Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σ χ ο λ ή Χ ρ η μ α τ ο ο ι κ ο ν ο μ ι κ ή ς κ α ι Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς

Τ μ ή μ α Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ς κ α ι Α σ φ α λ ι σ τ ι κ ή ς Ε π ι σ τ ή μ η ς

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν **Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η**

Πειραματικοί σχεδιασμοί και γραμμικά μοντέλα τυχαίων και μικτών επιδράσεων

Βίκτωρ Ε. Τραπουζανλής

Δ ι π λ ω μ α τ ι κ ή Ε ρ γ α σ ί α

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιούλιος 2017

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Πειραματικοί σχεδιασμοί και γραμμικά μοντέλα τυχαίων και μικτών επιδράσεων

Βίκτωρ Ε. Τραπουζανλής

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιούλιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επικ. Καθηγητής Ευαγγελάρας Χαραλάμπος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Τσίμπος Κλέων
- Αναπλ. Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

Experimental Designs and Linear models of Random and Mixed effects

By

Victor E. Trapouzanlis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
July 2017

Στον Πατέρα μου

† Ευστράτιο

Ευχαριστίες

Ἆρα πόσον καιρὸν συνίσταται οὗτος ὁ αἰών; καὶ πότε ἀρχὴν λαμβάνει ὁ μέλλων; καὶ πόσον ἆρα πάλιν κατεύδουσι τὰ σκηνώματα ταῦτα καιρὸν ἐν τῷ σχήματι τούτῳ, καὶ τὰ σώματα ἔσονται τῷ χοΐ ἅμα συμμεμιγμένα; καὶ πῶς ἆρα γίνεται ἡ διαγωγὴ ἐκείνη; καὶ ἐν ποίᾳ μορφῇ αὕτη ἡ φύσις ἀνίσταται καὶ συνίσταται; καὶ ἐν ποίῳ τρόπῳ ἔρχεται εἰς τὴν δευτέραν κτίσιν; Καὶ ἐν τῷ εἰς ταῦτα καὶ τὰ τοιαῦτα ἀδολεσχεῖν, ἐπιπίπτει ἐπ᾽ αὐτὸν ἔκπληξις καὶ ἥσυχος σιωπῆ, εἶθ᾽ οὕτως ἀνίσταται τῇ ὥρᾳ ἐκείνῃ καὶ γόνυ κλίνει, καὶ εὐχαριστίας ἀναπέμπει καὶ δοξολογίας μετὰ δακρύων ἱκανῶν τῷ μόνῳ σοφῷ Θεῷ, τῷ ἐν τοῖς πανσόφοις ἔργοις αὐτοῦ δοξαζομένῳ ἀεί.

Τὸ δῶρο τῆς εὐχαριστίας στὴ θέση τῶν ἀναπάντητων ἐρωτημάτων. Ὑπὲρ πάντων, ὧν ἴσμεν καὶ ὧν οὐκ ἴσμεν.

Περίληψη

Εξειδικεύοντας λίγο περισσότερο στον γενικό τίτλο, αντικειμενικός στόχος της παρούσας διατριβής είναι η διερεύνηση και εφαρμογή προσεγγίσεων ανάλυσης σε πειραματικούς σχεδιασμούς όπου οι παράγοντες που διαμορφώνουν την προς μελέτη μεταβλητή παρουσιάζουν συγκεκριμένες ιδιαιτερότητες.

Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμαστε σε εκείνες τις περιπτώσεις όπου οι υπό εξέταση παράγοντες (παράγοντες διαμόρφωσης ή επιρροής μιας μεταβλητής απόκρισης) δεν μπορούν να αλλάξουν εύκολα. Αυτοί οι σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται συχνά για σε παραγοντικά πειράματα στα οποία η φύση του πειραματικού υλικού ή οι σχετικές λειτουργίες καθιστούν δύσκολη τη διαχείριση όλων των θεραπειών (δηλαδή των συνδυασμών των επιπέδων από τους εμπλεκόμενους παράγοντες) με τον ίδιο τρόπο. Μπορούν επομένως να χρησιμοποιηθούν, όταν τα επίπεδα των παραγόντων που σχετίζονται με έναν από τους παράγοντες, απαιτούν μεγαλύτερες ποσότητες πειραματικού υλικού από τα επίπεδα θεραπείας των άλλων παραγόντων. Με άλλα λόγια, ενδέχεται να μην είμαστε σε θέση να τυχαιοποιήσουμε εντελώς τη σειρά εκτέλεσης (πραγμάτωσης) των διαφορετικών επιπέδων ενός παράγοντα. Αυτό συχνά οδηγεί σε μια γενίκευση του παραγοντικού σχεδιασμού που ονομάζεται split-plot σχεδιασμός.

Οι μορφές αυτές σχεδιασμού θα μελετηθούν – λαμβάνοντας υπόψη και τον παράγοντα του χρόνου –με μοντέλα μικτών επιδράσεων ενώ θα συγκριθούν και με άλλες περιπτώσεις σχεδιασμού όπως είναι οι πλήρως τυχαιοποιημένοι σχεδιασμοί.

Abstract

Elaborating a bit more to the general title, the aim of this dissertation is to investigate and apply approaches of experimental design and analysis involving factors of influence with very specific peculiarities – particular characteristics.

More specifically, we refer to those cases where the tested factors do not change easily. The respectively designs are frequently used for factorial experiments in which the nature of the experimental material or the operations involved make it difficult to handle all factor combinations in the same manner. It may be used when the treatment levels associated with one of the factors require larger amounts of experimental material than do treatment levels for other factors. In other words, we may be unable to completely randomize the order of the runs. This often results in a generalization of the factorial design called a split-plot design.

This type of experimental design will be studied taking into account the time factor, with mixed effects models, and will be compared with other design cases such as fully random designs.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1.1 Πειραματικά στοιχεία και στατιστικός σχεδιασμός

Η ισχύς των μεθόδων εκτίμησης των παραμέτρων ενός πληθυσμού όπως και οι αντίστοιχοι έλεγχοι υποθέσεων που απορρέουν από τη στατιστική επαγωγή, συνδέεται με την καταλληλότητα των στοιχείων που έχουν περισυλλεγεί για την διεξαγωγή μιας έρευνας ή αλλιώς ενός πειράματος και ως εκ τούτου από τον τρόπο που έγινε η συλλογή αυτή των δεδομένων. Είναι αυτός ο τρόπος που πρέπει μεταξύ άλλων να διασφαλίζει το δυνατόν περισσότερο «**τη στατιστική αποτύπωση επάνω στο εξεταζόμενο χαρακτηριστικό**» (Κ. Δρακάτος, 1984) της επιδράσεως του παράγοντα ή των παραγόντων για τους οποίους ενδιαφερόμαστε. Αν δεν συμβαίνει/διασφαλίζεται κάτι τέτοιο τότε, τα συμπεράσματά μας ενδέχεται να μην αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα, αφενός διότι η επίδραση που καταλογίζεται σε έναν συγκεκριμένο παράγοντα να οφείλεται σε κάποιον άλλον και αφετέρου διότι μπορεί να μην υφίσταται καν μια τέτοια επίδραση.

Στη περίπτωση που εξετάζουμε, για παράδειγμα, την επίδραση μιας διαφημιστικής καμπάνιας στις πωλήσεις ενός προϊόντος για το οποίο παρατηρείται στατιστικά σημαντική αύξηση των πωλήσεών του συγκρίνοντας δυο διαφορετικές χρονικές περιόδους, πριν και μετά τη διαφήμιση, ενδέχεται η αύξηση αυτή να μην οφείλεται αποκλειστικά (ή και καθόλου) στη διαφήμιση. Η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο, είναι αρκετά μεγάλη από τη στιγμή που τα δεδομένα του χαρακτηριστικού «πωλήσεις» που έχουν συλλεχθεί στις δυο χρονικές περιόδους (πριν και μετά την διαφημιστική καμπάνια) έχουν επηρεαστεί συστηματικά και από άλλους παράγοντες (εκτός της διαφήμισης) όπως για παράδειγμα είναι η μείωση της τιμής, άλλες προωθητικές ενέργειες που αφορούν το προϊόν, εποχικές συνιστώσες, μακροοικονομικοί παράγοντες, ενέργειες ανταγωνιστών κλπ. Αν πράγματι και κάτι άλλο λαμβάνει χώρα στη διαμόρφωση μιας κατάστασης όπως είναι η αύξηση των πωλήσεων ενός προϊόντος, τότε δε θα πρέπει να αποδώσουμε, χωρίς παραπέρα έρευνα, τη διαφορά των πωλήσεων αποκλειστικά στη διαφήμιση.

Αντιλαμβανόμαστε επομένως, ότι είναι αναγκαίο να υπάρχει **αιτιώδης σχέση** μεταξύ του παράγοντα που ενδιαφέρει και μιας μετρήσιμης πραγματικότητας που μελετάται η διαμόρφωση της οποίας αποδίδεται (κυρίως) στον παράγοντα αυτόν.

Θα μπορούσαμε, στηριζόμενοι στα όσα παρατηρήσαμε παραπάνω, να ισχυριστούμε ότι τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε στην επαγωγική στατιστική, χωρίζονται σε δυο κατηγορίες:

1. Σε παρατηρήσεις που περιγράφουν ποσοτικά, καταστάσεις που επικρατούν σε ορισμένο πληθυσμό, χωρίς να έχουν μεσολαβήσει επιδράσεις τέτοιες που να αποβλέπουν στην επί τούτου τροποποίηση και μεταβολή του πληθυσμού αυτού έτσι ώστε να εξαλειφθούν κατά την παρατήρηση οι παράγοντες εκείνοι που ασκούν μεν επιρροή στο εξεταζόμενο χαρακτηριστικό αλλά ωστόσο δεν ενδιαφέρουν τον ερευνητή. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι δεδομένα τους είδους, δεν είναι πολλές φορές κατάλληλα προς χρήση προκειμένου να επιβεβαιωθούν ή απορριφθούν υποθέσεις που αναφέρονται σε τέτοιου είδους αιτιωδών σχέσεων. Η συμβολή ή όχι γνωστών ή αγνώστων πλήθους παραγόντων, στη διαμόρφωση των παρατηρήσεων του δείγματος, που θα μας βοηθήσει στη διεξαγωγή μιας έρευνας και των συνεπαγόμενων συμπερασμάτων, κάνει δυσδιάκριτη την επίδραση που ασκείται στο εξεταζόμενο χαρακτηριστικό από ορισμένους μόνο από τους παράγοντες αυτούς.
2. Σε παρατηρήσεις που προκύπτουν κατόπιν μεταβολής ορισμένων προσδιοριστικών παραγόντων του εξεταζόμενου χαρακτηριστικού. Με τη μεταβολή αυτή επιδιώκεται να αποτυπωθεί πάνω στα στοιχεία (ή αλλιώς παρατηρήσεις) οι επιδράσεις που τυχόν ασκούνται επί του μελετώμενου χαρακτηριστικού. Αυτό θα πει, με άλλα λόγια, ότι **τα δεδομένα που συλλέγομε είναι πειραματικά**. Επί της ουσίας, έχει επέλθει τροποποίηση και μεταβολή τέτοια που αποβλέπει σε ορισμένο αναλυτικό σκοπό.

Ελεγχόμενα πειράματα, καθώς περιγράφηκαν στη δεύτερη περίπτωση δεδομένων, δεν εξυπηρετούν τους σκοπούς της στατιστικής αναλύσεως από την άποψη κυρίως ότι είναι παρακινδυνευμένη οποιαδήποτε γενίκευση στον πληθυσμό (περί της επιδράσεως που ασκείται από ένα μεταβαλλόμενο χαρακτηριστικό στο εξεταζόμενο χαρακτηριστικό), εφόσον αυτή θα στηρίζεται σε στοιχεία που συγκεντρώθηκαν με σταθερούς τους υπολοίπους προσδιοριστικούς παράγοντες. Τι θα γινόταν στη περίπτωση που και οι λοιποί παράγοντες τελικά μεταβάλλονταν; Θα επιδρούσε σε μια τέτοια περίπτωση ο παράγοντας που μελετάμε με τον ίδιο τρόπο;

Οφείλουμε να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι στην πραγματικότητα είναι αδύνατος ο ακριβής έλεγχος (ακόμη και σε συνθήκες εργαστηρίου) όλων ανεξάρτητα των λοιπών αυτών παραγόντων. Αυτό το μη ελεγχόμενο μέρος της μεταβλητότητας των μετρήσεων ενός χαρακτηριστικού, υπό συνθήκες ελεγχόμενου πειράματος, καλείται «**πειραματικό σφάλμα**» και εκφράζεται από τη διακύμανση των παρατηρήσεων που λαμβάνονται κάτω από απόλυτα όμοιες συνθήκες. Αυτό θα το δούμε εκ νέου στην ενότητα των ορισμών που ακολουθεί.

Γενικά ωστόσο, τα πειραματικά στοιχεία που συλλέγονται με τον παραπάνω τρόπο, ανεξάρτητα από τις στατιστικές αδυναμίες που παρουσιάζουν, πολλές φορές ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στις ανάγκες της έρευνας. Είναι επίσης δυνατόν, στοιχεία τέτοια να προκύπτουν και από πειράματα που εκτελούνται κάτω από πραγματικές συνθήκες. Αν και τα συμπεράσματα, σε μια τέτοια περίπτωση, θα είναι πιο ασαφή λόγω διόγκωσης του σφάλματος από μη ελεγχόμενους παράγοντες, ένα τέτοιο πείραμα (εκτός εργαστηρίου) θα μπορούσε να δώσει στοιχεία τέτοια που να στήριζε συμπερασματολογία η οποία θα αφορούσε τον πληθυσμό. Στη περίπτωση μάλιστα που ληφθεί μέριμνα για τη κατάλληλη διαμόρφωση του δείγματος, οι μετρήσεις που θα προέκυπταν από ένα τέτοιο πείραμα εκτός εργαστηρίου δεν θα διέφεραν, ως προς την καταλληλότητα, από τα στοιχεία ενός πειράματος εντός εργαστηρίου.

Σε κάθε περίπτωση, για να είναι εφικτός ο καθορισμός των επιδράσεων διαφόρων επιμέρους παραγόντων στη διαμόρφωση ενός χαρακτηριστικού με τις γνωστές στατιστικές μεθόδους, πρέπει το πείραμα από το οποίο προέρχονται τα δεδομένα να έχει σχεδιαστεί με τον κατάλληλο τρόπο. Τι θα πει ωστόσο κατάλληλος στατιστικός σχεδιασμός; Αμέσως παρακάτω, εκθέτουμε συνοπτικά ορισμένες βασικές αρχές που πρέπει να διέπουν το σχεδιασμό ενός πειράματος. Κάποιες από αυτές θα εξεταστούν και στην ενότητα που θα ακολουθήσει.

1. Η επιλογή των επί μέρους πειραματικών μονάδων που πρόκειται να υποβληθούν σε δοκιμασία για να διαπιστωθεί τυχόν αντίδρασή τους στις μεταβολές ενός συγκεκριμένου παράγοντα (ή παραγόντων), προϋποθέτει την εφαρμογή μιας τυχαίας διαδικασίας έτσι ώστε να αποφεύγεται η παρέμβαση του ερευνητή στη διαμόρφωση των αποτελεσμάτων. Η τυχαιοποίηση αυτή είναι απαραίτητη για την εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος. Εξάλλου, ένα πειραματικό σχέδιο τότε μόνο μπορεί να χαρακτηριστεί ως στατιστικό, όταν σε κάποιο στάδιό του προβλέπεται οπωσδήποτε η διεξαγωγή τυχαίας επιλογής.
2. Θα πρέπει για έναν πειραματικό σχεδιασμό, να υπάρχει η δυνατότητα επαναλήψεως της ίδιας δοκιμασίας σε διαφορετικές πειραματικές μονάδες. Αν διαθέτουμε ολόκληρη σειρά από μετρήσεις που αφορούν την επίδραση συγκεκριμένου παράγοντα πάνω στο εξεταζόμενο χαρακτηριστικό, κάτω από ποικίλες συνθήκες, μπορούμε, με τον μέσο όρο των μετρήσεων αυτών, να έχουμε κατά κάποιο τρόπο αλληλεξουδετέρωση των επιδράσεων από λοιπούς παράγοντες.

Μια από τεχνικές αναλύσεως των στοιχείων που προέρχονται από τέτοια πειραματικά σχέδια είναι και η ανάλυση της διακύμανσης με την οποία θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα παρακάτω. Ουσιαστικά, η μέθοδος αυτή αποβλέπει στον ίδιο γενικό σκοπό όπως και η μέθοδος της παλινδρόμησης, ο οποίος έχει να κάνει με την εκτίμηση των επιδράσεων που ασκούνται σε μια μεταβλητή από ένα ή περισσότερους παράγοντες. Στις σελίδες που θα ακολουθήσουν, θα γίνει (μεταξύ των άλλων) και μια προσπάθεια να συνδεθεί η συμπερασματολογία από την ανάλυση της διακύμανσης με εκείνη της ανάλυσης παλινδρόμησης, ανάγοντας το πρόβλημα του πειραματικού σχεδιασμού σε παλινδρομικό υπόδειγμα. Μια τέτοια αναγωγή θα μας βοηθήσει στο να έχουμε μια πολύ καλύτερη εποπτεία των επί μέρους επιδράσεων των παραγόντων.

1.2 Ορισμένοι χρήσιμοι ορισμοί

Μεταβλητή απόκρισης: το αποτέλεσμα που μετριέται σε ένα πείραμα η οποία μέτρηση εξετάζεται αν διαφοροποιείται σημαντικά ως προς τα διάφορα επίπεδα παραγόντων που επιδρούν ή και διαμορφώνουν τις τιμές (μετρήσεις) της μεταβλητής αυτής. **Τα επίπεδα των παραγόντων αναφέρονται σε διακριτές καταστάσεις ή και τιμές του παράγοντα όπου για την κάθε μια από αυτές παίρνουμε και μετρήσεις για την μεταβλητή απόκρισης**. Οι συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων (των οποίων η επίδραση μελετάται) λέγονται θεραπείες (treatments). Η μεταβολές της μεταβλητής απόκρισης από θεραπεία σε θεραπεία είναι γνωστή ως επίδραση στη μεταβλητή απόκρισης.

Άλλη μια σημαντική παράμετρος στα προβλήματα πειραματικού σχεδιασμού είναι και η μεταβλητή πλαισίου η οποία ενώ ενδέχεται να επηρεάζει τη μεταβλητή απόκρισης, να μην ενδιαφέρει επί της ουσίας και για το λόγο αυτό τίθεται υπό έλεγχο για να περιοριστεί το δυνατόν περισσότερο αν όχι να εξαλειφθεί εντελώς η επίδρασή της. Ο έλεγχος μιας **μεταβλητής πλαισίου** επιτυγχάνεται με σταθεροποίηση και ομαδοποίηση. Ο τυχαίος επιμερισμός των διαφόρων επιπέδων ενός παράγοντα στις πειραματικές μονάδες, γίνεται ξεχωριστά για κάθε ομάδα. Οι ομάδες αυτέ λέγονται blocks και αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες καταστάσεις (επίπεδα) μια ελεγχόμενης μεταβλητής πλαισίου. Κοντολογίς, τα blocks αναφέρονται στα επίπεδα μιας μεταβλητής πλαισίου την οποία ομαδοποιούμε για να μπορεί να είναι ελέγξιμη στο βαθμό που μπορεί να είναι ελέγξιμη. Σε κάθε ομάδα εφαρμόζονται όλες οι θεραπείες.

Θα γνωρίζουμε ως πειραματικό σφάλμα της μεταβλητής απόκρισης, το μέρος εκείνο της μεταβλητότητας της απόκρισης που αφενός δεν οφείλεται σε αλλαγή θεραπείας αλλά και ούτε και σε μεταβολές καταστάσεων των μεταβλητών πλαισίου.

Ο επιμερισμός της μεταβλητότητας στις τρεις προαναφερθείσες πηγές διακύμανσης ήτοι (α) των επιπέδων ενός παράγοντα, (β) των ομάδων μιας μεταβλητής πλαισίου και τέλος (γ) του πειραματικού σφάλματος, μπορεί να επιτευχθεί με την τυχαιοποίηση των πειραματικών μονάδων στις θεραπείες, την ομαδοποίηση που αφορά τα επίπεδα της μεταβλητής πλαισίου και την εκ νέου, επαναλαμβανόμενη παρατήρηση της μεταβλητής ενδιαφέροντος για κάθε θεραπεία.

Μια άλλη διάσταση του όλου πλαισίου των πειραματικών σχεδιασμών η οποία και είναι μείζονος σημασίας, αφορά τον χαρακτήρα των παραγόντων που εμπλέκονται και εξετάζονται σε ένα πείραμα. Πιο συγκεκριμένα, διακρίνουμε (α) τους παράγοντες σταθερών επιδράσεων και (β) τους παράγοντες τυχαίων επιδράσεων. Υπάρχει δε και η δυνατότητα χρήσης παραγόντων σταθερών και μεικτών επιδράσεων ταυτοχρόνως. Προφανώς, με όλες αυτές τις περιπτώσεις θα ασχοληθούμε αναλυτικά παρακάτω. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε τα μοντέλα σταθερών, τυχαίων και μεικτών επιδράσεων, στο τρίτο κεφάλαιο εξειδικεύουμε με περιπτώσεις σχεδιασμών που κάνουν χρήση των μοντέλων μεικτών επιδράσεων και τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο ολοκληρώνουμε με παραδείγματα στα οποία εφαρμόζονται μεθοδολογίες που ανεπτύχθησαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

1.3 Η φύση του προβλήματος βάσει των ορισμών που δόθηκαν

Προσπαθώντας να συνδέσουμε τα παραπάνω με ένα πρόβλημα της αγοράς θα μπορούσαμε να εστιάσουμε στη συστηματική μελέτη των επιδράσεων από κάποιους παράγοντες όπως και των επιρροών που ασκούν ελεγχόμενες μεταβλητές σε μια μεταβλητή που μας ενδιαφέρει Αυτή θα μπορούσε, για παράδειγμα, να είναι κάποιες προωθητικές ενέργειες, γνωστές και ως promotions, πάνω στη διαμόρφωση των πωλήσεων ενός προϊόντος. Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε το αν και κατά πόσο ενέργειες του είδους, έφτασαν να διαφοροποιούν σημαντικά τις πωλήσεις προς τα πάνω και ποια από αυτές ήταν αποτελεσματικότερη, ίσως εξετάζοντάς την και από την άποψη του κόστους της.

Αντιλαμβανόμαστε ότι η μεταβλητή απόκρισης θα είναι οι πωλήσεις (σε όγκο, μονάδες ή αξία) που διαμορφώνονται διαχρονικά κάτω από την επίδραση παραγόντων καθώς αναφέραμε και παραπάνω.

Άλλοι παράγοντες θα μπορούσαν να είναι η έκπτωσης στη τιμή του προϊόντος (price reduction), το ποσοστό παρουσίας του στο σύνολο της αγοράς (distribution), ειδικές χρονικές περίοδοι κατά τη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους (special days), η θερμοκρασία (temperature) κάποιοι ειδικοί μακροοικονομικοί παράγοντες κλπ.

Οι συνεχείς μεταβλητές ίσως θα πρέπει να μετατραπούν σε κατηγορικές – διατακτικές μεταβλητές προσδίδοντας σκορ στα επίπεδα των διαβαθμίσεων (από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες τιμές ή το αντίστροφο).

Κεφάλαιο 2

2.1 Μοντέλα σταθερών επιδράσεων με έναν παράγοντα

Η μεθοδολογία που είδη αναφέραμε στα παραπάνω, εστιάζεται στην ανάλυση της διακύμανσης της οποίας σκοπός είναι **ο καταμερισμός της συνολικής μεταβλητότητας ενός χαρακτηριστικού σε συνιστώσες που έχουν πειραματικό ενδιαφέρον** και υποβοηθούν τον τελικό σκοπό της ανάλυσης ο οποίος αποβλέπει στο να μπορέσουμε τελικά να κάνουμε έλεγχο της σημαντικότητας των διαφορών που παρατηρούνται μεταξύ των επί μέρους δειγματικών μέσων (μέσων ανά επίπεδο παράγοντα). Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουμε να πληροφορηθούμε αν οι διαφορές αυτές υποδηλώνουν την ύπαρξη πραγματικών διαφορών μεταξύ των πληθυσμών, οι οποίες οφείλονται στην επίδραση ενός ή περισσοτέρων παραγόντων ή πρέπει να αποδοθούν στην τύχη.

Έστω ότι έχουμε k πληθυσμούς (υποομάδες που θα αποτελούν και τα επίπεδα του εκάστοτε παράγοντα), εκ των προτέρων γνωστών και δεδομένων, οι οποίοι αποτελούν υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου τιμών του χαρακτηριστικού Y και οι οποίοι προκύπτουν από διαφορετικές δοκιμασίες που οι επί μέρους μονάδες επιβάλλονται ως προς ένα ορισμένο παράγοντα. Από τους πληθυσμούς αυτούς λαμβάνουμε k τυχαία δείγματα με το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων, έστω n. Η παρατήρηση j του δείγματος που έχει ληφθεί από τον i πληθυσμό θα συμβολίζεται με Y_{ij} και θα είναι μια τυχαία μεταβλητή (θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε με μικρά και κεφαλαία αντίστοιχα τις παρατηρήσεις και τις τυχαίες μεταβλητές). Η τυχαία αυτή μεταβλητή είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο μ_i και διακύμανση σ^2 δηλαδή $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι τιμές της Y_{ij} θα μπορούσαν να εκφραστούν με το παρακάτω υπόδειγμα:

$$Y_{ij} = \mu_\iota + e_{ij} \text{ με } i = 1,2,\ldots,k \text{ και } j = 1,2,\ldots,n$$

όπου e_{ij} είναι οι τιμές $n \cdot k$ ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών και που αναφέρονται στο κομμάτι εκείνο της υπό μελέτης μεταβλητής Y_{ij} που δεν ερμηνεύεται από τον παράγοντα. Θα ξέρουμε ότι $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.

Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να αποδοθεί και ως εξής:

$$Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$$

Δηλαδή ως άθροισμα ενός γενικού μέσου μ και της επίδρασης a_i η οποία προέρχεται από τον παράγοντα που έχει χρησιμοποιηθεί για να κατανεμηθούν όλες οι μονάδες και ως εκ τούτου και οι δειγματοληπτικές μονάδες, σε k πληθυσμούς (υποομάδες ή επίπεδα παράγοντα ή θεραπείες). Το άθροισμα των επιδράσεων αυτών θα είναι ίσο με μηδέν $\sum_{i=1}^{k} a_i$.

