ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

‘’ΜΕΤΡΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ’’

ΛΕΛΟΥΔΑ ΖΗΣΟΥΔΑ

Διπλωματική Εργασία
Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
Απαιτήσεων του για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη
Και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΑΘΗΝΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από το Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄ αριθμό ……συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής, Κούτρας Μάρκος
- Επίκουρος Καθηγητής, Τζαβελάς Γεώργιος

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

‘’RUIN MEASURES FOR STOCHASTIC SURPLUS PROCESSES IN DISCRETE TIME’’

LELOUDA ZISOUDA

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics
and Insurance Science of the University of Piraeus
in partial fulfilment of the requirements for the degree
of Master of Science in Actuarial Science and
Risk Management.

PIRAEUS, GREECE

SEPTEMBER 2017

This thesis was approved unanimously by the three-member committee appointed by the Department of Statistics and Insurance Science, University of Piraeus, in accordance with the rules of the MSc program in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members were:

- Associate Professor, ChadjikonstantinidisEfstathios (Supervisor)
- Professor, Koutras Markos
- Assistant Professor, Tzabelas Georgios

Ευχαριστιες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες και την ιδιαίτερη εκτίμησή μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, για την πολύτιμη συνεισφορά του, την εποικοδομητική συνεργασία και την καθοδήγησή του.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δυο μέλη της επιτροπής κ. Κούτρα Μάρκο και κ. Τζαβελά Γεώργιο, για το χρόνο τους και τις ουσιαστικές παρατηρήσεις τους.

Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες, αλλά και την αγάπη μου προς την οικογένειά μου, για την υποστήριξη και την βοήθειά τους.

Περίληψη

Η ομαλή λειτουργία μιας ασφαλιστικής εταιρίας εξαρτάται κυρίως από την διασφάλιση επαρκών αποθεματικών, τα οποία βοηθούν στην κάλυψη πιθανών υποχρεώσεων προς τρίτους ή και αναπάντεχων ζημιών. Στη θεωρία χρεοκοπίας χαρακτηρίζονται και ως πλεόνασμα προσδιορίζοντας έτσι και την πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία μας ενημερώνει εγκαίρως εάν είναι επαρκή ή όχι τα αποθεματικά της.

Η αρχή έγινε από τον Σουηδό μαθηματικό Ernst Filip Oskar Lundberg (1903) εργαζόμενος πάνω στην θεωρία συλλογικού κινδύνου και στην αντασφάλιση εισάγοντας την σύνθετη διαδικασία Poisson. Στη συνέχεια με την βοήθεια του Cramer (1930) ενσωματώνοντας την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου προκύπτει το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή γνωστό και ως μοντέλο Cramer – Lundberg. Μελέτησαν τον αριθμό των ζημιών σύμφωνα με την κατανομή Poisson. Έπειτα έρχεται ο Sparre Andersen αποδεικνύοντας το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με τον αριθμό των ζημιών να περιγράφονται από μια ανανεωτική διαδικασία. Στη συνέχεια ακολούθησαν οι Gerber και Shiu αποδεικνύοντας την αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ποινής, η οποία συνδυάζει όλα τα μέτρα χρεοκοπίας, πλεόνασμα, έλλειμμα και χρόνο χρεοκοπίας.

Abstract

The regular operation of an insurance company depends mainly on securing sufficient reserves, which may cover possible obligations to third parties or unexpected losses. They are also known as surplus identifying ruin probabilitywhich inform us in time, whether its reserves are sufficient or not.

The beginning was by the Swedish mathematician Ernst Filip Oskar Lundberg (1903) who was working on issues of collective risk theory and matters of reinsurance, introducing also the compound Poisson model. After that Cramer (1930) helped him and the two of them as a team managed to combine the theory of stochastic processes with the risk theory and created the already classic model which is known as the model of Cramer – Lundberg. These two scientists also, concerned with the study of numbers of losses, according to Poisson distribution. In the meantime, Sparre Andersen appeared, and managed to prove the renewal model of risk theory with the numbers of losses be described by a renewal process. Last but not least Gerber and Shiu are mentioned, the two scientists who proved the the expected discount function of penalty. which combines all measures of ruin such as surplus, deficit and time of bankruptcy.

Περιεχομενα

ΜΕΡΟΣ Α

ΜΕΡΟΣ Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:1 ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:2 ΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:3 ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΧΡΟΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:4 ΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΡΟΣ Γ

Σχηματα

Πινακες

Η Θεωρία Χρεοκοπίας αποτελεί πλέον αναπόσπαστο κομμάτι των εταιριών ειδικότερα αυτές που δραστηριοποιούνται στον ασφαλιστικό τομέα, αφού μέσου αυτής εγγυάται η ομαλή λειτουργία της μονάδας. Μέσω διαφόρων μελετών, οι οποίες θα αναλυθούν λεπτομερώς στη συνέχεια αντλούμε αποτελέσματα για τα αποθέματα μιας ασφαλιστικής εταιρίας που διαθέτει στο ενεργητικό της. Αυτή η διαδικασία μας δίνει τη δυνατότητα να δούμε κατά πόσο μια εταιρία είναι φερέγγυα και κατά πόσο τα αποθέματά της επαρκούν για την κάλυψη πιθανών ασφαλιστικών ζημιών. Πέρα από αυτό η θεωρία χρεοκοπίας μας βοηθάει να χαρακτηρίσουμε και την πιθανότητα χρεοκοπίας, με την χρήση διαφόρων μέτρων κινδύνου που θα αναλυθούν στα παρακάτω κεφάλαια.

Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο θα μελετηθεί το κλασσικό μοντέλο θεωρίας χρεοκοπίας και όλα τα συναφή αποτελέσματα, τα οποία θα μας βοηθήσουν να αξιολογήσουμε σωστά την φερεγγυότητα και την βιωσιμότητά της εταιρείας. Θα γίνει ανάλογη μελέτη μέτρων κινδύνων που σχετίζονται με διάφορες μεταβλητές, όπως πιθανότητα χρεοκοπίας, έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας καθώς και το πλεόνασμα αυτής. Τέλος θα δοθεί αναφορά στην αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ποινής, η οποία σύμφωνα με τους Gerber και Shiu λαμβάνει υπόψη της όλα τα μέτρα χρεοκοπίας, δίνοντας μια νέα διάσταση στη μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας και νέα εργαλεία για την διερεύνηση των ιδιοτήτων της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετηθεί διεξοδικά η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής κάτω από το ανανεωτικό μοντέλο θεωρίας χρεοκοπίας, το οποίο αποτελεί επέκταση του σύνθετου διωνυμικού μοντέλου, που έχει αποδειχθεί αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο. Ακολουθούν αριθμητικά παραδείγματα, στα οποία φαίνεται πως λειτουργεί η πιθανότητα χρεοκοπίας κάτω από διάφορα ενδεχόμενα.

Στο επόμενο κεφάλαιο που ακολουθεί αναλύεται το ανανεωτικό μοντέλο διακριτού χρόνου με εξαρτήσεις μεταξύ μεγεθών και χρόνων εμφάνισης ζημιών. Όπως και στα προηγούμενα έτσι και εδώ θα δοθούν διάφορα αποτελέσματα για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής κάτω από αυτό το μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα για τις διάφορες κατανομές μεγεθών που ακολουθούν οι ατομικές ζημιές.

Τέλος στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρακολουθήσουμε λεπτομερώς τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το στάσιμο και σύνηθες διακριτό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου ή αλλιώς γνωστό και ως το διακριτό ανανεωτικό μοντέλο ισορροπίας. Παρόμοια με τα παραπάνω θα δείξουμε τι αποτελέσματα προκύπτουν από αυτό το μοντέλο για την προεξοφλητική συνάρτηση ποινής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:1

¨ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ¨

Στο πρώτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων ή αλλιώς γνωστό και ως μοντέλο *Cramer-Lundberg*, το οποίο αποτελεί την αρχή της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου. Ο Filip Lundberg (1930), Σουηδός μαθηματικός, ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκε με αυτό στην διατριβή του, παρατηρώντας πως η κατανομή Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μοντέλα ασφαλίσεων.

1.1 Η Στοχαστική Διαδικασία Πλεονάσματος για το Σύνθετο Διωνυμικό Μοντέλο

Αρχικά θα ασχοληθούμε με το συλλογικό πρότυπο, στο οποίο μελετάμε τις συνολικές απαιτήσεις π.χ. μιας ασφαλιστικής ή χρηματοοικονομικής εταιρίας, όπως είναι τα έξοδα της σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα, καθώς επίσης και τα έσοδα όπως αυτά μεταβάλλονται στο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα αφορά χαρτοφυλάκια που δεν είναι προβλέψιμα, αλλά επηρεάζονται από τυχαίες (στοχαστικές) ποσότητες που μεταβάλλονται στο χρόνο τυχαία. Γι΄αυτό το λόγο είναι αναγκαία η *στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος*, όπου μέσα από αυτήν θα περιγράψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά και διάφορα αποτελέσματα για το κλασσικό μοντέλο.

Η έννοια αυτή αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης της θεωρίας χρεοκοπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.1

Μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) $\{X_i : t \in T\}$, όπου T είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή θα παίρνει διακριτές τιμές. Οπότε μιλάμε για μια στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο ή διακριτής παραμέτρου.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό $\{X(t) : t \in T\}$,ο οποίος αναφέρεται σε ένα μη αριθμήσιμο σύνολο, οπότε έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

Οι στοχαστικές ανελίξεις όμως διακρίνονται ανάλογα και με το πλήθος των τιμών για το X_i. Εάν είναι αριθμήσιμο ή όχι, μιλάμε για μια ανέλιξη με διακριτές ή συνεχείς τιμές.

1.1.1 *Σύνθετες Κατανομές και Σύνθετες Στοχαστικές Ανελίξεις*

Έστω $X_1, X_2,...$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. που δηλώνουν το ύψος των απαιτήσεων (ή ζημιών). Ορίζουμε επίσης μια μεταβλητή N , που δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων (ή ζημιών) στο ίδιο χρονικό διάστημα, είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. X_i και παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές.

Οπότε η μεταβλητή S λέμε ότι ακολουθεί μια σύνθετη κατανομή, έστω G η οποία ορίζεται παρακάτω:

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \alpha\nu \ \mathrm{N} \geq 1 \\ 0, & \alpha\nu \ \mathrm{N} = 0 \end{cases}$$

Η μεταβλητή S ονομάζεται *σύνθετη τυχαία μεταβλητή*.
Για τον ορισμό, όμως της *σύνθετης στοχαστικής ανέλιξης* αρκεί να αντικαταστήσουμε την μεταβλητή N με μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$η οποία απαριθμεί τις απαιτήσεις στο χρόνο.

Επομένως η σύνθετη τ.μ. αντικαθίστανται με $\{S(t) : t \geq 0\}$, όπου για $t \geq 0$, έχουμε

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_I & \alpha\nu \ \mathrm{N}(t) \geq 1 \\ 0, & \alpha\nu \ \mathrm{N}(t) = 0 \end{cases}$$

Μια από τις πιο γνωστές στοχαστικές διαδικασίες και θα εξετάσουμε στη συνέχεια είναι αυτή στην οποία η $\{N(t)\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, οπότε η $\{S(t) : t \geq 0\}$ παριστά τις συνολικές ζημιές καθώς μεταβάλλονται στον χρόνο. Άρα αποτελεί μια σύνθετη ανέλιξη Poisson, η οποία είναι ένα παράδειγμα απαριθμήτριας διαδικασίας (μη φθίνουσα με ακέραιες και μη αρνητικές τιμές). Οι χρόνοι μεταξύ της εμφάνισης των ζημιών ονομάζονται *ενδιάμεσοι χρόνοι* ή *χρόνοι αναμονής* και είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή (όχι απαραίτητα εκθετική).

Σε αυτό το μοντέλο θα μελετήσουμε τα έξοδα της εταιρίας (ή αποζημιώσεις) καθώς αυτά εξελίσσονται με τον χρόνο, αλλά πιο σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το *πλεόνασμα (έσοδα – έξοδα)*, το οποίο θα εξετάσουμε πότε θα γίνει αρνητικό για πρώτη φορά.

Η εταιρία συνηθίζει να κρατάει ένα αρχικό *αποθεματικό*, για την κάλυψη απρόσμενων ζημιών και το οποίο συμβολίζεται με u .

Τέλος αν υποθέσουμε ότι

- Τα <u>*συνολικά έξοδα*</u> της εταιρίας στο διάστημα $[0,t]$ περιγράφονται από την σύνθετη ανέλιξη $\{S(t):t \geq 0\}$, η οποία ορίζεται για κάθε t από τη σχέση

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \alpha\nu \ \mathrm{N}(t) \geq 1 \\ 0, & \alpha\nu \ \mathrm{N}(t) = 0 \end{cases}$$

- Ενώ τα <u>*συνολικά έσοδα*</u> στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ προέρχονται μόνο από τα ασφάλιστρα, τα οποία συμβολίζονται με $P(t)$

Τότε η αξία του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρίας δίνεται από τον γενικό τύπο:

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

Όσον αφορά τα έσοδα καθορίζονται με ακρίβεια από τον ασφαλιστή σε μορφή ασφαλίστρων, οπότε δεν υπάρχει το ενδεχόμενο της αβεβαιότητας ως προς την είσπραξή τους και γι΄αυτό το λόγο η $P(t)$ αποτελεί αύξουσα συνάρτηση και όχι στοχαστική ανέλιξη, σε αντίθεση με τα έξοδα $S(t)$.

Η $P(t)$ θεωρούμε ότι είναι μια γραμμική συνάρτηση, συμβολίζοντας με c το ασφάλιστρο , οπότε τελικά θα εισπράττει ct νομισματικές μονάδες (ν.μ.), δηλαδή

$$P(t) = ct\,, \quad \forall t$$

Με βάση τα παραπάνω θα δοθεί ο ορισμός της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος $U(t)$

1.1.2 Η Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος U(t)

Θα εξετάσουμε την στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $U(t)$, η οποία δίνεται λεπτομερώς από τον παρακάτω ορισμό:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.2</u>

Η *στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) πλεονάσματος* (ή αποθεματικού) τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

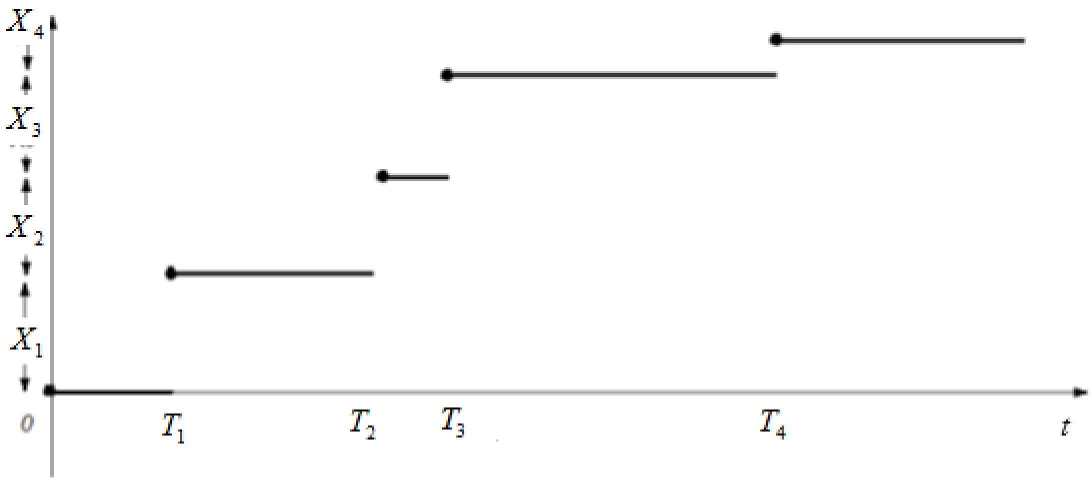
$$U(t) = u + P(t) - S(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

όπου $U(0) = u$ το αρχικό αποθεματικό

- ✓ $U(t)$: η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή t, ή αλλιώς αποκαλείται και αποθεματικό ή και πλεόνασμα την στιγμή t
- ✓ $u \geq 0$: το αρχικό πλεόνασμα (ή αποθεματικό) που διαθέτει μια ασφαλιστική εταιρία την χρονική στιγμή μηδέν,
- ✓ Η στοχαστική διαδικασία $P(t)$ είναι ντετερμινιστική, όπου $P(t) = ct$ με $c > 0$, δηλαδή τα ασφάλιστρα καταβάλλονται ανά μονάδα χρόνου με σταθερό ρυθμό c,
- ✓ $S(t)$: τα συνολικά έξοδα της ασφαλιστικής εταιρίας, δηλαδή η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές απαιτήσεις που θα εμφανιστούν σε ένα χαρτοφυλάκιο εκείνη την χρονική στιγμή.

Επιπλέον θεωρούμε ότι σε κάθε χρονική περίοδο το ασφάλιστρο που εισπράττεται είναι 1ν.μ. και οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης μιας απαίτησης είναι ανεξάρτητοι και ισόνομα εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ. Τέλος οι ενδιάμεσοι χρόνοι των κινδύνων και τα ύψη των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητα γεγονότα.

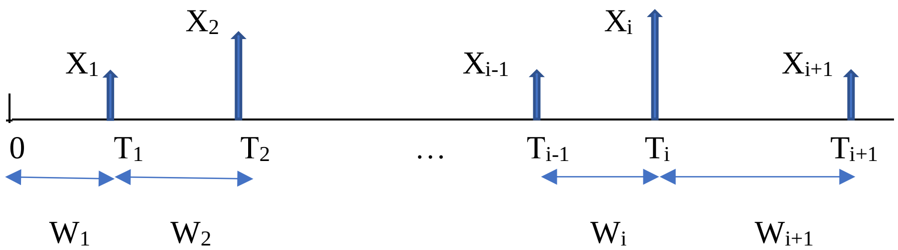
Οι δειγματοσυναρτήσεις της $U(t)$ εμφανίζουν ‘άλματα’ προς τα κάτω τις χρονικές στιγμές $T_1, T_2, ...$ επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένων. Αυτά τα άλματα είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα προς τα πάνω ‘άλματα’ της $S(t)$.



Σχήμα:1.1 Γραφική *παράσταση της στοχαστικής διαδικασίας S(t). Έχει σταθερή Τιμή σε κάθε διάστημα (T_i,T_{i+1})*

Το γράφημα της $S(t)$ απεικονίζει μια δυνατή εξέλιξη τιμών της διαδικασίας συνολικών αποζημιώσεων σε μια μικρή σχετικά χρονική περίοδο. Η $S(t)$ είναι μια δεξιά συνεχής κλιμακωτή συνάρτηση.

Τα σημεία ασυνέχειας, τα οποία αποτελούν τα 'άλματα', είναι τα σημεία που εμφανίζονται οι απαιτήσεις και το ύψος των 'αλμάτων' είναι ίσο με το μέγεθος της αντίστοιχης αποζημίωσης. Τέλος τα οριζόντια μήκη των βημάτων αποτελούν τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων, οι οποίοι είναι εκθετικά κατανεμημένοι και συμβολίζονται με $\{W_n \, , \, n \geq 1\}$.

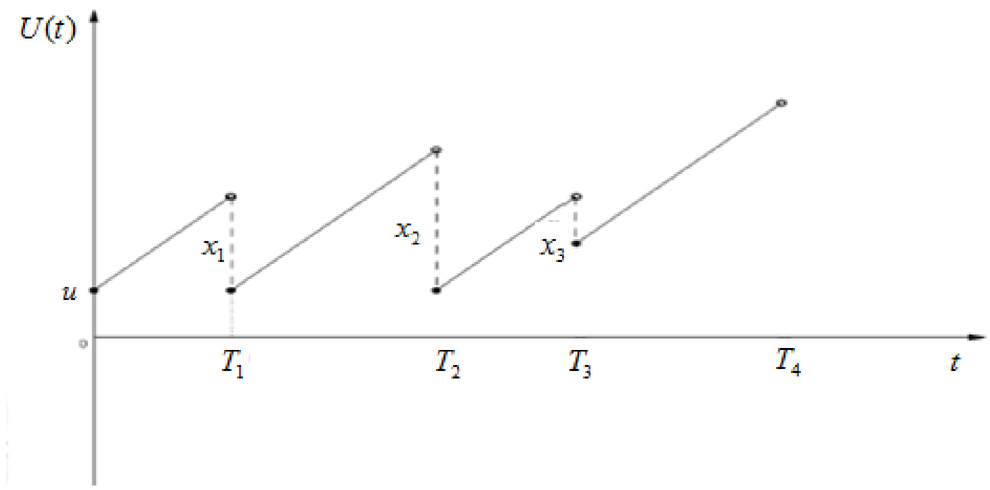


Σχήμα:1.2 *Χρόνοι άφιξης απαιτήσεων, Μεγέθη απαιτήσεων και Ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων.*

Όπου T_i : οι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων, για $i = 1,2,..., N(t)$

W_i : οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων, δηλαδή

$$\begin{Bmatrix} W_1 = T_1 \\ W_i = T_i - T_{i-1}, \;\; \gamma\iota\alpha \;\; i = 1,2,3,..., N(t) \end{Bmatrix}$$



Σχήμα:1.3 *Γραφική παράσταση της διαδικασίας P(t). Είναι ευθύγραμμα τμήματα με θετική κλίση ίση με τον συντελεστή διεύθυνσης c.*

1.1.3 Το Πλήθος των Αποζημιώσεων N(t)

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως οι τ.μ. W_i είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δηλαδή $W_i \sim Exp(\lambda)$, για κάθε $i = 1,2,..., N(t)$ τότε το άθροισμα αυτών ακολουθεί κατανομή Γάμμα με παραμέτρους n και λ, δηλαδή $W_1 + W_2 + ... + W_n \sim G(n,\lambda)$.

Οπότε

$$\begin{aligned}\Pr(N(t) = k) &= \Pr(N(t) \le k) - \Pr(N(t) \le k-1)\\ &= \Pr(W_1 + W_2 + ... + W_{k+1} > t) - \Pr(W_1 + W_2 + ... + W_k > t)\\ &= \int_t^\infty \frac{\lambda^{k+1} y^k e^{-\lambda y}}{\kappa!} dy - \int_t^\infty \frac{\lambda^k y^{k-1} e^{-\lambda y}}{(k-1)!} dy\\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\end{aligned}$$

Άρα ο αριθμός των κινδύνων που εμφανίζονται στο διάστημα $[0,t]$ ακολουθεί κατανομή Poissonμε παράμετρο λt, δηλαδή $N(t) \sim P(\lambda t)$.

1.1.4 Περιγραφή Μοντέλου

Όπως περιγράψαμε και προηγουμένως οι μεταβλητές X_i δηλώνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων και είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Είναι όμως ανεξάρτητες και από τον αριθμό των αποζημιώσεων σε ένα διάστημα $N(t)$, όπου η $\{N(t),\, t \geq 0\}$αποτελεί μια ανέλιξη Poisson. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ανέλιξη $\{S(t),\, t \geq 0\}$ των συνολικών απαιτήσεων είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson. Έτσι μπορούμε να μιλήσουμε για το **κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων** (Lundberg 1903) επισημαίνοντας ότι οι εμφανίσεις των απαιτήσεων είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητα γεγονότα</u>.

Θα μελετήσουμε κυρίως την περίπτωση όπου τα ζημιογόνα ενδεχόμενα ανανεώνονται. Δηλαδή πως υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας στα πλαίσια μιας στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος για την κάλυψη ενός μόνο ζημιογόνου ενδεχομένου (χαρτοφυλάκια στα οποία εμφανίζεται το πολύ μια ζημιά).

Έστω η τ.μ. I_i, η οποία παριστά το πλήθος των απαιτήσεων για την i-χρονική περίοδο, δηλαδή για την περίοδο $(i-1, i]$ τότε

$$I_i \sim Bernoulli(p) \text{ για κάθε } i = 1,2,3,...$$

Άρα η $N(t)$ που δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων $N(t) = I_1 + I_2 + ... + I_t$ για τις πρώτες t περιόδους ακολουθεί $N(t) \sim B(t, p)$

Έστω X_i το ύψος μη-μηδενικής απαίτησης δοθέντος ότι έχει συμβεί απαίτηση για την i-χρονική περίοδο. Υποθέτουμε επίσης ότι η τ.μ. $X_i \in \{1,2,3,...\}$

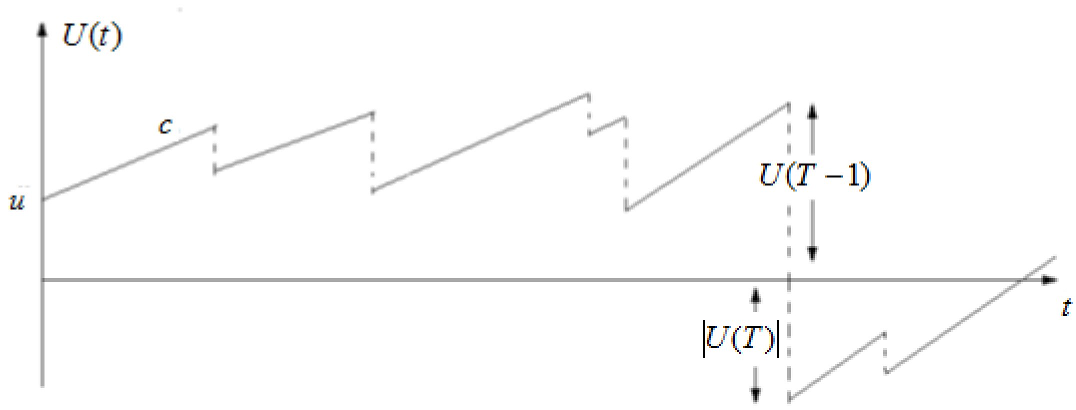
Επιπλέον μένει να ορίσουμε την συνάρτηση πιθανότητας με $f_x(x) = \Pr(X = x)$ και την συνάρτηση κατανομής ως $f_y(x) = \Pr(X \leq x)$

Οπότε καταλήγουμε σε ένα νέο ορισμό για την $U(t)$, γνωστή και ως η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, με:

$$\begin{aligned} U(t) &= u + ct - (X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}) \\ &= u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,, \qquad t = 0,1,2,... \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Όπου $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i = 0$, για $t = 0$ και ακολουθεί μια (διακριτή) σύνθετη διωνυμική κατανομή και ct ν.μ., για αυτό το λόγο η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος της σχέσης (1.2) αναφέρεται και ως ΄΄***στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο***'' της θεωρίας κινδύνου.

Στο παρακάτω σχήμα αναφέρονται αναλυτικά τα παραπάνω.



<u>Σχήμα:1.</u>4 *Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος U(t)*

Από το παραπάνω γράφημα συμπεραίνουμε ότι το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό με την εμφάνιση της 5ης ζημιάς. Η προς τα κάτω τάση των τιμών του πλεονάσματος στις χρονικές στιγμές εμφάνισης των ζημιών υποδεικνύει μια επισφαλή επιχείρηση ή ένα επισφαλές χαρτοφυλάκιο. Αυτό ίσως μπορεί να αποφευχθεί ακόμη και μακροπρόθεσμα αυξάνοντας το αρχικό αποθεματικό και το ασφάλιστρο.

1.1.5 Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια

Μια σημαντική τ.μ. που συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η L, η οποία καλείται *‘’Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια’’* (Maximal Aggregate Loss) ή *Συνολικές Απαιτήσεις* και ορίζεται ως:

$$L = \max_{t\geq 0}\{S(t) - ct\} = \max_{t\geq 0}\{u - U(t)\} \quad (1.3)$$

Όπου $S(t)$: το κεφάλαιο που απαιτείται την χρονική στιγμή $[0,t]$ και

ct : το ποσό που εισπράττεται την χρονική στιγμή $[0,t]$

Η L είναι σύνθετη γεωμετρική τ.μ. και έχει μεικτή κατανομή, αφού έχει θετική ρίζα στο σημείο 0 και είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

Καταλήγοντας μπορούμε να εκφράσουμε το ενδεχόμενο να εμφανιστούν πολλές απαιτήσεις σε μια χρονική περίοδο, έστω p.

