



Π.Μ.Σ. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία

Τιμολόγηση Επιτοκιακών Παραγώγων

Ευγενία Α. Κώτσαρη ΜΧΡΗ1528

Επιβλέπων:

Λέκτορας Νικόλαος Εγγλέζος

Τριμελής Επιτροπή:

Λέκτορας Νικόλαος Εγγλέζος
Επικ. Καθηγητής Δ. Βολιώτης
Επικ. Καθηγητής Δ. Κυριαζής

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, κύριο Νικόλαο Εγγλέζο για την συνεχή επικοινωνία μας κατά την διάρκεια όλου του εξαμήνου από την ανάθεση του θέματος της εργασίας έως την παράδοση της διπλωματικής εργασίας. Με την καθοδήγησή του και τις γνώσεις του με βοήθησε να συνδυάσω αποτελεσματικά το χρηματοοικονομικό, μαθηματικό καθώς και το προγραμματιστικό υπόβαθρο με την Matlab που απαιτείτο για το πέρας της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να πω ευχαριστώ σε όλο το διδακτικό προσωπικό του τμήματος Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, οι οποίοι με τις γνώσεις τους και το έργο που παρήγαγαν μας έκαναν να αισθανόμαστε περήφανοι για το ότι είμαστε κάτοχοι του συγκεκριμένου μεταπτυχιακού διπλώματος.

Τέλος, οι ευχαριστίες αυτές δεν θα μπορούσαν να εκφραστούν εάν η οικογένειά μου δεν με είχε στηρίξει στην πραγματοποίηση αυτού του ακαδημαϊκού βήματος. Αφιερώνω αυτή την διπλωματική εργασία στην οικογένειά μου για την απόλυτη υποστήριξη και την αγάπη τους όλα αυτά τα χρόνια.

Στην οικογένεια μου

Περίληψη

Η ανάπτυξη της αγοράς των επιτοκιακών παραγώγων τα τελευταία χρόνια προκαλεί ολοένα και περισσότερο το ενδιαφέρον των χρηματοοικονομικών ερευνητών σχετικά με την μελέτη της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων η οποία αποτελεί έναν πολύ σημαντικό και σπουδαίο τομέα στην χρηματοοικονομική επιστήμη. Συνεπώς για τον λόγο αυτό, η σημασία της σωστής και ακριβούς πρόβλεψης της μελλοντικής διάρθρωσης των επιτοκίων κάνει τους ερευνητές να θέλουν να μεγιστοποιήσουν την πιθανότητα εύρεσης των πιο κατάλληλων μοντέλων. Απόρροια της αξιόπιστης και ακριβούς πρόβλεψης αποτελεί η αποτελεσματική τιμολόγηση παραγώγων προϊόντων του επιτοκίου.

Η τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων, και πιο συγκεκριμένα η σύγκριση μεταξύ δύο διαφορετικών μοντέλων, είναι το θέμα της συγκεκριμένης εργασίας. Στην αρχή παρουσιάζεται η ιστορική αναδρομή τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων όπως και το ενιαίο πλαίσιο σύγκρισής τους. Στη συνέχεια περιγράφονται τα μοντέλα τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων ενός παράγοντα, τα μοντέλα Vasicek και CIR και οι επεκτάσεις τους. Η εμπειρική μελέτη πραγματοποιείται με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab για τα μοντέλα Extended Vasicek και CIR, καθώς και για τα επιτοκιακά caps. Τέλος, εκτιμώντας τις παραμέτρους του κάθε μοντέλου με τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt και ελέγχοντας την προβλεπτική ικανότητά του, καταλήγουμε πως τα μοντέλα αυτά αποτελούν αξιόπιστα υποδείγματα τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων.

Λέξεις κλειδιά:

Γενικευμένο μοντέλο Vasicek, γενικευμένο μοντέλο CIR, επιτοκιακά παράγωγα, τιμολόγηση, ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου, προβλεπτική ικανότητα, δικαιώματα σε ομόλογα, matlab, διάρθρωση επιτοκίου

Abstract

In recent years, the development of interest rate derivatives market attracts increasingly the interest of financial researchers on the study of the term structure of interest rates which is a vital and important sector in financial economics. Therefore for this reason, the importance of proper and accurate prediction of the future structure of interest rates makes researchers want to maximize the chance of finding the most appropriate models. A result of the reliable and accurate prediction is the effective pricing of interest rate derivatives.

Pricing of interest rate derivatives, and specifically the comparison between two different models, is the subject of this study. Firstly, we present a historical overview of pricing interest rate derivatives as their common comparability framework. Then we describe the pricing models of interest rate derivatives of one factor, the Vasicek and the CIR models and their extensions. The empirical study is performed via the programming language of Matlab for the Extended Vasicek model and the Extended CIR model, as well as for interest rate caps. Finally, estimating the parameters of each model with the iterative algorithm process of Levenberg-Marquardt and testing their predictive ability, we conclude that these models are reliable pricing methods of interest rate derivatives.

Key words :

Extended Vasicek, Extended CIR, interest rate derivatives , pricing, zero coupon bonds, interest rate caps, predictive ability, matlab, interest rate structure

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή	7
1.1 Καμπύλη Απόδοσης.....	7
1.1.1 Βραχυπρόθεσμο και μακροπρόθεσμο επιτόκιο	9
1.1.2 Καμπύλη απόδοσης	9
1.2 Θεωρίες της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων	11
1.2.1 Θεωρία Προσδοκίων	11
1.2.2 Θεωρία της προτίμησης της ρευστότητας	11
1.2.3 Θεωρία Προτίμησης	12
1.3 Ιστορική Αναδρομή.....	13
1.3.1 Επισκόπηση των προηγούμενων εμπειρικών ερευνών	13
1.3.2 Συνοπτικός Πίνακας Παράθεσης εμπειρικών ερευνών	19
Κεφάλαιο 2 Μοντέλα Αποτίμησης Επιτοκιακών Παραγώγων	25
2.1 Μοντέλο VASICEK	26
2.2 Μοντέλο Cox Ingersoll Ross.....	33
2.3 Γενικευμένο μοντέλο VASICEK – HULL AND WHITE (1990).....	37
2.4 Διωνυμικά και τριωνυμικά δέντρα για την αποτίμηση των μοντέλων	42
2.5 Γενικευμένο μοντέλο CIR.....	44
2.6 Interest Rate Caps	46
2.7 Τα CAPS ως χαρτοφυλάκιο των Interest Rate Options	47
2.7.1 Χαρακτηρισμός cap ως ένα χαρτοφυλάκιο των Bond Options	48
2.8 Floors και Collars.....	49
2.8.1 Αποτίμηση των CAPS και FLOORS.....	49
Κεφάλαιο 3 Αριθμητική Ανάλυση	51
3.1 Αριθμητική ανάλυση των μοντέλων Extended Vasicek & CIR.....	51
3.2 Αριθμητική ανάλυση των Interest Rate Caps για τα 2 μοντέλα.....	56

3.3	Εμπειρική μελέτη με στοιχεία από Bloomberg.....	59
3.3.1	Δεδομένα εμπειρικής μελέτης.....	59
3.3.2	Αποτίμηση των δικαιωμάτων στα δύο γενικευμένα μοντέλα χρησιμοποιώντας δεδομένα της αγοράς	59
3.3.3	Εκτίμηση παραμέτρων για τα μοντέλα Extended Vasicek και Extended CIR.....	60
3.3.4	Προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων	65
Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα.....		67
Βιβλιογραφία.....		69
Παράρτημα		73
Αριθμητική Ανάλυση : Κώδικες MatLab		73

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Καμπύλη Απόδοσης

Τα επιτοκιακά παράγωγα (interest rate derivatives) είναι ένα χρηματοοικονομικό μέσο με μία τιμή η οποία αυξάνει και μειώνεται με βάση τις μεταβολές των επιτοκίων. Από τα πιο γνωστά είναι τα swaps, caps και floors. Τα επιτοκιακά παράγωγα συχνά χρησιμοποιούνται ως μέσα αντιστάθμισης από τράπεζες, θεσμικούς επενδυτές, εταιρίες και ιδιώτες για να προστατευτούν από τις μεταβολές στα επιτόκια της αγοράς, αλλά μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουν ή να αυξήσουν το προφίλ κινδύνου του κατόχου. Συνεπώς η χρησιμοποίησή τους για την αύξηση ή μείωση της έκθεσης σε κίνδυνο αυτομάτως τα κάνει να κυμαίνονται από απλά ως και εξαιρετικά περίπλοκα. Η αποπληρωμή τους (payoff) εξαρτάται κατά κάποιον τρόπο από το επίπεδο του επιτοκίου. Από την δεκαετία του 1990 αυξήθηκε σημαντικά ο όγκος των συναλλαγών που περιλάμβανε επιτοκιακά παράγωγα τόσο στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (over-the-counter), τόσο και στην χρηματιστηριακή αγορά (exchanged-traded market).

Σήμερα τα επιτοκιακά παράγωγα είναι η μεγαλύτερη αγορά παραγώγων στον κόσμο. Η τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών υπολογίζει ότι το μεγαλύτερο ονομαστικό ποσό, παραδείγματος χάρη, τον Ιούνιο του 2012 ανήκε σε εξωχρηματιστηριακά συμβόλαια επιτοκίων και έπειτα σε εξωχρηματιστηριακές συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων. Σύμφωνα με τη Διεθνή Ένωση Swaps και Παραγώγων, το 80% των 500 κορυφαίων εταιρειών του κόσμου, χρησιμοποιούν παράγωγα επιτοκίου για τον έλεγχο των ταμειακών ροών τους. Αυτό συγκρίνεται με το 75% για τις επιλογές ξένου συναλλάγματος, το 25% για επιλογές εμπορεύματος και 10% για δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μετοχών.

Η σημαντικότερη πρόκληση συνεπώς για όλους όσους ασχολούνται με παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, είναι η εύρεση μίας καλής και αξιόπιστης διαδικασίας όχι μόνο για την τιμολόγηση αλλά και για την αντιστάθμιση των προϊόντων αυτών. Η τιμολόγηση τέτοιων προϊόντων είναι

πολύ δύσκολη σε σχέση με άλλα παράγωγα προϊόντα που είναι γραμμένα σε κάποιον χρηματιστηριακό τίτλο είτε σε κάποια χρηματιστηριακή αξία ή οποιαδήποτε άλλη αξία, καθώς η μεταβολή επιτοκίου είναι πιο περίπλοκη συγκριτικά με μία μεταβολή σε συναλλαγματική ισοτιμία ή γενικά η συμπεριφορά ενός επιτοκίου είναι πιο περίπλοκη από την συμπεριφορά μιας μετοχής σε διάφορους τίτλους.

Επίσης ένας ακόμη παράγοντας που χαρακτηρίζει τα παράγωγα επιτοκίων ως πιο δύσκολα από παράγωγα άλλου είδους, είναι ότι τα επιτόκια χρησιμοποιούνται τόσο για την προεξόφληση των παραγώγων, όσο και για την αποπληρωμή τους.

Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά τα πιο σημαντικά επιτοκιακά παράγωγα που διαπραγματεύονται είναι τα δικαιώματα προαίρεσης επί ομολόγων (bond options), τα δικαιώματα επιτοκίου μέγιστης και ελαχίστης αξίας (interest rate caps and floors) και τέλος τα δικαιώματα σε συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (swaps options). Το μοντέλο Black and Scholes (1973) καθώς και επεκτάσεις του μοντέλου αυτού χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση των επιτοκιακών προϊόντων. Τα μοντέλα αυτά υποθέτουν ότι η κατανομή πιθανότητας των επιτοκίων, των ομολόγων ή οποιασδήποτε άλλης μεταβλητής είναι λογαριθμοκανονική. Προσπαθώντας να υπερπηδήσουν τους περιορισμούς τους οποίους γεννά κάθε πρόβλημα οι ερευνητές έχουν δημιουργήσει διαφορετικά μοντέλα για τη περιγραφή της χρονικής εξέλιξης διάρθρωσης των επιτοκίων. Στο κύριο κομμάτι αυτής της διπλωματικής θα αναλυθούν και θα συγκριθούν δύο μοντέλα τιμολόγησης, στο κύριο κομμάτι αυτής θα δούμε πως μπορούν να επεκταθούν τα μοντέλα μας έτσι ώστε να είναι συνεπή με την τρέχουσα διάρθρωση των επιτοκίων. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις επιμέρους θεωρίες και στοιχειώδεις γνώσεις έτσι ώστε να κατανοηθεί καλύτερα το θέμα της εργασίας μας, δίνονται παρακάτω.

1.1.1 Βραχυπρόθεσμο και μακροπρόθεσμο επιτόκιο

Η σχέση μεταξύ βραχυπρόθεσμων (short term rate) και μακροπρόθεσμων επιτοκίων (long term rate) ονομάζεται χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την μεταβλητότητα των επιτοκίων είναι η οικονομική κατάσταση της εκάστοτε αγοράς. Κατά την διάρκεια μίας ανόδου του επιχειρηματικού κύκλου όπου η κατάσταση της οικονομίας βρίσκεται σε πολύ καλή πορεία, παρατηρείται κίνηση των επιτοκίων σε υψηλότερα επίπεδα καθώς υπάρχει αύξηση της παραγωγής και ζήτηση κεφαλαίων. Στην αντίθετη περίπτωση, εκεί όπου παρατηρείται οικονομική ύφεση έχουμε καθοδική κίνηση των επιτοκίων.

Όσον αφορά τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια, σε αυτά η μεταβολή τους επηρεάζεται από τις τρέχουσες μεταβολές του κεφαλαίου, συνεπώς τα συναντάμε περισσότερο στις διάφορες συχνές μεταβολές των οικονομικών συνθηκών. Τα μακροπρόθεσμα επιτόκια επηρεάζονται από τον προσδοκώμενο πληθωρισμό. Το εύρος της διαφοράς μεταξύ των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων είναι μεγαλύτερο σε περιόδους ύφεσης σε σύγκριση με το εύρος τους σε περιόδους ανάκαμψης.

1.1.2 Καμπύλη απόδοσης

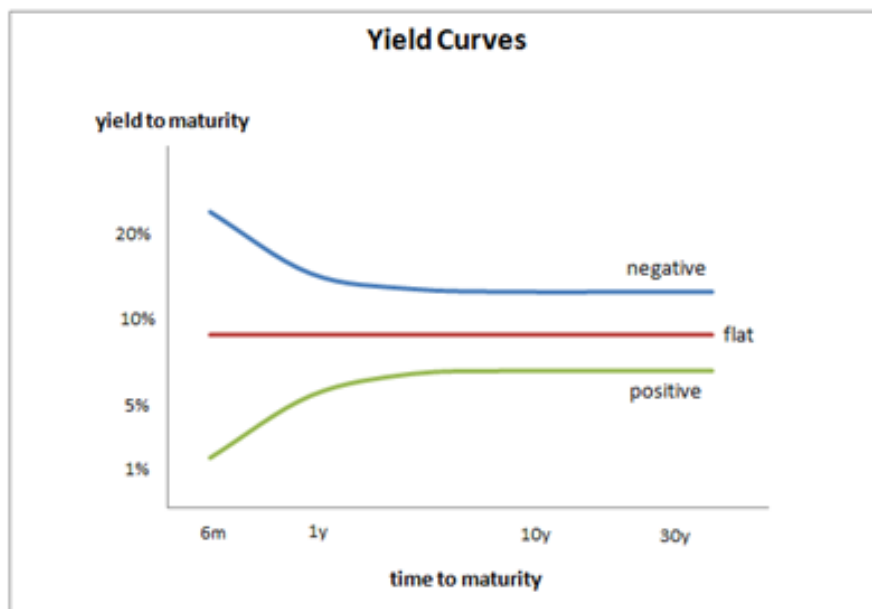
Η καμπύλη απόδοσης (yield curve) αποτελεί ιδιαίτερη σημασία για την ερμηνεία της διάρθρωσης επιτοκίου. Επίσης, δίνει σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά τις προσδοκίες των επενδυτών. Παριστάνει γραφικά την σχέση επιτοκίων με τον χρόνο ή διαφορετικά παριστάνει την διάρκεια μέχρι την λήξη (time to maturity) για συγκεκριμένο χρεόγραφο με συγκεκριμένο σταθερό κίνδυνο και συνθήκες ρευστότητας. Κάθε φορά το σχήμα της καμπύλης δίνει μια ιδέα για τις μελλοντικές μεταβολές των επιτοκίων και την οικονομική δραστηριότητα. Υπάρχουν τρεις μορφές της καμπύλης απόδοσης.

