ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η συνάρτηση των Gerber – Shiu. Μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας και μέτρων κινδύνου σε στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος

ΗΛΙΑΝΑ Δ. ΚΟΛΙΟΥ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς

Νοέμβριος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. ………….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης(Επιβλέπων)

- Αναπλ. Καθηγητής Ν. Μαχαιράς

- Επίκ. Καθηγητής Β. Σεβρόγλου Βασίλειος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE

AND RISK MANAGEMENT

The Gerber – Shiu function. Study of ruin time and risk measures for stochastic surplus process

ILIANA D. KOLIOU

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Actuarial Science and Risk Management

«Μια επένδυση στη γνώση, αποδίδει το καλύτερο επιτόκιο.»

-Βενιαμίν Φραγκλίνος, 1706-1790, Αμερικανός πολιτικός & συγγραφέας.

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, για την υπομονή του, την πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε, μέχρι την περάτωση της εργασίας.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Νικόλαο Μαχαιρά και κ. Βασίλειο Σεβρόγλου για τη συμμετοχή τους στην παρουσίαση και την αξιολόγηση της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς μου την οικογένειά μου, καθώς και τους πολυαγαπημένους μου φίλους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη θεωρία κινδύνου, ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μία από τις βασικές μεταβλητές. Ο μετασχηματισμός Laplace, η πυκνότητα και οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς με διαφορετικές παραδοχές. Η συνάρτηση Gerber-Shiu που δόθηκε από τους Gerber και Shiu (1998) αποτελεί ένα αναλυτικό εργαλείο στη μελέτη αυτών των ποσοτήτων. Για παράδειγμα, οι Dickson και Willmot (2005) αντέστρεψαν τη συνάρτηση Gerber-Shiu ως προς τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, του θεωρήματος Lagrange και έτσι πήραν την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας. Ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι να μελετήσει τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Μια εισαγωγή στη συνάρτηση Gerber-Shiu και διαφορετικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου παρέχονται στο Κεφάλαιο 1.

Στο κεφάλαιο 2, οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας μελετώνται ως γενικευμένες μορφές της συνάρτησης Gerber-Shiu στο εξαρτημένο μοντέλο Sparre Andersen. Δείχνεται ότι οι δομικές ιδιότητες της συνάρτησης Gerber-Shiu ισχύουν και για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, οι ροπές συνεχίζουν να ικανοποιούν την ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση. Αυτές, αναλύονται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 4 με το μοντέλο των Willmot και Woo (2012), όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι και τα μεγέθη των απαιτήσεων, που εξαρτώνται από τον χρόνο, ακολουθούν την κατανομή Coxian. Στο Κεφάλαιο 3, εξετάζεται μια άλλη μορφή του εξαρτημένου μοντέλου Sparre Andersen με τα μεγέθη απαιτήσεων να ακολουθούν την Coxian (π.χ. Landriault et al. (2014)). Δίνεται μια αναλυτική μορφή των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, η οποία περιλαμβάνει την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 5, ο αριθμός των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία εξετάζονται στο ανανεωτικό μοντέλο Sparre Andersen με εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων. Η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, ο αριθμός των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία και άλλα μέτρα χρεοκοπίας ορίζονται.

ABSTRACT

In risk theory, the time to ruin is one of the central quantities. The Laplace transform, density and moments of the time to ruin have been studied by many authors under different risk model assumptions. The Gerber-Shiu function proposed by Gerber and Shiu (1998) provides an analytic tool in studying these quantities. For example, Dickson and Willmot (2005) inverted the Gerber-Shiu function with respect to the Laplace transform parameter of the time to ruin by Lagrange's implicit function theorem, and hence obtained the density of the time to ruin. The main focus of this thesis is to study the moments involving the time to ruin by using Gerber-Shiu function as the analytic tool. An introduction on the Gerber-Shiu function and different risk models is first given in Chapter 1.

In Chapter 2, the moments of the time to ruin are studied as generalized versions of the Gerber-Shiu function in dependent Sparre Andersen models. It is shown that structural properties of the Gerber-Shiu function hold also for the moments of the time to ruin. In particular, the moments continue to satisfy defective renewal equations. These properties are discussed in detail in Chapter 4 under the model of Willmot and Woo (2012) where Coxian interclaim times and arbitrary time-dependent claim sizes are assumed. In Chapter 3, another very general class of dependent Sparre Andersen models with Coxian claim sizes (e.g. Landriault et al. (2014)) is considered. An analytical form is provided for the moments of the time to ruin under this class, which involves solving linear systems of equations.

In Chapter 5, the number of claims until ruin is taken into consideration under a Sparre Andersen model with exponential claim sizes. The joint density of the time to ruin, the number of claims until ruin and other ruin-related quantities is identified. The joint moments of these quantities can then be obtained from this joint density.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 3

1.1. Εισαγωγή........ 3

1.2. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων........ 3

1.3. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων 7

1.4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος........ 9

1.5. Μέτρα χρεοκοπίας........ 11

1.5.1. Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου........ 12

1.5.2. Το ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου (E. Sparre – Andersen model)........ 15

1.5.3. Το ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των κινδύνων και των μεγεθών ατομικής ζημιάς 18

1.6. Η συνάρτηση των Gerber και Shiu 20

1.7. Ροπές που σχετίζονται με την χρεοκοπία 23

1.8. Coxian Distribution 24

1.9. Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation)........ 25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ........ 26

2.1. Ιδιότητες των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας 26

2.2. Δομικές ιδιότητες των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας 29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ 32

3.1. Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής του ελλείματος........ 32

3.2. Προσδιορισμός των συντελεστών........ 39

3.3. Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας 42

3.4. Αριθμητικά παραδείγματα........ 53

Παράδειγμα 1 53

Παράδειγμα 2 55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ 57

4.1. Μετασχηματισμός Laplace των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας 57

4.2. Coxian Ενδιάμεσοι χρόνοι 60

4.2.1. Μετασχηματισμός Laplace των ροπών........ 60

4.2.2. Ποσότητες σχετιζόμενες με τις ροπές 64

4.2.3. Αριθμητικά παραδείγματα 71
Παράδειγμα 1 71
Παράδειγμα 2 74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΑΛΛΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ 75
5.1. Εισαγωγή.. 75
5.2. Δομικές ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu 76
5.3. Από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και άλλων μέτρων χρεοκοπίας με Εκθετικές απαιτήσεις 79
5.4. Αριθμητικό παράδειγμα 91
Παράδειγμα 91
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 95
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.. 96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

1.1. Εισαγωγή

Η ομαλή λειτουργεία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τον σχηματισμό επαρκών αποθεματικών ώστε να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις τόσο στα επαγγελματικά όσο και στα ασφαλιστικά ρίσκα.

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ή μοντέλο Cramer - Lundberg, το οποίο αποτελεί την αρχή της (μαθηματικής) θεωρίας κινδύνου, εισήχθη αρχικά από τον Σουηδό μαθηματικό Filip Lundberg (1903) στη διδακτορική διατριβή του. Ο Lundberg παρατήρησε πως η διαδικασία Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μοντέλα ασφαλίσεων. Στη συνέχεια, ο Harald Cramer, κατάφερε να ενσωματώσει τη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Κύριο χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από τη διαδικασία Poisson. Η γενίκευση του μοντέλου έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε στο 15Ο^{ο} αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την Εργασία "On The collective Theory of risk in case of contagion between the claims". Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία. Επίσης, ακολούθησαν πολλές γενικεύσεις του κλασσικού μοντέλου, χρησιμοποιώντας διάφορες κατανομές για την περιγραφή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων.

1.2. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Για την μοντελοποίηση του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού οργανισμού, αρχικά προσδιορίζουμε τον αριθμό των κινδύνων που είναι εκτεθειμένος.

Ορισμός 1.1 *Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων, αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω,*

- $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$,
- $N(t)$ *είναι δικριτή,*

- $\alpha\nu\ s \leq t\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ N(s) \leq N(t)$

Μια χρήσιμη αλλά και ευρέως χρησιμοποιούμενη στοχαστική διαδικασία στην θεωρία κινδύνου είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βρίσκεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων που απαριθμεί η $\{N(t): t \geq 0\}$. Έστω $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F_w(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_w(t)$, μετασχηματισμό Laplace $\widehat{f_w}(t) = \int_0^{\infty} = e^{-st} f_w(t)dt$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$, όπου με W_i συμβολίζουμε τον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισης του i – ενδεχομένου(ζημιάς). Τότε η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.2 *Έστω μια ακολουθία $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μη αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ.. Η ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \sigma_0 = 0$, με $\sigma_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ με $N(0) = 0$ που δίνεται από την σχέση*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n \leq t)}$$

και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Για κάθε ανανεωτική ανέλιξη, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$N(t) = n \text{ αν και μόνο αν } \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Θέλοντας να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω έχουμε ότι η εξίσωση ($N(t) = n$) σημαίνει την εμφάνιση ακριβώς n γεγονότων έως το χρόνο t, ενώ το ενδεχόμενο $\{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$ σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν n γεγονότα (ανανεώσεις) είναι t. Επειδή οι παραπάνω αποτελούν δύο διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου ενδεχομένου, η (1.1) είναι αληθής.

Θεώρημα 1.1 *Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

Το «στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα» (Elementary Renewal Theorem) είναι ένα βασικό θεώρημα την θεωρία στοχαστικών ανελίξεων. Παρατίθεται ένα λήμμα αφού είναι απαραίτητο για την απόδειξη του προαναφερθέντος θεωρήματος.

Λήμμα 1.1 Ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} E\left[\sigma_{N(t)+1}\right] &= E\left[W_1 + W_2 + \cdots + W_{N(t)+1}\right] \\ &= E[W_1]E[N(t)+1] \\ &= E[W_1][E[N(t)]+1]\,, \qquad \text{αν } E[W_1] < \infty \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2 (Elementary Renewal Theorem) *Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι $t < \sigma_{N(t)+1}$. Από το Λήμμα 1.1 έπεται ότι

$$t < E\left[\sigma_{N(t)+1}\right] = E(W_1)\left[1 + E\big(N(t)\big)\right]$$

από την οποία παίρνουμε

$$\frac{1}{t}E\big(N(t)\big) > \frac{1}{E(W_1)} - \frac{1}{t}.$$

Επομένως, $$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{1}{t}E\big(N(t)\big) \geq \frac{1}{E(W_1)} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $$\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}E\big(N(t)\big) \leq \frac{1}{E(W_1)}.$$

Για ευκολία θέτουμε $M(t) = E\big(N(t)\big)$ *και* $m = E(W_1)$,

για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις εξής τ.μ.:

$$W_i^c = \begin{cases} W_i, & \alpha\nu\ W_i \leq c \\ c, & \alpha\nu\ W_i > c \end{cases}$$

και θεωρούμε την ανανεωτική διαδικασία που έχει ενδιάμεσους χρόνους τις τ.μ. $\{W_i^c\}$. Έστω σ_n^c και $N^c(t)$ οι χρόνοι αναμονής και η απαριθμήτρια διαδικασία που παράγεται από τις . $\{W_i^c\}$. Αφού οι τ.μ. $\mathrm{W_i^c}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες από το c, είναι φανερό ότι $$t + c \geq \sigma_{N^c(t)+1}^c\,,$$

και επομένως,

$$t + c \geq E\left[\sigma_{N^c(t)+1}^c\right] = E(W_i^c)\left[1 + E\big(N^c(t)\big)\right] \qquad \textbf{(1.3)}$$

όπου $m^c = E(W_i^c) = \int_0^c [1 - F(w)dw$ και $M^c(t) = E(N^c(t))$.

Από το ότι $W_i^c \leq W_i$ έπεται ότι $N^c(t) \geq N(t)$ και άρα $M^c(t) \geq M(t)$. Επομένως, από την σχέση (1.3) παίρνουμε ότι

$$t + c \geq m^c[1 + M(t)]$$

ή $$\frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{m^c} + \frac{1}{t}(\frac{c}{m^c} - 1),$$

οπότε $$\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}M(t) \leq \frac{1}{m^c} \quad \text{,για οποιοδήποτε } c>0. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Αλλά, $\lim\limits_{c\to\infty} m^c = \lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c [1 - F(w)]dw = \int_0^\infty [1 - F(w)]dw = m.$

Επομένως η (1.4) μας δίνει $\lim\limits_{t\to\infty} sup \frac{1}{t}M(t) \leq \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{m^c} = \frac{1}{m}$ ή

$$= \lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t}E\big(N(t)\big) \leq \frac{1}{E(W_1)}.$$

Από τις σχέσεις (1.2) και (1.5) έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Παρατηρούμε, από τον Ορισμό 1.2 της ανανεωτικής διαδικασίας, ότι προκύπτει διαφορετική στοχαστική ανέλιξη ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ενδεχομένων. Όταν υποθέσουμε ότι ο ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ακολουθούν την εκθετική κατανομή, προκύπτει μία ειδική περίπτωση ανανεωτικής ανέλιξης, η διαδικασία Poisson.

Ορισμός 1.3 *Μια απαριθμήτρια διαδικασία* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *, ονομάζεται διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ*, με* $\lambda > 0$ *αν :*

i. $N(0) = 0$

ii. *Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις*

iii. *Για κάθε* $t > 0$ *η* $N(t)$*ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο* λt*:*

$$Pr(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1,2,\dots$$

1.3. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Μια ασφαλιστική επιχείρηση είναι υποχρεωμένη να καταβάλλει στους ασφαλισμένους της αποζημίωση, όταν επέλθει μια ζημιά. Για τον λόγο αυτό κρίνεται αναγκαίο να μοντελοποιήσει το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων για να μπορέσει να παρακολουθήσει και να κρίνει την ενδεχόμενη εξέλιξή τους. Οι συνολικές αποζημιώσεις εξαρτώνται τόσο από το πλήθος όσο και από το ύψος των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται ως τον χρόνο t συμβολίζεται με $S(t)$. Ορίζουμε $\{W_n, n \geq 1\}$ μια ακολουθία τ.μ. που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και T_n το χρόνο εμφάνισης του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Ισχύει

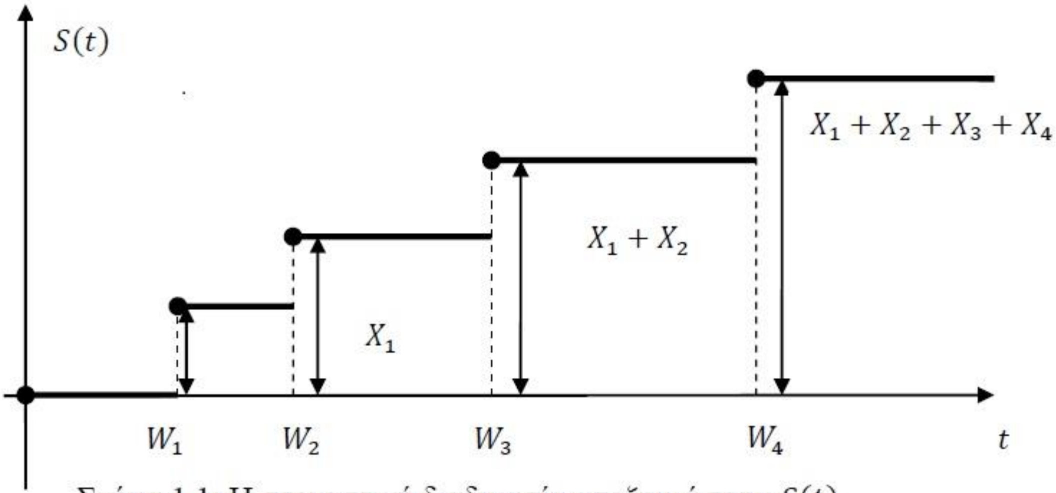
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Επίσης ορίζουμε $N(t) = \sup\{n : T_n < t\}$ είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται στο διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.4 *Το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως τον χρόνο t ορίζει τη στοχαστική διαδικασία*

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} \text{ ή } S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

όπου $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με X_i τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το ύψος της i-οστής ζημιάς που προκαλείται από την επέλευση του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Θεωρούμε ότι οι $\{W_n, n \geq 1\}$ και $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.



Σχήμα 1.1: Η στοχαστική διαδικασία αποζημιώσεων $S(t)$

Στο Σχήμα 1.1 παρατηρούμε, όπως είναι λογικό, ότι οι συνολικές αποζημιώσεις S(t) είναι μηδενικές ως ότου εμφανιστεί το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο, ενώ εμφανίζει άλματα ίσα με τα επιμέρους ζημιογόνα ενδεχόμενα. Τέλος, παρατηρούμε ότι η S(t) παραμένει σταθερή όταν δεν επέρχονται κίνδυνοι.

1.4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Θεωρούμε μία συνάρτηση $P(t)$ η οποία δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που εισρέουν στην εταιρεία στο διάστημα $[0, t]$, c το ασφάλιστρο που εισρέει στην εταιρεία στην μονάδα του χρόνου, έτσι ώστε το σύνολο των ασφαλίστρων που εισπράττει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ είναι ct και u το αποθεματικό που κρατάει η εταιρεία για κάθε χαρτοφυλάκιο.

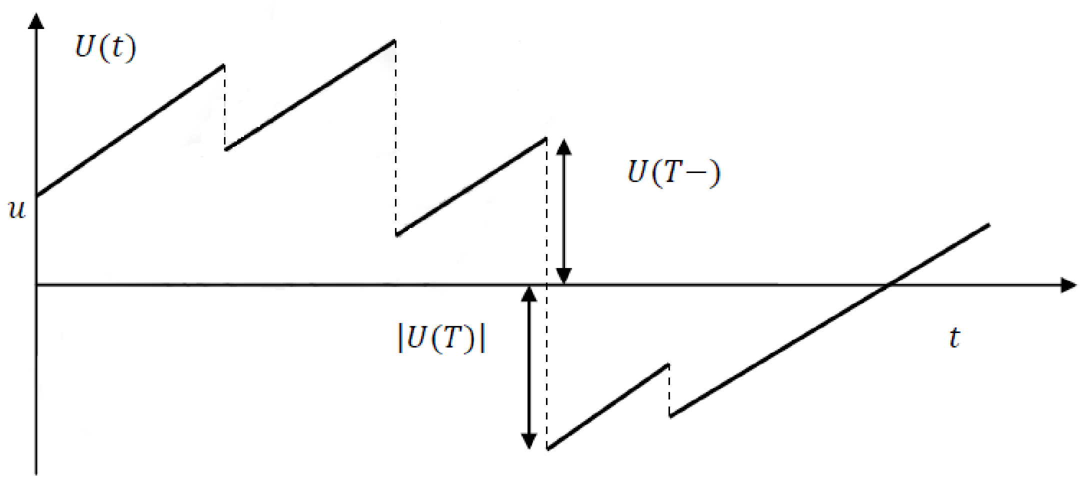
Ορισμός 1.5 *Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από τη σχέση*

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό, $P(t)$ το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$ και $S(t)$ είναι η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο ίδιο διάστημα. Το $U(t)$ καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t, ενώ το $U(0) = u$ λέγεται αρχικό αποθεματικό.

Κάθε ασφαλιστική εταιρεία έχει την υποχρέωση, βάση νόμου, να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο κατά την έναρξη των εργασιών, το οποίο αποτελεί και το πλεόνασμα της εταιρείας κατά την χρονική στιγμή $t = 0$.

Ενδιαφέρον, ακόμη, έχει σε περίπτωση χρεοκοπίας ποιο θα είναι το έλλειμμα την στιγμή που θα συμβεί αυτή ($|U(T)|$) καθώς και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία($U(T-)$). Οι μεταβλητές αυτές παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$

Παρατηρούμε ότι η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ εμφανίζει πτώσεις κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων γεγονότων αντίστοιχες με τα άλματα της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$. Η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών είναι ευθύγραμμο τμήμα με κλίση c (> 0) ενώ η $S(t)$ έχει σταθερή τιμή.

Η διαδικασία πλεονάσματος ενδέχεται να πάρει αρνητικές τιμές κατά την επέλευση των ζημιογόνων γεγονότων, δηλαδή κατά τις χρονικές στιγμές W_i. Το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται Πιθανότητα Χρεοκοπίας, την οποία θα ορίσουμε στην συνέχεια, όπως και το χρόνο που εμφανίζεται αυτή.

1.5. Μέτρα χρεοκοπίας

Για την κατανόηση των μοντέλων κινδύνου (κλασσικό μοντέλο, ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των κινδύνων και των μεγεθών ατομικής ζημιάς) που αναπτύσσονται παρακάτω, σε αυτή την παράγραφο θα αναπτύξουμε κάποια βασικά μέτρα χρεοκοπίας.

Χρόνος Χρεοκοπίας

Ορισμός 1.6 *Για $t \geq 0$, ορίζουμε*

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \; \mu\varepsilon \; inf\emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική.

Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Ορισμός 1.7 *Μία ποσότητα που συνδέεται άμεσα με τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία για $u \geq 0$ ορίζεται ως*

$$\psi(u) \coloneqq P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u). \qquad \textbf{(1.5)}$$

Εδώ είναι σημαντικό να επισημανθεί πως η μαθηματική χρεοκοπία δεν ισούται κατ' ανάγκη με πραγματική χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου ή της εταιρείας, αφού η διαδικασία πλεονάσματος $U(T)$ δεν είναι ο μοναδικός πόρος εσόδων της εταιρείας και η καταβολή μια αποζημίωσης δεν είναι στιγμιαίο γεγονός. Είναι εμφανές, από μαθηματικής άποψης, ότι μέσω του υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας μπορεί να προσδιοριστεί κατάλληλα το αρχικό αποθεματικό u καθώς και το ασφάλιστρο c, ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική ($U(t) < 0$). Η κλασική θεωρία κινδύνων περιορίζεται στη μελέτη της χρεοκοπίας εξαιτίας των αποζημιώσεων και αγνοεί οποιοδήποτε άλλο αίτιο χρεοκοπίας.

1.5.1. Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Το κλασσικό μοντέλο είναι το περισσότερο διαδεδομένο μοντέλο και χρησιμοποιείται ευρέως, κυρίως λόγω της δυνατότητάς του να οδηγεί σε απλούστερους μαθηματικούς υπολογισμούς, συγκριτικά με άλλα μοντέλα. Το μοντέλο αυτό, με άπειρο χρόνο λειτουργίας, αν και δεν είναι το πιο ρεαλιστικό σε σχέση με άλλα (πεπερασμένος ή διακριτός χρόνος) ερευνήθηκε για πολλές δεκαετίες περισσότερο από κάθε άλλο μοντέλο.

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιογόνων γεγονότων είναι εκθετικά κατανεμημένοι, δηλαδή οι τ.μ. $\{W_n\,, n \geq 1\}$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

$$\Pr(W_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Στο κλασσικό μοντέλο, η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο σε ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος αυτού, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson.

$$\Pr(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Θεωρούμε ανεξάρτητες τις τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ και $N(t)$, ενώ οι τ.μ. $X_n, n = 1,2, \ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες με από κοινού συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

όπου $f(x) = \Pr(X = x)$ και η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι

$$\bar{F}(x) = 1 - F\int_0^\infty f(x)\,dx, \qquad (x) = \int_x^\infty f(x)dx$$

Συμβολίζουμε με μ το αναμενόμενο ύψος ζημιάς (μέση τιμή) και ισούται με

$$\mu = E(x) = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)\,dx$$

και με $F_e(x)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση ισορροπίας της τ.μ. X και υπολογίζεται ως

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{E(x)}dy = \int_0^x f_e(y)dy \qquad x > 0$$

όπου $$f_e(y) = \frac{\bar{F}(y)}{E(x)}$$

Στο κλασσικό μοντέλο θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι σταθερός και ίσος με c και τα ασφάλιστρα (ct) που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ ισούνται με τη στοχαστική διαδικασία είσπραξης ασφαλίστρων $P(t)$. Μια βασική υπόθεση που κάνουμε πάντα στο κλασσικό μοντέλο είναι ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ επαρκούν για να καλύψουν τις αναμενόμενες συνολικές ζημιές, δηλαδή ισχύει η συνθήκη $ct \geq E[S(t)]$. Γνωρίζοντας ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt θα ισχύει ότι

$$E[N(t)] = \lambda t \text{ και } E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda t E[X].$$

Οπότε έχουμε ότι

$$ct \geq \lambda t E[X] \Rightarrow c \geq \lambda E[X]$$

Παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέλος της σχέσης αυτής δηλώνει τη μέση τιμή των εσόδων, ενώ το δεξιό τη μέση τιμή των εξόδων στη μονάδα του χρόνου για τον ασφαλιστή. Η συνθήκη απαιτεί τα έσοδα να υπερβαίνουν τα έξοδα κατά μέσο όρο στη μονάδα του χρόνου, για το λόγο αυτό αναφέρεται ως συνθήκη καθαρού κέρδους (net profit condition).

Αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο στην θεωρία χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα του ασφαλιστή να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό.

Ορισμός 1.8 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από τη σχέση*

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u]$$

Πολλές φορές η δέσμευση παραλείπεται και, όταν είναι σαφές ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u, γράφουμε απλώς

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0].$$

Αντίστοιχα η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u)$$

Ορισμός 1.9 *Ορίζουμε μια παράμετρο $\theta > 0$, η οποία ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας τέτοια ώστε*

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Το θ εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της ασφαλιστικής εταιρείας στη μονάδα του χρόνου.

Ο συντελεστής προσαρμογής

Ορισμός 1.10 *Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης*

$$1 + (1+\theta)E(x)r = M_x(r) \qquad \textbf{(1.7)}$$

όπου θ το περιθώριο ασφαλείας και $M_x(r)$ η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X στο σημείο r, δηλαδή

$$M_x(r) = E(e^{rX}) = \int_0^{\infty} e^{rX} f(x)\, dx.$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει η τ.μ. X να έχει ροπογεννήτρια.

Ανισότητα Lundberg

Θεώρημα 1.2 *Όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R, ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο $u \geq 0$ είναι*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \qquad \textbf{(1.8)}$$

Η ανισότητα αυτή συνδέει τη πιθανότητα χρεοκοπίας με τον συντελεστή προσαρμογής και ταυτόχρονα δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας ($\psi(u)$) συναρτήσει του συντελεστή προσαρμογής (R) και του αρχικού αποθεματικού (u). Μπορούν να δοθούν δυο ερμηνείες για την ανισότητα Lundberg:

i. Δεδομένου αρχικού κεφαλαίου u, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας,
ii. δεδομένου του συντελεστή προσαρμογής R, όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό κεφάλαιο, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Ορισμός 1.11 *Ορίζουμε ως θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg, εξίσωση της μορφής*

$$cs + \lambda\hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0 \qquad \textbf{(1.9)}$$

όπου $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)\, dy$ *ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας* $f(s)$*. Αποδεικνύεται ότι η (1.9) για* $\delta > 0$ *έχει μια θετική ρίζα που τη συμβολίζουμε με* $\rho = \rho(\delta)$*.*

Παρατήρηση 1.1 Ανεξαρτήτως με το αν το περιθώριο ασφαλείας είναι θετικό ή όχι, για $\delta > 0$ υπάρχουν οι θετικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1.9). Για $\delta = 0$,

- *για* $\theta < 0$*, οι ρίζες της εξίσωσης είναι θετικές*
- *για* $\theta > 0$*, οι ρίζες της εξίσωσης είναι ίσες με μηδέν.*

1.5.2. Το ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου (E. Sparre – Andersen model)

Στο μοντέλο αυτό, η βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, δηλαδή ακολουθούν την ίδια κατανομή, η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατανομή ορισμένη στο διάστημα $[0, \infty)$. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι οι αφίξεις των απαιτήσεων στην εταιρεία παριστάνονται τώρα από μια ανανεωτική ανέλιξη.