Το υπόδειγμα αυτό υποδηλώνει ότι κάθε παρατήρηση Y_{ij} αποτελείται: (α) από μια σταθερή ποσότητα μ, (β) από μια επίδραση a_i που ασκείται στις τιμές της Y_{ij} ως τυχαίας μεταβλητής κατά την δοκιμασία στην οποία υποβάλλεται η αντίστοιχη μονάδα (τιμή) λόγω της υπαγωγής της στον πληθυσμό i και (γ) από μια ποσότητα η οποία προσπαθεί να ενσωματώσει τις επιδράσεις εκείνες που δεν τις προξενεί ο υπό μελέτη παράγον αλλά άλλοι παράγοντες που δεν λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση.

Υποθέτουμε τώρα ότι εξετάζεται η επίδραση που ασκούν τα 3 επίπεδα ενός παράγοντα πάνω στις τιμές που αποδίδει η υπό μελέτη μεταβλητή (μεταβλητή απόκρισης) σε ένα πείραμα. Υποθέτουμε για ευκολία ότι για κάθε θεραπεία (εδώ επίπεδο παράγοντα) το πλήθος των πειραματικών μονάδων είναι 10 και επομένως, σχηματικά, θα έχουμε:

***Παράγοντας** A*	***Μεταβλητή απόκρισης** Y*
Επίπεδο 1	$Y_{1.1}, Y_{1.2}, ..., Y_{1.10}$
Επίπεδο 2	$Y_{2.1}, Y_{2.2}, ..., Y_{2.10}$
Επίπεδο 3	$Y_{3.1}, Y_{3.2}, ..., Y_{3.10}$

Πίνακας 2.1

Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο πείραμα όπως το διαμορφώσαμε (επί της ουσίας προϋποθέσαμε), οι θεραπείες ταυτίζονται με τα επίπεδα του παράγοντα για κάθε επίπεδο έχουμε το ίδιο ακριβώς πλήθος παρατηρήσεων (πειραματικών μονάδων). Θα γνωρίζουμε ότι οι σχεδιασμοί με ίσο αριθμό παρατηρήσεων ανά θεραπεία (επίπεδο παράγοντα, στη συγκεκριμένη περίπτωση) θα λέγονται ισορροπημένοι σχεδιασμοί.

Αυτό που επιδιώκουμε είναι να βρούμε αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ των επιπέδων του παράγοντα ως προς τις τιμές της μεταβλητής απόκρισης. Αυτό που λέμε ωστόσο αξιοσημείωτο θα πρέπει να το προσδιορίσουμε με σαφήνεια αφού θα είναι το μέτρο που θα καθορίζει το αν υπάρχουν όντως διαφοροποιήσεις και σε ποιο βαθμό.

Θα μπορούσαμε έτσι να ανάγουμε το πρόβλημα, στον έλεγχο της υπόθεσης διαφορών μεταξύ των μέσων τιμών της μεταβλητής απόκρισης από επίπεδο σε επίπεδο. Με άλλα λόγια, να εξεταστεί η:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 ,$$

έναντι της εναλλακτικής ότι δυο τουλάχιστον από τις μέσες τιμές διαφέρουν μεταξύ των (όπως θα λέμε στη συνέχεια, «στατιστικά σημαντικά» ως προς ένα «επίπεδο σημαντικότητας», όροι που πλαισιώνουν και διαμορφώνουν το κανονιστικό πλαίσιο των διαφορών).

Μια άλλη διατύπωση των υποθέσεων του ελέγχου θα μπορούσε να βασιστεί στις επιδράσεις όπως τις ορίσαμε στα προηγούμενα:

$$H_0 : a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ υπό το υπόδειγμα } Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij} \text{ με } i = 1, 2, \ldots, 10 \text{ και } j = 1, 2, 3$$

η δε εναλλακτική της θα είναι $H_i : a_i \neq 0$ για μια τουλάχιστον από τις τρεις (για το συγκεκριμένο παράδειγμα) τιμές της.

Είναι απαραίτητη, στο σημείο αυτό, λίγη άλγεβρα αναφορικά με το πώς διαμορφώνεται η συνολική μεταβλητότητα της μεταβλητής απόκρισης Y ως προς τον παράγοντα, βάσει του οποίου διεξάγεται το πείραμα και του μέρους εκείνου της μεταβλητότητας που μένει ανερμήνευτο από τον παράγοντα, αποδιδόμενο σε αυτό που λίγο πριν ονομάσαμε όρο σφάλματος.

Ο πίνακας που παραθέσαμε προηγουμένως γίνεται:

Παράγοντας A	***Μεταβλητή απόκρισης*** Y	***Αθροίσματα***	***Μέσες τιμές***
Επίπεδο 1	$Y_{1.1}, Y_{1.2}, \ldots, Y_{1.10}$	$Y_{1\bullet}$	$\overline{Y}_{1\bullet}$
Επίπεδο 2	$Y_{2.1}, Y_{2.2}, \ldots, Y_{2.10}$	$Y_{2\bullet}$	$\overline{Y}_{2\bullet}$
Επίπεδο 3	$Y_{3.1}, Y_{3.2}, \ldots, Y_{3.10}$	$Y_{3\bullet}$	$\overline{Y}_{3\bullet}$
	Σύνολο	$Y_{\bullet\bullet}$	$\overline{Y}_{\bullet\bullet}$

Πίνακας 2.2

Πιο συγκεκριμένα τώρα, ως συνολική μεταβλητότητα θα ξέρουμε το άθροισμα των τετραγώνων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή τους με πλήθος επιπέδων (εδώ και θεραπειών) $k = 3$ και πλήθος παρατηρήσεων ανά επίπεδο $n_1 = n_2 = n_3 = 10 = n_i$, θα έχουμε:

$$SSTotal = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet} + \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}\right) + \left(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}\right)^2 + \left(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2 + 2\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}\right)\left(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n_i}\left(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2 + 2\left(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}\right)\right] =$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)^2+n_i\left(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2+2\left(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)\right]=$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)^2+n_i\left(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2+2\left(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)\right] \\ \sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)=Y_{i\bullet}-n_i\overline{Y}_{i\bullet}=Y_{i\bullet}-Y_{i\bullet}=0\end{cases}=$$

$$\Leftrightarrow SST=\sum_{i=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{n_i=n=10}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)^2+\sum_{i=1}^{k=3}n_i\left(\overline{Y}_{i\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2=SSE+SSA \quad \textbf{(1)}$$

όπου SSA το μέρος της μεταβλητότητας που εκφράζεται από τον παράγοντα A (sum of squared of treatments), και SSE αυτό που αποδίδεται στον όρο σφάλματος (sum of squared of errors). Θα προσθέταμε στο σημείο αυτό ότι η συνιστώσα SSE μετράει τη μεταβλητότητα των παρατηρήσεων μέσα σε όλα τα σε όλα τα επί μέρους δείγματα (σε σχέση με τους μέσους όρους) και εκφράζει τις επιδράσεις που οφείλονται στην τύχη, ανεξάρτητα από το αν η υπόθεση H_0 που εξετάζουμε είναι αληθής ή όχι. Από την άλλη μεριά, η συνιστώσα SSA όταν η υπόθεσή μας αληθεύει εκφράζει επιδράσεις που οφείλονται στην τύχη. Ωστόσο όταν η αρχική μας υπόθεση δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα τότε εκφράζει τις διαφοροποιήσεις εκείνες που όντως παρατηρούνται μεταξύ των επί μέρους πληθυσμών δηλαδή των επιπέδων του υπό εξέταση παράγοντα.

Σημείωση που αφορά τους μέσους ανά επίπεδο όπως και τον συνολικό μέσο:

$$\overline{Y}=\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij} \text{ και } \overline{Y}_{i\bullet}=\frac{1}{nk}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}$$

Τώρα, από τη στιγμή που οι παρατηρήσεις της i θεραπείας (ή επιπέδου παράγοντα) προέρχεται από κανονικό πληθυσμό με μέσο μ και διακύμανση σ^2, τότε επίσης για τις αυτές παρατηρήσεις και για κάθε ένα από τα επίπεδα του παράγοντα θα ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i=10}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)^2\sim\chi^2_{n_i-1} \quad \textbf{(2)}$$

το οποίο σημαίνει ότι η στατιστική $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i=10}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i\bullet}\right)^2$ ακολουθεί την χι-τετράγωνο κατανομή με $n_i-1=n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Τούτο αποδεικνύεται εύκολα αν λάβουμε υπόψη μας το θεώρημα ότι αν $\overline{Y}$ και S^2 είναι ο μέσος και η διακύμανση αντίστοιχα ενός δείγματος μεγέθους n που προέρχεται από κανονικό πληθυσμό $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ τότε η τυχαία μεταβλητή $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ θα ακολουθεί την χι-τετράγωνο κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Πράγματι, θα έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\mu\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\bar{Y}+\bar{Y}-\mu\right)^2=\ldots=\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2+n\left(\bar{Y}-\mu\right)^2=$$

$$=(n-1)\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2}{n-1}+n\left(\bar{Y}-\mu\right)^2=(n-1)S^2+n\left(\bar{Y}-\mu\right)^2$$

και διαιρώντας με σ^2 και τα δυο μέρη θα πάρουμε:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Y_j-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\frac{n\left(\bar{Y}-\mu\right)^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Y_j-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \quad \textbf{(3)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{Y_j-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ και ως εκ τούτου $\left(\dfrac{Y_j-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi_1^2$. Επομένως για το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την χι – τετράγωνο κατανομή με έναν βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Y_j-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi_n^2 \quad \textbf{(4)}$$

ήτοι ότι ακολουθεί την χι – τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας.

Εμμένοντας στη σχέση (3), το δεύτερο μέρος του δεξιού σκέλους της ισότητας δεν είναι άλλο από μια τυχαία μεταβλητή $\dfrac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ που ακολουθεί την τυπική κανονική και επομένως το τετράγωνό της $\left(\dfrac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$ θα ακολουθεί την χι – τετράγωνο με έναν βαθμό ελευθερίας ήτοι

$$\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\sim\chi_1^2 \quad \textbf{(5)}$$

Έτσι, δοθέντων των συμπερασμάτων (4) και (5) θα είναι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ [1].

Το τελευταίο συμπέρασμα μας βοηθά στο να κατανοήσουμε τελικά, γιατί το άθροισμα $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i=10}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2 \sim \chi^2_{n_i-1}$ θα αφορά τυχαία μεταβλητή με κατανομή χι – τετράγωνο με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Επομένως και το άθροισμα k τέτοιων τυχαίων μεταβλητών θα έχει ως κατανομή πιθανότητας την χι – τετράγωνο με $k(n-1)$ όπερ και σημαίνει ότι:

$$\frac{SSE}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i=10}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2\right] \sim \chi^2_{k(n_i-1)} \quad \textbf{(6)}$$

Εναλλακτικά η παραπάνω σχέση γράφεται, έχοντας ήδη ορίσει ότι $n_1=n_2=n_3=10=n_i$:

$$\frac{SSE}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2\right] \sim \chi^2_{k(n-1)} \quad \textbf{(7)}$$

Ως τυχαία μεταβλητή από χι – τετράγωνο κατανομή, η μέση της τιμή (ή διαφορετικά, η μαθηματική της ελπίδα) θα είναι ίση με τους βαθμούς ελευθερίας της. Από την ιδιότητα αυτή μπορούμε να διεξάγουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα:

$$E\left(\frac{SSE}{\sigma^2}\right)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2\right]\right)=k(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{k(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2\right]\right)=E\left(\frac{SSE}{k(n-1)}\right)=\sigma^2 \quad \textbf{(8)}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η τυχαία μεταβλητή $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{k(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2\right]$ **(9)** είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης σ^2.

Από την άλλη τώρα πλευρά και επικεντρώνοντας στο άθροισμα των τετραγώνων που αφορούν τη μεταβλητότητα του παράγοντα, θα έχουμε (υπό την προϋπόθεση ότι τελικά δεν υπάρχουν πραγματικές διαφορές μεταξύ των επί μέρους k πληθυσμών) ότι οι δειγματικοί μέσοι $\bar{Y}_{i\bullet}$ θα ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2/n. Τότε

---

[1] Θεώρημα: Αν για τις δυο τυχαίες και ανεξάρτητες μεταβλητές X, Z ισχύει ότι η $X \sim \chi^2_n$ και $X+Z \sim \chi^2_k$ όπου $k>n$, τότε θα είναι και $Z \sim \chi^2_{k-n}$

όμως η τυχαία μεταβλητή $\left(\dfrac{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \sim N(0,1)$ και άρα $\left(\dfrac{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi_1^2$. Ως εκ τούτου, το άθροισμα k τέτοιων τυχαίων μεταβλητών θα ακολουθεί την χι – τετράγωνο με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας. Διαφορετικά:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{n}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2 \sim \chi_{k-1}^2 \quad \textbf{(10)}$$

Η μαθηματική ελπίδα, της παραπάνω τυχαίας μεταβλητής, θα είναι:

$$E\left(\frac{SSA}{\sigma^2}\right) = E\left(\frac{n}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2\right) = k-1 \Leftrightarrow$$

$$E\left(\frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2\right) = E\left(\frac{SSA}{k-1}\right) = \sigma^2 \quad \textbf{(11)}$$

Και πάλι επομένως βλέπουμε δηλαδή ότι η τυχαία μεταβλητή $\dfrac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2$ **(12)** είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης σ^2.

Και οι δυο εκτιμήτριες **(9)** και **(12)** στηρίζονται στη παραδοχή ότι οι επί μέρους πληθυσμοί (επίπεδα παράγοντα) αποτελούν ενιαίο σύνολο και ότι δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μέσων τους. Αν η υπόθεση αυτή δεν ισχύει, τότε η εκτιμήτρια **(12)** θα είναι μεγαλύτερη από την εκτιμήτρια **(9)** αφού εκτός από τη μεταβλητότητα που θα οφείλεται αποκλειστικά στη τύχη, θα υπάρχουν και οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των μέσων των επιπέδων του παράγοντα. Επομένως, προκειμένου η αρχική μας υπόθεση να ελεγχθεί, δεν έχουμε παρά να συγκρίνουμε την τιμή της εκτιμήτριας **(12)** προς την τιμή της εκτιμήτριας **(9)**, οπότε, αν η πρώτη είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την δεύτερη τότε η υπόθεση που εξετάζουμε θα πρέπει λογικά να απορριφθεί.

Η σύγκριση αυτή μπορεί να γίνει με χρήση του λόγου των μεταβλητών **(7)** και **(10)** έχοντάς τις διαιρέσει προηγουμένως με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας ήτοι:

$$\frac{\dfrac{n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2}{\sigma^2(k-1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}\right)^2}{\sigma^2 k(n-1)}} = \frac{SSA/(k-1)}{SSE/k(n-1)} = \frac{MSA}{MSE}$$

Γνωρίζουμε ότι ο λόγος δυο τυχαίων μεταβλητών που ακολουθών την χι – τετράγωνο κατανομή, έχοντάς τες διαιρέσει με τους αντίστοιχους βαθμούς τους ελευθερίας, $k-1$ και $k(n-1)$, θα ακολουθεί την *Snedecor's F* κατανομή ή αλλιώς την *Fisher – Snedecor* με $k-1$ και $k(n-1)$ βαθμούς ελευθερίας:

$$\frac{SSA/(k-1)}{SSE/k(n-1)} = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{k-1,k(n-1)}$$

Έτσι αν η ποσότητα της στατιστικής ελέγχου $\frac{MSA}{MSE}$ που θα προκύπτει από τις παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερη από την $F_{k-1,k(n-1)}$ για γνωστό επίπεδο σημαντικότητας τότε η αρχική μας υπόθεση $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ θα απορρίπτεται και ως εκ τούτου θα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσω τιμών των διαφορετικών θεραπειών.

2.2 Σχεδιασμός τυχαιοποιημένων ομάδων σταθερών επιδράσεων

Έστω τώρα ότι θα θέλαμε να προσθέσουμε και τις ομάδες (blocks) μιας μεταβλητής πλαισίου στο πείραμά μας ή σχεδιασμό μας, προκειμένου αυτή να μπορεί να ελεγχθεί και ως εκ τούτου να μειωθεί η επιρροή της. Σε μια τέτοια περίπτωση τα επίπεδα του παράγοντα επιμερίζονται τυχαία στις πειραματικές μονάδες για κάθε ομάδα της μεταβλητής πλαισίου χωριστά. Αναμένουμε έτσι ότι οι πειραματικές μονάδες, μέσα σε κάθε ομάδα, να είναι περισσότερο ομογενείς από αυτές που ανήκουν σε μια άλλη ομάδα. Αν πράγματι ισχύει αυτό, τότε είναι δυνατόν να εξαλείψουμε τη μεταβλητότητα που οφείλεται στις διαφορετικές ομάδες της μεταβλητής πλαισίου.

Λόγω του ότι κάθε ομάδα περιέχει όλα τα δυνατά επίπεδα του παράγοντα (δίνεται σχετικό παράδειγμα διάταξης των δεδομένων στον πίνακα παρακάτω, όπου εξετάζεται η περίπτωση της τυχαιοποίησης και των τριών επιπέδων ενός παράγοντα σε κάθε ομάδα της μεταβλητής πλαισίου), ο σχεδιασμός αυτός ονομάζεται και σχεδιασμός τυχαιοποιημένων πλήρων ομάδων.

	Παράγοντας		
Blocks	***Επίπεδο 1***	***Επίπεδο 2***	***Επίπεδο 3***
Block 1	$Y_{1.1}$	$Y_{1.2}$	$Y_{1.3}$
Block 2	$Y_{2.1}$	$Y_{2.2}$	$Y_{2.3}$
Block 3	$Y_{3.1}$	$Y_{3.2}$	$Y_{3.3}$
Μέσες τιμές	$\overline{Y}_{1}.$	$\overline{Y}_{2}.$	$\overline{Y}_{3}.$

Πίνακας 2.3

Παρατηρούμε ότι κάθε θεραπεία βρίσκεται μια φορά σε κάθε ομάδα. Ο έλεγχος που διεξάγεται προκειμένου να ελεγχθεί η υπόθεση:

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ έναντι της εναλλακτικής H_1 : όχι η H_0

στηρίζεται στη στατιστική ελέγχου $F = \dfrac{MSA}{MSE} \sim F_{k\text{-}1,\, n-k}$.

Όπου α_i με $i = 1, 2, 3$ οι επιδράσεις των αντίστοιχων επιπέδων του παράγοντα ($k = 3$ επίπεδα) και $MSA = \dfrac{SSA}{k-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2}{k-1}$ με $n_i = 3$ και $\overline{Y}_{\bullet\bullet}$ η μέση τιμή όλων των παρατηρήσεων. Επίσης θα ξέρουμε ότι $MSE = \dfrac{SSE}{n-k} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} n_i \left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}\right)^2}{n-k}$ με n το πλήθος όλων των παρατηρήσεων.

Η υπόθεση H_0 θα απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας a όταν η τιμή της στατιστικής ελέγχου είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής δηλαδή ισχύει $F > F_{k\text{-}1,\, n-k,\, a}$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει επίδραση του παράγοντα αφού δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των επιπέδων του.

2.3 Η περίπτωση των δυο παραγόντων σταθερών επιδράσεων

Όταν αντί του ενός, έχουμε να εξετάσουμε δυο παράγοντες, τότε προσαρμόζουμε κατάλληλο υπόδειγμα που ενσωματώνει, πέρα από τις κύριες επιδράσεις των παραγόντων αυτών, και την αλληλεπίδρασή τους. Οι δυο αυτοί παράγοντες, έστω A και B χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη συγκεκριμένου αριθμού επιπέδων, εκ των προτέρων γνωστό και σταθερό (fixed), όπου δοκιμάζονται και ελέγχονται όλα σε σχέση με την εκάστοτε μεταβλητή απόκρισης. Υποθέτουμε ότι στο πλήθος είναι α και β επίπεδα αντίστοιχα για τους δυο παράγοντες A και B. Για κάθε επίπεδο θα υποθέσουμε n επαναλήψεις για να πάρουμε τελικά μαζί με την αλληλοεπίδραση των δυο παραγόντων:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \text{ με } \begin{cases} i = 1,2,\dots,a \\ j = 1,2,\dots,\beta \\ k = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Όπου μ είναι και πάλι ο γενικός μέσος όλων των πληθυσμών, α_i, β_j, οι επιδράσεις που ασκούνται λόγω της υπαγωγής της μονάδας, με κριτήρια τους παράγοντες A και B στους πληθυσμούς i και j αντίστοιχα και $(\alpha\beta)_{ij}$ η αλληλεπίδραση που ασκείται από τους παράγοντες αυτούς. Τέλος, όπου e_{ijk} είναι οι τιμές $a \cdot \beta \cdot n$ ανεξαρτήτων μεταβλητών που κατανέμονται κανονικά με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση σ^2. Για τις επιδράσεις α_i, β_j και $(\alpha\beta)_{ij}$ θα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i = \sum_{j=1}^{\beta} \beta_i = \sum_{i=1}^{\alpha} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{\beta} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Από την άλλη, οι υποθέσεις που ελέγχουμε είναι:

$$H_0: \alpha_i = 0,\ i = 1,2,\dots,a$$

$$H_0: \beta_j = 0,\ j = 1,2,\dots,\beta$$

$$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0,\ i = 1,2,\dots,\alpha \text{ και } j = 1,2,\dots,\beta$$

Οι εναλλακτικές αφορούν, **κατά περίπτωση**, το ενδεχόμενο έστω και μια από τις επιδράσεις (κύριες ή από κοινού) να είναι διαφορετική του μηδενός.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση ενός μοντέλου πολλαπλής παλινδρόμησης της μορφής $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + e$ κάτι που θεωρείτε χρήσιμο στις περιπτώσεις εκείνες που οι επεξηγηματικές μεταβλητές δεν είναι ποιοτικές αλλά ποσοτικές.

Γνωρίζουμε είδη ότι η τιμή Y_{ijk} αναφέρεται στη k παρατήρηση που κείται στο επίπεδο i του παράγοντα A, και στο επίπεδο j του παράγοντα B. Ανάλογα ορίζουμε τα αθροίσματα και τις μέσες τιμές κατά περίπτωση:

- $Y_{i..}$ το άθροισμα όλων των τιμών του επιπέδου i του παράγοντα A και $\bar{Y}_{i..}$ την αντίστοιχη μέση τιμή
- $Y_{.j.}$ το άθροισμα όλων των τιμών του επιπέδου j του παράγοντα B και $\bar{Y}_{.j.}$ την αντίστοιχη μέση τιμή
- $Y_{ij.}$ το άθροισμα όλων των τιμών του επιπέδου i του παράγοντα A και ου επιπέδου j του παράγοντα B δηλαδή το άθροισμα των τιμών στο κελί ij ή διαφορετικά της **θεραπείας** ij. Ορίζουμε και την αντίστοιχη μέση τιμή ως $\bar{Y}_{ij.}$
- $Y_{...}$ το συνολικό άθροισμα όλων των τιμών όλων των επιπέδων και $\bar{Y}_{...}$ την αντίστοιχη μέση τιμή

Από την σχηματική απεικόνιση του πειράματος (πίνακας που ακολουθεί) καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για σχεδιασμό **πλήρων τυχαιοποιημένων ομάδων** όπου όλα τα επίπεδα του πρώτου παράγοντα συνδέονται με όλα τα επίπεδα του δευτέρου. Συν τοις άλλοις, πρόκειται και για έναν **ισορροπημένο** σχεδιασμό αφού κάθε **θεραπεία** συνδυάζει τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων ήτοι n **πειραματικές μονάδες**.

