιδιότητες, ενδεικτικά αναφέρουμε τους Brown(1980), Barlow και Proschan(1975). Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των κλάσεων εκείνων που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια της διατριβής ότι οι κλάσεις κατανομών μεταξύ των άλλων συνδέονται με την μονοτονία της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής και της διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής.

Πιο συγκεκριμένα θα λέμε ότι η κατανομή ισορροπίας F ανήκει στην κλάση NBU (NWU) (new better (worse) than used) εάν ισχύει $\bar{F}(x+y) \leq (\geq) \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$. Ακόμη θα λέμε ότι η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην κλάση $2-NBU$ ($2-NWU$) αν η κατανομή ισορροπίας F_e που συνδέεται με την κατανομή F ανήκει στην κλάση NBU (NWU).

Μια κατανομή F θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση DFR (IFR) (decreasing (increasing) failure rate) όταν η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του χρόνου.

Μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F , θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση $IMRL$ ($DMRL$) (increasing (decreasing) mean residual lifetime) αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση. Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής θα συμβολίζεται με $m(t)$ και ισχύει ότι

$$m(t) = E(X - t | X > t) = \frac{\mu \bar{F}_e(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (1.46)$$

Σημειώνουμε ότι στην παρούσα διατριβή ότι αύξουσα (φθίνουσα) σημαίνει μη φθίνουσα (μη αύξουσα). Για περισσότερες λεπτομέρειες που αφορούν τις παραπάνω κλάσεις κατανομών παραπέμπουμε τους αναγνώστες στο βιβλίο των Willmot και Lin(2001) και στο βιβλίο των Shaked και Shanthikumar (2006). Αναφέρουμε επίσης ότι όταν η κατανομή F ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση DFR .

1.5. Κλάσεις κατανομών

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε το επόμενο αποτέλεσμα το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές στην συνέχεια της διατριβής και αφορά την μονοτονία της συνάρτησης $L(t)$ κάτω από την υπόθεση ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IMRL*.

Πρόταση 1.5.1 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IMRL* τότε η συνάρτηση $L(t) = U(t) - t\mu^{-1}$ και η αναμενόμενη μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής $E(\gamma_t)$, είναι αύξουσες συναρτήσεις του χρόνου t .*

Απόδειξη Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον Brown (1980), σελίδα 231. \square

Μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X (ή η κατανομή της F) θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση *NBUE* (new better than used in expectation) εάν ισχύει $E(X - t | X > t) \leq E(X)$ για κάθε $t \geq 0$.

Αντίστοιχα η τυχαία μεταβλητή X θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση *NWUE* (new worse than used in expectation) εάν ισχύει $E(X - t | X > t) \geq E(X)$ για κάθε $t \geq 0$.

Η κλάση *NWUE(NBUE)* είναι η μεγαλύτερη κλάση από όσες αναφέρουμε παραπάνω. Αξίζει να σημειωθεί πως όταν η κατανομή F ανήκει στην κλάση *NWUE(NBUE)* τότε ισχύει ότι

$$\mu \bar{F}(t) \leq (\geq) \int_t^\infty \bar{F}(x) dx. \quad (1.47)$$

Μια πιο γενική συνθήκη κάτω από την οποία η κατανομή F ανήκει στην κλάση *NWUE(NBUE)* είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 1.5.2 *Αν υπάρχει $a \geq 0$ με $\int_a^\infty \bar{F}(x) dx = \beta \leq \mu$ τέτοιο ώστε*

$$\bar{F}(t) \int_a^\infty \bar{F}(x) dx \leq \int_t^\infty \bar{F}(x) dx, \quad t \geq 0, \quad (1.48)$$

τότε

(i) *Η συνάρτηση κατανομής F θα ανήκει στην κλάση *NWUE(NBUE)*.*

(ii) *Η συνάρτηση $g(t) = e^{\frac{t}{\beta}} \int_t^\infty \bar{F}(z) dz$ είναι αύξουσα.*

Απόδειξη (i) Αντικαθιστώντας στην σχέση (1.48) όπου $a = 0$ προκύπτει η σχέση (1.47) και κατά συνέπεια η κατανομή F ανήκει στην κλάση *NWUE*. Για το (ii) αρκεί να παραγωγίσουμε τη σχέση (1.48) ως προς t και τότε προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt} g(t) = e^{\frac{t}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx - \bar{F}(t) \right) \geq 0.$$

1.5. Κλάσεις κατανομών

□

Αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση $NWUE$ ($NBUE$) τότε ισχύει $\bar{F}_e(t) \geq (\leq) \bar{F}(t)$ και κατά συνέπεια $\mu_2(2\mu^2)^{-1} \geq (\leq) 1$. Μια ακόμη μεγαλύτερη κλάση από την $NWUE$ ($NBUE$) είναι η $HNWUE$ ($HNBUE$) (harmonic new worst (better) than used in expectation). Αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση $HNWUE$ ($HNBUE$) τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq (\geq) \mu e^{-t/\mu}.$$

Τέλος αναφέρουμε την παρακάτω πρόταση που θα αποτελέσει βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό του ορίου της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής αλλά και τον υπολογισμό ορίων σε φράγματα για την συνδιακύμανση της τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής.

Πρόταση 1.5.3 Αν f_1 και f_2 δύο συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε η f_2 να είναι ολοκληρώσιμη στο πεδίο ορισμού της και $\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = 0$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx = 0.$$

Απόδειξη Το αποτέλεσμα αποτελεί συνέπεια του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (dominated convergence theorem), βλ.πχ Asmussen (2003). Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στον Δερμιτζάκη (2011, σελίδα 246).

Κεφάλαιο 2

Φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

2.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο η ανανεωτική συνάρτηση εκφράζει τον μέσο αριθμό ανανεώσεων ενός συστήματος. Η ανάγκη κατασκευής φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση πηγάζει κυρίως από δύο παράγοντες:

1. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιείται συνήθως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, ο υπολογισμός του οποίου σε κάποιες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα δύσκολος.
2. Υπάρχουν κατανομές όπου δεν υπάρχει δυνατότητα έκφρασης αναλυτικού τύπου για την ανανεωτική συνάρτηση (κλασικό παράδειγμα η κατανομή Weibull).

Μελετώντας την βιβλιογραφία παραθέτουμε την ακόλουθη λίστα (κατά χρονολογική σειρά) με μελετητές που ασχολήθηκαν με την κατασκευή φραγμάτων ,στην λίστα αυτή περιλαμβάνονται οι : Lorden (1970), Barlow και Proschan (1975), Brown (1980, 1981, 1987), Politis και Koutras (2006).

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τα γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$, θα κατασκευάσουμε καινούργια φράγματα τα οποία βελτιώνουν τα ήδη υπάρχοντα.

2.2. Γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

2.2 Γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Ο Lorden (1970) κατασκεύασε ίσως ένα από τα πιο γνωστά φράγματα της ανανεωτικής θεωρίας. Απέδειξε πως αν η δεύτερη ροπή της κατανομής F η οποία συμβολίζεται με μ_2 , είναι πεπερασμένη, ισχύει το ακόλουθο γενικό άνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση

$$U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} - 1. \quad (2.1)$$

Οι Barlow και Proschan (1975) μελετώντας την μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής (σχέση (1.34)) και κάνοντας την παρατήρηση ότι αυτή δεν μπορεί να είναι αρνητική κατέληξαν στο επόμενο γενικό κάτω φράγμα

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1. \quad (2.2)$$

Οι ίδιοι το 1981 υποθέτοντας ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $NBUE(NWUE)$ έδωσαν το εξής φράγμα

$$U(t) \leq (\geq) \frac{t}{\mu}. \quad (2.3)$$

Ο Brown (1980) απέδειξε ότι όταν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$, τότε η συνάρτηση $L(t) = U(t) - \mu^{-1}t$ είναι αύξουσα και ισχύει ότι

$$U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1. \quad (2.4)$$

Επίσης κατασκεύασε το ακόλουθο κάτω φράγμα για την συνάρτηση $U(t)$

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} - \frac{\int_t^\infty (\bar{F}_e(x) - q^{-1}\bar{F}(x)) dx}{\mu},$$

όπου $q = 1 - F(0)$ και $\bar{F}_e(x)$ είναι η ουρά της κατανομής ισορροπίας $F_e(x)$. Εδώ υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι $F(0) = 0$ (δείτε την απόδειξη της πρότασης 2.4.2 παρακάτω). Κάτω από αυτή την υπόθεση το κάτω φράγμα του Brown γράφεται

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty \bar{F}_e(x) dx + \bar{F}_e(t). \quad (2.5)$$

Θα συμβολίζουμε το κάτω φράγμα του Brown με $L_B(t)$. Το συγκεκριμένο φράγμα συμπεριφέρεται αρκετά καλά για μεγάλες τιμές του t . Πιο συγκεκριμένα όπως προκύπτει από τον Stone (1966) αν η κατανομή F έχει πεπερασμένες ροπές τάξης r με $r \geq 2$, τότε η διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων $L(t)$ και $L_B(t)$ είναι της τάξης $o(t^{1-r})$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Stone (1966) για να ισχύει αυτό δεν είναι

2.2. Γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

απαραίτητο η κατανομή F να είναι απόλυτα συνεχής, όπως υποθέτουμε εδώ, αλλά αρκεί κάποια συνέλιξη της F με τον εαυτό της να έχει ένα απόλυτα συνεχές τμήμα. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται από την *IMRL* κλάση (Brown (1980)). Αντιθέτως για μικρές τιμές του t , και ιδιαίτερα αν η κατανομή ανήκει στην κλάση των κατανομών με βαριά ουρά το φράγμα $L_B(t)$ δεν έχει το ίδιο καλή απόδοση.

Αυτό αποτυπώνεται στο Παράδειγμα 2.8, όπου συγκρίνουμε το φράγμα των Losidis και Politis (2017) που παρουσιάζουμε στην Ενότητα 2.4 και το οποίο βελτιώνει ομοιόμορφα το φράγμα $L_B(t)$.

Λίγα χρόνια αργότερα το 1987 ο Brown κατασκευάζει το ακόλουθο κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ανήκουν στην κλάση *IFR*

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^2} - 1. \quad (2.6)$$

Μια πρώτη παρατήρηση κοιτάζοντας αυτά τα φράγματα είναι πως όλα τους περιέχουν έμμεσα την συνάρτηση $L(t)$, όπως αυτή ορίζεται από τη σχέση (1.7). Πιο συγκεκριμένα αναφέρουμε πως η συνάρτηση $L(t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ανανεωτική εξίσωση.

Πρόταση 2.2.1 Η συνάρτηση $L(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$L(t) = \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \int_0^t L(x)f(t-x)dx. \quad (2.7)$$

Απόδειξη Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1.9) ως προς x στο διάστημα $(0,t)$ έχουμε

$$L(t) = \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \int_0^t \int_0^z l(z-x)f(x)dx dz. \quad (2.8)$$

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης στο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$L(t) = \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \int_0^t \int_x^t l(z-x)f(x)dz dx = \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \int_0^t L(x)f(t-x)dx.$$

□

Μια δεύτερη παρατήρηση που απορρέει από την επισκόπηση των παραπάνω φραγμάτων είναι πως σε όλες τις περιπτώσεις η συνάρτηση $L(t)$ φράσσεται από μια σταθερή ποσότητα.

Γενικότερα η σχέση (2.7) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την παραγωγή φραγμάτων της συνάρτησης $L(t)$. Πιο συγκεκριμένα αν η συνάρτηση $L(t)$ φράσσεται άνω και κάτω

2.2. Γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

από δύο σταθερές ποσότητες, τις b_u και b_l αντίστοιχα, τότε ένα διπλό φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ θα είναι το

$$\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + b_l F(t) \leq L(t) \leq \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + b_u F(t). \quad (2.9)$$

Τα φράγματα που θα παραθέσουμε στην συνέχεια είναι ήδη γνωστά από το άρθρο των Politis και Koutras (2006), όμως εμείς θα τα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.7).

Πόρισμα 2.2.2 Ένα γενικό διπλό φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ είναι το

$$\bar{F}_e(t) - 1 \leq L(t) \leq \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2} F(t) - 1. \quad (2.10)$$

Απόδειξη Το πάνω φράγμα προκύπτει αντικαθιστώντας στην σχέση (2.7) τη σχέση (2.1). Το κάτω φράγμα προκύπτει αντικαθιστώντας στη σχέση (2.7) τη σχέση (2.2). \square

Αντίστοιχα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πάνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IMRL* αντικαθιστώντας τη σχέση (2.4) στην σχέση (2.7). Πιο συγκεκριμένα προκύπτει ότι

$$L(t) \leq \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{2\mu^2} F(t) - 1,$$

το οποίο αποτελεί βελτίωση του φράγματος που περιγράφεται από τη σχέση (2.10). Εύκολη είναι και η κατασκευή φράγματος κάτω από την αντίστοιχη υπόθεση της *IFR* κλάσης με τον ίδιο τρόπο σκέψης. Πιο συγκεκριμένα αντικαθιστώντας στη σχέση (2.8) τη σχέση (2.6) προκύπτει ότι

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^2} F(t) - 1 = \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2} F(t) - F(t) - 1. \quad (2.11)$$

Τέλος γνωρίζουμε ότι όταν η κατανομή F ανήκει στην κλάση *NBUE* (*NWUE*) τότε $L(t) \leq (\geq) 0$. Έτσι άμεσα από τη σχέση (2.7) και τη γενική λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης (σχέση (1.5)) προκύπτει το ακόλουθο φράγμα

$$L(t) \leq (\geq) \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t). \quad (2.12)$$

Οι Politis και Koutras (2006) αναφέρουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες τα φράγματά τους είναι καλύτερα από τα ήδη υπάρχοντα.

2.3 Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Ο λόγος που αποδείξαμε τα φράγματα των Politis και Koutras (2006) χρησιμοποιώντας την σχέση (2.7) και όχι παραπέμποντας στις αποδείξεις που υπάρχουν στο άρθρο τους δεν είναι τυχαίος. Τα φράγματα αυτά προέκυψαν στην ουσία από την αντικατάσταση γνωστών φραγμάτων της συνάρτησης $L(t)$ στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^t L(x)f(t-x)dx.$$

Αν λοιπόν μπορούσαμε να χωρίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα σε ένα τμήμα που είναι γνωστό (παραδείγματος χάριν αποτελείται από ποσότητες όπως η συνάρτηση κατανομής F ή η κατανομή ισορροπίας F_e) και σε ένα άλλο τμήμα που περιέχει την συνάρτηση $L(t)$, τότε χρησιμοποιώντας την ίδια λογική που εφάρμοσαν οι Politis και Koutras (2006) μπορούμε να κατασκευάσουμε καλύτερα φράγματα από τα ήδη βελτιωμένα φράγματα που παρουσίασαν.

2.3.1 Υπολειπόμενος όρος

Βασικό ρόλο στην κατασκευή νέων βελτιωμένων φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση θα διαδραματίσει η συνάρτηση $Q(t)$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$Q(t) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \left(U(t) - \frac{t}{\mu} \right). \quad (2.13)$$

Για τους εξοικειωμένους με την ανανεωτική θεωρία αναγνώστες η παραπάνω συνάρτηση θυμίζει το βασικό ανανεωτικό θεώρημα (key renewal theorem). Γενικότερα πολλοί ερευνητές (παραδείγματος χάριν Brown) αντί να ασχοληθούν με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $L(t)$, ασχολούνται με την συνάρτηση $Q(t)$ η οποία είναι γνωστή ως "υπολειπόμενος όρος" (remainder term).

Πρόταση 2.3.1 Η συνάρτηση $Q(x)$ ικανοποιεί την κανονική ανανεωτική εξίσωση

$$Q(x) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x) - \bar{F}_e(x) + \int_0^x Q(x-y)f(y)dy. \quad (2.14)$$

Απόδειξη Θα αρχίσουμε την απόδειξη μας με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^x Q(x-y)f(y)dy.$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.13) στο παραπάνω ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.3) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^x Q(x-y)f(y)dy &= \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(x) - F(x) - \int_0^x U(x-y)f(y)dy + \int_0^x \frac{x-y}{\mu}f(y)dy \\ &= \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(x) - F(x) - (U(x) - F(x)) + \frac{x}{\mu} - F_e(x) \\ &= \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(x) - \left(U(x) - \frac{x}{\mu}\right) - F_e(x).\end{aligned}$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης την συνάρτηση $\frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(x) - \bar{F}_e(x)$, έχουμε

$$\frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(x) - \bar{F}_e(x) + \int_0^x Q(x-y)f(y)dy = \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \left(U(x) - \frac{x}{\mu}\right) = Q(x).$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά την συνάρτηση $\frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(x) - \bar{F}_e(x)$ που συναντήσαμε στη σχέση (2.14).

Πρόταση 2.3.2 Αν \bar{F} και \bar{F}_e είναι η ουρά της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων και της κατανομής ισορροπίας αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu} \left(\int_t^\infty x\bar{F}(x)dx - t \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \right) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \right) = \frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(t) - \bar{F}_e(t).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\frac{1}{\mu} \left(\int_t^\infty x\bar{F}(x)dx - t \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \right) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \int_t^\infty \bar{F}(x)dx = \frac{\mu_2}{2\mu}\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty \bar{F}_e(y)dy.$$

Απόδειξη Για λόγους ευκολίας θα συμβολίσουμε με $z(t)$ τη συνάρτηση

$$z(t) = \frac{1}{\mu} \left(\int_t^\infty x\bar{F}(x)dx - t \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \right) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \int_t^\infty \bar{F}(x)dx.$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $z(t)$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{1}{\mu} \left(-t\bar{F}(t) - \int_t^\infty \bar{F}(x)dx + t\bar{F}(t) \right) + \frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(t) = \frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(t) - \bar{F}_e(t).$$

Το δεύτερο μέρος του πορίσματος προκύπτει ολοκληρώνοντας την παραπάνω παράγωγο στο διάστημα $(0, t]$. □

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Στην ουσία όπως φαίνεται από την τελευταία απόδειξη η συνάρτηση $\frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(x) - \bar{F}_e(x)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $z(t)$, την οποία συναντάμε στον Tijms (2003), σελίδα 317.

Πρόταση 2.3.3 Ένα διπλό φράγμα για την συνάρτηση $Q(t)$ είναι το

$$\frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(t) - \bar{F}_e(t) - \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(t) \leq Q(t) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - \bar{F}_e(t) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy. \quad (2.15)$$

Απόδειξη Αρχικά θα αποδείξουμε το κάτω φράγμα της συνάρτησης $Q(t)$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.13) τη σχέση (2.1) προκύπτει ότι

$$Q(t) \geq -\frac{\mu_2}{2\mu^2}. \quad (2.16)$$

Εισάγοντας την παραπάνω ανισότητα στη (2.14) έχουμε

$$Q(x) \geq \frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(x) - \bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(x). \quad (2.17)$$

Για το πάνω φράγμα αρχικά αντικαθιστώντας τη σχέση (2.2) στη (2.13) έχουμε

$$Q(t) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2}. \quad (2.18)$$

Εισάγοντας στη συνέχεια την παραπάνω σχέση στη (2.14) προκύπτει ότι

$$Q(t) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - \bar{F}_e(t).$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω ανισότητα στη σχέση (2.14) προκύπτει ότι

$$Q(t) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - \bar{F}_e(t) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy. \quad (2.19)$$

2.3.2 Βελτιωμένα φράγματα για την συνάρτηση $L(t)$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι η βασική σχέση που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε φράγματα που βελτιώνουν+ αυτά των Politis και Koutras (2006).

Πρόταση 2.3.4 Η συνάρτηση $L(t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$\begin{aligned} L(t) = & \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right)F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(x)\right)f(t-x)dx \\ & - \int_0^t \left(\int_0^x Q(x-y)f(y)dy\right)f(t-x)dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Απόδειξη Η ανανεωτική εξίσωση (2.14) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$L(x) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 + \bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x) - \int_0^x Q(x-y)f(y)dy. \quad (2.21)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.21) με $f(t-x)$ και ολοκληρώνοντας ως προς x στο διάστημα $(0,t]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^t L(x)f(t-x)dx &= \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right) F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x)\right) f(t-x)dx \\ &\quad - \int_0^t \left(\int_0^x Q(x-y)f(y)dy\right) f(t-x)dx. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (2.7). \square

Καταφέραμε λοιπόν να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^t L(x)f(t-x)dx$ σε δύο τμήματα:

1. Το ένα τμήμα περιέχει την συνάρτηση

$$\left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right) F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x)\right) f(t-x)dx,$$

που εύκολα υπολογίζεται αν γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων.

2. Το δεύτερο τμήμα περιέχει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t \left(\int_0^x Q(x-y)f(y)dy\right) f(t-x)dx,$$

το οποίο δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί λόγω της συνάρτησης $Q(t)$. Όμως η συνάρτηση $Q(t)$ συνδέεται άμεσα με την συνάρτηση $L(t)$, μέσω της σχέσης (2.13)). Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε όλα τα γνωστά φράγματα για την συνάρτηση $L(t)$ που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα ώστε να κατασκευάσουμε καινούργια .

Για λόγους ευκολίας στην ανάλυσή μας θα χρησιμοποιούμε την σχέση (2.13) στην παρακάτω μορφή

$$-Q(t) = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu^2} + L(t). \quad (2.22)$$

Πρόταση 2.3.5 Ένα γενικό άνω φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ είναι το

$$L(t) \leq \bar{F}_e(t) - 1 + \frac{\mu_2}{\mu^2} F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(x)\right) f(t-x)dx. \quad (2.23)$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Το παραπάνω φράγμα αποτελεί βελτίωση τόσο του φράγματος των Politis και Koutras (2006) , όσο και του φράγματος του Lorden (1970) για όλες τις τιμές του t που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\mu \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq \mu_2 \bar{F}(t). \quad (2.24)$$

Απόδειξη Εισάγοντας το φράγμα του Lorden στη σχέση (2.22) έχουμε

$$-Q(x) \leq 1 - \frac{\mu_2}{2\mu^2} + \frac{\mu_2}{\mu^2} - 1 = \frac{\mu_2}{2\mu^2}.$$

Η παραπάνω ανισότητα θα ισχύει και αν θέσουμε $t - x$ όπου x παραπάνω. Δηλαδή, για $x \leq t$ θα ισχύει

$$-Q(t - x) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (2.20) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L(t) &\leq \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right) F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x) \right) f(t - x) dx \\ &\quad + \frac{\mu_2}{2\mu^2} \int_0^t F(x) f(t - x) dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση (2.23).

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.10) και τη σχέση (2.23) παρατηρούμε ότι το φράγμα που παρουσιάζουμε περιέχει το φράγμα των Politis και Koutras (2006), και μάλιστα είναι καλύτερο από αυτό αν το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.23) παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η ποσότητα $\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(x)$ να παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός, πιο συγκεκριμένα

$$\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(x) = \mu^{-1} \left(\int_t^\infty \bar{F}(x) dx - \frac{\mu_2}{\mu} \bar{F}(t) \right) \leq 0.$$

Δηλαδή η παραπάνω σχέση παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός αν και μόνο αν ισχύει η σχέση (2.24). \square

Έμμεσα η σχέση (2.23) περιέχει και το φράγμα του Lorden (1970). Πιο συγκεκριμένα προσθέτοντας και αφαιρώντας την ποσότητα $\frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(t)$ στη σχέση (2.23) έχουμε

$$L(t) \leq \frac{\mu_2}{\mu^2} - 1 + \bar{F}_e(t) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(x) \right) f(t - x) dx. \quad (2.26)$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Παρατηρούμε και εδώ ότι αν ισχύει η σχέση (2.24) τότε το φράγμα που δίνουμε στη σχέση (2.23) αποτελεί βελτίωση του φράγματος που δίνει ο Lorden (1970). Πρόκειται για την ίδια συνθήκη που δίνουν οι Politis και Koutras (2006). Αντίστοιχα ένα κάτω φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2) και (2.21). Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.3.6 Ένα γενικό κάτω φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - 1 + \int_0^t \bar{F}_e(x) f(t-x) dx. \quad (2.27)$$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.22) τη σχέση (2.2) έχουμε

$$-Q(x) = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu^2} + L(t) \geq -\frac{\mu_2}{2\mu^2}.$$

Εισάγοντας την τελευταία ανισότητα στη σχέση (2.20) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L(t) &\geq \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right) F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x) \right) f(t-x) dx \\ &\quad - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \int_0^t F(x) f(t-x) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εκτελώντας στοιχειώδεις υπολογισμούς. \square

Τα παραπάνω φράγματα όπως φαίνεται στα Παραδείγματα 2.1 και 2.2 που δίνονται στη συνέχεια του κεφαλαίου βελτιώνουν αισθητά αυτά των Politis και Koutras (2006) και κατά συνέπεια και αυτά του Lorden (1970) και των Barlow και Proschan (1975). Εκτός από τα γενικά φράγματα έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε φράγματα για συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών όπως η *IFR* και οι *NBUE* (*NWUE*).

Πρόταση 2.3.7 Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IFR* τότε ένα κάτω φράγμα της συνάρτησης $L(t)$ είναι το

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - 1 + \frac{\mu_2}{\mu^2} F(t) - F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(x) + \bar{F}(x) \right) f(t-x) dx. \quad (2.29)$$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.22) τη σχέση (2.6) έχουμε

$$-Q(x) = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu^2} + \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^2} - 1 \geq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1.$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Εισάγοντας την τελευταία ανισότητα στη σχέση (2.20) έχουμε

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right) F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x)\right) f(t-x) dx \\ + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right) \int_0^t F(x) f(t-x) dx.$$

Εκτελώντας πράξεις στο εσωτερικό της τελευταίας σχέσης προκύπτει ότι

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - 1 + \frac{\mu_2}{\mu^2} F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{\mu^2} \bar{F}(x) - F(x)\right) f(t-x) dx.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας όπου $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$ μέσα στο παραπάνω ολοκλήρωμα. \square

Παρατηρούμε πως η σχέση (2.29) περιλαμβάνει το φράγμα που απέδειξαν οι Politis και Koutras (2006) (πρόκειται για τη σχέση (2.11) στο παρόν κεφάλαιο) γεγονός που καθιστά ευκολότερη τη σύγκριση αυτών των δύο φραγμάτων. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να πούμε πως το φράγμα που δίνεται μέσω της σχέσης (2.29) είναι καλύτερο από αυτό της σχέσης (2.11) αν ισχύει ότι

$$\frac{\bar{F}_e(x)}{\bar{F}(x)} \geq \frac{\mu_2}{\mu^2} - 1 = \frac{\sigma^2}{\mu^2},$$

όπου $\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2$.

Πρόταση 2.3.8 *Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση NBUE (NWUE) τότε ένα άνω (κάτω) φράγμα της συνάρτησης $L(t)$ είναι το*

$$L(t) \leq (\geq) \bar{F}_e(t) - 1 + \int_0^t (\bar{F}_e(x) + F(x)) f(t-x) dx. \quad (2.30)$$

Απόδειξη Από τη σχέση (2.3) προκύπτει ότι όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση NBUE (NWUE) τότε $L(t) \leq (\geq) 0$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη (2.22) έχουμε

$$-Q(x-y) \leq (\geq) 1 - \frac{\mu_2}{2\mu^2}.$$

Εισάγοντας την τελευταία ανισότητα στη σχέση (2.20) προκύπτει ότι

$$L(t) \leq (\geq) \bar{F}_e(t) - \bar{F}(t) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right) F(t) + \int_0^t \left(\bar{F}_e(x) - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \bar{F}(x)\right) f(t-x) dx$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

$$+ \left(1 - \frac{\mu_2}{2\mu^2}\right) \int_0^t F(x)f(t-x)dx.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις. □

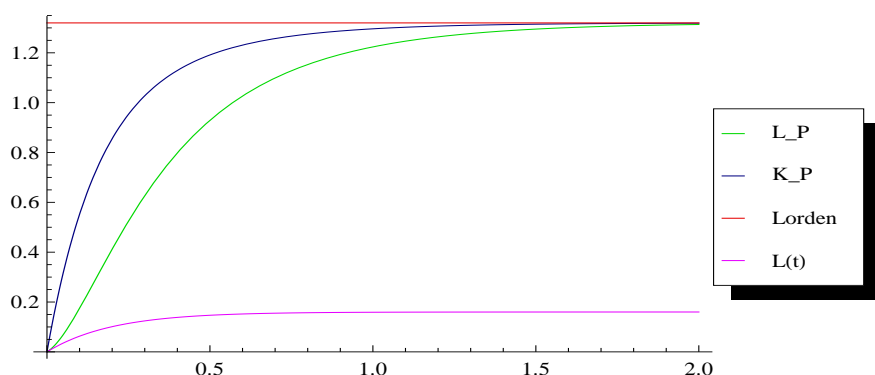
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικά παραδείγματα, όπου μελετάμε αριθμητικά την απόδοση των φραγμάτων που δόθηκαν παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε δύο παραδείγματα, το ένα αναφέρεται στη μείξη εκθετικών κατανομών, η οποία ανήκει στην κλάση *NWUE*, και το άλλο αναφέρεται σε μια κατανομή *Gamma* με παράμετρο σχήματος μεγαλύτερη της μονάδας, έτσι ώστε να ανήκει στην κλάση *IFR* και κατά συνέπεια και στην κλάση *NBUE*.

Παράδειγμα 2.1: Μείξη δύο εκθετικών κατανομών

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}, \quad x \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1),(2.10) και (2.23) για τον υπολογισμό των



Διάγραμμα 2.1: Σύγκριση φραγμάτων για την συνάρτηση $L(t)$.

φραγμάτων του Lorden, των Politis και Koutras ($K - P$) και των Losidis και Politis ($L - P$) κατασκευάσαμε το διάγραμμα (2.1) όπου μπορούμε να δούμε την απόδοση του καθενός από τα φράγματα αυτά. Στο ίδιο διάγραμμα υπάρχει και η συνάρτηση $L(t)$ ώστε να μπορέσουμε να δούμε πόσο κοντά είναι το κάθε φράγμα σε σχέση με αυτή.

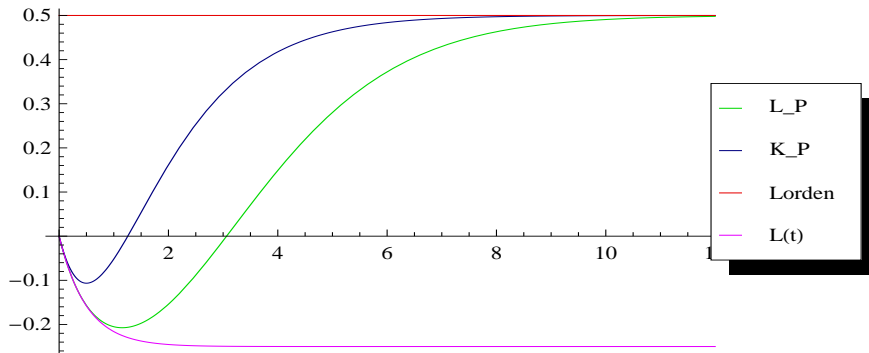
Παράδειγμα 2.2: Γάμμα (2,1)

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0.$$

2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Η κατανομή Γάμμα συμβολίζεται ως εξής: Γάμμα (a, b) όπου $a > 0$ είναι η παράμετρος σχήματος και $b > 0$ η παράμετρος κλίμακας. Μια κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος $a > 1$ έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας (θα ανήκει στην κλάση *IFR*), ενώ αν $a < 1$ τότε έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (θα ανήκει στην κλάση *DFR*). Τέλος αν η παράμετρος σχήματος $a = 1$ τότε η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή.



Διάγραμμα 2.2: Σύγκριση γενικών φραγμάτων για την συνάρτηση $L(t)$.

Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει πως η συνάρτηση $L(t)$ για την κατανομή Γάμμα $(2, 1)$ ισούται με

$$L(t) = \frac{1}{4}(-1 + e^{-2t}).$$

Στο Πίνακα 2.2.1 βλέπουμε τις αριθμητικές τιμές που παίρνει το φράγμα που παρουσιάσαμε μέσω της σχέσης (2.30), το οποίο θα το συμβολίζουμε με $NBUE_{bound}(t)$, και το οποίο ισούται με

$$NBUE_{bound}(t) = -\frac{1}{12}e^{-t}t(6 + t^2),$$

και το συγκρίνουμε με το φράγμα που παρουσιάζουν οι Politis και Koutras (2006) (πρόκειται για τη σχέση (2.12) στην παρούσα διατριβή). Θα συμβολίζουμε το φράγμα αυτό με $K - P_{bound}(t)$ συμβολισμός που προκύπτει από τα αρχικά των Koutras και Politis. Το παραπάνω φράγμα για μια κατανομή $Gamma(2, 1)$ ισούται με

$$K - P_{bound}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}t.$$

Στην τελευταία στήλη του πίνακα μπορούμε να δούμε την ποσοστιαία βελτίωση που προκύπτει αν αντί για το φράγμα των Politis και Koutras χρησιμοποιήσουμε το φράγμα που δίνουμε μέσω της σχέσης (2.30). Παρατηρούμε πως για μικρές τιμές του t , το φράγμα που προτείνουν οι Politis και Koutras έχει παρόμοια απόδοση με αυτό που προτείνουμε μέσω της σχέσης (2.30). Επίσης παρατηρούμε πως το φράγμα $K - P_{bound}(t)$ τείνει στο μηδέν καθώς το t μεγαλώνει με ταχύτερο ρυθμό από το

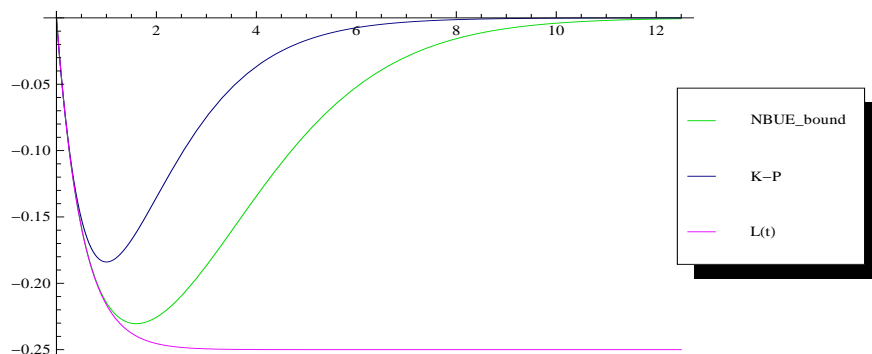
2.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

φράγμα που εμείς προτείνουμε.

Στο Διάγραμμα 2.2 μπορούμε να δούμε την γραφική απεικόνιση των παραπάνω φραγμάτων καθώς επίσης και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $L(t)$.

Πίνακας 2.2.1: Σύγκριση φραγμάτων για την κλάση NBUE

| | $NBUE_{bound}$ | $K - P_{bound}$ | βελτίωση % |
|------------|----------------|-----------------|------------|
| $t = 0$ | 0 | 0 | - |
| $t = 0.25$ | -0.0983642 | -0.0973501 | 1.04% |
| $t = 0.5$ | -0.157951 | -0.151633 | 4.16% |
| $t = 0.75$ | -0.193744 | -0.177137 | 9.37% |
| $t = 1$ | -0.214596 | -0.18394 | 16.6% |
| $t = 1.5$ | -0.230103 | -0.167348 | 37.5% |
| $t = 2$ | -0.225559 | -0.135335 | 66.7% |
| $t = 3$ | -0.186702 | -0.0746806 | 150% |
| $t = 5$ | -0.0870318 | -0.0168449 | 416% |



Διάγραμμα 2.3: Σύγκριση φραγμάτων για κλάση $NBUE$ για την συνάρτηση $L(t)$.

Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής $Gamma(2, 1)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t και ισούται με

$$\lambda(t) = \frac{t}{t+1}.$$

Στο Διάγραμμα 2.3 μπορούμε να συγκρίνουμε τις αποδόσεις των φραγμάτων που δίνονται από τις σχέσεις (2.29), (2.11) και (2.6). Για λόγους σύγκρισης θα συμβολίσουμε με $IFR_{bound}(t)$ το φράγμα της σχέσης (2.29) το οποίο για την κατανομή $Gamma(2, 1)$ ισούται με

$$IFR_{bound}(t) = \frac{1}{4}(-2 + e^{-t}(2 + t^2)).$$

2.4. Βελτίωση φραγμάτων της $L(t)$ για την κλάση $IMRL$

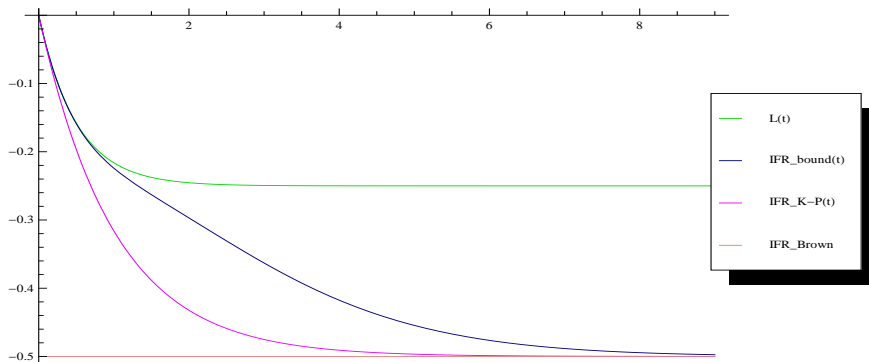
Θα συμβολίσουμε επίσης το φράγμα που προτείνουν οι Politis και Koutras (2006) με $IFR_{K-P}(t)$, το οποίο ισούται με

$$IFR_{K-P}(t) = \frac{1}{2}(-1 + e^{-t}).$$

Τέλος θα συμβολίσουμε με $IFR_{Brown}(t)$ το φράγμα που προτείνει ο Brown (1987) μέσω της σχέσης (2.6), το οποίο στο παράδειγμα μας ισούται με

$$IFR_{Brown}(t) = -0.5$$

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.3 το φράγμα που προτείνουμε μέσω της σχέσης (2.29) είναι καλύτερο από αυτό που προτείνουν οι Politis και Koutras (2006). Πιο συγκεκριμένα τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες τιμές του t το φράγμα της σχέσης (2.29) έχει καλύτερη απόδοση από το φράγμα των Politis και Koutras. Παρατηρούμε επίσης ότι για μικρές τιμές t το φράγμα που προτείνουμε ταυτίζεται ή βρίσκεται πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές της συνάρτησης $L(t)$. Τέλος φαίνεται πως το φράγμα των Politis και Koutras τείνει στη σταθερή ποσότητα -0.5 (φράγμα του Brown) με ταχύτερο ρυθμό σε σχέση με το φράγμα της σχέσης (2.29).



