

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
SHEWHART ΚΑΙ
ΚΑΝΟΝΑΣ ΡΟΩΝ r / m

Γεώργιος Τσεκούρας

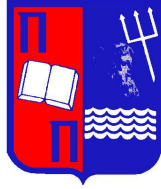
Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιανουάριος 2017



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
SHEWHART ΚΑΙ
ΚΑΝΟΝΑΣ ΡΟΩΝ r / m

Γεώργιος Τσεκούρας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιανουάριος 2017

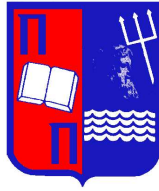
Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Δημήτριος Αντζουλάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Χαράλαμπος Ευαγγελάρας, Επίκουρος Καθηγητής
- Γεώργιος Τζαβελάς, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**Shewhart control charts
and
r / m runs rules**

By

George Tsekouras

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment
of the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
January 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να δώσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αντζουλάκο Δημήτριο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του σε όλη την διάρκεια της εργασίας μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
Περίληψη	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας	
1.1 Εισαγωγή	2
1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών και Διαγράμματα Ελέγχου	2
1.2.1 Το Πρόβλημα του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών	2
1.2.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου	4
1.2.3 Χαρακτηριστική Καμπύλη	7
1.2.4 Μέσο μήκος ροής (ARL)	9
1.2.5 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I & II	10
1.3 Διαγράμματα Ελέγχου Shewhart για Μεταβλητές	11
1.3.1 Εκτίμηση της Μέσης Τιμής και της Διασποράς	11
1.3.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή	13
1.3.3 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά	16
1.3.4 Διαγράμματα Ελέγχου για Μεμονωμένες Παρατηρήσεις	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Διαγράμματα ελέγχου με χρήση ροών και σχηματισμών	
2.1 Εισαγωγή	22
2.2 Οι κανόνες των Champ και Woodall (1987)	22
2.3 Οι κανόνες 2/2 και 2/3 του Klein (2000a)	27
2.4 Η βελτιωμένη προσέγγιση των Khoo και Ariffin (2006)	28
2.5 Το τροποποιημένο r -από- m διάγραμμα των Antzoulakos και Rakitzis (2008a)	32
2.6 Το αναθεωρημένο r -από- m διάγραμμα των Antzoulakos και Rakitzis (2008b)	35
2.7 Η προσέγγιση του Acosta-Mejia (2007)	40
2.7.1 Κανόνας ροών k -από- k	40
2.7.2 Κανόνας k -από- k με προειδοποιητικά όρια	42
2.8 Διαγράμματα παρακολούθησης της τυπικής απόκλισης	43
2.8.1 Μονόπλευρα S διαγράμματα ελέγχου εμπλουτισμένα με κανόνες ροών τύπου r από m	45
2.8.2 Δίπλευρα S διαγράμματα ελέγχου εμπλουτισμένα με κανόνες ροών τύπου r από m	47
2.8.3 Η προσέγγιση των Acosta-Mejia & Pignatiello (2009)	51
2.8.3.1 Ο συνδυασμένος κανόνας k/k στα S διαγράμματα ελέγχου	51
2.8.3.2 Ένα S διάγραμμα με χρήση του κανόνα k/k μόνο	52
2.8.3.3 Ένα S διάγραμμα ίσων ουρών, με χρήση του συνδυασμένου κανόνα k/k	54
2.8.3.4 Ένα τροποποιημένο S διάγραμμα	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Υπολογιστικός κώδικας για τα r από m σχήματα κανόνων ροών	
3.1 Εισαγωγή	59
3.2 Περιγραφή του κώδικα	60
3.3 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων του κώδικα	62
3.4 Διαγράμματα Κανονικής Κατανομής	62
3.5 Διαγράμματα μέσης τιμής για την Γάμμα κατανομή	70
3.6 Διάγραμμα εύρους για την κατανομή χ^2	78
3.7 Διάγραμμα τυπικής απόκλισης για την λογιστική κατανομή	82
3.8 Συμπεράσματα	87
3.9 Κώδικες για τον υπολογισμό της ισχύος	87
Βιβλιογραφία	94

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart είναι το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας, εξ' αιτίας της απλότητάς του και της ικανότητάς του να εντοπίζει εγκαίρως μεγάλες μεταβολές/μετατοπίσεις της παραμέτρου (π.χ., μέση τιμή, τυπική απόκλιση, ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων, κ.α.) ενός χαρακτηριστικού ποιότητας ενός προϊόντος. Η απόδοσή του όμως μειώνεται σημαντικά όσον αφορά την ανίχνευση μεταβολών/μετατοπίσεων μικρού μεγέθους. Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση εναλλακτικών διαγραμμάτων ελέγχου εξοπλισμένων με κανόνες ροών προκειμένου να γίνει το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart περισσότερο ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της υπό παρακολούθηση παραμέτρου. Αυτά τα διαγράμματα βασίζονται συνήθως στη χρήση ενός κανόνα ροών τύπου r/m και ο υπολογισμός του μέσου μήκους ροής του διαγράμματος είναι αρκετά δύσκολος λαμβανομένου υπόψη της πληθώρα των διαγραμμάτων ελέγχου αλλά και των κατανομών πιθανότητας που μπορούν να υποθεθούν ότι περιγράφουν το χαρακτηριστικό της ποιότητας. Έτσι ο σημαντικότερος στόχος της εργασίας είναι να δοθούν Κώδικες στη γλώσσα R που να επιτρέπουν τον υπολογισμό της ισχύος ενός οποιουδήποτε διαγράμματος ελέγχου μεταβλητών εφοδιασμένο με ένα κανόνα ροών τύπου r/m και για οποιαδήποτε κατανομή του χαρακτηριστικού ποιότητας.

Η παρούσα διπλωματική εργασία χωρίζεται σε 3 μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται μια εισαγωγή στις έννοιες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας καθώς και η επεξήγηση της λειτουργίας ενός τυπικού διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart. Στην συνέχεια, στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε διάφορα διαγράμματα εφοδιασμένα με κανόνες ροών που έχουν σαν σκοπό να παρουσιάσουν βελτιωμένη επίδοση στον εντοπισμό μικρών αλλαγών σε σχέση με το τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Τέλος, στο τρίτο μέρος γίνεται μελέτη και σύγκριση της επίδοσης κάποιων διαγραμμάτων ελέγχου εφοδιασμένων με κανόνες ροών τύπου r/m και δίνεται κώδικας στη γλώσσα R που επιτρέπει τον υπολογισμό της ισχύος αυτών των διαγραμμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας

1.1 Εισαγωγή

Ο βασικότερος παράγοντας της αγοράς ενός προϊόντος από τον καταναλωτή, εκτός από την τιμή είναι και η ποιότητα του προϊόντος. Είναι αρκετά σημαντικό για το καταναλωτικό κοινό τα παραγόμενα προϊόντα να ανταποκρίνονται σε κάποιες προδιαγραφές και να μην αποκλίνουν από αυτές. Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας είναι η γνωστότερη μέθοδος ελέγχου των παραγωγικών διεργασιών, με σκοπό την βελτίωση της ποιότητας του προϊόντος. Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας περιέχει τρία υποσύνολα στατιστικών μεθόδων: (α) το σχεδιασμό και την ανάλυση των πειραμάτων, (β) τον στατιστικό έλεγχο των διεργασιών, και (γ) την δειγματοληψία αποδοχής. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με τον στατιστικό έλεγχο διεργασιών.

Ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών είναι το σύνολο εκείνων των στατιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας κατά την διάρκεια της παραγωγής προϊόντων. Ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών χρησιμοποιεί αρκετά εργαλεία για την επίβλεψη μιας διεργασίας (ιστόγραμμα, φύλλο ελέγχου, διάγραμμα Pareto, διάγραμμα αιτίας – αποτελέσματος, διάγραμμα συγκέντρωσης ελαττωμάτων, διάγραμμα διασποράς). Ωστόσο το πιο εύχρηστο από αυτά όμως είναι το διάγραμμα ελέγχου (Control Chart).

1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών και Διαγράμματα Ελέγχου

1.2.1 Το Πρόβλημα του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών

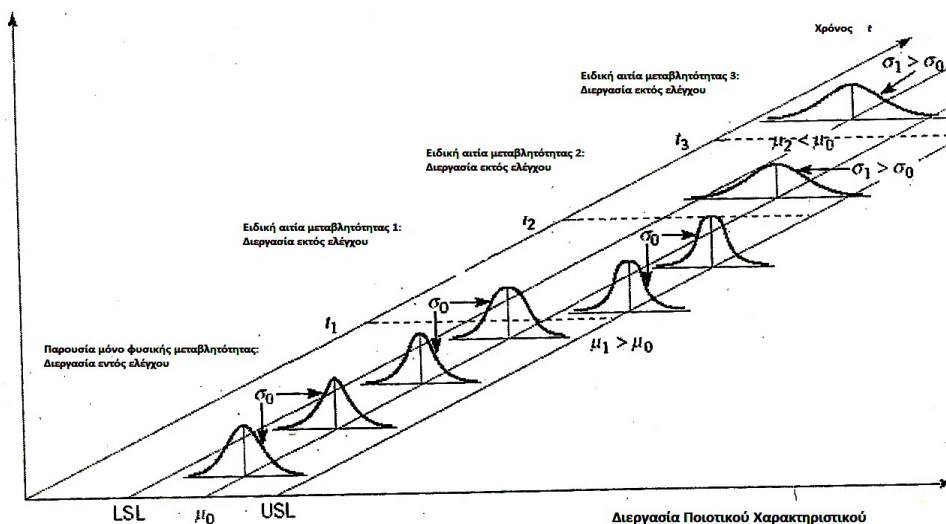
Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη ή το πόσο σωστά συντηρείται, πάντα θα υπάρχει σε αυτήν, μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα αποτελεί την συνισταμένη πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας. Η φυσική μεταβλητότητα είναι συνήθως μικρή σε μέγεθος και δεν μπορεί να μειωθεί ή να εξαλειφθεί. Μια διεργασία που λειτουργεί μόνο με την παρουσία της φυσικής μεταβλητότητας ονομάζεται διεργασία εντός ελέγχου.

Σε μια παραγωγική διεργασία όμως είναι πιθανόν να εμφανιστούν και άλλες μορφές μεταβλητότητας πέραν της φυσικής, οι οποίες δεν θα οφείλονται σε τυχαία αίτια και που οδηγούν στην συστηματική αλλαγή ενός ή παραπάνω παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Αυτού του είδους η μη-φυσική μεταβλητότητα ονομάζεται ειδική και οι αιτίες που

οδηγούν σε αυτήν ονομάζονται ειδικές ή συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας, τέτοιες συνήθως είναι οι εξής: (α) λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, (β) λάθη των χειριστών των μηχανημάτων, και (γ) κακής ποιότητα ή ελαττωματική πρώτη ύλη. Όταν μια διεργασία λειτουργεί με την παρουσία της ειδικής μεταβλητότητας λέμε ότι βρίσκεται εκτός (στατιστικού) ελέγχου.

Κατά την φάση σχεδιασμού ενός προϊόντος είναι αρκετά σημαντικό να καθοριστούν τα όρια ελέγχου για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του προϊόντος αυτού. Τα όρια αυτά είναι το άνω και το κάτω όριο ελέγχου, τα οποία συμβολίζονται ως UCL και LCL αντίστοιχα, και ανάμεσα τους πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού που ερευνάται ώστε το τελικό προϊόν να είναι αποδεκτό. Επίσης στην φάση του σχεδιασμού ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που ονομάζεται τιμή στόχος και συνήθως βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος που ορίζεται από τα όρια ελέγχου (LCL, UCL).

Υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, η συντριπτική πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, δεν συμβαίνει όμως το ίδιο υπό συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας. Σε περίπτωση εμφάνισης ειδικής μεταβλητότητας ενδέχεται να υπάρξει αλλαγή στις παραμέτρους της κατανομής που ακολουθούν οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού που μελετάμε. Στην περίπτωση την κανονικής κατανομής π.χ. μπορεί να υπάρξει μετατόπιση είτε στον μέσο της κατανομής, είτε στην διακύμανση της, είτε και στα δύο. Σε κάθε περίπτωση, η επίδραση της ειδικής μεταβλητότητας έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των παραγόμενων προϊόντων που έχουν τιμές ποιοτικού χαρακτηριστικού εκτός των ορίων ελέγχου. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ξεκάθαρα η επίδραση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στην εντός ελέγχου μέση τιμή μ_0 και στην τυπική απόκλιση σ_0 σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αναλυτικά έχουμε: (α) τη χρονική στιγμή t_1 η μέση τιμή μετατοπίζεται στην θέση $\mu_1 > \mu_0$, (β) τη χρονική στιγμή t_2 η μέση τιμή μετατοπίζεται στην θέση μ_0 ενώ η τυπική απόκλιση στην θέση $\sigma_1 > \sigma_0$, και (γ) τη χρονική στιγμή t_3 η μέση τιμή μετατοπίζεται στην θέση $\mu_2 < \mu_0$.



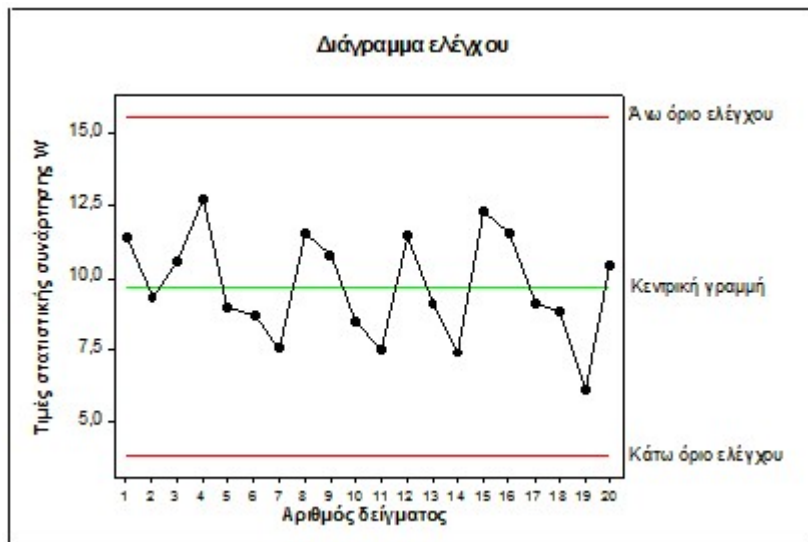
Το κύριο αντικείμενο του στατιστικού ελέγχου διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της ειδικής μεταβλητότητας σε μια παραγωγική διεργασία προκειμένου να προβούμε στις απαραίτητες διορθωτικές κινήσεις ώστε να μην κατασκευαστούν αρκετά μη συμμορφούμενα προϊόντα με τις προδιαγραφές. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι μια ευρέως διαδεδομένη τεχνική που χρησιμοποιείται για την άμεση ανίχνευση της μεταβλητότητας ειδικών αιτιών σε μια διεργασία. Για το παραπάνω παράδειγμα θα ήταν χρήσιμη η κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου για την μέση τιμή και την διακύμανση. Τα διαγράμματα ελέγχου χωρίζονται σε 2 βασικές κατηγορίες, εκείνα που αφορούν συνεχή χαρακτηριστικά (μεταβλητές) και εκείνα που αφορούν διακριτά χαρακτηριστικά (ιδιότητες), σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με την πρώτη κατηγορία.

1.2.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων κ.λ.π., και η κρίσιμη ποσότητα η μέση τιμή της X , η μεταβλητότητα των τιμών της X , το ποσοστό των ελαττωματικών, κτλ.). Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X , έστω τα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ υπολογίζουμε την τιμή $W_i = g(\mathbf{X}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Έτσι η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής μ της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_i = g(\mathbf{X}_i) = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της κατανομής της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου, όπου οι παρατηρούμενες τιμές της W_i , έχουν παρασταθεί με • που συνδέονται με μια τεθλασμένη γραμμή, ενώ διακρίνονται και άλλες 3 γραμμές. Η κεντρική γραμμή παριστάνει την μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης W , η οποία είναι και η τιμή στόχος της παραγωγικής διεργασίας. Οι δυο ακραίες γραμμές είναι τα άνω και κάτω όρια ελέγχου, όσο οι τιμές της W εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, τότε λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και ότι βρισκόμαστε σε κατάσταση συναγερμού, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να σταματήσει η παραγωγική διεργασία για να προβούμε σε έρευνα ανίχνευσης των ειδικών αιτιών της μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες γι' αυτήν την συμπεριφορά. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ακόμα και αν όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, δεν εξασφαλίζεται το γεγονός ότι η διεργασία θα είναι εντός ελέγχου, καθώς μπορεί τα δείγματα να συμπεριφέρονται με συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, κάτι που αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Ένα τέτοιο παράδειγμα θα ήταν εάν όλα τα σημεία εμφανίζονταν μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του άνω ορίου ελέγχου του διαγράμματος.

Ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits model), για την κατασκευή των γραμμών ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

Μοντέλο ορίων L σίγμα	
UCL	$= \mu_W + L\sigma_W$
$Center\ Line$	$= \mu_W$
LCL	$= \mu_W - L\sigma_W$

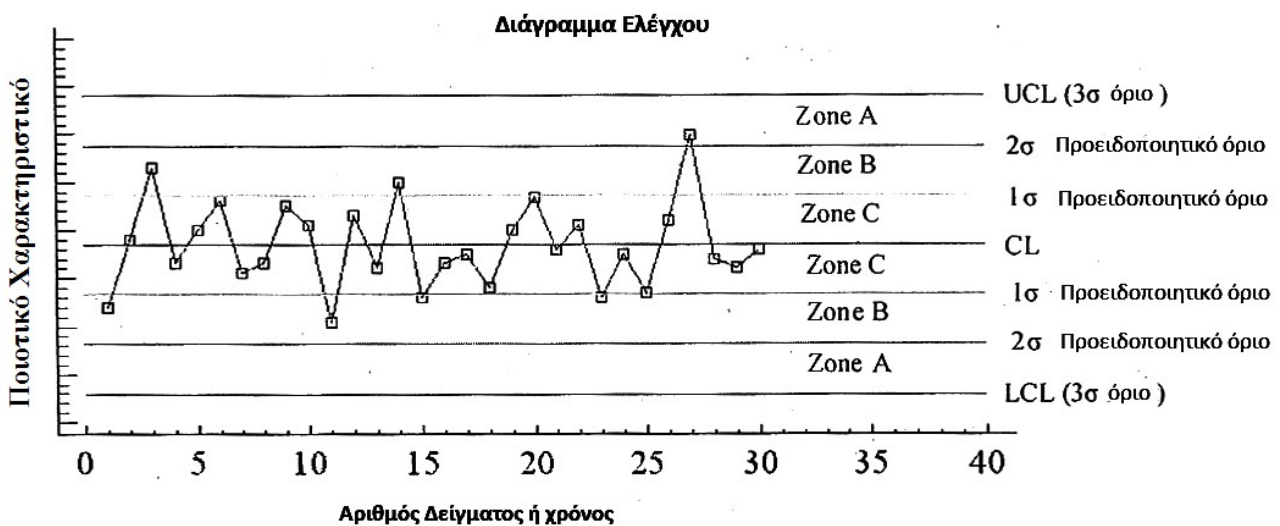
Το μ_W και το σ_W δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα ενός προϊόντος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε. Όταν το $L = 3$ ομιλούμε για κατασκευή ορίων ελέγχου τριών σίγμα (*three sigma control limits*, 3σ). Η κατανομή που υποθέτουμε για να περιγράψει την τυχαία μεταβλητή W είναι συνήθως η κανονική κατανομή

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*) που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (μοντέλο ορίων πιθανότητας a)

Μοντέλο ορίων πιθανότητας a		
UCL	=	$w_{a/2}$
$Center\ Line$	=	$w_{0.5}$
LCL	=	$w_{1-(a/2)}$

(w_a συμβολίζει το άνω a ποσοστιαίο σημείο της W).

Σε αρκετές περιπτώσεις, για να κάνουμε περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου στο να εντοπίζει πιο γρήγορα τις εκτός ελέγχου διαδικασίες, εκτός από τα όρια ελέγχου, σχεδιάζουμε εντός τους και τα προειδοποιητικά όρια όπως στο παρακάτω σχήμα:

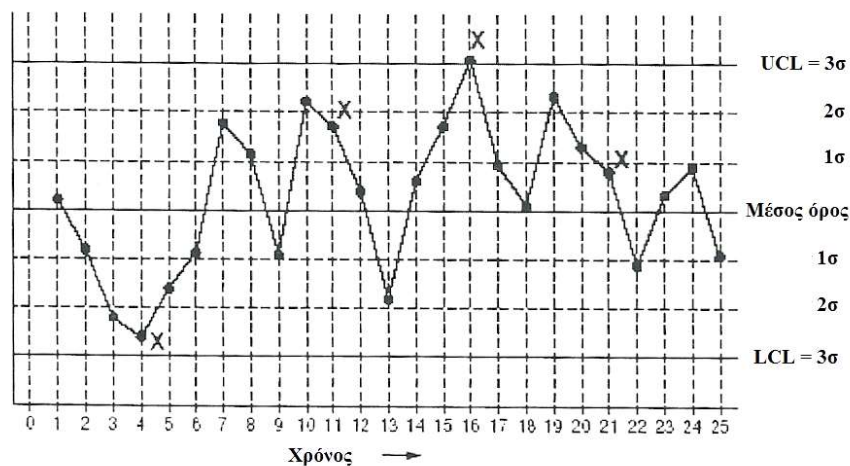


Μαζί με τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται και κάποιοι κανόνες που σχετίζονται με κάποια υποδείγματα ακολουθιών σημείων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Όταν εμφανιστεί ένα από τα υποδείγματα που υποδεικνύουν οι παρακάτω κανόνες τότε η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα κάποιο σημείο του διαγράμματος να είναι εκτός ορίων ελέγχου. Οι σημαντικότεροι κανόνες αφορούν την εμφάνιση των παρακάτω υποδειγμάτων:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου
2. 2 από 3 συνεχόμενα σημεία στην ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A)
3. 4 από 5 σημεία πέραν της ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές)
4. 8 συνεχόμενα σημεία από την ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής
5. 6 συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
6. 15 συνεχόμενα σημεία εντός της ολικής ζώνης C
7. 14 συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή «πάνω – κάτω»
8. 8 συνεχόμενα σημεία πέραν της ολικής ζώνης C
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα όρια ελέγχου ή τα προειδοποιητικά όρια.

Οι πρώτοι 4 κανόνες είναι γνωστοί και ως *Western Electric rules*, οι περισσότεροι από τους παραπάνω κανόνες είναι διαθέσιμοι στα στατιστικά πακέτα. Ωστόσο η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στην παραγωγική διεργασία καθώς ο μεγάλος αριθμός αριθμός ψευδών συναγεμίων που θα δημιουργηθεί, θα διακόψει αντίστοιχες φορές την παραγωγική διεργασία με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής.

Western Electric rules



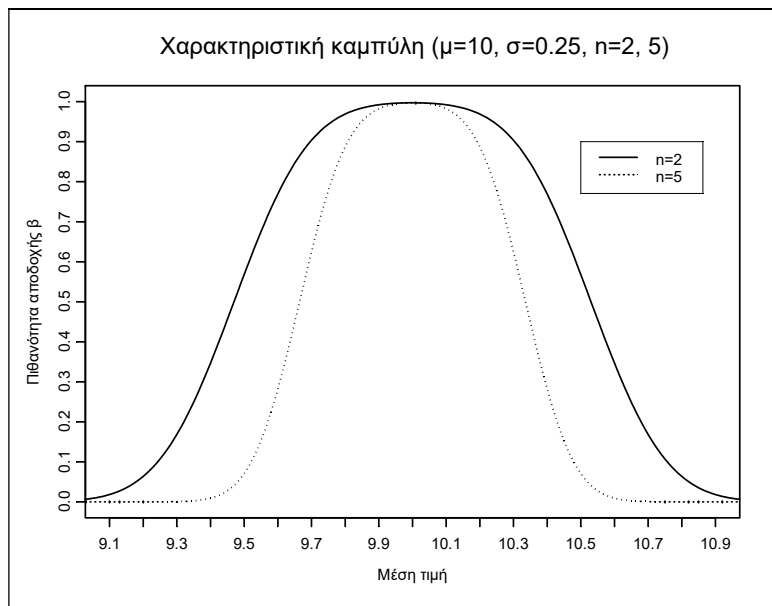
1.2.3 Χαρακτηριστική Καμπύλη

Η χαρακτηριστική καμπύλη είναι μια γραφική παράσταση, η οποία δείχνει την πιθανότητα μια διεργασία να είναι εντός ελέγχου, συναρτήσει της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας (ενώ δηλαδή είναι εκτός στατιστικού ελέγχου). Στην χαρακτηριστική καμπύλη απεικονίζεται η πιθανότητα να συμβεί το σφάλμα τύπου II, δηλαδή να μας δώσει το διάγραμμα ένδειξη ότι η

διεργασία είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός ελέγχου (αφού θα έχει υπάρξει μετατόπιση του μέσου). Η πιθανότητα του σφάλματος II (πιθανότητα β) για 3σ όρια ελέγχου, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $W = \bar{X}$ και για μετατόπιση του μέσου επιπέδου της διεργασίας από μ σε μ^* , δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\beta = P\left(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu^*, \sigma^2)\right) = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\mu - \mu^*}{\sigma} + 3\right) - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\mu - \mu^*}{\sigma} - 3\right)$$

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε την χαρακτηριστική καμπύλη για μια κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 10$ για 2 περιπτώσεις, μια με δειγματικό αριθμό $n = 2$ και μια για $n = 5$.



Όπως παρατηρούμε όταν το μέσο επίπεδο μεταβεί από την θέση $\mu = 10$ στην $\mu^* = 10.5$, τότε για μέγεθος δείγματος $n = 2$ η πιθανότητα σφάλματος II ισούται 0.568113 ενώ για $n = 5$ η πιθανότητα είναι ίση με 0.0704921 που είναι αρκετά ικανοποιητική. Αν όμως η ζητούμενη αλλαγή είναι από την θέση $\mu=10$ στην $\mu^*=10,3$ οι πιθανότητες για τις 2 περιπτώσεις είναι 0.903702 και 0.624271 αντίστοιχα, οπότε χρειαζόμαστε μεγαλύτερα μεγέθη δειγμάτων για να εντοπίσουμε γρηγορότερα τις μικρές αλλαγές στον μέσο της διεργασίας. Πολλές φορές όμως αυτό απαιτεί μεγάλο κόστος και έτσι η πολιτική που συνηθίζεται είναι να παίρνουμε αρκετές φορές μικρό δείγμα παρά λίγες φορές μεγάλο.

1.2.4 Μέσο μήκος ροής (ARL)

Το μέσο μήκος ροής είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου, καθώς μας δίνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων στο διάγραμμα μέχρι να εμφανιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Το μέσο μήκος ροής υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$ARL = \frac{1}{p}$$

όπου p συμβολίζει την πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου. Είναι φανερό ότι το μήκος ροής ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή καθώς μετρά τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία, που στην περίπτωση μας είναι να βρεθεί ένα σημείο εκτός ορίων ελέγχου.

Έστω ότι έχουμε μια διεργασία εντός ελέγχου, όπου χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου και κανονική κατανομή, σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να βρεθεί εκτός ελέγχου ένα σημείο είναι ίση με 0.0027, οπότε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 είναι ίσο με:

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370$$

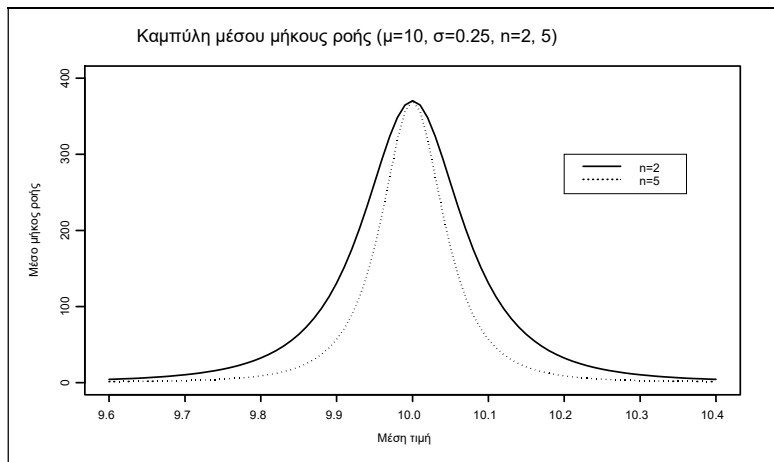
Σε περίπτωση που η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, τότε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

όπου β είναι η πιθανότητα ένα σημείο του διαγράμματος να βρεθεί εντός του διαγράμματος ελέγχου σε αυτή την μετατόπιση (οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα $1 - \beta$).

Ενώ στην εντός ελέγχου διαδικασία προτιμούμε να έχουμε ένα μεγάλο ARL_0 , καθώς δεν θέλουμε να διακοπεί μια διεργασία που λειτουργεί ομαλά, σε μια εκτός ελέγχου διαδικασία όμως επιθυμούμε όσο γίνεται μικρότερο ARL_1 με σκοπό να εντοπιστεί γρήγορα η μετατόπιση της διεργασίας.

Το ακόλουθο σχήμα δίνει το ARL_1 στην περίπτωση που έχουμε 3σ όρια ελέγχου, $X \sim N(10, 0.25^2)$, $W = \bar{X}$ και $n = 2, 5$. Από το σχήμα προκύπτει ότι το ARL_1 δεν είναι καθόλου ικανοποιητικό για μικρές μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Για παράδειγμα αν το μέσο επίπεδο της διεργασίας από $\mu = 10$ μετατοπιστεί στη θέση $\mu^* = 10.1$ τότε $\beta = 0.992359$ και $ARL_1 \cong 130$.



Η χρήση του ARL ως μέτρου απόδοσης μιας παραγωγικής διεργασίας έχει αμφισβητηθεί για την καταλληλότητά του, καθώς το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει πολύ από το θεωρητικό ARL. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό, είναι επειδή η γεωμετρική κατανομή που ακολουθεί το ARL είναι μια πολύ ασύμμετρη κατανομή, ιδιαίτερα για μικρές τιμές του p , η τυπική απόκλιση λαμβάνει μεγάλες τιμές, έτσι η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής.

Στην πράξη, εκτός από το ARL χρησιμοποιούμε και τον μέσο χρόνο σήματος ATS που ορίζεται από την σχέση

$$ATS = ARL \times h$$

όπου h συμβολίζει τον χρόνο που μεσολαβεί για την λήψη 2 διαδοχικών δειγμάτων και συνεπώς η ποσότητα ATS δηλώνει τον μέσο χρόνο που απαιτείται για να δώσει το διάγραμμα ένα σήμα εκτός ελέγχου.

1.2.5 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I & II

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο **φάσεις** (*phases*) για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, η Φάση I και η Φάση II.

Στη Φάση Ελέγχου I εξετάζονται δείγματα που συλλέχθηκαν από παρελθόντα χρόνο με σκοπό να ελεγχθεί αν η διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, έτσι τα διαγράμματα ελέγχου σε αυτήν την φάση έχουν αναδρομική χρήση. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα βοηθούν στο να φέρουμε την διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου, και όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν θα είναι κατάλληλα ως προς την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Στη Φάση Ελέγχου I κοιτάμε αρχικά αν ένα ή περισσότερα δείγματα από αυτά που έχουμε συλλέξει βρίσκονται εκτός ορίων ελέγχου. Σε περίπτωση που συμβεί αυτό, τότε εξαιρούμε

το σημείο αυτό και επαναυπολογίζεται η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου, όταν είναι παραπάνω από ένα σημεία εκτός τότε τα εξαιρούμε διαδοχικά ξεκινώντας από το πιο απομακρυσμένο σημείο από τα όρια ελέγχου τα οποία επαναυπολογίζονται κάθε φορά. Τα νέα όρια θα είναι στενότερα, κάτι που πιθανόν να έχει ως αποτέλεσμα, δείγματα που αρχικά ήταν εντός ελέγχου πλέον να έχουν βγει εκτός ορίων, σε αυτή την περίπτωση θα εξαιρεθούν και αυτά τα σημεία μέχρι να μείνουν μόνο εντός ελέγχου σημεία. Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται έως ότου “όλα” τα σημεία του διαγράμματος βρεθούν εντός των ορίων ελέγχου του. Όταν συμβεί αυτό θεωρούμε ότι όλα τα δείγματα που αντιστοιχούν στα σημεία που βρίσκονται εντός των τελικών ορίων ελέγχου συλλέχθηκαν από μια εντός ελέγχου διεργασία. Τα τελικά όρια ελέγχου είναι κατάλληλα για τη μελλοντική παρακολούθηση της ποσότητας που μας ενδιαφέρει (αποτελούν πλέον τα “όρια ελέγχου Φάσης II”).

Στη Φάση II τα διαγράμματα χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς εάν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου, έτσι ώστε κάθε φορά που εντοπίζεται μια αλλαγή στο μέσο επίπεδο του χαρακτηριστικού προς μελέτη, να εντοπίζεται εγκαίρως. Έτσι κάθε φορά που ελέγχουμε ένα δείγμα παίρνουμε μια άμεση απάντηση για το αν η διαδικασία είναι εκτός ή εντός ελέγχου.

1.3 Διαγράμματα Ελέγχου Shewhart για Μεταβλητές

1.3.1 Εκτίμηση της Μέσης Τιμής και της Διασποράς

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 . Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ είναι ο δειγματικός μέσος

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης σ^2 είναι η δειγματική διακύμανση

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε μπορούμε να βρούμε αμερόληπτους εκτιμητές της τυπικής απόκλισης σ που είναι οι ακόλουθοι:

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{c_4}.$$

Επίσης

$$\sigma_R = \sqrt{V(R)} = \sigma d_3, \quad \sigma_S = \sqrt{V(S)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Στους παραπάνω τύπους οι ποσότητες d_2 , d_3 και c_4 είναι σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του δείγματος.

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, από ένα κανονικό πληθυσμό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 . Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ είναι ο

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Για την περίπτωση των δειγμάτων η τυπική απόκλιση της πληθυσμού υπολογίζεται με 3 μεθόδους, το μέσο εύρος των δειγμάτων, την μέση δειγματική τυπική απόκλιση και την μέση δειγματική διασπορά.

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

και

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}.$$

Η ποσότητα \bar{R}/d_2 είναι αμερόληπτος εκτιμητής της ποσότητας σ , και χρησιμοποιείται ως εκτίμησή της, δηλαδή

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

Έστω S_i η ποσότητα που ορίζεται από τη σχέση

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m$$

και

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}.$$

Η ποσότητα \bar{S}/c_4 είναι αμερόληπτος εκτιμητής της ποσότητας σ , και χρησιμοποιείται ως εκτίμησή της, δηλαδή:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση:

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

και

$$\overline{S^2} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}.$$

Η ποσότητα $\sqrt{\overline{S^2}}$ αν και δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ χρησιμοποιείται αρκετές φορές ως εκτίμηση της ποσότητας σ , δηλαδή

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{S^2}}.$$

1.3.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή

Ας υποθέσουμε ότι ένας πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, με τα μ και σ^2 να είναι γνωστά. Ο δειγματικός μέσος ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$ και παίρνει τιμές στο παρακάτω διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα $1 - a$

$$\left[\mu - z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Για $a = 0.0027$, δηλαδή για $z_{a/2} = 3$, προκύπτει το διάστημα

$$\left[\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

μέσα στο οποίο έχει πιθανότητα 99.73% να βρεθεί ο δειγματικός μέσος. Με βάση το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης μπορούμε να θέσουμε τα εξής 3σ όρια ελέγχου με την προϋπόθεση ότι η διασπορά θα παραμένει σταθερή:

\bar{X} Διάγραμμα
3σ όρια ελέγχου φάσης II
$\text{LCL} = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\text{CL} = \mu$ $\text{UCL} = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Τα παραπάνω όρια είναι γνωστά και ως όρια ελέγχου Φάσης II καθώς οι βασικές παράμετροι (μέση τιμή και διασπορά) είναι γνωστές εκ των προτέρων. Φυσικά υπάρχουν και οι περιπτώσεις όπου θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά όρια από τα 3σ, ακολουθώντας το παρακάτω γενικό σχήμα:

\bar{X} Διάγραμμα
Lσ όρια ελέγχου φάσης II
$\text{LCL} = \mu - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\text{CL} = \mu$ $\text{UCL} = \mu + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Σε περίπτωση που οι ποσότητες μ και σ του πληθυσμού είναι άγνωστες (διαγράμματα ελέγχου Φάσης I), θα χρησιμοποιήσουμε εκτιμήσεις, δηλαδή

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$$

Ανάλογα λοιπόν με την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης μπορούμε να δημιουργήσουμε ξεχωριστά διαγράμματα ελέγχου.