Όταν τα μακροπρόθεσμα επιτόκια κινούνται σε υψηλότερα επίπεδα από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια τότε η καμπύλη απόδοσης κινείται ανοδικά, δηλαδή

έχει θετική κλίση. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται ομαλή καμπύλη, (normal yield curve) καθώς είναι και η πιο συνηθισμένη περίπτωση.

Όταν τα μακροπρόθεσμα επιτόκια κινούνται σε χαμηλότερα επίπεδα από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια τότε η καμπύλη απόδοσης κινείται καθοδικά, έχει αρνητική κλίση και είναι γνωστή ως μη ομαλή καμπύλη απόδοσης (abnormal yield curve). Αυτό το είδος της καμπύλης αποδόσεων είναι το σπανιότερο από τους τρεις κύριους τύπους καμπύλη και θεωρείται ότι είναι ένας προγνωστικός δείκτης της οικονομικής ύφεσης.

Αυτές οι παραπάνω δύο περιπτώσεις περιγράφουν δύο ακραίες και εντελώς αντίθετες κινήσεις της καμπύλης. Υπάρχει και η περίπτωση κατά την οποία τα μακροπρόθεσμα επιτόκια κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα με τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια, η καμπύλη απόδοσης τότε είναι επίπεδη και έτσι ονομάζεται (flat yield curve). Μπορούμε να δούμε τις παραπάνω περιπτώσεις και πιο περιεκτικά στο παρακάτω σχήμα.



1.2 Θεωρίες της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων

1.2.1 Θεωρία Προσδοκιών (Pure Expectations Theory)

Η θεωρία αυτή υποστηρίζει ότι η μορφή της καμπύλης των επιτοκίων καθορίζεται μόνον από τις προσδοκίες των επενδυτών για το μελλοντικό επίπεδο των επιτοκίων (δηλαδή την πορεία του πληθωρισμού). Οι συμμετέχοντες στην αγορά είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο (risk neutral) και άρα θα επιλέξουν την επένδυση με την μεγαλύτερη απόδοση. Οι υποστηρικτές της πιστεύουν ότι η απαιτούμενη απόδοση ενός μακροπρόθεσμου ομολόγου ισούται με την απόδοση μιας σειράς βραχυπρόθεσμων ομολόγων: πχ. η απόδοση ενός ετήσιου ομολόγου συν την αναμενόμενη απόδοση ενός εξαμήνου ομολόγου αγορασμένου σε έξι μήνες από σήμερα κλπ.

Έτσι λοιπόν μια ευθεία καμπύλη επιτοκίων σημαίνει ότι τα επιτόκια αναμένεται να μείνουν σταθερά στο μέλλον, ενώ μια ανοδική καμπύλη επιτοκίων σημαίνει ότι τα επιτόκια αναμένεται να ανέβουν στο μέλλον. Τέλος, μια καθοδική καμπύλη επιτοκίων σημαίνει ότι τα επιτόκια αναμένεται να πέσουν στο μέλλον. Αυτό συμβαίνει, γιατί ομόλογα σε κυκλοφορία γίνονται πιο ελκυστικά εάν αναμένεται μείωση των επιτοκίων, αφού θα πληρώνεται σταθερός τόκος ακόμα και όταν τα επιτόκια θα είναι χαμηλότερα. Αυτό αυξάνει τη ζήτηση για τα συγκεκριμένα ομόλογα και την αγοραία τιμή τους, με αποτέλεσμα να μειώνει την απόδοση τους και άρα να δημιουργεί καθοδική καμπύλη αποδόσεων.

(https://el.wikipedia.org/wiki/Καμπύλη_αποδόσεων)

1.2.2 Θεωρία της προτίμησης της ρευστότητας (Liquidity Premium Theory)

Σύμφωνα με τη θεωρία της προτίμησης της ρευστότητας, ακόμα και όταν δεν αναμένεται αλλαγή στην πορεία του πληθωρισμού και συνεπώς των επιτοκίων, η καμπύλη των αποδόσεων είναι ανοδική. Αυτό συμβαίνει γιατί οι επενδυτές επιθυμούν ρευστότητα, δηλαδή οι δανειζόμενοι προτιμούν να δανείζονται μακροπρόθεσμα, επειδή τα βραχυπρόθεσμα δάνεια τους εκθέτουν στον κίνδυνο

επιστροφής του δανείου κάτω από αντίξοες συνθήκες και οι δανειστές να δανείζουν βραχυπρόθεσμα για μικρότερο κίνδυνο απώλειας του κεφαλαίου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υψηλότερη ζήτηση για βραχυπρόθεσμα ομόλογα αλλά και την υψηλότερη προσφορά για μακροπρόθεσμα ομόλογα. Άρα οι επενδυτές, προκειμένου να δεσμεύσουν τα κεφάλαια τους για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, απαιτούν κάποιο πριμ ρευστότητας (liquidity premium) στις αποδόσεις των πιο μακροπρόθεσμων ομολόγων, όπως φαίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα. Λόγω του πριμ ρευστότητας, οι αποδόσεις των μακροπρόθεσμων ομολόγων τείνουν να είναι υψηλότερες από των βραχυπρόθεσμων.

(https://el.wikipedia.org/wiki/Καμπύλη_αποδόσεων)

1.2.3 Θεωρία Προτίμησης (Preferred Habitat Theory)

Η θεωρία αυτή αποτελεί ουσιαστικά μια βελτίωση της Liquidity Premium Theory και υποστηρίζει ότι οι επενδυτές θα προσπαθήσουν να ταιριάξουν τη χρονική διάρκεια των στοιχείων του παθητικού τους με τη χρονική διάρκεια των στοιχείων του ενεργητικού τους (ελαχιστοποίηση αβεβαιότητας). Όμως αν οι επενδυτές λάβουν κάποιο πριμ (premium), δηλαδή ανταμοιβή για τον κίνδυνο, θα προτιμήσουν και άλλες επενδύσεις, και θα αφήσουν τον χρονικό ορίζοντα που επιθυμούν για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, πριμ (που μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά) θα υπάρχουν για χρονικές διάρκειες όπου δεν υπάρχει αρκετή ζήτηση. Ακόμη, εάν δεν ξέρουμε από πριν τι ζήτηση θα υπάρχει για διάφορες μελλοντικές στιγμές, δεν μπορούμε να πάρουμε καμία πληροφορία από την καμπύλη των επιτοκίων.
(https://el.wikipedia.org/wiki/Καμπύλη_αποδόσεων)

1.3 Ιστορική Αναδρομή

1.3.1 Επισκόπηση των προηγούμενων εμπειρικών ερευνών

Ένα σύγχρονο καθώς και επίκαιρο θέμα όσον αφορά την χρηματοοικονομική επιστήμη είναι η χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Απόρροια αυτής της σημασίας είναι οι διάφορες μελέτες πάνω σε αυτό το θέμα καθώς και σε άλλα θέματα που σχετίζονται πλήρως με αυτό, έχουν ιδιαίτερη σημασία και η κάθε μελέτη συμβάλλει στην επόμενη. Στην ενότητα αυτή λοιπόν, παρουσιάζονται μελέτες οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί και έχουν χαρακτηριστεί ως πολύ σημαντικές στο συγκεκριμένο θέμα διότι έχουν συνεισφέρει στο να κατανοηθεί και να γίνει η σωστή έρευνα κάθε φορά σχετικά με την χρονική διάρθρωση των επιτοκίων καθώς και να δημιουργήσουν μία συνδετική αλυσίδα.

Ο Telser (1966) ερευνά την χρονική διάρθρωση των επιτοκίων, όταν ταυτόχρονα γίνεται χρήση κάθε φορά από θεωρίες που αφορούν διαφορετικούς παράγοντες της χρονικής διάρθρωσης. Η θεωρία προσδοκιών και η θεωρία ρευστότητας είναι οι δύο θεωρίες που αναλύονται και αφορούν τη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Στη μελέτη καταλήγεται, ότι και οι δύο θεωρίες έχουν πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Το βασικότερο συμπέρασμα είναι, ότι δεν μπορεί να υπάρξει απόλυτη ομοφωνία στο ερώτημα για το ποια είναι η κατάλληλη θεωρία που περιγράφει καλύτερα το πρόβλημα της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων.

Οι Elliot και Baier (1979) εξέτασαν στο άρθρο τους που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό "The Journal of Finance", έξι διαφορετικά οικονομετρικά μοντέλα επιτοκίου ανέλυσαν κατά πόσο μπορούν τα συγκεκριμένα να εξηγήσουν και να προβλέψουν επίπεδα επιτοκίων. Η έρευνα γίνεται παίρνοντας ως εργαλείο μια συγκεκριμένη μέθοδο καθώς και στοιχεία από την αγορά. Συμπεραίνεται, ότι τέσσερα από τα έξι μοντέλα μπορούν και εξηγούν τις τρέχουσες τιμές των επιτοκίων, ενώ κανένα μοντέλο δεν καταφέρνει να προβλέψει με ακρίβεια τις τιμές των μελλοντικών επιτοκίων.

Οι Brennan και Schwartz (1982) εφάρμοσαν ένα μοντέλο με στόχο την τιμολόγηση ομολόγων του αμερικανικού δημοσίου της περιόδου 1948-1979. Σκοπός, να εξετάσουν κατά πόσο το μοντέλο είναι ικανό να εκτιμήσει σωστά ομόλογα, υπερεκτιμημένα ή υποεκτιμημένα. Για μεγάλα χρονικά διαστήματα το μοντέλο σημείωνε ικανοποιητικά αποτελέσματα σε εκτιμητικό υπόβαθρο, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που υπήρχαν όταν αυτά δεν μεγάλα.

Οι Cox, Ingersoll και Ross (1985) στη μελέτη τους που αποτελεί σημείο αναφοράς για το είδος, ανέπτυξαν ένα διαχρονικό μοντέλο τιμολόγησης προϊόντων, έτσι ώστε να μελετήσουν τη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Η σημαντικότητα που χαρακτηρίζει αυτό το μοντέλο ότι είναι ικανό να εξαλείφει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων. Συμπεραίνεται ότι, το μοντέλο αυτό είναι κατάλληλο για λεπτομερείς προβλέψεις σχετικά με το πώς μεταβάλλεται η διάρθρωση των επιτοκίων σε μια ενδεχόμενη αλλαγή μιας συγκεκριμένης μεταβλητής. Με το συγκεκριμένο μοντέλο θα ασχοληθούμε και πιο εξειδικευμένα στην συγκεκριμένη εργασία.

Οι Ho και Lee (1986) ανέπτυξαν το πρώτο διωνυμικό μοντέλο διακριτών περιόδων περιέγραφε ολόκληρη την κίνηση επιτοκίων. Το μοντέλο χρησιμοποιεί την αρχική διάρθρωση των επιτοκίων η οποία λαμβάνεται από τιμές ομολόγων και στην συνέχεια προβλέπει τις κινήσεις επιτοκίων. Σημειώνεται ότι ανέπτυξαν ένα διωνυμικό πλέγμα για την διάρθρωση των επιτοκίων, και όχι για την τιμή ομολόγων.

Ο Turnovsky (1989) εξετάζει κάτω από ένα στοχαστικό μακροοικονομικό πλαίσιο, τη συμπεριφορά της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων καταλήγοντας σε λύσεις για το μακροπρόθεσμο και βραχυπρόθεσμο επιτόκιο που λαμβάνονται από μελλοντικές δημοσιονομικές και νομισματικές πολιτικές. Συμπεραίνεται πως η καμπύλη απόδοσης είναι εξαιρετικά ευαίσθητη στις διάφορες μεταβολές που συμβαίνουν στην οικονομία, καθώς εμπεριέχουν την αποστροφή κινδύνου (risk aversion) από την πλευρά των επενδυτών.

Οι Hutchinson και Toma (1991) απέδειξαν ότι όταν το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο αυξάνεται, τότε η χρονική διάρθρωση των επιτοκίων είναι φθίνουσα. Επίσης διαπίστωσαν την ύπαρξη μιας τάσης προς το μέσο όρο (mean reversion) κατά τη φάση δέσμευσης (binding phase) του προγράμματος υποστήριξης της περιόδου 1942- 1944, ενώ παρατήρησαν ότι οι προσδοκίες για εμμονή των επενδυτών στο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο άλλαζε με την αλλαγή πολιτικής. Επιπλέον, κατέδειξε η μελέτη τους, ότι το πρόγραμμα υποστήριξης περιόρισε τις ανοδικές κινήσεις του μελλοντικού βραχυπρόθεσμου επιτοκίου για να ελεγχθεί ενδεχόμενος πληθωρισμός.

Οι Chan, Karolyi και Longstaff (1992) προκειμένου να διαπιστώσουν ποιο μοντέλο αποδίδει καλύτερα την καμπύλη του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, συνέκριναν οκτώ διαφορετικά μοντέλα επιτοκίου. Τα μοντέλα συγκρίνονται όλα σε ένα ενιαίο πλαίσιο ώστε να επιτευχθεί σωστή και αμερόληπτη σύγκριση. Τα αποτελέσματα της μελέτης τους απέδειξαν, ότι τα μοντέλα που περιγράφουν καλύτερα τη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων, είναι αυτά που επιτρέπουν την κατά το δυνατό καλύτερη εξάρτηση της υπό συνθήκης μεταβλητότητας των επιτοκίων με το επίπεδο των επιτοκίων.

Οι Longstaff και Schwartz (1992) με στόχο την μελέτη επάνω στην διάρθρωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου ανέπτυξαν ένα μοντέλο δύο παραγόντων. Το μοντέλο εφαρμόστηκε για την τιμολόγηση ομολόγων και δικαιωμάτων επί των ομολόγων. Οι παράγοντες που χρησιμοποιήθηκαν είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο και η μεταβλητότητα του.

Η Johansson (1994) αναπτύσσει ένα συνεχές στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου. Χρησιμοποιούνται δεδομένα που αφορούν διατραπεζικά επιτόκια πέντε μεγάλων τραπεζών της Σουηδίας για να προσεγγίσει, κατά το δυνατό καλύτερα, το στιγμιαίο ακίνδυνο επιτόκιο. Τα αποτελέσματα δείχνουν, ότι ο χρόνος μελέτης επιδρά στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων, όπως και ότι η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας αυξάνει την προκατάληψη των εκτιμητριών.

Οι Brenner, Harjes και Kroner (1996) αναλύουν δύο διαφορετικά μοντέλα επιτοκίου για τον προσδιορισμό της μεταβλητότητας των επιτοκίων, ενώ μελετούν και εναλλακτικά μοντέλα για τον προσδιορισμό της εξάρτησης της μεταβλητότητας και του επιπέδου των επιτοκίων.

Οι Ceczy, Minton και Schrand (1997) μελετούν τη χρήση παραγώγων σε συνάλλαγμα σε επιχειρήσεις με έκθεση σε κίνδυνο συναλλάγματος. Η μελέτη τους συμπεραίνει, ότι η χρήση αυτού του είδους των παραγώγων μπορεί να αποφέρει κέρδος στις, όταν χρησιμοποιούνται λογικά.

