ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson

Θάνος Ιωάννης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Μάρτιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson

Θάνος Ιωάννης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Μάρτιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ / συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης
- Αναπληρωτής Καθηγητής Βασίλειος Σεβρόγλου

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Mixed Compound Poisson distributions

by
Thanos Ioannis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
March 2018

Στους γονείς μου και στον αδερφό μου,
Θανάση, Αγγελική και Γιώργο.

Ευχαριστίες

Κατάρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα για την παρούσα διπλωματική εργασία Καθηγητή κ.Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Κωνσταντίνο Πολίτη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Βασίλειο Σεβρόγλου για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της επιτροπής και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Οι μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson χρησιμοποιούνται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων για μοντελοποίηση μη ομογενών πληθυσμών. Στην εργασία αυτή μελετούνται αποτελέσματα σχετικά με τις μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson που συχνά έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες για μοντελοποίηση συχνότητας απαιτήσεων και παρέχουν ενδιαφέρουσες αναλογιστικές εφαρμογές. Για παράδειγμα έχουν συχνά παχιές ουρές που είναι χρήσιμες για δεδομένα με μακριές ουρές. Επιλέγονται δομικές κατανομές μείξης όπως π.χ. η (γενικευμένη) Γάμμα, η (γενικευμένη) Βήτα, γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή, και υπολογίζονται αναλυτικά οι συναρτήσεις πιθανότητας της κατανομής των (συνολικών) απαιτήσεων. Επίσης παρουσιάζονται χαρακτηρισμοί μεικτών κατανομών Poisson μέσω της απόλυτης μονοτονίας της πιθανογεννήτριας συνάρτησης και της αραίωσης.

Αποδεικνύεται, ότι η συνάρτηση πιθανότητας μιας μεικτής σύνθετης κατανομής Poisson μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις. Ωστόσο, σημαντικές κατανομές αριθμού απαιτήσεων μπορούν να χαρακτηριστούν μέσω της αναδρομής Panjer. Επίσης αποδεικνύονται αναδρομικοί τύποι για τη συνάρτηση κατανομής και τις ροπές των συνολικών απαιτήσεων, όταν οι κατανομές μεγέθους απαιτήσεων είναι διακριτές ή συνεχείς. Οι αναδρομικοί τύποι παρέχουν κατάλληλες αριθμητικές προσεγγίσεις της συνάρτησης κατανομής των συνολικών απαιτήσεων.

Τέλος δίνονται λεπτομερείς αποδείξεις μιας επέκτασης της αναδρομής Panjer που οφείλεται στους K.Th. Hess, A. Liewald and K.D. Schmidt [36] και έχει εφαρμογές στις οικογένειες κατανομών Hofmann και στα χαρτοφυλάκια κινδύνων που υπόκεινται σε αντασφάλιση καταστροφικών υπερβολικών ζημιών.

Abstract

Mixed compound Poisson distributions are used in a range of scientific fields to model non-homogeneous populations. In this paper, we study the results of the mixed compound Poisson distributions that often have the desirable properties for the modeling of the claim distribution and provide interesting actuarial applications. For example, they often have thick tails which make them useful for long-tailed data. Mixed structural distributions are given such as (generalized) Gamma, (generalized) Beta, generalized inverse Gaussian, and the probability functions of the (total) claim distributions are explicitly calculated. We also present characterizations of mixed Poisson distribution through the absolute monotony of the probability generating function and the thinning.

In turns out that aggregate claim distributions can be determined explicitly only in a few exceptional cases. However, the most important claim number distributions can be characterized by a simple recursion formula and admit the recursive computation of aggregate claims distributions and their moments, when the claim size distribution is discrete or continuous.

Finally, detailed proofs of an extension of Panjer's recursion, due to K.Th. Hess, A. Liewald and K.D. Schmidt [36], are presented. The results of this extension are of interest in catastrophe excess-of-loss reinsurance and have an application to Hofmann families.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ. : Τυχαία μεταβλητή

σ.(π).π. : Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

σ.κ. : Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

σ.δ : Στοχαστική διαδικασία

μ.χ. : Μετρήσιμος χώρος

χ.π. : Χώρος Πιθανότητας

χ.σ. : Χαρακτηριστική συνάρτηση

σ.β. : Σχεδόν βέβαια

σ.ο. : Σχεδόν όλα

κ.δ.π : Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα

i.i.d : Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες

πρβλ. : Παράβαλε

MP : Μεικτή κατανομή Poisson

MPP : Μεικτή διαδικασία Poisson

CMPP : Σύνθετη Μεικτής *σ.δ.* Poisson

Εισαγωγή

Μείξεις κατανομών έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως για την μοντελοποίηση παρατηρημένων καταστάσεων, των οποίων τα διάφορα χαρακτηριστικά, όπως αντανακλώνται από τα δεδομένα, διαφέρουν από εκείνα που θα αναμενόταν υπό την απλή συνιστώσα κατανομή. Σε αναλογιστικές εφαρμογές, για παράδειγμα, τα παρατηρούμενα δεδομένα σχετικά με τον αριθμό των απαιτήσεων εμφανίζουν συχνά μία διακύμανση που ξεπερνά αισθητά τον μέσο όρο τους. Ως εκ τούτου, υποθέτοντας μία μορφή της κατανομής Poisson (ή οποιαδήποτε άλλη μορφή κατανομής που θα συνεπαγόταν την ισότητα του μέσου με τη διακύμανση) για την κατανομή της συχνότητας των απαιτήσεων, δεν είναι κατάλληλη σε τέτοιες περιπτώσεις.

Γενικά, η παραδοχή μιας συγκεκριμένης μορφής κατανομής $F(\bullet|\theta)$, $\theta \in \Theta$, για την μητρική κατανομή ενός συνόλου δεδομένων επιβάλλει μία ορισμένη σχέση μέσου προς διακύμανση, η οποία στην πράξη μπορεί να παραβιαστεί σοβαρά. Οι γενικότερες οικογένειες κατανομών, γνωστές ως μείξεις, θεωρούνται συνήθως ως εναλλακτικά μοντέλα που προσφέρουν μεγαλύτερη ευελιξία. Αυτές είναι κατάλληλα " αθροίσματα" απλούστερων κατανομών συνιστωσών που εξαρτώνται από μία παράμετρο, που η ίδια είναι μία τ.μ. με κάποια κατανομή. Οι μεικτές κατανομές Poisson, ειδικότερα, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως ως κατανομές συχνότητας απαιτήσεων. Εκτός από την αναλογιστική επιστήμη έχουν χρησιμοποιηθεί σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων για τη μοντελοποίηση μη ομογενών πληθυσμών.

Μία κατανομή πιθανότητας λέγεται ότι είναι μία **μεικτή κατανομή**, αν η συνάρτηση κατανομής της μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$F(\bullet) = \int_{\Theta} F(\bullet|\theta) dU(\theta),$$

όπου $F(\bullet|\theta)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της μητρικής κατανομής που εξαρτάται από μία παράμετρο θ με συνάρτηση κατανομής $U(\theta)$ για θ μέσα σε έναν παραμετρικό χώρο Θ.

Η συνάρτηση κατανομής U αναφέρεται ως δομική συνάρτηση κατανομής. Η δομική κατανομή ανάμειξης μπορεί να είναι συνεχής, διακριτή ή μία κατανομή με θετική πιθανότητα σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Τα μοντέλα μείξης καλύπτουν διάφορα ξεχωριστά πεδία της στατιστικής επιστήμης. Η ευρεία αποδοχή τους ως κατάλληλα μοντέλα για την περιγραφή διαφορετικών καταστάσεων είναι εμφανής από την πληθώρα των εφαρμογών τους στη στατιστική βιβλιογραφία. Στο βιβλίο των Titterington, Smith and Makov [86] (1985) παρέχεται μία ανασκόπηση των εργασιών στον τομέα των εφαρμογών μοντέλων μείξης ως το 1985. Τα τελευταία χρόνια ο αριθμός των εφαρμογών αυξήθηκε κυρίως λόγω της ύπαρξης υπολογιστών υψηλής ταχύτητας, οι οποίοι απομάκρυναν κάθε εμπόδιο για την εφαρμογή τέτοιων μεθόδων. Έτσι, τα μοντέλα μείξης έχουν βρει εφαρμογές σε ποικίλους τομείς όπως μοντελοποίηση δεδομένων, μελέτες ανθεκτικότητας σε έκτοπες παρατηρήσεις (outlier - nobustness studies), εκτίμηση πυκνότητας πυρήνων, μοντέλα λανθάνουσας δομής (latent structure models), εμπειρική εκτίμηση Bayes, Bayesian στατιστικές και άλλα.

Ενδιαφέρουσες ανασκοπήσεις σχετικά με ειδικά θέματα που σχετίζονται με μείξεις μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Gupta and Huang [35] (1981) (σε θέματα κατάταξης και επιλογής) και του Titterington [87] (1990). Μία ενημέρωση για ορισμένα θέματα υπάρχει στο βιβλίο των Titterington, Smith and Makov [86] (1985).

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να συγκεντρώσει και να μελετήσει αποτελέσματα σχετικά με τις (σύνθετες) μεικτές κατανομές Poisson. Η χαρακτηριστική δυσκολία του αντικειμένου είναι η κλάση κατανομών που πρέπει να επιλεχθεί για την παράμετρο της Poisson, καθώς η μεικτή κατανομή που προκύπτει συνήθως έχει μία τέτοια μορφή που η συνάρτηση πιθανότητας είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά και έτσι καταφεύγουμε σε αριθμητικές προσεγγίσεις. Ενδιαφέρουσα είναι επίσης η εύρεση αναδρομικών τύπων, οι οποίοι καθορίζουν μονοσήμαντα την επιθυμητή πυκνότητα της μεικτής κατανομής. Μαθηματικοί όπως οι Panjer, Depril, Willmot έχουν ασχοληθεί διεξοδικά με το θέμα αυτό, εξαντλώντας όλες τις κλασσικές επιλογές, που μπορεί να επιλέξει κάποιος, για την κατνομή της παραμέτρου της Poisson. Επίσης μελετάται και η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων που έχει βαρύνουσα σημασία στον αναλογισμό.

Στο Κεφάλαιο 1 δίνονται οι βασικές έννοιες και οι ορισμοί που χρειάζονται για την μελέτη των μεικτών σύνθετων κατανομών Poisson. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται μία σύντομη επισκόπηση των εννοιών της κλασσικής θεωρίας κινδύνου. Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζονται οι μεικτές $\sigma.\delta.$ Poisson με παράμετρο μείξης (ή δομική παράμετρο) μία τ.μ. Διατυπώνεται μεταξύ άλλων το πολυωνυμικό κριτήριο, που μας επιτρέπει να ελέγχουμε πότε η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων είναι μεικτή Poisson, και είναι χρήσιμο στον υπολογισμό της πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιας μεικτής $\sigma.\delta.$ Poisson (βλ. Λήμμα 3.2.3) και ένα αποτέλεσμα που μας δείχνει ότι η κλάση των μεικτών $\sigma.\delta.$ Poisson περιέχεται στην κλάση των $\sigma.\delta.$ Markov (βλ. Θεώρημα 3.2.4). Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται μία σύντομη επισκόπηση των διαδικασιών συνολικών απαιτήσεων και των σύνθετων κατανομών. Στο Κεφάλαιο 5 μελετούνται οι μεικτές κατανομές Poisson με δομική παράμετρο μία τ.μ. με θετικές τιμές. Αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των μεικτών κατανομών Poisson (βλ. Πρόταση 5.1.2 και Θεώρημα 5.1.4), δίνονται αρκετά παραδείγματα μεικτών κατανομών Poisson με υπολογισμό των συναρτήσεων πιθανότητας, των πιθανογεννητριών, των μέσων τιμών, της διακύμανσης κ.λπ.(βλ. Ενότητα 5.2). Επίσης αποδεικνύονται χαρακτηρισμοί των μεικτών κατανομών Poisson μέσω της απόλυτης μονοτονίας της πιθανογεννήτριας συνάρτησης (βλ. Πρόταση 5.3.2) της p-αραίωσης (p-thinning βλ. Θεώρημα 5.3.5) και της άπειρης διαιρετότητας (βλ. Προτάσεις 5.3.8 και 5.3.9). Στο Κεφάλαιο 6 εξηγείται η σχέση μεταξύ μεικτών κατανομών Poisson και μεικτών *σ.δ.* Poisson. Στο Κεφάλαιο 7 μελετούνται οι μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson. Αποδεικνύεται ένας χαρακτηρισμός των πιο σπουδαίων (μεικτών) σύνθετων κατανομών Poisson μέσω μίας αναδρομής (βλ. Θεώρημα 7.2.1), και αναδρομικοί τύποι για τη συνάρτηση κατανομής και τις ροπές των συνολικών απαιτήσεων (βλ. Θεωρήματα 7.3.3 και 7.3.5) και συνεχών κατανομών κατανομών μεγέθους απαιτήσεων (βλ. Θεωρήματα 7.4.1 και 7.4.3). Επιπλέον μελετάται η κλάση Willmot ως μία ειδική κλάση κατανομών της δομικής παραμέτρου, που μας διευκολύνει, μέσω αναδρομικών τύπων, στον υπολογισμό μερικών μεικτών σύνθετων κατανομών (βλ. Θεώρημα 7.5.5). Τέλος παρουσιάζεται μία επέκταση της αναδρομής Panjer, που αποδείχθηκε από τους K.Th. Hess, A. Liewald and K.D. Schmidt [36] το 2002 (βλ. Θεωρήματα 7.6.2, 7.6.9, 7.6.10 και 7.6.11) έχει εφαρμογές στις οικογένειες Hofmann (βλ. Θεώρημα 7.6.15) και στα χαρτοφυλάκια κινδύνων που υπόκεινται σε αντασφάλιση καταστροφικών υπερβολικών ζημιών.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή $\Omega \setminus A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων** και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας μη κενής οικογένειας** $\{A_i\}_{i \in I}$ **ξένων ανά δύο υποσυνόλων του** Ω.

Αν $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $D \subseteq \Omega$ συμβολίζουμε με $f \upharpoonright D$ τον περιορισμό της f στο D. Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτηση** του A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **ένας γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα A, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $A = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel**.

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας **χώρος πιθανότητας** (χ.π. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y \quad P-$σχεδόν βέβαια

($P-\sigma.\beta.$ για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν και μόνο αν $\int |f|dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f:\Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$ − συναρτήσεων).

Έστω Υ ένα μη κενό σύνολο. Με π_Ω και π_Υ συμβολίζονται οι **κανονικές προβολές** από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Ω και Υ αντίστοιχα. Αν $f:\Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε για σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $f_\omega : \Upsilon \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $f_\omega(y) := f(\omega, y)$ ονομάζεται η **$\omega-$τομή** της f. Αντίστοιχα, για σταθερό $y \in \Upsilon$ η $f^y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $f^y(\omega) := f(\omega, y)$ ονομάζετσι η **y-τομή** της f.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A XdP = \int_A YdP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X δοθείσης της $\mathcal{F}$** και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μ.χ. Μία συνάρτηση $k : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ένας **$T-\Sigma$-Μαρκοβιανός πυρήνας (Markov kernel)** όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\bullet, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην T για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι Σ-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$.

Ένας $T-\Sigma$-**Μαρκοβιανός πυρήνας** ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο**. (βλ. π.χ. [45, p. 83]).

Έστω $\Sigma - T$-μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της X επάνω στην $\mathcal{F}$** είναι ένας $T-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανός πυρήνας k, ικανοποιώντας για κάθε $B \in T$ τη συνθήκη

$$k(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P \upharpoonright \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Σαφώς, για κάθε $T - Z-$Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(B, \omega) := (k(B, \bullet) \circ \Theta(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad B \in T \quad \text{και} \quad \omega \in \mathbf{\Omega}$$

είναι ένας $T-\sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet, \theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Με $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$, όπου $\alpha,\beta>0$, συμβολίζουμε την κατανομή γάμμα και με $\mathbf{Exp}(\alpha):=\mathbf{Ga}(\alpha,\mathbf{1})$ την εκθετική κατανομή. Με $\mathbf{P}(\alpha)$ συμβολίζουμε την κατανομή Poisson με παράμετρο $\alpha>0$, με $\mathbf{Be}(\alpha,\beta)$ την κατανομή βήτα με $\alpha,\beta>0$, με $\mathbf{N}(\mu,\sigma^{\mathbf{2}})$ την κανονική κατανομή με $\mu\in\mathbb{R}$ και $\sigma^2>0$. Επίσης με $\mathbf{B}(\mu,\theta)$, όπου $\mu\in\mathbb{N}_0$ και $\theta\in(0,1)$, συμβολίζουμε την διωνυμική κατανομή και με $\mathbf{NB}(\alpha,\theta)$, όπου $\alpha>0$ και $\theta\in(0,1)$, συμβολίζουμε την αρνητική διωνυμική κατανομή.

Για οποιαδήποτε $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, θα λέμε ότι δύο $T-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i\in\{1,2\}$, είναι **$P\restriction\mathcal{F}-$ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1=k_2\quad P\restriction\mathcal{F}-\sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N\in\mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B,\omega)=k_2(B,\omega)$ για κάθε $B\in T$ και $\omega\notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται ***P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}\subseteq\Sigma$, αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq 2$ έχουμε:

$$P(E_1\cap\cdots\cap E_n|\mathcal{F})=\prod_{j=1}^{n}P(E_j|\mathcal{F})\quad P\restriction\mathcal{F}\quad-\sigma.\beta.$$

για κάθε $j\leq n$ και για κάθε $E_j\in\Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1,\ldots,i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I.

Μια οικογένεια $\Sigma-T$-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{Q_i\}_{i\in I}$ από το Ω στο Υ είναι:

- ***P*-υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και

- ***P*-υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν

$$P(F\cap X_i^{-1}(B))=P((F\cap X_j^{-1}(B)),\quad \text{για}\quad i,j\in I,F\in\mathcal{F}\quad\text{και }\mathrm{B}\in\mathrm{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X):=X^{-1}(\mathfrak{B}):=\{X^{-1}(B):B\in\mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X)\subseteq\Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., ορίζουμε:

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)=\sigma\Bigg(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\Bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια** $\{X_j\}_{j\in I}$.

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_t\}_{t\in T}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου $\mathrm{T}\neq\varnothing$ σύνολα δεικτών, αν και μόνο αν για κάθε $\{t_1,\ldots,t_m\}\subseteq I$, οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}),\ldots,\sigma(X_{t_m}),\Sigma_{t_1},\ldots,\Sigma_{t_n}$ είναι ανεξάρτητες.

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [3, Ορισμός 1.19]), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j:\Omega\longmapsto\overline{\mathbb{R}}$ $(j\in I)$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** ($\sigma.\delta.$) ή **στοχαστική ανέλιξη**. Επί πλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια *σ.δ.* **συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια *σ.δ.* **διακριτού χρόνου**.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια *σ.δ.* με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο τιμών R_{X_i} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή *σ.δ.*** ή ***σ.δ.* Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | \bigcap_{j=1}^{n} \{X_{t_j} = x_j\}) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \cdots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}) > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου B**.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση (filtration)** αν και μόνο αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία *σ.δ.* $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma(\{X_k : k \leq j\})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε *σ.δ.* $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω I ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μία *σ.δ.* $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή ένα $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$-**martingale** αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$,

$(m2)$ για κάθε $j \in I$, η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P \upharpoonright \Sigma_j - \sigma.\beta.$

Τέλος, για την υπόλοιπη εργασία, και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε ένα σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P).

Κεφάλαιο 2

Σύντομη Επισκόπηση Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Αρχικά παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες των *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων. Τέλος αναφέρονται βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson.

2.1 Η Στοχαστική Διαδικασία Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθούν ορισμοί και λήμματα τόσο για τη στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων αλλά και για τη στοχαστική διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, η $T_n(\omega) > 0$. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων. Με $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τη ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων** και ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$,
- $\mathbb{E}[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σταθερή *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων, και τη $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων επαγόμενη από τη *σ.δ.* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο $\Omega_T := \emptyset \in \Sigma$.

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η *σ.δ.* άφιξης, και η *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Λήμμα 2.1.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

$$\sigma(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}). \tag{2.2}$$

Αυτό σημαίνει πως η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Λήμμα 2.1.5. *Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Πόρισμα 2.1.6. *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [2, Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7].

Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό πως κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί έχει να κάνει με το αν θα πρέπει την πιθανότητα έκρηξης, να τη λάβουμε ίση με το μηδέν ή όχι. Η απόφαση αυτή αφορά τη *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων.

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ *και*

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $\mathbb{E}[W_n] = 1/\theta$ *και* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, *και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [72, Lemma 1.2.2].

2.2 Η Απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία

Στην προηγούμενη ενότητα συζητήσαμε για τη *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων καθώς και για τη *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων. Στην παρούσα ενότητα θα προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω, κάνοντας λόγω για τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται ***σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων ή απαριθμήτρια *σ.δ.*** , αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

(n1) $N_0(\omega) = 0$,

(n2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

(n3) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

(n4) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

(n5) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας *σ.δ.*** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,
- Όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Ένα αρχικό αποτέλεσμα του ορισμού, αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα το οποίο ισχυρίζεται πως κάθε *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων, παράγει μία *σ.δ.* αριθμού απαιτήσεων και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.3}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.4}$$

Θεώρημα 2.2.3. *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.5}$$

τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ ισχύει

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.6}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [2, Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3] αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου θεωρούμε:

- Την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ως μία απαριθμήτρια *σ.δ.* ,
- $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ως μια *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων η οποία παράγεται από τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων
- $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μια *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων η οποία παράγεται από τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων
- Το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων ότι είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει $\Omega_N = \emptyset$.

Κάτω από την τελευταία υπόθεση προκύπτουν δύο εξαιρετικά χρήσιμες ισότητες. Σύμφωνα με αυτές, ορισμένα από τα γεγονότα (ενδεχόμενα) που καθορίζονται από τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων, μπορούν να ερμηνευτούν ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από τη *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων, και αντίστροφα.

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν:*

(a) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$ *και*

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. πχ. [2, Λήμμα 3.3.4].

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων και η *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Λήμμα 2.2.5. *Ισχύει ότι:*

$$\sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}) \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνδέσουμε την πιθανότητα έκρηξης με τη *σ.δ.* του αριθμού απαιτήσεων ως εξής:

Λήμμα 2.2.6. *Ισχύει ότι:*

$$P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right]. \tag{2.8}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [2, Λήμμα 3.3.6].

Πόρισμα 2.2.7. *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές, τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με μηδέν.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. π.χ. [5, Πόρισμα 2.2.7].

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s, t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, διότι μέσω αυτών κατανοούμε παρισσότερο τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων.

- Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leq t$, η **προσαύξηση** της *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s, t]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{2.9}$$

  Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $N_0 = 0$ και $T_n > 0$, η σχέση (2.9), συμφωνεί με τον τρόπο που ορίσαμε τη τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.2.2.

- Για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι:

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.10}$$

  που ισχύει ακόμη και όταν $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

2.3 Η στοχαστική διαδικασία Poisson

Ορισμός 2.3.1. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Από τους ορισμούς προκύπτει πως μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [2, Λήμμα Α΄1.3]).

Ορισμός 2.3.2. Μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

Λήμμα (Multinomial Criterion) 2.3.3. *Έστω $\alpha \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Για κάθε $t \in (0,\infty)$ η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$

και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε το $\sum_{j=1}^m k_j = n$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} | \{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

(*b*) *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Poisson με παράμετρο α.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. [5, Λήμμα 2.3.3].

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(*i*) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$, *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$

(*ii*) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, *για όλα τα* $t \in (0,\infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ η $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0,\infty)$ η $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [72, Lemma 2.2.1].

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*i*) *Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο* θ.

(iii) *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη* $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) *Η σ.δ.* $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι ένα martingale.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [72, Theorem 2.3.4] και για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. π.χ. [2, Θεώρημα 4.2.4].

Κεφάλαιο 3

Μεικτές στοχαστικές διαδικασίες **Poisson**

Η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο, είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα συζητηθεί μια γενική μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος. Η βασική ιδέα είναι να ερμηνεύσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ως μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια. Στη περίπτωση αυτή η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, ορίζεται ως μία μείξη στοχαστικών διαδικασιών αριθμού απαιτήσεων ομοιογενών χαρτοφυλακίων, με τέτοιον τρόπο ώστε η μεικτή κατανομή τους, να αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου. Αρχικά θα καθοριστεί το γενικό μοντέλο, και στη συνέχεια θα μελετηθεί η μεικτή *σ.δ.* Poisson και μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση, η διαδικασία Pólya-Lundberg.

Τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 4.1 και 4.2 υπάρχουν στο [72]. Εδώ παρουσιάζονται με αναλυτικές αποδείξεις.

3.1 Το υπόδειγμα

Θεωρούμε στο εξής μία απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και μια τυχαία μεταβλητή Θ. Υποθέτουμε όπως προαναφέρθηκε, πως το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, είναι ένα μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια ιδίου μεγέθους, τα οποία είναι παρόμοια, αλλά διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο, μπορεί να προσδιοριστεί με τη πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής Θ. Αυτό σημαίνει πως η κατανομή του Θ αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, υπό όρους. Οπότε οι ιδιότητες της κατανομής της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής ως προς το Θ, και από τις ιδιότητες της κατανομής του Θ. Για το λόγο αυτό, η τυχαία μεταβλητή Θ ονομάζεται **παράμετρος δόμησης (structure parameter)**, η κατανομή της P_Θ ονομάζεται **κατανομή δόμησης (structure distribution)**, ενώ η *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων (mixed claim number process) ή μεικτή απαριθμήτρια σ.δ. (mixed counting process)**.

Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει:

- **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ, και έχει

- **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_{j+h}} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$ έχουν την ίδια υπό συνθήκη κατανομή ως προς το Θ με τις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$.

Άμεσα προκύπτει πως, μια στοχαστική διαδικασία αριθμού απαιτήσεων με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν και μόνο αν η $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος Α΄1.3 του [2].

Λήμμα 3.1.1. *[72, Lemma 4.1.1] Αν μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Αντίθετα, για μία σ.δ. αριθμού των απαιτήσεων με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, συνεπάγεται ότι δεν έχει γενικά ανεξάρτητες προσαυξήσεις όπως θα δούμε και από το Θεώρημα 3.2.6 στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 3.1.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

και

$$\mathbb{V}ar(N_t) = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(N_t|\Theta)] + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(N_t|\Theta))$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

3.2 Η μεικτή *σ.δ.* Poisson

Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται ο ορισμός της μεικτής *σ.δ.* Poisson.

Ορισμός 3.2.1. Η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή *σ.δ.* Poisson** με παράμετρο Θ (ή για συντομία $P - MPP(\Theta)$), εάν

- η Θ είναι μια τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει $\mathrm{P}_\Theta[(0,\infty)] = 1$, και εάν
- η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει η σχέση $\mathrm{P}_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 > 0$ (δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-*σ.δ.* Poisson με παράμετρο θ_0.

Στην συνέχεια παρατίθεται μία βασική ιδιότητα της μεικτής *σ.δ.* Poisson:

Λήμμα 3.2.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση:*

$$P[\{N_t = n\}] > 0,$$

για όλα τα $t \in (0,\infty)$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Λήμμα 3.2.3. (Πολυωνυμικό κριτήριο) *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson, τότε η σχέση:*

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!} \cdot \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

ισχύει για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1 < \cdots < k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{m} X_k = n$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [5] Λήμμα 4.2.1.

Στην περίπτωση που $m = 2$, το πολυωνυμικό κριτήριο λέγεται **διωνυμικό κριτήριο του Lundberg**.

Το πολυωνυμικό κριτήριο επιτρέπει να ελέγξουμε την παραδοχή ότι η απαριθμήτρια *σ.δ.* είναι μία μεικτή *σ.δ.* Poisson και είναι χρήσιμο να υπολογισθούν οι πεπερασμένων διαστάσεων κατανομές μιας μεικτής διαδικασίας Poisson.

Σαν μία πρώτη συνέπεια του πολυωνυμικού κριτηρίου, θα δείξουμε ότι κάθε μεικτή *σ.δ.* Poisson είναι μία διαδικασία Markov:

Θεώρημα 3.2.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson, τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Για τις αποδείξεις του Λήμματος 3.2.2 και του Θεωρίματος 3.2.4 βλ. π.χ. [72, Lemma 4.2.2 και Theorem 4.2.3].

Λήμμα 3.2.5. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει:*

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$\mathbb{V}ar(N_t) = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar(\Theta).$$

Ιδιαιτέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για μια απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. π.χ. [72, Lemma 4.2.5].
Έτσι, αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson έτσι ώστε η κατανομή να είναι μη εκφυλισμένη και να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε, για όλα τα $t \in (0,\infty)$, ισχύει ότι $\mathbb{V}ar(N_t) > \mathbb{E}[N_t]$.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα για το αν μια μεικτή σ.δ. Poisson μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Θεώρημα 3.2.6. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, έτσι ώστε το Θ να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Η κατανομή του Θ, είναι εκφυλισμένη.*

(*b*) *Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

(*c*) *Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μή ομογενής σ.δ. Poisson.*

(*d*) *Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία (ομογενής) σ.δ. Poisson.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [72, Theorem 4.2.6].

3.3 Παρατηρήσεις

Το υπόβαθρο του μοντέλου που συζητήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί να γίνει πιο σαφές αν συμφωνήσουμε να κάνουμε μία διάκριση μεταξύ των χαρτοφυλακίων του ασφαλιστή και των γενικών χαρτοφυλακίων. Ένα χαρτοφυλάκιο του ασφαλιστή είναι, φυσικά, ένα σύνολο κινδύνων, οι οποίοι είναι ασφαλισμένοι από την ίδια ασφαλιστική εταιρία, σε αντίθεση, ένα γενικό χαρτοφυλάκιο είναι ένα σύνολο κινδύνων, οι οποίοι κατανέμονται μεταξύ μιας ή περισσοτέρων ασφαλιστικών εταιριών. Τα ομοιογενή χαρτοφυλάκια των ασφαλιστών τείνουν να είναι μικρά, ενώ τα ομοιογενή γενικά χαρτοφυλάκια μπορεί να είναι μεγάλα. Ως εκ τούτου, φαίνεται να είναι λογικό να συνδυάζουμε πληροφορίες από όλες τις ασφαλιστικές εταιρείες που ασχολούνται με την ίδια ασφαλιστική εργασία προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την απαριθμήτρια *σ.δ.* των ομοιογενών γενικών χαρτοφυλακίων. Αυτό δίνει αξιόπιστες πληροφορίες για την υπό συνθήκη κατανομή της απαριθμήτριας *σ.δ.* του κάθε χαρτοφυλακίου του ασφαλιστή. Η κάθε ασφαλιστικη εταιρία μένει, στη συνέχεια, να κάνει την κατάλληλη επιλογή της δομικής κατανομής του δικού της χαρτοφυλακίου.

Η ερμηνεία της μεικτής απαριθμήτριας *σ.δ.* μπορεί να επεκταθεί ως εξής:
Μέχρι τώρα, έχουμε υποθέσει ότι ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο είναι μία μείξη από γενικά χαρτοφυλάκια που είναι ομοιογενή. Σε ορισμένους κλάδους nonlife ασφάλισης όπως τη βιομηχανική ασφάλιση κινδύνων πυρκαγιάς, ωστόσο, είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς χαρτοφυλάκια που είναι ομοιογενή και αρκετά μεγάλα ώστε να παρέχουν αξιόπιστες στατιστικές πληροφορίες. Είναι επομένως σκόπιμο να τροποποιηθεί το μοντέλο με την παραδοχή ότι ένα μάλλον ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο του ασφαλιστή είναι μία μείξη από ομοιογενή γενικά χαρτοφυλάκια. Τα μαθηματικά της μείξης δεν αλλάζουν καθόλου. Μόλις αυτή η γενίκευση γίνει αποδεκτή, μπορούμε επίσης να δεχθούμε περισσότερα από δύο επίπεδα της ανομοιογένειας και να κάνουμε μείξη ομοιογενών χαρτοφυλακίων για να περιγράψουμε όλο και περισσότερα ανομοιογενή χαρτοφυλάκια. Σε κάθε περίπτωση, το επίπεδο της ανομοιογένειας του χαρτοφυλακίου αντανακλάται από τη διακύμανση της δομικής κατανομής, η οποία είναι ίση με το μηδέν αν και μόνο αν το χαρτοφυλάκιο είναι ομοιογενές.

Υπάρχει ακόμα μια άλλη παραλλαγή των ερμηνειών που δίνεται μέχρι τώρα: Η μεικτή απαριθμήτρια *σ.δ.* μπορεί να ερμηνευθεί ως η απαριθμήτρια *σ.δ.* ενός μεμονωμένου κινδύνου, επιλεγμένο τυχαία από ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων που είναι παρόμοιο αλλά διαφορετικοί μεταξύ τους και μπορεί να χαρακτηριστεί από τη πραγματοποίηση της δομικής παραμέτρου, η οποία δεν είναι παρατηρήσιμη. Αυτή η διερμηνεία παρέχει ένα σύνδεσμο μεταξύ των απαριθμητριών *σ.δ.* ή των *σ.δ.* συνολικών απαιτήσεων και αξιολόγηση εμπειρίας experience rating - μία θεωρία υπολογισμού ασφαλίστρων, η οποία, στον πυρήνα της, ασχολείται με τη βέλτιστη πρόβλεψη των μελλοντικών αριθμών απαιτήσεων ή των σοβαρών απαιτήσεων μεμονωμένων κινδύνων, δοσμένης της εμπειρίας από μεμονωμένες απαιτήσεις κατά το παρελθόν καθώς και από πλήρεις ή μερικές πληροφορίες σχετικά με τη δομή του χαρτοφυλακίου από το οποίο επιλέχθηκε ο κίνδυνος. Για μία εισαγωγή στην αξιολόγηση εμπειρίας βλ. Sundt [82](1993) και Schmidt [73] (1992).