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του μ την ποσότητα $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$ παίρνουμε:

\bar{X} Διάγραμμα	
3σ όρια ελέγχου φάσης I	Μέθοδος R
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$	

όπου η σταθερά A_2 είναι ίση με

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} .$$

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του μ την ποσότητα $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4$, παίρνουμε

\bar{X} Διάγραμμα	
3σ όρια ελέγχου φάσης I	Μέθοδος S
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$	

όπου η σταθερά A_3 είναι ίση με

$$A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} .$$

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του μ την ποσότητα $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$, παίρνουμε

\bar{X} Διάγραμμα	
3σ όρια ελέγχου φάσης I	Μέθοδος S^2
$UCL = \bar{\bar{X}} + A \sqrt{\bar{S}^2}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A \sqrt{\bar{S}^2}$	

1.3.3 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά

Εκτός από την μέση τιμή, είναι απαραίτητο για μια παραγωγική διεργασία, να ελέγχεται και η διασπορά του εξεταζόμενου χαρακτηριστικού. Ας υποθέσουμε ότι το εξεταζόμενο χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με σ γνωστό. Αν $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την X , τότε για τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)} = \max\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\} - \min\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$$

είναι γνωστό ότι

$$\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2, \quad \sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = \sigma d_3$$

όπου οι ποσότητες d_2 και d_3 εξαρτώνται από το μέγεθος n του δείγματος.

Μέσω των παραπάνω τύπων, μπορούμε να φτιάξουμε ένα διάγραμμα για την διασπορά όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος R_i του κάθε δείγματος. Το διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ έχει την παρακάτω μορφή:

R Διάγραμμα
3σ όρια ελέγχου φάσης II
$UCL = D_2\sigma$
$CL = d_2\sigma$
$LCL = D_1\sigma$

όπου

$$D_1 = d_2 - 3d_3, \quad D_2 = d_2 + 3d_3 \quad .$$

Για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4, \quad \sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2} \quad .$$

Το μοντέλο με τα 3σ όρια ελέγχου θα έχει την παρακάτω μορφή:

S Διάγραμμα
3σ όρια ελέγχου φάσης II
$UCL = B_6\sigma$ $CL = c_4\sigma$ $LCL = B_5\sigma$

όπου

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}.$$

Τέλος για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την δειγματική διασπορά

$$W_i = S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

για την οποία ισχύει ότι

$$E(S_i^2) = \sigma^2, \quad \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας a θα έχει την παρακάτω μορφή:

S ² Διάγραμμα
Όρια ελέγχου Πιθανότητας a φάσης II
$UCL = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; a/2}^2$ $CL = \sigma^2$ $LCL = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; 1-a/2}^2$

Τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου, χρησιμοποιούνται όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι γνωστή (Φάση II), κάτι που όμως δεν συμβαίνει συνήθως. Για αυτό τον σκοπό m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Τα

προκαταρκτικά δείγματα είναι συνήθως 20 έως 25 μεγέθους 4 έως 6 και υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

Υπό αυτές τις συνθήκες, χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση $W_i = R_i$ για την παρακολούθηση της διασποράς και παίρνοντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του R διαγράμματος ελέγχου Φάσης I με όρια 3σ δίνονται από τις σχέσεις

R Διάγραμμα
3σ όρια ελέγχου φάσης I
$UCL = D_4\bar{R}$
$CL = \bar{R}$
$LCL = D_3\bar{R}$

όπου

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση $W_i = S_i$ για την παρακολούθηση της διασποράς και παίρνοντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του S διαγράμματος ελέγχου Φάσης I με όρια 3σ δίνονται από τις σχέσεις

S Διάγραμμα
3σ όρια ελέγχου φάσης I
$UCL = B_4\bar{S}$
$CL = \bar{S}$
$LCL = B_3\bar{S}$

όπου

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση $W_i = S_i^2$ για την παρακολούθηση της διασποράς και παίρνοντας ως εκτίμηση του σ^2 την ποσότητα $\hat{\sigma}^2 = \overline{S^2}$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του S^2 διαγράμματος ελέγχου με όρια πιθανότητας a δίνονται από τις σχέσεις:

S ² Διάγραμμα	
Όρια ελέγχου πιθανότητας φάσης Ι	
UCL	$= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi_{n-1; a/2}^2$
CL	$= \overline{S^2}$
LCL	$= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi_{n-1; 1-a/2}^2$

Όλα τα παραπάνω διαγράμματα χρησιμοποιούνται όταν τα δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς, σε περίπτωση όμως που το χαρακτηριστικό X ακολουθεί μια γνωστή μη-κανονική κατανομή (χ^2 , Gamma, t , Weibull κ.α.) τότε στα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούμε όρια πιθανότητας. Σε περίπτωση που η κατανομή του χαρακτηριστικού X δεν είναι γνωστή τότε αναγκαστικά θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τα διαγράμματα ελέγχου που εφαρμόζονται στην κανονική κατανομή. Και στις 2 περιπτώσεις όμως μας ενδιαφέρει η επίδραση της μη κανονικότητας στα διαγράμματα.

Επίσης αξίζει να σημειώσουμε ότι το \bar{X} και το S διάγραμμα ελέγχου το προτιμούμε έναντι του \bar{X} και του R διαγράμματος ελέγχου όταν το μέγεθος των δειγμάτων είναι σχετικά μεγάλο ($n > 10$). Η σχετική αποτελεσματικότητα r δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$r = \frac{V(S/c_4)}{V(R/d_2)} = \frac{(1-c_4^2)d_2^2}{d_3^2 c_4^2}.$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται μεταβολή της σχετικής αποτελεσματικότητας r ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος

Μέγεθος δείγματος n	Σχετική αποτελεσματικότητα r
2	1.000
3	0.992
4	0.975
5	0.955
6	0.930
10	0.850

1.3.4 Διαγράμματα Ελέγχου για Μεμονωμένες Παρατηρήσεις

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάσαμε τις περιπτώσεις όπου το μέγεθος δείγματος ήταν μεγαλύτερο από 1, όταν το δειγματικό μέγεθος είναι ίσο με 1 τότε μιλάμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις. Οι μέθοδοι που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους για να εφαρμοστούν σε αυτού του τύπου τα διαγράμματα χρειάζεται να τροποποιηθούν κατάλληλα.

Αν η κατανομή του χαρακτηριστικού X προέρχεται από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ, σ γνωστά, το διάγραμμα ελέγχου μέσης τιμής για τις μεμονωμένες παρατηρήσεις δίνονται από το παρακάτω πλαίσιο. Στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i

X διάγραμμα
3σ Όρια Ελέγχου Φάσης II
$UCL = \mu + 3\sigma$ $CL = \mu$ $LCL = \mu - 3\sigma$

Στις μεμονωμένες παρατηρήσεις δεν έχει νόημα το εύρος, οπότε δεν γίνεται να κατασκευαστεί R διάγραμμα ελέγχου. Μπορούμε όμως να μελετήσουμε το κινούμενο εύρος των παρατηρήσεων που ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| = \max(X_{i-1}, X_i) - \min(X_{i-1}, X_i) \quad i \geq 2$$

Για το κινούμενο εύρος που είναι το εύρος δυο παρατηρήσεων, ισχύει ότι:

$$\mu_{MR_i} = E(MR_i) = \sigma d_2, \quad \sigma_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = \sigma d_3$$

Οι σταθερές d_2, d_3 υπολογίζονται για $n = 2$. Οπότε τα όρια για το κινούμενο εύρος είναι τα παρακάτω:

$$LCL = \mu_{MR_i} - 3\sigma_{MR_i} = (d_2 - 3d_3)\sigma,$$

$$CL = \mu_{MR_i} = d_2\sigma$$

$$UCL = \mu_{MR_i} + 3\sigma_{MR_i} = (d_2 + 3d_3)\sigma$$

Θέτοντας $D_1 = d_2 - 3d_3$ και $D_2 = d_2 + 3d_3$ προκύπτουν τα ακόλουθα όρια:

MR διάγραμμα
3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I
$LCL = D_1\sigma$ $CL = d_2\sigma$ $UCL = D_2\sigma$

Σε περίπτωση που τα μ και σ δεν είναι γνωστά, θα πρέπει να εκτιμηθούν. Γι' αυτό συλλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους m και εκτιμάμε τον μέσο από την σχέση:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$$

Για την εκτίμηση του σ θέτουμε:

$$\overline{MR} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_m}{m-1}$$

Μέσω του μέσου κινούμενου εύρους μπορούμε να εκτιμήσουμε την τυπική απόκλιση ως εξής:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα παρακάτω όρια ελέγχου:

X διάγραμμα 3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I
$UCL = \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$ $CL = \bar{X}$ $LCL = \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$

MR διάγραμμα 3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I
$UCL = D_4 \overline{MR}$ $CL = \overline{MR}$ $LCL = D_3 \overline{MR}$

όπου

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2},$$

Κλείνοντας το Κεφάλαιο 1 σημειώνουμε ότι οι περισσότερες έννοιες που παρουσιάστηκαν εδώ αναφέρονται στις σημειώσεις του Αντζουλάκου (2010).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαγράμματα ελέγχου με χρήση ροών και σχηματισμών

2.1 Εισαγωγή

Το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου του Shewhart είναι το δημοφιλέστερο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας διεργασίας. Όταν βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (υψηλότερα του άνω ορίου ελέγχου ή χαμηλότερα του κάτω ορίου ελέγχου) έχουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου έχει αυξημένη απόδοση στον εντοπισμό διεργασιών εκτός ελέγχου όταν έχουμε μεσαίες ή μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου (μεγαλύτερες του 1.5σ). Ωστόσο δεν είναι το ίδιο αποτελεσματικό στο γρήγορο εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το μειονέκτημά του, προτάθηκε η χρησιμοποίηση επιπλέον κανόνων ευαισθητοποίησης βασισμένων σε κανόνες ροών.

Στην παρούσα μελέτη θα παρουσιαστούν αποτελέσματα από βασικά άρθρα πάνω στη χρήση ροών και σχηματισμών για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart, όπως είναι τα άρθρα των Champ & Woodall (1987), Klein (2000a), Khoo & Ariffin (2006) και Antzoulakos & Rakitzis (2008a, 2008b, 2010).

2.2 Οι κανόνες των Champ και Woodall (1987)

Από μια τυχαία μεταβλητή X που δηλώνει την ποιότητα ενός προϊόντος έχουμε στη διάθεσή μας ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$. Υπολογίζουμε τους διαδοχικούς ανεξάρτητους δειγματικούς μέσους $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$, για τους οποίους υποθέτουμε ότι $\bar{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma^2/n)$, για $i = 1, 2, \dots$, όπου το σ^2 είναι γνωστό και παραμένει σταθερό στο χρόνο. Θεωρώντας ότι $\mu_i = \mu$ ($i \geq 1$), θα εξεταστεί αν ισχύει η συνθήκη $\mu = \mu_0$ (το μ_0 παριστάνει την εντός ελέγχου μέση τιμή της X).

Μας διευκολύνει να βασισθούν οι αποφάσεις μας στο τυποποιημένο δείγμα $Z_i = (\bar{X}_i - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$, $i \geq 1$. Ως γνωστόν, τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart βασίζονται στους τρέχοντες δειγματικούς μέσους, και ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας προκύπτει στο στάδιο t όταν $|Z_t| > L$, όπου συνήθως το $L = 3$. Αυτή η διαδικασία έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι ευαίσθητη σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Ένας τρόπος να βελτιώσουμε την ευαισθησία στις

μικρές μετατοπίσεις του μέσου είναι να προσθέσουμε περισσότερους κανόνες για να έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Οι βασικοί κανόνες ροών ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart στο οποίο απεικονίζεται μια στατιστική συνάρτηση με εντός ελέγχου μέσο μ_0 και τυπική απόκλιση σ ($LCL = \mu_0 - L\sigma$, $UCL = \mu_0 + L\sigma$) μπορούν να κωδικοποιηθούν με τον ακόλουθο τρόπο σύμφωνα με τους Champ & Woodall (1987). Ο συμβολισμός $T(k, m, a, b)$ θα δηλώνει ότι k από m διαδοχικά σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στο διάστημα $(\mu_0 + a\sigma, \mu_0 + b\sigma)$, $a < b$. Έτσι στο σύνηθες διάγραμμα ελέγχου Shewhart, $L = 3$, ο Κανόνας 1 της Παραγράφου 1.2.2, που είναι ο κλασικός κανόνας λήψης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας, μπορεί να γραφεί στη μορφή: $C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$ και ο Κανόνας 2 μπορεί να γραφεί ως: $C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$.

Έτσι συνολικά, οι Champ και Woodall μελέτησαν τους ακόλουθους 9 κανόνες ευαισθητοποίησης:

$$\text{Κανόνας 1: } C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$$

$$\text{Κανόνας 2: } C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

$$\text{Κανόνας 3: } C_3 = \{T(4,5,-3,-1), T(4,5,1,3)\}$$

$$\text{Κανόνας 4: } C_4 = \{T(8,8,-3,0), T(8,8,0,3)\}$$

$$\text{Κανόνας 5: } C_5 = \{T(2,2,-3,-2), T(2,2,2,3)\}$$

$$\text{Κανόνας 6: } C_6 = \{T(5,5,-3,-1), T(5,5,1,3)\}$$

$$\text{Κανόνας 7: } C_7 = \{T(1,1,-\infty,-3.09), T(1,1,3.09,\infty)\}$$

$$\text{Κανόνας 8: } C_8 = \{T(2,3,-3.09,-1.96), T(2,3,-1.96,3.09)\}$$

$$\text{Κανόνας 9: } C_9 = \{T(8,8,-3.09,0), T(8,8,0,3.09)\}$$

Με τον συμβολισμό $C_{ij\dots k} = C_i \cup C_j \cup \dots \cup C_k$ δηλώνεται το διάγραμμα ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν συμβεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από αυτά που περιγράφουν οι κανόνες C_i, C_j, \dots, C_k . Ο κανόνας $C_{ij\dots k}$ ονομάζεται σύνθετος κανόνας.

Παρακάτω, στον Πίνακα 2.1, δίνονται οι τιμές του μέσου μήκους ροής ARI σε διάφορα διαγράμματα ελέγχου Shewhart εφοδιασμένα με κανόνες ροών. Η μετατόπιση του μέσου δίνεται σε μονάδες τυπικής απόκλισης, δηλαδή $\delta = \sqrt{n} |\mu - \mu_0| / \sigma$. Για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων του Πίνακα 2.1 οι Champ και Woodall χρησιμοποίησαν μεθοδολογία που βασίζεται σε αλυσίδες Markov.

Πίνακας 2.1 Τιμές του *ARL* για διαγράμματα ελέγχου Shewhart εφοδιασμένα με κανόνες ροών (Champ & Woodall (1987))

Μετατόπιση	Κανόνας															
δ	C ₁	C ₇	C ₁₂	C ₇₈	C ₁₅	C ₁₃	C ₁₄	C ₇₉	C ₁₆	C ₁₂₃	C ₁₅₆	C ₁₂₄	C ₇₈₉	C ₁₃₄	C ₁₄₅₆	C ₁₂₃₄
0.0	370.40	499.62	225.44	239.75	278.03	166.05	152.73	170.41	349.38	132.89	266.82	122.05	126.17	105.78	133.21	91.75
0.2	308.43	412.01	177.56	185.48	222.59	120.70	110.52	120.87	279.53	97.86	208.44	89.14	91.19	76.01	96.37	66.80
0.4	200.08	262.19	104.46	106.15	134.17	63.88	59.76	63.80	165.48	52.93	119.47	48.71	49.19	40.95	51.94	36.61
0.6	119.67	153.86	57.92	57.80	75.27	33.99	33.64	35.46	89.07	28.70	63.70	27.49	27.57	23.15	29.01	20.90
0.8	71.55	90.41	33.12	32.75	42.96	19.78	21.07	22.09	48.40	16.93	34.96	17.14	17.14	14.62	17.94	13.25
1.0	43.89	54.55	20.01	19.70	25.61	12.66	14.58	15.26	27.74	10.95	20.43	11.73	11.71	10.19	12.19	9.22
1.2	27.82	34.03	12.81	12.62	16.06	8.84	10.90	11.42	17.05	7.68	12.83	8.61	8.59	7.66	8.90	6.89
1.4	18.25	21.97	8.69	8.58	10.60	6.62	8.60	9.05	11.28	5.76	8.65	6.63	6.62	6.08	6.84	5.41
1.6	12.38	14.68	6.21	6.16	7.36	5.24	7.03	7.44	7.98	4.54	6.22	5.27	5.27	5.01	5.42	4.41
1.8	8.69	10.15	4.66	4.64	5.36	4.33	5.85	6.24	5.97	3.73	4.71	4.27	4.27	4.24	4.39	3.68
2.0	6.30	7.25	3.65	3.65	4.07	3.68	4.89	5.25	4.67	3.14	3.72	3.50	3.52	3.65	3.61	3.13
2.2	4.72	5.36	2.96	2.98	3.22	3.18	4.08	4.41	3.78	2.70	3.04	2.91	2.94	3.17	3.01	2.70
2.4	3.65	4.08	2.48	2.51	2.64	2.78	3.38	3.67	3.14	2.35	2.55	2.47	2.50	2.77	2.54	2.35
2.6	2.90	3.20	2.13	2.17	2.22	2.43	2.81	3.05	2.64	2.07	2.19	2.13	2.16	2.43	2.19	2.07
2.8	2.38	2.59	1.87	1.91	1.93	2.14	2.35	2.54	2.26	1.85	1.91	1.87	1.91	2.14	1.91	1.85
3.0	2.00	2.15	1.68	1.71	1.70	1.89	1.99	2.14	1.95	1.67	1.70	1.68	1.71	1.89	1.70	1.67

Ο Πίνακας 2.2 περιέχει τους λόγους των τιμών του ARL του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου με $L\sigma$ όρια ελέγχου με τις αντίστοιχες τιμές του ARL_0 του Πίνακα 2.1. Τα όρια ελέγχου (L) για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου έχουν επιλεγεί με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, έτσι ώστε το ARL_0 να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά, αλλά όχι μεγαλύτερο του αντίστοιχου ARL_0 που αναφέρεται στο διάγραμμα ελέγχου εφοδιασμένου με κανόνες ρών (η τιμή του L δίνεται στην πρώτη γραμμή του Πίνακα 2.2 με έντονη γραφή). Για παράδειγμα, το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου 2.91σ έχει $ARL_0 = 276.88$ και μπορεί να συγκριθεί με το αντίστοιχο διάγραμμα των Champ & Woodall (1987) που χρησιμοποιεί το σύνθετο κανόνα C_{15} με $ARL_0 = 278.03$. Έτσι για $\delta = 0.2$ έχουμε ότι $ARL_1 = 232.58$ για το διάγραμμα Shewhart, $ARL_1 = 222.59$ για το διάγραμμα που χρησιμοποιεί τον σύνθετο κανόνα C_{15} , και επομένως ο λόγος των δύο ARL_1 τιμών είναι $232.58/222.59 = 1.04488 \cong 1.04$. Γίνεται προφανές από τον Πίνακα 2.2 ότι τα διαγράμματα ελέγχου εφοδιασμένα με κανόνες ρών είναι πιο αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου (λόγοι αρκετά μεγαλύτεροι της μονάδας). Τα διαγράμματα με κανόνες ρών είναι λιγότερο αποτελεσματικά στις μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου, αλλά και οι δύο τύποι διαγραμμάτων τείνουν να ανιχνεύουν μεγάλες μετατοπίσεις αρκετά γρήγορα.

Πίνακας 2.2 Λόγοι *ARL* του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου $L\sigma$ έναντι των αντίστοιχων διαγραμμάτων του Πίνακα 2.1

Μετατόπιση	Όριο ελέγχου $L\sigma$ του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου Shewhart															
	3.00	3.09	2.84	2.86	2.91	2.74	2.71	2.75	2.98	2.67	2.89	2.64	2.66	2.59	2.67	2.54
δ	C_1	C_7	C_{12}	C_{78}	C_{15}	C_{13}	C_{14}	C_{79}	C_{16}	C_{123}	C_{156}	C_{124}	C_{789}	C_{134}	C_{1456}	C_{1234}
0.0	1.00	1.00	0.98	0.98	1.00	0.98	0.97	0.98	0.99	0.99	0.97	0.99	0.98	0.96	0.99	0.98
0.2	1.00	1.00	1.06	1.08	1.04	1.15	1.15	1.19	1.04	1.16	1.05	1.17	1.18	1.19	1.18	1.18
0.4	1.00	1.00	1.21	1.26	1.15	1.49	1.47	1.54	1.14	1.49	1.22	1.50	1.52	1.56	1.52	1.53
0.6	1.00	1.00	1.34	1.42	1.25	1.77	1.66	1.74	1.27	1.76	1.40	1.71	1.75	1.80	1.74	1.77
0.8	1.00	1.00	1.45	1.54	1.33	1.92	1.68	1.76	1.40	1.91	1.55	1.76	1.80	1.84	1.80	1.82
1.0	1.00	1.00	1.52	1.61	1.39	1.93	1.57	1.63	1.51	1.92	1.66	1.68	1.72	1.75	1.72	1.75
1.2	1.00	1.00	1.54	1.63	1.43	1.83	1.40	1.44	1.56	1.84	1.71	1.55	1.56	1.56	1.58	1.61
1.4	1.00	1.00	1.54	1.62	1.44	1.68	1.22	1.25	1.55	1.70	1.70	1.40	1.43	1.40	1.43	1.45
1.6	1.00	1.00	1.50	1.56	1.43	1.50	1.07	1.07	1.49	1.55	1.63	1.27	1.29	1.24	1.30	1.31
1.8	1.00	1.00	1.44	1.49	1.40	1.33	0.94	0.94	1.41	1.39	1.54	1.17	1.19	1.10	1.18	1.18
2.0	1.00	1.00	1.37	1.41	1.35	1.18	0.86	0.84	1.31	1.27	1.44	1.09	1.10	0.99	1.10	1.08
2.2	1.00	1.00	1.29	1.32	1.30	1.07	0.80	0.78	1.21	1.16	1.34	1.04	1.04	0.91	1.04	1.01
2.4	1.00	1.00	1.22	1.24	1.24	0.98	0.78	0.75	1.13	1.08	1.25	1.00	1.00	0.85	1.00	0.96
2.6	1.00	1.00	1.16	1.15	1.19	0.93	0.78	0.74	1.08	1.02	1.18	0.97	0.96	0.81	0.97	0.92
2.8	1.00	1.00	1.11	1.10	1.13	0.89	0.80	0.76	1.03	0.98	1.13	0.95	0.94	0.80	0.95	0.90
3.0	1.00	1.00	1.05	1.05	1.10	0.88	0.82	0.78	1.01	0.95	1.06	0.93	0.92	0.80	0.94	0.89

2.3 Οι κανόνες 2/2 και 2/3 του Klein (2000a)

Ένα βασικό μειονέκτημα της προσέγγισης των Champ & Woodall (1987) είναι ότι δεν μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αφού οι ζώνες και τα όρια ελέγχου των διαγραμμάτων είναι σταθερά. Ο Klein (2000a) πρότεινε διαγράμματα ελέγχου εφοδιασμένων με κανόνες ευαισθητοποίησης όπου το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής μπορεί να πάρει όποια τιμή θέλουμε. Τα διαγράμματα αυτά έχουν δύο όρια ελέγχου, ένα πάνω και ένα κάτω όριο ελέγχου και στηρίζονται σε κανόνες ροών της μορφής 2-από-2 και της μορφής 2-από-3.

Η ιδέα του Klein (2000a) βασιζόταν στην εργασία των Derman & Ross (1997), οι οποίοι είχαν προτείνει δύο σχήματα προκειμένου να αυξήσουν την ευαισθησία ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart που λειτουργούν ως εξής:

- (i) Στο πρώτο διάγραμμα έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία όταν δύο συνεχόμενα σημεία (κανόνας 2/2) βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος (δεν μας ενδιαφέρει να βρίσκονται και τα δύο σημεία πέρα από ένα συγκεκριμένο όριο ελέγχου).
- (ii) Το δεύτερο διάγραμμα δίνει ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία όταν δύο από τρία συνεχόμενα σημεία (κανόνας 2/3) βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος (δεν μας ενδιαφέρει να βρίσκονται και τα δύο σημεία πέρα από ένα συγκεκριμένο όριο ελέγχου).

Ο Klein (2000a) τροποποίησε την ιδέα των Derman & Ross (1997) και πρότεινε για το μεν πρώτο σχήμα να έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία όταν δύο από δύο σημεία βρίσκονται πέρα από το ίδιο όριο ελέγχου (είτε το πάνω είτε το κάτω όριο ελέγχου). Στη δεύτερη περίπτωση, πρότεινε να έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία όταν δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία βρίσκονται πέρα από το ίδιο όριο ελέγχου (είτε το πάνω είτε το κάτω όριο ελέγχου).

Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται τιμές *ARL* για το κλασικό διάγραμμα Shewhart με 3σ όρια ελέγχου, για τα διαγράμματα των Derman & Ross (1997) και για τα διαγράμματα του Klein (2000a) με τους κανόνες 2/2 και 2/3.

Πίνακας 2.3 Τιμές του ARL για τα διαγράμματα των Shewhart, Derman-Ross και Klein

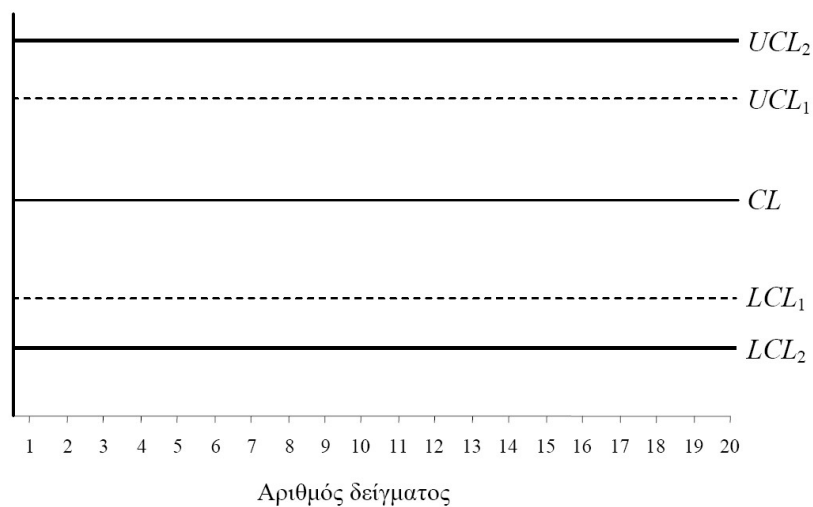
Μετατόπιση δ	Όρια ελέγχου				
	Shewhart	Derman-Ross: 2/2	Derman-Ross: 2/3	Klein: 2/2	Klein: 2/3
	± 3	± 1.9322	± 2.0698	± 1.7814	± 1.9307
0.0	370	370	370	370	370
0.2	308	313	308	277	271
0.4	200	204	193	150	142
0.6	120	116	107	79	73
0.8	72	65	58	44	40
1.0	44	37	33	26	23
1.2	28	23	20	16	15
1.4	18	15	13	11	10
1.6	12	10	8.9	7.8	7.1
1.8	8.7	7.2	6.6	5.9	5.4
2.0	6.3	5.5	5.1	4.6	4.3
2.2	4.7	4.4	4.1	3.8	3.6
2.4	3.6	3.6	3.4	3.2	3.1
2.6	2.9	3.1	3.0	2.8	2.8
2.8	2.4	2.8	2.7	2.6	2.5
3.0	2.0	2.5	2.5	2.4	2.4
4.0	1.2	2.1	2.1	2.0	2.0
5.0	1.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Το εντός ελέγχου μέσος μήκος ροής ARL_0 τίθεται ίσο με 370.4. Στον παραπάνω πίνακα έχουν σημειωθεί με έντονη γραφή οι μικρότερες τιμές του ARL . Παρατηρούμε λοιπόν πως η πρόταση του Klein είναι αρκετά καλύτερη για μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας, εκτός από την περίπτωση όπου έχουμε μετατόπιση μεγαλύτερη από 2.8σ , οπότε τότε αποδίδει καλύτερα το κλασικό \bar{X} διάγραμμα ελέγχου. Για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων του Πίνακα 2.3 ο Klein χρησιμοποίησε μεθοδολογία που βασίζεται σε αλυσίδες Markov.

2.4 Η βελτιωμένη προσέγγιση των Khoo και Ariffin (2006)

Οι κανόνες ροών χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart προκειμένου να αυξήσουν την ευαισθησία τους στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων της διεργασίας. Όμως υστερούν στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων σε σχέση με τα κλασικά διαγράμματα Shewhart.

Το σημείο αυτό αποτελεί ίσως το κυριότερο μειονέκτημά τους εφόσον θα θέλαμε μεγάλες μετατοπίσεις, που είναι και οι πιο σοβαρές, να ανιχνεύονται άμεσα. Με την επίλυση αυτού του προβλήματος ασχολήθηκαν οι Khoo & Ariffin (2006) οι οποίοι πρότειναν δύο βελτιωμένα σχήματα τα οποία στηρίζονται στους κανόνες ροών 2/2 και 2/3 του Klein (2000a). Οι Khoo & Ariffin (2006) πρόσθεσαν και στις δύο περιπτώσεις έναν επιπλέον κανόνα, τον 1/1, ο οποίος κάνει χρήση των δικών του ορίων ελέγχου. Έτσι, μια ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία λαμβάνεται είτε όταν ένα σημείο είναι πέρα από τα όρια ελέγχου UCL_2 ή LCL_2 , είτε με τον κανόνα 2/2 που σχετίζεται με τα όρια ελέγχου UCL_1 και LCL_1 (το όλο σχήμα θα συμβολίζεται με $I-2/2$). Ανάλογα λειτουργεί και το σχήμα με τον κανόνα 2/3 (θα συμβολίζεται με $I-2/3$). Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.1 Τα διπλά συμμετρικά όρια ελέγχου των Khoo & Ariffin (2006)

Προκύπτουν λοιπόν δύο ζεύγη ορίων ελέγχου, ένα εξωτερικό ζεύγος (LCL_2 , UCL_2) που χρησιμοποιείται από τον κανόνα 1/1, και ένα άλλο εσωτερικό ζεύγος (LCL_1 , UCL_1) που χρησιμοποιείται από τον κανόνα 2/2 ή τον κανόνα 2/3. Για να χρησιμοποιήσουμε τους νέους κανόνες, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τα εξωτερικά όρια ελέγχου (UCL_2 , LCL_2). Τα εξωτερικά όρια θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα από $\pm 3\sigma$, εάν το επιθυμητό μέσο μήκος ροής θέλουμε να είναι 370.4. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τα εσωτερικά όρια ελέγχου (UCL_1 , LCL_1), χρησιμοποιώντας μεθοδολογία των αλυσίδων Markov, έτσι ώστε να έχουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Στους Πίνακες 2.4 και 2.5 παρουσιάζονται οι τιμές του ARL για πέντε διαφορετικά σενάρια για τα εξωτερικά όρια ελέγχου. Για λόγους σύγκρισης δίνονται και οι τιμές του μέσου μήκους ροής ARL του αντίστοιχου διαγράμματος ελέγχου του Shewhart, καθώς και των διαγραμμάτων ελέγχου 2/2 και 2/3 του Klein (2000a). Προκύπτει ότι τα σχήματα των Khoo & Ariffin (2006) έχουν καλύτερο ARL στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου ενώ ταυτοχρόνως έχουν την ίδια

καλή απόδοση στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων του μέσου. Ο υπολογισμός των τιμών του *ARL* έγινε από τους Khoo & Ariffin (2006) με προσομοίωση.

Πίνακας 2.4 Τιμές του *ARL* για σχήματα *I-2/2* των Khoo & Ariffin (2006), του σχήματος *2/2* του Klein (2000a) και του κλασικού σχήματος Shewhart

Μετατόπιση δ	Shewhart	Klein 2/2	Όρια ελέγχου για το σχήμα <i>I-2/2</i> των Khoo & Ariffin				
	± 3	± 1.7814	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.4$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.843$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.5$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.823$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.6$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.81$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.7$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.798$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.8$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.792$
0.0	371.20	375.48	373.22	373.25	373.84	369.57	372.69
0.2	311.60	280.52	281.48	281.57	282.24	277.16	278.38
0.4	204.13	153.98	156.50	155.63	155.78	153.88	153.58
0.6	120.22	81.14	81.97	81.39	80.83	80.04	80.00
0.8	71.86	45.33	45.30	44.90	44.77	44.75	44.65
1.0	44.28	26.95	26.40	26.40	26.45	26.37	26.38
1.2	28.38	16.99	16.38	16.42	16.51	16.45	16.55
1.4	18.03	11.25	10.68	10.68	10.75	10.75	10.85
1.6	12.51	7.92	7.48	7.48	7.48	7.52	7.60
1.8	9.00	5.83	5.41	5.45	5.48	5.48	5.52
2.0	6.39	4.52	4.14	4.17	4.21	4.24	4.27
2.2	4.72	3.71	3.32	3.34	3.38	3.41	3.45
2.4	3.65	3.19	2.80	2.82	2.87	2.90	2.94
2.6	2.92	2.84	2.40	2.44	2.49	2.53	2.58
2.8	2.36	2.58	2.12	2.16	2.21	2.24	2.28
3.0	1.98	2.38	1.90	1.94	1.98	2.02	2.07
4.0	1.19	2.04	1.27	1.31	1.34	1.38	1.42
5.0	1.02	2.00	1.05	1.06	1.07	1.09	1.11
6.0	1.00	2.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01

Πίνακας 2.5 Τιμές του *ARL* για σχήματα *I-2/3* των *Kho & Ariffin (2006)*, του σχήματος *2/3* του *Klein (2000a)* και του κλασικού σχήματος *Shewhart*

Μετατόπιση δ	Shewhart	Klein 2/3	Όρια ελέγχου για το σχήμα <i>I-2/3</i> των <i>Kho & Ariffin</i>				
	± 3	± 1.9307	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.4$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.986$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.5$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.966$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.6$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.955$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.7$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.946$	$UCL_2/LCL_2 = \pm 3.8$ $UCL_1/LCL_1 = \pm 1.94$
0.0	371.20	374.48	373.13	371.06	372.94	369.96	369.33
0.2	311.60	277.11	278.78	275.61	276.46	275.39	275.03
0.4	204.13	145.00	148.85	145.41	145.25	144.66	143.90
0.6	120.22	74.47	76.57	75.16	74.59	74.24	73.80
0.8	71.86	40.89	41.57	41.08	40.86	40.66	40.47
1.0	44.28	23.80	24.24	23.85	23.78	23.59	23.55
1.2	28.38	15.32	15.31	15.07	15.05	15.04	15.08
1.4	18.03	10.23	10.13	10.01	9.98	10.01	10.03
1.6	12.51	7.24	7.05	7.00	7.01	7.02	7.04
1.8	9.00	5.38	5.52	5.14	5.16	5.16	5.17
2.0	6.39	4.28	4.27	4.00	4.03	4.05	4.09
2.2	4.72	3.54	3.45	3.26	3.31	3.33	3.36
2.4	3.65	3.06	2.94	2.78	2.81	2.84	2.87
2.6	2.92	2.73	2.58	2.40	2.44	2.48	2.51
2.8	2.36	2.50	2.28	2.14	2.19	2.22	2.25
3.0	1.98	2.35	2.07	1.94	1.98	2.02	2.06
4.0	1.19	2.03	1.42	1.31	1.34	1.38	1.43
5.0	1.02	2.00	1.11	1.06	1.07	1.09	1.11
6.0	1.00	2.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01

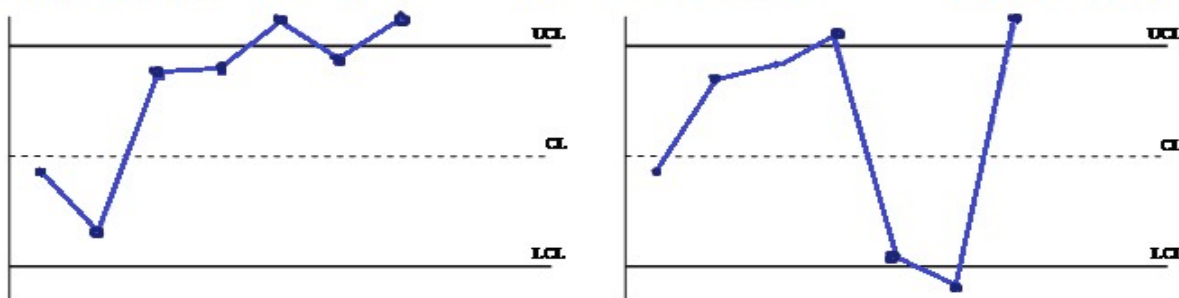
2.5 Το τροποποιημένο r -από- m διάγραμμα των Antzoulakos και Rakitzis (2008a)

Ο r -από- m (r/m) κανόνας ροών ($1 \leq r \leq m$) δίνει σήμα εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασίας όταν r από m συνεχόμενα σημεία βρίσκονται πάνω από το άνω όριο ελέγχου (UCL), είτε όταν r από m συνεχόμενα σημεία βρίσκονται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (LCL). Στο r/m σχήμα, με $r < m$, η ομάδα των σημείων με μέγιστο μήκος m η οποία προκαλεί σήμα για εκτός ελέγχου διαδικασία, μπορεί να γραφεί ως ένωση δυο ομάδων σημείων. Η πρώτη ομάδα, A, περιέχει τα σημεία που είναι πάνω (κάτω) από το UCL (LCL) και η δεύτερη ομάδα, B, περιέχει το πολύ $m-r$ σημεία τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία της A ομάδας.