Οι Koski και Pontiff (1999) ερευνούν τη χρήση παραγώγων από τους διευθυντές επενδύσεων και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι αυτοί που χρησιμοποιούν παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, αυξάνουν τον κίνδυνο στις επιχειρήσεις τους, χωρίς παράλληλα να αυξάνεται η απόδοση της επένδυσής τους.

Οι Chaudhry, Christie-David, Koch και Reichert (2000) καταγράφουν στο άρθρο τους, ότι οι τράπεζες χρησιμοποιούν τις συμφωνίες ανταλλαγής συναλλάγματος ως εργαλείο αντιστάθμισης, καθώς και το ότι τα δικαιώματα επί συναλλαγμάτων μπορεί να έχουν κερδοσκοπικό ρόλο. Αναφορικά με τα επιτοκιακά παράγωγα και τη χρήση τους στις επιχειρήσεις θεωρούν, ότι στόχος είναι η μείωση ή η αύξηση του κινδύνου.

Οι Henstchel και Kothari (2001) ερευνούν ανάμεσα σε 425 αμερικανικές επιχειρήσεις, εάν αυτές επιδιώκουν τη μείωση ή την εξάλειψη του κινδύνου τους, χρησιμοποιώντας παράγωγα. Στην έρευνα τους σημειώνουν, ότι οι επιχειρήσεις χρησιμοποιούν συνήθως παράγωγα προϊόντα για την εξάλειψη του κινδύνου βραχυπρόθεσμων συμβολαίων. Καθώς αυτού του είδους οι χρηματοροές αντιπροσωπεύουν ένα μικρό μόνο μέρος της αξίας μιας επιχείρησης, η μείωση του κινδύνου αυτού του είδους έχει μικρή επίδραση στο κίνδυνο γενικά μιας επιχείρησης, και αυτό έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την επικρατούσα θεωρία περί διαχείρισης του κινδύνου.

Ο Bali (2003) παρουσιάζει μια επέκταση του BDT μοντέλου χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων, με ένα μοντέλο δύο παραγόντων για να ελέγξει την ικανότητα του στην τιμολόγηση ομολόγων. Τα αποτελέσματα δείχνουν, ότι το μοντέλο καταφέρνει σε πολύ μεγάλο βαθμό να προβλέψει τη μελλοντική μεταβλητότητα των επιτοκίων.

Ο Glasserman (2003) στο άρθρο του επιχειρεί να αναπαράγει τη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές τα προθεσμιακά επιτόκια ή τις συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων. Εξηγεί ξεκάθαρα, πώς συνδέονται τα χρονικά άλματα και ο κίνδυνος με τα προθεσμιακά επιτόκια. Επιπλέον αναπτύσσονται σχέσεις για την τιμολόγηση διαφόρων χρεογράφων, ενώ περιγράφεται και η επίδραση των αλμάτων στη μεταβλητότητα των παραγώγων επιτοκίου.

Οι Goard και Hansen (2004) συγκρίνουν το δικό τους μοντέλο με το μοντέλο που ανέπτυξαν οι Gao (1999) και Goard (2000). Διαπιστώνουν, ότι η εξαγωγή της καμπύλης απόδοσης γίνεται με μεγαλύτερη ακρίβεια όταν τα δεδομένα περιλαμβάνουν τιμές από κατά το δυνατό μεγαλύτερες χρονικές περιόδους.

Οι Buraschi και Corielli (2005) αναλύουν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα διαφόρων μοντέλων όσον αφορά στην τιμολόγηση και σε στρατηγικές αντιστάθμισης. Οι παράμετροι και οι αρχικές συνθήκες συνεχώς μεταβάλλονται, ούτως ώστε τα αποτελέσματα των μοντέλων να προσεγγίσουν τα αποτελέσματα που παρατηρούνται στην αγορά. Συμπέραναν, ότι πολλές από τις υποθέσεις των μοντέλων στην προσπάθεια αυτή παύουν να ισχύουν και ότι υπάρχουν συνέπειες στη στρατηγική διαχείρισης του κινδύνου.

Ο Mato (2005) υποστηρίζει, ότι η διαχείριση του κινδύνου των επιτοκίων είναι καθοριστικής σημασίας για τη διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου. Αυτό, άλλωστε, αποδεικνύει η συμπεριφορά των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο. Αναλύει διάφορες τεχνικές κινδύνου που οδηγούν σε διαφορετικά χαρτοφυλάκια.

Οι Faff και Gray (2005) προσομοιώνουν ένα GMM μοντέλο για να διαπιστώσουν την ακρίβεια και την αμεροληψία των εκτιμητριών του. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι το GMM μοντέλο ξεπερνά όλες τις δυσκολίες που προκύπτουν κατά την προσομοίωση, αλλά αδυνατεί να εξαλείψει την τάση στο μέσο όρο που παρουσιάζεται, για αυτό και επιβάλλεται να δοθεί μεγάλη προσοχή.

Οι Reno και Roma (2006) εκτιμούν τον παράγοντα αλλαγής για μοντέλα ενός μόνο παράγοντα, εφαρμόζοντας μη παραμετρικές μεθόδους. Παρατηρήθηκε ότι οι εκτιμήσεις εξαρτώνται κάθε φορά από το εύρος των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν.

Οι Sanford και Martin (2006) αναλύουν διάφορα μοντέλα επιτοκίων συνεχούς χρόνου ενός μόνο παράγοντα για να περιγράψουν το αυστραλιανό βραχυπρόθεσμο επιτόκιο. Διαπιστώνουν, ότι αυτό που ανταποκρίνεται καλύτερα στην προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι το μοντέλο των Cox-Ingersoll-Ross Square Root.

Οι Benratti και Colla (2006) εστιάζουν την προσοχή τους, στο πώς διάφορα συγγενή μοντέλα επιτοκίων (affine models) μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διαχείριση χαρτοφυλακίων. Συμπεραίνουν, ότι στην περίπτωση του προσδιορισμού της καμπύλης απόδοσης των επιτοκίων κανένα μοντέλου δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι υπερτερεί των άλλων. Το καταλληλότερο κάθε φορά μοντέλο έχει να κάνει με το στόχο του μελετητή.

Ο Mahdavi (2008) περιγράφει τη συμπεριφορά του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου στην Αμερική, στο Ηνωμένο Βασίλειο, στον Καναδά, την Ιαπωνία, την Αυστραλία, τη Δανία, τη Σουηδία και την Ευρωζώνη κάτω από συνθήκες που δεν επιτρέπουν την εμφάνιση κερδοσκοπίας. Ο περιορισμός αυτός συνδέει το ρυθμό μεταβολής του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με το προθεσμιακό επιτόκιο. Παράλληλα καθίσταται σαφής η ανεπάρκεια των μοντέλων ενός μόνο παράγοντα να εξηγήσουν το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο σε όλες τις χώρες. Οι τιμές της αγοράς για τον κίνδυνο είναι μη γραμμικές και αυξανόμενες όσο αυξάνει το επίπεδο του επιτοκίου.

Οι Gibson, Lhabitant και Talay (2010) περιγράφουν και συγκρίνουν στη μελέτη τους μερικά από τα πιο γνωστά και διάσημα μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων. Συζητούνται αναλυτικά τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του κάθε μοντέλου, ταξινομούνται τα μοντέλα με βάση τα χαρακτηριστικά τους. Συμπεραίνουν, ότι η καταλληλότητα του κάθε μοντέλου συνδέεται άμεσα με τον σκοπό για τον οποίο επιλέγεται.

1.3.2 Συνοπτικός Πίνακας Παράθεσης εμπειρικών ερευνών

Στον παρακάτω πίνακα θα συνοψίσουμε τις ερευνητικές μελέτες που αναφέραμε προηγουμένως:

Συγγραφέας - Έτος	Σκοπός	Συμπεράσματα
Tesler (1966)	Έρευνα χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων	Δεν υπάρχει απόλυτη θεωρία που να περιγράφει καλύτερα το πρόβλημα της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων.
Elliot και Baier (1979)	Εξήγηση έξι διαφορετικών μοντέλων επιτοκίου για την πρόβλεψη επιτοκίων	Τέσσερα από τα έξι μοντέλα είναι ικανά να εξηγούν τις τρέχουσες τιμές επιτοκίων, κανένα μοντέλο δεν είναι ικανό να προβλέψει με ακρίβεια τις τιμές των μελλοντικών επιτοκίων
Brennan και Schwartz (1982)	Πρόταση μοντέλου για την τιμολόγηση κρατικών ομολόγων	Δεν υπάρχει ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα στις μελλοντικές τιμές βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων
Cox -Ingersoll -Ross (1985)	Για την μελέτη της χρονικής διάρθρωσης επιτοκίου, γίνεται ανάπτυξη ενός διαχρονικού μοντέλου τιμολόγησης	Πρόβλεψη του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, κάτω από διαφορετικούς περιορισμούς
Ho and Lee (1986)	Ανάπτυξη το πρώτου διωνυμικού μοντέλο διακριτών περιόδων, περιγραφή ολόκληρη την κίνηση επιτοκίων	Πρόβλεψη κινήσεων επιτοκίου

Turnovsky (1989)	Με εργαλείο ένα μακροοικονομικό στοχαστικό πλαίσιο εξετάζει την συμπεριφορά της χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων	Οι οικονομικοί παράγοντες επηρεάζουν την διάρθρωση επιτοκίων. Αυτό είναι κάτι το οποίο δηλώνει ότι οι επενδυτές είναι risk lovers
Hutchinson και Toma (1991)	Προσδιορισμός τάσης της μέσης τιμής	Μεταβολή στις κινήσεις των επιτοκίων ανάλογα με την πολιτική που ακολουθείται
Chan, Karolyi ,Longstaff και Sanders (1992)	Δημιουργία ενός κοινού πλαισίου σύγκρισης διαφορετικών μοντέλων διάρθρωσης επιτοκίων	Τα μοντέλα που προβλέπουν την διάρθρωση επιτοκίων είναι καλύτερα από αυτά που προβλέπουν την μεταβλητότητα των επιτοκίων
Longstaff and Schwartz (1992)	Ανάπτυξη ενός μοντέλου δύο παραγόντων για την διάρθρωση των επιτοκίων, παράγοντες που επηρεάζουν είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο και η μεταβλητότητά του	Απλότητα στην εφαρμογή του μοντέλου αρκετά πλεονεκτήματα στην υλοποίηση του
Johansson (1994)	Ανάπτυξη ενός συνεχούς στοχαστικού μοντέλου επιτοκίου	Η ετεροσκεδαστικότητα αυξάνει την προκατάληψη εκτιμητριών

Brennen , Harjes και Kroner (1996)	Δημιουργία μοντέλων διάρθρωσης με ενσωματωμένη την μεταβλητότητα επιτοκίων	Δεν γίνεται ο σωστός προσδιορισμός από τα μοντέλα τα οποία είναι απλά στην εφαρμογή τους καθώς αποτυγχάνουν να συμπεριλάβουν την μεταβλητότητα των επιτοκίων
Ceczy, Minton και Schrand (1997)	Εξέταση της χρησιμότητας των παραγώγων στις επιχειρήσεις οι οποίες αντιμετωπίζουν συναλλαγματικό κίνδυνο	Η χρήση παραγώγων προϊόντων είναι μεγαλύτερη σε επιχειρήσεις με μεγαλύτερο περιθώριο ανάπτυξης
Koski και Pontiff (1999)	Έρευνα για τα πλεονεκτήματα χρήσης των παραγώγων προϊόντων στην απόδοση	Ίδιος κίνδυνος και απόδοση σε αυτούς που χρησιμοποιούν παράγωγα και σε αυτούς που δεν χρησιμοποιούν
Chaundry, Christie-David, Koch and Reichert (2000)	Εντοπισμός κινήτρων για την χρήση παραγώγων προϊόντων σε χρηματοδοτικούς οργανισμούς	Κίνητρα :Κερδοσκοπία και αντιστάθμιση κινδύνου
Henstehel ,Kothari (2001)	Να διαπιστώσουν εάν μειώνεται ο κίνδυνος στις επιχειρήσεις κάνοντας χρήση παραγώγων προϊόντων	Μερική αποφυγή κινδύνου αλλά όχι ολική
Bali (2003)	Σύγκριση μονοπαραγοντικών μοντέλων με μοντέλα δύο παραγόντων	Περισσότερα πλεονεκτήματα παρουσιάζουν τα μοντέλα δύο παραγόντων

Glaserman (2003)	Να περιγράψει την διάρθρωση των επιτοκίων χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές το προθεσμιακό επιτόκιο και swaps	Περιγραφή της επίδρασης της μεταβλητότητας στα επιτοκιακά παράγωγα
Goard και Hansen (2004)	Ανάπτυξη ενός μοντέλου επιτοκίων και σύγκριση με άλλα για την εφαρμογή του	Το μοντέλο τους θεωρείται καλύτερο και πιο αποτελεσματικό
Buraschi και Corielli (2005)	Ανάλυση στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της βαθμονόμησης των μοντέλων για την αντιστάθμιση και τιμολόγησή τους	Η βαθμονόμηση δεν ταυτίζεται με τις υποθέσεις ύπαρξης των μοντέλων
Mato (2005)	Να αναλύσει την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ νέων και αρχικών μέτρων διαχείρισης κινδύνου	Δεν υπάρχει συσχέτιση
Faff και Gray (2005)	Τρόποι εκτίμησης παραμέτρων του GMM μοντέλου για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο	Εκτιμώνται οι παράμετροι
Reno, Roma και Schaafer (2006)	Εκτίμηση συντελεστή διάχυσης βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με μη παραμετρικές μεθόδους	Οι εκτιμήσεις κάθε φορά εξαρτώνται από το εύρος των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν
Sanford και Martin (2006)	Ανάλυση διάφορων μοντέλων για τον προσδιορισμό συγκεκριμένου βραχυπρόθεσμου επιτοκίου	Υπερτερεί το μοντέλο CIR

Beltratti και Colla (2006)	Δημιουργία μοντέλων για την βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου	Δεν υπάρχει ιδανικό μοντέλο
Mahdavi (2008)	Προσδιορισμός του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου σε επτά χώρες της ευρωζώνης με βάση ορισμένα μοντέλα	Κανένα μοντέλο δεν μπορεί να το προσδιορίσει αποτελεσματικά

Κεφάλαιο 2

Μοντέλα Αποτίμησης Επιτοκιακών Παραγώγων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τα μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε.

Στην εργασία αυτή θα λειτουργήσουμε με το μοντέλο Vasicek και το μοντέλο CIR. Τα συγκεκριμένα μοντέλα είναι μοντέλα τα οποία ασχολούνται με την στοχαστική εξέλιξη κυρίως βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Επιπρόσθετα βασική υπόθεσή τους εμπεριέχεται στο γεγονός ότι η μελλοντική εξέλιξη της τιμής του επιτοκίου εξαρτάται αποκλειστικά από την τρέχουσα τιμή του και όχι από την εξέλιξη του στις διάφορες περιόδους του χρόνου. Στην ενότητα αυτή θα αντλούμε τη μερική διαφορική εξίσωση για την τιμή των ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου για τα μοντέλα με σύντομο ρυθμό. Η μερική διαφορική εξίσωση για την τιμή χωρίς τοκομερίδιο των ομολόγων μας επιτρέπει να αντλήσουμε την τιμή του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου για το μοντέλο Vasicek και το μοντέλο CIR.