Διάγραμμα 2.4: IFR:Σύγκριση φραγμάτων για την συνάρτηση $L(t)$.

2.4 Βελτίωση φραγμάτων της $L(t)$ για την κλάση $IMRL$

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τα φράγματα που παρουσίασε ο Brown (1980) και έχουν εφαρμογή στην κλάση $IMRL$. Θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια αυτής της ενότητας ένα διπλό φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ (Πρόταση 2.4.2). Το κάτω φράγμα βελτιώνει ομοιόμορφα αυτό του Brown (1980), ενώ το πάνω φράγμα βελτιώνει αυτά των Politis και Koutras (2006).

2.4. Βελτίωση φραγμάτων της $L(t)$ για την κλάση $IMRL$

Θα αρχίσουμε την ανάλυσή μας με το ακόλουθο λήμμα, το οποίο ως αποτέλεσμα υπάρχει διαπισθητικά στο άρθρο των Politis και Koutras (2006) (πρόκειται για τη σχέση (24) εκεί) αλλά και στο άρθρο των Geluk και Frenk (2011). Εμείς θα αποδείξουμε το λήμμα αυτό χρησιμοποιώντας έναν διαφορετικό τρόπο.

Λήμμα 2.4.1 Η συνάρτηση $L(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$L(t) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \int_0^t \bar{F}_e(t-y)dL(y). \quad (2.31)$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη μας από τον υπολογισμό της συνάρτησης $\bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)l(t-x)dx$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση (1.8) έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)l(t-x)dx &= \bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)(u(t-x) - \frac{1}{\mu})dx \\ &= \bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)u(t-x)dx - \frac{1}{\mu} \int_0^t \bar{F}_e(x)dx, \end{aligned}$$

αντικαθιστώντας όπου $\bar{F}_e(t) = 1 - F_e(t)$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)l(t-x)dx = 1 - F_e(t) + U(t) - \int_0^t F_e(x)u(t-x)dx - \frac{1}{\mu} \int_0^t \bar{F}_e(x)dx.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση

$$F_e(t) + \int_0^t F_e(x)u(t-x)dx = \frac{t}{\mu},$$

βλ. για παράδειγμα Feller (1971, Κεφάλαιο XI). □

Πρόταση 2.4.2 Συμβολίζουμε με $m(t)$ τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής (*mean residual life*) της κατανομής F . Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $m(t)$ είναι αύξουσα. Τότε ένα κάτω φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$L(t) \geq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + 2\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t), \quad (2.32)$$

και αντίστοιχα ένα πάνω φράγμα είναι το

$$L(t) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \bar{F}_e(t) + \frac{m(t)}{\mu} (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)). \quad (2.33)$$

2.4. Βελτίωση φραγμάτων της $L(t)$ για την κλάση $IMRL$

Απόδειξη Η απόδειξη στηρίζεται στο Λήμμα 2.4.1 και στην σχέση

$$\bar{F}_e(t) = \int_0^t \bar{F}(t-y)dL(y), \quad t \geq 0. \quad (2.34)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εύκολα αν σκεφτούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{F}(t-y)dL(y) &= \int_0^t \bar{F}(t-y)dU(y) - \frac{1}{\mu} \int_0^t \bar{F}(t-y)dy \\ &= 1 - F_e(t). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάναμε στην εκφώνηση της πρότασης η συνάρτηση L είναι μη αρνητική και αύξουσα, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως θα αντιστοιχεί σε ένα θετικό μέτρο. Κάνοντας για λόγους ευκολίας την υπόθεση ότι $F(0) = 0$, το μέτρο θα έχει μοναδιαία μάζα στο μηδέν. Γράφουμε $L_0(t) = L(t) - 1$, έτσι ώστε το μέτρο που συνδέεται με το L_0 να παραμένει θετικό αλλά χωρίς μάζα στο μηδέν. Έτσι οι σχέσεις (2.31) και (2.34) μπορούν να γραφτούν ως εξής,

$$L(t) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(t-y)dL_0(y) \quad (2.35)$$

και

$$\bar{F}_e(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-y)dL_0(y). \quad (2.36)$$

Κάτω από την υπόθεση ότι η F είναι $IMRL$, ισχύει ότι $\bar{F}_e(t) \geq \bar{F}(t)$ για κάθε t . Στην πραγματικότητα αυτή η ανισότητα συνδέεται με την κλάση $NWUE$ η οποία είναι μια μεγαλύτερη κλάση από την $IMRL$ (παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε πηγές όπως το βιβλίο των Lai και Xie (2006) για περισσότερες λεπτομέρειες). Σύμφωνα με τα παραπάνω από την σχέση (2.35) προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα

$$L(t) \geq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}(t-y)dL_0(y)$$

και το κάτω φράγμα προκύπτει αντικαθιστώντας τη σχέση (2.36).

Για την απόδειξη του πάνω φράγματος αρχικά παρατηρούμε ότι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής $m(t)$, (όπως αυτός ορίζεται από τη σχέση (1.46)), μπορεί να εκφραστεί ως εξής $m(t) = \mu \bar{F}_e(t) / \bar{F}(t)$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η συνάρτηση $m(t)$ είναι αύξουσα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{F}_e(t-y)dL_0(y) &= \frac{1}{\mu} \int_0^t m(t-y)\bar{F}(t-y)dL_0(y) \\ &\leq \frac{m(t)}{\mu} \int_0^t \bar{F}(t-y)dL_0(y) \\ &= \frac{m(t)}{\mu} (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)). \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.5. Ένα διπλό φράγμα για την $u(t)$.

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση και τη σχέση (2.36) ολοκληρώνεται η απόδειξη.
□

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι και τα δύο φράγματα που παρουσιάσαμε στην Πρόταση 2.4.2 παρουσιάζουν σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά, τείνοντας στην ποσότητα $\mu_2/(2\mu^2) - 1$. Για το κάτω φράγμα αυτό είναι προφανές, ενώ για το πάνω φράγμα παραπέμπουμε στους Losidis και Politis (2017).

2.5 Ένα διπλό φράγμα για την $u(t)$.

Υποθέτοντας ότι η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων έχει μια απόλυτα συνεχή και φραγμένη συνάρτηση πυκνότητας f , τότε είναι γνωστό (παραδείγματος χάρη Feller (1971)) ότι η ανανεωτική πυκνότητα u είναι η μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης που δίνεται στη σχέση (1.6). Εισάγοντας την βαθμίδα αποτυχίας (σχέση (1.13)) στη σχέση (1.6), προκύπτει ότι

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \lambda(t-x)\bar{F}(t-x)u(x)dx.$$

Η παραπάνω σχέση θα μας βοηθήσει να κατασκευάσουμε ένα διπλό φράγμα για την συνάρτηση $u(t)$ κάτω από την υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην κλάση DFR .

Πρόταση 2.5.1 Έστω $\lambda(t)$ η βαθμίδα αποτυχίας η οποία συνδέεται με την συνάρτηση κατανομής F . Κάτω από την υπόθεση ότι η $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα ισχύει ότι,

$$u(t) \geq f(t) + \frac{F(t)}{\mu} + \lambda(t)(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) \quad (2.38)$$

και

$$u(t) \leq f(t) + \frac{F(t)}{\mu} + \lambda(0)(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)). \quad (2.39)$$

Απόδειξη Αφαιρώντας την ποσότητα $\mu^{-1} \int_0^t f(t-x)dx$ και από τα δύο μέλη της σχέσης (1.6), έχουμε

$$u(t) - \frac{F(t)}{\mu} = f(t) + \int_0^t \lambda(t-x)\bar{F}(t-x) \left(u(x) - \frac{1}{\mu} \right) dx.$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$u(t) = f(t) + \frac{F(t)}{\mu} + \int_0^t \lambda(t-x)\bar{F}(t-x)dL_0(x).$$

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Αν η F ανήκει στην DFR κλάση τότε για κάθε $0 \leq x \leq t$, ισχύει ότι $\lambda(0) \geq \lambda(t-x) \geq \lambda(t)$. Και τα δύο φράγματα αποδεικνύονται συνδυάζοντας την παραπάνω διπλή ανισότητα για την βαθμίδα αποτυχίας και τη σχέση (2.36). \square

Οι Politis και Koutras (2006) αναφέρουν ότι αν η F ανήκει στην κλάση $IMRL$, τότε η $u(t)$ ικανοποιεί την ανισότητα $u(t) \geq f(t) + F(t)/\mu$. Είναι προφανές ότι η σχέση (2.38) αποτελεί μια βελτίωση της σχέσης αυτής.

Το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.5.1 για την ανανεωτική πυκνότητα είναι καλύτερο από το κάτω φράγμα που δόθηκε στο Πρόρισμα 1.2.6 αν

$$f(t) + \frac{F(t)}{\mu} + \lambda(t)(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) \geq \lambda(t).$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1.13) η παραπάνω ανισότητα γράφεται

$$\frac{F(t)}{\mu} + \lambda(t)\bar{F}_e(t) \geq \lambda(t),$$

και αναδιατάσσοντας τους όρους στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σχέση (2.38) αποτελεί βελτίωση της σχέσης (1.15) αν και μόνο αν ισχύει

$$\frac{F(t)}{\mu} \geq \lambda(t)F_e(t).$$

2.6 Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ που περιγράφει τον αναμενόμενο αριθμό των ανανεώσεων που θα συμβούν στο χρονικό διάστημα $(t, t+x)$.

Αρχικά αναφέρουμε ότι η διαφορά $U(t+x) - U(t)$ γράφεται ως εξής

$$U(t+x) - U(t) = \int_t^{t+x} u(z) dz. \quad (2.40)$$

Ίσως το πιο γνωστό αποτέλεσμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ είναι το θεώρημα του Blackwell σύμφωνα με το οποίο ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (U(t+x) - U(t)) = \frac{x}{\mu}. \quad (2.41)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα θα μας δώσει μια σχέση υπολογισμού της διαφοράς $U(t+x) - U(t)$ για πεπερασμένο χρόνο και η οποία θα μπορεί άμεσα να συνδεθεί οπτικά με τη σχέση (2.41).

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Πρόταση 2.6.1 Η διαφορά $U(t+x) - U(t)$ σε μια ανανεωτική διαδικασία δίνεται από τη σχέση

$$U(t+x) - U(t) = \frac{x}{\mu} + \int_t^{t+x} l(z) dz. \quad (2.42)$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει άμεσα αντικαθιστώντας τη σχέση (1.8) στη σχέση (2.40). \square

Καταφέραμε λοιπόν να δημιουργήσουμε μια σχέση για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ για πεπερασμένο χρόνο της οποίας το όριο για $t \rightarrow \infty$ δίνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα ($x\mu^{-1}$).

Πόρισμα 2.6.2 Η διαφορά $U(t+x) - U(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$U(t+x) - U(t) = \frac{x}{\mu} + \bar{F}(t) - \bar{F}(x+t) - (\bar{F}_e(t) - \bar{F}_e(x+t)) + \int_t^{t+x} \int_0^z f(z-y) l(y) dy dz. \quad (2.43)$$

Απόδειξη Το ζητούμενο προκύπτει αντικαθιστώντας τη σχέση (1.9) στη σχέση (2.42). \square

2.6.1 Φράγματα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ και μονοτονία της $L(t)$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, πέραν από την κατασκευή φραγμάτων για την συνάρτηση $U(t)$, έχει και η κατασκευή φραγμάτων για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$. Ένα τέτοιο φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ προκύπτει άμεσα από τη σχέση (2.42). Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι

Πόρισμα 2.6.3 Αν η συνάρτηση $L(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου t τότε

$$U(t+x) - U(t) \geq (\leq) \frac{x}{\mu}.$$

Παρατήρηση : Σύμφωνα με τον Brown (1980) αύξουσα $L(t)$ συνεπάγεται ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι *IMRL*. Έτσι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.33) και (2.32) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πάνω φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ για την περίπτωση όπου η συνάρτηση $L(t)$ είναι αύξουσα (και κατά συνέπεια η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων θα ανήκει στην κλάση *IMRL*).

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Πόρισμα 2.6.4 *Αν η κατανομή F των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση IMRL τότε ένα πάνω φράγμα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ είναι το εξής*

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x+t) - \bar{F}_e(t) + \frac{1}{\mu} \int_t^{t+x} \bar{F}_e(z) dz + \bar{F}(t) - \bar{F}_e(t) + \frac{m(t+x)}{\mu} (\bar{F}_e(t+x) - \bar{F}(t+x)). \quad (2.44)$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει αφαιρώντας από τη σχέση (2.33) τη σχέση (2.32).
□

Παρατηρούμε ότι το φράγμα που δίνεται από τη σχέση (2.44) τείνει στην ποσότητα $x\mu^{-1}$ καθώς $t \rightarrow \infty$, επομένως σύμφωνα με το ανανεωτικό θεώρημα του Blackwell έχει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά.

2.6.2 Φράγματα της διαφοράς $U(t+x) - U(t)$ και κοιλότητα-κυρτότητα ανανεωτικής πυκνότητας

Τα φράγματα της προηγούμενης ενότητας μπορούν να βελτιωθούν υπό την υπόθεση της μονοτονίας για την ανανεωτική πυκνότητα $u(t)$. Μια επαρκής συνθήκη ώστε η ανανεωτική πυκνότητα $u(t)$ να είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου t (και κατά συνέπεια η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ να είναι κοίλη) είναι ότι η κατανομή F ανήκει στην κλάση DFR (Brown (1980)).

Πόρισμα 2.6.5 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα πάνω φράγμα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ δίνεται από τη σχέση*

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \bar{F}(t) - \bar{F}(t+x) - (\bar{F}_e(t) - \bar{F}_e(t+x)) + \lambda(0) \int_t^{t+x} (\bar{F}_e(z) - \bar{F}(z)) dz.$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει αντικαθιστώντας τη σχέση (2.39) στη σχέση (2.40). □

Πόρισμα 2.6.6 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα κάτω φράγμα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ δίνεται από τη σχέση*

$$U(t+x) - U(t) \geq \frac{x}{\mu} + \bar{F}(t) - \bar{F}(t+x) - (\bar{F}_e(t) - \bar{F}_e(t+x)) + \int_t^{t+x} \lambda(z) (\bar{F}_e(z) - \bar{F}(z)) dz.$$

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Απόδειξη Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας τη σχέση (2.38) στη σχέση (2.40). \square

Αντιθέτως αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση IFR τότε δεν συνεπάγεται ότι η ανανεωτική πυκνότητα είναι αύξουσα συνάρτηση. Ένα αντιπαράδειγμα προκύπτει από την συνέλιξη τριών εκθετικών κατανομών με την ίδια παράμετρο.

Πρόταση 2.6.7 *Αν η συνάρτηση $u(t)$ είναι αύξουσα τότε ένα φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ είναι το*

$$U(t+x) - U(t) \geq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x+t) - \bar{F}_e(t).$$

Απόδειξη Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.54) και (2.56) έχουμε

$$U(t+x) - U(t) \geq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x+t) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}_e * (U(t+x) - U(t)). \quad (2.45)$$

Όμως η συνέλιξη $\bar{F}_e * U(t)$ ισούται με

$$\bar{F}_e * U(t) = \int_0^t \bar{F}_e(t-x)u(x)dx = \int_0^t \bar{F}_e(z)u(t-z)dz, \quad (2.46)$$

και αντίστοιχα θέτοντας όπου $t = t+x$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\bar{F}_e * U(t+x) = \int_0^{t+x} \bar{F}_e(t+x-z)u(z)dz = \int_0^{t+x} \bar{F}_e(z)u(t+x-z)dz, \quad (2.47)$$

και επειδή η συνάρτηση $u(t)$ είναι αύξουσα ισχύει ότι

$$\int_0^{t+x} \bar{F}_e(z)u(t+x-z)dz \geq \int_0^t \bar{F}_e(z)u(t-z)dz.$$

Δηλαδή καταλήξαμε στη σχέση

$$\int_0^{t+x} \bar{F}_e(z)u(t+x-z)dz - \int_0^t \bar{F}_e(z)u(t-z)dz \geq 0,$$

και το αποτέλεσμα έπεται από τη σχέση (2.45). \square

Παρατηρούμε ότι τα φράγματα που δίνονται στο Πρόρισμα 2.6.5 στο Πρόρισμα 2.6.6 και στο Πρόρισμα 2.6.7 τείνουν στην ποσότητα $x\mu^{-1}$ καθώς $t \rightarrow \infty$, επομένως σύμφωνα με το ανανεωτικό θεώρημα του Blackwell έχουν τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Οι Shaked και Zhu (1992) απέδειξαν ότι ισοδύναμη συνθήκη της κυρτότητας (κοιλότητας) της ανανεωτικής συνάρτησης $U(t)$ είναι η στοχαστικά φθίνουσα

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

(αύξουσα) υπολειπόμενη ζωή γ_t . Επίσης ο Chen (1994) απέδειξε ότι αν η ανανεωτική συνάρτηση είναι κυρτή (κοίλη) τότε η κατανομή F θα είναι NBU (NWU).

Τέλος μπορούμε να συνδέσουμε την κοιλότητα (κυρτότητα) της συνάρτησης $L(t)$ με την κατασκευή φραγμάτων για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$. Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.15) στη σχέση (2.40) προκύπτει ότι

$$U(t+x) - U(t) \geq (\leq) \int_t^{t+x} \lambda(z) dz = \Lambda(t+x) - \Lambda(t),$$

όπου $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(z) dz$ είναι η συνάρτηση κινδύνου (hazard function) που αντιστοιχεί στην F .

2.6.3 Φράγματα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ που προκύπτουν από τα φράγματα της ανανεωτικής συνάρτησης

Ένα πρώτο φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2). Πιο συγκεκριμένα από την σχέση (2.1) αντικαθιστώντας όπου $t = t+x$ έχουμε

$$U(t+x) \leq \frac{t+x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} - 1,$$

και αφαιρώντας κατά μέλη από την παραπάνω ανίσωση τη σχέση (2.2) καταλήγουμε στο παρακάτω άνω φράγμα

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2}. \quad (2.48)$$

Το παραπάνω φράγμα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι κατασκευάστηκε από τα δύο πιο γνωστά γενικά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση και είναι ήδη γνωστό (Lorden (1970)).

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε δύο καλύτερα φράγματα από το φράγμα που αποτυπώνεται μέσω της σχέσης (2.48).

Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε (προκύπτει άμεσα από τη σχέση (2.13)) είναι η εξής

$$L(t+x) - L(t) = Q(t) - Q(t+x). \quad (2.49)$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα φράγματα που έχουμε κατασκευάσει για την συνάρτηση $Q(t)$, ώστε να κατασκευάσουμε φράγματα για την διαφορά $L(t+x) - L(t)$ και κατά συνέπεια φράγματα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$.

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Πιο συγκεκριμένα πολλαπλασιάζοντας με -1 τη σχέση (2.17) και θέτοντας όπου $t = t+x$ έχουμε

$$-Q(t+x) \leq -\frac{\mu_2}{2\mu^2}\bar{F}(t+x) + \bar{F}_e(t+x) + \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(t+x) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} + \bar{F}_e(t+x) + \frac{\mu_2}{\mu^2}\bar{F}(t+x).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη στην παραπάνω σχέση τη σχέση (2.19) προκύπτει ότι

$$Q(t) - Q(t+x) \leq \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2}F(t+x) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy.$$

Στη συνέχεια, μέσω της σχέσης (2.49) προκύπτει ότι

$$L(t+x) - L(t) \leq \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2}F(t+x) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy. \quad (2.50)$$

Όμως μέσω της σχέσης (1.7) η συνάρτηση $L(t+x) - L(t)$ ισούται με

$$L(t+x) - L(t) = U(t-x) - U(t) - \frac{x}{\mu},$$

και τελικά η (2.50) γράφεται ως εξής

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2}F(t+x) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy. \quad (2.51)$$

Η σχέση (2.51) βελτιώνει αισθητά το φράγμα που περιγράφεται από τη σχέση (2.48) μιας και ισχύει ότι

$$\frac{\mu_2}{\mu^2}F(t+x) + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy \leq \frac{\mu_2}{\mu^2}.$$

Η επόμενη πρόταση βελτιώνει ακόμη περισσότερο το φράγμα που παρουσιάσαμε μέσω της σχέσης (2.51) κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα :

Πρόταση 2.6.8 Ένα άνω φράγμα για την συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$ είναι το

$$\begin{aligned} U(t+x) - U(t) &\leq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2}F(t+x) - \int_0^t \bar{F}_e(t-y)f(y)dy \\ &\quad + \int_0^{t+x} \left(\bar{F}_e(y) - \frac{\mu_2}{\mu^2}\bar{F}(y) \right) f(t+x-y)dy, \end{aligned} \quad (2.52)$$

το οποίο αποτελεί βελτίωση του φράγματος που περιγράφεται στη σχέση (2.51) για όλα εκείνα τα x για τα οποία ισχύει ότι

$$\bar{F}_e(x) \leq \frac{\mu_2}{\mu^2}\bar{F}(x).$$

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει άμεσα αν στη σχέση (2.23) αντικαταστήσουμε όπου $t = t+x$ και στη συνέχεια, αφαιρέσουμε κατά μέλη από αυτή τη σχέση, τη σχέση (2.27). \square

Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε έναν αναδρομικό τύπο κατασκευής φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή χωρίζεται σε διαδοχικά βήματα. Σε κάθε βήμα θα εισάγουμε το φράγμα που δημιουργήσαμε στο προηγούμενο βήμα. Εισάγοντας αρχικά τη σχέση (2.23) στη σχέση (2.7) έχουμε

$$L(t) \leq \bar{F}_e(t) - 1 + \bar{F}_e * (F + F_2)(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2} (F_2(t) - \bar{F} * F_2(t)).$$

Επαναλαμβάνοντας $k-1$ φορές την παραπάνω διαδικασία προκύπτει το ακόλουθο πάνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση

$$L(t) \leq \bar{F}_e(t) - 1 + \bar{F}_e * \left(\sum_{i=1}^k F_i \right) (t) + \frac{\mu_2}{\mu^2} (F_k(t) - \bar{F} * F_k(t)). \quad (2.53)$$

Η τελευταία σχέση βελτιώνει το φράγμα που δίνουν οι Politis και Koutras (2006) κατά την ποσότητα $\mu_2 \mu^{-2} \bar{F} * F_k(t)$. Η σχέση (2.53) επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία άπειρες φορές ($k \rightarrow \infty$) γράφεται ως εξής

$$L(t) \leq \bar{F}_e(t) - 1 + \bar{F}_e * U(t). \quad (2.54)$$

Αντίστοιχα εφαρμόζοντας τον ίδιο τρόπο σκέψης και εισάγοντας τη σχέση (2.27) στη σχέση (2.7) έχουμε

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - 1 + \bar{F}_e * (F + F_2)(t).$$

Ύστερα από $k-1$ επαναλήψεις έχουμε

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - 1 + \bar{F}_e * \left(\sum_{i=1}^k F_i \right) (t). \quad (2.55)$$

Καθώς $k \rightarrow \infty$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$L(t) \geq \bar{F}_e(t) - 1 + \bar{F}_e * U(t). \quad (2.56)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.53) και (2.55) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διπλό φράγμα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$. Πιο συγκεκριμένα ένα πάνω φράγμα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ είναι το

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}_e * \left(\sum_{i=1}^k F_i(t+x) - \sum_{i=1}^k F_i(t) \right)$$

2.6. Η συνάρτηση $U(t+x) - U(t)$

$$+\frac{\mu_2}{\mu^2} (F_k(t+x) - \bar{F} * F_k(t+x)).$$

Αντίστοιχα ένα κάτω φράγμα είναι το

$$U(t+x) - U(t) \geq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}_e * \left(\sum_{i=1}^k F_i(t+x) - \sum_{i=1}^k F_i(t) \right) - \frac{\mu_2}{\mu^2} (F_k(t+x) - \bar{F} * F_k(t+x)).$$

Το επόμενο αποτέλεσμα αναφέρεται στην κλάση NBUE. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής.

Πρόταση 2.6.9 *Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων σε μια ανανεωτική διαδικασία ανήκει στην κλάση NBUE τότε ένα πάνω φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ είναι το*

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + 1 + \bar{F}_e(t-x) - \bar{F}(t-x) - \bar{F}_e(t) - \int_0^t \bar{F}_e(t-z) \left(\sum_{k=1}^n f^{*k}(z) \right) dz,$$

και η παραπάνω σχέση ισχύει για $n = 1, 2, \dots$.

Απόδειξη Είναι γνωστό (Feller (1971)) ότι

$$U(t) - \frac{t}{\mu} = \bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(t-z)u(z)dz.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να γράψουμε την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ ως εξής

$$U(t+x) - U(t) = \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \int_0^{t+x} \bar{F}_e(t+x-z)u(z)dz - \int_0^t \bar{F}_e(t-z)u(z)dz. \quad (2.57)$$

Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση NBUE τότε $\bar{F}_e(t) \leq \bar{F}(t)$, και εισάγοντας αυτή την ανισότητα στη σχέση (2.57), έχουμε

$$U(t+x) - U(t) \leq \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \int_0^{t+x} \bar{F}(t+x-z)u(z)dz - \int_0^t \bar{F}_e(t-z)u(z)dz. \quad (2.58)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα με την βοήθεια των σχέσεων (1.8) και (1.12) γράφεται

$$\int_0^{t+x} \bar{F}(t+x-z)u(z)dz = \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}(t+x) + F_e(t+x) = F(t+x). \quad (2.59)$$

2.7. Φράγματα για την δεξιά ουρά του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα αρκεί να σκεφτούμε πως $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^k(t) \geq \sum_{k=1}^n f^k(t)$ και, κατά συνέπεια,

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + 1 + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}(t+x) - \int_0^t \bar{F}_e(t-z) \left(\sum_{k=1}^n f^{*k}(z) \right) dz. \quad (2.60)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.59) και (2.60) στην (2.58) ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Ένα ασθενέστερο φράγμα σε σύγκριση με το φράγμα της σχέσης (2.59) προκύπτει για $n = 1$ και είναι το

$$\begin{aligned} U(t+x) - U(t) &\leq \frac{x}{\mu} + 1 + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}(t+x) - \int_0^t \bar{F}_e(t-z) f(z) dz \\ &\leq \frac{x}{\mu} + 1 + \bar{F}_e(t+x) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}(t+x). \end{aligned}$$

2.7 Φράγματα για την δεξιά ουρά του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιώντας τα φράγματα που κατασκευάσαμε για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ θα κατασκευάσουμε φράγματα για την δεξιά ουρά της υπολειπόμενης ζωής. Στην προσπάθειά μας να είναι συγκρίσιμα τα φράγματα που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια αυτής της ενότητας με τα ήδη υπάρχοντα θα ορίσουμε τη συνάρτηση $U_1(t) = 1 + U(t)$.

Στο Κεφάλαιο 1 συμβολίσαμε με $X_{N(t)+1}$ τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο ανανεώσεων και ο οποίος περιλαμβάνει τη χρονική στιγμή t . Καθώς $t \rightarrow \infty$ ο συνολικός χρόνος $X_{N(t)+1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή, έστω β_∞ , με συνάρτηση πυκνότητας $tf(t)\mu^{-1}$ (Asmussen (2003)).

Ο Chang (1994) απέδειξε ένα πάνω φράγμα για την δεξιά ουρά της υπολειπόμενης ζωής είναι το

$$P(\gamma_t > x) \leq \left(\frac{t + E(\gamma_t)}{t+x} \right) P(\beta_\infty > x), \quad x \geq E(\gamma_t). \quad (2.61)$$

Στην απόδειξη της παραπάνω σχέσης ο Chang (1994) εκφράζει την δεξιά ουρά του υπολειπόμενου χρόνου ως εξής,

$$P(\gamma_t > x) = \int_x^{t+x} (U_1(t) - U_1(t+x-z)) f(z) dz + U_1(t) \int_{t+x}^{\infty} f(z) dz. \quad (2.62)$$

2.7. Φράγματα για την δεξιά ουρά του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Πρόταση 2.7.1 Ένα γενικό πάνω φράγμα της δεξιάς ουράς της υπολειπόμενης ζωής είναι το

$$P(\gamma_t > x) \leq \left(\frac{t + E(\gamma_t)}{t + x} \right) P(\beta_\infty > x) - \int_x^{t+x} \bar{F}_e(t + x - z) f(z) dz - \int_x^{t+x} \int_0^{t+x-z} \bar{F}_e(y) f(t + x - z - y) f(z) dy dz. \quad (2.63)$$

Απόδειξη Η σχέση (1.34) μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της $U_1(t)$ ως εξής

$$E(\gamma_t) = \mu \left(U_1(t) - \frac{t}{\mu} \right).$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς $U_1(t)$ έχουμε

$$U_1(t) = \mu^{-1} (E(\gamma_t) + t). \quad (2.64)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.64) στη σχέση (2.62) έχουμε

$$P(\gamma_t > x) = \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} (z - x + E(\gamma_t) - E(\gamma_{t+x-z})) f(z) dz + U_1(t) \int_{t+x}^{\infty} f(z) dz. \quad (2.65)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} (z - x + E(\gamma_t) - E(\gamma_{t+x-z})) f(z) dz &= \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} (z - x + E(\gamma_t)) f(z) dz \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} E(\gamma_{t+x-z}) f(z) dz. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Όμως ο Chang (1994) απέδειξε τη σχέση

$$\frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} (z - x + E(\gamma_t)) f(z) dz \leq \left(\frac{t + E(\gamma_t)}{t + x} \right) P(x \leq \beta_\infty \leq t + x). \quad (2.67)$$

Παρουσιάζει επίσης ένα παρόμοιο πάνω φράγμα με αυτό της σχέσης (2.67) για το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.65). Πιο συγκεκριμένα,

$$U_1(t) \int_{t+x}^{\infty} f(z) dz \leq \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} (z - x + E(\gamma_t)) f(z) dz \leq \left(\frac{t + E(\gamma_t)}{t + x} \right) P(\beta_\infty \geq t + x). \quad (2.68)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.67) και (2.68) στη σχέση (2.65) έχουμε,

$$P(\gamma_t > x) \leq \left(\frac{t + E(\gamma_t)}{t + x} \right) P(\beta_\infty \geq x) - \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} E(\gamma_{t+x-z}) f(z) dz. \quad (2.69)$$

2.8. Παραδείγματα

Η σχέση (1.34) μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια της συνάρτησης $L(t) = U(t) - t\mu^{-1}$ ως εξής

$$E(\gamma_t) = \mu(1 + L(t)).$$

Εισάγοντας στην τελευταία σχέση το φράγμα για τη συνάρτηση $L(t)$ που δίνεται από τη σχέση (2.27) έχουμε

$$E(\gamma_t) = \mu(1 + L(t)) \geq \mu(\bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(z)f(t-z)dz).$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (2.69). \square

2.8 Παραδείγματα

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα για να εξετάσουμε την απόδοση των φραγμάτων που παρουσιάσαμε στην Πρόταση 2.4.2, τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες τιμές του χρόνου t .

Παράδειγμα 2.3 Υποθέτουμε ότι η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι απολύτως συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}e^{-4x} + \frac{5}{3}e^{-5x}, \quad x \geq 0. \quad (2.70)$$

Πρόκειται στην ουσία για μια μείξη τριών εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 2, 4 και 5 με αντίστοιχα βάρη $1/3, 1/3$ και $1/3$. Οι δύο πρώτες ροπές είναι ίσες με $\mu = 19/60$ και $\mu_2 = 47/200$. Είναι γνωστό πως η μείξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην κλάση *IMRL* (βλ. Willmot και Lin, 2001). Μπορεί κάποιος εύκολα να ελέγξει ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής δίνεται από τη σχέση

$$m(t) = \frac{4 + 5e^t + 10e^{3t}}{20(1 + e^t + e^{3t})}, \quad t \geq 0.$$

Η ανανεωτική συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια σε αυτή την περίπτωση. Ο Πίνακας 2.3.1 παρουσιάζει το ποσοστιαίο σφάλμα του φράγματος του Brown (1980) (σχέση (2.5)), και το κάτω και πάνω φράγμα από την Πρόταση 2.4.2. Στον πίνακα συμβολίζουμε αυτά τα σφάλματα με $E_1(t)$, $E_2(t)$ και $E_3(t)$ αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις σφάλματος $E_2(t)$ και $E_3(t)$ παίρνουν τιμές κάτω του 1% για κάθε τιμή του t . Για μικρές τιμές του t , το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.4.2 αποτελεί μια αισθητή βελτίωση σε σχέση με το φράγμα του Brown (σχέση (2.5)). Παραδείγματος χάριν για $t \geq 3$, βλέπουμε ότι το σχετικό σφάλμα μειώνεται κατά πολύ (πρακτικά

2.8. Παραδείγματα

Πίνακας 2.3.1

| | $E_1(t)$ | $E_2(t)$ | $E_3(t)$ |
|------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $t = 0$ | 0 | 0 | 0 |
| $t = 0.25$ | 5.47871 | 0.33287 | 0.35334 |
| $t = 0.5$ | 5.13209 | 0.58834 | 0.60911 |
| $t = 0.75$ | 3.79376 | 0.61001 | 0.57178 |
| $t = 1$ | 2.58007 | 0.51432 | 0.41319 |
| $t = 1.5$ | 1.07767 | 0.27671 | 0.14939 |
| $t = 2$ | 0.42420 | 0.12489 | 0.04348 |
| $t = 3$ | 0.06133 | 0.02054 | 0.00299 |
| $t = 5$ | 0.00117 | 0.00042 | 0.00001 |
| $t = 8$ | $2.923 \cdot 10^{-6}$ | $1.070 \cdot 10^{-6}$ | $2.784 \cdot 10^{-9}$ |
| $t = 10$ | $5.359 \cdot 10^{-8}$ | $1.964 \cdot 10^{-8}$ | $1.055 \cdot 10^{-11}$ |
| $t = 12$ | $9.815 \cdot 10^{-10}$ | $3.597 \cdot 10^{-10}$ | $2.442 \cdot 10^{-13}$ |

αμελητέο).

Στον Πίνακα 2.3.2 έχουμε τη δυνατότητα να δούμε για $t = 0.6$ τόσο την πραγματική τιμή της δεξιάς ουράς της υπολειπόμενης ζωής, αλλά και τις τιμές του φράγματος του Chang (1994) (σχέση (2.61)) και της βελτίωσης που δίνεται από τη σχέση (2.63).

Πίνακας 2.3.2

| | (2.61) | $P(\gamma_t > x)$ | (2.63) | % βελτίωση |
|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| $x = 0.25$ | 0.7426 | 0.3798 | 0.5845 | 27.04% |
| $x = 0.5$ | 0.3427 | 0.1633 | 0.2805 | 22.17% |
| $x = 0.75$ | 0.1616 | 0.074 | 0.1344 | 20.23% |
| $x = 1$ | 0.0773 | 0.0346 | 0.0648 | 19.29% |
| $x = 1.5$ | 0.0178 | 0.0076 | 0.0151 | 17.88% |
| $x = 2$ | 0.0040 | 0.0017 | 0.0034 | 17.64% |
| $x = 10$ | $1.6748 \cdot 10^{-13}$ | $6.4571 \cdot 10^{-14}$ | $1.4445 \cdot 10^{-13}$ | 15.94% |

Παράδειγμα 2.4 Σε αυτό το παράδειγμα υποθέτουμε ότι η κατανομή F είναι μια Pareto κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{375}{(x+5)^4}, \quad x \geq 0.$$

Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, η κατανομή που χρησιμοποιούμε ανήκει στην κλάση των κατανομών με βαριά ουρά. Να σημειωθεί ότι η τρίτη ροπή μ_3 δεν είναι πεπερασμένη. Οι πρώτες δύο ροπές είναι ίσες με $\mu = 5/2$ και $\mu_2 = 25$.

2.8. Παραδείγματα

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.2, όταν $t \rightarrow \infty$, η $L(t)$ συγκλίνει στην ποσότητα $\mu_2/(2\mu^2) - 1 = 2$.

Σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε αναλυτική έκφραση για τον υπολογισμό της συνάρτησης $L(t)$. Ο Πίνακας 2.4.1 παρουσιάζει το κάτω και το πάνω φράγμα για την συνάρτηση $L(t)$ από την Πρόταση 2.4.2 (συμβολίζονται με $L_1(t)$ και $U_1(t)$) και το κάτω φράγμα του Brown το οποίο συμβολίζεται με $L_B(t)$ από τη σχέση (2.5). Συγκρίνοντας τις στήλες $L_B(t)$ και $L_1(t)$ φαίνεται ότι το φράγμα που προτείνουμε στην Πρόταση 2.4.2 είναι καλύτερο από το φράγμα που πρότεινε ο Brown (1980) .