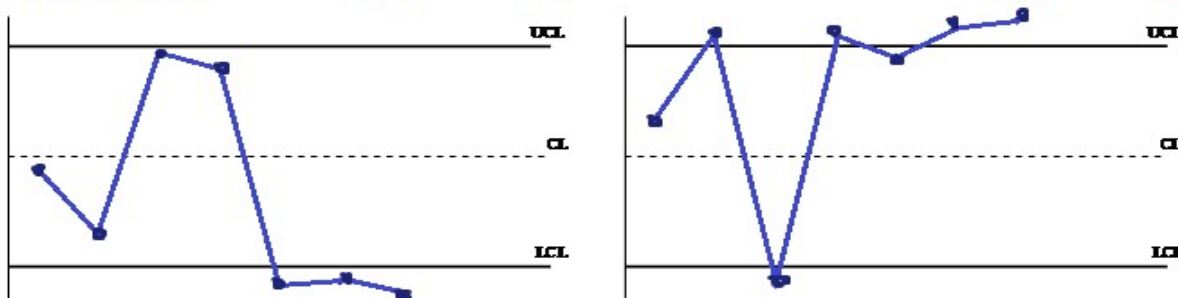
Στην Σχήμα 2.2, παρέχονται μερικές διαδικασίες η οποίες δείχνουν το σχηματισμό r/m και χρησιμοποιούνται ώστε να ανιχνευθούν μετατοπίσεις του μέσου μιας διαδικασίας.

Σχήμα 2.2. Επεξήγηση των r/m σχηματισμών

Διαδικασία I: 2/3 σχήμα ελέγχου **Διαδικασία II: 2/4 σχήμα ελέγχου**



Διαδικασία III: 3/3 σχήμα ελέγχου **Διαδικασία IV: 3/4 σχήμα ελέγχου**



Για τις διαδικασίες I, II και IV υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετατοπιστεί προς τα άνω, ενώ για την III υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετατοπιστεί χαμηλότερα. Όπως και να έχει, για την διαδικασία II, υπάρχουν αμφιβολίες ότι ο μέσος έχει μετατοπιστεί προς τα άνω διότι ανάμεσα από τα r ($=2$) σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω από το UCL (στοιχεία της ομάδας A) υπάρχουν $m-r$ ($=2$) σημεία σε μεγάλη απόσταση από αυτά (στοιχεία της ομάδας B). Έτσι, φαίνεται λογικό να λάβουμε υπόψη μας την τοποθεσία των σημείων της

ομάδας B σε σχέση με την τοποθεσία των σημείων της ομάδας A, ώστε να αποφανθούμε ότι υπάρχει ένδειξη για εκτός ελέγχου διαδικασία. Μια λογική υπόθεση είναι να απαιτούμε από τα σημεία της ομάδας B να βρίσκονται αρκετά κοντά στα σημεία της ομάδας A.

Για αυτό το λόγο, στην περίπτωση που $r < m$, προτείνεται το τροποποιημένο διάγραμμα ελέγχου, το οποίο μας δίνει σήμα για μια εκτός ελέγχου διεργασία όταν είτε r σημεία βρίσκονται άνω του άνω ορίου ελέγχου τα οποία διαχωρίζονται από το πολύ $m-r$ σημεία τα οποία βρίσκονται ανάμεσα από την κεντρική γραμμή και το άνω όριο ελέγχου, είτε r σημεία βρίσκονται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου τα οποία διαχωρίζονται το πολύ από $m-r$ σημεία τα οποία βρίσκονται ανάμεσα από την κεντρική γραμμή και το κάτω όριο ελέγχου.

Το παραπάνω καλείται τροποποιημένο r από m διάγραμμα ελέγχου και συμβολίζεται ως $M: r/m$.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η απόδοση του $M: r/m$ διαγράμματος ελέγχου. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές από τις οποίες προκύπτουν τα σημεία του διαγράμματος είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με 1 ($\sigma=1$). Η διαδικασία θεωρείται εντός ελέγχου όταν ο μέσος της είναι ίσος με μηδέν ($\mu=0$).

Στον Πίνακα 2.6, παρουσιάζονται οι τιμές του ARL και τα όρια ελέγχου του $M: r/m$ ($m=3,4,5$ και $2 \leq r < m$) διαγράμματος για εντός ελέγχου ARL είναι ίσο με 370,4. Για λόγους σύγκρισης υπάρχουν και οι τιμές από τα διαγράμματα του Klein (2000a), όπως επίσης και οι τιμές για το τυπικό διάγραμμα Shewhart. Προκύπτει ότι το $M: r/m$ υπερτερεί σταθερά των αντίστοιχων r/m διαγραμμάτων για κάθε μετατόπιση του μέσου. Για μετατοπίσεις του μέσου μεγαλύτερη από 2.6 τυπικές αποκλίσεις το διάγραμμα Shewhart έχει την καλύτερη απόδοση. Η επιλογή για το βέλτιστο τροποποιημένο διάγραμμα ελέγχου εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης που επιθυμούμε να εντοπίσουμε. Για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων του Πίνακα 2.6 οι Antzoulakos & Rakitzis (2008a) χρησιμοποίησαν μεθοδολογία που βασίζεται σε αλυσίδες Markov.

Πίνακας 2.6 : Τιμές του *ARL* για τα *M:r/m* διαγράμματα ελέγχου

	Shewhart 1/1	Klein 2/2	Klein 2/3	M: 2/2	M:2/3	M:2/4	M:2/5	M: 3/4	M: 4/5
δ	3.00	1.78	1.93	1.78	1.87	1.90	1.91	1.31	0.95
0	370.40	370.37	370.40	370.37	370.32	370.39	370.33	370.45	370.40
0.1	352.93	342.00	339.58	342.00	337.48	334.80	332.98	328.58	323.10
0.2	308.43	276.65	270.10	276.65	264.73	257.80	253.34	243.13	231.24
0.3	253.14	207.12	198.46	207.12	191.59	182.89	177.45	166.16	153.58
0.4	200.08	150.24	141.62	150.24	134.90	126.61	121.51	112.02	101.68
0.5	155.22	108.45	100.87	108.45	95.06	88.03	83.76	76.66	68.97
0.6	119.67	78.91	72.64	78.91	67.88	62.24	58.84	53.80	48.34
0.7	92.32	58.21	53.17	58.21	49.37	44.96	42.32	38.83	35.06
0.8	71.55	43.63	39.64	43.63	36.63	33.22	31.21	28.83	26.28
0.9	55.83	33.25	30.11	33.25	27.74	25.12	23.59	22.00	20.33
1	43.89	25.78	23.30	25.78	21.44	19.42	18.26	17.23	16.18
1.1	34.80	20.32	18.36	20.32	16.89	15.34	14.46	13.83	13.23
1.2	27.82	16.28	14.73	16.28	13.56	12.37	11.70	11.36	11.09
1.3	22.43	13.24	12.01	13.24	11.08	10.16	9.65	9.52	9.50
1.4	18.25	10.94	9.96	10.94	9.21	8.49	8.11	8.14	8.30
1.5	14.97	9.17	8.38	9.17	7.78	7.22	6.93	7.08	7.38
1.6	12.38	7.79	7.16	7.79	6.67	6.23	6.02	6.26	6.67
1.7	10.33	6.71	6.20	6.71	5.79	5.46	5.30	5.62	6.12
1.8	8.69	5.85	5.43	5.85	5.10	4.84	4.72	5.11	5.69
1.9	7.37	5.17	4.82	5.17	4.55	4.35	4.26	4.71	5.34
2	6.30	4.61	4.33	4.61	4.10	3.95	3.89	4.38	5.07
2.1	5.43	4.16	3.93	4.16	3.74	3.62	3.58	4.12	4.85
2.2	4.72	3.79	3.60	3.79	3.44	3.35	3.33	3.91	4.67
2.3	4.13	3.49	3.33	3.49	3.19	3.13	3.11	3.74	4.53
2.4	3.65	3.23	3.10	3.23	2.99	2.95	2.94	3.59	4.42
2.5	3.24	3.02	2.92	3.02	2.82	2.79	2.79	3.48	4.33
2.6	2.90	2.85	2.76	2.85	2.68	2.66	2.66	3.39	4.26
2.7	2.62	2.70	2.63	2.70	2.56	2.55	2.56	3.31	4.20
2.8	2.38	2.58	2.52	2.58	2.47	2.46	2.46	3.25	4.16
2.9	2.17	2.48	2.43	2.48	2.38	2.38	2.39	3.20	4.12
3	2.00	2.39	2.36	2.39	2.32	2.32	2.32	3.16	4.09
3.1	1.85	2.32	2.29	2.32	2.26	2.26	2.27	3.12	4.07
3.2	1.73	2.26	2.24	2.26	2.21	2.21	2.22	3.10	4.05
3.3	1.62	2.21	2.19	2.21	2.17	2.18	2.18	3.08	4.04
3.4	1.53	2.17	2.16	2.17	2.14	2.14	2.15	3.06	4.03
3.5	1.45	2.14	2.13	2.14	2.11	2.12	2.12	3.05	4.02
3.6	1.38	2.11	2.10	2.11	2.09	2.09	2.10	3.03	4.02
3.7	1.32	2.09	2.08	2.09	2.07	2.07	2.08	3.03	4.01
3.8	1.27	2.07	2.06	2.07	2.06	2.06	2.06	3.02	4.01
3.9	1.23	2.05	2.05	2.05	2.04	2.05	2.05	3.01	4.01
4	1.19	2.04	2.04	2.04	2.03	2.04	2.04	3.01	4.00

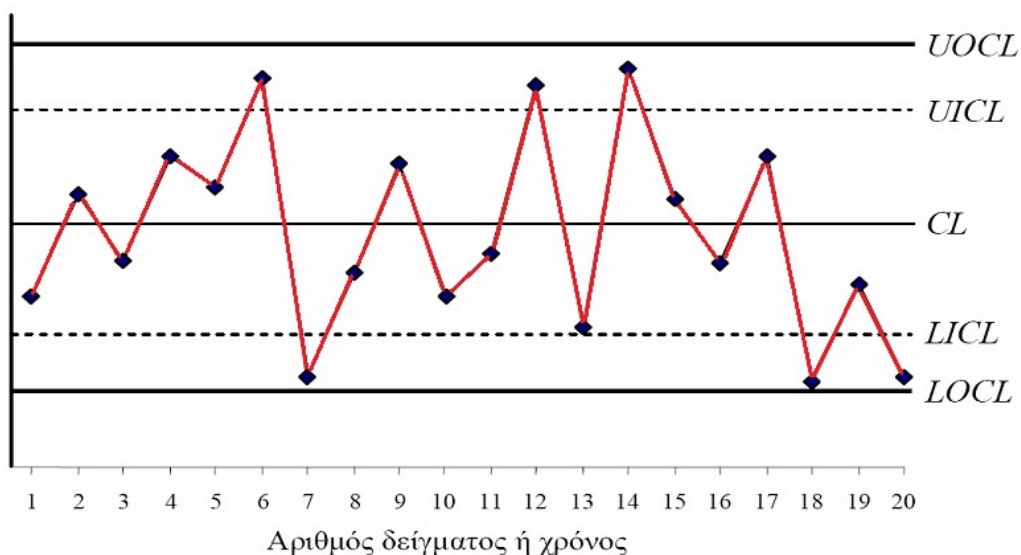
2.6 Το αναθεωρημένο r -από- m διάγραμμα των Antzoulakos και Rakitzis (2008b)

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, οι Khoo & Ariffin (2006) πρότειναν έναν συνδυασμό του κλασικού διαγράμματος ελέγχου Shewhart (κανόνας 1/1) με τα διαγράμματα τύπου 2/2 ή 2/3 του Klein (2000a). Αυτός ο συνδυασμός κανόνων θα αναφέρεται στο εξής ως βελτιωμένος (improved) m -από- k κανόνας και θα συμβολίζεται ως $I-m/k$, όπου $k \geq 2$ και $2 \leq m \leq k$. Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι οι κανόνες $I-2/2$ και $I-2/3$ παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση με κριτήριο το μέσο μήκος ροής, σε σύγκριση με τους αντίστοιχους κανόνες του Klein στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου, ενώ διατηρούν την ανωτερότητά τους στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων του μέσου.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας νέος κανόνας, ο οποίος καλείται αναθεωρημένος (revised) m -από- k κανόνας ροής και θα συμβολίζεται με $R-m/k$. Ο κανόνας αυτός παρουσιάστηκε από τους Antzoulakos & Rakitzis (2008b).

Έστω ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με μια κεντρική γραμμή (CL) και δύο ζευγάρια συμμετρικών ορίων ελέγχου που αποτελούνται από τα εξωτερικά (outer) όρια ελέγχου ($LOCL, UOCL$) και τα εσωτερικά (inner) όρια ελέγχου ($LICL, UICL$). Στο Σχήμα 2.3 φαίνονται τα συγκεκριμένα όρια ελέγχου.

Σχήμα 2.3: Ο κανόνας $R-m/k$ των Antzoulakos & Rakitzis (2008b)



Για τα παραπάνω εσωτερικά και εξωτερικά όρια ελέγχου ισχύει η συνθήκη

$$LOCL < LICL < CL < UICL < UOCL .$$

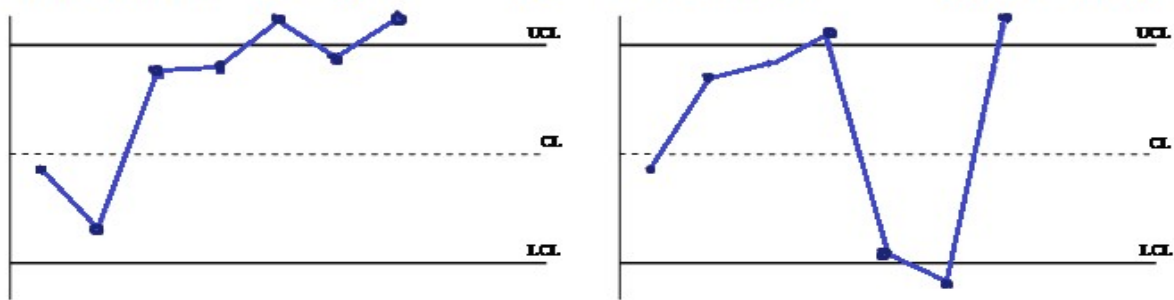
Για $k \geq 2$ και $2 \leq m < k$, το σχήμα $R - m/k$ δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν συμβεί κάποιο ενδεχόμενο από τα παρακάτω δύο:

- ένα σημείο βρεθεί εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου,
- όταν m από k συνεχόμενα σημεία βρεθούν ανάμεσα στα UICL (αντ. LICL) και UOCL (αντ. LOCL), και τα υπόλοιπα σημεία που περισσεύουν, δηλαδή τα $k-m$ σημεία, βρίσκονται ανάμεσα από την κεντρική γραμμή CL και το UICL (αντ. LICL).

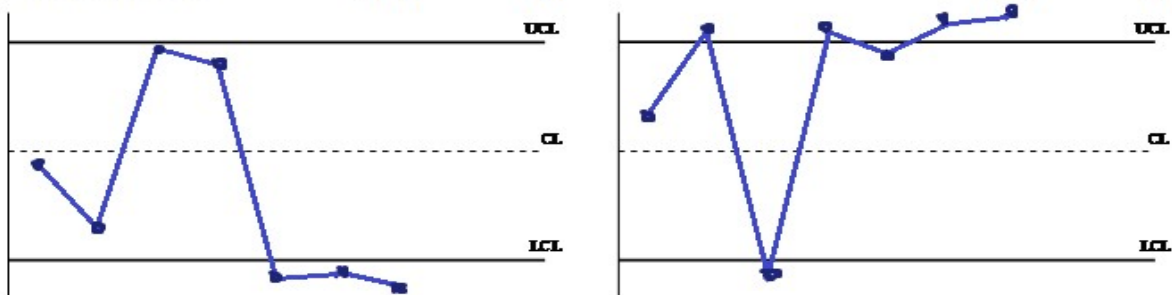
Σχετικά με το δεύτερο ενδεχόμενο τονίζουμε ότι θα πρέπει τα k το πλήθος συνεχόμενα σημεία του σχηματισμού να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής CL. Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται εύκολα η διαφορά των σχημάτων $I-2/3$ με τον $R-2/3$. Το σχήμα $R-2/3$ δίνει σήμα εκτός ελέγχου στο δείγμα 20, ενώ το σχήμα $I-2/3$ στα δείγματα 14 και 20. Η λογική του προταθέντα κανόνα $R - m/k$ διασαφηνίζεται στο ακόλουθο σχήμα.

Σχήμα 2.4 Ορισμένες ροές m/k

Διαδικασία I: 2/3 σχήμα ελέγχου Διαδικασία II: 2/4 σχήμα ελέγχου



Διαδικασία III: 3/3 σχήμα ελέγχου Διαδικασία IV: 3/4 σχήμα ελέγχου



Στις διαδικασίες I, II και IV υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο, ενώ για την III υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετατοπιστεί χαμηλότερα. Ωστόσο για την διαδικασία II, υπάρχουν αμφιβολίες ότι ο μέσος έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο διότι ανάμεσα από τα 2 σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω από το UCL υπάρχουν 2 σημεία σε μεγάλη απόσταση από αυτά. Αυτό το σημείο έρχεται να βελτιώσει ο κανόνας $R-m/k$.

Για τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου $R-m/k$ πρώτα επιλέγουμε μια τιμή c για το εντός ελέγχου ARL και κατόπιν υπολογίζουμε τα εξωτερικά όρια ελέγχου $UOCL = L$, $LOCL = -L$. Η τιμή L πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $L > z_{1/2c}$ ώστε να έχουμε μεγαλύτερα όρια ελέγχου σε σχέση με το κλασσικό διάγραμμα Shewhart εφοδιασμένο με τον κανόνα 1/1 με το ίδιο εντός ελέγχου $ARL = c$ (το z_a συμβολίζει το άνω a ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής). Στην συνέχεια υπολογίζονται τα εσωτερικά όρια ελέγχου $LICL = -d$, $UICL = d$, με $d < L$, έτσι ώστε να δώσουν την επιθυμητή τιμή c για το εντός ελέγχου ARL .

Όπως κάναμε και στις προηγούμενες τρεις μελέτες, των Champ & Woodall (1987), του Klein (2000a) και των Khoo & Ariffin (2006), θα δοθεί πίνακας ο οποίος θα περιέχει τις τιμές του ARL των Antzoulakos & Rakitzis (2008b) και θα υπάρχει δυνατότητα σύγκρισης με τις τιμές ARL των προηγούμενων μελετών. Αυτό θα γίνει για τα σχήματα $R-2/3$ και $R-4/5$.

Στον Πίνακα 2.7 δίνεται το ARL και τα όρια ελέγχου έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL να ισούται με 370.4. Για λόγους σύγκρισης η τιμή του L συμπίπτει για τους κανόνες $I-2/3$ και $R-2/3$. Με έντονη γραφή φαίνονται οι μικρότερες τιμές του ARL , για τις οποίες παρατηρούμε ότι υπερτερεί ο κανόνας $R-2/3$. Στη συνέχεια δίνονται αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά του Πίνακα 2.7 για τον κανόνα 4/5:

Πίνακας 2.7 Τιμές του *ARL* στα διαγράμματα Shewhart, Klein 2/3, *I*-2/3 και *R*-2/3

	Shewhart	Klein 2/3	<i>I</i> -2/3 (Khoo & Ariffin)					<i>R</i> -2/3 (Antzoulakos & Rakitzis)				
			±3.4	±3.5	±3.6	±3.7	±3.8	±3.4	±3.5	±3.6	±3.7	±3.8
δ	±3	±1.93	±1.986	±1.967	±1.954	±1.946	±1.94	±1.926	±1.906	±1.892	±1.884	±1.878
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.1	352.93	339.58	340.95	340.33	339.97	339.76	339.64	339.30	338.56	338.11	337.84	337.69
0.2	308.43	270.10	273.62	272.01	271.06	270.53	270.24	269.18	267.29	266.16	265.49	265.11
0.3	253.14	198.46	202.82	200.78	199.60	198.94	198.58	196.95	194.62	193.23	192.43	191.97
0.4	200.08	141.62	145.62	143.69	142.59	141.99	141.67	139.75	137.59	136.32	135.60	135.19
0.5	155.22	100.87	104.06	102.47	101.58	101.10	100.85	98.89	97.13	96.12	95.54	95.23
0.6	119.67	72.64	75.00	73.78	73.10	72.73	72.56	70.71	69.37	68.61	68.18	67.95
0.7	92.32	53.17	54.84	53.92	53.42	53.16	53.04	51.38	50.39	49.83	49.52	49.36
0.8	71.55	39.64	40.77	40.10	39.74	39.56	39.48	38.02	37.30	36.90	36.69	36.58
0.9	55.83	30.11	30.85	30.36	30.11	29.99	29.94	28.68	28.16	27.88	27.73	27.66
1.0	43.89	23.30	23.76	23.41	23.23	23.15	23.13	22.05	21.68	21.48	21.38	21.34
1.1	34.80	18.36	18.62	18.37	18.25	18.20	18.19	17.28	17.00	16.87	16.80	16.78
1.2	27.82	14.73	14.84	14.66	14.58	14.56	14.56	13.78	13.58	13.49	13.45	13.44
1.3	22.43	12.01	12.02	11.90	11.85	11.84	11.85	11.18	11.04	10.98	10.96	10.96
1.4	18.25	9.96	9.89	9.81	9.78	9.78	9.79	9.22	9.13	9.09	9.08	9.08
1.5	14.97	8.38	8.26	8.21	8.19	8.20	8.22	7.72	7.66	7.64	7.64	7.65
1.6	12.38	7.16	7.00	6.96	6.96	6.98	7.00	6.56	6.52	6.51	6.52	6.54
1.7	10.33	6.20	6.00	5.99	5.99	6.01	6.04	5.65	5.63	5.63	5.64	5.66
1.8	8.69	5.43	5.22	5.21	5.23	5.25	5.27	4.93	4.92	4.93	4.95	4.97
1.9	7.37	4.82	4.58	4.59	4.61	4.63	4.66	4.35	4.35	4.37	4.39	4.41
2.0	6.30	4.33	4.07	4.08	4.11	4.14	4.16	3.88	3.89	3.91	3.93	3.96
2.1	5.43	3.93	3.65	3.67	3.70	3.73	3.76	3.50	3.51	3.54	3.56	3.59
2.2	4.72	3.60	3.31	3.33	3.36	3.39	3.42	3.18	3.20	3.23	3.25	3.28
2.3	4.13	3.33	3.02	3.05	3.08	3.11	3.14	2.91	2.94	2.97	3.00	3.03
2.4	3.65	3.10	2.78	2.81	2.84	2.88	2.91	2.69	2.72	2.75	2.78	2.81
2.5	3.24	2.92	2.57	2.60	2.64	2.68	2.71	2.50	2.53	2.57	2.60	2.63
2.6	2.90	2.76	2.39	2.43	2.47	2.51	2.54	2.34	2.37	2.41	2.44	2.48
2.7	2.62	2.63	2.24	2.28	2.32	2.36	2.40	2.20	2.23	2.27	2.31	2.34
2.8	2.38	2.52	2.11	2.15	2.19	2.23	2.27	2.07	2.11	2.15	2.19	2.23
2.9	2.17	2.43	2.00	2.04	2.08	2.12	2.16	1.97	2.01	2.05	2.09	2.12
3.0	2.00	2.36	1.90	1.94	1.98	2.02	2.06	1.87	1.91	1.95	1.99	2.03
3.1	1.85	2.29	1.80	1.85	1.89	1.93	1.98	1.79	1.83	1.87	1.91	1.95
3.2	1.73	2.24	1.72	1.77	1.81	1.85	1.90	1.71	1.75	1.79	1.84	1.88
3.3	1.62	2.19	1.65	1.69	1.74	1.78	1.82	1.64	1.68	1.72	1.77	1.81
3.4	1.53	2.16	1.58	1.63	1.67	1.71	1.76	1.57	1.62	1.66	1.70	1.75
3.5	1.45	2.13	1.52	1.57	1.61	1.65	1.70	1.52	1.56	1.60	1.64	1.69
3.6	1.38	2.10	1.47	1.51	1.55	1.59	1.64	1.46	1.50	1.55	1.59	1.63
3.7	1.32	2.08	1.42	1.46	1.50	1.54	1.58	1.41	1.45	1.49	1.54	1.58
3.8	1.27	2.06	1.37	1.41	1.45	1.49	1.53	1.37	1.40	1.44	1.49	1.53
3.9	1.23	2.05	1.33	1.36	1.40	1.44	1.48	1.32	1.36	1.40	1.44	1.48
4.0	1.19	2.04	1.29	1.32	1.36	1.40	1.44	1.28	1.32	1.36	1.40	1.44

Πίνακας 2.8 Τιμές του *ARL* στα διαγράμματα Shewhart, Klein 4/5, *I*-4/5 και *R*-4/5

	Shewhart	Klein 4/5	<i>I</i> -4/5 (Khoo & Ariffin)					<i>R</i> -4/5 (Antzoulakos & Rakitzis)				
			±3.4	±3.5	±3.6	±3.7	±3.8	±3.4	±3.5	±3.6	±3.7	±3.8
δ	±3	±1.043	±1.092	±1.075	±1.065	±1.058	±1.053	±1.002	±0.984	±0.973	±0.965	±0.96
0.0	370.40	370.40	370.74	370.39	370.47	370.38	370.36	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.1	352.93	324.91	328.58	326.98	326.24	325.66	325.33	326.67	325.31	324.45	323.92	323.59
0.2	308.43	235.22	242.56	239.56	237.89	236.77	236.11	238.64	235.76	233.98	232.88	232.21
0.3	253.14	157.91	165.25	162.22	160.50	159.40	158.75	160.89	157.97	156.21	155.13	154.47
0.4	200.08	105.40	111.03	108.66	107.31	106.47	105.98	107.20	104.93	103.58	102.77	102.28
0.5	155.22	71.92	75.78	74.10	73.16	72.58	72.25	72.70	71.12	70.19	69.64	69.32
0.6	119.67	50.61	53.10	51.96	51.34	50.97	50.76	50.72	49.66	49.05	48.70	48.50
0.7	92.32	36.79	38.32	37.57	37.17	36.94	36.82	36.51	35.82	35.43	35.21	35.10
0.8	71.55	27.60	28.50	28.01	27.76	27.62	27.56	27.11	26.67	26.43	26.30	26.24
0.9	55.83	21.34	21.81	21.50	21.35	21.27	21.24	20.75	20.47	20.33	20.26	20.24
1.0	43.89	16.97	17.15	16.96	16.88	16.84	16.84	16.34	16.17	16.09	16.06	16.06
1.1	34.80	13.84	13.83	13.72	13.68	13.68	13.69	13.20	13.11	13.07	13.07	13.09
1.2	27.82	11.57	11.42	11.36	11.36	11.37	11.40	10.93	10.88	10.88	10.90	10.93
1.3	22.43	9.88	9.63	9.61	9.63	9.66	9.69	9.24	9.23	9.25	9.29	9.32
1.4	18.25	8.60	8.27	8.29	8.32	8.36	8.40	7.97	7.99	8.02	8.07	8.11
1.5	14.97	7.63	7.23	7.27	7.31	7.36	7.41	6.99	7.03	7.08	7.13	7.17
1.6	12.38	6.87	6.41	6.47	6.53	6.59	6.64	6.22	6.28	6.34	6.40	6.45
1.7	10.33	6.28	5.77	5.83	5.90	5.97	6.03	5.61	5.68	5.75	5.82	5.87
1.8	8.69	5.82	5.24	5.32	5.40	5.47	5.54	5.12	5.20	5.28	5.35	5.41
1.9	7.37	5.45	4.81	4.90	4.99	5.07	5.14	4.72	4.81	4.89	4.97	5.04
2.0	6.30	5.16	4.45	4.55	4.65	4.73	4.81	4.38	4.47	4.57	4.65	4.72
2.1	5.43	4.92	4.15	4.26	4.36	4.45	4.53	4.08	4.19	4.29	4.38	4.46
2.2	4.72	4.74	3.88	4.00	4.11	4.20	4.29	3.83	3.95	4.05	4.15	4.24
2.3	4.13	4.59	3.64	3.77	3.88	3.99	4.08	3.60	3.73	3.84	3.94	4.04
2.4	3.65	4.47	3.43	3.56	3.68	3.79	3.90	3.40	3.53	3.65	3.76	3.86
2.5	3.24	4.37	3.23	3.37	3.49	3.61	3.72	3.21	3.34	3.47	3.58	3.69
2.6	2.90	4.29	3.05	3.19	3.32	3.44	3.56	3.03	3.17	3.30	3.42	3.54
2.7	2.62	4.23	2.87	3.01	3.15	3.28	3.40	2.86	3.00	3.13	3.26	3.38
2.8	2.38	4.18	2.71	2.85	2.99	3.12	3.25	2.70	2.84	2.98	3.11	3.24
2.9	2.17	4.14	2.55	2.69	2.83	2.97	3.10	2.54	2.68	2.82	2.96	3.09
3.0	2.00	4.11	2.40	2.54	2.68	2.82	2.95	2.39	2.53	2.67	2.81	2.94
3.1	1.85	4.09	2.26	2.39	2.53	2.67	2.81	2.25	2.39	2.52	2.66	2.80
3.2	1.73	4.07	2.12	2.25	2.39	2.52	2.66	2.12	2.25	2.38	2.52	2.66
3.3	1.62	4.05	2.00	2.12	2.25	2.38	2.52	2.00	2.12	2.25	2.38	2.51
3.4	1.53	4.04	1.88	1.99	2.12	2.24	2.38	1.88	1.99	2.12	2.24	2.38
3.5	1.45	4.03	1.77	1.88	1.99	2.11	2.24	1.77	1.88	1.99	2.11	2.24
3.6	1.38	4.02	1.67	1.77	1.88	1.99	2.11	1.67	1.77	1.88	1.99	2.11
3.7	1.32	4.02	1.58	1.67	1.77	1.88	1.99	1.58	1.67	1.77	1.88	1.99
3.8	1.27	4.01	1.50	1.58	1.67	1.77	1.88	1.50	1.58	1.67	1.77	1.88
3.9	1.23	4.01	1.43	1.50	1.58	1.67	1.77	1.43	1.50	1.58	1.67	1.77
4.0	1.19	4.01	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67

Από τους παραπάνω πίνακες συμπεραίνουμε ότι ο αναθεωρημένος κανόνας $R - m/k$ υπερτερεί σταθερά του αντίστοιχου κανόνα $I - m/k$ και προφανώς και του σχήματος του Klein, αφού παρουσιάζει καλύτερη απόδοση από ένα κλασικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart για μετατοπίσεις του μέσου μέχρι και 2.4 τυπικές αποκλίσεις. Επιπλέον, από τους δύο πίνακες προκύπτει ότι όσο μεγαλώνει η τιμή του L (εξωτερικά όρια ελέγχου) τόσο μειώνεται η τιμή του d (εσωτερικά όρια ελέγχου). Τέλος, για την ίδια τιμή του L ο κανόνας $I - m/k$ χρησιμοποιεί ευρύτερα εσωτερικά όρια ελέγχου σε σχέση με τον κανόνα $R - m/k$.

2.7 Η προσέγγιση του Acosta-Mejia (2007)

2.7.1 Κανόνας k -από- k

Ο Weiler (1953) πρότεινε έναν κανόνα ροών ο οποίος έδινε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν k συνεχόμενα σημεία υπερέβαιναν ένα όριο ελέγχου, έστω a . Ένας τέτοιος κανόνας καλείται k -από- k κανόνας ροών και συμβολίζεται ως εξής: $\{T(k, k, a, \infty), T(k, k, -\infty, -a)\}$. Οι Derman & Ross (1997) και ο Klein (2000a) μελέτησαν την ειδική περίπτωση του κανόνα του Weiler (1953) για $k = 2$, δείχνοντας ότι τα διαγράμματα \bar{X} με τον συγκεκριμένο κανόνα είναι πιο ευαίσθητα σε μικρές μεταβολές στο μέσο της διεργασίας σε σχέση με τα τυπικά διαγράμματα Shewhart.

Για να υπολογιστεί το όριο ελέγχου a κάνουμε την παρακάτω υπόθεση. Έστω μια ακολουθία από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, και έστω p η πιθανότητα επιτυχίας σε μια δοκιμή. Έχει αποδειχθεί από τον Feller (1950) ότι ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών που χρειάζεται για να λάβουμε k συνεχόμενες επιτυχίες, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\frac{1 - p^k}{(1 - p)p^k}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν p είναι η πιθανότητα ένα μεμονωμένο σημείο να βρεθεί πέρα από το άνω όριο ελέγχου μόνο (ή αντίστοιχα κάτω από το κάτω όριο ελέγχου μόνο), τότε το εντός ελέγχου ARL για τα διαγράμματα \bar{X} με τον κανόνα ροών k -από- k ισούται με το μισό της παραπάνω σχέσης. Όταν το ARL και το k είναι δεδομένα, μπορούμε να υπολογίσουμε το p και το όριο a ως $\Phi^{-1}(p)$. Ο Πίνακας 2.9 παρουσιάζει τις τιμές του ορίου a όταν το εντός ελέγχου ARL ισούται με 370.4, οι τιμές των ορίων αυτών χρησιμοποιούνται για να συγκριθούν μεταξύ τους οι διαφορετικοί κανόνες k -από- k .

Πίνακας 2.9: Τιμές ορίων ελέγχου για διαγράμματα μέσης τιμής κανόνων k -από- k

k	1	2	3	4	5	6	7	8
p	0.0135	0.0374	0.1150	0.2028	0.2850	0.3578	0.4207	0.4743
a	3	1,7814	1,2000	0.8318	0.5677	0.3644	0.2000	0.0645

Στον Πίνακα 2.10 καταγράφονται οι τιμές του ARL των διαγράμματα \bar{X} με τους κανόνες 1-από-1 (το τυπικό διάγραμμα Shewhart), 2-από-2, 3-από-3, 4-από-4 και 8-από-8, για διαφορετικά μεγέθη μεταβολών. Παρατηρούμε ότι για μικρά μεγέθη μεταβολών ($\delta < 1$) στην μέση τιμή, ο κανόνας k-από-k γίνεται περισσότερο ευαίσθητος όταν το k αυξάνεται. Για μεσαίου μεγέθους αλλαγές το ARL βελτιώνεται αλλά στην συνέχεια χειροτερεύει όσο το k αυξάνεται. Για μεγάλες αλλαγές υπερτερεί το τυπικό διάγραμμα Shewhart.

Αξίζει να σημειωθεί επίσης, ότι για να είναι σταθερό το ARL στην τιμή του 370.4 σε όλους τους εξεταζόμενους κανόνες, είναι απαραίτητο το όριο α να αναπροσαρμόζεται ανάλογα με το μέγεθος του k. Για παράδειγμα όταν έχουμε $k = 8$, τότε το α είναι πολύ κοντά στο 0, συγκεκριμένα $\alpha = 0.0645$.

Πίνακας 2.10: Τιμές ARL για διαγράμματα μέσης τιμής κανόνων k-από-k

δ	Shewhart chart	k = 2	k = 3	k = 4	k = 8
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.4	276.7	259.3	248.5	229.8
0.4	200.1	150.3	129.5	118.7	103.9
0.6	119.7	78.9	65.2	59.0	52.6
0.8	71.6	43.6	35.8	32.6	31.0
1.0	43.9	25.8	21.4	20.1	20.9
1.2	27.8	16.3	14.0	13.5	15.6
1.4	18.2	10.9	9.9	9.9	12.6
1.6	12.4	7.8	7.4	7.8	10.8
1.8	8.7	5.9	5.9	6.4	9.7
2.0	6.3	4.6	4.9	5.6	9.0
2.2	4.7	3.8	4.3	5.0	8.6
2.4	3.6	3.2	3.9	4.7	8.4
2.6	2.9	2.8	3.6	4.4	8.2
2.8	2.4	2.6	3.4	4.3	8.1
3.0	2.0	2.4	3.2	4.2	8.1
4.0	1.2	2.0	3.0	4.0	8.0
5.0	1.0	2.0	3.0	4.0	8.0
6.0	1.0	2.0	3.0	4.0	8.0

2.7.2 Κανόνας k -από- k με προειδοποιητικά όρια

Τα διαγράμματα \bar{X} εφοδιασμένα με k -από- k κανόνες ροών, δεν δίνουν γρήγορα σήμα εκτός ελέγχου σε μεγάλες μεταβολές στον μέσο της διεργασίας, επειδή το μέσο μήκος ροής έχει κάτω όριο ίσο με το k . Για να βελτιωθεί η επίδοση του ARL προτείνεται να συνδυαστούν οι κανόνες ροών 1-από-1 και k -από- k , τέτοια διαγράμματα θα δίνουν σήμα εκτός ελέγχου όταν ένα δείγμα βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου ή εάν k συνεχόμενα σημεία βρεθούν μεταξύ του προειδοποιητικού ορίου και του αντίστοιχου ορίου ελέγχου.