Οι περισσότερες από τις τράπεζες σήμερα χρησιμοποιούν το μοντέλο Vasicek ή την εκτεταμένη μορφή του μοντέλου που ονομάζεται Hull and White model το οποίο εισήχθη από τους Hull και White (1987), για να μοντελοποιήσει την εξέλιξη των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Υπάρχουν δύο συνήθεις λόγοι για αυτό. Ο πρώτος και ο πιο προφανής λόγος είναι ότι αυτά ήταν τα πρώτα μοντέλα τα οποία εισήγαγαν την περιγραφή του r_t , αλλά αυτό από μόνο του δεν είναι αρκετό. Ο σημαντικότερος λόγος είναι λόγω της απλότητάς του, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Το τελευταίο είναι ίσως και ο λόγος για τον οποίο η χρησιμότητα και η χρησιμοποίηση του μοντέλου συνεχίζεται ακόμη και τώρα έπειτα από δεκαετίες. Η μεγάλη έκπληξη κατά τη χρήση αυτού του μοντέλου είναι ότι συναντά κανείς αρνητικές τιμές των επιτοκίων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μοντέλο Vasicek διανέμεται κανονικά όπως θα δείξουμε. Είναι προφανές ότι κανείς δεν θα βάλει τα χρήματα στον δικό του αποταμιευτικό λογαριασμό ξέροντας ότι θα αξίζει λιγότερο τον επόμενο χρόνο από ό,τι είναι σήμερα, έτσι το να γίνεται εξάσκηση με αρνητικό επιτόκιο δεν είναι ρεαλιστικό. Ως εκ τούτου, μια καλύτερη εναλλακτική λύση είναι το μοντέλο Cox Ingersoll Ross (CIR), καθώς αυτό το μοντέλο δεν δημιουργεί αρνητικές τιμές επιτοκίων.

Το μοντέλο CIR είναι ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο σε σύγκριση με το μοντέλο Vasicek. Αποδεικνύεται ότι το μοντέλο CIR είναι πιο περίπλοκο.

2.1 Μοντέλο VASICEK

Για το μοντέλο Vasicek και το μοντέλο CIR υποθέτουμε ότι το επιτόκιο ακολουθεί μια διαδικασία Markov. Ορίζουμε $W(t)$ ως μια διαδικασία Wiener στον χώρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου (Ω, F, P) . Στη συνέχεια το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση ,

$$dr(t) = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t) \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια αγορά η οποία είναι τέλεια ρευστοποιήσιμη. Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν να αγοραστεί ή να πωληθεί ένα ομόλογο, ή υποδιαίρεσεις του ομολόγου σε οποιαδήποτε ποσότητα, σε κάθε δεδομένη στιγμή. Ορίζουμε την τιμή του ομολόγου $P(t, T)$, ως συνάρτηση του t και r , έτσι ώστε

$$P(t, T) = f(t, r) \quad (2)$$

Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση $f(t, r)$ είναι τουλάχιστον δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Έτσι κάνοντας χρήση στο λήμμα του Itô παίρνουμε:

$$\begin{aligned} df(t, r) &= \\ f_t dt + f_r dr + f_{rr} (dr)^2 &= \\ f_t dt + f_r (\mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t)) + \frac{1}{2} f_{rr} (\mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t))^2 &= \\ (f_t + f_r \mu(r, t) + \frac{1}{2} f_{rr} \sigma^2(r, t))dt + f_r \sigma(r, t)dW(t) & \quad (3) \end{aligned}$$

Θέλουμε να δημιουργήσουμε μία επένδυση αυτοχρηματοδότηση $\Pi(t)$, χωρίς κίνδυνο στον χρόνο t . Ορίζουμε b_1 και b_2 ως δύο αυθαίρετα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου με διαφορετικές ληκτότητες και διαφορετικές τιμές $f_1(t, r)$ και $f_2(t, r)$, για το καθένα αντίστοιχα. Επιπλέον ορίζουμε Δ_1 και Δ_2 ως την ποσότητα των ομολόγων για τα b_1 και b_2 για τα οποία θέλουμε να αγοράσουμε στο δικό μας

χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου. Η επιστροφή στο χαρτοφυλάκιο μας είναι η συνολική αθροιστική επιστροφή που συνοψίζεται από το καθένα από τα δύο αυθαίρετα ομόλογα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \Delta 1 \frac{df_1(t,r)}{df_1(t,r)} + \Delta 2 \frac{df_2(t,r)}{df_2(t,r)} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3) στην (4) παίρνουμε :

$$\begin{aligned} & \Delta 1 \frac{(f1_t + f1_r \mu(r,t) + \frac{1}{2} f1_{rr} \sigma^2(r,t))dt + f1_r \sigma(r,t) dW(t)}{f1(t,T)} + \Delta 2 \frac{(f2_t + f2_r \mu(r,t) + \frac{1}{2} f2_{rr} \sigma^2(r,t))dt + f2_r \sigma(r,t) dW(t)}{f2(t,T)} \\ &= \Delta 1 \hat{\mu}_1 dt + \Delta 1 \hat{\sigma}_1 dW(t) + \Delta 2 \hat{\mu}_2 dt + \Delta 2 \hat{\sigma}_2 dW(t) \\ &= (\Delta 1 \hat{\mu}_1 + \Delta 2 \hat{\mu}_2) dt + (\Delta 1 \hat{\sigma}_1 + \Delta 2 \hat{\sigma}_2) dW(t), \end{aligned}$$

με

$$\hat{\mu}_1 = \frac{(f1_t + f1_r \mu(r,t) + \frac{1}{2} f1_{rr} \sigma^2(r,t))dt}{f1(t,T)}$$

$$\Delta 1 = \frac{-\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1},$$

Και

$$\hat{\mu}_2 = \frac{(f2_t + f2_r \mu(r,t) + \frac{1}{2} f2_{rr} \sigma^2(r,t))dt}{f2(t,T)}$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{f2_r \sigma(r,t)}{f2(t,T)}.$$

Δεδομένου ότι θέλουμε ένα χαρτοφυλάκιο άνευ κινδύνου χρειαζόμαστε να εξαλείψουμε τον παράγοντα κίνδυνου, όπου εδώ είναι η διαδικασία Wiener.

Οι μεταβλητές $\Delta 1$ και $\Delta 2$ είναι οι μόνες που μπορούν να αλλάξουν, συνεπώς πρέπει να επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαλείφουν την διαδικασία Wiener.

Με άλλα λόγια,

$$\Delta 1 + \Delta 2 = 1$$

$$\Delta 1 \hat{\sigma}_1 + \Delta 2 \hat{\sigma}_2 = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχουμε:

$$\Delta 1 = \frac{-\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2}, \quad \Delta 2 = \frac{-\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1}$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις στην **(4)** παίρνουμε :

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \left(\hat{\mu}_1 \frac{-\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2} + \hat{\mu}_2 \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2} \right) dt \quad \text{(5)}$$

Το δικό μας χαρτοφυλάκιο Π , είναι μηδενικού κινδύνου ως εκ τούτου πρέπει να προσφέρει την ίδια απόδοση με οποιαδήποτε άλλη επένδυση μηδενικού κινδύνου. Μία ασφαλής επένδυση σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να είναι μια κατάθεση, αποταμίευση στην τράπεζα. Επομένως αν βάλουμε τα χρήματά μας σε έναν αποταμιευτικό λογαριασμό η αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = r dt \quad \text{(6)}$$

Αντικαθιστώντας την **(5)** στην **(6)** και μετά λύνοντας ως προς $r(t)$ αυτό θα μας δώσει:

$$r(t) = \frac{\hat{\mu}_2 \hat{\sigma}_1 - \hat{\mu}_1 \hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2} \quad \text{(7)}$$

Μπορούμε να την ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση όπως φαίνεται παρακάτω,

$$\frac{\hat{\mu}_1 - r}{\hat{\sigma}_1} = \frac{\hat{\mu}_2 - r}{\hat{\sigma}_2} \quad \text{(8)}$$

Ας ορίσουμε τώρα

$$\lambda(t) = \frac{\hat{\mu}_t - r(t)}{\hat{\sigma}_t} \quad (9)$$

Αυτή η παράμετρος $\lambda(t)$, ονομάζεται παράμετρος κινδύνου της αγοράς. Εάν τώρα συνοψίσουμε τις ποσότητες $\hat{\mu}_t$, $\hat{\sigma}_t$ στην (9) τότε παίρνουμε:

$$\lambda(t) = \frac{f_t + f_r \mu(r,t) + \frac{1}{2} f_{rr} \sigma^2(r,t) - rf(t,r)}{f_r \sigma(r,t)}$$

Αυτό μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$f_t(t,r) + (\mu(r,t) - \lambda(t)\sigma(r,t))f_r(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)f_{rr}(t,r) - rf(t,r) = 0 \quad (10)$$

Αν συμβολίσουμε με $f(t,r) = P(t,T)$, τότε παίρνουμε:

$$P_t(t,T) + (\mu(r,t) - \lambda(t)\sigma(r,t))P_r(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)P_{rr}(t,r) - rP(t,T) = 0 \quad (11)$$

Θέλουμε να εισάγουμε την τιμή ομολόγου στη ακόλουθη σχέση:

$$P(t,T) = e^{C(t,T) - B(t,T)r(t)} \quad (12)$$

Οι συναρτήσεις $B(t,T)$ και $C(t,T)$ βασίζονται μόνο στην μεταβλητή t . Για ευκολία ορίζουμε τις $B(t,T)$ και $C(t,T)$ ως συναρτήσεις με μία μεταβλητή τ , έχουμε αντίστοιχα $B(t,T) = B(\tau)$ και $C(t,T) = C(\tau)$. Για τα παράγωγα των $B(t,T)$, $C(t,T)$ που βασίζονται στο τ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} B_\tau(\tau) &= -B_t(\tau), \\ C_\tau(\tau) &= -C_t(\tau). \end{aligned} \quad (13), (14)$$

Στην συνέχεια εισάγουμε τις εξής σχέσεις,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \mu(r,t) - \lambda_t \sigma(r,t), \\ \tilde{\sigma} &= \sigma(r,t). \end{aligned} \quad (15), (16)$$

Ξαναγράφοντας την **(11)** κάνοντας χρήση των $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$ αποδόσεων έχουμε:

$$P_t + \tilde{\mu}P_r + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2P_{rr} - rP = 0 \quad (17)$$

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση του Vasicek μοντέλου είναι $dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$, **(2)** όπου κ, μ και σ είναι σταθερές μεταβλητές και W_t είναι μια διαδικασία Wiener. Μπορεί εύκολα να δειχθεί χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito, με $Y_t = e^{\kappa t} r_t$ ότι η λύση στο παραπάνω μοντέλο είναι η

$$r_{t+\Delta t} = e^{-\kappa\Delta t} r_t + \mu(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa t} dW_t \quad (2.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι η r_t ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση τις παρακάτω εκφράσεις, αντίστοιχα για την καθεμία ξεχωριστά.

$$E [r_{t+\Delta t} | r_t] = e^{-\kappa\Delta t} r_t + \mu(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \quad (2.2), (2.3)$$

$$Var [r_{t+\Delta t} | r_t] = \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)(1 - e^{-2\kappa\Delta t}).$$

Εάν το κ τείνει στο μηδέν τότε η αναμενόμενη μέση τιμή τείνει στο r_t και η διακύμανση τείνει στο μηδέν. Αντίθετα εάν το κ τείνει στο άπειρο βλέπουμε ότι η μέση τιμή ταυτίζεται με το μ και η διακύμανση με τον παράγοντα $\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου για το μοντέλο Vasicek. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να λύσουμε την

$$-C_\tau(\tau) - \tilde{\mu}B(\tau) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2B^2(\tau) - (1 - B_\tau(\tau))r = 0 \quad (18)$$

ως προς $\tilde{\mu} = \kappa(\mu - r)$,
 $\tilde{\sigma} = \sigma$.

Παίρνουμε $\frac{-dC(\tau)}{d\tau} - \kappa(\mu - r)B(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2B^2(\tau) - (1 - \frac{dB(\tau)}{d\tau})r = 0$.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την σχέση ως

$$\frac{-dC(\tau)}{d\tau} - \kappa\mu B(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau) - (1 - \kappa r B(\tau) - \frac{dB(\tau)}{d\tau})r = 0 \quad (19)$$

η οποία επαληθεύεται για κάθε r και για κάθε t για τα οποία πρέπει να έχουμε:

$$\frac{-dC(\tau)}{d\tau} - \kappa\mu B(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau) = 0 \quad (20)$$

και

$$\kappa B(\tau) + \frac{dB(\tau)}{d\tau} = 1 \quad (21)$$

Επιπλέον έχουμε ότι $P(T, T) = P(T=0) = e^{C(0) - B(0)r(T)}$ (22),

το οποίο συνοψίζει ότι $C(0) - B(0) = 0$ (23).

Βλέπουμε εύκολα ότι λύνοντας την $\frac{dB(\tau)}{d\tau} = e^{-\kappa\tau}$ (24) με $B(0) = 0$ παίρνουμε

$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$ (25). Στο επόμενο βήμα από την σχέση (25) \Rightarrow (20) και

ενσωματώνοντας την t χρονική στιγμή με το διάστημα $[t, T]$ δίνει :

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \int_t^T \kappa\mu B(T-s) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(T-s) ds \\ &= \int_t^T \kappa\mu \frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa} ds + \int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa}\right)^2 ds \\ &= \int_t^T \kappa\mu \frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa} ds + \int_t^T \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - 2e^{-\kappa(T-s)} + e^{-2\kappa(T-s)}) ds \\ &= -\mu(T-t) + \mu \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{\sigma^2}{2\kappa} (T-t) - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{\sigma^2}{2\kappa} \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \\ &= -\mu(\tau) + \mu B(\tau) + \frac{\sigma^2}{2\kappa} (\tau) - \frac{\sigma^2}{2\kappa} B(\tau) + \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(\frac{1 - e^{-2\kappa(T-s)}}{2\kappa}\right) \\ &= \frac{(B(\tau) - \tau)(\kappa^2 \mu - \frac{\sigma}{2})}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B^2(\tau) \end{aligned} \quad (26)$$

Συνεπώς, για την τιμή ομολόγου παίρνουμε

$$P(t, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r(t)} = e^{-rR(t, \tau)} \quad (27)$$

Με την βασική σχέση (2) έχουμε

$$dR(t, \tau) = \hat{\kappa}(\hat{\mu} - R(t, \tau))dt + \hat{\sigma}dWt \quad (28)$$

με

$$\kappa = \hat{\kappa} \quad (29)$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \quad (30)$$

$$\sigma = \frac{\tau}{B(\tau)}\hat{\sigma} \quad (31)$$

Επισημαίνοντας, οι τιμές καθορίστηκαν βάσει του μέτρου ουδέτερου κινδύνου. Παίρνουμε την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση για το $R(t, \tau)$,

$$dR_{(t, \tau)} = \kappa \left(\frac{B_\tau \mu}{\tau} - \frac{\ln(A_\tau)}{\tau} - R(t, \tau) \right) dt + \frac{B_\tau}{\tau} \sigma dWt \quad (32)$$

$$A(\tau) = \exp\left\{ \tau(\tau - B_\tau) \left(\frac{B_\tau}{\tau} \left[\frac{\sigma^2 B_\tau^2}{4\kappa(B_\tau - \tau)} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right] - \hat{\mu} \right) \right\} \quad (33)$$

$$\mu = (1 - B_\tau) \left(\frac{\sigma^2 B_\tau^2}{4\kappa(B_\tau - \tau)} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) - \hat{\mu} \quad (34)$$

2.2 Μοντέλο Cox Ingersoll Ross

Τώρα θεωρούμε το μοντέλο CIR .Η στοχαστική διαφορική εξίσωση του μοντέλου αυτού είναι $dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$, **(35)**

Όπου κ , μ και σ είναι σταθερές και W_t είναι μια διαδικασία Wiener . Χρησιμοποιώντας ξανά το λήμμα του Ίτο , όπως και στο μοντέλο του Vasicek μπορούμε να δείξουμε ότι το ακριβές διακριτό μοντέλο που αντιστοιχίζεται σύμφωνα με την παραπάνω σχέση , είναι το παρακάτω:

$$r_{t+\Delta t} = e^{-\kappa\Delta t}r_t + \mu(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa t} \sqrt{r_t} dW_t \quad (36)$$

Μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την μέση τιμή και την συνδιακύμανση της πιο πάνω διαδικασίας, η οποία μας δίνει ότι:

$$E[r_{t+\Delta t} | r_t] = e^{-\kappa\Delta t}r_t + \mu(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \quad (37)$$

$$Var[r_{t+\Delta t} | r_t] = e^{-\kappa\Delta t}r_t\left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \mu\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta t})^2 \quad (38)$$

Εάν το κ τείνει να ισούται με το μηδέν τότε η αναμενόμενη τείνει να ισούται με την ποσότητα r_t και η διακύμανση να ισούται με το μηδέν. Όμως, εάν το κ τείνει στο άπειρο βλέπουμε ότι η αναμενόμενη μέση τιμή τείνει στο μ και η διακύμανση τείνει στο $\mu\frac{\sigma^2}{2\kappa}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε ποια είναι η τιμή του ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου για το μοντέλο CIR. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να λύσουμε την **(18)** με:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \kappa(\mu - r), \\ \tilde{\sigma} &= \sigma\sqrt{r}. \end{aligned}$$

Για αυτόν τον λόγο παίρνουμε,

$$-\frac{dC(\tau)}{d\tau} - \kappa(\mu - r)B(\tau) + \frac{1}{2}\tau\sigma^2B^2(\tau) - (1 - \frac{dB(\tau)}{d\tau})r = 0 \quad (39)$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την σχέση ως,

$$-\frac{dC(\tau)}{d\tau} - \kappa\mu B(\tau) - (1 - \frac{1}{2}\sigma^2B^2(\tau) - \kappa r B(\tau))\frac{dB(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (40)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο όπως με το μοντέλο του Vasicek παίρνουμε

$$-\frac{dC(\tau)}{d\tau} - \kappa \mu B(\tau) = 0 \quad (41)$$

και

$$\kappa B(\tau) + \frac{dB(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(\tau) = 1, \quad (42)$$

με $B(0) = 0, C(0) = 0$.