Πίνακας 2.4.1

| | $L_B(t)$ | $L_1(t)$ | $U_1(t)$ |
|------------|----------|----------|----------|
| $t = 0$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $t = 0.25$ | 1.0023 | 1.0455 | 1.0476 |
| $t = 0.5$ | 1.0083 | 1.0834 | 1.0909 |
| $t = 0.75$ | 1.0170 | 1.1156 | 1.1304 |
| $t = 1$ | 1.0278 | 1.1436 | 1.1667 |
| $t = 1.5$ | 1.0533 | 1.1898 | 1.2308 |
| $t = 2$ | 1.0816 | 1.2274 | 1.2857 |
| $t = 3$ | 1.1406 | 1.2871 | 1.3750 |
| $t = 5$ | 1.2500 | 1.3750 | 1.5000 |
| $t = 7$ | 1.3403 | 1.4416 | 1.5833 |
| $t = 10$ | 1.4444 | 1.5186 | 1.6667 |
| $t = 15$ | 1.5625 | 1.6094 | 1.7500 |
| $t = 20$ | 1.6400 | 1.6720 | 1.8000 |
| $t = 30$ | 1.7347 | 1.7522 | 1.8571 |

2.8. Παραδείγματα

Κεφάλαιο 3

Μελέτη της συνδιακύμανσης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής

3.1 Εισαγωγή

Δύο βασικές ποσότητες σε μια ανανεωτική ανέλιξη, όπως έχουμε δει, είναι ο χρόνος της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, δ_t και γ_t αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι οι γ_t και δ_t είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αν και μόνο αν η ανανεωτική ανέλιξη είναι ανέλιξη Poisson (βλ. Serfozo, 2009 ή Janssen και Manca, 2005).

Στην γενική περίπτωση όπου οι γ_t και δ_t είναι εξαρτημένες, περιμένουμε διαισθητικά ότι η μεταξύ τους συσχέτιση συνδέεται με το είδος αξιοπιστίας, ή γήρανσης που παρουσιάζει η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχέση αυτών των δύο μεταβλητών στην προληπτική συντήρηση (preventive maintenance) όπου η τρέχουσα ζωή είναι η ηλικία του εξαρτήματος και η υπολειπόμενη ζωή ο χρόνος ζωής που απομένει για το εξάρτημα.

Οι Gakis και Sivazlian (1994) με την βοήθεια πολλαπλών ολοκληρωμάτων υπολογίζουν την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής για πεπερασμένο χρόνο t καθώς και για την περίπτωση όπου ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Στις επόμενες ενότητες θα εργαστούμε πάνω την σχέση της συνδιακύμανσης όπως αυτή παρουσιάζεται από τη σχέση (1.35) και θα μελετήσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι θετική ή αρνητική.

Είναι γεγονός πως πέρα από την προσπάθεια των Gakis και Sivazlian (1994) δεν φαίνεται να υπάρχει βιβλιογραφικά κάποια άλλη αναφορά για την περιγραφή ενός τύπου για την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε επίσης συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μονοτονία της μέσης τιμής του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, η οποία όπως θα αποδείξουμε, κάτω από κάποιες συνθήκες είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t (βλ. Πρόταση 3.2.13). Τέλος θα παρουσιάσουμε ένα διπλό φράγμα για την συνδιακύμανση της τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής κάτω από την συνθήκη ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR .

Θα συμβολίζουμε την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων με F και υποθέτουμε πως είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα f .

3.2 Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Μια πρώτη παρατήρηση που προκύπτει από την μελέτη της σχέσης (1.35) είναι πως ιδιαίτερο κατασκευαστικό ρόλο έχουν οι συνελίξεις $[t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t)$ και $[t\bar{F}(t)] * u(t)$. Το επόμενο αποτέλεσμα θα μας βοηθήσει να απλοποιήσουμε την σχέση που παρουσιάζουν οι Gakis και Sivazlian (1994) για την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Λήμμα 3.2.1 Για οποιεσδήποτε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f_1 και f_2 ορισμένες στο διάστημα $[0, \infty)$ ισχύει ότι

$$[tf_1(t)] * f_2(t) = t[f_1(t) * f_2(t)] - [tf_2(t)] * f_1(t). \quad (3.1)$$

Απόδειξη Η συνέλιξη $[tf_1(t)] * f_2(t)$ υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} [tf_1(t)] * f_2(t) &= \int_0^t (t-x)f_1(t-x)f_2(x)dx = t \int_0^t f_1(t-x)f_2(x)dx - \int_0^t xf_1(t-x)f_2(x)dx \\ &= t[f_1(t) * f_2(t)] - [tf_2(t)] * f_1(t). \end{aligned}$$

□

Η σχέση (3.1) μας επιτρέπει να γράψουμε τη σχέση (1.32) ως εξής

$$\begin{aligned} E(\gamma_t \cdot \delta_t) &= t\mu\bar{F}_e(t) + t(\mu\bar{F}_e(t) * u(t)) - \mu[tu(t)] * \bar{F}_e(t) \\ &= t(\mu\bar{F}_e(t) + \mu\bar{F}_e(t) * u(t)) - \mu[tu(t)] * \bar{F}_e(t). \end{aligned}$$

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Εισάγοντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση (1.34) προκύπτει πως η μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής μπορεί να γραφεί συναρτήσει της μέσης τιμής της υπολειπόμενης ζωής ως εξής

$$E(\gamma_t \cdot \delta_t) = tE(\gamma_t) - \mu[tu(t)] * \bar{F}_e(t). \quad (3.2)$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε έναν τύπο υπολογισμού της μέσης τιμής του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Λήμμα 3.2.2 Η μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t \cdot \delta_t) = \mu t - t^2 + \mu \int_0^t U(x)dx + \mu \int_0^t xF_e(t-x)u(x)dx.$$

Απόδειξη Αρχικά θα ασχοληθούμε με την συνέλιξη $\mu[tu(t)] * \bar{F}_e(t)$, που υπάρχει ως όρος στη σχέση (3.2). Αυτή η συνέλιξη μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω ως εξής

$$\begin{aligned} \mu[tu(t)] * \bar{F}_e(t) &= \mu[tu(t)] * (1 - F_e(t)) = \mu \int_0^t xu(x)dx - \mu \int_0^t xu(x)F_e(t-x)dx \\ &= \mu \left(tU(t) - \int_0^t U(x)dx \right) - \mu \int_0^t xu(x)F_e(t-x)dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.3) και (1.34) στην σχέση (3.2) ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Στις επόμενες γραμμές θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τύπο για τον υπολογισμό της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, βασιζόμενοι στις σχέσεις (1.33) και (1.34). Έτσι η σχέση (1.35) μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής

$$\begin{aligned} Cov(\gamma_t, \delta_t) &= t\mu\bar{F}_e(t) + [t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t) - (t - E(S_{N(t)}))(\mu\bar{F}_e(t) + \mu\bar{F}_e(t) * u(t)) \\ &= [t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t) - t([\mu\bar{F}_e(t)] * u(t)) + E(S_{N(t)})\mu \left(1 + U(t) - \frac{t}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.1), η συνέλιξη $[t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t)$ θα ισούται με

$$[t\mu\bar{F}_e(t)] * u(t) = t(\mu\bar{F}_e(t) * u(t)) - [tu(t)] * [\mu\bar{F}_e(t)],$$

και τελικά η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής θα ισούται με

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) = -[tu(t)] * [\mu\bar{F}_e(t)] + E(S_{N(t)})\mu \left(1 + U(t) - \frac{t}{\mu} \right). \quad (3.4)$$

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση, απαραίτητο εργαλείο για την ανάλυση της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής αποτελεί η μέση τιμή του συνολικού χρόνου $S_{N(t)}$ μέχρι την τελευταία ανανέωση του συστήματος πριν τη χρονική στιγμή t .

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές αναφορές για την μέση τιμή $E(S_{N(t)+1})$ λόγω της ευκολίας του υπολογισμού της. Ας μην ξεχνάμε πως ο συνολικός χρόνος $S_{N(t)+1}$ είναι χρόνος διακοπής (stopping time) και εύκολα υπολογίζεται η μέση τιμή $E(S_{N(t)+1})$ με τη βοήθεια της ταυτότητας του Wald.

Ο Ross (1996) (σελίδες 113-114) υπολογίζει την συνάρτηση κατανομής της $S_{N(t)}$, εμείς στο επόμενο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας μια διαφορετική προσέγγιση από αυτή του Ross (1996) παρουσιάζουμε έναν τύπο υπολογισμού της μέσης τιμής $E(S_{N(t)})$ χρησιμοποιώντας την δεξιά ουρά της $S_{N(t)}$.

Λήμμα 3.2.3 Η μέση τιμή $E(S_{N(t)})$ ισούται με

$$E(S_{N(t)}) = [tu(t)] * \bar{F}(t). \quad (3.5)$$

Απόδειξη Η μέση τιμή $E(S_{N(t)})$ ισούται με

$$E(S_{N(t)}) = \int_0^t P(S_{N(t)} > x) dx.$$

Η πιθανότητα που είναι μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} P(S_{N(t)} > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(x \leq S_n \leq t, S_{n+1} > t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^t P(X_{n+1} > t - y) dF_n(y) \\ &= \int_x^t \bar{F}(t - y) u(y) dy. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Έτσι η μέση τιμή $E(S_{N(t)})$ ισούται με

$$E(S_{N(t)}) = \int_0^t \int_x^t \bar{F}(t - y) u(y) dy dx.$$

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$E(S_{N(t)}) = \int_0^t \int_0^y \bar{F}(t - y) u(y) dx dy = \int_0^t y \bar{F}(t - y) u(y) dy,$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Η σχέση (3.6) μας δίνει την δυνατότητα να διατυπώσουμε έναν τύπο για την μέση τιμή $E(X_{N(t)+1})$ του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ανανεώσεων (όταν η χρονική στιγμή t περιλαμβάνεται σε αυτό το διάστημα).

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Πόρισμα 3.2.4 Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X_{N(t)+1}$, που περιγράφει τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών ανανεώσεων δίνεται από την σχέση

$$E(X_{N(t)+1}) = \mu(1 + U(t)) - \left(tU(t) - \int_0^t U(x)dx \right) + \int_0^t \int_x^t F(t-y)u(y)dydx.$$

Απόδειξη Είναι προφανές πως $E(X_{N(t)+1}) = E(\gamma_t) + E(\delta_t) = E(S_{N(t)+1}) - E(S_{N(t)})$ εφόσον η χρονική στιγμή t βρίσκεται ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $S_{N(t)}$ και $S_{N(t)+1}$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές $E(S_{N(t)})$ και $E(S_{N(t)+1})$. Η σχέση (3.6) θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής για $t > x$

$$\begin{aligned} P(S_{N(t)} > x) &= \int_x^t \bar{F}(t-y)u(y)dy = \int_x^t u(y)dy - \int_x^t F(t-y)u(y)dy \\ &= U(t) - U(x) - \int_x^t F(t-y)u(y)dy. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση (ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη στο $(0, t)$) η μέση τιμή $E(S_{N(t)})$ θα ισούται με

$$E(S_{N(t)}) = tU(t) - \int_0^t U(x)dx - \int_0^t \int_x^t F(t-y)u(y)dy.$$

Από την άλλη χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.34) η μέση τιμή του συνολικού χρόνου $S_{N(t)}$ ισούται με

$$E(S_{N(t)+1}) = \mu(1 + U(t)),$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από τις δύο τελευταίες σχέσεις. \square

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε μια απλοποιημένη σχέση σε σύγκριση με αυτή που οι Gakis και Sivazlian διατύπωσαν το 1994 για την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Λήμμα 3.2.5 Η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) = -[tu(t)] * \mu (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) + [tu(t)] * \mu \bar{F}(t) \left(U(t) - \frac{t}{\mu} \right). \quad (3.7)$$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.5) στη σχέση (3.4) προκύπτει ότι η συνδιακύμανση ισούται με

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) = -[tu(t)] * \mu \bar{F}_e(t) + [tu(t)] * \mu \bar{F}(t) \left(1 + U(t) - \frac{t}{\mu} \right), \quad (3.8)$$

και με αναδιάταξη των όρων ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Παρατήρηση 3.2.6 Αν $\bar{F}(t) = \bar{F}_e(t)$ τότε $Cov(\gamma_t, \delta_t) = 0$.

Πράγματι, αν $\bar{F}(t) = \bar{F}_e(t)$ τότε η σχέση (1.3) γράφεται

$$U(t) = F_e(t) + \int_0^t U(t-x) dF_e(x) = \frac{t}{\mu}.$$

Δηλαδή καταλήξαμε πως όταν $\bar{F}(t) = \bar{F}_e(t)$ τότε $U(t) = \frac{t}{\mu}$ και άμεσα από τη σχέση (3.7) προκύπτει πως η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής ισούται με μηδέν.

Είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για το πρόσημο της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Λήμμα 3.2.7 Η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής τη χρονική στιγμή t , σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία είναι θετική (αρνητική) αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$U(t) \geq (\leq) \frac{t}{\mu} + \frac{[tu(t)] * \bar{F}_e(t)}{[tu(t)] * \bar{F}(t)} - 1, \quad t > 0. \quad (3.9)$$

Απόδειξη Παρατηρούμε αρχικά ότι αν ισχύει η σχέση (3.9), πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος των συνελίξεων με μ έχουμε

$$U(t) \geq (\leq) \frac{t}{\mu} + \frac{[tu(t)] * \mu \bar{F}_e(t)}{[tu(t)] * \mu \bar{F}(t)} - 1.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της παραπάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.8) προκύπτει ότι όταν ισχύει η σχέση (3.9) τότε $Cov(\gamma_t, \delta_t) \geq (\leq) 0$.

Αν τώρα ισχύει ότι $Cov(\gamma_t, \delta_t) \geq (\leq) 0$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.7) προκύπτει ότι

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \geq (\leq) \frac{[tu(t)] * \mu \bar{F}_e(t) - [tu(t)] * \mu \bar{F}(t)}{[tu(t)] * \mu \bar{F}(t)} = \frac{[tu(t)] * \bar{F}_e(t)}{[tu(t)] * \bar{F}(t)} - 1.$$

□

Σημαντικό ρόλο στην προσπάθειά μας να μελετήσουμε περισσότερο της συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι θετική (αρνητική) έχει το επόμενο αποτέλεσμα.

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Θεώρημα 3.2.8 Η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία δίνεται από τη σχέση

$$\text{Cov}(\gamma_t, \delta_t) = \frac{\mu_3}{6\mu} k_1(t) - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} k_2(t) k_3(t), \quad (3.10)$$

όπου

$$k_1(t) = 1 + \frac{6\mu}{\mu_3} \left(t\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx \right), \quad (3.11)$$

$$k_2(t) = 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(t\bar{F}(t) - \mu^{-1} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx \right) \quad (3.12)$$

και

$$k_3(t) = 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(\mu\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t \bar{F}_e(t-x)l(x)dx \right). \quad (3.13)$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε την απόδειξή μας με την μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Εισάγοντας τη σχέση (1.8) στη σχέση (1.32) μπορούμε να εκφράσουμε την μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής ως εξής

$$\begin{aligned} E(\gamma_t \cdot \delta_t) &= t\mu\bar{F}_e(t) + [t\mu\bar{F}_e(t)] * \left(l(t) + \frac{1}{\mu} \right) \\ &= t\mu\bar{F}_e(t) + \int_0^t x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\int_0^t x\bar{F}_e(x)dx = \frac{\mu_3}{6\mu} - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx,$$

μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (3.14) ως εξής

$$E(\gamma_t \cdot \delta_t) = t\mu\bar{F}_e(t) + \frac{\mu_3}{6\mu} - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx. \quad (3.15)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα την σταθερή ποσότητα $\mu_3/(3\mu)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(\gamma_t \cdot \delta_t) &= \frac{\mu_3}{6\mu} \left(1 + \frac{6\mu}{\mu_3} \left(t\mu\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx \right) \right) \\ &= \frac{\mu_3}{6\mu} k_1(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Αντίστοιχα για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της τρέχουσας ζωής, η σχέση (1.33) με την βοήθεια της σχέσης (1.8) γράφεται

$$\begin{aligned}
 E(\delta_t) &= t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] * \left(\frac{1}{\mu} + l(t)\right) \\
 &= t\bar{F}(t) + \mu^{-1} \int_0^t x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx \\
 &= t\bar{F}(t) + \frac{\mu_2}{2\mu} - \mu^{-1} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα την ποσότητα $\mu_2/(2\mu)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 E(\delta_t) &= \frac{\mu_2}{2\mu} \left(1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(t\bar{F}(t) - \mu^{-1} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx \right) \right) \\
 &= \frac{\mu_2}{2\mu} k_2(t). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Τέλος για την μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής, ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο σκέψης και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.34) και (1.8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 E(\gamma_t) &= \mu \left(\bar{F}_e(t) + \bar{F}_e(t) * \left(\frac{1}{\mu} + l(t)\right) \right) \\
 &= \mu \left(\bar{F}_e(t) + \mu^{-1} \int_0^t \bar{F}_e(x)dx + \int_0^t \bar{F}_e(t-x)l(x)dx \right) \\
 &= \mu\bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t \bar{F}_e(t-x)l(x)dx. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα την σταθερά $\mu_2/(2\mu)$ έχουμε

$$E(\gamma_t) = \frac{\mu_2}{2\mu} \left(1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(\mu\bar{F}_e(t) + \int_0^t \bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t \bar{F}_e(t-x)l(x)dx \right) \right) = \frac{\mu_2}{2\mu} k_3(t), \quad (3.20)$$

και το ζητούμενο του θεωρήματος έπεται. \square

Η σχέση (3.10) περιέχει τις σταθερές $\mu_3/(6\mu)$ και $\mu_2/(4\mu^2)$ γεγονός που μας προτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας F_e όπως αυτός εκφράζεται από την σχέση (1.11) για να περιγράψουμε την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Πόρισμα 3.2.9 Η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\text{Cov}(\gamma_t, \delta_t) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} k_1(t) \left\{ \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2} - b(t) \right\}, \quad t > 0, \quad (3.21)$$

$$\text{όπου } b(t) = \frac{k_2(t)k_3(t)}{k_1(t)}.$$

Απόδειξη Λύνοντας τη σχέση (1.11) ως προς την ποσότητα $\frac{\mu_3}{6\mu}$, έχουμε

$$\frac{\mu_3}{3\mu} = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} (1 + CV_e^2).$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (3.10) προκύπτει ότι

$$\text{Cov}(\gamma_t, \delta_t) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} k_1(t) \left\{ \frac{1}{2} (1 + CV_e^2) - b(t) \right\}, \quad t > 0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εισάγοντας στην παραπάνω σχέση την σχέση (1.11). \square

Το Πόρισμα 3.2.9 μας δίνει την δυνατότητα να παρουσιάσουμε κάποιες συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι θετική ή αρνητική. Όπως φαίνεται από τη σχέση (3.21) το πρόσημο της συνδιακύμανσης εξαρτάται από τις τιμές που θα πάρει η συνάρτηση $b(t)$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

Πόρισμα 3.2.10 Η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία είναι θετική (αρνητική) αν και μόνο αν

$$b(t) \leq (\geq) \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2}.$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει απευθείας από τη σχέση (3.21) εφόσον η συνάρτηση $k_1(t)$ είναι μη αρνητική. \square

Πόρισμα 3.2.11 Αν $\text{Cov}(\gamma_t, \delta_t) \leq 0$ τότε η συνάρτηση $b(t)$ φράσσεται από κάτω από την σταθερά $\frac{2}{3}$.

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Απόδειξη Από την μια πλευρά αν η συνδιακύμανση $Cov(\gamma_t, \delta_t)$ είναι αρνητική, τότε σύμφωνα με το πόρισμα (3.2.10) ισχύει ότι

$$b(t) \geq \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2}.$$

Από την άλλη πλευρά ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$\mu\mu_3 \geq \mu_2^2,$$

η οποία προκύπτει στην ουσία από την χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz. Από τις δύο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι όταν $Cov(\gamma_t, \delta_t) \leq 0$, τότε $b(t) \geq \frac{2}{3}$. \square

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει όχι μόνο το πρόσημο της συνδιακύμανσης αλλά και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση είναι μονότονη συνάρτηση (αύξουσα ή φθίνουσα). Μάλιστα πρόκειται για ισχυρότερη συνθήκη από την συνθήκη του πρόσημου της συνδιακύμανσης. Αυτό διότι στο σημείο $t = 0$, $Cov(\gamma_0, \delta_0) = 0$ και κατά συνέπεια αν η συνδιακύμανση είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση τότε θα είναι και θετική (αρνητική) για κάθε $t \geq 0$.

Είναι προφανές ότι η μονοτονία της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σχετίζεται με την παράγωγο της μέσης τιμής του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, όπως επίσης από την παράγωγο της μέσης τιμής της τρέχουσας ζωής και της μέσης τιμής της υπολειπόμενης ζωής.

Πρόταση 3.2.12 Η παράγωγος της μέσης τιμής του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d}{dt}E(\gamma_t\delta_t) = E(\gamma_t) - E(\delta_t). \quad (3.22)$$

Απόδειξη Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.32) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\gamma_t\delta_t) &= \mu\bar{F}_e(t) - t\bar{F}(t) + \mu\bar{F}_e(t) * u(t) - [t\bar{F}(t)] * u(t) \\ &= \mu\bar{F}_e(t) + \mu\bar{F}_e(t) * u(t) - (t\bar{F}(t) + [t\bar{F}(t)] * u(t)). \end{aligned}$$

Όμως το άθροισμα των πρώτων δύο όρων της παραπάνω σχέσης είναι η μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής όπως αυτό προκύπτει από τη σχέση (1.34) και σύμφωνα με τη σχέση (1.33) το άθροισμα μέσα στην παρένθεση είναι η μέση τιμή της τρέχουσας ζωής. \square

Τίθεται λοιπόν ένα βασικό ερώτημα: κάτω από ποιες συνθήκες η μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής.

3.2. Συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Πρόταση 3.2.13 Σε μια ανανεωτική διαδικασία αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση.

Απόδειξη Απο την Πρόταση 1.5.1 γνωρίζουμε ότι $l(t) \geq 0$. Παραγωγίζοντας ως προς t τη σχέση (3.14) έχουμε

$$\frac{d}{dt}E(\gamma_t \delta_t) = \mu \bar{F}_e(t) - t \bar{F}(t) + t \bar{F}_e(t) + \mu \bar{F}_e(t) * l(t) - [t \bar{F}(t)] * l(t)$$

Εφαρμόζοντας αρχικά την σχέση (3.1) και στη συνέχεια τη σχέση (1.12) έχουμε

$$[t \bar{F}(t)] * l(t) = t[l(t) * \bar{F}(t)] - [tl(t)] * \bar{F}(t) = t(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) - [tl(t)] * \bar{F}(t)$$

και τελικά η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$\frac{d}{dt}E(\gamma_t \delta_t) = \mu \bar{F}_e(t) + \mu \bar{F}_e(t) * l(t) + [tl(t)] * \bar{F}(t) \geq 0.$$

□

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα αντιπαράδειγμα από το οποίο φαίνεται ότι η μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής μπορεί να είναι φθίνουσα. Έστω ότι η F είναι οποιαδήποτε κατανομή συγκεντρωμένη στο διάστημα $(2, 3)$ (π.χ. η ομοιόμορφη στο διάστημα αυτό). Τότε, π.χ. για $t = 3/2$, έχουμε $\delta_t = 3/2$ με πιθανότητα 1 (δεν υπάρχει καμία ανανέωση), άρα $E(\delta_t) = 3/2$. Από την άλλη, η πρώτη ανανέωση θα συμβεί στο διάστημα $(2, 3)$, άρα $\gamma_t < 3/2$ με πιθανότητα 1 και τότε $E(\delta_t) - E(\gamma_t) \leq 0$.

Λήμμα 3.2.14 Η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου αν και μόνο αν

$$\frac{\frac{d}{dt}(E(S_{N(t)})E(S_{N(t)+1}))}{\frac{d}{dt}(E(S_{N(t)}) + E(S_{N(t)+1}))} \geq (\leq)t.$$

Απόδειξη Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.35) ως προς t προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}Cov(\gamma_t, \delta_t) = \frac{d}{dt}E(\gamma_t \cdot \delta_t) - E(\gamma_t) \frac{d}{dt}E(\delta_t) - E(\delta_t) \frac{d}{dt}E(\gamma_t).$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω παράγωγο τη σχέση (3.22) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Cov(\gamma_t, \delta_t) &= E(\gamma_t) - E(\delta_t) - E(\gamma_t) \frac{d}{dt}E(\delta_t) - E(\delta_t) \frac{d}{dt}E(\gamma_t) \\ &= E(\gamma_t) \left(1 - \frac{d}{dt}E(\delta_t)\right) - E(\delta_t) \left(1 + \frac{d}{dt}E(\gamma_t)\right). \end{aligned}$$

3.3. Φράγματα για την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Εισάγοντας τις σχέσεις (1.33) και (1.34) στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Cov(\gamma_t, \delta_t) &= (E(S_{N(t)+1}) - t) \frac{d}{dt} E(S_{N(t)}) - (t - E(S_{N(t)})) \frac{d}{dt} E(S_{N(t)+1}) \\ &= \frac{d}{dt} (E(S_{N(t)}) \cdot E(S_{N(t)+1})) - t (E(S_{N(t)}) + E(S_{N(t)+1})). \end{aligned}$$

Έτσι η συνδιακύμανση είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου αν

$$\frac{\frac{d}{dt} (E(S_{N(t)})E(S_{N(t)+1}))}{\frac{d}{dt} (E(S_{N(t)}) + E(S_{N(t)+1}))} \geq (\leq) t.$$

Το αντίστροφο προκύπτει ανάλογα, αν ξεκινήσουμε την διαδικασία απόδειξης από το τέλος προς την αρχή. \square

3.3 Φράγματα για την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

Η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι συνδεδεμένη με ποσότητες όπως η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$. Όμως δεν είναι πάντα εύκολος ο υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης και για αυτό το λόγο η δημιουργία φραγμάτων που την προσεγγίζουν ικανοποιητικά αποτέλεσε αντικείμενο ενδιαφέροντος για πολλές δεκαετίες.

Η ενότητα αυτή χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζουμε φράγματα για την μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής και για την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IMRL*. Στο δεύτερο μέρος αυτής της ενότητας παρουσιάζουμε ένα διπλό φράγμα για τη συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, κάτω από την υπόθεση ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *DFR*.

3.3.1 Φράγματα μέσων τιμών και κλάση *IMRL*

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (3.15), (3.17) και (3.19) ο υπολογισμός των μέσων τιμών της τρέχουσας ζωής, της υπολειπόμενης ζωής και του γινομένου τους συνδέεται άμεσα με την συνάρτηση $l(t)$ και κατά συνέπεια με την $u(t)$ (μέσω της σχέσης (1.8)), ο υπολογισμός όμως αυτών των συναρτήσεων δεν είναι πάντα εύκολος

3.3. Φράγματα για την συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

και η αναζήτηση ικανοποιητικών φραγμάτων έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Σε αυτή την ενότητα θα κατασκευάσουμε φράγματα για την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής και της μέσης τιμής του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Δεν θα ασχοληθούμε με την κατασκευή φραγμάτων για την μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής μιας και αυτά προκύπτουν άμεσα από την κατασκευή των φραγμάτων για την συνάρτηση $L(t)$ που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2.

Λήμμα 3.3.1 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων σε μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε ένα διπλό φράγμα για την μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι το*

$$t\mu\bar{F}_e(t) + \int_0^t x\bar{F}_e(x)dx \leq E(\gamma_t \cdot \delta_t) \leq t\mu\bar{F}_e(t) + \int_0^t x\bar{F}_e(x)dx + t \left(\int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx - \mu\bar{F}_e(t) \right).$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε αρχικά το πάνω φράγμα. Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.1), η συνέλιξη $[t\bar{F}_e(t)] * l(t)$ γράφεται

$$[t\bar{F}_e(t)] * l(t) = t[[\bar{F}_e(t)] * l(t)] - [tl(t)] * \bar{F}_e(t), \quad (3.23)$$

όμως σύμφωνα με τη σχέση (2.35) η συνέλιξη $[\bar{F}_e(t)] * l(t)$ ισούται με

$$[\bar{F}_e(t)] * l(t) = U(t) - \frac{t}{\mu} + 1 - \int_0^t \frac{\bar{F}_e(x)}{\mu} dx - \bar{F}_e(t).$$

Με την βοήθεια της σχέσης (2.4) ένα πάνω φράγμα για την συνέλιξη $[\bar{F}_e(t)] * l(t)$ είναι το

$$[\bar{F}_e(t)] * l(t) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2} - \int_0^t \frac{\bar{F}_e(x)}{\mu} dx - \bar{F}_e(t).$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση (3.23) προκύπτει πως ένα πάνω φράγμα της συνέλιξης $[t\bar{F}_e(t)] * l(t)$ είναι το

$$[t\bar{F}_e(t)] * l(t) \leq t \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - \int_0^t \frac{\bar{F}_e(x)}{\mu} dx - \bar{F}_e(t) \right).$$

Το πάνω φράγμα προκύπτει με αντικατάσταση της παραπάνω ανισότητας στη σχέση (3.15). Το κάτω φράγμα προκύπτει άμεσα από τη σχέση (3.15) αν αναλογιστούμε ότι όταν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε $l(t) \geq 0$, και κατά συνέπεια $[t\bar{F}_e(t)] * l(t) \geq 0$. \square

3.4. Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιάμεσους χρόνους.

Λήμμα 3.3.2 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων σε μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε ένα κάτω φράγμα για την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής είναι το*

$$E(\delta_t) \geq t\bar{F}(t) + \frac{\mu_2}{2\mu} - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx,$$

και αντίστοιχα ένα πάνω φράγμα είναι το

$$E(\delta_t) \leq t\bar{F}(t) + \frac{\mu_2}{2\mu} - \frac{1}{\mu} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + t(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)).$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε αρχικά το πάνω φράγμα. Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.1) η συνέλιξη $[t\bar{F}(t)] * l(t)$ γράφεται

$$[t\bar{F}(t)] * l(t) = t[[\bar{F}(t)] * l(t)] - [tl(t)] * \bar{F}(t), \quad (3.24)$$

όμως σύμφωνα με τη σχέση (1.12), η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής

$$[t\bar{F}(t)] * l(t) = t(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) - [tl(t)] * \bar{F}(t) \leq t(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)).$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την (3.17) προκύπτει το πάνω φράγμα για την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής.

Το κάτω φράγμα προκύπτει άμεσα από τη σχέση (3.17) αν αναλογιστούμε ότι όταν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε $l(t) \geq 0$ και κατά συνέπεια $[t\bar{F}(t)] * l(t) \geq 0$. \square

3.4 Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιάμεσους χρόνους.

Οι συναρτήσεις $k_1(t)$, $k_2(t)$ και $k_3(t)$ που ορίστηκαν στην εκφώνηση του Θεωρήματος 3.2.9 περιέχουν την συνάρτηση $l(t)$, οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποια φράγματα για την συνδιακύμανση χρησιμοποιώντας γνωστά φράγματα για την συνάρτηση $u(t)$ (και κατά συνέπεια την $l(t)$). Πιο συγκεκριμένα, στην συνέχεια αναφέρεται ένα διπλό φράγμα για την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής κάτω από την συνθήκη ότι η κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR .

Το φράγμα αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον μιας και δεν υπάρχουν γενικά στην βιβλιογραφία ικανοποιητικές προσεγγίσεις της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και

3.4. Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιάμεσους χρόνους.

της υπολειπόμενης ζωής.

Για την κατασκευή του διπλού φράγματος θα ορίσουμε δύο βοηθητικές συναρτήσεις, τις $g_l(t)$ και $g_u(t)$ οι οποίες στην ουσία είναι τα φράγματα για την συνάρτηση $l(t)$ που παρουσιάσαμε στις σχέσεις (2.38) και (2.39). Πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση $g_l(t)$ ορίζεται ως εξής

$$g_l(t) = f(t) - \frac{\bar{F}(t)}{\mu} + \lambda(t)(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) \quad (3.25)$$

και αντίστοιχα η συνάρτηση $g_u(t)$ ορίζεται μέσω της σχέσης

$$g_u(t) = f(t) - \frac{\bar{F}(t)}{\mu} + \lambda(0)(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)). \quad (3.26)$$

Πόρισμα 3.4.1 *Αν η κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα πάνω φράγμα της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι το*

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) \leq \frac{\mu_3}{6\mu} k_{1u}(t) - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} k_{2l}(t) k_{3l}(t), \quad (3.27)$$

όπου

$$k_{1u}(t) = 1 + \frac{6\mu}{\mu_3} \left(t\mu\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)g_u(t-x)dx \right),$$

$$k_{2l}(t) = 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(t\bar{F}(t) - \mu^{-1} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)g_l(t-x)dx \right)$$

και

$$k_{3l}(t) = 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(\mu\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t \bar{F}_e(x)g_l(t-x)dx \right).$$

Πόρισμα 3.4.2 *Αν η κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα κάτω φράγμα της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι το*

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) \geq \frac{\mu_3}{6\mu} k_{1l}(t) - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} k_{2u}(t) k_{3u}(t), \quad (3.28)$$

όπου

$$k_{1l}(t) = 1 + \frac{6\mu}{\mu_3} \left(t\mu\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)g_l(t-x)dx \right),$$

3.4. Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιάμεσους χρόνους.

$$k_{2u}(t) = 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(t\bar{F}(t) - \mu^{-1} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)g_u(t-x)dx \right)$$

και

$$k_{3u}(t) = 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \left(\mu\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty \bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t \bar{F}_e(x)g_u(t-x)dx \right).$$

Για να αποδείξουμε τα παραπάνω δύο πορίσματα, από τις σχέσεις (3.11), (3.25) και (3.26) προκύπτει αρχικά ότι

$$k_{1l}(t) \leq k_1(t) \leq k_{1u}(t).$$

Αντίστοιχα από τις σχέσεις (3.12) , (3.25) και (3.26) προκύπτει ότι

$$k_{2l}(t) \leq k_2(t) \leq k_{2u}(t),$$

και τέλος από τις σχέσεις (3.13), (3.25) και (3.26) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$k_{3l}(t) \leq k_3(t) \leq k_{3u}(t).$$

Η απόδειξη και των δύο φραγμάτων (3.27) και (3.28) προκύπτει άμεσα αντικαθιστώντας τις παραπάνω ανισότητες στη σχέση (3.10).

Οι Gakis και Sivazlian (1994) αποδεικνύουν ότι η ασυμπτωτική συνδιακύμανση δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, \delta_t) = \int_0^\infty \int_0^\infty (\bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(y)\bar{F}_e(x)) dydx = \frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}. \quad (3.29)$$

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση τόσο για το άνω όσο και για το κάτω φράγμα της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά.

Πιο συγκεκριμένα αν στη σχέση (3.25) αντικαταστήσουμε όπου $f(t) = \lambda(t)\bar{F}(t)$ προκύπτει ότι

$$g_l(t) = -\frac{\bar{F}(t)}{\mu} + \lambda(t)\bar{F}_e(t),$$

και καθώς $t \rightarrow \infty$, έχουμε ότι $g_l(t) \rightarrow 0$. Αντίστοιχα αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (1.13) στη σχέση (3.26) έχουμε

$$g_u(t) = \lambda(t)\bar{F}(t) - \frac{\bar{F}(t)}{\mu} + \lambda(0)(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) = \bar{F}(t) \left(\lambda(t) - \frac{1}{\mu} - \lambda(0) \right) + \lambda(0)\bar{F}_e(t).$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η συνάρτηση $g_u(t)$ τείνει στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$. Για να είναι ολοκληρώσιμες οι συναρτήσεις $x\bar{F}(x)$, $\bar{F}_e(x)$ θα πρέπει $\mu_2 < \infty$,

3.4. Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιάμεσους χρόνους.

και για να είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $x\bar{F}_e(x)$ θα πρέπει $\mu_3 < \infty$. Επομένως, κάτω από την υπόθεση ότι $\mu_3 < \infty$ είναι όλες ολοκληρώσιμες. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.5.3 καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}_e(x)g_j(t-x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}(x)g_j(t-x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}(x)g_j(t-x)dx = 0,$$

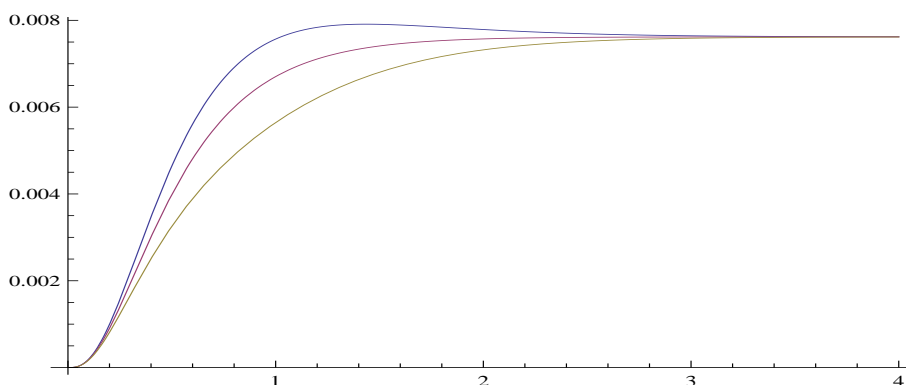
όπου ο δείκτης $j \in \{l, u\}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω το όριο των συναρτήσεων $k_{iu}(t)$, $k_{il}(t)$ για $i = 1, 2, 3$ θα ισούται με την μονάδα και κατά συνέπεια τα φράγματα που παρουσιάσαμε στο Πρόρισμα 3.4.1 και στο Πρόρισμα 3.4.2 συγκλίνουν ασυμπτωτικά στην ποσότητα $\mu_3/(6\mu) - \mu_2/(4\mu^2)$ η οποία ισούται με την ασυμπτωτική συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής (σχέση (3.29)).

Την μονοτονία της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης μελετάμε στο Κεφάλαιο 4, στο οποίο και θα παραθέσουμε έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης του τύπου υπολογισμού της από αυτόν που ήδη έχουν παραθέσει οι Gakis και Sivazlian (1994).