Αυτό το σχήμα προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Page (1955), το διάγραμμα ελέγχου αποτελείται από δύο ζευγάρια ορίων ελέγχου, ένα ζευγάρι εσωτερικό για τον k -από- k κανόνα (προειδοποιητικά όρια) και ένα ζευγάρι εξωτερικό για τον 1-από-1 κανόνα (όρια δράσης). Σύμφωνα με τον Page (1955), το ARL γι' αυτού του είδους τα διαγράμματα υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο, όπου συμβολίζουμε με p_1 την πιθανότητα ένα σημείο να βρεθεί μεταξύ των προειδοποιητικών ορίων και με p_2 να βρεθεί μεταξύ του προειδοποιητικού ορίου και του αντίστοιχου ορίου δράσης:

$$\frac{1 - p_2^k}{1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2^k}$$

Για να υπολογίσουμε του όρια συγκεκριμένου διαγράμματος ελέγχου, προτείνεται να θέσουμε αρχικά τα προειδοποιητικά όρια σε τέτοιες τιμές ώστε να προκύψει η επιθυμητή τιμή του εντός ελέγχου ARL, και στην συνέχεια τα όρια δράσης στις τιμές εκείνες που θα προκύψει το μικρότερο ARL για μια συγκεκριμένη αλλαγή δ . Για να το πετύχουμε αυτό θέτουμε την παραπάνω εξίσωση ίση με το εντός ελέγχου ARL και ψάχνουμε για ένα όριο ελέγχου που θα δίνει το μικρότερο ARL για μια συγκεκριμένη αλλαγή στον μέσο της διεργασίας, δεδομένου ότι το προειδοποιητικό όριο είναι όσο ορίζει η παραπάνω εξίσωση.

Στον Πίνακα 2.11 συγκρίνουμε τις τιμές του ARL των διαγραμμάτων ελέγχου \bar{X} που συνδυάζουν τους κανόνες ροών 1-από-1 και k -από- k , για διάφορα μεγέθη μεταβολών. Για κάθε τιμή του k προτείνεται και οι τιμές των ορίων δράσης (α) και των προειδοποιητικών ορίων (w). Όπως είναι φανερό από τις τιμές του παρακάτω πίνακα, όταν οι αλλαγές στην μέση τιμή της διεργασίας είναι $\delta < 1$, τότε όλα τα διαγράμματα με τους υπό εξέταση κανόνες, υπερτερούν του τυπικού διαγράμματος Shewhart, ενώ όσο αυξάνεται η τιμή του k , τόσο βελτιώνεται και η επίδοση του ARL. Παρατηρούμε επίσης ότι για μεγάλα μεγέθη αλλαγών στην μέση τιμή, μεγαλύτερα από 3σ , όλα τα διαγράμματα έχουν ικανοποιητικές αποδόσεις χωρίς κάποιο να ξεχωρίζει:

Πίνακας 2.11: Τιμές ARL για διαγράμματα μέσης τιμής κανόνων k -από- k με όρια δράσης και προειδοποιητικά όρια

δ	Shewhart chart	$k = 2$ $w = 1.84$ $a = 3.40$	$k = 3$ $w = 1.33$ $a = 3.20$	$k = 4$ $w = 0.96$ $a = 3.20$	$k = 5$ $w = 0.69$ $a = 3.20$	$k = 8$ $w = 0.11$ $a = 3.40$	$k = 9$ $w = 0$ $a = 3.37$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.2	308.4	278.6	271.9	263.6	257.6	235.6	234.5
0.4	200.1	152.4	142.7	132.7	126.2	107.5	106.9
0.6	119.7	79.9	72.5	66.0	62.2	53.6	53.6
0.8	71.6	43.8	39.1	35.5	33.7	30.8	31.1
1.0	43.9	25.7	22.8	20.1	20.2	20.0	20.5
1.2	27.8	16.0	14.3	13.5	13.3	14.4	14.9
1.4	18.2	10.6	9.6	9.4	9.5	11.2	11.7
1.6	12.4	7.4	6.9	7.0	7.3	9.1	9.6
1.8	8.7	5.5	5.3	5.5	5.8	7.7	8.1
2.0	6.3	4.2	4.2	4.5	4.8	6.7	6.9
2.2	4.7	3.4	3.4	3.7	4.0	5.6	5.8
2.4	3.6	2.8	2.9	3.2	3.5	4.8	4.9
2.6	2.9	2.4	2.5	2.8	3.0	4.0	4.1
2.8	2.4	2.1	2.2	2.4	2.6	3.3	3.3
3.0	2.0	1.9	2.0	2.1	2.2	2.8	2.8
4.0	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.4	1.4
5.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.1	1.1	1.1
6.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

2.8 Διαγράμματα παρακολούθησης της τυπικής απόκλισης

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με την μελέτη των κανόνων ροών σε διαγράμματα που αφορούν τον μέσο της διεργασίας. Όμως η παρακολούθηση της μεταβλητότητας είναι εξίσου σημαντική για την σωστή μελέτη μιας διεργασίας. Μια αύξηση στην τυπική απόκλιση θα έχει σαν αποτέλεσμα την αλλοίωση της ποιότητας του χαρακτηριστικού προς μελέτη, μια μείωση αντιθέτως, οδηγεί στην βελτίωση της διεργασίας.

Το πλέον διαδεδομένο διάγραμμα ελέγχου για την μεταβλητότητα είναι το S διάγραμμα ελέγχου το οποίο εντοπίζει γρήγορα τις μεγάλες αλλαγές αλλά δεν είναι αρκετά ευαίσθητο στις μικρές προς μεσαίες αλλαγές. Στις δύο επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε S διαγράμματα ελέγχου συμπληρωμένα με κανόνες τύπου r -από- m βασιζόμενοι στην εργασία των Antzoulakos & Rakitzis (2010).

Ας υποθέσουμε ότι όλα τα δείγματα και οι παρατηρήσεις που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ανεξάρτητα και ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί την κανονική κατανομή με εντός ελέγχου τυπική απόκλιση σ_0 , ενώ ο μέσος όρος παραμένει σταθερός. Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου

η τιμή της τυπικής απόκλισης είναι $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$, και όποτε συμβαίνει μια τέτοια αλλαγή θεωρείται ότι είναι ξαφνική και διαρκής. Όταν έχουμε αύξηση στην τυπική απόκλιση τότε $\sigma_1 > \sigma_0$ δηλαδή $\lambda > 1$, όταν έχουμε μείωση τότε $\sigma_1 < \sigma_0$ δηλαδή $\lambda < 1$, και όταν $\lambda = 1$ η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Στο σύνηθες S διάγραμμα ελέγχου έχουμε ότι τα UCL, CL και LCL δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL = (c_4 + l_U \sqrt{1 - c_4^2})\sigma_0$$

$$CL = c_4\sigma_0$$

$$LCL = (c_4 - l_L \sqrt{1 - c_4^2})\sigma_0$$

Επειδή όμως η τυπική απόκλιση δεν είναι δυνατόν να παίρνει τιμές μικρότερες του μηδενός, το LCL τίθεται ίσο με το 0, έτσι το διάγραμμα S δεν μπορεί να εντοπίσει μειώσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις μια λύση είναι η χρήση των ορίων πιθανότητας.

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; a/2}^2}{n-1}}, \quad LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-a/2}^2}{n-1}},$$

όπου το a δηλώνει την πιθανότητα εσφαλμένου συναγερωμού. Όταν χρησιμοποιούμε τα όρια πιθανότητας τότε συνηθίζουμε να θέτουμε την γραμμή της διαμέσου (MDL) για κεντρική γραμμή (αντί της μέσης τιμής)

$$MDL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 0.5}^2}{n-1}}.$$

Εξαιτίας της ασυμμετρίας της S στατιστικής, συνήθως θεωρούμε μονόπλευρα S διαγράμματα ελέγχου για να ελέγξουμε αυξήσεις και μειώσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Τα άνω και κάτω όρια πιθανότητας ελέγχου των μονοπλεύρων άνω και κάτω S διαγραμμάτων με πιθανότητα εσφαλμένου συναγερωμού a είναι τα

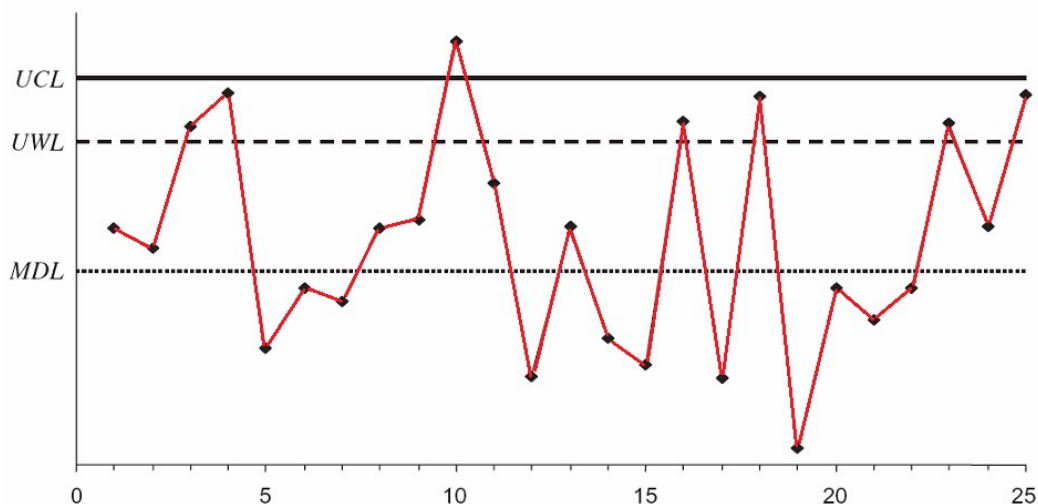
$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; a}^2}{n-1}}, \quad LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-a}^2}{n-1}}$$

2.8.1 Μονόπλευρα S διαγράμματα ελέγχου εμπλουτισμένα με κανόνες ροών τύπου r από m

Έστω τώρα ένα μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου με ένα UCL, ένα άνω προειδοποιητικό όριο (UWL) και την MDL. Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με κανόνες ροών με σκοπό να βελτιωθεί η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μικρών και μέτριων αλλαγών της υπό παρακολούθησης παραμέτρου. Οι 3 γραμμές του διαγράμματος ελέγχου ικανοποιούν την ανισότητα $0 < MDL < UWL < UCL$. Ένα εκτός ελέγχου σήμα λαμβάνεται στις εξής περιπτώσεις: (α) ένα σημείο ξεπερνά το UCL ή (β) r σημεία βρεθούν μεταξύ του UWL και του UCL τα οποία χωρίζονται από $m - r$ σημεία τα οποία βρίσκονται όλα πάνω από την MDL ($m \geq 2$; $2 \leq r \leq m$). Το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου θα το αναφέρουμε ως «μονόπλευρο άνω r -από- m διάγραμμα ελέγχου» η αλλιώς $S: r/m$. Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για τις μικρές αλλαγές μπορούμε να εργαστούμε μόνο με την συνθήκη (β), κάτι που όμως δεν συνηθίζεται καθώς στην περίπτωση ακραίων παρατηρήσεων επιθυμούμε να δοθεί άμεσο σήμα εκτός ελέγχου.

Στο Σχήμα 2.5 έχουμε την γραφική απεικόνιση ενός άνω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου $S: 2/3$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 περιπτώσεις όπου η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, η πρώτη είναι στο δείγμα 4, καθώς 2 συνεχόμενα δείγματα, το 3^ο και το 4^ο βρίσκονται μεταξύ του προειδοποιητικού ορίου UWL και του άνω ορίου UCL. Η 2^η περίπτωση είναι στο δείγμα 10 όπου η τιμή της S ξεπερνάει το UCL, ενώ η 3^η περίπτωση είναι στο δείγμα 25 όπου τα δείγματα 23 και 25 βρίσκονται μεταξύ του UWL και του UCL, ενώ το ενδιάμεσο δείγμα 24 βρίσκεται μεταξύ της MDL και του UWL. Στην 2^η περίπτωση συναντιέται η συνθήκη (α) ενώ στην 1^η και την 3^η περίπτωση η συνθήκη (β). Βλέπουμε επίσης ότι τα δείγματα 16 και 18 βρίσκονται μεταξύ του UWL και του UCL αλλά η διεργασία δεν βγαίνει εκτός ελέγχου καθώς τιμή που αντιστοιχεί στο δείγμα 17 είναι χαμηλότερη της MDL.

Σχήμα 2.5 Απεικόνιση του άνω μονόπλευρου $S: 2/3$ διαγράμματος ελέγχου



Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον καθορισμό των τιμών των προειδοποιητικών και των ορίων ελέγχου σε ένα $S: r/m$ διάγραμμα ελέγχου με δοσμένες τιμές των r , m , του μεγέθους δείγματος n και του $ARL_0 = c$. Αφού το UCL του τυπικού άνω μονόπλευρου S διαγράμματος με $ARL_0 = c$, δίνεται από τον τύπο

$$S_u = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;1/c}^2}{n-1}}$$

στην περίπτωση μας θα πρέπει να ισχύει η ανίσωση $UWL < S_u < UCL$. Για το σχεδιασμό του μονόπλευρου άνω $S: r/m$ διαγράμματος ελέγχου προτείνονται τα παρακάτω βήματα:

- (B1) Καθορίζουμε μια τιμή τυπικής απόκλισης $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$ ($\lambda > 1$) που θέλουμε να εντοπιστεί όσο πιο γρήγορα γίνεται.
- (B2) Διαλέγουμε το μέγεθος του δείγματος n και 2 θετικούς ακεραίους r, m ($2 \leq r \leq m$).
- (B3) Θέτουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_0 = c$.
- (B4) Υπολογίζουμε το ζευγάρι (UWL, UCL) που ελαχιστοποιεί την τιμή του ARL_1 υποθέτοντας ότι η τυπική απόκλιση της διαδικασίας έχει αλλάξει στην σ_1 .
- (B5) Δηλώνουμε την διαδικασία εκτός ελέγχου εξαιτίας μιας αύξησης στην τυπική απόκλιση της διαδικασίας εάν (α) ένα σημείο ξεπεράσει το UCL, ή (β) r σημεία βρεθούν μεταξύ του UWL και του UCL τα οποία χωρίζονται από $m - r$ σημεία που βρίσκονται πάνω από την MDL.

Αντίστοιχα σχεδιάζονται και τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου $S: r/m$

Στους Πίνακες 2.12 και 2.13 παρουσιάζουμε ARL τιμές αρκετών μονόπλευρων άνω και κάτω διαγραμμάτων ελέγχου $S: r/m$ που έχουν σχεδιαστεί για να εντοπίσουν μια αύξηση και μια μείωση αντίστοιχα της τάξης του 20% στην τυπική απόκλιση της διαδικασίας, δηλαδή για $\lambda = 1.2$ και $\lambda = 0.8$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι τιμές με την έντονη γραφή είναι οι πιο μικρές για κάθε αλλαγή, κάτι που σημαίνει ότι το διάγραμμα ελέγχου στο οποίο αντιστοιχούν είναι το πιο αποτελεσματικό για την συγκεκριμένη αλλαγή.

Από τους πίνακες που εξετάστηκαν, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για τις μικρές αλλαγές θα πρέπει να προτιμηθεί το διάγραμμα ελέγχου $S: 2/5$ για τις αυξήσεις, ενώ για τις μειώσεις χρησιμοποιούνται το $S: 8/8$ ή το $S: 4/5$.

Πίνακας 2.12 : Τιμές του ARL του άνω μονόπλευρου $S: r/m$ διαγράμματος ελέγχου
(Παράμετροι σχεδιασμού: $n = 5$, $ARL_0 = 200$, $\lambda = 1.2$)

UCL	1.927	2.025	2.066	2.086	2.096	1.999	2.029	2.040	2.003	1.974	1.955
UWL		1.527	1.540	1.546	1.548	1.326	1.349	1.360	1.229	1.116	0.960
MDL			0.916	0.916	0.916		0.916	0.916	0.916		
λ	S	$S: 2/2$	$S: 2/3$	$S: 2/4$	$S: 2/5$	$S: 3/3$	$S: 3/4$	$S: 3/5$	$S: 4/5$	$S: 5/5$	$S: 8/8$
1.00	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
1.10	65.03	58.95	56.31	54.89	54.10	58.70	55.62	54.01	56.31	59.62	60.96
1.20	28.27	24.62	23.16	22.42	22.01	24.58	22.95	22.15	23.45	25.28	26.16
1.30	15.04	13.02	12.28	11.92	11.73	13.10	12.31	11.95	12.67	13.61	14.17
1.40	9.25	8.10	7.72	7.55	7.46	8.22	7.84	7.68	8.11	8.60	8.96
1.50	6.32	5.65	5.45	5.37	5.33	5.78	5.60	5.53	5.80	6.06	6.29
1.60	4.67	4.27	4.17	4.14	4.13	4.39	4.32	4.30	4.47	4.60	4.74
1.70	3.66	3.42	3.38	3.37	3.37	3.53	3.51	3.52	3.63	3.69	3.76
1.80	3.01	2.86	2.85	2.86	2.86	2.96	2.97	2.97	3.05	3.07	3.10
1.90	2.56	2.48	2.48	2.50	2.51	2.56	2.59	2.60	2.64	2.64	2.65
2.00	2.24	2.20	2.21	2.23	2.24	2.27	2.30	2.32	2.34	2.32	2.31

Πίνακας 2.13 Τιμές του ARL του κάτω μονόπλευρου $S: r/m$ διαγράμματος ελέγχου
(Παράμετροι σχεδιασμού: $n = 5$, $ARL_0 = 200$, $\lambda = 0.8$)

MDL			0.916	0.916	0.916		0.916	0.916	0.916		
LWL		0.470	0.447	0.439	0.436	0.623	0.589	0.577	0.696	0.813	0.980
LCL	0.227	0.015	0.015	0.014	0.013	*	*	*	*	0.026	*
λ	S	$S: 2/2$	$S: 2/3$	$S: 2/4$	$S: 2/5$	$S: 3/3$	$S: 3/4$	$S: 3/5$	$S: 4/5$	$S: 5/5$	$S: 8/8$
1.00	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
0.90	133.34	101.15	95.48	91.92	89.66	85.22	79.03	75.31	70.36	70.27	61.88
0.80	85.13	49.41	44.45	41.40	39.44	36.55	32.06	29.56	26.92	27.56	24.55
0.70	51.55	23.52	20.61	18.90	17.80	16.32	14.03	12.87	11.95	12.81	13.03
0.60	29.24	11.15	9.83	9.11	8.66	7.98	7.01	6.60	6.55	7.43	9.22
0.50	15.31	5.48	5.03	4.83	4.71	4.57	4.25	4.18	4.62	5.52	8.15
0.40	7.27	3.03	2.93	2.92	2.93	3.30	3.25	3.27	4.07	5.04	8.00
0.30	3.13	2.14	2.14	2.16	2.17	3.01	3.01	3.02	4.00	5.00	8.00
0.20	1.37	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	3.00	3.00	4.00	4.99	8.00
0.10	1.00	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	3.00	3.00	4.00	4.92	8.00

* Τιμή μικρότερη του 0.001

2.8.2 Δίπλευρα S διαγράμματα ελέγχου εμπλουτισμένα με κανόνες ροών τύπου r από m

Παρόλο που τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου συνίστανται ως τα καλύτερα για τον εντοπισμό αύξησης ή μείωσης στην μεταβλητότητα της διεργασίας, οι ερευνητές συνήθως χρησιμοποιούν τα δίπλευρα διαγράμματα, τα οποία έχουν την δυνατότητα να εντοπίσουν ταυτόχρονα αυξήσεις και μειώσεις στην μεταβλητότητα.

Θεωρούμε ένα δίπλευρο διάγραμμα ως συνδυασμό δύο μονόπλευρων διαγραμμάτων $S: r/m$, ένα άνω διάγραμμα με UCL και UWL και ένα κάτω διάγραμμα με LCL και LWL, τα οποία μοιράζονται την ίδια MDL. Το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου $S: r/m$, είναι εκείνο το διάγραμμα ελέγχου που δίνει εκτός ελέγχου σήμα σε μια διεργασία όταν: (α) ένα σημείο βρεθεί εκτός ορίων

ελέγχου, (β) r σημεία βρεθούν μεταξύ του UWL και του UCL τα οποία χωρίζονται από $m - r$ σημεία που βρίσκονται πάνω από την MDL, (γ) r σημεία βρίσκονται μεταξύ της LCL και της LWL τα οποία χωρίζονται από τα $m - r$ σημεία που βρίσκονται κάτω από την MDL ($m \geq 2, 2 \leq r \leq m$).

Οι παραπάνω συνθήκες (α) – (γ) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, οπότε ο υπολογισμός του ARL του δίπλευρου $S: r/m$ διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται βάσει του τύπου

$$ARL = \frac{1}{(1/ARL_U) + (1/ARL_L)}$$

όπου ARL_U (ARL_L) είναι η τιμή του ARL του αντίστοιχου άνω (κάτω) μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου $S: r/m$.

Παρακάτω δίνουμε δύο πίνακες, ο πρώτος πίνακας έχει $ARL_0 = 226.15$ ενώ ο δεύτερος $ARL_0 = 166.82$ που περιέχουν τιμές του ARL_1 για τιμές του λ από 0 έως 2 για τους παρακάτω τύπους διαγραμμάτων: (1) τα τυπικά S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας, (2) τα δίπλευρα διαγράμματα $S(\neq)$ και $K(2)$ σχήματα ελέγχου που προτάθηκαν από τον Klein (2000b), (3) δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου $S: r/m$, (4) το σχήμα ελέγχου C_{12} των Champ & Woodall (1987) που λειτουργεί παρόμοια με το $S: 2/3$ διάγραμμα ελέγχου το οποίο μελετήθηκε από τους Lowry *et al.* (1995), και (5) το σχήμα ελέγχου C_{13} των Champ & Woodall (1987) που λειτουργεί παρόμοια με το $S: 4/5$ διάγραμμα ελέγχου το οποίο μελετήθηκε από τους Lowry *et al.* (1995).

Από την εξέταση των πινάκων φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι τα δίπλευρα διαγράμματα εμπλουτισμένα με κανόνες ροών είναι πιο αποτελεσματικά στον εντοπισμό αλλαγών στην μεταβλητότητα του μεγέθους $0.4 \leq \lambda \leq 1.5$. Τα διαγράμματα $S: r/m$ υπερτερούν επίσης των διαγραμμάτων $S(\neq)$ και $K(2)$ με εξαίρεση τις πολύ μεγάλες μειώσεις $\lambda = 0.1$ και $\lambda = 0.2$. Επιπλέον το δίπλευρο $S: 2/3$ διάγραμμα ελέγχου, υπερτερεί του C_{12} για τιμές $0.3 \leq \lambda \leq 1.6$, ενώ αντίστοιχα το δίπλευρο $S: 4/5$ υπερτερεί του C_{13} για τις μικρές μειώσεις $0.5 \leq \lambda < 1$. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει διάγραμμα $S: r/m$ που να παρακολουθεί εξίσου καλά τις μειώσεις και τις αυξήσεις στην μεταβλητότητα. Από την συνολική μελέτη πάνω στα διαγράμματα ελέγχου για τη μεταβλητότητα είτε μονόπλευρα είτε δίπλευρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το καλύτερο διάγραμμα για μικρές προς μέτριες αυξήσεις στην τυπική απόκλιση είναι το άνω $S: 2/5$, ενώ για μικρές ή μέτριες μειώσεις προτείνονται είτε το $S: 8/8$ (για $0.8 \leq \lambda < 1$) είτε το $S: 4/5$ (για $0.5 \leq \lambda < 0.8$).

Πίνακας 2.14 : Τιμές του ARL του δίπλευρου $S: r/m$ διαγράμματος ελέγχου
(Παράμετροι σχεδιασμού: $n = 5$, $ARL_0 = 226.15$)

	S	$S(\#)$	$K(2)$	$S: 2/2$	$S: 2/3$	$S: 2/4$	$S: 2/5$	$S: 3/3$	$S: 3/4$	$S: 3/5$	$S: 4/5$	$S: 5/5$	$S: 8/8$	C_{12}
UCL	2.043	2.175	1.548	2.145	2.191	2.214	2.227	2.124	2.161	2.113	2.138	2.101	2.08188	2.110
UWL				1.603	1.617	1.623	1.625	1.384	1.407	1.454	1.276	1.156	0.987	1.686
MDL					0.916	0.916	0.916		0.916	0.916	0.916			
LWL				0.417	0.396	0.389	0.386	0.568	0.536	0.523	0.639	0.757	0.924	0.339
LCL	0.184	0.209	0.417	*	*	*	0.001	0.001	*	0.001	0.001	*	*	0.163
0.1	1.01	1.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	3.00	3.00	4.00	5.00	8.00	1.03
0.2	1.97	1.56	2.00	2.00	2.01	2.01	2.01	3.00	3.00	3.00	4.00	5.00	8.00	1.65
0.3	5.70	3.94	2.35	2.35	2.34	2.36	2.38	3.04	3.04	3.05	4.00	5.00	8.00	2.62
0.4	14.62	9.56	4.01	4.01	3.79	3.71	3.68	3.63	3.51	3.52	4.17	5.10	8.01	5.42
0.5	32.33	20.58	8.56	8.56	7.60	7.09	6.78	5.85	5.25	5.05	5.14	5.99	8.32	12.72
0.6	63.48	39.82	19.74	19.74	16.87	15.21	14.12	11.94	10.09	9.19	8.37	9.19	10.16	29.98
0.7	113.79	70.72	45.71	45.71	39.12	35.08	32.40	28.07	23.31	20.69	17.89	18.60	16.51	66.82
0.8	188.93	117.29	102.45	102.51	90.98	83.64	78.75	70.42	60.38	54.38	47.12	47.20	37.36	137.06
0.9	269.43	180.89	205.20	206.81	196.00	188.62	183.65	170.70	158.23	149.25	136.68	134.31	111.36	240.80
1	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15	226.15
1.1	105.49	165.49	107.33	99.05	94.70	92.25	90.80	100.42	94.68	93.86	96.59	104.14	108.35	94.70
1.2	46.09	80.62	46.48	39.77	36.86	35.31	34.41	39.78	36.25	35.15	36.99	41.10	42.83	37.81
1.3	23.11	38.79	23.94	19.37	17.89	17.13	16.71	19.41	17.71	17.00	18.22	20.22	21.23	18.43
1.4	13.36	20.96	14.49	11.23	10.46	10.10	9.90	11.35	10.52	10.07	10.91	11.94	12.59	10.73
1.5	8.65	12.74	9.89	7.40	7.00	6.81	6.73	7.55	7.15	6.85	7.46	8.00	8.43	7.11
1.6	6.11	8.53	7.38	5.36	5.14	5.05	5.01	5.51	5.32	5.11	5.56	5.86	6.14	5.18
1.7	4.62	6.16	5.87	4.15	4.03	4.00	3.99	4.30	4.21	4.06	4.41	4.56	4.73	4.03
1.8	3.68	4.72	4.90	3.38	3.32	3.32	3.32	3.51	3.49	3.37	3.64	3.71	3.82	3.30
1.9	3.05	3.79	4.24	2.86	2.84	2.85	2.85	2.98	2.99	2.89	3.10	3.13	3.18	2.81
2	2.61	3.16	3.78	2.50	2.49	2.51	2.52	2.60	2.63	2.54	2.71	2.71	2.73	2.45

* Τιμή μικρότερη του 0.001

Πίνακας 2.15 Τιμές του ARL του δίπλευρου $S: r/m$ διαγράμματος ελέγχου
(Παράμετροι σχεδιασμού: $n = 5$, $ARL_0 = 166.82$)

	S	S (#)	K (2)	S : 2/2	S : 2/3	S : 2/4	S : 2/5	S : 3/3	S : 3/4	S : 3/5	S : 4/5	S : 5/5	S : 8/8	C _B
UCL	2.001	2.131	1.517	2.102	2.146	2.168	2.180	2.079	2.113	2.129	2.089	2.054	2.036	2.110
UWL				1.575	1.589	1.595	1.597	1.362	1.386	1.397	1.259	1.141	0.976	1.284
MDL					0.916	0.916	0.916		0.916	0.916	0.916			
LWL				0.436	0.414	0.407	0.403	0.587	0.555	0.542	0.659	0.777	0.944	0.594
LCL	0.199	0.226	0.436	*	*	*	*	0.001	0.001	0.001	0.001	*	*	0.163
0.1	1.00	1.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	3.00	3.00	3.00	4.00	5.00	8.00	1.03
0.2	1.69	1.38	2.00	2.00	2.00	2.00	2.01	3.00	3.00	3.00	4.00	5.00	8.00	2.24
0.3	4.52	3.20	2.26	2.26	2.25	2.27	2.28	3.02	3.03	3.03	4.00	5.00	8.00	3.36
0.4	11.20	7.45	3.58	3.58	3.42	3.37	3.36	3.49	3.39	3.41	4.13	5.07	8.01	4.02
0.5	24.38	15.73	7.19	7.19	6.47	6.10	5.88	5.30	4.82	4.68	4.91	5.79	8.24	5.57
0.6	47.45	30.09	15.86	15.85	13.71	12.48	11.69	10.21	8.75	8.07	7.59	8.44	9.76	10.02
0.7	84.59	53.02	35.53	35.53	30.66	27.72	25.78	22.81	19.17	17.23	15.29	16.10	15.05	22.28
0.8	139.77	87.61	77.75	77.80	69.39	64.09	60.60	54.90	47.46	43.11	38.03	38.42	31.78	55.82
0.9	197.38	134.36	152.07	153.40	145.75	140.57	137.10	128.17	119.31	113.52	104.36	102.96	87.42	135.14
1	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82	166.82
1.1	81.68	124.66	83.85	77.37	74.30	72.59	71.59	78.64	74.69	72.48	76.38	81.72	85.08	72.34
1.2	37.46	63.71	38.40	32.82	30.65	29.50	28.84	32.95	30.35	29.01	31.05	34.12	35.55	30.03
1.3	19.50	31.99	20.59	16.63	15.49	14.92	14.60	16.72	15.44	14.82	15.90	17.43	18.26	15.61
1.4	11.59	17.85	12.84	9.92	9.33	9.05	8.90	10.05	9.43	9.15	9.77	10.57	11.10	9.70
1.5	7.67	11.13	8.97	6.69	6.37	6.23	6.17	6.83	6.53	6.41	6.80	7.22	7.56	6.80
1.6	5.52	7.60	6.80	4.92	4.75	4.69	4.66	5.06	4.92	4.88	5.13	5.36	5.58	5.17
1.7	4.23	5.58	5.49	3.86	3.77	3.75	3.75	3.99	3.94	3.94	4.10	4.22	4.35	4.15
1.8	3.41	4.33	4.63	3.18	3.14	3.14	3.14	3.30	3.29	3.31	3.41	3.46	3.53	3.46
1.9	2.85	3.52	4.04	2.71	2.70	2.71	2.72	2.82	2.84	2.86	2.93	2.94	2.97	2.98
2	2.47	2.96	3.63	2.38	2.39	2.40	2.41	2.47	2.50	2.53	2.57	2.56	2.57	2.61

* Τιμή μικρότερη του 0.001

Για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων των πινάκων για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας οι Antzoulakos & Rakitzis (2010) χρησιμοποίησαν μεθοδολογία που βασίζεται σε αλυσίδες Markov

2.8.3 Η προσέγγιση των Acosta-Mejia & Pignatiello (2009)

2.8.3.1 Ο συνδυασμένος κανόνας k/k στα S διαγράμματα ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζουμε αποτελέσματα της προσέγγισης των Acosta-Mejia & Pignatiello (2009). Έστω ένα διάγραμμα με 2 όρια ελέγχου (UCL, LCL) και 2 προειδοποιητικά όρια (UWL, LWL) με τους ακόλουθους κανόνες ρών:

$$\{T(1, 1, UCL, \infty), T(k, k, UWL, UCL), T(k, k, LCL, LWL), T(1, 1, -\infty, LCL)\}$$

Για να σχεδιαστεί το παραπάνω διάγραμμα, είναι απαραίτητο βρεθούν οι κατάλληλες τιμές των 4 αυτών ορίων ώστε η τιμή του εντός ελέγχου ARL να κρατηθεί σε αποδεκτό επίπεδο. Έστω

- p_1 : η πιθανότητα ένα μεμονωμένο σημείο να βρεθεί μεταξύ των 2 προειδοποιητικών ορίων.
- p_2 : η πιθανότητα ένα μεμονωμένο σημείο να βρεθεί μεταξύ του άνω προειδοποιητικού ορίου και του άνω ορίου ελέγχου.
- p_3 : η πιθανότητα ένα μεμονωμένο σημείο να βρεθεί μεταξύ του κάτω προειδοποιητικού ορίου και του κάτω ορίου ελέγχου.
- p_4 : η πιθανότητα ένα μεμονωμένο σημείο να βρεθεί πάνω από το άνω όριο ελέγχου.
- p_5 : η πιθανότητα ένα μεμονωμένο σημείο να βρεθεί κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, οι πιθανότητες αυτές μπορούν να συμβολιστούν και ως p_{10} , p_{20} , p_{30} , p_{40} , p_{50} . Γενικά το p_{20} δεν είναι ίσο με p_{30} και το p_{40} δεν είναι ίσο με το p_{50} . Όταν $p_{20} = p_{30}$ τότε θα αναφερόμαστε στο S διάγραμμα ως ένα διάγραμμα ίσων ουρών. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ARL για ένα διάγραμμα εφοδιασμένο με τον παραπάνω k/k κανόνα μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$\frac{1}{1 - p_1 - \frac{p_2 - p_2^k}{1 - p_2^k} - \frac{p_3 - p_3^k}{1 - p_3^k}}.$$

Έστω τώρα μια παραγωγική διεργασία από την οποία παίρνουμε με ανεξάρτητες παρατηρήσεις οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή $X_t \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ όπου το μ είναι γνωστό και σταθερό. Ας υποθέσουμε ότι η διεργασία υπόκειται σε μια ξαφνική και διαρκή αλλαγή στην τυπική απόκλιση. Έστω σ_0 η τιμή της τυπικής απόκλισης όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου ενώ όταν είναι εκτός ελέγχου έχουμε $\sigma_t \neq \sigma_0$. Έστω $\delta^2 = \sigma_t^2 / \sigma_0^2$ η μεταβολή στην διακύμανση της διεργασίας.

Για το S διάγραμμα ελέγχου τα όρια είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, 1-p_{40}}^2}{n-1}} \\ \text{UWL} &= \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, 1-p_{20}-p_{40}}^2}{n-1}} \\ \text{LWL} &= \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, p_{30}+p_{50}}^2}{n-1}} \\ \text{LCL} &= \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, p_{50}}^2}{n-1}} \end{aligned}$$

2.8.3.2 Ένα S διάγραμμα με χρήση του κανόνα k/k μόνο

Θεωρούμε ένα S διάγραμμα που δίνει σήμα εκτός ελέγχου όταν k συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω (κάτω) από το UWL (LWL). Ο συγκεκριμένο κανόνας ροών συμβολίζεται ως

$$\{T(k, k, \text{UWL}, \infty), T(k, k, -\infty, \text{LWL})\}.$$

Ο τύπος

$$\frac{1}{1-p_1 - \frac{p_2 - p_2^k}{1-p_2^k} - \frac{p_3 - p_3^k}{1-p_3^k}}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον σχεδιασμό ενός S διαγράμματος με αυτόν του κανόνα, αν θεωρήσουμε ότι $\text{UCL} = \infty$ και $\text{LCL} = -\infty$, δηλαδή $p_4 = p_5 = 0$. Για να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα ίσων ουρών με ένα εντός ελέγχου ARL ίσο με M_1 θέτουμε $p = p_2 = p_3$ στον παραπάνω τύπο. Όταν $p < 0.50$ τότε η λύση για το p προκύπτει από την εξίσωση

$$M_1 = \frac{1}{2p - 2\left(\frac{p - p^k}{1 - p^k}\right)}$$

ή ισοδύναμα

$$M_1 = \frac{1 - p^k}{2p^k(1 - p)}.$$

Γενικά, όταν σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα S ίσων ουρών με μόνο τον κανόνα ροών k/k, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$LWL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1,p}^2}{n-1}}$$

$$UWL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1,1-p}^2}{n-1}}$$

$$CL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1,0.50}^2}{n-1}}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι όσο το k αυξάνεται, αυξάνονται το p και το $\chi_{n-1,p}^2$, ενώ αντίστοιχα μειώνεται το $\chi_{n-1,1-p}^2$. Έτσι όταν αυξάνεται το k , για να παραμείνει σταθερό το εντός ελέγχου ARL, τα 2 όρια πλησιάζουν την κεντρική γραμμή. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το S διάγραμμα με $\sigma_0 = 1$, $n = 5$, $k = 3$ και ένα εντός ελέγχου $ARL = 250$. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω δεδομένα στην σχέση

$$M_1 = \frac{1 - p^k}{2p^k(1-p)}$$

βρίσκουμε ότι η λύση είναι $p = 0,132$, έτσι έχουμε $p_1 = 1 - 2p = 0.736$. Συνεπώς

$$UWL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{4,1-p}^2}{4}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{4,0.868}^2}{4}} = 1.3299$$

Και

$$LWL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{4,p}^2}{4}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{4,0.132}^2}{4}} = 0.5614$$

Τώρα συγκρίνουμε τις επιδόσεις ARL των S διαγραμμάτων με μόνο κανόνα ροών k -από- k . Ο Πίνακας 2.16 παρουσιάζει τα όρια και τις επιδόσεις των S διαγραμμάτων με $ARL = 250$, $n = 5$ και k από 1 μέχρι 7 συνεχόμενα σημεία για να δοθεί σήμα εκτός ελέγχου. Οι στήλες για $k = 1$ δίνουν τις τιμές του ARL του S διαγράμματος με όρια πιθανότητας ($\alpha = 0.004$). Συμπεριλαμβάνουμε μια σειρά για $\delta = 0.95$ για να δούμε αν κάποια S διαγράμματα με μόνο τον κανόνα ροών k -από- k είναι μεροληπτικά ως προς το ARL. Παρατηρούμε όμως ότι όσο το k αυξάνεται η μεροληψία τείνει να απομακρύνεται. Η κεντρική γραμμή για τα διαγράμματα αυτά είναι ίση με 0.916065. Παρατηρούμε ότι όσο το k αυξάνεται τα 2 όρια πλησιάζουν αυτή την τιμή. Από τον Πίνακα 2.26 είναι φανερό ότι για αυξήσεις στο σ ($\delta > 1$) η επίδοση του διαγράμματος S με τον κανόνα ροών k -από- k μόνο, χειροτερεύει όσο το k αυξάνεται. Παρόλα αυτά για μικρές μειώσεις στο σ ($0.5 < \delta < 1$) η επίδοση ARL αυτών των διαγραμμάτων βελτιώνεται όσο το k αυξάνεται. Για να βελτιώσουμε την επίδοση

των S διαγραμμάτων, στην επόμενη παράγραφο θα σχεδιάσουμε S διαγράμματα που συνδυάζουν τον k-από-k με τον 1-από-1 κανόνα.