		Παράγοντας Β		
Παράγοντας Α	***Επίπεδο 1***	***Επίπεδο 2***	$\cdots$	***Επίπεδο β***
Επίπεδο 1	$Y_{111}, Y_{112}, \ldots, Y_{11n}$	$Y_{111}, Y_{112}, \ldots, Y_{11n}$	$\cdots$	$Y_{1\beta 1}, Y_{1\beta 2}, \ldots, Y_{1\beta n}$
Επίπεδο 2	$Y_{211}, Y_{212}, \ldots, Y_{21n}$	$Y_{221}, Y_{222}, \ldots, Y_{22n}$		$Y_{2\beta 1}, Y_{2\beta 2}, \ldots, Y_{2\beta n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
Επίπεδο α	$Y_{\alpha 11}, Y_{\alpha 12}, \ldots, Y_{\alpha 1n}$	$Y_{\alpha 21}, Y_{\alpha 22}, \ldots, Y_{\alpha 2n}$	$\cdots$	$Y_{\alpha\beta 1}, Y_{\alpha\beta 2}, \ldots, Y_{\alpha\beta n}$

Πίνακας 2.4

Μπορούμε τώρα να παραθέσουμε και τις ισότητες των παραπάνω ορισμάτων, χρήσιμες και απαραίτητες για την πραγμάτωση των ελέγχων που στα προηγούμενα παραθέσαμε:

- $Y_{i\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$ όπου $\bar{Y}_{i\cdot\cdot} = \frac{Y_{i\cdot\cdot}}{\beta n}$ και $i = 1,2,\ldots,a$
- $Y_{\cdot j\cdot} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$ όπου $\bar{Y}_{\cdot j\cdot} = \frac{Y_{\cdot j\cdot}}{a n}$ και $j = 1,2,\ldots,\beta$
- $Y_{ij\cdot} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$ όπου $\bar{Y}_{ij\cdot} = \frac{Y_{ij\cdot}}{n}$ και $i = 1,2,\ldots,a$, $j = 1,2,\ldots,\beta$
- $Y_{\ldots} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$ όπου $\bar{Y}_{\ldots} = \frac{Y_{\ldots}}{\alpha\beta n}$

Όσο δε για τα αθροίσματα των μέσων τετραγωνικών διαφορών:

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{\ldots}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\ldots}\right) + \left(\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\ldots}\right) + \left(\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{Y}_{\ldots}\right) + \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot}\right)\right]^2 =$$

$$= \underbrace{\beta n \sum_{i=1}^{a}\left(\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\ldots}\right)^2}_{SSA} + \underbrace{a n \sum_{j=1}^{\beta}\left(\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\ldots}\right)^2}_{SSB} +$$

$$\underbrace{+\, n \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\left(\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{Y}_{\ldots}\right)^2}_{SSAB} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot}\right)^2}_{SSE} =$$

$$= SSA + SSB + SSAB + SSE$$

Τα επιμέρους αθροίσματα τετραγώνων απλοποιούνται ως εξής:

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} {Y_{ijk}}^2 - \frac{Y_{...}^2}{\alpha\beta n}$$

$$SSA = \frac{1}{\beta n}\sum_{i=1}^{a} Y_{i..}^2 - \frac{Y_{...}^2}{\alpha\beta n}$$

$$SSB = \frac{1}{\alpha n}\sum_{j=1}^{\beta} Y_{.j.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{\alpha\beta n}$$

$$SSAB = SS_{subtotal} - SSA - SSB$$

όπου

$$SS_{subtotal} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta} Y_{ij.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{\alpha\beta n}$$

Και τέλος

$$SSE = SST - SS_{subtotal}$$

Αποδεικνύεται ότι οι αναμενόμενες μέσες τιμές για τα παραπάνω τετραγωνικά αθροίσματα θα είναι:

$$E(MSA) = E\left(\frac{SSA}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{\beta n \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2}{\alpha - 1}$$

$$E(MSB) = E\left(\frac{SSB}{\beta-1}\right) = \sigma^2 + \frac{\alpha n \sum_{j=1}^{\beta} \beta_j^2}{\beta - 1}$$

$$E(MSAB) = E\left[\frac{SSAB}{(a-1)(\beta-1)}\right] = \sigma^2 + \frac{\alpha\beta n \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} (\alpha\beta)_j^2}{(a-1)(\beta-1)}$$

και

$$E(MSE) = E\left[\frac{SSE}{\alpha\beta(n-1)}\right] = \sigma^2$$

Από τις τελευταίες σχέσεις που αφορούν τις μέσες τιμές των τετραγώνων αντλούμε και τους λόγους βάσει των οποίων θα διαμορφώσουμε τις στατιστικές ελέγχου για τον έλεγχο των υποθέσεων με τις οποίες ανοίξαμε την ενότητα. Πιο συγκεκριμένα, υπό την υπόθεση $H_0\colon (\alpha\beta)_{ij} = 0$, η στατιστική $F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$ ακολουθεί την κατανομή F με $(\alpha-1)(\beta-1)$ και $\alpha\beta(n-1)$ βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, αν $F_{AB} > F_{(a-1)(\beta-1),\alpha\beta(n-1),\alpha}$ τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α. Για τις άλλες δυο υποθέσεις $H_0\colon \alpha_i = 0$ και $H_0\colon \beta_j = 0$ θα έχουμε αντίστοιχα στατιστικές ελέγχου $F_A = \frac{MSA}{MSAB}$ με $F_A \sim F_{a-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$

και $F_B = \frac{MSB}{MSAB}$ με $F_B \sim F_{\beta-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$ όπου και πάλι ο έλεγχος διεξάγεται καθώς περιγράψαμε στη περίπτωση της αλληλεπίδρασης.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα ενότητα, προχωράμε με ελέγχους που αφορούν διαφορές μέσων τιμών ανά δυο (Walter T. Federer and Charles E. McCulloch 1999[2]) ή διαφορετικά συγκρίσεις επιπέδων ανά δυο, των κύριων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων των παραγόντων (σταθερών επιδράσεων και μόνο). Προσεγγίζουμε με την εκτίμηση διαστημάτων εμπιστοσύνης με τη μέθοδο του **Tukey** για τις διαφορές οι οποίες κρίνονται στατιστικά σημαντικές σε προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας αν δεν περιέχουν το μηδέν. Διακρίνουμε:

- Σύγκριση διαφορετικών επιπέδων παράγοντα A:
  όπου τα διαστήματα εμπιστοσύνης και σε επίπεδο σημαντικότητας a, ορίζονται ως $(1-a)\%\ CI$ για $(\beta_j - \beta_{j'})$: $(\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j'\cdot}) \pm q_{a,v,df}\sqrt{\frac{2MSE}{r\beta}}$ με $df = r(\alpha-1)(\beta-1)$ και v το πλήθος των παρατηρήσεων στα εξεταζόμενα επίπεδα του παράγοντα.
- Σύγκριση διαφορετικών επιπέδων παράγοντα B
  όπου τα διαστήματα εμπιστοσύνης και σε επίπεδο σημαντικότητας a, ορίζονται ως $(\gamma_j - \gamma_{j'})$: $(\bar{Y}_{\cdot\cdot k} - \bar{Y}_{\cdot\cdot k'}) \pm q_{a,v,df}\sqrt{\frac{2MSE}{r\alpha}}$ με $df = r(\alpha-1)(\beta-1)$ και v το πλήθος των παρατηρήσεων στα εξεταζόμενα επίπεδα του παράγοντα.
- Σύγκριση αλληλεπιδράσεων των παραγόντων Α και Β:
  όπου τα διαστήματα εμπιστοσύνης και σε επίπεδο σημαντικότητας a, ορίζονται ως $(1-a)\%\ CI$ για $(\gamma_k - \gamma_{k'}) + (\beta\gamma_{jk} - \beta\gamma_{jk'})$: $(\bar{Y}_{\cdot jk} - \bar{Y}_{\cdot jk'}) \pm q_{a,v,df}\sqrt{\frac{2MSE}{r}}$ με $df = r(\alpha-1)(\beta-1)$ και v το πλήθος των παρατηρήσεων στα εξεταζόμενα επίπεδα του παράγοντα.

Για όλες τις περιπτώσεις, όπου $q_{a,v,df}$ είναι το ποσοστημόριο της κατανομής του studentized εύρους για τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο εμπιστοσύνης.

Τους πολλαπλούς ελέγχους θα τους δούμε να αναπτύσσονται ως εφαρμογή στο τέταρτο κεφάλαιο, κατανοώντας έτσι καλύτερα τη χρησιμότητά τους. Θα πρέπει να σημειώσουμε ωστόσο ότι για το λογισμικό που θα χρησιμοποιούμε το ποσοστημόριο της κατανομής του

[2] Multiple Comparisons in Split Block and Split-Split Plot Designs by Walter T. Federer and Charles E. McCulloch (1991)

studentized εύρους θα διαιρείτε με την ποσότητα $1/\sqrt{2}$ προκειμένου να εκτιμηθεί το διάστημα εμπιστοσύνης.

2.3 Μοντέλα τυχαίων επιδράσεων

Μέχρι το σημείο αυτό, έχουμε υποθέσει ότι τα επίπεδα των παραγόντων, που μας απασχολούν και εξετάζουμε στα πλαίσια ενός πειραματικού σχεδιασμού, είναι σταθερά και δεδομένα (R. Lyman Ott, Michael Longnecker, 2010 [3]). Υπό αυτή την έννοια υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν και κάποια επιπλέον στον πληθυσμό επίπεδα παραγόντων, άλλα από αυτά που εξετάζουμε. Δεχθήκαμε έτσι, ως ένα βαθμό μπορεί και να είναι έτσι, ότι τα ειδικά επίπεδα ενδιαφέροντος ανά παράγοντα ήταν και τα μοναδικά κατά περίπτωση. Αναπόφευκτα, από κει και πέρα, τα όποια στατιστικά συμπεράσματα που προέκυπταν είναι σχετικά και να αφορούν μόνο τους παράγοντες αυτούς και ειδικότερα τα συγκεκριμένα επίπεδα που μελετήθηκαν.

Θυμίζουμε απλά, ότι σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε επί της ουσίας, ένα μοντέλο παλινδρόμησης, προσπαθώντας να προσδώσουμε μετρήσιμα και ως εκ τούτου συγκρίσιμα μεγέθη που αφορούν τις επιδράσεις πάνω στη μεταβλητή απόκρισης από τα δεδομένα επίπεδα του παράγοντα όπως ορίστηκαν στον πειραματικό σχεδιασμό. Τα συμπεράσματα που απορρέουν από πειράματα του είδους (με σταθερούς ως προς τα επίπεδα παράγοντες), αφορούν αποκλειστικά και το συγκεκριμένο σύνολο επιπέδων του παράγοντα ή των παραγόντων που εξετάζονται.

Από την άλλη μεριά, σε ορισμένες πειραματικές καταστάσεις, τα επίπεδα του παράγονται ή των παραγόντων που υπεισέρχονται στο πείραμα, επιλέγονται τυχαία από τη στιγμή που, είτε λόγω μεγάλου πλήθους επιπέδων στον πληθυσμό, είτε λόγου κόστους, είτε κάποιων άλλων παραμέτρων, τα επίπεδα του παράγοντα (ή κάποιων παραγόντων), επιλέγονται από ένα μεγαλύτερο πληθυσμό δυνατών επιπέδων. Ωστόσο, αν εμείς θελήσουμε τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν να έχουν αντίκτυπο και να μπορούν να γενικευθούν και να αφορούν ολόκληρο τον πληθυσμό δηλαδή για όλα τα δυνατά επίπεδα του παράγοντα (ή κάποιων παραγόντων), και όχι μόνο για εκείνα που χρησιμοποιήθηκαν στον πειραματικό σχεδιασμό, τότε τα επίπεδα θα επιλέγονται τυχαία από ένα πλήθος δυνατών επιπέδων που συναντώνται στον πληθυσμό. Στη περίπτωση αυτή ο παράγοντας αυτός θα λέγεται τυχαίος

[3] In a **fixed-effects** model for an experiment, all the factors in the experiment have a predetermined set of levels and the only inferences are for the levels of the factors actually used in the experiment (An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, R. Lyman Ott, Michael Longnecker, Chapter 17 and page 1041).

παράγοντας (random factor) και οι τυχόν επιδράσεις του λέγονται αντίστοιχα τυχαίες (random effects[4]).

Παρόλα αυτά, έχουμε κάνει αναφορά σε προηγούμενα, για την επίδραση ενός τυχαίου παράγοντα πάνω σε μια μεταβλητή απόκρισης όπως και στο αντίστοιχο μοντέλο τυχαίων επιδράσεων για την ανάλυση της διακύμανσης και των συστατικών της ή αλλιώς συνιστωσών της διακύμανσης. Όπως και έχουμε συζητήσει για πειράματα όπου τα blocks (ομάδες) είναι τυχαία. Αυτό ωστόσο που αποκαλούσαμε τυχαίο, στις προηγούμενες περιπτώσεις, έχει να κάνει (α) με τον τρόπο κατανομής των πειραματικών μονάδων στις θεραπείες οι οποίες προσδιορίζονταν από σταθερά (fixed) και όχι τυχαία (random) επίπεδα των υπό εξέταση παραγόντων ή (β) με το γεγονός ότι ο επιμερισμός των διαφόρων σταθερών επιπέδων του παράγοντα στις πειραματικές μονάδες, είναι τυχαίος και γίνεται ξεχωριστά για κάθε μια από τις ομάδες μεταβλητής πλαισίου. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε σε μεθόδους για το σχεδιασμό και την ανάλυση παραγοντικών πειραμάτων με τυχαίους παράγοντες όπως και σε συνδυασμούς παραγόντων με τυχαίες και σταθερές επιδράσεις ήτοι μικτές επιδράσεις (random and fixed effects or mixed effect modes[5]). Αυτό βέβαια δεν αποκλείει ότι οι σχεδιασμοί δεν μπορεί να ενέχουν το στοιχείο της τυχαιοποίησης όπως το έχουμε ήδη αντιμετωπίσει.

2.3.1 Μοντέλα τυχαίων επιδράσεων με έναν παράγοντα

Ξεκινάμε για λόγους ευκολίας, με ένα μοντέλο που αφορά την εξέταση της επίδρασης ενός παράγοντα πάνω σε μια μεταβλητή απόκρισης και στη συνέχεια θα επεκταθούμε στη περίπτωση των δυο παραγόντων με τυχαίες επιδράσεις όπως και στην αλληλεπίδρασή τους. Υποθέτουμε το βασικό μοντέλο τυχαίων επιδράσεων που έχει την μορφή:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

[4] In a **random effects** model for an experiment, the levels of factors used in the experiment are randomly selected from a population of possible levels. The inferences from the data in the experiment are for all levels of the factors in the population from which the levels were selected and not only the levels used in the experiment (An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, R. Lyman Ott, Michael Longnecker, Chapter 17 and page 1042).

[5] In a **mixed-effects model** for an experiment, the levels of some of the factors used in the experiment are randomly selected from a population of possible levels, whereas the levels of the other factors in the experiment are predetermined. The inferences from the data in the experiment concerning factors with fixed levels are only for the levels of the factors used in the experiment, whereas inferences concerning factors with randomly selected levels are for all levels of the factors in the population from which the levels were selected (An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, R. Lyman Ott, Michael Longnecker, Chapter 17 and page 1042).

Το υπόδειγμα αυτό θυμίζει πολύ ξεκάθαρα το υπόδειγμα σταθερών επιδράσεων που εξετάσαμε στα προηγούμενα. Ωστόσο υπάρχουν ουσιώδες διαφορές οι οποίες συνοψίζονται (εκτός των όσων είπαμε στα προηγούμενα) και στο γεγονός ότι η μέση τιμή του πληθυσμού μ δεν είναι πλέον μια γνωστή σταθερά με $\mu_i = E(Y_{ij}) = \mu + \alpha_i$ αλλά τώρα ισχύει $\mu_i = E(Y_{ij}) = \mu$ όπου η παράμετρος μ είναι μεν σταθερά ωστόσο άγνωστη. Επιπλέον διακρίνουμε τις ακόλουθες διαφορές και ομοιότητες:

1. Η παράμετρος μ εξακολουθεί να αφορά την συνολική μέση τιμή ωστόσο αυτή είναι πλέον άγνωστη.
2. Ο α είναι παράγοντας με τυχαίες επιδράσεις χωρίς πλέον τα i επίπεδα που τον αφορούν και λαμβάνονται υπόψη στον πειραματικό σχεδιασμό να είναι σταθερά και τα μόνα στον πληθυσμό. Αυτός υποθέτουμε ότι κατανέμεται κανονικά με μέσο μηδέν και άγνωστη διακύμανση σ_α^2.
3. Τα a_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους για τα i επίπεδα
4. Ισχύει, όπως και στα μοντέλα σταθερών επιδράσεων, ότι τα κατάλοιπα e_{ij} κατανέμονται κανονικά με μέσο μηδέν και (επίσης) άγνωστη διακύμανση σ^2 όπως και το ότι αυτά είναι ανεξάρτητα τόσο μεταξύ τους όσο και με τα α_i.

Έχοντας υποθέσει k τυχαία επιλεγμένα επίπεδα για τον παράγοντα A από ένα μεγαλύτερο σύνολο θεραπειών όπως συναντώνται στον πληθυσμό και με πλήθος τιμών n ανά επιλεγμένο επίπεδο, τα δεδομένα του πειράματος θα είναι σχηματικά, σε μορφή πίνακα, ως ακολούθως:

Παράγοντας A	***Μεταβλητή απόκρισης Y***
Επίπεδο 1	$Y_{1.1}, Y_{1.2}, \dots, Y_{1.n}$
$\vdots$	$\vdots$
Επίπεδο k	$Y_{k.1}, Y_{k.2}, \dots, Y_{k.n}$

Πίνακας 2.5

Οι υποθέσεις που εξετάζονται στη προκειμένη περίπτωση, όταν δηλαδή έχουμε παράγοντα τυχαίων επιδράσεων, δεν αφορούν τις μέσες τιμές ανά επίπεδο αλλά την διακύμανση του παράγοντα. Πιο συγκεκριμένα, οι υποθέσεις διαμορφώνονται ως εξής

$$H_0: \sigma_a^2 = 0$$
$$H_1: \sigma_a^2 > 0$$

Έτσι, ο πίνακας με τις πηγές μεταβλητότητας, τα αντίστοιχα αθροίσματα τετραγώνων, μέσα αθροίσματα τετραγώνων, βαθμοί ελευθερίας και τη στατιστική ελέγχου, θα είναι:

Πηγές μεταβλητότητας	*Αθροίσματα τετραγώνων*	*Βαθμοί ελευθερίας*	*Μέσα αθροίσματα τετραγώνων*	*Στατιστική ελέγχου*
Παράγοντας Α	*SSA*	$k-1$	*MSA*	$F=\frac{MSA}{MSE}$
Κατάλοιπα	*SSE*	$k(n-1)$	*MSE*	
Ολικό	*SST*	$kn-1)$		

Πίνακας 2.6

Επομένως, αν $F > F_{k-1,k(n-1),a}$ τότε η αρχική υπόθεση περί μηδενικής διασποράς των τιμών της μεταβλητής απόκρισης, η οποία διασπορά οφείλεται στις επιδράσεις του παράγοντα, απορρίπτεται έναντι της εναλλακτικής ότι υφίσταται μεταβολές στη μεταβλητή απόκρισης που οφείλονται στις επιδράσεις του παράγοντα, σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Τώρα, για την μεταβλητή απόκρισης θα ισχύουν, αναφορικά με τη μέση τιμή και τη διακύμανση της: $E(Y_{ij}) = \mu$ και $V(Y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2$, όπου σ_α^2 και σ_e^2 είναι γνωστές ως συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης. Θα γνωρίζουμε επίσης ότι για την εκτίμηση της διακύμανσης του αστάθμητου παράγοντα θα χρησιμοποιείται η σχέση $\sigma_e^2 = MSE = \frac{SSE}{k(n-1)}$ ή διαφορετικά (πιο αναλυτικά) $\sigma_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\cdot}\right)^2}{k(n-1)}$, ενώ για την εκτίμηση της διασποράς που οφείλεται στον παράγοντα θα έχουμε $\sigma_\alpha^2 = \frac{k(n-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}(\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{Y}_{..})^2-(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\cdot}\right)^2}{nk(k-1)(n-1)} = \dots = \frac{MSA-MSE}{n}$.

Ένα άλλο σημαντικό μέτρο που απορρέει από τα παραπάνω είναι το ποσοστό της διασποράς που οφείλεται στον παράγοντα δηλαδή στις διαφορές μεταξύ των επιπέδων του παράγοντα. Αυτό εκτιμάται ως ο λόγος της διασποράς του παράγοντα προς τη συνολική διασπορά, δηλαδή $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2+\sigma_e^2}$ και είναι γνωστός ως εσωτερικός συντελεστής συσχέτισης (intraclass correlation coefficient), συμβολικά ρ_I, ή συντελεστής διαμέρισης διακύμανσης (variance partition coefficient – VPC). Αυτή εκτιμάται από τον λόγο $\frac{MSA-MSE}{MSA+(k+1)MSE}$.

2.3.2 Εκτίμηση συνιστωσών στη περίπτωση ενός παράγοντα τυχαίων επιδράσεων

Για την εξαρτημένη μεταβλητή (στην ορολογία της ανάλυσης παλινδρόμησης) θα ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Για ότι αφορά τη κατανομή της $Y_{ij} \sim N(\mu, \sigma_\alpha^2 + \sigma^2)$
- Για ότι αφορά τη συνδιακύμανση (επί της ουσίας διακύμανση) των τιμών μέσα σε καθένα από τα επίπεδα i του παράγοντα, $Cov(Y_{ij}, Y_{i,j'}) = \sigma_\alpha^2$ για $j \neq j'$

- Για ότι αφορά τη συνδιακύμανση των τιμών μεταξύ διαφορετικών επιπέδων του παράγοντα $Cov(Y_{ij}, Y_{i',j'}) = 0$ για $i \neq i'$
- Και τέλος, αναφορικά με τη μήτρα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων, στη γενική της μορφή θα έχουμε

$$Cov(\boldsymbol{Y}) = \Sigma =$$

$$= \begin{pmatrix} Cov(Y_{1,1}, Y_{1,1}) & Cov(Y_{1,1}, Y_{1,2}) & Cov(Y_{1,1}, Y_{1,3}) & \cdots & Cov(Y_{1,1}, Y_{k,n}) \\ Cov(Y_{1,2}, Y_{1,1}) & Cov(Y_{1,2}, Y_{1,2}) & Cov(Y_{1,2}, Y_{1,3}) & \cdots & Cov(Y_{1,2}, Y_{k,n}) \\ Cov(Y_{1,3}, Y_{1,1}) & Cov(Y_{1,3}, Y_{1,2}) & Cov(Y_{1,3}, Y_{1,3}) & \cdots & Cov(Y_{1,3}, Y_{k,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_{k,n-1}, Y_{1,1}) & Cov(Y_{k,n-1}, Y_{1,2}) & Cov(Y_{k,n-1}, Y_{1,3}) & \cdots & Cov(Y_{k,n-1}, Y_{k,n}) \\ Cov(Y_{k,n}, Y_{1,1}) & Cov(Y_{k,n}, Y_{1,2}) & Cov(Y_{k,n}, Y_{1,3}) & \cdots & Cov(Y_{k,n}, Y_{k,n}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_\alpha^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Από τις υποθέσεις που μόλις προηγήθηκαν και με βάση ορισμένες άλλες ιδιότητες, δίνουμε παρακάτω εκτιμήσεις για τις μαθηματικές ελπίδες $E()$ των μέσων τετραγωνικών αθροισμάτων (της μεταβλητότητας της μεταβλητής απόκρισης που ερμηνεύεται από τον παράγοντα A) και των καταλοίπων αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε ότι $\frac{SSA}{\sigma^2+n\sigma_\alpha^2} \sim \chi_{k-1}^2$ και $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi_{n(k-1)}^2$ επομένως θα έχουμε:

$$E(MSA) = E\left(\frac{SSA}{k-1}\right) = E\left(\frac{SSA}{\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2} \cdot \frac{\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2}{k-1}\right) =$$

$$\frac{\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2}{k-1} \cdot E\left(\frac{SSA}{\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2}\right) = \frac{\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2}{k-1} \cdot (k-1) = \sigma^2 + n\sigma_\alpha^2$$

Ομοίως θα είναι και $E(MSE) = \sigma^2$. Από κει προκύπτουν και οι εκτιμήσεις που δώσαμε στην ενότητα 2.2 για την σ_α^2.

Σημειώνουμε εδώ ότι οι παρατηρήσεις Y_{ij} μέσα σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο του παράγοντα έχουν την ίδια συνδιακύμανση (βλέπε πρώτη ιδιότητα), επειδή πριν την διεξαγωγή του πειράματος, αυτό που θα αναμέναμε είναι η ύπαρξη ομοιογένειας (ως προς την κατανομή και τα χαρακτηριστικά της), δεδομένου ότι ως τυχαίες μεταβλητές προέρχονται όλες από την ίδια τυχαία συνιστώσα. Από την στιγμή που το πείραμα διεξάγεται και οι μετρήσεις ανά επίπεδο του παράγοντα είναι συγκεκριμένες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι όλες μεταξύ τους ανεξάρτητες (δεύτερη ιδιότητα) και ότι οι παρατηρήσεις στην εν λόγω θεραπεία διαφέρουν μόνο λόγω του τυχαίου σφάλματος.

Για την εκτίμηση των συνιστωσών της συνολικής διακύμανσης ήτοι $\sigma_\alpha^2 + \sigma^2$ δύναται να χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος των ροπών η οποία δεν έχει προϋποθέσεις (όπως πχ αυτή της κανονικότητας) και δίνει **best quadratic unbiased** εκτιμητές ή διαφορετικά, εκτιμητές με την ελάχιστη διακύμανση. Υπάρχει και μια διαφορετική μέθοδο εκτίμησης των συνιστωσών της διακύμανσης βασισμένη στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης μεγίστης πιθανοφάνειας για την οποία ωστόσο λόγος θα γίνει παρακάτω.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι εκτιμήσεις που δίνονται για τις διακυμάνσεις να είναι αρνητικές κάτι που εκ των πραγμάτων δεν μπορούμε να δεχθούμε εφόσον μιλάμε εξορισμού για θετικά μεγέθη (ή μηδέν). Μπορούμε να δεχθούμε, σε μια τέτοια περίπτωση, ότι δεν υπάρχει διακύμανση και ότι επί της ουσίας μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν. Ωστόσο, υποθέτοντας κάτι τέτοιο είναι πιθανό να δημιουργήσει προβλήματα στις εκτιμήσεις των άλλων παραμέτρων άλλα και στις ιδιότητες αυτών. Εναλλακτικές προσεγγίσεις προτείνουν είτε την επανεκτίμηση των συνιστωσών με αρχικούς περιορισμούς για το θετικό του προσήμου είτε επαναπροσδιορισμό του αρχικού μοντέλου δεδομένου ότι αρνητικές εκτιμήσεις στη διακύμανση παραπέμπουν ορισμένες φορές και σε λάθος ορισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης. Εκτεταμένη αναφορά σε τρόπους για την αντιμετώπιση του προβλήματος έχει γίνει από τους Searle (1971a, 1971b), Searle, Casella, and McCullogh (1992), and Burdick and Graybill (1992).

Κλείνουμε την ενότητα αυτή, με τη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των συνιστωσών διακύμανσης της μεταβλητής απόκρισης σε πείραμα με έναν παράγοντα τυχαίων επιδράσεων. Στην ίδια ενότητα νωρίτερα, κάναμε αναφορά στις εκτιμήσεις που προέρχονται από τη μέθοδο των ροπών τονίζοντας ωστόσο ότι, ενώ δίνουν την ελάχιστη διακύμανση (ως εκτιμητές), δεν έχουν καλές στατιστικές ιδιότητες και για το λόγο αυτό αποφεύγετε η χρήση της. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι και η αδυναμία, μέσω της μεθόδου των ροπών, να εκτιμηθεί διάστημα εμπιστοσύνης για την συνιστώσα σ_α^2 η οποία έχει ιδιαίτερο πάντα ενδιαφέρον για τη συμπερασματολογία από τη διεξαγωγή ενός πειράματος. Έτσι, αντί αυτής της τεχνικής εκτίμησης των παραμέτρων που ορίζουν την συνολική διακύμανση, προσφεύγουμε στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Αν και πρόκειται για μια πιο περίπλοκη διαδικασία εκτίμησης, η ενσωμάτωσή της στα γνωστότερα στατιστικά πακέτα επεξεργασίας δεδομένων έχει βοηθήσει στο να πραγματοποιούνται οι απαιτούμενοι υπολογισμοί αρκετά γρήγορα και αξιόπιστα (θα το δούμε στα ειδικά πακέτα της JPM που θα χρησιμοποιήσουμε στο πρακτικό κομμάτι της παρούσας μελέτης).

Αν και είναι πέρα από τους στόχους μας (εκτεταμένη αναφορά γίνεται στους Hardeo Sahai, Mario Miguel Ojeda, Analysis of Variance for Random Models **Volume I** – Balanced Data Theory, Methods, Applications and Data Analysis), παρακάτω δίνουμε αρκετά συνοπτικά, μια γενική ιδέα του πως προσεγγίζουμε βάσει της μεθόδου αυτής.

Ας υποθέσουμε μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας $f(X,\theta)$ όπου θ μια άγνωστη παράμετρο. Από τυχαίο δείγμα n παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ που προέρχονται από την τυχαία μεταβλητή X, παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των x_i του τυχαίου αυτού δείγματος $\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$. Ως συνάρτηση πιθανοφάνειας ορίζεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, ήτοι η $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$ όπου για δεδομένα $x_1, x_2, \dots, x_n$ η μοναδική άγνωστη παράμετρος που εμπεριέχει είναι η θ.

