ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Π.Μ.Σ. στην «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου»

«Ευκαιρίες Βέβαιου Κέρδους στην Αντιστάθμιση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων»

Γεράσιμος Χ. Γεωργούσης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου

Πειραιάς, Μάιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Π.Μ.Σ. στην «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου»

«Ευκαιρίες Βέβαιου Κέρδους στην Αντιστάθμιση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων»

Γεράσιμος Χ. Γεωργούσης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου

Πειραιάς, Μάιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
Β. Σεβρόγλου (Επιβλέπων)
Α. Κυριαζής
Γ. Βερροπούλου

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

Postgraduate Program in “Actuarial Science and Risk Management”

“Arbitrage Opportunities to Derivative Hedging”

By

Gerasimos C. Georgousis

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, May 2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας, καθώς και για την άριστη συνεργασία μας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Αθανάσιο Κυριαζή, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και την κυρία Γεωργία Βερροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω, τους γονείς μου, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν, κατά την διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών, αλλά και για την στήριξη τους σε όλη την πορεία της ζωής μου.

Στους γονείς μου και
την αδερφή μου

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τον ρόλο που παίζουν οι τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους και οι επιπτώσεις τους στην αντιστάθμιση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ιδιαίτερα, θα επεκτείνουμε την ασυμπωτική θεωρία τιμολόγησης και θα εστιάσουμε τη μελέτη μας στην εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης αντιστάθμισης, τα οποία υιοθετούν το μέγεθος του κινδύνου του βέβαιου κέρδους στον οποίο επιτρέπεται να εκτίθεται ένας επενδυτής. Επίσης θα δείξουμε ότι οι προκύπτουσες ζώνες αντιστάθμισης είναι ανεξάρτητες από τα λεπτομερή στατιστικά χαρακτηριστικά των ευκαιριών βέβαιου κέρδους. Επιπλέον, θα δώσουμε αριθμητικά αποτελέσματα θεωρίας τιμολόγησης σχετικά με την αντιστάθμιση, τα οποία θα εστιάσουν στις μέγιστες αποκλίσεις του αποτελεσματικού λόγου αντιστάθμισης από τον συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης Black–Scholes και τέλος θα δώσουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα αυτά είναι συνεπή με την εμπειρική δουλειά στην βιβλιογραφία.

Abstract

In this work random arbitrage opportunities and their implications in hedging for pricing financial derivatives will be studied. In particular, we will extend the asymptotic pricing theory and we will focus our study to discover confidence intervals for hedging. Hedging confidence intervals and their linchpin to the amount of arbitrage risk an investor will permit to be exposed to will be founded. Moreover, sufficient evidence in order to indicate that the resulting hedging zones are independent of the detailed statistical characteristics of certain profit opportunities will be provided. In addition, numerical results based on pricing theory about hedging, which will focus on effective hedging ratio's largest deviations from the usual Black-Scholes hedging ratio will be provided, and finally useful conclusions will be given. Note that the results are consistent with empirical work in the literature.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι ασφαλιστικές εταιρείες αφορούν κυρίως την διαχείριση των κινδύνων τους. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος αποτελεσματικής διαχείρισης των κινδύνων είναι ο κλάδος των ασφαλίσεων. Με τον όρο ασφάλιση, εννοούμε την μεταφορά μέρους του κινδύνου σε εξειδικευμένα άτομα (ασφαλιστές) έναντι ενός ασφαλίστρου με στόχο την αποζημίωση των ασφαλισμένων σε περίπτωση ζημιάς [8].

Μια άλλη τεχνική που εφαρμόζεται για την διαχείριση των κινδύνων είναι η αντιστάθμιση χρηματοοικονομικών παραγωγών. Πιο συγκεκριμένα, αυτή η τεχνική καλύπτει τις απώλειες κεφαλαίων που μπορεί να προκύψουν. Τα κεφάλαια αυτά χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση του συναλλαγματικού και του επιτοκιακού κινδύνου.

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα, τα οποία θα αναλυθούν εκτενώς σε επόμενα κεφάλαια της εργασίας, είναι γνωστά από τα αρχαία χρόνια. Ειδικότερα, το έργο του Αριστοτέλη «Πολιτικά», αποτελεί την αρχική πηγή των παραγώγων, με χαρακτηριστική αναφορά στον Θαλή τον Μιλήσιο, ο οποίος προβλέπει την σοδειά του επόμενου έτους και αποφασίζει να αγοράσει δικαίωμα χρήσης του ελαιοτριβείου. Η πρώτη οργανωμένη διαπραγμάτευση αυτών των προϊόντων έγινε το 1688 στο χρηματιστήριο του Άμστερνταμ και αφορούσε δικαιώματα προαίρεσης στο βολβό της τουλίπας. Το 1973 στο Σικάγο λειτούργησε το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων, ενώ στην συνέχεια ακολούθησαν τα χρηματιστήρια του Μόντρεαλ, της Νέας Υόρκης, κλπ. Στην Ελλάδα το 1999, δημιουργήθηκε το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών, το οποίο αποτέλεσε την πρώτη οργανωμένη αγορά παραγώγων στην χώρα μας [19].

Αφού ολοκλήρωσαμε την σύντομη ιστορική αναδρομή, θα συνεχίσουμε κάνοντας μια μικρή ανασκόπηση σε κάθε κεφάλαιο χωριστά, η οποία θα αποτελέσει το επιστέγασμα για την καλύτερη αφομοίωση του θέματος που μελετάμε από τον αναγνώστη. Η εργασία μας διαρθρώνεται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και δίνονται παραδείγματα που αφορούν μαθηματικές έννοιες της θεωρίας των Πιθανοτήτων, δηλαδή την σ-άλγεβρα, το μέτρο πιθανότητας, την ανεξαρτησία και την δεσμευμένη πιθανότητα. Στη συνέχεια του κεφαλαίου εισάγουμε τις έννοιες και τους ορισμούς της στοχαστικής διαδικασίας, της κίνησης Brown, της αριθμητικής και γεωμετρικής κίνησης Brown, της διαδικασίας Ornestein–Uhlenbeck, ενώ δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στο στοχαστικό ολοκλήρωμα του Ito, παραθέτοντας ξανά παραδείγματα που αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση όσων αναφέρθηκαν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο συνεχίζουμε με τις έννοιες που αφορούν τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα, τις κατηγορίες στις οποίες αυτά διακρίνονται, ενώ επικεντρωνόμαστε ιδιαίτερα στα δικαιώματα προαίρεσης. Ένα σημαντικό σημείο που χρήζει ιδιαίτερης σημασίας και προσοχής είναι η τιμολόγηση των παραγώγων. Για να γίνουν όλα αυτά σαφή και κατανοητά παρατίθενται διάφορα παραδείγματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, το οποίο θα αποτέλεσει και το βασικό αντικείμενο της μελέτης μας, παρουσιάζουμε μια ασυμπτωτική θεωρία τιμολόγησης η οποία βασίζεται στο κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ) για την τιμολόγηση ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης, και εστιάζει στην εύρεση ζωνών τιμολόγησης για ένα δικαίωμα προαίρεσης. Η μέθοδος αυτή είναι απαραίτητη για την αποθήκευση του κόστους της αντιστάθμισης σε ένα τυχαίο περιβάλλον βέβαιου κέρδους. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται εφαρμογές, αριθμητικά παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις ενώ στην συνέχεια ακολουθούν κάποια αξιοσημείωτα συμπεράσματα σχετικά με την μεθοδολογία που εφαρμόστηκε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1ο Κεφάλαιο

Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε βασικές έννοιες και ορισμούς που αφορούν τις στοχαστικές διαδικασίες, με στόχο την καλύτερη κατανόηση από τον αναγνώστη των θεμάτων που θα πραγματευτούν στα επόμενα κεφάλαια. Θεωρούμε ένα τυχαίο πείραμα τύχης. Αν το αποτέλεσμά του είναι αριθμός τότε θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή W για την οποία ισχύει $W \in R$. Αν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι n αριθμοί, τότε θεωρούμε τυχαίο δείγμα $W = (W_1, W_{2,} \dots, W_n) \in R^n$. Επίσης υπάρχουν πειράματα τύχης με πιο σύνθετο σύνολο αποτελεσμάτων όπως είναι για παράδειγμα η παρακολούθηση μιας διαδικασίας αφίξεων επιβατών σε μια στάση του μετρό, καθώς επίσης και η παρακολούθηση της πορείας της τιμής μιας μετοχής κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την τιμή μιας ή περισσότερων μεταβλητών όπως είναι το πλήθος των αφίξεων ή τιμή της μετοχής. Για να επιτευχθεί αυτό θα εισάγουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας[13].

1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες-Βασικές έννοιες

1.1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 1.1.1 *Μια στοχαστική διαδικασία (σ.δ) είναι μια παραμετρική συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{W_t, t \in T\}$, οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, K, P) (ο ορισμός του οποίου θα δοθεί αναλυτικά σε επόμενες παραγράφους) και παίρνουν τιμές στο $R^n, n = 1,2,3, \dots$.*
Μια σ.δ έχει δυο «μεταβλητές» την t και την ω.
1) Για κάθε $t \in T$, έχουμε μια τιμή $W_t(\omega): \omega \in \Omega$.
2) Θεωρώντας $\omega \in \Omega$ σταθερό θεωρούμε την συνάρτηση $t \to W_t(\omega): t \in T$. (Το T είναι ένα διάστημα τέτοιο ώστε $T = [\alpha, \beta]$).
Η τελευταία ονομάζεται τροχιά (path) της W_t.

Διαισθητική Αντιμετώπιση

Ένας τρόπος για να κατανοήσουμε διαισθητικά την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας, είναι να θεωρήσουμε μια συλλογή σωματιδίων τα οποία παρακολουθούμε στον χρόνο. Θεωρούμε ότι t είναι ο χρόνος ο οποίος μπορεί να είναι είτε διακριτός είτε συνεχής, ενώ το ω θα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ή πείραμα. Η συγκεκριμένη επιλογή του ω θα ονομάζεται μια πραγματοποίηση της σ.δ. Τότε $W_t(\omega)$ θα είναι η θέση του σωματιδίου ω την χρονική στιγμή t.
Ισοδύναμα, μία σ.δ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο πιθανότητας P σε ένα κατάλληλα ορισμένο χώρο μέτρου.

(Ο ορισμός του μέτρου πιθανότητας θα δοθεί στις επόμενες παραγράφους).

Παράδειγμα 1.1.1
(Στοχαστική Διαδικασία με διακριτό σύνολο δεικτών T)

Θεωρούμε ότι ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ότι ω_i, είναι αποτέλεσμα της $i-\rho\acute{\iota}\psi\eta\varsigma$. Θεωρούμε τ.μ W_i με τιμές

$$W_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \omega_i = \kappa o\rho\acute{\omega}\nu\alpha \\ -1, & \alpha\nu\ \omega_i = \gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu\alpha\tau\alpha \end{cases}$$

Η τιμή της W_i, μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος ενός παίκτη κατά την $i-\rho\acute{\iota}\psi\eta$, αν ποντάρει 1 ευρώ στο κατά πόσο έρθει κορώνα ή γράμματα. Οπότε θα έχουμε μια παραμετρική συλλογή τ.μ $\{W_i, i \in N\}$, η οποία είναι μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο.
Η τιμή της W_i είναι τα κέρδη (ή αυτά που έχασε) κατά την διάρκεια του παιχνιδιού.

1.2 Στοιχεία από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Η θεωρία των πιθανοτήτων είναι ο τομέας των μαθηματικών που διερευνά την τυχαιότητα διαφόρων φαινομένων και γεγονότων. Κύριο γνώρισμα της, είναι ότι τα πειράματα που εκτελούνται δεν μπορούν να προβλέψουν με ακρίβεια ένα τελικό αποτέλεσμα κυρίως λόγω της τυχαιότητας, αλλά μπορούν να δώσουν ένα σύνολο από τυχαία δυνατά αποτελέσματα. Διάφορες έννοιες όπως η έννοια της πιθανότητας, οι στοχαστικές διαδικασίες και οι συναρτήσεις κατανομής χρησιμοποιούνται με σκοπό την μελέτη των τυχαίων φαινομένων. Η έννοια της πιθανότητας συγκεκριμένα αποτελεί, το πιο βασικό χαρακτηριστικό για την παρατήρηση των διαφόρων πειραμάτων τύχης, όπως για παράδειγμα είναι η ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού ή το στρίψιμο ενός νομίσματος [8,19].

1.2.1 Σ-άλγεβρα

Όταν αναφερόμαστε στις πιθανότητες λαμβάνουμε υπόψη μας την έννοια του γεγονότος. Με τον όρο γεγονός ή ενδεχόμενο ονομάζουμε ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω, το οποίο συμβολίζεται με κεφαλαία γράμματα, όπως A, B, Γ. Για να γίνει πιο κατανοητή η πιο πάνω έννοια θα εισάγουμε την έννοια της σ-άλγεβρας [6,8].

Ορισμός 1.2.1: *Θεωρούμε ένα σύνολο Ω. Ως σ-άλγεβρα ορίζουμε μια συλλογή K η οποία περιέχει υποσύνολα του Ω και για την οποία ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*
(i) $\emptyset \in K$,
(ii) αν ένα σύνολο $Z \in K$, *τότε και το συπληρωματικό του* Z *θα ανήκει στο* K, *δηλαδή* $Z^C \in K$,
(iii) αν μια ακολουθία $\{Z_n, \mu\varepsilon\, n = 1,2,3 \ldots\} \in K$, *τότε και η ένωση των συνόλων θα ανήκει στο* K, *δηλαδή* $\cup_{n=1}^{\infty} Z_n \in K$ [6,8].

Ορισμός 1.2.2: *Ένα ζεύγος* (Ω, K) *ορίζεται ως μετρήσιμος χώρος με το* Ω *να αποτελεί ένα σύνολο και το* K *μια σ-άλγεβρα* [6,8].

Παράδειγμα 1.2.1

Θεωρούμε ένα σύνολο $\Omega = \{2,4,6,7\}$. Η

$$K = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{4,6\}, \{4,7\}, \{6,7\}, \{4,6\}, \{2,6,7\}, \{2,4,7\}, \{2,4,6\}\}$$

είναι σ-άλγεβρα διότι ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν προηγουμένως και το ζευγάρι (Ω, K) ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.

Παράδειγμα 1.2.2

Έστω ένα σύνολο $\Omega = \{1,3,5,7\}$, τότε η

$$K = \{\Omega, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{1,3,5\}\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα καθώς το στοιχείο $\emptyset$ δεν εμπεριέχεται στο σύνολο, δηλαδή δεν ικανοποιείται η πρώτη ιδιότητα.

Ορισμός 1.2.3: *Ανοικτό υποσύνολο είναι ένα υποσύνολο P του R, δηλαδή $P \in R$, για το οποίο αν για κάθε $x \in P$, υπάρχει ένα $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $(x - \rho, x + \rho) \in P$* [6].

Ορισμός 1.2.4: *Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο $P \in R$. Η οικογένεια του P, παράγει την σ-άλγεβρα του P, και τα στοιχεία της αποτελούν το σύνολο Borel* [6].

1.2.2 Μέτρο Πιθανότητας

Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, K, P), όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος που περιλαμβάνει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, K είναι η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του Ω και P είναι η πιθανότητα του δειγματοχώρου για την οποία ισχύει $P(\Omega) = 1$ [6,8].

Ορισμός 1.2.5 *Το μέτρο πιθανότητας είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:*
i) $P(\Omega) = 1$
ii) $P(B) \geq 0$ *για κάθε* $B \in K$ *και*
iii) αν B_n *με n=1,2,… ισχύει* $B_i \cap B_j = \emptyset$, *για κάθε* $i \neq j$ *τότε* $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$ [6,8].

Παράδειγμα 1.2.3

Θεωρούμε ένα αμερόληπτο ζάρι καθώς και τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ο οποίος μας δείχνει τα δυνατά αποτελέσματα που παίρνουμε από την ρίψη του ζαριού. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$B_1 = \{άρτιος\ αριθμός\} = \{2,4,6\}$$
$$B_2 = \{περιττός\ αριθμός\} = \{1,3,5\}$$

Επειδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα και ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας η πιθανότητα ή η σχετική συχνότητα για κάθε ενδεχόμενο είναι ίδια και θα ισούται με $\frac{1}{6}$.

Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας

$$P(B_n) = \frac{N(B_n)}{N(\Omega)},$$

όπου $N(B_n)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου B_n και $N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου Ω, υπολογίζουμε την πιθανότητα για κάθενα από τα δυο ενδεχόμενα.

Συνεπώς, η πιθανότητα για το πρώτο ενδεχόμενο θα είναι

$$P(B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα για το δεύτερο ενδεχόμενο θα ισούται με

$$P(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1.2.3 Ανεξαρτησία

Η έννοια ανεξαρτησίας παίζει σημαντικό ρόλο στην θεωρία των πιθανοτήτων. Θα παρουσιάσουμε τρεις διαφορετικούς ορισμούς προκειμένου να καταστήσουμε σαφή την έννοια αυτή σε όλες τις εκφάνσεις της. Αρχικά, θα ορίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας για γεγονότα, στην συνέχεια θα συνεχίσουμε με την έννοια της ανεξαρτησίας για τυχαίες μεταβλητές, και στο τέλος θα δώσουμε τον ορισμό της ανεξαρτησίας για συλλογές γεγονότων, δηλαδή για σ-άλγεβρες [6,8].

Ορισμός 1.2.6 *Δυο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, αν*

$$P(AB) = P(A)\ P(B),$$

δηλαδή αυτά τα ενδεχόμενα δεν αλληλοεπηρεάζονται [6].

Ορισμός 1.2.7 *Έστω οι τυχαίες μεταβλητές* Y_i, *με* $i \in I$. *Αυτές οι μεταβλητές ονομάζονται ανεξάρτητες αν οι παραγόμενες σ-άλγεβρες από αυτές είναι ανεξάρτητες* [6].

Ορισμός 1.2.8 *Έστω μια σ-άλγεβρα* K *επάνω σε ένα σύνολο* Ω. *Οι σ-υποάλγεβρες* K_i, *με* $i \in I$ *της* K *καλούνται ανεξάρτητες αν για κάθε υποσύνολο* G *του* I *και κάθε σύνολο* $B_\iota \in K_i$ *ισχύει*

$$P\left(\bigcap_{n \in G} B_n\right) = \prod_{n \in G} P(B_n).$$

Παράδειγμα 1.2.4

Εκτελούμε ένα πείραμα ρίψης δυο τίμιων ζαριών. Ονομάζουμε A το ενδεχόμενο στο οποίο το πρώτο ζάρι θα φέρει άρτιο αριθμό και B ονομάζουμε το ενδεχόμενο στο οποίο το δεύτερο ζάρι θα φέρει περιττό αριθμό. Είναι φανερό, ότι τα δυο αυτά ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους καθώς το ένα αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από το άλλο, με αποτέλεσμα να ισχύει ο τύπος $P(AB) = P(A)\,P(B)$ [8].

Παράδειγμα 1.2.5

[8] Θεωρούμε δυο ανεξάρτητα ενδεχόμενα Γ και Δ. Θα δείξουμε ότι τα ενδεχόμενα Γ' και Δ' είναι επίσης ανεξάρτητα. Πιο συγκεκριμένα

$$P\left(\Gamma^{'} \cap \Delta^{'}\right) = (P\left(\Gamma \cap \Delta\right)^{'}) = 1 - P(\Gamma \cup \Delta)$$

ή

$$P\left(\Gamma^{'} \cap \Delta^{'}\right) = 1 - P(\Gamma) - P(\Delta) + P(\Gamma \cap \Delta)$$

ή

$$P\left(\Gamma^{'} \cap \Delta^{'}\right) = 1 - P(\Gamma) - P(\Delta) + P(\Gamma)P(\Delta)$$

ή

$$P\left(\Gamma^{'} \cap \Delta^{'}\right) = \left(1 - P(\Gamma)\right)\left(1 - P(\Delta)\right)$$

ή

$$P\left(\Gamma^{'} \cap \Delta^{'}\right) = P\left(\Gamma^{'}\right) P(\Delta^{'})$$

1.2.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η δεσμευμένη πιθανότητα, καλείται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, γνωρίζοντας ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί ένα άλλο ενδεχόμενο. Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας θα παραθέσουμε τον ακόλουθο ορισμό [19].

Ορισμός 1.2.9 *Θεωρούμε ένα δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος τύχης, δυο ενδεχόμενα A και B για τα οποία ισχύουν ότι* $A \in \Omega$ *και* $B \in \Omega$ *αντίστοιχα καθώς και μια πιθανότητα* $P(B) > 0$. *Με* $P(A|B)$ *συμβολίζεται η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος B η οποία δίνεται από τον τύπο*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Στην περίπτωση που $P(B) = 0$, *η δεσμευμένη πιθανότητα* $P(A|B)$, *δεν μπορεί να οριστεί* [6,8].

Παράδειγμα 1.2.6

Το 75% των εργαζομένων μιας κατασκευαστικής εταιρείας είναι άνδρες. Από σχετική έρευνα προέκυψε ότι το 20% των εργαζομένων είναι μηχανικοί και το 15% των εργαζομένων είναι άνδρες μηχανικοί. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από την εταιρεία και είναι άνδρας, ποια είναι η πιθανότητα να μηχανικός;
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A το άτομο να είναι μηχανικός, B το άτομο να είναι άνδρας.
Δίνεται ότι $P(A) =\ 20\%, P(B) = 75\%,\ P(AB) = 15\%$

Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα, ότι ένας εργαζόμενος είναι μηχανικός δοθέντος ότι είναι άνδρας, δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε την την $P(A|B)$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.75} = 0.2.$$

Οπότε, η πιθανότητα *ένας* άνδρας να είναι μηχανικός είναι 0.2 ή 20% [11].