Στο ανανεωτικό μοντέλο θα έχουμε τους εξής συμβολισμούς:

- $T_1, T_2, \ldots$ είναι οι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που δηλώνουν τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των απαιτήσεων.
- $X_1, X_2, \ldots$ είναι οι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που δηλώνουν τα μεγέθη των απαιτήσεων. Οι X_i είναι ανεξάρτητες από τις T_i για $i = 1,2, \ldots$
- Η κατανομή των X_i συμβολίζεται με F ενώ με B δηλώνουμε την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων T_i.

- Η κατανομή B μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή, όπου σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο αποτελεί γενίκευση του διακριτού πρότυπου που είδαμε προηγουμένως.

$$P(T_1 < t) = B(t), \qquad t \geq 0$$

- Η ροπή $k-$τάξης της F συμβολίζεται με μ_k,

$$\mu_k = \int_0^\infty x^k dF(x).$$

Στο ανανεωτικό μοντέλο, ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων και το αναμενόμενο ύψος ζημιάς, c και μ αντίστοιχα, έχουν την ίδια έννοια με το κλασικό, ενώ η ένταση λ εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων ανά χρονική μονάδα. Σε μια ανανεωτική ανέλιξη, η αναμενόμενη χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων είναι η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων, $E(T_i)$. Συνεπώς, το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου ισούται με

$$\frac{1}{E(T_1)}.$$

Περιθώριο ασφαλείας – Ανανεωτικό μοντέλο

Ορισμός 1.12 *Ορίζουμε μια παράμετρο $\theta > 0$, η οποία ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας τέτοια ώστε*

$$\theta = \frac{cE(T_1)}{\mu_1} - 1.$$

Συνθήκη καθαρού κέρδους – Ανανεωτικό μοντέλο

Στο ανανεωτικό μοντέλο εξασφαλίζεται και πάλι ότι τα έσοδα της εταιρείας υπερβαίνουν τα αναμενόμενα έξοδα. Ισχύει ότι

$$cE(T_1) > \mu_1.$$

Έστω τώρα οι μεταβλητές $Y_1, Y_2, \ldots$ που δηλώνουν τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων και ορίζονται ως:

$$Y_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \qquad n = 1,2, \ldots$$

Στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος – Ανανεωτικό μοντέλο

Τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την πληρωμή της πρώτης αποζημίωσης (T_1), το πλεόνασμα είναι

$$U(T_1) = u + cT_1 - X_1 = u + Z_1$$

όπου $Z_i = cT_i - X_i$ για $i = 1,2, \ldots$ και η Z_1 εκφράζει το καθαρό κέρδος στο χρονικό διάστημα $[0, T_1]$.

Συντελεστής προσαρμογής – Ανανεωτικό μοντέλο

Ορισμός 1.13 *Έστω $F_z(x)$ η συνάρτηση κατανομής και $M_z(r)$ η ροπογεννήτρια της κατανομής των μεταβλητών $Z_1, Z_2, \ldots$. Τότε ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η θετική λύση της εξίσωσης*

$$M_z(-r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rx} dF_z(x) = 1 \qquad \text{(εξίσωση Lundberg)}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει το πολύ μια θετική ρίζα. Ακόμη, επειδή οι ακολουθίες των μεταβλητών T_i και X_i είναι ανεξάρτητες ο συντελεστής προσαρμογής ικανοποιεί τη σχέση

$$M_z(R) = M_T(-cR)M_X(R) = 1.$$

Παρατήρηση 1.2 Στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων T_i κατανέμονται εκθετικά, η εξίσωση Lundberg ανάγεται σε αυτή που είδαμε στο κλασσικό πρότυπο, δηλαδή την (1.7)

Πιθανότητα χρεοκοπίας – Ανανεωτικό μοντέλο

Ορισμός 1.14 *Έστω R ο συντελεστής προσαρμογής, T ο χρόνος χρεοκοπίας και $U(\,T)$ το έλλειμμα της στιγμή της χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο. Τότε για κάθε $u \geq 0$ ισχύει η σχέση*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)} \middle| T < \infty\right]}.$$

Επομένως έχουμε ότι για κάθε $u \geq 0$, *η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποίει τη σχέση*

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

Ασυμπτωτικός τύπος Cramer – Lundberg

Ορισμός 1.14 *Έστω* R *ο συντελεστής προσαρμογής,* $H(x)$ *η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών στο ανανεωτικό μοντέλο και* $\varphi = \psi(0)$*. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi(u)$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C,$$

όπου $C > 0$ είναι μία σταθερά.

1.5.3. Το ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των κινδύνων και των μεγεθών ατομικής ζημιάς

Το μοντέλο αυτό αποτελεί μια γενίκευση του κλασσικού μοντέλου. Σε αυτό το μοντέλο η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U_t, t \geq 0\}$ ορίζεται ως:

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό και c είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων στην μονάδα του χρόνου. Η απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων συμβολίζετε με $\{N_t, t \geq 0\}$ και οι ενδιάμεσοι χρόνοι με V_i. Οι τυχαίες μεταβλητές $\{Y_i, i = 1,2, \dots\}$ εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με την κατανομή Y στο $(0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι τα ζευγάρια $\{(V_i, Y_i), i = 1,2, \dots\}$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, έτσι ώστε και τα $\{(cV_i - Y_i), i = 1,2, \dots\}$ να είναι επίσης ανεξάρτητα και ισόνομα, το οποίο υποδηλώνει ότι η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{(U_t), t \geq 0\}$ διατηρεί την δομή του τυχαίου περιπάτου (random walk) του Sparre – Andersen μοντέλου. Ωστόσο τα V_i και Y_i μπορεί να είναι εξαρτημένα. Η από κοινού συνάρτηση των (V_i, Y_i) ορίζεται ως το γινόμενο της περιθώριας πυκνότητας $k(t)$ και της δεσμευμένης πιθανότητας του Y_i δοθέντος του V_i. Ορίζουμε ως πυκνότητα της δεσμευμένης πιθανότητας του Y_i ως

$$P_t(y) = \Pr(Y \leq y | V = t) = 1 - \overline{P_t}(y) \qquad \text{για } y > 0$$

Έστω η $p_t(y) = P_t'(y)$ είναι η περιθώρια πυκνότητα, έτσι ώστε η από κοινού συνάρτηση να δίνεται από $p_t(y)k(t)$. Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace της $p_t(y)$ είναι $\widetilde{p_t}(y) = \int_0^\infty e^{-sy}\, p_t(y)dy$.

Για να ολοκληρώσουμε τον ορισμό της ανέλιξης του πλεονάσματος, ορίζουμε $c(> 0)$ να είναι το ασφάλιστρο ανά τον χρόνο και υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη του θετικού περιθώριού ασφαλείας.

Ας θεωρήσουμε τώρα την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t, y)$ όταν ισχύει ότι $V = t\ και\ Y = y$. Τέλος ας υποθέσουμε ότι για τη συνθήκη καθαρού κέρδους ισχύει ότι

$$E[cV] > E[Y]$$

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου θεωρεί ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{V_i, i = 1,2, \dots\}$ είναι ανεξάρτητοι από τα μεγέθη των αποζημιώσεων $\{Y_i, i = 1,2, \dots\}$ και ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ανάλυση όσον αφορά το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου γίνεται από τους Gerber (1979), Grandell (1991) και Panjer & Willmot (1992). Επιπλέον, υπάρχει και το μοντέλο Sparre Andersen όπου αναφέρεται σε μεγαλύτερο εύρος όσον αφορά τους ενδιάμεσους χρόνους και τα μεγέθη ζημιών. Πρόσφατα παραδείγματα είναι όπως αυτό των Albrerecher and Teugels (2006), Boudreault et al. (2006), Cossette et al. (2008) και του Zhang et al. (2012).

1.6. Η συνάρτηση των Gerber και Shiu

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως ορίστηκε παραπάνω, αν και είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, δεν είναι το μοναδικό για να κατανοήσουμε την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος σε σχέση με την τυχαία μεταβλητή T. Τυχαίες μεταβλητές που σχετίζονται με την τ.μ. T είναι το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, που συμβολίζεται με $|U(T)|$, και το πλεόνασμα λίγο πρίν τη χρεοκοπία, που συμβολίζεται με $U(T-)$. Είναι προφανές πως οι προαναφερθείσες ποσότητες δίνουν περισσότερες και σημαντικότερες πληροφορίες όσον αφορά την συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος $U(t)$, απ' ότι η αποκλειστική μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας T.

Οι Gerber και Shiu στην εργασία τους "On the Time Value of Ruin" το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις παραπάνω τυχαίες μεταβλητές $|U(T)|$ & $U(T-)$ και τον χρόνο χρεοκοπίας T, σε μία μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function). Μέσω αυτής της συνάρτησης, μελετήθηκαν ταυτόχρονα μέτρα κινδύνου που μέχρι τότε προσεγγιζόταν μεμονωμένα.

Ορισμός 1.15 *Έστω $w(x, y)$ μία μη αρνητική συνάρτηση ορισμένη στο R^2 και έστω $\delta \geq 0$. Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ σε ένα κλασικό μοντέλο και συμβολίζουμε και πάλι με $U(T-)$ το πλεόνασμα αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και με $|U(T)|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η τυχαία μεταβλητή T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, η οποία είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, αφού ισχύει $P(T < \infty) < 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U_{T-}, |U(T)|) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right], \qquad (\mathbf{1.10})$$

Εδώ η συνάρτηση $I(.)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου, δηλαδή για κάθε ενδεχόμενο A είναι $I(A) = 1$ αν το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί, αλλιώς ισχύει ότι $I(A) = 0$. Η συνάρτηση $m_\delta(u)$ ονομάζεται αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής ή συνάρτηση των Gerber – Shiu.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευθεί ως προεξοφλημένη ποινή όταν συμβεί η χρεοκοπία.

Παρατηρούμε ότι από τον Ορισμό 1.10 προκύπτουν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, όπως:

a) Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$, παίρνουμε σαν ειδική περίπτωση της συνάρτησης Gerber – Shiu την πιθανότητα χρεοκοπίας.

$$m_0(u) = E[I(T < \infty)|U_0 = u] = P(T < \infty|U(0) = u) = \psi(u).$$

b) Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = y$ η συνάρτηση των Gerber – Shiu μας δίνει την μέση τιμή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Αντίστοιχα, για $\delta = 0$ και $w(x, y) = x$ η συνάρτηση των Gerber – Shiu μας δίνει την μέση τιμή του πλεονάσματος αμέσως μετά τη χρεοκοπία.

c) Έστω, $x, y \geq 0$. Αν θέσουμε

$$w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)I(|U(T)| \leq y),$$

προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των μεταβλητών $U(T-)$ και $|U(T)|$.

Για $\delta = 0$ παίρνουμε τη συνήθη από κοινού συνάρτηση κατανομής του ζεύγους $(U(T-), |U(T)|)$.

$$m_\delta(u) = P[U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty|U(0) = u].$$

Η συνάρτηση των Gerber – Shiu εκτός από την Θεωρία Κινδύνου εφαρμόζεται και στον κλάδο των Χρηματοοικονομικών μαθηματικών (βλ. Gerber – Shiu (1999) και Gerber –Landry (1998)).

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, οι Gerber – Shiu (1998) απέδειξαν ότι η (1.10) ικανοποιεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση. Οι Lin και Willmot (1999) έλυσαν αυτή την εξίσωση μέσω της ουράς μιας κατάλληλης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Η συνάρτηση των Gerber – Shiu μπορεί να πάρει μια γενικότερη μορφή:

$$m_{r,\delta}(u) = E\left[r^{N_T} e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T - 1}\right) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] \quad (\mathbf{1.11})$$

Όπου $r \in (0,1]$ και με N_T συμβολίζουμε το πλήθος των ζημιογόνων γεγονότων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Από τη σχέση **1.11** παίρνουμε:

- Για $w(x, y, z, w) = e^{-sx}$

Το πλήθος των ζημιογόνων γεγονότων μέχρι την χρεοκοπία, όπως παρουσιάστηκε στην δημοσίευση Landriault et al. (2011), ορίζεται ως

$$m_{r,\delta}(u) = E[r^{N_T} e^{-\delta T - sU_T} - I(T < \infty)|U_0 = u]$$

,με τα μεγέθη των ζημιογόνων γεγονότων να ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

- Για $r = 1$

Όπως παρουσιάστηκε στην δημοσίευση Cheung et al. (2010) έχουμε ότι:

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T - 1}\right) I(T < \infty)\middle|U_0 = u\right], \qquad \textbf{(1.12)}$$

όπου $\delta \geq 0$, με X_T συμβολίζουμε το ελάχιστο πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και ισχύει ότι $R_{N_T - 1} = u$ αν έχουμε χρεοκοπία με την πρώτη εμφάνιση ζημιογόνου γεγονότος.

1.7. Ροπές που σχετίζονται με την χρεοκοπία

Στην συνάρτηση Gerber – Shiu όπως την είδαμε στην σχέση (1.10), η από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος αμέσως μετά την στιγμή της χρεοκοπίας, μπορεί να βρεθεί εύκολα αν γνωρίζουμε την συνάρτηση ποινής

$$w(x,y) = x^k y^n$$

όπου k και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας μπορούν να μελετηθούν με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση γίνεται μέσω προσδιορισμού της ελλειμματικής συνάρτησης του χρόνου χρεοκοπίας και παίρνοντας τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας μέσω ολοκληρωμάτων. Συγκεκριμένα, αν η ελλειμματική συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας, με πλεόνασμα u δίνεται από την συνάρτηση $g(t|u)$, τότε η k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από

$$E[T^k I(T<\infty)|U_0 = u] = \int_0^\infty t^k g(t|u)dt$$

για $k = 0,1,2, \dots$. Στη δεύτερη προσέγγιση για να μελετήσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, λαμβάνουμε υπόψιν ότι είναι συνδεδεμένες με την συνάρτηση Gerber – Shiu. Για να εξετάσουμε αυτή την σχέση μεταξύ τους, ας θεωρήσουμε την

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T<\infty)|U_0 = u]$$

Ορίζουμε τώρα την k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ως

$$m_{k,\delta}(u) = E[T^k e^{-\delta T} I(T<\infty)|U_0 = u]$$

για $k = 0,1,2, \dots$, είναι φανερό ότι μπορούμε να πάρουμε την προηγούμενη συνάρτηση διαφοροποιώντας k φορές τη συνάρτηση Gerber – Shiu ως προς δ, δηλαδή έχουμε ότι

$$m_{k,\delta}(u) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \delta^k} m_\delta(u).$$

1.8. Coxian Distribution

Μια συνεχής κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, ανήκει στην Coxian-n οικογένεια κατανομών αν ο μετασχηματισμός Laplace της ικανοποιεί την σχέση:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\alpha(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+s)^{n_i}} \qquad \textbf{(1.13)}$$

όπου $\lambda_i, n_i > 0$ για $i = 1, \dots, m, \lambda_i \neq \lambda_j \; \gamma\iota\alpha \; i \neq j \; \kappa\alpha\iota \; n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Ακόμη, $\alpha(s)$ είναι ένα πολυώνυμο με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Από την σχέση (1.13) παίρνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Coxian-n κατανομής θα είναι της μορφής:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} \frac{\lambda_i(\lambda_i x)^{j-1} e^{-\lambda_i x}}{(j-1)!}.$$

Εκτενή ανάλυση για την κατανομή Coxian γίνεται στην δημοσίευση Klugman et al. (2013).

1.9. Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation)

Για την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Μια προσεγγιστική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης παρουσιάζεται στη συνέχεια, μέσω της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Ορίζουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση ως εξής:

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \varphi(u-x)dG(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u), \quad u \geq 0, \tag{1.14}$$

όπου $\beta > 0$, $G(x) = 1 - \bar{G}(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του ύψους του ζημιογόνου γεγονότος με $G(0) = 0$, και $H(u)$ είναι συνεχής για $u \geq 0$.

Ορίζουμε την συσχετισμένη σύνθετη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $K(u) = 1 - \overline{K}(u)$, όπου

$$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \bar{G}^{*n}(u), \qquad u \geq 0,$$

όπου $\bar{G}^{*n}(u)$ είναι η ουρά της n −οστής συνέληξης της $G(u)$.

Η λύση της (1.14) μέσω της $\overline{K}(u)$ που ορίσαμε προηγουμένως δίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 1.3 *Η λύση της $\varphi(u)$ μπορεί να γραφεί ως*

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u) \tag{1.15}$$

ή

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u) \tag{1.16}$$

Αν η $H(u)$ είναι διαφορίσιμη, η $\varphi(u)$ θα ισούται με:

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)H'^{(x)}dx - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u),\ u \geq 0 \tag{1.17}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1. Ιδιότητες των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας

Οι συναρτήσεις Gerber –Shiu που είδαμε στην παράγραφο 1.6 φαίνεται να ικανοποιούν την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται η ανάλυση αυτής της παρατήρησης.

Από την γενική σχέση (1.12)

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right]$$

παίρνουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις:

- Για $w(x, y, z, v) = w_{123}(x, y, z)$, παίρνουμε

$$m_{\delta,123}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_{123}(U_{T-}, |U_T|, X_T) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right], \quad \textbf{(2.1)}$$

- Για $w(x, y, z, v) = w_{23}(y, z)$, παίρνουμε

$$m_{\delta,23}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_{23}(|U_T|, X_T) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right], \qquad \textbf{(2.2)}$$

- Για $w(x, y, z, v) = w_2(y)$, παίρνουμε

$$m_{\delta,2}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_2(|U_T|) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right], \qquad \textbf{(2.3)}$$

Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι όλες οι συναρτήσεις Gerber –Shiu που ικανοποιούν την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, έχουν σύνθετη γεωμετρική δεξιά ουρά που δίνεται από την σχέση (1.12) για $w(x, y, z, v) = 1$. Δηλαδή, παίρνουμε ότι:

$$\bar{G}_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U_0 = u], \qquad \textbf{(2.4)}$$

Για να ξεκινήσουμε την ανάλυση, δοθέντος ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u και ότι συμβαίνει χρεοκοπία με την εμφάνιση του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος, ορίζουμε ότι η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (x) και του ελλείματος την στιγμή της χρεοκοπίας (y) δίνεται από τη σχέση:

$$h_1(x, y|u) = \begin{cases} \frac{1}{c} f\left(\frac{x-u}{c}, x + y\right), x > u \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

αφού όταν συμβαίνει χρεοκοπία με την εμφάνιση του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος ο χρόνος χρεοκοπίας t , δίνεται από την σχέση $t = (x - u)/c$ και εξ ορισμού ισχύει ότι $R_{N_T-1} = u$.

Αν δεν συμβαίνει χρεοκοπία με την εμφάνιση του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος, δοθέντος ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u, ορίζουμε ότι η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας (t), του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (x), του ελλείματος την στιγμή της χρεοκοπίας (y) και του πλεονάσματος αμέσως μετά την εμφάνιση του προηγούμενου ζημιογόνου γεγονότος πριν την χρεοκοπία είναι η:

$$h_2(t, x, y, v|u) \quad \textbf{(2.6)}$$

Με βάση τα παραπάνω, η συνάρτηση πυκνότητας της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ορίζεται ως $h_1(x, y|0)$, όπου x είναι το ποσό πάνω από το αρχικό αποθεματικό u (δηλαδή, το πλεόνασμα είναι $x + u$), y είναι το ποσό κάτω από το αρχικό αποθεματικό u (δηλαδή, το απόθεμα μετά την εμφάνιση του ζημιογόνου γεγονότος είναι $u - y$ και η στιγμή εμφάνισης του ζημιογόνου γεγονότος είναι η x/c. Αν $y < u$ είναι εμφανές ότι δεν υπάρχει χρεοκοπία και το νέο μας πλεόνασμα είναι $u - y$.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω η σχέση (1.12) γράφεται ως

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{1,\delta}(x, y|0)dx + \int_0^\infty \int_0^x h_{2,\delta}(x, y, v|0)dvdx\right\}dy + v_\delta(u) \quad \textbf{(2.7)}$$

Ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις πυκνότητας:

$$h_{1,\delta}(x, y|u) = e^{-\delta(\frac{x-u}{c})}h_1(x, y|u), \quad \textbf{(2.8)}$$

$$h_{2,\delta}(x, y, v|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}h_2(t, x, y, v|u)dt, \quad \textbf{(2.9)}$$

$$h_\delta(x, y|u) = h_{1,\delta}(x, y|u) + \int_0^x h_{2,\delta}(x, y, v|u)dv, \quad \textbf{(2.10)}$$

Από την (2.10) για $u = 0$, η (2.7) παίρνουμε ότι:

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)\left\{\int_0^\infty h_\delta(x, y|0)dx\right\}dy + v_\delta(u), \quad \textbf{(2.11)}$$

Η σχέση (2.11) μπορεί να γραφεί και ως :

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y)f_\delta(y)dy + v_\delta(u), \quad \textbf{(2.12)}$$

όπου είναι φανερό ότι αποτελεί ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση με $f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_\delta(x, y|0)dx$, $\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_\delta(x, y|0)dxdy$ και $v_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u, u, u)h_{1,\delta}(x, y|0)dxdy + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x+u, y-u, u, v+u)h_{2,\delta}(x, y, v|0)dvdxdy.$

Συμπεραίνοντας, από όσα προαναφέρθηκαν μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (1.12) αποτελεί μια ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση, που εξαρτάται μόνο από την από κοινού συνάρτηση των U_{T-}, $|U_T|$ και R_{N_T-1}.

Παρατηρούμε ότι σχέση (2.12) μπορεί να γραφεί και σε απλούστερες μορφές.

- Για $w(x,y,z,v) = w_{123}(x,y,z)$, από την (2.1) και δεδομένου ότι ισχύει η (2.10) παίρνουμε ότι

$$m_{\delta,123}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,123}(u), \qquad \textbf{(2.13)}$$

όπου $v_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w_{123}(x+u, y-u, u) h_\delta(x,y|0)dxdy$.

- Για $w(x,y,z,v) = w_{23}(y,z)$, από τα παραπάνω και την σχέση (2.2) παίρνουμε ότι

$$m_{\delta,23}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,23}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{\delta,23}(u), \qquad \textbf{(2.14)}$$

όπου $v_{\delta,23}(u) = \int_u^\infty w_{23}(y-u,u) f_\delta(y)dy$.

- Για $w(x,y,z,v) = w_2(y)$, από τα παραπάνω και την σχέση (2.3) παίρνουμε ότι

$$m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,2}(u-y) f_\delta(y)dy + \varphi_\delta \int_u^\infty w_2(y-u) f_\delta(y)dy. \qquad \textbf{(2.15)}$$

2.2. Δομικές ιδιότητες των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας

Ας εξετάσουμε τώρα τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας μέσω της εξίσωσης των Gerber – Shiu.

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας κινδύνου οι Lin & Willmot (2000) απέδειξαν ότι ο μέσος χρόνος χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση $E[Tw(U_{T-}, |U_T|)I(T<\infty)|U_0 = u]$ και η σχέση $E[T^k i(T<\infty)|U_0 = u]$ για $k = 2,3,\dots$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Μέσω του μοντέλου Sparre Andersen, γίνεται γενίκευση για την k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας και παίρνουμε ότι:

$$m_{k,\delta}(u) = E\left[T^k e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T - 1}\right) i(T<\infty) \middle| U_0 = u\right] \quad \textbf{(2.16)}$$

Αν θεωρήσουμε την k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, για $k = 0,1,2,\dots$,οι σχέσεις (2.8), (2.9) και (2.10) μπορούν να γραφούν αντίστοιχα ως:

$$h_{1,\delta}^{*k}(x,y|u) = \left(\frac{x-u}{c}\right)^k h_{1,\delta}(x,y|u), \quad \textbf{(2.17)}$$

$$h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|u) = \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} h_2(t,x,y,v|u)dt, \quad \textbf{(2.18)}$$

$$h_\delta^{*k}(x,y|u) = h_{1,\delta}^{*k}(x,y|u) + \int_0^x h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|u)dv, \quad \textbf{(2.19)}$$

Θεώρημα 2.1 *Θεωρούμε το εξαρτημένο μοντέλο Sparre Andersen όπως περιεγράφηκε στην ενότητα 1.5.2 με πλεόνασμα u. Η γενικευμένη* k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας (δηλαδή η $m_{k,\delta}(u)$) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Για $k = 0,1,2,\dots$

$$m_{k,\delta}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{k,\delta}(u-y) f_\delta(y)dy + v_{k,\delta}(u) \quad \textbf{(2.20)}$$

όπου

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_\delta(x,y|0)dxdy\,, f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_\delta(x,y|0)dx \ \ \kappa\alpha\iota$$

$$v_\delta(u) = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \int_0^u m_{k-j,\delta}(u-y) \int_0^\infty h_\delta^{*j}(x,y|0)dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u, u, u) h_{1,\delta}^{*k}(x,y|0)dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x+u, y-u, u, v+u) h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)dvdxdy \quad \mathbf{(2.21)}$$

Για $k = 0$ η (2.20) γίνεται (2.12)

Απόδειξη

Η (2.12) γράφεται και ως

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) f_\delta^{**}(y)dy + v_\delta(u), \qquad \textbf{(2.22)}$$

όπου $f_\delta^{**}(y) = \varphi_\delta f_\delta(y) = \int_0^\infty h_\delta(x,y|0)dx$

Παραγωγίζοντας την (2.22) k φορές ως προς δ παίρνουμε

$$\frac{\partial^k m_\delta(u)}{\partial \delta^k} = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \int_0^u \frac{\partial^{k-j} m_\delta(u-j)}{\partial \delta^{k-j}} \frac{\partial^j f_\delta^{**}(y)}{\partial \delta^j} dy + \frac{\partial^k v_\delta(u)}{\partial \delta^k} \qquad \textbf{(2.23)}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $(-1)^k$ και από την (2.23) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} m_{k,\delta}(u) = \int_0^u & m_{k,\delta}(u-y) f_\delta^{**}(y)dy \\ & + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \int_0^u m_{k-j,\delta}(u-y) \left\{ (-1)^J \frac{\partial^j f_\delta^{**}(y)}{\partial \delta^j} \right\} dy \\ & + (-1)^k \frac{\partial^k v_\delta(u)}{\partial \delta^k} \end{aligned} \qquad (\mathbf{2.24})$$

Για $j = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j f_\delta^{**}(y)}{\partial \delta^j} = \int_0^\infty & \frac{\partial^j h_\delta(x,y|0)}{\partial \delta^j} dx \\ & = \int_0^\infty \left\{ \left(-\frac{x}{c}\right)^j e^{-\frac{\delta x}{c}} h_1(x,y|0) \right. \\ & \left. + \int_0^x \int_0^\infty (-t)^j e^{-\delta t} h_2(t,x,y,v|0) dt dv \right\} dx \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k v_\delta(u)}{\partial \delta^k} = & \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u, u, u) \left\{ \left(-\frac{x}{c}\right)^k e^{-\frac{\delta x}{c}} h_1(x,y|0) \right\} dx dy \\ & + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x+u, y-u, u, v \\ & + u) \left\{ \int_0^\infty (-t)^k e^{-\delta t} h_2(t,x,y,v|0) dt \right\} dv dx dy \end{aligned}$$

όπου μας δίνει μέσω της (2.24) τις εξισώσεις (2.20) και (2.21). □

Μέσω του θεωρήματος 2.1 συμπεραίνουμε ότι αν είναι γνωστές οι συναρτήσεις $h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|u)$ για κάθε $k = 0,1,2,\dots$ δοθέντος ότι ικανοποιεί η εξίσωση το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, τότε η $m_{k,\delta}(u)$ μπορεί να λυθεί αναδρομικά ως προς

k. Η ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση (2.20) μπορεί να λυθεί αναδρομικά αφού η $v_{k,\delta}(u)$ ορίζεται από την $m_{j,\delta}(u)$ για $j = 0,1,\dots,k-1$. Τέλος, αν η εξίσωση (2.20) είναι πλήρως ορισμένη, τότε η λύση της δίνεται από την σχέση

$$m_{k,\delta}(u) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^u v_{k,\delta}(u-y)g_\delta(y)dy + v_{k,\delta}(u) \qquad \textbf{(2.25)}$$

όπου $g_\delta(y) = \frac{d}{dy}G_\delta(y)$ και $G_\delta(y) = 1 - \bar{G}_\delta(y)$ αποτελεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή με

$$\bar{G}_\delta(y) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)\varphi_\delta^n \bar{F}_\delta^{*n}(y) \qquad , y \geq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται το εξαρτημένο ανανεωτικό μοντέλο Sparre Andersen με το ύψος των ζημιογόνων γεγονότων να ακολουθεί την κατανομή Coxian-n. Έχει αποδειχθεί ότι η συνάρτηση Gerber – Shiu είναι γραμμικό άθροισμα εκθετικών όρων. Οι συντελεστές αυτών των εκθετικών όρων μελετώνται στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου ενώ οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που φαίνεται να αποτελούν γραμμικό άθροισμα αναλύονται στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου. Τέλος, παρουσιάζονται κάποια αριθμητικά παραδείγματα.