Αυτό το οποίο επιδιώκουμε είναι να εκτιμηθεί η άγνωστη παράμετρος θ μέσω της μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Για να το αντιστοιχήσουμε αυτό με ένα πρόβλημα πειραματικού σχεδιασμού που αφορά μοντέλο τυχαίων επιδράσεων, ας θεωρήσουμε τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ διαστάσεων $kn \times 1$ με k θεραπείες και n επαναλήψεις για κάθε θεραπεία. Επομένως, το συνολικό μέγεθος του δείγματος θα είναι $N = k \cdot n$. Επιπροσθέτως, ορίζουμε ως $\boldsymbol{\Sigma}$ τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων (με διαστάσεις $N \times N$) των $k \cdot n$ παρατηρήσεων που προέρχονται από το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{y}$. Έτσι, για την συνάρτηση πιθανοφάνειας θα έχουμε:

$$L(x_{1.1}, x_{1.2}, \dots, x_{k.n}; \mu, \sigma^2, \sigma_\alpha^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k \cdot n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{i}_N\mu)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{I}_N\mu)\right]}$$

Όπου $N = a \cdot n$ ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων, $\boldsymbol{I}_N$ ένα $k \cdot n \times 1$ διάνυσμα με άσσους ως στοιχεία. Επομένως αναζητάμε εκείνες τις εκτιμήσεις για τις παραμέτρους σ^2, σ_α^2 και μ οι οποίες και θα μεγιστοποιούν τη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Τώρα, αν και οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας έχουν κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες που αφορούν την κανονικότητα της κατανομής τους και την αμεροληψία τους για μεγάλα δείγματα, προτιμάται ως μέθοδος εκτίμησης μια παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου που μπορεί και διασφαλίζει, τρόπον τινά, αμεροληψία για τη σ^2 συνιστώσα όπως και το ότι $\sigma^2 > 0$, $\sigma_\alpha^2 > 0$. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως residual maximum likelihood $REML$ ή διαφορετικά και ως restricted maximum likelihood.

Αυτό που γνωρίζαμε, μέχρι τώρα, είναι ότι μέσω της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας των y_{ij} ή αλλιώς των μ, SSA και SSE παίρναμε εκτιμήσεις για τα αντίστοιχα μέτρα θέσης και διασποράς. Με την $REML$ μεγιστοποιούμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των SSA και SSE μόνο. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε τα μεγέθη $u_1 = k(n-1)$, $u_2 = k-1$, $S_1 = MSE$, $S_2 = MSA$, $\omega_1 = \sigma^2$, και $\omega_2 = \sigma^2 + \sigma_\alpha^2$ τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών S_1 και S_2 (Hardeo Sahai, Mario Miguel Ojeda, Analysis of Variance for Random Models **Volume I** και σελίδες 37 – 40) θα δίνεται από:

$$L(\omega_1, \omega_2) = \frac{e^{\left[-\frac{1}{2}(u_1 S_1 \omega_1^{-1} + u_2 S_2 \omega_2^{-1})\right]}(u_1 S_1)^{\frac{u_1}{2}-1} (u_2 S_2)^{\frac{u_2}{2}-1}}{2^{\frac{u_1+u_2}{2}} \omega_1^{\frac{u_1}{2}} \omega_2^{\frac{u_2}{2}}}$$

Παίρνοντας τώρα, τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας των S_1 και S_2, θα έχουμε:

$$\ln L(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{2}(C + u_1 S_1 \omega_1^{-1} + u_2 S_2 \omega_2^{-1} + u_1 \ln \omega_1 + u_2 \ln \omega_2)$$

Όπου η ποσότητα C είναι ανεξάρτητη των μεγεθών ω_1 και ω_2. Έτσι, το όλο πρόβλημα ανάγεται στην μεγιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης υπό τους περιορισμούς $\sigma^2 \geq 0$, $\sigma_\alpha^2 \geq 0$ ή αναλογικά, με τα ίδια αποτελέσματα, $\omega_2 \geq \omega_1 \geq 0$.

2.4 Μοντέλα τυχαίων επιδράσεων δυο παραγόντων

Υποθέτουμε για τη συνέχεια, δυο παράγοντες A και B οι οποίοι χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη πολλών επιπέδων και για τους οποίους θα πρέπει να επιλέξουμε κάποια με τυχαίο τρόπο, στο πλήθος α και β αντίστοιχα. Για κάθε επίπεδο θα υποθέσουμε n επαναλήψεις για να πάρουμε τελικά μαζί με την αλληλοεπίδραση των δυο παραγόντων:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \text{ με } \begin{cases} i = 1,2, \dots, a \\ j = 1,2, \dots, \beta \\ k = 1,2, \dots, n \end{cases}$$

Όπου όλοι οι παράμετροι του υποδείγματος α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ και e_{ijk} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες κατανέμονται κανονικά με μέσο μηδέν και διακυμάνσεις αντίστοιχα σ_α^2, σ_β^2, $\sigma_{\alpha\beta}^2$ και σ^2. Οι διακυμάνσεις αυτές συναποτελούν και τις συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης όλων των παρατηρήσεων της μεταβλητής απόκρισης. Θα έχουμε δηλαδή: $V(y_{ijk}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$.

Και σε αυτή τη περίπτωση, οι υποθέσεις για τις οποίες θέλουμε να διεξάγουμε ελέγχους, διατυπώνονται με τον ίδιο τρόπο καθώς του ενός παράγοντα. Προσθέτουμε μόνο άλλες δυο περιπτώσεις που έχουν να κάνουν με τον δεύτερο παράγοντα και την αλληλεπίδραση:

$$H_0: \sigma_\alpha^2 = 0$$
$$H_0: \sigma_\beta^2 = 0$$
$$H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$$

Τα απαραίτητα αθροίσματα SSA, SSB, $SSAB$ και SSE υπολογίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στη περίπτωση των σταθερών επιδράσεων. Αυτό που ωστόσο αλλάζει είναι οι εκτιμήσεις των αναμενόμενων μέσων τετραγώνων:

$$E(MSA) = \sigma^2 + n \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2 + \beta \cdot n \cdot \sigma_\alpha^2$$
$$E(MSB) = \sigma^2 + n \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2 + \alpha \cdot n \cdot \sigma_\beta^2$$
$$E(MSAB) = \sigma^2 + n \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2$$
$$E(MSE) = \sigma^2$$

Έτσι, με βάση τις αναμενόμενες αυτές μέσες τιμές, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διεξαγωγή των στατιστικών ελέγχων των υποθέσεων που διατυπώσαμε για τις συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης. Πιο συγκεκριμένα, υπό την υπόθεση $H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ η στατιστική $F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$ ακολουθεί την κατανομή F με $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ και $\alpha\beta(n - 1)$ βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, αν $F_{AB} > F_{(a-1)(\beta-1),\alpha\beta(n-1),\alpha}$ τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α. Για τις άλλες δυο υποθέσεις $H_0: \sigma_\alpha^2 = 0$ και $H_0: \sigma_\beta^2 = 0$ θα έχουμε αντίστοιχα στατιστικές ελέγχου $F_A = \frac{MSA}{MSAB}$ με $F_A \sim F_{a-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$ και $F_B = \frac{MSB}{MSAB}$ με $F_B \sim F_{\beta-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$.

Σε πολλά πειράματα που εμπλέκονται παράγοντες τυχαίων επιδράσεων, απαιτείται η εκτίμηση των συνιστωσών της διακύμανσης. Και στη περίπτωση των δυο παραγόντων, ένας τρόπος να προσεγγίσουμε είναι και η μέθοδος των ροπών. Αυτή δίνει μεν σημειακές εκτιμήσεις των συνιστωσών, δεν μπορεί ωστόσο να σώσει διαστήματα εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις αυτές. Συνοπτικά, οι εκτιμητές των ροπών δίνονται παρακάτω:

$$\hat{\sigma}^2 = MSE$$
$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 = \frac{MSAB - MSE}{n}$$
$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{MSB - MSAB}{an}$$
$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{MSA - MSAB}{\beta n}$$

Στη περίπτωση που θα πρέπει να εκτιμηθούν και διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραπάνω παραμέτρους, καταφεύγουμε στις εκτιμήσεις από τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να δώσουμε, πολύ συνοπτικά, το πώς δομείτε ο πίνακας διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων και στη συνέχεια μια άποψη της συνάρτησης πιθανοφάνειας που χρησιμοποιείται.

Θεωρούμε και πάλι το μοντέλο $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$ με $i = 1,2, \dots, a$, $j = 1,2, \dots, \beta$ και $k = 1,2, \dots, n$. Για λόγους ευκολίας στη δυνατότητα εποπτείας του πίνακα συνδιακυμάνσεων διακυμάνσεων, θα υποθέσουμε ότι κάθε ένας εκ των δυο παραγόντων έχει δυο επίπεδα και σε κάθε επίπεδο πραγματώνουμε δυο επαναλήψεις. Κοντολογίς ισχύει $\alpha = \beta = n = 2$. Σε μια τέτοια περίπτωση το διάνυσμα τυχαίων της μεταβλητών θα είναι

$$\boldsymbol{y}' = (Y_{111}, Y_{112}, Y_{211}, Y_{212}, Y_{121}, Y_{122}, Y_{221}, Y_{222})$$

Ενώ για τις διακυμάνσεις, στη γενική τους μορφή, θα έχουμε

$$Cov(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 \text{ για } i = i', j = j', k \neq k' \\ \sigma_\alpha^2 \text{ για } i = i', j \neq j' \\ \sigma_\beta^2 \text{ για } i \neq i', j = j' \\ 0 \text{ για } i \neq i', j \neq j' \end{cases}$$

Για να πάρουμε έναν 8×8 πίνακα

$$Cov(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\Sigma} =$$

$$= \begin{pmatrix} Cov(Y_{111}, Y_{111}) & Cov(Y_{111}, Y_{112}) & Cov(Y_{111}, Y_{211}) & Cov(Y_{111}, Y_{212}) & Cov(Y_{111}, Y_{121}) & Cov(Y_{111}, Y_{122}) & Cov(Y_{111}, Y_{221}) & Cov(Y_{111}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{112}, Y_{111}) & Cov(Y_{112}, Y_{112}) & Cov(Y_{112}, Y_{211}) & Cov(Y_{112}, Y_{212}) & Cov(Y_{112}, Y_{121}) & Cov(Y_{112}, Y_{122}) & Cov(Y_{112}, Y_{221}) & Cov(Y_{112}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{211}, Y_{111}) & Cov(Y_{211}, Y_{112}) & Cov(Y_{211}, Y_{211}) & Cov(Y_{211}, Y_{212}) & Cov(Y_{211}, Y_{121}) & Cov(Y_{211}, Y_{122}) & Cov(Y_{211}, Y_{221}) & Cov(Y_{211}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{212}, Y_{111}) & Cov(Y_{212}, Y_{112}) & Cov(Y_{212}, Y_{211}) & Cov(Y_{212}, Y_{212}) & Cov(Y_{212}, Y_{121}) & Cov(Y_{212}, Y_{122}) & Cov(Y_{212}, Y_{221}) & Cov(Y_{212}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{121}, Y_{111}) & Cov(Y_{121}, Y_{112}) & Cov(Y_{121}, Y_{211}) & Cov(Y_{121}, Y_{212}) & Cov(Y_{121}, Y_{121}) & Cov(Y_{121}, Y_{122}) & Cov(Y_{121}, Y_{221}) & Cov(Y_{121}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{122}, Y_{111}) & Cov(Y_{122}, Y_{112}) & Cov(Y_{122}, Y_{211}) & Cov(Y_{122}, Y_{212}) & Cov(Y_{122}, Y_{121}) & Cov(Y_{122}, Y_{122}) & Cov(Y_{122}, Y_{221}) & Cov(Y_{122}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{221}, Y_{111}) & Cov(Y_{221}, Y_{112}) & Cov(Y_{221}, Y_{211}) & Cov(Y_{221}, Y_{212}) & Cov(Y_{221}, Y_{121}) & Cov(Y_{221}, Y_{122}) & Cov(Y_{221}, Y_{221}) & Cov(Y_{221}, Y_{222}) \\ Cov(Y_{222}, Y_{111}) & Cov(Y_{222}, Y_{112}) & Cov(Y_{222}, Y_{211}) & Cov(Y_{222}, Y_{212}) & Cov(Y_{222}, Y_{121}) & Cov(Y_{222}, Y_{122}) & Cov(Y_{222}, Y_{221}) & Cov(Y_{222}, Y_{222}) \end{pmatrix}$$

Από όπου και προκύπτει τελικά

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma^2 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 & \sigma^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για δυο παράγοντες τυχαίων επιδράσεων δεν διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη με ένα παράγοντα που ήδη έχουμε εξετάσει. Αυτό που διαφέρει είναι το πλήθος των υπό εκτίμηση παραμέτρων και προφανώς οι διαστάσεις του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$L\left(\mu,\, \sigma^2,\, \sigma_\alpha^2,\, \sigma_\beta^2,\, \sigma_{\alpha\beta}^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\alpha\cdot\beta\cdot n}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{i}_N\mu)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{i}_N\mu)\right]}$$

Και σε αυτή τη περίπτωση, $N = a \cdot \beta \cdot n$ ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων και $\boldsymbol{i}_N$ ένα $a \cdot \beta \cdot n \times 1$ διάνυσμα με άσσους ως στοιχεία. Ωστόσο, για λόγους που είδη έχουμε αναπτύξει στα προηγούμενα, η μέθοδος που προτιμάται είναι αυτή της $REML$, παραλλαγή της ML (λεπτομερέστατη αναφορά επί του θέματος, στις σελίδες 177 – 184, παράγραφοι 4.4.2 και 4.4.3 των Hardeo Sahai, Mario Miguel Ojeda, Analysis of Variance for Random Models **Volume I**).

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης $(1-\alpha)\%$ για κάθε μια από της συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης, θα έχουν την μορφή $\left(\hat{\sigma}_l^2 - Z_{\frac{\alpha}{2}} SE(\hat{\sigma}_l^2),\, \hat{\sigma}_l^2 + Z_{\frac{\alpha}{2}} SE(\hat{\sigma}_l^2)\right)$ με $l = \alpha, \beta, \alpha\beta$ και $SE(\hat{\sigma}_l^2)$ το τυπικό σφάλμα της εκάστοτε εκτίμησης.

2.5 Μοντέλα μεικτών (σταθερών και τυχαίων) επιδράσεων δυο παραγόντων

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα μικτά μοντέλα με δυο παράγοντες υποθέτοντας ότι ο ένας είναι σταθερών και ο άλλος τυχαίων επιδράσεων. Έστω ότι ο A είναι παράγοντας σταθερών επιδράσεων και ο B τυχαίων. Έτσι, το μοντέλο θα είναι:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \text{ με} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,a \\ j = 1,2,\ldots,\beta \\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Όπου τώρα παράμετροι του υποδείγματος α_i, β_j, αφορούν αντίστοιχα σταθερές και τυχαίες επιδράσεις του μοντέλου με την αλληλεπίδρασή τους $(\alpha\beta)_{ij}$ να είναι μεταβλητή τυχαίων επιδράσεων. Η δε παράμετρος του τυχαίου όρου σφάλματος e_{ijk} διατηρεί τις ιδιότητες, καθώς στις προγενέστερες υποπεριπτώσεις, μιας τυχαίας ανεξάρτητης μεταβλητής η οποία κατανέμεται κανονικά με μέσο μηδέν και διακύμανση σ^2. Για την παράμετρο σταθερών επιδράσεων του μοντέλου θα ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i = 0$ ενώ για την αντίστοιχη των τυχαίων επιδράσεων β_j θα ξέρουμε ότι αφορά μια κανονική τυχαία ανεξάρτητη μεταβλητή, για $j = 1,2,\ldots,\beta$, με μέσο μηδέν και διακύμανση σ_β^2 δηλαδή $\beta_j \sim NID(0,\, \sigma_\beta^2)$. Η αλληλεπίδραση των δυο παραγόντων $(\alpha\beta)_{ij}$ θα είναι και αυτή μια τυχαία κανονική μεταβλητή με μέσο μηδέν και διακύμανση ίση με $\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2$ που ωστόσο αθροίζοντας τις αλληλεπιδράσεις ανά επίπεδο του παράγοντα σταθερών επιδράσεων το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν ήτοι $\sum_{i=1}^{\alpha}(\alpha\beta)_{ij} = (\alpha\beta)_{.j} = 0,\ \ j = 1,2,\dots,\beta$. Ο περιορισμός αυτός υπονοεί ότι ορισμένα στοιχεία της αλληλεπίδρασης από διαφορετικά επίπεδα του παράγοντα σταθερών επιδράσεων, δεν είναι ανεξάρτητα. Πράγματι, δυνάμεθα να αποδείξουμε ότι

$$Cov\big((\alpha\beta)_{ij},\ (\alpha\beta)_{i'j'}\big) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2 \text{ αν } i \neq i' \\ \quad 0 \text{ αν } j \neq j' \end{cases}$$

Το γεγονός της υπόθεσης των αλληλοεξουδετερωμένων επιδράσεων $\sum_{i=1}^{\alpha}(\alpha\beta)_{ij} = 0$ προσδίδει έναν περιορισμό στο μικτό μοντέλο και για το λόγο αυτό στη βιβλιογραφία συναντάται και ως υπό **περιορισμό μοντέλο (restricted model[6])**. Αυτό έχει και τις ανάλογες επιπτώσεις στην εκτίμηση της μαθηματικής ελπίδας των μέσων τετραγώνων (αναμενόμενα μέσα τετράγωνα – Expected Mean Squares):

$$E(MSA) \ = \ \sigma^2 \ + \ n \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2 \ + \frac{\beta \cdot n}{\alpha - 1} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha} a_i^2$$

$$E(MSB) \ = \ \sigma^2 \ + \ \ \alpha \cdot n \cdot \sigma_{\beta}^2$$

$$E(MSAB) \ = \ \sigma^2 \ + \ n \cdot \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$E(MSE) \ = \ \sigma^2$$

Στηριζόμενοι στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε, αφού διατυπώσουμε τις υπό εξέταση υποθέσεις, να κατασκευάσουμε τις στατιστικές ελέγχου υπό τις υποθέσεις αυτές. Πιο συγκεκριμένα οι υποθέσεις με τις αντίστοιχες στατιστικές ελέγχου και κατανομές τους, δίνονται συνοπτικά παρακάτω:

- Υπό την υπόθεση $H_0\!: \alpha_i = 0$ για τον παράγοντα τυχαίων επιδράσεων, η στατιστική $F_A = \frac{MSA}{MSAB}$ θα ακολουθεί την $F_{\alpha-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$ και επομένως αν $F_A > F_{\alpha-1,(\alpha-1)(\beta-1),\alpha}$ τότε η αρχική υπόθεση θα απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α.
- Ομοίως υπό την υπόθεση $H_0\!: \sigma_{\alpha\beta}^2 \ = \ 0$ η στατιστική $F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$ ακολουθεί την κατανομή F με $(\alpha-1)(\beta-1)$ και $\alpha\beta(n-1)$ βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, αν

---

[6] «*Because of the sum of interaction effects over the levels of the fixed factor equals zero, this version of the mixed model is called the restricted model. There exists another model which does not include such a restriction and is discussed later. Neither of these models is "correct" or "wrong" - they are both theoretical models for how the data behave. They have different implications for the meanings of the variance components. The restricted model is often used in the ANOVA setting. The unrestricted model is often used for more general designs that include continuous covariates and repeated or spatially correlated measurements*» (***Copyright © 2017 The Pennsylvania State University***, link: https://onlinecourses.science.psu.edu/stat503/node/1).

$F_{AB} > F_{(a-1)(\beta-1),\alpha\beta(n-1),\alpha}$ τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α.

- Όπως και υπό την υπόθεση $H_0: \sigma_\beta^2 = 0$ θα έχουμε ότι για την στατιστική $F_B = \frac{MSB}{MSE}$ ισχύει ότι $F_B \sim F_{\beta-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$. Έτσι, αν $F_B > F_{\beta-1,(\alpha-1)(\beta-1),\alpha}$ τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α η μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται.

Στα μικτά υποδείγματα είναι εφικτό να εκτιμήσουμε τις κύριες επιδράσεις του σταθερού παράγοντα μέσω των ισοτήτων $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$ και $\hat{a}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$ με $i = 1,2,\dots,a$. Αντιστοίχως, οι συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης θα εκτιμώνται, για ένα μικτό υπόδειγμα, ως εξής:

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{MSB - MSE}{an}$$

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 = \frac{MSAB - MSE}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MSE$$

2.6 Επεκτάσεις και περαιτέρω ανάπτυξη επί των μεικτών μοντέλων

2.6.1 Μεικτά μοντέλα με περισσότερους παράγοντες και προσεγγιστικοί έλεγχοι F

Υποθέτουμε τώρα, ότι στο σχεδιασμό μας υπεισέρχονται ένας παράγοντας σταθερών επιδράσεων A και δυο τυχαίων επιδράσεων, έστω B και C. Πρόκειται δηλαδή για μικτό υπόδειγμα τριών παραγόντων. Συχνά, σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι αρκετά δύσκολο να προσεγγίσουμε με ακριβείς στατιστικούς ελέγχους (για λόγους έλλειψης βαθμών ελευθερίας) επί των επιδράσεων των παραγόντων είτε αυτές είναι οι κύριες επιδράσεις είτε όχι. Θα μπορούσε εδώ κάποιος να αντιπροτείνει το να αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις των παραγόντων ως αμελητέες και να επικεντρωθούμε στις κύριες μόνο επιδράσεις. Μια τέτοια ωστόσο απόφαση ενέχει πολύ ρίσκο και θα ήταν καλό να υπάρχει εκ των προτέρων πληροφόρηση σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις πριν εξαιρεθούν από την ανάλυση.

Στη περίπτωση των τριών παραγόντων, σε ένα μοντέλο μικτών επιδράσεων που εξετάζουμε, θα υποθέσουμε ότι ο παράγοντας A έχει α επίπεδα, ο παράγοντας B έχει β και τέλος ο C έχει γ. Κάθε επίπεδο, οποιουδήποτε παράγοντα, αντιστοιχεί με όλα τα επίπεδα των υπόλοιπων παραγόντων ενώ για κάθε **θεραπεία** ο αριθμός των παρατηρήσεων δηλαδή των πειραματικών μονάδων είναι n στο πλήθος και επομένως έχουμε να κάνουμε με έναν **ισορροπημένο** σχεδιασμό **πλήρως τυχαιοποιημένο με μικτές επιδράσεις**. Οι αναμενόμενες μέσες τιμές των τετραγωνικών διαφορών συνοψίζονται στο πίνακα παρακάτω:

MS	df	$E(MS)$
MSA	$a-1$	$\sigma^2 + \beta n\sigma^2_{\alpha\gamma} + \gamma n\sigma^2_{\alpha\beta} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + \beta\gamma n\sigma^2_{\alpha}$
MSB	$\beta-1$	$\sigma^2 + \alpha n\sigma^2_{\beta\gamma} + \alpha\gamma n\sigma^2_{\beta}$
MSC	$c-1$	$\sigma^2 + \alpha n\sigma^2_{\beta\gamma} + \alpha\beta n\sigma^2_{\gamma}$
$MSAB$	$(a-1)(\beta-1)$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + \gamma n\sigma^2_{\alpha\beta}$
$MSAC$	$(a-1)(c-1)$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + \beta n\sigma^2_{\alpha\gamma}$
$MSBC$	$(\beta-1)(c-1)$	$\sigma^2 + \alpha n\sigma^2_{\beta\gamma}$
$MSABC$	$(a-1)(\beta-1)(c-1)$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
MSE	$(n-1)\alpha\beta c$	σ^2

Πίνακας 2.7

Με $\sigma^2_\alpha = \frac{1}{a-1} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha} a_i^2$

Από την παράθεση των αναμενόμενων μέσων τετραγωνικών αποκλίσεων καταλαβαίνουμε επίσης ότι το υπόδειγμα τελεί υπό **περιορισμό**[7] όσο αφορά τις αλληλεπιδράσεις του παράγοντα σταθερών επιδράσεων. Αυτό αντικατοπτρίζεται στην απουσία των διακυμάνσεων $\sigma^2_{\alpha\beta}$, $\sigma^2_{\alpha\gamma}$, και $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ από όλες τις αναμενόμενες τιμές εκτός από εκείνη του παράγοντα σταθερών επιδράσεων A όπου τα αθροίσματα των επιδράσεων γίνονται μόνο κατά μήκος των επιπέδων των παραγόντων τυχαίων επιδράσεων B και C.

Ο έλεγχος της υπόθεσης $H_0\colon \sigma^2_\beta = 0$ μπορεί να γίνει με χρήση της στατιστικής ελέγχου $F_0 = \frac{MSB}{MSBC}$ και τούτο γιατί η διαφορά $E(MSB) - E(MSBC)$ καταλήγει στο να μας δώσει μια από τις συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης σ^2_β η οποία είναι και το ζητούμενο του ελέγχου από την άποψη της στατιστικής της σημαντικότητας. Δεν μπορούμε, ωστόσο, να πούμε το ίδιο για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0\colon a_i = 0$ και τούτο γιατί δεν υπάρχουν μέσες τετραγωνικές αποκλίσεις της μορφής MS' και MS'' των οποίων οι αναμενόμενες τιμές να ικανοποιούν τη συνθήκη μηδενικών διαφορών $E(MS') - E(MS'')$ υπό την ισχύ της υπόθεσης $H_0\colon a_i = 0$. Ο Satterthwaite (1946) πρότεινε τη χρήση γραμμικών συνδυασμών για τα MS' και MS'' που προφανώς θα προέρχονται από τις μέσες τετραγωνικές αποκλίσεις MS του πίνακα διακυμάνσεων.

[7] Για υποδείγματα που δεν τελούν υπό περιορισμό, μπορούμε να ανατρέξουμε στην ενότητα 5 του κεφαλαίου 17, από το βιβλίο των R. Lyman Ott και Michael Longnecker με τίτλο An Introduction to Statistical Methods and Data Analysisστις 6η έκδοση (σελίδες 1069-1070)

Η υπό αναζήτηση στατιστική ελέγχου $F_0' = \frac{MS'}{MS''}$ θα έχει αριθμητή και παρονομαστή αντίστοιχα $MS' = MSA + MSABC$ και $MS'' = MSAB + MSAC$ όπου αντικαθιστώντας με τις αναμενόμενες μέσες τιμές για κάθε συνιστώσα θα πάρουμε:

$$E(MS') - E(MS'') = E(MSA) + E(MSABC) - E(MSAB) - E(MSAC) =$$
$$= \sigma^2 + \beta n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \gamma n\sigma_{\alpha\beta}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \beta\gamma n\sigma_{\alpha}^2 + \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 -$$
$$-\left(\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \gamma n\sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \beta n\sigma_{\alpha\gamma}^2\right) =$$
$$= \beta\gamma n\sigma_{\alpha}^2$$

Πρόεκυψε πολλαπλάσιο μιας εκ των συνιστωσών της συνολικής διακύμανσης η οποία, υπό την μηδενική υπόθεση, μας δίνει μηδέν. Καταλήξαμε επομένως στο να βρούμε στατιστική ελέγχου για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: a_i = 0$ ήτοι την

$$F_0' = \frac{MSA + MSABC}{MSAB + MSAC}$$

Αυτή ακολουθεί ασυμπτωτικά (κατά προσέγγιση) την κατανομή F με βαθμούς ελευθερίας:

$$p = \frac{(MSA + MSABC)^2}{\frac{MSA^2}{df_A} + \frac{MSABC^2}{df_{ABC}}} = \frac{(MSA + MSABC)^2}{\frac{MSA^2}{(a-1)} + \frac{MSABC^2}{(a-1)(\beta-1)(c-1)}}$$

και

$$q = \frac{(MSAB + MSAC)^2}{\frac{MSAB^2}{df_{AB}} + \frac{MSAC^2}{df_{AC}}} = \frac{(MSA + MSAC)^2}{\frac{MSAB^2}{(a-1)(\beta-1)} + \frac{MSAC^2}{(a-1)(c-1)}}$$

Έτσι, η υπόθεση $H_0: a_i = 0$ απορρίπτεται, σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν $F_0 > F_{p,q,a}$. Θα πρέπει, ωστόσο, να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στη χρήση της παραπάνω προσέγγισης αφού υπάρχει πιθανότητα κάποιος από τους γραμμικούς συνδυασμούς (αριθμητής ή παρονομαστής) να είναι αρνητικός. Οι Gaylor and Hopper (1969) επισήμαναν ότι ασφαλής χρήση της μεθόδου γίνεται στη περίπτωση που αν $MS' = MS_1 - MS_2$ ισχύει (α) $\frac{MS_1}{MS_2} > F_{df_1,df_2,0.025} \times F_{df_1,df_2,0.5}$ και (β) $df_1 \leq 100, , df_2 \geq \frac{df_1}{2}$.

