

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ
ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΜΕ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

ΣΟΥΛΤΑΝΑ ΑΓΓΕΛΙΔΟΥ

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάρτιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- (Επιβλέπων)

-

-

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**VOLATILITY FORECASTING
MODELS WITH APPLICATIONS
IN FINANCE**

By
Soultana Angelidou

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
March 2018

Στη μνήμη της γιαγιάς μου Κωνσταντίας.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη των μεθόδων πρόβλεψης της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας υποδείγματα βασισμένα στην ανάλυση χρονοσειρών με χρηματοοικονομικές εφαρμογές και συγκεκριμένα τα υποδείγματα της ομάδας GARCH(1,1). Αρχικά στο 1^ο κεφάλαιο κάνουμε μια αναφορά της σπουδαιότητας που αντανακλά η μεταβλητότητα στη σύγχρονη οικονομική ζωή. Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια της μεταβλητότητας και περιγράφουμε εν συντομία τις ιδιότητές της. Στο 2^ο Κεφάλαιο κατηγοριοποιούμε τις μεθόδους πρόβλεψης της μεταβλητότητας σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που προτάθηκε κατά τους Poon και Granger (2003). Ακολούθως, κάνουμε μια σύντομη περιγραφή όλων των μεθόδων πρόβλεψης και καταλήγουμε σε κάποια γενικά συμπεράσματα σύγκρισης των προβλέψεων και των τρόπων αξιολόγησης τους. Στο 3^ο κεφάλαιο σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα του μοντέλου GARCH(1,1) σε προσομοιωμένα δεδομένα χρονοσειρών χρησιμοποιώντας την R, με συνεχείς εναλλαγές των τιμών των παραμέτρων ω, α, β . Στην συνέχεια ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία αξιολογούμε την δυνατότητα εκτίμησης των παραμέτρων αυτών. Τέλος, στο 4^ο Κεφάλαιο τιμολογούμε μέσω προσομοίωσης δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και Ασιατικού τύπου θεωρώντας ότι η μεταβλητότητα τους περιγράφεται από ένα υπόδειγμα της ομάδας GARCH(1,1) και συγκρίνοντας το με την τιμολόγηση του κλασικού μοντέλου Black and Scholes.

Abstract

This dissertation deals with volatility forecasting models with applications in Finance. In the first chapter we give a recitation of the importance that reflects the volatility in the modern economic life. Then, we define the concept of volatility and briefly describe its properties. In the second chapter, we categorize several volatility forecasting methods according to the categorization proposed by Poon and Granger (2003). In the third chapter, we evaluate volatility models via simulated time series data using R for various values of the parameters. Finally, in the last chapter, we estimate, through Monte Carlo simulation, the fair value of specific European options assuming that their volatility is described by a GARCH(1,1) process and make a brief comparison with the corresponding Black and Scholes model (with constant volatility).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1. Ορισμός και ιδιότητες της Μεταβλητότητας**
 - 1.1 Η Μεταβλητότητα στην σύγχρονη οικονομική ζωή
 - 1.2 Ορισμός Μεταβλητότητας
 - 1.3 Ιδιότητες Μεταβλητότητας
- 2. Μέθοδοι πρόβλεψης της Μεταβλητότητας**
 - 2.1 Κατηγοριοποίηση των μεθόδων πρόβλεψης της Μεταβλητότητας
 - 2.2 Υποδείγματα Ιστορικής Μεταβλητότητας
 - 2.3 Υποδείγματα ομάδας ARCH/GARCH
 - 2.4 Η προβλεπτική ικανότητα των Ιστορικών υποδειγμάτων και των υποδειγμάτων της ομάδας ARCH/GARCH
 - 2.5 Υποδείγματα Long Memory
 - 2.6 Στοχαστικά υποδείγματα
 - 2.7 Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)
 - 2.8 Μη παραμετρικά υποδείγματα
 - 2.9 Γενικά συμπεράσματα σύγκρισης των προβλέψεων
 - 2.10 Αξιολόγηση των μεθόδων πρόβλεψης της Μεταβλητότητας
- 3. Το Υπόδειγμα GARCH(1,1) και η εφαρμογή του σε προσομοιωμένα δεδομένα χρονοσειρών**
 - 3.1 Το υπόδειγμα GARCH(1,1)
 - 3.2 Μεθοδολογία και προσομοίωση του GARCH(1,1) στην R
 - 3.3 Εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος GARCH(1,1) μέσω προσομοιωμένων δεδομένων στην R
 - 3.4 Επιλογή του καλύτερου υποδείγματος GARCH

4. Εκτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης θεωρώντας ότι η μεταβλητότητα περιγράφεται από ένα GARCH(1,1) μοντέλο

- 4.1 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα
- 4.2 Δικαιώματα προαίρεσης
- 4.3 Αγορά σε κατάσταση ισορροπίας
- 4.4 Το μοντέλο Black and Scholes
- 4.5 Τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου υπό GARCH(1,1)
- 4.6 Τιμολόγηση δικαιωμάτων αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και Ασιατικού τύπου υπό GARCH(1,1) με διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1^ο

Ορισμός και ιδιότητες Μεταβλητότητας

1.1 Η Μεταβλητότητα στην σύγχρονη οικονομική ζωή

Η μεταβλητότητα, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της καθώς και η επιτυχής πρόβλεψη της αποτελούν ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα στις χρηματοοικονομικές αγορές και έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον ακαδημαϊκών ερευνητών και επαγγελματιών του χώρου, κυρίως τις τέσσερις τελευταίες δεκαετίες. Πλήθος ερευνών έχουν δημοσιοποιηθεί για τη μελέτη και τη πρόβλεψη των μεθόδων εκτίμησης της μεταβλητότητας.

Όπως αναφέρεται επιγραμματικά, κατά τους Poon και Granger (2003), κυρία αιτία της σπουδαιότητας της μελέτης της μεταβλητότητας αντανακλάται στους εξής τομείς:

- i. **Στις επενδυτικές αποφάσεις**, αφού ερμηνεύεται ως το κλειδί για τη λήψη των αποφάσεων και τη διαχείριση χαρτοφυλακίου. Οι επενδυτές και οι διαχειριστές χαρτοφυλακίων δύναται να αναλαμβάνουν κίνδυνο μέχρι ένα συγκεκριμένο μέγεθος. Μια επιτυχημένη πρόβλεψη της μεταβλητότητας της αξίας ενός τίτλου συνεισφέρει στην καλύτερη αξιολόγηση των επενδυτικών αποφάσεων.
- ii. **Στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων**. Για να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης θα πρέπει να γνωρίζουμε τη μεταβλητότητα του αγαθού από σήμερα έως τη λήξη του δικαιώματος. Δηλαδή, στην πράξη η αγορά καταγράφει τις τιμές των δικαιωμάτων σε όρους μεταβλητότητας .

Για παράδειγμα, η τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ή αντίστοιχα να αγοράσει ένας επενδυτής ή ένας αγοραστής για την μετοχή μιας εταιρείας εξαρτάται από την άποψη του για το πόσα θα είναι τα μελλοντικά του κέρδη και πόσο πιθανόν να επιτευχθούν. Όσο πιο κερδοφόρα είναι μια επιχείρηση, τόσο μεγαλύτερο το τίμημα που πληρώνει κάποιος για την απόκτησης της μετοχής της. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι οι μελλοντικές χρηματικές ροές που απορρέουν από κάθε αγαθό, σε συνδυασμό με τη πιθανότητα και το χρόνο που αυτές προκύπτουν, καθορίζουν την τιμή του.

- iii. **Στην Διαμόρφωση της νομισματικής πολιτικής.** Η μεταβλητότητα στις αγορές επηρεάζει σημαντικά την επενδυτική ψυχολογία και κατά συνέπεια την ευρύτερη οικονομία. Οι Κεντρικές Τράπεζες λαμβάνουν σοβαρά υπόψη τους την μεταβλητότητα των μετοχών, ομολόγων, νομισμάτων και εμπορευμάτων προκειμένου να χαράξουν τη νομισματική τους πολιτική. Για παράδειγμα, μετά τα γεγονότα της τρομοκρατικής επίθεσης της 11^{ης} Σεπτεμβρίου 2001, δημιουργήθηκε αναταραχή στις χρηματαγορές σε παγκόσμιο επίπεδο. Αυτό το συμβάν ήταν μια σαφής ένδειξη της σημαντικής διασύνδεσης μεταξύ αβεβαιότητας στις χρηματιστηριακές αγορές και της επενδυτικής συμπεριφοράς. Για το λόγο αυτό, οι υπεύθυνοι χάραξης νομισματικής πολιτικής χρησιμοποιούν εκτιμήσεις της αγοράς για τη μεταβλητότητα ως ένα δείκτη του πόσο ευάλωτες είναι οι χρηματοοικονομικές αγορές και η οικονομία.

Αυτό το εκτεταμένο ενδιαφέρον επιβεβαιώνει την τεράστια σημασία της μεταβλητότητας στην σύγχρονη οικονομική ζωή.

1.2 Ορισμός Μεταβλητότητας (Volatility)

Ως μεταβλητότητα μπορούμε να ορίσουμε το μέσο μέτρησης του κινδύνου και της αβεβαιότητας ενός χρηματοοικονομικού μέσου. Ωστόσο, όπως έχει επισημανθεί κατά τους Roop και Granger, πολλοί ερευνητές και χρηματοοικονομικοί φοιτητές συχνά έχουν μια λανθασμένη αντίληψη των διαφορών μεταξύ της μεταβλητότητας, της τυπικής απόκλισης και του κινδύνου. Αρχικά, είναι πολύ σημαντικό να διαχωρίσουμε αυτές τις τρεις έννοιες.

Συγκεκριμένα, στα χρηματοοικονομικά ο όρος μεταβλητότητα συχνά αναφέρεται στην τυπική απόκλιση, σ , η οποία υπολογίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανση, σ^2 , η οποία με τη σειρά της υπολογίζεται από ένα πλήθος παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας των παρακάτω τύπο:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (R - \bar{R})^2 \quad (1)$$

Όπου \bar{R} η μέση απόδοση.

Το στατιστικό $\hat{\sigma}$ της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι μια παράμετρος ελεύθερης κατανομής, η οποία εκφράζει τη δεύτερη ροπή του δείγματος. Μόνο όταν αναφέρεται σε συγκεκριμένη γνωστή κατανομή όπως η κανονική κατανομή ή η student t , μπορεί να δοθεί αναλυτικός τύπος για την πυκνότητα πιθανότητας ή την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας. Σε διαφορετική περίπτωση πρέπει να εξαχθεί εμπειρικά.

Σε συνεχή χρόνο το σ είναι παράμετρος κλίμακας, η οποία αυξάνει ή μειώνει το μέγεθος των διακυμάνσεων που προκαλούνται από μια τυπική διαδικασία. Ανάλογα με τη στοχαστική διαδικασία που χρησιμοποιείται και την ευαισθησία των μεταβλητών στο χρόνο προκύπτουν διαφορετικές κατανομές αποδόσεων. Επομένως, δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε το σ ως μέτρο κινδύνου εκτός και αν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη κατανομή. Συγκεκριμένα, όταν το σ χρησιμοποιείται ως μέτρο αβεβαιότητας τότε υποθέτουμε κανονική κατανομή. Άλλα μέτρα που έχουν προταθεί περιλαμβάνουν τη μέση απόλυτη απόδοση και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Γενικά, ο κίνδυνος συχνά συνδέεται με μικρές ή αρνητικές αποδόσεις, ενώ τα περισσότερα μέτρα διασποράς δεν κάνουν τέτοια διάκριση. Για παράδειγμα, ο δείκτης που συχνά χρησιμοποιείται για τη μέτρηση αποτελεσματικότητας χαρτοφυλακίων είναι ο *Sharpe ratio*, που ορίζεται ως το πηλίκο της υπερβάλλουσας απόδοσης (που είναι το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους μείον το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου) δια της τυπικής απόκλισης. Ο συγκεκριμένος δείκτης συχνά εκτιμάει λανθασμένα τις υψηλές αποδόσεις. Άλλες τέτοιες προτάσεις είναι η ιδέα της ημιδιακύμανσης από τον Harry Markowitz (1991), η οποία χρησιμοποιεί μόνο τα τετράγωνα των αποδόσεων κάτω από το μέσο, δεν έχει όμως ευρέως χρησιμοποιηθεί διότι δεν είναι λειτουργική στην κατασκευή χαρτοφυλακίων.

Επομένως, η έννοια της μεταβλητότητας σχετίζεται με τον κίνδυνο χωρίς να ταυτίζονται.

Αφού διαχωρίσαμε την έννοια της μεταβλητότητας και του κινδύνου επιστρέφουμε στην αρχική μας εξίσωση (1). Ανακεφαλαιώνοντας, η μεταβλητότητα είναι ένα μέγεθος μέτρησης της μέσης απόκλισης από τη μέση τιμή. Για ένα μικρό αριθμό παρατηρήσεων η μέση τιμή του δείγματος είναι μια μη ακριβής πρόβλεψη της πραγματικής μέσης τιμής της χρονοσειράς με αποτέλεσμα και η πρόβλεψη να είναι ανακριβής. Η ακρίβεια της εκτίμησης της μέσης τιμής βελτιώνεται αν μεγαλώσουμε το δείγμα. Μια συνήθης τακτική που χρησιμοποιείται είναι να υπολογίζονται οι αποκλίσεις του δείγματος όχι από τη μέση τιμή αλλά από το μηδέν, ώστε να αυξάνεται η ακρίβεια της πρόβλεψης της μεταβλητότητας.

Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ η εξίσωση (1) είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2 , η τετραγωνική ρίζα του $\hat{\sigma}^2$ είναι ένας μεροληπτικός εκτιμητής του σ λόγω της ανισότητας Jensen. Η μεροληψία διορθώνεται με την υπόθεση της κανονικότητας.

1.3 Ιδιότητες Μεταβλητότητας

Ορισμένες βασικές ιδιότητες της μεταβλητότητας όπως έχουν προκύψει από τη διεθνή έρευνα και βιβλιογραφία είναι οι εξής:

- Παχιές ουρές (Fat Tails)
- Συσσώρευση της μεταβλητότητας (Volatility Clustering)
- Ισχυρή μνήμη της μεταβλητότητας (Long Memory properties)
- Αντιστροφή προς τη μέση μεταβλητότητα (Mean reversion)
- Ασυμμετρία (Asymmetry)
- Εξωγενείς παράγοντες που ενδέχεται να επηρεάσουν τη μεταβλητότητα

Παχιές ουρές (Fat Tails) - Συσσώρευση της μεταβλητότητας (Volatility Clustering).

Η διατήρηση της μεταβλητότητας αναφέρεται σε αρκετές μελέτες με αποτέλεσμα οι ενδεχόμενες ασυνήθιστα υψηλές τιμές της μεταβλητότητας σήμερα να επηρεάζουν την πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το υπόδειγμα ARCH που παρουσιάστηκε από τον Engle (1982) και οι διάφορες προεκτάσεις του όπως και τα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας αναπτύχθηκαν για να συμπεριλαμβάνουν το φαινόμενο της συσσώρευσης της μεταβλητότητας. Υπάρχουν περίοδοι που η μεταβλητότητα παραμένει υψηλή ενώ άλλες χαμηλή. Η συσσώρευση της και οι παχιές ουρές των αποδόσεων σχετίζονται άμεσα.

Ισχυρή μνήμη της μεταβλητότητας (Long Memory properties).

Σε πολλές μελέτες, λαμβάνοντας υπόψη ορισμένα μέτρα μεταβλητότητας ημερησίων αποδόσεων, η μεταβλητότητα φαίνεται να παρουσιάζει επικίνδυνη εμμονή. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Mandelbrot (1963): «Μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές και μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές». Έχει παρατηρηθεί ότι οι τετραγωνικές και οι απόλυτες αποδόσεις των χρηματοοικονομικών αγαθών συνήθως έχουν σειριακές συσχετίσεις οι οποίες φθίνουν αργά. Υπό αυτές τις συνθήκες μια διαταραχή στη σειρά της μεταβλητότητας φαίνεται να έχει πολύ ισχυρή μνήμη, επηρεάζοντας τη μελλοντική μεταβλητότητα για μεγάλο χρονικό ορίζοντα.

Αντιστροφή προς τη μέση μεταβλητότητα (Mean reversion). Οι αυτοσυσχετίσεις των διακυμάνσεων και ιδιαίτερα αυτές των μέσων απόλυτων αποκλίσεων, παραμένουν θετικές και σημαντικά μεγαλύτερες του μηδενός για περισσότερες από χίλιες υστερήσεις. Επομένως, μια διαταραχή στη διαδικασία της μεταβλητότητας θα έχει μακροπρόθεσμα επίδραση μελλοντικά. Οι περίοδοι υψηλής ή χαμηλής μεταβλητότητας τείνουν να ακολουθούνται από περιόδους αντιστροφής προς τη μέση μεταβλητότητα. Επομένως περίοδοι υψηλής μεταβλητότητας δίνουν τη θέση του σε πιο κανονικές διακυμάνσεις και αντίστροφα. Οι προβλέψεις για τη μεταβλητότητα σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα ανεξαρτήτως σε ποια χρονική στιγμή βρισκόμαστε θα πρέπει να συγκλίνει στο ίδιο περίπου κανονικό επίπεδο. Ωστόσο, υπάρχουν διαφωνίες ως προς ποιο είναι αυτό το κανονικό επίπεδο και το αν παραμένει σταθερό στη πάροδο του χρόνου. Συνήθως στην πρόβλεψη για μεγάλο ορίζοντα το σφάλμα είναι διπλάσιο σε μέγεθος όταν χρησιμοποιούνται ημερήσια αντί για μηνιαία δεδομένα σε διάστημα

μεγαλύτερο των 24 μηνών. Γενικά, οι προβλέψεις οι οποίες βασίζονται σε υποδείγματα, χάνουν την υπεροχή τους όταν ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης αυξάνεται σε σχέση με τη συχνότητα των δεδομένων.

Ασυμμετρία (Asymmetry). Μια επιπλέον ιδιότητα είναι ότι παρατηρείται αρνητική συσχέτιση της μεταβλητότητας και των μετοχικών αξιών. Μια αρνητική μεταβολή των αποδόσεων προκαλεί μεγαλύτερη μεταβλητότητα από μια ισόποση θετική μεταβολή. Εμπειρικά, με τη θεωρία του Sharpe (1964), CAPM, έχει υποστηριχθεί ότι όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα οι αναμενόμενες αποδόσεις πέφτουν. Εξήγηση αυτού του φαινομένου είναι ότι η πτώση της τιμής αυξάνει τη σχέση ξένων προς ιδίων κεφαλαίων οδηγώντας σε αύξηση των αποδόσεων των μετοχών της εταιρείας. Ανάλογα, μια αντίστοιχη ασυμμετρία υπάρχει και στα επιτόκια λόγω του γεγονότος ότι δεν παίρνουν αρνητικές τιμές. Τέλος, δεν έχει βρεθεί τέτοιος συσχετισμός για τις ισοτιμίες συναλλάγματος.