Σύμφωνα με τον Seal [75], η ιστορία της μεικτής *σ.δ.* Poisson προέρχεται από μία εργασία του Dubourdieu [25], ο οποίος την πρότεινε ως ένα μοντέλο σε μια ασφάλεια αυτοκινήτου, αλλά δεν το συνέκρινε με στατιστικά δεδομένα. Ύστερα από δύο χρόνια, οι μεικτές *σ.δ.* Poisson έγιναν κεντρικό θέμα στο γνωστό βιβλίο του Lundberg [53] (1940) που αναπτύχθηκε η μαθηματική θεωρία τους και μελετήθηκαν οι εφαρμογές τους στις ασφάλιες για αρρώστιες και ατυχήματα. Ακόμη μία εφαρμογή προτάθηκε από τον Hofmann [40], ο οποίος μελέτησε τις μεικτές *σ.δ.* Poisson σαν ένα μοντέλο για ασφαλιστικές αποζημιώσεις εργαζομένων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες στις μεικτές *σ.δ.* Poisson, αξίζει να διαβαστούν οι εργασίες των Lundberg [53] (1940), και Albrecht [8], τα άρθρα επισκόπησης των Albrecht [9] και Pfeifer [65], και το βιβλίο του Grandell [34]. Ο Pfeifer [63], [64] και ο Gerber [29] μελέτησαν τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων που επάγονται από τη *σ.δ.* Pólya-Lundberg. Οι Pfeifer and Heller [67] και ο Pfeifer [66] χαρακτήρισαν τις μεικτές *σ.δ.* Poisson με τη βοήθεια της ιδιότητας martingale κάποιων μετασχηματισμών *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων. Οι μεικτές *σ.δ.* Poisson με τη δομική παράμετρο να ακολουθεί την κατανομή Gamma με τρεις παραμέτρους πρώτα μελετήθηκε από τον Delaporte [21], [22] και αργότερα οι δομικές κατανομές συζητήθηκαν από τους Tröblinger [88], Kupper [49], Albrecht [8], και Gerber [30].

Για να επιλέξουμε μία *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων ως μοντέλο για τα συγκεκριμένα δεδομένα, είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ορισμένα κριτήρια, τα οποία τηρούνται για ορισμένες *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων, αλλά αποτυγχάνουν για άλλες. Τα ακόλουθα κριτήρια αναφέρονται στην ανομοιογενή *σ.δ.* Poisson και στην μεικτή *σ.δ.* Poisson, με κάθε μία από αυτές να συμπεριλαμβάνει την ομοιογενή *σ.δ.* Poisson ως μία ειδική περίπτωση:

- *Ανεξάρτητες προσαυξήσεις*: Η ανομοιογενής *σ.δ.* Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ενώ η μεικτή *σ.δ.* Poisson με μη εκφυλισμένη δομική κατανομή δεν έχει.

- *Στάσιμες προσαυξήσεις*: Η μεικτή *σ.δ.* Poisson έχει στάσιμες αυξήσεις, ενώ η ανομοιογενής *σ.δ.* Poisson με μη σταθερή ένταση δεν έχει.

- *Πολυωνυμικό κριτήριο*: Το πολυωνυμικό κριτήριο με πιθανότητες κατάλληλες για χρονικά διαστήματα ισχύει για τη μεικτή *σ.δ.* Poisson, αλλά δεν ισχύει για τη μη ομογενή *σ.δ.* Poisson με μη σταθερή ένταση.

- *Ανισότητα ροπών*: Η ανισότητα ροπών

$$\mathbb{E}[N_t] \leq \mathbb{V}ar(N_t)$$

για όλα τα $t \in (0, \infty)$, είναι μία αυστηρή ανισότητα για τη μεικτή *σ.δ.* με μία μη εκφυλισμένη δομική κατανομή, αλλά είναι μία ισότητα για τη μη ομογενή *σ.δ.* Poisson.

Αφού επιλεχθεί ο τύπος της απαριθμήτριας *σ.δ.* σύμφωνα με τα προηγούμενα κριτήρια, στο επόμενο βήμα θα πρέπει να επιλεχθούν παράμετροι και να εξεταστεί η καλή προσαρμογή των θεωρητικών πεπερασμένης διάστασης κατανομών στις αντίστοιχες εμπειρικές.

Η ασφάλιση αυτοκινήτου δεν ήταν μόνο ο νονός των μεικτών *σ.δ.* Poisson όταν αυτές εισήχθησαν στη θεωρία κινδύνου από τον Dubourdieu [25] χωρίς αναφορά σε στατιστικά δεδομένα. Εξακολουθεί να είναι ακόμη η σημαντικότερη κατηγορία ασφάλισης, στην οποία η μεικτή *σ.δ.* Poisson φαίνεται να είναι καλό μοντέλο για την απαριθμήτρια *σ.δ.* . Αυτό αναφέρεται στις δημοσιεύσεις των Thyrion [85], Delaporte [21], [22], Tröblinger [88], Derron [24], Bichsel [14] και Ruohonen [71] και στο βιβλίο του Lemaire [50]. Κατά κανόνα, ωστόσο, πήραν δεδομένα από μία μόνο περίοδο και ως εκ τούτου σύγκριναν μονοδιάστατες θεωρητικές κατανομές με εμπειρικές. Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την ανάπτυξη των αριθμών απαιτήσεων στο χρόνο, θα ήταν απαραίτητο να συγκρίνουμε τις πεπερασμένες μονοδιάστατες κατανομές της επιλεγμένης απαριθμήτριας $\sigma.\delta.$ με τις εμπειρικές.

Κεφάλαιο 4

Διαδικασίες συνολικών απαιτήσεων

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε και μελετάμε τις διαδικασίες των συνολικών αποζημιώσεων. Πρώτα γίνεται μια ανάλυση του μοντέλου που χρησιμοποιείται έως και σήμερα (Ενότητα 4.1) και, στη συνέχεια, αποδεικνύονται κάποια γενικά αποτελέσματα για τις σύνθετες κατανομές (Ενότητα 4.2).

4.1 Το υπόδειγμα

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε μια απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και την αντίστοιχη *σ.δ.* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ άφιξης των απαιτήσεων. Υποθέτουμε ότι το μηδενικό σύνολο εξαίρεσης είναι το κενό και ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με μηδέν.
Επιπλέον, θεωρούμε την ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίων μεταβλητών. Για $t\in\mathbb{R}_+$, ισχύει

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k, \tag{4.1}$$

με $S_0 = 0$, όπου

- X_n είναι το μέγεθος ή το ποσό της n- οστής απαίτησης.
- S_t είναι το μέγεθος των συνολικών απαιτήσεων που έχουν συμβεί σε χρόνο t.

Η απόδειξη της (4.1) έχει ως εξής:

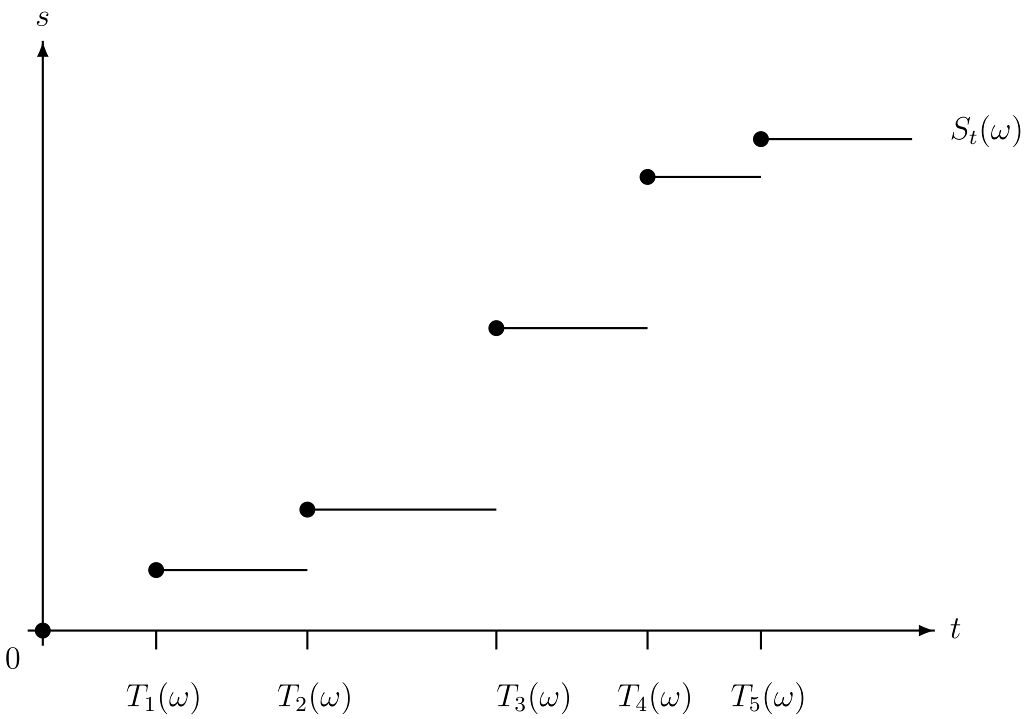
Έστω $t \geq 0$ και $\omega \in \Omega$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\omega \in \{N_t = n_0\}$, δηλαδή τέτοιο ώστε $N_t(\omega) = n_0$. Επομένως ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \chi_{\{N_t=n_0\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{N_t} X_k(\omega).$$

Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **η *σ.δ.* του μεγέθους των απαιτήσεων (claim size process)**, ενώ η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **η *σ.δ.* των συνολικών απαιτήσεων**

(aggregate claims process), που παράγεται απο την *σ.δ.* του αριθμού απαιτήσεων και της *σ.δ.* του μεγέθους των απαιτήσεων.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, θεωρούμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι i.i.d. και ότι η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η *σ.δ.* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του μεγέθους των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες.



Τα παρακάτω αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου, εκτός του Πορίσματος 4.1.2, αναφέρονται στο βιβλίο [72] του Klaus D. Schmidt. Εδώ γίνονται αναλυτικότερα οι αποδείξεις.

Λήμμα 4.1.1. *Για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $B\in\mathfrak{B}$ ισχύει ότι:*

$$P[\{S_t\in B\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t=n\}]P\left[\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\right\}\right]. \tag{4.2}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [6] Λήμμα 4.1.1.

Παρατήρηση 4.1.2. *Για $s,t\in\mathbb{R}_+$, με $s\le t$, για τις προσαυξήσεις της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ των συνολικών απαιτήσεων στο διάστημα $(s,t]$ ισχύει:*

$$S_t - S_s = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k. \tag{4.3}$$

με $S_0=0$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της S_t ισχύει ότι:

$$S_t - S_s = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - \sum_{k=1}^{N_s} X_k = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k.$$

□

Σύμφωνα με τον ορισμό της S_t, ισχύει ότι:

$$S_t(\omega) = (S_t - S_s)(\omega) + S_s(\omega),$$

ακόμα και όταν το $S_s(\omega)$ απειρίζεται. Για την σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων, οι ιδιότητες των ανεξάτητων ή στάσιμων προσαυξήσεων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Θεώρημα 4.1.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε και η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. [6] Θεώρημα 4.1.3.

Θεώρημα 4.1.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε και η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. [6] Θεώρημα 4.1.4.

4.2 Σύνθετες κατανομές

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον τρόπο υπολογισμού της κατανομής του συνολικού μεγέθους των απαιτήσεων S_t σε χρόνο t.
Θεωρούμε N μια τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί την συνθήκη $P_N[\mathbb{N}_0] = 1$ και ορίζουμε

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k. \tag{4.4}$$

όπου η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία i.i.d. τ.μ. Οι τυχαίες μεταβλητές N και S θα αναφέρονται ως η απαριθμήτρια τ.μ. και η τ.μ. των συνολικών απαιτήσεων, αντίστοιχα.

Θεωρούμε επιπλέον ότι οι N και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή P_S των συνολικών απαιτήσεων ονομάζεται **σύνθετη κατανομή (compound distributions)** και συμβολίζεται με

$$\mathbf{C}(P_N, P_X).$$

Οι σύνθετες κατανομες συνήθως προσδιορίζονται απο την κατανομή της απαριθμήτριας σ.δ. . Για παράδειγμα, αν η P_N ακολουθεί την κατανομή Poisson, τότε και η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ ονομάζεται **σύνθετη κατανομή Poisson**.
Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια αναδιατύπωση του Λήμματος 4.1.1

Λήμμα 4.2.1. *Για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει*

$$P_S[B] = \sum_{n=0}^{\infty} P_N[\{n\}] P_X^{*n}[B]. \tag{4.5}$$

Σε μερικές περιπτώσεις είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιείται η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων.

Λήμμα 4.2.2. *Η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί τη σχέση*

$$\varphi_S(z) = m_N(\varphi_X(z)) \tag{4.6}$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$m_S(z) = m_N(m_X(z))$$

Απόδειξη. **(α)** Για κάθε $z \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\varphi_S(z) &= E\left[e^{izS}\right] = E\left[e^{iz\sum_{k=1}^{N} X_k}\right] \\
&= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} e^{iz\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} e^{izX_k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{izX_k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] E\left[e^{izX_1}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \varphi_X(z)^n = E\left[\varphi_X(z)^N\right] \\
&= m_N(\varphi_X(z)),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα προκύπτει από το Πόρισμα Beppo Levi (βλ. [4, Πόρισμα 2.3.2]) και η έκτη από την $\varphi_X := \varphi_{X_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(β) Πάλι για κάθε $z \in [-1, 1]$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}
m_S(z) &= E\left[z^S\right] = E\left[z^{\sum_{k=1}^{N} X_k}\right] \\
&= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} z^{\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} z^{X_k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \prod_{k=1}^{n} E\left[z^{X_k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] E\left[z^{X_1}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] m_X(z)^n = E\left[m_X(z)^N\right] \\
&= m_N(m_X(z)),
\end{aligned}$$

όπου πάλι η πέμπτη ισότητα προκύπτει από το Πόρισμα Beppo Levi (βλ. [4, Πόρισμα 2.3.2]) και η έκτη από την $m_X := m_{X_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$\square$

Πόρισμα 4.2.3. *Αν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί την*

$$\varphi_S(z) = e^{\alpha(\varphi_X(z)-1)}. \tag{4.7}$$

Αν η κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή Bernoulli ή μια λογαριθμική κατανομή, τότε ο υπολογισμός της σύνθετης κατανομής Poisson μπορεί να απλοποιηθεί σύμφωνα με τα παρακάτω Πορίσματα.

Πόρισμα 4.2.4. *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\eta \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{B}(\eta)) = \mathbf{P}(\alpha\eta). \tag{4.8}$$

Πόρισμα 4.2.5. *(Quenouille [69] (1949)). Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\eta \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{Log}(\eta)) = \mathbf{NB}\left(\frac{\alpha}{|\log(1-\eta)|}, 1-\eta\right). \tag{4.9}$$

Πόρισμα 4.2.6. *Αν $P_N = \mathbf{NB}(\alpha, \theta)$,τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί τη σχέση*

$$\phi_S(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)\phi_X(z)}\right)^{\alpha}. \tag{4.10}$$

Πόρισμα 4.2.7. *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\theta, \eta \in (0,1)$,*

$$\mathbf{C}(\mathbf{NB}(\alpha, \theta), \mathbf{B}(\eta)) = \mathbf{NB}\left(\alpha, \frac{\theta}{\theta + (1-\theta)\eta}\right). \tag{4.11}$$

Πόρισμα 4.2.8. *(Panjer - Willmot [61] (1981)). Για όλα τα $m \in \mathbb{N}, \theta \in (0,1)$ και τα $\beta \in (0,\infty)$,*

$$\mathbf{C}(\mathbf{NB}(m, \theta), \mathbf{Geo}(\beta)) = \mathbf{CB}(m, 1-\theta), \mathbf{Exp}(\beta\theta)). \tag{4.12}$$

Λήμμα 4.2.9. (Οι ταυτότητες του Wald). *Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}[N] < \infty$ και $\mathbb{E}[X] < \infty$. Τότε για την μέση τιμή και την διακύμανση της S ισχύει*

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] \tag{4.13}$$

και

$$\mathbb{V}ar(S) = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(N)\mathbb{E}[X]^2 \tag{4.14}$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &:= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}]\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}] n\mathbb{E}[X] \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X],
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος Beppo Levi (βλ. [4, Πόρισμα 2.3.2]) και της ανεξαρτησίας των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Παρόμοια ισχύει

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)^2\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}] \left(\mathbb{V}ar\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + \left(\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right)^2\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}] \left(n\mathbb{V}ar[X] + n^2\mathbb{E}[X]^2\right) \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar[X] + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2,
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος Beppo Levi και της ανεξαρτησίας των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Επομένως

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(S) &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 \\
&= \Big(\mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar(X) + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2\Big) - \Big(\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar(X) + \Big(\mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2\Big)\mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(N)\mathbb{E}[X]^2.
\end{aligned}
$$

□

Παρατήρηση 4.2.10. Για μία επέκταση της ταυτότητας του Wald στην περίπτωση όπου το μέγεθος των απαιτήσεων δεν είναι i.i.d., βλ. Rhiel [70] (1985).

Κεφάλαιο 5

Μεικτές κατανομές Poisson

Στο Κεφάλαιο 5 εξετάζουμε τις βασικές ιδιότητες των μεικτών κατανομών Poisson, δίνουμε κάποια παραδείγματα και παρουσιάζουμε χαρακτηρισμούς μεικτών κατανομών Poisson. Σε όλο το κεφάλαιο η N είναι μία διακριτή τ.μ.

5.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 5.1.1. *Έστω Θ μία μη αρνητική τ.μ. και $U := P_\Theta$. Μία διακριτή τ.μ. N ακολουθεί την* **μεικτή κατανομή Poisson με δομική παράμετρο** *U ($MP(t,U)$ για συντομία), αν*

$$\begin{aligned} p_n(t) &:= P[N=n] \\ &:= \mathbb{E}[\frac{(\Theta t)^n}{n!}e^{-\Theta t}] \\ &= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}U(d\theta) \end{aligned}$$

για κάθε $n \in N_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Το t που εμφανίζεται στον παραπάνω ορισμό, θα μπορούσε προς το παρόν να προκαλέσει σύγχυση, αλλά αργότερα θα φανεί πρακτικό.

Παρ'ολα αυτά, μερικές φορές γράφουμε $MP(U)$ αντί $MP(1,U)$. Έστω U_t η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Θt, δηλ. $U_t(\theta) = U(\theta/t)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $MP(t,U) = MP(Ut)$. Συχνά είναι βολική η ταυτόχρονη μελέτη του Θ και N, δηλ. η θεώρηση του τυχαίου διανύσματος (Θ, N). Η κατανομή αυτού του τυχαίου διανύσματος δίνεται (με μία επέκταση του 5.1.1) από τον τύπο

$$P[\Theta \le x, N=n] := \int_0^x \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}U(d\theta) \tag{5.1}$$

για $x \in \mathbb{R}_+$ και $n \in N_0$. Η δομική κατανομή U ονομάζεται και **prior κατανομή**.

Στην παρακάτω πρόταση συγκεντρώνουμε κάποιες απλές και γνωστές ιδιότητες των μεικτών κατανομών Poisson.

Πρόταση 5.1.2. *Έστω ότι η N ακολουθεί την κατανομή $MP(t, U)$. Τότε*

(ι) $\mathbb{E}[N] = t\mathbb{E}[\Theta]$,

(ιι) $\mathbb{V}ar[N] = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar[\Theta]$,

(ιιι) $\frac{1}{t}P\{N > n\} = \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!}(1 - F_\Theta(\theta))d\theta$,

(ιυ)

$$P\{\Theta \leq x | N = n\} = \frac{\int_{0-}^x \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^\infty \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}, \tag{5.2}$$

(υ)

$$\mathbb{E}[\Theta | N = n] = \frac{\int_{0-}^\infty \theta^{n+1} e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^\infty \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}, \tag{5.3}$$

(υι) Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση m_N της N δίνεται από τον τύπο

$$m_N(s) := \mathbb{E}[s^N] = L_\Theta(t(1-s)) \quad \text{για κάθε } s \leq 1$$

όπου $L_\Theta(v) := \int_{0-}^\infty e^{-\theta v} U(d\theta)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της Θ.

Απόδειξη. Από την ταυτότητα του Wald έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N|\Theta]] = \mathbb{E}[\Theta t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar[N] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}ar[N|\Theta]] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}[N|\Theta]] \\ &= \mathbb{E}[\Theta t] + \mathbb{V}ar[\Theta t] \\ &= t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar[\Theta] \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τις σχέσεις (i) και (ii).

Για την απόδειξη της (iii) θέτουμε

$$h(\theta) := \sum_{k=n+1}^\infty \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \quad \text{για κάθε } \theta > 0. \tag{5.4}$$

Τότε για κάθε $\theta > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= \left(\sum_{k=n+1}^\infty \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \right)' \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \left(\frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \right)' \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \left[\frac{k(\theta t)^{k-1}}{k!} e^{-\theta t} - \frac{t(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{t(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{t(\theta t)^{k}}{k!}\right]e^{-\theta t},$$

δηλαδή

$$h'(\theta)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{t(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{t(\theta t)^{k}}{k!}\right]e^{-\theta t} \quad \text{για κάθε } \theta>0. \tag{5.5}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(\{N>n\}) &= \\
& P(\biguplus_{k=n+1}^{\infty}\{N=k\}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P\{N=k\}) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\Omega} P(\{N=k|\Theta\})dP = \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\Omega}\frac{(\Theta t)^k}{k!}e^{-\Theta t)}dP \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{(\theta t)^k}{k!}e^{-\theta t}P_{\Theta}(d\theta) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{(\theta t)^k}{k!}e^{-\theta t}dF_{\Theta}(\theta) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\theta t)^k}{k!}e^{-\theta t}dF_{\Theta}(\theta) \\
&\overset{(5.4)}{=} \int_0^{\infty} h(\theta)f_{\theta}(\theta)d\theta = \int_0^{\infty} h(\theta)(-\overline{F}_{\theta}(\theta))'d\theta \\
&= [-h(\theta)\overline{F}_{\Theta}(\theta)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\overline{F}_{\Theta}(\theta)h'(\theta)d\theta \\
&= [0-0] + \int_0^{\infty} h'(\theta)(1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&\overset{(5.5)}{=} \int_0^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{t(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\theta t}-\frac{t(\theta t)^k}{k!}e^{-\theta t}\right)(1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\theta t}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{t(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{t(\theta t)^k}{k!}\right)(1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\infty} te^{-\theta t}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\theta t)^k}{k!}\right](1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\infty} te^{-\theta t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta t)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(\theta t)^k}{k!}\right](1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&\overset{l=k+1}{=} \int_0^{\infty} te^{-\theta t}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\theta t)^l}{l!}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(\theta t)^l}{l!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta t)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(\theta t)^k}{k!}\right](1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\infty} te^{-\theta t}\left[e^{\theta t}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(\theta t)^l}{l!}-e^{\theta t}+\sum_{l=0}^{n}\frac{(\theta t)^l}{l!}\right](1-F_{\Theta}(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\infty} te^{-\theta t}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{(\theta t)^l}{l!}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(\theta t)^l}{l!}\right](1-F_{\Theta}(\theta))d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty te^{-\theta t}\Big[\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(\theta t)^l}{l!}+\frac{(\theta t)^n}{n!}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(\theta t)^l}{l!}\Big](1-F_\Theta(\theta))d\theta \\
&= t\int_0^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}(1-F_\Theta(\theta))d\theta.
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα είναι συνέπεια του θεωρήματος 2.4.6. από Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης [4].

Από τον Ορισμό 5.1.1 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
P\{\Theta \le x|N=n\} &= \frac{P\{\Theta\le x, N=n\}}{P\{N=n\}} \\
&= \frac{\int_{0^-}^x \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}U(d\theta)}{\int_{0^-}^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}U(d\theta)} \\
&= \frac{\int_{0^-}^x \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}{\int_{0^-}^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)},
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει τη σχέση (iv).
Για τη σχέση (v) έχουμε

$$\mathbb{E}[\Theta|N=n] := \int_0^\infty x dP\{\Theta\le x|N=n\}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Theta|N=n] &:= \int_0^\infty x dP\{\Theta\le x|N=n\} \\
&\overset{iv}{=} \int_0^\infty d\frac{\int_{0^-}^x \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}{\int_{0^-}^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)} \\
&= \frac{\int_{0^-}^\infty x x^n e^{-xt}U(dx)}{\int_{0^-}^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)} \\
&= \frac{\int_{0^-}^\infty \theta^{n+1} e^{-\theta t}U(d\theta)}{\int_{0^-}^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_N(s) &:= \sum_{k=0}^\infty s^k p_k(t) \\
&= \int_{0^-}^\infty \sum_{k=0}^\infty s^k \frac{(\theta t)^k}{k!}e^{-\theta t}U(d\theta) \\
&= \int_{0^-}^\infty e^{s\theta t}e^{-\theta t}U(d\theta) \\
&= \int_{0^-}^\infty e^{-\theta t(1-s)}U(d\theta) \\
&= L_\Theta(t(1-s)),
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει τη σχέση (vi). □

Παρατηρήσεις 5.1.3. **(a)** *Από τη σχέση (iv) της Πρότασης 5.1.2 προκύπτει, οτι η συνάρτηση*

$$F(x|N=n) := P(\Theta \le x|N=n)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως η **posterior κατανομή** *της* Θ *δοσμένου του ενδεχομένου* $\{N=n\}$.

(b) *Οι σχέσεις (i) και (ii) της Πρότασης 5.1.2 προκύπτουν επίσης, με παραγώγιση της* $M_N(s)$. *Γενικότερα, έχουμε ότι η παραγοντική ροπή δίνεται από τη σχέση:*

$$\mathbb{E}[N(N-1)\dots(N-k+1)] = t^k\mathbb{E}[\Theta^k], k=1,2,\dots$$

Ένας άλλος τρόπος να κατανοήσουμε τη σχέση (ii) είναι να θεωρήσουμε

$$N = (N-t\Theta)+t\Theta,$$

και να παρατηρήσουμε ότι

$$Cov[N-t\Theta, t\Theta] = \mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta|\Theta]] = 0.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
Cov(N-t\Theta,t\Theta) &= \mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta] - \mathbb{E}[N-t\Theta]\mathbb{E}[t\Theta] \\
&= \mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta] - (\mathbb{E}[N]-t\mathbb{E}[\Theta])t\mathbb{E}[\Theta]) \\
&\overset{(5.1.2(\mathrm{i}))}{=} \mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta] - (t\mathbb{E}[\Theta]-t\mathbb{E}[\Theta])t\mathbb{E}[\Theta] \\
&= \mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(N-t\Theta)t\Theta|\Theta]] \\
&\overset{\text{Προτ. } 3.3.14[\Sigma\Sigma\mathrm{A}]}{=} \mathbb{E}[t\Theta\mathbb{E}[N-t\Theta|\Theta]] \\
&= t\mathbb{E}[\Theta(\mathbb{E}[N|\Theta]-t\mathbb{E}[\Theta|\Theta])] \\
&= t\mathbb{E}[\Theta(\mathbb{E}[N|\Theta]-t\Theta)] \\
&= t\mathbb{E}[\Theta(t\Theta-t\Theta)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το $t\Theta$ *ως "σήμα" και το* $N-t\Theta$ *ως "θόρυβο". Να σημειώσουμε, όμως, ότι*

$$\mathbb{V}ar[N-t\Theta|\Theta] = t\Theta,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι οι $t\Theta$ *και* $N-t\Theta$ *δεν είναι ανεξάρτητες.*

Στο πλαίσιο αυτό, είναι φυσικό να ερμηνεύσουμε το $\mathbb{V}ar[t\Theta] = t^2\mathbb{V}ar[\Theta]$ *ως την* **ένταση της διακύμανσης** *και την* $\mathbb{V}ar[N-t\Theta] = t\mathbb{E}[\Theta]$ *ως την* **παραλλαγή της Poisson**.

Το ακόλουθο θεώρημα, στο οποίο η σχέση (i) αποδείχθηκε από τον Feller [26] (1943, p.392), είναι ουσιαστικά ένα πόρισμα της Πρότασης (5.1.1 (vi)). Ας συμβολίσουμε με $\stackrel{d}{=}$ την ισονομία και το $\stackrel{d}{\to}$ τη σύγκλιση κατά κατανομή. Με το συμβολισμό του θεωρήματος, $\Theta_1 \stackrel{d}{=} \Theta_2$ σημαίνει ότι $U_1(\theta) = U_2(\theta)$ για όλα τα θ και $\Theta_n \stackrel{d}{\to} \Theta$ σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} U_n(l) = U(l)$$

για κάθε σημείο της συνέχειας της U.

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ μη αρνητικές τ.μ. με κατανομές $U, U_1, U_2, \ldots$ και έστω ότι οι τ.μ. $N, N_1, N_2, \ldots$ ακολουθούν τις $MP(U), MP(U_1), MP(U_2), \ldots$ αντίστοιχα. Τότε*

(ι) $N_1 \stackrel{d}{=} N_2$ αν και μόνον αν $\Theta_1 \stackrel{d}{=} \Theta_2$

(ιι) $N_n \stackrel{d}{\to} N$ αν και μόνον αν $\Theta_n \stackrel{d}{\to} \Theta$

(ιιι) Αν $N_n \stackrel{d}{\to} \tilde{\mathrm{N}}$, όπου $\tilde{\mathrm{N}}$ είναι μία διακριτή τ.μ., τότε η $\tilde{\mathrm{N}}$ είναι MP.

Απόδειξη.

(ι) Αν $\Theta_1 \stackrel{d}{=} \Theta_2$ τότε $N_1 \stackrel{d}{=} N_2$ από τον ορισμό της ισονομίας.

Επομένως $P_{N_1} = P_{N_2}$ αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_{N_1}(\{n\}) &= \int_0^\infty e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^n}{n!}P_{\Theta_1}(d\theta) \\ &= \int_0^\infty e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^n}{n!}P_{\Theta_2}(d\theta) \\ &= P_{N_1}(\{n\}), \end{aligned}$$

δηλαδή $N_1 \stackrel{d}{=} N_2$.

Αντιστρόφως, έστω $N_1 \stackrel{d}{=} N_2$. Τότε από την Πρόταση 5.1.2 (vi) προκύπτει ότι για κάθε $v \in [0,1]$ ισχύει $L_{\Theta_1}(v) = L_{\Theta_2}(v)$. Αφού ο μετασχηματισμός Laplace είναι μονοσήμαντα ορισμένος από τις τιμές του στο $[0,1]$ (βλ. Feller [28] (1971, p.430), η σχέση $\Theta_1 \stackrel{d}{=} \Theta_2$ προκύπτει από το θεώρημα μοναδικότητας για μετασχηματισμούς Laplace.

(ιι) Αν $\Theta_n \stackrel{d}{\to} \Theta$ τότε, από την Πρόταση 5.1.1 (vi) και τα θεωρήματα συνέχειας για τους μετασχηματισμούς Laplace και τις γεννήτριες συναρτήσεις, $L_{\Theta_n}(v) \to L_\Theta(v)$ και έτσι $m_{N_n}(s) \to m_N(s)$ που συνεπάγεται ότι $N_n \stackrel{d}{\to} N$.

Αντιστρόφως $N_n \stackrel{d}{\to} N$ τότε παίρνουμε, όπως παραπάνω, ότι $L_{\Theta_n}(v) \to L_\Theta(v)$ για κάθε $0 \le v \le 1$. Με μία μικρή γενίκευση του θεωρήματος συνέχειας για τους μετασχηματισμούς Laplace, (βλ. Kallenberg [44] (1983, p.167)), έχουμε ότι $\Theta_n \stackrel{d}{\to} \Theta$.

(ιιι) Αν έχουμε ότι $N_n \stackrel{d}{\to} \tilde{\mathrm{N}}$, τότε $m_{N_n}(s) \to m_{\tilde{\mathrm{N}}}(s)$ και έτσι $L_{\Theta_n}(v) \to m_{\tilde{\mathrm{N}}}(1-u)$ για $0 \le v \le 1$. Αφού $m_{\tilde{\mathrm{N}}}(1-t) \to m_{\tilde{\mathrm{N}}}(1) = 1$ όταν το $t \to 0$, η (iii) προκύπτει από την (ii). $\square$

5.2 Παραδείγματα μεικτών κατανομών Poisson

Poisson - Gamma 5.2.1. Η πιο συνηθισμένη επιλογή για την κατανομή της δομικής παραμέτρου U είναι σίγουρα η κατανομή $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_\Theta(\theta) := U'(\theta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}, \quad \theta \geq 0,$$

όπου α και β είναι θετικές παράμετροι. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η Θ είναι η $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$. Για $\beta = 1$ η τ.μ. Θ ακολουθεί την **εκθετική κατανομή**. Ακόμη, όταν η β είναι ακέραιος αριθμός, η Θ είναι ισόνομη με το άθροισμα των β, οι οποίες είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Αυτές οι κατανομές Γάμμα συχνά αναφέρονται ως **κατανομές Erlang**.

Έχουμε, βλ. π.χ. Γ΄.4.3, ότι

$$\mathbb{E}_\Theta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \mathbb{V}ar_\Theta = \frac{\beta}{\alpha^2},$$
$$M_\Theta(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^\beta.$$

Επίσης ισχύει

$$p_k(t) = \binom{\beta + k - 1}{k}\left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^\beta \left(\frac{t}{t + \alpha}\right)^k \tag{5.6}$$

για $k \in \mathbb{N}_0$, δηλ. η N **κατανέμεται αρνητικά διωνυμικά**. Για $\beta = 1$ καταλήγει στη **γεωμετρική κατανομή**.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
P[\{N_t = k\}] &= \int_\Omega P(\{N_t = k\}|\Theta(\omega))P(d\omega)\\
&= \int_\Omega e^{-t\Theta(\omega)}\frac{(t\Theta(\omega))^k}{k!}P(d\omega)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t\theta}\frac{(t\theta)^k}{k!}P_\Theta(d\theta)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t\theta}\frac{(t\theta)^k}{k!}\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}e^{-\alpha\theta}\theta^{\beta-1}\chi_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta)\\
&= \frac{\Gamma(\beta + k)}{\Gamma(\beta)k!}\left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^\beta\left(\frac{t}{\alpha + t}\right)^k\int_{(0,\infty)}\frac{(\alpha + t)^{\beta+k}}{\Gamma(\beta + k)}e^{-(\alpha+t)\theta}\theta^{\beta+k-1}\lambda(d\theta)\\
&= \binom{\beta + k - 1}{k}\left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^\beta\left(\frac{t}{t + \alpha}\right)^k,
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας και η τρίτη είναι συνέπεια του [4], Θεωρήματος 2.4.6.