2.6.2 Γενική μορφή μοντέλων μεικτών επιδράσεων

Αντιμετωπίζοντας τους παράγοντες σταθερών και τυχαίων επιδράσεων από την σκοπιά ενός απλού γραμμικού παλινδρομικού μοντέλου, θα γράφαμε την εξίσωση παλινδρόμησης (χωρίς καμία παρέκκλιση από ότι έχουμε δει μέχρι τώρα) ως εξής:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Για τις συνιστώσες του υποδείγματος θα έχουμε όπου:

- $\boldsymbol{y}$ το διάνυσμα των τιμών της μεταβλητής απόκρισης
- $\boldsymbol{X}$ ο πίνακας σχεδιασμού για τον παράγοντα σταθερών επιδράσεων
- $\boldsymbol{\beta}$ οι υπό εκτίμηση παράμετροι σταθερών επιδράσεων
- $\boldsymbol{Z}$ ο πίνακας σχεδιασμού για τον παράγοντα
- $\boldsymbol{u}$ το άγνωστο διάνυσμα τυχαίων επιδράσεων για τον αντίστοιχο παράγοντα με πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης $\boldsymbol{G}$ και $\boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{G})$
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ το διάνυσμα των τυχαίων σφαλμάτων με πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης $\boldsymbol{R}$ και $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R})$

Η διακύμανση του διανύσματος των αποκρίσεων, που θα την συμβολίζουμε με $\boldsymbol{V}$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{V} = Var[\boldsymbol{y}] = Var[\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}] = 0 + Var[\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Z}' + \boldsymbol{R}$$

Οι υπό εκτίμηση παράγοντες του υποδείγματος είναι οι $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{G}$ και $\boldsymbol{R}$ οι οποίες και εκτιμούνται με τη διαδικασία μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας με ή χωρίς περιορισμούς (Wolfinger, R., Tobias, R. and Sall, J. 1994). Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση ML που μεγιστοποιείται είναι της μορφής, όταν δεν εφαρμόζονται περιορισμοί:

$$-2L_{ML}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{R}) = ln|\boldsymbol{V}| + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} + N_T ln(2\pi)$$

όπου N_T είναι το σύνολο των παρατηρήσεων και $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\beta}$

Τώρα, όταν εφαρμόζονται περιορισμοί:

$$-2L_{REML}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{R}) = ln|\boldsymbol{V}| + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} + ln\left|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}\right| + (N_T - p) ln(2\pi)$$

Η διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων δεν είναι διαφορετική από την λεπτομερή αναφορά που έχουμε ήδη κάνει στις προηγούμενες ενότητες του αυτού κεφαλαίου. Για περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με τη γενική μορφή του μοντέλου, παραθέτω το ακόλουθο link https://www.ncss.com/software/ncss/ncss-documentation/#MixedModels κεφάλαιο Mixed Models και ενότητα Mixed Models – General https://ncss-wpengine.netdna-ssl.com/wp-content/themes/ncss/pdf/Procedures/NCSS/Mixed_Models-General.pdf.

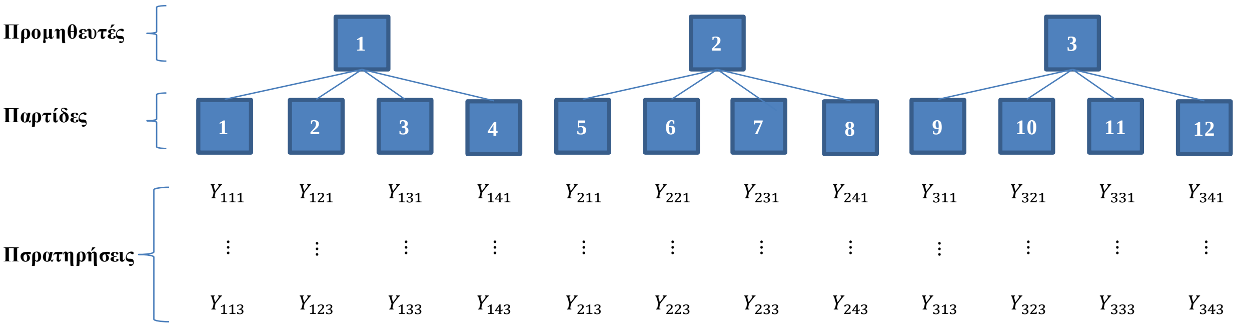
Κεφάλαιο 3

3.1 Nested models – Εμφωλευμένα ή ένθετα μοντέλα

Σε ορισμένα πολυπαραγοντικά πειράματα, τα επίπεδα ενός παράγοντα, έστω *Β*, είναι παρόμοια αλλά όχι ταυτόσημα για διαφορετικά επίπεδα ενός άλλου παράγοντα , έστω ο παράγοντας *Α*. Μια τέτοια ρύθμιση ονομάζεται ένθετος ή ιεραρχικός σχεδιασμός, με τα επίπεδα του παράγοντα *Β* να κείτονται ένθετα κάτω από τα επίπεδα του παράγοντα *Α*. Για παράδειγμα, σκεφτείτε μια εταιρεία που αγοράζει τις πρώτες ύλες της από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές. Η εταιρεία επιθυμεί να καθορίσει αν η καθαρότητα της πρώτης ύλης είναι η ίδια από κάθε προμηθευτή. Υπάρχουν τέσσερις παρτίδες των πρώτων υλών που διατίθενται από κάθε προμηθευτή και τρία προσδιοριστικά χαρακτηριστικά καθαρότητας πρέπει να λαμβάνονται από κάθε παρτίδα (Chapter 14, pages 604 – 605, Design and Analysis, of Experiments, D.C. Modgomery).

Το παραπάνω παράδειγμα περιγράφει έναν δύο σταδίων πειραματικό σχεδιασμό με ένθετους παράγοντες, όπου οι παρτίδες των πρώτων υλών φωλιάζουν κάτω από τους αντίστοιχους προμηθευτές. Ένας τέτοιος πειραματικός σχεδιασμός θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και ως ένα παραγοντικός. Ωστόσο, αν αυτό ήταν πράγματι ένα παραγοντικό πείραμα τότε η 1^{η} παρτίδα θα αφορούσε την ίδια παρτίδα πρώτης ύλης για όλους του προμηθευτές, αντίστοιχα η 2^{η} παρτίδα θα αναφέρονταν πάντα στην ίδια αντίστοιχη παρτίδα για όλους του προμηθευτές κοκ. Θα είχαμε δηλαδή παράγοντες των οποίων τα επίπεδα διασταυρώνονται. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει για την περίπτωση που εξετάζουμε εφόσον οι παρτίδες από κάθε προμηθευτή είναι μοναδικές για το συγκεκριμένο προμηθευτή. Δηλαδή, η 1^{η} παρτίδα από τον προμηθευτή 1 δεν έχει καμία σχέση με την 1^{η} παρτίδα από οποιοδήποτε άλλο προμηθευτή, η 2^{η} παρτίδα από τον προμηθευτή 1 δεν έχει καμία σχέση με την 2^{η} παρτίδα από οποιοδήποτε άλλο προμηθευτή, και ούτω καθεξής.

Για να τονίσει το γεγονός ότι οι παρτίδες από κάθε προμηθευτή είναι διαφορετικές, μπορούμε να αλλάξουμε την αρίθμηση των παρτίδων ως εξής: 1, 2, 3, και 4 από τον προμηθευτή 1 έπειτα 5, 6, 7, και 8 από τον προμηθευτή 2 και τέλος 9, 10, 11, και 12 από τον προμηθευτή 3, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Αυτό γίνεται κυρίως για να ξεχωρίζουμε περιπτώσεις παραγόντων που διασταυρώνονται (cross factors) και εμφωλευμένων παραγόντων (nested factors).

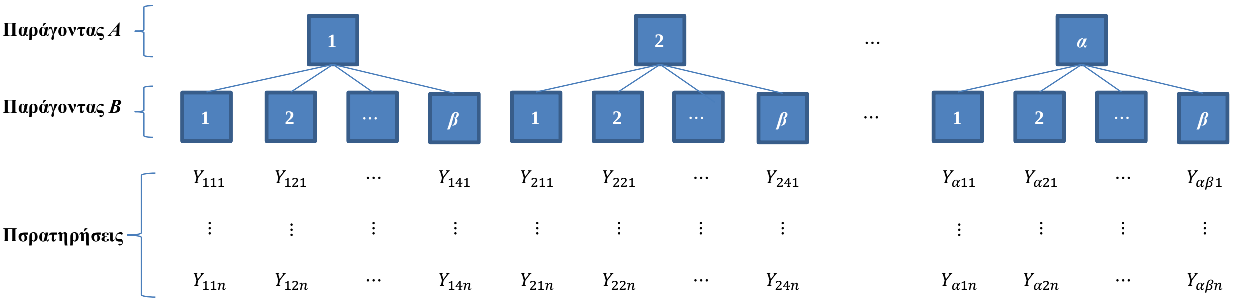


3.2 Στατιστική ανάλυση με εμφωλευμένα ή ένθετα μοντέλα

Γενικεύοντος το παράδειγμα του **δισταδιακού σχεδιασμού ένθετων παραγόντων**, δίνουμε παρακάτω τη βασική δομή του μοντέλου που χρησιμοποιείτε στις περιπτώσεις αυτές, εισάγοντας και τον αντίστοιχους συμβολισμούς για τη διάκριση των ιδιαιτεροτήτων του σχεδιασμού. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + e_{(ij)k} \text{ με } \begin{cases} i = 1,2, \dots, a \\ j = 1,2, \dots, \beta \\ k = 1,2, \dots, n \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ένα ίδιο πλήθος[8] β επιπέδων του παράγοντα B, είναι ένθετα σε κάθε ένα από τα α στο πλήθος επίπεδα του παράγοντα A, με n παρατηρήσεις σε επίπεδο του B. Ο συμβολισμός $j(i)$ αποδίδει το i επίπεδο του παράγοντα A που βρίσκεται εμφωλευμένο στο j επίπεδο του παράγοντα B ενώ αντίστοιχα ο $(ji)k$ χρησιμοποιείται για τον όρο του σφάλματος.



Αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων δεν μπορεί να υφίσταται (όπως έχει σχεδιαστεί) αφού τα επίπεδα του παράγοντα B δεν εμφανίζεται σε κάθε ένα από τα επίπεδα του παράγοντα A. Ωστόσο, επειδή (α) σε κάθε επίπεδο του A αντιστοιχεί το ίδιο πλήθος επιπέδων

[8] Προσοχή, τα επίπεδα του B που κείτονται ένθετα στα αντίστοιχα επίπεδα του A, δεν είναι τα ίδια ανά επίπεδο του A. Έχουν μόνο το ίδιο πλήθος.

του B και (β) σε κάθε επίπεδο του τελευταίου υπάρχει το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων, ο σχεδιασμός αυτός θεωρείται ισορροπημένος.

Προχωράμε τώρα με τη παράθεση των συνιστωσών μεταβλητότητας για τη περίπτωση που μας απασχολεί και συγκεκριμένα δίνουμε τα αθροίσματα των μέσων τετραγωνικών διαφορών:

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{\dots}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left[(\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\dots}) + (\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\dots}) + (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{Y}_{\dots}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot})\right]^2 =$$

$$= \underbrace{\beta n\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2}_{SSA} + \underbrace{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\left(\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot}\right)^2}_{SSB(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot}\right)^2}_{SSE} =$$

$$= SSA + SSB(A) + SSE$$

Προφανώς, διαιρώντας κάθε ένα από αυτά τα αθροίσματα με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας θα πάρουμε τους γνωστούς λόγους των μέσων τετραγώνων. Υπό την προϋπόθεση ότι τα κατάλοιπα κατανέμονται ανεξάρτητα, ακλουθώντας κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση σ^2, οι προαναφερθέντες λόγοι των μέσων τετραγώνων ακολουθούν την κατανομή F και είναι αυτοί που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για την διεξαγωγή των ελέγχων που αφορούν τις επιδράσεις των παραγόντων. Τώρα, οι αντίστοιχες αναμενόμενες μέσες τιμές, ανάλογα με τις ιδιότητες των παραγόντων, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$\boldsymbol{E(MS)}$	$\boldsymbol{A}$ σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{B}$ σταθερών επιδράσεων	$\boldsymbol{A}$ σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{B}$ τυχαίων επιδράσεων	$\boldsymbol{A}$ τυχαίων επιδράσεων $\boldsymbol{B}$ τυχαίων επιδράσεων
$\boldsymbol{E(MSA)}$	$\boldsymbol{\sigma^2 + \frac{\beta n \sum a_i^2}{a-1}}$	$\boldsymbol{\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + \frac{\beta n \sum a_i^2}{a-1}}$	$\boldsymbol{\sigma^2 + \beta n\sigma_\alpha^2 + n\sigma_\beta^2}$
$\boldsymbol{E[MSA(B)]}$	$\boldsymbol{\sigma^2 + \frac{n\sum\sum \beta_{j(i)}^2}{a(\beta-1)}}$	$\boldsymbol{\sigma^2 + n\sigma_\beta^2}$	$\boldsymbol{\sigma^2 + n\sigma_\beta^2}$
$\boldsymbol{E(MSE)}$	$\boldsymbol{\sigma^2}$	$\boldsymbol{\sigma^2}$	$\boldsymbol{\sigma^2}$

Πίνακας 3.1

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πώς προσεγγίζουμε κατά περίπτωση, ανάλογα με τη φύση των παραγόντων που εξετάζουμε. Έτσι, αν:

- οι παράγοντες A και B είναι σταθερών επιδράσεων τότε η εξέταση των επιδράσεών τους επικεντρώνεται στον έλεγχο των υποθέσεων $H_0\colon a_i = 0$ και $H_0\colon \beta_{j(i)} = 0$ αντίστοιχα. Οι έλεγχοι στηρίζονται στις στατιστικές ελέγχου $F_A = \frac{MSA}{MSE}$ και $F_{B(A)} =$

$\frac{MSB(A)}{MSE}$. Οι αρχικές υποθέσεις απορρίπτονται αν $F_A > F_{\alpha-1,\alpha\beta(n-1),\alpha}$ και $F_{B(A)} > F_{\alpha(\beta-1),\alpha\beta(n-1),\alpha}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α.

- οι παράγοντες A και B είναι τυχαίων επιδράσεων τότε η εξέταση των επιδράσεών τους επικεντρώνεται στον έλεγχο των υποθέσεων $H_0: \sigma_\alpha^2 = 0$ και $H_0: \sigma_\beta^2 = 0$. Οι έλεγχοι αντίστοιχα στηρίζονται στις στατιστικές $F_A = \frac{MSA}{MSB(A)}$ και $F_{B(A)} = \frac{MSB(A)}{MSE}$. Απορρίπτουμε τις υπό έλεγχο υποθέσεις αν $F_A > F_{\alpha-1,\alpha(\beta-1),\alpha}$ και $F_{B(A)} > F_{\alpha(\beta-1),\alpha\beta(n-1),\alpha}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α.
- ο παράγοντας A είναι σταθερών και ο B τυχαίων επιδράσεων τότε η εξέταση των επιδράσεών τους θα αφορά τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0: a_i = 0$ και $H_0: \sigma_\beta^2 = 0$. Οι έλεγχοι αντίστοιχα στηρίζονται στις στατιστικές $F_A = \frac{MSA}{MSB(A)}$ και $F_{B(A)} = \frac{MSB(A)}{MSE}$. Και σε αυτή τη περίπτωση οι αρχικές υποθέσεις απορρίπτονται αν $F_A > F_{\alpha-1,\alpha(\beta-1),\alpha}$ και $F_{B(A)} > F_{\alpha(\beta-1),\alpha\beta(n-1),\alpha}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Τα αθροίσματα των τετραγωνικών αποκλίσεων θα δίνονται συνοπτικά από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} {Y_{ijk}}^2 - \frac{Y_{\cdots}^2}{\alpha\beta n}$$

$$SSA = \frac{1}{\beta n}\sum_{i=1}^{a} Y_{i\cdot\cdot}^2 - \frac{Y_{\cdots}^2}{\alpha\beta n}$$

$$SSB(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta} Y_{ij\cdot}^2 - \frac{1}{\beta n}\sum_{i=1}^{a} Y_{i\cdot\cdot}^2$$

Με μια πιο σκωπτική αναφορά, αποβλέποντας στο να τονιστεί το γεγονός ότι ο παράγοντας B είναι ένθετος στον A παράγοντα

$$SSB(A) = \sum_{i=1}^{a}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\beta} Y_{ij\cdot}^2 - \frac{Y_{i\cdot\cdot}^2}{\beta n}\right]$$

Και τέλος

$$SSE = SST - [SSA + SSB(A)]$$

Για τη συνέχεια, θα βασιστούμε στα όσα έχουμε αναφέρει έως τώρα, επιδιώκοντας μια μορφή ανακεφαλαίωσης των προσεγγίσεων σε σχεδιασμούς ανάλογα με τη δομή των δεδομένων και το ζητούμενο των πειραμάτων. Από τα μοντέλα σταθερών επιδράσεων περάσαμε σε αυτά των τυχαίων και μικτών επιδράσεων για να φτάσουμε στα εμφωλευμένα μοντέλα τα οποία συνδυάζουν παράγοντες μικτών επιδράσεων. Εξειδικεύοντας περισσότερο και στηριζόμενοι στη λογική των ένθετων μοντέλων, δίνουμε μια ακόμη διάσταση στους παραγοντικούς σχεδιασμούς προσθέτοντας και την περίπτωση **των τυχαιοποιημένων σχεδιασμών ομάδων με υποομάδες** ή διαφορετικά split plot μοντέλων.

3.3 Τυχαιοποιημένοι σχεδιασμοί ομάδων με υποομάδες (Split Plot Design)

Γνωρίζουμε ότι κάθε σχεδιασμός προέρχεται από μια δεδομένη ανάγκη βελτιστοποίησης μιας πρακτικής διαδικασίας κάτι που είναι ακόμη πιο έντονο όταν οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι περισσότερο εξειδικευμένες λόγω κυρίως της φύσεως των παραγόντων που «καλούνται» να υπεισέλθουν σε ένα παραγοντικό πείραμα. Έτσι, και πάλι στη λογική της στρατηγικής των ομαδοποιήσεων όπως μέχρι τώρα έχουμε δει, θα περιγράψουμε τον σχεδιασμό των ομάδων με υποομάδες χρησιμοποιώντας συγκεκριμένο παράδειγμα βάσει του οποίου θα θεμελιώσουμε και το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο.

Θεωρούμε την περίπτωση δυο παραγόντων οι οποίοι ωστόσο εφαρμόζονται σε διαφορετικούς χρόνους: πρώτα παράγονται τρία μείγματα σοκολάτας που αναφέρονται ως τα επίπεδα του παράγοντα A και διαδοχικά, στο ενδιάμεσο της παραγωγής των τριών μειγμάτων σοκολάτας, εφαρμόζονται δε μια δεύτερη φάση, τέσσερις διαφορετικές μέθοδοι επεξεργασίας (επίπεδα του παράγοντα B) του κάθε μείγματος αφού αυτά χωριστούν ισόποσα σε τέσσερα τμήματα. Θα λέγαμε, με μια καλύτερη διατύπωση, ότι οι δυο παράγοντες εφαρμόζονται σε διαδοχικές φάσεις όπου πρώτα παράγεται το μείγμα του πρώτου είδους/μείγματος σοκολάτας και στη συνέχεια, αφού χωριστεί το μείγμα αυτό σε τέσσερα μέρη, εφαρμόζεται στο το καθένα και μια από τις τέσσερις μεθόδους επεξεργασίας. Αυτό όπως είπαμε ισχύει για το πρώτο μείγμα του οποίου η παραγωγή δεν θεωρείται ακριβώς τυχαιοποιημένη αφού η σειρά προκαθορίζεται βάσει αντικειμενικών καταστάσεων που έχουν να κάνουν με το κόστος παραγωγής όπως και με τη διαδικασία της παραγωγής αυτής καθεαυτής.

Σχηματικά η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε έχει ως εξής:

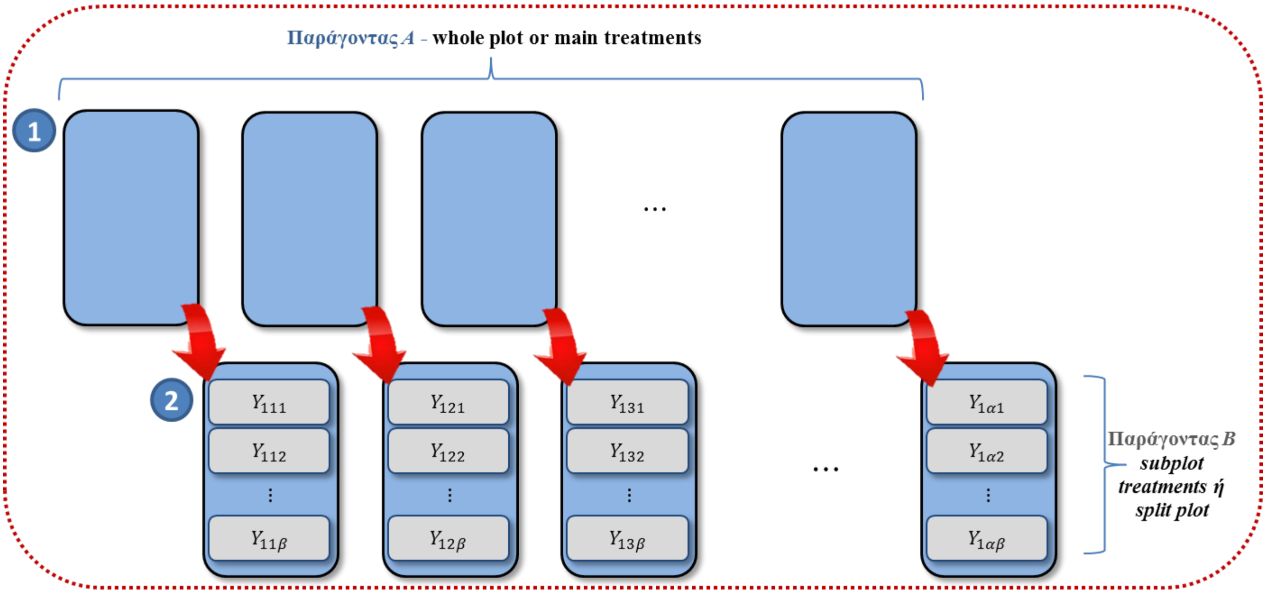
- 1^{η} φάση – παραγωγή του πρώτου μείγματος σοκολάτας. Έτσι παίρνουμε το πλαίσιο για το πρώτο επίπεδο του παράγοντα A. Τα επίπεδα του παράγοντα αυτού αποτελούν ολοκληρωμένα πειραματικά τεμάχια (whole plots) και αντιπροσωπεύουν τις κυρίως ομάδες σε έναν σχεδιασμό ομάδων με υποομάδες.

- 2η φάση – διαχωρισμός του μείγματος, έτσι ώστε να δοκιμαστεί σε τέσσερις διαφορετικές μεθόδους επεξεργασίας οι οποίες και αποτελούν τα επίπεδα του παράγοντα B. Τα επίπεδα αυτού του παράγοντα ορίζονται ως οι υποομάδες (split plots ή subplots). Στη φάση αυτή είναι δυνατό το πλήρες τυχαιοποιημένο σχέδιο, των επιπέδων του παράγοντα B επί του πρώτου επιπέδου του παράγοντα A.

Αυτό που έπεται των δυο φάσεων δεν είναι παρά η μέτρηση της μεταβλητής απόκρισης που αφορά, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, την ελαστικότητα (REL: relative elasticity) των μειγμάτων σοκολάτας υπό τις διαφορετικές μεθόδους επεξεργασίας των.