Η διαδικασία επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης στο μοντέλο CIR είναι λίγο πιο δύσκολη συγκριτικά με το μοντέλο Vasicek .

$$B(\tau) = \frac{2\lambda(e^{\lambda\tau} - 1)}{2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\tau\lambda} - 1)}, \quad (43)$$

$$\lambda = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \quad (44)$$

Αυτό μας δίνει :

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\lambda\tau} - 1)}{2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\tau\lambda} - 1)} \quad (45)$$

$$B^2(\tau) = \frac{4(e^{\lambda\tau} - 1)^2}{(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\tau\lambda} - 1))^2} \quad (46)$$

Όπως αναμενόταν αυτή η λύση επιλύει την εξίσωση (42) και η λύση αυτή είναι μοναδική. Αντικαθιστούμε την εξίσωση (43) στην (41) κι έχουμε στην συνέχεια

$$C(\tau) = \int_t^T -\kappa \mu B(T-s) ds = \int_t^T -\kappa \mu \left(\frac{2(e^{\lambda(T-s)} - 1)}{2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{(T-s)\lambda} - 1)} \right) ds \quad (47)$$

Για να επιλυθεί πρέπει αρχικά να ξεκινήσουμε θέτοντας $x(s) = e^{\lambda(T-s)}$,

με $ds = -\frac{1}{\lambda x(s)} dx$.

Αυτό μας δίνει:

$$\begin{aligned}
 C(\tau) &= \int_t^T -2\kappa\mu \left(\frac{(e^{\lambda(T-s)} - 1)}{2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{(T-s)\lambda} - 1)} \right) ds = \int_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 -2\kappa\mu \left(\frac{-(x-1)}{\lambda x(2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1))} \right) ds \\
 &= \int_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left(\frac{1}{(2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1))} - \frac{1}{x(2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1))} \right) dx \\
 &= \int_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left(\frac{1}{2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1)} - \frac{\lambda + \kappa}{(\kappa - \lambda)(2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1))} - \frac{1}{x(\lambda - \kappa)} \right) dx \quad (48)
 \end{aligned}$$

Έπειτα έχουμε την εξής αντικατάσταση

$$y(x) = 2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1), \quad \text{Με } dx = \frac{1}{\lambda + \kappa} dy$$

Αυτό οδηγεί στο,

$$\begin{aligned}
 C(\tau) &= \int_{2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-\tau)} - 1)}^{2\lambda - (\lambda + \kappa)} \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left(\frac{1}{(\lambda + \kappa)(y)} - \frac{1}{(\kappa - \lambda)y} \right) dy - \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \int_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 \frac{1}{(\lambda - \kappa)x} dx \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left(\left[\frac{1}{(\lambda + \kappa)} \ln(y) - \frac{1}{(\kappa - \lambda)} \ln(y) \right]_{2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-\tau)} - 1)}^{2\lambda - (\lambda + \kappa)} \right) - \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda - \kappa)} \ln(x) \right]_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda + \kappa)} [\ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1))] - \frac{1}{(\kappa - \lambda)} \ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(x-1)) \right]_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 \\
 &\quad - \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda - \kappa)} \ln(x) \right]_{e^{\lambda(T-\tau)}}^1 \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda + \kappa)} [\ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-s)} - 1))] - \frac{1}{(\kappa - \lambda)} \ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-s)} - 1))] \right]_t^T \\
 &\quad - \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda - \kappa)} \ln(e^{\lambda(T-s)}) \right]_t^T \quad (49)
 \end{aligned}$$

Αντί να αντικαταστήσουμε τα όρια μέσα στην κύρια παράσταση για την επίλυση θα απλουστεύσουμε την παραπάνω εξίσωση έτσι ώστε να χρησιμοποιούμε μια ευκολότερη μορφή για την μελλοντική χρήση της.

$$\begin{aligned}
 C(\tau) &= \frac{2\kappa\mu}{\lambda} [\ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-s)} - 1))]_{(\kappa^2 - \lambda^2)}^{-2\lambda} \Big|_t^T - \frac{2\kappa\mu}{\lambda} \left[\frac{1}{(\lambda - \kappa)} \ln(e^{\lambda(T-s)}) \right]_t^T \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{\lambda} [\ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-s)} - 1))]_{(\kappa^2 - \lambda^2)}^{-2\lambda} \Big|_t^T - \frac{2\kappa\mu}{\lambda} [\ln[e^{\frac{(T-s)(\kappa + \lambda)}{2}}]]_{(\kappa^2 - \lambda^2)}^{-2\lambda} \Big|_t^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-4\kappa\mu}{(\kappa^2 - \lambda^2)} [\ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-s)} - 1)) - \ln(e^{\frac{(T-s)(\kappa+\lambda)}{2}})]_t^T \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{(\sigma^2)} [\ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda(T-s)} - 1)) - \ln(e^{\frac{(T-s)(\kappa+\lambda)}{2}})]_t^T \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{(\sigma^2)} [\ln(2\lambda) - \ln(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda\tau} - 1)) + \ln(e^{\frac{(\tau)(\kappa+\lambda)}{2}})] \\
 &= \frac{2\kappa\mu}{(\sigma^2)} \ln \frac{2\lambda e^{\frac{(\lambda+\kappa)(\tau)}{2}}}{(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda\tau} - 1))} \cdot \quad \mathbf{(50)}
 \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε μια φόρμουλα για το ομόλογο zero coupon για το μοντέλο CIR η οποία δίνεται ως εξής

$$P(t, T) = A(\tau)e^{-B(\tau)r(t)} = e^{-\tau R(t, \tau)} \quad \mathbf{(51)}$$

Με

$$A(\tau) = \left(\frac{2\lambda e^{\frac{(\lambda+\kappa)(\tau)}{2}}}{(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda\tau} - 1))} \right)^{\frac{2\kappa\mu}{\sigma^2}} \quad \mathbf{(52)}$$

$$B(\tau) = \frac{(e^{\lambda\tau} - 1)^2}{(2\lambda + (\lambda + \kappa)(e^{\lambda\tau} - 1))} \quad \mathbf{(53)}$$

$$\text{όπου } \lambda = \sqrt{\kappa^2 + \sigma^2} \text{ .}$$

Τώρα θα πρέπει να επαναλάβουμε τα ίδια βήματα όπως στο μοντέλο Vasicek. Κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου παίρνουμε την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση για την σχέση $R(t, \tau)$,

$$. dR(t, \tau) = \frac{B_\tau}{\tau} \left[\kappa(\mu - \frac{\tau R(t, \tau) + \ln(A_\tau)}{B_\tau}) \right] dt + \sigma \sqrt{\frac{\tau R(t, \tau) + \ln(A_\tau)}{B_\tau}}] dW_t \quad \mathbf{(54)}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση $R(t, \tau)$ με την ακόλουθη φόρμα :

$$dR(t, \tau) = \frac{B_\tau}{\tau} \left[\kappa \left(\mu - \frac{\tau R(t, \tau) + \ln(A_\tau)}{B_\tau} \right) dt + \sigma \sqrt{\frac{\tau R(t, \tau) + \ln(A_\tau)}{B_\tau}}] dW_t \quad (55)$$

2.3 Γενικευμένο μοντέλο VASICEK – HULL AND WHITE (1990)

Η προτεινόμενη επέκταση του Vasicek μοντέλου δίνεται από την παρακάτω βασική σχέση και θέτοντας $\beta=0$.

$$dr = [\theta(t) + \alpha(t)(b - r)]dt + \sigma(t)r^\beta dz.$$

Θα υποθέσουμε ότι η αγοραία τιμή του επιτοκίου είναι μία συνάρτηση του χρόνου, $X(t)$, η οποία οριοθετείται στο διάστημα $(0, \tau)$. Αυτό σύμφωνα με τους Cox, Ingersoll, και Ross (1985a), σημαίνει ότι η τιμή, f , οποιουδήποτε ενδεχομένου που εξαρτάται από το r πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$f_t + [\varphi(t) - \alpha(t)r]f_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 f_{rr} - rf = 0, \quad (56)$$

όπου $\varphi(t) = a(t)b + \theta(t) - \lambda(t)\sigma(t)$. Η τιμή ενός εκπτώτικου ομολόγου που πληρώνει 1\$ την χρονική στιγμή T είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη $f=1$ όταν $t=T$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση:

$$f = A(t, T)e^{-B(t, T)r}. \quad (57)$$

Αυτή ικανοποιεί την (56) και την οριακή συνθήκη όταν:

$$A_t - \varphi(t)AB + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 AB^2 = 0 \quad (58) \text{ και } B_t - \alpha(t)B + 1 = 0, \quad (59)$$

με $A(T, T) = 1$ και $B(T, T) = 0$. (60) Εάν οι σχέσεις (58) και (59) έχουν λυθεί με βάση τις οριακές συνθήκες στην (61), η εξίσωση (58) προσδιορίζει την τιμή ενός εκπτώτικου ομολόγου την χρονική στιγμή T . Λύνοντας τις (58), (59) σχέσεις όπου $\varphi(t)$ και $\sigma(t)$ σταθερές οδηγούμαστε στην εξής φόρμουλα τιμολόγησης ομολόγων μέσω του Vasicek :

$$B(t,T) = (1 - e^{-a(T-t)})/a,$$

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T) - T + t)(\alpha\phi - \sigma^2/2)}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right].$$

Η συνάρτηση $\sigma(t)$ θα έπρεπε να επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει τις τρέχουσες και μελλοντικές μεταβλητότητες των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων r . Όπως θα δείξουμε αργότερα, $A(0,T)$, $B(0,T)$ ορίζονται από το $\sigma(0)$, δηλαδή την τρέχουσα διάρθρωση επιτοκίων ή την τρέχουσα διάρθρωση των τρεχουσών ή προθεσμιακών επιτοκιακών μεταβλητοτήτων. Αρχικά πρώτα πρέπει να προσδιοριστούν τα $\alpha(t)$, $\phi(t)$, $A(t,T)$, $B(t,T)$ στα πλαίσια των $A(0,T)$, $B(0,T)$ και $\sigma(t)$.

Παραγωγίζοντας τις (7) και (8) ως προς T έχουμε τις :

$$A_{tT} - \phi(t)[A_T B + A B_T] + \sigma(t)^2 [A_T B^2 + 2A B B_T] / 2 = 0, \quad (61)$$

$$B_t B_T - \alpha(t) B_T = 0. \quad (62)$$

Εξαλείφοντας τον παράγοντα $\alpha(t)$ από τις (8) και (11) παρουσιάζεται η εξής σχέση:

$$B_t B_T - B B_{tT} + B_T = 0. \quad (63)$$

Επίσης εξαλείφοντας τον παράγοντα $\alpha(t)$ από τις (7) και (10) προκύπτει η εξής σχέση:

$$A B A_{tT} - B A_t A_T - A A_t B_T + \sigma(t)^2 A^2 B^2 B_T / 2 = 0. \quad (64)$$

Οι οριακές συνθήκες για τις (62) και (63) είναι οι γνωστές $A(0,T)$ και $B(0,T)$, $A(T,T)=1$ και $B(T,T)=0$. Οι λύσεις για τις (62) και (63) που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες είναι:

$$B(t,T) = \frac{B(0,T) - B(0,t)}{\partial B(0,t) / \partial t}, \quad (65)$$

$$\hat{A}(t,T) = \hat{A}(0,T) - \hat{A}(0,t) - B(t,T) \frac{\partial \hat{A}(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[B(t,T) \frac{\partial B(0,t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0,\tau)/\partial \tau} \right]^2 d\tau, \quad (66)$$

όπου $\hat{A}(t,T) = \log[A(t,T)]$.

Υποκαθιστώντας στις σχέσεις (58) , (59) έχουμε ,

$$a(t) = -\frac{\partial^2 B(0,t)/\partial t^2}{\partial B(0,t)/\partial t}, \quad (67)$$

$$\varphi(t) = -\alpha(t) \frac{\partial \hat{A}(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{A}(0,t)}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial B(0,t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0,\tau)/\partial \tau} \right]^2 dt. \quad (68)$$

Στην συνέχεια θα συζητήσουμε σχετικά με την αποτίμηση των δικαιωμάτων υπό την επεκτεταμένη μορφή του Vasicek μοντέλου. Ορίζουμε ως $P(r,t_1,t_2)$ την τιμή ενός εκπτώτικου ομολόγου την χρονική στιγμή t_1 το οποίο λήγει την χρονική στιγμή t_2 . Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση έχουμε ,

$$P(r,t_1,t_2) = A(t_1,t_2) e^{-B(t_1,t_2)r} \quad (69)$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ίτο η μεταβλητότητα του $P(r,t_1,t_2)$ είναι $\sigma(t_1) B(t_1,t_2)$. Η κατανομή της τιμής ενός ομολόγου σε οποιαδήποτε πρώιμη στιγμή είναι λογαριθμοκανονική . Θεωρούμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε ένα εκπτώτικό ομόλογο με τιμή εξάσκησης X . Το δικαίωμα λήγει την T χρονική στιγμή ενώ το ομόλογο την S στιγμή ($S \geq T \geq t$). Το δικαίωμα αγοράς μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικαίωμα για την ανταλλαγή X μονάδων ενός εκπτώτικου ομολόγου που λήγει την στιγμή T για μία μονάδα ενός εκπτώτικου ομολόγου που λήγει την στιγμή T . Ορίζουμε $\alpha_1(t)$ και $\alpha_2(t)$ τις μεταβλητότητες την χρονική στιγμή t των τιμών των ομολόγων που λήγουν τις στιγμές T και S ,αντίστοιχα, $\rho(t)$ είναι η στιγμιαία συσχέτιση μεταξύ των δύο τιμών των ομολόγων. Από την λογαριθμοκανονική θεωρία που αναπτύχθηκε και από τα συμπεράσματα του Merton (1973) , η τιμή του δικαιώματος αγοράς , C , έχει ως ακολούθως:

$$C = P(r,t,s)N(b) - XP(r,t,T)N(b - \sigma_p), \quad (70)$$

όπου

$$b = \frac{1}{\sigma_p} \log \frac{P(r,t,s)}{P(r,t,T)X} + \frac{\sigma_p}{2},$$

$$\sigma_p^2 = \int_t^T [a_1(\tau)^2 - 2\rho(\tau)\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau) + \alpha_2(\tau)^2] d\tau, \quad (71)$$

Με $N(\cdot)$ συμβολίσαμε την κανονική συνάρτηση κατανομής. Για όσο χρησιμοποιούμε το μονοπαράγοντικό μοντέλο τότε θα ισχύει $\rho=1$. Επιπλέον

$$\alpha_1(\tau) = \sigma(\tau)B(\tau, S),$$

$$\alpha_2(\tau) = \sigma(\tau)B(\tau, T).$$

Κάνοντας τις πράξεις,

$$\sigma_p^2 = \int_t^T \sigma(\tau)^2 [B(\tau, s) - B(\tau, T)]^2 d\tau.$$

Από την σχέση (14) αυτή η σχέση μετατρέπεται σε

$$\sigma_p^2 = [B(0, s) - B(0, T)]^2 \int_t^T \left[\frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right]^2 d\tau. \quad (72)$$

Οι σχέσεις (70) και (72) παρέχουν μια απλή αναλυτική λύση για τις τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς. Τα ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης μπορούν να βρεθούν κάνοντας χρήση της εξίσωσης put – call parity. Στην περίπτωση που a και σ είναι σταθερές,

$$B(\tau, s) = (1 - e^{-a(s-\tau)}) / a,$$

$$B(\tau, T) = (1 - e^{-a(T-\tau)}) / a,$$

Και η σχέση (72) γίνεται

$$\sigma_p = v(t, T)(1 - e^{-a(s-T)}) / a$$

Όπου

$$v(t,T)^2 = \sigma^2(1 - e^{-2a(T-t)}) / 2a.$$

Αυτό είναι το αποτέλεσμα Jamshidian(1989). Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το αποτέλεσμα του Jamshidian δεν εξαρτάται από τις $\theta(t)$ και $\lambda(t)$.