3.1. Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής του ελλείματος

Όπως είδαμε και στην ενότητα 1.5.3., στο εξαρτημένο μοντέλο Sparre Andersen, οι ενδιάμεσοι χρόνοι V και τα μεγέθη των αποζημιώσεων Y είναι εξαρτημένες μεταβλητές. Σε αυτό το κεφάλαιο, ορίζουμε ως από κοινού συνάρτηση των (V, Y) την:

$$f(t,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i} g_{ih}(t)e_{\beta_i,h}(y), \qquad t, y \geq 0 \qquad \mathbf{(3.1)}$$

με $e_{\beta,h}(y) = \frac{\beta(by)^{h-1}e^{-\beta y}}{(h-1)!}, y > 0$, όπου είναι η κατανομή Erlang.

Παρατηρούμε ότι η περιθώρια κατανομή της Y δίνεται από την

$$p(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\left\{\int_0^\infty g_{ih}(t)dt\right\}e_{\beta_i,h}(y) \qquad \mathbf{(3.2)}$$

όπου αποτελεί μια κατανομή Coxian-n με $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Η συνάρτηση Gerber – Shiu σε αυτό το κεφάλαιο θα είναι της μορφής

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T}w(|U(T)|)I(T < \infty)\middle|U(0) = u\right] \qquad \mathbf{(3.3)}$$

όπου η συνάρτηση ποινής περιλαμβάνει μόνο το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας.

Έχει αποδειχθεί από τον Landriault et al. (2014) ότι η σχέση (2.10) μπορεί να γραφεί

$$h_\delta(x, y|u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i} \xi_{\delta,ih}(x|u)e_{\beta_i,h}(y)$$

για κάποιες $\xi_{\delta,ih}(x|u)$, με $i = 1, \dots, m$ και $h = 1, \dots, n_i$.

Επομένως, η $f_\delta(y)$ δίνεται από την σχέση

$$f_\delta(y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \xi_{\delta,ih} e_{\beta_i,h}(y) \qquad \mathbf{(3.4)}$$

όπου $\xi_{\delta,ih} = \varphi_\delta^{-1} \int_0^\infty \xi_{\delta,ih}(x|0)dx$ και $\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_\delta(x,y|0)dxdy$.

Έχει αποδειχθεί ότι η σχέση (3.3) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y) f_\delta(y)dy + v_\delta(u) \qquad \mathbf{(3.5)}$$

όπου

$$v_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^\infty w(y) f_\delta(u+y)dy \qquad \mathbf{(3.6)}$$

Από τον μετασχηματισμό Laplace της (3.5) παίρνουμε

$$\widetilde{m}_\delta(s) = \frac{\tilde{v}_\delta(s)}{1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s)} \qquad \mathbf{(3.7)}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της (3.4) η σχέση (3.7) μπορεί να γραφεί ως

$$\widetilde{m}_\delta(s) = \sum_{z=1}^{n} \frac{C_{z,\delta}}{s + R_{z,\delta}} \qquad \mathbf{(3.8)}$$

Ως εκ τούτου με αναστροφή της (3.8) παίρνουμε την

$$m_\delta(u) = \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} e^{-R_{z,\delta} u} \ , \ \ u \geq 0 \qquad \mathbf{(3.9)}$$

Αν υποθέσουμε ότι οι $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ *και* $R_{1,\delta}, R_{2,\delta}, \dots, R_{n,\delta}$ είναι διακριτές τότε αποδεικνύεται ότι όλες οι $-R_{1,\delta}, -R_{2,\delta}, \dots, -R_{n,\delta}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και είναι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}} \right)^h \tilde{g}_{ih}\big(\delta + cR_{z,\delta}\big) = 1 \qquad \mathbf{(3.10)}$$

Θεώρημα 3.1 *Θεωρούμε το εξαρτημένο μοντέλο Sparre Andersen με από κοινού συνάρτηση $f(t,y)$ όπως ορίζεται στην σχέση (3.1), την συνάρτηση Gerber – Shiu $m_\delta(u)$ στην μορφή που έχει στην σχέση (3.9) και τις διακριτές μεταβλητές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ και $R_{1,\delta}, R_{2,\delta}, \dots, R_{n,\delta}$. Τότε για $z = 1,2, \dots, n$, η $R_{z,\delta}$ ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση Lundberg (3.10). Επιπλέον, όταν ισχύει ότι $\tilde{g}_{in_i}(\delta + c\beta_i) \neq 0$ για $i = 1,2, \dots, m$, παίρνουμε ότι οι $C_{1,\delta}, C_{2,\delta}, \dots, C_{n,\delta}$ ικανοποιούν την*

$$\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}} \right)^h = E\big[w\big(E_{i,h}\big)\big] \qquad \mathbf{(3.11)}$$

για $i = 1,2,\dots,m$, $h = 1,2,\dots,n_i$ *και* $E\left[w\left(E_{i,h}\right)\right] = \int_0^\infty w(y)\, e_{\beta_i,h}(y)dy$.

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά ορίζουμε τον χρόνο και το ύψος του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος και έχουμε

$$\begin{aligned} m_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty w(y-u-ct) f(t,y)dydt \\ + \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-y)\, f(t,y)dydt \qquad \textbf{(3.12)} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (3.1) και την (3.9) στην (3.12) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} e^{-R_{z,\delta} u} \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty w(y-u-ct) \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} g_{ih}(t) e_{\beta_i,h}(y) \right\} dydt \\ &+ \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} \left\{ \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} e^{-R_{z,\delta}(u+ct-y)} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} g_{ih}(t) e_{\beta_i,h}(y) \right\} dydt \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_0^\infty w(y) e_{\beta_i,h}(y+u+ct) dy \right\} g_{ih}(t) dt \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_0^{u+ct} e^{-R_{z,\delta}(u+ct-y)}\, e_{\beta_i,h}(y) dy \right\} g_{ih}(t) dt \end{aligned}$$

Λύνουμε τώρα τα δύο ολοκληρώματα της εξίσωσης

- για το πρώτο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας ότι

$$e_{\beta,h}(x+y) = \frac{1}{\beta} \sum_{z=1}^{h} e_{\beta,h+1-z}(x) e_{\beta,z}(y)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w(y) e_{\beta_i,h}(y+u+ct) dy &= \frac{1}{\beta_i} \int_0^\infty w(y) \left\{ \sum_{z=1}^{h} e_{\beta_i,h-l+1-z}(y) e_{\beta_i,l}(u+ct) \right\} dy \\ &= \frac{1}{\beta_i} \sum_{z=1}^{h} \left\{ \int_0^\infty w(y) e_{\beta_i,h-l+1}(y) dy \right\} e_{\beta_i,l}(u+ct) \\ &= \frac{1}{\beta_i} \sum_{l=1}^{h} E\left[w(E_{i,h-l+1})\right] e_{\beta_i,l}(u+ct) \end{aligned}$$

- για το δεύτερο ολοκλήρωμα, για $R \neq \beta_i$ έχουμε

$$\int_0^u e^{-R(u-y)}\, e_{\beta_i,h}(y) dy = \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R}\right)^h e^{-Ru} - \frac{1}{\beta_i} \sum_{l=1}^{h} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R}\right)^{h-l+1} e_{\beta_i,l}(u)$$

Έτσι έχουμε ότι:

$$\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} e^{-R_{z,\delta} u}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \frac{1}{\beta_i} \sum_{l=1}^{h} E\left[w(E_{i,h-l+1})\right] e_{\beta_i,l}(u+ct) \right\} g_{ih}(t)dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}} \right)^{h} e^{-R_{z,\delta}(u+ct)} \right\} g_{ih}(t)dt$$
$$- \sum_{i=1}^{m} \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \frac{1}{\beta_i} \sum_{l=1}^{h} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}} \right)^{h-l+1} e_{\beta_i,l}(u+ct) \right\} g_{ih}(t)dt$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{h} \frac{1}{\beta_i} E\left[w_2\left(E_{i,h-l+1}\right)\right] \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e_{\beta_i,l}(u+ct)\, g_{ih}(t)dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} \sum_{h=1}^{n_i} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}} \right)^{h} e^{-R_{z,\delta} u} \int_0^{\infty} e^{-(\delta + cR_{z,\delta})t}\, g_{ih}(t)dt$$
$$- \sum_{i=1}^{m} \sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta} \sum_{h=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{h} \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}} \right)^{h-l+1} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e_{\beta_i,l}(u+ct)\, g_{ih}(t)dt$$

Λύνοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{\beta_i} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e_{\beta_i,l}(u+ct) g_{ih}(t)dt = \frac{1}{\beta_i^2} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{j=1}^{l} e_{\beta_i,j}(u) e_{\beta_i,l-j+1}(ct) \right\} g_{ih}(t)dt$$
$$= \frac{1}{\beta_i^2} \sum_{j=1}^{l} e_{\beta_i,j}(u) \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e_{\beta_i,l-j+1}(ct)\, g_{ih}(t)dt = \sum_{j=1}^{l} e_{\beta_i,j}(u)\, M^*_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

όπου

$$M^*_{i,h,l}(\delta) = \frac{1}{\beta_i^2} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e_{\beta_i,l}(ct)\, g_{ih}(t)dt \qquad \mathbf{(3.13)}$$

Επομένως,

$$\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\left\{1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{j}\tilde{g}_{ij}\left(\delta + cR_{z,\delta}\right)\right\}e^{-R_{z,\delta}u}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} E\left[w\left(E_{i,h-l+1}\right)\right]\sum_{j=1}^{l} e_{\beta_i,j}(u)\, M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\ \sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{h-l+1}\sum_{j=1}^{l} e_{\beta_i,j}(u)\, M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{l=j}^{h} E\left[w\left(E_{i,h-l+1}\right)\right] M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\ \sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{h-l+1} M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} E\left[w_2\left(E_{i,h-l+1}\right)\right] M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} C_{z,\delta}\sum_{j=1}^{n_i} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} E\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{h-l+1} M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} e_{\beta_i,j}(u)\left\{\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)\left(E\left[w\left(E_{i,h-l+1}\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{h-l+1}\right)\right\} \qquad \mathbf{(3.14)}$$

Η (3.14) ισχύει για κάθε $u \geq 0$ και έτσι οι συντελεστές του $e^{-R_{z,\delta}u}\ για\ z = 1,2,\dots,n$ και του $e_{\beta_i,j}(u)\ για\ i = 1,2,\dots,m\ και\ j = 1,2,\dots,n_i$ θα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως, για $e^{-R_{z,\delta}u} = 0$ παίρνουμε την (3.10) και για τους συντελεστές του $e_{\beta_i,j}(u)$ έχουμε ότι

$$\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} M^{*}_{i,h,l-j+1}(\delta)\left\{E\left[w\left(E_{i,h-l+1}\right)\right]-\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{h-l+1}\right\} = 0 \quad \mathbf{(3.15)}$$

Θέτουμε

$$f_{i,j}(\delta) = E\left[w\left(E_{i,j+1}\right)\right]-\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right)^{j+1}$$

έτσι το δεξί μέρος της (3.15) γίνεται

$$\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{h} M^*_{i,h,l-j+1}(\delta)\, f_{i,h-l}(\delta) = \sum_{l=j}^{n_i}\sum_{h=l}^{n_i} M^*_{i,h,l-j+1}(\delta)\, f_{i,h-l}(\delta)$$
$$= \sum_{l=j}^{n_i}\sum_{h=0}^{n_i-l} M^*_{i,h+l,l-j+1}(\delta)\, f_{i,h}(\delta) = \sum_{h=0}^{n_i-j} f_{i,h}(\delta) \sum_{l=j}^{n_i-h} M^*_{i,h+l,l-j+1}(\delta)$$
$$= \sum_{h=0}^{n_i-j} f_{i,h}(\delta) \sum_{l=0}^{n_i-(h+j)} M^*_{i,h+\mathrm{j}+\mathrm{l},l+1}(\delta)$$

Θέτοντας,

$$M_{i,h}(\delta) = \sum_{l=0}^{n_i-h} M^*_{i,h+\mathrm{l},l+1}(\delta) \qquad \mathbf{(3.16)}$$

Η (3.15) μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{l=0}^{n_i-h} f_{i,h}(\delta) M_{i,j+h}(\delta) = 0 \qquad \mathbf{(3.17)}$$

για $= 1,2, \dots, m\ και\ j = 1,2, \dots, n_i$. Για $j = n_i$ η σχέση (3.17) γίνεται

$$f_{i,0}(\delta) M_{i,n_i}(\delta) = 0 \qquad \mathbf{(3.18)}$$

Από τις σχέσεις (3.13) και (3.16) έχουμε

$$M_{i,n_i}(\delta) = M^*_{i,n_i}(\delta) = \frac{\tilde{g}_{in_i}(\delta + c\beta_i)}{\beta_i}$$

η οποία θεωρείται μη μηδενική. Επομένως, η $f_{i,0}(\delta)$ πρέπει να είναι μηδενική, δηλαδή,

$$\sum_{z=1}^{n} C_{z,\delta}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{z,\delta}}\right) = E\big[w\big(E_{i,1}\big)\big]$$

Επαγωγικά, ας θεωρήσουμε ότι

$$f_{i,j}(\delta) = 0\,, \qquad j = 0,1, \dots, z-1 \qquad \mathbf{(3.19)}$$

και να αποδείξουμε ότι η $f_{i,z}(\delta) = 0$. Από την (3.17) για $j = n_i - z$, δηλαδή το $z \in \{0,1, \dots, n_i - 1\}$ παίρνουμε

$$\sum_{h=0}^{z} f_{i,h}(\delta) M_{i,n_i-z+h}(\delta) \qquad \mathbf{(3.20)}$$

Από την (3.19) είναι φανερό ότι η (3.20) ισχύει αν

$$f_{i,z}(\delta) M_{i,n_i}(\delta) = 0$$

ή

$$f_{i,z}(\delta) = 0$$

Άρα, $f_{i,z}(\delta) = 0$ για $z = 0,1, \dots, n_i - 1$, που μας δίνει την (3.11). □

3.2. Προσδιορισμός των συντελεστών

Όπως είδαμε στην σχέση (3.9), η συνάρτηση Gerber – Shiu εξαρτάται από τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg και τους αντίστοιχους συντελεστές $C_{1,\delta}, C_{2,\delta}, , \ldots, C_{n,\delta}$ όπου ικανοποιούν την (3.11). Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιείται μια προσέγγιση έτσι ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί η μορφή των συντελεστών $C_{1,\delta}, C_{2,\delta}, , \ldots, C_{n,\delta}$, ώστε να υπάρχει υπό όρους μια ρητή μορφή της συνάρτησης ποινής.

Θεώρημα 3.2 *Οι συντελεστές $C_{z,\delta}$ της σχέσης (3.8) για $z = 1, \ldots, n$ είναι της μορφής*

$$C_{z,\delta} = \tilde{v}_\delta(-R_{z,\delta}) \frac{\prod_{i=1}^{m} (\beta_i - R_{z,\delta})^{n_i}}{\prod_{j=1, j\neq z}^{n} (R_{j,\delta} - R_{z,\delta})} \qquad \mathbf{(3.21)}$$

<u>Απόδειξη</u>

Δοθέντος της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας , (3.4) έχουμε

$$\left\{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}\right\} \tilde{f}_\delta(s) = \left\{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}\right\} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \xi_{\delta,ih} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + s}\right)^h$$

αποτελεί πολυώνυμο του s, $n-1$ βαθμού ή μικρότερου. Επομένως,

$$\left\{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}\right\} \{1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s)\}$$

αποτελεί πολυώνυμο n βαθμού με τον συντελεστή του s^n να ισούται με 1. Αποδείχθηκε το 2014 από τον Landriault ότι η εξίσωση $1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s) = 0$ έχει ρίζες τις τιμές $-R_{1,\delta}, -R_{2,\delta}, \ldots, -R_{n,\delta}$. Οπότε,

$$\left\{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}\right\} \{1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s)\} = \prod_{j=1}^{n} (s + R_{j,\delta}) \qquad \mathbf{(3.22)}$$

$$\frac{\{1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s)\}}{s + R_{j,\delta}} = \frac{\prod_{j=1, j\neq z}^{n} (s + R_{j,\delta})}{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}} \qquad \mathbf{(3.23)}$$

για $z = 1,2, \ldots, n$.

Από τις σχέσεις (3.7) και (3.8) έχουμε

$$\tilde{m}_\delta(s) = \sum_{h=1}^{n} \frac{C_{h,\delta}}{s + R_{h,\delta}} = \frac{\tilde{v}_\delta(s)}{1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s)} \qquad \mathbf{(3.24)}$$

Τότε από την (3.24) παίρνουμε

$$C_{z,\delta} = \lim_{s \to R_{z,\delta}} (s + R_{z,\delta}) \tilde{m}_\delta(s) = \lim_{s \to R_{z,\delta}} (s + R_{z,\delta}) \frac{\tilde{v}_\delta(s)}{1 - \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s)} \qquad \mathbf{(3.25)}$$

για $z = 1,2, \ldots, n$. Αντικαθιστώντας την (3.23) στην (3.25) παίρνουμε

$$C_{z,\delta} = \lim_{s \to R_{z,\delta}} \tilde{v}_\delta(s) \frac{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}}{\prod_{j=1, j\neq z}^{n} (s+R_{j,\delta})}$$

Έτσι, είναι φανερό ότι ισχύει η (3.21). □

Ο όρος $\tilde{v}_\delta(-R_{z,\delta})$ στην σχέση (3.21) είναι πολύπλοκος αλλά μπορεί να απλουστευθεί για ορισμένες τιμές της συνάρτησης ποινής $w(y)$ όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια.

Θεώρημα 3.3 *Δοθέντος της $w(y) = y^n e^{-zy}$ με $n = 0,1,2, \ldots$ και $z \geq 0$, θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace $\tilde{v}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} v_\delta(u)du$ και υποθέτοντας ότι $s \neq z$, παίρνουμε ότι*

$$\tilde{v}_\delta(s) = \frac{n!}{(z-s)^{n+1}} \left\{ \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(s-z)^j}{j!} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial z^j} \varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s) \right\} \right\} \quad (\mathbf{3.26})$$

όπου

$$\varphi_\delta \tilde{f}_\delta(s) = 1 - \frac{\prod_{j=1}^{n} (s+R_{j,\delta})}{\prod_{i=1}^{m} (s+\beta_i)^{n_i}} \quad (\mathbf{3.27})$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά, γράφουμε την (3.6) στην μορφή

$$v_\delta(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty w(y-u) f_\delta(y)dy \quad (\mathbf{3.28})$$

Αν ισχύει ότι $w(y) = y^n e^{-zy}$, τότε η (3.28) γίνεται

$$v_\delta(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty (y-u)^n e^{-z(y-u)} f_\delta(y)dy \quad (\mathbf{3.29})$$

Οι Li και Garrido το 2004 απέδειξαν ότι ισχύει η εξίσωση

$$T_r^n f(u) = \int_u^\infty \frac{(y-u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-r(y-u)} f(y)dy$$

με την βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης η (3.29) γίνεται

$$v_\delta(u) = n!\, \varphi_\delta T_z^{n+1} f_\delta(u) \quad (\mathbf{3.30})$$

Από τον μετασχηματισμό Laplace της (3.30) παίρνουμε

$$\tilde{v}_\delta(s) = n!\, \varphi_\delta T_s T_z^{n+1} f_\delta(0) \quad (\mathbf{3.31})$$

Υποθέτοντας $s \neq z$, επαγωγικά θα παίρναμε ότι

$$T_s T_z^{n+1} f_\delta(0) = \frac{1}{(z-s)^{n+1}} \left\{ \tilde{f}_\delta(s) - \sum_{j=0}^{n} (z-s)^j \int_0^\infty \frac{y^j}{j!} e^{-zy} f_\delta(y) dy \right\} \quad (\mathbf{3.32})$$

Ισχύει ότι $T_s T_z^{n+1} f_\delta(0) = \{\tilde{f}_\delta(s) - \tilde{f}_\delta(z)\}/\{z-s\}$ οπότε η (3.32) ισχύει Για $n=0$.

Ακόμη, ισχύει ότι

$$T_s T_z^{n+2} f_\delta(0) = \frac{T_s T_z^{n+1} f_\delta(0) - T_z^{n+2} f_\delta(0)}{z-s}$$

Αν ισχύει η (3.32) τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_s T_z^{n+2} f_\delta(0) &= \frac{1}{z-s} \left\{ \frac{1}{(z-s)^{n+1}} \left\{ \tilde{f}_\delta(s) - \sum_{j=0}^{n} (z-s)^j \int_0^\infty \frac{y^j}{j!} e^{-zy} f_\delta(y) dy \right\} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} e^{-zy} f_\delta(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{(z-s)^{n+2}} \left\{ \tilde{f}_\delta(s) - \sum_{j=0}^{n+1} (z-s)^j \int_0^\infty \frac{y^j}{j!} e^{-zy} f_\delta(y) dy \right\} \end{aligned}$$

Επομένως, είναι φανερό ότι η (3.26) αποδεικνύεται συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.31) και (3.32). Τέλος, η (3.27) αποδεικνύεται άμεσα από την (3.22). □

3.3. Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Αρχικά, ας ορίσουμε την μορφή της k-οστής ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, όπου είναι

$$m_{k,\delta}(u) = E\left[T^k e^{-\delta T} w(|U_T|) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] \qquad \textbf{(3.33)}$$

για $k = 0,1,2, \ldots$, και είναι φανερό ότι $m_{0,\delta}(u) = m_\delta(u)$. Όπως είδαμε στην ενότητα 1.7 η (3.25) σχετίζεται με την (3.3) με διαφοροποίηση k-τάξης, όπου ορίζεται ως

$$m_{k,\delta}(u) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \delta^k} m_\delta \qquad \textbf{(3.34)}$$

Θεώρημα 3.4 *Θεωρούμε το εξαρτημένο μοντέλο Sparre Andersen με από κοινού συνάρτηση $f(t, y)$ όπως ορίζεται στην σχέση (3.1). Για $k = 0,1,2, \ldots$ η k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας (3.33) μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$m_{k,\delta}(u) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r, z) u^r e^{-R_{z,\delta} u}, \quad u \geq 0 \qquad \textbf{(3.35)}$$

όπου $-R_{1,\delta}, -R_{2,\delta}, \ldots, -R_{n,\delta}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και είναι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (3.10). Επιπλέον, για $r = 0,1, \ldots, k$ και $z = 1,2, \ldots, n$ τα $B_{0,\delta}(0, z) = C_{z,\delta}$ και αποτελούν τους συντελεστές της (3.9).

Απόδειξη

Για $k = 0$ η (3.35) γίνεται η (3.9) με $B_{0,\delta}(0, z) = C_{z,\delta}$, για $z = 1,2, \ldots, n$. Ας υποθέσουμε ότι η (3.35) ισχύει για k, τότε

$$\begin{aligned}
m_{k+1,\delta}(u) &= -\frac{\partial}{\partial \delta} m_{k,\delta}(u) = -\frac{\partial}{\partial \delta}\left\{\sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r, z) u^r e^{-R_{z,\delta} u}\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r, z) \frac{\partial R_{z,\delta}}{\partial \delta} u^{r+1} e^{-R_{z,\delta} u} - \sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} \frac{\partial B_{k,\delta}(r, z)}{\partial \delta} u^r e^{-R_{z,\delta} u} \\
&= -\sum_{z=1}^{n} \frac{\partial B_{k,\delta}(0, z)}{\partial \delta} e^{-R_{z,\delta} u} \\
&+ \sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} \left\{B_{k,\delta}(r-1, z) \frac{\partial R_{z,\delta}}{\partial \delta} - \frac{\partial R_{z,\delta}(r, z)}{\partial \delta}\right\} u^r e^{-R_{z,\delta} u} \\
&+ \sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(k, z) \frac{\partial R_{z,\delta}}{\partial \delta} u^{k+1} e^{-R_{z,\delta} u} \\
&= \sum_{r=0}^{k+} \sum_{z=1}^{n} B_{k+1,\delta}(r, z) u^r e^{-R_{z,\delta} u}
\end{aligned}$$

όπου, $B_{k+1,\delta}(0, z) = -\frac{\partial B_{k,\delta}(0,z)}{\partial \delta}$ για $z = 1,2, \ldots, n$

$B_{k+1,\delta}(r,z) = B_{k,\delta}(r-1,z)\frac{\partial B_{z,\delta}}{\partial \delta} - \frac{\partial B_{k,\delta}(r,z)}{\partial \delta}$ για $r = 1,2,\dots,k$ $και$ $z = 1,2,\dots,n$ και

$B_{k+1,\delta}(k+1,z) = B_{k,\delta}(k,z)\frac{\partial B_{z,\delta}}{\partial \delta}$ για $z = 1,2,\dots,n$.