Από τη σχέση (5.2) συνεπάγεται ότι η Θ με τη δέσμευση ότι $N = n$ είναι ίση με $\mathbf{Ga}(\alpha + t, \beta + n)$, και έτσι

$$\mathbb{E}[\Theta|N = n] = \frac{\beta + n}{\alpha + t} \tag{5.7}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
P\{\Theta \le x|N=n\} & \\
&\overset{(5.2)}{=} \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}{\int_{0^-}^{\infty}\theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}\\
&= \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^n e^{-\theta t}U'(\theta)d\theta}{\int_{0^-}^{\infty}\theta^n e^{-\theta t}U'(\theta)d\theta}\\
&= \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^n e^{-\theta t}\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}d\theta}{\int_{0^-}^{\infty}\theta^n e^{-\theta t}\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}d\theta}\\
&= \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta}{\int_{0^-}^{\infty}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta}\\
&= \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta}{\frac{1}{t+\alpha}\int_{0^-}^{\infty}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta(t+\alpha)}\\
&= \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta}{\frac{1}{t+\alpha}\frac{1}{(t+\alpha)^{n+\beta-1}}\int_{0^-}^{\infty}(\theta(t+\alpha))^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta(t+\alpha)}\\
&\overset{\theta_2=\theta(t+\alpha)}{=} \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta}{\frac{1}{(t+\alpha)^{n+\beta}}\int_{0}^{\infty}\theta_2^{\beta+n-1}e^{-\theta_2}d\theta_2}\\
&= \frac{\int_{0^-}^{x}\theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta}{\frac{1}{(t+\alpha)^{n+\beta}}\Gamma(n+\beta)}\\
&= \frac{(t+\alpha)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta)}\int_0^x \theta^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta\\
&= \frac{1}{\Gamma(n+\beta)}\int_0^x \theta^{n+\beta-1}(t+\alpha)^{n+\beta-1}e^{-\theta(t+\alpha)}d\theta(t+\alpha)\\
&= \mathbf{Ga}(\alpha+t,\beta+n)((0,x)) \quad \text{για κάθε } x>0
\end{aligned}$$

Άρα $P_{\Theta|\{N=n\}} = \mathbf{Ga}(\alpha+t,\beta+n)$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.6) παίρνουμε ότι

$$\frac{\beta+n}{\alpha+t} = \frac{p_{n+1}(t)(n+1)}{p_n(t)t} \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N} \text{ και } t>0$$

Πράγματι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $t>0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}(t)(n+1)}{p_n(t)t} &\overset{(5.6)}{=} \frac{\binom{\beta+n}{n+1}(\frac{\alpha}{\alpha+t})^\beta(\frac{t}{t+\alpha})^{n+1}(n+1)}{\binom{\beta+n-1}{n}(\frac{\alpha}{\alpha+t})^\beta(\frac{t}{t+\alpha})t}\\
&= \frac{\frac{(\beta+n)!}{(n+1)!(\beta-1)!}\frac{t}{t+\alpha}(n+1)}{\frac{(\beta+n-1)!}{n!(\beta-1)!}t}\\
&= \frac{(\beta+n)!(n+1)n!}{(n+1)!(\beta+n-1)!(t+\alpha)}\\
&= \frac{(\beta+n)n!}{n!(t+\alpha)}
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\beta+n}{t+\alpha}.$$

Έπομενως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t > 0$ ίσχυει

$$p_{n+1}(t) = \frac{(\beta+n)t}{(\alpha+t)(n+1)} p_n(t). \tag{5.8}$$

Αφού σύμφωνα με την (5.6) ισχύει $p_0(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\beta$ από την (5.8) παίρνουμε έναν απλό αναδρομικό τύπο για την κατανομή της N. Συνήθως η (5.8) γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$p_n(t) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}(t) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$

όπου $a = \frac{t}{\alpha+t}$ και $b = \frac{(\beta-1)t}{\alpha+t}$. Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται υπόθεση του Panjer, που χρησιμοποιείται στη γνωστή αναδρομή του Panjer ([60] (1981)). Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Ενότητα 7.3.

Poisson - γενικευμένη βήτα 5.2.2. Ας εξετάσουμε την κατανομή που παίρνουμε όταν κάνουμε μείξη της Poisson με την γενικευμένη Βήτα κατανομή. Η τ.μ. Θ ακολουθεί τη **γενικευμένη βήτα κατανομή**, αν ισχύει

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(\theta_1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)\theta_1^{\alpha+\beta-1}}, \quad \text{για κάθε } \theta \in (0,\theta_1), \text{ όπου } \alpha,\beta > 0. \tag{5.10}$$

Στην περίπτωση που ισχύει $\theta_1 = 1$ η κατανομή της Θ ονομάζεται βήτα κατανομή.

Έτσι η σ.π. της N υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
p_n \quad &:= \quad p_n(1) = \int_0^{\theta_1} \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta} f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \quad \int_0^{\theta_1} \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta} \frac{\theta^{\alpha-1}(\theta_1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)\theta_1^{\alpha+\beta-1}} d\theta \\
&= \quad \frac{\theta_1^{n-1}}{B(\alpha,\beta)n!} \int_0^{\theta_1} \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^n \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{\alpha-1} \left(1-\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{\beta-1} e^{-\theta} d\theta \\
&\overset{u:=\frac{\theta}{\theta_1}}{=} \quad \frac{\theta_1^n}{B(\alpha,\beta)n!} \int_0^1 u^n (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} e^{-u\theta_1} du \\
&= \quad \frac{\theta_1^n}{B(\alpha,\beta)n!} \int_0^1 u^{n+\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{u^k(-\theta_1)^k}{k!} du \\
&= \quad \frac{\theta_1^n}{B(\alpha,\beta)n!} \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 u^{n+\alpha+k-1}(1-u)^{\beta-1} \frac{(-\theta_1)^k}{k!} du \\
&= \quad \frac{\theta_1^n}{B(\alpha,\beta)n!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta_1)^k}{k!} \int_0^1 u^{n+\alpha+k-1}(1-u)^{\beta-1} du \\
&= \quad \frac{\theta_1^n}{B(\alpha,\beta)n!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta_1)^k}{k!} B(n+\alpha+k,\beta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\theta_1^n}{B(\alpha,\beta)n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+k+\beta)}\\
&= \frac{\theta_1^n\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+k+\beta)}\\
&= \frac{\theta_1^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k)}{\Gamma(n+\alpha+k+\beta)},
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
p_n = \frac{\theta_1^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k)}{\Gamma(n+\alpha+k+\beta)}. \tag{5.11}
$$

Στην ειδική περίπτωση $\alpha = 1$ έχουμε

$$
p_n = \frac{\theta_1^n}{n!}\Gamma(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(n+1+k+\beta)},
$$

δηλαδή τον τύπο που προκύπτει από τον ορισμό που έδωσε ο Willmot για την $f_\Theta(\theta = \frac{\beta(\theta_1-\theta)^{\beta-1}}{\theta^\beta}$ με $\theta \in (0,\theta_1)$. Η κατανομή Poisson-βήτα έχει μελετηθεί από τους Johnson and Kotz ([42], p. 227) και Beall and Rescia ([13]). Μία πιο γενική μείξη βήτα έχει μελετηθεί από τους Willmot and Panjer ([94]). Ωστόσο, η αναδρομική σχέση που λαμβάνεται δεν είναι πολύ βολική για κάποιες ενδιαφέρουσες κατανομές. Η παραπάνω μείξη είναι χρήσιμη στη λήψη αποτελεσμάτων για πιο γενικής σοβαρότητας κατανομές για κάποιες επιλογές του β. Αυτά τα αποτελέσματα είναι αρκετά απλό να εφαρμοστούν για να πάρουμε τύπο υπολογισμού για την κλάση Neyman των κατανομών συχνότητας, και για την μείξη Poisson-ομοιόμορφης ($\beta = 1$ στην 5.11).

Χρησιμοποιώντας την (5.11) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της N δίνεται από τον τύπο

$$
m_N(z) = M[1,\beta+1,\theta_1(z-1)], \text{ για κάθε } z \in [-1,1] \tag{5.12}
$$

όπου $M(\bullet)$ είναι η **συρρέουσα (confluent) υπεργεωμετρική συνάρτηση** (βλ. Johnson and Kotz [42], (1969), p. 8), που ορίζεται ως εξής:

$$
M(a,b,z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!} :=_1 F_1(a,b;z)
$$

όπου $a^{(0)} := 1$ και $a^{(n)} := a(a+1)\dots(a+n-1)$, $a, z \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$.

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
m_N(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q(n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\theta_1^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k)}{\Gamma(n+\alpha+k+\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\alpha=1}{=} && \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\theta_1^n}{n!}\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(n+1+k+\beta)} \\
&= && \Gamma(1+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta_1 z)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(n+1+k+\beta)}\frac{(-\theta_1)^k}{k!} \\
&= && \Gamma(1+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(n+1+k+\beta)}\frac{(-\theta_1)^k(\theta_1 z)^n}{k!n!} \\
&= && \Gamma(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!n!}\frac{(-\theta_1)^k(\theta_1 z)^n}{\Gamma(n+1+k+\beta)} \\
&= && \Gamma(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-\theta_1)^k(\theta_1 z)^n}{\Gamma(n+1+k+\beta)} \\
&\overset{n+k=l}{=} && \Gamma(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}\binom{l}{k}\frac{(-\theta_1)^k(\theta_1 z)^{l-k}}{\Gamma(l+1+\beta)} \\
&= && \Gamma(1+\beta)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(l+1+\beta)}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-\theta_1)^k(\theta_1 z)^{l-k} \\
&= && \Gamma(\beta+1)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{[\theta_1(z-1)]^l}{\Gamma(\beta+l+1)} \\
&= && \Gamma(\beta+1)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{[\theta_1(z-1)]^l}{(\beta+l)(\beta+l-1)\dots(\beta+1)} \\
&= && \sum_{l=0}^{\infty}\frac{[\theta_1(z-1)]^l}{(\beta+1)^{(n)}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1^{(l)}[\theta_1(z-1)]^l}{(\beta+1)^{(l)}l!} \\
&= && M[1,\beta+1,\theta_1(z-1)]
\end{aligned}
$$

όπου η έκτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Fubini για σειρές, αφού μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+1+k)}{\Gamma(l+1+k+\beta)}\frac{|(-\theta_1)^k||\theta_1 z|^l}{k!l!} < \infty \tag{5.13}
$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+1+k)}{\Gamma(l+1+k+\beta)k!l!}|(-\theta_1)^k||\theta_1 z|^l \\
&\overset{|z|\le 1}{\le} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+1+k)}{\Gamma(l+1+k+\beta)k!l!}|\theta_1|^k|\theta_1|^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+1+k)}{\Gamma(l+1+k+\beta)k!l!}\theta_1^{l+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+k)!\theta_1^{l+k}}{l!k!(\beta+l+k)(\beta+l+k-1)\dots(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\theta_1^k\theta_1^l}{k!l!} = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta_1^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\theta_1^l}{l!}
\end{aligned}
$$

$$= \quad \frac{e^{\theta_1}e^{\theta_1}}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{e^{2\theta_1}}{\Gamma(\beta+1)} < \infty$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα $(l+k)! \leq (\beta+1)^{(l+k)}$.

Επομένως αποδείχθηκε ότι ισχύει η ισότητα

$$m_N(z) = M[1, \beta+1, \theta_1(z-1)]. \tag{5.14}$$

Θα δείξουμε ότι

$$M[1, \beta+1, \theta_1(z-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\theta_1(z-1)]^n}{(\beta+1)^{(n)}} \tag{5.15}$$

Πράγματι, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} M[1, \beta+1, \theta_1(z-1)] &= \Gamma(\beta+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\theta_1(z-1)]^n}{\Gamma(\beta+n+1)} \\ &= \Gamma(\beta+1) \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\theta_1(z-1)]^n}{(\beta+n)(\beta+n-1)\ldots(\beta+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\theta_1(z-1)]^n}{(\beta+1)^{(n)}}. \end{aligned}$$

Από την (5.15) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[N] = \theta_1(\beta+1)^{-1} \tag{5.16}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} m'_N(1) &= M'[1, \beta+1, 0] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[\theta_1(z-1)]^{n-1}\theta_1}{(\beta+1)^{(n)}} \Bigg|_{z=1} \\ &= \frac{\theta_1^0 0^0 \theta_1}{(\beta+1)^{(1)}} = \frac{\theta_1}{\beta+1} = \mathbb{E}[N]. \end{aligned}$$

Poisson - Lognormal 5.2.3. Μια ακόμη σημαντική μίξη είναι να επιλέξουμε την παράμετρο Θ να ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, δηλ. $P_{ln\Theta} = \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ ή $P_\Theta = \mathbf{LN}(\mu, \sigma^2)$ και σ.π.π. Η μίξη της Poisson με την lognormal προτάθηκε ως το κατάλληλο μοντέλο περιγραφής των ασφαλιστικών εισφορών. Αν με $N(\omega)$ συμβολιστεί το πλήθος των διαφορετικών ασφαλιστικών εισφορών και με Z το ύψος μιας ασφαλιστικής εισφοράς (ανεξάρτητη της τυχαίας μεταβλητής N) ,τότε οι συνολικές ασφαλιστικές εισφορές περιγράφονται από το άθροισμα:

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \chi_{\{N>0\}^{(\omega)}}.$$

Μια εύλογη επιλογή είναι να επιλέξουμε τις Z_i ανεξάρτητες και ισόνομες από την λογαριθμοκανονική κανατομή με άγνωστες παραμέτρους μ,σ^2, ενώ η τυχαία μεταβλητή είναι μια Poisson με παράμετρο λ. Τότε η κατανομή της S είναι μια σύνθετη κατανομή Poisson η οποία είναι μίξη Poisson με λογαριθμοκανονική.

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\theta} e^{-\frac{(\ln\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{για κάθε } \theta > 0 \tag{5.17}$$

Τα γινόμενα και τα πηλίκα τυχαίων μεταβλητών, που ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή, ακολουθούν πάλι την λογαριθμοκανονική κατανομή. Επίσης και οι Θ^b και $b\Theta$, για $b \neq 0$ ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή, αν η Θ ακολουθεί τη $\mathbf{LN}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$. Ωστόσο, η κατανομή του αθροίσματος ανεξάρτητων λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, η οποία εμφανίζεται σε πολλά πρακτικά προβλήματα και περιγράφει την κατανομή της $S|N$, δεν ακολουθεί την λογαριθμοκανονική και δεν εμφανίζεται σαν κάποια γνωστή κατανομή (Slimanc [77]).

Προσεγγίσεις για την κατανομή του αθροίσματος τ.μ. με την λογαριθμοκανονική κατανομή μελετούνται από τους Levy [52] (1992) και Milevsky and Posner [58].

Για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Ν ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\theta} e^{-\frac{(\ln\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{t^k\theta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-t\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}[e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}}] \end{aligned}$$

όπου η X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{Ga}(t,k)$. Εάν αναπτύξουμε σε σειρά Taylor την συνάρτηση $e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ γύρω από το $x_0 = \mathbb{E}[X] = \frac{k}{t}$, και αγνοήσουμε τις δυνάμεις που είναι μεγαλύτερες του 2, τότε λαμβάνουμε τη σχέση

$$f(x) = f(x_0)[1 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2], \text{ όπου}$$

$f(x) := e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x_0 := \frac{k}{t}$, $C_1 := e^{-\frac{lnx_0-\mu}{x_0\sigma^2}}$ και $C_2 := \frac{1}{2\sigma^2 x_0^2}[\frac{(lnx_0-\mu)^2}{\sigma^2} - 1 + lnx_0 - \mu]$.

Πράγματι,

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \tag{5.18}$$

$$f'(x_0) = f(x_0)(-\frac{lnx_0-\mu}{x_0\sigma^2}) \tag{5.19}$$

$$f''(x_0) \quad = \quad [f(x)(-\frac{lnx-\mu}{x\sigma^2})]'\Big|_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= f'(x_0)(-\frac{ln_{x_0}-\mu}{x_0\sigma^2}) - \frac{1}{\sigma^2}f(x_0)(\frac{lnx-\mu}{x})'\Big|_{x=x_0} \\
&= -f'(x_0)\frac{ln_{x_0}-\mu}{x_0\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}f(x_0)\frac{\frac{1}{x}x-(lnx-\mu)1}{x^2}\Big|_{x=x_0} \\
&\overset{(5.19)}{=} f(x_0)\frac{(ln_{x_0}-\mu)^2}{x_0^2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}f(x_0)\frac{1-(lnx_0+\mu)1}{x^2}
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)[1-\frac{lnx_0-\mu}{x_0\sigma^2}(x-x_0)+\frac{1}{2}(\frac{(lnx_0-\mu)^2}{x_0^2\sigma^4}-\frac{1-lnx_0+\mu}{x_0^2\sigma^2})](x-x_0)^2 \\
&= f(x_0)[1+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2],
\end{aligned}$$

όπου $C_1 := -\frac{lnx_0-\mu}{x_0\sigma^2}$ και $C_2 := \frac{1}{2x_0^2\sigma^2}[\frac{(lnx_0-\mu)^2}{\sigma^2}-1+lnx_0-\mu]$

Επομένως για $x_0 = \frac{k}{t}$ έχουμε

$$f(x) = -\frac{(ln\frac{k}{t}-\mu)^2}{2\sigma^2}[1+C_1(x-\frac{k}{t})+C_2(x-\frac{k}{t})^2]$$

όπου $C_1 := -\frac{ln\frac{k}{t}-\mu}{\frac{k}{t}\sigma^2}$ και $C_2 := \frac{t^2}{2k^2\sigma^2}[\frac{(ln\frac{k}{t}-\mu)^2}{\sigma^2}-1+ln\frac{k}{t}-\mu]$.

$$e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cong e^{-\frac{(\ln x_0-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{d}{dx}e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx^2}e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}}(x_0)(x-x_0)^2$$

Συνεπώς αν πάρουμε μέσες τιμές στη σχέση αυτή θα έχουμε:

$$\mathbb{E}(e^{-\frac{(\log X-\mu)^2}{2\sigma^2}}) \cong e^{-\frac{(\log\frac{k}{t}-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\frac{d}{dx^2}e^{-\frac{(\log X-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\frac{k}{t})\right\}\mathbb{V}ar(X)$$

Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για μεγάλες τιμές του φυσικού αριθμού κ, προσεγγιστικά θα ισχύει ότι:

$$p_k(t) \cong \frac{1}{t}f_\Theta(\theta)(\frac{k}{t}) \quad \text{και} \quad P(\{N>n\}) = \int_0^\infty P(\{N>n\}|\theta)P_\Theta(d\theta) \approx 1-P_\Theta(\frac{n}{t}).$$

Poisson - μετασχηματισμένη εκθετική (Transmuted exponential) 5.2.4. Στα ασφαλιστικά συμβόλαια (εξαιρούνται τα ασφαλιστικά ζωής), η συνολική απώλεια S (από την μεριά της ασφαλιστικής) ορίζεται ως το άθροισμα των υφιστάμενων απωλειών για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, με τύπο

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N,$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N εκφράζει το πλήθος των υφιστάμεων απωλειών και X_i είναι η $i-$οστή υφιστάμενη απώλεια. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες - ισόνομες και ανεξάρτητες από την τ.μ. N.

Σε αυτή την μίξη θεωρούμε μια θετική τυχαία μεταβλητή Θ η οποία ακολουθεί την μετασχηματισμένη εκθετική κατανομή, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_\Theta(\theta) = \left[(1-a)\eta e^{-\eta\theta} + 2a\eta e^{-2\eta\theta}\right]\chi_{[0,+\infty)}(\theta)$$

Τότε η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N μπορεί να υπολογιστούν αρκετά απλά, χρησιμοποιώντας τους τύπους $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ και $\Gamma(n+1) = n!$. Πράγματι παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
p_n(t) &= P(\{N=n\}) = \int\limits_0^\infty P(\{N=n|\theta\})f_\Theta(\theta)d\theta \\
&= \frac{\eta(1-a)}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(t+\eta)\theta}t^n\theta^n d\theta + \frac{2a\eta}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(t+2\eta)\theta}t^n\theta^n d\theta \\
&= \frac{\eta(1-a)t^n}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(t+\eta)\theta}\theta^n d\theta + \frac{2a\eta t^n}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(t+2\eta)\theta}\theta^n d\theta \\
&= \frac{\eta(1-a)t^n}{n!(t+\eta)^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-(t+\eta)\theta}(t+\eta)^n\theta^n d(t+\eta)\theta \\
&\quad + \frac{2a\eta t^n}{n!(t+2\eta)^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-(t+2\eta)\theta}(t+2\eta)^n\theta^n d\theta(t+2\eta) \\
&= \frac{\eta(1-a)t^n}{n!(t+\eta)^{n+1}}\Gamma(n+1) + \frac{2a\eta t^n}{n!(t+2\eta)^{n+1}}\Gamma(n+1) \\
&= \frac{\eta(1-a)t^n}{n!(t+\eta)^{n+1}}n! + \frac{2a\eta t^n}{n!(t+2\eta)^{n+1}}n! \\
&= \frac{\eta(1-a)t^n}{(t+n)^{n+1}} + \frac{2a\eta t^n}{(t+2n)^{n+1}} \\
&= \eta\bigg(\frac{(1-a)t^n}{(t+n)^{n+1}} + \frac{2at^n}{(t+2n)^{n+1}}\bigg).
\end{aligned}$$

Η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής N είναι άμεσα υπολογίσιμη καθώς για κάθε $z \in [-1,1]$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
m_N(z) &= \mathbb{E}[z^N] = \sum_{n=0}^\infty z^n p_n = \sum_{n=0}^\infty z^n\eta\bigg(\frac{(1-a)t^n}{(t+\eta)^{n+1}} + \frac{2at^n}{(t+2\eta)^{n+1}}\bigg) \\
&= \eta\bigg[\frac{(1-a)}{t+n}\sum_{n=0}^\infty\frac{(zt)^n}{(t+\eta)^n} + \frac{2a}{t+2\eta}\sum_{n=0}^\infty\big(\frac{zt}{t+2\eta}\big)^n\bigg] \\
&= \eta\bigg[\frac{1-a}{t+\eta}\frac{1}{1-\frac{zt}{t+\eta}} + \frac{2a}{t+2\eta}\frac{1}{1-\frac{zt}{t+2\eta}}\bigg] \\
&= \eta\bigg[\frac{(1-a)(t+\eta)}{(t+\eta)(t+\eta-zt))} + \frac{2a(t+2\eta)}{(t+2\eta)(t+2\eta-zt)}\bigg]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \eta\left[\frac{1-a}{t+\eta-zt}+\frac{2a}{t+2\eta-zt}\right]\\
&= \eta\left(\frac{1-a}{t(1-z)+\eta}+\frac{2a}{t(1-z)+2\eta}\right),
\end{aligned}
$$

για κάθε $z \in (-1-\frac{\eta}{t}, 1+\frac{\eta}{t})$.

Επομένως παραγωγίζοντας την m_N λαμβάνουμε ότι $\mathbb{E}[N] = \frac{t(2-a)}{2\eta}$.

Πράγματι,

$$
m_N'(z) = n\left(\frac{(1-\alpha)t}{(t(1-z)+\eta)^2}+\frac{2\alpha t}{(t(1-z)+2\eta)^2}\right).
$$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
m_N'(1^-) &= n\left(\frac{(1-\alpha)t}{\eta^2}+\frac{2\alpha t}{(2\eta)^2}\right)\\
&= \frac{(1-\alpha)t}{\eta}+\frac{2\alpha t}{4\eta} = \frac{(1-\alpha)t}{\eta}+\frac{\alpha t}{2\eta}\\
&= \frac{(2-2\alpha+\alpha)t}{2\eta} = \frac{(2-\alpha)t}{2\eta}.
\end{aligned}
$$

Poisson - Poisson 5.2.5. Εξίσου μεγάλο ενδιαφέρον προξενεί η μίξη της τυχαίας μεταβλητής Θ με την N με $P_{N|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta)$ θεωρώντας ότι $P_\Theta = \mathbf{P}(\mathbf{a})$ με $a > 0$.

Η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής N μπορεί να υπολογιστεί αρκετά απλά. Πράγματι, για κάθε $z \in [-1, 1]$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
m_N(z) &= \mathbb{E}[z^N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[z^N|\Theta]]\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}[z^N|\Theta=j)P(\Theta=j]\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z^n e^{-tj}\frac{(tj)^k}{k!}e^{-a}\frac{a^j}{j!}\\
&= e^{-a}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-tj}\frac{t^k j^k}{k!}\frac{a^j}{j!}\\
&= e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^k a^j e^{-tj}}{j!}\right]z^k
\end{aligned}
$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας της N αποδεικνύουμε αρχικά ότι για κάθε $n \in N_0$ ισχύει

$$
\frac{d^n m_N(z)}{dz} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^k a^j e^{-tj}}{j!}\right]k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)z^{k-n}. \tag{5.20}
$$

Πράγματι, η σχέση (5.20) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή στο $n \in N_0$.

- $n = 0$ Έχουμε

$$\frac{d^0 m_N(z)}{dz^0} = m_N(z) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k a^j e^{-tj}}{j!} \Bigg] z^k,$$

δηλ. ισχύει η (5.20) για $n = 0$.

- $n \longrightarrow n+1$

Έστω ότι ισχύει η (5.20) για κάποιο $n \in N_0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1} m_N(z)}{dz^{n+1}} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{d^n m_N(z)}{dz^n}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\left(e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k a^j e^{-tj}}{j!} \Bigg] k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) z^{k-n}\right) \\
&= e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k a^j e^{-tj}}{j!} \Bigg] k(k-1)(k-2)\dots(k-n) z^{k-n-1}.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η (5.20) για κάθε $n \in N_0$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in N_0$ ισχλυει

$$p_n = e^{-a} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n a^j e^{-tj}}{j!} \tag{5.21}$$

Πράγματι, για κάθε $n \in N_0$ χρησιμοποιώντας τη σχέση Γ΄.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n m_N(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} \\
&\overset{(5.20)}{=} \frac{1}{n!} e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k a^j e^{-tj}}{j!} \Bigg] k(k-1)\dots(k-n+1) z^{k-n} 0^{k-n} \\
&= \frac{1}{n!} e^{-a} \frac{t^n}{n!} \Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n a^j e^{-tj}}{j!} \Bigg] n! \\
&= e^{-a} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n a^j e^{-tj}}{j!}.
\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\mathbb{V}ar(N) = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(N|\Theta)] + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}[N|\Theta)] = \mathbb{E}[t\Theta] + \mathbb{V}ar(t\Theta) = (1+t)t\alpha.$$

Poisson - γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (GIGD) 5.2.6. Έστω ότι η Θ ακολουθεί την γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (GIGD) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(\psi/\chi)^{\gamma/2}}{2K_\gamma(\sqrt{\chi\psi})} \theta^{\gamma-1} e^{-(\chi\theta^{-1}+\psi\theta)/2} \quad \text{για κάθε } \theta > 0 \tag{5.22}$$

όπου K_γ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τρίτου είδους. Η κατανομή GIGD εισήχθη πρώτη φορά από τον Good [31] το 1953. Το πεδίο ορισμού των παραμέτρων έχει ως εξής:

$$\gamma \in \mathbb{R}, (\chi, \psi) \in \Theta_\gamma$$

όπου

$$\Theta_\gamma = \begin{cases} \{(\chi,\psi) : \chi \geq 0, \psi > 0,\}, & \text{αν } \gamma > 0 \\ \{(\chi,\psi) : \chi > 0, \psi > 0,\}, & \text{αν } \gamma = 0 \\ \{(\chi,\psi) : \chi > 0, \psi \geq 0,\}, & \text{αν } \gamma < 0 \end{cases}$$

Η αντίστοιχη σύνθετη κατανομή Poisson ονομάζεται **κατανομή Sichel**. Πριν συζητήσουμε αυτήν την κατανομή, θα δώσουμε ορισμένα βασικά στοιχεία για την GIGD. Η κλάση των GIGD είναι ευρεία και περιλαμβάνει πολλές σημαντικές ειδικές περιπτώσεις. Συχνά είναι χρήσιμο να εισάγουμε τις παραμέτρους $\omega := \sqrt{\chi\psi}, \eta := \sqrt{\frac{\chi}{\psi}}$. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Θ γράφεται στη μορφή

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\eta^{-\gamma}}{2K_\gamma(\omega)}\theta^{\gamma-1}e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\eta^{-1}\theta)/2} \quad \text{για κάθε } \theta > 0 \tag{5.23}$$

όπου η παράμετρος ω (για σταθερό γ) είναι μία παράμετρος συγκέντρωσης (concentration) και η παράμετρος η είναι παράμετρος κλίμακας. Για να γίνει πιο κατανοητή η κατανομή GIGD, ας δούμε ορισμένες ιδιότητες της συνάρτησης Bessel τρίτου είδους, τις οποίες μελέτησε ο Jørgensen [43] (1982). Η συνάρτηση K_γ ορίζεται μέσω του τύπου

$$K_\gamma(\omega) := \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-\omega(x^{-1}+x)/2}dx \quad \text{για κάθε } \omega > 0.$$

ο οποίος είναι μια από τις πολλές ολοκληρωτικές παραστάσεις αυτής της συνάρτησης. Είναι άμεσο ότι

$$K_\gamma(\omega) = K_{-\gamma}(\omega) \tag{5.24}$$

και

$$K_{\gamma+1}(\omega) = \frac{2\gamma}{\omega}K_\gamma(\omega) + K_{\gamma-1}(\omega) \tag{5.25}$$

Πράγματι, θέτοντας $u = x^{-1}$, τότε $du = -x^{-2}dx = -u^2dx$. Επομένως

$$\begin{aligned} K_{-\gamma}(\omega) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (u^{-1})^{-\gamma-1}e^{-\omega(u+u^{-1})}/2\frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\gamma+1-2}e^{-\omega(u+u^{-1})}/2\frac{du}{=}K_\gamma(\omega). \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της (5.25) έχουμε

$$K_\gamma(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-\omega(x^{-1}+x)/2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\frac{x^\gamma}{\gamma})'e^{-\omega(x^{-1}+x)/2}dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^\gamma}{2\gamma} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} - \lim_{x\to 0} \frac{x^\gamma}{2\gamma} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} + \frac{\omega}{2\gamma} \int_0^\infty x^\gamma e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} dx$$

$$-\frac{\omega}{2\gamma} \int_0^\infty x^{\gamma-2} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} dx$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τους κανόνες L.H. βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\gamma}{2\gamma} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\gamma}{2\gamma} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} = 0$$

και καταλήγουμε στη σχέση:

$$K_\gamma(\omega) = \frac{\omega}{2\gamma} K_{\gamma+1}(\omega) - \frac{\omega}{2\gamma} K_{\gamma-1}(\omega), \tag{5.26}$$

όπου λύνοντας ως προς το $K_{\gamma+1}$ προκύπτει το ζητούμενο. Στην ειδική περίπτωση όπου το γ είναι της μορφής $n + \frac{1}{2}$ έχουμε

$$K_{n+1/2}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} e^{-\omega} \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+i)!}{(n-i)!i!} (2\omega)^{-i} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.27}$$

Αυτή η σχέση απλοποιεί αρκετά τη συνάρτηση K_γ Από το Θ_γ είναι εφικτή η περίπτωση $\gamma, \chi > 0$. Τότε η K_γ είναι στενά συνδεδεμένη με την κατανομή Γάμμα, καθώς:

$$\lim_{\omega\to 0} \omega^\gamma K_\gamma(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} dx = \Gamma(\gamma) 2^{\gamma-1}, \gamma > 0$$

Πράγματι είναι:

$$\omega^\gamma K_\gamma(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{(x\omega)^\gamma}{x} e^{-\omega(x^{-1}+x)/2} dx$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x\omega = y$ οδηγούμαστε στο ολοκλήρωμα:

$$\omega^\gamma K_\gamma(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\gamma-1} e^{-\psi/2} e^{-\omega^2} 2y dy$$

Τέλος θέτοντας $u = \frac{y}{2}$ λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\omega^\gamma K_\gamma(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty 2^{\gamma-1} \int_0^\infty u^{\gamma-1} e^{-u} e^{-\omega^2} 4u du$$

Το αποτέλεσμα τώρα είναι άμεσο από το Θεωρήμα της Κυριαρχημένης σύγκλισης και το γεγονός ότι $\lim_{\omega\to 0} e^{-\omega^2} 4u = 1$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα συνδυασμό με την συνάρτηση πυκνότητας της Θ, βλέπουμε ότι για μικρό ω, η Θ ακολουθεί σχεδόν μια $\mathbf{Ga}(\gamma, \chi/2)$. Στο υπόλοιπο παράδειγμα θα υποτεθεί ότι $\chi > 0$. Στην περίπτωση όπου $\psi = 0$ λόγω του χώρου

Θ_γ συνάγουμε ότι $\gamma < 0, \chi > 0$. Χρησιμοποιώντας ξανά ότι $\lim_{\omega\to 0}\omega^\gamma K_\gamma(\omega) = \Gamma(\gamma)2^{\gamma-1}$ καταλήγουμε στην συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(\chi/2)^{-\gamma}}{\mathbf{Ga}(-\gamma)}\theta^{\gamma-1}e^{-x/(2l)}, \theta > 0$$

γνωστή ως reciprocal Γάμμα κατανομή. Οι ροπές της τ.μ. Θ δίνονται από τον τύπο:

$$\mathbb{E}(\Theta^k) = \left\{\frac{\Gamma(-\gamma+k)}{\Gamma(-\gamma)}(\chi/2), k < -\gamma//\infty, k \geq -\gamma\right.$$

και ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$L_\Theta(v) = \frac{2K_\gamma(\sqrt{2\chi v})}{\Gamma(-\gamma)(\chi v/2)^{\gamma/2}}$$

Αν $\psi > 0$ τότε όλες οι ροπές υπάρχουν (Jørgensen) με:

$$\mathbb{E}(\Theta^k) = \frac{K_{\gamma+k}(\omega)}{K_\gamma(\omega)}\eta^k$$

και μετασχηματισμό Laplace:

$$L_\Theta(v) = \frac{K_\gamma(\omega\sqrt{1+2v\psi})}{K_\gamma(\omega)(1+2v\psi)^{\gamma/2}}.$$

5.3 Χαρακτηρισμοί των μεικτών κατανομών Poisson

Ορισμός 5.3.1. Μία συνάρτηση $h(s)$ της οποίας όλες οι n-οστές παράγωγοι $h^{(n)}(s)$ υπάρχουν για κάθε $s \in (a,b)$ είναι **απόλυτα μονότονη** στο (a,b) αν

$$h^{(n)}(s) \geq 0, \text{για κάθε } n = 0, 1, \ldots \quad \text{και για κάθε } s \in (a,b)$$

και είναι **πλήρως μονότονη** στο (a,b) αν

$$(-1)^n h^{(n)}(s) \geq 0, n = 0, 1, \ldots \text{και } s \in (a,b).$$

Είναι γνωστό, βλέπε για παράδειγμα Feller [28], pp.223, 439, ότι μία συνάρτηση $h(s)$ είναι μία πιθανογεννήτρια συνάρτηση αν και μόνο αν είναι απόλυτα μονότονη στο (0,1) και $h(1) = 1$, και ότι μία συνάρτηση $h(s)$ είναι ένας μετασχηματισμός Laplace αν και μόνο αν η $m_{h(s)}$ είναι πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$ και $h(0) = 1$.