Για να αποτιμήσουμε ευρωπαϊκά δικαιώματα σε coupon bearing bonds, θεωρούμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα με τιμή εξάσκησης X και λήξη την T στιγμή σε ένα coupon bearing bond το οποίο πληρώνει c_i την i χρονική στιγμή $s_i > T$ ($1 \leq i \leq n$). Το δικαίωμα θα εξασκηθεί όταν $r(T) < r^*$, όπου r^* είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης

$$\sum_{i=1}^n c_i P(r^*, T, s_i) = X.$$

Η συνάρτηση payoff του δικαιώματος είναι

.

Ισοδύναμα έχουμε
$$\sum_{i=1}^n c_i \max[0, P(r, T, s_i) - X_t],$$

όπου $X_t = P(r^*, T, s_t)$

Το δικαίωμα στο coupon bearing bond είναι το άθροισμα n δικαιωμάτων με τιμή εξάσκησης του i -οστού δικαιώματος, X_i . Τα αμερικάνικα δικαιώματα ομολόγων και άλλα ενδεχόμενα παρόμοια μπορούν να αποτιμηθούν αφού πρώτα υπολογιστεί το $\alpha(t)$ και $\varphi(t)$ από τις (68) και (69) και έπειτα γίνει χρήση των αριθμητικών διαδικασιών για να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση στην (56) σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες.

2.4 Διωνυμικά και τριωνυμικά δέντρα για την αποτίμηση των μοντέλων

Όπως έχουμε αναφέρει τα μονοπαραγοντικά μοντέλα είναι σημαντικά εργαλεία για την αποτίμηση επιτοκιακών παραγώγων. Διωνυμικά και τριωνυμικά δέντρα εξάγουν ορισμένες εναλλακτικές εύκολες να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να ταιριάξουν διάφορες μέθοδοι επάνω στα μοντέλα. Όταν ολοκληρωθεί η διάρθρωση και υπολογιστεί σε κάθε κόμβο, το δέντρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί να αποτιμήσει ένα ευρύ φάσμα των παραγώγων ή να λειτουργήσει ως ένα εργαλείο για την προσομοίωση της εξέλιξης του όρου διάρθρωσης – δομής. Πολλοί συγγραφείς δείχνουν πως τα δέντρα μπορούν να χτιστούν για ιδιαίτερα μοντέλα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συνεπή με την αρχική διάρθρωση των επιτοκίων. Παραδείγματος χάρη, τα μοντέλα Ho and Lee(1986) Black et al (1990), Black and Karasinski(1991) και Kalotay et al (1993) Hull και White (1994,1996) δείχνουν πως ένα τριωνυμικό δέντρο μπορεί να κατασκευαστεί όταν το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ή συναρτήσεις αυτού θεωρείται ότι ακολουθεί την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck με εξάρτηση στον χρόνο. Στο Hull και White μοντέλο, το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί κανονική τιμή για όλες τις τιμές επιτοκίου όπως και το μοντέλο Ho–Lee, ενώ τα υπόλοιπα τρία μοντέλα ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή για όλες τις τιμές επιτοκίου.

Κριτική των τριωνυμικών δέντρων Hull and White

Οι Hull –White (1994,1996) θεωρούν μοντέλα της εξής φόρμουλας $dx = [\theta(t) - ax]dt + \sigma dz$, όπου x είναι μία συνάρτηση $f(r)$ του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου r , a, σ σταθερές και όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα dz είναι μια διαδικασία Wiener. Πριν προχωρήσουμε πιο αναλυτικά στην προσέγγιση των Hull – White αναφέρουμε επιγραμματικά για τις συναρτήσεις $f(r)$ των τυχαία προαναφερόμενων μοντέλων ώστε να υπάρχει μια ενδεικτική διαχώριση μεταξύ τους.

Hull –White (1990) : $f(r)=r$

Ho-Lee(1986) : $f(r)=r$, $\alpha=0$

Black and Karasinski(1991) : $f(r)=\ln(r)$

Kalotay et al (1993): $f(r)=\ln(r)$ και $\alpha=0$ όπου,

α :ρυθμός αποστροφής

$\theta(t)/\alpha$: εξαρτώμενο από τον χρόνο με $\theta(t)$ να επιλέγεται έτσι ώστε να ταιριάζει με την αρχική διάρθρωση.

Τώρα πιο συγκεκριμένα, η προσέγγιση Hull –White περιλαμβάνει την κατασκευή ενός τριωνυμικού δέντρου για x^* , όπου $dx^*=-ax^*dt+\sigma dz$. Υποθέτουμε ότι το μέγεθος του βήματος είναι Δt με μέση τιμή και διασπορά να είναι ίσες με $-ax^*$ και σ^2 αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες τιμές αυτές προκύπτουν από την παραπάνω κύρια σχέση. Στο τριωνυμικό δέντρο η κάθετη απόσταση Δx^* μεταξύ των κόμβων είναι $\sigma\sqrt{3\Delta t}$. Η κανονική τριωνυμική διαδικασία χρησιμοποιείται για όλους τους κόμβους οι οποίοι ισούνται με λιγότερο από $0.184/(a\Delta t)$ από το κέντρο του δέντρου , ο κόμβος που βρίσκεται από επάνω ισούται με $0.184/(a\Delta t)$ ενώ ο κάτω κόμβος ισούται με $-0.184/(a\Delta t)$. Ορίζουμε μία νέα μεταβλητή $x=x^*+\varphi(t)$. Η διαδικασία που ακολουθεί το x είναι η εξής $dx=[\theta(t)-\alpha x]dt+\sigma dz$, όπου $\theta(t)=\varphi'(t)+a\varphi(t)$.

Από την εξίσωση (1) και διαμέσου του x^* ψάχνουμε να βρούμε την συνάρτηση $\varphi(t)$ που ταιριάζει στην αρχική διάρθρωση. Ξεκινάμε από τον χρόνο 0 στον χρόνο $i\Delta t$ σε όλους τους κόμβους με α_i έτσι ώστε το μηδενικό ομόλογο να τιμολογείται σωστά την στιγμή $(i+1)\Delta t$. Η αξία του r σε έναν κόμβο υπολογίζεται από την αξία του x σε έναν κόμβο ως $f^{-1}(x)$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το επιτόκιο στο δέντρο στις Δt περιόδους επιτοκίου ,είναι εκφρασμένο με συνεχή ανατοκισμό. Η διάκριση στο ότι δεν είναι το στιγμιαίο επιτόκιο αποδεικνύει ότι το μοντέλο των Hull and White(1990) αλλά και το μοντέλο των Ho and Lee (1986) χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό για αναλυτικές εκφράσεις για τις τιμές των ομολόγων και των ευρωπαϊκών επιλογών. Για το $f(r)$ ή απλά το r ,δίνεται η διαδικασία από το λήμμα του Ίτο,

$dr = \{[\theta(t) - \alpha x]h(x) + h'(x)\sigma^2/2\}dt + \sigma h(x)dz$ όπου $h(x) = dr/dx$. Το σχήμα της μεταβλητότητας του $h(x)$, καθορίζει την κλίση του r . Στην περίπτωση του Black and Karasinski η διαδικασία για το r είναι $dr = r\{\theta(t) - a \ln(r) + \sigma^2/2\}dt + \sigma r dz$.

2.5 Γενικευμένο μοντέλο CIR

Η προτεινόμενη επέκταση του μοντέλου CIR δίνεται από την βασική μας σχέση $dr = [\theta(t) + \alpha(t)(b-r)]dt + \sigma(t)r^\beta dz$, την οποία χρησιμοποιήσαμε και στο μοντέλο του Vasicek. Από αυτήν λοιπόν την σχέση και για $\beta=0,5$ έχουμε

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b-r)]dt + \sigma(t)\sqrt{r}dz.$$

Επισημαίνουμε ότι η τιμή αγοράς του κινδύνου επιτοκίου είναι $\lambda(t)\sqrt{r}$ για λ συνάρτηση του χρόνου η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, \tau)$. Η διαφορική εξίσωση η οποία πρέπει να ικανοποιείται από την τιμή f οποιουδήποτε επιτοκίου r είναι

$$f_t + [\varphi(t) - \psi(t)r]f_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 r f_{rr} - rf = 0, \quad (73)$$

όπου, $\varphi(t) = a(t)b + \theta(t)$

Και $\psi(t) = a(t) + \lambda(t)\sigma(t)$.

Όπως και στην επέκταση του μοντέλου Vasicek έτσι και τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $f = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$. (74)

Αυτή ικανοποιεί την εξίσωση (73)

όταν $A_t - \varphi(t)A = 0$ (75)

Και

$$B_t - \psi(t)B - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 B^2 + 1 = 0. \quad (76)$$

Εάν A και B είναι οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων **(75)** και **(76)** με τις οριακές συνθήκες $A(T,T)=1$ και $B(T,T)=0$ η **(74)** δίνει την τιμή στον χρόνο t ενός εκπτώτικου ομολόγου το οποίο λήγει την στιγμή T . Επιλύοντας τις εξισώσεις **(76)** και **(76)** για την περίπτωση κατά την οποία $\varphi(t), \psi(t), \sigma(t)$ είναι σταθερές και οδηγούν στην CIR φόρμα τιμολόγησης :

$$\int_0^T \varphi(s)B(s,T)ds = -\log A(0,T). \quad (77)$$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\psi)(T-t)/2}}{(\gamma+\psi)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2\varphi/\sigma^2}, \quad (78)$$

Όπου $\gamma = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$

$$B_t B_T - B B_{tT} + B_T + \sigma(t)^2 B^2 B_T / 2 = 0$$

$$A(t,T) = A(0,T) \exp \left[\int_0^t \varphi(s)B(s,T)ds \right].$$

$$\int_0^T \varphi(s)B(s,T)ds = -\log A(0,T).$$

2.6 Interest Rate Caps

Ένα δημοφιλές interest rate option το οποίο προσφέρεται στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα στην εξωχρηματιστηριακή αγορά είναι το interest rate cap. Είναι ένα είδος παραγώγων επιτοκίου στο οποίο ο αγοραστής λαμβάνει πληρωμές στο τέλος της κάθε περιόδου κατά την οποία το επιτόκιο υπερβαίνει τη συμφωνηθείσα τιμή άσκησης. Τα interest rate caps γίνονται καλύτερα κατανοητά όταν θεωρήσουμε αρχικά ένα κυμαινόμενο επιτόκιο (floating-rate note) όπου το επιτόκιο επανέρχεται σε τακτά χρονικά διαστήματα και ισούται με το επιτόκιο LIBOR. Η χρονική στιγμή ανάμεσα σε αυτά τα τακτά διαστήματα ονομάζεται και είναι γνωστή ως tenor. Για την καλύτερη κατανόησή του παραθέτουμε το επόμενο παράδειγμα. Έστω ότι ο όρος tenor ισούται με 3 μήνες. Το επιτόκιο για τους πρώτους 3 μήνες ισούται με το αρχικό τριμηνιαίο LIBOR επιτόκιο. Το επιτόκιο για τους επόμενους 3 μήνες ισούται με θεωρείται ίσο με το ισχύον επιτόκιο στην αγορά στο τριμηνιαίο σύνολο και ούτω καθεξής.

Ένα interest rate cap σχεδιάστηκε για να παρέχει ασφάλιση έτσι ώστε ο ρυθμός επιτοκίου στο κυμαινόμενο επιτόκιο να μην ξεπεράσει το επιτόκιο πάνω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Αυτό το επίπεδο είναι γνωστό ως cap rate. Υποθέτουμε ότι το κύριο ποσό ισούται με 10 εκατομμύρια δολάρια, η πορεία, tenor ισούται με 3 μήνες και η ζωή του cap ισούται με 5 χρόνια, επίσης το επιτόκιο του cap ισούται με 4%. Το cap παρέχει ασφάλιση για το επιτόκιο έτσι ώστε να μην ξεπεράσει το επίπεδο του 4% ποσοστιαία.

Το cap rate εκφράζεται σε τετραμηνιαίο ρυθμό καθώς οι πληρωμές γίνονται σε τετραμηνιαία βάση. Αγνοούμε ημερήσιες μετρήσεις και συνοψίζουμε ότι είναι ακριβώς 0.25 έτη ακριβώς ανάμεσα σε κάθε ημερομηνία πληρωμής. Υποθέτουμε ότι σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία το τριμηνιαίο LIBOR επιτόκιο ισούται με 5%. Συνεπώς το κυμαινόμενο επιτόκιο θα απαιτούσε

$$0.25 \times 0.05 \times \$10,000,000 = \$125,000$$

έτσι ώστε να πληρωθούν τους επόμενους 3 μήνες. Με το τριμηνιαίο επιτόκιο LIBOR να ήταν 4% η επιτοκιακή πληρωμή θα ήταν

$$0.25 \times 0.04 \times \$10,000,000 = \$100,00$$

Για αυτόν το λόγο το cap προσφέρει μία εξόφληση των \$ 25,000. Η εξόφληση δεν υφίσταται στην ημερομηνία επαναφοράς (reset day) αλλά συμβαίνει 3 μήνες αργότερα.

Σε κάθε μία ημερομηνία επαναφοράς κατά την διάρκεια της ζωής του cap το LIBOR παρατηρείται και πιο συγκεκριμένα εάν είναι μικρότερο από 4% τότε δεν υπάρχει εξόφληση από το cap για τους επόμενους 3 μήνες. Εάν όμως το LIBOR είναι μεγαλύτερο από 4% τότε η εξόφληση είναι το ένα τέταρτο του αρχικού ποσού των \$10,000,000. Ας σημειώσουμε ότι τα caps είναι συχνά ορισμένα έτσι ώστε το αρχικό LIBOR επιτόκιο, ακόμη και εάν είναι μεγαλύτερο από το cap rate να μην οδηγεί αμέσως σε μία πληρωμή στην πρώτη ημερομηνία επαναφοράς. Στο παράδειγμά μας το cap διαρκεί 5 χρόνια. Υπάρχουν για αυτόν τον λόγο συνολικά 19 ημερομηνίες επαναφοράς τις χρονικές στιγμές (0.25 , 0.50,0.75,.....,4.75 χρόνια) και 19 ενδεχόμενες εξοφλήσεις από τα caps τις χρονικές στιγμές (0.50,0.75,1.00,.....,5.00 χρόνια).