Εξωγενείς παράγοντες που ενδέχεται να επηρεάσουν τη μεταβλητότητα. Επιπρόσθετα, οι τιμές των χρηματοοικονομικών αγαθών δεν κινούνται ανεξάρτητα από το περιβάλλον στο οποίο διαμορφώνονται και επομένως είναι εύλογες και άλλες μεταβλητές που περιέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τη μεταβλητότητα της χρονοσειράς. Αρκετοί ερευνητές προτείνουν τη σύνδεση των αποδόσεων με τη ροή της άφιξης νέων πληροφοριών. Ως, χαρακτηριστικό παράδειγμα, οι Andersen και Bollerslev (1998) βρήκαν ότι η μεταβλητότητα της ισοτιμίας μεταξύ του Γερμανικού φράγκου και του δολαρίου αυξάνεται σημαντικά την ώρα ανακοινώσεως Αμερικανικών μακροοικονομικών στοιχείων όπως η ανεργία ή η αύξηση του ΑΕΠ. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό παράδειγμα που εξωγενείς παράγοντες επηρεάζουν τη μεταβλητότητα είναι η συμπεριφορά της ενδοσυνεδριακής μεταβλητότητας. Οι Chan et al (1991) αναφέρουν ότι η διακύμανση των αποδόσεων των συμβολαίων έχει σχήμα U, γνωστό ως το «χαμόγελο» της μεταβλητότητας. Δηλαδή είναι συνήθως μεγαλύτερη στο άνοιγμα και στο κλείσιμο της συνεδρίασης και κυμαίνεται σε χαμηλότερα επίπεδα κατά την διάρκεια της ημέρας. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρείται και στις Ευρωπαϊκές αγορές διότι εμφανίζεται συσχέτιση μεταξύ των Ευρωπαϊκών μετοχικών αγορών και της αγοράς των ΗΠΑ. Η πρωινή αυξανόμενη μεταβλητότητα οφείλεται στην αβεβαιότητα από το βραδινό κλείσιμο της Αμερικάνικης αγοράς, ενώ μετά από την κοιλιά που κάνει κατά τη διάρκεια του μεσημεριού, αυξάνεται και πάλι κατά τις απογευματινές ώρες, πριν δηλαδή το κλείσιμο της Ευρώπης λόγω το ανοίγματος της αγοράς των ΗΠΑ.

Κεφάλαιο 2^ο

Μέθοδοι πρόβλεψης της Μεταβλητότητας

2.1 Κατηγοριοποίηση των μεθόδων πρόβλεψης της Μεταβλητότητας

Μετά τον ορισμό και την περιγραφή των ιδιοτήτων της μεταβλητότητας μπορούμε να περάσουμε στη μελέτη των βασικότερων υποδειγμάτων πρόβλεψης της μεταβλητότητας. Στη σχετική βιβλιογραφία έχει αναπτυχθεί πληθώρα μεθοδολογιών πρόβλεψης, κάποιες από τις οποίες χρησιμοποιούν ιδιαίτερα απλοϊκές υποθέσεις ενώ άλλες περισσότερο περίπλοκες μεθόδους. Όπως έχει προκύψει μέσα από τη διεθνή έρευνα και βιβλιογραφία καμία από αυτές τις μεθόδους δεν υπερτερεί σταθερά έναντι των άλλων.

Μια γενικότερη κατηγοριοποίηση των υποδειγμάτων πρόβλεψης, κατά τους Poon και Granger (2003), είναι η εξής:

1. Υποδείγματα βασισμένα στην ανάλυση χρονοσειρών:
 - i. Υπόδειγμα ιστορικής μεταβλητότητας
 - ii. Υποδείγματα ομάδας ARCH/GARCH
2. Υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας
3. Υποδείγματα Long Memory
4. Υποδείγματα βασισμένα στις αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης (options) – τεκμαρτή μεταβλητότητα
5. Μη παραμετρικά υποδείγματα

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ασχοληθούμε με την ανάλυση των υποδειγμάτων που αφορούν χρονοσειρές και συγκεκριμένα το υπόδειγμα GARCH(1,1), το οποίο θα αναλύσουμε εκτενώς σε επόμενη ενότητα. Ακολούθως, θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή όλων των υποδειγμάτων.

2.2 Υποδείγματα ιστορικής Μεταβλητότητας

Ο πιο διαδεδομένος τρόπος παραγωγής προβλέψεων της μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών δεικτών είναι τα υποδείγματα χρονοσειρών. Τα υποδείγματα αυτά βασίζονται στην υπόθεση ότι η μεταβολή της τιμής ενός μεγέθους ακολουθεί ένα συγκεκριμένο πρότυπο, το οποίο έχει μεγάλη πιθανότητα να επαναληφθεί. Ο Stephen

Brown (1990), ο Engle (1993) και ο Aydemir (1998) κάνουν μια λεπτομερή περιγραφή των υποδειγμάτων πρόβλεψης της μεταβλητότητας βασισμένα σε ανάλυση χρονοσειρών.

Σε όλα τα μοντέλα ιστορικής μεταβλητότητας που αναφέρονται στη συνέχεια, ως μεταβλητότητα, σ_t , ορίζεται η τυπική απόκλιση του δείγματος των αποδόσεων για t περιόδους, ενώ με $\hat{\sigma}_t$ συμβολίζεται η πρόβλεψη της σ_t . Η επικρατούσα πρακτική ορίζει ότι ως μεταβλητότητα χρησιμοποιούνται οι ημερήσιες αποδόσεις στο τετράγωνο για την υπό εξέταση περίοδο. Με τη διαθεσιμότητα βεβαίως στοιχείων υψηλής συχνότητας, πολλοί ερευνητές υπολογίζουν την ημερήσια μεταβλητότητα από τις ενδοσυνοδριακές αποδόσεις. Τα υποδείγματα αυτά στηρίζονται στην υπόθεση ότι η μεταβλητότητα της χρονικής περιόδου $t - \tau$, $\sigma_{t-\tau}$, είναι γνωστή ή μπορεί να εκτιμηθεί για κάθε $\tau > 0$ εάν θέσουμε στο t το $t - 1$.

Ενδεικτικά, τα κυριότερα υποδείγματα ιστορικής μεταβλητότητας είναι τα ακόλουθα:

- Τυχαίος περίπατος (Random Walk)
- Μέθοδος Ιστορικού Μέσου Όρου (Historical Average method)
- Μέθοδος Απλού Κινητού Μέσου Όρου (Simple Moving Average method)
- Εκθετική εξομάλυνση (Exponential Smoothing)
- Εκθετικός κινητός Μέσος Όρος - εξομάλυνση (Exponentially Weighted Moving Average-EWMA)
- Υπόδειγμα παλινδρόμησης (Regression)

Συνεχίζοντας, θα αναλύσουμε τα παραπάνω υποδείγματα.

i. Τυχαίος περίπατος (Random Walk):

Πρόκειται για το πιο απλό υπόδειγμα ιστορικής μεταβλητότητας, κατά το οποίο η μεταβλητότητα της προηγούμενης περιόδου σ_{t-1} χρησιμοποιείται ως πρόβλεψη για την σημερινή μεταβλητότητα σ_t . Σύμφωνα με αυτό το υπόδειγμα η καλύτερη πρόβλεψη για την αυριανή μεταβλητότητα είναι η σημερινή πραγματοποιηθείσα μεταβλητότητα:

$$\hat{\sigma}_t = \sigma_{t-1}$$

Παρόλο που το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι ιδιαίτερα απλοϊκό, έχει πολύ καλές επιδόσεις, σύμφωνα με μελέτες του Dimson και Marsh (1990).

ii. Μέθοδος Ιστορικού Μέσου Όρου (Historical Average method):

Στο υπόδειγμα αυτό χρησιμοποιούνται όλες οι ιστορικές παραστάσεις, δηλαδή η μελλοντική μεταβλητότητα βασίζεται σε όλο το τυχαίο δείγμα:

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sigma_{t-1} + \sigma_{t-2} + \dots + \sigma_1}{t-1}.$$

Συγκεκριμένα, το υπόδειγμα αυτό κάνει πρόβλεψη για μια χρονική περίοδο λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαθέσιμες ιστορικές τιμές της μεταβλητότητας μέχρι και την αμέσως προηγούμενη περίοδο. Έτσι η τιμή της μεταβλητότητας θα εκτιμάται από τη μέση τιμή της προηγούμενης περιόδου της μεταβλητότητας. Το υπόδειγμα του Ιστορικού Μέσου Όρου προσδίδει ίδια βαρύτητα σε κάθε μία τιμή της μεταβλητότητας από τις προηγούμενες περιόδους. Εάν η κατανομή της μεταβλητότητας έχει στάσιμο μέσο τότε είναι το βέλτιστο υπόδειγμα για πρόβλεψη.

iii. Μέθοδος Απλού Κινητού Μέσου Όρου (Simple Moving Average method):

Στο υπόδειγμα αυτό χρησιμοποιούνται μόνο οι νεώτερες παρατηρήσεις αποβάλλοντας τελείως τις παλαιότερες. Συμφωνά με αυτό το υπόδειγμα η μεταβλητότητα μιας χρονικής περιόδου t εκτιμάται από το μέσο όρο των τιμών των τ προηγούμενων χρονικών περιόδων.

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sigma_{t-1} + \sigma_{t-2} + \dots + \sigma_{t-\tau}}{\tau}.$$

Η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιείται για να εξουδετερωθεί η βραχυπρόθεσμη τάση που εμπεριέχεται στα δεδομένα. Η τιμή του τ , η οποία δηλώνει τον αριθμό των χρονικών υστερήσεων που θεωρούνται στο υπόδειγμα, μπορεί να επιλεγεί υποκειμενικά ή να είναι τέτοια ώστε να ελαχιστοποιηθεί το εντός του δείγματος σφάλμα της πρόβλεψης $\varepsilon_t = \sigma_t - \hat{\sigma}_t$.

iv. Εκθετική εξομάλυνση (Exponential Smoothing):

Η μέθοδος αυτή εκτιμά τη μελλοντική μεταβλητότητα ως ένα σταθμικό μέσο όρο των προγενέστερων τιμών της. Ειδικότερα, οι πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, οι οποίες θεωρείται ότι επιδρούν περισσότερο στη διαμόρφωση της μελλοντικής μεταβλητότητας λαμβάνουν συγκριτικά αυξημένη βαρύτητα, ενώ οι παλαιότερες λαμβάνουν συγκριτικά μειωμένη βαρύτητα:

$$\hat{\sigma}_t = (1 - \beta)\sigma_{t-1} + \beta\hat{\sigma}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \beta \in [0,1]$$

Η παράμετρος β ονομάζεται παράμετρος εξομάλυνσης ενώ η ποσότητα $1 - \beta$ καλείται σταθερά της εκθετικής εξομάλυνσης. Η παράμετρος β εκτιμάται μέσω της ελαχιστοποίησης του εντός του δείγματος σφάλμα πρόβλεψης ε_t .

Οι βαρύτητες των παρατηρήσεων μειώνονται γεωμετρικά καθώς μετακινούμαστε από την πιο πρόσφατη προς την παλαιότερη παρατήρηση. Έτσι, η πιο πρόσφατη παρατήρηση λαμβάνει τη μεγαλύτερη βαρύτητα $1 - \beta$, ενώ οι υπόλοιπες παρατηρήσεις $(1 - \beta)\beta$, $(1 - \beta)\beta^2$ κ.λ.π. πηγαίνοντας προς τα πίσω αντίστοιχα.

Η παράμετρος β λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$. Όταν $\beta = 0$, η μεταβλητότητα της επόμενης περιόδου θα ισούται με την μεταβλητότητα της προηγούμενης περιόδου. Στην περίπτωση αυτή, η πρόβλεψη του υποδείγματος συμπίπτει με εκείνη του Τυχαίου Περίπατου. Όταν το β είναι μικρό π.χ. 0,2 έως 0,5 το υπόδειγμα δίνει σχετικά μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, ενώ για μεγάλες τιμές του β π.χ. από 0,8 ή 0,9 τότε το υπόδειγμα δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις τιμές της μεταβλητότητας του απώτερου παρελθόντος. Καθώς το β προσεγγίζει τη μονάδα, η πρόβλεψη προσεγγίζει εκείνη του υποδείγματος του Ιστορικού Μέσου Όρου.

Σύμφωνα με τον Brown (1962), όταν δεν υπάρχει διαθέσιμη καμία άλλη πληροφορία, το β εκτιμάται ότι πρέπει να κυμαίνεται από 0,05 έως 0,30. Κατά τους Dimson και Marsh (1990), η βέλτιστη τιμή του β εξαρτάται από την υπό μελέτη χρονική περίοδο και την εξεταζόμενη αγορά.

v. Εκθετικός κινητός Μέσος Όρος - εξομάλυνση (Exponentially Weighted Moving Average-EWMA):

Το συγκεκριμένο υπόδειγμα χρησιμοποιεί μόνο τις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις αντικαθιστώντας τις παλαιότερες με ένα κινητό μέσο όρο:

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} \beta^i \sigma_{t-i}}{\sum_{i=1}^{\tau} \beta^i}.$$

Όπως και στην μέθοδο της εκθετικής εξομάλυνσης, η παράμετρος β εκτιμάται ελαχιστοποιώντας το εντός του δείγματος σφάλμα.

vi. Υπόδειγμα παλινδρόμησης (Regression):

Το υπόδειγμα αυτό εκφράζει τη μεταβλητότητα ως μία συνάρτηση των προγενέστερων τιμών της:

$$\sigma_t = \gamma + \beta_1 \sigma_{t-1} + \beta_2 \sigma_{t-2} + \dots + \beta_n \sigma_{t-n} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Πρόκειται για την παλινδρόμηση της τρέχουσας επάνω σε όλες τις παρελθοντικές, n το πλήθος, τιμές της μεταβλητότητας, τις οποίες έχουμε διαθέσιμες στο δείγμα. Οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ εκφράζουν τις βαρύτητες της μεταβλητότητας. Οι συντελεστές αυτοί δεν είναι προκαθορισμένοι αλλά προκύπτουν από εκτίμηση.

Η μέθοδος της παλινδρόμησης είναι μια αυτοπαλίνδρομη μέθοδος (AR) και αν σε αυτή συμπεριληφθούν εκτός του σφάλματος ε_t και τα σφάλματα του παρελθόντος $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$, τότε προκύπτει ένα νέο υπόδειγμα (ARMA):

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \beta_1 \sigma_t + \beta_2 \sigma_{t-1} + \dots + \beta_n \sigma_{t-n+1} + \gamma_1 \varepsilon_t + \gamma_2 \varepsilon_{t-1} + \dots \quad (2)$$

Τα υποδείγματα (1) και (2) μπορούν να λειτουργήσουν και με διαφορές d τάξεις των τιμών της μεταβλητής (ARIMA(p, d, q)).

Για την ορθή εφαρμογή του υποδείγματος είναι αναγκαίο να εκπληρώνονται ορισμένες υποθέσεις σχετικά με τα τυχαία σφάλματα:

- $E(\varepsilon_t) = 0$, για κάθε t
- $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, για κάθε t
- $E(\varepsilon_t, \varepsilon_k) = 0$, για κάθε $t \neq k$
- $E(\varepsilon_t \sigma_{t-k}) = 0$, για κάθε t, k
- $\varepsilon_t \sim iid N(0, \sigma^2)$, για κάθε t

Συνοψίζοντας τις υποθέσεις, η αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος για κάθε χρονική στιγμή οφείλει να είναι 0. Η διακύμανση των τυχαίων σφαλμάτων να είναι σταθερή για κάθε χρονική στιγμή.

Οι τιμές των τυχαίων σφαλμάτων να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά ανεξάρτητες και με της ερμηνευτικές μεταβλητές. Και τέλος τα τυχαία σφάλματα οφείλουν να ακολουθούν κανονική κατανομή.

Στην περίπτωση παραβίασης των παραπάνω υποθέσεων τότε εμφανίζονται φαινόμενα όπως παραβίασης της κανονικότητας, πολυσυγγραμμικότητα, ετεροσκεδαστικότητα, αυτοσυσχέτιση στο μοντέλο.

Η παραβίαση της κανονικότητας αποτελεί καθοριστικό παράγοντα στην υλοποίηση στατιστικών αναφορών επί των παραμέτρων. Δίχως την ισχύ της κανονικότητας κανένας στατιστικός έλεγχος για τις παραμέτρους του υποδείγματος δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Το πρόβλημα της κανονικότητας των τιμών του τυχαίου σφάλματος είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί με ενδεχόμενη εκτίμηση του υποδείγματος σε λογαριθμική μορφή, ωστόσο αυτή η τακτική οδηγεί σε μείωση του μεγέθους των τιμών των παρατηρήσεων όλων των μεταβλητών.

Η πολυσυγγραμμικότητα δηλώνει την ύπαρξη μίας ή περισσότερων γραμμικών σχέσεων μεταξύ των ερμηνευτικών μεταβλητών. Άμεση συνέπεια είναι να μην επιτυγχάνεται ο βέλτιστος προσδιορισμός των τιμών της ερμηνευτικής μεταβλητής. Η πολυσυγγραμμικότητα επηρεάζει το εύρος των τιμών του διαστήματος εμπιστοσύνης των συντελεστών του υποδείγματος, την αξιοπιστία των στατιστικών ελέγχων, την ακρίβεια των εκτιμήσεων του υποδείγματος και δημιουργεί πρόβλημα στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η ετεροσκεδαστικότητα δηλώνει την μη ύπαρξη σταθερής διακύμανσης των τιμών του τυχαίου σφάλματος. Έχει ως αποτέλεσμα να μην λαμβάνονται ως εκτιμητές των συντελεστών εκείνοι με τη μικρότερη διακύμανση. Ως επακόλουθο τα διαστήματα εμπιστοσύνης και οι στατιστικοί έλεγχοι για τους συντελεστές του υποδείγματος θα δίνουν λανθασμένα συμπεράσματα.

Η αυτοσυσχέτιση δηλώνει την μη ύπαρξη ανεξαρτησίας στις τιμές των τυχαίων σφαλμάτων. Η εμφάνιση της οφείλεται στην λανθασμένη αλγεβρική μορφή του υποδείγματος, στην ύπαρξη χρονικών υστερήσεων και στην παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών. Αποτέλεσμα έχει τους αμφιβόλου αξίας στατιστικούς ελέγχους.

2.3 Υποδείγματα ομάδας ARCH/GARCH

Μία πιο εξελιγμένη μεθοδολογία για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας είναι τα υποδείγματα της ομάδας ARCH. Οι ρίζες της μεθοδολογίας των υποδειγμάτων αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης υπό συνθήκης ετεροσκεδαστικότητας (AutoRegressive Conditional Heteroscedastic models - ARCH) οφείλονται στον Engle (1982), ο οποίος εισήγαγε το φαινόμενο της υπό συνθήκης μεταβλητότητας, δείχνοντας ότι μεγάλα και μικρά σφάλματα πρόβλεψης τείνουν να εμφανίζονται κατά ομάδες πράγμα που υποδεικνύει ότι η διακύμανση έχει ένα τύπο ετεροσκεδαστικότητας. Το άρθρο του Engle ήταν μόνο η αρχή. Στη συνέχεια ο Bollerslev (1986) επινόησε μια γενικευμένη μορφή υποδειγμάτων ARCH, γνωστή ως Generalized ARCH ή GARCH. Υπάρχουν αρκετές μελέτες για τα υποδείγματα ARCH ενδεικτικά αναφέρονται των Anil Bera και Matthew Higgins (1993), Ray Chou, Kenneth Kroner (1992), Bollerslev, Engle και Nelson (1994), Diebold και Jose Lopez (1995). Με την υιοθέτηση του VaR από όλους τους μεγάλους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς, ένας νέος σημαντικός ρόλος γεννήθηκε για τα μοντέλα ARCH. Πολλές έρευνες εξετάζουν τη χρησιμότητα τους για τον υπολογισμό του VaR και τα συγκρίνουν με τα υποδείγματα εκθετικού κινητού μέσου όρου.

Τα υποδείγματα ARCH λαμβάνουν υπόψη τους μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας όμως σταθμίσεις, δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις πρόσφατες παρατηρήσεις και λιγότερη στις παλαιότερες. Τα γεγονότα που συνέβησαν μακριά στο παρελθόν, έχουν μία στάθμιση, έστω μικρή, επομένως εξακολουθούν να επηρεάζουν τη μελλοντική μεταβλητότητα. Η καινοτομία αυτών των υποδειγμάτων είναι ότι οι σταθμίσεις που χρησιμοποιούνται δεν είναι δεδομένες αλλά υπολογίζονται με βάση τα ιστορικά στοιχεία της κάθε χρονοσειράς, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται καλύτερα

στις ιδιαιτερότητες των υπό εξέταση παρατηρήσεων. Από τη στιγμή που οι σταθμίσεις αυτές καθοριστούν, τα υποδείγματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προβλέψουν την μεταβλητότητα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Τα υποδείγματα ARCH σε αντίθεση με τα προαναφερθέντα ιστορικά υποδείγματα δεν χρησιμοποιούν την τυπική απόκλιση του δείγματος, αλλά διαμορφώνουν μία υπό συνθήκη διακύμανση h_t , των αποδόσεων μέσω της διαδικασίας μέγιστης πιθανοφάνειας. Με αυτό τον τρόπο κατασκευής τους, η υπό συνθήκη διακύμανση h_t , είναι γνωστή κατά την περίοδο $t - 1$. Έτσι η πρόβλεψη μιας περιόδου μπροστά είναι άμεσα διαθέσιμη, για τις προβλέψεις περισσότερων περιόδων χρησιμοποιείται μια ακολουθιακή διαδικασία.