Η επόμενη πρόταση, που αποδείχθηκε από τους Puri and Goidie [68], pp.140-141, δίνει έναν αναλυτικό ορισμό των μεικτών κατανομών Poisson, ο οποίος μπορεί αρχικα να φαίνεται κάπως τεχνητός. Θα φανεί, όμως, στη συνέχεια να έχει μία φυσική πιθανοθεωρητική ερμηνεία.

Πρόταση 5.3.2. *Μία διακριτή τ.μ. N με πιθανογεννήτρια συνάρτηση m_N έχει μεικτή κατανομή Poisson αν και μόνο αν η m_N είναι απόλυτα μονότονη στο $(-\infty, 1)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η N είναι η $MP(U)$ για κάποια κατανομή U. Από την Πρόταση 5.1.2 (vi) έπεται ότι $m_N(s) = L_\Theta(1-s)$. Έτσι έχουμε

$$m^{(n)}(s) = (-1)^n L_\Theta^{(n)}(1-s) \geq 0$$

για $0 < 1-s < \infty$ ή για $s \in (-\infty, 1)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $m_N(s)$ είναι απόλυτα μονότονη στο $(-\infty, 1)$. Τότε συνεπάγεται ότι η $m_N(s+1)$ είναι απόλυτα μονότονη στο $(-\infty, 0)$ και ότι $m_N(-s+1)$ είναι απόλυτα μονότονη στο $(0, \infty)$. Αφού $m_N(-0+1) = 1$ έχουμε

$$m_N(-s+1) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\theta s} U(d\theta) = L_\theta(s)$$

για κάποια κατανομή U. Έτσι $m_N(s) = L_\theta(1-s)$ που συνεπάγεται ότι η N είναι η $MP(U)$, αφού η πιθανογεννήτρια συνάρτηση καθορίζει την κατανομή. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μία τ.μ. N χρησιμοποιείται ως ένα μοντέλο αριθμού αφίξεων, ας πούμε, σε διάστημα $(0, t]$.

Ορισμός 5.3.3. Έστω N μία διακριτή τ.μ., έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli, δηλ.

$$P(\{X_n = 0\}) = 1 - p \text{ και } P\{X_n = 1\} = p$$

για κάποια $p \in (0, 1]$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και έστω ότι η N είναι ανεξάρτητη από τη $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Η διακριτή τ.μ.

$$S := N_p = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, (S_0 = 0 \text{ αν } N = 0)$$

ονομάζεται μία **ανεξάρτητη p-αραίωση (thinning)** της N.

Από τον Ορισμό 5.3.3 συνεπάγεται ότι η S δοσμένης της N, κατανέμεται διωνυμικά, $\mathbf{B}(N, p)$, δηλ.

$$P(\{N_p = k)|\{(N = n\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

για $n \in \mathbb{N}_0$ και $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Η έννοια της p-αραίωσης είναι πιο φυσική στα πλαίσια *σ.δ.* . Η επίπτωση της στην μοντελοποίηση του κινδύνου μελετήθηκε από τον Grandell [33], pp.45-55. Εδώ θα δώσουμε μόνο ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει ο αριθμός των απαιτήσεων N_p στο $(0, t]$, που θα κοστίσει στην εταιρεία περισσότερα από ένα ορισμένο ποσό. Αν τα κόστη των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητα και αν η πιθανότητα ενός κόστους απαίτησης που υπερβαίνει το ποσό αυτό είναι p, τότε η N_p είναι μία p-αραίωση.

Ας θεωρήσουμε τώρα τα N και N_p όπως παραπάνω. Τότε

$$m_{N_p}(s) \;=\; \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[s^{N_p}|N]\big]$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}s^k p^k(1-p)^{N-k}\Big] \\ &= \mathbb{E}\big[(1-p+ps)^N\big] \\ &= m_N(1-p(1-s)). \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, λέμε ότι η N_p λαμβάνεται από μία p-αραίωση, και έχουμε

$$m_N(s) = m_{N_p}(1 - \frac{1-s}{p}). \tag{5.28}$$

Αν η N είναι η $MP(t,U)$ έχουμε

$$m_{N_p}(s) = L_\Theta(t(p((1-s))) = L_\Theta(pt(1-s)),$$

δηλ. η N_p είναι η $MP(pt,U)$, και η N μπορεί να ληφθεί από μία p-αραίωση από την $N_{1/p}$, η οποία είναι η $MP(t/p,U)$. Σε γενικές γραμμές μία τ.μ. N δεν μπορεί κατ΄ ανάγκη να ληφθεί από την p-αραίωση.

Πρόταση 5.3.4. *Μία διακριτή τ.μ. N με πιθανογεννήτρια συνάρτηση m_N μπορεί να προκύψει από μία ανεξάρτητη p-αραίωση για κάθε $p \in (0,1)$ αν και μόνο αν η m_N είναι απόλυτα μονότονη στο $(-\infty,1)$.*

Απόδειξη. Έστω N μία τ.μ. με πιθανογεννήτρια συνάρτηση m_N, και έστω p σταθερό. Θεωρούμε την συνάρτηση m, η οποία ορίζεται από τη σχέση $m(s) = m_N(1-\frac{1-s}{p})$. Με απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$m^{(n)}(s) = p^{-n} m_N^{(n)}(1 - \frac{1-s}{p}).$$

Αφού η m είναι μία πιθανογεννήτρια συνάρτηση αν και μόνο αν είναι απόλυτα μονότονη στο διάστημα $(0,1)$ συνεπάγεται ότι η m είναι μία πιθανογεννήτρια συνάρτηση αν και μόνο αν είναι απόλυτα μονότονη στο διάστημα $(1-\frac{1}{p},1) = (-\frac{1-p}{p},1)$. Έτσι, προκύπτει το συμπέρασμα της πρότασης. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 5.3.2 και 5.3.4, παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο είναι μια πολύ ειδική περίπτωση ενός χαρακτηρισμού των διαδικασιών Cox σύμφωνα με τον Mecke [57].

Θεώρημα 5.3.5. *Μία διακριτή τ.μ. N ακολουθεί τη μεικτή Poisson αν και μόνο αν μπορεί να προκύψει από μία ανεξάρτητη p-αραίωση για κάθε $p \in (0,1)$.*

Θα εξετάσουμε τώρα την έννοια της άπειρης διαιρετότητας.

Ορισμός 5.3.6. Μία διακριτή τ.μ. N ονομάζεται **διακριτά άπειρα διαιρετή (discretely infinitely divisible), DID** για συντομία, εάν για κάθε n υπάρχουν n ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. $N_{n1}, \ldots, N_{nn}$ ώστε η N να έχει την ίδια κατανομή με το άθροισμα των n ανεξάρτητων τ.μ. $N_{n1}, \ldots, N_{nn}$.

Μία τ.μ. Θ ονομάζεται **άπειρα διαιρετή(infinitely divisible), ID** για συντομία, εάν για κάθε n υπάρχουν n ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. Θ_n, τέτοια ώστε η Θ να έχει την ίδια κατανομή με το άθροισμα των $\Theta_{n1}, \ldots, \Theta_{nn}$.

Ένας ισοδύναμος αναλυτικός ορισμός είναι ότι η N είναι DID εάν για κάθε n υπάρχει μία πιθανογεννήτρια συνάρτηση m_n τέτοια ώστε $m_N(s) = m_n^n(s)$. Κατά τον ίδιο τρόπο η Θ, με μετασχηματισμό Laplace $L_\Theta(s)$, είναι ID εάν για κάθε n υπάρχει ένας μετασχηματισμός Laplace $L_{\theta,n}(s)$ τέτοιος ώστε $L_\Theta(s) = L^n_{\Theta_{nn}}(s)$.

Παρατήρηση 5.3.7. Γενικά μία διακριτή τ.μ. ονομάζεται ID όταν είναι, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3.6, DID. Η τετριμμένη μεταβλητή $N = 1$ είναι ID αλλά όχι DID. Από την άλλη μεριά, μία ID διακριτή μεταβλητή N είναι DID αν και μόνο αν $P\{N = 0\} > 0$, βλέπε Kallenberg ([44], p.55). Θα δώσουμε μερικά πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα.

Εάν η N είναι DID είναι σαφώς και ID, και $P\{N = 0\} > 0$ συνεπάγεται από την παράσταση που θα δοθεί. Ας υποθέσουμε ότι η N είναι ID και ότι $P\{N = 0\} > 0$. Για κάθε n υπάρχουν ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $\Theta_{n,1}, \ldots, \Theta_{n,n}$ τέτοιες ώστε

$$N \overset{d}{=} \Theta_{n,1}, \Theta_{n,2} \ldots, \Theta_{n,n}.$$

Αφού, όπως εύκολα αποδεικνύεται, $\Theta_{n,1}, \ldots, \Theta_{n,n}$ είναι μη-αρνητικές, προκύπτει ότι η $P\{N = 0\} > 0$ συνεπάγεται την $P\{\Theta_{n,k} = 0\} > 0$. Αν $\Theta_{n,1}, \ldots, \Theta_{n,n-1} = 0$, που ισχύει με θετική πιθανότητα, έχουμε ότι $N = \Theta_{n,n}$. Έτσι $\Theta_{n,n}$ είναι διακριτή, δηλ. N είναι DID.

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή (βλ. π.χ. Feller [27] σελ. 290)

Πρόταση 5.3.8. *Μία διακριτή τ.μ. N είναι DID αν και μόνο αν είναι σύνθετη Poisson.*

Πρόταση 5.3.9. (Maceda [54] (1948)) *Έστω μια τ.μ. N η οποία είναι MP(U), όπου U είναι η κατανομή μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής Θ. Τότε η N είναι DID αν η Θ είναι ID.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η Θ είναι ID και L_Θ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της. Σταθεροποιούμε ένα φυσικό αριθμό n. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός Laplace L_{Θ_n} έτσι ώστε να ισχύει $L_\Theta(v) = L^n_{\Theta_n}(v)$. Τότε $G_n(s) := L_{\Theta_n}(1 - s)$ σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.2, (vi) θα έχουμε

$$m_N(s) = L_\Theta(1 - s) = L^n_{\Theta_n}(1 - s) = m^n_N(s).$$

Επομένως ισχύει το συμπέρασμα. □

Η πρόταση αυτή φαίνεται φυσιολογική στην κατασκευή σύνθετων κατανομών Poisson. Η συγκεκριμένη πρόταση ωστόσο δεν ισχύει ως ισοδυναμία. Ο Kallenberg [44] δίνει ένα εκτενές χαρακτηριστικό αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα 5.3.10. Εάν η τυχαία μεταβλητή Θ ακολουθεί την κατανομή **Ga**(β,γ) τότε έχει μετασχηματισμό Laplace

$$L_\Theta(v) = (1 + \frac{v}{\beta})^{-\gamma}$$

οπότε η Θ είναι ID και η Θ_n ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{Ga}(\beta, \frac{\gamma}{n})$. Τότε η τυχαία μεταβλητή N με κατανομή $MP(t,U)$ από την προηγούμενη πρόταση είναι DID οπότε ακολουθεί μια σύνθετη κατανομή Poisson. (βλ. Πρόταση 5.3.8) Έχουμε (βλ. Bühlmann [15] 1970)

$$\begin{aligned} m_N(s) &= L_\Theta(t(1-s)) = (1 + \frac{t(1-s)}{\beta})^{-\gamma} = e^{-\gamma[\ln(\frac{\beta+t}{\beta}) + \ln(1 - \frac{ts}{\beta+t})]} \\ &= e^{\gamma \ln(\frac{\beta+t}{\beta})(\frac{\ln(1-\frac{ts}{\beta+t})}{\ln(\frac{\beta+t}{\beta})} - 1)}. \end{aligned}$$

Οπότε η N είναι μια σύνθετη κατανομή Poisson με

$$\widetilde{\alpha} = \gamma \ln(\frac{\beta+t}{\beta}) \quad \text{και} \quad \widetilde{m}_\xi(s) = -\frac{\ln(1 - \frac{ts}{\beta+t})}{\ln(\frac{\beta+t}{\beta})}.$$

Άρα

$$m_N(s) = e^{\widetilde{\alpha}(\widetilde{m}_\xi(s) - 1)}. \tag{5.29}$$

Όμως, αφού η N είναι σύνθετη Poisson, θα ισχύει

$$m_N(s) = e^{\widetilde{\alpha}(m_\xi(s) - 1)}. \tag{5.30}$$

Από τις (5.29) και (5.30) προκύπτει ότι $\widetilde{m}_\xi(s) = m_\xi(s)$, όπου $m_\xi(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της λογαριθμικής κατανομής με παράμετρο $\frac{t}{\beta+t}$. Άρα έχουμε $P_N = \mathbf{C}\big(\mathbf{P}(\widetilde{\alpha}), \mathbf{Log}(\frac{t}{\beta+t})\big) = \mathbf{NB}\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{\left|ln\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)\right|}, \frac{\beta}{\beta+t}\right)$.

Επιλέγοντας λοιπόν αυτή την κατανομή για την τ.μ. ξ αναγκαστικά η m_ξ είναι πιθανογεννήτρια συνάρτηση. Η κατανομή της ξ ονομάζεται **λογαριθμική κατανομή**. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το $\widetilde{\alpha}$ δεν είναι ανάλογο του t ωστόσο η κατανομή του ξ εξαρτάται από το t.

Παράδειγμα 5.3.11. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η Θ είναι μια μετατοπισμένη κατανομή γάμμα, με συνάρτηση πυκνότητας, δηλ. $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$ ή

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta (\theta-\gamma)^{\beta-1} e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)}, & \text{αν } \theta > \gamma \\ 0, & \text{αν } \theta \le \gamma \end{cases}$$

Η παράμετρος α μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας "βασικός κίνδυνος ". Έστω ότι η τ.μ. N μια $MP(t,U)$. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τον Delaporte [22] (1960). Ο Ruohonen [71]

(1988) το προσάρμοσε σε διάφορα είδη δεδομένων, ενώ οι Willmot and Sundt [95] (1989), Schröter [74] (1990) μελέτησαν το μοντέλο από θεωρητική σκοπιά. Η παραπάνω κατανομή της τ.μ. N είναι γνωστή ως **κατανομή Delaporte**. Επειδή η Θ είναι ID από την Πρόταση 5.3.9, η N θα είναι DID. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τ.μ. N μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας τ.μ. Poisson και μιας αρνητικής διωνυμικής τ.μ.

Πράγματι, αφού αν ισχύει ότι η P_N είναι η κατανομή Delaporte, προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανότητας της N δίνονται από τον τύπο

$$p_k(t) = \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}\frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)}d\theta \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}_0.$$

Τότε αποδεικνύεται, ότι

$$p_0(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\alpha+t}\right)^\beta \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+.$$

Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\theta t}\frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)}d\theta \\
&= \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\alpha\theta+\alpha\gamma-\theta t}d\theta \\
&= \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\theta(\alpha+t)+\alpha\gamma}d\theta \\
&\overset{\tilde\theta=\theta(\alpha+t)}{=} \int_{\gamma(\alpha+t)}^{\infty} \frac{\alpha^\beta\left(\frac{\tilde\theta}{\alpha+t}-\frac{\gamma(\alpha+t)}{\alpha+t}\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\tilde\theta+\alpha\gamma}\frac{1}{\alpha+t}d\tilde\theta \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\beta \int_{\gamma(\alpha+t)}^{\infty} \frac{\left(\tilde\theta-\gamma(\alpha+t)\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\tilde\theta+\alpha\gamma}d\tilde\theta \\
&= e^{-\gamma t}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\beta \int_{\gamma(\alpha+t)}^{\infty} \frac{\left(\tilde\theta-\gamma(\alpha+t)\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\tilde\theta+\alpha\gamma+\gamma t}d\tilde\theta \\
&= e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\alpha+t}\right)^\beta \int_{\gamma(\alpha+t)}^{\infty} \alpha^\beta\frac{\left(\tilde\theta-\gamma(\alpha+t)\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\left(\tilde\theta-\gamma(\alpha+t)\right)}d\tilde\theta \\
&= e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\alpha+t}\right)^\beta.
\end{aligned}$$

Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$m_{N_t}(s) = e^{-(1-s)t\gamma}\left(\frac{\alpha}{\alpha+(1-s)t}\right)^\beta \quad \text{για κάθε } s \in (-1,1).$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$m_{N_t}(s) = m_{N_{t,1}}(s)m(s) \quad \text{για κάθε } s \in (-1,1) \tag{5.31}$$

όπου η $m_{N_{t,1}}(s) = e^{-(1-s)t\gamma}$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας ομογενούς Poisson $N_{t,1}$ με παράμετρο γ και η $m(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια $m_{N_{t,2}}(s)$ της τ.μ. $N_{t,2}$ που ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή $\mathbf{NB}(\beta, \theta)$ με $\theta := \frac{\alpha}{\alpha+t} \in (0,1)$. Πράγματι, για κάθε $s \in (-1,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} m(s) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha + t(1-s)}\right)^{\beta} = \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha+t}}{\frac{\alpha+t(1-s)}{\alpha+t}}\right)^{\beta} \\ &= \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha+t}}{1 - \frac{t}{\alpha+t}s}\right)^{\beta} = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)s}\right)^{\beta}, \end{aligned}$$

άρα

$$m(s) = m_{N_{t,2}}(s) \quad \text{για κάθε } s \in (-1,1) \tag{5.32}$$

(βλ. Γ΄.3.3).

Από τις σχέσεις (5.31) και (5.32) προκύπτει, ότι

$$m_{N_t} = m_{N_{t,1}} m_{N_{t,2}} \tag{5.33}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε, ότι οι $m_{N_{t,1}}$ και $m_{N_{t,2}}$ είναι ανεξάρτητες, τότε

$$m_{N_{t,1}+N_{t,2}} = m_{N_{t,1}} m_{N_{t,2}} \tag{5.34}$$

(βλ. π.χ. Feller [27], Chapter XI.5, Section 5, p.279).
Από τις σχέσεις (5.33) και (5.34) έπεται ότι $N_t \stackrel{d}{=} N_{t,1} + N_{t,2}$.

Αν και συνεπάγεται από τον τύπο

$$p_m(t) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(\gamma t)^{m-n}}{(m-n)!} e^{-\gamma t} \binom{\beta+n-1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\beta} \left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n},$$

θα μπορούσαμε να ορίσουμε τα $p_m(t)$ και μέσω ενός αναδρομικού τύπου. Έχουμε

$$L_{\Theta}(v) = e^{-\gamma}(1 + \frac{v}{\alpha})^{-\beta}$$

και επομένως, ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με εκείνη του Παραδείγματος 5.3.10, προκύπτει

$$m_N(s) = e^{-\gamma t(1-s)}(1 + \frac{t(1-s)}{\alpha})^{-\beta}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς s και με απλές πράξεις οδηγούμαστε στη σχέση

$$(\alpha + t - ts) m'_N(s) = (\beta t + \gamma t(\alpha + t) - \gamma t^2 s) m_N(s).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$m_N(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t) s^m \quad \text{και} \quad m'_N(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) p_{m+1}(t) s^m$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές του s^m μαζί με τη συνθήκη $p_{-1}(t) = 0$ παίρνουμε

$$(\beta + t)(m+1) p_{m+1}(t) = (\beta + \gamma)(\alpha + t) + m) t p_m(t) - \gamma t^2 p_{m-1}(t) \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}_0.$$

Επειδή $p_0(t) = m_N(0) = e^{-\gamma t}(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{\beta}$, η $p_m(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά.

Από τα παραπάνω προκύπτει η εξής παρατήρηση

Παρατήρηση 5.3.12. Έστω ότι η N_t ακολουθεί την κατανομή Delaporte με δομική παράμετρο $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$, και έστω ότι οι τ.μ. $N_{t,1}$ και $N_{t,2}$ είναι ανεξάρτητες με $P_{N_{t,1}} = \mathbf{P}(\gamma t)$ και $P_{N_{t,2}} = \mathbf{NB}\big(\beta, \frac{\alpha}{\alpha+t}\big)$. Τότε ισχύει ότι

$$N_t \stackrel{d}{=} N_{t,1} + N_{t,2}$$

ή ισοδύναμα $P_{N_t} = \mathbf{P}(\gamma t) \star \mathbf{NB}\big(\beta, \frac{\alpha}{\alpha+t}\big)$. Συμβολισμός: $P_{N_t} = \mathbf{Del}\big(\gamma t, \beta, \frac{\alpha}{\alpha+t}\big)$.

Παράδειγμα 5.3.13. (συνέχεια του 5.2.6) Στην ειδική περίπτωση όπου $\gamma = -\frac{1}{2}$, η κατανομή της Θ ονομάζεται **αντίστροφη Γκαουσιανή (IGD)**. Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $K_\gamma(\omega) = K_{-\gamma}(\omega)$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}(\Theta) = \eta.$$

Πράγματι, για $\gamma = -\frac{1}{2}$ έχουμε

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\sqrt{\eta}}{2K_{-\frac{1}{2}}(\omega)} \theta^{-3/2} e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\theta\eta^{-1})/2}, \tag{5.35}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Theta] &= \int_0^\infty \theta f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \frac{\sqrt{\eta}}{2K_{-\frac{1}{2}}(\omega)} \int_0^\infty \theta^{-1/2} e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\theta\eta^{-1})/2} d\theta \\
&\stackrel{\theta:=\eta\tilde{\theta}}{=} \frac{\sqrt{\eta}}{2K_{-\frac{1}{2}}(\omega)} \int_0^\infty \eta^{-1/2}\tilde{\theta}^{-1/2} e^{-\omega(\tilde{\theta}^{-1}+\tilde{\theta}^{-1})/2} \eta d\tilde{\theta} \\
&= \frac{\eta}{2K_{-\frac{1}{2}}(\omega)} \int_0^\infty \tilde{\theta}^{-1/2} e^{-\omega(\tilde{\theta}^{-1})/2} d\tilde{\theta} \\
&\stackrel{(5.24)}{=} \frac{\eta}{2K_{1/2}(\omega)} 2k_{1/2}(\omega) = \eta.
\end{aligned}$$

Με

$$\mathbb{E}[\Theta] = \eta = \sqrt{\frac{\chi}{\psi}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{\omega}{2\eta} = \frac{\psi}{2}$$

η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_Θ της τ.μ. Θ γίνεται μέσω της (5.27)

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi\theta^3\beta}} e^{-\beta(\theta-\eta)^2/\theta}$$

που είναι μία βολική παραμετροποιήση. Πράγματι, για $\gamma = -\frac{1}{2}$ από τη σχέση (5.27) και τη σχέση (5.35) προκύπτει ότι

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\sqrt{\eta}}{2K_{-\frac{1}{2}}(\omega)} \theta^{-3/2} e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\theta\eta^{-1})/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}}\frac{\theta^{-3/2}e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\theta\eta^{-1})/2}}{e^{-\omega}\sum_{i=0}^{0}\frac{(1+i)!}{(1-i)!i!}(2\omega)^{-i}} \\
&= \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}}\frac{\theta^{-3/2}e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\theta\eta^{-1})/2}}{e^{-\omega}} \\
&= \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\frac{\pi}{4\beta\eta}}}e^{2\beta\eta}\theta^{-3/2}e^{-2\beta\eta(\eta^2+\theta^2)/2\eta\theta} \\
&= \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\frac{\pi\theta^3}{\beta\eta}}}e^{-\beta(\eta^2+\theta^2-2\eta\theta)/\theta} \\
&= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\pi\theta^3}{\beta}}}e^{-\beta(\theta-\eta)^2/\theta}.
\end{aligned}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο μετασχηματισμός Laplace καταλήγει στην ακόλουθη απλούστερη μορφή:

$$L_\Theta(v) = e^{-2\beta\eta(\sqrt{1+v/\beta}-1)},$$

από όπου και προκύπτει ότι η Θ είναι ID συνεπώς η N είναι DID σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.9.

Υποθέτουμε τώρα, ότι η N είναι μια τ.μ. η οποία είναι $MP(t, U)$. Στην περίπτωση της αντίστροφης Γκαουσιανής, που πρώτα μελετήθηκε από τον Holla [41] (1967), η N ονομάζεται αντίστροφη Γκαουσιανή-Poisson κατανομή. Αυτή η περίπτωση μελετήθηκε περαιτέρω από τον Sichel [78] (1971) και τον Willmot [91] (1987) και επεκτάθηκε για δομικές τ.μ. Θ που ακολουθούν την (GIGD). Η αντίστοιχη μεικτή κατανομή Poisson ονομάστηκε **κατανομή Sichel**. Από την (5.23)

$$p_m(t) = (\frac{\psi}{\psi+2t})^{\gamma/2}(\frac{\chi t^2}{\psi+2t})^{m/2}\frac{K_{\gamma+m}(\sqrt{\chi(\psi+2t)})}{m!K_\gamma(\sqrt{\chi\psi})}.$$

Παρόλο που ο παραπάνω τύπος μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά στην περίπτωση όπου η Θ ακολουθεί την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, είναι είναι αρκετά ευκολότερο να προκύψει ο παραπάνω τύπος μέσω μιας αναδρομικής σχέσης. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.26), ο Sichel [79] (1974) απέδειξε ότι

$$(\psi+2t)m(m+1)p_{m+1}(t) = 2tm(\gamma+m)p_m(t) + \chi t^2 p_{m-1}(t) \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}. \tag{5.36}$$

Είναι επίσης δυνατό να αποδειχθεί η (5.36) με τη μέθοδο του Willmot, ο οποίος κατέληξε στον αναδρομικό τύπο:

$$\chi t^2 p_{m-1}(t) = -2tm(\gamma+m)p_m(t) + (\psi+2t)m(m+1)p_{m+1}(t).$$

Κεφάλαιο 6

Μεικτές κατανομές Poisson που προκύπτουν από μεικτές $\sigma.\delta.$ Poisson

Σε αναλογιστικές εφαρμογές η κατανομή του αριθμου των απαιτήσεων μπορεί συχνά να υποτεθεί ότι είναι μια μεικτή Poisson, αφού είναι πολύ σύνηθες ο υπό μελέτη πληθυσμός να μην είναι ομοιογενής. Το συνολικό ποσό που πληρώνεται από την ασφαλιστική εταιρία εξαρτάται από την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων και ακολουθεί μία σύνθετη μεικτή κατανομή Poisson. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών απαιτήσεων είναι συνήθως δύσκολο να δοθεί και να υπολογισθεί. Για αυτό το λόγο, η χρήση αναδρομικών σχέσεων γίνεται απαραίτητη. Μία από τις πιο γνωστές μεικτές κατανομές Poisson, η αρνητική διωνυμική κατανομή έχει μελετηθεί στη θεμελιώδη εργασία του Panjer [60] (1981), αφού είναι το μόνο μέλος της οικογένειας των μεικτών κατανομών Poisson με γραμμικές αναδρομικές σχέσεις πρώτης τάξης. Οι σύνθετες μεικτές κατανομές Poisson μελετούνται διεξοδικά σε μια σειρά δημοσιεύσεων από τους Sundt [83] (1999), Hesselager [37] [38] (1994, 1996), Wang and Sobrero [89] (1994), Willmot [93] (1993) και Grandell [34] (1997) μεταξύ άλλων. Η ιδέα είναι να κατασκευαστεί ένα σύστημα αναδρομής που βασίζεται στη σχέση αναδρομής για τις πιθανότητες της μεικτής κατανομής Poisson. Σε αυτές τις δημοσιεύσεις δίνονται αρκετά παραδείγματα για πολλά μέλη της οικογένειας των μεικτών κατανομών Poisson. Αναδρομικές σχέσεις για τις ροπές της σύνθετης μεικτής κατανομής Poisson δίνονται από τους Χατζηκωνσταντινίδη και Αντζουλάκο [17] (2002).

Ο ορισμός της $\sigma.\delta.$ Poisson βασίστηκε στις υποθέσεις ενός σταθερού απειροελάχιστου κινδύνου για ολόκληρη την περίοδο της παρατήρησης και της ανεξαρτησίας μεταξύ οποιωνδήποτε δύο γεγονότων. Οι παραδοχές αυτές δεν είναι πάντα ρεαλιστικές. Οι Arbous and Kerrich [11] (1951) πρότειναν το λεγόμενο μεταδοτικό (contagious) μοντέλο υποθέτοντας, ότι μετά το πρώτο γεγονός ο απειροελάχιστος κίνδυνος περιορίζεται και παραμένει σταθερός για το υπόλοιπο της περιόδου παρατήρησης, δηλαδή το κάθε γεγονός έχει σαν απότελεσμα μία αλλαγή στον απειροελάχιστο κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα, ο απειροελάχιστος κίνδυνος $k_m(t)$ εξαρτάται τόσο από τον αριθμό m των γεγονότων που έχουν γίνει όσο και από το χρόνο t. Ένα γνωστό παράδειγμα μιας τέτοιας *σ.δ.* είναι η *σ.δ.* Pólya για την οποία ισχύει $k_m(t) = \frac{a+m}{b+t}$. Η προκύπτουσα κατανομή είναι η αρνητική διωνυμική κατανομή. Ο McFadden [55] (1965) περιέγραψε μία πιο γενική *σ.δ.* τη λεγόμενη μεικτή *σ.δ.* Poisson. (Βλέπε επίσης Willmot και Sundt [95] (1989) και Grandell) [34] (1997). Κάθε $MP(U)$ κατανομή με $U := P_\Theta$ όπου Θ είναι μία τ.μ. με θετικές τιμές, μπορεί να αποδειχθεί ότι προκύπτει από ένα μεταδοτικό μοντέλο εάν ο απειροελάχιστος κίνδυνος ορίζεται ως η ποσότητα

$$k_m(t) = \frac{\int_0^\infty \theta^{m+1} e^{-\theta t} f_\Theta(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \theta^m e^{-\theta t} f_\Theta(\theta) d\theta}.$$

Για $t = 1$, η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$k_m(1) = \frac{(m+1)p(m+1)}{p(m)}, \tag{6.1}$$

όπου $p(m)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της $MP(U)$ κατανομής, η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$p(x) := P(\{X = x\}) = \int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} f_\Theta(\theta) d\theta \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Αυτός ο ορισμός, ωστόσο, έχει ατυχείς συνέπειες στην πράξη καθώς παρατηρούμε ένα σύνολο δεδομένων, το οποίο μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από μία συγκεκριμένη μεικτή κατανομή Poisson, όπου δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ποιο μοντέλο οδήγησε σε αυτό: ένα μεικτό μοντέλο ή ένα μοντέλο μετάδοσης· Τουλάχιστον δύο μοντέλα μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια μεικτή κατανομή Poisson. (βλ. Cane (1977) [16] και Xekalaki (1983a) [96] για περαιτέρω ανάλυση).

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα, οποιαδήποτε μεικτή κατανομή Poisson μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας μεικτής *σ.δ.* Poisson που ορίζεται από τον απειροελάχιστο κίνδυνο που δίνεται από την (6.1). Ένα τέτοιο μοντέλο μπορεί να παρασταθεί από τη σχέση:

$$\mathbf{P}(t\Theta) \wedge \mathbf{K}(\Theta), \tag{6.3}$$

όπου $\mathbf{K}(\Theta) = P_\Theta$ και με t συμβολίζουμε την περίοδο της παρατήρησης. Γενικά, τέτοια μοντέλα οδηγούν σε μεικτές κατανομές Poisson που διαφέρουν από αυτά που αποκτήσαμε από το μοντέλο

$$\mathbf{P}(\Theta) \wedge \mathbf{K}(\Theta). \tag{6.4}$$

Εμάς μάς ενδιαφέρει το δεύτερο μοντέλο (6.4). Ωστόσο, σε μερικές περιπτώσεις, έχει ενδιαφέρον να θεωρούμε το πρώτο μοντέλο. Αν η μελετηθείσα περίοδος υποτίθεται ότι είναι μήκους μονάδας, τα δύο αυτά μοντέλα είναι ταυτόσημα. Αντιθέτως, παρουσιάζει συχνά ενδιαφέρον να θεωρήσουμε το μοντέλο (6.3) και να εξετάσουμε πως αυτό γενικότερα συσχετίζεται με το μοντέλο (6.4), το οποίο χρησιμοποιείται πιο συχνά στην πράξη. Επίσης, σε πολλά μεικτά μοντέλα παλινδρόμησης Poisson χρησιμοποιείται το μοντέλο (6.3). Σε αυτές τις περιπτώσεις, η παράμετρος θ της Poisson αντιμετωπίζεται ως regressor εξαρτόμενος από μια σειρά συμμεταβλητών, ενώ το t είναι μια τ.μ., που έχει τη δικιά της συνάρτηση πιθανότητας, που ονομάζεται παράμετρος overdispersion. Περισσότερες λεπτομέρειες στα μοντέλα παλινδρόμησης μεικτής Poisson, μπορεί να βρει κάποιος στους Lawless [51] (1987), Dean et al. [20] (1989), Xue and Deddens [97] (1992), McNeney and Petkau [56] (1994), Wang et al. [90] (1996) και Chen and Ahn [18] (1996). Ακόμη, αξίζει να αναφέρουμε ότι τα μοντέλα παλινδρόμησης μεικτής Poisson επιτρέπουν για διαφορετικές τιμές μέσης τιμής σε σχέσεις διακυμάνσεων που προσφέρουν ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών μοντέλων για πραγματικές εφαρμογές (βλέπε π.χ. Hinde και Demetrio [39], (1998)).