2.7 Τα CAPS ως χαρτοφυλάκιο των Interest Rate Options

Θεωρούμε ένα cap με συνολική διάρκεια ζωής T , αρχικό κεφάλαιο L , και επιτόκιο cap το οποίο το συμβολίζουμε με R_K .

Υποθέτουμε ότι οι ημερομηνίες επαναφοράς είναι t_1, t_2, \dots, t_n με $t_{n+1} = T$.

Ορίζουμε R_k ως το LIBOR επιτόκιο για την περίοδο ανάμεσα στις στιγμές t_k και t_{k+1} παρατηρούμενο την στιγμή t_k όπου $1 \leq k \leq n$. Το cap οδηγεί σε μία εξόφληση την στιγμή t_{k+1} όπου η φόρμουλα δίνεται από τον εξής τύπο :

$$L \delta_k \max(R_k - R_K, 0), \quad (79)$$

$$\text{όπου } \delta_k = t_{k+1} - t_k. \quad (80)$$

Και τα δύο χρησιμοποιούμενα επιτόκια εκφράζονται σε συχνότητα ανάλογη με των ημερομηνιών.

Η παραπάνω είναι συνάρτηση payoff ενός call option με LIBOR επιτόκιο προσφερόμενο την χρονική στιγμή t_k με την εξόφληση να συμβαίνει την στιγμή t_{k+1} . Το cap λοιπόν, είναι ένα χαρτοφυλάκιο n options. Τα επιτόκια LIBOR αναλογούν στις χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_n και οι αντίστοιχες πληρωμές εμφανίζονται τις στιγμές t_2, t_3, \dots, t_{n+1} . Τα n call options τα οποία ανήκουν στο cap ονομάζονται caplets.

2.7.1 Χαρακτηρισμός του cap ως ένα χαρτοφυλάκιο των Bond Options

Ένα interest rate cap μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί ως ένα χαρτοφυλάκιο put options σε zero coupon bonds με τις εξοφλήσεις των puts να λαμβάνονται την χρονική στιγμή την οποία υπολογίζονται. Η προηγούμενη συνάρτηση payoff την στιγμή t_{k+1} είναι ισοδύναμη με

$$\frac{L\delta_k}{1+R_k\delta_k} \max(R_k - R_K, 0) \quad (80)$$

την στιγμή t_k .

$$\max\left[L - \frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}, 0\right] \quad (81)$$

Η έκφραση $\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$ (80) είναι η τιμή την t_k ενός zero-coupon bond το οποίο

πληρώνει $L(1+R_K\delta_k)$ την στιγμή t_{k+1} . Συνεπώς η έκφραση στην σχέση (81)

δηλώνει την συνάρτηση εξόφλησης για ένα put option με ληκτότητα t_k σε ένα zero coupon bond με ληκτότητα t_{k+1} όταν η ονομαστική αξία είναι του ομολόγου είναι $L(1+R_K\delta_k)$ και η τιμή εξάσκησης να ισούται με L. Συνοψίζοντας ακολουθεί

ότι ένα interest rate cap μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ευρωπαϊκά put options πάνω σε zero coupon bonds.

2.8 Floors και Collars

Ανάλογα με τα caps ορίζονται και τα interest rate floors και interest rate collars τα οποία μερικές φορές ονομάζονται και floor – ceiling agreements. Ένα floor παρέχει μια συνάρτηση εξόφλησης όταν το κυμαινόμενο επιτόκιο βρεθεί κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει και πριν η συνάρτηση payoff την χρονική στιγμή t_{k+1} είναι η εξής:

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0).$$

Αναλογικά όπως το interest rate cap, το interest rate floor είναι ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από put options σε interest rates, ή ένα χαρτοφυλάκιο από call options σε zero coupon bonds. Κάθε ένα από τα συγκεκριμένα options που περιλαμβάνει ένα floor ονομάζεται floorlet.

Ο συνδυασμός ανάμεσα σε μία long θέση σε ένα cap και σε μία short θέση σε ένα floor ονομάζεται collar και χρησιμοποιείται έτσι ώστε να περιορίζει το επιτόκιο στο κυμαινόμενο LIBOR-note ανάμεσα σε συγκεκριμένα δύο επίπεδα που ορίζονται. Συνήθως ορίζεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η τιμή του cap και η τιμή του floor να είναι ίσες .

2.8.1 Αποτίμηση των CAPS και FLOORS

Όπως είπαμε και πριν το caplet που αντιστοιχεί την χρονική στιγμή t_k περιλαμβάνει μία εξόφληση την χρονική στιγμή t_{k+1} δηλαδή την σχέση

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0).$$

Η αξία του caplet ισούται με

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d1) - R_K N(d2)]$$

$$d1 = \frac{\ln(F_k / R_K) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d2 = \frac{\ln(F_k / R_K) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

όπου F_k το προθεσμιακό επιτόκιο την χρονική στιγμή 0 για την περίοδο ανάμεσα στις στιγμές t_k, t_{k+1} .

Για τα δικά μας μοντέλα χρησιμοποιούμε την τιμή P **(69)** από την βασική μας σχέση η οποία βρίσκεται στο κεφάλαιο 2 στην περιγραφή του γενικευμένου μοντέλου Vasicek και CIR.

Κεφάλαιο 3 Αριθμητική Ανάλυση

3.1 Αριθμητική ανάλυση των μοντέλων **Extended Vasicek & CIR**

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε τις ιδιότητες των μοντέλων καθώς και αναλύσαμε τις επεκτάσεις των κύριων μοντέλων, του Vasicek (1977) καθώς και των Cox, Ingersoll και Ross (1985b). Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο τα δεδομένα της αγοράς μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να δείξουμε πως η διαδικασία ακολουθούμενη από το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στα δύο μοντέλα μπορεί να συνάγεται από την χρονική διάρθρωση επιτοκίων και από την διάρθρωση άμεσης ή προθεσμιακής μεταβλητότητας των επιτοκίων. Μόλις το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ληφθεί τότε το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποτιμήσει οποιαδήποτε απαίτηση.

Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν ευρωπαϊκά δικαιώματα ομολόγων. Τα μοντέλα θα είναι εξοπλισμένα με την ίδια χρονική διάρθρωση επιτοκίων και μεταβλητότητας, με ίδια δεδομένα σχετικά με την αναμενόμενη μελλοντική στιγμιαία τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και αυτά τα δεδομένα θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων μας. Κάνοντας την παραπάνω εμπειρική διαδικασία θα δούμε κατά πόσο τα μοντέλα παρουσιάζουν παρόμοιες τιμές για διάφορες τιμές εξάσκησης και τιμές ληκτότητας. Η αριθμητική ανάλυση θα γίνει με την βοήθεια της Matlab.

Για αρχή θα συγκρίνουμε τις τιμές call options σε ένα πενταετές ομόλογο με ονομαστική αξία \$100 με κουπόνι 10 % ετησίως το οποίο πληρώνεται κάθε εξάμηνο και στα δύο διαφορετικά μοντέλα. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής τιμές στην μεταβλητότητα, επιτόκιο, τιμές ληκτοτήτων των options, τιμές εξάσκησης και στις διάφορες παραμέτρους των μοντέλων μας οι οποίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Τιμές εξάσκησης				
Ληκτότητα options	95.0	97.5	100.0	102.5	105.0
0.5	$\sigma=0,06$		$r=10\%$		
1.0					
1.5	$y=0,2$ (CIR)				
2.0					
3.0	$\varphi=0,02$			$a=1$	
4.0					

Πίνακας 1: Τιμές δεδομένων στο δείγμα

Όπως αναφέραμε και παραπάνω ο Jamshidian δείχνει ότι οι τιμές των options σε coupon-bearing bonds μπορούν να αποτυπωθούν από τις τιμές των options σε zero-coupon bonds στα μονοπαραγοντικά μοντέλα των Vasicek και CIR. Θεωρούμε λοιπόν κάθε φορά ένα συγκεκριμένο ευρωπαϊκό call option σε ένα coupon bearing bond με τιμές X και T που φαίνονται από τον πίνακα. Υποθέτουμε ότι το ομόλογο περιέχει ένα σύνολο από n χρηματοροές, κουπόνια από την στιγμή την οποία λήγει το option .

Για όλες τις ληκτότητες T έχουμε τρέξει στον κώδικα τα δεδομένα ώστε να βρούμε τις τιμές που αναλογούν στο κάθε μοντέλο. Αναλυτικότερα και σύμφωνα με την τεχνική σημείωση (Technical Note No.15* από το βιβλίο του J. Hull) όπως αναφέρεται και στην βιβλιογραφία για να μπορέσει να γίνει καλύτερα κατανοητή η διαδικασία θα παραθέσουμε ολόκληρη την αριθμητική διαδικασία για την πρώτη τιμή του πίνακα για το μοντέλο CIR με $T=0.5$ και $X=95.0$.

Γενικά $P(r, t_1, t_2)$ είναι η τιμή ενός ομολόγου την στιγμή t_1 που λήγει την χρονική στιγμή t_2 με βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r . Η απόφαση εξάσκησης γίνεται την στιγμή T δηλαδή στην λήξη του ευρωπαϊκού δικαιώματος σε coupon bearing bond.

Η λήξη του ομολόγου συμβολίζεται με s_i , η στιγμή που πληρώνεται το κάθε κουπόνι, c_i . Επειδή $T=0.5$ και το ομόλογο είναι πενταετές έχουμε :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1.5 \\ s_3 &= 2 \\ s_4 &= 2.5 \\ s_5 &= 3 \\ s_6 &= 3.5 \\ s_7 &= 4 \\ s_8 &= 4.5 \\ s_9 &= 5 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} c_1 &= (10\% \times 100) / 2 = 5 \\ c_2 &= 5 \\ c_3 &= 5 \\ c_4 &= 5 \\ c_5 &= 5 \\ c_6 &= 5 \\ c_7 &= 5 \\ c_8 &= 5 \\ c_9 &= 100 + 5 = 105 \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε $T' = s_n$ τότε από 0 έως T είναι η διάρκεια ζωής του ευρωπαϊκού δικαιώματος στο πενταετές ομόλογο και από 0 έως T' είναι η διάρκεια ζωής του coupon bearing ομολόγου.

Λύνουμε ως εξής:

Η συνάρτηση εξόφλησης την χρονική στιγμή T ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος σε ένα bearing coupon ομόλογο είναι $\max\{0, \sum_{i=1}^n c_i P(r, T, s_i) - X\}$ **(1)**. Εμείς πρέπει να βρούμε την τιμή του r^* έτσι ώστε να έχουμε την ακόλουθη ισοδύναμη σχέση.

Τώρα η σχέση **(1)** γίνεται

Αυτό που δημιουργήσαμε είναι η συνάρτηση εξόφλησης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πάνω σε ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με τιμές εξάσκησης τις τιμές $P(r^*, T, s_i)$ για κάθε τιμή s_i . Αν περιγράψουμε με λόγια την παραπάνω τελική μας σχέση είναι ότι συμπεραίνουμε πως η τιμή ενός ευρωπαϊκού

δικαιώματος σε ένα coupon bearing ομόλογο ισούται με το άθροισμα των τιμών των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων σε ένα ομόλογο με μηδενικό τοκομερίδιο όπου η καθεμία είναι πολλαπλασιασμένη με το αντίστοιχο κουπόνι.

Κατά συνέπεια έχουμε να λύσουμε την εξής εξίσωση ως προς r^* :

$$\sum_{i=1}^9 c_i P(r^*, 0.5, s_i) = 95. \text{ Η επίλυση γίνεται με την βοήθεια της συνάρτησης } \underline{\text{fsolve}}$$

η οποία επιλύει μη γραμμικές εξισώσεις, συστήματα, στον κώδικα της matlab.

Στον κώδικα το επιτόκιο το οποίο αναζητάμε το συμβολίζουμε με r_k . Με T όπου αντιπροσωπεύεται από την μεταβλητή t_1 στους κώδικες να συμβολίζει την λήξη του δικαιώματος, με s όπου αντιπροσωπεύεται από την μεταβλητή t_2 στους κώδικες να συμβολίζει την λήξη του ομολόγου και με $t=0$ γίνεται η ακόλουθη διαδικασία.

Αρχικά, στο command window θέτουμε μία αρχική τιμή στο επιτόκιο αυτό, έστω $rk0=[0]$, καλούμε fun το όνομα @m.file που έχουμε και τέλος επιλύουμε ως προς r_k πληκτρολογώντας, $r_k = \text{fsolve}(\text{fun}, rk0)$. Το m.file στο οποίο γίνεται αυτή η εύρεση είναι αντίστοιχα το EXTVASICEKF.m και CIRF.m. Η matlab τώρα μας εμφανίζει το επιτόκιο κι έτσι τώρα βρίσκουμε τα διάφορα Strikes, X_i . Απαραίτητη προϋπόθεση για την τιμολόγηση είναι ο ορισμός προηγουμένως της βασικής μας συνάρτησης $P(r, t_1, t_2)$. Το αρχείο μας αυτό το ονομάζουμε παρακάτω EXTVASICEK_P.m καθώς και CIR_P.m. Τα τελικά μας αποτελέσματα βρίσκονται από το αρχείο με όνομα EXTVAS_Option_Non_Zero.m, CIR_Option_Non_Zero.m

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι πίνακες με τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις τιμές των call options του πενταετούς ομολόγου και για τα δύο μας μοντέλα.

Option maturity (years)	Model	Exercise Price				
		95.0	97.5	00.0	102.5	105.0
0.5	Ext Vas	4.31	2.29	0.91	0.28	0.07
1.0	Ext Vas	4.23	2.41	1.09	0.41	0.14
1.5	Ext Vas	4.15	2.39	1.11	0.47	0.58
2.0	Ext Vas	4.02	2.31	1.09	0.45	0.17
3.0	Ext Vas	3.70	2.14	0.96	0.36	0.11
4.0	Ext Vas	3.33	1.82	0.68	0.18	0.03

Πίνακας 2: Τιμές call options σε ένα 5-ετές ομόλογο (Ext Vas)

Option maturity (years)	Model	Exercise Price				
		95.0	97.5	00.0	102.5	105.0
0.5	CIR	4.28	2.27	0.91	0.26	0.06
1.0	CIR	4.21	2.38	1.08	0.38	0.11
1.5	CIR	4.10	2.35	1.11	0.42	0.13
2.0	CIR	3.96	2.29	1.09	0.41	0.12
3.0	CIR	3.65	2.09	0.96	0.33	0.09
4.0	CIR	3.32	1.78	0.67	0.15	0.02

Πίνακας 3: Τιμές call options σε ένα 5-ετές ομόλογο (CIR)

3.2 Αριθμητική ανάλυση των Interest Rate Caps για τα 2 μοντέλα

Στην συνέχεια παρουσιάζεται οι πίνακες με τις τιμές των δύο μοντέλων για τα caps σε επιτόκιο μηδενικού κινδύνου όταν το κεφάλαιο ισούται με \$100.

Η αριθμητική ανάλυση κι εδώ έγινε με την βοήθεια της matlab οι κώδικες της οποίας παρουσιάζονται στο παράρτημα.