Στη σχετική βιβλιογραφία τα συχνότερα γραμμικά υποδείγματα της οικογένειας ARCH είναι τα εξής:

- το υπόδειγμα ARCH
- το υπόδειγμα GARCH
- το ολοκληρωμένο υπόδειγμα GARCH - IGARCH
- το κλασματικό ολοκληρωμένο υπόδειγμα GARCH – FIGARCH

Το τελευταίο υπόδειγμα ανήκει στην κατηγορία Long Memory, για την οποία θα γίνει αναφορά αργότερα. Τα υπόλοιπα υποδείγματα τα αναλύουμε στη συνέχεια.

I. ARCH(q):

Για να ορίσουμε ένα υπόδειγμα ARCH, πρέπει αρχικά να ορίσουμε τις αποδόσεις r_t , ως εξής:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$$

όπου η $z_t, t = 0, 1, \dots$ αποτελεί μια διαδικασία λευκού θορύβου (ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή 0 και διασπορά 1) και $z_t \sim D(0,1)$.

Η κατανομή D συχνά λαμβάνεται ως κανονική. Η διαδικασία $z_t, t = 0, 1, \dots$, κλιμακώνεται από την υπό συνθήκη διακύμανση, η οποία με τη σειρά της είναι μια συνάρτηση των τετραγωνικών υπολειμματικών αποδόσεων του παρελθόντος.

Το υπόδειγμα ARCH(q) που προτάθηκε από τον Engle έχει ως εξής:

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^q a_j \varepsilon_{t-j}^2$$

Με $\omega > 0$ και $a_j \geq 0$ για να διασφαλίζεται ότι η υπό συνθήκη διακύμανση h_t είναι αυστηρά θετική ποσότητα. Συνήθως, το q έχει υψηλή τιμή λόγω του φαινομένου της «εμμονής» στις χρηματοοικονομικές αγορές. Από τον τρόπο υποδειματοποίησης της μεταβλητότητας, η h_t είναι γνωστή κατά τη χρονική περίοδο $t - 1$. Έτσι η πρόβλεψη μιας περιόδου μπροστά είναι άμεσα διαθέσιμη. Αν θεωρήσουμε ότι η διαδικασία r_t είναι στάσιμη τότε η απλή (μη δεσμευμένη) διακύμανση του r_t δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^q a_j}$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\varepsilon_t^2 = z_t^2 \left(\omega + \sum_{j=1}^q a_j \varepsilon_{t-j}^2 \right),$$

από όπου θα είναι

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V(r_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(z_t^2)E\left(\omega + \sum_{j=1}^q a_j \varepsilon_{t-j}^2\right) = \omega + \sum_{j=1}^q a_j E(\varepsilon_{t-j}^2) \\ &= \omega + \sum_{j=1}^q a_j V(r_{t-j}) = \omega + \sum_{j=1}^q a_j \sigma^2, \end{aligned}$$

και λύνοντας την παραπάνω ως προς σ^2 προκύπτει το ζητούμενο.

Η διαδικασία έχει στάσιμη συνδιακύμανση αν και μόνο αν το άθροισμα των αυτοπαλίνδρομων παραμέτρων είναι μικρότερο της μονάδας, $\sum_{j=1}^q a_j < 1$.

Σε ένα υπόδειγμα ARCH(q) μια μεγάλη διαταραχή αποτυπώνεται με μια μεγάλη απόκλιση της h_t και παράλληλα μια μεγάλη τιμή του σφάλματος ε_t . Η διακύμανση του σφάλματος είναι μια αύξουσα συνάρτηση με χρονική υστέρηση q , χωρίς να παίζει ρόλο το αν είναι θετικά ή αρνητικά τα σφάλματα, εφόσον είναι υψωμένη στο τετράγωνο. Η τάξη της χρονική υστέρησης q είναι αυτή που καθορίζει το μήκος του χρόνου στο οποίο μια διαταραχή μπορεί να επηρεάσει τη δεσμευμένη διακύμανση. Όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της χρονικής υστέρησης τόσο μακρύτερο θα είναι το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο θα εκτείνονται οι επιδράσεις των διαταραχών. Η επιλογή της τάξης του q είναι ένα σημαντικό εμπειρικό ζήτημα.

II. Το υπόδειγμα GARCH (Γενικευμένο υπόδειγμα ARCH):

Το υπόδειγμα GARCH, το οποίο αποτελεί επέκταση του υποδείγματος ARCH, οφείλεται στον Bollerslev (1986). Σε αντίθεση με το υπόδειγμα ARCH(q) που επιτρέπει στις υπό συνθήκη διακυμάνσεις να εξαρτώνται αποκλειστικά από τις τετραγωνικές υπολειμματικές αποδόσεις, το υπόδειγμα GARCH(p, q) επιτρέπει την εξάρτηση των υπό συνθήκη διακυμάνσεων h_t για p χρονικές στερήσεις, δηλαδή η h_t εξαρτάται από τις προηγούμενες τιμές της $h_{t-1}, h_{t-2}, \dots, h_{t-p}$.

Στο υπόδειγμα GARCH(p, q) η υπό συνθήκη διακύμανση h_t έχει τη μορφή της διαδικασίας ARMA(p):

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2, \quad \omega > 0$$

Αν θεωρήσουμε και εδώ ότι η διαδικασία r_t είναι στάσιμη, τότε αποδεικνύεται όμοια με παραπάνω ότι η απλή διακύμανση εκφράζεται από τη σχέση :

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \beta_i - \sum_{j=1}^q \alpha_j}$$

Το υπόδειγμα GARCH(p, q) έχει σταθερή διακύμανση αν και μόνο αν:

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$$

και πάλι η επιλογή των p και q αποτελεί εμπειρικό ζήτημα.

Το GARCH(1,1) είναι το πιο διαδεδομένο υπόδειγμα GARCH με πολλές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά, στο οποίο απαιτούνται επιπλέον οι περιορισμοί $\alpha_1 \geq 0$ και $\beta_1 \geq 0$ ώστε να διασφαλιστεί ότι η h_t είναι αυστηρά θετική ποσότητα.

Η υπό συνθήκη διακύμανση στο υπόδειγμα GARCH στην πραγματικότητα αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο όρο τριών διαφορετικών προβλέψεων. Πρώτον, της σταθερής διακύμανσης που υποδηλώνει το μακροχρόνιο μέσο όρο. Δεύτερον, την πρόβλεψη που έχει γίνει την αμέσως προηγούμενη περίοδο και τρίτον, την νέα πληροφορία που δεν ήταν διαθέσιμη όταν έγινε η προηγούμενη πρόβλεψη. Όταν κάνουμε όμως πρόβλεψη για πολλές περιόδους στο μέλλον ο μακροχρόνιος μέσος όρος είναι αυτός που επικρατεί. Οι σταθμίσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτές που καθορίζουν πόσο γρήγορα αλλάζει η πρόβλεψη της μεταβλητότητας με βάση τις νέες πληροφορίες και πόσο γρήγορα επανέρχεται στο μακροχρόνιο μέσο όρο.

Γενικά αντί να υποδειγματοποιήσουμε τη μεταβλητότητα ως ένα ARCH(q) υψηλής τάξης, είναι προτιμότερο να την υποδειγματοποιήσουμε ως ένα GARCH(p, q).

Σημαντικό πλεονέκτημα του υποδείγματος GARCH είναι ότι μπορεί αποτελεσματικά να αφαιρέσει την υπερβολική κύρτωση. Ωστόσο, βασικό του μειονέκτημα είναι ότι δεν μπορεί να περιγράψει την ασυμμετρία που πολλές φορές παρουσιάζουν οι κατανομές των αποδόσεων.

III. Το ολοκληρωμένο υπόδειγμα GARCH (IGARCH):

Οι Engle και Bollerslev (1986) επέκτειναν το υπόδειγμα GARCH δημιουργώντας το ολοκληρωμένο υπόδειγμα GARCH (IGARCH). Το υπόδειγμα IGARCH σε σχέση με το υπόδειγμα GARCH έχει έναν επιπλέον περιορισμό:

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j = 1$$

Όταν ισχύει η ισότητα τότε η απλή διακύμανση σ^2 , δεν είναι πλέον πεπερασμένη ($\sigma^2 \rightarrow \infty$).

Επιπλέον στο υπόδειγμα IGARCH η σειρά των αποδόσεων δεν έχει στάσιμη συνδιακύμανση, αν και παραμένει αυστηρά στάσιμη, ενώ δεν έχει πεπερασμένη τέταρτη ροπή. Άρα, μια διαταραχή στην υπό συνθήκη μεταβλητότητα επηρεάζει τις μελλοντικές προβλέψεις της μεταβλητότητας για άπειρο χρονικό διάστημα.

Στο σημείο αυτό, προτού περάσουμε στα υπόλοιπα υποδείγματα αυτής της κατηγορίας πρέπει να σημειωθεί ότι τα αρχικά γραμμικά υποδείγματα ARCH/ GARCH αγνοούν πληροφορίες σχετικά με την κατεύθυνση (θετική ή αρνητική) των αποδόσεων, εστιάζοντας αποκλειστικά στο μέγεθος τους. Όμως όπως έχουμε προαναφέρει, υπάρχουν σημαντικά στοιχεία που δείχνουν ότι οι αρνητικές αποδόσεις οδηγούν σε μεγαλύτερες διακυμάνσεις από ότι οι αντίστοιχες θετικές.

Για να καλύψουν αυτό το κενό εμφανίστηκαν διάφορα μη γραμμικά ή αλλιώς ασύμμετρα υποδείγματα GARCH, με ποιο γνωστά:

- Εκθετικό υπόδειγμα GARCH (EGARCH)
- TGARCH/GJR-GARCH

IV. Εκθετικό υπόδειγμα GARCH (EGARCH):

Το εκθετικό υπόδειγμα GARCH (EGARCH) οφείλεται στον Nelson (1991), σε αυτό το υπόδειγμα η υπό συνθήκη διακύμανση εκφράζεται σε λογαριθμική μορφή, ως εξής:

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln h_{t-j} + \sum_{\kappa=1}^p (\theta_{\kappa} \psi_{t-\kappa} + \gamma_{\kappa} |\psi_{t-\kappa}| - \sqrt{2/\pi}),$$

Όπου $\psi_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$.

Στο υπόδειγμα EGARCH δεν χρειάζεται να τεθούν περιορισμοί στις τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος ώστε να αποφευχθεί η αρνητική διακύμανση.

Η διαδικασία έχει στάσιμη συνδιακύμανση αν και μόνο αν $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$.

Η υπό συνθήκη διακύμανση εξαρτάται τόσο από το μέγεθος όσο και από το πρόσημο των ε_t . Θέτοντας κατάλληλες συνθήκες για τις παραμέτρους το υπόδειγμα μπορεί να περιγράψει το φαινόμενο μια αρνητική διαταραχή να οδηγεί σε υψηλότερη μελλοντική μεταβλητότητα σε σχέση με μια ισόποση θετική διαταραχή. Ωστόσο βασικό του μειονέκτημα είναι ότι όταν η μεταβλητότητα εμφανίζει ανά τακτά χρονικά διαστήματα, περιόδους όπου είναι μεγαλύτερη συγκριτικά με άλλες περιόδους, τότε υπάρχει κίνδυνος να δοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες τιμές και να προκύψουν λανθασμένες εκτιμήσεις. Επιπλέον, η επιλογή του αριθμού των δεδομένων δεν είναι αντικειμενική.

V. GJR-GARCH/ TGARCH:

Ένα απλούστερο υπόδειγμα για την αντιμετώπιση της ασυμμετρίας της μεταβλητότητας της χρονοσειράς είναι το GJR-GARCH. Το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \delta D_{t-1} \varepsilon_{t-j}^2)$$

Όπου

$$D_{t-1} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0, & \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

Η υπό συνθήκη διακύμανση είναι θετική όταν:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \alpha_i + \gamma_i \geq 0 \text{ και } \beta_i \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, \dots, p \text{ και για } j = 1, 2, \dots, q.$$

Η διαδικασία έχει στάσιμη συνδιακύμανση αν και μόνο αν:

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \left(\alpha_j + \frac{1}{2} \gamma_j \right) < 1.$$

Το υπόδειγμα TGARCH προσομοιάζει το GJR-GARCH με τη διαφορά ότι χρησιμοποιεί τις απόλυτες τιμές των αποδόσεων:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p [\alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i D_{t-i} |\varepsilon_{t-i}|] + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}$$

Η υπό συνθήκη διακύμανση είναι θετική όταν:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \alpha_i + \gamma_i \geq 0 \text{ και } \beta_j \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, \dots, p \text{ και για } j = 1, 2, \dots, q.$$

Η διαδικασία έχει στάσιμη συνδιακύμανση αν και μόνο αν:

$$\beta_1 + \frac{1}{2} [\alpha_1^2 + (\alpha_1 + \gamma_1)^2] + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \beta_1 (\alpha_1 + \gamma_1) < 1.$$

2.4 Προβλεπτική ικανότητα των Ιστορικών υποδειγμάτων και των υποδειγμάτων της ομάδας ARCH/ GARCH

Σε αυτό το σημείο είναι καίριας σημασίας να γίνει μία σύντομη ανασκόπηση της προβλεπτικής ικανότητας των μεθόδων που έχουν αναφερθεί ως τώρα. Τα ιστορικά υποδείγματα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες κατηγορίες είναι απλούστερα στην κατασκευή και στην εφαρμογή τους. Παρά την απλότητα τους, οι μέθοδοι του τυχαίου περιπάτου και του ιστορικού μέσου όρου έχουν πολύ καλά αποτελέσματα για μεσοπρόθεσμους και μακροπρόθεσμους ορίζοντες πρόβλεψης. Οι Alford και Boatsman (1995) βρίσκουν ότι η ιστορική μεταβλητότητα που υπολογίζεται από την τυπική απόκλιση των αποδόσεων του παρελθόντος περιέχει καλύτερη πρόβλεψη της μεταβλητότητας για πέντε έτη μπροστά. Μελέτες υποστηρίζουν την σημασία της ύπαρξης αρκετά μεγάλης περιόδου εκτίμησης ώστε να διεξαχθούν καλές προβλέψεις της μεταβλητότητας για μεγάλους ορίζοντες.

Ωστόσο, τα ιστορικά υποδείγματα δεν ήταν σε θέση να αντιμετωπίσουν το φαινόμενο της μόχλευσης, δηλαδή ότι μια αρνητική απόδοση ακολουθείται από σχετικά υψηλότερη μεταβλητότητα σε σύγκριση με μια θετική του ίδιου μεγέθους. Αρχικά, βασικό πλεονέκτημα των υποδειγμάτων της ομάδας ARCH είναι η αντιμετώπιση του φαινομένου ότι οι υψηλές τιμές της μεταβλητότητας τείνουν να ακολουθούνται από υψηλές τιμές και οι χαμηλές τιμές από χαμηλές. Επιπλέον, τα υποδείγματα αυτής της ομάδας περιγράφουν ικανοποιητικά τις παχιές ουρές της μεταβλητότητας. Με τις τροποποιήσεις των υποδειγμάτων της ομάδας ARCH/GARCH δημιουργήθηκαν πιο κατάλληλα υποδείγματα ώστε να αντιμετωπίσουν το φαινόμενο της μόχλευσης και την υπερβάλλουσα κύρτωση.

Ωστόσο, μερικοί ερευνητές τα θεωρούν πιο περιοριστικά λόγω της ύπαρξης σχέσης μεταξύ των παρελθοντικών τιμών των σφαλμάτων και της υπό συνθήκης διακύμανσης, απαιτούν πολυπληθή δεδομένα και μεγάλο αριθμό παραμέτρων και δεν έχουν σχεδιαστεί για τη διεξαγωγή προβλέψεων για μακρινό ορίζοντα, καθώς δεν είναι ι-

κανά να ενσωματώσουν νέες πληροφορίες από τις διαταραχές του άγνωστου μέλλοντος. Διότι, ύστερα από ορισμένες χρονικές περιόδους μπροστά η υπό συνθήκη διακύμανση συγκλίνει στην μακροχρόνια διακύμανση.

2.5 Υποδείγματα Long Memory

Η χρήση των υποδειγμάτων τα οποία εκμεταλλεύονται το χαρακτηριστικό της μακράς μνήμης (long memory) της μεταβλητότητας, εμφανίστηκε σχετικά πρόσφατα στη βιβλιογραφία. Η ιδιότητα της μακράς μνήμης εμφανίζεται όταν οι επιδράσεις των διαταραχών στη χρονοσειρά της μεταβλητότητας εξασθενούν με αργό ρυθμό. Χαρακτηριστικές μελέτες για τα συγκεκριμένα υποδείγματα έχουν προταθεί από Li (2002), Vilasuso (2002), Diebold και Labus (2003) και Xu (2004).

Υποδείγματα που ανήκουν στην συγκεκριμένη κατηγορία ενδεικτικά είναι:

- CGARCH
- RS-GARCH
- ST-GARCH
- FI-GARCH

Ωστόσο, όταν γίνεται σύγκριση με την τεκμαρτή μεταβλητότητα, η οποία εξάγεται συνήθως από τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος των δικαιωμάτων προαίρεσης. Παρά τη μικρότερη συχνότητα δεδομένων, οι προβλέψεις της τεκμαρτής μεταβλητότητας υπερτερούν αυτή των long memory υποδειγμάτων που βασίζονται σε ενδοσυνοδριακά δεδομένα.

2.6 Στοχαστικά υποδείγματα

Τα στοχαστικά υποδείγματα αποτελούν κατά κύριο λόγο υποδείγματα θεωρητικά και λιγότερο υποδείγματα που χρησιμοποιούνται στην πράξη για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας. Παρόλα αυτά, δεν θα πρέπει να παραγκωνιστούν οι εξελίξεις που έχουν επισημανθεί στον επιστημονικό τομέα. Η πρώτη απόπειρα στοχαστικού υποδείγματος έγινε από τους Hull και White (1987).

Γενικά, τα στοχαστικά υποδείγματα βασίζονται σε μια διαφορετική λογική από ότι τα υποδείγματα ιστορικής μεταβλητότητας, γεγονός που τα κάνει θεωρητικά πιο συμβατά με τις σύγχρονες οικονομικές θεωρίες, αλλά πρακτικά πιο δύσκολα στην εφαρμογή τους. Αυτό οφείλεται στο ότι τα στοχαστικά μοντέλα δεν έχουν κλειστή μορφή και επομένως δεν μπορούν να εκτιμηθούν άμεσα από μεθόδους μέγιστης πιθανοφάνειας.

2.7 Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)

Η τιμή ενός δικαιώματος εξαρτάται από διάφορες μεταβλητές, μία από αυτές είναι η μεταβλητότητα. Για να υπολογίσουμε λοιπόν την δίκαιη αξία του δικαιώματος εισάγεται και η μεταβλητότητα σε ένα μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων. Στην περίπτωση που αντιστραφεί η διαδικασία και εισαχθεί η πραγματική τιμή ενός δικαιώματος σε ένα μοντέλο αποτίμησης, εξάγεται η πραγματική τιμή της μεταβλητότητας, αυτή είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα (Implied Volatility). Συνεπώς, η τεκμαρτή μεταβλητότητα αποτελεί ένα σημαντικό κριτήριο στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης και υποδεικνύει πως οι επενδυτές εκτιμούν την αγορά. Εφόσον η αγορά είναι αποτελεσματική η τεκμαρτή μεταβλητότητα θεωρείται αμερόληπτος εκτιμητής. Το πρώτο υπόδειγμα τεκμαρτής μεταβλητότητας είναι το υπόδειγμα Black και Scholes (1973).