1.2.5 Μέση τιμή ή Αναμενόμενη τιμή

Η μέση τιμή ή η αναμενόμενη τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης και αποτελεί ίσως το σπουδαιότερο μέτρο της Στατιστικής ενώ υπολογίζεται σε όλες τις κατανομές [19].

Ορισμός 1.2.10 *Θεωρούμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$. Η μέση τιμή θα δίνεται από την σχέση*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} xf(x),$$

με τον όρο ότι το γινόμενο

$$\sum_{i=1}^{n} |x|\, f(x) < \infty,$$

δηλαδή θα συγκλίνει απόλυτα [6,8].

Ορισμός 1.2.11 *Θεωρούμε μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$. Η μέση τιμή θα δίνεται από τον τύπο*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx,$$

με βασική προϋπόθεση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty,$$

δηλαδή το δεξί μέλος θα συγκλίνει απόλυτα [6,8].

Ιδιότητες της Μέσης τιμής

i) Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές $X \; και \; Y$, και δύο σταθερές $c \; και \; c_1$. Για την μέση τιμή ισχύει ότι

$$E[c\,X + c_1 Y] = c\,E(X) + c_1 E(Y).$$

ii) Όταν $Y = c$, όπου c σταθερά, τότε $E(Y) = c$.
iii) Όταν $Y \leq X$, τότε $E(Y) \leq E(X)$.
iv) Όταν $Y \geq 0$ τότε $\mathrm{E}(Y) = \int Y\,dP = 0$ αν και μόνο αν $Y = 0$, όπου P μέτρο πιθανότητας [8].

Παράδειγμα 1.2.7

[8] Έστω μια τυχαία μεταβλητή X για την οποία δίνεται ο ακόλουθος πίνακας

X	f(x)
0	½
1	½
2	½

Για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x f(x) = 0\,\frac{1}{2} + 1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Παράδειγμα 1.2.8

[8] Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 3x$ με $x \in [1,3]$ και θέλουμε να βρούμε την μέση τιμή.
Πιο συγκεκριμένα η λύση θα είναι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{1}^{3} x\,3x\,dx = 3\int_{1}^{3} x^2\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^3 = 3^3 - 1 = 26.$$

1.2.6 Διακύμανση

Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ένα μέτρο διασποράς και μας δείχνει πόσο συγκεντρωμένες είναι οι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής γύρω από την μέση τιμή της μεταβλητής αυτής [19].

Ορισμός 1.2.12 [8] *Η ποσότητα $Var(X)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X ονομάζεται διακύμανση και δίνεται από την σχέση*

$$Var(X) = E[(X - E(X)^2]$$

ή

$$Var(X) = E[X^2 - 2\,X\,E(X) + E(X)^2]$$

ή

$$Var(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

ή

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Παράδειγμα 1.2.9

Θεωρούμε ξανά τα δεδομένα του Προβλήματος 1.2.7, και αυτή την φορά ζητάμε να βρούμε την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X. Πιο συγκεριμένα από το πρόβλημα 1.2.7 έχουμε τον πίνακα

X	*f(x)*
0	½
1	½
2	½

και την μέση τιμή η οποία ισούται με $E(X) = \frac{3}{2}$. Για να βρούμε την διακύμανση θα πρέπει πρώτα να βρούμε την τιμή της $E(X^2)$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x^2\,f(x) = 0^2\frac{1}{2} + 1^2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{2} = \frac{0+1+4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Οπότε η διακύμανση θα είναι

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{10-9}{4} = \frac{1}{4}.$$

1.3 Βασικές Έννοιες-Ορισμοί. Η Κίνηση Brown.

Το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $\{W(t), t \in T\}$ ονομάζεται χώρος καταστάσεων της στοχαστικής διαδικασίας και συμβολίζεται με S. Με βάση το σύνολο τιμών S έχουμε μία ακόμη διάκριση που αφορά τις στοχαστικές διαδικασίες. Αν το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών S είναι πεπερασμένο, τότε η στοχαστική διαδικασία είναι διακριτής τυχαίας μεταβλητής, ενώ στην περίπτωση που το S είναι συνεχές, τότε έχουμε διαδικασία συνεχούς τυχαίας μεταβλητής [1].

Μία από τις κατηγορίες στοχαστικών διαδικασιών που θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα κατά την διάρκεια αυτής της εργασίας είναι η *κίνηση Brown*. Πιο συγκεκριμένα, η *κίνηση Brown* (το όνομα της οποίας οφείλεται στον Σκωτσέζο Βιολόγο *Robert Brown*) μπορεί να αναφέρεται σε ένα συμβάν το οποίο πραγματοποιείται σε συνεχή χρόνο με συνεχείς κινήσεις (πχ ένας τυχαίος περίπατος, η ρίψη ενός ζαριού πολλές φορές και με μεγάλη συχνότητα). Θεωρούμε $W = \{W(t)\}$ ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών που χαρακατηρίζουν την κίνηση αυτή.

Ορισμός 1.3.1 *Ορίζουμε σαν κίνηση Brown την στοχαστική διαδικασία* $W(t),\ t > 0$ *η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:*
α) $W(0) = w_0$
β) Η $W(t+s) - W(t)$ *ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους* 0 *και* s*, και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι*
$P(W(t+s) - W(t) \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} exp\left(-\frac{|w|^2}{2t}\right)$*, όπου* A *είναι ένα σύνολο Borel.*
γ) Οι διαφορές $W(t_1) - W(t_0),\ W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ *είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους με* $t_0 < t_1 < t_2, \dots, < t_n$*. Τα* $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ *είναι μικρά ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα στα οποία πραγματοποιείται η κίνηση.*

δ) Η $W(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου t [6,8].

Παρατήρηση: Αν $W(0) = 0$, τότε η κίνηση Brown ονομάζεται *pure κίνηση Brown* [6,8].

Παράδειγμα 1.3.1

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη διακύμανση της διαφοράς $W_t - W_s$ με $0 \leq s < t$.
Έχουμε ότι:

$$Var(W_t - W_s) = Var(W_{s+t-s} - W_s) = Var\left(W_{s+(t-s)} - W_s\right) = t - s.$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει από την ιδιότητα β [6,8].

Παράδειγμα 1.3.2

[8] Θέλουμε να αποδείξουμε την σχέση

$$E[W(t+s)|W(t)] = W(t). \qquad (1.3.1)$$

Από την θεωρία των πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y, W ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$E[X+Y|W] = E[X|W] + E[Y|W], \qquad (1.3.2)$$

και

$$E[Y|Y] = Y \qquad (1.3.3).$$

Αν εφαρμόσουμε αυτές τις ιδιότητες στην σχέση (1.3.1) θα προκύψει

$$E[W(t+s)|W(t)] = E[W(t+s) + W(t) - W(t)|W(t)]$$

ή

$$E[W(t+s)|W(t)] = E[W(t+s) - W(t)|W(t)] + E[W(t)|W(t)]$$

ή

$$E[W(t+s)|W(t)] = 0 + W(t) = W(t).$$

Σχόλια

i) Η ποσότητα $E[W(t+s)-W(t)|W(t)]$ θα ισούται με το μηδέν και αυτό γιατί όπως θα δούμε αναλυτικά πιο κάτω η διαφορά $W(t+s)-W(t)$ ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση s (δηλαδή $[W(t+s)-W(t)]\sim N(0,s)$).

ii) Η σχέση (1.3.1) ονομάζεται *martingale*.

Παράδειγμα 1.3.3

[8] Θεωρούμε ότι $W(2)=4$. Ζητάμε να βρούμε την $E[W(5)\mid W(2)]$. Όντως βρίσκουμε εύκολα ότι

$$E[W(5)\mid W(2)] = E[W(2+3)\mid W(2)] = W(2) = 4$$

Παράδειγμα 1.3.4 (Μοντέλο για τις τιμές χρεογράφων) [6]

Ένα μοντέλο που μελετάει τις τιμές των χρεογράφων (π.χ τιμές ομολόγων, τιμές μετοχών) είναι η στοχαστική διαδικασία

$$S_t = S_0 e^{\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \tag{1.3.4}$$

όπου S_t θα είναι η τιμή της μετοχής ή του ομολόγου την στιγμή t. Τα ρ, σ είναι θετικές πραγματικές σταθερές, το S_0 μια αρχική συνθήκη και W_t είναι κίνηση Brown. Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της S_t την χρονική στιγμή t, δηλαδή την $E[S_t]$. Έχουμε:

$$E[S_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} S_t\, e^{-\frac{z^2}{2t}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}\ e^{-\frac{z^2}{2t}}\, dz$$

$$= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{\left(\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{z^2}{2t}+\sigma z\right)}\, dz = S_0\, e^{\rho t}.$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι ένα άθροισμα ανεξάρτητο των διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών μπορεί να προσεγγίσει μια standard κίνηση Brown [8].

Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$W(t+h) - W(t) = \sqrt{h}Y(t+h), \tag{1.3.5}$$

όπου $Y(t)$ είναι μια τυχαία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών μιας διωνυμικής κατανομής και h είναι μια μικρή περίοδος, για την οποία εκτιμούμε την μεταβολή της $W(t)$ από t σε $t+h$ [8].

Θεωρούμε επίσης ένα χρονικό διάστημα $[0,T]$,το οποίο χωρίζεται σε ν ίσα διαστήματα, δηλαδή θα ισχύει

$$h = \frac{T}{\nu}.$$

Από την διαμέριση θα προκύψει

$$\begin{aligned} W(T) - W(0) \\ &= [W(h) - W(0)] + [W(2h) - W(h)] + [W(3h) - W(2h)] + \cdots \\ &+ \big[W(\nu h) - W\big((\nu-1)h\big)\big] = \sum_{i=1}^{\nu}[W(ih) - W(i-1)h] \\ &= \sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{h}\,Y(ih) \ (\lambda \acute{o} \gamma \omega \ \tau \eta \varsigma \ 1.2.5). \end{aligned}$$

[8] Αν στην προηγούμενη σχέση αντικαταστήσουμε όπου $h = \frac{T}{\nu}$, θα έχουμε

$$W(T) = \sqrt{T}\sum_{i=1}^{\nu} Y(ih)\frac{1}{\sqrt{\nu}}. \tag{1.3.6}$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η $Y(ih)$ ακολουθεί διωνυμική κατανομή, από όπου προκύπτει ότι

$$E[Y(ih)] = 0$$

και

$$Var[Y(ih)] = 1.$$

[8] Για την ποσότητα $[\sum_{i=1}^{n} Y(ih)\frac{1}{\sqrt{\nu}}]$ η μέση τιμή και η διακύμανση θα είναι αντίστοιχα

$$E\left[\sum_{i=1}^{\nu} Y(ih)\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\nu}}E[\sum_{i=1}^{\nu} Y(ih)] = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sum_{i=1}^{\nu} E[Y(ih)] = 0,$$

(1.3.7)

και

$$Var\left[\sum_{i=1}^{\nu} Y(ih)\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^2 \sum_{i=1}^{\nu} Var(Y(ih)) = \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^2 \sum_{i=1}^{\nu} 1 = \frac{1}{\nu}\nu = 1.$$

(1.3.8)

Έχοντας βρει την μέση τιμή και την διακύμανση καθώς και με την χρήση του Κ.Ο.Θ (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα), παρατηρούμε ότι το όριο

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} Y(ih)\frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

προσεγγίζει την τυπική κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 (έστω δηλαδή $Z{\sim}N(0,1)$) [8].

[8] Άρα, όταν $\nu \to \infty$ η σχέση

$$W(T) = \sqrt{T} \sum_{i=1}^{\nu} Y(ih)\frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

Θα προσεγγίζει την $\sqrt{T}Z(T)$, δηλαδή

$$W(T) \cong \sqrt{T}Z(T), \qquad (1.3.9)$$

με

$$W(T){\sim}N(0,T).$$

Παρατηρήσεις

i) Η ολοκληρωτική μορφή της $W(T)$ είναι η ακόλουθη

$$W(T) = \int_0^T dZ(t) \qquad (1.3.10)$$

και το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται *στοχαστικό ολοκλήρωμα.*

ii) Αν στην σχέση (1.2.5) αντικαταστήσουμε την χρονική περίοδο h με dt, και αν συμοβολίσουμε την αλλαγή της $W(t)$ με $d(t)$, τότε θα προκύψει η ακόλουθη σχέση

$$dW(t) = Z(t)\sqrt{dt}, \qquad (1.3.11)$$

η οποία είναι στοχαστική διαφορκή εξίσωση της σχέσης (1.3.9).

Παράδειγμα 1.3.5

[8] Θεωρούμε μια κίνηση Brown και θέλουμε να βρούμε υπολογίσουμε

$$E[W(3)W(2)].$$

Για τα $W(2)$ και $W(1)$ έχουμε τα εξής

$$W(2) = W(2) - W(0)$$

και

$$W(3) = W(3) - W(2) + W(2).$$

Οι διαφορές $W(2) - W(0)$ και $W(3) - W(2)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Άρα θα έχουμε

$$E[W(3)W(2)] = E[W(2)\{W(3) - W(2) + W(2)\}]$$

ή

$$E[W(3)W(2)] = E\left[(W(2))^2\right] + E[W(2)\,\{W(3) - W(2)\}]$$

ή

$$E[W(3)W(2)] = E\left[(W(2))^2\right] + E[W(2)]\,E[W(3) - W(2)]$$

ή

$$E[W(3)W(2)] = E\left[(W(2))^2\right] - E^2[W(2)] + E^2[W(2)]$$
$$+E[W(2)]E[W(3) - W(2)]$$

ή

$$E[W(3)W(2)] = Var\big(W(2)\big) + E[W(2)]\{E[W(2) + E[W(3) - W(2)]\}$$

ή

$$E[W(3)W(2)] = Var[W(2)] = 2.$$

Σχόλιο

Το $E[W(2)]$ θα ισούται με μηδέν.

1.4 Αριθμητική Κίνηση Brown

[8] Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t,\ t \geq 0\}$ για την οποία ισχύει

$$X(t+h) - X(t) = \mu\, h + \sigma\, Y(t+h)\sqrt{h}. \tag{1.4.1}$$

Το $Y(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί διωνυμική κατανομή, το $\mu\, h$ είναι το drift term (ή αλλιώς όρος μετατόπισης) και το $\sigma\sqrt{h}$ είναι το noise term.
[8] Θεωρούμε επίσης $T > 0$, καθώς και μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ σε n ίσα υποδιαστήματα με

$$h = \frac{T}{n}. \tag{1.4.2}$$

[8] Από την διαμέριση θα πάρουμε

$$\begin{aligned} X(T) - X(0) = {} & [X(h) - X(0)] + [X(2h) - X(h)] + [x(3h) - X(2h)] + \cdots \\ & + \big[X(nh) - X\big((n-1)h\big)\big] = \sum_{i=1}^{n} [X(ih) - X(i-1)h] \\ & = \sum_{i=1}^{n} \big(\mu h + \sigma Y(ih)\sqrt{h}\big) \ (\,\lambda \acute{o} \gamma \omega\ \tau \eta \varsigma\ 1.4.1). \end{aligned}$$

Αν στην συνέχεια αντικαταστήσουμε όπου h την (1.4.2), θα έχουμε ότι

$$X(T) - X(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu \frac{T}{n} + \sigma Y(ih)\sqrt{\frac{T}{n}}\right) = \mu\, T \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sigma\sqrt{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}. \tag{1.4.3}$$

Η ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}$ σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 (ή διαφορετικά η ποσότητα $\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση T) [8]. Οπότε

$$X(T) - X(0) = \mu T + \sigma W(t), \tag{1.4.4}$$

με $W(t)$ την pure κίνηση Brown. (Σε μια pure κίνηση Brown η W έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 και ακολουθεί κανονική κατανομή).

Η στοχαστική διαφορική μορφή της (1.4.4) θα είναι

$$dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)\,. \tag{1.4.5}$$

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση, ορίζεται ως αριθμητική κίνηση Brown με μέση τιμή $E[X(t) - X(0)] = \mu\, t$ και διακύμανση $Var[X(t) - X(0)] = \sigma^2\, t$. Αυτό σημαίνει ότι η $X(t) - X(0)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους μt και $\sigma^2 t$. Το μ είναι ο στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου και το σ^2 η στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου [8].

1.5 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown. Σε σχέση με την αριθμητική κίνηση Brown, παρουσιάζει πλεονέκτημα έναντι αυτής σε σχέση με την αγορά μετοχών. Ιδιαίτερα αναφέρουμε ότι η αριθμητική κίνηση Brown έχει τα παρακάτω μειονεκτήματα [8].

1) Η αριθμητική κίνηση Brown $X(t)$ δεν μπορεί να περιγράψει την πορεία των τιμών των μετοχών όταν λαμβάνει αρνητικές τιμές [8].
2) Οι μεταβολές στην μέση τιμή και την διασπορά δεν εξαρτώνται από την τιμή της μετοχής. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα ομόλογο, και τις μεταβολές της τιμής του ομολόγου σε όρους ελβετικού φράγκου. Αν τριπλασιαστεί η τιμή του ομολόγου, θα πρέπει να τριπλασιαστεί και η αξία του ελβετικού φράγκου, μόνο που σύμφωνα με την αριθμητική κίνηση Brown κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί [8].

Οπότε για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων εισάγουμε την γεωμετρική κίνηση Brown την οποία και παρουσιάζουμε παρακάτω.

Από την σχέση (1.4.5) βλέπουμε ότι το μ («όρος μετατόπισης» ή “drift factor”) και το σ («μεταβλητότητα» ή “volatility”) είναι παράγοντες του $X(t)$, δηλαδή $\mu \equiv \mu(X(t))$ και $\sigma \equiv \sigma(X(t))$ και συμπεραίνουμε ότι η σχέση

$$dX(t) = \mu\big(X(t)\big)dt + \sigma\big(X(t)\big)dW(t) \tag{1.5.1}$$

είναι μια διαδικασία Itô [8].

[8] Αν στην συνέχεια $\mu\big(X(t)\big) = \mu\, X(t)$ και $\sigma\big(X(t)\big) = \sigma\, X(t)$ τότε η προηγούμενη σχέση θα γίνει

$$dX(t) = \mu\, X(t)dt + \sigma\, X(t)dW(t) \tag{1.5.2}$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu\, d(t) + \sigma\, dW(t). \tag{1.5.3}$$

Η (1.5.2) ορίζεται ως γεωμετρική κίνηση Brown και η λύση της είναι

$$X(t) = X(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\, W(t)}, \tag{1.5.4}$$

με W_t να ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

Η γεωμετρική κίνηση Brown δεν είναι κανονικά κατανεμημένη από την στιγμή που υπάρχει το εκθετικό, αλλά ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά

$$E[X(t)] = X(0)e^{\mu t}, \tag{1.5.5}$$

και

$$Var[X(t)] = X^2(0)e^{2\mu t}\big(e^{t\sigma^2} - 1\big), \tag{1.5.6}$$

αντίστοιχα [8].

Επίσης η $ln(X(t))$ ακολουθεί κανονική κατανομή δηλαδή ισχύει

$$ln(X(t)) = lnX(0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\, W(t).$$

Σχόλιο

[8] Όταν η X_t ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown, τότε η $ln(X_t)$, ακολουθεί την αντίστοιχη αριθμητική κίνηση Brown, δηλαδή

$$d[ln(X(t))] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t).$$

Παράδειγμα 1.5.1

Θεωρούμε την γεωμετρική κίνηση Brown

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = 0.522d(t) + 0.430dW(t)$$

Θέλουμε να βρούμε την μέση τιμή καθώς και η διακύμανση της ποσοστιαίας μεταβολής

Από την σχέση (1.5.3) βλέπουμε ότι το μ ισούται με 0.522 οπότε αυτή είναι η μέση τιμή που ζητάμε, ενώ το σ ισούται με 0.430, οπότε η ζητούμενη διασπορά θα είναι 0.430^2= 0.1849 [8].

Παράδειγμα 1.5.2

[8] Η τιμή μιας μετοχής αυτή την χρονική στιγμή ($t = 0$) είναι 100 ευρώ και ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με $\mu = 20\,\%$ και $\sigma^2 = 8\%$. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα η τιμή της μετοχής να είναι πάνω 300 ευρώ μετά από δύο χρόνια, (δηλαδή $P(S(2) > 300)$).

Πιο αναλυτικά θα έχουμε

$$P(S(2) > 300) = P\left(\frac{S(2)}{100} > \frac{300}{100}\right) = P\left(\frac{S(2)}{S(0)} > 3\right) = P\left(ln\frac{S(2)}{S(0)} > ln3\right). \tag{1.5.7}$$

Η ποσότητα

$$ln\frac{S(2)}{S(0)}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή

$$N\left(\left(0.2-\frac{1}{2}0.08\right)\times 2, 0.08\ \times 2\right)\rightarrow N(0.32, 0.16).$$

Οπότε από την σχέση (1.5.7) θα προκύψει

$$P(S(2)>300)=P\left(ln\frac{S(2)}{S(0)}>ln3\right)=P\left(ln\frac{S(2)}{S(0)}-0.32>ln3-0.32\right)$$
$$=P\left(\frac{ln\frac{S(2)}{S(0)}-0.32}{\sqrt{0.16}}>\frac{ln3-0.32}{\sqrt{0.16}}\right)$$

(1.5.8).