Παράδειγμα 3.1: Συνδιακύμανση τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής -Μείξη δύο εκθετικών κατανομών Η μείξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην κλάση DFR . Θεωρώντας ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}, \quad x \geq 0,$$

με βάση τα αποτελέσματα που δίνονται στα Πορίσματα 3.4.1 και 3.4.2 και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.10) κατασκευάζουμε το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο αποτυπώνεται τόσο η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής όσο και τα δύο φράγματα της. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται ότι η



Διάγραμμα 3.1: Συνδιακύμανση και φράγματά της για μείξη δύο εκθετικών κατανομών.

3.4. Φράγματα για την συνδιακύμανση για DFR ενδιάμεσους χρόνους.

ασυμπτωτική συμπεριφορά τόσο του πάνω όσο και του κάτω φράγματος της συνδιακύμανσης μεταξύ της υπολειπόμενης και της τρέχουσας ζωής ταυτίζεται με το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} Cou(\gamma_t, \delta_t)$.

Κεφάλαιο 4

Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Πιο συγκεκριμένα θα συνδέσουμε το πρόσημο που έχει η ασυμπτωτική συνδιακύμανση με συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών. Επίσης θα παρουσιάσουμε μια γενικότερη συνθήκη που συνδέει το πρόσημο της συνδιακύμανσης με τον συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας (βλ. σχέση (1.11)). Θα υπολογίσουμε επίσης την ασυμπτωτική συνδιακύμανση για τις τυχαίες μεταβλητές γ_t^r και δ_t^s για οποιαδήποτε $r, s \geq 1$.

Μια βασική διαφορά μεταξύ της συνήθους στοχαστικής διαδικασίας όταν ο χρόνος t είναι πεπερασμένος και όταν ο χρόνος t τείνει στο άπειρο είναι πως για πεπερασμένο χρόνο t η τυχαία μεταβλητή δ_t έχει ένα συνεχές τμήμα στο διάστημα $(0, t)$ και έχει μάζα στο σημείο t . Αυτό συμβαίνει διότι $P(\delta_t \leq t) = 1$ με $P(\delta_t = t) = \bar{F}(t) > 0$. Όταν όμως ο χρόνος t τείνει στο άπειρο τότε η τυχαία μεταβλητή δ_t συγκλίνει κατά κατανομή σε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή. Το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής $\gamma_t \cdot \delta_t$.

Παίρνοντας το όριο της σχέσης (1.24) για $t \rightarrow \infty$ προκύπτει η παρακάτω γνωστή στην ανανεωτική θεωρία σχέση (ενδεικτικά αναφέρουμε Feller (1971), Asmussen (2003))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t > y, \delta_t > x) = \bar{F}_e(x + y), \quad x, y \geq 0. \quad (4.1)$$

4.2. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία

Θέτοντας $x = 0$ και $y = 0$ στην παραπάνω σχέση έχουμε αντίστοιχα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t > y) = \bar{F}_e(y), \quad y \geq 0 \quad (4.2)$$

και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\delta_t > x) = \bar{F}_e(x), \quad x \geq 0. \quad (4.3)$$

Ένα βασικό αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε τόσο σε αυτό το κεφάλαιο όσο και στο επόμενο, αφορά στον υπολογισμό ροπών (ας μην ξεχνάμε ότι ποσότητες όπως η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών υπολογίζονται με την βοήθεια ροπών).

Λήμμα 4.1.1 (i) Για κάθε $r > 0$ και για κάθε μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X , ισχύει ότι

$$E(X^r) = r \int_0^{\infty} x^{r-1} P(X > x) dx.$$

(ii) Για κάθε $r, s > 0$ και για κάθε ζευγάρι μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών X, Y , ισχύει ότι

$$E(X^r Y^s) = rs \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{r-1} y^{s-1} P(X > x, Y > y) dy dx.$$

Απόδειξη Για το μέρος (i) παραπέμπουμε τους αναγνώστες στον Feller (1971), σελίδα 150. Για το μέρος (ii) θα επικαλεστούμε την πηγή των Denuit et al. (2005) (παρατήρηση 1.6.7). \square

4.2 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός κλειστού τύπου για την ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής έχει απαντηθεί από τους Gakis και Sivazlian (1994) (σχέση (3.29)). Ωστόσο δεν έχουν απαντηθεί μέχρι τώρα ερωτήματα που συνδέονται με το πρόσημο ή ακόμη και ερωτήματα που συνδέονται με την μονοτονία της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Διαβάζοντας το συγκεκριμένο άρθρο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αν και ασχολείται με την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής για πεπερασμένο t και παρουσιάζει μια σχέση υπολογισμού της (πρόκειται για τη σχέση (1.35)) δεν χρησιμοποιεί αυτή τη σχέση για να υπολογίσει την ασυμπτωτική

4.2. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία

συνδιακύμανση. Ο λόγος προφανώς είναι η δύσχρηστη μορφή της σχέσης (1.35) που δεν επιτρέπει άμεσα τον υπολογισμό του ορίου της όταν $t \rightarrow \infty$. Έτσι χάνεται η αίσθηση της σύνδεσης της σχέσης για την συνδιακύμανση όταν ο χρόνος t είναι πεπερασμένος και όταν τείνει στο άπειρο. Στην ουσία χειρίζονται την ασυμπτωτική περίπτωση σαν μια ξεχωριστή περίπτωση και όχι σαν υποπερίπτωση της συνήθους ανανεωτικής διαδικασίας για πεπερασμένο t .

Εμείς θα ακολουθήσουμε έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης από αυτό των Gakis και Sivazlian (1994) και θα αποδείξουμε την σχέση (3.29) χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.10) και την Πρόταση 1.5.3.

Παρατηρώντας τις σχέσεις (3.10) και (3.29) αρκεί να αποδείξουμε ότι $k_1(t) = k_2(t) = k_3(t) = 1$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Μέσω της σχέσης (3.11) το όριο της συνάρτησης $k_1(t)$ ισούται με

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} k_1(t) &= 1 + \frac{6\mu}{\mu_3} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t\bar{F}_e(t) - \int_t^\infty x\bar{F}_e(x)dx + \mu \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx \right) \\ &= 1 + \frac{6\mu^2}{\mu_3} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Αντίστοιχα από τη σχέση (3.12) μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης $k_2(t)$ όταν $t \rightarrow \infty$. Πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} k_2(t) &= 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t\bar{F}(t) - \mu^{-1} \int_t^\infty x\bar{F}(x)dx + \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx \right) \\ &= 1 + \frac{2\mu}{\mu_2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

και τέλος από την σχέση (3.13) το όριο της συνάρτησης $k_3(t)$ ισούται με

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_3(t) = 1 + \frac{2\mu^2}{\mu_2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \bar{F}_e(t-x)l(x)dx. \quad (4.6)$$

Για τον υπολογισμό του ορίου στα ολοκληρώματα των σχέσεων (4.4), (4.5) και (4.6) θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.5.3. Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω πρόταση ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}_e(x)l(t-x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x\bar{F}(x)l(t-x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \bar{F}_e(t-x)l(x)dx = 0.$$

Αποδείξαμε δηλαδή, παίρνοντας το όριο στη σχέση (3.10), ότι η ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση (3.29).

Στις επόμενες γραμμές θα συνδέσουμε την ασυμπτωτική συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής με την συνάρτηση $Q(t)$ που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο

4.2. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία

2, όπως αυτή περιγράφεται μέσω της σχέσης (2.13). Αυτό θα γίνει μέσω της σχέσης που παρουσιάζει ο Tijms (2003, σελίδα 315) σύμφωνα με την οποία, κάτω από την υπόθεση ότι η τρίτη ροπή μ_3 είναι πεπερασμένη ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t U(x) dx - \left(\frac{t^2}{2\mu} + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right) t \right) \right) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^3} - \frac{\mu_3}{6\mu^2}. \quad (4.7)$$

Πλέον μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.1 Έστω $Q(t)$ ο υπολειπόμενος όρος όπως αυτός περιγράφεται από τη σχέση (2.14). Τότε καθώς $t \rightarrow \infty$, η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, \delta_t) = -\mu \int_0^\infty Q(x) dx.$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει αντικαθιστώντας τη σχέση (2.13) στη σχέση (4.7). \square

Το επόμενο αποτέλεσμα μας δίνει μια σχέση υπολογισμού της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης συναρτήσει του συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας F_e .

Πρόταση 4.2.2 Έστω X_e μια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει ως συνάρτηση κατανομής την κατανομή ισορροπίας F_e . Θα συμβολίζουμε με CV_e τον συντελεστή μεταβλητότητας της τυχαίας μεταβλητής X_e , ο οποίος ορίζεται ως $CV_e = (Var(X_e))^{1/2}/E(X_e)$. Τότε η ασυμπτωτική συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, \delta_t) = \left(\frac{\mu_2^2}{8\mu^2} \right) (CV_e^2 - 1). \quad (4.8)$$

Απόδειξη Λύνοντας τη σχέση (1.11) ως προς την ποσότητα $\mu_3/(3\mu)$ προκύπτει ότι

$$\frac{\mu_3}{3\mu} = (1 + CV_e^2) \left(\frac{\mu_2}{2\mu} \right)^2,$$

και ύστερα από λίγες πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} = \left(\frac{\mu_2^2}{8\mu^2} \right) (CV_e^2 - 1),$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την βοήθεια της σχέσης (3.29). \square

Άμεσα από την παραπάνω πρόταση προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

4.2. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία

Πόρισμα 4.2.3 Σε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, \delta_t) \geq (\leq) 0$$

αν και μόνο αν $CV_e \geq 1$ ($CV_e \leq 1$).

Από το παραπάνω πόρισμα προκύπτει επίσης ότι οι τυχαίες μεταβλητές γ_t και δ_t είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστες αν και μόνο αν $CV_e = 1$.

Στη συνέχεια θα συνδέσουμε την ασυμπτωτική συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_t και δ_t με τον συντελεστή μεταβλητότητας που συνδέεται με τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο ανανεώσεων και ο οποίος περιλαμβάνει τη χρονική στιγμή t . Πιο συγκεκριμένα καθώς $t \rightarrow \infty$ ο συνολικός χρόνος $X_{N(t)+1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή την οποία έχουμε ονομάσει β_∞ . Έστω CV_β ο συντελεστής μεταβλητότητας της β_∞ . Εύκολα κάποιος μπορεί να δει ότι

$$CV_\beta = \frac{(\mu_3\mu - \mu_2^2)^{1/2}}{\mu_2},$$

και με την βοήθεια του CV_β η σχέση (3.29) γράφεται στην μορφή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, \delta_t) = \frac{\mu_2^2}{12\mu^2} (2CV_\beta^2 - 1).$$

Άμεσα από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι, αν η ασυμπτωτική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής β_t είναι *NWUE*, τότε η ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι θετική. Οι Gakis και Sivazlian (1994) απέδειξαν ότι ο ασυμπτωτικός συντελεστής συσχέτισης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής (τον οποίο συμβολίζουμε με $\rho(t)$) δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \frac{\frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}}{\frac{\mu_3}{3\mu} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu}\right)^2}. \quad (4.9)$$

Η σχέση (4.8) μας επιτρέπει να εκφράσουμε τον ασυμπτωτικό συντελεστή συσχέτισης με την βοήθεια του συντελεστή μεταβλητότητας CV_e .

Πόρισμα 4.2.4 Ο ασυμπτωτικός συντελεστής συσχέτισης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \frac{1}{2} (1 - CV_e^{-2}).$$

4.3. Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s

Απόδειξη Η σχέση (1.11) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left(\frac{\mu_2}{2\mu}\right)^2 CV_e^2 = \frac{\mu_3}{3\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εισάγοντας την παραπάνω σχέση και τη σχέση (4.8) στην (4.9). \square

Μια ίσως ενδιαφέρουσα παρατήρηση που προκύπτει από το παραπάνω πόρισμα είναι πως ο ασυμπτωτικός συντελεστής συσχέτισης δεν μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1/2.

Στην συνέχεια θα γενικεύσουμε τη σχέση (3.29) και θα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s , για οποιαδήποτε $r, s \geq 1$. Κάτι τέτοιο έχει ιδιαίτερο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον για την ανανεωτική θεωρία. Παραδείγματος χάριν η ανανεωτική θεωρία ενδιαφέρεται για την διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής και για την διακύμανση της τρέχουσας ζωής, και κατά συνέπεια για τις δεύτερες ροπές $E(\gamma_t^2)$ και $E(\delta_t^2)$. Για να κατανοήσουμε την σχέση μεταξύ των διακυμάνσεων των δύο αυτών μεταβλητών θα πρέπει να κατανοήσουμε μεταξύ των άλλων τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι δεύτερες ροπές της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Δημιουργείται λοιπόν η ανάγκη κατασκευής μιας πιο γενικής σχέσης για τον υπολογισμό της συνδιακύμανσης $Cov(\gamma_t^r, \delta_t^s)$.

4.3 Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s

Σε αυτή την ενότητα θα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s . Στα Κεφάλαια 5 και 7 θα ασχοληθούμε διεξοδικά με τις μέσες τιμές $E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s)$, $E(\gamma_t^r)$ και $E(\delta_t^s)$ μέσω των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε την συνδιακύμανση $Cov(\gamma_t^r, \delta_t^s)$ για πεπερασμένο χρόνο t , τόσο για μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία όσο και για μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία.

Πόρισμα 4.3.1 Έστω r, s δύο θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων να έχει πεπερασμένη ροπή $s+r+1$ τάξης ($\mu_{s+r+1} < \infty$). Τότε η ασυμπτωτική συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s ισούται με

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t^r, \delta_t^s) = \frac{r!s!\mu_{r+s+1}}{\mu(r+s+1)!} - \frac{\mu_{r+1}\mu_{s+1}}{\mu^2(r+1)(s+1)}.$$

Απόδειξη Η ασυμπτωτική συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t^r, \delta_t^s) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s) - \lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_t^r) \lim_{t \rightarrow \infty} E(\delta_t^s).$$

4.3. Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t^r και δ_t^s

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.1 και τις σχέσεις (4.1), (4.2) και (4.3) η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t^r, \delta_t^s) = \int_0^\infty \int_0^\infty (\bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(x)\bar{F}_e(y)) ry^{r-1}sx^{s-1} dydx. \quad (4.10)$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.1.1 έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty rx^{r-1}sy^{s-1}\bar{F}_e(x+y)dydx \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty r(y-x)^{r-1}sx^{s-1}\bar{F}_e(y)dydx. \end{aligned}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_x^\infty r(y-x)^{r-1}sx^{s-1}\bar{F}_e(y)dydx &= \int_0^\infty \bar{F}_e(y) \int_0^y r(y-x)^{r-1}sx^{s-1}dx dy \\ &= \frac{r!}{\prod_{j=1}^{r-1}(s+j)} \int_0^\infty y^{r+s-1}\bar{F}_e(y)dy \\ &= \frac{r!}{\prod_{j=1}^r(s+j)} \frac{\mu_{s+r+1}}{\mu(s+r+1)} \\ &= \frac{r!s!}{(s+r)!} \frac{\mu_{s+r+1}}{\mu(s+r+1)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Η ασυμπτωτική ροπή r τάξης της υπολειπόμενης ζωής υπολογίζεται ως εξής

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_t^r) = \int_0^\infty ry^{r-1}\bar{F}_e(y)dy = \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)}, \quad (4.12)$$

και αντίστοιχα ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\delta_t^s) = \frac{\mu_{s+1}}{\mu(s+1)},$$

και το ζητούμενο τώρα έπεται. □

Πόρισμα 4.3.2 Έστω r, s δύο θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων να έχει πεπερασμένη ροπή $s+r+1$ τάξης (δηλαδή $\mu_{s+r+1} < \infty$). Αν η F ανήκει στην κλάση $2-NBU$ ($2-NWU$), τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t^r, \delta_t^s) \leq (\geq) 0.$$

4.3. Ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_i^r και δ_i^s

Απόδειξη Όταν η κατανομή F ανήκει στην κλάση 2-NBU (2-NWU) τότε,

$$\bar{F}_e(x+y) \leq (\geq) \bar{F}_e(x)\bar{F}_e(y).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με $ry^{r-1}sx^{s-1}$ και ολοκληρώνοντας ως προς x και y στο διάστημα $(0,\infty)$ προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty \int_0^\infty ry^{r-1}sx^{s-1}\bar{F}_e(x+y)dydx \leq (\geq) \int_0^\infty sx^{s-1}\bar{F}_e(x)dx \int_0^\infty ry^{r-1}\bar{F}_e(y)dy.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται άμεσα μέσω της σχέσης (4.10). □

Κεφάλαιο 5

Συνδιακύμανση μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία

5.1 Εισαγωγή

Αντικείμενο μελέτης σε αυτό το κεφάλαιο αποτελεί η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία. Για να τονίσουμε τη διαφορά σε σχέση με τα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιούμε λίγο διαφορετικό συμβολισμό βάζοντας παύλες πάνω από τις αντίστοιχες ποσότητες για τους διάφορους χρόνους.

Θα συμβολίσουμε με $\bar{\delta}_t$ την τρέχουσα ζωή και με $\bar{\gamma}_t$ την υπολειπόμενη ζωή. Τέλος θα συμβολίσουμε με $\bar{\beta}_t$ το συνολικό χρονικό διάστημα που απαιτείται για μια ανανέωση (όταν η χρονική στιγμή t περιέχεται στο διάστημα).

Οι Daley και Vere-Jones (2003, σελίδα 74) αναφέρουν ότι η από κοινού δεξιά ουρά της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$P(\bar{\gamma}_t > y, \bar{\delta}_t > x) = \bar{F}_e(x + y), \quad x \leq t, y \geq 0. \quad (5.1)$$

Είναι σημαντικό για την συνέχεια της ανάλυσης μας να έχουμε στο μυαλό μας ότι αν δεν συμβεί καμία ανανέωση στο διάστημα $(0, t]$ τότε $\bar{\delta}_t = t$ και κατά συνέπεια η τυχαία μεταβλητή $\bar{\delta}_t$ θα έχει μάζα στο σημείο t . Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι η κατανομή της τρέχουσας ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία εξαρτάται από τον χρόνο t και έτσι η στοχαστική διαδικασία $\{\bar{\delta}_t : t \geq 0\}$ δεν είναι στάσιμη.

5.1. Εισαγωγή

Για αυτό το λόγο πολλοί ερευνητές (ενδεικτικά αναφέρουμε τους Asmussen (2003) και Daley και Vere-Jones (2003)) έχουν επεκτείνει τον άξονα του χρόνου έτσι ώστε να παίρνει και αρνητικές τιμές. Κάτω από αυτή την προσέγγιση η στοχαστική διαδικασία $\{\bar{\delta}_t : t \geq 0\}$ είναι στάσιμη και η σχέση (5.1) ισχύει για κάθε $x \geq 0$, και όχι μόνο για $x \leq t$. Δηλαδή αυτό που ισχύει για $t \rightarrow \infty$ σε μια συνήθη διαδικασία ισχύει για κάθε t εδώ.

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε για κάθε $t \geq 0$ την ακόλουθη συνάρτηση,

$$G(x, y; t) = \int_0^t \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(x) \right) dx. \quad (5.2)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y; t) = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(x) \right) dx \quad (5.3)$$

$$= \frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} = \text{Cov}(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) \quad (5.4)$$

Πόρισμα 5.1.1 Η συνάρτηση $G(x, y; t)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του χρόνου t αν και μόνο αν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση NBUE (NWUE).

Απόδειξη Παραγωγίζοντας τη σχέση (5.2) ως προς t έχουμε,

$$\frac{d}{dt} G(x, y; t) = \int_t^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(t). \quad (5.5)$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού μας είναι πλέον προφανής χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κλάσης NBUE (NWUE) (παραπέμπουμε στη σχέση (1.47)). \square

Από τη σχέση (5.3) προκύπτει ότι αν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση NBUE (NWUE) τότε η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι αρνητική (θετική) για κάθε $t \leq 0$.

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά την κλάση HNBUE(HNWUE) η οποία είναι μεγαλύτερη της κλάσης NBUE (NWUE).

Πόρισμα 5.1.2 Αν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση HNBUE (HNWUE), τότε $\text{Cov}(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) \leq (\geq) 0$.

Απόδειξη Αν η F_e ανήκει στην κλάση HNBUE(HNWUE) τότε ισχύει ότι

$$\int_t^\infty \bar{F}_e(x) dx \leq (\geq) \frac{\mu_2}{2\mu} e^{-\frac{2\mu t}{\mu_2}}.$$

5.1. Εισαγωγή

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς t στο διάστημα $[0, \infty)$ έχουμε

$$\int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}_e(z) dz dt \geq (\leq) \frac{\mu_2}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\frac{2\mu}{\mu_2}t} dt. \quad (5.6)$$

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας είναι ίση με

$$\frac{\mu_2}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\frac{2\mu}{\mu_2}t} dt = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}, \quad (5.7)$$

και αντίστοιχα το αριστερό μέλος γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}_e(z) dz dt &= \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_z^\infty \bar{F}(y) dy dz dt = \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^y \bar{F}(z) dz dy dt \\ &= \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty (z-t) \bar{F}(z) dz dt = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^z x \bar{F}(z) dx dz \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty z^2 \bar{F}(z) dz = \frac{\mu_3}{6\mu}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.8) και (5.7) στην (5.6) καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως όταν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση $HNBUE$ ($HNWUE$) τότε

$$\frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} \leq (\geq) 0.$$

□

Ο Gupta (1984) απέδειξε ότι η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία είναι θετική (αρνητική) αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση DFR (IFR). Στο επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύουμε ότι η συνδιακύμανση είναι θετική όταν η κατανομή F ανήκει στην κλάση IMRL (η οποία είναι μεγαλύτερη της DFR). Πιο συγκεκριμένα

Πόρισμα 5.1.3 *Αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση IMRL τότε,*

$$Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) \geq 0.$$

Απόδειξη Ο Brown (1981) απέδειξε ότι αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση IMRL τότε η κατανομή ισορροπίας F_e θα ανήκει στην κλάση DFR, και κατά συνέπεια θα ανήκει και στις κλάσεις NWUE και HNWUE. Η απόδειξη ολοκληρώνεται συνδυάζοντας τα παραπάνω με την Πρόταση 5.1.2. □

Στο Κεφάλαιο 6 θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός του Gupta (1984) ισχύει όχι μόνο για την στάσιμη ανανεωτική διαδικασία αλλά επίσης για την συνήθη ανανεωτική διαδικασία.

5.2. Μια διαφορετική προσέγγιση

5.2 Μια διαφορετική προσέγγιση

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέραμε ότι για να είναι η στοχαστική διαδικασία $\{\bar{\delta}_t : t \geq 0\}$ στάσιμη πρέπει να επεκτείνουμε τον άξονα του χρόνου έτσι ώστε να παίρνει και αρνητικές τιμές.

Ωστόσο αυτή η επέκταση του χρόνου στον αρνητικό ημιάξονα είναι μια μαθηματική και άκρως τεχνική λύση του προβλήματος της μη στασιμότητας της τρέχουσας ζωής αλλά φαίνεται να μην έχει πρακτική εφαρμογή. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η τρέχουσα και η υπολειπόμενη ζωή έχουν εφαρμογή στην βιολογία και τη ιατρική, παραδείγματος χάριν ο χρόνος από τη στιγμή που ο ασθενής είναι φορέας ενός ιού μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι η τρέχουσα ζωή και ο χρόνος μεταξύ της χρονικής στιγμής t μέχρι τη στιγμή που ο ασθενής παύει να είναι άρρωστος, είναι η υπολειπόμενη ζωή. Σε αυτή την περίπτωση η επέκταση του χρόνου στο αρνητικό ημιάξονα φαίνεται να μην έχει πρακτική εφαρμογή.

Για αυτό το λόγο σε αυτή την ενότητα θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση και δεν θα επεκταθούμε στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε μια παρατήρηση που διατυπώθηκε από τον Serfozo (2009, σελίδα 148), σύμφωνα με την οποία, αν δεν συμβεί καμία ανανέωση στο διάστημα $(0, t]$ τότε $\bar{\delta}_t = t$ και κατά συνέπεια η τυχαία μεταβλητή $\bar{\delta}_t$ θα έχει μάζα στο σημείο t . Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι η κατανομή της τρέχουσας ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία εξαρτάται από τον χρόνο t και έτσι η στοχαστική διαδικασία $\{\bar{\delta}_t : t \geq 0\}$ δεν είναι στάσιμη.

Από τη σχέση (5.1), μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τις περιθώριες δεξιές ουρές των τυχαίων μεταβλητών $\bar{\gamma}_t$ και $\bar{\delta}_t$. Πιο συγκεκριμένα για $x = 0$ και $y = 0$ αντίστοιχα έχουμε,

$$P(\bar{\gamma}_t > y) = \bar{F}_e(y), \quad y \geq 0 \quad (5.9)$$

και

$$P(\bar{\delta}_t > x) = \bar{F}_e(x), \quad x \leq t. \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1), (5.9) και (5.10) έχουμε την δυνατότητα να παρουσιάσουμε έναν κλειστό τύπο υπολογισμού της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία.

5.2.1 Μονοτονία συνδιακύμανσης

Σε αυτή την ενότητα θα συνδέσουμε την συμπεριφορά του πρόσημου της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής με συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών.

Αν και στην βιβλιογραφία (παραδείγματος χάριν Asmussen (2003)) η τρέχουσα ζωή αντιμετωπίζεται ως μια συνεχής τυχαία μεταβλητή που παίρνει θετικές και αρνητικές

5.2. Μια διαφορετική προσέγγιση

τιμές, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εμείς θα θεωρήσουμε ότι η τρέχουσα ζωή παίρνει μη αρνητικές τιμές και έχει ένα συνεχές τμήμα και ένα διακριτό τμήμα.

Πρόταση 5.2.1 Η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία δίνεται από τη σχέση

$$Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) = G(x, y; t) = \int_0^t \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(x) \right) dx. \quad (5.11)$$

Απόδειξη Με τη βοήθεια του Λήμματος 4.1.1, παρατηρούμε ότι η συνδιακύμανση μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) = \int_0^t \int_0^\infty (P(\bar{\gamma}_t > y, \bar{\delta}_t > x) - P(\bar{\gamma}_t > y)P(\bar{\delta}_t > x)) dy dx.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις σχέσεις (5.1), (5.9) και (5.10) έχουμε

$$\begin{aligned} Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) &= \int_0^t \int_0^\infty (\bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(x)\bar{F}_e(y)) dy dx \\ &= \int_0^t \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \bar{F}_e(x) \int_0^\infty \bar{F}_e(y) dy \right) dx \\ &= \int_0^t \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(x) \right) dx, \end{aligned}$$

το οποίο είναι η ζητούμενη σχέση. \square

Η Πρόταση 5.2.1 δίνει για κάποιον που ενδιαφέρεται να μελετήσει την μονοτονία της συνδιακύμανσης μια πολύ εύχρηστη μορφή της. Πιο συγκεκριμένα μας επιτρέπει να διατυπώσουμε την ακόλουθη αναγκαία και ικανή συνθήκη για την μονοτονία της.

Πόρισμα 5.2.2 Η συνδιακύμανση $Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του χρόνου t αν και μόνο αν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση NBUE (NWUE).

Απόδειξη Παραγωγίζοντας ως προς t και τα δύο μέλη της σχέσης (5.11) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt} Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t) = \int_t^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(t). \quad (5.12)$$

Ο ισχυρισμός μας είναι προφανής μέσω του ορισμού της κλάσης NBUE (NWUE) (δείτε σχέση (1.47)). \square

Σημειώνουμε ότι για $t = 0$, η συνδιακύμανση των μεταβλητών $\bar{\gamma}_t$ και $\bar{\delta}_t$ ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει πως αύξουσα συνδιακύμανση συνεπάγεται θετικό πρόσημο και φθίνουσα συνδιακύμανση συνεπάγεται αρνητικό πρόσημο για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

5.3. Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία

5.3 Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία

Προηγουμένως στην απόδειξη της Πρότασης 5.2.1, υπολογίσαμε αρχικά την μέση τιμή $E(\bar{\gamma}_t \cdot \bar{\delta}_t)$. Στην πραγματικότητα κάτω από την ίδια λογική μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε ροπή του γινομένου $\bar{\gamma}_t^r \cdot \bar{\delta}_t^s$ για ακέραιους $r, s > 0$, κάτω από τη υπόθεση ότι $\mu_{r+s+1} < \infty$.

Πρόταση 5.3.1 Αν F_e είναι η κατανομή ισορροπίας της κατανομής F η οποία έχει πυκνότητα f , τότε

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx &= \int_0^t \int_0^\infty x^s y^r \frac{f(x+y)}{\mu} dx dy \\ &+ t^s \int_t^\infty r(z-t)^{r-1} \bar{F}_e(z) dz. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Απόδειξη Το αριστερό μέλος της σχέσης (5.13) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx &= \int_0^\infty \int_0^t r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dx dy \\ &= \int_0^\infty r y^{r-1} \int_0^t s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dx dy \\ &= t^s \int_0^\infty r y^{r-1} \bar{F}_e(t+y) dy \\ &+ \int_0^\infty r y^{r-1} \int_0^t x^s \frac{\bar{F}_e(x+y)}{\mu} dx dy. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους της σχέσης (5.14) γράφεται,

$$t^s \int_0^\infty r y^{r-1} \bar{F}_e(t+y) dy = t^s \int_t^\infty r(z-t)^{r-1} \bar{F}_e(z) dz. \quad (5.15)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους της ίδιας σχέσης γράφεται,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r y^{r-1} \int_0^t x^s \frac{\bar{F}_e(x+y)}{\mu} dx dy &= \int_0^t x^s \int_0^\infty r y^{r-1} \frac{\bar{F}_e(x+y)}{\mu} dy dx \\ &= \int_0^t \int_0^\infty x^s y^r \frac{f(x+y)}{\mu} dx dy. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.15) και (5.16) στη σχέση (5.14). \square

5.3. Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία

Πρόταση 5.3.2 Σε μια στάσιμη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία η ροπή $E(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ δίνεται από τη σχέση

$$E(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s) = \frac{r!s!}{(s+r)!} \frac{\mu_{s+r+1}}{\mu(s+r+1)} - \int_t^\infty \int_0^\infty ry^{r-1}sx^{s-1}\overline{F}_e(x+y)dydx. \quad (5.17)$$

Απόδειξη Όπως είδη έχουμε αναφέρει στην αρχή της ενότητας η τυχαία μεταβλητή $\overline{\delta}_t$ έχει ένα διακριτό μέρος (μάζα στο σημείο t) και ένα συνεχές μέρος (πυκνότητα) στο διάστημα $(0, t)$. Το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο $\overline{\gamma}_t \cdot \overline{\delta}_t$.

Θα ορίσουμε με $f_{\overline{\gamma}_t, \overline{\delta}_t}$ την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, η οποία θα ισούται με

$$f_{\overline{\gamma}_t, \overline{\delta}_t}(x, y) = -\frac{d}{dxdy}P(\overline{\gamma}_t > y, \overline{\delta}_t > x) = -\frac{d}{dxdy}\overline{F}_e(x+y) = \frac{f(x+y)}{\mu}.$$

Ορίζουμε επίσης με $E_C(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ το μέρος της ροπής $E(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ που προέρχεται από την πυκνότητα $f_{\overline{\gamma}_t, \overline{\delta}_t}(x, y)$, δηλαδή από το συνεχές τμήμα της από κοινού κατανομής. Έχουμε

$$E_C(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s) = \int_0^t \int_0^\infty x^s y^r \frac{f(x+y)}{\mu} dy dx. \quad (5.18)$$

Από την άλλη πλευρά αν δεν συμβεί καμιά ανανέωση στο διάστημα $(0, t)$ τότε $\overline{\delta}_t = t$. Και σε αυτή την περίπτωση το ενδεχόμενο $\{\overline{\gamma}_t > y\}$ είναι ισοδύναμο με $\{\overline{\gamma}_0 > y+t\}$. Θα ορίσουμε λοιπόν με $E_D(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ το τμήμα εκείνο της ροπής $E(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ που συνδέεται με την μάζα στο σημείο t . Σε αυτή την περίπτωση η ροπή $E_D(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ ισούται με

$$E_D(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s) = t^s \int_0^\infty ry^{r-1}P(\overline{\gamma}_0 > t+y)dy = t^s \int_t^\infty r(z-t)^{r-1}\overline{F}_e(z)dz \quad (5.19)$$

Προσθέτοντας τις $E_C(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ και $E_D(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s)$ και λαμβάνοντας υπόψη το Πρόγραμμα 5.2.3 μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} E(\overline{\gamma}_t^r \cdot \overline{\delta}_t^s) &= \int_0^t \int_0^\infty rx^{r-1}sy^{s-1}\overline{F}_e(x+y)dydx \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty r(y-x)^{r-1}sx^{s-1}\overline{F}_e(y)dydx - \int_t^\infty \int_0^\infty ry^{r-1}sx^{s-1}\overline{F}_e(x+y)dydx. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση (4.11).
□

Αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε ροπή της τρέχουσας ζωής.

5.3. Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία

Πρόταση 5.3.3 Σε μια στάσιμη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία η ροπή s -τάξης της τρέχουσας ζωής δίνεται από τη σχέση

$$E(\bar{\delta}_t^s) = s \int_0^t x^{s-1} \bar{F}_e(x) dx, \quad s \geq 1. \quad (5.20)$$

Απόδειξη Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η τρέχουσα ζωή έχει ένα συνεχές τμήμα με συνάρτηση πυκνότητας $\mu^{-1} \bar{F}(x)$ στο διάστημα $(0, t)$ και ένα διακριτό τμήμα (μάζα στο σημείο t) με συνάρτηση πιθανότητας $P(\bar{\delta}_t = t) = \bar{F}_e(t)$. Έτσι η ροπή s -τάξης της τρέχουσας ζωής υπολογίζεται ως εξής

$$E(\bar{\delta}_t^s) = \mu^{-1} \int_0^t x^s \bar{F}(x) dx + t^s P(\bar{\delta}_t = t) = \mu^{-1} \int_0^t x^s \bar{F}(x) dx + t^s \bar{F}_e(t). \quad (5.21)$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$\mu^{-1} \int_0^t x^s \bar{F}(x) dx = - \int_0^t x^s (\bar{F}_e(x))' dx = -t^s \bar{F}_e(t) + s \int_0^t x^{s-1} \bar{F}_e(x) dx.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας το παραπάνω ολοκλήρωμα στη σχέση (5.21). \square

5.3.1 Συντελεστής συσχέτισης

Έχοντας μελετήσει τη συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, το επόμενο λογικό ερευνητικό βήμα είναι ο συντελεστής συσχέτισης των δύο αυτών μεταβλητών. Θα συμβολίσουμε τον συντελεστή συσχέτισης της τρέχουσας και της υπόλοιπης ζωής με $\bar{\rho}(t)$. Γνωρίζουμε ότι

$$\bar{\rho}(t) = \frac{Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t)}{(Var(\bar{\gamma}_t))^{1/2} (Var(\bar{\delta}_t))^{1/2}}.$$

Τον αριθμητή τον υπολογίσαμε στην Πρόταση 5.2.1. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις που περιλαμβάνονται στον παρονομαστή. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφέρουμε πως η ασυμπτωτική ροπή r -τάξης της υπολειπόμενης ζωής δεν διαφέρει από την αντίστοιχη ροπή της υπολειπόμενης ζωής στην στάσιμη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Έτσι για τον υπολογισμό της πρώτης και δεύτερης ροπής της υπολειπόμενης ζωής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.12).

Αντίστοιχα για τον υπολογισμό της διακύμανσης της τρέχουσας ζωής θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την πρώτη και δεύτερη ροπή της τρέχουσας ζωής. Αυτό θα το κάνουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.20).

5.3. Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία

Μια άμεση παρατήρηση είναι πως η μέση τιμή του συνολικού χρόνου ζωής $\bar{\beta}_t = \bar{\gamma}_t + \bar{\delta}_t$ ισούται με

$$E(\bar{\beta}_t) = \mu_2 / (2\mu) + \int_0^t \bar{F}_e(x) dx,$$

και είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t .

Πρόταση 5.3.4 *Ο συντελεστής συσχέτισης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία δίνεται από τη σχέση*

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\int_0^t \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(x) \right) dx}{\left(2 \int_0^t x \bar{F}_e(x) dx - \left(\int_0^t \bar{F}_e(x) dx \right)^2 \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_3}{3\mu} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu} \right)^2 \right)^{1/2}}.$$

Απόδειξη Όπως ήδη αναφέραμε παραπάνω χρειάζεται να υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις $Var(\bar{\gamma}_t)$ και $Var(\bar{\delta}_t)$. Για την διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.12), εύκολα προκύπτει ότι

$$Var(\bar{\gamma}_t) = \frac{\mu_3}{3\mu} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu} \right)^2. \quad (5.22)$$

Η διακύμανση της τρέχουσας ζωής χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.20) θα ισούται με

$$Var(\bar{\delta}_t) = 2 \int_0^t x \bar{F}_e(x) dx - \left(\int_0^t \bar{F}_e(x) dx \right)^2. \quad (5.23)$$

Πλέον η ολοκλήρωση της απόδειξης είναι προφανής. \square

Ένα έμμεσο αποτέλεσμα που προέκυψε μελετώντας την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής σε μια στάσιμη διαδικασία είναι ο υπολογισμός της διακύμανσης του συνολικού χρόνου που απαιτείται για μια ανανέωση (όταν η χρονική στιγμή t περιλαμβάνεται στο διάστημα αυτό).