2.8 Μη παραμετρικά υποδείγματα

Ενώ τα υπόλοιπα υποδείγματα πρόβλεψης της μεταβλητότητας ήταν αυστηρά παραμετρικά, στη σύγχρονη βιβλιογραφία έχουν κάνει την εμφάνισή τους και λιγότερο παραμετρικοί μέθοδοι. Τέτοιες είναι η ημιπαραμετρική πρόβλεψη κατανομής ουδέτερου ρίσκου, η μέγιστη αρχή εντροπίας, τα νευρωνικά δίκτυα κ.α..

2.9 Γενικά συμπεράσματα συγκρίσεων μεθόδων πρόβλεψης

Σύμφωνα με την ερευνά του Poon και Granger (2003) η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι το καταλληλότερο μέσο πρόβλεψης της μεταβλητότητας με τα ιστορικά υποδείγματα και την κατηγορία των υποδειγμάτων GARCH να ακολουθούν. Αφού ο υπολογισμός της τεκμαρτής μεταβλητότητας βασίζεται σε εκτιμήσεις της αγοράς η τεκμαρτή μεταβλητότητα υπολογίζεται με βάση μεγαλύτερο εύρος πληροφοριών σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις που βασίζονται σε ιστορικές μεθόδους με αποτέλεσμα να υπερτερεί. Τα στοχαστικά υποδείγματα λόγω της πολυπλοκότητας τους υπολείπονται σε σχέση με τα προαναφερθέντα. Ωστόσο, η τεκμαρτή μεταβλητότητα δεν είναι πρακτικά εφικτό να χρησιμοποιηθεί για όλα τα αγαθά, καθώς δεν υπάρχουν παράγωγα για όλα.

2.10 Αξιολόγηση των μεθόδων πρόβλεψης της Μεταβλητότητας

Αφού αναλύσαμε τις μεθόδους πρόβλεψης της μεταβλητότητας, επακόλουθο είναι να γίνει η αξιολόγηση τους. Η σύγκριση των μεθόδων πρόβλεψης αποτελεί ένα πολύ σημαντικό θέμα. Ωστόσο, αντίθετα με τις προσπάθειες που έχουν λάβει χώρα στους τομείς της κατασκευής υποδειγμάτων μεταβλητότητας και πρόβλεψης μικρή σημασία έχει δοθεί στο θέμα της αξιολόγησης.

Ο πιο διαδεδομένος τρόπος αξιολόγησης της πρόβλεψης της μεταβλητότητας είναι η παλινδρόμηση. Εναλλακτικά, χρησιμοποιείται η μέτρηση σφαλμάτων πρόβλεψης. Στη σχετική βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα μεθόδων μέτρησης σφαλμάτων πρόβλεψης, ενδεικτικά αναφέρουμε τις εξής:

Στους παρακάτω τύπους όπου,

N : το πλήθος των προβλέψεων της μεταβλητότητας

σ_t : η μεταβλητότητα την χρονική περίοδο t

$\hat{\sigma}_t$: η εκτίμηση της μεταβλητότητας την χρονική περίοδο t

- Μέσο σφάλμα (Mean Error):

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\sigma}_t - \sigma_t)$$

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Square Error):

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\sigma}_t - \sigma_t)^2$$

- Ρίζα μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Root Mean Square Error):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2}$$

- Το μέσο απόλυτο σφάλμα (Mean Absolute Error):

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\varepsilon_t|$$

- Μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t}$$

- Μέσος λογάριθμος του απόλυτου σφάλματος :

$$\text{MLAE} = \frac{1}{N} \sum \ln|\varepsilon_t|$$

Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω μέθοδοι δίνουν ίδια βαρύτητα στην υποεκτίμηση και υπερεκτίμηση της μεταβλητότητας του ίδιου απολύτου μεγέθους.

Στη μέθοδο ME τα θετικά και αρνητικά μεγάλα σφάλματα αλληλοαναιρούνται. Συνεπώς, οδηγεί σε λανθασμένη ιεράρχηση των προβλέψεων της μεταβλητότητας.

Ο Bollerlev και Ghysels (1996) πρότειναν μια προσαρμοσμένη για ετεροσκεδαστικότητα εκδοχή του MSE, το HMSE:

$$\text{HMSE} = \frac{1}{N} \sum \left[\frac{\sigma_t}{\hat{\sigma}_t} - 1 \right]^2$$

Μια λιγότερο διαδεδομένη μέθοδος στη βιβλιογραφία, είναι το στατιστικό Theil-U που τυποποιεί το σφάλμα της πρόβλεψης με ένα σφάλμα ενός υποδείγματος που λαμβάνει ως υπόδειγμα αναφοράς.

$$\text{Theil} - U = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i - \sigma_i)}{\sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i^{\text{TM}} - \sigma_i)}$$

Όπου $\hat{\sigma}_i^{\text{TM}}$ είναι η πρόβλεψη της μεταβλητότητας μέσω του υποδείγματος αναφοράς. Για το υπόδειγμα αναφοράς, το στατιστικό Theil-U ισούται με τη μονάδα. Με αυτό τον τρόπο, το στατιστικό Theil-U δεν επηρεάζεται από κανένα γραμμικό μετασχηματισμό και είναι ανεξάρτητο από τη μονάδα μέτρησης της μεταβλητότητας.

Για να λυθεί το πρόβλημα της υποεκτίμησης και της υπερεκτίμησης προτάθηκε η μέθοδος LINEX .

$$\text{LINEX} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\exp\{-a(\hat{\sigma}_i - \sigma_i)\} + a(\hat{\sigma}_i - \sigma_i) - 1]$$

Η συνάρτηση LINEX σταθμίζει διαφορετικά τα θετικά και τα αρνητικά σφάλματα, σύμφωνα με το πρόσημο του α . Αν το α είναι θετικό τότε ποινικοποιεί περισσότερο τις υποεκτιμήσεις, ενώ αν το α είναι αρνητικό τότε δίνει μεγαλύτερη ποινή στις υπερεκτιμήσεις. Η επιλογή του α είναι υποκειμενική. Μέσω της LINEX, είναι δυνατό να δοθεί η αναλυτική έκφραση της βέλτιστης πρόβλεψης κάτω από την υπόθεση ότι η διαδικασία είναι δεσμευμένη κανονική. Από τη σχετική βιβλιογραφία έχει δειχθεί ότι με κατάλληλη επιλογή του α , η μέθοδος LINEX υπερτερεί.

Κεφάλαιο 3^ο

Το υπόδειγμα GARCH(1,1) και η εφαρμογή του σε προσομοιωμένα δεδομένα χρονοσειρών

3.1 Το υπόδειγμα GARCH(1,1)

Το GARCH είναι το πιο διαδεδομένο μοντέλο της κατηγορίας ARCH και αναπτύχθηκε από τον μαθητή του Engle, τον Bollerslev (1986). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενη παράγραφο, το υπόδειγμα αυτό χρησιμοποιεί μια υπό συνθήκη διακύμανση h_t . Η υπό συνθήκη διακύμανσή h_t απεικονίζει την μεταβολή της διακύμανσης των σφαλμάτων με το πέρασμα του χρόνου. Συγκεκριμένα για το υπόδειγμα GARCH(1,1) δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \quad t = 1, 2, \dots$$

Όπου $\omega > 0$, $\alpha + \beta < 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Υπενθυμίζεται ότι θεωρούμε μια χρονοσειρά τιμών αξιόγραφων (π.χ. χρηματιστηριακών τιμών μετοχών), έστω S_t , $t = 1, 2, \dots$ και συμβολίζουμε με r_t τις αποδόσεις τους,

$$r_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}, \quad t = 2, 3, \dots$$

Υποθέτουμε ότι οι παραπάνω είναι κανονικές με μέση τιμή μ και διασπορά h_t , δηλαδή,

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$$

όπου $z_t \sim N(0,1)$ ανεξάρτητες τ.μ. για $t = 1, 2, \dots$.

Σε αυτό το κεφάλαιο σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα του μοντέλου GARCH(1,1) σε προσομοιωμένα δεδομένα χρονοσειρών χρησιμοποιώντας την R (λογισμικό ανοικτού κώδικά που αποτελεί μια εφαρμογή της γλώσσας προγραμματισμού S) με συνεχείς εναλλαγές των τιμών των παραμέτρων ω , α , β και στην συνέχεια

ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία με σκοπό να αξιολογήσουμε την δυνατότητα εκτίμησης των παραμέτρων αυτών.

3.2 Μεθοδολογία και προσομοίωση του GARCH(1,1) στην R

Θα κατασκευάσουμε ένα υπόδειγμα GARCH(1,1) με συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους, έστω $\omega = 0.1, \alpha = 0.4, \beta = 0.2$. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην R περιγράφεται λεπτομερώς παρακάτω. Υπενθυμίζουμε ότι τα $\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$, όπου $z_t \sim N(0,1)$.

Αρχικά θα δώσουμε τιμές στις παραμέτρους ω, α, β , έστω $\omega = 0.1, \alpha = 0.4, \beta = 0.2$.

```
> omega<-0.1; alpha<-0.4; beta<-0.2;
```

Έπειτα, ορίζουμε ένα διάνυσμα t που θα παίρνει τιμές από το 1 έως $n = 500$ για να δηλώσουμε το χρόνο.

```
> n<-500; t<-c(1:n);
```

Κατόπιν, ορίζουμε την $z_t \sim N(0,1)$, η οποία αποτελείται από ανεξάρτητες τ.μ. από την κανονική κατανομή, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rnorm`.

```
> z<-rnorm(n)
```

Έπειτα, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rep` θα φτιάξουμε δύο διανύσματα το $\mathbf{e} = \varepsilon_t$ και το $\mathbf{h} = h_t$. Αρχικά τα δύο διανύσματα \mathbf{e} , \mathbf{h} είναι «κενά» (αποτελούνται από 0) μόλις όμως τρέξουμε την επαναληπτική διαδικασία θα αποκτήσουν τις αντίστοιχες τιμές του υποδείγματος GARCH(1,1) για τα αντίστοιχα σφάλματα ε_t και τις υπό συνθήκες διακυμάνσεις h_t .

```
> e<-rep(0,n)
```

```
> h<-rep(0,n)
```

Τέλος, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική εντολή `for` και τον τύπο της υπό συνθήκης διακύμανσης $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$, παράγουμε την μεταβλητότητα του υποδείγματος GARCH(1,1) με τις συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους ω, α, β . Υπενθυμίζουμε ότι στο συγκεκριμένο υπόδειγμα η πρόβλεψη της μεταβλητότητας μπορεί εύκολα να βρεθεί από την προηγούμενη περίοδο που είναι γνωστή.

```
> h[1]<- omega/(1-alpha-beta); e[1]=z[1]*sqrt(h[1]);
```

```

for(i in 2:500){
h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1]
e[i]<-z[i]*sqrt(h[i])
}

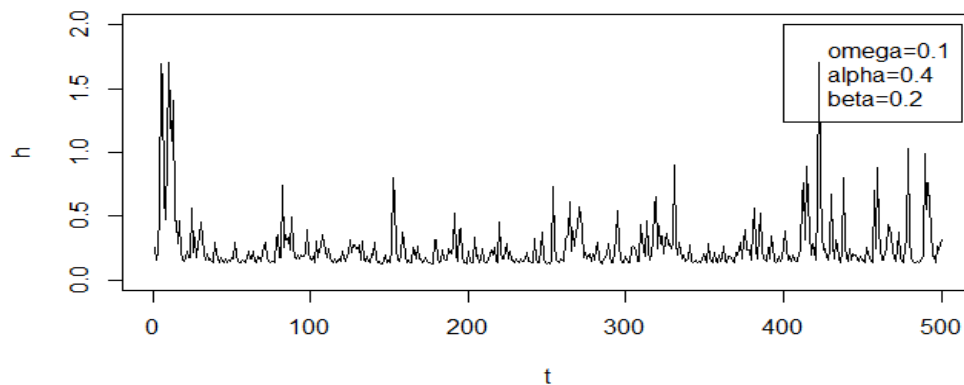
```

Μέσω της συνάρτησης `plot` παίρνουμε και το γράφημα της υπό συνθήκης διακύμανσης h_t σε συνάρτηση με το χρόνο t .

```

> plot(t,h,ylim=c(0,2) , type="l")
> legend(0.8*n,2,c("omega=0.1","alpha=0.4","beta=0.2"))

```



Επίσης μπορούμε να δούμε πως περίπου συμπεριφέρεται η χρονοσειρά S_t , $t = 1, 2, \dots$ των τιμών του αξιογράφου που ακολουθεί την παραπάνω χρονοσειρά της δεσμευμένης μεταβλητότητας. Υποθέτουμε ότι,

$$r_t = \mu + \frac{\varepsilon_t}{100} = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}, t = 2, 3, \dots$$

προκύπτει ότι:

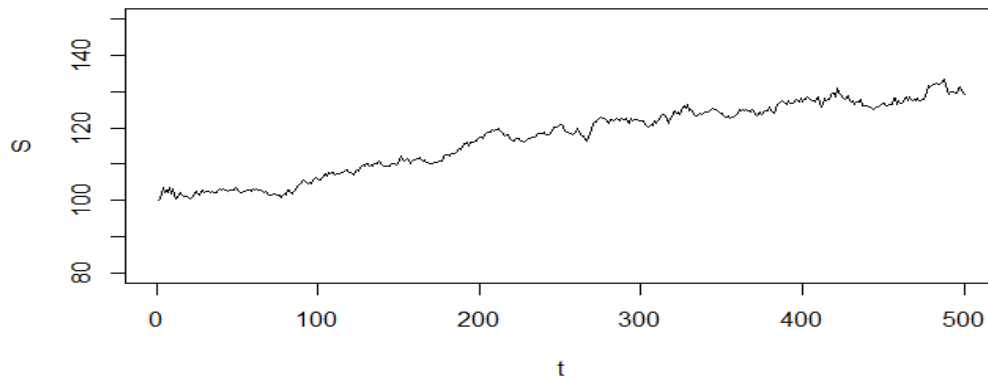
$$S_t = S_{t-1} e^{\mu + \frac{\varepsilon_t}{100}}, \quad t = 2, 3, \dots$$

και το αντίστοιχο γράφημα θα είναι (για $S_1 = 100, \mu = 0.0005$).

```

μ=0.0005;S=rep(100,n); for(i in 2:n){S[i]<-S[i-1]*exp(μ+e[i]/100)}
plot(t,S,ylim=c(80,150) , type="l")

```

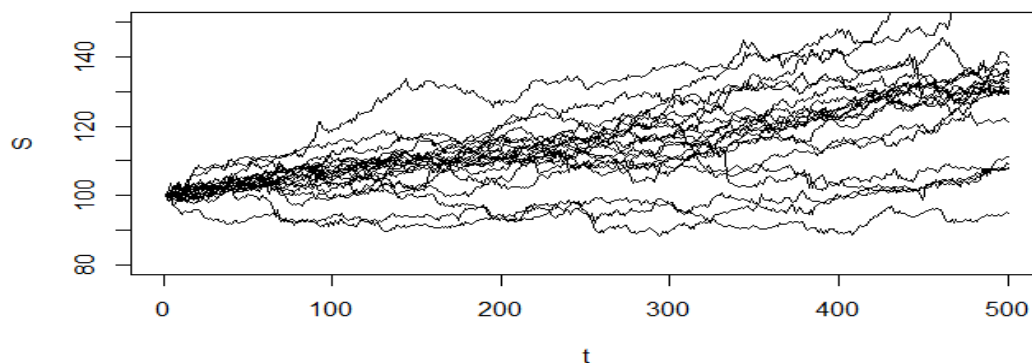
Μπορούμε να δούμε 20 τέτοιες διαδρομές μαζί σε ένα σχήμα χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία:

```

μ=0.0005;S=rep(100,n); for(i in 2:n){S[i]<-S[i-
1]*exp(μ+e[i]/100)}
plot(t,S,ylim=c(80,150),type="l")

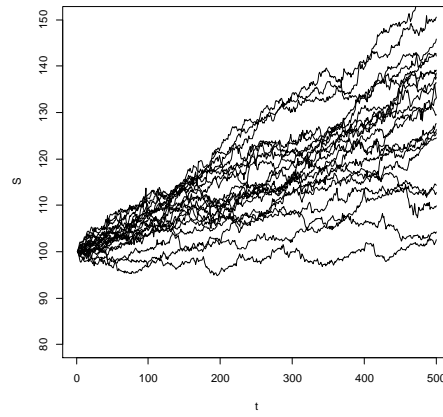
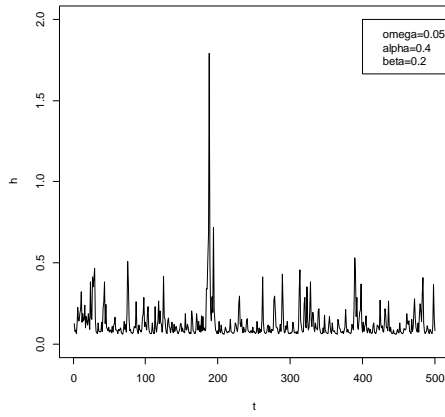
for(j in 1:20)
{
z<-rnorm(n)
h[1]<- omega/(1-alpha-beta); e[1]=z[1]*sqrt(h[1])
for(i in 2:n){
h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1]
e[i]<-z[i]*sqrt(h[i])}
for(i in 2:n){S[i]<-S[i-1]*exp(μ+e[i]/100)}
lines(t,S,type="l")
}

```

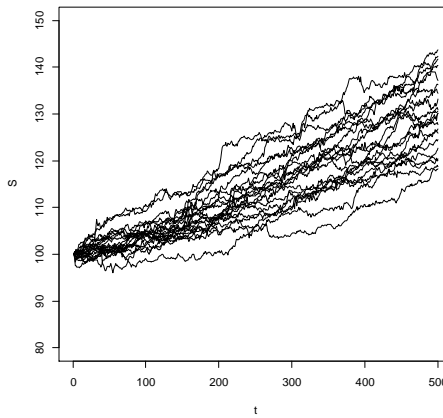
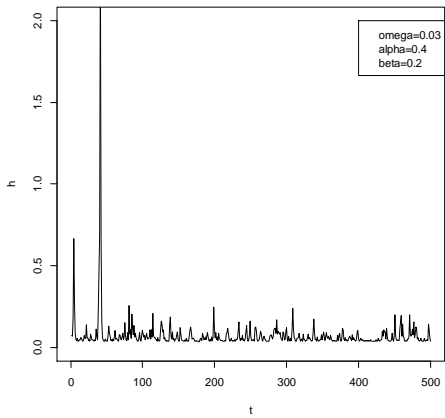


Στην συνέχεια θα αλλάξουμε τιμές στις παραμέτρους και θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για να πάρουμε μια εικόνα για την μεταβλητότητα.