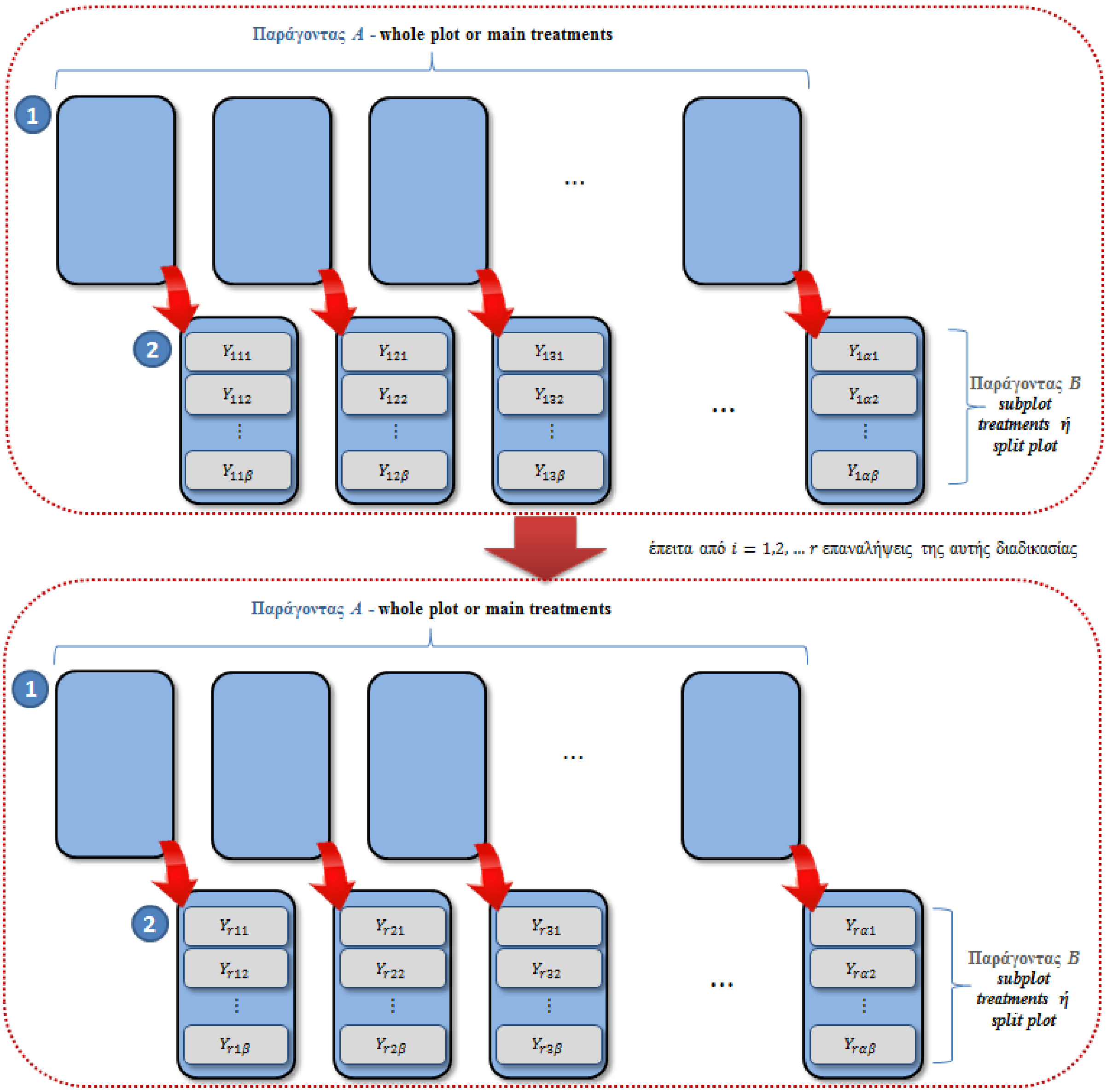
Επομένως, σε άλλο χρόνο η 1η φάση του πειράματος και σε άλλο η 2η φάση. Αυτό είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα του σχεδιασμού ομάδων σε υποομάδες. Σαν να πρόκειται για δυο πειράματα όπου στο πρώτο εφαρμόζεται ο πρώτος παράγοντας του οποίου τα επίπεδα **δύσκολα αλλάζουν** (whole plot ή main treatments) και στο δεύτερο πείραμα δοκιμάζονται **όλα τα επίπεδα** (subplot treatments ή split plot) του παράγοντα B σε συνδυασμό με το ένα επίπεδο του παράγοντα A. Οι πειραματικές μονάδες αφορούν σε πλήθος, τα επίπεδα του παράγοντα B (τα οποία μεταβάλλονται και ευκολότερα) επί του πρώτου επιπέδου του A παράγοντα.

Στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται το πείραμα για το οποίο αναφερθήκαμε ήδη και συγκεκριμένα **μια επανάληψη** αυτού. Είναι σαφής ο διαχωρισμός των φάσεων πραγματώσεως του πειράματος δεδομένης της δυσκολίας εφαρμογής του πρώτου παράγοντα από όπου λαμβάνουμε τα whole plots. Στο διάγραμμα ωστόσο απεικονίζονται περισσότερα των τριών επιπέδων για τον παράγοντα A και συγκεκριμένα, χάριν της γενίκευσης, έχουμε λάβει $j = 1,2, \dots, a$ ολοκληρωμένα τεμάχια δηλαδή επίπεδα του δύσκολα εφαρμοζόμενου παράγοντα A. Ακολουθεί. στη δεύτερη φάση, η ανάπτυξη των επιπέδων του δευτέρου παράγοντα σε κάθε ένα από τα επίπεδα του πρώτου. Και για αυτή τη περίπτωση υποθέσαμε περισσότερα των τεσσάρων επιπέδων ή αλλιώς υποομάδων ήτοι $k = 1,2, \dots, \beta$.



Αναφερθήκαμε, μέχρι τώρα, σε μια επανάληψη του πειράματος εξαντλώντας όλες τις δυνατές θεραπείες που συνδυάζουν τα επίπεδα του παράγοντα A με εκείνα του B προκειμένου να πάρουμε τις απαιτούμενες μετρήσεις για το πείραμα. Με την ίδια λογική και τους αυτούς περιορισμούς, μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία όσες φορές είναι εφικτό, έστω $i = 1,2,\ldots,r$, αυξάνοντας τους βαθμούς ελευθερίας με τους οποίους θα δουλέψουμε αφενός και αφετέρου προσθέτοντας άλλη μια διάσταση που εμπεριέχει τον χρόνο ο οποίος έτσι κι' αλλιώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη κρίση μιας παραγωγικής διαδικασίας (ως παράδειγμα) και των παραγόντων που την διαμορφώνουν και την επηρεάζουν.

Σχηματικά οι επαναλήψεις των φάσεων σε σχεδιασμούς ομάδων σε υποομάδες, δίνονται αμέσως παρακάτω. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι επαναλήψεις των εφαρμογών των παραγόντων με τη διαδοχή που περιγράψαμε, καθώς είναι αναμενόμενο, δημιουργούν μια επιπλέον διάσταση μεταβλητότητας η οποία και συμπεριλαμβάνεται στην ανάλυση ως **παράγοντας τυχαίων επιδράσεων**. Είναι δύσκολο εκ των πραγμάτων και λόγο της φύσεως των προβλημάτων που εξετάζουμε εδώ, να παραδεχθούμε ότι οι επαναλήψεις για τους παράγοντες μπορούν να πραγματωθούν ταυτόχρονα και έτσι να αγνοήσουμε την επίδραση του χρόνου ως παράγοντα τυχαίων επιδράσεων. Δεν είναι λίγες ωστόσο οι περιπτώσεις που λαμβάνονται ομάδες, κοινώς blocks, που περιλαμβάνουν όλες τις πραγματώσεις του παράγοντα ολοκληρωμένων τεμαχίων (αντί των επαναλήψεων όπως τις περιγράψαμε επιδράσεων) των οποίων οι επιδράσεις δεν θεωρούνται τυχαίες.



Το υπόδειγμα που διαμορφώνεται για την εξέταση των επιδράσεων στο παράδειγμα των δυο παραγόντων, για έναν split plot σχεδιασμό, είναι:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau\beta_{ij} +$$

$$+\gamma_k + \tau\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \tau\beta\gamma_{ijk} \text{ με } \begin{cases} i = 1,2, \dots, r \\ j = 1,2, \dots, a \\ k = 1,2, \dots, \beta \end{cases}$$

Διαχωρίσουμε το μοντέλο σε δυο μέρη που αντικατοπτρίζουν τα όσα προαναφέραμε επί της διαδικασίας με τις δυο φάσεις του πειράματος:

- Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του πρώτου παράγοντα (παράγοντα *A*) ήτοι αυτών των ολοκληρωμένων τεμαχίων (whole plots) με την παράμετρο τ_i να αντιστοιχεί στην επίδραση της i επανάληψης ή του i block, την παράμετρο β_j να αποδίδει την κύρια επίδραση του j επιπέδου του παράγοντα A και τέλος την παράμετρο $\tau\beta_{ij}$ να αντιπροσωπεύει, επί της ουσίας, το τυχαίο σφάλμα από την εφαρμογή του j επιπέδου (whole plot) του παράγοντα A στο i block ή αλλιώς την πραγμάτωση του j επιπέδου κατά την i επανάληψη. Τούτο είναι γνωστό ως whole-plot error.

- Το δεύτερο μέρος έχει συνιστώσες την παράμετρο γ_k που αφορά την κύρια επίδραση του k επιπέδου του δεύτερου παράγοντα B των υποομάδων (subplots ή split plots), την παράμετρο $\tau\gamma_{ik}$ που προσμετρά την αλληλεπίδραση μεταξύ του k επιπέδου του παράγοντα B και της i επανάληψης ή του i block, τη συνιστώσα $\beta\gamma_{jk}$ που αφορά την αλληλεπίδραση του j επιπέδου του παράγοντα A και του k επιπέδου του παράγοντα B και τέλος το σφάλμα $\tau\beta\gamma_{ijk}$ από τις μετρήσεις εφαρμογής του k επιπέδου του παράγοντα B στο επίπεδο j του παράγοντα A επί της i επανάληψης ή του i block. Το σφάλμα $\tau\beta\gamma_{ijk}$ είναι γνωστό ως subplot error.

Στη βιβλιογραφία συναντάμε και τον όρο σφάλματος e_{ijk} ο οποίος είναι ίσος με το άθροισμα $\tau\gamma_{ik} + \tau\beta\gamma_{ijk}$ βάσει του οποίου το αρχικό υπόδειγμα γράφεται και ως εξής:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau\beta_{ij} +$$
$$+\gamma_k + \beta\gamma_{jk} + e_{ijk} \text{ με } \begin{cases} i = 1,2,\dots,r \\ j = 1,2,\dots,a \\ k = 1,2,\dots,\beta \end{cases}$$

Θα γνωρίζουμε, ως προϋποθέσεις του υποδείγματος, ότι θα ισχύει $\tau_i \sim N(0,\sigma_\tau^2)$, $\tau\beta_{ij} \sim N\left(0,\sigma_{\tau\beta}^2\right)$ και για τον όρο σφάλματος $e_{ijk} \sim N(0,\sigma_e^2)$ ο οποίος είναι και ανεξάρτητος των $\tau\beta_{ij}$. Επίσης για τα αθροίσματα $\sum_j^a \beta_j = \sum_k^\beta \gamma_k = \sum_j^a \beta\gamma_{jk} = \sum_k^\beta \beta\gamma_{jk} = 0$.

Οι συνιστώσες της συνολικής μεταβλητότητας για τη περίπτωση που μας απασχολεί και συγκεκριμένα τα αθροίσματα των μέσων τετραγωνικών διαφορών δίνονται παρακάτω:

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{\beta}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}\right)^2 =$$

$$= \underbrace{r\beta\sum_{j=1}^{a}\left(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}\right)^2}_{\mathbf{SSA\ (Whole\ Plot)}} + \underbrace{a\beta\sum_{i=1}^{r}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2}_{\mathbf{SSR\ (Replicates)}} + \underbrace{\beta\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}\right)^2}_{\mathbf{SSRA\ (Whole\ Plot\ Error)}} +$$

$$+\underbrace{ar\sum_{k=1}^{\beta}(\bar{Y}_{\cdot\cdot k}-\bar{Y}_{\dots})^2}_{\boldsymbol{SSB\ (Subplot)}}+\underbrace{r\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{\beta}\left(\bar{Y}_{\cdot jk}-\bar{Y}_{\cdot j\cdot}-\bar{Y}_{\cdot\cdot k}+\bar{Y}_{\dots}\right)^2}_{\boldsymbol{SSAB\ (Interaction)}}+$$

$$\underbrace{a\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\beta}(\bar{Y}_{i\cdot k}-\bar{Y}_{i\cdot\cdot}-\bar{Y}_{\cdot\cdot k}+\bar{Y}_{\dots})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{\beta}\left(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij\cdot}-\bar{Y}_{i\cdot k}-\bar{Y}_{\cdot jk}+\bar{Y}_{i\cdot\cdot}+\bar{Y}_{\cdot j\cdot}+\bar{Y}_{\cdot\cdot k}-\bar{Y}_{\dots}\right)^2}_{\boldsymbol{SSE\ (Subplot\ Error)}}$$

$$=SSA+SSR+SSRA+SSB+SSAB+SSE$$

Διαιρώντας κάθε ένα από αυτά τα αθροίσματα με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας θα πάρουμε τους γνωστούς λόγους των μέσων τετραγώνων. Έχοντας ήδη υποθέσει τους δυο παράγοντες ως σταθερών επιδράσεων και τις επαναλήψεις ως τυχαίων επιδράσεων, στον πίνακα που ακολουθεί δίνουμε τις αναμενόμενες τιμές των μέσων τετραγώνων και για την περίπτωση που οι παράγοντες είναι τυχαίων επιδράσεων[9]:

Πηγή μεταβλητότητας	$\boldsymbol{E(MS)}$	Βαθμοί ελευθερίας	$\boldsymbol{A}$ σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{B}$ σταθερών επιδράσεων	$\boldsymbol{A}$ τυχαίων επιδράσεων $\boldsymbol{B}$ τυχαίων επιδράσεων
Επαναλήψεις	$\boldsymbol{E(MSR)}$	$\boldsymbol{r-1}$	$\boldsymbol{\alpha\beta\sigma_\tau^2+\beta\sigma_{\tau\beta}^2+\sigma_e^2}$	$\boldsymbol{\alpha\beta\sigma_\tau^2+\beta\sigma_{\tau\beta}^2+\sigma_e^2}$
Παράγοντας $\boldsymbol{A}$ ή Whole Plot	$\boldsymbol{E(MSA)}$	$\boldsymbol{\alpha-1}$	$\boldsymbol{\beta\sigma_{\tau\beta}^2+\frac{\beta r\sum\beta_j^2}{\alpha-1}+\sigma_e^2}$	$\boldsymbol{r\beta\sigma_\beta^2+\beta\sigma_{\tau\beta}^2+r\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_e^2}$
Whole Plot Error	$\boldsymbol{E(MSRA)}$	$\boldsymbol{(\alpha-1)(r-1)}$	$\boldsymbol{\beta\sigma_{\tau\beta}^2+\sigma_e^2}$	$\boldsymbol{\beta\sigma_{\tau\beta}^2+\sigma_e^2}$
Παράγοντας $\boldsymbol{B}$ ή Sub Plot	$\boldsymbol{E(MSB)}$	$\boldsymbol{\beta-1}$	$\boldsymbol{\frac{ar\sum\gamma_k^2}{\beta-1}+\sigma_e^2}$	$\boldsymbol{r\alpha\sigma_\gamma^2+r\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_e^2}$
Αλληλεπίδραση παραγόντων	$\boldsymbol{E(MSAB)}$	$\boldsymbol{(\alpha-1)(\beta-1)}$	$\boldsymbol{\frac{ar\sum\sum(\beta\gamma)_{jk}^2}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\sigma_e^2}$	$\boldsymbol{r\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_e^2}$
Subplot Error	$\boldsymbol{E(MSE)}$	$\boldsymbol{r(\alpha-1)(\beta-1)}$	$\boldsymbol{\sigma_e^2}$	$\boldsymbol{\sigma_e^2}$

Πίνακας 3.2

Σημειώνουμε εδώ κάποιες πρόσθετες προϋποθέσεις για το υπόδειγμα τυχαίων επιδράσεων είναι ότι $\tau_i\sim N(0,\sigma_\tau^2)$, $\beta_j\sim N\left(0,\sigma_\beta^2\right)$, $\tau\beta_{ij}\sim N\left(0,\sigma_{\tau\beta}^2\right)$, $\gamma_k\sim N\left(0,\sigma_\gamma^2\right)$, $\beta\gamma_{jk}\sim N\left(0,\sigma_{\beta\gamma}^2\right)$ και $e_{ijk}\sim N(0,\sigma_e^2)$.

Για τους ελέγχους που διεξάγονται, ανάλογα και με τη φύση των παραγόντων, διακρίνουμε τις δυο υποπεριπτώσεις, εκείνη των σταθερών και εκείνη των τυχαίων επιδράσεων:

[9] Εκτεταμένες αναφορές στα αναπτύγματα των αθροισμάτων καθώς και στους αντίστοιχους πίνακες ανάλυσης της διακύμανσης όπως αυτά παραθέτονται , βλέπε Larry Winner, Department of Statistics University of Florida: http://www.stat.ufl.edu/~winner/STA4211.html (Design & Analysis of Experiments) και splitplot.ppt (Design & Analysis of Split-Plot Experiments – Univariate Analysis).

- για την πρώτη περίπτωση, η εξέταση των επιδράσεών τους επικεντρώνεται στον έλεγχο των υποθέσεων $H_0\!:\beta_j = 0$, $H_0\!:\gamma_k = 0$ και για την αλληλεπίδραση $H_0\!:\beta\gamma_{jk} = 0$ αντίστοιχα. Οι έλεγχοι στηρίζονται στις στατιστικές ελέγχου $F_A = \frac{MSA}{MSRA}$, $F_B = \frac{MSB}{MSE}$ και $F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$.
- για την δεύτερη περίπτωση (των τυχαίων επιδράσεων) η εξέταση των επιδράσεών τους επικεντρώνεται στον έλεγχο των υποθέσεων $H_0\!:\sigma_\beta^2 = 0$, $H_0\!:\sigma_\gamma^2 = 0$ και $H_0\!:\sigma_{\beta\gamma}^2 = 0$. Οι έλεγχοι αντίστοιχα στηρίζονται στις στατιστικές:
  - $F_A = \frac{MSA+MSE}{MSRA+MSAB}$ με βαθμούς ελευθερίας για την κριτική τιμή που εκτιμούνται προσεγγιστικά ως $\nu_1 = \frac{(MSA+MSE)^2}{\frac{(MSA)^2}{(a-1)}+\frac{(MSE)^2}{a(r-1)(\beta-1)}}$ και $\nu_2 = \frac{(MSRA+MSAB)^2}{\frac{(MSRA)^2}{(a-1)(r-1)}+\frac{(MSAB)^2}{(a-1)(\beta-1)}}$. Εδώ απλά θυμίζουμε ότι $[E(MSA) + E(MSE)] - [E(MSRA) + E(MSAB)] = r\beta\sigma_\beta^2$
  - $F_B = \frac{MSB}{MSAB}$
  - $F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$

Κεφάλαιο 4

4.1 Εισαγωγή

Η περιπτωσιολογία των πειραμάτων οδήγησε και σε διαφορετικές απαιτήσεις σχεδιασμών. Διακρίνουμε τους πλήρως τυχαιοποιημένους σχεδιασμούς ομάδων με υποομάδες, από εκείνους όπου πρωτίστως εφαρμόζεται πλήρης τυχαιοποίηση των ομάδων (whole plots) σε ομοιογενή blocks. Οι υποομάδες (subplots), στη συνέχεια, κατανέμονται τυχαία σε κάθε ομάδα. Η πρώτη περίπτωση δεν αφορά τίποτα περισσότερο από την τυχαία κατανομή των επιπέδων του ευκόλως μεταβαλλόμενου παράγοντα σε κάθε ένα από τα επίπεδα του δυσκόλως μεταβαλλόμενου παράγοντα ενώ η δεύτερη περιγράφει ότι και η πρώτη με τη διαφορά ότι η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται και μέσα σε κάθε block με τρόπο τυχαίο όσο αφορά τα επίπεδα του δυσκόλως μεταβαλλόμενου παράγοντα.

Θα συνεχίσουμε παρακάτω προσεγγίζοντας και με τις δυο μορφές σχεδιασμού ανάλογα με τις απαιτήσεις κάθε φορά της έρευνας και των περιορισμών που αυτή συνεπάγεται ως προς το σχεδιασμό.

4.2 Το ερευνητικό ερώτημα και η περίπτωση του split plot σχεδιασμού

Υποθέτουμε ότι οι υπεύθυνοι μιας μεγάλης αλυσίδας καταστημάτων που δραστηριοποιείται στο λιανεμπόριο (κοινώς αλυσίδα σούπερ μάρκετ) επί των ηνωμένων πολιτειών, θέλουν να εξετάσουν την επίδραση που μπορούν να έχουν κάποια τηλεοπτικά διαφημιστικά spots σε συνδυασμό με προωθητικές ενέργειες, πάνω στις πωλήσεις προϊόντων ιδιωτικής ετικέτας στη πολιτεία του Τέξας η οποία είναι και η **μεταβλητή απόκρισης**. **Οι παράγοντες που εξετάζονται είναι δυο, η διαφήμιση και προωθητικές ενέργειες**, ενώ το πείραμα διεξάγεται σε βάθος χρόνου δεκαοχτώ εβδομάδων (ως replicates). Συγκεκριμένα:

Στις πρώτες έξι εβδομάδες προβάλλεται το πρώτο διαφημιστικό με πρωταγωνιστές ηθοποιούς της περιοχής (όχι κατ' ανάγκη ευρεία γνωστούς) ενώ ταυτόχρονα λαμβάνουν χώρα και τρεις προωθητικές ενέργειες ήτοι Feature, Display και TPR[10], η κάθε μια σε διαφορετικά

---

[10] A **feature** is a retailer print advertisement that is used to promote a specific product or group of products
A **display** is a mechanism used by a retailer or manufacturer to increase sales by stocking products in high traffic locations throughout the retail environment. A display is defined by its location in the retail outlet
TPR: Price Reductions are price decreases of at least 5 % from the regular shelf price.

καταστήματα της αλυσίδας. Για τις τρεις προωθητικές ενέργειες, που υιοθετήθηκαν από την αλυσίδα καταστημάτων, έχουμε τα ακόλουθα:

- **Feature**: αναφέρονται γενικότερα και ως διαφημιστικά φυλλάδια στα οποία διαφημίζεται συγκεκριμένο προϊόν ή μια ολόκληρη κατηγορία προϊόντων. Αυτά προέρχονται τόσο από τους παραγωγούς όσο και από τα καταστήματα στα οποία πωλούνται τα προϊόντα. Για να έχει νόημα και απόκριση μια τέτοια προωθητική ενέργεια, εκτός από την ενημέρωση του καταναλωτή, συχνά αυτή περιλαμβάνει και κουπόνια εκπτωτικά ή άλλες προσφορές που ισχύουν μόνο κατόπιν αγοράς.
- **Display**: αφορούν τις τοποθετήσεις προϊόντων που προέρχονται είτε από τους παραγωγούς είτε από το ίδιο το κατάστημα, σε ειδικά διακριτά ράφια πέραν της συνήθης τοποθέτησής τους. Εκτός αυτού, υπάρχει και μέριμνα τα stands αυτά να περιέχουν προϊόντα μόνο ενός, κάθε φορά, παραγωγού ή καταστήματος ενώ παράλληλα στήνονται σε σημεία των καταστημάτων που παρατηρείται υψηλή κινητικότητα καταναλωτών.
- **TPR**: πρόκειται για επίσης μια από τις πιο συνηθισμένες προωθητικές ενέργειες και αφορά αυτό που ξέρουμε ως έκπτωση τιμής η οποία για την περίπτωση που εξετάζουμε, μπορεί να μετρήσει ως ενέργεια μόνο όταν η μείωση είναι της τάξεως τουλάχιστον του 5% και για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (όχι πάνω από 6 εβδομάδες).

Αντιλαμβανόμαστε, επομένως, **ότι το πρώτο επίπεδο του παράγοντα που αφορά τη διαφήμιση είναι το spot με ηθοποιούς**. Από την άλλη, **για τις προωθητικές ενέργειες (ως δεύτερου παράγοντα) τα επίπεδα είναι τρία (Feature, Display και TPR)** και λαμβάνουν χώρα σε ισόποσα καταστήματα καθ' όλη τη διάρκεια των έξι εβδομάδων που προβάλλονται το spot με τους ηθοποιούς. **Έτσι, οι θεραπείες** (συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων) του πειράματος για τις πρώτες έξι εβδομάδες αφορούσαν (α) spot ηθοποιών και Feature (β) spot ηθοποιών και Display (γ) spot ηθοποιών και TPR. Το πλήθος των παρατηρήσεων της μεταβλητής απόκρισης είναι, για το πρώτο αυτό χρονικό διάστημα: 6 εβδομάδες × 3 spot/promotions = 18 παρατηρήσεις. Αυτές αφορούν τον τζίρο (ACV) των καταστημάτων για τα προϊόντα ενδιαφέροντος, και αντιστοιχούν στις τρεις προαναφερθείσες θεραπείες που επαναλαμβάνονται έξι φορές. Ο πίνακας 4.1 με τα πρώτα δεδομένα που ακολουθεί είναι διαφωτιστικός.

Weeks	Media campaign	Promotions	ACV	Weeks	Media campaign	Promotions	ACV
1	Actors	Display	*177*	4	Actors	Price Reduction	*135*
1	Actors	Feature	*154*	4	Actors	Feature	*107*
1	Actors	Price Reduction	*178*	4	Actors	Display	*119*
2	Actors	Feature	*110*	5	Actors	Feature	*125*
2	Actors	Price Reduction	*161*	5	Actors	Price Reduction	*145*
2	Actors	Display	*138*	5	Actors	Display	*140*
3	Actors	Feature	*105*	6	Actors	Price Reduction	*138*
3	Actors	Display	*126*	6	Actors	Display	*136*
3	Actors	Price Reduction	*135*	6	Actors	Feature	*107*

Πίνακας 4.1: Πρώτο κύμα διαφημίσεων διάρκειας έξι εβδομάδων

Μετά το πέρας του πρώτου κύματος διαφημιστικής καμπάνιας, ακολουθούν άλλες 6 εβδομάδες με προβολές διαφημίσεων για τα προϊόντα ιδιωτικής ετικέτας όπου αυτή τη φορά πρωταγωνιστούσαν παίκτες του μπάσκετ. Πρόκειται, με άλλα λόγια για το δεύτερο spot διαφήμισης που δεν είναι τίποτα άλλο από το **δεύτερο επίπεδο του πρώτου παράγοντα** των διαφημίσεων. Και πάλι, παράλληλα με την προβολή των spots, σε ισάριθμο πλήθος καταστημάτων της αλυσίδας, έτρεχαν οι προωθητικές ενέργειες όπως τις αναφέραμε ήδη στη προηγούμενη παράγραφο. Οι θεραπείες με τις αντίστοιχες τιμές που συλλέχθηκαν για την μεταβλητή απόκρισης δίνονται στον πίνακα 4.2 παρακάτω.

Weeks	Media campaign	Promotions	ACV	Weeks	Media campaign	Promotions	ACV
7	Basketball players	Feature	*159*	10	Basketball players	Display	*138*
7	Basketball players	Price Reduction	*188*	10	Basketball players	Price Reduction	*148*
7	Basketball players	Display	*173*	10	Basketball players	Feature	*104*
8	Basketball players	Display	*144*	11	Basketball players	Feature	*118*
8	Basketball players	Feature	*106*	11	Basketball players	Display	*143*
8	Basketball players	Price Reduction	*159*	11	Basketball players	Price Reduction	*171*
9	Basketball players	Display	*151*	12	Basketball players	Price Reduction	*156*
9	Basketball players	Price Reduction	*162*	12	Basketball players	Display	*142*
9	Basketball players	Feature	*112*	12	Basketball players	Feature	*106*

Πίνακας4.8: Δεύτερο κύμα διαφημίσεων διάρκειας έξι εβδομάδων

Τέλος, διεξάγεται και ο τελευταίος κύκλος διαφημιστικής καμπάνιας όπου αυτή τη φορά πρωταγωνιστούν απλοί πολίτες (καταναλωτές). Αυτό αφορά το **τρίτο επίπεδο του πρώτου παράγοντα**. Η διάρκεια όπου προβάλλεται καθορίζεται και πάλι στις έξι εβδομάδες ενώ παράλληλα βρίσκονται σε ισχύ οι προωθητικές ενέργειες με τα χαρακτηριστικά που έχουμε αναπτύξει επαρκώς στα προηγούμενα. Ο πίνακας με τις τιμές του τζίρου (μεταβλητή απόκρισης) και των αντιστοίχων θεραπειών, κείτονται στον πίνακα 4.3 που ακολουθεί.