Αν θέσουμε την ποσότητα

$$\frac{ln\frac{S(2)}{S(0)}-0.32}{\sqrt{0.16}}$$

ίση με Z, τότε η σχέση (1.5.8) θα γίνει

$$P(S(2)>300)=P\left(Z>\frac{ln3-0.32}{\sqrt{0.16}}\right)=P(Z>1.9465)\approx P(Z>1.95)$$
$$=1-P(Z\leq 1.95)=1-\Phi(1.95)=1-0.9744=0.0253.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι,

$$P(S(2)>300)=0.0253=2.5\%.$$

Παράδειγμα 1.5.3

[8] Έστω η γεωμετρική κίνηση Brown με $\mu=0.2$. Για

$$h=\frac{1}{200},$$

δίνεται ο λόγος

$$\frac{\sigma\sqrt{h}}{\mu h}=33.837\,, \tag{1.5.9}$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε την τυπική αποκλιση σ.

Αν λύσουμε την σχέση (1.5.9) ως προς σ θα έχουμε

$$\frac{\sigma\sqrt{h}}{\mu h} = 33.387,$$

ή

$$\sigma\sqrt{h} = \lambda h\, 33.387$$

ή

$$\sigma = \frac{h\lambda\, 33.387}{\sqrt{h}} = \frac{0.2\frac{1}{200}33.387}{\sqrt{\frac{1}{200}}} = \frac{0.03338}{0.07071} \cong 0.47$$

Έχοντας ολοκληρώσει την αναφορά μας στις έννοιες της κίνησης Brown, της αριθμητικής κίνησης Brown και της Γεωμετρικής κίνησης Brown και δίνοντας κάποια αξιόλογα παραδείγματα με σκοπό την καλύτερη κατανόηση τους από τον αναγνώστη, στην παράγραφο που ακολουθεί θα αναλύσουμε την έννοια των martingales. Τα martingales είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών που βρίσκουν εφαρμογή σε πολλούς τομείς όπως είναι για παράδειγμα η επιδημιολογία και τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά [14].

1.6 Martingales

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω τα martingales αποτελούν μια πολύ σημαντική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών που εφαρμόζονται σε πολλούς τομείς όπως είναι για παράδειγμα τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Στην ουσία εκφράζουν τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται μια στοχαστική διαδικασία με μία τυχαία μεταβλητή. Η αρχική τους ιδέα στηρίχθηκε στα τυχερά παιχνίδια, αλλά στην πορεία εξελίχθηκε σε ένα από τους πιο δυναμικούς κλάδους της Θεωρίας των Πιθανοτήτων [14].

Αρχικά θα εισάγουμε την έννοια της διύλισης, η οποία αποτελεί ένα σημαντικό μέρος στην κατανόηση των *martingales*.

Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, K, P) , όπου Ω ένα σύνολο , K μια σ-άλγεβρα και P μια πιθανότητα.

Ορισμός 1.6.1: *Αν μια ακολουθία* $\{Z_n\,, \text{με}\ n = 1,2,3\ldots\}$, *υπό-σ-αλγεβρών της* K *είναι αύξουσα, τότε η ακολουθία αυτή ονομάζεται διύλιση* [6].

Ορισμός 1.6.2: *Θεωρούμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $\{Y_n\,, \text{με}\ n = 1,2,3\ldots\}$ *και μια διύλιση* $\{Z_n\,, \text{με}\ n = 1,2,3\ldots\}$. *Η ακολουθία* $\langle (Y_n, Z_n)\rangle_{n\in N^*}$ *που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(i) $Y_n \in L^1(P)$, *για κάθε* n *που ανήκει στο* N^*,
(ii) η ακολουθία $\langle Y_n\rangle_{n\in N^*}$, *είναι* $\langle Z_n\rangle_{n\in N^*}$ *προσαρμοσμένη,*
(iii) $E[Y_{n+1}|Z_n] = Y_n$,

ονομάζεται martingale [6,15].

Παρατήρηση

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύονται τα martingales. Όπως είδαμε και στην εισαγωγή της ενότητας, η ιδέα τους βασίστηκε στα τυχερά παιχνίδια. Θεωρούμε ότι λοιπόν, μία τυχαία μεταβλητή Y_n, η οποία αναπαριστά το ποσό που έχει στην κατοχή του ένας παίκτης μετά το τέλος του $n - \text{οστού}$ παιχνιδιού, ενώ Z_n, θα είναι η πληροφορία για όλα τα παιχνίδια μέχρι και την στιγμή $t = n$. Σε αυτή την περίπτωση, σύμφωνα με την ιδιότητα *(iii)* του ορισμού 1.6.2, βλέπουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του ποσού του παίκτη στον επόμενο γύρο θα είναι ίδια με το ποσό που έχει ο παίκτης στο τωρινό παιχνίδι. Από αυτό βγαίνει το συμπέρασμα ότι τα martingales αναφέρονται σε *αμερόληπτα* παιχνίδια [14].

Πρόταση 1.6.1

[15] Η ακολουθία $\langle (Y_n, Z_n)\rangle_{n\in N^*}$ είναι ένα martingale αν και μόνο αν για κάθε $B \in Z_n$ ισχύει η ισότητα

$$\int_B Y_n dP = \int_B Y_{n-1} dP.$$

Πρόταση 1.6.2

[15] Η μέση τιμή παραμένει σταθερή, δηλαδή ισχύει

$$E[Y_n] = E[Y_1]\,, \qquad \text{για κάθε } n \in N^*.$$

Παράδειγμα 1.6.1

Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, K, P) και μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{Y_n\,, \mu\varepsilon\; n = 1,2,3\ldots\}$, δηλαδή

$$Y_n = Z_1 + \cdots + Z_n, \qquad \text{για κάθε } n \in N^*,$$

όπου $\{Z_n\,, \mu\varepsilon\; n = 1,2,3\ldots\}$ είναι μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με

$$P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = \frac{1}{2}, \qquad \text{για κάθε } n \in N^*.$$

Θέτουμε $\Sigma_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ μια διύλιση και $X_n = (-1)^n \cos(\pi Y_n)$, για κάθε $n \in N^*$.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{X_n\,, \mu\varepsilon\; n = 1,2,3\ldots\}$ είναι $\{\Sigma_n\,, \mu\varepsilon\; n = 1,2,3\ldots\}$- martingale.

Για να είναι η ακολουθία X_n martingale θα πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 1.6.2.

Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $n \in N^*$ $X_n \in L^1(P)$.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$E[|X_n|] = E[|(-1)^n \cos(\pi Y_n)|] = E[|cos\pi Y_n|] \le E[|\pi Y_n|] = \pi E[|Y_n|]$$

Αφού ισχύει η ανισότητα $|cos(\pi\, Y_n)| \le |\pi\, Y_n|$, για κάθε $n \in N^*$, τότε

$$E[|X_n|] \le \pi E[|Y_n|], \;\; \text{για κάθε } \; n \in N^* \qquad (1.6.1)$$

Για κάθε $n \in N^*$

$$E[|Y_n|] = E[|Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n|] \le E[|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|]$$

ή

$$E[|Y_n|] = E[|Z_1|] + E[|Z_2|] + \cdots + E[|Z_n|]$$

ή

$$E[|Y_n|] = \left(1\,\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right) + \cdots \left(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right)$$

ή

$$E[|Y_n|] = n.$$

Οπότε

$$\pi E[|Y_n|] \leq \pi\, n \ < \infty, \text{για κάθε } \ n \in N^* \qquad (1.6.2)$$

Από τις (1.6.1) και (1.6.2) προκύπτει ότι

$$E[|X_n|] \leq \pi\, n < \infty, \text{για κάθε } \ n \in N^*,$$

δηλαδή

$$X_n \in L^1(P), \qquad \text{για κάθε } n \in N^*.$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n\in N^*}$ είναι $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in N^*}$ προσαρμοσμένη.

Παρατηρούμε ότι αφού η Z_λ είναι Σ_n μετρήσιμη για κάθε $\lambda \in \{1, \dots, n\}$, τότε η $\langle Y_n \rangle_{n\in N^*}$ είναι Σ_n μετρήσιμη για κάθε $n \in N^*$. Οπότε η ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n\in N^*}$ θα είναι $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in N^*}$ μετρήσιμη και θα ισχύει η ιδιότητα *(ii)*.

Αν ισχύει και η ιδιότητα *(iii)*, δηλαδή $E[X_{n+1}|\Sigma_n] = X_n$, *για κάθε* $n \in N^*$, τότε η $\langle X_n \rangle_{n\in N^*}$ είναι $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in N^*}$ martingale.

Πιο συγκεκριμένα για κάθε $n \in N^*$, έχουμε ότι

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = E[(-1)^{n+1}\cos(\pi Y_{n+1})$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+1} E\big[cos\left(\pi(Y_n + Z_{n+1})\right)\big|\Sigma_n\big](-1)^{n+1}$$

$$E[\cos(\pi Y_n)\cos(\pi Z_{n+1}) - \sin(\pi Y_n)\sin(\pi Z_{n+1}) \quad |\Sigma_n]$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+1}\cos(\pi Y_n)\, E[\cos(\pi Z_{n+1})\,|\Sigma_n]$$

$$-(-1)^{n+1}\sin(\pi Y_n) E[\sin(\pi Z_{n+1})\,|\Sigma_n]$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+1}\ \cos(\pi Y_n) E[\ \cos(\pi Z_{n+1})$$

$$-(-1)^{n+1}\sin(\pi Y_n)\, E[sin(\pi Z_{n+1})]$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+1}\cos(\pi Y_n)\left[\frac{1}{2}cos\pi + \frac{1}{2}\cos(-\pi)\right]$$

$$-(-1)^{n+1}\sin(\pi Y_n)\,[\frac{1}{2}sin\pi + \frac{1}{2}\sin(-\pi)]$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+1}co\,s(\pi Y_n)\left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+1}\cos(\pi Y_n)\,(-1)$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n+2}\cos(\pi Y_n)$$

ή

$$E[X_{n+1}|\Sigma_n] = (-1)^{n}\cos(\pi Y_n) = X_n$$

Αφού αποδείξαμε τις τρεις ιδιότητες του ορισμού 1.6.2, προκύπτει ότι $\langle X_n\rangle_{n\in N^*}$ είναι $\langle \Sigma_n\rangle_{n\in N^*}$ martingale.

Παράδειγμα 1.6.2

Θεωρούμε ότι έχουμε ξανά τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος. Αυτή την φορά όμως θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{Y_n^2 - n, \mu\varepsilon\; n = 1,2,3 \dots\}$ είναι $\{\Sigma_n\,, \mu\varepsilon\; n = 1,2,3 \dots\}$- martingale.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (i) θέλουμε να αποδείξουμε ότι $Y_n^2 - n \in L^1(p)$, για κάθε $n \in N^*$.
Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε

$$|Y_n| = |Z_1 + \dots + Z_n| \le |Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_n| = n.$$

Για κάθε $n \in N^*$ έχουμε

$$\int |Y_n^2 - n| dP \leq \int Y_n^2 dP + n \leq \int n^2 dP + n = n + n^2 < \infty.$$

Οπότε προκύπτει ότι $\langle Y_n^2 - n \rangle_{n\in N^*} \in L^1(p)$,

Σύμφωνα με την ιδιότητα *(ii)* θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\langle Y_n^2 - n \rangle_{n\in N^*}$ είναι $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in N^*}$ προσαρμοσμένη.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η ακολουθία $\langle Y_n \rangle_{n\in N^*}$ είναι $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in N^*}$, οπότε και η ακολυθία $\langle Y_n^2 - n \rangle_{n\in N^*}$ θα είναι $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in N^*}$ προσαρμοσμένη.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι $E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n]$=$Y_n^2 - n$.

Πράγματι για κάθε $n \in N^*$ ισχύει

$$E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n] = E[(Y_n + Z_{n+1})^2 - (n+1)|\Sigma_n]$$

ή

$$E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n] = E[(Y_n^2 - 2Y_n Z_{n+1} + Y_{n+1}^2) - (n+1)|\Sigma_n]$$

ή

$$E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n] = E[Y_n^2|\Sigma_n] - 2E[Y_n Z_{n+1}|\Sigma_n] + E[Y_{n+1}^2|\Sigma_n] - (n+1)$$

ή

$$E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n] = Y_n^2 - 2Y_n\left[1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\right] + \left[1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right] - (n+1)$$

ή

$$E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n] = Y_n^2 + 1 - (n+1)$$

ή

$$E[Y_{n+1}^2 - (n+1)|\Sigma_n] = Y_n^2 - n$$

1.7 Μια παράκαμψη στην Στοχαστική Ανάλυση

Όπως είδαμε και στις προηγούμενες παραγράφους η παράγωγος της κίνησης *Brown* δεν ορίζεται σε κανένα σημείο της. Παρόλα αυτά χάρη σε μια καινοτομία ενός Ιάπωνα μαθηματικού, ονόματι Kyoshi Itô μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα πάνω σε αυτή. Τα ολοκληρώματα αυτά εφαρμόζονται στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε μια συνάρτηση

$$f: (0, +\infty) \times \Omega \rightarrow R$$

η οποία εξαρτάται από την έκβαση κάποιας κίνησης Brown W_t. Ορίζουμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα πάνω στις μεταβολές της κίνησης *Brown*

$$\int_c^d f(t,u)dW_t(u). \tag{1.7.1}$$

Ο συμβολισμός dW_t μπορεί να γραφεί ως η διαφορά $W_{t+dt} - W_t$, όταν το $dt \rightarrow 0$. Στην ουσία αυτό το ολοκλήρωμα που αποτελεί ένα εμαβδόν, είναι δηλαδή το όριο των αθροισμάτων των γινομένων της συνάρτησης f επί της διαφοράς $W_{t+dt} - W_t$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i, u)\left(W_{t_i+1} - W_{t_i}\right). \tag{1.7.2}$$

Παράδειγμα 1.7.1

Αν θέσουμε όπου $f = 1$, τότε από την (1.7.1) θα έχουμε

$$\int_c^d dW_t(u) = W_d - W_c$$

Σε αυτό το σημείο θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε παραγώγους με την χρήση της σειράς Taylor. Θεωρούμε μια συνάρτηση της τιμής μετοχής $f(S)$, μια στιγμιαία αλλαγή της τιμής της μετοχής δS καθώς και την σχέση

$$f(S + \delta S) = f(S) + \delta S\,\frac{df}{dS} + \frac{1}{2}(\delta S)^2 \frac{d^2 f}{dS^2} + O((\delta S)^3), \tag{1.7.3}$$

η οποία είναι μια σειρά Taylor της $f(S)$ γύρω από το σημείο O.

Συνήθως όταν το $\delta S \rightarrow 0$, τότε ο όρος $(\delta S)^2$ εξαφανίζεται επιτρέποντας την αναπαράσταση της $\frac{df}{dS}$ ως εξής

$$\frac{df}{dS} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{f(S + \delta S) - f(S)}{\delta S}, \tag{1.7.4}$$

Θεωρούμε επίσης την σχέση

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \tag{1.7.5}$$

όπου $W(t)$ είναι μια κίνηση Brown.

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο την προηγούμενη σχέση (η οποία είναι μια διαδικασία Itô) θα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$dS^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dW + \sigma^2 S^2 dW^2. \tag{1.7.6}$$

Στην σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η dW είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει διακύμανση $E[dW^2] \geq 0$. Στην πραγματικότητα, ισχύει $E[dW^2] = dt$, με αποτέλεσμα ο όρος αυτός να παραμένει όσο το $dt \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι είναι απίθανο να υπολογίσουμε στοχαστικές μεταβλητές με τον ίδιο τρόπο που υπολογίζουμε ντετερμινιστικές μεταβλητές. Για να αντιμετωπίσουμε λοιπόν αυτή την κατάσταση θα δώσουμε βάση στην εργασία του Ιάπωνα μαθηματικού Kiyoshi Itô (όπως αναφέραμε και στην αρχή της ενότητας).

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός από θεωρίες πίσω από τους υπολογισμούς του Itô, αλλά εμείς θα εστιάσουμε μόνο σε βασικά αποτελέσματα και η εξήγηση θα είναι ευρετική.

Λήμμα του Itô

Αν έχουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dW, \tag{1.7.7}$$

και $F = f(S,t)$, (αν το f είναι δυο φορές συνεχώς διαφοροποιήσιμη στο $[0,\infty) \times R$,) τότε η F είναι μια στοχαστική διαδικασία που δίνεται από την σχέση

$$dF = \left[a(S,t)\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(S,t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt + b(S,t)\frac{\partial f}{\partial x}dW, \tag{1.7.8}$$

(Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία για το S περιγράφεται από την ολοκληρωτική μορφή της (1.6.4)

$$S_t = S_0 + \int_0^t a(S,s)ds + \int_0^t b(S,s)dW, \tag{1.7.9}$$

όπου το πρόβλημα με την εκτίμηση εμφανίζεται με τον όρο dW, ένα πρόβλημα το οποίο μπορεί να επιλυθεί καθορίζοντας το ολοκλήρωμα του Itô, το οποίο είναι στενά συνδεδεμένο με το λήμμα του Itô.)

Επίσης αν υποθέσουμε ότι $dt \to 0, dW^2 \to dt$ και $dtdW = o(dt)$ είναι πιθανό να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα μέσω της σειράς Taylor σε δυο διαστάσεις. Οπότε ο κανόνας που χρησιμοποιούμε για να οδηγηθούμε στο λήμμα του Itô, υποθέτει ότι $dW^2 \to dt$ όταν $dt \to 0,$ αλλά το αποτέλεσμα δεν είναι αξιόπιστο εφόσον γνωρίζουμε ότι $E[dW^2] = dt$.

Παράδειγμα 1.7.2

Αν $dS = adt + bdW$, όπου a και b είναι δυο σταθερές, τι διαδικασία ακολουθείται για $Y = S^2$;

Από το λήμμα του Itô θα έχουμε ότι

$$dG = \left[a\frac{\partial g}{\partial S} + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} + b^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}\right]dt + b\frac{\partial g}{\partial S}dW, \tag{1.7.10}$$

και σε αυτή την περίπτωση $f(S,t) = x^2$ και $\frac{\partial f}{\partial S} = 2S$, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 2$ και $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ με την (1.6.10) να γίνεται

$$dG = (2aS + b^2)dt + 2bSdW. \tag{1.7.11}$$

Αν συγκρίνουμε την σχέση (1.7.7) με την σχέση (1.7.5) παρατηρούμε ότι $a(x,t) = \mu S$ και $b(x,t) = \sigma S$. Οπότε η διαδικασία που ακολουθείται από οποιαδήποτε συνάρτηση $F = f(S,t)$ (που ικανοποιεί τις συνθήκες του Itô) θα είναι

$$dF = \left[\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}\,dW, \tag{1.7.12}$$

Για ποιο λόγο είναι σημαντικό αυτό το αποτέλεσμα;

Είναι φανερό ότι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης ή η τιμή οποιουδήποτε παραγώγου, είναι μια συνάρτηση του υπό-θεώρηση περιουσιακού στοιχείου με τον χρόνο. Αυτό επιτρέπει τον προσδιορισμό της διαδικιασίας από μια συνάρτηση με αυτές τις μεταβλητές (λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς). Αυτό είναι ένα κρίσιμο εμπόδιο για την παραγωγή της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes.

Παράδειγμα 1.7.3

Θεωρούμε ότι η $f(t,u) = f(t)$ είναι μια τοποθέτηση σε συγκεκριμένη μετοχή u. Η εξέλιξη της τιμής της περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση η οποία είναι μια κίνηση Brown

$$S(t) = W_t. \tag{1.7.13}$$

Η σχέση

$$dS(t) = dW_t, \tag{1.7.14}$$

μας δείχνει την μεταβολή της τιμής της μετοχής ανάμεσα στα διαστήματα $t + dt$ και t. Στην περίπτωση που έχουμε $f(t)$ μέρη από αυτή την μετοχή, το κέρδος ή η ζημία θα δίνεται από την σχέση

$$f(t)\, dS(t) = f(t)\, dW_t. \tag{1.7.15}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε τις χρονικές στιγμές $t = c$ και $t = d$. Αν προσθέσουμε όλες τις μεταβολές που βρίσκονται ανάμεσα σε αυτές τις χρονικές στιγμές θα έχουμε την συνολική μεταβολή της τοποθέτησης $f(t)$ η οποία συμβολίζεται ως

$$\int_c^d f(t) dW_t, \tag{1.7.16}$$

ενώ $dt \to 0$.

Υποθέτουμε επίσης ότι την την στιγμή $t = c$ επενδύσαμε ένα ποσό $V(c) = y$ στο χαρτοφυλάκιό μας. Την χρονική στιγμή $t = d$ η αξία του χαρτοφυλακίου θα αλλάξει εξαιτίας των μεταβολών στην τιμή της μετοχής και θα δίνεται από την σχέση

$$V(d) - V(c) = \int_c^d f(t) dW_t. \tag{1.7.17}$$

Η σχέση (1.6.17) είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα που εκφράζει την αξία των χαρτοφυλακίων ως προς την μεταβολή της αξίας τους.

Αν θεωρήσουμε τώρα για την σχέση (1.7.16) ότι $c = 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας και επίσης ότι $d = t$, θα έχουμε το εξής ολοκλήρωμα

$$\int_0^t f(s)dW_t, \qquad \mu\varepsilon \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Συνοψίζοντας για κάθε τιμή t που βρίσκεται στο διάστημα $[0, T]$ κατασκευάζουμε μια στοχαστική διαδικασία

$$I_t = \int_0^t f(s)dW_t \tag{1.7.18}$$

η οποία ορίζεται ως στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô.