Επομένως, η (3.35) επαγωγικά είναι αληθής. □

Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε για να αποδειχθεί η (3.11) μπορεί να εφαρμοστεί εδώ για να προσδιοριστούν τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συντελεστές $B_{k,\delta}(r,z)$ στη σχέση (3.35), και αυτό δίνεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.5 *Θεωρούμε ότι ισχύει ότι και στο Θεώρημα 3.4. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ και $R_{1,\delta}, R_{2,\delta}, \dots, R_{n,\delta}$ είναι διακριτές και ότι $\tilde{g}_{in_i}(\delta + c\beta_i) \neq 0$ για $i = 1,2,\dots,m$. Τότε για $k = 1,2,\dots$ οι συντελεστές $B_{k,\delta}(r,z)$ με $r = 0,1,\dots,k$ και $z = 1,\dots,n$ ικανοποιούν δύο σύνολα εξισώσεων.*

Το πρώτο είναι το ακόλουθο αναδρομικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{x=r}^{k-1}\binom{k}{x}\sum_{y=r}^{x}B_{x,\delta}(y,z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y}Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(k-x+a-r) + \sum_{y=r+1}^{k}B_{k,\delta}(y,z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y}Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(a-r) = 0 \qquad (\mathbf{3.36})$$

για $r = 0,1,\dots,k-1$ $και$ $z = 1,\dots,n$, όπου

$$Q_{i,h,y,a,r,z,\delta} = (-1)^{y-\alpha}c^{a-r}\frac{y!}{r!\,(a-r)!}\binom{y-a+h-1}{h-1}\frac{\beta_i^h}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{y-a+h}} \qquad (\mathbf{3.37})$$

και

$$N_{i,h,z,\delta}(k) = \int_0^\infty t^k e^{-(\delta + cR_{z,\delta})t} g_{ih}(t)dt. \qquad (\mathbf{3.38})$$

Αφού η σχέση (3.38) αληθεύει για $r = 0,1,\dots,k-1$ $και$ $z = 1,\dots,n,$ υπάρχουν συνολικά $k \times n$ εξισώσεις.

Το δεύτερο σύνολο εξισώσεων είναι το ακόλουθο

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{z=1}^{n}B_{k,\delta}(y,z)\frac{(-1)^r(j+r-1)!}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{j+r}} = 0 \qquad (\mathbf{3.39})$$

για $i = 1,\dots,m$ $και$ $j = 1,..,n_i$. Υπάρχουν συνολικά n εξισώσεις.

<u>Απόδειξη</u>

Όπως είδαμε στη σχέση (3.12) ισχύει ότι

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty w(y-u-ct) f(t,y) dy dt \\ + \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-y)\, f(t,y) dy dt \qquad (\mathbf{3.40})$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.34) και διαφοροποιώντας την (3.40) k φορές ως προς δ παίρνουμε

$$m_{k,\delta}(u) = \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty w(y-u-ct) f(t,y) dy dt \\ + \sum_{x=0}^{k} \binom{k}{x} \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} m_{x,\delta}(u+ct-y)\, f(t,y) dy dt \qquad (\mathbf{3.41})$$

Αντικαθιστώντας την (3.1) και την (3.35) στην (3.41) παίρνουμε

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r,z) u^r e^{-R_{z,\delta} u} \\ = \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty w(y-u-ct) \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} g_{ih}(t) e_{\beta_i,h}(y) \right\} dy dt \\ + \sum_{x=0}^{k} \binom{k}{x} \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} \left\{ \sum_{r=0}^{x} \sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(r,z)(u+ct \right. \\ \left. - y)^r e^{-R_{z,\delta}(u+ct-y)} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} g_{ih}(t) e_{\beta_i,h}(y) \right\} dy dt \\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} \left\{ \int_0^\infty w(y)\, e_{\beta_i,h}(y+u+ct) dy \right\} g_{ih}(t) dt \\ + \sum_{x=0}^{k} \binom{k}{x} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{x} \sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(r,z) \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty t^{k-x} e^{-\delta t} \\ \times \left\{ \int_0^{u+ct} (u+ct-y)^r\, e^{-R_{z,\delta}(u+ct-y)} e_{\beta_i,h}(y) dy \right\} g_{ih}(t) dt \qquad (\mathbf{3.42})$$

Ισχύει ότι

$$\int_0^\infty w(y)\, e_{\beta_i,h}(y+u+ct) dy = \frac{1}{\beta_i} \sum_{q=1}^{h} \left\{ \int_0^\infty w(y)\, e_{\beta_i,h-q+1}(y) dy \right\} e_{\beta_i,q}(u+ct) \\ = \frac{1}{\beta_i} \sum_{q=1}^{h} E\left[w(E_{i,h-q+1}) \right] e_{\beta_i,q}(u+ct)$$

όπου $E_{i,h}$ αποτελεί τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang ($e_{\beta_i,q}$) όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Επιπλέον, για $R \neq \beta_i$ ισχύει ότι

$$\int_0^u (u-y)^r e^{-R(u-y)}\, e_{\beta_i,h}(y)dy$$
$$= \sum_{a=0}^{r} (-1)^{r-\alpha} \frac{r!}{a!} \binom{y-a+h-1}{h-1} \frac{\beta_i^h}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{r-a+h}} u^a e^{-Ru}$$
$$+ (-1)^{r+1} \frac{1}{\beta_i} \sum_{q=1}^{h} \frac{(h-q+r)!}{(h-q)!} \frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i - R)^{h-q+r+1}}\ e_{\beta_i,q}(u)$$

Επομένως η (3.42) μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r,z) u^r e^{-R_{z,\delta} u}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty t^k e^{-\delta t} \left\{ \frac{1}{\beta_i} \sum_{q=1}^{h} E\left[w(E_{i,h-q+1})\right] e_{\beta_i,q}(u+ct) \right\} g_{ih}(t)dt$$
$$+ \sum_{x=0}^{k} \binom{k}{x} \sum_{i=1}^{m} \sum_{y=0}^{x} \sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(y,z) \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty t^{k-x} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{a=0}^{y} (-1)^{y-\alpha} \frac{y!}{a!} \binom{y-a+h-1}{h-1} \right.$$
$$\left. \times \frac{\beta_i^h}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{y-a+h}} (u+ct)^a e^{-R_{z,\delta}(u+ct)} \right\} g_{ih}(t)dt$$
$$+ \sum_{x=0}^{k} \binom{k}{x} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{x} \sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(r,z) \sum_{h=1}^{n_i} \int_0^\infty t^{k-x} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{a=0}^{y} (-1)^{r+1} \frac{1}{\beta_i} \sum_{q=1}^{h} \frac{(h-q+r)!}{(h-q)!} \right.$$
$$\left. \times \frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i - R)^{h-q+r+1}} e_{\beta_i,q}(u+ct) \right\} g_{ih}(t)dt \qquad \mathbf{(3.43)}$$

Η σχέση (3.43) μπορεί να γραφεί και ως

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}\sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r,z)u^r e^{-R_{z,\delta}u} - \sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{y=0}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(y,z) \\
&\times \sum_{h=1}^{n_i}\int_0^\infty t^{k-x}e^{-\delta t}\left\{\sum_{a=0}^{y}(-1)^{y-a}\frac{y!}{a!}\binom{y-a+h-1}{h-1}\frac{\beta_i^h}{\left(\beta_i-R_{z,\delta}\right)^{y-a+h}}\right. \\
&\times\left.\left\{\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}u^r c^{a-r}t^{a-r}\right\}e^{-R_{z,\delta}(u+ct)}\right\}g_{ih}(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\int_0^\infty t^k e^{-\delta t}\left\{\frac{1}{\beta_i}\sum_{q=1}^{h}E\left[w\left(E_{i,h-q+1}\right)\right]e_{\beta_i,q}(u+ct)\right\}g_{ih}(t)dt \\
&+ \sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(r,z)\sum_{h=1}^{n_i}\int_0^\infty t^{k-x}e^{-\delta t}\left\{(-1)^{r+1}\frac{1}{\beta_i}\sum_{q=1}^{h}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}\right. \\
&\times\left.\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}e_{\beta_i,q}(u+ct)\right\}g_{ih}(t)dt \qquad (\mathbf{3.44})
\end{aligned}
$$

Έπειτα, αφού

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\, e_{\beta_i,x}(u+ct)g_{ih}(t)dt \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{x} e_{\beta_i,j}(u)\left\{\frac{1}{\beta_i^2}\int_0^\infty e^{-\delta t}\, e_{\beta_i,x-j+1}(ct)g_{ih}(t)dt\right\} \qquad (\mathbf{3.45})
\end{aligned}
$$

Μπορεί να δειχθεί εύκολα, διαφοροποιώντας k φορές την (3.45) ως προς δ ότι

$$
\frac{1}{\beta_i}\int_0^\infty t^{k-x}e^{-\delta t}\, e_{\beta_i,x}(u+ct)g_{ih}(t)dt = \sum_{j=1}^{x} e_{\beta_i,j}(u)\, M_{i,h,x-j+1,\delta}(k) \qquad (\mathbf{3.46})
$$

όπου

$$
M_{i,h,x,\delta}(k) = \frac{1}{\beta_i^2}\int_0^\infty t^k e^{-\delta t}\, e_{\beta_i,x}(ct)g_{ih}(t)dt.
$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3.37), (3.38) και τις (3.46), (3.44) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}\sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r,z)u^{r}e^{-R_{z,\delta}u} \\
&\qquad -\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{y=0}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(y,z)\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{r=0}^{y} u^{r}e^{-R_{z,\delta}u} \\
&\qquad \times\left\{\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(k-x+a-r)\right\} \\
&\qquad =\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{q=1}^{h} E\left[w\left(E_{i,h-q+1}\right)\right]\sum_{j=1}^{q} e_{\beta_i,q}(u)M_{i,h,x-j+1,\delta}(k) \\
&\qquad +\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(r,z)\sum_{h=1}^{n_i}(-1)^{r+1} \\
&\qquad \times\left\{\sum_{q=1}^{h}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}\sum_{j=1}^{q} e_{\beta_i,q}(u)M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)\right\} \quad (\mathbf{3.47})
\end{aligned}
$$

Η σχέση (3.47) μπορεί να γραφεί ως

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}\sum_{z=1}^{n} B_{k,\delta}(r,z)u^{r}e^{-R_{z,\delta}u}-\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{x} u^{r}e^{-R_{z,\delta}u}\sum_{y=r}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(y,z) \\
&\qquad \times\left\{\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(k-x+a-r)\right\} \\
&\qquad =\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{h} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{q=j}^{h} E\left[w\left(E_{i,h-q+1}\right)\right]M_{i,h,x-j+1,\delta}(k) \\
&\qquad +\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(r,z)\sum_{h=1}^{n_i}(-1)^{r+1} \\
&\qquad \times\left\{\sum_{j=1}^{h} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{q=j}^{h}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)\right\}
\end{aligned}
$$

όπου τελικά καταλήγει στην

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{k}\sum_{z=1}^{n} u^{r} e^{-R_{z,\delta}u} \Bigg\{ & B_{x,\delta}(r,z) \\
& - \sum_{x=r}^{k}\binom{k}{x}\sum_{y=r}^{x} B_{x,\delta}(y,z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(k-x+a-r)\Bigg\} \\
& = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i} e_{\beta_i,j}(u)\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{q=j}^{h}\Bigg\{E\left[w\left(E_{i,h-q+1}\right)\right]M_{i,h,x-j+1,\delta}(k) \\
& + \sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n} B_{x,\delta}(y,z)(-1)^{r+1}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!} \\
& \times \frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}} M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)\Bigg\} \qquad (\mathbf{3.48})
\end{aligned}
$$

Αφού η (3.48) ισχύει για κάθε $u \geq 0$ οι συντελεστές των $u^r e^{-R_{z,\delta}u}$ για $r = 0,1,\ldots,k$, $z = 1,\ldots,n$ και των $e_{\beta_i,j}(u)$ για $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n_i$ θα είναι μηδέν. Έτσι το αριστερό μέρος της σχέσης (3.48) είναι

$$
0 = B_{x,\delta}(r,z) - \sum_{x=r}^{k}\binom{k}{x}\sum_{y=r}^{x} B_{x,\delta}(y,z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(k-x+a-r)\,,(\mathbf{3.49})
$$

για $r = 0,1,\ldots k$, $z = 1,\ldots,n$. Με την βοήθεια των σχέσεων (3.37), (3.38) η (3.49) μπορεί να γραφεί ως

$$
\begin{aligned}
0 = B_{x,\delta}(r,z) & \left\{1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i-R_{z,\delta}}\right)^{h}\tilde{g}_{in_i}(\delta+c\beta_i)\right\} \\
& - \sum_{x=r}^{k-1}\binom{k}{x}\sum_{y=r}^{x} B_{x,\delta}(y,z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(k-x+a-r) \\
& - \sum_{y=r+1}^{x} B_{x,\delta}(y,z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,y,a,r,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(a-r) \qquad (\mathbf{3.50})
\end{aligned}
$$

για $r = 0,1,\ldots k$, $z = 1,\ldots,n$. Στη σχέση (3.50), το πρώτο μέρος, με βάση την σχέση (3.10) ισούται με μηδέν και $\sum_{i=j}^{k} 0\ για\ j > k$. Επομένως, από την (3.50) για $r = 0,1,\ldots,k$, $z = 1,\ldots,n$ προκύπτει η (3.36).

Το δεξί μέρος της σχέσης (3.48) είναι

$$0=\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{q=j}^{h}\left\{E\left[w\left(E_{i,h-q+1}\right)\right]M_{i,h,x-j+1,\delta}(k)\right.$$
$$+\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n}B_{x,\delta}(r,z)(-1)^{r+1}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}$$
$$\left.\times\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)\right\} \qquad (\mathbf{3.51})$$

για $i=1,2,\ldots,m$ και $j=1,2,\ldots,n_i$. Βγάζοντας τον όρο $x=0$ από την (3.51) έχουμε

$$0=\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{q=j}^{h}\left\{E\left[w\left(E_{i,h-q+1}\right)\right]-\sum_{z=1}^{n}B_{0,\delta}(0,z)\left(\frac{\beta_i}{\beta_i-R_{z,\delta}}\right)^{h-q+1}\right\}M_{i,h,x-j+1,\delta}(k)$$
$$+\sum_{h=i}^{n_i}\sum_{q=j}^{h}\sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\left\{\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n}B_{x,\delta}(r,z)(-1)^{r+1}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}\right.$$
$$\left.\times\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}\right\}M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)$$

όπου ο πρώτος όρος ισούται με μηδέν με βάση την σχέση (3.11), οπότε το δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης ισούται με

$$0=\sum_{h=i}^{n_i}\sum_{q=j}^{h}\sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\left\{\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n}B_{x,\delta}(r,z)(-1)^{r+1}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}\right.$$
$$\left.\times\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}\right\}M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x) \qquad (\mathbf{3.52})$$

για $i=1,2,\ldots,m$ και $j=1,2,\ldots,n_i$. Αν ορίσουμε την

$$\xi_{x,n,i,h}(\delta)=\sum_{r=0}^{x}\sum_{z=1}^{n}B_{x,\delta}(r,z)(-1)^{r+1}\frac{(h-q+r)!}{(h-q)!}\frac{\beta_i^{h-q+1}}{(\beta_i-R)^{h-q+r+1}}$$

τότε η (3.52) μπορεί να γραφεί ως

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{h=i}^{n_i}\sum_{q=j}^{h}\sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\xi_{x,n,i,h-q}(\delta)M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)\\
&= \sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\sum_{q=j}^{n_i}\sum_{h=q}^{n_i}\xi_{x,n,i,h-q}(\delta)M_{i,h,q-j+1,\delta}(k-x)\\
&= \sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\sum_{q=j}^{n_i}\sum_{h=0}^{n_i-q}\xi_{x,n,i,h}(\delta)M_{i,h+q,q-j+1,\delta}(k-x)\\
&= \sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\sum_{h=0}^{n_i-j}\sum_{q=j}^{n_i-h}\xi_{x,n,i,h}(\delta)M_{i,h+q,q-j+1,\delta}(k-x)\\
&= \sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}\sum_{h=0}^{n_i-j}\xi_{x,n,i,h}(\delta)\left\{\sum_{q=0}^{n_i-h-j}M_{i,h+j+q,q-j+1,\delta}(k-x)\right\}\\
&= \sum_{x=1}^{k-1}\binom{k}{x}\sum_{h=0}^{n_i-j}\xi_{x,n,i,h}(\delta)\left\{\sum_{q=0}^{n_i-h-j}M_{i,h+j+q,q-j+1,\delta}(k-x)\right\}\\
&+\sum_{h=0}^{n_i-j}\xi_{k,n,i,h}(\delta)\left\{\sum_{q=0}^{n_i-h-j}M_{i,h+j+q,q-j+1,\delta}(0)\right\} \qquad (\mathbf{3.53})
\end{aligned}
$$

για $i = 1,2,\dots,m$ και $j = 1,2,\dots,n_i$.

Για κάθε $i \in \{1,2,\dots,m\}$, σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι

$$\xi_{k,n,i,h}(\delta) = 0, \quad h = 0,1,2,\dots,n_i-1 \qquad (\mathbf{3.54})$$

για $k = 1,2,3, \dots$, όπου μας δίνει τη σχέση (3.39).

Για να το αποδείξουμε, αρχικά έχουμε ότι για $k = 1$ η (3.53) γίνεται

$$0 = \sum_{h=0}^{n_i-j}\xi_{1,n,i,h}(\delta)\left\{\sum_{q=0}^{n_i-h-j}M_{i,h+j+q,q-j+1,\delta}(0)\right\} \qquad (\mathbf{3.55})$$

για $j = 1,2,\dots,n_i$. Όταν $j = n_i$ η (3.55) γίνεται

$$\xi_{x,n,i,0}(\delta)M_{i,n_i,1,\delta}(0) = 0$$

και έτσι $\xi_{x,n,i,0}(\delta) = 0$ αφού $M_{i,n_i,1,\delta}(0) = \tilde{g}_{in_i}(\delta + c\beta_i)/\beta_i$. Λαμβάνοντας υπόψιν την (3.55) μπορούμε αντίστροφα να αποδείξουμε για $j = n_i - 1, n_i - 2, \dots, 1$ ότι

$$\xi_{1,n,i,h}(\delta) = 0, \quad h = 0,1,2,\dots,n_i-1 \qquad (\mathbf{3.56})$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η (3.54) αληθεύει για $k = 2,3, \dots$. Θεωρούμε ότι για $x = 1,2,\dots,k-1$,

$$\xi_{x,n,i,h}(\delta) = 0, \quad h = 0,1,2,\dots,n_i-1 \qquad (\mathbf{3.57})$$

Επομένως, από την σχέση (3.53) παίρνουμε ότι

$$0=\sum_{h=0}^{n_i-j}\xi_{k,n,i,h}(\delta)\left\{\sum_{q=0}^{n_i-h-j}M_{i,h+j+q,q-j+1,\delta}(0)\right\} \qquad (\mathbf{3.58})$$

για $j=1,2,\dots,n_i$. Όταν $j=n_i$ η σχέση (3.58) μας δίνει

$$\xi_{k,n,i,0}(\delta)M_{i,n_i,1,\delta}(0)=0.$$

Όπως είδαμε και παραπάνω, αφού η $M_{i,n_i,1,\delta}(0)$ αποτελεί μη μηδενική συνάρτηση, ισχύει ότι $\xi_{k,n,i,0}(\delta)=0$. Έπειτα, για την σχέση (3.58) παίρνουμε $j=n_i-s$ όπου $s\in\{1,2,\dots,n_i-1\}$ και μας δίνει ότι

$$0=\sum_{h=0}^{s}\xi_{k,n,i,h}(\delta)\left\{\sum_{q=0}^{s-h}M_{i,n_i-s+h+q,q-j+1,\delta}(0)\right\} \qquad (\mathbf{3.59})$$

θεωρώντας ότι ισχύει η παρακάτω εξίσωση

$$\xi_{k,n,i,h}(\delta)=0,\quad h=0,1,2,\dots,s-1 \qquad (\mathbf{3.60})$$

η σχέση (3.59) γίνεται

$$\xi_{k,n,i,s}(\delta)M_{i,n_i,1,\delta}(0)=0 \qquad (\mathbf{3.61})$$

όπου $\xi_{k,n,i,s}(\delta)=0$, αφού η $M_{i,n_i,1,\delta}(0)$ είναι μη μηδενική. Έτσι, αν πραγματοποιηθούν τα βήματα από την σχέση (3.59) ως την (3.61) και επιλέγουμε για s με την σειρά τις τιμές $s=1,2,\dots,n_i-1$ αποδεικνύεται ότι

$$\xi_{k,n,i,h}(\delta)=0,\quad h=0,1,2,\dots,n_i-1$$

Επομένως, η (3.54) ισχύει για $k=2,3,\dots$ υπό την προϋπόθεση της (3.57). Τέλος, αφού η (3.54) ισχύει για $k=1$ όπως αποδείχθηκε στην (3.56), συμπεραίνουμε ότι η (3.54) ισχύει για $k=1,2,3,\dots$ που μας δίνει την απόδειξη της (3.39). □

Το θεώρημα 3.4 μας δείχνει ότι οι συντελεστές $B_{x,\delta}(r,z)$ μπορούν να λυθούν αναδρομικά ως προς k. Δηλαδή, μπορούμε αρχικά να βρούμε τους συντελεστές μέσω της συνάρτησης Gerber – Shiu, δηλαδή τα $C_{z,\delta}$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.11) και (3.21). Έπειτα, χρησιμοποιώντας αυτές τις λύσεις παίρνουμε τις τιμές των $B_{1,\delta}(0,z)$ και $B_{1,\delta}(1,z)$. Από το θεώρημα 3.4 οι εξισώσεις δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$B_{1,\delta}(1,z)=\frac{C_{z,\delta}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}Q_{i,h,0,0,0,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(1)\right\}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=0}^{1}Q_{i,h,1,a,0,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(a)} \qquad (\mathbf{3.62})$$

για $z=1,\dots,n$ και

$$\sum_{z=1}^{n}B_{1,\delta}(0,z)\frac{(j-1)!}{\left(\beta_i-R_{z,\delta}\right)^{j}}=\sum_{z=1}^{n}B_{1,\delta}(1,z)\frac{(j)!}{\left(\beta_i-R_{z,\delta}\right)^{j+1}} \qquad (\mathbf{3.63})$$

για $i = 1, \dots, m$ $και$ $j = 1, \dots, n_i$. Σε συνέχεια, οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν είναι αυτές των $B_{2,\delta}(0, z)$, $B_{2,\delta}(1, z)$ και $B_{2,\delta}(2, z)$. Από το θεώρημα 3.4 έχουμε ότι

$$B_{2,\delta}(2, z) = \frac{2B_{1,\delta}(1, z)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=r}^{y} Q_{i,h,1,1,1,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(1)\right\}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=1}^{2} Q_{i,h,2,a,1,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(a-1)}$$

για $z = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} B_{2,\delta}(1, z) = -\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=0}^{1} Q_{i,h,1,a,0,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(a)} &\left\{C_{z,\delta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i} Q_{i,h,0,0,0,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(2)\right. \\ &+ 2\sum_{y=0}^{1} B_{1,\delta}(y, z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=0}^{y} Q_{i,h,y,a,0,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(1+a) \\ &\left.+ B_{2,\delta}(2, z)\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{a=1}^{2} Q_{i,h,2,a,0,z,\delta}N_{i,h,z,\delta}(a)\right\} \end{aligned}$$

για $z = 1, \dots, n$ και

$$\sum_{z=1}^{n} B_{2,\delta}(0, z)\frac{(j-1)!}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{j}} = \sum_{z=1}^{n} B_{2,\delta}(1, z)\frac{(j)!}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{j+1}} - \sum_{z=1}^{n} B_{2,\delta}(2, z)\frac{(j+1)!}{\left(\beta_i - R_{z,\delta}\right)^{j+2}}$$

για $i = 1, \dots, m$ $και$ $j = 1, \dots, n_i$.

3.4. Αριθμητικά παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Σε αυτή την ενότητα, ο μέσος όρος και η διακύμανση του χρόνου μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας θα μελετηθούν με τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης ζημιάς και το ύψος της ζημιάς να έχουν διαφορετική από κοινού κατανομή.

Αρχικά, εξετάζονται δύο περιπτώσεις που έχουν ανεξάρτητους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης ζημιάς και το ύψος της ζημιάς.

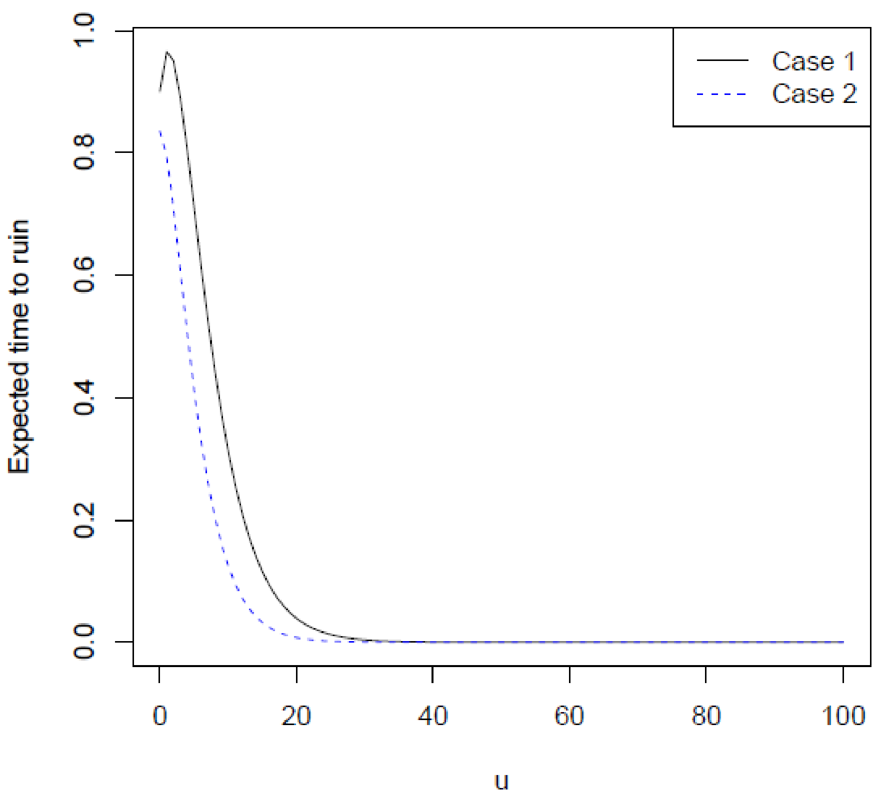
Η από κοινού κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων (V) και του ύψους της ζημιάς (Y) δίνονται αντίστοιχα στην συνέχεια.

$$f(t,y) = e^{-t}\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}y}\right) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad f(t,y) = 4te^{-2t}\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}y}\right)$$

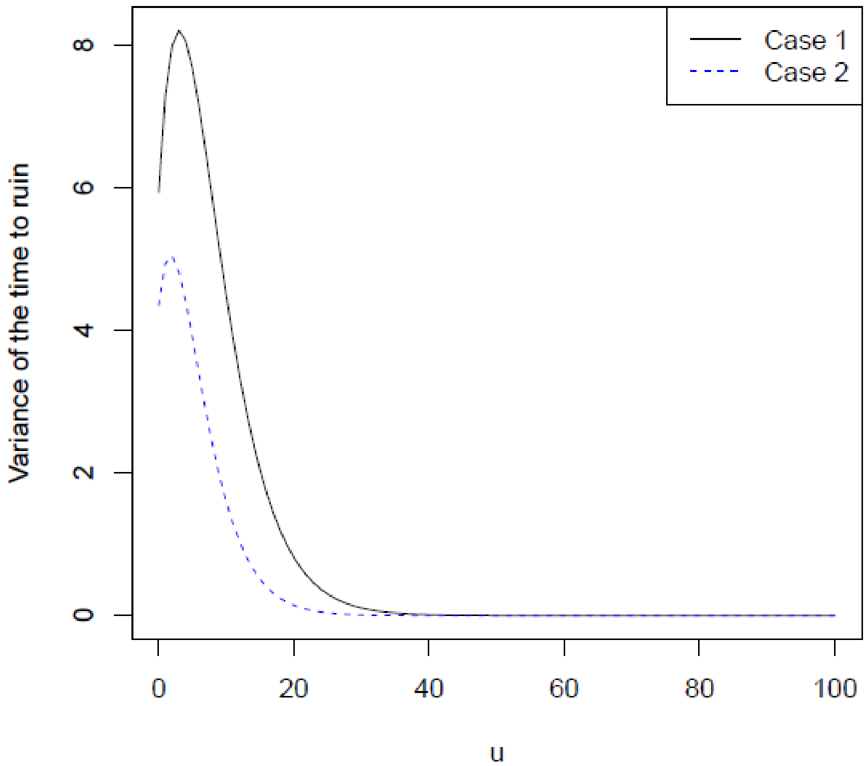
Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε επιλέξει κοινούς αναμενόμενους ενδιάμεσους χρόνους και ύψη ζημιών ($E[V] = 1 \; \kappa\alpha\iota \; E[Y] = 3/2$). Και στις δυο περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το πλεόνασμα ισούται με $c = 5/2$.