Πίνακας 2.16: Οι τιμές των ARL των S διαγραμμάτων με μόνο κανόνα ροών k-από-k (n=5)

δ	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 3$	$\kappa = 5$	$\kappa = 7$
0.20	2.08	2.00	3.00	5.00	7.00
0.30	6.17	2.39	3.04	5.01	7.00
0.40	15.98	4.17	3.68	5.11	7.02
0.50	35.50	9.09	6.05	6.06	7.48
0.60	69.90	21.25	12.59	9.46	9.78
0.70	125.50	49.72	30.10	19.54	17.26
0.80	208.66	112.27	76.49	50.57	41.67
0.90	298.98	226.51	186.53	145.98	126.36
0.95	300.91	270.54	249.15	222.40	206.56
1.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00
1.10	114.76	116.42	120.72	129.62	137.54
1.20	49.34	49.51	52.24	58.45	64.35
1.30	24.45	25.16	27.41	32.27	36.91
1.40	14.00	15.08	17.03	21.06	24.91
1.50	9.01	10.22	11.95	15.43	18.78
1.60	6.32	7.57	9.14	12.26	15.26
1.70	4.75	6.00	7.44	10.30	13.07
1.80	3.77	4.99	6.34	9.01	11.61
1.90	3.12	4.31	5.59	8.13	10.60
2.00	2.66	3.83	5.06	7.49	9.87
U. limit	2.0569	1.5575	1.3299	1.0931	0.9621
L. limit	0.1797	0.4111	0.5614	0.7505	0.8708

2.8.3.3 Ένα S διάγραμμα ίσων ουρών με χρήση του συνδυασμένου κανόνα k/k

Για το S διάγραμμα που χρησιμοποιεί το συνδυασμένο κανόνα

$$\{T(1, 1, UCL, \infty), T(k, k, UWL, UCL), T(k, k, LCL, LWL), T(1, 1, -\infty, LCL)\}$$

τα όρια είναι τα ακόλουθα

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, 1-p_{40}}^2}{n-1}}$$

$$UWL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, 1-p_{20}-p_{40}}^2}{n-1}}$$

$$LWL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, p_{30}+p_{50}}^2}{n-1}}$$

$$LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1, p_{50}}^2}{n-1}}$$

Για να σχεδιάσουμε αυτό το διάγραμμα θα πρέπει να βρούμε τα $p_{20} = p_{30}$ και $p_{40} = p_{50}$. Για να το πετύχουμε αυτό θέτουμε δ_0 το μέγεθος της αλλαγής στην διεργασία που θέλουμε να εντοπισθεί γρήγορα, και συμβολίζουμε το αντίστοιχο μέσο μήκος ροής ως ARL_{δ} . Για να σχεδιάσουμε ένα S διάγραμμα ίσων ουρών θα πρέπει να βρούμε το p_{20} και το p_{40} που ελαχιστοποιούν το ARL_{δ} έτσι ώστε το ARL_0 να είναι ίσο με μια προκαθορισμένη τιμή, έστω M_1 . Έτσι θέλουμε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\text{minimize } ARL_{\delta} = \frac{1}{1 - p_1 - \frac{p_2 - p_2^k}{1 - p_2^k} - \frac{p_3 - p_3^k}{1 - p_3^k}}$$

όπου

$$p_1 = P[LWL < S < UWL] = F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{1}{\delta_0^2} \chi_{n-1, 1-p_{20}+p_{40}}^2 \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{1}{\delta_0^2} \chi_{n-1, p_{20}+p_{40}}^2 \right)$$

$$p_2 = P[UWL < S < UCL] = F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{1}{\delta_0^2} \chi_{n-1, 1-p_{40}}^2 \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{1}{\delta_0^2} \chi_{n-1, 1-p_{20}-p_{40}}^2 \right)$$

$$p_3 = P[LCL < S < LWL] = F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{1}{\delta_0^2} \chi_{n-1, p_{20}+p_{40}}^2 \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{1}{\delta_0^2} \chi_{n-1, p_{40}}^2 \right)$$

ικανοποιώντας τους περιορισμούς

$$M_1 = \frac{1/2}{p_{20} + p_{40} - \frac{p_{20} - p_{20}^k}{1 - p_{20}^k}},$$

$$0 \leq p_{20} \leq 0.50,$$

$$0 \leq p_{40} \leq 0.50.$$

Στον παρακάτω Πίνακα 2.17 βλέπουμε τις βελτιστοποιημένες τιμές του ARL των S διαγραμμάτων που χρησιμοποιούν ταυτόχρονα τους κανόνες 1/1 και k/k για $k = 3, 7, 9, 10$ για διάφορες μεταβολές στην τυπική απόκλιση, για μικρές μειώσεις ($\delta_0 = 0.20$) μέχρι μεγάλες αυξήσεις ($\delta_0 = 2.00$). Φαίνεται ότι για τις αυξήσεις της τυπικής απόκλισης τα εξεταζόμενα διαγράμματα έχουν καλύτερες επιδόσεις από εκείνα που χρησιμοποιούν μόνο τον κανόνα k/k. Αντίθετα για τις εξεταζόμενες μειώσεις στην τυπική απόκλιση, τα διαγράμματα που χρησιμοποιούν τους κανόνες 1/1 και k/k έχουν χειρότερες επιδόσεις από τα διαγράμματα με μόνο κανόνα τον k/k. Γενικά η επίδοση του ARL των S διαγραμμάτων με τους κανόνες 1/1 και k/k υπερτερούν της επίδοσης των διαγραμμάτων με όρια πιθανότητας. Στην σειρά για $\delta = 0.95$ φαίνεται ότι τα διαγράμματα αυτά είναι μεροληπτικά ως προς το ARL και για $\delta_0 = 2.0$, φαίνεται ότι η μεροληψία αυξάνεται όσο

αυξάνεται και το k . Επίσης όσο αυξάνεται το k , τόσο περισσότερο τα προειδοποιητικά όρια πλησιάζουν προς την κεντρική γραμμή της διαμέσου, η οποία είναι ίση με 0.916965.

Πίνακας 2.17: Τιμές των διαγραμμάτων ARL για διαγράμματα που χρησιμοποιούν τους κανόνες ροών 1/1 και k/k βελτιστοποιημένους για δύο τιμές του δ_0 ($n = 5$)

δ	$k=3$	$k=7$	$k=9$	$k=10$	$k=3$	$k=7$	$k=9$	$k=10$
0.20	2.10	2.43	2.33	2.33	1.87	2.07	2.08	2.08
0.30	2.79	4.85	5.37	5.62	2.81	4.40	4.92	5.12
0.40	3.98	6.14	7.37	7.97	4.89	6.25	7.32	7.84
0.50	7.61	7.53	8.82	9.48	11.24	10.34	11.46	12.09
0.60	17.71	11.80	12.61	12.95	28.88	24.80	26.52	27.64
0.70	44.47	25.66	25.39	24.72	71.40	71.57	77.93	81.47
0.80	109.29	71.77	70.49	67.15	155.61	172.99	184.35	189.08
0.90	232.68	198.71	201.17	196.34	272.20	288.40	293.53	295.10
0.95	278.43	264.37	266.88	264.79	294.03	298.63	299.91	300.27
1.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00	250.00
1.10	105.47	108.09	108.96	109.36	107.95	113.04	113.99	114.26
1.20	41.73	43.76	44.59	44.93	43.60	47.52	48.45	48.70
1.30	20.25	21.73	22.22	22.47	21.04	23.22	23.78	23.96
1.40	11.76	12.83	13.12	13.28	12.04	13.28	13.59	13.70
1.50	7.78	8.57	8.73	8.83	7.85	8.59	8.77	8.83
1.60	5.64	6.22	6.30	6.37	5.63	6.10	6.20	6.24
1.70	4.38	4.80	4.84	4.87	4.32	4.64	4.70	4.71
1.80	3.57	3.88	3.88	3.90	3.50	3.71	3.74	3.75
1.90	3.02	3.23	3.22	3.23	2.94	3.09	3.10	3.11
2.00	2.63	2.77	2.75	2.75	2.55	2.65	2.66	2.66
δ_0	1.10	1.10	1.10	1.10	2.00	2.00	2.00	2.00
UCL	2.133	2.099	2.0856	2.0850	2.076	2.058	2.0574	2.0572
UWL	1.395	1.038	0.9627	0.9271	1.479	1.189	1.1299	1.1082
LWL	0.516	0.799	0.8702	0.9051	0.460	0.669	0.7188	0.7374
LCL	0.155	0.166	0.1703	0.1704	0.173	0.179	0.1796	0.1797

2.8.3.4 Ένα τροποποιημένο S διάγραμμα

Στις προηγούμενες παραγράφους παρατηρήσαμε ότι όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, όσο αυξάνεται το k τόσο τα προειδοποιητικά όρια πλησιάζουν την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (CL). Για να απλοποιήσουμε τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων αυτών, θεωρούμε ότι τα προειδοποιητικά όρια ισαπέχουν από την κεντρική γραμμή. Ας εξετάσουμε το παραπάνω διάγραμμα για $k = 9$, δηλαδή το διάγραμμα

$$\{T(1,1,UCL, \infty), T(9,9,CL,UCL), T(9,9,LCL,CL), T(1,1,-\infty,LCL)\}.$$

Για να σχεδιάσουμε ένα τέτοιο διάγραμμα θέτουμε $p_1 = 0$ και $p = p_2 = p_3$ και βρίσκουμε $p < 0.50$ τέτοιο ώστε:

$$M_1 = \frac{1 - p^9}{1 - 2p + p^9}.$$

Τα όρια και η κεντρική γραμμή υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{n-1, 1-p_{40}}^2}{n-1}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{n-1, 0.5+p}^2}{n-1}}$$

$$LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{n-1, p_{50}}^2}{n-1}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{n-1, 0.5-p}^2}{n-1}}$$

$$CL = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{n-1, 0.5}^2}{n-1}}$$

Για να βρούμε τα όρια του διαγράμματος με $n = 5$, $\sigma_0 = 1$, και M_1 ίσο με 250, λύνουμε ως προς p τη σχέση

$$M_1 = \frac{1 - p^9}{1 - 2p + p^9}.$$

και βρίσκουμε ότι $p = 0.4989623$. Έτσι τα όρια ελέγχου υπολογίζονται ως εξής:

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{4, 0.5+p}^2}{4}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{4, 0.99896}^2}{4}} = 2.1439$$

$$LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{4, 0.5-p}^2}{4}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{x_{4, 0.00104}^2}{4}} = 0.1521$$

ενώ η κεντρική ισούται με 0.916065

Συγκρίνουμε τώρα τις επιδόσεις του ARL των διαγραμμάτων S με τους κανόνες ροών 1/1 και k/k για $k = 8, 9$, και 10. Στον Πίνακα 2.18 βλέπουμε τις επιδόσεις του ARL και τα όρια των διαγραμμάτων αυτών, όπως επίσης και τις τιμές του ARL με όρια πιθανότητας ($\alpha = 0.004$).

Παρατηρούμε ότι τα S διαγράμματα με προειδοποιητικά όρια έχουν πολύ καλύτερες επιδόσεις ARL από τα διαγράμματα με όρια πιθανότητας, όταν η τυπική απόκλιση σ υφίσταται μειώσεις της τάξης $0.3 < \delta < 1$. Αντίστοιχα, όταν εξετάζουμε τις αυξήσεις στην τυπική απόκλιση, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα με τους κανόνες 1/1 και 9/9 έχει καλύτερη επίδοση από το διάγραμμα με τα όρια πιθανότητας όταν η διαφορά είναι της τάξεως $1.0 < \delta < 1.4$, ομοίως το διάγραμμα με τους κανόνες

1/1 και 10/10 υπερτερεί του διαγράμματος με όρια πιθανότητα για μεταβολές $1.0 < \delta < 1.5$. Όταν όμως οι μεταβολές είναι μεγαλύτερες από 1.5 ($1.5 < \delta < 2.0$) τότε τα διαγράμματα με όρια πιθανότητας υπερτερούν.

Τέλος, παρατηρούμε πως αν συγκρίνουμε τα δύο διαγράμματα μεταξύ τους, βλέπουμε ότι εκείνο με τους κανόνες 1/1 και 9/9 έχει καλύτερες επιδόσεις στις μειώσεις της τυπικής απόκλισης για $0.3 < \delta < 1$, ενώ το διάγραμμα με τους κανόνες 1/1 και 10/10 έχει καλύτερες επιδόσεις στις αυξήσεις της. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι το διάγραμμα με τους κανόνες 1/1 και 10/10 είναι μεροληπτικό ως προς το ARL. Και τα δύο διαγράμματα είναι απλά στην σχεδίαση και αποτελεσματικά στον άμεσο εντοπισμό των μεταβολών στην τυπική απόκλιση, οπότε συνιστώνται και τα 2, είτε πρόκειται για αύξηση είτε για μείωση του σ .

Πίνακας 2.18: Τιμές ARL για S διαγράμματα με προειδοποιητικά όρια στην κεντρική γραμμή της διαμέσου ($n = 5$)

δ	P. limits $k = 1$	1-of-1 & 8-of-8	1-of-1 & 9-of-9	1-of-1 & 10-of-10
0.20	2.08	7.42	3.01	2.42
0.30	6.17	7.87	6.25	5.78
0.40	15.98	7.97	7.86	8.07
0.50	35.50	8.33	8.84	9.48
0.60	69.90	10.31	11.41	12.65
0.70	125.50	17.12	20.00	23.34
0.80	208.66	39.76	49.74	61.68
0.90	298.48	121.19	152.92	184.50
0.95	300.91	202.28	234.96	258.00
1.00	250.00	250.00	250.00	250.00
1.10	114.76	137.12	112.00	109.59
1.20	49.34	62.58	46.46	45.02
1.30	24.45	34.49	23.63	22.61
1.40	14.00	21.98	14.20	13.42
1.50	9.01	15.41	9.55	8.95
1.60	6.32	11.50	6.94	6.46
1.70	4.75	8.96	5.32	4.94
1.80	3.77	7.18	4.25	3.95
1.90	3.12	5.89	3.51	3.27
2.00	2.66	4.92	2.98	2.79
UCL	2.0569	2.5238	2.1439	2.0934
LCL	0.1797	0.0671	0.1521	0.1677

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Υπολογιστικός κώδικας για τα r από m σχήματα κανόνων ροών

3.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρουν οι Mehmmod et al. (2013), μια στατιστική διεργασία δείχνει διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματά της είτε λόγω φυσικών μεταβολών (διεργασία εντός ελέγχου) είτε λόγω μη φυσικών μεταβολών (διεργασία εκτός ελέγχου). Οι δεύτερες μεταβολές ενδέχεται να επηρεάσουν την ποιότητα της διεργασίας και γι' αυτό είναι απαραίτητο να διαγνωστούν οι αιτίες που τις προκαλούν. Για τον εντοπισμό και την αναγνώριση αυτών των μεταβολών χρησιμοποιούμε το Στατιστικό Έλεγχο Διεργασίας που μας παρέχει αρκετά τέτοια εργαλεία με κυριότερο όμως τα διαγράμματα ελέγχου. Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart είναι αυτά που χρησιμοποιούνται πιο συχνά στην πράξη λόγω της απλότητάς τους και της ικανότητάς τους να εντοπίζουν άμεσα μεγάλες μετατοπίσεις των παραμέτρων της διεργασίας. Με επιπρόσθετη χρήση κάποιων κανόνων ευαισθησίας ή/και κανόνων ροών μπορούμε να αυξήσουμε την αποτελεσματικότητά τους. Ενώ όμως η εφαρμογή των επιπρόσθετων κανόνων κάνει πιο ευαίσθητα τα διαγράμματα ελέγχου στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, δημιουργούνται δυσκολίες στο σχεδιασμό των διαγραμμάτων. Επίσης ένα εναλλακτικό κριτήριο σύγκρισης διαγραμμάτων ελέγχου, πέρα από το μέσο μήκος ροής, είναι η ισχύς του διαγράμματος, η οποία είναι η πιθανότητα να διαπιστώσουμε ότι μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου, ενώ βρίσκεται όντως σε κατάσταση εκτός ελέγχου.

Όπως προαναφέραμε η επιπρόσθετη χρήση κανόνων στα τυπικά διαγράμματα ελέγχου Shewhart, δημιουργούν δυσκολίες στον υπολογισμό της ισχύος, εξαιτίας του πολύπλοκου σχεδιασμού αυτών των διαγραμμάτων ενώ ταυτόχρονα αυξάνουν και τον αριθμό των ψευδών συναγερμών. Παράλληλα υπάρχει μεροληψία στην περίπτωση χωριστής χρήσης του κάθε κανόνα και περιορισμένη διαθεσιμότητα στα πακέτα λογισμικού για διαφορετικούς r / m κανόνες.

Για να ξεπεραστούν οι παραπάνω δυσκολίες οι Riaz et al. (2011) δημιούργησε έναν υπολογιστικό κώδικα στο λειτουργικό περιβάλλον της γλώσσας R που ξεπερνάει τις προαναφερθείσες δυσκολίες. Ο κώδικας αυτός προσφέρει την ευελιξία να εξετάζουμε τη συμπεριφορά της ισχύος κάτω από την επίδραση διαφόρων κανόνων ροών για μια ποικιλία διαγραμμάτων ελέγχου ανάλογα με το είδος της κατανομής και του ποιοτικού χαρακτηριστικού που εξετάζεται (πχ διαγράμματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης, εύρους και διασποράς).

3.2 Περιγραφή του κώδικα

Η μεθοδολογία των Riaz et al. (2011) και των Mehmmod et al. (2013) πάνω στην οποία βασίστηκε ο κώδικας της παρούσας διπλωματικής εργασίας χωρίζεται σε 2 βασικά μέρη. Στο Μέρος I (Part I) γίνεται επιλογή του r και του m (δηλαδή του κανόνα r/m) και του a . Σύμφωνα με τον Riaz et al. (2011) έχουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν τουλάχιστον r από m συνεχόμενα σημεία ($r \leq m$) βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος, είτε αυτό είναι μονόπλευρο είτε είναι δίπλευρο. Επομένως για δεδομένο ρίσκο a (πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού) τα όρια ελέγχου υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε εντέλει να ικανοποιείται η εξίσωση

$$a = \sum_{i=r}^m \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i}$$

όπου η πιθανότητα p δηλώνει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου για μια εντός ελέγχου διεργασία.

Στη συνέχεια, μέσω της συνάρτησης “onepoint”, υπολογίζεται αυτή η πιθανότητα. Για τις περιπτώσεις $r = m$, $r = m - 1$ και $r = m - 2$ που είναι οι σημαντικότερες σύμφωνα με διάφορους ερευνητές και είναι και οι μοναδικές που εξετάζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία, η πιθανότητα p υπολογίζεται ως εξής:

- Για $r = m$ έχουμε ότι $p = a^{1/m}$.
- Για $r = m - 1$ και για $r = m - 2$ η συνάρτηση “onepoint”, βρίσκει το διάνυσμα ff που περιέχει όλα τα p για τα οποία

$$\sum_{i=r}^m \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} - a > 0$$

και

$$\sum_{i=r}^m \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} - a < 0.0001$$

για $p = (1/100000, 2/100000, 3/100000, \dots, 1$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η συνάρτηση “onepoint”, αποδίδει στο p την ελάχιστη τιμή του διανύσματος ff , δηλαδή $p = \min(ff) = ff[1]$.

Στο Μέρος II (Part II) του κώδικα καλούμαστε να υπολογίσουμε τα όρια ελέγχου του εκάστοτε διαγράμματος, έτσι ώστε η πιθανότητα να βρεθεί έξω από αυτά ένα μεμονωμένο σημείο να είναι ίση με την πιθανότητα p που υπολογίστηκε παραπάνω. Τα όρια ελέγχου μπορεί να είναι δύο στην

περίπτωση που εξετάζουμε δίπλευρο διάγραμμα, ή ένα στην περίπτωση των μονόπλευρων διαγραμμάτων (άνω ή κάτω όριο ελέγχου). Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να δηλωθεί το μέγεθος του δείγματος (n), ο αριθμός των προσομοιώσεων ($simu$) καθώς και οι παράμετροι της κάθε κατανομής.

🚩 Ειδικά στην περίπτωση της κανονικής κατανομής τα όρια ελέγχου για τα διαγράμματα μέσης τιμής (\bar{x}), τυπικής απόκλισης (S) και διασποράς (S^2) υπολογίζονται από τους θεωρητικούς τύπους και είναι όρια ελέγχου πιθανότητας. Στα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου μοιράζεται η πιθανότητα στις περιοχές κάτω του lcl και πάνω του ucl . Για την παρακολούθηση του εύρους (R) τα όρια ελέγχου υπολογίζονται με προσομοίωση. Στη συνέχεια βρίσκεται η ισχύς με προσομοίωση ως εξής:

1. Διάγραμμα ελέγχου \bar{x} : Η μέση τιμή (mean, μ) μετατοπίζεται από την τιμή (mean, μ) στην τιμή $\text{mean} + \delta * \text{sd}$ ($\mu + \delta * \sigma$). Θεωρούμε ότι η τυπική απόκλιση παραμένει σταθερή.
2. Διαγράμματα ελέγχου S, S^2 και R : Η τυπική απόκλιση μετατοπίζεται από την τιμή (sd, σ) στην τιμή $\delta * \text{sd}$ ($\delta \sigma$). Θεωρούμε ότι η μέση τιμή παραμένει σταθερή.

🚩 Για τα διαγράμματα μη κανονικών κατανομών, τα όρια ελέγχου υπολογίζονται μέσω προσομοίωσης. Αρχικά παράγονται τυχαία δείγματα (το πλήθος $simu$) από την εκάστοτε κατανομή προκειμένου να προσδιοριστούν τα όρια ελέγχου lcl και ucl μέσω προσομοίωσης. Στη συνέχεια για να υπολογιστεί η ισχύς χρησιμοποιείται ο τύπος

$$pro = \sum_{i=r}^m \binom{m}{i} op^i (1-op)^{m-i}$$

όπου η πιθανότητα op (που είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου) υπολογίζεται ως εξής:

1. Διάγραμμα ελέγχου \bar{x} : Αν τα $simu$ τυχαία δείγματα μετατοπιστούν κατά δ μονάδες, δηλαδή από τη θέση X στη θέση $X + \delta$ τότε έχουμε μετατόπιση της μέσης τιμής κατά δ μονάδες. Η πιθανότητα op τότε προκύπτει ως το πηλίκο του αριθμού των αρχικών $simu$ τυχαίων δειγμάτων που βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[lcl - \delta, ucl - \delta]$ διά του αριθμού $simu$.
2. Διαγράμματα ελέγχου S, S^2 και R : Αν τα $simu$ τυχαία δείγματα X μετατοπιστούν στη θέση $X * \delta$, τότε έχουμε μετατόπιση της τυπικής απόκλισης κατά δ μονάδες. Η πιθανότητα op προκύπτει ως το πηλίκο του αριθμού των αρχικών $simu$ τυχαίων δειγμάτων που βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[lcl / \delta, ucl / \delta]$ διά του αριθμού $simu$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Κώδικας των Mehmmod et al. (2013) περιείχε λάθη τα οποία εντοπίστηκαν και διορθώθηκαν. Ίσως για αυτό το λόγο δεν μπορεί πλέον να βρεθεί στην ηλεκτρονική διεύθυνση που δίνεται στην εργασία των Mehmmod et al. (2013)

3.3 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων του κώδικα

Στις επόμενες παραγράφους, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα των Mehmmod et al. (2013) με σκοπό να συγκρίνουμε μεταξύ τους διαφορετικούς κανόνες ροών για διαφορετικά είδη κατανομών και διαγραμμάτων ελέγχου. Πρέπει να σημειωθεί ότι εξετάσαμε μόνο αυξήσεις των ζητούμενων χαρακτηριστικών, καθώς επίσης ότι στα διαγράμματα που αφορούν την μέση τιμή, μελετήσαμε τις αυξήσεις από 0 έως 3 τυπικές αποκλίσεις, ενώ στους υπόλοιπους τύπους διαγραμμάτων (τυπικής απόκλισης, διασποράς και εύρους) μελετήσαμε αυξήσεις από 1 έως 4.4 τυπικές αποκλίσεις. Τέλος, σε όλα τα διαγράμματα θέσαμε ως πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού $a = 0.0027$, μέγεθος δείγματος $n = 5$ και αριθμό προσομοιώσεων $simu = 500000$.

3.4 Διαγράμματα Κανονικής Κατανομής

Για την κανονική κατανομή θα μελετήσουμε τα διαγράμματα της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Θα μελετήσουμε την περίπτωση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu = 0$ και $\sigma = 1$. Παραθέτουμε έναν πίνακα με τις τιμές της ισχύος που προκύπτουν για διαφορετικούς κανόνες ροών.

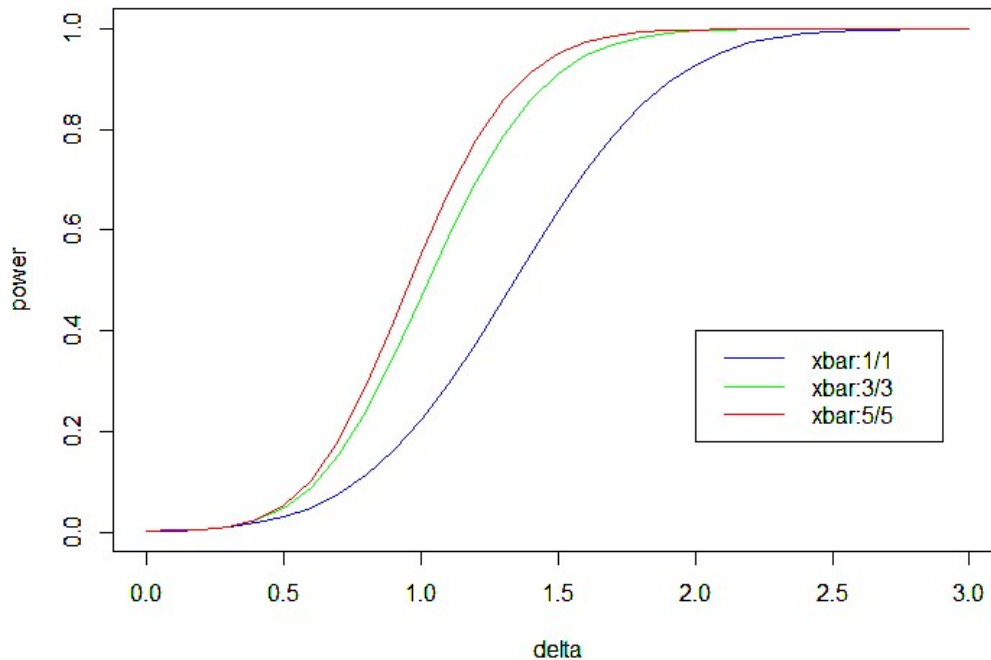
Πίνακας 3.1: Τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής (\bar{x})

δ	1/1	3/3	5/5	2/3	4/5	6/7	2/4	4/6	6/8	3/4	4/4	3/5
0	0.0027	0.0028	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0026
0.1	0.0032	0.0033	0.0033	0.0035	0.0035	0.0034	0.0036	0.0035	0.0035	0.0035	0.0033	0.0036
0.2	0.0054	0.0059	0.0054	0.0063	0.0066	0.0063	0.0072	0.0076	0.0073	0.0066	0.0056	0.0072
0.3	0.0098	0.0114	0.0113	0.0139	0.0151	0.0148	0.0160	0.0185	0.0184	0.0146	0.0112	0.0176
0.4	0.0177	0.0239	0.0242	0.0293	0.0357	0.0369	0.0353	0.0462	0.0488	0.0338	0.0247	0.0422
0.5	0.0296	0.0484	0.0523	0.0591	0.0792	0.0861	0.0725	0.1043	0.1168	0.0723	0.0510	0.0923
0.6	0.0489	0.0890	0.1025	0.1089	0.1567	0.1764	0.1355	0.2087	0.2418	0.1386	0.0979	0.1797
0.7	0.0760	0.1539	0.1820	0.1844	0.2737	0.3136	0.2321	0.3599	0.4176	0.2392	0.1705	0.3081
0.8	0.1131	0.2405	0.2904	0.2861	0.4238	0.4814	0.3587	0.5361	0.6122	0.3696	0.2709	0.4676
0.9	0.1619	0.3483	0.4184	0.4094	0.5802	0.6525	0.5049	0.7050	0.7797	0.5170	0.3907	0.6327
1	0.2229	0.4661	0.5519	0.5423	0.7270	0.7923	0.6494	0.8385	0.8957	0.6622	0.5202	0.7748
1.1	0.2950	0.5868	0.6767	0.6703	0.8402	0.8918	0.7761	0.9237	0.9583	0.7829	0.6423	0.8791
1.2	0.3749	0.6947	0.7805	0.7808	0.9164	0.9495	0.8734	0.9690	0.9861	0.8754	0.7492	0.9436
1.3	0.4624	0.7873	0.8610	0.8661	0.9606	0.9788	0.9361	0.9894	0.9961	0.9342	0.8341	0.9772
1.4	0.5526	0.8584	0.9150	0.9250	0.9832	0.9923	0.9717	0.9970	0.9990	0.9689	0.8964	0.9921
1.5	0.6383	0.9120	0.9516	0.9615	0.9935	0.9974	0.9891	0.9992	0.9998	0.9868	0.9383	0.9976
1.6	0.7181	0.9474	0.9736	0.9825	0.9977	0.9992	0.9962	0.9998	1	0.9949	0.9649	0.9994
1.7	0.7889	0.9698	0.9864	0.9924	0.9993	0.9998	0.9989	1	1	0.9982	0.9811	0.9998
1.8	0.8475	0.9835	0.9934	0.9968	0.9998	1	0.9997	1	1	0.9994	0.9906	1
1.9	0.8940	0.9917	0.9971	0.9990	1	1	1	1	1	0.9998	0.9953	1
2	0.9294	0.9960	0.9986	0.9997	1	1	1	1	1	0.9999	0.9979	1
2.1	0.9548	0.9980	0.9994	0.9999	1	1	1	1	1	1	0.9990	1
2.2	0.9730	0.9991	0.9997	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	1
2.3	0.9837	0.9996	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	1
2.4	0.9911	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	1
2.5	0.9952	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.6	0.9975	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.7	0.9988	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.8	0.9995	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.9	0.9997	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Στις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις συγκρίνουμε τις επιδόσεις των κανόνων ροών για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή.

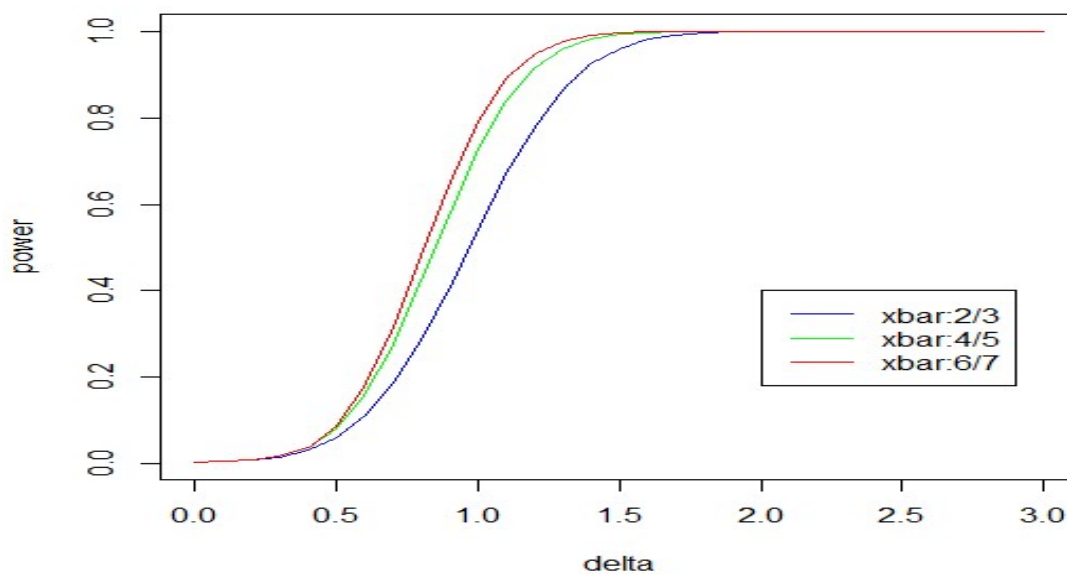
Γράφημα 3.1: Σύγκριση κανόνων 1/1, 3/3 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής

Ο κανόνας 5/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για αλλαγές μεγαλύτερες από $\delta = 0.3$, με τους κανόνες 3/3 και 1/1 να ακολουθούν. Για αλλαγές $\delta = 0.2$ και $\delta = 0.3$ φαίνεται να υπερτερεί ο κανόνας 3/3.



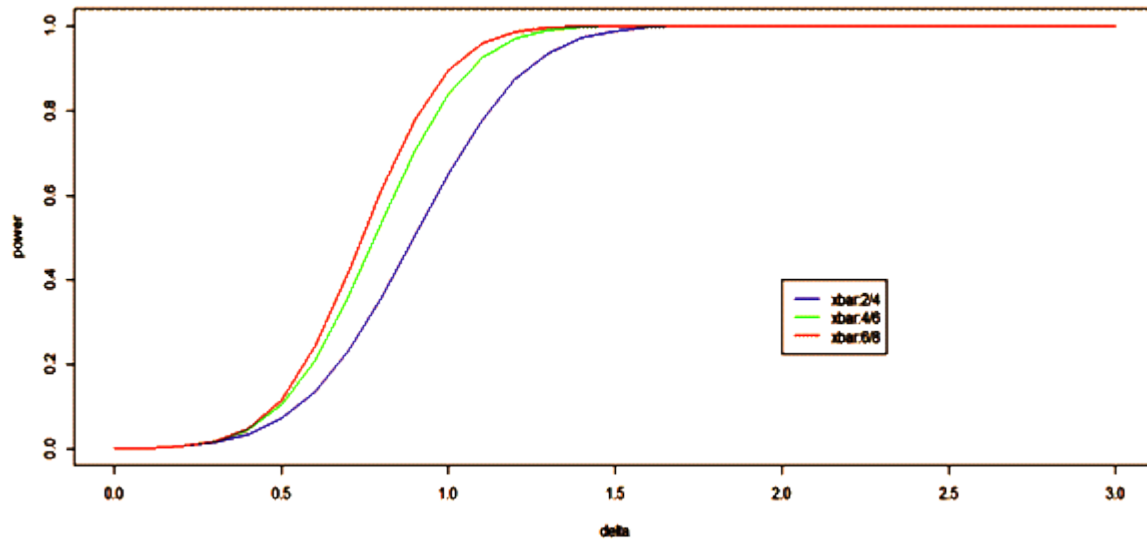
Γράφημα 3.2: Σύγκριση κανόνων 2/3, 4/5 και 6/7 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής

Ο κανόνας 6/7 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για αλλαγές μεγαλύτερες από $\delta = 0.3$, με τους κανόνες 4/5 και 2/3 να ακολουθούν. Για αλλαγές μικρότερες ή ίσες με $\delta = 0.3$ φαίνεται να υπερτερεί ο κανόνας 4/5.