Κεφάλαιο 7

Μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson

Η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων που πληρώνονται από μία ασφαλιστική εταιρία χρησιμοποιείται όταν η συχνότητα των απαιτήσεων είναι μία τ.μ. που ακολουθεί μεικτή κατανομή Poisson. Αποδεικνύεται πως σε πολλές περιπτώσεις η πυκνότητα των συνολικών απαιτήσεων μπορεί να εκτιμηθεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας απλούς αναδρομικούς τύπους (συνεχείς ή διακριτούς).

Αποδεικνύεται ότι η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς μόνο σε λίγες εξαιρετικές περιπτώσεις. Ωστόσο, οι πιο σημαντικές κατανομές αριθμού απαιτήσεων μπορούν να χαρακτηριστούν μέσω μιας απλής αναδρομής (βλ. Ενότητα 7.2). Επίσης αποδεικνύονται αναδρομικοί τύποι για τη συνάρτηση πιθανότητας και τις ροπές των συνολικών απαιτήσεων διακριτών κατανομών μεγέθους απαιτήσεων (βλ. Ενότητα 7.3) και συνεχών κατανομών μεγέθους απαιτήσεων (βλ. Ενότητα 7.4). Ενδιαφέρουσα είναι μία επέκταση της αναδρομής Panjer που έχει εφαρμογές στις οικογένειες Hofmann και στα χαρτοφυλάκια κινδύνων που υπόκεινται σε αντασφάλιση καταστροφικών υπερβολικών ζημιών.

7.1 Ορισμοί και συμβολισμοί

Είναι ενδιαφέρον να αποκτηθεί η κατανομή της πιθανότητας των απαιτήσεων που θα πληρωθούν από έναν ασφαλιζόμενο. Για να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα, υποθέτουμε ότι αυτές οι συνολικές απαιτήσεις σε ένα επαγγελματικό χαρτοφυλάκιο μπορεί να παρουσιαστούν ως ένα τυχαίο άθροισμα της μορφής:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{7.1}$$

όπου η N είναι μία απαριθμήτρια τ.μ. που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των απαιτήσεων που πληρώνονται από τον ασφαλιστή και $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη-αρνητικών τ.μ. (ανεξαρτήτων από την N) που αντιπροσωπεύουν το μέγεθος της κάθε απαίτησης ξεχωριστά.

Ας ορίσουμε

$$p_n := P(\{N = n\}) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0 \tag{7.2}$$

και

$$m_N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad \text{για κάθε } z \in [-1, 1]. \tag{7.3}$$

Ακόμη, ας ορίσουμε την κοινή συνάρτηση κατανομής της ακολουθίας $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ως:

$$F(x) = P(\{X_k \leq x\}) \quad \text{για κάθε } x \geq 0 \tag{7.4}$$

και τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace

$$L_{X_k}(s) := \mathbb{E}[e^{-sX_k}]. \tag{7.5}$$

όπου s είναι τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία ορίζεται η $\mathbb{E}[e^{-sX_k}]$.

Ομοίως για την τ.μ. S ορίζουμε τις

$$F_S(y) := P(\{S \leq y\}) \quad \text{για κάθε } y \geq 0 \tag{7.6}$$

και

$$L_S(u) = \mathbb{E}[e^{-uS}] \tag{7.7}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$ για το οποίο ορίζεται η $L_S(u) = \mathbb{E}[e^{-uS}]$.

Είναι γνωστό ότι

$$L_S(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n [L_X(u)]^n = m_N[L_X(u)]. \tag{7.8}$$

Σε αυτό το σημείο, καμία υπόθεση δεν έχει γίνει όσον αφορά τις τιμές των X_k (και ως εκ τούτου του T). Θεωρούμε δύο πιθανά σενάρια:

(α) ***Περίπτωση 1*** - Έστω ότι η X_k είναι διακριτή. Σε αυτήν τη περίπτωση υποθέτουμε πως η X_k είναι μία απαριθμήτρια τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_x := f_X(x) := P(\{X_k = x\}) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \tag{7.9}$$

Τότε η S είναι και αυτή μία απαριθμήτρια τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας:

$$g(s) := f_S(s) := P(\{S = s\}) \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{N}_0. \tag{7.10}$$

Είναι ξεκάθαρο πως σε αυτήν την περίπτωση η σχέση (7.8) ισχύει αν η L_S και η L_X είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της S και της X_1 αντίστοιχα.

(β) ***Περίπτωση 2*** - Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η X_k είναι μία μεικτή τ.μ. Εδώ υποθέτουμε πως η X_k είναι μία απολύτως συνεχής στο $(0, \infty)$ αλλά με θετική πιθανότητα στο 0. Έτσι έστω

$$f_0 = P(\{X_k = 0\}), \tag{7.11}$$

και

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \quad \text{για κάθε } x > 0. \tag{7.12}$$

ορίζουμε την συνάρτηση $\tilde{f}$ μέσω του τύπου

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u) &:= \int_{0^+}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx \\ &= L_X(u) - f_0. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η S είναι και αυτή μεικτού τύπου και έτσι ορίζουμε τις

$$g_0 := P(\{S = 0\}), \tag{7.14}$$

$$g(s) := \frac{d}{ds}F_S(s) \quad \text{για κάθε } s > 0 \tag{7.15}$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &:= \int_{0^+}^{\infty} e^{-uy} g(y)dy \\ &= L_S(u) - g_0. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Οι δύο περιπτώσεις για τον τύπο της X_k φτιάχτηκαν με σκοπό να αποκτήσουμε αναδρομικές υπολογιστικές σχέσεις για τη σ.π.π. της $g(y)$ ή τη συνάρτηση πιθανότητας $g(y)$ για διακριτά, μεικτά και συνεχή ποσά απαιτήσεων. Και στις δύο περιπτώσεις, ο τύπος της X_k είναι ίδιος με της S. Αυτό επιτρέπει επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της αναδρομικής σχέσης και έτσι, την επέκταση των αποτελεσμάτων σε συνεχούς τύπου κατανομές με σ.π. της μορφής $Q_1[Q_2(z)]$ όπου Q_1 και Q_2 είναι συναρτήσεις πιθανότητας. Από την (7.8), $L_S(u) = m_1[L_Z(u)]$ όπου $L_Z(u) = m_2[L_X(u)]$ έτσι ώστε, γενικά, ο τύπος της X_k και της S πρέπει να είναι ίδιος για επαναλαμβανόμενη εφαρμογή. Η συνεχής περίπτωση μπορεί εύκολα να αντιμετωπιστεί υποθέτοντας πως $f_0 = 0$ στην μεικτού τύπου περίπτωση.

Ξεχωριστός συμβολισμός για διακριτά και συνεχή τμήματα της κατανομής χρησιμοποιείται παρά μία γενικευμένη πυκνότητα με σκοπό να προληφθούν δυσκολίες σε συμβολισμούς (π.χ. $\lim_{y\to 0} g(y) \neq g_0(y)$). Σύμφωνα με αυτή τη φιλοσοφία της ευκολίας της ερμηνείας, μόνο διακριτά διανύσματα και ολοκληρώματα κατά Riemann χρησιμοποιούνται.

Υπολογιστικές σχέσεις είναι (γενικά) απαραίτητες γιατί οι αναλυτικές εκφράσεις για σύνθετες τ.μ. μπορούν να βρεθούν μόνο στις πιο απλές περιπτώσεις. Μία σημαντική κλάση των κατανομών συχνότητας είναι αυτή για την οποία ισχύει:

$$np_n = [(a + b) + a(n - 1)]p_{n-1} \quad \text{για κάθε } n = 2, 3, 4, \ldots \tag{7.17}$$

Αναδρομικές σχέσεις για τις κατανομές συνολικών απαιτήσεων με πιθανότητες συχνότητας να ικανοποιούν τη σχέση (7.17) προέρχονται από τους Sundt and Jewell([84]) και Willmot and Panjer([94]). Αυτοί απόδειξαν ότι αν η X_k είναι διακριτή τ.μ., τότε

$$g_x = h_x + \sum_{y=1}^{x} k_{x,y} g_{x-y} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}, \tag{7.18}$$

όπου

$$g_x = P(\{S = x\}), \quad f_x = P(\{X_k = x\}), \quad h_x = \frac{p_1 - (a+b)p_0}{1 - af_0} f_x \tag{7.19}$$

και

$$k_{x,y} = \frac{ax + by}{x(1 - af_0)} f_y. \tag{7.20}$$

Στη περίπτωση όπου η X_k είναι μεικτή τ.μ. έχουμε

$$g(x) = h(x) + \int_0^x k(x,y) g_{x-y} dy \quad \text{για κάθε } x > 0 \tag{7.21}$$

όπου

$$h(x) = \frac{p_1 + (a+b)(g_0 - p_0}{1 - af_0} f_x \tag{7.22}$$

και

$$k(x,y) = \frac{ax + by}{x(1 - af_0)} f_y. \tag{7.23}$$

Αυτές οι σχέσεις, μαζί με την παρακάτω

$$g_0 = P(f_0), \tag{7.24}$$

οδηγούν σε εξίσωση από την οποία παίρνουμε την κατανομή των συνολικών απαιτήσεων αναδρομικά για την κλάση των κατανομών συχνότητας που ικανοποιούν την (7.17). Τα αποτελέσματα μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε πιο περίπλοκες συνεχείς κατανομές (βλ. Willmot and Panjer [94] (1985) μέσω επαναλαμβανόμενων εφαρμογών(ένας πεπερασμένος αριθμός φορών).

Η εξίσωση (7.21) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra του δεύτερου τύπου και η (7.18) η αντίστοιχη διακριτή. Ο Baker [12] (1977) δίνει μία καλή περιγραφή της αριθμητικής λύσης της (7.21) για την $g(x)$. Ο Ströter [80] (1984) θεωρεί αυτές τις αναδρομές από τη μεριά καταστάσεων ασφάλισης.

Μερικές γνωστές κατανομές ικανοποιούν την (7.17), όπως η Poisson, η αρνητική διωνυμική, η διωνυμική, η γεωμετρική, και οι λογαριθμικές σειρές.

Πολλοί συγγραφείς έχουν εργαστεί πάνω στις κατανομές συχνότητας των απαιτήσεων, οι οποίες ικανοποιούν διαφορικές εξισώσεις με σκοπό να αντλήσουμε υπολογιστικές σχέσεις για τις κατανομές συνολικών απαίτησεων. Ο Panjer [60], Sundt and Jewell [84], Willmot and Panjer [94], και άλλοι έχουν χρησιμοποιήσει αυτή την προσέγγιση.

7.2 Χαρακτηρισμός της Διωνυμικής, της Poisson και της Αρνητικής Διωνυμικής κατανομής

Σάυτήν την ενότητα με $Q : \mathfrak{B} \to [0,1]$ θα συμβολίσουμε μια κατανομή η οποία ικανοποιεί την συνθήκη $Q(\mathbb{N}_0) = 1$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε ως $q_n := Q(\{n\})$.

Θεώρημα 7.2.1. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Η κατανομή Q είναι είτε η κατανομή Dirac δ_0 είτε η μία διωνυμική, Poisson, ή αρνητική διωνυμική κατανομή.

(β) Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η αναδρομική σχέση:

$q_n = (a + \frac{b}{n})q_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον εάν η Q είναι μία διωνυμική, Poisson ή αρνητική διωνυμική κατανομή τότε $a < 1$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά ότι $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$.

Αν $Q = \delta_0$, τότε ο αναδρομικός τύπος ισχύει για $a = b = 0$.

Αν $Q = \mathbf{B}(m, \theta)$, τότε ο αναδρομικός τύπος ισχύει για $a = -\frac{\theta}{1-\theta}, b = \frac{(m+1)\theta}{1-\theta}$.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(a + \frac{b}{n}) &= -\frac{\theta}{1-\theta} + \frac{(m+1)\theta}{(1-\theta)n} \\ &= \frac{\theta}{1-\theta}(\frac{m+1}{n} - 1)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}q_{n-1} &= \mathbf{B}(m, \theta)(\{n-1\}) \\ &= \binom{m}{n-1}\theta^{n-1}(1-\theta)^{m-n+1}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}(a + \frac{b}{n})q_{n-1} &= \frac{\theta}{1-\theta}(\frac{m+1}{n} - 1)\binom{m}{n-1}\theta^{n-1}(1-\theta)^{m-n+1} \\ &= \theta^n(1-\theta)^{m-n}(\frac{m+1-n}{n})\binom{m}{n-1} \\ &= \frac{m+1-n}{n}\frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}\theta^n(1-\theta)^{m-n} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\theta^n(1-\theta)^{m-n} = \binom{m}{n}\theta^n(1-\theta)^{m-n} = q_n\end{aligned}$$

Αν $Q = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε ο αναδρομικός τύπος ισχύει για $a = 0$ και $b = \alpha$.

Πράγματι, αφού $Q = \mathbf{P}(\alpha)$, έχουμε

$$\begin{aligned}(a + \frac{b}{n})q_{n-1} &= (0 + \frac{\alpha}{n})\mathbf{P}(\alpha)(\{n-1\}) = \frac{\alpha}{n}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha} \\ &= \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Όμως

$$q_n = \mathbf{P}(\alpha)(\{n\}) = \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}.$$

Από τις δύο πιο πάνω σχέσεις έχουμε ότι $q_n = (a + \frac{b}{n})q_{n-1}$.

Αν $Q = \mathbf{NB}(\alpha, \theta)$, τότε ο αναδρομικός τύπος ισχύει για $a = 1-\theta$ και $b = \frac{a-1}{1-\theta|}$. Επομένως, αν ισχύει το (a) τότε έπεται το (b).

Θα δείξουμε τώρα την αντίστροφη συνεπαγωγή, $(b) \Longrightarrow (a)$.

Η υπόθεση (αναδρομικός τύπος) συνεπάγεται ότι $q_0 > 0$. Πράγματι, αν ίσχυε ότι $q = 0$ τότε από τον αναδρομικό τύπο προκύπτει ότι $q_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Άτοπο, διότι $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$. Έστω ότι $q_0 = 1$. Τότε $Q[\{0\}] = q_0 = 1$, επομένως $Q = \delta_0$.

Πράγματι, γνωρίζουμε ότι $q_0 = 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$ άρα $q_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Συνεπώς,

$$Q(\{0\}) = 1 = q_0 \tag{7.25}$$

και

$$Q(\{n\}) = 0 = \delta_0(\{n\}) \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \tag{7.26}$$

Από τις (7.25) και (7.26) έχουμε ότι $Q = \delta_0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $q_0 < 1$. Τότε $0 < q_1 = (a+b)q_0 < (a+b).1 = a+b$. Επομένως $a+b > 0$. Η απόδειξη από εδώ και έπειτα επικεντρώνεται στις τρεις περιπτώσεις $a < 0, a = 0, a > 0$.

(a) *Έστω ότι* $a < 0$. Τότε αφού $a + b > 0$ θα είναι $b > 0$. Τότε η ακολουθία $\left\{a + \frac{b}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και έχει όριο τον αριθμό α. Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός m για τον οποίο ισχύει ότι $q_m > 0$ και $q_{m+1} = 0$. Επομένως $0 = q_{m+1} = (a + \frac{b}{m+1})q_m$ και έτσι ισχύει $a + \frac{b}{m+1} = 0$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει $m = -\frac{a+b}{a}$ συνεπώς $b = -(m+1)a$. Τότε για κάθε $n \in \{1, 2, ..., m\}$ έχουμε

$$q_n = (a + \frac{b}{n})q_{n-1} = (a - \frac{(m+1)a}{n})q_{n-1} = -a\frac{m+1-n}{n}q_{n-1}.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας αναδρομικά τον παραπάνω τύπο βλέπουμε ότι

$$q_n = a^2\frac{m+1-n}{n}\frac{m+1-(n-1)}{n-1}q_{n-2} = ... = (-a)^n q_0 \prod_{k=1}^{m}\frac{m+1-k}{k} = \binom{m}{n}(-a)^n q_0.$$

Όμως επειδή $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n = \sum\limits_{n=0}^{m} q_n = 1$ θα έχουμε

$$1 = \sum_{n=0}^{m} q_n = q_0 \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-a)^n = (1-a)^m q_0.$$

Άρα $q_0 = \frac{1}{(1-a)^m}$, και έτσι $q_n = \binom{m}{n}(-a)^n q_0 = \binom{m}{n}(-a)^n\frac{1}{(1-a)^m} = \binom{m}{n}(\frac{-a}{1-a})^n(\frac{1}{1-a})^{m-n}$ για όλα τα $n \in \{0, 1, .., m\}$. Τελικά έχουμε

$$Q = \mathbf{B}(-\frac{a+b}{a}, -\frac{a}{1-a}).$$

(b) *Έστω ότι $a = 0$.* Επειδή $a + b > 0$, είναι άμεσο ότι $b > 0$. Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $q_n = \frac{b}{n} q_{n-1}$, και έτσι $q_n = \frac{b^2}{n(n-1)} q_{n-2} = ... = \frac{b^n}{n!} q_0$.

Χρησιμοποιώντας εκ νέου τη σχέση ότι $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$, λαμβάνουμε ότι $q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = 1$, και έτσι παίρνουμε τη σχέση $q_0 = e^{-b}$, συνεπώς

$$q_n = e^{-b} \frac{b^n}{n!} \quad \text{για όλα τα } n \in \mathbb{N}_0.$$

Τελικά έχουμε

$$Q = \mathbf{P}(b).$$

(c) *Έστω ότι $a > 0$.* Για τεχνικούς λόγους θέτουμε $c := \frac{a+b}{a}$. Τότε θα ισχύει ότι $c > 0$ και $b = (c-1)a$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ προκύπτει

$$q_n = (a + \frac{b}{n}) q_{n-1} = (a + \frac{(c-1)a}{n}) q_{n-1} = \frac{c+n-1}{n} a q_{n-1},$$

και έτσι, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο οπισθοδρομικά, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$q_n = a^n q_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{c+k-1}{k} = \binom{c+n-1}{n} a^n q_0.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \frac{c+k-1}{k} &= \frac{c(c+1)...(c+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(c+n-1)(c+n-2)...(c+1)c}{n!} = \frac{(c+n-1)(c+n-2)...c(c-1)!}{n!(c-1)!} \\ &= \frac{(c+n-1)!}{n!(c+n-1-n)!} = \binom{c+n-1}{n}. \end{aligned}$$

Ιδιαιτέρως, $q_n \geq \frac{1}{n} c a^n q_0$, γιατί

$$\binom{c+n-1}{n} \geq \frac{1}{n} c \iff \frac{(c+n-1)!c}{(n-1)!c!} \geq 1 \iff \binom{c+n-2}{n-1} \geq 1,$$

που ισχύει. Είναι τότε σαφές ότι επειδή $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$, θα πρέπει να ισχύει υποχρεωτικά $a < 1$

Αθροίζοντας έχουμε $1 = \sum_{n=0}^{\infty} q_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c+n-1}{n} a^n q_0 = (1-a)^{-c} q_0$.

Επομένως $q_0 = (1-a)^c$, άρα $q_n = \binom{c+n-1}{n} (1-a)^c a^n$. Άρα έχουμε

$$Q = \mathbf{NB}(\frac{a+b}{a}, 1-a).$$

□

Έτσι δείξαμε ότι $(b) = (a)$.

Το Θεώρημα 7.2.1 και η απόδειξή του μας οδηγεί στο να ασχοληθούμε με την οικογένεια όλων των κατανομών Q που ικανοποιούν τη σχέση ότι $Q(\mathbb{N}_0) = 1$, και για τις οποίες υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $-b < a < 1$ και

$$q_n = (a + \frac{b}{n})q_{n-1} \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

ως μία παραμετρική οικογένεια κατανομών, η οποία αποτελείται από τη διωνυμική, την αρνητική διωνυμική και η κατανομή Poisson. Η κατανομή Dirac δ_0 δεν περιλαμβάνεται γιατί οι παράμετροι a, b δεν ορίζονται μονοσήμαντα.

7.3 Οι αναδρομικοί τύποι των Panjer και DePril

Ο βασικός στόχος αυτής της ενότητας είναι να αποδειχθεί ότι οι αναδρομικοί τύποι για την διωνυμική, την αρνητική διωνυμική και την κατανομή Poisson οδηγούν σε αναδρομικούς τύπους για την κατανομή και τις ροπές των συνολικών απαιτήσεων, στην περίπτωση όπου η κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων συγκεντρώνεται στο σύνολο $\mathbb{N}_0$.

Από εδώ και πέρα θα υποθέτουμε ότι $P_X(\mathbb{N}_0) = 1$. Τότε θα έχουμε ότι $P_S(\mathbb{N}_0 = 1)$.

Παρατήρηση 7.3.1. Για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε

$$p_n := P[\{N = n\}]$$

$$f_n := P[\{X = n\}]$$

$$g_n := P[\{S = n\}].$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{S = n\}|\{N = k\})P(\{N = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f_n^{*k}.$$

Λήμμα 7.3.2. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι σχέσεις*

$$f_m^{*n} = \sum_{k=0}^{m} f_{m-k}^{*(n-1)} f_k = \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{m} k f_{m-k}^{*(n-1)} f_k. \tag{7.27}$$

Απόδειξη. Έστω $j \in \{1, 2 \dots n\}$ και $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ αυθαίρετα. Τότε

$$\begin{aligned} P[\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \{X_j = k\}] &= P[\{\sum_{j \neq i=1}^{n} X_i = m - k\} \cap \{X_j = k\}] \\ &= P[\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m - k\}]P[\{X_j = k\}] \end{aligned}$$

$$= f^{*(n-1)}_{m-k} f_k.$$

Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned}
f^{*n}_m &= P[\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\}] = P[\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \Omega] \\
&= P[\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap (\biguplus_{k\in\mathbb{N}_0} \{X_j = k\})] \\
&= P[\biguplus_{k\in\mathbb{N}_0} \{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \{X_j = k\}] \\
&= P[\biguplus_{k=0}^{m} \{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \{X_j = k\}] \\
&= \sum_{k=0}^{m} P\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \{X_j = k\}] \\
&= \sum_{k=0}^{m} f^{*(n-1)}_{m-k} f_k.
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα ισχύει διότι

$$\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \{X_j = k\} = \emptyset, \quad \text{για κάθε } k \geq m+1.$$

Επιπλέον εάν συμβολίσουμε με χ_A την δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου A και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathbb{E}(\chi_A) = P(A)$ λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\right\}} X_j] &= \mathbb{E}[\chi_{\biguplus_{k=0}^{m}\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\}\cap\{X_j=k\}} X_j] \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}[\chi_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\right\}\cap\{X_j=k\}} X_j] \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}[\chi_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\right\}\cap\{X_j=k\}} k] \\
&= \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{E}[\chi_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\right\}\cap\{X_j=k\}}] \\
&= \sum_{k=1}^{m} kP[\sum_{i=1}^{n} X_i = m\} \cap \{X_j = k\}] \\
&= \sum_{k=1}^{m} k f^{*(n-1)}_{m-k} f_k, \quad \text{για όλα τα } j \in \{1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας και τη συνεπαγωγή ότι $\sum\limits_{j=1}^{n} X_j = m \Longrightarrow \frac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j = 1$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
f_m^{*n} &= P[\{\sum_{i=1}^{n} X_i = m\}] = \mathbb{E}[\chi_{\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\}}] \\
&= \mathbb{E}[\chi_{\{\sum\limits_{i=1}^{m=n} X_i = m\}}.1] = \mathbb{E}[\chi_{\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\}} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} X_j] \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\chi_{\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m\}} X_j] = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} k f_{m-k}^{*(n-1)} f_k \\
&= \frac{n}{m}\sum_{k=1}^{m} k f_{m-k}^{*(n-1)} f_k.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η δεύτερη ισότητα. □

Για τις μη εκφυλισμένες κατανομές του αριθμού των απαιτήσεων, που χαρακτηρίστηκαν στο Θεώρημα 7.2.1, μπορούμε να αποδείξουμε έναν αναδρομικό τύπο για την κατανομή των συνολικών απαιτήσεων.

Θεώρημα 7.3.3. (Αναδρομή Panjer). *Εάν η τυχαία μεταβλητή N είναι μη-εκφυλισμένη και ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε*

$$g_0 = \begin{cases} (1-\theta+\theta f_0)^m, \text{αν } P_N = \mathbf{B}(m,\theta) \\ e^{-a(1-f_0)}, \text{αν } P_N = \mathbf{P}(a) \\ \left\{\frac{\theta}{1-f_0+\theta f_0}\right\}^a, \text{αν } P_N = \mathbf{NB}(a,\theta) \end{cases}$$

και επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$g_n = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{n}(a + b\frac{k}{n})g_{n-k}f_k.$$

Ιδιαιτέρως, εάν $f_0 = 0$ τότε $g_0 = p_0$.

Απόδειξη. Η επαλήθευση του τύπου για την g_0 είναι άμεση. Πράγματι διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για την τυχαία μεταβλητή N:

(a) $P_N = \mathbf{B}(m,\theta)$. Τότε για κάθε $z \in [-1, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
m_S(z) &= m_N(m_X(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} m_X(z)^n \binom{m}{n}\theta^n(1-\theta)^{m-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}[m_X(z)\theta]^n(1-\theta)^{m-n} = [1-\theta+\theta m_X(z)]^m,
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.2.2.

Τότε αν εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των γεννητριών βρίσκουμε ότι $g_0 = [1-\theta+\theta f_0]^m$

(b) $P_N = \mathbf{P}(a)$. Τότε για κάθε $z \in [-1,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} m_S(z) &= m_N(m_X(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} m_X(z)^n e^{-a}\frac{a^n}{n!} \\ &= e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(am_X(z))^n}{n!} = e^{-a+am_X(z)} = e^{-a(1-m_X(z))} \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.2.2

Τότε αν εξισώσουμε τους σταθερούς συντελεστές των γεννητριών βρίσκουμε ότι $g_0 = e^{-a(1-f_0)}$

(c) $P_N = \mathbf{NB}(a,\theta)$. Τότε για κάθε $z \in [-1,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} m_S(z) &= m_N(m_X(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} m_X(z)^n \binom{n+a-1}{n}\theta^n(1-\theta)^a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+a-1}{n}(m_X(z)\theta)^n(1-\theta)^a = (1-\theta)^a(1-m_X(z)\theta)^{-a} \\ &= \left\{\frac{1-\theta}{1-m_X(z)\theta}\right\}^a \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.2.2

Τότε αν εξισώσουμε τους σταθερούς συντελεστές των γεννητριών βρίσκουμε ότι

$$g_0 = \left\{\frac{1-\theta}{1-f_0\theta}\right\}^a.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, σύμωνα με το Λήμμα 7.3.2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_m &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_m^{*j} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j f_m^{*j} = \sum_{j=1}^{\infty}(a+\frac{b}{j})p_{j-1}f_m^{*j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} ap_{j-1}f_m^{*j} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b}{j}p_{j-1}f_m^{*j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} ap_{j-1}\sum_{k=0}^{m} f_{m-k}^{*(j-1)}f_k + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b}{j}p_{j-1}\frac{j}{m}\sum_{k=1}^{m} k f_{m-k}^{*(j-1)}f_k \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} ap_{j-1}f_m^{*(j-1)}f_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(a+b\frac{k}{m})p_{j-1}f_{m-k}^{*(j-1)}f_k \\ &= af_0\sum_{j=0}^{\infty}p_j f_m^{*j} + \sum_{k=1}^{m}(a+b\frac{k}{m})(\sum_{j=0}^{\infty}p_j f_{m-k}^{*j})f_k \end{aligned}$$

$$= \quad af_0g_m + \sum_{k=1}^{m}(a + b\frac{k}{m})g_{m-k}f_k.$$

Συνεπώς βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} g_m \quad &= \quad af_0g_m + \sum_{k=1}^{m}(a + b\frac{k}{m})g_{m-k}f_k \\ &\Longleftrightarrow \quad g_m(1 - af_0) = \sum_{k=1}^{m}(a + b\frac{k}{m})g_{m-k}f_k \\ &\Longleftrightarrow \quad g_m = \frac{1}{1 - af_0}\sum_{k=1}^{m}(a + b\frac{k}{m})g_{m-k}f_k. \end{aligned}$$

□

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για τις ροπές της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων.

Παρατήρηση 7.3.4. Οι Sundt and Jewell [84] (1981), p.33, επέκτειναν την υπόθεση του Panjer στην

$$p_{m+1} = \left(a + \frac{b}{m+1}\right)p_m \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}, \tag{7.28}$$

δηλ. άφησαν το p_0 να είναι (σχετικά) ελεύθερο.

Ο Schröter [74] (1990, p.165) επέκτεινε την υπόθεση του Panjer με ένα διαφορετικό τρόπο

$$p_{m+1} = \left(a + \frac{b}{m+1}\right)p_m + \frac{c}{m+1}p_{m-1} \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}_0, \tag{7.29}$$

όπου $p_{-1} := 0$. Ο Sundt [81] (1992, p.78) δημιούργησε έναν αναδρομικό τύπο κάτω από την υπόθεση ότι

$$p_{m+1} = \sum_{i=1}^{K}\left(a_i + \frac{b_i}{m+1}\right)p_{m+1-i} \quad \text{για κάθε } m = M, M+1, \ldots, \tag{7.30}$$

όπου $p_m = 0$ για $m < 0$. Στις εφαρμογές μας είναι αρκετό να θεωρήσουμε την περίπτωση $K = 2$, $M = 1$ και $a_2 = 0$, οπότε θέτουμε $a_1 = a$, $b_1 = b$ και $b_2 = c$. Τότε η (7.30) μπορεί να γραφεί

$$p_{m+1} = \left(a + \frac{b}{m+1}\right)p_m + \frac{c}{m+1}p_{m-1} \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}, \tag{7.31}$$

Θεώρημα 7.3.5. (Αναδρομή De Pril)

Εάν η τυχαία μεταβλητή N είναι μη-εκφυλισμένη και ικανοποιεί την αναδρομική εξίσωση $p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$, με $a \neq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε:

$$\mathbb{E}[S^n] = \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a + b\frac{k}{n})\mathbb{E}[S^{n-k}]\mathbb{E}[X^k], \ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.3.3 και τη σχέση που αποδείχτηκε, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
(1-af_0)\mathbb{E}[S^n] &= (1-af_0)\sum_{m=0}^{\infty} m^n g_m = \sum_{m=1}^{\infty} m^n (1-af_0) g_m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^n \sum_{k=1}^{m} (a+b\frac{k}{m}) g_{m-k} f_k = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} (am^n + bkm^{n-1}) g_{m-k} f_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty} (am^n + bkm^{n-1}) g_{m-k} f_k \\
&\overset{l=m-k}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \left\{a(k+l)^n + bk(k+l)^{n-1}\right\} g_l f_k
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^n] &= af_0\mathbb{E}[S^n] + (1-af_0)\mathbb{E}[S^n] \\
&= af_0 \sum_{l=0}^{\infty} l^n g_l + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \left\{a(k+l)^n + bk(k+l)^{n-1}\right\} g_l f_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \left\{a(k+l)^n + bk(k+l)^{n-1}\right\} g_l f_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} l^{n-j}k^j + b\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} l^{n-1-j}k^{j+1} \right\} g_l f_k \\
&= a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathbb{E}[S^{n-j}]\mathbb{E}[X^j] + b\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[S^{n-1-j}]\mathbb{E}[X^{j+1}] \\
&= a\mathbb{E}[S^n] + a\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\mathbb{E}[S^{n-j}]\mathbb{E}[X^j] + b\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\mathbb{E}[S^{n-j}]\mathbb{E}[X^j] \\
&= a\mathbb{E}[S^n] + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(a+b\frac{j}{n})\mathbb{E}[S^{n-j}]\mathbb{E}[X^j].
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε το αποτέλεσμα του θεωρήματος. □

Χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο του De Pril σε συνδυασμό με τις ταυτότητες του Wald, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές $r-$τάξεως για την κατανομή των συνολικών απαιτήσεων.

Παρατηρήσεις 7.3.6. (a) Το Θεώρημα 7.2.1 είναι γνωστό. Βλέπε Johnson and Kotz [42] (1969) και Sundt and Jewell [84] (1981). Το Θεώρημα 7.3.3 οφείλεται στον Panjer [60] (1981). Για την υπόθεση Poisson, βλ. επίσης Shumway and Gurland [76] (2001) και Adelson [7] (1966). Υπολογιστικές μορφές της αναδρομής του Panjer συζητήθηκαν από τους Panjer and Willmot [62](1986). Υπάρχουν δύο σημαντικές γενικεύσεις του αναδρομικού τύπου του Panjer. Αυτές είναι στις εργασίες των Sundt [81] (1992) και Hesselager [37] (1994). Επιπλέον σημαντικές γενικεύσεις του αποτελέσματος του Panjer έχουν γίνει από τους Kling and Goovaerts [48] (1993) και τον Ambagaspitiya [10] (1995).

(b) Το Θεώρημα 7.3.5 οφείλεται στον DePril [23] (1986). Για την υπόθεση Poisson, βλ. επίσης Goovaerts, DeVylder and Haezendonck [32] (1984). Ο DePril απέδειξε πραγματικά γενικότερο αποτέλεσμα από το Θεώρημα 5.4.3, δηλαδή, μια αναδρομή για τις ροπές του $S - c$ με $c \in \mathbb{R}$. Επίσης, οι Kaas and Goovaerts [46] (1985) απέδειξαν έναν αναδρομικό τύπο για τις ροπές των συνολικών απαιτήσεων όταν η κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων είναι αυθαίρετη.

7.4 Μία συνεχής εκδοχή του αλγόριθμου του Panjer

Ο αλγόριθμος του Panjer που αναφέρθηκε στο Θεώρημα 7.3.3 έχει το μειονέκτημα, ότι τα ατομικά μεγέθη απαιτήσεων πρέπει να παίρνουν τιμές επάνω σε ένα αριθμήσιμο σύνολο. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το μειονέκτημα εισάγουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την συνάρτηση κατανομής F_S του συνολικού ποσού των απαιτήσεων. Αυτή η εξίσωση ισχύει για οποιαδήποτε (όχι κατ΄ ανάγκη διακριτή) συνάρτηση κατανομής F_X των ατομικών μεγεθών απαιτήσεων, αν υποθέσουμε ότι οι σύνθετες συναρτήσεις πιθανότητας $p_k (k \in \mathbb{N})$ ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο $p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ του Panjer.