Δοθέντων των δύο υποθέσεων παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα την μέσης τιμής και διακύμανσης του χρόνου χρεοκοπίας των ανεξάρτητων περιπτώσεων.

Διάγραμμα 3.1



Διάγραμμα 3.2



Στο Διάγραμμα 3.1, ο άξονας y αντιπροσωπεύει την ποσότητα $m_{1,0}(u) = E\,[TI(T < \infty)|U_0 = \ u]$ και ο άξονας x είναι το αρχικό πλεόνασμα u. Παρατηρούμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος για την χρεοκοπία αυξάνεται ελαφρά και στη συνέχεια μειώνεται γρήγορα όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μεγαλύτερο. Μια πιθανή εξήγηση μπορεί να δοθεί από τους δύο παράγοντες που επηρεάζουν το $E\,[TI(T < \infty)|U_0 = \ u]$, δηλαδή τον χρόνο για την χρεοκοπία και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Με μεγαλύτερο αρχικό πλεόνασμα, θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος για να επέλθει χρεοκοπία. Ωστόσο, η πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται μικρότερη εάν το αρχικό πλεόνασμα είναι μεγάλο. Επομένως, αυτοί οι δύο παράγοντες είναι καθοριστικοί. Σύμφωνα με το Διάγραμμα 3.1, εκτός από όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μικρό, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ο κυρίαρχος παράγοντας και συνεπώς ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας μειώνεται γρήγορα όσο το αρχικό πλεόνασμα γίνεται μεγαλύτερο. Ακόμη, παρατηρούμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος για να επέλθει χεοκοπία στην περίπτωση 2 είναι μικρότερος από εκείνον στην περίπτωση 1 με δεδομένο αρχικό πλεόνασμα u.

Στο Διάγραμμα 3.2, βλέπουμε το αρχικό αποθεματικό εν συναρτήσει της ποσότητας $m_{2,0}(u) - \{m_{1,0}(u)\}^2 = E[T^2 I(T < \infty)|U_0 = u] - \{E\,[TI(T < \infty)|U_0 = \ u]\}^2$. Παρατηρούμε πάλι ότι και στις δύο περιπτώσεις η διακύμανση του χρόνου χρεοκοπίας αυξάνεται αρχικά και στη συνέχεια μειώνεται γρήγορα καθώς το αρχικό πλεόνασμα γίνεται μεγαλύτερο. Επίσης, η διακύμανση του χρόνου μέχρι την χρεοκοπία είναι μικρότερη στην περίπτωση 2 σε σύγκριση με την περίπτωση 1. Αυτές οι παρατηρήσεις είναι παρόμοιες με εκείνες που έγιναν από το Διάγραμμα 3.1 που περιγράφει τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας.

Παράδειγμα 2

Σε συνέχεια του Παραδείγματος 1 θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης και τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εξαρτημένες μεταβλητές.

Έτσι, ας θεωρήσουμε ότι η από κοινού κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων (V) και του ύψους της ζημιάς (Y) δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω συναρτήσεις.

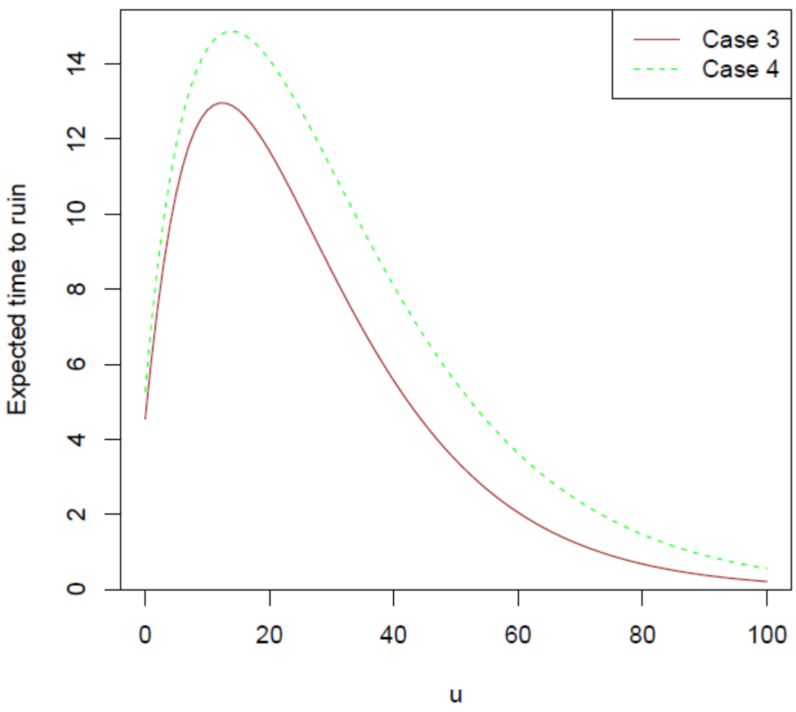
$$f(t,y) = \frac{3}{4}e^{-t}\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}y}\right) + \frac{1}{4}(2e^{-2t})\left(\frac{2}{3}\right)^2 ye^{-\frac{2}{3}y}$$

$$f(t,y) = \frac{3}{4}e^{-t}\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}y}\right) + \frac{1}{4}(2e^{-2t})\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}y}\right)$$

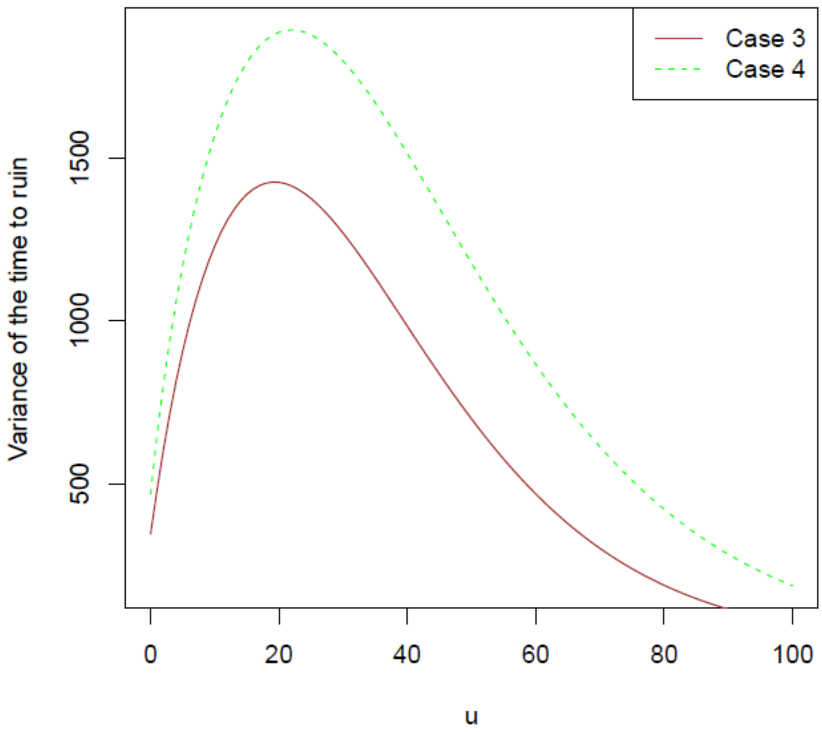
όπου και στις δυο περιπτώσεις έχουμε επιλέξει κοινούς αναμενόμενους ενδιάμεσους χρόνους και ύψη ζημιών ($E[V]=7/8$ και $E[Y]=15/8$), και για τις δυο περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το πλεόνασμα ισούται με $c=5/2$.

Δοθέντων των δύο υποθέσεων παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα την μέσης τιμής και διακύμανσης του χρόνου χρεοκοπίας των ανεξάρτητων περιπτώσεων.

Διάγραμμα 3.3



Διάγραμμα 3.4



Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τα διαγράμματα είναι παρόμοια με αυτά που συμπεράναμε στο Παράδειγμα 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου, ο μετασχηματισμός Laplace των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας εξετάζεται γενικά υπό το εξαρτημένο μοντέλο Sparre Andersen. Το αποτέλεσμα γενικεύει τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu όπως παρουσιάζεται από το Cheung et al. (2010). Στη δεύτερη ενότητα, θεωρούμε το μοντέλο Willmot και Woo (2012) στο οποίο ορίζεται ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Coxian και τα μεγέθη των απαιτήσεων εξαρτώνται από το χρόνο. Ο μετασχηματισμός Laplace των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας και η συνάρτηση $h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)$ όπως ορίστηκε στην (2.18) καθορίζονται κάτω από αυτό το μοντέλο.

4.1. Μετασχηματισμός Laplace των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας

Υποθέτουμε το εξαρτώμενο μοντέλο Sparre Andersen που αναφέραμε στην ενότητα 1.1, με από κοινού συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων να είναι η $f(t,y)$. Σε αυτό το κεφάλαιο, παίρνουμε την συνάρτηση Gerber-Shiu στην μορφή

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right) I(T<\infty) \middle| U_0 = u\right], \quad \mathbf{(4.1)}$$

όπου περιλαμβάνει στην συνάρτηση ποινής το πλεόνασμα πριν την στιγμή της χρεοκοπίας U_{T-}, το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας $|U_T|$ και το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν την χρεοκοπία R_{N_T-1}.

Για $k = 0,1,2,\ldots$, θεωρούμε την k-οστή γενικευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας

$$m_{k,\delta}(u) = E\left[T^k e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right) I(T<\infty) \middle| U_0 = u\right] \quad \mathbf{(4.2)}$$

Προφανώς ισχύει ότι $m_{0,\delta}(u) = m_\delta(u)$.

Όπως αποδείχθηκε από τους Cheung et al (2010) και Willmot και Woo (2012) ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu (στην μορφή της 4.1) ικανοποιεί την

$$\{1 - \tilde{f}(\delta - cs, s)\}\tilde{m}_\delta(s) = \tilde{\beta}_{0,\delta}(s) - \sigma_{0,0,\delta}(s), \quad \mathbf{(4.3)}$$

όπου

$$\tilde{f}(r,s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-rt-sy} f(t,y)\, dtdy \quad \mathbf{(4.4)}$$

αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων. Ακόμη ισχύει ότι

$$\tilde{\beta}_{0,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\beta_{0,\delta}(u)\,du$$

όπου

$$\beta_{0,\delta}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct, u)\,f(t,y)dydt.$$

Επίσης,

$$\sigma_{0,0,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi_{0,0,\delta}(x, \delta - cs)dx$$

όπου

$$\varphi_{0,0,\delta}(x,h) = \int_{\frac{x}{c}}^\infty e^{-ht}\int_0^x m_\delta(x-y)\,f(t,y)dydt.$$

Όπως αναφέρεται στο Cheung et al (2010) η εξίσωση Lundberg ως προς s ικανοποιεί την

$$1 - \tilde{f}(\delta - cs, s) = 0 \qquad (\mathbf{4.5})$$

Ας γενικεύσουμε τώρα τα παραπάνω αποτελέσματα για την k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας όπως δόθηκε στην (4.2) για $k = 0,1,2,\dots$.

Θεώρημα 4.1 *Θεωρούμε ένα εξαρτημένο* Sparre Andersen *μοντέλο όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 1. Τότε η (4.2) ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση.*

$$\{1 - \tilde{f}(\delta - cs, s)\}\tilde{m}_{k,\delta}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,k}(s) + \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\tilde{f}_r(\delta - cs, s)\tilde{m}_{k-r,\delta}(s) - \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(s), \quad (\mathbf{4.6})$$

όπου

$\tilde{f}_r(\delta - cs, s) = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial \delta^r}\,\tilde{f}_r(\delta - cs, s)$ και $\tilde{\beta}_{\delta,k}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\beta_{k,\delta}(u)du$

με $\beta_{k,\delta}(u) = \int_0^\infty t^k e^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct, u)\,f(t,y)dydt \qquad (\mathbf{4.7})$

Ακόμη, για $r = 0,1,\dots,k$, ισχύει ότι

$$\sigma_{k,r,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\varphi_{k,r,\delta}(x, \delta - cs)dx \qquad (\mathbf{4.8})$$

όπου

$$\varphi_{k,r,\delta}(x,h) = \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} t^r e^{-ht} \int_0^x m_{k-r,\delta}(x-y)\, f(t,y)dydt. \qquad \mathbf{(4.9)}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά θα επαναδιατυπώσουμε την (4.3) προκυμμένου να αποδείξουμε την (4.6). Οπότε η (4.3) μπορεί και να γραφεί ως

$$\widetilde{m}_\delta(s) - \tilde{f}(\delta - cs, s)\widetilde{m}_\delta(s) = \tilde{\beta}_{0,\delta}(s) - \sigma_{0,0,\delta}(s) \qquad \mathbf{(4.10)}$$

Αν διαφοροποιήσουμε την (4.10) k-φορές ως προς δ, παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\widetilde{m}_{k,\delta}(s) - \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \tilde{f}_r(\delta - cs, s)\widetilde{m}_{k-r,\delta}(s) = \tilde{\beta}_{\delta,k}(s) - \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sigma_{k,r,\delta}(s)$$

όπου προφανώς ισούται με την (4.6).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι όταν η (4.6) ισούται με μηδέν, από το αριστερό μέρος της εξίσωσης προκύπτει η εξίσωση Lundberg (4.5). Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι η εξίσωση (4.6) είναι μια γενίκευση της (4.3). □

4.2. Coxian Ενδιάμεσοι χρόνοι

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε το μοντέλο των Willmot και Woo (2012), το οποίο είναι ένα εξαρτημένο Sparre Andersen μοντέλο με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων (t) και των μεγεθών των απαιτήσεων (y), την

$$f(t,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tau_{ij}(t)\,b_{ij}(y), \quad t,y\geq 0, \qquad \mathbf{(4.11)}$$

όπου η $\tau_{ij}(t)$ ακολουθεί την Erlang, δηλαδή

$$\tau_{ij}(t)=\frac{\lambda_i(\lambda_i t)^{j-1}e^{-\lambda_i t}}{(j-1)!}\ , \quad t\geq 0 \qquad \mathbf{(4.12)}$$

Η περιθώρια κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ορίζεται ως εξής

$$k(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left\{\int_0^{\infty}b_{ij}(y)dy\right\}\tau_{ij}(t)$$

όπου αποτελεί κατανομή Coxian-n με $n=\sum_{i=1}^{m}n_i$.

Οι Willmot και Woo (2012), απέδειξαν ότι δοθέντος της (4.11) η εξίσωση (4.5) γίνεται

$$1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-cs}\right)^{j}\tilde{b}_{ij}(s)=0 \qquad \mathbf{(4.13)}$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί, ότι αν στην (4.11) ισχύει ότι $b_{ij}(y)=b(y)$ για κάθε i,j τότε θα παίρναμε ένα Sparre Andersen μοντέλο με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν την κατανομή Coxian και τα μεγάθη των ζημιών να μην εξαρτώνται από τον χρόνο.

4.2.1. Μετασχηματισμός Laplace των ροπών

Οι Willmot και Woo (2012) ειδίκευσαν τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu υποθέτοντας ότι η (4.13) έχει n διακριτές ρίζες με μη-αρνητικά πραγματικά μέρη. Θα προσδιορίσουμε δηλαδή την μορφή των ροπών του μετασχηματισμού Laplace.

Θεώρημα 4.2.1 *Θεωρούμε ένα εξαρτημένο* Sparre Andersen *μοντέλο όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 1, όπου η κατανομή των μεγεθών και των ενδιάμεσων χρόνων των απαιτήσεων δίνεται από την (4.11). Ακόμη υποθέτουμε ότι υπάρχουν* n *διακριτές ρίζες με μη-αρνητικά πραγματικά μέρη, οι* $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$*, της (4.13). Για* $k=0,1,2,\ldots$*, ο μετασχηματισμός Laplace την* k*-οστής ροπής του χρόνου χρεοκοπίας (4.2) δίνεται από:*

$$\widetilde{m}_{k,\delta}(s) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - cs}\right)^j \tilde{b}_{ij}(s)}$$
$$\times \left\{\tilde{\beta}_{\delta,k}(s) + \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-cs)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(s)\right\}\widetilde{m}_{k-r,\delta}(s)\right.$$
$$\left. - \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(s)\right\}, \qquad \mathbf{(4.14)}$$

όπου

$$\tilde{\beta}_{\delta,k}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,\beta_{k,\delta}(u)du\,,$$

με

$$\beta_{k,\delta}(u) = \int_0^\infty t^k e^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct, u)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tau_{ij}(t)\,b_{ij}(y)\right\}dydu \quad \mathbf{(4.15)}$$

Ακόμα, ισχύει ότι

$$\sigma_{k,0,\delta}(s) = \frac{\sum_{h=1}^{n} Q_{k,\delta}(\rho_h)\prod_{j=1,j\neq h}^{n}\left(\frac{s-\rho_j}{\rho_h-\rho_j}\right)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}} \qquad \mathbf{(4.16)}$$

όπου για $h = 1,2,\dots,n$

$$Q_{k,\delta}(\rho_h) = \left\{\tilde{\beta}_{\delta,k}(s) + \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-cs)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(s)\right\}\widetilde{m}_{k-r,\delta}(s) - \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(s)\right\}\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_x}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά, με την υπόθεση της (4.11), παίρνουμε ότι

$$\tilde{f}(\delta - cs, s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-cs}\right)^j \tilde{b}_{ij}(s) \qquad \mathbf{(4.17)}$$

και

$$\tilde{f}_r(\delta - cs, s) = (-1)^r\frac{\partial^r}{\partial\delta^r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-cs}\right)^j\tilde{b}_{ij}(s)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-cs)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(s) \qquad \mathbf{(4.18)}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.6) τις (4.17) και (4.18) παίρνουμε ότι

$$\left\{1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-cs}\right)^j \tilde{b}_{ij}(s)\right\}\widetilde{m}_{k,\delta}(s)$$
$$=\tilde{\beta}_{\delta,k}(s)+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-cs)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(s)\right\}\widetilde{m}_{k-r,\delta}(s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(s) \qquad \mathbf{(4.19)}$$

η οποία είναι η (4.14). Επιπλέον, είναι προφανές ότι από την (4.7) προκύπτει η (4.15) όταν ισχύει η (4.11).

Ας προσδιορίσουμε τώρα και την $\sigma_{k,0,\delta}(s)$. Αρχικά, θα αντικαταστήσουμε την (4.11) στην (4.9) και παίρνουμε την

$$\varphi_{k,r,\delta}(x,h)=\int_{\frac{x}{c}}^{\infty}t^r e^{-ht}\int_0^x m_{k-r,\delta}(x-y)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tau_{ij}(t)\,b_{ij}(y)\right\}dydt$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\alpha_{k-r,\delta,iq}(x)\int_{x/c}^{\infty}t^r e^{-ht}\,\tau_{iq}(t)dt \qquad \mathbf{(4.20)}$$

όπου

$$\alpha_{k,\delta,iq}(x)=\int_0^x m_{k,\delta}(x-y)\,b_{iq}(y)dy \qquad \mathbf{(4.21)}$$

Το ολοκλήρωμα στην (4.20) μπορεί να απλοποιηθεί και να γραφεί ως:

$$\int_{\frac{x}{c}}^{\infty}t^r e^{-ht}\,\tau_{iq}(t)dt=\int_{\frac{x}{c}}^{\infty}t^r e^{-ht}\frac{\lambda_i(\lambda_i t)^{q-1}e^{-\lambda_i t}}{(q-1)!}\,dt$$
$$=\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q}{(\lambda_i+h)^{q+r}}\int_{\frac{x}{c}}^{\infty}\frac{(\lambda_i+h)^{q+r}t^{(q+r-1)}e^{-(\lambda_i+h)t}}{(q+r-1)!}dt$$
$$=\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q}{(\lambda_i+h)^{q+r}}\sum_{j=0}^{q+r-1}\frac{\left\{(\lambda_i+h)\left(\frac{x}{c}\right)\right\}^j e^{-\frac{(\lambda_i+h)x}{c}}}{j!}$$
$$=\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\lambda_i^q e^{-(\lambda_i+h)\frac{x}{c}}\sum_{j=1}^{q+r}\frac{x^{q+r-j}(\lambda_i+h)^{-j}}{c^{q+r-j}(q+r-j)!}$$

οπότε η (4.20) μπορεί να γραφεί ως

$$\varphi_{k,r,\delta}(x,h)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\alpha_{k-r,\delta,iq}(x)\sum_{j=1}^{q+r}\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\lambda_i^q e^{-(\lambda_i+h)\frac{x}{c}}\,\frac{x^{q+r-j}(\lambda_i+h)^{-j}}{c^{q+r-j}(q+r-j)!} \qquad \mathbf{(4.22)}$$

Αν βάλουμε τώρα την (4.22) στην (4.8) παίρνουμε για $r = 0,1, \dots, k$

$$\sigma_{k,r,\delta}(s)$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_i} \alpha_{k-r,\delta,iq}(x) \sum_{j=1}^{q+r} \frac{(q+r-1)!}{(q-1)!} \lambda_i^q e^{-(\lambda_i+h)\frac{x}{c}} \ \frac{x^{q+r-j}(\lambda_i+h)^{-j}}{c^{q+r-j}(q+r-j)!} \right\} dx$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{q+r} \frac{(q+r-1)!}{(q-1)!} \frac{\lambda_i^q (\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{c^{q+r-j}(q+r-j)!} \ \int_0^\infty x^{q+r-j} e^{-\frac{\lambda_i+\delta}{c}x} \alpha_{k-r,\delta,iq}(x) dx$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{q+r} \frac{(q+r-1)!}{(q-1)!} \frac{\lambda_i^q (\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!} \ \tilde{\alpha}_{k-r,\delta,iq}^{(q+r-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right), \qquad \mathbf{(4.23)}$$

όπου

$$\tilde{\alpha}_{k,\delta iq}^{(r)}(s) = \int_0^\infty (-x)^r e^{-sx} \alpha_{k,\delta,iq}(x) dx \qquad \mathbf{(4.24)}$$

Ειδικότερα, η (4.23) για $r = 0$ γίνεται

$$\begin{aligned} \sigma_{k,0,\delta}(s) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{q} \frac{\lambda_i^q (\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q-j}(q-j)!} \ \tilde{\alpha}_{k,\delta,iq}^{(q-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (\lambda_i+\delta-cs)^{-j} \ \sum_{q=j}^{n_i} (\frac{\lambda_i^q \ \tilde{\alpha}_{k,\delta,iq}^{(q-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)}{(-c)^{q-j}(q-j)!} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\theta_{ij,k,\delta}}{(\lambda_i+\delta-cs)^j} \qquad \mathbf{(4.25)} \end{aligned}$$

με

$$\theta_{ij,k,\delta} = \sum_{q=j}^{n_i} (\frac{\lambda_i^q \ \tilde{\alpha}_{k,\delta,iq}^{(q-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)}{(-c)^{q-j}(q-j)!}.$$

Αντίστοιχα, η (4.25) μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_{k,0,\delta}(s) = \frac{Q_{k,\delta}(s)}{\prod_{x=1}^{m}(\lambda_x+\delta-cs)^{n_x}} \qquad \mathbf{(4.26)}$$

με

$$Q_{k,\delta}(s) = \left\{ \prod_{x=1}^{m} (\lambda_x+\delta-cs)^{n_x} \right\} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\theta_{ij,k,\delta}}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}.$$

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση της υπόθεσης ότι η (4.13) έχει n διακριτές ρίζες με μη-αρνητικά πραγματικά μέρη, τις $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Για $h = 1,2, \dots, n$ θέτοντας $s = \rho_h$ η (4.19) γίνεται

$$\sigma_{k,0,\delta}(\rho_h) = \tilde{\beta}_{\delta,k}(\rho_h) + \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-c\rho_h)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(\rho_h)\right\}\tilde{m}_{k-r,\delta}(\rho_h)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(\rho_h) \qquad \mathbf{(4.27)}$$

Να σημειώσουμε ότι η $\sigma_{k,r,\delta}(\rho_h)$ εξαρτάται από την $m_{k-r,\delta}(u)$. Επομένως, για $r = 1,2,\ldots,k$ η $\sigma_{k,r,\delta}(\rho_h)$ αποτελεί συνάρτηση της $m_{x,\delta}(u)$ για τα περισσότερα $x = k-1$. Επομένως, θεωρητικά η $\sigma_{k,0,\delta}(\rho_h)$ στην (4.27) μπορεί να γραφεί αναδρομικά ως k, με $\sigma_{0,0,\delta}(\rho_h) = \tilde{\beta}_{0,\delta}(\rho_h)$. Αντικαθιστώντας την (4.270 στην (4.26) παίρνουμε

$$Q_{k,\delta}(\rho_h) = \left\{\tilde{\beta}_{\delta,k}(\rho_h) + \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-c\rho_h)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(\rho_h)\right\}\tilde{m}_{k-r,\delta}(\rho_h)\right.$$
$$\left.-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(\rho_h)\right\}\prod_{x=1}^{m}(\lambda_x+\delta-cs)^{n_x} \qquad \mathbf{(4.28)}$$

Αφού το $Q_{k,\delta}(s)$ αποτελεί πολυώνυμο με μέγιστο βαθμό $n-1$, μπορεί να γραφεί σαν πολυώνυμο Lagrange, δηλαδή ως

$$Q_{k,\delta}(s) = \sum_{h=1}^{n} Q_{k,\delta}(\rho_h)\prod_{j=1,j\neq h}^{n}\left(\frac{s-\rho_j}{\rho_h-\rho_j}\right) \qquad \mathbf{(4.29)}$$

Είναι φανερό ότι αντικαθιστώντας την (4.29) στην (4.26) παίρνουμε την (4.16). □

4.2.2. Ποσότητες σχετιζόμενες με τις ροπές

Αν πάρουμε την αντίστροφη της (4.14) ως προς s μας δίνει την k-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας $m_{k,\delta}(u)$, αλλά είναι περίπλοκο να παίρνουμε την αντίστροφη γενικά. Σε αυτή την ενότητα, δίνεται ένας εναλλακτικός τρόπος για την λύση της $m_{k,\delta}(u)$. Η εξίσωση $h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)$ όπως ορίστηκε στην (2.18) θα προσδιοριστεί κάτω από την υπόθεση οι ενδιάμεσοι χρόνοι να ακολουθούν την κατανομή Coxian, και ως εκ τούτου η $m_{k,\delta}(u)$ μπορεί να λυθεί αναδρομικά ως προς k από την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση του Θεωρήματος 2.2.1.

