ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Βέλτιστη αντασφάλιση και θεωρία χρεοκοπίας.

Μαρία Ι. Παπαδοπούλου

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων του για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς

Μάιος 2017

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS

AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Optimal reinsurance and ruin theory.

Maria I. Papadopoulou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece

May 2017

Στους γονείς και τον αδερφό μου,

Ιωάννη, Παναγιώτα και Νικήτα

Ευχαριστίες

Σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, υπήρξαν πολλά αγαπημένα πρόσωπα, που βοήθησαν και στήριξαν, κυρίως ψυχολογικά, την προσπάθεια αυτή και σε αυτό το σημείο θα ήθελα να τα ευχαριστήσω. Αρχικά, ευχαριστώ τους γονείς και τον αδερφό μου, που για ακόμα μια φορά στάθηκαν δίπλα μου και μου έδωσαν την αγάπη τους. Επίσης, ευχαριστώ τους φίλους μου, που με την υπομονή τους και την θετικότητά τους, με βοήθησαν να ανταπεξέλθω σε όλες τις δυσκολίες.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά, τον Αναπληρωτή Καθηγητή, κύριο Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, με τον οποίο είχα μια άψογη συνεργασία και με βοήθησε να ολοκληρώσω την συγκεκριμένη εργασία, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κυρία Βερροπούλου Γεωργία και τον Καθηγητή κύριο Νεκτάριο Μιλτιάδη.

Περίληψη

Η θεωρία των κινδύνων μελετά όλες τις πτυχές ενός χαρτοφυλακίου ασφάλισης ζημιών. Σε αυτή την ευρεία περιοχή, η θεωρία της χρεοκοπίας επικεντρώνεται στη μακροχρόνια χρεοκοπία μιας ασφαλιστικής εταιρείας με τέτοιου είδους χαρτοφυλάκιο. Ένα άλλο μέρος της θεωρίας των κινδύνων, ασχολείται με τη διαδικασία αντασφάλισης, κατά την οποία μια ασφαλιστική εταιρεία μεταβιβάζει μέρος ή το σύνολο του κινδύνου σε μία άλλη ασφαλιστική εταιρεία, η οποία ονομάζεται αντασφαλίστρια εταιρεία. Η θεωρία της αντασφάλισης και της χρεοκοπίας είναι μέρη της θεωρίας των κινδύνων, τα οποία συνδέονται στενά.

Η θεωρία της χρεοκοπίας έχει μελετηθεί πάνω από έναν αιώνα. Στις αρχές του 20ου αιώνα, οι Σουηδοί αναλογιστές Lundberg και Cramer δημιούργησαν τα θεμελιώδη στοιχεία του κλασικού μοντέλου κινδύνου σε συνεχή χρόνο. Αυτό το μοντέλο επεκτάθηκε ευρέως κατά την διάρκεια του περασμένου αιώνα. Ο Andersen βελτίωσε εις βάθος το μοντέλο των Cramer – Lundberg, το 1957, όπου θεωρούσε ότι η διαδικασία άφιξης των απαιτήσεων εκφράζεται μέσω μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Πρόσφατα, οι Gerber & Shiu (1998) επανεξέτασαν τη θεωρία της χρεοκοπίας με την αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτησης ποινής. Η λεγόμενη συνάρτηση Gerber - Shiu επιτρέπει την ανάλυση μέτρων χρεοκοπίας, όπως είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, η συμπεριφορά του πλεονάσματος σε χρεοκοπία και άλλα.

Στην παρούσα εργασία, επομένως, θα αναλυθεί το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου και η έννοια της αντασφάλισης, ενώ στην συνέχεια στα κεφάλαια 3 και 4 θα πραγματοποιηθεί μία ενδελεχής μελέτη για τον συντελεστή προσαρμογής R με αντασφάλιση. Κατόπιν, στο 5ο κεφάλαιο γίνεται λόγος για την συνάρτηση Gerber – Shiu με αναλογική αντασφάλιση.

Abstract

Risk theory studies all aspects of a loss insurance portfolio. In this wide area, the ruin theory focuses on the long-term ruin of an insurance company with a loss insurance portfolio. Another part of risk theory deals with the reinsurance process, in which an insurance company transfers a part or all risk to another insurance company, which is called Reinsurance Company. Reinsurance theory and ruin theory are parts of the risk theory and are closely connected.

Ruin theory has been studies for over a century. At the beginning of the 20th century, Swedish actuarialists Lundberg and Cramer created the fundamental elements of the classical model of risk of continuing time. This model has been widely expanded during the past century. Andersen greatly improved the Cramer-Lundberg model in 1957, when he considered as a renewal process the process of the arriving demands. Recently, Gerber & Shiu, at 1998, reviewed the ruin theory with the expected discounted penalty function. The Gerber-Shiu function allows the analysis of ruin measures, such as: the ruin probability, the surplus's behavior in ruin cases and others.

In the present study, therefore, the classic model of risk theory and the reinsurance will be analyzed. Moreover, in chapters 3 and 4, there will be a further study of the R coefficient of adjustment with reinsurance. Then, in Chapter 5 there will be a reference in the Gerber - Shiu function with analog reinsurance.

Πίνακας περιεχομένων

Περιεχόμενα Γραφημάτων

Επεξήγηση συμβόλων

$\ast$: τελεστής συνέλιξης μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων

$I(\cdot)$: δείκτρια συνάρτηση του συνόλου $\cdot$

$\frac{\partial}{\partial u}$: τελεστής μερικής παραγώγισης ως προς u

$\mathbb{R}$: σύνολο πραγματικών αριθμών

$a \wedge b$: min{a,b}

$(a)_+$: max{0, a}

τ. μ.: τυχαία/ες μεταβλητή/ες

$1^{ο}$ Κεφάλαιο: «Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου »

1.1 Εισαγωγή

Για να επιτύχει ένας ασφαλιστικός οργανισμός να λειτουργεί μέσα σε υγιή πλαίσια, καλείται να διατηρεί επαρκή αποθεματικά, με σκοπό να μπορεί να ανταπεξέρχεται στις υποχρεώσεις του, αναλαμβάνοντας επαγγελματικά και ασφαλιστικά ρίσκα. Τα αποθεματικά για μια ασφαλιστική εταιρεία αποκαλούνται ως πλεόνασμα και προκύπτουν από την διαφορά του ενεργητικού (απαιτήσεις) και του παθητικού (υποχρεώσεις) της.

Ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα τα αποθεματικά να μην επαρκούν για να καλυφθεί το σύνολο των αποζημιώσεων, συνθέτει το μεγαλύτερο πρόβλημα στην θεωρία κινδύνου.

Με τον όρο «κίνδυνος», γίνεται αναφορά σε κάθε απρόβλεπτο και τυχαίο γεγονός, το οποίο μπορεί να επιφέρει τέτοιες συνέπειες στην ασφαλιστική επιχείρηση, που να υπάρξει αβεβαιότητα ακόμη και για την επιβίωσή της.

Η θεωρία συλλογικών κινδύνων πρωτοεμφανίστηκε στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα, χάρη στην διδακτορική διατριβή του Σουηδού Filip Lundberg, το 1903. Στη συνέχεια, το 1930, ο Harald Cramer, με γνώμονα το έργο του Lundberg, πρόσθεσε στη θεωρία του κινδύνου, τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, δημιουργώντας, έτσι, το «Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου» ή «Μοντέλο Cramer – Lundberg». Κυρίαρχο γνώρισμα του, είναι ότι το πλήθος των ζημιών ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων, αναλύεται με την βοήθεια της κατανομής Poisson, πάνω στην οποία είναι βασισμένο το μεγαλύτερο τμήμα της σύγχρονης παγκόσμιας βιβλιογραφίας, αναφορικά με τη θεωρία κινδύνου, αλλά και τη θεωρία χρεοκοπίας.

Ο όρος «χρεοκοπία», δεν χρησιμοποιείται κυριολεκτικά, αλλά ως τεχνικός όρος, ώστε να χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο για την φερεγγυότητα ενός χαρτοφυλακίου. Στην περίπτωση που ένα χαρτοφυλάκιο χρεοκοπήσει, δεν θα πάψει και η λειτουργία του, απλά η εταιρεία θα πρέπει να βρει μεθόδους κάλυψης των ζημιών, όπως για παράδειγμα μέσω αντασφάλισης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, επίσης, συναντάται και σε μετέπειτα μελέτες του ίδιου μοντέλου, μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, για την οποία μίλησαν για πρώτη φορά, το 1998, οι Gerber – Shiu.

Συγκεκριμένα, κύριες τυχαίες μεταβλητές εξέτασης του μοντέλου αυτού, για καθορισμένο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο και μελλοντικό χρονικό διάστημα, αποτελούν οι εξής

- Το ***πλήθος των αποζημιώσεων***, που θα πρέπει να καταβληθούν και το οποίο αποτελεί μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη – αρνητικές ακέραιες τιμές.
- Το ***μέγεθος***, δηλαδή το ***ύψος της ζημιάς***, που θα υποστεί η κάθε μία από αυτές τις μελλοντικές αποζημιώσεις και το οποίο συνθέτει μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με μη – αρνητικές τιμές.

Στα πρώτα στάδια, η θεωρητική και εφαρμοσμένη έρευνα της θεωρίας κινδύνου υπέθετε ότι το σύνολο των μελλοντικών αποζημιώσεων, το οποίο θα καταβληθεί στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, πραγματοποιείται βάσει μιας στοχαστικής ανέλιξης Poisson, με όλα τα τυποποιημένα θεωρητικά γνωρίσματά της, όπως είναι για παράδειγμα

- ***Η ιδιότητα της έλλειψης μνήμης.***
- ***Η ιδιότητα των ομογενών προσαυξήσεων.***
- ***Η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.***

Συνεπώς, θεωρούσαν ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι που παρατίθεντο μεταξύ των διαδοχικών πληρωμών των αποζημιώσεων, ήταν συνεχείς και μη – αρνητικές τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούσαν την εκθετική κατανομή, με παράμετρο, την ένταση της απαριθμήτριας στοχαστικής κατανομής Poisson.

Έχει διαπιστωθεί, όμως, ότι η υπόθεση αυτή της κατανομής Poisson δεν χαρακτηρίζεται από ρεαλιστικότητα, με αποτέλεσμα το σύνολο των αποζημιώσεων να μην περιγράφεται ικανοποιητικά από το κλασικό μοντέλο, με συνέπεια να αναδύεται μία νέα ανανεωτική κατανομή, περισσότερο ρεαλιστική.

Ωστόσο, το πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση έγκειται στο ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι δεν είναι εκθετικά κατανεμημένοι, αλλά ακολουθούν μία άλλη, συνεχή και μη – αρνητική κατανομή, όπως είναι για παράδειγμα οι ακόλουθες

- ***Κατανομή Weibull***
- ***Κατανομή Pareto***
- ***Λογαριθμοκανονική Κατανομή***
- ***Κατανομή Γάμμα***

Σε αυτές, επομένως, γίνεται χρήση των λεγόμενων «ανανεωτικών μοντέλων» της θεωρίας κινδύνου, που έχουν να κάνουν με την διακριτή κατανομή του πλήθους των μελλοντικών αποζημιώσεων, ενώ συνθέτουν μία ευρεία επέκταση της στοχαστικής κατανομής Poisson, αλλά και των αντίστοιχων κλασικών μοντέλων.

Σε αυτά τα ανανεωτικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου, οι δύο κύριες τυχαίες μεταβλητές, είναι οι εξής

- Ο ***χρόνος χρεοκοπίας***, ο οποίος συμβολίζεται με T και αποτελεί μία συνεχή και μη – αρνητική τυχαία μεταβλητή.
- Ο ***αριθμός των αποζημιώσεων***, ο οποίος θα καταβληθεί στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, έως ότου πραγματοποιηθεί η χρεοκοπία. Συμβολίζεται με N, ενώ αποτελεί μία διακριτή, μη – αρνητική και ακέραιη τυχαία μεταβλητή, η οποία, μάλιστα, έχει ως σύνολο τιμών της τους φυσικούς αριθμούς.

Στη συνέχεια, παρατίθενται ορισμένες από τις βασικότερες έννοιες της θεωρίας κινδύνου.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων (Counting process)

Για να μπορέσει να επιτευχθεί η μοντελοποίηση του πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας, θα πρέπει να καθοριστεί πρώτα ο αριθμός των κινδύνων, με τους οποίους έρχεται αντιμέτωπη και καλείται να αντιμετωπίσει.

Ορισμός 1: *Ορίζεται* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *μία στοχαστική διαδικασία, η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα* $[0,t]$ *και ονομάζεται απαριθμητήρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων*, για την οποία ισχύουν τα εξής

- $N(t) > 0$, με $N(0) = 0$
- $N(t)$ είναι διακριτή
- Αν $s \leq t$, τότε $N(s) \leq N(t)$.

Η οικογένεια ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών αποτελεί μία από τις γενικές κατηγορίες των στοχαστικών διαδικασιών και για τον ορισμό της, χρησιμοποιούνται ως βάση οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων της $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Έστω $\{W(i)\}_{i=1}^{\infty}$, μία ακολουθία μη – αρνητικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με συνάρτηση κατανομής $F_w(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_w(t)$ μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_w(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t)dt$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$ όπου W_i ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης του i ενδεχομένου.

1.3 Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων (Stochastic process of aggregate claims)

Υποχρέωση κάθε ασφαλιστικής εταιρείας είναι η καταβολή των αποζημιώσεων στους πελάτες της, δηλαδή στους ασφαλισμένους, σε περίπτωση που υποστούν ζημία, η οποία οφείλεται στο ασφαλιστήριο συμβόλαιό τους. Συνεπώς, κρίνεται απαραίτητη η μοντελοποίηση του ύψους των συνολικών της αποζημιώσεων, με απώτερο σκοπό να καταφέρει να παρατηρεί και να προβλέπει την εξέλιξή τους.

Το σύνολο των αποζημιώσεων καθορίζεται από τα ακόλουθα

- Το ***πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων***, που προκύπτουν σε κάποιο καθορισμένο χρονικό διάστημα.
- Το ***μέγεθος των ζημιών***, που προκύπτουν.

Επιπλέον, η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, οι οποίες καταβάλλονται ως το χρόνο t, συμβολίζεται με $S(t)$. Ακολούθως, με $\{W_n, n \geq 1\}$ ορίζεται μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, η οποία παρουσιάζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων, ενώ με T_n ορίζεται ο χρόνος εμφάνισης του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου.

Επομένως, ισχύει

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i .$$

Αντίστοιχα, η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων, ενός διαστήματος $[0,t]$ ορίζεται ως $N(t) = sup\{n : T_n < t\}$.

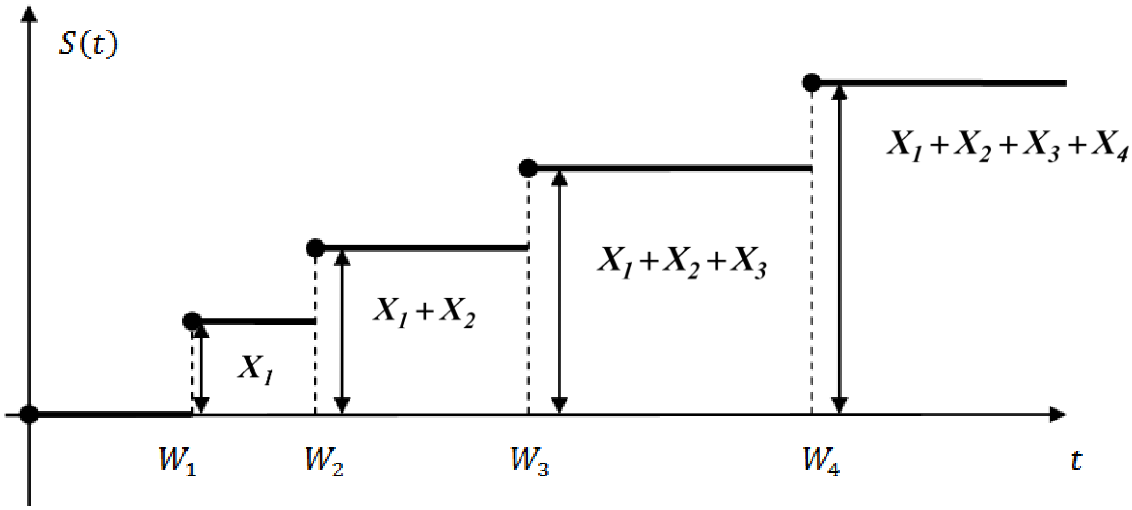
Ορισμός 2: *Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων, που καταβάλλονται έως το χρόνο* t, *προσδιορίζεται από τη στοχαστική διαδικασία*

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} \quad ή \quad S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i , & N(t) > 0 \\ 0 , & N(t) = 0 \end{cases} ,$$

όπου $X_{i}{}_{i \geq 1}^{\infty}$ *μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, που εκφράζει το μέγεθος της i-οστής ζημίας, που προκαλείται από την επέλευση του n-οστού ζημιογόνου* *ενδεχομένου. Θεωρείται ότι $\{W_n, n \geq 1\}$ και $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες, οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.*

Τέλος, στο ακόλουθο Γράφημα 1 , παρατηρείται ότι οι συνολικές αποζημιώσεις $S(t)$ παρουσιάζονται μηδενικές μέχρι το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο. Κατόπιν, σημειώνονται άλματα ύψους, ανάλογα του μεγέθους της ατομικής ζημίας, ενώ η γραφική απεικόνιση διατηρείται σταθερή, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν κίνδυνοι.

Γράφημα 1: «Η στοχαστική διαδικασία αποζημιώσεων S(t)»



Πηγή: Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα

1.4 Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος (Surplus process)

Το κυρίαρχο αντικείμενο της μελέτης της θεωρίας κινδύνου και χρεοκοπίας, αποτελεί η έρευνα της στοχαστικής διαδικασίας των συνολικών εσόδων και των συνολικών εξόδων, δηλαδή των ασφαλίστρων και των αποζημιώσεων αντίστοιχα, της ασφαλιστικής επιχείρησης, κατά το πέρασμα του χρόνου, στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο των κινδύνων.

Αναφορικά με τα συνολικά έσοδα στο κλασικό μοντέλο, πραγματοποιούνται οι ακόλουθες υποθέσεις και παραδοχές

- ***Τα ασφάλιστρα παραμένουν σταθερά στην μονάδα του χρόνου, ενώ είναι ίσα με ένα συγκεκριμένο και προκαθορισμένο ποσό*** c .

- ***Το σύνολο του ποσού των ασφαλίστρων, που θα έχει συγκεντρωθεί, μέχρι μία καθορισμένη μελλοντική στιγμή t, αποτελεί την γραμμική συνάρτηση αυτής της μελλοντικής στιγμής t και παίρνει την μορφή $u+ct$***, όπου u είναι το αρχικό απόθεμα, που δεσμεύει η ασφαλιστική επιχείρηση, δηλαδή είναι το λεγόμενο «απόθεμα ασφαλείας», κατά την έναρξη του χρόνου, που αρχίζουν να καταβάλλονται τα ασφάλιστρα και οι αποζημιώσεις.

Επομένως, σύμφωνα με τις ανωτέρω παραδοχές, ο ορισμός του πλεονάσματος $U(t)$ της ασφαλιστικής επιχείρησης, σε κάποια καθορισμένη μελλοντική στιγμή t, είναι η διαφορά των συνολικών εσόδων $P(t)$ που θα εισπραχθούν από τα συνολικά ασφάλιστρα, μείον τα συνολικά έξοδα $S(t)$ των αποζημιώσεων, μέχρι το χρόνο t.

Με άλλα λόγια

$$U(t) = u + P(t) - S(t),\ t \geq 0,$$

όπου $U(0) = u$, είναι το αρχικό απόθεμα κατά την έναρξη του χρόνου.

Στηριζόμενοι σε όλα αυτά, συνεπώς, για τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών εσόδων $\{P(t),\ t \geq 0\}$, θα ισχύει το εξής

$$P(t) = ct,\ t \geq 0.$$

Εκτός αυτού, η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων $\{S(t),\ t \geq 0\}$ που θα καταβληθούν, έως την μελλοντική στιγμή t, θα πραγματοποιείται μέσα από μια σύνθετη τυχαία μεταβλητή, μια κατανομή, δηλαδή, τυχαίου αθροίσματος, ως εξής

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ \text{αν}\ \{N(t) \geq 1\},$$

$$S(t) = 0,\ \text{αν}\ \{N(t) = 0\},$$

$$\text{και}\ S(0) = 0,\ \text{αν}\ t = 0,$$

όπου

- $N(t)$, για σταθερό $t > 0$, είναι η διακριτή, θετική και ακέραιη τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει το σύνολο των αποζημιώσεων, που θα έχουν καταβληθεί, μέχρι και τη μελλοντική χρονική στιγμή t.

- X_i, αποτελεί τη μη – αρνητική τυχαία μεταβλητή, η οποία είναι είτε διακριτή είτε συνεχής και δείχνει το οικονομικό μέγεθος της κάθε αποζημίωσης, που πληρώνεται. Επιπλέον, τα μεγέθη αυτά, συνθέτουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, χωρίς να επηρεάζονται από το συνολικό πλήθος των $N(t)$.

Ωστόσο, για σταθερό $t > 0$, η σύνθετη κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων S(t), όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων X_i ακολουθούν μία συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας, θα είναι μία κατανομή μικτού τύπου.

Πιο αναλυτικά, η σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S(t)$

- *Θα διαθέτει μία μάζα πιθανότητας στο σημείο* 0, αν $N(t) = 0$, δηλαδή στην περίπτωση που δεν απαιτηθεί η αποζημίωση στο χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής επιχείρησης.
- *Θα χαρακτηρίζεται από συνέχεια, αυστηρώς στο θετικό διάστημα* $(0,1)$ *των συνεχών τιμών της*, αν ισχύει $N(t) = 1,2,3,\ldots$

Παρ' όλα αυτά, στην περίπτωση που τα ξεχωριστά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων, ακολουθούν κάποια διακριτή κατανομή πιθανότητας, τότε και η σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S(t)$ θα ακολουθεί διακριτού τύπου κατανομή.

Στηριζόμενοι, επομένως, σε όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, η στοχαστική διαδικασία $\{U(t),\ t \geq 0\}$ σε μελλοντική χρονική στιγμή t, προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t),\ t \geq 0,$$

όπου

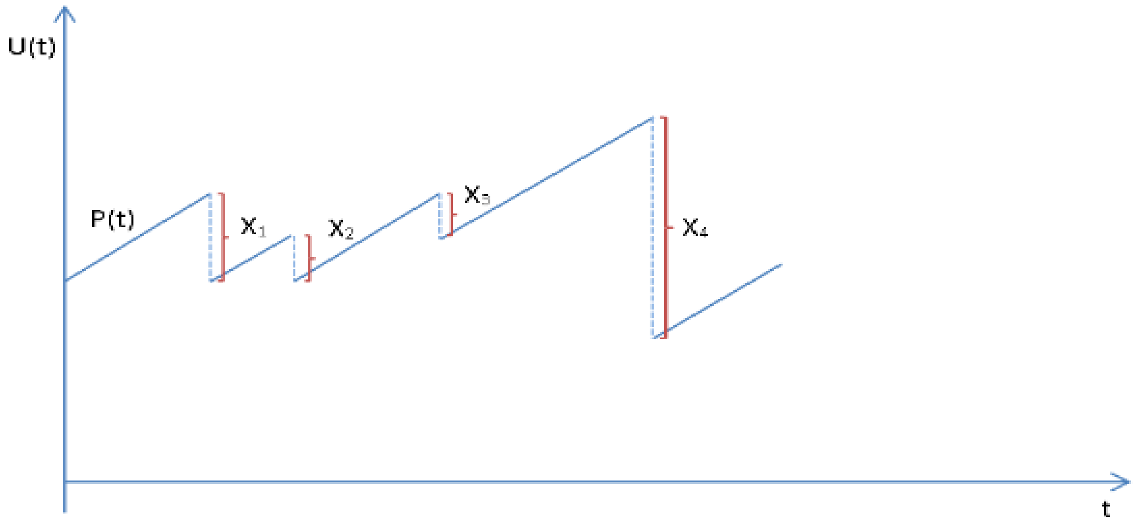
- $U(0) = u$, ***είναι το αρχικό αποθεματικό*** του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής επιχείρησης, κατά τον χρόνο $t = 0$. Με άλλα λόγια, για $t = 0,$ το αρχικό αποθεματικό είναι το πλεόνασμα της επιχείρησης.
- c **: είναι ο ρυθμός με τον οποίο εισπράττονται τα ασφάλιστρα**, ανά μονάδα χρόνου.

Έτσι, είναι φανερό ότι η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{U(t),\ t \geq 0\}$, εξαρτάται από τα ακόλουθα

- Την ***κατανομή*** $S(t)$ των συνολικών μελλοντικών αποζημιώσεων.
- Τις ***τιμές των σταθερών παραμέτρων*** u ***και*** c.

Τέλος, από το ακόλουθο Γράφημα 2 , διαφαίνεται ότι η συνάρτηση της $U(t)$ παρουσιάζει άλματα προς τα κάτω, στις στιγμές που διαδραματίζονται γεγονότα W_i που προκαλούν ζημίες. Αυτά, χαρακτηρίζονται από το ίδιο μέγεθος με τα αντίστοιχα της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$, ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $U(t)$ αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο έχει θετική κλίση c .

Γράφημα 2: «Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος U(t)»



Πηγή: Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα

1.5 Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας χρεοκοπίας και όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, συναντάται για πρώτη φορά το 1903, διατυπώθηκε από τον Σουηδό αναλογιστή Fillip Lundberg. Στη συνέχεια, υπέστησαν τροποποιήσεις οι υποθέσεις αναφορικά με την κατανομή, που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι, όπως και με την κατανομή, που ακολουθούν οι αποζημιώσεις, με αποτέλεσμα το μοντέλο αυτό να διευρυνθεί. Όπως και να έχει, η μελέτη της συνάρτησης της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι αυτή που προσελκύει το ενδιαφέρον.

Επιπλέον, μέσα από τα άρθρα των Gerber και Shiu, το 1998, οι οποίοι όρισαν για πρώτη φορά την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, δηλαδή μία γενίκευση στην ουσία, της συνάρτησης της πιθανότητας χρεοκοπίας, η θεωρία χρεοκοπίας ωθήθηκε σε μεγάλο βαθμό.

Στο κλασικό αυτό μοντέλο, όπως ήδη έχει αναφερθεί, η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, προσδιορίζεται για κάθε $t \geq 0$, από την ακόλουθη σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t)\ ,$$

όπου

- u : το αρχικό αποθεματικό.
- $P(t)$: μια πραγματική γραμμική συνάρτηση, η οποία καταγράφει το συνολικό ποσό των ασφαλίστρων, που έχουν εισπραχθεί στο $[0,t]$ και τα οποία αποτελούν τα μοναδικά έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας.
- $S(t)$: μια σύνθετη ανέλιξη Poisson, η οποία φανερώνει το σύνολο των αποζημιώσεων, που έχουν απαιτηθεί στο $[0,t]$ και τα οποία αποτελούν τα μοναδικά έξοδα της ασφαλιστικής εταιρείας.

Με βάση όλα τα παραπάνω, για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, ισχύουν τα παρακάτω

- $N(t) \sim P(\lambda t)$, δηλαδή, η $\left\{N(t) : t \geq 0\right\}$ είναι ανέλιξη Poisson με ένταση λ, όπου λ είναι ο αναμενόμενος αριθμός άφιξης των ζημιών στην μονάδα του χρόνου. Έτσι, η εμφάνιση μιας ζημιάς εξαρτάται από το μήκος του διαστήματος και $\left\{S(t) : t \geq 0\right\}$ είναι μια σύνθετη Poisson.
- Για τις τ. μ. $\sum_{i=1}^{n} X_i$, ισχύει ότι

  Συνάρτηση κατανομής: $F(x) = Pr(X \leq x) = \int_0^x f(y)dy$

  Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f(x) = Pr(X = x)$

  Συνάρτηση δεξιάς ουράς: $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(y)dy$

  Μέση τιμή: $\mu = E(x) = \int_0^\infty \overline{F}(x)\, dx = \int_0^\infty x\ f(x)\, dx$

  Κατανομή ισορροπίας

  Συνάρτηση κατανομής: $H(y) = 1 - \overline{F}_e(y) = \dfrac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(y)\, dy$

  Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $h(y) = \dfrac{1}{\mu}\overline{F}(y)$.

1.5.1 Η συνθήκη του καθαρού κέρδους

Όπως είναι φυσικό, αν μια ασφαλιστική εταιρεία επιθυμεί να διατηρεί ένα βιώσιμο χαρτοφυλάκιο, καλείται τα έσοδα της να είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα της, στην μονάδα του χρόνου.

Με άλλα λόγια, θα πρέπει να ισχύει το εξής

$$
\begin{aligned}
& ct > E\left[S(t)\right] \Leftrightarrow \\
& ct > E(X)E\left[N(t)\right] \Leftrightarrow \\
& ct > E(X)\lambda t \Leftrightarrow \\
& c > \lambda\mu_1 \quad ,
\end{aligned}
$$

όπου

- c : τα συνολικά έσοδα στην μονάδα του χρόνου.
- λ : η ένταση της ανέλιξης Poisson.
- μ_1 : η μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων.

Σε περίπτωση που η συνθήκη αυτή του καθαρού κέρδους δεν βρίσκεται σε ισχύ, η χρεοκοπία χαρακτηρίζεται ως αναπόφευκτη.

1.5.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο

Η σχέση με την οποία περιγράφεται η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο, είναι η ακόλουθη

$$\psi(u) = \Pr ob[U(t) < 0 \text{, για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u].$$

Στην ουσία, είναι η πιθανότητα η ανέλιξη του πλεονάσματος να λάβει αρνητική τιμή σε κάποια χρονική στιγμή, αν είναι γνωστό ότι το αρχικό απόθεμα είναι u. Επίσης, η $\psi(u)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του u, για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0.$$

Επιπλέον, ο όρος χρεοκοπία δεν χρησιμοποιείται με την αυστηρή σημασία, που παίρνει στην καθημερινή ζωή, αλλά είναι περισσότερο τεχνικός, καθώς με αυτόν ερευνάται η φερεγγυότητα ενός χαρτοφυλακίου.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως ορίστηκε παραπάνω, αναφέρεται σε άπειρο χρόνο, δηλαδή στην περίπτωση, που το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο δραστηριοποιείται κάτω από τις ίδιες συνθήκες, για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην ουσία, όμως, αυτό δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί, καθώς ο ασφαλιστής επιθυμεί να γνωρίζει κάθε στιγμή την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Για το λόγο αυτό, θα χρησιμοποιηθεί ο ανωτέρω ορισμός, που θα ισχύει σε όλα τα στοχαστικά μοντέλα.

1.5.3 Το περιθώριο ασφαλείας (Premium loading factor)

Το περιθώριο ασφαλείας ή ο συντελεστής ασφαλείας η, όπως αλλιώς καλείται, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, δίνεται από την ακόλουθη σχέση, η οποία προκύπτει από την συνθήκη του καθαρού κέρδους

$$c = (1+\eta)\lambda\mu_1 \Leftrightarrow$$

$$\eta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1.$$

Πιο αναλυτικά, όσο μεγαλύτερες τιμές παίρνει το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο, τόσο πιο μικρή είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας του. Θα μπορούσε κανείς να πει, ότι ο συντελεστής αυτός δείχνει σε τι βαθμό τα έσοδα της επιχείρησης υπερβαίνουν τα έξοδα της, κατά μέσο όρο σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Ο συντελεστής ασφαλείας η, επομένως, παρουσιάζει το ποσοστό κέρδους ενός χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής επιχείρησης.

Έτσι, οι τιμές τις οποίες λαμβάνει, κυμαίνονται στις περισσότερες περιπτώσεις μεταξύ 0 και 1, χωρίς, όμως, αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι εφικτό να ξεπεράσει την τιμή 1. Κάτι τέτοιο συμβαίνει, σε περίπτωση μη ανταγωνιστικού χαρτοφυλακίου ή ειδικών συνθηκών, όπως είναι για παράδειγμα η έλλειψη ανταγωνισμού σε συγκεκριμένο τομέα στην ασφαλιστική αγορά. Ενώ, στην περίπτωση που λάβει την τιμή 0, η χρεοκοπία είναι βέβαιη.

1.5.4 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο

Η σχέση με την οποία περιγράφεται η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο, είναι η ακόλουθη

$$\psi(u,t) = \Pr ob[U(t) < 0,\ \text{για κάποιο}\ 0 < t \le \tau].$$

Πιο αναλυτικά, η $\psi(u,t)$ συναρτήσει του t είναι αύξουσα, ενώ, συναρτήσει του u, φθίνουσα. Με άλλα λόγια, ισχύει

$$u_1 \le u_2 \to \psi(u_1,t) \ge \psi(u_2,t)$$

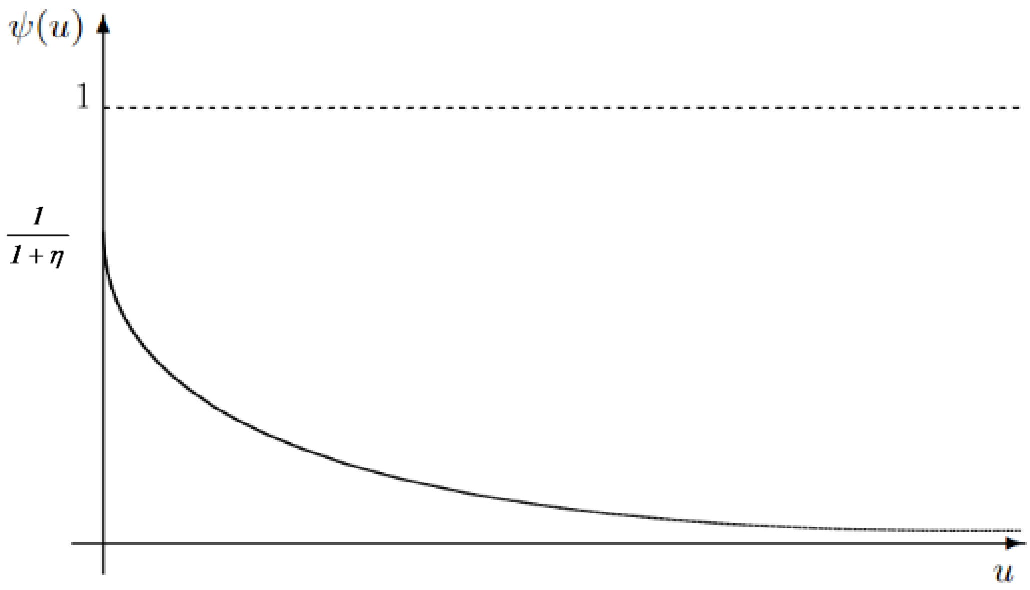
και

$$t_1 \leq t_2 \rightarrow \psi(u,t_1) \leq \psi(u,t_2).$$

Τέλος, είναι φανερό πως για κάθε $u \geq 0$, ισχύει: $\lim_{t \to \infty} \psi(u,t) = \psi(u)$.

Διαγραμματικά, η συνάρτηση πιθανότητας χρεοκοπίας παρουσιάζεται στο Γράφημα 3 που ακολουθεί και έχει την εξής μορφή

Γράφημα 3: «Συνάρτηση πιθανότητας χρεοκοπίας»



Πηγή: Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα

1.5.5 Η πιθανότητα μη – χρεοκοπίας

Ως πιθανότητα μη χρεοκοπίας χρησιμοποιείται η ακόλουθη σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

Η συνάρτηση αυτή $\delta(u)$ είναι αύξουσα ως προς u, ενώ ισχύει $\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$. Επιπλέον, δεν είναι ούτε διακριτή, αλλά ούτε και συνεχής, παρά είναι μία μικτή κατανομή, καθώς $\delta(0) > 0$ και παρουσιάζει πυκνότητα στο $(0, +\infty)$.

Στο κλασικό αυτό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, η συνάρτηση δ(u) ικανοποιεί την εξής ολοκληρο διαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\, f(x)\, dx$$

ή

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)[1-F(x)]\, dx\,,\ u \geq 0.$$

Τέλος, η λύση της παραπάνω εξίσωσης για $u = 0$, είναι η ακόλουθη

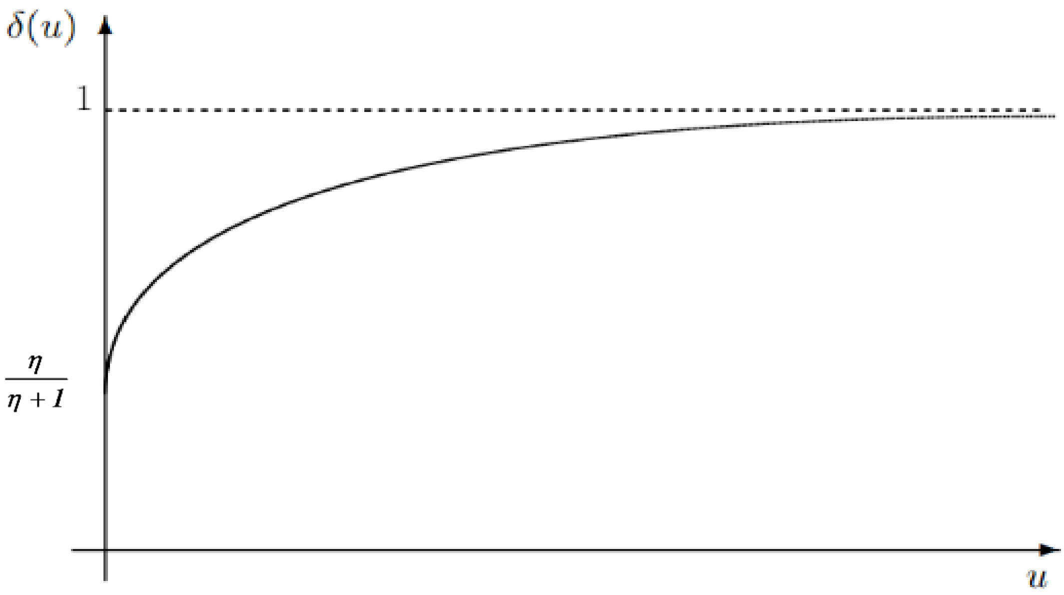
$$\delta(0) = \frac{\eta}{1+\eta}.$$

Και έτσι, κατ' επέκταση:

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\eta}.$$

Διαγραμματικά, έχει την εξής μορφή

Γράφημα 4: «Συνάρτηση πιθανότητας μη χρεοκοπίας»



Πηγή: Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα

1.5.6 Τα κλιμακωτά ύψη

Τα κλιμακωτά ύψη αποτελούν μία ακολουθία, αποτελούμενη από τυχαίες μεταβλητές, όπως είναι για παράδειγμα

$$\{L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k\}$$

στην οποία

- L_1: δείχνει την πτώση του πλεονάσματος, κάτω του αρχικού αποθέματος u και $L_1 = 0$ στην περίπτωση που δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από u.
- L_2: παρουσιάζει την πτώση του πλεονάσματος, κάτω του $u_1 = u - L_1$.
- L_3: παρουσιάζει την πτώση του πλεονάσματος, κάτω του $u_2 = u - L_2$.

$$\vdots$$

- L_k: απεικονίζει την πτώση του πλεονάσματος, κάτω του $u_k = u - L_{k-1}$.

Κάποιες απαραίτητες επισημάνσεις, είναι οι ακόλουθες

- Η παραπάνω ακολουθία χαρακτηρίζεται ως πεπερασμένη, μόνο στην περίπτωση μηδενικών τιμών, από ένα σημείο και μετά, με άλλα λόγια, όταν ισχύει $L_j = 0$ για $j = i, i+1, \ldots$
- Το ενδεχόμενο πτώσης του πλεονάσματος από u_i σε u_{i+1}, ισούται με $\psi(0)$ και είναι ανεξάρτητο του u_i.
- Δεν είναι εφικτή η ύπαρξη απείρου στο πλήθος L_j διότι από την συνθήκη του καθαρού κέρδους, το πλεόνασμα από ένα χρονικό σημείο και έπειτα, αρχίζει να αυξάνεται, με συνέπεια να μην δύναται η ανέλιξη του πλεονάσματος να σημειώνει άπειρο αριθμό ελαχίστων.

Τέλος, μία ιδιαίτερα σπουδαία ποσότητα είναι η κατανομή ισορροπίας, η οποία στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου έχει συνάρτηση, για την τυχαία μεταβλητή L_1, την ακόλουθη

$$H(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x [1 - F(t)]\, dt.$$

1.5.7 Η μέγιστη συσσωρευτική απώλεια (Maximal aggregate loss)

Γίνεται η υπόθεση ότι οι τυχαίες μεταβλητές L_i προσδιορίζουν την έκταση της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u και έχουν την ονομασία κλιμακωτά ύψη.

Έστω τώρα, ότι K είναι το σύνολο των κλιμακωτών υψών στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, το οποίο κινείται σύμφωνα με την γεωμετρική κατανομή. Με άλλα λόγια, αν η εμφάνιση ενός L_i θεωρείται "αποτυχία", δηλαδή αν σημειωθεί πτώση κάτω του αρχικού αποθεματικού, τότε η μεταβλητή K υπολογίζει τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι να πραγματοποιηθεί η πρώτη επιτυχία και η συνάρτηση πιθανότητας αυτής της κατανομής, ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$Prob(K=k)=\psi(0)^k\delta(0)=\left[\frac{1}{1+\eta}\right]^k$$

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_k=\sum_{i=1}^{k}L_i$$

ή $$L=\max_{t\geq 0}\left\{S(t)-ct\right\}=\max\left\{u-U(t)\right\}.$$

Η τυχαία μεταβλητή L δείχνει το συνολικό μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ενώ η κατανομή της συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Πιο συγκεκριμένα, η κατανομή της χαρακτηρίζεται ως μικτή, για δύο λόγους

- ✓ ***Είναι δυνατόν να λάβει την τιμή 0, με θετική πιθανότητα.***
- ✓ ***Η πυκνότητά της βρίσκεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.***

$$\begin{cases} P(L=0)=P(K=0)=\delta(0),\ k=0 \\ P(L>u)=\psi(u) \\ P(L\leq u)=\delta(u). \end{cases}$$

Η τυχαία μεταβλητή L_i του κλασικού υποδείγματος, σε περίπτωση πτώσης του πλεονάσματος, ακολουθεί μία συνεχή κατανομή, η οποία έχει πυκνότητα $\frac{1}{\mu_1}\overline{F}(x).$

Επομένως, ισχύει

$$P(L_1\leq x)=\int_0^x\frac{1}{\mu_1}\overline{F}(t)dt.$$

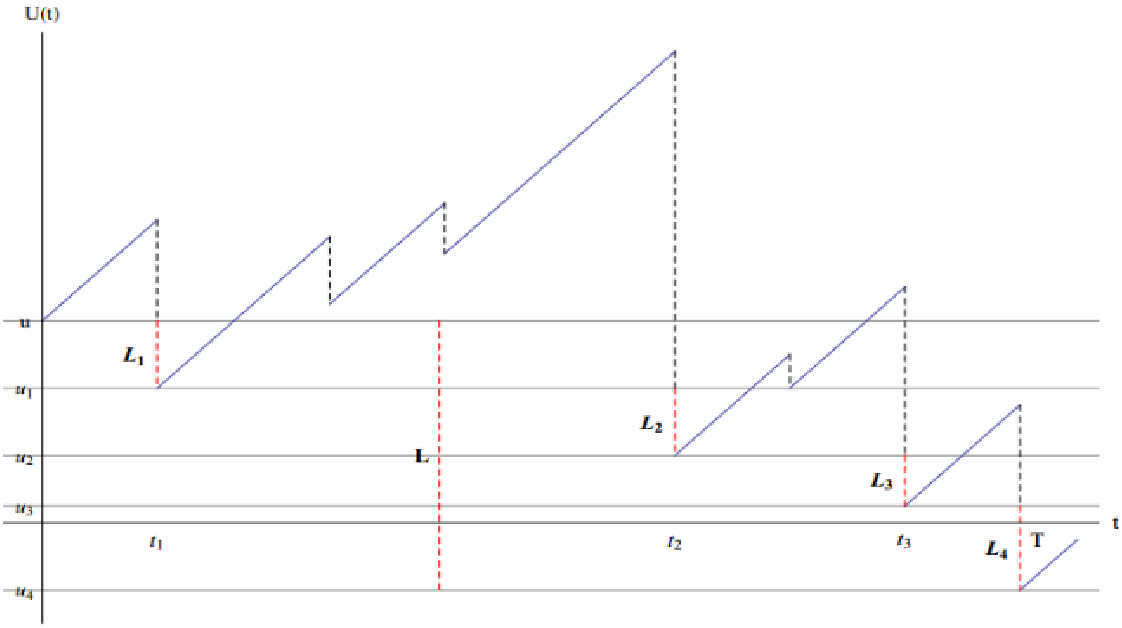
Έτσι, είναι φανερό ότι η κατανομή του κλιμακωτού ύψους L_i είναι ανεξάρτητη του αρχικού αποθέματος u.

Τέλος, στην περίπτωση που η $M_X(r)$ αποτελεί τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων, τότε θα ισχύει το ακόλουθο

$$M_{L_1}(r)=\frac{1}{\mu_1 r}(M_X(r)-1).$$

Στη συνέχεια, στο Γράφημα 5 , παρατίθεται η αναπαράσταση της ακολουθίας των κλιμακωτών υψών και παρουσιάζεται και η μέγιστη συσσωρευτική απώλεια, τα οποία έχουν ως εξής

Γράφημα 5: «Ακολουθία κλιμακωτών υψών»



Πηγή: Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα

1.5.8 Γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Για να πάρουμε την γενικευμένη εξίσωση Lundberg, θεωρούμε την αντίστοιχη εμφυτευμένη σε διακριτό χρόνο στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.

Έστω, $V_0=0$ και $V_\kappa=W_1+W_2+\cdots W_\kappa,\ \kappa\geq 1$, όπου V_κ είναι η χρονική στιγμή εμφάνισης της K απαίτησης.

Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος διακριτού χρόνου ως εξής

$$U^*(0)=u,\quad \gamma\iota\alpha\quad \kappa=0$$

Και $\quad U^{*}(\kappa) = u + cV_{\kappa} - \sum_{i=1}^{\kappa} X_i$

$$= u + c\sum_{i=1}^{\kappa} W_i - \sum_{i=1}^{\kappa} X_i$$

$$= u + \sum_{i=1}^{\kappa} (cW_i - X_i), \ \text{για} \ \kappa = 1,2,3 \ .$$

Άρα, $U^{*}(\kappa)$ είναι το πλεόνασμα μετά και την εμφάνιση της κ -απαίτησης.

Αναζητούμε, λοιπόν, έναν αριθμό s, τέτοιο ώστε η στοχαστική διαδικασία $\left\{ e^{-\delta V_{\kappa} + sU^{*}(\kappa)}, \ \kappa = 0,1,2,\ldots \right\}$ να είναι ένα martingale.

Εδώ, αξίζει να σημειωθεί ο ορισμός των martingale.

«Θεωρούμε τον πιθανοθεωρητικό χώρο $\left(\Omega, A, P \right)$ *και* $\left\{ F_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *μια αύξουσα ακολουθία υπό σ-αλγεβρών της* A*, δηλαδή* $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$*. Τότε, η* $\left\{ F_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *καλείται διύλιση. Μια ακολουθία τ. μ.* $\left\{ X_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *καλείται martingale ως προς την ακολουθία* $\left\{ F_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *αν και μόνο αν*

i. *Η* X_n *είναι* F_n*- μετρήσιμη, δηλαδή* $X_n \in F_n$.

ii. *Η* X_n *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή* $E\left[\left| X_n \right| \right] < \infty$.

iii. $E\left[X_{n+1} \middle| F_n \right] = X_n$.

Η ακολουθία $\left\{ X_n, F_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι martingale.»*

Έτσι, η διαδικασία $\left\{ e^{-\delta V_{\kappa} + sU^{*}(\kappa)}, \ \kappa = 0,1,2,\ldots \right\}$ είναι martingale, αν και μόνο αν ισχύει

$$E\left[e^{-\delta W}e^{s(cW-X)}\right]=1\Rightarrow$$

$$E\left[e^{(cs-\delta)W}e^{sX}\right]=1\Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{(cs-\delta)}e^{-sx}f_{x,w}(x,t)\,dx\,dt=1$$

Αν γνωρίζουμε την $f_{x,w}(x,t)$, την αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση και προκύπτει η γενικευμένη εξίσωση Lundberg.

1.5.9 Ο συντελεστής προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R αποτελεί ένα μέτρο κινδύνου σε μία ανέλιξη πλεονάσματος και εξάγεται ως η μοναδική θετική λύση της ακόλουθης εξίσωσης, όταν αυτή λυθεί ως προς r, η οποία προκύπτει αν στην σχέση (1.1) το $\delta=0$ και X,W είναι ανεξάρτητες

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{cst}e^{-sx}f_x(x)\,f_w(t)\,dx\,dt=1\Leftrightarrow$$

$$\left[\int_0^{\infty}e^{cst}f_w(t)\,dt\right]\left[\int_0^{\infty}e^{-sx}f_x(x)\,dx\right]\Leftrightarrow$$

$$M_w(cs)M_x(-s)=1\,.$$

Αν $s=-r$, τότε παίρνουμε για $r>0$

$$M_w(-cr)M_x(r)=1\,.$$

Για το κλασσικό μοντέλο, **W~Exp(λ),** οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{\lambda}{\lambda+cr}M_x(r)=1\Leftrightarrow$$

$$M_x(r)=\frac{\lambda+cr}{\lambda}=1+\frac{c}{\lambda}r\,,$$

όπου

$$c=(1+\eta)\,\lambda\,E(x)\,.$$

Οπότε,

$$M_X(r) = 1 + (1+\eta)\, E(X) r$$

όπου

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^{\infty} e^{rx}\, f(x)\, dx\ ,$$

αποτελεί τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων, για την οποία ισχύουν

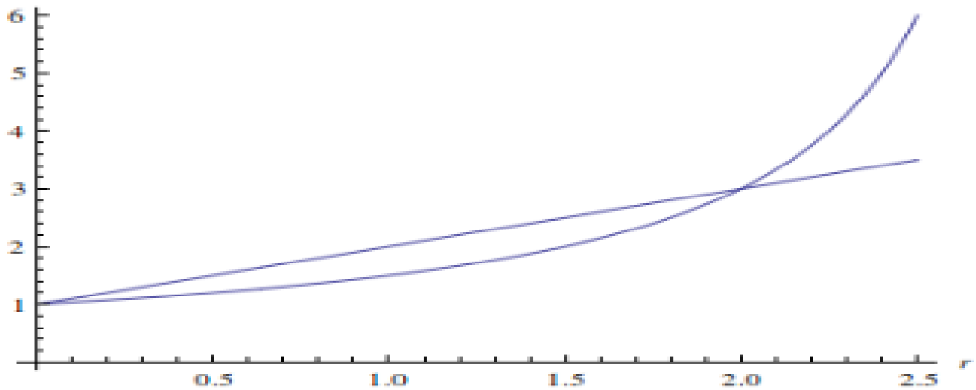
- $\lim_{r \to 0} M_X(r) = 1$
- $\lim_{r \to \infty} M_X(r) = \infty$.

Τέλος, επειδή η δεύτερη παράγωγος της $M_X(r)$ είναι θετική, η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή. Επίσης, η εξίσωση εύρεσης του συντελεστή προσαρμογής μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$M_X(r) = 1 + (1+\eta)\mu_1 r\,.$$

Όμως, το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι μία γραμμική συνάρτηση ως προς r. Έτσι, οι δύο αυτές συναρτήσεις, δεν γίνεται να διαθέτουν πάνω από μία θετική λύση, κάτι το οποίο φαίνεται στο Γράφημα 6 παρακάτω

Γράφημα 6: «Ο συντελεστής προσαρμογής»



Πηγή: Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση των αποζημιώσεων $M_X(r)$, απειρίζεται στις περιπτώσεις των κατανομών με βαριά ουρά, για κάθε $r > 0$, οπότε ο συντελεστής προσαρμογές σε αυτές τις περιπτώσεις δεν υφίσταται.

1.5.10 Εξίσωση Lundberg

Όπως επισημάνθηκε, έντονο ενδιαφέρον και σημασία στην θεωρία κινδύνου κατέχει ο συντελεστής προσαρμογής R, ο οποίος προκύπτει από την θετική λύση της ακόλουθης εξίσωσης ως προς r

$$\int_0^\infty e^{rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1 + \eta = \frac{1}{\psi(0)}.$$

Δύο είναι οι βασικοί λόγοι, για τους οποίους ο συντελεστής αυτός παίζει τόσο σημαντικό ρόλο

- Η ***ανισότητα του Lundberg***:

$$\psi(u) \le e^{-Ru}.$$

- Ο ***ασυμπτωτικός τύπος των Cramer – Lundberg***:

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}.$$

Η εξίσωση του Lundberg αποτελεί μία από τις σπουδαιότερες έννοιες στην θεωρία χρεοκοπίας και αυτό γιατί μέσω αυτής

- ***Υπολογίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας.***
- ***Εντοπίζονται προσεγγίσεις και φράγματα***, σχετικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας, σε συνάρτηση με το συντελεστή προσαρμογής και το αρχικό κεφάλαιο.

Επιπλέον, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι όσο αυξάνεται ο συντελεστής προσαρμογής R, τόσο μειώνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας, για το ίδιο αρχικό αποθεματικό u. Από την άλλη πλευρά, όσο αυξάνεται το αρχικό αποθεματικό, τόσο η πιθανότητα χρεοκοπίας για τον ίδιο συντελεστή προσαρμογής, παρουσιάζει μείωση.

Τέλος, η συνάρτηση με την οποία ορίζεται η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, είναι η ακόλουθη

$$cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0,$$

όπου:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy$$

αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(s)$.

Επιπλέον, η θεμελιώδης αυτή συνάρτηση του Lundberg αποδεικνύεται ότι έχει μία μόνο θετική ρίζα, η οποία συμβολίζεται με $\rho = \delta(\rho)$.

1.5.11 Ο χρόνος χρεοκοπίας

Ο χρόνος της χρεοκοπίας ορίζεται στο σημείο εκείνο, όπου το πλεόνασμα λαμβάνει για πρώτη φορά αρνητική τιμή. Ουσιαστικά, αποτελεί μία τυχαία ελλειμματική μεταβλητή, αφού είναι δυνατόν να πάρει την τιμή ∞.

Επιπλέον, όταν βρίσκεται σε ισχύ η συνθήκη του καθαρού κέρδους, η ασφαλιστική επιχείρηση μπορεί να μην χρεοκοπήσει ποτέ. Δηλαδή, η πιθανότητα αυτή παρουσιάζεται με την ακόλουθη σχέση

$$Pr\,ob(T = \infty) = Pr\,(U(t) > 0,\ \text{για κάθε}\ t > 0) = P(T = \infty \mid U(0) = u) = 1 - \psi(u) = \delta(u).$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα χρεοκοπίας, εκφράζεται ως εξής

$$Pr\,ob(T < \infty) = P(U(t) < 0 \mid U(0) = u) = P(T < \infty \mid U(0) = u) = \psi(u).$$

Τέλος, όπως μπορεί εύκολα να αντιληφθεί κανείς, η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας συνδέεται στενά με την τιμή του αρχικού αποθέματος u και ισχύει ότι

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$$

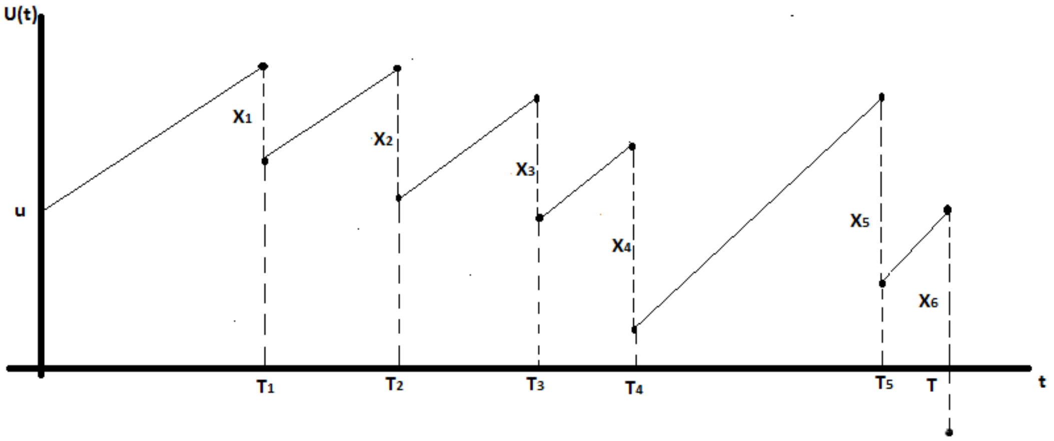
και $\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$.

Επομένως, ένας πιο ακριβής συμβολισμός για τον χρόνο αυτόν χρεοκοπίας, είναι ο ακόλουθος

$$T = \inf\{t : U(t) < 0 \mid U(0) = u\}.$$

Διαγραμματικά,

Γράφημα 7: «Ο χρόνος χρεοκοπίας»



1.5.12 Το έλλειμμα και το πλεόνασμα κατά την χρεοκοπία

Στην περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία, το εύλογο και σημαντικό ερώτημα που γεννάται είναι ποιο είναι το έλλειμμα και ποιο το πλεόνασμα κατά την στιγμή που αυτή πραγματοποιείται. Η απάντηση σε αυτό, δίνεται από το γεγονός ότι το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t δηλώνεται με $U(T)$ και εκφράζει το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου αμέσως πριν καταβάλλει την αποζημίωση που οδηγεί σε χρεοκοπία. Επομένως, το έλλειμμα θα είναι ίσο κατά απόλυτη τιμή με την τυχαία μεταβλητή $-U(T)$, η οποία υποδεικνύει την οξύτητα της χρεοκοπίας, δηλαδή το πόσο κάτω από το μηδέν έφτασε το πλεόνασμα την στιγμή της χρεοκοπίας. Το $U(T-)$ είναι πάντα θετικό και ορίζεται ως εξής

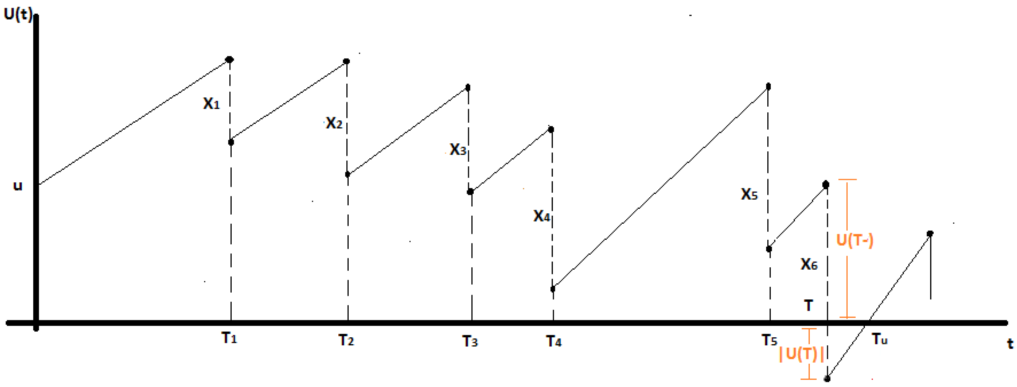
$$U(T-) = \lim_{t \to T-} U(t).$$

Όταν το αρχικό αποθεματικό u παίρνει την τιμή 0, τότε η κατανομή του ελλείμματος τη χρονική στιγμή, που ξεκινάει η χρεοκοπία, είναι η H. Με άλλα λόγια, ισχύει ότι

$$P\left[\, |U(t)| \leq x | T < \infty,\ U(0) = 0 \right] = H(u) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \overline{F}(y)\, dy.$$

Τα παραπάνω, απεικονίζονται στο Γράφημα 8.

Γράφημα 8: «Έλλειμμα και πλεόνασμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας»



1.5.13 Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber – Shiu (Expected discounted penalty function)

Κατά το έτος 1998, οι Gerber – Shiu στην εργασία τους «On the time of ruin» πέτυχαν την μοντελοποίηση των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών

- Του ***χρόνου χρεοκοπίας*** T , δηλαδή τη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα λαμβάνει για πρώτη φορά αρνητική τιμή.
- Του ***ελλείμματος*** $|U(T)|$, ακριβώς μετά την χρεοκοπία.
- Του ***πλεονάσματος*** $U(T-)$, πριν την χρεοκοπία.

σε μία μόνο συνάρτηση, που ονομάστηκε αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και χάρη στην οποία πραγματοποιήθηκε ταυτόχρονη έρευνα σε μέτρα κινδύνου, που μέχρι τότε είχαν μελετηθεί μόνο ξεχωριστά.

Η συνάρτηση αυτή, επομένως, για $u \geq 0$, $\delta \geq 0$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta T} w\{U(T-), |U(T)|\} I(T < \infty) | U(0) = u\},$$

όπου

- δ *είναι η ένταση ανατοκισμού.*
- $0 \leq w(x,y) < \infty$ είναι μία δισδιάστατη συνάρτηση στο R^2 ,η οποία καλείται συνάρτηση ποινής.
- $I(\cdot)$ *είναι η δείκτρια συνάρτηση, η οποία ενημερώνει για την πρόκληση της χρεοκοπίας.*

- $e^{-\delta T_u} w\{U(T_u-),|U(T_u)|\}$ *είναι η ποσότητα, η οποία δηλώνει την παρούσα αξία της συνάρτησης ποινής κατά τη χρονική στιγμή T, καθώς* $e^{-\delta T_u}$ *είναι η παρούσα αξία της μονάδας που καταβάλλεται την χρονική στιγμή T.*

Από τον ορισμό της $m_\delta(u)$, προκύπτουν πολλά και ενδιαφέροντα αποτελέσματα για μέτρα κινδύνου. Κάποια από αυτά είναι τα παρακάτω

- Για $\delta = 0$ *και* $w\{U(T-),|U(T)|\} = 1$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\left[I(T<\infty)|U(0)=u\right] = Prob\left[T<\infty|U(0)=u\right] = \psi(u).$$

- Για $\delta > 0$ *και* $w\{U(T-),|U(T)|\} = 1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T<\infty)|U(0)=u\right].$$

- Για $\delta > 0$ *και* $w\{U(T-),|U(T)|\} = I(U(T-)\le x_1)I(|U(T)|\le x_2)$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ. μ. $U(T-),|U(T)|$

$$m_\delta(u) = F_\delta\left[x_1,x_2\middle|u\right] = E\left\{e^{-\delta T} I(U(T-)\le x_1,|U(T)|\le x_2)I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right\}.$$

- Για $\delta > 0$ *και* $w\{U(T-),|U(T)|\} = I(U(T-)=x_1)I(|U(T)|=x_2)$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ. μ. $U(T-),|U(T)|$

$$m_\delta(u) = f_\delta\left[x_1,x_2\middle|u\right] = E\left\{e^{-\delta T} I(U(T-)=x_1,|U(T)|=x_2)I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right\}.$$

Έχοντας βρει τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι εύκολο να βρούμε τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής και συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$.

- Για $\delta > 0$ *και* $w\{x_1,x_2\} = I(x_1 \le U(T-))$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$

$$m_\delta(u) = H_\delta\left[x_1\middle|u\right].$$

- Για $\delta > 0 \ \kappa\alpha\iota \ w\{ x_1, x_2 \} = I(x_2 \leq |U(T)|)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος πριν τη χρεοκοπία $|U(T)|$

$$m_\delta(u) = Z_\delta\left[x_1 \middle| u \right].$$

- Για $\delta > 0 \ \kappa\alpha\iota \ w\{U(T-),|U(T)| \} = I(U(T-) = x_1)$, προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$

$$m_\delta(u) = h_\delta\left[x_1 \middle| u \right] = E\left\{ e^{-\delta T} I(U(T-) = x_1)\, I(T < \infty) \middle| U(0) = u \right\}.$$

- Για $\delta > 0 \ \kappa\alpha\iota \ w\{U(T-),|U(T)| \} = I(|U(T)| = x_2)$, προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$

$$m_\delta(u) = z_\delta\left[x_2 \middle| u \right] = E\left\{ e^{-\delta T} I(|U(T)| = x_2)\, I(T < \infty) \middle| U(0) = u \right\}.$$

Οι Gerber & Shiu το 1998 στην εργασία τους, απέδειξαν ότι η $m_\delta(u)$, ικανοποιεί μια ολοκληρο - διαφορική εξίσωση Voltera, η οποία φαίνεται παρακάτω

«Η συνάρτηση $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο - διαφορική εξίσωση

$$m'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u m(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c} z(u), \ u \geq 0$$

όπου $z(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, f(x) dx .$»

Για $\delta = 0 \ \kappa\alpha\iota \ w\{U(T-),|U(T)| \} = 1$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας, οπότε

«Η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\overline{F}(u), \ u \geq 0 \ ,$$

όπου: $\overline{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^\infty f(x) dx .$»

Η λύση της συγκεκριμένης ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με την χρήση των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

«Ανανεωτική εξίσωση ή εξίσωση ανανεωτικού τύπου, έχει την μορφή

$$\varphi(u)=\lambda\int_0^u \varphi(u-x)dG(x)+g(u),\ u\geq 0\ ,$$

όπου λ : σταθερά, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1]$

g : φραγμένη συνάρτηση

G : αθροιστική συνάρτηση κατανομής

φ : άγνωστη συνάρτηση.

« Η συνάρτηση $m_\delta(u)$ *για* $u\geq 0$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u m_\delta(u-x)g(x)dx+\frac{1}{1+\beta}H(u),u\geq 0$$

όπου $\beta=\dfrac{(1+\theta)E(X)}{\int_0^\infty e^{-py}\overline{F}(y)dy}$,

$\rho=\rho(\delta)$,

$$g(x)=G'(x)=\left[1-\frac{\overline{F}(x)-e^{px}\int_0^\infty e^{-py}f(y)dy}{p\int_0^\infty e^{-py}\overline{F}(y)dy}\right],$$

και $H(u)=\dfrac{e^{pu}\int_u^\infty e^{-px}\int_x^\infty w(x,y-x)f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-py}\overline{F}(y)dy}$ »

«Η λύση της παραπάνω ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση

$$m_\delta(u)=\frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(u)+\frac{1}{1+\beta}H(u)$$

$$\text{ή} \quad m_\delta(u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(u)-\frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u)+\frac{1}{\beta}H(u),$$

όπου

$K(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n G^{*n}(u),\ u\geq 0$ *με* G^{*n} την n-οστή συνέλιξη της $G(x)$.

και

$\overline{K}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n G^{*n}(u),\ u\geq 0$ *με* G^{*n} την n-οστή συνέλιξη της $\overline{G}(x)$.

2ο Κεφάλαιο: «Η έννοια και τα είδη της αντασφάλισης »

2.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Το πρώτο σύστημα αντασφάλισης, σε μια σαφώς απλούστερη μορφή από ότι τη γνωρίζουμε σήμερα, ήταν ήδη σε ισχύ από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων και των Ρωμαίων, καθώς υπήρχε μια σύμβαση δανείου για την μεταφορά εμπορευμάτων δια θαλάσσης, η οποία διασφάλιζε τις μεταφορές και ταυτόχρονα αποτελούσε επένδυση για τον εγγυητή του δανείου. Την εποχή εκείνη, όποιος επιθυμούσε να κάνει κάποια μεταφορά δια θαλάσσης, δανειζόταν χρήματα από τον χρηματοδότη (ο οποίος αργότερα ήταν ο ασφαλιστής) , τα οποία επέστρεφε με τόκο σε περίπτωση που το εμπόρευμά του έφτανε άθικτο στον προορισμό του.

Η πρώτη σύμβαση αντασφάλισης που έχει ανακαλυφθεί συνάφθηκε στην Γένοβα τον Ιούλιο του 1370 και αφορούσε μεταφορά εμπορευμάτων δια θαλάσσης από την Γένοβα στην Φλάνδρα. Σε αυτήν την σύμβαση, ο ασφαλιστής μεταβίβαζε το πιο επικίνδυνο τμήμα του ταξιδιού σε έναν άλλο ασφαλιστή.

Κατά τον 16^{ο} αιώνα, και πιο συγκεκριμένα στην Σεβίλλη το 1552, ξεκίνησαν να χρησιμοποιούνται τα πρώτα προτυπωμένα έντυπα ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Κατά τον 17^{ο} και 18^{ο} αιώνα, εισήχθησαν και οι έννοιες του τρόπου ανάκτησης, του ασφαλιζόμενου ποσού και της ημερομηνίας καταβολής των ασφαλίστρων.

Το 1850, δημιουργήθηκαν οι πρώτες αντασφαλίστριες εταιρείες , οι οποίες ήταν η Kölnische Rueck και η Aachener Rueck.

Σήμερα, υπάρχουν πολλές αντασφαλιστικές εταιρείες ανά τον κόσμο, με πιο γνωστές τις Swiss Re Ltd, Munich Reinsurance Company, Lloyd's, Hannover Rueckersicherung AG και Berkshire Hathaway Inc.

Η αντασφάλιση, είναι η αποδοχή ενός κινδύνου έναντι πληρωμής. Η αντασφάλιση ορίζεται ως μια συμφωνία (σύμβαση) μεταξύ ενός ασφαλιστή (αντασφαλιζόμενος ή εκχωρητής ή πρωτασφαλιστής) και ενός αντασφαλιστή. Η συμφωνία αυτή, πραγματοποιείται με την πληρωμή ενός αντασφαλίστρου από τον πρωτασφαλιστή ως εγγύηση στον αντασφαλιστή, ώστε να του εκχωρήσει μέρος του κινδύνου ή ολόκληρο τον κίνδυνο που έχει αναλάβει. Είναι, δηλαδή, η ασφάλιση των ασφαλιστικών εταιρειών, με την οποία επιτυγχάνουν τόσο να διασπάσουν και να επιμερίσουν τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, όσο και να εξομαλύνουν τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουν, ώστε να μην δείξουν υψηλά κέρδη ή ζημίες. Ο αντασφαλιστής είναι είτε μια εταιρεία που ασχολείται αποκλειστικά με αντασφαλιστικά προϊόντα, είτε μια ασφαλιστική εταιρεία. Η τελευταία ονομάζεται «assumed reinsurance».

2.2 Είδη αντασφάλισης

Τα είδη της αντασφάλισης είναι δυο. Η προαιρετική (Facultative) και η συμβατική (treaty) αντασφάλιση.

2.2.1 Προαιρετική αντασφάλιση

Σε αυτό το είδος αντασφάλισης, παρουσιάζεται με κάθε λεπτομέρεια ένας και μόνο κίνδυνος, σε έναν ή περισσότερους υποψήφιους αντασφαλιστές. Οι αντασφαλιστές με την σειρά τους, αναλύουν τα δεδομένα και έχουν την δυνατότητα να αναλάβουν ή να απορρίψουν την προσφορά.

Το συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης, είναι δυσλειτουργικό και καθόλου εύχρηστο, καθώς η διαδικασία σύναψης είναι χρονοβόρα και δαπανηρή. Επίσης, σε πολλές περιπτώσεις καθιστά τον πρωτασφαλιστή μη ανταγωνιστικό στην αγορά, διότι η εύρεση του αντασφαλιστή και η αποδοχή της προσφοράς είναι μια αρκετά χρονοβόρα διαδικασία, η οποία αναγκάζει και τον πρωτασφαλιστή να καθυστερεί να δεχτεί την δουλειά.

2.2.2 Αντασφαλιστική σύμβαση

Σε αυτό το είδος αντασφάλισης, ο αντασφαλιστής καλύπτει ένα προσυμφωνημένο ποσοστό των ασφαλιστικών συμβολαίων που εκδίδει ο πρωτασφαλιστής και ανήκουν είτε σε έναν συγκεκριμένο κλάδο, είτε σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή, είτε σε ένα ασφαλιζόμενο ποσό που δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο. Η συμβατική αντασφάλιση, είναι μια συμφωνία, η οποία δίνει το δικαίωμα στον πρωτασφαλιστή να ασφαλίσει έναν κίνδυνο και να τον αντασφαλίσει αυτόματα στους αντασφαλιστές, οι οποίοι υποχρεούνται να τον δεχθούν, αφού έχουν αποδεχθεί μέρος της σύμβασης.

2.2.2.1 Αναλογική αντασφάλιση (Proportional reinsurance)

Στο συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης, ο αντασφαλιστής αναλαμβάνει ένα ποσοστό επί του συνολικού ασφαλιστικού ποσού, το οποίο προκαθορίζεται και αφορά ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο. Στα ασφάλιστρα που εισπράττονται, αλλά και στις αποζημιώσεις που δίνονται, συμμετέχουν, ανάλογα κάθε φορά με το ποσοστό τους, τόσο ο εκχωρητής, όσο και ο αντασφαλιστής. Ο αντασφαλιστής εισπράττει αποζημίωση για τις υπηρεσίες που προσφέρει.

Ο βασικότερος λόγος που μια ασφαλιστική εταιρεία επιλέγει αυτόν τον τύπο αντασφάλισης, είναι για να μπορεί να αναλαμβάνει κινδύνους μεγαλύτερους από αυτούς που αναλαμβάνει συνήθως.

Η αναλογική αντασφάλιση, χωρίζεται σε δυο επιμέρους κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία ονομάζεται **απλή αναλογική αντασφάλιση** ή **αντασφάλιση κατ' αναλογία (Quota Share)**.

Αποτελεί την πιο απλή μορφή αντασφάλισης, καθώς ο πρωτασφαλιστής συνάπτει συμφωνία με τον αντασφαλιστή για το ποσοστό του κινδύνου που θα του εκχωρήσει. Οι περισσότερες συμβάσεις αυτής της μορφής, έχουν προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης στο τέλος της οικονομικής χρήσης κάθε έτους και όχι καθ' όλο το έτος κάλυψης όπου έχουν αποπληρωθεί όλες οι υποχρεώσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο αντασφαλιστής πληρώνει στον πρωτασφαλιστή εφάπαξ το ποσό που του αναλογεί για την κάλυψη των εκτιμώμενων ζημιών που εκκρεμούν. Επίσης, ο αντασφαλιστής επιστρέφει και τα ασφάλιστρα, τα οποία αφορούν την υπολειπόμενη περίοδο (μη δεδουλευμένα ασφάλιστρα). Η μεταφορά του κινδύνου από μια ασφαλιστική περίοδο σε μια άλλη, καλείται μεταφορά χαρτοφυλακίου.

Ο αντασφαλιστής, λαμβάνει το ποσοστό που του αναλογεί από τα από τα ασφάλιστρα που εισπράττονται, καθώς και ένα ποσό ως αμοιβή για τις υπηρεσίες του.

Η ιδία κράτηση καθορίζεται από ένα σταθερό ποσοστό για όλους τους κινδύνους.
Αν X είναι το ύψος της ζημιάς, τότε aX είναι το μέρος του κινδύνου, το οποίο καλύπτει ο πρωτασφαλιστής (ιδία κράτηση/retention πρωτασφαλιστή) και $(1-a)X$ είναι το μέρος του κινδύνου που καλύπτει ο αντασφαλιστής (εκχώρηση κινδύνου).
Προφανώς, ισχύει ότι

$$X = aX + (1-a)X, \text{για} \, 0 < a < 1$$

Ενώ, για:

- $a = 0$ **:** γίνεται πλήρης εκχώρηση του κινδύνου στον αντασφαλιστή
- $a = 1$ **:** δεν πραγματοποιείται αντασφάλιση του κινδύνου.

Το ποσοστό a καλείται και ρυθμός ιδίας κράτησης (retention rate). Για δοθέν $a \in (0,1)$ ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων θα συμβολίζεται με $C(a)$. Επειδή aX είναι ο κίνδυνος που καλύπτει ο πρωτασφαλιστής, τότε κατ' αναλογία του a, ο συντελεστής προσαρμογής για τον πρωτασφαλιστή $R(a)$ είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$E\{e^{r[X(a)-C(a)W]}\} = 1, \text{ ως προς } r$$

όπου συμβολίζεται με $X(a)$ η αποζημίωση που καταβάλλει ο πρωτασφαλιστής. Δηλαδή, $X(a) = aX$.

Με την συγκεκριμένη μορφή αντασφάλισης επιτυγχάνεται η διασπορά του κινδύνου και η επέκταση του χαρτοφυλακίου.

Το μειονέκτημα της απλής αναλογικής αντασφάλισης, είναι ότι ανεξαρτήτως μεγέθους κινδύνου και κατηγορίας κινδύνου, εφαρμόζεται η ίδια αναλογία, και μάλιστα υπάρχει μέγιστο ποσό ζημιάς, πάνω από το οποίο ο αντασφαλιστής δεν συμμετέχει στην ζημιά.
Μικρές ή νεοσύστατες εταιρείες χρησιμοποιούν κατά κύριο λόγο το συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης.

Η δεύτερη κατηγορία που ανήκει στην απλή αναλογική αντασφάλιση καλείται **αντασφάλιση υπερβάλλοντος κεφαλαίου (Surplus reinsurance)**.

Οι συμβάσεις σε αυτό το είδος αντασφάλισης είναι κατά βάση ίδιες με τις συμβάσεις απλής αναλογικής αντασφάλισης. Αυτό που αλλάζει είναι ότι ο πρωτασφαλιστής επιλέγει το ποσό που παρακρατά και καλείται όριο ιδίας κράτησης και το υπόλοιπο ποσό το εκχωρεί στον αντασφαλιστή. Το όριο ιδίας κράτησης ορίζεται ως μια γραμμή («line of cover») . Ο αντασφαλιστής από την πλευρά του , αποδέχεται την κάλυψη του ποσού αυτού και επιλέγει το μέγιστο ποσό που έχει δυνατότητα να καλύψει και είναι πολλαπλάσιο του ποσού ιδίας κράτησης. Στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ξεπεράσουν το όριο που έχει θέσει ο αντασφαλιστής, τότε ο πρωτασφαλιστής καλύπτει την υπέρβαση.

Πιο συγκεκριμένα, ο εκχωρητής παρακρατά προκαθορισμένο μέγιστο ποσό από κάθε κίνδυνο ξεχωριστά και το ποσό αυτό προσδιορίζει το ποσοστό ιδίας κράτησης. Για παράδειγμα, όταν το όριο ιδίας κράτησης είναι 50.000€ για κάθε κίνδυνο, τότε για ασφάλιση 100.000€ η εκχωρήτρια εταιρεία κρατά το 50%, ενώ για ασφάλιση 1.000.000€ κρατά το 5%.

Το ποσοστό που καλύπτεται από κάθε κίνδυνο, προκύπτει από την σχέση

$$X(a) = \frac{X^{line}}{X^{max}} X,$$

όπου X^{line} είναι το όριο κράτησης («line»)

και X^{max} είναι η μέγιστη τιμή της .

Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μορφής αντασφάλισης είναι ότι, ενώ στην απλή αναλογική αντασφάλιση το ποσό παρακράτησης ήταν a για όλους τους κινδύνους, στην συγκεκριμένη αντασφάλιση, το ποσό διατήρησης είναι $\frac{X^{line}}{X^{max}}$ και εξαρτάται από τη μέγιστη τιμή, η οποία είναι διαφορετική για κάθε κίνδυνο.

Οι εταιρείες που χρησιμοποιούν αυτή τη μορφή αντασφάλισης, επιτυγχάνουν διασπορά του κινδύνου, επέκταση του χαρτοφυλακίου τους, αλλά καταφέρνουν και να αναλαμβάνουν μεγαλύτερους κινδύνους, με αποτέλεσμα να δημιουργούν χαρτοφυλάκια με ποικιλία στους κινδύνους που επωμίζονται. Παρ’ όλα αυτά, τέτοιου είδους συμβάσεις είναι πολύπλοκες και πιο δαπανηρές από τις απλές αναλογικές συμβάσεις.

2.2.2.2 Μη αναλογική αντασφάλιση (Non - Proportional reinsurance)

Μέσω της αναλογικής αντασφάλισης, επιτυγχάνεται η διασπορά του κινδύνου και η επέκταση του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας. Παρ' όλα αυτά, δεν ενδείκνυται σε περιπτώσεις μεγάλων κινδύνων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιείται η μη αναλογική αντασφάλιση. Ο αντασφαλιστής καλύπτει ένα μέρος της αποζημιώσεων και μάλιστα μόνο όταν ξεπερνά ένα προκαθορισμένο ποσό. Η αμοιβή του αντασφαλιστή, πραγματοποιείται με τη μορφή ασφαλίστρων, τα οποία υπολογίζονται για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο που έχει αντασφαλιστεί, χωρίς να λαμβάνει προμήθειες από τα κέρδη, όπως στην αναλογική αντασφάλιση. Η μη αναλογική αντασφάλιση, αναλύεται στις παρακάτω τέσσερις κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία ονομάζεται **αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας (Excess of loss reinsurance)**.

Σε αυτό το είδος μη αναλογικής αντασφάλισης, ο αντασφαλιστής καλείται να αποζημιώσει την επιχείρηση, για πιθανές ζημίες που θα λάβουν χώρα στο αντασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο και το ποσό αυτό της αποζημίωσης θα υπερβαίνει κάποιο συγκεκριμένο συμφωνηθέν ύψος. Συγκεκριμένα, ο αντασφαλιστής έχει την δυνατότητα να καταβάλλει το σύνολο του υπερβάλλοντος ποσού ή μέχρι κάποιο συγκεκριμένο ανώτατο όριο. Στην δεύτερη περίπτωση, ο ασφαλιστής καλείται να αποκτήσει, μέσω αγοράς, ποικίλα επίπεδα κάλυψης από διαφορετικούς αντασφαλιστές, έτσι ώστε να είναι εξασφαλισμένος, σε περίπτωση που επέλθει μία ζημία.

Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό, παρατίθεται το εξής παράδειγμα:

Έστω ότι ο ασφαλιστικός οργανισμός ορίζει ότι το ποσό που μπορεί να επωμιστεί σε περίπτωση ζημίας είναι ***7000*** ευρώ. Βάσει αυτού, προχωράει στη σύναψη ασφαλιστικής συμφωνίας, στην οποία ο αντασφαλιστής πρόκειται να εξοφλήσει το ποσό των ζημιών, που ξεπερνάει τα ***7000*** ευρώ. Κατά αυτόν τον τρόπο, αν ο οργανισμός παρουσιάσει ζημίες ύψους ***8000*** ευρώ, ο ίδιος θα πληρώσει τα ***7000*** ευρώ και ο αντασφαλιστής θα καλύψει τα υπόλοιπα 1000 ευρώ. Ωστόσο, αν η ζημία ανέρχεται στο ποσό των ***6500*** ευρώ, τότε αυτή θα πρέπει να καλυφθεί εξ' ολοκλήρου από τον ασφαλιστικό οργανισμό, καθώς το ποσό αυτό είναι χαμηλότερο του συμφωνηθέν ποσού των ***7000*** ευρώ.

Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν τα παρακάτω:

- <u>Αποζημίωση πρωτασφαλιστή (ιδία κράτηση):</u>

$$Y = X \wedge L = min\{X, L\} = \begin{cases} X, & X \le L \\ L, & X > L \end{cases}$$

- <u>Αποζημίωση αντασφαλιστή (εκχώρηση):</u>

$$Z = (X - L)_+ = max\{0, X - L\} = \begin{cases} 0, & X \le L \\ X - L, & X > L \end{cases}$$

και $X = X \wedge L + (X - L)_+$,

όπου L είναι το όριο της ιδίας κράτησης (retention limit) του πρωτασφαλιστή.

Επιπλέον, με σκοπό να εξασφαλιστεί η αντασφαλίστρια από μία άνοδο του ποσού της ζημιάς, εξαιτίας του πληθωρισμού, επιδιώκει την συσχέτιση του υψηλότερου ποσού της ιδίας κράτησης του ασφαλιστικού οργανισμού με κάποιο δείκτη, ο οποίος τις περισσότερες φορές είναι ο πληθωρισμός. Με άλλα λόγια, αξιώνει το ποσό της ιδίας κράτησης να μεγεθύνεται ετησίως, σύμφωνα με έναν γενικά αναγνωρισμένο δείκτη. Σε αντίθετη περίπτωση, η αντασφαλίστρια αντιμετωπίζει τον κίνδυνο, το σύνολο του κόστους, εξαιτίας του πληθωρισμού, να αθροιστεί στις ζημιές, οι οποίες κοστίζουν ήδη πέραν της ιδίας κράτησης και μαζί με την πιθανότητα επιπλέον ζημιών, οι οποίες διαθέτουν και αυτές αυξημένο κόστος, εξαιτίας του πληθωρισμού, να αγγίξει το υψηλότερο ποσό κάλυψης, που καθορίζεται από την σύμβαση.

Με παρόμοιο τρόπο, επίσης, το υψηλότερο αυτό όριο κάλυψης είναι δυνατόν να σχετίζεται με τον αντίστοιχο δείκτη. Πολλές φορές, ο ασφαλιστικός οργανισμός υποχρεούται να καταβάλλει πρόσθετο ασφάλιστρο, σαν αποζημίωση στην αντασφαλίστρια για τον προστιθέμενο κίνδυνο, στην περίπτωση που το ποσό της ιδίας κράτησης δεν σχετίζεται με κάποιο δείκτη.

Στην περίπτωση όπου στην σύμβαση που συνάπτεται, καταγράφονται δείκτες, τότε σε μία πιθανή κατάσταση πρόκλησης κάποιου συμβάντος, μια συνήθης διαδικασία που εφαρμόζεται, ώστε να επιμεριστεί η ζημιά μεταξύ του ασφαλιστικού οργανισμού και της αντασφαλίστριας εταιρείας, είναι η ακόλουθη:

- ***Αποπληθωρίζεται το σύνολο των ποσών***, έτσι ώστε να φτάσουν πάλι στα αντίστοιχα επίπεδα, που είχαν κατά την σύναψη της σύμβασης.
- ***Μοιράζονται τα αποπληθωρισμένα ποσά***, ανάμεσα στον ασφαλιστικό οργανισμό και την αντασφαλίστρια επιχείρηση.
- ***Πραγματοποιείται αύξηση του πληθωρισμού στα ποσά που κατανεμήθηκαν***, επαναφέροντάς τα στην ημερομηνία της πληρωμής.

Τα **working covers** αποτελούν μια συγκεκριμένη και πολύ διαδεδομένη μορφή της αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας. Σε αυτά, ο πρωτασφαλιστής και ο αντασφαλιστής αποδέχονται τη χρησιμοποίηση της σύμβασης που συνάπτουν, με σχετική συχνότητα και κατ' επέκταση, αυτή δημιουργείται με απώτερο στόχο την αντασφαλιστική κάλυψη των κινδύνων, που αντιμετωπίζει ο ασφαλιστικός οργανισμός.

Έτσι, το ποσό της προτεραιότητας του εκχωρηθέντος ασφαλιστικού οργανισμού ορίζεται σε χαμηλό ύψος, ώστε να είναι δυνατόν να το υπερβούν με ευκολία πολλές ζημίες. Αυτό έχει ως συνέπεια, ο αντασφαλιστής να εκτίθεται σε ενδεχόμενες ζημίες, που αφορούν έναν μεμονωμένο κίνδυνο ή ασφάλιστρο.

Επιπλέον, αυτά τα working covers μπορούν να εκφραστούν με δύο τρόπους:

- ***Κατά κίνδυνο (per risk).***

Στην περίπτωση αυτή ο αντασφαλιστής καλείται να καταβάλλει χρηματικό ποσό για τις ζημίες, που υπερβαίνει το συμφωνηθέν ποσό της προτεραιότητας του εκχωρηθέντος ασφαλιστικού οργανισμού. Ωστόσο, ο υπολογισμός της προτεραιότητας αυτής, όπως και του ποσού υπέρβασης λαμβάνει υπόψη κάθε ζημία σε κάθε μεμονωμένο κίνδυνο.

- ***Κατά γεγονός (per event or per occurrence).***

Σε αυτό τον τρόπο, αναμειγνύονται ποικίλοι κίνδυνοι. Εδώ, ο αντασφαλιστής είναι υποχρεωμένος να πληρώσει, μόνο στην περίπτωση που το σύνολο των ποσών των ζημιών, που έχουν προκληθεί από την ίδια αιτία, ξεπερνάει το συμφωνηθέν ποσό της προτεραιότητας.

Ουσιαστικά, το είδος αυτό της μη αναλογικής αντασφάλισης υφίσταται, ώστε να μπορεί ο ασφαλιστικός οργανισμός να επωμίζεται την κάλυψη υψηλού κινδύνου. Εύλογο είναι, ωστόσο, ότι η έννοια του μεγέθους είναι άμεσα συνυφασμένη με τη φερεγγυότητα του ασφαλιστικού οργανισμού, αλλά και από το ποσό των ετησίων ασφαλίστρων.

Επιπλέον, ορισμένοι ακόμη στόχοι της ύπαρξης αυτού του είδους αντασφάλισης, είναι οι ακόλουθοι:

- ***Ο περιορισμός του κινδύνου μη σχηματισμού του απαραίτητου περιθωρίου φερεγγυότητας*** από την εταιρεία, λόγω ενός καταστροφικού συμβάντος ή μεγάλων ζημιών.
- ***Η σταθεροποίηση του ρυθμού μεταβολής των αποτελεσμάτων χρήσης*** της εταιρείας, μέσω της μείωσης του επιπέδου των διακυμάνσεων των αποζημιώσεων.

Όπως είναι φυσικό, αυτό του είδους της μη αναλογικής αντασφάλισης, παρουσιάζει τόσο πλεονεκτήματα όσο και μειονεκτήματα.

Πιο συγκεκριμένα:

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Ανάληψη πολύ μεγάλων κινδύνων.	Ακριβό ασφάλιστρο.
Μειώνεται ο κίνδυνος ο οργανισμός να μην καταφέρει να σχηματίσει το απαραίτητο περιθώριο φερεγγυότητας, είτε από μεγάλες ζημιές, είτε από ζημιές, που οφείλονται σε καταστροφές.	Ο εκχωρών τον κίνδυνο είναι πιθανόν να μείνει ακάλυπτος, είτε λόγω περιορισμένου αριθμού ανανεώσεων της κάλυψης, είτε λόγω εκπνοής τμημάτων της κάλυψης (κατόπιν επελεύσεως του κινδύνου).

Η δεύτερη κατηγορία μη αναλογικής αντασφάλισης καλείται **αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας σε επίπεδο συνόλου ζημιών (Aggregate excess of loss)**.

Είναι πιθανόν να πραγματοποιηθούν συμβάντα, τα οποία θα προκαλέσουν ταυτόχρονη πρόκληση ποικίλλων ασφαλίσιμων κινδύνων, όπως είναι για παράδειγμα:

- ***Μία πυρκαγιά μεγάλης έκτασης.***
- ***Μία έκρηξη.***
- ***Μία πολλαπλή σύγκρουση.***

Αυτά, επομένως, είναι δυνατόν να δημιουργήσουν ένα σύνολο ζημιών για τον ασφαλιστικό οργανισμό, που παρόλο που μπορεί να καλύψει το κόστος της κάθε μίας μεμονωμένα, ωστόσο δεν δύναται να καλύψει το αθροιστικό κόστος τους.

Συνεπώς, όπως γίνεται αντιληπτό, ο ασφαλιστικός οργανισμός έχει ανάγκη από ένα διαφορετικό είδος αντασφαλιστικής κάλυψης, μέσω του οποίου όλες οι ζημίες που είναι απόρροια ενός συγκεκριμένου συμβάντος, να θεωρούνται ως σύνολο, έτσι ώστε να καλύπτονται και ως σύνολο.

Η κύρια διαφορά μεταξύ της αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας σε επίπεδο συνόλου ζημιών και της κατά κίνδυνο αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας, που αναφέρθηκε, έγκειται στον ορισμό του γεγονότος. Πιο συγκεκριμένα, βάσει της αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας σε επίπεδο συνόλου ζημιών, στην ζημία εμπεριέχονται όλες οι μεμονωμένες ζημίες, που προέρχονται από ένα μοναδικό συμβάν, το οποίο τις περισσότερες φορές είναι ξαφνικό και εύκολα αναγνωρίσιμο.

Τέλος, όπως συμβαίνει και στην κατά κίνδυνο αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας, η αντασφαλίστρια εταιρεία μπορεί να θέσει ένα μέγιστο ποσό κάλυψης, ακόμα και στο σύνολο του ποσού που απαιτείται να καταβληθεί σε ένα χρόνο από όλα τα συμβάντα, ώστε να περιοριστούν οι ζημίες.

Η τρίτη κατηγορία μη αναλογικής αντασφάλισης ονομάζεται **καταστροφική αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας (catastrophe excess of loss)**.

Ο τύπος αυτός μη αναλογικής αντασφάλισης, όπως υποδηλώνει και η ονομασία του, λαμβάνει χώρα μόνο σε ακραίες περιπτώσεις, όταν ένα συμβάν είναι τόσο ολέθριο, που είναι ικανό να δημιουργήσει εκατοντάδες, ακόμα και χιλιάδες απώλειες, αιτία διαφορετικών ασφαλίσιμων κινδύνων.

Τέτοια συμβάντα αποτελούν, κατά κύριο λόγο, τα ακραία καιρικά φαινόμενα, όπως είναι τα ακόλουθα:

- ***Σεισμός.***
- ***Πλημμύρα.***
- ***Ανεμοθύελλα.***
- ***Παγωνιά.***

Ενώ, ακόμη, μπορούν να οφείλονται στον ανθρώπινο παράγοντα, τα οποία είναι πιθανόν να επιφέρουν ακόμα μεγαλύτερο κόστος από τα ακραία καιρικά φαινόμενα. Δηλαδή, να προκαλούνται για παράδειγμα, από:

- ***Ελαττωματική παραγωγή φαρμάκων.***
- ***Μόλυνση από τοξικά απόβλητα.***

Επομένως, τόσο ο ασφαλιστικός οργανισμός όσο και η αντασφαλίστρια εταιρεία, αποδέχονται ότι αυτού του είδους η αντασφαλιστική σύμβαση θα ενεργοποιηθεί, μόνο στην εξαιρετική περίπτωση, όπου θα συμβεί κάποιο από τα παραπάνω γεγονότα. Έτσι, τίθεται ένα αυστηρά καθορισμένο όριο στο σύνολο των ζημιών, τα οποία μπορεί να καλύψει μία καταστροφική αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας. Συγκεκριμένα, τις περισσότερες φορές επιτρέπονται μόνο δύο τέτοιου είδους γεγονότα.

Τέλος, και σε αυτό τον τύπο, η κυρίαρχη διαφορά του από την αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας σε επίπεδο συνόλου ζημιών, συνοψίζεται στο φανερά υψηλότερο ποσό κάλυψης που αναλαμβάνει η καταστροφική αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας.

Στην Catastrophic Excess of Loss, το χαρτοφυλάκιο προστατεύεται από τις πολύ βαριές ζημιές, όμως αποτυγχάνει να προσφέρει επαρκή κάλυψη έναντι μιας πιθανής αύξησης της συχνότητας των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων.

Η τέταρτη κατηγορία μη αναλογικής αντασφάλισης είναι η **αντασφάλιση STOP LOSS – ανακοπή ζημίας**.

Έργο της αντασφάλισης ανακοπής ζημίας αποτελεί η προστασία του ετήσιου αποτελέσματος ενός χαρτοφυλακίου κινδύνου, απέναντι σε ενδεχόμενες αρνητικές διακυμάνσεις από τον μέσο όρο, οι οποίες μπορεί να προέρχονται από μία άνοδο του αριθμού συχνότητας, αλλά και του μεγέθους των ζημιών.

Συχνά, μία ορισμένη κατηγορία ασφαλιστικών έργων δημιουργεί έντονες αποκλίσεις στο συνολικό αριθμό των ζημιών, που απαιτείται να εξοφληθούν μέσα στο έτος. Έτσι, ο ασφαλιστικός οργανισμός για να καταφέρει να εξασφαλιστεί από αυτό, καταφεύγει σε μη αναλογική αντασφάλιση του συνολικού κόστους των αποζημιώσεων, το οποίο ξεπερνά το συμφωνηθέν ποσό. Σε μία τέτοια περίπτωση, το σύνολο του κόστους των αποζημιώσεων συνδέεται με το συνολικό λογαριασμό μιας περιόδου 12 μηνών.

Επιπλέον, η αντασφάλιση ανακοπής ζημίας τελείται κατά τον ίδιο τρόπο με την αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας. Ωστόσο, ενώ με την αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας, ο αντασφαλιστής καλείται να προβεί σε χρηματικές αποζημιώσεις στον εκχωρηθέν ασφαλιστικό οργανισμό για μεμονωμένες ζημίες, αντίθετα, η αντασφάλιση ανακοπής ζημίας αναλαμβάνει ζημίες, που αφορούν το ετήσιο σύνολο του ποσού των αποζημιώσεων. Με άλλα λόγια, είναι σε θέση να παρέχει προστασία απέναντι σε μία άνοδο των ζημιών, σε μία ή και περισσότερες ασφαλιστικές κατηγορίες ενός ασφαλιστικού οργανισμού.

Αυτή η ευελιξία επιτυγχάνεται μέσω της αντασφάλισης ανακοπής ζημίας , που στην ουσία, αποτελεί μία προέκταση της αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας σε επίπεδο συνόλου ζημιών. Η ασφαλιστική εταιρεία θέτει ρητά ένα ανώτατο όριο κάλυψης της ζημίας. Σε περίπτωση που αυτό το όριο ξεπεραστεί, το επιπλέον κόστος καλείται να το καλύψει ο ασφαλιστικός οργανισμός.

Επιπλέον, σύνηθες σε τέτοιου είδους ασφαλιστικές συμβάσεις είναι η απαίτηση εκ μέρους της αντασφαλίστριας εταιρείας, να αναλάβει ο ασφαλιστικός οργανισμός ποσό ίσο προς κάποιο ποσοστό του ανωτάτου ποσού ιδίας κράτησής του και του ανωτάτου ποσού ανάληψης από την αντασφαλίστρια. Έτσι, μέσω αυτού, η αντασφαλίστρια εταιρεία πιέζει τον ασφαλιστικό οργανισμό να αναλαμβάνει και να επωμίζεται το κόστος ζημιών, όταν αυτό αγγίξει το ανώτερο ποσό, που έχει συμφωνηθεί.

Δικαιωματικά, η αντασφάλισης ανακοπής ζημίας αποτελεί την βέλτιστη επιλογή, από όλους τους τύπους αντασφάλισης. Αυτό στηρίζεται στο γεγονός, ότι αποδίδει για ένα συγκεκριμένο κίνδυνο ασφαλίστρου, τη μικρότερη δυνατή διακύμανση για τις καθαρές κρατήσεις της εταιρείας. Τις περισσότερες φορές, μάλιστα, η μείωση της διακύμανσης που προσφέρει, υπερτερεί κατά πολύ από τα άλλα είδη αντασφάλισης, ενώ, ταυτόχρονα, διατηρεί σε σταθερό επίπεδο τον ασφαλιστικό κίνδυνο.

Τέλος, η αντασφάλιση αυτή προσφέρει μία πολύ ικανοποιητική εγγύηση έναντι της χρεοκοπίας, στην περίπτωση όπου ο εκχωρητής ασφαλιστικός οργανισμός μπορεί να καταβάλει χρηματικό ποσό μέχρι το ποσό της ιδίας κράτησης, πέρα του οποίου αρχίζει η εφαρμογή της αντασφάλισης ανακοπής ζημίας.

3ο Κεφάλαιο: « Μελέτη του συντελεστή προσαρμογής R με αναλογική αντασφάλιση »

3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Σε αρκετές μελέτες, που αναφέρονται στην βέλτιστη αντασφάλιση, η παραδοχή της ανεξαρτησίας μεταξύ των μεγεθών των ατομικών ζημιών και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων, διευκολύνει την διεξαγωγή συμπερασμάτων από τα μοντέλα. Πολλοί μελετητές στα έργα τους, έχουν δεχτεί την υπόθεση της ανεξαρτησίας για τη μεγιστοποίηση του συντελεστή προσαρμογής, όπως είναι για παράδειγμα οι ακόλουθοι:

- ***Waters (1983)***
- ***Centeno (2002a)***
- ***Centeno (2002b)***
- ***Hald & Schmidli (2004).***

Όταν υφίσταται εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών των ατομικών ζημιών και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων, τα μοντέλα που έχουν μελετηθεί έως τώρα, σπάνια επικεντρώνονται στην αντασφάλιση. Παραδείγματα ερευνητών, που εξέτασαν στις μελέτες τους την εξάρτηση αυτών των μεγεθών είναι οι

- ***Albrecher & Teugels (2006)***
- ***Boudreault et al (2006)***
- ***Marceau (2007).***

Μόνο ο Centeno, το 2005, ασχολείται με την εξάρτηση σε ένα πλαίσιο βέλτιστης αντασφάλισης, όπως αυτή χαρακτηρίζεται μέσα από τη συχνότητα εμφάνισης των απαιτήσεων.

Επομένως, η μελέτη της βέλτιστης αντασφάλισης, μέσα σε ένα πλαίσιο εξάρτησης, προκύπτει φυσικά. Έτσι, επικεντρώνεται κανείς στο βέλτιστο όριο ιδίας κράτησης της αντασφάλισης σε ένα πλαίσιο εξάρτησης, όπου το ασφάλιστρο υπολογίζεται, σε πρώτη φάση, σύμφωνα με την αρχή της αναμενόμενης αξίας και στη συνέχεια, σύμφωνα με άλλες αρχές υπολογισμού των ασφαλίστρων.

Για την διεξαγωγή συμπερασμάτων, θα χρησιμοποιηθεί ένα γενικό μοντέλο κινδύνου, στο οποίο, όπως επισημάνθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα ισχύουν τα ακόλουθα

- ***Χρόνος χρεοκοπίας:*** $T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$
- ***Ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων:*** $C = (1+\eta)\dfrac{E(X)}{E(W)}$

- ***Πιθανότητα χρεοκοπίας:*** $\psi(u) = \Pr ob(T < \infty) \leq e^{-Ru}$.

Για κάθε χαρτοφυλάκιο ζημιών, το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Από την ανισότητα Lundberg, $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, είναι φανερό ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαρτάται από τον συντελεστή προσαρμογής R, δηλαδή, ο συντελεστής προσαρμογής είναι ένα μέτρο κινδύνου. Έτσι, έπεται ότι η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας επιτυγχάνεται αν μεγιστοποιηθεί η τιμή του συντελεστή προσαρμογής R.

Ο κύριος στόχος αυτού του μέρους, συνεπώς, έγκειται στην παρουσίαση της βέλτιστης αντασφάλισης, η οποία συνίσταται στη μεγιστοποίηση του συντελεστή προσαρμογής.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα εξετασθεί η αναλογική αντασφάλιση, για την οποία θα εφαρμοστεί η αρχή της αναμενόμενης αξίας υπολογισμού του ασφαλίστρου, αλλά και θα αποδειχτεί ότι ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ αποτελεί μονοκόρυφη συνάρτηση του ποσοστού ιδίας κράτησης. Η απόδειξη ότι ο $R(a)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση, αποτελεί ικανή συνθήκη για την βέλτιστη αντασφάλιση, καθώς δεν είναι εφικτό να βρεθεί ακριβές νούμερο, αλλά μέσω προσεγγιστικών μεθόδων θα συγκλίνει στο μέγιστο.

Τέλος, υπάρχουν διάφοροι τρόποι ενσωμάτωσης της εξάρτησης. Σε πρώτη φάση, θα χρησιμοποιηθούν μέσα για να δομηθεί η εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών ατομικών ζημιών και χρόνων εμφάνισης των κινδύνων. Ενώ, στη συνέχεια, η ανάλυση θα επικεντρωθεί σε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις εξάρτησης.

- Η πρώτη περίπτωση, στην οποία χρησιμοποιείται δομή εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών των ατομικών ζημιών X_i και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων W_i.

- Και η δεύτερη περίπτωση, όπου χρησιμοποιούνται μοντέλα ευπάθειας.

3.2 Σύμφωνα με την αρχή της αναμενόμενης τιμής

Σε αυτό το είδος αντασφάλισης, το καθαρό ασφάλιστρο ανά μονάδα χρόνου εκφράζεται ως εξής

$$C(a) = C - (1+\eta_R)\frac{E[(1-a)X]}{E(W)} \rightarrow$$

$$C(a) = (1+\eta)\frac{E(X)}{E(W)} - (1+\eta_R)\frac{E[(1-a)X]}{E(W)}$$

όπου:

- ✓ η : είναι το περιθώριο κινδύνου για τον ασφαλιστή (safety loading).
- ✓ η_R : είναι το περιθώριο κινδύνου για τον αντασφαλιστή.

Επιπλέον, αυτά τα περιθώρια κινδύνου, πληρούν την προϋπόθεση ότι $\eta < \eta_R$ και αυτό γιατί, ο ασφαλιστής θα μπορούσε να απαλλαγεί από όλο τον κίνδυνο, που αντιμετωπίζει, ασφαλίζοντας ολόκληρο το χαρτοφυλάκιό του.

Το συγκεκριμένο ασφάλιστρο, μπορεί να εκφραστεί με πιο απλοποιημένη μορφή, ως εξής

$$C(a) = \frac{E[X]}{E[W]}[\eta - \eta_R + a(1+\eta_R)] .$$

Βάσει αυτής της σχέσης, παρατηρείται ότι αυτό το ασφάλιστρο, είναι μια γραμμική συνάρτηση του ποσοστού ιδίας κράτησης α. Επομένως, η πρώτη παράγωγος του ασφαλίστρου $C'(a)$ είναι σταθερή και ίση με

$$\frac{dC}{da} = \frac{E(X)}{E(W)}(1+\eta_R).$$

Στην παρούσα ενότητα, γίνεται λόγος για την βέλτιστη αντασφάλιση. Επομένως, είναι αναγκαίο να βρεθεί το βέλτιστο ποσοστό ιδίας κράτησης α, που μεγιστοποιεί τον συντελεστή προσαρμογής R.

Ο συντελεστής προσαρμογής R, είναι η μοναδική θετική ρίζα της ακόλουθης εξίσωσης

$$E\left\{e^{r[X(a)-C(a)W]}\right\} = 1$$

η οποία ισοδυναμεί με την

$$h(r,a) = \ln\left\{E[e^{r(X(a)-C(a)W)}]\right\} = 0 .$$

Αρχικά, θα βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το a, έτσι ώστε η εξίσωση $h(r,a) = 0$ να έχει μοναδική θετική ρίζα, τον συντελεστή προσαρμογής.

Επειδή η $h(r,a)$ είναι κυρτή συνάρτηση ως προς r και $h(0,a) = 0$, η εξίσωση $h(r,a) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα αν και μόνο αν

$$\frac{\partial h(0,a)}{\partial r} < 0.$$

Έστω η συνάρτηση

$$g(a) = \frac{\partial h(0,a)}{\partial r}.$$

Τότε,

$$g(a) = E[aX - C(a)W].$$

Πρέπει να βρεθεί η τιμή του a , για την οποία η

$$g(a) < 0.$$

Από τις σχέσεις

$$g'(a) = E[X - C'(a)W]$$

και $$C'(a) = \frac{E(X)}{E(W)}(1+\eta_R)$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} g'(a) &= E\left[X - \frac{E(X)}{E(W)}(1+\eta_R)W\right] \\ &= E(X) - \frac{E(X)}{E(W)}(1+\eta_R)E(W) \\ &= -\eta_R E(X) < 0 \end{aligned}$$

Επειδή η $g'(a) < 0$, η g έχει το πολύ μια ρίζα.

Η εξίσωση $g(a) = 0$ είναι ισοδύναμη με την

$$E[aX - C(a)W] = 0,$$

ή $$aE(X) - C(a)E(W) = 0,$$

ή $$aE(X) - \frac{E(X)}{E(W)}[\eta - \eta_R + a(1+\eta_R)]E(W) = 0,$$

ή $$a - [\eta - \eta_R + a(1+\eta_R)] = 0,$$

ή $$a = \frac{\eta_R - \eta}{\eta_R}.$$

Έστω τώρα a_0 να είναι εκείνη η τιμή του $\frac{\eta_R - \eta}{\eta_R}$ που είναι θετική, επειδή $\eta_R - \eta > 0$.

Τότε, ισχύει

$$g(a) < 0 \text{ για κάθε } a \in [a_0, 1].$$

Αυτό, είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει $R > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$h(R,a) = 0$$

και $$C(a) > 0 \text{ για κάθε } a \in (a_0, 1].$$

Έτσι, η εξίσωση

$$h(r,a) = \ln\left\{ E\left[e^{r(X(a) - C(a)W)} \right] \right\} = 0$$

για να έχει μια αυστηρά θετική ρίζα, τον συντελεστή προσαρμογής R, θα πρέπει η μερική παράγωγος του h σε σχέση με το r, να δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\frac{dh}{dr}(r,a) = \frac{E\left[(aX - C(a)W) e^{r(X(a) - C(a)W)} \right]}{E\left[e^{r(X(a) - C(a)W)} \right]}.$$

Η συνάρτηση $r \to h(r,a)$ είναι κυρτή, αφού η συνάρτηση h είναι μία C^2 συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών θετικών αριθμών $\Re^+$, επειδή

$$\frac{d^2h}{dr^2}(r,a) = \frac{E\left[(aX - C(a)W)^2 e^{r(aX - C(a)W)} \right]}{E\left[e^{r(X(a) - C(a)W)} \right]} - \left[\frac{E\left[(aX - C(a)W) e^{r(aX - C(a)W)} \right]}{E\left[e^{r(aX - C(a)W)} \right]} \right]^2 > 0$$

ως μεταβλητή μετασχηματισμού Esscher.

Η σχέση

$$\frac{dh}{dr}(r,a)=\frac{E\left[(aX-C(a)W)e^{r(X(a)-C(a)W)}\right]}{E\left[e^{r(X(a)-C(a)W)}\right]}$$

υφίσταται αν και μόνο αν

$$\frac{dh}{dr}(r,a)<0.$$

Επιπλέον, αν g είναι η πρώτη παράγωγος του h ως συνάρτηση του a ,με $a\rightarrow\frac{dh}{dr}(0,a)$, τότε

$$g(a)=E[aX-C(a)W].$$

Στη συνέχεια, θα πρέπει να βρεθούν οι τιμές του a, για τις οποίες η συνάρτηση $g(a)$ είναι αυστηρά αρνητική. Η συνάρτηση g είναι αυστηρά φθίνουσα, καθώς $g'(a)=-\eta_R E(X)<0$, και έχει το πολύ μία ρίζα. Έτσι, η εξίσωση $g(a)=0$, είναι ισοδύναμη με

$$aE(X)-C(a)E(W)=0,$$

όπου $$C(a)=\frac{E(X)}{E(W)}[\eta-\eta_R+a(1+\eta_R)].$$

Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$a\frac{E(X)}{E(W)}=\frac{E(X)}{E(W)}[\eta-\eta_R+a(1+\eta_R)]\Leftrightarrow$$

$$-a\eta_R=\eta-\eta_R$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$a=\frac{\eta_R-\eta}{\eta_R}.$$

Εάν γίνει η υπόθεση ότι a_0 είναι $\frac{\eta_R-\eta}{\eta_R}$, αυτό είναι θετικό στην περίπτωση όπου: $\eta<\eta_R$. Συνεπώς, για κάθε $a\in[\alpha_0,1]$, για το οποίο ισχύει $g(a)<0$, που υποδηλώνει ότι υπάρχει $R>0$, έτσι ώστε: $h(R,a)=0$.

Διαφορετικά, η λύση της εξίσωσης $h(R,a)$ είναι μηδενική. Επιπλέον, το ασφάλιστρο $C(a)$ είναι αυστηρά θετικό στο διάστημα $(a_0,1]$, δεδομένου ότι η προϋπόθεση $g(a)<0$ είναι ακριβώς ο περιορισμός του καθαρού κέρδους, που αποφεύγει την οριστική καταστροφή.

Πιο συγκεκριμένα, τώρα, για τον βέλτιστο συντελεστή προσαρμογής R, ήδη είναι γνωστό ότι υφίσταται μόνο εάν το $a\in(a_0,1]$. Έτσι, από δω και στο εξής, γίνεται η υπόθεση ότι $a\in(a_0,1]$.

Εδώ, αξίζει να αναφερθεί ο ορισμός μίας μονοκόρυφης συνάρτησης φ στο I, ο οποίος είναι ο ακόλουθος:

« Η $\varphi:t\to\varphi(t)$ είναι μία μονοκόρυφη συνάρτηση στο I, εάν έχει μοναδικό μέγιστο που επιτυγχάνεται για $t=t^*$ στο I και είναι αυστηρά αύξουσα στο $I\cap(-\infty,t^*]$ και παράλληλα, αυστηρά φθίνουσα στο $I\cap[t^*,+\infty)$. »

Η συνάρτηση φ μπορεί, επίσης, να ονομάζεται μονοκόρυφη εάν, αρχικά μειώνεται αυστηρά και στη συνέχεια, αυστηρά αυξάνεται, δηλαδή, έχει ένα μοναδικό ελάχιστο για το I, αλλά αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση που μελετάται εδώ.

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη επαρκής συνθήκη μονοκόρυφης συνάρτησης:

« Εάν η φ είναι μία C^2 (διπλά διαφορίσιμη ή διπλά παραγωγίσιμη) συνάρτηση, τότε είναι μία μονοκόρυφη συνάρτηση στο I, εάν η εξίσωση $\varphi'(t)=0$ έχει μοναδική ρίζα t^*, όπως $\varphi''(t^*)<0$. »

Στην συνέχεια, πρέπει να αποδειχθεί η παραπάνω συνθήκη. Η συνάρτηση ϕ'' είναι συνεχής, (καθώς ϕ είναι μια C^2 συνάρτηση), οπότε υπάρχει $\varepsilon\succ 0$, έτσι ώστε για κάθε $t\in(t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon)$ να είναι $\phi''(t)<0$. Έτσι, η συνάρτηση ϕ' είναι μια αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $(t^*-\varepsilon,t^*+\varepsilon)$, η οποία μηδενίζεται στο t^*. Επίσης, η συνάρτηση $\phi'(t)$ είναι αυστηρά θετική στο $I\cap(-\infty,t^*)$ και αυστηρά αρνητική στο $I\cap(t^*,+\infty)$, αφού η ϕ' είναι συνεχής και η εξίσωση $\varphi'(t)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα I. Σε αντίθετη περίπτωση, η ϕ' θα είχε παραπάνω από μια ρίζες. Έτσι, η συνάρτηση ϕ είναι αυστηρά αύξουσα στο $I\cap(-\infty,t^*)$, όπου φτάνει στο μέγιστο σημείο της, στο t^* και έπειτα γίνεται αυστηρά φθίνουσα στο $I\cap(t^*,+\infty)$.

Επίσης, για να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $R(a)$ είναι μονοκόρυφη, πρέπει να επαληθεύει την προηγούμενη επαρκής συνθήκη. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να αποδειχτεί ότι:

- Η εξίσωση $\frac{\partial R}{\partial a}(a)=0$, έχει μία μοναδική ρίζα a^*.
- Η $\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}(a^*)<0$.

Πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της «έμμεσης συνάρτησης», προκύπτει το εξής

$$\frac{\partial R}{\partial a}(a)=-\left.\frac{\frac{\partial h}{\partial a}(r,a)}{\frac{\partial h}{\partial r}(r,a)}\right|_{r=R}.$$

Στο θεώρημα «έμμεσης συνάρτησης», ορίζεται C^1 (δισδιάστατη) συνάρτηση F, ενός δίσκου με κέντρο στο (a,b),για την οποία ισχύει ότι $F(a,b)=0$. Για $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$, υπάρχει $h>0$ και μοναδική εξίσωση ϕ, η οποία ορίζεται στο διάστημα $(a-h,a+h)$, έτσι ώστε $\phi(a)=b$ και για κάθε $|x-a|<h$, είναι $F[x,\phi(x)]=0$. Επιπλέον, για $|x-a|<h$, η συνάρτηση ϕ είναι C^1, για την οποία ισχύει η σχέση

$$\phi'(x)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right|_{y=\phi(x)}.$$

Αυτό το θεώρημα απαιτεί να μην είναι μηδενικός ο παρονομαστής. Πράγματι, είναι γνωστό ότι η $r\to h(r,a)$, είναι μία κυρτή συνάρτηση, καθώς $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,a)<0$.

Έτσι, η τελευταία συνάρτηση, παρουσιάζει ένα μοναδικό ελάχιστο στο $\tilde{r}$, έτσι ώστε $h(\tilde{r},a)<0$, καθώς $h(0,a)=0$ και $\frac{\partial h}{\partial r}(0,a)=E[X(a)-C(a)W]<0$.

Επομένως, ο συντελεστής προσαρμογής R ικανοποιεί την

$$R>\tilde{r}.$$

Τότε, για κάθε $a > 0$, έπεται ότι

$$\frac{\partial h}{\partial r}(R,a) > 0$$

επειδή, $r \to h(r,a)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[r,+\infty)$.

Κατά συνέπεια, η εξίσωση $\frac{\partial R}{\partial a}(a) = 0$, ισοδυναμεί με

$$\left.\frac{\partial h(a,r)}{\partial a} = 0\right|_{r=R} .$$

Στην συνέχεια, θα δειχτεί ότι η ανωτέρω εξίσωση έχει μία μοναδική ρίζα a^*. Πράγματι, αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{E\left\{ R[X - C'(a)W]\, e^{R[X(a)-C(a)W]} \right\}}{E\left\{ e^{R[X(a)-C(a)W]} \right\}} = 0,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$E\left\{ [X - C'(a)W]\, e^{R[X(a)-C(a)W]} \right\} = 0,$$

επειδή

- $R > 0$, και
- $E\left\{ e^{R[X(a)-C(a)W]} \right\} > 0$.

Έστω f είναι η συνάρτηση $a \to E\left\{ R[X - C'(a)W]\, e^{R[X(a)-C(a)W]} \right\}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει

- $f(a_0) = -\eta_R\, E(X) < 0$
- $f(1) > 0$.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f ως προς a δίνεται από την σχέση

$$f'(a) = RE\left\{[X - C'(a)W]^2 e^{R[X(a) - C(a)W]}\right\} +$$

$$R'(a)E\left\{[X - C'(a)W][X(a) - C(a)W]e^{R[X(a) - C(a)W]}\right\}.$$

Έτσι, έπεται ότι

$$f'(a) > 0 \text{ όταν } f(a) = 0 \Leftrightarrow R'(a) = 0.$$

Επιπλέον, προκύπτει ότι

$$f(a_0) = -\eta_R\, E(X) < 0$$

$$\text{και } f(1) > 0.$$

Πράγματι,

$$f(1) = E\left\{\left[X - (1+\eta_R)\frac{E(X)}{E(W)}W\right] e^{R\left[X - (1+\eta)\frac{E(X)}{E(W)}W\right]}\right\} >$$

$$E\left\{\left[X - (1+\eta)\frac{E(X)}{E(W)}W\right] e^{R\left[X - (1+\eta)\frac{E(X)}{E(W)}W\right]}\right\}.$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας έχει θετικό πρόσημο, όπως και η $\frac{\partial h}{\partial r}(R,1)$. Ως εκ τούτου, η f είναι μια συνεχής αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση κάθε φορά που διασχίζει την τετμημένη, έτσι ώστε

$$f(a_0) < 0$$

$$\text{και } \quad f(1) > 0.$$

Από τα παραπάνω, έπεται ότι η συνάρτηση f μηδενίζεται μόνο μία φορά στο διάστημα $(a_0, 1]$ και έτσι, η συνάρτηση $\left.\frac{\partial h(a,r)}{\partial a} = 0\right|_{r=R}$ έχει μία μοναδική ρίζα a^*.

Στην συνέχεια, υπολογίζεται η δεύτερη παράγωγος $\dfrac{\partial^2 R(a)}{\partial a^2}$, Από την εξίσωση $\dfrac{\partial R}{\partial a}(a) = -\left.\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial a}(r,a)}{\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,a)}\right|_{r=R}$, έπεται ότι

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}(a^*) = -\left.\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial a^2}(r,a)}{\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,a)}\right|_{r=R,a=a^*},$$

όπου

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(r,a) = \frac{E\left\{R\left[X - C'(a^*)W\right]^2 e^{R[X(a^*)-C(a^*)W]}\right\}}{E\left\{e^{R[X(a^*)-C(a^*)W]}\right\}} =$$

$$-\left\{\frac{E\left\{R[X - C'(a^*)W]e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\}}{E\left\{e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\}}\right\}^2.$$

Επιπλέον, επειδή το a^*, μηδενίζει την πρώτη παράγωγο του R, αυτό οδηγεί στην ακόλουθη σχέση

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R,a) = \frac{E\left\{R^2[X - C'(a^*)W]^2 e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\}}{E\left\{e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\}}.$$

Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R,a)<0$$

κάτι το οποίο δηλώνει ότι η συνάρτηση $a \to R(a)$ είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(a_0,1]$, καθώς η συνάρτηση $a \to \frac{\partial R}{\partial a}(a)$ μηδενίζεται ακριβώς μία φορά.

Κλείνοντας, το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει σχετικά με αυτό το θέμα της βελτιστοποίησης του $a \to R(a)$, είναι ότι ο συντελεστής προσαρμογής R, στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης, είναι μία μονοκόρυφη συνάρτηση του a, στο διάστημα $(a_0,1]$.

Επίσης, είναι εύλογο να σημειωθεί ότι η μονοκόρυφη συνάρτηση, που αποτελεί επαρκή συνθήκη για τη μεγιστοποίηση, εξασφαλίζει ότι οι αριθμητικές μεγιστοποιήσεις του συντελεστή προσαρμογής R θα συγκλίνουν, κάτι το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην πράξη.

3.3 Άλλες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων

Μέχρι τώρα, μελετήθηκε ο συντελεστής προσαρμογής R, στην περίπτωση όπου το ασφάλιστρο υπολογίζεται με την αρχή της αναμενόμενης τιμής. Ένα μειονέκτημα της αρχής αυτής, είναι ότι για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου δεν λαμβάνει υπ' όψιν τις διακυμάνσεις των ζημιών, παρά μόνο την αναμενόμενη τιμή τους. Έτσι, έχουν προταθεί μεταξύ άλλων και άλλες αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου, στις οποίες λαμβάνονται υπ' όψιν και οι διακυμάνσεις των ζημιών. Σε αυτή την υποενότητα, για την εύρεση της βέλτιστης αντασφάλισης, θα εξετασθούν οι παρακάτω αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων

- ***Αρχή της διακύμανσης:*** $C = E(X) + \eta Var(X)$.
- ***Αρχή της τυπικής απόκλισης***: $C = E(X) + \eta\sqrt{Var(X)}$.
- ***Εκθετική αρχή***: $C = \dfrac{ln\left[E\left(e^{\eta X}\right)\right]}{\eta}$.

Αυτές οι αρχές, εφαρμόζονται χωρίς αντασφάλιση για ολόκληρο τον κίνδυνο **X**.

Όσον αφορά το μονοκόρυφο της συνάρτησης του συντελεστή προσαρμογής $R(a)$, μεταξύ της αρχής της αναμενόμενης τιμής και των άλλων αρχών υπολογισμού, εμφανίζονται

- ***Στη συνάρτηση*** $g(a)$, της οποίας το πρόσημό της ορίζει την ύπαρξη ή όχι του συντελεστή προσαρμογής R.
- ***Στη συνάρτηση*** $f(a)$, της οποίας το πλήθος των ριζών είναι το πλήθος των τοπικών μεγίστων.
- ***Στην δεύτερη παράγωγο*** $\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R,a)$ της $R(a)$, της οποίας το πρόσημο εξασφαλίζει αν το βέλτιστο θα είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Για όλες τις αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου, επομένως, θα πρέπει να ελεγχθούν και να μελετηθούν τα παραπάνω τρία σημεία.

3.3.1 Αρχή της διακύμανσης

Το ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της διακύμανσης στην αναλογική αντασφάλιση, ορίζεται ως εξής

$$C(a) = \frac{E(X)+\eta Var(X)}{E(W)} - \frac{E[X(1-a)] + \eta_R Var[X(1-a)]}{E(W)} = \frac{a\,E(X)+Var(X)[\eta-(1-a)^2\eta_R]}{E(W)}.$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι οι ακόλουθες

$$C'(a) = \frac{E(X)+2(1-a)\eta_R Var(X)}{E(W)}$$

και $$C''(a) = \frac{-2\eta_R Var(X)}{E(W)} < 0.$$

Αρχικά, θα πρέπει να βρεθεί η αποδεκτή συνθήκη για το όριο ιδίας κράτησης **α**, έτσι ώστε να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$. Όπως και στην προηγούμενη υποενότητα, προσδιορίστηκε η συνάρτηση $g(a) = E[aX - C(a)W]$, έτσι κι εδώ μπορεί να ορισθεί ως εξής

$$g(a) = -Var(X)\left[\eta-(1-a)^2\eta_R\right].$$

Επειδή

$$g(0) = -(\eta-\eta_R)Var(X) > 0,$$

η g είναι μία αυστηρά φθίνουσα κυρτή συνάρτηση, η οποία έχει μία μοναδική θετική ρίζα a_0 στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, έτσι ώστε $\textit{για κάθε } a > a_0, \textit{ να είναι } g(a) < 0$.

Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μια αναλυτική έκφραση του a_0, η

$$a_0 = 1 - \sqrt{\frac{\eta}{\eta_R}} > 0 .$$

Έτσι, ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ υπάρχει στο διάστημα $(a_0, 1]$.

Στη συνέχεια, η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής

$$f(a) = E\left\{ [X - C'(a)W]\, e^{R[X(a) - C(a)W]} \right\},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$f'(a) = RE\left\{ [X - C'(a)W]^2 e^{R[X(a) - C(a)W]} \right\} - C''(a)\, E\left\{ e^{R[X(a) - C(a)W]} \right\}$$

$$+ R'(a)\, E\left\{ \left[X - C'(a)W \right]\left[X(a) - C(a)W \right] e^{R\left[X(a) - C(a)W \right]} \right\}.$$

Επειδή $C''(a) < 0$, η συνάρτηση $f'(a)$ είναι αυστηρά θετική, όταν η συνάρτηση f μηδενίζεται $[f(a) = 0 \leftrightarrow R'(a) = 0]$.

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$f(a_0) \triangleq E\left\{ \left[X - C'(a_0)W \right] e^0 \right\} = -2(1 - a_0)Var(X) < 0$$

και $$f(1) = \left\{ E\left[X - C'(1)W \right] e^{R\left[X - C(1)W \right]} \right\} > \frac{E\left\{ \left[X - C(1)W \right] e^{R\left[X - C(1)W \right]} \right\}}{E\left\{ e^{R\left[X - C(1)W \right]} \right\}} > 0 .$$

Πράγματι, όταν $a = 1$, ισχύει ότι

$$C'(1) = \frac{E(X)}{E(W)} < \frac{E(X)\eta Var(X)}{E(W)} = C(1).$$

Εκτός αυτών, η συνάρτηση f είναι συνεχής και ξεκινάει από $f(a_0)<0$ και καταλήγει σε $f(1)>0$, ενώ είναι αυστηρώς αύξουσα, όταν μηδενίζεται. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση f μηδενίζεται μόνο μία φορά, έστω στο a^*.

Τελικά, η δεύτερη παράγωγος του συντελεστή προσαρμογής R, όταν η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται, έχει το αντίθετο πρόσημο από την ποσότητα

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R,a^*)=\frac{E\left\langle R\left\{R\left[X-C'(a^*)W\right]^2-C''(a^*)W\right\}e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\rangle}{E\left\{e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\}}$$

Επειδή $C''(a)<0$, προκύπτει ότι $\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R,a)>0$ και κατά συνέπεια, ισχύει ότι

$$R''(a^*)<0.$$

Επομένως, το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει είναι ότι και με την χρήση της αρχής της διακύμανσης για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου, η συνάρτηση του συντελεστή προσαρμογής $R(a)$ παραμένει μονοκόρυφη στο διάστημα $(a_0,1]$.

3.3.2 Αρχή της τυπικής απόκλισης

Το ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της τυπικής απόκλισης στην αναλογική αντασφάλιση, δίνεται από την

$$C(a)=\frac{E(X)+\eta\sqrt{Var(X)}}{E(W)}-\frac{E[X(1-a)]+\eta_R\sqrt{Var[X(1-a)]}}{E(W)}=\frac{aE(X)+\sqrt{Var(X)}[\eta-(1-a)\eta_R]}{E(W)},$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$C'(a)=\frac{E(X)+\eta_R\sqrt{Var(X)}}{E(W)}$$

και $\qquad C''(a)=0$.

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η αντίστοιχη συνάρτηση, σύμφωνα με αυτή την αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου. Έτσι, η συνάρτηση g δίνεται από τη σχέση

$$g(a) = -\sqrt{Var(X)}[\eta - (1-a)\eta_R]$$

η οποία είναι μία αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, με μία μάλιστα μοναδική θετική ρίζα $a_0 \in (0,1]$ έτσι ώστε για κάθε $a > a_0$, να είναι $g(a) < 0$.

Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μια αναλυτική έκφραση της ρίζας, η οποία είναι

$$a_0 = \frac{\eta_R - \eta}{\eta_R} > 0.$$

Επομένως, υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ στο διάστημα $(a_0, 1]$.

Στη συνέχεια, η συνάρτηση f ορίζεται με παρόμοιο τρόπο, όπως και στην προηγούμενη αρχή, επειδή $C''(a) = 0$. Πράγματι, είναι

$$f(a_0) = -\eta_R\sqrt{Var(X)} < 0.$$

Η $f(1)$ δίνεται από τη σχέση

$$f(1) = E\left\{[X - C'(1)W]\, e^{R[X - C(1)W]}\right\} > \frac{E\left\{[X - C'(1)W]\, e^{R[X - C'(1)W]}\right\}}{E\left\{e^{R[X - C'(1)W]}\right\}} > 0$$

χρησιμοποιώντας την σχέση

$$C'(1) = \frac{E(X) + \eta_R\sqrt{Var(X)}}{E(W)} < \frac{E(X)\eta\sqrt{Var(X)}}{E(W)} = C(1).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f μηδενίζεται μία φορά στο διάστημα $(a_0, 1]$.

Τέλος, η δεύτερη παράγωγος του συντελεστή προσαρμογής R είναι αρνητική, καθώς η εξίσωση $\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R, a^*) = 0$ εξακολουθεί να ισχύει, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Έτσι, ισχύει το ίδιο συμπέρασμα, όπως και προηγουμένως, ότι δηλαδή η συνάρτηση του συντελεστή αντασφάλισης $R(a)$ εξακολουθεί να είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(a_0,1]$ και με αυτή την μέθοδο υπολογισμού του ασφαλίστρου.

3.3.3 Εκθετική αρχή

Η εκθετική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου στην αναλογική αντασφάλιση, δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$C(a)=\frac{ln\left[E(e^{\eta X})\right]}{\eta\, E(X)}-\frac{ln\left\{E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]\right\}}{\eta_R E(X)},$$

της οποίας η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$C'(a)=\frac{E\left[X\,e^{\eta_R(1-a)X}\right]}{E(X)\,E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]}$$

και $$C''(a)=\frac{-\eta_R}{E(W)}\frac{E\left[X^2e^{\eta_R(1-a)X}\right]}{E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]}-\left\{\frac{E\left[X\,e^{\eta_R(1-a)X}\right]}{E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]}\right\}^2<0.$$

Επιπλέον, από τις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$g(a)=E(X)-\frac{1}{\eta}ln\left[E(e^{\eta X})\right]+\frac{1}{\eta_R}ln\left\{E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]\right\}.$$

Έτσι, η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης g, είναι

$$g'(a)=E(X)-\frac{E\left[X\,e^{\eta_R(1-a)X}\right]}{E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]}=-\frac{Cov\left[X,e^{\eta_R(1-a)X}\right]}{E\left[e^{\eta_R(1-a)X}\right]}.$$

Για X θετική τ.μ. και k θετικό πραγματικό αριθμό, ισχύει ότι οι συναρτήσεις $\phi(x) = xe^{kx}$ και $\varphi(x) = e^{kx}$ είναι κυρτές στο σύνολο των πραγματικών μη-αρνητικών θετικών αριθμών $\Re_+^*$, καθώς είναι C^2 συναρτήσεις με

$$\varphi''(x) = (2k + x^2)e^{kx} > 0$$

και

$$\phi''(x) = k^2 e^{kx}.$$

Έτσι, έπεται ότι η $g'(a)$ είναι αρνητική, καθώς ισχύει ότι

$$Cov\left[X, e^{kX}\right] \overset{\Delta}{=} E(Xe^{kX}) - E(X)E(e^{kX}) \geq E(X)e^{kE(X)} - E(X)e^{kE(X)} = 0,$$

χρησιμοποιώντας την Jensen ανισότητα, η οποία εκφράζεται ως

$$E[\Phi(X)] \geq \Phi[E(X)]$$

για μια κυρτή συνάρτηση Φ.

Επιπλέον, είναι

$$g(0) = \frac{1}{\eta_R} ln\left[E(e^{\eta_R X})\right] - \frac{1}{\eta} ln\left[E(e^{\eta X})\right] > 0$$

και $$g(1) = -\frac{1}{\eta} ln\left[E\left(e^{\eta X}\right)\right] < 0$$

δεδομένου ότι, η εκθετική αρχή είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς το συντελεστή επιβάρυνσης η.

Επομένως, η g είναι μια φθίνουσα συνάρτηση, η οποία μηδενίζεται μια φορά στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, έστω στο a_0.

Συνεπώς, ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ υπάρχει στο διάστημα $(a_0, 1]$, με $a_0 > 0$.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής

$$f(a)=E\left\{R\left[X-C'(a)W\right]e^{R\left[X(a)-C(a)W\right]}\right\}.$$

Ισχύει, ότι

$$f(a_0)=E\left\{\left[X-C'(a_0)W\right]e^{0}\right\}=g'(a_0)<0$$

και $$C'(1)=\frac{E(X)}{E(W)}<\frac{1}{\eta}ln\left[E\left(e^{\eta X}\right)\right]=C(1)$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen με $\varphi(\chi)=e^{\eta X}$.

Επίσης, ισχύει ότι $f(1)>0$. Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην αρχή της διακύμανσης, (όπου $C''(a)<0$), προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει μία μοναδική ρίζα a^* και συνεπώς και η πρώτη παράγωγος $R'(a)$.

Τέλος, κάνοντας χρήση ξανά των αποτελεσμάτων της αρχής της διακύμανσης, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(R,a^*)=\frac{E\left\langle R\left\{R\left[X-C'(a^*)W\right]^2-C''(a)W\right\}e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\rangle}{E\left\{e^{R\left[X(a^*)-C(a^*)W\right]}\right\}}$$

που είναι θετικό, καθώς $C''(a)<0$. Επομένως, η δεύτερη παράγωγος $R''(a)$ είναι αρνητική.

Έτσι και με αυτόν τον τρόπο υπολογισμού του ασφαλίστρου, έπεται ότι η συνάρτηση του συντελεστή προσαρμογής είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(a_0,1]$.

3.4 Εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών ατομικών ζημιών και χρόνων εμφάνισης των κινδύνων.

Μέχρι τώρα, δόθηκαν αποτελέσματα για τον συντελεστή προσαρμογής, θεωρώντας την ανεξαρτησία μεταξύ των μεγεθών ατομικών ζημιών X και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων W. Στη συνέχεια, θα εξετασθεί ο συντελεστής προσαρμογής, θεωρώντας μια δομή εξάρτησης μεταξύ των τ. μ. X_i και W_i. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της τ. μ. $X \mid W$ είναι η διακριτή μείξη των συναρτήσεων κατανομής δυο τ. μ. Y_1 και Y_2. Δηλαδή, θα ισχύει ότι

$$F_{X|W}(x \mid t) = e^{-at} F_{Y_1}(x) + (1 - e^{-at}) F_{Y_2}(x),$$

όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά.

Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δεσμευμένης τ. μ. $X \mid W$ είναι

$$f_{X|W}(x \mid t) = e^{-at} f_{Y_1}(x) + (1 - e^{-at}) f_{Y_2}(x),$$

όπου $f_{Y_1}(x) = F'_{Y_1}(x)$ και $f_{Y_2}(x) = F'_{Y_2}(x)$ είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ. μ. Y_1 και Y_2.

Το παραπάνω μοντέλο με εξάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο, (από το μοντέλο στο οποίο οι τ. μ. X και W θεωρούνται ανεξάρτητες), για την προσέγγιση των συνολικών ζημιών σε ασφαλίσεις καταστροφικών ζημιών.

Πράγματι, έστω W_i ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης μεταξύ της $(j-1)$ και της (j) καταστροφικής ζημιάς. Ένα τέτοιο ενδεχόμενο, έχει δυο πιθανές εντάσεις, οι οποίες συμβολίζονται με $I_j = 1$ (συνηθισμένου μεγέθους ζημιά), 2 (καταστροφικού μεγέθους ζημιά) και η πιθανότητα εμφάνισής τους εκφράζεται από την σχέση

$$Prob(I_j = 1 \mid W_j = w) = e^{-\beta w} = 1 - Prob(I_j = 2 \mid W_j = w).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$Prob(X_j \le x \mid I_j = i) = F_i(x), \text{ για } i = 1,2.$$

Για παράδειγμα, σε ένα πλαίσιο κινδύνου, όπου μελετώνται οι σεισμοί, μπορεί κάποιος να αναμένει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος εμφάνισης του ενός σεισμού από τον άλλο, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το μέγεθος της ζημιάς που θα προκαλέσει ο επόμενος σεισμός. Σε αυτή την περίπτωση, η κατανομή της F_2, πρέπει να έχει πιο βαριά ουρά από την κατανομή της F_1.

Η περιθώρια συνάρτηση της τ. μ. X_k δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} f_{X_k}(x) &= M_W(-\beta) f_1(x) + [1 - M_W(-\beta)] f_2(x) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\beta} f_1(x) + \frac{\beta}{\lambda+\beta} f_2(x), \end{aligned}$$

για $k = 1,2,\ldots$

Για την συγκεκριμένη δομή εξάρτησης, θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{c}{\lambda}-\frac{\lambda\mu_1+\beta\mu_2}{\beta+\lambda}>0\ ,$$

ώστε να μην υπάρχει βέβαιη χρεοκοπία. Με άλλα λόγια, το αριστερό μέρος της ανισότητας αποτελεί το περιθώριο ασφαλείας στην συγκεκριμένη δομή εξάρτησης.

Επιπλέον, η συνδιακύμανση των τ. μ. X και W δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}Cov(W,X) &= E[Cov(X,W\mid W)]+Cov[E(X\mid W,E(W\mid W)]\\ &= Cov[e^{-\beta W}\mu_1+(1-e^{-\beta W})\mu_2,W]\\ &= -Cov(e^{-\beta W},W)(\mu_2-\mu_1)\\ &= \frac{\beta}{(\lambda+\beta)^2}(\mu_2-\mu_1)\ ,\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$Cov(W,X)>0\ \ \gamma\iota\alpha\ E(Y_2)>E(Y_1)\ ,$$

$$\text{ενώ}\quad Cov(W,X)<0\ \ \gamma\iota\alpha\ E(Y_2)<E(Y_1)\ .$$

Θεωρούμε ότι, για σταθερά $a>0$, η συνάρτηση κατανομής των εξαρτημένων μεγεθών X και W δίνεται από τη σχέση

$$F_{x/w}(x\mid t)=e^{-at}F_{Y_1}(x)+(1-e^{-at})F_{Y_2}(x)$$

όπου Y_1 *και* Y_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες από την W .

Από τα παραπάνω, έπεται ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_{X/W}$ της τ. μ. X/W και η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ. μ. X , είναι αντίστοιχα

$$M_{X/W}(x/t)=e^{-at}M_{Y_1}(x)+(1-e^{-at})M_{Y_2}(x),$$

$$\text{και}\ \ M_X(x)=M_W(-a)M_{Y_1}(x)+\Big[1-M_W(-a)\Big]M_{Y_2}(x)\ .$$

Επίσης, η ροπή τάξης $n=1,2,3,\ldots$, της τ. μ. X , είναι

$$E(X^n)=M_W(-a)E(Y_1^n)+\Big[1-M_W(-a)\Big]E(Y_2^n)$$

Στην συνέχεια, θα δειχθεί πως υπολογίζονται η περιθώρια συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ. μ. X . Είναι

$$f_{X/W}(x/t)=\frac{f_{X,W}(x,t)}{f_W(t)}\Leftrightarrow$$

$$f_{X,W}(x,t)=f_{X/W}(x/t)f_W(t)$$

$$=[e^{-at}f_{Y_1}(x)+(1-e^{-at})f_{Y_2}(x)]\,f_W(t)$$

$$=e^{-at}f_{Y_1}(x)\,f_W(t)+f_{Y_2}(x)\,f_W(t)-e^{-at}f_{Y_2}(x)f_W(t).$$

Τότε,

$$f_X(x)=\int_0^{\infty}f_{X,W}(x,t)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-at}f_W(t)\,f_{Y_1}(x)\,dt+\int_0^{\infty}f_W(t)\,f_{Y_2}(x)\,dt-\int_0^{\infty}e^{-at}f_W(t)\,f_{Y_2}(x)\,dt$$

$$=f_{Y_1}(x)\int_0^{\infty}e^{-at}f_W(t)\,dt+f_{Y_2}(x)\int_0^{\infty}f_W(t)\,dt-f_{Y_2}(x)\int_0^{\infty}e^{-at}f_W(t)\,dt$$

$$=f_{Y_1}(x)M_W(-a)+f_{Y_2}(x)-f_{Y_2}(x)\,M_W(-a)\ ,$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι η ροπογεννήτρια της τ.μ. W, στην θέση $-a$,(ή ο μετασχηματισμός Laplace).

Άρα,

$$f_X(x)=M_W(-a)f_{Y_1}(x)+(1-M_W(-a))f_{Y_2}(x)\Rightarrow$$

$$F_X(x)=M_W(-a)F_{Y_1}(x)+(1-M_W(-a))F_{Y_2}(x)$$

3.4.1 Εξάρτηση με αναλογική αντασφάλιση

Στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης, ο συντελεστής προσαρμογής R, προκύπτει ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$E\left[e^{r(aX-C(a)W)}\right]=1$$

Θεωρώντας ότι υπάρχουν οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις των τ. μ. Y_1,Y_2,W η παραπάνω σχέση, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$M_{Y_1}(ar)M_W(-rC(a)-a)+M_{Y_2}(ar)\left\{M_W[-rC(a)]-M_W[-rC(a)-a]\right\}=1\ ,$$

όπου

$a:$ όριο ιδίας κράτησης με $a \in [0,1]$, και

$C(a):$ ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων.

Όπως είναι ήδη γνωστό, ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση στο διάστημα $(a_0,1]$, οπότε στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης, ο παραπάνω τύπος είναι χρήσιμος μόνο για αριθμητικά αποτελέσματα.

Αριθμητική εφαρμογή

Έστω,

$Y_i \sim Gamma(\lambda_i,\lambda_i)$ με

$$f_{Y_i}(x) = \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\Gamma(\lambda_i)} x^{\lambda_i - 1} e^{-\lambda_i x} , \; x > 0$$

$W \sim G(x,\delta)$ με

$$f_W(t) = \frac{\delta^x}{\Gamma(x)} t^{x-1} e^{-\delta t} , \; t > 0 .$$

Είναι

$$Var(Y_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2} = \frac{1}{\lambda_i} ,$$

οπότε αν $\lambda_1 < \lambda_2$ έπεται ότι

$$Var(Y_1) \geq Var(Y_2) .$$

Επειδή,

$$M_{Y_1}(u) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - u} \right)^{\lambda_1} , \; \lambda_1 < u$$

$$M_{Y_2}(u) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - u} \right)^{\lambda_2} , \; \lambda_2 < u .$$

Τότε αν $Var(Y_1) > Var(Y_2)$ (ή ισοδύναμα αν $\lambda_1 < \lambda_2$), έπεται ότι

$$M_{Y_1}(ar) > M_{Y_2}(ar).$$

Επειδή,

$$M_W(u) = \left(\frac{\delta}{\delta - u}\right)^x \text{ για } \delta > u,$$

είναι

$$M_W(-rC(a)-a) = \left(\frac{\delta}{\delta + rC(a) - a}\right)^x.$$

Προφανώς, η $M_W(-rC(a)-a)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς a.

Έστω,

$$\begin{aligned} g(a) = {} & M_{Y_1}(ar)M_W(-rC(a)-a) + \\ & M_{Y_2}(ar)\{M_W[-rC(a)] - M_W[-rC(a)-a]\} \\ = {} & M_{Y_2}(ar)M_W[-rC(a)] + \\ & [M_{Y_1}(ar) - M_{Y_2}(ar)]M_W[-rC(a)-a]. \end{aligned}$$

Άρα, αν $Var(Y_1) > Var(Y_2)$, τότε η $g(a)$ είναι αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση ως προς a.

Επομένως, για $a_1 < a_2$, ισχύει ότι $g(a_1) > g(a_2)$, οπότε θα ισχύει και ότι $R_{a_1} < R_{a_2}$.

Δηλαδή, όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου a, τόσο αυξάνει και η τιμή του συντελεστή προσαρμογής.

Επίσης, και η κατανομή της τ. μ. W είναι σημαντική στη διαμόρφωση της τιμής του συντελεστή προσαρμογής. Για παράδειγμα, όταν $W \sim Exp(1) = G(1,1)$, ο συντελεστής προσαρμογής είναι μικρότερος από όταν η $W \sim G(2,2)$. Επομένως, όταν η διακύμανση της τ. μ. W αυξάνει, τότε η τιμή του R φθίνει.

3.5 Δομή εξάρτησης μέσω μοντέλων ευπάθειας

Η βασική υπόθεση στο συγκεκριμένο μοντέλο, είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές $(X_i)\ και (W_i)$, με γνωστή την τυχαία μεταβλητή (Θ_i), είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ισχύει, δηλαδή, ότι $(X_i/\theta_i = \theta, W_i/\theta_i = \theta)_{i\geq 1}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητα και ισόνομα (i.i.d.) διανύσματα. Επίσης, υποθέτουμε ότι η $(\Theta_i)_i$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες (i.i.d.) τυχαίες μεταβλητές, η οποία ακολουθεί μια διακριτή κατανομή για $\left\{\theta_1,\ldots,\theta_m\right\}$.

Βάσει των παραπάνω παραδοχών, προκύπτει ότι

$$F_{X,W}(x,t)=\sum_{j=1}^{m}Pr\,ob(\Theta=\theta_j)F_{X/\Theta}(x/\theta_j)F_{W/\Theta}(x/\theta_j)\,.$$

Έτσι, ο συντελεστής προσαρμογής αποτελεί τη λύση της εξίσωσης

$$\sum_{j=1}^{m}Pr\,ob(\Theta=\theta_j)M_{X/\Theta}(r/\theta_j)M_{W/\Theta}(-rC/\theta_j)=1$$

3.5.1 Δομή εξάρτησης μέσω μοντέλων ευπάθειας στην αναλογική αντασφάλιση

Στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης, είναι ήδη γνωστό ότι ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$, είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(a_0,1]$ για κάθε μορφή εξάρτησης. Ο στόχος σε αυτή την περίπτωση, είναι να μελετηθεί η επίδραση της κατανομής του Θ στον συντελεστή προσαρμογής.

Για $X/\Theta=\theta_j \sim G(a,\theta_j)\ \kappa\alpha\iota\ W/\Theta=\theta_j \sim G(\beta,\theta_j)$, η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής γίνεται

$$\sum_{j=1}^{m}Pr\,ob(\Theta=\theta_j)\left[\frac{\theta_j}{\theta_j-ar}\right]^{a}\left[\frac{\theta_j}{\theta_j+rC(a)}\right]^{\beta}=1\,.$$

Έστω $\bar{e}$ ο δείκτης αναμενόμενης τιμής των X προς την αναμενόμενη τιμή των W , δηλαδή $\bar{e}=\dfrac{E(X)}{E(W)}$. Όταν αυξάνεται αυτός ο δείκτης, τότε ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ μειώνεται δραματικά.

Ακόμη, η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή Θ, ασκεί μεγάλη επιρροή στην τιμή του συντελεστή προσαρμογής. Πιο συγκεκριμένα, όσο μειώνεται η μέση τιμή της Θ, δηλαδή αυξάνονται οι $E(X)\ \kappa\alpha\iota\ E(W)$, τόσο μειώνεται ο συντελεστής προσαρμογής.

4ο Κεφάλαιο: « Μελέτη του συντελεστή προσαρμογής R με αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας »

4.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Ο Centeno, το 1995, ασχολήθηκε με την βέλτιστη αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας της πιθανότητας χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο, στην περίπτωση ανεξαρτησίας των μεγεθών των ατομικών ζημιών και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα εξετασθεί μέσω διάφορων αρχών η μεγιστοποίηση του συντελεστή προσαρμογής για την αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως αναλύθηκε και για την αναλογική αντασφάλιση. Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής προσαρμογής, θα μελετηθεί μέσω των παρακάτω αρχών

- Αρχή της αναμενόμενης τιμής,
- Αρχή της διακύμανσης
- Αρχή της τυπικής απόκλισης
- Εκθετική αρχή.

Ουσιαστικά, θα αποδειχτεί ότι ο συντελεστής προσαρμογής $R(L)$ αποτελεί μονοκόρυφη συνάρτηση του ορίου ιδίας κράτησης, το οποίο, όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελεί ικανή συνθήκη, για την βέλτιστη αντασφάλιση.

Οι παρακάτω έννοιες του γενικού μοντέλου κινδύνου χρησιμοποιούνται, και σε αυτό το κεφάλαιο, ώστε να διεξαχθούν αποτελέσματα.

- ***Χρόνος χρεοκοπίας:*** $T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$
- ***Ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων:*** $C = (1+\eta)\dfrac{E(X)}{E(W)}$
- ***Πιθανότητα χρεοκοπίας:*** $\psi(u) = \Pr ob(T < \infty) \le e^{-Ru}$.

Τέλος, θα δομηθεί η εξάρτηση πάνω στην κατανομή των μεγεθών των ατομικών ζημιών και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων, ενώ στην συνέχεια, θα αναλυθούν

- Η δομή εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών των ατομικών ζημιών X_i και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων W_i.
- Και η εξάρτηση, μέσω μοντέλων ευπάθειας.

4.2 Αρχή της αναμενόμενης αξίας

Έστω, $L \in R^{+}$ το όριο ιδίας κράτησης του πρωτασφαλιστή για κίνδυνο X για μια αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας (excess-of-loss reinsurance).

Τότε, ο κίνδυνος που καλύπτεται από τον πρωτασφαλιστή είναι

$$X(L) = X \wedge L = min(X, L) = \begin{cases} X, X \leq L \\ L, X > L \end{cases}.$$

Όπως και προηγούμενα, έτσι και εδώ, τα περιθώρια του κινδύνου η και η_R θεωρούνται γνωστά και σταθερά με $\eta < \eta_R$.

Έτσι, το καθαρό ασφάλιστρο ανά μονάδα χρόνου $C(L)$, είναι

$$C(L) = (1+\eta)\frac{E(X)}{E(W)} - (1+\eta_R)\frac{E\left[\left(X-L\right)_+\right]}{E(W)},$$

όπου,

$$\left(X-L\right)_+ = X - (X \wedge L) = max\{0, X-L\} = \begin{cases} 0, \ X \leq L \\ X-L, X > L \end{cases},$$

είναι το μέρος του κινδύνου που καλύπτει ο αντασφαλιστής.

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγός του $C(L)$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$C'(L) = (1+\eta_R)\frac{\overline{F}_X(L)}{E(W)}$$

και $$C''(L) = -(1+\eta_R)\frac{f_X(L)}{E(W)}$$

θεωρώντας ότι υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας f_X της τ. μ. X και

$$\overline{F}_X = Prob(X > x)$$

είναι η επιβίωσης της τ. μ. X.

Και σε αυτή την περίπτωση, επιδίωξη αποτελεί η μεγιστοποίηση του συντελεστή προσαρμογής R, ο οποίος είναι η ρίζα της γνωστής εξίσωσης:

$$h(r,L)=ln\left\langle E\left\{e^{r\left[X(L)-C(L)W\right]}\right\}\right\rangle=0$$

η οποία καλείται εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση g, η οποία ορίζεται ως

$$g(L)=\frac{\partial h}{\partial r}(0,L)=E\left[\left(X\wedge L\right)-C(L)W\right].$$

Συνεπώς, η παραπάνω συνάρτηση του συντελεστή προσαρμογής R έχει θετική ρίζα, αν και μόνο αν $g(L)<0$, για τον ίδιο λόγο που ίσχυε και στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης. Στην συγκεκριμένη μορφή αντασφάλισης, ισχύει ότι η συνάρτηση h εκφράζεται από την σχέση

$$h(r,L)=ln\left\{E\left[e^{r(X\wedge L-C(L)W)}\right]\right\}.$$

Η συνάρτηση $r\to h(r,L)$ είναι κυρτή, αφού η συνάρτηση h είναι μία C^2 συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών θετικών αριθμών $\Re^+$, επειδή

$$\frac{d^2h}{dr^2}(r,L)=\frac{E\left[(X\wedge L-C(L)W)^2e^{r(X\wedge L-C(L)W)}\right]}{E\left[e^{r(X\wedge L-C(L)W)}\right]}-\left[\frac{E\left[(X\wedge L-C(L)W)e^{r(X\wedge L-C(L)W)}\right]}{E\left[e^{r(X\wedge L-C(L)W)}\right]}\right]^2>0$$

ως μεταβλητή μετασχηματισμού Esscher.

Η συνάρτηση g μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη μορφή

$$g(L)=(\eta_R-\eta)E(X)-\eta_R E(X\wedge L)$$

όπου η περιορισμένη αναμενόμενη τιμή $E(X \wedge L)$ είναι ίση με

$$\int_0^L \overline{F}_X(x)dx .$$

Η g είναι αυστηρώς φθίνουσα συνάρτηση, επειδή

$$g'(L) = -\eta_R \overline{F}_X(L) < 0 .$$

Από τις

$$g(0) = (\eta_R - \eta)E(X) > 0$$

και $$\lim_{L \to +\infty} g(L) = -\eta E(X) < 0$$

έπεται ότι υπάρχει $L_0 > 0$, το οποίο μηδενίζει την συνάρτηση g.

Επομένως, εξασφαλίζεται ότι υπάρχει $L_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $L > L_0,\ g(L) < 0$, κάτι το οποίο έρχεται να επιβεβαιώσει ότι η ανωτέρω συνάρτηση του συντελεστή προσαρμογής έχει μία θετική ρίζα, όταν $L \in (L_0, +\infty)$.

Στη συνέχεια, θα εξετασθεί το μονοκόρυφο του συντελεστή προσαρμογής $R = R(L)$.

Αρχικά, θα πρέπει να δειχθεί ότι η πρώτη παράγωγος $\frac{\partial R}{\partial L}$ έχει ακριβώς μια ρίζα, έστω L^* και στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2 R(L^*)}{\partial L^2} < 0$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της «έμμεσης συνάρτησης», προκύπτει το εξής:

$$\frac{\partial R}{\partial L}(L) = -\left.\frac{\frac{\partial h}{\partial L}(r,L)}{\frac{\partial h}{\partial r}(r,L)}\right|_{r=R}$$

και χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με το προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει ότι η $\frac{\partial R}{\partial L}(L) = 0$, είναι ισοδύναμη με την $\frac{\partial h}{\partial L}(R,L) = 0$.

Έτσι, το βέλτιστο όριο ιδίας κράτησης L^* είναι τέτοιο ώστε

$$\frac{\partial h}{\partial L}(R, L^*) = 0.$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί

$$X \wedge L = \begin{cases} X \text{ , για } X \le L \\ L \text{ , για } X > L \end{cases}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, ως προς L προκύπτει

$$\frac{\partial X \wedge L}{\partial L} = \begin{cases} 0 \text{ , για } X \le L \\ 1 \text{ , για } X > L \end{cases} = 1_{(X > L)} \, .$$

Στην συνέχεια, θα εξετασθεί η παράγωγος της δείκτριας συνάρτησης $1_{(X>L)}$, ως προς L, η οποία παραγωγίζεται στο σύνολο των πραγματικών θετικών αριθμών $\Re_+$, εκτός από την τιμή X και υπολογίζεται από την σχέση

$$\lim_{L \to X^-} \frac{1_{(L>L)} - 1_{(X>L)}}{L - X} = \lim_{L \to X^-} \frac{-1}{L - X} = +\infty$$

και $$\lim_{L \to X^+} \frac{1_{(L>L)} - 1_{(X>L)}}{L - X} = \lim_{L \to X^+} 0 = 0 ,$$

Οπότε,

$$\frac{\partial 1_{(X>L)}}{\partial L} = 0 ,$$

καθώς η X είναι συνεχής.

Τότε, ισχύει ότι

$$\frac{E\left\{ R\left[1_{(X > L^*)} - C'(L^*)W \right] e^{R\left[X(L^*) - C'(L^*)W \right]} \right\}}{E\left\{ e^{R\left[X(L^*) - C'(L^*)W \right]} \right\}} = 0 ,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{E\left\{R\left[1_{(X>L^*)}-C'(L^*)W\right]e^{R\left[X(L^*)-C'(L^*)W\right]}\right\}}{f(L^*)}=0.$$

Η παραπάνω εξίσωση, δεν έχει πάντοτε μία μοναδική ρίζα, καθώς όπως αποδεικνύεται παρακάτω, η συνάρτηση f που ορίζεται ως το δεξιά μέρος της παραπάνω εξίσωσης, έχει μερικές φορές περισσότερες από μία ρίζες ή και καμία απολύτως.

Αρχικά, ορίζεται η συνάρτηση f ως εξής

$$f(L)=E\left\{\left[1_{(X>L)}-C'(L)W\right]e^{R\left[X(L)-C(L)W\right]}\right\}.$$

Η μελέτη των ριζών της $f(L)=0$ είναι αρκετά πολύπλοκη.

Ισχύει ότι

$$lim_{L\to\infty}\, f(L)=0$$

επειδή και η δείκτρια συνάρτηση $1_{(X>L)}$ και η πρώτη παράγωγος $C'(L)=(1+\eta_R)\dfrac{\overline{F}_X(L)}{E(W)}$, τείνουν στο μηδέν όταν $L\to\infty$. Ωστόσο, η λύση $L=+\infty$, δεν αποτελεί μαθηματική, αλλά ούτε και πρακτική λύση, καθώς κάτι τέτοιο θα σημαίνει ότι ο πρωτασφαλιστής δεν θα αντασφαλίζονταν (θα κρατούσε για κάλυψη ολόκληρο τον κίνδυνο).

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$f(L_0)\triangleq E\left\{\left[1_{(X>L_0)}-C'(L_0)W\right]e^{0}\right\}=-2\,\eta_R\, F_X(L_0)E\left[(X-L_0)_+\right]<0.$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι

$$f'(L) = -E\left\{C''(L)W\, e^{R[X(L)-C(L)W]}\right\}+$$

$$RE\left\{[1_{(X>L)} - C'(L)W]^2 e^{R[X(L)-C(L)W]}\right\}+$$

$$R'(L)E\left\{[1_{(X>L)} - C'(L)W][X(L) - C(L)W]e^{R[X(L)-C(L)W]}\right\}.$$

Στην παραπάνω σχέση, θεωρείται ως δεδομένο ότι η X είναι συνεχής, διαφορετικά η δεύτερη παράγωγος $C''(L)$ δεν ορίζεται.

Επιπλέον, ισχύει ότι η $C''(L) = -(1+\eta_R)\dfrac{f_X(L)}{E(W)} < 0$.

Από την μελέτη, λοιπόν, της παραγώγου, δεν επιβεβαιώνεται ότι η συνάρτηση f είναι μία αύξουσα συνάρτηση, με αποτέλεσμα να υπάρχει μοναδικό $L^* \in [L_0, +\infty)$, το οποίο μηδενίζει την f.

Στη συνέχεια, ωστόσο, θεωρείται ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς μία ρίζα L^* στο διάστημα $(L_0, +\infty)$.

Η δεύτερη παράγωγους $\dfrac{\partial^2 R(L^*)}{\partial L^2}$, είναι

$$\frac{\partial^2 R}{\partial L^2} = -\left.\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial L^2}(r,L)}{\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,L)}\right|_{r=R, L=L^*},$$

και γνωρίζοντας ότι $\dfrac{\partial h}{\partial L}(R,L) > 0$, το πρόσημο της δεύτερης αυτής παραγώγου είναι ίδιο με το πρόσημο της συνάρτησης

$$\frac{\partial^2 h}{\partial L^2}(R,L^*)=\frac{E\left\langle R\left\{R\left[1_{(X>L^*)}-C'(L^*)W\right]^2-C''(L)W\right\}e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\rangle}{E\left\{e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\}}$$

$$-\left\langle\frac{E\left\{R\left[1_{(X>L^*)}-C'(L^*)W\right]e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\}}{E\left\{e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\}}\right\rangle^2.$$

Επιπλέον, επειδή το L^* μηδενίζει την πρώτη παράγωγο του R, έπεται ότι

$$\frac{\partial^2 h}{\partial L^2}(R,L^*)=\frac{E\left\langle R\left\{R\left[1_{(X>L^*)}-C'(L^*)W\right]^2-C''(L^*)W\right\}e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\rangle}{E\left\{e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\}}$$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα ισχύουν μόνο όταν η μεταβλητή X είναι συνεχής, έτσι ώστε να υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $C''(L)$:

$$C''(L)=-(1+\eta_R)\frac{f_X(L)}{E(W)}<0,$$

και $\frac{\partial I_{\{X>L^*\}}}{\partial L}$ είναι σχεδόν βέβαια μηδέν (είναι μηδέν με πιθανότητα ένα), όπως αποδείχθηκε και προηγουμένως.

Τότε, ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 h}{\partial L^2}(R,L^*) = \frac{E\left\langle R\left\{R\left[1_{(X>L^*)} - C'(L^*)W\right]^2 + (1+\eta_R)\frac{f_X(L)}{E(W)}W\right\}e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\rangle}{E\left\{e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\}} > 0$$

επειδή

$$P\left[1_{(X>L^*)} = C'(L^*)W\right] = 0,$$

όταν οι μεταβλητές X και W είναι συνεχείς.

Κατά συνέπεια, η δεύτερη παράγωγος $\frac{\partial^2 R}{\partial L^2}(L^*)$ έχει αντίθετο πρόσημο από την $\frac{\partial h}{\partial L}(R,L^*)$ και έτσι, η συνάρτηση $L \to R(L)$ είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(L_0,+\infty)$.

Ωστόσο, σε αντίθεση με την αναλογική αντασφάλιση, αυτή η περίπτωση αντασφάλισης δεν εγγυάται ότι η συνάρτηση $L \to R(L)$ είναι μονοκόρυφη, παρά μόνο όταν η συνάρτηση:

$$E\left\{\left[1_{(X>L)} - C'(L)W\right]e^{R\left[X(L)-C(L)W\right]}\right\} = 0$$

έχει μία μοναδική ρίζα L^*. Ενώ, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\frac{\partial^2 R}{\partial L^2}(R,L^*) < 0$ η συνάρτηση $L \to R(L)$ είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(L_0,+\infty)$. Διαφορετικά, όλες οι ρίζες L^* είναι τοπικά μέγιστα.

4.3 Άλλες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Όπως στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης, θα μελετηθεί ο συντελεστής προσαρμογής R και με άλλες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Πιο συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιηθούν οι ίδιες αρχές με την προηγούμενη ενότητα, δηλαδή αυτές της:

- ***Αρχή της Διακύμανσης***
- ***Αρχή της Τυπικής Απόκλισης***

- ***Εκθετική Αρχή.***

4.3.1 Αρχή της διακύμανσης

Η αρχή της διακύμανσης στην αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημίας, ορίζεται ως

$$C(L) = \frac{E(X) + \eta Var(X)}{E(W)} - \frac{E\left[(X-L)_+\right] + \eta_R Var\left[(X-L)_+\right]}{E(W)}$$

$$= \frac{E\left[X \wedge L\right] + \eta Var(X) - \eta_R Var\left[(X-L)_+\right]}{E(W)}.$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$C'(L) = \frac{\overline{F}_X(L) + 2\eta_R F_X(L) E\left[(X-L)_+\right]}{E(W)}$$

και $$C''(L) = \frac{-f_X(L) - 2\eta_R \overline{F}_X(L) F_X(L) + 2\eta_R f_X(L) E\left[(X-L)_+\right]}{E(W)}.$$

Στη συνέχεια, θα γίνει η μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων g και f, καθώς και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου του συντελεστή προσαρμογής.

Ισχύει ότι

$$g(L) = -\eta Var(X) + \eta_R Var\left[(X-L)_+\right]$$

και $$g'(L) = -2\eta_R F_X(L) E\left[(X-L)_+\right].$$

Ως εκ τούτου, η συνάρτηση g είναι αυστηρώς φθίνουσα με

$$g(0) = (\eta_R - \eta) Var(X) > 0$$

και τείνει στο $-\eta Var(X) < 0$, όταν το L τείνει στο $+\infty$.

Έτσι, υπάρχει μοναδικό L_0, έτσι ώστε για κάθε $L > L_0$, να είναι $g(L) < 0$, οπότε ο $R(L)$ υπάρχει στο διάστημα $(L_0, +\infty)$.

Από την μελέτη, της παραγώγου της συνάρτησης f, η οποία γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην αρχή της αναμενόμενης τιμής, δεν επιβεβαιώνεται ότι η f είναι μία αύξουσα συνάρτηση, με αποτέλεσμα να υπάρχει μοναδικό $L^* \in [L_0,+\infty)$, το οποίο μηδενίζει την f.

Αντίστοιχα, από την μελέτη της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f καθίσταται αδύνατος ο προσδιορισμός του πρόσημου της. Υπάρχουν μερικές περιπτώσεις όπου η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[L_0,+\infty)$, ωστόσο δεν υπάρχει ρίζα, το οποίο φανερώνει ότι το βέλτιστο όριο διατήρησης L^* θα είναι $+\infty$.

Τέλος, η μελέτη του πρόσημου της δεύτερης παραγώγου $R''(L)$ παρουσιάζει και αυτή προβλήματα. Επισημαίνεται, ότι το πρόσημό της είναι το αντίθετο της

$$\frac{\partial^2 h}{\partial L^2}(R,L^*) = \frac{E\left\langle R\left\{R\left[1_{(X>L^*)} - C'(L^*)W\right]^2 - C''(L)W\right\}e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\rangle}{E\left\{e^{R\left[X(L^*)-C(L^*)W\right]}\right\}}.$$

Ωστόσο, η δεύτερη παράγωγος $C''(L)$ δεν είναι πάντα αρνητική. Έτσι, δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι το $R(L^*)$ είναι το μέγιστο, σε αντίθεση με την περίπτωση της αρχής της αναμενόμενης τιμής, καθώς η συνάρτηση $\frac{\partial^2 h}{\partial L^2}(R,L^*)$ μπορεί να είναι αρνητική. Όμως, μπορεί εύλογα να αποδειχθεί ότι ο όρος $\left[1_{(X>L^*)} - C'(L^*)W\right]^2$ είναι μεγαλύτερος από τον $C''(L)W$ κατά μέσο όρο.

Το παραπάνω, τέλος, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι συνάρτηση $R(L)$ δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι είναι μονοκόρυφη, ακόμη και αν η συνάρτηση f μηδενιστεί μία φορά.

4.3.2 Αρχή της τυπικής απόκλισης

Η αρχή της τυπικής απόκλισης στην αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημίας, δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$C(L)=\frac{E(X)+\eta\sqrt{Var(X)}}{E(W)}-\frac{E\left[(X-L)_+\right]+\eta_R\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}}{E(W)}$$

$$=\frac{E[X\wedge L]+\eta\sqrt{Var(X)}-\eta_R\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}}{E(W)}$$

όπου, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$C'(L)=\frac{\overline{F}_X(L)}{E(W)}+\eta_R\frac{F_X(L)\,E\left[(X-L)_+\right]}{E(W)\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}}$$

και $$C''(L)=-\frac{f_X(L)}{E(W)}+\eta_R\frac{\overline{F}_X(L)F_X(L)+f_X(L)E\left[(X-L)_+\right]}{E(W)\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}}-\eta_R\frac{\left\{E\left[(X-L)_+\right]F_X(L)\right\}^2}{E(W)\left\{\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Επιπλέον, είναι απαραίτητη η μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων f και g. Είναι

$$g(L)=-\eta\sqrt{Var(X)}+\eta_R\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}$$

και $$g'(L)=-\eta_R\frac{F_X(L)\,E\left[(X-L)_+\right]}{\sqrt{Var\left[(X-L)_+\right]}}.$$

Επειδή

$$g(0)=(\eta_R-\eta)\sqrt{Var(X)}>0,$$

και η g τείνει στο $-\eta\sqrt{Var(X)}<0$, όταν το L τείνει στο $+\infty$, η g έχει μοναδική ρίζα L_0, τέτοια ώστε η συνάρτηση $R(L)$ να ορίζεται μόνο στο διάστημα $(L_0,+\infty)$.

Τέλος, το πρόβλημα με τον αριθμό των ριζών της f εξακολουθεί να ισχύει, όπως και με την προηγούμενη αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου, ενώ η παράγωγος $C''(L)$ δεν είναι πάντα αρνητική.

Όπως και στην αρχή της διακύμανσης, έτσι και εδώ, η συνάρτηση $L \to R(L)$ δεν είναι πάντα μονοκόρυφη, ακόμη και αν η συνάρτηση f μηδενιστεί μία φορά.

4.3.3 Εκθετική αρχή

Η εκθετική αρχή στην αντασφάλιση υπερβάλλουσας ζημίας, δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$C(L) = \frac{ln\left[E(e^{\eta X})\right]}{\eta\, E(X)} - \frac{ln\left\{E\left[e^{\eta_R (X-L)_+}\right]\right\}}{\eta_R E(X)},$$

όπου, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$C'(L) = \frac{1}{E(X)} + \frac{f_X(L)}{\eta_R\, E(X)\, E\left[e^{\eta_R (X-L)_+}\right]}$$

και $$C''(L) = \frac{f'_X(L) + \eta_R\ f_X(L)}{\eta_R\ E(X)\, E\left[e^{\eta_R (X-L)_+}\right]} + \frac{f_X^2(L)}{\eta_R\ E(X) E^2\left[e^{\eta_R (X-L)_+}\right]}.$$

Επιπλέον, η αντίστοιχη συνάρτηση g είναι

$$g(L) = E[X \wedge L] - \frac{ln\left[E(e^{\eta X})\right]}{\eta} + \frac{ln\left\{E\left[e^{\eta_R (X-L)_+}\right]\right\}}{\eta_R},$$

της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι

$$g'(L) = -F_X(L) - \frac{f_X(L)}{\eta_R\ E\left[e^{\eta_R (X-L)_+}\right]} < 0.$$

Επειδή το $g(0)$ είναι θετικό και η g τείνει στο $-\frac{ln\left[E(e^{\eta X})\right]}{\eta E(X)}<0$, όταν το L τείνει στο $+\infty$, έπεται ότι υπάρχει μοναδικό L_0 έτσι ώστε για κάθε $L>L_0$, να ισχύει $g(L)<0$. Άρα, υπάρχει ο $R(L)$ στο διάστημα $(L_0,+\infty)$

Και σε αυτή την περίπτωση, η εύρεση του αριθμού των ριζών της f παρουσιάζει προβλήματα. Έτσι, η συνάρτηση $L\to R(L)$ δεν είναι πάντα μονοκόρυφη.

Κλείνοντας, σαν γενικό συμπέρασμα από τις τρεις αυτές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου, διαφαίνεται ότι δεν είναι δυνατή η εγγύηση ότι η συνάρτηση $L\to R(L)$ είναι μονοκόρυφη στο διάστημα $(L_0,+\infty)$, ακόμα και αν η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται ακριβώς μία φορά. Αυτή είναι και η βασική διαφορά από την αρχή της αναμενόμενης τιμής.

4.4 Εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών ατομικών ζημιών και χρόνων εμφάνισης των κινδύνων με αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας

Στην περίπτωση της αντασφάλισης με υπερβάλλοντος ζημίας, ο συντελεστής προσαρμογής R, προκύπτει ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$E\left[e^{r(X\wedge L-C(L)W)}\right]=1,$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται ως

$$M_{Y_1\wedge L}(r)M_W(-rC(L)-a)+M_{Y_2\wedge L}(r)\left\{M_W[-rC(L)]-M_W[-rC(L)-a]\right\}=1,$$

όπου L είναι το όριο ιδίας κράτησης του πρωτασφαλιστή.

Στη συνέχεια, θα μελετηθεί το μονοκόρυφο του συντελεστή προσαρμογής.

Έστω, η τ. μ. $Y_i\sim Erl(n_i,\lambda_i), i=1,2$. Τότε

$$M_{Y_i\wedge L}(r)=\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i-r}\right)^{n_i}F_{n_i,\lambda_{i-r}}(L)+e^{rL}\overline{F}_{n_i,\lambda_i}(L),$$

όπου $F_{n,\lambda}(L)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας $Erl(n,\lambda)$ και η οποία ισούται με

$$F_{n,\lambda}(x)=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}e^{-\lambda x}.$$

Όπως είναι ήδη γνωστό, ο συντελεστής προσαρμογής $R(L)$ θα είναι μια μονοκόρυφη συνάρτηση, αν και μόνο αν η συνάρτηση f έχει μοναδική θετική ρίζα στο διάστημα $(L_0,+\infty]$.

Υποθέτοντας την εξάρτηση των μεγεθών, η συνάρτηση f ορίζεται ως

$$f(L)=E\left\{\left[1_{(X>L)}-C'(L)W\right]e^{R\left[X\wedge L-C(L)W\right]}\right\}$$

$$=\left\{\overline{F}_{Y_1}(L)M_W(-a)+\overline{F}_{Y_2}(L)\left[1-M_W(-a)\right]\right\}e^{RL}M_W\left[-RC(L)\right]$$

$$-C'(L)\left\{M_{Y_1\wedge L}(R)M_W(-a)+\left[1-M_W(-a)\right]M_{Y_2\wedge L}(R)\right\}M'_W\left[-RC(L)\right]$$

Για $Y_i \sim Erl(n_i,\lambda_i)$, προκύπτει ότι:

$$f(L)=e^{RL}\overline{F}_X(L)\left\{M_W\left[-RC(L)\right]-C'(L)M'_W\left[-RC(L)\right]\right\}$$

$$-C'(L)M'_W[-RC(L)]\left[p_aM_{Y_1}(R)F_{n_1,\lambda_1-R}(L)+(1-p_a)M_{Y_2}(R)F_{n_2,\lambda_2-R}(L)\right]$$

όπου $p_a=M_W(-a)$.

Η συνάρτηση $f(L)$ έχει μοναδική θετική λύση, καθώς είναι συνδυασμός συνεχών και αυστηρά κυρτών συναρτήσεων. Έτσι, ο συντελεστής προσαρμογής $R(L)$ είναι μια μονοκόρυφη συνάρτηση.

Ακριβώς όπως και στην αναλογική αντασφάλιση, ισχύει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το a, τόσο μεγαλύτερη είναι και η τιμή του συντελεστή προσαρμογής και όταν η διακύμανση της W αυξάνεται, τόσο μειώνεται ο συντελεστής προσαρμογής.

4.5 Δομή εξάρτησης μέσω μοντέλων ευπάθειας στην αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας

Στην περίπτωση της αντασφάλισης υπερβάλλοντος ζημίας, η εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{m}Prob(\Theta=\theta_j)M_{X/\Theta}(r/\theta_j)M_{W/\Theta}(-rC/\theta_j)=1\ ,$$

γίνεται

$$\sum_{j=1}^{m} Prob(\Theta=\theta_j) M_{X^{\wedge}L/\Theta}(r/\theta_j) M_{W/\Theta}\left[-rC(L)/\theta_j\right]=1 \ .$$

Για να αποδειχθεί ότι ο συντελεστής προσαρμογής $R(L)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδική θετική ρίζα στο $(L_0,+\infty)$.

Έστω ότι $X/\Theta=\theta_j \sim Exp(\theta_j)$ *και* $W/\Theta=\theta_j \sim Exp(\theta_j)$, τότε η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής γίνεται

$$\sum_{j=1}^{m} Prob(\Theta=\theta_j)\left[\frac{-\theta_j}{\theta_j-r}+\frac{-re^{-(\theta_j-r)L}}{\theta_j-r}\right]\frac{\theta_j}{\theta_j+rC(L)}=1 \ .$$

Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει ότι

$$f(L)=\sum_{j=1}^{m} R\, p_j M_{W,\theta_j}\left[-RC(L)\right]e^{-(\theta_j-R)L}\left\{1+\frac{(1+\eta_R)e^{-\theta_j L}}{\left[\theta_j+RC(L)\right](\theta_j-R)}\left[R-\theta_j e^{(\theta_j-R)L}\right]\right\},$$

όπου $p_j=Prob(\Theta=\theta_j)$ *και* θ_j περιγράφει την εξαρτημένη αντίστοιχη ποσότητα, γνωρίζοντας ότι $\Theta=\theta_j$.

Αντίστοιχα, έστω ότι: $X/\Theta=\theta_j \sim G(a,\theta_j)$ *και* $W/\Theta=\theta_j \sim G(\beta,\theta_j)$, τότε η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής γίνεται

$$M_{X^{\wedge}L/\Theta}(r/\theta_j)=\left(\frac{\theta_j}{\theta_j-r}\right)^{a} F_{a,\theta_j-r}(L)+e^{rL}\overline{F}_{a,\theta_j}(L) \ ,$$

όπου $F_{a,\theta}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της ***Gamma*** με παραμέτρους (a,θ). Σε αυτή την περίπτωση, η σχέση $(2.5.1)$ γίνεται:

$$\sum_{j=1}^{m} Prob(\Theta=\theta_j)\left[\left(\frac{\theta_j}{\theta_j-r}\right)^{a} F_{a,\theta_j-r}(L)+e^{rL}\overline{F}_{a,\theta_j}(L)\right]\left[\frac{\theta_j}{\theta_j+rC(L)}\right]^{\beta}=1$$

Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει ότι:

$$f(L)=\sum_{j=1}^{m} p_j \overline{F}_{a,\theta_j}(L)\left\{e^{rL}M_{W,\theta_j}\left[-RC(L)\right]\right\}-(1+\eta_R)\frac{M_{X\wedge L,\theta_j}(R)}{E(W)}M'_{W,\theta_j}\left[-RC(L)\right]$$

όπου $p_j = Prob(\Theta=\theta_j)$ και θ_j περιγράφει την εξαρτημένη αντίστοιχη ποσότητα, γνωρίζοντας ότι $\Theta=\theta_j$.

Αντίστοιχα, έστω ότι: $X/\Theta=\theta_j \sim G(a,\theta_j)$ *και* $W/\Theta=\theta_j \sim G(\beta,\theta_j)$, τότε η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής γίνεται

$$M_{X\wedge L/\Theta}(r/\theta_j)=\left(\frac{\theta_j}{\theta_j-r}\right)^{a} F_{a,\theta_j-r}(L)+e^{rL}\overline{F}_{a,\theta_j}(L),$$

όπου $F_{a,\theta}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της ***Gamma*** με παραμέτρους (a,θ). Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής γίνεται

$$\sum_{j=1}^{m} Prob(\Theta=\theta_j)\left[\left(\frac{\theta_j}{\theta_j-r}\right)^{a} F_{a,\theta_j-r}(L)+e^{rL}\overline{F}_{a,\theta_j}(L)\right]\left[\frac{\theta_j}{\theta_j+rC(L)}\right]^{\beta}=1$$

Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει ότι

$$f(L)=\sum_{j=1}^{m} p_j \overline{F}_{a,\theta_j}(L)\left\{e^{rL}M_{W,\theta_j}\left[-RC(L)\right]\right\}-(1+\eta_R)\frac{M_{X\wedge L,\theta_j}(R)}{E(W)}M'_{W,\theta_j}\left[-RC(L)\right]$$

όπου $p_j = Prob(\Theta=\theta_j)$ *και* θ_j περιγράφει την εξαρτημένη αντίστοιχη ποσότητα, γνωρίζοντας ότι $\Theta=\theta_j$. Η συνάρτηση L έχει μοναδική θετική ρίζα, καθώς αποτελεί συνδυασμό αυστηρώς κυρτών συναρτήσεων.

Έτσι, ο συντελεστής προσαρμογής $R(L)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση. Και σε αυτό το είδος αντασφάλισης, υποθέτοντας ότι $\bar{e}$ είναι ο δείκτης αναμενόμενης τιμής της X προς την αναμενόμενη τιμή της W, δηλαδή $\bar{e}=\frac{E(X)}{E(W)}$, παρατηρείται ότι όταν ο δείκτης αυξάνεται, τότε ο συντελεστής προσαρμογής $R(a)$ μειώνεται.

Ακόμη, η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή Θ, ασκεί μεγάλη επίδραση στην τιμή του συντελεστή προσαρμογής. Πιο συγκεκριμένα, όσο μειώνεται η μέση τιμή Θ, δηλαδή αυξάνονται οι $E(X)$ *και* $E(W)$, τόσο μειώνεται και ο συντελεστής προσαρμογής.

5ο Κεφάλαιο: «Συνάρτηση Gerber Shiu με αναλογική αντασφάλιση»

5.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Η θεωρία της χρεοκοπίας είναι μέρος της θεωρίας των κινδύνων, που μελετά τα μέτρα χρεοκοπίας. Πριν από τον Gerber & Shiu, το 1998, η ανάλυση των μέτρων αυτών, όπως για παράδειγμα

- ***Ο χρόνος χρεοκοπίας***
- ***Η πιθανότητα χρεοκοπίας***
- ***Το έλλειμμα της χρεοκοπίας.***
- ***Το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία***

δεν ήταν ενοποιημένη, αντίθετα απαιτούνταν ειδική ανάλυση για όλα τους.

Στη συνέχεια, οι Gerber & Shiu, το 1998, εισήγαγαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, η οποία μεταξύ άλλων, εκτός των παραπάνω μέτρων χρεοκοπίας, περιέχει και άλλα μέτρα, όπως π.χ. ροπές και από κοινού κατανομές των παραπάνω τυχαίων μεγεθών.

Σε αυτό το κεφάλαιο, λοιπόν, θα μελετηθεί η συνάρτηση των Gerber & Shiu στο μοντέλο των Cramer & Lundberg, όταν εισάγεται η αναλογική αντασφάλιση. Σε αντίθεση με το προηγούμενο κεφάλαιο, επιπλέον, το παρόν θα βασιστεί στην υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ της δριμύτητας και της συχνότητας της απαίτησης, ενώ στόχος του είναι η μελέτη της επίδρασης της αντασφάλισης στα μέτρα χρεοκοπίας.

5.2 Αναλογική αντασφάλιση και ανάλυση μέτρων χρεοκοπίας

Σε αυτή την ενότητα, θα εξεταστεί η περίπτωση όπου ο ασφαλιστής διατηρεί ένα ποσοστό $0 < a < 1$ του κινδύνου ατομικής απαίτησης και το υπόλοιπο μέρος του κινδύνου, εκχωρείται για κάλυψη στον αντασφαλιστή. Έτσι, μετά την αντασφάλιση, οι συνολικές αποζημιώσεις του πρωτασφαλιστή, είναι

$$S_t(a) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i(a) = a\, S_t\,,$$

όπου

$X_i(a) = aX_i$ (με X_i το ύψος της i - ατομικής ζημιάς) και $\boldsymbol{S_t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, οι συνολικές απαιτήσεις χωρίς αντασφάλιση.

Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος είναι

$$U_t^a = u + C(a)t - aS_t$$

όπου

- $C(a)$ ***είναι ο ρυθμός είσπραξης του αντασφαλίστρου***, δηλαδή το ασφάλιστρο που καταβάλει ο πρωτασφαλιστής στον αντασφαλιστή.
- $a \in \left(a_0, 1\right)$ ***είναι το όριο ιδίας κράτησης (retention limit) του πρωτασφαλιστή.***
- $N(t)$ ***είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο λ,*** δηλαδή $N(t) \sim P(\lambda t)$, για κάθε $t \geq 0$.

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και ο μετασχηματισμός Laplace της τ. μ. $\mathrm{X}(\alpha)$, είναι αντίστοιχα

$$F_{X(a)}(x) \triangleq \Pr ob[X(a) \leq x] = \Pr ob(aX \leq x) = F_X\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$f_{X(a)}(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\text{και} \quad \hat{f}_{X(a)}(\xi) = E[e^{-\xi X(a)}] = \hat{f}_X(a\xi).$$

5.2.1 Η ανανεωτική συνάρτηση της $\varphi_{(\alpha)}$

Με $f_a(x,y,t|u)$, θα συμβολίζεται η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U_{\tau-}^{\alpha}$, $\left|U_{\tau}^{\alpha}\right|$ και τ, γνωρίζοντας ότι $U_0^{\alpha} = u$. Η f_a είναι μία ελλειμματική πυκνότητα, επειδή

$$\psi(u) = \int\int\int_0^{+\infty} f_a(x,y,t|u) dx\, dy\, dt < 1$$

αφού, θεωρείτε ότι το $\left(U_t^a\right)_t$ έχει μία αυστηρά θετική κλίση.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως

$$\varphi_a(u) \triangleq E\left\{e^{-\delta\tau} w\left[U_{\tau-}^{\alpha}, \left|U_{\tau}^{\alpha}\right|\right]\right\} 1_{\left(\tau<+\infty\right)} \left| U_0^a = u, \right.$$

όπου προσωρινά γράφουμε φ_a αντί $\varphi_{a,\delta}$.

Για την εύρεση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η $\varphi_a(u)$, θεωρούμε ένα απειροστό διάστημα $[0,h]$. Επειδή η $N(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson, τότε στο εν λόγω διάστημα είτε θα εμφανίζεται ακριβώς μια απαίτηση, είτε καμία. Η πιθανότητα εμφάνισης τουλάχιστον δυο απαιτήσεων είναι $o(h)$, (δηλαδή μηδενική). Τότε, έπεται ότι

$$\varphi_a(u) = E\left\{e^{-\delta\tau} w\left[U_{\tau-}^{\alpha}, \left|U_{\tau}^{\alpha}\right|\right] 1_{(\tau<+\infty)} \left| U_0^a = u \right.\right\}$$

$$= E\left\{e^{-\delta\tau} w\left[U_{\tau-}^{\alpha}, \left|U_{a}^{\tau}\right|\right] 1_{(\tau<+\infty)} \left| U_0^a = u, N_h = 0 \right.\right\} P\left(N_h = 0\right)$$

$$= E\left\{e^{-\delta\tau} w\left[U_{\tau-}^{\alpha}, \left|U_{a}^{\tau}\right|\right] 1_{(\tau<+\infty)} \left| U_0^a = u, N_h = 1 \right.\right\} P\left(N_h = 1\right)$$

$$= e^{-(\lambda+\delta)\tau} \varphi_{\delta,\alpha}\left[u + C(a)h\right]$$

$$+ \int_0^h \int_0^{+\infty} E\{ e^{-\delta(\zeta+\tau)} w[U_{\tau-}^{\alpha}, |U_t^a|] 1_{(\zeta+\tau<\infty)} \mid U_{\tau}^{\alpha} = u + C(a)t - x \} \lambda e^{-\lambda\tau} f_{X(a)}(x)\, dx\, dt$$

$$= e^{-(\lambda+\delta)h}\varphi_{\alpha}[u+C(a)h] + \int_{0}^{h}\int_{0}^{u+C(a)t}\varphi_{\alpha}[u+C(a)t-x]\,\lambda e^{-(\lambda+\delta)t} f_X(\frac{x}{a})\frac{dx}{a}dt$$

$$+\int_{0}^{h}\int_{u+C(a)t}^{+\infty} e^{-\delta t} w[u+C(a)t, x-C(a)t-u]\lambda e^{-\lambda t} f_X(\frac{x}{a})\frac{dx}{a}dt.$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_a(u)}{\partial h} &= -(\lambda+\delta)e^{-(\lambda+\delta)h}\varphi_a[u+C(a)h] + e^{-(\lambda+\delta)h}C(a)\varphi_a'[u+C(a)h] \\ &+ \int_{0}^{u+C(a)h}\varphi_a[u+C(a)h-x]\,\lambda e^{-(\lambda+\delta)h} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a} \\ &+ \int_{u+C(a)h}^{+\infty} e^{-\delta h} w[u+C(a)h, x-C(a)h-u]\,\lambda e^{-\lambda h} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}.\end{aligned}$$

Θέτοντας $h=0$, προκύπτει η παρακάτω ολοκληρο - διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\varphi_a(u)$ όταν έχουμε αναλογική αντασφάλιση

$$0 = -(\lambda+\delta)\varphi_a(u) + C(a)\varphi_a'(u) + \int_{0}^{u}\varphi_a(u-x)\,\lambda f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a} \int_{u}^{+\infty} w(u,x-u)\,\lambda f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}$$

ή ισοδύναμα

$$\varphi_a'(u) = \frac{\lambda+\delta}{C(a)}\varphi_a(u) - \frac{\lambda}{C(a)}\int_{0}^{u}\varphi_a(u-x) f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a} - \frac{\lambda}{C(a)} w_a u\,,$$

όπου

$$w_a u = \int_{u}^{+\infty} w(u, x-u) f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}$$

Κατόπιν, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης $\phi_a'(u)$ με $e^{-\rho u}$ και ορίζοντας ως

$$\varphi_{a,\rho}(u) \triangleq \varphi(a)e^{-\rho u},$$

επειδή

$$\varphi'_{a,\rho}(u) = \varphi'_a(u)e^{-\rho u} - \rho\varphi_{a,\rho}(u)$$

προκύπτει ότι

$$C(a)\varphi'_{a,\rho}(u) = [\lambda + \delta - C(a)\rho\,]\,\varphi_{a,\rho}(u) - \int_0^u \varphi_{a,\rho}(u-x)e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a} - \lambda e^{-\rho u} w_a u\,.$$

Θεωρώντας, τώρα, την γενικευμένη εξίσωση Lundberg

$$\lambda + \delta - C(a)\xi = \lambda\,\hat{f}_X(a\xi)\,,$$

η οποία έχει ακριβώς μια μη – αρνητική ρίζα $\rho = \rho(\delta)$,

προκύπτει ότι

$$C(a)\varphi'_{a,\rho}(u) = \lambda\,\hat{f}_X(a\rho)\varphi_{a,\rho}(u) - \int_0^u \varphi_{a,\rho}(u-x)e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a} - \lambda e^{-\rho u} w_a u\,.$$

Θέλοντας να απλοποιηθούν οι όροι με $\phi_{a,\rho}$ στο δεξιό μέρος της εξίσωσης, ο στόχος είναι να εμφανιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της f_X.

Συνεπώς, ολοκληρώνοντας το δεξιό μέρος της εξίσωσης, ως προς u μεταξύ του μηδενός και του $z > 0$, προκύπτει ότι

$$\lambda\,\hat{f}_X(a,\rho)\int_0^z \phi_{a,\rho}(u)du - \lambda\int_0^z\int_0^u \phi_{a,\rho}(u-x)e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}du - \lambda\int_0^z e^{-\rho u} w_a(u)du\,.$$

Ακόμη, αλλάζοντας την μεταβλητή και την σειρά ολοκλήρωσης, είναι

$$\begin{aligned}\int_0^z\int_0^u \phi_{a,\rho}(u-x)e^{-\rho x}\, f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}du &= \int_0^z\int_0^u \phi_{a,\rho}(y)e^{-\rho(u-y)}\, f_X\left(\frac{u-y}{a}\right)\frac{dy}{a}du \\ &= \int_0^z \phi_{a,\rho}(y)\int_y^z e^{-\rho(u-y)}\, f_X\left(\frac{u-y}{a}\right)\frac{du}{a}dy \\ &= \int_0^z \phi_{a,\rho}(y)\int_0^{z-y} e^{-\rho x}\, f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}dy.\end{aligned}$$

Επειδή

$$\int_0^u e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a} = \hat{f}_X(a,\rho) - \int_0^{+\infty} e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}$$

έπεται ότι

$$\int_0^z\int_0^u \phi_{a,\rho}(u-x)e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}du = \int_0^z \phi_{a,\rho}(y)\left[\hat{f}_X(a\rho) - \int_0^{+\infty} e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}\right]dy\ .$$

Επιπλέον, ολοκληρώνοντας το αριστερό μέρος της συνάρτησης $C(a)\phi'_{a,\rho}(u)$ στην αρχική ολοκληρο - διαφορική εξίσωση, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση , προκύπτει ότι:

$$C(a)[\phi_{a,\rho}(z) - \phi_a(0)] = \lambda\int_0^z \phi_{a,\rho}(y)\int_{z-y}^{+\infty} e^{-\rho x} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}dy - \lambda\int_0^z e^{-\rho u}w_a(u)du\ .$$

Όταν $z \to +\infty$, προκύπτει ότι

$$0 = \phi_a(0) - \frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\rho u}w_a(u)du.$$

Επειδή, ισχύει

$$\hat{w}_a(\rho) - \int_0^z e^{-\rho u}w_a(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-\rho u}w_a(u)du$$

προκύπτει η

$$C(a)\phi_{a,\rho}(z) = \lambda\int_0^z \phi_a(y)\int_{z-y}^{+\infty} e^{-\rho(y+x-z)} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}dy + \frac{\lambda}{C(a)}\int_z^{+\infty} e^{-\rho(u-z)}w_a(u)du\ ,$$

από την οποία πολλαπλασιάζοντας με $e^{\rho z}$, έπεται ότι

$$\phi_a(z) = \frac{\lambda}{C(a)}\int_0^z \phi_a(y)\int_{z-y}^{+\infty} e^{-\rho(y+x-z)} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}dy + \frac{\lambda}{C(a)}\int_z^{+\infty} e^{-\rho(u-z)}w_a(u)du\ .$$

Επομένως, η συνάρτηση ανανέωσης ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_{\delta,a} = \phi_{\delta,a} * g_a + h_a ,$$

όπου το σύμβολο * δηλώνει τη συνέλιξη.

Η παραπάνω εξίσωση, γράφεται ως

$$\phi_{\delta,a}(z) = \int_0^z \phi_{\delta,a}(z-x) g_a(z) dx + h_a(z) ,$$

όπου

$$g_a(z) = \frac{\lambda}{C(a)} \int_z^{+\infty} e^{-\rho(x-z)} f_X\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{a}$$

και $$h_a(z) = \frac{\lambda}{C(a)} \int_z^{+\infty} e^{-\rho(u-z)} w_a(u) du .$$

5.2.2 Λύση της ανανεωτικής εξίσωσης με τον μετασχηματισμό Laplace

Ο συνήθης τρόπος να λυθεί η παραπάνω ανανεωτική εξίσωση, είναι να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Laplace. Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, έπεται ότι

$$\hat{\phi}_{\delta,a} = \hat{\phi}_a * \hat{g}_a + \hat{h}_a$$

από την οποία προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace των $\phi_a = \phi_{\delta,a}$ είναι

$$\hat{\phi}_a = \frac{\hat{h}_a}{1 - \hat{g}_a} .$$

Στην συνέχεια, θα υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των g_a και h_a. Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\hat{g}_a(\xi)=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\xi z}\int_z^{+\infty} e^{-\rho(x-z)} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}$$

$$=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\rho x}\int_0^{x} e^{-\xi z} e^{-\rho z} dz\, f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}$$

$$=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\rho x}\left(\frac{e^{-(\rho-\xi)x}-1}{\rho-\xi}\right) f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}$$

$$=\frac{\lambda}{C(a)\left(\rho-\xi\right)}\left[\hat{f}_{X(a)}(\xi)-\hat{f}_{X(a)}(\rho)\right],$$

και

$$\hat{h}_a(\xi)=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\xi z}\int_z^{+\infty} e^{-\rho(u-z)} w_a\left(u\right) du\, dz$$

$$=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} w_a(u) e^{-\xi u}\int_0^{u} e^{-(\xi-\rho)z}\, du\, dz$$

$$=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} w_a(u) e^{-\xi u}\left(\frac{e^{(\rho-\xi)u}-1}{\rho-\xi}\right) du$$

$$=\frac{\lambda}{C(a)\left(\rho-\xi\right)}\left[\hat{w}_a(\xi)-\hat{w}_a(\rho)\right],$$

όπου

$$w_a(u)=\int_u^{+\infty} w(u,x-u) f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}.$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber & Shiu, είναι ο εξής

$$\hat{\phi}_{\delta,\alpha}=\frac{\lambda\left[\hat{w}_a(\xi)-\hat{w}_a(\rho)\right]}{C(a)(\rho-\xi)+\lambda\,\hat{f}_{X(a)}(\rho)-\lambda\,\hat{f}_{X(a)}(\xi)}.$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης Lundberg

$$\lambda+\delta-C(a)\xi=\lambda\,\hat{f}_X(\alpha\xi)$$

προκύπτει ότι

$$\hat{\phi}_{\delta,\alpha} = \frac{\lambda\left[\hat{w}_a(\xi)-\hat{w}_a(\rho)\right]}{-\xi C(a)+\lambda+\delta-\lambda\,\hat{f}_{X(a)}(\xi)}.$$

Αν $w(x,y)=1$, τότε είναι

$$w_a(u)=\int_u^{+\infty} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}=\overline{F}_X\left(\frac{u}{a}\right).$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace της $w_a(z)$ γίνεται

$$\hat{w}_a(\xi)=a\overline{F}_X(\alpha\xi)=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi}\hat{f}_X(\alpha\xi),$$

επειδή

$$\hat{f}'(\xi)=\xi\,\hat{f}(\xi)-f(0).$$

Επίσης, από το γεγονός ότι ρ είναι ρίζα της εξίσωσης Lundberg, ισχύει ότι

$$\lambda+\delta-C(a)\rho=\lambda\,\hat{f}_X(\alpha\rho),$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της $h_a(z)$ είναι

$$\hat{h}_a(\xi)=\frac{\lambda}{C(a)(\rho-\xi)}\left[\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi}\hat{f}_X(\alpha\xi)+\frac{\delta}{\lambda\rho}-\frac{C(a)}{\lambda}\right].$$

Επομένως, για $w(x,y)=1$, ο μετασχηματισμούς Laplace της συνάρτησης $\varphi_{\delta,a}(z)$, γίνεται

$$\hat{\phi}_{\delta,\alpha} = \frac{\frac{\lambda}{\xi}\left[1-\hat{f}_X(a\xi)\right]+\frac{\delta}{\rho}-C(a)}{-\lambda\left[1-\hat{f}_X(a\xi)\right]+\delta-C(a)\xi}.$$

Επειδή για $\delta=0$, $w(x,y)=1$ είναι $\varphi_{\delta,a}(z)=\psi_a(z)$, όπου ψ_a η πιθανότητα χρεοκοπίας με αναλογική αντασφάλιση, από την παραπάνω σχέση για $\delta=0$ έπεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace της ψ_a είναι

$$\hat{\psi}_\alpha=\frac{\frac{\lambda}{\xi}\left[1-\hat{f}_X(a\xi)\right]+\lambda aE(X)}{\lambda\left[1-\hat{f}_X(a\xi)\right]-C(a)\xi}.$$

5.2.3 Το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και πιθανότητα χρεοκοπίας

Αρχικά, σε αυτή την υποενότητα, με $f_a(x,y,t\,|\,u)$ θα συμβολίζεται η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών

- ***Του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία*** $U^a_{\tau-}$.
- ***Του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία*** $|U^a_{\tau-}|$.
- ***Του χρόνου χρεοκοπίας*** τ.

Τότε:

- ***Για*** $x>u+C(a)t$***, ισχύει ότι***

$$f_a(x,y,t\,|\,u)=0,$$

καθώς η ανισότητα $\left\{U^a_{\tau-}>u+C(a)t\right\}$ ισοδυναμεί με $\{0>aS_\tau\}$.

- ***Για*** $x=u+C(a)t$***, ισχύει ότι***

$$\tau=W_1,$$

από την οποία έπεται ότι

$$f_a\left[u+C(a)t,y,t\,|\,u\right]dy\,dt=\lambda e^{-\lambda t}f_{X(a)}\left[u+C(a)t+y\right]dy\,dt.$$

- $$f_a(x,y,t\,|\,u)=\left[\int_0^{+\infty}f_a(x,z,t\,|\,u)dz\right]\frac{f_{X(a)}(x+y)}{\overline{F}_{X(a)}(x)},$$

δεσμεύοντας ως προς ότι $U_{\tau-}^{a}=x$ και $\tau=t$.

Έστω, $f_a(x,y|u)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ. μ. $U_{\tau-}^{a}$ και $|U_{\tau-}^{a}|$, η οποία ορίζεται ως $f_a(x,y|u)=\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} f_a(x,y,t|u)dt$.

Τότε, ισχύει ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} f_a(x,y,t|u)dt=\int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\left[\int_0^{+\infty} f_a(x,z,t|u)dz\right]dt\,\frac{f_{X(a)}(x+y)}{\bar{F}_{X(a)}(x)},$$

οπότε,

$$f_a(x,y|u)=f_a(x|u)\frac{f_{X(a)}(x+y)}{\bar{F}_{X(a)}(x)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανανεωτική συνάρτηση των Gerber – Shiu για $u=0$, προκύπτει ότι $\phi_{\delta,\alpha}=h_a(0)$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x,y)f_a(x,y|0)dx\,dy=\frac{\lambda}{C(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\rho x}\int_z^{+\infty} w(x,u-x)f_{X(a)}(u)du\,dx \leftrightarrow$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x,y)f_a(x,y|0)dx\,dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x,y)\frac{\lambda e^{-\rho x}}{C(a)}\,f_{X(a)}(x+y)dy\,dx\,.$$

Ως εκ τούτου, έπεται ότι

$$f_a(x,y|0)=\frac{\lambda e^{-\rho x}}{aC(a)}\,f_X\left(\frac{x+y}{a}\right),$$

από την οποία προκύπτει και η

$$f_a(x|0)=\frac{\lambda e^{-\rho x}}{C(a)}\bar{F}_X\left(\frac{x}{a}\right),$$

όπου $f_a(x|a)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U_{\tau-}^{a}$ για $u=0$.

Χωρίς αντασφάλιση, δηλαδή, για $a=1$, από τις δυο τελευταίες σχέσεις, προκύπτουν τα παρακάτω πολύ γνωστά αποτελέσματα για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας χωρίς αντασφάλιση

$$f(x,y|0)=\frac{\lambda}{c}e^{-\rho x}f_X(x+y)$$

και $$f(x|0)=e^{-\rho x}\overline{F}_X(x).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, ορίζεται ως

$$\psi_\delta(u)=\psi_{a,\delta}(u)=E\left[e^{-\delta\tau+\rho U_\tau^\alpha}1_{(\tau<+\infty)}\middle|U_0^a=u\right].$$

Τότε, η $f_a(x|u)$ ως συνάρτηση της $f_a(x|0)$ και ,$\psi_\delta(u)$ είναι

$$f_a(x|u)=\begin{cases} f_a(x|0)\dfrac{e^{\rho u}-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}, & \text{αν } x>u\geq 0 \\ f_a(x|0)\dfrac{e^{\rho x}\psi_\delta(u-x)-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}, & \text{αν } 0<x\leq u. \end{cases}$$

Κατά αντιστοιχία, η $f_a(x,y|u)$ είναι

$$f_a(x,y|u)=\begin{cases} f_a(x,y|0)\dfrac{e^{\rho u}-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}, & \text{αν } x>u\geq 0 \\ f_a(x,y|0)\dfrac{e^{\rho x}\psi_\delta(u-x)-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}, & \text{αν } 0<x\leq u. \end{cases}$$

Τέλος, θα δοθεί μια αναλυτική έκφραση της $\psi_{\delta,a}$.

Συνεπώς, όταν η συνάρτηση ποινής είναι

$$w(x,y)=e^{-\rho y}$$

τότε,

$$w_a(u)=\int_u^{+\infty} e^{-\rho(x-u)} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}=g_a(u)\frac{C(a)}{\lambda}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\hat{h}_a(\xi)$, προκύπτει ότι

$$\hat{h}_a(\xi)=\int_0^{+\infty} e^{-\xi z}\int_z^{+\infty} e^{-\rho(u-z)} g_a(z)\,du\,dz=\frac{\hat{g}_a(\xi)-\hat{g}_a(\rho)}{\rho-\xi}$$

Και επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi_{\delta,a}$ είναι

$$\hat{\psi}_{\delta,a}(\xi)=\frac{\hat{g}_a(\xi)-\hat{g}_a(\rho)}{(\rho-\xi)(1-\hat{g}_a(\xi))}.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Heaviside, προκύπτει ότι

$$\hat{\psi}_\delta(u)=\sum_{k=1}^{m}\lim_{\xi\to -r_k}(\xi+r_k)\hat{\psi}_{\delta,a}(\xi)e^{\xi u}$$

όπου $(-r_{a,k})_1\le k\le m$, είναι οι διακριτές ρίζες της $\hat{g}_a(\xi)=1$, οι οποίες για χάριν ευκολίας θα θεωρούνται ότι είναι και απλές, (δηλαδή, έχουν βαθμό πολλαπλότητας ίσο με τη μονάδα).

Έτσι, από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\psi_\delta(u)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{-\hat{g}'_a(-r_{a,k})}\hat{h}_a(-r_{a,k})e^{-r_{a,k}u}.$$

5.2.4 Εκθετικά κατανεμημένα μεγέθη απαιτήσεων

Αρχικά, γίνεται η παραδοχή ότι το μέγεθος των απαιτήσεων X ακολουθεί μία εκθετική κατανομή με παράμετρο β. Έτσι, η εξίσωση Lundberg, που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα, γίνεται δεύτερης τάξης, ως εξής

$$aC(a)\xi^2+\left[C(a)\beta-a(\delta+\lambda)\right]-\beta\delta=0\,.$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης, ισούται με

$$\Delta_a=\left[a(\delta+\lambda)-C(a)\beta\right]^2+4a\beta\delta C(a)$$

η οποία είναι θετική $\forall\, a \in (a_0, 1)$.

Επομένως, οι ρίζες της ρ και $-R$ είναι

$$\rho = \frac{a(\delta+\lambda) - C(a)\beta + \sqrt{\Delta_a}}{2C(a)a}$$

και $$R = \frac{-a(\delta+\lambda) + C(a)\beta + \sqrt{\Delta_a}}{2C(a)a}.$$

Επειδή, $\hat{f}_{X(a)}(\xi) = \dfrac{\beta}{\beta + a\xi}$, προκύπτει ότι

$$\hat{\varphi}_{\delta,a} = \frac{\lambda\left[\hat{w}_a(\xi) - \hat{w}_a(\rho)\right]}{-\xi C(a) + \lambda + \delta - \lambda\dfrac{\beta}{\beta + a\xi}}.$$

Επιπλέον, στην ειδική περίπτωση που ισχύει για τη συνάρτηση ποινής ότι $w(x,y) = w(y)$, τότε

$$w_a(z) = \frac{\beta}{a} e^{-\frac{\beta z}{a}} \hat{w}\left(\frac{\beta}{a}\right).$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$\hat{w}_a(\xi) = \frac{\frac{\beta}{a}}{\xi + \frac{\beta}{a}} \hat{w}\left(\frac{\beta}{a}\right).$$

Επομένως, παίρνουμε

$$\hat{\varphi}_{\delta,a}(\xi) = \frac{\lambda\beta\,\hat{w}\left(\frac{\beta}{a}\right)}{a\xi\left[\lambda + \delta - C(a)\right] + \delta\beta} * \frac{\rho - \xi}{\frac{\beta}{a} + \rho}.$$

Ένας τρόπος να υπολογισθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_0, a είναι να αντιστραφεί ο προηγούμενος μετασχηματισμός Laplace όταν $w(x,y)=1$ και $\delta=0$. Επειδή

$$\psi_{a,\delta} = E\left[e^{-\delta\tau+\rho U_\tau^a} 1_{(\tau<+\infty)} \middle| U_0^a = u \right]$$

προκύπτει ότι

$$E\left[e^{-\delta\tau+\rho U_\tau^a} 1_{(\tau<+\infty)} \middle| U_0^a = u \right] = e^{-Ru}.$$

Συνεπώς, είναι

$$f_a(x,y\,|\,u) = f_a(x\,|\,u)\frac{f_{X(a)}(x+y)}{\bar{F}_{X(a)}(x)} = f_a(x\,|\,u)\frac{\beta}{a}e^{-\frac{\beta y}{a}} = f_a(x\,|\,u)f_{X(a)}(y).$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των $U_{\tau-}^a$ και $|U_\tau^a|$, έπεται ότι

$$E\left[e^{-\delta\tau+\rho U_\tau^a} 1_{(\tau<+\infty)} \middle| U_0^a = u \right] \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-R(-y)} e^{-\delta\tau} f_a(x,y,t\,|\,u)\,dt\,dx\,dy \rightarrow$$

$$e^{-Ru} = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{Ry} f_a(x,y\,|\,u)\,dx\,dy \rightarrow$$

$$e^{-Ru} = \int_0^{+\infty} f_a(x\,|\,u)\,dx \int_0^{+\infty} e^{Ry} f_{X(a)}(y)\,dy \rightarrow$$

$$e^{-Ru} = \hat{f}_X(-aR) * E\left[e^{-\delta\tau} 1_{(\tau<+\infty)} \middle| U_0^a = u \right].$$

Ως εκ τούτου, ισχύει ότι

$$E\left[e^{-\delta\tau} 1_{(\tau<+\infty)} \middle| U_0^a = u \right] = \frac{\beta - aR}{\beta} e^{-Ru}.$$

Αν ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία και στην συνάρτηση $\varphi_{\delta,a}$, για $w(x,y)=x$ προκύπτει ότι

$$\varphi_{\delta,a}(u) = \hat{w}\left(\frac{\beta}{a}\right)\left(\frac{\beta}{a} - R\right)e^{-Ru}.$$

Επιπλέον, κάνοντας χρήση της σχέσης $w(y) = e^{-\rho y}$, προκύπτει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_{\delta,a}(u)$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\psi_{\delta,a}(u) = \frac{\beta - aR}{\beta + a\rho}e^{-Ru}.$$

Καθώς, επίσης, όπως επισημάνθηκε οι $-R$ και ρ είναι οι ρίζες της εξίσωσης Lundberg, συνεπάγεται ότι:

$$-R\rho = \frac{-\delta\beta}{C(a)a},$$

$$\text{και } \rho - R = \frac{\beta}{a} - \frac{\delta + \lambda}{C(a)}.$$

Ως εκ τούτου, ισχύει ότι

$$\left(\frac{\beta}{a} - R\right)\left(\frac{\beta}{a} + \rho\right) = \frac{\beta\lambda}{C(a)a}.$$

Επομένως, για την πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει ότι

$$\psi_{\delta,a}(u) = \frac{\beta\lambda}{aC(a)\left(\frac{\beta}{a} + \rho\right)^2}e^{-Ru},$$

Οπότε για $\delta = 0$ είναι

$$\psi_{0,a}(u) = \frac{a\lambda}{C(a)\beta}e^{-Ru}.$$

Επίσης, παίρνουμε ότι

$$f_a(x, y \mid 0) = \frac{\lambda e^{-\rho u}}{aC(a)}\beta e^{-\beta\frac{x+y}{a}},$$

$$f_a(x|0)=\frac{\lambda e^{-\rho u}}{C(a)}\beta e^{-\beta\frac{x}{a}}.$$

και

Επειδή

$$\frac{e^{\rho u}-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}=\frac{(\beta+a\rho)e^{\rho u}-(\beta-aR)e^{-Ru}}{a(\rho+R)}$$

και $$\frac{e^{\rho x}\psi_\delta(u-x)-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}=\frac{(\beta-aR)e^{-Ru}}{a(\rho+R)}\left[e^{(\rho+R)x}-1\right],$$

έπεται ότι

$$f_a(x|u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{C(a)a(\rho+R)}e^{-\beta\frac{x}{a}}e^{-\rho x}\left[(\beta+a\rho)e^{\rho u}-(\beta-aR)e^{-Ru}\right], & \text{για } x>u\geq 0\\[2ex] \dfrac{\lambda(\beta-\alpha R)}{C(a)a(\rho+R)}e^{-\beta\frac{x}{a}}(e^{Rx}-e^{-\rho x})e^{-Ru}, & \text{για } 0<x\leq u\end{cases}$$

και

$$f_a(x,y|u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\beta}{C(a)a^2(\rho+R)}e^{-\beta\frac{x+y}{a}}e^{-\rho x}\left[(\beta+a\rho)e^{\rho u}-(\beta-aR)e^{-Ru}\right], & \text{για } x>u\geq 0\\[2ex] \dfrac{\lambda\beta(\beta-\alpha R)}{C(a)a^2(\rho+R)}e^{-\beta\frac{x+y}{a}}(e^{Rx}-e^{-\rho x})e^{-Ru}, & \text{για } 0<x\leq u\end{cases}$$

Συνεπώς, το ισοδύναμο των $f_a(x|u)$ και $f_a(x,y|u)$ μπορεί να προέλθει κατευθείαν από τους παραπάνω τύπους, όταν αν $0<x\leq u$, καθώς σε αυτούς ο μόνος όρος που εξαρτάται από το u είναι το εκθετικό όριο e^{-Ru}.

5.2.4.1 Η επίδραση της αναλογικής αντασφάλισης

Στην συγκεκριμένη ενότητα, θα εξετασθούν το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας, μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος.

Έστω $X \sim E(\beta)$. Τότε, όπως αποδείχθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτει ότι η πυκνότητα των $U_{\tau-}$ και $|U_{\tau}|$, γνωρίζοντας ότι $U_0 = u$, δίνεται από τις σχέσεις

$$f_a(x|u) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{C(a)a(\rho+R)} e^{-\beta\frac{x}{a}} e^{-\rho x} \left[(\beta+a\rho)e^{\rho u} - (\beta-aR)e^{-Ru} \right], \text{ για } x > u \geq 0 \\ \dfrac{\lambda(\beta-\alpha R)}{C(a)a(\rho+R)} e^{-\beta\frac{x}{a}} (e^{Rx} - e^{-\rho x})e^{-Ru}, \text{ για } 0 < x \leq u \end{cases}$$

και

$$f_a(y|u) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\beta}{C(a)a(\beta+\alpha\rho)(\rho+R)} e^{-\beta\frac{y}{a}} \left[(\beta+a\rho)e^{\rho u} - (\beta-aR)e^{-Ru} \right], \text{ για } x > u \geq 0 \\ \dfrac{\lambda\beta}{C(a)(\beta+\alpha\rho)} e^{-\beta\frac{y}{a}} e^{-Ru}, \text{ για } 0 < x \leq u \end{cases}$$

Η τελευταία σχέση, προκύπτει από την ολοκλήρωση της συνάρτησης $f_a(x,y|u)$ ως προς x.

Οι παραπάνω σχέσεις, είναι αρκετά περίπλοκες, αφού η $f_a(x|u)$ εκφράζει την πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πριν την χρεοκοπία και η $f_a(y|u)$ εκφράζει την πυκνότητα του ελλείμματος κατά την στιγμή της χρεοκοπίας.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, θεωρείται ότι $\delta = 0$ (οπότε και $\rho = 0$) και το ασφάλιστρο, υπολογίζεται από την σχέση

$$C(a) = (1+\eta)\frac{E(X)}{E(W)} - (1+\eta_R)\frac{E[(1-a)X]}{E(W)},$$

με $\eta = 0.2$ και $\eta_R = 0.3$. Επίσης, θα ισχύει ότι $\beta = 2$ και $\lambda = 1$.

Όπως ήταν αναμενόμενο, η αντασφάλιση περιορίζει σημαντικά τον κίνδυνο. Αυτό, συμβαίνει διότι στην περίπτωση που υπάρχει αντασφάλιση, η πιθανότητα η κατανομή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία να έχει πιο βαριά ουρά, είναι μικρότερη, από ότι στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει αντασφάλιση.

Πράγματι, όπως φαίνεται στο Γράφημα 9 , για $a = 0.5,$ το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία συγκεντρώνεται κοντά στον μέσο, ο οποίος υπολογίζεται από την σχέση

$$\mu = \frac{\lambda}{C(a)R}(1 - e^{-Ru}),$$

η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση της $f_a(x|u)$.

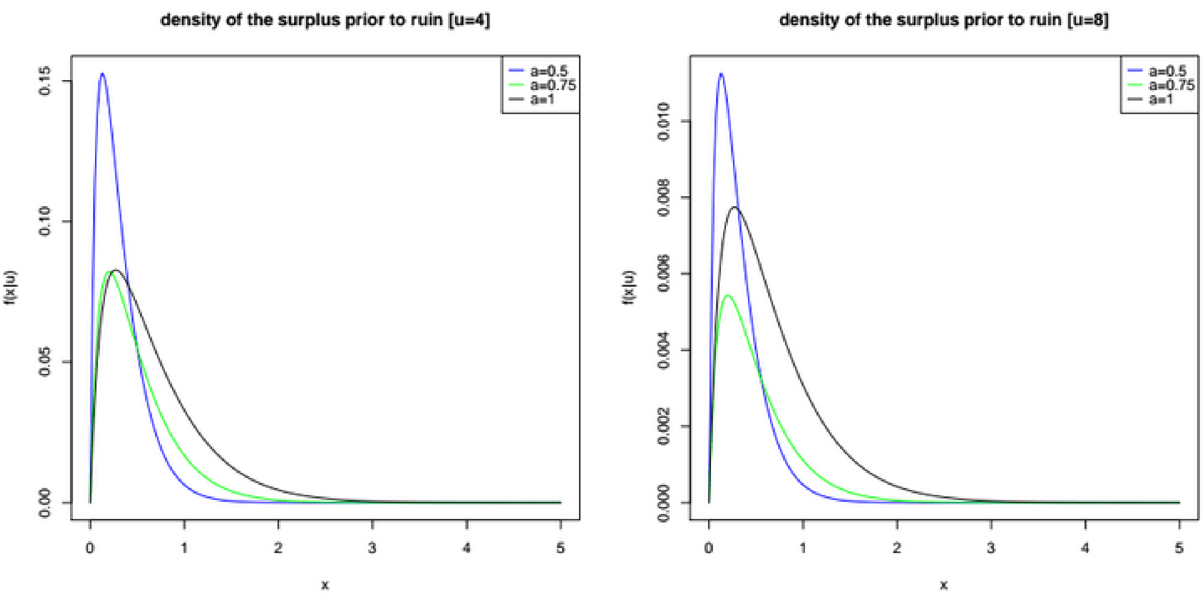
Αντίθετα, για $a = 1$ (δεν υπάρχει αντασφάλιση), η ουρά της κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία είναι πιο βαριά.

Επιπλέον, στο Γράφημα 10 , παρατηρείται η ίδια επίδραση της αντασφάλισης στο έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η πυκνότητα του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι μια εκθετική συνάρτηση, ενώ αντίθετα το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, είναι μια μείξη εκθετικών κατανομών.

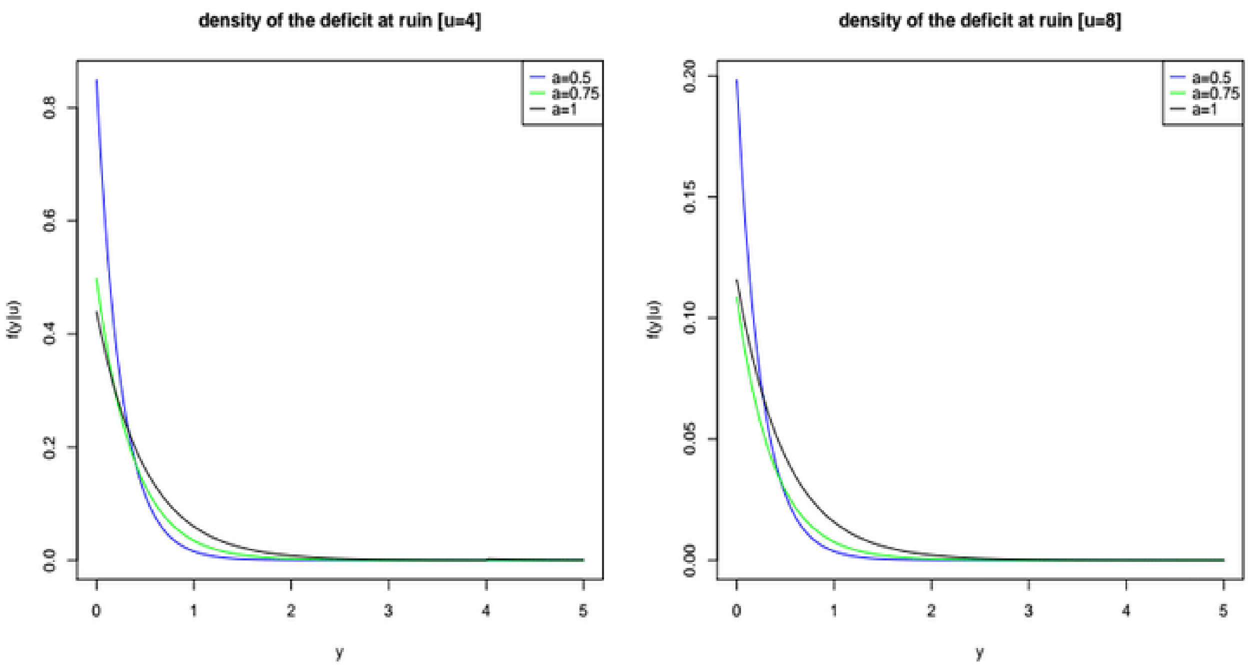
Τέλος, παρατηρείται, όπως είναι φυσικό, ότι όταν το αρχικό αποθεματικό u αυξάνεται, τόσο το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, όσο και το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας μειώνονται.

Διαγραμματικά:

Γράφημα 9: «Διάγραμμα x → f_α(x|u) όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά.»



Γράφημα 10: «Διάγραμμα x → f_α(y|u) Όταν Τα Μεγέθη Των Απαιτήσεων Είναι Εκθετικά»



Πηγή: Dutang, C. (2007), "Topics in Ruin Theory: Optimal Reinsurance in a Context of Dependence, Analysis of the Gerber – Shiu Function with Reinsurance and Ruin Probabilities with Phase – type Distributions", Universite LYON

5.2.5 Υπέρ - εκθετικά κατανεμημένα μεγέθη απαιτήσεων

Στην συγκεκριμένη ενότητα, θα αναλυθεί η περίπτωση όπου τα μεγέθη ακολουθούν υπερ εκθετική κατανομή, δηλαδή μια μείξη εκθετικών κατανομών.

Για αυτήν την κατανομή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως

$$f_{X(a)}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{a}e^{-\frac{\beta_j}{a}x},$$

όπου $0<\beta_1<\cdots<\beta_n, A_j>0$ και $\sum_{j=1}^{n}A_j=1$.

Έτσι,

$$\hat{f}_{X(a)}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{\beta_j+a\xi}.$$

Επομένως, η εξίσωση Lundberg γίνεται

$$\delta+\lambda-C\xi=\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{\beta_j+a\xi}.$$

Έστω, $(-r_{k,a})_{1\le k\le m}$ οι απλές και διακριτές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Τότε,

$$\hat{g}_a(\xi)=-\frac{\lambda}{C(\rho-\xi)}\left[\hat{f}_{X(a)}(\xi)-\hat{f}_{X(a)}(\rho)\right]=\frac{\alpha\lambda}{C}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{(\beta_j+a\xi)(\beta_j+a\rho)}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace της $f_{X(a)}$, προκύπτει ότι

$$\hat{h}_a(\xi)=\frac{\left[\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\rho)\right]}{(\rho-\xi)}=\frac{\alpha^2\lambda}{C}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{(\beta_j+a\xi)(\beta_j+a\rho)^2}$$

και $\quad \hat{g}'_a(\xi)=-\dfrac{\alpha^2\lambda}{C}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{(\beta_j+a\rho)(\beta_j+a\xi)^2}$.

Επομένως, η εξίσωσης της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi_\delta(u)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{-\hat{g}'_a(-r_{a,k})}\hat{h}_a(-r_{a,k})e^{-r_{a,k}u},$$

γίνεται

$$\psi_{\delta,a}(u)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{(\beta_j-ar_{k,a})(\beta_j+a\rho)^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\beta_j}{(\beta_j+a\rho)(\beta_j-ar_{k,a})^2}}e^{-r_{k,a}u}$$

η οποία απλοποιείται για $\delta=0$ ως εξής

$$\psi_{0,a}(u)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{(\beta_j-ar_k)\beta_j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{(\beta_j-ar_k)^2}}e^{-r_ku}.$$

5.2.5.1 Η επίδραση της αναλογικής αντασφάλισης

Στην συγκεκριμένη ενότητα, θα εξετασθούν το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας, όταν τα μεγέθη ακολουθούν υπέρ εκθετική κατανομή, μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος.

Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[3e^{-3x} + 7e^{-7x}]$$

$$\text{και } \lambda = 3 .$$

Είναι γνωστό ότι οι ρίζες της εξίσωσης Lundberg είναι λογικές.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται από την σχέση

$$\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-x} + \frac{1}{35}e^{-6x} ,$$

όταν $\delta = 0$, δηλαδή δεν υπάρχει αντασφάλιση.

Στην περίπτωση της αναλογικής αντασφάλισης, μπορεί να λυθεί η εξίσωση Lundberg

$$aC(a)\xi^2 + \left[C(a)\beta - a(\delta + \lambda)\right] - \beta\delta = 0 .$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} ,$$

όπου

$$C_1 = \frac{r_2(3 - ar_1)(7 - ar_1)}{21(r_2 - r_1)}$$

$$\text{και } C_2 = \frac{r_1(7 - ar_2)(3 - ar_2)}{21(r_1 - r_2)} .$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$r_1 = \frac{-3 + 10\frac{C(a)}{a} + 3\sqrt{\Delta_a}}{2C(a)} ,$$

$$r_2 = \frac{-3 + 10\frac{C(a)}{a} - 3\sqrt{\Delta_a}}{2C(a)}$$

και $\Delta_a = 1 + \left(4\frac{C(a)}{a\lambda}\right).$

Ως εκ τούτου, ισχύει η ακόλουθη σχέση για το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία

$$f_a(x\,|\,u) = f_a(x\,|\,0)\begin{cases} \dfrac{1 - C_1e^{-r_1u} - C_2e^{-r_2u}}{1 - C_1 - C_2}, \text{ για } x > u \geq 0 \\ \dfrac{C_1e^{-r_1(u-x)} + C_2e^{-r_2(u-x)} - C_1e^{-r_1u} - C_2e^{-r_2u}}{1 - C_1 - C_2}, \text{ για } 0 < x \leq u \end{cases},$$

όπου

$$f_a(x\,|\,0) = \frac{3}{2C(a)}\left[e^{-3\frac{x}{a}} + e^{-7\frac{x}{a}}\right].$$

Για το έλλειμμα αμέσως μετά την χρεοκοπία, η σχέση είναι πιο περίπλοκη και ορίζεται ως

$$f_a(y\,|\,u) = \begin{cases} f_a(y\,|\,0)\dfrac{1 - C_1e^{-r_1u} - C_2e^{-r_2u}}{1 - C_1 - C_2}, \text{ για } x > u \geq 0 \\ \dfrac{3}{2C(a)(1 - C_1 - C_2)}K(y) \text{ , για } 0 < x \leq u \end{cases},$$

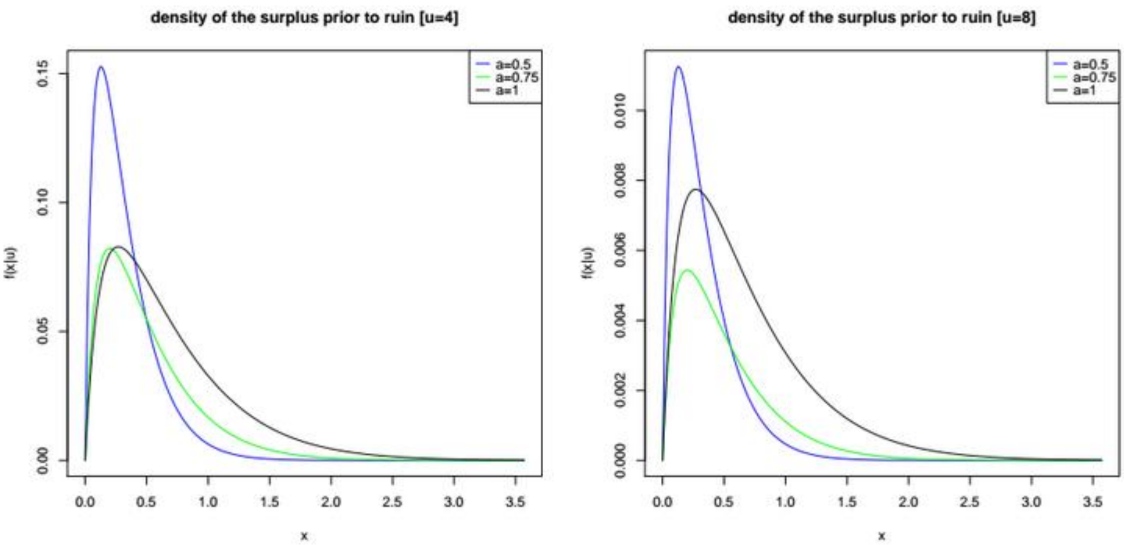
όπου

$$K(y) = \left(\frac{r_1C_1e^{-r_1u}e^{-3\frac{y}{a}}}{3 - ar_1} + \frac{r_2C_2e^{-r_2u}e^{-3\frac{y}{a}}}{3 - ar_2} + \frac{r_2C_2e^{-r_2u}e^{-7\frac{y}{a}}}{7 - ar_2} + \frac{r_1C_1e^{-r_1u}e^{-7\frac{y}{a}}}{3 - ar_1}\right).$$

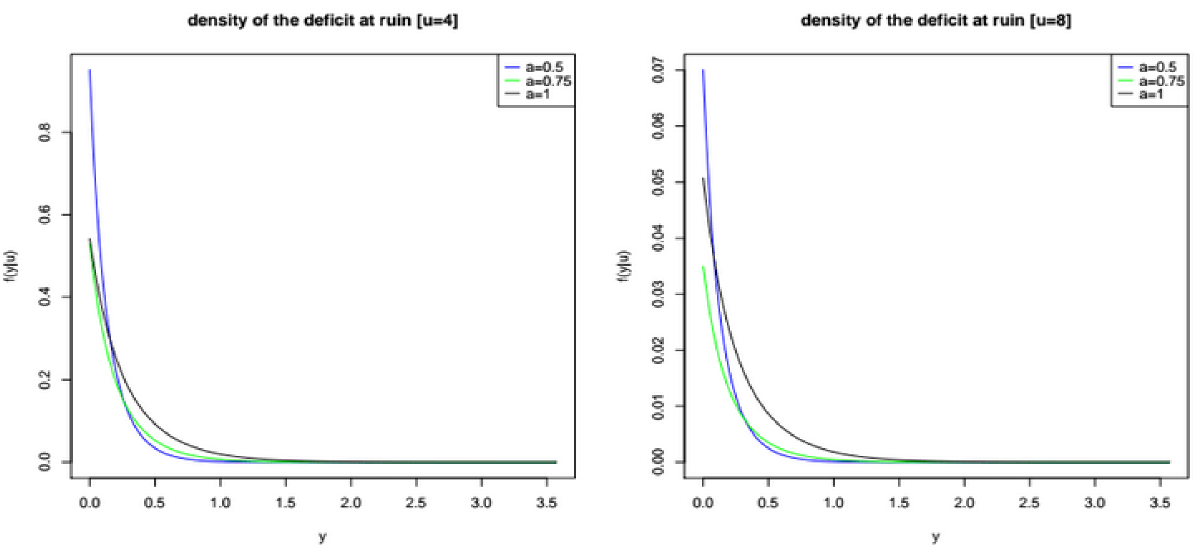
Όπως διαφαίνεται από το Γράφημα 11 και το Γράφημα 12, όπως και στην προηγούμενη υποενότητα, για $a = 0.5$, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, καθώς και το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας, συγκεντρώνονται κοντά στον μέσο όρο, ενώ αντίθετα, για $a = 1$ (δεν υπάρχει αντασφάλιση), η ουρά της κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας είναι πιο βαριά.

Τέλος, και σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρείται, ότι όταν το αρχικό αποθεματικό ***u*** αυξάνεται, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας μειώνονται.

Γράφημα 11: «Διάγραμμα x → f_α(x|u) όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι υπέρ - εκθετικά »



Γράφημα 12: «Διάγραμμα x → f_α(y|u) όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι υπέρ – εκθετικά»



Πηγή: Dutang, C. (2007), "Topics in Ruin Theory: Optimal Reinsurance in a Context of Dependence, Analysis of the Gerber – Shiu Function with Reinsurance and Ruin Probabilities with Phase – type Distributions", Universite LYON.

5.3 Οι συνέπειες της αντασφάλισης στην πιθανότητα χρεοκοπίας

Στην συγκεκριμένη ενότητα, θα μελετηθεί η επίδραση που έχει η αντασφάλιση στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Η μελέτη βασίζεται σε μια εκθετική κατανομή με παράμετρο έστω $\lambda = 1$ και σε μια μείξη εκθετικών κατανομών με παραμέτρους έστω $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.36$ και $\lambda_3 = 0.54$ και αντίστοιχα βάρη $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.36$ και $w_3 = 0.54$. Στις προηγούμενες ενότητες, δόθηκαν οι βασικές έννοιες για την επίδραση της αναλογικής αντασφάλισης για μεγέθη εκθετικά και υπέρ εκθετικά κατανεμημένα.

Οι αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου, πάνω στις οποίες βασίστηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα είναι η αρχή της αναμενόμενης τιμής και η αρχή της τυπικής απόκλισης. Η βασική διαφορά ανάμεσα στις δυο αυτές αρχές, είναι ότι η αρχή της τυπικής απόκλισης, εξαρτάται από την ουρά της κάθε κατανομής. Όταν τα μεγέθη κατανέμονται με κατανομή, η οποία έχει βαριά ουρά, τότε, ουσιαστικά, μπορούν να συμβούν και ακραία συμβάντα χωρίς η πιθανότητα να μηδενίζεται. Έτσι, θα εξετασθεί η επίδραση των αρχών αυτών στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Όπως φαίνεται στο Γράφημα 13, για $a = 0.5$, η πιθανότητα χρεοκοπίας στο 0, δηλαδή η $\psi_a(0)$, έχει μεγαλύτερη τιμή, από την περίπτωση που δεν υπάρχει αντασφάλιση, δηλαδή για $a = 1$. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς γνωρίζουμε ότι

$$\psi_a(0) = \frac{a\lambda E(X)}{C(a)},$$

η οποία είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς a για τις δυο αρχές που μελετώνται.

Επιπλέον, η πιθανότητα χρεοκοπίας για $a = 0.5$, πέφτει γρηγορότερα στο 0, από ότι όταν δεν υπάρχει αντασφάλιση. Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_{1/2}$ διασχίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_1, περίπου στην τιμή 6 στην εκθετική κατανομή και περίπου στην τιμή 7 στην μείξη των εκθετικών. Έτσι, ανάμεσα σε αυτές τις δυο τιμές, οι πιθανότητες χρεοκοπίας είναι μικρότερες στην περίπτωση της αντασφάλισης, από τις περιπτώσεις που δεν υπάρχει χρεοκοπία.

Τέλος, παρατηρείται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της μείξης εκθετικών κατανομών απ' ότι στην περίπτωση της εκθετικής. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει και λογικά, καθώς η διακύμανση της εκθετικής είναι μικρότερη από την διακύμανση της μείξης των εκθετικών. Πιο συγκεκριμένα, προκύπτει ότι

$$Var_{Exp}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

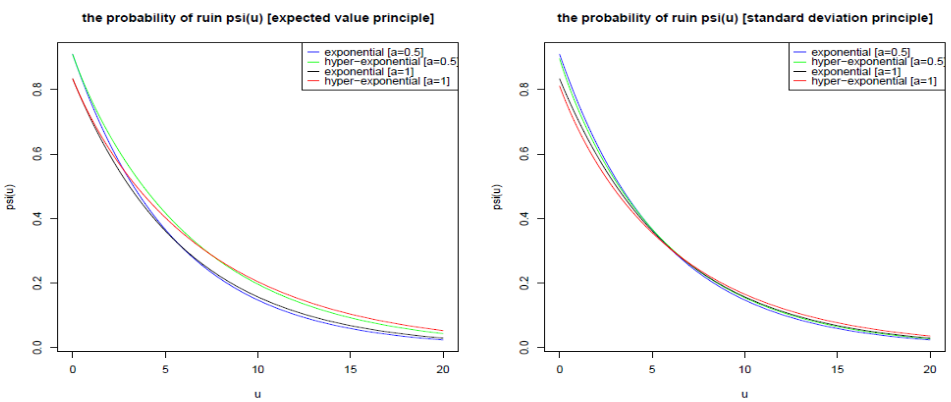
$$Var_{MictureExp}(X) = \sum_{i=1}^{3} w_i E(X^2) - \left[\sum_{i=1}^{3} w_i E(X) \right]^2$$

και $$= \frac{2}{0.46^2}0.1 + \frac{2}{0.92^2}0.36 + \frac{2}{1.38^2}0.54 - \left[\frac{1}{0.46}0.1 + \frac{1}{0.92}0.36 + \frac{1}{1.38^2}0.54 \right]^2$$

$$= 2.362949 - 1 = 1.362949$$

Τα ίδια ακριβώς συμπεράσματα διεξάγονται και στην περίπτωση υπολογισμού του ασφαλίστρου, σύμφωνα με την αρχή της τυπικής απόκλισης, τα οποία, όμως, δεν είναι τόσο ευδιάκριτα, όσο στην περίπτωση της αρχής αναμενόμενης τιμής. Πράγματι, στηρίζοντας μια αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου στην διακύμανση, όπως συμβαίνει στην αρχή της τυπικής απόκλισης, τα μεγέθη που ακολουθούν κατανομές με βαριά ουρά είναι πιο εύκολο να μοντελοποιηθούν , σε σχέση τα μεγέθη που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Και σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_{1/2}$ διασχίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_1, περίπου στην τιμή 6 .

Γράφημα 13: «Διάγραμμα u → ψ_α(u) Όταν Τα Μεγέθη Των Απαιτήσεων Είναι εκθετικά και υπέρ εκθετικά κατανεμημένα»



Πηγή: Dutang, C. (2007), “Topics in Ruin Theory: Optimal Reinsurance in a Context of Dependence, Analysis of the Gerber – Shiu Function with Reinsurance and Ruin Probabilities with Phase – type Distributions”, Universite LYON.

Επίλογος

Στην παρούσα εργασία έγινε λόγος για την θεωρία χρεοκοπίας και την βέλτιστη αντασφάλιση, μέσα από την ανάλυση πολύπλευρων θεμάτων.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε μία ενδελεχής ανάλυση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, κυρίως μέσω της παρουσίασης:

- *Της συνθήκης του καθαρού κέρδους.*
- *Της πιθανότητας χρεοκοπίας και μη.*
- *Της εξίσωσης Lundberg.*
- *Του ελλείμματος της χρεοκοπίας.*
- *Της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber – Shiu.*

Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύθηκε η αντασφάλιση και οι βασικές έννοιες και δομές που την διέπουν.

Έπειτα, στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο διεξήχθη μελέτη του συντελεστή προσαρμογής R, τόσο με αναλογική αντασφάλιση όσο και με αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας. Αυτή, πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με την αρχή της αναμενόμενης αξίας, αλλά και με άλλες αρχές υπολογισμού των ασφαλίστρων, όπως είναι οι ακόλουθες:

- *Αρχή της διακύμανσης.*
- *Αρχή της τυπικής απόκλισης.*
- *Εκθετική Αρχή.*

Ακολούθως, στο πέμπτο κεφάλαιο, παρατίθεται η συνάρτηση των Gerber – Shiu με αναλογική αντασφάλιση, μέσω μαθηματικής τεκμηρίωσης.

Ελληνική Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

- Κωνσταντινίδης, Δ. (2011), «Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Συμμετρία, Αθήνα
- Πολίτης, Κ. (2012), «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου», Εκδόσεις: Σταμούλη, Αθήνα
- Χρυσαφίνου, Ο. (2008), «Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις», Εκδόσεις: Σοφία, Θεσσαλονίκη
- Χατζηκωνσταντινίδης Ε., «Σημειώσεις Θεωρίας Κινδύνου μεταπτυχιακού μαθήματος του τμήματος Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου»

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

- Albers, W. (1999), "Stop-loss premiums under dependence", Insurance: Mathematics and Economics 24
- Albrecher, H. & Teugels, J. L. (2006), "Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory", Journal of Applied Probability 43 (1), pp 265 – 285
- Albrecher, H. & Haas, S. (2011), "Ruin theory with excess of loss reinsurance and reinstatements", Applied Mathematics and Computation 217 (20), pp 8039
- Benktander, G. (1977), "On the rating of a special stop loss cover", ASTIN Bulletin 9, pp 33 – 35
- Biffis, E. & Morales, M. (2010), "On a generalization of the Gerber – Shiu function to path – dependent penalties"
- Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D. & Marceau, E. (2006), "On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes", Scandinavian Actuarial Journal 2006 (5), pp 265 – 285
- Centeno, M. d. L. (1995), "Excess of loss reinsurance and the probability of ruin infinite time", Astin Bull 27 (1)
- Centeno, M. d. L. (2002a), "Excess of loss reinsurance and gerber's inequality in the Sparre Anderson model", Insurance: Mathematics and Economics 31 (3), pp 415 – 427
- Centeno, M. d. L. (2002b), "Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the Sparre Anderson model", Insurance: Mathematics and Economics 30 (1), pp 37 – 49
- Centeno, M. d. L. (2005), "Dependent risks and excess of loss reinsurance", Insurance: Mathematics and Economics 37, pp 229 – 238
- Dhaene, J. & Goovaerts, M.J. (1996), "Dependency of risks and stop-loss order", ASTIN Bulletin 26, pp 201 – 209
- Dickson, D. & Hipp, C. (1998), "Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes", Insurance: Mathematics and Economics, 22. pp 251 – 262

- Dickson, D. C. M. (1998), "Comments on Gerber & Shiu (1998)", North American Actuarial Journal
- Dickson, D. C. M. (2005), "Insurance Risk and Ruin", Cambridge University Press, UK
- Dickson, D. & Willmot, G.E. (2005), "The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model", ASTIN Bulletin, 35, pp 45 – 60
- Dufresne, E. & Gender, H. (1991), "Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion", Insurance: Math. Econ. 10, pp 51 – 59
- Dutang, C. (2007), "Topics in Ruin Theory: Optimal Reinsurance in a Context of Dependence, Analysis of the Gerber – Shiu Function with Reinsurance and Ruin Probabilities with Phase – type Distributions", Universite LYON
- Gary, P. & Russell, J. (1981), "Pricing Excess of Loss Casualty Working Cover Reinsurance Treaties"
- Gerber, H. U. (1979), "An Introduction to Mathematical Risk Theory", Huebner Foundation, Philadelphia
- Gerber, H. U. & Dufresnes, F. (1991b), "Three methods to calculate the probability of ruin", Astin Bull 19 (1), pp 71 – 90
- Gerber, H. U. (1992), "On the probability of ruin for infinitely divisible claim amount distributions", Insurance: Mathematics and Economics. 11. pp 163 – 166
- Gerber, H. & Shiu, E. (1998), "On the time value of ruin", North American, 2. pp 48 – 78
- Hald, M. & Schmidli, H. (2004), "On the maximisation of the adjustment coefficient under proportional reinsurance", Astin Bull. 34 (1), pp 75 – 83
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. & Denuit, M. (2009), "Modern Actuarial Risk Theory" Using R. Kluwer Academic Publishers
- Lehrke, T. A. "Aggregate Excess or Stop-Loss Reinsurance", Stain Publishing Home
- Marceau, E. (2007), "On a general class of compound renewal risk models with dependence", Research funded by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and the chaire en actuariat de l'universite Laval
- Schmidli, H. (2001), "Optimal Proportional Reinsurance Policies in a Dynamic Setting", Scandinavian Actuarial Journal 101 (1), pp 55 – 68
- Seng Tan, K., Weng, C. & Zhang Yi (2010), "VaR and CTE Criteria for Optimal Quota – Share and Stop – Loss Reinsurance", North American Actuarial Journal, Volume 13, Number 4, pp 470 - 482
- Spiegel, M. (1965), "Laplace Transforms", McGraw-Hill, New York
- Sundt, B. & Teugels (2004), "Premium Principles", Encyclopedia of Actuarial Science
- Walhin, J. F. & Paris, J. (2000), "The effect of excess of loss reinsurance with reinstatements on the cedent's portfolio", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs mathematika 24
- Waters, H. R. (1983), "Some mathematical aspects of reinsurance", Insurance: Mathematics and Economics 2 (1), pp 17 – 26

- Willmot, G. & Lin, S. (1999), “Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory” Insurance Mathematics and Economics, pp 63 - 84
- Willmot, G. & Lin, S. (2000), “The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin”, Insurance Mathematics and Economics 27, pp 19 – 44
- Willmot, G. & Lin, S. (2003). “The classical risk model, with constant dividend barrier: analysis of the Gerber - Shiu discounted penalty function”, Insurance Mathematics and Economics

Ηλεκτρονικές Πηγές

- http://www.unipi.gr/faculty/kpolitis/ruin/ruin_notes.pdf
- http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209013347185177.pdf
- http://www.actuar.aegean.gr/notes/Antasfalisi_sim1.pdf