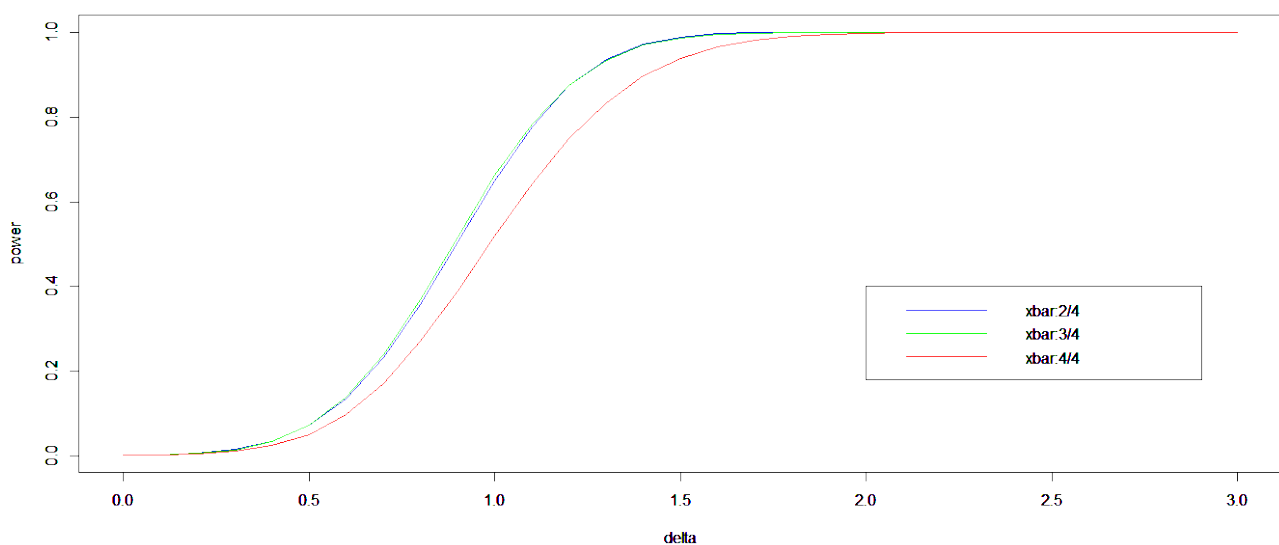
Γράφημα 3.3: Σύγκριση κανόνων 2/4, 4/6 και 6/8 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής

Ο κανόνας 6/8 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για αλλαγές μεγαλύτερες από $\delta = 0.3$, με τους κανόνες 4/6 και 2/4 να ακολουθούν. Για αλλαγές $\delta = 0.3$ και $\delta = 0.2$ φαίνεται να υπερτερεί ο κανόνας 4/6.



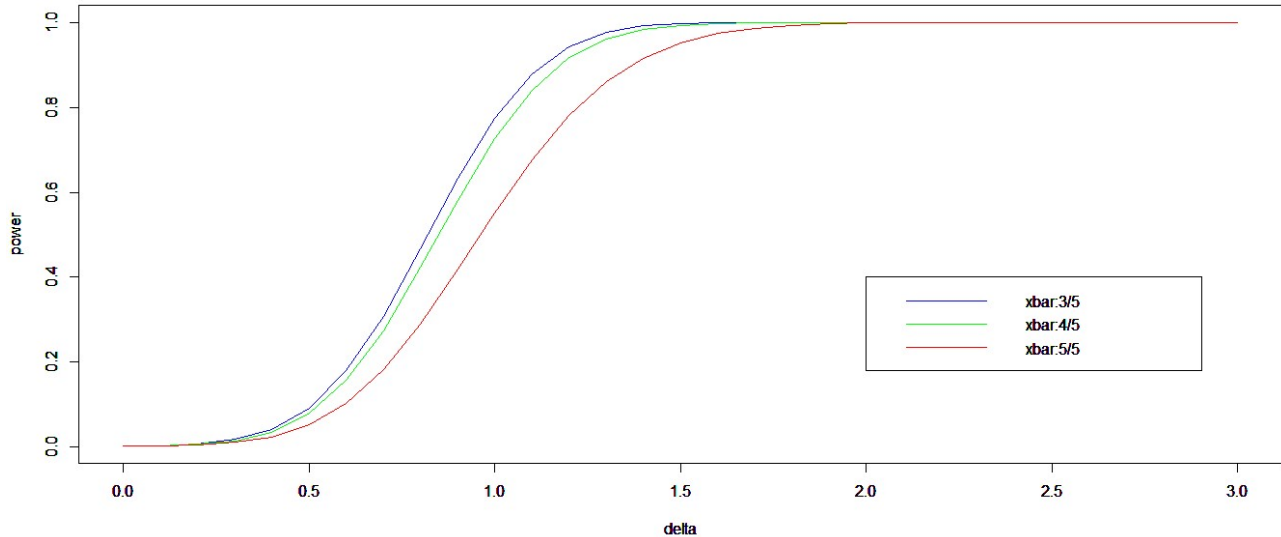
Γράφημα 3.4: Σύγκριση κανόνων 2/4, 3/4 και 4/4 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής

Ο κανόνας 3/4 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, για μεταβολές από $\delta = 0.4$ έως 1.2, στις άλλες αλλαγές μεγαλύτερη ισχύ έχει ο κανόνας 2/4. Οι τιμές ισχύος των 2 αυτών κανόνων είναι παραπλήσιες σε όλο το φάσμα των αλλαγών, ενώ ο κανόνας 4/4 φαίνεται να υπολείπεται αρκετά από τους άλλους 2 κανόνες.



Γράφημα 3.5: Σύγκριση κανόνων 3/5, 4/5 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής

Ο κανόνας 3/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για όλες τις μεταβολές, με τους κανόνες 4/5 και 5/5 να ακολουθούν.



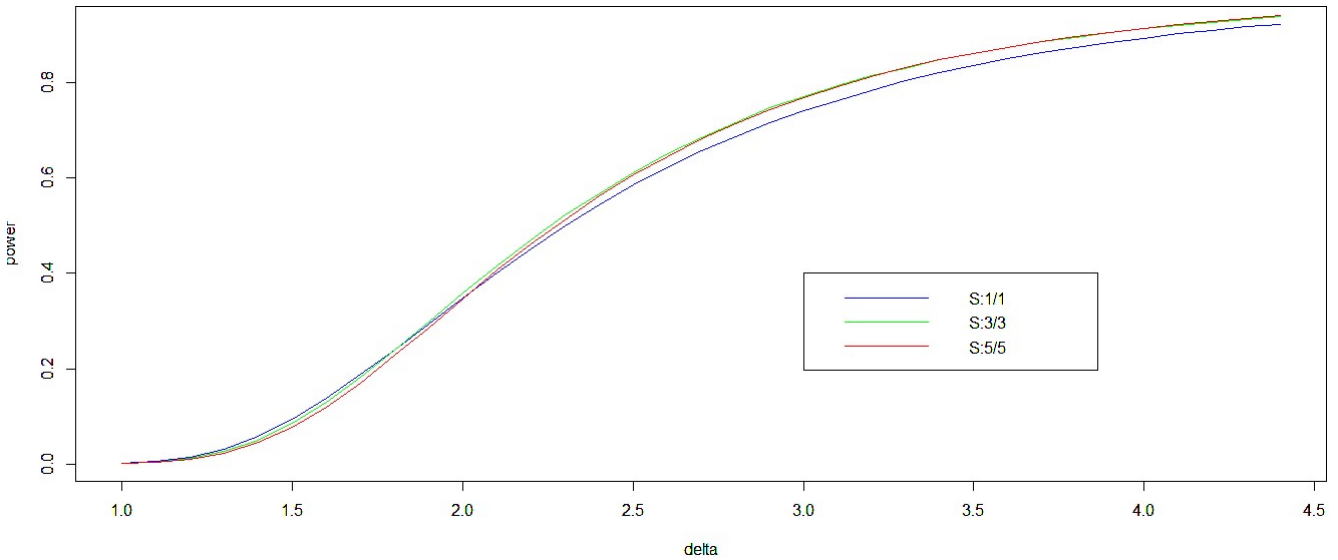
Παρατηρούμε στα γραφήματα 3.1, 3.2, 3.3 όπου εξετάζονται αντίστοιχα οι γενικές μορφές των κανόνων m/m , $m-1/m$ και $m-2/m$, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός m , τόσο περισσότερο αποτελεσματικός είναι και ο αντίστοιχος κανόνας, για αλλαγές μεγαλύτερες από 0.4. Στις γραφικές παραστάσεις 3.4 και 3.5 όπου οι παραπάνω γενικές μορφές κανόνων συγκρίνονται μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι ο κανόνας m/m υστερεί σημαντικά έναντι των άλλων 2, οι οποίοι έχουν παραπλήσιες τιμές για $m = 4$, αλλά για $m = 5$, ο 3/5 υπερτερεί έναντι του 4/5. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και στα διαγράμματα τυπικής απόκλισης

Πίνακας 3.2: Τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης (S)

δ	1/1	3/3	5/5	2/3	4/5	6/7	2/4	4/6	6/8	3/4	4/4	3/5
1	0.0028	0.0028	0.0027	0.0028	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0026	0.0027	0.0027	0.0028
1.1	0.0062	0.0055	0.0053	0.0069	0.0064	0.0061	0.0074	0.0070	0.0069	0.0064	0.0054	0.0072
1.2	0.0154	0.0128	0.0116	0.0184	0.0168	0.0155	0.0225	0.0210	0.0200	0.0178	0.0122	0.0223
1.3	0.0329	0.0270	0.0243	0.0442	0.0405	0.0376	0.0570	0.0549	0.0514	0.0423	0.0254	0.0561
1.4	0.0599	0.0516	0.0461	0.0877	0.0825	0.0761	0.1178	0.1180	0.1105	0.0861	0.0484	0.1190
1.5	0.0948	0.0871	0.0785	0.1510	0.1452	0.1362	0.2043	0.2073	0.1992	0.1491	0.0818	0.2086
1.6	0.1384	0.1307	0.1206	0.2282	0.2236	0.2143	0.3090	0.3185	0.3088	0.2279	0.1257	0.3173
1.7	0.1887	0.1824	0.1713	0.3152	0.3148	0.3025	0.4178	0.4351	0.4272	0.3185	0.1749	0.4343
1.8	0.2396	0.2391	0.2283	0.4036	0.4069	0.3957	0.5267	0.5494	0.5429	0.4106	0.2336	0.5458
1.9	0.2939	0.2989	0.2860	0.4885	0.4971	0.4865	0.6245	0.6488	0.6476	0.4981	0.2928	0.6443
2	0.3481	0.3588	0.3470	0.5679	0.5811	0.5721	0.7077	0.7353	0.7327	0.5796	0.3516	0.7289
2.1	0.4006	0.4155	0.4062	0.6393	0.6520	0.6478	0.7760	0.8004	0.8012	0.6525	0.4103	0.7948
2.2	0.4514	0.4691	0.4609	0.7006	0.7155	0.7118	0.8308	0.8526	0.8540	0.7132	0.4652	0.8473
2.3	0.4991	0.5220	0.5125	0.7539	0.7688	0.7658	0.8727	0.8924	0.8941	0.7647	0.5166	0.8868
2.4	0.5437	0.5668	0.5613	0.7975	0.8127	0.8104	0.9048	0.9212	0.9232	0.8092	0.5648	0.9168
2.5	0.5843	0.6101	0.6069	0.8349	0.8476	0.8472	0.9302	0.9433	0.9441	0.8445	0.6086	0.9398
2.6	0.6204	0.6506	0.6447	0.8644	0.8776	0.8770	0.9476	0.9593	0.9599	0.8742	0.6481	0.9557
2.7	0.6556	0.6844	0.6824	0.8885	0.9017	0.9005	0.9613	0.9699	0.9712	0.8982	0.6846	0.9676
2.8	0.6857	0.7159	0.7134	0.9092	0.9197	0.9206	0.9717	0.9780	0.9792	0.9166	0.7159	0.9767
2.9	0.7145	0.7457	0.7428	0.9256	0.9348	0.9354	0.9785	0.9839	0.9853	0.9325	0.7440	0.9825
3	0.7407	0.7701	0.7681	0.9391	0.9476	0.9480	0.9841	0.9884	0.9893	0.9455	0.7699	0.9873
3.1	0.7623	0.7927	0.7903	0.9501	0.9570	0.9578	0.9884	0.9913	0.9921	0.9556	0.7918	0.9905
3.2	0.7828	0.8126	0.8118	0.9583	0.9652	0.9661	0.9910	0.9936	0.9940	0.9635	0.8130	0.9930
3.3	0.8031	0.8289	0.8301	0.9660	0.9718	0.9719	0.9934	0.9954	0.9958	0.9701	0.8293	0.9949
3.4	0.8190	0.8465	0.8462	0.9716	0.9763	0.9768	0.9951	0.9966	0.9967	0.9757	0.8468	0.9962
3.5	0.8354	0.8592	0.8600	0.9769	0.9814	0.9811	0.9962	0.9974	0.9976	0.9799	0.8608	0.9972
3.6	0.8491	0.8714	0.8731	0.9807	0.9844	0.9845	0.9970	0.9981	0.9982	0.9834	0.8736	0.9977
3.7	0.8611	0.8850	0.8845	0.9839	0.9866	0.9871	0.9977	0.9986	0.9986	0.9859	0.8847	0.9984
3.8	0.8730	0.8930	0.8949	0.9865	0.9894	0.9896	0.9982	0.9989	0.9991	0.9884	0.8955	0.9988
3.9	0.8825	0.9030	0.9045	0.9889	0.9908	0.9913	0.9987	0.9991	0.9993	0.9901	0.9047	0.9990
4	0.8911	0.9114	0.9131	0.9905	0.9924	0.9928	0.9990	0.9993	0.9994	0.9918	0.9132	0.9992
4.1	0.9006	0.9190	0.9201	0.9920	0.9936	0.9940	0.9993	0.9996	0.9995	0.9933	0.9196	0.9994
4.2	0.9081	0.9254	0.9264	0.9932	0.9947	0.9948	0.9994	0.9996	0.9997	0.9942	0.9265	0.9996
4.3	0.9160	0.9312	0.9334	0.9942	0.9954	0.9957	0.9995	0.9997	0.9997	0.9951	0.9329	0.9997
4.4	0.9210	0.9366	0.9383	0.9950	0.9961	0.9963	0.9996	0.9997	0.9998	0.9960	0.9380	0.9997

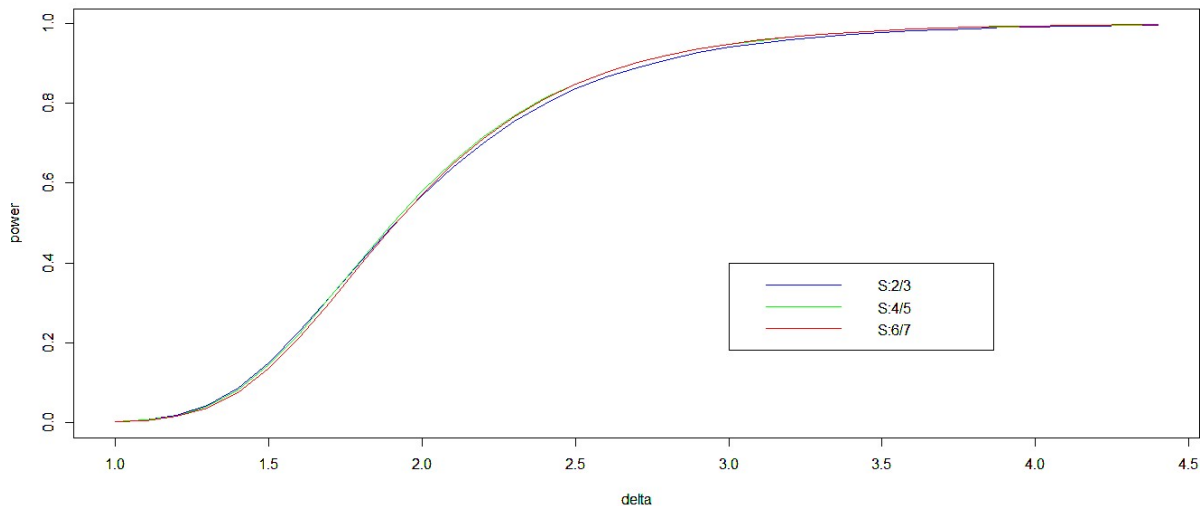
Γράφημα 3.6: Σύγκριση κανόνων 1/1, 3/3 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης

Παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις των 3 αυτών κανόνων είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Ο κανόνας 1/1 φαίνεται να είναι περισσότερο αποτελεσματικός για μικρότερες αλλαγές από 1 μέχρι 1.9 τυπικές αποκλίσεις. Για αλλαγές του μεγέθους από 2 έως 3.2 σ πιο αποτελεσματικός κανόνας φαίνεται να είναι ο 3/3 ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις πιο αποτελεσματικός είναι ο 5/5



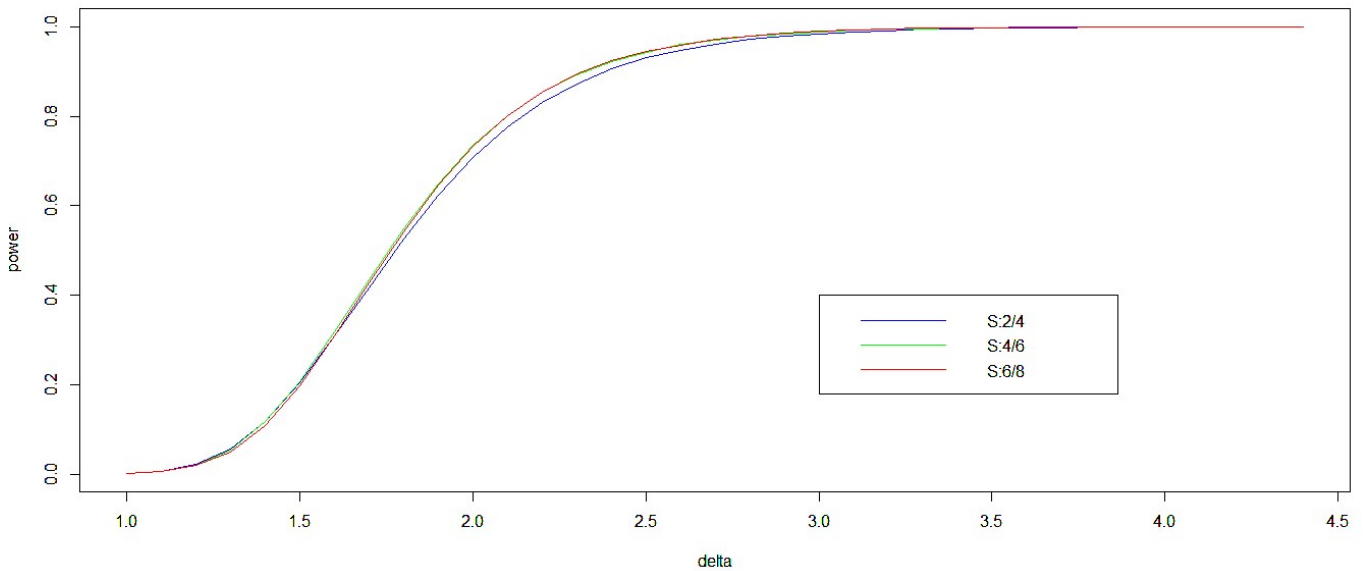
Γράφημα 3.7: Σύγκριση κανόνων 2/3, 4/5 και 6/7 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης

Ομοίως με το προηγούμενο διάγραμμα, οι 3 κανόνες δεν έχουν πολύ μεγάλη διαφορά στις μεταξύ τους αποδόσεις. Για μεταβολές μέχρι 1.7 τυπικών αποκλίσεων δείχνει να είναι αποτελεσματικότερος κανόνας ο 2/3, για αλλαγές από 1.8 μέχρι 2.7 μεγαλύτερη ισχύ έχει ο κανόνας 4/5 ενώ για μεγαλύτερες αλλαγές πιο αποτελεσματικός είναι ο 6/7.



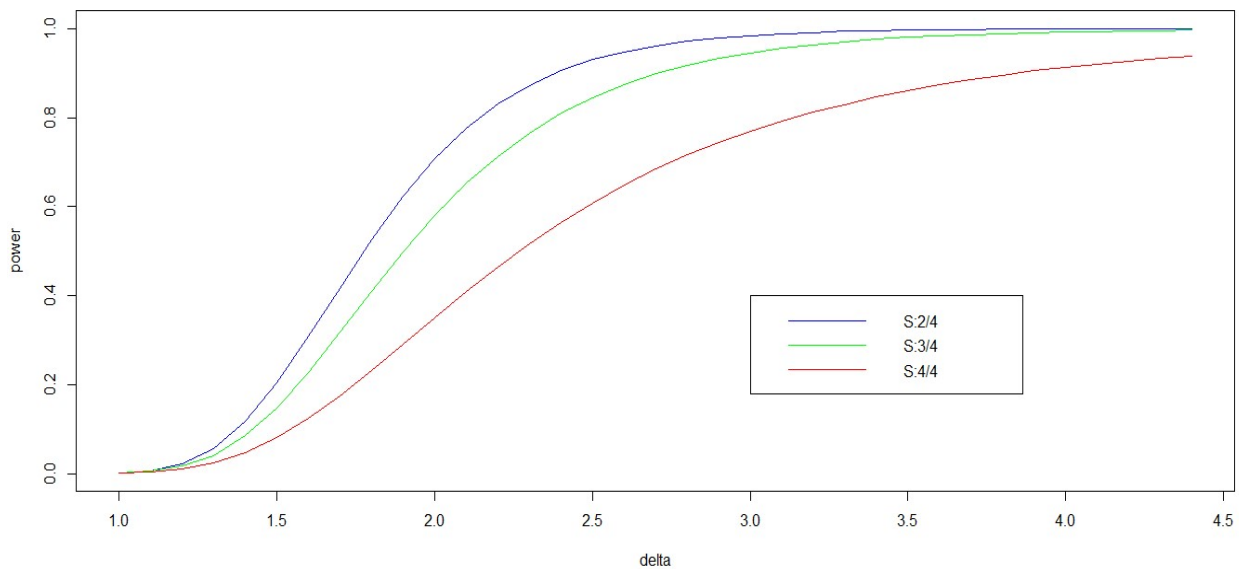
Γράφημα 3.8: Σύγκριση κανόνων 2/4, 4/6 και 6/8 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης

Επίσης εδώ οι κανόνες δεν έχουν πολύ μεγάλη διαφορά μεταξύ τους, ο κανόνας 2/4 έχει μεγαλύτερη ισχύ για αλλαγές μέχρι 1.3 σ , για μεταβολές από 1.4 έως 2 τυπικές αποκλίσεις πιο ισχυρός κανόνας είναι ο 4/6, ενώ για μεγαλύτερες αλλαγές πιο αποτελεσματικός είναι ο 6/8.



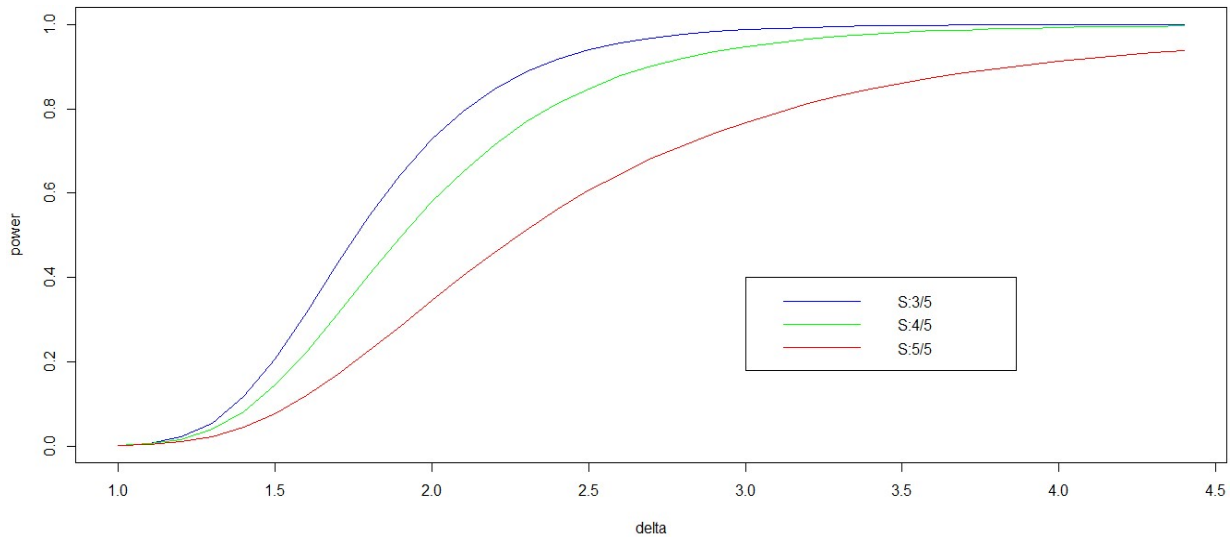
Γράφημα 3.9: Σύγκριση κανόνων 2/4, 3/4 και 4/4 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ξεκάθαρη υπεροχή του κανόνα 2/4 για όλες τις μεταβολές με τους κανόνες 3/4 και 4/4 να ακολουθούν.



Γράφημα 3.10: Σύγκριση κανόνων 3/5, 4/5 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ξεκάθαρη υπεροχή του κανόνα 3/5 έναντι των υπολοίπων για όλες τις μεταβολές, με τους κανόνες 4/5 και 5/5 να ακολουθούν.



Παρατηρούμε στις γραφικές παραστάσεις 3.6, 3.7, 3.8 όπου εξετάζονται αντίστοιχα οι γενικές μορφές των κανόνων m/m , $m-1/m$ και $m-2/m$, ότι οι 3 εξεταζόμενοι κανόνες σε κάθε γενική μορφή έχουν παραπλήσιες τιμές μεταξύ τους. Οι κανόνες με τον μεγαλύτερο αριθμό m , τείνουν να είναι αποτελεσματικότεροι στις μεταβολές μεγάλου μεγέθους. Στις γραφικές παραστάσεις 3.4 και 3.10 όπου οι παραπάνω γενικές μορφές κανόνων συγκρίνονται μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι ο κανόνας $m-2/m$ υπερέχει σημαντικά έναντι των άλλων 2 γενικών κανόνων, με τους κανόνες $m-1/m$ και m/m να έπονται.

3.5 Διαγράμματα μέσης τιμής για τη Γάμμα κατανομή

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την συμπεριφορά των κανόνων ροών στο διάγραμμα μέσης τιμής για τη Γάμμα κατανομή για 2 διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μορφής (shape) a , συγκεκριμένα για $a = 0.5$ και $a = 2$. Για την παράμετρο κλίμακας (scale) s επιλέξαμε την τιμή 1. Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)s^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/s}, \quad x > 0.$$

Ενώ σε όλα τα διαγράμματα μέσης τιμής που παραθέτουμε, μελετάμε τις αλλαγές από 0 μέχρι 3σ , στα γραφήματα για τα διαγράμματα της Γάμμα κατανομής με $a = 0.5$ παραθέτουμε τις αλλαγές μέχρι $\delta = 2\sigma$, επειδή για μεγαλύτερες αλλαγές η ισχύς είναι ίση με 1 σε όλους τους κανόνες ροών.

Στον παρακάτω Πίνακα 3.3, παρατίθενται οι τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για τη Γάμμα κατανομή με $\alpha = 0.5$.

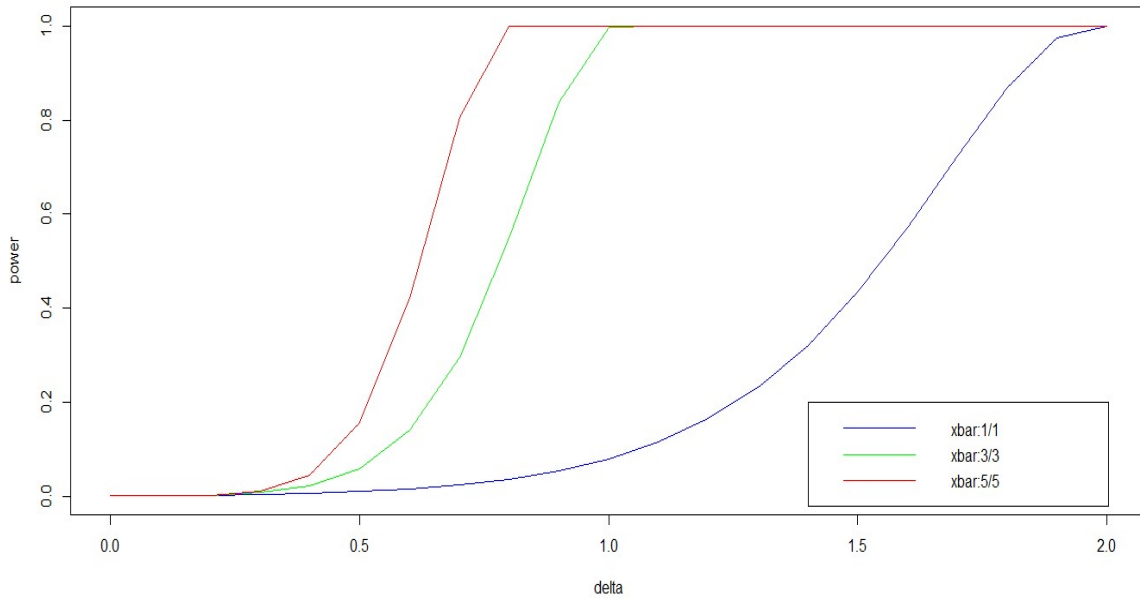
Πίνακας 3.3: Τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για τη Γάμμα κατανομή με $\alpha = 0.5, s = 1$

δ	1/1	3/3	5/5	2/3	4/5	6/7	2/4	4/6	6/8	3/4	4/4	3/5
0	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.1	0.0021	0.0011	0.0011	0.0015	0.0009	0.0009	0.0015	0.0009	0.0008	0.0011	0.0011	0.0011
0.2	0.0032	0.0031	0.0025	0.0033	0.0031	0.0025	0.0034	0.0033	0.0028	0.0033	0.0028	0.0033
0.3	0.0049	0.0087	0.0114	0.0072	0.0116	0.0148	0.0073	0.0123	0.0159	0.0095	0.0103	0.0096
0.4	0.0073	0.0233	0.0465	0.0153	0.0392	0.0696	0.0154	0.0412	0.0731	0.0258	0.0347	0.0263
0.5	0.0110	0.0592	0.1572	0.0313	0.1157	0.2472	0.0316	0.1200	0.2550	0.0655	0.1035	0.0670
0.6	0.0166	0.1401	0.4211	0.0619	0.2880	0.6052	0.0632	0.2948	0.6058	0.1523	0.2681	0.1548
0.7	0.0248	0.2967	0.8055	0.1186	0.5751	0.9340	0.1209	0.5790	0.9235	0.3149	0.5624	0.3184
0.8	0.0371	0.5481	0.9997	0.2150	0.8693	0.9999	0.2190	0.8592	0.9991	0.5572	0.8924	0.5597
0.9	0.0549	0.8385	1	0.3626	0.9933	1	0.3677	0.9868	1	0.8181	1	0.8103
1	0.0803	0.9967	1	0.5580	1	1	0.5621	1	1	0.9734	1	0.9630
1.1	0.1162	1	1	0.7693	1	1	0.7661	1	1	0.9999	1	0.9989
1.2	0.1656	1	1	0.9306	1	1	0.9206	1	1	1	1	1
1.3	0.2333	1	1	0.9945	1	1	0.9891	1	1	1	1	1
1.4	0.3219	1	1	1	1	1	0.9998	1	1	1	1	1
1.5	0.4355	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.6	0.5724	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.7	0.7237	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.8	0.8700	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.9	0.9743	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Γράφημα 3.11: Σύγκριση κανόνων 1/1, 3/3 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για τη Γάμμα Κατανομή με $\alpha = 0.5$, $s = 1$

Ο κανόνας 5/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, με τον κανόνα 3/3 να ακολουθεί.

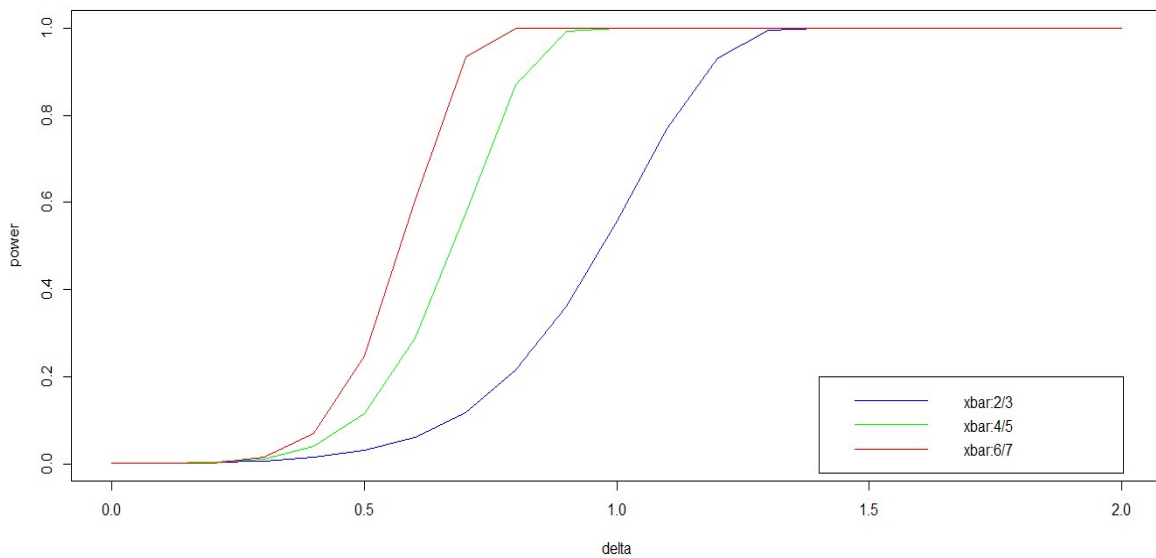
Ο κανόνας 1/1 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 2$, ο 3/3 για $\delta = 1.1$ ενώ ο 5/5 για $\delta = 0.9$.



Γράφημα 3.12: Σύγκριση κανόνων 2/3, 4/5 και 6/7 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για τη Γάμμα Κατανομή με $\alpha = 0.5$, $s = 1$

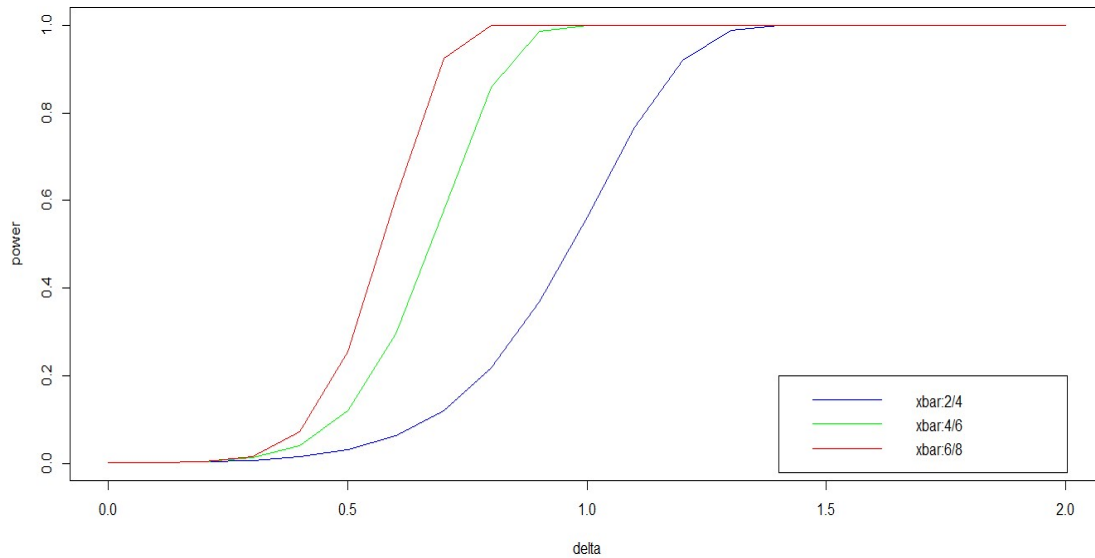
Ο κανόνας 6/7 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, με τον κανόνα 4/5 να ακολουθεί.

Ο κανόνας 2/3 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 1.4$, ο 4/5 για $\delta = 1$ ενώ ο 6/7 για $\delta = 0.9$.