Θεώρημα 4.2.2 *Θεωρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.1. Για* $k = 0,1,2,\ldots$, *η εξίσωση* $h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)$ *γίνεται*

$$
\begin{aligned}
&h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)\\
&=\sum_{h=1}^{n}\xi_{h,\delta}\left\{e^{-\rho_h v}h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)\right.\\
&+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-c\rho_h)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(\rho_h)\right\}\right.\\
&\times\left\{e^{-\rho_h v}h_{1,\delta}^{*k-r}(x,y|v)+\int_0^\infty e^{-\rho_h z}h_{2,\delta}^{*k-r}(x,y,v|z)dz\right\}\\
&\left.\left.-\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{q+r}\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!}\ \gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-j,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v)\right\}\right\}\\
&-\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^q}{(q-1)!\,(-c)^{q+r}}\gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-1,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v) \qquad \mathbf{(4.30)}
\end{aligned}
$$

όπου η $h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)$ έχει ορισθεί στην (2.17), και

$$\xi_{h,\delta}=\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-\rho_h\right)^{n_i}}{\prod_{j=1,j\neq h}^{n}\left(\rho_j-\rho_h\right)} \qquad \mathbf{(4.31)}$$

και

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{k,\delta,iq,r,s}(x,y,v)\\
&\qquad=\int_v^\infty(-\alpha)^r e^{-s\alpha}\,h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)b_{iq}(\alpha-v)d\alpha\\
&\qquad+\int_0^\infty\int_0^z(-z)^r e^{-sz}\,h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|z-\alpha)b_{iq}(a)d\alpha dz \qquad \mathbf{(4.32)}
\end{aligned}
$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά, δοθέντος της (2.17) η (4.7) μπορεί να γραφεί ως

$$
\begin{aligned}
\beta_{k,\delta}(u)&=\int_u^\infty\int_0^\infty w(x,y,u)\,h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)dydx \qquad \mathbf{(4.33)}\\
&=\int_0^\infty\int_u^\infty w(x+u,y-u,u)\,h_{1,\delta}^{*k}(x,y|0)dydx
\end{aligned}
$$

Από την στιγμή της χρεοκοπίας (4.2) το Θεώρημα 2.2.1 παίρνουμε ότι για $k=0,1,2,\dots$

$$m_{k,\delta}(u)=\varphi_\delta\int_0^u m_{k,\delta}(u-y)\,f_\delta(y)dy+v_{k,\delta}(u) \qquad \mathbf{(4.34)}$$

όπου

$$v_{k,\delta}(u)\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\int_0^u m_{k-j,\delta}(u-j)\int_0^\infty h_\delta^{*j}(x,y|0)\,dxdy+\beta_{k,\delta}(u)$$
$$+\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x+u,y-u,v+u)\,h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)dvdxdy.$$

Για $u=0$ η (4.34) γίνεται

$$m_{k,\delta}(0)=\ \beta_{k,\delta}(0)+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)dvdxdy \qquad \mathbf{(4.35)}$$

Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της (4.14) με s και το $s\to\infty$, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to\infty}s\tilde{m}_{k,\delta}(s)\\&=\lim_{s\to\infty}s\tilde{\beta}_{k,\delta}(s)\\&+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\lim_{s\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-cs)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(s)\right\}\right\}\left\{\lim_{s\to\infty}s\tilde{m}_{k-r,\delta}(s)\right\}\\&-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\lim_{s\to\infty}s\sigma_{k,r,\delta}(s) \qquad \mathbf{(4.36)}\end{aligned}$$

Από το θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε ότι $\lim_{s\to\infty}s\tilde{m}_{k,\delta}(s)=m_{k,\sigma}(0)$ και $\lim_{s\to\infty}s\tilde{\beta}_{k,\delta}(s)=\beta_{k,\delta}(0)$, οπότε η (4.36) γράφεται ως

$$m_{k,\delta}(0)=\beta_{k,\delta}(0)-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\lim_{s\to\infty}s\sigma_{k,r,\delta}(s) \qquad \mathbf{(4.37)}$$

Από τις (4.35) και (4.37) παίρνουμε ότι

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)dvdxdy=-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\lim_{s\to\infty}s\sigma_{k,r,\delta}(s) \qquad \mathbf{(4.38)}$$

Για να λύσουμε την (4.38) θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε το όριο $\lim_{s\to\infty}s\sigma_{k,r,\delta}(s)$ για $r=0,1,2,\ldots,k$.

Για $r=1,2,\ldots,k$ από την (4.23) παίρνουμε ότι

$$\sigma_{k,r,\delta}(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{q+r}\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!}\ \tilde{\alpha}_{k-r,\delta,iq}^{(q+r-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right),\quad \mathbf{(4.39)}$$

$$\tilde{\alpha}_{k,\delta,iq}^{(r)}(s)=\int_0^\infty(-z)^r e^{-sz}\int_0^z m_{k,\delta}(z-\alpha)b_{iq}(\alpha)d\alpha dz \qquad \mathbf{(4.40)}$$

Όπως ορίστηκαν οι $h_{1,\delta}^{*k}(x,y|u)$ και $h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|u)$ στις (2.17) και (2.18) έχουμε ότι

$$m_{k,\delta}(u)=\int_0^\infty\int_u^\infty w(x,y,u)\,h_{1,\delta}^{*k}(x,y|u)dxdy \\ +\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\;\,h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|u)dvdxdy \qquad (\mathbf{4.41})$$

Βάζοντας τώρα την (4.41) στην (4.40), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{k,\delta,iq}^{(r)}(s)&=\int_0^\infty(-z)^r e^{-sz}\int_0^z\left\{\int_0^\infty\int_{z-\alpha}^\infty w(x,y,z-\alpha)\,h_{1,\delta}^{*k}(x,y|z-\alpha)dxdy\right.\\&\left.+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\;\,h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|z-\alpha)dvdxdy\right\}b_{iq}(\alpha)d\alpha dz\\&=\int_0^\infty\int_\alpha^\infty\int_0^\infty\int_{z-\alpha}^\infty w(x,y,z-\alpha)(-z)^r e^{-sz}h_{1,\delta}^{*k}(x,y|z-\alpha)\,b_{iq}(\alpha)dxdydzd\alpha\\&+\int_0^\infty\int_0^z\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)(-z)^r e^{-sz}h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|z-\alpha)\,b_{iq}(\alpha)dvdxdyd\alpha dz\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_v^\infty w(x,y,v)(-v-\alpha)^r e^{-s(v+\alpha)}h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)\,b_{iq}(\alpha)dxdydvd\alpha\\&+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\int_0^\infty\int_0^z(-z)^r e^{-sz}h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|z-\alpha)b_{iq}(\alpha)d\alpha dzdvdxdy\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\int_0^\infty(-v-\alpha)^r e^{-s(v+\alpha)}h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)\,b_{iq}(\alpha)d\alpha dvdxdy\\&+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\int_0^\infty\int_0^z(-z)^r e^{-sz}h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|z-\alpha)b_{iq}(\alpha)d\alpha dzdvdxdy\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,\gamma_{k,\delta,iq,r,s}(x,y,v)dvdxdy \qquad (\mathbf{4.42})\end{aligned}$$

όπου $\gamma_{k,\delta,iq,r,s}(x,y,v)$ δίνεται από την (4.32). Έτσι, από την (4.39) έχουμε

$$\sigma_{k,r,\delta}(s)=\sum_{i=1}^m\sum_{q=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{q+r}\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!} \\ \times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,\gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-j,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v)dvdxdy \qquad (\mathbf{4.43})$$

έτσι για $r=1,2,\dots,k$ έχουμε ότι

$$\lim_{s\to\infty} s\sigma_{k,r,\delta}(s)$$

$$= \lim_{s\to\infty}\left\{s\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{q+r}\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!}\right.$$

$$\left.\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,\gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-j,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v)dvdxdy\right\}$$

$$= \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^q\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-c\right)^{-1}}{(q-1)!\,(-c)^{q+r-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,\gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-1,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v)dvdxdy$$

$$+\lim_{s\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\sum_{j=2}^{q+r}\frac{(q+r-1)!}{(q-1)!}\frac{\lambda_i^q\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-c\right)^{-1}(\lambda_i+\delta-cs)^{-(j-1)}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!}\right.$$

$$\left.\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,\gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-j,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v)dvdxdy\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^q}{(q-1)!\,(-c)^{q+r}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,v)\,\gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-1,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v)dvdxdy \qquad \mathbf{(4.44)}$$

Ακόμα, από την (4.26) και την (4.29) παίρνουμε ότι

$$\lim_{s\to\infty} s\sigma_{k,0,\delta}(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s\sum_{h=1}^{n}Q_{k,\delta}(\rho_h)\prod_{j=1,j\neq h}^{n}\left(\frac{s-\rho_j}{\rho_h-\rho_j}\right)}{\prod_{x=1}^{m}(\lambda_x+\delta-cs)^{n_x}}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\sum_{h=1}^{n}Q_{k,\delta}(\rho_h)\prod_{j=1,j\neq h}^{n}\left(\frac{1-\frac{\rho_j}{s}}{\rho_h-\rho_j}\right)}{\prod_{x=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-c\right)^{n_i}}$$

$$=\frac{1}{(-c)^n}\sum_{h=1}^{n}Q_{k,\delta}(\rho_h)\prod_{j=1,j\neq h}^{n}\left(\frac{1}{\rho_h-\rho_j}\right) \qquad \mathbf{(4.45)}$$

Τώρα αν αντικαταστήσουμε την (4.28) στην (4.45) παίρνουμε ότι

$$\lim_{s\to\infty} s\sigma_{k,0,\delta}(s)=-\sum_{h=1}^{n}\xi_{h,\delta}\left\{\tilde{\beta}_{\delta,k}(\rho_h)\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-c\rho_h)^{j+r}}\tilde{b}_{ij}(\rho_h)\right\}\widetilde{m}_{k-r,\delta}(\rho_h)$$

$$\left.-\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sigma_{k,r,\delta}(\rho_h)\right\} \qquad \mathbf{(4.46)}$$

όπου η $\xi_{h,\delta}$ έχει ορισθεί στην (4.31). Ας μελετήσουμε την (4.46) ανά όρο. Αρχικά, παρατηρούμε ότι από την (4.33) ότι

$$\tilde{\beta}_{k,\delta}(\rho_h) = \int_0^\infty e^{-\rho_h v} \int_v^\infty \int_0^\infty w(x,y,v)\, h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)dydxdv$$
$$= \int_{\mathbf{0}}^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x,y,v)\, e^{-\rho_h v} h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)dvdxdy \qquad (\mathbf{4.47})$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι από την (4.41) έχουμε ότι

$$\widetilde{m}_{k-r,\delta}(\rho_h) = \int_0^\infty e^{-\rho_h v} \int_0^\infty \int_v^\infty w(x,y,v)\, h_{1,\delta}^{*k-r}(x,y|v)dxdydv$$
$$+ \int_0^\infty e^{-\rho_h z} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x,y,v)\;\; h_{2,\delta}^{*k-r}(x,y,v|z)dvdxdydz$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x,y,v) \Big\{ e^{-\rho_h v} h_{1,\delta}^{*k-r}(x,y|v)$$
$$+ \int_0^\infty e^{-\rho_h z}\, h_{2,\delta}^{*k-r}(x,y,v|z) \Big\} dvdxdy \qquad (\mathbf{4.48})$$

Έτσι από τις σχέσεις (4.47), (4.48) και (4.43) προκύπτει ότι η (4.46) μπορεί να γραφεί ως

$$\lim_{s\to\infty} s\sigma_{k,0,\delta}(s) = -\sum_{h=1}^{n} \xi_{h,\delta} \Bigg\{ \int_{\mathbf{0}}^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x,y,v) \Bigg\{ e^{-\rho_h v} h_{1,\delta}^{*k}(x,y|v)$$
$$+ \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^j j(j+1)\cdots(j+r-1)}{(\lambda_i+\delta-c\rho_h)^{j+r}} \tilde{b}_{ij}(\rho_h) \right\}$$
$$\times \left\{ e^{-\rho_h v} h_{1,\delta}^{*k-r}(x,y|v) + \int_0^\infty e^{-\rho_h z}\, h_{2,\delta}^{*k-r}(x,y,v|z) \right\}$$
$$- \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sum_{i=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{q+r} \frac{(q+r-1)!}{(q-1)!} \frac{\lambda_i^q (\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{q+r-j}(q+r-j)!}$$
$$\times \gamma_{k-r,\delta,iq,q+r-j,\frac{\lambda_i+\delta}{c}}(x,y,v) \Bigg\} dvdxdy \Bigg\} \qquad (\mathbf{4.49})$$

Τέλος, αντικαθιστούμε την (4.44) και την (4.49) στην (4.38). Θέτοντας $w(x,y,v) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 v}$ στην (4.38) παίρνουμε την (4.30) με αναστροφή ως προς s_1, s_2 $και$ s_3. □

Το θεώρημα 4.2.2 γενικεύει ότι

$$h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|0) = \sum_{h=1}^{n} \xi_{h,\delta}\, e^{-\rho_h v} h_{1,\delta}^{*0}(x,y|v)$$

που αποδεικνύεται από τους Willmot και Woo (2012). Με βάση το Θεώρημα 2.1 η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την $m_{0,\delta}(u)$ ορίζεται πλήρως αν δίνεται η $h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|0)$, δηλαδή

$$m_{0,\delta}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{0,\delta}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{0,\delta}(\mathrm{u}) \qquad \mathbf{(4.50)}$$

όπου

$$v_{0,\delta}(\mathrm{u}) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u, u)\, h_{1,\delta}^{*0}(x,y|0) dx dy + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x+u, y-u, v+u)\, h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|0) dv dx dy$$

Επιπλέον, από την (2.25), η (4.50) λύνεται ως

$$m_{0,\delta}(u) = \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u v_{0,\delta}(y) g_\delta(u-y) dy + v_{0,\delta}(u) \qquad \mathbf{(4.51)}$$

Από την (4.41) παίρνουμε ότι

$$m_{0,\delta}(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u)\, h_{1,\delta}^{*0}(x,y|u) dx dy + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x,y,v)\ \ h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|u) dv dx dy \qquad \mathbf{(4.52)}$$

Αν τώρα εξισώσουμε τις (4.51) και (4.52) με την συνάρτηση ποινής να είναι ίση με $w(x,y,v) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 v}$ μπορεί να δειχθεί ότι η $h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|u)$ αποτελεί μια συνάρτηση της $h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|0)$.

Στο Θεώρημα 4.2.2, είδαμε ότι η $h_{2,\delta}^{*k}(x,y,v|0)$ είναι μια συνάρτηση της $h_{2,\delta}^{*r}(x,y,v|u)$ για $u \geq 0$ και $r = 0,1,\dots,k-1$. Επιπλέον, είδαμε ότι η $h_{2,\delta}^{*r}(x,y,v|u)$ για $u \geq 0$ μπορεί να γραφεί εκφραζόμενη σε όρους της $h_{2,\delta}^{*r}(x,y,v|0)$ όπως περιεγράφηκε στην τελευταία παράγραφο. Έτσι, η $h_{2,\delta}^{*r}(x,y,v|0)$ μπορεί να λυθεί αναδρομικά ως προς k από την (4.30). Για παράδειγμα, δοθέντος της $h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|0)$για $u \geq 0$, η (4.30) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουμε την $h_{2,\delta}^{*1}(x,y,v|0)$. Στην συνέχεια εξισώνοντας την (2.25) με την (4.41) με $k=1$ παίρνουμε την $h_{2,\delta}^{*1}(x,y,v|u)$ για $u \geq 0$ και η (4.30) χρησιμοποιείται ξανά για να προσδιορίσουμε την $h_{2,\delta}^{*2}(x,y,v|0)$, και ούτω κάθε εξής.

4.2.3. Αριθμητικά παραδείγματα

Σε αυτή την ενότητα, παρατίθενται δύο παραδείγματα για να δούμε σε πράξη την χρήση των αποτελεσμάτων της ενότητας 4.2.2.

Στο πρώτο παράδειγμα, διαλέγουμε ένα μοντέλο, κατάλληλο ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά από το Κεφάλαιο 3. Στο δεύτερο παράδειγμα, Βλέπουμε την χρησιμότητα του μοντέλου σε περιπτώσεις που άλλες προσεγγίσεις φαίνεται να μην είναι τόσο κατάλληλες. Η κατανομή των μεγεθών των απαιτήσεων, δεν είναι Coxian.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε ένα Sparre Andersen μοντέλο, όπου η από κοινού κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων και τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι η

$$f(t,y) = 4te^{-2t}(ye^{-y}) \qquad \mathbf{(4.53)}$$

Υποθέτοντας ότι $\delta = 0$ και $c = 3$, η εξίσωση Lundberg έχει μη αρνητικές ρίζες της $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = 1$.

Μας ενδιαφέρει να βρούμε τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας, δηλαδή την $E[TI(T<\infty)|U_0 = u]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 χρειαζόμαστε τις $h^{*1}_{1,0}(x,y|0)$ και $h^{*1}_{2,0}(x,y,v|0)$ για να λύσουμε την $E[TI(T<\infty)|U_0 = u]$.

Αρχικά, από την (2.17) έχουμε ότι για $k = 0,1,2,\ldots$

$$h^{*k}_{1,0}(x,y|u) = \frac{4}{3^{k+2}}(x-u)^{k+1}(x+y)e^{-\frac{5}{3}x-y+\frac{2}{3}u}, x > u \qquad \mathbf{(4.54)}$$

Έπειτα, είναι απαραίτητο να ορίσομε την ποσότητα $h^{*0}_{2,0}(x,y,v|u)$ για $u \geq 0$ για να υπολογίσουμε το $h^{*1}_{2,0}(x,y,v|0)$.Ας σημειώσουμε ότι την $h^{*0}_{2,0}(x,y,v|u)$ μπορούμε να την πάρουμε από την $h^{*0}_{2,0}(x,y,v|0)$ όπως θα δείξουμε παρακάτω.

Αρχικά για $k = 0$ η (4.30) γίνεται

$$h^{*0}_{2,\delta}(x,y,v|0) = \sum_{h=1}^{2}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{2}{3}-\rho_h\right)^2}{\prod_{j=1,j\neq h}^{2}(\rho_j-\rho_h)}\right\}e^{-\rho_h v}h^{*0}_{1,\delta}(x,y|v) \qquad \mathbf{(4.55)}$$

όπου $h^{*0}_{1,\delta}(x,y|v)$ ορίζεται στην (4.54). Από την συνάρτηση Gerber-Shiu παίρνουμε

$$m_{0,0}(u) = E\left[e^{-s_1 U_{T-}-s_2|U_T|-s_3 R_{N_{T-1}}}I(T<\infty)\middle|U_0 = u\right] \qquad \mathbf{(4.56)}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η $m_{0,0}(u)$ στην (4.56) ικανοποιεί την

$$m_{0,0}(u) = \varphi_0\int_0^u m_{0,0}(u-y)\,f_0(y)dy + v_{0,0}(u) \qquad \mathbf{(4.57)}$$

όπου

$$\varphi_0=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{h_{1,\delta}^{*0}(x,y|v)+\int_0^x h_{2,\delta}^{*0}(x,y,v|0)dv\right\}dx$$

$$\begin{aligned}v_{0,0}(u)=&\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s_1(x+u)-s_2(y-u)-s_3u}\,h_{1,0}^{*0}(x,y|0)dxdy\\&+\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1(x+u)-s_2(y-u)-s_3(u+v)}\,h_{2,0}^{*0}(x,y,v|0)dvdxdy\\&=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3u}\,h_{1,0}^{*0}(x-u,y+u|0)dxdy\\&+\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^x e^{-s_1x-s_2y-s_3v}\,h_{2,0}^{*0}(x-u,y+u,v-u|0)dvdxdy\end{aligned}$$

Από την (2.25), η (4.57) λύνεται ως

$$m_{0,0}(u)=\sum_{n=1}^\infty\varphi_0^n\int_0^u v_{0,0}(z)\,f_0^{*n}(u-z)dz+v_{0,0}(u)$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{n=1}^\infty\varphi_0^n\int_0^u\left\{\int_0^\infty\int_z^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3z}\,h_{1,0}^{*0}(x-z,y+z|0)dxdy\right.\\&\left.+\int_0^\infty\int_z^\infty\int_z^x e^{-s_1x-s_2y-s_3v}\,h_{2,0}^{*0}(x-z,y+z,v-z|0)dvdxdy\right\}\times f_0^{*n}(u-z)dz\\&+\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3u}\,h_{1,0}^{*0}(x-u,y+u|0)dxdy\\&+\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^x e^{-s_1x-s_2y-s_3v}\,h_{2,0}^{*0}(x-u,y+u,v-u|0)dvdxdy\qquad(\mathbf{4.58})\end{aligned}$$

Έτσι, από την (4.41) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}m_{0,0}(u)=&\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3u}\,h_{1,0}^{*0}(x,y|u)dxdy\\&+\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^z e^{-s_1x-s_2y-s_3v}\,h_{2,0}^{*0}(x,y,v|u)dvdxdy\qquad(\mathbf{4.59})\end{aligned}$$

Αν εξισώσουμε τώρα την (4.59) και την (4.58) μπορεί να δειχθεί αναδρομικά ως προς $s_1, s_2\ \kappa\alpha\iota\ s_3$ ότι

$$\begin{aligned}h_{2,0}^{*0}(x,y,v|u)=&\sum_{n=1}^\infty\varphi_0^n\left\{h_{1,0}^{*0}(x-v,y+v|0)f_0^{*n}(u-v)\right.\\&\left.+\int_0^v h_{2,0}^{*0}(x-z,y+z,v-z|0)f_0^{*n}(u-z)\,dz\right\}\end{aligned}$$

Για $0\le v\le\min(x,u)\,,0\le x<\infty, y\ge 0$ και

$$\begin{aligned}h_{2,0}^{*0}(x,y,v|u)=&\sum_{n=1}^\infty\varphi_0^n\int_0^u h_{2,0}^{*0}(x-z,y+z,v-z|0)f_0^{*n}(u-z)dz\\&+h_{2,0}^{*0}(x-u,y+u,v-u|0)\end{aligned}$$

για $u < v \leq x, u \leq x < \infty, y \geq 0$.

Τώρα έχοντας προσδιορίσει το $h_{2,0}^{*0}(x,y,v|u)$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $h_{2,0}^{*1}(x,y,v|0)$ από την (4.30). Τέλος, με υπολογισμένες όλες τις ποσότητες αυτού του παραδείγματος, και κάνοντας χρήση της (2.25) η λύση της $E[TI(T<\infty)|U_0 = u]$ δίνεται από την

$$E[TI(T<\infty)|U_0 = u] = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0^n \int_0^u v_{1,0}(y)\, f_0^{*n}(u-y)dy + v_{1,0}(u) \qquad \mathbf{(4.60)}$$

όπου

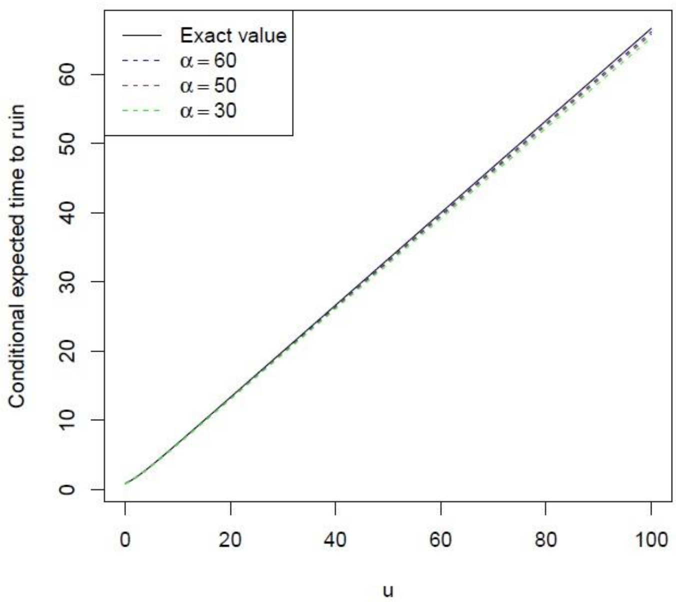
$$\begin{aligned} v_{1,0}(u) = &\int_0^u E[I(T<\infty)|U_0 = u-y] \\ &\times \int_0^\infty \left\{ h_{1,0}^{*1}(x,y|0) + \int_0^x h_{2,0}^{*0}(x,y,v|0)dv \right\} dxdy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \left\{ h_{1,0}^{*1}(x,y|0) + \int_0^x h_{2,0}^{*0}(x,y,v|0)dv \right\} dxdy \qquad \mathbf{(4.61)} \end{aligned}$$

Η λύση της $E[TI(T<\infty)|U_0 = u]$ στην (4.60) περιλαμβάνει ένα απειροστό άθροισμα, οπότε χρησιμοποιούμε μια προσέγγιση με πεπερασμένο αριθμό α όρων. Στην ενότητα 4.1 η προσέγγιση του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας $E[T|T<\infty, U_0 = u] = E[TI(T<\infty)|U_0 = u]/E[I(T<\infty)|U_0 = u]$ έχει γίνει με διαφορετική τιμή του α.

Προκυμμένου να συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις, η ακριβής τιμή του $E[T|T<\infty, U_0 = u]$ δίνεται και στην ενότητα 4.1.

Στον Πίνακα 4.1 βλέπουμε τις προσεγγιστικές και τις πραγματικές τιμές της $E[T|T<\infty, U_0 = u]$ για α=30, α=50 και α=60

Πίνακας 4.1



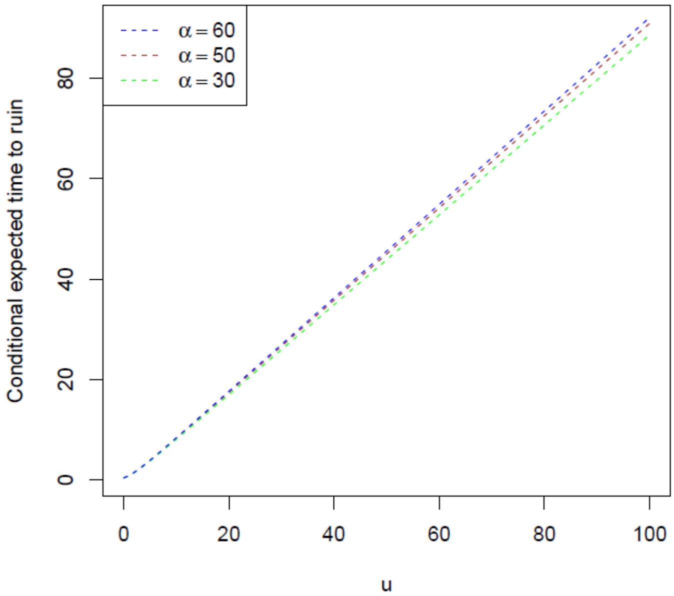
Παράδειγμα 2

Σε αυτό το παράδειγμα υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Erlang(2) και τα μεγέθη των ζημιών την Erlang(1/2), δηλαδή η από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι η

$$f(t, y) = 4te^{-2t} \frac{\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{4}}}{\sqrt{\pi}}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\delta = 0$ και $c = 3$. Παρόμοια με το παράδειγμα 1 παίρνουμε τον Πίνακα 4.2 με τις αναμενόμενες τιμές της $E[T|T < \infty, U_0 = u]$για α=30, α=50 και α=60

Πίνακας 4.2



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΑΛΛΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο 1, αναφέρθηκε ότι η από κοινού κατανομή των ροπών των διάφορων παραγόντων που σχετίζονται με την χρεοκοπία μπορεί να ληφθεί από τις επι μέρους κατανομές των παραγόντων αυτών. Ωστόσο, σε αυτό το κεφάλαιο η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία και άλλων παραγόντων που σχετίζονται με την χρεοκοπία υπόκεινται στο Sparre Andersen μοντέλο με εκθετικές απαιτήσεις.