1.8 Η διαδικασία Ornestein–Uhlenbeck

[8] Κατά την τιμολόγηση προιόντων, παρατηρούμε ότι οι τιμές επανέρχονται στον μέσο όρο. Πιο συγκεκριμένα μια τιμή που ξεκινά από το μέσο όρο μπορεί να κίνηθει είτε ανοδικά είτε καθοδικά, κάποια μακροπρόθεσμα στιγμή θα επανέλθει στην μέση τιμή. Αν στην σχέση (1.4.5) τροποποιήσουμε την μετατόπιση (drift) με σκοπό να εισάγουμε την επαναφορά της τιμής στην μέση τιμή, θα έχουμε την διαδικασία Ornestein – Uhlenbeck, δηλαδή

$$dX(t) = \mu[\lambda - X(t)]dt + \sigma dW(t). \tag{1.8.1}$$

όπου λ είναι η μέση τιμή στην οποία η $X(t)$ έχει την τάση να επανέλθει, σ είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας (*volatility*) μ είναι ο παράγοντας αναστροφής και $W(t)$ είναι η κίνηση Brown.

Παράδειγμα 1.8.1

[8] Θέλουμε να αποδείξουμε την σχέση (1.8.1)

Θέτουμε $Y(t) = X(t) - \lambda$. Οπότε θα έχουμε,

$$dY(t) = -\mu Y(t)dt + \sigma dW(t)$$

ή

$$dY(t) + \mu Y(t)dt = \sigma dW(t)$$

το οποίο μπορεί γράφεται ως εξής:

$$d[e^{\mu t}Y(t)] = e^{\mu t}\sigma dW(t)$$

Αν ολοκληρώσουμε από το 0 έως το t θα προκύψει

$$\int_0^t d[e^{\mu t}Y(t)] = \int_0^t e^{\mu s}\sigma dW(s),$$

ή

$$[e^{\mu t}Y(t)]_0^t = \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW(s),$$

ή

$$[e^{\mu t}Y(t)]_0^t = \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW(s),$$

ή

$$e^{\mu t}Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW(s),$$

ή

$$Y(t) = e^{-\mu t}Y(0) + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW(s). \tag{1.8.2}$$

Αν αντικαταστήσουμε όπου $Y(t)$, την διαφορά $X(t) - \lambda$ θα προκύψει

$$X(t) = X(0)e^{-\mu t} + \lambda(1 - e^{-\mu t}) + \sigma \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dW(s).$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μία μικρή ανασκόπηση στις έννοιες που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα. Πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο αυτό, είδαμε τους ορισμούς της στοχαστικής διαδικασίας, της θεωρίας μέτρου, της κίνησης Brown, της αριθμητικής κίνησης Brown, της γεωμετρικής κίνησης Brown, των martingales καθώς και του στοχαστικού ολκληρώματος του Itô. Στην συνέχεια, παρουσιάσαμε εφραμογές και παραδείγματα, με σκοπό να τονιστεί η σημαντικότητα αυτών των εννοιών, και να συμβαδίσει με την αφομοίωση τους από τους αναγνώστες. Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα εστιάσουμε στην αγορά χρηματοοικονομικών πραγώγων και στην τιμολόγησή τους. Η κατανόηση τους θα αποτελέσει το εφαλτήριο για το τρίτο κεφάλαιο, το οποίο είναι το αντικείμενο μελέτης της εργασίας μας.

2ο Κεφάλαιο

Η Αγορά Παραγώγων και η Τιμολόγησή τους

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, καθώς και τις κατηγορίες στις οποίες αυτά διακρίνονται. Ειδικότερα θα δώσουμε συμβολισμούς οι οποίοι θα φανούν χρήσιμοι στην πορεία της εργασίας και ταυτόχρονα, θα παραθέσουμε παραδείγματα με σκοπό να κατανοήσει ο αναγνώστης καλύτερα την χρήση και την εφαρμογή αυτών των προϊόντων. Στην συνέχεια θα αναφέρουμε τους τρόπους με τους οποίους γίνεται η τιμολόγηση, των δικαιωμάτων προαίρεσης (options). Συνοψίζοντας, αυτό το κεφάλαιο θα αποτελέσει ένα εργαλείο εξοικείωσης του αναγνώστη με τις βασικές έννοιες της εργασίας, με σκοπό να κατανοήσει πιο εύκολα το αντικείμενο που αυτή πραγματεύεται.

2.1 Βασικές έννοιες, ορισμοί και κατηγορίες

2.1.1 Χρηματοοικονομικά Παράγωγα Προϊόντα

Χρηματαοοικονομικά παράγωγα είναι χρηματοικονομικά μέσα τα οποία βασίζουν την τιμή τους στην τιμή άλλων υποκείμενων μέσων όπως είναι οι συναλλαγματικές ισοτιμίες, τα επιτόκια, οι τιμές των μετοχών και οι χρηματιστηριακοί δείκτες. Μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις υποκείμενες αξίες και στα παράγωγα προϊόντα είναι ότι οι συμβάσεις των τελευταίων έχουν μικρή διάρκεια και λήγουν σε συγκεκριμένή χρονική στιγμή. Η χρήση των παραγώγων έχει ως στόχο την αντιστάθμιση κινδύνου καθώς και το βέβαιο κέρδος [9]. Πιο συγκεκριμένα

1) Αντιστάθμιση Κινδύνου (Hedging)

Το χρηματοοικονομικό παράγωγο προϊόν θα πάρει μία τιμή η οποία θα φέρει διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά της υποκείμενης αξίας με αποτέλεσμα να αποτραπούν οι συνέπειες από μια ενδεχόμενη απώλεια κεφαλαίων (κεφαλαιακός κίνδυνος) [19].

2) Βέβαιο κέρδος (Arbitrage)

Εμφανίζεται στην περίπτωση που το κέρδος προέρχεται από τις διαφορετικές τιμές που παίρνει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές [19].

2.1.2 Κατηγορίες Χρηματοοικονομικών Παραγώγων Προϊόντων

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε τον ορισμό και τους στόχους των χρηματοοικονομικών παραγώγων προϊόντων. Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στις κατηγορίες διακρισής τους. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι εξής:

1) Προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards)
2) Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)
3) Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων (Stock Repo και Stock Reverse Repo)
4) Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

1) Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forwards)

Τα συμβόλαια αυτά αποτελούν την πιο απλή μορφή παραγώγων και πραγματοποιούνται κυρίως ανάμεσα σε δυο χρηματοοικονομικούς οργανισμούς. Είναι δηλαδή τα συμβόλαια στα οποία κάποιος συμφωνεί να αγοράσει (*long position*) μία υποκείμενη αξία (π.χ μετοχές) σε συγκεκριμένη ημερομηνία T στο μέλλον και σε τιμή η οποία καθορίζεται από την αρχή (τιμή K), ενώ η άλλη μεριά επιθυμεί να πουλήσει *(short position)* μια υποκείμενη αξία στην χρονική στιγμή T και σε τιμή K [12].

Για παράδειγμα τον μήνα Φεβρουάριο, η επιχείρηση Χ συμφωνεί να αγοράσει τον Ιούνιο 2000 μετοχές της ΕΥΔΑΠ από την επιχείρηση Ζ, στην τιμή $K = 20$ ευρώ ανά μετοχή. Τον Ιούνιο η επιχείρηση Ζ θα πουλήσει στην επιχείρηση Χ 2000 μετοχές εισπράττοντας $2000 \times 20 = 40000$ ευρώ, από αυτήν, σύμφωνα με με το συμβόλαιο [12].

Αν τον μήνα Ιούνιο, δηλαδή τον μήνα που λήγει το συμβόλαιο, η τιμή της μετοχής είναι $S_T = 22$ ευρώ, τότε η επιχείρηση Χ θα είναι κερδισμένη κατά 2 ευρώ ανά μετοχή, δεδομένου ότι καταβάλλοντας $2000 \times 20 = 40000$ ευρώ, θα είναι σε θέση να πουλήσει αμέσως τις μετοχές στην τιμή $2000 \times 22 = 44000$ ευρώ. Σε περίπτωση όμως που η τιμή της μετοχής ήταν $S_T = 17$ ευρώ τότε κερδισμένη θα ήταν η επιχείρηση Ζ, και η επιχείρηση Χ θα έχανε 3 ευρώ ανά μετοχή ($2000 \times 17 = 34000$ ευρώ) [12].

Γενικεύοντας, το κέρδος του αγοραστή από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο δίνεται από τον τύπο

$$S_T - K, \tag{2.1.1}$$

όπου S_T είναι η τιμή της υποκείμενης αξίας την χρονική στιγμή T που λήγει το συμβόλαιο και K είναι η προκαθορισμένη τιμή [12].
Σε αντίθετη περίπτωση το κέρδος του πωλητή θα είναι

$$K - S_T. \tag{2.1.2}$$

Η προκαθορισμένη τιμή K (exercise price) [12].

2) Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ ή Futures)

Τα ΣΜΕ παρουσιάζουν ομοιότητες με τα ΠΣ. Η διαφορά εδώ είναι ότι ο χρόνος μπορεί μην έχει καθοριστεί απόλυτα και για αυτό το λόγο το Χρηματιστήριο Παραγώγων αναλαμβάνει να προσδιορίσει την ακριβή χρονική στιγμή. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση μεταξύ των δυο συμβαλλομένων μπορεί να είναι καθαρά τυπική οπότε το Χρηματιστήριο Παργώγων καλείται να εγγυηθεί για την εκπλήρωση των συμβολαίων. Αυτό το πετυχαίνει αναγκάζοντας και τα δύο μέρη να δημιουργήσουν ένα λογαριασμό περιθωριών (margin account) όπου θα καταθέσουν ένα ποσό σαν εγγύηση [12].

Για παράδειγμα, έχουμε έναν αγοραστή Α ο οποίος θέλει να αγοράσει (long position) 250 μετοχές της ΕΥΔΑΠ με τιμή εξάσκησης $K = 20$ ευρώ ανά μετοχή και ημερομηνία λήξης T μετά από 2 μήνες, και έναν πωλητή Β ο οποίος επιθυμεί να πουλήσει 250 μετοχές της ΕΥΔΑΠ με τιμή εξάσκησης $K = 20$ ευρώ ανά μετοχή και ημερομηνία λήξης T μετά από 2 μήνες. Και οι δυο πλευρές (αγοραστής, πωλητής) δημιουργούν ένα Λογαριασμό Περιθωρίων όπου καταβάλουν ένα ποσό σαν εγγύηση π.χ 15% της τιμής εξάσκησης K πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό των μετοχών (δηλαδή 15% του $K \times 250$). Όπως αναφέραμε πιο πριν επειδή μπορεί να μην έχει καθορίστει απόλυτα ο χρόνος λήξης, το

Χρηματιστήριο Παραγώγων αναλαμβάνει να φέρει σε επαφή τον αγοραστή και τον πωλητή προσδιορίζοντας μια συγκεκριμένη ημερομηνία. Μετά το πέρας αυτής της συνάντησης η τιμή του K μεταβάλλεται. Αν για παράδειγμα η τιμή αλλάξει από 20 σε 23 ευρώ, τότε ο αγοραστής θα έχει κέρδος 3 ευρώ σε περίπτωση που αποφασίσει να λάβει το short position. Το ποσό των 3×250 ευρώ πιστώνονται στον αγοραστή, ενώ ταυτόχρονα το ίδιο ποσό ζημιώνεται ο πωλητής μέσω των Λογαριασμών Περιθωρίων. Αυτή η διαδικασία επαναλάμβανεται κάθε φορά που υπάρχει συνάντηση μεταξύ των δύο πλευρών και το αποτέλεσμα (κέρδος ή ζημιά) λαμβάνεται τμηματικά καθώς πλησιάζει η ημερομηνία λήξης T [12].

3) Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων (Stock Repo και Stock Reverse Repo)

Τα Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων δίνουν την δυνατότητα στον επενδυτή:
α) Να δανείσει τις μετοχές του στο χρηματιστήριο παραγώγων, ενώ ταυτόχρονα θα λαμβάνει ένα μηνιαίο έσοδο (χωρίς κίνδυνο) [12].
β) Δίνοντας ένα αντίτιμο σε ημερήσια βάση, να δανειστεί μετοχές από το χρηματιστήριο παραγώγων[12].

4) Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ αγοραστή και πωλητή του δικαιώματος, όπου μεσολαβεί και το Χρηματιστήριο Παραγώγων παίζοντας καταλυτικό ρόλο. Το συμβόλαιο αυτό θα δώσει το δικαίωμα στον αγοραστή να αγοράσει από τον πωλητή έναν υποκείμενο τίτλο (π.χ μετοχή) σε προκαθορισμένη τιμή και σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το δικαίωμα προαίρεσης αποτελεί μια πιο σύνθετη μορφή παραγώγων σε σχέση με τα ΣΜΕ και ΠΣ, δεδομένου ότι ο αγοραστής ασκεί το δικαίωμα, παρά μόνο όταν υπάρχει όφελος και χωρίς να είναι υποχρεωμένος. Επίσης ο πωλητής του δικαίωματος υποχρεούται να υπακούσει στις εντολές του αγοραστή, που αυτό σημαίνει ότι ο αγοραστής βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση, καταβάλλοντας ένα αντίτιμο με σκοπό το δικαίωμα να περάσει στην κατοχή του [12].

<u>Χαρκατηριστικά Δικαιώματος Προαίρεσης [12]</u>

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας μια συνοπτική καταγραφή των χαρκτηριστικών ενός δικαώματος προαίρεσης:

α) Το είδος του δικαιώματος

Έχουμε τις εξής κατηγορίες, δικαίωμα αγοράς (call option) και δικαιώμα πώλησης (put option) τα οποία με την σειρά τους διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες

Αγορά Call Option (long call)

Πώληση Call Option (short call)

Αγορά Put Option (long put)

Πώληση Put Option (short put)

β) Υποκείμενος Τίτλος (Μετοχές, χρηματιστηριακοί δείκτες, επιτόκια)

γ) Το μέγεθος του συμβολαίου

δ) Ημερομηνία λήξης T (exercise date)

Έχουμε δυο κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης που εξαρτώνται από την χρονική στιγμή T:
i) <u>Ευρωπαϊκού Τύπου</u>, όπου ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K, μπορεί να ασκηθεί *μόνο* την στιγμή της λήξης t.
ii) <u>Αμερικανικού Τύπου</u>, όπου το δικαίωμα αγοράς μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή *μέχρι και* την ημερομηνία λήξης t σε τιμή K.

ε) Η τιμή εξάσκησης (Exercise Price)

Είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποια ο αγοραστής θα επιλέξει αν θα ασκήσει το δικαίωμα προαίρεσης ή όχι.

στ) Το αντίτιμο C (ασφάλιστρο)

Είναι το ποσό που καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή για να αγοράσει το δικαίωμα.

Αφού αναφέραμε τα χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης θα συνεχίσουμε παραθέτοντας μια σειρά από παραδείγματα που αφορούν

τα είδη των δικαιωμάτων προαίρεσης με σκοπό την κατανόηση της χρήσης τους από τους αναγνώστες.
Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα υποκείμενο τίτλο, (π.x μια μετοχή της ΕΥΔΑΠ) που η αξία του στις 20 Ιουνίου είναι 85 ευρώ. Θεωρούμε επίσης ότι στην αγορά παραγώγων έχουμε πολλά είδη δικαιωμάτων προαίρεσης (δικαιώματα αγοράς και δικαίωματα προαίρεσης) ευρωπαϊκού τύπου για 150 μετοχές της Wind που λήγουν τον Ιούλιο, τον Αύγουστο, τον Σεπτέμβριο και τον Οκτώβριο έχοντας τιμές εξάσκησης $80, 82, 90, 100$ και 130. Το ποσό C που θα καταβάλει ο αγοραστής για την αγορά ή την πώληση του δικαιώματος προαίρεσης θα εξαρτηθεί από την ζήτηση και την προσφορά, του κάθε δικαιώματος. Στην συνέχεια παραθέτουμε τέσσερα παραδείγματα για να γίνει πιο κατανοητή η χρήση των δικαιωμάτων προαίρεσης [12].

Άγορά Δικαιώματος Αγοράς (Long Call)

Ένας επενδυτής X προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής της ΕΥΔΑΠ θα αυξηθεί μέσα στους επόμενους μήνες. Για το λόγο αυτό αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς (call option), δεδομένου ότι δεν θέλει να διακινδυνεύσει να αγοράσει επιπλεόν μετοχές. Πιο συγκεκριμένα ο επενδυτής X γίνεται κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς (holder ενός call option) στις 20 Ιουνίου, με ημερομηνία λήξης τον Σεπτέμβριο και τιμή εξάσκησης $K = 90$ ευρώ. Καταβάλλει ένα αντίτιμο C, και θα είναι σε θέση να αγοράσει τις 150 μετοχές της ΕΥΔΑΠ, σε περίπτωση που τον συμφέρει [12].

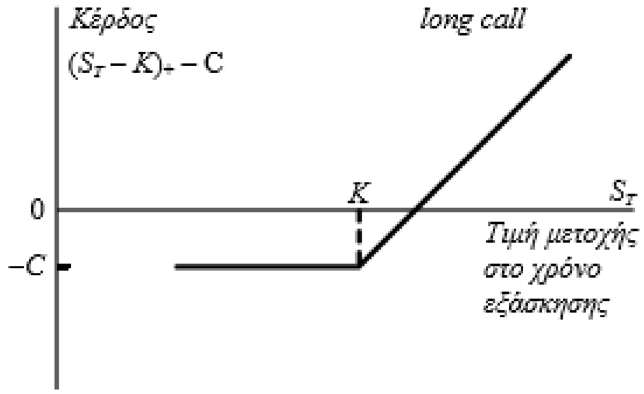
Αν τον Σεπτέμβριο η αξία της μετοχής αυξηθεί στα 100 ευρώ, ο επενδυτής X ασκεί το δικαίωμα έχοντας κέρδος 10 ευρώ ανά μετοχή $(100 - 90)$ σε περίπτωση που αποφασίσει να πουλήσει τις μετοχές αμέσως. Σε αντίθετη περίπτωση, αν η τιμή της μετοχής μειωθεί στα 70 ευρώ, δεν θα ασκήσει το δικαίωμα και θα ζημιωθεί κατά C ευρώ, δηλαδή θα χάσει τα χρήματα που έδωσε για να αποκτήσει το δικαίωμα [12].

Το αποτέλεσμα δίνεται από την σχέση:

$$(S_T - K)_+ = max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & αν\ S_T > K \\ 0, & αν\ S_T \leq K' \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

όπου S_T είναι η αξία της μετοχής την στιγμή άσκησης του δικαιώματος.

Η διαγραμματική απεικόνιση του long call παρουσιάζεται πιο κάτω



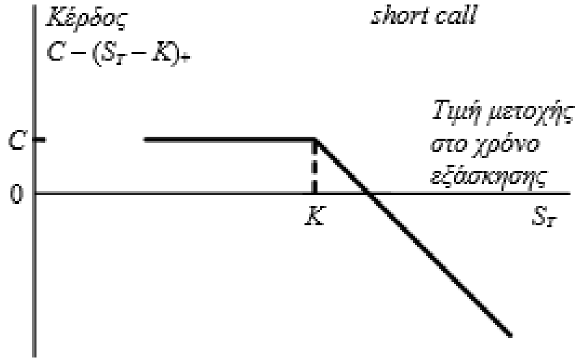
Πώληση Δικαιώματος Αγοράς (Short Call)

Ένας επενδυτής Ψ, είναι κάτοχος 150 μετοχών της ΕΥΔΑΠ και προβλέπει μια ελαφριά πτώση ή μια στάσιμη πορεία στην τιμή της μετοχής. Για να διαφαλίσει την αύξηση της αξίας του χαρτοφυλακίου του, αποφασίζει να πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς, το οποίο λήγει τον Σεπττέμβριο και έχει τιμή εξάσκησης $K = 90$ ευρώ. Από αυτή την πράξη λαμβάνει ως κέρδος την τιμή του ασφαλίστρου C. Αν τον Σεπτέμβριο η τιμή της μετοχής είναι για παράδειγμα 70 ευρώ ο αγοραστής του short call δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του, με αποτέλεσμα ο επενδυτής Ψ να βγει κερδισμένος αποκομίζοντας το ποσό C. Αντίθετα αν η τμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης είναι 110 ευρώ, τότε ο αγοραστής εξασκεί το δικαίωμα και ο επενδυτής αναγκάζεται να πουλήσει στον αγοραστή την μετοχή στην τιμή των 90 ευρώ, με αποτέλεσμα να χάσει το ποσό των 20 ευρώ ανα μετοχή που προκύπτει από την διαφορά $110 - 90$ [12].

