ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΜΕ ΑΝΤΑΛΛΑΞΙΜΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

Μαρία Ελένη Κ. Μπαράκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς

20 Σεπτεμβρίου 2017

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΜΕ ΑΝΤΑΛΛΑΞΙΜΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

Μαρία Ελένη Κ. Μπαράκη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς

20 Σεπτεμβρίου 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ………………………………. (Επιβλέπων)

- ……………………………….

- ……………………………….

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN

APPLIED STATISTICS

COMPARING RELIABILITY STRUCTURES WITH EXCHANGEABLE COMPONENTS

By

Maria Eleni K. Baraki

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

20 September 2017

Στους γονείς μου

Κωνσταντίνο και Σταματία

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, τον καθηγητή κ. Μ. Κούτρα, για τη συνεχή καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της αλλά και των σπουδών μου γενικότερα. Εκτιμώ ιδιαιτέρως τη διαθεσιμότητά του και τις πολύτιμες συμβουλές του, οι οποίες έχουν συμβάλλει σημαντικά στην ποιότητα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Δ. Αντζουλάκο και τον επίκουρο καθηγητή κ. Μ. Μπούτσικα για τις χρήσιμες παρεμβάσεις τους. Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθώ στους συμφοιτητές μου, οι οποίοι υπήρξαν σημαντικοί αρωγοί στην προσπάθειά μου υποστηρίζοντάς με σε κάθε φάση της πορείας μου. Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου για την αφοσίωση, την αγάπη και την πίστη τους σε μένα.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως θέμα τη σύγκριση μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας που απαρτίζονται από ανταλλάξιμες μονάδες. Παρόλο που το μεγαλύτερο κομμάτι της έρευνας αφορά συστήματα που αποτελούνται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, η ύπαρξη στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των χρόνων ζωής των μονάδων αποτελεί πιο ρεαλιστική υπόθεση. Αυτός είναι και ο λόγος που τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερες έρευνες έχουν θέμα τη μελέτη συστημάτων στα οποία υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των μονάδων του. Κυρίαρχη έννοια για αυτή τη μελέτη αποτελεί η υπογραφή ενός συστήματος, με τη χρήση της οποίας ο υπολογισμός της αξιοπιστίας τέτοιων συστημάτων παύει να είναι δύσκολη υπόθεση.

Στο πρώτο κεφάλαιο ο αναγνώστης εισάγεται στην έννοια της αξιοπιστίας ενός συστήματος. Κάνοντας μια αναδρομή στο παρελθόν, σημειώνεται η εξέλιξη που παρατηρήθηκε στη θεώρηση αυτής της έννοιας καθώς και η σημασία της στατιστικής στον υπολογισμό της αξιοπιστίας ενός συστήματος. Συγκεκριμένα, γίνεται μια αναφορά στις διατεταγμένες παρατηρήσεις οι οποίες αποτελούν απαραίτητο εργαλείο για τον υπολογισμό στατιστικών συναρτήσεων που είναι χρήσιμες σε τομείς όπως η αξιοπιστία συστημάτων και ο έλεγχος ποιότητας. Στο τέλος του κεφαλαίου σημειώνεται η έννοια της υπογραφής, με τη βοήθεια της οποίας είναι δυνατή η εύρεση της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός συστήματος που αποτελείται από ανταλλάξιμες μονάδες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια των ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών. Αρχικά δίνεται ο ορισμός μιας πεπερασμένης/άπειρης ανταλλάξιμης ακολουθίας και το Θεώρημα De Finetti σύμφωνα με το οποίο οι άπειρες ακολουθίες ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες και ισόνομες. Στη συνέχεια του κεφαλαίου δίνονται κάποιες στατιστικές συναρτήσεις που αφορούν τις διατεταγμένες παρατηρήσεις n ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών. Τέλος, γίνεται παρουσίαση της ακριβούς κατανομής στατιστικών συναρτήσεων που σχετίζονται με ροές επιτυχίας σε μια ανταλλάξιμη ακολουθία από δίτιμες δοκιμές.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας. Δίνονται τύποι για την αξιοπιστία των συστημάτων αυτών με τη βοήθεια της υπογραφής, αρχικά για την περίπτωση που αποτελούνται από ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες και στη συνέχεια για την περίπτωση που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες. Στα πλαίσια της εργασίας, μελετάται η στοχαστική σύγκριση μεταξύ διαφόρων συστημάτων, η οποία γίνεται συγκρίνοντας τις υπογραφές αυτών. Για το σκοπό αυτό αναφέρονται τέσσερα είδη στοχαστικής διάταξης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται το θέμα της διατήρησης των ιδιοτήτων φθοράς κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Συγκεκριμένα, δίνονται κάποια αποτελέσματα που διευκρινίζουν πότε ένα σύστημα ανήκει στην κλάση IFR ή DFR καθώς και ορισμένες συνθήκες που βασίζονται στο διάνυσμα υπογραφής του συστήματος και εξετάζουν το ίδιο ερώτημα. Τέλος,

διατυπώνονται κάποιες νέες πολυμεταβλητές έννοιες γήρανσης συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες και οι ιδιότητες αυτών, εστιάζοντας στη διμεταβλητή περίπτωση.

Abstract

The subject of the present MSc Dissertation is the comparison of reliability structures with exchangeable components. Even though most of the published work in this area deals with reliability systems with independent and identically distributed components, the assumption of dependence between the lifetimes of system's components is more realistic. This is the reason why more and more published work over the last years deals with components with dependent lifetimes. Principal concept for this study is the systems' signature, which is very helpful for the calculation of their reliability function.

In the first chapter the reader is introduced in the concept of system's reliability. With a flashback over the past decades, the evolution of this concept and the significance of statistics in calculating system's reliability are illustrated. More specifically, we introduce order statistics, which is a tool with an important role in reliability system theory, quality control and other applied areas. Finally, we present the concept of signature, which is a very useful tool for studying the reliability function of a system with exchangeable components.

In the second chapter, the concept of exchangeable random variables is introduced. Firstly, the finite/infinite exchangeable sequence and De Finetti's Theorem, according to which infinite exchangeable sequences are conditionally independent and identically distributed, are reviewed. Then, several results are given regarding the distribution of order statistics in a sample of exchangeable random variables. Finally, additional results regarding the distribution of runs in the case of an exchangeable sequence of binary trials are provided.

The third chapter introduces the reader to the concept of the signature of a coherent reliability structure. The reliability function of the system is expressed in terms of the system's signature for the case where the system's components are independent and identically distributed or the components are exchangeable. In addition, various results pertaining to the stochastic comparison of certain systems, based on the comparison of their signatures, are provided. For this purpose, four different kinds of stochastic order are considered.

The fourth chapter refers to the subject of aging preservation properties under the formation of coherent reliability systems. More specifically, various results regarding whether a coherent system is IFR/DFR are provided, along with several conditions based on the system's signature, examining the same question. Finally, some new concepts of multivariate aging for exchangeable random variables and their properties are presented, focusing our attention only on the bivariate case.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η αξιοπιστία συνήθως αναφέρεται στην ικανότητα που έχει μια μονάδα ή ένα τμήμα ενός εξοπλισμού να φέρει εις πέρας ικανοποιητικά τη λειτουργία για την οποία σχεδιάστηκε. Αρχικά, η αξιοπιστία θεωρήθηκε ως μια ποιοτική ιδιότητα. Για παράδειγμα η επιθυμία να έχουμε περισσότερες από μία μηχανές σε ένα αεροπλάνο αναγνωρίστηκε χωρίς να βασιστούμε σε κάποιου είδους δεδομένα απόδοσης ή αποτυχίας. Με το ίδιο σκεπτικό, η χαμηλή αξιοπιστία ενός συστήματος συχνά είχε ως επακόλουθο μια μη συστηματική προσπάθεια να βελτιωθούν οι μονάδες του συστήματος ξεχωριστά.

Σήμερα αντίθετα η αξιοπιστία χρησιμοποιείται σχεδόν πάντα με την ποσοτική της έννοια. Υπό αυτή την έννοια, η αξιοπιστία μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πιθανότητα που έχει ένα αντικείμενο να εκπληρώνει τη λειτουργία για την οποία έχει σχεδιαστεί καθ' όλη τη διάρκεια του χρόνου ζωής του. Αυτό ακριβώς είναι και το σημείο όπου εμφανίζονται οι μαθηματικές και στατιστικές μέθοδοι, καταλήγοντας έτσι σε μαθηματικά μοντέλα και μεθόδους που στοχεύουν στην επίλυση προβλημάτων πρόβλεψης, εκτίμησης ή βελτιστοποίησης της πιθανότητας επιβίωσης, του μέσου χρόνου ζωής ή της κατανομής του χρόνου ζωής των μονάδων του συστήματος.

Παρόλο που η θεωρία αξιοπιστίας άρχισε να χτίζει τους πυλώνες της στα μέσα της δεκαετίας του '60, σημαντική ανάπτυξη στον τομέα αυτό σημειώθηκε από τότε και μετά. Κινητήρια δύναμη για την πρόοδο αυτή υπήρξαν οι ανάγκες της βιομηχανίας και της κοινωνίας για βελτίωση της αξιοπιστίας και της ασφάλειας εξοπλισμών, αγαθών και διαδικασιών. Στις μέρες μας, η έρευνα στοχεύει στη βελτίωση της ποιότητας και της αξιοπιστίας των παραγόμενων αγαθών.

Στη θεωρία αξιοπιστίας, στην ανάλυση επιβίωσης, και γενικότερα στις πιθανότητες και τη στατιστική συμπερασματολογία, σημαντικό ρόλο έχουν οι διατεταγμένες παρατηρήσεις, καθώς χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε στατιστικές συναρτήσεις με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στους τομείς αυτούς, όπως ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Η θεωρία των διατεταγμένων παρατηρήσεων έχει αρχίσει να μελετάται εκτενώς από τις αρχές του περασμένου αιώνα, ενώ τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί μια ραγδαία αύξηση στις σχετικές μελέτες. Οι κατανομές των διατεταγμένων παρατηρήσεων που μελετήθηκαν πρώτες, αφορούσαν την περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, που αποτελούν μια ακραία υπόθεση. Όμως, στην ανάλυση αξιοπιστίας, η υπόθεση της εξάρτησης των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος αποτελεί πιο ρεαλιστική υπόθεση από αυτή της ανεξαρτησίας, αφού για παράδειγμα, μπορεί οι μονάδες του συστήματος να επηρεαστούν από ένα κοινό σοκ. Η σημασία των διατεταγμένων παρατηρήσεων στην περίπτωση των εξαρτημένων χρόνων ζωής, έγκειται στο ότι παριστάνουν το χρόνο ζωής των k-από-τα- n: F συστημάτων.

Ένα σημαντικό είδος εξάρτησης, το οποίο έχει τραβήξει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών τα τελευταία χρόνια, είναι η ανταλλαξιμότητα. Για τη μελέτη της αξιοπιστίας συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες, αλλά και των ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν αυτά τα συστήματα, ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο αποτελεί η έννοια της υπογραφής, η οποία εισήχθη από τον Samaniego (1985). Η έννοια αυτή αρχικά αναπτύχθηκε για μονότονα συστήματα που αποτελούνται από ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες, όμως το 2007 οι Navarro και Rychlik (2007) επέκτειναν τη χρήση της και στην περίπτωση των μονότονων συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες.

Κεφάλαιο 2

Ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές

2.1. Εισαγωγικά

Είναι γεγονός πως στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα τα δείγματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό ξεκίνησε να χρησιμοποιείται η έννοια των εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών στις πιθανότητες και τη στατιστική. Οι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές είναι μία ιδιαίτερα σημαντική μορφή εξάρτησης τυχαίων μεταβλητών. Καθώς οι διατεταγμένες παρατηρήσεις των τυχαίων αυτών μεταβλητών έχουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία αξιοπιστίας, και υπάρχει άμεση σχέση αυτών και της έννοιας της ανταλλαξιμότητας, θα ξεκινήσουμε δίνοντας κάποιους τύπους που αφορούν τις διατεταγμένες αυτές παρατηρήσεις. Δε μπορούμε να παραλείψουμε από την ανασκόπηση το Θεώρημα De Finetti, το οποίο αποτελεί το θεμελιώδες θεώρημα για μια άπειρη ακολουθία ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών. Σύμφωνα με το Θεώρημα αυτό, οι άπειρες ακολουθίες ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες και ισόνομες.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις ροές επιτυχιών σε μια ακολουθία από ανταλλάξιμες δοκιμές Bernoulli και θα βρούμε την ακριβή κατανομή διαφόρων στατιστικών συναρτήσεων ροών, που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η δεσμευμένη κατανομή οποιασδήποτε στατιστικής συνάρτησης ροής, δοθέντος του αριθμού των επιτυχιών, είναι ταυτόσημη με την αντίστοιχη κατανομή στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών. Η εύρεση της κατανομής τέτοιων ροών σε ανταλλάξιμες ακολουθίες οδηγούν στην εκτίμηση της αξιοπιστίας κάποιων σημαντικών συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες (όπως για παράδειγμα το συνεχόμενο- k-από-τα- n: G σύστημα).

2.2. Ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές

Ας φανταστούμε ότι κάποιος καταγράφει τα αποτελέσματα από δέκα ρίψεις ενός νομίσματος και τα εννέα από αυτά είναι ‘Κεφαλή’. Μετά από τις δέκα αυτές ρίψεις, δε θα ήταν παράλογο να αλλάξει την πεποίθησή του ότι το αποτέλεσμα της επόμενης ρίψης θα είναι και πάλι ‘Κεφαλή’. Από την υποκειμενική άποψη, όπου θεωρούμε τις πιθανότητες ως πεποιθήσεις κάτι τέτοιο έχει νόημα. Αντίθετα, από την αντικειμενική άποψη, όπου ορίζουμε την πιθανότητα επιτυχίας και έπειτα εφαρμόζουμε ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές, δεν είναι προφανές πως θα μπορούσαμε να χειριστούμε μια τέτοια περίπτωση. Η έννοια της ανταλλαξιμότητας όμως, θα δώσει την ευκαιρία για μια αντικειμενική ερμηνεία αλλάζοντας την πιθανότητα επιτυχίας καθ' όλη τη διάρκεια της ρίψης νομισμάτων. Η βασική υπόθεση που κάνουμε σε αυτή την περίπτωση είναι ότι δε μας νοιάζει πότε παρατηρείται η εμφάνιση 'Κεφαλής' ή 'Γραμμάτων', αλλά το πλήθος από αυτά που παρατηρήσαμε.

Στη θεωρία αξιοπιστίας, η υπόθεση της εξάρτησης των χρόνων ζωής των μονάδων που αποτελούν ένα σύστημα είναι πιο ρεαλιστική από την υπόθεση της ανεξαρτησίας. Για παράδειγμα, οι μονάδες ενός συστήματος μπορούν να επηρεαστούν από ένα κοινό γεγονός/σοκ. Ένα είδος εξάρτησης είναι και η ανταλλαξιμότητα, η οποία έχει τραβήξει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών τα τελευταία χρόνια. Για τον ορισμό μιας ανταλλάξιμης ακολουθίας βλέπε [20].

Ορισμός 2.2.1. *Μια πεπερασμένη ακολουθία* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *λέγεται ανταλλάξιμη ή συμμετρική αν ισχύει*

$$(X_1, X_2,\ldots,X_n) =^D (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)},\ldots,X_{\pi(n)}) \text{ ή}$$

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2,\ldots,X_n \leq x_n) = P(X_{\pi(1)} \leq x_1, X_{\pi(2)} \leq x_2,\ldots,X_{\pi(n)} \leq x_n)$$

για κάθε μετάθεση $\boldsymbol{\pi}$ *των* $1,2,\ldots,n$.

Ορισμός 2.2.2. *Μια άπειρη ακολουθία* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ *λέγεται ανταλλάξιμη ή συμμετρική αν για κάθε* n *ισχύει*

$$(X_1, X_2,\ldots,X_n) =^D (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)},\ldots,X_{\pi(n)}) \text{ ή}$$

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2,\ldots,X_n \leq x_n) = PX_{\pi(1)} \leq x_1, X_{\pi(2)} \leq x_2,\ldots,X_{\pi(n)} \leq x_n)$$

για κάθε μετάθεση $\boldsymbol{\pi}$ *των* $1,2,\ldots,n$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η άπειρη ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι ανταλλάξιμη εάν η από κοινού κατανομή ενός οποιουδήποτε πλήθους n από αυτές, εξαρτάται μόνο από το πλήθος n των τυχαίων μεταβλητών και όχι από τις συγκεκριμένες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X_1, X_2,\ldots,X_n$ είναι συμμετρική ως προς τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Εάν η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών είναι πεπερασμένη και ανταλλάξιμη, τότε καλείται N-ανταλλάξιμη. Θεωρήματα που ισχύουν για άπειρα ανταλλάξιμες ακολουθίες δεν είναι απαραίτητο να ισχύουν για N-ανταλλάξιμες ακολουθίες. Σημειώνουμε ότι οι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές είναι ισόνομες, δηλαδή έχουν την ίδια κατανομή. Τέλος, τονίζουμε ότι η περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών είναι η πιο απλή περίπτωση ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών

Αρχικά θα δώσουμε ένα παράδειγμα για τη δημιουργία ανταλλάξιμων ακολουθιών από δίτιμες τυχαίες μεταβλητές. Τα αποτελέσματα που θα δείξουμε όμως ισχύουν και για την περίπτωση οποιωνδήποτε διακριτών και συνεχών τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.2.1. Αυτή η διαδικασία που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, γνωστή ως ‘Το δοχείο του Pólya’, είναι μια κλασική διαδικασία για την παραγωγή ανταλλάξιμων δίτιμων δοκιμών. Δίνεται σε κάποιον ένα δοχείο με B_0 μαύρες και W_0 άσπρες μπάλες. Η διαδικασία που ακολουθείται περιγράφεται στη συνέχεια:

1. Θεωρούμε $i = 0$.
2. Τραβάμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο και σημειώνουμε το χρώμα της.
3. Αν η μπάλα είναι μαύρη τότε $X_i = 1$, αλλιώς $X_i = 0$.
4. Αυξάνουμε $i = i + 1$.
5. Τοποθετούμε τη μπάλα που τραβήξαμε στο δοχείο μαζί με α μπάλες του ίδιου χρώματος.
6. Πηγαίνουμε πάλι στο βήμα (2).

Εάν $\alpha = 1$ τότε η ακολουθία που παράγεται είναι ανεξάρτητη και ισόνομη και προκύπτει με επανατοποθέτηση, ενώ εάν $\alpha = 0$ πρόκειται για δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση η οποία οδηγεί στη Υπεργεωμετρική κατανομή.

Για να δούμε ότι οι μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανταλλάξιμες σημειώνουμε τα εξής παραδείγματα:

$$P(1,1,0,1) = \frac{B_0}{B_0 + W_0} \times \frac{B_0 + a}{B_0 + W_0 + a} \times \frac{W_0}{B_0 + W_0 + 2a} \times \frac{B_0 + 2a}{B_0 + W_0 + 3a}$$

$$P(1,0,1,1) = \frac{B_0}{B_0 + W_0} \times \frac{W_0}{B_0 + W_0 + a} \times \frac{B_0 + a}{B_0 + W_0 + 2a} \times \frac{B_0 + 2a}{B_0 + W_0 + 3a}$$

□

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η έννοια της ανταλλαξιμότητας προτάθηκε αρχικά από τον De Finetti, ο οποίος απέδειξε πως μια άπειρη ανταλλάξιμη ακολουθία κατανέμεται ως μίξη ανεξάρτητων και ισόνομων ακολουθιών. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το Θεώρημα De Finetti βλέπε [20].

Θεώρημα 2.2.1. (De Finetti (1937)) *Μια άπειρη ακολουθία ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών* $= (X_1, X_2, \dots)$ *αποτελεί μια μίξη ανεξάρτητων και ισόνομων ακολουθιών. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας* (U, Θ) *τέτοιος ώστε*

$$P(\boldsymbol{X} \in B) = \int_U P(\boldsymbol{X}(u) \in B)\Theta(du),$$

όπου $\boldsymbol{X}(u) = (X_1(u), X_2(u), \dots)$ *είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (που ονομάζονται μικτικές τυχαίες μεταβλητές) και* $\Theta(\cdot)$ *ένα μέτρο πιθανότητας, που ονομάζεται μέτρο μίξης.*

Στη συνέχεια, θα δώσουμε τη μορφή που παίρνει το παραπάνω Θεώρημα για την περίπτωση των δίτιμων τυχαίων μεταβλητών (βλέπε [26]).

Θεώρημα 2.2.2. Η άπειρη ακολουθία των δίτιμων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανταλλάξιμη αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση κατανομής $F(p)$ στο [0,1] τέτοια ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \int_0^1 p^{t_n}(1-p)^{n-t_n}\, dF(p)$$

όπου $t_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα ασχοληθούμε με τις διατεταγμένες παρατηρήσεις n τυχαίων μεταβλητών. Καθώς οι διατεταγμένες παρατηρήσεις έχουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία αξιοπιστίας, και υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ αυτών και της έννοιας της ανταλλαξιμότητας, θα ξεκινήσουμε δίνοντας κάποιους τύπους που αφορούν τις διατεταγμένες αυτές παρατηρήσεις. Είναι γνωστό ότι όταν οι μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και έχουν μια κοινή συνάρτηση κατανομής F, συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F} = 1 - F$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f = F'$, τότε ισχύουν:

$$f_{X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\, f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$\bar{F}_{i:n}(x) = P(X_{i:n} > x) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(x) \bar{F}^{n-j}(x),$$

$$f_{i:n}(x) = \bar{F}'_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} F^{i-1}(x) \bar{F}^{n-i}(x) f(x)$$

και

$$\begin{aligned} F_{r,k:n}(x,s) &= P(X_{r:n} > x, X_{k:n} > s) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} F^i(t) \sum_{j=0}^{k-i-1} \binom{n-i}{j} [F(x) - F(s)]^j F^{n-i-j}(s) \end{aligned}$$

για $s > x$ και $1 \leq r \leq k < n$. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [23].

Στην περίπτωση που το διάνυσμα $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι ανταλλάξιμο, τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος αυτού, $f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, είναι συμμετρική ως προς τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Θεωρώντας λοιπόν τις αντίστοιχες διατεταγμένες μεταβλητές $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$f_{X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\, f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; x_1 < x_2 < \cdots < x_n. \qquad (2.1)$$

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση επιβίωσης της μεταβλητής $X_{i:n}$. Αφού τα X_i είναι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να γράψουμε

$$\bar{F}_{i:n}(x) = P(X_{i:n} > x) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} P(X_1 \leq x, \dots, X_j \leq x, X_{j+1} > x, \dots, X_n > x)$$

Η παραπάνω ισότητα μπορεί να γραφεί με χρήση των όρων της από κοινού συνάρτησης επιβίωσης των X_i, όπως δίνεται στη συνέχεια:

$$\bar{F}_{i:n}(x) = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} P(X_{1:j} > x)$$

$$= \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \bar{F}(\underbrace{x, x, \dots, x}_{j}, \underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{n-j})$$

$$= 1 - \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} \binom{n}{j} F\,(\underbrace{x, x, \dots, x}_{j}, \underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{n-j}). \qquad (2.2)$$

Για την απόδειξη της παραπάνω σχέσης παραπέμπουμε στο [23]. Η σχέση (2.2) δείχνει ότι η συνάρτηση επιβίωσης της μεταβλητής $X_{i:n}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της από κοινού συνάρτησης επιβίωσης των X_1, X_2,...,X_n. Μια τέτοιου είδους απεικόνιση ονομάζεται γενικευμένη μίξη. Παραγωγίζοντας και τις δύο πλευρές ως προς x μπορούμε να πάρουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $X_{i:n}$.

Θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}_{r,k:n}$ που πρόκειται για την από κοινού συνάρτηση επιβίωσης των $(X_{r:n}, X_{k:n})$, $1 \leq r \leq k < n$. Για $r = 1$ και $s > x$ έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{F}_{1,k:n}(x, s) &= P(X_{1:n} > x, X_{k:n} > s) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} P(x < X_1 \leq s, \dots, x < X_j \leq s, X_{j+1} > s, \dots, X_n > s).\end{aligned}$$

Ακόμη, για $s > x$ και $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{1,k:n}(x, s) &= P(X_{1:n} > x, X_{k:n} > s) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \binom{n}{j} \binom{n-j-1}{n-k} \bar{F}\,(\underbrace{x, x, \dots, x}_{j}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-j})\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Η ισότητα (2.3) μας δείχνει ότι η από κοινού συνάρτηση αξιοπιστίας των $(X_{1:n}, X_{k:n})$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της από κοινού συνάρτησης επιβίωσης των X_i, $\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)$.

Σημειώνουμε ακόμη πως χρησιμοποιώντας την από κοινού και τις περιθώριες συναρτήσεις αξιοπιστίας, η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $(X_{1:n}, X_{k:n})$ δίνεται από τη σχέση:

$$F_{1,k:n}(x,s) = P(X_{1:n} \le x, X_{k:n} \le s) = 1 - \bar{F}_{X_{1:n}}(x) - \bar{F}_{X_{k:n}}(s) + \bar{F}_{X_{1,k:n}}(x,s).$$

Θεωρούμε ακόμη την από κοινού συνάρτηση αξιοπιστίας των $(X_{r:n}, X_{k:n})$ όπου $1 \le r \le k < n$. Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες για τις διατεταγμένες μεταβλητές και την υπόθεση της ανταλλαξιμότητας των X_i μπορούμε να γράψουμε:

$$P(X_{r:n} > x, X_{k:n} > s) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{k-i-1} \binom{n-i}{j} \times$$

$$P(X_1 \le x, \dots, X_i \le x, x < X_{i+1} \le s, \dots, x < X_{i+j} \le s, X_{i+j+1} > s, \dots, X_n > s) \qquad (2.4)$$

Λήμμα 2.2.1. Για $s > x$, $P(X_1 \le x, \dots, X_i \le x, x < X_{i+1} \le s, \dots, x < X_{i+j} \le s, X_{i+j+1} > s, \dots, X_n > s)$

$$= \bar{F}(\underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{i}, \underbrace{x, \dots, x}_{j}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-i-j})$$

$$- \sum_{l=1}^{j} (-1)^{l+1} \binom{j}{l} \bar{F}(\underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{i}, \underbrace{x, \dots, x}_{j-l}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-i-j+l})$$

$$- \sum_{l=1}^{i} (-1)^{l+1} \bar{F}(\underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{i-l}, \underbrace{x, \dots, x}_{l+j}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-i-j})$$

$$+ \sum_{l_1=1}^{i} \sum_{l_2=1}^{j} (-1)^{l_1+l_2} \binom{i}{l_1} \binom{j}{l_2} \bar{F}(\underbrace{-\infty, \dots, -\infty}_{i-l_1}, \underbrace{x, \dots, x}_{j+l_1-l_2}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-i-j+l_2}). \qquad (2.5)$$

Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε άθροιση στην ισότητα (2.5) είναι ίση με μηδέν αν $i = 0$ ή $j = 0$. Όταν $i = 0$ η πιθανότητα στην ισότητα (2.5) είναι ίση με $P(x < X_{i+1} \le s, \dots, x < X_j \le s, X_{j+1} > s, \dots, X_n > s)$. Ομοίως για $j = 0$ είναι ίση με $P(X_1 \le x, \dots, X_i \le x, x < X_{i+1} > s, \dots, X_n > s)$. Για την απόδειξη αυτού παραπέμπουμε στο [24].

2.3. Κατανομή ροών επιτυχιών σε μια ακολουθία από ανταλλάξιμες δίτιμες δοκιμές

Η εμφάνιση ροών και μοτίβων σε μια ακολουθία δοκιμών με διακριτά αποτελέσματα ή τυχαίων μεταθέσεων, είναι σημαντική έννοια σε διάφορους τομείς της επιστήμης, συμπεριλαμβανομένων της στατιστικής θεωρίας αξιοπιστίας, του στατιστικού ελέγχου ποιότητας, της βιολογίας (ταυτοποίηση αλληλουχίας DNA) και των ελέγχων υποθέσεων. Για μια εκτενή ανασκόπηση των δοκιμών και των εφαρμογών τους ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [17].

Η εύρεση της ακριβούς κατανομής της στατιστικής συνάρτησης ροών μπορεί να καταστεί ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία με χρήση της συνδυαστικής ανάλυσης, ακόμη και στην πιο απλή περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών Bernoulli. Για το λόγο αυτό, οι Fu και Koutras (βλέπε [18]) παρουσίασαν την τεχνική ενσωμάτωσης της Μαρκοβιανής αλυσίδας (MCI), η οποία χρησιμοποιείται ευρέως για της εύρεση της κατανομής διαφόρων στατιστικών ροών.

Η χρήση της παραπάνω τεχνικής απαιτεί τον ορισμό ενός κατάλληλου πεπερασμένου χώρου Ω που είναι βασισμένος στη δομή της συγκεκριμένης ροής, ενός κατάλληλου διαμερισμού $\{C_X\}$ του συνόλου Ω για κάθε x, μιας πεπερασμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{Y_t(x,i)\}$ και ενός πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Με τον ορισμό αυτόν, έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε την ακριβή κατανομή για ένα μεγάλο πλήθος στατιστικών συναρτήσεων ροών. Η πρώτη συνιστώσα x της πεπερασμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας Y_t προσδιορίζει τον αριθμό των εμφανίσεων ενός συγκεκριμένου μοτίβου, ενώ η δεύτερη συνιστώσα i μας δίνει πληροφορία σχετικά με το στάδιο του σχηματισμού του επόμενου μοτίβου. Στις περισσότερες περιπτώσεις η δεύτερη συνιστώσα συμβολίζει τον αριθμό των συνεχόμενων επιτυχιών. Η ακολουθία Y_t έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα όταν η αρχική δίτιμη ακολουθία αποτελείται από ανεξάρτητα ή Μαρκοβιανά εξαρτημένα στοιχεία.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την περίπτωση ροών επιτυχιών που βασίζονται σε μια ανταλλάξιμη ακολουθία από δίτιμες δοκιμές $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Δεδομένου ότι η δεύτερη συνιστώσα, i, της Μαρκοβιανής αλυσίδας δεν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα στην περίπτωση των ανταλλάξιμων δοκιμών, η τεχνική MCI δεν είναι κατάλληλη για την εύρεση της κατανομής μιας στατιστικής συνάρτησης ροής σε μια ακολουθία ανταλλάξιμων δοκιμών. Θα αποδείξουμε ότι για την περίπτωση των ανταλλάξιμων δοκιμών, η δεσμευμένη κατανομή μιας στατιστικής συνάρτησης ροής, δοθέντος του αριθμού των επιτυχιών, είναι ταυτόσημη με την αντίστοιχη κατανομή στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών. Αυτό το αποτέλεσμα, σε συνδυασμό με τη δεσμευμένη κατανομή στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών, δίνει τη δυνατότητα σε κάποιον να υπολογίσει τις περιθώριες κατανομές στατιστικών συναρτήσεων ροής για ανταλλάξιμες δοκιμές.

Διαφορετικά σχήματα απαρίθμησης σε μια ακολουθία δίτιμων δοκιμών με πιθανά αποτελέσματα ‘1’ (επιτυχία) και ‘0’ (αποτυχία) δημιουργούν διάφορες στατιστικές συναρτήσεις ροών, όπως για παράδειγμα τον αριθμό των ροών επιτυχιών μήκους ακριβώς ίσο με k (συμβ. $E_{n,k}$), τον αριθμό των ροών επιτυχιών μήκους τουλάχιστον ίσο με k (συμβ. $G_{n,k}$), τον αριθμό των μη επικαλυπτόμενων ή επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k (συμβ. $N_{n,k}$ και $M_{n,k}$) και το μέγιστο μήκος ροής επιτυχιών (συμβ. L_n). Για την καλύτερη κατανόηση των πιο πάνω τυχαίων μεταβλητών έστω ότι έχουμε μια ακολουθία $n = 12$ δίτιμων δοκιμών με επιτυχία (1) και αποτυχία (0), 111101011000. Τότε έχουμε

$E_{12,2} = 1$, $E_{12,3} = 0$, $G_{12,2} = 2$, $G_{12,3} = 1$, $N_{12,2} = 3$, $N_{12,3} = 1$, $M_{12,2} = 4$, $M_{12,3} = 2$, και $L_{12} = 4$.

Η δεσμευμένη κατανομή των παραπάνω στατιστικών συναρτήσεων, δοθέντος του αριθμού των επιτυχιών σε μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές. Η ανταλλαξιμότητα όμως, η οποία οδηγεί σε ένα μοντέλο εξάρτησης με ευρύ φάσμα εφαρμογών σε τομείς όπως η αξιοπιστία και ο έλεγχος ποιότητας, ορίζει μια μορφή συμμετρίας ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές. Θα θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση των ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές από το σύνολο $\{0,1\}$.

Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ μια ακολουθία από δίτιμες ανταλλάξιμες δοκιμές με δύο δυνατά αποτελέσματα, όπου ‘1’ (επιτυχία) και ‘0’ (αποτυχία). Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $S_n^{(e)} = N_{n,1}^{(e)}$ (βλέπε [19]) δίνεται από τη σχέση

$$P\left\{S_n^{(e)} = s\right\} = \binom{n}{s} g(n,s). \tag{2.6}$$

όπου

$$g(n,s) = \sum_{i=0}^{n-s} (-1)^i \binom{n-s}{i} \lambda_{s+i},$$

και $\lambda_y = P\left\{\xi_1 = \cdots = \xi_y = 1\right\}$ για $y = 1,2,\ldots$ και $\lambda_0 = 1$. Για την ακρίβεια η συνάρτηση $g(n,s)$ ορίζει την πιθανότητα ότι s από τα $\xi_i's$ είναι ίσα με ‘1’ και $n - s$ από τα $\xi_i's$ είναι ίσα με ‘0’.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή η_i, η οποία συμβολίζει το μήκος της ροής επιτυχιών στο i -οστό στάδιο. Για παράδειγμα $\{\eta_i = k\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{\xi_i = \cdots = \xi_{i-k+1} = 1, \xi_{i-k} = 0\}$. Η μεταβλητή $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα όταν η ακολουθία $\xi_1, \xi_2, \ldots$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες ή από Μαρκοβιανά εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές. Αυτό δεν ισχύει όμως στην περίπτωση που η ακολουθία αποτελείται από ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές. Για την απόδειξη αυτού ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [19]. Επομένως, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική MCI για την εύρεση της ακριβούς κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων ροής. Για το λόγο αυτό, θα βρούμε τις κατανομές αυτές με βάση το συνολικό αριθμό επιτυχιών. Για τους Ορισμούς και τις αποδείξεις των Προτάσεων που θα ακολουθήσουν παραπέμπουμε στο [19].

Θεωρούμε την ακόλουθη γενίκευση της στατιστικής συνάρτησης ροών, η οποία περιλαμβάνει πολλές ροές για τις ειδικές περιπτώσεις που εμπλέκονται παράμετροι.

Ορισμός 2.3.1. Θεωρούμε τις παραμέτρους $1 \leq a, b, c \leq n, (a, b, c \in \mathbb{Z}^+, a \leq b, bc \leq n)$ και $d \in \{1,2\}$. Αν η στατιστική συνάρτηση $X_{a,b,c,d}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X_{a,b,c,d} = \sum_{m=a}^{b} \sum_{j=mc}^{n} Y_j^{mc,d}$$

όπου

$$Y_j^{mc,d} = \begin{cases} 1 \; αν \; \eta_j = mc \; και \; (d-1)\xi_{j+1} = 0, \\ 0 \; αλλιώς \end{cases}$$

τότε ονομάζεται γενικευμένη στατιστική συνάρτηση ροής (GRS) βασισμένη στην ακολουθία $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Για διάφορες επιλογές των παραμέτρων a, b, c, d προκύπτουν διαφορετικά σχήματα απαρίθμησης. Τα πιο γνωστά σχήματα φαίνονται στον Πίνακας 1 που ακολουθεί.

Πίνακας 1: Οι βασικότερες στατιστικές συναρτήσεις ροών για διάφορες τιμές των παραμέτρων a,b,c,d.

d	**a**	**b**	**c**	$\boldsymbol{X_{a,b,c,d}}$
1	k	n	1	$M_{n,k}$
1	1	$\left[\frac{n}{k}\right]$	k	$N_{n,k}$
2	k	k	1	$E_{n,k}$
2	k	n	1	$G_{n,k}$

Για παράδειγμα, διαλέγοντας τις κατάλληλες παραμέτρους, όπως φαίνονται στον παραπάνω πίνακα, για τις στατιστικές συναρτήσεις $M_{n,k}$ και $N_{n,k}$ παίρνουμε τις εξής σχέσεις:

$$X_{k,n,1,1} = \sum_{m=k}^{n} \sum_{j=m}^{n} Y_j^{m,1}, \qquad X_{1,\left[\frac{n}{k}\right],k,1} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \sum_{j=mk}^{n} Y_j^{mk,1}.$$

Συμβολίζουμε με $X_{a,b,c,d}$ και $X_{a,b,c,d}^{(e)}$ τις γενικευμένες στατιστικές συναρτήσεις ροής που εξαρτώνται από ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές και ανταλλάξιμες δοκιμές αντίστοιχα. Το ακόλουθο λήμμα αποδεικνύει ότι η δεσμευμένη κατανομή των παραπάνω στατιστικών συναρτήσεων είναι ίδια, δοθέντος του αριθμού των επιτυχιών.

Λήμμα 2.3.1. Ισχύει ότι

$$P\left[X_{a,b,c,d}^{(e)} = x | S_n^{(e)} = l\right] = P\left[X_{a,b,c,d} = x | S_n = l\right].$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω Λήμματος είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τις περιθώριες κατανομές των στατιστικών συναρτήσεων ροής στην περίπτωση των ανταλλάξιμων δοκιμών. Με χρήση του νόμου της ολικής πιθανότητας έχουμε

$$P\left[X_{a,b,c,d}^{(e)} = x\right] =$$

$$\sum_{\chi} P\left[X_{a,b,c,d}^{(e)} = x | S_n^{(e)} = l\right] P\left[S_n^{(e)} = l\right] = \sum_{\chi} P\left[X_{a,b,c,d} = x | S_n = l\right] P\left[S_n^{(e)} = l\right]$$

όπου χ αποτελείται από τα $l \leq n$ για τα οποία ισχύει $\left[X_{a,b,c,d} = x | S_n = l\right]$ και όπου η $P\left[S_n^{(e)} = l\right]$ δίνεται από τη σχέση (2.6).

Παράδειγμα 2.3.1. Θα υπολογίσουμε την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης που εκφράζει τον αριθμό ροών μήκους τουλάχιστον ίσο με k στην περίπτωση των ανταλλάξιμων δοκιμών.

Η δεσμευμένη κατανομή του παραπάνω στατιστικού στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών δίνεται από τη σχέση (βλέπε [21])

$$P\left[G_{n,k} = x | S_n = l\right] = \frac{\binom{n-l+1}{x}}{\binom{n}{l}} \sum_{j=0}^{[(l-kx)/k]} (-1)^j \binom{n-l-x+1}{j} \binom{n-k(x+j)}{n-l}.$$

Αφού ισχύει $P\left[G_{n,k}^{(e)} = x | S_n^{(e)} = l\right] = P\left[G_{n,k} = x | S_n = l\right]$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.6) έχουμε:

$$P\left[G_{n,k}^{(e)} = x\right] = \sum_{x_1} P\left[G_{n,k} = x | S_n = l\right] P\left[S_n^{(e)} = l\right]$$

$$= \sum_{l \in x_1} \sum_{j \in x_2} \sum_{i \in x_3} (-1)^j (-1)^i \binom{n-l-x+1}{j} \binom{n-l+1}{x}$$

$$\times \binom{n-k(x+j}{n-l} \binom{n-l}{i} \lambda_{l+i}.$$

όπου

$$x_1 \in \{l: 0 \leq l \leq n, l-kx \geq 0, n-l+1 \geq x\},$$

$$x_2 \in \left\{j: j \leq n-l-x+1, j \leq \left[\frac{l-kx}{k}\right]\right\},$$

$x_3 \in \{i: 0 \le i \le n-l\}$.

Από την τομή των περιορισμών στα x_1, x_2 και x_3 έχουμε

$$P\left[G_{n,k}^{(e)} = x\right] = \sum_{l=kx}^{a_1}\sum_{j=0}^{a_2}\sum_{i=0}^{n-l}(-1)^j(-1)^i\binom{n-l-x+1}{j}\binom{n-l+1}{x} \\ \times\binom{n-k(x+j)}{n-l}\binom{n-l}{i}\lambda_{l+i}, \ \ x = 0,1,\dots,\left[\frac{n+1}{k+1}\right], \quad (2.7)$$

όπου $a_1 = \min(n, n-x+1)$ και $a_2 = \min\left(\left[\frac{l-kx}{k}\right], n-l-x+1\right)$.

□

Η στατιστική συνάρτηση του μέγιστου μήκους ροής επιτυχιών είναι μια από τις πιο χρήσιμες στατιστικές συναρτήσεις για την αξιοπιστία ενός συστήματος συνεχόμενου- k-από-τα- n: G. Για τον ορισμό ενός τέτοιου συστήματος, θεωρούμε ένα μονότονο δυαδικό σύστημα $\Sigma = (Z, \varphi)$ το οποίο αποτελείται από ένα σύνολο μονάδων Z και τη συνάρτηση δομής $\varphi: Z^n = Z \times Z \times \dots Z \to [0,1]$. Υποθέτουμε ότι σε οποιαδήποτε στιγμή, κάθε μονάδα του συστήματος μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις δύο καταστάσεις , λειτουργίας (1) ή μη λειτουργίας (0). Για το συνεχόμενο- k-από-τα- n: G σύστημα ισχύει $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ =1 αν και μόνο αν k ή περισσότερες συνεχόμενες μονάδες λειτουργούν. Επομένως, η αξιοπιστία ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$E[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)] = P[L_n \ge k],$$

όπου με L_n συμβολίζουμε τη στατιστική συνάρτηση του μέγιστου μήκους ροής επιτυχιών σε n δοκιμές.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι ένα σύστημα αποτελείται από n μονάδες και ότι το Y_i ($i = 1,2,\dots,n$) συμβολίζει την αντοχή της i-οστής μονάδας η οποία υπόκειται σε πίεση X. Η μονάδα αποτυγχάνει αν η πίεση που της εξασκείται ξεπερνά την αντοχή της κάποια στιγμή, δηλαδή αν $Y_i > X$ τότε η i-οστή μονάδα συνεχίζει να λειτουργεί, διαφορετικά αποτυγχάνει. Η πιθανότητα $P[Y_i > X]$ δίνει την αξιοπιστία της i-οστής μονάδας. Ορίζουμε ακόμη

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & Y_i > X \\ 0, & Y_i \le X \end{cases}, \ i = 1,2,\dots,n.$$

όπου Y_i, $i = 1,2,\dots,n$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες της X. Τότε οι μεταβλητές ξ_i, $i = 1,2,\dots,n$ είναι ανταλλάξιμες. Αν σε ένα τέτοιο σύστημα η συνάρτηση επιβίωσης του συστήματος εξαρτάται από την παρατήρηση των k ή περισσότερων συνεχόμενων εν λειτουργία μονάδων, τότε η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$P\left[L_n^{(e)} \ge k\right],$$

όπου $L_n^{(e)}$ ορίζει τη στατιστική συνάρτηση του μέγιστου μήκους ροής επιτυχιών μιας ακολουθίας από ανταλλάξιμες δίτιμες δοκιμές. Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια αποτελέσματα που αφορούν τη στατιστική συνάρτηση $P\left[L_n^{(e)} \geq k\right]$.

Η ακριβής έκφραση για την αξιοπιστία του συστήματος αυτού, $P\left[L_n^{(e)} \geq k\right]$, μπορεί να βρεθεί εύκολα αφού $P\left[L_n^{(e)} < k\right] = P\left[G_{n,k}^{(e)} = 0\right]$. Με χρήση της σχέσης (2.7) για $k = 1,2,\dots,n$ έχουμε

$$P\left[L_n^{(e)} \geq k\right] = 1 - \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=0}^{\min(\left[\frac{l}{k}\right],n-l+1)} \sum_{i=0}^{n-l} (-1)^j (-1)^i \binom{n-l+1}{j} \binom{n-kj}{n-l} \binom{n-l}{i} \lambda_{l+i}.$$

Είναι δυνατόν να πάρουμε μια απλούστερη έκφραση για την αξιοπιστία $P\left[L_n^{(e)} \geq k\right]$ του συστήματος όταν $2k \geq n$. Το αποτέλεσμα αυτό δίνεται στο ακόλουθο λήμμα, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο [19].

Λήμμα 2.3.2. *Για $2k \geq n$ ισχύει ότι*

$$P\left[L_n^{(e)} \geq k\right] = (n-k+1)\lambda_k - (n-k)\lambda_{k+1}.$$

Όπως είδαμε παραπάνω, ο ορισμός της πιθανότητας $\lambda_m = P[Y_1 > X, \dots, Y_m > X]$ είναι επαρκής για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας του συστήματος. Υποθέτουμε ότι $P[X \leq x] = F_X(x)$ και $P[Y_i \leq x] = F_Y(x), i = 1,2,\dots,n$, όπου F_X, F_Y είναι συνεχείς συναρτήσεις. Σε αυτή την περίπτωση

$$\lambda_m = P[Y_1 > X, \dots, Y_m > X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{F}_Y(x)\right)^m d\, F_X(x).$$

Προκειμένου να γίνουν όλα αυτά κατανοητά, θα δώσουμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.3.2. Θεωρούμε $F_X(x) = 1 - e^{-\theta_1 x}$ και $F_Y(x) = 1 - e^{-\theta_2 x}, x > 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lambda_m = \frac{\theta_1}{\theta_1 + m\theta_2}.$$

Επομένως, για $k = 1,2,\dots,n$ ισχύει

$$P\left[L_n^{(e)} \geq k\right]$$
$$= 1 - \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=0}^{\min(\left[\frac{l}{k}\right],n-l+1)} \sum_{i=0}^{n-l} (-1)^j (-1)^i \binom{n-l+1}{j} \binom{n-kj}{n-l} \binom{n-l}{i} \frac{\theta_1}{\theta_1 + (l+i)\theta_2}.$$

και ένας εναλλακτικός τύπος για την περίπτωση που ισχύει $2k \geq n$ είναι

$$P\left[L_n^{(e)} \geq k\right] = (n-k+1)\frac{\theta_1}{\theta_1 + k\theta_2} - (n-k)\frac{\theta_1}{\theta_1 + (k+1)\theta_2}.$$

□

Εάν στο σύστημα που περιγράψαμε προηγουμένως, η επιβίωση εξαρτάται από την παρατήρηση των k ή περισσότερων (όχι απαραίτητα συνεχόμενων) εν λειτουργία μονάδων, τότε το σύστημα ονομάζεται k-από-τα- n: G σύστημα και η αξιοπιστία του δίνεται από τη σχέση:

$$P\left[S_n^{(e)} \geq k\right] = \sum_{a=k}^{n} \sum_{j=0}^{n-a} (-1)^j \binom{n}{a} \binom{n-a}{j} \lambda_{a+j},$$

όπου $\lambda_m = P[Y_1 > X, \dots, Y_m > X]$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτό, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [25].

Κεφάλαιο 3

Συστήματα αξιοπιστίας με ανταλλάξιμες μονάδες

3.1. Εισαγωγικά

Στη θεωρία αξιοπιστίας, τα μονότονα συστήματα αποτελούν το βασικό πλαίσιο για την περιγραφή της δομής ενός συστήματος. Ξεκινώντας από τους χρόνους ζωής των μονάδων ενός μονότονου συστήματος, μπορούμε να καταλήξουμε στο χρόνο ζωής ολόκληρου του συστήματος. Εάν οι χρόνοι ζωής των μονάδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, τότε η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος είναι μια συνάρτηση των κατανομών των διατεταγμένων χρόνων ζωής των μονάδων. Τα βάρη σε αυτή την κατανομή μίξης είναι γνωστά ως υπογραφή του Samaniego.

Η προηγούμενη διατύπωση για το χρόνο ζωής του συστήματος ισχύει και υπό πιο ασθενείς προϋποθέσεις, για παράδειγμα όταν αντικαταστήσουμε την υπόθεση των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με την υπόθεση των ανταλλάξιμων τυχαίων μεταβλητών. Παρόλο που το μεγαλύτερο κομμάτι των δημοσιευμένων ερευνών στη θεωρία αξιοπιστίας ασχολείται με συστήματα που αποτελούνται από ανεξάρτητες μονάδες, στην πράξη αυτό που συναντάται είναι οι μονάδες να συνδέονται με κάποια μορφή εξάρτησης. Για το λόγο αυτό, θα ασχοληθούμε με συστήματα των οποίων οι μονάδες είναι ανταλλάξιμες και, με τη χρήση της λεγόμενης υπογραφής τους, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας αυτών.

3.2. Η έννοια της υπογραφής

Εκτός από τις κλασικές τεχνικές που διαθέτουμε για τη μελέτη της λειτουργίας ενός συστήματος αξιοπιστίας (μέσω της συνάρτησης αξιοπιστίας ή του μέσου χρόνου μέχρι την αποτυχία) ένα χρήσιμο εργαλείο για το χαρακτηρισμό ενός τέτοιου συστήματος είναι η έννοια της υπογραφής, η οποία εισήχθη από τον Francisco Samaniego (βλέπε [7]).

Ορισμός 3.2.1. *Έστω τ ένα μονότονο σύστημα τάξης n. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι ζωής των n μονάδων του συστήματος είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (iid) και* *περιγράφονται από μια συνεχή κατανομή F. Η υπογραφή του συστήματος τ, η οποία συμβολίζεται με $\boldsymbol{s_\tau}$ ή απλούστερα με $\boldsymbol{s}$, είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα πιθανότητας του οποίου το i-οστό στοιχείο s_i ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει όταν αποτύχει η i-οστή του μονάδα. Δηλαδή, $s_i = P(T = X_{i:n})$, όπου T είναι ο χρόνος ζωής του συστήματος και $X_{i:n}$ είναι η i-οστή διατεταγμένη παρατήρηση του διανύσματος που περιέχει τους χρόνους ζωής των n μονάδων, δηλαδή είναι ο χρόνος μέχρι την αποτυχία της i-οστής μονάδας.*

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, με την υπόθεση των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων, η υπογραφή ενός συστήματος αποτελεί ένα καθαρό μέτρο περιγραφής της συνδεσμολογίας ενός συστήματος, αφού εξαρτάται μόνο από τη δομή του συστήματος και όχι από την κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων του.

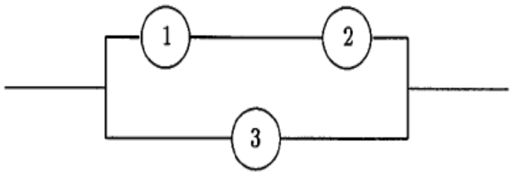
Ένα από τα πιο βασικά συστήματα στη θεωρία αξιοπιστίας είναι το σύστημα *k-από-τα-n: F* (ένα σύστημα n μονάδων που αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον k μονάδες από τις n), το οποίο θα συμβολίζεται με $\tau_{k|n}$. Για παράδειγμα, $\tau_{1|n}$και $\tau_{n|n}$ είναι αντίστοιχα το σειριακό και το παράλληλο σύστημα τάξης n. Προφανώς το διάνυσμα υπογραφής ενός *k-από-τα-n:F* συστήματος είναι το $\boldsymbol{s_{k|n}} = (0, \dots ,0, s_k, 0, ,0)$ όπου $s_k = 1$ (βλέπε [6]).

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, το i -οστό στοιχείο του διανύσματος $\boldsymbol{s}$ δίνεται από τον τύπο $s_i = P(T = X_{i:n})$, όπου με T συμβολίζεται ο χρόνος ζωής του συστήματος και με $X_{i:n}$ η i -οστή διατεταγμένη παρατήρηση μεταξύ των χρόνων ζωής των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων $X_1, X_2,\dots,X_n$. Ανάλογα, μπορούμε να υπολογίσουμε το s_i σαν το πηλίκο του αριθμού n_i των διατάξεων για τις οποίες η αποτυχία της i -οστής μονάδας προκαλεί αποτυχία του συστήματος, προς το συνολικό αριθμό $n!$ όλων των δυνατών διατάξεων των n χρόνων ζωής των μονάδων.

Τονίζουμε ότι υπό την υπόθεση των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων, κάθε μία από τις $n!$ διατάξεις των χρόνων ζωής $X_1, X_2,\dots,X_n$ των μονάδων είναι εξίσου πιθανή να συμβεί. Επομένως η πιθανότητα ότι η αποτυχία της i -οστής είναι μοιραία για το σύστημα, εξαρτάται αποκλειστικά από την πιθανότητα ότι η τελευταία μονάδα που λειτουργεί σε ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής είναι η i -οστή μονάδα που αποτυγχάνει συνολικά. Με άλλα λόγια, για να υπολογίσουμε τα $s_i,\ i = 1, \dots , n$, αρκεί να εντοπίσουμε τα ελάχιστα σύνολα διακοπής και να καταγράψουμε για κάθε μία από τις εξίσου πιθανές μεταθέσεις των $X_1, X_2,\dots,X_n$ τη διατεταγμένη παρατήρηση που συνδέεται με την αποτυχία του συστήματος (το σύστημα αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες ενός ελάχιστου συνόλου διακοπής αποτύχουν). Το ακόλουθο παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τις παραπάνω έννοιες.

Παράδειγμα 3.2.1. Θεωρούμε το παράλληλο-σειριακό σύστημα που φαίνεται παρακάτω:

Σχήμα 1: Παράλληλο-σειριακό σύστημα $τ_{ps}$



Ο χρόνος ζωής του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$T_{ps} = \max\{\min\{X_1, X_2\}, X_3\}.$$

Τα ελάχιστα σύνολα διακοπής του συστήματος του **Error! Not a valid bookmark self-reference.** είναι τα {1,3} και {2,3}. Στον Πίνακας 2 σημειώνουμε τις έξι πιθανές μεταθέσεις των χρόνων ζωής των τριών μονάδων, καταγράφοντας συγχρόνως στην κάθε περίπτωση τη διατεταγμένη παρατήρηση που συνδέεται με την αποτυχία του συστήματος.

Από τον Πίνακας 2 είναι προφανές ότι η υπογραφή του συστήματος είναι $\boldsymbol{s_{ps}} = (0,2/3,1/3)$.

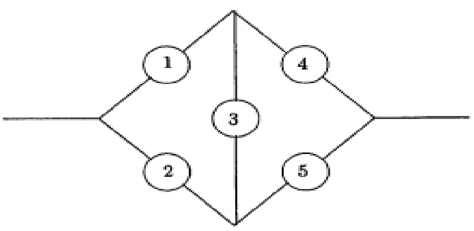
Πίνακας 2: Ο χρόνος ζωής ενός παράλληλου-σειριακού συστήματος με χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων

Διάταξη των χρόνων ζωής των μονάδων	Χρόνος ζωής συστήματος
$X_1 < X_2 < X_3$	$X_{3:3}$
$X_1 < X_3 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_2 < X_1 < X_3$	$X_{3:3}$
$X_2 < X_3 < X_1$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_1 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_2 < X_1$	$X_{2:3}$

□

Παράδειγμα 3.2.2. Θεωρούμε το σύστημα γέφυρα που φαίνεται παρακάτω:

Σχήμα 2: Σύστημα γέφυρα $τ_{BS}$



Σημειώνουμε ότι τα ελάχιστα σύνολα διακοπής του παραπάνω συστήματος είναι τα {1,2}, {4,5}, {1,3,5} και {2,3,4}. Είναι σαφές πως η αποτυχία μιας μονάδας δε μπορεί να προκαλέσει αποτυχία του συστήματος, οπότε $s_1 = 0$.

Τα ελάχιστα σύνολα διακοπής που αποτελούνται από δύο μονάδες είναι τα $\{1,2\}$ και $\{4,5\}$ και σε καθένα από αυτά έχουμε 2! δυνατές μεταθέσεις. Σε κάθε μία από αυτές τις 4 μεταθέσεις αντιστοιχούν ακόμη 3! πιθανές μεταθέσεις των 3 μονάδων που απομένουν. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για την αποτυχία του συστήματος ταυτόχρονα με την αποτυχία της δεύτερης μονάδας ισούται με $(2! \cdot 3! + 2! \cdot 3!) = 12 + 12 = 24$. Ακόμη, το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων για την αποτυχία των 5 μονάδων του συστήματος ισούται με $5! = 120$. Επομένως η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει με την αποτυχία της δεύτερης μονάδας ισούται με

$$s_2 = P\big(T = X_{(2)}\big) = \tfrac{24}{120} = 0.2.$$

Για να βρούμε την πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ισούται με τον τρίτο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με παραπάνω. Τα ελάχιστα σύνολα διακοπής που αποτελούνται από 3 μονάδες είναι τα $\{1,3,5\}$ και $\{2,3,4\}$ και σε καθένα από αυτά έχουμε 3! δυνατές μεταθέσεις. Σε κάθε μία από αυτές τις 12 μεταθέσεις αντιστοιχούν ακόμη 2! πιθανές μεταθέσεις των δύο μονάδων που απομένουν. Επίσης, οι ευνοϊκές περιπτώσεις για την αποτυχία του συστήματος ταυτόχρονα με την αποτυχία της τρίτης μονάδας περιλαμβάνουν και τα σύνολα διακοπής {1,Σ,2}, {Σ,1,2}, {2,Σ,1}, {Σ,2,1}, {4,Σ’,5}, {Σ’,4,5}, {5,Σ’,4} και {Σ’,5,4}, όπου Σ είναι μια από τις μονάδες 3,4,5 και Σ’ μια από τις μονάδες 1,2,3. Επομένως, το συνολικό πλήθος των ευνοϊκών αυτών περιπτώσεων ισούται με

$$3! \cdot 2! + 3! \cdot 2! + 4 \cdot 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3 \cdot 2! = 12 + 12 + 24 + 24 = 72.$$

Επομένως η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει με την αποτυχία της τρίτης μονάδας ισούται με

$$s_3 = P\big(T = X_{(3)}\big) = \frac{72}{120} = 0.6.$$

Για να αποτύχει το σύστημα με την αποτυχία της τέταρτης μονάδας θα πρέπει οι τελευταίες δύο μονάδες που αποτυγχάνουν να είναι οι 1 και 4 ή οι 2 και 5 και υπάρχουν συνολικά 4! μεταθέσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή. Δηλαδή, η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει με την αποτυχία της τέταρτης μονάδας ισούται με

$$s_4 = P\big(T = X_{(4)}\big) = \frac{4!}{5!} = 0.2.$$

Τέλος, είναι κατανοητό πως το σύστημα δε μπορεί να λειτουργήσει με μόνο μία μονάδα σε λειτουργία, επομένως $s_5 = 0$.

Καταλήγουμε πως η υπογραφή της γέφυρας δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{s_{BS}} = (0, 0.2, 0.6, 0.2, 0)$.

□

Έστω ότι φ είναι η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος n μονάδων. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $\varphi_D(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in [0,1]^n$, είναι επίσης συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με το ίδιο σύνολο μονάδων. Το τελευταίο σύστημα ονομάζεται δυϊκό σύστημα του αρχικού, το οποίο ονομάζουμε πρωτεύον σύστημα.

Είναι σαφές πως αν το $\boldsymbol{y}$ είναι ένα διάνυσμα διακοπής της φ, δηλαδή $\varphi(\boldsymbol{y}) = 0$, τότε $\varphi_D(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{y}) = 1$, δηλαδή το $\boldsymbol{1} - \boldsymbol{y}$ είναι διάνυσμα λειτουργίας του πρωτεύοντος συστήματος. Ακόμη αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας του πρωτεύοντος συστήματος, τότε τα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι τα ελάχιστα σύνολα διακοπής του δυϊκού συστήματος.

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν τρόπο για να υπολογίζουμε την υπογραφή του δυϊκού συστήματος όταν γνωρίζουμε την υπογραφή του πρωτεύοντος, και αντίστροφα (βλέπε [9]).

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $\boldsymbol{s}$ η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος n ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων. Έστω ακόμη s_D η υπογραφή του δυϊκού του συστήματος. Τότε*

$$s_i = s_{n-i+1}^D, i = 1,2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

3.3. Μελέτη της συνάρτησης αξιοπιστίας με χρήση της υπογραφής

Παρακάτω δίνουμε μια θεμελιώδη ιδιότητα της υπογραφής $\boldsymbol{s}$ ενός συστήματος, σύμφωνα με την οποία, αν γνωρίζουμε την κατανομή F των χρόνων ζωής των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων, μπορούμε να εκφράσουμε την κατανομή του χρόνου ζωής T του συστήματος ως συνάρτηση της υπογραφής $\boldsymbol{s}$ και της κατανομής F. Για την απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί παραπέμπουμε στο βιβλίο [7].

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ οι χρόνοι ζωής των n ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων ενός μονότονου συστήματος με υπογραφή $\boldsymbol{s}$ και έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος. Τότε*

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\bar{F}(t))^{n-j}, \tag{3.2}$$

όπου $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η σχέση (3.2) δεν ισχύει μόνο στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων αλλά ισχύει και κάτω από μία λιγότερο αυστηρή προϋπόθεση. Συγκεκριμένα η σχέση (3.2) ισχύει όταν οι χρόνοι ζωής $X_1, X_2, \dots, X_n$ των μονάδων του συστήματος είναι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές.

Η σχέση (3.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσουμε κλειστούς τύπους για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_T του χρόνου ζωής T του συστήματος, αλλά και τη βαθμίδα αποτυχίας r_T του συστήματος, όταν η κατανομή F των χρόνων ζωής των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων είναι συνεχής. Για την απόδειξη των πορισμάτων που ακολουθούν παραπέμπουμε στο βιβλίο [7].

Πόρισμα 3.3.1. *Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim F$ οι χρόνοι ζωής των n ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων ενός μονότονου συστήματος με υπογραφή $\boldsymbol{s}$ και έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος. Εάν η F είναι συνεχής, τότε*

$$f_T(t) = -\left(\frac{d}{dt}\right) P(T > t) \sum_{i=1}^{n} i\, s_i \binom{n}{i} \big(F(t)\big)^{i-1} \big(\bar{F}(t)\big)^{n-i} f(t). \tag{3.3}$$

Τονίζουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος, $r_T(t)$, που ορίζεται σαν το πηλίκο

$$\frac{f_T(t)}{\bar{F}_T(\mathrm{t})},$$

μπορεί να γραφεί σε όρους του διανύσματος της υπογραφής $\boldsymbol{s}$ και της κατανομής F των μονάδων του συστήματος. Το πηλίκο της πυκνότητας (3.3) προς τη συνάρτηση επιβίωσης (3.2) μπορεί να μας δώσει τον επόμενο τύπο για τη βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος.

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός μονότονου συστήματος n μονάδων με υπογραφή $\boldsymbol{s}$, και έστω ότι οι χρόνοι ζωής $X_1, X_2, \dots, X_n$ των μονάδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση κατανομής f. Τότε*

$$r_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} i\, s_i \binom{n}{i} \big(F(t)\big)^{i-1} \big(\bar{F}(t)\big)^{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} \big(F(t)\big)^{j} \big(\bar{F}(t)\big)^{n-j}} r(t)\ , \tag{3.4}$$

όπου $r(t) = (\frac{f(t)}{\bar{F}(t)})$ η κοινή βαθμίδα αποτυχίας των μονάδων.

Ένας ισοδύναμος και πιο χρήσιμος τύπος από τον (3.4) είναι ο εξής:

$$r_T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, s_{i+1} \binom{n}{i} \big(F(t)\big)^{i} \big(\bar{F}(t)\big)^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} s_j\right) \binom{n}{i} \big(F(t)\big)^{i} \big(\bar{F}(t)\big)^{n-i}} r(t)\ ,$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Samaniego απέδειξε πως η σχέση (3.2) ισχύει στην περίπτωση ενός συστήματος που αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες. Όμως οι Navarro και Rychlik [4] απέδειξαν πως η σχέση αυτή ισχύει και στην περίπτωση που οι χρόνοι ζωής $X_1, X_2, \ldots, X_n$ των μονάδων του συστήματος είναι ανταλλάξιμες μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω* $T = g(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ *ο χρόνος ζωής ενός μονότονου συστήματος και έστω* $t \geq 0$. *Τότε η σχέση*

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i\, P(X_{i:n} > t) \tag{3.5}$$

όπου $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *η υπογραφή του συστήματος, ισχύει για όλα τα μονότονα συστήματα τάξης* n *αν και μόνο αν οι τυχαίες μεταβλητές των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος είναι ανταλλάξιμες.*

Ακόμη, ο Navarro απέδειξε πως κάθε μονότονο σύστημα που αποτελείται από n ανεξάρτητες μονάδες μπορεί να εκφραστεί σαν μια γενικευμένη μίξη σειριακών και παράλληλων συστημάτων. Στη συνέχεια δίνεται μία πρόταση του M. Burkschat (βλέπε [1]) που αφορά αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.3.1. *Δοθέντων όλων των προϋποθέσεων του Θεωρήματος* 3.3.2. *ισχύει η σχέση*

$$P(X_{i:n} > t) = \sum_{l=n-i+1}^{n} a_l\, P(X_{1:l} > t) = \sum_{k=i}^{n} b_k\, P(X_{k:k} > t) \tag{3.6}$$

με κατάλληλα $a_{n-i+1}, \ldots, a_n, b_i, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. *Αξιοποιώντας το Θεώρημα* 3.3.2. *η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως γενικευμένες μίξεις*

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, P(X_{1:i} > t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, P(X_{i:i} > t) \tag{3.7}$$

όπου $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n = 1$.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον επόμενο τύπο που μας δίνει τη συνάρτηση αξιοπιστίας $\bar{F}$ ενός μονότονου συστήματος με n ανταλλάξιμες μονάδες:

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(n)\, g_i(t), \forall t > 0 \tag{3.8}$$

όπου

$$c_i(n) = s_i(n) \text{ και } g_i(t) = \bar{F}_{i:n}(t) \tag{3.9}$$

είτε

$$c_i(n) = \alpha_i(n) \text{ και } g_i(t) = \bar{F}_{1:i}(t) \tag{3.10}$$

είτε

$$c_i(n) = \beta_i(n) \text{ και } g_i(t) = \bar{F}_{i:i}(t) \tag{3.11}$$

όπου $\alpha_i(n)$ και $\beta_i(n)$ είναι η λεγόμενη ελάχιστη και μέγιστη υπογραφή των μονάδων αντίστοιχα (βλέπε[11]).

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια Πρόταση η οποία δίνει τη σχέση της μέγιστης και ελάχιστης υπογραφής ενός συνεχόμενου k από τα n: F $\tau_{c:k|n}$ συστήματος. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [12].

Πρόταση 3.3.2. *Αν $2k \geq n$ και οι μονάδες του συστήματος είναι ανταλλάξιμες, τότε η ελάχιστη υπογραφή του συνεχόμενου k από τα n : G συστήματος είναι ίση με $\boldsymbol{\alpha} = (0, \dots ,0, \alpha_k = n - k + 1, \alpha_{k+1} = k - n, 0, \dots ,0)$ και η μέγιστη υπογραφή του συνεχόμενου k από τα n: F συστήματος είναι ίση με $\boldsymbol{\beta} = (0, \dots ,0, \beta_k = n - k + 1, \beta_{k+1} = k - n, 0, \dots ,0)$.*

Προφανώς η ελάχιστη υπογραφή ενός συστήματος είναι ίση με τη μέγιστη υπογραφή του δυϊκού του. Άρα για $2k \geq n$ η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου k από τα n: F συστήματος μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη μέγιστη υπογραφή του συνεχόμενου k από τα n: F συστήματος. Ανάλογα, για $2k \geq n$ η αξιοπιστία του συνεχόμενου k από τα n : F συστήματος μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ελάχιστη υπογραφή του συνεχόμενου k από τα n: G συστήματος. Παρόμοια, η ελάχιστη υπογραφή ενός παράλληλου συστήματος είναι

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\binom{n}{1}, -\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\right)$$

και η μέγιστη υπογραφή ενός σειριακού συστήματος είναι

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\binom{n}{1}, -\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\right). \tag{3.12}$$

Παρακάτω παραθέτουμε μία πρόταση η οποία δίνει τη σχέση της υπογραφής ενός συστήματος με τα σύνολα λειτουργίας του (βλέπε [6] και [7]).

Πρόταση 3.3.3. *Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από n ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες, και t_0 δοθείσα χρονική στιγμή. Αν θέσουμε $p = \bar{F}(t_0)$ και $q = F(t_0) = 1 - p$ τότε μπορούμε να πάρουμε το πολυώνυμο αξιοπιστίας $h(p)$ συναρτήσει του p. Δύο ισοδύναμοι τύποι για το h είναι:*

$$h(p) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n} s_i\right)\binom{n}{j}(1-p)^j p^{n-j} \quad \textit{και}$$

$$h(p) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=n-j+1}^{n} s_i\right)\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \tag{3.13}$$

όπου $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ *η υπογραφή του συστήματος.*

Όπως είναι προφανές από τον τύπο (3.13), ο συντελεστής του $p^j(1-p)^{n-j}$ στο πολυώνυμο αξιοπιστίας μπορεί να ερμηνευτεί ως το πλήθος των συνόλων λειτουργίας τάξης j, δηλαδή από τους $\binom{n}{j}$ δυνατούς συνδυασμούς με ακριβώς j μονάδες σε λειτουργία, το πλήθος των συνόλων που οδηγούν στη λειτουργία του συστήματος. Αν θεωρήσουμε ότι α_j είναι το ποσοστό των συνόλων λειτουργίας μεταξύ των $\binom{n}{j}$ δυνατών συνδυασμών με j μονάδες που λειτουργούν, τότε είναι σαφές πως το πολυώνυμο αξιοπιστίας μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \tag{3.14}$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ είναι συνδεδεμένο με τα σύνολα λειτουργίας ενώ το διάνυσμα $\boldsymbol{s}$ με τα σύνολα διακοπής. Οι συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών συνδέονται μεταξύ τους με την επόμενη σχέση

$$\alpha_j = \sum_{i=n-j+1}^{n} s_i \text{ , για } j = 1,2,\dots,n \tag{3.15}$$

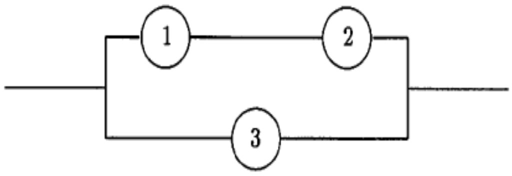
ή αντίστοιχα (χρησιμοποιώντας την υπόθεση $\alpha_0 = 0$)

$$s_j = \alpha_{n-j+1} - \alpha_{n-j} \text{ , για } j = 1,2,\dots,n. \tag{3.16}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε εκ νέου την υπογραφή των συστημάτων που είδαμε στα Παραδείγματα 3.2.1. και 3.2.2., χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την Πρόταση 3.3.1.

Παράδειγμα 3.3.1. Θεωρούμε το παράλληλο-σειριακό σύστημα που φαίνεται παρακάτω:

Σχήμα 3: Παράλληλο-σειριακό σύστημα τ_{PS}.



Στον Πίνακας 3 που ακολουθεί καταγράφεται το πλήθος των συνόλων λειτουργίας τάξης j, $j = 0,1,2,3$.

Πίνακας 3: Πλήθος συνόλων λειτουργίας τάξης j σε ένα παράλληλο-σειριακό σύστημα

j	***Πλήθος συνόλων λειτουργίας τάξης j***
0	0
1	1
2	3
3	1

Έχουμε υποθέσει ότι α_0=0 και υπολογίζουμε τις τιμές α_1, α_2, α_3 σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha_j = \frac{\#\text{ συνόλων λειτουργίας τάξης } j}{\binom{n}{j}}, j = 1,2,3$$

αφού, όπως είπαμε, τα α_j αποτελούν το ποσοστό των συνόλων λειτουργίας μεταξύ των $\binom{n}{j}$ δυνατών συνδυασμών με *j* μονάδες που λειτουργούν. Συγκεκριμένα έχουμε:

- $\alpha_1 = \frac{1}{\binom{3}{1}} = \frac{1}{3}$, αφού από τα 3 δυνατά σύνολα του συστήματος που έχουν μία μονάδα εν λειτουργία, υπάρχει μόνο ένα που αποτελεί σύνολο λειτουργίας του συστήματος, και είναι το {3}.
- $\alpha_2 = \frac{3}{\binom{3}{2}} = \frac{3}{3} = 1$, αφού από τα 3 δυνατά σύνολα του συστήματος που έχουν δύο μονάδες εν λειτουργία ({1,2}, {1,3} και {2,3}), και τα τρία αποτελούν σύνολα λειτουργίας του συστήματος.
- $\alpha_3 = \frac{1}{\binom{3}{3}} = \frac{1}{1} = 1$, αφού το σύνολο που έχει όλες τις μονάδες εν λειτουργία, δηλαδή το σύνολο {1,2,3}, αποτελεί σύνολο λειτουργίας του συστήματος.

Έχοντας υπολογίσει αυτές τις τιμές, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τις συνιστώσες του διανύσματος της υπογραφής, χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.16). Συγκεκριμένα έχουμε:

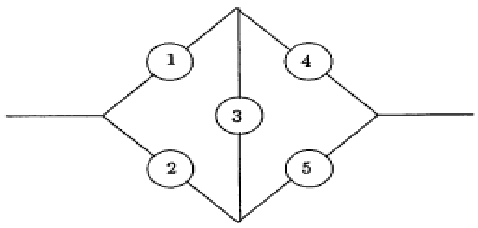
- $s_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = 1 - 1 = 0$
- $s_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $s_3 = \alpha_1 - \alpha_0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Επομένως το διάνυσμα της υπογραφής του παράλληλου-σειριακού συστήματος είναι το $\boldsymbol{s_{ps}} = (0,2/3,1/3)$.

□

Παράδειγμα 3.3.2. Θεωρούμε το σύστημα γέφυρα που φαίνεται παρακάτω:

Σχήμα 4: Σύστημα γέφυρα τ_{BS}



Στον Πίνακας 4 που ακολουθεί καταγράφεται το πλήθος των συνόλων λειτουργίας τάξης j, $j = 0,1,2,3,4,5$.

Έχουμε υποθέσει ότι α_0=0 και υπολογίζουμε τις τιμές α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha_j = \frac{\#\text{ συνόλων λειτουργίας τάξης } j}{\binom{n}{j}}, j = 1,2,3,4,5$$

ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Συγκεκριμένα έχουμε:

Πίνακας 4: Πλήθος συνόλων λειτουργίας τάξης j σε ένα σύστημα γέφυρα

j	***Πλήθος συνόλων λειτουργίας τάξης*** j
0	0
1	0
2	2
3	8
4	5
5	1

- $\alpha_1 = \frac{0}{\binom{5}{1}} = 0$ **,** αφού από τα 5 δυνατά σύνολα του συστήματος που έχουν μία μονάδα εν λειτουργία, δεν υπάρχει κανένα που να αποτελεί σύνολο λειτουργίας του συστήματος.
- $\alpha_2 = \frac{2}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, αφού από τα 20 δυνατά σύνολα του συστήματος που έχουν δύο μονάδες εν λειτουργία, μόνο τα {1,4} και {2,5} αποτελούν σύνολα λειτουργίας του συστήματος.

- $\alpha_3 = \frac{8}{\binom{5}{3}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, αφού από τα 20 δυνατά σύνολα του συστήματος που έχουν τρεις μονάδες εν λειτουργία, μόνο τα 8 ({1,2,4}, {1,3,4}, {1,4,5}, {1,2,5}, {2,3,5}, {2,4,5}, {1,3,5} και {2,3,4}) αποτελούν σύνολα λειτουργίας του συστήματος.
- $\alpha_4 = \frac{5}{\binom{5}{4}} = \frac{1}{1} = 1$, αφού από τα πέντε δυνατά σύνολα του συστήματος που έχουν τέσσερις μονάδες εν λειτουργία ({2,3,4,5}, {1,3,4,5}, {1,2,4,5}, {1,2,3,5} και {1,2,3,4}), και τα πέντε αποτελούν σύνολα λειτουργίας του συστήματος.
- $\alpha_5 = \frac{1}{\binom{5}{5}} = \frac{1}{1} = 1$, αφού το σύνολο που έχει όλες τις μονάδες εν λειτουργία, δηλαδή το σύνολο {1,2,3,4,5}, αποτελεί σύνολο λειτουργίας του συστήματος.

Έχοντας υπολογίσει αυτές τις τιμές, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τις συνιστώσες του διανύσματος της υπογραφής, χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.16). Συγκεκριμένα έχουμε:

- $s_1 = \alpha_5 - \alpha_4 = 1 - 1 = 0$
- $s_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
- $s_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
- $s_4 = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$
- $s_5 = \alpha_1 - \alpha_0 = 0 - 0 = 0$

Επομένως το διάνυσμα της υπογραφής της γέφυρας δίνεται από το διάνυσμα

$\boldsymbol{s_{BS}} = (0, 0.2, 0.6, 0.2, 0)$.

□

3.4. Σύγκριση συστημάτων αξιοπιστίας με χρήση της υπογραφής

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πως συγκρίνοντας τις υπογραφές δύο συστημάτων, οδηγούμαστε στη στοχαστική σύγκριση μεταξύ των συστημάτων αυτών.

Η έννοια της στοχαστικής διάταξης είναι ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για τη σύγκριση χρόνων ζωής συστημάτων. Παρακάτω θα αναφερθούμε σε τρία είδη στοχαστικής διάταξης, τα οποία είναι τα πιο συνήθη για τη σύγκριση της απόδοσης των μονότονων συστημάτων. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στη μονογραφία [1].

Ορισμός 3.4.1. *Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F και G αντίστοιχα.*

1. *X και Y είναι διατεταγμένες σύμφωνα με τη συνήθη στοχαστική διάταξη, (συμβ. $X \leq_{st} Y$), αν ισχύει*
$$1- F(t) \leq 1- G(t)$$
για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.
2. *X και Y είναι διατεταγμένες σύμφωνα με τη διάταξη της βαθμίδας αποτυχίας, (συμβ. $X \leq_{hr} Y$), αν η συνάρτηση*
$$\frac{1-G(t)}{1-F(t)}$$
είναι αύξουσα για όλα τα t για τα οποία ισχύει $F(t)<1$ ή $G(t)<1$ (συμβ. $\alpha/0:=\infty$ για $\alpha>0$).
3. *X και Y είναι διατεταγμένες σύμφωνα με τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας, (συμβ. $X \leq_{lr} Y$), αν η συνάρτηση*
$$\frac{g(t)}{f(t)}$$
είναι αύξουσα για όλα τα t που ανήκουν στην ένωση των στηριγμάτων των X και Y (σύμβαση: $\alpha/0:=\infty$ για $\alpha>0$), όπου f και g είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις κατανομής F και G.

Οι παραπάνω στοχαστικές διατάξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να συγκρίνουμε τους χρόνους ζωής δύο συστημάτων αξιοπιστίας. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους επόμενους ορισμούς ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [6]. Αν T_1 και T_2 είναι τυχαίοι χρόνοι ζωής δύο συστημάτων αξιοπιστίας τότε λέμε ότι:

1. ο T_2 είναι μεγαλύτερος από τον T_1 σύμφωνα με τη συνήθη στοχαστική διάταξη ($T_1 \leq_{st} T_2$) αν $\bar{F}_{T_1}(t) \leq \bar{F}_{T_2}(t)$ για όλα τα t. Απλούστερα, για όλα τα t είναι πιο πιθανό να επιβιώσει έως εκείνη τη στιγμή το δεύτερο σύστημα συγκριτικά με το πρώτο.
2. ο T_2 είναι μεγαλύτερος από τον T_1 σύμφωνα με τη διάταξη της βαθμίδος αποτυχίας ($T_1 \leq_{hr} T_2$) αν $\bar{F}_{T_2}(t)/\bar{F}_{T_1}(t) \uparrow t$. Ισοδύναμα, στην περίπτωση όπου οι χρόνοι ζωής T_1 και T_2 έχουν συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_{T_1}(t)$ και $f_{T_2}(t)$ τότε η παραπάνω διάταξη ισχύει όταν $r_{T_1}(t) \geq r_{T_2}(t)$ για όλα τα t.
3. ο T_2 είναι μεγαλύτερος από τον T_1 σύμφωνα με τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας ($T_1 \leq_{lr} T_2$) αν $f_{T_2}(t)/f_{T_1}(t) \uparrow t$.

Σημειώνουμε ότι η σχέση που προκύπτει από τη διάταξη της βαθμίδος αποτυχίας είναι ισχυρότερη από τη συνήθη στοχαστική διάταξη. Η σχέση ($T_1 \leq_{hr} T_2$) σημαίνει ότι, δεδομένου πως τα δύο συστήματα έχουν επιζήσει μέχρι τη στιγμή t, ο χρόνος T_2 είναι μεγαλύτερος από το χρόνο T_1, δηλαδή $(T_1 | T_1 > t)) \leq_{st} (T_2 | T_2 > t)$. Επιπλέον, η σχέση που προκύπτει από τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας είναι ακόμη πιο ισχυρή. Η σχέση που συνδέει τις τρεις παραπάνω στοχαστικές διατάξεις είναι:

$$T_1 \leq_{lr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα τρία είδη διάταξης με σκοπό να συγκρίνουμε την επίδοση μονότονων συστημάτων. Θα ξεκινήσουμε με ένα αποτέλεσμα που εξετάζει τη σημασία της στοχαστικής διάταξης μεταξύ δύο υπογραφών. Για δύο διακριτές κατανομές $\boldsymbol{s_1}$ και $\boldsymbol{s_2}$ στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ ορίζουμε τα εξής (βλέπε [9]):

1. $\boldsymbol{s_1} \leq_{st} \boldsymbol{s_2}$ αν και μόνο αν $\sum_{j=i}^{n} s_{1j} \leq \sum_{j=i}^{n} s_{2j}$ για $i = 1,2, \ldots, n$. (3.17)
2. $\boldsymbol{s_1} \leq_{hr} \boldsymbol{s_2}$ αν και μόνο αν $\frac{\sum_{j=i}^{n} s_{2j}}{\sum_{j=i}^{n} s_{1j}}$ είναι μη φθίνουσα ως προς i. (3.18)
3. $\boldsymbol{s_1} \leq_{lr} \boldsymbol{s_2}$ αν και μόνο αν $\frac{s_{2i}}{s_{1i}}$ είναι μη φθίνουσα ως προς i. (3.19)

Η σχέση μεταξύ στοχαστικά διατεταγμένων διανυσμάτων υπογραφής και χρόνων ζωής δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί (βλέπε [1]).

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $T_1 = g_1(X_1, \ldots, X_n)$ και $T_2 = g_2(X_1, \ldots, X_n)$ οι χρόνοι ζωής δύο μονότονων συστημάτων όπου $X_1, \ldots, X_n$ οι χρόνοι ζωής των μονάδων, που είναι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε ακόμη πως τα συστήματα αυτά έχουν διανύσματα υπογραφής $\boldsymbol{s_1}$ και $\boldsymbol{s_2}$, αντίστοιχα.*

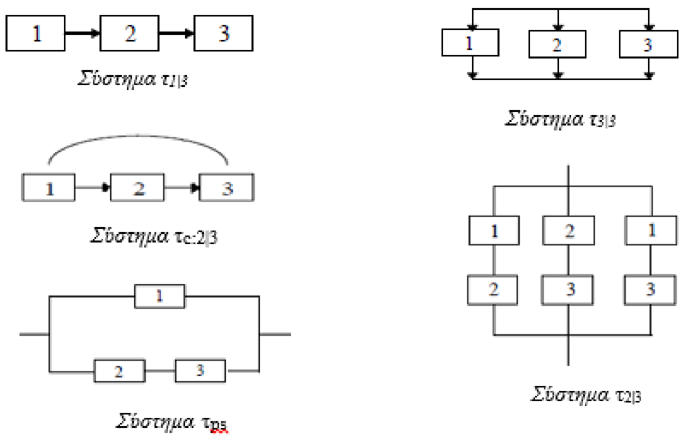
1. *Αν $\boldsymbol{s_1} \leq_{st} \boldsymbol{s_2}$, τότε $T_1 \leq_{st} T_2$.*
2. *Αν $\boldsymbol{s_1} \leq_{hr} \boldsymbol{s_2}$ και $X_{1:n} \leq_{hr} X_{2:n} \leq_{hr} \ldots \leq_{hr} X_{n:n}$, τότε $T_1 \leq_{hr} T_2$.*
3. *Αν $\boldsymbol{s_1} \leq_{lr} \boldsymbol{s_2}$ και $X_{1:n} \leq_{lr} X_{2:n} \leq_{lr} \ldots \leq_{lr} X_{n:n}$, τότε $T_1 \leq_{lr} T_2$.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι τα ακριβή χαρακτηριστικά της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος επηρεάζουν άμεσα την κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος. Παρακάτω δίνονται παραδείγματα συστημάτων με διανύσματα υπογραφής που ικανοποιούν μερικές, αλλά όχι όλες, από τις παραπάνω σχέσεις διάταξης.

Παράδειγμα 3.4.1. Θεωρούμε τα πέντε δυνατά μονότονα συστήματα αξιοπιστίας που αποτελούνται από τρεις μονάδες. Τα συστήματα αυτά είναι:

- το σειριακό σύστημα $\tau_{1|3}$
- το παράλληλο σύστημα $\tau_{3|3}$
- το σύστημα 2 από τα 3:*G* $\tau_{2|3}$
- το παράλληλο-σειριακό σύστημα τ_{ps}
- το συνεχόμενο 2 από τα 3:*F* $\tau_{c:2|3}$.

Σχήμα 5: Σύγκριση των πέντε μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας τάξης 3



Τα διανύσματα της υπογραφής των συστημάτων αυτών είναι $s_{1|3} = (1,0,0)$, $s_{2|3} = (0,1,0)$, $s_{3|3} = (0,0,1)$, $s_{ps} = (0,2/3,1/3)$ και $s_{c:2|3} = (0,2/3,1/3)$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.17) καταλήγουμε πως ισχύει η εξής διάταξη χρόνων ζωής των συστημάτων σύμφωνα με τη συνήθη στοχαστική διάταξη:

$$T_{1|3} \leq_{st} T_{2|3} \leq_{st} T_{ps} =_{st} T_{c:2|3} \leq_{st} T_{3|3}.$$

Επίσης με χρήση των σχέσεων (3.18) και (3.19) καταλήγουμε πως η παραπάνω διάταξη ισχύει και στην περίπτωση της βαθμίδος αποτυχίας και του λόγου πιθανοφάνειας. Αυτά γίνονται σαφή από τον Πίνακας 5 που ακολουθεί.

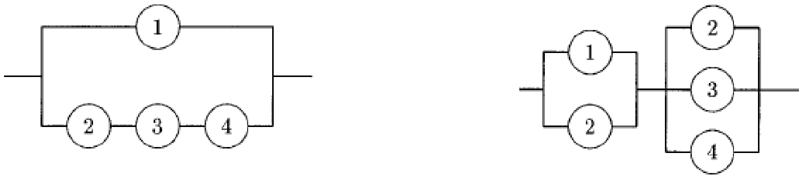
Πίνακας 5: Σύγκριση μονότονων συστημάτων τάξης 3

i	$\sum_{j=i}^{4} s_{1\|3j}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{2\|3j}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{3\|3j}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{psj}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{c:2\|3j}$
1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1/3	1/3
i	$s_{1\|3i}$	$s_{2\|3i}$	$s_{s3\|3i}$	s_{psi}	$s_{c:2\|3i}$
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	2/3	2/3
3	0	0	1	1/3	1/3

□

Παράδειγμα 3.4.2. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται δύο διαφορετικά συστήματα αξιοπιστίας που αποτελούνται από τέσσερις μονάδες.

Σχήμα 6: Σύγκριση δύο μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας τάξης 4



Το πρώτο σύστημα αξιοπιστίας έχει διάνυσμα υπογραφής $\boldsymbol{s_1} = (0,1/2,1/4,1/4)$ ενώ το δεύτερο $\boldsymbol{s_2} = (0,1/6,7/12,1/4)$. Με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα καταλήγουμε πως ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τα διανύσματα υπογραφής:

$$\boldsymbol{s_1} \leq_{st} \boldsymbol{s_2},\ \boldsymbol{s_1} \nleq_{\boldsymbol{hr}} \boldsymbol{s_2} \text{ και } \boldsymbol{s_1} \nleq_{\boldsymbol{lr}} \boldsymbol{s_2}.$$

Πίνακας 6: Σύγκριση μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας τάξης 4

$\boldsymbol{i}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{1j} \leq \sum_{j=i}^{4} s_{2j}$	$\frac{\sum_{j=i}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=i}^{4} s_{1j}}$	$\frac{s_{2j}}{s_{1j}}$
1	4/4 ≤ 12/12	1/1	0/0
2	4/4 ≤ 12/12	1/1	1/3
3	1/2 ≤ 10/12	5/3	7/3
4	1/4 ≤ 1/4	1	1

Είναι φανερό από την πρώτη στήλη πως ικανοποιούνται όλες οι ανισότητες, επομένως καταλήγουμε ότι $\boldsymbol{s_1} \leq_{st} \boldsymbol{s_2}$. Όμως στη δεύτερη και τρίτη στήλη οι τιμές δεν ακολουθούν μη φθίνουσα πορεία καθώς το i παίρνει τιμές από το 1 έως το 4. Συγκεκριμένα για i=4 οι τιμές και των δύο κλασμάτων είναι μικρότερες σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές για i=3. Άρα καταλήγουμε πως η παραπάνω ανισότητα δεν επαληθεύεται στην περίπτωση των διατάξεων της βαθμίδος αποτυχίας και του λόγου πιθανοφάνειας. □

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε σε κάποια αποτελέσματα που αφορούν τη διάταξη με βάση τη βαθμίδα αποτυχίας συστημάτων αξιοπιστίας με ανταλλάξιμες μονάδες. Πιο συγκεκριμένα, θα δώσουμε κάποιες συνθήκες βασισμένες στην υπογραφή των συστημάτων, οι οποίες οδηγούν στη στοχαστική σύγκριση μεταξύ δύο συστημάτων αξιοπιστίας.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, αν X και Y είναι δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχείς συναρτήσεις κατανομής $F_X(x)$ και $F_Y(y)$ με αντίστοιχες βαθμίδες αποτυχίας $r_X(t)$ και $r_Y(t)$, τότε λέμε ότι η X είναι μικρότερη από την Y με τη διάταξη της βαθμίδος αποτυχίας (δηλαδή $X \leq_{\boldsymbol{hr}} Y$) αν

$$r_X(t) \geq r_Y(t) \tag{3.20}$$

για όλα τα t. Επειδή θα χρησιμοποιούμε την παραπάνω διάταξη για σύγκριση χρόνων ζωής συστημάτων αξιοπιστίας (οι οποίοι είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές) θα περιορίσουμε το εύρος του t στο $[0,+\infty)$.

Τέλος, όπως αναφέραμε και στον Ορισμό 3.4.1, η σχέση (3.20) ισχύει αν και μόνο αν η $\bar{F}_X(t)\ /\ \bar{F}_Y(t)$ είναι φθίνουσα για όλα τα $t \geq 0$. Πιο αναλυτικά στην εργασία [3] έχει αποδειχθεί ότι $X \leq_{hr} Y$ αν και μόνο αν ισχύει

$$\bar{F}_X'(t)\ \bar{F}_Y(t) - \bar{F}_Y'(t)\bar{F}_X(t) \leq 0, \text{ για όλα τα } t \geq 0. \qquad (3.21)$$

Θεωρούμε πως τα συστήματα αποτελούνται από n μονάδες με αντίστοιχους χρόνους ζωής $X_1,\ldots,X_n$, οι οποίοι είναι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές. Συμβολίζουμε με

$$s_i^{(1)} = P(T_1 = X_{i:n}) \text{ και } s_i^{(2)} = P(T_2 = X_{i:n}),\ i = 1,2,\ldots,n$$

τα διανύσματα υπογραφής του πρώτου και δεύτερου συστήματος αξιοπιστίας αντίστοιχα. Ακόμη, συμβολίζουμε με $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(2)}$ τα αντίστοιχα διανύσματα της ελάχιστης υπογραφής των συστημάτων και $\beta_i^{(1)}$, $\beta_i^{(2)}$ τα αντίστοιχα διανύσματα της μέγιστης υπογραφής των συστημάτων.

Παρακάτω δίνουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη στοχαστική διάταξη μεταξύ των χρόνων ζωής T_1 και T_2 δύο συστημάτων αξιοπιστίας. Για την απόδειξη αυτής ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία [3].

Πρόταση 3.4.1. *Ο χρόνος ζωής T_1 του πρώτου συστήματος αξιοπιστίας είναι μικρότερος από το χρόνο ζωής T_2 του δεύτερου συστήματος αξιοπιστίας με τη διάταξη της βαθμίδας αποτυχίας αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_i^{(1)}(n)c_j^{(2)}(n) - c_i^{(2)}(n)c_j^{(1)}(n)\right) g_i'(t)g_j'(t) \leq 0, \qquad (3.22)$$

για όλα τα $t \geq 0$, όπου

$$c_i^{(1)}(n) = s_i^{(1)}(n),\ c_i^{(2)}(n) = s_i^{(2)}(n) \text{ και } g_i(t) = \bar{F}_{i:n}(t) \text{ για } i = 1,2,\ldots,n$$

ή

$$c_i^{(1)}(n) = \alpha_i^{(1)}(n),\ c_i^{(2)}(n) = \alpha_i^{(2)}(n) \text{ και } g_i(t) = \bar{F}_{1:n}(t) \text{ για } i = 1,2,\ldots,n$$

ή

$$c_i^{(1)}(n) = \beta_i^{(1)}(n),\ c_i^{(2)}(n) = \beta_i^{(2)}(n) \text{ και } g_i(t) = \bar{F}_{i:i}(t) \text{ για } i = 1,2,\ldots,n.$$

Οι επόμενες προτάσεις προσφέρουν έναν εναλλακτικό τρόπο για να ελέγξουμε τη στοχαστική διάταξη μεταξύ των χρόνων ζωής T_1, T_2 δύο συστημάτων αξιοπιστίας (βλέπε [3]).

Πρόταση 3.4.2. *Ο χρόνος ζωής T_1 του πρώτου συστήματος αξιοπιστίας είναι μικρότερος από το χρόνο ζωής T_2 του δεύτερου με τη διάταξη της βαθμίδας αποτυχίας αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i^{(1)}(n) c_j^{(2)}(n)\, h_{ij}(t) \leq 0 \tag{3.23}$$

για όλα τα $t \geq 0$. Οι ποσότητες $c_i^{(1)}(n)$, $c_i^{(2)}(n)$ και $g_i(t)$ είναι αυτές που ορίστηκαν στην Πρόταση 3.4.1. *και*

$$h_{ij}(t) = g_i'(t) g_j(t) - g_i(t) g_j'(t)\,, \text{ για } i = 1,2, \dots, n \text{ και } j = 1,2, \dots, n.$$

Πρόταση 3.4.3. *Ο χρόνος ζωής T_1 του πρώτου συστήματος αξιοπιστίας είναι μικρότερος από το χρόνο ζωής T_2 του δεύτερου με τη διάταξη της βαθμίδας αποτυχίας αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(c_i^{(1)}(n) c_j^{(2)}(n) - c_i^{(2)}(n) c_j^{(1)}(n) \right) h_{ij}(t) \leq 0 \tag{3.24}$$

για όλα τα $t \geq 0$, όπου $c_i^{(1)}(n)$, $c_i^{(2)}(n)$, $g_i(t)$ και $h_{ij}(t)$ είναι οι ποσότητες που ορίστηκαν παραπάνω.

3.5. Διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μία διάταξη που βασίζεται στη σύγκριση των συναρτήσεων του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Όπως και στις διατάξεις που εισήχθησαν στην προηγούμενη ενότητα, ο σκοπός της διάταξης αυτής είναι να συγκρίνουμε τη θέση των τυχαίων μεταβλητών. Μεταξύ άλλων θα δώσουμε και τη σχέση μεταξύ των διατάξεων της ενότητας 3.4. και της διάταξης της παρούσας ενότητας. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παρούσα διάταξη παραπέμπουμε στο [16].

Ορισμός 3.5.1. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής του X τη στιγμή t ορίζεται ως*

$$m(t) = \begin{cases} E[X-t|X>t] = \frac{1}{\bar{F}(t)}\int_0^\infty xf(t+x)\,dx\,, & t<t^* \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \qquad (3.25)$$

όπου $t^* = \sup\{t: \bar{F}(t) > 0\}$.

Παρόλο που στη σχέση (3.25) δεν υπάρχει περιορισμός σχετικά με το στήριγμα της X, η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μας ενδιαφέρει συνήθως όταν το X είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Σε αυτή την περίπτωση η X μπορεί να θεωρηθεί ως ο χρόνος ζωής μια μονάδας και τότε η συνάρτηση $m(t)$ εκφράζει τον αναμενόμενο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της μονάδας τη στιγμή t δοθέντος ότι η μονάδα ήταν σε λειτουργία τη στιγμή t. Προφανώς $m(t) \geq 0$ αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή κάθε μη αρνητική συνάρτηση δεν αποτελεί τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (mrl) που αντιστοιχεί σε κάποια τυχαία μεταβλητή. Για την ακρίβεια, μια συνάρτηση m είναι μια mrl συνάρτηση μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής με συνεχή συνάρτηση κατανομής αν και μόνο αν η m ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $0 \leq m(t) \leq \infty$ για όλα τα $t \geq 0$,

(ii) $m(0) > 0$,

(iii) η m είναι συνεχής

(iv) η $m(t) + t$ είναι αύξουσα στο $[0, \infty]$, και

(v) αν υπάρχει ένα t_0 τέτοιο ώστε $m(t_0) = 0$, τότε $m(t) = 0$ για όλα τα $t \geq t_0$. Διαφορετικά, όταν δεν υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $m(t_0) = 0$, τότε
$$\int_0^\infty \frac{1}{m(t)}dt = \infty.$$

Προφανώς όσο μικρότερη η mrl συνάρτηση, τόσο μικρότερο θα είναι το X με την έννοια κάποιας στοχαστικής διάταξης. Αυτός ήταν και ο λόγος που αναπτύχθηκε η διάταξη που διατυπώνουμε στη συγκεκριμένη παράγραφο.

Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{F}$ και $\bar{G}$ αντίστοιχα και mrl συναρτήσεις m και l αντίστοιχα τέτοιες ώστε

$$m(t) \leq l(t) \text{ για όλα τα } t \geq 0.$$

Τότε λέμε ότι η X είναι μικρότερη από την Y με τη διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. (συμβ. $X \leq_{mrl} Y$). Ανάλογα μπορεί να δειχθεί ότι $X \leq_{mrl} Y$ αν και μόνο αν,

$$\frac{\int_t^\infty \bar{G}(u)du}{\int_t^\infty \bar{F}(u)du} \text{ είναι αύξουσα ως προς } t \text{ στο σύνολο } \left\{t: \int_t^\infty \bar{F}(u)du > 0\right\},$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν,

$$\bar{G}(t)\int_t^\infty \bar{F}(u)du \leq \bar{F}(t)\int_t^\infty \bar{G}(u)du \text{ για όλα τα } t.$$

Παράδειγμα 3.5.1. Η εκθετική κατανομή λόγω της απλότητας και της σημασίας της σε ποικίλες εφαρμογές, αποτελεί μια από τις πιο δημοφιλείς κατανομές στη θεωρία αξιοπιστίας. Πολλές μηχανικές συσκευές (ιδιαίτερα ηλεκτρονικές) έχουν μια σταθερή βαθμίδα αποτυχίας ίση με λ, $\lambda > 0$. Για μια μονάδα (ή ένα σύστημα αξιοπιστίας) της οποίας ο χρόνος ζωής ακολουθεί την εκθετική κατανομή, η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής δίνεται από τη σχέση $m(t) = E[T] = \frac{1}{\lambda}$, λόγω της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης που χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένη κατανομή.

Θεωρούμε λοιπόν δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Αν $m_1(t)$ και $m_2(t)$ είναι οι αντίστοιχες mrl συναρτήσεις των παραπάνω τυχαίων μεταβλητών, τότε μπορούμε να πούμε ότι η X είναι μικρότερη από την Y με τη διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής αν ισχύει $\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_2}$ ή διαφορετικά $\lambda_2 \leq \lambda_1$. □

Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει μόνο τιμές στο σύνολο $\mathbb{N}_+$ ο ορισμός της διάταξης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής χρειάζεται να τροποποιηθεί.

Ορισμός 3.5.2. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε η mrl συνάρτηση του X ορίζεται ως*

$$m(n) = \begin{cases} E[X - n | X \geq n], & n \leq n^* \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \tag{3.26}$$

όπου $n^* = max\{n: P\{X \geq n\} > 0\}$.

Παρατηρούμε ότι για μια τέτοια τυχαία μεταβλητή ισχύει $m(0) = \mu$. Δεδομένου ότι το μ είναι πεπερασμένο, ισχύει $m(n) < \infty$ για $n < \infty$. Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με mrl συναρτήσεις m και l αντίστοιχα. Λέμε ότι $X \leq_{mrl} Y$ αν

$$m(n) \leq l(n) \text{ για όλα τα } n \geq 0.$$

Στη συνέχεια θα ελέγξουμε τη σχέση μεταξύ της διάταξης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με τις στοχαστικές διατάξεις που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με mrl συνάρτηση m και συνάρτηση βαθμίδος αποτυχίας r τότε αποδεικνύεται ότι

$$m(t) = \int_t^{t^*} \exp\left\{-\int_t^x r(u)du\right\}dx, \text{ για } t < t*.$$

Επομένως, αν Y είναι μια άλλη τυχαία μεταβλητή με mrl συνάρτηση l και συνάρτηση βαθμίδος αποτυχίας q και ικανοποιείται η σχέση $X \leq_{hr} Y$, τότε $X \leq_{mrl} Y$. Αυτό ακριβώς διαπραγματεύεται το Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 3.5.1. *Αν X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $X \leq_{hr} Y$, τότε $X \leq_{mrl} Y$.*

Σημειώνουμε ότι καμία από τις διατάξεις $\leq_{st}$ και $\leq_{mrl}$ δε συνεπάγεται την άλλη. Το Θεώρημα που ακολουθεί μας δίνει μια συνθήκη υπό την οποία *$X \leq_{mrl} Y$ αν και μόνο αν $X \leq_{hr} Y$.*

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με mrl συναρτήσεις m και l αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η $\frac{m(t)}{l(t)}$ είναι αύξουσα ως προς t. Τότε, αν ισχύει $X \leq_{mrl} Y$, θα ισχύει και $X \leq_{hr} Y$.*

Στη συνέχεια, υπό μία πιο αδύνατη συνθήκη από αυτή του Θεωρήματος 3.5.2.μπορούμε να αποδείξουμε ότι η διάταξη $X \leq_{mrl} Y$ συνεπάγεται τη διάταξη $X \leq_{st} Y$.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω X και Y δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με mrl συναρτήσεις m και l αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\frac{m(t)}{l(t)} \geq \frac{m(0)}{l(0)}$ (δηλαδή $\frac{m(t)}{l(t)} \geq \frac{E(X)}{E(Y)}$ όταν X και Y είναι θετικές)για κάθε, $t \geq 0$. Τότε, αν $X \leq_{mrl} Y$ θα ισχύει $X \leq_{st} Y$.*

Κεφάλαιο 4

Ιδιότητες γήρανσης συστημάτων αξιοπιστίας με ανταλλάξιμες μονάδες

4.1. Εισαγωγικά

Οι ιδιότητες γήρανσης ενός συστήματος αξιοπιστίας αποτελούν ένα σημαντικό ερευνητικό κομμάτι της θεωρίας αξιοπιστίας. Μονομεταβλητές έννοιες γήρανσης, όπως IFR (*Increasing Failure Rate*), NBU (*New Better than Used*) ή $DMRL$ (*Decreasing Mean Residual Life*), που εφαρμόζονται σε συστήματα αξιοπιστίας με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες, είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην ανάλυση αξιοπιστίας. Ένα σύνθετο σύστημα όμως, συνήθως αποτελείται από μονάδες οι οποίες λειτουργούν κάτω από τις ίδιες συνθήκες, και επομένως είναι εξαρτημένες μεταξύ τους. Για αυτό το λόγο, στο παρόν κεφάλαιο θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι χρόνοι ζωής των μονάδων είναι ανταλλάξιμες τυχαίες μεταβλητές.

Αρχικά, θα εστιάσουμε στη γήρανση ενός συστήματος αξιοπιστίας και σε διάφορα αποτελέσματα που διευκρινίζουν πότε ένα σύστημα ανήκει στην κλάση IFR ή DFR (*Decreasing Failure Rate*). Πιο συγκεκριμένα, θα δώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ο χρόνος ζωής T ενός συστήματος αύξουσα συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας (συμβ. $T \in IFR$), καθώς και επιπλέον συνθήκες που βασίζονται στο διάνυσμα υπογραφής του συστήματος και εξετάζουν το ίδιο ερώτημα. Τέλος, θα δώσουμε κάποιες νέες πολυμεταβλητές έννοιες γήρανσης και θα συζητήσουμε τις ιδιότητες αυτών. Θα εστιάσουμε στην περίπτωση της διμεταβλητής περίπτωσης, καθώς οι ιδέες μπορούν να γενικευτούν εύκολα και στην πολυμεταβλητή περίπτωση.

4.2. Διατήρηση των ιδιοτήτων IFR/DFR

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε διάφορα αποτελέσματα σχετικά με τις ιδιότητες γήρανσης ενός συστήματος αξιοπιστίας. Πιο συγκεκριμένα, θα ορίσουμε συνθήκες υπό τις οποίες ο χρόνος ζωής T ενός συστήματος αξιοπιστίας έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας ($T \in IFR$). Στη συνέχεια θα δοθούν κάποιες επαρκείς συνθήκες, βασισμένες στην υπογραφή του συστήματος, που αναφέρονται στη γήρανση ενός συστήματος αξιοπιστίας με n ανταλλάξιμες μονάδες. Για την απόδειξη των Προτάσεων που ακολουθούν παραπέμπουμε στην εργασία [11].

Η Πρόταση που ακολουθεί μας δίνει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει ο χρόνος ζωής T ενός συστήματος αξιοπιστίας αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή για να ισχύει $T \in IFR$.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός συστήματος με αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας*

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(n)\, g_i(t) \tag{4.1}$$

όπου οι ποσότητες $c_i(n)$ *και* $g_i(t)$ *είναι όπως περιγράφηκαν στις σχέσεις* (3.9)-(3.11). *Τότε* $T \in IFR$ *αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη*

$$\sum_{1\le i<j\le n} c_i(n)c_j(n)g_{ij}(t) \le 0, \text{ για όλα τα } t\ge 0$$

όπου

$$g_{ij}(t) = g_i''(t)g_j(t) + g_i(t)g_j''(t) - 2g_i'(t)g_j'(t) = \tag{4.2}$$

$$\left(g_i(t)g_j(t)\right)'' - 4g_i'(t)g_j'(t).$$

Πόρισμα 4.2.1. *Θεωρούμε ένα σύστημα αξιοπιστίας για το οποίο το διάνυσμα των χρόνων ζωής των μονάδων του* $(X_1, \ldots, X_n)$ *ακολουθεί την πολυδιάσταση κατανομή Pareto με από κοινού συνάρτηση κατανομής*

$$\bar{F}_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_n > x_n)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1\right)^{-a},\ x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

όπου a είναι μια θετική παράμετρος. Συμβολίζουμε ακόμη με $\alpha_i(n)$, $i = 1,2,\ldots,n$ *την ελάχιστη υπογραφή των* n *μονάδων του συστήματος. Τότε* $T \in IFR$ *αν και μόνο αν*

$$\frac{a+1}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2\alpha_i(n)}{(1+i(t-1))^{a+2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(n)}{(1+i(t-1))^{a}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i\alpha_i(n)}{(1+i(t-1))^{a+1}}\right)^2$$

για όλα τα $t > 1$.

Σημειώνουμε πως το παραπάνω Πόρισμα προκύπτει από την Πρόταση 4.2.1. όπου οι συντελεστές $c_i(n)$ είναι οι ελάχιστες υπογραφές του συστήματος αξιοπιστίας, δηλαδή $c_i(n) = \alpha_i(n)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Στην επόμενη Πρόταση θα δώσουμε μια εναλλακτική επαρκή συνθήκη για να έχει ένα σύστημα αξιοπιστίας αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας. Η συνθήκη αυτή κρίνεται ιδιαίτερα βολική καθώς στο αριστερό μέρος της ανισότητας το κομμάτι που σχετίζεται με την υπογραφή των μονάδων του συστήματος είναι διαχωρισμένο από το κομμάτι που σχετίζεται με τους χρόνους ζωής των μονάδων.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός συστήματος με αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας*

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(n)\, g_i(t)$$

όπου οι ποσότητες $c_i(n)$ και $g_i(t)$ είναι όπως περιγράφηκαν στις σχέσεις (3.9)-(3.11). *Αν το ακόλουθο αληθεύει*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\,(n)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(t) g_i''(t) + \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\,(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} (g_i''(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\,(n) g_i''(t)\right)^2$$

για όλα τα $t \geq 0$, τότε $T \in IFR$.

Παράδειγμα 4.2.1. Θεωρούμε ένα σειριακό σύστημα που αποτελείται από δύο ανταλλάξιμες μονάδες με χρόνους ζωής X_1 και X_2 που ακολουθούν την διμεταβλητή Log-Logistic κατανομή με παραμέτρους β, θ. Η κοινή συνάρτηση επιβίωσης του διανύσματος (X_1, X_2) των χρόνων ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{1 + 2(\theta t)^{\beta}}$$

όπου β>1 και θ>0. Η μέγιστη υπογραφή των αντίστοιχων μονάδων με χρήση της σχέσης (3.12) είναι ίση με

$$\beta_1(2) = 2, \beta_2(2) = -1$$

και οι αντίστοιχες συναρτήσεις $g_i(t)$ με χρήση της σχέσης (3.11) είναι ίσες με

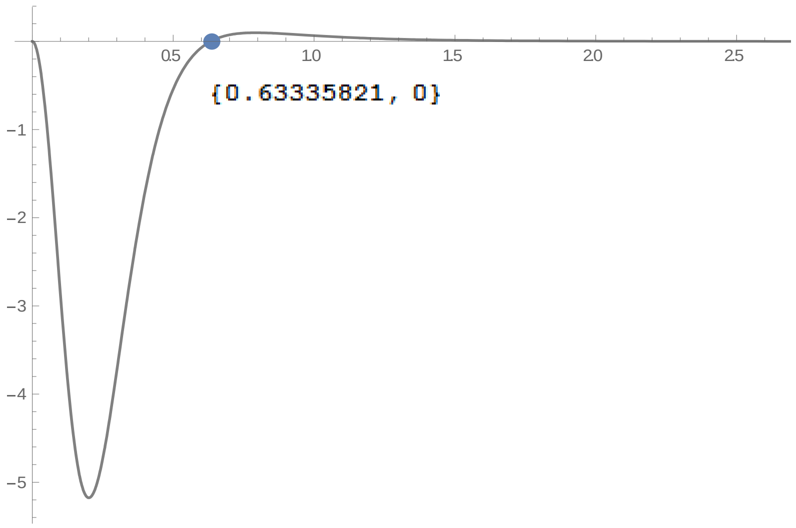
$$g_i(t) = \frac{1}{1+i(\theta t)^{\beta}}\,,\ i = 1{,}2.$$

Δεδομένου ότι $c_i(n)$= $\beta_i(n)$, $i = 1,2, \dots, n$, στην ειδική περίπτωση $\beta = \theta = 2$, η παραπάνω ανισότητα (με τη βοήθεια του τύπου (4.2)) παίρνει τη μορφή

$$\frac{128t^2(2304t^8+96t^6-256t^4-54t^2-3)}{(32t^4+12t^2+1)^4} \leq 0$$

Οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $2304t^8 + 96t^6 - 256t^4 - 54t^2 - 3 = 0$ είναι οι $t = -0.63335821$ και $t = 0.63335821$. Επαληθεύουμε γραφικά ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει για $0 < t < 0.63335821$. Τελικά καταλήγουμε ότι ένα σειριακό σύστημα που αποτελείται από δύο ανταλλάξιμες log-logistic μονάδες ανήκει στην κλάση IFR για το χρονικό διάστημα (0,0.63335821).

Σχήμα 7: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\frac{128t^2(2304t^8+96t^6-256t^4-54t^2-3)}{(32t^4+12t^2+1)^4}$



□

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιες επαρκείς συνθήκες προκειμένου να ανήκει ο χρόνος ζωής ενός συστήματος αξιοπιστίας στην κλάση IFR/DFR. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την υπογραφή ενός συστήματος αξιοπιστίας του Samaniego (βλέπε Κεφάλαιο 3).

Πρόταση 4.2.3. *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός συστήματος με αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας $\bar{F}(t)$. Αν αληθεύει το ακόλουθο*

$$min(1, n\bar{F}(t)) \sum_{i=1}^{n} s_i\,(n)\bar{F}''_{i:n}(t) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\,(n)\bar{F}'_{i:n}(t)\right)^2$$

για όλα τα $t \geq 0$, τότε $T \in IFR$.

Στην επόμενη Πρόταση θα δώσουμε μια επαρκή συνθήκη, βασισμένη στο κατώτερο όριο της υπογραφής των μονάδων του συστήματος, για να ανήκει ο χρόνος ζωής T του συστήματος αξιοπιστίας στην κλάση IFR.

Πρόταση 4.2.4. *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός συστήματος με αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας $\bar{F}(t)$. Έστω ακόμη ότι b_n είναι ένα κάτω όριο της ακολουθίας των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος της υπογραφής του συστήματος, δηλαδή,*

$$s_i(n) \geq b_n, \text{ για όλα τα } i \text{ για τα οποία ισχύει } s_i(n) \neq 0.$$

Αν ισχύει το ακόλουθο

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(n)\, \bar{F}''_{i:n}(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(n)\, \bar{F}_{i:n}(t)\right)$$

$$\leq b_n^2\left(n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=n-i+1}^{n}(-1)^{r-n+i-1}\binom{r-1}{n-i}\binom{n}{r}\bar{F}'_{1:r}(t)\right)^2$$

για όλα τα $t \geq 0$, τότε $T \in IFR$.

Το επόμενο Πόρισμα προκύπτει από την παραπάνω πρόταση και μας δίνει μια ευκολότερη συνθήκη.

Πόρισμα 4.2.2. *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός συστήματος με αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας $\bar{F}(t)$. Έστω ακόμη ότι b_n είναι ένα κάτω όριο της ακολουθίας των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος της υπογραφής του συστήματος. Αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη*

$$\min(1, n\bar{F}(t)) \sum_{i=1}^{n} s_i\,(n)\bar{F}''_{i:n}(t) \leq b_n^2\left(n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=n-i+1}^{n}(-1)^{r-n+i-1}\binom{r-1}{n-i}\binom{n}{r}\bar{F}'_{1:r}(t)\right)^2$$

για όλα τα $t \geq 0$, τότε $T \in IFR$.

Στην Πρόταση που ακολουθεί θα δώσουμε μια ικανή συνθήκη για να ανήκει ο χρόνος ζωής T ενός συστήματος στην κλάση IFR/DFR.

Πρόταση 4.2.5. . *Έστω T ο χρόνος ζωής ενός συστήματος με αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας $\bar{F}(t)$. Έστω ακόμη ότι B_n είναι ένα άνω όριο της υπογραφής του συστήματος, δηλαδή,*

$$s_i(n) \leq B_n, \text{ για } i = 1,2,\ldots,n.$$

(i) *Αν ισχύει το ακόλουθο*

$$(nB_n\bar{F}(t))\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(n)\, \bar{F}''_{i:n}(t)\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(n)\, \bar{F}'_{i:n}(t)\right)^2$$

για όλα τα $t \geq 0$, τότε $T \in IFR$.

(ii) *Αν ισχύει το ακόλουθο*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(n)\,\bar{F}''_{i:n}(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(n)\,\bar{F}_{i:n}(t)\right)$$

$$\geq B_n^2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=n-i+1}^{n}(-1)^{r-n+i-1}\binom{r-1}{n-i}\binom{n}{r}\bar{F}''_{1:r}(t)\right)^2$$

για όλα τα $t \geq 0$, *τότε* $T \in DFR$.

4.3. Πολυμεταβλητές έννοιες γήρανσης συστημάτων αξιοπιστίας με ανταλλάξιμες μονάδες

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε δύο νέες πολυμεταβλητές ιδιότητες γήρανσης, θεωρώντας την περίπτωση ενός συστήματος που αποτελείται από δύο ανταλλάξιμες μονάδες. Συγκεκριμένα θα ορίσουμε τη διμεταβλητή IFR ($BIFR$) ιδιότητα και τη διμεταβλητή $DMRL$ ($BDMRL$) ιδιότητα. Για κάθε μία από αυτές τις ιδιότητες θα δώσουμε δύο διαφορετικές επεκτάσεις, οι οποίες καθορίζονται από τη μορφή της στοχαστικής διάταξης που επιθυμούμε.

Πριν ορίσουμε τη $BIFR$ ιδιότητα, θα ήταν χρήσιμο να αναφερθούμε στις Schur-concave συναρτήσεις. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτές τις συναρτήσεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [14] και [22].

Ορισμός 4.3.1. *Λέμε ότι το* $\boldsymbol{x}$ *είναι μεγαλύτερο από το* $\boldsymbol{y}$, *και συμβολίζουμε* $x \prec y$, *αν η αναδιάταξη των συνιστωσών των* $\boldsymbol{x}$ *και* $\boldsymbol{y}$ *για την οποία ισχύει* $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}$, $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \cdots \geq y_{(n)}$ *ικανοποιεί τις σχέσεις* $\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ *και* $\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}$.

Ορισμός 4.3.2. *Η συνάρτηση* $F: A \to \mathbb{R}$, *όπου* $A \subset \mathbb{R}^n$, *ονομάζεται Schur-convex αν* $x \prec y$ *συνεπάγεται* $F(x) \leq F(y)$. *Η συνάρτηση* F *ονομάζεται Schur-concave αν η* $-F$ *είναι Schur-convex.*

Στη συνέχεια θα δώσουμε τους ορισμούς για τη $BIFR$ ιδιότητα γήρανσης. Σημειώνουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει IFR κατανομή αν και μόνο αν $X - t_1|X > t_1 \geq_{st} X - t_2|X > t_2$ $\forall$ $t_1 < t_2$ και ακόμη αν και μόνο αν $X - t_1|X > t_1 \geq_{hr} X - t_2|X > t_2$, $\forall$ $t_1 < t_2$. Βασισμένοι σε αυτό, οι Bassan και Spizzichino έδωσαν δύο νέους ορισμούς για την περίπτωση της διμεταβλητής IFR ιδιότητας γήρανσης. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [13].

Ορισμός 4.3.3. *Ένα ανταλλάξιμο τυχαίο διάνυσμα $T = (T_1, T_2)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση $BIFR$ αν ισχύει*

$$T_1 - t_1 | T_1 > t_1, T_2 > t_2 \geq_{st} T_2 - t_2 | T_1 > t_1, T_2 > t_2,\ \text{για}\ t_1 \leq t_2. \tag{4.3}$$

Τονίζουμε ότι η σχέση (4.3) ισχύει αν και μόνο αν η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(t_1, t_2) = P[T_1 > t_1, T_2 > t_2]$ των (T_1, T_2) είναι Schur-concave. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με Schur-concave συναρτήσεις παραπέμπουμε στο [14].

Ορισμός 4.3.4 *Ένα ανταλλάξιμο τυχαίο διάνυσμα $T = (T_1, T_2)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση $s - BIFR$* (δηλαδή είναι διμεταβλητό ισχυρό IFR) *αν ισχύει*

$$T_1 - t_1 | T_1 > t_1, T_2 > t_2 \geq_{hr} T_2 - t_2 | T_1 > t_1, T_2 > t_2,\ \text{για}\ t_1 \leq t_2. \tag{4.4}$$

Η σχέση (4.4) ισχύει αν και μόνο αν η συνάρτηση

$$R(t) = \frac{\bar{F}(x + t, y)}{\bar{F}(y + t, x)} \tag{4.5}$$

είναι αύξουσα ως προς t για όλα τα $x < y$. Διαφορετικά, παίρνοντας λογαρίθμους και στη συνέχεια διαφορίζοντας και τις δύο πλευρές, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με

$$r_{T_1|T_2}(y + t | T_2 > x) \geq r_{T_1|T_2}(x + t | T_2 > y)\ \text{για όλα τα}\ t > 0\ \text{και}\ 0 \leq x < y, \tag{4.6}$$

όπου με $r_{T_1|T_2}(. | T_2 > t_2)$ συμβολίζουμε τη βαθμίδα αποτυχίας της δεσμευμένης κατανομής $\{T_1 | T_2 > t_2\}$.

Αξίζει να τονίσουμε ότι οι δύο παραπάνω περιπτώσεις πολυμεταβλητής γήρανσης ταυτίζονται στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές T_1 και T_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει μια συνθήκη μεταξύ των T_1 και T_2 για να ανήκουν οι περιθώριες κατανομές ενός $s - BIFR$ τυχαίου διανύσματος στην κλάση IFR.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω ότι το τυχαίο διάνυσμα $T = (T_1, T_2)$ ανήκει στην κλάση $s - BIFR$ και έστω ότι T_1 έχει φθίνουσα δεξιά ουρά (right tail decreasing RTD) ως προς T_2. Τότε η περιθώρια κατανομή της T_1 είναι IFR.*

Σημειώνουμε ότι αν $T = (T_1, T_2)$ είναι ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής $F = (F_1, F_2)$ τότε λέμε ότι T_2 *είναι* RTD ως προς T_1 αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i. $\{T_1 | T_2 > t_2\} \leq_{hr} T_1\ \forall\ t_2 > 0$

ii. $\frac{\bar{F}(t_1,t_2)}{\bar{F}(t_1)}$ είναι φθίνουσα ως προς t_1 $\forall$ $t_2 > 0$

iii. $P(T_2 > t_2 | T_1 > t_1)$ είναι φθίνουσα ως προς t_1 $\forall$ $t_2 > 0$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτό, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [15].

Παράδειγμα 4.3.1. Θεωρούμε ότι η από κοινού κατανομή των (T_1, T_2) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}(x, y) = \exp\{1 - exp(x^2 + y^2)\} \; x \geq 0, y \geq 0.$$

Σύμφωνα με τον τύπο (4.5) θα έχουμε

$$R(t) = \frac{\bar{F}(x + t, y)}{\bar{F}(y + t, x)} = \exp\{e^{x^2+(y+t)^2} - e^{y^2+(x+t)^2}\}$$

Και η τελευταία είναι αύξουσα ως προς t για $x \leq y$. Επομένως καταλήγουμε ότι το διάνυσμα (T_1, T_2) ανήκει στην κλάση $s - BIFR$.

Ακόμη η T_2 *είναι* RTD *ως προς την* T_1 αφού η συνάρτηση

$$\frac{\bar{F}(t, y)}{\bar{F}(t, 0)} = \exp\left\{e^{t^2} - e^{y^2+t^2}\right\} = exp\left\{e^{t^2}(1 - e^{y^2})\right\}$$

είναι γνησίως φθίνουσα ως προς t για $y > 0$, αφού η συνάρτηση $1 - e^{y^2}$ είναι φθίνουσα ως προς t στο ίδιο διάστημα.

Τελικά αυτή η δισδιάστατη κατανομή πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.3.1. και επομένως ανήκει στην κλάση $s - BIFR$, ενώ οι αντίστοιχες περιθώριες ανήκουν στην κλάση IFR. □

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη διμεταβλητή $DMRL$ ($BDMRL$) ιδιότητα, και θα δώσουμε δύο ορισμούς σε αναλογία με τη $BIFR$ ιδιότητα γήρανσης. Πριν δώσουμε τους ορισμούς όμως θα αναφερθούμε στην περίπτωση μια μεταβλητής που ανήκει στην κλάση $DMRL$ για να προχωρήσουμε έπειτα στην περίπτωση της δισδιάστατης περίπτωσης. Η μεταβλητή X ανήκει στην κλάση $DMRL$ αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$X - t_1 | X > t_1 \geq_{mrl} X - t_2 | X > t_2 \; \forall t_1 < t_2. \quad (4.7.)$$

Δεδομένου ότι η διάταξη της βαθμίδος αποτυχίας συνεπάγεται τη διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να πούμε ότι η $BIFR$ ιδιότητα συνεπάγεται τη $BDMRL$ ιδιότητα.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της διμεταβλητής $DMRL$ ιδιότητας λαμβάνοντας υπόψη τη δεσμευμένη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής δοθέντων ορισμένων παρατηρηθέντων δίτιμων δεδομένων. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [13].

Ορισμός 4.3.5. *Ένα ανταλλάξιμο τυχαίο διάνυσμα* $T = (T_1, T_2)$ *λέμε ότι ανήκει στην κλάση* $BDMRL$ *αν για* $t_1 < t_2$ *ισχύει*

$$E(T_1 - t_1 | T_1 > t_1, T_2 > t_2) \geq E(T_2 - t_2 | T_1 > t_1, T_2 > t_2). \tag{4.8}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει αν και μόνο αν αληθεύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i. $\int_{t_1}^{\infty} \bar{F}(x, t_2) dx \geq \int_{t_2}^{\infty} \bar{F}(x, t_1) dx$ για $t_1 < t_2$
ii. $\int_{t_1}^{\infty} \int_{t_2}^{\infty} \bar{F}(x, y) dx dy$ είναι Schur-concave στο (t_1, t_2)
iii. $\mu_{T_1|T_2}(t_1 | T_2 > t_2) \geq \mu_{T_1|T_2}(t_2 | T_2 > t_1)$ για $t_1 < t_2$,

όπου με $\mu_{T_1|T_2}(\cdot | T_2 > t_2)$ συμβολίζεται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της δεσμευμένης κατανομής του T_1 δοθέντος ότι $\{T_2 > t_2\}$.

Στην περίπτωση που οι T_1, T_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, η ιδιότητα γήρανσης $BDMRL$ μεταφράζεται ως

$$T_1 - t_1 | T_1 > t_1, T_2 > t_2 \geq_{mrl} T_2 - t_2 | T_1 > t_1, T_2 > t_2 \ \forall\ t_1 < t_2. \tag{4.9}$$

Επειδή η αντιστοιχία μεταξύ των (4.8) και (4.9) ισχύει μόνο στην περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων μονάδων και όχι στην περίπτωση των ανταλλάξιμων μεταβλητών, θα δώσουμε μια πιο ισχυρή εκδοχή της $BDMRL$ ιδιότητας, την $s - BDMRL$.

Ορισμός 4.3.6. *Θεωρούμε ότι ένα ανταλλάξιμο τυχαίο διάνυσμα* $T = (T_1, T_2)$ *ανήκει στην κλάση* $s - BDMRL$ *(δηλαδή είναι διμεταβλητό ισχυρό BDMRL) εάν για όλα τα* $t_1 < t_2$ *ισχύει η σχέση* (4.9).

Η παραπάνω σχέση ισχύει αν και μόνο αν αληθεύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i. $\mu_{T_1|T_2}(x + t_1 | T_2 > t_2) \geq \mu_{T_1|T_2}(x + t_2 | T_2 > t_1)$ για $t_1 < t_2$ και $x > 0$
ii. $\dfrac{\int_{x+t_1}^{\infty} \bar{F}(u, t_2) du}{\int_{x+t_2}^{\infty} \bar{F}(u, t_1) du}$ είναι αύξουσα ως προς x για $x > 0$ και $t_1 < t_2$.

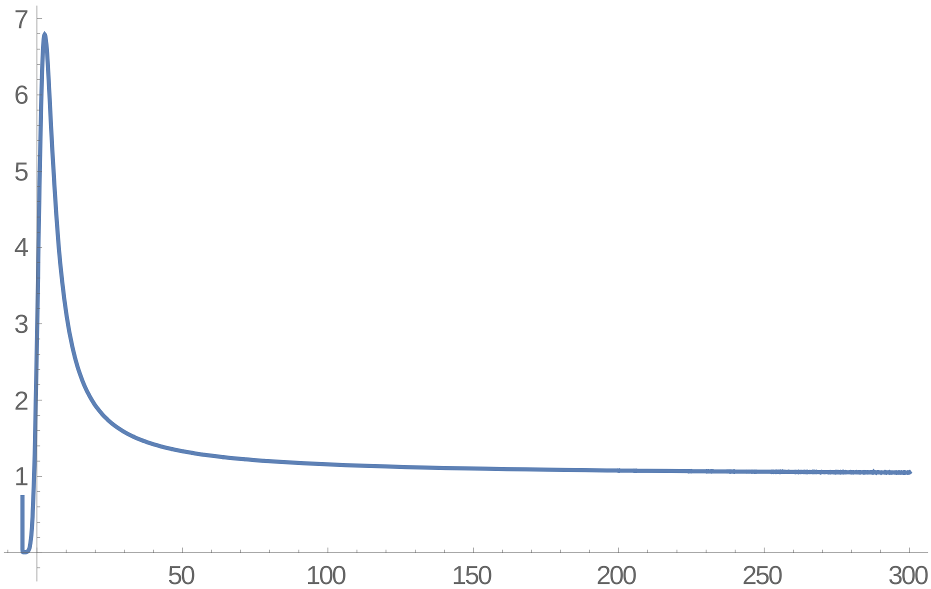
Παρακάτω παραθέτουμε ένα παράδειγμα όπου ένα δισδιάστατο διάνυσμα ανήκει στην $BDMLR$ κλάση, αλλά όχι και στην $s - BDMRL$.

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω $\bar{F}_{T_1, T_2}(u, v) = C[1 + u^3 + v^3]^{-2}$, όπου C κατάλληλη θετική σταθερά. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης είναι Schur-concave και επομένως η από κοινού κατανομή των (T_1, T_2) ανήκει στην κλάση $BIFR$ και τελικά στην κλάση $BDMRL$. Για να ελέγξουμε εάν ανήκει και στην κλάση $s - BDMRL$ θα εξετάσουμε εάν η συνάρτηση

$$\frac{\int_{x+t_1}^{\infty}\bar{F}(u,t_2)du}{\int_{x+t_2}^{\infty}\bar{F}(u,t_1)\,du}=\frac{\int_{x+1}^{\infty}[65+u^3]^{-2}du}{\int_{x+4}^{\infty}[2+u^3]^{-2}\,du}$$

είναι αύξουσα ως προς x. Εξετάζοντας το γράφημα της συνάρτησης αυτής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, βλέπουμε ότι δεν είναι μονότονο και επομένως η κατανομή δεν είναι $s-BDMRL$. Δεδομένου ότι η διάταξη $\geq_{hr}$ συνεπάγεται τη διάταξη $\geq_{mrl}$, η κατανομή δεν είναι ούτε $s-BIFR$.

Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\frac{\int_{x+1}^{\infty}[65+u^3]^{-2}du}{\int_{x+4}^{\infty}[2+u^3]^{-2}du}$



□

Βιβλιογραφία

[1] Burkschat, M. (2014). *Reliability of Coherent Systems with Dependent Component Lifetimes.* Institute of Statistics, RWTH Aachen University.

[2] Hollander, M., & Samaniego, F. J. (2008). The Use of Stochastic Precedence in the Comparison of Engineered Systems. *Advances in Mathematical Modeling for Reliability, IOS Press,* 129-137.

[3] Koutras, M. V., Triantafyllou, I. S., & Eryilmaz, S. (2016). Stochastic Comparisons Between Lifetimes of Reliability Systems with Exchangeable Components. *Methodology and Computing in Applied Probability Volume* 18, 1081-1095.

[4] Navarro, J., & Rychlik, T. (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. *Journal of Multivariate Analysis* 98, 102 – 113.

[5] Navarro, J., Ruiz, J. M., & Sandoval, C. J. (2004). A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signature. *Statistics & Probability Letters* 72(2), 179–185.

[6] Samaniego, F. J. (2007). *System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability.* Davis: University of California.

[7]Samaniego, F. J. (2007). *System Signatures and their Applications in Engineering* Reliability International Series in Operations Research & Management Science. University of California at Davis: Springer.

[8] Samaniego, F. J., & Boland, P. J. (2004). *Mathematical Reliability: An Expository Perspective.* Refik Soyer, Thomas A. Mazzuchi, Nozer D. Singpurwalla Springer Science+Business Media New York.

[9] Samaniego, F. J., Kochar, S., & Mukerjee, H. (1999). The "Signature" of a Coherent System and Its Application to Comparisons Among Systems. *Naval Research Logistics,* 46, 507–523.

[10] Triantafyllou , I. S., & Koutras, M. V. (2008). On the Signature of Coherent Systems and Applications. *Probability in the Engineering and Informational Sciences,* 22, 19-35.

[11] Triantafyllou, I. S., & Koutras, M. V. (2014). Reliability Analysis of Coherent Systems with Exchangeable Components. *Applications of Mathematics and Informatics in Science and Engineering, Springer,* 91, 321-332.

[12] Navarro, J., & Eryilmaz, S. ((2007)). Mean residual lifetimes of consecutive-k-out-of-n: F systems. *Journal of Applied Probability* 44, 82–98.

[13] Bassan, B., Spizzichino, F., & Kochar, S. (2002). Some Bivariate Notions of IFR and DMRL and Related Properties. Journal of *Applied Probability*, 39, 533-544.

[14] Marshall, A. W., & Olkin, I. (1974). Majorization in Multivariate Distributions. *The Annals of Statistics*, 2, 1189-1200.

[15] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts* . London, New York: Chapman & Hall/CRC.

[16] Shaked, M., & Shanthikumar, G. J. (2007). *Stochastic Orders.* New York, USA: Springer.

[17] Fu, J. C., & Lou, W. (2003). *Distribution Theory of Runs and Patterns and Its Applications.* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[18] Fu, J. C., & Koutras, M. V. (1994). Distribution theory of runs: Markov chain approach. *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1050-1058.

[19] Eryilmaz, S., & Demir, S. (2007). Success runs in a sequence of exchangeable binary trials. *Journal of Statistical Planning and Inference* 137, 2954 – 2963.

[20] Eberlein, E., Hahn, M., & Talagrand, M. (1998). *High Dimensional Probability*. USA: Springer Basel AG.

[21] Balakrishnan, N., & Koutras, M. V. (2002). *Runs and Scans with Applications.* New York: Wiley Series in Probability and Statistics.

[22] Roventa, I. (2012). A note on Schur-concave functions. *Journal of Inequalities and Applications*, 159, 1:9.

[23] David, H. A., & Nagaraja, H. N. (2003). *Order Statistics, 3rd Edition.* Hoboken, NJ: Wiley Series in Probability and Statistics.

[24] Sadegh, M. K. (2016). Distribution of Order Statistics for Exchangeable Random Variables. *Journal of the Iranian Statistical Society*, 15, 59-70.

[25] Bhattacharyya, G. K., & Johnson, R. A. (1974). Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model. *Journal of the American Statistical Association*, 69, 966-970.