5.1. Εισαγωγή

Θεωρούμε το Sparre Andersen μοντέλο όπως περιεγράφηκε στο Κεφάλαιο 1. Είναι σκόπιμο να θυμίσουμε ότι οι περιθώριες κατανομές των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων είναι οι $k(t)$ και $p(y)$ αντίστοιχα.

Ακόμα, έχουμε τις συναρτήσεις χρεοκοπίας που αναφέραμε στην Ενότητα 1.6, οι οποίες ορίζονται από τον χρόνο χρεοκοπίας T και το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία N_T. Αυτές έχουν επίσης το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία U_{T-}, το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας $|U_T|$ και το μικρότερο πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία X_T. Επιπλέον, η μεταβλητή R_{N_T-1} συμβολίζει το πλεόνασμα αμέσως μετά από την προτελευταία απαίτηση πριν την χρεοκοπία. Αν επέλθει χρεοκοπία με την πρώτη απαίτηση τότε η R_{N_T-1} ισούται με u, αν έχουμε χρεοκοπία με την εμφάνιση της δεύτερης απαίτησης τότε η R_{N_T-1} αποτελεί το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν την χρεοκοπία. Σε αυτό το κεφάλαιο η από κοινού κατανομή αυτών των ποσοτήτων έχει την παρακάτω μορφή της γενικευμένης Gerber-Shiu συνάρτησης (Shi (2013)).

Για $r \in (0,1]$ και $\delta \geq 0$ έχουμε

$$m_{r,\delta}(u) = E\left[r^{N_T} e^{-\delta T} w\left(U_{T-}, |U_T|, X_T, R_{N_T-1}\right) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] \qquad (\mathbf{5.1})$$

5.2. Δομικές ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu

Προκυμμένου να αναλύσουμε την (5.1), ας ορίσουμε πρώτα τις ακόλουθες συναρτήσεις που εμπεριέχονται στην (5.1).

Για την χρεοκοπία με την πρώτη απαίτηση έχουμε

$$g_1(x,y|u) = \begin{cases} \frac{1}{c} f\left(\frac{x-u}{c}, x+y\right) & ,x > u \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \quad \mathbf{(5.2)}$$

ως την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία (x) και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας (y). Για την χρεοκοπία όταν συμβαίνει στην n-οστή απαίτηση, όταν $n = 2,3, \ldots$, έχουμε

$$g_n(t,x,y,v|u), \quad v < x, \quad \mathbf{(5.3)}$$

ως την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας (t), του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία (x), του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας (y) και του πλεονάσματος αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν την χρεοκοπία (v). Εξ' ορισμού, η $g_1(x,y|u)$ είναι ισοδύναμη με την $h_1(x,y|u)$ όπως ορίστηκε στην (2.5) και το άθροισμα $\sum_{n=2}^{\infty} g_n(t,x,y,v|u)$ είναι ισοδύναμο με την $h_2(t,x,y,v|u)$ όπως ορίστηκε στην (2.6).

Βασιζόμενοι στην (5.2) και την (5.3), ορίζουμε και τις

$$g_{1,r,\delta}(x,y|u) = re^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} g_1(x,y|u) \quad \mathbf{(5.4)}$$

$$g_{2+,r,\delta}(x,y,v|u) = \sum_{n-2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g_n(t,x,y,v|u)dt \quad \mathbf{(5.5)}$$

$$g_{r,\delta}(x,y|u) = g_{1,r,\delta}(x,y|u) + \int_0^x g_{2+,r,\delta}(x,y,v|u)\, dv$$

Θεώρημα 5.1 *Θεωρούμε ένα εξαρτημένο* Sparre Andersen *μοντέλο όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 1. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu (5.1) ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\begin{aligned} m_{r,\delta}(u) = \varphi_{r,\delta} \int_0^u & m_{r,\delta}(u-y)\, f_{r,\delta}(y)dy \\ & + \int_u^{\infty} \int_0^{\infty} w(u+x, y-u, u, u)\, g_{1,r,\delta}(x,y|0)dxdy \\ & + \int_u^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^x w(u+x, y-u, u, v \\ & + u)\, g_{2+,r,\delta}(x,y,v|0)dvdxdy \end{aligned} \quad \mathbf{(5.6)}$$

όπου

$$\varphi_{r,\delta} = \int_0^\infty \int_0^\infty g_{r,\delta}(x, y|0)\, dxdy \qquad \mathbf{(5.7)}$$

$$f_{r,\delta}(y) = \frac{1}{\varphi_{r,\delta}} \int_0^\infty g_{r,\delta}(x, y|0)\, dx \qquad \mathbf{(5.8)}$$

<u>Απόδειξη</u>

Στην πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα u, έχουμε

$$\begin{aligned} m_{r,\delta}(u) = &\int_0^u m_{r,\delta}(u-y) \int_0^\infty g_{r,\delta}(x, y|0)\, dxdy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty w(u+x, y-u, u, u)\, g_{1,r,\delta}(x, y|0) dxdy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(u+x, y-u, u, v+u)\, g_{2+,r,\delta}(x, y, v|0) dvdxdy \end{aligned}$$

Η οποία είναι απόρροια της (5.6) αν αντικαταστήσουμε την (5.7) και την (5.8). □

Το θεώρημα 5.1 γενικεύει τα αποτελέσματα του Cheung et al. (2010) και του Landriault et al. (2011) όπου είναι ειδικές περιπτώσεις την (5.1).

Στο υπόλοιπο κεφάλαιο θεωρούμε το Sparre Andersen μοντέλο όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι και τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητα, δηλαδή $f(t, y) = k(t)p(y)$.

Έτσι, η (5.4) γίνεται

$$\begin{aligned} g_{1,r,\delta}(x, y|u) &= re^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p(x+y) \qquad \mathbf{(5.9)} \\ &= \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \left\{ re^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) \bar{P}(x) \right\} \\ &= \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \int_0^\infty g_{1,r,\delta}(x, y|u) dy \end{aligned}$$

Όπου

$$\bar{P}(x) = \int_x^\infty p(y) dy$$

Από τον Cheung et al. (2010), η (5.3) μπορεί να γραφεί ως

$$g_n(t, x, y, v|u) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \int_0^\infty g_n(t, x, y, v|u) dy$$

Για $n = 2,3, \dots$. Οπότε η (5.5) γίνεται

$$g_{2+,r,\delta}(x,y,v|u) = \sum_{n-2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \int_0^{\infty} g_n(t,x,y,v|u)dy \right\} dt$$
$$= \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \int_0^{\infty} g_{2+,r,\delta}(x,y,v|u)dy$$
$$= \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} g_{2+,r,\delta}(x,v|u) \qquad (\mathbf{5.10})$$

Όπου

$$g_{2+,r,\delta}(x,v|u) = \int_0^{\infty} g_{2+,r,\delta}(x,y,v|u)dy$$

Έτσι,

$$g_{r,\delta}(x,y|u) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \left\{ \int_0^{\infty} g_{1,r,\delta}(x,y|u)dy + \int_0^{x} g_{2+,r,\delta}(x,v|u)dv \right\}$$

Άρα, η (5.8) γίνεται

$$f_{r,\delta}(y) = \frac{1}{\varphi_{r,\delta}} \int_0^{\infty} \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \left\{ \int_0^{\infty} g_{1,r,\delta}(x,y|0)dy + \int_0^{x} g_{2+,r,\delta}(x,v|0)dv \right\} dx \quad \square \quad (\mathbf{5.11})$$

5.3. Από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και άλλων μέτρων χρεοκοπίας με Εκθετικές απαιτήσεις

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετηθούν τα προηγούμενα αποτελέσματα κάτω υπό την υπόθεση ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, δηλαδή

$$p(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y \geq 0 \tag{5.12}$$

Οπότε η (5.11) γίνεται

$$f_{r,\delta}(y) = \beta e^{-\beta y} \tag{5.13}$$

Έχει αποδειχθεί από τον Landriault et al. (2011) ότι η $\varphi_{r,\delta}$ που ορίστηκε στη (5.7) ικανοποιεί την

$$\varphi_{r,\delta} = r\tilde{k}\left(\delta + c\beta\left(1 - \varphi_{r,\delta}\right)\right) \tag{5.14}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι

$$\bar{G}_{r,\delta}(u) = E\left[r^{N_T}e^{-\delta T}I(T < \infty)\middle|U_0 = u\right] \tag{5.15}$$

Στο Landriault et al. (2011) έχει αποδειχθεί ότι

$$\bar{G}_{r,\delta}(u) = \varphi_{r,\delta}\int_0^u \bar{G}_{r,\delta}(u-y)\beta e^{-\beta y}dy + \varphi_{r,\delta}e^{-\beta u} \tag{5.16}$$

Και η $\bar{G}_{r,\delta}(u)$ δίνεται από την

$$\bar{G}_{r,\delta}(u) = \varphi_{r,\delta}e^{-\beta(1-\varphi_{r,\delta})u} \tag{5.17}$$

Όπου η $\varphi_{r,\delta}$ ορίστηκε στην (5.14). από τα αποτελέσματα της $\bar{G}_{r,\delta}(u)$ και το Θεώρημα του Lagrange, ο Landriault et al. (2011) έδειξε ότι η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας (t) και του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία (n) δοθέντος αρχικού πλεονάσματος (u) δίνεται από την

$$h(t,n|u) = \begin{cases} e^{-\beta(u+ct)}k(t), & t \geq 0, n = 1 \\ \dfrac{nu+ct}{n(n-1)}\left\{\dfrac{\beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}e^{-\beta(u+ct)}}{(n-2)!}\right\}k^{*n}(t), & t \geq 0, n = 2,3,\dots. \end{cases} \tag{5.18}$$

όπου $k^{*n}(t) = \int_0^t k^{*(n-1)}(t-x)k(x)dx$ με $k^{*1}(t) = k(t)$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι χρήσιμα για να μελετηθεί η συνάρτηση Gerber-Shiu στην μορφή

$$m_{r,\delta,1234}(u) = E\left[r^{N_T}e^{-\delta T}e^{-s_1 U_{T-} - s_2|U_T| - s_3 X_T - s_4 R_{N_T - 1}}I(T < \infty)\middle|U_0 = u\right] \tag{5.19}$$

Θεώρημα 5.2 *Θεωρούμε ένα εξαρτημένο* Sparre Andersen *μοντέλο όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 1 στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι και τα μεγέθη των ζημιών είναι ανεξάρτητα, δηλαδή $f(t,y) = k(t)p(y)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα μεγέθη των ζημιών έχουν κατανομή όπως ορίστηκε στην (5.12). Με $\varphi_{r,\delta}$ και $\bar{G}_{r,\delta}(u)$ να δίνονται* *από τις (5.14) και (5.17) αντίστοιχα η συνάρτηση Gerber-Shiu (5.19) μπορεί να γραφεί ως*

$$m_{r,\delta,1234}(u) = \Theta_{r,\delta}(s_1,s_2,s_3,s_4)\left\{(s_1+s_3+s_4)e^{-(s_1+s_3+s_4+\beta)u} + \beta\,\bar{G}_{r,\delta}(u)\right\} \quad \mathbf{(5.20)}$$

Όπου

$$\Theta_{r,\delta}(s_1,s_2,s_3,s_4) = \frac{\beta}{\beta+s_2}\left\{\frac{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_3+s_4}\right\} \times \left\{\frac{r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big)}{s_1+s_4+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)}\right\}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά, οι συναρτήσεις (5.9) και (5.10) μπορούν λόγω της (5.12) και δοθέντος ότι $u = 0$ να γραφούν ως:

$$g_{1,r,\delta}(x,y|0) = re^{-\delta\left(\frac{x}{c}\right)}\frac{1}{c}k\left(\frac{x}{c}\right)\beta e^{-\beta(x+y)} \quad \mathbf{(5.21)}$$

$$g_{2+,r,\delta}(x,y,v|0) = \beta e^{-\beta y}g_{2+,r,\delta}(x,v|0) \quad \mathbf{(5.22)}$$

Αντικαθιστώντας τις (5.13), (5.21) και (5.22) στην (5.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&m_{r,\delta}(u)\\
&= \varphi_{r,\delta}\int_0^u m_{r,\delta,1234}(u-y)\,\beta e^{-\beta y}dy\\
&+ \int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_3u-s_4u}\left\{re^{-\delta\left(\frac{x}{c}\right)}\frac{1}{c}k\left(\frac{x}{c}\right)\beta e^{-\beta(x+y)}\right\}dxdy\\
&+ \int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_3u-s_4(u+v)}\left\{\beta e^{-\beta y}g_{2+,r,\delta}(x,v|0)\right\}dvdxdy\\
&= \varphi_{r,\delta}\int_0^u m_{r,\delta,1234}(u-y)\,\beta e^{-\beta y}dy\\
&+ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1(u+ct)-s_2y-s_3u-s_4u}\left\{re^{-\delta t}k(t)\beta e^{-\beta(ct+y+u)}\right\}dtdy\\
&+ \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1(u+x)-s_2y-s_3u-s_4(u+v)}\left\{\beta e^{-\beta(y+u)}g_{2+,r,\delta}(x,v|0)\right\}dvdxdy\\
&= \varphi_{r,\delta}\int_0^u m_{r,\delta,1234}(u-y)\,\beta e^{-\beta y}dy + \frac{\beta}{\beta+s_2}re^{-(s_1+s_3+s_4+\beta)u}\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big)\\
&+ \frac{\beta}{\beta+s_2}e^{-(s_1+s_3+s_4+\beta)u}\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1x-s_4v}\,g_{2+,r,\delta}(x,v|0)dvdx\\
&= \varphi_{r,\delta}\int_0^u m_{r,\delta,1234}(u-y)\,\beta e^{-\beta y}dy\\
&+ \frac{\beta}{\beta+s_2}e^{-(s_1+s_3+s_4+\beta)u}\xi_{r,\delta}(s_1,s_4) \qquad \mathbf{(5.23)}
\end{aligned}$$

όπου

$$\xi_{r,\delta}(s_1,s_4) = r\tilde{k}\big(\delta + c(s_1+\beta)\big) + \int_0^\infty \int_0^x e^{-s_1 x - s_4 v}\, g_{2+,r,\delta}(x,v|0)\,dv\,dx$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της (5.23) έχουμε

$$\widetilde{m}_{r,\delta,1234}(z) = \varphi_{r,\delta}\widetilde{m}_{r,\delta,1234}(z)\frac{\beta}{\beta+z} + \frac{\beta}{\beta+s_2}\left\{\frac{1}{s_1+s_3+s_4+\beta+z}\right\}\xi_{r,\delta}(s_1,s_4) \qquad (\mathbf{5.24})$$

Η (5.24) μπορεί να γραφεί κα ως

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_{r,\delta,1234}(z) &= \frac{\beta}{\beta+s_2}\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)\left\{\frac{1}{s_1+s_3+s_4+\beta+z}\right\}\left\{\frac{\beta+z}{\beta(1-\varphi_{r,\delta})+z}\right\}\\ &= \frac{\beta}{\beta+s_2}\left\{\frac{\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_3+s_4}\right\}\left\{\frac{s_1+s_3+s_4}{s_1+s_3+s_4+\beta+z}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\beta\varphi_{r,\delta}}{\beta(1-\varphi_{r,\delta})+z}\right\} \qquad (\mathbf{5.25})\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας, την (5.25) ως προς z παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_{r,\delta,1234}(z) &= \frac{\beta}{\beta+s_2}\left\{\frac{\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_3+s_4}\right\}\left\{(s_1+s_3+s_4)e^{-(s_1+s_3+s_4+\beta)u}\right.\\ &\quad\left.+\beta\bar{G}_{r,\delta}(u)\right\} \qquad (\mathbf{5.26})\end{aligned}$$

όπου η $\bar{G}_{r,\delta}(u)$ έχει οριστεί στην (5.17).

Για να οριστικοποιήσουμε την (5.26), απομένει να ορίσουμε την $\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)$. Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στο Cheung et al. (2010) μπορεί να χρησιμοποιηθεί εδώ.

$$m_{r,\delta,1234}(u) = E\left[r^{N_T}e^{-\delta T}e^{-s_1 U_{T-}-s_4 R_{N_{T-1}}}I(T<\infty)\middle|U_0=u\right]$$

Από την (5.26) με $s_2 = s_3 = 0$, παίρνουμε

$$m_{r,\delta,14}(u) = \frac{\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\left\{(s_1+s_4)e^{-(s_1+s_4+\beta)u}+\beta\bar{G}_{r,\delta}(u)\right\} \qquad (\mathbf{5.27})$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}m_{r,\delta,14}(u) &= \int_0^\infty re^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} m_{r,\delta,14}(u+ct-y)\,\beta e^{-\beta y}dy\right.\\ &\quad\left.+\int_{u+ct}^\infty e^{-s_1(u+ct)-s_4 u}\,\beta e^{-\beta y}dy\right\}k(t)dt \qquad (\mathbf{5.28})\end{aligned}$$

Η (5.28) μπορεί να γραφεί απλούστερα χρησιμοποιώντας τις (5.27) και (5.16)

$$
\begin{aligned}
m_{r,\delta,14}(u) = \int_0^\infty re^{-\delta t} \int_0^{u+ct} & \frac{\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\{(s_1+s_4)e^{-(s_1+s_4+\beta)(u+ct-y)} \\
& + \beta\bar{G}_{r,\delta}(u+ct-y)\}\beta e^{-\beta y}dyk(t)dt \\
& + \int_0^\infty re^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty e^{-s_1(u+ct)-s_4 u}\,\beta e^{-\beta y}dy\,k(t)dt \\
& = \int_0^\infty re^{-\delta t}\frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\left\{e^{-\beta(u+ct)}\left[1-e^{-(s_1+s_4)(u+ct)}\right]\right. \\
& \left. + \frac{\bar{G}_{r,\delta}(u+ct)}{\varphi_{r,\delta}} - e^{-\beta(u+ct)}\right\}k(t)dt \\
& + \int_0^\infty re^{-\delta t}\left\{e^{-(\beta+s_1)(u+ct)-s_4 u}\right\}k(t)dt \\
& = \frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\int_0^\infty re^{-\delta t}\left\{\frac{\bar{G}_{r,\delta}(u+ct)}{\varphi_{r,\delta}}\right. \\
& \left. - e^{-(s_1+s_4+\beta)(u+ct)}\right\}k(t)dt \\
& + e^{-(s_1+s_4+\beta)(u+ct)}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big) \qquad \mathbf{(5.29)}
\end{aligned}
$$

Από τις (5.14) και (5.17) η (5.29) γίνεται

$$
\begin{aligned}
m_{r,\delta,14}(u) = & \frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\left\{\int_0^\infty re^{-\delta t}\, e^{-\beta(1-\varphi_{r,\delta})(u+ct)}k(t)dt\right. \\
& \left. - e^{-(s_1+s_4+\beta)u}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)\right\} + e^{-(s_1+s_4+\beta)u}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big) \\
& = \frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\{\varphi_{r,\delta}e^{-\beta(1-\varphi_{r,\delta})u} \\
& - e^{-(s_1+s_4+\beta)u}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)\} + e^{-(s_1+s_4+\beta)u}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big) \\
& = \frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}\{\bar{G}_{r,\delta}(u) - e^{-(s_1+s_4+\beta)u}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)\} \\
& + e^{-(s_1+s_4+\beta)u}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big) \qquad \mathbf{(5.30)}
\end{aligned}
$$

Εξισώνοντας την (5.27) με την (5.30) παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& \frac{\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}(s_1+s_4)e^{-(s_1+s_4+\beta)u} \\
& \qquad = \left\{r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)\right. \\
& \qquad \left. - \frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)\right\} \\
& \qquad \times e^{-(s_1+s_4+\beta)u} \qquad \mathbf{(5.31)}
\end{aligned}
$$

Αφού η (5.31) είναι αληθής για $u \geq 0$, οι ποσότητες $e^{-(s_1+s_4+\beta)u}$ και στα δύο μέρη είναι ίσα οπότε παίρνουμε

$$\frac{(s_1+s_4)\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}=r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)-\frac{\beta\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)}{\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4}r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)$$

$$\xi_{r,\delta}(s_1,s_4)=-\frac{\big(\beta\varphi_{r,\delta}+s_1+s_4\big)r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)}{s_1+s_4+r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)} \qquad (\mathbf{5.32})$$

Έτσι, αντικαθιστώντας την (5.32) στην (5.26) παίρνουμε την (5.20). □

Το θεώρημα 5.2. παραθέτει γενικεύσεις των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν από τους Cheung et al. (2010) και Landriault et al. (2011).

Στο επόμενο θεώρημα, δίνεται η από κοινού κατανομή των διάφορων μέτρων χρεοκοπίας. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την από κοινού κατανομή των $\left(N_T,T,U_{T-},|U_T|,R_{N_T-1}\right)$ αντί των $\left(N_T,T,U_{T-},|U_T|,X_T,R_{N_T-1}\right)$, χωρίς να χάσουμε την γενικότητά της.

Θεώρημα 5.3 *Υποθέτοντας τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.2 οι από κοινού πυκνότητες που δόθηκαν στις (5.2) και (5.3) ορίζονται ως*

$$g_1(x,y|u)=\frac{1}{c}\beta e^{-\beta(x+y)}k\left(\frac{x-u}{c}\right),\quad x>u,\qquad y\geq 0 \qquad (\mathbf{5.33})$$

$$g_2(t,x,y,v|u)=\frac{\beta^2e^{-\beta(u+ct+y)}}{c}k\left(t-\frac{x-v}{c}\right)k\left(\frac{x-v}{c}\right),t,y,\geq 0\,,x\in[0,u+ct],$$
$$v\in[\max(x-ct,0)\,,x] \qquad (\mathbf{5.34})$$

$$\begin{aligned}g_n=(t,x,y,v|u)\\ &=\frac{\beta^2e^{-\beta(x-v+y)}}{c}k\left(\frac{x-v}{c}\right)h\left(t-\frac{x-v}{c},n-1|u\right)\\ &+\sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{\frac{v-\max(x-ct,0)}{c}}\frac{(cz-v)^j}{j!}\frac{\beta^{j+2}e^{-\beta(x-v+y+cz)}}{c}k\left(\frac{x-v}{c}\right)\\ &\times k^{*j}(z)h\left(t-z-\frac{x-v}{c},n-j-1\middle|u\right)dz,\quad t,y,\geq 0\,,x\in[0,u+ct],\\ &\qquad v\in[\max(x-ct,0)\,,x]\\ &\qquad n=3,4,\ldots, \qquad (\mathbf{5.35})\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $h(t,n|u)$ δίνεται από την σχέση (5.18)

Απόδειξη

Θεωρούμε την

$$m_{r,\delta,124}(u) = E\left[r^{N_T} e^{-\delta T} e^{-s_1 U_{T-} - s_2 |U_T| - s_4 R_{N_{T-1}}} I(T<\infty) \middle| U_0 = u\right]$$

Από την (5.20) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} m_{r,\delta,124}(u) = \frac{\beta}{\beta + s_2} \\ \times \left\{ r\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big) e^{-(s_1+s_4+\beta)u} \frac{s_1 + s_4}{s_1 + s_4 + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big)} \right. \\ \left. + \frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + \beta)\big)}{s_1 + s_4 + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big)} \bar{G}_{r,\delta}(u) \right\} \qquad (\mathbf{5.36}) \end{aligned}$$

Ας αντιστρέψουμε τώρα την (5.36) ως προς r, δ, s_1, s_2 $και$ s_4. Για να το κάνουμε αυτό ας ξεκινήσουμε με το γεγονός ότι προφανώς ισχύει ότι

$$\frac{\beta}{\beta + s_2} = \int_0^\infty e^{-s_2 y} \beta e^{-\beta y}\, dy \qquad (\mathbf{5.37})$$

Έπειτα, χρησημοποιότας ότι

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \frac{s_1 + s_4}{s_1 + s_4 + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big)}{s_1 + s_4} \right\}^n \\ &= 1 \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n \beta^n \int_0^\infty e^{-\delta T} \frac{e^{-c(s_1+s_4)t}}{(s_1 + s_4)^n} e^{-c\beta t}\, k^{*n}(t) dt \qquad (\mathbf{5.38}) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση που δόθηκε στο Landriault et al., δηλαδή την

$$\frac{e^{-ct}}{(s)^n} = \int_{ct}^\infty \frac{(x - ct)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-sx} dx \qquad (\mathbf{5.39})$$

Έτσι, για $n = 1,2, \dots$, η (5.38) γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{s_1 + s_4}{s_1 + s_4 + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big)} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n \beta^n \int_0^\infty e^{-\delta T} \left\{ \int_{ct}^\infty \frac{(x - ct)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(s_1+s_4)x} dx \right\} e^{-c\beta t} k^{*n}(t) dt \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n \beta^n \int_0^\infty \int_{ct}^\infty e^{-\delta T} e^{-(s_1+s_4)x} \frac{(x - ct)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-c\beta t} k^{*n}(t) dx dt \quad (\mathbf{5.40}) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (5.40), ο όρος που βρίσκεται στην δεύτερη σειρά της (5.36) μπορεί να γραφεί ώς

$$r\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)e^{-(s_1+s_4+\beta)u}\left\{\frac{s_1+s_4}{s_1+s_4+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)}\right\}$$

$$=\left\{r\int_0^\infty e^{-\delta T}e^{-s_1(u+ct)-s_4u}e^{-\beta(u+ct)}k(t)dt\right\}$$

$$\times\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n\beta^n\int_0^\infty\int_{ct}^\infty e^{-\delta T}e^{-(s_1+s_4)x}\frac{(x-ct)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-c\beta t}k^{*n}(t)dxdt\right\}$$

$$=r\int_0^\infty e^{-\delta T}e^{-s_1(u+ct)-s_4u}e^{-\beta(u+ct)}k(t)dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n\beta^n\int_0^\infty e^{-\delta T}\int_0^t\left\{e^{-s_1(u+cv)-s_4u}e^{-\beta(u+cv)}k(v)\right\}$$

$$\times\left\{\int_{c(t-v)}^\infty e^{-(s_1+s_4)x}\frac{(x-c(t-v))^{n-1}}{(n-1)!}e^{-c\beta(t-v)}k^{*n}(t-v)dx\right\}dvdt$$

$$=r\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}e^{-s_1x-s_4u}\frac{1}{c}e^{-\beta x}k\left(\frac{x-u}{c}\right)dx$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}r^n\int_0^\infty e^{-\delta T}\int_0^t\int_{c(t-v)}^\infty e^{-s_1(x+u+cv)}e^{-s_4(x+u)}$$

$$\times\frac{\beta^{n-1}(c(t-v)-x)^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\beta(u+ct)}k(v)k^{*(n-1)}(t-v)dxdvdt$$

$$=r\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}e^{-s_1x-s_4u}\frac{1}{c}e^{-\beta x}k\left(\frac{x-u}{c}\right)dx-\sum_{n=1}^{\infty}r^n\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty\int_{x-ct}^x e^{-\delta t-s_1x-s_4v}$$

$$\times\frac{\beta^{n-1}(u+ct-x)^{n-2}}{c(n-2)!}e^{-\beta(u+ct)}k\left(\frac{x-v}{c}\right)k^{*(n-1)}\left(\frac{v+ct-x}{c}\right)dvdxdt \qquad \mathbf{(5.41)}$$