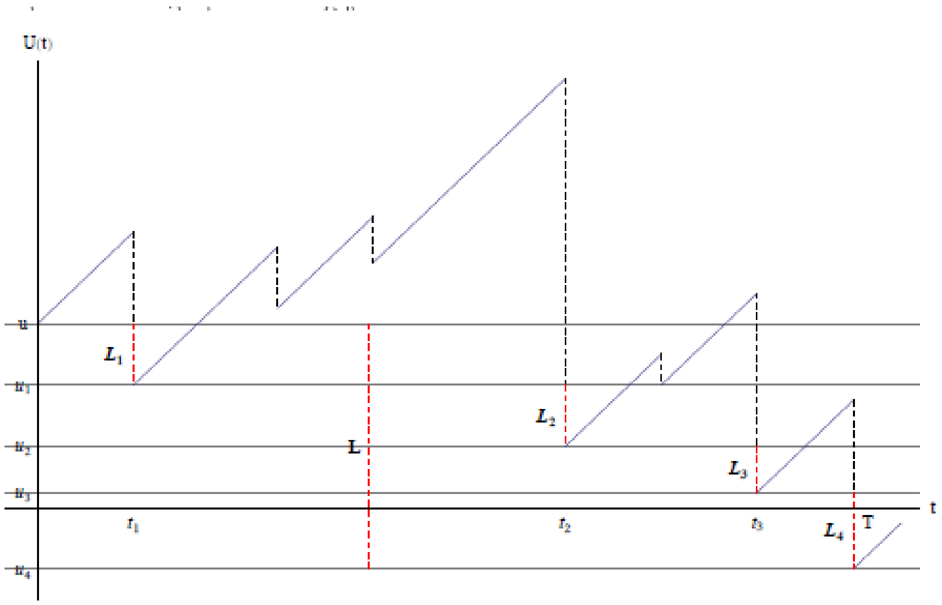
Τότε η L_i εκφράζει τις συνολικές απαιτήσεις για την i-χρονική περίοδο, δηλαδή

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} L_i = L_1 + L_2 + ... + L_{N(t)}$$

από το οποίο αντλούμε το συμπέρασμα ότι οι τ.μ. $\{L(t)\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες εκφράζοντας το μέγεθος της i-οστής απαίτησης.

Επιπλέον αξίζει να σημειωθεί ότι η τ.μ. L_1 παριστά το μέγεθος της πτώσης της $U(t)$ κάτω από το u (εάν και όταν συμβεί τέτοια πτώση). Ενώ η τ.μ. L_2 παριστά το μέγεθος της πτώσης της $U(t)$ κάτω από το $u - L_1$ και η τ.μ. L_3 παριστά το μέγεθος της πτώσης της $U(t)$ κάτω από το $u - L_1 - L_2$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται αναλυτικά τα όσα περιγράψαμε.



<u>Σχήμα:1.5</u> *Γραφική Αναπαράσταση των μεταβλητών L_i και της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L στην ανέλιξη του πλεονάσματος*

Έστω τώρα η τ.μ. Y_i που παριστά το *ύψος* (συνολικής) απαίτησης για την i-περίοδο.

Τότε, είναι:

$$Y_i = \begin{Bmatrix} 0, & \mu\varepsilon \;\; \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; q \;\; \acute{\eta} \\ L_i, & \mu\varepsilon \;\; \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; p \end{Bmatrix}$$

Έστω η τ.μ. $I_i = \begin{Bmatrix} 0, & \mu\varepsilon \;\; \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; q \;\; \kappa\alpha\iota \\ 1, & \mu\varepsilon \;\; \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; p \end{Bmatrix}$ δηλαδή η τ.μ $I_i \sim Bernoulli(p)$ για κάθε $i = 1,2,3,...$ Τότε προφανώς, ισχύει ότι $Y_i = I_i X_i$ για κάθε $i = 1,2,3,...$

Επειδή οι τ.μ. $I_1, I_2, \ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες, τότε κατ΄εξακολούθησην και οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ και $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι και αυτές μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες έστω με μια τ.μ. Y.

Προφανώς, η τ.μ. $y \in \{0,1,2,\ldots\}$ έχει συνάρτηση πιθανότητας, η οποία ορίζεται ως

$$f_Y(x) = \Pr(Y = x) \text{ και είναι } f_Y(x) = \begin{cases} q, & x = 0 \\ p\, f_X(x), & x = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

και η συνάρτηση κατανομής $F_Y(x) = \Pr(Y \le x)$ και $F_Y(x) = q + pF_X(x)$

Οπότε το μοντέλο (1.2) μπορεί να δοθεί από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} U(t) &= u + ct - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_t) \\ &= u + ct - \sum_{i=1}^{t} Y_i \end{aligned}$$

Τέλος για τα ασφάλιστρα ισχύει ότι $p\mu < 1$, όπου μ : μέσος όρος και $P(t) = ct$ για κάποιο $c > 0$, δηλαδή είναι μια γραμμική συνάρτηση.

Για την στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος, αρκεί να οριστεί και ο *Συντελεστής ή το Περιθώριο Ασφαλείας* (Premium Loading Factor), ο οποίος είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1, \quad \text{για } \theta > 0 \qquad (1.4)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει το ΄΄Ε*πιβαρυμένο Ασφάλιστρο*΄΄ το οποίο ισούται με $c = (1+\vartheta)\lambda\mu$.

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα το περιθώριο ασφαλείας εκφράζει πόσο περισσότερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα, για αυτό το λόγο μπορεί να εκφράσει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή.

- **<u>Παρατήρηση:</u>**

Θεωρούμε επίσης σαν υπόθεση ότι στο χρονικό διάστημα $[0,t]$, τα έσοδα του ασφαλιστή είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα του, δηλαδή

$$E(ct) > E\left(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right) \Rightarrow ct > \lambda\mu t \Rightarrow \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$$

Οπότε για το κλασσικό μοντέλο κάνουμε την εξής υπόθεση:

$$c > \lambda\mu \quad (1.5)$$

η οποία αποτελεί την *΄΄Συνθήκη Καθαρού Κέρδους΄΄* εξασφαλίζοντας ότι τα έσοδα της εταιρίας θα είναι περισσότερα από τα έξοδα, δηλαδή εκφράζει την βιωσιμότητα του χαρτοφυλακίου:

- Με μ : μέση αποζημίωση και
- λ : η ποσότητα που εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στην μονάδα του χρόνου.

1.1.6 Χρόνος Χρεοκοπίας T

Το ενδεχόμενο να γίνει για πρώτη φορά το πλεόνασμα αρνητικό, κατά τη χρονική στιγμή T_i, είναι γνωστό ως η πιθανότητα χρεοκοπίας. Για να οριστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας όμως θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα τον χρόνο χρεοκοπίας, ο οποίος δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.3

Ως *χρόνο χρεοκοπίας* (Time of Ruin) για $t \geq 1$ θεωρούμε το ενδεχόμενο:

$$T = \inf\{t \geq 1 : U(t) \leq 0\} \quad \textit{(1.6α)}$$

όπου T είναι ο χρόνος που για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική ή μηδέν. Ενώ υπάρχει και άλλη εκδοχή να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική για $t \geq 0$

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \quad \textit{(1.6β)}$$

Στην 2η περίπτωση δεν θεωρούμε ζημιά το πλεόνασμα να γίνει μηδέν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Ο χρόνος χρεοκοπίας αποτελεί μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, αφού

- Pr (να συμβεί χρεοκοπία) = $\Pr(T < \infty) < 1$
- Pr (να μην συμβεί χρεοκοπία) = $\Pr(T = \infty) > 0$

1.2 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας

1.2.1 Ορισμός

Η διαδικασία του πλεονάσματος αποτελεί μια διωνυμική διαδικασία, δηλαδή θεωρούμε σαν επιτυχία την εμφάνιση μιας απαίτησης σε μία χρονική περίοδο, συμβολίζοντας την με p και σαν αποτυχία το ενδεχόμενο να μην εμφανιστεί απαίτηση, έστω q όπου $q = 1 - p$.

Όπως ορίσαμε και προηγουμένως χρεοκοπία θεωρείται το γεγονός να εμφανιστεί για πρώτη φορά αρνητικό πλεόνασμα $(U < 0)$ και συμβολίζουμε με $\psi(u)$ την αντίστοιχη πιθανότητα. Σύμφωνα με τους Gerber (1988) και Dickson (1992) θεωρούν χρεοκοπία το ενδεχόμενο $\{U(t) \le 0,\ \textit{για κάποιο}\ \mathrm{t} \ge 1\}$, με

$$\psi(u) = \Pr[U(t) \le 0,\ \textit{για κάποια}\ t \in \{1,2,3,...\}] \quad \textit{(1.7α)}$$

Ενώ σύμφωνα με τους Shiu (1989) και Willmot (1992) θεωρούν χρεοκοπία το ενδεχόμενο $\{U(t) < 0,\ \textit{για κάποιο}\ \mathrm{t} \ge 0\}$, με

$$\psi(u) = \Pr[U(t) < 0,\ \textit{για κάποια}\ t \in \{0,1,2,...\}] \quad \textit{(1.7β)}$$

1.2.2 Η Στοχαστική Διαδικασία Πλεονάσματος για το Σύνθετο Διωνυμικό Μοντέλο

Η ψ αποτελεί φθίνουσα συνάρτηση της μεταβλητής u και ισχύει ότι $\lim_{u \to 0} \psi(u) = 0$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι με τον όρο ‘χρεοκοπία’ η εταιρία δεν παύει να λειτουργεί ή ότι χρεοκοπεί στην κυριολεξία. Αυτός ο όρος χρησιμοποιείται ως μέτρο της φερεγγυότητας της λειτουργίας ενός χαρτοφυλακίου ή της βιωσιμότητάς του και η εταιρία, είτε δανείζεται χρήματα, είτε αναπληρώνει τη ζημιά αντλώντας αποθεματικό από κάποιο άλλο χαρτοφυλάκιο στο ενεργητικό της, είτε καλύπτεται μέσω αντασφάλισης.

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.4

Ορίζουμε ως *΄΄Πιθανότητα Χρεοκοπίας΄΄* (Probability of Ruin) την συνάρτηση $\psi(u)$ με αρχικό αποθεματικό $u \ge 0$, η οποία είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u) = P(U(T) \le 0 \mid U(0) = u) \quad (1.8)$$

Εξετάζουμε την πρώτη χρονική περίοδο σε διακριτό διωνυμικό μοντέλο, στην οποία συναντάμε δύο πιθανά ενδεχόμενα:

- ✓ Να μην εμφανιστεί ζημιά (με πιθανότητα q), οπότε η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό κεφάλαιο $u+1$ και θέλουμε να συμβεί χρεοκοπία μετά την 1η χρονική περίοδο. Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με:

$$q\psi(u+1)$$

- ✓ Να εμφανιστεί ακριβώς μια ζημιά (με πιθανότητα p) οπότε πάλι βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δυο δυνατά ενδεχόμενα:

  - ❖ <u>Να μην εμφανιστεί χρεοκοπία</u>: Έστω x το ύψος της ζημιάς και $c=1$, δεν θα εμφανιστεί χρεοκοπία όταν $u+1-x>0$ ή $x<u+1$ ή $x\leq u$.
    Η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία μετά την 1η περίοδο, δηλαδή πιο συγκεκριμένα να μην συμβεί χρεοκοπία από την εμφάνιση μιας ζημιάς, είναι ίση με

$$p(x)=\sum_{x=1}^{u}\psi(u+1-x)\,p(x)$$

  - ❖ <u>Να εμφανιστεί χρεοκοπία:</u> Σε αυτή την περίπτωση $u+1-x\leq 0$ ή $x\geq u+1$. Πιο συγκεκριμένα $\Pr(X\geq u+1)=\sum_{x=u+1}^{\infty}p(x)$.
    Οπότε η πιθανότητα χρεοκοπίας από την εμφάνιση μιας απαίτησης είναι ίση με

$$p\sum_{x=u+1}^{\infty}p(x)$$

Από τις παραπάνω υποθέσεις έπεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με:

$$\psi(u)=q\psi(u+1)+p\sum_{x=1}^{u}\psi(u+1-x)\,p(x)+p\sum_{x=u+1}^{\infty}p(x),\quad \gamma\iota\alpha\quad u=1,2,3,\ldots\ (1.9)\qquad \square$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

Υπάρχει όμως και η άλλη περίπτωση, όπως αναφέραμε και στην αρχή, αυτή την οποία μελέτησαν οι Shiu και Dickson.Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\psi(u)&=\Pr\left[U(t)<0,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota\alpha\ t\in\{1,2,3,\ldots\}\right]\\&=q\psi(u+1)+p\sum_{x=1}^{u+1}\psi(u+1-x)\,p(x)+p\sum_{x=u+2}^{\infty}p(x)\qquad(1.9a)\end{aligned}$$

1.2.3 Πιθανότητας Μη - Χρεοκοπίας

Η πιθανότητα *΄΄μη χρεοκοπίας΄΄* είναι αύξουσα ως προς το u την συμβολίζουμε με $\delta(u)$ και ισούται με $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Η $\delta(u)$είναι μεικτού τύπου κατανομή, διότι $\delta(0) > 0$ και $\delta(u)$ έχει πυκνότητα στο (0,+∞), δηλαδή είναι συνεχής στο (0,+∞),. Επειδή είναι συνεχής από δεξιά μπορεί να θεωρηθεί μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής και είναι αύξουσα ως προς u.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.5</u>

Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ορίζεται ως:

$$\delta(u) = \delta(0) + \sum_{k=1}^{u} \delta(k)\left[1 - F_Y(u-k)\right] \qquad (1.9b) \quad \text{για} \quad u = 1,2,3,...$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Θεωρώντας πιθανές αθροιστικές ποσότητες αξίωσης την πρώτη χρονική στιγμή έχουμε το εξής: $\delta(0) = f_Y(0)\,\delta(1)$, για $u = 2,3,4,...$

$$\delta(u-1) = f_Y(0)\,\delta(u) + \sum_{j=1}^{u-1} \delta(j)\, f_Y(u-j) \qquad (i)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{u-1} \delta(k) &= f_Y(0)\sum_{k=1}^{u}\delta(k) + \sum_{k=2}^{u}\sum_{j=1}^{k-1}\delta(j)\, f_Y(k-j) \\ &= f_Y(0)\sum_{k=1}^{u}\delta(k) + \sum_{k=1}^{u-1}\delta(k)\left[F_Y(u-k) - f_Y(0)\right] \\ &= f_Y(0)\delta(u) + \sum_{k=1}^{u-1}\delta(k) F_Y(u-k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(0)\delta(u) &= \delta(0) + \sum_{k-1}^{u-1}\delta(k)[1 - F_Y(u-k)] \\ &= \delta(u-1) - \sum_{k=1}^{u-1}\delta(k)\, f_Y(u-k) \quad \textit{που προκύπτει απο την } (i)\end{aligned}$$

'Ε$\tau\sigma\iota$ $\quad \delta(u-1) = \delta(0) + \sum_{k=1}^{u-1}\delta(k)\left[1 - F_Y(u-1-k)\right] \qquad \textit{για } u = 2,3,4,..$

□

Επιπλέον απο την $\delta(u)$ που ορίζεται ως :

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx$$

μπορούμε να πάρουμε αποτελέσματα για την ποσότητα $\delta(0)$ παίρνοντας το όριο για $u \to \infty$.

$$\lim_{u\to\infty}\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \lim \delta(u-x) \lim \overline{F}(x)dx$$

$$1 = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\mu \quad \text{και} \quad \vartheta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \Rightarrow \vartheta + 1 = \frac{c}{\lambda\mu}$$

$$\text{Οπότε} \quad \delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\vartheta} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta} \quad \text{και} \quad \psi(0) = 1 - \delta(0) = \frac{1}{1+\vartheta}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω αξίζει να αναφέρουμε ότι:

1. Αν δεν ισχύει η συνθήκη $c > \lambda\mu$, τότε προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$, αφού σε κάθε χρονική στιγμή τα αναμενόμενα έξοδα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα έσοδα, δηλαδή

$$\psi(u) = 1, \ \forall \ u \geq 0$$

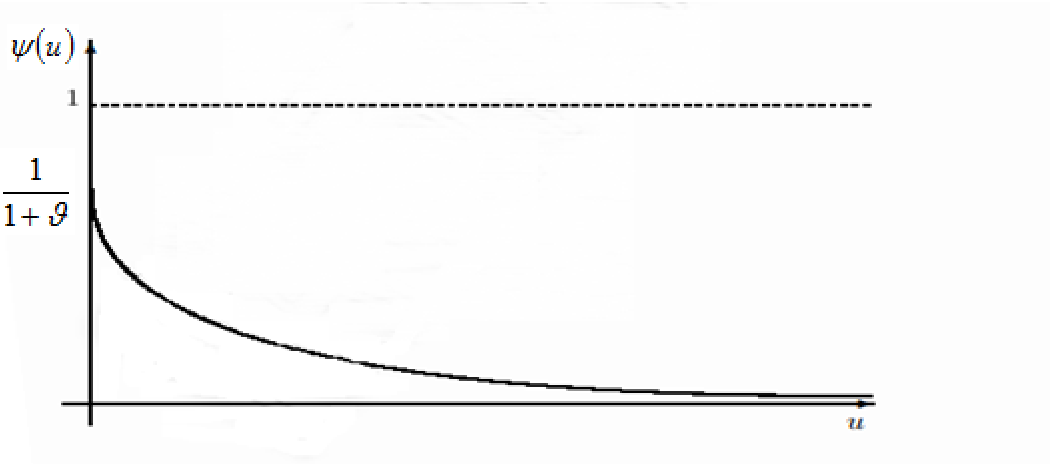
2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του u , αφού όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει η πιθανότητα για χρεοκοπία, σε αντίθεση με την πιθανότητα μη – χρεοκοπίας $\delta(u)$, η οποία είναι αύξουσα ως προς το u .

Πιο συγκεκριμένα $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$ και $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$

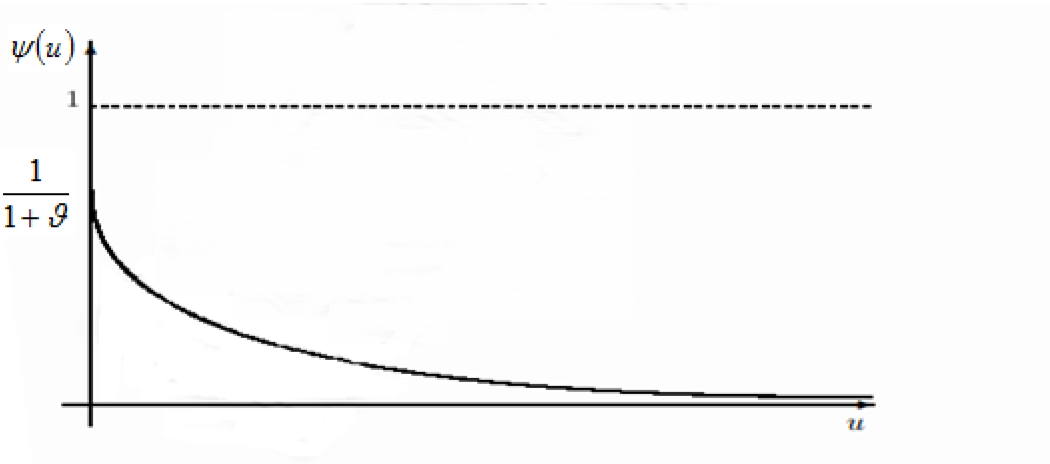
3. Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας θεωρείται συνάρτηση κατανομής, διότι:

   - Είναι αύξουσα ως προς u
   - Είναι συνεχής από δεξιά και
   - $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω θα δοθούν γραφικές παραστάσεις



Σχήμα:1.6 *Γραφική Παράσταση της Πιθανότητας Χρεοκοπίας*



Σχήμα:1.7 *Γραφική Παράσταση της Μη - Πιθανότητας Χρεοκοπίας*

Επιπλέον για την τ.μ. L έχουμε:

$$\Pr(L=0)=\Pr(K=0)=\delta(0) \quad \text{και} \quad \Pr(L>u)=\psi(u)=1-\delta(u)=1-\Pr(L\le u)$$

Ακολουθεί αριθμητικό παράδειγμα, όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους $X_i \approx Exp\left(\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{1+0.3} = 0.7692\right)$.

Ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασσικό μοντέλο όταν οι αποζημιώσεις είναι εκθετικές είναι $R = \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{0.3}{1+0.3} = 0.2307$

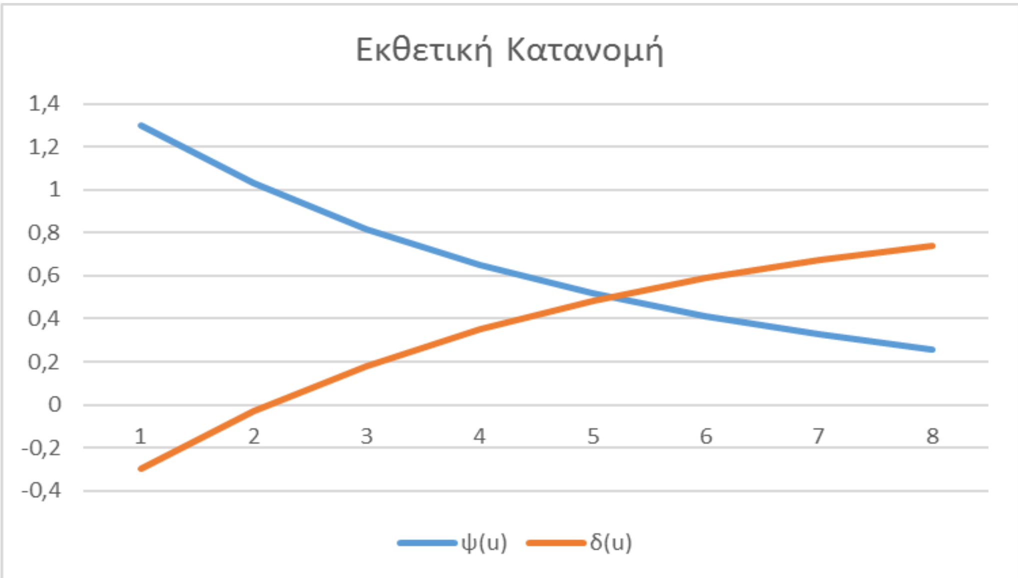
Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\psi(u) = P(L > u) = \frac{1}{1+\lambda} e^{-Ru}$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7
ψ(u)	1,3	1,032171	0,819521	0,650681	0,516626	0,41019	0,325681	0,258584
δ(u)	-0,300	-0,03217	0,180479	0,349319	0,483374	0,58981	0,674319	0,741416

Πίνακας: 1.1

Στη συνέχεια απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\psi(u)$ και $\delta(u)$



Σχήμα:1.8 *Γραφικές Παραστάσεις των συναρτήσεων δ(u) και ψ(u)*

1.2.4 Διάφορα Αποτελέσματα για u=0.

Για τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι αναγκαίο να οριστεί η ποσότητα $\psi(0)$. Αντίστοιχα από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας προκύπτει το εξής:

$$\psi(0) = q\psi(1) + p \qquad (1.10)$$

Η παραπάνω σχέση υφίσταται διότι όταν εμφανίζεται μια απαίτηση (ζημιά) συμβαίνει χρεοκοπία και ισούται με p.

- **<u>Σχολιο</u>*:***

Από τις σχέσεις *(1.9)* και *(1.10)* μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά την συνάρτηση πιθανότητας $\psi(u)$. Θα δούμε αναλυτικά αποτελέσματα στη συνέχεια. Παρ' όλο που έχουμε πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα όταν ορίσουμε να υπάρχει αρχικό απόθεμα $(U(t) > 0)$, θα δούμε λεπτομερώς τι προκύπτει στην περίπτωση όπου $u = 0$.

Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι $\psi(0) = p\mu \qquad (1.11)$

Προτού όμως δούμε αναλυτικά την απόδειξη πρέπει να επισημάνουμε δύο υποθέσεις:

<u>Λημμα:</u>

- Για όλα τα x, ισχύει ότι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\left[(S_k + x)^{(k)} q^{S_k + x}\right] = \frac{1}{1 - p\mu} \qquad (1.12)$$

- Για όλα τα $x \neq 0$, ισχύει ότι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\left[(S_K + x - 1)^{(k-1)} q^{S_k + x}\right] = \frac{1}{x} \qquad (1.13)$$

□

Εφόσον η διαδικασία $U(t)$ είναι skip free upwards και ο χρόνος τείνει στο άπειρο $(t \to \infty)$ θεωρούμε *΄΄χρεοκοπία΄΄* το γεγονός να εμφανιστεί ζημιά. ($U(t) = 0$ για κάποια $t \geq 1$). Δηλαδή πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται η πιθανότητα να συμβεί η παραπάνω υπόθεση.

Επιπλέον ορίζουμε S_k το ενδεχόμενο μιας πιθανής χρεοκοπίας την χρονική στιγμή 0 μεταξύ της $k_{ης}$ και $(k+1)_{ης}$ ζημιάς που συμβαίνει την χρονική στιγμή $t = S_k$, και μια τέτοια επίσκεψη θα συμβεί υπό την προϋπόθεση ότι $N_t = k$.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η δεσμευμένη πιθανότητα μιας χρεοκοπίας την χρονική στιγμή 0 μεταξύ της $k_{ης}$ και $(k+1)_{ης}$ ζημιάς είναι:

$$\Pr(N_t = k) = \binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - 1}$$

Η πιθανότητα όμως όπου επισκέπτεται για τελευταία φορά μεταξύ της $k_{ης}$ και $(k+1)_{ης}$ ζημιάς δίνεται από την σχέση

$$E\left[\binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - 1}\right][1-\psi(0)]$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - 1}\right][1-\psi(0)] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\left[S_k^{(k)} q^{S_k}\right][1-\psi(0)]\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, από την παραπάνω υπόθεση και την σχέση (1.12) αποδεικνύεται ότι

$$\psi(0) = \frac{p\mu}{1-p\mu}[1-\psi(0)] \quad (1.14)$$

θυμίζουμε ότι $\psi(0) = p\mu$ □

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:</u>

I. Έστω η τ.μ. X έχει την εκφυλισμένη κατανομή στο σημείο 1, δηλαδή

$$f_X(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{Bmatrix}$$

Προκύπτει ότι $f_Y(x) = 0$, για κάθε $x = 2,3,4,...$

Επομένως όταν $u=0$ και εμφανιστεί ζημιά την πρώτη περίοδο τότε έχουμε:

$$\psi(0) = p \quad (1.15)$$

Οπότε από την *(1.10)* προκύπτει άμεσα ότι $\psi(1)=0$ και από την *(1.9)*:

$$\begin{aligned}
& \psi(u) = q\psi(u+1) + p\psi(u) \\
\Rightarrow\ & \psi(u+1) = \psi(u), \quad \text{για κάθε } u = 1,2,3,\ldots \\
\textit{δηλαδή} \quad & \psi(u) = \psi(1), \quad \text{για κάθε } u = 2,3,4,.. \\
\textit{Άρα και} \quad & \psi(u) = 0, \quad \text{για κάθε } u = 2,3,4,\ldots \\
& \Rightarrow \psi(u) = 0, \quad \text{για κάθε } u = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

II. Έστω ότι όλες οι ζημιές είναι μεγέθους 2, δηλαδή

$$f_Y(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x = 2 \\ 0, & x \neq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \Pr(Y=2) = 1$$

Τότε

$$\begin{aligned}
U(t) &= u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \\
&= u + t - 2N(t) \\
&= u + (t - N_t) - N_t
\end{aligned}$$

Αυτή η διαδικασία καθώς και τα αποτελέσματα της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι γνωστό ως ***'gambler's ruin problem'***.

Άρα καταλήγουμε ότι $\psi(0) = 2p$ και $\psi(u) = \left(\dfrac{p}{q}\right)^u$, για $u = 1,2,3,\ldots$ που είναι η λύση των σχέσεων *(1.9), (1.10)* και *(1.11)* □

Αναφέραμε προηγουμένως πως από την πιθανότητα χρεοκοπίας Σύνθετου Κλασσικού Μοντέλου Poisson σε συνεχή χρόνο μπορεί να προσεγγιστεί πιθανότητα χρεοκοπίας για το Σύνθετο Διωνυμικό Μοντέλο.