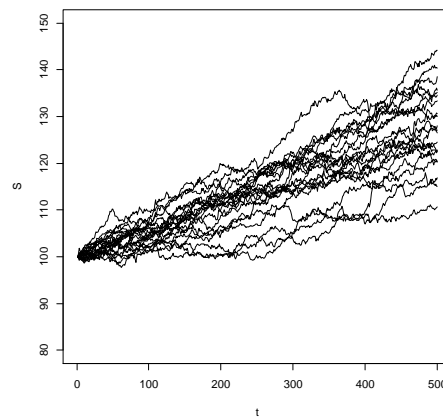
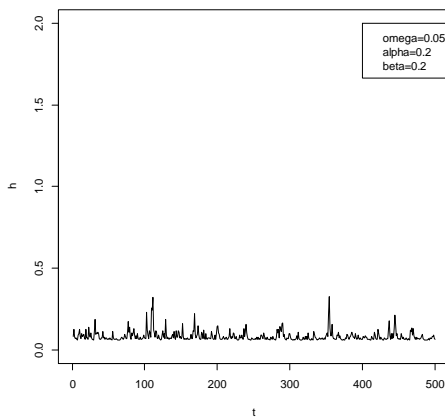
$$\omega = 0.05, \alpha = 0.4, \beta = 0.2.$$



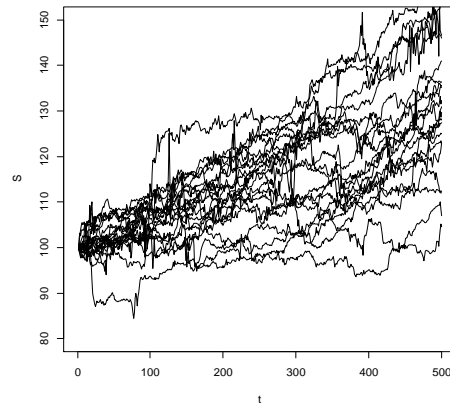
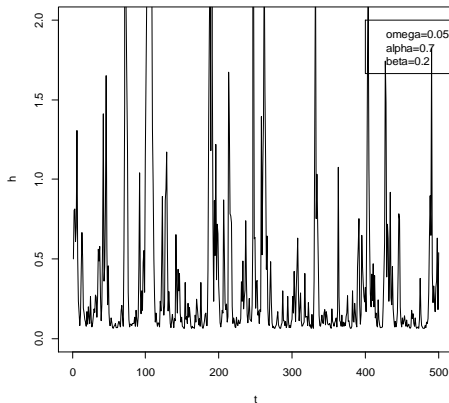
$$\omega = 0.03, \alpha = 0.4, \beta = 0.2.$$



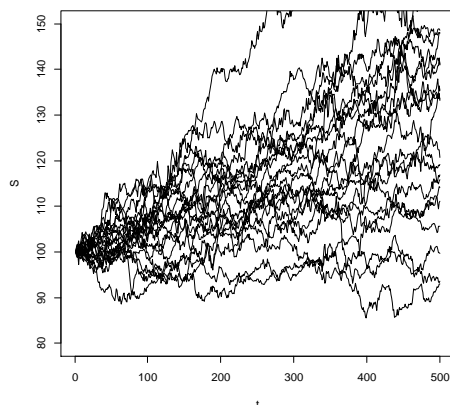
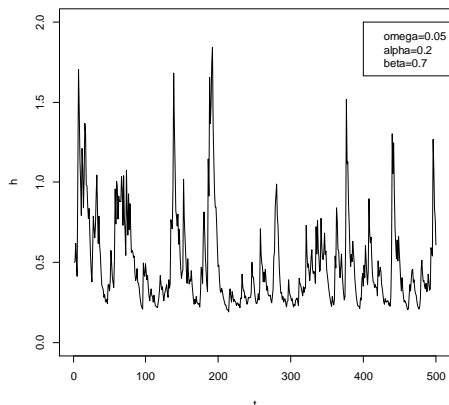
$$\omega = 0.05, \alpha = 0.2, \beta = 0.2.$$



$$\omega = 0.05, \alpha = 0.7, \beta = 0.2.$$



$$\omega = 0.05, \alpha = 0.2, \beta = 0.7.$$



Παρατηρούμε στα δύο πρώτα παραδείγματα ότι διατηρώντας σταθερές τις παραμέτρους α, β και μικραίνοντας το ω έχουμε πιο μικρό μακροχρόνιο μέσο της χρονοσειράς αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει το ω υποδηλώνει τη σταθερή διακύμανση $\sigma^2 = \omega / (1 - \alpha - \beta)$. Στα επόμενα παραδείγματα διατηρώντας σταθερή την τιμή του ω και μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων α, β παρατηρούμε ότι μεγαλώνοντας την τιμή του α δίνουμε μεγαλύτερη βαρύτητα στην πληροφορία που δεν ήταν διαθέσιμη στη προηγούμενη πρόβλεψη και η υπό συνθήκη διακύμανση h_t έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα με τη πάροδο του χρόνου. Μεγαλώνοντας την τιμή του β , εκτός από αύξηση της μεταβλητότητας της χρονοσειράς, παρατηρούμε και πιο αργή επαναφορά στο μακροχρόνιο μέσο της.

3.3 Εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος GARCH(1,1)

Στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να παρουσιάσουμε τη μέθοδο εκτίμησης των παραμέτρων ω, α, β του μοντέλου GARCH(1,1) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας προσομοιωμένες χρονοσειρές για να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητά της. Το παράδειγμα θα είναι το ίδιο με την ανωτέρω παράγραφο του κεφαλαίου προσθέτοντας επιπλέον το πακέτο `tseries` και τις συναρτήσεις `garch` και `confint`.

Σύμφωνα με τους Cryer and Chan (2008) και τους Ruey S. Tsay (2012) δεν υπάρχει ακριβής μέθοδος υπολογισμού των παραμέτρων ω, α, β του μοντέλου GARCH(1,1) αλλά μια μέθοδος εκτίμησης τους. Στη σχετική βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα αναφορών στα υποδείγματα GARCH ωστόσο λίγα από αυτά περιγράφουν κάποιο τρόπο υπολογισμού των παραμέτρων κυρίως λόγω των πολλών υπολογιστικών πράξεων που απαιτούνται. Χάριν ευκολίας υπάρχουν έτοιμα πακέτα στην R τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς παρακάτω.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή αυτής της μεθόδου. Αφού πρώτα μας έχουν δοθεί οι τιμές των παραμέτρων ω, α, β για να υπολογίσουμε τις υπό συνθήκης δεσμευμένες διακυμάνσεις $h_{t|t-1}^2$ χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$h_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1|t-2}^2 \quad (1)$$

για $t \geq 2$, με την προϋπόθεση ότι η αρχική υπό συνθήκη δεσμευμένη διακύμανση $h_{1|0}^2$ ισούται με τη σταθερή διακύμανση του μοντέλου $\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$.

Γνωρίζοντας ότι η υπό συνθήκη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τον τύπο:

$$f(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{t|t-1}^2}} \exp\left[-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_{t|t-1}^2}\right] \quad (2)$$

Και χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση:

$$f(\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1) = f(\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1) f(\varepsilon_n | \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1) \quad (3)$$

Έχουμε ως αποτέλεσμα τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\omega, \alpha, \beta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \{\log(h_{t-1|t-2}^2) + \varepsilon_t^2 / h_{t|t-1}^2\} \quad (4)$$

Την οποία θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε για να έχουμε ως επακόλουθο μία καλή μέθοδο εκτίμησης αυτών των παραμέτρων.

Το πακέτο `tseries` ανανεώθηκε το τρέχον έτος 2017 και απευθύνεται σε διαδικασίες που αφορούν χρονοσειρές. Η συνάρτηση `garch` χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας της δεσμευμένης κανονικής κατανομής που περιγράψαμε παραπάνω αντιστοιχεί το κατάλληλο μοντέλο GARCH(p,q) στα δεδομένα του προβλήματος. Με τη σειρά της η συνάρτηση `confint` μας παρέχει τα διαστήματα εμπιστοσύνης σχετικά με τις παραμέτρους του μοντέλου. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην R δίνεται για το πρώτο παράδειγμα παρακάτω.

Αρχικά κατασκευάζουμε όπως και στην προηγούμενη παράγραφο το υπόδειγμα GARCH(1,1) με συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους.

```
omega<-0.1; alpha<-0.4; beta<-0.2; n=500;
t<-c(1:n); z<-rnorm(n); e<-rep(0,n); h<-rep(0,n)
h[1]<- omega/(1-alpha-beta); e[1]=z[1]*sqrt(h[1])
for(i in 2:n)
  {h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1]
   e[i]<-z[i]*sqrt(h[i])}
```

Στη συνέχεια εκτιμώνται οι παράμετροι του μοντέλου χρησιμοποιώντας τον κώδικα:

```
library(tseries)
a.garch<-garch(e,grad="numerical",trace=FALSE)
coef(a.garch)
confint(a.garch)
```

Λαμβάνοντας τα αποτελέσματα:

```
>coef(a.garch)
      a0      a1      b1
0.1106566 0.4017685 0.1854384
```

Όπου το $\omega = a_0$, $a = a_1$, $\beta = b_1$.

Επίσης λαμβάνουμε τα ακόλουθα διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους.

```
>confint(a.garch)
           2.5 %      97.5 %
a0  0.068549191  0.1527640
a1  0.233713454  0.5698236
b1 -0.008863575  0.3797404
```

Εκτελώντας την εντολή `summary` έχουμε μια επιβεβαίωση της παραπάνω διαδικασίας.

```
>summary(a.garch)
```

Call:

```
garch(x = e, grad = "numerical", trace = FALSE)
```

Model:

```
GARCH(1,1)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.330086	-0.652154	-0.003827	0.690840	3.155446

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
a0	0.11066	0.02148	5.151	2.60e-07 ***
a1	0.40177	0.08574	4.686	2.79e-06 ***
b1	0.18544	0.09914	1.871	0.0614 .

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Diagnostic Tests:

Jarque Bera Test

data: Residuals

X-squared = 0.88307, df = 2, p-value = 0.643

Box-Ljung test

data: Squared.Residuals

X-squared = 0.018356, df = 1, p-value = 0.8922

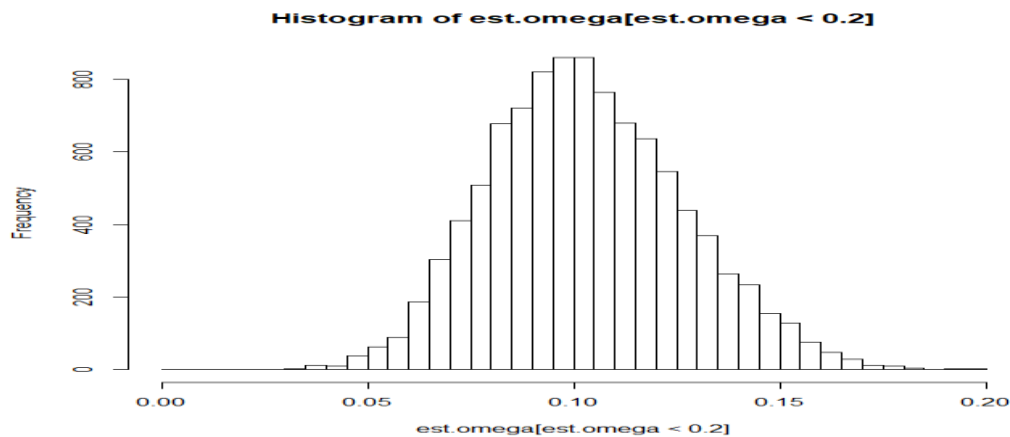
Παρατηρούμε ότι με την εντολή `summary` κάτω από τη γραμμή `call` εμφανίζεται ο τύπος του μοντέλου $GARCH(p,q)$ που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα μας και κάτω από τη γραμμή `model` επιβεβαιώνεται ο τύπος του υποδείγματος $GARCH(1,1)$. Στη γραμμή `Diagnostic Tests` με το test Jarque Bera Test γίνεται έλεγχος κανονικότητας των καταλοίπων. Προκύπτει λόγω του ότι το p -value είναι ίσο με $0.643 > 0.05$ σε επίπεδο σημαντικότητας 5% δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση δηλαδή H_0 : τα κατάλοιπα ακολουθούν κανονική κατανομή. Επομένως δεχόμαστε την κανονικότητα των καταλοίπων. Τέλος με το Box-Ljung test ελέγχεται αν τα τετράγωνα των καταλοίπων είναι ανεξάρτητα. Το αντίστοιχο p -value είναι $0.8922 > 0.05$ και επομένως η ανεξαρτησία γίνεται δεκτή σε ε.σ. 5%.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία $m=10000$ φορές καταγράφοντας κάθε φορά την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου και παρουσιάζοντας τα αντίστοιχα αποτελέσματα σε ακόλουθο ιστόγραμμα όπου επιβεβαιώνονται οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων.

```
m=10000;est.omega=rep(0,m);est.alpha=rep(0,m);est.beta=rep(0,m)
for(j in 1:m)
{
omega<-0.1; alpha<-0.4; beta<-0.2; n=500;
t<-c(1:n); z<-rnorm(n); e<-rep(0,n); h<-rep(0,n)
h[1]<- omega/(1-alpha-beta); e[1]=z[1]*sqrt(h[1])
for(i in 2:n){
h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1]
e[i]<-z[i]*sqrt(h[i])}

a.garch<-garch(e,grad="numerical",trace=FALSE)
est.omega[j]=coef(a.garch)[1]
est.alpha[j]=coef(a.garch)[2]
est.beta[j]=coef(a.garch)[3]
}
```

```
hist(est.omega[est.omega<0.2],seq(0,0.20,0.005))
```



```
> mean(est.omega)
```

```
[1] 0.1042394
```

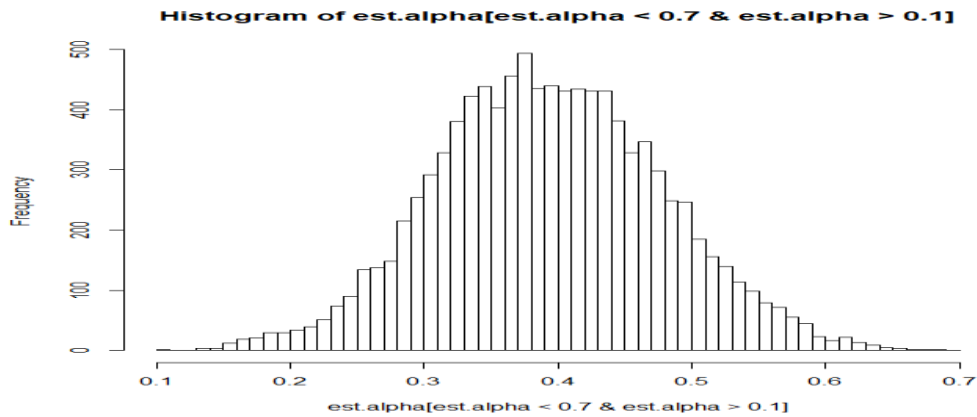
```
> var(est.omega)
```

```
[1] 0.001767802
```

Η κατανομή της εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου ω εμφανίζεται να είναι σχεδόν κανονική. Οι εκτιμώμενες τιμές βρίσκονται στο διάστημα (0.05, 0.15)

και ο μέσος όρος 0.1042394 φαίνεται να προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

```
hist(est.alpha[est.alpha<0.7&est.alpha>0.1],seq(0.1,0.7,0.01))
```



```
> mean(est.alpha)
```

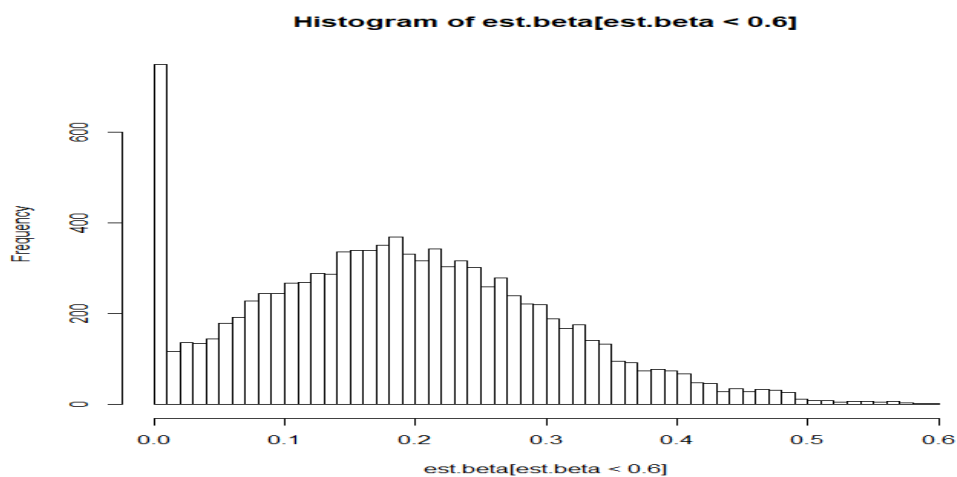
```
[1] 0.3930165
```

```
> var(est.alpha)
```

```
[1] 0.007139221
```

Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για την κατανομή της εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου a που εμφανίζεται να είναι συμμετρική-σχεδόν κανονική. Οι εκτιμώμενες τιμές βρίσκονται στο διάστημα (0.2, 0.6) και ο μέσος όρος 0.3930165 φαίνεται να προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

```
hist(est.beta[est.beta<0.6],seq(0,0.6,0.01))
```




```
> mean(est.beta)
```

```
[1] 0.1888947
```

```
> var(est.beta)
```

```
[1] 0.01345474
```

Τέλος, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες κατανομές η κατανομή της εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου β δεν εμφανίζεται να είναι συμμετρική. Θα μπορούσαμε να την χαρακτηρίσουμε θετικά ασύμμετρη επειδή παρατηρούμε ότι αρ-κετές τιμές της συσσωρεύονται κοντά στο μηδέν αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι αρνητικές τιμές της παραμέτρου β μηδενίζονται.

3.4 Επιλογή του καλύτερου υποδείγματος GARCH

Στόχος μας σε αυτή τη παράγραφο είναι να εξετάσουμε πως μπορούμε να προσδιο-ρίσουμε το μοντέλο GARCH που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. Η επιλογή του βέλτιστου μοντέλου γίνεται εξετάζοντας τον δείκτη AIC (Akaike's Information Criterion) που ορίζεται ως

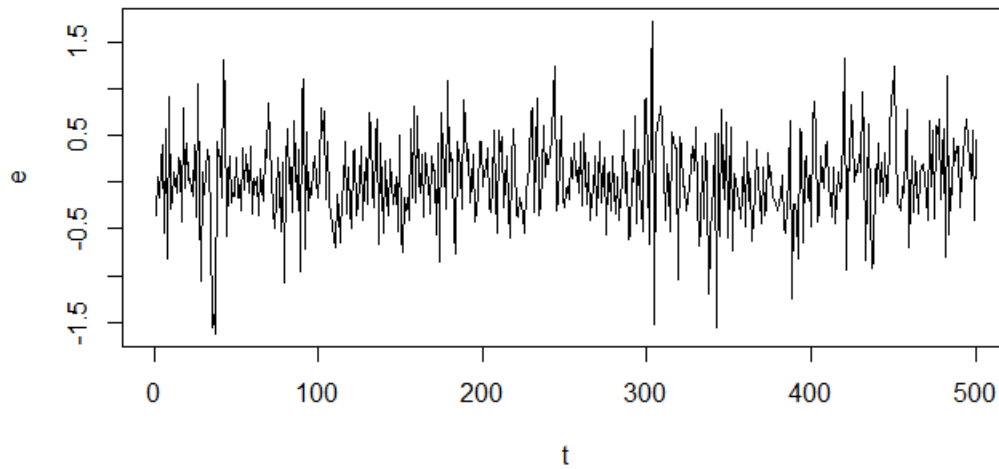
$$AIC = -2 \log(ML) + 2k$$

όπου k είναι το πλήθος των παραμέτρων του μοντέλου και ML είναι η μέγιστη πιθα-νοφάνεια του μοντέλου. Βέλτιστο μοντέλο, όπως και στην περίπτωση των ARIMA υ-ποδειγμάτων είναι αυτό που έχει το μικρότερο δείκτη AIC. Εάν δύο μοντέλα μεγιστο-ποιούν την πιθανοφάνεια περίπου το ίδιο τότε προφανώς καλύτερο θα είναι αυτό με τις λιγότερες παραμέτρους.

Ως παράδειγμα θα παράγουμε δεδομένα από μια GARCH(1,1) διαδικασία και στη συνέχεια (υποθέτοντας ότι δεν γνωρίζουμε την τάξη της) θα δοκιμάσουμε την προ-σαρμογή διαφόρων GARCH μοντέλων (συγκεκριμένα (i) GARCH(1,1), (ii) GARCH(2,2) και (iii) GARCH(3,3) μοντέλο) για να δούμε αν μπορούμε μέσω του δείκτη AIC να προσδιορίσουμε το σωστό (που προφανώς είναι το GARCH(1,1)).

Αρχικά προσομοιώνουμε δεδομένα από το GARCH(1,1):