Πόρισμα 5.3.5 (i) *Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $\bar{\beta}_t$ σε μια στάσιμη ανανεωτική διαδικασία δίνεται από τη σχέση*

$$\begin{aligned} Var(\bar{\beta}_t) &= \frac{\mu_3}{3\mu} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu} \right)^2 + 2 \int_0^t x \bar{F}_e(x) dx - \left(\int_0^t \bar{F}_e(x) dx \right)^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t \left(\int_x^\infty \bar{F}_e(y) dy - \frac{\mu_2}{2\mu} \bar{F}_e(x) \right) dx. \end{aligned}$$

(ii) *Αν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση NWUE, τότε οι διακυμάνσεις των τυχαίων μεταβλητών $\bar{\delta}_t$ και $\bar{\beta}_t$ είναι αύξουσες συναρτήσεις του χρόνου t .*

5.3. Ροπές ανωτέρας τάξης σε μια στάσιμη διαδικασία

Απόδειξη Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $\bar{\beta}_t$ γράφεται ως εξής

$$Var(\bar{\beta}_t) = Var(\bar{\gamma}_t + \bar{\delta}_t) = Var(\bar{\gamma}_t) + Var(\bar{\delta}_t) + 2Cov(\bar{\gamma}_t, \bar{\delta}_t).$$

Το πρώτο μέρος του πορίσματος προκύπτει αμέσως αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις σχέσεις (5.11), (5.23) και (5.22).

Για να αποδείξουμε ότι η διακύμανση της τρέχουσας ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση θα παραγωγίσουμε τη σχέση (5.23) ως προς t . Πιο συγκεκριμένα

$$\frac{d}{dt} Var(\bar{\delta}_t) = 2t\bar{F}_e(t) - 2\bar{F}_e(t) \int_0^t \bar{F}_e(x) dx = 2\bar{F}_e(t) \left(t - \int_0^t \bar{F}_e(x) dx \right). \quad (5.24)$$

Ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι μη αρνητικός εφόσον ισχύει $\bar{F}_e(t) \leq 1$ για κάθε t και κατά συνέπεια η παράγωγος δεν είναι αρνητική.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής είναι σταθερή, ότι η διακύμανση της τρέχουσας ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου και πως η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου όταν η κατανομή ισορροπίας ανήκει στην κλάση $NWUE$ (Πόρισμα 5.2.2), καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $\bar{\beta}_t$ είναι αύξουσα συνάρτηση. \square

Κεφάλαιο 6

Σχέση εξάρτησης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής

6.1 Εισαγωγή

Συχνά στην στατιστική και στις πιθανότητες αναφερόμαστε σε ομάδες ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Παραδείγματος χάριν στη θεωρία αξιοπιστίας συχνά θεωρούμε ότι οι μονάδες που αποτελούν ένα σύστημα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Αυτή η πολύ γενική υπόθεση ίσως να διευκολύνει την μελέτη βασικών προβλημάτων αλλά δεν είναι ρεαλιστική. Ας σκεφτούμε παραδείγματος χάριν μια ομάδα κωπηλατών. Το συγκεκριμένο άθλημα χαρακτηρίζεται από δύναμη, ταχύτητα και συγχρονισμό, η κίνηση του κάθε αθλητή επηρεάζει και επηρεάζεται από τις κινήσεις των υπολοίπων. Δεν μπορούμε λοιπόν να μελετήσουμε την αξιοπιστία του εν λόγω συστήματος θεωρώντας ότι οι μονάδες του συστήματος (οι αθλητές) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών έχουν μελετηθεί διεξοδικά στους τομείς των πιθανοτήτων και της στατιστικής και κάθε στατιστικό μοντέλο θα πρέπει να στηρίζεται σε κάποιες υποθέσεις σχετικά με την σχέση εξάρτησης των μεταβλητών του.

Ο Karl Pearson συχνά αναφέρεται ως ο πρώτος που εισήγαγε τις σχέσεις εξάρτησης. Στη συνέχεια κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1960, η μελέτη των σχέσεων εξάρτησης δύο μεταβλητών αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους Harris (1960, 1970), Lehmann (1966), Esary et al. (1967), Esary και Proshan (1972), Kimeldorf και Sampson (1987), Yanagimoto (1972), Shaked (1977, 1979, 1982).

6.1. Εισαγωγή

Το πρόσημο της συνδιακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών συνδέεται με τις σχέσεις εξάρτησης. Η σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y περιγράφει μαθηματικά, τον τρόπο με τον οποίο μεγάλες (ή αντίστοιχα μικρές) τιμές της μεταβλητής X τείνουν να εμφανίζονται ταυτόχρονα με μεγάλες (μικρές) τιμές της τυχαίας μεταβλητής Y .

Θα αρχίσουμε το κεφάλαιο αυτό με τους ορισμούς μερικών από τους βασικούς τύπους εξάρτησης (για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο βιβλίο των Balakrishnan και Lai (2008), Κεφάλαιο 3):

1. Ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X, Y) θα λέμε ότι είναι *PRD* (positive regression dependent) (αντίστοιχα *NRD* (negative regression dependent)) αν για κάθε $s \leq t$, ισχύει

$$P(Y > y|X = s) \leq (\geq)P(Y > y|X = t).$$

2. Θα λέμε ότι η Y είναι right tail increasing in X και θα συμβολίζουμε με $RTI(Y|X)$ αν για κάθε $s \leq t$ ισχύει ότι

$$P(Y > y|X > s) \geq P(Y > y|X > t),$$

δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y > y|X > x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς x για κάθε y . Αντίστοιχα θα λέμε ότι η X είναι right tail increasing in Y και θα συμβολίζεται με $RTI(X|Y)$ αν πιθανότητα $P(X > x|Y > y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς y για κάθε x .

Με παρόμοιο τρόπο θα λέμε ότι η Y είναι left tail decreasing in X και θα συμβολίζεται με $LTD(Y|X)$ αν η πιθανότητα $P(Y \leq y|X \leq x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x για κάθε y . Τέλος η X θα είναι left-tail decreasing in Y , και θα συμβολίζεται με $LTD(X|Y)$, αν η πιθανότητα $P(X \leq x|Y \leq y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y για κάθε x .

Τέλος αναφέρουμε τις σχέσεις εξάρτησης *PQD* (positive quadrant dependence) και *NQD* (negative quadrant dependence).

Ένα ζεύγος δύο τυχαίων μεταβλητών (X, Y) θα είναι *PQD(NQD)* αν ισχύει ότι

$$P(X \geq x, Y \geq y) \geq (\leq)P(X \geq x)P(Y \geq y),$$

ή ισοδύναμα

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq (\leq)P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Ο Lehmann (1966) απέδειξε ότι ισοδύναμη συνθήκη για την *PQD* σχέση εξάρτησης είναι η ακόλουθη

$$Cov(a(X), b(Y)) \geq 0,$$

όπου a, b είναι αύξουσες συναρτήσεις ορισμένες σε ολόκληρο το \mathbb{R} .

6.1. Εισαγωγή

Λήμμα 6.1.1 Αν το ζεύγος (X,Y) ανήκει στην κλάση RTI ή LTD τότε θα ανήκει και στην κλάση PQD .

Απόδειξη Παραπέμπουμε στο βιβλίο των Balakrishnan και Lai (2008), σελίδα 111.
□

Τέλος αν το ζεύγος (X,Y) είναι PRD τότε θα είναι RTI και LTD (Balakrishnan και Lai (2008)).

Όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της $PQD(NQD)$, η εξάρτηση δύο τυχαίων μεταβλητών (X,Y) συνδέεται άμεσα με την συνδιακύμανσή τους.

Λήμμα 6.1.2 Αν το ζεύγος (X,Y) είναι $PQD(NQD)$ τότε η συνδιακύμανσή τους θα είναι θετική(αρνητική).

Απόδειξη Παραπέμπουμε στους Gupta et al (2010). □

Έχοντας μελετήσει στο Κεφάλαιο 3 την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής, μια αναμενόμενη ερώτηση που προκύπτει είναι πώς μπορούμε να συνδέσουμε τους τύπους εξάρτησης με τις τυχαίες μεταβλητές γ_t και δ_t . Μια άμεση απάντηση μπορεί να δοθεί εκφράζοντας την δεξιά ουρά της υπολειπόμενης ζωής γ_t ως εξής:

$$P(\gamma_t > y) = P(\gamma_t > y | \delta_t = t)P(\delta_t = t) + \int_0^t P(\gamma_t > y | \delta_t = x)f_{\delta_t}(x)dx, \quad (6.1)$$

όπου $f_{\delta_t}(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της τρέχουσας ζωής (θυμίζουμε ότι η τρέχουσα ζωή έχει ένα διακριτό μέρος στο σημείο t με $P(\delta_t = t) = P(N(t) = 0) = \bar{F}(t)$ και ένα συνεχές τμήμα στο διάστημα $(0,t)$). Αντιλαμβανόμαστε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα

$$a = P(\gamma_t > y | \delta_t = x) \quad (6.2)$$

μας επιτρέπει να συνδέσουμε την δεξιά ουρά της υπολειπόμενης ζωής με την σχέση εξάρτησης $PRD(NRD)$ και ως εκ τούτου με την $PQD(NQD)$. Έτσι η σχέση (6.1) αποτελεί έναν από τους συνδυαστικούς κρίκους των σχέσεων εξάρτησης με την κατανομή της υπολειπόμενης ζωής.

Λήμμα 6.1.3 Αν το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) είναι $PRD(NRD)$ τότε

$$P(\gamma_t > y) \geq (\leq) P(\gamma_t > y | \delta_t = t). \quad (6.3)$$

6.1. Εισαγωγή

Απόδειξη Αν το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) είναι *PRD* (*NRD*) τότε η σχέση (6.1) γράφεται

$$\begin{aligned} P(\gamma_t > y) &= P(\gamma_t > y | \delta_t = t)P(\delta_t = t) + \int_0^t P(\gamma_t > y | \delta_t = x)f_{\delta_t}(x)dx \\ &\geq (\leq)P(\gamma_t > y | \delta_t = t)P(\delta_t = t) + P(\gamma_t > y | \delta_t = t) \int_0^t f_{\delta_t}(x)dx \\ &= P(\gamma_t > y | \delta_t = t)P(\delta_t = t) + P(\gamma_t > y | \delta_t = t)P(\delta_t < t) \\ &= P(\gamma_t > y | \delta_t = t). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 6.1.4 Αν το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) είναι *NRD* τότε

$$P(\gamma_t > y, \delta_t = t) \geq P(\gamma_t > y)P(\delta_t = t).$$

Απόδειξη Προκύπτει άμεσα από τη σχέση (6.3). □

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(\gamma_t > y | \delta_t = s)$ ισούται με

$$P(\gamma_t > y | \delta_t = s) = \frac{P(\gamma_t > y, \delta_t = s)}{P(\delta_t = s)}. \quad (6.4)$$

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο $\{\gamma_t > y, \delta_t = s\}$ σημαίνει ότι η τελευταία ανανέωση έγινε πριν από s χρονικές μονάδες, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t - s$ (για $t \geq s$) και ότι η επόμενη ανανέωση θα γίνει μετά τη χρονική στιγμή $t + y$. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχει γίνει καμία ανανέωση στο διάστημα $(t - s, t + y]$ και η αντίστοιχη πιθανότητα $P(\gamma_t > y, \delta_t = s)$ είναι ίση με

$$P(\gamma_t > y, \delta_t = s) = \bar{F}(s + y). \quad (6.5)$$

Αντίστοιχα το ενδεχόμενο $\{\delta_t = s\}$ σημαίνει ότι η τελευταία ανανέωση έγινε πριν από s χρονικές μονάδες και δεν έχει γίνει ανανέωση στο διάστημα $(t - s, t]$, και η αντίστοιχη πιθανότητα $P(\delta_t = s)$ είναι ίση με

$$P(\delta_t = s) = \bar{F}(s). \quad (6.6)$$

Στην ουσία, με το που συμβαίνει κάποια ανανέωση ο χρόνος μηδενίζεται και αρχίζουμε από την αρχή.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο αποτέλεσμα θα εισαγάγουμε στην ανάλυσή μας τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής X_s ο οποίος ορίζεται ως εξής :

$$X_s = X - s | X > s.$$

6.1. Εισαγωγή

Η δεξιά ουρά της τυχαίας μεταβλητής X_s για $s \geq 0$ θα είναι

$$P(X_s > x) = P(X - s > x | X > s) = \frac{\bar{F}(x + s)}{\bar{F}(s)}. \quad (6.7)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.7) τις σχέσεις (6.5) και (6.6) προκύπτει ότι

$$P(X_s > y) = \frac{P(\gamma_t > y, \delta_t = s)}{P(\delta_t = s)} = P(\gamma_t > y | \delta_t = s). \quad (6.8)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.3) έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 6.1.5 *Αν το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) είναι $PRD(NRD)$ τότε*

$$P(\gamma_t > y) \geq (\leq) P(X_t > y). \quad (6.9)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι, αν το ζεύγος (γ_t, δ_t) είναι $PRD(NRD)$, τότε η τυχαία μεταβλητή γ_t είναι στοχαστικά μεγαλύτερη (μικρότερη) από τον υπολειπόμενο χρόνο X_t .

Οι σχέσεις (6.5) και (6.6) μας δίνουν την δυνατότητα να διατυπώσουμε με την βοήθεια της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής έναν διαφορετικό ορισμό της κλάσης $NBU(NWU)$ την οποία παρουσιάσαμε στην Ενότητα 1.5. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Πόρισμα 6.1.6 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $NBU(NWU)$ τότε*

$$P(X_s > y) = P(\gamma_t > y | \delta_t = s) \leq (\geq) P(\delta_t = y).$$

Ένα άλλο αποτέλεσμα που προκύπτει από τον ορισμό της σχέσης $PRD(NRD)$ και τη σχέση (6.8) είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 6.1.7 *Αν το ζεύγος (γ_t, δ_t) είναι $PRD(NRD)$ τότε για $s \leq t$ ισχύει ότι*

$$P(X_s > y) \geq (\leq) P(X_t > y).$$

Δηλαδή αν το ζεύγος (γ_t, δ_t) είναι $PRD(NRD)$, τότε ο υπολειπόμενος χρόνος X_t είναι στοχαστικά φθίνουσα (αύξουσα) τυχαία μεταβλητή.

Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει

6.2. Πρόσχημο συνδιακύμανσης

στην κλάση $DFR(IFR)$. Πιο συγκεκριμένα (βλ. Willmot και Lin (2001)) η σχέση (6.7) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ ως εξής

$$P(X_s > x) = \frac{e^{-\int_0^{x+s} \lambda(z) dz}}{e^{-\int_0^s \lambda(z) dz}} = e^{-\int_s^{x+s} \lambda(z) dz}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς x έχουμε

$$\frac{d}{dx} P(X_s > x) = P(X_s > x) (\lambda(x) - \lambda(x+s)).$$

Αν λοιπόν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κλάση IFR (DFR) τότε ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι μια στοχαστικά φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του s .

Δημιουργείται λοιπόν ένα ερώτημα κατά πόσο συνδέονται οι κλάσεις $DFR(IFR)$ με τις σχέσεις εξάρτησης $PRD(NRD)$. Απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα δώσουμε στο Θεώρημα 6.2.2.

6.2 Πρόσχημο συνδιακύμανσης

Ένα από τα βασικά ερωτήματα στην παρούσα διατριβή είναι η μελέτη της σχέσης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t και δ_t . Η σχέση αυτή αντανακλάται στο πρόσχημο της συνδιακύμανσης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Στο Κεφάλαιο 3 μελετήσαμε τη συνάρτηση της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής και αναφέραμε συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι θετική ή αρνητική. Αναφέραμε επίσης συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση.

Το πρόβλημα του προσήμου της συνδιακύμανσης είναι ένα σύνθετο πρόβλημα και για την επίλυσή του θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε συνδυαστικά τις κλάσεις κατανομών και τις σχέσεις εξάρτησης.

Στο Κεφάλαιο 3 (Λήμμα 3.2.7) αποδείξαμε ότι η συνδιακύμανση μεταξύ της υπολειπόμενης και της τρέχουσας ζωής είναι θετική (αρνητική) αν και μόνο αν ισχύει η σχέση (3.9). Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί συνδεθεί με τη σχέση εξάρτησης PQD (NQD) μιας και όπως αναφέραμε παραπάνω η σχέση εξάρτησης PQD (NQD) μεταξύ δύο μεταβλητών συνεπάγεται θετική (αρνητική) συνδιακύμανση. Στο επόμενο αποτέλεσμα παρουσιάζουμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) να είναι $PQD(NQD)$.

Πόρισμα 6.2.1 Αν το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) είναι $PQD(NQD)$ τότε ισχύει ότι

$$U(t) \geq (\leq) \frac{t}{\mu} + \frac{[tu(t)] * \bar{F}_e(t)}{[tu(t)] * \bar{F}(t)} - 1.$$

6.2. Πρόσημο συνδιακύμανσης

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.2.7. \square

Στο επόμενο αποτέλεσμα είμαστε σε θέση να συνδέσουμε το πρόσημο της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών γ_t και δ_t με συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών. Πιο συγκεκριμένα :

Θεώρημα 6.2.2 *Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων σε μια στοχαστική διαδικασία ανήκει στην κλάση $IFR(DFR)$ τότε η συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t και δ_t είναι αρνητική (θετική).*

Απόδειξη Σε αντιστοιχία με τη σχέση (6.2), για δύο χρονικές στιγμές s_1 και s_2 με $s_1 < s_2$ ορίζουμε

$$a_1 = P(\gamma_t > y | \delta_t = s_1) = P(X_{s_1} > y)$$

και

$$a_2 = P(\gamma_t > y | \delta_t = s_2)P(X_{s_2} > y).$$

Αν λοιπόν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IFR(DFR)$ τότε $a_1 \geq (\leq) a_2$ και τότε το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (γ_t, δ_t) θα ανήκει στην κλάση $NRD(PRD)$ και κατά συνέπεια θα ανήκει και στην κλάση $NQD(PQD)$. Επομένως για τη συνδιακύμανση θα ισχύει $Cov(\gamma_t, \delta_t) \leq (\geq) 0$. \square

Στο Κεφάλαιο 3 και πιο συγκεκριμένα στο Πόρισμα 3.2.9 μας δόθηκε η δυνατότητα να παρουσιάσουμε κάποιες συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι θετική ή αρνητική. Όπως φαίνεται από τη σχέση (3.21) το πρόσημο της συνδιακύμανσης εξαρτάται από τις τιμές που θα πάρει η συνάρτηση $b(t)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 6.2.2 μπορούμε να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε τα εξής δύο πορίσματα.

Πόρισμα 6.2.3 *Αν η κατανομή των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση $DFR(IFR)$ τότε :*

$$b(t) \leq (\geq) \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2}.$$

Απόδειξη Στο Πόρισμα 3.2.9 αποδείξαμε ότι η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής για $t > 0$ δίνεται από τη σχέση

$$Cov(\gamma_t, \delta_t) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} k_1(t) \left\{ \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2} - b(t) \right\}, \quad t > 0$$

6.3. Σχέση συσχέτισης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής όταν $t \rightarrow \infty$

$$\text{όπου } b(t) = \frac{k_2(t)k_3(t)}{k_1(t)}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 6.2.2 αν η κατανομή των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR (IFR) τότε η συνδιακύμανση μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής είναι θετική (αρνητική). Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η συνάρτηση $k_1(t)$ είναι μη αρνητική αυτό σημαίνει ότι

$$b(t) \leq (\geq) \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2}.$$

□

Πόρισμα 6.2.4 Αν η κατανομή F των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση IFR τότε η συνάρτηση $b(t)$ φράσσεται από κάτω από την σταθερά $\frac{2}{3}$.

Απόδειξη Από την μια πλευρά αν η συνδιακύμανση $Cov(\gamma_t, \delta_t)$ είναι αρνητική, τότε σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.10 ισχύει ότι

$$b(t) \geq \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2}.$$

Από την άλλη πλευρά ισχύει η ανισότητα $\mu\mu_3 \geq \mu_2^2$, η οποία προκύπτει στην ουσία από την χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz για κατάλληλα επιλεγμένες δυνάμεις. Από τις δύο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι όταν η συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι αρνητική, τότε $b(t) \geq \frac{2}{3}$. □

6.3 Σχέση συσχέτισης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής όταν $t \rightarrow \infty$

Στο Κεφάλαιο 4 μελετήσαμε την ασυμπτωτική συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_t και δ_t και μάλιστα συνδέσαμε το πρόσημό της με συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών. Ακόμη πιο ισχυρά αποτελέσματα από αυτά του Κεφαλαίου 4 μπορούν να διατυπωθούν σε όρους positive quadrant dependence. Πιο συγκεκριμένα καθώς

6.3. Σχέση συσχέτισης μεταξύ τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής όταν
 $t \rightarrow \infty$

$t \rightarrow \infty$ οι τυχαίες μεταβλητές γ_t και δ_t συγκλίνουν κατά κατανομή στις τυχαίες μεταβλητές γ_∞ και δ_∞ αντίστοιχα. Δηλαδή η σχέση (4.1) γράφεται ισοδύναμα

$$P(\gamma_\infty > y, \delta_\infty > x) = \bar{F}_e(x + y), \quad x, y \geq 0. \quad (6.10)$$

Θέτοντας $x = 0$ και $y = 0$ στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$P(\gamma_\infty > y) = \bar{F}_e(y), \quad y \geq 0. \quad (6.11)$$

και

$$P(\delta_\infty > x) = \bar{F}_e(x) \quad x \geq 0. \quad (6.12)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_∞ και δ_∞ θα δίνεται από τη σχέση

$$Cov(\gamma_\infty, \delta_\infty) = \int_0^\infty \int_0^\infty (\bar{F}_e(x + y) - \bar{F}_e(y)\bar{F}_e(x)) dydx = \frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2}{4\mu^2}. \quad (6.13)$$

Πόρισμα 6.3.1 Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση 2-NWU (2-NBU) τότε το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών $(\gamma_\infty, \delta_\infty)$ είναι PQD (NQD).

Απόδειξη Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1 στην ενότητα 1.5, μια κατανομή F θα ανήκει στην κλάση 2-NWU (2-NBU) αν ισχύει

$$\bar{F}_e(x + y) \geq (\leq) \bar{F}_e(y)\bar{F}_e(x).$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις σχέσεις (6.10), (6.11) και (6.12) προκύπτει ότι

$$P(\gamma_\infty > y, \delta_\infty > x) \geq (\leq) P(\gamma_\infty > y)P(\delta_\infty > x).$$

□

Χρησιμοποιώντας τον συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας (σχέση (1.11)) η σχέση (6.13) γράφεται

$$Cov(\gamma_\infty, \delta_\infty) = \left(\frac{\mu_2^2}{8\mu^2} \right) (CV_e^2 - 1). \quad (6.14)$$

Δηλαδή είμαστε σε θέση να συνδέσουμε την κλάση εξάρτησης PQD (NQD) του ζεύγους $(\gamma_\infty, \delta_\infty)$ με τον συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας F_e . Πιο συγκεκριμένα, από το Λήμμα 6.1.2 και τη σχέση (6.14) προκύπτει άμεσα το εξής.

6.4. Σχέση εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s

Πόρισμα 6.3.2 Αν το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών $(\gamma_\infty, \delta_\infty)$ είναι PQD (NQD) τότε $CV_e \geq 1$ ($CV_e \leq 1$).

Στη συνέχεια θα συνδέσουμε την συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_∞ και δ_∞ με τον συντελεστή μεταβλητότητας που συνδέεται με τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο ανανεώσεων και ο οποίος περιλαμβάνει τη χρονική στιγμή t . Πιο συγκεκριμένα καθώς $t \rightarrow \infty$ ο συνολικός χρόνος $X_{N(t)+1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή την οποία ονομάζουμε β_∞ . Έστω CV_β ο συντελεστής μεταβλητότητας της β_∞ . Εύκολα κάποιος μπορεί να δει ότι $CV_\beta = (\mu_3\mu - \mu_2^2)^{1/2} / \mu_2$, και με την βοήθεια του CV_β η σχέση (6.13) γράφεται στην μορφή

$$Cov(\gamma_\infty, \delta_\infty) = \frac{\mu_2^2}{12\mu^2} (2CV_\beta^2 - 1).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα

Πόρισμα 6.3.3 Αν η σχέση εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_∞ και δ_∞ είναι PQD (NQD) τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας CV_β θα είναι μεγαλύτερος (μικρότερος) από από την σταθερά $\sqrt{2}/2$.

6.4 Σχέση εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s

Σε αυτή την ενότητα θα γενικεύσουμε το πρόβλημα της συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής υπολογίζοντας τη συνδιακύμανση $Cov(\gamma_\infty^r, \delta_\infty^s)$ για οποιαδήποτε $r, s \geq 1$.

Με τη βοήθεια των σχέσεων σχέση (6.10), (6.11) και (6.12) η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s για $r, s \geq 1$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} Cov(\gamma_\infty^r, \delta_\infty^s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} (\bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(y)\bar{F}_e(x)) dy dx \\ &= \frac{r!s!\mu_{r+s+1}}{\mu(r+s+1)!} - \frac{\mu_{r+1}\mu_{s+1}}{\mu^2(r+1)(s+1)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Για την ειδική περίπτωση όπου $r = s = 1$ από την παραπάνω σχέση προκύπτει η (6.13).

Πόρισμα 6.4.1 Το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών $(\gamma_\infty^r, \delta_\infty^s)$ είναι PQD (NQD) αν ισχύει

$$\frac{\mu_{r+s+1}}{\mu_{r+1}\mu_{s+1}} \geq (\leq) \frac{1}{\mu} \frac{(r+s+1)!}{(r+1)!(s+1)!}.$$

6.4. Σχέση εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s

Απόδειξη Προκύπτει άμεσα από τη σχέση (6.15). □

Πριν παρουσιάσουμε το επόμενο αποτέλεσμα θα εισάγουμε την ποσότητα $l_{r,s}$ η οποία θα ισούται με

$$l_{r,s} = \left(\frac{\frac{\mu_{r+s+1}}{\mu(r+s+1)} - \frac{\mu_{r+1}\mu_{s+1}}{\mu^2(r+1)(s+1)}}{\frac{\mu_{r+1}\mu_{s+1}}{\mu^2(r+1)(s+1)}} \right)^{1/2}. \quad (6.16)$$

Παρατηρούμε ότι για $r = 1, s = 1$ η $l_{1,1}$ ισούται με τον συντελεστή μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας CV_e (σχέση (1.11)).

Η σχέση (6.16) μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε την συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s ως εξής :

Λήμμα 6.4.2 Η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s δίνεται από τη σχέση :

$$Cov(\gamma_\infty^r, \delta_\infty^s) = \frac{r!s!}{(r+s)!} \frac{\mu_{r+1}\mu_{s+1}}{\mu^2(r+1)(s+1)} \left(1 + l_{r,s}^2 - \frac{(r+s)!}{r!s!} \right). \quad (6.17)$$

Απόδειξη Λύνοντας τη σχέση (6.16) ως προς $\mu_{r+s+1}/(\mu(r+s+1))$ έχουμε :

$$\frac{\mu_{r+s+1}}{\mu(r+s+1)} = \frac{\mu_{r+1}\mu_{s+1}}{\mu^2(r+1)(s+1)} (1 + l_{r,s}^2).$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.15). □

Άμεσα από τη σχέση (6.17) προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 6.4.3 Το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών $(\gamma_\infty^r, \delta_\infty^s)$ ανήκει στην κλάση PQD (NQD) αν

$$l_{r,s}^2 \geq (\leq) \frac{(r+s)!}{r!s!} - 1.$$

Η σχέση (6.17) αποτελεί τη γενίκευση της σχέσης (6.14). Πιο συγκεκριμένα αν στη σχέση (6.17) αντικαταστήσουμε όπου $r = s = 1$ τότε προκύπτει η σχέση (6.14).

6.4. Σχέση εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών γ_∞^r και δ_∞^s

Κεφάλαιο 7

Ροπές ανωτέρας τάξεως

7.1 Εισαγωγή

Μέσα στα πλαίσια της μελέτης των τυχαίων μεταβλητών που συναντάμε στην ανανεωτική θεωρία είναι και η μελέτη της συμπεριφοράς των ροπών τους οι οποίες μας επιτρέπουν να εξετάσουμε ποσότητες με ιδιαίτερο ενδιαφέρον όπως η διακύμανση και η συνδιακύμανση τυχαίων μεταβλητών.

Οι ροπές της υπολειπόμενης ζωής αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης και πολλά γνωστά αποτελέσματα είναι στη διάθεσή μας ,ενδεικτικά αναφέρουμε τα άρθρα των Brown (1980), Coleman (1982) , Gakis και Sivazlian (1994) και το βιβλίο A First Course in Stochastic Models (Tijms (2003)). Ωστόσο φαίνεται να μην απασχόλησε ιδιαίτερα την επιστημονική κοινότητα η μελέτη των ροπών της τρέχουσας ζωής, και του γινομένου μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα πάμε ένα βήμα παραπέρα παρουσιάζοντας νέα αποτελέσματα που συνδέονται όχι μόνο με τις ροπές ανωτέρας τάξης της υπολειπόμενης ζωής αλλά επίσης με αυτές της τρέχουσας ζωής και του γινομένου τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής.

Μελετώντας την υπάρχουσα βιβλιογραφία ένα πολύ βασικό αποτέλεσμα στην ανανεωτική θεωρία είναι η σχέση (1.34) και αφορά τον υπολογισμό της μέσης τιμής της υπολειπόμενης ζωής $E(\gamma_t)$.

Ο Tijms (2003) κάνει ένα επιπλέον βήμα και παρουσιάζει τον ακόλουθο τύπο υπολογισμού της ροπής δευτέρας τάξης

$$E(\gamma_t^2) = \mu_2(1 + U(t)) - 2\mu \left(t + \int_0^t U(x)dx \right) + t^2, \quad t \geq 0. \quad (7.1)$$

Ένας γενικότερος τύπος υπολογισμού ροπών οποιασδήποτε τάξης r , με $r = 1, 2, \dots$

7.1. Εισαγωγή

δόθηκε από τον Coleman (1982) ο οποίος απέδειξε ότι

$$E(\gamma_t^r) = E(X-t)^r + \mu_r U(t) - r \int_0^t (E(X+z-t)^{r-1} - (z-t)^{r-1}) U(z) dz. \quad (7.2)$$

Το ίδιο άρθρο αναφέρεται και στην ασυμπτωτική ροπή ανωτέρας τάξεως της υπολειπόμενης ζωής και πιο συγκεκριμένα αναφέρει πως, αν η ροπή $r+1$ τάξης είναι πεπερασμένη, τότε

$$E(\gamma_t^r) = \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)} + o(1), \quad (7.3)$$

όπου $o(1)$ είναι μια συνάρτηση η οποία τείνει στο μηδέν όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Για την συνάρτηση αυτή δεν έχουμε καμία επιπλέον πληροφορία.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την συνάρτηση αυτή την οποία θα συμβολίσουμε με $S_r(t)$ και η οποία εκφράζεται συναρτήσει της συνάρτησης $l(t)$ όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (1.8) και της δεξιάς ουράς \bar{F} της κατανομής των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων. Πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση $S_r(t)$ ορίζεται ως εξής

$$S_r(t) = E(\gamma_t^r) - \frac{\mu_{r+1}}{(r+1)\mu}. \quad (7.4)$$

Βασιζόμενοι στις δύο παρακάτω σχέσεις εκτός από την μελέτη ροπών θα μελετήσουμε επίσης την μονοτονία της διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής και το πρόσημο της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων $N(t)$ κάτω από συγκεκριμένες κλάσεις. Συγκεκριμένα ο Coleman (1982) απέδειξε ότι η διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$Var(\gamma_t) = \mu_2(1+U(t)) - \mu^2(1+U(t))^2 + 2\mu \left(tU(t) - \int_0^t U(x) dx \right). \quad (7.5)$$

Στο ίδιο άρθρο ασχολήθηκε και με την συνδιακύμανση μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής τη χρονική στιγμή t και του αριθμού των ανανεώσεων στο διάστημα $[0, t]$ την οποία συμβολίζουμε με $Cov(\gamma_t, N(t))$ και ισούται με

$$Cov(\gamma_t, N(t)) = tU(t) - \int_0^t U(x) dx - \mu U^2(t) + \mu \int_0^t U(t-x)u(x) dx. \quad (7.6)$$

Καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο η ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής γ_t και του συνολικού αριθμού ανανεώσεων $N(t)$ ισούται με

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, N(t)) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^3} - \frac{\mu_3}{6\mu^2}. \quad (7.7)$$

7.2 Η συνάρτηση κατανομής G_{w-1}

Δύο κατανομές που συνδέονται άμεσα μεταξύ τους είναι η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων F και η κατανομή ισορροπίας F_e . Πιο συγκεκριμένα $\bar{F}(x) = \mu f_e(x)$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια μεγαλύτερη οικογένεια κατανομών, θα την συμβολίσουμε με G_{w-1} για $w = 1, 2, 3, \dots$, ειδικές περιπτώσεις της οποίας είναι η κατανομές F και F_e .

Αυτή η οικογένεια κατανομών θα μας βοηθήσει:

- i. Να παρουσιάσουμε τύπους υπολογισμού ροπών ανωτέρας τάξης για την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής, της υπολειπόμενης ζωής και του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.
- ii. Να κατασκευάσουμε φράγματα για ροπές οποιασδήποτε τάξης για τις βασικές μεταβλητές που περιγράφουν χρόνους στην ανανεωτική θεωρία.

Για $w = 1, 2, 3, \dots$ ορίζουμε με \bar{G}_{w-1} τη δεξιά ουρά της κατανομής G_{w-1} ως εξής

$$\bar{G}_{w-1}(t) = \int_t^\infty g_{w-1}(y) dy, \quad (7.8)$$

όπου $g_{w-1}(y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής G_{w-1} η οποία ορίζεται ως εξής

$$g_{w-1}(y) = \frac{w}{\mu_w} \int_y^\infty (z-y)^{w-1} f(z) dz. \quad (7.9)$$

Μια παρόμοια προσέγγιση έγινε από τον Willmot (2002) ο οποίος χρησιμοποίησε την σύνθετη γεωμετρική κατανομή για την ανάλυσή του.

Μια πρώτη παρατήρηση που προκύπτει άμεσα από τη σχέση (7.9) είναι πως για $w = 1$ ισχύει ότι

$$\bar{F}(y) = \mu g_0(y), \quad (7.10)$$

και κατά συνέπεια από τη σχέση (7.8) προκύπτει πως

$$\bar{G}_0(t) = \bar{F}_e(t).$$

Κάτω από την υπόθεση πως η πρώτη και δεύτερη ροπή, μ και μ_2 αντίστοιχα, της κατανομής F είναι πεπερασμένες μπορούμε χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov να κατασκευάσουμε ένα πάνω φράγμα για την δεξιά ουρά $\bar{G}_0(t)$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\bar{F}(t) \leq t^{-2} \mu_2 \quad (7.11)$$

7.2. Η συνάρτηση κατανομής G_{w-1}

Εισάγοντας την παραπάνω ανισότητα στην σχέση (7.10) προκύπτει πως

$$g_0(t) \leq \frac{\mu_2}{\mu} t^{-2}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση ως προς t στο διάστημα $[x, \infty)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ένα πάνω φράγμα για την κατανομή ισορροπίας (θυμίζουμε ότι $\overline{G}_0 = \overline{F}_e$) είναι το

$$\int_x^\infty g_0(t) dt \leq \frac{\mu_2}{\mu} \int_x^\infty t^{-2} dt = \frac{\mu_2}{\mu} \frac{1}{x}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει έναν τύπο υπολογισμού των ροπών οποιασδήποτε τάξης της κατανομής G_{w-1} .

Πρόταση 7.2.1 Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $G_{w-1} = 1 - \overline{G}_{w-1}$ για κάποιο $w \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $h = 1, 2, \dots$ η ροπή h τάξης ως προς την αρχή δίνεται από τη σχέση

$$E(X^h) = \frac{h!w!}{(h+w)! \mu_w} \mu_{h+w}. \quad (7.12)$$

Απόδειξη Θα υπολογίσουμε την ροπή h τάξης χρησιμοποιώντας την δεξιά ουρά \overline{G}_{w-1} της κατανομής G_{w-1} ως εξής (για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο Λήμμα 4.1.1)

$$E(X^h) = h \int_0^\infty x^{h-1} \overline{G}_{w-1}(x) dx = h \int_0^\infty \int_x^\infty x^{h-1} g_{w-1}(y) dy dx.$$

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής

$$E(X^h) = h \int_0^\infty g_{w-1}(y) \int_0^y x^{h-1} dx dy = \int_0^\infty y^h g_{w-1}(y) dy.$$

Εισάγοντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση (7.9) έχουμε

$$E(X^h) = \frac{w}{\mu_w} \int_0^\infty \int_y^\infty y^h (u-y)^{w-1} f(u) du dy$$

και αλλάζοντας εκ νέου τα όρια ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(X^h) &= \frac{w}{\mu_w} \int_0^\infty \int_0^u y^h (u-y)^{w-1} f(u) dy du \\ &= \frac{1}{\mu_w} \int_0^\infty f(u) \left(\int_0^u y^h w (u-y)^{w-1} dy \right) du. \end{aligned} \quad (7.13)$$

7.2. Η συνάρτηση κατανομής G_{w-1}

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης ισούται με

$$\int_0^u y^h w (u-y)^{w-1} dy = \frac{h(h-1)(h-2)\dots 1 \int_0^u y^{h+w-1} dy}{(w+1)(w+2)\dots(w+h-1)} = \frac{h!w!}{(h+w)!} u^{h+w}. \quad (7.14)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας τη σχέση (7.14) στην σχέση (7.13). \square

Μια πρώτη παρατήρηση είναι πως για $w = h = 1$ η μέση τιμή είναι $E(X) = \frac{\mu_2}{2\mu}$. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο αν σκεφτούμε πως για $h = 1$, $G_0(t) = F_e(t)$. Το επόμενο αποτέλεσμα συνδέεται άμεσα με την ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής αλλά και με την ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων $N(t)$ για την ειδική περίπτωση όπου $w = 1$.