Ο Gerber ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν και απέδειξε μερικά από τα παραπάνω αποτελέσματα (1988) συνεχίζοντας με μεγάλη επιτυχία ο Shiu (1989) και τέλος ο Willmot (1992), ο οποίος έδωσε αρκετά σαφή αποτελέσματα για την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής της χρεοκοπίας για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως μελετήσαμε το μοντέλο κινδύνου σε διακριτό χρόνο με τα εξής χαρακτηριστικά:

- ✓ L_i να δηλώνει το σύνολο των απαιτήσεων την i-χρονική περίοδο,
- ✓ Το σύνολο των L_i να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες καθώς και μη-αρνητικές ακέραιες μεταβλητές,
- ✓ Το ασφάλιστρο να είναι 1 νομισματική μονάδα *(ν.μ.)* και
- ✓ $E(X_i) < 1$

1.2.5 Σφοδρότητα - Έλλειμμα Χρεοκοπίας

Για να ορίσουμε την´´*σφοδρότητα*´´ πρώτα πρέπει να αναλύσουμε το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία.

- Πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία:

Θα μελετήσουμε την συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας (σ.π.π.) του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και θα δώσουμε τον τύπο του Dickson, όπως το απέδειξε ο ίδιος το 1992 και συμβολίζεται με$U(T-1)$ (Βλ. Σχήμα 1.4). Αποτελεί το επίπεδο της ανέλιξης του πλεονάσματος ακριβώς πριν την αποζημίωση που προκαλείται από την χρεοκοπία.

Οπότε η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία έχοντας ένα αρχικό αποθεματικό u και με το πλεόνασμα να είναι μικρότερο του x, είναι

$$f(x \mid u) = \Pr[T < \infty \;\; \kappa\alpha\iota \;\; U(T-1) \le x] \quad (1.14)$$

- Αν $u < x$ τότε $f(x \mid u) = f(x \mid 0)\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}$

- Αν $u > x$ τότε $f(x \mid u) = f(x \mid 0)\dfrac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}$, όπου $f(x \mid 0) = \dfrac{\lambda}{c}[1-p(x)]$

- Έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία:

Δηλώνει δηλαδή το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν. Εάν δεν εμφανιστεί πτώση κάτω από το αρχικό απόθεμα το οποίο έχουμε ορίσει τότε $L_1 = 0$. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι $\delta(0) = P(L_1 \le u)$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.6</u>

Ορίζουμε σφοδρότητα (ή έλλειμμα) χρεοκοπίας, δίνοντας την συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος, η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$G(u \mid y) = G(u, y) = \Pr\left[T < \infty \ \ \kappa\alpha\iota \ \ U(T) > -y\right], \ \ \mu\varepsilon \ \ u = 0,1,2,... \ (1.15)$$

Όπου $T = \min\{t : U(t) \le 0, \ \ t = 1,2,3,...\} = \infty \ \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ \ U(t) > 0, \ \ \gamma\iota\alpha \ \ t = 1,2,3,...$

Η συνάρτηση $G(u, y)$ δείχνει την πιθανότητα δοθέντος ότι έχει συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι $y-1$.
Ισχύει επίσης ότι $\lim_{y\to\infty} G(y \mid u) = \psi(u)$
Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζοντας $u = 0$ μπορεί να δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$\psi(0) = \mathrm{E}(X_i) \quad (1.16)$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Έστω $u = 0$ το αρχικό πλεόνασμα και y το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας. Ορίζουμε συνάρτηση πιθανότητας $g(0, y)$. Να επισημάνουμε ότι

- Όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι θετική ποσότητα $(u > 0)$
  Τότε η $g(0, y)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η πιθανότητα ότι το πλεόνασμα θα πέσει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό επίπεδο που έχει οριστεί και θα είναι ίσο με το έλλειμμα, δηλαδή y.

- Όταν όμως το έλλειμμα είναι ίσο με το μηδέν $(y = 0)$
  Τότε η $g(0, y)$ δίνει την πιθανότητα ότι το πλεόνασμα επιστρέφει στο αρχικό του επίπεδο χωρίς προηγουμένως να έχει πέσει κάτω από το αρχικό επίπεδο. □

Από τις παραπάνω υποθέσεις καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα για την πιθανότητα μη - χρεοκοπίας:

$$\delta(u) = \delta(0) + \sum_{y=1}^{u} g(0, u-y)\delta(y) \qquad (1.17)$$

Όπου:

- $\delta(0)$: είναι η πιθανότητα το πλεόνασμα να μην πέσει ποτέ από το αρχικό επίπεδο που έχει οριστεί και
- $g(0,u-y)\,\delta(y)$: εφόσον $y<u$ μας δίνει την πιθανότητα ότι το πλεόνασμα θα πέσει για πρώτη φορά στο y και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας θα συμβεί από το επίπεδο y.

Μια παρόμοια ερμηνεία εφαρμόζεται και στην περίπτωση όπου $y=u$.
Από την σχέση *(1.12)* αντικαθιστώντας όπου $k=y$ παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\delta(u)=\delta(0)+\sum_{y=1}^{u}\delta(y)\left[1-F_Y(u-y)\right] \quad (1.18)$$

Από τις σχέσεις *(1.17)* και *(1.18)* προκύπτει ότι $g(0,y)=1-F_Y(y),\ \gamma\iota\alpha\ u=1,2,3,...$

Οπότε από την *(1.16)* καταλήγουμε στο εξής: $\psi(0)=\sum_{y=0}^{\infty}g(0,y)$

Ορίζουμε το ασφάλιστρο της μιας 1 ν.μ. ως $(1+\theta)E(X_i)$ οπότε

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta} \quad (1.19)$$

Όπως στο κλασσικό μοντέλο σε συνεχές χρόνο. □

1.2.6 Από Κοινού Συνάρτηση Κατανομής

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως μπορούμε να αποκτήσουμε αρκετά αποτελέσματα χρεοκοπίας όταν ορίσουμε το αρχικό πλεόνασμα να είναι μηδέν, ξεκινώντας με την από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Η συνάρτηση των Gerber – Shiu εισήχθη το 1998 και αποτελεί γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Κύριο χαρακτηριστικό της, είναι η από κοινού μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας T, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ και του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $U(T-1)$ (Βλ. Σχήμα 1.4)

Είναι γνωστή και ως΄΄*Αναμενόμενη Προεξοφλημένη Συνάρτηση Ποινής*΄΄(Expected Discounted Penalty Function), την οποία θα ορίσουμε αργότερα, αφού πρώτα αναλύσουμε αποτελέσματα που αφορούν το ανανεωτικό μοντέλο.

Ορισμος: 1.7

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής με αρχικό πλεόνασμα u ορίζεται η συνάρτηση $f(u,x,y)$ για $x=1,2,3,\ldots$ και $y=0,1,2,\ldots$ όπου

$$f\,(u,x,y)=\Pr\left[T<\infty, U(T)=-y \quad \kappa\alpha\iota \quad U(T-1)=x\ \right] \quad (1.20)$$

□

Άρα η $f(u,x,y)$ δίνει την πιθανότητα η χρεοκοπία να προκύπτει από το αρχικό απόθεμα u, με έλλειμμα y την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας T και ένα πλεόνασμα x την χρονική στιγμή πριν από την χρεοκοπία.

Η πιθανότητα η χρεοκοπία να συμβεί την χρονική στιγμή 1 με έλλειμμα y την στιγμή της χρεοκοπίας, είναι $f(0,0,y)=f_Y(y+1)$

Εξετάζοντας τα πιθανά ποσά συνολικών ζημιών κατά την πρώτη χρονική περίοδο μπορούμε να γράψουμε:

$$f\,(u,x,y)=\sum_{j=0}^{u} f_Y(j)\,f(u+1-j,x,y), \qquad \gamma\iota\alpha\ u=0,1,2,\ldots x-1, x+1,\ldots$$

και

$$f(u,x,y)=\sum_{j=0}^{u} b(j)\,f(u+1-j,x,y)+b(x+y+1), \quad \acute{o}\tau\alpha\nu\ u=x$$

Υποθέτουμε ότι $\sum_{u=0}^{\infty} f(u,x,y)<\infty \quad (1.21)$. Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{u=0}^{\infty} f(u,x,y) &= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{j=o}^{u} f_Y(j)\,f(u+1-j,x,y)+f_Y(x+y+1)\\ &= \sum_{u=1}^{\infty} f(u,x,y)\sum_{j=0}^{\infty} f_Y(j)+f_Y(x+y+1)\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου $\qquad f(0,x,y)=f_Y(x+y+1) \quad (1.22)$

και καταλήγουμε σε $G(0,y)=\sum_{j=0}^{y-1}\sum_{x=0}^{\infty} f_Y(x+y+1)=\sum_{j=0}^{y-1}\left[1-F_Y(y)\right]$

$$\text{Άρα} \quad \psi(0)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-F_Y(j)\right]$$

$$\begin{aligned}\Pr\left[T<\infty\ \kappa\alpha\iota\ U(T-1)\le x-1 \,|\, u=0\right] &= \sum_{j=0}^{x-1}\sum_{y=0}^{\infty} f_Y(j+y+1)\\ &= \sum_{j=0}^{x-1}\left[1-F_Y(j)\right]\\ &= G(0,x) \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

i. Η σχέση *(1.20)* ισχύει όταν εφαρμοστεί η ανισότητα του Lundberg.
ii. Η σχέση *(1.21)* ισχύει όταν το άθροισμα της σχέσης *(1.20)* είναι απειροστό.

Η κατανομή του L_i μπορεί να εκφραστεί ως σύνθετη διωνυμική κατανομή με διωνυμικές παραμέτρους 1 και $1- f_x(0)$ και συνάρτηση πιθανότητας για ατομικές ζημιές $\frac{f_X(j)}{1-f_X(0)}$, για $j=1,2,3,...$

1.3 Μια Εφαρμογή Στο Διωνυμικό - Γεωμετρικό Μοντέλο

1.3.1 Ορισμοί - Εισαγωγικά

Το πλήθος των ζημιών $N(t)$ κάθε χρονική στιγμή ακολουθούν Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους 1 και p $\left(N(t) \sim Binomial(1, p)\right)$, ενώ οι ατομικές ζημιές X_i την Γεωμετρική $\left(X_i \sim G(p)\right)$ με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - pq^x, \ \ \gamma\iota\alpha \ \ x = 0,1,2,...$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $E(X_i) < 1$ για τις παραμέτρους p και q θα ισχύει

$$\frac{p}{1-q} < 1$$

Μπορούμε να γράψουμε την *(1.8)* ως εξής:

$$\psi(u) = \psi(0) - \sum_{k=1}^{u}\left[1-\psi(k)\right]\left[1-F_Y(u-k)\right]$$

Και εισάγουμε την $\psi(0)$:

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{u}\psi(k)\left[1-F_Y(u-k)\right] + \sum_{k=u}^{\infty}\left[1-F_Y(k)\right]$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την $F_Y(k)$:

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{u}\psi(k)\, pq^{u-k} + \sum_{k=u}^{\infty} pq^k \qquad (1.24)$$

και

$$\psi(u+1) = \sum_{k=1}^{u+1}\psi(k)\, pq^{u+1-k} + \sum_{k=u+1}^{\infty} pq^k \qquad (1.25)$$

Εάν πολλάπλασιάσουμε την *(1.24)* με τον όρο q και την αφαιρέσουμε από την *(1.25)* προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\psi\left(u+1\right)-\frac{q}{1-p}\psi(u)=0$$

Οπότε καταλήγουμε στο ότι $\psi\left(u\right)=c\left(\frac{q}{1-p}\right)^{u}$ (1.26)

Από την οποία προκύπτει ότι $c=\psi(0)$ και μπορεί να γραφεί και σε μορφή:

$$\psi\left(u\right)=\psi(0)e^{-Ru},$$

Όπου R **:** είναι ο συντελεστής προσαρμογής και ο μοναδικός θετικός αριθμός που ικανοποιεί την σχέση $E\left[e^{R(X_i-1)}\right]=1$ καταλήγοντας ότι $e^{R}=\frac{1-p}{q}$ □

Τα παραπάνω αποτελέσματα σχετίζονται άμεσα με αυτά της πιθανότητας χρεοκοπίας για το Εκθετικό μοντέλο Poisson το οποίο μπορεί να γραφτεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόμοια αποτελέσματα για την $\psi(u)$ και $\delta\left(u\right)$απέδειξε ο Willmott.

Αφού αποδείξαμε τα παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $g(0,y)$ για να καταλήξουμε στην $G(0,y)$ δεδομένου ότι το αρχικό πλεόνασμα φτάνει στο αρχικό του επίπεδο.

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}G\left(u,y\right)&=\sum_{k=u}^{u+y-1}g(0,k)+\sum_{k=0}^{u-1}g(0,k)G(u-k,y)\\&=\sum_{k=u}^{u+y-1}g(0,k)+\sum_{k=1}^{u}g(0,u-k)G(k,y)\end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε όπου $g\left(0,k\right)=1-F_{Y}(k)=pq^{k}$

$$G\left(u,y\right)=\sum_{k=u}^{u+y-1}pq^{k}+\sum_{k=1}^{u}pq^{u-k}G(k,y)$$

$$G\left(u+1,y\right)=\sum_{k=u+1}^{u+y}pq^{k}+\sum_{k=1}^{u+1}pq^{u+1-k}G(k,y)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική $G\left(u+1,y\right)-\frac{q}{1-p}G(u,y)=0$ οπότε

$$G\left(u,y\right)=G(0,y)\left(\frac{q}{1-p}\right)^{u}$$

$$G(0,y) = \sum_{k=0}^{y-1} g(0,k) = \sum_{k=0}^{y-1} pq^k = p\frac{1-q^y}{1-q}, \quad \text{για y=1,2,3,…}$$

$$G(u,y) = (1-q^y)\frac{p}{1-q}\left(\frac{q}{1-p}\right)^u = P(y)\,\psi(\mathrm{u}) \qquad (1.27)$$ □

Παρ' όλα αυτά σε αντίθεση με το Εκθετικό μοντέλο Poisson που είδαμε προηγουμένως, η κατανομή του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας δεν είναι ισόνομη με την κατανομή των ατομικών ζημιών. Το έλλειμμα είναι γεωμετρικά κατανεμημένο με παράμετρο q , αλλά πάνω από 0,1,2,.., αφού ο λόγος $G(u,y)/\psi(u)$ δίνει την πιθανότητα το έλλειμμα να είναι μικρότερο ή ίσο του $y-1$, δοθέντος ότι έχει συμβεί χρεοκοπία, οπότε

$$\Pr[-U(T) < y \mid T < \infty] = 1-q^y, \quad \text{για} \quad y = 1,2,3,..$$

Στη συνέχεια θα δούμε γραφικές αναπαραστάσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων και πιο συγκεκριμένα για τις συναρτήσεις $\psi(u)$ και $G(x,y)$.

1.4 Προσεγγίσεις για το Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου σε Συνεχή Χρόνο

Σύμφωνα με τον Gerber (1988), όπως αναφέραμε και νωρίτερα το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του σύνθετου κλασσικού μοντέλου Poissonσε συνεχή χρόνο. Η παραπάνω υπόθεση θα γίνει με την βοήθεια των διηνεκών πιθανοτήτων χρεοκοπίας.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την ανέλιξη Poisson, η οποία αποτελεί παράδειγμα απαριθμήτριας ανέλιξης, πιο συγκεκριμένα είναι μη φθίνουσα, με πιθανότητα 1 και παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές. Τέτοιες ανελίξεις χρησιμοποιούνται συνήθως για να παραστήσουν πόσες φορές συμβαίνει ένα γεγονός μέσα σε μια ασφαλιστική εταιρία, δηλαδή μια απαίτηση για αποζημίωση στο χρονικό διάστημα που έχει οριστεί.

Παρόλα αυτά οι ασφαλιστικές εταιρίες καταλήγουν να μελετάνε μοντέλα διακριτού χρόνου, διότι είναι πιο εφικτή και κατανοητή η προσέγγισή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου. Έχει αποδειχθεί ότι παίρνουν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα απ' ότι σε συνεχή χρόνο.

Εφόσον οι ανελίξεις που θα μελετήσουμε είναι σε συνεχή χρόνο, όπως αναφέραμε και προηγουμένως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{N(t),\, t \geq 0\}$.

Τα τελευταία χρόνια έχουν παρουσιαστεί και μελετηθεί διάφορες γενικεύσεις του μοντέλου, όπως:

- Η $P(t)$ να μην είναι γραμμική συνάρτηση,
- Οι μεταβλητές X_i δεν είναι ανεξάρτητες,
- Η $\{N(t),\, t \geq 0\}$ είναι μια ανανεωτική ανέλιξη,
- Λαμβάνεται υπόψη ο πληθωρισμός και
- Γίνεται επένδυση του αρχικού αποθεματικού ή και των ασφαλίστρων.

Όπως είπαμε και προηγουμένως θα μελετήσουμε τη συνθήκη αυτή θεωρώντας διηνεκείς πιθανότητες χρεοκοπίας. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο, θα προσαρμόσουμε ένα πλαίσιο που έχει σχεδιαστεί το 1991 από τους Dickson και Waters, οι οποίοι χρησιμοποίησαν το σύνθετο μοντέλο Poisson σε διακριτό χρόνο για να το προσεγγίσουν σε συνεχή.

Τα χαρακτηριστικά αυτού του μοντέλου είναι τα εξής:

- Οι επιμέρους ποσότητες ζημιάς διανέμονται επί των μη-αρνητικών ακεραίων με μέσο β, όπου $\beta > 1$ και είναι μια ακέραια μεταβλητή,
- Οι παράμετροι της κατανομής Poisson για τον αναμενόμενο αριθμό ζημιών για κάθε χρονική στιγμή είναι $\dfrac{1}{(1+\theta)\beta}$ και
- Το ασφάλιστρο ανά μονάδα χρόνου είναι 1 .

Επομένως θα αντικαταστήσουμε το διακριτό σύνθετο μοντέλο Poisson με ένα σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Θεώρησαν $\psi(\beta u)$ μια προσέγγιση της $\psi_c(u)$, να είναι η απώτερη πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνεχές σύνθετο μοντέλο Poisson. Στην πραγματικότητα οι περισσότεροι προτιμούν να προσεγγίσουν ένα σύνθετο διακριτό μοντέλο Poisson από ένα σύνθετο διωνυμικό μοντέλο. Προτιμάται για μεγάλες τιμές β απ΄ότι μια απλή κατανομή Poisson με παράμετρο $\dfrac{1}{(1+\theta)\beta}$, η οποία είναι πολύ κοντά στην προσεγγιστική διωνυμική κατανομή. Για παράδειγμα εάν το $\beta = 100$ και $\theta = 0.1$,η πιθανότητα των περισσοτέρων από μια ζημιά κάθε χρονική στιγμή σύμφωνα με το σύνθετο μοντέλο Poisson είναι 0,00004.

Σε αυτή την εφαρμογή θεωρούμε η ζημιά ότι είναι μια μη αρνητική ακέραια μεταβλητή, σε αντίθεση με τις προηγούμενες. Η παραπάνω υπόθεση γίνεται , διότι για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασσικό σύνθετο μοντέλο Poisson συνεχούς χρόνου, πρέπει να μετατρέπει το συνεχές ατομικό ποσό ζημιάς σε διακριτό χρόνο.

Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας αναδρομικά από τον παρακάτω τύπο

$$\psi(1) = f_Y(0)^{-1}\left[\psi(0) - 1 + F_Y(0)\right], \quad \gamma\iota\alpha\ u = 2,3,4,... \quad (1.28)$$

$$\psi(u) = f_Y(0)^{-1}\left[\psi(u-1) - 1 + F_Y(u-1) - \sum_{j=1}^{u-1} f_Y(j)\,\psi(u-j)\right] \quad (1.29)$$

Οι παραπάνω δυο σχέσεις ταυτίζονται με τις αντίστοιχες σχέσεις (1.9) και (1.10) των Gerber και Shiu.

1.5 Προεξοφλημένες συναρτήσεις πιθανότητας σύμφωνα με τους Gerber και Shiu (1998).

Το 1998 δυο μεγάλοι ερευνητές ο Gerber και ο Shiu έδωσαν μια νέα συνάρτηση, η οποία αποτελεί γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της συνάρτησης είναι η από κοινού μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας T, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$και του πλεονάσματος ακριβώς πριν την χρεοκοπία $U(T-1)$, όπως ορίσαμε και προηγουμένως (Βλ. Σχήμα 1.4). Μοντελοποίησαν αυτές τις τρείς τυχαίες μεταβλητές σε μια συνάρτηση, την Αναμενόμενη Προεξοφλημένη Συνάρτηση Ποινής ή γνωστή και ως συνάρτηση των Gerber – Shiu, η οποία ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.8

Ορίζουμε ως αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των Gerber – Shiu για $u \geq 0$και $\delta \geq 0$

$$\phi_\delta(u) = \mathrm{E}\left[e^{-\delta T} w(U(T-1), |U(T)|) I(T<\infty) \,|\, U(0) = u\right] \quad (1.30)$$

Όπου

- δ: είναι η ένταση ανατοκισμού (παράγοντας προεξόφλησης – discountedfactor),
- $w(x,y)$: είναι μια συνάρτηση ποινής (penaltyfunction), δηλαδή τι χρηματικό ποσό οφείλει να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρία, με $0 \leq w(x,y) < \infty$, και $y > 0$,
- T : είναι ο χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u,
- $U(T-1)$: το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,
- $|U(T)|$: είναι η σφοδρότητα χρεοκοπίας ή αλλιώς το έλλειμμα στο ταμείο κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και
- I : είναι η δείκτρια συνάρτηση η οποία ορίζει την ποινή εάν και εφόσον τελικά συμβεί χρεοκοπία δοθέντος ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι u .

$$I(T<\infty)=\begin{cases}1, \; \alpha\nu \; \sigma\upsilon\mu\beta\varepsilon\acute{\iota} \; \eta \; \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \\ 0, \; \alpha\nu \; \delta\varepsilon\nu \; \sigma\upsilon\mu\beta\varepsilon\acute{\iota} \; \eta \; \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha\end{cases}$$

Από την σχέση *(1.27)* μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα

$$\phi_\delta(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(x,y)\,f(x,y,t\,|\,u)dt\,dx\,dy \quad (1.31)$$

Όπου:

– $f(x,y,t\,|\,u)$: είναι η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του πλεονάσματος ακριβώς πριν την χρεοκοπία με $\psi(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y,t\,|\,u)dtdxdy$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $m_\delta(u)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής $w(x,y)$ προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω:

i. Αν $w(x,y)=1$ και $\delta>0$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι έχει συμβεί η χρεοκοπία, δηλαδή

$$\phi_\delta(u)=\mathrm{E}\left[e^{-\delta T}\, I(T<\infty\,|\,U(0)=u)\right] \quad (1.32)$$

ii. Αν $w(x,y)=1$ και $\delta=0$ προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u)=\mathrm{E}\left[\mathrm{I}(\mathrm{T}<\infty\,|\,U(0)=u)\right]=\Pr(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u) \quad (1.33)$$

iii. Αν $w(x,y)=I\left(U(T-1)=x\right)I\left(|U(T)|=y\right)$ και $\delta>0$, η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα των τ.μ. έλλείμματος πλεονάσματος, την στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\phi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}\; I(U(T-1)=x)I(|U(T)|=y)I(T<\infty)|\,U(0)=u\right]=f_\delta(x,y\,|\,u)$$

iv. Αν $w(x,y)=I(U(T-1)=y)$ και $\delta>0$, προκύπτει η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα της τ.μ. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας , δηλαδή

$$\phi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}\;\; I(|U(T)|=y)I(T<\infty)|\,U(0)=u\right]=f_{1\delta}(y\,|\,u)=g(u,y)$$

v. Αν $w(x,y)=I(U(T-1)=x)$ και $\delta>0$, προκύπτει η περιθώρια ελλειμματική πυκνότητα της τ.μ. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία , δηλαδή

$$\phi_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}\;\; I(U(T-1)=x)I(T<\infty)|\,U(0)=u\right]=f_{2\delta}(x\,|\,u)$$

Σημείωση:

Η ανανεωτική εξίσωση, η οποία αποτελεί υποκατηγορία των γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, δίνεται από τον παρακάτω γενικό τύπο

$$M(t) = g(x) + \lambda \int_0^x M\,(t-x) dF(y) \quad (i)$$

Όπου $g(u): \; g: \Re \to \Re^+$ είναι τοπικά φραγμένη συνάρτηση

$F(u)$: αποτελεί συνάρτηση κατανομής με $F(0) = 0$

λ: θετική σταθερά

Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται στις τρείς παρακάτω περιπτώσεις:

- Ελλειμματικές (Defective) Ανανεωτικές Εξισώσεις όταν $\lambda < 1$
- Κανονικές (Proper) Ανανεωτικές Εξισώσεις όταν $\lambda = 1$ και
- Υπερβολική (Excessive) όταν $\lambda > 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ:1.1

Έστω $F(u)$ συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) με $F(0) = 0$, μια θετική σταθερά, για $\lambda < 1$ και $g(u)$ μια μη αρνητική, φραγμένη πραγματική συνάρτηση τότε η λύση της (i) είναι η εξής:

$$M(x) = g(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^x g(x-y)\, H(y) \quad (ii), \quad \text{όπου}$$

$$\overline{H}(x) = 1 - H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\lambda)\, \lambda^n\, \overline{F}^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

Η συνάρτηση $H(x)$ είναι μια σ.κ. και καλείται σύνθετη γεωμετρική κατανομή (Compound Geometric Distribution) και $\overline{H}(x)$ είναι συνάρτηση δεξιάς ουράς. Αξίζει να σημειωθεί ότι η $H(x)$ είναι ανεξάρτητη από την $g(x)$ και $H(0) = 1 - \lambda$.
΄2 Σύμφωνα με τα παραπάνω η σύνθετη γεωμετρική κατανομή είναι

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda) \lambda^n\, F^{*n}(x), \quad x \geq 0 \quad \text{και η λύση αυτής}$$

$$M(x) = \lambda \int_0^x g(x-y)\, dH(y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:1.2

Η συνάρτηση $\varphi(u)$ των Gerber-Shiu ικανοποιεί την *΄΄Ελλειμματική Ανανεωτική Εξίσωση΄΄* (Defective Renewal Equation), η οποία χρησιμοποιείται για την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\phi_{\delta}(u) = \lambda \int_0^u \phi(u-x)\, g(x) dx + g(u). \quad \gamma\iota\alpha \quad u \geq 0 \qquad (1.34)$$

όπου λ είναι μια σταθερά η οποία ανήκει στο (0,1) και $g(x) = G^{'}(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 2

¨ΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ¨

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας σύμφωνα με τον Sparre-Andersen (1958), το οποίο αποτελεί επέκταση του κλασσικού σύνθετου διωνυμικού μοντέλου και θεωρεί μια κλάση σύνθετων ανανεωτικών μοντέλων με τους χρόνους αναμενόμενης ζημιάς να ακολουθούν μια διακριτή κατανομή, έστω K_m. Το κλασσικό σύνθετο διωνυμικό μοντέλο με το οποίο ασχοληθήκαμε στο Κεφάλαιο 1 αναφέρεται στην ειδική περίπτωση όπου $m=1$.

Η αναδρομική σχέση για την συνάρτηση των Gerber και Shiu δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία αντλείται, χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις και όχι μετασχηματισμό Laplace όπως γίνεται συνήθως για τα μοντέλα που μελετώνται σε συνεχή χρόνο. Κύριος σκοπός επομένως αυτού του κεφαλαίου είναι να εκτιμήσουμε την συνάρτηση των Gerber και Shiu σε μια κλάση ανανεωτικού μοντέλου.

2.1 Περιγραφή Μοντέλου

Θεωρούμε σε διακριτό χρόνο την διαδικασία χρεοκοπίας ως

$$U(n) = u + n - \sum_{i=1}^{N(n)} X_i\,,\ \ n = 1,2,3,... \qquad (2.1)$$

όπου $u \in N$ και είναι το αρχικό πλεόνασμα.

Οι μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x),\ \ για\ \ x = 1,2,3,...$ δοθέντος ότι έχει συμβεί ζημιά.

Ορίζουμε επιπλέον ως $\mu_k = E\left[X^k\right]$ την k_η στιγμή του X με μετασχηματισμό Laplace $\hat{p}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} s^i\, p(i),\ \ s \in C$ και $\{N(n); n \in N\}$ να είναι η διαδικασία καταμέτρησης του πλήθους των ζημιών που ορίζεται ως $N(n) = \max\{k : W_1 + W_2 + .. + W_n \le n\}$.