```
omega<-0.1; alpha<-0.4; beta<-0.2; n=500;  
t<-c(1:n); z<-rnorm(n); e<-rep(0,n); h<-rep(0,n)  
h[1]<- omega/(1-alpha-beta); e[1]=z[1]*sqrt(h[1])  
for(i in 2:n){  
  h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1]  
  e[i]<-z[i]*sqrt(h[i])}  
plot(t,e,type="l")
```



(i) Εφαρμόζουμε το GARCH(1,1) μοντέλο:

```
g1=garch(e, order=c(1, 1))
summary(g1)
```

Με αποτελέσματα:

```
Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
  Min   1Q  Median   3Q   Max
-3.40271 -0.56214  0.05844  0.77783  3.34820

Coefficient(s):
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
a0 1.441e-01  2.682e-02  5.372 7.77e-08 ***
a1 3.511e-01  8.517e-02  4.123 3.75e-05 ***
b1 3.670e-15  1.113e-01  0.000  1

Diagnostic Tests:
  Jarque Bera Test
data: Residuals
X-squared = 2.3062, df = 2, p-value = 0.3157

  Box-Ljung test
data: Squared.Residuals
X-squared = 0.0012584, df = 1, p-value = 0.9717
```

```
> AIC(g1)
[1] 622.2825
```

(ii) Εφαρμόζουμε το GARCH(2,2) μοντέλο:

```
g2=garch(e, order=c(2, 2))
summary(g2)
```

Με αποτελέσματα:

```
Model:
GARCH(2,2)

Residuals:
  Min    1Q  Median    3Q   Max
-3.45073 -0.56733  0.05527  0.78355  3.37142

Coefficient(s):
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
a0 1.408e-01  1.387e+00  0.102  0.919
a1 3.288e-01  8.018e-02  4.101 4.12e-05 ***
a2 7.031e-03  3.310e+00  0.002  0.998
b1 7.730e-03  1.006e+01  0.001  0.999
b2 5.740e-16  3.242e-01  0.000  1.000

Diagnostic Tests:
  Jarque Bera Test
data: Residuals
X-squared = 2.1575, df = 2, p-value = 0.34

  Box-Ljung test
data: Squared.Residuals
X-squared = 0.044919, df = 1, p-value = 0.8322
```

```
> AIC (g2)
[1] 626.431
```

(iii) Εφαρμόζουμε το GARCH(3,3) μοντέλο:
`g3=garch(e, order=c(3,3))`
`summary(g3)`

Με αποτελέσματα:

```
Model:
GARCH(3,3)

Residuals:
  Min    1Q  Median    3Q   Max
-3.57733 -0.57894  0.06955  0.78104  3.10661

Coefficient(s):
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
a0 1.297e-01  4.606e-01  0.282  0.77822
a1 1.688e-01  5.693e-02  2.965  0.00303 **
a2 5.145e-02  3.427e-01  0.150  0.88066
a3 2.141e-15  5.372e-01  0.000  1.00000
b1 4.407e-02  1.973e+00  0.022  0.98218
b2 4.474e-02  2.858e+00  0.016  0.98751
b3 5.359e-02  1.015e+00  0.053  0.95790

Diagnostic Tests:
  Jarque Bera Test
data: Residuals
X-squared = 2.1971, df = 2, p-value = 0.3334

  Box-Ljung test
```

```
data: Squared.Residuals
X-squared = 6.2281, df = 1, p-value = 0.01257
```

```
> AIC (g3)
[1] 638.246
```

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως βέλτιστο μοντέλο είναι αυτό με το μικρότερο δείκτη AIC. Από τη σύγκρισή των τριών μοντέλων προκύπτει ότι πιο κοντά στα δεδομένα μας είναι το μοντέλο GARCH(1,1).

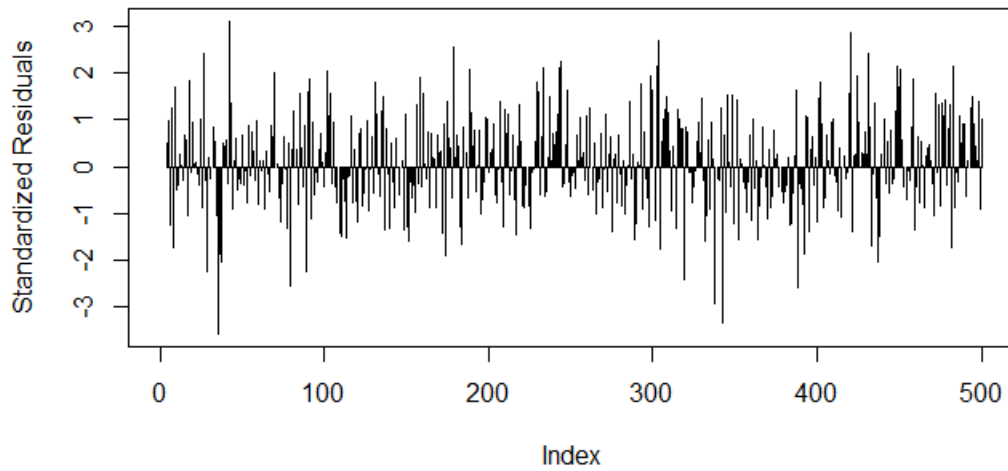
Υπενθυμίζουμε ότι με την εντολή `summary` κάτω από τη γραμμή `call` εμφανίζεται ο τύπος του μοντέλου που χρησιμοποιείται GARCH(p,q). Στη γραμμή `Diagnostic Tests` με το `test Jarque Bera Test` γίνεται έλεγχος κανονικότητας των καταλοίπων. Προκύπτει λόγω του ότι το `p-value` είναι μεγαλύτερο 0.05 σε επίπεδο σημαντικότητας 5% δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή H_0 : τα κατάλοιπα ακολουθούν κανονική κατανομή. Επομένως δεχόμαστε την κανονικότητα των καταλοίπων. Τέλος με το `Box-Ljung` τεστ ελέγχεται αν τα τετράγωνα των καταλοίπων είναι ανεξάρτητα. Εάν το αντίστοιχο `p-value` είναι μεγαλύτερο 0.05 η ανεξαρτησία γίνεται δεκτή σε ε.σ. 5%.

Τέλος, σε αυτή τη παραγράφου θα ολοκληρώσουμε με έλεγχο της κανονικότητας των καταλοίπων και της ανεξαρτησίας των τετραγωνικών αποκλίσεων του μοντέλου GARCH(1,1) χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα `plot`, `QQplot` και `acf` και στα τρία διαγράμματα δεν παρατηρείται κάποια τάση της μεταβλητότητας ούτε κάποιο σειριακό συσχετισμό.

Στην περίπτωση των ARIMA μοντέλων τα κατάλοιπα είναι πολύ χρήσιμα για να προσδιορίσουμε το βέλτιστο μοντέλο. Υπενθυμίζουμε ότι τα κατάλοιπα υπολογίζονται από τον τύπο $\hat{\varepsilon}_t = r_t / \sigma_{t|t-1}$.

Οι εντολές που χρησιμοποιούμε στην R είναι οι ακόλουθες:

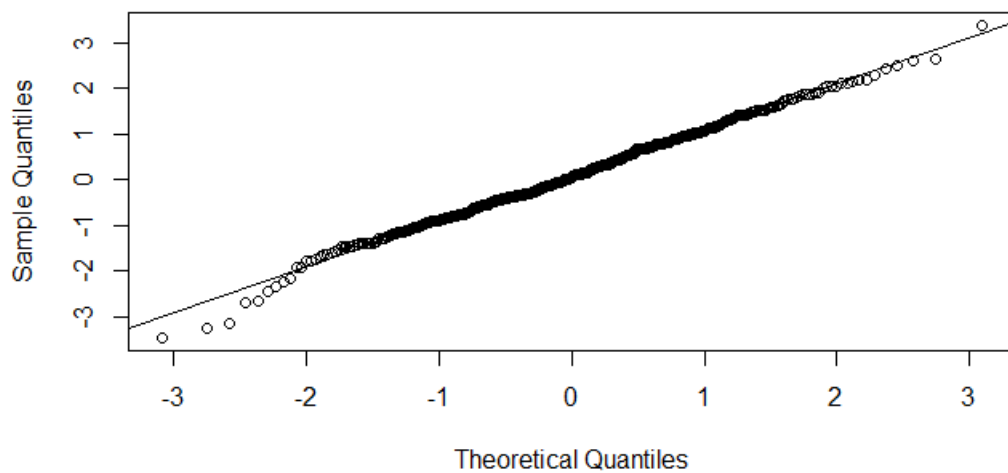
```
plot(residuals(g1), type='h', ylab='Standardized Residuals')
```



Στο παραπάνω διάγραμμα δεν παρατηρούμε κάποια τάση των καταλοίπων.

```
qqnorm(residuals(g1)); qqline(residuals(g1))
```

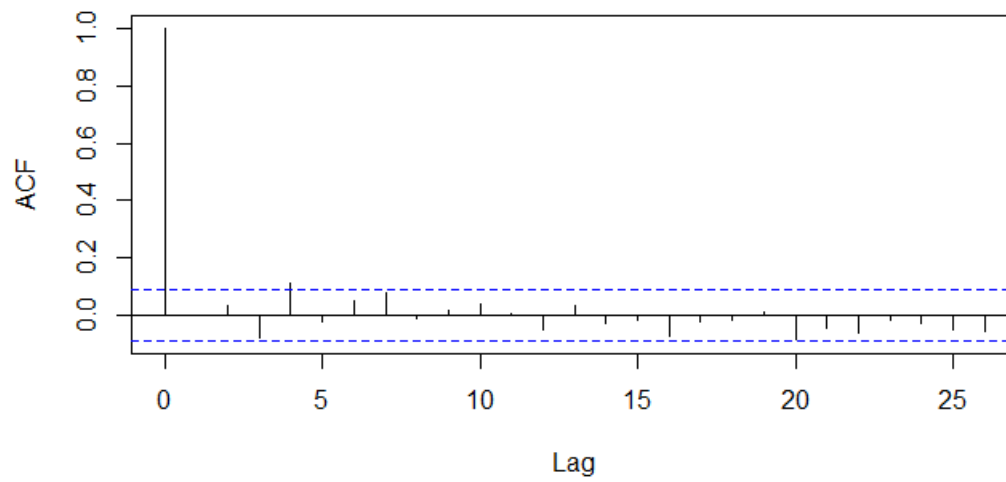
Normal Q-Q Plot



Όπως έχει προηγούμενος αναφερθεί με το γράφημα QQ plot γίνεται έλεγχος της κανονικότητας των κατάλοιπων. Ως συνέπεια δεχόμαστε την κανονικότητα των καταλοίπων αφού δεν παρατηρείται έντονη γραφική απόκλιση από την ευθεία.

```
acf(residuals(g1)^2, na.action=na.omit)
```

Series residuals(g1)^2



Τέλος, με το γράφημα ACF γίνεται έλεγχος της ανεξαρτησίας των τετραγωνικών αποκλίσεων. Η γενική εικόνα των τετραγωνικών αποκλίσεων είναι ότι είναι ανεξάρτητα.

Κεφάλαιο 4^ο

Εκτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης θεωρώντας ότι η μεταβλητότητα περιγράφεται από ένα GARCH(1,1) μοντέλο

4.1 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Παράλληλα με τη λειτουργία των χρηματιστήριων αξιών όπου πραγματοποιούνται συναλλαγές μετοχών και ομολόγων, λειτουργούν και τα λεγόμενα χρηματιστήρια παραγώγων στα οποία συναλλάσσονται διάφορα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Ως παράγωγο προϊόν θεωρείται μια διμερής σύμβαση η οποία μπορεί να αναφέρεται σε μετοχές, δείκτες μετοχών, ομόλογα, συνάλλαγμα ή εμπορεύματα. Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι:

- i. Προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts)
- ii. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future contracts)
- iii. Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων (Stock Repo and Stock Reverse Repo)
- iv. Δικαιώματα προαίρεσης (options)

Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα κάνουμε μια περιληπτική αναφορά μόνο στα δικαιώματα προαίρεσης με σκοπό την αποτίμηση των δικαιωμάτων θεωρώντας ότι η μεταβλητότητα τους περιγράφεται από ένα GARCH(1,1) μοντέλο. Για περισσότερα στοιχεία πάνω στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις Πανεπιστημιακές Σημειώσεις του Μ.Μπούτσικα (2005).

4.2 Δικαιώματα προαίρεσης

Δικαίωμα προαίρεσης καλείται μια συμφωνία (ένα συμβόλαιο) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων (τον αγοραστή και τον πωλητή του δικαιώματος) με τη μεσολάβηση του Χρηματιστήριου Παραγώγων. Η συμφωνία αυτή δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα (και όχι την υποχρέωση) να αγοράσει (ή να πουλήσει, ανάλογα με το είδος του δικαιώματος) από τον πωλητή του δικαιώματος ένα συγκεκριμένο αγαθό A σε μια προκαθορισμένη τιμή K , κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου $[0, T]$ ή σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T στο μέλλον. Το αγαθό A μπορεί να είναι μετοχή, χρηματιστηριακός δείκτης, συνάλλαγμα, εμπόρευμα.

Στα δικαιώματα προαίρεσης αγοραστής του δικαιώματος (holder) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμα του παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο πωλητής (writer) του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πράξει ότι τελικά αποφασίσει ο αγοραστής του δικαιώματος. Για το λόγο αυτό ο αγοραστής θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο C (ασφάλιστρο) στον πωλητή για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Συμφωνά με τα παραπάνω ένα δικαίωμα προαίρεσης χαρακτηρίζεται από τα εξής:

- i. Το είδος του δικαιώματος (δικαίωμα αγοράς-call option ή δικαίωμα πώλησης-put option). Στην αγορά μπορεί κανείς να αγοράσει ένα call option (long call) ή να πουλήσει ένα call option (short call) ή να αγοράσει ένα put option (long put) ή να πουλήσει ένα put option (short put).
- ii. Ο υποκείμενος τίτλος (π.χ. συγκεκριμένη μετοχή).
- iii. Το μέγεθος του συμβολαίου (π.χ. πλήθος μετοχών).
- iv. Η ημερομηνία λήξης. Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης T υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης: (α) Αμερικανικού τύπου (American option) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης. (β) Ευρωπαϊκού τύπου (European option) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του.
- v. Η τιμή εξάσκησης K (strike price) η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς/πώλησης θα αγοράσει/πουλήσει (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα) το συγκεκριμένο αγαθό στο οποίο αναφέρεται το δικαίωμα.
- vi. Το αντίτιμο C το οποίο καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του δικαιώματος.

4.3 Αγορά σε κατάσταση ισορροπίας

Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης θα πρέπει να υποθέσουμε απλουστευτικά τα εξής :

Στην αγορά δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, ενώ όλα τα κέρδη φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο.

Οι συναλλασσόμενοι μπορούν πάντοτε να δανείζουν και να δανείζονται με τον ίδιο επιτόκιο r χωρίς κίνδυνο με συνεχή ανατοκισμό.

Οι συναλλασσόμενοι προσπαθούν να εκμεταλλευτούν οποιαδήποτε ευκαιρία για σίγουρο κέρδος εμφανίζεται. Επομένως μόλις εμφανιστεί μια ευκαιρία για arbitrage (σίγουρο κέρδος), τότε αρκετοί επενδυτές θα σπεύσουν να την εκμεταλλευτούν με συνέπεια αυτή να χαθεί.

Αυτό μας οδηγεί να θεωρήσουμε ότι οι τιμές που αφορούν τα διάφορα παράγωγα προϊόντα είναι τέτοιες ώστε να εξασφαλίζεται ισορροπία στην αγορά.

4.4 Το μοντέλο Black and Scholes

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο μια σημαντική εφαρμογή της μεταβλητότητας είναι στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων. Το πιο διαδεδομένο μοντέλο για αυτό το σκοπό είναι το υπόδειγμα Black and Scholes. Πρόκειται για μία μέθοδο τιμολόγησης της τιμής μιας μετοχής κάνοντας χρήση της μεταβλητότητας.

Αρκετοί ερευνητές όπως οι Hull και White (1987) μελέτησαν την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε στοχαστικά υποδείγματα. Με την είσοδο των GARCH μοντέλων επεκτάθηκε η μελέτη της μεταβλητότητας σε συνεχή χρόνο. Ωστόσο, πολλά άρθρα όπως των Duan (1995), Amin και Ng (1993), Kafner και Hardle (2000) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα των εξω-χρηματιστηριακών χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι πιο κοντά στην παρατηρηθείσα τιμή αγοράς παρά το μοντέλο των Black and Scholes.

Στην συνέχεια της παραγράφου θα αναλύσουμε εν συντομία το μοντέλο των Black and Scholes και χρησιμοποιώντας προσομοιωμένες χρονοσειρές θα το συγκρίνουμε με ένα GARCH(1,1) υπόδειγμα.

Το βασικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης Black and Scholes βασίζεται στην εξής σχέση (υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου):

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

Όπου S_t η τιμή της μετοχής σε χρόνο t .

Θεωρούμε ότι η $S_t, t \geq 0$, είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown με αρχική τιμή S_0 .

$W_t, t \geq 0$, είναι μια τυπική κίνηση Brown (BM(0,1)), r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και σ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής.

Με τη χρήση του ολοκληρώματος Itô η λογαριθμική τιμή της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο:

$$d\ln(S_t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

Στην πράξη θεωρούμε ότι το σ και το r είναι γνωστές σταθερές παράμετροι και ο μόνος παράγοντας αβεβαιότητας στο μοντέλο είναι η κίνηση λευκού θορύβου dW_t .

Με την προσθήκη προσομοιωμένων χρονοσειρών η τιμή της μετοχής για χρόνο t δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$S_t = S_{t-1} \exp(r - 0.5\sigma^2 + \sigma\varepsilon_t)$$

Όπου $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Επιπλέον αν K : η τιμή εξασκήσεως και T : ο χρόνος λήξης παράγοντας μέσω προσομοίωσης την τιμή της μετοχής S_T μπορούμε να επαναλάβουμε n φορές την παραπάνω διαδικασία.

Κάνοντας χρήση των παραπάνω αποτελεσμάτων η no-arbitrage αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι

$$C(S_0) = e^{-rT} E(\max(S_T - K, 0)) \approx e^{-rT} \sum_{i=1}^n \frac{\max(S_T^{(i)} - K, 0)}{n}$$

4.5 Τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου υπό GARCH(1,1)

Μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω διαδικασία για ένα GARCH(1,1) μοντέλο κάνοντας χρήση την υπό συνθήκης διακύμανσης h_t αντί της σταθερής διακύμανσης. Πιο συγκεκριμένα η αξία της μετοχής δίνεται από τον τύπο:

$$S_t = S_{t-1} \exp(r - 0.5h_t^2 + h_t\varepsilon_t).$$

Κατασκευάζοντας τον κώδικα στην R θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα.

Πρώτο βήμα, θα δώσουμε τιμές στις παραμέτρους α, β, ω .

Δεύτερο βήμα θα δώσουμε τον τύπο υπολογισμού της σταθερής μεταβλητότητας σ , όπως έχει αναλυθεί και σε προηγούμενες παραγράφους.

Στο *τρίτο βήμα* θα προσομοιώσουμε στους χρόνους $idt = iT/n$ για i από 1 έως $n = 500$ την υπό συνθήκη διακύμανση h_t του GARCH(1,1) μοντέλου, καθώς και την αντίστοιχη αξία της μετοχής υπό συνθήκες σταθερής μεταβλητότητας (μεταβλητή $SS[i]$) και υπό το μοντέλο GARCH (μεταβλητή $S[i]$).

Θυμίζουμε ότι κάθε φορά η αξία της μετοχής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία από την προηγούμενη τιμή στη επόμενη.

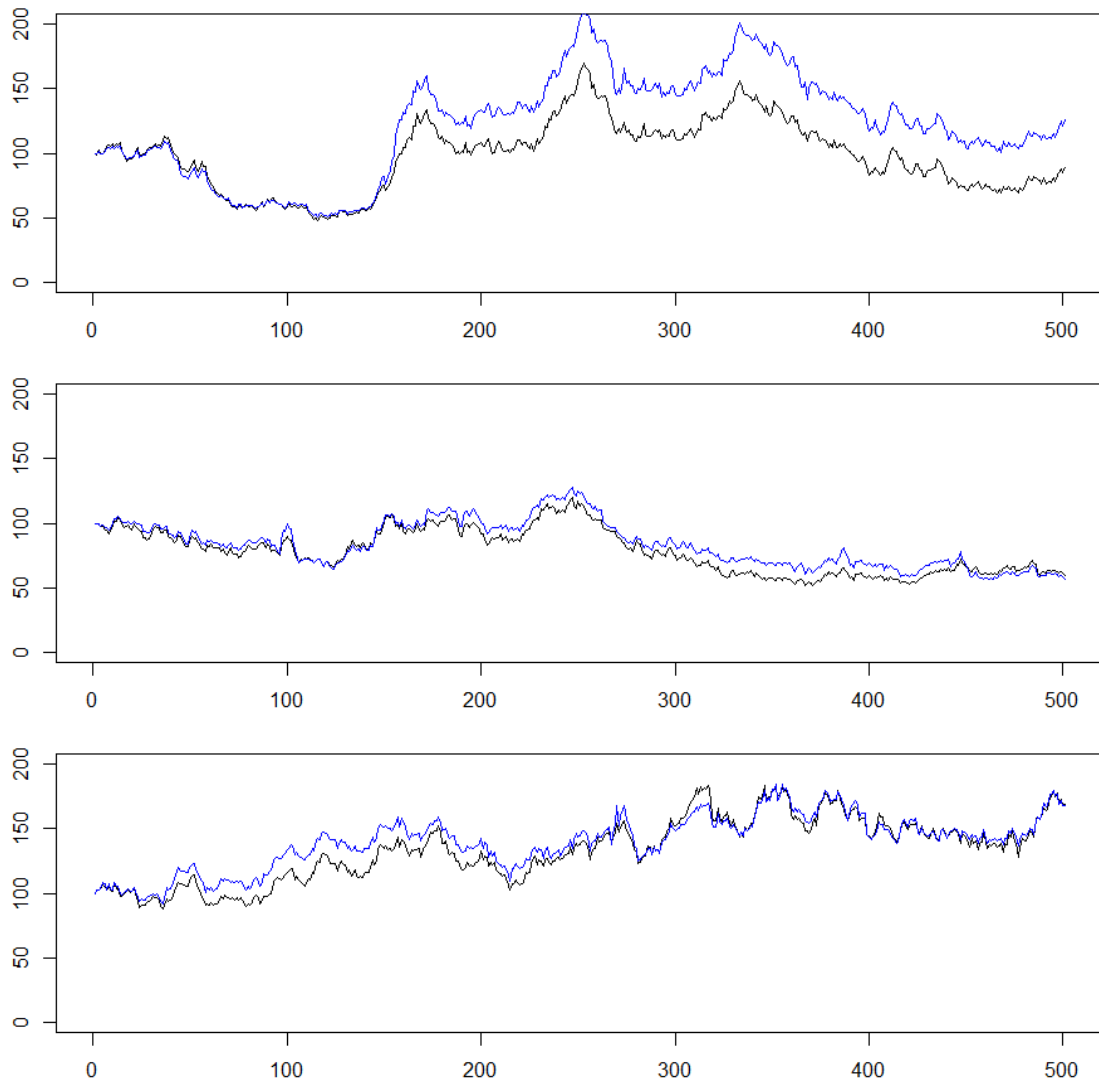
Συγκεκριμένα, ο κώδικας για την διαδρομή της τιμής μιας μετοχής υπό Garch(1,1) και υπό σταθερή μεταβλητότητα είναι:

```
n=500; omega<-0.2; alpha<-0.4; beta<-0.4; T=0.5; dt=T/n;
r=0.1; S0=100; sigma=(omega/(1-alpha-beta))^0.5
```

```

t<-1:(n+1); z<-rnorm(n+1); e<-rep(0,n+1); h<-rep(0,n+1);
par(mar=c(2,2,0.5,0.5))
S<-rep(S0,n+1); SS<-rep(S0,n+1);
h[1]<- sigma^2; e[1]= rnorm(1)*sqrt(h[1])
for(i in 2:(n+1)){
h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1];
e[i]<-rnorm(1)*sqrt(h[i]);
S[i]<-S[i-1]*exp((r-h[i]/2)*dt+z[i]*sqrt(h[i])*dt^0.5);
SS[i]<-SS[i-1]*exp((r-sigma^2/2)*dt+z[i]*sigma*dt^0.5)};
plot(1:(n+1),SS,type="l",ylim=c(0,200))
lines(1:(n+1),S,col="blue")

```

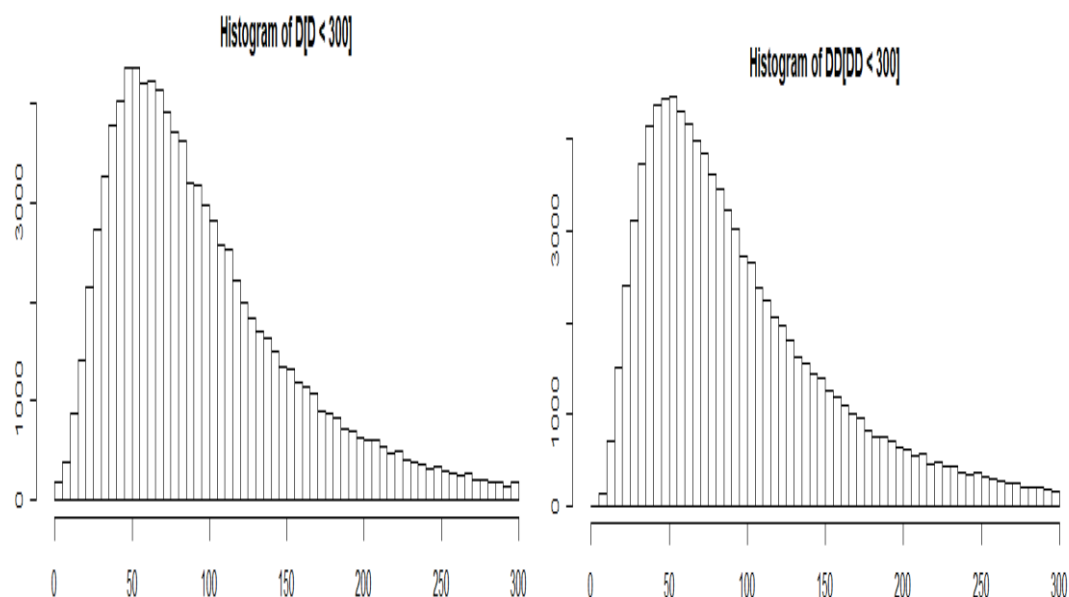


Στο ίδιο σχήμα βάζουμε τις προσομοιωμένες διαδρομές από τα δύο μοντέλα (με σταθερό και μεταβλητό volatility).

Με $S[i]$ συμβολίζεται η τιμή της μετοχής ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με την μεταβλητότητα του να υπολογίζεται από ένα GARCH(1,1) μοντέλο και με $SS[i]$ συμβολίζεται η τιμή της μετοχής υπό το μοντέλο Black and Scholes.

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία $m=100000$ φορές και κατασκευάζουμε ένα ιστόγραμμα με την τελική τιμή της μετοχής υπό το Garch(1,1) και υπό το κλασικό μοντέλο.

```
n=50; omega<-0.2; alpha<-0.4; beta<-0.4; T=0.5; dt=T/n;
r=0.1; S0=100; K=100; sigma=(omega/(1-alpha-beta))^0.5
t<-1:(n+1); e<-rep(0,n+1); h<-rep(0,n+1);
m=100000;D=rep(0,m);DD=rep(0,m);par(mar=c(2,2,0.5,0.5))
for(j in 1:m)
{z<-rnorm(n+1);
S<-rep(S0,n+1); SS<-rep(S0,n+1);
h[1]<-sigma^2; e[1]=z[1]*sqrt(h[1])
for(i in 2:(n+1)){
h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1];
e[i]<-rnorm(1)*sqrt(h[i]);
S[i]<-S[i-1]*exp((r-h[i]/2)*dt+z[i]*sqrt(h[i])*dt^0.5);
SS[i]<-SS[i-1]*exp((r-sigma^2/2)*dt+z[i]*sigma*dt^0.5)};
D[j]=S[n+1]
DD[j]=SS[n+1]
}
hist(D[D<300],seq(0,300,5))
hist(DD[DD<300],seq(0,300,5))
```



```
> print(c(mean(D),sd(D)))
[1] 105.22358 88.77709
> print(c(mean(DD),sd(DD)))
[1] 105.19360 85.24482
```

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από τα ανωτέρω αποτελέσματα, υπό τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, η μέση τιμή της τελικής τιμής της μετοχής είναι

περίπου ίση στα δύο μοντέλα αλλά στο πρώτο (GARCH) μοντέλο έχει μεγαλύτερη διασπορά.

Επιπλέον η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς εκτιμάται με τον παραπάνω κώδικα, αλλάζουμε μόνο τις παρακάτω εντολές:

```
D[j]=max(c(S[n+1]-K,0))
DD[j]=max(c(SS[n+1]-K,0))
```

και θα είναι

```
> print(c(mean(D),sd(D)/m^0.5))
[1] 30.4877435 0.2545886
> print(c(mean(DD),sd(DD)/m^0.5))
[1] 31.0330787 0.2240158
```

Δηλαδή υπό το μοντέλο μεταβλητότητας GARCH(1,1), το δικαίωμα έχει δίκαιη αξία 30.5 ενώ υπό το μοντέλο σταθερής μεταβλητότητας έχει δίκαιη αξία 31 περίπου.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει μεγάλη απόκλιση στις δύο τιμές. Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει αρκετές μελέτες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα GARCH είναι πιο κοντά στην τιμή αγοράς παρά το μοντέλο των Black and Scholes.

4.6 Τιμολόγηση δικαιωμάτων αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και Ασιατικού τύπου υπό GARCH(1,1) με διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους

Στην τελευταία μας παράγραφο στόχος μας είναι να προσομοιώσουμε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου και ασιατικού τύπου υπό το μοντέλο Black Scholes και υπό το μοντέλο GARCH(1,1) και με κατάλληλη εναλλαγή των παραμέτρων να παραστήσουμε τις διαφορές των δύο μοντέλων.

Δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ασιατικού τύπου (BS model vs GARCH model για διάφορες τιμές του beta)

```
alpha=0.3; beta=0.3; omega=0.1; C.GARCH=c(); C.BS=c();
steps=seq(0.05,0.65,0.05);plot(NULL,ylim=c(0,1),xlim=c(0,1))
for(beta in steps)
{
  set.seed(100)
  n=50; T=0.5; dt=T/n;
  r=0.1; S0=100; K=100; sigma=(omega/(1-alpha-beta))^0.5
  t<-1:(n+1); e<-rep(0,n+1); h<-rep(0,n+1);
```

```

m=10^5; D.GARCH=rep(0,m); D.BS=rep(0,m);
for(j in 1:m)
{
z<-rnorm(n+1);
SG<-rep(S0,n+1); S<-rep(S0,n+1);
h[1]<- sigma^2; e[1]=rnorm(1)*sqrt(h[1])
for(i in 2:(n+1))
{
h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1];
e[i]<-rnorm(1)*sqrt(h[i]);
SG[i]<-SG[i-1]*exp((r-h[i]/2)*dt
+z[i]*sqrt(h[i])*dt^0.5);
S[i]<-S[i-1]*exp((r-sigma^2/2)*dt+z[i]*sigma*dt^0.5)
}
D.GARCH[j]=exp(-r*T)*max(c(SG[n+1]-mean(SG),0))
D.BS[j]=exp(-r*T)*max(c(S[n+1]-mean(S),0))
}
C.GARCH=c(C.GARCH,mean(D.GARCH));C.BS=c(C.BS,mean(D.BS))
text(0.5,beta,paste(beta,mean(D.GARCH),mean(D.BS)))
}

```

```

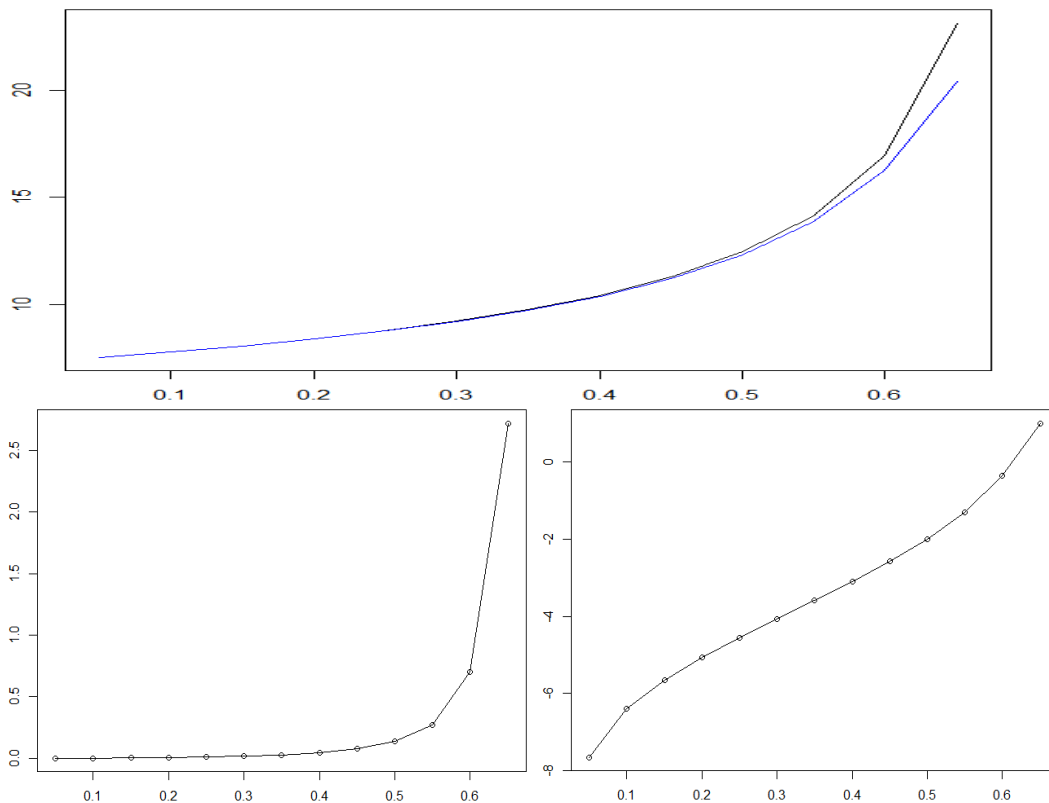
par(mar=c(2,2,0.5,0.5))
plot(steps,C.BS,type="l")
lines(steps,C.GARCH,col="blue")

```

```

plot(steps,C.BS-C.GARCH,type="o")
plot(steps,log(C.BS-C.GARCH),type="o")
C.BS
C.GARCH

```



```

> C.BS
[1] 7.526890 7.777288 8.061287 8.387076 8.765887 9.213632 9.753946
[8] 10.423725 11.284313 12.447206 14.143266 16.959753 23.130457
> C.GARCH
[1] 7.526416 7.775633 8.057819 8.380822 8.755325 9.196564 9.726367
[8] 10.378737 11.208656 12.311543 13.870867 16.257850 20.407238

```

Με τον παραπάνω κώδικα παράγουμε την δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ασιατικού τύπου υπό το μοντέλο GARCH(1,1) και υπό το μοντέλο Black and Scholes και με εναλλαγή της παραμέτρου β για τιμές από 0.05 έως 0.65 με βήμα 0.05 κατασκευάσουμε τρία διαγράμματα που απεικονίζουν τις αποκλίσεις των δύο μοντέλων. Στο πρώτο διάγραμμα με μπλε χρώμα παριστάνονται οι τιμές του δικαιώματος αγοράς υπό το μοντέλο GARCH(1,1) ενώ με μαύρο χρώμα παριστάνονται οι τιμές του μοντέλου Black and Scholes. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου β τα δύο μοντέλα ταυτίζονται ενώ για μεγάλες τιμές της παραμέτρου βλέπουμε ότι το μοντέλο GARCH(1,1) παρουσιάζει μικρότερες τιμές. Στο δεύτερο διάγραμμα παριστάνονται οι διαφορές των δύο μοντέλων όπου επιβεβαιώνεται το προηγούμενο μας συμπέρασμα ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου β οι διαφορές των δύο μοντέλων είναι μηδενικές ενώ για μεγάλες τιμές της παραμέτρου οι διαφορές τους αυξάνονται εκθετικά. Στο τρίτο διάγραμμα απεικονίζουμε τον λογάριθμο των διαφορών των δύο μοντέλων όπου παρατηρούμε ότι αυξάνεται γραμμικά. Για επιβεβαίωση των ανωτέρω συμπερασμάτων παραθέτουμε και τις τιμές των δύο μοντέλων κάτωθι των διαγραμμάτων.

Δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ασιατικού τύπου (BS model vs GARCH model για διάφορες τιμές του alpha)

```

alpha=0.3; beta=0.3; omega=0.1; C.GARCH=c(); C.BS=c();
steps=seq(0.05,0.65,0.05);plot(NULL,ylim=c(0,1),xlim=c(0,1))
for(alpha in steps)
{
  set.seed(100)
  n=50; T=0.5; dt=T/n;
  r=0.1; S0=100; K=100; sigma=(omega/(1-alpha-beta))^0.5
  t<-1:(n+1); e<-rep(0,n+1); h<-rep(0,n+1);
  m=10^5; D.GARCH=rep(0,m); D.BS=rep(0,m);
  for(j in 1:m)
  {
    z<-rnorm(n+1);
    SG<-rep(S0,n+1); S<-rep(S0,n+1);
    h[1]<-sigma^2; e[1]=rnorm(1)*sqrt(h[1])
    for(i in 2:(n+1))
    {
      h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1];
      e[i]<-rnorm(1)*sqrt(h[i]);
      SG[i]<-SG[i-1]*exp((r-
h[i]/2)*dt+z[i]*sqrt(h[i])*dt^0.5);
      S[i]<-S[i-1]*exp((r-sigma^2/2)*dt+z[i]*sigma*dt^0.5)
    }
    D.GARCH[j]=exp(-r*T)*max(c(SG[n+1]-mean(SG),0))
  }
}

```

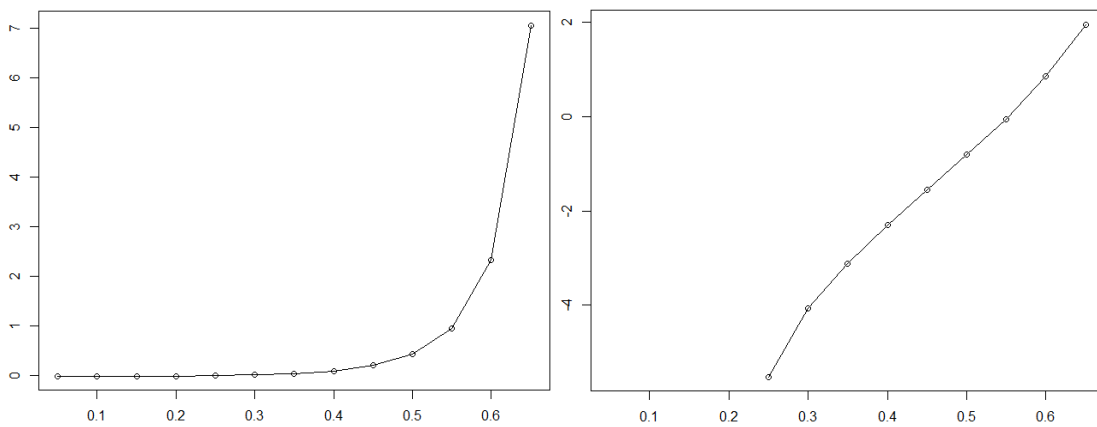
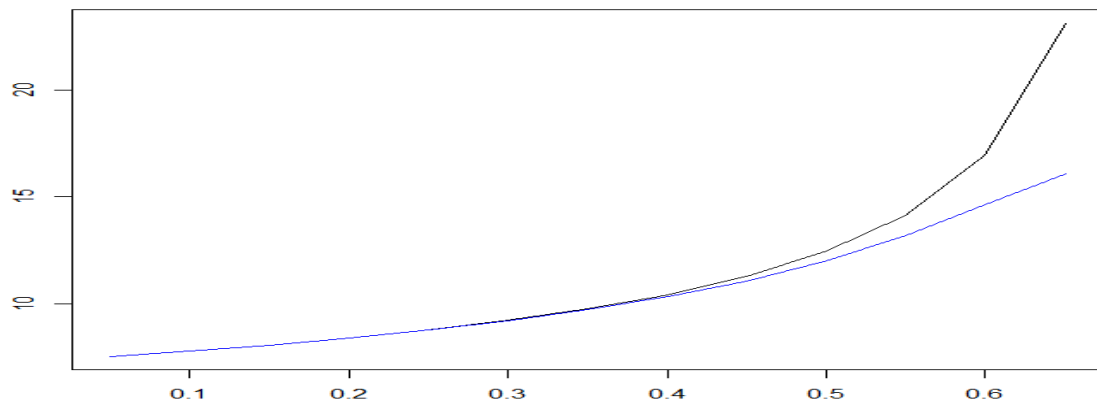
```