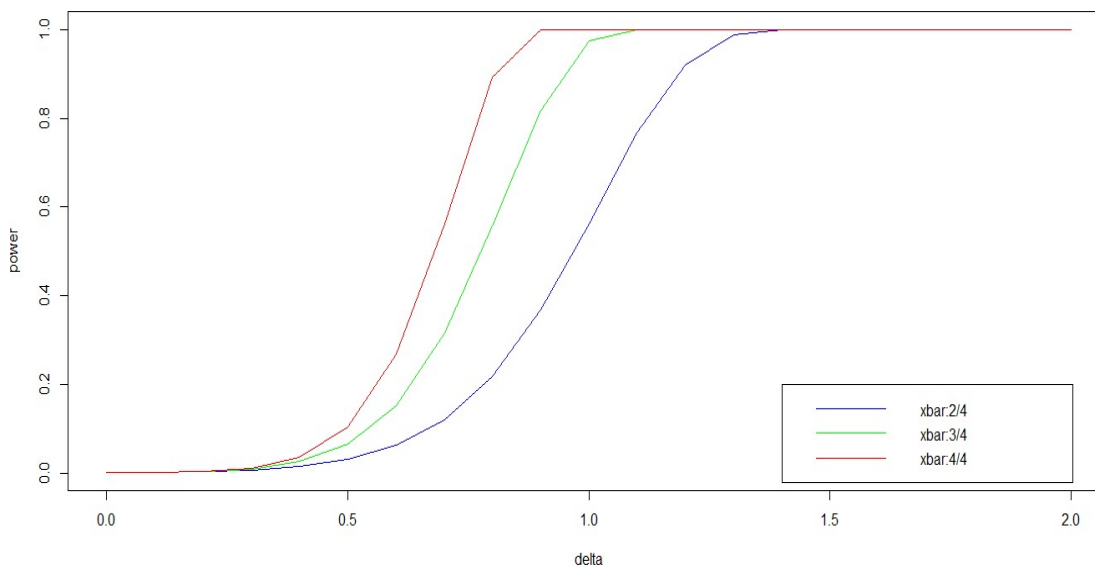
Γράφημα 3.13: Σύγκριση κανόνων 2/4, 4/6 και 6/8 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για τη Γάμμα Κατανομή $\alpha = 0.5$, $s = 1$

Ο κανόνας 6/8 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, με τον κανόνα 4/6 να ακολουθεί. Ο κανόνας 2/4 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 1.5$, ο 4/6 για $\delta = 1$ ενώ ο 6/8 για $\delta = 0.9$.



Γράφημα 3.14: Σύγκριση κανόνων 2/4, 3/4 και 4/4 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή $\alpha = 0.5$, $s = 1$

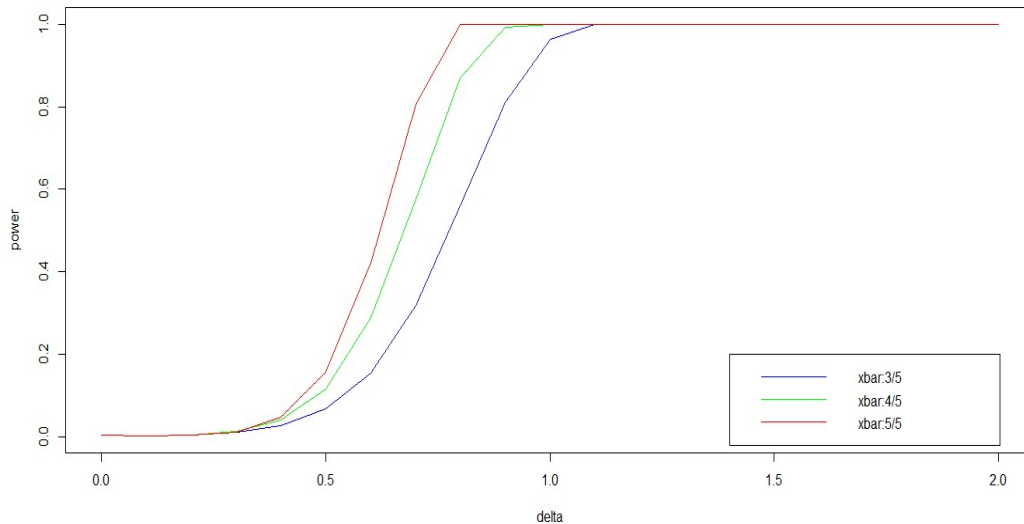
Ο κανόνας 4/4 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, με τον κανόνα 3/4 να ακολουθεί. Ο κανόνας 2/4 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 1.5$, ο 3/4 για $\delta = 1.2$ ενώ ο 4/4 για $\delta = 0.9$.



Γράφημα 3.15: Σύγκριση κανόνων 3/5, 4/5 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή $\alpha = 0.5$, $s = 1$

Ο κανόνας 5/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, με τον κανόνα 4/5 να ακολουθεί.

Ο κανόνας 5/5 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 0.9$, ο 4/5 για $\delta = 1$ ενώ ο 3/5 για $\delta = 1.2$.



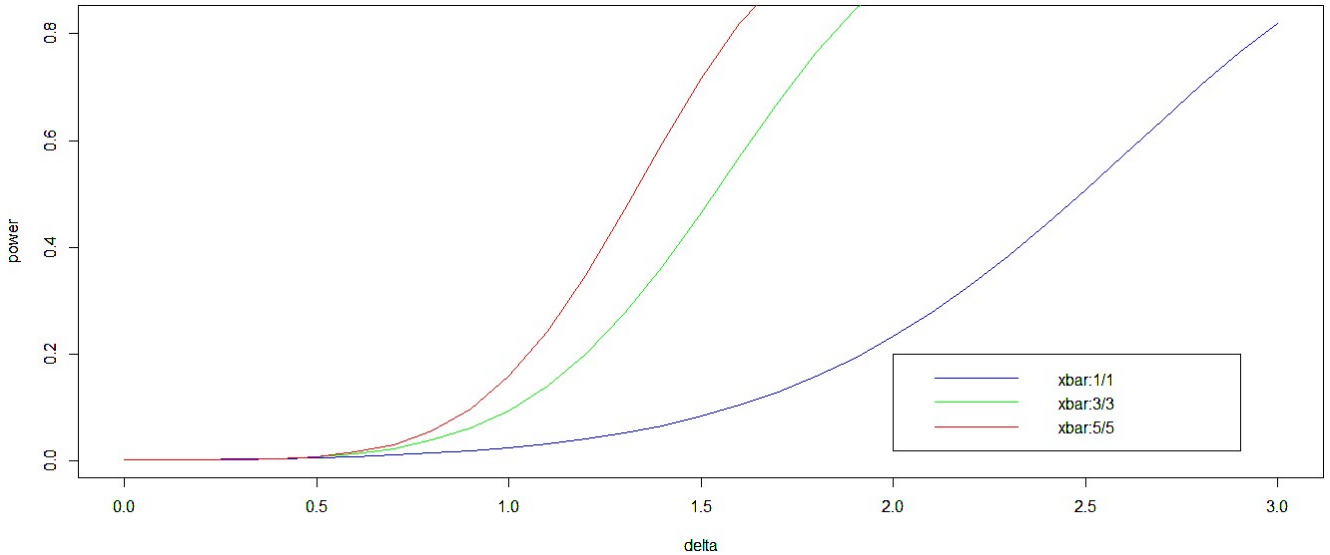
Παρατηρούμε στα γραφήματα 3.11, 3.12, 3.13 όπου εξετάζονται αντίστοιχα οι γενικές μορφές των κανόνων m/m , $m-1/m$ και $m-2/m$, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός m , τόσο περισσότερο αποτελεσματικός είναι και ο αντίστοιχος κανόνας. Στις γραφικές παραστάσεις 3.14 και 3.15 όπου οι παραπάνω γενικές μορφές κανόνων συγκρίνονται μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι ο κανόνας m/m υπερέρχει έναντι των άλλων 2, με τον κανόνα $m-1/m$ να ακολουθεί. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και για τα διαγράμματα μέσης τιμής για την Γάμμα κατανομή με $\alpha = 2$.

Πίνακας 3.4: Τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα κατανομή με $\alpha = 2, s = 1$

δ	1/1	3/3	5/5	2/3	4/5	6/7	2/4	4/6	6/8	3/4	4/4	3/5
0	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.1	0.0022	0.0022	0.0022	0.0021	0.0022	0.0022	0.0021	0.0021	0.0021	0.0022	0.0022	0.0021
0.2	0.0027	0.0024	0.0024	0.0024	0.0023	0.0023	0.0024	0.0023	0.0022	0.0024	0.0024	0.0023
0.3	0.0034	0.0032	0.0031	0.0034	0.0033	0.0033	0.0035	0.0034	0.0033	0.0034	0.0032	0.0035
0.4	0.0046	0.0050	0.0049	0.0053	0.0055	0.0056	0.0057	0.0061	0.0062	0.0057	0.0050	0.0060
0.5	0.0061	0.0083	0.0087	0.0086	0.0104	0.0111	0.0091	0.0119	0.0130	0.0101	0.0087	0.0110
0.6	0.0083	0.0141	0.0163	0.0135	0.0198	0.0230	0.0146	0.0230	0.0280	0.0177	0.0158	0.0198
0.7	0.0111	0.0237	0.0306	0.0211	0.0368	0.0471	0.0232	0.0433	0.0582	0.0303	0.0282	0.0347
0.8	0.0145	0.0388	0.0557	0.0323	0.0654	0.0904	0.0359	0.0773	0.1126	0.0506	0.0490	0.0584
0.9	0.0190	0.0616	0.0969	0.0483	0.1101	0.1606	0.0548	0.1312	0.1999	0.0813	0.0816	0.0947
1	0.0247	0.0946	0.1583	0.0713	0.1763	0.2632	0.0812	0.2090	0.3234	0.1257	0.1299	0.1477
1.1	0.0320	0.1402	0.2425	0.1026	0.2652	0.3941	0.1178	0.3125	0.4738	0.1868	0.1965	0.2197
1.2	0.0412	0.2008	0.3472	0.1444	0.3758	0.5443	0.1673	0.4367	0.6343	0.2662	0.2821	0.3115
1.3	0.0527	0.2758	0.4696	0.1976	0.5008	0.6903	0.2296	0.5728	0.7759	0.3624	0.3852	0.4221
1.4	0.0665	0.3649	0.5961	0.2629	0.6304	0.8151	0.3057	0.7054	0.8835	0.4715	0.4984	0.5412
1.5	0.0835	0.4643	0.7157	0.3407	0.7480	0.9045	0.3934	0.8180	0.9495	0.5871	0.6143	0.6610
1.6	0.1042	0.5687	0.8187	0.4291	0.8455	0.9579	0.4919	0.9017	0.9824	0.6992	0.7246	0.7701
1.7	0.1290	0.6716	0.8951	0.5239	0.9164	0.9848	0.5937	0.9539	0.9951	0.7968	0.8185	0.8589
1.8	0.1587	0.7654	0.9466	0.6209	0.9608	0.9956	0.6922	0.9818	0.9990	0.8753	0.8908	0.9227
1.9	0.1932	0.8449	0.9768	0.7139	0.9842	0.9990	0.7825	0.9941	0.9998	0.9315	0.9412	0.9631
2	0.2327	0.9060	0.9917	0.7970	0.9949	0.9998	0.8583	0.9985	1	0.9673	0.9724	0.9849
2.1	0.2776	0.9485	0.9978	0.8664	0.9986	1.0000	0.9153	0.9997	1	0.9863	0.9888	0.9948
2.2	0.3279	0.9756	0.9996	0.9193	0.9997	1.0000	0.9548	1	1	0.9952	0.9965	0.9986
2.3	0.3838	0.9897	1	0.9558	1	1.0000	0.9784	1	1	0.9986	0.9992	0.9997
2.4	0.4439	0.9963	1	0.9785	1	1.0000	0.9911	1	1	0.9997	0.9999	1
2.5	0.5072	0.9991	1	0.9908	1	1.0000	0.9969	1	1	0.9999	1	1
2.6	0.5733	0.9999	1	0.9967	1	1.0000	0.9991	1	1	1	1	1
2.7	0.6390	1	1	0.9990	1	1.0000	0.9998	1	1	1	1	1
2.8	0.7031	1	1	0.9998	1	1.0000	1	1	1	1	1	1
2.9	0.7642	1	1	1	1	1.0000	1	1	1	1	1	1
3	0.8196	1	1	1	1	1.0000	1	1	1	1	1	1

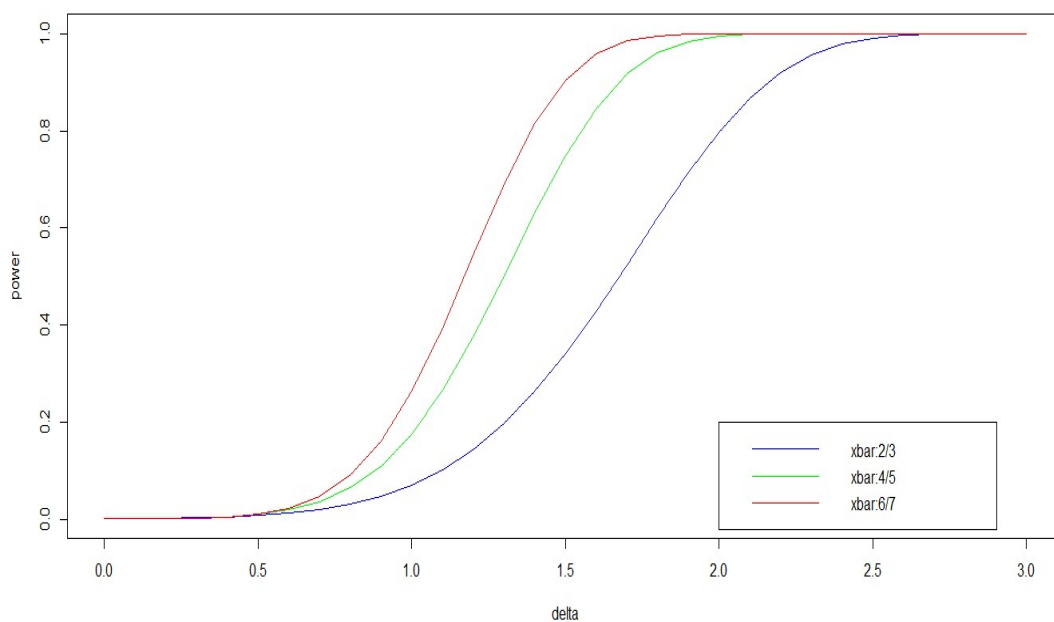
Γράφημα 3.16: Σύγκριση κανόνων 1/1, 3/3 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή με $\alpha = 2$, $s = 1$

Ο κανόνας 5/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για αλλαγές μεγαλύτερες από $\delta = 0.4$, με τους κανόνες 3/3 και 1/1 να ακολουθούν.



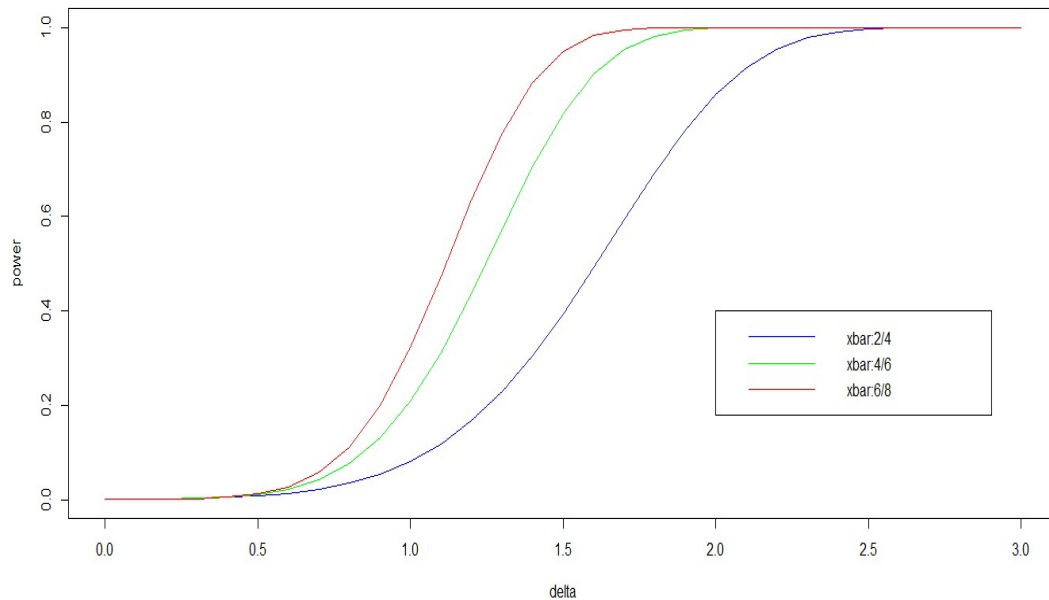
Γράφημα 3.17: Σύγκριση κανόνων 2/3, 4/5 και 6/7 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή με $\alpha = 2$, $s = 1$

Ο κανόνας 6/7 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για αλλαγές μεγαλύτερες από $\delta = 0.3$ με τους κανόνες 4/5 και 2/3 να ακολουθούν. Ο κανόνας 6/7 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 2.1$, ο 4/5 για $\delta = 2.3$ ενώ ο 2/3 για $\delta = 2.9$.



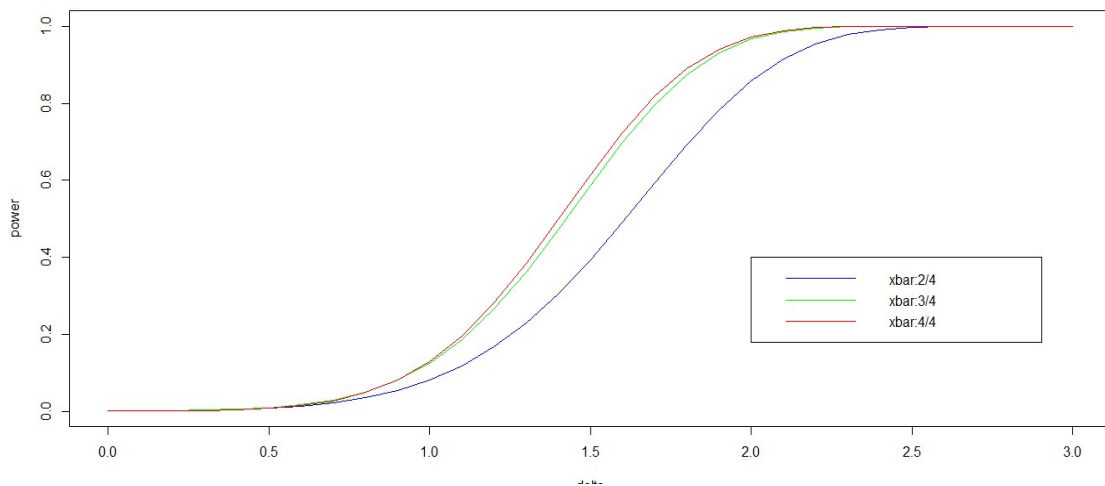
Γράφημα 3.18: Σύγκριση κανόνων 2/4, 4/6 και 6/8 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή $\alpha = 2, s = 1$

Ο κανόνας 6/8 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 0.3$, με τους κανόνα 4/6 και 2/4 να ακολουθούν. Ο κανόνας 6/8 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 2$, ο 4/6 για $\delta = 2.2$ ενώ ο 2/4 για $\delta = 2.8$.



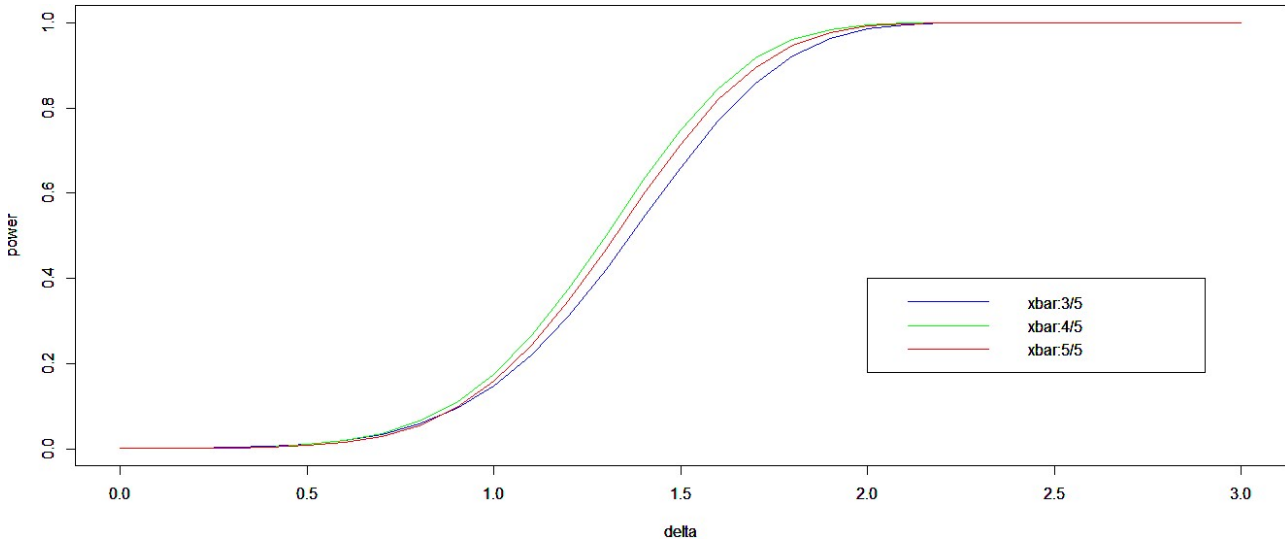
Γράφημα 3.19: Σύγκριση κανόνων 2/4, 3/4 και 4/4 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή $\alpha = 2, s = 1$

Ο κανόνας 3/4 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για μεταβολές από $\delta = 0.3$ μέχρι $\delta = 0.8$, ενώ ο κανόνας 4/4 έχει μεγαλύτερη ισχύ για μεγαλύτερες αλλαγές. Ο κανόνας 4/4 φτάνει να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 2.5$, ο 3/4 για $\delta = 2.6$ ενώ ο 2/4 για $\delta = 2.8$.



Γράφημα 3.20: Σύγκριση κανόνων 3/5, 4/5 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα μέσης τιμής για την Γάμμα Κατανομή με παραμέτρους $\alpha = 2, s = 1$

Ο κανόνας 4/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 0.6$. Οι κανόνες ροών 5/5 και 4/5 φτάνουν να έχει ισχύ ίση με 1 για $\delta = 2.3$, ενώ ο 3/5 για $\delta = 2.4$



Παρατηρούμε στα γραφήματα 3.16, 3.17, 3.18 όπου εξετάζονται αντίστοιχα οι γενικές μορφές των κανόνων m/m , $m-1/m$ και $m-2/m$, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός m , τόσο περισσότερο αποτελεσματικός είναι και ο αντίστοιχος κανόνας. Στην γραφική παράσταση 3.19 παρατηρούμε ότι ο κανόνας 4/4 είναι εκείνος που υπερτερεί των άλλων κανόνων για μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 0.8$ και στην γραφική παράσταση 3.20 ο κανόνας 4/5 είναι εκείνος που υπερτερεί των άλλων κανόνων για μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 0.6$.

3.6 Διαγράμματα εύρους για την κατανομή χ^2

Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε του διάγραμμα εύρους της κατανομής χ^2 η οποία έχει σαν βασική παράμετρο τους βαθμούς ελευθερίας k . Εδώ επιλέγουμε $k = 10$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής χ^2 με k βαθμούς ελευθερίας δίνεται από τον τύπο

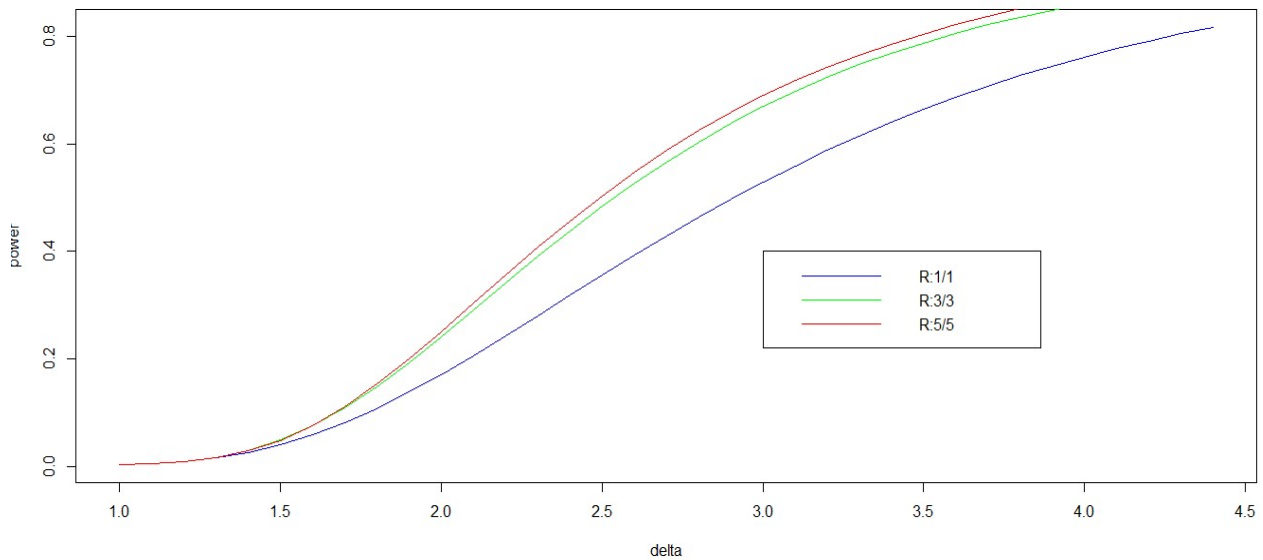
$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Πίνακας 3.5: Τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα εύρους της κατανομής χ^2 (df=10)

δ	1/1	3/3	5/5	2/3	4/5	6/7	2/4	4/6	6/8	3/4	4/4	3/5
1	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
1.1	0.0045	0.0044	0.0042	0.0049	0.0048	0.0048	0.0050	0.0051	0.0051	0.0048	0.0043	0.0051
1.2	0.0083	0.0083	0.0079	0.0104	0.0103	0.0101	0.0113	0.0118	0.0119	0.0104	0.0082	0.0119
1.3	0.0151	0.0160	0.0154	0.0213	0.0221	0.0219	0.0249	0.0274	0.0276	0.0222	0.0158	0.0274
1.4	0.0255	0.0290	0.0282	0.0404	0.0440	0.0435	0.0499	0.0577	0.0592	0.0435	0.0288	0.0565
1.5	0.0399	0.0486	0.0481	0.0697	0.0791	0.0788	0.0888	0.1068	0.1109	0.0771	0.0486	0.1028
1.6	0.0584	0.0754	0.0757	0.1103	0.1285	0.1299	0.1425	0.1752	0.1843	0.1237	0.0759	0.1672
1.7	0.0813	0.1088	0.1106	0.1608	0.1903	0.1937	0.2092	0.2598	0.2741	0.1819	0.1107	0.2466
1.8	0.1077	0.1484	0.1527	0.2192	0.2611	0.2684	0.2859	0.3546	0.3736	0.2500	0.1518	0.3358
1.9	0.1379	0.1931	0.2000	0.2839	0.3374	0.3482	0.3686	0.4523	0.4743	0.3233	0.1983	0.4296
2	0.1710	0.2412	0.2505	0.3520	0.4157	0.4292	0.4515	0.5450	0.5701	0.3980	0.2477	0.5201
2.1	0.2059	0.2905	0.3035	0.4197	0.4920	0.5066	0.5311	0.6300	0.6569	0.4706	0.2991	0.6040
2.2	0.2423	0.3414	0.3561	0.4859	0.5621	0.5810	0.6058	0.7040	0.7304	0.5398	0.3503	0.6791
2.3	0.2801	0.3910	0.4074	0.5494	0.6273	0.6470	0.6728	0.7660	0.7911	0.6041	0.4009	0.7426
2.4	0.3182	0.4380	0.4569	0.6076	0.6843	0.7052	0.7315	0.8173	0.8394	0.6618	0.4495	0.7960
2.5	0.3560	0.4838	0.5033	0.6603	0.7344	0.7554	0.7819	0.8582	0.8773	0.7121	0.4954	0.8402
2.6	0.3928	0.5268	0.5466	0.7073	0.7772	0.7967	0.8243	0.8909	0.9064	0.7561	0.5380	0.8752
2.7	0.4286	0.5663	0.5876	0.7491	0.8133	0.8314	0.8593	0.9161	0.9291	0.7940	0.5785	0.9033
2.8	0.4630	0.6036	0.6254	0.7855	0.8440	0.8604	0.8881	0.9363	0.9465	0.8270	0.6155	0.9248
2.9	0.4967	0.6384	0.6593	0.8173	0.8703	0.8850	0.9110	0.9513	0.9600	0.8550	0.6499	0.9418
3	0.5285	0.6695	0.6899	0.8443	0.8920	0.9049	0.9293	0.9629	0.9700	0.8783	0.6811	0.9551
3.1	0.5588	0.6980	0.7178	0.8674	0.9100	0.9213	0.9440	0.9716	0.9775	0.8979	0.7092	0.9653
3.2	0.5877	0.7240	0.7429	0.8870	0.9247	0.9350	0.9558	0.9783	0.9831	0.9142	0.7345	0.9731
3.3	0.6150	0.7473	0.7658	0.9037	0.9372	0.9462	0.9651	0.9836	0.9873	0.9281	0.7574	0.9793
3.4	0.6409	0.7690	0.7861	0.9179	0.9472	0.9555	0.9725	0.9875	0.9904	0.9395	0.7790	0.9839
3.5	0.6649	0.7881	0.8048	0.9300	0.9559	0.9628	0.9783	0.9904	0.9927	0.9492	0.7977	0.9875
3.6	0.6872	0.8057	0.8223	0.9405	0.9628	0.9690	0.9828	0.9926	0.9945	0.9572	0.8153	0.9903
3.7	0.7079	0.8216	0.8379	0.9493	0.9687	0.9741	0.9864	0.9943	0.9958	0.9637	0.8310	0.9924
3.8	0.7269	0.8357	0.8515	0.9567	0.9736	0.9784	0.9891	0.9956	0.9968	0.9694	0.8449	0.9941
3.9	0.7446	0.8494	0.8640	0.9629	0.9777	0.9818	0.9914	0.9965	0.9975	0.9741	0.8574	0.9953
4	0.7617	0.8616	0.8749	0.9682	0.9812	0.9845	0.9931	0.9973	0.9981	0.9780	0.8689	0.9963
4.1	0.7770	0.8726	0.8852	0.9728	0.9841	0.9870	0.9945	0.9979	0.9985	0.9813	0.8796	0.9971
4.2	0.7917	0.8827	0.8940	0.9766	0.9865	0.9890	0.9957	0.9984	0.9988	0.9841	0.8892	0.9977
4.3	0.8052	0.8918	0.9026	0.9799	0.9885	0.9907	0.9965	0.9987	0.9991	0.9863	0.8977	0.9982
4.4	0.8174	0.9002	0.9104	0.9828	0.9902	0.9921	0.9972	0.9990	0.9993	0.9883	0.9058	0.9985

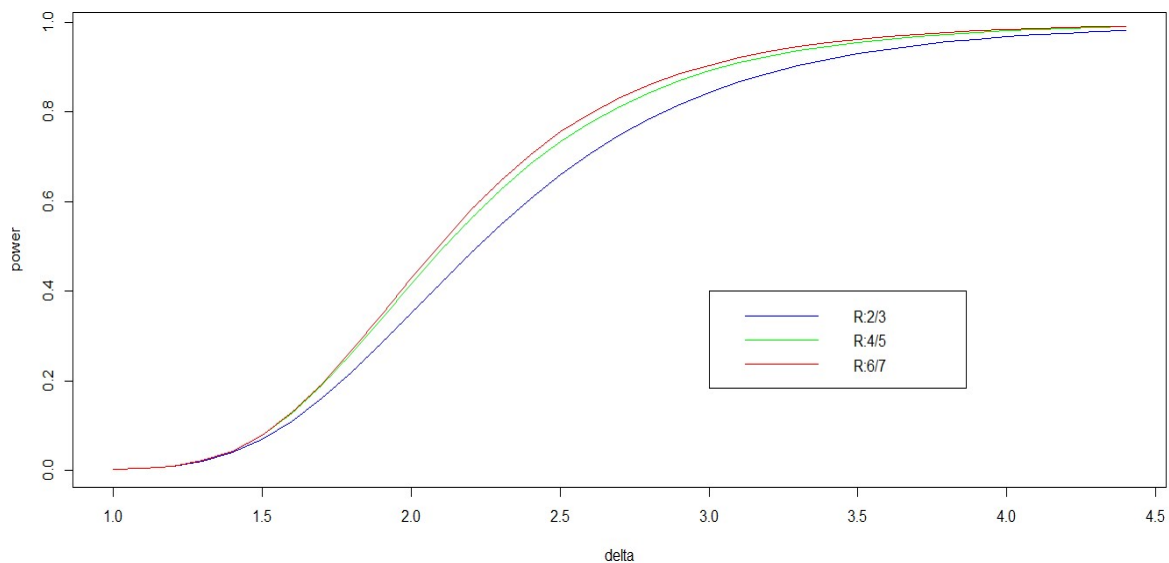
Γράφημα 3.21: Σύγκριση κανόνων 1/1, 3/3 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα εύρους για την κατανομή χ^2 με 10 βαθμούς ελευθερίας

Ο κανόνας 5/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 1.5$, με τους κανόνες 3/3 και 1/1 να ακολουθούν. Για αλλαγές από $\delta = 1.3$ μέχρι $\delta = 1.5$ ο κανόνας 3/3 είναι αυτός που υπερτερεί.



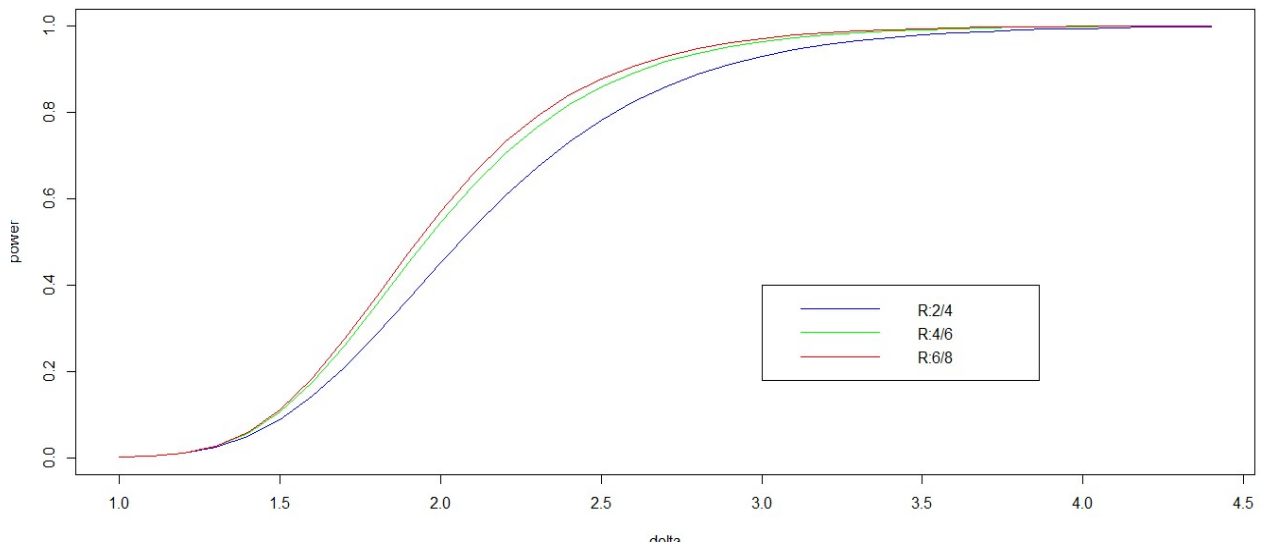
Γράφημα 3.22: Σύγκριση κανόνων 2/3, 4/5 και 6/7 για το δίπλευρο διάγραμμα εύρους για την κατανομή χ^2 με 10 βαθμούς ελευθερίας

Ο κανόνας 6/7 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 1.5$, με τους κανόνες 4/5 και 2/3 να ακολουθούν. Για αλλαγές από $\delta = 1.3$ μέχρι $\delta = 1.5$ ο κανόνας 4/5 είναι αυτός που υπερτερεί.



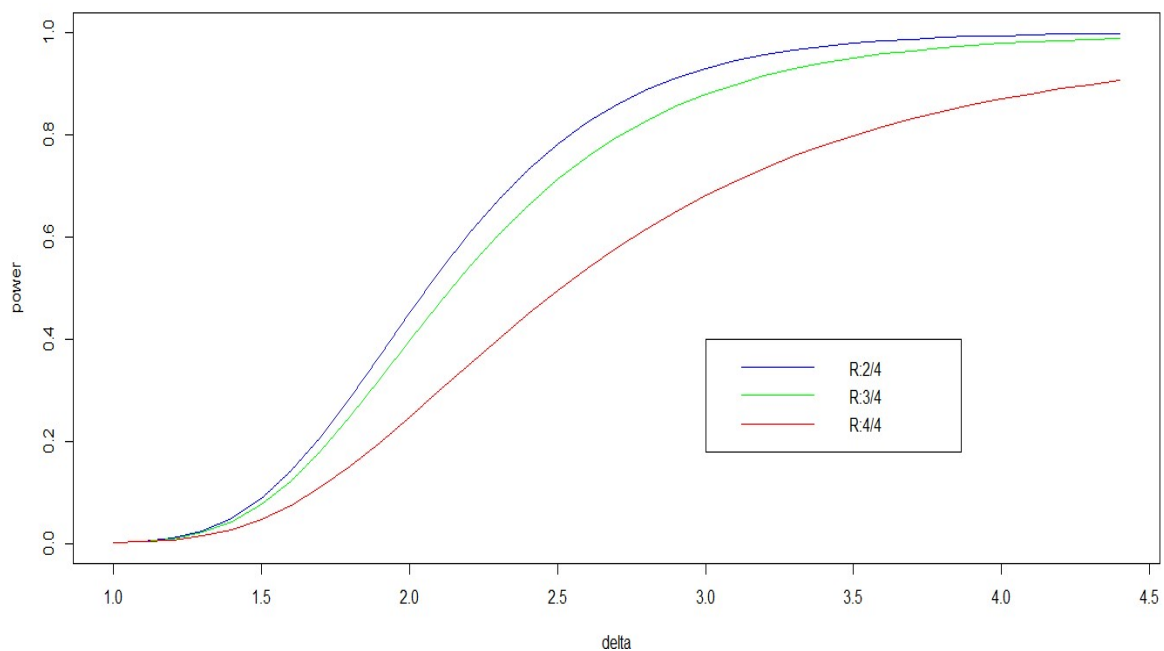
Γράφημα 3.23: Σύγκριση κανόνων 2/4, 4/6 και 6/8 για το δίπλευρο διάγραμμα εύρους για την κατανομή χ^2 με 10 βαθμούς ελευθερίας

Ο κανόνας 6/8 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για όλες τις μεταβολές μεγαλύτερες από $\delta = 1.1$ με τους κανόνες 4/6 και 2/4 να ακολουθούν.