Ο γενικός τύπος που ισχύει είναι

$$-(S_T - K)_+ = -max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & \alpha\nu\ S_T > K \\ 0, & \alpha\nu\ S_T \leq K \end{cases}, \qquad (2.1.4)$$

ενώ στην συνέχεια ακολουθεί το διάγραμμα του short call



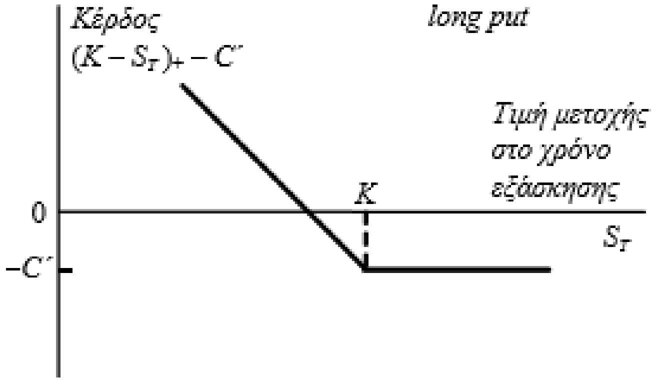
Αγορά Δικαιώματος Πώλησης (Long Put)

Ο επενδυτής Ζ είναι κάτοχος 150 μετοχών της ΕΥΔΑΠ και πρόβλεπει μια πτώση στην τιμή της μετοχής. Αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης (long put), από την στιγμή που δεν θέλει να προβεί άμεσα σε ενέργειες πώλησης των μετοχών του. Το δικαίωμα αυτό λήγει τον Σεπτέμβριο με τιμη εξάσκησης $K = 90$ ευρώ ανά μετοχή και ταυτόχρονα καταβάλλει ατίτιμο C_1. Αν η τιμή της μετοχής την ημερομηνία λήξης είναι 75 ευρώ ο αγοραστής θα ασκήσει το δικαίωμα αυτό, και θα πουλήσει κερδίζοντας 15 ευρώ ανά μετοχή, που προκύπτει από την διαφορά $90 - 75$ ευρώ. Σε περίπτωση όμως που η μετοχή -πάρει την τιμή 115 ευρώ δεν θα ασκήσει το δικαίωμα. Αυτό σημαίνει ότι θα έχει ζημιά C_1 [12].

Το κέρδος του αγοραστή δίνεται από την σχέση

$$(K - S_T)_+ = max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & αν\ K > S_T \\ 0, & αν\ K \leq S_T, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

ενώ ταυτόχρονα το διάγραμμα του long put θα είναι



<u>Πώληση Δικαιώματος Πώλησης (Short Put)</u>

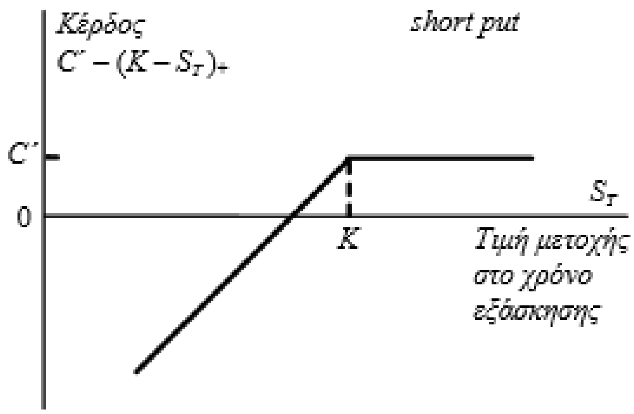
Ο επενδυτής Ω θεωρεί ότι η τιμή της μετοχής της ΕΥΔΑΠ θα αυξηθεί ελάχιστα ή θα μείνει στάσιμη τους επόμενους μήνες. Για αυτό τον λόγο πουλάει ένα δικαίωμα πώλησης που λήγει τον Σεπτέμβριο, έχει τιμή εξάσκησης $K = 90$ ευρώ και λαμβάνει ένα premium C_1. Σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής αυξηθεί στα 100 ευρώ, ο αγοραστής δεν θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης και ο επενδυτής θα έχει κέρδος το premium C_1. Αν όμως η τιμή της μετοχής γίνει μικρότερη από την τιμή εξάσκησης K, δηλαδή αν πάρει την τιμή 70 τότε ο αγοραστής θα ασκήσει το δικαίωμα του και ο επενδυτής θα βγει ζημιωμένος κατά 20 ευρώ ανά μετοχή, γιατί θα είναι αναγκασμένος να αγοράσει την μετοχή στην τιμή εξάσκησης $K = 90$ ευρώ [12].

Το κέρδος του επενδυτή δίνεται από την σχέση

$$-(K - S_T)_+ = -max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} S_T - K & αν\ K > S_T \\ 0, & αν\ \ K \leq S_T \end{cases}, \qquad (2.1.6)$$

όπου S_T είναι η τιμή της μετοχής την στιγμή εξάσκησης T.

Η διαγραμματική απεικόνιση [12] δίνεται πιο κάτω



Στην συνέχεια αξίζει να αναφέρουμε κάποιες έννοιες οι οποίες είναι χρήσιμες για την ερμηνεία χρηματοοικονομικών καταστάσεων. Συμβολίζουμε την τιμή μιας μετοχής σε χρόνο t με S_t και θεωρούμε ένα δικαίωμα προαίρεσης (π.χ δικαίωμα αγοράς) με τιμή εξάσκησης K επί της μετοχής αυτής. Σε περίπτωση που το δικαίωμα εξασκηθεί στον χρόνο αυτό και φέρει στον κάτοχο θετικό κέρδος δηλαδή αν ισχύει $S_t > K$, θα είναι in-the-money, αν φέρει μηδενικό κέρδος δηλαδή αν ισχύει $S_t = K$, θα είναι at-the-money και αν το κέρδος είν αι αρνητικό δηλαδή αν ισχύει $S_t < K$, θα είναι out-of-the-money. Αυτό σημαίνει ότι το δικαίωμα θα εξασκηθεί από τον κάτοχο μόνο όταν ισχύει $S_t > K$ (in the money) [12].

2.2 Μέθοδοι αγοροπωλησιών μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε τους τρόπους υπολογισμού του κέρδους σε κάθε περίπτωση ανάλογα με το είδος του δικαιώματος προαίρεσης (Long Call, Short Call, Long Put, Short Put). Σε αυτό το σημείο θα δούμε τι γίνεται στην περίπτωση που ο επενδυτής αποφασίζει να χρησιμοποιήσει ταυτόχρονα δύο ή και περισσότερα δικαιώματα προαίρεσης [12].

2.2.1. Μέθοδοι που αφορούν δικαιώματα προαίρεσης ίδιου τύπου επί της ίδιας μετοχής

1) Ανοδικό Άνοιγμα (Bull spread)

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K_1 αλλά και ταυτόχρονη πώληση δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K_2 (με $K_2 > K_1$) επί της ίδιας μετοχής. Με S_T θα συμβολίσουμε την τιμή της μετοχής την στιγμή της λήξης και των δυο δικαιωμάτων,(κοινή και για τα δυο δικαιώματα) ενώ με C_1 και C_2 θα συμβολίσουμε την αξία τους. Για να βρούμε το συνολικό κέρδος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

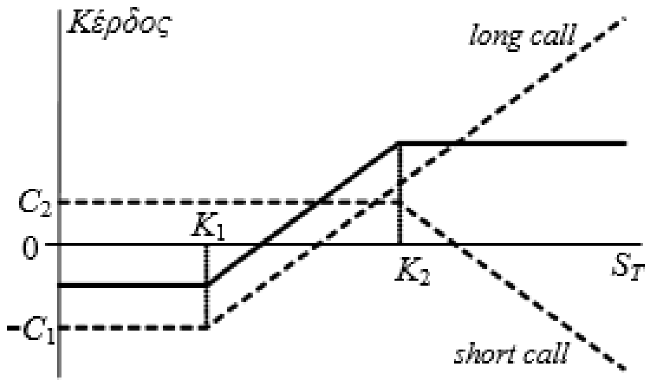
$$(S_T - K_1)_+ - C_1 + C_2 - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} C_2 - C_1, & S_T < K_1 \\ (S_T - K_1) + C_2 - C_1, & K_1 \le S_T \le K_2 \\ K_2 - K_1 + C_2 - C_1, & K_2 < S_T \end{cases}, \tag{2.2.1}$$

Αν αφαιρέσουμε την ποσότητα $C_1 - C_2$, η προηγούμενη σχέση θα πάρει την μορφή

$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0, & S_T < K_1 \\ S_T - K_1, & K_1 \le S_T \le K_2 \\ K_2 - K_1, & K_2 < S_T \end{cases}, \qquad (2.2.2)$$

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, η μέγιστη απώλεια του επενδυτή θα είναι η ποσότητα $C_1 - C_2$, ενώ το μέγιστο κέρδος του θα είναι $K_2 - K_1 - C_1 - C_2$. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν τρία είδη *bull spreads*. Στο πρώτο είδος και τα δυο δικαιώματα αγοράς είναι αρχικά *out-the money*. Στο δεύτερο είδος και τα δυο δικαίωματα αγοράς είναι αρχικά *in-the money,* ενώ στην τελευταία περίπτωση το ένα δικαίωμα αγοράς βρίσκεται αρχικά in-the money και το άλλο *out-the-money*.

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το συνολικό κέρδος



Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν το κέρδος για κάθε δικαίωμα χωριστά, ενώ η συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει το συνολικό κέρδος το οποίο το βρίσκουμε αθροίζοντας τα κέρδη των δυο δικαιωμάτων.

Συνοψίζοντας, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει ομοιότητες με την περίπτωση όπου έχουμε αγορά ενός μόνο δικαιώματος αγοράς, δηλαδή ο επενδυτής περιμένει αύξηση της τιμής της μετοχής το επόμενο χρονικό διάστημα. Η διαφορά που μπορούμε να διακρίνουμε όμως είναι ότι για το κέρδος $(K_2 - K_1)$ υπάρχει ένα άνω φράγμα και για αυτό το λόγο η ποσότητα $C_1 - C_2$ θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή [12].

2) Καθοδικό Άνοιγμα (Bear Spread)

Έστω ότι έχουμε την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call) με τιμή άσκησης K_1 και την ταυτόχρονη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς (long put) με τιμή άσκησης K_2, με την διαφορά ότι εδώ ισχύει ότι $K_1 > K_2$ (στο

ανοδικό άνοιγμα είχαμε $K_2 > K_1$) επί της ίδιας μετοχής. Με S_T συμβολίζουμε ξανά την τιμή που θα έχει η μετοχή την χρονική στιγμή της λήξης (ίδια τιμή και για τα δύο δικαιώματα), ενώ με $C_1 \, και \, C_2$ συμβολίζουμε την αξία τους.
Το συνολικό κέρδος θα δίνεται από την σχέση

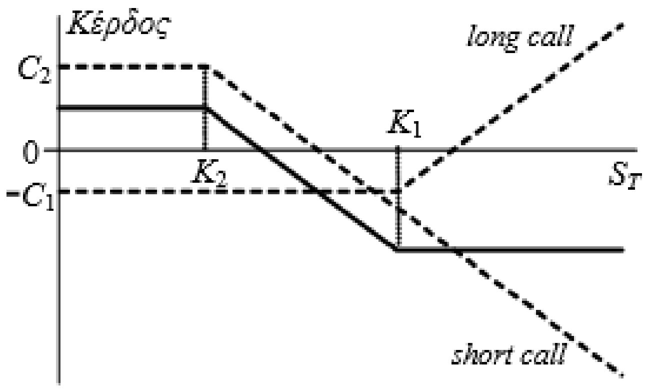
$$(S_T - K_1)_+ - C_1 + C_2 - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} C_2 - C_1, & S_T < K_2 \\ -(S_T - K_2) + C_2 - C_1, & K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ K_2 - K_1 + C_2 - C_1, & K_1 < S_T \end{cases}, \tag{2.2.3}$$

εναλλακτικά έχουμε

$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0, & S_T < K_2 \\ -(S_T - K_2), & K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ K_2 - K_1, & K_1 < S_T \end{cases}. \tag{2.2.4}$$

Με αυτή την μέθοδο το μέγιστο κέρδος του επενδυτή θα είναι το ποσό $C_2 - C_1$ ενώ η μέγιστη απώλεια του θα ισούται με $K_2 - K_1 + C_2 - C_1$.

Η διαγραμματική απεικόνιση του συνολικού κέρδους είναι

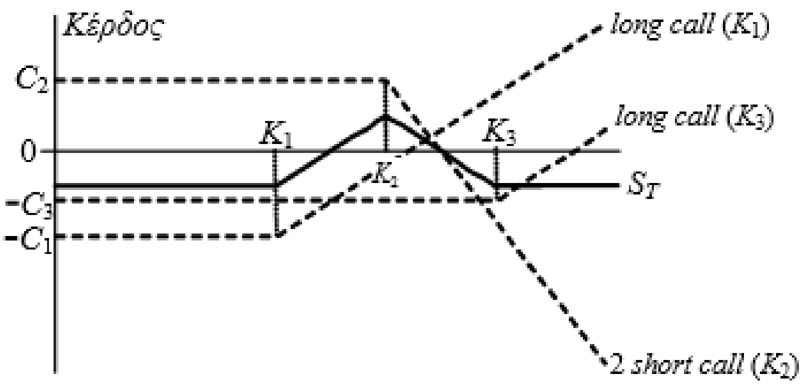


Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο (Bull Spread) οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στο κέρδος του κάθε δικαιώματος χωριστά, ενώ η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στο συνολικό κέρδος το οποίο προκύπτει από την άθροιση των κερδών και των δυο δικαιωμάτων.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται όταν ο επενδυτής περιμένει μια μείωση στην τιμή της μετοχής, (όπως και στην περίπτωση που έχουμε πώληση μόνο ενός δικαιώματος αγοράς). Η διαφορά όμως είναι ότι εδώ υπάρχει ένα κάτω φράγμα για την σχέση $K_2 - K_1$ η οποία είναι η ζημία και για αυτό θα εισπραχθεί μικρότερο ποσό $C_2 - C_1$ [12].

3) Butterfly Spread

Εστω ότι έχουμε αγορά δυο δικαιωμάτων αγοράς (long call) με τιμές άσκησης K_1 και K_3 με $K_1 < K_3$ και ταυτόχρονη πώληση δυο δικαιωμάτων αγοράς με τιμή άσκησης K_2 επί της ίδιας μετοχής. Το K_2 βρίσκεται ανάμεσα στο K_1 και K_3. Η γραφική παράσταση του συνολικού κέρδους φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα

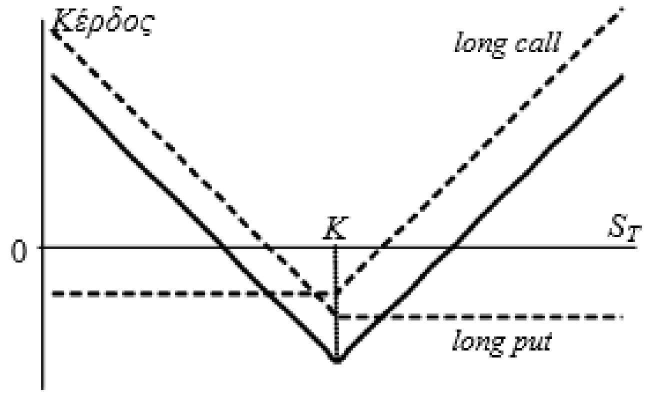


Από το σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε ότι όταν η τιμή της μετοχής S_T προσεγγίσει αρκετά την τιμή K_2 κατά την ημερομηνία λήξης της, τότε θα έχουμε θετική απόδοση. Σε αντίθετη περίτωση, αν έχουμε μεγάλη μεταβολή στην τιμή της μετοχής (άνοδος και πτώση) τότε θα έχουμε ζημιά [12].

2.2.2 Μέθοδοι που αφορούν δικαιώματα αγοράς και πώλησης ταυτόχρονα επί της ίδιας μετοχής.

Μέθοδος Straddle

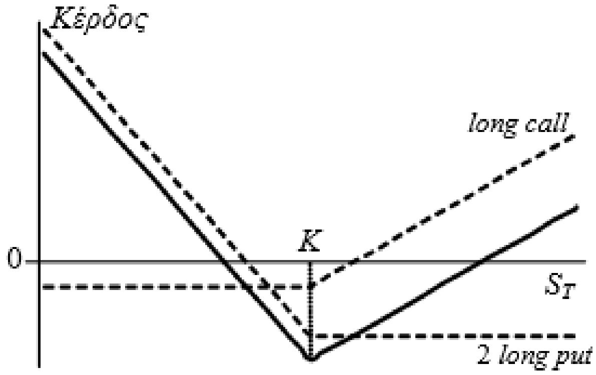
Η μέθοδος *Straddle* αναφέρεται στην αγορά ενός δικαιώματος πώλησης (long put) και στην αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call) επί της ίδιας μετοχής με κοινή τιμή άσκησης K. Το συνολικό κέρδος δίνεται στο επόμενο σχήμα



Με S_T θα συμβολίσουμε την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή της λήξης. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στο κέρδος του κάθε δικαιώματος χωριστά, ενώ η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στο συνολικό κέρδος. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται η τιμή S_T της μετοχής από το την τιμή άσκησης K τόσο πιο μεγάλο θα είναι το κέρδος (είτε ακολουθεί ανοδική πορεία, είτε καθοδική) , ενώ αντίθετα αν όσο η τιμή S_T προσεγγίζει την τιμή K τότε θα έχουμε ζημία [12].

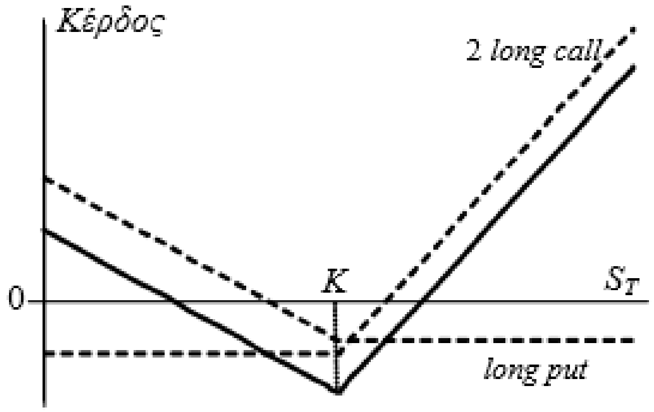
Μέθοδος Strip and Strap

Αυτή η μέθοδος παρουσιάζει ομοιότητες με την προηγούμενη μέθοδο. Στην μέθοδο *Strip* έχουμε την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call) και την αγορά *δύο* δικαιωμάτων πώλησης (long put) με την ίδια τιμή άσκησης K επί της ίδιας μετοχής. (Η διαφορά με την προηγούμενη μέθοδο είναι ότι εκείνη αφορούσε την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και την αγορά *ενός* δικαιώματος πώλησης). Το συνολικό κέρδος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Όπως και στην μέθοδο *Straddle* έτσι και εδώ όταν η τιμή S_T βρίσκεται μακριά από την τιμή άσκησης K,τότε το κέρδος θα είναι μεγαλύτερο (άσχετα αν η πορεία που ακολουθεί είναι ανοδική ή καθοδική) [12].

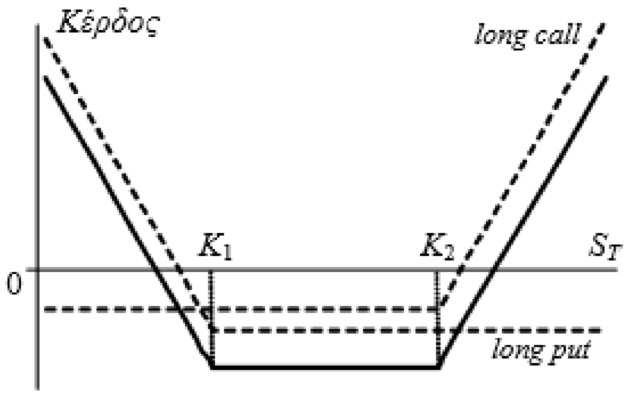
Η μέθοδος *Strap* αφορά στην αγορά *δύο* δικαιωμάτων αγοράς (long call) και την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης (long put) επί της ίδιας μετοχής με τιμή άσκησης K. Η γραφική αναπαράσταση του συνολικού κέρδους θα είναι



Η ερμηνεία του σχήματος της μεθόδου *Strap* είναι ανάλογη με την ερμηνεία του σχήματος της μεθόδου *Strip*. Η διάφορα ανάμεσα σε αυτές τις μεθόδους είναι ότι ο επνεδυτής στην μέθοδο *Strip* πιστεύει ότι θα υπάρχει πτώση στην τιμή της μετοχής,πράγμα που συνεπάγεται μεγαλύτερο κέρδος, ενώ στην μέθοδο *Strap* θεωρεί ότι η τιμή της μετοχής θα αυξηθεί [12].

Μέθοδος είναι η Strangles

Η μέθοδος είναι η *Strangles***,** παρουσιάζει και αυτή ομοιότητες με την μεθοδο *Straddle* με την διαφορά ότι εδώ έχουμε διαφορετικές τιμές άσκησης. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call) και στην αγορά ενός δικαιώματος πώλησης (long put) επί της ίδιας μετοχής αλλά με διαφορετικές τιμές άσκησης K_1 και K_2 με $K_2 > K_1$. Το συνολικό κέρδος απεικονίζεται ως εξής



Αντίστοιχα και σε αυτή την περίπτωση όταν η τιμή της S_T είναι μακριά από τα K_1 και K_2, τότε θα έχουμε κέρδος [12].

2.3 Τιμολόγηση Παραγώγων

Με τον όρο τιμολόγηση εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η τιμή ενός προϊόντος, ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας. Οι αντικειμενικοί σκοποί της τιμολόγησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους και των πωλήσεων, η ελαχιστοποίηση ζημιάς της επιχείρησης και η πώληση αγαθών σε περισσότερες αγορές [10]. Όσον αφορά στα χρηματοοικονομικά παράγωγα έχουμε τιμολόγηση στα προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards), στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures) και στα δικαιώματα προαίρεσης *(Options).* Αυτό που μας ενδιαφέρει στα προθεσμιακά συμβόλαια και στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ο καθορισμός της τιμής συναλλαγής. Δεν θα αναφερθούμε όμως σε αυτές τις κατηγορίες τιμολόγησης γιατί δεν είναι το βασικό αντικείμενο μελέτης της εργασίας μας. Αντίθετα, θα εστιάσουμε στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και πιο συγκεκριμένα στην τιμολόγηση παραγώγων ευρωπαικού τύπου.