Στην συνέχεια θα αναλύσουμε τον όρο που βρίσκεται στην τελευταία γραμμή της σχέσης (5.36). Από τις (5.38) και (5.39) έχουμε

$$\frac{1}{s_1+s_4+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)}$$

$$=\frac{1}{s_1+s_4}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n\beta^n\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{e^{-c(s_1+s_4)t}}{(s_1+s_4)^n}e^{-c\beta t}\,k^{*n}(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{s_1+s_4}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n\beta^n\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{e^{-c(s_1+s_4)t}}{(s_1+s_4)^n}\left\{\int_{ct}^\infty\frac{(v-ct)^n}{n!}e^{-(s_1+s_4)v}dv\right\}e^{-c\beta t}\,k^{*n}(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s_1+s_4)x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{ct}^\infty e^{-(s_1+s_4)v}\frac{\beta^n(ct-v)^n}{n!}e^{-c\beta t}k^{*n}(t)dvdt$$

Επιπλέον, εξ' ορισμού της $\bar{G}_{r,\delta}(u)$ στην (5.15) έχουμε ότι

$$\bar{G}_{r,\delta}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} h(t, n|u) dt$$

όπου η $h(t, n|u)$ ορίζεται στην (5.18). Επομένως, ο όρος της τελευταίας γραμμής της (5.36) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
&\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + \beta)\big)}{s_1 + s_4 + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s_1 + s_4 + \beta)\big)} \bar{G}_{r,\delta}(u) \\
&\qquad = \left\{ r\beta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-c(s_1+\beta)t} k(t) dt \right\} \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} h(t, n|u) dt \right\} \\
&\qquad \times \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(s_1+s_4)x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_{ct}^{\infty} e^{-(s_1+s_4)v} \frac{\beta^n (ct - v)^n}{n!} e^{-c\beta t} k^{*n}(t) dv dt \right\} \\
&\qquad = \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^{t} e^{-c(s_1+\beta)x} \beta k(x) h(t - x, n - 1|u)\, dx dt \right\} \\
&\qquad \times \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(s_1+s_4)x} dx \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_{ct}^{\infty} e^{-(s_1+s_4)v} \frac{\beta^n (ct - v)^n}{n!} e^{-c\beta t} k^{*n}(t) dv dt \right\} \qquad \mathbf{(5.42)}
\end{aligned}$$

Ας μελετήσουμε τώρα τους όρους της (5.42) σαν δύο ξεχωριστά αθροίσματα. Για το πρώτο έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\left\{\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^{t} e^{-c(s_1+\beta)x} \beta k(x) h(t-x, n-1|u)\, dxdt\right\}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(s_1+s_4)x}\, dx\right\} \\
&\quad = \left\{\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-s_1 x} \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} \frac{\beta e^{-\beta x}}{c} k\left(\frac{x}{c}\right) h\left(t-\frac{x}{c}, n-1\middle|u\right) dxdt\right\}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(s_1+s_4)x}\, dx\right\} \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-s_1 x} \\
&\quad \times \int_0^{x} \left\{\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} \frac{\beta e^{-\beta x}}{c} k\left(\frac{x-v}{c}\right) h\left(t-\frac{x-v}{c}, n-1\middle|u\right) dt\right\} e^{-s_4 v} dvdx \\
&\quad = \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t - s_1 x - s_4 v} \\
&\quad \times \frac{\beta e^{-\beta(x-v)}}{c} k\left(\frac{x-v}{c}\right) h\left(t-\frac{x-v}{c}, n-1\middle|u\right) dvdxdt \\
&\quad = r^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t - s_1 x - s_4 v} \frac{\beta e^{-\beta(u+ct)}}{c} k\left(t-\frac{x-v}{c}\right) k\left(\frac{x-v}{c}\right) dvdxdt \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t - s_1 x - s_4 v} \\
&\quad \times \frac{\beta e^{-\beta(x-v)}}{c} k\left(\frac{x-v}{c}\right) h\left(t-\frac{x-v}{c}, n-1\middle|u\right) dvdxdt \qquad \mathbf{(5.43)}
\end{aligned}
$$

Για το δεύτερο άθροισμα έχουμε

$$\left\{\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^{t} e^{-c(s_1+\beta)x} \beta k(x) h(t-x, n-1|u)\, dxdt\right\}$$
$$\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_{ct}^{\infty} e^{-(s_1+s_4)v} \frac{\beta^n (ct-v)^n}{n!} e^{-c\beta t} k^{*n}(t) dvdt\right\}$$
$$= \left\{\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^{ct} e^{-s_1 x} \frac{\beta e^{-\beta x}}{c} k\left(\frac{x}{c}\right) h\left(t-\frac{x}{c}, n-1\middle|u\right) dxdt\right\}$$
$$\times \left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_{ct}^{\infty} e^{-(s_1+s_4)v} \frac{\beta^n (ct-v)^n}{n!} e^{-c\beta t} k^{*n}(t) dvdt\right\}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} r^n \sum_{j=1}^{n-2} \left\{\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_{ct}^{\infty} e^{-(s_1+s_4)v} \frac{\beta^j (ct-v)^j}{j!} e^{-c\beta t} k^{*j}(t) dvdt\right\}$$
$$\times \left\{\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^{ct} e^{-s_1 x} \frac{\beta e^{-\beta x}}{c} k\left(\frac{x}{c}\right) h\left(t-\frac{x}{c}, n-j-1\middle|u\right) dxdt\right\}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} r^n \sum_{j=1}^{n-2} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^{t} \left\{\int_{ct}^{\infty} e^{-(s_1+s_4)v} \frac{\beta^j (cz-v)^j}{j!} e^{-c\beta t} k^{*j}(z) dv\right\}$$
$$\times \left\{\int_0^{c(t-z)} e^{-s_1 x} \frac{\beta e^{-\beta x}}{c} k\left(\frac{x}{c}\right) h\left(t-z-\frac{x}{c}, n-j-1\middle|u\right) dx\right\} dzdt$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t - s_1 x - s_4 v} \left\{\sum_{j=1}^{n-2} \int_0^{\frac{v-\max(x-ct,0)}{c}} \frac{\beta^j (cz-v)^j}{j!}\right.$$
$$\left. \times\, e^{-\beta(x-v+cz)} k\left(\frac{x-v}{c}\right) k^{*j}(z) h\left(t-z-\frac{x-v}{c}, n-j-1\middle|u\right) dz\right\} dvdxdt \qquad (\mathbf{5.44})$$

Επομένως, η (5.42) λόγω των (543) και (5.44) γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+\beta)\big)}{s_1+s_4+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s_1+s_4+\beta)\big)}\bar{G}_{r,\delta}(u)\\
&\qquad= r^2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t-s_1x-s_4v}\frac{\beta e^{-\beta(u+ct)}}{c}k\left(t-\frac{x-v}{c}\right)k\left(\frac{x-v}{c}\right)dvdxdt\\
&\qquad+\sum_{n=3}^{\infty} r^n\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t-s_1x-s_4v}\\
&\qquad\times\left\{\frac{\beta e^{-\beta(x-v)}}{c}k\left(\frac{x-v}{c}\right)h\left(t-\frac{x-v}{c},n-1\middle|u\right)\right.\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{\frac{v-\max(x-ct,0)}{c}}\frac{\beta^j(cz-v)^j}{j!}\\
&\qquad\left.\times e^{-\beta(x-v+cz)}k\left(\frac{x-v}{c}\right)k^{*j}(z)h\left(t-z-\frac{x-v}{c},n-j-1\middle|u\right)dz\right\}dvdxdt \qquad (\mathbf{5.45})
\end{aligned}
$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τις (5.37), (5.41) και (5.45) στην (5.36) παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&m_{r,\delta,124}(u)\\
&= r\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)-s_1x-s_2y-s_4u}\frac{1}{c}\beta e^{-\beta(x+y)}k\left(\frac{x-u}{c}\right)dydx\\
&-\sum_{n=2}^{\infty} r^n\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{u+ct}^\infty\int_{x-ct}^{x} e^{-\delta t-s_1x-s_2y-s_4v}\\
&\times\frac{\beta^n(u+ct-x)^{n-2}}{c(n-2)!}e^{-\beta(u+ct+y)}k\left(\frac{x-v}{c}\right)k^{*(n-1)}\left(\frac{v+ct-x}{c}\right)dvdxdydt\\
&+r^2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t-s_1x-s_2y-s_4v}\\
&\times\frac{\beta^2e^{-\beta(u+ct+y)}}{c}k\left(t-\frac{x-v}{c}\right)k\left(\frac{x-v}{c}\right)dvdxdydt\\
&+\sum_{n=3}^{\infty} r^n\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t-s_1x-s_2y-s_4v}\\
&\times\left\{\frac{\beta^2e^{-\beta(x-v+y)}}{c}k\left(\frac{x-v}{c}\right)h\left(t-\frac{x-v}{c},n-1\middle|u\right)\right.\\
&+\sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{\frac{v-\max(x-ct,0)}{c}}\frac{\beta^{j+2}(cz-v)^j}{j!\,c}e^{-\beta(x-v+y+cz)}k\left(\frac{x-v}{c}\right)\\
&\left.\times k^{*j}(z)h\left(t-z-\frac{x-v}{c},n-j-1\middle|u\right)dz\right\}dvdxdydt \qquad (\mathbf{5.46})
\end{aligned}
$$

Δοθέντος του χρόνου χρεοκοπίας t, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία πρέπει να είναι ίσο ή μικρότερο του $u + ct$. Έτσι, η (5.46) γίνεται

$$
\begin{aligned}
& m_{r,\delta,124}(u) \\
& = r \int_{u}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right) - s_1 x - s_2 y - s_4 u} \frac{1}{c} \beta e^{-\beta(x+y)} k\left(\frac{x-u}{c}\right) dy dx \\
& + r^2 \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{u+ct} \int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t - s_1 x - s_2 y - s_4 v} \\
& \times \frac{\beta^2 e^{-\beta(u+ct+y)}}{c} k\left(t - \frac{x-v}{c}\right) k\left(\frac{x-v}{c}\right) dv dx dy dt \\
& + \sum_{n=3}^{\infty} r^n \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{u+ct} \int_{\max(x-ct,0)}^{x} e^{-\delta t - s_1 x - s_2 y - s_4 v} \\
& \times \left\{ \frac{\beta^2 e^{-\beta(x-v+y)}}{c} k\left(\frac{x-v}{c}\right) h\left(t - \frac{x-v}{c}, n-1 \middle| u\right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^{n-2} \int_{0}^{\frac{v-\max(x-ct,0)}{c}} \frac{(cz-v)^j}{j!} \frac{\beta^{j+2} e^{-\beta(x-v+y+cz)}}{c} k\left(\frac{x-v}{c}\right) \\
& \left. \times k^{*j}(z) h\left(t - z - \frac{x-v}{c}, n-j-1 \middle| u\right) dz \right\} dv dx dy dt
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

Αντιστρέφοντας την (5.47) ως προς s, δ, s_1, s_2 και s_4 παίρνουμε τις σχέσεις (5.33), (5.34) και (5.35). □

5.4. Αριθμητικό παράδειγμα

Στο Θεώρημα 5.3, η από κοινού κατανομή των $\left(N_T, T, U_{T-}, |U_T|, R_{N_{T}-1}\right)$ δίνεται και από αυτή μπορούμε να πάρουμε την περιθώρια κατανομή και τις ριπές των $N_T, T, U_{T-}, |U_T|$ και $R_{N_{T}-1}$ με ολοκλήρωση. Στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε πως μπορούμε να βρούμε τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το ανανεωτικό μοντέλο Sparre Andersen με από κοινού κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων την

$$f(t,y) = (te^{-t})2e^{-2y} \qquad \mathbf{(5.48)}$$

όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια Erlang(2)($k(t) = te^{-t}$) και τα μεγέθη των απαιτήσεων μια Εκθετική ($p(y) = 2e^{-2y}$). Υποθέτουμε ότι το θετικό περιθώριο ασφαλείας είναι $c = 1$ έτι ώστε να ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους $E[cV] > E[Y]$.

Δοθέντος της (5.48) και ότι $c = 1$, από την σχέση (5.33) έχουμε ότι

$$g_1(x,y|u) = 2e^{-2(x+y)}(x-u)e^{-(x-u)} = 2(x-u)e^{-3x-2y+u} \qquad \mathbf{(5.49)}$$

για $x > u$ και $y \geq 0$.

Από την σχέση (5.34) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_2(t,x,y,v|u) &= 4e^{-2(u+t+y)}(t-x+v)e^{-(t-x+v)}(x-v)e^{-(x-v)} \\ &= 4(t-x+v)(x-v)e^{-3t-2y-2u} \qquad \mathbf{(5.50)} \end{aligned}$$

για $t, y \geq 0, \quad x \in [0, u+ct]$ και $v \in [\max(x-ct, 0), x]$.

Τέλος, από την (5.35), παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&g_n(t,x,y,v|u)\\
&\qquad = 4e^{-2(x-v+y)}(x-v)e^{-(x-v)}h(t-(x-v),n-1|u)\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{v-\max(x-ct,0)} \frac{(z-v)^j}{j!}2^{j+2}e^{-2(x-v+y+z)}(x-v)e^{-(x-v)}\\
&\qquad \times \frac{z^{2j-1}e^{-z}}{(2j-1)!}h(t-z-(x-v),n-j-1|u)dz\\
&\qquad = 4(x-v)e^{-3t-2y+3v}\left\{h(t-(x-v),n-1|u)\right.\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{2^j}{j!\,(2j-1)!}\int_0^{v-\max(x-ct,0)}(z-v)^j\,z^{2j-1}e^{-z}\\
&\qquad \left.\times\, h(t-z-(x-v),n-j-1|u)dz\right\} \qquad\qquad (\mathbf{5.51})
\end{aligned}
$$

για $t,y\geq 0,\quad x\in[0,u+ct],\quad v\in[\max(x-ct,0)\,,x]$ και $n=3,4,\ldots$, όπου

$$
h(t,n|u)=\begin{cases} e^{-2(u+t)}te^{-t}, & t\geq 0, n=1\\ \dfrac{nu+t}{n(n-1)}\left\{\dfrac{2^{n-1}(u+t)^{n-2}e^{-2(u+t)}}{(n-2)!}\right\}\dfrac{t^{2n-1}e^{-t}}{(2n-1)!}\,, & t\geq 0, n=2,3,\ldots. \end{cases}
$$

Δοθέντος των (5.49), (5.50) και (5.51), ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί ως

$$
\begin{aligned}
&E[TI(T<\infty)|U_0=u]\\
&=\int_u^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{x-u}{c}\right\}g_1(x,y|u)dydx\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct}\int_{\max(x-ct,0)}^{x}\{t\}\,g_n(t,x,y,v|u)dvdxdydt \qquad (\mathbf{5.52})
\end{aligned}
$$

Για υπολογιστικούς λόγους, επειδή το άθροισμα της (5.52) είναι άπειρο, θέτουμε την μεταβλητή r που αποτελεί έναν πεπερασμένο ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Επομένως, η (5.52) γράφεται

$$
\begin{aligned}
&E[TI(T<\infty)|U_0=u]\\
&\approx\int_u^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{x-u}{c}\right\}g_1(x,y|u)dydx\\
&+\sum_{n=2}^{r}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct}\int_{\max(x-ct,0)}^{x}\{t\}\,g_n(t,x,y,v|u)dvdxdydt \qquad (\mathbf{5.53})
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι ο όρος

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{u+ct}\int_{\max(x-ct,0)}^{x}\{t\}\, g_n(t,x,y,v|u)dvdxdydt$$

στο παράδειγμά μας, γίνεται αρκετά μικρός όταν $n > 55$. Αυτό συμβαίνει γιατί η $g_n(t,x,y,v|u)$ εξαρτάται από την $h(t,n|u)$, που τείνει στο μηδέν όσο το n αυξάνεται. Στον Πίνακα 5.1, εκτιμώνται οι τιμές της $E[TI(T<\infty)|U_0=u]$ μέσω της (5.53) για $u = 0{,}2{,}5{,}10{,}20$ και για διάφορες τιμές της r.

Πίνακας 5.1

u	$r = 25$	$r = 30$	$r = 55$
0	0.1219	0.1220	0.1220
2	0.5865×10^{-2}	0.5866×10^{-2}	0.5866×10^{-2}
5	4.9482×10^{-5}	4.9483×10^{-5}	4.9483×10^{-5}
10	1.3486×10^{-8}	1.3487×10^{-8}	1.3487×10^{-8}
20	7.0020×10^{-16}	7.0033×10^{-16}	7.0036×10^{-16}

Θέλοντας να πάρουμε ακριβή αποτελέσματα της $E[TI(T<\infty)|U_0=u]$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του τρίτου κεφαλαίου. Από την (3.35) έχουμε ότι

$$E[TI(T<\infty)|U_0=u] = B_{1,0}(0,1)e^{-Ru} + B_{1,0}(1,1)ue^{-Ru} \qquad \mathbf{(5.54)}$$

όπου $-R$ αποτελεί την αρνητική ρίζα της παρακάτω εξίσωσης (ως προς s)

$$\left(\frac{2}{2+s}\right)\left(\frac{1}{1-s}\right)^2 = 1 \qquad \mathbf{(5.55)}$$

Παίρνουμε δηλαδή ότι $R = 1{,}73205$. Επιπλέον, από τις σχέσεις (3.54) και (3.11) έχουμε ότι

$$B_{1,0}(1,1) = \frac{-C_{1,0}\left\{\frac{2}{2-R}\right\}\left\{\int_0^{\infty} te^{-Rt}(te^{-t})dt\right\}}{-\left\{\frac{2}{(2-R)^2}\right\}\left\{\int_0^{\infty} e^{-Rt}(te^{-t})dt\right\} + \left\{\frac{2}{2-R}\right\}\left\{\int_0^{\infty} te^{-Rt}(te^{-t})dt\right\}} \qquad \mathbf{(5.56)}$$

με $C_{1,0}\left\{\frac{2}{2-R}\right\} = 1$.

Τέλος, από την (3.55) έχουμε ότι

$$\frac{B_{1,0}(0,1)}{2-R} = \frac{B_{1,0}(1,1)}{(2-R)^2} \qquad \mathbf{(5.57)}$$

Λύνοντας τις (5.56) και (5.57), παίρνουμε ότι $B_{1,0}(0,1) = 0{,}122009$ και $B_{1,0}(1,1) = 0{,}032692$. Οπότε, η (5.54) γίνεται

$$E[TI(T < \infty)|U_0 = u] = 0{,}122009\, e^{-1{,}73205u} + 0{,}032692 u e^{-1{,}73205u} \qquad \mathbf{(5.58)}$$

Οι τιμές της $E[TI(T < \infty)|U_0 = u]$ μέσω της (5.58) για $u = 0{,}2{,}5{,}10{,}20$ δίνονται στον Πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2

u	Exact value
0	0.1220
2	0.5866×10^{-2}
5	4.9484×10^{-5}
10	1.3489×10^{-8}
20	7.0046×10^{-16}

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμώμενες με τις πραγματικές τιμές του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας είναι πολύ κοντά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή τη διπλωματική, το κύριο αντικείμενο μελέτης είναι οι γενικευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Στο εξαρτώμενο μοντέλο Sparre Andersen, οι δομικές ιδιότητες της συνάρτησης Gerber-Shiu δείχνουν να ισχύουν και για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2. Αυτές οι ιδιότητες είναι χρήσιμες στην περαιτέρω έρευνα των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας. Επιπλέον, είναι επίσης ενδιαφέρον να παρέχονται καλά προσεγγιστικά αποτελέσματα για τις ροπές, δεδομένου ότι τα αναλυτικά αποτελέσματα συνήθως περιλαμβάνουν πολλές αναδρομές. Υπάρχουν προσεγγιστικά αποτελέσματα για το κλασικό μοντέλο κινδύνου Possion, όπου ανάλυσή του γίνεται στις δημοσιεύσεις Egidio dos Reis (2000), Dickson and Waters (2002) και Pitts και Πολίτης (2008).

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύουμε το εξαρτώμενο μοντέλο Sparre Andersen με τα μεγέθη των απαιτήσεων να ακολουθούν την κατανομή Coxian και οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας να αποτελούν γραμμικά αθροίσματα της κατανομής Erlang. Οι όροι αυτών των αθροισμάτων μπορούν να υπολογιστούν, λύνοντας γραμμικά συστήματα εξισώσεων. Παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα που αφορούν την μέση τιμή και την διακύμανση του χρόνου χρεοκοπίας. Διαισθητικά, ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας και η διακύμανση του χρόνου χρεοκοπίας θα πρέπει να σχετίζονται με την περιθώρια κατανομή κάθε αύξησης της διαδικασίας του ασφαλιστικού πλεονάσματος.

Η περιθώρια κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων, και ιδίως η δομή εξάρτησής τους, επηρεάζει την περιθώρια κατανομή κάθε προσαύξησης. Απαιτούνται περαιτέρω έρευνες ως προς τον τρόπο με τον οποίο οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας συνδέονται με την εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων.

Στο κεφάλαιο 4, οι δομικές ιδιότητες των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, αναλύονται με το εξαρώμενο μοντέλο Sparre Andersen όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Coxian. Τα αριθμητικά παραδείγματα μας δείχνουν πως τα αποτελέσματα από το κεφάλαιο 2 χρησιμοποιούνται αναδρομικά προκειμένου να προσδιοριστεί ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας. Φαίνεται ότι οι τεχνικές που προκύπτουν στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζονται κυρίως στον υπολογισμό των μικρότερων σε βαθμό ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.

Στο κεφάλαιο 5, η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία και άλλων μέτρων χρεοκοπίας αναλύονται με το μοντέλο Sparre Andersen, όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή. Η περιθώρια και η από κοινού κατανομή των ροπών αυτών των μέτρων χρεοκοπίας μπορούν να υπολογιστούν με ολοκλήρωση. Η από κοινού κατανομή αυτών των ποσοτήτων μπορεί να μελετηθεί σε ένα πιο γενικό πλαίσιο των μεγεθών των απαιτήσεων, δηλαδή όταν αυτά π.χ. ακολουθούν την κατανομή Coxian.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Albrecher, H., Boxma, O.J., 2004. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. Insurance: Mathematics and Economics 35, 245-254.

Albrecher, H., Constantinescu, C., Loisel, S., 2011. Explicit ruin formulas for models with dependence among risks. Insurance: Mathematics and Economics 48, 265-270.

Albrecher, H., Teugels, J.L., 2006. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. Journal of Applied Probability 43, 257-273.

Borovkov, K.A., Dickson, D.C.M., 2008. On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes. Insurance: Mathematics and Economics 42, 1104-1108.

Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. Scandinavian Actuarial Journal 5, 265-285.

Cheung, E.C.K., Landriault, D., Willmot, G.E., Woo, J.K., 2010. Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. Insurance: Mathematics and Economics 46, 117-126.

Dickson, D.C.M., Hipp, C., 2001. On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-344.

Dickson, D.C.M., Waters, H.R., 2002. The distribution of the time to ruin in the classical risk model. ASTIN Bulletin 32, 299-313.

Dickson, D.C.M., Willmot, G.E., 2005. The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. ASTIN Bulletin 35, 45-60.

Drekic, S., Willmot, G.E., 2003. On the density and moments of the time of ruin with Exponential claims. ASTIN Bulletin 33, 11-21.

Drekic, S., Willmot, G.E., 2005. On the moments of the time of ruin with applications to phase-type claims. North American Actuarial Journal 9, 17-30.

Dufresne, F., Gerber, H.U., 1988. The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. Insurance: Mathematics and Economics 7, 193-199.

Gerber, H.U., 1979. An introduction to mathematical risk theory. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania.

Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1998. On the time value of ruin. North American Actuarial Journal 2, 48-78.

Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen model. North American Actuarial Journal 9, 49-69.

Good, I., 1960. Generalizations to several variables of lagrange expansion, with applications to stochastic processes. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 56, 367-380.

Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E., 2013. Loss models: further topics. John

Wiley & Sons.

Landriault, D., Lee, W.Y., Willmot, G.E., Woo, J.K., 2014. A note on deficit analysis in dependency models involving Coxian claim amounts. Scandinavian Actuarial Journal. To appear.

Landriault, D., Shi, T., 2013. Distribution of the time to ruin in some Sparre Andersen risk models. ASTIN Bulletin 43, 39-59.

Landriault, D., Shi, T., Willmot, G.E., 2011. Joint densities involving the time to ruin in the Sparre Andersen risk model under exponential assumptions. Insurance: Mathematics and Economics 49, 371-379.

Landriault, D., Willmot, G., 2008. On the Gerber-Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution. Insurance: Mathematics and Economics 42, 600-608.

Landriault, D., Willmot, G.E., 2009. On the joint distributions of the time to ruin, the surplus prior to ruin, and the deficit at ruin in the classical risk model. North American Actuarial Journal 13, 252-279.

Lee, W.Y., Willmot, G.E., 2014a. The moments of the time to ruin in dependent Sparre Andersen models with Coxian claim sizes. Submitted to Scandinavian Actuarial Journal.

Lee, W.Y., Willmot, G.E., 2014b. On the moments of the time to ruin in dependent Sparre Andersen models with emphasis on Coxian interclaim times. Submitted to Insurance: Mathematics and Economics.

Li, S., Garrido, J., 2004. On ruin for the Erlang(n) risk process. Insurance: Mathematics and Economics 34, 391-408.

Li, S., Garrido, J., 2005. On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. Advances in Applied Probability 37, 836-856.

Li, S., Lu, Y., 2013. On the generalized Gerber-Shiu function for surplus processes with interest. Insurance: Mathematics and Economics 52, 127-134.

Lin, X.S., Willmot, G.E., 2000. The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics 27, 19-44.

Lin, X.S., Willmot, G.E., Drekic, S., 2003. The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. Insurance: Mathematics and Economics 33, 551-566.

Panjer, H.H., Willmot, G.E., 1992. Insurance risk models. Society of Actuaries.

Pitts, S.M., Politis, K., 2008. Approximations for the moments of ruin time in the compound Poisson model. Insurance: Mathematics and Economics 42, 668-679.

Schi, J.L., 1999. The Laplace transform: theory and applications. Springer, New York.

Shi, T., 2013. On the distribution of the time to ruin and related topics. Ph.D. thesis.

University of Waterloo.

Sparre Andersen, E., 1957. On the collective theory of risk in the case of contagion between claims. Proceedings of the Transactions of the XVth International Congress on Actuaries vol. II, 219-229.

Widder, D.V., 2010. The Laplace transform. Dover.

Willmot, G.E., 2002. On higher-order properties of compound geometric distributions. Journal of Applied Probability 39, 324-340.

Willmot, G.E., 2007. On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times. Insurance: Mathematics and Economics 41, 17-31.

Willmot, G.E., Cai, J., Lin, X.S., 2001. Lundberg inequalities for renewal equations. Advances in Applied Probability 33, 674-689.

Willmot, G.E., Lin, X.S., 2001. Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications. Springer-Verlag, New York. Willmot, G.E., Woo, J.K., 2010. Surplus analysis for a class of Coxian interclaim time distributions with applications to mixed Erlang claim amounts. Insurance: Mathematics and Economics 46, 32-41.

Willmot, G.E., Woo, J.K., 2012. On the analysis of a general class of dependent risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 51, 134-141.

Yang, C., Sendova, K.P., 2014. The ruin time under the Sparre-Andersen dual model. Insurance: Mathematics and Economics 54, 28-40.

Zhang, Z., Yang, H., Yang, H., 2012. On a Sparre Andersen risk model with time-dependent claim sizes and jump-diffusion perturbation. Methodology and computing in applied probability 14, 973-995.

Zhu, J., Yang, H., 2008. Estimates for the absolute ruin probability in the compound Poisson risk model with credit and debit interest. Journal of Applied Probability 45, 818-830.