Πρόταση 7.2.2 Αν η κατανομή G_{w-1} ανήκει στην κλάση $HNWUE(HNBUE)$ τότε

$$\frac{w}{(w+1)(w+2)} \frac{\mu_{w+2}}{\mu_w} \geq (\leq) \frac{\mu_{w+1}^2}{(w+1)^2 \mu_w^2}. \quad (7.15)$$

Απόδειξη Αν η κατανομή G_{w-1} ανήκει στην κλάση $HNWUE(HNBUE)$ τότε εξ ορισμού ισχύει πως

$$\int_x^\infty \bar{G}_{w-1}(t) dt \geq (\leq) \frac{\mu_{w+1}}{\mu_w(w+1)} e^{-(w+1)\frac{\mu_w}{\mu_{w+1}}x}.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x στο διάστημα $(0, \infty)$ προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \bar{G}_{w-1}(t) dt \geq (\leq) \frac{\mu_{w+1}^2}{(w+1)^2 \mu_w^2}. \quad (7.16)$$

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα του αριστερού τμήματος της παραπάνω σχέσης γράφεται ως εξής

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \bar{G}_{w-1}(t) dt dx = \int_0^\infty t \bar{G}_{w-1}(t) dt,$$

και εισάγοντας την σχέση (7.8) προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty t \bar{G}_{w-1}(t) dt = \int_0^\infty t \int_t^\infty g_{w-1}(y) dy dt.$$

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης στο δεξιό μέρος της παραπάνω σχέσης έχουμε

$$\int_0^\infty t \bar{G}_{w-1}(t) dt = \int_0^\infty \frac{y^2}{2} g_{w-1}(y) dy.$$

7.3. Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

Εισάγοντας την σχέση (7.9) στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους της παραπάνω σχέσης έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{y^2}{2} g_{w-1}(y) dy &= \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{y^2}{2} \frac{w}{\mu_w} (u-y)^{w-1} f(u) du dy \\
 &= \frac{w}{2\mu_w} \int_0^\infty \int_0^y y^2 (u-y)^{w-1} f(u) dy du \\
 &= \frac{w}{2\mu_w} \int_0^\infty f(u) \left(\int_0^y y^2 (u-y)^{w-1} dy \right) du \\
 &= \frac{w}{2\mu_w} \frac{2}{(w+1)(w+2)} \int_0^\infty u^{w+2} f(u) du \\
 &= \frac{w}{(w+1)(w+2)} \frac{\mu_{w+2}}{\mu_w}.
 \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (7.16).
□

Παρατηρούμε πως από την σχέση (7.15) για την ειδική περίπτωση όπου $w = 1$ ισχύει ότι

$$\frac{\mu_3}{6\mu} \geq (\leq) \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}.$$

Στην ανανεωτική θεωρία η παραπάνω ανισότητα προσδιορίζει το πρόσημο της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης μεταξύ της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Επίσης αποτελεί μια ακόμη ένδειξη πως υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ανανεωτικής θεωρίας και της θεωρίας της χρεοκοπίας μιας και η ίδια ακριβώς ανισότητα προσδιορίζει το πρόσημο της συνδιακύμανσης μεταξύ του πλεονάσματος πριν και μετά την στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τους αναγνώστες στους Psarrakos και Politis (2012). Θα δείξουμε στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού ότι η παραπάνω ανισότητα προσδιορίζει το πρόσημο της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων $N(t)$.

7.3 Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

Όπως ήδη αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, τα μέχρι στιγμής βασικά αποτελέσματα που αφορούν τις ροπές στην ανανεωτική θεωρία αναφέρονται στην υπολειπόμενη ζωή γ_t , αυτό δεν είναι πιστεύουμε τυχαίο μιας και η τυχαία μεταβλητή γ_t

7.3. Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

είναι συνεχής και παίρνει οποιαδήποτε θετική τιμή. Στην περίπτωση του υπολογισμού ροπών της υπολειπόμενης ζωής μπορούμε άμεσα να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.1.1. Αν και, όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, με το πρόβλημα υπολογισμού της υπολειπόμενης ζωής έχουν ασχοληθεί αρκετοί ερευνητές και πολλά αποτελέσματα είναι γνωστά εδώ και δεκαετίες, εμείς θα παραθέσουμε το επόμενο πόρισμα το οποίο μας δίνει περισσότερες πληροφορίες για την ποσότητα $o(1)$ που συναντάμε στη σχέση (7.3) .

Πρόταση 7.3.1 Η ροπή r τάξεως (για $r = 1, 2, \dots$) της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από την σχέση

$$E(\gamma_t^r) = \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)} - r \int_0^\infty y^{r-1} \phi(0, y; t) dy, \quad (7.17)$$

όπου η συνάρτηση $\phi(0, y; t)$ ορίζεται στη σχέση (1.22).

Απόδειξη Από τη σχέση (1.24) για $x = 0$ προκύπτει ότι

$$P(\gamma_t > y) = \bar{F}_e(y) - \int_0^y \bar{F}(z) l(t + y - z) dz.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με ry^{r-1} και ολοκληρώνοντας ως προς y στο διάστημα $(0, \infty)$ έχουμε

$$r \int_0^\infty y^{r-1} P(\gamma_t > y) dy = r \int_0^\infty y^{r-1} \bar{F}_e(y) dy - r \int_0^\infty \int_0^y y^{r-1} \bar{F}(z) l(t + y - z) dz dy.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$r \int_0^\infty y^{r-1} \bar{F}_e(y) dy = \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)},$$

ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα με την βοήθεια της σχέσης (1.21) για $x = 0$ γράφεται ως εξής

$$\int_0^\infty \int_0^y y^{r-1} \bar{F}(z) l(t + y - z) dz dy = r \int_0^\infty y^{r-1} \phi(0, y; t) dy.$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως η ροπή r τάξεως της υπολειπόμενης ζωής δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t^r) = \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)} - r \int_0^\infty y^{r-1} \phi(0, y; t) dy,$$

όπως αναφέρεται στην εκφώνηση. □

7.3. Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

Λήμμα 7.3.2 Για $r = 1, 2, \dots$, ισχύει ότι

$$S_r(t) = -r \int_0^\infty y^{r-1} \phi(0, y; t) dy. \quad (7.18)$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει από τη σύγκριση των σχέσεων (7.3) και (7.17). \square

Από τη σχέση (7.18) φαίνεται πως το πρόσημο της συνάρτησης $S_r(t)$ συνδέεται με την συνάρτηση $l(t)$ μέσω της σχέσης (1.21) και κατά συνέπεια συνδέεται με το αν η συνάρτηση $L(t)$ είναι φθίνουσα ή αύξουσα.

Πόρισμα 7.3.3 Αν η $L(t)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) τότε

$$S_r(t) \geq (\leq) 0.$$

Απόδειξη Αν η συνάρτηση $L(t)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) τότε $l(t) \leq (\geq) 0$ και μέσω του ορισμού της συνάρτησης ϕ στη σχέση (1.21) θα ισχύει

$$\phi(x, y; t) \leq (\geq) 0, \quad x, y, t \geq 0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται συνδυάζοντας τη παραπάνω σχέση με τη σχέση (7.18). \square

Το επόμενο αποτέλεσμα συνδέει το πρόσημο της συνάρτησης $S_r(t)$ με την κλάση $IMRL$. Πιο συγκεκριμένα

Πόρισμα 7.3.4 Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ ανανεώσεων ενός συστήματος ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε $S_r(t) \leq 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη Σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.1 όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η συνάρτηση $L(t)$ είναι αύξουσα, και σύμφωνα με το Πόρισμα 7.3.3 η συνάρτηση $S_r(t)$ θα είναι αρνητική. \square

Πρόταση 7.3.5 Αν η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ είναι κοίλη (κυρτή) τότε η ροπή $E(\gamma_t^r)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου t .

Απόδειξη Παραγωγίζοντας τη σχέση (7.17) ως προς t έχουμε,

$$\frac{d}{dt} E(\gamma_t^r) = -r \int_0^\infty y^{r-1} \frac{d}{dt} \phi(y; t) dy.$$

7.3. Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση (1.21) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\gamma_t^r) &= -r \int_0^\infty y^{r-1} \frac{d}{dt} \phi(y; t) dy = -r \int_0^\infty \int_0^y y^{r-1} \bar{F}(z) \frac{d}{dt} l(t+y-z) dy dz \\ &= -r \int_0^\infty \int_0^y y^{r-1} \bar{F}(z) \frac{d^2}{dt^2} L(t+y-z) dz. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν η $U(t)$ είναι κοίλη (κυρτή) το ίδιο θα ισχύει και για την $L(t)$ και το αποτέλεσμα έπεται. \square

Πρόταση 7.3.6 *Αν η συνάρτηση κατανομής F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR, τότε η ροπή $E(\gamma_t^r)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t .*

Απόδειξη Ο Brown (1980) απέδειξε ότι αν η κατανομή F είναι DFR τότε η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ είναι κοίλη (concave). Μέσω της σχέσης (1.7) γίνεται αντιληπτό ότι κοίλη ανανεωτική συνάρτηση συνεπάγεται κοίλη συνάρτηση $L(t)$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.5. \square

Με τη βοήθεια του Λήμματος 4.1.1 μας δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τις δεξιές ουρές της τρέχουσας ζωής, της υπολειπόμενης ζωής και του γινομένου τους για τον υπολογισμό ροπών ανωτέρας τάξης.

Πρόταση 7.3.7 *Η ροπή s -τάξης (για $s = 1, 2, \dots$) της τρέχουσας ζωής δίνεται από τη σχέση*

$$\begin{aligned} E(\delta_t^s) &= \frac{\mu_{s+1}}{(s+1)\mu} - \int_t^\infty \frac{x^{s+1}}{(s+1)\mu} f(x) dx + t^s \bar{F}(t) + \frac{t^{s+1} \bar{F}(t)}{(s+1)\mu} \\ &\quad + \int_0^t \int_x^t s x^{s-1} \bar{F}(z) l(t-z) dz dx. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη υπολογίζοντας την δεξιά ουρά της τρέχουσας ζωής. Θέτοντας όπου $y = 0$ στη σχέση (1.25) έχουμε

$$P(\delta_t > x) = \bar{F}_e(x) - \bar{F}_e(t) + \bar{F}(t) + \int_x^t \bar{F}(z) l(t-z) dz. \quad (7.20)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.1 η ροπή ανωτέρας τάξης s για $s = 1, 2, \dots$ δίνεται από τη σχέση

$$E(\delta_t^s) = \int_0^t s x^{s-1} P(\delta_t > x) dx.$$

7.3. Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

Με την βοήθεια της σχέσης (7.20) η ροπή s τάξεως της τρέχουσας ζωής ισούται με

$$\begin{aligned} E(\delta_t^s) &= \int_0^t s x^{s-1} \bar{F}_e(x) dx - \int_0^t s x^{s-1} (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) dx \\ &\quad + \int_0^t \int_x^t s x^{s-1} \bar{F}(z) l(t-z) dz, \end{aligned} \quad (7.21)$$

και υπολογίζοντας ένα προς ένα τα ολοκληρώματα της παραπάνω σχέσης έχουμε, αρχικά για το πρώτο ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned} \int_0^t s x^{s-1} \bar{F}_e(x) dx &= t^s \bar{F}_e(t) + t^s \bar{F}(t) + \frac{t^{s+1} \bar{F}(t)}{(s+1)\mu} + \int_0^t \frac{x^{s+1}}{(s+1)\mu} f(x) dx \\ &= t^s \bar{F}_e(t) + t^s \bar{F}(t) + \frac{t^{s+1} \bar{F}(t)}{(s+1)\mu} + \frac{\mu_{s+1}}{(s+1)\mu} - \int_t^\infty \frac{x^{s+1}}{(s+1)\mu} f(x) dx. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (7.21) βλέπουμε ότι

$$\int_0^t s x^{s-1} (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) dx = t^s (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) \quad (7.23)$$

Ο ισχυρισμός μας αποδεικνύεται αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.22) και (7.23) στην (7.21). \square

Πρόταση 7.3.8 Σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία για κάθε $r \geq 1, s \geq 1$ η ροπή $E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s)$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s) &= \frac{r!s!}{(r+s)!} \frac{\mu_{r+s+1}}{\mu(r+s+1)} - \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)\mu} \int_t^\infty s x^{s-1} g_{r+1}(x) dx \\ &\quad - \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \phi(x, y; t) dy dx. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Απόδειξη Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1.24) με την ποσότητα $r y^{r-1} s x^{s-1}$ και ολοκληρώνοντας δύο φορές ως προς y και ως προς x αντίστοιχα έχουμε

$$E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s) = \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx - \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \phi(x, y; t) dy dx. \quad (7.25)$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης γράφεται ως εξής

$$\int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx = \int_0^\infty \int_x^\infty r (y-x)^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(y) dy dx$$

7.3. Ροπές ανωτέρας τάξεως στην Ανανεωτική Θεωρία

$$- \int_t^\infty \int_x^\infty r(y-x)^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(y) dy dx. \quad (7.26)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα απλοποιείται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_x^\infty r(y-x)^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(y) dy dx &= \int_0^\infty \bar{F}_e(y) \int_0^y r(y-x)^{r-1} s x^{s-1} dx dy \\ &= \frac{r!}{\prod_{j=1}^{r-1} (s+j)} \int_0^\infty y^{r+s-1} \bar{F}_e(y) dy \\ &= \frac{r!}{\prod_{j=1}^r (s+j)} \frac{\mu_{s+r+1}}{\mu(s+r+1)} \\ &= \frac{r!s!}{(s+r)!} \frac{\mu_{s+r+1}}{\mu(s+r+1)}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (7.25) γράφεται

$$\int_t^\infty \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx = \int_t^\infty s x^{s-1} \int_x^\infty r(z-x)^{r-1} \bar{F}_e(z) dz$$

και με την βοήθεια της σχέσης (7.9) το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_t^\infty \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx = \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)\mu} \int_t^\infty s x^{s-1} g_{r+1}(x) dx. \quad (7.28)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.27) και (7.28) στην σχέση (7.25). \square

Μια άλλη τυχαία μεταβλητή με ιδιαίτερη σημασία και άμεσα συνδεδεμένη με την τρέχουσα και υπολειπόμενη ζωή είναι ο χρόνος μεταξύ δύο ανανεώσεων που περιλαμβάνει την χρονική στιγμή t , ο οποίος είναι $X_{N(t)+1} = \gamma_t + \delta_t$. Ο υπολογισμός της ροπής πρώτης τάξης $E(X_{N(t)+1})$ προκύπτει εύκολα ως το άθροισμα των ροπών πρώτης τάξης της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

Ωστόσο στην βιβλιογραφία δεν αναφέρεται ένας τύπος υπολογισμού ροπών ανωτέρας τάξεως. Ίσως λόγω της πολυπλοκότητας της συνάρτησης πυκνότητας που έχει η $X_{N(t)+1}$ (βλ. σχέση (1.28)).

Το πρόβλημα της πολυπλοκότητας της σχέσης (1.28) για τον υπολογισμό ροπών ανωτέρας τάξης για την τυχαία μεταβλητή $X_{N(t)+1}$ μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας τις ροπές του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής και το διώνυμο του Νεύτωνα. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής αποτέλεσμα

Πόρισμα 7.3.9 Σε μια συνήθη στοχαστική ανανεωτική διαδικασία η ροπή n -τάξης (για $n \geq 1$) για την τυχαία μεταβλητή $X_{N(t)+1}$ δίνεται από τη σχέση

$$E(X_{N(t)+1}^n) = \frac{\mu_{n+1}}{\mu} - \frac{n!}{\mu} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{n-k+2}}{k!(n-k+2)!} \int_t^\infty k x^{k-1} g_{n-k+1}(x) dx$$

7.4. Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης

$$-\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \int_0^t \int_0^\infty (n-k)y^{n-k-1}kx^{k-1}\phi(x,y;t)dz. \quad (7.29)$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Νεύτωνα μπορούμε να υπολογίσουμε την n -στη ροπή $E(X_{N(t)+1}^n)$ ως εξής

$$E(X_{N(t)+1}^n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} E(\gamma_t^{n-k} \cdot \delta_t^k). \quad (7.30)$$

Με την βοήθεια της σχέσης (7.24) μπορούμε τώρα να γράψουμε την μέση τιμή $E(\gamma_t^{n-k} \delta_t^k)$ ως εξής

$$E(\gamma_t^{n-k} \cdot \delta_t^k) = \frac{(n-k)!k!}{n!} \frac{\mu_{n+1}}{\mu(n+1)} - \frac{n!}{\mu} \frac{\mu_{n-k+2}}{k!(n-k+2)!} \int_t^\infty kx^{k-1}g_{n-k+1}(x)dx \\ - \frac{n!}{(n-k)!k!} \int_0^t \int_0^\infty (n-k)y^{n-k-1}kx^{k-1}\phi(x,y;t)dz. \quad (7.31)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την εισαγωγή της σχέσης (7.31) στη σχέση (7.30). □

7.4 Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης

Μέχρι στιγμής στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε φράγματα για την συνάρτηση $L(t)$, τα οποία μέσω της σχέσης (1.34) μπορούν να μετατραπούν σε φράγματα για την μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε φράγματα για την μέση τιμή της τρέχουσας ζωής και για τη μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής. Στην ενότητα αυτή θα κατασκευάσουμε φράγματα για τις ροπές $E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s)$, $E(\gamma_t^r)$ και $E(\delta_t^s)$ κάτω από την υπόθεση ότι η κατανομή F του χρόνου που απαιτείται μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR .

Για την κατασκευή φραγμάτων θα χρησιμοποιήσουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $q_l(t)$ και $q_u(t)$ τις οποίες ορίσαμε στο Κεφάλαιο 3 (σχέσεις (3.25) και (3.26)). Οι συναρτήσεις $q_l(t)$ και $q_u(t)$ διαδραματίζουν βασικό ρόλο στην κατασκευή άνω και κάτω φράγματος για την από κοινού κατανομή της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής και κατά συνέπεια στα φράγματα για τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής της τρέχουσας ζωής και της υπολειπόμενης.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.25) και (3.26) κατασκευάζουμε δύο ακόμη βοηθητικές συναρτήσεις που στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή

7.4. Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης

φραγμάτων για τις ροπές των χρόνων της ανανεωτικής θεωρίας. Ορίζουμε με $\phi_l(x, y)$ τη συνάρτηση

$$\phi_l(x, y; t) = \int_{x+y}^{t+y} \bar{F}(z) q_l(t+y-z) dz \quad (7.32)$$

και αντίστοιχα με $\phi_u(x, y)$ τη συνάρτηση

$$\phi_u(x, y; t) = \int_{x+y}^{t+y} \bar{F}(z) q_u(t+y-z) dz. \quad (7.33)$$

Πόρισμα 7.4.1 Αν η συνάρτηση κατανομής F των ενδιάμεσων χρόνων είναι DFR τότε ένα διπλό φράγμα για την από κοινού δεξιά ουρά της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής είναι το

$$\begin{aligned} \bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(t+y) + \bar{F}(t+y) + \phi_l(x, y; t) &\leq P(\gamma_t > y, \delta_t > x) \\ &\leq \bar{F}_e(x+y) - \bar{F}_e(t+y) + \bar{F}(t+y) + \phi_u(x, y; t). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Απόδειξη Το πάνω φράγμα κατασκευάζεται συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.32) και (1.25). Το κάτω άκρο προκύπτει από τις σχέσεις (1.25) και (7.33). \square

Πρόταση 7.4.2 Αν η κατανομή F των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα κάτω φράγμα για την ροπή $E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s)$ είναι το

$$\begin{aligned} E(\gamma_t^s \delta_t^r) &\geq \frac{r!s!}{(r+s)! \mu(r+s+1)} - \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)\mu} \int_t^\infty s x^{s-1} g_{r+1}(x) dx \\ &\quad - \frac{t^s}{\mu(r+1)} \frac{\mu_{r+2}}{r+2} g_{r+1}(t) + \frac{\mu_{r+1}}{r+1} t^s g_r(t) + \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \phi_l(x, y; t) dx \end{aligned} \quad (7.35)$$

και ένα άνω φράγμα είναι το

$$\begin{aligned} E(\gamma_t^r \delta_t^s) &\leq \frac{r!s!}{(r+s)! \mu(r+s+1)} - \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)\mu} \int_t^\infty s x^{s-1} g_{r+1}(x) dx \\ &\quad - \frac{t^s}{\mu(r+1)} \frac{\mu_{r+2}}{r+2} g_{r+1}(t) + \frac{\mu_{r+1}}{r+1} t^s g_r(t) + \int_0^t \int_0^\infty r y^{r-1} s x^{s-1} \phi_u(x, y; t) dx. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Απόδειξη Και τα δύο φράγματα προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της διπλής ανισότητας όπως αυτή εκφράζεται από τη σχέση (7.34) με $r y^{r-1} s x^{s-1}$ και

7.4. Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης

ολοκληρώνοντας ως προς x στο διάστημα $(0, t)$ και ως προς y στο διάστημα $(0, \infty)$. Πιο συγκεκριμένα το κάτω φράγμα προκύπτει ως εξής:

$$E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s) \geq \int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} (\bar{F}_e(x+y) dy dx + \bar{F}(t+y) - \bar{F}_e(t+y) + \phi_u(x, y; t)) dy dx. \quad (7.37)$$

Αντίστοιχα το πάνω φράγμα προκύπτει από την ανισότητα

$$E(\gamma_t^r \cdot \delta_t^s) \leq \int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} (\bar{F}_e(x+y) dy dx + \bar{F}(t+y) - \bar{F}_e(t+y) + \phi_l(x, y; t)) dy dx. \quad (7.38)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} (\bar{F}_e(x+y) dy dx + \bar{F}(t+y) - \bar{F}_e(t+y)) dy dx$$

περιλαμβάνεται και στο πάνω και στο κάτω φράγμα. Για τον υπολογισμό του θα το χωρίσουμε σε δύο ολοκληρώματα ως εξής

$$\int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} \bar{F}_e(x+y) dy dx - \int_0^t \int_0^\infty \bar{F}_e(t+y) - \bar{F}(t+y) dy dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ήδη υπολογισμένο συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.27) και (7.28). Το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} (\bar{F}_e(t+y) - \bar{F}(t+y)) dy dx &= \int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} \bar{F}_e(t+y) dy dx \\ &\quad - \int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} \bar{F}(t+y) dy dx. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της παραπάνω σχέσης μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} \bar{F}_e(t+y) dy dx &= \int_0^\infty \int_0^t ry^{r-1} sx^{s-1} \bar{F}_e(t+y) dx dy \\ &= t^s \int_t^\infty ry^{r-1} + \bar{F}_e(t+y) dy \\ &= t^s \int_t^\infty r(z-t)^{r-1} \bar{F}_e(z) dz \\ &= t^s \int_t^\infty (z-t)^r \frac{\bar{F}_e(z)}{\mu} dz = \\ &= \frac{t^s}{\mu(r+1)} \int_t^\infty (z-t)^{r+1} f(z) dz \end{aligned}$$

7.4. Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.9) έχουμε

$$\int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} \overline{F}_e(t+y) dy dx = \frac{t^s}{\mu(r+1)} \frac{\mu_{r+2}}{r+2} g_{r+1}(t). \quad (7.40)$$

Κάτω ακριβώς από την ίδια λογική το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (7.39) ισούται με

$$\int_0^t \int_0^\infty ry^{r-1} sx^{s-1} \overline{F}(t+y) dy dx = \frac{\mu_{r+1}}{r+1} t^s g_r(t). \quad (7.41)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με αντικατάσταση των σχέσεων (7.40) και (7.41) στις σχέσεις (7.37) και (7.38). \square

Παίρνοντας το όριο για $t \rightarrow \infty$ τόσο στο πάνω όσο και στο κάτω φράγμα είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πως και τα δύο φράγματα τείνουν στη σταθερή ποσότητα

$$\frac{r!s!}{(r+s)!} \frac{\mu_{r+s+1}}{\mu(r+s+1)}$$

που ισούται με $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_t^r \delta_t^s)$ (παραπέμπουμε στην απόδειξη του Πορίσματος 4.3.1).

Επομένως τα φράγματα έχουν τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Για την κατασκευή φραγμάτων για τις ροπές της υπολειπόμενης ζωής θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (7.17). Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής.

Πόρισμα 7.4.3 *Αν η συνάρτηση κατανομής F των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ανήκει στην κλάση DFR, τότε ένα κάτω φράγμα για την ροπή r τάξης της υπολειπόμενης ζωής $E(\gamma_t^r)$ είναι το*

$$E(\gamma_t^r) \geq \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)} - \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)\mu} g_{r+1}(t) + \frac{\mu_{r+1}}{r+1} g_r(t) + r \int_0^\infty y^{r-1} \phi_l(0, y; t) dy. \quad (7.42)$$

Αντίστοιχα ένα πάνω φράγμα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$E(\gamma_t^r) \leq \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)} - \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)\mu} g_{r+1}(t) + \frac{\mu_{r+1}}{r+1} g_r(t) + r \int_0^\infty y^{r-1} \phi(0, y; t) dy. \quad (7.43)$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει με την ίδια απολύτως λογική που εργαστήκαμε για τα φράγματα της ροπής της τρέχουσας ζωής μόνο που σε αυτή την περίπτωση θα θέσουμε στη σχέση (1.18) όπου $x = 0$, να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μέλη της σχέσης αυτής με ry^{r-1} και να ολοκληρώσουμε ως προς y στο διάστημα $[0, \infty)$. \square

7.4. Φράγματα για τις ροπές ανωτέρας τάξης

Πόρισμα 7.4.4 Όταν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα κάτω φράγμα για την s -στη ροπή της τρέχουσας ζωής είναι το

$$E(\delta_t^s) \geq \frac{\mu_{s+1}}{(s+1)\mu} - \int_t^\infty \frac{x^{s+1}}{(s+1)\mu} f(x) dx + t^s \bar{F}(t) + \frac{t^{s+1} \bar{F}(t)}{(s+1)\mu} + \int_0^t s x^{s-1} \phi_l(x, 0; t) dx. \quad (7.44)$$

Αντίστοιχα ένα πάνω φράγμα δίνεται από την σχέση

$$E(\delta_t^s) \leq \frac{\mu_{s+1}}{(s+1)\mu} - \int_t^\infty \frac{x^{s+1}}{(s+1)\mu} f(x) dx + t^s \bar{F}(t) + \frac{t^{s+1} \bar{F}(t)}{(s+1)\mu} + \int_0^t s x^{s-1} \phi_u(x, 0; t) dx. \quad (7.45)$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει με αντικατάσταση των σχέσεων (7.32) και (7.33) στη σχέση (7.19). \square

Πόρισμα 7.4.5 Αν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR τότε ένα πάνω φράγμα για την μέση τιμή $E(X_{N(t)+1}^n)$ είναι το

$$E(X_{N(t)+1}^n) \leq \frac{\mu_{n+1}}{\mu} - \frac{n!}{\mu} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{n-k+2}}{k!(n-k+2)!} \int_t^\infty k x^{k-1} g_{n-k+1}(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{n! \mu_{n-k+2}}{k!(n-k+2)!} \frac{t^k}{\mu} g_{n-k+1}(t) + \sum_{k=0}^n \frac{n! \mu_{n-k+1}}{k!(n-k+1)!} t^k g_{n-k}(t) + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \int_0^t \int_0^\infty (n-k) y^{n-k-1} k x^{k-1} \phi_u(x, y; t) dz, \quad (7.46)$$

και ένα κάτω φράγμα είναι το

$$E(X_{N(t)+1}^n) \geq \frac{\mu_{n+1}}{\mu} - \frac{n!}{\mu} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{n-k+2}}{k!(n-k+2)!} \int_t^\infty k x^{k-1} g_{n-k+1}(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{n! \mu_{n-k+2}}{k!(n-k+2)!} \frac{t^k}{\mu} g_{n-k+1}(t) + \sum_{k=0}^n \frac{n! \mu_{n-k+1}}{k!(n-k+1)!} t^k g_{n-k}(t) + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \int_0^t \int_0^\infty (n-k) y^{n-k-1} k x^{k-1} \phi_l(x, y; t) dz. \quad (7.47)$$

7.5. Απόδοση φραγμάτων

Απόδειξη Το κάτω φράγμα προκύπτει με αντικατάσταση της σχέσης (7.35) στην σχέση (7.30), και το πάνω φράγμα με αντικατάσταση της σχέσης (7.36) στη σχέση (7.30). \square

7.5 Απόδοση φραγμάτων

Η βασική ιδέα που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη ενότητα για την κατασκευή φραγμάτων ήταν να αντικαταστήσουμε την συνάρτηση $l(t)$ με το κάτω και άνω φράγμα που έχουμε παρουσιάσει για αυτή (σχέσεις (3.25) και (3.26) αντίστοιχα).

Η απάντηση στην ερώτηση πόσο ικανοποιητικά είναι τα φράγματα της Ενότητας 7.4 συνδέεται άμεσα με το πόσο μεγάλη ή μικρή είναι η απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων $q_u(t)$ και $q_l(t)$ από την συνάρτηση $l(t)$. Για να μπορέσουμε να μετρήσουμε αυτή την απόσταση θα εισαγάγουμε στην ανάλυσή μας τις ακόλουθες δύο συναρτήσεις που μετρούν το σφάλμα (την διαφορά) μεταξύ των τιμών που δίνει η συνάρτηση $l(t)$ και των τιμών που δίνει η συνάρτηση $q_u(t)$ και η συνάρτηση $q_l(t)$. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε με $e_u(t)$ τη διαφορά

$$e_u(t) = q_u(t) - l(t), \quad (7.48)$$

και με $e_l(t)$ τη συνάρτηση

$$e_l(t) = l(t) - q_l(t). \quad (7.49)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (1.9) και (3.26) η σχέση (7.48) γράφεται ως εξής

$$e_u(t) = \lambda(0) (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)) - \int_0^t \lambda(t-x) \bar{F}(t-x) l(x) dx.$$

Εισάγοντας στην παραπάνω σχέση την (1.12) η συνάρτηση $e_u(t)$ γράφεται ως εξής

$$e_u(t) = \int_0^t (\lambda(0) - \lambda(t-x)) \bar{F}(t-x) l(x) dx,$$

και κάτω από την υπόθεση ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση DFR , προκύπτει το ακόλουθο άνω φράγμα για την συνάρτηση σφάλματος $e_u(t)$

$$e_u(t) \leq (\lambda(0) - \lambda(t)) (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)).$$

Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμενοι και με την βοήθεια των σχέσεων (1.9), και (3.25) η συνάρτηση $e_l(t)$ γράφεται

$$e_l(t) = \int_0^t \lambda(t-x) \bar{F}(t-x) l(x) dx - \lambda(t) (\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)).$$

7.5. Απόδοση φραγμάτων

Η παραπάνω σχέση με την βοήθεια της σχέσης (1.12) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$e_l(t) = \int_0^t (\lambda(t-x) - \lambda(t)) \bar{F}(t-x) l(x) dx. \quad (7.50)$$

Όμως όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *DFR* τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα $\lambda(0) \geq \lambda(t-x) \geq \lambda(t)$ και πλέον είναι ξεκάθαρο πως η συνάρτηση σφάλματος $e_l(t)$ φράσσεται από την συνάρτηση

$$e_l(t) \leq (\lambda(0) - \lambda(t))(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)).$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως και οι δύο συναρτήσεις σφάλματος που μετρούν την απόκλιση μεταξύ των πραγματικών τιμών και των προσεγγιστικών τιμών που προέρχονται από το άνω και το κάτω φράγμα της $l(t)$ φράσσονται από την συνάρτηση

$$e(t) = (\lambda(0) - \lambda(t))(\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)), \quad (7.51)$$

και αυτό σημαίνει πως η απόδοση των φραγμάτων που κατασκευάσαμε σχετίζεται με την διαφορά $\bar{F}_e(t) - \bar{F}(t)$, μια διαφορά που τείνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα 7.5.1 Υποθέτουμε πως η κατανομή F των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{3}{2} e^{-3x} + \frac{7}{2} e^{-7x}, \quad x \geq 0. \quad (7.52)$$

Πρόκειται δηλαδή για μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 3, 7 και βάρη 1/2 και 1/2. Οι πρώτες δύο ροπές είναι ίσες με $\mu = 5/21$ και $\mu_2 = 58/441$. Όπως είναι γνωστό η μείξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην κλάση *DFR*. Ο Πίνακας 7.5.1 παρουσιάζει τις τιμές που παίρνουν η $E(\gamma_t \cdot \delta_t)$ σύμφωνα με την σχέση (7.24) και τις τιμές που παίρνουν το κάτω και το άνω φράγμα σύμφωνα με τις σχέσεις (7.35) και (7.36). Όπως μπορούμε να δούμε από αυτόν τον πίνακα τόσο το πάνω όσο και το κάτω φράγμα για τη μέση τιμή του γινομένου της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής έχουν σημαντικά ικανοποιητική απόδοση με μέγιστο ποσοστιαίο σφάλμα κάτω του 0.3%.

Στον Πίνακα 7.5.2 παρουσιάζουμε τις τιμές της μέσης τιμής της τρέχουσας ζωής καθώς και των δύο φραγμάτων της.

Στον Πίνακα 7.5.3 μπορούμε να δούμε την απόδοση του κάτω και άνω φράγματος για την μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής όπως αυτά εκφράζονται μέσω των σχέσεων (7.42) και (7.43) συγκρίνοντάς τα με τις πραγματικές τιμές της μέσης υπολειπόμενης ζωής. Τέλος παραθέτουμε το Διάγραμμα 7.1 όπου βλέπουμε γραφικά

7.5. Απόδοση φραγμάτων

Πίνακας 7.5.1

| | $E(\gamma_t \cdot \delta_t)$ | Lower bound | Upper bound |
|------------|------------------------------|-------------|-------------|
| $t = 0$ | 0 | 0 | 0 |
| $t = 0.25$ | 0.0415117 | 0.0414739 | 0.0415514 |
| $t = 0.5$ | 0.0624005 | 0.06222 | 0.062614 |
| $t = 0.75$ | 0.073202 | 0.072927 | 0.0735822 |
| $t = 1$ | 0.0786706 | 0.0784018 | 0.0791087 |
| $t = 1.5$ | 0.0826917 | 0.0825474 | 0.0830114 |
| $t = 2$ | 0.083627 | 0.0835723 | 0.0837842 |
| $t = 3$ | 0.0838865 | 0.0838814 | 0.0839088 |
| $t = 5$ | 0.0839002 | 0.0839002 | 0.0839004 |
| $t = 8$ | 0.0839002 | 0.0839002 | 0.0839002 |
| $t = 10$ | 0.0839002 | 0.0839002 | 0.0839002 |

Πίνακας 7.5.2

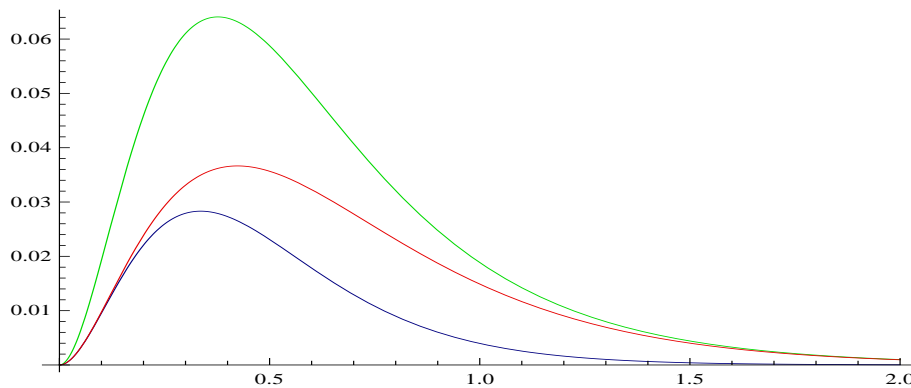
| | $E(\delta_t)$ | Lower bound | Upper bound |
|------------|---------------|-------------|-------------|
| $t = 0$ | 0 | 0 | 0 |
| $t = 0.25$ | 0.151211 | 0.151064 | 0.151365 |
| $t = 0.5$ | 0.213917 | 0.213262 | 0.214696 |
| $t = 0.75$ | 0.245011 | 0.244071 | 0.246329 |
| $t = 1$ | 0.260812 | 0.259934 | 0.262273 |
| $t = 1.5$ | 0.272594 | 0.272148 | 0.27361 |
| $t = 2$ | 0.275373 | 0.275207 | 0.275861 |
| $t = 3$ | 0.276149 | 0.276134 | 0.276217 |
| $t = 5$ | 0.276190 | 0.276190 | 0.276191 |
| $t = 8$ | 0.276190 | 0.276190 | 0.276190 |
| $t = 10$ | 0.276190 | 0.276190 | 0.276190 |

την συμπεριφορά των συναρτήσεων $e_l(t)$ και $e_u(t)$. Παρατηρούμε πως η διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων $q_u(t)$ και $l(t)$ είναι μικρότερη του 0.03 σε απόλυτο μέγεθος. Ακόμη βλέπουμε ότι η διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων $q_l(t)$ και $l(t)$ είναι και αυτή μικρότερη του 0.03. Παρατηρούμε επίσης ότι το άνω φράγμα των συναρτήσεων $e_u(t)$ και $e_l(t)$, όπως αυτό αποτυπώνεται από τη σχέση (7.51), είναι πεπερασμένο και μικρότερο του 0.06. Τέλος φαίνεται πως οι συναρτήσεις σφάλματος $e_l(t)$ και $e_u(t)$ όπως επίσης και το άνω φράγμα τους τείνουν στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$.