2.3.1 Τιμολόγηση με την βοήθεια Διωνυμικού Μοντέλου

Έστω ότι έχουμε μια μετοχή και θεωρούμε ότι η τιμή της είτε θα ανεβαίνει είτε θα κατεβαίνει κατά την διάρκεια της περιόδου. Πιο συγκεκριμένα, θα ισχύει ότι

$$S \nearrow \; Su, \;\; όπου \;\; u = \frac{S_h}{S} = 1 + g, \;\; (up\, ratio) \tag{2.3.1}$$

(Διωνυμικό δέντρο)

$$S \searrow \; Sd, \;\; όπου \; d = \frac{S_h}{S} = 1 + l, \;\; (down\, ratio) \tag{2.3.2}$$

όπου S είναι η τιμή που θα έχει η μετοχή στην αρχή της περιόδου, h θα είναι η διάρκεια της μιας περιόδου και S_h θα είναι η τιμή που θα πάρει η μετοχή στο τέλος της περιόδου.
Το γινόμενο Su δείχνει ότι η μετοχή ανεβαίνει, ενώ η το γινόμενο Sd δείχνει η μετοχή πέφτει.

Θεωρούμε μία τιμή εξάσκησης K ενός δικαιώματος αγοράς (*call option*), με την μετοχή να πληρώνει μερίσματα με *απόδοση* δ (yield rate). Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης όταν η τιμή της μετοχής ανεβαίνει θα είναι $C_u = max\{0,\ u\,S - K\}$ στο *τέλος της περιόδου* h, ενώ όταν η μετοχή κατεβαίνει η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης θα ισούται με $C_d = max\{0,\ d\,S - K\}$.

Στο τέλος της περιόδου h συσσωρεύεται ένα ποσό $e^{\delta h}$, όταν τα μερίσματα επενδυθούν ξανά, ενώ με i συμβολίζουμε το επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό *(risk free).*

Η τιμή του *call option* στην αρχή της περιόδου που καλούμαστε να προσδιορίσουμε συμβολίζεται με C. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να γίνει με την χρήση δύο μεθόδων:
1)Risk-Neutral Approach (Προσέγγιση Ουδέτερου Κινδύνου)
2)Replicating Portfolio Approach (Προσέγγιση Αναπροσαρμογής Χαρτοφυλακίου)

1) Risk-Neutral Approach (Προσέγγιση Ουδέτερου Κινδύνου)

Στην μέθοδο αυτή καλούμαστε να υπολογίσουμε τις *πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου(risk-neutral probabilities).*

Η p_u είναι η *πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου* όταν η μετοχή ανεβαίνει, ενώ η p_d είναι η *πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου* όταν η τιμή της μετοχής πέφτει. Για τις πιθανότητες αυτές ισχύει ότι

$$p_u + p_d = 1,$$

από την οποία συνεπάγεται ότι

$$p_u = 1 - p_d. \tag{2.3.3}$$

Έστω ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς αναπαρίσταται από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Y, με σύνολο τιμών $range(Y) = \{C_u, C_d\}$.

Η *μελλοντική τιμή* του δικαιώματος αγοράς είναι

$$p_u C_u + p_d C_d, \tag{2.3.4}$$

και η *μελλοντική τιμή* της μετοχής θα δίνεται από τον τύπο

$$S e^{(i-\delta)h} = (1 - p_d) u\, S_0 + p_d\, d\, S_0, \tag{2.3.5}$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι οι πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου θα είναι

$$p_d = \frac{u - e^{(i-\delta)h}}{u - d}, \tag{2.3.6}$$

και

$$p_u = 1 - p_d = \frac{e^{(i-\delta)h} - d}{u - d}. \tag{2.3.7}$$

Τέλος, μέσω της (2.3.4) προκύπτει ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς στην αρχή της περιόδου θα δίνεται από την σχέση

$$C = e^{-ih}[(1 - p_d)\, C_u + p_d\, C_d] \tag{2.3.8}$$

Παρατήρηση

Από την σχέση (2.3.8) βλέπουμε ότι το $\delta = 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα στην αρχή της περιόδου.

2) Replicating Portfolio Approach (Προσέγγιση Αναπροσαρμογής Χαρτοφυλακίου)

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα πάρει την θέση του δικαιώματος αγοράς. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο K το οποίο έχει άμεση σχέση με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς επί μιας μετοχής. Επίσης υποθέτουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο Λ το οποίο το οποίο σχετίζεται με την αγορά, ενώ με Δ και Γ θα συμβολίσουμε το πλήθος των μεριδίων της μετοχής και το δάνειο αντίστοιχα.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται δυο πίνακες οι οποίοι δείχνουν την πορεία των χαρτοφυλακίων K και Λ

Χαρτοφυλάκιο K

Συναλλαγή $(t = 0)$	Up- State	Down State
Αγορά ενός call$(-C)$	C_u	C_d
Σύνολο $(-C)$	C_u	C_d

Χαρτοφυλάκιο Λ

Συναλλαγή $(t = 0)$	Up- State	Down State
Αγορά Δ μεριδίων$(-\Delta S)$	$\Delta\, u\, Se^{\delta h}$	$\Delta\, d\, Se^{\delta h}$
Δάνειο Γ ευρώ $(+\Gamma)$	$-\Gamma e^{ih}$	$-\Gamma e^{ih}$
Σύνολο $(-\Delta S + \Gamma)$	$\Delta u\, Se^{\delta h} - \Gamma e^{ih}$	$\Delta d\, Se^{\delta h} - \Gamma e^{ih}$

Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο K αντικατασταθεί από το Λ τότε θα έχουμε

$$C = \Delta\, S - \Gamma, \tag{2.3.10}$$

$$C_u = \Delta\, u\, Se^{\delta h} - \Gamma e^{ih}, \tag{2.3.11}$$

$$C_d = \Delta\, d\, Se^{\delta h} - \Gamma e^{ih}, \tag{2.3.12}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προσδιορίζουμε το πλήθος των μεριδίων Δ, το δάνειο Γ και την τιμή C του δικαιώματος αγοράς. Πιο συγκεκριμένα

$$\Delta = e^{-\delta h} \frac{C_u - C_d}{S\,(u-d)}, \tag{2.3.13}$$

$$\Gamma = e^{-ih} \frac{uC_d - dC_u}{d-u}, \tag{2.3.14}$$

$$C = e^{-ih}[p_u\, C_u + p_d\, C_d]. \tag{2.3.15}$$

2.3.2 Τιμολόγηση Παραγώγων Συμβολαίων

Έστω ένα παράγωγο συμβόλαιο. Την χρονική στιγμή $t = 1$ η απολαβή του αγοραστή θα είναι G, όπου G είναι μία τυχαία μεταβλητή και για $t = 0$ η τιμή της είναι άγνωστη.

Αυτό που θέλουμε να βρούμε είναι το ποσό που θα πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής την στιγμή $t = 0$ με σκοπό το συμβολαίο να περάσει στην κυριότητα του. Θεωρούμε διωνυμικό μοντέλο το οποίο δίνει μια καλή περιγραφή σχετικά με την πορεία της τιμής της μετοχής. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$S(0) = uS\,, \qquad με\ πιθανότητα\ p$$

και

$$S(0) = dS, \qquad με\ πιθανότητα\ 1-p$$

όπου $S(0)$ θα είναι η τιμή της μετοχής την στιγμή $t = 0$.

Για την τιμολόγηση ενός παραγώγου συμβολαίου απαιτείται η χρήση μιας μετοχής και ενός βέβαιου τίτλου. Αυτά τα δύο μαζί θα συνδυαστούν σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει την ίδια συμπεριφορά με το παράγωγο συμβόλαιο ενώ ταυτόχρονα θα κινείται είτε ανοδικά, είτε καθοδικά.

Θεωρούμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$, η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει είτε την ανοδική πορεία, είτε την καθοδική, (με 1 θα συμβολίσουμε την ανοδική πορεία και με 2 την καθοδική). Οι απολαβές του αγοραστή θα λάβουν δύο διαφορετικές τιμές, έστω $G_1 \, και \, G_2$ αντίστοιχα. Την ίδια χρονική στιγμή δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται από l_0 μερίδια από βέβαιο τίτλο και l_1 μερίδια από μία μετοχή. Τότε, η αξία του χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την σχέση

$$X(0) = l_0 + l_1 S(0) \quad (2.3.16) \; (για \; t = 0).$$

Την στιγμή $t = 1$ η αξία του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από την τιμή της μετοχής με αποτέλεσμα να έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$X(1) = l_0(1 + i) + l_1 uS, \qquad (2.3.17)$$

και

$$X(2) = l_0(1 + i) + l_1 dS, \qquad (2.3.18)$$

Το $X(1)$ αντιστοιχεί στην ανοδική πορεία και το $X(2)$ αντοιστοιχεί στην καθοδική πορεία.

Επειδή το χαρτοφυλάκιο που δημιουργήσαμε θέλουμε να έχει την ίδια συμπεριφορά με το παράγωγο συμβόλαιο θα ισχύει ότι

$$X(1) = G(1), \qquad (2.3.18)$$

και

$$X(2) = G(2), \qquad (2.3.19)$$

Αν από την (2.3.17) αφαιρέσουμε την (2.3.18), θα προκύψει ότι

$$l_1 = \frac{X(1) - X(2)}{S(u - d)}, \qquad (2.3.20)$$

και αν στην (2.3.17) αντικαταστήσουμε την (2.3.20) θα βρούμε το l_0, το οποίο θα ισούται με

$$l_0 = \frac{uX(2) - dX(1)}{(1 + i)(u - d)}. \qquad (2.3.21)$$

Το χαρτοφυλάκιο αυτό συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο που συμπεριφέρεται ένα option. Οπότε είτε την χρονική στιγμή $t = 0$ είτε την $t = 1$, θα έχουμε την ίδια συμπεριφορά. Στην περίπτωση που κάτι τέτοιο δεν συνέβαινε, δεν θα υπήρχε η ευκαιρία για arbitrage. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την προοπτική, το χαρτοφυλάκιο του παράγωγου συμβολαίου θα έχει την ίδια τιμή τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$, οπότε

$$P = l_0 + l_1 S$$

ή

$$P = \frac{uG(2) - dG(1)}{(1+i)(u-d)} + \frac{G(1) - G(2)}{S(u-d)} S$$

ή

$$P = \frac{uG(2) - dG(1) + G(1)(1+i) - G(2)(1+i)}{(1+i)(u-d)}$$

ή

$$P = \frac{(1+i-d)}{(1+i)(u-d)} G(1) + \frac{u-(1+i)}{(1+i)(u-d)} G(2)$$

ή

$$P = \frac{(1+i-d)}{(u-d)} \frac{G(1)}{(i+1)} + \frac{u-(1+i)}{(u-d)} \frac{G(2)}{(i+1)}.$$

Στην συνέχεια θα θέσουμε όπου $\Pi_1 = \frac{(1+i-d)}{(u-d)}$, $G_1^* = \frac{G(1)}{(i+1)}$, $\Pi_2 = \frac{u-(1+i)}{(u-d)}$, και $G_2^* = \frac{G(2)}{(i+1)}$ και η προηγούμενη σχέση θα γίνει

$$P = \Pi_1 G_1^* + \Pi_2 G_2^*. \tag{2.3.22}$$

Παρατηρήσεις

i) Θεωρούμε ότι το Π_1 λειτουργεί ως πιθανότητα ανοδικής πορείας και το Π_2ως πιθανότητα καθοδικής πορείας. Επίσης το ζεύγος (Π_1, Π_2), δίνει και την τιμή ενός παράγωγου συμβολαίου, δηλαδή θα έχουμε

$$E(G^*) = P = \Pi_1 G_1^* + \Pi_2 G_2^*, \tag{2.3.23}$$

όπου G^* θα είναι η προεξοφλημένη τιμή της απολαβής την στιγμή $t = 1$.

<u>Τιμολόγηση και απουσία arbitrage</u>

Σε αυτή την περίπτωση θα εξετάσουμε τον τρόπο τιμολόγησης στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει βέβαιο κέρδος στην αγορά. Θεωρούμε λοιπόν, την χρονική στιγμή $t = 0$ και P την τιμή του παραγώγου. Ο

αγοραστής του παραγώγου επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο ($την\ t = 0$), το οποίο θα αποτελείται από τα εξής μέρη
l_0^* θα είναι ο βέβαιος τίτλος
l_1^* θα είναι μέρη από μετοχή αξίας S.

Την χρονική στιγμή t=0 η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την σχέση

$$l_0^* + l_1^* S - P. \tag{2.3.24}$$

(Το αρνητικό πρόσημο αναπαριστούν τα χρηματα που ξόδεψε ο αγοραστής για να αγοράσει το δικαίωμα προαίρεσης).

Αν εφαρμόσουμε το διωνυμικό μοντέλο διαπιστώνουμε ότι για την ανοδική πορεία θα ισχύει η σχέση

$$l_0^* (1 + i) + l_1^* u\, S + G_1, \tag{2.3.25}$$

όπου G_1 θα είναι η απολαβή από την ανοδική πορεία.

Στην καθοδική πορεία η σχέση που θα ισχύει θα είναι

$$l_0^* (1 + i) + l_1^* d\, S + G_2, \tag{2.3.26}$$

όπου G_2 είναι η απολαβή από την καθοδική πορεία.

Ένα εύλογο ερώτημα που χρήζει απάντησης είναι αν μπορεί ο αγοραστής του παραγώγου να έχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος σύμφωνα με το χαρτοφυλάκιο που έχει επιλέξει. Επίσης θα μπορούσε η συνολική αξία του χαρτοφυλάκιου του κάτοχου την στιγμή t=0 να είναι μηδέν και την στιγμή t=1 να έχει θετική τιμή άσχετα από την πορεία της αγοράς;

Αν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε καλούμαστε να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα

$$l_0^* + l_1^* S = 0, \tag{2.3.27}$$

$$l_0^* (1 + i) + l_1^* u\, S + G_1 > 0, \tag{2.3.28}$$

$$l_0^* (1 + i) + l_1^* d\, S + G_2 > 0. \tag{2.3.29}$$

Θεωρούμε ότι το σύστημα έχει λύση την (l_0^*, l_1^*).

Διαιρώντας τις (2.2.28) και (2.2.29) με $(1+i)$ έχουμε

$$l_0^* + l_1^* \, S \frac{u}{(1+i)} + \frac{G_1}{(1+i)} > 0,$$

$$l_0^* + l_1^* \, S \frac{d}{(1+i)} + \frac{G_2}{(1+i)} > 0.$$

Στην συνέχεια θέτουμε $u^* = \frac{u}{(1+i)}$, $G_1^* = \frac{G_1}{(1+i)}$, $d^* = \frac{d}{(1+i)}$ και $G_2^* = \frac{G_2}{(1+i)}$ και οι σχέσεις που παίρνουμε είναι

$$l_0^* + l_1^* \, S \, u^* + G_1^* > 0, \tag{2.3.30}$$

$$l_0^* + l_1^* \, S \, d^* + G_2^* > 0. \tag{2.3.31}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (2.2.30) με $\Pi_1 = \frac{(1+i-d)}{(u-d)}$ και την (2.2.31) με $\Pi_2 = \frac{u-(1+i)}{(u-d)}$, με τις σχέσεις να γίνονται

$$\Pi_1 l_0^* + \Pi_1 \, l_1^* \, S \, u^* + \Pi_1 \, G_1^* > 0,$$

και

$$\Pi_2 l_0^* + \Pi_2 l_1^* \, S \, d^* + \Pi_2 \, G_2^* > 0.$$

Προσθέτονοτας αυτές τις δυο σχέσεις θα προκύψει

$$(\Pi_1 + \Pi_2) l_0^* + (\Pi_1 \, u^* + \Pi_2 \, d^*) \, l_1^* \, S + (\Pi_1 \, G_1^* + \Pi_2 \, G_2^*) > 0. \tag{2.3.32}$$

Γνωρίζουμε ότι $(\Pi_1 + \Pi_2) = 1, (\Pi_1 \, u^* + \Pi_2 \, d^*) = 1$ και $(\Pi_1 \, G_1^* + \Pi_2 \, G_2^*) = E(G^*)$.

Επομένως,

$$l_0^* + l_1^* \, S + E(G^*) > 0. \tag{2.3.33}$$

Αν στην (2.3.33) θέσουμε όπου $l_0^* + l_1^* \, S = P$, τότε έχουμε ότι $E(G^*) > P$, που είναι άτοπο γιατί ξέρουμε ότι $E(G^*) = P$.

2.4 Το Μοντέλο Black-Scholes

Μια σημαντική καινοτομία στον χώρο της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης αποτελεί το μοντέλο Black-Scholes. Πιο συγκεκριμένα, οι οικονομολόγοι Black και Scholes το 1973 με την δημοσίευση του άρθρου “Pricing of Options and Corporate Liabilities”, έδειξαν ότι με την προϋπόθεση ότι οι τιμές ακολουθούν το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown, υπάρχει μόνο μια τιμή για ένα δικαίωμα αγοράς. Αυτό σημαίνει ότι αν υιοθετηθεί μια στρατιγική, δεν θα οδηγήσει σε βέβαιο κέρδος. Δηλαδή δεν υπάρχει βέβαιο κέρδος, όταν η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι αυτή που δίνεται από το μοντέλο Black – Scholes.

2.4.1 Ανάλυση Black-Scholes

Μετατροπή της στοχαστικής διαδικασίας σε ντετερμινιστική

Προηγουμένως αναφερθήκαμε στην γεωμετρική κίνηση Brown η οποία είναι ένα στοχαστικό μοντέλο που μελετάει τις μεταβολές στις τιμές των μετοχών. Αυτή η στοχαστική διαδικασία χρησιμοποιείται στον τύπο των Black- Scholes, και εμείς καλούμαστε να αποδείξουμε την μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes.

Επειδή υπάρχει ένας τυχαίος όρος που καθιστά δύσκολη την κατασκευή της μερικής διαφορικής εξίσωσης θα δημιουργήσουμε μια συνάρτηση g η οποία είναι ντετερμινιστική. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε την σχέση

$$g = f - \Delta S. \tag{2.4.1}$$

όπου Δ είναι μια άγνωστη παράμετρος η οποία είναι σταθερή στην διάρκεια περιόδου dt.
Η διαφορική μορφή της g θα είναι

$$dg = df - \Delta dS. \tag{2.4.2}$$

Αν στην (2.4.2) αντικαταστήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$df = \left[\mu\, S\,\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \left[S\,\sigma\,\frac{\partial V}{\partial S}\right] dW, \tag{2.4.3}$$

και

$$dS = S\,\mu\,dt + S\,\sigma\,dW, \tag{2.4.4}$$

θα έχουμε

$$dg = \sigma\,S\left[\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta\right]dW + \left[\mu\,S\left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt. \tag{2.4.5}$$

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω σχέση αποτελείται από δύο όρους, ένα στοχαστικό και ένα ντετερμινιστικό. Αν τώρα θέσουμε όπου $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$, ο συντελεστής του όρου dW γίνεται μηδέν δηλαδή το στοχαστικό μέρος της (2.4.5) θα εξαφανιστεί και η νέα σχέση που θα προκύψει είναι

$$dg = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt. \tag{2.4.6}$$

Συνοψίζοντας, αυτή η εξίσωση ντετερμινιστικού τύπου αποτελεί την βάση που εισήγαγαν οι Black-Scholes με σκοπό να φτάσουμε στην μερική διαφορική εξίσωση που ζητάμε.

2.4.2 Η Μερική Διαφορική Εξίσωση Black-Scholes

Αφού προσδιορίσαμε την εξίσωση ντετερμινιστικού τύπου που αποτελεί την βάση που εισήγαγαν οι Black-Scholes, θα εισάγουμε την έννοια της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes. Πρώτα όμως, είναι απαραίτητο να παρουσιάσουμε και να εξηγήσουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$S = S_t$ είναι η τιμή του *underlying asset* (υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου). Π.χ μετοχές, ομόλογα, κλπ. Το t κάποιες φορές παραλείπεται, αλλά στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιείται ο συμβολισμός S_t.

t είναι ο χρόνος που πέρασε από την στιγμή που έγινε η αγορά του δικαιώματος προαίρεσης και T είναι ο χρόνος λήξης.

$V(S,t)$ είναι η αξία ενός δικαίωματος αγοράς *(call option)* ή ενός δικαιώματος πώλησης *(put option).*

$C(S,t)$ είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς *(call option).*

$P(S,t)$ είναι η τιμή του δικαιώματος πώλησης *(put option).*

K είναι η τιμή άσκησης (exercise price) του δικαιωματος προαίρεσης

σ είναι η μεταβλητότητα (volatility) του υποκείμενου τίτλου.

μ είναι ο drift term του υποκείμενου τίτλου

r είναι το *risk free interest rate* (επιτόκιο μηδενικού κινδύνου). Για παράδειγμα η απόδοση που λαμβάνουμε από μια επένδυση (χωρίς κίνδυνο) όπως είναι πχ ένα ομόλογο κυβέρνησης

<u>Υποθέσεις του Μοντέλου Black-Scholes</u>

1) Το υπό-θεώρηση περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί γεωμετρική κίνηση *Brown* με drift term μ και μεταβλητότητα σ. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η σχέση

$$dS = \mu\, S\, dt \;+ \sigma\, S\, dW.$$

2) Έχεις το δικαίωμα να πουλήσεις ένα περιουσιακό στοιχείο το οποίο δεν σου ανήκει κατά κυριότητα.
3) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών.
4) Δεν υπάρχουν μερίσματα κατά την διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης.
5) Δεν υπάρχει βέβαιο κέρδος (arbitrage), με αποτέλεμα η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης να δίνεται από το μοντέλο Black-Scholes.
6) r σταθερό.

Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης $V(S,t)$ εξαρτάται από την τιμή του περιουσιακού στοιχείου S_t, η οποία ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή

$$dS = \mu\, S\, dt \;+ \sigma\, S\, dW. \tag{2.4.7}$$

Οπότε από το λήμμα του Itô θα ισχύει

$$dV = \left[\mu S\,\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2\sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \left[S\sigma\, \frac{\partial V}{\partial S}\right] dW \tag{2.4.8}$$

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από ένα δικαιώμα προαίρεσης και μια παράμετρο $\varDelta$, που στην ουσία είναι μερίδια από μετοχές. Αν συμβολίσουμε με $\varPi$ την αξία του χαρτοφυλακίου θα ισχύει

$$\varPi = V - \varDelta S. \tag{2.4.9}$$

Επίσης θεωρούμε ότι η τιμή της παραμέτρου $\varDelta$ είναι σταθερή κατά την διάρκεια της περιόδου dt και η σχέση η οποία δίνεται είναι η ακόλουθη

$$d\varPi = dV - \varDelta dS. \tag{2.4.10}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (2.4.10) τις σχέσεις (2.4.7) και (2.4.8) θα προκύψει

$$d\varPi = \sigma S\left[\frac{\partial V}{\partial S} - \varDelta\right] dW + [\mu S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \varDelta\right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \tag{2.4.11}$$

Αν θέσουμε ξανά όπου $\varDelta = \frac{\partial V}{\partial S}$, η (2.4.11) θα γίνει

$$d\varPi = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,, \tag{2.4.12}$$

δηλαδή η εξίσωση για το $d\varPi$ γίνεται ντετερμινιστική, από την στιγμή που το στοχαστικό μέρος παύει να υφίσταται. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι το χαρτοφυλάκιο είναι τέλεια αντισταθμισμένο. Επίσης, καθώς ο χρόνος μεταβάλλεται είναι πολύ πιθανό να αλλάξουν οι τιμές του $\varDelta$ και του $\frac{\partial V}{\partial t}$.

Ωστόσο, αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει βέβαιο κέρδος (arbitrage) και σταθερό constant επιτόκιο μηδενικού κινδύνο r κατά την περίοδο dt, ο τύπος που θα προκύψει για το $d\varPi$ θα είναι

$$d\varPi = r\varPi dt\,. \tag{2.4.13}$$

Αν εξισώσουμε τις (2.4.12) και (2.4.13) έχουμε

$$r\varPi dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2\sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt\,,$$

ή

$$(rV - r\Delta S)dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2\sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt,$$

ή

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - r\Delta S,$$

ή

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\Delta - rV = 0. \tag{2.4.14}$$

Η σχέση που μόλις αποδείξαμε (έχει βραβευτεί με Nobel to 1997), είναι η μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes. Οι όροι

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

είναι η απόδοση του τέλεια αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου Π, ενώ το

$$rS\Delta - rV,$$

αποτελεί την απόδοση των τραπεζικών καταθέσεων.

Παρατηρήσεις

1) Η μερική διαφορική εξίσωση (2.4.14) ορίζει την τιμή ενός παραγώγου πάνω σε ένα υπό-θεώρηση περιουσιακό στοιχείο, που ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown.
2) Η (2.4.14) είναι μερική διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου.
3) Το Δ είναι μια σημαντική και ανήκει στην κατηγορία των *Greeks*.
4) Ο γραμμικός τελεστής

$$L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\Delta - r, \tag{2.4.15}$$

είναι ένα μέτρο της διαφοράς ανάμεσα στην απόδοση του «τέλεια» αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου Π (δυο πρώτοι όροι) και την απόδοση των τραπεζικών καταθέσεων (οι δυο τελευταίοι όροι).

2.4.3 Το Μοντέλο Black-Scholes

Αφού αποδείξαμε την μερική διαφορική εξίσωση Black- Scholes, θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η τιμολόγηση ενός

δικαιώματος αγοράς. Με το μοντέλο αυτό υπολογίζουμε την μοναδική τιμή ενός δικαιώματος αγοράς που δεν θα οδηγήσει σε βέβαιο κερδος, δηλαδή σε arbitrage.
Βασική προυποθεση είναι ότι η αξία του χρεογράφου ακολουθεί κίνηση Brown. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει το arbitrage, η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι συνάρτηση πέντε μεταβλητών.

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European call option) με τιμή άσκησης K και στιγμή λήξης t. Αυτό σημαίνει ότι κάποιος έχει το δικαίωμα να αγοράσει μία μονάδα μιας μετοχής για παράδειγμα την χρονική στιγμή t με τιμή K.

Η αξία C του δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή t θα δίνεται από την σχέση

$$C = S\,\Phi(l_1) - Ke^{-it}\Phi(l_2), \tag{2.4.16}$$

όπου

S θα είναι η τιμή της μετοχής την στιγμή $t = 0$,

Φ είναι η τυποποιημένη κανονική συνάρτηση κατανομής,

K η τιμή άσκησης, δηλαδή μια προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής θα επιλέξει αν θα ασκήσει το δικαίωμα προαίρεσης ή όχι,

i είναι η ένταση ανατοκισμού (*risk free*),

και

$$l_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(i + \frac{s^2}{2}\right)t}{s\sqrt{t}}, \tag{2.4.17}$$

$$l_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(i - \frac{s^2}{2}\right)t}{s\sqrt{t}}, \tag{2.4.18}$$

και s^2 θα είναι η διασπορά του *risk free* για την μετοχή.

Στην συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα με σκοπό να γίνει περισσότερο κατανοητή η εννοία του μοντέλου Black-Scholes.

Θεωρούμε ότι η τιμή μιας μετοχής την στιγμή $t = 0$ θα είναι $S_0 = 20$ ευρώ, το επιτόκιο ανατοκισμού $i = 0.04$ και διασπορά $s^2 = 0.16$. Επίσης θεωρούμε ακόμα ένα δικαίωμα αγοράς (call option) το οποίο έχει τιμή άσκησης $K = 30$ ευρώ, και λήγει την χρονική στιγμή $t = \frac{3}{12}$. Ζητάμε να βρούμε την τιμή του call option με την χρήση του μοντέλου Black-Scholes την στιγμή $t = \frac{3}{12}$.

Για τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος αγοράς θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$C = S_0\, \Phi(l_1) - Ke^{-it}\Phi(l_2).$$

Τα δεδομένα του παραδείγματος μας είναι $S_0 = 20$, $i = 0.04$, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.16} = 0.4$, $K = 30$ και $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Υπολογίζουμε πρώτα τα l_1 αι l_2.

$$l_1 = \frac{\log\left(\frac{20}{30}\right) + (0.04 + \frac{0.16}{2})\frac{1}{4}}{0.4\frac{1}{2}} = -0.7305$$

$$l_2 = \frac{\log\left(\frac{20}{30}\right) + (0.04 - \frac{0.16}{2})\frac{1}{4}}{0.4\frac{1}{2}} = -0.9305$$

Στην συνέχεια κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο

$$C = 20\, \Phi(-0.7305) - 30e^{-0.04\frac{1}{4}}\Phi(-0.9305)$$

ή

$$C = 20\, \Phi(-0.7305) - 29.7\Phi(-0.9305)$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια μικρή παράκαμψη για να θυμήσουμε μια σημαντική ιδιότητα. Ισχύει ότι $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (όπου $\Phi(x)$ θα είναι η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής). Οπότε η προηγούμενη σχέση θα γίνει

$$\begin{aligned} C &= 20[\,1 - \Phi(0.7305)] - 29.7[1 - \Phi(0.9305)] \\ &= 20(1 - 0.7693) - 29.7(1 - 0.8238) = 4.614 - 5.23314. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο της εργασίας μας θα κάνουμε μια μικρή σύνοψη σχετικά με τα θέματα που έχουν πραγματευτεί μέχρι τώρα. Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε αναλυτικά τις έννοιες της στοχαστικής διαδικασίας, της θεωρίας μέτρου, της κίνησης Brown, της αριθμητικής κίνησης Brown, της γεωμετρικής κίνησης Brown, των martingales καθώς και του στοχαστικού ολκληρώματος του Itô. Χρησιμοποιήσαμε αρκετά παραδείγματα με σκόπο την καλύτερη κατανόησή τους από τον αναγνώστη. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες και τις κατηγορίες των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, ενώ παραθέσαμε και εδώ παραδείγματα με στόχο να γίνει κατανοητή η χρήση και η εφαρμογή τους. Σε αυτό το κεφάλαιο επίσης, ένα σημείο που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής είναι η τιμολόγηση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και ιδιαίτερα το μοντέλο Black-Scholes, το οποίο αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για το τρίτο κεφάλαιο που είναι και το βασικό θέμα μελέτης της εργασίας μας.

3ο Κεφάλαιο

Στοχαστικό Περιβάλλον Βέβαιου Κέρδους σε Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης [16]

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια ασυμπτωτική θεωρία [18] τιμολόγησης η οποία βασίζεται στο κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ) για την τιμολόγηση ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης, και εστιάζει στην εύρεση ζωνών τιμολόγησης για ένα δικαίωμα προαίρεσης από το να ψάχνει μια ακριβή εξίσωση για την τιμή. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι οι ζώνες τιμολόγησης είναι ανεξάρτητες από τα χαρακτηριστικά του τυχαίου βέβαιου κέρδους. Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία όπως και στην περίπτωση της τιμολόγησης και προσπαθούμε να βρούμε διαστήματα εμπιστοσύνης αντιστάθμισης, που μπορούν να προσαρμοστούν στο μέγεθος του κινδύνου του βέβαιου κέρδους που εκτίθεται ο επενδυτής. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται για να αποθηκεύσει το κόστος της αντιστάθμισης σε ένα τυχαίο περιβάλλον βέβαιου κέρδους.

3.1. Μαθηματική Μοντελοποίηση

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε μια αγορά που αποτελείται από μια μετοχή με τιμή S, ένα ομόλογο που συμβολίζεται με B και ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης με τιμή V. Υποθέτουμε ότι η αγορά θα επηρεαστεί από δυο πηγές αβεβαιότητας: α) από τις τυχαίες διακυμάνσεις από την απόδοση της τιμής της μετοχής, και β) από μία απόδοση βέβαιου κέρδους από την τιμή του ομολόγου. Το παραπάνω μοντέλο περιγράφεται από τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW \tag{3.1}$$

και

$$\frac{dB}{B} = r\,dt + \xi(t)\,dt\,, \tag{3.2}$$

όπου r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και το W η διαδικασία Wiener. Η τυχαία διαδικασία $\xi(t)$ περιγράφει τις διακυμάνσεις από την απόδοση βέβαιου κέρδους γύρω από το rdt.

Αυτές οι τυχαίες διακυμάνσεις της απόδοσης βέβαιου κέρδους $\xi(t)$ υποθέτουμε ότι συμβαίνουν στην *κλίμακα του χρόνου* (σε ώρες). Αυτό σημαίνει ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος τ_{arb} συνδέει με μια σχέση το χρόνο απόδοσης της τιμής της μετοχής και τη διάρκεια ζωής Τ του παραγώγου, δηλαδή θα ισχύει $\mathbf{0} << \boldsymbol{\tau_{arb}} << \boldsymbol{T}$. Αυτή η διαφορά στο χρόνο επιτρέπει την ανάπτυξη μιας ασυμπτωτικής θεωρίας τιμολόγησης συμπεριλαμβανομένου του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ) για την τυχαία διαδικασία.

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση της μερικής διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί την τιμή V του δικαιώματος προαίρεσης. Θεωρούμε επενδυτή ο οποίος δημιουργεί μια μηδενική αρχική επενδυτική θέση δημιουργώντας ένα χαρτοφυλάκιο Π. Αυτό το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από ένα ομόλογο B, από Δ μερίδια της μετοχής S (όπου $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ γνωστό ως ένα από τα Greeks), και ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης με τιμή άσκησης K και ημερομηνία λήξης T.

Τότε, η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού δίνεται από τη σχέση

$$\Pi = B - \frac{\partial V}{\partial S}\,S + V. \tag{3.3}$$

Η δυναμική του χαρτοφυλακίου μέσω των Black-Scholes δίνεται από τις δυο εξισώσεις $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ και $\Pi = 0$. Αν εφαρμόσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô στη σχέση (3.3), τότε με τη βοήθεια των σχέσεων (3.1) και (3.2) και λαμβάνοντας υπόψιν την $\xi(t) = 0$, οδηγούμαστε στην κάτωθι κλασσική εξίσωση των Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{3.4}$$

Μετασχηματίζοντας την (3.1) και την (3.3) και θεωρώντας ότι $B = 0$ έχουμε αντίστοιχα τις εξής σχέσεις

$$dS = S\,\mu\,dt + S\,\sigma\,dW \tag{3.5}$$

και

$$d\Pi = -\frac{\partial V}{\partial S}\,dS + dV, \tag{3.6}$$

ενώ από την εφαρμογή του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô, όσον αφορά την αξία του δικαιώματος προαίρεσης, έχουμε

$$dV = \left[\mu\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt + \left[S\,\sigma\,\frac{\partial V}{\partial S}\right]dW. \tag{3.7}$$

Αν στην (3.6) αντικαταστήσουμε τις (3.5) και (3.7) τότε θα ισχύει

$$d\Pi = \left[\mu S\,\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt + \,S\sigma\,\frac{\partial V}{\partial S}\,dW - \frac{\partial V}{\partial S}\,S\mu dt - \frac{\partial V}{\partial S} S\sigma\,dW,$$

ή ισοδύναμα

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt\, + \frac{1}{2}\,S^2\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,dt$$

και η σχέση στην οποία καταλήγουμε είναι

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt. \tag{3.8}$$

Εναλλακτικά στην περίπτωση που έχουμε $B \neq 0$ μαζί με τη βοήθεια της σχέσης (3.2) παίρνουμε

$$d\Pi = r\,B\,dt + \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt. \tag{3.9}$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου Π μεταβάλλεται εξαιτίας μιας απόδοσης r σε σχέση με το μικρό χρονικό διάστημα dt και παίρνουμε την σχέση

$$d\Pi = r\,\Pi\,dt \tag{3.10}$$

Αν εξισώσουμε την προηγούμενη (3.10) με τις (3.8) και (3.9) τότε θα έχουμε αντίστοιχα

$$r\,\Pi\,dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt, \qquad (3.11)$$

ή

$$r\,\Pi\,dt = \left[r\,B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt\ \ (\alpha\nu\ B \neq 0) \qquad (3.12)$$

Αν στην συνέχεια αντικαταστήσουμε στις (3.11) και (3.12) όπου Π την (3.3) θα πάρουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\left(r\,V - r\,\frac{\partial V}{\partial S}\,S\right) dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt,$$

ή

$$\left(r\,B + r\,V - r\,\frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt = \left[r\,B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt\ \ (\alpha\nu\ B \neq 0).$$

Παραλείποντας το dt και από τις δυο σχέσεις θα έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\,V - r\,\frac{\partial V}{\partial S}\,S$$

ή

$$r\,B + r\,V - r\,\frac{\partial V}{\partial S}\,S = r\,B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,S^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\ .$$

Συνοψίζοντας βλέπουμε ότι και οι δυο αυτές σχέσεις ($\mu\varepsilon\ B = 0$ ή $B \neq 0$) ικανοποιούν την (3.4), οπότε η τελική σχέση που θα προκύψει θα είναι

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - r\,V = 0.$$

Μια γενίκευση του $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ είναι η απλή εξίσωση ισορροπίας

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\Pi}{\tau_{arb}}, \tag{3.13}$$

όπου τ_{arb} είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος κατά τη διάρκεια του οποίου η ευκαιρία βέβαιου κέρδους, σταματάει να υπάρχει [2]. Αν αντικαταστήσουμε στην κάτωθι, γνωστή ως "αυτοχρηματοδοτούμενη" συνθήκη

$$d\Pi = dB - \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) dS + dV, \tag{3.14}$$

το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô, την εξίσωση (3.5) και την

$$dB = B\, r\, dt + B\, \xi(t)\, dt,$$

(η τελευταία αποτελεί τον μετασχηματισμό της (3.2)) , θα οδηγηθούμε στην ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} - r\, V + r\, \Pi + \xi(t)\, \Pi + \xi(\tau)\left(S\, \frac{\partial V}{\partial S} - V\right) + \frac{\Pi}{\tau_{arb}} = 0 \tag{3.15}$$

Για να αποδείξουμε την (3.15) θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως πριν, χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις με την διαφορά ότι τώρα θα ισχύει $\xi(t) \neq 0$ και $\Pi \neq 0$. Πιο συγκεκριμένα

$$d\Pi = r\, B\, dt + \xi(t)\, B dt - \frac{\partial V}{\partial S}\, (\mu\, S\, dt + S\, \sigma\, dW)$$
$$+ \left[\mu\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2 \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + S\, \sigma\, \frac{\partial V}{\partial S}\, dW$$

ή

$$d\Pi = r\, B\, dt + \xi(t)\, B\, dt - \frac{\partial V}{\partial S}\, \mu\, S\, dt - \frac{\partial V}{\partial S}\, S\, \sigma\, dW + \mu\, S\, \frac{\partial V}{\partial S}\, dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$
$$+ \frac{1}{2}\, S^2 \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\, dt + S\, \sigma\, \frac{\partial V}{\partial S}\, dW$$

Και καταλήγουμε στην σχέση

$$d\Pi = \left[r\, B + \xi(t)\, B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2\, \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt. \tag{3.16}$$

Όπως και πριν έτσι και σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου Π μεταβάλλεται εξαιτίας μια απόδοσης r σε σχέση με τον χρόνο t και παίρνουμε την σχέση

$$d\Pi = r\, \Pi\, dt. \tag{3.17}$$

Εξισώνοντας τις (3.14) $και$ (3.15) θα πάρουμε

$$r\, \Pi\, dt = \left[r\, B + \xi(t)\, B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2\, \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt.$$

Αν αντικαταστήσουμε όπου

$$\Pi = \left(B - \frac{\partial V}{\partial S} S + V \right)$$

στην προηγούμενη σχέση και παραλείψουμε το dt , τότε θα ισχύει

$$r\, B + \xi(t)\, B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2 \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\, B + r\, V - r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2\, \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} + \xi(t)\, B - r\, V = 0 \tag{3.18}$$

Αν στην σχέση (3.16) αντικαταστήσουμε όπου $B = \Pi + \frac{\partial V}{\partial S} S - V$ θα έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, S^2 \sigma^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} - r\, V + \xi(t)\, \Pi + \xi(t) \left(\frac{\partial V}{\partial S} S - V \right) = 0$$

Όταν $\Pi = 0$ και $\xi(t) = 0$, βλέπουμε ότι η σχέση (3.6) θα ισούται με την (3.4) δηλαδή θα έχουμε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση Black – Scholes.

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα θα εισάγουμε την αδιάστατη παράμετρο του χρόνου

$$\tau = \frac{T-t}{T}, \qquad 0 \leq \tau \leq 1, \tag{3.19}$$

και μία μικρή παράμετρο

$$\varepsilon = \frac{\tau_{arb}}{T} \ll 1. \tag{3.20}$$

Όταν το $\varepsilon \to 0$, η στοχαστική απόδοση βέβαιου κέρδους ξ γίνεται μια λειτουργία η οποία γρήγορα μεταβάλλεται στο χρόνο και λέγεται $\xi(\frac{\tau}{\varepsilon})$ [17]. Υποθέτουμε ότι το $\xi(t)$ είναι μια εργοδική τυχαία διαδικασία, (με $\langle \xi(\tau) \rangle = 0$) όπως

$$D = \int_0^{+\infty} [\xi(\tau+s)\,\xi(t)]\; ds \tag{3.21}$$

η οποία είναι πεπερασμένη. Από την (3.13) βλέπουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου Π μειώνεται στο μηδέν εκθετικά. Ετσι για $\Pi = 0$, έχουμε ότι $\varepsilon \to 0$. Από την (3.15) η τιμή V^{ε} του δικαιώματος προαίρεσης θα ισούται με $V^{\varepsilon} = V^{\varepsilon}(S,t)$ και θα υπακούει στην στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} - rV^{\varepsilon} + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\left(S\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} - V^{\varepsilon}\right) \tag{3.22}$$

μαζί με την αρχική συνθήκη

$$V^{\varepsilon}(S,0) = max(S - K, 0) \tag{3.23}$$

για ένα δικαίωμα αγοράς με προκαθορισμένη τιμή K.

3.2 Αντιστάθμιση Κινδύνου σε Στοχαστικό Περιβάλλον Βέβαιου Κέρδους

Σε αυτήν την ενότητα διερευνούμε το πρόβλημα της αντιστάθμισης κινδύνου από την εγγραφή ενός δικαιώματος προαίρεσης σε ένα κεφάλαιο, για την περίπτωση που οι στοχαστικές ευκαιρίες βέβαιου κέρδους είναι παρούσες στην αγορά. Εδώ εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία, όπως και στην περίπτωση της τιμολόγησης [18] και προσπαθούμε να βρούμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης αντιστάθμισης τα οποία μπορούν να προσαρμοστούν στο μέγεθος του κινδύνου του βέβαιου κέρδους που εκτίθεται ο επενδυτής. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποθηκεύσει το κόστος της αντιστάθμισης σε ένα τυχαίο περιβάλλον βέβαιου κέρδους.