Οι ποσότητες W_i αποτελούν τον χρόνο αναμονής και είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πιθανότητας

$k(x) = P(W = x), \quad \gamma\iota\alpha \quad x = 1,2,3,...$ με μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{k}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} s^i \, k(i), \;\; s \in C$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι $\{W_i \,; i \in N^+\}$ και $\{X_i \,; i \in N^+\}$είναι ανεξάρτητες και ισχύει ότι $E(W) = (1+\vartheta)\; E(X) = (1+\vartheta)\mu$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την συνάρτηση ποινής συμβολίζοντας την όπως και προηγουμένως με $w(x, y)$, όπου $x, y = 0,1,2,...$ και είναι μη-αρνητική.
Για $0 < u < 1$, ορίζουμε την συνάρτηση των Gerber και Shiu συμβολίζοντας την με $\phi(u)$ γνωστή και ως προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής:

$$\phi(u) = \mathrm{E}\left[u^T w(U(T-1), |U(T)|)\, I(T < \infty) \,|\, U(0) = u\right], \quad u \in N \qquad (2.2)$$

όπου $w(U(T-1), |U(T)|)$: να είναι η συνάρτηση ποινής την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας με πλεόνασμα $(U(T-1)) = x$ και έλλειμμα $(|U(T)|) = y$ και

u : το προεξοφλητικό επιτόκιο το οποίο είναι ίσο με $u = e^{-\delta}$ με $\delta \geq 0$ να αποτελεί την ένταση ανατοκισμού, την οποία εισήγαγαν οι Gerber και Shiu το 1997, ή μεταβλητή ενός μετασχηματισμού Laplace.

Χρόνο χρεοκοπίας θεωρούμε το σύνολο $T = \min\{n \in N^+ : U(n) < 0\}$ και πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty \,|\, U(0) = u)$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y, t \,|\, u)\, dx\, dy\, dt, \;\; u \in N$$

Όπου $f(x, y, t \,|\, u)$: από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

Θεωρούμε ότι $c > \lambda E(x)$, έτσι ώστε $U(t) \to \infty$ για $t \to \infty$.
Από τις παραπάνω υποθέσεις καταλήγουμε ότι $\psi(u) < 1$, δηλαδή αποτελεί μια *ελλειμματική σ.π.π.* Αποτελεί την περίπτωση όπου $w(x, y) = 1$ και $\delta = 0$ και

- Για $x > u + ct$
  - $f(x, y, t \,|\, u) = 0$ και
  - $f(u+ct, y, t \,|\, u)\, dxdydt = e^{-\lambda t}\, \lambda\, p(u + ct + y) dydt$

Τέλος η *διηνεκής (ultimate)* πιθανότητα χρεοκοπίας την στιγμή n ορίζεται ως

$$\psi(u, n) = \Pr(T = n \,|\, U(0) = u), \; n = 1,2,3,...$$

Άρα η από κοινού συνάρτηση κατανομής ελλείμματος κατά τη διάρκεια της χρεοκοπίας, το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία και του χρόνου δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$f_3(x, y, t \,|\, u) = \Pr\{U(T-1) = x, |U(T)| = y, \; T = t \,|\, U(0) = u\}, \; x \in N, \; y \in N^+$$

Έστω $u \in (0,1)$ είναι ο σταθερός συντελεστής προεξόφλησης, ορίζουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π., ελλείμματος και πλεονάσματος, ως

$$f_2(x, y \mid u) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t f_3(x, y, t \mid u)$$

Καθώς επίσης και $$f_1(x \mid u) = \sum_{y=0}^{\infty} f_2(x, y \mid u)$$

η οποία αποδείχθηκε πρώτα από τους Dufrense και Gerber(1988) για $\delta = 0$

Ως συνάρτηση δεξιάς ουράς ορίζεται $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ οπότε

$$f_2(x, y \mid u) = f_1(x \mid u) \frac{f(x + y + 1)}{\overline{F}(x + 1)}, \; x \in N, \;\; y \in N^+$$

2.2 Η Κλάση K_m

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως θα μελετήσουμε το μοντέλο με τον χρόνο αναμονής να ακολουθεί μια διακριτή κλάση κατανομών K_m.

Στη συνέχεια θα δοθούν κάποιες γνωστές κατανομές για την κλάση αυτή

- Ορίζουμε συνάρτηση πιθανότητας $k(x)$ $x \in N^+$ τότε

$$\hat{k}(s) = \frac{s\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j (s-1)^j\right]}{\prod_{i=1}^{m}(1 - sq_i)}, \qquad R(s) < \min\left\{\frac{1}{q_i} : 1 \le i \le m\right\} \quad (2.3)$$

όπου $0 < q_i < 1$, για $i = 1,2,3,..., m$ και οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, ...\beta_{m-1}$ είναι τέτοιοι ώστε K να είναι συνάρτηση ποινής.

Η μέση τιμή και η δεύτερη ροπή του χρόνου αναμονής δίνονται παρακάτω:

- $$E(W) = \hat{k}'(1) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{(1-q_i)} + \frac{\beta_1}{\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)} \quad (2.4)$$

- $$E\left[W^{(2)}\right] = \hat{k}''(1) = \frac{2\beta_2 + \beta_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{(1-q_i)}}{\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)} + E(W)\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i}{(1-q_i)} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{q_i}{1-q_i}\right)^2, \quad (2.5)$$

όπου $x^{(2)} = x(x-1)$ είναι το δεύτερο παραγοντικό του x.

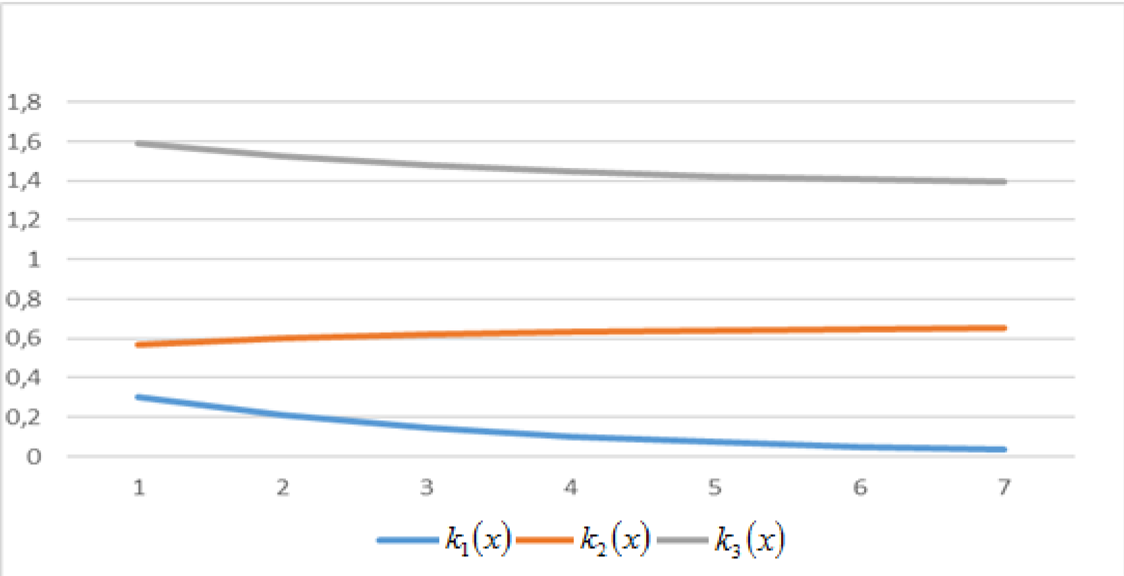
Η κλάση αυτή των κατανομών εμπεριέχει κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όπως την τροποποιημένη γεωμετρική, τροποποιημένη ή περικομμένη αρνητική διωνυμική, καθώς επίσης και τον γραμμικό συνδυασμό αυτών (περιλαμβανομένου και των μεικτών).

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα που μας αποδεικνύουν τα όσα αναφέραμε προηγουμένως.

1. Εάν $\hat{k}(s) = \dfrac{s(1-q)}{(1-sq)}, \quad 0<q<1$ τότε $k(x) = (1-q_1)\, q_1^{x-1}, \quad x = 1,2,3,\ldots$ είναι μια τροποποιημένη ή περικομμένη γεωμετρική κατανομή.

p	x	:1	2	3	4	5	6	7
0,3	$k_1(x)$	0,3	0,21	0,147	0,1029	0,07203	0,050421	0,0352947
0,4	$k_2(x)$	0,5719448	0,598853378	0,61843915	0,632529092	0,642582621	0,64971502	0,654754747
0,8	$k_3(x)$	1,59326396	1,525736174	1,478391905	1,445243848	1,422047208	1,40581665	1,394460006

Πίνακας 2.1



Σχήμα:2.1 *Γραφικές Παραστάσεις της k(x) για διάφορες τιμές του p (1η Περίπτωση)*

2. Εάν $\hat{k}(s) = s\prod_{i=1}^{m} \frac{(1-q_i)}{(1-sq_i)}$, $0 < q_i < 1$ τότε k είναι τροποποιημένη κατανομή που είναι η συνέλιξη των m γεωμετρικών κατανομών με

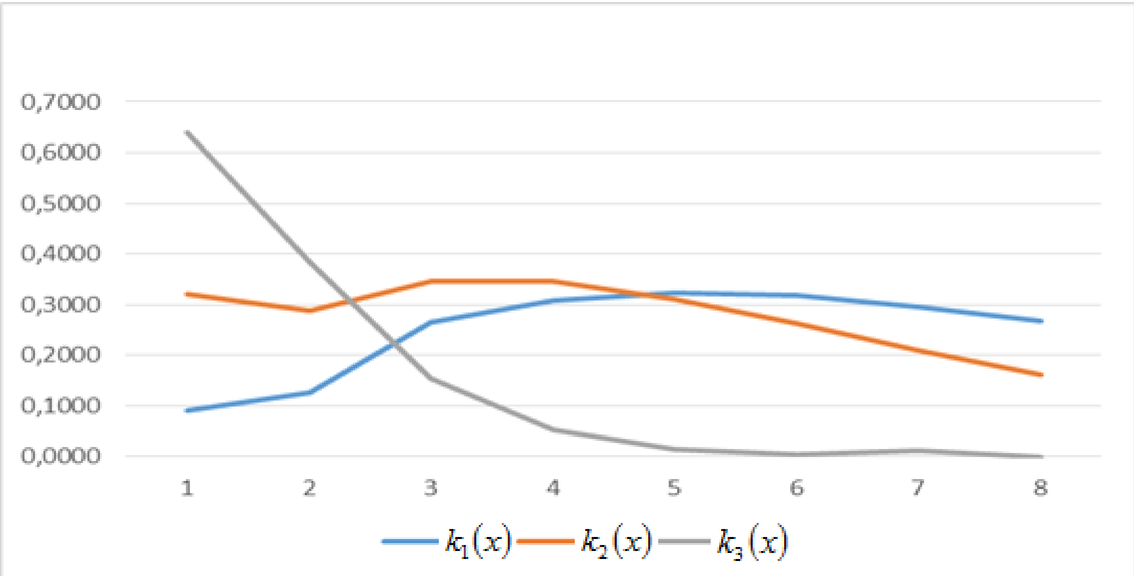
$$k_i(x) = (1-q_i)^m q_i^x, \quad x = 0,1,2,...$$

Επιπλέον, εάν $q_i = q$ για όλα τα $i = 1,2,..., m$, τότε η κατανομή k είναι τροποποιημένη αρνητική διωνυμική κατανομή με

$$k(x) = \binom{m+x-2}{x-1}(1-q)^m q^{x-1}, \quad x = 1,2,...$$

$m=2$	q	x:	1	2	3	4	5	6	7	8
	0,3	$k_1(x)$	0,0900	0,1260	0,2646	0,3087	0,3241	0,3176	0,2964	0,2668
	0,4	$k_2(x)$	0,3200	0,2880	0,3455	0,3456	0,3110	0,2612	0,2090	0,1612
	0,8	$k_3(x)$	0,6400	0,3840	0,1536	0,0512	0,0154	0,0043	0,0116	0,0002

Πίνακας 2.2



<u>Σχήμα:2.2</u> *Γραφικές Παραστάσεις της k(x) για διάφορες τιμές του p (2η Περίπτωση)*

3. Εάν $\hat{k}(s)=\dfrac{\prod_{i=1}^{m} s(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)}$, τότε $k(x)=k_1 * k_2 * \ldots * k_m(x)$ με

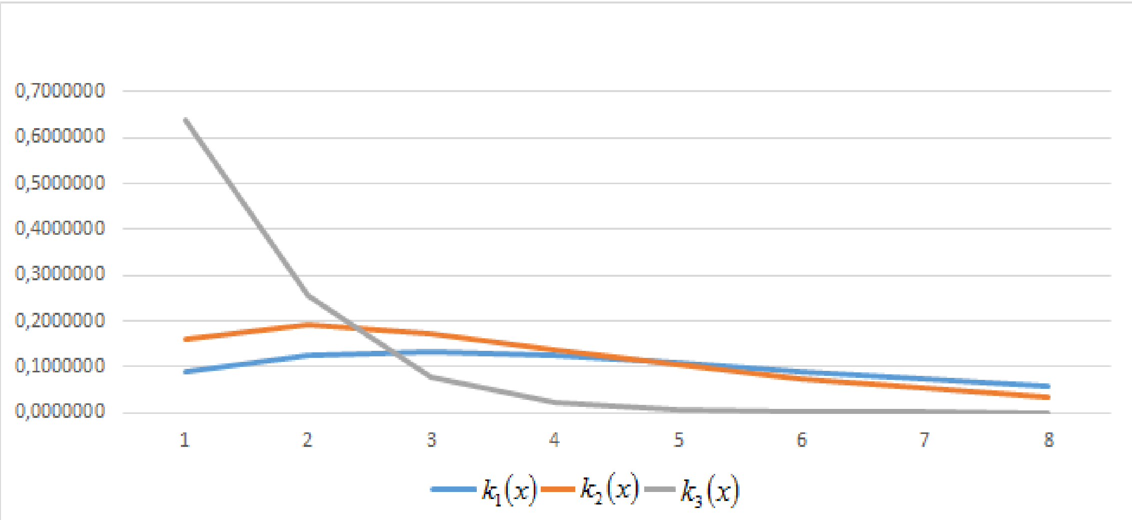
$$k_i(x)=(1-q_i)q_i^{x-1},\ 0<q_i<1,\ \ x=1,2,\ldots$$

Επιπλέον εάν $q_i=q$ για όλα τα $i=1,2,\ldots,m$, τότε η κατανομή k είναι μια αρνητική διωνυμική ξεκινώντας από m, δηλαδή

$$k(x)=(1-q)^m\binom{x-1}{m-1}q^{x-m},\quad x=m,m+1,\ldots$$

$m=2$	p	x:	1	2	3	4	5	6	7	8
	0,3	$k_1(x)$	0,0900	0,1260	0,2646	0,3087	0,3241	0,3176	0,2964	0,2668
	0,4	$k_2(x)$	0,3200	0,2880	0,3455	0,3456	0,3110	0,2612	0,2090	0,1612
	0,8	$k_3(x)$	0,6400	0,3840	0,1536	0,0512	0,0154	0,0043	0,0116	0,0002

Πίνακας 2.3



<u>Σχήμα:2.3</u> *Γραφικές Παραστάσεις της k(x) για διάφορες τιμές του p (3η Περίπτωση)*

4. Εάν $k(x)=\left[\frac{(1-q)^m}{\left(1-(1-q)^m\right)}\right]\binom{m+x-1}{x}q^x$, $0<q<1$, $x=1,2,..$ τότε η κατανομή k είναι μια περικομμένη αρνητική διωνυμική με

$$\hat{k}(s)=\frac{(1-q)^m}{1-(1-q)^m}\frac{1-(1-sq)^m}{(1-sq)^m}=\frac{s\left[(1-q)^m+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j(s-1)^j\right]}{(1-sq)^m},\quad \text{όπου}$$

$$\beta_j=\left[\frac{(1-q)^m}{\left(1-(1-q)^m\right)}\right]\sum_{k=j}^{m-1}(-q)^{k+1}1\binom{m}{k+1}\binom{k}{j},\qquad j=1,2,...,m$$

Συγκεκριμένα εάν $q_1,q_2,...,q_m$ είναι διακριτές μεταβλητές, με μερικά κλάσματα, η κατανομή k μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των m γεωμετρικών κατανομών με παράμετρο q_i

$$k(x)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(1-q_i)q_i^{x-1},\quad x=1,2,...\qquad (2.6)$$

Όπου $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$ είναι τα βάρη και ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{m}\theta_i=1$, καταλήγοντας σε

$$\theta_i=\frac{\sum_{k=1}^{m-1}\beta_k\left(\frac{1}{q_i-1}\right)^k+\prod_{j-1}^{m}(1-q_j)}{(1-q_i)\left[\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\left(\frac{1-q_j}{q_i}\right)\right]},\quad i=1,2,...,m\ (2.7)$$

Υποθέτοντας ότι η κατανομή της $k(s)$ δίνεται από την σχέση *(2.3)* μπορούμε να απλοποιήσουμε την γενικευμένη ισότητα του Lundberg $\hat{k}(u/s)\,\hat{p}(s)=1$ σε

$$\gamma(s):=\frac{1}{\hat{k}(u/s)}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-uq_i)}{u\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j\,s^{m-1-j}(u-s)^j\right]}=\hat{p}(s),\quad s\in C\qquad (2.8)$$

Στο παρακάτω θεώρημα θα αναφερθούμε στην ιδιότητα των ριζών, οι οποίες αποτελούν ρόλο ΄΄κλειδί΄΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ:2.1

Για $0 < u < 1$ και $m \in N^+$, η σχέση *(2.8)* έχει ακριβώς m ρίζες, τότε $\rho_\iota(u),\ i = 1,2,..,m$ με $0 <| \rho_i |< 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω μια μονάδα περιγράμματος $\Gamma = \{s : | s |= 1\} \in C$.

Εφόσον $| \hat{k}(u/s) |< \hat{k}(| u/s |) = \hat{k}(| u |) < 1$ ανήκει στο περίγραμμα Γ, τότε

$| 1/\hat{k}(u/s) |> 1 = \hat{p}(1) = \hat{p}(| s |) \geq | \hat{p}(s) |$ πάνω στο Γ.

Από το θεώρημα του Rouche οι ισότητες $\dfrac{1}{\hat{k}(u/s)} = 0$ και $\dfrac{1}{\hat{k}(u/s)} = \hat{p}(s)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στην μονάδα κύκλου.

Από την εξίσωση *(2.8)*, η προηγούμενη σχέση έχει m ρίζες μέσα σε μια μονάδα κύκλου, οπότε καταλήγουμε στο ότι η εξίσωση του Lundbergέχει επίσης mρίζες μεταξύ της μονάδας κύκλου, δηλαδή $\rho_1(u), \rho_2(u), ..., \rho_m(u)$.

Τέλος μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $s = 0$ δεν είναι λύση της *(2.8),* οπότε καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα $0 <| \rho_\iota |< 1,\ \gamma\iota\alpha\ i = 1,2,...,m$

2.3 Η Γενικευμένη Εξίσωση Lundberg

Για να ορίσουμε την κλάση K_m αρχικά θα πρέπει να δοθεί ο ορισμός της διαδικασίας martingale, η οποία αποτελεί ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών, και παίζει σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων.

Αρκεί πρώτα να δοθεί ο ορισμός της διήθησης και η έννοια της προσαρμοσμένης τυχαίας μεταβλητής.

ΟΡΙΣΜΟΣ: 2.1

Μια **διήθηση (filtration)** είναι μια οικογένεια από σ-άλγεβρες F_tτέτοια ώστε

$$s \leq t \Rightarrow F_s \subset F_t$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: 2.2

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_tονομάζεται **προσαρμοσμένη** στην διήθηση F_iαν η X_t είναι F_t– μετρήσιμη για κάθε t.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ: 2.3</u>

Έστω (Ω, F, P) είναι ένας χώρος πιθανοτήτων F_i μια διήθηση στην F$(F_i \subset F)$ και X_i μια οικογένεια πραγματικών, ολοκληρώσιμων $(E[|X_t|] < \infty)$ τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση F_t.

Τότε η οικογένεια X_t είναι μια οικογένεια **martingale** αν

$$E\lfloor X_t \mid F_s \rfloor = X_s, \quad \mu\varepsilon \quad s \le t \qquad (2.9)$$

- **<u>Σημείωση:</u>**

Ο δείκτης t μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτός.

Ας ορίσουμε κάποιες μεταβλητές για να μας βοηθήσουν στη συνέχεια

- $\tau_k = \sum_{j=1}^{k} W_j$: τον χρόνο άφιξης της $k_{ης}$ ζημιάς και
- $U_k = U(\tau_k)$: το πλεόνασμα ακριβώς μετά την $k_η$ ζημιά.

Θέτοντας $\tau_0 = 0$ προκύπτει ότι $U_o = u$ και για $k = 1,2,3,..$ έχουμε ότι

$$U_k = U(\tau_k) = u + \tau_k - \sum_{j=1}^{k} X_j = u + \sum_{j=1}^{k} \left[W_j - X_j\right]$$

Ψάχνουμε έναν αριθμό $s \in C$ τέτοιο ώστε η παρακάτω διαδικασία να είναι της μορφής martingale.

$$\left\{u^{\tau_k} s^{-U_k} ; k \in N\right\} \qquad (2.10)$$

Από την συνθήκη του martingale

$$E\left[u^{W_1} s^{X_1 - W_1}\right] = E\left[(u/s)^{W_1} s^{X_1}\right] = E\left[(u/s)^{W_1}\right] E\left[s^{X_1}\right] = 1$$

Καταλήγουμε στο εξής : $\hat{k}(u/s)\hat{p}(s) = 1$ (2.11) , η οποία αποτελεί γενίκευση της ισότητας Lundberg.

2.4 Ο Τελεστής Dickson and Hipp.

Οι Dickson και Hipp όρισαν ένα εργαλείο για πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού θετικές ακέραιες μεταβλητές.

Ορίζουμε T_r το εργαλείο για $x \in N^+$, με

$$T_r f(y) = \sum_{x=y}^{\infty} r^{x-y} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x f(x+y), \;\; r \in C \quad (2.12)$$

Όσον αφορά τη συνεχή περίπτωση, ο διακριτός περιορισμός T_r έχει επίσης πολλές ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για την απλοποίηση των υπολογισμών:

1. $rT_r f(1) = \hat{f}(r)$, όπου $\hat{f}(r)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της f.
2. $T_1 f(y) = \sum_{x=y}^{\infty} f(x), \;\; y \in N^+$.
3. Εάν r_1 και r_2 είναι διακριτές μεταβλητές, τότε

$$T_{r_2} T_{r_1} f(y) = \frac{r_2 T_{r_2} f(y) - r_1 T_{r_1} f(y)}{r_2 - r_1} \qquad (2.13)$$

4. Εάν $r_1 = r_2 = r$, τότε

$$\begin{aligned} T_r^2 f(y) = T_r T_r f(y) = \lim_{r_1 \to r} T_{r_1} T_r f(y) = \lim_{r_1 \to r} \frac{r_1 T_{r_1} f(y) - r T_r f(y)}{r_1 - r} \\ = \frac{d[r T_r f(y)]}{dr} = \sum_{x=y}^{\infty} (x-y+1) r^{x-y} f(x) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

5. Εάν $r_1, r_2, ..., r_k$ είναι διακριτές, τότε

$$T_{r_k} T_{r_{k-1}} ... T_{r_1} f(y) = \sum_{j=1}^{k} \frac{r_j^{k-1} T_{r_j} f(y)}{\pi_k^{'}(r_j)} \qquad (2.15)$$

Όπου $\pi_k(s) = \prod_{i=1}^{k} (s - r_i)$ και κάθε γεννήτρια συνάρτηση δίνεται

$$sT_s T_{r_k} T_{r_{k-1}} ... T_{r_1} f(1) = \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{s}{s-r_i} \right] \hat{f}(s) - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{s}{s-r_j} \right) \frac{r_j^{k-1} \hat{f}(r_j)}{\pi_k^{'}(r_j)}$$

6. Για $k \in N^+$,

$$T_r^k f(y) = T_r\, T_r ... T_r\, f(y) = \lim_{s\to r} T_s T_r^{k-1} = \frac{d\left[r T_r^{k-1} f(y)\right]}{dr} \qquad (2.16)$$

2.5 Η Γεννήτρια Συνάρτηση της Συνάρτησης των Gerber και Shiu

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την γεννήτρια συνάρτηση της προεξοφλημένης συνάρτησης των Gerber και Shiu, η οποία δίνεται από τον παρακάτω θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:2.2</u>

Η γεννήτρια συνάρτηση της προεξοφλημένης συνάρτησης των Gerber και Shiu δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\hat{\omega}(s) - \dfrac{Q_{m-1}(s)}{u\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j\, s^{m-1-j}\,(u-s)^j\right]}}{\left[\gamma(s) - \hat{p}(s)\right]} \qquad (2.17)$$

Όπου $Q_{m-1}(s) = \left[\prod_{i=1}^{m}(s-uq_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(u\theta_i b_i(1-q_i)\right)}{\left(s-uq_i\right)}\right]$ είναι πολυώνυμο βαθμού m-1 ή λιγότερο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Έστω οι μεταβλητές T και X_i τότε η προεξοφλημένη συνάρτηση για $u \in N$ είναι

$$\phi(u) = E\left[u^{W_1}\phi(U_1)\right] = E\left[u^{W_1}\phi(u+W_1-X_1)\right] = \sum_{t=1}^{\infty} u^t\, k(t)\, E\left[\phi(u+t-X_1)\right]$$

Όπως γνωρίζουμε η γεννήτρια συνάρτηση της ϕ είναι $\hat{\phi}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u\, \phi(u)$

$$\hat{\phi}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \phi(u) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t) E\left[\phi(u+t-X_1)\right]$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{y=u+1}^{\infty} u^{y-u} k(y-u) E\left[\phi(y-X_1)\right]$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} u^y \, E\left[\phi(y-X_1)\right] \sum_{u=0}^{y-1} (s/u)^u k(y-u)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} s^y \, E\left[\phi(y-X_1)\right] \sum_{t=1}^{y} (u/s)^t k(t) \qquad (2.18)$$

Εάν $q_1, q_2, ..., q_m$ είναι διακριτές, τότε η συνάρτηση $k(t)$ είναι της μορφής *(2.6)* και αντικαθιστώντας στην σχέση *(2.18)* γίνεται

$$\hat{\phi}(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i (1-q_i)}{q_i} \sum_{y=1}^{\infty} s^y E\left[\phi(y-X_1)\right] \sum_{t=1}^{y} (u/s)^t q_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i (1-q_i)(u/s)}{\left[1-(u/s)q_i\right]} \left\{ \sum_{y=1}^{\infty} s^y E\left[\phi(y-X_1)\right] - \sum_{y=1}^{\infty} (uq_i)^y E\left[\phi(y-X_1)\right] \right\}$$

$$= \hat{k}(u/s) \sum_{y=1}^{\infty} s^y E\left[\phi(y-X_1)\right] - \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i (1-q_i) u b_i}{(s-uq_i)} \qquad (2.19)$$

Όπου $b_i = \sum_{y=1}^{\infty} (uq_i)^y E\left[\phi(y-X_1)\right]$.

Από τον ορισμό της $\phi(u)$.

$$E\left[\phi(y-X_1)\right] = \sum_{x=1}^{y} \phi(y-x) p(x) + \omega(y) \qquad (2.20)$$

Όπου $\omega(y) = \sum_{x=y+1}^{\infty} w(y-1, x-y) p(x)$ (2.20 α)

Αθροίζοντας τις σχέσεις *(2.19)* και *(2.20)* ισχύει το εξής:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{k}(u/s)\hat{\omega}(s) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i (1-q_i) u b_i}{(s-uq_i)}}{\left[1-\hat{k}(u/s)\,\hat{p}(s)\right]} \qquad (2.21)$$

Όπου $\hat{\omega}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y \omega(y)$.