7.6. Διακύμανση υπολειπόμενης ζωής

Πίνακας 7.5.3

| | $E(\gamma_t)$ | Lower bound | Upper bound |
|------------|---------------|-------------|-------------|
| $t = 0$ | 0.238095 | 0.238095 | 0.238095 |
| $t = 0.25$ | 0.265276 | 0.264706 | 0.265888 |
| $t = 0.5$ | 0.273063 | 0.271838 | 0.274641 |
| $t = 0.75$ | 0.275295 | 0.274196 | 0.277081 |
| $t = 1$ | 0.275934 | 0.275224 | 0.277406 |
| $t = 1.5$ | 0.276169 | 0.275966 | 0.276827 |
| $t = 2$ | 0.276189 | 0.27614 | 0.276415 |
| $t = 3$ | 0.27619 | 0.276188 | 0.27621 |
| $t = 5$ | 0.27619 | 0.27619 | 0.276191 |
| $t = 8$ | 0.27619 | 0.27619 | 0.27619 |
| $t = 10$ | 0.27619 | 0.27619 | 0.27619 |



Διάγραμμα 7.1: Συναρτήσεις σφάλματος για την μέση τιμή του γινομένου τρέχουσας και υπολειπόμενης ζωής

7.6 Διακύμανση υπολειπόμενης ζωής

Αν και στην αρχή του κεφαλαίου αναφέραμε τις σχέσεις (7.1) και (7.5) ως τύπους υπολογισμού της δεύτερης ροπής και της διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής, θα ξεκινήσουμε αυτή την ενότητα παρουσιάζοντας τα ακόλουθα δύο αποτελέσματα για τον υπολογισμό των ίδιων ποσοτήτων μέσω του υπολειπόμενου όρου $Q(t)$ (όπως αυτός υπολογίζεται από τη σχέση (2.13)).

Λήμμα 7.6.1 Η ροπή πρώτης τάξης της υπολειπόμενης ζωής σε μια ανανεωτική διαδικασία ισούται με

$$E(\gamma_t) = \frac{\mu_2}{2\mu} - \mu Q(t), \quad (7.53)$$

7.6. Διακύμανση υπολειπόμενης ζωής

και η ροπή δεύτερης τάξης δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t^2) = \frac{\mu_2^2}{2\mu^2} - \mu_2 Q(t) + 2 \left(\mu \int_0^t Q(x) dx \right). \quad (7.54)$$

Απόδειξη Η σχέση (7.53) προκύπτει συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.13) και (1.34). Η απόδειξη της σχέσης (7.54) προκύπτει με αντικατάσταση της σχέσης (2.13) στην σχέση (7.1). \square

Είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε έναν τύπο για την διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής.

Πόρισμα 7.6.2 Η διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής σε μια συνήθη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία δίνεται από τη σχέση

$$Var(\gamma_t) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} - 2\mu \int_0^t Q(x) dx - \mu^2 Q(t)^2. \quad (7.55)$$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.53) και (7.54) στη σχέση (7.5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Var(\gamma_t) &= \frac{\mu_2^2}{2\mu^2} - \mu_2 Q(t) + 2 \left(\mu \int_0^t Q(x) dx \right) - \left(\frac{\mu_2}{2\mu} + \mu Q(t) \right)^2 \\ &= \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} + 2\mu \int_0^t Q(x) dx - \mu^2 Q(t)^2. \end{aligned}$$

\square

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την μονοτονία της διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής και θα παρουσιάσουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Θα συνδέσουμε επίσης την μονοτονία της διακύμανσης με την κλάση *IMRL*.

Η μελέτη της μονοτονίας της διακύμανσης μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα άνω φράγμα για την συνδιακύμανση της τρέχουσας και της υπολειπόμενης ζωής.

7.6.1 Μονοτονία διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής.

Στην ανάλυση της μονοτονίας της διακύμανσης της υπολειπόμενης ζωής βασικό ρόλο έχει η σχέση (7.5). Πιο συγκεκριμένα παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή μπορούμε να διατυπώσουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

7.6. Διακύμανση υπολειπόμενης ζωής

Πόρισμα 7.6.3 Η διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου t αν και μόνο αν

$$U(t) \leq (\geq) \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1. \quad (7.56)$$

Απόδειξη Παραγωγίζοντας ως προς t τη σχέση (7.5) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Var(\gamma_t) &= \mu_2 u(t) - 2\mu^2(1 + U(t))u(t) + 2\mu t u(t) \\ &= 2\mu^2 u(t) \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - U(t) + \frac{t}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται πως η διακύμανση είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση αν ισχύει η σχέση (7.56).

Από την άλλη αν ισχύει η (7.56) τότε

$$\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 - U(t) + \frac{t}{\mu} \geq (\leq) 0,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της παραπάνω ανισότητας με την θετική ποσότητα $2\mu^2 u(t)$ προκύπτει πως

$$\frac{d}{dt} Var(\gamma_t) \geq (\leq) 0.$$

□

Στην ουσία, όταν η διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση τότε η σχέση (7.56) είναι ίδια με τη σχέση (2.4) που δίνει ο Brown(1980) ως ένα πάνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IMRL*.

Πιο συγκεκριμένα ο Brown(1980) εισάγει μια αρνητική και αύξουσα συνάρτηση $B(t)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$B(t) = U(t) - t\mu^{-1} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1.$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την (2.13) είναι εύκολα αντιληπτό ότι ισχύει ότι

$$Q(t) = -B(t).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση *IMRL* τότε ο υπολειπόμενος όρος $Q(t)$ θα είναι μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου t , έτσι παραγωγίζοντας τη σχέση (7.55) ως προς t έχουμε

$$\frac{d}{dt} Var(\gamma_t) = 2\mu Q(t) - 2\mu^2 Q(t) \frac{d}{dt} Q(t) \geq 0.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο αποτέλεσμα:

7.6. Διακύμανση υπολειπόμενης ζωής

Πόρισμα 7.6.4 Όταν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η διακύμανση της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση του t .

7.6.2 Μονοτονία ροπών υπολειπόμενης ζωής και κλάση $IMRL$.

Ένα ήδη γνωστό αποτέλεσμα από τις αρχές τις δεκαετίας του 80 είναι ότι η μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$, αυτό προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.5.1. Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε ροπή της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση.

Από τη σχέση (7.17) αντικαθιστώντας όπου $r = 1$ προκύπτει ότι

$$E(\gamma_t) = \frac{\mu_2}{2\mu} - \int_0^{\infty} \phi(0, y; t) dy.$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (7.53) προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τον υπολειπόμενο όρο $Q(t)$,

$$Q(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \phi(0, y; t) dy.$$

Η παραπάνω σχέση είναι ικανή να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα πως κάθε ροπή της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t (και όχι μόνο η πρώτη και η δεύτερη ροπή της όπως προκύπτει άμεσα με παραγωγή των σχέσεων (7.53) και (7.54)).

Αφού λοιπόν η $Q(t)$ είναι θετική και φθίνουσα συνάρτηση τότε και η ποσότητα $\mu^{-1} \int_0^{\infty} \phi(0, y; t) dy$ είναι θετική και φθίνουσα συνάρτηση ως προς t , και κατά συνέπεια

$$\frac{d}{dt} \phi(0, y; t) \leq 0. \quad (7.57)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (7.17) ως προς t έχουμε

$$\frac{d}{dt} E(\gamma_t^r) = -r \int_0^{\infty} y^{r-1} \frac{d}{dt} \phi(0, y; t) dy \geq 0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται συνδυάζοντας την τελευταία σχέση και τη σχέση (7.57).

7.7. Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων

7.7 Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την μονοτονία της συνδιακύμανσης μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων τόσο για πεπερασμένο χρόνο όσο και για την περίπτωση όπου $t \rightarrow \infty$.

Μια πρώτη παρατήρηση από την μελέτη της σχέσης (7.6) είναι πως για $t = 0$ $Cov(\gamma_t, N(t)) = 0$. Αυτό σημαίνει πως αύξουσα (φθίνουσα) συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων συνεπάγεται ότι $Cov(\gamma_t, N(t)) \geq (\leq) 0$.

Πόρισμα 7.7.1 Η συνδιακύμανση μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων είναι αύξουσα (φθίνουσα) και κατά συνέπεια θετική (αρνητική) συνάρτηση στο διάστημα $(0, \infty)$ αν και μόνο αν

$$U(t) \leq (\geq) \frac{t}{2\mu} + \frac{u^{*2}(t)}{2u(t)},$$

όπου

$$u^{*2}(t) = \int_0^t u(t-x)u(x)dx.$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει με παραγωγή της σχέσης (7.6). □

Στο υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνδιακύμανσης μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων $N(t)$.

Πρόταση 7.7.2 Εάν η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η ασυμπτωτική συνδιακύμανση της υπολειπόμενης ζωής και του αριθμού των ανανεώσεων $N(t)$ μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης $Q(t)$ (όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (2.13)), ως εξής:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, N(t)) = \int_0^{\infty} Q(x)dx.$$

Απόδειξη Το αριστερό μέλος της σχέσης (4.7) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t U(x)dx - \left(\frac{t^2}{2\mu} + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right) t \right) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left(U(x) - \left(\frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right) \right) dx.$$

7.7. Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων

Εισάγοντας στην παραπάνω σχέση τη (2.13) προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t U(x) dx - \left(\frac{t^2}{2\mu} + \left(\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right) t \right) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(x) dx = \int_0^\infty Q(x) dx.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση και τη σχέση (7.7) στην (4.7) προκύπτει το ζητούμενο. \square

Πρόταση 7.7.3 Αν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση $HNBUE(HNWUE)$ τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Cov}(\gamma_t, N(t)) \geq (\leq) 0.$$

Απόδειξη Αν η F_e ανήκει στην κλάση $HNBUE(HNWUE)$ τότε ισχύει ότι

$$\int_t^\infty \bar{F}_e(x) dx \leq (\geq) \frac{\mu_2}{2\mu} e^{-\frac{2\mu t}{\mu_2}}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς t στο διάστημα $[0, \infty)$ έχουμε

$$\int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}_e(z) dz dt \geq (\leq) \frac{\mu_2}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\frac{2\mu t}{\mu_2}} dt. \quad (7.58)$$

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας είναι ίση με

$$\frac{\mu_2}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\frac{2\mu t}{\mu_2}} dt = \frac{\mu_2^2}{4\mu^2}, \quad (7.59)$$

και αντίστοιχα το αριστερό μέλος γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}_e(z) dz dt &= \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_z^\infty \bar{F}(y) dy dz dt = \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^y \bar{F}(z) dz dy dt \\ &= \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty (z-t) \bar{F}(z) dz dt = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^z x \bar{F}(z) dx dz \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty z^2 \bar{F}(z) dz = \frac{\mu_3}{6\mu}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.60) και (7.59) στην (7.58) καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως όταν η κατανομή ισορροπίας F_e ανήκει στην κλάση $HNBUE(HNWUE)$ τότε

$$\frac{\mu_3}{6\mu} - \frac{\mu_2^2}{4\mu^2} \leq (\geq) 0.$$

7.7. Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανισότητα με την σταθερά $-\mu^{-1}$ έχουμε

$$\frac{\mu_2^2}{4\mu^3} - \frac{\mu_3}{6\mu^2} \geq (\leq) 0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα και τη σχέση (7.7). \square

Λήμμα 7.7.4 Έστω CV_e ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας, όπως αυτός δίνεται από στη σχέση (1.11), τότε η ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ της υπολειπόμενης ζωής και του πλήθους των ανανεώσεων δίνεται από την σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, N(t)) = \left(\frac{\mu_2^2}{8\mu^3} \right) (1 - CV_e^2). \quad (7.61)$$

Απόδειξη Λύνοντας τη σχέση (1.11) ως προς $\frac{\mu_3}{3\mu}$ έχουμε

$$\frac{\mu_3}{3\mu} = (1 + CV_e^2) \left(\frac{\mu_2}{2\mu} \right)^2, \quad (7.62)$$

και με την βοήθεια της (7.6) η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, N(t)) = \frac{\mu_2^2}{4\mu^3} - \frac{\mu_2^2}{8\mu^3} (1 + CV_e^2) = \left(\frac{\mu_2^2}{8\mu^3} \right) (1 - CV_e^2). \quad \square$$

Ένα άμεσο αποτέλεσμα που απορρέει από τη σχέση (7.61) και δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται ο συντελεστής μεταβλητότητας της κατανομής ισορροπίας F_e και η ασυμπτωτική συνδιακύμανση είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 7.7.5 Ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, N(t)) \leq (\geq) 0$ αν και μόνο αν $CV_e \geq 1$ ($0 \leq CV_e \leq 1$).

Απόδειξη Η απόδειξη απορρέει απευθείας από τη σχέση (7.61). \square

Πόρισμα 7.7.6 Ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, N(t)) = 0$ αν και μόνο αν $CV_e = 1$.

7.7. Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων

Απόδειξη Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την σχέση (7.61). □

Ένα ερώτημα που δημιουργείται από το Πρόβλημα 7.7.5 είναι για ποιες κατανομές F ισχύει $CV_e \geq 1$ ($0 \leq CV_e \leq 1$).

Απάντηση σε αυτό το ερώτημα μπορούμε να δώσουμε για την περίπτωση όπου $CV_e \geq 1$. Γνωρίζουμε ότι αν η κατανομή F ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η κατανομή ισορροπίας F_e θα ανήκει στην κλάση DFR (Brown (1981)) και αφού ανήκει στην DFR , τότε θα ανήκει και στην κλάση $NWUE$, και κατά συνέπεια $CV_e \geq 1$.

Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για κατανομές με θετική γήρανση. Συγκεκριμένα αν η F είναι $DMRL$, τότε η κατανομή ισορροπίας F_e είναι IFR και επομένως $CV_e \leq 1$. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στους Marshall και Olkin (2007, σελίδα 170).

7.7. Συνδιακύμανση υπολειπόμενης ζωής και αριθμού ανανεώσεων

Κεφάλαιο 8

Τυχαίος περίπατος με θετική τάση

8.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η ανανεωτική θεωρία συνδέεται με τους τυχαίους περιπάτους. Αυτό συμβαίνει κυρίως για δύο λόγους:

1. Ο τυχαίος περίπατος μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της ανανεωτικής θεωρίας ή αντίστοιχα η ανανεωτική θεωρία μπορεί να θεωρηθεί μια ειδική περίπτωση τυχαίου περιπάτου (περιορίζεται στον θετικό ημίξονα).
2. Μέσα από τους τυχαίους περιπάτους αναδύονται ανανεωτικές ανελίξεις. Όπως θα δούμε στην συνέχεια του κεφαλαίου, χαρακτηριστική περίπτωση άμεσης εφαρμογής βασικών αποτελεσμάτων της ανανεωτικής θεωρίας στους τυχαίους περιπάτους είναι τα κλιμακωτά ύψη (ladder heights).

Δίνεται λοιπόν η δυνατότητα να μεταφέρουμε μερικά από τα βασικά αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων από την ανανεωτική θεωρία στο πεδίο των τυχαίων περιπάτων.

Ο Gut (1983) μελετάει τυχαίους περιπάτους με θετική τάση (positive drift) όταν ο χρόνος $t \rightarrow \infty$ και μεταφέρει κάποια από τα αποτελέσματα του από το πεδίο των τυχαίων περιπάτων στην ανανεωτική θεωρία.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ακολουθήσουμε αντίθετη διαδρομή από αυτή του Gut και θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε αποτελέσματα από την ανανεωτική θεωρία στους τυχαίους περιπάτους. Μάλιστα θα ασχοληθούμε όχι μόνο για την περίπτωση όπου ο χρόνος $t \rightarrow \infty$ αλλά και για την περίπτωση όπου ο χρόνος είναι πεπερασμένος

8.2. Τυχαίος περίπατος και βασικές διαφορές με ανανεωτική θεωρία

($t < \infty$).

Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί επίσης στη διαφορά

$$P(\gamma_t > x) - P(\gamma_\infty > x).$$

Παρότι ο Chang (1992) έδωσε φράγματα για αυτή την διαφορά κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, δεν έχουμε μια σχέση που να υπολογίζει ακριβώς αυτή τη διαφορά, κάτι το οποίο θα επιχειρήσουμε να κάνουμε σε αυτό το Κεφάλαιο.

8.2 Τυχαίος περίπατος και βασικές διαφορές με ανανεωτική θεωρία

Σε αυτή την ενότητα θα θυμίσουμε κάποιες από τις βασικές αρχές που διέπουν την ανανεωτική θεωρία αλλά όπως θα δούμε στη συνέχεια δεν ισχύουν στην περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.

Θα συμβολίζουμε με $\{S_n, n \geq 0\}$ τον τυχαίο περίπατο με θετική τάση, όπου $S_0 = 0$

και $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ($n \geq 1$), θέτοντας $\{X_k, k \geq 1\}$ ως μια ακολουθία ισόνομων

και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Υποθέτουμε επίσης ότι ο τυχαίος περίπατος έχει θετική τάση η οποία συμβολίζεται με $E(X_1) = \mu < \infty$, οπότε σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών, ισχύει $S_n \rightarrow \infty$ με πιθανότητα 1 καθώς $n \rightarrow \infty$.

Σημειώνουμε ότι τα επιμέρους αθροίσματα S_n μπορούν να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές.

Βασικό αντικείμενο μελέτης της ανανεωτικής θεωρίας όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 2 της παρούσας διατριβής είναι η τυχαία μεταβλητή $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$ για $t \geq 0$. Όπως αναφέρουμε και στο Κεφάλαιο 2 η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ δεν είναι χρόνος διακοπής και για αυτό το λόγο κάνουμε συχνά χρήση της τυχαίας μεταβλητής $\nu(t) = \min\{n : S_n > t\}$ για $t \geq 0$. Η τυχαία μεταβλητή $\nu(t)$ είναι γνωστή ως ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για να βρεθεί ο τυχαίος περίπατος πάνω από ένα φράγμα t (first passage time beyond the level t).

Σύμφωνα με τα παραπάνω στην ανανεωτική θεωρία ισχύει ότι

$$\nu(t) = 1 + N(t). \quad (8.1)$$

Η παραπάνω σχέση δεν ισχύει για την περίπτωση που μελετάμε έναν τυχαίο περίπατο που μπορεί να πάρει και θετικές και αρνητικές τιμές. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τους αναγνώστες στον Gut (1983, Κεφάλαιο 3).

Μια άλλη σχέση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην ανανεωτική θεωρία είναι η παρακάτω σχέση δεικνότητας μεταξύ των μεταβλητών S_n και $N(t)$.

$$P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n). \quad (8.2)$$

8.3. Κλιμακωτά ύψη

Θα ορίσουμε επίσης με $M_n = \max\{0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$ το μέγιστο των επιμέρους αθροισμάτων S_i για $1 \leq i \leq n$. Σε αντίθεση με την σχέση (8.2) που δεν ισχύει στην περίπτωση των τυχαίων περιπάτων ο Gut (1983) αναφέρει πως ισχύει μια αντίστοιχη σχέση δυικότητας μεταξύ των M_n και $\nu(t)$. Πιο συγκεκριμένα

$$P(\nu(t) > n) = P(M_n \leq t). \quad (8.3)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο $E(\nu(t))$ που απαιτείται ώστε ο τυχαίος περίπατος να περάσει για πρώτη φορά πάνω από το σημείο t . Δηλαδή θα ισχύει

$$E(\nu(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M_n \leq t). \quad (8.4)$$

8.3 Κλιμακωτά ύψη

Πριν εισάγουμε στην ανάλυσή μας τα κλιμακωτά ύψη, θα ορίσουμε τις κλιμακωτές εποχές ή στιγμές $\{T_k, k \geq 0\}$ (ladder epochs) ως εξής:

$$T_k = \min\{n > T_{k-1} : S_n > S_{k-1}\} \quad (k \geq 1) \quad (8.5)$$

με $T_0 = 0$.

Η τυχαία μεταβλητή $Y_k = S_{T_k}$ ($k \geq 0$) ονομάζεται κλιμακωτό ύψος (ladder height). Θα συμβολίζουμε επίσης με $\mu_H = E(Y_1)$ και με $\mu_T = E(T_1)$ τις αντίστοιχες μέσες τιμές. Πιο συγκεκριμένα ισχύει (Gut(1983), σελίδα 77, σχέση (2.3))

$$0 < \mu_H = \mu_T \mu < \infty. \quad (8.6)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει επίσης ο χρόνος που το κλιμακωτό ύψος θα περάσει για πρώτη φορά πάνω από το σημείο t ($t \geq 0$), ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$\nu_H(t) = \min\{n : Y_n > t\}.$$

Θα συμβολίσουμε με $G_Y(t) = P(Y_1 \leq t)$ τη συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών, και με $G_Y^{(k)} = P(\sum_{i=1}^k Y_i \leq t)$ την k -οστή συνέλιξη της κατανομής των κλιμακωτών υψών με τον εαυτό της. Θα θέσουμε επίσης με $g_Y(t)$ τη συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής G_Y .

Τέλος θα συμβολίζουμε με $G_e(t)$ την παρακάτω συνάρτηση κατανομής

$$G_e(t) = \frac{1}{\mu_H} \int_0^t \bar{G}_Y(x) dx \quad (8.7)$$

8.4. Αποτελέσματα από την ανανεωτική θεωρία

Σύμφωνα με τον Chang (1989 σελίδα 19 σχέση 2.3) η μέση τιμή $E\nu_H(t)$ θα εκφράζεται από τη σχέση

$$E\nu_H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_Y^{(k)}(t). \quad (8.8)$$

Θα ορίσουμε με $M_H(t)$ το άθροισμα

$$M_H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_Y^{(k)}(t) = E\nu_H(t) - 1. \quad (8.9)$$

Μια πρώτη παρατήρηση είναι πως οι σχέσεις (8.7), (8.9) θυμίζουν τον τρόπο που ορίζεται η ανανεωτική συνάρτηση και η κατανομή ισορροπίας μέσω των σχέσεων (1.2) και (1.10) του Κεφαλαίου 1.

8.4 Αποτελέσματα από την ανανεωτική θεωρία

Η στοχαστική ανέλιξη των κλιμακωτών υψών $\{Y_n, n \geq 0\}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και κατά συνέπεια μπορούμε να εφαρμόσουμε βασικά αποτελέσματα της ανανεωτικής θεωρίας στα κλιμακωτά ύψη.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1.3) η συνάρτηση $M_H(t)$ θα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση ανανεωτικού τύπου

$$M_H(t) = G_Y(t) + \int_0^t G_Y(t-x) dM_H(x). \quad (8.10)$$

Εισάγουμε επίσης τη συνάρτηση $Q_H(t)$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$Q_H(t) = \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} - 1 - \left(M_H(t) - \frac{t}{\mu_H} \right). \quad (8.11)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.13) που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2 στην ανέλιξη $\{Y_k, k \geq 0\}$ των κλιμακωτών υψών έχουμε

$$M_H(t) = \frac{t}{\mu_H} + \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} - 1 - Q_H(t). \quad (8.12)$$

Συμβολίζοντας με $E\nu_H(t) = M_H(t) + 1$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$E\nu_H(t) = \frac{t}{\mu_H} + \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} - Q_H(t). \quad (8.13)$$

8.4. Αποτελέσματα από την ανανεωτική θεωρία

Ο τρόπος με τον οποίο ορίσαμε τη συνάρτηση $Q_H(t)$ (παρατηρήστε ότι η σχέση (8.13) είναι η αντίστοιχη σχέση (2.13) του υπολειπόμενου όρου που συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 2) μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια ανανεωτική εξίσωση για την $Q_H(t)$. Πιο συγκεκριμένα,

Πρόταση 8.4.1 Η συνάρτηση $Q_H(t)$ ικανοποιεί την κανονική ανανεωτική εξίσωση

$$Q_H(x) = \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} \bar{G}_Y(x) - \bar{G}_e(x) + \int_0^x Q_H(x-z)g_Y(z)dz. \quad (8.14)$$

Απόδειξη Θα αρχίσουμε την απόδειξή μας με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^x Q_H(x-z)g_Y(z)dz.$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (8.11) στο παραπάνω ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.10) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^x Q_H(x-z)g_Y(z)dz &= \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} G_Y(x) - G_Y(x) - \int_0^x M_H(x-z)g_Y(z)dz + \int_0^x \frac{x-z}{\mu_H} g_Y(z)dz \\ &= \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} G_Y(x) - G_Y(x) - (M_H(x) - G_Y(x)) + \frac{x}{\mu_H} - G_e(x) \\ &= \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} G_Y(x) - \left(M_H(x) - \frac{x}{\mu_H} \right) - G_e(x). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης την συνάρτηση $\frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} \bar{G}_Y(x) - \bar{G}_e(x)$, έχουμε

$$\frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} \bar{G}_Y(x) - \bar{G}_e(x) + \int_0^x Q_H(x-z)g_Y(z)dz = \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} - 1 - \left(M_H(x) - \frac{x}{\mu_H} \right) = Q_H(x).$$

□

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.13) και (8.14) μπορούμε να διατυπώσουμε τη παρακάτω σχέση για την μέση $E\nu_H(t)$.

Πόρισμα 8.4.2 Σε έναν τυχαίο περίπατο η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\nu_H(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$E\nu_H(t) = \frac{t}{\mu_H} + \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} G_Y(t) + \bar{G}_e(t) - \int_0^t Q_H(t-z)g_Y(z)dz. \quad (8.15)$$

8.5. Δεξιά ουρά υπέρβασης του σημείου t (Overshoot)

Τα παραπάνω αποτελέσματα για την μέση τιμή $E\nu_H(t)$ μπορούν να μας βοηθήσουν να κατασκευάσουμε αντίστοιχα αποτελέσματα για την μέση τιμή $E\nu(t)$, και αυτό διότι σύμφωνα με τον Gut(1983) (σελίδα 96, σχέση (9.8)) η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\nu_H(t)$ συνδέεται με την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\nu(t)$ μέσω της σχέσης

$$E\nu(t) = E\nu_H(t)\mu_T. \quad (8.16)$$

Λήμμα 8.4.3 Σε έναν τυχαίο περίπατο με θετική τάση ισχύει ότι

$$E\nu(t) = \frac{t}{\mu} + \mu_T \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} - \mu_T Q_H(t). \quad (8.17)$$

Απόδειξη Η απόδειξη ολοκληρώνεται πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (8.13) με μ_T και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση του Gut. \square

Πόρισμα 8.4.4 Σε έναν τυχαίο περίπατο η μέση τιμή $E\nu(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$E\nu(t) = \frac{t}{\mu} + \mu_T \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} G_Y(t) + \mu_T \left(\bar{G}_e(t) - \int_0^t Q_H(t-z)g_Y(z)dz \right). \quad (8.18)$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει αντικαθιστώντας τη σχέση (8.14) στη σχέση (8.17). \square

8.5 Δεξιά ουρά υπέρβασης του σημείου t (Overshoot)

Στον τυχαίο περίπατο, αν έχουμε θέσει ένα όριο t και θέλουμε να δούμε πότε ο τυχαίος περίπατος θα υπερβεί αυτό το όριο, η τυχαία μεταβλητή γ_t εκφράζει το μέγεθος της υπέρβασης αυτού του ορίου. Ο Chang (1992) αναφέρει ότι η δεξιά ουρά της τυχαίας μεταβλητής γ_t δίνεται από τη σχέση

$$P(\gamma_t > y) = \int_0^t P(Y_1 > t + y - z) dE\nu_H(t). \quad (8.19)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση (8.19) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$P(\gamma_t > y) = P(Y_1 > t + y) + \int_0^t P(Y_1 > t + y - s) dM_H(t), \quad (8.20)$$

8.5. Δεξιά ουρά υπέρβασης του σημείου t (Overshoot)

(αντίστοιχος ισχυρισμός διατυπώνεται από τους Janssen και Manca (2005) σελίδα 74 πρόταση 8.2 σχέση (8.9) και παρατήρηση 8.1 σελίδα 75 σχέση (8.17) και αφορά την συνάρτηση κατανομής της υπολειπόμενης ζωής στην ανανεωτική διαδικασία). Ο Gut (1983) αποδεικνύει πως η ασυμπτωτική δεξιά ουρά της τυχαίας μεταβλητής γ_t δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t > y) = \bar{G}_e(y), \quad (8.21)$$

με την συνάρτηση κατανομής G_e να ορίζεται στη σχέση (8.7).

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (8.19) και (8.21) με τις σχέσεις (1.24) και (4.1) παρατηρούμε μια ομοιότητα στη δομή τους. Μπορούμε λοιπόν να εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο προσεγγίσαμε την δεξιά ουρά της υπολειπόμενης ζωής σε μια ανανεωτική διαδικασία στο Κεφάλαιο 1. Η βασική ιδέα είναι να εκφράσουμε την δεξιά ουρά της τυχαίας μεταβλητής γ_t σε έναν τυχαίο περίπατο συναρτήσει της ασυμπτωτικής δεξιάς ουράς της.

Θα συμβολίσουμε με

$$L_H(t) = M_H(t) - \frac{t}{\mu_H}, \quad (8.22)$$

και θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $L_H(t)$ είναι συνεχής με παράγωγο $l_H(t)$. Δηλαδή θα ισχύει

$$l_H(t) = m_H(t) - \frac{1}{\mu_H}. \quad (8.23)$$

Πρόταση 8.5.1 Σε έναν τυχαίο περίπατο ισχύει ότι

$$[\bar{G}_Y(t)] * l_H(t) = \bar{G}_e(t) - \bar{G}_Y(t). \quad (8.24)$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη μας προσπαθώντας να υπολογίσουμε την διαφορά $\bar{G}_e(t) - \bar{G}_Y(t)$ με την βοήθεια της σχέσης (8.10) ως εξής

$$\begin{aligned} \bar{G}_e(t) - \bar{G}_Y(t) &= G_Y(t) - G_e(t) \\ &= M_H(t) - \int_0^t G_Y(t-x)m_H(x)dx - G_e(t) \\ &= (1 - G_Y(t)) * m_H(t) - \int_0^t \frac{\bar{G}_Y(x)}{\mu_H} dx \\ &= \bar{G}_Y(t) * m_H(t) - \int_0^t \frac{\bar{G}_Y(x)}{\mu_H} dx \\ &= \bar{G}_Y(t) * \left(m_H(t) - \frac{1}{\mu_H} \right) \\ &= \bar{G}_Y(t) * l_H(t), \end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Το παραπάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με τη σχέση (8.20) μας δίνει τη δυνατότητα

8.6. Ροπές της τυχαίας μεταβλητής γ_t

να εκφράσουμε την δεξιά ουρά της τυχαίας μεταβλητής γ_t σε έναν τυχαίο περίπατο μέσω της \bar{G}_e . Πιο συγκεκριμένα

Πρόταση 8.5.2 Η δεξιά ουρά της τυχαίας μεταβλητής γ_t δίνεται από τη σχέση

$$P(\gamma_t > y) = \bar{G}_e(y) - \int_0^y \bar{G}_Y(t + y - s)l_H(s)ds. \quad (8.25)$$

Απόδειξη Εισάγοντας τη σχέση (8.23) στη σχέση (8.20) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(\gamma_t > y) &= \bar{G}_Y(t + y) + \int_0^t \bar{G}_Y(u + y) \left(l_H(t - u) + \frac{1}{\mu_H} \right) du \\ &= \bar{G}_Y(t + y) + \bar{G}_e(y) - \bar{G}_e(t + y) + \int_0^t \bar{G}_Y(u + y)l_H(t - u)du. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{G}_Y(u + y)l_H(t - u)du &= \int_y^{t+y} \bar{G}_Y(z)l_H(t + y - z)dz \\ &= \int_0^{t+y} \bar{G}_Y(z)l_H(t + y - z)dz - \int_0^y \bar{G}_Y(z)l_H(t + y - z)dz. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (8.24), το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης γράφεται

$$\int_0^{t+y} \bar{G}_Y(z)l_H(t + y - z)dz = \bar{G}_e(t + y) - \bar{G}_Y(t + y).$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\int_0^t \bar{G}_Y(u + y)l_H(t - u)du = \bar{G}_e(t + y) - \bar{G}_Y(t + y) - \int_0^y \bar{G}_Y(z)l_H(t + y - z)dz.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (8.26).

□

8.6 Ροπές της τυχαίας μεταβλητής γ_t

Σε ένα τυχαίο περίπατο, η πρώτη διέλευση $\nu(t)$ από το επίπεδο t πρέπει να συμβαίνει σε κάποιο κλιμακωτό ύψος. Ο Gut (1983) παρουσιάζει την ακόλουθη σχέση η οποία

8.6. Ροπές της τυχαίας μεταβλητής γ_t

αποτελεί μια από τις γέφυρες που συνδέουν την ανανεωτική θεωρία με τον τυχαίο περίπατο. Πιο συγκεκριμένα ισχύει

$$\gamma_t = S_{\nu(t)} - t = Y_{\nu_H(t)} - t = R_H(t),$$

και σύμφωνα με το παραπάνω η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής γ_t θα δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t) = E(S_{\nu(t)}) - t = \mu \left(E(\nu(t)) - \frac{t}{\mu} \right) = E(Y_{\nu_H(t)}) - t. \quad (8.27)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την δυνατότητα να εκφράσουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής γ_t με την βοήθεια της συνάρτησης $Q_H(t)$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής

Πόρισμα 8.6.1 Σε έναν τυχαίο περίπατο η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής γ_t δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t) = \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H} - \mu_H Q_H(t). \quad (8.28)$$

Απόδειξη Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας στη σχέση (8.27) τις σχέσεις (8.6) και (8.17). \square

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, πέρα από την πρώτη ροπή της τυχαίας μεταβλητής γ_t , έχει και η δεύτερη ροπή της, διότι υπολογίζοντας τις δύο πρώτες ροπές μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε την διακύμανση της.

Πόρισμα 8.6.2 Σε έναν τυχαίο περίπατο η δεύτερη ροπή της τυχαίας μεταβλητής γ_t δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t^2) = E(Y_1^2)(1 + M_H(t)) - 2\mu_H \left(t + \int_0^t M_H(x) dx \right) + t^2, \quad t \geq 0. \quad (8.29)$$

Απόδειξη Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της σχέσης (7.1) που παραθέτει ο Tijms (2003) (Λήμμα 8.1.3, σχέση (8.1.7), σελίδα 310). Η βασική διαφορά είναι ότι δεσμεύουμε τη δεύτερη ροπή της υπολειπόμενης ζωής ως προς το πρώτο κλιμακωτό ύψος Y_1 , δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned} E(\gamma_t^2) &= \int_0^\infty E(\gamma_t^2 | Y_1 = x) f_Y(x) dx \\ &= \int_0^\infty E(\gamma_{t-x}^2) f_Y(x) dx + \int_t^\infty (x-t)^2 f_Y(x) dx. \end{aligned}$$

8.7. Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$

□

Ο υπολογισμός της πρώτης και της δεύτερης ροπής μέσω των σχέσεων (8.28) και (8.29) μας δίνει την δυνατότητα να διατυπώσουμε έναν τύπο υπολογισμού της διακύμανσης της τυχαίας μεταβλητής γ_t . Πιο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 8.6.3 Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής γ_t σε έναν τυχαίο περίπατο δίνεται από τη σχέση

$$\text{Var}(\gamma_t) = \frac{E(Y_1^2)}{4\mu_H^2} + 2\mu_H \int_0^t Q_H(x)dx - \mu_H^2 Q_H(t)^2. \quad (8.30)$$

Απόδειξη

Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής γ_t δίνεται από τη σχέση

$$\text{Var}(\gamma_t) = E(\gamma_t^2) - E(\gamma_t)^2.$$

Εισάγοντας στην τελευταία σχέση τις (8.28) και (8.29) και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Η σχέση (8.25) μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε οποιαδήποτε ροπή r τάξης με $r = 1, 2, \dots$. Πιο συγκεκριμένα

Πρόταση 8.6.4 Η ροπή οποιασδήποτε τάξης r ($r = 1, 2, \dots$), της τυχαίας μεταβλητής γ_t σε έναν τυχαίο περίπατο με θετική τάση θα δίνεται από τη σχέση

$$E(\gamma_t^r) = \frac{E(Y_1^{r+1})}{\mu_H(r+1)} - r \int_0^\infty \int_0^y y^{r-1} \overline{G}_Y(t+y-s) l_H(s) ds dy. \quad (8.31)$$

8.7 Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε φράγματα για τη διαφορά $U(t+x) - U(t)$ στην ανανεωτική θεωρία. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη διαφορά $E\nu(t+h) - E\nu(t)$.

Με τη βοήθεια του Πορίσματος 8.4.4 μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακόλουθη σχέση για τη διαφορά $E(\nu(t+h)) - E(\nu(t))$ για πεπερασμένο t .

$$E(\nu(t+h)) - E(\nu(t)) = \frac{h}{\mu} + \mu_T \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} (G_Y(t+h) - G_Y(t)) + \mu_T (\overline{G}_e(t+h) - \overline{G}_e(t))$$

8.7. Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$

$$-\mu_T \left(\int_0^{t+h} Q_H(t+h-z)g_Y(z)dz - \int_0^t Q_H(t-z)g_Y(z)dz \right). \quad (8.32)$$

Ο Gut (1983) αποδεικνύει πως σε έναν τυχαίο περίπατο καθώς $t \rightarrow \infty$ ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (E\nu(t+h) - E\nu(t)) = \frac{h}{\mu}.$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία σχέση θυμίζει το Θεώρημα του Blackwell στην ανανεωτική θεωρία.