D.BS[j]=exp(-r*T)*max(c(S[n+1]-mean(S),0))
}
C.GARCH=c(C.GARCH,mean(D.GARCH));C.BS=c(C.BS,mean(D.BS))
text(0.5,alpha,paste(alpha,mean(D.GARCH),mean(D.BS)))
}

par(mar=c(2,2,0.5,0.5))
plot(steps,C.BS,type="l")
lines(steps,C.GARCH,col="blue")

plot(steps,C.BS-C.GARCH,type="o")
plot(steps,log(C.BS-C.GARCH),type="o")
C.BS
C.GARCH

```



```

> C.BS
[1] 7.526890 7.777288 8.061287 8.387076 8.765887 9.213632 9.753946
[8] 10.423725 11.284313 12.447206 14.143266 16.959753 23.130457
> C.GARCH
[1] 7.528650 7.780524 8.064792 8.388622 8.761877 9.196564 9.709677
[8] 10.323996 11.071247 12.003943 13.193135 14.629491 16.061760

```

Όπως και πριν, στο πρώτο διάγραμμα με μπλε χρώμα παριστάνονται οι τιμές του δικαιώματος αγοράς υπό το μοντέλο GARCH(1,1) ενώ με μαύρο χρώμα παριστάνονται οι τιμές του μοντέλου Black and Scholes παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου α τα δύο μοντέλα ταυτίζονται ενώ για μεγάλες τιμές της παραμέτρου βλέπουμε ότι το μοντέλο GARCH(1,1) παρουσιάζει μικρότερες τιμές. Στο δεύτερο διάγραμμα παριστάνονται οι διαφορές των δύο μοντέλων όπου επιβεβαιώνεται το προηγούμενο μας συμπέρασμα ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου α οι διαφορές

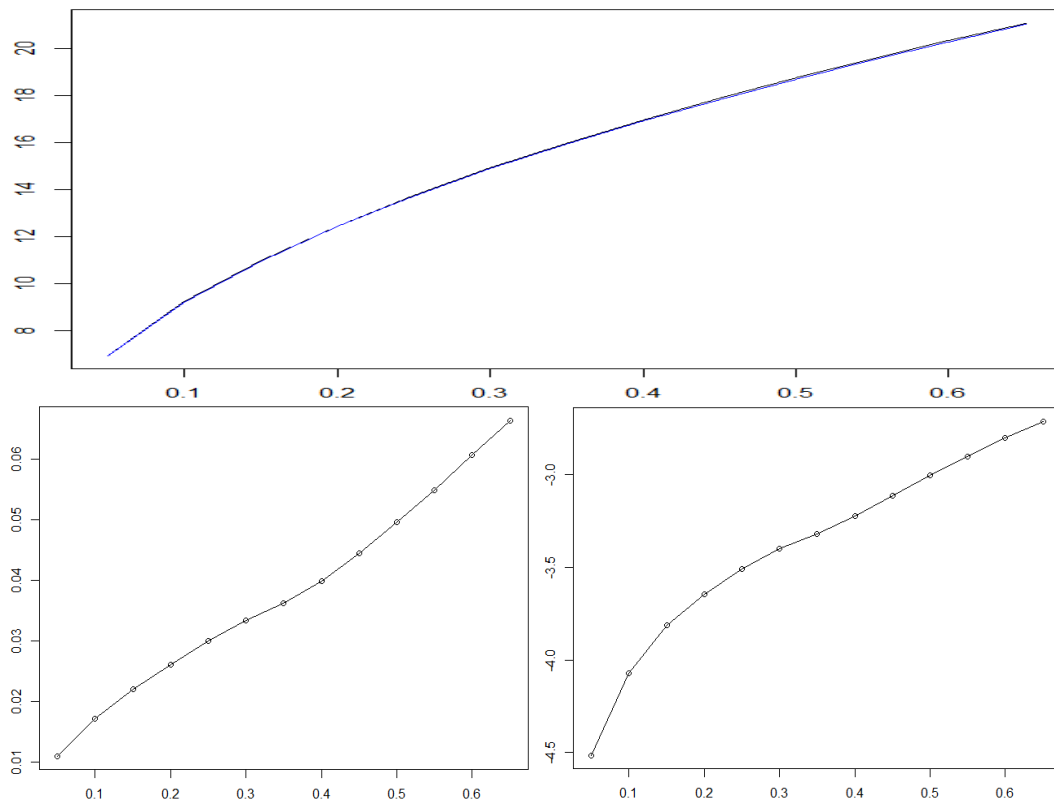
των δύο μοντέλων είναι μηδενικές ενώ για μεγάλες τιμές της παραμέτρου οι διαφορές τους αυξάνονται εκθετικά. Στο τρίτο διάγραμμα απεικονίζουμε τον λογάριθμο των διαφορών. Για επιβεβαίωση των ανωτέρω συμπερασμάτων παραθέτουμε και τις τιμές των δύο μοντέλων κάτωθι των διαγραμμάτων.

Δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ασιατικού τύπου (BS model vs GARCH model για διάφορες τιμές του omega)

```
alpha=0.3; beta=0.3; omega=0.1; C.GARCH=c(); C.BS=c();
steps=seq(0.05,0.65,0.05);plot(NULL,ylim=c(0,1),xlim=c(0,1))
for(omega in steps)
{
  set.seed(100)
  n=50; T=0.5; dt=T/n;
  r=0.1; S0=100; K=100; sigma=(omega/(1-alpha-beta))^0.5
  t<-1:(n+1); e<-rep(0,n+1); h<-rep(0,n+1);
  m=10^5; D.GARCH=rep(0,m); D.BS=rep(0,m);
  for(j in 1:m)
  {
    z<-rnorm(n+1);
    SG<-rep(S0,n+1); S<-rep(S0,n+1);
    h[1]<- sigma^2; e[1]=rnorm(1)*sqrt(h[1])
    for(i in 2:(n+1))
    {
      h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1];
      e[i]<-rnorm(1)*sqrt(h[i]);
      SG[i]<-SG[i-1]*exp((r-
h[i]/2)*dt+z[i]*sqrt(h[i])*dt^0.5);
      S[i]<-S[i-1]*exp((r-sigma^2/2)*dt+z[i]*sigma*dt^0.5)
    }
    D.GARCH[j]=exp(-r*T)*max(c(SG[n+1]-mean(SG),0))
    D.BS[j]=exp(-r*T)*max(c(S[n+1]-mean(S),0))
  }
  C.GARCH=c(C.GARCH,mean(D.GARCH));C.BS=c(C.BS,mean(D.BS))
  text(0.5,omega,paste(alpha,mean(D.GARCH),mean(D.BS)))
}

par(mar=c(2,2,0.5,0.5))
plot(steps,C.BS,type="l")
lines(steps,C.GARCH,col="blue")

plot(steps,C.BS-C.GARCH,type="o")
plot(steps,log(C.BS-C.GARCH),type="o")
C.BS
C.GARCH
```



```

> C.BS
[1] 6.922796 9.213632 10.970844 12.447206 13.742247 14.907424 15.973089
[8] 16.959753 17.881736 18.748865 19.568537 20.347131 21.088942
> C.GARCH
[1] 6.911843 9.196564 10.948800 12.421143 13.712331 14.874056 15.936893
[8] 16.919900 17.837303 18.699266 19.513733 20.286560 21.022566

```

Η εικόνα για την παράμετρο ω αλλάζει. Στο πρώτο διάγραμμα παρατηρούμε ότι οι τιμές της παραμέτρου ω στα δύο μοντέλα σχεδόν ταυτίζονται. Στο δεύτερο διάγραμμα παριστάνονται οι διαφορές των δύο μοντέλων όπου παρατηρούμε ότι αυξάνονται γραμμικά. Στο τρίτο διάγραμμα απεικονίζουμε τον λογάριθμο των διαφορών. Για επιβεβαίωση των ανωτέρω συμπερασμάτων παραθέτουμε και τις τιμές των δύο μοντέλων κάτωθι των διαγραμμάτων όπου παρατηρούμε ότι οι τιμές των δύο μοντέλων είναι παρά πολύ κοντά.

Συνεχίζοντας, θα εφαρμόσουμε τον ανωτέρω κώδικα για να παράγουμε την δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου επειδή οι τροποποιήσεις στον κώδικα είναι ελάχιστες ενδεικτικά θα παραθέσουμε μόνο τον κώδικα της μίας παραμέτρου .

Δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου (BS model vs GARCH model για διάφορες τιμές του alpha)

```

alpha=0.3; beta=0.3; omega=0.1; C.GARCH=c(); C.BS=c();
steps=seq(0.05,0.65,0.05);plot(NULL,ylim=c(0,1),xlim=c(0,1))
for(alpha in steps)
{
  set.seed(100)

```

```

n=50; T=0.5; dt=T/n;
r=0.1; S0=100; K=100; sigma=(omega/(1-alpha-beta))^0.5
t<-1:(n+1); e<-rep(0,n+1); h<-rep(0,n+1);
m=10^5; D.GARCH=rep(0,m); D.BS=rep(0,m);
for(j in 1:m)
  {
    z<-rnorm(n+1);
    SG<-rep(S0,n+1); S<-rep(S0,n+1);
    h[1]<- sigma^2; e[1]=rnorm(1)*sqrt(h[1])
    for(i in 2:(n+1))
      {
        h[i]<-omega+alpha*(e[i-1]^2)+beta*h[i-1];
        e[i]<-rnorm(1)*sqrt(h[i]);
        SG[i]<-SG[i-1]*exp((r-
h[i]/2)*dt+z[i]*sqrt(h[i])*dt^0.5);
        S[i]<-S[i-1]*exp((r-sigma^2/2)*dt+z[i]*sigma*dt^0.5)
      }
    D.GARCH[j]=exp(-r*T)*max(c(SG[n+1]-K,0))
    D.BS[j]=exp(-r*T)*max(c(S[n+1]-K,0))
  }
C.GARCH=c(C.GARCH,mean(D.GARCH));C.BS=c(C.BS,mean(D.BS))
text(0.5,alpha,paste(alpha,mean(D.GARCH),mean(D.BS)))
}

```

```

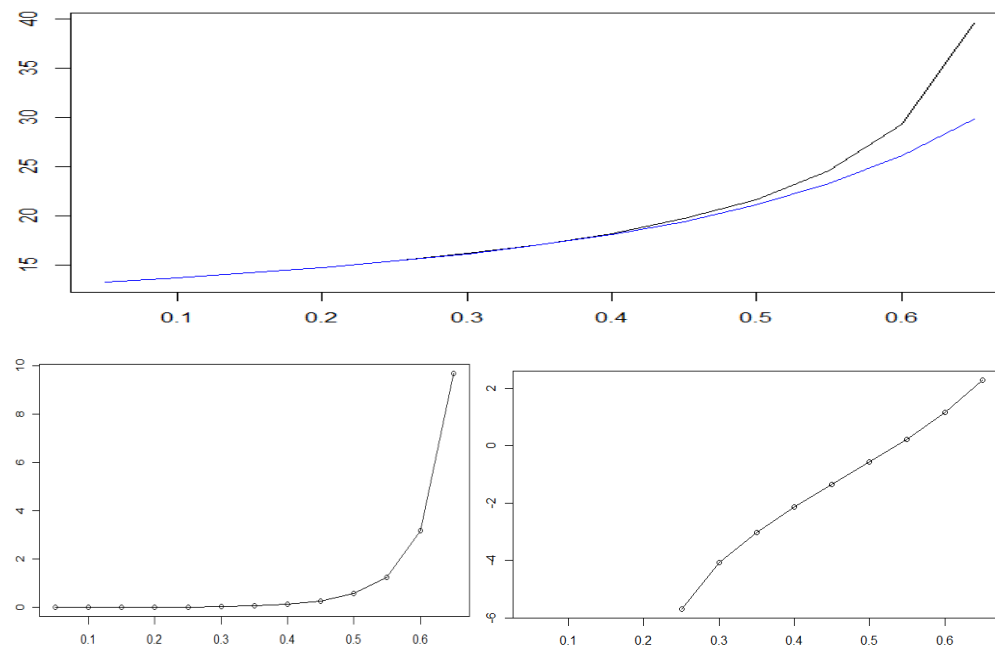
par(mar=c(2,2,0.5,0.5))
plot(steps,C.BS,type="l")
lines(steps,C.GARCH,col="blue")

```

```

plot(steps,C.BS-C.GARCH,type="o")
plot(steps,log(C.BS-C.GARCH),type="o")
C.BS
C.GARCH

```



> C.BS

[1] 13.32121 13.74848 14.23291 14.78851 15.43437 16.19775 17.11864 18.25916

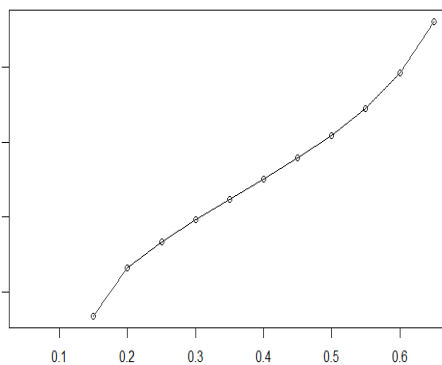
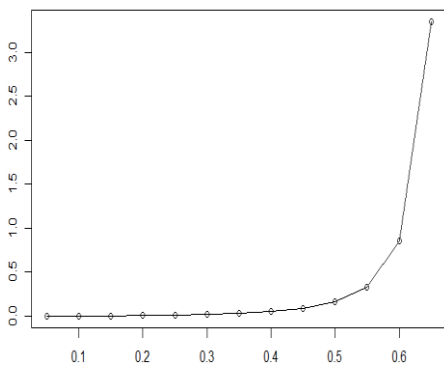
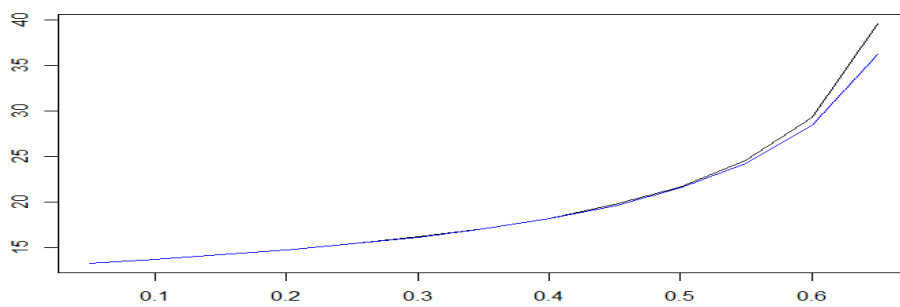
[9] 19.72297 21.69719 24.56678 29.30265 39.52558

> C.GARCH

[1] 13.32226 13.75086 14.23651 14.79102 15.43098 16.18065 17.07050 18.14240

[9] 19.46226 21.13710 23.32815 26.14898 29.86188

Δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου (BS model vs GARCH model για διάφορες τιμές του beta)



> C.BS

[1] 13.32121 13.74848 14.23291 14.78851 15.43437 16.19775 17.11864 18.25916

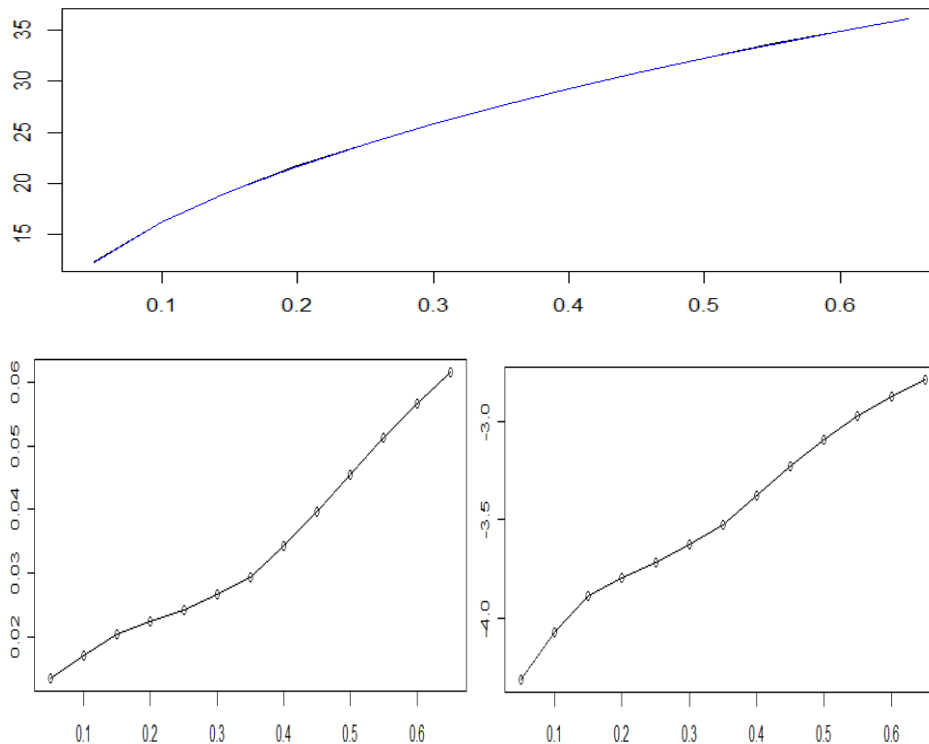
[9] 19.72297 21.69719 24.56678 29.30265 39.52558

> C.GARCH

[1] 13.32339 13.74940 14.23161 14.78377 15.42492 16.18065 17.08935 18.20912

[9] 19.63525 21.53529 24.23570 28.44757 36.17611

Δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου (BS model vs GARCH model για διάφορες τιμές του omega)



> C.BS

[1] 12.29055 16.19775 19.19002 21.69719 23.88938 25.85530 27.64732 29.30265

[9] 30.84498 32.29136 33.65479 34.94521 36.17090

> C.GARCH

[1] 12.27720 16.18065 19.16953 21.67476 23.86511 25.82869 27.61797 29.26845

[9] 30.80545 32.24602 33.60367 34.88867 36.10933

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές των παραμέτρων α, β τα δύο μοντέλα ταυτίζονται ενώ για μεγάλες τιμές των παραμέτρων έχουν κάποια απόκλιση με το μοντέλο GARCH(1,1) να παρουσιάζει μικρότερες τιμές. Όσον αφορά τη παράμετρο ω τα δύο μοντέλα σχεδόν ταυτίζονται. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήξαμε και στην τιμολόγηση της δίκαιης αξίας του ασιατικού τύπου δικαιώματος αγοράς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cryer J.D. and Hung-Sik Chan (2012), *Time series Analysis with Applications in R*, (2th ed.).Springer.

Poon and Granger (2003), Forecasting Volatility in Financial Markets: A review, *Journal of Economic Literature* 41(2): 478-539

John C. Hull (2014), *Options, Futures, and other Derivatives*, Pearson

Ruey S. Tsay (2012), *An introduction to analysis of financial Data in R*, John Wiley & Sons

Ruey S. Tsay (2010), *Analysis of financial Time series*, John Wiley & Sons

Μπούτσικας Μ. (2005), *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.