Θεώρημα 7.4.1. *Αν η συνάρτηση πιθανότητας $p_k (k \in \mathbb{N})$ της N ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο*

$$p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{7.32}$$

του Panjer με παραμέτρους $(a, b \in \mathbb{R})$ και $F_X(0) = 0$, τότε η συνάρτηση κατανομής $F_S = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_X^{*k}$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$F_S(x) = p_0 + aF_X * F_S(x) + b\int_0^x \int_0^{x-v} \frac{v}{v+y} dF_S(y) dF_X(v) \quad \text{για κάθε } x > 0. \tag{7.33}$$

Αν $F_X(0) = \alpha > 0$, τότε

$$F_X(0) = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{1-\alpha a}\right)^{\frac{b+a}{\alpha}}, & \text{αν } a \neq 0 \\ e^{(\alpha-1)b}, & \text{αν } a = 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $F_X(0) = 0$. Αφού $F_X^{*0}(x) = \delta_0(x)$ για κάθε $x \geq 0$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $F_S = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_X^{*k}$ για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$F_S(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_k F_X^{*n}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a+\frac{b}{n})p_{n-1}F_X^{*n}(x) \\
&= p_0 + a\sum_{n=0}^{\infty}p_nF_X^{*(n+1)}(x) + b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{n+1}F_X^{*(n+1)}(x) \\
&= p_0 + aF_X * F_S(x) + bG(x),
\end{aligned}$$

όπου

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{n+1}F_X^{*(n+1)}(x).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω του αναδρομικού τύπου του Panjer, ενώ η τρίτη προκύπτει με αλλαγή της μεταβλητής από το n στο $n+1$.

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned}
F_X^{*(n+1)}(x) &= \mathbb{E}[\chi_{\{X_1+\cdots+X_{n+1}\leq x\}}] \\
&= \mathbb{E}\Big[\frac{\sum_{i=1}^{n+1}X_i}{\sum_{i=1}^{n+1}X_i}\chi_{\{\sum_{i=1}^{n+1}X_i\leq x\}}\Big] \\
&= \sum_{j=i}^{n+1}\mathbb{E}\Big[\frac{X_j}{\sum_{i=1}^{n+1}X_i}\chi_{\{\sum_{i=1}^{n+1}X_i\leq x\}}\Big].
\end{aligned}$$

Επειδή η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι i.i.d., έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_X^{*(n+1)} &= \sum_{j=1}^{n+1}\mathbb{E}\Big[\frac{X_j}{\sum_{i=1}^{n+1}X_i}\chi_{\{\sum_{i=1}^{n+1}X_i\leq x\}}\Big] \\
&= (n+1)\mathbb{E}\Big[\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1}X_i}\chi_{\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leq x\}}\Big] \\
&= (n+1)\int_0^{\infty}y\mathbb{E}\Big[\frac{1}{y+\sum_{i=2}^{n+1}X_i}\chi_{\{\sum_{i=2}^{n+1}X_i\leq x-y\}}\Big]dF_X(y) \\
&= (n+1)\int_0^{\infty}y\int_0^{\infty}\frac{\chi_{\{y+v\leq x\}}}{y+v}dF_X^{*n}(v)dF_X(y) \\
&= (n+1)\int_0^{x}\int_0^{x-y}\frac{y}{x+v}dF_X^{*n}(v)dF_X(y).
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}p_n\int_0^{x}\int_0^{x-y}\frac{y}{x+v}dF_X^{*n}(v)dF_X(y) \\
&= \int_0^{x}\int_0^{x-y}\frac{y}{x+v}d\big(\sum_{n=0}^{\infty}p_nF_X^{*n}(v)\big)dF_X(y) \\
&= \int_0^{x}\int_0^{x-y}\frac{y}{x+v}dF_X(v)dF_X(y),
\end{aligned}$$

όπου η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}p_nF_X^{*n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\mathbb{R}$, επειδή $\sum_{n=0}^{\infty}p_n = 1$ και $F_X^{*n} \leq 1$. Έτσι, αποδείχθηκε ο τύπος (7.33).

Έστω τώρα ότι $F_X(0) = a > 0$. Τότε χρησιμοποιώντας πάλι τον αναδρομικό τύπο του Panjer έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_S(0) &= m_N(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n p_n \\
&= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha + \frac{b}{n}\Big) p_{n-1} a^n \\
&= p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\alpha + \frac{b}{n+1}\Big) p_n a^{n+1} \\
&= p_0 + a\alpha m_N(a) + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} p_n \\
&= p_0 + a\alpha m_N(a) + b \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^a x^n dx\Big) p_n \\
&= p_0 + a\alpha m_N(a) + b \int_0^a \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n p_n\Big) dx \\
&= p_0 + a\alpha m_N(a) + b \int_0^a m_N(x) dx.
\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με τη σειρά, διότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n p_n = m_N(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επάνω στο $x \in [0, 1]$. Έτσι αποδίξαμε ότι

$$m_N(a) = p_0 + a\alpha m_N(a) + b \int_0^a m_N(x) dx.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς a έχουμε:

$$m_N'(a) = \alpha m_N(a) + a\alpha m_N'(a) + b m_N(a).$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί ως το παρακάτω πρόβλημα Cauchy:

$$m_N'(a) = \Big(\frac{\alpha + b}{1 - a\alpha}\Big) m_N(a) \quad \text{με } m_N(1) = 1$$

(a) Έστω $a \neq 0$. Τότε

$$\int \frac{m_N'(a)}{m_N(a)} da = (b + \alpha) \int \frac{da}{1 - a\alpha} + c.$$

Επομένως

$$ln m_N(a) = -\frac{b + \alpha}{\alpha} ln(1 - a\alpha) + c$$

ή ισοδύναμα

$$m_N(a) = e^c (1 - a\alpha)^{-\frac{b+\alpha}{\alpha}}$$

Επειδή $m_N(1) = 1 = e^c(1 - \alpha)^{-\frac{b+\alpha}{\alpha}}$, προκύπτει ότι $e^c = (1 - \alpha)^{\frac{b+\alpha}{\alpha}}$. Άρα

$$m_N(a) = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - a\alpha}\right)^{\frac{b+\alpha}{\alpha}}.$$

(b) Έστω $a = 0$. Τότε

$$m'_N(a) = bm_N(a),$$

συνεπώς $m_N(a) = ce^{ba}$. Επειδή όμως $m_N(1) = 1 = ce^b$, θα έχουμε $c = e^{-b}$ και επομένως

$$m_N(a) = e^{b(a-1)}.$$

Τελικά έχουμε

$$F_X(0) = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{1-\alpha a}\right)^{\frac{b+a}{\alpha}}, & \text{αν } a \neq 0 \\ e^{(\alpha-1)b}, & \text{αν } a = 0. \end{cases}$$

□

Παρακάτω θεωρούμε την περίπτωση, όπου όλες οι X_n είναι (απόλυτα) συνεχείς τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X. Τότε

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(y)dy.$$

Έστω ότι η f_X είναι φραγμένη συνάρτηση. Τότε η κατανομή της S έχει ένα άτομο στο μηδέν και μία συνεχή συνιστώσα με πυκνότητα f_S, δηλ.

$$F_S(x) = p_0\chi_{\{x\geq 0\}} + \int_0^x f_S(y)dy,$$

όπου $f_S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k f_X^{*k}(y)$.

Υποθέτουμε επιπλέον, ότι η συνάρτηση κατανομής F_X είναι απόλυτα συνεχής και ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X είναι φραγμένη. Τότε η συνάρτηση κατανομής F_S μπορεί να αναλυθεί σε ένα διακριτό μέρος, το οποίο είναι ένα άτομο στην αρχή 0, και σε ένα απόλυτα συνεχές μέρος, δηλ.

$$F_S(B) := P_S(B) = p_0\delta_0(B) + \int_B f_S(x)\lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathbb{B}.$$

Για να δημιουργήσουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την $f_S(x)$, χρειαζόμαστε τον παρακάτω τύπο αναπαράστασης για τη συνάρτηση $g_k : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g_k(x) := \int_0^x y f_X(y) f_X^{*k}(x-y)dy.$$

Λήμμα 7.4.2. *Για κάθε $x > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$g_k(x) = \frac{x}{k+1} f_X^{*(k+1)}(x) \tag{7.34}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$.

- $k = 1$. Έστω $x > 0$. Τότε

$$xf_X^{*2}(x) - g_1(x) = \int_0^x (x-y)f_X(y)f_X(x-y)dy = g_1(x),$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός $z := x - y$. Άρα ισχύει η (7.34) για $k = 1$.

- $k - 1 \longrightarrow k$. Έστω ότι ισχύει η (7.34) για κάποιο $k - 1 \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned} xf_X^{*(k+1)}(x) - g_k(x) &= \int_0^x (x-y)f_X(y)f_X^{*k}(x-y)dy \\ &= k\int_0^x f_X(y)g_{k-1}(x-y)dy \\ &= k\int_0^x f_X(y)\int_0^{x-y} zf_X(z)f_X^{*(k-1)}(x-y-z)dzdy \\ &= k\int_0^x zf_X(z)\int_0^{x-z} f_X(y)f_X^{*(k-1)}(x-y-z)dzdy \\ &= k\int_0^x zf_X(z)f_X^{*k}(x-z)dz = kg_k(x). \end{aligned}$$

Άρα ισχύει η (7.34) για κάθε k επίσης.

□

Θεώρημα 7.4.3. *Αν η ακολουθία $\{p_k\}_k \in \mathbb{N}$ των τιμών της συνάρτησης πιθανότητας της N ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο (a) του Panjer με παραμέτρους a, b και p_0, και η συνάστηση κατανομής F_X είναι απόλυτα συνεχής με φραγμένη πυκνότητα f_X, τότε η πυκνότητα f_S του απόλυτα συνεχούς μέρους της σύνθετης συνάρτησης κατανομής $F_S = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_X^{*k}$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f_S(x) - \frac{1}{x}\int_0^x (ax+by)f_X(y)f_S(x-y)dy = p_1 f_X(x), \quad x > 0. \tag{7.35}$$

Επιπλέον, η f_S είναι η μοναδική λύση της (7.35) μέσα από το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων επάνω στο $(0, \infty)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.32) και (7.34) για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\int_0^x (ax+by)f_X(y)f_S(x-y)dy &= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} p_k \int_0^x (ax+by)f_X(y)f_X^{*k}(x-y)dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k\big(a + \frac{b}{k+1}\big)f_X^{*(k+1)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1}f_X^{*(k+1)}(x) \\ &= f_S(x) - p_1 f_X(x). \end{aligned}$$

Έτσι η f_S ικανοποιεί την (7.35). Αφού $f_X^{*k}(x) \geq 0$ και $\int_0^\infty f_X^{*k}(x)dx = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η f_S είναι ολοκληρώσιμη.

Μένει να δείξουμε, ότι η f_S είναι η μοναδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την (7.35). Για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε την απεικόνιση $g \mapsto \mathbf{A}g$ μέσω του τύπου

$$(\mathbf{A}g)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x (ax + by) f_X(y) g(x - y) dy \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Τότε εφαρμόζοντας τις σχέσεις (7.32) και (7.34) έχουμε

$$p_k(\mathbf{A}f_X^{*k})(x) = p_{k+1} f_X^{*(k+1)}(x) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}. \tag{7.36}$$

Πράγματι, για κάθε $x > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
p_k(\mathbf{A}f_X^{*k})(x) &= p_k \frac{1}{x}\int_0^x (ax + by) f_X(y) f_X^{*k}(x - y) dy \\
&= p_k \frac{1}{x} ax \int_0^x f_X(y) f_X^{*k}(x - y) dy + p_k \frac{1}{x} b \int_0^x y f_X(y) f_X^{*k}(x - y) dy \\
&= p_k a f_X^{*(k+1)}(x) + p_k \frac{1}{x} b \frac{x}{k+1} f_X^{*(k+1)}(x) \\
&= p_k \left(a + \frac{b}{k+1}\right) f_X^{*(k+1)}(x) = p_{k+1} f_X^{*(k+1)}(x),
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 7.4.2 και η πέμπτη της (7.32).

Προφανώς η $g(x) = f_S(x)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x) = (\mathbf{A}g)(x) + p_1 f_X(x). \tag{7.37}$$

Έστω μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (7.37). Με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να αποδειχθεί η ισότητα

$$(\mathbf{A}^n g)(x) = g(x) - \sum_{k=1}^n p_k f_X^{*k}(x) \quad \text{για κάθε } x > o \quad \text{και για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{7.38}$$

Πράγματι για

- $n = 1$ ισχύει από την υπόθεσή μας.
- $n \longrightarrow n + 1$ Έστω ότι ισχύει η (7.38) για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^{n+1}g)(x) &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^n g)(x) = \mathbf{A}(g - \sum_{k=1}^n p_k f_X^{*k})(x) \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x (ax + by) f_X(y) g(x - y) dy - \frac{1}{x}\int_0^x (ax + by) f_X(y) \sum_{k=1}^n p_k f_X^{*k}(x - y) dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathbf{A}g)(x) - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{x} xa \int_0^x f_X(y) f_X^{*k}(x-y)dy \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{b}{x} \int_0^x y f_X(y) f_X^{k}(x-y)dy \\
&= (\mathbf{A}g)(x) - \sum_{k=1}^{n} p_k a f_X^{*(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{x} b \frac{x}{k+1} f_X^{*(k+1)}(x) \\
&= (\mathbf{A}g)(x) - \sum_{k=1}^{n} p_k \left(a + \frac{b}{k+1}\right) f_X^{*(k+1)}(x) \\
&= g(x) - p_1 f_X(x) - \sum_{k=1}^{n} p_{k+1} f_X^{*(k+1)}(x) \\
&= g(x) - \sum_{k=1}^{n+1} p_k f_X^{*k}(x),
\end{aligned}
$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνάπεια του Λήμματος 7.4.2 και η έκτη της ισότητας (7.32).

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{A}^n g)(x) = 0$ για κάθε $x > 0$ και για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Άρα $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k f_X^{*k}(x) = f_S(x)$. $\square$

Παράδειγμα 7.4.4. Έστω $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$, όπου $P_N = \mathbf{NB}(2,p)$ με $\mathbb{E}[N] = 100 = \frac{2p}{1-p} \Longrightarrow p = \frac{50}{51}$ και $P_{X_k} = \mathbf{Exp}(\delta)$. Τότε ισχύει

$$\overline{F}_S(x) = e^{-(1-p)\delta x}(1 - (1-p)^2 + p^2(1-p)\delta x) \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Στον παρακάτω πίνακα οι τιμές $\overline{F}(x)$ συγκρίνονται με εκείνες του αλγορίθμου του Panjer (Θεώρημα 7.3.3), όπου θέτουμε $\delta = 1$, και της συνεχούς εκδοχής του αλγορίθμου του Panjer (Θεώρημα 7.4.4). Εδώ η εκθετικά κατανεμημένη τ.μ. X μετασχηματίζεται σε μία διακριτή τ.μ. σύμφωνα με τον τύπο $X_h := h[X/h]$ με $h > 0$. Στην τέταρτη στήλη του πίνακα, εμφανίζεται μία εναλλακτική προσέγγιση της $\overline{F}(x)$ του Θεωρήματος 7.4.3 μέσω της παρακάτω παραδοχής:

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_S(kh) &= \int_{kh}^{\infty} f_S(t)dt \\
&= \int_{(k-1)h}^{\infty} f_S(t)dt - \int_{(k-1)h}^{kh} f_S(t)dt \\
&\approx \overline{F}_S\big((k-1)h\big) - h f_S(kh), \qquad (7.39)
\end{aligned}
$$

όπου $\int_{(k-1)h}^{kh} f_S(t)dt = h f_S(kh)$ από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Θέτουμε $h = 0.01$. Αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές $f_S(kh)$ για $1 \leq k \leq 1000$ στον τύπο (7.35) του Θεωρήματος 7.4.3, ενώ το ολοκλήρωμα του τύπου (7.35) διακριτοποιείται. Μετά χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος (7.35) για να υπολογιστούν οι τιμές $\overline{F}_S(kh)$. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Είναι εύκολο να δούμε, ότι ο διακριτός αλγόριθμος του Panjer παρέχει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από ό,τι ο συνεχής ανάλογός του. Αυτό πιθανότατα οφείλεται στα πολλαπλά σφάλματα διακριτοποιήσης στα ολοκληρώματα (7.33) και (7.39).

$x = kh$	$\overline{F}(x)$(θεωρητικό)	$\overline{F}(x)$ $h = 0.01$ (διακριτό Panjer)	$\overline{F}(x)$ $h = 0.01$ (συνεχές Panjer)
0.2	0.999 457 6849	0.999 467 0538	0.999 087 9445
0.4	0.999 285 7597	0.999 297 1743	0.998 915 6727
0.6	0.999 099 8702	0.999 113 4705	0.998 729 4395
0.8	0.998 900 1291	0.998 916 0536	0.998 529 3566
1.0	0.998 686 6458	0.998 705 0343	0.998 315 5350
2.0	0.997 416 9623	0.997 449 7336	0.997 044 1967
4.0	0.993 909 1415	0.993 980 7697	0.993 533 2344
6.0	0.989 196 0212	0.989 319 4873	0.988 817 1510
8.0	0.983 375 4927	0.983 563 2134	0.982 993 7890
10.0	0.976 539 7011	0.976 803 5345	0.976 155 2479

7.5 Η κλάση Willmot

Αναφέρουμε μία απλή αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό μερικών μεικτών σύνθετων κατανομών Poisson, όπου η παράγωγος του λογαρίθμου της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της δομικής παραμέτρου μπορεί να γραφεί ως ένας λόγος δύο πολυωνύμων.

Ορισμός 7.5.1. Έστω Θ μη αρνητική τ.μ. και $U := P_\Theta$. Η U ανήκει στην **κλάση Willmot των απόλυτα συνεχών κατανομών** αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(ι) $\quad F_\Theta(\theta_0) = 0$ και $F_\Theta(\theta_1) = 1$ για $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le \infty$

(ιι) $\quad \frac{d}{d\theta} \ln f_\Theta(\theta) = \frac{\eta(\theta)}{\kappa(\theta)} = \frac{\sum_{n=0}^{w} \eta_n \theta^n}{\sum_{n=0}^{w} \kappa_n \theta^n}$ για κάθε $0 \le \theta_0 \le \theta \le \theta_1 < \infty$.

Η κλάση Willmot συμβολίζεται ως $\mathbf{W(w)}$.

Υποθέτουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα η_w, κ_w είναι διαφορετικό του μηδενός. Επομένως αν $U \in \mathbf{W(w)}$ τότε έχει μια αναπαράσταση τύπου (ii) όπως παραπάνω. Αυτή η κλάση έχει την εξαιρετική ιδιότητα του μετασχηματισμού της σε συζυγείς prior κατανομές σχετικές με την κατανομή Poisson.

Θυμίζουμε ότι σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.2.1, αυτό σημαίνει ότι η posterior κατανομή U^* που δίνεται από τη σχέση

$$U^*(x) := P\{\Theta \le x | N(t) = n\} = \frac{\int_{0-}^{x} \theta^n e^{-\theta t} dU(\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^n e^{-\theta t} dU(\theta)},$$

ανήκει επίσης στην κλάση Willmot. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η παρακάτω πρόταση, η οποία έχει αποδειχθεί στην εργασία [38] σελ. 57-58 του Hesselager (1996).

Παραδείγματα 7.5.2. (a) Δομική κατανομή Γάμμα

Για μία δομική τ.μ. Θ με $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta} \quad \text{για κάθε } \theta \in \mathbb{R}_+,$$

επομένως ισχύει ότι

$$\frac{d}{d\theta}\ln f_\Theta(\theta) = \frac{\beta - 1}{\theta} - \alpha,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση (ii) του Ορισμού 7.5.1 για $w = 1$ και $\eta_0 = \beta - 1 \quad \eta_1 = -\alpha$ και $\kappa_0 = 0 \quad \kappa_1 = 1$.

(b) Δομική γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή

Για μία δομική τ.μ. Θ με γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\eta^{-\gamma}}{2K_\gamma(\omega)}\theta^{\gamma-1}e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\eta^{-1}\theta)/2} \quad \text{για κάθε } \theta > 0,$$

όπου K_γ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τρίτου είδους, και ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{d\theta}\ln f_\Theta(\theta) = \frac{\eta^2 + 2\omega\eta(\gamma-1)\theta - \theta^2}{2\omega\eta\theta^2},$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση (ii) του Ορισμού 7.5.1 για $w = 2$ και $\eta_0 = \eta^2 \quad \eta_1 = 2\omega\eta(\gamma - 1) \quad \eta_2 = -1$ και $\kappa_0 = 0 \quad \kappa_1 = 0 \quad \kappa_2 = 2\omega\eta$.

(c) Δομική γενικευμένη Βήτα κατανομή

Για μία δομική τ.μ. Θ με γενικευμένη Βήτα κατανομή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\theta^{\alpha-1}(\eta-\theta)^{\beta-1}}{\eta^{\alpha+\beta-1}} \quad \text{για κάθε } \theta \in [0, \eta]$$

και ικανοποιείται τη σχέση

$$\frac{d}{d\theta}\ln f_\Theta(\theta) = \frac{(a-1)(\eta-\theta) - (\beta-1)\theta}{(\eta-\theta)\theta}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση (ii) του Ορισμού 7.5.1 για $w = 2$ και $\eta_0 = \eta(\alpha - 1) \quad \eta_1 = -(\alpha+\beta-2) \quad \eta_2 = 0$ και $\kappa_0 = 0 \quad \kappa_1 = \eta \quad \kappa_2 = -1$.

(d) Δομική γενικευμένη κατανομή Pareto

Για μία δομική τ.μ. Θ με γενικευμένη κατανομή Pareto η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\eta^\alpha\theta^{\beta-1}}{(\eta+\theta)^{\alpha+\beta}} \quad \text{για κάθε } \theta \in \mathbb{N}_0$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{d\theta}\ln f_\Theta(\theta) = \frac{\eta(\beta-1)-(\alpha+1)\theta}{\theta(\theta+\eta)},$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση (ii) του Ορισμού 7.5.1 για $w = 2$ και $\eta_0 = \eta(\beta - 1)$ $\quad \eta_1 = -(\alpha+1)$ $\quad \eta_2 = 0$ και $\kappa_0 = 0$ $\quad \kappa_1 = \eta$ $\quad \kappa_2 = 1$.

Παρατήρηση 7.5.3. Για λόγους συμβολισμών, ορίζουμε $n_n = \theta_n = 0$ για κάθε $n \notin \{0, 1, \ldots, w\}$.

Έστω ότι η N είναι $\mathbf{MP}(t, U)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.2 (vi) έχουμε

$$m_N(s) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{-t(1-s)\theta} f_\Theta(\theta) d\theta.$$

Σημειώνουμε ότι

$$m_N^{(n)}(s) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} t^n \theta^n e^{-t(1-s)\theta} f_\Theta(\theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{\overline{n}} p_{m+n}(t) s^m,$$

όπου

$$(m+1)^{\overline{n}} := \frac{(m+n)!}{m!} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0, \\ (m+1)\ldots(m+n), & \text{αν } n > 0. \end{cases}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\big(e^{-t(1-s)\theta} f_\Theta(\theta)\kappa(\theta) &= e^{-t(1-s)\theta}\big(t(s-1)f_\Theta(\theta)\kappa(\theta) + f'_\Theta(\theta)\kappa(\theta) + f_\Theta(\theta)\kappa'(\theta) \\ &= e^{-t(1-s)\theta} f_\Theta(\theta)\big(t(s-1)\kappa(\theta) + \eta(\theta) + \kappa'(\theta)\big), \end{aligned} \tag{7.40}$$

όπου

$$t(s-1)\kappa(\theta) + \eta(\theta) + \kappa'(\theta) = \sum_{n=0}^{k} \big(ts\kappa_n - t\kappa_n + \eta_n + (n+1)\kappa_{n+1}\big)\theta^n.$$

Ολοκληρώνοντας την (7.40) επάνω στο διάστημα (θ_0, θ_1) και πολλαπλασιάζοντας με t^k οδηγούμαστε στην επιθυμητή διαφορική εξίσωση

$$\sum_{n=0}^{k} \big(ts\kappa_n - t\kappa_n + \eta_n + (n+1)\kappa_{n+1}\big) t^{k-n} m_N^{(n)} =$$
$$t^k e^{-t(1-s)\theta_1} f_\Theta(\theta_1) = t^k e^{-t(1-s)\theta_1} f_\Theta(\theta_1) - t^k e^{-t(1-s)\theta_0} f_\Theta(\theta_0)\kappa(\theta_0).$$

Αναπτύσσοντας κατά MacLaurin τις σειρές $m_N^{(n)}(s)$ και $e^{ts\theta}$ και εξισώνοντας τους συντελεστές των s^m (βλ. Willmot [93] (1993)) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-1}^{k} \big(\theta_{n+1} m^{\overline{n+1}} + (\eta_n - \kappa_n t + (n+1)\kappa_{n+1})(m+1)^{\overline{n}}\big) t^{k-n} p_{m+n}(t) &= \\ t^k \pi_{\theta_1 t, m} f_\Theta(\theta_1)\kappa(\theta_1) - t^k \pi_{\theta_0 t, m} f_\Theta(\theta_0)\kappa(\theta_0),& \end{aligned} \tag{7.41}$$

όπου $\pi_{\theta t, m}$ είναι μία πιθανότητα Poisson και $p_{-1}(t) = 0$. Θυμίζουμε ότι $\kappa_{k+1} = \kappa_{-1} = \eta_{-1} = 0$.

Πρόταση 7.5.4. *Έστω $U \in \mathbf{W(w)}$ και U^* η posterior κατανομή της U δοθέντος ότι $N(s) = m$. Τότε*

(1) Αν $\theta_0 \neq 0$, τότε $U^* \in \mathbf{W(w{+}1)}$, όπου $\eta_n^* = \eta_{n-1} + m\theta_n - s\theta_{n-1}$ και $\theta_n^* = \theta_{n-1}, \theta_{-1} = \eta_{-1} = \theta_{w+1} = 0$ για κάθε $n = 1, \ldots, w+1$ και με $\theta_1 = \eta_1 = \theta_{w+1} = 0$.

(2) Αν $\theta_0 = 0$ τότε $U^* \in \mathbf{W(w)}$, όπου $\eta_n^* = \eta_n + m\theta_{n+1} - s\theta_n$ και $\theta_n^* = \theta_n, \theta_{w+1} = 0$ για κάθε $n = 1, \ldots, w$ και $\theta_{m+1} = 0$.

Απόδειξη. Η πυκνότητα f_{U^*} της U^* δίνεται από τον τύπο: $f_{U^*}(\theta) = c\theta^m e^{-s\theta} f_\Theta(\theta)$, όπου η σταθερά c εξαρτάται από τα m, s αλλά όχι από το θ. Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{d}{d\theta}\ln f_{U^*}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\ln c + m\ln\theta - s\theta + \ln f_\Theta(\theta)) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\theta^n}{\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_n\theta^n} + \frac{m - s\theta}{\theta},$$

για κάθε $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Με απλούς υπολογισμούς οδηγούμαστε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι αν $\theta_w = 0$ τότε $\eta_{w+1}^* = \eta_w \neq 0$ στην περίπτωση (1) και $\eta_w^* = \eta_w \neq 0$ στην περίπτωση (2), συνεπώς πράγματι η κατανομή U^* ανήκει στην κλάση Willmot. □

Για αποφυγή πολυπλοκότητας, περιοριζόμαστε στο $t = 1$ και χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $p_m = p_m(1)$ και $N = N_1$. Έστω ότι $U \in \mathbf{W(1)}$. Τότε από τη σχέση (7.41) έχουμε:

$$(\theta_1-\eta_1)(m+1)p_{m+1} = (\kappa_1 m+(\eta_0-\kappa_0+\kappa_1))p_m+\kappa_0 p_{m-1}+\pi_{\theta_0,m}f_U(\theta_0)\kappa(\theta_0)-\pi_{\theta_1,m}f_U(\theta_1)\kappa(\theta_1), \tag{7.42}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\pi_{\theta,m}$ είναι μια πιθανότητα Poisson. Έτσι η σχέση

$$p_{m+1} = (\alpha + \frac{b}{m+1})p_m + \frac{c}{m+1}p_{m-1} \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N} \tag{7.43}$$

εφαρμόζεται με

$$\alpha = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \eta_1}, \quad b = \frac{\eta_0 - \theta_0}{\theta_1 - \eta_1}, \quad c = \frac{\theta_0}{\theta_1 - \eta_1}.$$

υποθέτοντας ότι $\theta_1 \neq \eta_1$, καθώς και

$$\pi_{\theta_0,m}f_U(\theta_0)\kappa(\theta_0) = \pi_{\theta_1,m}f_U(\theta_1) \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}. \tag{7.44}$$

Η τελευταία απαίτηση ικανοποιείται εάν ισχύει ή μόνο η

$$f_\Theta(\theta_0)\kappa(\theta_0) = f_\Theta(\theta_1)\kappa(\theta_1) = 0$$

ή μόνο η

$$\theta_0 = 0 \quad \text{και} \quad f_\Theta(\theta_1)\kappa(\theta_1) = 0.$$

Υπο αυτή την προυπόθεση η σχέση (αναδρομικός τύπος του Sundt)

$$g_\kappa = \sum_{j=0}^{\kappa}((a + \frac{b_j}{\kappa})f_j + \frac{c_j}{2\kappa}f_j^{2*})g_{\kappa-1} + (p_1 - (a+b)p_0)f_\kappa \quad \text{για κάθε } \kappa \in \mathbb{N}$$

μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(\kappa_1 - \eta_1)g_k = \sum_{j=0}^{k}((\kappa_1 + \frac{(\eta_0 - \kappa_0)j}{k})f_j + \frac{\kappa_0 j}{2k}f_j^{2*})g_{k-j} \tag{7.45}$$

εάν ισχύει ότι $f_\Theta(\theta_0)\kappa(\theta_0) = f_\Theta(\theta_1)\kappa(\theta_1) = 0$ ή

$$(\kappa_1 - \eta_1)g_k = \sum_{j=0}^{k}((\kappa_1 + \frac{(\eta_0 - \kappa_0)j}{k})f_j + \frac{\kappa_0 j}{2k}f_j^{2*})g_{k-j} + f_\Theta(0)\kappa_0 f_k \tag{7.46}$$

στην περίπτωση όπου $\theta_0 = 0$ και $f_\Theta(\theta_1)\kappa(\theta_1) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Είναι γνωστό ότι $g_0 = G(f_0) = L(1-f_0)$. Αν $f_0 = 0$ η αρχική συνθήκη γίνεται απλώς $g_0 = p_0$. Αν $f_0 > 0$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο:

$$\widetilde{f_0} := 0, \quad \widetilde{f_k} := f_k/(1-f_0), \quad \widetilde{\Theta} = (1-f_0)\Theta$$

ή ισοδύναμα

$$\widetilde{U}(\theta) = U(\theta/(1-f_0)), \quad \widetilde{H}(s) = (H(s)-f_0)/(1-f_0), \quad \widetilde{G}(s) = G(1-(1-f_0)(1-s)).$$

Τότε όμως θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_Y(s) &= \widetilde{G}\big(\widetilde{H}(s)\big) \\
&= G\big(1-(1-f_0)(1-\frac{H(s)-f_0}{1-f_0})\big) \\
&= G\big(H(s)\big) = H_Y(s).
\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $U \in W(w)$ τότε επιπλέον θα έχουμε

$$\frac{d}{d\theta}\ln f_{\widetilde{U}}(\theta) = \frac{\widetilde{U}''(\theta)}{\widetilde{U}'(\theta)} = \frac{U''(\theta/(1-f_0))}{(1-f_0)U'(\theta/(1-f_0))}.$$

Επομένως $\widetilde{U} \in \mathbf{W(w)}$ με

$$\widetilde{\theta_0} = (1-f_0)\theta_0 \quad \widetilde{\theta_1} = (1-f_0)\theta_1$$

και

$$\widetilde{\eta_n} = \eta_n/(1-f_0)^n, \quad \widetilde{\kappa_n} = \kappa_n/(1-f_0)^{n-1}$$

ή

$$\widetilde{\eta}_n = \eta_n(1-f_0)^{w-n}, \quad \widetilde{\kappa}_n = \kappa_n(1-f_0)^{w+1-n}.$$

Από εδώ και στο εξής με $\gamma_{\theta,k}$ θα συμβολίσουμε την σύνθετη πιθανότητα Poisson, δηλ.

$$\gamma_{\theta,k} := \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{\theta,m} f_k^{m,*}$$

Θεώρημα 7.5.5. (Willmot, 1993) *Έστω* $U \in W(1)$ *και* $\eta_1 \neq \kappa_1$. *Τότε* $g_0 = G(f_0)$ *και*

$$(\kappa_1 - \eta_1) g_k = (\sum_{j=0}^{k} (\kappa_1 + \frac{(\eta_0 - \kappa_0) j}{k}) f_j + \frac{\kappa_0 j}{2\kappa} f_j^{2*}) g_{\kappa - j} + b_\kappa(\theta_0) - b_\kappa(\theta_1), \quad \textit{για κάθε } \kappa \in \mathbb{N} \tag{7.47}$$

όπου

$$b_\kappa(\theta) = \begin{cases} \kappa_0 f_\Theta(0) f_\kappa, \ \textit{αν } \theta = 0 \\ \theta^{-1} \kappa(\theta) f_\Theta(\theta) \gamma \theta_1 \kappa, \ \textit{αν } 0 < \theta < \infty \\ 0, \ \textit{αν } \theta = \infty \end{cases}$$

Απόδειξη. Η αρχική απόδειξη που έδωσε ο Willmot [93] (1993) βασίστηκε πάνω στη διαφορική εξίσωση για το $G(s)$ που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της (7.41). Εδώ θα δούμε την απόδειξη του Schröter [74] (1990) p.164-165. Από τη συνθήκη (7.42) προκύπτει

$$\begin{aligned} (\kappa_1 - \eta_1) g_k &= (\kappa_1 - \eta_1) \sum_{m=0}^{\infty} p_{m+1} f_k^{(m+1)*} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (\kappa_1 + \frac{\eta_0 - \kappa_0}{m+1}) p_m f_k^{(m+1)*} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa_0}{m+1} p_{m-1} f_k^{(m+1)*} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi_{\theta_0,m} f_\Theta(\theta_0)\kappa(\theta_0) - \pi_{\theta_1,m} f_\Theta(\theta_1)\kappa(\theta_1)}{m+1} f_k^{(m+1)*}. \end{aligned} \tag{7.48}$$

(a) Από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.3 έχουμε

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\kappa_1 + \frac{\eta_0 - \kappa_0}{m+1}) p_m f_k^{(m+1)*} = \sum_{m=0}^{\infty} (\kappa_0 + \frac{(\eta_0 - \kappa_0) j}{k}) f_j g_{k-j}.$$

(b) Ισχύει

$$\mathbb{E}[Z_1 + Z_2 | Z_1 + Z_2 + ... + Z_m = k] = \sum_{j=0}^{k} j \frac{f_j^{2*} f_{k-j}^{(m-1)*}}{f_k^{(m+1)*}} = \frac{2k}{m+1}$$

ή

$$\frac{f_k^{(m+1)*}}{m+1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{j}{2k} f_j^{2*} f_{k-j}^{(m-1)*}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa_0}{m+1}p_{m-1}f_k^{(m+1)*} &= \sum_{m=1}^{\infty}\kappa_0 p_{m-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{j}{2k}f_j^{2*}f_{k-j}^{(m-1)*}\\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{\kappa_0 j}{2k}f_j^{2*}f_{k-j}^{(m-1)*}.\end{aligned}$$

(c) Έστω $b_k(\theta)$ όπως στο Θεώρημα 7.5.5 και έστω

$$\widetilde{b_k}(\theta) := \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\pi_{\theta,m}f_U(l)\kappa(\theta)}{m+1}f_k^{(m+1)*}.$$

Επειδή $\pi_{00} = 1$, θα έχουμε $\widetilde{b_k}(0) = f_\Theta(0)\kappa(0)f_k = b_k(0)$. Επιπλέον $f_\Theta(\infty) = 0$, επομένως $\widetilde{b_k}(\infty) = b_k(\infty) = 0$. Τώρα, για κάθε $0 < \theta < \infty$ και $k \neq 0$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\pi_{\theta,m}f_k^{(m+1)*} &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+1}\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}f_k^{(m+1)*}\\ &= \frac{1}{\theta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^{m+1}}{(m+1)!}e^{-\theta}f_k^{(m+1)*} = \theta^{-1}\gamma_{l,k}\end{aligned}$$

και $\widetilde{b_k}(\theta) = b_k(\theta)$. □

Παράδειγμα 7.5.6. Από το Παράδειγμα 5.3.11, η N ακολουθεί την κατανομή Delaporte εάν η τ.μ. Θ είναι μια μετατοπισμένη κατανομή Γάμμα, δηλαδή $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$ ή

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)} \quad \text{για κάθε } \theta > \gamma$$

Τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\ln f_\Theta(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\big(c + (\beta-1)\ln(\theta-\gamma) - \alpha(\theta-\gamma)\big)\\ &= \frac{\beta-1}{\theta-\gamma} - \alpha = \frac{\beta-1+\gamma\alpha-\alpha\theta}{-\gamma+\theta}.\end{aligned}$$

Τότε οι συνθήκες $(i),(ii)$ του Ορισμού 7.5.1 ισχύουν με

$$\theta_0 = \gamma, \quad \eta_0 = \beta - 1 + \alpha\gamma, \quad \kappa_0 = -\gamma$$

$$\theta_1 = \infty, \quad \eta_1 = -\alpha, \quad \kappa_1 = 1.$$

Επειδή $\kappa(\alpha) = 0$, προκύπτει ότι η σχέση (7.48) μπορεί να αναχθεί στην

$$(1+\alpha)g_k = \sum_{j=0}^{k}((1+\frac{(\beta-1+\alpha\gamma+\gamma)j}{k})f_j - \frac{\alpha j}{2k}f_j^{2*})g_{k-j} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

7.6 Μια επέκταση της αναδρομής Panjer

Σε όλη την ενότητα με $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ συμβολίζεται μία κατανομή με $Q(\mathbb{N}_0) = 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε $q_n := Q(\{n\})$.