Στη συνήθη περίπτωση των Black-Scholes η τέλεια αντιστάθμιση επιτυγχάνεται διατηρώντας ένα ποσό $\Delta_{Bs} = \frac{\partial V}{\partial S}$ της υποκείμενης αξίας ώστε να εξαλειφθεί ο κίνδυνος από τις αλλαγές στην τιμή της μεταβλητής. Παραγωγίζοντας την (3.4) ως προς S και εισάγοντας την «αδιάστατη παράμετρο του χρόνου» όπως πριν, έχουμε ότι

$$\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial \tau} = S\,(\sigma^2 + r)\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\,\frac{\partial^2 \Delta_{BS}}{\partial S^2} \tag{3.24}$$

με αρχική συνθήκη $\Delta_{BS}(S, 0) \;=\; H(S - K)$ για μία αγορά ενός δικαιώματος προαίρεσης με προκαθορισμένη τιμή K και H την συνάρτηση Heaviside, δηλαδή

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας την (3.22) ως προς S, ο στοχαστικός λόγος αντιστάθμισης που υπολογίζει την απόδοση του στοχαστικού βέβαιου κέρδους καθορίζεται από το

$\Delta^{\varepsilon} \;= \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}$, μαζί με το ε, και ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \sigma^2 S \frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta^{\varepsilon}}{\partial S^2} + \left(r + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) S \frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial S}. \tag{3.25}$$

Πιο συγκεκριμένα για την (3.22) θα έχουμε ότι

$$\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} - rV^{\varepsilon} + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\left(S\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} - V^{\varepsilon}\right)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial \tau}\right) = \frac{\sigma^2 2 S}{2} \frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2}\right) + r \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} + r S \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}\right) - r\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}$$
$$+ \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) S \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}\right) - \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}$$

ή

$$\frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \sigma^2 S \frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta^{\varepsilon}}{\partial S^2} + \left(r + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) S \frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial S},$$

(η οποία είναι και η ζητούμενη σχέση)

όπου

$$\Delta^{\varepsilon} = \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}, \qquad \frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}\right) = \frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Delta^{\varepsilon}}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2}\right)$$

και

$$\frac{\partial \Delta^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial \tau}\right).$$

Σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών, ο στοχαστικός λόγος αντιστάθμισης $\Delta^{\varepsilon} = \Delta^{\varepsilon}(S,\tau)$ συγκλίνει με πιθανότητα στον λόγο αντιστάθμισης $\Delta_{BS}(S,\tau) = \frac{\partial V}{\partial S}$ των Black–Scholes $\Delta_{BS}(S,\tau)$. Γράφοντας το $\Delta^{\varepsilon} = \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S}$ ως υπέρθεση του Δ_{BS} και του τυχαίου πεδίου $Y^{\varepsilon}(S,\tau)$ έχουμε

$$\Delta^{\varepsilon}(S,\tau) = \Delta_{BS}(S,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\, Y^{\varepsilon}(S,\tau). \tag{3.26}$$

Αντικαθιστώντας την (3.26) μέσα στην (3.25) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.24), παίρνουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση για το τυχαίο πεδίο $Y^{\varepsilon}\,(S,\tau)$, που δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial Y^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 Y^{\varepsilon}}{\partial S^2} + \left(\sigma^2 S + rS + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) S\right)\frac{\partial Y^{\varepsilon}}{\partial S} + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\frac{S}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S}. \tag{3.27}$$

Στην συνέχεια, προσπαθούμε να βρούμε την ασυμπτωτική εξίσωση για την $Y^{\varepsilon}(S,\tau)$ όταν το $\varepsilon \to 0$. Εφαρμόζοντας την εργοδική θεωρία, στο όριο $\varepsilon \to 0$, το τυχαίο πεδίο $Y^{\varepsilon}(S,\tau)$, συγκλίνει ασθενώς στο πεδίο $Y(S,\tau)$, ικανοποιώντας τη γραμμική στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\,\frac{\partial Y}{\partial S^2} + S\,(\sigma^2 + r)\,\frac{\partial Y}{\partial S} + S\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S}\,\eta(\tau), \tag{3.28}$$

Για $\eta(\tau)$ ο «Γκαουσιανός λευκός θόρυβος» ικανοποιεί την σχέση

$$\langle\,\eta(\tau_1)\,\eta(\tau_1)\,\rangle = 2\,D\,\delta\,(\tau_1 - \tau_2), \tag{3.29}$$

όπου δ η *συνάρτηση του Dirac* (βλ. Παράρτημα), D η *σταθερά διάχυσης* η οποία δίνεται από την (3.21), και μαζί και η αρχική συνθήκη $Y(S,0) = 0$. Η λύση της εξίσωσης (3.28) δίνεται από την σχέση

$$Y(\tau,S) = \int_0^{\tau}\int_0^{+\infty} G(S,S_1,\tau,\tau_1)\;S_1\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S_1}\,\eta(\tau_1)\,dS_1\,d\tau_1 \tag{3.30}$$

όπου $G(S,S_1,\tau,\tau_1)$ είναι η *συνάρτηση Green* (βλ. Παράρτημα) που αντιστοιχεί στην (3.28) και δίνεται από τον τύπο

$$G(S,S_1,\tau,\tau_1) = \frac{1}{S_1\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau-\tau_1)}}\;e^{-\left[\ln\left(\frac{S}{S_1}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-\tau_1)\right]^2 / \,2\sigma^2\,(\tau-\tau_1)}$$

[5] . Από την λύση (3.30), προκύπτει ότι η $Y(S,\tau)$ είναι ένα *Γκαουσιανό πεδίο* με μέση τιμή μηδέν και συνδιακύμανση

$$R(S,x,\tau) = \langle Y(S,\tau)\;\;Y(x,\tau)\rangle$$

που ικανοποιεί την ντετερμινιστική μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\,\frac{\partial^2 R}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,x^2\,\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \,S\,(\sigma^2 + r)\,\frac{\partial R}{\partial S} + x\,(\sigma^2 + r)\,\frac{\partial R}{\partial x}$$
$$+2\,D\left(S\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S} \times x\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial x}\right)$$

(3.31)

με $R(S,x,0) \equiv 0$. Οι τυπικές ζώνες αντιστάθμισης για την περίπτωση των ευκαιριών βέβαιου κέρδους μπορούν να δοθούν από την σχέση

$$\Delta_{BS}\,(S,\tau) \pm 2\,\sqrt{\varepsilon\,U(S,\tau)}. \tag{3.32}$$

Η αντιστάθμιση εντός δυο τυπικών αποκλίσεων του λόγου αντιστάθμισης των Black-Scholes, παράγει υψηλότερη προστασία ενάντια στις διακυμάνσεις του βέβαιου κέρδους. Η διακύμανση $U(S,\tau) = R(S,S,\tau)$ ποσοτικοποιεί τις διακυμάνσεις γύρω από την αναλογία αντιστάθμισης των Black –Scholesκαι δίνεται από την σχέση

$$U(S,\tau) = 2\,D\,\int_0^{\tau}\left[\int_0^{+\infty} G(S,S_1,\tau,\tau_1)\,S_1\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S_1}\,dS_1\right]^2 d\tau_1. \tag{3.33}$$

Κάποιος μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ένας επενδυτής αντισταθμίζει το δικαίωμα προαίρεσης χρησιμοποιώντας τον λόγο αντιστάθμισης

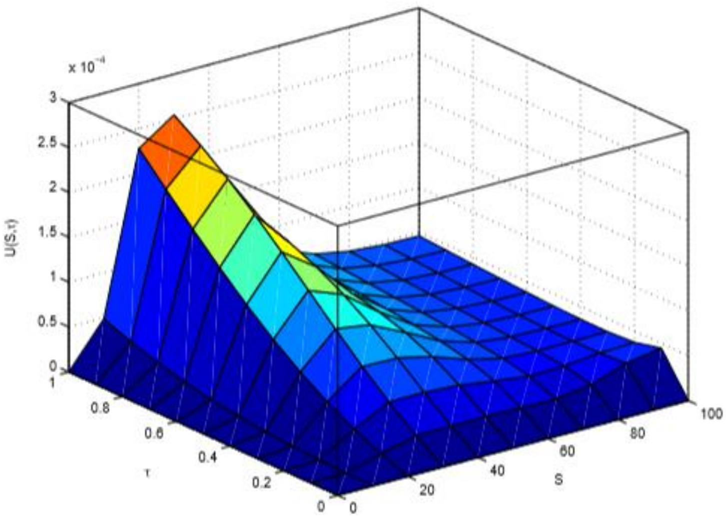
$$\Delta_{BS}(S,\tau) + 2\,\sqrt{\varepsilon\,U(S,\tau)}. \tag{3.34}$$

3.4. Εφαρμογές και Αριθμητικά αποτελέσματα

Από την εξίσωση (3.28) ή (3.33), μπορούμε να δούμε ότι οι μεγάλες διακυμάνσεις της $Y(S,\tau)$ συμβαίνουν όταν η ποσότητα

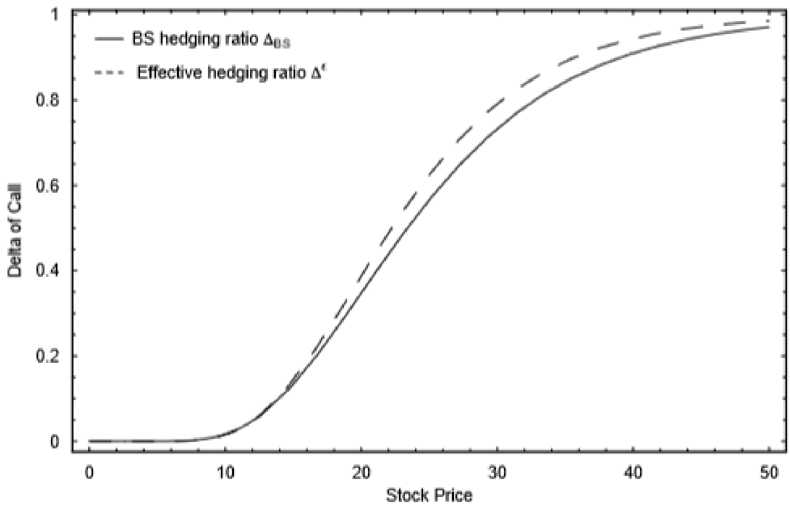
$$S\,\frac{\partial \Delta_{BS}}{\partial S}$$

παίρνει τη μέγιστη τιμή. Αυτή η περιοχή είναι γνωστή ως “at the money $(K = S_T)$". Έτσι, το σφάλμα κινδύνου (εύρος ζώνης) στην αντιστάθμιση ενός δικαιώματος προαίρεσης, είναι μεγαλύτερο για αυτές τις πειρπτώσεις. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.31) παίρνουμε ένα διάγραμμα της διακύμανσης $U(S,\tau)$ σχετικά με την τιμή της μετοχής S και το χρόνο τ (Σχήμα 1). Από το γράφημμα παρατηρούμε ότι το σφάλμα της αντιστάθμισης αυξάνεται καθώς κινούμαστε στην περιοχή “at the money $(K = S_T)$”. Αυτό το αποτέλεσμα είναι συνεπές με τα εμπειρικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις αναφορές [3,4].



Σχήμα 1. Σχήμα 1: Διακύμανση $\boldsymbol{U(S,\tau)}$, όπου $\boldsymbol{S}$ η τιμή της μετοχής και $\boldsymbol{\tau}$ ο χρόνος. Η τιμή άσκησης θα είναι $\boldsymbol{K = 20}$, η μεταβλητότητα $\boldsymbol{\sigma = 0.4}$, το επιτόκιο $\boldsymbol{r = 0.1}$ και το $\boldsymbol{D = 0.1}$.

Στο σχήμα 2, σχεδιάζουμε τον αποτελεσματικό λόγο αντιστάθμισης ο οποίος δίνεται από την σχέση (3.34), για $\varepsilon = 0.1$, και το συγκρίνουμε με τον συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης των Black-Scholes. Σημειώνουμε ότι οι μέγιστες αποκλίσεις από το συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης Black-Scholes είναι στην περιοχή “at the money $(K = S_T)$", ενώ μειώνονται όταν κινούμαστε στις περιοχές γνωστές και ως “in and out of the money $(K < S_T)$ και $(K > S_T)$". Συγκεκριμένα, οι διορθώσεις βέβαιου κέρδους για την περιοχή “at the money $(K = S_T)$" υπολογίζονται περίπου στο 3.5% της αλλαγής του λόγου αντιστάθμισης Black-Scholes.



Σχήμα 2. Σχήμα 2: Αποτελεσματικός λόγος αντιστάθμισης και λόγος αντιστάθμισης Black-Scholes. Το $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.1}$, $\boldsymbol{T} = \mathbf{1}$ και οι τιμές των $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{r}$, και $\boldsymbol{D}$ είναι ίδιες με τις τιμές του Σχήματος 1.

3.5. Συμπεράσματα

Χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική θεωρία τιμολόγησης, εξερευνήσαμε τον ρόλο που παίζουν οι τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους στα παράγωγα προϊόντα αντιστάθμισης. Πιο συγκεκριμένα, καταφέραμε να δώσουμε ζώνες αντιστάθμισης γύρω από το συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης Black-Scholes, που υπολογίζονται για την στοχαστική φύση των ευκαιριών βέβαιου κέρδους. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μέγιστες αποκλίσεις από τον συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης Black–Scholes είναι στην περιοχή γνωστή ως “at the money $(K = S_T)$". Σημειώνουμε ότι η δουλειά σε αυτό το άρθρο είναι καθαρά θεωρητική. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα είναι συνεπή με την εμπειρική δουλειά στην βιβλιογραφία. Σε μελλοντική εργασία σχεδιάζουμε να δημιουργήσουμε παραμετρικά και μη παραμετρικά στατιστικά τεστ, πάνω σε ένα μεγάλο δείγμα από παρατηρήσεις αγορών για να εξηγήσουμε ποσοτικά τις αποκλίσεις για κάθε αγορά από την τιμή Black-Scholes και να αντισταθμίσουμε το λόγο για την περίπτωση της επιστροφής του βέβαιου κέρδους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ [7]

Αφού ολοκληρώσαμε το αντικείμενο μελέτης μας, το οποίο αφορά τις ευκαιρίες βέβαιου κέρδους στην αντιστάθμιση χρηματοοικονομικών παραγώγων, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες οι οποίες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην καλύτερη κατανόηση της εργασίας μας από τους αναγνώστες.

<u>Η Συνάρτηση του Dirac</u>

Η συνάρτηση Dirac ορίστηκε (εσφαλμένα) στην προσπάθεια να οριστεί μια παράγωγος μιας συνάρτησης σε σημείο που *δεν* είναι συνεχής. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε μια συνάρτηση $\delta(x)$ ορισμένη στο R με τις ακόλουθες ιδιότητες

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$
ii) $\delta(x) = 0, \; x \neq 0$

Είναι αδύνατο να υπάρξει συνάρτηση που να ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες διότι το μέτρο Lebesgue του μονοσυνόλου $\{0\}$, είναι μηδέν με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα να μηδενίζεται.

<u>Σχόλια</u>

Η τιμή της δ στο σημείο 0 *δεν* είναι καθορισμένη με αποτέλεσμα να μην είναι καλά ορισμένη σαν κλασική συνάρτηση.
Η συνάρτηση δ χρησιμοποιείται κυρίως για την περιγραφή φυσικών μεγεθών όπως είναι για παράδειγμα η πυκνότητα μάζας μιας ευθείας που έχει μονάδα μάζας *μόνο* στο σημείο μηδέν (δεν κατανέμεται δηλαδή σε κανένα άλλο σημείο).
Το όνομά της το πήρε από τον *Paul Dirac* που την χρησιμοποίησε στην κβαντομηχανική μηχανική.
Οι αντιφάσεις των μαθηματικών γύρω από την συνάρτηση Dirac σταμάτησαν να υπάρχουν με την ανάπτυξη της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών.
Η κεντρική ιδέα της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων βασίζεται στην *ολική* συμπεριφορά της συνάρτησης και όχι στην *σημειακή* συμπεριφορά, όπως γίνεται στην περίπτωση του κλασικού ορισμού της συνάρτησης.

Συνάρτηση Green

Θεωρούμε ένα γραμμικό μερικό διαφορικό τελεστή L, για τον οποίο θα ορίσουμε τις έννοιες της θεμελιώδους λύσης, καθώς και της συνάρτησης Green.

Ορισμός

Θεωρούμε συνάρτηση $K(x,x')$, η οποία ορίζεται ως *θεμελιώδης λύση* για τον γραμμικό διαφορικό τελεστή L, όταν αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$LK(x,x') = \delta(x-x'). \tag{1}$$

Το σημείο x' καλείται ανώμαλο σημείο της K και αποτελεί μια σημαντική παράμετρο για την λύση.
Η θεμελιώδης σχέση $K(x,x')$ περιγράφει το αποτέλεσμα που προκύπτει στην θέση x από ένα σημειακό αίτιο μοναδιαίας έντασης που βρίσκεται στην θέση x'.
Όταν μελετάμε ένα φυσικό μέγεθος, η τιμή που εμφανίζεται στην εξίσωση εξαρτάται από την απόσταση των σημείων x και x' με αποτέλεσμα να έχουμε αντιμετάθεση των μεταβλητών αυτών στην K. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ιδιότητα αμοιβαιότητας της θεμελιώδους λύσης.
Αξίζει να σημειωθεί ότι η θεμελιώδης λύση για τον τελεστή L ισούται με την λύση της εξίσωσης, δηλαδή ισχύει

$$L\,u = f, \tag{2}$$

όπου

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x,x')\, f(x')\, du(x'). \tag{3}$$

Αν στην σχέση (2) αντικαταστήσουμε την (3) θα έχουμε

$$\begin{aligned} L\,u(x) &= L\left[\int_{\Omega} K(x,x')\, f(x')\, du(x')\right] = \int_{\Omega} [LK(x,x')] f(x')\, du(x') \\ &= \int_{\Omega} \delta(x-x')\;\; f(x')\;\; du(x') = f(x'). \end{aligned}$$

Ο τελεστής L επιδρά μόνο πάνω στην K, και αυτό γιατί εξαρτάται από το x.
Το πρόβλημα των αρχικών τιμών για την σχέση (2) ακολουθείται από ένα σύνολο βοηθητικών εντολών, το οποίο συμβολίζεται με τον γραμμικό τελεστή C και για το οποίο ισχύει

$$C\,u = g. \tag{4}$$

Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της συνάρτησης Green.

Η συνάρτηση

$$G(x, x') = K(x, x') + U(x, x'), \tag{5}$$

καλείται συνάρτηση Green. Αυτό συμβαίνει όταν η K αποτελεί την θεμελιώδη λύση του τελεστή L και η U είναι μια κλασική λύση της (1), τέτοια ώστε η συνάρτηση $G(x, x')$ να ικανοποιεί τις σχέσεις (1) και (5).
Η K που χαρακτηρίζει τον τελεστή L αποτελεί το ανώμαλο μέρος της G, ενώ η U που χαρακτηρίζει την σχέση (4) αποτελεί το ομαλό μέρος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αρτίκης Θ., *«Μαθήματα Στοχαστικών Διαδικασιών»*, (Πειραιάς, 1991).

[2] Adamchuk A. N., Esipov S. E, Collectively fluctuating assets in the presence of arbitrage opportunities and option pricing, Phys. Usp. 40 (12) (1997) 1239-1248.

[3] Bakshi G., Cao C., Chen Z., Empirical performance of alternative option pricing models, J. Finance (1997) 2003-2049.

[4] Bakshi G., Cao C., Chen Z., Pricing and Hedging Long-Term Options, J. Econometrics 94 217-318.

[5] Courant R., Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, vol. II, Partial Differential Equations, Wiley, New York 1989.

[6] Γιαννακόπουλος Α.Ν., *«Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση»*, τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου (2 Φεβρουαρίου 2003).

[7] Δάσιος Γ., Κυριακή Κ., *«Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις»*, Αθήνα 1994

[8] Διαμαντόπουλος Σ., *«Διαχείριση Χαρτοφυλακίου Ασφαλιστηρίων Ζωής"*, Πανεπιστήμιο Πειραιά, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, (Πειραιάς, Μάιος 2015).

[9] Ζαπράνης Α., *«Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Παράγωγα»* Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής.

[10] Καταραχιά Α., *«Άρχες Μάρκετινγκ»*, Τεχνικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Μακεδονίας, τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής.

[11] Κονοτογιάννης Ι., Τουμπής Σ., *«Στοιχεία Πιθανοτήτων με Εφαρμογές στην Στατιστική και την Πληροφορική»*.

[12] Μπούτσικας Μ., *«ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης (2006-2007).

[13] Μπούτσικας Μ. *«Σύντομη Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις»,* 2011.

[14]Οικονόμου Α., *«Εισαγωγή στα Martingales»* (Μάιος 2012).

[15] Παλιεράκη Α., *«Εφαρμοσμένη θεωρία των Martingales»* , Πολυτεχνείο Κρήτης, (Χανιά, Σεπτέμβριος 2006).

[16] Panayidis S., *"Arbitrage Opportunities and their implications to derivative hedging",* The School of Mathematics, The University of Manchester, Manchester.

[17] Papanicolaou G., Sircar R., Stochastic volatility, smiles and asymptotics, Appl. Math. Finance 6 (1999) 107-145.

[18] Fedotov S., Panayides S., Stochastic arbitrage return and its implication for option pricing, Physica A 345 (2005) 207-217.

[19] Wikipedia.