ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΥΜΒΑΣΕΩΝ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΘΕΤΗΣΗΣ

Μαργαρίτα Θεοδούλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Μάρτιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μιχαήλ Ανθρωπέλος (Επιβλέπων)
- Κωνσταντίνος Πολίτης
- Νικόλαος Μαχαιράς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

PRICING METHODS OF CREDIT DEFAULT SWAPS

by
Margarita Theodoulou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
March 2018

Στους γονείς μου
Φανούριο και Μαρία

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Ανθρωπέλο ο οποίος συνέβαλε σημαντικά στην πρόοδο και διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας. Το μάθημα του Πιστωτικού Κινδύνου που δίδαξε στο 2^{o} εξάμηνο σπουδών μου καθώς και οι σημειώσεις του σε αυτό, βοήθησαν σημαντικά στην καλύτερη κατανόηση των γενικών οικονομικών όρων και όρων που αφορούν το θέμα της εργασίας μου.
Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Μαχαιρά και κ. Πολίτη που δέχθηκαν να λάβουν τον ρόλο του εξεταστή καθηγητή στην εργασία μου. Και οι δύο αυτοί καθηγητές αποτέλεσαν σημαντικό παράγοντα στην πορεία του Μεταπτυχιακού καθώς μου δίδαξαν δύο σημαντικά μαθήματα του προγράμματος σπουδών.
Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια και τους φίλους μου για την στήριξη και την κατανόησή τους μέχρι σήμερα.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στις δύο πιο σημαντικές μεθόδους τιμολόγησης του πιστωτικού κινδύνου. Αρχικά και έως ότου ξεκινήσει η παρουσίαση των μεθόδων αυτών, γίνεται μια αναφορά στα πιστωτικά παράγωγα προϊόντα και εκτενέστερα, στην δημοφιλέστερη κατηγορία τους, τις Συμβάσεις Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης. Οι συμβάσεις αυτές θα μας δώσουν την αφορμή για μελέτη και ανάλυση μεθόδων πρόβλεψης και αντιμετώπισης πιθανών αθετήσεων διαφορετικών οντοτήτων αναφοράς. Το πρώτο μοντέλο που μελετάμε είναι το μοντέλο ανηγμένης μορφής ή έντασης αθέτησης, η κατασκευή του οποίου απαιτεί τη χρήση διπλών στοχαστικών διαδικασιών Poisson ή διαφορετικά, διαδικασίες Cox. Το δομικό μοντέλο αποτελεί τον δεύτερο τρόπο τιμολόγησης του πιστωτικού κινδύνου το οποίο βασίζεται στο έργο του Robert C. Merton. Για την κατασκευή των δύο αυτών μεθόδων ήταν απαραίτητη η μοντελοποίηση του πιστωτικού περιθωρίου ανταλλαγής αθέτησης. Συγκρίνοντας συνοπτικά τα δύο αυτά μοντέλα, η παρούσα διπλωματική εργασία θα δημιουργήσει μια καθαρή εικόνα δυο διαφορετικών προσεγγίσεων στη σύγχρονη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου.

Abstract

This paper focuses on the two most important measurement methods of credit risk. Initially, and until these methods are launched, reference is made to credit derivatives products and more extensively to their most popular category, Credit Default Swaps. These contracts will give us motivation to study and analyse methods of prediction and addressing possible defaults of different reference entities. The first model we are studying is the reduced form model or intensity model which its construction requires the use of doubly stochastic Poisson processes or otherwise, Cox processes. The structural model is the second pricing method of credit risk based on Robert C. Merton's work. In order to construct these two methods, it was necessary to model the credit default swap spread. By pointing out the relations and differences between these two models, this paper will hopefully generate a clear overview of two different approaches to modern credit risk management.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σημασία της αγοράς πιστωτικών παραγώγων έχει αυξηθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια και επαναστάτησε με συναλλαγές πιστωτικού κινδύνου. Σύμφωνα με την έρευνα αγοράς της Διεθνούς Ένωσης των Συμβάσεων Ανταλλαγής και Παραγώγων (International Swaps & Derivatives Association –ISDA) στα μέσα του 2008, το πλασματικό υπόλοιπο των πιστωτικών παραγώγων ανέρχεται σε 62,2 τρισεκατομμύρια δολάρια μόλις στις αρχές του έτους 2008. Τα πιστωτικά παράγωγα περιλαμβάνουν ενιαία ονόματα (single names), δείκτες (indexes), καλάθια (baskets) και χαρτοφυλάκια συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (credit default swaps). Περαιτέρω, μια έρευνα της ISDA το 2009 για τη χρήση παραγώγων, δείχνει ότι το 94,2% των μεγαλύτερων παγκοσμίως εταιρειών στον κόσμο χρησιμοποιούν παράγωγα για αντιστάθμιση και διαχείριση κινδύνου. Τον τελευταίο καιρό έχουν γίνει αρκετές καινοτομίες στον τομέα των παραγώγων, οι οποίες οδηγούν σε νέα προϊόντα διαχείρισης διαφόρων μηχανισμών επιχειρηματικού κινδύνου που μέχρι πρόσφατα ήταν δύσκολο να απομονωθούν και να αντιμετωπιστούν σωστά. Η παρουσία πιστωτικών παραγώγων στην αγορά έδειξε ότι πλεονεκτούν σε σύγκριση με τα τυποποιημένα μέσα μετρητών (cash instruments) αφού η χρήση τους αποδεικνύεται αποτελεσματικότερη όσον αφορά την αναπαραγωγή σε μορφή παραγώγων. Για παράδειγμα, ένα ομόλογο μετρητών (cash bonds) και η αγορά repo μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαραγωγή μιας συμφωνίας αντιστάθμισης πιστωτικού κινδύνου. Επιπλέον, τα πιστωτικά παράγωγα έχουν ανοίξει δυνατότητες για νέα πεδία χρήσης. Τα πεδία χρήσης περιλαμβάνουν την αντιστάθμιση του πιστωτικού κινδύνου, τη μείωση της συγκέντρωσης κινδύνου στους ισολογισμούς των εταιρειών και τη χαλάρωση του ρυθμιστικού κεφαλαίου για τις τράπεζες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δημιουργήθηκε η δυνατότητα μεταφοράς και μόχλευσης του πιστωτικού κινδύνου με τη χρήση πιστωτικών παραγώγων. Η ανάπτυξη παραγώγων στα τέλη της δεκαετίας του '90 έχει το χαρακτήρα πολλών διαστάσεων. Τα κλασικά παράγωγα όπως τα options και τα forwards, αυξήθηκαν παράλληλα με τη διάσταση των νέων εφαρμογών των κινδύνων διαχείρισης παράγωγων προϊόντων, πέρα από την παραδοσιακή εστίαση σε ορισμένες παραμέτρους, όπως ο κίνδυνος τιμών και γεγονότων που συνδέονται με τη διαχείριση του κινδύνου χαρτοφυλακίου και την αξία των μετόχων μεταξύ πολλών άλλων.

Με τη μοντελοποίηση των περιθωρίων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (credit default swap spreads) και την πρόβλεψη των πιθανών αθετήσεων (default probabilities) των εταιρειών με τη χρήση πιθανοτήτων αθέτησης, η παρούσα διπλωματική καθιστά την αναζήτηση συνεπών μεθόδων μέτρησης και διαχείρισης του κινδύνου κατασκευάζοντας εύλογες προβλέψεις ενδεχόμενων εταιρικών αθετήσεων των υποχρεώσεών τους. Επιπλέον, στην εργασία αυτή γίνεται ποσοτική μέτρηση του κινδύνου, διαμορφώνοντας τα περιθώρια ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης.

Η σημερινή βιβλιογραφία για τη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου διαχωρίζεται, ενώ η αγορά έχει μεγάλη ανάγκη για πιστωτικά μοντέλα. Σε μια μελέτη των Jones, Mason και Rosenfeld (1984) αποδείχθηκε ότι το δομικό μοντέλο (structural model) του Merton τείνει να υποτιμά τα credit default swap spreads της αγοράς. Σε αντίθεση με μία μελέτη του Li και Wong (2007), προκύπτει ότι το δομικό μοντέλο υπερεκτιμά τις αποδόσεις των ομολόγων. Ως εκ τούτου, αυτό οδηγεί σε υπερεκτίμηση του περιθωρίου ανταλλαγής πιστωτικών κινδύνων που ισχύει στην αγορά. Σε μια μελέτη περιπτώσεων διαφορετικών μοντέλων από τους Arora, Bohn και Zhou (2005) αναφέρθηκε ότι το μοντέλο ανηγμένης μορφής (reduced form or intensity model), έτεινε να ξεπεράσει το δομικό μοντέλο του Merton. Επομένως, γεννιέται η ανάγκη για δημιουργία πιο έγκυρων και τυποποιημένων τρόπων μέτρησης και διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει τις δυο αυτές σημαντικότερες προσεγγιστικές μεθόδους μοντελοποίησης των πιστωτικών περιθωρίων ανταλλαγής κινδύνου που οδηγούν στον υπολογισμό και την πρόβλεψη των πιθανοτήτων αθέτησης. Επισημαίνοντας τα κοινά και διαφορετικά στοιχεία μεταξύ τους, δημιουργείται μια σαφή εικόνα δύο διαφορετικών προσεγγίσεων στη σύγχρονη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου.

2. ΠΙΣΤΩΤΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΠΡΟΙΟΝΤΑ

2.1 Ορισμοί

Παράγωγο προϊόν στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος (υποκείμενο προϊόν). Ουσιαστικά, δηλαδή, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε μία οργανωμένη δευτερογενή αγορά, όπως ένα χρηματιστήριο, είτε προϊόντα που δεν τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε οργανωμένες αγορές. Σε γενικές γραμμές, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές και ομόλογα μέχρι αγροτικά προϊόντα (π.χ. σιτάρι) και μέταλλα (π.χ. χρυσός).

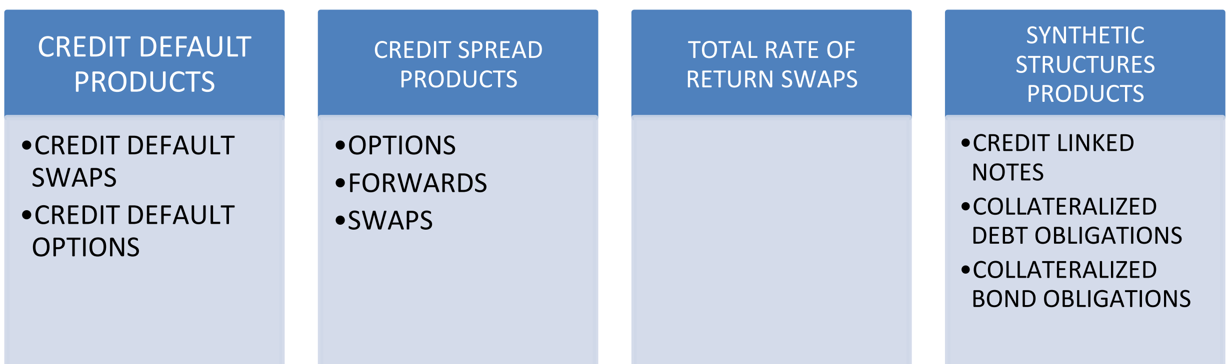
Μέσω των παραγώγων, επιχειρήσεις και οργανισμοί αντιμετωπίζουν άμεσα και αποτελεσματικά κάθε μορφής κινδύνου που μπορεί να προκύψει κατά τη λειτουργία τους. Ειδικότερα, όταν μιλάμε για πιστωτικό κίνδυνο, δηλαδή τον κίνδυνο να προκληθούν απώλειες εξαιτίας κάποιου αντισυμβαλλόμενου να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του.

Ένας επενδυτής ο οποίος δανείζει κεφάλαια με την αγορά ομολογιακού δανείου, εκτίθεται σε τρεις τύπους πιστωτικού κινδύνου. Πρώτον, στον κίνδυνο αθέτησης συμφωνίας (default risk) στον οποίο ο οφειλέτης δεν μπορεί να αποπληρώσει την οικονομική υποχρέωση που έχει αναλάβει, ή μέρος αυτής, προς τον δανειστή του. Δεύτερον, στον κίνδυνο υποβάθμισης (downgrade risk), δηλαδή ο κίνδυνος να υποβαθμιστεί η πιστοληπτική ικανότητα μιας επιχείρησης, μιας τράπεζας ή ενός οργανισμού από τους οίκους αξιολόγησης, όπως είναι η Moody’s Investors Service και η Standard and Poor’s. Τρίτον, στον κίνδυνο περιθωρίου (credit spread risk) ο οποίος προκύπτει από μεταβολές της αγοραίας αξίας των χρεωστικών τίτλων λόγω διακυμάνσεων του πιστωτικού περιθωρίου τους. Επομένως, τα πιστωτικά παράγωγα είναι τα μέσα που επιτρέπουν την απομόνωση/μεταφορά και τη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου.

Η Διεθνής Ένωση Ανταλλαγών και Παραγώγων (International Swaps and Derivatives – ISDA) δημιουργήθηκε από το 1985 με σκοπό να εργαστεί για να καταστήσει τις παγκόσμιες αγορές παραγώγων ασφαλέστερες και πιο αποτελεσματικές. Σήμερα, βάσει της επίσημης σελίδας της ISDA, διαθέτει περισσότερα από 875 μέλη από 68 χώρες σε όλο τον κόσμο. Τα μέλη αυτά αποτελούνται από ένα ευρύ φάσμα παραγόντων της αγοράς παραγώγων, συμπεριλαμβανομένων εταιριών, κυβερνητικών και υπερεθνικών οντοτήτων, ασφαλιστικών εταιριών, διαχειριστών κεφαλαίων και επενδύσεων, διεθνών και περιφερειακών τραπεζών κλπ. Η ISDA επίσης, δημιουργεί βιομηχανικά πρότυπα για τα παράγωγα και παρέχει νομικούς ορισμούς των όρων που χρησιμοποιούνται στις συμβάσεις. Για παράδειγμα, οι ορισμοί των πιστωτικών παραγώγων το 1999, οι οποίοι παρέχουν βασικούς ορισμούς για τις συμβάσεις αντιστάθμισης πιστωτικού κινδύνου (credit default swaps), τις συμφωνίες ανταλλαγής συνολικών αποδόσεων (total return swaps), τα γραμμάτια πιστωτικής σύνδεσης (credit linked notes) κι άλλες συναλλαγές πιστωτικών παραγώγων. Η πιο ενημερωμένη και αναθεωρημένη έκδοση των ορισμών των πιστωτικών παραγώγων από την ISDA, έγινε το 2014.

2.2 ΕΙΔΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Τα πιστωτικά παράγωγα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε είδη με διάφορους τρόπους σύμφωνα με την βιβλιογραφία που αναφέρεται στα είδη τους [Duffie D. and Singleton K.J (2003), Choudhry M. (2013) et al.]. Ωστόσο, οι πλείστοι των συγγραφέων ακολουθούν μια γενική κατηγοριοποίηση η οποία χωρίζει τα πιστωτικά παράγωγα σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες, όπως φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί σύμφωνα με την Deutsche Bank (2007):



Διάγραμμα 1 : Είδη Πιστωτικών Παραγώγων

Η πρώτη κατηγορία πιστωτικών παραγώγων χωρίζεται στα δημοφιλέστερα και πιο διαδεδομένα προϊόντα τα οποία είναι τα Credit Default Swaps, όπου θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα στη συνέχεια της διπλωματικής καθώς και στα Credit Default Options. Στην δεύτερη κατηγορία βρίσκονται τα Credit Spread Products τα οποία αναφέρονται στο πιστωτικό περιθώριο σε σχέση με τον risk free δείκτη αναφοράς ή στη διαφορά των πιστωτικών περιθωρίων δυο χρεογράφων θετικών ως προς τον κίνδυνο. Η επόμενη κατηγορία, δηλαδή τα Total Rate of Return Swaps, επιτρέπουν στον αγοραστή προστασίας να ανταλλάξει την οικονομική απόδοση που επιτυγχάνεται από το περιουσιακό στοιχείο αναφοράς με την περιοδική πληρωμή που συνήθως είναι η αποδοσιακή διαφορά πάνω από το Libor. Στην τελευταία κατηγορία βρίσκονται Synthetic Structures Products, τα οποία προκάλεσαν τις περισσότερες αντιδράσεις για την κατάταξή τους στα πιστωτικά παράγωγα και ο λόγος είναι ότι αν και περιέχουν πιστωτικά παράγωγα, πολλοί οικονομικοί αναλυτές θεωρούν ότι δεν είναι αμιγώς παράγωγα.

2.3 Χρήσεις από τα πιστωτικά ιδρύματα

Γενικότερα, τα πιστωτικά παράγωγα προϊόντα χρησιμοποιούνται για την διαχείριση των πιστωτικών γραμμών αλλά επιπλέον και για να μειώσουν τα πιστωτικά ιδρύματα τα κεφάλαια που είναι υποχρεωμένα να κατακρατούν (regulatory arbitrage). Βέβαια, αυτές είναι χρήσεις που αφορούν τον αγοραστή προστασίας. Ένας πωλητής προστασίας από την άλλη, μπορεί να χρησιμοποιήσει τα προϊόντα λόγω ευκαιριών στην μείωση του κόστους χρηματοδότησης (funding arbitrage) ή για να αλλάξει τη δομή ενός προϊόντος.

Όταν τώρα αναφερόμαστε στην διαχείριση των πιστωτικών γραμμών εννοούμε των χειρισμό καταστάσεων όπου μια τράπεζα έχει δώσει δάνεια σε επιχειρήσεις συγκεκριμένων τομέων της οικονομίας. Ενώ ο κίνδυνος αυτός της συγκέντρωσης θα μπορούσε να μετριαστεί από την τράπεζα με άλλους τρόπους(όπως την πώληση δανείων στην δευτερογενή αγορά ή την παροχή δανείων στους όχι μέχρι πρότινος τομείς), υπάρχουν κάποια πλεονεκτήματα εάν χρησιμοποιηθούν τα πιστωτικά παράγωγα για αυτό τον σκοπό. Κατά πρώτον, δεν θα επηρεαστεί αρνητικά η σχέση πελάτη-τράπεζας και κατά δεύτερον, η παροχή δανείων σε άλλους τομείς μπορεί να εκθέσει την τράπεζα σε νέους κινδύνους.

Τα πιστωτικά παράγωγα λοιπόν δίνουν την δυνατότητα διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου δανείων χωρίς να υπάρξει κάποια αρνητική επιρροή στις σχέσεις με τους πελάτες και παρέχοντας αποτελεσματικότητα κόστους. Να αναφέρουμε πως αν υπάρξει κάποιο γεγονός που θα επηρεάσει αρνητικά τον τομέα που η τράπεζα παρέχει δάνεια, τότε όλες οι επιχειρήσεις στις οποίες η τράπεζα έχει δανείσει, και ανήκουν όλες στον ίδιο τομέα, θα δυσκολευτούν ή θα αδυνατούν να αποπληρώσουν τα χρέη τους προς την τράπεζα. Αυτό λοιπόν εννοούμε όταν αναφερόμαστε στον «κίνδυνο συγκέντρωσης».

Όσον αφορά τώρα τα κεφάλαια που είναι υποχρεωμένες να κρατούν οι τράπεζες, αυτά θα πρέπει να είναι ίσα με το 8% της λογιστικής αξίας του συνόλου των δανείων, στις περισσότερες των περιπτώσεων[Συμβούλιο της Ευρωπαϊκής Ένωσης – Κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον τραπεζικό τομέα] . Από την άλλη υπάρχουν μεγάλες τράπεζες που χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα αξιολόγησης των πελατών και εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου, τα οποία υποδεικνύουν ένα εύρος κεφαλαίων που πρέπει να κρατείται ανάλογα με την πιστοληπτική ικανότητα του εκάστοτε πελάτη.

Οι τράπεζες αυτές λοιπόν μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις πιστωτικές συμφωνίες ανταλλαγής για να «ξεφορτωθούν» δάνεια χαμηλού πιστωτικού κινδύνου και πιο συγκεκριμένα αυτά που απαιτούν κράτηση κεφαλαίων χαμηλότερη από το 8% της λογιστικής τους αξίας, τα οποία θα μείωναν την απόδοση κεφαλαίου της τράπεζας.

2.4 Κίνδυνοι

Παρόλο που τα πιστωτικά παράγωγα προσφέρουν πολλά οφέλη, αν δεν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα μπορούν να αυξήσουν κάποιους από τους κινδύνους τους οποίους συνήθως αντιμετωπίζουν οι συμμετέχοντες στην αγορά. Επιπλέον, η χρήση των πιστωτικών παραγώγων μπορεί να διαστρέψει τα υπάρχοντα κίνητρα της παρακολούθησης και διαχείρισης κινδύνου.

Το arbitrage που αφορά τα κεφάλαια που οι τράπεζες πρέπει να κρατούν ίσως οδηγήσει σε ορθότερη κατανομή των κεφαλαίων, αλλά παρόλα αυτά υπάρχει ο κίνδυνος η δραστηριότητα αυτή να οδηγήσει στην αύξηση του προφίλ κινδύνου μιας τράπεζας. Αυτό βέβαια συμβαίνει γιατί οι τράπεζες απαλλάσσονται από τα περιουσιακά στοιχεία χαμηλού κινδύνου και κρατούν τα περιουσιακά στοιχεία υψηλού κινδύνου. Η καθαρή επίδραση της δραστηριότητας αυτής (δηλαδή το κατά πόσο μια τράπεζα έχει τελικά πολύ περισσότερα ή πολύ λιγότερα κεφάλαια από όσα θα έπρεπε) εξαρτάται από το πόσο καλά το μοντέλο εκτίμησης κινδύνου της εκάστοτε τράπεζας αντικατοπτρίζει τους πραγματικούς κινδύνους όλου του χαρτοφυλακίου δανείων σε σχέση με το σταθερό ποσοστό του οκτώ τοις εκατό επί της λογιστικής αξίας του χαρτοφυλακίου των δανείων που θα έπρεπε να παρακρατούν.

Πιο συγκεκριμένα, αν το μοντέλο μιας τράπεζας εκτιμά καλύτερα το πόσα κεφάλαια που θα έπρεπε η τράπεζα να διατηρεί, σε σχέση βέβαια με το απλούστερο μοντέλο που προτείνεται από τους κανονισμούς, τότε το arbitrage μπορεί να επιτρέψει στην τράπεζα να επιτύχει μια καλύτερη εξισορρόπηση κινδύνου-απόδοσης χωρίς να υπάρξουν αρνητικές επιδράσεις.

Άλλος ένας κίνδυνος που συνδέεται με τα πιστωτικά παράγωγα, και αφορά κυρίως τα πιστωτικά παράγωγα που έχουν ως περιουσιακά στοιχεία αναφοράς δάνεια, έχει να κάνει με τα κίνητρα της παρακολούθησης δανείων. Σε κάθε δάνειο που δίνει μια τράπεζα παρακολουθεί την πιστωτική αξιοπιστία του δανειζόμενου. Αν όμως η τράπεζα αγοράσει πιστωτική προστασία, μέσω της χρήσης πιστωτικού παραγώγου, τότε η παρακολούθηση του δανείου πιθανόν να μην είναι το ίδιο αποδοτική με πριν. Αν όμως η λήξη του πιστωτικού παραγώγου είναι μικρότερη από την λήξη του δανείου τότε δεν θα υπάρξουν κίνητρα για μη αποτελεσματική παρακολούθηση καθώς η τράπεζα θα υπόκειται στον κίνδυνο μιας ενδεχόμενης αθέτησης μετά τη λήξη του παράγωγου προϊόντος. Επίσης, οι τράπεζες οι οποίες αποφεύγουν να παρακολουθούν την πιστωτική αξιοπιστία του δανειζόμενου αποκτούν κακό όνομα το οποίο ίσως αποδειχθεί δαπανηρό για την διεκπεραίωση συναλλαγών στην αγορά πιστωτικών παραγώγων.

Γενικότερα, τα πιστωτικά παράγωγα θα μπορούσαν να αυξήσουν την ρευστότητα και αποτελεσματικότητα των αγορών προϊόντων που εμπεριέχουν το χαρακτηριστικό του κινδύνου μέσω της δυνατότητας μεταφοράς του κινδύνου και της ξεχωριστής αποτίμησης του κινδύνου. Τα πιστωτικά παράγωγα επίσης, ίσως βελτιώσουν την διαδικασία ανακάλυψης τιμής του πιστωτικού κινδύνου [J. Kiff & R. Morrow (2000)].

Επιπλέον, τα πιστωτικά παράγωγα μπορούν, όπως αρχικά αναφέραμε, να χρησιμοποιηθούν από τράπεζες που μπορούν να χρηματοδοτηθούν με χαμηλό κόστος και έπειτα αυτές να «δανείσουν» το ανταγωνιστικό αυτό πλεονέκτημα τους σε επενδυτές οι οποίοι μπορούν αλλιώς να δανειστούν με υψηλότερο από την τράπεζα κόστος, σε αντάλλαγμα βέβαια της μεταφοράς του πιστωτικού κινδύνου από την τράπεζα στους επενδυτές. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως 'funding arbitrage'.

3. CREDIT DEFAULT SWAPS

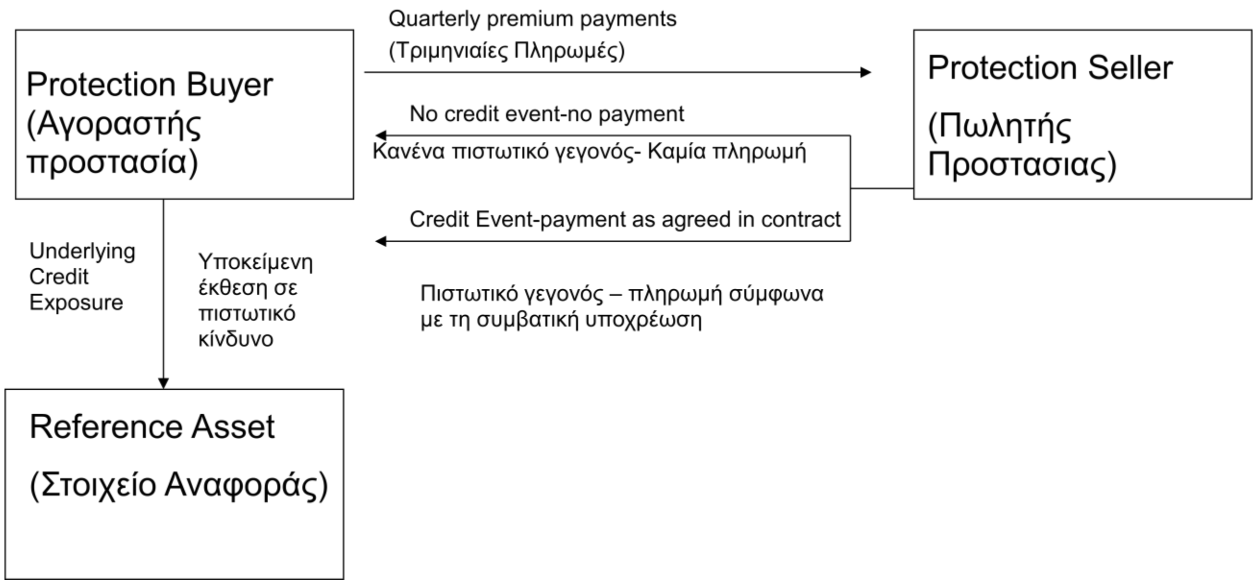
Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται από αυτό το σημείο και έπειτα στην πιο δημοφιλή κατηγορία πιστωτικών παραγώγων τα Credit Default Swaps –CDSs (Συμβάσεις Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης). Θα αναφέρουμε τα σημαντικότερα είδη CDSs που συναντάμε στην αγορά και θα αναλυθούν κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους καθώς και κάποια απλά παραδείγματα που θα βοηθήσουν στην κατανόηση του μηχανισμού τους.

3.1. Απλό CDS- The Single name Credit Default Swap

Μία τέτοια σύμβαση ανταλλαγής κινδύνου λειτουργεί ως εξής: υπάρχει μια συμφωνία ανάμεσα σε δυο μέλη, όπου το ένα από τα δυο μέλη παίρνει θέση αγοραστή του πιστωτικού κινδύνου ενώ το άλλο θέση πωλητή του πιστωτικού κινδύνου μιας οντότητας αναφοράς.
Δηλαδή, έχουμε μια συναλλαγή όπου το ένα μέλος (πωλητής κινδύνου ή αγοραστής προστασίας) πραγματοποιεί περιοδικές πληρωμές σε αντάλλαγμα λήψης προκαθορισμένης πληρωμής από το άλλο μέλος (αγοραστής κινδύνου ή πωλητής προστασίας) εάν συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός. Η συμφωνία αυτή βέβαια έχει διάρκεια έως την ημερομηνία λήξης (maturity date).

Εάν τώρα συμβεί το πιστωτικό γεγονός, ο αγοραστής προστασίας έναντι πιστωτικού κινδύνου λαμβάνει πληρωμή από το άλλο μέλος της συμφωνίας (πληρωμή με μετρητά ή φυσική παράδοση). Να αναφέρουμε πως στις συμφωνίες αυτές η φυσική παράδοση δεν είναι πάντα δυνατόν να γίνει καθώς οι συμφωνίες χρησιμοποιούνται είτε για αντιστάθμιση και το περιουσιακό στοιχείο δεν είναι πάντα άμεσα μεταβιβάσιμο είτε για να δημιουργηθούν θέσεις πώλησης από χρήστες οι οποίοι δεν έχουν στην κατοχή τους κάποια παραδοτέα υποχρέωση. Παρόλα αυτά, ο τρόπος αυτός διακανονισμού είναι ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος. Εάν τώρα υπάρχουν περιουσιακά στοιχεία-υποχρεώσεις προς παράδοση σε διαφορετικές τιμές τότε ο αγοραστής προστασίας αγοράζει και παραδίδει στο πωλητή το φθηνότερο προς παράδοση περιουσιακό στοιχείο. Ακόμη, ένα πλεονέκτημα της φυσικής παράδοσης είναι το ότι αποφεύγονται τυχόν διαμάχες για την δίκαιη τιμή αγοράς παραδείγματος χάρη ενός ομολόγου (περιουσιακό στοιχείο αναφοράς), έπειτα από το πιστωτικό γεγονός.

Εάν δεν λάβει χώρα κάποιο πιστωτικό γεγονός ο αγοραστής προστασίας θα συνεχίσει να πραγματοποιεί πληρωμές έως την λήξη της συμφωνίας. Οι πληρωμές μπορεί να πραγματοποιούνται ανά τρίμηνο, ανά εξάμηνο ή και να είναι ετήσιες. Επίσης, συχνά συναντάται στην βιβλιογραφία ο αγοραστής προστασίας να ονομάζεται και πληρωτής (payer) και η πληρωμή που πραγματοποιεί "premium leg", ενώ ο πωλητής προστασίας παραλήπτης (receiver) και η πληρωμή που θα πραγματοποιήσει σε περίπτωση αθέτησης "protection leg". Επιπλέον, όταν οι δύο αντισυμβαλλόμενοι συμφωνούν να γίνει πληρωμή ενός προκαθορισμένου σταθερού ποσού (πληρωμή αθέτησης ή αποζημίωσης) σε περίπτωση που λάβει χώρα ένα πιστωτικό γεγονός, τότε πρόκειται για έναν δυαδικό διακανονισμό (Binary Settlement).
Παρακάτω παρουσιάζεται ένα διάγραμμα με τη δομή μιας single name CDS Συναλλαγής:



Διάγραμμα 2 : Δομή μιας single name CDS Συναλλαγής

3.1.1 Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Ένα ταμείο (έστω pension fund) έχει πενταετή ομόλογα που εκδίδονται από την Α.Ε., ονομαστικής αξίας €10 εκατ. Το pension fund, προκειμένου να διαχειριστεί τον κίνδυνο να χάσει τα χρήματά του σε περίπτωση αθέτησης της Α.Ε. επί του χρέους της, αγοράζει ένα CDS από την «Τράπεζα Παραγώγων» ονομαστικού ποσού €10 εκατ. Έστω ότι το CDS διαπραγματεύεται στις 200 μονάδες βάσης (2%). Σε αντάλλαγμα για αυτήν την πιστωτική προστασία, το συνταξιοδοτικό ταμείο πληρώνει το 2% των €10 εκατ. (€200.000) ετησίως, έστω σε τριμηνιαίες δόσεις των € 50.000 στην Τράπεζα Παραγώγων.

- Εάν η Α.Ε. δεν αθετήσει, το ταμείο θα καταβάλλει τριμηνιαίες πληρωμές στην Τράπεζα Παραγώγων για 5 χρόνια, στο τέλος των οποίων θα λάβει πίσω και τα €10 εκατ. από την Α.Ε.
- Αν και οι πληρωμές της προστασίας ύψους €1 εκατ. μειώνουν τις αποδόσεις των επενδύσεων για το συνταξιοδοτικό ταμείο, ο κίνδυνος απώλειάς τους λόγω αθέτησης της Α.Ε. εξαλείφεται.
- Εάν η Α.Ε. αθετήσει τις υποχρεώσεις της, έστω στον τρίτο χρόνο της σύμβασης, το ταμείο θα σταματήσει να πληρώνει τις τριμηνιαίες δόσεις και η Τράπεζα Παραγώγων θα επιβεβαιώσει ότι το ταμείο χρηματοδοτείται πλέον για την απώλεια των €10 εκατομμυρίων πλην του ανακτώμενου ποσού, εάν υπάρχει. Το συνταξιοδοτικό ταμείο χάνει ακόμα τα €600.000 που έχει καταβάλει τα τρία χρόνια, αλλά χωρίς τη σύμβαση

ανταλλαγής θα έχανε το σύνολο των €10 εκατομμυρίων μείον το ανακτήσιμο ποσό (recovery rate).

Παράδειγμα 2ο

‘Ενα αντισταθμιστικό κεφάλαιο/ταμείο (hedge fund) προβλέπει ότι η εταιρεία Α.Ε. θα αθετήσει την υποχρέωση της ως προς το χρέος της. Έτσι, αγοράζει προστασία CDS, από την ΑΑΑ-Τράπεζα για δύο χρόνια, αξίας €10 εκατ., με οντότητα αναφοράς την Α.Ε. και με μια αποδοσιακή διαφορά(spreads) των 500 bppa (=5%) ετησίως.

- Εάν πράγματι η Α.Ε. αθετήσει ύστερα από ένα χρόνο, το αντισταθμιστικό κεφάλαιο θα έχει πληρώσει €500.000 στην ΑΑΑ-Τράπεζα , αλλά θα εισπράξει €10 εκατ. (υποθέτοντας ότι η ΑΑΑ-Τράπεζα έχει την ρευστότητα να καλύψει τις απώλειες), με αποτέλεσμα έτσι την αποκόμιση κέρδους. Η ΑΑΑ-Τράπεζα και οι επενδυτές της θα υποστούν έτσι μία ζημία των €9,5 εκατ.
- Ο επενδυτής μπορεί να κερδοσκοπήσει πάνω στην πιστοληπτική ικανότητα μιας εταιρείας ή κράτους, δεδομένου ότι γενικά οι αποδοσιακές διαφορές(spreads) αυξάνονται με την εξασθένηση της φερεγγυότητας, ενώ μειώνονται με την ενίσχυσή της.
- Ο επενδυτής επομένως μπορεί να αγοράσει το CDS κάποιας εταιρείας για να κερδοσκοπήσει από το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας της. Εναλλακτικά, ο επενδυτής μπορεί να πάρει θέση πωλητή στο CDS αν κρίνει ότι η πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας θα βελτιωθεί εάν η τράπεζα ανατρέψει με κάποιον τρόπο την κατάσταση που οδηγεί στην χρεοκοπία.
- Εάν όμως η Α.Ε. δεν αθετήσει τις υποχρεώσεις της, τότε το CDS θα διαρκέσει δύο χρόνια και το αντισταθμιστικό ταμείο θα καταλήξει να πληρώσει και να υποστεί ζημία €1 εκατ. Έτσι η ΑΑΑ-Τράπεζα, παρέχοντας ασφάλεια κατάφερε να βγάλει €1 εκατ., χωρίς καμία αρχική επένδυση. Το hedge fund θα μπορούσε να ρευστοποιήσει τη θέση του στο CDS μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα σε μία προσπάθεια να «κλειδώσει» τα κέρδη ή τις ζημίες του

Παράδειγμα 3ο

- Μετά από ένα χρόνο, η αγορά θεωρεί ότι η Α.Ε. είναι πιο πιθανό να καταλήξει σε αθέτηση, με αποτέλεσμα η αποδοσιακή διαφορά να φτάσει από τις 500 στις 1.500 μονάδες βάσης(bppa). Το hedge fund μπορεί να πουλήσει προστασία αξίας €10 εκατ. στην ΑΑΑ-Τράπεζα για ένα χρόνο, σε αυτό το υψηλότερο ποσοστό. Συνεπώς, εντός των δύο ετών το hedge fund θα πληρώσει στην τράπεζα 2*5%* €10 εκατ. = €1 εκατ., αλλά θα εισπράξει 1*15% *€ 10 εκατ = €1,5 εκατ, κι έτσι θα έχει κέρδη € 500.000.
- Σε ένα άλλο σενάριο, η αγορά θεωρεί τώρα ότι είναι λιγότερο πιθανό να αθετήσει η Α.Ε., με αποτέλεσμα το spread να υποχωρήσει στις 250 μονάδες βάσης. Το hedge fund μπορεί

να επιλέξει να πουλήσει προστασία αξίας €1εκ. στην ΑΑΑ-Τράπεζα, για ένα χρόνο, σε αυτό το χαμηλότερο ποσοστό. Έτσι, αυτά τα δύο χρόνια το αντισταθμιστικό κεφάλαιο θα καταβάλλει στην τράπεζα 2*5%* €10 εκατ. = €1 εκατ., ενώ θα εισπράξει 1 * 2,5% * €10 εκατ. = €250.000, έχοντας έτσι ζημία €750.000. Η ζημία αυτή ωστόσο είναι μικρότερη από αυτή του ενός εκατομμυρίου ευρώ που θα είχε επέλθει εάν δεν είχε συνηφθεί η δεύτερη συναλλαγή.

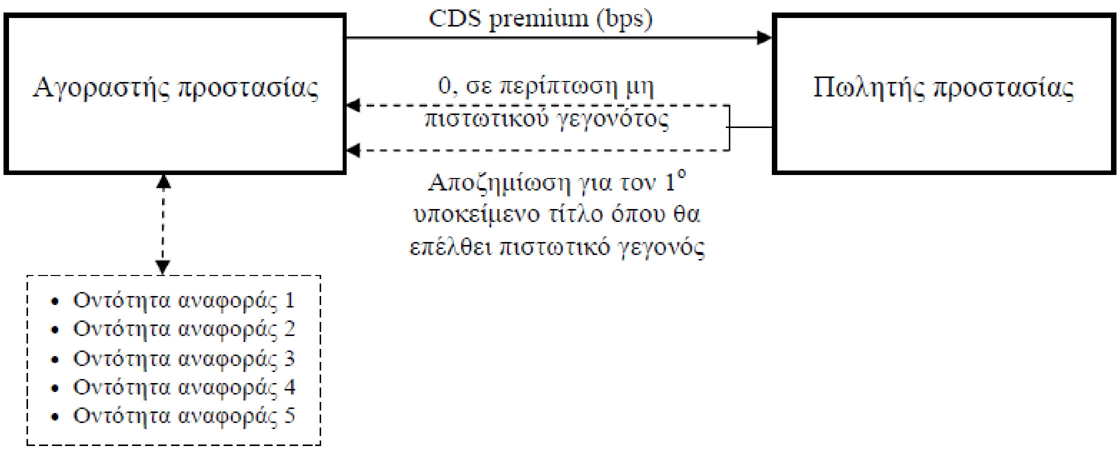
Συναλλαγές όπως αυτές δεν χρειάζεται καν να πραγματοποιηθούν με μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Αν η αποδοσιακή διαφορά της Α.Ε. είχε διευρυνθεί μόλις λίγες μονάδες βάσης κατά τη διάρκεια μιας ημέρας, το αντισταθμιστικό κεφάλαιο θα μπορούσε να έχει συνάψει αμέσως μία σύμβαση συμψηφισμού με αποτέλεσμα να αποκομίσει ένα μικρό κέρδος κατά τη διάρκεια των δύο CDS.
Τα CDS χρησιμοποιούνται επίσης για την κατασκευή συνθετικών CDS. Αντί να κατέχει κανείς ένα ομόλογο ή δάνειο, μπορεί να αναπαράγει την έκθεσή του στον πιστωτικό κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων με τη χρήση ενός CDS.

3.2 CDSs Χαρτοφυλακίου - Basket Default Swaps

Τα CDSs χαρτοφυλακίου, σε αντίθεση με τα single name, περιλαμβάνουν ένα πλήθος οντοτήτων αναφοράς, διάφορων δανειστών, με ποικίλα επίπεδα πιστοληπτικής αξιολόγησης.

Υπάρχουν διάφορα είδη συμβολαίων και μπορούν να χωριστούν ως εξής:

- το *add-up basket CDS*, όπου ο πωλητής προστασίας είναι υποχρεωμένος να καταβάλει στον αγοραστή προστασίας αποζημίωση για οποιοδήποτε όνομα και αν χρεοκοπήσει.
- το n^{th}*-to- default CDS*, όπου ο πωλητής προστασίας πληρώνει τον αγοραστή προστασίας αν και μόνο αν έχει χρεοκοπήσει μέχρι και η ν-οστή οντότητα αναφοράς. Το πιο σύνηθες είναι το *first-to-default CDS*, δηλαδή το συμβόλαιο ενεργοποιείται μόλις γίνει η πρώτη χρεοκοπία (Διάγραμμα 3)
- *Μειωμένη συμφωνία ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου – Subordinate Default Swap*. Σε αυτό το είδος υπάρχουν δυο βασικά στοιχεία. Το πρώτο είναι μια μέγιστη αποπληρωμή για κάθε χρεοκοπημένη οντότητα αναφοράς και το δεύτερο μια μέγιστη συνολική αποπληρωμή κατά τη διάρκεια του swap για το σύνολο των οντοτήτων αναφοράς(Standard & Poor’s (1999))
- Τέλος, στην *Ανώτερη Συμφωνία Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου – Senior default swap* υπάρχει μια μέγιστη αποπληρωμή για κάθε οντότητα αναφοράς, αλλά η αποπληρωμή δεν ενεργοποιείται μέχρι να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο ποσό απώλειας.



Διάγραμμα 3 : Δομή ενός first-to-default CDS

3.2.1 Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Έστω ένας επενδυτής ο οποίος έχει επενδύσει €10εκ. σε καθ' ένα από τα εταιρικά ομόλογα των παρακάτω εταιρειών. Έστω επίσης ότι ξέρουμε το ποσοστό ανάκτησης για κάθε εταιρικό ομόλογο εκ των προτέρων (recovery rate):

α) Έστω για την εταιρεία Α, το ποσοστό ανάκτησης είναι 40%
β) Έστω για την εταιρεία Β, το ποσοστό ανάκτησης είναι 30%
γ) Έστω για την εταιρεία Γ, το ποσοστό ανάκτησης είναι 50%
Εάν ο επενδυτής χρησιμοποιεί CDS για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της επένδυσης των €30 εκ., τι απόδοση θα είχε σε καθένα από τα παρακάτω σενάρια;

i) **<u>Η εταιρεία Β χρεοκοπεί σε μια συνηθισμένη δομή CDS:</u>**
Ο επενδυτής θα λάβει €7 εκ. δηλαδή : (€10εκ * (1-0.30)) από το CDS

ii) **<u>Η εταιρεία Β χρεοκοπεί σ' ένα "first-to-default basket"</u>**
Εφόσον η εταιρεία Β χρεοκοπήσει και δεδομένου ότι ο επενδυτής έχει επιλέξει το "first –to-default basket" θα λάβει όπως στην προηγούμενη περίπτωση €7 εκ.

iii) **<u>Η εταιρεία Α χρεοκοπεί πρώτα και μετά ακολουθεί η εταιρεία Β, σ' ένα "first-to-default basket"</u>**
Δεδομένου ότι αυτό είναι ένα "first-to-default basket", ο επενδυτής θα αποζημιωθεί μόνο για την

πρώτη χρεοκοπία. Έτσι ο επενδυτής θα λάβει €6 εκ. δηλαδή (€10 εκ. * (1-0.40)) σε αυτή τη συναλλαγή, αφού μετά η σύμβαση CDS θα έχει λήξει κι έτσι ο επενδυτής θα πρέπει να επωμιστεί τη ζημία της χρεοκοπίας της εταιρείας Β.

- **Η εταιρεία Γ χρεοκοπεί σε ένα "senior basket" το οποίο έχει όριο πρώτης ζημίας €5εκ.**

Στο παραπάνω παράδειγμα, ο επενδυτής θα έπαιρνε €5εκ δηλαδή, (€10εκ *(1-0.50)), αλλά δεδομένου του ορίου που πρέπει να πληρώσει ο επενδυτής για το senior basket/CDS, δηλαδή τα €5 εκ, δεν θα λάβει τίποτα.

- **Η εταιρεία Α χρεοκοπεί σε ένα "senior basket" το οποίο έχει όριο πρώτης ζημίας €5εκ.**

Στο παράδειγμα αυτό, ο επενδυτής θα έπαιρνε €6εκ δηλαδή, (€10εκ *(1-0.40)), αλλά δεδομένου του ορίου που πρέπει να πληρώσει ο επενδυτής για το senior basket/CDS, δηλαδή τα €5 εκ, θα λάβει μόνο το €1 εκ.

Παράδειγμα 2^{ο}

Έστω ότι η απόδοση σε ένα πενταετές (5Y) risk-free ομόλογο είναι 7%, η απόδοση σε ένα 5Y εταιρικό ομόλογο που έχει εκδόσει η εταιρεία ΑΒΓ είναι 9,5% και το 5Y CDS για την ίδια εταιρεία είναι 150bps/pa (basis points per annum) δηλαδή 1,5%.

- Στο σενάριο αυτό υπάρχει ευκαιρία για τον επενδυτή (arbitrage opportunity)?
- Εάν τα CDS της εν λόγω εταιρείας διαπραγματεύονταν στα 300bps/pa, τι ευκαιρία κέρδους θα είχε ο επενδυτής (arbitrage opportunity)?

Έστω ότι ο επενδυτής αυτός έχει αγοράσει το εταιρικό ομόλογο και έχει πάρει και αντίστοιχη θέση στο CDS της ίδιας εταιρείας, αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν μια θέση σε ένα στοιχείο risk-free.

(i) Στην περίπτωση αυτή είναι εύκολα αντιληπτό ότι ο επενδυτής μπορεί να κερδίσει εφόσον αγοράσει το εταιρικό ομόλογο και το αντίστοιχο CDS. Με αυτό τον τρόπο ο επενδυτής:

- Θα κερδίσει 9,5% από την απόδοση του ομολόγου
- Θα πληρώσει 1,5% για το CDS και θα έχει μια καθαρή απόδοση 8% σε ένα risk free στοιχείο.
- Αυτή η απόδοση είναι κατά 1% μεγαλύτερη από την απόδοση που θα είχε εάν είχε επενδύσει σε ένα στοιχείο risk-free από την αρχή.

(ii) Εάν τα CDS διαπραγματεύονταν στα **300bppa,** τότε ο επενδυτής θα μπορούσε να πουλήσει το εταιρικό ομόλογο και να πουλήσει και τα CDS που είχε αγοράσει για αντιστάθμιση και με το διαθέσιμο ρευστό να αγοράσει το risk-free στοιχείο. Με αυτό τον τρόπο ο επενδυτής:

- Θα πουλήσει το εταιρικό ομόλογο από το οποίο έχει απόδοση 9,5% και θα αγοράσει το risk-free στοιχείο που έχει απόδοση 7%
- Θα κερδίσει 3% από τα CDS που θα πουλήσει

- Έτσι θα έχει κέρδος **<u>50bppa</u>**.

Τα CDSs χαρτοφυλακίου μειονεκτούν σε σχέση με τα single name και ο λόγος είναι ότι κάποιες οντότητες αναφοράς τείνουν να συγχωνευθούν, με αποτέλεσμα να μειωθεί ο αριθμός των οντοτήτων στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο. Σε περίπτωση συγχώνευσης εταιριών, ο ISDA προβλέπει δυο ενδεχόμενα : την μη αντικατάσταση (no replacement clause), όπου στο συμβόλαιο δεν γίνεται καμία αλλαγή και την αντικατάσταση (replacement clause),όπου ο αγοραστής προστασίας είναι υποχρεωμένος να δώσει στον πωλητή προστασίας μία λίστα με τουλάχιστον τρία ονόματα εταιριών, ίδιου κλάδου και πιστοληπτικής αξίας με αυτές που συγχωνεύθηκαν, ώστε να επιλέξει την αντικαταστάτρια εταιρία.
Είναι λογικό τα CDSs χαρτοφυλακίου να έχουν μεγαλύτερο πιστωτικό κίνδυνο σε σχέση με τα απλά CDSs, ειδικότερα όταν οι πιθανότητες αθέτησης (default probabilities) των τίτλων στο χαρτοφυλάκιο αναφοράς έχουν χαμηλή συσχέτιση. Ως αντίκτυπο αυτού, τα CDSs premiums είναι μεγαλύτερα.

4. Μοντελοποίηση της έντασης (Intensity modeling)

Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται στην έρευνα του David Lando που αφορά την ένταση αθέτησης και πώς αυτή, μέσω της μοντελοποίησης έχει ενεργό ρόλο στην μελέτη του κινδύνου αθέτησης και στην τιμολόγηση προϊόντων [“Credit Risk Modeling: Theory and Applications, (2004)]. Βασική πηγή επίσης, αποτελεί και το σύγγραμμά του με τίτλο “On Cox processes and credit risky securities”, (1998). Αναφορά επίσης γίνεται και στο μοντέλο που ανέπτυξαν οι Duffie και Singleton (1999a) καθώς ο Schonbuncher (1998).

Σε μοντέλα που έχουν μελετηθεί μέχρι και σήμερα και βασίζονται σε options, το πιστωτικό γεγονός ορίζεται σε όρους της διαδικασίας μοντελοποίησης των περιουσιακών στοιχείων ενός εκδότη. Η αθέτηση ενεργοποιείται όταν τα περιουσιακά στοιχεία ή κάποια λειτουργία τους, πλησιάζουν ή πέφτουν κάτω από τα όρια. Σε αυτό το κεφάλαιο, προχωράμε σε μια κατηγορία μοντέλων, τα intensity models των οποίων οι παράγοντες επηρεάζουν το πιστωτικό γεγονός, αλλά τυπικά (κι όχι απαραίτητα), αφήνουν στην άκρη το ερώτημα του τι ακριβώς ενεργοποιεί το πιστωτικό γεγονός.

Υπάρχουν δυο βασικοί λόγοι γιατί τα intensity models είναι σημαντικά στην μελέτη του κινδύνου αθέτησης. Πρώτον, τα intensity models, ξεκάθαρα, φαίνεται να είναι ο πιο κομψός τρόπος γεφύρωσης του χάσματος ανάμεσα στο credit scoring ή στα μοντέλα πρόβλεψης αθέτησης και στα μοντέλα που τιμολογούν τον κίνδυνο αθέτησης. Αν θέλουμε να ενσωματώσουμε στα μοντέλα τιμολόγησης όχι μόνο την αξία του ενεργητικού της εταιρίας αλλά και άλλους συναφείς παράγοντες πρόβλεψης αθέτησης, μπορούμε να στρέψουμε το ενδιαφέρον μας στα μοντέλα πρόβλεψης αθέτησης και να αναρωτηθούμε ποιές μεταβλητές είναι ικανές για πρόβλεψη της αθέτησης. Για να το μετατρέψουμε αυτό σε μοντέλο τιμολόγησης πρέπει να κατανοήσουμε τη δυναμική εξέλιξη των μεταβλητών και πώς αυτές επηρεάζουν τις πιθανότητες αθέτησης. Το φυσικό πλαίσιο για να γίνει αυτό, είναι τα intensity-based models τα οποία συνδέουν παλινδρομήσεις κινδύνου με τυποποιημένους μηχανισμούς τιμολόγησης.

Δεύτερον, ο μαθηματικός μηχανισμός των intensity models φέρνει στο παιχνίδι ολόκληρο των μηχανισμό του default – free term-structured modeling. Αυτό σημαίνει ότι οι οικονομετρικές προδιαγραφές από το term-structure modeling και τα κόλπα για την τιμολόγηση παραγώγων, μπορούν να μεταφερθούν σε απαιτήσεις θετικές προς την αθέτηση (defaultable claims). Επιπλέον, κάποιες απαιτήσεις, όπως τα basket default swaps, των οποίων το ισοδύναμο δεν βρίσκεται εύκολα στη συνήθη μοντελοποίηση των term-structure, αποδεικνύονται βολικά σε αυτή τη ρύθμιση.

Στη συνήθη μοντελοποίηση των term-structure , η άγνοιά μας στο τι πραγματικά ρυθμίζει τη δυναμική των επιτοκίων, συχνά κρύβεται σε μια « εξωγενή» προδιαγραφή, για παράδειγμα το short rate. Η χρήση αυτή των εξωγενή προδιαγραφών θα μεταφερθεί στη ρύθμιση του κινδύνου αθέτησης, όπου τα περισσότερα μοντέλα χρησιμοποιούν αυτού του είδους προδιαγραφές της έντασης αθέτησης. Η μαθηματική δομή για τη συνήθη μοντελοποίηση των term- structure, εύκολα επιτρέπει για το short rate, να εξαρτάται από πολυδιάστατες διεργασίες μεταβλητής κατάστασης και ακόμη, να εξαρτάται από αισθητές διεργασίες μεταβλητής κατάστασης. Πρόκειται κυρίως για το πρόβλημα του καθορισμού καλών μοντέλων για αυτήν την εξάρτηση η οποία μας υποχρεώνει να χρησιμοποιούμε εξωγενή προδιαγραφές. Σε αυτήν την κατηγορία περιλαμβάνουμε προδιαγραφές που χρησιμοποιούν αισθητές ποσότητες (όπως αποδόσεις και μεταβλητότητες) από τη δομή που προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε ως μεταβλητές κατάστασης. Το ίδιο ισχύει στη συνέχεια για τα μοντέλα έντασης αθέτησης (intensity models of default). Καθώς οι γνώσεις μας βελτιώνονται όσον αφορά τους καλούς προγνωστικούς δείκτες αθέτησης, ελπίζουμε ότι θα φτιάξουμε καλύτερα μοντέλα για τα credit spreads και τις εντάσεις αθέτησης τα οποία δεν συνδέονται απλά σε εξωγενή προδιαγραφές της έντασης, αλλά στην πραγματικότητα περιλαμβάνει πιο θεμελιώδης μεταβλητές. Δεν υπάρχουν πολλά μοντέλα ακόμη που το κάνουν αυτό με πειστικό τρόπο. Ο μηχανισμός αυτού του κεφαλαίου θα πρέπει να είναι χρήσιμος στην προσπάθειά μας να φτιάξουμε τέτοιου είδους μοντέλα.

Έχοντας τονίσει την ομοιότητα μεταξύ της συνήθης μοντελοποίησης των term- structure και της μοντελοποίησης των defaultable bonds, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε επίσης και τις διαφορές. Οι δυο πιο σημαντικές διαφορές είναι οι προδιαγραφές των ασφάλιστρων κινδύνου (risk premiums) και οι υποθέσεις ανάκτησης (recovery assumptions). Ο λόγος για την ομοιότητα μεταξύ της τιμής ενός default free ομολόγου και ενός defaultable ομολόγου σε ένα intensity model, είναι η ομοιότητα μεταξύ της αναμενόμενης τιμής του συντελεστή προεξόφλησης (discount factor) και της πιθανότητας επιβίωσης. Ωστόσο, επειδή η ένταση αθέτησης είναι συνδεδεμένη με μία διαδικασία άλματος (όπου το short rate δεν είναι), υπάρχει ένα πιο πλούσιο πακέτο των risk premiums, επομένως χρησιμοποιώντας μόνο την προδιαγραφή των risk premiums που δουλεύει για τα μοντέλα βραχυπρόθεσμων επιτοκίων (short rate models), αφήνει εκτός τη σημαντική έννοια της εκδήλωσης του κινδύνου, η οποία πρέπει να αντιμετωπιστεί. Κατανοώντας τη δομή των risk premiums είναι σημαντικό αν θέλουμε τελικά να συνδέσουμε τα μοντέλα πρόβλεψης αθέτησης με τα μοντέλα τιμολόγησης. Αν εκτιμήσουμε μια συνάρτηση κινδύνου η οποία συνδέει ορισμένες δυναμικές μεταβλητές με πιθανότητες αθέτησης και προσδιορίσουμε τη δυναμική εξέλιξη των μεταβλητών, πότε ισχύει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εμπειρικά εκτιμημένη συνάρτηση κινδύνου για τιμολόγηση, προσαρμόζοντας ενδεχομένως τα ασφάλιστρα κινδύνου στις μεταβλητές; Αυτή είναι μια σημαντική ερώτηση για οποιαδήποτε προσπάθεια απόκτησης πιθανοτήτων αθέτησης μέσω παρατηρούμενων- αισθητών τιμών.

Μια δεύτερη σημαντική διαφορά μεταξύ της τιμολόγησης ενός defaultable bond και της τιμολόγησης ενός treasury bond, είναι το γεγονός ότι οι υποθέσεις ανάκτησης εισάγονται εμφανώς στην τιμολόγηση των defaultable bonds. Θα ξοδέψουμε λίγο χρόνο μελετώντας τον ρόλο των διαφορετικών υποθέσεων ανάκτησης.

Η παρουσίαση των μοντέλων αθέτησης θα επικεντρωθεί σχεδόν αποκλειστικά στην κατασκευή χρησιμοποιώντας μία ρύθμιση διπλών στοχαστικών διαδικασιών Poisson ή διαφορετικά, διαδικασιών Cox. Καθώς αυτή δεν είναι η πιο γενική ρύθμιση, είναι με διαφορά η πιο βολική να εργαστεί κάποιος σε πρακτικά προβλήματα τιμολόγησης.

Υπάρχει φυσικά μια βλάβη της γενικότητας χρησιμοποιώντας αθετήσεις μοντελοποιημένες ως διαδικασίες Cox, και αυτή η βλάβη της γενικότητας κυρίως εμφανίζεται όταν μοντελοποιούμε πολλαπλές αθετήσεις της ίδιας εταιρίας ή αθετήσεις στενά συνδεόμενων εταιριών. Μία ταυτόχρονη ισχυρή αλλαγή σε μια συνηθισμένη μεταβλητή κατάστασης που ελέγχει τις εντάσεις αθέτησης πολλών εταιριών, μπορεί να προκαλέσει υψηλά επίπεδα αλληλεξάρτησης ακόμη και με τη διατήρηση της δομής των διαδικασιών Cox. Ως εκ τούτου, για σκοπούς πρακτικής μοντελοποίησης ο μηχανισμός αυτού του κεφαλαίου θα πάρει τον μοντελοποιητή σε μεγάλο βαθμό προς την κατεύθυνση της κατασκευής ρεαλιστικών μοντέλων που είναι αναλυτικά ελκυστικά.

Από τη σκοπιά της μοντελοποίησης, κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί αν η αναλυτική ελκυστικότητα των intensity models εμφανίζεται σε αρκετά υψηλή τιμή, και συγκεκριμένα αφήνοντας τη ρητή περιγραφή της αθέτησης ως το πρώτο χτύπημα της αξίας του ενεργητικού μιας επιχείρησης. Θα δούμε ότι στην πραγματικότητα intensity models προκύπτουν φυσικά, σε ένα δομικό μοντέλο (structural model) αν προσθέσουμε το ρεαλιστικό χαρακτηριστικό, ότι η αξία του ενεργητικού ή η απόσταση της αξίας του ενεργητικού στο όριο αθέτησης δεν μπορεί να παρατηρηθεί τέλεια. Αυτή η απλή επιπλοκή έχει το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι οι μεταβλητές που συσχετίζονται με την αξία του ενεργητικού έχουν προγνωστική ικανότητα απλώς και μόνο επειδή είναι συσχετισμένες με την πραγματική τιμή. Ως εκ τούτου, ακόμη και σε μοντέλα όπου η τέλεια παρατήρηση της αξίας του ενεργητικού θα καθιστούσε την αξία των περιουσιακών στοιχείων επαρκή πρόβλεψη της αθέτησης, οι ατελείς πληροφορίες προκαλούν πρόσθετες μεταβλητές για να αυξήσουν την προγνωστική μας ικανότητα.

4.1 Τι είναι ένα intensity model;

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το τι προσπαθεί να επιτύχει το intensity model, θα δούμε εν συντομία την έννοια της έντασης αθέτησης και τη σύνδεσή της με τις υποθετικές πιθανότητες αθέτησης.

Έστω τ μία θετική τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή μπορεί να περιγραφεί σε όρους μιας συνάρτησης κινδύνου h, π.χ

$$P(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right).$$

Τότε,

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(\tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t) = h(t),$$

έτσι, $h(t)\Delta(t)$ είναι κατά προσέγγιση η υποθετική πιθανότητα μιας αθέτησης σε ένα μικρό διάστημα μετά τη δεδομένη επιβίωση μέχρι και το t. Σημειώστε ότι αυτή είναι μια υποθετική πιθανότητα αθέτησης την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε για όλα τα t τη στιγμή 0, αφού ο μόνος λόγος που αυτή η υποθετική πιθανότητα αθέτησης αλλάζει με το t, είναι η ίδια χρονική διάρκεια.

Σε πραγματικές καταστάσεις μοντελοποίησης υπάρχουν παράγοντες άλλοι από το πέρασμα του χρόνου, οι οποίοι επηρεάζουν την πιθανότητα αθέτησης μιας εταιρίας η οποία κατάφερε να επιβιώσει πέραν από το χρόνο t . Αν η εταιρία επιβιώσει ανάμεσα στο χρόνο 0 και στο χρόνο t, φυσιολογικά έχουμε πρόσβαση σε πληροφορίες στον χρόνο t οι οποίες δεν είναι διαθέσιμες στο χρόνο 0. Ως εκ τούτου, θέλουμε να είμαστε ικανοί να φτιάξουμε μοντέλα στα οποία μπορούμε να προσφέρουμε ένα γενικότερο σύνολο πληροφοριών $\mathcal{F}_t$ έτσι ώστε,

$$P(\tau \leq t + \Delta t \mid \mathcal{F}_t) \cong 1_{\{\tau > t\}} \lambda(t) \Delta t \,, \tag{4.1}$$

όπου $\mathcal{F}_t$ περιλαμβάνει πληροφορίες επιβίωσης μέχρι το χρόνο t, και λ είναι μία διαδικασία η οποία είναι προσαρμοσμένη με (στην πραγματικότητα προβλέψιμη σε σχέση με) τη διύλιση • . Το πρόβλημα φυσικά, είναι ότι αυτή η χαλαρή διατύπωση δε χρησιμεύει ως ορισμός και είναι επομένως αδύνατον να διατυπωθούν κανόνες υπολογισμού αυτού. Επομένως, πρέπει να στραφούμε σε έναν πιο τεχνικό ορισμό.

4.2 Η κατασκευή της διαδικασίας Cox ενός μόνο χρονικού άλματος

Η κατασκευή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι γνωστή από τη θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών υπό την επωνυμία "Διαδικασίες Cox " ή "Διπλά Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson". Αυτή η κατασκευή αποκτά ένταση αθέτησης η οποία διέπεται από "εξωγενείς" μεταβλητές κατάστασης.

Υποθέτουμε, από εδώ και στο εξής, ότι υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Είναι βολικό να σκεφτόμαστε το Q ως μέτρο τιμολόγησης, δηλαδή ένα μέτρο που είναι ουδέτερο σε σχέση με τον κίνδυνο(risk neutral ή martingale) και υπάρχει σε μια οικονομία χωρίς arbitrage. Στη συνέχεια, όλα τα χρεόγραφα τιμολογούνται ως αναμενόμενες προεξοφλημένες αξίες στο πλαίσιο αυτού του μέτρου. Η συγκεκριμένη επιλογή του Q εξαρτάται, μεταξύ άλλων, από τις υποθέσεις μας για τα ασφάλιστρα κινδύνου, αλλά στην πρακτική μοντελοποίηση η δομή των ασφαλίστρων κινδύνου επιλέγεται σχεδόν πάντα για να φτάσουμε στη δομή που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο. Μέχρι να συζητήσουμε τη δομή των ασφαλίστρων κινδύνου, όπου χρειάζεται ρητά να γίνει διάκριση μεταξύ του φυσικού μέτρου P και του μέτρου τιμολόγησης Q, οι προσδοκίες που υπολογίζουμε είναι στο μέτρο Q.

Μια διαδικασία X μεταβλητών κατάστασης με τιμές στο $\mathbb{R}^d$, ορίζεται στο χώρο πιθανότητας. Έστω $\lambda: \mathbb{R}^d \to R$ να είναι μη αρνητική (μετρήσιμη) συνάρτηση. Ο στόχος είναι να κατασκευάσουμε μια διαδικασία άλματος N_t με την ιδιότητα ότι $\lambda(X_t)$ είναι η $\mathcal{F}_t$- ένταση της N. Εστιάζουμε μόνο στον πρώτο χρονικό άλμα τ αυτής της διαδικασίας. Έστω $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ δηλώνει τη διύλιση που παράγεται από το X, δηλαδή $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s;\ 0\leq s \leq t\}$. Έστω E_1 να είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 1, η οποία είναι ανεξάρτητη από το $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.

Έστω $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$, όπου $\mathcal{H}_t = \sigma\{N_s;\ 0\leq s \leq t\}$, δηλαδή το $\mathcal{F}_t$ περιλαμβάνει πληροφορίες τόσο για το X όσο και για τη διαδικασία άλματος. Ορίζω

$$\tau = \inf\left\{t:\ \int_0^t \lambda(X_s)ds \ \geq\ E_1 \right\}.$$

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αυτός ο ορισμός του χρόνου αθέτησης τ, θα συλλάβει την ιδέα ότι $\lambda(X)$ είναι μια στοχαστική (pre-default) ένταση για το χρόνο άλματος τ. Ο εύχρηστος ορισμός αυτού είναι ότι $1_{\{\tau\leq t\}} - \int_0^t \lambda(X_s)1_{\{\tau\geq s\}}ds$ είναι $\mathcal{F}_t$-martingale. Θα το δείξουμε αυτό στην επόμενη ενότητα μαζί με κάποια άλλα χρήσιμα υπολογιστικά αποτελέσματα. Ωστόσο, πριν από αυτά τα πιο τεχνικά αποτελέσματα, εξηγούμε γιατί η κατασκευή είναι τόσο χρήσιμη.

Εξετάζουμε ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου που εκδίδεται από μια μη αξιόπιστη εταιρία στο χρόνο 0. Ας υποθέσουμε ότι η λήξη του ομολόγου είναι T και ότι κάτω από το risk neutral μέτρο πιθανότητας Q, ο χρόνος αθέτησης τ της εκδούσας εταιρείας έχει ένταση $\lambda(X_t)$, όπου η ρύθμιση είναι ακριβής όπως πιο πάνω. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχει μια short-rate διαδικασία $r(X_s)$ έτσι ώστε οι τιμές των default-free ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου να μπορούν να υπολογιστούν ως εξής

$$p(0,t) = E\left[\exp\left(-\int_0^t r(X_s)ds\right)\right],$$

όπου t είναι η ημερομηνία λήξης του ομολόγου. (Πιο γενικά, $p(t,T) = E(\exp(-\int_t^T r(X_s)ds) \mid \mathcal{F}_t)$.) Τότε, η τιμή του risky bond τη χρονική στιγμή 0, υποθέτοντας μηδενική ανάκτηση, είναι

$$\begin{aligned} v(0,t) &= E\left[\exp\left(-\int_0^T r(X_s)ds\right)1_{\{\tau>T\}}\right] \\ &= E\left[E\left[\exp\left(-\int_0^T r(X_s)ds\right)1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_T\right]\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_0^T r(X_s)ds\right)E[1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_T]\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_0^T r(X_s)ds\right)\exp\left(-\int_0^T \lambda(X_s)ds\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_0^T (r+\lambda)(X_s)ds\right)\right] \end{aligned}$$

Δηλαδή το short rate $r(X_s)$ επαυξάνεται με την ένταση αθέτησης $\lambda(X_s)$ κι έτσι έχουμε $(r+\lambda)(X_s)$.

Για να το δείτε αυτό $E\left[1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_T\right]= \exp\left(-\int_0^T \lambda(X_s)ds\right)$ σημειώστε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}\left(\tau > T \mid \mathcal{G}_T\right) &= \mathrm{Q}\left(\int_0^T \lambda(X_s)ds < E_1 \mid \mathcal{G}_T\right) \\ &= exp\left(-\int_0^T \lambda(X_s)ds\right) \end{aligned}$$

γιατί όταν το $\mathcal{G}_T$ είναι γνωστό, τότε είναι $\int_0^T \lambda(X_s)ds$ και επειδή η E_1 είναι ανεξάρτητη του $\mathcal{G}_T$.

Το παράδειγμα μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί για να καλύψει μια ενδεχόμενη απαίτηση με μία υποσχόμενη πληρωμή $f(X_t)$ και μια πραγματική πληρωμή $f(X_t)1_{\{\tau>T\}}$. Η βασική απλούστευση που επιτυγχάνουμε είναι ότι αντικαθιστούμε την πολύπλοκη τυχαία μεταβλητή $f(X_t)1_{\{\tau>T\}}$ στη φόρμουλα αποτίμησής μας, με το συχνά πολύ απλούστερο $f(X_t)$, με κόστος την τροποποίηση του short rate. Αυτό το απλό παράδειγμα δείχνει ότι το πλαίσιο προφανώς αποτελεί υπόσχεση για την επίτευξη αναλυτικά ευαίσθητων τιμών ενδεχόμενων απαιτήσεων με θετική πιθανότητα αθέτησης.

Για να καταστεί λειτουργικό το πλαίσιο, πρέπει να διευθετήσουμε τα ακόλουθα τεχνικά θέματα:

(1) Ελέγχουμε ότι η κατασκευή πραγματικά κάνει το λ μία στοχαστική (pre-default) ένταση,

(2) Επεκτείνουμε το αποτέλεσμα σε μια δυναμική έκδοση, η οποία ενημερώνει τις πληροφορίες

καθώς περνάει ο χρόνος,

(3) Επεκτείνουμε τις μεθόδους σε άλλους τύπους υποσχόμενων πληρωμών.

Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, χρειαζόμαστε πρώτα τεχνικά αποτελέσματα.

4.3 Μερικά χρήσιμα τεχνικά αποτελέσματα

Αυτή η ενότητα παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο για την εμφάνιση των γενικών εκφράσεων για την τιμή των παραγώγων που εξετάστηκαν πιο πάνω. Η ρύθμιση είναι ακριβώς όπως στην ενότητα 4.2. Έχουμε ήδη αποκτήσει τη θεμελιώδη ταυτότητα

$$Q\,(\tau > t) = E\left[exp\left(-\int_0^t \lambda(X_s)ds\right)\right], \qquad (4.2)$$

η οποία μπορεί να ληφθεί με απλή προετοιμασία. Αλλά θέλουμε επίσης να χειριστούμε τις υπό όρους προσδοκίες σχετικών συναρτήσεων (conditional expectations of relevant functions) σε αυθαίρετες ημερομηνίες. Εάν βρισκόμαστε στο χρόνο t και το τ δεν έχει συμβεί ακόμη, τότε η πιθανότητα αθέτησης πριν το $T > t$, είναι μία συνάρτηση των μεταβλητών κατάστασης και συνεπώς το $\mathcal{G}_T$ περιέχει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε.

Μια επίσημη δήλωση αυτού είναι η εξής. Έστω $Z \in \mathcal{F}$ και (για να βεβαιωθούμε ότι υπάρχουν οι υπό όροι προσδοκίες) υποθέτουμε ότι $E|\ Z\ | < \infty$. Στη συνέχεια υπάρχει μια $\mathcal{G}_T$ -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή Y_t τέτοια ώστε

$$1_{\{\tau>t\}}E[Z \mid \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}}Y_t\,.$$

Δε θα δώσουμε απόδειξη εδώ. Από αυτό μπορεί να αποδειχθεί αυτό

$$1_{\{\tau>t\}}E[Z \mid \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau>t\}}\frac{E[Z1_{\{\tau>t\}}|\mathcal{G}_t]}{E[1_{\{\tau>t\}}|\mathcal{G}_t]}\,, \qquad (4.3)$$

αντικαθιστώντας και πάλι το συνολικό ιστορικό $\mathcal{F}$ με το ιστορικό της διαδικασίας μεταβλητής κατάστασης.

Η πρόταση (4.3) είναι το βασικό συστατικό των αποδείξεων και αρχίζουμε εξετάζοντας τις δυναμικές εκδοχές της πιθανότητας επιβίωσης στην πρόταση (4.2).

4.3.1 Δυναμικές Πιθανότητες Επιβίωσης

Για να λάβουμε μια δυναμική έκδοση της (4.2) προχωρούμε ως εξής: αρχικά σημειώστε ότι

$$Q(\tau > T \mid \mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau>T\}} E(1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{F}_t),$$

έτσι ώστε χρησιμοποιώντας την (4.3) να μας δίνει

$$Q(\tau > T \mid \mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau>T\}} \frac{E(1_{\{\tau>T\}} | \mathcal{G}_t)}{E(1_{\{\tau>T\}} | \mathcal{G}_t)}.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} E\big(1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_t \big) &= E(E(1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_T) \mid \mathcal{G}_t) \\ &= E\left[\exp\left(- \int_0^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{G}_t\right] \\ &= \exp\left(- \int_0^t \lambda(X_s) ds\right) \mathrm{E}\left(exp\left(- \int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{G}_t\right), \end{aligned}$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας αυτό για $T = \tau$ έχουμε επίσης,

$$Q(\tau > T \mid \mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau>T\}} E\left(exp\left(- \int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{G}_t\right).$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε την ιδιότητα του martingale της προδιαγραφής της διαδικασίας Cox.

4.4 Η Ιδιότητα Martingale

Αν θέσουμε $N_t = 1_{\{\tau \le t\}}$, τότε (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $1_{\{\tau = t\}}$ έχει πιθανότητα 0) χρησιμοποιώντας την πρόταση από την προηγούμενη ενότητα, βρίσκουμε ότι

$$E[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s] = 1_{\{\tau>T\}} \left(1 - E\left[exp\left(- \int_s^t \lambda_u du \right) \mid \mathcal{G}_s \right] \right).$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η ιδιότητα martingale της

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du,$$

δηλαδή ότι $E(M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$. Έχοντας υπολογίσει $E[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s]$ τώρα θεωρούμε

$$E\left[\int_0^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du - \int_0^s \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Γράφοντας αυτό

$$1_{\{\tau>s\}} \int_s^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du = \int_s^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du$$

η πρόταση (4.3) μας δίνει

$$E\left[\int_s^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du \mid \mathcal{G}_s\right] = 1_{\{\tau>s\}} \frac{E\left[\int_s^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du \mid \mathcal{F}_s\right]}{E\left[1_{\{\tau>s\}} \mid \mathcal{G}_s\right]}. \tag{4.4}$$

Τώρα, σημειώστε ότι

$$E\left[\int_s^t \lambda_u 1_{\{\tau>u\}} du \mid \mathcal{G}_s\right] = \int_s^t E\left[\lambda_u 1_{\{\tau>u\}} \mid \mathcal{G}_s\right] du$$

$$= \int_s^t E\left[E\left[\lambda_u 1_{\{\tau>u\}} \mid \mathcal{G}_T\right] \mid \mathcal{G}_s\right] du$$

$$= \int_s^t E\left[\lambda_u exp\left(-\int_0^u \lambda_v \, dv\right) \mid \mathcal{G}_s\right] du$$

$$= E\left[\int_S^t \lambda_u exp\left(-\int_0^u \lambda_v dv\right) du \mid \mathcal{G}_s\right]$$

$$= E\left[\int_0^t -\frac{d}{du} exp\left(-\int_0^u \lambda_v dv\right) du \mid \mathcal{G}_s\right]$$

$$= E\left[exp\left(-\int_0^s \lambda_v dv\right) - exp\left(-\int_0^t \lambda_v dv\right) \mid \mathcal{G}_s\right]$$

κι έτσι, μπορούμε να γράψουμε την πρόταση (4.4) ως εξής

$$1_{\{\tau>s\}}\frac{E\left[exp\left(-\int_0^s \lambda_v dv\right)-exp\left(-\int_0^t \lambda_v dv\right) \mid \mathcal{G}_s\right]}{exp\left(-\int_0^s \lambda_v dv\right)} = 1_{\{\tau>s\}}\left(1-E\left[exp\left(-\int_s^t \lambda_v dv\right) \mid \mathcal{G}_s\right]\right)$$

κι αυτό μας δίνει το αποτέλεσμα martingale.

4.5 Επεκτείνοντας το πεδίο εφαρμογής της προδιαγραφής Cox

Με αυτά τα τεχνικά αποτελέσματα, είμαστε έτοιμοι να επεκτείνουμε το πεδίο εφαρμογής της ρύθμισης του μοντέλου. Στη μοντελοποίηση της αθέτησης θα ασχοληθούμε με τιμολόγηση ταμειακών ροών, οι οποίες με τον ένα ή τον άλλο τρόπο συνδέονται με την τυχαία μεταβλητή τ. Οι τύποι τιμολόγησης που λαμβάνουμε είναι εύκολο να αναγνωριστούν ως απλές επεκτάσεις εκείνων που λαμβάνονται όταν το τ έχει μια ντετερμινιστική ένταση. Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι για μια στιγμή η ένταση λ(s) είναι ντετερμινιστική (και επομένως ίση με τον κίνδυνο αθέτησης) έτσι ώστε $Q(\tau > t) = exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$.
Στη συνέχεια, με τις σχετικές υποθέσεις ενσωμάτωσης στις συναρτήσεις g και h, έχουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$E\big(\exp(-rT)1_{\{\tau>T\}}\big) = exp\left(-\int_0^T \big(r+\lambda(s)\big)ds\right),$$
$$E\left(\int_0^T \exp(-rT)g(t)1_{\{\tau>t\}}dt\right) = \int_0^T exp\left(-\int_0^t \big(r+\lambda(s)\big)ds\right)g(t)dt,$$
$$E\big(\exp(-r\tau)\,h(\tau)1_{\{\tau\le T\}}\big) = \int_0^T exp\left(-\int_0^t \big(r+\lambda(s)\big)ds\right)\lambda(t)h(t)dt.$$

Τιμολογώντας τη στιγμή t, παίρνουμε την εξής έκφραση

$$E\left(exp\left(-\int_t^T r(X_s)ds\right)f(X_T)1_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{F}_t\right)$$
$$= E\left(exp\left(-\int_t^T (r+\lambda)(X_s)ds\right)f(X_T) \mid \mathcal{G}_t\right)1_{\{\tau>t\}},$$

έτσι ώστε το μόνο που χρειαζόμαστε είναι η πληροφορία όσον αφορά τη μεταβλητή κατάστασης (και η πληροφορία ότι η αθέτηση δεν έχει συμβεί ακόμη) για να υπολογίσει την τιμή μιας θετικής προς την αθέτηση (defaultable) απαίτηση. Δύο επιπλέον "δομικά στοιχεία" μπορούν να τιμολογηθούν χρησιμοποιώντας αυτό το πλαίσιο και με αυτά τα στοιχεία έχουμε πολύ ευέλικτη συλλογή εργαλείων.

Αρχικά, θεωρήστε μια απαίτηση που πληρώνει περιοδικά $g(X_s)1_{\{\tau>s\}}$ μέχρι την αθέτηση ή μέχρι την ημερομηνία λήξης T στην περίπτωση που δεν υπάρξει αθέτηση. Γι' αυτό βρίσκουμε (υποθέτοντας ημερομηνία λήξης T)

$$E\left[\int_t^T g(X_s)1_{\{\tau>s\}}exp\left(-\int_t^s r(X_u)du\right)ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= 1_{\{\tau>t\}}E\left[\int_t^T g(X_s)exp\left(-\int_t^s (r+\lambda)(X_u)du\right)ds \mid \mathcal{G}_t\right]. \qquad (4.5)$$

Ένα άλλο κομμάτι είναι μια πληρωμή στην (τυχαία) ημερομηνία αθέτησης (και πάλι T είναι η λήξη)

$$E\left[exp\left(-\int_t^\tau r(X_u)du\right)h(X_\tau)1_{\{t<\tau\le T\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= 1_{\{\tau>t\}}E\left[\int_t^T h(X_s)\lambda(X_s)exp\left(-\int_t^s (r+\lambda)(X_u)du\right)ds\right]. \qquad (4.6)$$

Όταν το X είναι μια διαδικασία διάχυσης (diffusion process), μερικές φορές έχουμε λύσεις κλειστού τύπου για αυτές τις εκφράσεις ή μπορούμε να εκφράσουμε τις προσδοκίες ως λύσεις σε μια μερική διαφορική εξίσωση, η οποία στη συνέχεια μπορεί να λυθεί αριθμητικά.

4.6 Ανάκτηση της αγοραίας αξίας

Τώρα θεωρούμε μια ειδική υπόθεση ανάκτησης που παρέχει μια επέκταση των κατάλληλων μεθόδων τιμολόγησης που έχουν αναπτυχθεί μέχρι στιγμής. Η επέκταση απαιτεί μια αρκετά εκτεταμένη στοχαστική συσκευή λογισμού, έτσι ώστε να επικεντρωθούμε σε τρεις πιο έξυπνες εξηγήσεις.

Θεωρείστε τη διαδικασία τιμολόγησης μιας defaultable ενδεχόμενης απαίτησης V που υπόσχεται την αποπληρωμή του $f(X_T)$ στον χρόνο T. Ο ισχυρισμός λέγεται ότι έχει (κλασματική) ανάκτηση της αγοραίας αξίας (Recovery of Market Value - RMV) του δ σε ένα χρόνο αθέτησης τ, εάν το ποσό που ανακτάται σε περίπτωση αθέτησης είναι ίσο με

$$h(\tau) = \delta V(\tau-) \text{ για } \tau \le T,$$

Όπου $V(\tau-)$ είναι η τιμή της απαίτησης ακριβώς πριν από την αθέτηση και $\delta \in [0, 1)$. Εργαζόμαστε με μια σταθερά δ εδώ, αφού αυτή η υπόθεση γίνεται συχνά σε πρακτικές εφαρμογές.

Με αυτήν την υπόθεση ανάκτησης, έχουμε ότι η τιμή στο t της defaultable ενδεχόμενης απαίτησης, εφόσον δεν υπήρξε αθέτηση κατά την ημερομηνία t, είναι

$$V(t) = E_t\left[exp\left(-\int_t^T (r+(1-\delta)\lambda(X_s)ds)\right)f(X_T)\right]. \qquad (4.7)$$

Σημειώστε την ειδική περίπτωση όπου $\delta = 0$, οδηγώντας μας πίσω στην υπόθεση από την προηγούμενη ενότητα.
Τώρα δίνουμε τρία επιχειρήματα για να υποστηρίξουμε αυτό το αποτέλεσμα.

4.6.1 Ένα διακριτό επιχείρημα χρόνου

Αυτό το επιχείρημα ακολουθεί τους Duffie και Singleton (1999a). Θεωρείστε μια ρύθμιση διακριτού χρόνου κατά την οποία

• λ_s είναι η πιθανότητα αθέτησης στο διάστημα $(s, s+1]$ δεδομένης της επιβίωσης μέχρι το χρόνο s·
• r_s είναι ο τόκος (συνεχώς συντεταγμένος) μεταξύ s και $s+1$ και
• δ είναι η κλασματική ανάκτηση που ελήφθη στο χρόνο $s+1$ σε περίπτωση αθέτησης στο χρονικό διάστημα $(s, s+1]$.

Χρησιμοποιώντας το γενικό πλαίσιο τιμολόγησης με διακριτό χρόνο δεδομένου ότι ο ισχυρισμός είναι ζωντανός στο t, έχουμε

$$\begin{aligned} V(t) &= \lambda_t \exp(-r_t)\, E_t[\delta V(t+1)] + (1-\lambda_t)\exp(-r_t)\, E_t[V(t+1)] \\ &\equiv \exp(-R_t)\, E_t[V_{t+1}], \end{aligned} \qquad \text{for } t < T$$

όπου έχουμε ορίσει

$$\exp(-R_t) = \lambda_t \exp(-r_t)\,\delta + (1-\lambda_t)\exp(-r_t).$$

Ερμηνεύοντας αυτήν την έκφραση, μας δίνει

$$V(t) = \exp(-R_t) E_t[\exp(-R_{t+1})\, E_{t+1}(V_{t+2})]$$

$$= E_t[\exp(-(R_t + R_{t+1}))V_{t+2}],$$

και συνεχίζοντας

$$V(t) = E_t\left[exp\left(-\sum_{i=0}^{T-t-1} R_{t+i}\right) f(X_T)\right],$$

εφόσον $V(t) = f(X_T)$ από τον ορισμό. Τώρα, μετακινώντας από μια περίοδο μήκους 1 σε μία του μήκους t, αλλά διατηρώντας τα ετήσια ποσοστά, έχουμε

$$\exp(-R_t\Delta t) = \lambda_t \Delta \exp(-r_t\Delta t)\,\delta + (1-\lambda_t\Delta t)\exp(-r_t\Delta t).$$

Για μικρά Δt, $\exp(-R_t\Delta t) \approx 1 - R_t\Delta t$ και $\exp(-r_t\Delta t) \approx 1 - r_t\Delta t$, τα οποία μας δίνουν

$$1 - R_t\Delta t \approx \lambda_t\delta\Delta t(1 - r_t\Delta t) + (1-\lambda_t\Delta t)(1 - r_t\Delta t),$$

και αντιστοιχώντας τον όρο Δt και από τις δύο πλευρές μας δίνει

$$R_t \approx r_t + (1-\delta)\lambda_t,$$

όπως επρόκειτο να παρουσιαστεί.

4.6.2 Επαναλαμβανόμενη κλασματική ανάκτηση της πραγματικής αξίας (Par) κατά τη λήξη

Αυτό το επιχείρημα οφείλεται στον Schonbucher (1998). Αυτό που δείχνουμε εδώ είναι ότι μια φαινομενικά διαφορετική υπόθεση ανάκτησης παράγει τον ίδιο τύπο και τότε συνειδητοποιούμε ότι η υπόθεση ανάκτησης είναι πραγματικά αυτή της κλασματικής ανάκτησης. Επιστρέφοντας στη ρύθμιση του συνεχούς χρόνου, υποθέστε ότι σε περίπτωση αθέτησης, η πληρωμή της defaultable απαίτησης μειώνεται σε ένα κλάσμα δ της αρχικής πληρωμής κατά τη λήξη.
Επομένως, εάν υπάρχει αθέτηση, η υποσχεθείσα πληρωμή μειώνεται από $f(X_T)$ σε $\delta f(X_T)$.
Ας υποθέσουμε ότι ενδέχεται να υπάρχουν επαναλαμβανόμενες αθετήσεις στο διάστημα [0, T) και ότι κάθε φορά που συμβαίνει μια αθέτηση, η υποσχεθείσα πληρωμή μειώνεται από ένα συντελεστή δ στη λήξη. Στη δικιά μας διαδικασία Cox, αυτό σημαίνει ότι η τιμή στο χρόνο t, αν ακόμη δεν έχει συμβεί καμία αθέτηση, είναι

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_t\left(\exp\left(-\int_t^T r(X_s)ds\right)\delta^k f(X_T)1_{\{N_T=k\}}\right),$$

όπου N_T υπολογίζει τον αριθμό των αθετήσεων στο χρόνο T. Προϋποθέτοντας (ως συνήθως) την εξέλιξη του X έως το T, σημειώνουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_t\left[\delta^k f(X_T)1_{\{N_T=k\}} \mid (X_t)_{0\le t\le T}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\delta^k \frac{(\int_t^T \lambda(X_s)ds)^k}{k!}\,exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s)ds\right)f(X_T)$$

$$= f(X_T)exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s)ds\right)exp\left(\delta\int_t^T \lambda(X_s)ds\right)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_t^T \delta\lambda(X_s)ds)^k}{k!} exp\left(-\int_t^T \delta\lambda(X_s)ds\right)$$

$$= f(X_T)exp\left(-\int_t^T \big((1-\delta)\lambda(X_s)\big)ds\right),$$

κι επομένως,

$$V(t) = E_t\left[exp\left(-\int_t^T (r + (1-\delta)\lambda)(X_s)ds\right) f(X_T)\right],$$

και αυτό είναι φυσικά ο ίδιος τύπος όπως και στην περίπτωση της κλασματικής ανάκτησης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η υπόθεση ανάκτησης που έγινε εδώ στην πραγματικότητα συνεπάγεται κλασματική ανάκτηση. Για να το δείτε αυτό, σημειώστε ότι η τιμή που εξαρτάται από k αθετήσεις που έχουν συμβεί, είναι ακριβώς

$$\delta^k V(t),$$

και ως εκ τούτου η τιμή περνά από έναν συντελεστή δ κάθε φορά που συμβαίνει μια αθέτηση. Όταν εξετάζουμε τα χρονικά εξαρτώμενα (ή και στοχαστικά) ποσοστά ανάκτησης, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Για να κάνουμε την παραπάνω προσέγγιση να παράγει το σωστό αποτέλεσμα, πρέπει να υποθέσουμε ότι το ποσοστό ανάκτησης στην πρώτη αθέτηση χρησιμοποιείται επίσης και σε όλες τις επόμενες αθετήσεις. Επομένως αν χρησιμοποιείται δ_{τ_1} στην πρώτη αθέτηση, η ίδια ποσότητα θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και στις επόμενες αθετήσεις.

4.6.3 Ανάκτηση της αγοραίας αξίας και αραίωση (thinning)

Αν N είναι μια διαδικασία Cox με ένταση λ, ορίζουμε μια αραίωση αυτής της διαδικασίας ως εξής.
Έστω $\tau_1, \tau_2, \ldots$ να είναι οι χρόνοι άλματος του N και θεωρείστε μια ακολουθία ανεξάρτητων μεταβλητών Bernoulli $Y_1, Y_2, \ldots$ όλα με $P(Y_i = 1) = \delta$. Η αραίωση N^Y του N δίνεται στη συνέχεια από

$$N_t^Y = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{\tau_{i \le t}\}} 1_{\{Y_{i=0}\}},$$

δηλαδή διαγράφουμε ένα άλμα κάθε φορά που $Y_i = 1$.
Η λήψη ενός κλάσματος δ σε αθέτηση της pre-default τιμής $V(\tau-)$ έχει την ίδια προσδοκία με τη λήψη 0 με πιθανότητα $1-\delta$ και $V(\tau-)$ με πιθανότητα δ.
Δεδομένου ότι $V(\tau-)$ ισοδυναμεί με ακύρωση του γεγονότος αθέτησης, παρατηρούμε ότι αυτή

η διατύπωση ανάκτησης είναι ίση με την υπόθεση μηδενικής ανάκτησης σε μια αραιή διαδικασία γεγονότος αθέτησης. Το ποσοστό αραίωσης είναι $1 - \delta$ και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μηδενική μας σύνθεση ανάκτησης με την ένταση $(1 - \delta)\lambda(X_s)$ και αυτό μας φέρνει πίσω στο (4.7).

4.7 Υποθέσεις Ανάκτησης

Η υποτιθέμενη μορφή ανάκτησης είναι σημαντική για τις μακροπρόθεσμες δομές (term structures) των credit spreads και εστιάζουμε εδώ σε τρεις τρόπους μέτρησης της ανάκτησης που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία για τα εταιρικά ομόλογα.
Οι τρεις υποθέσεις ανάκτησης έχουν ως εξής.

1. **Ανάκτηση της ονομαστική αξίας**
   Αυτό μετρά την αξία στους επενδυτές ως κλάσμα της ονομαστικής αξίας. Αυτό είναι το πιο κοντά σε νομική πρακτική, υπό την έννοια ότι το χρέος με την ίδια προτεραιότητα αποδίδεται σε μια κλασματική ανάκτηση ανάλογα με το ανεξόφλητο ονομαστικό ποσό αλλά όχι τη λήξη ή το κουπόνι. Είναι επίσης το μέτρο που χρησιμοποιείται συνήθως στις μελέτες πρακτορείων αξιολόγησης. Δεν είναι ίσο με την πτώση της τιμής, εκτός αν το ομόλογο διαπραγματεύεται στο άρτιο. Το μόνο που χρειάζεται είναι μια post-default τιμή αγοράς για την εκτίμηση της ποσότητας.
   Στη Moody's αυτά τα δεδομένα έχουν οριστεί 30 ημέρες μετά την ημερομηνία αθέτησης. Με μαθηματικούς όρους, ο τύπος για μια τιμή ομολόγου δεν είναι τόσο όμορφος όσο στην περίπτωση της ανάκτησης της αξίας της αγοράς, αφού πρέπει να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής (4.6).

2. **Ανάκτηση της αξίας της αγοράς**

   Αυτό μετρά τη μεταβολή της αγοραίας αξίας κατά τη στιγμή της αθέτησης. Αυτό έχει οικονομική σημασία, καθώς πρόκειται για την απώλεια αξίας που σχετίζεται με την αθέτηση. Εδώ χρειαζόμαστε τιμές τόσο πριν όσο και μετά την ημερομηνία αθέτησης, και σε εμπειρικές μετρήσεις η pre-default τιμή θα ήταν η δυσκολότερη στο να προσδιοριστεί. Για τους σκοπούς της εκ των προτέρων τιμολόγησης, η προσέγγιση που επικαλείται κατά την προβολή του γεγονότος αθέτησης ως απλή πτώση αντί για ένα συμβάν που μεταφέρθηκε, πιθανόν δεν είναι σοβαρή. Όπως έχουμε δει, αυτή η ποσότητα είναι εξαιρετικά βολική για να εργαστούμε για σκοπούς μοντελοποίησης.

3. **Ανάκτηση του treasury**

   Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, το εταιρικό ομόλογο σε αθέτηση αντικαθίσταται με ένα treasury bond με την ίδια διάρκεια, αλλά με μειωμένη πληρωμή. Αυτό θα μπορούσε, από οικονομική άποψη, να θεωρηθεί ως μια πιο εκλεπτυσμένη προσέγγιση από την ανάκτηση της ονομαστικής αξίας, διότι τουλάχιστον προσπαθεί να διορθώσει το γεγονός ότι τα ποσά των κεφαλαίων με μεγάλη διάρκεια θα πρέπει να προεξοφλούνται περισσότερο από τα ποσά των κεφαλαίων με μικρή διάρκεια .

Κάποιος θα μπορούσε να πει, ως μια καθαρά μαθηματική δήλωση, ότι μια υπόθεση μπορεί πάντα να εκφραστεί σε όρους μιας άλλης και ως εκ τούτου όλες είναι ισοδύναμες. Αλλά αυτό φυσικά, αγνοεί το γεγονός ότι από τη στιγμή που έχουμε αναλάβει ένα συγκεκριμένο τύπο ανάκτησης, συχνά υποθέτουμε ότι είναι σταθερός (ή χρησιμοποιούμε τη μέση ανάκτηση για αποτίμηση). Και έχει σημασία για την τιμολόγηση της οποίας το ποσοστό ανάκτησης κρατάμε σταθερό.

Μια τελική σημείωση αφορά την ευκολία με την οποία εξάγουμε τεκμαρτές πιθανότητες αθέτησης (implied default probabilities) από τις τιμές. Η εξαγωγή αυτή συνδέεται στενά με τις υποθέσεις ανάκτησης. Ένα πλεονέκτημα της ανάκτησης των ιδίων προσέγγισης (treasury approach) είναι ότι επιτρέπει (τουλάχιστον με μία υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ του short rate r και της έντασης αθέτησης λ) μια άμεση έκφραση για τα τεκμαρτά ποσοστά επιβίωσης. Εάν εργαζόμαστε με μια σταθερή και γνωστή ανάκτηση της αγοραίας αξίας, δεν μπορούμε (ακόμη και στην περίπτωση της ανεξαρτησίας μεταξύ αγορών ομολόγων και αθέτησης) γενικά να συμπεράνουμε την τεκμαρτή πιθανότητα αθέτησης από ένα ομόλογο χωρίς να έχουμε προδιαγραφή για την εξέλιξη του λ.

Για έναν ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με ληκτότητα T και κλασματική ανάκτηση δ, έχουμε

$$\begin{aligned} \upsilon(0,T) &= p(0,T)E\left[exp\left(-\int_0^T \lambda_s(1-\delta)ds\right)\right] \\ &= p(0,T)E\left[\left(exp\left(-\int_0^T \lambda_s\, ds\right)\right)^{1-\delta}\right], \end{aligned}$$

αλλά η $(1-\delta)^{\text{ή}}$ στιγμή δεν μας δίνει την τεκμαρτή πιθανότητα αθέτησης

$$E\left[exp\left(-\int_0^T \lambda_s ds\right)\right]$$

εκτός κι αν γνωρίζουμε περισσότερα για το λ.

Στην ανάκτηση της ρύθμισης του treasury (με ανεξαρτησία) μεταξύ r και λ έχουμε

$$E\left[exp\left(-\int_0^T \lambda_s ds\right) = \frac{\upsilon(0,T)-\delta p(0,T)}{(1-\delta)p(0,T)}\right],$$

η οποία είναι πολύ βολική για να εργαστεί κάποιος, αλλά μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα με πραγματικά δεδομένα, καθώς το δεξιό μέλος δεν χρειάζεται να είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1.

5.Τιμολόγηση των Συμβάσεων Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης

5.1 Τιμολογώντας τα Default Swaps

Σε αυτό το κεφάλαιο επιστρέφουμε σε μια πιο θεμελιώδη προσέγγιση και δοκιμάζουμε την τιμολόγηση του CDS από τις θεμελιώδεις ταμειακές ροές: δηλαδή βρίσκουμε την πληρωμή ασφαλίστρου που καθιστά την αξία του συμβολαίου CDS στην αρχή της συναλλαγής μηδενική. Η τιμή υπολογίζεται χρησιμοποιώντας πληροφορίες σχετικά με την ένταση αθέτησης και την ανάκτηση σε περίπτωση αθέτησης.

Ανεξάρτητα από τις υποθέσεις ανάκτησης, η παρούσα αξία των πληρωμών για ασφάλιστρα χειρίζεται εύκολα. Ας υποθέσουμε ότι το ομόλογο αναφοράς έχει ημερομηνίες κουπονιού 1,. . . , T και λήγει κατά την ημερομηνία T. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι η ανάκτηση του ομόλογου ανά μονάδα ονομαστικής αξίας είναι δ σε περίπτωση αθέτησης, έτσι ώστε ο πωλητής προστασίας να πληρώνει $1-\delta$. Μπορεί κανείς να αλλάξει τις υποθέσεις ανάκτησης στην κλασματική ανάκτηση ή ανάκτηση του treasury, αλλά περιγράφουμε χρησιμοποιώντας αυτήν την υπόθεση και παραπέμπουμε στην προηγούμενη συζήτησή μας για διάφορες υποθέσεις ανάκτησης.

Θέλουμε να βρούμε το κατάλληλο ασφάλιστρο ανταλλαγής $c^{ds}(T)$ πάνω σε ένα CDS με ληκτότητα T και υποθέτουμε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την ένταση αθέτησης του υποκείμενου τίτλου αναφοράς ως μια διαδικασία Cox με διαδικασία έντασης λ.

Δεδομένου ότι ο αγοραστής προστασίας καταβάλλει ένα σταθερό ασφάλιστρο $c^{ds}(T)$ έως τη λήξη T ή την αθέτηση, όποιο από τα δύο συμβεί πρώτο, είναι εύκολο να βρεθεί η τιμή π^{pb} αυτού του σκέλους της ανταλλαγής:

$$\begin{aligned}\pi^{pb} &= \mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{T}} \exp\left(-\int_0^{\mathrm{i}} \mathrm{r_s ds}\right) 1_{\{\tau>i\}} c^{ds}(T)\right] \\ &= c^{ds}(T)\mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{T}} \exp\left(-\int_0^{\mathrm{i}} (\mathrm{r_s}+\lambda_{\mathrm{s}})\mathrm{ds}\right)\right] \\ &= c^{ds}(T)\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{T}} \upsilon^0(0,\mathrm{i}),\end{aligned}$$

με το συμβολισμό $\upsilon^0(0,\mathrm{i})$εννοούμε ένα risky zero coupon bond με μηδενική ανάκτηση.

Η αξία π^{ps} των πληρωμών που πραγματοποιήθηκε από τον πωλητή προστασίας είναι λίγο πιο τεχνική αν επιμένουμε στη διευθέτηση όλων κατά τον ακριβή χρόνο αθέτησης τ. Χρησιμοποιώντας και πάλι το μηχανισμό της διαδικασίας Cox, βρίσκουμε

$$\pi^{ps} = E\left[exp\left(-\int_0^{\tau} r_s ds\right) 1_{\{\tau\leq T\}}(1-\delta)\right]$$

$$= (1-\delta)E\left[\int_0^T \lambda_t \exp\left(-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds\right)dt\right]$$

$$= (1-\delta)\int_0^T E\left[\lambda_t exp\left(-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds\right)\right]dt.$$

Για να επιτύχουμε μια περαιτέρω απλοποίηση, υποθέτουμε ανεξαρτησία (κάτω από το μέτρο του martingale) μεταξύ της έντασης αθέτησης και της short-rate διαδικασίας, η έκφραση μειώνεται σε

$$\pi^{ps} = (1-\delta)\int_0^T E\left[exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)\right]E\left[-\frac{d}{dt}exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)\right]dt$$

$$= \int_0^T p(0,t)\left(-\frac{d}{dt}S(0,t)\right)dt$$

$$= (1-\delta)\int_0^T \hat{\lambda}(t)S(0,t)p(0,t)dt,$$

όπου $\hat{\lambda}$ είναι η ένταση αθέτησης (όχι η στοχαστική αθέτηση) της κατανομής επιβίωσης, δηλαδή

$$S(0,t) \equiv E\left(exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)\right) \equiv exp\left(-\int_0^t \hat{\lambda}_s ds\right).$$

Συνολικά βρίσκουμε, εξισώνοντας τις τιμές π^{pb} και π^{ps}, ότι

$$c^{ds}(T) = \frac{(1-\delta)\int_0^T \hat{\lambda}(t)S(0,t)p(0,t)dt}{\sum_{i=1}^T v^0(0,i)} = \frac{(1-\delta)\int_0^T \hat{\lambda}(t)S(0,t)p(0,t)dt}{\sum_{i=1}^T p(0,i)S(0,i)}.$$

Το ολοκλήρωμα εμφανίζεται, φυσικά, δεδομένου ότι εξετάζουμε τον διακανονισμό ακριβώς στην ημερομηνία αθέτησης. Εάν, αντιθέτως, ορίσουμε τον διακανονισμό σα να πραγματοποιείται τις ίδιες ημέρες όπως οι πληρωμές ανταλλαγής και θέσουμε

$$\hat{Q}(\tau = i) = Q(\tau \in (i-1,i]) = S(0,i-1) - S(0,i),$$

τότε, (ακόμη υποθέτοντας ανεξαρτησία) παίρνουμε το ασφάλιστρο ανταλλαγής (swap premium) σε μια μορφή που περιλαμβάνει μόνο ένα πεπερασμένο άθροισμα (όπως με τις εκφράσεις ανταλλαγής επιτοκίου)

$$c^{ds}(T) = \frac{(1-\delta)\sum_{i=1}^T p(0,i)\hat{Q}(\tau = i)}{\sum_{i=1}^T p(0,i)S(0,i)}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση η καμπύλη ανταλλαγής κινδύνου λήφθηκε θεωρώντας το $c^{ds}(T)$ ως μια συνάρτηση του T που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να αντλήσει τεκμαρτές πιθανότητες αθέτησης.

Παράδειγμα

Η τράπεζα Α παρέχει δάνειο ύψους €5.000.000 στην Α.Ε.Ε.Α.Π. Η τράπεζα Α φοβάται για πιθανή αθέτηση της Α.Ε.Ε.Α.Π και για να διαχειριστεί τον ενδεχόμενο κίνδυνο αγοράζει προστασία μέσω CDS από την τράπεζα Β για δύο χρόνια. Έστω ότι η ένταση αθέτησης της Α.Ε.Ε.Α.Π είναι 2% και το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 3% (σταθερά και για τα δυο χρόνια).Υποθέτουμε ποσοστό ανάκτησης 35% και τριμηνιαίες πληρωμές ασφαλίστρων.

Οι πληρωμές των ασφαλίστρων γίνονται στις 20 Μαρτίου, 20 Ιουνίου, 20 Σεπτεμβρίου και 20 Δεκεμβρίου. Έστω ότι η σύναψη του συμβολαίου ξεκινάει 20 Ιουνίου 2017 και τελειώνει 20 Ιουνίου 2019.

Χρονικές στιγμές : $t_0 = 0, t_1 = 0{,}25, t_2 = 0{,}5,\ldots, t_7 = 1{,}75, t_8 = 2$.

Στον **Πίνακα 5.1** υπολογίζουμε την παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών πάνω στο CDS, που θα καταβάλει ο αγοραστής προστασίας, με άγνωστο το ασφάλιστρο ανταλλαγής όπου θα το γράφουμε cds. Κάθε τριμηνιαία πληρωμή ασφαλίστρου είναι ίση με $\frac{N \cdot cds}{4}$, όπου N ονομαστικό κεφάλαιο ύψους €5.000.000. Η πιθανότητα επιβίωσης μέχρι το χρόνο t_i, όπου $i = 0,1,2,\ldots,8$, είναι ίση με $e^{-0{,}02t_i}$. Για $i = 1,\ldots,8$ η αναμενόμενη πληρωμή είναι ίση με $e^{-0{,}02t_i}\frac{N \cdot cds}{4}$ και ο συντελεστής προεξόφλησης είναι ίσος με $e^{-0{,}03t_i}$. Επομένως η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών είναι το γινόμενο της αναμενόμενης πληρωμής και του συντελεστή προεξόφλησης στο χρόνο t_i, για $i = 1,\ldots,8$.

Πίνακας 5.1 Υπολογισμός της παρούσας αξίας των αναμενόμενων πληρωμών πάνω στο CDS, που καταβάλλει ο αγοραστής προστασίας.

Χρόνος (ανά τρίμηνο)	**Πιθανότητα επιβίωσης**	**Αναμενόμενη πληρωμή**	**Συντελεστής προεξόφλησης**	**Παρούσα αξία αναμενόμενης πληρωμής**
20 Ιουνίου 2017	1			
20 Σεπτεμβρίου2017	0,995	1.243.765,60cds	0,993	1.234.472,25cds
20 Δεκεμβρίου 2017	0,990	1.237.562,29cds	0,985	1.219.137,39cds
20 Μαρτίου 2018	0,985	1.231.389,92cds	0,978	1.203.993,02cds
20 Ιουνίου 2018	0,980	1.225.248,34cds	0,970	1.189.036,78cds
20 Σεπτεμβρίου2018	0,975	1.219.137,39cds	0,963	1.174.266.33cds
20 Δεκεμβρίου 2018	0,970	1.213.056,92cds	0,956	1.159.679,36cds
20 Μαρτίου 2019	0,966	1.207.006,77cds	0,949	1.145.273,59cds
20 Ιουνίου 2019	0,961	1.200.986,80cds	0,942	1.131.046,77cds
Σύνολο				9.456.905,49cds

Στον **Πίνακα 5.2** υπολογίζουμε την παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών που πραγματοποιούνται από τον πωλητή προστασίας. Υποθέτουμε ότι η αθέτηση μπορεί να συμβεί σε οποιοδήποτε τρίμηνο μέσα στο χρόνο. Για $i = 1, \dots, 8$, η πιθανότητα αθέτησης στο χρόνο t_i, είναι η πιθανότητα επιβίωσης στην αρχή του τριμήνου μείων την πιθανότητα επιβίωσης στο τέλος του τριμήνου, δηλαδή $e^{-0,02t_{i-1}} - e^{-0,02t_i}$. Η αναμενόμενη πληρωμή είναι ίση με $(e^{-0,02t_{i-1}} - e^{-0,02t_i})x\ 5.000.000\ x\ (1-35\%)$, ο συντελεστής προεξόφλησης παραμένει όπως πιο πάνω, δηλαδή $e^{-0,03t_i}$. Επομένως η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών είναι το γινόμενο της αναμενόμενης πληρωμής και του συντελεστή προεξόφλησης στο χρόνο t_i, για $i = 1, \dots, 8$.

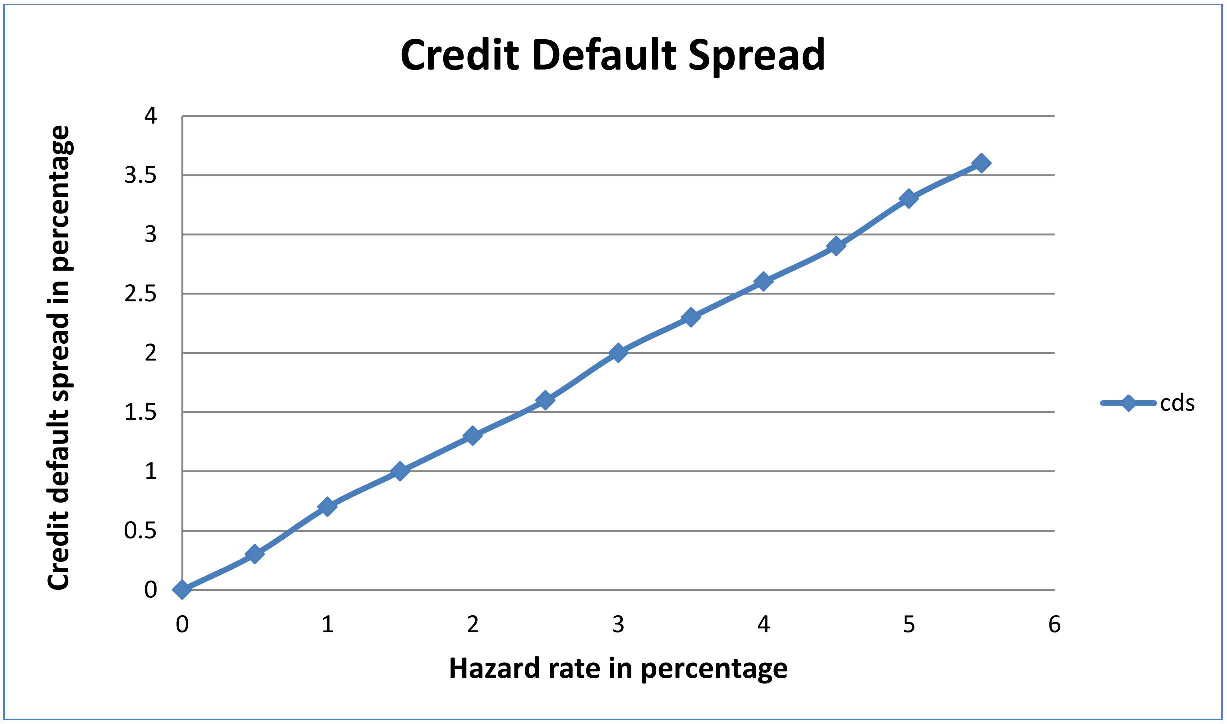
Πίνακας 5.2 Υπολογισμός της παρούσας αξίας της αναμενόμενης πληρωμής που καταβάλλει ο πωλητής προστασίας.

Χρόνος (ανά τρίμηνο)	**Πιθανότητα αθέτησης**	**Αναμενόμενη πληρωμή(ευρώ)**	**Συντελεστής προεξόφλησης**	**Παρούσα αξία αναμενόμενης πληρωμής(ευρώ)**
20 Ιουνίου 2017				
20 Σεπτεμβρίου2017	0,005	16.209,44	0,993	16.088,33
20 Δεκεμβρίου 2017	0,005	16.128,60	0,985	15.888,47
20 Μαρτίου 2018	0,005	16.048,16	0,978	15.691,10
20 Ιουνίου 2018	0,005	15.968,12	0,970	15.496,19
20Σεπτεμβρίου2018	0,005	15.888,47	0,963	15.303,69
20 Δεκεμβρίου 2018	0,005	15.809,23	0,956	15.113,58
20 Μαρτίου 2019	0,005	15.730,38	0,949	14.925,84
20 Ιουνίου 2019	0,005	15.651,93	0,942	14.740,43
Σύνολο				123.247,63

Από τον **Πίνακα 5.1** βλέπουμε ότι η παρούσα αξία της αναμενόμενης πληρωμής είναι 9.456.905,49cds ενώ από τον **Πίνακα 5.2** είναι 123.247,63. Εξισώνοντας τα δυο αυτά αποτελέσματα έχουμε

$$9.456.905{,}49cds = 123.247{,}63$$

δηλαδή ότι $cds = 0{,}013$ ή διαφορετικά 1,3%.



Διάγραμμα 4 : Μεταβολή του cds με βάση την ένταση αθέτησης.

Στο πιο πάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το ασφάλιστρο ανταλλαγής αυξάνεται όσο αυξάνεται και η ένταση αθέτησης. Η ένταση αθέτησης καταγράφει την πιθανότητα ή τον ρυθμό με τον οποίο ένα γεγονός αναμένεται να λάβει χώρα (συνήθως αναφερόμαστε σε πιστωτικό γεγονός) σε μια δεδομένη χρονική περίοδο, με την προϋπόθεση ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί ακόμη. Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι όσο πιο αναξιόπιστη είναι η οντότητα αναφοράς για την οποία γίνεται η συμφωνία, τόσο πιο μεγάλο είναι και το ασφάλιστρο ανταλλαγής.

5.2 Ένας first- to- Default Υπολογισμός

Αυτός ο τύπος κατασκευής είναι εύκολος να χειριστεί σε μια ρύθμιση που βασίζεται σε ένταση.
Θυμηθείτε την ακόλουθη ιδιότητα του ελαχίστου των N εκθετικών μεταβλητών . Αν $\tau_1, \dots, \tau_N$ είναι ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ με παραμέτρους $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ αντίστοιχα, τότε

$$\tau^* = \min_{i=1,\dots,N} \tau_i$$

είναι εκθετικά κατανεμημένο με παράμετρο $\lambda^* = \lambda^1 + \cdots + \lambda^N$.
Αυτό απλώς προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} P(\tau^* > t) &= P(\tau_1, \dots, \tau_N > t) \\ &= \prod_{i=1}^{N} P(\tau_i > t) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \lambda^i t\right) = exp(-\lambda^* t). \end{aligned}$$

Μια εφαρμογή του κανόνα του Bayes μας δίνει ότι η κατανομή της ταυτότητας της πρώτης επιχείρησης που θα αθετήσει, είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο αθέτησης:

$$P\big(\tau^* = \tau^i \mid \tau^* = t\big) = \frac{\lambda^i}{\lambda} \ . \tag{5.1}$$

Τώρα βλέπουμε πώς αυτά τα αποτελέσματα εφαρμόζονται στη ρύθμιση της διαδικασίας Cox, όπου έχουμε υπό όρους ανεξαρτησία (conditional independence) των χρόνων αθέτησης των εκδοτών. Ως συνήθως, θέτουμε $G_T = \sigma\{X_s : 0 \le s \le t\}$, όπου X είναι μια διαδικασία των μεταβλητών κατάστασης και ορίζουμε

$$\tau_i = inf\left\{t > 0: \int_0^t \lambda^i(X_s) ds > E_i\right\}$$

για N συναρτήσεις έντασης $\lambda^i(\cdot)$ και N ανεξάρτητες εκθετικές μεταβλητές $E_1, \dots, E_N$ με μέση τιμή 1. Με τον ορισμό που δώσαμε πιο πάνω για το τ^*, παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(\tau^* > t) &= E[P(\tau^* > t) \mid G_T] \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{N} exp\left(-\int_0^t \lambda^i(X_s) ds\right)\right) \\ &= E\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda^*(X_s) ds\right)\right], \end{aligned}$$

όπου

$$\lambda^*(\cdot) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^i(\cdot).$$

Ως εκ τούτου, η ένταση του πρώτου χρόνου αθέτησης είναι μόνο το άθροισμα των επιμέρους εντάσεων, ακόμη και σε αυτή τη ρύθμιση με τυχαίες εντάσεις. Σημειώστε ότι βασιζόμαστε στην ιδιότητα του μη ταυτόχρονου άλματος. Αν μία εκθετική οδηγεί σε αρκετά χρονικά άλματα, τότε η ένταση της πρώτης προς αθέτηση θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των marginal εντάσεων. Απλά σκεφτείτε μια υπόθεση με δύο εκδότες που οδηγείται από την ίδια εκθετική μεταβλητή.

Αυτό σημαίνει ότι η αξία της πληρωμής του ασφαλίστρου του αγοραστή προστασίας μπορεί να αποτιμηθεί ακριβώς όπως και στη σύμβαση ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης (με έναν εκδότη). Αλλά αυτό δεν ολοκληρώνει τη διαδικασία αποτίμησης της ανταλλαγής. Για να βρούμε το επίπεδο της πληρωμής του ασφαλίστρου που δίνει αρχικά την μηδενική αξία κατασκευής, πρέπει να εξετάσουμε την αξία της πληρωμής του πωλητή προστασίας. Αν η πληρωμή αυτή ήταν ανεξάρτητη από το ποιος εκδότης αθετεί πρώτος, θα μπορούσαμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε απλά το αποτέλεσμα από το single-name default swap. Αλλά πρέπει να είμαστε σε θέση να χειριστούμε μια ανάκτηση που εξαρτάται από τον εκδότη και έτσι συνεχίζουμε: πέραν από το χρόνο αθέτησης τ^*, ορίζουμε K να υποδηλώνει την ταυτότητα της εταιρίας που αθετεί πρώτη, δηλαδή το K μπορεί να πάρει τις τιμές $1,2,\ldots,N$ (ή 0 αν καμιά εταιρία δεν αθετήσει). Χρειαζόμαστε την πιθανότητα του γεγονότος ότι $\tau^* \in (t, t+dt)$ και $K = i$, υπό όρους του X:

$$\begin{aligned} P(\tau^* \in dt, K = i) & \\ &= P(\tau_i \in dt;\ \tau_j > t, j \neq i) \\ &= \lambda^i(X_t) exp\left(-\int_0^t \lambda^i(X_s)ds\right) \prod_{j\neq i} exp\left(-\int_0^t \lambda^j(X_s)ds\right) dt \\ &= \lambda^i(X_t) exp\left(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds\right) dt. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Διαδοχικά, αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει το ανάλογο του (5.1), δηλ. την πιθανότητα ότι είναι η εταιρία i που αθετεί δεδομένου ότι η πρώτη αθέτηση εμφανίζεται κατά το χρόνο t:

$$P(\,K = i \mid \tau^* = t\,) = \frac{E\left(\lambda^i(X_t) exp\left(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds\right)\right)}{E\left(\lambda^*(X_t) exp\left(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds\right)\right)}.$$

Εδώ χρειαζόμαστε μόνο το (5.2) για να λάβουμε την τιμή της πληρωμής ασφαλίστρου σε ένα first-to-default swap. Θέτω

$$h(i, t, X_t) 1_{\{t \le T\}}$$

το οποίο υποδηλώνει την πληρωμή στο χρόνο t στον αγοραστή προστασίας εάν $\tau^* = t$ και η ταυτότητα της επιχείρησης που αθετεί είναι i. Τότε, η αξία της υποχρέωσης από τον πωλητή προστασίας είναι

$$
\begin{aligned}
\pi^{ps} &= E\left[exp\left(-\int_0^{\tau^*\wedge T} r_s ds\right) h(K,\tau^*,X_{\tau^*})1_{\{\tau^*\leq T\}}\right] \\
&= E\left[E\left(exp\left(-\int_0^{\tau^*\wedge T} r_s ds\right) h(K,\tau^*,X_{\tau^*})1_{\{\tau^*\leq T\}} \mid G_T\right)\right] \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^T exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) h(i,t,X_t)\lambda^i(X_t) exp\left(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds\right)dt\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_0^T E\left(exp\left(-\int_0^t (r_s+\lambda^*(X_s)ds\right)\right) h(i,t,X_t)\lambda^i(X_t)dt.
\end{aligned}
$$

Και πάλι, οι μεταβλητές συνάφειας (affine state variables) και οι εντάσεις συνάφειας (affine intensities) μας βοηθούν να αποκτήσουμε αναλυτικά ευάγωγες λύσεις. Αλλά σημειώστε ότι το άθροισμα των εντάσεων λ^* μοιάζει φαινομενικά απλό. Εάν οι διαδικασίες έντασης είναι όλες λειτουργίες της ίδιας υποκείμενης μονοπαραγοντικής διαδικασίας, τότε το άθροισμα των εντάσεων είναι ακόμα μονοπαραγοντικό, αλλά αν υπάρχουν ιδιοσυγκρασιακές συνιστώσες σε κάθε ένταση στο άθροισμα, τότε καταλήγουμε σε ένα πολυπαραγοντικό πρόβλημα συνάφειας (affine problem).

.

5.3 Μία αποσύνθεση των m-of-n-to- Default Swaps

Το m-of-n-to-default swap είναι ένα πολύπλοκο προϊόν και φαίνεται δεν είναι ένα μέσο στο οποίο οι λύσεις κλειστής μορφής (closed- form solutions) μπορούν εύκολα να βρεθούν. Αφού η αντιστάθμιση των εν λόγω μέσων πραγματοποιείται συχνά μέσω της single-name CDS αγοράς, εξετάζουμε εδώ την αποσύνθεση ενός m-of-n-to- default swap σε ένα χαρτοφυλάκιο των first-to-default swaps υπό μία υπόθεση χωρίς ταυτόχρονες αθετήσεις.

Ένα απλό παράδειγμα που απεικονίζει την ιδέα: θεωρήστε ένα first-2-of-3-to-default swap το οποίο αποζημιώνει τον αγοραστή για τις πρώτες δύο αθετήσεις ανάμεσα σε μία λίστα τριών εκδοτών. Έστω ότι η πληρωμή στο χρόνο αθέτησης τ για τον εκδότη i συμβολίζεται με $1-\delta^i(\tau)$. Ισχυριζόμαστε ότι ένα first-2-to-default swap μπορεί να αναπαραχθεί μέσω ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα first-to-default swap (1,2), ένα first-to-default swap (1,3), ένα first-to-default swap (2,3) στις επιχειρήσεις και μία ανοιχτή θέση (short position) σε ένα first-to-default swap (1,2,3) στις επιχειρήσεις. Σκεφτείτε τι θα συμβεί αν η εταιρία 1 αθετήσει πρώτη και μετά αθετήσει η εταιρία 2 (στο χρόνο τ_1και τ_2). Οι ταμειακές ροές στους χρόνους τ_1και τ_2 απεικονίζονται στον Πίνακα 5.3 που σαφώς είναι η αποπληρωμή που θα επιδιώξουμε να επαναλάβουμε. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσετε ότι επίσης ισχύει στην περίπτωση μηδενικής ή μιας αθέτησης και για οποιονδήποτε συνδυασμό γεγονότων αθέτησης. Γενικότερα, μπορεί να δειχθεί ότι ένα m-of-n-to-default swap μπορεί να αποσυνδεθεί αναδρομικά σε ένα χαρτοφυλάκιο με first-to-default συμβόλαια.

Πίνακας 5.3. Η αποσύνθεση ενός first-2-of-3-to-default swap σε ένα χαρτοφυλάκιο των first-to-default swaps

	τ_1	τ_2
Long (1,2)	$\delta(\tau_1)$	0
Long (1,3)	$\delta(\tau_1)$	0
Long (2,3)	0	$\delta(\tau_2)$
Short (1,2,3)	$-\delta(\tau_1)$	0
Σύνολο	$\delta(\tau_1)$	$\delta(\tau_2)$

Έστω ότι $U^{m,n}(t)$ εκφράζει την τιμή στο χρόνο t ενός m-of-n-default συμβολαίου. Έστω ότι $U_K^{m-1,n-1}$ εκφράζει την τιμή ενός first-$(m-1)$-of-$(n-1)$ συμβολαίου, στο οποίο ο εκδότης K δε συγκαταλέγεται στους τίτλους αναφοράς (reference securities). Στη συνέχεια, έχουμε την αναδρομική σχέση

$$U^{m,n}(t) = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{K=1}^{n} U_K^{m-1,n-1}(t) - (n-m)U^{m-1,n}(t)\right).$$

Για απόδειξη, βλέπε Huge (2000).

Πρακτικά, όταν $n = 50$ και $m = 100$, διατρέχοντας αναδρομικά, δεν είναι εφικτό. Πρέπει τότε να καταφύγουμε στην προσομοίωση Monte Carlo ή σε απλούστερες "διωνυμικές" μεθόδους.

6. Δομικά Μοντέλα Τιμολόγησης (Structural Modeling)

Τα δομικά μοντέλα που θα συζητήσουμε σε αυτό το μέρος της εργασίας βασίζονται στο έργο του βραβευμένου με Νόμπελ, Robert C. Merton (1974), το λεγόμενο "Μοντέλο του Merton". Το μοντέλο αυτό αναφέρεται στην κεφαλαιακή δομή μιας εταιρίας και συνδέει την αξία των περιουσιακών στοιχείων της, καθώς και του μετοχικού της κεφαλαίου, για να εξάγει μια εκτίμηση για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ουσιαστικά, ο Merton ανέπτυξε μια θεωρία πάνω στην τιμολόγηση ομολόγων όταν υπάρχει αξιοσημείωτη πιθανότητα αθέτησης. Συγκεκριμένα, έστω ότι μια εταιρία έχει ένα ορισμένο ποσό χρέους που πρέπει να επιστραφεί σε κάποια μελλοντική ημερομηνία T. Εάν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της, τα οποία μοντελοποιούνται με λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution), είναι μικρότερη από την αξία των υποχρεώσεων, κατά την ημερομηνία T, τότε η εταιρία θα χρεοκοπήσει (θα κάνει αθέτηση στις υποχρεώσεις της).

6.1 Το μοντέλο του Merton

Υποθέτουμε ότι το χρέος της εταιρίας είναι ένα zero-coupon bond με ονομαστική αξία D, το οποίο λήγει στο χρόνο T. Επιπρόσθετα, V_t αντιπροσωπεύει την αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας τη χρονική στιγμή $t \in [0,T]$ και E_t την αξία του μετοχικού κεφαλαίου τη χρονική στιγμή $t \in [0,T]$. Εάν $V_T < D$, τότε αυτό σημαίνει πως η εταιρία είναι πλέον ανίκανη να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις της στο χρόνο T με αποτέλεσμα την χρεοκοπία της και το μετοχικό κεφάλαιο να μηδενίζεται. Εάν όμως $V_T > D$, η εταιρία μπορεί να αποπληρώσει το χρέος της στο χρόνο T κι έτσι η αξία του μετοχικού κεφαλαίου είναι $V_T - D$.

Πίνακας 6.1 : Οι πιθανές καταστάσεις στο χρόνο T.

	ΑΞΙΑ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	ΑΞΙΑ **ΧΡΕΟΥΣ**	**ΑΞΙΑ ΜΕΤΟΧΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**
ΑΘΕΤΗΣΗ	$V_T < D$	V_T	0
ΜΗ ΑΘΕΤΗΣΗ	$V_T > D$	D	$V_T - D$

Με βάση τα παραπάνω, η αξία του μετοχικού κεφαλαίου στο χρόνο T θα είναι $E_T = max\{0, V_T - D\}$. Με απλά λόγια

Αξία μετοχικού κεφαλαίου = Αξία περιουσιακών στοιχείων – Αξία Χρέους.

Με βάση αυτή τη λογιστική ταυτότητα, παρατηρούμε ότι ο Merton εξέτασε το μετοχικό κεφάλαιο μιας εταιρείας ως Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) με υποκείμενο τίτλο τα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας και την τιμή άσκησης ίση με την ονομαστική αξία του χρέους.

Ανάλογα, η αξία του χρέους της εταιρίας στο χρόνο T θα είναι $B_T = D - max\{0, D - V_T\} = min\{D, V_T\}$, δηλαδή αν τα περιουσιακά στοιχεία υπερβαίνουν το χρέος, τότε η αξία του χρέους της εταιρίας θα είναι ίση με D, διαφορετικά θα είναι ίση με ό,τι έχει απομείνει από το ενεργητικό της. Επίσης η εξίσωση αυτή, είναι ισοδύναμη με ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (put option) με υποκείμενο τίτλο τα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας και την τιμή άσκησης ίση με την ονομαστική αξία του χρέους.

Ας εξετάσουμε τον τρόπο τιμολόγησης του δικαιώματος αγοράς ενός υποκείμενου τίτλου V_T. Βάσει τον Merton και τις υποθέσεις των Black & Scholes, η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας ακολουθεί Γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή

$$dV_t = \mu V_t d_t + \sigma V_t dW_t$$

και πιο συγκεκριμένα,

$$V_t = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_t}, \qquad \forall t \in [0, T],$$

όπου V_0 η τρέχουσα αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας, μ ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης των περιουσιακών στοιχείων (μείον το μέρισμα που δίνεται στους μετόχους) και σ η μεταβλητότητα των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.

Έτσι, η πιθανότητα αθέτησης στον χρόνο T, έχει ως εξής

$$\begin{aligned} P[V_T - D] &= P[V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T} < D] \\ &= P[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T < \ln\left(\frac{D}{V_0}\right)] \\ &= P[W_T < \frac{\ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής κατανομής $N(0,1)$.

Η αγοραία αξία λοιπόν του μετοχικού κεφαλαίου σήμερα είναι,

$$E_0 = V_0 \Phi(d_1) - De^{-r_f T}\Phi(d_2)$$

με $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r_f + \frac{\sigma_V{}^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}$ και $d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r_f - \frac{\sigma_V{}^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}$

όπου οι μεταβλητές είναι όπως πριν με τις μόνες διαφορές: το E_0 είναι η αξία του μετοχικού κεφαλαίου σήμερα, σ_V η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων και r_f το risk-free επιτόκιο.

Η εξίσωση της E_0 στην ουσία μας περιγράφει την κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθούν οι μέτοχοι της εταιρίας στηριζόμενοι στο ενεργητικό της π.χ αν η αξία των περιουσιακών στοιχείων αυξηθούν, σαφώς θα αυξηθεί και η αξία του μετοχικού κεφαλαίου, εν αντιθέσει, στην περίπτωση όπου το χρέος ξεπεράσει την αξία του ενεργητικού, προκαλώντας έτσι την χρεοκοπία της εταιρίας. Σε περίπτωση όπου συμβεί το τελευταίο, οι μέτοχοι έχουν κάθε δικαίωμα να ρευστοποιήσουν τα περιουσιακά στοιχεία της εταιρίας για να αποπληρώσουν το χρέος ή μέρος αυτού, με αποτέλεσμα τον μηδενισμού του μετοχικού κεφαλαίου.

Η $\Phi(d_2)$ ουσιαστικά είναι η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο πιθανότητα εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς (call option) επομένως η $\Phi(-d_2)$ είναι η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο πιθανότητα να μην εξασκηθεί το δικαίωμα αυτό. Το να μην εξασκηθεί δικαίωμα αγοράς συνίσταται χρεοκοπία της εταιρίας αφού $V_T < D$.

<u>Ένα απλό παράδειγμα:</u>

Η εταιρία Α έχει στην κατοχή της περιουσιακά στοιχεία αξίας €10.000.000 και αξία χρέους €7.500.000. Η μεταβλητότητα και το risk-free επιτόκιο είναι ίσα με 25% και 4,5% αντίστοιχα. Αν σε 3 μήνες πρέπει να γίνει η αποπληρωμή του χρέους, τότε πόση είναι η πιθανότητα αθέτησης;

$$\Phi(-d_2) = \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{10}{7{,}5}\right) + (0{,}045 - \frac{0{,}25^2}{2})\frac{90}{360}}{0{,}25\sqrt{\frac{90}{360}}}\right) = \Phi(-2{,}33) = 1 - \Phi(2{,}33) = 0{,}0099$$
$$= 0.99\%$$

6.2 Προσεγγιστική αποτίμηση του credit default spread βάσει το υπόδειγμα του Merton

Υποθέτουμε ότι η παρούσα αξία της υποσχόμενης αποπληρωμής του χρέους ορίζεται ως

$$D' = De^{-r_f T} \qquad (6.1)$$

Επίσης, το μέτρο μόχλευσης ορίζεται ως

$$L = \frac{D'}{V_0} \qquad (6.2)$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η αγοραία αξία του μετοχικού κεφαλαίου σήμερα είναι

$$E_0 = V_0\Phi(d_1) - De^{-r_f T}\Phi(d_2)$$

Κάνοντας χρήση του (1) και (2) έχουμε ότι

$$E_0 = V_0\left[\Phi(d_1) - \frac{D'}{V_0}\Phi(d_2)\right]$$
$$= V_0[\Phi(d_1) - L\Phi(d_2)] \qquad (6.3)$$

Η μόχλευση L, η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων σ_V και ο χρόνος αποπληρωμής T του χρέους είναι οι παράμετροι που καθορίζουν την πιθανότητα αθέτησης. Θέτουμε,

$$B_0 = V_0 - E_0.$$

Μέσω της (3), έχουμε

$$\begin{aligned} B_0 &= V_0 - V_0[\Phi(d_1) - L\Phi(d_2)] \\ &= V_0[1 - \Phi(d_1) + L\Phi(d_2)] \\ &= V_0[\Phi(-d_1) + L\Phi(d_2)] \end{aligned}$$

Από τον ορισμό $D' = De^{-r_f T}$, το B_0 αναδιατυπώνεται και ως

$$B_0 = De^{-\bar{r}T} = \frac{D'}{e^{-r_f T}} e^{-\bar{r}T} = D' e^{(r_f - \bar{r})T} \qquad (6.4)$$

όπου $\bar{r}$ το προεξοφλητικό επιτόκιο.

Κάνοντας χρήση των τύπων (2) και (4) έχουμε,

$$\begin{aligned} B_0 &= V_0[\Phi(-d_1) + L\Phi(d_2)] \\ D' e^{(r_f - \bar{r})T} &= \frac{D'}{L}[\Phi(-d_1) + L\Phi(d_2)] \\ e^{(r_f - \bar{r})T} &= \Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L} \\ (r_f - \bar{r})T &= \ln(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L}) \\ r_f - \bar{r} &= \frac{\ln(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L})}{T} \\ \bar{r} &= r_f - \frac{\ln(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L})}{T} \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, το credit spread μπορούμε πλέον να το υπολογίσουμε με χρήση του τύπου

$$cds = \bar{r} - r_f = -\frac{\ln(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L})}{T}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Η αγοραστική αξία των περιουσιακών στοιχείων μιας εταιρίας είναι ίση με €40.300.000 και το χρέος το οποίο πρέπει να πληρώσει σε ένα χρόνο ανέρχεται στα €30.000.000. Αν το risk-free επιτόκιο είναι ίσο με 5% και η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων είναι ίση με 30%, πόσο θα είναι το credit spread;

$$\Phi(d_1) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r_f + \frac{{\sigma_V}^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{40{,}3}{30}\right) + (0{,}05 + \frac{0{,}3^2}{2})1}{0{,}3\sqrt{1}}\right) = \Phi(1{,}3)$$
$$= 0{,}9032$$

Αφού βρήκαμε το $\Phi(d_1)$ μπορούμε να βρούμε και το $\Phi(-d_1)$:

$$\Phi(-d_1) = 1 - \Phi(d_1) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$$

$$\Phi(d_2) = \Phi\left(d_1 - \sigma_V\sqrt{T}\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r_f - \frac{{\sigma_V}^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{40{,}3}{30}\right) + (0{,}05 - \frac{0{,}3^2}{2})1}{0{,}3\sqrt{1}}\right)$$
$$= \Phi(1{,}0) = 0{,}8413$$

Μένει να βρούμε το L:

$$L = \frac{D'}{V_0} = \frac{De^{-r_f T}}{V_0} = \frac{30e^{-0{,}05}}{40{,}3} = 0{,}708$$

Επομένως, το credit default spread είναι ίσο με

$$cds = -\frac{\ln(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L})}{T} = -\frac{\ln(0{,}8413 + \frac{0{,}0968}{0{,}708})}{1} = 0{,}022 \text{ ή διαφορετικά } 2{,}2\%.$$

Συμπεράσματα

Στα πιο πάνω κεφάλαια αναλύσαμε τα δυο από τα σημαντικότερα μοντέλα τιμολόγησης, το structural model και το intensity (ή reduced form) model που εφαρμόζονται στην αποτίμηση του περιθωρίου ανταλλαγής αθέτησης (cds spread).

Το structural model είδαμε ότι σχετίζεται με μοντέλα που έχουν το χαρακτηριστικό γνώρισμα της περιγραφής της εσωτερικής δομής του εκδότη του χρέους, έτσι ώστε η αθέτηση υποχρέωσης να είναι συνέπεια κάποιου εσωτερικού γεγονότος. Συγκεκριμένα, γνωρίζοντας την κεφαλαιακή δομή μιας εταιρίας, το μοντέλο είναι ικανό να κάνει μια πρόβλεψη όσο αφορά την ενδεχόμενη αθέτηση. Το μοντέλο επικεντρώνεται κυρίως στην αποτίμηση του χρέους. Η πραγματική εφαρμογή του στην πρόβλεψη της αθέτησης δίνει κακά και αρνητικά αποτελέσματα, όπως δείχνουν οι Jones, Mason και Rosenberg (1984) και Jarrow και Van Deventer (1999). Από την άλλη κάποιοι υποστηρίζουν ότι το μοντέλο του Merton είναι πιο κατάλληλο από το intensity model κατά την τιμολόγηση των default swaps για ομόλογα υψηλής απόδοσης, λόγω της υψηλής συσχέτισης των ομολόγων αυτών με τα υποκείμενα ίδια κεφάλαια της εκδίδουσας εταιρίας.

Το intensity model υπολογίζει την πιθανότητα αθέτησης βασιζόμενο σε εξωγενείς μεταβλητές όπως είναι οι τιμές της αγοράς. Επίσης, πολλοί οικονομολόγοι, ανάμεσά τους και ο M. Choudhry, θεωρούν τα μοντέλο αυτό πιο αξιόπιστο και ακριβέστερο στην τιμολόγηση του cds spread σε σχέση με το structural model. Επίσης, έχει το πλεονέκτημα ότι υπολογίζει με τέτοιο τρόπο τις τιμές των ομολόγων που δεν αφήνει περιθώρια για κερδοσκοπία.

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα του Li and Wong (2007), το structural model τείνει να υπερεκτιμά την εξάρτηση της αγοράς που καθορίζεται από το credit default swap spread. Ωστόσο, το intensity model υπερεκτιμά επίσης το credit default swap spread της αγοράς αλλά όχι στην ίδια έκταση. Τούτο εγείρει το ερώτημα κατά πόσον η αγορά είναι σε θέση να τιμολογεί σωστά τα credit default swap spreads. Δεδομένου ότι τόσο το intensity model όσο και το structural model χρησιμοποιούν ομόλογα ως αντικείμενο αναφοράς, υπάρχει τεράστιος κίνδυνος ελλιπούς πληροφόρησης. Τα ομόλογα είναι σχετικά μη ρευστά. Έτσι, οι αποδόσεις των ομολόγων τείνουν να αντιδρούν πιο αργά στις αλλαγές στο οικονομικό περιβάλλον. Επομένως, τα σύγχρονα μοντέλα τιμολόγησης των cds spreads για να είναι πιο αξιόπιστα πρέπει να ερμηνεύονται με προσοχή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αναστασοπούλου Λίνα (2016), Σημειώσεις Στρατηγικές Διοικητική Κινδύνου : Παράγωγα προϊόντα για τον πιστωτικό κίνδυνο.

[2] Γ. Παναγόπουλος (2009), Η κανονιστική ρύθμιση των hedge funds και των πιστωτικών παραγώγων. Δημοσίευση για το Derivatives.gr .

[3] Κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με τις κοινές διαδικασίες και μεθόδους για τη διαδικασία εποπτικού ελέγχου και αξιολόγησης (ΔΕΕΑ), 2014, European Banking Authority.

[4] Arora N, Bohn J.R., Zhou F, Reduced Form vs. Structural Models of Credit Risk: A Case A Study of Three Models, pp.1-39, Moody's KMV Company, 2005

[5] Choudry M. (2013), An introduction to Credit Derivatives, Elsevier Butterworth-Heinemann – second edition.

[6] Duffie D. & Singleton K.J (1999a), Modeling term structures of defaultable bonds, Review of Financial Studies.

[7] Duffie D. & Singleton K.J (2003), Credit Risk: pricing, measurement and management, Princeton University Press.

[8] Hull John (2015), Options, Futures and other Derivatives, University of Toronto – ninth edition.

[9] International Swaps and Derivatives Association, ISDA News Release, International Swaps and Derivatives Association Inc, September 24, 2008

[10] International Swaps and Derivatives Association, ISDA News Release, International Swaps and Derivatives Association Inc, April 23, 2009

[11] Jones E.P., Mason S.P., Rosenfeld.E, Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Empirical Investigation, Journal of Finance, 39 (1984), pp. 611–625

[12] Kiff J. & Morrow R. (2000), Credit Derivatives, Bank of Canada Review.

[13] Lando David (1998), "On Cox processes and credit risky securities, Review of Derivatives Research.

[14] Lando David (2004), "Credit Risk Modeling: Theory and Applications", Princeton University Press.

[15] Li K.L., Wong H.Y., Structural Model of Corporate Bond Pricing with Maximum Likelihood Estimation*, pp. 22, Department of Statistics, the Chinese University of Hong Kong, 2007

[16] Morgan J.P., The J.P. Morgan Guide to Credit Derivatives, pp 7, Risk Publications, 1999

[17] O'Kane D and Schlögl L, *Modeling Credit: Theory and Practice*, Lehman Brothers, 2001

[18] O´Kane D, Credit Derivatives Explained, pp 3-7, Lehman Brothers, 2001

[19] Schönbucher P. (1998), The term structure of defaultable bond prices, Review of Derivatives Research.

ΙΣΤΟΤΟΠΟΙ

www2.isda.org

www.el.wikipedia.org

www.consilium.europa.eu