Οι Sundt and Jewell απέδειξαν, ότι μία μη εκφυλισμένη κατανομή αριθμού απαιτήσεων $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ικανοποιεί την αναδρομή

$$q_{n+1} = \left(a + \frac{b}{q_n + 1} q_n\right)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, αν και μόνο αν η Q είναι μία διωνυμική, Poisson ή αρνητική διωνυμική κατανομή (βλ. Θεώρημα 7.2.1). Ένας παρόμοιος χαρακτηρισμός για κατανομές αριθμού α-παιτήσεων, που ικανοποιούν τον παραπάνω αναδρομικό τύπο, έχει γίνει από τον Willmot [92] (1988). Στην ενότητα αυτή επεκτείνονται αυτά τα αποτελέσματα και η επαγόμενη αναδρομή για τις κατανομές συνολικών απαιτήσεων στην περίπτωση, όπου ο αναδρομικός τύπος ισχύει για όλα τα $n \geq k$ για αυθαίρετο k. Τα αποτελέσματα έχουν αποδειχθεί από τους K.Th. Hess, A. Liewald and K.D. Schmidt [36] (2002), και είναι ενδιαφέροντα στα χαρτοφυλάκια κινδύνων, που υπόκεινται σε αντασφάλιση καταστροφικών υπερβολικών ζημιών, όπου, κατά κανόνα, η υπέρβαση της προτεραιότητας γίνεται μόνο όταν προκύπτουν τουλάχιστον k απαιτήσεις.

Ορισμοί 7.6.1. Μία **κατανομή αριθμού απαιτήσεων** είναι μία ακολουθία $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με $q_n \geq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$. Μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **μη εκφυλισμένη**, αν $q_n < 1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Μία μη εκφυλισμένη κατανομή αριθμού απαιτήσεων $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **κατανομή Panjer** με παραμέτρους $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}_0$, αν $q_n = 0$ για όλα τα $n \leq k-1$ και

$$q_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) q_n$$

για όλα τα $n \geq k$. Συμβολισμός $Q =$**Panjer**(a, b, k). Η κατανομή Panjer(a, b, k) ονομάζεται επίσης **κατανομή Panjer τάξης k** και η οικογένεια όλων των κατανομών Panjer τάξης k ονομάζεται η **κλάση Panjer τάξης k**.

Οι Sundt and Jewell [84] (1981) απέδειξαν, ότι η κλάση Panjer τάξης 0 ταυτίζεται με την οικογένεια όλων των (μη εκφυλισμένων) διωνυμικών, Poisson ή αρνητικών διωνυμικών κατανομών τάξης 0. Ο Willmot [92] (1988) χαρακτήρισε όλες τις παραπάνω κατανομές με την κλάση Panjer τάξης 1. Στην ενότητα αυτή ταυτοποιούνται όλες οι παραπάνω κατανομές με την κλάση Panjer τάξης k για οποιαδήποτε $k \in \mathbb{N}_0$ (βλ. Θεώρημα 7.6.9).

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων στηρίζονται σε μία διαφορική εξίσωση, η οποία χαρα-κτηρίζει την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας κατανομής Panjer (βλ. Θεώρημα 7.6.2). Επίσης δίνεται μία εφαρμογή στις οικογένειες Hoffman.

Τέλος σημειώνουμε, ότι οι κατανομές Panjer τάξης $k \geq 1$ είναι κατάλληλες για χαρτο-φυλάκια κινδύνων, τα οποία υπόκεινται σε καταστροφή υπερσυσσωρευτικής (αντ)ασφάλισης (catastrophe excess-of-loss reinsurance), όπου κατά κανόνα, ξεπερνιέται η προτεραιότητα μόνο όταν συμβαίνουν τουλάχιστον k απαιτήσεις.

Στο παρακάτω Θεώρημα χαρακτηρίζεται μία κατανομή **Panjer**(a, b, k) μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης για την πιθανογεννήτριά της. Για μία κατανομή Q αριθμού απαιτήσεων, η πιθανογεννήτρια της $m_Q : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ορίζεται από τη σχέση

$$m_Q(t) := \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n.$$

Τότε έχουμε $q_n = m_Q^{(n)}(0)/n!$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 7.6.2. *Έστω $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μία μη εκφυλισμένη κατανομή αριθμού απαιτήσεων. Για $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}_0$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) $Q =$**Panjer**(a, b, k).

(b) Για κάθε $l \geq 1$ η m_Q ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$(1 - at)h^{(l)}(t) = (la + b)h^{(l-1)}(t) + q_k \binom{k}{l} l! t^{k-1}$$

με $t \in [0, 1)$ και με αρχικές συνθήκες $h^{(j)}(0) = 0$ για όλα τα $j \leq k - 1$.

(c) Η m_Q ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(1 - at)h^{(k+1)}(t) = \big((k + 1)a + b\big)h^{(k)}(t)$$

με $t \in [0, 1)$ και με αρχικές συνθήκες $h^{(j)}(0) = 0$ για όλα τα $j \leq k - 1$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει το (a). Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{m_Q^{(l)}(t)}{l!} - q_k \binom{k}{l} t^{k-1} &= \sum_{n=k+1}^{\infty} q_k \binom{n}{l} t^{n-l} \\
&= \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1} \binom{n}{l} t^{n-l} \\
&= \sum_{n=j}^{\infty} \left(a + \frac{b}{j+1}\right) q_j \binom{j+1}{l} t^{j+1-l} \\
&= at \sum_{j=k}^{\infty} q_j \binom{j}{l} t^{j-l} + \left(a + \frac{b}{l}\right) \sum_{j=k}^{\infty} q_j \binom{j}{-1l} t^{j-(l-1)} \\
&= at \frac{m_Q^{(l)}(t)}{l!} + \left(a + \frac{b}{l}\right) \frac{m_Q^{(l-1)}(t)}{(l-1)!}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$(1 - at)m_Q^{(l)}(t) = (la + b)m_Q^{(l-1)}(t) + q_k \binom{k}{l} l! t^{k-1}.$$

Άρα $(a) \Longrightarrow (b)$. Προφανώς ισχύει ότι $(b) \Longrightarrow (c)$. Υποθέτουμε τώρα, ότι ισχυει το (c). Με επαγωγή στο $n \geq k$ μπορούμε να αποδείξουμε, ότι

$$(1-at)m_Q^{(n+1)}(t) = \big((n+1)a+b\big)m_Q^{(n)}(t)$$

για όλα τα $n \geq k$. Θέτοντας $t := 0$, η προηγούμενη ισότητα μάς δίνει ότι

$$q_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right)q_n$$

για όλα τα $n \geq k$ και οι αρχικές συνθήκες μάς δίνουν $q_n = 0$ για όλα τα $n \leq k-1$. Άρα ισχύει $(c) \Longrightarrow (a)$. $\square$

Ορισμός 7.6.3. Για $l \in \mathbb{N}_0$ και μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων $Q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, **διωνυμική ροπή** l **τάξης** ονομάζεται η

$$\beta_Q^{[l]} := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{l} q_n = \sum_{n=l}^{\infty} \binom{n}{l} q_n.$$

Η διωνυμική ροπή τάξης l είναι πεπερασμένη, αν και μόνο αν $\lim_{t \to 1} m_Q^{(l)}(t)$ είναι πεπερασμένο, και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\beta_Q^{[l]} = \frac{m_Q^{(l)}(1)}{l!}.$$

Επιπλέον, μία διωνυμική ροπή είναι πεπερασμένη, αν και μόνο αν η ροπή ίδιας τάξης είναι πεπερασμένη. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.6.2.

Πόρισμα 7.6.4. *Έστω $Q =$* **Panjer**(a,b,k) *με $a < 1$. Τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης.*

Οι κατανομές της κλάσης Panjer τάξης k 7.6.5. *Μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων $Q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι η:*

- *διωνυμική κατανομή* $\mathbf{B}(m,\theta)$ *με παραμέτρους $m \in \mathbb{N}$ και $\theta \in (0,1)$, αν η*

  $$q_n = \binom{m}{n}\theta^n(1-\theta)^{m-n}$$

  ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$,

- *κατανομή Poisson* $\mathbf{P}(a)$ *με παράμετρο $a \in (0,\infty)$, αν η*

  $$q_n = e^{-a}\frac{a^n}{n!}$$

  ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$,

- *η αρνητική διωνυμική κατανομή* $\mathbf{NB}(\beta, \theta)$ *με παραμέτρους* $\beta > 0$ *και* $\theta \in (0,1)$, *αν η*
$$q_n = \binom{\beta+n-1}{n}(1-\theta)^\beta \theta^n$$
ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$,

- **λογαριθμική κατανομή** $\mathbf{Log}(\theta)$ *με παράμετρο* $\theta \in (0,1)$, *αν η*
$$q_n = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^n}{n}$$
ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

- **επεκταμένη μη αρνητική κατανομή** $\mathbf{ENB}(m, \beta, \theta)$ *με παραμέτρους* $m \in \mathbb{N}$, $\beta \in (-m, -m+1)$ *και* $\theta \in (0,1]$, *αν η*
$$q_n = \frac{\binom{\beta+n-1}{n}\theta^n}{(1-\theta)^{-\beta} - \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\beta+j-1}{j}\theta^j}$$
ισχύει για όλα τα $n \leq m$,

- **επεκταμένη λογαριθμική κατανομή** $\mathbf{ELog}(m, \theta)$ *με παραμέτρους* $m \in \{2, 3, \ldots\}$ *και* $\theta \in (0,1]$, *αν η*
$$q_n = \frac{\binom{n}{m}^{-1}\theta^n}{\sum_{j=m}^{\infty}\binom{j}{m}^{-1}\theta^j}$$
ισχύει για όλα τα $n \geq m$.

Αυτές οι κατανομές θα αναφέρονται ως οι **βασικές κατανομές αριθμού απαιτήσεων**.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί, ότι κάθε βασική κατανομή αριθμού απαιτήσεων είναι μία κατανομή Panjer. Ο παρακάτω Πίνακας 1 περιέχει για κάθε βασική κατανομή αριθμού απαιτήσεων Q, *θεωρούμενη ως κατανομή* $\mathbf{Panjer}(a, b, k)$, *τις παραμέτρους* a, b, k *και τις πιθανογεννήτριες* m_Q.

Πίνακας 1

Βασικές κατανομές αριθμού απαιτήσεων

Q	**a**	**b**	**k**	$\mathbf{m_Q(t)}$
$\mathbf{B}(m,\theta)$	$-\frac{\theta}{1-\theta}$	$(m+1)\frac{\theta}{1-\theta}$	*0*	$(1-\theta+\theta t)^m$
$\mathbf{P}(a)$	*0*	a	*0*	$e^{-a(1-t)}$
$\mathbf{NB}(\beta,\theta)$	θ	$-\theta$	*0*	$\left(\frac{1-\theta t}{1-\theta}\right)^{-\beta}$
$\mathbf{Log}(\theta)$	θ	$-\theta$	*1*	$\frac{\log(1-\theta t)}{\log(1-\theta)}$
$\mathbf{ENB}(m,\beta,\theta)$	θ	$(\beta-1)\theta$	m	$\frac{(1-\theta t)^{-\beta}-\sum_{j=0}^{m-1}\binom{\beta+j-1}{j}(\theta t)^j}{(1-\theta)^{-\beta}-\sum_{j=0}^{m-1}\binom{\beta+j-1}{j}\theta^j}$
$\mathbf{ELog}(m,\theta)$	θ	$-m\theta$	m	$\frac{\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}^{-1}(\theta t)^n}{\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}^{-1}\theta^n}$

Παρατήρηση 7.6.6. Ο Πίνακας 1 δείχνει, ότι υπάρχουν κατανομές $\mathbf{Panjer}(a, b, k)$ με $a = 1$. Αυτό παρατηρήθηκε από τον Willmot [92] (1988), ο οποίος ανακάλυψε ότι $\mathbf{ENB}(1, \beta, 1) = \mathbf{Panjer}(1, \beta - 1, 1)$.

Ορισμός 7.6.7. Για μία κατανομή $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ αριθμού απαιτήσεων και $k \in \mathbb{N}_0$ που ικανοποιεί τις σχέσεις $q_k > 0$ και $\sum_{n=k+1}^{\infty} q_n > 0$, ορίζουμε

$$Q^{<k>} := \{q_n^{<k>}\}_{n\in\mathbb{N}_0},$$

όπου $q_n^{<k>} := 0$ για όλα τα $n \leq k - 1$ και

$$q_n^{<k>} := \frac{q_n}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j}$$

για όλα τα $n \geq k$. Τότε η $Q^{<k>}$ είναι μία μη εκφυλισμένη κατανομή αριθμού απαιτήσεων με πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$m_{Q^{<k>}}(t) = \frac{m_Q(t) - \sum_{j=0}^{k-1} q_j t^j}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j}.$$

Η κατανομή $Q^{<k>}$ ονομάζεται η k-**περικοπή** της Q.

Ο παρακάτω Πίνακας 2 μάς δίνει τις k-περικοπές $Q^{<k>}$ των βασικών κατανομών Q αριθμού απαιτήσεων:

Πίνακας 2		
k-περικοπές των βασικών κατανομών αριθμού απαιτήσεων		
Q	**k**	$\mathbf{Q^{<k>}}$
$\mathbf{B}(m, \theta)$	$\{0, 1, \ldots, m - 1\}$	$\mathbf{B}(m, \theta; k)$
$\mathbf{P}(a)$	$\{0, 1, \ldots\}$	$\mathbf{P}(a; k)$
$\mathbf{NB}(\beta, \theta)$	$\{0, 1, \ldots\}$	$\mathbf{NB}(\beta, \theta; k)$
$\mathbf{Log}(\theta)$	$\{1, 2, \ldots\}$	$\mathbf{Log}(\theta; k)$
$\mathbf{ENB}(m, \beta, \theta)$	$\{m, m + 1, \ldots\}$	$\mathbf{ENB}(m, \beta, \theta; k)$
$\mathbf{ELog}(m, \theta)$	$\{m, m + 1, \ldots\}$	$\mathbf{ELog}(m, \theta; k)$

Ιδιαιτέρως, έχουμε

$$\mathbf{B}(m, \theta) = \mathbf{B}(m, \theta; 0)$$

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(a; 0)$$

$$\mathbf{NB}(\beta, \theta) = \mathbf{NB}(\beta, \theta; 0)$$

$$\mathbf{Log}(\theta) = \mathbf{Log}(\theta; 1)$$

$$\mathbf{ENB}(m, \beta, \theta) = \mathbf{ENB}(m, \beta, \theta; m)$$

$$\mathbf{ELog}(m,\theta) = \mathbf{ELog}(m,\theta;m)$$

Αφού κάθε βασική κατανομή αριθμού απαιτήσεων είναι μία κατανομή Panjer, είναι σαφές ότι η k-περικοπή μιας βασικής κατανομής αριθμού απαιτήσεων ανήκει στην κλάση Panjer τάξης k. Για να αποδείξουμε, ότι ισχύει και το αντίστροφο αυτού του ισχυρισμού, χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 7.6.8. *Έστω ότι $Q = $* **Panjer**$(a,b,k)$. *Τότε $(k+1)a+b>0$. Επιπλέον, αν $a+b<0$ τότε $a \leq 1$.*

Απόδειξη. Η πρώτη ανισότητα είναι άμεση, αφού η Q είναι μη εκφυλισμένη. Έστω τώρα ότι $a+b \geq 0$ και $a>0$. Τότε για όλα τα $n \geq k$ έχουμε

$$q_{n+1} = \frac{na+a+b}{n+1} q_n \geq \frac{n}{n+1} a q_n,$$

επομένως

$$q_{n+1} \geq \frac{k+1}{n+1} a^{n-k} q_{k+1}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k+1}{n+1} a^{n-k}$ αποκλίνει για $a \geq 1$, προκύπτει ότι $a<1$. Αν υποθέσουμε ότι $a>0$ και $a+b<0$, τότε για όλα τα $n \geq k$ έχουμε

$$q_{n+1} = \frac{(n-k)a+(k+1)a+b}{n+1} q_n \geq \frac{n-k}{n+1} q_n,$$

επομένως

$$q_{n+1} \geq \binom{n+1}{k+1}^{-1} a^{n-k} q_{k+1}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+1}{k+1}^{-1} a^{n-k}$ αποκλίνει για $a>1$, προκύπτει $a \leq 1$. □

Θεώρημα 7.6.9. *Έστω Q μία μη εκφυλισμένη κατανομή αριθμού απαιτήσεων. Για $k \in \mathbb{N}_0$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) Η Q ανήκει στην κλάση Panjer τάξης k.

(b) Η Q είναι η $k-$περικοπή μιας βασικής κατανομής αριθμού απαιτήσεων.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα, ότι ισχύει το (a), και θεωρούμε την κατανομή $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} =$ **Panjer**(a,b,k). Από το Θεώρημα 7.6.2 έχουμε

$$\frac{d(\ln m_Q^{(k)})(t)}{dt} = \frac{(k+1)a+b}{1-at} \tag{7.49}$$

για όλα τα $t \in [0,1)$ και $m_Q^{(0)} = 0$ για όλα τα $n \leq k-1$. Για να επιλύσουμε την (7.49) διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, που εξαρτόνται από το a:

- *Η περίπτωση* $a < 0$: Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει

$$m_Q^{(k)}(t) = c(1-at)^{-(k+1+b/a)}$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Αφού η σχέση

$$q_{n+1} = \frac{(m-k)a + (k+1)a + b}{n+1} q_n$$

ισχύει για όλα τα $n \geq k$, από το Λήμμα 7.6.8 προκύπτει η ύπαρξη κάποιου $m \geq k$ ώστε $q_{m+1} = 0 < q_m$.

Έτσι έχουμε $m = (a+b)/(-a)$, συνεπώς

$$m_Q^{(k)}(t) = c(1-at)^{m-k}.$$

Η γενική λύση της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης έχει τη μορφή

$$m_Q(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^j + c_k(1-at)^m$$

και οι αρχικές συνθήκες μαζί με τη σχέση $m_Q(1) = 1$ μας δίνουν

$$m_Q(t) = \frac{\left(\frac{1}{1-a} + \frac{-a}{1-a}t\right)^m - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{m-j} \left(\frac{-a}{1-a}t\right)^j}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{m-j} \left(\frac{-a}{1-a}\right)^j}.$$

Επομένως, έχουμε

$$Q = \mathbf{B}\big((a+b)/(-a), (-a)/(1-a), k\big).$$

- *Η περίπτωση* $a = 0$: Σε αυτήν την περίπτωση, από το Λήμμα 7.6.8 προκύπτει ότι $b > 0$, και έτσι παίρνουμε

$$m_Q^{(k)} = ce^{bt}$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης έχει την μορφή

$$m_Q(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^j + c_k e^{bt}$$

και οι αρχικές συνθήκες μαζί με τη σχέση $m_Q(1) = 1$ μας δίνουν

$$m_Q(t) = \frac{e^{-b(1-t)} - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-bt} \frac{(bt)^j}{j!}}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-b} \frac{b^j}{j!}}.$$

Επομένς έχουμε $Q = \mathbf{P}(b,k)$.

- *Η περίπτωση* $a > 0$: Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$m_Q^{(k)}(t) = c(1-at)^{-(k+1+b/a)}$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Για να επιλύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση, διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις εξαρτώμενες από το b.

  - *Η περίπτωση* $b > -a$: Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $a + b > 0$ και από το Λήμμα 7.6.8 προκύπτει $a \in (0, 1)$. Θέτοντας $\beta := \frac{a+b}{a}$ παίρνουμε $\beta \in (0, \infty)$ και

$$m_Q^{(k)} = c(1-at)^{-(k+\beta)}.$$

Η γενικη λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης έχει την μορφή

$$m_Q(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^j + c_k(1-at)^{-\beta}$$

και οι αρχικές συνθήκες μαζί με τη σχέση $m_Q(1) = 1$ μας δίνουν

$$m_Q(t) = \frac{\left(\frac{1-at}{1-a}\right)^{-\beta} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{\beta+j-1}{j}(1-a)^{\beta}(at)^j}{1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{\beta+j-1}{j}(1-a)^{\beta}a^j}.$$

Επομένως, έχουμε $Q = \mathbf{NB}\big((a+b)/a, a, k\big)$.

  - *Η περίπτωση* $b = -a$: Σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε

$$m_Q^{(k)}(t) = c(1-at)^{-k}$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Η γενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης έχει την μορφή

$$m_Q(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^j + c_k \ln(1-at)$$

και οι αρχικές συνθήκες μαζί με τη σχέση $m_Q(1) = 1$ μας δίνουν

$$m_Q(t) = \frac{\frac{\ln(1-at)}{\ln(1-a)} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(at)^j}{j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a^j}{j}}.$$

Επομένως, έχουμε $Q = \mathbf{Log}(a, k)$.

  - *Η περίπτωση* $-(m+1)a < b < -ma$ *με* $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$: Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $a + b < 0$ και από το Λήμμα 7.6.8 προκύπτει $a \in (0, 1]$. Θέτοντας $\beta := (a + b)/a$, παίρνουμε $\beta \in (-m, m + 1)$. Προχωρώντας όπως και στην περίπτωση $b > -a$, αλλά λαμβάνοντας υπόψη την περίπτωση $a = 1$, παίρνουμε

$$m_Q(t) = \frac{(1-at)^{-\beta} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{\beta+j-1}{j}(at)^j}{(1-a)^{-\beta} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{\beta+j-1}{j}a^j}.$$

Επομένως, έχουμε $Q = \mathbf{ENB}\big(m, (a+b)/a, a, k\big)$.

- *Η περίπτωση* $b = -ma$ *με* $m \in \{2, 3, \ldots, k\}$: Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $a + b < 0$ και το Λήμμα 7.6.8 μάς δίνει $a \in (0, 1]$. Τότε παίρνουμε

$$m_q^{(k)}(t) = c(1 - at)^{m-k-1}$$

για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Η γενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης έχει την μορφή

$$m_Q(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^j + c_k (1 - at)^{m-1} \ln(1 - at)$$

και οι αρχικές συνθήκες μαζί με τη σχέση $m_Q(1) = 1$ μας δίνουν

$$m_Q(t) = \frac{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{m}^{-1} (at)^n}{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{m}^{-1} a^n}.$$

Επομένως, έχουμε $Q = \mathbf{ELog}(m, a, k)$.

- *Η περίπτωση* $b \leq -(k+1)a$: Αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη λόγω του Λήμματο 7.6.8. Επομένως ισχύει $(a) \implies (b)$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι προφανής, όπως σημειώθηκε πριν στο Λήμμα 7.6.8.

$\square$

Στις περιπτώσεις $k = 0$ *και* $k = 1$, *παίρνουμε τα αποτελέσματα των Sundt and Jewell [84] (1981) και του Willmot [92] (1988), αντίστοιχα.*

Έστω N *μία τ.μ., ώστε η κατανομή της* Q *να είναι μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων, έστω* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισοκατανεμημένων και ανεξαρτήτων της* N *τ.μ., και έστω* $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$. *Αν η κατανομή* F *κάθε* X_n *είναι μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων, τότε το ίδιο ισχύει και για την κατανομή* $F^{*k} = \{f_n^{*k}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *της τ.μ.* $\sum_{n=1}^{k} X_n$ *και για την κατανομή* $\mathbf{C}(Q, F)$ *της τ.μ.* S. *Είναι γνωστό, ότι* $m_{F^{*k}}(t) = \big(m_k(t)\big)^k$ *και* $m_{\mathbf{C}(Q,F)}(t) = m_Q\big(m_F(t)\big)$ *για όλα τα* $t \in \mathbb{R}_+$. *Το παρακάτω αποτέλεσμα γενικεύει το Θεώρημα 7.6.2.*

Θεώρημα 7.6.10. *Έστω* $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *μία μη εκφυλισμένη κατανομή αριθμού απαιτήσεων. Για* $a, b \in \mathbb{R}$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $Q = \mathbf{Panjer}(a, b, k)$.

(β) Για κάθε κατανομή $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *αριθμού απαιτήσεων με* $f_0 = 0$ *και για κάθε* $l \geq 1$, *η* $m_{\mathbf{C}(Q,F)}$ *ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση*

$$\big(1 - am_F(t)\big) h^{(l)}(t) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \big(a + b\frac{i}{l}\big) h^{(l-i)}(t) m_F^{(i)}(t) + q_k m_{F^{*k}}^{(l)}(t)$$

με $t \in [0, 1)$ *και τις αρχικές συνθήκες* $h^{(j)}(0) = 0$ *για όλα τα* $j \leq k - 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει το (a), και έστω $G := \mathbf{C}(Q, F)$. Τότε έχουμε

$$m_G(t) = m_Q\big(m_F(t)\big)$$

και επομένως

$$m'_G(t) = m'_Q\big(m_F(t)\big)m'_F(t).$$

Από το Θεώρημα 7.6.2 προκύπτει

$$\begin{aligned}\big(1 - am_F(t)\big)m'_G(t) &= \big(1 - am_F(t)\big)m'_Q\big(m_F(t)\big)m'_F(t)\\ &= \big((a+b)m_Q(m_F(t)) + q_k k(m_F(t))^{k-1}\big)m'_F(t)\\ &= (a+b)m_G(t)m'_F(t) + q_k m'_{F^{*k}}(t).\end{aligned}$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση του (b) στην περίπτωση $l = 1$, και η γενική περίπτωση προκύπτει με επαγωγή στο l. Επιπλέον το Θεώρημα 7.6.2 μάς δίνει

$$m_Q^{(j)}(0) = 0$$

για όλα τα $j \leq k-1$. Αφού $m_F(0) = f_0 = 0$, με διαφόριση και στα δύο μέλη της ισότητας $m_G(t) = m_Q(m_F(t))$ παίρνουμε

$$m_G^{(j)}(0) = 0$$

για όλα τα $j \leq k-1$. Επομένως, ισχύει η συνεπαγωγή $(a) \Longrightarrow (b)$.

Υποθέτουμε τώρα, ότι ισχύει το (b). Για την κατανομή $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ αριθμού απαιτήσεων με $f_1 = 1$, έχουμε $m_F(t) = t$ και επομένως $\mathbf{C}(Q, F) = Q$ και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$(1 - at)h^{(l)}(t) = (la + b)h^{(l-1)}(t) + q_k \binom{k}{l} l!t^{k-l}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.6.2 παίρνουμε ότι $Q = \mathbf{Panjer}(a, b, k)$. Επομένως ισχύει η συνεπαγωγή $(b) \Longrightarrow (a)$. □

Αν η κατανομή $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, που θερήσαμε στο Θεώρημα 7.6.10, προκύπτει ως μία προσέγγιση μιας συνεχούς κατανομής, τότε η συνθήκη $f_0 = 0$ μπορεί να παραλειφθεί. Για αυτήν την περίπτωση έχουμε την παρακάτω παραλλαγή του Θεωρήματος 7.6.10.

Θεώρημα 7.6.11. *Έστω ότι $Q = \mathbf{Panjer}(a, b, k)$. Αν η $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων και αν $G = \mathbf{C}(Q, F)$, τότε $m_G(t) = m_Q(m_F(t))$ και η σχέση*

$$(1 - am_F(t))m_G^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^{l} \binom{l}{i} \big(a + b\frac{i}{l}\big) m_G^{(l-i)}(t) m_F^{(i)}(t) + q_k m_{F^{*k}}^{(l)}(t)$$

ισχύει για όλα τα $l \geq 1$. Για $t = 0$, το Θεώρημα 7.6.11 μάς δίνει την παρακάτω επέκταση της αναδρομής του Panjer (Θεώρημα 7.3.3):

Πόρισμα 7.6.12. *Έστω* $Q = \mathbf{Panjer}(a, b, k)$. *Αν η* $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *είναι μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων με* $f_0 < 1$ *και αν ισχύει* $G = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{C}(Q, F)$, *τότε* $g_0 = m_Q(f_0)$ *και η ισότητα*

$$g_n = \frac{1}{1 - af_0}\left(\sum_{i=1}^{n} (a + b\frac{i}{n})g_{n-i}f_i + q_k f_n^{*k}\right)$$

ισχύει για όλα τα $n \geq 1$. *Για* $t = 1$, *το Θεώρημα 7.6.11 μάς δίνει την παρακάτω αναδρομή για τις διωνυμικές ροπές μιας σύνθετης κατανομής.*

Πόρισμα 7.6.13. *Έστω ότι* $Q = \mathbf{Panjer}(a, b, k)$ *με* $a < 1$. *Αν η* F *είναι μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων και αν* $G = \mathbf{C}(Q, F)$, *τότε* $\beta_G^{[0]} = 1$ *και η ισότητα*

$$\beta_G^{[n]} = \frac{1}{1 - a}\left(\sum_{i=1}^{n} (a + b\frac{i}{n})\beta_G^{[n-i]}\beta_F^{[i]} + q_k\beta_{F^{*k}}^{[n]}\right)$$

ισχύει για όλα τα $n \geq 1$, *ώστε η* $\beta_F^{[n]}$ *να είναι πεπερασμένη.*

Τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 7.6.10, 7.6.11 και των Πορισμάτων 7.6.12, 7.6.13 είναι γνωστά για την περίπτωση $k = 0$. Το Πόρισμα 7.6.12 έχει επίσης αποδειχθεί από τον Sundt [81], το 1992. Το Πόρισμα 7.6.13 είναι μία παραλλαγή ενός αποτελέσματος του DePril [23] (1986), ο οποίος απέδειξε μία αναδρομή για τις (συνήθεις) ροπές στην περίπτωση $k = 0$ (βλ. Θεώρημα 7.3.5).

Ακολουθεί μία εφαρμογή στις οικογένειες Hofmann.

Ορισμός 7.6.14. Θεωρούμε μία οικογένεια $\{Q_S\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ κατανομών αριθμού απαιτήσεων $Q_S = \{q_{sn}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Για $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $\Pi_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, 1]$ μέσω του τύπου

$$\Pi_n(s) := q_{sn}.$$

Η οικογένεια $\{Q_S\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **οικογένεια Hofmann** $\mathbf{H}(d, p, c)$ με παραμέτρους $d \in \mathbb{R}_+$ και $p, c \in (0, \infty)$, αν υπάρχει μία διαφορίσιμη συνάρτηση $\vartheta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(ϑ_1) $\vartheta(0) = 0$

(ϑ_2) $\frac{d\vartheta(s)}{ds} = \frac{P}{(1+cs)^d}$

(ϑ_3) $\Pi_0(s) = e^{-\vartheta(s)}$

(ϑ_4) $\Pi_n(s) = \frac{(-s)^n}{n!}\frac{d^n\Pi_0(s)}{ds^n}$.