Πολλαπλασιάζοντας και τους δυο παρανομαστείς και τον αριθμητή της σχέσης *(2.21)*με $\gamma(s) = \dfrac{1}{\hat{k}(u/s)}$ καταλήγουμε στην υπόθεση του Θεωρήματος, ότι η γεννήτρια συνάρτηση της $\phi(u)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{\omega}(s) - \dfrac{Q_{m-1}(s)}{u\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(u-s)^j\right]}}{\left[\gamma(s) - \hat{p}(s)\right]} \qquad (2.22)$$

$$\text{Όπου } Q_{m-1}(s) = \left[\prod_{i=1}^{m}(s-uq_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(u\theta_i b_i(1-q_i)\right)}{\left(s-uq_i\right)}\right].$$

Εφόσον η $\hat{\phi}(s)$ είναι απειροστή για όλα τα s και ισχύει ότι $0 < |R(s)| < 1$, ο αριθμητής στο δεξί μέλος της *(2.22)* θα πρέπει να είναι μηδέν οποιαδήποτε στιγμή είναι μηδέν ο παρονομαστής.
Τότε το $Q_{m-1}(s)$ μπορεί να προσδιοριστεί από το γραμμικό σύστημα, για i=1,2,…,m

$$Q_{m-1}(\rho_j) = \hat{\omega}(\rho_j)\left\{u\left[\rho_j^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(u-\rho_j)^t\right]\right\}$$

Επιπλέον εάν $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ είναι διακριτές τιμές, από την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, καταλήγουμε σε

$$Q_{m-1}(s) = \sum_{j=1}^{m} c_j\,\hat{\omega}(\rho_j)\left[\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}\right] \qquad (2.23)$$

$$\text{Όπου } c_j = u\left[\rho_j^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(u-\rho_j)^t\right],\ \text{για } i = 1,2,...,m$$

Επισημαίνουμε ότι εάν τα $q_i^{'}s$ είναι ίσα, η σχέση *(2.22)* ισχύει , καθώς επίσης και η *(2.23)* εφόσον οι $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ είναι διακριτές τιμές, από την ιδιότητα της συνέχειας.

2.5.1 Αποτελέσματα όταν u=0.

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε διάφορα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν το αρχικό πλεόνασμα ορίζεται να είναι μηδέν, όπως και στο κλασσικό μοντέλο.

Για ευκολία θεωρούμε τις μεταβλητές $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ ότι είναι διακριτές.

Αρχικά θα ορίσουμε την $\phi(0)$:

$$\phi(0) = \lim_{s\to 0}\hat{\phi}(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\hat{\omega}(s) - \dfrac{Q_{m-1}(s)}{u\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(u-s)^j\right]}}{\left[\gamma(s) - \hat{p}(s)\right]}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j\,\hat{\omega}(\rho_j)\left[\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\frac{\rho_k}{\rho_j - \rho_k}\right]}{u^m\prod_{i=1}^{m} q_i}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\,\hat{\omega}(\rho_j)}{\rho_j\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j - \rho_k\right)} \qquad (2.24)$$

Όπου $\omega(y) = \sum_{x=y+1}^{\infty} w(y-1, x-y)\,p(x) = \sum_{t=1}^{\infty} w(y-1,t)\,p(y+t)$ και

$$\hat{\omega}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y\omega(y) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} s^y w(y-1,t)\,p(y+t) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} s^{x+1} w(x,y)\,p(x+y+1)$$

Οπότε η *(2.24)* μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\phi(0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j^{x+1} w(x,y)\,p(x+y+1)}{\rho_j\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j - \rho_k)}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j^{x} w(x,y)\,p(x+y+1) \qquad (2.25)$$

Όπου $b_j = \dfrac{c_j}{\prod_{k=2,k\neq j}^{m}(\rho_j - \rho_k)}$

Όμως γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι

$$\phi(0) = E\left[u^T w(U(T-1),|U(T)|) I(T<\infty) \mid U(0)=0\right] = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} w(x,y) f_2(x,y \mid 0) \qquad (2.26)$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στο εξής:

$$f_2(x,y \mid 0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j \rho_j^x \, p(x+y+1), \quad x \in \mathrm{N}, \; y \in \mathrm{N}^+ \qquad (2.27)$$

$$f_1(x \mid 0) = \sum_{y=1}^{\infty} f_2(x,y \mid 0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j \rho_j^x \, \bar{P}(x+1), \quad x \in \mathrm{N} \qquad (2.28)$$

$$\text{Όπου} \quad \bar{P}(x+1) = \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y) \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} g(y) := g(y \mid 0) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_2(x,y \mid 0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{x=0}^{\infty} \rho_j^x \, p(x+y+1) \\ &= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho_j} \, p(y+1), \; y \in \mathrm{N}^+ \end{aligned} \qquad (2.29)$$

Όπως ορίσαμε και προηγουμένως η συνάρτηση gείναι μια ελλειμματική συνάρτηση και η γεννήτρια της ορίζεται ως $\hat{g}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y g(y)$

<u>ΛΗΜΜΑ:</u>

Η γεννήτρια συνάρτηση της g ορίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\hat{g}(s) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-uq_i) - u\,\hat{p}(s)\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(u-s)^j\right]}{\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)} \qquad (2.30)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εφόσον γνωρίζουμε ότι $\hat{g}(s) = sT_s\, g(1)$ τότε

$$\hat{g}(s) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j sT_sT_{\rho_j}\, p(2) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j s\left[\frac{sT_s\, p(2) - \rho_j T_{\rho_j}\, p(2)}{s-\rho_j}\right]$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\left[\dfrac{\hat{p}(s) - \dfrac{s}{\rho_j}\hat{p}(\rho_j)}{s-\rho_j}\right]}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\,\hat{p}(s)}{\left(s-\rho_j\right)\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)} - \sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\,\hat{p}(\rho_j)}{\rho_j\left(s-\rho_j\right)\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)}\right\}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{u\,\hat{p}(s)\left[\rho_j^{m-1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-q_i\right)\right]+\sum\limits_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}\left(u-\rho_j\right)^t}{\left(s-\rho_j\right)\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)} - \sum_{j=1}^{m}\frac{s\prod\limits_{i=1}^{m}\left(\rho_j-uq_i\right)}{\rho_j\left(s-\rho_j\right)\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)}\right\} \quad (2.31)$$

Από μια γνωστή σχέση και την θεωρία παρεμβολής έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(\rho_j-s\right)^n}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)} = \begin{cases} 1, & n = m-1, \\ 0, & n = 0,1,2,\ldots,m-2 \\ -\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m}\left(s-\rho_i\right)}, & n=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{u\rho_j^{m-1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-q_i\right)}{\left(s-\rho_j\right)\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho j-\rho_k\right)} = -u\sum_{j=1}^{m}\frac{\left[\left(\rho_j-s\right)+s\right]^{m-1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-q_i\right)}{\left(\rho_j-s\right)\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho j-\rho_k\right)} \quad (2.32)$$

Οπότε

$$= -u\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)\sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{t=0}^{m-1} s^{m-1-t}\binom{m-1}{1}(\rho_j - s)^t}{(\rho_j - s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho j - \rho_k)}$$

$$= us^{m-1}\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}\right] \qquad (2.33)$$

Με τον ίδιο τρόπο

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{u\left[\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(u-\rho_j)^t\right]}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} = u\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\sum_{j=1}^{m}\frac{[(\rho_j - s)+s]^{m-1-t}[(u-s)+(s-\rho_j)]^t}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$= \frac{u\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t(u-s)^t s^{m-1-t}}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)} \qquad (2.34)$$

Και

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-\prod_{i=1}^{m}(\rho_j - uq_i)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{t=0}^{m}\sigma_{m-t}\rho_j^t}{\rho_j(\rho_j - s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\frac{\sigma_m}{\rho_j(\rho_j - s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{t=1}^{m}\sigma_{m-t}\rho_j^{t-1}}{(\rho_j - s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} \qquad (2.35)$$

Όπου $\sigma_0 = 1,\ \sigma_2 = \sum_{i=1}^{m}(-uq_i),\ \sigma_3 = \sum_{1\le i<j\le m} u^2 q_i q_j, .., \sigma_m = \prod_{i=1}^{m}(-uq_i)$

Από τις σχέσεις *(2.32)* και *(2.35)* καταλήγουμε σε μια απλούστερη μορφή

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-\prod_{i=1}^{m}(\rho_j - uq_i)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} = \frac{1}{s}\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}uq_i}{\prod_{i=1}^{m}\rho_i} - \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-uq_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}\right] \qquad (2.36)$$

Αθροίζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις *(2.31)*, *(2.33)*, *(2.34)* και *(2.36)* καταλήγουμε εν τέλει στην σχέση *(2.30)*. □

Με την βοήθεια του λήμματος μπορούμε να καταλήξουμε

$$\phi_T(0) = E\left[u^T I(T<\infty) \mid U(0)=0\right] = \sum_{y=1}^{\infty} g(y) = \lim_{s\to 1} \hat{g}(s)$$

$$= 1 - \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{uq_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-uq_i) - u\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1}\beta_t (u-1)^t\right]}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_i)}\right]$$

$$= 1 - \left[1-\hat{k}(u)\right]\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{uq_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-uq_i)}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_i)}\right] < 1 \qquad (2.37)$$

Όπου το τελευταίο βήμα προκύπτει από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης της $\hat{k}(s)$.

$$\Psi(0) = \lim_{u\to 1^-} E\left[u^T I(T<\infty) \mid U(0)=0\right]$$

$$= 1 - \lim_{u\to 1^-}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{uq_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-uq_i)\left[1-\hat{k}(u)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_i)}\right]$$

$$= 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\lim_{u\to 1^-}\frac{\left[\dfrac{1-\hat{k}(u)}{1-u}\right]}{\left[\dfrac{1-\rho_m(u)}{1-u}\right]}$$

$$= 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\left[\frac{\hat{k}'(1)}{\rho_m'(1)}\right]$$

Τελικά

$$= 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\left[E(W)-E(X)\right] \qquad (2.38)$$

Όπου το τελευταίο βήμα προκύπτει από τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων $\hat{k}'(1) = E(W)$ και $\rho_m'(1) = E(W)/\left[E(W)-E(X)\right]$, που μπορεί να προκύψει παραγωγίζοντας ως προς u και στις δυο μεριές της ισότητας του Lundberg $\hat{k}\left(\dfrac{u}{\rho_m(u)}\right)\hat{p}(\rho_m(u)) = 1$, όταν $u \to 1^-$, γνωρίζοντας ότι $\lim_{u\to 1^-}\rho_m(u) = 1$.

2.6 Αναδρομικός Υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber και Shiu

2.6.1 Γενική Περίπτωση

Για τον υπολογισμό του αναδρομικού τύπου $\phi(u)$, θα χρειαστούμε αρχικά την σχέση *(2.25)*, αφού ορίσουμε πρώτα την $\phi(0)$.

Για $u \in \mathrm{N}^{+}$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από την πρώτη χρονική στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το αρχικό επίπεδο, το οποίο έχουμε ορίσει εξ΄αρχής. Οπότε

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} u^{t}\phi(u-y) f_3(x,y,t\,|\,0) + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} u^{t} w(x+u,y-u) f_3(x,y,t\,|\,0)\\ &= \sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty}\phi(u-y) f_2(x,y\,|\,0) + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w(x+u,y-u) f_2(x,y\,|\,0)\\ &= \sum_{y=1}^{u}\phi(u-y) g(y) + H(u), \quad u \in \mathrm{N}^{+} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Άρα η σχέση *(2.39)* αποτελεί αναδρομική σχέση της $\phi(u)$ με πρώτο όρο $\phi(0)$.

Όπου

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w(x+u,y-u) f_2(x,y\,|\,0) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} w(x,y) f_2(x-u,y+u\,|\,0)\\ &= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{x=u}^{\infty}\rho_j^{x-u}\sum_{y=1}^{\infty} w(x,y) p(x+y+1)\\ &= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{x=u}^{\infty}\rho_j^{x-u}\omega(x+1)\\ &= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho_j}\omega(u+1) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Πιο συγκεκριμένα όταν $w(x,y)=1$, μελετάμε την $\phi(u)$ σε σχέση με τον προεξοφλητικό παράγοντα $u=e^{-\delta T}$, η οποία ορίζεται :

$$\phi_T(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right],\ \ u \in \mathrm{N}$$

Με αποτέλεσμα η *(2.20 α)* να γίνει $\omega(u) = \sum_{x=u+1}^{\infty} p(x) = \overline{P}(u) = T_1 p(u+1)$ και

$$H(u) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho_j} T_1 p(u+2) = T_1 g(u+1) = \sum_{y=u+1}^{\infty} g(u) \tag{2.41}$$

Άρα η αναδρομική σχέση της $\phi_T(u)$ είναι:

$$\phi_T(u)=\sum_{y=1}^{u}\phi_T(u-y)g(y)+\sum_{y=u+1}^{\infty}g(y),\ \ u\in\aleph^{+} \quad (2.42)$$

Οπότε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ μπορεί να οριστεί και ως το όριο της $\phi_T(u)$ για $u\to 1^{-}$, δηλαδή

$$\Psi(u)=\lim_{u\to 1^{-}}E\left[u^{T}I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]=\sum_{Y=1}^{U}\Psi(u-y)g_1(y)+\sum_{y=u+1}^{\infty}g_1(y),\ \ u\in\aleph^{+} \quad (2.43)$$

Όπου $g_1(y)=\lim_{u\to 1^{-}}g(y)$

2.6.2 *Ειδικές Κατανομές Χρόνου Αναμονής*

<u>1η Περίπτωση:</u>

Αν $\hat{k}(s)=\dfrac{s(1-q)}{(1-sq)}$, τότε η γενικευμένη εξίσωση Lundberg έχει μια λύση, έστω $p\in(0,1)$ και η αναδρομική σχέση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\phi(u)=\sum_{y=1}^{u}\phi(u-y)g(y)+H(u),\ \ u\in\aleph^{+}$$

Με αρχική τιμή, η οποία αντλείται από την σχέση *(2.25)*

$$\phi(0)=H(0)=\frac{\rho(1-q)}{q}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho^{x}\,w(x,y)\,p(x+y+1)$$

Και πιο συγκεκριμένα $\phi_T(0)=1-\rho(1-u)/[(u\,q(1-\rho))]$ και $\Psi(0)=1-\vartheta/[q(1+\vartheta)]$.

Και
$$g(y)=\frac{\rho(1-q)}{q}T_{\rho}\,p(y+1)=\frac{1-q}{q}\sum_{x=1}^{\infty}\rho^{x}\,p(x+y) \quad (2.44)$$

$$H(u)=\frac{\rho(1-q)}{q}T_{\rho}\,\omega(y+1)=\frac{1-q}{q}\sum_{x=1+u}^{\infty}\rho^{x-u}\,\omega(u) \quad (2.45)$$

2^{η} Περίπτωση:

Αν $\hat{k}(s)=\dfrac{s[(1-q_1)(1-q_2)+\beta(s-1)]}{[(1-sq_1)(1-sq_2)]},\ 0<q_1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ q_2<1$ τότε (2.46)

$$g(y)=\frac{\rho_1\,\rho_2\,[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]}{u\,q_1\,q_2\,(\rho_1-\rho_2)}T_{\rho_2}\,T_{\rho_1}\,p(y+1)+\left[\frac{\beta\,\rho_1\,\rho_2}{q_1q_2}\right]\frac{T_{\rho_1}p(y+1)-T_{\rho_2}\,p(y+1)}{\rho_1-\rho_2}$$

Και (2.47)

$$H(u)=\frac{\rho_1\,\rho_2\,[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]}{u\,q_1\,q_2\,(\rho_1-\rho_2)}T_{\rho_2}\,T_{\rho_1}\,\omega(u+1)+\left[\frac{\beta\,\rho_1\,\rho_2}{q_1q_2}\right]\frac{T_{\rho_1}\omega(u+1)-T_{\rho_2}\,\omega(u+1)}{\rho_1-\rho_2}$$

Στην περίπτωση αυτή το αρχικό επίπεδο της αναδρομικής σχέσης ορίζεται ως εξής (2.48)

$$\phi(0)=H(0)=\frac{\rho_1\,\rho_2\,[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]+\beta\,u\,\rho_2}{u\,q_1\,q_2\,(\rho_1-\rho_2)}\hat{\omega}(\rho_1)+\frac{\rho_1\,\rho_2\,[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]+\beta\,u\,\rho_1}{u\,q_1\,q_2\,(\rho_2-\rho_1)}\hat{\omega}(\rho_2)$$

Πιο συγκεκριμένα, εάν $w(x,y)=1$, τότε από τις σχέσεις *(2.37)* και *(2.38)* προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\phi_T(0)=1-\frac{\rho_1\rho_2\,(1-u)[1-u\,(q_1q_2+\beta)]}{u^2\,q_1q_2\,(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \qquad (2.49)$$

$$\Psi(0)=1-\left[\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{q_1q_2}\right]\left[\frac{\rho_1(1)}{1-\rho_1(1)}\right][E(W)-E(X)]$$

Ενώ στην περίπτωση όπου $m=2$ αξίζει να σημειωθούν τα παρακάτω,

- Εάν $\beta=-[\alpha\,q_2(1-q_1)+(1-\alpha)q_1(1-q_2)],\ 0<\alpha,q_1,q_2<1$ τότε k είναι μια μείξη δυο τροποποιημένων κατανομών, με πυκνότητα

$$k(x)=\alpha\,(1-q_1)q_1^{x-1}+(1-\alpha)(1-q_2)q_2^{x-1},\ \ \gamma\iota\alpha\ \ x=1,2,...$$

- Εάν $q_1=q_2=q$ και $\beta=-(1-q)^2\,q/(2-q)$, με $0<q<1$, τότε k είναι μια περικομμένη αρνητική διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$k(x)=\{(1-q)^2/[1-(1-q)^2]\}(x+1)\,q^x,\ \ x=1,2,...$$

$3^{η}$ Περίπτωση:

Αν $\hat{k}(s)=\dfrac{s\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)}$, δηλαδή για $\beta_i=0,\ \ \gamma\iota\alpha\ \ i=1,2,...,m-1$, τότε k είναι η συνέλιξη των m γεωμετρικών κατανομών, αλλά μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά 1.

Οπότε $g(y)=u\left[\prod_{i=1}^{m}\dfrac{\rho_i(1-q_i)}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\rho_j^{m-1}T_{\rho_j}\ p(y+1)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}=u\left[\prod_{i=1}^{m}\dfrac{\rho_i(1-q_i)}{uq_i}\right]T_{\rho_m}\ T_{\rho_{m-1}}...T_{\rho_1}\ p(y+1)$ (2.50)

Ομοίως $H(u)=u\left[\prod_{i=1}^{m}\dfrac{\rho_i(1-q_i)}{uq_i}\right]T_{\rho_m}\ T_{\rho_{m-1}}...T_{\rho_1}\ \omega(u+1)$ (2.51). Κατά συνέπεια το $\phi(0)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\phi(0)=H(0)=u\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-1}T_{\rho_j}\ \omega(1)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}=u\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{uq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-2}\ \hat{\omega}(\rho_J)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} \qquad (2.52)$$

Πιο συγκεκριμένα πάλι από τις σχέσεις *(2.37)* και *(2.38)* αντλούμε το εξής συμπέρασμα

$$\phi_T(0)=1-\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}\right]\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-uq_i)-u\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(uq_i)} \qquad (2.53)$$

$$\Psi(0)=1-\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\left[E(W)-E(X)\right] \qquad (2.54)$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι τα παραπάνω αποτελούν την διακριτή εκδοχή των αποτελεσμάτων της γενικευμένης διαδικασίας Erlang m σε συνεχή χρόνο.

2.7 *Αριθμητικές Εφαρμογές*

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε με διάφορα παραδείγματα ότι η συνάρτηση $g(y)$ μπορεί να υπολογιστεί αντιστρέφοντας την γεννήτρια συνάρτηση της σχέσης *(2.30)* όταν οι ζημιές ακολουθούν κατανομή η οποία έχει μια λογική συνάρτηση πιθανότητας ή όταν αναφέρονται σε πεπερασμένο χρόνο, όπως οι ρητές συναρτήσεις.

Πριν αναφερθούμε στα παραδείγματα αξίζει να σημειωθεί το παρακάτω θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:2.3</u>

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ είναι διακριτές τιμές, τότε η συνάρτηση $g(y)$ μπορεί να δοθεί με την μέθοδο μερικών κλασμάτων, δηλαδή

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} z_i\, \alpha_i^{y-1}, \quad y \in \aleph^+ \quad (2.55)$$

$$\text{Όπου ο συντελεστής } z_i = \frac{\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j - \alpha_i}\right]}{\left[\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (\alpha_j - \alpha_i)\right]}, \quad i = 1,2,...,n$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Θεωρούμε συνάρτηση $p(x)$ την κατανομή της κλάσης K_n.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα όπου η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο

$$\hat{p}(s) = \frac{E_n(s)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - s\alpha_i)} \quad \text{και} \quad \Re(s) < \min\left\{\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, ..., \frac{1}{\alpha_n}\right\} \quad (2.56)$$

Όπου $E_n(s)$ είναι συνάρτηση πολυωνύμων με βαθμό n και

$$E_n(0) = 0,\ E_n(1) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \alpha_i) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 0 < \alpha_\iota < 1, \ \ \gamma\iota\alpha \ \ i = 1,2,...,n$$

Άρα η γεννήτρια συνάρτηση $\hat{g}(s)$ της σχέσης (2.31) μπορεί να απλοποιηθεί

$$\hat{g}(s) = 1 - \frac{\left[\prod_{i=1}^{m}(s - uq_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - s\alpha_i)\right] - E_n(s)\, B_{m-1}(s)}{\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{uq_i}{\rho_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - s\alpha_i)\right]} \quad (2.57)$$

όπου $B_{m-1}(s)=u\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}\left(1-q_i\right)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(u-s)^j\right]$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση $m-1$ βαθμού, με αρχικό συντελεστή $B_{m-1}=u\left[\prod_{i=1}^{m}\left(1-q_i\right)+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\beta_j\right]$.

Επιπλέον θα ορίσουμε και την συνάρτηση $E_{m,n}(s)$ να είναι πολυωνυμικού βαθμού $(n+m)$, με

$$E_{m,n}(s)=\left[\prod_{i=1}^{m}(s-uq_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1-s\alpha_i)\right]-E_n(s)B_{m-1}(s)$$

Και συντελεστή 'οδηγό' $\left(-1\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$.

Οπότε καταλήγουμε στο ότι οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg για $\rho_1,\rho_2,...,\rho_m$ με $0<\left|\rho_i\right|<1$, είναι οι αντίστοιχες m ρίζες της $E_{m,n}(s)=0$.

Ας ορίσουμε επιπλέον μια σειρά από ρίζες $R_1,R_2,...R_n$ με $\left|R_i\right|>1$ να είναι οι υπολειπόμενες n ρίζες της εξίσωσης $E_{m,n}(s)=0$. Υπάρχει μια σχέση, που συνδέει τις ρίζες $\rho_1,\rho_2,...,\rho_m$ με τις $R_1,R_2,...R_n$, δηλαδή

$$\left[\prod_{i=1}^{m}\rho_i\right]\left[\prod_{i=1}^{m}R_i\right]=\frac{\prod_{i=1}^{n}uq_i}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i} \qquad (2.58)$$

Επιπλέον η εξίσωση $E_{m,n}(s)$ μπορεί να αναλυθεί και ως :

$$E_{m,n}(s)=\left[\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right]\left[\prod_{i=1}^{m}\left(s-\rho_i\right)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}\left(R_I-s\right)\right]$$

Οπότε η εξίσωση *(2.57)* μέσω της *(2.58)* μας δίνει την ακόλουθη σχέση για την γεννήτρια συνάρτηση

$$\hat{g}\left(s\right)=1-\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-s/R_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\alpha_i s\right)}=\frac{sQ_{n-1}(s)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i s)} \qquad (2.59)$$

όπου $Q_{n-1}(s)=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\alpha_i s\right)-\prod_{i=1}^{n}\left(1-s/R_i\right)}{s}$ είναι πολυώνυμο $n-1$βαθμού. □

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα για την καλύτερη κατανόησή των παραπάνω αποτελεσμάτων.

1. Έστω <u>*(Claim Waiting Time):*</u> $X(t) \sim SNB(x,q)$ με σ.π.π. $k(x) = x(1-q)^2 q^{x-1}$ και γεννήτρια συνάρτηση $\hat{k}(s) = \dfrac{s(1-q)^2}{(1-sq)^2}$.

Επιπλέον <u>*Claim Amounts:*</u> είναι μια μείξη δυο γεωμετρικών κατανομών με παραμέτρους $\aleph(t) \sim Geo_1(\vartheta, \alpha_1)$ και $\aleph(t) \sim Geo_2(\vartheta, \alpha_2)$ με

$$p(x) = \vartheta(1-\alpha_1)\alpha_1^{x-1} + (1-\vartheta)(1-\alpha_2)\alpha_2^{x-1}, \quad x \in \aleph^+,\ 0 < \vartheta, \alpha_1, \alpha_2 < 1$$

Και $\hat{p}(s) = \dfrac{s[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \beta(1-s)]}{(1-s\alpha_1)(1-s\alpha_2)}$ με $\beta = \vartheta\alpha_2(1-\alpha_1) + (1-\vartheta)\alpha_1(1-\alpha_2)$

Κατ΄επέκταση η παρακάτω εξίσωση

$$E_{2,2}(s) = (s-uq)^2(1-s\alpha_1)(1-s\alpha_2) - u(1-q)^2 s^2[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \beta(1-s)] = 0$$

Έχει δυο ρίζες , έστω ρ_1, ρ_2 με $|\rho_i| < 1$ και R_1, R_2 με $|R_i| > 1$.

Από την σχέση *(2.59)* προκύπτει το εξής:

$$\hat{g}(s) = \frac{s\left[\left(\alpha_1\alpha_2 - \dfrac{1}{R_1R_2}\right)s + \dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2} - (\alpha_1+\alpha_2)\right]}{(1-s\alpha_1)(1-s\alpha_2)}$$

Κάνοντας την μέθοδο αντιστροφής παίρνουμε:

$$g(y) = k_1\alpha_1^{y-1} + k_2\alpha_2^{y-2},\ y \in \aleph^+ \quad (2.60)$$

Όπου $k_1 = \dfrac{(R_1R_2\alpha_1\alpha_2 - 1) + \alpha_1[R_1 + R_2 - R_1R_2(\alpha_1+\alpha_2)]}{R_1R_2(\alpha_1-\alpha_2)}$

$k_2 = \dfrac{(R_1R_2\alpha_1\alpha_2 - 1) + \alpha_{21}[R_1 + R_2 - R_1R_2(\alpha_1+\alpha_2)]}{R_1R_2(\alpha_2-\alpha_1)}$.

<u>**Σχολιο:**</u>

Η εξίσωση ϕ των Gerber-Shiu μπορεί να δοθεί αναδρομικά από την σχέση *(2.36)*, εάν θέσουμε όπου $u=1$ και $w(x,y)=1$ να είναι οι ποσότητες xy, x και y αντίστοιχα. Τότε η $\phi(u)$ απλοποιεί τις κοινές και οριακές στιγμές των ποσοτήτων $U(T-1)$ και $|U(T)|$.

Για την καλύτερη κατανόηση των όσων αναφέραμε παραπάνω θα δώσουμε ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο με αρχικό πλεόνασμα $u=1$ Έστω $p = 2/3$ και $1-\vartheta = 0,4$ ορίζουμε επιπλέον τις μεταβλητές $\alpha_1 = 1/2$ και $\alpha_2 = 1/3$.