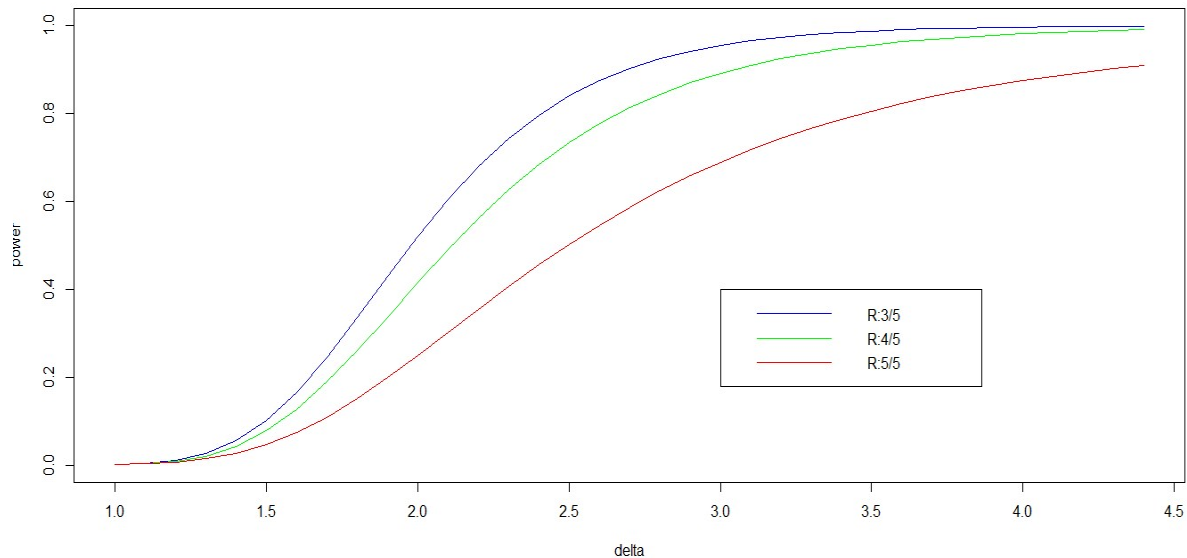
Γράφημα 3.24: Σύγκριση κανόνων 2/4, 3/4 και 4/4 για το δίπλευρο διάγραμμα εύρους για την κατανομή χ^2 με 10 βαθμούς ελευθερίας

Ο κανόνας 2/4 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων, για όλες τις μεταβολές με τους κανόνες 3/4 και 4/4 να ακολουθούν.



Γράφημα 3.25: Σύγκριση κανόνων 3/5,4/5, και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα εύρους για την κατανομή χ^2 με 10 βαθμούς ελευθερίας

Ο κανόνας 3/5 είναι αποτελεσματικότερος των άλλων 2 κανόνων για όλες τις μεταβολές στην τυπική απόκλιση, με τους κανόνες 4/5 και 5/5 να ακολουθούν.



Παρατηρούμε στα γραφήματα 3.21, 3.22, 3.23 όπου εξετάζονται αντίστοιχα οι γενικές μορφές των κανόνων m/m , $m-1/m$ και $m-2/m$, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός m , τόσο περισσότερο αποτελεσματικός είναι και ο αντίστοιχος κανόνας. Στις γραφικές παραστάσεις 3.24 και 3.25 όπου οι παραπάνω γενικές μορφές κανόνων συγκρίνονται μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι ο κανόνας $m-2/m$ υπερέρχει σημαντικά έναντι των άλλων 2, με τους κανόνες $m-1/m$ και m/m να υπολείπονται σημαντικά.

3.7 Διαγράμματα τυπικής απόκλισης για τη λογιστική κατανομή

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε την το διάγραμμα τυπικής απόκλισης της λογιστικής κατανομής με παράμετρο θέσης (location) $l = 5$ και κλίμακας (scale) $s = 2$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογιστικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

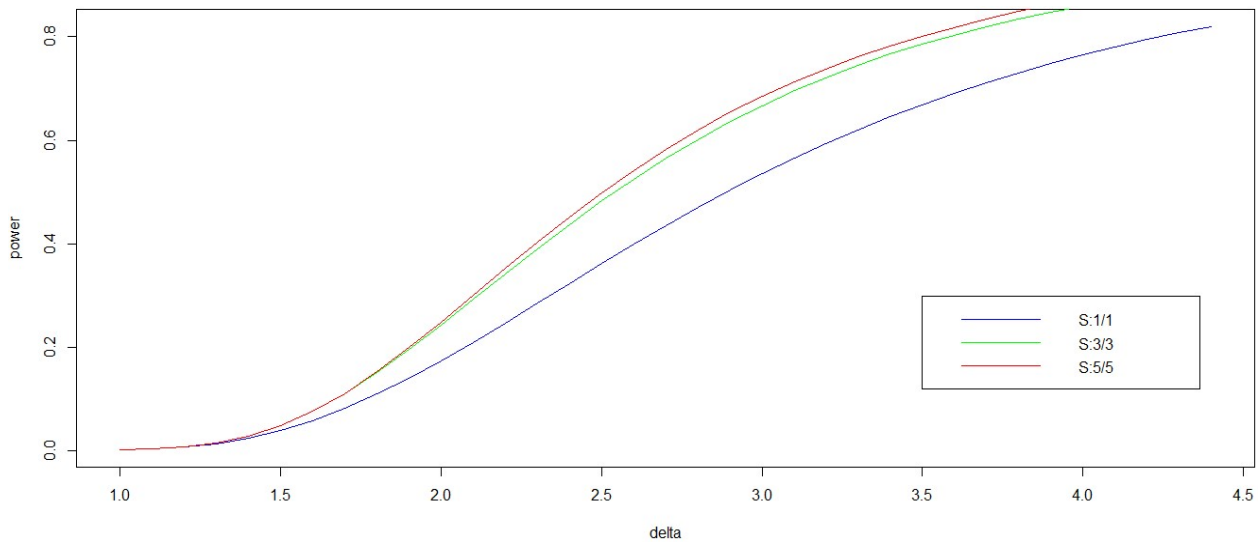
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-l}{s}}}{s \left(1 + e^{-\frac{x-l}{s}}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Πίνακας 3.6: Τιμές της ισχύος για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης της λογιστικής κατανομής με $l = 5$ και $s = 2$

δ	1/1	3/3	5/5	2/3	4/5	6/7	2/4	4/6	6/8	3/4	4/4	3/5
1	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
1.1	0.0043	0.0044	0.0043	0.0050	0.0048	0.0047	0.0050	0.0052	0.0052	0.0048	0.0043	0.0051
1.2	0.0082	0.0084	0.0082	0.0107	0.0105	0.0103	0.0117	0.0122	0.0121	0.0106	0.0083	0.0122
1.3	0.0149	0.0163	0.0158	0.0224	0.0228	0.0221	0.0260	0.0285	0.0286	0.0227	0.0162	0.0282
1.4	0.0254	0.0296	0.0288	0.0428	0.0453	0.0448	0.0522	0.0597	0.0603	0.0444	0.0294	0.0579
1.5	0.0400	0.0497	0.0489	0.0736	0.0809	0.0812	0.0920	0.1103	0.1128	0.0788	0.0497	0.1047
1.6	0.0592	0.0769	0.0767	0.1156	0.1309	0.1322	0.1466	0.1801	0.1864	0.1258	0.0775	0.1698
1.7	0.0828	0.1111	0.1113	0.1684	0.1929	0.1962	0.2155	0.2653	0.2768	0.1854	0.1128	0.2498
1.8	0.1100	0.1514	0.1530	0.2288	0.2650	0.2697	0.2940	0.3592	0.3770	0.2526	0.1541	0.3401
1.9	0.1407	0.1966	0.1995	0.2954	0.3417	0.3498	0.3768	0.4561	0.4791	0.3255	0.2005	0.4325
2	0.1743	0.2439	0.2491	0.3640	0.4187	0.4292	0.4602	0.5486	0.5734	0.4004	0.2503	0.5218
2.1	0.2100	0.2931	0.3010	0.4326	0.4945	0.5067	0.5400	0.6330	0.6578	0.4732	0.3019	0.6048
2.2	0.2474	0.3429	0.3530	0.4990	0.5654	0.5797	0.6147	0.7058	0.7312	0.5429	0.3526	0.6789
2.3	0.2857	0.3909	0.4041	0.5612	0.6286	0.6440	0.6812	0.7680	0.7906	0.6072	0.4029	0.7421
2.4	0.3241	0.4380	0.4526	0.6179	0.6849	0.7011	0.7389	0.8191	0.8393	0.6638	0.4512	0.7955
2.5	0.3624	0.4833	0.4991	0.6699	0.7352	0.7502	0.7880	0.8595	0.8781	0.7139	0.4962	0.8385
2.6	0.3995	0.5256	0.5425	0.7161	0.7775	0.7922	0.8292	0.8918	0.9076	0.7578	0.5387	0.8736
2.7	0.4359	0.5654	0.5826	0.7565	0.8141	0.8277	0.8634	0.9175	0.9302	0.7956	0.5783	0.9015
2.8	0.4708	0.6021	0.6200	0.7916	0.8454	0.8574	0.8908	0.9369	0.9475	0.8274	0.6151	0.9239
2.9	0.5036	0.6360	0.6547	0.8219	0.8715	0.8818	0.9133	0.9518	0.9605	0.8548	0.6497	0.9412
3	0.5356	0.6673	0.6855	0.8484	0.8927	0.9021	0.9312	0.9632	0.9703	0.8779	0.6808	0.9544
3.1	0.5656	0.6957	0.7128	0.8709	0.9105	0.9189	0.9456	0.9719	0.9776	0.8975	0.7093	0.9648
3.2	0.5939	0.7214	0.7382	0.8901	0.9250	0.9325	0.9570	0.9786	0.9831	0.9137	0.7347	0.9727
3.3	0.6204	0.7449	0.7614	0.9063	0.9378	0.9438	0.9660	0.9836	0.9873	0.9274	0.7575	0.9789
3.4	0.6452	0.7665	0.7822	0.9202	0.9481	0.9532	0.9730	0.9875	0.9905	0.9388	0.7788	0.9837
3.5	0.6688	0.7855	0.8015	0.9317	0.9567	0.9610	0.9786	0.9904	0.9928	0.9484	0.7974	0.9874
3.6	0.6910	0.8034	0.8181	0.9419	0.9638	0.9673	0.9831	0.9926	0.9945	0.9562	0.8147	0.9902
3.7	0.7112	0.8195	0.8338	0.9504	0.9694	0.9728	0.9865	0.9943	0.9958	0.9630	0.8304	0.9924
3.8	0.7304	0.8340	0.8484	0.9576	0.9744	0.9771	0.9893	0.9956	0.9968	0.9689	0.8441	0.9940
3.9	0.7481	0.8472	0.8619	0.9638	0.9783	0.9807	0.9915	0.9965	0.9975	0.9737	0.8570	0.9953
4	0.7649	0.8590	0.8731	0.9689	0.9816	0.9838	0.9932	0.9973	0.9981	0.9776	0.8690	0.9963
4.1	0.7803	0.8697	0.8835	0.9733	0.9844	0.9863	0.9946	0.9979	0.9985	0.9809	0.8797	0.9971
4.2	0.7944	0.8798	0.8927	0.9770	0.9868	0.9885	0.9957	0.9983	0.9988	0.9838	0.8887	0.9977
4.3	0.8076	0.8892	0.9008	0.9802	0.9887	0.9902	0.9965	0.9987	0.9991	0.9860	0.8977	0.9982
4.4	0.8199	0.8975	0.9087	0.9830	0.9904	0.9917	0.9972	0.9990	0.9993	0.9880	0.9056	0.9985

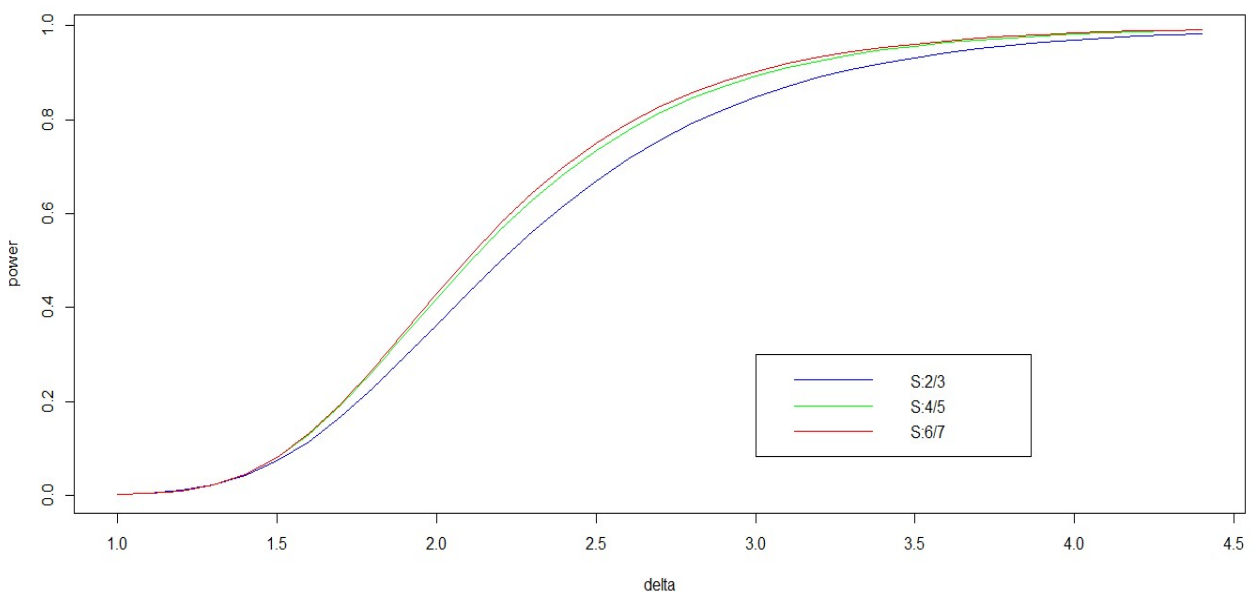
Γράφημα 3.26: Σύγκριση κανόνων 1/1, 3/3 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης για την λογιστική κατανομή

Παρατηρούμε ότι για αλλαγές στην τυπική απόκλιση μεγαλύτερες από $\delta = 1.7$, ο κανόνας 5/5 είναι αυτός που έχει τις καλύτερες επιδόσεις στην ισχύ, με τον κανόνα 3/3 να είναι αυτός που ακολουθεί με παραπλήσιες τιμές, ενώ ο κανόνας 1/1 να υπολείπεται αρκετά των άλλων 2 κανόνων. Για αλλαγές μεταξύ $\delta = 1.3$ και $\delta = 1.7$ φαίνεται ότι ο κανόνας 3/3 είναι αυτός που υπερिशχεί.



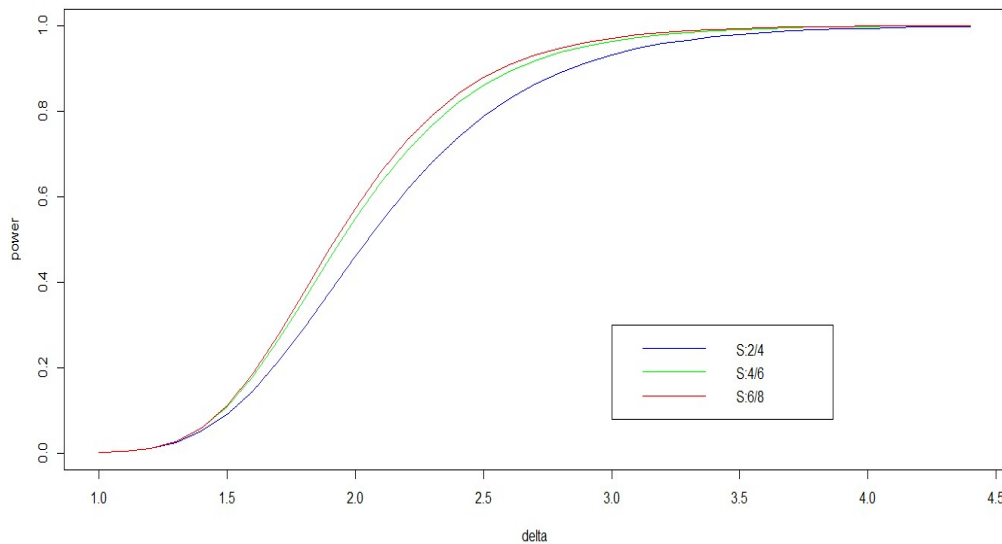
Γράφημα 3.27: Σύγκριση κανόνων 2/3, 4/5 και 6/7 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης για την λογιστική κατανομή

Παρατηρούμε ότι για μεγέθη αλλαγών μεγαλύτερα από $\delta = 1.5$ ο κανόνας 6/7 είναι αυτός που έχει την μεγαλύτερη ισχύ, με τους άλλους 2 κανόνες να έχουν παραπλήσιες τιμές, ιδιαίτερα ο 4/5.



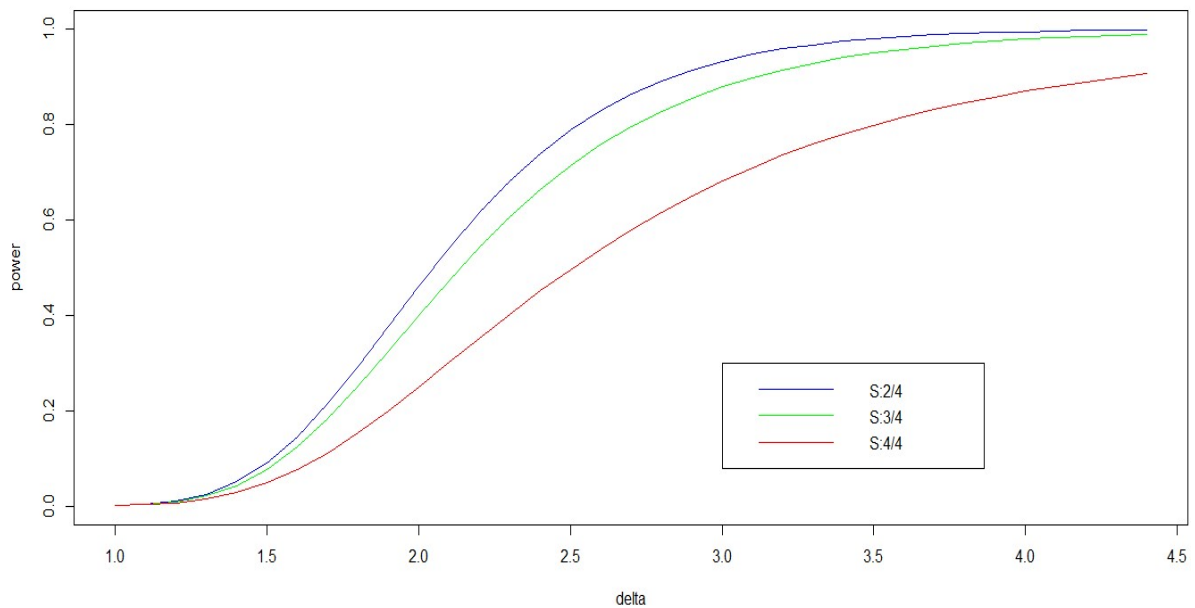
Γράφημα 3.28: Σύγκριση κανόνων 2/4, 4/6 και 6/8 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης για την λογιστική κατανομή

Παρατηρούμε ότι για μεγέθη αλλαγών μεγαλύτερα από $\delta = 1.3$ ο κανόνας 6/7 είναι αυτός που έχει την μεγαλύτερη ισχύ, με τους κανόνες ο 4/6 και 2/4 να ακολουθούν.



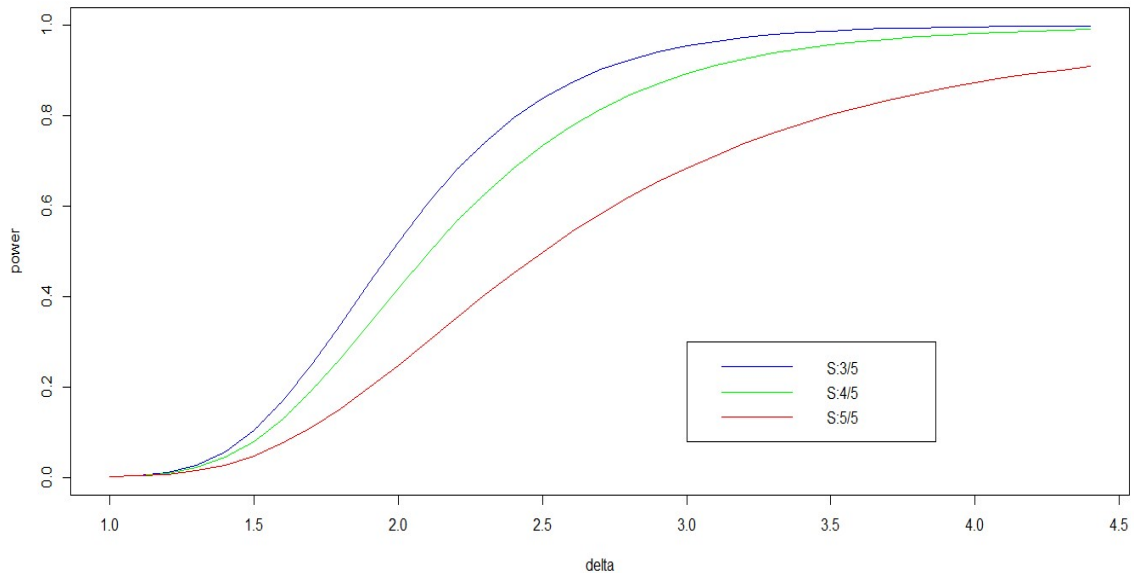
Γράφημα 3.29: Σύγκριση κανόνων 2/4, 3/4 και 4/4 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης για την λογιστική κατανομή

Παρατηρούμε ότι ο κανόνας 2/4 υπερτερεί των άλλων κανόνων για όλες τις πιθανές μεταβολές, με τους κανόνες 3/4 και 4/4 να ακολουθούν.



Γράφημα 3.30: Σύγκριση κανόνων 3/5, 4/5 και 5/5 για το δίπλευρο διάγραμμα τυπικής απόκλισης για την λογιστική κατανομή

Παρατηρούμε ότι ο κανόνας 3/5 υπερτερεί των άλλων κανόνων για όλες τις πιθανές μεταβολές, με τους κανόνες 4/5 και 5/5 να ακολουθούν.



Παρατηρούμε στα γραφήματα 3.26, 3.27 και 3.28 όπου εξετάζονται αντίστοιχα οι γενικές μορφές των κανόνων m/m , $m-1/m$ και $m-2/m$, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός m , τόσο περισσότερο αποτελεσματικός είναι και ο αντίστοιχος κανόνας. Στις γραφικές παραστάσεις 3.28 και 3.29 όπου οι παραπάνω γενικές μορφές κανόνων συγκρίνονται μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι ο κανόνας $m-2/m$ υπερέχει σημαντικά έναντι των άλλων 2, με τους κανόνες $m-1/m$ και m/m να υπολείπονται σημαντικά.

3.8 Συμπεράσματα

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα προκύπτει ότι γενικά όσο μεγαλύτερο είναι το “ m ”, τόσο αποτελεσματικότερος είναι ο κανόνας r/m ενώ για συγκεκριμένο “ m ” ο κανόνας r/m τείνει να έχει καλύτερη απόδοση όταν το “ r ” επιλέγεται να είναι ίσο με “ $m-2$ ” με τις περιπτώσεις $r = m - 1$ και $r = m$ να ακολουθούν. Εξάιρεση στο παραπάνω συμπέρασμα δείχνει να αποτελεί το διάγραμμα μέσης τιμής της κατανομή Γάμμα, στο οποίο η γενική μορφή του κανόνα m/m δείχνει να υπερτερεί έναντι των κανόνων, $m-1/m$ και $m-2/m$ αντίστοιχα.

Ο υπολογιστικός κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται πως είναι αρκετά λειτουργικός καθώς μπορεί να δώσει τα ζητούμενα αποτελέσματα για τον υπολογισμό της ισχύος καθώς και των ορίων ελέγχου για τα ζητούμενα ποιοτικά χαρακτηριστικά για όλα τα είδη διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνται συνήθως όπως της μέσης τιμής, του εύρους, της τυπικής απόκλισης και της διασποράς καθώς και για μια πληθώρα κατανομών όπως η κανονική, η t , η Γάμμα, η χ^2 , η Weibull, η Λογιστική, η Λογαριθμοκανονική, κ.α. . Επίσης μπορούμε να παρουσιάσουμε αποτελέσματα για οποιαδήποτε πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού και για κάθε ποσό μεταβολής στο ζητούμενο ποιοτικό χαρακτηριστικό.

Ο κώδικας με τις κατάλληλες τροποποιήσεις θα μπορούσε να επεκταθεί και σε άλλων ειδών διαγράμματα όπως το EWMA και το CUSUM , καθώς επίσης και να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη του μέσου μήκους ροών (ARL).

3.9 Κώδικες για τον υπολογισμό της ισχύος

- Κώδικας για τον Πίνακα 3.1 (dist=Normal, chart=xbar, side=Two Sided)

```
#### PART I #####
r=1
m=1
alpha=0.0027

#### Συνάρτηση onepoint
onepoint=function(alpha, r, m)
{
a=c(1:100000)/100000
if (m-r==0)
{
return(alpha^(1/r))
}
if (m-r==1)
{
return(a[(m*(a^r))*(1-a)+(a^m)]-alpha)>0
+ & (m*(a^r))*(1-a)+(a^m)]-alpha)<=0.0001])
}
```

```

}
if(m-r==2)
{
q=NULL
q=factorial(m)/(factorial(r)*factorial(m-r))
return(a[(q*(a^(r))*((1-a)^(m-r))+m*(a^(r+1))*(1-a)+(a^(m))-alpha)>0
+ & (q*(a^(r))*((1-a)^(m-r))+
m*(a^(r+1))*(1-a)+(a^(m))-alpha)<=0.0001])
}
}
ff=onepoint(alpha,r,m)
p=ff[1]

#### PART II #####
simu=500000
n=5
mean=0
sd=1
#### Probability Limits
ucl=mean+(qnorm(1-(p/2))*sd)/sqrt(n)
lcl=mean+(qnorm(p/2)*sd)/sqrt(n)

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(0,3,0.1)
pro <- c()
for(j in 1:length(delta)) {
c1=0
for(i in 1:simu) {
sum1=0
for(i in 1:m) {
gen=mean(rnorm(n,mean+delta[j]*sd,sd))
if(gen>ucl | gen<lcl) {
sum1=sum1+1
}
}
if(sum1>=r) {
c1=c1+1
}
}
pro[j]=round(c1/simu,4)
}

#### Results
mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat

```

- **Κώδικας για τον Πίνακα 3.2 (dist=Normal, chart=S, side=Two Sided)**

Το Μέρος I (Part I) του κώδικα είναι ίδιο με αυτό της Παραγράφου 3.4.1. Το Μέρος II (Part II) είναι το ακόλουθο:

```

#### PART II #####
simu=500000
n=5
mean=0
sd=1
#### Probability Limits

```

```

ucl=(sqrt(qchisq(1-(p/2),n-1)/(n-1)))*sd
lcl=(sqrt(qchisq(p/2,n-1)/(n-1)))*sd

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(1,4.4,0.1)
pro <- c()
for (j in 1:length(delta)) {
  c1=0
  for(i in 1:simu) {
    sum1=0
    for(i in 1:m) {
      gen=sd(rnorm(n,mean,delta[j]*sd))
      if(gen>ucl | gen<lcl) {
        sum1=sum1+1
      }
    }
    if(sum1>=r) {
      c1=c1+1
    }
  }
  pro[j]=round(c1/simu,4)
}

#### Results
mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat

```

- **Κώδικας για (dist=Normal, chart=S2, side=Two Sided)**

Το Μέρος I (Part I) του κώδικα είναι ίδιο με αυτό της Παραγράφου 3.4.1. Το Μέρος II (Part II) είναι το ακόλουθο:

```

#### PART II #####
simu=500000
n=5
mean=0
sd=1
#### Probability Limits
ucl=(sqrt(qchisq(1-(p/2),n-1)/(n-1)))*sd^2
lcl=(sqrt(qchisq(p/2,n-1)/(n-1)))*sd^2

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(1,4.4,0.1)
pro <- c()
for (j in 1:length(delta)) {
  c1=0
  for(i in 1:simu) {
    sum1=0
    for(i in 1:m) {
      gen=var(rnorm(n,mean,delta[j]*sd))
      if(gen>ucl | gen<lcl) {
        sum1=sum1+1
      }
    }
    if(sum1>=r) {
      c1=c1+1
    }
  }
  pro[j]=round(c1/simu,4)
}

```



```

}
pro[j]=round(c1/simu,4)
}

#### Results
mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat

```

- **Κώδικας για (dist=Normal, chart=R, side=Two Sided)**

Το Μέρος I (Part I) του κώδικα είναι ίδιο με αυτό της Παραγράφου 3.4.1. Το Μέρος II (Part II) είναι το ακόλουθο:

```

#### PART II #####
simu=500000
n=5
mean=0
sd=1
#### Probability Limits via simulation
range <- c()
for(i in 1:500000) {
a=rnorm(n,mean,sd)
range[i]=max(a)-min(a)
}
ucl=quantile(range,1-(p/2))
lcl=quantile(range,(p/2))

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(1,4.4,0.1)
pro <- c()
for(j in 1:length(delta)) {
c1=0
for(i in 1:simu) {
sum1=0
for(i in 1:m) {
a=rnorm(n,mean,sd*delta[j])
gen=max(a)-min(a)
if(gen>ucl | gen<lcl) {
sum1=sum1+1
}
}
if(sum1>=r) {
c1=c1+1
}
}
pro[j]=round(c1/simu,4)
}

#### Results
mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat

```

- **Κώδικας για τον Πίνακα 3.3 (dist=Gamma, chart=xbar, side=Two Sided)**

Το Μέρος I (Part I) του κώδικα είναι ίδιο με αυτό της Παραγράφου 3.4.1. Το Μέρος II (Part II) είναι το ακόλουθο:

```
#### PART II #####
simu=500000
n=5
sh=2
sc=1
#### Probability Limits via simulation
a=c()
for(i in 1:simu) {
a[i]=mean(rgamma(n,shape=sh,scale=sc))
}
ucl=quantile(a,1-(p/2))
lcl=quantile(a,p/2)

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(0,3,0.1)
pro <- c()
op <- c()
for (j in 1:length(delta)) {
op[j]=sum(a>(ucl-delta[j])|a<(lcl-delta[j]))/simu
if(m-r==0)
{
pro[j]=round(op[j]^m,4)
}
if(m-r==1)
{
pro[j]=round(m*(op[j]^(r))*(1-op[j])+(op[j]^(m)),4)
}
if(m-r==2)
{
q=factorial(m)/(factorial(r)*factorial(m-r))
pro[j]=round(q*(op[j]^(r))*((1-op[j])^(m-r))
+ m*(op[j]^(r+1))*(1-op[j])+(op[j]^(m)),4)
}
}

#### Results
mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat
```

- **Κώδικας για τον Πίνακα 3.5 (dist=ChiSquared, chart=R, side=Two Sided)**

Το Μέρος I (Part I) του κώδικα είναι ίδιο με αυτό της Παραγράφου 3.4.1. Το Μέρος II (Part II) είναι το ακόλουθο:

```
#### PART II #####
simu=500000
n=5
df=10
#### Probability Limits via simulation
a=c()
for(i in 1:simu) {
```

```

g <- rchisq(n, df)
a[i]=max(g)-min(g)
}
ucl=quantile(a,1-(p/2))
lcl=quantile(a,p/2)

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(1,4.4,0.1)
pro <- c()
op <- c()
for (j in 1:length(delta)) {
op[j]=sum(a>(ucl-delta[j])|a<(lcl-delta[j]))/simu
if(m-r==0)
{
pro[j]=round(op[j]^m,4)
}
if(m-r==1)
{
pro[j]=round(m*(op[j]^r)*(1-op[j])+(op[j]^m),4)
}
if(m-r==2)
{
q=factorial(m)/(factorial(r)*factorial(m-r))
pro[j]=round(q*(op[j]^r)*((1-op[j])^(m-r))
+ m*(op[j]^(r+1))*(1-op[j])+(op[j]^m),4)
}
}

#### Results
mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat

```

- **Κώδικας για τον Πίνακα 3.6 (dist=Logistic, chart=S, side=Two Sided)**

Το Μέρος I (Part I) του κώδικα είναι ίδιο με αυτό της Παραγράφου 3.4.1. Το Μέρος II (Part II) είναι το ακόλουθο:

```

#### PART II #####
simu=500000
n=5
loc=5
sc=2
#### Probability Limits via simulation
a=c()
for(i in 1:simu) {
a[i]=sd(rlogis(n, location=loc,scale=sc))
}
ucl=quantile(a,1-(p/2))
lcl=quantile(a,p/2)

#### Power Computation via simulation
delta <- seq(1,4.4,0.1)
pro <- c()
op <- c()
for (j in 1:length(delta)) {
op[j]=sum(a>(ucl-delta[j])|a<(lcl-delta[j]))/simu
if(m-r==0)

```

```

{
pro[j]=round(op[j]^m,4)
}
if(m-r==1)
{
pro[j]=round(m*(op[j]^r)*(1-op[j])+(op[j]^m),4)
}
if(m-r==2)
{
q=factorial(m)/(factorial(r)*factorial(m-r))
pro[j]=round(q*(op[j]^r)*((1-op[j])^(m-r))
+ m*(op[j]^(r+1))*(1-op[j])+(op[j]^m),4)
}
}

```

Results

```

mat <- cbind(delta,pro)
rownames(mat) <- rep("",nrow(mat))
colnames(mat) <- c("delta","power")
mat

```

Βιβλιογραφία

- Αντζουλάκος, Δ. (2010). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστημιακές σημειώσεις για το ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστική Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Acosta-Mejia C. A. (2007). Two Sets of Runs Rules for the \bar{X} Chart, *Quality Engineering*, 19, 129-136.
- Acosta-Mejia C. A. & Pignatiello J. J. (2009). ARL-Design of S Charts with k -of- k Runs Rules, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38, 1625-1639.
- Antzoulakos D. L. & Rakitzis A. C. (2008a). The modified r out of m control chart. *Commun. Stat. Simul. Comput.*, 37, 396–408.
- Antzoulakos D. L. & Rakitzis A. C. (2008b). The Revised m -of- k Runs Rule. *Quality Engineering*, 20, 75–81.
- Antzoulakos D. L. & Rakitzis A. C. (2010). Runs rules schemes for monitoring process variability, *Journal of Applied Statistics*, 37, 1231-1247.
- Champ, C. W. & Woodall, W. H. (1987). Exact Results for Shewhart Control Charts With Supplementary Runs Rules, *Technometrics*, 29, 393-399.
- Derman, C. and Ross, S. M. (1997). *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, San Diego, CA.
- Feller, W. (1950). *Probability Theory and its Applications*. New York: John Wiley & Sons
- Klein, M. (2000a). Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart. *Journal of Quality Technology*, 32, 427-431.
- Klein, M. (2000b). Modified S-charts for controlling process variability, *Commun. Stat. Simul. Comput.*, 29, 919–940.
- Khoo, M. & Ariffin, K. (2006). Two Improved Runs Rules for the Shewhart Control Chart. *Quality Engineering*, 18, 173-178.
- Lowry, C. A., Champ C. W. & Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation, *Commun. Stat. Simul. Comput.*, 24, 409–437.
- Mehmood R., Riaz M. & Does R. (2011). Efficient power computation for r out of m runs rules schemes, *Comput. Stat.*, 28, 667–681.
- Page, E. S. (1955). Control charts with warning lines. *Biometrika*, 42, 243–257.

Riaz M., Mehmood R. & Does R. (2011). On the performance of different control charting rules, *Qual. Reliab. Eng. Int.*, 27, 1059–1067.

Weiler, H. (1953). The use of runs to control the mean in quality control. *Journal of the American Statistical Association*, 2, 816–825.