Οι οικογένειες Hofmann έχουν μελετηθεί από τον Hofmann [40] το 1955. Οι Kestemont and Paris [47] απέδειξαν το 1985, ότι κατά κατανομή μιας οικογένειας Hofmann μπορεί να γραφεί ως μία σύνθετη κατανομή

$$Q_S = \mathbf{C}(P_S, R_S)$$

όπου P_S είναι μία κατανομή Poisson και R_S είναι μία κατανομή αριθμού απαιτήσεων. Το παρακάτω θεώρημα περιγράφει αυτήν την κατάσταση πιο συγκεκριμένα. Συμβολίζουμε με $\mathbf{Dirac}(1)$ την κατανομή $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ αριθμού απαιτήσεων με $q_1 = 1$.

Θεώρημα 7.6.15. *Έστω* $\{Q_S\}_{s\in\mathbb{R}_+} = \mathbf{H}(d,p,c)$. *Τότε ισχύει*

$$Q_S = \mathbf{C}\big(\mathbf{P}(\vartheta(s)), R_S\big)$$

με

$$R_S = \begin{cases} \mathbf{Dirac}(1), & \text{αν } d = 0 \\ \mathbf{ENB}\big(1, d-1, cs/(1+cs)\big), & \text{αν } d \in (0,1) \\ \mathbf{Log}\big(cs/(1+cs)\big), & \text{αν } d = 1 \\ \mathbf{NB}\big(d-1, cs/(1+cs), 1\big), & \text{αν } d \in (1,\infty) \end{cases}$$

και για όλα τα $s \in \mathbb{R}_+$. *Ιδιαιτέρως, η* Q_S *είναι πεπερασμένες ροπές οποιασδήποτε τάξης.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Bernstein (βλ. [1], Θεώρημα 5.1.2 για μία αναλυτική απόδειξη) υπάρχει μία κατανομή πιθανότητας Q που συγκεντρώνεται στο $(0,\infty)$, ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\Pi_n(s) = \int_{(0,\infty)} e^{-\theta s}\frac{(\theta s)^n}{n!}Q(d\theta)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και τα $s \in \mathbb{R}_+$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για την $\Pi_n(S)$ με απλούς υπολογισμούς μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$m_{Q_S}(t) = e^{-\vartheta(s-st)}$$

και

$$m_{\mathbf{C}(\mathbf{P}(\vartheta(s),R_S)}(t) = e^{-\vartheta(s)(1-m_{R_S}(t))}.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός του θεωρήματος προκύπτει από τους τύπους

$$\vartheta(s) = \begin{cases} ps, & \text{αν } d = 0 \\ \frac{p}{c}\ln(1+cs), & \text{αν } d = 1 \\ \frac{p}{c}\frac{(1+cs)^{1-d}-1}{1-d}, & \text{αν } d \in (0,1)\cup(1,\infty), \end{cases}$$

ενώ ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τα Πορίσματα 7.6.13 και 7.6.4. □

Ερώτημα 7.6.16. Στα Θεωρήματα 7.6.10 και 7.6.11 οι αναδρομικοί τύποι έχουν το μειονέκτημα, ότι τα ατομικά μεγέθη απαιτήσεων παίρνουν τιμές επάνω σε ένα αριθμίσιμο σύνολο. Έτσι προκύπτει το ερώτημα της εύρεσης ενός αναδρομικού τύπου, όπου η συνάρτηση κατανομής F_X αντιστοιχεί σε (απόλυτα) συνεχείς τ.μ. X_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α΄ Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Β΄ Συναρτήσεις Bessel

Γ΄ Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου που χρειαζόμαστε στην μελέτη των κατανομών Hofmann. Για τις έννοιες που δεν αναφέρονται εδώ, παραπέμπουμε στο [4, Κεφάλαιο 1 και 2].

Α΄.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός Α΄.1.1. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π. και $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.

(a) Η οικογένεια $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα γινόμενο** της Σ και T.

(b) Για κάθε $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, και $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** και η **y-τομή** (x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.

(c) Αν η $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** της f και η **y-τομή** της f, αντίστοιχα.

Λήμμα Α΄.1.2. *Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

(i) Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $E_x \in T$ και $E^y \in \Sigma$.

(ii) *Για κάθε $\Sigma \otimes T$- μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.*

Πρόταση Α΄.1.3. *Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $x \longmapsto Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $y \longmapsto P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη.*

Θεώρημα Α΄.1.4 (Fubini)**.** *Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \ \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** *των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [19, Lemma 5.1.2, Proposition 5.1.3 και Theorem 5.1.4]

Α΄.2 Μετασχηματισμοί Laplace

Ορισμός Α΄.2.1. Έστω μια συνάρτηση $m : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ή ένα μέτρο μ πάνω στην ημιευθεία $\mathbb{R}_+$. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$L_m(\lambda) := L(m; \lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} m(t)dt \quad \text{ή} \quad L(\mu; \lambda) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}\mu(dt). \tag{Α΄.1}$$

Η συνάρτηση L ορίζεται για όλα τα λ για τα οποία το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Προφανώς $L_m = L\mu_m$ αν $\mu_m(dt)$ υποδηλώνει το μέτρο $m(t)dt$.

Το ακόλουθο λήμμα της πραγματικής ανάλυσης είναι πολύ χρήσιμο για να δειχθεί ότι ένα πεπερασμένο μέτρο είναι μοναδικά ορισμένο απο τον μετασχηματισμό Laplace.

Πρόταση Α΄.2.2. *Ένα μέτρο μ πάνω στο $\mathbb{R}_+$ είναι πεπερασμένο αν, και μόνο αν $L(\mu; 0+) < \infty$. Το μέτρο μ είναι μοναδικά ορισμένο απο τον μετασχηματισμό Laplace του. Για μία αναλυτική απόδειξη παραπέμπουμε στην Ερμίδης [1], Πρόταση Α΄.3.3.*

Παράρτημα Β΄

Συναρτήσεις Bessel

Εδώ δίνονται βασικοί ορισμοί και ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel, που χρησιμοποιούνται στη Διπλωματική.

Β΄.1 Ορισμοί

Η συνάρτηση Bessel, που αρχικά ορίστηκε από τον μαθηματικό Daniel Bernoulli και γενικεύθηκε αργότερα από τον Friedrich Bessel, δίνει τις κανονικές λύσεις $y(x)$ της διαφορικής εξίσωσης του Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-a^2)y=0 \tag{Β΄.1}$$

για έναν αυθαίρετο μιγαδικό αριθμό a (η τάξη της συνάρτησης του Bessel). Αν και ο α και ο $-a$ παράγουν την ίδια διαφορική εξίσωση για κάθε πραγματικό αριθμό a, είναι κατανοητό ότι προσδιορίζουν διαφορετικές συναρτήσεις Bessel για αυτές τις δύο τιμές έτσι ώστε οι συναρτήσεις Bessel να είναι συνήθως διαφορίσιμες συναρτήσεις του a. Συναρτήσεις Bessel για ακέραιο a ονομάζονται επίσης **κυλινδρικές συναρτήσεις**.

Ορισμός Β΄.1.1. Συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους.

Οι **συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους**, που συμβολίζονται $J_a(x)$, είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Bessel που είναι πεπερασμένες στην αρχή των αξόνων ($x=0$), για a ακέραιο ή θετικό, και αποκλίνουν καθώς το x τείνει στο μηδέν, για a αρνητικό μη ακέραιο. Είναι δυνατό να ορίσουμε τη συνάρτηση από την ανάπτυξη της ως σειράς της γύρω από το $x=0$, η οποία μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο Frobenius στην εξίσωση Bessel:

$$J_a(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+a+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a} \tag{Β΄.2}$$

όπου $\Gamma(z)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, μια μετατοπισμένη γενίκευση της παραγοντικής συνάρτησης σε μη ακέραιες τιμές. Για μη ακέραιο a, οι συναρτήσεις $J_a(x)$ και $J_{-a}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και επομένως είναι οι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Για ακέραιο a ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Ορισμός Β′.1.2. Συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους. Οι **συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους**, συμβολίζονται με $Y_a(x)$, ενίοτε συμβολίζονται αντί αυτού με $N_a(x)$, είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel. Αυτές κάποιες φορές ονομάζονται **συναρτήσεις Weber** καθώς εισήχθησαν από τον H. Weber (1873), και επίσης **συναρτήσεις Neumann** από το όνομα του Carl Neumann (βλ.Carl Neumann [59] (1877)).

Για μη ακέραιο a,η $Y_a(x)$ συνδέεται με την $J_a(x)$ με τη σχέση

$$Y_a(x) = \frac{J_a(x)cos(a\pi) - J_{-a}(x)}{sin(a\pi)}. \tag{Β′.3}$$

Στην περίπτωση ακεραίου n, η συνάρτηση ορίζεται παίρνοντας το όριο για τον μη ακέραιο a να τείνει στο n:

$$Y_n(x) = \lim_{a\to n} Y_a(x). \tag{Β′.4}$$

Αν το a είναι μη αρνητικός ακέραιος έχουμε τη σειρά

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}}{\pi} \sum_{0\leq k\leq n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi}J_u(z)ln\frac{z}{2} \\ &\quad -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \big(\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\big)\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!}. \end{aligned}$$

Υπάρχει επίσης ένας αντίστοιχος ολοκληρωτικός τύπος (για $\mathrm{Re}(x) > 0$),

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin(xsin\theta - n\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}]e^{-xsinht}dt. \tag{Β′.5}$$

Η $Y_a(x)$ είναι αναγκαία η δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης Bessel όταν ο a είναι ακέραιος. Όταν ο a είναι ακέραιος , επιπλέον, καθώς ήταν παρόμοια η περίπτωση με τις συναρτήσεις πρώτου είδους , ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x). \tag{Β′.6}$$

Ορισμός Β′.1.3. Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel: I_a, K_a

Οι συναρτήσεις Bessel ισχύουν ακόμα και για μιγαδικά ορίσματα x, και μια σημαντική ιδιαίτερη περίπτωση είναι αυτή του καθαρά φανταστικού ορίσματος. Σε αυτήν την περίπτωση, οι λύσεις της εξίσωσης Bessel καλούνται **τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel** (ή επίσης **υπερβολικές συναρτήσεις Bessel**) **πρώτου και δεύτερου είδους**, και ορίζονται από τους τύπους

$$I_a(x) = i^{-a}J_a(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+a+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a}, \tag{Β′.7}$$

$$K_a(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-a}(x) - I_a(x)}{sin(a\pi)}, \tag{B'.8}$$

όπου το a δεν είναι ακέραιος. Όταν το a είναι ακέραιος, τότε χρησιμοποιείται το όριο. Αυτές είναι πραγματικές συναρτήσεις, για πραγματικά και θετικά ορίσματα x. Συνεπώς, το ανάπτυγμα σε σειρά για την $I_a(x)$ είναι όμοιο με αυτό για την $J_a(x)$, αλλά χωρίς τον εναλλασσόμενο παράγοντα $(-1)^m$.

Οι συναρτήσεις $I_a(x)$ και $K_a(x)$ είναι οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της **τροποποιημένης εξίσωσης Bessel**

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + a^2)y = 0.$$

Οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους ονομάζονται επίσης και τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τρίτου είδους.

Παράρτημα Γ′

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

Γ′.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός Γ′.1.1. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{Γ′.1}$$

Δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός Γ′.1.2. Η συνάρτηση $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότητα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός Γ′.1.3. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι

$$\binom{\alpha}{m} := \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a-j}{m-j}. \tag{Γ′.2}$$

Πόρισμα Γ′.1.4. *Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει*

$$\binom{a+m-1}{m} = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{Γ′.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a+m-1-j}{m-j} = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!} = \frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!} \\ &= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (Γ′.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός Γ′.1.5. Έστω (Ω,Σ,P) ένας χ.π. Για μια τ.μ X: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution).

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (*σ.κ.*) $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x) := P_X((-\infty,x]) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [4], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [4], Πρόταση 1.4.10).

Μια (*σ.κ.*) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ($\sigma.\pi.\pi.$).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x)d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη $\sigma.(\pi.)\pi.$, και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Γ΄.1.6. Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}X := \mathbb{E}[X] := \int XdP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμός Γ΄.1.7. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται ***σ*-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega\times\Upsilon, \Sigma\otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των P και Q** και συμβολίζεται με $P\otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A\in\Sigma$ και $B\in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A\times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega\times\Upsilon, \Sigma\otimes T, P\otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός Γ′.1.8. Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J}\Omega_i \otimes_{i\in J}\Sigma_i \otimes_{i\in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.

Ορισμοί Γ′.1.9. Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n\in\mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ και για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n\in\mathbb{N} : n\geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[4, Παρατήρηση 3.2.5], (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n\in\mathbb{N} : n\geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k\in\mathbb{N}_n^*$ και για κάθε $A_k\in\Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.

Ορισμοί Γ′.1.10. Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [3, Ορισμός 1.19]), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \ (j\in I)$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη**. Επιπλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια ***σ*.δ. συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I\subseteq\mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια ***σ*.δ. διακριτού χρόνου**.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$:

- Είναι μια ***σ.δ.* ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in\mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j\in\mathbb{N}_m^*)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

- Είναι μια ***σ.δ.* στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$, $h\in\mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m\in\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και για κάθε $h\in\mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{(X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h})_{j\in\mathbb{N}_m}} = P_{(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})_{j\in\mathbb{N}_m}}$.

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$. Για $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

Γ′.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0, 1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).
Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0, 1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός Γ′.2.1. Αν

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση

$$\mathbb{E}[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|Q(dx) < \infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή**.

Ορισμός Γ′.2.2. Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** ή έχει **n−οστή ροπή** που ορίζεται από την σχέση

$$\mathbb{E}[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός Γ΄.2.3. Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε **η διακύμανση** της Q ορίζεται να είναι

$$\mathbb{V}ar(Q) := \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[Q])^2 Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$\mathbb{V}ar(Q) = \mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q]^2.$$

Ορισμός Γ΄.2.4. Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+ = 1$ και $\mathbb{E}[Q] \in (0, \infty)$,τότε **ο συντελεστής μεταβλητότητας** της Q ορίζεται από την σχέση

$$v[Q] := \frac{\sqrt{\mathbb{V}ar(Q)}}{\mathbb{E}[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Γ΄.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Γ΄.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{Γ'.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Γ'.2.7. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{Γ'.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση Γ'.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$\mathbb{E}[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{Γ'.6}$$

$$\mathbb{E}[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{Γ'.7}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό Γ'.2.7 ισχύει

$$m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

επομένως αν παραγωγίσουμε ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d}{dz} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x z^{x-1} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} = \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) = \mathbb{E}[Q].$$

Αν βρούμε και την δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x(x-1) z^{x-2} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\Big|_{z=1} &= \int_{\mathbb{R}} x(x-1)Q(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) - \int_{\mathbb{R}} xQ(dx) \\ &= \mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q] \end{aligned}$$

επομένως για την δεύτερη ροπή θα ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q^2] &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\Big|_{z=1} + \mathbb{E}[Q] \\ &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\Big|_{z=1} \end{aligned}$$

□

Συνέλιξη

Ορισμός Γ΄.2.9. Αν η $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση με $+(x, y) := x + y$, τότε η

$$Q * R :=$$

είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται **συνέλιξη** των Q και R.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού Γ΄.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα Α΄.1.4).

Πρόταση Γ΄.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Ιδιαιτέρως ισχύει

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B - y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\begin{aligned} (Q * R)(B) &= (Q \otimes R)_+(B) \\ &:= (Q \otimes R)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(\{x \in \mathbb{R} : x \in B - y\})R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy), \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α′.1.4.

Ιδιαιτέρως για οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(Q * \delta_y)(B) &= (\delta_y * Q)(B) \\ &= (Q \otimes \delta_y)_+(B) \\ &= Q \otimes \delta_y(\{(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : x + \bar{y} \in B\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(B - \bar{y})\delta_y(d\bar{y}) \\ &= Q(B - y),\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α′.1.4. □

Πρόταση Γ′.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$

$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$

$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, *τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση Γ′.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$\mathbb{E}[Q * R] = \mathbb{E}[Q] + \mathbb{E}[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$\mathbb{V}ar(Q * R) = \mathbb{V}ar(Q) + \mathbb{V}ar(R).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση Γ′.2.12 για την ροπογεννήτρια της $Q*R$ ισχύει $M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$. Επιπλέον από την Γ′.4 ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[Q * R] = \frac{dM_{Q*R}}{dz}(0), \quad \mathbb{E}[(Q * R)^2] = \frac{d^2 M_{Q*R}}{dz^2}(0).$$

Επομένως θα ισχύει

$$M'_{Q*R}(z) = \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)' = M'_Q(z)M_R(z) + M_Q(z)M'_R(z)$$
$$M''_{Q*R}(z) = \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)'' = M''_Q(z)M_R(z) + 2M'_Q(z)M'_R(z) + M_Q(z)M''_R(z)$$

και άρα θα ισχύει

$$\mathbb{E}[Q * R] = M'_{Q*R}(0) \overset{(\Gamma'.4)}{=} \mathbb{E}[Q] + \mathbb{E}[R]$$

$$\mathbb{E}[(Q*R)^2] = M''_{Q*R}(0) \overset{(\Gamma'.4)}{=} \mathbb{E}[Q^2] + 2\mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[R] + \mathbb{E}[R^2].$$

Επομένως για την διακύμανση θα ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(Q*R) &= \mathbb{E}[(Q*R)^2] - \mathbb{E}[Q*R]^2 \\
&= \mathbb{E}[Q^2] + 2\mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[R] + \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[Q]^2 - 2\mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[R] - \mathbb{E}[R]^2 \\
&= \mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q]^2 + \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[R]^2 \\
&= \mathbb{V}ar(Q) + \mathbb{V}ar(R)
\end{aligned}$$

□

Πρόταση Γ′.2.13. *Αν $Q = \int f\, d\nu$ και $R = \int g\, d\nu$ για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε $Q*R = \int f*g\, d\nu$, όπου η απεικόνιση $f*g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται*

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\nu(dy).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση Γ′.2.10, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}
[Q*R](B) &= \int_{\mathbb{R}} Q[B-y]R(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} f(x)\nu(dx)\; g(y)\nu(dy)
\end{aligned}$$

□

Ορισμός Γ′.2.14. Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q όριζεται από την σχέση

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f\, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

Γ′.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός Γ′.3.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **διακριτή**, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός Γ΄.3.2. Για $m \in \mathbb{N}$ και $\theta \in (0,1)$, η **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0,1,\dots,m\}$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = m\theta$$
- Διακύμανση:
$$\mathbb{V}ar(Q) = m\theta(1-\theta)$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta)+\theta e^{iz}\big)^m$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = ((1-\theta)+\theta e^{z})^m$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = ((1-\theta)+\theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1,\theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός Γ΄.3.3. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $\theta \in (0,1)$, **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha+x-1}{x}\theta^\alpha(1-\theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta}$$
- Διακύμανση:
$$\mathbb{V}ar(Q) = \alpha\frac{1-\theta}{\theta^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{iz}}\right)^\alpha$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^z}\right)^\alpha \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1-\theta))$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)z}\right)^\alpha$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m,\theta)$ για $m \in \mathbb{N}$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός Γ΄.3.4. Για $\alpha \in (0,\infty)$, **η κατανομή Poisson** $\mathbf{P}(\alpha)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$\mathbb{E}[Q] = \alpha$$

- Διακύμανση:

$$\mathbb{V}ar(Q) = \alpha$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^z-1)}$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός Γ΄.3.5. Για $\alpha,\beta \in (0,\infty)$ και $\theta \in (0,1)$, **η κατανομή Delaporte** $\mathbf{Del}(\alpha,\beta,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta,\theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός Γ′.3.6. Για $m \in \mathbb{N}$ και $\theta \in (0,1)$, **η γεωμετρική κατανομή** $\mathbf{Geo}(m,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m,\theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1,\theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός Γ′.3.7. Για $\theta \in (0,1)$, **η λογαριθμική κατανομή** $\mathbf{Log}(\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta}{1-\theta}$$
- Διακύμανση:
$$\mathbb{V}ar(Q) = \frac{|\ln(1-\theta)|-\theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

Γ′.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός Γ′.4.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **συνεχής**, αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue $\boldsymbol{\lambda}$.

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός Γ′.4.2. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Βήτα** $\mathbf{Be}(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
- Διακύμανση:
$$\mathbb{V}ar(Q) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός Γ′.4.3. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \int \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1}\chi_{(0,\infty)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$\mathbb{V}ar(Q) = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^\beta$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^\beta \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang** $\mathbf{Ga}(\alpha, m)$, με $m \in \mathbb{N}$.
- **Η εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η $\boldsymbol{\chi}^2$ κατανομή** $\boldsymbol{\chi}^2_m := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός Γ΄.4.4. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha, \beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta) = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, 0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός Γ΄.4.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto** $\mathbf{Par}(\alpha, \beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βιβλιογραφία

[1] Ερμίδης, Ι. (2016), *Μεικτές κατανομές Hofmann με εφαρμογές*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΑΕ.

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006), *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ.

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2005), *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[4] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[5] Μπότση, Α. (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσηνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ.

[6] Παππά, Ε. (2017), *Στοχαστικές Διαδικασίες με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και εφαρμογές*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΑΕ.

[7] Adelson, R. M. (1966), *Compound Poisson distributions. Oper. Res. Quart. 17, 73-75.*

[8] Albrecht, P. (1981), *Dynamische statistische Entscheidungsverfahren für Schadenzahlprozesse. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.*

[9] Albrecht, P. (1985), *Mixed Poisson process. In: Encyclopedia of Statistical Sciences; Vol. 6, pp. 556-559. New York - Chichester: Wiley.*

[10] Ambagaspitiya, R. S. (1995), *A family of discrete distributions. Insurance Math. Econom. 16, 107-127.*

[11] Arbous, A.G. and Kerrich, J.E. (1951), *Accident Statistics and the Concept of Accident-Proneness. Biometrics, 7, 340-432. Ashford J.R. and Hunt R.G. (1974). The Distribution of Doctor-Patient Contacts in the National Health Service. Journal of the Royal Statistical Society A, 137, 347-383.*

[12] Baker, C T (1977),*The Numerical Treatment oflmegral Equations Clarendon Press. Oxford*

[13] Beall, G. and Rescia, R. (1953) *A Generahzatlon of Neyman's Contagious Distributions. Biometrics 9, 354-386*

[14] Bichsel, F. (1964) *A Generahzatlon of Neyman's Contagious Distributions. Biometrics 9, 354-386*

[15] Bühlmann, H. (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag, Berlin. [17, 22, 33]*

[16] Cane, V. (1977), *A Class of Non-Identifiable Stochastic Models. Journal of Applied Probability, 14, 475-482.*

[17] Chadjiconstantinidis, S. and Antzoulakos, D.L. (2002), *Moments of Compound Mixed Poisson Distributions. Scandinavian Actuarial Journal, (3) 138-161.*

[18] Chen, J. and Ahn, H. (1996), *Moments of Compound Mixed Poisson Distributions. Scandinavian Actuarial Journal, (3) 138-161.*

[19] Cohn, D.L. (2013), *Measure Theory*

[20] Dean, C.B., Lawless, J. and Willmot, G.E. (1989), *A Mixed Poisson-Inverse Gaussian Regression Model. Canadian Journal of Statistics, 17, 171-182.*

[21] Delaporte, P. J. (1960), *Un problème de tarification de l'Aassurance accidents d'Aautomobiles examine par la statistique mathematique. In: Transactions of the International Congress of Actuaries; Vol. 2, pp. 121-135.*

[22] Delaporte, P. J. (1965), *Tarification du risque individuel d'Aaccidents d'Aautomobiles par la prime modelee sur le risque. ASTIN Bull. 3, 251-271.*

[23] DePril, N. (1986), *Moments of a class of compound distributions. Scand. Actuar. J., 117-120.*

[24] Derron, M. (1962), *Mathematische Probleme der Automobilversicherung. Mitt. SVVM 62, 103-123.*

[25] Dubourdieu, M. J. (1938), *Remarques relatives à la theorie mathematique de l'Aassurance-accidents. Bull. Inst. Actu. Franc. 44, 79-126.*

[26] Feller, W. (1943), *On a general dass of* "contagious" *distributions. Ann. Math. Statist. 14, 389-400.*

[27] Feller, W. (1968), *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol I. 3rd ed. Wiley, New York.*

[28] Feller, W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol II. 2nd ed. Wiley, New York.*

[29] Gerber, H. U. (1983), *On the asymptotic behaviour of the mixed Poisson process. Scand. Actuar. J. 256.*

[30] Gerber, H. U. (1991), *From the generalized gamma to the generalized negative binomial distribution. Insurance Math. Econom. 10, 303-309.*

[31] Good, I. J. (1953), *The population frequencies of species and the estimation of population parameters. Biometrika 40, 237-260.*

[32] Goovaerts, M. J., DeVylder, F., and Haezendonck, J. (1984), *Insurance Premiums. Amsterdam - New York: North-Holland.*

[33] Grandell, J. (1991), *Aspects of risk theory. Springer-Verlag, New York.*

[34] Grandell, J. (1997), *Mixed Poisson Processes. Chapman and Hall.*

[35] Gupta, S. and Huang, W.T. (1981), *On Mixtures of Distributions: A Survey and Some New Results on Ranking and Selection. Sankhyā B, 43, 245-290.*

[36] Hess, K.T., Liewald, A., and Schmidt, K.D. (2002).*An extension of Panjer's recursion.* ASTIN Bull. 32, 283-297.

[37] Hesselager, O. (1994), *A Recursive Procedure for Calculation of Some Compound Distributions. ASTIN Bulletin, 24, 19-32.*

[38] Hesselager, O. (1996), *A Recursive Procedure for Calculation of Some Mixed Compound Poisson Distributions. Scandinavian Actuarial Journal, (1), 54-63.*

[39] Hinde, J. and Demetrio, C.G.B. (1998), *Overdispersion: Models and Estimation. Computational Statistics and Data Analysis, 27, 151-170.*

[40] Hofmann, M. (1955), *Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung. Mitt. SVVM 55, 499-575.*

[41] Holla, M. S (1967), *On A Polsson-lnverse Gausslan Distribution Metrlka —1, 115-121 Johnson, N L and Kotz, S (1969) Distributions m Statistics Discrete Distributions. John Wiley New York.*

[42] Johnson, N L and Kotz, S (1969), *Distributions m Statistics Discrete Distributions. John Wiley New York.*

[43] Jørgensen, B (1982),*Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution, Lecture Notes in Statistics 9, Sprmger-Verlag, New York.*

[44] Kallenberg, 0. (1983), *Random Measures. 3rd ed. Akademie-Verlag, Berlin and Academic Press, New York.*

[45] Kallenberg, O. (2005), *Probability Symmetries and Invariance Principles*, Springer.

[46] Kaas, R., and Goovaerts, M. J. (1985), *Computing moments of compound distributions. Scand. Actuar. J., 35-38.*

[47] Kestemont, R.M. and Paris, J. (1985), *Sur l'ajustement du Hombre de sinistres. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmathematiker 85, 157-164.*

[48] Kling, B. and Goovaerts, M. J. (1993), *A note on compound generalized distributions. Scand. Actuar. J., 60-72.*

[49] Kupper, J. (1962), *A note on compound generalized distributions. Scand. Actuar. J., 60-72.*

[50] Lemaire, J. (1985), *Automobile Insurance. Boston - Dordrecht - Lancaster: Kluwer-Nijhoff.*

[51] Lawless, J. (1987), *Negative Binomial and Mixed Poisson Regression. Canadian Journal of Statistics, 15, 209-225.*

[52] Levy, E. (1992), *Pricing European average rate currency options, Journal of International Money and Finance, 14, 474-491*

[53] Lundberg, O. (1940), *On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics. Uppsala: Almqvist and Wiksells.*

and accident statistics. 1st ed. 1940, Almqvist och Wiksell, Uppsala.

[54] Maceda, E. C. (1948), *On the compound and generalized Poisson distributions. Ann. Math. Statist. 19, 414-416.*

[55] McFadden, J.A. (1965), *The Mixed Poisson Process. Sankhya, A, 27, 83-92.*

[56] McNeney, B. and Petkau, J. (1994), *Overdispersed Poisson Regression Models for Studies of Air Pollution and Human Health. Canadian Journal of Statistics, 22, 421-440.*

[57] Mecke, J. (1968), *Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse. Z. Wahrschein. und verw. Geb. 11, 74-81.*

[58] Milevsky, M.A. and Posner, S.E. (1998), *Asian Options, the sum of lognormal, and the Reciprocal Gamma dstribution, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33, 3.*

[59] Neumann, C. (1877), *Theorie der Besselschen Funktionen: ein analogen zur Theorie der Kugelfunktionen (B.6. Teubner, 1877).*

[60] Panjer, H H (1981), *Recursive Evaluation of A Family of Compound Distributions ASTIN Bulletin 12, 22-26*

[61] Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (1981), *Finite sum evaluation of the negativebinomial-exponential model. ASTIN Bull. 12, 133-137.*

[62] Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (1986), *Computational aspects of recursive evaluation of compound distributions. Insurance Math. Econom. 5, 113-116.*

[63] Pfeifer, D. (1982a), *The structure of elementary birth processes. J. Appl. Probab. 19, 664-667.*

[64] Pfeifer, D. (1982b), *An alternative proof of a limit theorem for the Polya-Lundberg process. Scand. Actuar. J. 176-178.*

[65] Pfeifer, D. (1986), *Polya-Lundberg process. In: Encyclopedia of Statistical Sciences; Vol. 7, pp. 63-65. New York - Chichester: Wiley.*

[66] Pfeifer, D. (1987), *Martingale characteristics of mixed Poisson processes. Blätter DGVM 18, 107-100.*

[67] Pfeifer, D., and Heller, U. (1987), *A martingale characterization of mixed Poisson processes. J. Appl. Probab. 24, 246-251.*

[68] Puri, P. S. and Goldie, C. M. (1979), *Poisson mixtures and quasi-infinite divisibility of distributions. J. Appl. Prob. 16, 138-153..*

[69] Quenouille, M. H. (1949), *Poisson mixtures and quasi-infinite divisibility of distributions. J. Appl. Prob. 16, 138-153..*

[70] Rhiel, R. (1985), *Zur Berechnung von Erwartungswerten und Varianzen von zufälligen Summen in der kollektiven Risikotheorie. Blätter DGVM 17, 15-18.*

[71] Ruohonen, M. (1988), *On a model for the claim number process. ASTIN Bull. 18, 57-68.*

[72] Schmidt, K.D. (1996), *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[73] Schmidt, K.D. (1992), *Stochastische Modellierung in der Erfahrungstarifierung. Blätter DGVM 20, 441-455.*

[74] Schröter, K. J. (1990), *On a Family of Counting Distributionsand Recursions for Related Compound Distributions. Scand. Actuarial, 161-175.*

[75] Seal, H. L. (1983), *The Poisson process: Its failure in risk theory. Insurance Math. Econom. 2, 287-288.*

[76] Shumway, R., and Gurland, J. (1960), *A fitting procedure for some generalized Poisson distributions. Scand. Actuar. J. 43, 87-108.*

[77] Slimanc, S.B. (2001), *Bounds to the distribution of a sum of independent lognormal random variables, IEEE Transations on Communications, 20, 6.*

[78] Sichel, H. S. (1971), *On A Family of Discrete Distributions Particularly Stated to Represent Long Taded Frequency Data Proceedings of the Third Symposmm on Mathematical Stansncs, ed N F. Loubscher Pretoria CSIR*

[79] Sichel, H. S. (1974), *On a distribution representing sentence-length in written prose. J. R. Statist. Soc. A 137, 25-34.*

[80] Ströter, B. (1984),*The Numerical Evaluation of the Aggregate Claim Density Function Via Integral Equations Blätter der Deutschen Gesellschaft ffir Verslcherungsmathematlk 17, 1-14*

[81] Sundt, B. (1992), *On some extensions of Panjer's class of counting distributions. ASTIN Bull.22, 61-80.*

[82] Sundt, B. (1993), *An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics. Third Edition. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.*

[83] Sundt, B. (1999), *An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics, 4th Edition. Karlsruhe: University of Mannheim Press.*

[84] Sundt, B. and Jewell, W. (1981), *Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distributions ASTIN Bulletin 12, 27-39.*

[85] Thyrion, P. (1960), *Contribution à l'Aetude du bonus pour non sinistre en assurance automobile. ASTIN Bull. 1, 142-162.*

[86] Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985), *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions. New York: John Wiley and Sons.*

[87] Titterington, D.M. (1990), *Some Recent Research in the Analysis of Mixture Distributions. Statistics, 21, 619-641. Wahlin, J.F. and Paris, J. (1999). Using Mixed Poisson Distributions in Connection with Bonus-Malus Systems. ASTIN Bulletin, 29, 81-99.*

[88] Tröblinger, A. (1961), *Mathematische Untersuchungen zur Beitragsrückgewähr in der Kraftfahrversicherung. Blätter DGVM 5, 327-348.*

[89] Wang, S. and Sobrero, M. (1994), *Further Results on Hesselager's Recursive Procedure for Calculation of Some Compound Distributions, ASTIN Bulletin, 24, 160-166.*

[90] Wang, P., Puterman, M., Cockburn, I. and Le, N. (1996), *Mixed Poisson Regression Models with Covariate Dependent Rates. Biometrics, 52, 381-400.*

[91] Willmot, G.E. (1987), *The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial. Scand. Actuarial J., 113-127.*

[92] Willmot, G.E. (1988), *Sundt and Jewell's family of discrete distributions. ASTIN Bulletin 18, 17-29.*

[93] Willmot, G.E. (1993), *On Recursive Evaluation of Mixed Poisson Probabilities and Related Quantities, Scandinavian Actuarial Journal, 18, 114-133.*

[94] Willmot, G. E. and Panjer, H. H. (1985) *Difference Equanon Approaches m Evaluanon of Compound Distributions, to appear.*

[95] Willmot, G.E. and Sundt, B. (1989), *On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Processes. Scandinavian Actuarial Journal, 14, 139-146.*

[96] Xekalaki, E. (1983a), *The Univariate Generalized Waring Distribution in Relation to Accident Theory: Proneness, Spells Or Contagion Biometrics, 39, 887-895.*

[97] Xue, D. and Deddens, J. (1992), *Overdispersed Negative Binomial Models. Communications in Statistics-Theory and Methods, 21, 2215-2226.*

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων