ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ LOGISTICS MANAGEMENT/ΔΙΟΙΚΗΣΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρηματοοικονομικά Δικαιώματα και Μέθοδοι Αξιολόγησης Επενδύσεων με τη Χρήση των Πραγματικών Δικαιωμάτων

ΤΣΙΛΙΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ (tml1601)

Επιβλέπως καθηγητής : Δημητρης Ψυχογιός

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική ασχολείται με το ζήτημα των Δικαιωμάτων στις επενδύσεις και στον τομέα της χρηματοοικονομικής.Ειδικότερα γίνεται περιληπτικά αναφορά στα περισσότερα δικαιώματα και στρατηγικές.Κατόπιν γίνεται εκτενής αναφορά και ανάλυση στα Πραγματικά Δικαιώματα (Real Options) και στις μεθόδους ανάλυσεις που τα διέπουν και συγκεκριμένα τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες.Γίνεται σύγκριση με τις παραδοσιακές μεθόδους αξιολόγησης επενδύσεων και συγκεκριμένα της ΚΠΑ.Στο τέλος παρουσιάζεται μία εφαρμογή σύγκρισης των δύο μορφών επένδυσης (Πραγματικών Δικαιωμάτων – ROV) και ΚΠΑ για ένα Αιολικό Πάρκο.Κατόπιν εξετάζεται εκτενέστερα η μελέτη περίπτωσης ενός επενδυτικού έργου στον τομέα των Μεταφορών και Logistics και ειδικότερα ενός οδικού δικτύου.Στο οποίο γίνεται η εφαρμογή των δύο μεθόδων που χρησιμοποιούνται εκτενέστερα στα Πραγματικά και εν γένει Χρηματοοικονομικά Δικαιώματα.

Summary introduction

The following dissertation is a short and simplistic presentation of the modern methods of Real Options applying in the fields of Investement Analysis.Through this personal piece of work I tried to explain as plain as possible the basic principles related to Financial Options and especially the core methods for excercising them.These are the Black-Scholes model first developed in the 70s and the Binomial Tree Method.The same models are applied to Real Options Analysis an offshoot of Financial Options.In later parts two case studies are deployed and examined, one in short and the other thoroughly and practical and interesting results from both of them tried to explain the usefuleness and resourcefoulness of Real Options Evaluation Analysis in modern Investment business projects.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή μου που επέβλεψε την παρούσα εργασία Δ.Ψυχογιό για την πολύτιμη βοηθειά του καθώς και την εταιρία Matlab Mathworks Inc που χωρίς την πολύτιμη και ανεκτίμητη συνεισφορά του λογισμικού που έχουν αναπτύξει δε θα ήταν δυνατή η παρούσα διπλωματική.Ευχαριστώ επίσης όλους τους αναφερόμενους συγγραφείς στη βιβλιογραφία η οποία με καθοδήγησε και με εισήγαγε στο ζήτημα των Πραγματικών Δικαιωμάτων και φυσικά τη διαδικτυακή εγκυκλοπαίδεια επιχειρηματικού και οικονομικού περιεχομένου Investopedia.Ευχαριστώ επίσης την Ευρωπαική Επιτροπή για τη μελέτη του οδικού δικτύου την οποία είχα την ευκαιρία να μελετήσω αυτή τη φορά με Πραγματικά Δικαίωματα και εν γένει όλους όσους με βοήθησαν στην εκπόνηση του παρόντος έργου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 Χρηματοοικονομικά εργαλεία αξιολόγησης επενδύσεων – μία σύντομη αναδρομή

Στην πορεία της επενδυτικής ιστορίας έχουν εφευρεθεί , δημιουργηθεί , αξιποιηθεί και υιοθετηθεί πολλά μοντέλα και θεωρίες.Μερικά από τα πιο σημαντικά είναι η θεώρηση της λογιστικής αξίας , η Καθαρά Παρούσα Αξία (NPV) , ο Εσωτερικός Βαθμός Απόδοσης (IRR) , οι προεξοφλημένες χρηματοροές (DCF) και ο δείκτης απόδοσης επένδυσης (ROI).Τα περισσότερα από αυτά τα εργαλεία αξιολόγησης επενδύσεων λαμβάνουν υπόψη είτε το αρχικό επενδυμένο κεφάλαιο , είτε τις χρηματοροές και ράντες που θα λάβουμε για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα είτε το ελάχιστο επιτόκιο απόδοσης (MARR).Ένα άλλο εργαλείο που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά ειδικά στο χρηματιστήριο είναι το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM) το οποίο μοντέλο σε σχέση με τα προηγούμενα εισάγει και μία πρώτη έννοια του ρίσκου (υπό μορφή της συνάρτησης (β) η **αστάθειας** κάτι το οποίο είναι ουσιώδης παράγοντας στην αξιολόγηση των επενδύσεων.

1.2 Αστάθεια

Αστάθεια είναι μία κατάσταση παροδική η συνεχής , δυναμική η στατική η οποία συνεπάγεται μία μεταβλητότητα.Ένα απλό παράδειγμα είναι οι τιμές των μετοχώς στους διάφορους χρηματιστηριακούς δείκτες (FSE , NYSE , κλ).Οι τιμές των μετοχών κάθε λεπτό μεταβάλλονται όχι όμως απαραίτητα με ένα καθορισμένο μοντέλο , δηλαδή στατιστικά.Επομένως πρόκειται για ένα στατιστικό μέγεθος που δηλώνει τη διασπορά ενός μεγέθους , όπως για παράδειγμα μιας μετοχής η της τιμής πώλησης ενός εξαρτήματος στην αγορά.Βασικά μεγέθη της αστάθειας είναι η μεταβλητότητα η διασπορά και η τυπική απόκλιση.Έτσι όταν έχουμε μεγάλη τυπική απόκλιση μιλάμε και για μία επενδύτικη απόφαση με μεγαλύτερο ρίσκο η κίνδυνο και ευκαιρία μαζί.Στα επενδυτικά μοντέλα όπως ήδη είπαμε δεν έχουν όλα συμπεριλάβει αυτόν τον παράγοντα με αποτέλεσμα να στερούνται πραγματικής βάσης και αξιοπιστίας.Αυτό το πραγματικό είναι που έρχεται να καλύψει μία νέα επενδυτική μέθοδος , κάτι που όπως θα αναφέρουμε αργότερα λαμβάνει τη μορφή δικαιώματος για τον υποψήφιο επενδυτή , αυτή των **Πραγματικών Δικαιωμάτων (Real Options)** .

1.3 Εισαγωγή στα Πραγματικές Δικαιώματα – Real Options

Οι πραγματικές επιλογές είναι ένα χρηματοοικονομικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στις επενδύσεις και συγκεκριμένα στην εκτίμηση ενός επενδυτικού έργου και του προυπολογισμού του.Βασική ιδιότητα του Real Options (RO) είναι ότι αποτελεί ένα δικαίωμα για τον επενδυτή που το χρησιμοποιεί και όχι μία υποχρέωση όπως μία αναγκαστική χρηματοροή σε ένα επενδυτικό έργο που έχει προαποφασισθεί ότι θα συμβεί μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα.Στην ουσία δίνει το δικαίωμα στον επενδυτή είτε να αναλάβει μία συγκεκριμένα απόφαση επένδυσης , είτε να την αναβάλει για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα στρεφόμενος σε μία εναλλακτική , είτε να εγκαταλέιψει πλήρως το έργο.Επίσης μπορεί να αφορά το μέγεθος των χρημάτων που θα δώσει ο επενδυτής η μπορεί να αποσπάσει από το έργο , δηλαδή τη υιοθέτηση μίας επεκτατικής η συσταλτικής επενδυτικής πολιτικής.Από την τελευταία δυνατότητα προκύπτει ένα βασικό σημείο του RO η λεγόμενη δυνατότητα του **call** και **put** επιλογής η αντίστοιχα του λαμβάνω και θέτω.Ένα απλό παράδειγμα των RO η **ΠΕ (Πραγματικών Δικαιωμάτων)** όπως θα τις αποκαλούμε εφεξής είναι η επένδυση σε εργοστασιακό βιομηχανικό εξοπλισμό για την παραγωγή τελικών προιόντων.Μπορούμε να επενδύσουμε αρχικά ένα ποσό CF_o και μετά στο επόμενο χρονικό διάστημα με βάση τις πιθανότητες κέρδους που έχουμε (η ζημίας) να συμφέρει να αυξήσουμε το CF_o σε CF_1 η αν προβλέπουμε ζημία να σταματήσουμε την επένδυση κεφαλαίου και συνεπώς τις χρηματοροές για όσα χρόνια η ανάλυση πραγματικών επιλογών κρίνει απαραίτητο.Φυσικά από το παραπάνω γίνεται φανερή η χρήση στατιστικών μεγεθών όπως για παράδειγμα της τυπικής απόκλισης **σ** που θα δούμε αργότερα που μας χρησιμεύει.

1.4 Βασικές Ιδιότητες των Πραγματικών Δικαιωμάτων

Μία ιδιοποιός διαφοράς των ΠΔ σε σχέση με άλλα χρηματοοικονομικά προιόντα είναι ότι δεν αναφέρονται και ανταλλάσονται όπως τα συνήθη αξιόγραφα και επίσης το γεγονός ότι ο κάτοχος η δικαιωματούχους μίας ΠΔ μπορούν άμεσα να επηρρεάσουν την αξία της ΠΔ σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο του επενδυτικού έργου.Επιπλέον στις

ΠΔ η αστάθεια δεν θεωρείται ως κάτι το αβέβαιο και απροσδιόριστο όπως σε άλλα χρηματοοικονομικά επενδυτικά εργαλεία όπως για παράδειγμα αυτό της καθαρής παρούσας αξίας.Αντιθέτως εδώ η αστάθεια ως προς τις επιδιωκόμενες η μη χρηματοροές λαμβάνει μέρος στην αξιολόγηση.Δηλαδή μία πιθανή αστάθεια ίση με 5% σημαίνει ότι αυτό θα ληφθεί άμεσα υπόψη για τη λήψη απόφασης (για παράδειγμα επεκτατικής η συσταλτικής) στην επόμενη χρονική περίοδο η οποία παρεπιπτόντως μπορεί να είναι ένας μήνας η μία ημέρα η μία ώρα , ειδικά το τελευταίο να αφορά μετοχές σταθερής αξίας.Αυτό είναι που δίνει τεράστια αξία στα ΠΔ , η ακριβής δυνατότητα να έχουμε την επιλογή το δικαίωμα δηλαδή να επιλέξουμε και να αλλάξομυε τη δυνατότητα χρηματοδότησης ενός έργου ειδικά αν αυτό προκύψει σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα να μας αποφέρει ζημιά με λίγα λόγια δηλαδή την ευελιξία να το κάνουμε αυτό.Ας αναλογιστούμε ότι με την Καθαρά Παρούσα Αξία ακόμα και αν προκύψουν αρνητικές χρηματοροές για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα και λάβουμε NPV θετικό στο τέλος χρήσης του έργου αυτό δε σημαίνει πως βγαίνουμε κερδισμένοι.Αντίθετα με τα ΠΔ , μπορούμε να διακόψουμε το έργο και να συνεχίσουμε αργότερα που θα έχουμε κέρδος.Έγκειται δηλαδή σε μία πραγματικού χρόνου και κύκλου ζωής στρατηγική αποφάσεων.

Ένα απλό παράδειγμα που μπορεί να μας καταστήσει σαφές την καταλληλότητα πλέον στην εποχή μας των ΠΔ και την αδυναμία των άλλων χρηματοοικονομικών εργαλείων είναι το παρακάτω:

Έστω ότι είμαστε μία εταιρεία που κατασκευάζει μηχανολογικό εξοπλισμό , για το παραδειγμά μας έστω ρουλεμάν.Για τα οποία στο χρόνο 0 που βρισκόμαστε το 2017 έχουμε μία τιμή πωλησής τους ίση με 500 ευρώ το ένα και θα κατασκευάσουμε 1000 ρουλεμάν.Θεωρούμε επίσης ένα αρχικά επενδεδυμένο κεφάλαιο ίσο με 1 εκατομμύριο ευρώ (1000000 €) και ο χρόνος αξιολόγησης της επενδυσής μας τα 10 χρόνια με επιτόκιο r = 10%.Με βάση την καθαρά παρούσα αξία έχουμε τα παρακάτω στοιχεία.

Year		FV
1	€	500,000.00
2	€	500,000.00
3	€	500,000.00
4	€	500,000.00
5	€	500,000.00
6	€	500,000.00
7	€	500,000.00
8	€	500,000.00

9	€	500,000.00
10	€	500,000.00
r	0.1	
I	€	1,000,000.00
NPV	€	2,072,283.55

Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα έχουμε θετικό NPV και μάλιστα θα λάβουμε σε σημερινή αξία κέρδος ίσο με 2072283.55 €.Άρα η ΚΠΑ μας λέει ότι μας συμφέρει να αποδεχτούμε το έργο και μάλιστα να το συνεχίσουμε για 10 χρόνια (το ελάχιστο).
Όμως εδώ υπεισέρχεται ο πρώτος προβληματισμός.Τι γίνεται αν στην αγορά η τιμή του ρουλεμάν το πρώτο έτος πέσει στα 100 € από τα 500 € που είναι σήμερα;Θα μας συμφέρει το όλο εγχείρημα.Μήπως συμφέρει να επενδύσουμε για αρχή τα πρώτα 2 έτη και μετά να επενδύσουμε στο πέμπτο έτος.Υπάρχει επίσης και το άλλο ενδεχόμενο να ανέβει η τιμή των ρουλεμάν στα 1000 ευρώ στο τρίτο έτος.Τότε μήπως μας συμφέρει να επενδύσουμε από το τρίτο έτος και μετά.Ουσιαστικά αυτό που υπονοείται είναι ότι έχουμε ένα ευκαριακό κόστος.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

	FV 1		**FV2**		**FV3**	
1	€	500,000.00	€	100,000.00	€	-
2	€	500,000.00	€	100,000.00	€	-
3	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
4	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
5	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
6	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
7	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
8	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
9	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
10	€	500,000.00	€	100,000.00	€	1,000,000.00
r	0.1					
I	€	1,000,000.00				
NPV	€	2,072,283.55	€	(385,543.29)	€	4,334,926.20

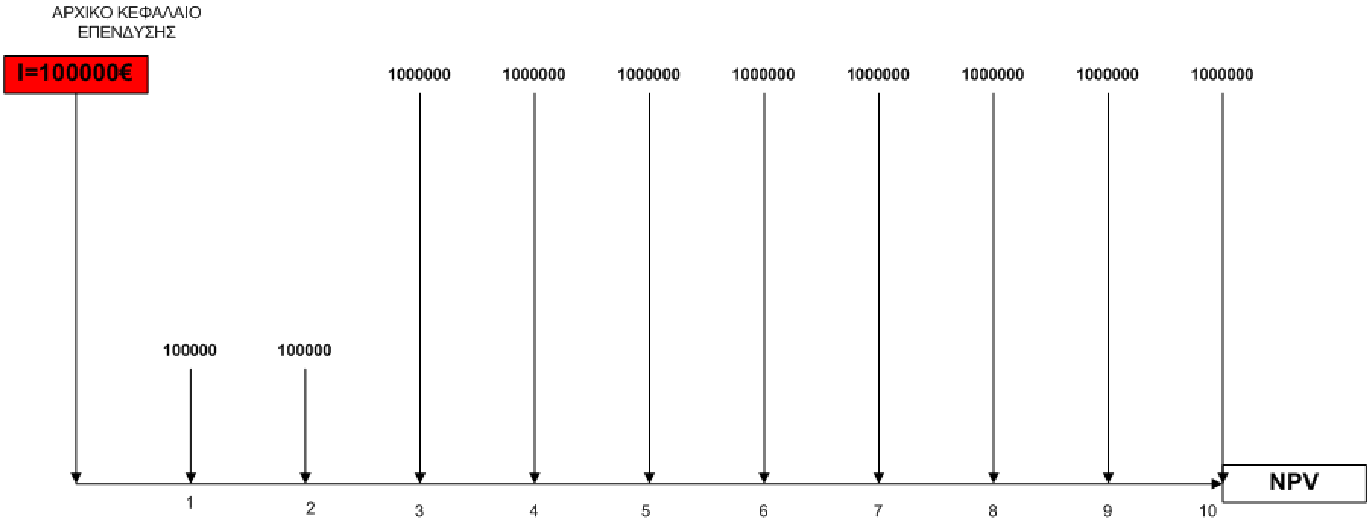
Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι άμα η τιμή του προιόντος πέσει στο 1^{ο} έτος στα 100 ευρώ ενώ εμείς είχαμε σχεδιάσει – εκτιμήσει για 500 ευρώ άμεσα βγαίνουμε χαμένοι και ζημία.Κανονικά δηλαδή άμα συνεχιστεί αυτή η τιμολογιακή κατάσταση για άλλα 9 χρόνια τότε με βάση την ΚΠΑ θα είχαμε στα 10 χρόνια ζημία 385543.29 €.Πως όμως εμείς να το ξέρουμε από τι στιγμή που θεωρήσαμε τιμή πώλησης του ρουλεμάν τα 500 € και μάλιστα βγάλαμε και κέρδος.Με λίγα λόγια υπεισήρθε ο απρόβλεπτος παράγοντας ένας στατιστικός όρος που μας λέει ότι υπάρχει αστάθεια ως προς τις τιμές και συνεπώς αστάθεια ως προς τις χρηματοροές.Στο τρίτο σενάριο εμείς ναι μεν υποθέσαμε αρχική τιμή πώλησης τα 500 ευρώ αλλά τελικά βλέπουμε ότι ενώ για τα δύο πρώτα έτη θα έχουμε 100 ευρώ και συνεπώς ζημία (-) στο τρίτο έτος η τιμή πώλησης του ρουλεμάν εκτοξεύεται στα 1000 ευρώ.Από την απρόβλεπτη πρακτικά αυτή κατάσταση η **φάση** βλέπουμε ότι με βάση τη ΚΠΑ των 3 έως 10 ετών βγάζουμε ένα κέρδος ίσο 4334926.20 € δηλαδή σχεδόν διπλάσιο της αρχικής μας εκτίμησης των 500 ευρώ για 10 χρόνια.Επομένως εδώ μας συμφέρει να ασκήσουμε ένα δικαίωμα στην επένδυση και να την αναβάλουμε για 2 χρόνια αλλά να την επεκτείνουμε για τα επόμενα 7 χρόνια.Αυτό φυσικά και δε γίνεται με τα απλά χρηματοοικονομικά επενδυτικά εργαλεία όπως η ΚΠΑ γιατί δεν μας δίνουν τον αστάθμητο παράγοντα αλλά αντιθέτως θεωρούν δεδομένη την κατάσταση της αγοράς για το $1^{ο}$ έτος δηλαδή το σήμερα.Δεν ξέρουμε με λίγα λόγια τι θα γίνει τη χρονική στιγμή t μετά από χρονικό διάστημα dt.Το συμπέρασμα από όλα τα προηγούμενα είναι ότι τα ΠΔ είναι και ένα δικαίωμα αναμονής στην επένδυση.Εκεί που θεωρούμε ότι κανονικά πρέπει να την ακυρώσουμε εντελώς γιατί έχουμε πραγματική τιμή πώλησης τα 100 € ξαφνικά και ''απρόβλεπτα'' πάμε στα 1000 € και πρέπει να κρατήσουμε την επένδυση ζωντανή.Ο παράγοντας της αναμονής η μερικής αναμονής και γενικά της επεκτατικής η συσταλτικής πολιτικής που επιτάσσεται από τις τρέχουσες συνθήκες της αγοράς καθοδηγούνται και ορίζονται από τους εξής παράγοντες:

- Αβεβαιότητα , όταν υπάρχει αβεβαιότητα υπάρχει και επιλογή (ΠΔ) , όταν δεν υπάρχει καμία αβεβαιότητα τα συνήθη χρηματοοικονομικά εργαλεία μας αρκούν.
- Μη αναστρεψιμότητα.Όταν επενδύουμε ένα αρχικό κεφάλαιο στο έτος 0 η σε οποιοδήποτε έτος ακολουθήσει δεν μπορούμε να λάβουμε πίσω αυτό το ποσό σε περίπτωση που θέλουμε να διακόψουμε την επένδυση δηλαδή sunk costs.Αυτό το λαμβάνουν άμεσα τα ΠΔ και φυσικά ως επακόλουθο της επίτευξης της ελάχιστης δυνατής ζημιάς.

- Αβεβαιότητα.Ο αστάθμητος παράγοντας ο οποίος σε μικρός η μεγάλο βαθμό επηρρεάζει τις χρηματοροές και οποίος εξαλείφεται με βάση τον όγκο της πληροφορίας που λαμβάνουμε.
- Υπάρχει πάντα η δυνατότητα αναβολής μιας επένδυσης ακόμη και αν ο ανταγωνισμός το καθιστά περιορισμένο.

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι βασικό μέλημα των επενδυτών και των επιχειρήσεων ειδικότερα , είναι η δημιουργία και χρήση των δικαιωμάτων πραγματικών επιλογών.Αυτή η χρήση καθίσταται ακόμα πιο επιτακτική όταν έχουμε να κάνουμε με επενδύσεις δισεκατομμυριών ευρώ όπως κρατικές επενδύσεις , για παράδειγμα ο ΟΛΘ , όπου με την αρχή της μη αναστρεψιμότητας τα εφάπαξ κόστη δεν ανακτώνται (sunk costs) και συνεπώς θα πρέπει με σύνεση να δαπανηθούν.Το δικαίωμα των ΠΕ δεν περιορίζεται μόνο σε μία επένδυση αλλά ακόμα και σε μεγάλα χαρτοφυλάκια όπου μπορεί να έχουμε καθετοποίηση η οροζιντοποίηση.Φυσικά υπάρχουν και άλλες εφαρμογές των ΠΕ εκτός επιχειρήσεων και με καθημερινές εφαρμογές για πολύ μικρά ποσά.

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε πρόκειται για μία μέθοδο αξιολόγησης επενδύσεων της επίβλεψης και αναμονής καθ’όλη όμως τη διάρκεια του έργου και όχι σε διακριτές τιμές όπως ανά έτος χωρίς το τελευταίο να αποκλείει τη μέθοδο για διακριτές χρονικές περιόδους.Μία μέθοδο δηλαδή που παρέχει ευελιξία.Από τι στιγμή που επενδύσαμε το αρχικό κεφάλαιο καλούμαστε σε τακτά χρονικά διαστήματα να λάβουμε κάποιες αποφάσεις , θα συνεχίσουμε το έργο , θα το επεκτείνουμε , θα το αναβάλουμε , κοκ.Μήπως μας συμφέρει να επενδύσουμε και άλλο κεφάλαιο σε Έρευνα και Ανάπτυξη (R&D);Διαγραμματικά αυτή η αστάθεια στις προεξοφλημένες χρηματοροές φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θα μπορούσαμε να είχαμε ακόμα πιο μεταβλητές χρηματοροές και τότε καθίσταται εμφανής η αναγκαιότητα των Πραγματικών Επιλογών και πόσο σύνθετη και δύσκολη γίνεται η εκτίμηση με βάση τα άλλα επενδυτικά εργαλεία.Επομένως καθίσταται εμφανής η σημασία του παράγοντα της αστάθειας και της εκτίμησης αυτού.Είναι εφικτό να εκτιμήσουμε και όχι να υπολογίσουμε με ακρίβεια τον παράγοντα της αστάθειας με βάση ιστορικά στοιχεία , όπως για παράδειγμα μία οικονομετρική εκτίμηση της τιμής του πωληθέντος προιόντος.Δυστυχώς μέχρι στιγμής η αστάθεια δεν υπολογίζεται άμεσα και γιαυτό χρειάζονται κάποιες παραδοχές και η άσκηση κάποιων περιορισμών.Για την προσέγγιση στατιστικά έχουν υιοθετηθεί πολλές μέθοδοι όπως Monte Carlo , μέθοδοι Στοχαστικής Άλγεβρας , Πεπερασμένων Στοιχείων από Αριθμητική Ανάλυση καθώς και κατανομές όπως η Δυωνμική (δέντρο δυωνυμικής κατανομής).Μία ακόμη παράμετρος είναι ο χρόνος δηλαδή η λήψη της βέλτιστης επενδυτικής απόφασης στη κατάλληλη χρονική στιγμή καθώς δεν υπάρχει δυνατότητα αναστρεψιμότητας του εφάπαξ κόστους.
Στην ουσία του πράγματος οι ΠΕ είναι ένα άτυπο στοχαστικό συμβόλαιο που μας δίνει ανά πάσα χρονική στιγμή τη δυνατότητα να πάρουμε συγκεκριμένες επενδυτικές αποφάσεις.Αυτές οι επενδυτικές αποφάσεις είναι πεπερασμένες και ορισμένες και αυτές θα αναλύσουμε στο παρακάτω μέρος αυτής της μελέτης.

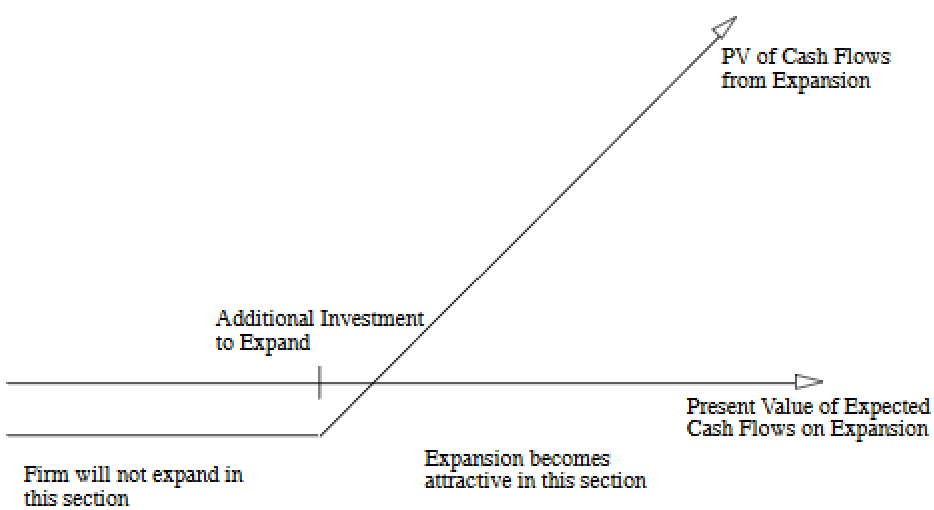
1.5 Μορφές Πραγματικών Δικαιωμάτων

Οι Πραγματικές Επιλογές όπως ήδη έχουμε αναφέρει μπορεί να είναι επεκτατικές , συσταλτικές , αναβλητικές , του λαμβάνειν και θέτειν (call & put options) η αλλιώς του δικαιώματος να πουλήσει ο επενδυτής η να αγοράσει.Μια γενικότερη οροθέτηση στην οποία θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν είναι η παρακάτω:

- Δικαιώματα επιλογής με βάση το μέγεθος των χρηματοροών και επένδυσης.
- Δικαιώματα επιλογής με βάση τη διάρκεια ζωής του έργου και το χρόνο.
- Δικαιώματα επιλογής με βάση τη λειτουργικότητα του έργου.

1.6 Πραγματικά Δικαιώματα Επέκτασης / Συσταλτικής στρατηγικής

Πρόκεται ουσιαστικά για την επιλογή που επιτρέπει στην εταιρία να επεκτείνει τις επενδυτικές τις λειτουργίες στο μέλλον με λίγο η καθόλου κόστος.Για παράδειγμα μία εταιρία logistics 3PL επένδυσε αρχικά ένα κεφάλαιο στην κατασκευή μιας αποθήκης και αποφάσισε μετά από χρόνο dt στη διάρκεια επενδυτικής ζωής του έργου να επεκτείνει τον αποθηκευτικό της χώρο.Φυσικά ουσιώδης παράγοντας για αυτή την επιλογή είναι η εκτίμηση του οικονομικού περιβάλλοντος και των χρηματοροών στο εγγύς μέλλον , δηλαδή αν θα εξασφαλίσει τόσα συμβόλαια ώστε να επεκτείνει την αποθήκη σε συνάρτηση με το χρόνο ζωής.Αν αυτό δε συμβεί τότε το δικαίωμα της επιχείρησης λήγει γιατί πλέον έχει περάσει ο χρόνος dt και δεν έχει νόημα η λήψη της επενδυτικής επέκτασης πλέον.Στην επέκταση μπορεί να προστεθεί και το ενδεχόμενο να μπορεί ο επενδυτής να αναλάβει επιπλέον έργα άμεσα η στο μέλλον.Αυτό μπορεί να ακούγεται απλό αλλά με τις άλλες μεθόδους όπως της ΚΠΑ μπορεί να υπολογίζαμε σε 10 χρόνια ένα αρνητικό μέγεθος όπως για τιμή πώλησης ρουλεμάν τα 100 € και η ανάληψη αυτού του επενδυτικού εγχειρήματος να μας βοηθούσε να αναλάβουμε ένα παραπλήσιο στο δέκατο χρόνο , έστω κοχλίες για ρουλεμάν το οποίο να μας απόφερε κέρδος.Αυτό είναι ένα συστατικό στοιχείο της επέκτασης.Αυτή η επέκταση λέγεται αλλιώς και **στρατηγική επιλογή επέκτασης**.Αυτό φαίνεται διαγραμματικά και από το παρακάτω σχήμα από το βιβλίο του Damodaran για τη Χρηματοοικονομική Διοίκηση:



Αυτό έχει ιδιαίτερη εφαρμογή στα λεγόμενα συμπληρωματικά αγαθά , όταν δηλαδή η είσοδος ενός αγαθού πρωτύτερα η ενδιάμεσα ενός συμπληρωματικού του βοηθά στην άυξηση των χρηματοροών του παρότι ως αυτή καθεαυτή η επένδυση παρουσιάζει αρνητική ΚΠΑ.Όμως συνολικά οι δύο επενδύσεις παρουσιάζουν κέρδος.Η βιομηχανία αναψυκτικών είναι ένα εφαρμοσμένο παράδειγμα.Θα ήταν αδύνατη η επιτυχία ενός αναψυκτικού Cola αν δεν είχε προηγηθεί η προλείανση του εδάφους με μία αρνητική επένδυση για παράδειγμα Soda.Αν δώσαμε 1000000 € για τη Soda τότε αυτό θεωρείται ως επιλογή επέκτασης για τη Cola.Η αρχική επένδυση του 1000000 € θεωρείται το κόστος επέκτασης η αλλιώς **τιμή διάθεσης (strike price) του επενδεδυμένου κεφαλαίου Κ**.Εδώ να επισημανθεί πως ως τιμή διάθεσης θεωρούμε την επιλογή μίας σταθερής προσυμφωνημένης τιμής την οποία θα επενδύσουμε στο εμπόρευμα (εδώ ρουλεμάν) και η οποία είναι συναρτήσει μίας τιμής αγοράς τη χρονική στιγμή που θα κάνουμε την επένδυση και όταν εμείς ως επενδυτές (εδώ η μηχανολογική εταιρεία που κατασκευάζει κοχλίες και ρουλεμάν) εξασκήσουμε το δικαιωμά μας θα δώσουμε 1000000 € για ρουλεμάν – επένδυση με τη στατιστική βλέψη των ΠΕ ότι θα κερδίσουμε από την επένδυση σε κοχλίες.Φυσικά μπορούμε να μην εξασκήσουμε αυτό το δικαίωμά μας οπότε ούτε κερδίζουμε κάτι αλλά ούτε και χάνουμε.Ένα δικαίωμα που έχει πεπερασμένο χρόνο διάρκειας.Να επισημανθεί εδώ ότι οι επενδυτικές ΠΕ δεν είναι ευκαριακές επιλογές αλλά βασίζονται σε μία αρχική στοχαστική εκτίμηση , το προαπαιτούμενο της επένδυσης για ρουλεμάν τώρα ώστε να κερδίσουμε από την επένδυση σε κοχλίες αύριο οριοθετείται τώρα.

Με βάση τις μεθόδους εκτίμησεις αυτή τη στιγμή στην αγορά κυκλοφορούν κάποια υπολογιστικά προγράμματα που μας δίνουν τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε εμείς αν συμφέρει η επέκταση με βάση ορισμένο χρονικό βήμα βέβαια όπως το Super Lattice Solver.

Στη συσταλτική στρατηγική κάνουμε το αντίθετο από τα προηγούμενα δηλαδή μειώνουμε το επενδυμένο κεφάλαιο η αναβάλουμε πλήρως το εγχείρημα.Εάν θεωρήσουμε στο χρόνο 0 ότι το εγχείρημα θα μας βγάλει συνολικά ζημιές μετά από χρόνο t τότε ασκούμε το δικαιωμά μας να εγκαταλείψουμε το έργο και να προφυλαχθούμε από περεταιρώ ζημίες.Εδώ ένα κλασικό παράδειγμα είναι η Airbus η οποία σκέφτεται το εγχείρημα να επενδύσει 500 εκ. $ για την παραγωγή ενός νέου πολιτικού αεροπλάνου αγοράζοντας το 50% των μετοχών της εατιρίας κατασκευής με αυτά τα λεφτά.Μία άλλη εταιρεία προτείνει στην Airbus να αγοράσει το μετοχικό της μερίδιο για 400 εκ. $ μέσα στα επόμενα 5 χρόνια αν η Airbus αποφασίσει να εγκαταλείψει το εγχείρημα.Εδώ κοιτάζουμε τόσο τη παρούσα αξία για 5 χρόνια που βγαίνει ίση με 480 εκ. $ (προφανώς και η Airbus έχει οριοθετήσει το έργο στα 30 χρόνια) καθώς και η τιμή διάθεσης Κ = 400 εκ. $.Με μία πρώτη εκτίμηση προφανώς και δε συμφέρει γιατί χάνει 480 – 400 = 80 εκ. $.Όμως τι θα γίνει αν τον τρίτο χρόνο βγεί ένα καλύτερο πολιτικό αεροπλάνο από ανταγωνίστρια εταιρία;Τότε με βάση τις ΠΕ για εγκατάλειψη έργου τη συμφέρει γιατί θα έχει τη μικρότερη ζημία.Άρα γίνεται εμφανές ότι ακόμα και στη ζημιά οι ΠΕ δίνουν ένα σαφές πλεονέκτημα έναντι των υπολοίπων.

2.1 Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης (Call & Put Options)

Το δικαίωμα αγοράς (Call Options) η αλλιώς δικαίωμα θέσης είναι στην ουσία μια συμφωνία που δίνει στον επενδυτή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ένα χρεόγραφο (μετοχές , ομόλογα , εμπορεύματα , κτλ) σε μία καθορισμένη τιμή σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.Η καθορισμένη αυτή τιμή λέγεται τιμή διάθεσης (strike price) και συμβολίζεται εφεξής με Κ.Το όλο εγχείρημα βασίζεται στη λογική ότι σε αυτή τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή η τιμή διάθεσης θα είναι μικρότερη από την πραγματική αξία του χρεογράφου που τη συμβολίζουμε με S και λέγεται στιγμιαία τιμή η αλλιώς spot price.Στην ουσία ωφελούμαστε από την άνοδο της τιμής του χρηματοοικονομικού στοιχείου που αγοράσαμε σε προηγούμενη χρονική στιγμή γιατί τη στιγμή αγοράς η τιμή του , S , έχει αυξηθεί.Η προκαθορισμένη χρονική στιγμή αγοράς λέγεται και ημερομηνία λήξης του δικαιώματος , δηλαδή πέραν αυτής χάνουμε το δικαίωμα αγοράς στην προσυμφωνημένη τιμή.Αυτό γίνεται εμφανές με ένα παράδειγμα από το χρηματιστήριο.Έστω η TOTAL που θέλει να αγοράσει ένα πακέτο μετοχών από μία μικρότερη εθνική εταιρία πετρελαίου στην τιμή των 100 € τη χρονική στιγμή 20/4/2017 ενώ βρισκόμαστε στις 4/4/2017.Αυτό σημαίνει ότι αφού ανέβει η τιμή της μετοχής της δεύτερης εταιρίας στα 150 € η TOTAL κέρδισε σε αξία 50 €.Εδώ έγκειται όμως και η ουσία του δικαιώματος , άμα η τιμή δεν πάει στα 150 € αλλά στα 50 € δεν εξασκούμε το δικαίωμα της συμφωνημένης αγοράς στις 20/4/2017 και έτσι δεν έχουμε ούτε κέρδος αλλά ούτε και ζημία , γιατί όπως έχει ήδη ειπωθεί το δικαίωμα αγοράς δεν συνίσταται σε υποχρέωση.

Αυτή τη διαφορά την καλούμε και **χαρακτήρα χρήματος** του χρηματοοικονομικού συμβολαίου.Μαθηματικά αυτό αναπαριστάται με τις εξής σχέσεις:

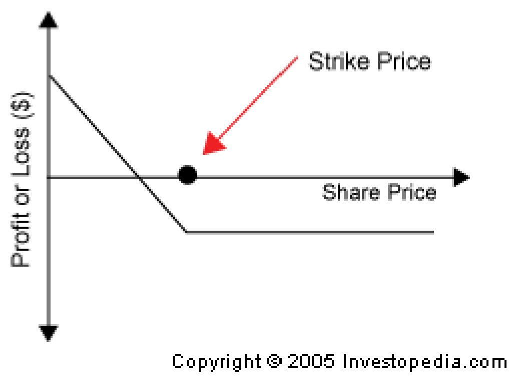
χαρακτήρας χρήματος = S – K , σε περίπτωση άυξησης του S (>K)
χαρακτήρας χρήματος = 0 , σε περίπτωση μείωσης του S (<K)

Συνολικά δηλαδή θέλουμε το: **max [(S-K) , 0] = (S – K)$^+$**

Το δικαίωμα πώλησης (put option) τώρα είναι το αντίστροφο του δικαιώματος αγοράς.Δικαίωμα πώλησης είναι μία συμφωνία η οποία μας δίνει το δικαίωμα να πουλήσουμε ένα περιουσιακό στοιχείο σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή σε μία προκαθροισμένη τιμή , τη λεγόμενη και τιμή διάθεσης , Κ.Όπως και πρίν στοιχηματίζουμε στην μειώση της πραγματικής τιμής του S εκείνη τη χρονική στιγμή.Δηλαδή μία σχέση της μορφής:

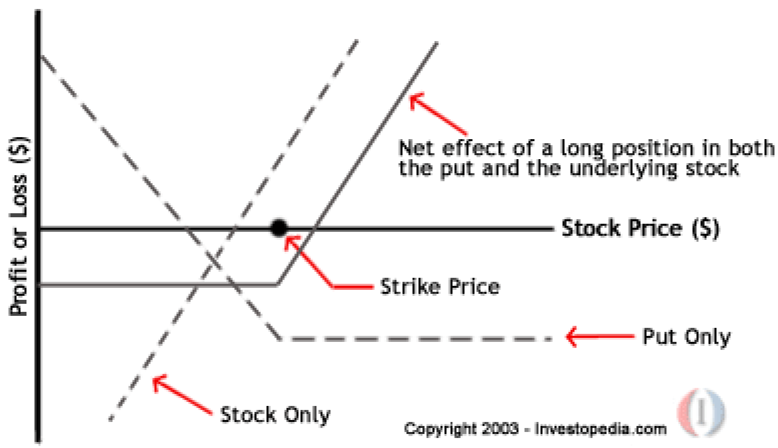
χαρακτήρας χρήματος = max [(K – S) , 0] = (K-S)$^+$

Δηλαδή εξασκούμε το δικαιωμά μας είτε να πουλήσουμε σε μία υψηλότερη τιμή από την τιμή που επικρατεί εκείνη τη χρονική στιγμή στην αγορά , S , είτε αν έχει μειωθεί η παραμείνει ίδια να μην πουλήσουμε καθόλου για να μη βγούμε ζημιωμένοι.Αυτό διαγραμματικά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στην ουσία τόσο η αγορά όσο και η πώληση θεωρούνται χρηματοοικονομικά παράγωγα γιατί εκμεταλλεύονται τις κινήσεις των τιμών στα χρηματοοικονομικά προιόντα.Μία ευρεία εφαρμογής είναι στα αντισταθμιστική προιόντα (hedge products) όπου διασφαλίζεται το κέρδος ή η μηδενική ζημία.Μπορούμε μάλιστα να έχουμε ταυτόχρονα και δικαιώματα αγοράς και πώλησης.Αυτό γίνεται πιο κατανοητό με το ακόλουθο παράδειγμα.Έστω μία εταιρία που διαθέτει 100 μετοχές του 1 € η κάθε μία.Συμφωνεί με μία άλλη εταιρία , υπογράφει συμβόλαιο , να αγοράσει σε ένα μήνα στην τιμή του 1 € άλλες 100 μετοχές πανομοιότυπες με τις δικές της και ταυτόχρονα να τις πουλήσει και τις 100 σε μία άλλη στην τιμή του 1 €.Εδώ το Κ λαμβάνει την τιμή 1.Έστω ότι σε ένα μήνα η τιμή του S γίνει 0.8 € τότε θα έχει ζημία αν αγοράσει άλλες 100 ίση με 100*(1-0.8) = 20

€ άρα δεν εξασκεί το δικαίωμα αγοράς και δεν αγοράζει.Όμως θα εξασκήσει το δικαίωμα πώλησης με την τρίτη εταιρία και θα κερδίσει : K – S = 0.2 δηλαδή 0.2*100 = 20 €.Εδώ θα μπορούσαμε να κάνουμε λόγο για μία στρατηγική **συζευγμένης πώληση (married put option)**.
Η συζευγμένη πώληση είναι μία στρατηγική στην ουσία όσο και δικαίωμα έτσι ώστε όταν κατέχουμε ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχές η ομόλογα αυξημένων προσοδικιών , δηλαδή εκτιμήσεων μεγάλης απόδοσης , κάνουμε μία συμφωνία πώλησης για να προστατευτούμε από πιθανές ζημίες λόγω πληθωρισμού , δηλαδή μείωση της αξίας του χαρτοφυλακίου.Αυτό φαίνεται διαγραμματικά στο παρακάτω σχήμα.



Εδώ αξίζει να αναφέρουμε ένα ακόμα βασικό συστατικό του δικαιώματος αγοράς και πώλησης αυτό της εκτέλεσης του δικαιώματος.Εκτέλεση σημαίνει η ενεργοποίηση των συμφωνηθέντων στο συμβόλαιο η συμφωνία αλλά όχι υποχρέωση με βασική παράμετρο τη λήξη αυτού οπότε χάνουμε το δικαίωμα.Στην περίπτωση δικαιώματος αγοράς ο πωλητής δικαιώματος πρέπει να πληροφορηθεί τη χρονική στιγμή που συμφωνήσαμε για την πραγματοποίηση η μη της αγοράς.Στην πραγματικότητα έχουμε να ισχύει η λήξη των περισσότερων συμφωνιών παρά η αγορά η πώληση.

2.2 Δικαιώματα με βάση το μέγεθος του έργου

Αυτά είναι γενικότερα δικαιώματα που έχουν να κάνουν με τη διαδικασία παραγωγής περισσότερο και δη τη βιομηχανική παραγωγή και λιγότερο με χρηματιστηριακά παράγωγα η αξιόγραφα γενικότερα.Πεδίο εφαρμογής τους μπορεί να είναι η Διοίκηση της Αλυσίδας Εφοδιασμού , ο Προγραμματισμός της Παραγωγής ενός εργοστασίου , μία Τεχνικοοικονομική Αξιολόγηση ενός μεγάλου τεχνικού επενδυτικού έργου όπως ένα αιολικό πάρκο η ένας λιγνιτκός σταθμός , κτλ.Διακρίνονται σε:

- Δικαιώματα εκροών δηλαδή η επιλογή παραγωγής διαφορετικών εκροών.Για παράδειγμα εδώ το ρόλο του K λαμβάνει η προσυμφωνημένη παρτίδα προμήθειας του αγοραστή η προμηθευτή και ανάλογα με στρατηγικές call η put βγαίνουμε είτε κερδισμένοι είτε εξασφαλισμένοι (μηδενικό κέρδος).Μας παρέχει δηλαδή μία ευελιξία.
- Δικαιώματα εισροών όπου εδώ συμφωνούμε ως προς διαφορετικές εισροές , προμηθευτές η πελάτες.Μία διαδεδομένη χρήση αυτού είναι στην αγοραπωλήσια πετρελαίου από τις μεγάλες πολυεθνικές πετρελαικές εταιρίες όπου με διαδικασίες call γίνεται η προμήθεια πετρελαίου.

Είδαμε επομένως κάποιες βασικές κατηγορίες άσκησης των δικαιωμάτων , τώρα θα δούμε και τις βασικές μεταβλητές η σταθερές που επηρεάζουν την αρχική εξάσκηση του δικαιώματος.

2.3 Υποκατηγορίες πραγματικών δικαιωμάτων

Υπάρχουν δύο βασικές υποκατηγορίες μελλοντικών συμβολαίων δικαιωμάτων , τα οποία μας δίνουν ευελιξία στο πόσο και πότε θα αγορασθεί/πουληθεί το δικαιώμα.Έτσι έχουμε να κάνουμε με:

- Ποιοτικά Δικαιώματα
- Χρονικά δικαιώματα

Γενικά έχουμε να κάνουμε με την μελλοντική τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου του οποίου η τιμή θα συμβολίζεται με F και αυτό με A σε χρόνο αρχής t μέχρι χρόνο λήξης του δικαιώματος t^*.Άρα για περισσότερα από ένα περιουσιακά στοιχεία $A_i, i = 1 \ldots n$ ισχύει:

$$F(t, [A_1, \ldots, A_n], (t+T))$$

η μελλοντική αξία τους σε χρόνο T.

Άρα και για ένα ευρωπαικό δικαίωμα η τιμή αγοράς του θα ισούται με:

$$EC(t, [A_1, \ldots, A_n], K, (t+T))$$

όπου μπορούμε να δούμε πως στην ωρίμανση του δικαιώματος ισχύει:

$$\max[\min(A_1, \ldots, A_n) - K, 0]$$

Δηλαδή βγάζουμε κέρδος μόνο αν και το χαμηλότερο σε αξία στοιχείο του χαρτοφυλακίου στη λήξη του δικαιώματος μας δώσει τιμή μεγαλύτερη της προσυμφωνημένης τιμής αγοράς διαφορετικά μηδέν.
Αντίστοιχα και το ευρωπαικό δικαίωμα πώλησης πρέπει να ισχύει:

$$EP(t,[A_1,\ldots,A_n],K,(t+T))$$

και στην ωρίμανση του δικαιώματος πρέπει ναι ισχύει:

$$\max[K-\min(A_1,\ldots,A_n),0]$$

Για περισσότερα από ένα στοιχεία ισχύει συνολικά.

$$VF = EC - EP$$

που συμβολίζει την τρέχουσα τιμή ενός συμβολαίου δικαιώματος που έχει αξία στη λήξη του F.

2.4 Βασικές παράμετροι άσκησης Πραγματικών Δικαιωμάτων

Πρώτη και σημαντικότερη είναι η τιμή διάθεσης η K.Αυτή ουσιαστικά είναι αμετάβλητη και προσυμφωνημένη και άρα σταθερή καθόλη τη διάρκεια εξάσκησης του δικαιώματος και επηρεάζεται από τις μεταβλητές του προβλήματος αξιολόγησης οι οποίες θα αναφερθούν παρακάτω.
Η Αστάθεια , ένα μέτρο της αβεβαιότητας της αξίας του επενδυτικού έργου στο χρόνο συμφωνίας.Όπως ήδη έχει λεχθεί υπάρχουν πολλές μέθοδοι που είτε λαμβάνουν υπόψι την αβεβαιότητα είτε όχι όπως η προσομοίωση Monte Carlo.Βασικός παράγοντας στην εκτίμηση της αστάθειας είναι η ιστορικότητα των τιμών (εσόδων , κλτ).
Ο χρόνος άσκησης του δικαιώματος που μπορεί να είναι από μία μέρα μέχρι ολόκληρες δεκαετίες.Μετά το πέρας αυτού του χρόνου το δικαίωμα λήγει.Θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στην εκτίμηση του δικαιώματος του χρόνου κατόπιν.

2.5 Αξία του Χρόνου

Αναφέρεται στην πριμοδότηση που ένας λογικός επενδυτής θα πληρώσει πάνω η κάτω από τη σημερινή προσυμφωνημένη τιμή άσκησης δικαιώματος.Σε κάποιες αγορές όπως των ΗΠΑ η της Γερμανίας η αξία του S θα είναι σχεδόν πάντα μεγαλύτερη από την αρχική σε άλλες όμως όπως της Ελλάδας αυτό δε συμβαίνει.Αυτή η πριμοδότηση είναι ανάλογη τόσο του χρόνου όσο και της αστάθειας και είναι :

Αστάθεια * Χρόνος

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε την εσωτερική τιμή του δικαιώματος , δηλαδή την τιμή ασκησής της τώρα και όχι της αγοράς.Για την εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος έχουν προταθεί κάποιες φόρμουλες η σναρτήσεις που μας δίνουν είτε το κέρδος είτε την αποφυγή ζημίας.Οι πιο σημαντικές είναι η **Black-Scholes** και η **Δυωνυμική**.Εμείς θέλουμε πάντα η τιμή του δικαιώματος να είναι μεγαλύτερη της εσωτερικής τιμής η αλλιώς:

Τιμή Χρόνου = Τιμή Δικαιώματος – Εσωτερική Τιμή

3.1 Μοντέλο Black – Scholes

Το μοντέλο αυτό δημιουργήθηκε από τους Fisher Black και Myron Scholes το 1973 για το οποίο και οι δύο εφευρέτες οικονομολόγοι έλαβαν βραβείο Νόμπελ.Το υπόδειγμα αυτό κάνει τις εξής παραδοχές:

- Τα δικαιώματα αναφέρονται στην Ευρώπη και μπορούν να εξασκηθούν μόνο κατά τη λήξη τους (δηλαδή ελάχιστο χρόνο dt πριν).
- Δεν πληρώνονται μερίσματα από το δικαίωμα στη διάρκεια ζωής του.
- Αποτελεσματικές αγορές , εδώ βασιζόμαστε στην υπόθεση των Αποδοτικών Αγορών (EMH) δηλαδή στο Χρηματιστήριο οι μετοχές ανταλλάσσονται στην καθαρή αξία τους καθιστώντας ανέφικτο για τους επενδυτές να αγοράσουν υποτιμημένες μετοχές η να πουλήσουν μετοχές σε υπερτιμημένες τιμές.Σε αυτό το πλαίσιο είναι αδύνατον για τον επενδυτή να επιλέξει ειδικά πακέτα κερδοσκοπικών μετοχών η να κάνει χρήση τεχνικών δεικτών (πχ , MACD) η οικονομικών δεδομένων.
- Δεν υπάρχουν κόστη συνδιαλλαγής στην απόκτηση του δικαιώματος.
- Η αστάθεια και το επιτόκιο θεωρούνται σταθερά.
- Οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή.

Από τα παραπάνω μπορούμε να παίξουμε με τις τιμές των K , επιτοκίου , χρόνου και αστάθειας.

Επομένως θα ασχοληθούμε με τις παρακάτω μεταβλητές:

S – η τιμή της μετοχής , κάποιες φορές σταθερή και άλλες μεταβλητή.

V(S,t) – η τιμή του παραγώγου συναρτήσει του S και του χρόνου t.

C(S,t) – η τιμή της αγοράς ενός δικαιώματος.

P(S,t) – η τιμή πώλησης ενός δικαιώματος.

K – η τιμή διάθεσης (προσυμφωνημένη).

r – το επιτόκιο (εκτός ρίσκου).

μ – ο ρυθμός τάσης του S.

σ – η τυπική απόκλιση

t – ο χρόνος (0....)

Και κάνουμε χρήση επίσης της αθροιστικής κανονικής κατανομής που είναι:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-x^2}{2}} dz$$

Στη γενική της μορφή θα είναι:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0$$

Άρα όλα εξαρτώνται από την τιμή της μετοχής S και επομένως μπορούμε με κατάλληλη αγορά η πώληση δικαιώματος του παραγώγου να εξαλείψουμε το ρίσκο.

Για την αγορά (Call) έχουμε την εξής σχέση που προτάθηκε από τους δύο οικονομολόγους:

$$C(S,t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Για την πώληση (Put) ομοίως:

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)} - S + C(S,t) =$$

$$N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S$$

Συνοπτικά κάθε όρος μπορεί να παρουσιασθεί στον ακόλουθο πίνακα με τον συμβολισμό ενός γράμματος.

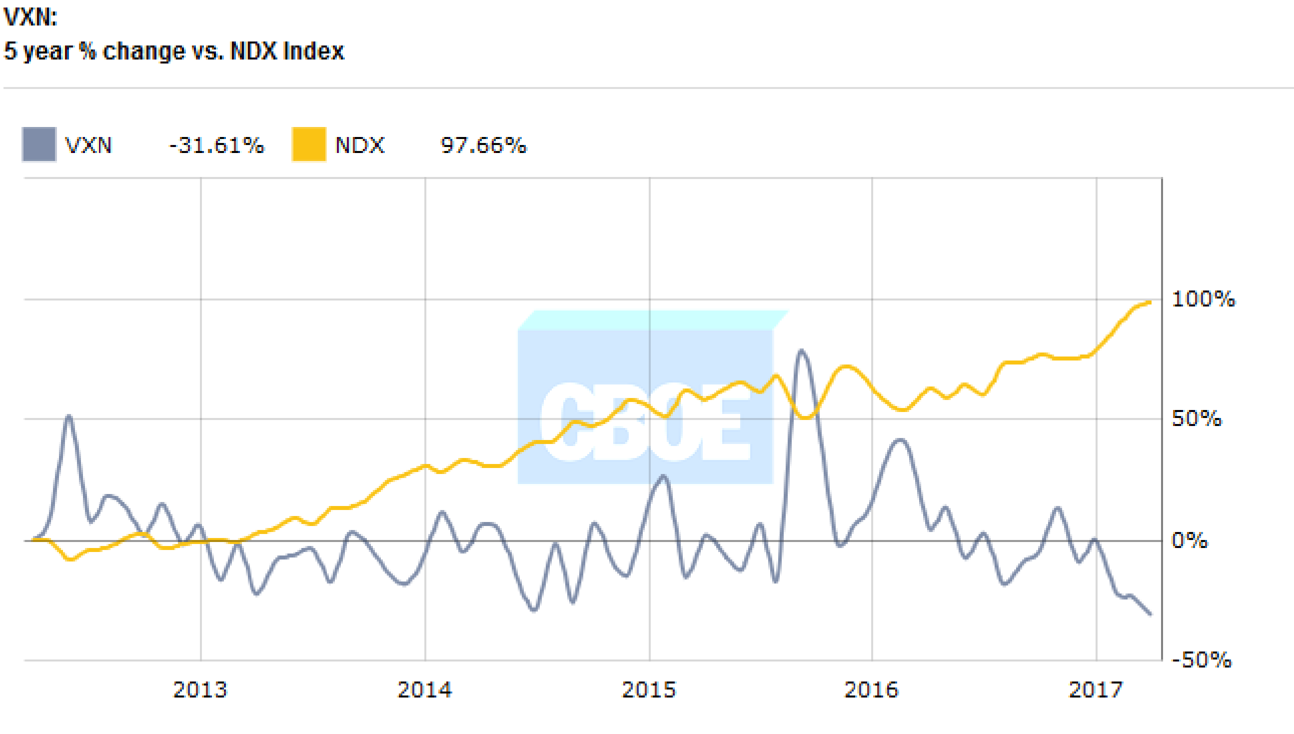
		Calls	Puts
Delta	$\frac{\partial C}{\partial S}$	$N(d_1)$	$-N(-d_1) = N(d_1) - 1$
Gamma	$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
Vega	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$	$SN'(d_1)\sqrt{T-t}$	
Theta	$\frac{\partial C}{\partial t}$	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Rho	$\frac{\partial C}{\partial r}$	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$

Υπάρχουν αρκετά προγράμματα που υπολογίζουν τη σχέση Call & Put για δεδομένα K , S , r , t και Αστάθεια (Volatility).Ένα από αυτά είναι και το παρακάτω που κάνει χρήση της εγγενούς συνάρτησης του Matlab και μας δίνει τις τιμές των Call και Put.
Για παράδειγμα για τον Nasdaq είναι για μία περίοδο πέντε ετών (t = 5) ίση με:

έτος	**VXN (%)**
2013	18.1
2014	16.01
2015	19.73
2016	19.63
2017	17.12

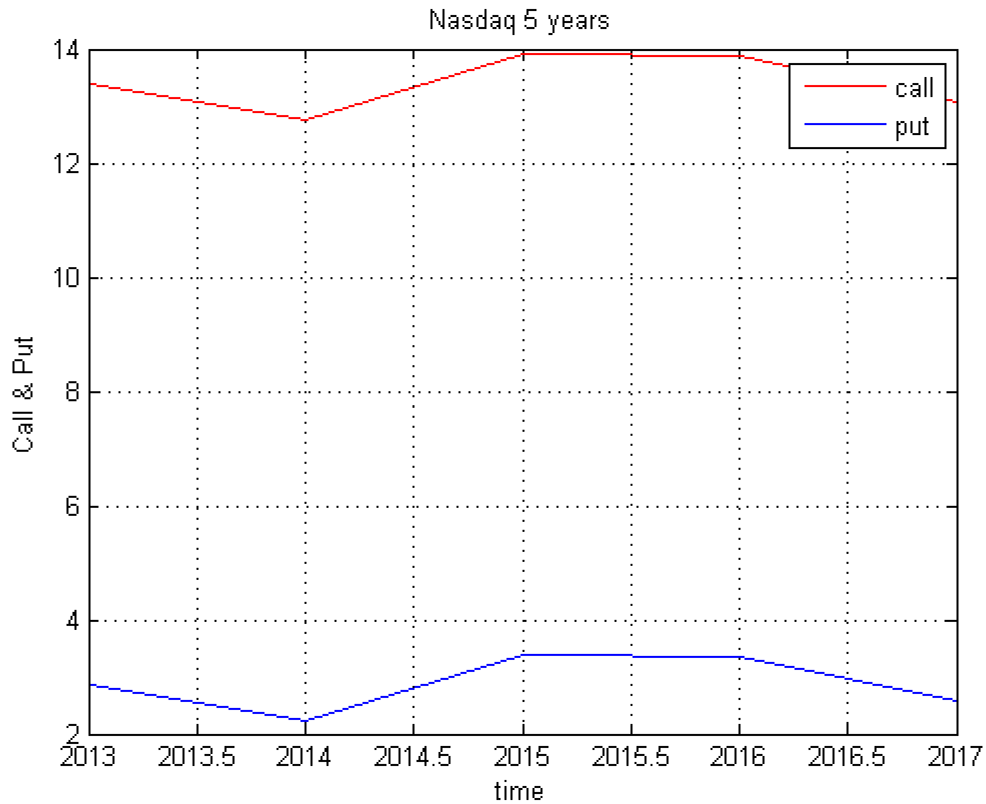
Η όπως φαίνεται παρακάτω:

KaiK



Και συνεπώς ο κώδικας σε Matlab που υπολογίζει τα Call & Put:

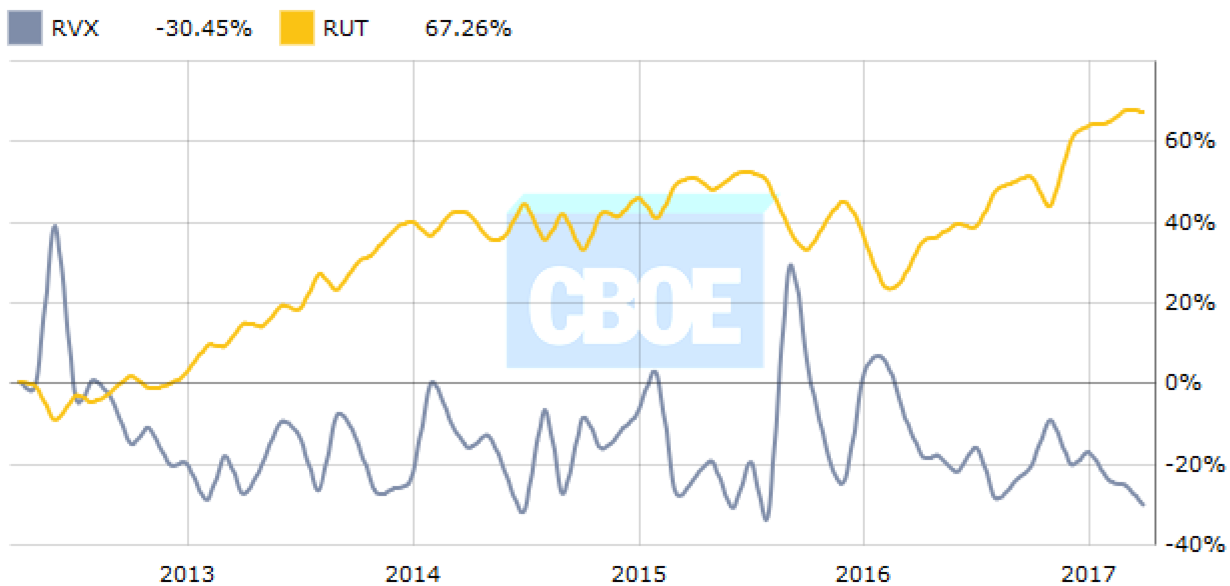
```
%Black-Scholes equation%
%S%
Price=101;
%K%
Strike=100;
%risk-free interest%
Rate=0.1;
%t%
Time=1;
%astathia%
time=[2013,2014,2015,2016,2017];
Volatility=[0.181,0.1601,0.1973,0.1963,0.1712];
for i=1:5
[C,P] = blsprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatility(i))
call(i)=C;
put(i)=P;
end
plot(time,call,'r',time,put,'b');
xlabel 'time';
ylabel 'Call & Put';
grid on;
hold on;
legend('call','put');
title 'Nasdaq 5 years';
```

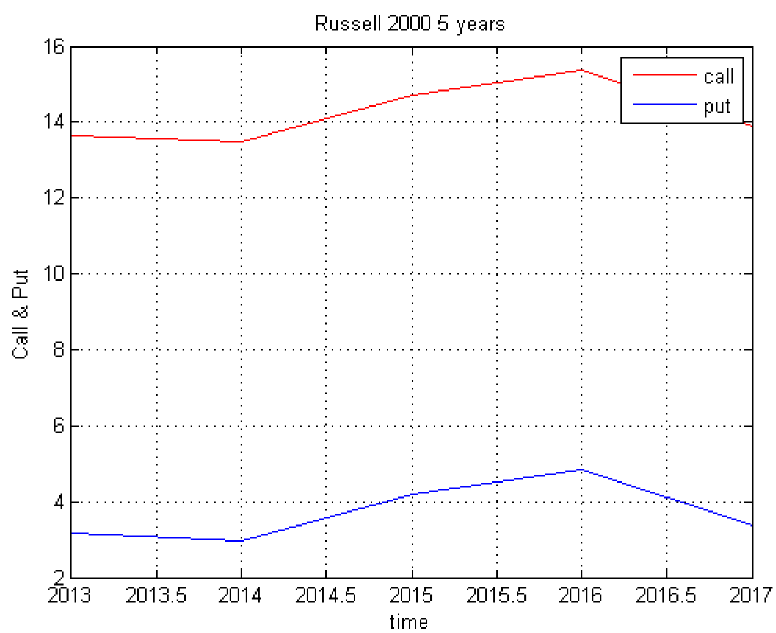


Από το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε τις διακυμάνσεις του C & P (Call & Put) για τα 5 έτη.Προφανώς με μικρή αστάθεια όπως το έτος 2014 έχουμε και μικρότερο περιθώριο κέρδους αγοράς.

Τώρα θα δούμε τι γίνεται και στον Russell 2000 για τα ίδια έτη όπου εδώ έχουμε άλλη αστάθεια.

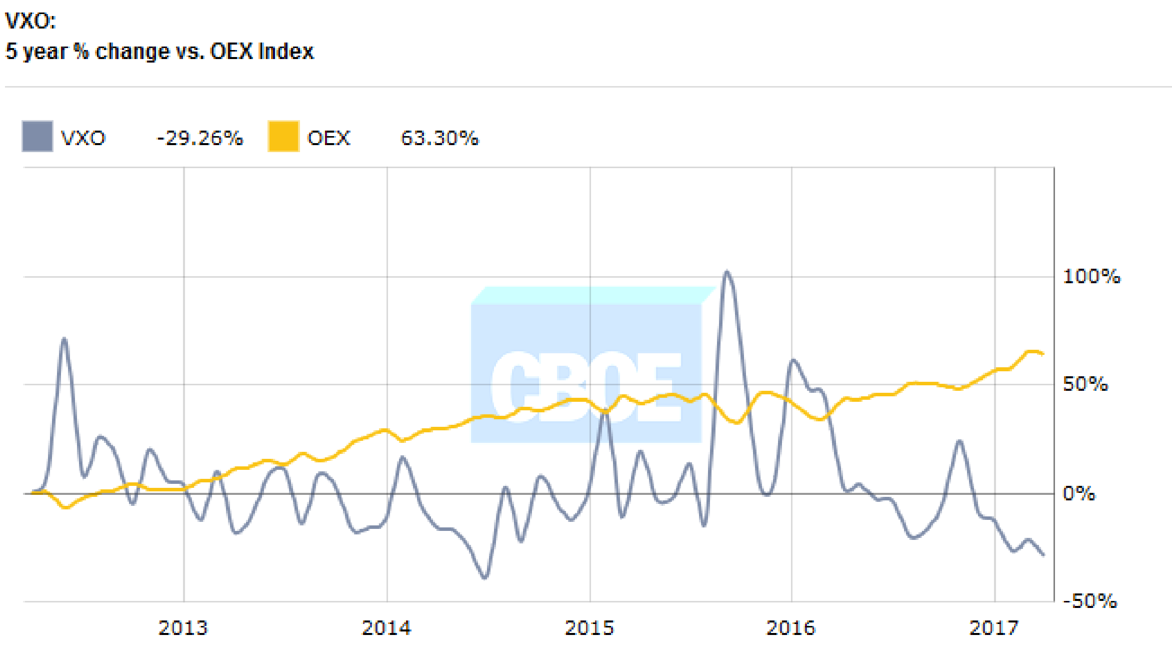
RVX:
5 year % change vs. RUT Index





έτος	RVX (%)
2013	18.96
2014	18.42
2015	22.16
2016	24.03
2017	19.69

Προτού αναλύσουμε τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να δούμε τι γίνεται και με έναν ακόμη οίκο το γνωστό S&P 500.



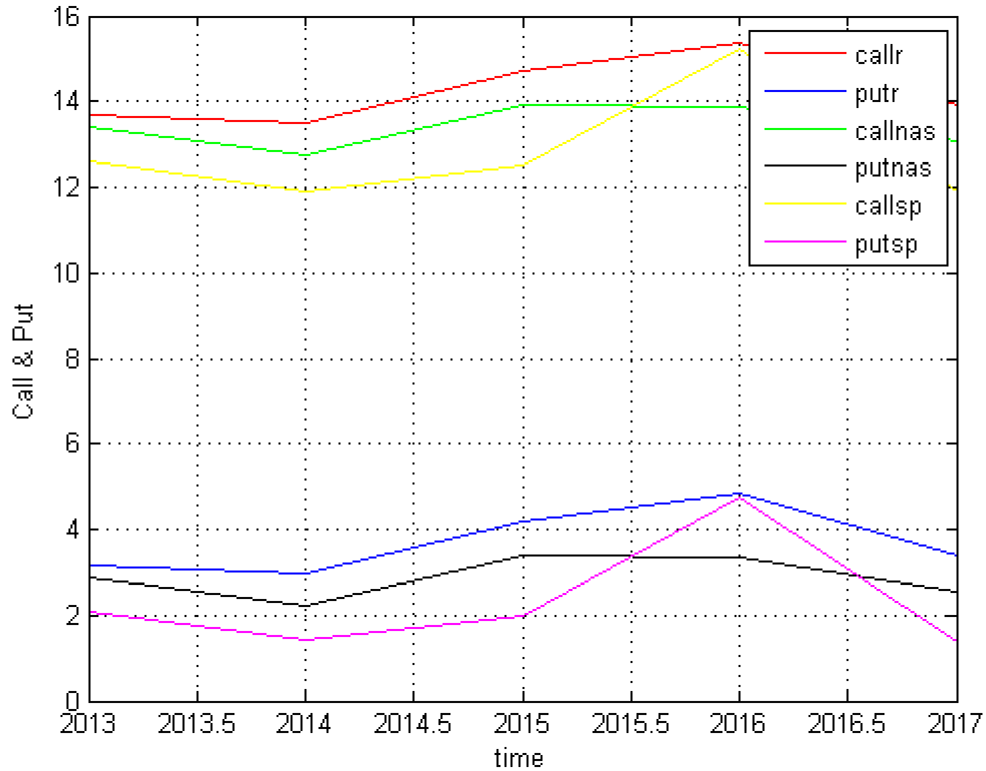
έτος	VXO (%)
2013	15.48
2014	13.11
2015	15.24
2016	23.72
2017	12.97

Βλέπουμε ότι για τον S&P οίκο αξιολόγησης η αστάθεια είναι συγκριτικά μικρότερη γιατί αναφέρεται σε λιγότερες εισηγμένες εταιρίες.Ο κώδικας που υπολογίζει Call & Put και για τους τρείς οίκους είναι ο παρακάτω:

```
%Black-Scholes equation%
%S%
```

```
Price=101;
%K%
Strike=100;
%risk-free interest%
Rate=0.1;
%t%
Time=1;
%????????%
time=[2013,2014,2015,2016,2017];
Volatilitynas=[0.181,0.1601,0.1973,0.1963,0.1712];
Volatilityr=[0.1896,0.1842,0.2216,0.2403,0.1969];
Volatilitysp=[0.1548,0.1311,0.1524,0.2372,0.1297];
for i=1:5
[C,P] = blsprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatilityr(i))
callr(i)=C;
putr(i)=P;
[C,P] = blsprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatilitysp(i))
callsp(i)=C;
putsp(i)=P;
[C,P] = blsprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatilitynas(i))
callnas(i)=C;
putnas(i)=P;
end
plot(time,callr,'r',time,putr,'b');
hold on;
plot(time,callnas,'g',time,putnas,'k');
plot(time,callsp,'y',time,putsp,'m');
xlabel 'time';
ylabel 'Call & Put';
grid on;
hold on;
legend('callr','putr','callnas','putnas','callsp','putsp');
```

Και βγάζουμε συνολικά σε διάγραμμα:



Παρατηρούμε ότι για όλους τους οίκους αξιολόγησης τα περιθώρια είναι περίπου ίδια δηλαδή μόνο σε απόλυτες τιμές διαφέρουν και αυτό σημαίνει ότι το υπόδειγμα Black-Scholes εξαρτάται καθαρά από τον παράγοντα της μετρούμενης αστάθειας.Ας δούμε τώρα τι σημαίνει αυτή η διαφορά του Call με το Put σε απόλυτους αριθμούς.

3.2 Αγορές Δικαιωμάτων και γενικεύσεις πάνω στο υπόδειγμα

Στον κόσμο υπάρχουν οι λεγόμενες αγορές δικαιωμάτων μερικές από τις βασικότερες είναι οι ακόλουθες: CBOE , NYSE , NASDAQ , κτλ.Γενικά το υπόδειγμα Black-Scholes αφορά τα περιουσιακά επενδυτικά στοιχεία τα οποία θεωρούνται ανοιμοιγενή μεταξύ τους , δηλαδή η τιμή του A_1 δεν είναι συναρτησιακά ανάλογη του A_2 , κοκ.Οι αγορές (calls) και οι πωλήσεις (puts) είναι στον κόσμο της αγοράς τα πιο ουσιώδη και ενδεχόμενα περιουσιακά στοιχεία ανταλλαγής.Όπως έχει ήδη περιληπτικώς αναφερθεί βασιζόμαστε στις εξής παραδοχές στην αγορά που ανταλλάσσουμε:

- Δεν υπάρχουν πρόστιμα για short-sales
- Δεν φορολουγούνται οι συναλλαγές
- Συνεχής λειτουργία της αγοράς (πχ , χρηματιστηριακής , ενεργειακής , μεσιτικής , κτλ)
- Επιτόκιο μηδενικού ρίσκου

- Η τιμή του S είναι συνεχής στο χρόνο , δηλαδή δεν λαμβάνει διακριτές τιμές
- Δεν πληρώνονται μερίσματα
- Δικαιώματα εξάσκησης μέχρι το τέλος λήξης του δικαιώματος

Δεν έχουμε καμία εξάρτηση από το ρίσκο και τόσο το S όσο και το σ(S) βασίζονται σε παρελθοντικές προσεγγίσεις.Παρόλαυτα σε επακόλουθες χρήσεις του μοντέλου όπου δεν τηρήθηκαν κάποιες από τις παραπάνω παραδοχές βρέθηκε πως πάλι λειτουργεί καλά.Αυτό που πρότειναν οι Black-Scholes στα χρηματοοικονομικά μπορεί να συνοψισθεί ως εξής.Οι μέτοχοι σε μία εταιρία λαμβάνουν θέση αγοραστή ενός call δικαιώματος και των ομολογιούχων των πωλητών ενός put δικαιώματος.Αυτό φυσικά μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω σε συγχωνεύσεις , εξαγορές , επεκτάσεις , κτλ.Φυσικά το υπόδειγμα B&S βασίζεται σε κάποιες στατιστικές παραδοχές.

- Κίνηση Brown (με αριθμητική προσέγγιση)
- Γεωμετρική κίνηση Brown
- Διεργασία κατανομής Poisson

Αυτή που αξίζει να αναφέρουμε περισσότερο είναι η δεύτερη η λεγόμενη και GBM η οποία είναι μία στοχαστική διεργασία στην οποία ο λογάριθμος μίας τυχαίας μεταβλητής , εδώ του S ακολουθεί μία κίνηση Brown.Βέβαια δεν θεωρείται και το πλέον ρεαλιστικό εργαλείο ειδικά σε πραγματικό χρόνο λόγω της αστάθειας.

3.3 Σύνθετη μορφή του υποδείγματος Black-Scholes

Μέχρι στιγμής είδαμε τι γίνεται με την απλή μορφή του υποδείγματος χωρίς όμως να εμβαθύνουμε στη μορφή των εξισώσεων.Εδώ θα δώσουμε μία πιο αναλυτική εξήγηση και θα ασχοληθούμε πιο πολύ με τη λεγόμενη ισοτιμία call-put.Φυσικά όλα αυτά θα τηρήσουν τις αρχικές προδιαγραφές δηλαδή για αγορά – πώληση Ευρωπαικών δικαιωμάτων.

Στη γενική του μορφή ένα δικαίωμα αγοράς , η τιμή του δηλαδή δίνεται από τον ακόλουθο σύνθετο τύπο:

$$C = S_0 N\left(\frac{rT + \frac{v^2 T}{2} + \ln\frac{S_0}{K}}{v\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} N\left(\frac{rT - \frac{v^2 T}{2} + \ln\frac{S_0}{K}}{v\sqrt{T}}\right) \quad (1.1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι έχουμε δύο όρους , έναν προσθετικό για την αγορά και ένα αφαιρετικό κατά τον εκθετικό όρο.Συμβολίζουμε επομένως:

- S_0 = η αρχική τιμή της μετοχής η του έργου/επένδυσης

- N = η γνωστή συνάρτηση κατανομής η οποία είναι γωνστή και ως F(x) = P(X≤x) η οποία λαμβάνει τιμές : 0 ≤ N(x) ≤ 1
- r = το επιτόκιο , με βάση τις τρεις παραδοχές ελεύθερο ρίσκου
- K = η τιμή διάθεσης δηλαδή η προσυμφωνημένη τιμή
- T = ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (από δευτερόλεπτα μέχρι δεκαετίες)
- v = η αστάθεια του δικαιώματος / επένδυσης , συνήθως ετήσια

Η απόδοση της εξίσωσης χριεάζεται κάποιες παραδοχές ειδικά στο θέμα του ρίσκου.Βασική επίσης συνιστώση είναι η ολοκλήρωση με βάση το ολοκλήρωμα Ito.Βασική παραδοχή στο ρίσκο είναι η επιδίωξη της προφύλαξης από κάθε ρίσκο για κάθε επενδυτική απόφαση.Δηλαδή κάθε επενδυτής αποφεύγει αποφάσεις που συνεπάγονται ρίσκο σε αντίθεση με την ΚΠΑ.Αυτό δεν απέχει και πολύ βέβαια από την πραγματικότητα καθώς λίγοι είναι αυτοί που πέρνουν ρίσκο ειδικά για μεγάλες επενδύσεις.Αρχίζουμε επομένως με κάποιους βασικούς όρους.

Συνάρτηση κατανομής η οποία θέλουμε να είναι μικρότερη η ίση της πραγματικής τιμής b τότε ισχύει όπως ήδη έχουμε πει:

$$F(b) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

Προφανώς η μέγιστη τιμής της F(b) είναι το 1 και η ελάχιστη το 0.

Με f(x) συμβολίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η οποία για κανονική κατανομή για δεδομένα μ και σ^2 (μέση τιμή και τυπική απόκλιση) λαμβάνει την μορφή:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ με } -\infty < x < \infty$$

Συμβολίζουμε επίσης από τη στατιστική με $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$

Άρα λαμβάνουμε για τη συνάρτηση κατανομής:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

Και επομένης η προσδοκώμενη μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Επίσης θεωρούμε ότι η μεταβλητή X ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή.
Σαν τρέχουσα τιμή της επένδυσης θεωρούμε την τιμή της τώρα σε χρόνο t = 0 sec δηλαδή την S_0 .Όμως υπάρχει και ένα κόστος κατακράτησης η αντιστάθμισης για τον κάτοχο για χρόνο t το οποίο δίνεται από τη σχέση : e^{rt}
Άρα η τρέχουσα τιμή είναι κόστος αντιστάθμισης συν κόστος τη παρούσα χρονική στιγμή δηλαδή , $S_0 e^{rt}$
Εδώ μπορούμε να κάνουμε μία γενίκευση για περισσότερες από μία επενδύσεις όπως για ένα πακέτο μετοχών από περιουσιακά στοιχεία A.Εδώ επομένως η τρέχουσα τιμή που συμβολίζεται με C η C(A,0) γιατί αναφερόμαστε στο χρόνο t = 0 , δίνεται από το κόστος αντιστάθμισης που προφανώς εξαρτάται από χρόνο και επιτόκιο αλλά και από την τιμή της στο χρόνο 0 η γενικεύοντας τη μέση τιμή της δηλαδή την E[C(A,t)].
Εδώ επειδή μιλάμε για κανονική κατανομή αλλά και εξάρτηση από το χρόνο και το επιτόκιο θα έχουμε και την προσδοκώμενη μέση τιμή E να εξαρτάται από αυτά άρα και τη μέση τιμή , μ , και τη διακύμανση , σ , να εξαρτώνται από το r και t όπως επίσης και από την αστάθεια ,v .Δηλαδή:

$$\sigma = \sigma(v, r, t) = v^2 t$$

$$\mu = \mu(v, r, t) = (r - \frac{v^2}{2})t$$

Εδώ να αναφερθεί ότι η διακύμανση , σ , έχει τύπο που δίνεται στη γενική του μορφή:

$$\ln \frac{S_0}{S_1} = \sigma$$

Άρα για την αστάθεια σε χρόνο t έχουμε:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \ln \frac{S_{t-1} S_t}{S_0 S_{t-1}} = \ln \frac{S_{t-1}}{S_0} + \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = v^2(t-1) + v^2 = v^2 t$$

Επομένως αν εμείς θέλουμε να δούμε πότε η συνάρτηση κατανομής λαμβάνει τιμή για μία τιμή μετοχής/επένδυσης κάτω του α κοιτάζουμε την εξής σχέση:

$$F(a) = P(S_t \le a) = P(S_0 e^{x_t} \le a)$$

$$= P(x_t \le \ln\frac{a}{S_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{\ln\frac{a}{S_0}} e^{\frac{-(x_t-\mu)^2}{2\sigma}} dx$$

Έτσι βρίσκουμε για μία οποιαδήποτε τιμή x , για την πυκνότητα πιθανότητας f(x) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}\, x} e^{\frac{-(\ln\frac{x}{S_0}-\mu)^2}{2\sigma}}$$

Επομένως όπως έχουμε ήδη πει η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

Και αρχίσαμε την ολοκληρωση από την τιμή 0 γιατί δεν έχει νόημα αρνητικός χρόνος. Άρα με τα δεδομένα των παραπάνω αντικαθιστούμε και βρίσκουμε:

$$\mathrm{E}(x_t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}\, x} x e^{\frac{-(\ln\frac{x}{S_0}-\mu)^2}{2\sigma}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}\, x} \int_0^{\infty} x e^{\frac{-(\ln\frac{x}{S_0}-\mu)^2}{2\sigma}} dx$$

Στην στατιστική για κανονικές κατανομές χρησιμοποιούμε έναν συντελεστή z ο οποίος είναι συναρτήσει του x για δική μας μαθηματική διευκόλυνση.Συνήθως είναι της μορφής:

$$z = \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma}}$$

Εδώ όμως ακολουθούμε κανονική λογαριθμική κατανομή και επομένως θα λάβει την τιμή:

$$z = \frac{\ln\frac{x}{S_0} - \mu}{\sqrt{\sigma}}$$

Αυτό μας οδηγεί να βρούμε και τη σχέση:

$$dz = \frac{dx}{x\sqrt{\sigma}}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην προσδοκώμενη μέση τιμή βρίσκουμε:

$$E(x_t) = \frac{S_0 e^{\mu + \frac{\sigma}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\sqrt{\sigma})^2}{2}} dz$$

Εδώ μπρούμε να κάνουμε την εξής παραδοχή που θα μας διευκολύνει στους υπολογισμούς και να προσεγγίσουμε το x με $x = z - \sqrt{\sigma}$ και επομένως λαμβάνουμε:

$$\mathrm{E}(x_t) = \frac{S_0 e^{\mu + \frac{\sigma}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = S_0 e^{\mu + \frac{\sigma}{2}}$$

Και με τις αρχικές συνθήκες για τα μ και σ και για $x_t = S_0$ λαμβάνουμε:

$$E(S_t) = S_0 e^{rt}$$

Τώρα θα επιστρέψουμε στην αρχική σχέση (1.1).Γνωρίζουμε ότι η τιμή της αγοράς ενός δικαιώματος ισούται με τη διαφορά της τρέχουσας τιμής μείον της τιμής διαθέσεως , δηλαδή:

$$S_T - K$$

Δηλαδή το κέρδος που θα βγάλουμε ως επενδυτές το οποίο όμως στη χειρότερη των περιπτώσεων θα είναι μηδενικό γιατί τότε $S_T = K$.

Άρα η τιμή αγοράς δίνεται από τη σχέση:

$$C(S,T) = \max(S_T - K, 0) \text{ s}$$

Άρα για χρόνο t = 0 και για $S_0 = E[C(S,T)]$ έχουμε:

$$C(S,0) = e^{-rT} E[C(S,T)] = e^{-rT} E[\max(S_T - K, 0)] =$$

$$e^{-rT} \int_K^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T v x}} (x - K) e^{\frac{-(\ln \frac{x}{S_0} - \mu)^2}{2v^2 T}} dx =$$

$$e^{-rT} \int_K^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T v x}} x e^{\frac{-(\ln \frac{x}{S_0} - \mu)^2}{2v^2 T}} dx - e^{-rT} \int_K^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T v x}} K e^{\frac{-(\ln \frac{x}{S_0} - \mu)^2}{2v^2 T}} dx$$

και με την αντικατάσταση:

$$\mathrm{A} = \frac{\ln \frac{K}{S_0} - \mu - v^2 T}{v\sqrt{T}}$$

Άρα βγάζουμε τη συνάρτηση ολοκλήρωμα για το πρώτο μέρος:

$$S_0 N\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT + \frac{v^2 T}{2}}{v\sqrt{T}}\right)$$

Ενώ για το δεύτερο μέρος βγάζουμε:

$$-K e^{-rT} N\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT - \frac{v^2 T}{2}}{v\sqrt{T}}\right)$$

Επομένως βρήκαμε για και για τα δύο μέλη της εξίσωσης ότι είναι συνάρτηση του:

K , r , v , T , S_0

Βρήκαμε επομένως την αρχική σχέση (1.1) και την επαληθεύσαμε με απλές παραδοχές οι οποίες ήταν απαραίτητες όπως της κανονικής κατανομής και φυσικά απλής στατιστικής.Για την απόδειξη μέ χρήση της ολοκλήρωσης του Ito θα ασχοληθούμε αργότερα όπου και θα εξάγουμε κάποια βασικά συμπεράσματα.Να επισημανθεί ότι το τελευταίο απαιτεί κάποιες στοιχειώδης γνώσεις στοχαστικής ανάλυσης οι οποίες όμως θα αναλυθούν.Με αντίστροφη σχέση και παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η σχέση για την πώληση , Put.

3.4 Βασική ισοτιμία Call – Put

Ασχολούμασθε με επενδύσεις οι οποίες στην πιο απλή μορφή τους μπορεί να αφορούν την αγορά μιας μετοχής και στην πιο γενική ενός χαρτοφυλακίου , την επένδυση σε αυτό.Εμείς δηλαδή θα ασχληθούμε με την διαιτησία του χαρτοφυλακίου το οποίο μας προσφέρει δικαίωμα κέρδους από μηδέν μέχρι ένα προκαθορισμένο όριο το οποίο όμως δεν είναι φραγμένο.Εδώ όμως πρέπει να γίνει μία αναφορά στο τι εννοούμαι στις επενδύσεις ως διαιτησία η γνωστό ως **εξισορροπητική κερδοσκοπία**.Εξισορροπητική κερδοσκοπία η arbitrage είναι η ταυτόχρονοη αγορά και πώληση της ίδιας επένδυσης (call & put) σε δύο διαφορετικές αγορές με δύο διαφορετικές τιμές , στρατηγική η οποία μπορεί να οδηγήσει σε κέρδη χωρίς την ανάληψη κινδύνου.Ακριβώς αυτό που μας ενδιαφέρει η μείωση και εξάλειψη του ρίσκου.Δηλαδή έστω ότι αγοράζουμε μία ουγγιά χρυσό στη χρηματιστήριο του Λονδίνου (LSE) για 1000 ευρώ και η ίδια ουγγιά μπορούμε να την αγοράσουμε από το χρηματιστήριο της Φρανκφούρτης (FWB) για 900 ευρώ.Εμείς ασκούμαι το δικαίωμα call στην Φρανκφούρτη και το ασκούμαι ταυτόχρονα ως put στο Λονδίνο.Αυτό είναι μία ισοτιμία call&put και ταυτόχρονα εξισορροπητική κερδοσκοπία.Τώρα εύλογα κάποιος θα αναρρωτηθεί ποια είναι η διαφορά στην κερδοσκοπία στα δικαιώματα από την απλή κερδοσκοπία.Η διαφορά έγκειται στο ότι στην πρώτη περίπτωση δεν έχουμε ανάληψη ρίσκου ενώ στη δεύτερη έχουμε τη λεγόμενη κατεύθυνση πρόβλεψης.Άρα αποφεύγουμε στρατηγικές κινδύνου όπως των ανοικτών πωλήσεων και του θεμελιωδούς κινδνύνου.Άρα ένα χαρτοφυλάκιο λέγεται εξισορροπητικής κερδοσκοπίας αν σήμερα το έτος t = 0 έχει μηδενική αξία , δηλαδή

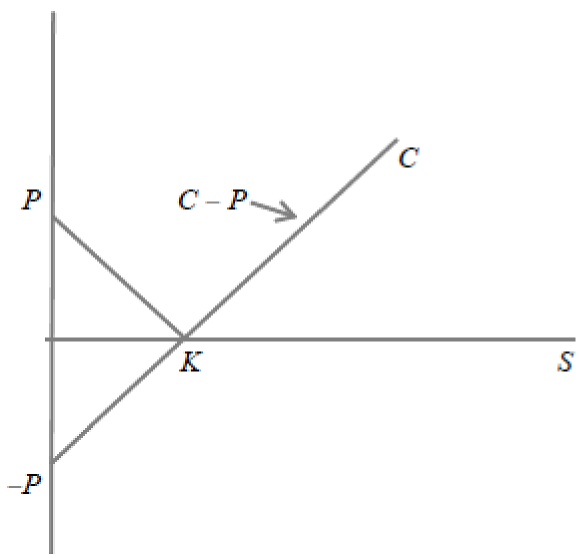
$$S_0 = K$$

και στο μέλλον δηλαδή για t = T θα έχει θετική τιμή.Με απλά λόγια άμα η τιμή παραμείνει στο S_0 θα έχουμε μηδενικό κέρδος το οποίο κερδοσκοπικά σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο έχει προσθετική αξία ίση με μηδέν.Αυτή ακριβώς η συνιστώσα δεν πρέπει να συγχέεται με το δικαίωμα το οποίο ναι μεν δίνει κέρδος αλλά δεν περιλαμβάνει ρίσκο.Στις επενδύσεις με δικαιώματα δεν υπάρχει η έννοια της κερδοσκοπίας παρά μόνο η διαιτησία του δηλαδή αν το χαρτοφυλάκιο μετοχών έχει σήμερα τιμή X(T) θα έχει και σε χρόνο t < T την τιμή X(T).Άρα όταν ο επενδυτής θα επενδύσει σε αγορά A(T) αξίας μετοχών A και πώληση B(T) μετοχών αξίας B , θα έχουμε για τη χρονική στιγμή t < T την ίδια διαφορά κέρδους δηλαδή A(T) – B(T).

Εδώ να αναλυθεί συντόμως ότι το χαρτοφυλάκιο A μετοχών A είναι ένα μακρύ η αυξητικό χαρτοφυλάκιο , δηλαδή αναμένεται αύξηση της τιμής των μετοχών του στο διάστημα T , γιαυτό και ασκούμαι το δικαιώμα αγοράς , call.Αντίθετα το χαρτοφυλάκιο B είναι αυτό που λέμε κοντό η βραχύ χαρτοφυλάκιο που πιστεύουμε ότι θα πέσει η αξία του τη χρονική στιγμή T , γιαυτό και ασκούμαι στο χρόνο t = 0 το δικαίωμα της πώλησης δηλαδή put.Αυτή η call-put ισοτιμία/αναλογία είναι σταθερή σε κάθε χρονική στιγμή μέχρι να λήξει το δικαίωμα.Κάτι που μπορούμε να συμπληρώσουμε σε όσα έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής είναι το γεγονός ότι ένα πραγματικό δικαίωμα ανεξαρτήτου της μεθόδου που χρησιμοποιείται μπορεί να αποδοθεί σε δύο μορφές.Ως κέρδος όταν το εξασκούν οι μέτοχοι υπό μορφή αγοράς (call) και ως χρέος όταν πάλι το εξασκεί η εταιρία υπό μορφή πώλησης στους ομολογιούχους της , πιστωτές (put).Το λογικό είναι ότι στην πρώτη περίπτωση θα λάβουμε το ποσό $A_T - K$ όπου με A_{T} υποδηλώνουμε τα περιουσιακά στοιχεία της εταιρίας , όπως για παράδειγμα τα καθαρά κέρδη η τα αποθέματα προς πώληση.Αυτή η ποσότητα θέλουμε να την εξασκήσουμε ως δικαίωμα δηλαδή να είναι μεγαλύτερη η ίση του μηδενός άρα σαν μέτοχοι θέλουμε να λαμβάνουμε την ποσότητα:

$$\max(A_T - K, 0)$$

Τώρα οι ομολογιούχοι από τους οποίους δανείστηκε η εταιρία θα λάβουν είτε το προσυμφωνημένο K στη λήξη του δικαιώματος η πριν ή το ελάχιστο αν το ενεργητικό μας η A_{T} είναι μικρότερο του K που σημαίνει ουσιαστικά ότι χρεωκοπήσαμε.Στην πρώτη περίπτωση τη διαφορά την ονομάζουμε και καθαρή θέση της εταιρίας.Έτσι τη χρονική στιγμή t = 0 έχουμε τη λεγόμενη ισοτιμία για την οποία μιλήσαμε.Αυτό φαίνεται διαγραμματικά παρακάτω.



Γενικά ένα χαρτοφυλάκιο X μπορεί να έχει τις εξής δύο τιμές:

- K αν έχει τιμή $S_t \leq K$ δηλαδή συμφωνήσαμε για τιμή διάθεσης K και κερδίσαμε τη χρονική στιγμή t τη διαφορά K – S_t.
- S_T αν για τη χρονική στιγμή λήξης του δικαιώματος ισχύει $K \leq S_T$ δηλαδή μηδενικό κέρδος.

Αυτά για το πρώτο χαρτοφυλάκιο που είναι το χαρτοφυλάκιο πώλησης , δηλαδή το put.
Αυτά για το πρώτο μέρος της ισοτιμίας , δηλαδή της πώλησης , τώρα θα δούμε και το δεύτερο μέρος της ισοτιμίας , δηλαδή της αγοράς.
Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο Υ , εδώ θεωρούμε την ταυτόχρονη ύπαρξη στο χαρτοφυλάκιο και ομολόγων σταθερής αξίας και μηδενικού κινδύνου με τιμή συνολικά K.Εδώ ισχύει:

- K αν έχει τιμή $S_t \leq K$ γιατί θα έχει μηδενική τιμή το κέρδος αφού αγοράζουμε κάτι με μικρότερη τιμή τη χρονική στιγμή t και μας μένουν μόνο τα σταθερά ομόλογα.
- S_T αν έχουν μόνο αν έχουμε $S_T \geq K$ καθώς τότε έχουμε το κέρδος $S_T - K$ και το κέρδος από τα ομόλογα K δηλαδή το αρχικό σύνολο.

Έτσι σε κάθε χρονική στιγμή πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$C(t) + KB(t,T) = P(t) + S(t) \quad (1.2)$$

Από την εξίσωση (1.1) βρίσκουμε:

$$C(0) = S_0 N\left(\frac{rT + \frac{v^2 T}{2} + \ln\frac{S_0}{K}}{v\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} N\left(\frac{rT - \frac{v^2 T}{2} + \ln\frac{S_0}{K}}{v\sqrt{T}}\right)$$

Άρα αντικαθιστώντας στη σχέση (1.2) βρίσκουμε :

$$P(0) = -S_0 N\left(-\frac{rT + \frac{v^2 T}{2} + \ln\frac{S_0}{K}}{v\sqrt{T}}\right) + Ke^{-rT0} N\left(-\frac{rT - \frac{v^2 T}{2} + \ln\frac{S_0}{K}}{v\sqrt{T}}\right) \quad (1.3)$$

Τώρα θα ασχοληθούμε με έναν ειδικός τύπο δικαιωμάτων αυτών του φραγμού η εμποδίου.Βασικό συστατικό τους στοιχείο είναι ότι πετυχαίνουν μία συγκεκριμένη τιμή , την οποία την καθορίζει ο επενδυτής πριν τη λήξη του δικαιώματος.
Ένα από αυτά είναι το δικαίωμα knock-out η διαγραφής το οποίο θέτει ένα όριο η καπέλο το οποίο αν το φτάσει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , το δικαίωμα λήγει και ο επενδυτής βγάζει μηδενικό κέρδος.Για παράδειγμα μία μετοχή μπορεί να ασκήσουμε το δικαίωμα να την αγοράσουμε στα 100 € (= K) και έχει τιμή μετοχής (S) ίση με 90 € προφανώς μικρότερη από την πρώτη τη χρονική στιγμή t = 0 που κλείνουμε τη συμφωνία ως επενδυτές.Μπορούμε να την καθιστήσουμε ως knock-out δικαίωμα αν

βάλουμε καπέλο τα 150 € δηλαδή άμα το S_t ξεπεράσει τα 150 € το δικαίωμα λήγει και αν το εξασκήσουμε κερδίζουμε 60 € αλλιώς μηδενικό κέρδος.Υπάρχουν διάφορες μορφές τύπων knock-out όπως η down-and-out ή η up-and-out.

Ένα άλλο από αυτά τα δικαιώματα είναι το knock-in το οποίο μας λέει ότι μας δίνει κέρδος μόνο όταν ξεπεραστεί το καπέλο η όριο.Για παράδειγμα έχουμε τιμή διάθεσης K = 100 € και έχει τιμή μετοχής S = 90 € θα βάλουμε πλαφόν τα 150 € που θα τα πιάσει στον 1^{o} χρόνο και σημαίνει ότι θα ασκήσουμε το δικαίωμα μετά από t = 1 χρόνος.Αυτό το πλαφόν η καπέλο το λέμε φράγμα και το συμβολίζουμε με B.

Άλλη κατηγορία είναι η down-and-out (dao) όπου έχουμε την επιλογή του δικαιώματος $\max(S_T - K, 0)$ για κάθε t = T εκτός και αν για t < T το S_T πέσει κάτω από το φράγμα B.Εδώ έστω ότι έχουμε K = 100 € και S_0 = 90 € αν το B είναι 95 € σημαίνε πως είναι μεγαλύτερη του αρχικού S και σημαίνει πως «χάνουμε» 5 € στο χρόνο λόγω φράγματος.Άρα δε μας συμφέρει να βάλουμε φράγμα για το δικαίωμα άνω της αρχικής τιμής S_0.

Υπάρχει τέλος και η down-and-in δικαίωμα αγοράς επιλογή που σημαίνει ότι ενεργοποιείται το δικαίωμα αγοράς μόνο όταν το S_t πέσει κάτω από το προκαθορισμένο φράγμα B για $t < T$ αλλιώς λήγει και μένει μηδενικό κέρδος.Για παράδειγμα έστω K = 100 € και $S_0 = 90$ € και θέτω B = 95 € άρα άμα πέσει το S κάτω από τα 95 € αγοράζουμε αλλιώς λήγει το δικαίωμα.

Οι παραπάνω μορφές αθροίζονται και μας δίνουν το δικαίωμα αγοράς C_V που σημαίνει ότι έχουμε:

$$C_I + C_O = C_V$$

Όπου με I συμβολίζω το down-and-in και με O το down-and-out.

Άρα βασικό μας μέλημα είναι ο προσδιορισμός του φράγματος κάτι που επιπλέκει το υπόδειγμα Black-Scholes.Το φράγμα μπορεί να θεωρηθεί αυτόνομο ως ιδίο δικαίωμα και επομένως να ικανοποιεί τις εξισώσεις του Black-Scholes δηλαδή τις (1.1) και (1.3) όπου όμως για το χρόνο t που λήγει το δικαίωμα πρέπει η τιμή του δικαιώματος του φράγματος να πάρει τιμή μηδέν η $C(B, t) = 0$.

Μαθηματικά αυτή η τροποποίηση οδηγεί στη γνωστή εξίσωση μεταφοράς της θερμότητας σε μονοδιάστατη ροή με βασική παραδοχή ότι η τιμή του παραγώγου η μετοχής εκφράζεται από μία συγκεκριμένη εξίσωση.Αυτή η εξίσωση μπορεί να είναι

γραμμική , εκθετική , πολυωνιμική , ημιτονική , κοκ.Θα μπορούσαμε να ερευνήσουμε πως επιδρά η μεταβολή του S ακολουθώντας μία εξίσωση.
Έτσι αρχικά έχουμε την εξής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S,t) + rS\frac{dC}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) = rC \quad (1.4)$$

Με αρχική συνθήκη $C(S,T) = \max(S - K, 0)$
Βασική μας επιδίωξη είναι να την μορφοποιήσουμε σε μία γνωστή μας μερική διαφορική εξίσωση η οποία να επιλύνεται με κάποιον γνωστό τρόπο προγραμματισμού.

3.5 Υπόθεση εκθετική S

Υποθέτουμε ότι ισχύει: $S = Be^x$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{dC}{dS}\frac{dS}{dx} = \frac{dC}{dS}\frac{d(Be^x)}{dx} = \frac{dC}{dS}Be^x = S\frac{dC}{dS}$$

Άρα βρίσκουμε και τη δεύτερη παράγωγο που χρειαζόμαστε για την εξίσωση (1.4) :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{d}{dx}\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}(S\frac{dC}{dS}) = \frac{dS}{dx}\frac{dC}{dS} + S\frac{d}{dx}(\frac{dC}{dS}) =$$

$$S\frac{dC}{dS} + S\frac{d^2C}{dSdx} = S\frac{dC}{dS} + S^2\frac{d^2C}{dS}$$

Και επομένως η (1.4) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{dC}{dt} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{dC}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = rC$$

Επίσης ισχύουν οι εξής συνοριακές συνθήκες:

$$C(x,T) = \max(S - K, 0) = \max(Be^x - K, 0)$$

$$C(0,t) = 0$$

Όπου η πρώτη σ.σ. αναφέρεται στην ιδιότητα του δικαιώματος αγοράς και η τελευταία στο δικαίωμα του φραγμού που είναι μηδενικό για B = 0.

Επόμενο θέμα είναι ο χρόνος που μπορεί να είναι μία συνάρτηση που σχετίζεται με τη διακύμανση δηλαδή το σ και το συνολικό χρόνο λήξης του δικαιώματος Τ.Στην υπόθεση του μοντέλου μας θέτουμε:

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

Έτσι αλλάζει και η δεύτερη σ.σ. σε $C(0,\tau) = 0$

Τελικώς φθάνουμε στην εξής εξίσωση:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Με τις εξής σ.σ.

$$u(x,0) = \max(e^{x-ax} - \frac{K}{B}e^{-ax}, 0)$$

$$u(0,\tau) = 0$$

όπου

$$u(x,\tau) = C \,/\, (Be^{ax+\beta\tau})$$

και με τις συνοριακές συνθήκες να λαμβάνουν τη μορφή:

$$u(x,0) = \{\max(e^{x-ax} - \frac{K}{B}e^{-ax}, 0), x > 0, -\max(e^{ax-x} - \frac{K}{B}e^{ax}, 0), x < 0\}$$

Άρα μπορώ να θέσω μία συνάρτηση

$U(x) = e^{x-ax} - \frac{K}{B}e^{ax}$ και της $U(-x)$

Άρα η σ.σ. θα πάρει τη μορφή

$$u(x,0) = U(x) - U(-x)$$

Μπορούμε επομένως να τρέξουμε σε κώδικα τα παραπάνω και να βρούμε σε ποια χρονική στιγμή μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα , call η μέχρι ποια χρονική στιγμή t.

Και πάντα θέλουμε τη μετατροπή της στη μονοδιάστατη εξίσωση μετάδοσης της θερμότητας για την επιλυσή της.Ας δούμε τι γίνεται με την περίπτωση του put.

Εδώ τώρα θα πρέπει ναι ισχύει:

$$P(S,T) = \max(K - S, 0)$$

Ενώ για τις συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να ισύει:

$$P(0,t) = K e^{-r(T-t)}$$

$$P(\infty,t) = 0$$

Ο κώδικα που το υλοποιεί αυτό είναι ο παρακάτω:

```
K=100;
B=90;
x=linspace(0,0.08,101);
S=B*exp(x);
T=12;
tt=0:0.01:1;
%time=12/100=2 days%
m=0;
xl=0;
xr=1;
S=B*exp(x);
%free-risk interest%
r=0.1;
%standard deviation of S%
sd=std(S);
%parametropiisi%
a=-(r/sd)+0.5;
b=-(r^2)/(sd^2)-(1/4)-r/sd;
t1=(T-tt)*2/sd;
t=zeros(1,101);
for i=101:-1:1
    t(102-i)=t1(i);
end
%U(x)%
U=exp(x-a*x)-(K/B)*exp(-a*x);
%U(-x)%
Uminus=exp(a*x-x)-(K/B)*exp(a*x);
%boundary conditions%
if U > 0
    xl=U-Uminus;
    xr=0;
else
   xl=0;
   xr=0;
end
ul=(K-B)*exp(-(a*x(1)+b*t(1)));
 ur=0;
% solves partial diff equation and gives u%
```

```
sol=pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t);
u=sol;
%strike price%
for i=1:length(S)
    KP(i)=K;
end
%Call price%
C=B*exp(a*x+b*t)*u;
CP=C+S;
plot(tt,CP,'b');
xlabel 't'
ylabel 'C,P,K'
hold on;
plot(tt,KP,'r');
legend ('call/s price','strike price');
grid on;
title 'Call parity - 1 year - ?=100,So=90,K=90'
```

```
function [c,f,s]=pdex1pde(x,t,u,DuDx)
c=1;
f=DuDx;
s=0;

function u0 = pdex1ic(x)
u0=0;

function [pl,ql,pr,qr]=pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl=ul;
ql=0;
pr=ur;
qr=1;
```

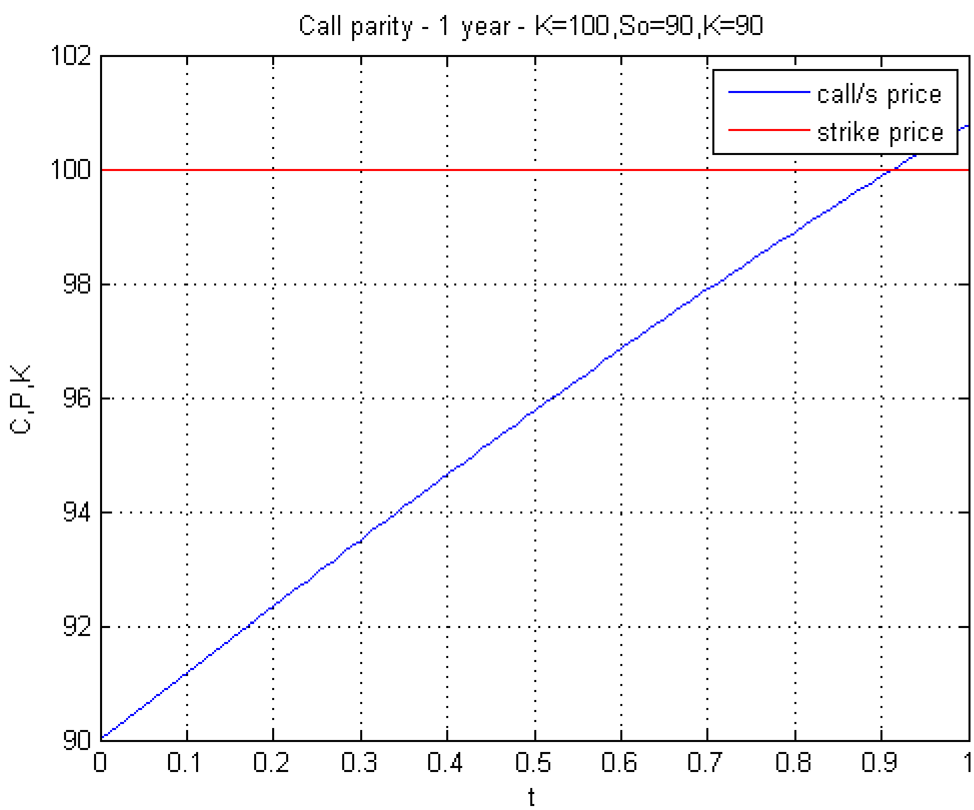
Για τον παραπάνω κώδικα χρησιμοποιήσαμε περίοδο ενός χρόνου η T = 12 μήνες και υποδιαιρέσαμε στα αντίστοιχα χρονικά διαστήμα.Οι συναρτήσει pde είναι εγγενείς συναρτήσεις της Matlab και υπολογίζουν τους όρους μεταφοράς της μερικής διαφορικής εξίσωσης με αρχικοποίηση συνθηκών.Εδώ μπορούμε να δοκιμάσουμε διαφορετικά T , διαφορετικά K με ίδιο S , διαφορετικό S με ίδιο K για αρχικοποίηση καθώς και διαφορετικά επιτόκια , r , και φυσικά εν τέλει διαφορετικό φράγμα B.Βέβαια για τη μεταβλητή x ουσιαστικά υπολογίζουμε μία τιμή που να ικανοποιεί και τη συνθήκη:

$$x < \ln\left(\frac{K}{B}\right)$$

και αυτό διότι μία αρχική τιμή της S που θα ξεπερνάει το φράγμα θα μας βγάλει άχρηστα αποτελέσματα και όπως αναλύσαμε και στη θεωρία αυτό που δε θέλουμε είναι

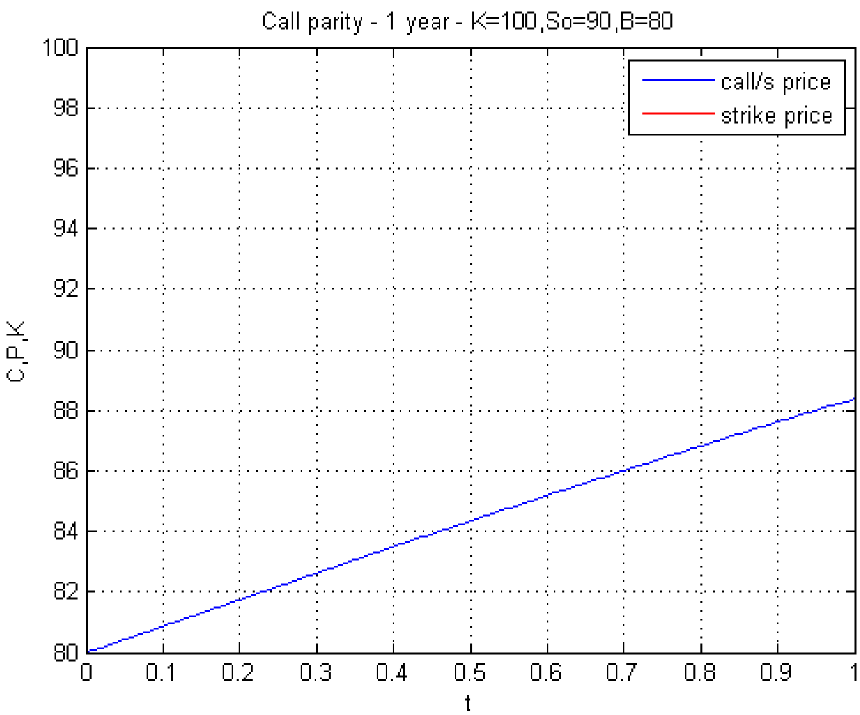
να ξεπεράσει το φράγμα , B.Και να επισημανθεί ότι από τη στιγμή που επιλέξαμε η τιμή της S , τρέχουσα τιμή να είναι συναρτήσει του φράγματος και εκθετικά άρα θα πέρνει μεγαλύτερη τιμή της B.Εδώ έγκειται και η σημασία των προηγούμενων θεωρημάτων δεν έχει νόημα να κοιτάξουμε περίπτωση σε call-put ισοτιμία για τρέχουσα τιμή μικρότερης του φράγματος , τότε αναγκαστικά διακόπτουμε δηλαδή ασκούμαι οριακά το δικαιώμα για B η πριν φθάσει την τιμή δηλαδή πριν τη λήξη του δικαιώματος.
Επομένως:

Για K = 100 € και S_0 = 90 € με φράγμα B = 90 €



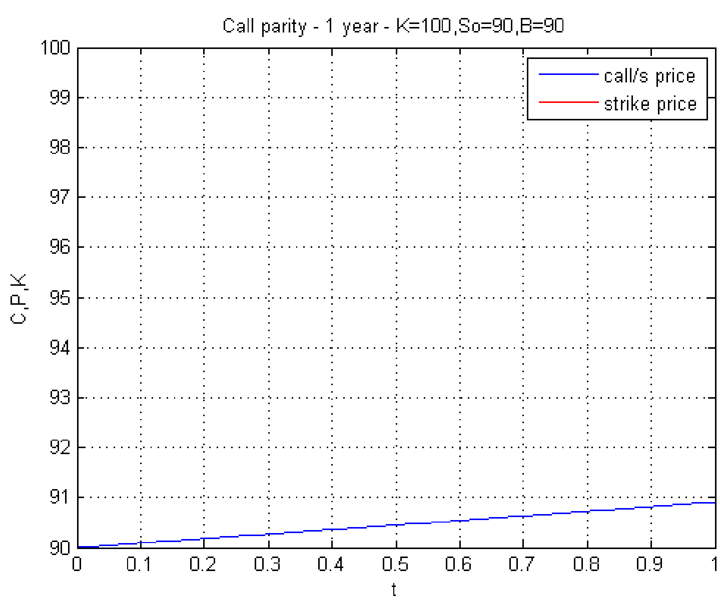
Άρα βρίσκουμε ότι κερδίζουμε μέχρι τη χρονική στιγμή t = 0.9 που αντιστοιχεί περίπου σε 10 μήνες από το έτος εκεί πρέπει να διακόψουμε το δικαιωμά μας ειδάλλως έχουμε από εκεί και πέρα μηδενικό κέρδος.Η πιο απλά για $t < 0.9$ μας συμφέρει να εξασκούμε το δικαίωμά μας.Το καλύτερο είναι να αγοράσουμε τη χρονική στιγμή μηδέν και αυτό γιατί το S συνεχώς αυξάνεται ως εκθετική κατανομή.

Για K = 100 € και S_0 = 90 € με φράγμα B = 80 €



Εδώ τώρα παρατηρούμε ότι με μικρότερο φράγμα κερδίζουμε περισσότερα και μέχρι να λήξει το δικαιωμά μας έχουμε κέρδη κάτι που θεωρητικά θα συνεχιζόταν αν είχαμε συμφωνήσει για 2 χρόνια η και 3 αντί για 12 μήνες.

Για K = 100 € και S_0 = 90 € με φράγμα B = 80 €

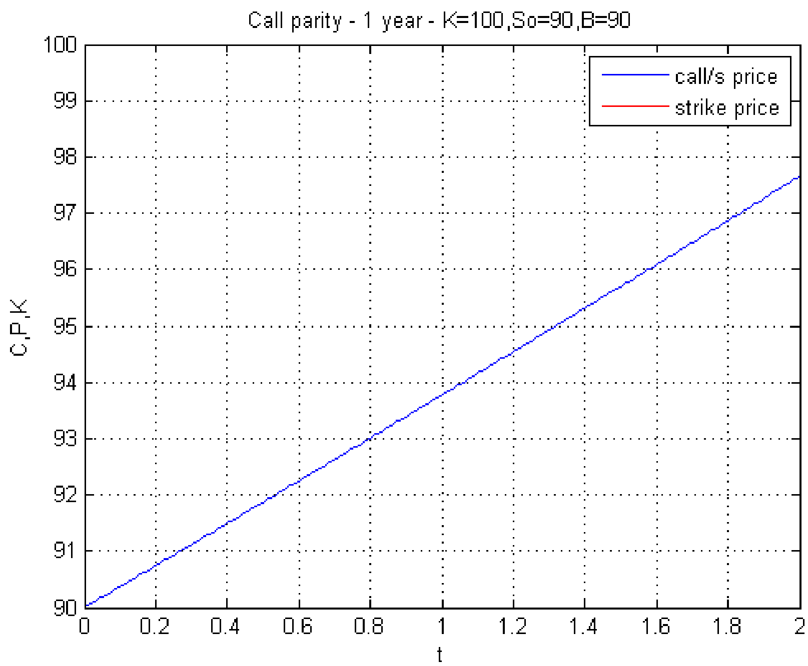


Εδώ η διαφορά έγκειται ότι το S αυξάνεται με πολύ μικρότερο ρυθμό ίσο με 6.7 % λιγότερο λόγω του :

$$\frac{e^{0.08} - e^{0.01}}{e^{0.08}} = 6.4\%$$

Εδώ με μικρότερη αύξηση του S κερδίζουμε με τον ίδιο τρόπο που θα κερδίζαμε αν μειώναμε το φράγμα.Ας δούμε και την περίπτωση αύξησης του χρόνο του δικαιώματος για λήξη του.

Για K = 100 € και S_0 = 90 € με φράγμα B = 80 €



Εδώ βλέπουμε ότι σε σχέση με το αρχικό διάγραμμα για τα ίδια μεγέθη κερδίζουμε πάλι ως προς το χρόνο άσκησης του δικαιώματος και για χρόνο ίσο με t = 1 η 12 μήνες έχουμε πολύ περισσότερα κέρδη ενώ στην πρώτη περίπτωση μηδενικά.

Μια μορφή που δίνει την τιμή του S στο χρόνο συναρτήσει μίας μεταβλητής x μπορεί να είναι και της μορφής 1/x δηλαδή να αυξάνεται για μικρά x και να μειώνεται για μεγάλα έτσι εκεί θα έχουμε πάλι την ίδια διαδικασία πάλι τις παρόμοιες οριακές και συνοριακές συνθήκες αλλά θα βρίσκαμε ένα βέλτιστο σημείο , ένα t δηλαδή με το καλύτερο call-put.

Στη γενική της μορφή η εξίσωση – υπόδειγμα Black-Scholes έχει τη μορφή:

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{df}{dS} rS = rf$$

Να επισημανθεί ότι οι περισσότερες αναλύσεις λαμβάνουν αυτές τις παραδοχές του υποδείγματος και αναφέρονται σε πραγματικά δικαιώματα Ευρώπης.Εδώ συμβολίζουμε τις αξίες οι τιμές της αγοράς (call) και πώλησης (put) τις οποίες αναπαριστούμε με V (V_C / V_P).

Έχουμε ότι ισχύει:

$$V(S,t) = K u(x,\tau)$$

$$u(x,\tau) = e^{-\gamma x-(\beta^2+l)\tau} v(x,\tau)$$

Όπου με γ , β , κ , l συμβολίζουμε :

$$\kappa = \frac{r-\delta}{\sigma^2/2}$$

$$l = \frac{\delta}{\sigma^2/2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\kappa - 1)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\kappa + 1) = \gamma + 1$$

Και με δ συμβολίζουμε το επιτόκιο ανατοκισμού και ν(x,τ) είναι μία ενδιάμεση συνάρτηση μετατροπής για εξίσωση θερμότητας.Η εξίσωση μετάδοσης θερμότητας μπορεί συνοπτικά να απεικονισθεί:

$$u_\tau = u_{xx}$$

Για κάθε θετικό χρόνο και πραγματική τιμή του x.

Με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης μία προσεγγιστική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από τη σχέση:

$$G(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}, \tau > 0, x \in \mathbb{R}$$

Και φυσικά οι οριακές συνθήκες οι οποίες δίνονται από τη σχέση:

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,\tau) u_o(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} u_o(\xi) d\xi$$

$$u(x,0) = u_0$$

Η τελευταία οριακή συνθήκη λαμβάνει τη μορφή:

$$u_C(x,0) = \max(e^{\beta x} - e^{\gamma x}, 0)$$
$$u_P(x,0) = \max(e^{\gamma x} - e^{\beta x}, 0)$$
$$u_c(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\pi-\xi)^2}{4\tau}} (e^{\beta x} - e^{\gamma x}) d\xi = I_\beta - I_\gamma$$

Ενώ οι δύο πρώτες ο.σ. είναι απλές η Τρίτη επιλύνεται με βάση το γενικό ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = e^{\alpha x + \alpha^2 \tau} \int_{-\infty}^{\frac{x+2\tau\alpha}{\sqrt{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta$$

$$\eta = \frac{x + 2\tau\alpha - \xi}{\sqrt{2\pi}}$$

Άρα συμβολίζουμε με $\Phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\eta^2/2} d\eta$

Έτσι με συνεχείς αντικαταστάσεις λαμβάνουμε για την τιμή των call και put :

$$V_C(S,t) = Se^{-\delta(\mathrm{T}-t)}\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$
$$V_P(S,t) = -Se^{-\delta(\mathrm{T}-t)}\Phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$$

όπου τέλος με d_1 και d_2 συμβολίζουμε τα μεγέθη:

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)(\mathrm{T} - t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T} - t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(\mathrm{T} - t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T} - t}}$$

Και εκμεταλλευόμενοι τέλος τις ιδιότητες :

$$\Phi(-\zeta) = 1 - \Phi(\zeta)$$

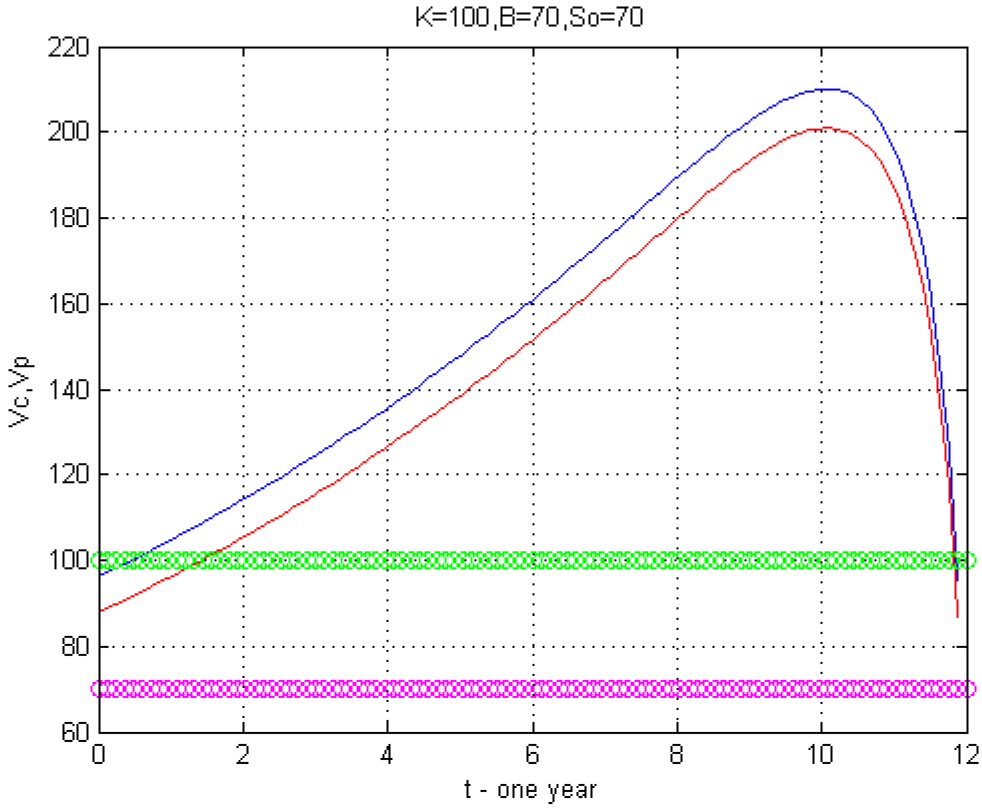
Μπορούμε να παραστήσουμε τα παραπάνω σε έναν πολύ σύντομο κώδικα στη Matlab:

```
%compound interest <r%
dd=0.08;
%12 months%
```

```
T=12;
%t,x->S%
t=linspace(0,12,101);
x=linspace(0,0.08,101);
%Strike price%
K=100;
%free-risk interest%
r=0.1;
%Bound/Fragma%
B=70;
%Trehouse timi%
S=B*exp(x);
%Tipiki apoklisi tou S%
sd=std(S);
for i=1:length(S)
    d1(i)=(log10(S(i)/K)+(r-dd+0.5*(sd^2)))*(T-t(i))/(sd*sqrt(T-t(i)));
    d2(i)=(log10(S(i)/K)+(r-dd-0.5*(sd^2)))*(T-t(i))/(sd*sqrt(T-t(i)));
end
f=@(h) exp(-(h.^2)/2);
for i=1:length(S)
    fd1(i)=integral(f,-Inf,d1(i));
    fd2(i)=integral(f,-Inf,d2(i));
    fd3(i)=1-fd1(i);
    fd4(i)=1-fd2(i);
end
for i=1:length(S)
    Vc(i)=S(i)*exp(-dd*(T-t(i)))*fd1(i)-K*exp(-r*(T-t(i)))*fd2(i);
    Vp(i)=-S(i)*exp(-dd*(T-t(i)))*fd3(i)+K*exp(-r*(T-t(i)))*fd4(i);
end
plot(t,Vc,'b');
hold on;
plot(t,Vp,'r');
hold on;
plot(t,K,'go');
hold on;
plot(t,B,'mo');
grid on;
xlabel 't - one year'
ylabel 'Vc,Vp'
title 'K=100,B=100'
```

Έτσι τώρα βλέπουμε πραγματικά τι γίνεται στην ισοτιμία Call – Put και όχι μόνο για την Call όπως αρχικά βρήκαμε.

Για K = 100 € και S_0 = 70 € με φράγμα B = 100 €

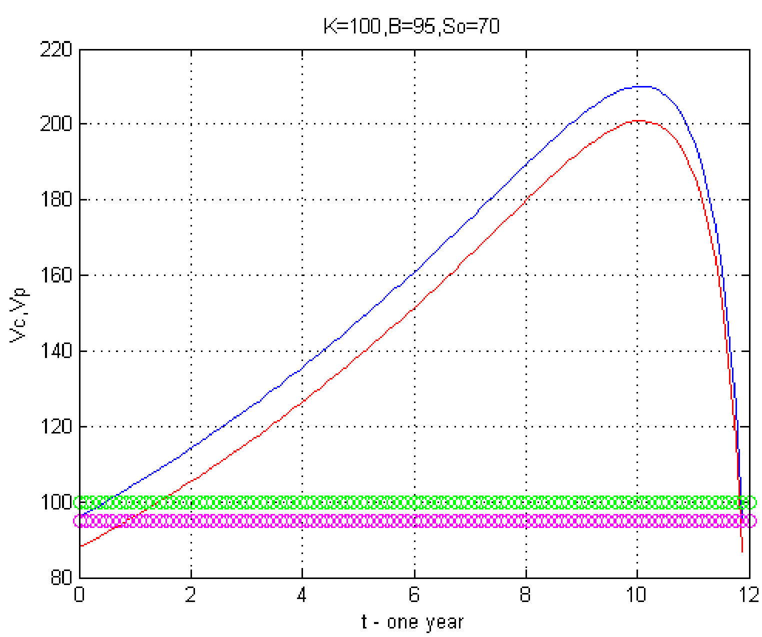


Το παραπάνω διάγραμμα μας λέει ότι όταν έχουμε K = 100 € και κάτω φράγμα B =70 €.Εδώ μπορεί να πεί κάποιος ότι συμφωνήσαμε για αγορά με K = 100 € και θέλουμε η τιμή του χαρτοφυλακίου των επενδύσεων να ξεπεράσει το 100.Όπως βλέπουμε από το σχήμα έχουμε κέρδος θετικό μόνο για τον 1^{ο} μήνα (για την ακρίβεια από την 5^{η} μέρα) αγοράζοντας , από τον 1^{ο} μήνα (45 ημέρες) πουλώντας και αγοράζοντας , ένα μίγμα αξιοποίησης του χαρτοφυλακίου και αυτό μέχρι τον 11^{ο} μήνα και 25 μέρες για την αγορά και για την πώληση ασυμπτωτικά.Στο διάστημα [0 – 1,5] μήνες θα έχουμε μηδενικό κέρδος άμα ασκήσουμε το δικαίωμα και στο διάστημα [11,8 -12] μήνες πάλι το ίδιο.Στους 12 μήνες ούτως η άλλως λήγει το δικαίωμα call – put.Εδώ έχουμε βάλει και ένα φράγμα B = 70 €.Ας δούμε αναλυτικά τι σημαίνει αυτό.Πρώτα όμως να ανακεφαλαιώσουμε περιληπτικά τις τέσσερις βασικές κατηγορίες φραγμού.Knock-out σημαίνει ότι ξεπερνάμε το καπέλο – φραγμό B και λήγει το δικαίωμα , δηλαδή αυτό μας συμφέρει.Knock-in το ακριβώς αντίθετο. Μετά είναι το το down-and-out που σημαίνει ότι επιλέγουμε το δικαίωμα σε κάθε t < T μέχρι το S να πέσει κάτω από το B και τέλος το down-and-in που σημαίνει ενεργοποίηση του δικαιώματος μόνο όταν πέσει κάτω από το

Β το S.Το Β όπως είπαμε το ορίζουμε εμείς ως επενδυτές και όταν λέμε εμείς μπορεί να συμπεριλαμβάνει μία μεγάλη επενδυτική εταιρία κατασκευής εμπορευματικών κέντρων , έναν λιμένα , μία ενεργειακή εταιρία κατασκευής ανεμογεννητριών , μια εταιρία logistics πετρελαιοειδών , ένα κράτος , κοκ.

- Με βάση το knock-out δε μας συμφέρει να ασκήσουμε ποτέ το δικαίωμα αλλά δε θα εφαρμόζαμε τέτοια στρατηγική εδώ γιατί βγάζουμε κέρδος και για μεγάλο διάστημα.Εκτός από την τελευταία μέρα του έτους όπου ασυμπτωτικά η τιμή πέφτει κάτω του φραγμού αλλά τότε με βάση το γεγονός ότι έχουμε P < K δε συμφέρει να ασκήσουμε το δικαίωμα και προφανώς να το αφήσουμε να λήξει.
- Με βάση το knock-in οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο έτος είμαστε καλυμμένοι και κερδισμένοι , εκτός από τις δύο μικρές περιόδους σε αρχή και τέλος του έτους που απλώς δεν έχουμε ζημία αλλά μηδενικό κέρδος.
- Με βάση το δικαίωμα dao είμαστε πάντα κερδισμένοι.
- Με βάση το dai μόνο ασυμτπωτικά στο τέλος του έτους , τη τελευταία μέρα που συμφέρει να το αφήσουμε να λήξει.

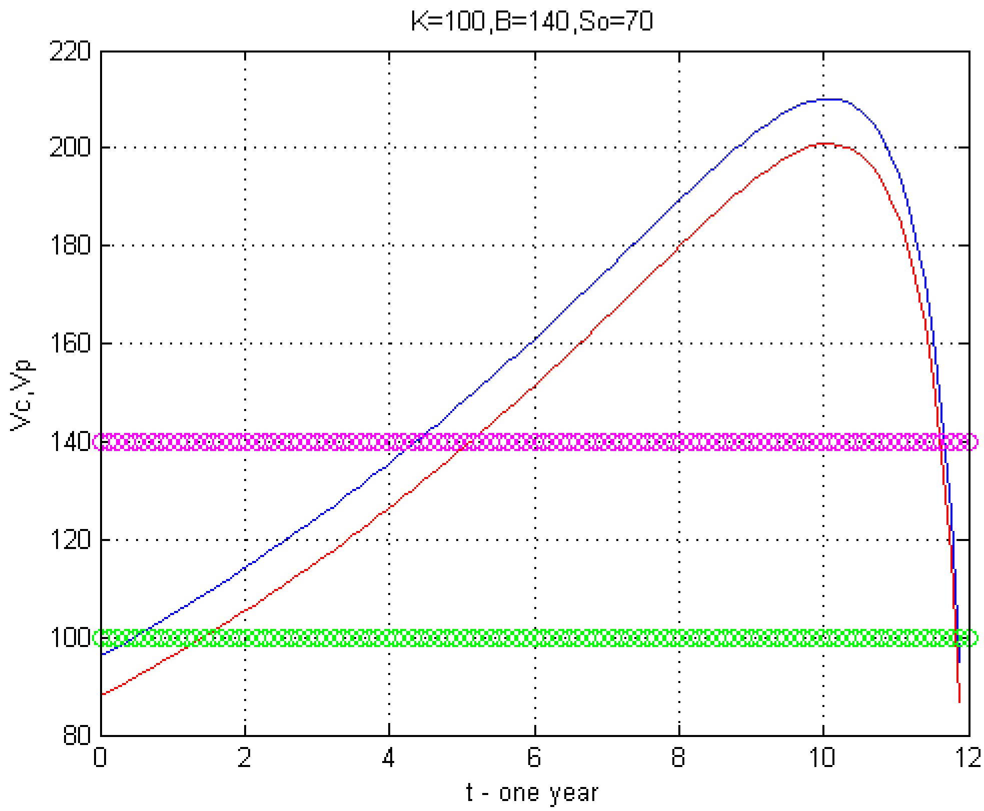
Ας δούμε τώρα τι γίνεται άμα πειράξουμε το Β και το βάλουμε Β = 95 €.Δηλαδή το αυξήσουμε.



Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι μπορούμε να ασκήσουμε το δικαίωμα για call αγορά από τη $1^{η}$ μέρα μέχρι και πρακτικά 4-5 ημέρες πριν την λήξη του δικαιώματος στο χρόνο όμως για την πώληση , put , μόνο από την $50^{η}$ ημέρα και πάλι μέχρι 4-5 ημέρες πριν την οριστική λήξη.Το φράγμα μας λέει ότι για την περίοδο [0 – 30] ημέρες έχουμε P_C < Β.Άρα με βάση τα κριτήρια:

- Με βάση το knock-out θα συνέφερε να ασκήσουμε μόνο το δικαίωμα πώλησης στην αρχή μέχρι το $1^{ο}$ μήνα.
- Με βάση το knock-in είμαστε καλυμμένη στη συντριπτική πλειοψηφία των ημερών για την αγορά αλλά και για 11 μήνες για την πώληση.

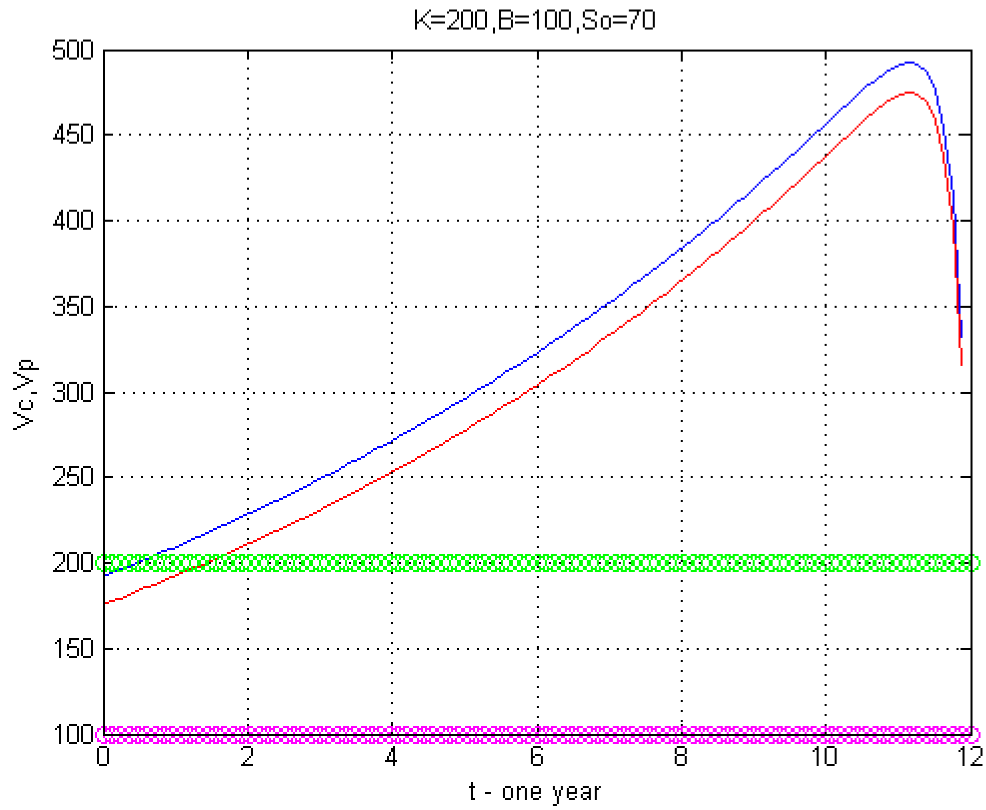
Ας δούμε τι γίνεται να αυξήσουμε και άλλο το φράγμα έστω στο B = 140 € τότε:



Τώρα παρατηρούμε ότι έχουμε κέρδος πάλι για τις ίδιες ημέρες όμως τώρα με βάση τις στρατηγικές δικαιωμάτων έχουμε ένα φράγμα που δεν μας επιτρέπει η μας προειδοποιεί ότι δεν θα έχουμε σε όλες τις περιοχές κέρδος.

- Με βάση το knock-out δε μας συμφέρει να ασκήσουμε το δικαίωμα αγοράς από τον $4^{ο}$ μήνα και μετά και συγκεκριμενα από τις 125 ημέρες και μετά.Όμως υπάρχει και το κριτήριο $P_S > K$ το οποίο σημαίνει τον περιορισμό από την $4^{η}$ ημέρα για αγορά και την $20^{η}$ ημέρα για πώληση.Δηλαδή ο φραγμός δε μας συμφέρει να είναι υψηλότερος του Κ σε αυτή την περίπτωση γιατί χάνουμε μεγάλες ευκαρίες αγοράς και πώλησης από τον $5^{ο}$ μήνα και μετά.
- Με βάση το knoc-in είμαστε πλήρως καλυμμένοι και κερδισμένοι γιατί εξασφαλίζουμε έτσι και τη μεγαλύτερη τιμή αγοράς και πώλησης.Δηλαδή στους 10 μήνες και 5 ημέρες.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται άμα αυξήσουμε τη τιμή διάθεσης , Κ στα 200 €.



Τώρα προφανώς δεν μας συμφέρει η knock-out για καμία δεδομένη χρονική σιτγμή όμως η knock-in μας συμφέρει για όλες και όχι μόνο αυτό αλλά βγάζουμε και ένα τεράστιο κέρδος.Για την ίδια ημέρα του 1^{ου} μήνα και 5^{ης} ημέρας που έχουμε το μέγιστο κέρδος (μέγιστη τιμή της put – call parity) στην αρχή είχαμε 210-100 – 100 € κέρδος τώρα έχουμε 490 -200 = 210 € κέρδος!Τεράστια αύξηση που σημαίνει ότι η επίδραση τη αρχικοποίησης του K είναι τεράστιας σημασίας.Βέβαια ποιος θα δεχότανε να πουλήσει σε τόσο μικρή τιμή όταν στο μέλλον θα μπορούσε να το κάνε με τριπλάσια είναι θέμα διαπραγμάτευσης που δεν άπτεται επί του παρόντος.

3.6 Αντισταθμιστικά Δικαιώματα

Έχοντας δεί το υπόδειγμα Black-Scholes μπορούμε τώρα να δούμε έναν παράγοντα της εξίσωσης και συγκεκριμένα τον παράγοντα:

$$\frac{dC}{dS} \text{ και } \frac{dP}{dS}$$

Οι παραπάνω δύο παράγοντες ονομάζονται **δέλτα δικαιώματος** και συνεπώς η στρατηγική αντισταθμισής τους λέγεται δέλτα αντιστάθμιση.Άρα για τα Ευρωπαικά Πραγματικά Δικαιώματα ισχύει:

$$\frac{dC}{dS} = N(d_1)$$

$$\frac{dP}{dS} = N(d_2) - 1$$

Εδώ θα συμβολίσουμε με A_i τον ρυθμό αύξησης του C η P η αλλιώς τον αριθμό των επενδυτικών στοιχείων που κατέχουμε την χρονική στιγμή i , πχ μετοχές , σε σχέση με το S δηλαδή η μεταβλητή αντιστάθμισης δέλτα που θέλουμε και με Π_{i+1} την πραγματική συνολική αξία του χαρτοφυλακίου μας στο χρόνο $t_i + dt = t_{i+1}$ άρα πρέπει να ισχύει:

$$\Pi_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + rdt) D_i$$

Στη χρονική στιγμή όμως t_{i+1} πρέπει να έχουμε πάλι συνολική αξία Π_{i+1} άρα θα ισχύει λόγω μη μεταβλητότητας της ποσότητας του χρήματος:

$$\Pi_{i+1} = A_{i+1} S_{i+1} + (1 + rdt) D_{i+1}$$

Άρα βρίσκουμε συνολικά.

$$D_{i+1} = (1 + rdt) D_i + (A_i - A_{i+1}) S_{i+1}$$

Ο αλγόριθμος που υπολογίζει τα παραπάνω είναι ο παρακάτω με τις εξής αρχικές συνθήκες:

$$S_o = \delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu o$$

$$A_o = \frac{dC_o}{dS}, \frac{dP_o}{dS}$$

$$D_o = 1$$

$$\Pi_o = A_o S_o + D_o$$

Για i = 0 μέχρι (N-1)

$$S_{i+1} = S_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sqrt{dt}\sigma\xi_i}$$

$$\Pi_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + rdt) D_i$$

$$A_{i+1} = \frac{dC_{i+1}}{dS}$$

$$D_{i+1} = (1 + rdt) D_i + (A_i - A_{i+1}) S_{i+1}$$

Ο κώδικας που υλοποιεί τα παραπάνω είναι:

```
randn('state',100)
clf
Szero = 100; sigma = 0.30; r = 0.01; mu = 0.02; T = 5; K
= 200;
Dt = 1e-2; N = T/Dt; t = [0:Dt:T];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
S = zeros(N,1); asset = zeros(N,1); cash = zeros(N,1);
portfolio = zeros(N,1); Value = zeros(N,1);
[C,Cdelta,P,Pdelta] = ch08(Szero,K,r,sigma,T-t(1));
S(1) = Szero;
asset(1) = Cdelta;
Value(1) = C;
cash(1) = 1;
portfolio(1) = asset(1)*S(1) + cash(1);
for i = 1:N
S(i+1) = S(i)*exp((mu-
0.5*sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*randn);
portfolio(i+1) = asset(i)*S(i+1) + cash(i)*(1+r*Dt);
[C,Cdelta,P,Pdelta] = ch08(S(i+1),K,r,sigma,T-t(i+1));
asset(i+1) = Cdelta;
cash(i+1) = cash(i)*(1+r*Dt) - S(i+1)*(asset(i+1) -
asset(i));
Value(i+1) = C;
end
Vplot = Value - (Value(1) - portfolio(1))*exp(r*t)';
plot(t(1:5:end),Vplot(1:5:end),'bo')
hold on
plot(t(1:5:end),portfolio(1:5:end),'r-','LineWidth',2)
hold on
plot(t(1:5:end),E,'go')
xlabel('Time'), ylabel('Portfolio')
legend('Theoretical Value','Actual Value')
grid on
```

```
function [C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S,K,r,sigma,tau)
if tau > 0
d1 = (log(S/K) + (r + 0.5*sigma^2)*(tau))/(sigma*sqrt(tau));
d2 = d1 - sigma*sqrt(tau);
N1 = 0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2 = 0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
C = S*N1-K*exp(-r*(tau))*N2;
Cdelta = N1;
P = C + K*exp(-r*tau) - S;
Pdelta = Cdelta - 1;
else
C = max(S-K,0);
```

```
Cdelta = 0.5*(sign(S-K) + 1);
P = max(K-S,0);
Pdelta = Cdelta - 1;
end
```

Καταρχάς εδώ να γίνει μία σύντομη περιγραφή των παραπάνω.Το χαρτοφυλάκιο Π είναι το αντιστάθμισμα δηλαδή η εναλλακτική λύση που θα ρίχναμε τα λεφτά μας χωρίς ρίσκο με σύνολο περιουσιακών/επενδυτικών στοιχείων A και ταμειακές καταθέσεις D.Κοινώς το ΔΠ ισούται με $\delta\Pi = \mathrm{A}\,\delta S + rD\,dt$.Εδώ υπεισέρχεται ο παράγοντας της τυχαιότητας τον οποίο απαλείφουμε με την παραδοχή:

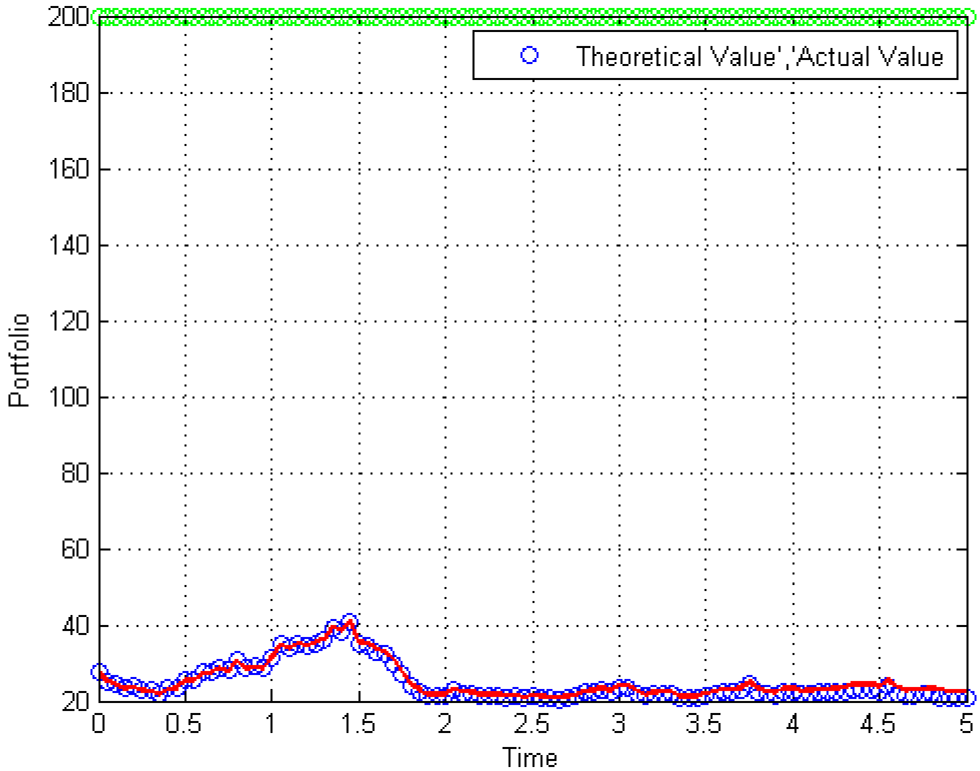
$$\frac{dC}{dS} = A_i$$

Επίσης το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο Π είναι αυτοχρηματοδοτούμενο δηλαδή πέραν του χρόνου t=0 δεν προσθέτουμε η αφαιρούμε χρήματα σε/από αυτό , έτσι θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο ένα σύστημα με μηδενική οικονομική εντροπία.Αυτό σημαίνει πως οι αυξήσεις του πρώτου παράγοντα A αντισταθμίζονται από τις μειώσεις η αυξήσεις του δεύτερου παράγοντα D.Έτσι πουλώντας περιουσιακά στοιχεία έχουμε μείωση του παράγοντα $\frac{dC}{dS}$ δηλαδή $\frac{dC_i}{dS_{i+1}} > \frac{dC_{i+1}}{dS_{i+1}}$ και το ακριβώς αντίθετο άμα αγοράζουμε.Εδώ είναι και η έννοια της αντιστάθμισης η αλλιώς hedging δηλαδή πως η ισοτιμία call-put και η επένδυση σε καταθέσεις D αντισταθμίζονται μεταξύ τους έτσι ώστε ναι μεν να αυξομειώνεται η αξία του χαρτοφυλακίου Π αλλά με αυτοχρηματοδότηση από το σύστημα.Επομένως ισχύει ανά πάσα στιγμή μεταξύ δύο χρονικών στιγμών:

$$\Delta(V - \Pi) = r\,dt(V - \Pi)$$

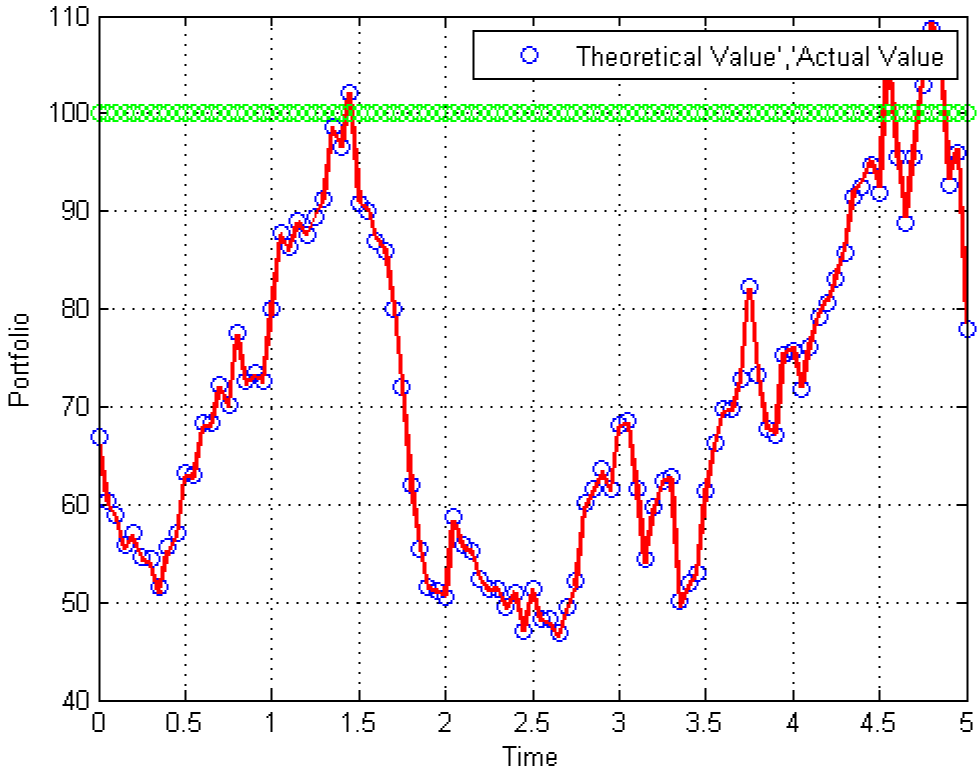
Έτσι τώρα αναμενόμενο είναι να μας ενδιαφέρει πότε θα κάνουμε κέρδος.Εάν ο πρώτος όρος είναι μεγαλύτερος του δεύτερου σημαίνει πως αγοράζουμε δικαιώματα V (C,P) και πουλάμε από το χαρτοφυλάκιο Π.Ταυτόχρονα αυτό σημαίνει ότι σε χρόνο dt θα πουλήσουμε από τώρα τα δικαιώματα.Αν ισχύει το αντίθετο δηλαδή ο πρώτος όρος είναι μικρότερος του δεύτερου τότε κάνουμε το ακριβώς αντίθετο.Και τέλος μας ενδιαφέρει η αύξηση του όρου C – Π χωρίς ρίσκο.Επίσης με βάση τη τιμή διάθεσης και την S_o μπορούμε να δούμε πότε μας συμφέρει αντιστάθμιση και πότε όχι.

Άρα για S_o = 100 και K =200 και σ = 30% και r = 10% για 5 έτη έχουμε.



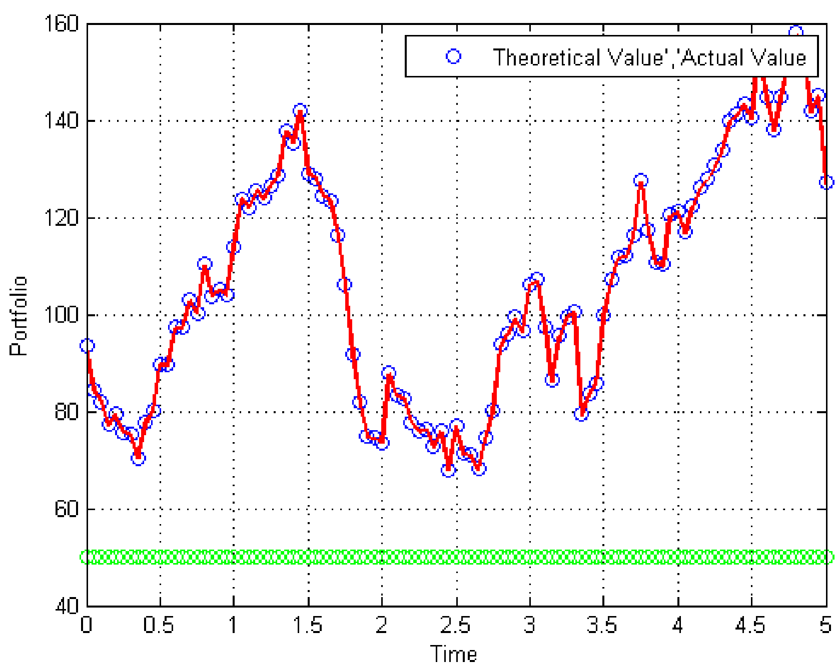
Εδώ βλέπουμε ότι έχουμε αυτό που είχαμε αναφέρει ως out-of-the-money δηλαδή εκτός χρήματος/χρηματικών απολαβών.Το χαρτοφυλάκιο και η τιμή αγοράς είναι σχεδόν ταυτόσημες άρα έχουμε πετύχει άριστη αντιστάθμιση πλην όμως δεν βγάζουμε κέρδη και το έτος 5 που λήγει το δικαίωμα αποκομίζουμε μηδέν κέρδος καθώς αγοράζουμε κάτι με τιμή στη καλύτερη των περιπτώσεων στον 1.5 χρόνο 160 € ακριβότερα.Ας δούμε τώρα τι γίνεται αν εξισώσουμε το K με το S_o.

Για S_o = 100 και K =100 και σ = 30% και r = 10% για 5 έτη έχουμε.

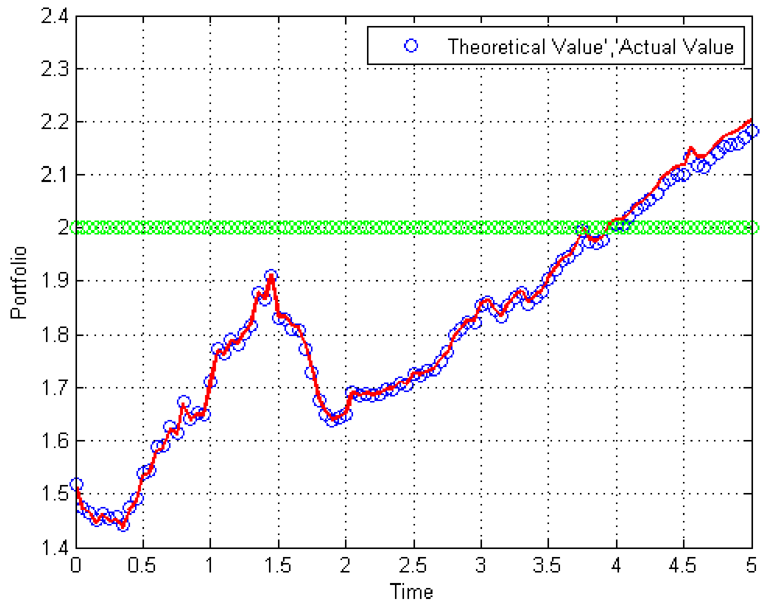


Εδώ βλέπουμε ότι κερδίζουμε σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα και συγκεκριμένα στον 1.5 χρόνο και λίγο πιο πριν και λίγο πριν τη λήξη.Εδώ βλέπουμε πάλι ότι η αντιστάθμιση λειτουργεί άριστα.

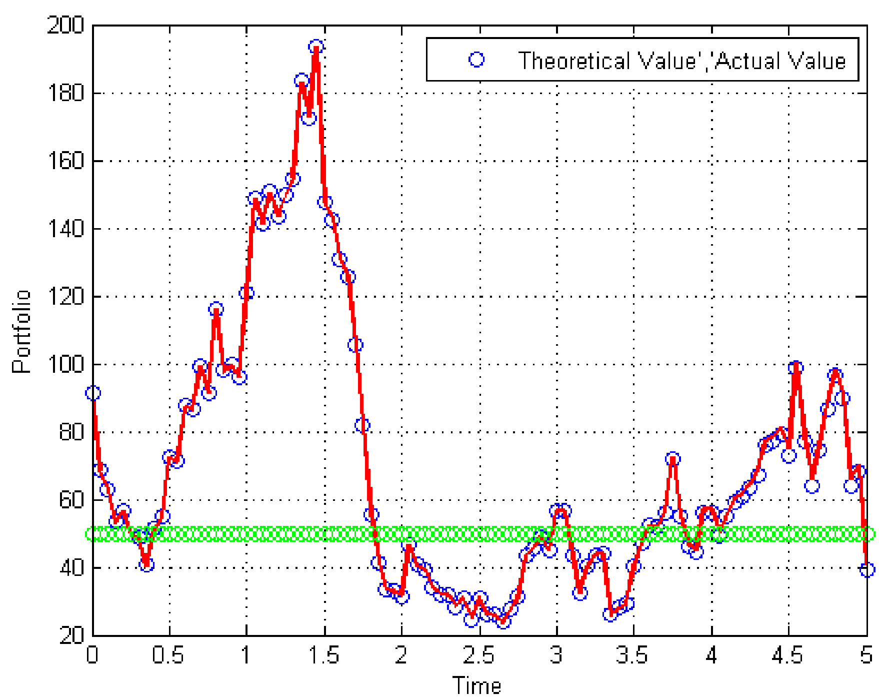
Για S_o = 100 και Κ =50 και σ = 30% και r = 10% για 5 έτη έχουμε.



Εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε μέγιστο κέρδος λίγο πριν την λήξη και μάλιστα πολύ μεγαλύτερο από ότι είχαμε πριν για K = 100 €.Υπάρχει και η περίπτωση για χαμηλές τιμές να μην έχουμε ταύτιση των C και P όπως για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα για K=2 και S_o=1.



Επίσης αποδεικνύεται πως οι παραπάνω μεταβολές είναι ανεξάρτητες της παραμέτρου μ , και ανάλογες της παραμέτρου r και σ.Για παράδειγμα με αστάθεια ίση με 80% θα περιμένουμε και τεράστιο κέρδος.

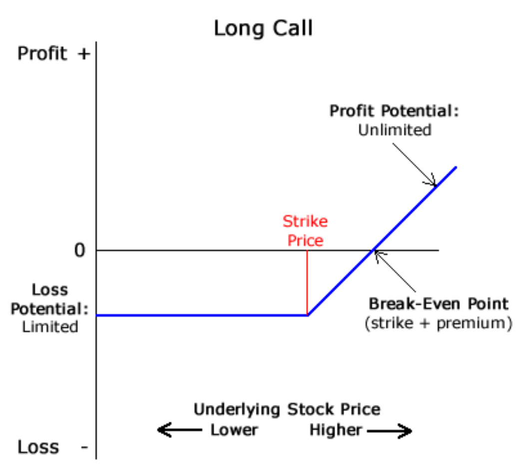


3.7 Στρατηγικές Δικαιωμάτων

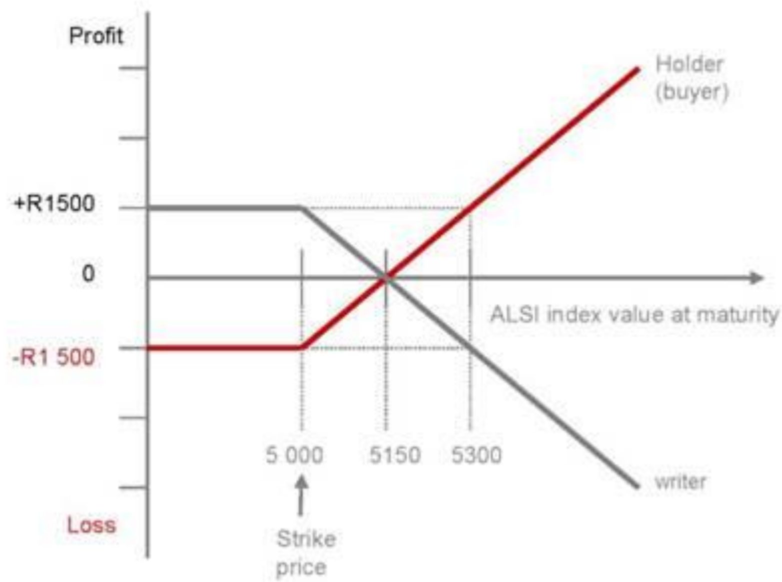
Οι στρατηγικές δικαιωμάτων μπορεί να είναι στοιχείωδης/απλές η σύνθετες.Όμως ακόμα και μια σύνθετη στρατηγική μπορεί να αναλυθεί σε απλές στοιχειώδης στρατηγικές.Βασική παραμετρός τους είναι η ανάλυση των χαρακτηριστικών ρίσκου και η μεταβολή του S με το χρόνο.Οι στρατηγικές στην ουσία μας δίνουν κάποια πλεονεκτήματα βασικότερα εκ των οποίων είναι:

- Συνδυασμός αγοράς και πώλησης , puts και calls , καθιστώντας εφικτούς επενδυτικούς σχηματισμούς που ειδάλλως δεν θα απέφεραν κέρδος.
- Σε περιπτώσεις όπως της αγοράς δεν είναι αναγκαία η αγορά της μετοχής η της επένδυσης αυτής καθεαυτής.
- Παρέχουν μόχλευση δηλαδή συνεχής μεγιστοποίηση πιθανού κέρδους.
- Χρησιμοποιούνται κατά κόρον στους μεγάλους οίκους αξιολόγησης όπως S&P και Moodys.Απλά και ευνόητα για νεοεισερχόμενες εταιρίες και επενδυτές στην αγορά είτε δημόσιους είτε ιδιώτες.

Πρώτη στρατηγική δικαιώματος είναι το λεγόμενο και long call η μακράς αγοράς.Ίσως η πιο βασική από τα δικαιώματα αγοράς όπου υπάρχει η πεποίθηση ότι η τιμή του S θα ξεπεράσει κατά πολύ την τιμή K λίγο πριν την λήξη.Αν φυσικά δε συμβεί το τελευταίο τότε έχουμε τη λήξη του δικαιώματος.Αυτό φαίνεται παρακάτω:



Από το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι έχουμε απεριόριστο μέγιστο κέρδος.Μηδενικό κέρδος έχουμε όταν S = K + πριμοδότηση.Το κέρδος επομένως είναι είναι το S μείον τα δύο παραπάνω.Για παράδειγμα έστω μία χρηματοροή που στοιχίζει σήμερα 1 εκ. € και τιμολογείται ένα δικαίωμα αγοράς στα 100 χιλ. €.Έστω ότι εμείς προσφερόμαστε να αγοράσουμε το δικαίωμα αγοράς της χρηματοροής στα 1.5 εκ €.Αν σε ένα χρόνο η χρηματοροή αποδώσει 2 εκ. €.Εμείς λοιπόν έχουμε κερδίσει από την άσκηση του δικαιώματος τη δεύτερη χρονική στιγμή ποσό ίσο με (2 – 1.5) = 0.5 > 0.1 άρα έχουμε όντως κερδίσει.Αν συνέβαινε το αντίθετο δηλαδή έστω χρηματοροή με αξία 1.4 € δε θα ασκούσαμε το δικαίωμα για το 2^{o} έτος και θα αφήναμε να λήξει.Αυτή η στρατηγική δικαιώματος είναι γνωστή και ως ανοδικής μορφής (bullish).Να επισημανθεί πάντοτε ότι αυτό που χάνουμε σε κάθε περίπτωση είναι το πρίμιουμ δηλαδή το μικρό ποσοστό με το οποίο αγοράζουμε το δικαίωμα από αυτόν που μας το εκδίδει.Εδώ μπορούμε να δούμε και τη στρατηγική από πλευράς του εκδότη δηλαδή αυτού που μας γράφει το δικαίωμα αγοράς.Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



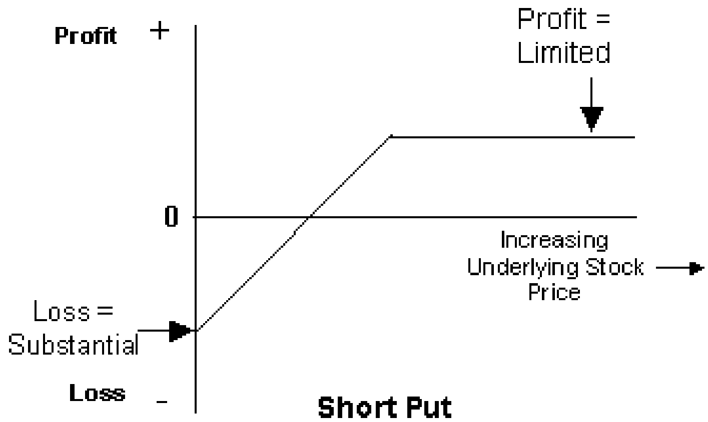
Όπως βλέπουμε ουσιαστικά κερδίζει το πριμ μετά έχει μόνο απώλειες , δηλαδή χαμένο κέρδος που δεν θα είχε αν εμείς δεν εξασκούσαμε το δικαίωμα.Στην ουσία δεν πρόκειται για ζημία αλλά για εκλιπών κέρδος.Για τον εκδότη δηλαδή ισχύει:

$$-(S - K), S > K$$

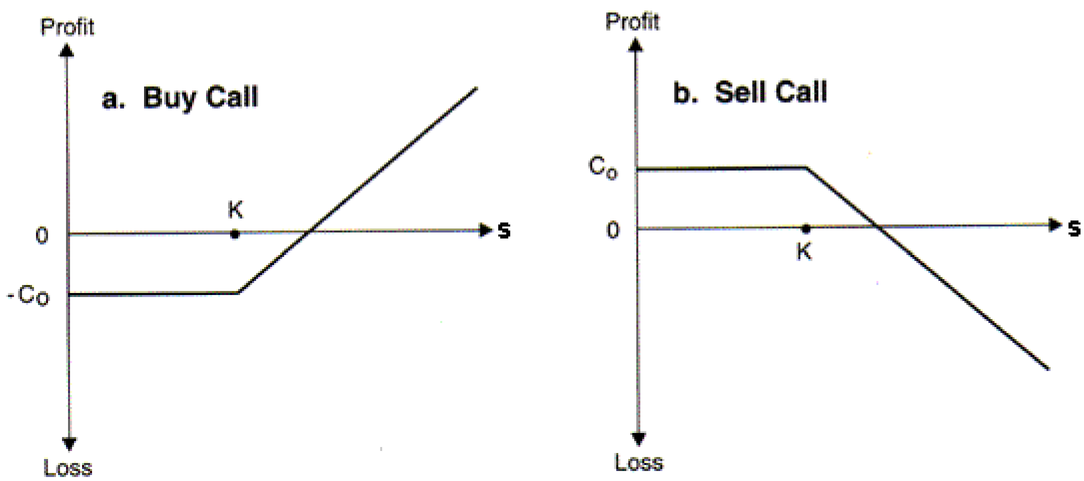
$$0, S \leq \mathrm{K}$$

Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι όσο κερδίζει ο αγοραστής δικαιώματος τόσο «χάνει» ο εκδότης του.Δηλαδή πουλάμε call και κερδίζουμε όσο χάνει αυτός που αγοράζει δικαίωμα αγοράς.Τα ακριβώς ανάλογα ισχύουν και για την αγορά και πούληση των put.

Άλλη σημαντική μορφή δικαιώματος είναι η βραχείας πώλησης η short put.Εδώ αναφερόμαστε στην πώληση ενός δικαιώματος όπου εδώ ασκούμε το δικαίωμα αναγκαστικής πώλησης σε έναν τρίτο έστω επενδυτή.Στην ουσία είναι μία ασφάλεια του επενδυτή να προφυλαχθεί από πιθανές ζημίες από ένα χρονικό σημείο και έπειτα.Όσο περισσότερο αυξάνει το S κερδίζουμε σε χρήμα όσο περισσότερο πέφτει χάνουμε έτσι έχουμε ένα άνω όριο στις ζημίες.

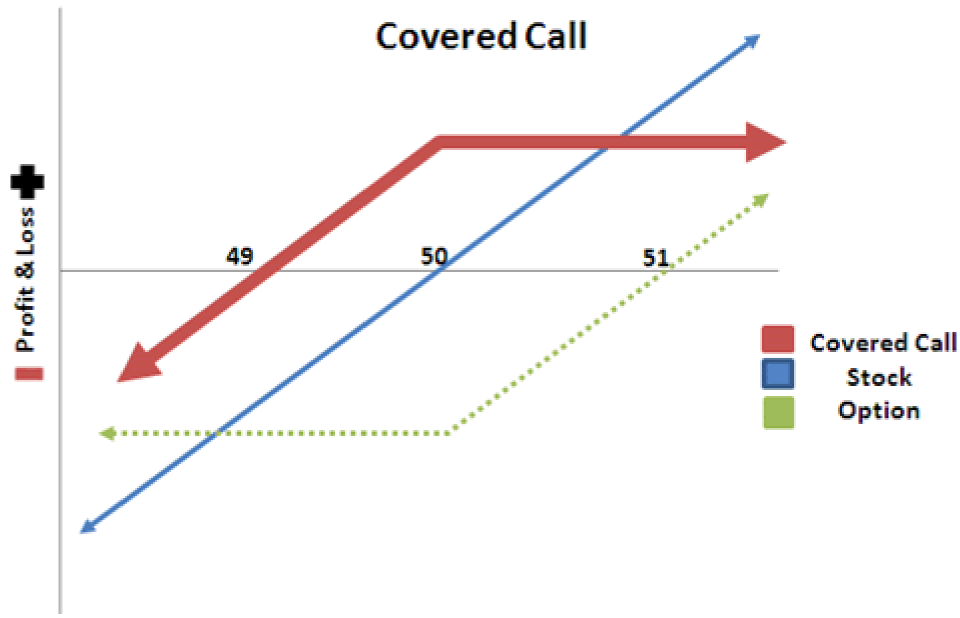


Αυτό που μπορούμε να αναφέρουμε συνοπτικά για το long call είναι ότι η πάροδος του χρόνου μειώνει την αξία του δικαιώματος στην ημερομηνία λήξης αλλά έχουμε και μεγαλύτερη αστάθεια με την πάροδο του χρόνου που αντισταθμίζει το πρώτο.Χρησιμοποιείται ευρέως από επενδυτικές εταιρίες που θέλουν μία μορφή ασφάλισης όπως μία πιθανή άνοδος των τιμών στην αγορά που σημαίνει ότι θα αγοράσουμε με υψηλή τιμή.Η άλλη μορφή στρατηγικής είναι η πώληση μιας αγοράς (call).Αυτή φαίνεται διαγραμματικά παρακάτω:



Εδώ έχουμε τα αντίθετα χαρακτηριστικά ως προς το ρίσκο σε σχέση με την αγορά.Το μέγιστο που μπορεί ο εκδώτης του δικαιώματος να κερδίσει , δηλαδή η εταιρία που πουλάει την αγορά , είναι το αρχικό πρίμιουμ η C_0.Με το πέρασμα του χρόνου μειώνεται και η αστάθεια εξού και η λέξη short call.Δηλαδή έχουμε στην αρχή μόνο αυξημένη αστάθεια.Είναι ένα αντισταθμιστικό μέτρο ειδικά όταν πέφτουν οι τιμές.Στην ουσία στην πώληση call πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς σε έναν τρίτο σε μία προκαθορισμένη τιμή πρίμιουμ με τη λογική ότι μπορεί να αυξηθεί η τιμή του S πάνω από το K αλλιώς ως τρίτος κάτοχος δικαιώματος μένει με μηδενικό κέρδος.Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το γεγονός ότι και στις δύο στρατηγικές αγοράς (βραχείας και μακράς) ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς κερδίζει το πρίμιουμ πώλησης ακόμα και αν ο τρίτος έχει μηδενικό κέρδος.Κατά τον ίδιο τρόπο εφαρμόζεται και η πώληση δικαιωμάτων long και short put/πώλησης.

Άλλη μορφή στρατηγικής δικαίωμα είναι το συγκαλυμμένο δικαίωμα αγοράς όπου ένας επενδυτής υιοθετεί μία στρατηγική μακράς αγοράς πάνω σε ένα περιουσιακό στοιχείο και πουλάει ταυτόχρονα δικαιώματα αγοράς του ίδιου περιουσιακού στοιχείου.



Στην ουσία πρόκειται για έναν συνδυασμό αγοράς δικαιώματος αγοράς και αγοράς της μετοχής η επενδυτικού στοιχείου.Αυτό μπορούμε να το απεικονίσουμε και ως:

	S < K	S > K
Απόδοση μετοχής	S	S
Απόδοση call	0	-(S – K)
Συνολική απόδοση	S	K

Το άλλο βασικό συστατικό της στρατηγικής δικαιωμάτων είναι τα λεγόμενα σπρεντ.Πρόκειται για την αγορά ενός δικαιώματος όπως έχουμε δει και την πώληση ενός άλλου.Τα σπρεντ χρησιμοποιούνται στα δικαιώματα από τους επενδυτές γιατί προσφέρουν δυνατότητα χαμηλών κερδών με περιορισμένο ρίσκο.Στην ουσία είναι η συγχώνευση θέσης long και short με αντισταθμιστική λειτουργία.Ειδικότερα μπορούμε να δούμε το εξής παράδειγμα.Έστω ότι έχουμε δύο call δικαιώματα με τιμές εξάσκησης

K1 και K2 όπου K1 < K2 με πριμ C1 και C2 όπου C1 > C2.Εδώ εισάγουμε την έννοια της στρατηγικής Bull σπριντ που σημαίνει την αγορά του δικαιώματος με το χαμηλότερο K και την πώληση του δικαιώματος με το υψηλότερο K.Άρα το κέρδος για την αγορά του πρώτου είναι:

$$\max(0, S - K1) - C1$$

και για το δεύτερο:

$$\max(0, S - K2) - C2$$

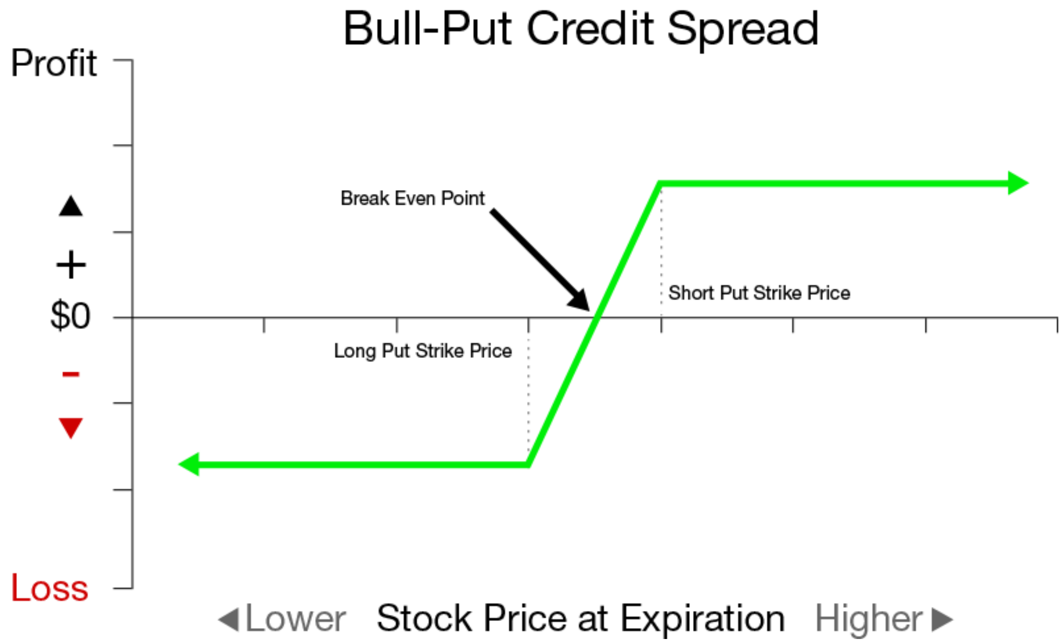
όμως από την πλευρά του αγοραστή του δικαιώματος άρα εμείς το βλέπουμε ως ζημία δηλαδή το συνολικό κέρδος για εμάς είναι:

$$Pr = \max(0, S - K1) - C1 - (\max(0, S - K2) - C2)$$

Άρα τώρα μπορούμε να έχουμε τις εξής τρεις πιθανές εκβάσεις σε σχέση με το S.

ΚΕΡΔΟΣ	ΣΥΝΘΗΚΗ
C2 – C1	S < K1 < K2
S + C2 – K1 – C1	K1 < S < K2
K2 + C2 – K1 – C1	K1 < K2 < S

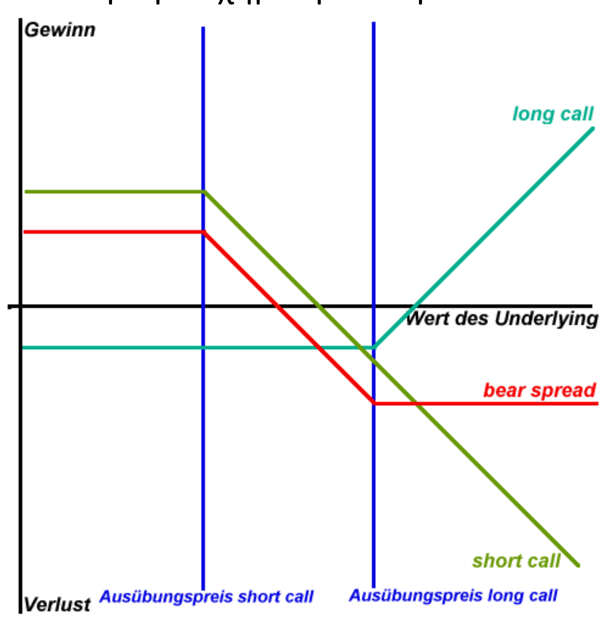
Στην πρώτη περίπτωση που ισχύει η πρώτη συνθήκη αφήνουμε το δικαίωμα να λήξει δηλαδή είμαστε εκτός χρήματος.Χάνουμε τη διαφορά των δύο πριμ.Στη τρίτη περίπτωση όλα εξαρτώνται από το πως κλείσαμε τα δύο δικαιώματα και μόνο στη δεύτερη υπάρχει ο παράγοντας S δηλαδή και η αβεβαιότητα ως προς τα κέρδη.Αυτό που ξέρουμε σίγουρα είναι ότι το S είναι μία δυναμική μεταβλητή που συνεχώς αλλάζει άρα κάποια στιγμή θα βρίσκεται κάτω από το K1 κάποια στιγμή ανάμεσα και κάποια στιγμή θα υπερβεί και το K2.Άρα με τη στρατηγική bull στην αρχή έχουμε ζημία ίση με τη διαφορά των πριμ , μετά βγάζουμε κέρδος μέχρι να γίνει K2 οπότε και ο τρίτος στον οποίο έχουμε πουλήσει το δικαίωμα αγοράς (long θέση) το εξασκεί , είναι δηλαδή το μέγιστο κέρδος το οποίο μπορούμε να επιτύχουμε.Εμείς δηλαδή θα πάρουμε από την πώληση ποσό ίσο με K2.Αυτό μπορούμε να το δούμε και διαγραμματικά.Ουσιαστικά στην μακρά θέση (long call) θα χάσουμε το κέρδος που θα βγάλει ο τρίτος από την εκμετάλλευση του δικαιώματος.Στη βραχεία θέση χάνουμε στην αρχή το πριμ μέχρι να πιάσουμε τιμή μεγαλύτερη του K1.Αυτή η στρατηγική λέγεται και bull σπριντ γιατί δείχνει μία δειλή θέση από πλευράς επενδυτή όχι τόσο κυριολεκτικά όσο από πλευράς προφύλαξης , δηλαδή πρόκειται για μία στρατηγική που δεν στοχεύει σε μεγάλα κέρδη και σαφώς δεν είναι επιθετική.Το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει με την στρατηγική bear σπριντ που όπως το υποννοεί η ονομασία της είναι επιθετική.



Στην bear σπριντ έχουμε το αναποδογύρισμα δηλαδή πώληση η μακρά θέση (long) και κατόπιν αγορά η βραχεία θέση (short).Εδώ το κέρδος δίνεται από τη σχέση:

$$Pr = -Max(0, S - K1) + C1 + Max(0, S - K2) - C2$$

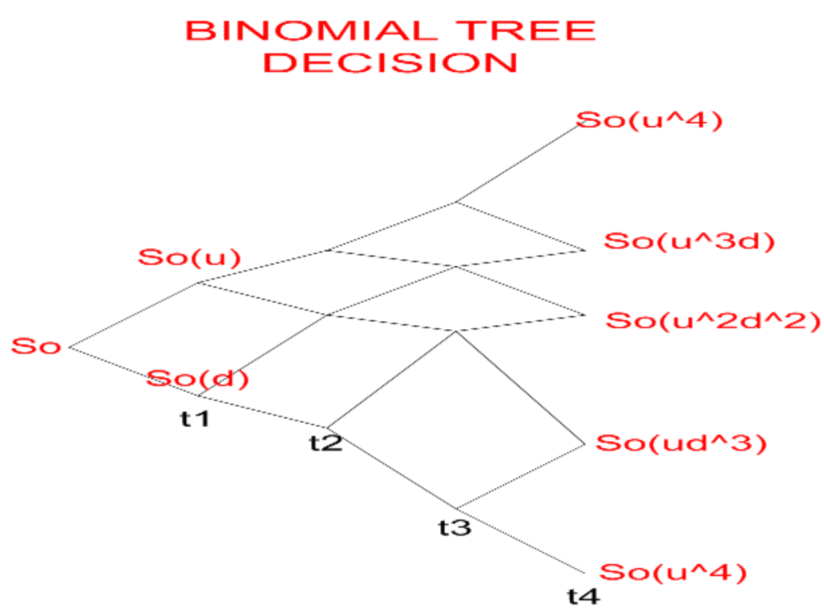
και λαμβάνουμε το αντίστροφο σχήμα η το παρακάτω:



4.1 Δυωνυμικά δέντρα αποφάσεων

Η άλλη πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος για να κρίνουμε πότε μας συμφέρει να πουλήσουμε και πότε να αγοράσουμε ένα δικαίωμα είναι η λεγόμενη Δυωνυμική μέθοδος που έχει τη μορφή διακλαδώσεων διαφορετικής εκβάσεως η καθεμία.

Η δυωνυμική μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων πλέγματος.Συγκεκριμένα αφορά την έκβαση μίας επένδυσης σε διακριτοποιημένα χρονικά σημεία.Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να την εφαρμόσουμε και σε κλάσματα του δευτερολέπτου αν και συνήθως εφαρμόζεται σε έτη δηλαδή σε χρόνο t = 1,…,N.Η επένδυση θεωρούμε ότι έχει αρχική τιμή S_0 κάτι που μπορεί να είναι και η τιμή ενός χρεογράφου αυτή τη χρονική στιγμή.Μετά σε χρόνο t_1 που είναι και η επόμενη χρονική στιγμή έχουμε δύο πιθανές εκβάσεις , η να αυξηθεί η τιμή του S_0 η να πέσει.Δηλαδή να αυξηθεί κατά έναν παράγοντα ίσο με u (up) η να πέσει κατά d (down).Φυσικά μπορεί και να παραμείνει ίδια που σημαίνει ότι οι δύο παραπάνω παράγοντες λαμβάνουν τιμή ίση με τη μονάδα.Την μεθεπόμενη χρονική στιγμή έχουμε αυτή τη φορά τέσσερα ενδεχόμενα.Να αυξηθεί το S_0u σε $(S_0u) = S_0u^2$ η σε S_0ud η να έχει συμβεί το δεύτερο ενδεχόμενο στην πρώτη χρονική στιγμή και έτσι έχουμε πάλι η αύξηση S_0ud η $(S_od)d = S_0d^2$.Αυτό σημαίνει ότι στη δεύτερη χρονική σιγμή έχουμε ένα ενδεχόμενο που συμπίπτει με το άλλο δηλαδή στην πραγματικότητα τρία πιθανά ενδεχόμενα άρα και με την ίδια λογική στην t_3 θα έχουμε τέσσερα πιθανά ενδεχόμενα κοκ μέχρι τη τελευταία χρονική στιγμή t_N όπου θα έχουμε (N+1) πιθανά ενδεχόμενα.Αυτό διαγραμματικά μπορεί να φανεί στο παρακάτω διάγραμμα για τέσσερις χρονικές στιγμές.



Φυσικά το παραπάνω διάγραμμα θα μπορούσε να είναι πάρα πολύ περίπλοκο και να έχει χιλιάδες διακλαδώσεις και πιθανά τελικά αποτελέσματα.Εδώ γίνεται και μία παραδοχή που απλώς θα διευκολύνει το μοντέλο μας και δεν θα μας εκτροχιάσει το αποτέλεσμα.Για παράδειγμα στο χρόνο t_2 θα μπορούσαμε να έχουμε τέσσερα αντί για τρία πιθανά αποτελέσματα καθώς ο μεσαίος κόμβος θα μπορούσε να ήταν δύο κόμβοι με διαφορετικά u και d.Αυτό μπορεί να υπολογιστεί αλλά καθιστά το πρόβλημα πολύ πιο δύσκολο προσθέτωντας κόβμους και πολυπλοκότητα.Μία άλλη βασική παραδοχή είναι η απαλειφή ρίσκου στις πιθανότητες έκβασης ενός αποτελέσματος.Επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των u και d.Αυτές οι παράμετροι αυξομείωσης είναι ανάλογες της διασποράς , σ , και το χρονικού βήματος (πχ , sec , χρόνος , μήνας , κτλ).Άρα ισχύει:

$$u = e^{(\sigma \sqrt{dt})}$$

$$d = e^{-(\sigma \sqrt{dt})}$$

Το σ περιέχει ουσιαστικά και την αστάθεια για την οποία είχαμε μιλήσει προηγουμένως.Από τις παραπάνω δύο σχέσεις συμπεραίνουμε ότι και.

$$d = \frac{1}{u}$$

Και η πιθανότητα της έκβασης κάθε ενδεχομένου.

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d}$$

όπου το επιτόκιο , r , είναι ελεύθερο ρίσκου
Επομένως γενικά για το υπολογισμό ενός δυωνυμικού δένδρου χρειαζόμαστε τις εξής μεταβλητές:

- σ
- r
- S_o , την αρχική τιμή της επένδυσης η χρεογράφου
- K , την τιμή διάθεσης η εξάσκησης του δικαιώματος
- T , τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος
- dt , το χρονικό βήμα

Θα μπορούσαμε να δούμε ένα παράδειγμα για τα παραπάνω και μία σύγκριση με το υπόδειγμα Black-Scholes.Έστω ότι έχουμε τα παρακάτω δεδομένα:

S_o = 100 €
K = 200 €
T = 4 χρόνια

σ = 0.2 (20%)

r = 10 %

dt = 1 χρόνος

Βρίσκουμε επομένως τα u = 1.221403 , d =0.8187 και p = 0.7113

t0	t1	t2	t3	t4
100	**Su**	**Su2**	**Su3**	**Su4**
	122.1403	149.1825	182.2119	222.5541
		Sud	**Su2d**	**Su3d**
	Sd	100	122.1403	149.1825
	81.87308			
		Sd2	**Sud2**	**Su2d2**
		67.032	81.87308	100
			Sd3	**Sud3**
			54.88116	67.032
				Sd4
				44.9329

Όπως βλέπουμε από το παραπάνω δένδρο έχουμε τη χειρότερη έκβαση να είναι στα 44.93 € και την καλύτερη στα 222.55 € δηλαδή 22.55 € μεγαλύτερη της Κ.Αυτό σημαίνει ότι ανάλογα με τον ασκούμαι δικαιώμα αγοράς η πώλησης μας συμφέρει η «χειρότερη» ή η «καλύτερη».Όμως στα παραπάνω δεν έγινε χρήση της πιθανότητας.Αυτό είναι σφάλμα που πρέπει να διορθωθεί και γίνεται με την προς-τα-πίσω αναγωγή.Έτσι κοιτάζουμε αρχικά τι συμβαίνει στο 4^{ο} έτος όπου έχουμε αναμενόμη αξία του S ίση με 222.55 €.Εμείς όμως αν εξασκήσουμε το δικαιωμά μας εκείνη τη στιγμή κερδίζουμε 222.55 – 200 = 22.55 €.Αν περιμένουμε να περάσει και το 5^{ο} έτος χάνουμε το δικαίωμα λόγω λήξης και δεν κερδίζουμε τίποτα.Άρα η αξία του δικαιώματος είναι 22.55 € και φυσικά είναι προτιμήτερο από το να αφήναμε το δικαιώμα να λήξει.Αν βρίσκαμε αρνητική τιμή θα το κάναμε.Στο ακριβώς πιο κάτω ενδεχόμενο το $S_o u^3 d$ έχουμε 149.18 – 200 = -50.82 € προφανώς και εδώ έχουμε ζημία άρα η αξία δικαιώματος σε αυτόν τον κόμβο τίθεται ίση με 0 €.Ομοίως και για τα παρακάτω.Τώρα για να μετακινηθούμε στη χρονική στιγμή t_3 πρέπει να υπολογίσουμε την αξία συναρτήσει των αξιών που υπολογίσαμε στους δύο κόμβους που έπονται αυτής της χρονικής στιγμής.Για το $S_o u^3$

ξέρουμε ότι δημιουργεί δύο κόμβους τους , S_0u^4 και S_0du^3 άρα βρίσκουμε μία σταθμισμένη τιμή και εδώ είναι που επηρρεάζεται από την πιθανότητα δηλαδή την αστάθεια.

$$[p(S_0u^4)+(1-p)(S_0u^3d)]e^{-rdt}$$

t0	t1	t2	t3	t4
100	Su	Su2	Su3	Su4
3.871128	122.1403	149.1825	182.2119	222.5541
	6.014291	**9.34397**	**14.51705**	**22.55409**
		Sud	Su2d	Su3d
	Sd	100	122.1403	149.1825
	81.87308	**0**	**0**	**0**
	0	Sd2	Sud2	Su2d2
		67.032	81.87308	100
		0	**0**	**0**
			Sd3	Sud3
			54.88116	67.032
			0	**0**
				Sd4
				44.9329
				0

Άρα η προσδοκώμενη τιμή της αξίας για το έτος t_0 είναι 3.871128 € δηλαδή η αξία άσκησης του δικαιώματος.

Η επίλυση με την Black-Scholes θα μας έδινε.

```
S=100;
K=200;
r=0.1;
T=4;
d1=-1.28287;
d2=-1.48287;
f=@(h) exp(-(h.^2)/2)
c1=integral(f,-Inf,d1)/(sqrt(2*pi));
c2=integral(f,-Inf,d2) /(sqrt(2*pi));;
C=c1*S-c2*K*exp(-r*T);
```

Οπότε λαμβάνουμε τιμή ίση με 0.7192 < 3,871128 €.Εδώ μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η δυωνυμική μέθοδος μας δίνει μεγαλύτερη αίσθηση του κέρδους και μάλιστα κατά δύο φορές μεγαλύτερο και αυτό διότι λαμβάνει υπόψη την αστάθεια περισσότερο από την

Black-Scholes όμως ειλικρινά τι θα συμβουλευόντανε ένας επενδυτής η χρηματιστής.Προφανώς σε όλα θέτουμε ανοχές η παραμέτρους ασφάλειας που σημαίνει ότι κοιτάζουμε το λιγότερο που μπορούμε να κερδίσουμε για τον αξίζει να επενδύσουμε τα λεφτά μας.Όμως ο μέτοχος θα κοίταζε ίσως τη δυωνυμική μέθοδο γιατί τον ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση του κέρδους.Από τη παραπάνω μέθοδο είδαμε ότι έχουμε για την τέταρτη χρονική περίοδο μόνο μία in-the-money επιλογή.Όλες οι υπόλοιπες τέσσερις είναι out-of-the-money και συνεπώς αφήνουμε το δικαιώμα να λήξει.Υπάρχει όμως και μία περίπτωση που δεν εξετάσαμε μέχρι στιγμής.Μπορεί σε έναν κόμβο να έχουμε μηδενικό κέρδος και έμμεσα να επιτάσσει τη λήξη του δικαιώματος όμως σε έναν επόμενο κόμβο που προέρχεται από τον πρώτο να έχουμε κέρδος θετικό.Έτσι το δυωνυμικό δένδρο μας δίνει μία διακριτοποιημένη αξιολόγηση , δηλαδή το πότε μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα ακόμη και αν για μεγάλο χρονικό διάστημα θα έπρεπε να μην το ασκήσουμε.Αυτό προφανώς δε γίνεται με τις συμβατικές μεθόδους όπως της DCF.

Μπορούμε να μελετήσουμε τι γίνεται άμα κοιτάξουμε για μία πενταετή περίοδο στην οποία αρχίζουμε με $S_o = 100$ και K = 100 για r = 10% και αστάθεια ίση με 30%.

Ο κώδικα που τα υλοποιεί φαίνεται παρακάτω:

```
%binomial tree%
S=100;
K=100;
T=5;
sd=0.3;
r=0.1;
dt=1;
u=exp(sd*sqrt(dt));
d=1/u;
p=(exp(r*dt)-d)/(u-d);
%arhikopiisi pinaka%
sizeA=0;
for i=1:(T+1)
    sizeA=i+sizeA;
end
A=zeros(T+1,sizeA);
A(1,1)=S;
for j=2:(T+1)
    for i=1:sizeA
        if j==2
            A(j,1)=S*u;
            A(j,2)=S*d;
        elseif j==3
            A(j,1)=(u^2)*S;
            A(j,2)=u*d*S;
            A(j,3)=(d^2)*S;
        elseif j==4
```

```
                A(j,1)=(u^3)*S;
                A(j,2)=(u^2)*d*S;
                A(j,3)=u*(d^2)*S;
                A(j,4)=(d^3)*S;
            elseif j==5
                A(j,1)=(u^4)*S;
                A(j,2)=(u^3)*d*S;
                A(j,3)=(u^2)*(d^2)*S;
                A(j,4)=u*(d^3)*S;
                A(j,5)=(d^4)*S;
            else
                A(j,1)=(u^5)*S;
                A(j,2)=(u^4)*d*S;
                A(j,3)=(u^3)*(d^2)*S;
                A(j,4)=(u^2)*(d^3)*S;
                A(j,5)=u*(d^4)*S;
                A(j,6)=(d^5)*S;
            end
        end
end
B=zeros(T+1,sizeA);
for j=(T+1):-1:1
    for i=1:(sizeA-1)
        if j==6
            B(j,i)=A(j,i)-K;
            if B(j,i) <= 0
                B(j,i)=0;
            end
        else
            B(j,i)=(A(j+1,i)*p+(1-
p)*A(j+1,i+1))*exp(-r*dt);
            B(j,i)=B(j,i)-K;
            if B(j,i) <= 0
                B(j,i)=0;
            end
        end
    end
end
%black and scholes%
f=@(h) exp(-(h.^2)/2);
d1=(log(S/K)+(r+0.5*(sd^2)*T))/(sd*sqrt(T));
d2=d1-sd*sqrt(T);
c1=integral(f,-Inf,d1)/(sqrt(2*pi));
c2=integral(f,-Inf,d2)/(sqrt(2*pi));
C=c1*S-c2*K*exp(-r*T);
```

Από τα παραπάνω βγάζουμε ότι έχουμε με την μεν δυωνυμική 348.1689 € ενώ με την Black-Scholes 42.75 €.Αυτό σημαίνει πως η δυωνυμική αποδεικνύεται ότι λαμβάνουμε ένα κέρδος πολλαπλάσιο από τη μέθοδο της Black-Scholes.Αυτό συμβαίνει διότι η δυωνυμική λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της τον τελευταίο χρόνο άμα συμβεί το ενδεχόμενο που όμως δεν υπεισέρχεται πουθενά ο παράγοντας της αστάθειας.Αν κοιτάξουμε τι γίνεται σε χρόνο (Τ-1) θα δούμε ότι έχουμε κέρδος ίσο με 145.9603 € δηλαδή το μισό και ούτε και για (Τ-2) ίσο με 34.9859 €.Γενικώς η μέθοδος αυτή όμως θέλει να βρεί τι κέρδος έχουμε για την αρχική χρονική στιγμή , δηλαδή η αναγωγή του κέρδους στη χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή αν έχουμε θετικό κέρδος η καθόλου σε σχέση με την τιμή διάθεσης.Ας δούμε τι βγάζει.

0	**0**	**0**	**0**	**0**
34.98588	0	0	0	0
82.21188	0	0	0	0
145.9603	34.98588	0	0	0
232.0117	82.21188	1.42E-14	0	0
348.1689	145.9603	34.98588	0	0

Αυτό μας λέει πως με αρχική τιμή ίση με $S_0 = 100$ και K = 200 δεν έχουμε παρά μηδενικό κέρδος.Ας δούμε τι γίνεται άμα αυξήσουμε το K με σταθερό το S_0.

0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
45.96031	0	0	0	0
132.0117	0	0.00E+00	0	0
248.1689	45.96031	0	0	0

Πάλι τα ίδια δηλαδή η αύξηση της τιμής διάθεσης σε σημείο που να ισχύει :

$$K \geq S_0$$

Δεν μας συμφέρει και δεν θέλουμε κάτι τέτοιο.Όμως η μέθοδος Black-Scholes μας λέει ότι και ακόμα σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε κέρδος ίσο με C = 15.6552 €.Επομένως αν έχουμε να λάβουμε μία κρίσιμη επενδυτική απόφαση και βασιστούμε στο υπόδειγμα Black-Scholes υπάρχει ο κίνδυνος (και όχι το ρίσκο) να πάρουμε λάθος απόφαση που ναι μεν δεν θα μας επιφέρει ζημία αλλά δε θα μας επιφέρει και κανένα κέρδος.Αντιθέτως η δυωνυμική μέθοδος είναι πιο ασφαλής.Ας δούμε τι γίνεται άμα μειώσουμε το K = 50.

50	**0**	**0**	**0**	**0**
84.98588	24.08182	0	0	0
132.2119	50	4.881164	0	0
195.9603	84.98588	24.08182	0	0
282.0117	132.2119	5.00E+01	4.881164	0
398.1689	195.9603	84.98588	24.08182	0

Εδώ βλέπουμε ότι έχουμε κέρδος ίσο με 50 € ενώ η Black-Scholes μας δίνει C = 69.24 € δηλαδή η τελυταία μέθοδος μας μεγαλοποιεί το κέρδος.Επίσης το τελευταίο χρόνο αποκομίζουμε πολύ μεγαλύτερα κέρδη αν συμβεί το γεγονός $S_0 u^5$.Ας δούμε τι γίνεται και άμα αυξήσουμε την αβεβαιότητα έστω σε σ = 50% τότε.

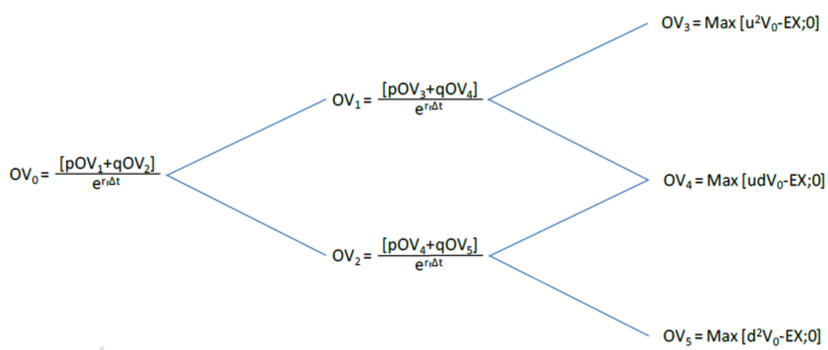
50	0	0	0	0
114.8721	10.65307	0	0	0
221.8282	50	0	0	0
398.1689	114.8721	10.65307	0	0
688.9056	221.8282	5.00E+01	0	0
1168.249	398.1689	114.8721	10.65307	0

Προφανώς και μεγαλύτερη αβεβαιότητα σημαίνει και μεγαλύτερα κέρδη αλλά και πάλι στην αρχή θα πάρουμε 50 €.Η Black-Scholes δίνει μόλις 3 μονάδες αύξηση στα 72 €.

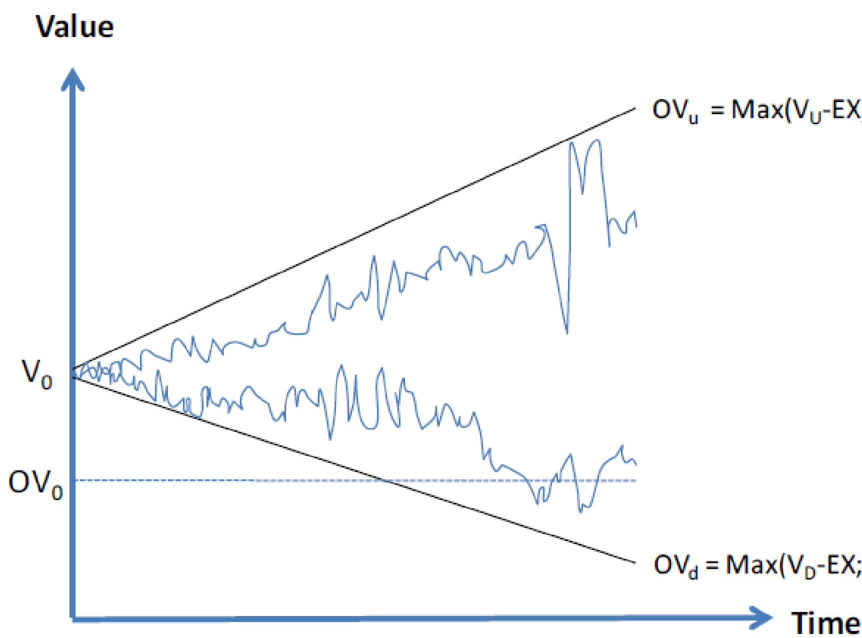
Άρα γενικά αν συμβολίσουμε το Κ με EX από το τιμή εξάσκησης (διάθεσης) – exercise price – μπορούμε να συμπεράνουμε ότι προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο:

$$OV_1 = \frac{pOV_{2u} + (1-p)OV_{2d}}{e^{rdt}}$$

Και ένα γενικό σχήμα απλοποιημένο που μας δείνχει τους υπολογισμούς των παρουσών αξιών είναι το παρακάτω για δυο χρονικές περιόδους.



Όπου θα πρέπει να συμπληρώσουμε ότι το OV_o η S_o υπολογίζεται σε σχετικούς όρους και όχι απόλυτους , δηλαδή σε σχέση με το αρχικό S , τα u και d και το επιτόκιο με μηδενικό ρίσκο r.Τέλος θεωρούμε ότι το S ακολουθεί μία στοχαστική διεργασία δηλαδή μία τυχαία γεωμετρική κίνηση Brown.Δηλαδή η πιθανότητα του u και d παραμένει σταθερή σε όλες τις χρονικές περιόδους άρα και η πληροφορία έρχεται με ομαλούς ρυθμούς και το S δεν κάνει απότομες μεταβολές πάνω η κάτω από την αρχική του τιμή.Αυτό βέβαια δεν μπορεί να ισχύσει για όλες τις επενδύσεις όπως για παράδειγμα ένα τουριστικό κέντρο/θέατρο , όπου η ζήτηση είναι απρόβλεπτη κάποιες χρονικές περιόδους πριν κλεισθούν οι συμβάσεις η ένα αιολικό πάρκο που δεν γνωρίζουμε το αιολικό δυναμικό.Όμως έχει πλήρη εφαρμογή σε ένα εμπορευματικό κέντρο , σε έναν ατμοηλεκτρικό και πυρηνικό σταθμό η σε μία χαλυβουργία.Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως το S σε μία επόμενη χρονική στιγμή δεν κινείται ακριβώς πάνω στην ευθεία που ορίζει ο παράγοντας πολλαπλασιασμένος με τα u και d αλλά κάπου ανάμεσα και με μεταβαλλόμενο ρυθμό.Οι δύο τελικές τιμές του $OV_{final} = B_{final} = \max(A(j,i) - K, 0)$ σχηματίζουν τον λεγόμενο και ως κώνο της αβεβαιότητας δύο τυχαίων διαδρομών.Στην ουσία πρόκειται για τον αντίθετης κατεύθυνσης γνωστό μας κώνο όπου θεωρούμε το αντίθετο δηλαδή ότι η αβεβαιότητα αυξάνει με το πέρας του χρόνου.



Από το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να εξάγουμε το εξής χρήσιμο συμπέρασμα.Οι διακυμάνσεις του B/V είναι η αστάθεια του έργου.Παρατηρούμε ότι εκεί που έχουμε μεγαλύτερη αστάθεια πετυχαίνουμε και μεγαλύτερες τιμές άρα μεταξύ δύο έργων με ίδια αναμενόμη απόδοση θα επιλέξουμε αυτό με τη μεγαλύτερη αστάθεια.Μπορούμε επομένως να δούμε τι γίνεται με ένα παράδειγμα η μελέτη περίπτωσης εδώ ένα αιολικό πάρκο (υποθετικό).

4.2 Μελέτη περίπτωσης Αιολικό πάρκο

Έστω ένα αιολικό πάρκο που σκοπεύουμε να κατασκευάσουμε με συνολική δυναμικότητα τα 5 MW.Θεωρούμε ότι θα επενδύσουμε αρχικό κεφάλαιο τα πρώτα 2 χρόνια 0.5 και 1 εκ. € αντιστοίχως και η διάρκεια επενδυτικής ζωής του έργου θα είναι τα 10 χρόνια.

- Αρχικά θα υπολογίσουμε τις DCF του επενδυτικού έργου.Αυτό σημαίνει πως υπολογίζουμε τα έσοδα και τα κόστη.Κατόπιν την Καθαρή Θέση και τέλος τα DCF.

- Τα έσοδα δίνονται από την εξής γενικό τύπο:

  [Φόρος επιδότησης ηλεκτρικού ρεύματος]x[Ηλεκτροπαραγωγή] =

  $a(1-b)cde$ όπου

  α = μικτή ηλεκτροπαραγωγή

  b = απώλειες δικτύου

  c = διαθεσιμότητα Α/Γ

  d = τιμή πώλησης ηλεκτρικού ρέυματος

  e = πριμοδότηση στην τιμή πώλησης η ταρίφα

- Μετά έχουμε το δεύτερο μέρος που είναι τα κόστη και περιλαμβάνουν τα εξής:

  LL = κόστος ενοικίασης γής αιολικού πάρκου (=0 αν έχει αγορασθεί η γής)

  INS = ασφάλεια επενδυτικού έργου (εξοπλισμού,δικτύου,κτλ)

  DC = κόστος παροπλισμού (δηλαδή στο πέρας των 20 ετών πόσο θα μας κοστίσει να δώσουμε για την κατεδάφιση της βάσης της Α/Γ , την αποσυναρμολόγηση του δικτύου Υ/Τ , κοκ)

  OPC = κόστος ιδιοκατανάλωσης

- Έτσι βρίσκουμε τα κέρδη προ φόρων και αποσβέσεων , EBITDA = Έσοδα – Κόστη.
- Θεωρούμε Απόσβεση = 20% άρα βρίσκουμε το EBIT = EBITDA – Αποσβέσεις.
- Θεωρούμε Φορολογία = 20% και έτσι βρίσκουμε τα κέρδη μετά φόρων = EBIT – Φόροι.
- Κατόπιν αφαιρούμε τα λειτουργικά και σταθερά έξοδα (εργατικά,κτλ) οπότε βρίσκουμε τις Καθαρές Ταμειακές Ροές (FCF) = Κέρδος μετά φόρων + Αποσβέσεις – [Επενδύσεις σε σταθερά και λειτουργικά έξοδα].
- Αρχικά θα υπολογίσουμε τα έσοδα.Η σχέση που μας δίνει την καθαρή ηλεκτροπαραγωγή είναι η εξής:

$$P_n = PA(1-n_{loss})$$

Ξέρουμε ότι έχουμε PI = 5 MW και θεωρούμε διαθεσιμότητα της κάθε Α/Γ και συνολικά του Α/Π στο 98% του χρόνου , δηλαδή πλην συντήρησης.Επίσης θεωρούμε πως όλοι οι βαθμοί απώλειας δίνουν γινόμενο ίσο με 2%.Το P είναι $P = PI(CF \cdot 24 \cdot 365)$ = 16644 MWh θεωρώντας τυπικό συντελεστή φορτίου , CF , ίσο με 38%.Επομένως βρίσκω $P_{net} = 15984.9 MWh$.Αυτό αποτελεί και μία εκτίμηση της ετήσιας ηλεκτροπαραγωγής.

Το επόμενο που θέλουμε είναι ο Φόρος που επιβαρύνει το κράτος στην ουσία για επιδότηση του ηλεκτροπαραγωγού με ΑΠΕ η αλλιώς ταρίφα.Αυτή η τιμή δίνεται ως ποσοστό της kWh και ένα πριμ.Εμείς θεωρούμε ως S την ωριαία τιμή της kWh η οποία και είναι ασταθής.Όμως η παραγωγή γίνεται σε ετήσια βάση , δηλαδή η εκτιμησή της , και συνεπώς μία λύση είναι να υπθέσουμε σταθερή ηλεκτροπαραγωγή.Θεωρούμε ως παραδοχή ένα Down-Lift-Cost ίσο με 5 €/kWh και μία πριμοδότηση από το κράτος για τις πρώτες 35000 hr ίσο με 20 €/kWh.Δηλαδή μας καλύπτει η επιδότηση για 10 χρόνια σχεδόν.

- Τώρα θα ασχοληθούμε με τα κόστη τα οποία μπορούμε να τα θεωρήσουμε ίσα με 1 εκ. €.
- Θεωρούμε απόσβεση ίση με 20% επί του αρχικού κόστους κτήσης των Α/Γ και κατασκευής του Α/Π που είναι 500 χιλ. €.

Επομένως συνολικά βρίσκουμε FCF = 1565066 €.

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός του κόστους καθαρής θέσης.Εμπειρικά μπορούμε να τον πεοσδιρίσουμε μεταξύ του 5 – 10 % των Εσόδων.Εμείς υιοθετούμε την παραδοχή του 7.5% και βρίσκουμε CE (cost of equity) = 124789.9 €.

Με την μέθοδο της ΚΠΑ και επιτόκιο δανεισμού r =10% και με βάση όλες τις παραπάνω παραδοχές βρίσκουμε:

YEAR oper	t	CF	PV	Profit/Loss
0	**1**	€ (500,000.00)	€ (500,000.00)	-
0	2	€ (1,000,000.00)	(826,446.28)	-
1	**3**	€ 665,065.76	499,673.75	499,673.75
2	**4**	€ 665,065.76	454,248.86	953,922.61
3	5	€ 665,065.76	412,953.51	1,366,876.12
4	**6**	€ 665,065.76	375,412.28	1,742,288.41
5	**7**	€ 665,065.76	341,283.89	2,083,572.30
6	8	€ 665,065.76	310,258.09	2,393,830.39
7	**9**	€ 665,065.76	282,052.80	2,675,883.19
8	**10**	€ 665,065.76	256,411.64	2,932,294.83
9	11	€ 665,065.76	233,101.49	3,165,396.32
10	**12**	€ 665,065.76	211,910.45	3,377,306.77

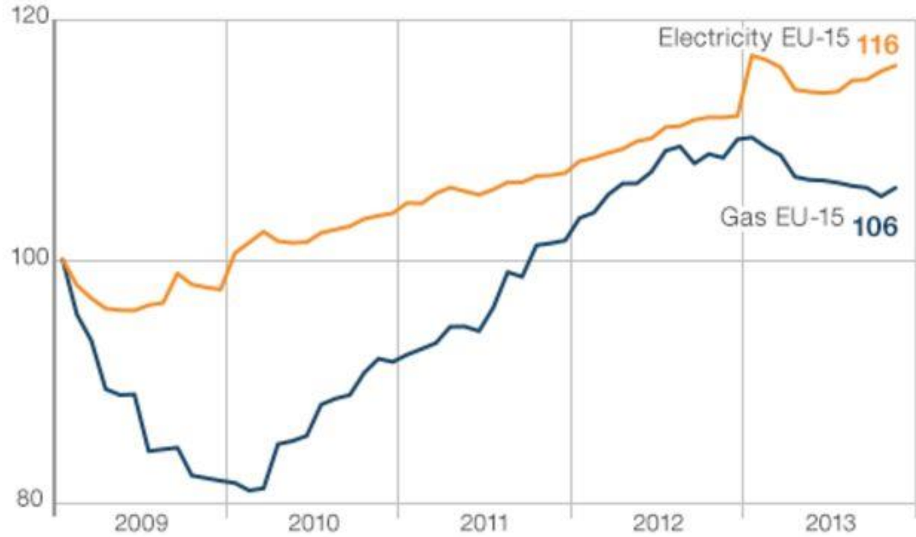
NPV	€	2,760,094.91

Αυτό σημαίνει πως έχουμε πλέον κέρδος από τον4^{ο} χρόνο.Υπάρχει όμως μία περίπτωση να συμφέρει να εγκαταλείψουμε το έργο πριν τον 4^{ο} χρόνο έστω από τον 3^{ο} που έχουμε ζημία.

Ας δούμε τι γίνεται με τη δυωνυμική μέθοδο.
Να επισημανθεί ότι αυτή η μέθοδος λαμβάνει υπόψι και τις πιθανές αρχικές εκβάσεις/διακλαδώσεις στα πρώτα δύο χρόνια της κατασκευής τα οποία εμείς στην NPV τα ορίσαμε ως έτος 0.Δηλαδή εμείς όταν στο πρώτο έτος κατασκευής δίνουμε 0.5 εκ. € κοιτάζουμε με βάση την αστάθεια όλες τις πιθανές εκβάσεις όπως να πουλήσουμε δικαίωμα πώλησης του έργου πριν δώσουμε το 1 εκ. €.
Βασικό κομμάτι στον υπολογισμό του δυωνυμικού δένδρου είναι η εκτίμηση της αστάθειας.Σε προηγούμενο παράδειγμα την είχαμε εκτιμήσει στο 30%.Αυτό είναι και ουσιαστικά το πιο δύσκολο κομμάτι των ΠΔ και της ανάλυσης τους (ROV).Η εκτίμηση της αστάθειας μπορεί να γίνει είτε με εσωτερικές στοχαστικές μεθόδους είτε με εξωτερικές.Στην περίπτωση επενδύσεων σε ΑΠΕ συνίσταται η χρήση της εξωτερικής μεθόδου.Με αυτή τη μέθοδο η αστάθεια εκτιμάται από την τιμή πώλησης του ρεύματος και την ηλεκτροπαραγωγή.Καθώς όμως έχουμε υποθέσει σταθερή ηλεκτροπαραγωγή τότε αυτό που μας απασχολεί είναι η διακύμανση της τιμής.Αυτή την ονομάζουμε και ως **δίδυμο ασφαλείας (twin security)**.Αυτό σημαίνει πως ανταλλάσσεται ως δικαίωμα στις χρηματοοικονομικές αγορές και έχει τα ίδια χαρακτηριστικά ρίσκου (τέλεια συσχέτιση) με ένα πραγματικό έργο Α/Π , στην ουσία πρόκειται για το γνωστό μας S.Βέβαια πρέπει να ξέρουμε ότι η διακύμανση της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας είναι κάτι το αρκετά σύνθετο ως προς τον προσδιορισμό ειδικά αν λάβουμε υπόψι ότι η ηλεκτρική ενέργεια είναι ένα συνεχές μη αποθηκεύσιμο αγαθό και αυτό επιδρά ανά πάσα στιγμή , δηλαδή ακόμα και δευτερόλεπτο , στην τιμή της.Παρακάτω φαίνεται αυτή η διακύμανση συναρτήσει της τιμής μιας από τις πρώτες ύλες στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.

European household electricity and gas prices

Index points



Source: HEPI by Energie-Control Austria, MEKH, VaasaETT

Αυτό σημαίνει πως η αστάθεια μπορεί να είναι πολυπαραγοντική δηλαδή να εξαρτάται από τη ζήτηση της αγοράς , τα επιτόκια , τις τιμές των ανταγωνιστικών πρώτων υλών (πετρέλαιο , λιγνίτης και ΦΑ) , και άλλα πολλά.Εμείς θα ακολουθήσουμε την παραδοχή της κίνησης κατά Brown.Υπάρχουν βέβαια αρκετές κατηγορίες εκτίμησης της αστάθειας όπως η χρήση χρονοσειρών και εμπειρικές.Μία καλή προσέγγιση είναι η χρήση πολύ μεγάλου χρονικού διαστήματος και η υιοθέτηση της τελικής τιμής λίγο πριν τη λήξη του 1ου χρόνου.Ένας τρόπος εκτίμησης της αστάθειας είναι από ιστορικές προθεσμιακές τιμές για παρελθοντικά έτη και αναγοντάς την στο τέλος στο έτος.Αυτές οι τιμές συμβολίζονται με f_i και έχουν πολύ μικρή διαφορά από τις τιμές S.Εμπειρικά μπορούμε να βρούμε κάποια μοντέλα αλλά δυστυχώς τα περισσότερα απαιτούν την αγορά τους οπότε μπορούμε να αρκεστούμε σε μία καλή παραδοχή της αύξησης των F με το χρόνο δηλαδή:

$$F_i = F_o + a \cdot t$$

όπου ως t νοείται η μία μέρα.Ο τύπος που δίνει την αστάθεια σε χρονικό διάστημα ενός έτους είναι:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1}^{n} (\ln(f_i) - \ln(f_{i-1}) - \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (\ln(f_i) - \ln(f_{i-1}))^2}$$

Και κατόπιν ο τύπος που δίνει την ετήσια αστάθεια ίσος με:

$$\sigma_{year} = \sigma_E \sqrt{365}$$

Θεωρούμε επομένως ένα α = 0.1 και

$$F_o = S_o e^{(r+s-c)t}$$

όπου με s συμβολίζουμε το κόστος αποθήκευσης το οποίο από μόνο είναι θέμα συζήτησης ολόκληρης μελέτης και έστι το θέτουμε ως 0% ένα λογικό νούμερο αφού το ρεύμα δεν αποθηκεύεται και το c είναι η απόδοση που προκύπτει αν είναι γνωστό το F και μόνο γιαυτό τη θέτουμε ίση με 10% ένας λογικός αριθμός.Άρα βρίσκουμε συνολικά για 365 ημέρες.

day	Fi	ln(Fi)-ln(Fi-1)/n-1	(ln(Fi)-ln(Fi-1))^2/n	σE
1	0.2	0	0	
2	0.3	0.001113915	0.000450416	
3	0.4	0.000790335	0.000226742	
4	0.5	0.000613032	0.000136419	
……..	……..	……..	……..	
364	36.5	7.53705E-06	2.06211E-08	
365	36.6	7.51643E-06	2.05085E-08	
total		0.014311775	0.001353435	11.38%
			σyear	**11.38%**

Εδώ επειδή το διάστημα τιμών είναι 365 ημέρες τα δύο σ ταυτίζονται και βρίσκουμε τελικά σ = 11.38%.Ένα νούμερο σχετικά λογικό γιατί για Α/Π κυμαίνεται όντως στο 10-25%.Η υπόλοιπη μεθοδολογία είναι η γνωστή δυωνυμική μέθοδος που είχαμε δεί πρωτύτερα.Επίσης ορίζουμε K =500000 €.Άρα κάνοντας χρήση του κώδικα σε Matlab βρίσκουμε:

t	καλύτερο απ.				χειρότερο απ.
0	€ 165,066.00	€ 888.73	€ -	€ -	€ -
1	€ 245,225.07	€ 93,529.12	€ -	€ -	€ -
2	€ 335,045.56	€ 165,066.00	€ 29,687.01	€ -	€ -
3	€ 435,691.93	€ 245,225.07	€ 93,529.12	€ -	€ -
4	€ 548,469.00	€ 335,045.56	€ 165,066.00	€ 29,687.01	€ -
5	€ 674,838.87	€ 435,691.93	€ 245,225.07	€ 93,529.12	€ -

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το έτος 4ο με βάση το NPV κερδίζουμε ποσό ίσο με 1,742,288.41 € ενώ με βάση το ROV το δυωνυμικό μας δίνει ποσό ίσο με το 1/3 ή 548469 €.Άρα εμείς μπορούμε να αναλογιστούμε ότι δεν καλύπτουμε τη ζημία μας και καλύτερα να πουλήσουμε στην τιμή Κ που ορίσαμε ίση με Κ = 500000 € << 2000000 €.Άρα η μέθοδος των ΠΔ μας προειδοποιεί ότι δεν είναι όντως τόσο ελκυστική η επένδυση όσο φαίνεται με την ΚΠΑ και αν ασκήσουμε δικαιώμα διακοπής στο 4ο έτος βγαίνουμε χαμένοι κατά 1.5 εκ. €.Η λογική θα έλεγε να ορίσουμε ένα τέτοιο Κ που να είναι μεγαλύτερο από το αρχικό κόστος επένδυσης δηλαδή έστω οριακά Κ = 1500000 €.Τότε όμως:

t	καλύτερο απ.					χειρότερο απ.
0	€	-	€ -	€ -	€ -	€ -
1	€	-	€ -	€ -	€ -	€ -
2	€	-	€ -	€ -	€ -	€ -
3	€	-	€ -	€ -	€ -	€ -
4	€	-	€ -	€ -	€ -	€ -
5	€	-	€ -	€ -	€ -	€ -

Βγαίνουμε παντελώς χαμένοι αν αποφασίσουμε να πουλήσουμε το δικαίωμα.Φυσικά κάποιος θα σκεφθότανε μία άλλη στρατηγική όπως αναβολή δικαιώματος (deferral option).Όμως αν δούμε τι γίνεται στο 10ο έτος με τη μέγιστη δυνατή πορεία του δένδρου βρίσκουμε : $B = S \cdot u^{10} = 20754000$ € άρα όντως κάποια χρονική στιγμή μετά το 5ο έτος συμφέρει η ανάληψη του δικαιώματος και φυσικά το NPV κάνει λόγο για ποσό ίσο με 2,760,094.91 € δηλαδή η ROV (ΑΠΔ) μας λέει ότι υπάρχει η δυνατότητα να βγάλουμε και ποσό είκοσι φορές πάνω από αυτό της ΚΠΑ.Φυσικά τα πρώτα χρόνια δεν έχουμε με αυτή την ανάλυση κανένα κέρδος αλλά κατόπιν μπορούμε να εισπράξουμε πολύ μεγάλα ποσά σε σχέση με τη ΚΠΑ.Όλα όμως βασίστηκαν σε μία προυπόθεση , την εκτίμηση της αστάθειας.Αυτή εξαρτάται τόσο από το είδος της επένδυσης που εξετάζουμε (πχ ρεύμα , φορτηγά , εμπορεύματα , κτλ) αλλά και από τα στοχαστικά μοντέλα που θα το εκτιμήσουν.Το τελευταίο εμπίπτει σε ένα νεό και καινούριο θέμα που η παρούσα διπλωματική δε θα εξετάσει.

Ένας ακόμα αλγόριθμος που υλοποιεί τα παραπάνω για συνδυασμό call-put αγοράς και πώλησης και μας δίνει την αξία του δικαιώματος αυτήν του Cox – Ross Rubinstein.Ο κώδικας που την υλοποιεί είναι ο παρακάτω:

```
%binomial cox ross rubinstein model%
K=100;
S0=50;
r=0.1;
vol=0.1;
dt=0.1;
steps=10;
type='CALL';
sinthiki=false;
a=exp(r*dt);
u=exp(vol*sqrt(dt));
d=1/u;
p=(a-d)/(u-d);
A=nan(steps+1,steps+1);
A(1,1)=S0;
for idx=2:steps+1
    A(1:idx-1,idx)=A(1:idx-1,idx-1)*u;
    A(idx,idx)=A(idx-1,idx-1)*d;
end
B=nan(size(A));
switch type
    case 'PUT'
        B(:,end)=max(K-A(:,end),0);
    case 'CALL'
        B(:,end)=max(A(:,end)-K,0);
end
steps = size(A,2)-1;
for idx = steps:-1:1
    B(1:idx,idx)=exp(-r*dt)*(p*B(1:idx,idx+1)+(1-
p)*B(2:idx+1,idx+1));
    if sinthiki
        switch type
            case 'PUT'
                B(1:idx,idx)=max(X-
A(1:idx,idx),B(1:idx,idx));
            case 'CALL'
                B(1:idx,idx)=max(A(1:idx,idx)-
X,B(1:idx,idx));
        end
    end
end
%option price%
Price=B(1);
```

5.1 Μελέτη περίπτωσης – Δρομολόγια και επένδυση σε δρόμο

Μία ενδιαφέρουσα μελέτη επένδυσης είναι αυτή της κατασκευής ενός οδικού δικτύου άμεσα παρεπόμενο μίας σοβαρής μελέτης logistics σε εθνικό και διεθνές επίπεδο.Για

παράδειγμα σε επίπεδο Ε.Ε. υπάρχει συγκεκριμένο παιδίο στρατηγικής επενδύσεων το οποίο έχει καθορισθεί με συγκεκριμένες βίβλους και πλάνα όπως το TEN-T τα οποία αποβλέπουν σε μεγαλύτερη προσβασιμότητα (των δρόμων) και της ασφάλειας και ρυθμού κυκλοφορίας.Τα παραπάνω είναι γνωστά και ως βιωσιμότητα των μεταφορών.Αυτό αφορά άμεσα το κομμάτι των logistics καθώς η κατασκευή ενός μεγάλο δρόμου η οδικής αρτηρίας συντελεί στην κυκλοφοριακή αποσυμφόρηση και συνεπώς σε γρηγορότερα , ασφαλέστερα και περισσότερα δρομολόγια.Ειδικότερα υποστηρίζεται μία πολυτροπική μεταφορά ειδών.Ενισχύεται η τοπική κίνηση μέσω της σύνδεσης με τον κύριο οδικό άξονα.Αναπτύσσονται και ενισχύονται φιλικά προς το περιβάλλον μεταφορικά συστήματα ειδικά με την πολυτροπική μεταφορά και την προώθηση χαμηλών εκπομπών βαρέων οχημάτων.Οδηγεί σε καλύτερα σιδηροδρομικά δίκτυα.Συνεπώς επικεντρώνουμε την ερευνά μας στο κομμάτι της επένδυσης (project) ενός συστήματος εξυπηρέτησης της μεταφοράς εμπορευμάτων.
Επομένως κρίνεται απαραίτητο να λάβουμε υπόψιν μας τα κατώθι δεδομένα:

- Εθνικό και τοπικό ΑΕΠ και ρυθμός αναπτυξής του
- Δημογραφικά χαρακτηριστικά (που αφορούν το μέγεθος και ροή εμπορευμάτων)
- Στοιχεία απασχόλησης
- Γεωοικονομικά χαρακτηριστικά της περιοχής όπου θα κατασκευασθεί ο δρόμος
- Πολιτικό πλαίσιο συμμόρφωσης (Ε.Ε.)
- Υπάρχον οδικό δίκτυο της περιοχής (καθώς και σιδηροδρομικό)
- Πληροφορίες σχετικά με ανταγωνιστικούς τρόπους μεταφοράς των εμπορευμάτων στην περιοχή
- Υπάρχουσες και σχεδιαζόμενες επενδύσεις στην περιοχή που μπορούν να επηρεάσουν την επένδυση
- Στατστικά στοιχεία προτύπων κίνησης και δρομολόγησης
- Προσβασιμότητα της περιοχής
- Τεχνικά χαρακτηριστικά
- Συχνότητα και CSM (customer service management)
- Χωρητικότητα η ικανότητα ικανοποίησης δρομολογίων

Τα παραπάνω μπορούν να προσδιορισθούν εύκολα και είναι το πρώτο βήμα στην αξιολόγηση του πλάνου επένδυσης.Το δεύτερο βήμα είναι τι θέλουμε να επιτύχουμε η ακριβέστερα τι μπορούμε να επιτύχουμε με βάση τη στρατηγική που μας έχει επιδοθεί (εδώ η Λευκή βίβλος των μεταφορών της Ε.Ε.).Αυτά θα μπορούσαν η πρέπει να είναι:

- Μείωση της υπάρχουσας κυκλοφοριακής συμφόρησης στους ήδη υπάρχοντες κόμβους μεταφοράς
- Αύξηση της αποτελεσματικότητας του σχεδιαζόμενου δικτύου μειώνοντας τα λειτουργικά έξοδα και τα ατυχήματα και αυξάνοντας τις ταχύτητες κυκλοφορίας παράλληλα
- Αύξηση αξιοπιστίας και ασφάλειας του σχεδιαζόμενου οδικού δικτύου
- Μείωση ρύπανσης και κατ'επέκταση των εκπομπών σωματιδίων
- Προσβασιμότητα στις γύρω περιοχές πέριξ του δικτύου

Βασική συνιστώσα των από πάνω είναι η ανάλυση της βάσης κόστους δεδομένων η CBA. Επόμενο βήμα είναι η πρόβλεψη των εισροών για την αναλυσή μας.Αυτά σε ένα δίκτυο logistics είναι η **ανάλυση ζήτησης** και η οποία μπορεί να επιμεριστεί σε:

- Δημογραφικά στοιχεία χρηστών
- Κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες όπως το τοπικό ΑΕΠ και μακροοικονομικά στοιχία όπως το ποσοστό ανεργίας και εισοδημάτων
- Η βιομηχανική δομή της περιοχής ειδικά η συγκέντρωση των συναφών δραστηριοτήτων και των κέντρων διανομής και της συναφούς δομής των υπαρχουσών (η μη) λειτουργιών και υπηρεσιών logistics
- Χαρακτηριστικά ζήτησης εμπορευμάτων σε μεταφορά και ελαστικότητα ως προς τον χρόνο , την ποσότητα και φυσικά την τιμή τους τα οποία και σαφώς αλλάζουν με το μέγεθος της επένδυσης
- Χωρητικότητες όπως περιορισμοί από ανταγωνιστικούς κόμβους και ενδεχόμενες μελλοντικές επενδύσεις (σε ανταγωνιστικούς κόμβους) οι οποίες θα φέρουν απαξίωση της επένδυσης και σαφής μείωση των χρηματοροών (δηλαδή μορφή ρίσκου)
- Ικανότητα εξυπηρέτησης όγκου οχημάτων
- Αλλαγή στη στρατηγική και το μάνατζμεντ των πολιτικών μεταφοράς όπως είναι ο περιορισμός χρήσης ρυπογόνων βαρέων οχημάτων (HTGV) σε συγκεκριμένους οδικούς κόμβους καθώς και επιβολή φορολογίας tonnage , εκπομπής ρύπων (κατηγορίες Euro) και αποσυμφόρησης
- Πιθανές τεχνολογικές μεταβολές
- Στρατηγικές τιμολόγησης οι οποίες άμεσα επηρεάζουν το μέγεθος ζήτησης και διανομής από κόμβο σε κόμβο.Εδώ μπορεί να γίνει η σύγκριση και η ανάλυση ρίσκου με διαφορετικά σενάρια.Εξωτερικότητες και επιδοτήσεις λαμβάνονται επίσης υπόψιν

Άρα βασικό μας παράγοντας είναι η ζήτηση δηλαδή ο προσδιορισμός της η αλλιώς η προβλεψή της.Μία εύκολη αντιμετώπιση είναι η πρόβλεψη της ζήτησης χωρίς το επενδυθέν έργο η τους υπάρχοντες κόμβους.Η τυχόν αποκλίσεις που σημειώθηκαν στο παρελθόν δηλαδή ένας προσδιορισμός στο ρίσκο και τέλος η ανάλυση ευαισθησίας των προτύπων ζήτησης – δηλαδή η ποσοστιαία εκτίμηση της ογκομετρικής παροχής και της συμμετοχής του κάθε τρόπου μεταφοράς.Αυτή η ανάλυση κυκλοφορίας είναι κάθε άλλο παρά απαραίτητη για τον προσδιορισμό της ζήτησης και συνεπώς των ενδεχόμενων μεταβολών των χρηματοροών του σχεδιαζόμενου δικτύου.Ενδιαφέρον στην ανάλυση της πρόβλεψης κυκλοφορίας είναι εκείνο το μοντέλο με ανατροφοδότηση δηλαδή αυτό ακριβώς που μας χρησιμεύει το Δένδρο Αποφάσεων (Tree decision analysis) σε κάθε στάδιο της επένδυσης.Επομένως με τη χρήση χρονοπινάκων κυκλοφοριάς όπως της κυκλοφοριακής ταχύτητας το μεταφράζουμε ρε ροές εισροών και συνεπώς κρίνουμε αν συμφέρει η συνέχεια , η αναστολή , η επέκταση η ακόμη και η προσφορά της επένδυσης σε άλλων για αγορά.Συνεπώς έχουμε να κάνουμε με την εφαρμογή εξάσκησης δικαιωμάτων (options) πάνω σε γεωοικονομικά κριτήρια αλλά και τον αντικτυπό τους.Να επισημανθεί πως όσο μεγαλύτερο το μέγεθος του έργου επένδυσης τόσο και πολυπλοκότερο το μοντέλο που θα πρέπει να εφαρμοσθεί.Συνεπώς ένα έργο όπου πρέπει να λαμβάνεται υπόψι η προτιμητέα επιλογή των εταιριών (3PL) για επιλογή χρήσης του , η δέσμευση χρήσης του και οι πιθανές απαραίτητες αλλαγές συνθέτουν από μόνα τους ένα πολύπλοκο μοντέλο.Εμείς στο τέλος οι αναλυτές της επένδυσης καλούμαστε να αποφασίσουμε τι δικαίωμα θα εξασκήσουμε.Επόμενο ενδιαφέρον στοιχείο που πρέπει να αποκομίσουμε είναι οι εκροές της ανάλυσης κόστους.Αυτές μπορεί να είναι:

- Αριθμός οχημάτων σε απόλυτους αριθμούς και συναρτήσει άλλων μεγεθών όπως φορτίο και κίνηση η και μήκος
- Αριθμός οχημάτων μεταφοράς ανά κατηγορία
- Τονάζ και τονοχιλιόμετρα
- Χρονικές αποστάσεις

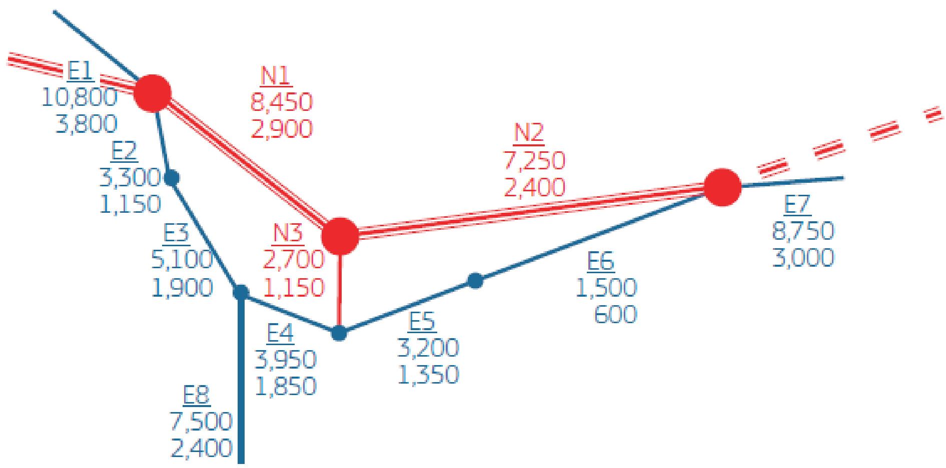
Στις εκροές συνιπολογίζονται και κάποια αποτελέσματα όπως η υπάρχουσα δομή της κυκλοφορίας (πχ 1000 οχήματα/ημέρα στον κόμβο Α) , η πιθανή απόκλιση (κέρδος) κυκλοφορίας από άλλα δίκτυα και τέλος η δημιουργηθείσα κυκλοφορία.

Αυτό που μας ενδιαφέρει εν τέλει είναι σαν επενδυτές η βιωσιμότητα του έργου δηλαδή η εξάσκηση ενός δικαιώματος.Δεν αφορά μόνο το χρηματοοικονομικό κομμάτι των ροών αλλά και το σχεδιαστικού δηλαδή το κομμάτι του μηχανικού που μεταφράζεται σε διαφορετικά σενάρια ζήτησης και επιπτώσεων καθώς και την εμφάνιση συνέργειας με άλλα έργα.Η ανάλυση δικαιωμάτων γίνεται εν παραλλήλω με την ανάλυση βιωσιμότητας.

Κατόπιν ακολουθεί η χρηματοοικονομική ανάλυση με πρώτα τα **κόστη επενδύσεων** – αρχικών και μη.Αυτά κατά βάση είναι κόστη μηχανικής φύσεως όπως κόστος απόκτησης παγίων (εδάφους χρήσης , κτλ) , διανοίξεων , κατασκευής γεφυρώσεων , διαβάσεις , παρεκκλίσεις και τα συναφή (κυρίως έργα πολιτικού μηχανικού).Ακολουθούν τα κόστη **Λειτουργίας και Συντήρησης (Λ&Σ)**.Αυτά αφορούν επιδιώρθωση υφιστάμενων δομών , συντήρηση , ανταλλακτικά , συστήματα παρακολούθησης , μισθοί προσωπικού σέρβις , πάγια έξοδα ,έξοδα διοίκησης και απόσβεσης.Αυτά μπορεί να είναι εντατικά και περιοδικά.Στη συνέχεια έχουμε τις **χρηματοροές** δηλαδή την εκτίμηση αυτών που γίνεται με βάση των εισροών αρχικών δεδομένων δηλαδή κυκλοφοριακής ταχύτητας , τονάζ και πολλών άλλων όπως έχουν ήδη αναφερθεί.Οι χρηματοροές είναι λόγο ασαφές ως προς το ποιος τις αποδίδει.Εμείς σαν επενδυτές πρέπει να ξέρουμε από ποιον θα λάβουμε χρήματα στη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου για την κατασκευή ενός δρόμου.Αυτό γίνεται με την καταβολή τελών χρήσης η διοδίων μπορεί όμως και να γίνει μία έμμεση εκτίμηση του κέρδους που αποκομίζουν οι εταιρίες μεταφοράς από το νέο οδικό δίκτυο το οποίο μεταφράζεται σε επιπλέον φορολογικά έσοδα και δασμούς που θα πιστωθούμε εμείς οι επενδυτές (δηλαδή το κράτος η μισθωτής φόρων).Μπορεί επίσης να έχουμε ράντες από κονδύλια η αλλιώς επενδύσεις από έναν φορέα όπως είναι η Ε.Ε. ειδικά όταν η επένδυση κρίνεται ασύμφορη τα πρώτα χρόνια (καθώς δεν προσελκύει το απαραίτητο ογκομετρικό πλεόνασμα για κέρδη logistics).Κατόπιν όλων των παραπάνω προβαίνουμε ως εν δυνάμει επενδυτές στη μικροοικονομική θεώρηση του προιόντος μας (οδικού δικτύου) αναλύοντας καπέλα και πλεονάσματα τιμών όπως γίνεται σε άλλες επενδύσεις (πχ την ενέργεια).Εδώ να αναφερθεί πως μπορεί να έχουμε μείωση των εσόδων αν έχουμε μία δυσανάλογη αύξηση του μήκους δρομολόγησης των εμπορευμάτων λόγω κόστους καυσίμων ακόμα και αν βελτιώθηκε η αποσυμφόρηση η ακόμα και αύξηση του κόστους συντήρησης του στόλου μιας εταιρίας (μεγαλύτερες διαδρομές).Επομένως έχουμε από τη μεριά του χρήστη ένα πλεόνασμα του καταναλωτή όπως μιας 3PL που κερδίζει από το συνδυασμό αριθμού δρομολογίων-κατανάλωσης καυσίμων-διοδίων-χρόνου και ένα πλεόνασμα του παραγωγού που είναι κατά βάση το κέρδος από αύξηση των χρεωθέντων οχημάτων στα διόδια και μείωση των λειτουργικών εξόδων.Όταν αυτά ισοσκελίζονται δεν λαμβάνονται υπόψιν στην ανάλυση και έχουμε να κάνουμε με μία απλή επένδυση ειδάλλως (όπως όταν έχουμε απρόβλεπτες διακυμάνσεις της ζήτησης) αυτά υπολογίζονται.Τα κόστη και οι αποσβέσεις μπορούν να συνοψισθούν στον παρακάτω πίνακα.

Τα **χρονικά κέρδη** η παράγοντας του χρόνου είναι από τα πιο σημαντικά οφέλη σε μία επένδυση και ασκώντας ένα δικαίωμα (πραγματικό) μπορεί να αποκομήσουμε τεράστια οφέλη όπως με την επέκταση.Ο χρόνος ορίζεται τόσο σε ωφέλιμο (μεταφοράς εμπορεύματος) όσο και σε νεκρό (άδειο φορτηγό).Επίσης λαμβάνουμε υπόψιν το μισθό των οδηγών καθώς μπορεί να μην συμφέρει η αύξηση δρομολογίων οριακά για την υπάρχουσα επέκταση καθώς στην εν λόγω χώρα η χώρες δεν το επιτρέπουν οι μισθοί (ώρες εργασίας) η της εταιρίας που τους μισθώνει.Άρα είναι παράγοντας που εξαρτάται από τις συνθήκες μισθοδοσίας.Κατόπιν είναι και παράγοντας των ανέσεων που θα προσφέρει το νέο οδικό δίκτυο στον οδηγό.Επίσης χρόνοι αναμονής και παράδοσης που θα επιφέρει ο νέος κόμβος από κανάλι διανομής σε άλλο κανάλι διανομής η χονδρέμπορο η λιανέμπορο , συνολική απόσταση και οι συνθήκες του δρόμου (στροφές και κλιματολογικές της περιοχής όπως συχνότητα εμφάνισης ομίχλης).Ο χρόνος είναι αντιστρόφως ανάλογος της αύξησης του κόστους λειτουργίας του φορτηγού και ανάλογος της αξιοπιστίας του χρόνου παράδοσης του εμπορεύματος.Μικρότερη και συντομότερη διαδρομή συνεπάγεται και λιγότερο ποσοστό καταστροφών του εμπορεύματος.Τα παραπάνω μπορούν να αναλυθούν αντιστοίχως και για τα υπόλοιπα τέσσερα αποτελέσματα.Όμως το σημαντικότερο όφελος και παράγοντας του υπόψη έργου είναι ο χρόνος ο οποίος συνήθως είναι το 70 % των όλων θετικών στις χρηματοροές (οι οποίες με τη σειρά τους σχετίζονται έμμεσα αλλά και άμεσα με το χρόνο όπως το γεγονός ότι στην ίδια ώρα θα μεταφέρονται περισσότερα εμπορεύματα).Επομένως αναλύουμε και εξετάζουμε την αξία του χρόνου , το κόστος ατυχημάτων , τις επιδράσεις και υποθέσεις στο ΑΕΠ της γύρω επηρεάζουσας περιοχής , το ρυθμό κυκλοφορίας , το συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης της επένδυσης , τα λειτουργικά έξοδα καθώς και το συνολικό κόστος επένδυσης και φυσικά τα διόδια και δασμούς χρήσης όπως και τα πρόστιμα (λόγω ρύπων).Κατόπιν γίνεται μία ανάλυση ρίσκου σε θέματα όπως : ρυθμιστικά (μόλυνση του γύρω περιβάλλοντος) , ανάλυση ζήτησης χρήσης του δρόμου στο μέλλον , πιθανά προβλήματα ανεπάρκειας υποδομών όπως η ανεπάρκεια καναλιών και φρεάτων σε περίπτωση ρίσκου εμφάνισης φαινομένων πλημμύρας (κάτι που συνέβη και στην περίπτωση μελέτης για την Αττική Οδό στο ύψος Κηφισού με Μάνδρας πριν το 2001) , διοικητικό ρίσκο όπως η μη ανανέωση άδειας χρήσης διοδίων (λόγω εθνικοποίησης η πτώχευσης του κράτους η ακύρωσης και παράβασης της σύμβασης χρήσης) , ρίσκο μίσθωσης γης στην επιφάνεια χρήσης του οδικού δικτύου (όταν αυτό συμβαίνει) , κατασκευαστικά ρίσκα τα οποία προκύπτουν από τη μορφή συνήθως της σύμβασης (T&M) δηλαδή υπερκοστολόγηση πέραν της αρχικής εκτίμησης , αρχαιολογικές ανασκαφές που εμποδίζουν τη συνέχεια της επένδυσης , πτώχευση συμβαλόμενης κατασκευαστικής εταιρίας και άλλα , πιθανές επεμβάσεις της αγοράς (ρίσκο αγοράς και κρατικό) στο ύψος της τιμής των διοδίων (αν υπάρχουν) και τέλος λοιπά ρίσκα πολιτικού χαρακτήρα.

Στη μελέτη περίπτωσης που ακολουθεί έχουμε να κάνουμε με την κατασκευή ενός καινούριου δρόμου 16.4 χμ με διόδια συμπληρωματικός του TEN-T δικτύου.Ο TEN-T υπενθυμίζεται είναι ένα σύνολο μεγάλων εθνικών και διασυνοριακών δρόμων στην Ευρώπη υπό λειτουργία , διεύρυνση και κατασκευή κυρίως όμως στην Ε.Ε.Στόχος του έργου είναι η μείωση της κυκλοφοριακής συμφόρησης στο υπάρχον οδικό δίκτυο.Η υπάρχουσα ικανότητα εξυπηρέτησης του δικτύου είναι 18000 οχήματα/ημέρα και έχει ξεπεράσει το αποδεκτό όριο.Το υπό μελέτη και κατασκευή έργο θα οδηγεί μέρος της κίνησης από επαρχιακές τοποθεσίες εν αντιθέσει του μοναδικού υπάρχοντος δικτύου που περνάει και από πόλη δημιουργώντας όχληση στους κατοίκους (εξωτερικό κόστος) καθώς και μόλυνση.Σε αυτό έρχεται να επιβαρύνει και η ετήσια άυξηση της κυκλοφορίας κατά 4.5 % το έτος με το στόλο φορτηγών μεταφοράς να αντιπροσωπεύει ένα σταθερό 35 % του συνολικού.Ειδικό χαρακτηριστικό του έργου θα είναι η απαραίτητη διεκπεραίωση γεφυρών και υπερυψωμένων διαβάσεων καθώς και τη διάνοιξη μίας σήραγγας (τούνελ).Θα είναι επομένως από τεχνικής απόψεως ένα έργο κατασκευής οδικού δικτύου δύο λωρίδων σε κάθε κατεύθυνση συνολικού μύκους 16.4 χμ και πλάτους 27.5 m.Κατασκευής περιφερειακού δρόμου μίας λωρίδας σε κάθε κατεύθυνση και πλάτους 11 m.Επίσης 3 γέφυρες συνολικού μήκους 2.2 χμ και 4 διαβάσεων 800 m μήκους και πλάτους 8 m.Τέλος μίας σήραγγας δύο λωρίδων συνολικού μήκους 2.2 χμ.Ως κύριος στόχος του έργου είναι όλα τα παραπάνω που αναφέρθηκαν επισημαίνοντας την αποσυμφόρηση , την ασφάλεια και φυσικά το μηδενισμό η ελαχιστοποίηση του εξωτερικού κόστους στην πόλη από την οποία διέρχεται το υφιστάμενο δίκτυο.Παρακάτω φαίνεται η κατανομή της κυκλοφορίας για το 1ο έτος της επένδυσης όπου με κόκκινο υποδηλώνεται το νέο δίκτυο και με μπλε το υπάρχον.



Επίσης ακολουθούν τα έξοδα αρχικής επένδυσης.

ΜΕΛΕΤΗ-ΣΧΕΔΙΑΣΗ-ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΙΒΛΕΨΗ	3000000
ΜΙΣΘΩΣΗ/ΑΓΟΡΑ ΓΗΣ	12000000
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ	248350000
ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ-ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ	12500000
ΓΕΩΠΟΝΟΥ-ΔΑΣΟΚΟΜΟΥ	800000
ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ	48000000
ΓΕΦΥΡΟΠΟΙΙΑΣ	77000000
ΣΗΡΥΓΓΑΣ	80000000
ΓΕΩΤΡΥΣΕΩΝ	5800000
ΕΡΓΟΝΟΜΙΚΑ-ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ	7500000
ΕΠΙΚΟΥΡΙΚΑ-ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΧΡΗΣΗΣ	8500000
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ-ΣΗΜΑΝΣΗ	1250000
ΚΤΙΡΙΑ	1000000
ΛΟΙΠΑ	5940000
ΕΡΓΟΤΑΞΙΟΥ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΩΝ	0
ΔΗΜΟΣΙΟΠΟΙΗΣΗΣ	60000
ΕΠΙΒΛΕΨΗΣ	5000000
ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΞΟΔΑ ΠΛΗΝ ΑΠΡΟΟΠΤΩΝ	268350000

ΑΠΡΟΟΠΤΑ (10 % ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ)	24835000
ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΞΟΔΑ ΜΕ ΑΠΡΟΟΠΤΑ	293185000
ΦΠΑ (ΑΠΟΛΥΤΟ)	56630055
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ	**349815055**

Εδώ να επισημανθεί ότι μέρος των εξόδων-αρχικού κόστους μελέτης που προηγήθηκε της τελικής τεχνοοικονομικής θεωρούνται ως χαμένα κόστη (sunk costs) και δεν περιλαμβάνονται στην ανάλυση.Το μοναδιαίο κόστος του δρόμου υπολογίζεται στα 16300 ευρώ/μέτρο ενώ για τη σήραγγα είναι 18200 ευρώ/μέτρο και για τις γέφυρες στα 1151 ευρώ/m^2.Το κόστος συντήρησης υπολογίζεται στα 34000 ευρώ/χμ και είναι ίδιο με και χωρίς το έργο και λαμβάνει χώρα σε πάροδο δεκαετίας , δεκαπενταετίας και εικοσαετίας για το δρόμο , γέφυρες και σήραγγα καθώς και έργα υποστήριξης.Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η πρόσοδος από τα διόδια ως έσοδο logistics και το οποίο χρεώνεται στα 0.20 ευρώ/χμ για τα βαρέα φορτηγά οχήματα (HGV) και 0.10 ευρώ/χμ για τα ελαφρά οχήματα.Το πλάνο επένδυσης θεωρεί διάρκεια ζωής τα 30 έτη η αλλιώς χρόνος μελέτης και επομένως θα έχουμε και μία υπολειμματική αξία της τάξης των 150 εκ. ευρώ.Ο συντελεστής προεξόφλησης ορίζεται στο 4 % με βάση τις πολιτικές της Ε.Ε.Η δε περίοδος κατασκευής είναι 3 έτη (από τα 30).Εδώ να συμπληρωθεί πως το έργο επιδοτείται από την Ε.Ε. κατά την ποσοστιαία διαφορά αρχικού κόστους επένδυσης (στα πρώτα 3 έτη) με έσοδα από διόδια επί τον συντελεστή συνεπένδυσης (85 %) και το ανώτατο όριο επιδοτούμενο ποσού (293.2 εκ. ευρώ).Έτσι προκύπτει:

ΜΕΛΕΤΗ/ΕΤΗ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**15**	**20**	**25**	**30**
Επιδότηση	88.4	89.2	55.1	0	0	0	...	0	0	0	0
Συνεισφορά προωθητή (εταιριών κοινοπραξίας)	24	22.5	13.9	0	0	0	...	0	0	0	0
Έσοδα από διόδια	0	0	0	2.2	2.3	2.3	...	2.7	2.9	3.1	3.4
ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΣΟΔΑ	112.4	111.7	69	2.2	2.3	2.3		2.7	2.9	3.1	3.4
κόστος επένδυσης	-112.4	-111.7	-69.1	0	0	0	...	0	0	0	0
λειτουργικά έξοδα	0	0	0	-0.9	-0.9	-0.9	...	-7.8	-0.9	-1	-1
ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΞΟΔΑ	-112.4	-111.7	-69.1	-0.9	-0.9	-0.9	...	-7.8	-0.9	-1	-1
ΚΑΘΑΡΑ ΕΣΟΔΑ	0	0	-0.1	1.3	1.4	1.4	...	-5.1	2	2.1	2.4
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΑ ΚΑΘΑΡΑ ΕΣΟΔΑ	0	0	-0.1	1.2	2.6	4	...	12.3	14.3	15.6	20.3
NPV ΔΙΟΔΙΩΝ (εκ.ευρώ)	**20.3**										

Άρα το έργο από πλευράς NPV μας δίνει για τα διόδια 20300000 ευρώ για περίοδο επένδυσης 30 έτη.Να επισημανθεί ότι ο χρηματοροές αυξάνουν με την πάροδο των ετών.Το επόμενο που μας ενδιαφέρει είναι η καθαρά παρούσα αξία της επένδυσης σε χρηματοροές απου απορέουν από την ασφάλεια μεταφοράς , το χρόνο δρομολογίων , τα λειτουργικά

έξοδα στόλου οχημάτων και έσοδα εξοικονόμησης από ατυχήματα.Το τελευταίο συνεπάγεται την εξοικονόμηση 677500 ευρώ και η εξοικονόμηση από πρόστιμα ρύπων είναι στα 31 ευρώ τον τόνο COx και NOx.Οπότε έχουμε πάλι έναν ακόλουθο πίνακα:
(εδώ το επιτόκιο προεξόφλησης λογίζεται στο 5 %)

ΜΕΛΕΤΗ/ΕΤΗ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	**15**	**20**	**25**
εξοδα επένδυσης	-94.9	-92.1	-57	0	0	0	…	0	0	0
λειτουργικά έξοδα	0	0	0	-0.8	-0.8	-0.8	…	-6.9	-0.8	-0.8
υπολειμματική αξία/salvage value	0	0	0	0	0	0	…	0	0	0
Έσοδα λόγω χρόνου (δρομολόγια)	0	0	0	10.7	11.5	12.3	…	20.7	25.4	30.5
Έσοδα λόγω μειώσης εξόδων φορτηγών/στόλου	0	0	0	1.3	1.4	1.5	…	2.1	2.4	2.7
Έσοδα από εξοικονόμηση ατυχημάτων	0	0	0	0.4	0.4	0.5	…	0.7	0.9	1
Έσοδα από μείωση ρύπων	0	0	0	0.1	0.1	0.1	…	0.2	0.3	0.4
Καθαρά έσοδα	-94.9	-92.1	-57	11.8	12.8	13.7	…	16.8	28.1	33.7
NPV	**87**									

Επομένως έχουμε μία Καθαρά Παρούσα Αξία ίση με 87 εκ. ευρώ συν τα έσοδα από διόδια άλλα 20.3 εκ. Ευρώ δηλαδή ένα ποσό των 107.3 εκ. ευρώ σε πλαίσιο 30 ετών.Τώρα ας δούμε τι γίνεται αν όλα τα παραπάνω τα αξιολογήσουμε με Πραγματικά Δικαιώματα (RO).Τότε πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τη μεταβλητότητα η ρίσκο.Το οποίο είναι σε συγκεκριμένα εύρη για κάθε παράγοντα που επηρεάζει το έργο.Παρακάτω φαίνεται το ρίσκο για κάθε έναν από τους παράγοντες ξεχωριστά με την υπόθεση ότι έχουμε πέντε επίπεδα των 5 % , 10 % , 15 % , 20 % και 25% ως A , B , C , D και E αντίστοιχα.

Μέγεθος ρίσκου	**Ποσοστό (%)**
Απόκτηση άδειας κατασκευής	5
Λοιπές αδειοδοτήσεις	5
Αλλαγή στις περιβαλλοντικές απαιτήσεις (Euro)	5
Κόστος κτήσης εδάφους	10
Καθυστερήσεις σε απαλλοτριώσεις	10
Επιπλέον απαιτήσεις αγοράς γης	5
Έλλειψη προσβασιμότητας εδάφους	5
Ελλιπής επίβλεψη εδάφους	5
Αλλαγές στις προδιαγραφές της σύμβασης	5
Ελλιπής εκτίμηση κόστους	10
Ελλιπής εκτίμηση PM χρονικών ορίων	20
Υπερκοστολόγηση σύμβασης (T&M)	20

Πλημμύρες-Κατολισθήσεις	5
Αρχαιολογικά ευρήματα	10
Ελλιπής προβλέψεις κόστους εργοταξίου	15
Ελλιπής προβλέψεις κόστους εργασίας	15
Πτώχευση συμβαλόμενου	10
Έλλειψη πόρων συμβαλομένου (ελλιπές Resource Management)	10
Ελλιπής δημόσια εξυπηρέτηση-γραφειοκρατεία	15
Απεργίες	5
Αλλαγή στρατηγικής (λόγω options)	5
Άμεσα διόδια	10
Έλλειψη εθνικής χρηματοδότησης του έργο	5
Ελλιπής εκτίμηση κυκλοφοριακής συμφόρησης	15
Μέσος όρος ρίσκου	9% ~ 10%

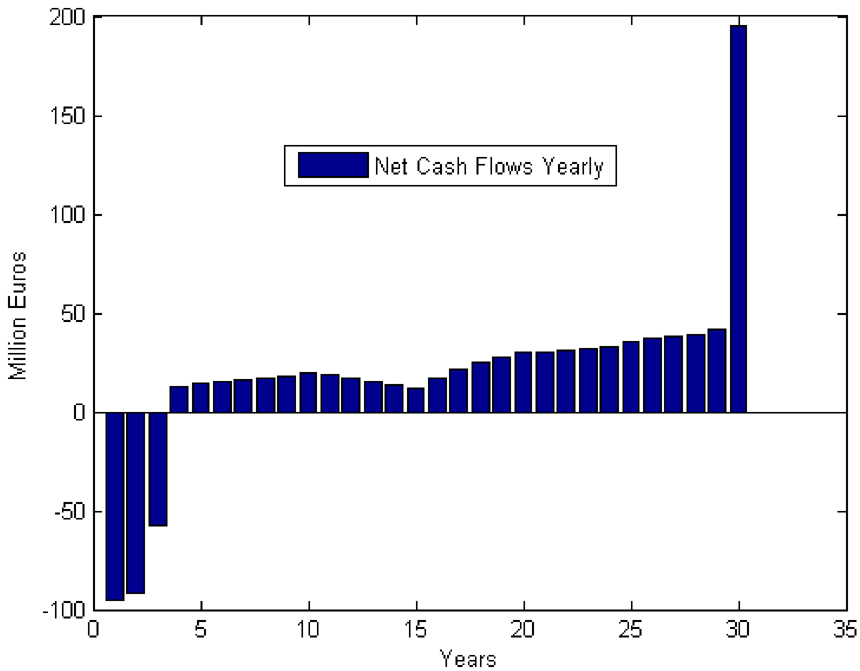
Άρα θεωρούμε για το μοντέλο του διωνυμικού δένδρου αποφάσεων συντελεστή ρίσκου ίσο με 10 %.Και βγάζουμε τα εξής αποτελέσματα σε δενδροειδής μορφή.Ο κώδικάς που υλοποιεί τα παραπάνω είναι ο εξής.

```
revenues=[112.4,111.7,69,2.2,2.3,2.3,2.4,2.4,2.5 ...
    2.5,2.5,2.55,2.6,2.65 ...
    2.7,2.75,2.8,2.85,2.85,2.9,2.9,2.9 ...
    2.95,3,3.1,3.15,3.2,3.25,3.3,3.4];
fcosts=[-112.4,-111.7,-69.1,-0.9,-0.9,-0.9,-0.9,-0.9 ...
    -0.9,-0.9,-1.5,-3,-4.5,-6,-7.8,-5,-4,-3,-2,-0.9 ...
    -0.95,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1];
ncosts=[-94.9,-92.1,-57,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8 ...
    -1.5,-2.5,-3.5,-5,-6.9,-5,-3.5,-2,-1,-0.8 ...
    -0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,-0.8,150.2];
totbenef=[0,0,0,12.5,13.5,14.4,15.4,16.3,17.4,18.5 ...
    19.5,20,21,22,23.7,24.5,26,27,28,28.9 ...
    29,30,31,32,34.6,35.5,36.5,38,40,42.3];
rev=revenues+totbenef;
costs=fcosts+ncosts;
npv=rev+costs;
K=94.3;
r=0.045;
T=27;
t=1:27;
v=0.1;
flag=0;
 [S,P]=binprice(rev(4),K,r,26,1,v,flag);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	NPVrev
14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	146.6205	162.0407	179.0827	197.9169	
0	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	146.6205	162.0407	
0	0	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	
0	0	0	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	
0	0	0	0	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	
0	0	0	0	0	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	
0	0	0	0	0	0	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	
0	0	0	0	0	0	0	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	
0	0	0	0	0	0	0	0	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	103.9876
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	4.697315
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	-0.37843
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	-0.82317
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	-6.92425
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	-10.7221
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	-12.5083
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.989429	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.800109	1.989429	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.628806	1.800109	1.989429	2.198659	2.429894	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.473805	1.628806	1.800109	1.989429	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.333554	1.473805	1.628806	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.206649	1.333554	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.091822	-48.2589
-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-3	-5.5	-8	-11	-14.7	-10	-7.5	-5	-3	-1.7	-1.75	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	149.2	

Το μοντέλο του Δένδρου (binomial real options tree model) υπολόγισε τις χρηματοροές εσόδων από το 4^{ο} έτος και κατόπιν καθώς οι αρχικές επιδοτήσεις και επενδυθέν κεφάλαιο δεν αποφέρουν συνολικά θετική ΚΠΑ για τα πρώτα 3 έτη και δεν θα ήταν συνετό να ληφθεί υπόψιν η συνεισφορά του έργου πριν ολοκληρωθεί στο 3^{ο} έτος από τη στιγμή που οι εκροές (έξοδα) είναι κατά πολύ μεγαλύτερα στα πρώτα αυτά έτη.Με γκρίζο χρώμα φαίνεται μία πιθανή εκδοχή χρηματοροών μέχρι το 20^{ο} έτος για την οποίαν δεν έχουμε θετική ΚΠΑ.Αν συνεχίσουμε το έργο να το λειτουργούμε και συντηρούμε για άλλα δέκα χρόνια και έχουμε την έκβαση με κίτρινο χρώμα τότε έχουμε ζημία ίση με αρνητική ΚΠΑ -48254900 ευρώ οπότε και θα έπρεπε εξαρχής να σταματήσουμε το έργο στο 3^{ο} έτος όπου λάβαμε τις επιδοτήσεις και εξισορροπείται κάπως η απώλεια.Το κόκκινο χρώμα δηλώνει χρονικά σημεία για τα οποία έχουμε καθαρή χρηματοροή κάτω της εκτιμηθείσας με το απλό μοντέλο του NPV όπως έγινε στην αρχική μελέτη της Ε.Ε. για τον ΤΕΝ-Τ.Δηλαδή για το έτος 7^{ο} έχουμε κανονικά με βάση τη μελέτη επένδυσης με ΚΠΑ χρηματοροή εσόδων ίση με 17800000 ευρώ ενώ εμείς έχουμε 16024061 ευρώ.Προφανώς αυτές οι περιοχές θα είχαν απορριφθεί με το απλό μοντέλο της

ΚΠΑ.Παρακάτω φαίνεται η πορεία των καθαρών χρηματοροών με το απλό μοντέλο σε πάροδο τριαντακονταετίας.

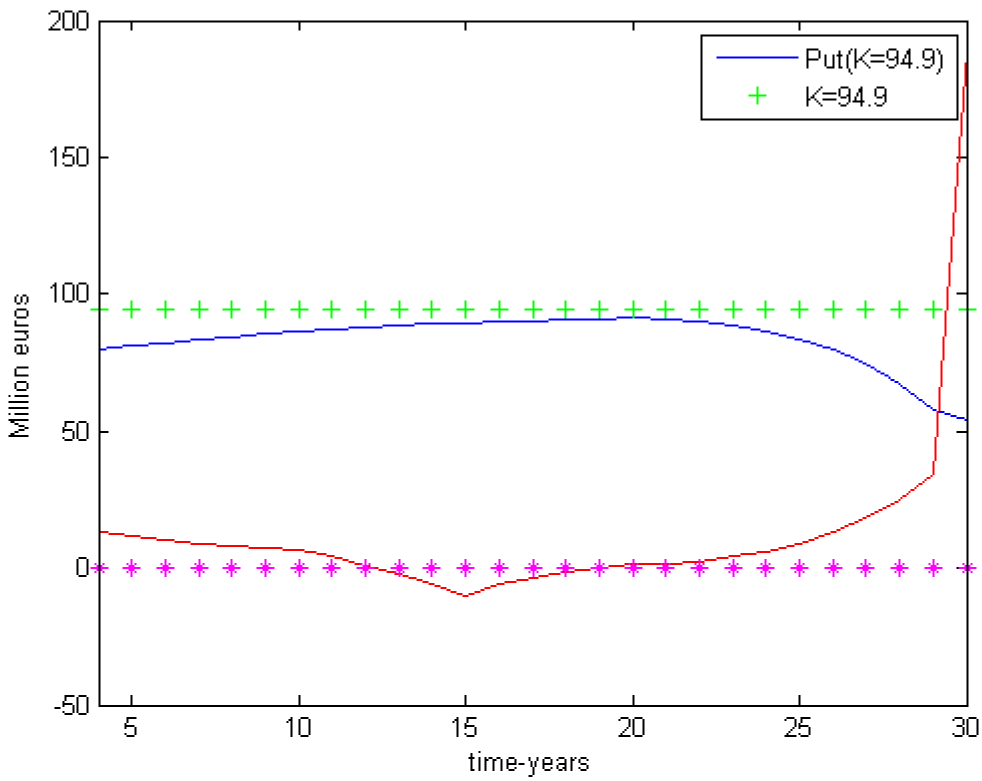


Με λίγο πειραματισμό οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως με τη μέθοδο του διωνυμικού δένδρου για ΠΔ έχουμε αρκετές διαδρομές για τις οποίες λαμβάνουμε μηδενικό NPV.Μία από αυτές που σαρώνει όλο το χρόνο ανάλυσης του έργου είναι αυτή με τα χρώματα γρκίζο-προτοκαλί και μετά με τα βελάκια όπου στην ακριβώς δυσμενέστερη έχουμε αρνητική ΚΠΑ (ίση με -378430 ευρώ) και σε αυτήν λαμβάνουμε το ποσό των 4697315 ευρώ.Το επόμενο που μας ενδιαφέρει είναι η εξάσκηση των πραγματικών δικαιωμάτων (Call – Put).Στην περιπτωσή μας προφανώς και έχουμε πώληση δηλαδή Put δεδομένου ότι εμείς αναλαμβάνουμε το έργο στην αρχή και μπορούμε όμως να θεωρήσουμε και Call σε μία επέκταση αυτού.Εμείς θεωρούμε τη διαδρομή που μας δίνει NPV = 103987600 ευρώ δηλαδή περισσότερα από τα 87 εκ. ευρώ που μας δίνει η αρχική απλή προσέγγιση της Καθαράς Παρούσας Αξίας για το έργο.Αυτό συμβολίζεται με τη μπλε διαδρομή στο παραπάνω σχήμα.Εμείς θεωρούμε πως μπορούμε να έχουμε ένα Πραγματικό Δικαίωμα Αμερικανικών χαρακτηριστικών.Ας εξηγήσουμε πρώτα τι σημαίνει αμερικανικών χαρακτηριστικών.Το αμερικάνικο δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο του δηλαδή ακόμα και στη λήξη στα 30 χρόνια εδώ.Έτσι σε σχέση με τα ευρωπαικά δικαιώματα παρουσιάζει αυξημένη αξία του δικαιώματος.Πράγμα μη θετικό αν εμείς θέλουμε σκόπιμα να υποβαθμίσουμε την αξία της επένδυσης για λόγους ασφάλειας.Να υπενθυμισθεί ότι το ευρωπαικό δικαίωμα υπολογίζεται με τη φόρμουλα Black-Scholes ενώ το αμερικανικό με τη χρήση της Cox-Rubinstein δυωνυμικού δένδρου.Το μεγαλύτερο μέρος των δικαιωμάτων που αγοράζονται και πωλούνται στη διεθνή αγορά είναι αμερικανικά και αυτό λόγω της καθιέρωσης τα τελευταία 70 χρόνια του δολαρίου στις ισοτιμίες και αποθεματικά.Είπαμε πως τα αμερικανικά δικαιώματα υπερτιμούνται σε σχέση με των ευρωπαικών αυτό προκύπτει και από το δικαίωμα εξάσκησης στην ημερομηνία λήξης.Ας δούμε τι γίνεται στην διαδρομή του δένδρου ορισμένη με μπλε χρώματα θεωρώντας τιμή εξάσκησης από K = 94.3 εκατομμύρια ευρώ (δηλαδή πουλάμε αν οι χρηματοροές εδώ S πέσουν κάτω από 94.3 εκατομμύρια που είναι και περίπου οι αρχικές ζημίες τα πρώτα 3 χρόνια της λειτουργίας και κατασκευής του δρόμου δηλαδή πουλάμε το έργο σε αυτή τη συμφωνημένη τιμή (πιθανόν σε μία άλλη εταιρία , το κράτος η ένας άλλο επενδυτή ιδιώτη) ενώ αν δεν πέσουμε λήγει το δικαίωμα και δεν πουλάμε.Με λίγα λόγια θέλουμε μία τιμή εξάσκησης τέτοια που να μας δώσει κέρδος ώστε να βγάλουμε στο ελάχιστο τις ζημιές η δε τιμή δικαιώματος δεν μπορεί να περιλάβει αρνητικούς αριθμούς άρα δεν συνυπολογίζονται οι ζημίες αρχικά.Αυτά υλοποιούνται με το παρακάτω κομμάτι του κώδικα.

```
%Put gia K=94.3%%%%%%%%%%%%%%%
a(1)=P(1,1,1);a(2)=P(2,2,1);a(3)=P(3,3,1);a(4)=P(4,4,1);a(5)=P(5,5,1);a(6)=P(
6,6,1);a(7)=P(7,7,1)...

;a(8)=P(8,8,1);a(9)=P(9,9,1);a(10)=P(10,10,1);a(11)=P(11,11,1);a(12)=P(12,12,
1);a(13)=P(13,13,1)...

;a(14)=P(14,14,1);a(15)=P(15,15,1);a(16)=P(16,16,1);a(17)=P(17,17,1);a(18)=P(
17,18,1);a(19)=P(16,19,1)...

;a(20)=P(15,20,1);a(21)=P(14,21,1);a(22)=P(13,22,1);a(23)=P(12,23,1);a(24)=P(
11,24,1);a(25)=P(10,25,1)...
    ;a(26)=P(9,26,1);a(27)=P(9,27,1);
%S gia K=94.3%%%%%%%%%%%%%%%
b(1)=S(1,1,1);b(2)=S(2,2,1);b(3)=S(3,3,1);b(4)=S(4,4,1);b(5)=S(5,5,1);b(6)=S(
6,6,1);b(7)=S(7,7,1)...

;b(8)=S(8,8,1);b(9)=S(9,9,1);b(10)=S(10,10,1);b(11)=S(11,11,1);b(12)=S(12,12,
1);b(13)=S(13,13,1)...

;b(14)=S(14,14,1);b(15)=S(15,15,1);b(16)=S(16,16,1);b(17)=S(17,17,1);b(18)=S(
17,18,1);b(19)=S(16,19,1)...

;b(20)=S(15,20,1);b(21)=S(14,21,1);b(22)=S(13,22,1);b(23)=S(12,23,1);b(24)=S(
11,24,1);b(25)=S(10,25,1)...
    ;b(26)=S(9,26,1);b(27)=S(9,27,1);
for i=1:27
b(i)=b(i)+costs(i+3);
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tt=4:1:30;
plot(tt,a,'b');
xlim([4 30]);
hold on;
plot(tt,K,'g+');
hold on;
plot(tt,b,'r');
hold on;
plot(tt,0,'m*');
hold on;
xlabel 'time-years';
ylabel 'Million euros';
legend('Put(K=94.3)','K=94.3');
set(gca,'Color',[1 1 1]);
```

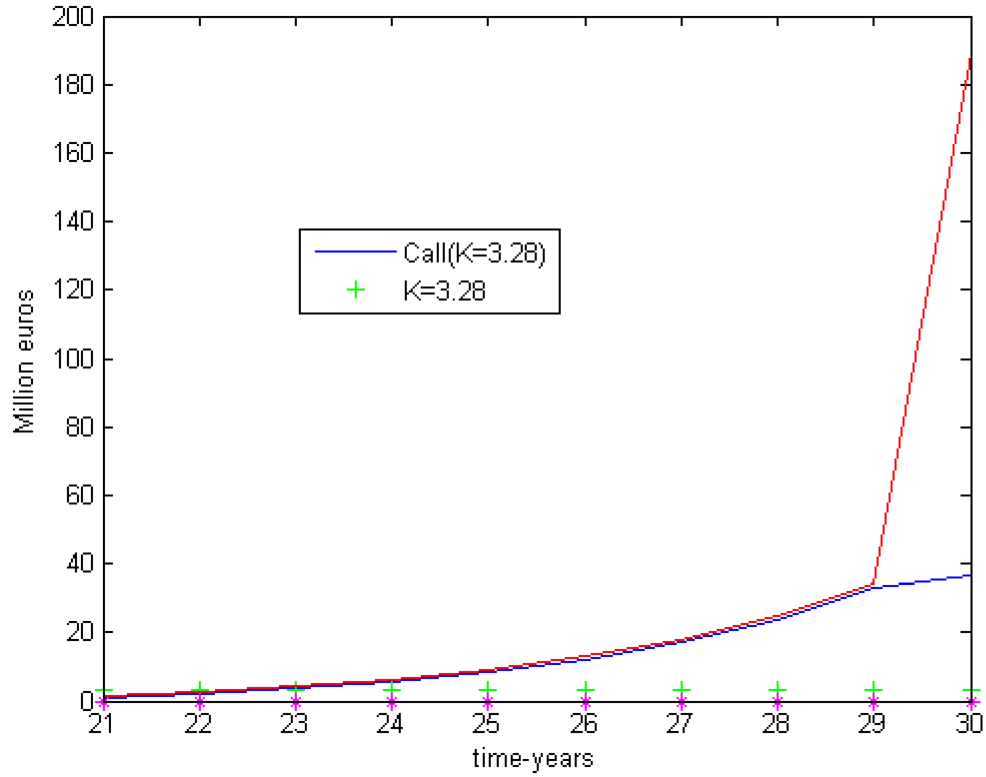
Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα που προκύπτει από τον υπολογισμού του δικαιώματος πώλησης.



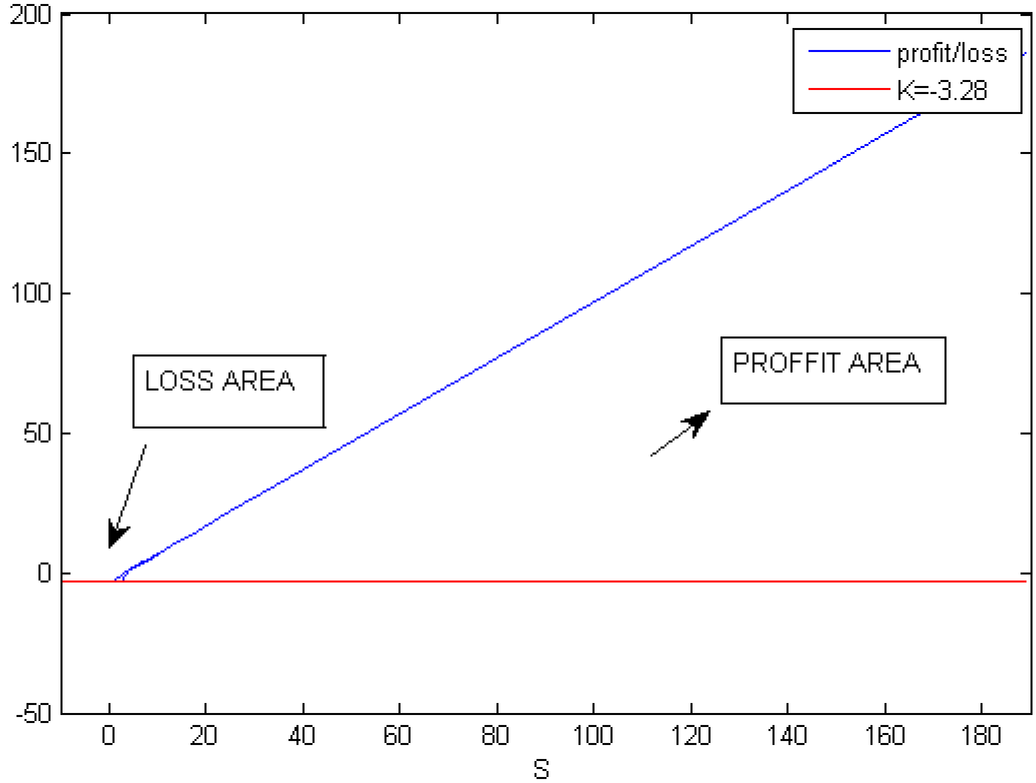
Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε αν έχουμε τιμή πώλησης-συμφωνημένη τιμή εξάσκησης στα K = 94.3 εκατομμύρια ευρώ-τότε στην του έργου ροή στα πρώτα 28 χρόνια δηλαδή από το 4^{ο} έτος μέχρι και το 28^{ο} έχουμε κάθε λόγο να πουλήσουμε με τη χρήση δικαιώματος το έργο δηλαδή να διακόψουμε την εκτελεσή του και μάλιστα μας συμφέρει να γίνει αυτό ώστε να εξασφαλίσουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος που θα είχαμε στην απλή ανάλυση στο 13^{ο} με 22^{ο} έτος οπότε και πουλάμε εξασκώντας το δικαίωμα για 93 εκατομμύρια ευρώ.Κατόπιν από το 22^{o} έτος και μετά που είναι πιο επιτακτικό από ποτέ να πουλήσουμε βλέπουμε τις χρηματοροές (μπλε γραμμή) να αυξάνουν όπως όντως βλέπουμε και στον πίνακα με τα μεγέθη του δυωνυμικού δένδρου.Από εκεί και πέρα δηλαδή μέχρι και το έτος λήξης το 28^{o} πάλι πρέπει να πουλήσουμε άμα θέλουμε μεγάλο κέρδος αλλά σε πολύ λιγότερο βαθμό.Στο 28^{o} έτος βλέπουμε πως μπορούμε να εξασκήσουμε το δικαίωμα για 58 εκατομμύρια ευρώ ενώ στο 20^{o} για 93 δηλαδή άμα δεν εξασκήσουμε το δικαιωμά μας στο 20^{o} έτος και περάσουν οκτώ χρόνια ακόμα εργοληψίας και λειτουργίας θα έχουμε χάσει 35 εκατομμύρια ευρώ.Έτσι με βάση την μπλε διαδρομή είμαστε χαμένοι αν δεν πουλήσουμε εξασκώντας το δικαίωμα ακόμα και στο 27^{o} έτος.Βέβαια στο 28^{o} έτος βλέπουμε να συγκλίνουν η κόκκινη γραμμή των χρηματοροών μας (μελλοντικές) και άρα κέρδους με το να συνεχίσουμε να λειτουργούμε το δρόμο και της ζημίας.Αυτή η τάση δείχνει και το γεγονός ότι απαξιώνεται το δικαίωμα στη λήξη του κερδίζοντας μηδέν ευρώ όπως ισχύει και στα ευρωπαικά Πραγματικά Δικαιώματα.Αν το έργο διαρκέσει άλλα 10 χρόνια προφανώς θα υπερβεί-όπως και γίνεται- η κόκκινη γραμμή την μπλε που αντιπροσωπεύει το δικαίωμα Put και έτσι δεν θα υπάρχει λόγος εξάσκησης και συμφέρει να λήξει χωρίς πώληση.Αυτό βλέπουμε να συμβαίνει από το 28^{o} έτος και μετά παρά το γεγονός ότι $S < K$ άρα πάλι πρέπει να πουλήσουμε αλλά τώρα έχουμε ραγδαία άνοδο των εσόδων συμπεριλαμβανομένων των ζημίων.Γιατί συμβαίνει αυτό.Μία πρώτη σκέψη ανάγεται στο γεγονός ότι στο τέλος της 30^{ης} περιόδου έχουμε παραμένουσα αξία της επένδυσης του οδικού δικτύου ίση με 149.2 εκατομμύρια ευρώ.Έτσι εκτινάσσονται τα έσοδα προεξοφλημένα.Όμως αυτός δεν είναι ο μόνος λόγος και ο κύριος λόγος.Από το 15^{o} έτος αρχίζουν οι αυξήσεις με μικρή κλίση άρα μικρό ρυθμό μέχρι το 25^{o} έτος οπότε λαμβάνουν μεγάλη κλίση.Αυτό σημαίνει πως με κλίση 50^{o} γρήγορα θα υπερβούν τις ζημίες και θα καθιστήσουν το έργο βιώσιμο.Ενώ από το 28^{o} έτος προσεγγίζουμε σχεδόν ανάπτυξη 85^{o} η οποία δεν ωφείλεται στην παραμένουσα αξία.Στο 29^{o} έτος πάλι δεν έχουμε την παραμένουσα αξία και η τρέχουσα τιμή υπερβαίνει την τιμή εξάσκησης δηλαδή $K < S$.Προφανώς από εκεί δεν πρέπει να πουλήσουμε με κανέναν τρόπο γιατί θα χάσουμε και πρέπει να αφήσουμε το δικαίωμα Put να λήξει ως αμερικανικό στο τέλος του 30^{ου} έτους.

Από τα παραπάνω βγαίνουν δύο συμπεράσματα για μία γραμμή χρηματοροών που μας δίνει συνολικά 103 εκατομμύρια.Με βάση τη μεταβλητότητα (10%) πρέπει να πουλήσουμε στα αρχικά με μεσαία χρονικά διαστήματα.Ειδικά από το 12ο μέχρι το 17^{o} έτος έχουμε ζημία στην όλη επένδυση και λειτουργία της και η εξάσκηση του δικαιώματος θα μας αποφέρει σχεδόν πλήρη αποκατάσταση συμπεριλαμβανομένων και των εξόδων επιδότησης από την Ε.Ε. και δανειοδότησης από την τράπεζα.Το δεύτερο συμπέρασμα είναι η χρησιμότητα των Πραγματικών Δικαιωμάτων και εν γένει των Χρηματοοικονομικών στην αξιολόγηση μιας επένδυσης όπως ένα μεγάλου έργου Logistics που είναι ένα οδικό δίκτυο για τη διακίνηση εμπορευμάτων και δασμολόγηση αυτών.Με το μοντέλο του Δυωνυμικού Δένδρου καταφέρνουμε να δούμε σε βάθος αν μπορούμε ανά πάσα στιγμή να ρευστοποιήσουμε την κατάσταση υπέρ μας με τη μορφή ενός εγγυημένου συμφωνητικού που είναι το δικαίωμα.Το οποίο έχει το απόλυτο προτέρημα ότι συμφωνείται στην αρχή της επένδυσης πριν καν αρχίσει η κατασκεύη (όπως εδώ των έργων οδοποιίας).Τι χάνουμε όμως.Αυτό που χάνουμε από τη συμβατική μέθοδο είναι πως αν αφήναμε το έργο να συνεχίσει θα είχαμε 103 εκατομμύρια ΚΠΑ και όχι 93 εκατομμύρα όπως αν πουλούσαμε σε τρίτο στο 20^{o} έτος.Άρα στην τελική κερδίζουμε χάνοντας 10 εκατομμύρια ευρώ.Αυτός είναι και ο λόγος που είναι ασφαλής χωρίς ρίσκο μέθοδος ενώ η ΚΠΑ δεν είναι.

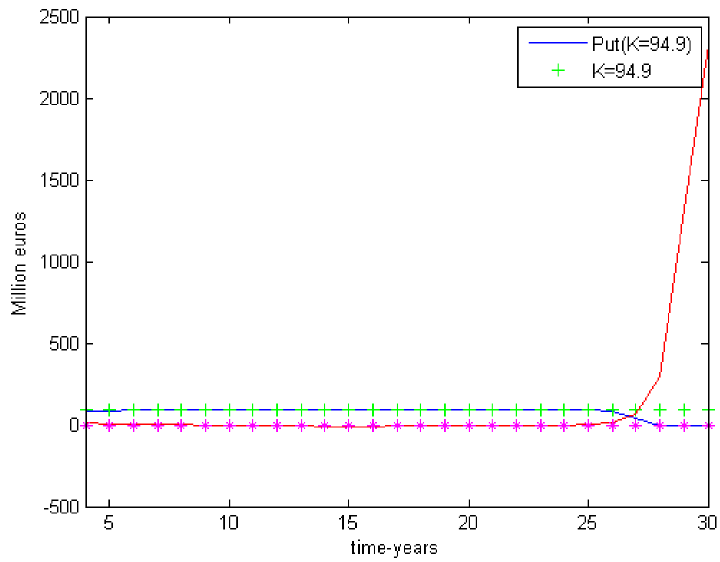
Ας δούμε τώρα τι γίνεται αν αντιστρέψουμε την κατάσταση δηλαδή εξασκήσουμε δικαίωμα αγοράς Call σε κάποιο σημείο.Αυτό σημαίνει πως εγκαταλείψαμε το έργο σε κάποια χρονική στιγμή όπως το 20^{o} έτος σε κάποιον ιδιώτη και μετά οι χρηματοροές του ξεκινούν για ένα διάστημα 12 ετών (δηλαδή μέχρι το 30^{o}).Εφαρμόζουμε πάλι τη μέθοδο του Δυωνυμικού Δένδρου για την χρηματοροή εγκατάλειψης.Δεδομένου ότι θα είναι οι κατώτερες τιμές και μεσαίες ίδιες δε χρειάζεται να ξαναυπολογίσουμε.Θέλουμε δηλαδή από το 21^{o} έτος και μετά να έχουμε τιμή εξάσκησης Κ που να είναι μικρότερη της τρέχουσας τιμής (της χρηματοροής).Θα βγούμε κερδισμένοι αγοράζοντας σε τιμή χαμηλότερη.Άρα σε κάθε χρονική στιγμή πρέπει να είναι το Κ μικρότερο από την ελάχιστη χρηματοροή (εδώ το 21^{o} έτος είναι με βάση τη μπλέ γραμμή τα 3.28 εκατομμύρια ευρώ).Άρα κερδίζω αν πετύχω τιμές άνω του 3.28 και εξασκώ Call δεδομένου ότι ήδη έχω γλυτώσει 93 εκατομμύρια ευρώ στο 20^{o} έτος.Αυτό υλοποιείται με την τροποποίηση της Rubinstein σε flag = 1 δηλαδή Call mode.Έτσι το διάγραμμα μας δίνει.



Από το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι η αγορά συμφέρει μόλις από το 23^{ο} έτος και μετά.Δηλαδή θα συμφωνήσουμε σε Call δικαίωμα στο 20^{ο} έτος και θα αγοράσουμε πίσω το έργο στην αρχή του 23^{ου} έτους.Φυσικά η συμφωνία μπορεί να γίνει στην αρχή του 1^{ου} έτους σε Put και Call.Εδώ συμφέρει σε κάθε σημείο η αγορά γιατί συβαδίζει με την πορεία ταυτόσημα με την τρέχουσα τιμή.Όμως όταν αγοράσουμε από το 29^{ο} έτος και μετά το δικαίωμα άσκησης αγοράς είναι πέρα για πέρα επιτακτικό.Στα προηγούμενα το κέρδος ήταν οριακό με την αγορά.Για παράδειγμα στο 27^{ο} έτος αγοράζουμε με 20 εκατομμύρια σαφώς περισσότερα από 3.28 και βγάζουμε ακριβώς 20.Στο 29^{ο} έτος όμως η κλίση δείνχει πως αγοράζουμε με 40 εκατομμύρια και βγάζουμε ένα μήνα μετά 80 εκατομμύρια δηλαδή το κέρδος είναι (80 – 40) ίσο με 40 εκατομμύρια.Συνεπώς αν εξασκήσουμε νωρίς το δικαίωμα αγοράς δηλαδή από το 23^{ο} έτος χάνουμε αυτό το ποσό ενώ με αγορά δύο έτη πριν το τέλος μελέτης του δικτύου εκτινάσσουμε τα κέρδη μας.Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω απλοικό διάγραμμα.



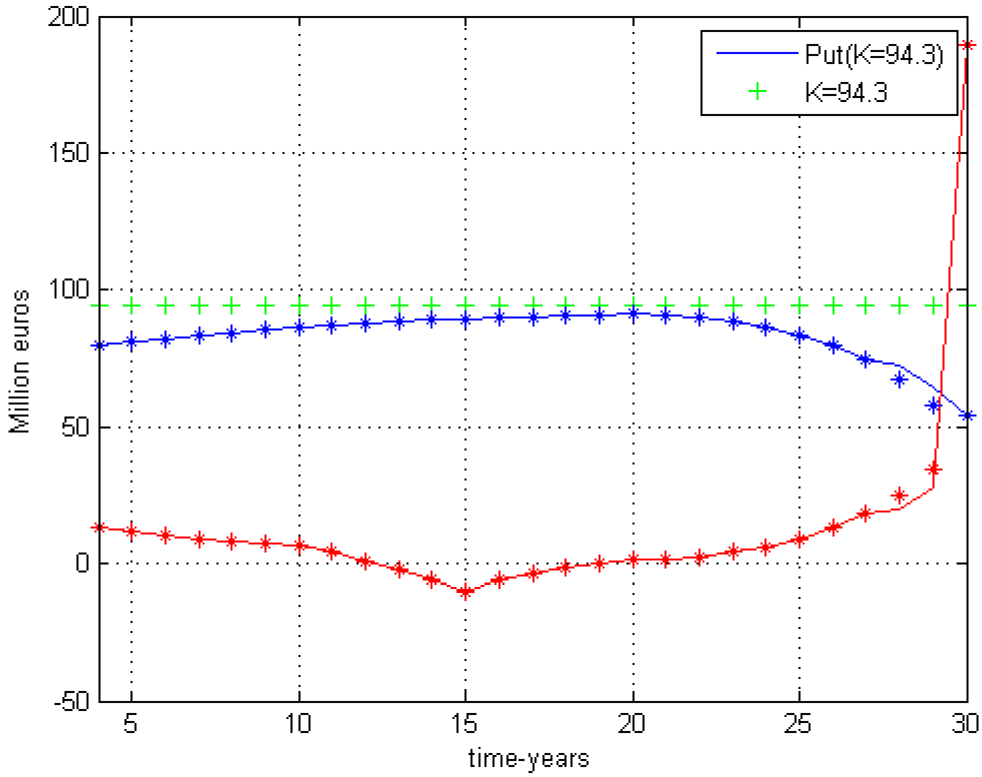
Άρα θα έχουμε ζημιά για αγορά στην αρχή ίση με -3.24 εκατομμύρια ευρώ και μετά τα κέρδη εκτινάσσονται στα 190 εκατομμύρια ευρώ.Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτει το γεγονός ότι έχουμε να κάνουμε με ένα Μακρύ Δικαίωμα Αγοράς η Long Call Option καθώς ως αγοραστής θεωρούμε ότι θα ανέβει – που όντως γίνεται- απότομα η δραστικά η τιμή του S που όντως γίνεται από το 29^{o} έτος δηλαδή λίγο πριν την λήξη.Επίσης να θυμηθούμε ότι στα Πραγματικά Δικαιώματα δεν υπάρχει άνω όριο στα κέρδη που μπορούμε να αποκομίσουμε όταν εφαρμόζουμε μία Long Call Option.Το δε σημείο του 29^{ου} έτους λέγεται και Νεκρό Σημείο.Επομένος η μελέτη περίπτωσης του οδικού δικτύου είναι μία εφαρμογή δικαιωμάτων Bullish καθώς οι προσδοκίες μας είναι η μελλοντική άνοδος της τιμής του S εδώ των χρηματοροών.Επίσης παρατηρούμε πως η Call (δικαίωμα αγοράς) από το 21^{o} έτος μέχρι και το 24^{o} προσεγγίζει σχεδόν ταυτίζεται με το δικαίωμα εξάσκησης άρα είμαστε σε μία at-the-money ισοδύναμη χρηματοοικονομική κατάσταση.Δηλαδή στα πρώτα έτη που δε συμφέρει η αγορά ως προς το κέρδος έχουμε προσέγγιση της πραγματικής εγγενούς τιμής με το K.Από εκεί και πέρα γινόμαστε in-the-money καθώς το S ξεπερνάει κατά πολύ το K.Ενώ στο δικαίωμα πώλησης είμαστε out-of-the-money από το 1^{o} μέχρι το 29^{o} έτος και in-the-money όλα τα υπόλοιπα.Αυτά έχουν σημασία γιατί στην πρώτη περίπτωση πώλησης έχουμε τεράστια επίδραση της μεταβλητότητας (v = 10%) η αβεβαιότητας όπως είχε υπολογιστεί σε προηγούμενο βήμα και του παράγοντα χρόνου (έτη εδώ) και χρονικά αλλάζει με αυτή δηλαδή όταν είναι at-the-money η in-the-money ενώ δε συμβαίνει το ίδιο στην ενδιάμεση κατάσταση.Το δε δικαίωμα πώλησης που είναι και το βασικότερο για όλη τη διάρκεια ζωής του έργου θεωρείται και αυτό Long Put η Μακράς Πώλησης καθώς πέφτει απότομα το S από το 22^{o} έτος και μετά.Αντιθέτως αν παρέμενε κοντά στο at-the-money θα ήταν ένα Κοντής Πώλησης η Short Put και θα είχαμε αυτό που λέμε δειλή στρατηγική πώλησης.Θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε μία στρατηγική για τα πρώτα 10 έτη Long Put και μετά μέχρι το 22^{o} Short Put και μετά πάλι Long Put που λέγεται και Long-Short Put στρατηγική έτσι ώστε να έχουμε ένα αντιστάθμισμα.Αυτό σημαίνει δύο διαφορετικές η και τρείς τιμές εξάσκησης K.Δηλαδή εφαρμογή bull και bear στρατηγικών.



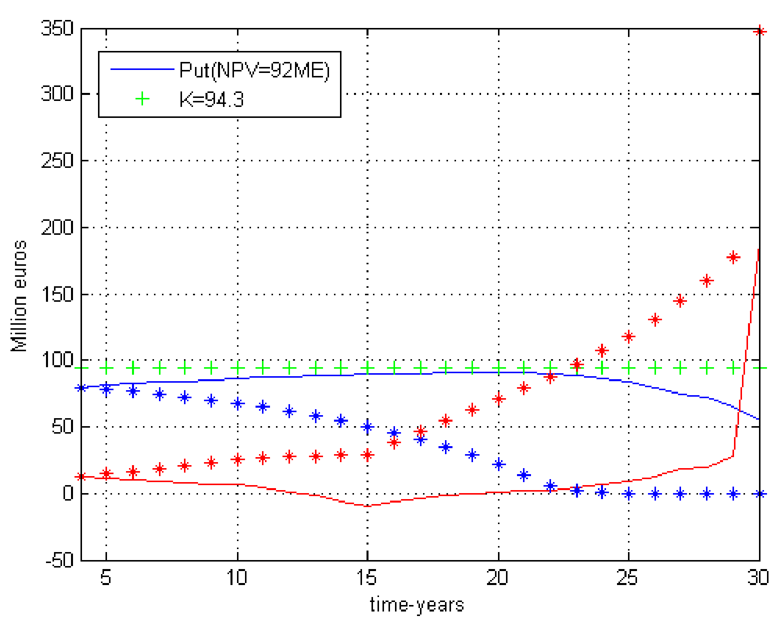
Ας δούμε τι γίνεται όμως αν αλλάξουμε τη μεταβλητότητα ακόμα και αν αυτό δε γίνεται από το υπόψιν έργο.Έστω ένα v = 50 %.Παραπάνω φαίνεται σε διάγραμμα τι γίνεται σε αυτή την περίπτωση.Προφανώς και έχουμε bearish συμπεριφορά ως προς την στρατηγική του πραγματικού δικαιώματος.Βλέπουμε πως έχουμε μία παρατεταμένη περίοδο μηδενικών κερδών και ζημίας ειδικά στα ενδιάμεσα έτη 14^{o} με 20^{o} αποτέλεσμα της αβεβαιότητας αλλά από το 25^{o} έτος τα κέρδη είναι απλώς τεράστια και δεν συμφέρει η οποιαδήποτε εξάσκηση του δικαιώματος (δηλαδή να το αφήσουμε να λήξει).Άρα η μεταβλητότητα συνεπάγεται αβεβαιότητα-προσδοκία ζημιών για παρατεταμένο διάστημα και κέρδη μελλοντικά σε μεγάλο και απροσδόκητο διάστημα 20 φορές περισσότερο.Δηλαδή πενταπλασιασμό της αβεβαιότητας (10% σε 50%) έχουμε εννεαπλασιασμό των κερδών αλλά με απότομο τρόπο.Είδαμε τι γίνεται για μία κατεύθυνση χρηματοροών με μεγαλύτερο NPV από το συμβατικό που είναι 87 εκατομμύρια ευρώ.Ας δούμε τι γίνεται όταν έχουμε μία κατεύθυνση με ακριβώς ίδια

ΚΠΑ.Αυτή η διαδρομή φαίνεται παρακάτω και μας δίνει την μόνη λίγο πιο πάνω σε ΚΠΑ δυνατή διαδρομή (γκρίζα-μπλε) και με ΚΠΑ = 92578260 ευρώ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	NPVrev
112.4	111.7	69	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	146.6205	162.0407	179.0827	197.9169	
0	0	0	0	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	146.6205	162.0407	
0	0	0	0	0	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	
0	0	0	0	0	0	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	
0	0	0	0	0	0	0	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	
0	0	0	0	0	0	0	0	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	92.57826
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.989429	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.800109	1.989429	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.628806	1.800109	1.989429	2.198659	2.429894	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.473805	1.628806	1.800109	1.989429	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.333554	1.473805	1.628806	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.206649	1.333554	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.091822	-48.2589
-207.3	-203.8	-126.1	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-3	-5.5	-8	-11	-14.7	-10	-7.5	-5	-3	-1.7	-1.75	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	149.2	



Όπου με διακεκομμένη είναι η ροή χρηματοροών που οδηγεί σε 92 εκατομμύρια βλέπουμε επομένως πως υπάρχει τεράστια ομοιότητα με εξαίρεση μια μικρή απόκλιση για τα έτη 27^{o} , 28^{o} και 29^{o}.Άρα οι στρατηγικές ισχύουν το ίδιο.Δεν έχει νόημα να δούμε τι γίνεται στο Δυωνυμικό Δένδρο Πραγματικών Δικαιωμάτων για πιθανές εκβάσεις καλύτερου αποτελέσματος στην κόκκινη περιοχή γιατί εκεί θα έχουμε προφανώς την ίδια συμπεριφορά.Έχει όμως νόημα στην καλύτερη έκβαση (λευκή περιοχή στον πίνακα).



Σε αυτή τη σύγκριση έχουμε με κόκκινη συνεχή γραμμή τη διαδρομή χρηματοροών που δίνει ΚΠΑ = 92 εκατομμύρια ευρώ και με κόκκινα σημεία την καλύτερη δυνατή διαδρομή του δυωνυμικού δένδρου που δίνει τη μέγιστη δυνατή ΚΠΑ ίση με 1747655000 η 1.74 δισεκατομμύρια ευρώ μέσα σε πλαίσιο τριακονταετίας.Αυτό το τελευταίο καταδεικνύει γιατί στα Logistics όπως με την κατασκευή ενός οδικού δικτύου για τη διέλευση φορτηγών εμπορευμάτων είναι σημαντική η ανάλυση επενδύσεων με Πραγματικά Δικαιώματα.Από τα 87 εκατομμύρια με τον παράγοντα της μεταβλητότητας χαμηλό μπορούμε να πετύχουμε και ένα ποσό σχεδόν 20 φορές μεγαλύτερο που θα έχει τεράστια συμβολή στο ΑΕΠ της χώρας και της Ε.Ε. συνολικότερα.Αυτό που βλέπουμε και κάνουμε στην εξάσκηση δικαιώματος πώλησης στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα είναι μία καθαρά bullish στρατηγική που γίνεται από το 23^{o} έτος in-the-money.Αυτό καταδεικνύεται από το μέγεθος του δικαιώματος το οποίο από τη στιγμή που αρχίζει η απότομη αύξηση των κερδών αυτό μέσα σε 5 έτη μηδενίζεται (από 50 εκατομμύρια δικαίωμα σε 0).Προφανώς στη μέγιστη και βέλτιστη εναλλακτική του δυωνυμικού δεν έχει νόημα η εξάσκηση του δικαιώματος πώλησης αλλά αγοράς όταν έχουμε να κάνουμε με έσοδα και πώλησης όταν έχουμε να κάνουμε με ζημίες.Το αντίθετο ισχύει στο κατώτερο παρακλάδι διαδρομής του δένδρου που η άμεση εξάσκηση δικαιώματος πώλησης και οι αντισταθμιστικές στρατηγικές μειώνουν στο ελάχιστο τις ζημίες μας.

Το επόμενο που θα μας ενδιαφέρει στα πραγματικά δικαιώματα τα οποία σημειωτέον κάνουν κατά βάση εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου δηλαδή της Δυωνυμικής , είναι στα ευρωπαικά δικαιώματα δηλαδή η Black-Scholes μαθηματική φόρμουλα.Αυτή μπορούμε να τη δούμε για τις δεδομένες χρηματοροές που μας δίνουν τα δεδομένα της μελέτης του έργου και αυτά είναι τα εξής για 30 έτη:

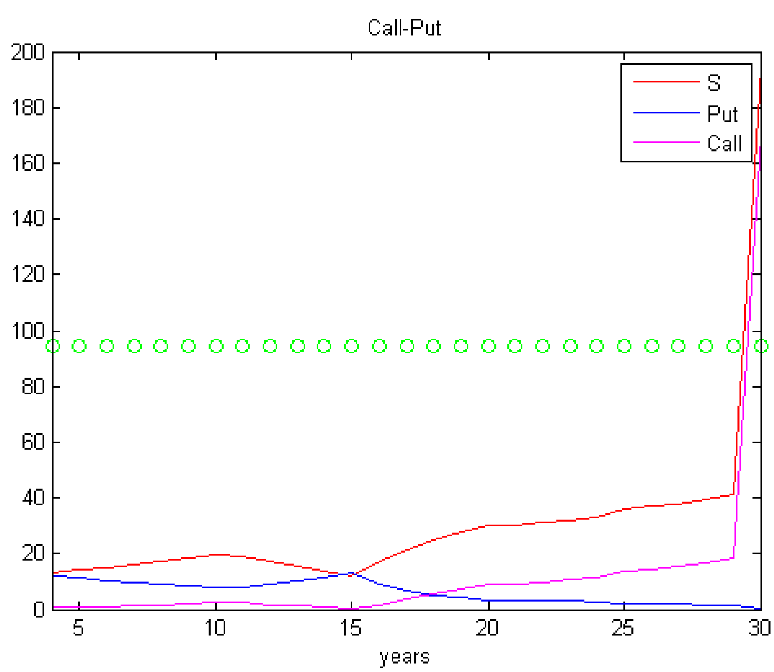
year	NCF	year	NCF
1	(94.9)	**16**	17.25
2	(92.1)	**17**	21.3
3	(57.1)	**18**	24.85
4	13	**19**	27.85
5	14.1	**20**	30.1
6	15	**21**	30.15
7	16.1	**22**	31.1
8	17	**23**	32.15
9	18.2	**24**	33.2
10	19.3	**25**	35.9
11	19	**26**	36.85
12	17.05	**27**	37.9

13	15.6	**28**	39.45
14	13.65	**29**	41.5
15	11.7	**30**	194.9

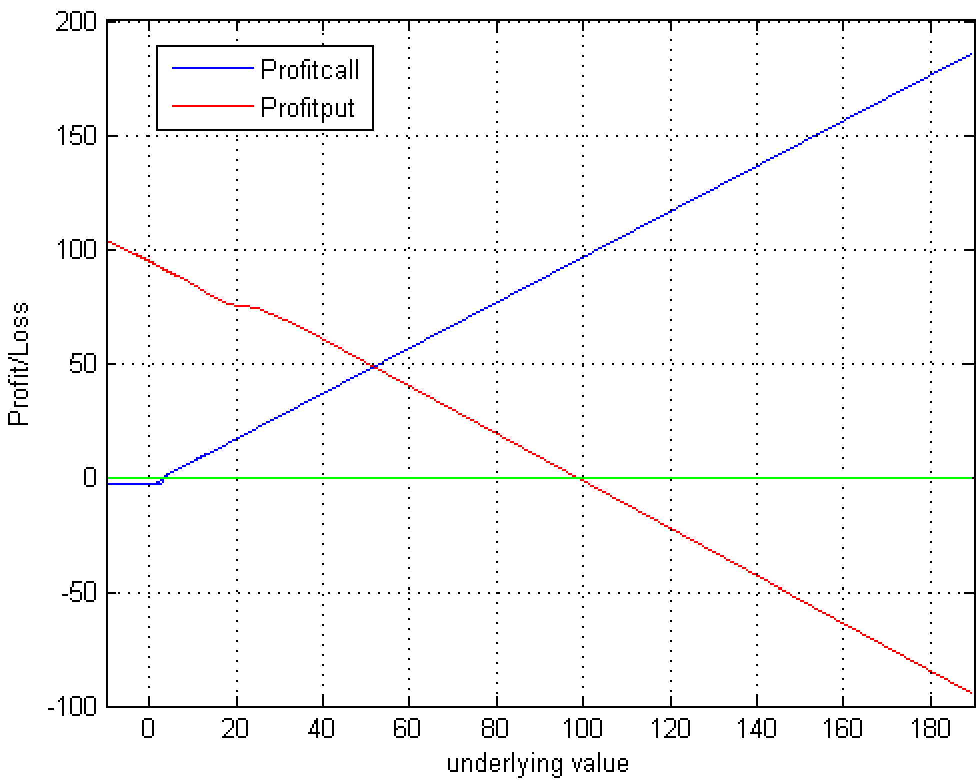
Και ο κώδικας που υλοποιεί την έρευση των Call και Put δικαιωμάτων είναι ο ακόλουθος.

```
%risk-free rate as coputed%
r=0.045;
%time of expiration of options%
Time=30;
v=0.1;
K=94.3;
for i=1:27
Pr(i)=npv(i+3);
end
[Call,Put]=blsprice(Pr,K,r,Time,v);
tt=4:1:30;
plot(tt,Pr,'r');
hold on;
plot(tt,Put,'b');
hold on;
plot(tt,Call,'m');
hold on;
plot(tt,K,'go');
hold on;
xlim([4 30]);
legend('S','Put','Call');
xlabel 'years'
title 'Call-Put';
```

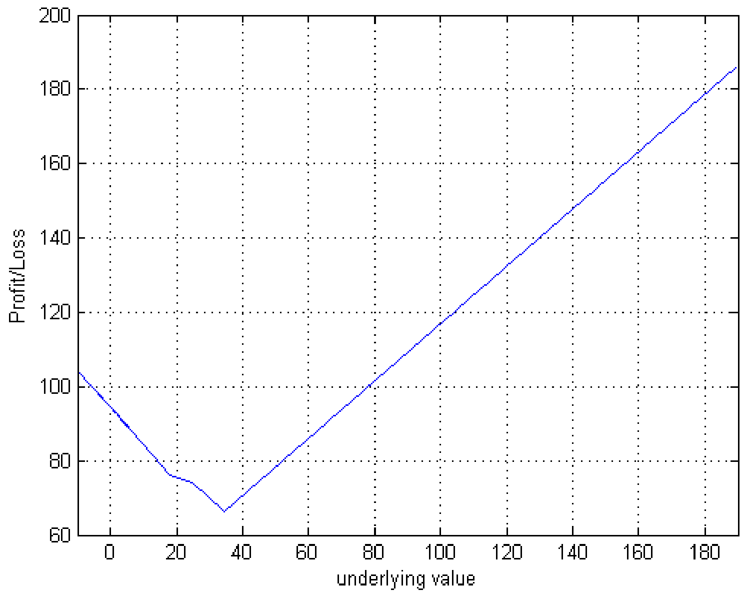
Επομένως για δεδομένη μεταβλητότητα ίση με v = 10 % βρίσκουμε.



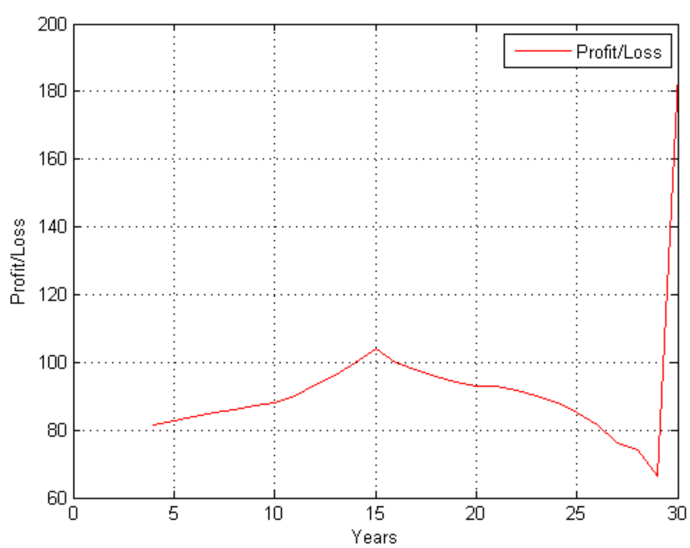
Εδώ μας ενδιαφέρει η πώληση.Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται πως συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα πώλησης Put κατά την περίοδο αρχικά στο $4^{ο}$ έτος και μετά στο $13^{ο}$ με $17^{ο}$ έτος ειδικά το $15^{ο}$ έτος για 20 εκατομμύρια ευρώ που έχουμε ζημίες.Εκεί φαίνεται πως ελαχιστοποιούμε τις ζημιές στα 74.3 εκατομμύρια ευρώ.Πουθενά όμως δεν συνιστάται πώληση ειδικά από το $28^{ο}$ έτος και μετά καθώς εκτινάσσονται τα κέρδη και το δικαίωμα μηδενίζεται και δεν μπορεί να εξασκηθεί στο τέλος.Η διαφορά με το δυωνυμικό έγκειται ότι αυτή είναι μια πιο επιφυλακτική μέθοδος καθώς η Δυωνυμική Μέθοδος μας συμβούλευε και παρότρυνε να πουλήσουμε μέχρι και το $25^{ο}$ έτος.Εδώ γίνεται σε πολύ μικρό βαθμό μόνο 5 έτη.Άρα είναι ασφαλής μέθοδος αλλά μας κρύβει εναλλακτικές δυνατότης να αποσωβίσουμε η και να μηδενίσουμε ζημιές και μας αποκρύπτει τη δυνατότητα Πώλησης-Αγοράς.Πάντως και οι δύο μέθοδοι δείχνουν αρκετές πληροφορίες που η απλή συμβατική μέθοδος με ρίσκο του NPV δε θα μπορούσε ποτέ νας φανερώσει.Ας δούμε όμως τι γίνεται με την ουσία της επένδυσης στα 30 έτη που είναι ο λόγος κερδών προς ζημίες.Συνδυάζοντας Δικαίωμα Αγοράς (δηλαδή μακράς θέσης) και Δικαίωμα Πώλησης (ομοίως μακράς θέσης) καταλήγουμε στα εξής.



Το οποίο σημαίνει πως στην πρέπει να ασκήσουμε δικαίωμα πώλησης και μετά δικαίωμα αγοράς.Έτσι βγάζουμε το ακόλουθο σχήμα.

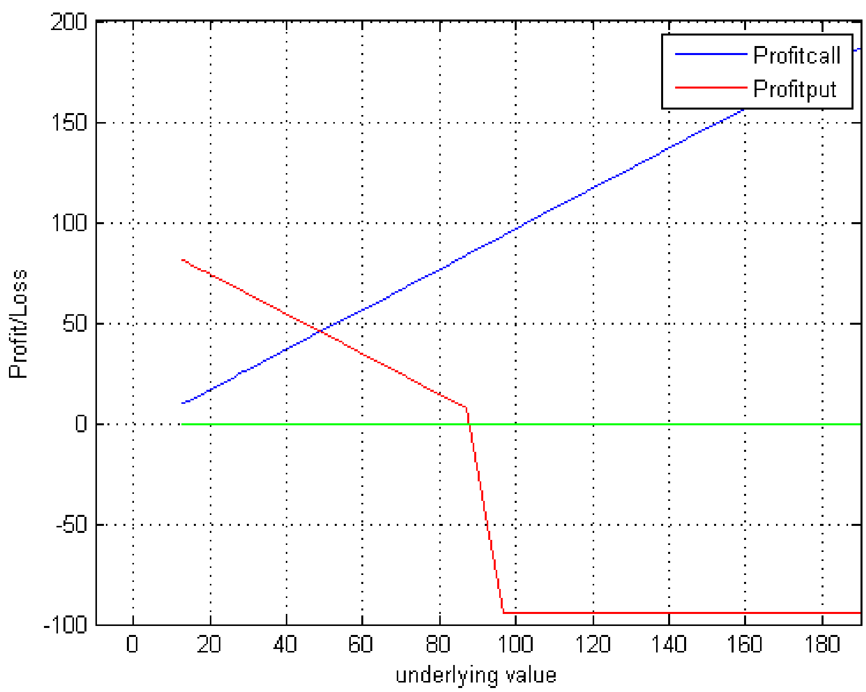


Το παραπάνω σχήμα δείχνει μία δημοφιλή στρατηγική συνδυασμού δικαιωμάτων που είναι η Straddle η Ισοσκελισμού δηλαδή συνδυασμός δύο Μακρών Θέσεων Πώλησης και Αγοράς με δύο Κ.Φυσικά σε άλλη μελέτη περίπτωσης και με διαφορετικές τιμές εξάσκησης λόγω διαφορετικής χρηματοροής (εδώ ΚΠΑ = 87 εκατομμύρια ευρώ) θα είχαμε ίσως και μία διαφορετική στρατηγική όπως μία Butterfly (σχήμα πεταλούδας) , Strangle , Strip και Strap και φυσικά ο συνδυασμός αγοράς και πώλησης δικαιώματος δηλαδή ένα spread.Εμείς μπορούμε το τελευταίο να το σκεφθούμε αρχικά ως μόνο Αγοράς δικαιώματος όπου θα καταβάλουμε το πριμ (ζημία για εμάς) στον εκδότη του δικαιώματος (πωλητής) που μπορεί να είναι οποιοσδήποτε επενδυτής θα αγόραζε η θα πωλούσε σε εμάς το έργο του οδικού δικτύου μετά το 1^{o} έτος.Ας δούμε αναλυτικά τι συμβαίνει.

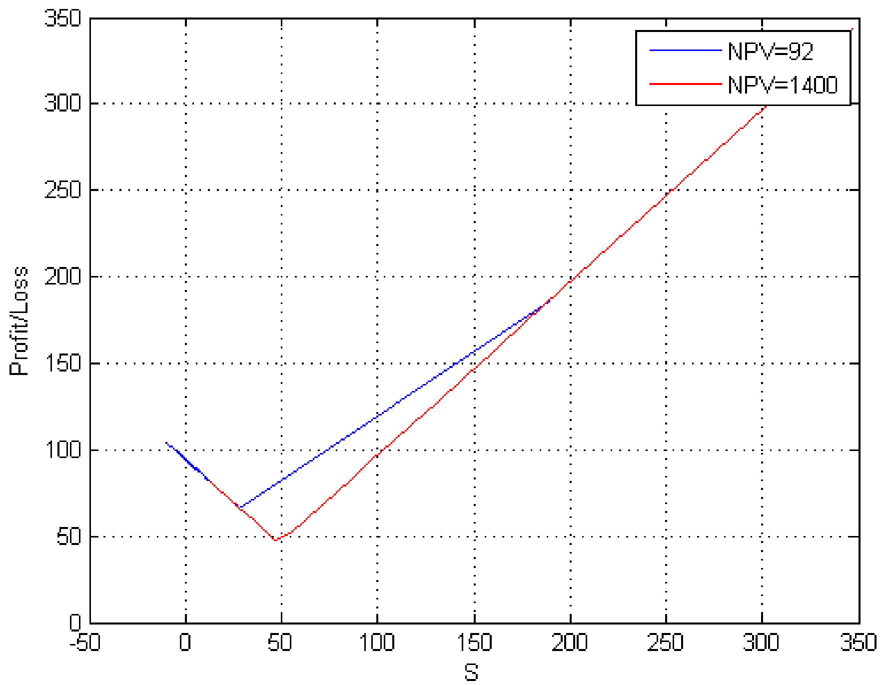


Το έτος 4^{ο} μέχρι και το 15^{ο} έχουμε άυξηση των εσόδων με το συνδυασμό Αγοράς-Πώλησης μετά για τα επόμενα 12 έτη έχουμε ζημιές οι οποίες όμως δεν είναι αρνητικές αλλά μείωση των κερδών λόγω του συνδυασμού των παραπάνω δύο δικαιωμάτων δηλαδή της στρατηγικής του Ισοσκελισμού (δύο προστατευτικών Μακρών θέσεων).Επίσης λόγω της γρήγορης μετάβασης στο ανοδικό σκέλος της καμπύλης Κέρδους/Ζημιών έχουμε με μια στρατηγική που παρά το γεγονός ότι βασίζεται σε bull στρατηγικές έχει βραχεία θέση δηλαδή είναι ένα spread βραχείας θέσης.Θα μπορούσε να γίνει και ο συνδυασμός δύο δικαιωμάτων αγοράς δικαιώματος πώλησης και πώλησης δικαιώματος πώλησης οπότε σε αυτή την περίπτωση θα κερδίζαμε το πριμ μετά την εξάσκησης του δικαιώματος Put δηλαδή κάπου στο 17^{ο} έτος και μετά.Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να κοιτάξουμε τη τιμή προβλέπεται να έχει το S και να ορίσουμε στο ίδιο έτος το μέγεθος του K , το οποίο θα είναι προφανώς διαφορετικό από τα προηγούμενα.Δηλαδή πριν το έτος 1 ή το έτος 0 πουλάμε ένα δικαίωμα Call με βάση ένα πρίμ που θα πάρουμε σε περίπτωση μη εξάσκησης από τον επενδυτή έτσι ώστε μετά να το εξασκήσει και να αγοράσει από εμάς την επένδυση αντί να αγοράσουμε ένα δικαιώμα Put.Και το ίδιο να κάνουμε κατόπιν πουλώντας ένα δικαίωμα πώλησης λίγο πριν το 17^{ο} έτος.

Ας δούμε τέλος αν αλλάξει κάτι ως προς την στρατηγική στο καλύτερο δυνατό ενδεχόμενο που μας δίνει ΚΠΑ = 1.4 δισεκατομμύρια ευρώ επομένως έχουμε.



Εδώ βλέπουμε πως έχουμε παρόμοια συμπεριφορά στην εξάσκηση των δικαιωμάτων δηλαδή πρώτα Πώληση και μετά Αγορά,Με μία όμως παρατήρηση εδώ η πώληση μετά από ένα σημείο και μετά γίνεται απαγορευτική δηλαδή από όταν το S πάρει τιμή 95 εκ. ευρώ ενώ για την πρώτη περίπτωση με τη διαδρομή που δίνει ΚΠΑ ίση με τη μέθοδο του NPV γίνεται απαγορευτική όταν το S διπλασιασθεί σε τιμή.Άρα το καλύτερο δυνατό ενδεχόμενο στο Δυωνμικό Δένδρο είναι και πιο επιφυλακτικό στις άσχημες επιλογές.Άρα υπάρχει μία τάση η αύξηση των κερδών για ίδια μεταβλητότητα να συνοδεύεται από σταδιακή απόρριψη της ζημιογόνος επιλογής δικαιώματος.



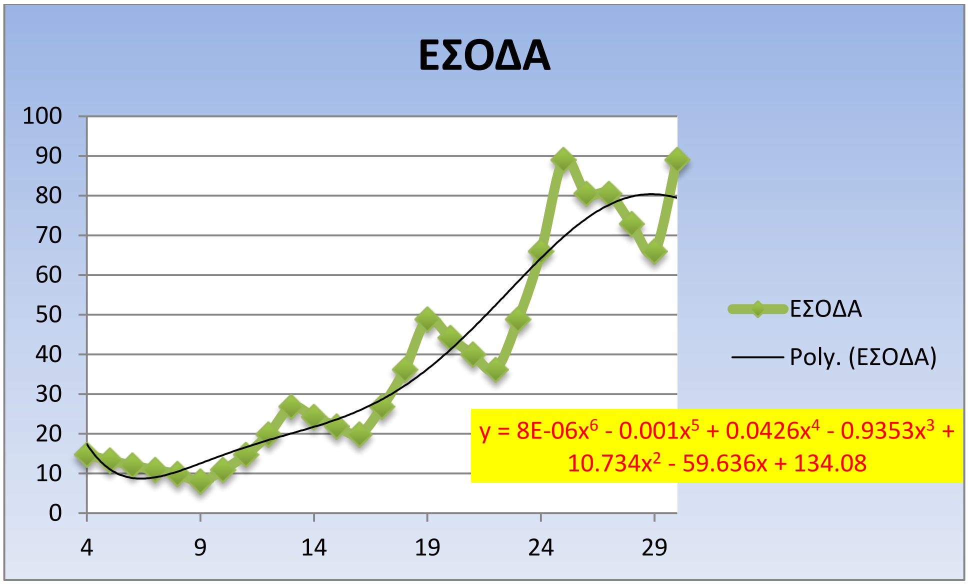
Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται πως η στρατηγική spread Straddle χαρακτηρίζει κάθε μας κίνηση για κατευθύνσεις στο δυωνυμικό που δίνουν θετική αθροιστική αξία.Όμως υπάρχει ξεκάθαρα τάση να γίνεται η Βραχεία Θέση μακρύτερη η να αποκτά Μακρά Θέση για καλύτερα δυνατά αποτελέσματα.Τέλος αυτό που μένει είναι και η εξέταση μίας περίπτωσης με αρνητική χρηματική ροή στο σύνολο των τριάντα ετών συνοπτικά για να δούμε τι επιτάσσουν τα Πραγματικά Δικαιώματα σε αυτή την περίπτωση.

Έτσι έγινε δυνατή η επίδειξη της αξίας των Πραγματικών Δικαιωμάτων και εν γένει των Χρηματοοικονομικών σε δύο πολύ σπουδαία έργα επένδυσης.Τόσο στο σύντομο Αιολικό Πάρκο όσο και στο εκτενές έργο Logistics κατασκευής οδικού δικτύου.

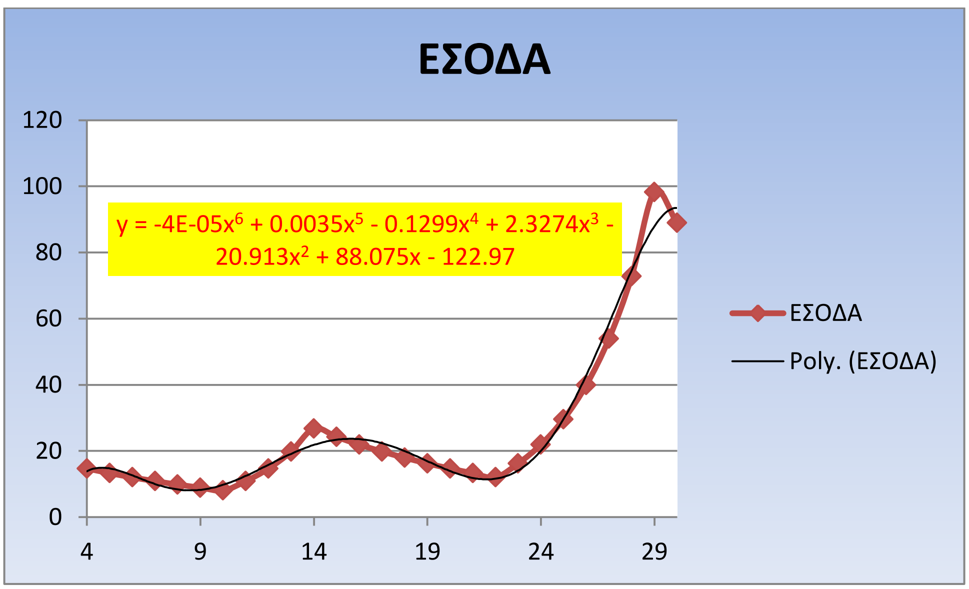
Τώρα κάτι εξαιρετικά ενδιαφέρον και ουσιώδες για την παρούσα μελέτη είναι εκείνη η περίπτωση στην οποία όπως συμβαίνει στα περισσότερα επενδυτικά έργα έχουμε μία περιοδική συμπεριφορά των εσόδων και ζημιών αντίστοιχα αν είναι αρνητικά.Ειδικότερα από τη θεωρία ανάπτυξης προιόντων και παραγώγων γνωρίζουμε ότι υπάρχουν οικονομικοί κύκλοι και στην περιτπωσή μας οι επιχειρηματικοί κύκλου.Αυτό σημαίνει μία ημιτονοειδή συνήθως συμπεριφορά στις χρηματοροές.Υπόκειντaι ασφαλώς τα επενδυτικά έργα σε μία ελεύθερη οικονομία όπως είναι αυτή των χωρών που απαρτίζουν την Ε.Ε. στους άτυπους νόμους που διέπουν το Διεθνές Εμπόριο.Αν και δεν είναι στόχος μας να κάνουμε την μακροοικονομική αξιολόγηση , το έργο ενός οδικού δικτύου είναι άμεσα εξαρτημένο από τη ζήτηση για χρήση στην πάροδο αξιοποιησής του δηλαδή συνακόλουθα από τη ζήτηση των αποθηκών για εμπορεύματα , τη διακίνηση αυτών , τους δασμούς και φυσικά τους χρηματοοικονομικούς δείκτες της επιχείρησης.Οι οποίοι στον τομέα των Logistics είναι προιόν της οικονομικής ανάλυσης του κόστους προμηθευτών και αγοραστών επομένως και των μακροοικονομικών παραγόντων των χωρών και συνεπώς υπόκειντaι σε μία ανομοιόμορφη πολλές φορές περιοδικότητα.Αυτές σε γενικότερη εικόνα έχουν περιγραφεί αναλυτικά στην περιπτωσή μας από τον Kuznets και Juglar ειδικά για επενδυτικά έργα Logistics.Θεωρούμε επομένως τι κατόθι περιοδικές συμπεριφορές στις χρηματοροές , μία με μεγάλο εύρος και πλάτος και μία πιο σταθερή και μικρότερου εύρους.Με μπεζ χρώμα παριστάνεται η δεύτερη και με πράσσινο η πρώτη.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	NPVrev
112.4	111.7	69	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	146.6205	162.0407	179.0827	197.9169	1747.655
0	0	0	0	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	146.6205	162.0407	
0	0	0	0	0	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	120.0427	132.6677	
0	0	0	0	0	0	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	98.28265	108.6191	
0	0	0	0	0	0	0	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	80.46703	88.92982	
0	0	0	0	0	0	0	0	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	65.88083	72.80958	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	53.93866	59.61144	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	44.16124	48.80572	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	36.15617	39.95874	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	29.60216	32.71545	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	24.2362	26.78515	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	19.84292	21.92982	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	16.24601	17.95462	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	13.30111	14.7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	10.89003	12.03534	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	8.916001	9.853705	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	7.299804	8.067531	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	5.976574	6.605136	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	4.893205	5.407828	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	4.006217	4.427555	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.989429	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	3.280013	3.624975	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.800109	1.989429	2.198659	2.429894	2.685448	2.967879	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.628806	1.800109	1.989429	2.198659	2.429894	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.473805	1.628806	1.800109	1.989429	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.333554	1.473805	1.628806	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.206649	1.333554	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.091822	-48.2589
-207.3	-203.8	-126.1	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-3	-5.5	-8	-11	-14.7	-10	-7.5	-5	-3	-1.7	-1.75	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	-1.8	149.2	

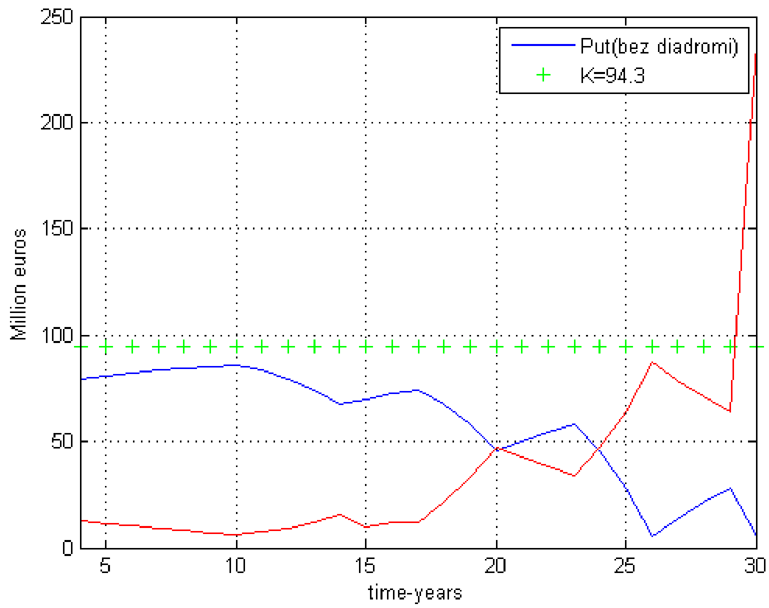
Ας δούμε τώρα ποιες σχέσεις μαθηματικά διέπουν αυτές τις συμπεριφορές.



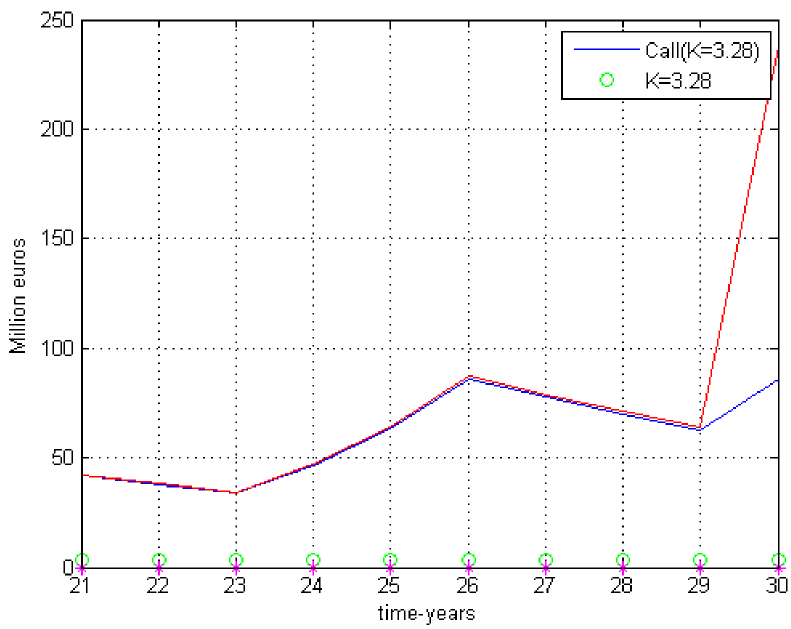
Όπου βλέπουμε πως με μία πολυωνυμική παλινδρόμηση λαμβάνουμε μία ημιτονικής συμπεριφοράς συμπεριφορά των εσόδων σε συνθήκες μεέγεθυνσης της οικονομίας για μικρές αλλαγές.



Όπου πάλι βλέπουμε τη συμπεριφορά των χρηματοροών με μία πολυωνυμική παλινδρόμηση έκτου βαθμού.Εδώ φαίνεται η χαρακτηριστική μεγάλη περίοδος και η απότομη αύξηση από το 24^{ο} έτος και μετά.Τώρα τι ακριβώς θα μας δείξει η ανάλυση Πραγματικών Δικαιώματων για αυτές τις δύο ενδιαφέρους περιπτώσεις.Επομένως βρίσκουμε πρώτα για την ομαλή διαδρομή (δηλαδή την μπεζ χρώματος).

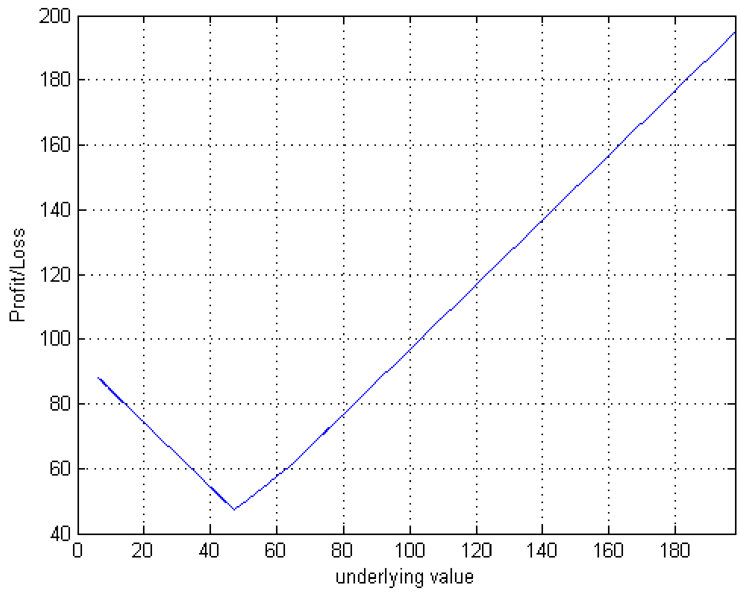


Για Put Δικαίωμα (Πώλησης) και:



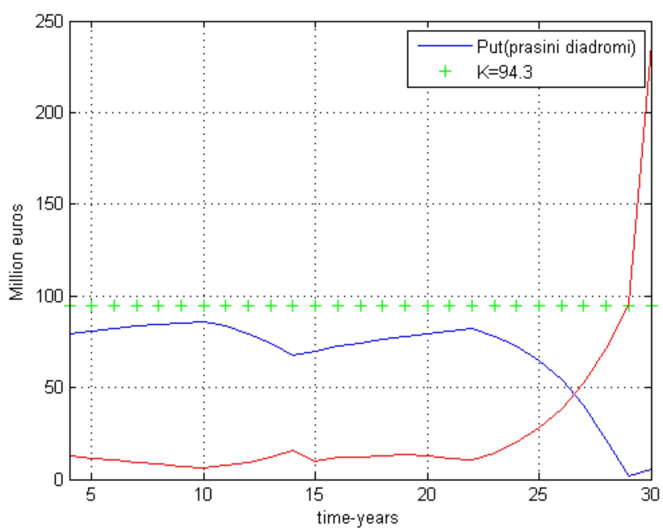
Για Call Δικαίωμα (Αγοράς)

Αυτό που βλέπουμε εκ πρώτης όψεως είναι ότι επιτάσσεται να πουλήσουμε τα πρώτα 15 χρόνια κάτι αναμενόμενο από τις πολύ χαμηλές χρηματοροές εκείνης της περιόδου δηλαδή της τάξεως των 8 με 18 εκατ. ευρώ.Μετά όμως αντιστρέφεται η κατάσταση σταδιακά για 5 χρόνια και μετά το 20^{o} έτος είναι πλέον σωστό να επιμείνουμε στην επενδυσή μας και ειδικά από το 28^{o} έτος είμαστε απόλυτα κερδισμένοι.Αξιοσημείωτη είναι η εξής συμπεριφορά αν δεν πουλήσουμε.Μιλήσαμε για ταλαντωτική συμπεριφορά ημιτονοειδής μικρά επιταχυνόμενου ρυθμού.Το έτος 20 είναι ουδέτερο και συμφέρει και δε συμφέρει να εξασκήσουμε δικαίωμα πώλησης και για 4 χρόνια βλέπουμε αυτή την ημιτονοειδή συμπεριφορά στο δικαίωμα εξάσκησης ειδικά το 23^{o} έτος.Γενικά συμφέρει η εξάσκηση του δικαιώματος με ημιτονοειδής μορφή λόγω της περιοδικότητας για το υπάρχον έργο μέχρι και το 28^{o} έτος μετά είμαστε χαμένοι κατί που ποτέ δε θα μας έλεγε η πολύ μεγάλη ΚΠΑ για αυτή τη διαδρομή.Τι γίνεται όμως με το δικαίωμα αγοράς.Συμφέρει να αγοράσουμε μόνο μετά το 28^{o} έτος όπως ακριβώς πρέπει να ισχυεί για αμοιβαία αλληλεξαρτώμενα δικαιώματα.Συνοπτικά μπορούμε να δούμε τη μορφή των Κερδών/Ζημίας ως προς την υποκείμενη αξία S δηλαδή των χρηματοροών.

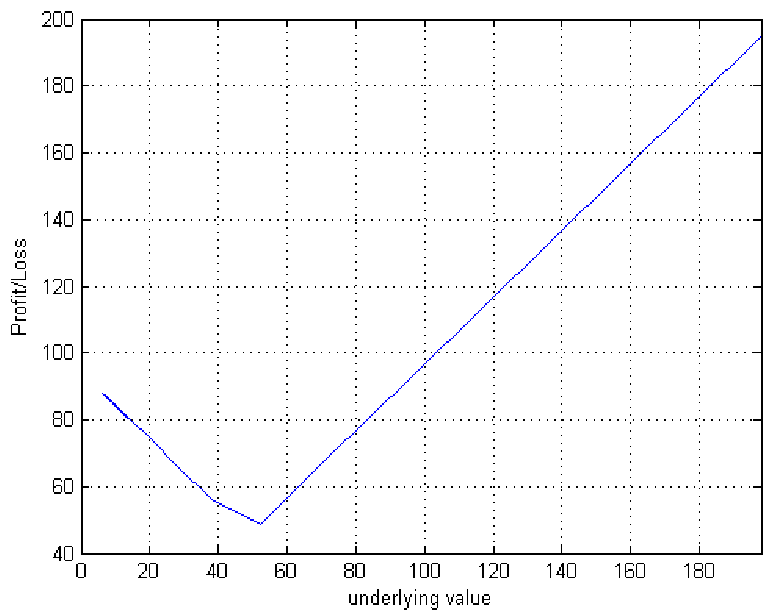


Πρόκειται ξεκάθαρα για μία στρατηγική Straddle όπως έχουμε δεί νωρίτερα.

Ομοίως για την διαδρομή εσόδων με πολύ μεγάλη διακύμανση και πλάτος βρίσκουμε για το δικαίωμα Πώλησης



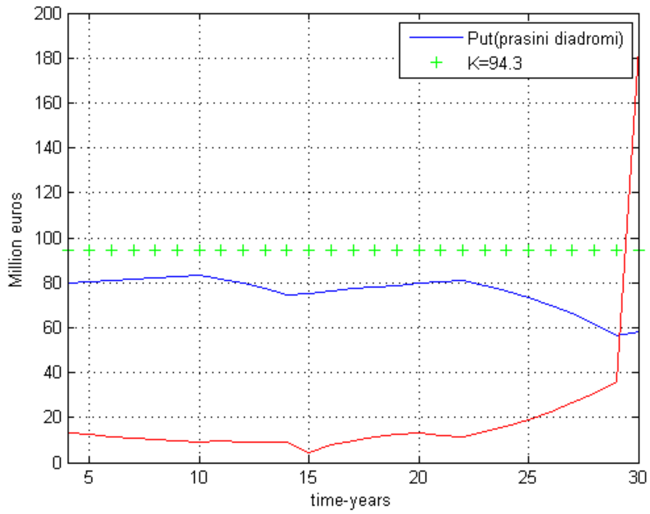
Εδώ ξεκάθαρα έχουμε μία εκτατική ταλαντωτική συμπεριφορά του δικαιώματος ημιτονοειδούς μορφής με αρχικά μικρό ρυθμό και μετά μεγάλο δηλαδή πρόκειται για επιτάχυνση μεγάλου μεγέθους αλλά εδώ παρατηρούμε ότι μία άστατη οικονομία με μεγάλη ύφεση θα έχει επίδραση σε ένα έργο Logistics μόνο μακροχρόνια και όχι από το 20^{o} έτος όπως το προηγούμενο.Εδώ δηλαδή εμμένη η τάση για εξάσκηση μέχρι το 26^{o} έτος με μεγάλη δυναμικότητα και ένταση.Ομοίως το δικαίωμα Αγοράς παρουσιάζει ανάστροφες συμπεριφορές ενώ το διάγραμμα Κέρδους/Ζημιών.



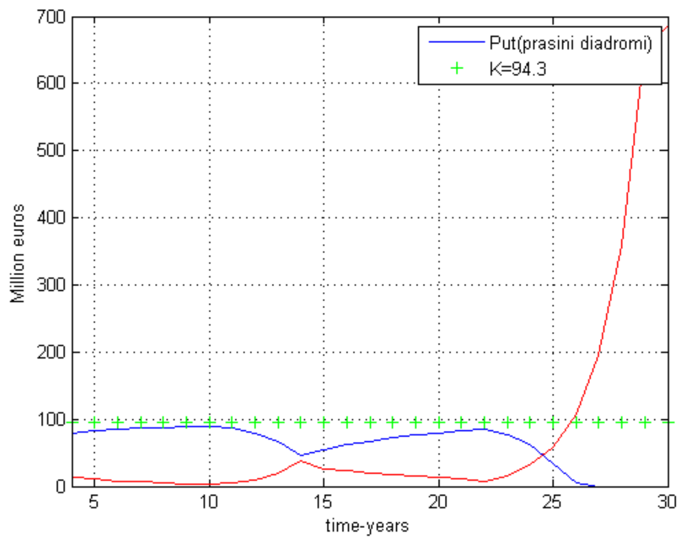
Είναι πάλι της ίδιας μορφής με ένα πάρα πολύ ενδιαφέρον έχει πανομοιότυπη μορφή με αυτό της προηγούμενης διαδρομής ΚΠΑ.Έτσι εξάγεται το συμπέρασμα πως η διαφορά στο πλάτος και εύρος των χρηματοροών δεν αλλάζει τη συνολική στρατηγική εξάσκησης δικαιώματος με την προυποθέση ότι καταλήγει στην ίδια τελική αξία εσόδων του 30^{ου} έτους.Αυτό γιατί παραλείψαμε την αξία του γεγονότους στο απόλυτο μέγεθος του πλάτους το οποίο στις θετικές του τιμές λαμβάνει ακραία μεγέθη σε σχέση με μία ομαλής ανάπτυξης πορείας εσόδων.

Το τελευταίο που θα μας απασχολήσει είναι και το πιο ουσιώδες η μεταβλητότητα η οποία και χαρακτηρίζει τα Πραγματικά Δικαιώματα.Όπως έχουμε ήδη δει λαμβάνει τιμή ίση με μ = 10%.Όμως μπορεί να μεταβληθεί στο επιτρεπτό εύρος που αφορά την μελέτη μας στις τιμές 5 – 20 %.Συνοπτικά μπορούμε να δούμε τι θα γίνει άμα λάβει τις τιμές ακόμη 5% και 20% που είναι και τα χαρακτηριστικά άκρα.Τι ακριβώς θα επηρεάσει στη στρατηγική εξάσκησης που λάβουμε και τι κέρδος μπορούμε να κερδίσουμε συνολικά.

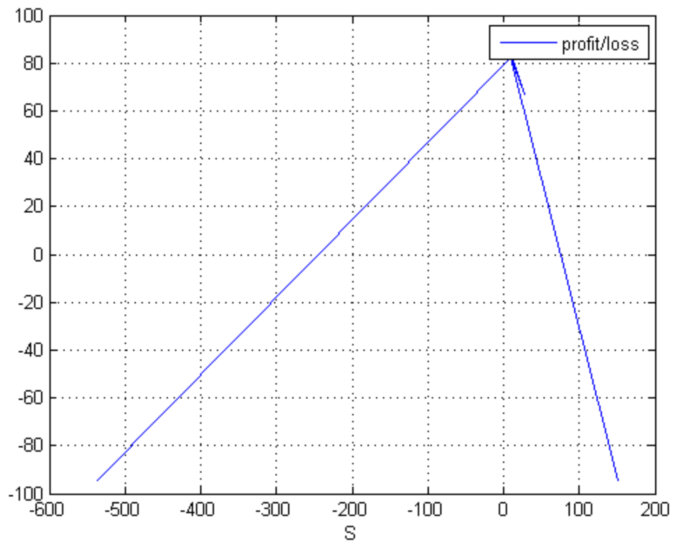
Για μ = 5% βρίσκουμε Δικαίωμα Πώλησης:



Και για μ = 20 % βρίσκουμε για το αντίστοιχο Δικαίωμα Πώλησης:



Επομένως με βάση τα παραπάνω δύο επιτρεπτά άκρα βλέπουμε υπάρχει μία αναλογία για μικρές χρηματοροές στα αρχικά έτη (τα πρώτα 10) οπότε και συμπεραίνουμε την μικρή επίδραση της μεταβλητότητας του μοντέλου για μικρές τιμές του S.Όμως έχουμε μία αξιοσημείωτη συμπεριφορά σύγκλισης και απόκλισης κατόπιν για το 13^{o} με 15^{o} έτος που δεν το έχουμε για μικρή μεταβλητότητα.Τι συνεπάγεται αυτό.Πως με αύξηση της μεταβλητότητας έχουμε πιο απρόβλεπτες και ασταθείς συμπεριφορές του μοντέλου και επομένως θέλουμε τη σταθερή συμπεριφορά της μικρής μεταβλητότητας.Όμως εδώ έρχεται να αντισταθμίσει το ζυγό το γεγονός ότι ένα μοντέλο με μεγάλη μεταβλητότητα μας φανερώνει υπέρμετρα κέρδη σε σχέση με το ίδιο με μικρή.Βλέπουμε πως για το 25^{o} έτος έχουμε 75 εκατ. ευρώ (μ = 20%) και μόνο 18 εκατ. για μ = 5%.Τέλος ας δούμε και την χειρότερη περίπτωση του δυωνυμικού δένδρου που είναι η διαγώνιος του πίνακα που έχει παρατεθεί σε προηγούμενη σελίδα.Μας δίνει όσον αφορά το Κέρδος και τη Ζημία στο χρόνο.



Που καταδεικνύει σαφέστατα την ανάγκη για πώληση στην αρχή με κάθε ζημία μέχρι να αρχίσουμε να έχουμε κέρδη οπότε συμφέρει η αγορά όμως ακόμα και τότε οι ζημιές είναι τεράστιες που σημαίνει πως η Ανάλυση Πραγματικών Δικαιωμάτων σε αυτές τις περιπτώσεις επιτάσσει άμεσα την ανάγκη από το 4^{o} έτος κιόλας της πώλησης.

6.1 Επίλογος και συμπεράσματα

Οι παραπάνω δύο μελέτες που άπτονται τόσο ενός καθαρά μηχανολογικού επενδυτικού ενεργειακού έργου και ήταν σύντομη όπως και η μακροσκελής ανάλυση ενός πάλι επενδυτικού έργου μηχανικής του τομέα των Logistics μπορούν να μας δείξουν ένα τελείως διαφορετικό σκηνικό όταν εφαρμοσθούν οι μέθοδοι ανάλυσης των Πραγματικών Δικαιωμάτων.Τα Πραγματικά Δικαιώματα προσφέρουν μία αναλυτική χωρίς ρίσκο πολύπλευρη εικόνα για μία οποιαδήποτε επένδυση υιοθετώντας αρχές και μεθόδους των γενικότερων Χρηματοοικονομικών Δικαιωμάτων.Ενώ με το απλό μοντέλο της ΚΠΑ θεωρούμε μία στατική ροή με σαφή και προσδιορισμένο κέρδος η ζημία στα Πραγματικά Δικαιώματα αποκαλύπτουμε συνιστώσες κέρδους υπερπολλαπλάσιες (και συγκεκριμένα ο μέσος όρος τελικών αξιών στο πολυωνυμικό δένδρο δίνει κατά πολύ μεγαλύτερες αποπληθωρισμένες αξίες σε σχέση με το συνήθως συμβατικό μοντέλο ειδικά για μεγάλες μεταβλητότητες) και με την εφαρμογή στρατηγικών επεκτατικών η επιφυλακτικών μπορούμε μία καθορισμένη ζημία με βάση τη ΚΠΑ να την μετατρέψουμε σε απρόοσκοπτη πορεία κέρδους.

7.1 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- **Real Options:Managerial Flexibility and Stategy in Resource Allocation – Lenos Trigeorgis**
- **Black-Scholes closed form (Ch.4) – An introduction to computational Finance**
- **Project Valuation Using Real Options : Prassad Kodukula – Chandra Papudesu**
- **Investment theory and risk management – Peterson**
- **Financial Futures and Options – T.E.Petzel**
- **Investments Analysis and Management – Jones**
- **Options and Futures – Don M.Chance**
- **Economics and Mathematics of Financial Markets – Cvitanic and Zapatero**
- **Logistics Systems Analysis – Daganzo**
- **Guide to Cost-Benefit Analysis of Investment Projects – European Commission**

http://etd.auburn.edu/bitstream/handle/10415/147/Han_Hyun_51.pdf?sequence=1
https://en.wikipedia.org/wiki/Real_options_valuation
http://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp
http://www.investopedia.com/terms/d/dispersion.asp
https://en.wikipedia.org/wiki/Strike_price
http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/eqnotes/optexpand.pdf
http://www.investopedia.com/terms/call-on-a-put.asp
https://en.wikipedia.org/wiki/Option_time_value
http://www.investopedia.com/terms/e/efficientmarkethypothesis.asp
http://www.investopedia.com/terms/m/markettiming.asp
http://www.investopedia.com/university/options-pricing/black-scholes-model.asp
https://en.wikipedia.org/wiki/Black%E2%80%93Scholes_model#Black-Scholes_formula
http://www.cboe.com/products/vix-index-volatility/volatility-on-stock-indexes/cboe-nasdaq-100-volatility-index-vxn
http://pi.unl.edu/~sdunbar1/MathematicalFinance/Lessons/BlackScholes/PutCallParity/putcallparity.xml

https://www.euretirio.com/arbitrage/
http://www.investopedia.com/terms/k/knock-outoption.asp
http://www.investopedia.com/terms/d/daio.asp
https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_Brownian_motion
https://en.wikipedia.org/wiki/Cone_of_Uncertainty
http://energynumbers.info/capacity-factors-at-danish-offshore-wind-farms
http://www.investopedia.com/ask/answers/06/sellingoptions.asp