Πέρα από το παραπάνω όριο, εύκολα κάποιος χρησιμοποιώντας από τη μια το φράγμα του Lorden (1970) για τη μέση τιμή $E\nu(t)$ και από την άλλη το γεγονός ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής γ_t είναι μη αρνητική μπορεί να κατασκευάσει το παρακάτω άνω φράγμα:

$$E\nu(t+h) - E\nu(t) \leq \frac{h}{\mu} + \frac{E(X_+^2)}{\mu^2}. \quad (8.33)$$

Ένα αντίστοιχο φράγμα για την διαφορά $U(t+h) - U(t)$ στην ανανεωτική θεωρία παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2 (σχέση (2.48)). Όπως φαίνεται από το επόμενο αποτέλεσμα το φράγμα που δίνεται από τη σχέση (8.33) μπορεί να βελτιωθεί ομοιόμορφα. Πιο συγκεκριμένα

Λήμμα 8.7.1 Σε έναν τυχαίο περίπατο ισχύει ότι

$$E\nu(t+h) - E\nu(t) \leq \frac{h}{\mu} + \frac{E(X_+^2)}{\mu^2} - \mu_T \left(\bar{G}_e(t) + \int_0^t \bar{G}_e(t-z)g_Y(z)dz \right).$$

Απόδειξη Η μη αρνητικότητα της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής γ_t μας επιτρέπει χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.28), να κατασκευάσουμε το ακόλουθο άνω φράγμα για την συνάρτηση $Q_H(t)$:

$$Q_H(t) \leq \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2}. \quad (8.34)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη (8.14) έχουμε

$$Q_H(x) \leq \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} - \bar{G}_e(x). \quad (8.35)$$

Εισάγοντας την παραπάνω σχέση στη (8.18)

$$E\nu(t) \geq \frac{t}{\mu} + \mu_T \left(\bar{G}_e(t) + \int_0^t \bar{G}_e(t-z)g_Y(z)dz \right). \quad (8.36)$$

8.7. Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$

Από την άλλη χρησιμοποιώντας το φράγμα του Lorden (1970) έχουμε

$$E\nu(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{E(X_+^2)}{\mu^2}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας όπου $t = t+h$ στη σχέση (8.36) και αφαιρώντας τη σχέση αυτή από το φράγμα του Lorden (1970). \square

Από τη σχέση (8.32) φαίνεται πως η κατασκευή φραγμάτων για τη διαφορά $E(\nu(t+h)) - E(\nu(t))$ συνδέεται με την μονοτονία της συνάρτησης $Q_H(t)$. Πιο συγκεκριμένα

Πόρισμα 8.7.2 Σε έναν τυχαίο περίπατο αν η συνάρτηση $Q_H(t)$ είναι αύξουσα και αρνητική (φθίνουσα και θετική) τότε ένα πάνω (κάτω) φράγμα για τη διαφορά $E(\nu(t+h)) - E(\nu(t))$ είναι το

$$E(\nu(t+h)) - E(\nu(t)) \leq (\geq) \frac{h}{\mu} + \mu_T \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H^2} (G_Y(t+h) - G_Y(t)) + \mu_T (\bar{G}_e(t+h) - \bar{G}_e(t)).$$

Απόδειξη Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τη σχέση (8.32) και την υπόθεση ότι η συνάρτηση $Q_H(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα). \square

Ένα αρχικό ερώτημα που δημιουργείται είναι κάτω από ποιες συνθήκες η συνάρτηση $Q_H(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα).

Ο τρόπος που έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $M_H(t)$ στη σχέση (8.10) και τη συνάρτηση $Q_H(t)$ στη σχέση (8.11) μας επιτρέπει να μεταφέρουμε κάποια αποτελέσματα που αφορούν τον χρόνο μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων από την ανανεωτική θεωρία, στους τυχαίους περιπάτους και συγκεκριμένα στα κλιμακωτά ύψη.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.5.1 του Κεφαλαίου 1 για τα κλιμακωτά ύψη.

Αν δηλαδή η κατανομή των κλιμακωτών υψών ανήκει στην κλάση $IMRL$ τότε η συνάρτηση $L_H(t) = M_H(t) - t\mu_H^{-1}$ είναι αύξουσα συνάρτηση και κατά συνέπεια (μέσω της σχέσης (8.11)) η συνάρτηση $Q_H(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επίσης χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.28) είναι προφανές ότι η μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής είναι αύξουσα συνάρτηση.

Το επόμενο αποτέλεσμα θα μας βοηθήσει να συνδέσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $Q_H(t)$ με τις κλάσεις κατανομών. Οι Lai και Siegmund (1979) (σχέση (61) σελίδα 71 στο άρθρο τους) αποδεικνύουν ότι:

$$\int_0^\infty \left(E(\gamma_x) - \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H} \right) dx = \frac{E(Y_1^2)^2}{4\mu_H^2} - \frac{E(Y_1^3)}{6\mu_H}. \quad (8.37)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση αντιλαμβανόμαστε ότι μπορούμε να συνδέσουμε το πρόσημο του παραπάνω ολοκληρώματος με τις κλάσεις κατανομών και πιο συγκεκριμένα με την $HNBU$ ($HNWUE$). Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του επόμενου αποτελέσματος.

8.7. Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$

Πρόταση 8.7.3 Αν η κατανομή ισορροπίας G_e ανήκει στην κλάση $HNBUE$ ($HNWUE$) τότε

$$\mu_H \int_0^\infty Q_H(x) dx \leq (\geq) 0.$$

Απόδειξη Αν η G_e ανήκει στην κλάση $HNBUE$ ($HNWUE$) τότε ισχύει ότι

$$\int_t^\infty \bar{G}_e(x) dx \leq (\geq) \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H} e^{\frac{-2\mu_H t}{E(Y_1^2)}}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς t στο διάστημα $[0, \infty)$ έχουμε

$$\int_0^\infty \int_t^\infty \bar{G}_e(z) dz dt \geq (\leq) \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H} \int_0^\infty e^{\frac{-2\mu_H t}{E(Y_1^2)}} dt. \quad (8.38)$$

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας είναι ίση με

$$\frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H} \int_0^\infty e^{\frac{-2\mu_H t}{E(Y_1^2)}} dt = \frac{E(Y_1^2)^2}{4\mu_H^2}, \quad (8.39)$$

και αντίστοιχα η αριστερή πλευρά γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_t^\infty \bar{G}_e(z) dz dt &= \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_z^\infty \bar{G}_Y(y) dy dz dt = \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^y \bar{G}_Y(z) dz dy dt \\ &= \mu^{-1} \int_0^\infty \int_t^\infty (z-t) \bar{G}_Y(z) dz dt = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^z x \bar{G}_Y(z) dx dz \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty z^2 \bar{G}_H(z) dz = \frac{E(Y_1^3)}{6\mu_H}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (8.40) και (8.39) στην (8.38) καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως όταν η κατανομή ισορροπίας G_e ανήκει στην κλάση $HNBUE$ ($HNWUE$) τότε

$$\frac{E(Y_1^3)}{6\mu_H} - \frac{E(Y_1^2)^2}{4\mu_H^2} \leq (\geq) 0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας στο εσωτερικό του ολοκληρώματος της σχέσης (8.37) τη σχέση (8.28). \square

Πόρισμα 8.7.4 Αν $Q_H(t) \leq (\geq) 0$ τότε

$$\frac{E(Y_1^3)}{6\mu_H} - \frac{E(Y_1^2)^2}{4\mu_H^2} \leq (\geq) 0.$$

8.7. Η συνάρτηση $E\nu(t+h) - E\nu(t)$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας στη σχέση (8.37) τη σχέση (8.28) έχουμε

$$\mu_H \int_0^\infty Q_H(x) dx = \frac{E(Y_1^3)}{6\mu_H} - \frac{E(Y_1^2)^2}{4\mu_H^2}. \quad (8.41)$$

Αν λοιπόν $Q_H(t) \leq (\geq) 0$ τότε

$$\frac{E(Y_1^3)}{6\mu_H} - \frac{E(Y_1^2)^2}{4\mu_H^2} \leq (\geq) 0.$$

□

Μια άλλη ποσότητα η οποία απασχόλησε τους Lai και Siegmund (1979) και αργότερα τον Chang (1992) είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$ (τόσο για πεπερασμένο t όσο και για την περίπτωση όπου $t \rightarrow \infty$). Πιο συγκεκριμένα οι Lai και Siegmund (1979) απέδειξαν (σχέση (57) σελίδα 70) ότι η συνδιακύμανση μεταξύ των μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$ για πεπερασμένο t δίνεται από τη σχέση

$$Cov(\nu_H(t), \gamma_t) = \int_0^\infty (E(\gamma_x) - E(\gamma_t)) \sum_{n=0}^\infty P(\nu_H(t) > n, S_n \in t - dx). \quad (8.42)$$

Ο Chang (1992) γενικεύει το παραπάνω αποτέλεσμα, και υπολογίζει τη συνδιακύμανση $Cov(\nu_H(t), \gamma_t^a)$ για $a > 0$. Πιο συγκεκριμένα

$$Cov(\nu_H(t), \gamma_t^a) = \int_0^\infty (E(\gamma_x^a) - E(\gamma_t^a)) \sum_{n=0}^\infty P(\nu_H(t) > n, S_n \in t - dx). \quad (8.43)$$

Επίσης επικαλούμενος τη σχέση (60) του άρθρου των Lai και Siegmund (1979) διατυπώνει την ακόλουθη σχέση για την ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cov(\gamma_t, \nu_H(t)) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \left(E(\gamma_x) - \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H} \right) P(\min_{n \geq 0} S_n > -x) dx. \quad (8.44)$$

Παρατηρούμε ότι τμήμα της παραπάνω σχέσης αποτελούν η μέση τιμή και η ασυμπτωτική μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής γ_t .

Μπορούμε λοιπόν χρησιμοποιώντας τα σχετικά με την τυχαία μεταβλητή γ_t αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων αυτού του κεφαλαίου να παρουσιάσουμε κάποια καινούργια αποτελέσματα για την ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$. Θα αρχίσουμε την ανάλυσή μας με έναν νέο τύπο υπολογισμού της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$ ο οποίος μπορεί να μας δώσει και κάποιες απαντήσεις για το πρόσημο της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης.

8.8. Τυποποιημένη εκθετική οικογένεια κατανομών και τυχαίος περίπατος

Πόρισμα 8.7.5 Η ασυμπτωτική συνδιακύμανση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Cov}(\gamma_t, \nu_H(t)) = -\frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^y \overline{G}_Y(x+y-s) l_H(s) P(\min_{n \geq 0} S_n > -x) ds dy dx. \quad (8.45)$$

Απόδειξη Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας στην σχέση (8.44) τη σχέση (8.31) για $r = 1$. \square

Η σχέση (8.45) μας δίνει τη δυνατότητα να συνδέσουμε το πρόσημο της ασυμπτωτικής συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$ με τη συνάρτηση l_H και κατά συνέπεια με την L_H . Αν λοιπόν η L_H είναι κοίλη (κυρτή) συνάρτηση τότε η l_H θα είναι θετική (αρνητική) και η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών γ_t και $\nu_H(t)$ θα είναι αρνητική (θετική).

Πρόταση 8.7.6 Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών G_Y ανήκει στην κλάση *IMRL* τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Cov}(\gamma_t, \nu_H(t)) \leq 0.$$

Απόδειξη Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.5.1 του Κεφαλαίου 1 για τα κλιμακωτά ύψη, προκύπτει ότι αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών ανήκει στην κλάση *IMRL* τότε η μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής $E(\gamma_x)$ θα είναι αύξουσα συνάρτηση. Δηλαδή θα ισχύει

$$E(\gamma_x) \leq E(\gamma_\infty) = \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εισάγοντας την παραπάνω ανισότητα στη σχέση (8.44). \square

8.8 Τυποποιημένη εκθετική οικογένεια κατανομών και τυχαίος περίπατος

Ο Chang (1992) στην προσπάθειά του να μελετήσει τις ροπές του πρώτου κλιμακωτού ύψους (first ladder height moments) εισάγει την ακόλουθη μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_\theta(x) = e^{\theta x - k(\theta)} f_0(x).$$

Η κατανομή F_0 η οποία αντιστοιχεί στην παράμετρο $\theta = 0$ έχει μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με την μονάδα. Η συνάρτηση k που περιέχεται στην παραπάνω σχέση

8.8. Τυποποιημένη εκθετική οικογένεια κατανομών και τυχαίος περίπατος

είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής F_θ .

Οι σχέσεις που ορίσαμε στην Ενότητα 8.3 θα χρησιμοποιηθούν και σε αυτή την ενότητα, με την μόνη διαφορά ότι θα συνοδεύονται από τον δείκτη θ για να δώσουμε έμφαση στην μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών που ορίσαμε παραπάνω.

Πιο συγκεκριμένα αντίστοιχη σχέση της (8.8) για την μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών είναι η

$$E\nu_{\theta_H}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_\theta(S_{T_k} \leq x), \quad (8.46)$$

όπου T_k είναι το k -στο κλιμακωτό διάστημα (ladder epoch) το οποίο ορίσαμε στη σχέση (8.5). Η σχέση (8.46) γράφεται ισοδύναμα

$$E\nu_{\theta_H}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_\theta(S_{T_k} \leq x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_\theta(Y_k \leq x). \quad (8.47)$$

Ορίζοντας με $G_{\theta_Y}(x) = P_\theta(Y_1 \leq x)$ και με $G_{\theta_Y}^{(k)} = P_\theta(\sum_{i=1}^k Y_i \leq x)$, βλέπουμε ότι η σχέση (8.47) γράφεται

$$E\nu_{\theta_H}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_{\theta_Y}(x)$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (8.9) η παραπάνω σχέση γράφεται

$$E\nu_{\theta_H}(x) = 1 + M_{\theta_H}(x).$$

Ο Chang (1992) αναφέρει (σχέση (2) σελίδα 721) ότι για κάποιο $a > 0$ και καθώς $x \rightarrow \infty$ ισχύει η παρακάτω σχέση για τη $E\nu_{\theta_H}(x)$,

$$E\nu_{\theta_H}(x) = \frac{x}{E_\theta(Y_1)} + \frac{E_\theta(Y_1^2)}{2E_\theta(Y_1)^2} + O(e^{-ax}).$$

Τα επόμενα δύο θεωρήματα θα αποτελέσουν βασικά εργαλεία για την ανάλυσή μας.

Θεώρημα 8.8.1 Υπό την υπόθεση ότι η οικογένεια $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ είναι μια τυποποιημένη εκθετική οικογένεια και F_0 είναι *strongly non lattice* τότε υπάρχουν $a > 0$, $\theta^* > 0$ και $C > 0$ τέτοια ώστε :

$$\left| E\nu_{\theta_H}(x) - \frac{x}{E_\theta(Y_1)} - \frac{E_\theta(Y_1^2)}{2E_\theta(Y_1)^2} \right| \leq Ce^{-ax}.$$

8.8. Τυποποιημένη εκθετική οικογένεια κατανομών και τυχαίος περίπατος

Απόδειξη Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον Siegmund (1979). □

Θεώρημα 8.8.2 *Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8.8.1 υπάρχει $a > 0$, $\theta^* > 0$ και C τέτοια ώστε*

$$|P_\theta((\gamma_x \leq y) - P_\theta((\gamma_\infty \leq y))| \leq Ce^{-a(x+y)}, \quad (8.48)$$

για κάθε $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $\theta \in [0, \theta^*]$.

Απόδειξη Για την απόδειξη παραπέμπουμε τους αναγνώστες στον Chang (1992) σελίδα 723. □

Ο Chang (1992) κατάφερε να κατασκευάσει το φράγμα που δίνεται από τη σχέση (8.48) για την απόλυτη διαφορά $P_\theta(\gamma_x \leq y) - P_\theta(\gamma_\infty \leq y)$ χωρίς να έχει κατασκευάσει μια σχέση υπολογισμού της διαφοράς αυτής. Σε αυτό τη σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι με την βοήθεια των σχέσεων (8.21) και (8.25) μπορούμε να υπολογίσουμε την παραπάνω διαφορά. Πιο συγκεκριμένα

$$P_\theta((\gamma_x \leq y) - P_\theta((\gamma_\infty \leq y)) = - \int_0^y \bar{G}_{\theta_Y}(x + y - s)l_H(s)ds.$$

Πόρισμα 8.8.3 *Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8.8.1 υπάρχει $a > 0$, $\theta^* > 0$ και C τέτοια ώστε*

$$\left| \int_0^y \bar{G}_{\theta_Y}(x + y - s)l_H(s)ds \right| \leq Ce^{-a(x+y)}, \quad (8.49)$$

για $x \geq 0$, $y \geq 0$, και $\theta \in [0, \theta^*]$.

Απόδειξη Με τη βοήθεια των σχέσεων (8.25) και (8.21) η διαφορά $P_\theta((\gamma_x \leq y) - P_\theta((\gamma_\infty \leq y))$ γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_\theta((\gamma_x \leq y) - P_\theta((\gamma_\infty \leq y)) &= P_\theta((\gamma_\infty \geq y) - P_\theta((\gamma_x \geq y)) \\ &= - \int_0^y \bar{G}_{\theta_Y}(x + y - s)l_{\theta_H}(s)ds. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (8.48). □

8.8. Τυποποιημένη εκθετική οικογένεια κατανομών και τυχαίος περίπατος

Στην Πρόταση 8.6.4 υπολογίσαμε μέσω της σχέσης (8.31) την ροπή r τάξης της τυχαίας μεταβλητής γ_t . Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση για την τυποποιημένη μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών με παράμετρο $\theta \in \Theta$ έχουμε:

$$E_\theta(\gamma_t^r) = \frac{E_\theta(Y_1^{r+1})}{(r+1)E_\theta(Y_1)} - r \int_0^\infty \int_0^y y^{r-1} \bar{G}_{\theta_Y}(t+y-s) l_{\theta_H}(s) ds dy. \quad (8.50)$$

Μπορούμε λοιπόν χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.49) να κατασκευάσουμε ένα διπλό φράγμα για το διπλό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής.

Πόρισμα 8.8.4 Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος 8.8.1 τότε για οποιαδήποτε $a \geq 1$ υπάρχει $r > 0$, $\theta^* > 0$ και $C > 0$ έτσι ώστε

$$\left| \int_0^\infty \int_0^y y^{a-1} \bar{G}_{\theta_Y}(t+y-s) l_{\theta_H}(s) ds dy \right| \leq \frac{C\Gamma(a)}{r^a} e^{-rt},$$

για $t \geq 0$ και $\theta \in [0, \theta^*]$.

Απόδειξη Η σχέση (8.49) γράφεται

$$-Ce^{-a(t+y)} \leq \int_0^y \bar{G}_{\theta_Y}(t+y-s) l_{\theta_H}(s) ds \leq Ce^{-a(t+y)}.$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της παραπάνω ανισότητας με ay^{a-1} και ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς y στο διάστημα $[0, \infty)$. \square

Κεφάλαιο 9

Ανανεωτική συνάρτηση και τυχαίος περίπατος

9.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε την εξίσωση ανανεωτικού τύπου (σχέση (1.5)) ειδική περίπτωση της οποίας αποτελεί η σχέση (1.2). Θυμίζουμε ότι η ανανεωτική συνάρτηση σε μια ανανεωτική διαδικασία, μετράει τον μέσο αριθμό ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$.

Σε έναν τυχαίο περίπατο το παραπάνω διάστημα επεκτείνεται σε όλο τον αρνητικό ημιάξονα. Για την ανανεωτική συνάρτηση θα διατηρήσουμε τον ίδιο συμβολισμό με εκείνον που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 1 και η οποία για την περίπτωση του τυχαίου περιπάτου ορίζεται ως εξής

$$U(t) = U\{(-\infty, t]\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq t). \quad (9.1)$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω άθροισμα ξεκινάει από το μηδέν ενώ η ανανεωτική συνάρτηση σε μια ανανεωτική διαδικασία ξεκινάει από την μονάδα. Ο Gut (1983) ορίζει τη συνάρτηση $\Xi(t)$ ως εξής

$$\Xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\{S_n \leq t\}. \quad (9.2)$$

Από τις σχέσεις (9.1) και (9.2) προκύπτει ότι

$$U(t) = 1 + \Xi(t). \quad (9.3)$$

9.2. Γνωστά φράγματα για την $U(t)$

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω δημιουργείται η ανάγκη επέκτασης του ορισμού της εξίσωσης ανανεωτικού τύπου που εισάγαμε στο Κεφάλαιο 1 (σχέση (1.5)) ως εξής

$$\Psi(t) = \psi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t-x)dW(x). \quad (9.4)$$

Όσον αφορά την ανανεωτική συνάρτηση ο Feller (1971) αναφέρει ότι ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση

$$U(t) = 1_{[0,\infty)}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} U(t-x)f(x)dx. \quad (9.5)$$

Ο Alsmeyer (1991) θέτει στη σχέση (9.4) όπου $\Psi(t) = U(t) - \mu^{-1}t_+$, με $t_+ = \max\{0, t\}$, $W = F(t)$ και αντικαθιστά τη συνάρτηση $\psi(t)$ με τις παρακάτω ποσότητες

$$\psi(t) = \begin{cases} \mu^{-1} \int_t^{\infty} \bar{F}(y)dy & \text{για } t \geq 0, \\ \mu^{-1} \int_{-\infty}^t (F(t-y)dy & \text{για } t < 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Η συνάρτηση $\psi(t)$ είναι γνωστή και με τον όρο "integrated tail function of F ". Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η ανανεωτική συνάρτηση ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση ανανεωτικού τύπου,

$$U(t) = \begin{cases} \mu^{-1}t + \mu^{-1} \int_t^{\infty} \bar{F}(y)dy + \int_{-\infty}^t \left(U(t-x) - \frac{t-x}{\mu} \right) f(x)dx & \text{για } t \geq 0, \\ \mu^{-1} \int_{-\infty}^t (F(t-y)dy + \int_{-\infty}^t \left(U(t-x) - \frac{t-x}{\mu} \right) f(x)dx & \text{για } t \leq 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Γνωρίζουμε επίσης (Carlsson (1983)) ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης $U(t) - t\mu^{-1}$ τείνει σε μια σταθερή ποσότητα και πιο συγκεκριμένα,

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \rightarrow \frac{\mu_2}{2\mu^2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

9.2 Γνωστά φράγματα για την $U(t)$

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε κάποια γνωστά φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση τα οποία στην συνέχεια θα μας βοηθήσουν να κατασκευάσουμε βελτιωμένα φράγματα.

9.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Ο Stone (1972) απέδειξε ότι για κάθε t ένα πάνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση είναι το

$$0 \leq U(t) - \frac{t_+}{\mu} \leq \frac{\mu_2}{\mu^2}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (9.8)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να κατασκευάσουμε επίσης φράγματα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$.

Για $t \geq 0$ η σχέση (9.8) γράφεται

$$\frac{t}{\mu} \leq U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2}, \quad t \geq 0, \quad (9.9)$$

και κατά συνέπεια

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2}, \quad t \geq 0.$$

Ο Daley (1980) κατασκευάζει πάνω και κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση τόσο για $t \geq 0$ όσο και για $t < 0$. Στην προσπάθεια του αυτή χρησιμοποιεί εκτός των τυχαίων μεταβλητών X και X_+ την τυχαία μεταβλητή M την οποία ορίζει ως εξής

$$M = - \inf_{\{n \geq 0\}} S_n.$$

Απέδειξε λοιπόν ότι ένα διπλό φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση για $t \geq 0$ είναι το

$$\frac{t}{\mu} + \frac{E(M)}{\mu} \leq U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{\mu}, \quad (9.10)$$

με τη μέση τιμή $E(M)$ να υπολογίζεται ως εξής

$$E(M) = \frac{\mu_2}{2\mu} - \frac{E(Y_1^2)}{2\mu_H}.$$

Αντίστοιχα για $t < 0$ η ανανεωτική συνάρτηση φράσσεται ως εξής

$$\frac{E(M+t)_+}{\mu} \leq U(t) \leq \left(\frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{2\mu} \right) P(M > -t). \quad (9.11)$$

9.3 Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Σε αυτή την ενότητα αντικαθιστώντας τα φράγματα του Stone και Daley στη σχέση (9.5) θα κατασκευάσουμε καινούργια φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση. Μια αντίστοιχη προσπάθεια για την κατασκευή φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση στην ανανεωτική θεωρία έγινε από τους Politis και Koutras (2006).

9.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Πόρισμα 9.3.1 Ένα πάνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση σε έναν τυχαίο περίπατο είναι το

$$U(t) \leq 1_{[0,\infty)}(t) + \frac{t}{\mu}F(t) - \int_{-\infty}^t \frac{yf(y)}{\mu}dy + \frac{\mu_2}{\mu^2}. \quad (9.12)$$

Απόδειξη Η σχέση (9.5) γράφεται

$$U(t) = 1_{[0,\infty)}(t) + \int_{-\infty}^t U(t-x)f(x)dx + \int_t^{\infty} U(t-x)f(x)dx. \quad (9.13)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση (9.8) έχουμε

$$U(t) \leq 1_{[0,\infty)} + \int_{-\infty}^t \left(\frac{t-x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} \right) f(x)dx + \frac{\mu_2}{\mu^2} \int_t^{\infty} f(x)dx,$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις. \square

Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.7) και το φράγμα του Daley, προκύπτουν τα επόμενα δύο αποτελέσματα.

Πρόταση 9.3.2 Ένα πάνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ σε έναν τυχαίο περίπατο είναι το

$$U(t) \leq 1_{[0,\infty)}(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{\mu} + \frac{t}{\mu}F(t) - \int_{-\infty}^t \frac{xf(x)}{\mu}dx, \quad \infty < t < \infty. \quad (9.14)$$

Απόδειξη Για την απόδειξη του παραπάνω φράγματος θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (9.13) και τα φράγματα που περιγράφονται από τις σχέσεις (9.10) και (9.11). Ένα πάνω φράγμα για το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (9.13), με τη βοήθεια της σχέσης (9.10) είναι το

$$\int_{-\infty}^t U(t-x)f(x)dx \leq \left(\frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{\mu} \right) F(t) + \frac{t}{\mu}F(t) - \int_{-\infty}^t \frac{xf(x)}{\mu}, \quad t \geq 0. \quad (9.15)$$

Αντίστοιχα ένα πάνω φράγμα για το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (9.13) μπορεί να κατασκευαστεί με τη βοήθεια της σχέσης (9.11). Πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} U(t-x)f(x)dx &\leq \int_t^{\infty} \frac{E(M+t-x)_+}{\mu} f(x)dx \\ &+ \left(\frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{2E(M)}{\mu} \right) \int_t^{\infty} P(M > -t+x)f(x)dx. \end{aligned} \quad (9.16)$$

9.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Όμως $E(M + t - x)_+ \leq E(M)$ για κάθε $x \geq t$. Επίσης $P(M > -t + x) \leq 1$. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω το ολοκλήρωμα η σχέση (9.16) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_t^\infty U(t-x)f(x)dx &\leq \frac{E(M)}{\mu}\bar{F}(t) + \left(\frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{2E(M)}{\mu}\right)\bar{F}(t) \\ &= \left(\frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{\mu}\right)\bar{F}(t), \quad t < 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας τις σχέσεις (9.16) και (9.17) στη σχέση (9.13). \square

Πρόταση 9.3.3 Ένα κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ σε έναν τυχαίο περίπατο είναι το

$$U(t) \geq 1_{[0,\infty)}(t) + \left(\frac{E(M)}{\mu} + \frac{t}{\mu}\right)F(t) - \int_{-\infty}^t \frac{xf(x)}{\mu}dx + \int_t^\infty \frac{E(M+t-x)_+}{\mu}f(x)dx. \quad (9.18)$$

Απόδειξη Αντικαθιστώντας τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση από τις σχέσεις (9.10) και (9.11) στη σχέση (9.13) έχουμε,

$$\begin{aligned} U(t) &\geq 1_{[0,\infty)}(t) + \int_{-\infty}^t \left(\frac{E(M)}{\mu} + \frac{t-x}{\mu}\right)f(x)dx + \int_t^\infty \frac{E(M+t-x)_+}{\mu}f(x)dx \\ &= 1_{[0,\infty)}(t) + \left(\frac{E(M)}{\mu} + \frac{t}{\mu}\right)F(t) - \int_{-\infty}^t \frac{xf(x)}{\mu}dx + \int_t^\infty \frac{E(M+t-x)_+}{\mu}f(x)dx. \end{aligned}$$

\square

Έχοντας κατασκευάσει πάνω και κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση σε έναν τυχαίο περίπατο μπορούμε να κατασκευάσουμε φράγματα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 9.3.4 Ένα πάνω φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ σε έναν τυχαίο περίπατο είναι το,

$$\begin{aligned} U(t+x) - U(t) &\leq 1_{[0,\infty)}(t+x) - 1_{[0,\infty)}(t) + \frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{\mu} (1 + F(t)) \\ &\quad + \frac{t}{\mu}(F(t+x) - F(t)) + \frac{x}{\mu}F(t+x) - \int_t^{t+x} \frac{yf(y)}{\mu}dy \\ &\quad - \int_t^\infty \frac{E(M+t-x)_+}{\mu}f(x)dx, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

9.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Απόδειξη Αντικαθιστώντας στη σχέση (9.14) όπου $t = t + x$ έχουμε

$$U(t+x) \leq 1_{[0,\infty)}(t+x) + \frac{\mu_2}{\mu^2} - \frac{E(M)}{\mu} + \frac{t+x}{\mu} F(t+x) - \int_{-\infty}^{t+x} \frac{xf(x)}{\mu} dx, \quad \infty < t < \infty. \quad (9.19)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (9.18) με -1 προκύπτει ότι

$$-U(t) \leq -1_{[0,\infty)}(t) - \left(\frac{E(M)}{\mu} + \frac{t}{\mu} \right) F(t) + \int_{-\infty}^t \frac{xf(x)}{\mu} dx - \int_t^{\infty} \frac{E(M+t-x)_+}{\mu} f(x) dx. \quad (9.20)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται προσθέτοντας τις σχέσεις (9.19) και (9.20). \square

9.3.1 Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση βασιζόμενα στο φράγμα του Stone

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιώντας από την μια τις εξισώσεις ανανεωτικού τύπου που παρουσιάσαμε (σχέσεις (9.5) και (9.7)) προηγουμένως σε αυτό το κεφάλαιο και από την άλλη τα φράγματα του Stone (1962) θα κατασκευάσουμε καινούργια φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση σε έναν τυχαίο περίπατο.

Πόρισμα 9.3.5 Σε έναν τυχαίο περίπατο ένα κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση για $t \geq 0$ είναι το

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu} + \bar{G}_R(t), t \geq 0, \quad (9.21)$$

όπου

$$\bar{G}_R(t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{\infty} \bar{F}(z) dz.$$

Επίσης ένα πάνω φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ για $t \geq 0$ δίνεται από τη σχέση

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} - \bar{G}_R(t), t \geq 0. \quad (9.22)$$

Απόδειξη Η σχέση (9.21) προκύπτει συνδυάζοντας τον πάνω κλάδο της σχέσης (9.7) και το φράγμα του Stone (σχέση (9.9)). Πιο συγκεκριμένα για $t \geq 0$, από τη σχέση (9.9) προκύπτει ότι $U(t) - t\mu^{-1} \geq 0$.

Αντικαθιστώντας αυτή την ανισότητα στον πάνω κλάδο της σχέσης (9.7) προκύπτει ότι

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu} + \bar{G}_R(t).$$

9.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Έτσι ένα καλύτερο φράγμα από το φράγμα που εκφράζει η σχέση (9.9) είναι το

$$\frac{t}{\mu} + \overline{G}_R(t) \leq U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2}, t \geq 0. \quad (9.23)$$

Και κατά συνέπεια ένα βελτιωμένο φράγμα για την διαφορά $U(t+x) - U(t)$ είναι το

$$U(t+x) - U(t) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} - \overline{G}_R(t), t \geq 0.$$

□

Μια αντίστοιχη σχέση της (9.21), παρουσιάζουν οι Politis και Koutras (2006) για την ανανεωτική συνάρτηση στην ανανεωτική θεωρία (σχέση 7 σελίδα 233). Η σχέση (9.21) αποτελεί γενίκευση αυτής των Politis και Koutras (2006) μιας και η συνάρτηση κατανομής F ορίζεται τόσο για θετικές όσο και για αρνητικές τιμές, ενώ στην ανανεωτική θεωρία ορίζεται μόνο για θετικές.

9.3. Νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Βιβλιογραφία

Α.Ελληνική

Δερμιτζάκης, Ν.Β (2011) Μελέτη ανανεωτικών εξισώσεων με εφαρμογές στην θεωρία χρεοκοπίας, Διδακτική διατριβή, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά

Πολίτης Κ. (2017) Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Β έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλης

Β.Ξενόγλωσση

Alsmeyer, G. (1991). Erneuerungstheorie: Analyse stochastischer Regenerationsschemata. Teubner, Stuttgart

Asmussen, S. (2003) *Applied Probability and Queues*. 2nd edition. Wiley, New York.

Balakrishnan, N and Lai,C.(2008) *Continuous Bivariate Distributions*, Second edition, Springer.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*.:Probability Models, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. To begin with, Silver Spring, MD.

Brown, M. (1980) Bounds, Inequalities, and Monotonicity Properties for Some Specialized Renewal Processes. *Ann. Prob.*, **8**, 227-240.

Brown, M. (1981) Further Monotonicity Properties for Specialized Renewal Processes. *Ann. Prob.*, **Vol 9, No 5**, 891-895

Brown, M. (1987) Inequalities for distributions with increasing failure rate. In *Contributions to the Theory and Applications of Statistics, A Volume in Honor of Herbert Solomon* (A. E. Gelfand, ed.) 3-17. Academic, Orlando, Florida.

- Carlsson, H. (1983) Remainder term estimates for the renewal function. *Ann. Prob.*, **11**, 143–157.
- Chang, J (1989) Random walks, moderate deviations, and the cusum procedure. Stanford University Technical report No 2.
- Chang, J (1992) On moments of the first ladder height of random walks with small drift. *Annals of Applied Probability*, **Vol 2, No 3**, 714–738.
- Chang, J (1994) Inequalities of the overshoot. *Annals of Applied Probability*, **Vol 4, No 4**, 1223–1233.
- Chen, Y-H. (1994) Classes of life distributions and renewal counting processes. *J. Appl. Prob.*, **31**, 1110-1115.
- Coleman, R (1982) The moments of forward recurrence time, *European Journal of Operational Research*, **vol. 9**, issue 2, 181-183
- Daley, D.J., Vere-Jones, D. (2003) *An Introduction to the Theory of Point Processes* (Vol. I). Springer-Verlag, New York.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005) *Actuarial Theory for Dependent Risks*. Wiley, Chichester, UK.
- Esary, J.D., Proschan, F. (1972): Relationships among some bivariate dependences. *Annals of Mathematical Statistics* **43**, 651–655
- Esary, J.D., Proschan, F., Walkup, D.W. (1967): Association of random variables, with applications. *Annals of Mathematical Statistics* **38**, 1466–1474
- Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II, 2nd edition. Wiley, New York.
- Gakis, K.G , Sivazlian, B.D (1994) The correlation of the backward and forward recurrence times in a renewal process. *Stochastic Analysis and Applications.*, **12:5**, 543-549.
- Geluk, J.L. and Frenk, J.B.G. (2011) Renewal theory for random variables with a heavy tailed distribution and finite variance. *Stat. Prob. Letters*, **81**, 77–82.
- Gupta R. C (1984) Some characterizations of renewal densities with emphasis in reliability. *Series Statistics*, 15:4, 571-579
- Gupta A.K et al (2010) *Probability and Statistical Models Foundations for Problems in Reliability and Financial Mathematics*.
- Gut, A. (1983) *Stopped Random Walks limit theorems and applications* (**Vol. I**). Springer-Verlag, New York.

- Harris, R. (1960) A lower bound for critical probability in a certain percolation model. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **56**, 13–20
- Harris, R. (1970) A multivariate definition for increasing hazard rate distribution. *Annals of Mathematical Statistics* **41**, 713–717
- Janssen, J and Manca, R. (2005) *Applied semi-markov processes*. Springer Verlag, New York.
- Kimeldorf, G., Sampson, A.R. (1987): Positive dependence orderings. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **39**, 113–128
- Lai, C-D, and Xie, M. (2006) *Stochastic Ageing and Dependence in Reliability*. Springer Verlag, New York.
- Lai T.L and Siegmund (1979) A nonlinear renewal theory with applications to sequential analysis II *The Annals of statistics*, **Vol 7 No 1**, 60–76.
- Lehmann, E.L. (1966) Some concepts of dependence. *Annals of Mathematical Statistics* **37**, 1137–1153
- Lorden, G. (1970) On excess over the boundary. *Ann. Math. Stat.*, **41**, 520-527.
- Losidis, S. and Politis, K. (2017) A two-sided bound for the renewal function when the interarrival distribution is IMRL. *Stat. Prob. Letters*, **125**, 164-170.
- Marshall, A.W and Olkin, I. (2007) *Life distributions*, Springer
- Marshall, K. T. (1973) Linear bounds on the renewal function. *Siam J. Appl. Math*, **24**, 245-250.
- Politis, K. and Koutras, M.V. (2006) Some new bounds for the renewal function. *Prob. Eng. Inf. Sci.*, **20**, 231–250.
- Psarrakos, G. and Politis, K. (2012) The Covariance Between the Surplus Prior to and at Ruin in the Classical Risk Model. *ASTIN Bulletin*, **42**(2), 631–653.
- Ross, S. (1996) *Stochastic Process*. 2nd edition, Wiley, New York.
- Serfozo, R. (2009) *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.
- Shaked, M. (1977) : A concept of positive dependence for exchangeable random variables. *Annals of Statistics* **5**, 505–515
- Shaked, M. (1979): Some concepts of positive dependence for bivariate interchangeable distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **31**, 67–84

- Shaked, M. (1982): A general theory of some positive dependence notions. *Journal of Multivariate Analysis* **12**, 199–218
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007) *Stochastic Orders*. Springer, New York, N.Y.
- Shaked, M. and Zhu, H. (1992) Some results on block replacement policies and renewal theory. *J. Appl. Prob.*, **29**, 932-946.
- Steele, J. M. (2004) *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. The Mathematical Association of America.
- Stone, C. J. (1966) On absolutely continuous components and renewal theory. *Ann. Math. Stat.*, **37**, 271–275.
- Stone, C. J. (1972) An upper bound for the renewal function. *Ann. Math. Stat.*, **43**, 2050-2052.
- Tijms, H. (2003) *A First Course in Stochastic Models*. 2nd edition. Wiley, New York.
- Willmot, G. E. and Lin, X. (2001) *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer, New York.
- Willmot, G. E. (2002) On higher-order properties of compound geometric distributions. *J. Appl. Prob.*, **39**, 324-340.
- Yangimoto, T. (1972): Families of positive random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **26**, 559–557