Τότε $E(W) = (1+\vartheta)E(X) = 2 > E(X) = 1.8$ και η εξίσωση $E_{2,2}(s) = 0$ έχει 4 ρίζες, έστω $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.2183$, $R_1 = 1.1344$ και $R_2 = 2.6917$.

$$\text{Άρα}\quad g(y) = 0.2941\alpha_1^{y-1} + 0.1256\alpha_2^{y-1},\ y \in \aleph^+$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να βγάλουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

u	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
0	1.9107	0.9904	1.8784	2.8557	5.2716	3.8688
1	2.95803	1.53196	1.89591	4.53027	5.37623	4.4279
2	3.53798	1.82529	1.90329	6.02392	5.42065	4.7286
3	3.86556	1.98875	1.90645	7.17367	5.43939	4.8952
4	4.05238	2.08156	1.90785	8.00108	5.44744	4.9894
5	4.15964	2.13462	1.90838	8.57300	5.45077	5.0430
6	4.22144	2.16502	1.90862	8.95754	5.45238	5.0736
7	4.25669	2.18245	1.90879	9.21084	5.45301	5.0912
8	4.27691	2.19274	1.90889	9.37486	5.45347	5.1016
9	4.28879	2.19854	1.90913	9.48004	5.45368	5.1077
10	4.29552	2.20187	1.90917	9.54631	5.45399	5.1110
11	4.29957	2.20366	1.90942	9.58805	5.45424	5.1131
12	4.30171	2.20491	1.90932	9.61360	5.45411	5.1142
13	4.30269	2.20535	1.90935	9.62939	5.45403	5.1147
14	4.30409	2.20612	1.90966	9.63979	5.45443	5.1158
15	4.30447	2.20586	1.90899	9.64538	5.45502	5.1149

Πίνακας: 2.4 *Κοινές και Περιθωριακές Τιμές Πλεονάσματος πριν την Χρεοκοπία και του Ελλείμματος την στιγμή της Χρεοκοπίας για Διάφορε ς Τιμές του u.*

Όπου A: από κοινού τιμή των μεταβλητών U(T-1) και |U(T)|, δεδομένου οτι έχει συμβεί Χρεοκοπία
B: μέσος όρος της U(T-1) δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία
Γ: μέσος όρος της |U(T)|, δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία
Δ:δεύτερη χρονική στιγμή για U(T-1),δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία
E: δεύτερη χρονική στιγμή για |U(T)|,δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία
ΣΤ:μέσος όρος ζημιάς, δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία

Πιο συγκεκριμένα ο παραπάνω πίνακας μας δείχνει για διάφορες τιμές του u , ξεκινώντας από τη μονάδα για τις δυο πρώτες στιγμές των ποσοτήτων U(T-1) και |U(T)|. □

2. Έστω $\aleph = 2,3,...$ με $p(n) = P(X = n) = p_n$, $n = 1,2,..., N$ *(2.61)*

Τότε $\hat{p}(s) = D_N(s) := p_1 s + p_2 s^2 + ... + p_N s^N$, $s \in C$ *(2.62)* αποτελεί ένα πολυώνυμο N βαθμού.

Η διωνυμική κατανομή και η υπεργεωμετρική κατανομή είναι μερικά από τα παραδείγματα κατανομών που μπορούν να μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα το παραπάνω παράδειγμα και μελετώνται σε πεπερασμένο χρόνο. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα πολυώνυμο $(N + m - 1)$ βαθμού το οποίο ορίζεται ως εξής

$$V(s) := D_N(s) B_{m-1}(s) - \prod_{i=1}^{m} (s - uq_i)$$

Με αρχικό συντελεστή $V_{N+m-1} = p_N \, B_{m-1}$,όπου $B_{m-1} = u\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j \beta_j\right]$

είναι ο αρχικός συντελεστής του πολυωνύμου $B_{m-1}(s)$.

Από την εξίσωση $V(s) = 0$ παίρνουμε $N + m - 1$ ρίζες , όπου οι $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ είναι m ρίζες με $0 < |\rho_i| < 1$. Οπότε θεωρούμε $R_1, R_2, ... R_{N-1}$, με $|R_i| > 1$ τις υπολειπόμενες ρίζες πλήθους $N - 1$.

Άρα θεωρούμε $V(s) = V_{N+m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{N}(s - R_i)\right]$ και θέτοντας όπου $s = 0$,

$$(-1)^N V_{N+m-1}\left(\prod_{i=1}^{m}\rho_i\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}R_i\right) = \prod_{i=1}^{m}(uq_i) \quad (2.63)$$

$$\text{Οπότε } \hat{g}(s) = 1 + V_{N+m-1}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{uq_i}\right)\prod_{i=1}^{N-1}(s - R_i) = 1 - \prod_{i=1}^{N-1}\frac{R_i - s}{R_i} \quad (2.64)$$

Εάν απομονώσουμε τον συντελεστή s^n παίρνουμε την $g(n)$, για $n = 1,2,..., N - 1$.

Πιο αναλυτικά έχουμε $g(1) = \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{R_i}$

$$g(2) = -\sum_{1 \le i \le j \le N-1}\frac{1}{R_i R_j}$$

$$\ldots$$

$$g(N-2) = (-1)^{N-3}\left[\prod_{i=1}^{N-1}\frac{1}{R_i}\right]\sum_{i=1}^{N-1}R_i$$

$$g(N-1) = (-1)^{N-2}\prod_{i=1}^{N-1}\frac{1}{R_i}$$

□

2.8 Μια Ελλειμματική Ανανεωτική Εξίσωση για την Συνάρτηση των Gerber και Shiu.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως η συνάρτηση $\phi(u)$ μπορεί να εκφραστεί με όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Ορίζω $\alpha(u) = \Pr(S = u)$, όπου $S = \begin{cases} Y_1 + Y_2 + ... + Y_M, & M \geq 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$

και η $M \sim G_o\left(\frac{\xi_u}{1+\xi_u}\right)$, με σ.π.π. $\Pr(M = n) = \frac{\xi_u}{1+\xi_u}\left(\frac{1}{1+\xi_u}\right)^n$, $n = 0,1,2,...$

Προτού αποδείξουμε την παραπάνω υπόθεση να υπενθυμίσουμε ότι ο Li έδειξε πως η συνάρτηση των Gerber και Shiu για $u \in \aleph^+$ μπορεί να δοθεί αναδρομικά από την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

$$\phi(u) = \sum_{y=1}^{u} \phi(u-y) g(y) + H(u) \qquad (2.65)$$

Όπου
$$g(y) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{uq_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j\, T_{\rho_j}\ p(y+1), \quad y \in \aleph^+$$
$$H(u) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{uq_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j\, T_{\rho_j}\ \omega(u+1), \quad u \in \aleph^+$$

(Αποδείξαμε προηγουμένως λεπτομερώς κάποια αποτελέσματα για τα παραπάνω στο Κεφ: 2.6.1)

Μένει να αποδείξουμε τον πρώτο όρο για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(0) = \lim_{u \to 1^-} \phi_T(0) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1} \frac{\rho_i}{1-\rho_i(1)}\right]\left[E(W) - E(X)\right] \qquad (2.66)$$

με $\rho_i(1)$ να είναι το όριο της ρ_i όταν $u \to 1^-$, για $i = 1,2,3,..., m-1$, λύνοντας την εξίσωση $\hat{k}(1/s)\,\hat{p}(s) = 1$.

Άρα από την σχέση (2.42) έχουμε τα εξής:

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\xi_u} \sum_{y=1}^{u} \phi(u-y) l(y) + H(u), \quad u \in \aleph^+ \quad (2.67)$$

όπου για την μεταβλητή ξ_u ισχύουν $\frac{1}{1+\xi_u} = \phi_T(0)$ και $l(y) = (1+\xi_u)g(y)$ ορίζοντας την ως κατάλληλή ελλειμματική συνάρτηση και $\phi(0) = H(0)$.

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω είναι η σχέση *(2.42)*, η οποία γίνεται

$$\phi_T(u) = \frac{1}{1+\xi_u}\sum_{y=1}^{u}\phi_T(u-y)l(y) + \frac{1}{1+\xi_u}\bar{\bar{L}}(u), \quad u \in \aleph^+ \quad (2.68)$$

Όπου $\bar{L}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} l(y)$ είναι η ουρά της l.

Ορίζοντας την σύνθετη γεωμετρική ελλειμματική συνάρτηση

$$\alpha(u) = \left(\frac{\xi_u}{1+\xi_u}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi_u}\right)^n l^{*n}(u), \ u \in \aleph \ (2.69) \qquad \text{με} \ \alpha(0) = \frac{\xi_u}{1+\xi_u}.$$

και χρησιμοποιώντας την γεννήτρια συνάρτηση καταλήγουμε

$$\phi_T(u) = \bar{A}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} a(y) = \left(\frac{\xi_u}{1+\xi_u}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi_u}\right)^n \bar{L}^{*n}(u), \ u \in \aleph \quad (2.70)$$

<u>**Σχολια:**</u>

1. Εφόσον $l(y) = \{\aleph^+\}$, τότε η $l^{*n}(u) = 0$, εάν $n > u$ και η $a(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα των πεπερασμένων όρων

$$a(u) = \left(\frac{\xi_u}{1+\xi_u}\right)\sum_{n=0}^{u}\left(\frac{1}{1+\xi_u}\right)^n l^{*n}(u), \ u \in \aleph$$

2. $L^{*n}(u) = 0$, εάν $n > u$ τότε $\phi_T(u)$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως το άθροισμα των πεπερασμένων όρων

$$\Phi_T(u) = 1 - \left(\frac{\xi_u}{1+\xi_u}\right)\sum_{n=0}^{u}\left(\frac{1}{1+\xi_u}\right)^n L^{*n}(u), \ u \in \aleph \quad (2.71)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.4

Εάν ορίσουμε μια γενική μορφή της $w(x, y)$, μπορεί να δοθεί η συνάρτηση των Gerber και Shiu $\phi(u)$ ρητά σε όρους Σύνθετης Γεωμετρικής Ελλειμματικής Συνάρτησης $a(u)$.

$$\phi(u) = \left(\frac{1+\xi_u}{\xi_u}\right)\sum_{y=0}^{u} H(u-y)\,a(y), \quad u \in \aleph \quad (2.72)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\hat{\phi}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u\, \phi(u)$, $\hat{l}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y\, l(y)$, $\hat{a}(s) = \sum_{y=0}^{\infty} s^y\, a(y)$ και $\hat{H}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u\, H(u)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις των ϕ, l, z και H αντίστοιχα.

Εάν πολλαπλασιάσουμε με τον όρο s^u και τις δυο πλευρές της σχέσης (2.42) κάνοντας άθροισμα για την μεταβλητή u από το 0 έως ∞ ισχύει

$$\hat{\phi}(s) = \frac{(1+\xi_u)\hat{H}(s)}{\left[1+\xi_u - \hat{l}(s)\right]}, \quad |\Re(s)| < 1 \quad (2.73)$$

Η εξίσωση $\hat{a}(s) = \dfrac{\xi_u}{1+\xi_u - \hat{l}(s)}$ συνεπάγεται ότι $\hat{\phi}(s) = \dfrac{\hat{a}(s)\hat{H}(s)(1+\xi_u)}{\xi_u}$.

Το αντίστροφο μας δίνει την αρχική μας σχέση (2.72). □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 3

¨ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΧΡΟΝΩΝ¨

Έπειτα από την μελέτη του κλασσικού μοντέλου σύνθετης διωνυμικής κατανομής και του ανανεωτικού μοντέλου σε διακριτό χρόνο, θα μελετήσουμε αντίστοιχα το ανανεωτικό μοντέλο διακριτού χρόνου με εξαρτήσεις μεταξύ χρόνων εμφάνισης ζημιάς. Πιο συγκεκριμένα η γεννήτρια συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας έχει μια γεωμετρική ουρά και όταν $X_i \sim G(p)$, μπορούμε να αντλήσουμε διάφορα αποτελέσματα για την ρητή συνάρτηση των Gerber και Shiu. Επιπλέον θα δούμε την συμπεριφορά των X_i όταν ακολουθούν μείξη γεωμετρικών κατανομών.

3.1 Εισαγωγή

Για την μελέτη αυτού του μοντέλου θα χρειαστεί να ορίσουμε την συνάρτηση ποινής να εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα, δηλαδή $w(x,y) = w_1(y)$. Οπότε:

$$\phi_{u,1}(u) = E\left[u^T w_1(|U(T)|) I(T<\infty) \mid U(0)=u\right], \quad u \in \aleph \quad (3.1)$$

Επιπλέον, θεωρούμε μια γενίκευση της (3.1) με $w(x,y) = s^x w_1(y)$ οπότε

$$\phi_{u,s}(u) = E\left[u^T s^{U(T-1)} w_1(|U(T)|) I(T<\infty) \mid U(0)=u\right], \quad u \in \aleph \quad (3.2)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το μοντέλο του Sparre Andersen σε διακριτό χρόνο με εξαρτήσεις μεταξύ χρόνων,κατανομής $K(t)$, επισημαίνοντας κάποιες ιδιότητες για την συνάρτηση $\phi_u(u)$.

Μπορούμε να αντλήσουμε αποτελέσματα για την συνάρτηση των Gerber και Shiu, όταν οι ατομικές ζημιές ακολουθούν είτε γεωμετρική κατανομή, είτε μείξη γεωμετρικών κατανομών.

3.2 Αναδρομική Σχέση της $\phi_u(u)$

Αρχικά θεωρούμε για $x \in \aleph$,την από κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος να είναι:

$$f_3(x,y,t\,|\,u) = P\{U(T-1) = x, |U(T)| = y, T = t\,|\,U(0) = u\}$$

Ενώ $f_2(x,t\,|\,u) = \sum_{y=1}^{\infty} f_3(x,y,t\,|\,u)$ αποτελεί την από κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος $U(T-1)$ και του χρόνου T.

Τέλος μένει να ορίσουμε τη συνάρτηση του ελλείμματος y, θέτοντας για $u \in (0,1)$ να είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας με $f_1(x\,|\,u) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t\, f_2(x,t\,|\,u)$.

Καθώς $p_x(y) = \dfrac{p(x+y+1)}{\bar{P}(x+1)}$, $y \in \aleph^+$ μας δίνει το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και τον χρόνο της χρεοκοπίας, καταλήγοντας στο εξής συμπέρασμα:

$$f_3(x,y,t\,|\,u) = p_x(y)\, f_2(x,t\,|\,u),\ x \in \aleph,\ y \in \aleph^+ \quad (3.3)$$

Με την προϋπόθεση ότι για πρώτη φορά το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το αρχικό επίπεδο που έχουμε ορίσει, έχουμε το εξής αποτέλεσμα για την $\phi_u(u)$.

$$\phi_u(u) = \sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} u^t\, \phi_u(u-y)\, f_3(x,y,t\,|\,0) + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} u^t w(x\,|+u, y-u)\, f_3(x,y,t\,|\,0) \quad (3.4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν το $u = 0$ το άθροισμα της μεταβλητής y από το 1 έως το u είναι 0. Από την σχέση *(3.3)* και τον ορισμό της $f_1(x\,|\,u)$ προκύπτει

$$\sum_{t-1}^{\infty} u^t\, f_3(x,y,t\,|\,0) = p_x(y) f_1(x\,|\,0) \quad (3.5)$$

Αντικαθιστώντας την *(3.5)* στην *(3.4)* ισχύει

$$\phi_u(u) = \sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty} \phi_u(u-y)\, p_x(y)\, f_1(x\,|\,0) + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w(x+u, y-u) p_x(y) f_1(x\,|\,0),\ u \in \aleph \quad (3.6)$$

Έστω $\xi_u = \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x\,|\,0)$ οπότε $g_1(y) = \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{p_x(y)\, f_1(x\,|\,0)}{\xi_u}$, $y \in \aleph^+ \quad (3.7)$

Οπότε η αναδρομική σχέση της $\phi_u(u)$ γίνεται

$$\phi_u(u) = \xi_u \sum_{y=1}^{u} \phi_u(u-y) g_1(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} w(x+u, y-u) p_x(y) f_1(x \mid 0), \quad u \in \aleph^+ \; (3.8)$$

$$\text{όπου} \quad \phi_u(0) = \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} w(x,y) p_x(y) f_1(x \mid 0)$$

Εάν η συνάρτηση ποινής περιλαμβάνει μόνο το έλλειμμα ώστε να ισχύει $w(x,y) = w_1(y)$, όπως ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου τότε

$$\phi_{u,1}(u) = \xi_u \sum_{y=1}^{u} \phi_{u,1}(u-y) g_1(y) + \xi_u \sum_{y=u+1}^{\infty} w_1(y-u) g_1(y), \quad u \in \aleph^+ \qquad (3.9)$$

$$\phi_{u,1}(0) = \xi_u \sum_{y=1}^{\infty} w_1(y) g_1(y) \quad (3.10)$$

Επιπλέον εάν $w_1(y) = 1$, τότε ορίζουμε $\overline{D}_u(u) = E\left[u^T I(T < \infty) \mid U(0) = u\right]$ ικανοποιώντας

$$\overline{D}_u(u) = \xi_u \sum_{y=1}^{u} \overline{D}_u(u-y) g_1(y) + \xi_u \overline{G}(u), \quad u \in \aleph \quad (3.11)$$

$$\text{όπου} \quad \overline{G}(u) = 1 - G(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} g_1(y) \,.$$

Επιπλέον ισχύει $\lim_{u \to 1} \overline{D}_u(u) = \psi(u)$.

Είναι γνωστό ότι η αναδρομική σχέση *(3.11)* δίνει το παρακάτω

$$\overline{D}_u(u) = (1-\xi_u) \sum_{n=1}^{\infty} \xi_u^n \, \overline{G}^{*n}(u), \quad u \in \aleph \quad (3.12)$$

όπου $G^{*n}(u) = 1 - \overline{G}^{*n}(u)$ αποτελεί την ελλειμματική συνάρτηση της ν-οστής συνέλιξης της $G(u)$. Πιο συγκεκριμένα όταν $u = 0$, $\overline{D}_u(0) = \xi_u$.

Εφόσον η συνάρτηση $g_1(y)$ ανήκει στο σύνολο N^+ και $n > u$ τότε $G^{*n}(u) = 0$. Ως εκ τούτου το δεξί μέλος της *(3.12)* μπορεί να μειωθεί σε ένα άθροισμα με πεπερασμένους όρους, δηλαδή

$$\overline{D}_u(u) = 1 - (1-\xi_u) \sum_{n=0}^{u} \xi_u^n G^{*n}(u), \quad u \in \aleph \qquad (3.13)$$

Μια παρόμοια εξήγηση θα δοθεί για την $\phi_u(u)$ στην επόμενη υπο ενότητα.

3.3 Γενική Έκφραση της $\phi_u(u)$

Αρχικά θα δοθεί μια γενική έκφραση της $\phi_u(u)$ με όρους σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Κάτι παρόμοιο έκανε και ο Li το 2005.

Έστω $a(u) = (1-\xi_u)\sum_{n=0}^{\infty}\xi_u^n g_1^{*n}(u),\ \ u \in \aleph$ η σύνθετη γεωμετρική ελλειμματική συνάρτηση, όπου $g_1^{*n}(u)$ είναι η ν-οστή συνέλιξη της ελλειμματικής συνάρτησης $g_1(u)$ και $a(0) = 1-\xi_u$. Όπως και προηγουμένως το άθροισμα γίνεται με πεπερασμένους όρους, δηλαδή

$$a(u) = (1-\xi_u)\sum_{n=0}^{u}\xi_u^n\, g_1^{*n}(u),\ \ u \in \aleph$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ: 3.1</u>

Για μια γενική συνάρτηση ποινής $w(x,y)$, η συνάρτηση των Gerber και Shiu $\phi_u(u)$ μπορεί να εκφραστεί με όρους της σύνθετης γεωμετρικής ελλειμματικής συνάρτησης, δηλαδή

$$\phi_u(u) = \frac{1}{1-\xi_u}\sum_{y=0}^{u} H(u-y)a(y),\ \ u \in \aleph \qquad (3.14)$$

όπου $$H(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w(x+u, y-u)\, p_x(y)\, f_1(x \mid 0)$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Σύμφωνα με την συνάρτηση $H(u)$ η εξίσωση *(3.8)* μπορεί να γραφτεί

$$\phi_u(u) = \xi_u\sum_{y=1}^{u}\phi_u(u-y)g_1(y) + H(u),\ \ u \in \aleph^+ \qquad (3.15)$$

Ορίζουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις των $\phi_u(u), g_1(y), a(y)$ και $H(u)$ ως

$$\hat{\phi}_u(z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^u\,\phi_u(u),\ \ \hat{g}_1(y) = \sum_{y=1}^{\infty} z^y\, g_1(y),\ \ \hat{a}(z) = \sum_{y=0}^{\infty} z^y\, a(y) \text{ και } \hat{H}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^u\, H(u)$$

αντίστοιχα.

Πολλαπλασιάζουμε την *(3.15)* με z^u αθροίζοντας τον όρο u από 0 έως ∞, έχουμε

$$\hat{\phi}_u(z) = \frac{\hat{H}(z)}{1-\xi_u\,\hat{g}_1(z)},\quad |\Re(z)| < 1 \qquad (3.16)$$

Αφού $\hat{a}(z) = \dfrac{1-\xi_u}{1-\xi_u\,\hat{g}_1(z)}$ τότε $\hat{\phi}_u(z) = \dfrac{\hat{a}(z)\hat{H}(z)}{1-\xi_u}$.

Αντιστρέφοντας την γεννήτρια συνάρτηση μας δίνει την αρχική μας σχέση *(3.15).* □

3.4 Ειδικές Περιπτώσεις Κατανομών Ατομικής Ζημιάς

Στην υπό ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με διάφορες κατανομές που μπορούν να πάρουν οι ατομικές ζημιές X_i, $i = 1,2,3,...$. Η παραπάνω ποσότητα θα αναλυθεί για μια εκφυλισμένη κατανομή σταθερού μεγέθους , γεωμετρική κατανομή και τέλος μια μείξη γεωμετρικών κατανομών.

3.4.1 Ατομικές Ζημιές Σταθερού Μεγέθους

Υποθέτουμε ότι οι ατομικές ζημιές είναι σταθερού μεγέθους 2, δηλαδή $p(2) = 1$. Με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_x(y) = \frac{p(x+y+1)}{\overline{P}(x+1)} = \begin{cases} 1, & x = 0,\ y = 1 \\ 0, & \delta\iota\alpha\phi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

Από την *(3.7)* προκύπτει ότι $g_1(y) = \begin{cases} 1, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ y = 1 \\ 0, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ y = 2,3,... \end{cases}$, ενώ από την *(3.11)* έχουμε

$$\overline{D}_u(0) = \xi_u \quad \text{και} \quad \overline{D}_u(u) = \xi_u\,\overline{D}_u(u-1), \quad u \in \aleph^+$$

Λύνοντας την παραπάνω αναδρομική σχέση προκύπτει $\overline{D}_u(u) = \xi_u^{u+1},\ u \in \aleph$.

Για να καθορίσουμε την μεταβλητή ξ_u ,δεδομένου ότι γνωρίζουμε τον χρόνο και το ποσό της πρώτης ζημιάς, για $u \in \aleph^+$. (3.17)

$$\overline{D}_u(u) = E\left[u^{W_1}\,\overline{D}_u(u+W_1-2)\right] = \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\overline{D}_u(u+t-2) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\xi_u^{u+t-1} = \frac{\overline{D}_u(u)}{\xi_u^2}\hat{k}(u\xi_u)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ξ_u $(0 < \xi_u < 1)$ είναι η λύση της

$$\xi_u^2 = \hat{k}(u\xi_u) \quad (3.18)$$

Πιο συγκεκριμένα $\psi(u) = \lim_{u \to 1^-} E\left[u^T I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] = \lim_{u \to 1^-} \xi_u^{u+1} = \xi_1^{u+1}$, $u \in \aleph$

όπου $\xi_1 = \psi(0)$ είναι η λύση της $\xi_1^2 = \hat{k}(\xi_1)$.

Ας ορίσουμε μια νέα μεταβλητή την $M(u) = E\left[TI(T < \infty) \mid U(0) = u\right]$, τότε

$$M(u) = \left.\frac{\partial \overline{D}_u(u)}{\partial u}\right|_{u=1} = (u+1)\,\xi_1^u \left.\frac{d\xi_u}{du}\right|_{u=1} = (u+1)\,\xi_1^u M(0) \qquad (3.19)$$

Για να καθορίσουμε την $M(0)$, η μονάδα μπορεί να διαφοροποιήσει την *(3.18)* ως προς το u, θέτοντας $u = 1$, δηλαδή $2\xi_1 M(0) = \hat{k}'(\xi_1)\left[\xi_1 + M(0)\right]$.

Λύνοντας την προκύπτει

$$M(0) = \frac{\xi_1 \hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}'(\xi_1)} \qquad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας την *(3.20)* στην *(3.19)* προκύπτει το εξής

$$M(u) = (u+1)\,\xi_1^{u+1} \frac{\hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}'(\xi_1)} = \frac{(u+1)\hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}'(\xi_1)}\psi(u)$$

Οπότε $\qquad E\left[T \mid T < \infty, U(0) = u\right] = \dfrac{E\left[TI(T < \infty) \mid U(0) = u\right]}{E\left[I(T < \infty) \mid U(0) = u\right]} = \dfrac{(u+1)\hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}'(\xi_1)}$.

3.4.2 Ατομικές Ζημιές που Ακολουθούν Γεωμετρική Κατανομή

Στο κομμάτι αυτό θα μελετήσουμε την περίπτωση που οι ατομικές ζημιές ακολουθούν Γεωμετρική Κατανομή, δηλαδή

Αν $X_i \sim G(p)$ τότε $p(x) = (1-q)\,q^{x-1}$, για $x \in \aleph^+$ και $0 < q < 1$.

Επιπλέον θα χρειαστεί να ορίσουμε την $p_x(y) = (1-q)\,q^{y-1} = p(y),\ y \in \aleph^+$.

Οπότε $g_1(y) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{p_x(y) f_1(x \mid 0)}{\xi_u} = p(y),\ y \in \aleph^+$ και $\xi_u = \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x \mid 0)$.

Από την *(3.11)* προκύπτει ότι $\overline{D}_u(u) = E\left[u^T I(T < \infty) \mid U(0) = u\right]$ με $\overline{D}_u(0) = \xi_u$ ικανοποιώντας την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$\overline{D}_u(u) = \xi_u \sum_{y=1}^{u} \overline{D}_u(u-y)p(y) + \xi_u \overline{P}(u) = \xi_u \sum_{y=1}^{u} \overline{D}_u(u-y)(1-q)\,q^{y-1} + \xi_u\, q^u,\ u \in \aleph \quad (3.22)$$

Η λύση της *(3.22)* είναι $\overline{D}_u(u) = \xi_u\left[q + \xi_u(1-q)\right]^u,\ u \in \aleph$ (3.23), όπου η μεταβλητή ξ_u θα καθοριστεί στη συνέχεια.

3.4.3 Ατομικές Ζημιές που Ακολουθούν Μεικτή Γεωμετρική Κατανομή

Στην υπό ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου οι ατομικές ζημιές ακολουθούν μεικτή γεωμετρική κατανομή. Για τους συντελεστές ισχύουν τα παρακάτω:

- $0 < a_j < 1$
- $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$**,** δηλαδή για την συνάρτηση πιθανότητας ισχύει
  - $p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j(x),\quad x \in \aleph^+$ (3.31)

όπου $\rho_j(x) = (1-q_j)q_j^{x-1},\ j = 1,2,\ldots,n$ είναι μια γεωμετρική σ.π.π με παραμέτρους $0 < q_j < 1$.

Θα δηλώσουμε επιπλέον την τυχαία μεταβλητή $Y_j \sim \rho_j(x)$.Για αυτήν την κατανομή, η συνάρτηση επιβίωσης της ορίζεται ως $\overline{P}(x) = \sum_{i=x+1}^{\infty} p(i) = \sum_{j=1}^{n} a_j q_j^x$, ενώ η γεννήτρια συνάρτηση ως $\hat{p}(z) = \sum_{x=1}^{\infty} p(x) z^x = \sum_{j=1}^{n} a_j \hat{\rho}_j(z)$, με $\hat{\rho}_j(z) = \sum_{x=1}^{\infty} \rho_j(x) z^x = \dfrac{(1-q_j)z}{1-q_j z}$ να είναι η γεννήτρια συνάρτηση της $\rho_j(x)$.

Θα αποδείξουμε ότι η $p(x)$ ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:

$$p(x+y) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(x) \rho_j(y), \quad x \in \aleph, \quad y \in \aleph^+ \text{ όπου } \zeta_j(x) = a_j q_j^x, \quad j = 1,2,...,n.$$

Εφόσον $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j(y) = \overline{P}(y)$ για $x \in \aleph,\ y \in \aleph^+$ έχουμε

$$p_x(y) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \zeta_j(x+1) \rho_j(y)}{\overline{P}(x+1)} = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^*(x+1) \rho_j(y)$$

$$p_x(y+u) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^*(x+1) \rho_j(y+u), \ u \geq 1 \quad (3.32), \quad \text{όπου } \zeta_j^*(x+1) = \frac{\zeta_j(x+1)}{\overline{P}(x+1)}$$

Προφανώς $p_x(y)$ είναι ένα μείγμα των $\rho_1(y),..., \rho_n(y)$ με βάρη $\zeta_j^*(x+1), \ j = 1,2,...,n$. Οι ρίζες της ακόλουθης γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg παίζουν σημαντικό ρόλο για τα παρακάτω συμπεράσματα.