Weeks	Media campaign	Promotions	ACV	Weeks	Media campaign	Promotions	ACV
13	Citizens	Price Reduction	*181*	16	Citizens	Price Reduction	*185*
13	Citizens	Display	*172*	16	Citizens	Feature	*143*
13	Citizens	Feature	*154*	16	Citizens	Display	*160*
14	Citizens	Display	*151*	17	Citizens	Feature	*121*
14	Citizens	Feature	*131*	17	Citizens	Display	*139*
14	Citizens	Price Reduction	*165*	17	Citizens	Price Reduction	*164*
15	Citizens	Feature	*135*	18	Citizens	Price Reduction	*156*
15	Citizens	Price Reduction	*158*	18	Citizens	Display	*158*
15	Citizens	Display	*154*	18	Citizens	Feature	*137*

Πίνακας 4.3: Τρίτο κύμα διαφημίσεων διάρκειας έξι εβδομάδων

Μπορεί κανείς να καταλάβει από τα συμφραζόμενα και έχοντας κατά νου τα όσα ειπώθηκαν στο κεφάλαιο 3, ότι ο πρώτος παράγοντας είναι ο δύσκολα μεταβαλλόμενος παράγοντας σε έναν split plot σχεδιασμό του οποίου τα επίπεδα δοκιμάζονται μεμονωμένα και σε απόλυτη αλληλουχία ενώ παράλληλα ένας δεύτερος παράγοντας επίσης δοκιμάζεται ωστόσο σε όλα του τα επίπεδα του πρώτου και ανεξαρτήτου σειράς. Ο δυσκόλως μεταβαλλόμενος παράγοντας (whole plot) δεν είναι άλλος από την τηλεοπτική διαφήμιση ενώ ο παράγοντας του οποίου όλα τα επίπεδα δοκιμάζονται ταυτόχρονα ενώ ένα μόνο του πρώτου λαμβάνει χώρα, είναι εκείνος των προωθητικών ανεργιών.

4.2.1 Εξειδικεύοντας λίγο τον σχεδιασμό μα βάσει τα δεδομένα της έρευνας

Πριν προχωρήσουμε στην εξέταση και ανάλυση των δεδομένων, όπως αυτά προέκυψαν από τους στόχους της έρευνας και τον σχεδιασμό που υποθέσαμε, είναι αναγκαίο να αναφερθούμε λίγο στο ρόλο του χρόνου. Συγκεκριμένα, αυτό που μας βοήθησε στο να σκεφτούμε τη χρήση του χρόνου είναι ο ρόλος των blocks σε ένα πείραμα ομάδων με υποομάδες (split plot). Ήδη, από την ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους, δώσαμε ιδιαίτερη έμφαση στις επαναλήψεις εφαρμογής (στο μέτρο του εφικτού) των παραγόντων που δύσκολα αλλάζουν και όχι τόσο στα blocks ως διακριτούς «χώρους» πραγμάτωσης των παραγόντων αυτών. Επομένως, χωρίς καμιά παραχώρηση στην ιδιαιτερότητα του σχεδιασμού που εκπηγάζει από τις ιδιαιτερότητες των αναγκών ενός πειράματος, προχωρήσαμε έχοντας ως διάσταση εφαρμογής (που προσμετρείται) τον χρόνο και όχι κάποια διακριτά πλαίσια που συμβατικά ονομάζουμε block. Και στις δυο περιπτώσεις ωστόσο (χρόνου ή διακριτών πλαισίων) **οι παράγοντες αυτοί θεωρούνται τυχαίων επιδράσεων**.

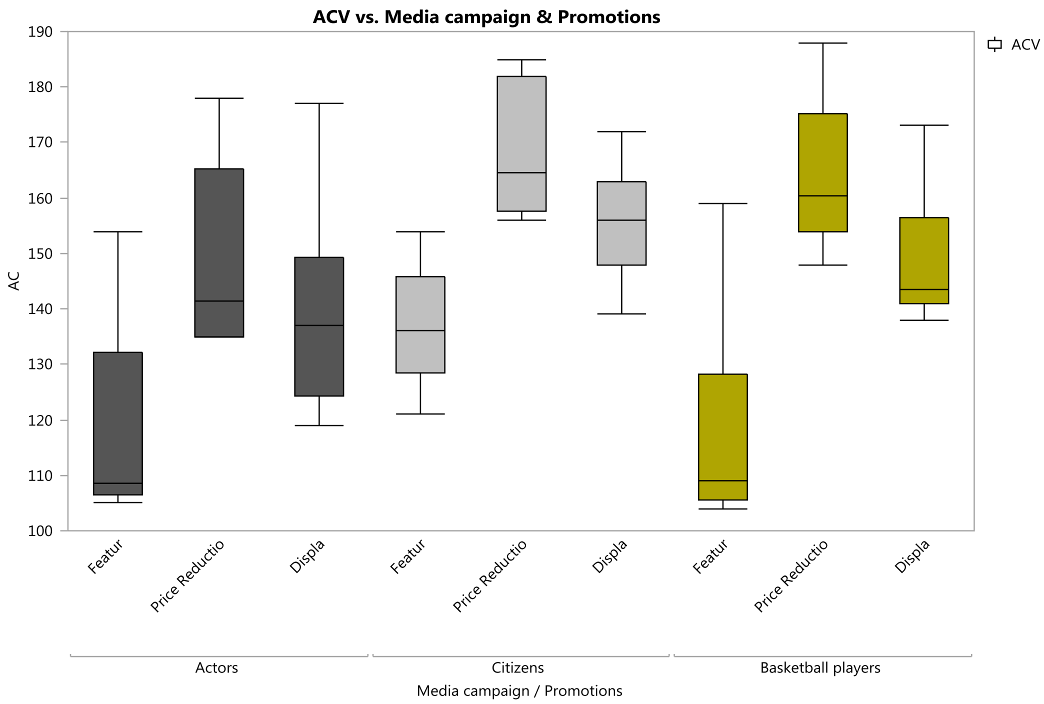
Τώρα, επιστρέφοντας πάλι στο ερευνητικό ζητούμενο και στον πειραματικό μας σχεδιασμό, επαναλαμβάνουμε συνοπτικά ότι σκοπός μας είναι η διερεύνηση τυχών θετικών επιδράσεων διαφημιστικών spots σε συνδυασμό με προωθητικές ενέργειες, επί των πωλήσεων σε προϊόντα ιδιωτικής επωνυμίας της αλυσίδας (private label products). Ενδιαφέρονται οι υπεύθυνοι της εταιρείας να εξετάσουν σε ποια περίπτωση από τις τρεις προωθητικές ενέργειες που έτρεξαν σε διάστημα δεκαοκτώ εβδομάδων σε συνδυασμό με μια διαφημιστική καμπάνια που πραγματοποιήθηκε με την προβολή τριών διαφορετικών spots (σε διαδοχικά διαστήματα το καθένα διάρκειας έξι εβδομάδων), είχε την αποδοτικότερη επίδραση επί των πωλήσεων ήτοι του τζίρου της εταιρείας.

- Η μεταβλητή απόκρισης αφορά το τζίρο και μετριέται σε χιλιάδες δολάρια Αμερικής.
- Ο δύσκολα μεταβαλλόμενος παράγοντας (whole plot) είναι η διαφημιστική καμπάνια με τρία επίπεδα σταθερών επιδράσεων ήτοι τα τρία spots
- Ο εύκολα μεταβαλλόμενος παράγοντας (subplot) είναι εκείνος των προωθητικών ενεργειών, του οποίου τα τρία επίπεδα σταθερών επιδράσεων κατανέμονται τυχαία σε καθένα από τα επίπεδα του whole plot.

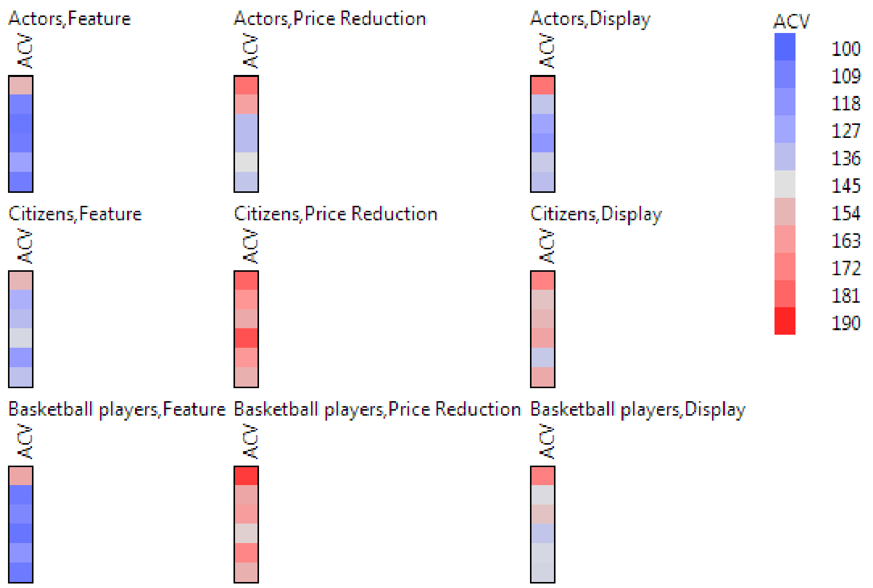
Τέλος, τα καταστήματα που λαμβάνουν μέρος στις μετρήσεις, υπήρξε πρόνοια να έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά ήτοι ως προς (α) τις ταμειακές μηχανές, (β) την έκταση χρήσης και logistics, (γ) τον αριθμό υπάλληλων (δ) τον εβδομαδιαίο τζίρο – κυρίως ως προς το προϊόν που κείται υπό έλεγχο – αλλά και (ε) την προσβασιμότητα. Σε κάθε ένα από τα καταστήματα που χρησιμοποιήθηκαν στον σχεδιασμό, εφαρμόστηκαν και διαφορετικές προωθητικές ενέργειες.

4.2.2 Μια πρώτη προσέγγιση – περιγραφικά στατιστικά

Μια αρκετά καλή εικόνα, spots και promotions, ως προς τη συμβολή στις πωλήσεις λαμβάνουμε από τα box plots που ακολουθούν στο διάγραμμα 4.2.1. Είναι χαρακτηριστική η περίπτωση της έκπτωσης στη τιμή (price reduction) όπου ως προωθητική ενέργεια δείχνει να έχει μια ιδιάζουσα επίδραση στις πωλήσεις σε σχέση με τις δυο εναλλακτικές, ενώ από την πλευρά των διαφημιστικών spots, παρατηρούμε μια αισθητή διαφοροποίηση για εκείνα που συμμετέχουν απλοί πολίτες.



Διάγραμμα 4.1: Κατανομή τζίρου ανά διαφημιστική καμπάνια και προωθητική ενέργεια



Διάγραμμα 4.2: Πυκνότητα τιμών ανά διαφημιστική καμπάνια και προωθητική ενέργεια

Συγκέντρωση, με υψηλότερες πωλήσεις, θα διαπιστώσουμε επίσης παρατηρώντας το διάγραμμα 4.3. Οι συνδυασμοί έκπτωσης των τιμών με διαφημιστικά spots που πρωταγωνίστησαν αφενός απλοί πολίτες αλλά και παίκτες του basket παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες τιμές σε πωλήσεις, κάτι που ήδη έχουμε αναφέρει από την εξέταση των θηκογραμμάτων στη προηγούμενη παράγραφο. Προφανώς, αυτό που μένει να δούμε, μέσω της ανάλυσης του πειραματικού σχεδιασμού που έπεται, είναι αν πράγματι αυτά που περιγραφικά παρατηρήσαμε ευσταθούν και στατιστικά.

4.2.3 Εκτίμηση υποδείγματος

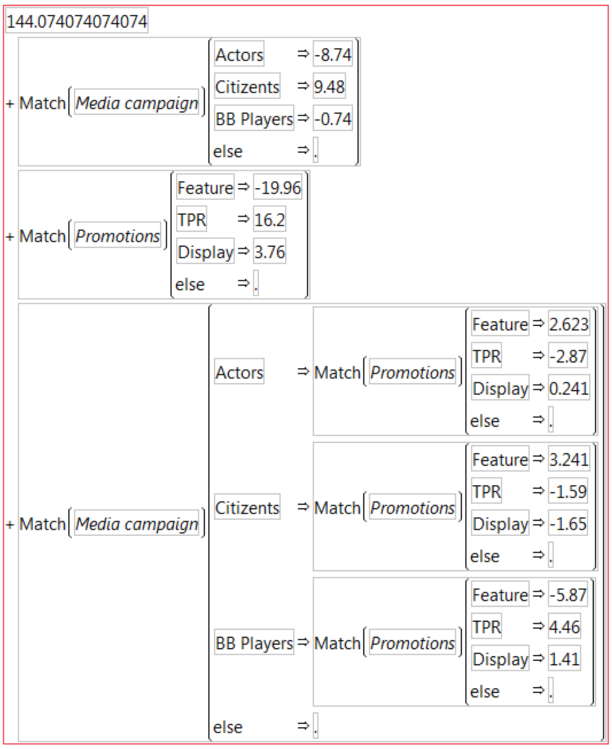
Η εκτίμηση του υποδείγματος, όπως ακριβώς το έχουμε αναπτύξει στο προηγούμενο κεφάλαιο, για ένα σχεδιασμό split plot με δυο παράγοντες σταθερών επιδράσεων και έναν τυχαίων που επί της ουσίας δεν μελετάτε ξεχωριστά αλλά η επίδρασή του υπεισέρχεται στο σφάλμα από τις επαναλήψεις των whole plots (whole plot error), δίνεται αμέσως παρακάτω. Την γενική του μορφή συνοδεύει η πραγματική εκτίμηση όπως δίνεται από το στατιστικό πακέτο της SAS (JMP – Mixed Modelling Effects).

Το μοντέλο στη γενική του μορφή

$$ACV_{ijk} = \mu + Week_i + MC_j +$$
$$+WMC_{ij} + Pr_k + MCPr_{jk} + e_{ijk}$$
$$\text{με} \begin{cases} i = 1,2,\dots,6 \\ j = 1,2,3 \\ k = 1,2,3 \end{cases}$$

Όπου ACV η εξαρτημένη μεταβλητή που αφορά το τζίρο σε χιλιάδες δολάρια, $Week_i$ οι εβδομάδες κατά την διάρκεια των οποίων έγιναν οι μετρήσεις όπου εδώ εμφανίζεται ως ο παράγοντας τυχαίων επιδράσεων, MC_j οι επιδράσεις από τα διαφημιστικά spots, WMC_{ij} γνωστό και ως whole plot error, Pr_k οι επιδράσεις από την εφαρμογή των προωθητικών ενεργειών, $MCPr_{jk}$ η αλληλεπίδραση των διαφημιστικών spots και των προωθητικών ενεργειών και e_{ijk} ο όρος σφάλματος του μοντέλου για τον οποίο θα ισχύει $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στις εκτιμήσεις του μοντέλου εμφανίζονται μόνο οι παράγοντες σταθερών επιδράσεων.

Εκτίμηση υποδείγματος



Ο πίνακας 4.4 που ακολουθεί δίνει κάποια μέτρα προσαρμογής του μοντέλου στη γραμμή των πραγματικών πωλήσεων (του τζίρου). Ενδεικτικά αναφέρουμε τον προσαρμοσμένο συντελεστή προσδιορισμού (RSquare Adj) οποίος είναι 0.956, υποδηλώνοντας μια καλή ερμηνεία της πραγματικότητας από το υπόδειγμα, όπως σχεδιάστηκε και εκτιμήθηκε.

Summary of Fit	Statistics
RSquare	0.956
RSquare Adj	0.948
Root Mean Square Error	6.152
Mean of Response	144.07
Observations (or Sum Wgts)	54

Πίνακας 4.4: Μέτρα καλής προσαρμογής του υποδείγματος

Στις εκτιμήσεις των συντελεστών του υποδείγματος (πίνακας 4.5), όταν αυτό γράφεται με τη μορφή ενός πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος, δεν εμφανίζονται οι μεταβλητές αναφοράς ανά περίπτωση. Έτσι για τον παράγοντα των διαφημιστικών spots, το επίπεδο που αναφέρεται στα spots με πρωταγωνιστές τους παίκτες του basket επιλέγεται ως μεταβλητή αναφοράς και η επίδρασή της ενσωματώνεται στη σταθερά του υποδείγματος. Έτσι, ο στατιστικά σημαντικός συντελεστής (σε επίπεδο σημαντικότητας 5%) για το επίπεδο/μεταβλητή Media campaign[Actors], προκύπτει ως η διαφορά της μέσης τιμής του επιπέδου από τον γενικό μέσο $135.3 - 144.07 = -8.74$ που σημαίνει ότι ο μέσος τζίρος που συνδέεται με την καμπάνια από ηθοποιούς υπολείπεται του γενικού μέσου τζίρου κατά 8.74 χιλιάδες δολάρια και η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική.

Parameter Estimation					
Term	**Estimate**	**Std Error**	**DFDen**	**t Ratio**	**Prob>|t|**
Intercept	144.07407	5.354562	5	26.91	<.0001*
Media campaign[Actors]	-8.740741	2.983816	10	-2.93	0.0151*
Media campaign[Citizens]	9.4814815	2.983816	10	3.18	0.0099*
Promotions[Feature]	-19.96296	1.184027	30	-16.86	<.0001*
Promotions[Price Reduction]	16.203704	1.184027	30	13.69	<.0001*
Media campaign[Actors]*Promotions[Feature]	2.6296296	1.674467	30	1.57	0.1268
Media campaign[Actors]*Promotions[Pr. Red.]	-2.87037	1.674467	30	-1.71	0.0968
Media campaign[Citizens]*Promotions[Feature]	3.2407407	1.674467	30	1.94	0.0624
Media campaign[Citizens]*Promotions[Pr. Red.]	-1.592593	1.674467	30	-0.95	0.3492

Πίνακας 4.5: Εκτιμήσεις παραμέτρων υποδείγματος

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ερμηνεύσουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές του υποδείγματος όπως εμφανίζεται με τη μορφή της παλίνδρομης. Όσο δε για τον συντελεστή που έχει να κάνει με το spot των παικτών, αυτός μπορεί να εκτιμηθεί ως η διαφορά του γενικού μέσου από το άθροισμα των συντελεστών των δυο άλλων διαφημιστικών spots. Από την τελευταία, αφαιρούμε πάλι τον γενικό μέσο για πάρουμε εκτίμηση για τον ζητούμενο συντελεστή. Πιο συγκεκριμένα: $[144.07-(-8.75+9.48)]-144.07=-0.74$.

Με τους συντελεστές του υποδείγματος θα πρέπει να είμαστε κάπως προσεκτικοί από την άποψη ότι αυτοί αποτελούν απευθείας συγκρίσεις με τον γενικό μέσο. **Αυτό ωστόσο που ενδιαφέρει περισσότερο εδώ είναι να επιλέξουμε το αποτελεσματικότερο spot όπως και το αποτελεσματικότερο promotion και επειδή αυτά τα δυο εξετάζονται και από κοινού καθώς ο split plot σχεδιασμός επιτρέπει, να δούμε εν τέλει και ποιος συνδυασμός θα πρέπει να προτιμάται για να βελτιστοποιηθούν οι πωλήσεις των private labels προϊόντων της αλυσίδας**.

Τα συμπεράσματα που μπορούν να διεξαχθούν από τον πίνακα 4.6 συνηγορούν με εκείνα του πίνακα ανάλυσης της διακύμανσης 4.7 για τους παράγοντες σταθερών επιδράσεων αλλά και της αλληλεπίδρασής τους. Υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές (5% επίπεδο σημαντικότητας) τόσο για τα επίπεδα του κάθε παράγοντα όσο και μεταξύ των αλληλοεπιδράσεών τους. Αυτό θα εξεταστεί διεξοδικότερα στην ενότητα με τις post hoc συγκρίσεις.

Fixed Effect Tests					
Source	**Nparm**	**DF**	**DFDen**	**F Ratio**	**Prob > F**
Media campaign	2	2	10	6.2468	0.0174*
Promotions	2	2	30	160.5445	<.0001*
Media campaign*Promotions	4	4	30	3.4606	0.0194*

Πίνακας 4.6: Ανάλυση Διακύμανσης των παραγόντων σταθερών επιδράσεων

Variance Components Estimates				
Random Effect	**Var Ratio**	**Var Component**	**Std Error**	**Pct of Total**
Weeks[Media campaign]	1.7835616	67.511111	35.982287	26.931
Weeks	3.8391389	145.31852	109.45378	57.969
Residual		37.851852	9.7733061	15.100
Total		250.68148	111.58234	100.000

Πίνακας 4.7: Οι συνιστώσες της διακύμανσης για τη περίπτωση των παραγόντων τυχαίων επιδράσεων

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση μας για την συγκεκριμένη ενότητα, δίνουμε μια αίσθηση της μεταβλητότητας που αντιπροσωπεύσουν οι συνιστώσες της συνολικής διακύμανσης, όπως αυτές προκύπτουν από τους παράγοντες τυχαίων επιδράσεων.

Η δομή των διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων θα δίνεται ως ακολούθως:

$$Cov(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma_\tau^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma_e^2 \text{ για } i=i', j=j', k=k' \\ \sigma_\tau^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 \text{ για } i=i', j=j', k\neq k' \\ \sigma_\tau^2 \text{ για } i\neq i', j=j' \\ 0 \text{ για } i\neq i', j\neq j' \end{cases}$$

Επομένως, με βάση τα δεδομένα του πίνακα 4.7 θα έχουμε ότι $\hat{\sigma}_\tau^2 = 67.51$, $\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 = 145.32$ και $\hat{\sigma}_e^2 = 37.85$ από τις οποίες συνιστώσες παίρνουμε τη συνολική διακύμανση των δεδομένων μας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό της μεταβλητότητας (57.97%) ερμηνεύεται από τον παράγοντα του χρόνου (weeks) και της αλληλεπίδρασής του με τον whole plot παράγοντα ήτοι αυτόν των διαφημιστικών spots. Από την άλλη, η μεταβλητότητα που προέρχεται από τον παράγοντα των τυχαίων επιδράσεων (του χρόνου) είναι περίπου δυο φορές μεγαλύτερη από εκείνη των καταλοίπων $\hat{\sigma}_\tau^2 \cong 1.78 \cdot \hat{\sigma}_e^2$ όπως και εκείνη της αλληλεπίδρασης είναι τέσσερις φορές περίπου μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των καταλοίπων του υποδείγματος $\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 \cong 3.84 \cdot \hat{\sigma}_e^2$. Τούτο είναι μια καλή ένδειξη ότι ο σχεδιασμός περιόρισε το ανερμήνευτο μέρος της μεταβλητότητας σημαντικά και ότι οι παράγοντες που υπεισέρχονται σε αυτό ερμηνεύουν ικανοποιητικά τη διαμόρφωση των πωλήσεων.

4.2.4 Post hoc έλεγχοι ανά επίπεδο παραγόντων σταθερών επιδράσεων

Προκειμένου να καταλήξουμε σε συμπεράσματα τέτοια που να μπορούμε να πάρουμε κάποιες αποφάσεις στη συνέχεια, σχετικά με το μίγμα διαφημιστικών spots και προωθητικών ενεργειών, προχωράμε σε ανά δυο ελέγχους με τη μέθοδο του Tukey's καθώς περιγράψαμε στο κεφάλαιο που προηγήθηκε.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα των post hoc ελέγχων στους πίνακες που ακολουθούν, ξεκινώντας από τους δυο παράγοντες **και κρατώντας για κάθε περίπτωση μόνο τις στατιστικά σημαντικές διαφορές του ενός επιπέδου από το άλλο για τον κάθε παράγοντα**. Οι έλεγχοι πραγματώθηκαν σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Promotions						
Level	**- Level**	Difference	Std Err Dif	Lower CL	Upper CL	p-Value
Price Reduction	Feature	36.16667	2.050795	31.11077	41.22257	<.0001
Display	Feature	23.72222	2.050795	18.66632	28.77812	<.0001
Price Reduction	Display	12.44444	2.050795	7.38854	17.50035	<.0001

Πίνακας 4.8: Ανά δυο συγκρίσεις επιπέδων του παράγοντα των Promotions

Η προωθητική ενέργεια που αποκλίνει σημαντικά από τις δυο εναλλακτικές αφορά την έκπτωση στη τιμή του προϊόντος. Είναι αυτή που είχε το θετικότερο αποτέλεσμα πάνω στις πωλήσεις και ως εκ τούτου στο τζίρο, σε σχέση με τις δυο άλλες. Ακολουθεί αυτή των

Displays σε σχέση μόνο με τα Features η οποία μοιάζει να έχει την χαμηλότερη επιρροή (πίνακας 4.8). Από την άλλη, και διαβάζοντας τα αποτελέσματα του πίνακα 4.9, βλέπουμε ότι η διαφημιστική καμπάνια που έχει γυριστεί με την συμμετοχή απλών πολιτών, έχει και την μεγαλύτερη επίδραση στις πωλήσεις.

Media campaign						
Level	**- Level**	Difference	Std Err Dif	Lower CL	Upper CL	p-Value
Citizens	Actors	18.22222	5.16812	4.05493	32.38952	0.0138

Πίνακας 4.9: Ανά δυο συγκρίσεις επιπέδων του παράγοντα των Spots

Promotions & Media campaign						
Level	**- Level**	Difference	Std Err Dif	Lower CL	Upper CL	p-Value
Citizens,Price Reduction	Basketball players,Feature	50.66667	5.926296	29.7105	71.62279	<.0001
Citizens,Price Reduction	Actors,Feature	50.16667	5.926296	29.2105	71.12279	<.0001
Basketball players,Price Reduction	Basketball players,Feature	46.5	3.552082	34.6449	58.35509	<.0001
Basketball players,Price Reduction	Actors,Feature	46	5.926296	25.0439	66.95612	<.0001
Citizens,Display	Basketball players,Feature	38.16667	5.926296	17.2105	59.12279	0.0002
Citizens,Display	Actors,Feature	37.66667	5.926296	16.7105	58.62279	0.0002
Citizens,Price Reduction	Citizens,Feature	31.33333	3.552082	19.4782	43.18842	<.0001
Actors,Price Reduction	Basketball players,Feature	31.16667	5.926296	10.2105	52.12279	0.0017
Basketball players,Display	Basketball players,Feature	31	3.552082	19.1449	42.85509	<.0001
Actors,Price Reduction	Actors,Feature	30.66667	3.552082	18.8116	42.52176	<.0001
Basketball players,Display	Actors,Feature	30.5	5.926296	9.5439	51.45612	0.0021
Citizens,Price Reduction	Actors,Display	28.83333	5.926296	7.8772	49.78945	0.0037
Basketball players,Price Reduction	Citizens,Feature	27.16667	5.926296	6.2105	48.12279	0.0064
Basketball players,Price Reduction	Actors,Display	24.66667	5.926296	3.7105	45.62279	0.0148
Actors,Display	Basketball players,Feature	21.83333	5.926296	0.8772	42.78945	0.0377
Actors,Display	Actors,Feature	21.33333	3.552082	9.4782	33.18842	<.0001
Citizens,Display	Citizens,Feature	18.83333	3.552082	6.9782	30.68842	0.0003
Basketball players,Price Reduction	Basketball players,Display	15.5	3.552082	3.6449	27.35509	0.0038

Πίνακας 4.10: Ανά δυο συγκρίσεις των επιπέδων του παράγοντα των Spots&Promotions

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα δεδομένα του πίνακα 4.10 και τούτο γιατί μπαίνουμε στη διαδικασία συγκρίσεων μιγμάτων διαφημιστικής καμπάνιας και προωθητικής ενέργειας το οποίο είναι και ένα από τα βασικότερα ζητούμενα της έρευνας, προκειμένου να προχωρήσει η εταιρεία σε αποδοτικούς σχεδιασμούς στήριξης του προϊόντος της μέσω τηλεοπτικών διαφημίσεων και συγκεκριμένων προωθητικών ενεργειών. Έτσι, διακρίνουμε δυο συνδυασμούς που καθώς τα αποτελέσματα δείχνουν επιφέρουν και τα καλύτερα αποτελέσματα εφόσον διαφέρουν στατιστικά σημαντικά με τους υπόλοιπους:

- Τηλεοπτικά spots με απλούς πολίτες και έκπτωση στη τιμή του προϊόντος
- Τηλεοπτικά spots με παίκτες του basket και έκπτωση στη τιμή του προϊόντος

Ωστόσο, το τι τελικά θα επιλεγεί δεν μπορεί να αποφασιστεί τελεσίδικα με βάση μόνο τα συμπεράσματα που προηγήθηκαν. Αυτό συμβαίνει για λόγους που ελάχιστα θα αναπτύξουμε στα τελικά συμπεράσματα μιας και βρίσκονται εκτός των επιδιώξεων της παρούσας έρευνας.