Υπενθυμίζουμε ότι ο Li (2005) απέδειξε ότι $\hat{k}\left(\dfrac{u}{z}\right)\hat{p}(z) = 1$ *(3.34)* και την ονόμασε γενικευμένη εξίσωση του Lundberg.

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους ισχυρισμούς με τους Landriault & Willmot (2008), μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση *(3.33)* έχει τις ίδιες ρίζες με

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} z^y \ f_1(x \mid 0) \, p_x(y) = 1 \quad (3.34)$$

<u>ΛΗΜΜΑ: 3.1</u>

Εάν όλες οι ζημιές είναι μείγμα γεωμετρικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από την σχέση *(3.31)*, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg*(3.33)* έχει ηρίζες, έστω $R_1, R_2,..., R_n$ με $|R_i| > 1$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\hat{k}\left(\frac{u}{z}\right)\hat{p}(z)=1$ έχει n ρίζες, έστω

$r_1, r_2, ..., r_n$ με $0<|r_i|<1$. Τότε $R_i=\frac{1}{r_i},\ i=1,2,..,n$, θεωρούμε ένα σύνολο

$\Gamma=\{z:|z|=1\}$ και εφόσον

$$\left|\frac{1}{\hat{p}(1/z)}\right|=\frac{1}{\left|\hat{p}(1/z)\right|}\geq\frac{1}{\hat{p}(1/|z|)}=1=\hat{k}(1)\geq\hat{k}(u)=\hat{k}(|uz|)\geq|\hat{k}(uz)|$$

Ανήκει στο σύνολο *Γ*, τότε από το Θεώρημα του Rouche παίρνουμε ότι η εξίσωση $\frac{1}{\hat{p}(1/z)}=0$ και $\hat{k}(uz)\,\hat{p}(1/z)=1$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στην μονάδα του κύκλου , ενώ η

$$\frac{1}{\hat{p}(1/z)}=\frac{\prod_{j=1}^{n}(z-q_j)}{\sum_{j=1}^{n}\left[a_j(1-q_j)\prod_{i=1,i\neq j}^{n}(z-q_j)\right]}=0$$

έχει *n* ρίζες στο σύνολο *Γ*. □

Για να ορίσουμε μια ρητή έκφραση για την $\phi_{u,s}(u)$ παίρνουμε την*(3.8)* όπου $\phi_u(u)$ αντικαθίσταται από την $\phi_{u,s}(u)$ και $w(x,y)=s^x w_1(y)$, δηλαδή

$$\phi_{u,s}(u)=\xi_u\sum_{y=1}^{u}\phi_{u,s}(u-y)g_1(y)+\xi_u\sum_{y=u+1}^{\infty}s^u\,w_1(y-u)\sum_{x=0}^{\infty}s^x p_x(y)\frac{f_1(x|0)}{\xi_u},\ u\in\aleph \quad (3.35)$$

Ορίζουμε επιπλέον $g_1(y)=\sum_{x=0}^{\infty}s^x\,p_x(y)f_1(x|0)/\xi_u$ και η *(3.35)* γίνεται

$$\phi_{u,s}(u)=\xi_u\sum_{y=1}^{u}\phi_{u,s}(u-y)g_1(y)+\xi_u\sum_{y=1}^{\infty}s^u\,w_1(y)g_s(y+u),\ u\in\aleph \quad (3.36)$$

Συνδυάζοντας την *(3.32)* και τον ορισμό της $g_s(y)$ έχουμε

$$g_s(y+u)=\sum_{x==0}^{\infty}s^x\,p_x(y+u)f_1(x|0)/\xi_u=\sum_{j=1}^{n}\delta_j(s)\rho_j(y+u) \quad (3.37)$$

με $\delta_j(s)=\sum_{x=0}^{\infty}s^x\zeta_j^*(x+1)f_1(x|0)/\xi_u$

Στην περίπτωση που έχουμε μια μείξη όμοιων γεωμετρικών κατανομών, η *(3.37)* γίνεται

$$g_1(y) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x(y)\frac{f_1(x\,|\,0)}{\xi_u} = \sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)\rho_j(y) \quad (3.38)$$

Όπως στην $p_x(y)$ με βάρη $\delta_j(1),\ j = 1,2,...,n$.

Χρησιμοποιώντας την *(3.38)* και την *(3.37)* η αναδρομική σχέση *(3.36)* μπορεί να γραφτεί και

$$\phi_{u,s}(u) = \xi_u \sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)\sum_{y=1}^{u}\phi_{u,s}(u-y)\rho_j(y) + \xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(s)\sum_{y=1}^{\infty}w_1(y)\rho_j(y+u)s^u \quad (3.39)$$

και η γεννήτρια συνάρτηση της

$$\hat{\phi}_{u,s}(z) = \xi_u \sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)\hat{\phi}_{u,s}(z)\hat{\rho}_j(z) + \xi_u\sum_{y=1}^{n}\delta_j(s)E\left[w_1(Y_j)\right]\frac{1}{1-q_j sz} \quad (3.40)$$

Σαν αποτέλεσμα, αποκτούμε

$$\hat{\phi}_{u,s}(z) = \frac{\xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(s)E\left[w_1(Y_j)\right]/(1-q_j sz)}{1-\xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)\hat{\rho}_j(z)} \quad (3.41)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο παρονομαστής έχει τα ίδια μηδενικά με την *(3.34)*, εφόσον $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} z^y f_1(x\,|\,0)p_x(y) = \xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)\hat{\rho}_j(z)$. Επομένως ο παρονομαστής έχει τις ίδιες ημηδενικές ρίζες, έστω $R_1, R_2, ...R_n$, όπως η *(3.33)*.

Στη συνέχεια θα βρούμε μια ρητή έκφραση για την $\phi_{u,s}(u)$ αντιστρέφοντας την*(3.41)*. Εφόσον $\hat{\rho}_j(z) = \frac{(1-q_j)z}{1-q_j z},\quad j = 1,2,...,n$ έχουμε από την *(3.41)*, ότι

$$\hat{\phi}_{u,s}(z) = \frac{\xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(s)E\left[w_1(Y_j)\right]/(1-q_j sz)}{1-\xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)(1-q_j)z/(1-q_j z)} = \frac{\hat{a}_{u,s}(z)}{\hat{a}_u(z)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-q_j z}{1-q_j sz} \quad (3.42)$$

$$\text{όπου}\ \hat{a}_{u,s}(z) = \xi_u\sum_{j=1}^{n}\delta_j(s)A_{-j}(sz)E\left[w_1(Y_j)\right] \quad (3.43)$$

$$\hat{a}_u(z) = \prod_{j=1}^{n}(1-q_j z) - \xi_u\, z\sum_{j=1}^{n}\delta_j(1)(1-q_j)A_{-j}(z) \quad (3.44) \quad \text{και} \quad A_{-j}(z) = \prod_{i=1, i\neq j}^{n}(1-q_i z)$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι ρίζες $R_1,...R_n$ είναι διακριτές, οπότε χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική παρεμβολή του Lagrange*(3.44)* και *(3.43)* μπορεί να γραφτεί

$$\hat{a}_{u,s}(z) = \sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{u,s}(R_j)\prod_{i=1,i\neq j}^{n}\frac{(R_i - z)}{R_i - R_j} \quad \text{και} \quad \hat{a}_u(z) = \prod_{j=1}^{n}\frac{R_j - z}{R_j}.$$

Αντικαθιστώντας τα στην *(3.42)* προκύπτει

$$\hat{\phi}_{u,s}(z) = \frac{\hat{\beta}_{u,s}(z)\prod_{l=1}^{n}R_l}{\prod_{j=1}^{n}(R_j - z)\prod_{i=1}^{n}(1-q_i sz)} \qquad (3.45)$$

όπου $\hat{\beta}_{u,s}(z) = \sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{u,s}(R_k)\prod_{i=1,i\neq j}^{n}\frac{R_i - z}{R_i - R_j}\prod_{i=1}^{n}(1-q_i z)$ είναι ένα πολυώνυμο $2n-1$ βαθμού. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο μερικών κλασμάτων η *(3.45)* γίνεται

$$\hat{\phi}_{u,s}(z) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\frac{R_j}{R_j - z} + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\frac{1}{1-q_j sz} \qquad (3.46)$$

Όπου
$$\gamma_{u,s}(j) = \frac{\hat{\beta}_{u,s}(R_j)\prod_{i=1,i\neq j}^{n}R_i}{\prod_{i=1,i\neq j}^{n}(R_i - R_j)\prod_{k=1}^{n}(1-q_k s R_j)}$$

Και
$$\kappa_{u,s}(j) = \frac{\hat{\beta}_{u,s}((q_j s)^{-1})\prod_{l=1}^{n}R_l}{\prod_{i=1}^{n}\left[R_i - (q_j s)^{-1}\right]\prod_{i=1,i\neq j}^{n}(1-q_i/q_j)}$$

Τελικά, αντιστρέφοντας την*(3.46)* έχουμε

$$\phi_{u,s}(u) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)R_j^{-u} + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)(q_j u)^u, \quad u \in \aleph \qquad (3.47)$$

Αναπτύσσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τους άγνωστους συντελεστές $\gamma_{u,s}(j)$ και $\kappa_{u,s}(j),\ j=1,2,...,n$.

Για $u \in \aleph$, η εξίσωση *(3.25)* ισχύει ακόμα και

$$\begin{aligned}\phi_{u,s}(u) &= \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\left[\sum_{x=1}^{u+t}\phi_{u,s}(u+t-x)p(x) + s^{u+t-1}\sum_{x=u+t+1}^{\infty} w_1(x-u-t)p(x)\right] \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\left[\nu_{u,s}(u+t) + s^{u+t-1}\sum_{y=1}^{\infty} w_1(y)p(y+u+t)\right]\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\text{όπου } \nu_{u,s}(t) = \sum_{y=0}^{t-1}\phi_{u,s}(y)p(t-y).$$

Η γεννήτρια συνάρτηση της $\nu_{u,s}(t)$ είναι $\hat{\nu}_{u,s}(z) = \hat{\phi}_{u,s}(z)\,\hat{p}(z)$.Από την *(3.46)* έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_{u,s}(z) &= \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\frac{R_j}{R_j - z}\hat{p}(z) + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\frac{\hat{p}(z)}{1-q_j s z} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-q_i)R_j z}{(R_j - z)(1-q_i z)} + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-q_i)z}{(1-q_i s z)(1-q_i z)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\left[\hat{p}(R_j)\frac{R_j}{R_j - z} - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-q_i z}\hat{\rho}_i(R_j)\right] + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-q_i)}{q_j s - q_i}\left[\frac{1}{1-q_i s z} - \frac{1}{1-q_i z}\right]\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας, για $t \in \aleph^+$ δίνει

$$\nu_{u,s}(t) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\left[\hat{p}(R_j)R_j^{-1} - \sum_{i=1}^{n}a_i\,\hat{\rho}_i(R_j)q_i^t\right] + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-q_i)}{q_j s - q_i}\left[(q_j s)^t - q_i^t\right]$$

Αντικαθιστώντας την στην *(3.48)*προκύπτει η *(3.49)*:

$$\begin{aligned}\phi_{u,s}(u) = &\sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\,\hat{p}(R_j)\hat{k}\left(\frac{u}{R_j}\right)R_j^{u-1} - \sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\hat{\rho}_i(R_j)\hat{k}(uq_i)q_i^u \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(1-q_i)}{q_j s - q_i}\left[\hat{k}(u q_j s)(q_j s)^u - \hat{k}(uq_i)q_i^u\right] \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\hat{k}(u q_j s)E(w_1(Y_j))(q_j s)^u / s\end{aligned}$$

Εφόσον R_j ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg*(3.33)* , θα μπορούσε $\hat{p}(R_j)\hat{k}(u/R_j) = 1$. Συγκρίνοντας τις σχέσεις*(3.47)* και *(3.49)* έχουμε

$$\kappa_{u,s}(j)=\frac{a_j\,\hat{k}(uq_js)E\left[w_1(Y_j)\right]/s}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-q_i)}{\left(q_js-q_i\right)\hat{k}(uq_js)}},\quad j=1,2,...,n$$

Και ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για την $\gamma_{u,s}(j)$:

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_{u,s}(j)\hat{\rho}_i(R_j)+\sum_{j=1}^{n}\kappa_{u,s}(j)\frac{1-q_i}{q_js-q_i}=0,\quad i=1,2,...,n \qquad (3.50)$$

Έστω τώρα δυο πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ και $B(s)=\left(b_{ij}(s)\right)_{n\times n}$, όπου $a_{ij}=\hat{\rho}_i\left(R_j\right)$ και $b_{ij}=\dfrac{1-q_i}{q_i-q_js}$. Ο αντίστροφος πίνακας της $\vec{\gamma}_{u,s}=\left(\gamma_{u,s}(1),...,\gamma_{u,s}(n)\right)^T$ και του $\vec{\kappa}_{u,s}=\left(\kappa_{u,s}(1),...,\kappa_{u,s}(n)\right)^T$ είναι δυσδιάστατοι πίνακες. Η εξίσωση *(3.50)* μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα ως εξής $A\vec{\gamma}_{u,s}=B(s)\vec{\kappa}_{u,s}$ (3.51)

Υποθέτουμε ότι η αντιστροφή του πίνακα *A* πραγματοποιείται και ορίζεται ως $A^{-1}=\left(a_{ij}^{\ *}\right)_{n\times n}$, τότε από τις *(3.50)* και *(3.51)*αποκτάμε τις παρακάτω λύσεις της $\gamma_{u,s}(j),\ j=1,2,..,n$

$$\begin{aligned}\gamma_{u,s}(j)&=\sum_{i=1}^{n}a^{*}_{j,i}\sum_{l=1}^{n}b_{i,l}(s)\kappa_{u,s}(l)\\&=\sum_{i=1}^{n}a^{*}_{j,i}\sum_{l=1}^{n}\frac{\dfrac{a_l(1-q_i)\hat{k}(q_lsu)E\left[w_1(Y_l)\right]}{s}}{\left(q_i-q_ls\right)\left[1-\hat{k}(q_lsu)\right]\sum_{m=1}^{n}\dfrac{a_m(1-q_m)}{q_ls-q_m}}\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:4

¨ΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ¨

4. 1 Εισαγωγή

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα μελετήσουμε το στάσιμο και σύνηθες διακριτό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, γνωστό και ως μοντέλο ισορροπίας. Θα επικεντρωθούμε πάλι στην προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu αντλώντας όρους από την αντίστοιχη συνάρτηση του κλασικού μοντέλου, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια. Επιπλέον θα εξετάσουμε την περίπτωση χωρίς προεξόφληση και το πλαίσιο για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

4. 2 Ορισμός

Πιο απλά το διακριτό στάσιμο μοντέλο ή αλλιώς το διακριτό ανανεωτικό μοντέλο ισορροπίας είναι μια γενίκευση του διακριτού ανανεωτικού μοντέλου. Όμοια θεωρούμε το πλήθος ζημιών να είναι $\{N(t); t \geq 0\}$ με εξαρτήσεις μεταξύ χρόνων $\{W_1, W_2, ...\}$ και θεωρώντας σωρευτική συνάρτηση κατανομής $K(x) = 1 - \overline{K}(x)$ συνάρτηση πιθανότητας $k(x) = \overline{K}(x-1) - \overline{K}(x)$, $x \in \aleph^+$. Ως γνωστόν οι ατομικές ζημιές $\{X_1, X_2, ...\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$. Επίσης αν υποθέσουμε ότι $k(0) = 0$ σε μια καθορισμένη χρονική στιγμή τότε $f(0) = 0$.

Σε αντίθεση με το κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο, το μοντέλο ισορροπίας υπολογίζει ξεχωριστά τους χρόνους αναμονής, δηλαδή ο W_1 είναι ανεξάρτητος των συνόλων $\{W_2, W_3, ...\}$ και $\{X_1, X_2, ...\}$ με συνάρτηση πιθανότητας

$K_1(x) = 1 - \overline{K}_1(x) = \Pr(W_1 = x)$ και μάζα $k_1(x) = \overline{K}(x-1) \big/ E[X_2]$, $x \in \aleph^+$.

Δηλαδή για την κατανομή της ισορροπίας της X_2 η σ.π.π. ισορροπίας είναι $+$ της X_1

και $F_1(x) = 1 - \overline{F}_1(x)$

Ως γνωστόν το αρχικό πλεόνασμα του ασφαλιστή την χρονική στιγμή tείναι

$$U(t) = u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad \text{και} \quad \frac{(1+\vartheta)E\{X_1\}}{E\{W_2\}} = 1 \quad \text{με} \quad \vartheta \geq 0.$$

Κάποιοι ερευνητές θεωρούν χρεοκοπία το ενδεχόμενο το πλεόνασμα να πέσει κάτω από το μηδέν, ενώ άλλοι όπου το πλεόνασμα είναι το πολύ μηδέν. (Βλ. Gerber (1988) και Shiu (1988)).Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την πρώτη περίπτωση, οπότε

$T = \inf \begin{cases} t \in N^+ : U(t) < 0, & \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \\ \infty, & \acute{o}\chi\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \end{cases}$ για το σύνηθες διακριτό ανανεωτικό μοντέλο.

Επιπλέον $m(u) = E\left\{u^T \, w(U(T-1), |U(T)|) \, I(T < \infty) | U(0) = u\right\}$ η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu, με $\upsilon \in (0,1)$ να είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, $w(u_1, u_2): N^+ \times N^+ \to N$ και τέλος $I(A)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση. Έστω T_e και T_* οι χρόνοι χρεοκοπίας στο διακριτό ανανεωτικό μοντέλο ισορροπίας και στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο αντίστοιχα, τότε η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως εξής:

$$m_e(u) = E\left\{u^{T_e} \, w(U(T_e - 1), |U(T_e)|) \, I(T_e < \infty) | U(0) = u\right\} \quad \text{και αντίστοιχα}$$
$$m_*(u) = E\left\{u^{T*} \, w(U(T_* - 1), |U(T_*)|) \, I(T_* < \infty) | U(0) = u\right\}$$

Τέλος θεωρούμε u μια μη αρνητική ακέραια μεταβλητή και την υπόθεση ότι τα ασφάλιστρα έρχονται πριν από την ζημιά σε μια καθορισμένη χρονική στιγμή

4. 3 Διαφορές Μεταξύ της Προεξοφλητικής Συνάρτησης Ποινής των Gerber και Shiu στο Σύνηθες και Στάσιμο Διακριτό Ανανεωτικό Μοντέλο Κινδύνου

Με την βοήθεια του παρακάτω Θεωρήματος θα δείξουμε λεπτομερώς πως ορίζεται η προεξοφλητική συνάρτηση ποινής στο σύνηθες και στο διακριτό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, αναδεικνύοντας έτσι τις διαφορές που προκύπτουν.

ΘΕΩΡΗΜΑ:4.1

Θα μελετήσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής κάτω από μια ισορροπία και τα πραγματικά ανανεωτικά μοντέλα σχετίζονται με την

$$m_e(u) = \frac{1}{1+\vartheta} \sum_{i=0}^{u} m(u-i) f_1(i+1) + \nu_u(u), \quad u \in \aleph$$

Όπου $$\nu_\upsilon(u) = \sum_{i=u+1}^{\infty} \upsilon^{i-u} \, \tau(i) - \frac{1-\upsilon}{1+\vartheta} \sum_{i=u+1}^{\infty} \upsilon^{i-u-1} \sum_{j=1}^{i} m(i-j) f_1(j)$$

Και $$\tau(i) = \frac{1}{E[W_2]} \sum_{j=i+1}^{\infty} w(i, j-i) f(j), \quad i \in \aleph.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θεωρούμε ως δεδομένο τον χρόνο W_1 και την ποσότητα X_1 της πρώτης περιόδου όπου εμφανίζεται ζημιά, καταλήγοντας στην παρακάτω σχέση *(4.1)*

$$m(u)=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon^{i}\left[\sum_{j=1}^{u+i}m(u+i-j)\,f(j)+\sum_{j=u+i+1}^{\infty}w(u+i,j-u-i)\,f(j)\right]P[W_1=i]=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon^{i}\gamma(u+i)P[W_1=i]$$

$$\text{Όπου } \gamma(t)=\sum_{j=1}^{t}m(t-j)\,f(j)+E\{W_2\}\tau(t),\quad t\in\aleph$$

Για $t=0$ έχουμε $\gamma(0)=E\{W_2\}\tau(0)$. Στη συνέχεια ξεκινώντας το άθροισμα της *(4.1)* από 0 και όχι από 1 στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, έχουμε το εξής:

$$m(u)=\sum_{i=0}^{\infty}u^{l+1}\gamma(u+1+l)P\{W_1=l+1\}\qquad(4.2)$$

$$\text{ή}\quad \frac{1}{E\{W_2\}}m(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\upsilon^{l+1}\gamma(u+1+l)\frac{k(l+1)}{E\{W_2\}}\qquad(4.3)$$

Για την διαδικασία ισορροπίας όπως και στην *(4.2)* έχουμε αναλογικά

$$m_e(u)=\sum_{l=0}^{\infty}\upsilon^{l+1}\gamma(u+1+l)\frac{\overline{K}(l)}{E\{W_2\}}\qquad(4.4)$$

Αφαιρώντας την *(4.3)* από την *(4.4)* έχουμε

$$m_e(u)-\frac{1}{E\{W_2\}}m(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\upsilon^{l+1}\gamma(u+1+l)\frac{\overline{K}(l+1)}{E\{W_2\}}=\sum_{i=0}^{\infty}\upsilon^{l+1}\gamma(u+1+l)k_1(l+2)\,.$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\upsilon^{l}\,\gamma(u+l)k_1(l+1)=m_e(u)-\frac{1}{E\{W_2\}}m(u)\quad(4.5)$$

Όμως εάν αντικαταστήσουμε την μεταβλητή u με $u-1$στην σχέση *(4.4),* προκύπτει

$$m_e(u-1)=\frac{\upsilon\gamma(u)}{E\{W_2\}}+\sum_{l=1}^{\infty}\upsilon^{l+1}\,\gamma(u+l)k_1(l+1),\quad u\in\aleph_+$$

Δηλαδή
$$\sum_{l=1}^{\infty}\upsilon^{l}\,\gamma(u+l)k_1(l+1)=\frac{1}{u}m_e(u-1)-\frac{\gamma(u)}{E\{W_2\}}\qquad(4.6)$$

Επιπλέον, εξισώνοντας τις σχέσεις *(4.5)* και *(4.6)* ισχύει το παρακάτω:

$$m_e(u) = \frac{1}{u} m_e(u-1) + \frac{m(u) - \gamma(u)}{E\{W_2\}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{u}\right) m_e(u) - \frac{m(u) - \sum_{j=1}^{u} m(u-j) f(j)}{E\{W_2\}} + \tau(u) = \frac{1}{u}\left[m_e(u-1) - m_e(u)\right]$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος αρκεί να δοθούν και οι γεννήτριες συναρτήσεις των παραπάνω σχέσεων πολλαπλασιάζοντας με $u\,z^u$ και κάνοντας άθροισμα ως προς το u από 1 έως το ∞ η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$(u-1)\left[\hat{m}_e(z) - m_e(0)\right] - \upsilon \frac{\hat{m}(z) - m(0) - \hat{m}(z)\hat{f}(z)}{\mathrm{E}\{W_2\}} + \upsilon\left[\hat{\tau}(z) - \tau(0)\right] = (z-1)\hat{m}_e(z) + m_e(0)$$

ή $(u-z)\hat{m}_e(z) = u\left[m_e(0) - \dfrac{m(0)}{E\{W_2\}}\right] + \upsilon \dfrac{\hat{m}(z) - \hat{m}(z)\hat{f}(z)}{E\{W_2\}} - \upsilon\left[\hat{\tau}(z) - \tau(0)\right]$ (4.7)

Όμως $\hat{f}_1(z) = \sum_{x=1}^{\infty} \dfrac{z^x \overline{F}(x-1)}{E\{X_1\}} = \dfrac{z}{E\{X_1\}} \sum_{x=0}^{\infty} z^x \overline{F}(x)$ από τον Feller (1968), υπάρχει

$$\hat{f}_1(z) = \frac{z\left[1 - \hat{f}(z)\right]}{(1-z)E(X_1)}.$$

Επομένως η *(4.7)* γίνεται:

$$(u-z)\hat{m}_e(z) = \upsilon\left[\tau(0) + m_e(0) - \frac{m(0)}{E\{W_2\}}\right] + \frac{\upsilon(1-z)E\{X_1\}}{z\,E\{W_2\}}\hat{m}(z)\hat{f}_1(z) - \upsilon\hat{\tau}(z) \quad (4.8)$$

Για να ορίσουμε την σταθερά $\upsilon[\tau(0) + m_e(0) - m(0)/E\{W_2\}]$, θέτουμε όπου $z = u$ και

$\dfrac{E\{X_1\}}{E\{W_2\}} = \dfrac{1}{1+\vartheta}$. Οπότε $\upsilon\left[\tau(0) + m_e(0) - \dfrac{m(0)}{E\{W_2\}}\right] = \upsilon\hat{\tau}(\upsilon) - \dfrac{1-\upsilon}{1+\vartheta}\hat{m}(u)\hat{f}_1(\upsilon)$.

Αντικαθιστώντας την στην *(4.8*) και αφού πολλαπλασιάσουμε με τον όρο z/u προκύπτει το παρακάτω:

$$z\left(1-\frac{z}{u}\right)\hat{m}_e(z) = z[T(u)-T(z)] - \frac{z}{u}\frac{1-u}{1+\vartheta}\hat{m}(u)\,\hat{f}_1(u) + \frac{1-z}{1+\vartheta}\hat{m}(z)\,\hat{f}_1(z)$$

$$= \frac{1-\frac{z}{u}}{1+\vartheta}\hat{m}(z)\,\hat{f}_1(z) + \frac{z}{u}\frac{1-u}{1+\vartheta}\left[\hat{m}(z)\,\hat{f}_1(z) - \hat{m}(u)\,\hat{f}_1(u)\right] + z[T(u)-T(z)]$$

Διαιρώντας με $\frac{1-z}{u}$ έχουμε:

$$z\,\hat{m}_e(z) = \frac{1}{1+\vartheta}\hat{m}(z)\,\hat{f}_1(z) + z\frac{1-u}{1+\vartheta}\frac{\hat{m}(z)\,\hat{f}_1(z) - \hat{m}(u)\,\hat{f}_1(u)}{u-z} + zu\frac{T(u)-T(z)}{u-z} \quad (4.9)$$

Ορίζουμε συνάρτηση με ΄΄εξάρτηση΄΄ έστω $a(x)$, $x \in \aleph$ και αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση $\hat{a}(z)$

Οπότε $$\frac{A(z)-A(t)}{z-t} = \sum_{u=0}^{u} z^u \sum_{x=u+1}^{\infty} t^{x-u-1}\, a(x)$$

Ο συντελεστής της z^u στην $\frac{A(z)-A(t)}{z-t}$ είναι $\sum_{x=u+1}^{\infty} t^{x-u-1}\, a(x)$ και εξισώνοντας τον συντελεστή της z^{u+1} στην *(4.9)* καταλήγουμε στην αρχική μας υπόθεση, αποδεικνύοντας το Θεώρημα:1.4

$$m_e(u) = \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} m(u-i)\, f_1(i+1) - \frac{1-u}{1+\vartheta}\sum_{i=u+1}^{\infty} u^{i-u-1}\sum_{j=1}^{i} m(i-j)\, f_1(j) + \sum_{i=u+1}^{\infty} u^{i-u}\,\tau(i) \quad \square$$

4.4 Το Προεξοφλητικό Μοντέλο

- Όταν $\underline{u=1}$, οι παρακάτω σχέσεις

$$\beta(u)=m(u)|_{u=1}=E\{w(U_{T-},|U_T|)I\,(T<\infty)\,|\,U_0=u\} \quad \text{και}$$

$$\beta_e(u)=m_e(u)|_{u=1}=E\{w(U_{Te-},|U_{Te}|)I(T_e<\infty)\,|\,U_0=u\}$$

Υποδηλώνουν δηλαδή τις συναρτήσεις των Gerber και Shiu σε ένα γνήσιο και σταθερό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ:4.1</u>

Οι συναρτήσεις $\beta_e(u)$ και $\beta(u)$ σχετίζονται με

$$\beta_e(u)=\frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u}\beta(u-i)\,f_1(i+1)+\sum_{i=u+1}^{\infty}\tau(i),\ \ u\in\aleph$$

Η απόδειξη αυτού του πορίσματος προκύπτει άμεσα από το παραπάνω Θεώρημα.4.1.

- Όταν $\underline{u=0}$ έχουμε τα εξής

$$\beta_e(u)=\frac{1}{1+\vartheta}\beta(0)f_1(1)+\sum_{i=u+1}^{\infty}\tau(i),\ \ u\in\aleph$$

Οπότε σε ένα γνήσιο μοντέλο η $\beta_e(0)$ εξαρτάται από το $\beta(0)$. Αυτή είναι μια απόκλιση από το συνεχές κλασσικό αναλογικό μοντέλο Poisson, η οποία δεν εξαρτάται από το αρχικό απόθεμα.

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια έτσι και εδώ θα αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που εμπλέκονται με όσα αναφέραμε προηγουμένως και άλλοι παράμετροι όπως είναι το πλεόνασμα και το έλλειμμα.

Οπότε μένει να ορίσουμε την αρχική μας συνάρτηση ως:

$$F(x,y\,|\,u)=P\{T<\infty,U_{T-}\le x,|U_T|\le y\,|\,U_0=u\}$$

Και ως ελλειμματική κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν από την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας σε ένα γνήσιο και στάσιμο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου την:

$$F_e(x,y\,|\,u)=P\{T_e<\infty,U_{Te-}\le x,|U_{Te}|\le y\,|\,U_0=u\}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ:4.2

Οι από κοινού ελλειμματικές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών σχετίζονται με

$$F_e(x,y\,|\,u) = \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} F(x,y\,|\,u-i)\; f_1(i+1) + \frac{I(u<x)}{1+\vartheta}\left[\overline{F}_1(u+1) - \overline{F}_1(x+1) - \overline{F}_1(x+y+1)\right]$$

$$x,y \in \aleph_+,\; u \in \aleph$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Μπορεί κανείς να εκφράσει τις παραπάνω σχέσεις $F(x,y\,|\,u)$ και $F_e(x,y\,|\,u)$ σε όρους των $\beta(u)$ και $\beta_e(u)$.

Εφόσον έχουν οριστεί οι συναρτήσεις μένει να δούμε αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- $w(X,Y) = I(X \le x)\, I(Y \le y)$
- $F(x,y\,|\,u) = \beta(u)$ και
- $F_e(x,y\,|\,u) = \beta_e(u)$

Οπότε από το πόρισμα 4.1 προκύπτει το εξής συμπέρασμα:

$$\begin{aligned}
F_e(x,y\,|\,u) &= \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} F(x,y\,|\,u-i)\; f_1(i+1) + \sum_{i=u+1}^{\infty}\frac{1}{E\{W_2\}}\sum_{j=i+1}^{\infty} I(i \le x)\, I(j-i \le y)\, f(j) \\
&= \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} F(x,y\,|\,u-i)\; f_1(i+1) + \frac{I(u<x)}{(1+\vartheta)\,E\{X_1\}}\sum_{i=u+1}^{x}\sum_{j=i+1}^{i+y} f(j) \\
&= \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} F(x,y\,|\,u-i)\; f_1(i+1) + \frac{I(u<x)}{(1+\vartheta)\,E\{X_1\}}\sum_{i=u+1}^{x}\left[\overline{F}(i) - \overline{F}(i+y)\right] \\
&= \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} F(x,y\,|\,u-i)\; f_1(i+1) + \frac{I(u<x)}{(1+\vartheta)} * \\
&\quad * \left[\overline{F}_1(u+1) - \overline{F}_1(x+1) - \overline{F}_1(u+y+1) + \overline{F}_1(x+y+1)\right], \qquad x,y \in \aleph_+
\end{aligned}$$

Κατ΄επέκταση καταλήγουμε στην αρχική μας υπόθεση. □

Οπότε η <u>ελλειμματική οριακή κατανομή του πλεονάσματος</u> ακριβώς πριν την χρεοκοπία είναι

$$F_{e,X}(x|u)=\lim_{y\to\infty}F_e(x,y|u)=\frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u}F_X(x|u-i)\, f_1(i+1)$$
$$+\frac{I(u<x)}{1+\vartheta}\left[\overline{F}_1(u+1)-\overline{F}_1(x+1)\right],\quad x\in\aleph_+,\ u\in\aleph$$

Ενώ η <u>ελλειμματική οριακή κατανομή του ελλείμματος</u> εκείνη την χρονική στιγμή είναι

$$F_{e,Y}(y|u)=\lim_{x\to\infty}F_e(x,y|u)$$
$$=\frac{1}{1+\vartheta}\left[\sum_{i=0}^{u}F_Y(y|u-i)\, f_1(i+1)+\overline{F}_1(u+1)-\overline{F}_1(u+y+1)\right],\ x\in\aleph_+, u\in\aleph$$

Όπου οι μεταβλητές Χ και Υ υποδηλώνουν ποια οριακή κατανομή θεωρούμε.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το κλασσικό διακριτικό μοντέλο κινδύνου, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση.

4.5 Το Σύνθετο Διωνυμικό Μοντέλο

Θεωρούμε την zero-truncated (περικομμένη) γεωμετρική κατανομή, έστω $k(x)=(1-\phi)\phi^{x-1}, x\in\aleph_+$ με δεξιά ουρά συνάρτησης $\overline{K}(x)=\phi^x$ και $E\{W_2\}=\dfrac{1}{1-\phi}$.

Επιπλέον $k_1(x)=k(x), x\in\aleph^+$ και $m_e(u)=m(u)=m_*(u)$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1 αποδεικνύουμε ότι είναι πιο πιθανό να αποκτήσουμε μία διακριτή αναλογική προεξοφλητική συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu σε κλασσικό μοντέλο κινδύνου.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:4.2</u>

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu $m_*(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση :

$$m_*(u)=q(u)\sum_{i=0}^{u}m_*(u-i)\,b_p(i+1)+u\sum_{i=u+1}^{\infty}\rho^{i-u-1}\,\tau(i),\ u\in\aleph$$

Όπου $\tau(i)=(1-\phi)\sum_{j=i+1}^{\infty} w(i,\, j-i) f(j),\ i\in\aleph$, με $\rho=\rho(u)$ να είναι η μοναδική θετική

ρίζα στο διάστημα $(u\phi, u]$ της $F(\rho)=\dfrac{\rho-u\phi}{u(1-\phi)}$.

Ορίζουμε σ.π.π $b_\rho(x)=\dfrac{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\ f(x+i)}{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\ \overline{F}(i)}$, $x\in\aleph^+$ και $q(u)=\left\{\begin{matrix}\dfrac{u-\rho}{1-\rho}, & u<1\\ \dfrac{1}{1+\vartheta}, & u=1\end{matrix}\right\}$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

Από την *(4.7)* έχουμε με $m_e(u)=m(u)=m_*(u)$

$$(u-z)\hat{m}_*(z)=u\left[1-\frac{1}{E\{W_2\}}\right]m_*(0)+u\tau(0)+u\frac{\hat{m}_*(z)-\hat{m}_*(z)\hat{f}(z)}{E\{W_2\}}-uT(z)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\left[z-u+u\frac{1-\hat{f}(z)}{E\{W_2\}}\right]\hat{m}_*(z)=uT(z)-u\left[1-\frac{1}{E\{W_2\}}\right]\hat{m}_*(0)-u\tau(0)\quad(4.10)$$

Εφόσον $E\{W_2\}=\dfrac{1}{1-\phi}$, ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της μπορεί να εκφραστεί ως

$$z-u+u\frac{1-\hat{f}(z)}{E\{W_2\}}=u\left[l(z)-\xi(z)\right]\text{όπου } l(z)=-\phi+\frac{z}{u}\ \text{ και }\ \xi(z)=(1-\phi)\hat{f}(z).$$

Υποθέτοντας ότι η μεταβλητή zείναι μεταξύ του 0 και της ακτίνας σύγκλισης του $\hat{f}(z)$ με $\xi'(z)\geq 0,\ \xi''(z)\geq 0$, $l'(z)>0$ και $l(u\phi)=0<\xi(u\phi)\ l(u)=1-\phi=\xi(1)\geq\xi(u)$
.
Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια μοναδική ρίζα, έστω $\rho\in(u\phi,u]$στην εξίσωση $l(\rho)=\xi(\rho)$ ή ισοδύναμα $z-u\phi-u(1-\phi)\hat{f}(z)=0$.
Οπότε από την *(4.10)* όπου $z=\rho$, προκύπτει το εξής:

$$u\phi m_*(0)+u\tau(0)=u\hat{t}(\rho)$$

Και η (4.10) γίνεται

$$\left[z-u\phi-u(1-\phi)\,\hat{f}(z)\right]\hat{m}_*(z)=u\,\hat{t}(z)-u\,\hat{t}(\rho)$$

Αφαιρώντας $\left[\rho-u\phi-u(1-\phi)\,\hat{f}(\rho)\right]\hat{m}_*(z)=0$ από τον πρώτο όρο του αριστερού μέλους της καταλήγουμε στο εξής:

$$\left\{z-\rho+u(1-\phi)\left[\hat{f}(\rho)-\hat{f}(z)\right]\right\}\hat{m}_*(z)=u\left[\hat{t}(z)-\hat{t}(\rho)\right]$$

ή πολλαπλασιάζοντας με τον όρο $\dfrac{z}{z-\rho}$

$$\left\{z-u(1-\phi)\frac{z\left[\hat{f}(\rho)-\hat{f}(z)\right]}{\rho-z}\right\}\hat{m}_*(z)=zu\frac{\hat{t}(z)-\hat{t}(\rho)}{z-\rho}$$

Για την αντιστροφή των γεννητριών συναρτήσεων, παρατηρούμε ότι η σ.π.π $b_\rho(x),\ x\in\aleph^+$ έχει γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας ην ακόλουθη:

$$\hat{b}_\rho(z)=\sum_{x=1}^{\infty}z^x\,b_\rho(x)=\frac{\sum_{x=1}^{\infty}z^x\sum_{i=x}^{\infty}\rho^{i-x}f(i)}{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\sum_{j=i+1}^{\infty}f(j)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i\,f(i)\sum_{x=1}^{i}\left(\frac{z}{\rho}\right)^x}{\sum_{j=1}^{\infty}f(j)\sum_{i=0}^{j-1}\rho^i}$$

$$=\frac{\frac{z}{\rho}\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i\,f(i)\left[1-\left(\frac{z}{\rho}\right)^i\Big/1-\frac{z}{\rho}\right]}{\sum_{j=1}^{\infty}f(j)\left[\frac{1-\rho^j}{1-\rho}\right]}=\frac{z\left[\hat{f}(\rho)-\hat{f}(\rho)\right]}{(\rho-z)\frac{1-\hat{f}(\rho)}{1-\rho}}=\frac{1-\rho}{1-\hat{f}(\rho)}\,\frac{z\left[\hat{f}(\rho)-\hat{f}(\rho)\right]}{\rho-z}$$

Επιπλέον αποκτούμε

$$z\,\hat{m}_*(z)-\frac{u(1-\phi)\left[1-\hat{f}(\rho)\right]}{1-\rho}\hat{b}_\rho(z)m_*(z)=zu\frac{\hat{t}(z)-\hat{t}(\rho)}{z-\rho}$$

Έπειτα από την σύγκριση των συντελεστών των z^{u+1} οδηγεί σε

$$m_*(u) = \frac{u(1-\phi)\left[1-\hat{f}(\rho)\right]}{1-\rho}\sum_{i=0}^{u} m_*(u-i)\, b_\rho(i+1) + u\sum_{i=u+1}^{\infty}\rho^{i-u-1}\,\tau(i)$$

Επιπλέον $u(1-\phi)\left[1-\hat{f}(\rho)\right] = u(1-\phi) - (\rho - u\phi) = u-\rho$ και

εάν $u<1$ έχουμε $\dfrac{u(1-\phi)\left[1-\hat{f}(\rho)\right]}{1-\rho} = \dfrac{u-\rho}{1-\rho}$.

Αντιστρόφως $\dfrac{u(1-\phi)\left[1-\hat{f}(\rho)\right]}{1-\rho} = \dfrac{u}{\rho}(1-\phi)E\{X_1\}\,\hat{f}_1(\rho) = \dfrac{u\,\hat{f}_1(\rho)}{\rho(1+\vartheta)}$

Εφόσον $1+\vartheta = \dfrac{E\{W_2\}}{E\{X_1\}} = \dfrac{1}{(1-\phi)E\{X_1\}}$.

Άρα, εάν $u \to 1^-$ τότε $\rho \to 1$ και $\dfrac{u(1-\phi)\left[1-\hat{f}(\rho)\right]}{1-\rho} \to \dfrac{1}{1+\vartheta}$.

Τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα. □

Εφόσον $\rho \in (u\phi, u]$ αποτελεί λύση της $l(u) = \xi(z)$, για $u<1$, η ανανεωτική εξίσωση που δόθηκε στο Θεώρημα 4.2 είναι ελλειμματική και θυμίζει το κλασσικό μοντέλο Poisson των Gerber και Shiu. (Βλ. Κεφ.1)

Μια από τις πιο σημαντικές περιπτώσεις είναι η σύνθετη διωνυμική αναλογία της κλασσικής διηνεκής πιθανότητας χρεοκοπίας της Poisson. Για να το αποκομίσουμε αυτό, θέτουμε όπου $\upsilon = 1$ οπότε $\rho = 1$ και $b_\rho(x) = f_1(x),\ x \in \aleph^+$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2, ισχύουν τα παρακάτω

$$\psi_*(u) = \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u}\psi_*(u-i)\, f_1(i+1) + \frac{1}{1+\vartheta}\overline{F_1}(u+1),\ \ u\in\aleph$$

Αυτή αποτελεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις και συμφωνεί με του Willmot (1993)

$$\hat{\psi}_*(z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^u\,\psi_*(u) = \frac{1}{1-z}\left\{1 - \frac{1-\dfrac{1}{1+\vartheta}}{1-\dfrac{\hat{f}_1(z)}{z(1+\vartheta)}}\right\}$$

Επιπλέον $\psi_*(u)$ αποτελεί διακριτή σύνθετη γεωμετρική ουρά με παράμετρο $\frac{1}{1+\vartheta}$ έχοντας σύνθετη κατανομή με σ.π.π. $h(x)= f_1(x+1)$ και συνάρτηση κατανομής $H(x)=1-\overline{H}(x),\ x\in\aleph$, δηλαδή

$$\psi_*(u)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^i \overline{H}^{*i}(u),\quad u\in\aleph$$

όπου $H^{*i}(x)=1-\overline{H}^{*i}(x)$ είναι η ν-οστή συνέλιξη της $H(x)$.

Ωστόσο η διηνεκής πιθανότητα χρεοκοπίας για $u=0$ είναι

$$\psi_*(0)=\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^i \left\{1-[f_1(1)]^i\right\}=\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left[\frac{1+\vartheta}{\vartheta}-\frac{1}{1-\frac{f_1(1)}{1+\vartheta}}\right]=1-\frac{\vartheta}{\phi(1+\vartheta)}$$

Εφόσον $f_1(1)=\frac{1}{E\{X_1\}}=\frac{1+\vartheta}{E\{V_2\}}=(1+\vartheta)(1-\phi)$, συμπίπτει με αυτή του Willmot (1993).Στο προεξοφλητικό μοντέλο μπορούμε να αντλήσουμε μια αναλογική κατάσταση σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.

Αφού $\beta_e(u)=\beta(u)$ η εξίσωση του Πορίσματος 4.1 γίνεται μια ελλειμματική ανανεωτική καταλήγοντας σε αυτήν του Πορίσματος 4.2, δηλαδή

$$\begin{aligned}F_*(x,y\,|\,u)&=\frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u}F_*(x,y\,|\,u-i)\,f_1(i+1)\\&+\frac{I(u<x)}{1+\vartheta}\left[\overline{F}_1(u+1)-\overline{F}_1(x+1)-\overline{F}_1(u+y+1)+\overline{F}_1(x+y+1)\right],\quad x,y\in\aleph^+,\ u\in\aleph\end{aligned}$$

Επιπλέον, όταν $\upsilon=1, \rho=1$ και $b_\rho(x)= f_1(x),\ x\in\aleph^+$, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.2 σχετίζεται με αυτό του Πορίσματος 4.1.

Τέλος επισημαίνουμε ότι η ποσότητα $U(T-1)+|U_T|$ είναι η ζημιά που εμφανίζεται λόγω χρεοκοπίας. Οπότε θεωρούμε

$$G_*(s\,|\,u)=E\{I(U(T_*-1)+|U_{T*}|\le s)I(T_*<\infty)\,|\,U_0=u\}$$

την ελλειμματική σωρευτική συνάρτηση κατανομής ζημιάς δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία σε ένα σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ανανεωτική εξίσωση της $G_*(s \mid u)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ:4.3

Η ποσότητα ζημιάς δεδομένου της χρεοκοπίας έχει ελλειμματική σωρευτική συνάρτηση κατανομής

$$G_*(s \mid u) = \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} G_*(s \mid u-i)\, f_1(i+1) + \\ + \frac{1}{1+\vartheta}\left[\overline{F}_1(u+1) - \overline{F}_1(s+1) + (u-s)\, f_1(s+1)\right], \quad u \in \aleph,\ s \geq u+2 \quad (4.11)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Όταν $w(x,y) = I(x+y \leq s),\ G_*(s \mid u) = \mu_*(u)\,|_{\upsilon=1}$. Επίσης εάν $\upsilon = 1$ τότε $\rho = 1$ το οποίο μας οδηγεί στο $b_\rho(x) = f_1(x),\ x \in \aleph^+$. Από το Θεώρημα 4.1 προκύπτει

$$G_*(s \mid u) = \frac{1}{1+\vartheta}\sum_{i=0}^{u} G_*(s \mid u-i)\, f_1(i+1) + (1-\phi)\sum_{i=u+1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} w(i, j-i)\, f(j)$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο

$$\begin{aligned}
(1-\phi)\sum_{i=u+1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} w(i, j-i) f(j) &= (1-\phi)\sum_{j=u+2}^{\infty} f(j) \sum_{i=u+1}^{j-1} w(i, j-i) \\
&= (1-\phi)\sum_{j=u+1}^{\infty} f(j+1)\sum_{i=u+1}^{j} I(j+1 \leq s) \\
&= (1-\phi)\sum_{j=u+1}^{s-1} (j-u)\, f(j+1) \\
&= (1-\phi)\sum_{j=u+1}^{s} (j-u-1)\, f(j) \\
&= (1-\phi)\left\{\sum_{j=u+1}^{s} j\, f(j) - (u+1)\left[\overline{F}(u) - \overline{F}(s)\right]\right\} \\
&= (1-\phi)\left\{(u+1)\overline{F}(u) - s\overline{F}(s) + \sum_{j=u+1}^{s-1}\overline{F}(j) - (u+1)\left[\overline{F}(u) - \overline{F}(s)\right]\right\} \\
&= (1-\phi)\left[\sum_{j=u+1}^{s}\overline{F}(j) + (u-s)\overline{F}(s)\right] \\
&= \frac{1}{1+\vartheta}\left[\overline{F}_1(u+1) - \overline{F}_1(s+1) + (u-s)\, f_1(s+1)\right], \quad s \in \aleph^+ \setminus \{1\},\ u+2 \leq s
\end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Πορίσματος 4.3 για $u = 0$, θα μας δώσει την ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς δεδομένου της χρεοκοπίας $S = X + Y$ στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο και με αρχικό πλεόνασμα 0, έχουμε

$$g_*(s\,|\,0) = \frac{1-\phi}{\phi}(s-1)\,f(s),\ s \in \aleph^+ \setminus \{1\}$$

Βιβλιογραφικες Αναφορες .

❖ ***Ελληνική:***

1. Γαλανάκης Χ. (2012)*Η συσχέτιση του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία. Δ.Ε.* ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

2. Γιαννακόπουλος Α (2003) *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική.Τόμος Ι:Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση.*

3. Δερμιτζάκης, Β. (2011)*Μελέτη Ανανεωτικών Εξισώσεων με Εφαρμογές στη Θεωρία Χρεοκοπίας*. Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

4. Δουραμάνης Δ. (2016)*Χρονική Αξία της Χρεοκοπίας με Χρεωστικό Επιτόκιο*. Δ.Ε ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

5. Κανελλόπουλος Λ.*Μελέτη μέτρων χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος με δύο χαρτοφυλάκια κινδύνων*. Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

6. Κουτσόπουλος Κ. (1999),*Αναλογιστικά Μαθηματικά,* Εκδόσεις Συμμετρία.

7. Κυνηγός Α.(2015) στοχαστικες ανελιξεις levy στη θεωρια χρεοκοπιας: μελετη της συναρτησης των gerber – shiu. . Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

8. Λυμπερόπουλος, Δ.(2006)*Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*. Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς

9. Ματζιώρος Π. (2012)*Ο αρθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.* Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς

10. Μαχαιράς Ν. (2013), *Στοχαστικές Διαδικασίες Στα Χρηματοοικονομικά Και Στον Αναλογισμό*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

11. Μετζάκη Α.(2015)*Ιδιότητες της από κοινού κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τουελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.*. Δ.Ε ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

12. Παπαϊωάννου, Α.*Μελέτη μη ανανεωτικών στοχαστικών μοντέλων στη θεωρία κινδύνου.* Δ.Ε ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

13. Σεμσίρης Α.*Ανάλυση μέτρων χρεοκοπίας και προεξοφλημένων καταβαλλόμενων μερισμάτων για το γενικό Μαρκοβιανό μοντέλο κινδύνου με πολλαπλά μερίσματα.* Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
14. Σκούρας Π.Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας με Εξαρτήσεις μεταξύ μεγεθών και χρόνων εμφάνισης των ζημιών.

15. Φλουρής Κ.(2010)*Η κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία.* Δ.Ε. ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς

16. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2015),*Θεωρία κινδύνων Ι*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

- ***Ξένη:***

17. Asmussen, S. (1998). *A probabilistic look at the Wiener – Hopf equation*. SIAM Review 40, 189-201.

18. Asmussen, S. (2003). *Applied probability and queues (2nd ed.)*. New York: Spinger.

19. Babolian, E. Shamloo, A., (2008) *Numerical solution of Volterra and integrodifferential equations of convolution functions*. Journal of Comptutational and Applied Mathematics 214 (2), 495-508.

20. Bertoin, J. (1999a). *Subordinators: examples and applications.* In Lecture on Probability Theory and Statistics, ed. P. Bernard Springer, New York.

21. Biffis, E. & Kyprianou, A. E. (2010). *A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes.* Insurance: Mathematics and Economics 46, 85-91

22. Biffis, E. & Morales, M. (2010). *On a generalization of the Gerber – Shiu function to path – dependent penalties*.

23. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, j. c , jones d. a., and nesbitt, c. j. (1987). *ActuarialMathematics.*Society of Actuaries, Itasca, Illinois, U.S.A.

24. Cheng, S., Gerber, H. U. & Shiu, E. S. W. (2000). *Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model*. Insurance: Mathematics and Economics 26, 239-250.

25. Cheng, Y., Tang, Q., 2003. *Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process*. North American Actuarial Journal 7 (1), 1–12.

26. Delbaen, F. And Haezendonck, J. (1985) *Inversed martingales in risk theory*. Insurance Mathematics and Economics 4, 201-206

27. Delbaen, F. (1990) "*A remark on the moments of ruin time in classical risk theory."* Insurance: Mathematics and Economics, 9, 121-126

28. *Dickson, D.C.M. (1994) "Some comments on the compound binomial model*." ASTIN Bulletin, 24, 33-45.

29. Dickson, D.C.M. & Hipp, C. (2001). *On the time to ruin for Erlang (2) risk processes*. Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-344

30. Dufresne, F. (1988). *Distributions stationnaires d'un systeme bonus-malus et probability de ruine* . ASTIN Bulletin 18, 31-46

31. Dufresne, F & Gerber, H. (1988). *The surpluses immediately before and at ruin, and theamount of the claim causing ruin.*Forthcoming in Insurance: Mathematics and Economics.

32. Dufresne, F. & Gerber, H (1991). *Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion*. Insurance: Math. Econ. 10, 51-59.

33. Dufresne, F & Gerber, H. (1993). *The probability of ruin for the inverse Gaussian and related processes.* Insurance: Math. Econ, 12, 9-22.

34. Dufrense, F. & Gerber, H. & Shiu, E. (1991). *Risk theory with the gamma process*. Astin Bull. 21, 177-192.

35. Eg´ıdio dos Reis, A.D. (2000) " *On the moments of ruin and recovery times*." Insurance: Mathematics and Economics, 27, 331-343.

36. Feller, W. (1966).*An Introduction to Probability*Theory and its Applications, Volume 2., Wiley, New York

37. Furrer, H (1998). *Risk processes perturbed by a-stable*

38. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. (1997) "*The join distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin and the deficit at ruin*." Insurance: Mathematics and Economics, 21, 129-137

39. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. (1998) "*On the time value of ruin*." North American Actuarial Journal, 2, 48-78.

40. Gerber, H (1988). *Mathematical Fun with Risk Theory.* Insurance: Mathematics andEconomics 7, 15—23

41. Gerber, H.U., 1988. *Mathematical fun with the compound binomial process*. ASTIN Bulletin 18, 161–168

42. Gerber, H. & Shiu, E. (1998). *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin.* Insurance Mathematics & Economics 21, 129-137.

43. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1998. *On the time value of ruin*. North American Actuarial Journal 2 (1), 48–78.

44. Hans U, Gerber *Mathematical Fun with the Compound Binomial Process* Ecole des H.E.C., Universite de Lausanne, 1015 Lausanne, Switzerland

45. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 2003b. *Discussion on "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process*" by Yebin Cheng and Qihe Tang. North American Actuarial Journal 7 (4), 96–101

46. Landriault, D. & Willmot, G. (2008). *On the Gerber-Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution*. Insurance: Mathematics and Economics 42, 600-608

47. Li, S., Garrido, J., 2002. *On the time value of ruin in the discrete time risk model.* Business Economics Series 12, Working paper 02-18, 28 pp.

48. Li, S., 2003. *Discussion on "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process*" by Yebin Cheng and Qihe Tang. North American Actuarial Journal 7 (3), 119–122

49. Li, S. & Garrido, J. (2005). *On a general class of renewal risk process*: Analysis of the Gerber-Shiu function. Advances in Applied Probability 37, 836-856

50. Li, S. & Garrido (2005a). *On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber – Shiu function*. Advances in Applied Probability 37, 836-856.

51. Li, S. (2005a). *On a class of discrete time renewal risk models*. Scandinavian Actuarial Journal 4, 241-260.

52. Li, S. & Garrido (2005b). *The Gerber – Shiu function in a Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion.* Scandinavian Actuarial Journal 2005, 161-186.

53. Li, S. (2005b). *Distributions of the surplus before ruin, the deficit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time risk models*. Scandinavian Actuarial Journal 4, 271-284.

54. Malinovskii, V. (1998). *Non-Poissonian claims' arrivals and calculation of the probability of ruin.* Insurance: Mathematics and Economics 22, 123-138

55. Panjer, H., Willmot, G.E. (1992) *Insurance risk models*. Society of Actuaries, Schaumburg, IL

56. Pavlova, K. & Willmot, G. E. (2004). *The discrete stationary renewal risk model and the Gerber-Shiu discounted penalty function*. Insurance: Mathematics and Economics 2, 267-277.

57. Song, M. et al (2010). *The Gerber – Shiu discounted penalty function in the risk process with phase-type interclaim times.* Applied Mathematics and Computation. 215, 523-531.

58. Shiu, E. S. W. (1988).*Calculation of the probability of eventual ruin by Beekman's convolutionseries. Insurance*: Mathematics and Economics 7, 41-47.

59. Shiu, E.S.W. (1989) "*The probability of eventual ruin in the compound binomial model.*" ASTIN Bulletin, 19, 179-190.

60. Wang, R. & Liu, H. (2002). *On the ruin probability under a class of risk processes.* ASTIN Bulletin 32, 81-90.

61. Willmot, G.E. (1993) "*Ruin probabilities in the compound binomial model*." Insurance: Mathematics and Economics, 12, 133-142

62. Willmot, G.E., Cai, J. (2001) " *Aging and other distributional properties of discrete compound geometric distributions*." Insurance: Mathematics and Economics, 28, 361-379

63. Willmot, G. E. (2007*). On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times*. Insurance: Mathematics and Economics 41, 17-31.