4.2.5 Συμπεράσματα από την split plot ανάλυση

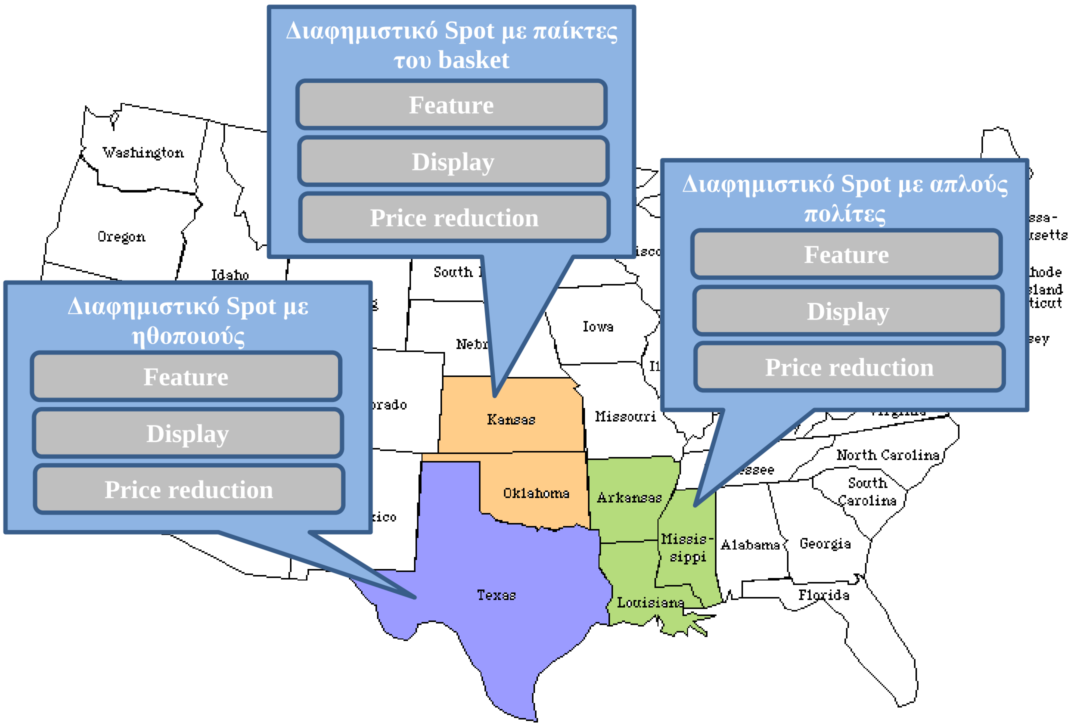
Από τα όσα ήδη έχουμε εξετάσει, θα επιμείνουμε στα συμπεράσματα που διεξήχθησαν από την ανάλυση της παραγράφου 4.2.4 με τους ανά δυο ελέγχους των αλληλεπιδράσεων. Διακρίναμε τις περιπτώσεις συνδυασμών με τις μεγαλύτερες διαφορές στην επίδραση των πωλήσεων ήτοι (α) τα τηλεοπτικά spots με απλούς πολίτες και έκπτωση στη τιμή του προϊόντος (β) τα τηλεοπτικά spots με παίκτες του basket και έκπτωση στη τιμή του προϊόντος, χωρίς ωστόσο αυτό να μπορεί από μόνο του να οδηγήσει και στις τελικές αποφάσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί εκτός από τις αποδόσεις προωθητικών ενεργειών ή διαφημιστικών καμπανιών, πάντα μετράμε το καθαρό αποτέλεσμα της επένδυσης, γνωστό ως return of investment (ROI). Αν στη πραγματικότητα αυτό που επέφερε η σύνθεση διαφήμισης και προωθητικής ενέργειας ως επιπλέον τζίρο επί του προϊόντος, είναι τελικά χαμηλότερο ή έστω ίσο με τη δαπάνη της επένδυσης που έκανε η επιχείρηση, τότε μάλλον θα ήταν φρόνιμο να αποφύγουμε τη χρηματοδότηση ενός τέτοιου συνδυασμού. Κοντολογίς, λαμβάνουμε υπόψη και το ύψος των δαπανών πριν τις τελικές αποφάσεις.

Στο παράδειγμά μας, η διαφήμιση με απλούς πολίτες ήταν χαμηλού κόστους (σε σχέση με τις άλλες δυο) ενώ τα τρία promotions δεν διέφεραν από πλευράς κόστους. Επομένως, μια διαφαινόμενη καλή επιλογή θα μπορούσε είναι τα τηλεοπτικά spots με απλούς πολίτες και έκπτωση στη τιμή του προϊόντος.

4.3 Η περίπτωση του πλήρως τυχαιοποιημένου σχεδιασμού (CRD)

Υποθέτουμε τώρα, ότι οι υπεύθυνοι της αλυσίδας των super markets θέλουν να εξετάσουν το ίδιο ακριβώς θέμα, καθώς ορίστηκε στα προηγούμενα, ωστόσο αλλάζοντας τον σχεδιασμό από split plot σε CRD (completely randomized design). Η αλλαγή αυτή έγκειται στο ότι τα δεδομένα μας προέρχονται τώρα από τρεις διαφορετικές περιοχές και από μετρήσεις του τζίρου σε βάθος χρόνου έξι εβδομάδων. **Τα διαφημιστικά spots προβάλλονται ταυτόχρονα**, ένα σε κάθε περιοχή, ενώ οι προωθητικές ενέργειες λαμβάνουν χώρα παράλληλα σε καταστήματα και των τριών περιοχών.

Παρακάτω, δίνεται ένας χάρτης του πειρατικού σχεδιασμού. Σε αυτό απεικονίζονται (α) οι περιοχές όπου προβλήθηκαν τα τρία διαφημιστικά spots, και τα οποία για την έρευνα **θα αποτελούν τα επίπεδα ενός παράγοντα σταθερών επιδράσεων** και (β) το πώς κατανέμονται οι προωθητικές ενέργειες μέσα σε κάθε διακριτή περιοχή. **Τα επίπεδα του δευτέρου αυτού παράγοντα των προωθητικών ενεργειών είναι επίσης σταθερών επιδράσεων** και κατανέμονται στο σύνολό τους τυχαία σε κάθε επίπεδο του πρώτου παράγοντα.



Χάρτης 4.1: Πλήρως τυχαιοποιημένος σχεδιασμός δυο παραγόντων

Ο χρόνος σε εβδομάδες θεωρείται (όπως είναι και αναμενόμενο) παράγοντας τυχαίων επιδράσεων και λειτουργεί όπως ακριβώς θα λειτουργούσαν και οι επαναλήψεις (replicates) σε ένα αντίστοιχο πείραμα πλήρως τυχαιοποιημένου σχεδιασμού.

Ακολουθεί ο πίνακας με τα δεδομένα του πειράματος όπως το έχουμε περιγράψει. Μπορούμε έτσι να διακρίνουμε καλύτερα τους συνδυασμούς των επιπέδων των εμπλεκομένων παραγόντων (δηλαδή οι θεραπείες του πειράματος). Οι μετρήσεις του τζίρου είναι ακριβώς οι ίδιες όπως και στη περίπτωση του split plot σχεδιασμού, το ίδιο συμβαίνει και για τους παράγοντες και τη φύση αυτών (μικτών επιδράσεων) αλλά και για τα επίπεδα των παραγόντων. Επαναλαμβάνουμε ότι αυτό που αλλάζει είναι ο τρόπος με τον οποίο σχεδιάστηκε το πείραμα, τρόπος που συνδέεται με τις ιδιαιτερότητες της έρευνας.

Week	Media campaign	Promotions	ACV	Week	Media campaign	Promotions	ACV
1	Actors	Feature	*154*	2	Actors	Feature	*110*
1	Actors	Display	*177*	2	Actors	Display	*138*
1	Actors	Price Reduction	*178*	2	Actors	Price Reduction	*161*
1	Citizens	Feature	*154*	2	Citizens	Feature	*131*
1	Citizens	Display	*172*	2	Citizens	Display	*151*
1	Citizens	Price Reduction	*181*	2	Citizens	Price Reduction	*165*
1	Basketball players	Feature	*159*	2	Basketball players	Feature	*106*
1	Basketball players	Display	*173*	2	Basketball players	Display	*144*
1	Basketball players	Price Reduction	*188*	2	Basketball players	Price Reduction	*159*
Week	Media campaign	Promotions	ACV	Week	Media campaign	Promotions	ACV
3	Actors	Feature	*105*	4	Actors	Feature	*107*
3	Actors	Display	*126*	4	Actors	Display	*119*
3	Actors	Price Reduction	*135*	4	Actors	Price Reduction	*135*
3	Citizens	Feature	*135*	4	Citizens	Feature	*143*
3	Citizens	Display	*154*	4	Citizens	Display	*160*
3	Citizens	Price Reduction	*158*	4	Citizens	Price Reduction	*185*
3	Basketball players	Feature	*112*	4	Basketball players	Feature	*104*
3	Basketball players	Display	*151*	4	Basketball players	Display	*138*
3	Basketball players	Price Reduction	*162*	4	Basketball players	Price Reduction	*148*
Week	Media campaign	Promotions	ACV	Week	Media campaign	Promotions	ACV
5	Actors	Feature	*125*	6	Actors	Feature	*107*
5	Actors	Display	*140*	6	Actors	Display	*136*
5	Actors	Price Reduction	*145*	6	Actors	Price Reduction	*138*
5	Citizens	Feature	*121*	6	Citizens	Feature	*137*
5	Citizens	Display	*139*	6	Citizens	Display	*158*
5	Citizens	Price Reduction	*164*	6	Citizens	Price Reduction	*156*
5	Basketball players	Feature	*118*	6	Basketball players	Feature	*106*
5	Basketball players	Display	*143*	6	Basketball players	Display	*142*
5	Basketball players	Price Reduction	*171*	6	Basketball players	Price Reduction	*156*

Πίνακας 4.11

4.3.1 Εκτίμηση υποδείγματος μεικτών επιδράσεων

Η γενική μορφή του υποδείγματος που εκτιμήσαμε, με βάση τις υποθέσεις και τον σχεδιασμό που στα προηγούμενα παραθέσαμε, δίνεται αμέσως πιο κάτω. Αυτό που θα παρατηρήσουμε είναι ότι το τρέχον υπόδειγμα μεικτών επιδράσεων διαφέρει ως προς τη σύνθεση των παραμέτρων του split plot υποδείγματος, Στη περίπτωση που αντιμετωπίζουμε τώρα, έχει επαλειφθεί η παράμετρος του whole plot error ενώ δεν έχουμε εκτιμήσει στο μοντέλο αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων σταθερών και τυχαίων επιδράσεων εφόσον ήταν έξω από τα ζητούμενα της έρευνας.

$$ACV_{ijk} = \mu + Week_i + MC_j + +Pr_k + MCPr_{jk} + e_{ijk} \text{ με } \begin{cases} i = 1,2,\ldots,6 \\ j = 1,2,3 \\ k = 1,2,3 \end{cases}$$

Επαναλαμβάνουμε και πάλι ότι, όπου ACV είναι η μεταβλητή απόκρισης που αφορά το τζίρο σε χιλιάδες δολάρια, $Week_i$ οι εβδομάδες κατά την διάρκεια των οποίων έγιναν οι μετρήσεις που υπεισέρχεται στο υπόδειγμα ως ο παράγοντας τυχαίων επιδράσεων, MC_j οι επιδράσεις από τα διαφημιστικά spots, Pr_k οι επιδράσεις από την εφαρμογή των προωθητικών ενεργειών, $MCPr_{jk}$ η αλληλεπίδραση των διαφημιστικών spots και των προωθητικών ενεργειών και τέλος e_{ijk} ο όρος σφάλματος του μοντέλου για τον οποίο θα ισχύει $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$.

Από τις στατιστικές του πίνακα 4.12 είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι το μοντέλο που εκτιμήσαμε προσαρμόζει αρκετά καλά στα δεδομένα με προσαρμοσμένο συντελεστή προσδιορισμού (RSquare Adj) ίσο με 0.844.

Summary of Fit	**Statistics**
RSquare	0.867
RSquare Adj	0.844
Root Mean Square Error	9.407
Mean of Response	144.07
Observations (or Sum Wgts)	54

Πίνακας 4.12: Μέτρα καλής προσαρμογής του υποδείγματος

Η ερμηνεία των επιδράσεων, όπως αυτές παρατίθενται στον πίνακα 4.13, είναι ακριβώς ή ίδια όπως αυτή που προηγήθηκε με τον σχεδιασμό split plot. Στον ίδιο πίνακα, τα στοιχεία της ανάλυσης των παραγόντων σταθερών επιδράσεων είναι εκείνα που ενδιαφέρουν και εξετάζονται κυρίως. Το γεγονός ότι οι εβδομάδες διεξαγωγής του πειράματος ορίστηκαν τυχαία, καλύπτοντας μια συγκεκριμένη μόνο περίοδο μέσα στο χρόνο, καθιστά τον παράγοντα του χρόνου, παράγοντα τυχαίων επιδράσεων όπου μάλιστα για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευσα έχει ελάσσονα σημασία. Επί των αποτελεσμάτων και σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, επισημαίνονται στατιστικά σημαντικές διαφορές τόσο για τα επίπεδα των δυο παραγόντων όσο των αλληλοεπιδράσεών τους. Ωστόσο αυτό θα εξεταστεί και στους post hoc ελέγχους που θα ακολουθήσουν.

Fixed Effect Tests					
Source	**Nparm**	**DF**	**DFDen**	**F Ratio**	**Prob > F**
Media campaign	2	2	40	6.2468	0.0174
Promotions	2	2	40	160.5445	<.0001
Media campaign*Promotions	4	4	40	3.4606	0.0194

Πίνακας 4.13: Ανάλυση Διακύμανσης των παραγόντων σταθερών επιδράσεων

Πράγματι, παρατηρώντας τα αποτελέσματα των ανά δυο ελέγχων για τα επίπεδα του παράγοντα των διαφημιστικών ενεργειών (πίνακας 4.14), βλέπουμε ότι:

- η έκπτωση στη τιμή διαφέρει στατιστικά σημαντικά από τις δυο άλλες εναλλακτικές ενέργειες με πολύ μεγαλύτερη συμβολή στην ενίσχυση του συνολικού τζίρου για τα προϊόντα ιδιωτικής ετικέτας
- τα displays διαφέρουν επίσης σε σχέση με τα features τα οποία υπολείπονται σημαντικά έναντι των άλλων δυο ενεργριών

Promotions						
Level	**- Level**	Difference	Std Err Dif	Lower CL	Upper CL	p-Value
Price Reduction	Feature	36.16667	3.135552	28.53498	43.79835	<.0001
Display	Feature	23.72222	3.135552	16.09054	31.35391	<.0001
Price Reduction	Display	12.44444	3.135552	4.81276	20.07613	0.0008

Πίνακας 4.14: Ανά δυο συγκρίσεις επιπέδων του παράγοντα των Promotions

Media campaign						
Level	**- Level**	Difference	Std Err Dif	Lower CL	Upper CL	p-Value
Citizens	Actors	18.22222	3.135552	10.59054	25.85391	<.0001
Citizens	BB players	10.22222	3.135552	2.59054	17.85391	0.0063
BB players	Actors	8	3.135552	0.36832	15.63168	0.0381

Πίνακας 4.15: Ανά δυο συγκρίσεις επιπέδων του παράγοντα των Media campaign

Παράλληλα, στο πεδίο των διαφημιστικών καμπανιών, τα spots εκείνα που γυρίστηκαν με τη συμμετοχή απλών καταναλωτών, φαίνεται να δεσπόζουν συγκριτικά με τα δυο άλλα spots αφού παρατηρούνται διαφορές στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Ακολουθούν τα spots με τους παίκτες του μπάσκετ ως πρωταγωνιστές, όπου η συμβολή τους στη διαμόρφωση υψηλότερου τζίρου, είναι στατιστικά σημαντική σε σχέση με εκείνη των spots από ηθοποιούς.

4.3.2 Αλληλεπιδράσεις παραγόντων και συμπεράσματα επί των ευρημάτων

Εκείνο όμως που θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε από την συγκεκριμένη έρευνα, κάτι που αποτελεί και το ζητούμενο, είναι η επισήμανση εκείνου του συνδυασμού διαφημιστικού spot και προωθητικής ενέργειας που προσθέτει περισσότερο στην αύξηση του τζίρου (incremental). Τα αποτελέσματα του πίνακα 16, μπορούν να μας κατατοπίσουν ως προς αυτό. Έχοντας παραθέσει **τις στατιστικά μόνο σημαντικές διαφορές**, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, μπορούμε να οδηγηθούμε σε ένα πρώτο συμπέρασμα ως προς τον καταλληλότερο συνδυασμό.

Promotions & Media campaign						
Level	**- Level**	Difference	Std Err Dif	Lower CL	Upper CL	p-Value
Citizens,Price Reduction	Basketball players,Feature	50.66667	5.430936	32.8691	68.46419	<.0001
Citizens,Price Reduction	Actors,Feature	50.16667	5.430936	32.3691	67.96419	<.0001
Basketball players,Price Reduction	Basketball players,Feature	46.5	5.430936	28.7025	64.29753	<.0001
Basketball players,Price Reduction	Actors,Feature	46	5.430936	28.2025	63.79753	<.0001
Citizens,Display	Basketball players,Feature	38.16667	5.430936	20.3691	55.96419	<.0001
Citizens,Display	Actors,Feature	37.66667	5.430936	19.8691	55.46419	<.0001
Citizens,Price Reduction	Citizens,Feature	31.33333	5.430936	13.5358	49.13086	<.0001
Actors,Price Reduction	Basketball players,Feature	31.16667	5.430936	13.3691	48.96419	<.0001
Basketball players,Display	Basketball players,Feature	31	5.430936	13.2025	48.79753	<.0001
Actors,Price Reduction	Actors,Feature	30.66667	5.430936	12.8691	48.46419	<.0001
Basketball players,Display	Actors,Feature	30.5	5.430936	12.7025	48.29753	<.0001
Citizens,Price Reduction	Actors,Display	28.83333	5.430936	11.0358	46.63086	0.0001
Basketball players,Price Reduction	Citizens,Feature	27.16667	5.430936	9.3691	44.96419	0.0004
Basketball players,Price Reduction	Actors,Display	24.66667	5.430936	6.8691	42.46419	0.0015
Actors,Display	Basketball players,Feature	21.83333	5.430936	4.0358	39.63086	0.0069
Actors,Display	Actors,Feature	21.33333	5.430936	3.5358	39.13086	0.009
Citizens,Price Reduction	Basketball players,Display	19.66667	5.430936	1.8691	37.46419	0.0208
Citizens,Price Reduction	Actors,Price Reduction	19.5	5.430936	1.7025	37.29753	0.0225
Citizens,Feature	Basketball players,Feature	19.33333	5.430936	1.5358	37.13086	0.0244
Citizens,Display	Citizens,Feature	18.83333	5.430936	1.0358	36.63086	0.031
Citizens,Feature	Actors,Feature	18.83333	5.430936	1.0358	36.63086	0.031

Πίνακας 4.16: Ανά δυο συγκρίσεις των αλληλεπιδράσεων των παραγόντων των Spots&Promotions

Το προβάδισμα, όπως και στη περίπτωση του σχεδιασμού split plot, έχουν οι διαφημίσεις με καταναλωτές που τρέχουν παράλληλα με την έκπτωση στη τιμή των προϊόντων ως προωθητική ενέργεια. Δεύτερος κατά σειρά προτεραιότητας, έρχεται ο συνδυασμός των spots με παίκτες του μπάσκετ και των promotions που αφορούν έκπτωση στη τιμή. Έπειτα, ακολουθούν, με στατιστικά σημαντικές επιδράσεις επί του τζίρου, είτε συνδυασμοί που περιέχουν διαφημίσεις με απλούς καταναλωτές είτε άλλοι που σαν δεύτερο συνθετικό έχουν την έκπτωση στην τιμή. Εναλλακτικά, ως συνθετικό προωθητικής ενέργειας διακρίνονται και τα displays.

Κλείνοντας θα πρέπει να υπογραμμίσουμε και πάλι ότι μια τελική αξιολόγηση, ανεξάρτητα από τον πειραματικό μας σχεδιασμό, θα πρέπει να γίνεται λαμβάνοντας υπόψη και το κόστος που έχουν οι διαφημιστικές καμπάνιες όπως και οι προωθητικές ενέργειες που επιλέγονται ως ενίσχυση του τζίρου και βελτίωση του μεριδίου στην αγορά. Αν το οποιοδήποτε επιπλέον όφελος που συνεπάγονται διαφημίσεις και άλλου είδους ενέργειες υπερκεράζονται από το αντίστοιχο κόστος εφαρμογής τους, τότε οι επιχείρηση οφείλει να ανατρέξει σε πιο συμφέρουσες εναλλακτικές. Έτσι, αν κάποιος από τους συνδυασμούς που προαναφέραμε επιφέρει μεγαλύτερο όφελος στο τζίρο της αλυσίδας, **λαμβανομένου υπόψη και του κόστους εφαρμογής**, σε σχέση με άλλους που φέρονται με μεγαλύτερη επιρροή, τότε προφανέστατα η στρατηγική της εταιρείας θα στραφεί σε αυτές τις εναλλακτικές. Ωστόσο, όπως ήδη αναφέραμε στα συμπεράσματα προηγούμενης παραγράφου, η διαφήμιση με απλούς καταναλωτές ήταν η χαμηλότερη σε κόστος ενώ τα τρία promotions κόστισαν το ίδιο περίπου. Έτσι θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι τα τηλεοπτικά spots με καταναλωτές με παράλληλη έκπτωση στη τιμή του προϊόντος είναι μια καλή και συμφέρουσα επιλογή στρατηγικής για την αλυσίδα των καταστημάτων.

Βιβλιογραφία

Βιβλία και Σημειώσεις

1. Κωνσταντίνος Δρακάτος, Στατιστική, 2η έκδοση 1984, εκδόσεις Σάκκουλας
2. Montgomery, Douglas C. Design and Analysis of Experiments, 8th edition 2013, John Wiley & Sons
3. Hardeo Sahai and Mario Miguel Ojeda, Analysis of Variance for Random Models, 2003, Springer International Publishing AG
4. Michael H. Kutner, Christopher J. Nachtsheim, John Neter and William Li, Applied Linear Statistical Models, 7th edition 2005, McGraw-Hill/Irwin
5. R. Lyman Ott and Michael Longnecker, An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, 6th edition 2010, Brooks/Cole, Cengage Learning
6. Paul D. Allison, Fixed Effects Regression Methods for Longitudinal Data Using SAS, 2005, SAS Institute Inc
7. J. Berger, S. Fienberg, J. Gani, K. Krickeberg, I. Oikin, B, Statistical Design and Analysis for Intercropping Experiments Volume 1, 1993, Singer
8. J. Berger, S. Fienberg, J. Gani, K. Krickeberg, I. Oikin, B. Statistical Design and Analysis for Intercropping Experiments Volume II, 1993, Singer
9. Walter T. Federer, Freedom King, Variations on Split Plot and Split Block Experiment Designs, 2007, John Wiley & Sons
10. Peter Goos and David Meintrup, Statistics with JMP: Hypothesis tests, ANOVA and Regression, 2016, John Wiley & Sons
11. Brown, H., and Prescott, R. Applied Mixed Models in Medicine. 2nd edition 2006, John Wiley & Sons
12. Demidenko, E., Mixed Models – Theory and Applications, 2004, John Wiley & Sons
13. Little, R. C. et al. SAS for Mixed Models, 2nd Edition 2006, SAS Institute Inc
14. Muller, K. E. and Stewart, P.W., Linear Model Theory: Univariate, Multivariate, and Mixed Models, 2006, John Wiley & Sons
15. Shaylre Searle Georggea Sella and Charless Mcculloch, Variance Components, 2006 by John Wiley & Sons
16. Ludwik Kurz and M. Hafed Benteftifa,Analysis of Variance in statistical image processing, 2006, Cambridge University Press

17. Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer, Mathematical Statistics with Applications, Seventh Edition 2008, Thomson Learning
18. Larry Winner, Department of Statistics University of Florida, Class: STA 4211 – Design & Analysis of Experiments, Lecture Notes in Design & Analysis of Split-Plot Experiments (Univariate Analysis)
19. Joseph Stevens, Lecture Notes in Hierarchical Linear Models, University of Oregon

Άρθρα

1. Walter T. Federer and Charles E. McCulloch, Multiple Comparisons in Split Block and Split-Split Plot Designs, 1991, Biometrics Unit Technical Reports; Number BU-1132-MA
2. Bradley Jones and Christopher J. Nachtsheim, Split-Plot Designs: What, Why, and How, October 2009, Journal of Quality Technology Vol. 41, No. 4
3. Wolfinger, R., Tobias, R. and Sall, J. 1994. "Computing Gaussian likelihoods and their derivatives for general linear mixed models," SIAM Journal of Scientific Computing, 15, no.6, pages 1294-1310
4. Box G. and Jones S, Split-Plot Designs for Robust Product Experimentation, Journal of Applied Statistics 19, pp. 3–26.