Life of cap (years)	Model	Cap Rate (% per annum)				
		8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
1.0	Ext Vas	2.09	1.20	0.41	0.10	0.03
2.0	Ext Vas	4.03	2.45	1.13	0.47	0.19
3.0	Ext Vas	5.82	3.66	1.89	0.91	0.43
4.0	Ext Vas	7.44	4.79	2.63	1.36	0.69
5.0	Ext Vas	8.92	5.63	3.32	1.80	0.95

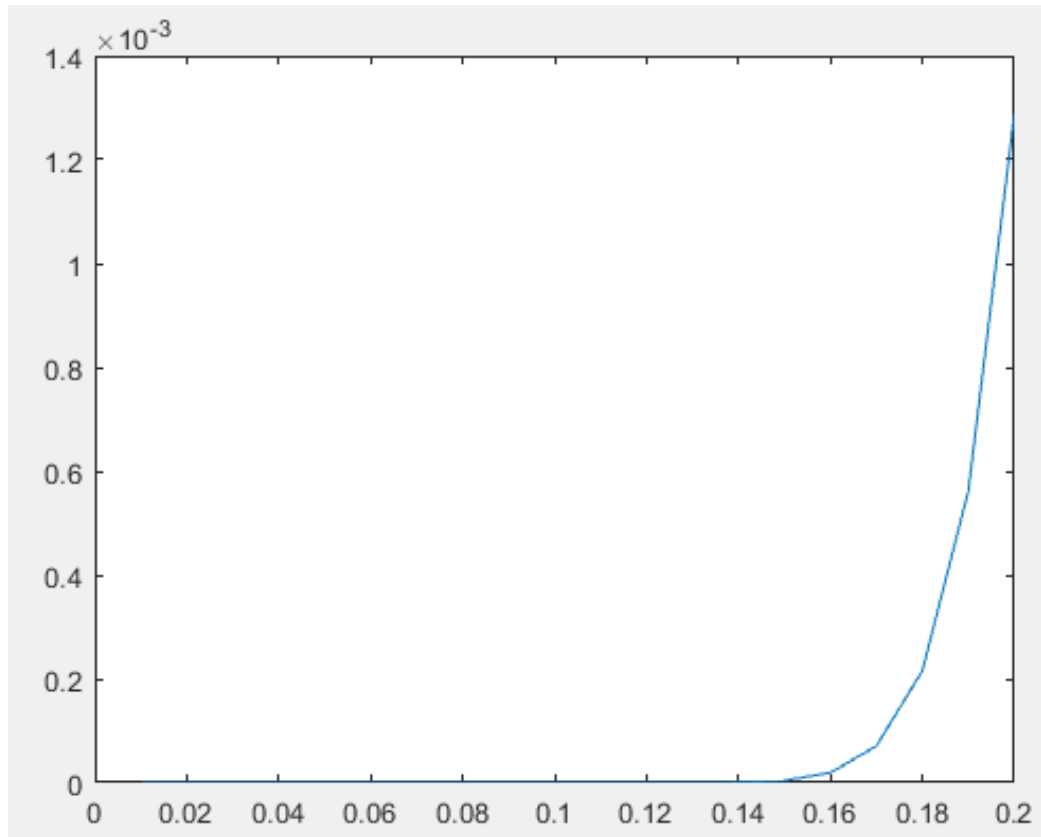
Πίνακας 4: Τιμές των CAPS σε risk free interest rate (Ext Vas)

Life of cap (years)	Model	Cap Rate (% per annum)				
		8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
1.0	CIR	2.10	1.21	0.41	0.10	0.02
2.0	CIR	4.05	2.47	1.13	0.45	0.16
3.0	CIR	5.86	3.70	1.89	0.87	0.37
4.0	CIR	7.52	4.85	2.62	1.30	0.61
5.0	CIR	9.03	5.90	3.31	1.72	0.84

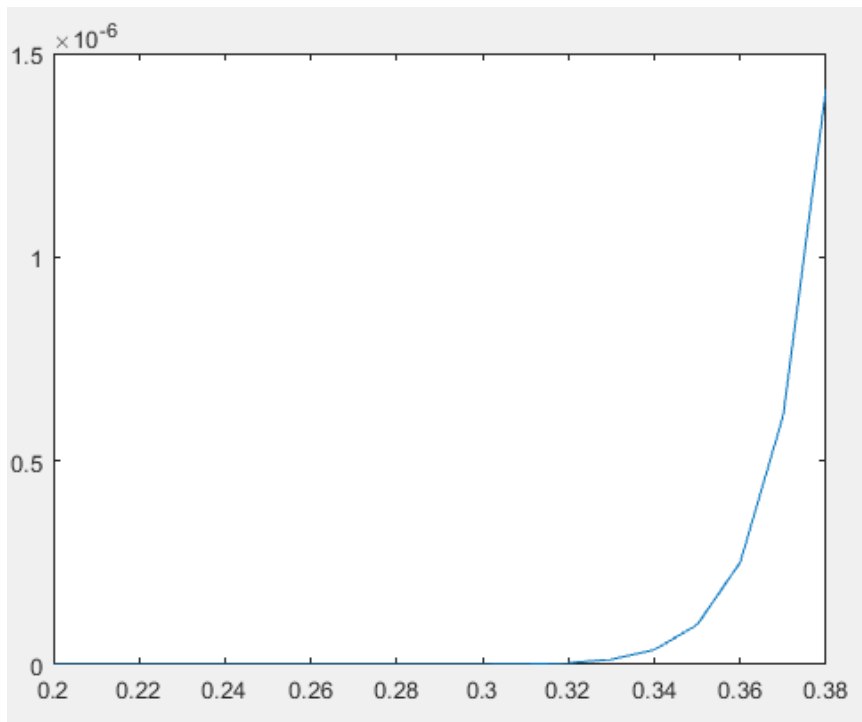
Πίνακας 5: Τιμές των CAPS σε risk free interest rate (CIR)

Στην συνέχεια μεταβάλλαμε διάφορες τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε να δούμε την συμπεριφορά της τιμής του ορτίου στα μοντέλα μας. Για τον λόγο αυτό παρουσιάζονται τα παρακάτω γραφήματα.

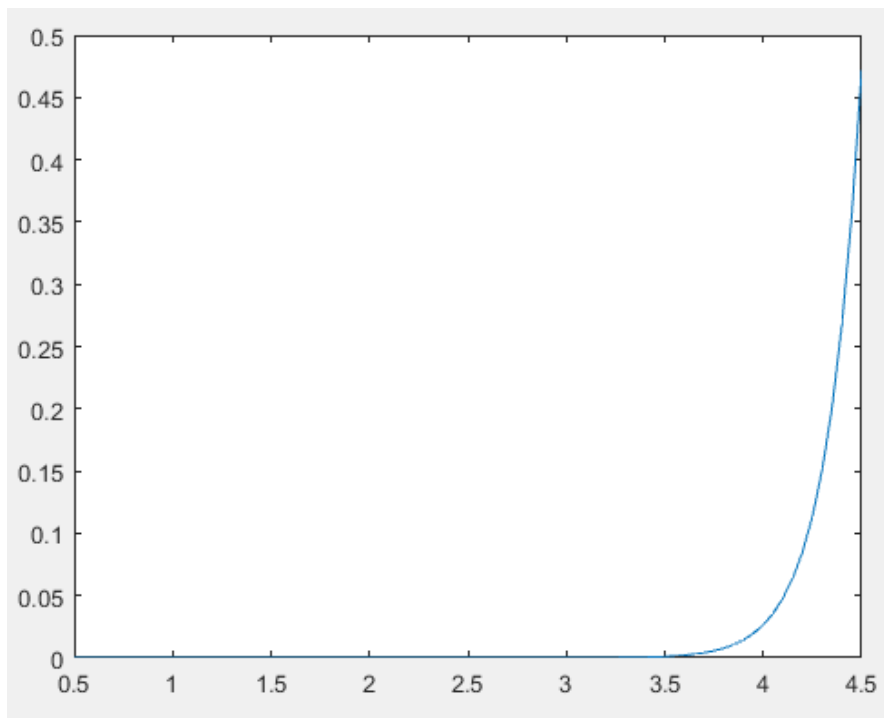
Γράφημα 1: $\sigma \uparrow \rightarrow O.p \uparrow$



Γράφημα 2: $y \uparrow \rightarrow O.p \uparrow$



Γράφημα 3: $T \uparrow \rightarrow O.p \uparrow$



3.3 Εμπειρική μελέτη με στοιχεία από την βάση δεδομένων της Bloomberg

3.3.1 Δεδομένα εμπειρικής μελέτης

Χρησιμοποιώντας την βάση δεδομένων της Bloomberg αντλήσαμε τα δεδομένα από τα δικαιώματα τριών διαφορετικών κυβερνητικών ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε τα εξής ομόλογα:

DBR 0 08/15/26, **FRTR 0 ¼ 11/25/26** και **BOTS 0 01/13/17**, συλλέξαμε τα στοιχεία συνολικής διάρκειας τριών μηνών, Οκτωβρίου, Νοέμβριου και Δεκεμβρίου 2016. Χρειαζόμαστε για κάθε μία ημέρα

- το time to maturity για το ομόλογο
- τιμή δικαιώματος
- τιμή εξάσκησης Strike
- το time to maturity για το δικαίωμα
- τα αντίστοιχα ημερήσια risk-free rates, ως το yield του 10ετούς κυβερνητικού ομολόγου των Η.Π.Α

3.3.2 Αποτίμηση των δικαιωμάτων στα δύο γενικευμένα μοντέλα χρησιμοποιώντας δεδομένα της αγοράς

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία δηλαδή τις δύο διαφορετικές ληκτότητες ομολόγου και δικαιώματος, επιπλέον τις τιμές εξάσκησης και τα διαφορετικά επιτόκια για την κάθε ημέρα, σύμφωνα με τον κώδικα 5 για το μοντέλο Extended Vasicek και τον κώδικα 12 για το γενικευμένο μοντέλο CIR οι οποίοι βρίσκονται στο παράρτημα αποτιμήσαμε τις τιμές των δικαιωμάτων για τα 3 διαφορετικά ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου μέσα από τις συγκεκριμένες φόρμουλες. Τα αποτελέσματα μας ήταν οι εκτιμήσεις 61 διαφορετικών τιμών δικαιωμάτων για το κάθε ομόλογο σύμφωνα με το γενικευμένο μοντέλο Vasicek και το γενικευμένο CIR. Στόχος μας είναι να μελετήσουμε κατά πόσο αυτές οι τιμές είναι παρόμοιες συγκρινόμενες ανά δύο

μεταξύ τους. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για μια συγκεκριμένη ημέρα τα οποία εξήλθαν από τους κώδικες με χρήση της Matlab.

10/03/2016	DBR 0 08/15/26	FRTR 0 ¼ 11/25/26	BOTS 0 01/13/17
Extended VASICEK	4,7205	4,7147	4,9316
Extended CIR	4,6883	4,6814	4,9282

Ανάλογα αποτελέσματα υπάρχουν για όλες τις ημέρες, οι τιμές κι εκεί είναι εξίσου πολύ κοντά.

3.3.3 Εκτίμηση παραμέτρων για τα μοντέλα Extended Vasicek και Extended CIR

Στο γενικευμένο μοντέλο Vasicek που μελετάμε τα μη παρατηρήσιμα μεγέθη είναι τα σ, f ενώ στο γενικευμένο μοντέλο CIR τα μη παρατηρήσιμα μεγέθη τα οποία συναντάμε είναι τα σ, f, γ . Μία πολύ δημοφιλής διαδικασία εκτίμησης είναι ο αλγόριθμος Levenberg- Marquardt. Η διαδικασία αυτή υποθέτει ότι έχουμε ένα μοντέλο και ένα σετ παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Ο αλγόριθμος βρίσκει τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων σε ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου που προήλθαν από το μοντέλο (θεωρητικές τιμές) με τις τιμές των δικαιωμάτων στα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου της αγοράς (πραγματικές τιμές), να έχουν όσο το δυνατό μικρότερη τιμή.

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{i=0}^N (f_i^{market} - f_i^{model})^2$$

όπου θ είναι το σετ των παραμέτρων (σ^*, f^*) και $(\sigma^*, f^*, \gamma^*)$ αντίστοιχα καθώς επίσης N είναι ο αριθμός των ημερών που πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις. Στην περίπτωση μας, $N=61$.

Ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση μη-γραμμικών least square curve fitting problems. Υποθέτουμε N παρατηρήσεις $y_i, i=1,2,\dots,N$ και μια συνάρτηση $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με n παραμέτρους x_1, x_2, \dots, x_n . Υποθέτουμε $N \geq n$.

Στην περίπτωση μας οι y_i είναι οι τιμές των δικαιωμάτων των ομολόγων που έχουμε συλλέξει από την αγορά.

Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου $g(x) = \hat{y}_i$ και εν συνεχεία βρίσκουμε τα κατάλοιπα $r_i(x) = \hat{y}_i - y_i$. Βρίσκουμε δηλαδή ένα διάνυσμα N διάστασης που περιέχει τα κατάλοιπα $R = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$. Συνεπώς θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που ακολουθεί

$$\min_x f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_i(x)^2 = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)$$

Για την επίλυση του παραπάνω curve fitting προβλήματος, οι Levenberg και Marquardt πρότειναν τη χρήση ενός επαναληπτικού αλγόριθμου που συνδυάζει δύο μεθόδους, τη Steepest descent μέθοδο και τη μέθοδο των Newton-Gauss. Ο Levenberg (1944) με το άρθρο του προτείνει τον υπολογισμό μιας κατεύθυνσης αναζήτησης d_k ως λύση της προσαρμοσμένης εξίσωσης των Newton-Gauss

$$(R'(x^k)^T R'(x^k) + \lambda_k I) d_k = -(R'(x^k)^T R(x^k))$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας και λ_k είναι μία παράμετρος απόσβεσης με $\lambda_k > 0$. Ο πίνακας στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένος. Έτσι η λύση d_k είναι βέβαιο ότι θα είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για τη συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης.

Για μικρά λ_k ο επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg–Marquardt προσομοιάζει την επαναληπτική μέθοδο Newton-Gauss και παρουσιάζει ένα ρυθμό τετραγωνικής σύγκλισης των x^k τιμών που επικρατούν και βρίσκονται κοντά στο x^* .

Για επαναλήψεις μακριά από το βέλτιστο, η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση αναζήτησης d_k είναι περίπου:

$$d_k \approx -\frac{1}{\lambda_k} R'(x^k)^T R(x^k)$$

Η τελευταία σχέση είναι ένα μικρό βήμα της μεθόδου Steepest Descent.

Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης επηρεάζει άμεσα τη σταθερότητα της μεθόδου. Ως επιλογή παίρνουμε συνήθως:

όπου τ είναι η παράμετρος που σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη που κάνουμε για τις παραμέτρους.

Θα βρούμε τις τιμές της αγοράς των δικαιωμάτων των 4 ομολόγων για τις 61 ημέρες και θα εφαρμόσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt, με τη βοήθεια της προγραμματιστικής γλώσσας της MatLab με την εντολή lsqnonlin. Θα δώσουμε μία αρχική τιμή στις παραμέτρους, συνήθως αυτή που θεωρούμε εμείς ως πιο πιθανή και τρέχοντας τον κώδικα που κατασκευάσαμε για το κάθε μοντέλο είναι αντίστοιχα οι, θα μας δώσει τον βέλτιστο συνδυασμό τιμών των παραμέτρων σ , f και y που αν χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο μας, θα μας δώσουν μια θεωρητική τιμή με το μικρότερο σφάλμα σε σχέση με την πραγματική τιμή του μετατρέψιμου ομολόγου. Στη συνέχεια θα ελέγξουμε την ορθότητα αυτών των τιμών και θα βρούμε την προβλεπτική ικανότητα του κάθε μοντέλου ξεχωριστά κάνοντας one-day forecasting.

Τα αποτελέσματα από τον κώδικα εκτίμησης (Κώδικας 15 και 16) αντίστοιχα για το κάθε μοντέλο είναι οι εκτιμώμενες παράμετροι σ^* , f^* για το Extended Vasicek και σ^* , f^* , y^* για το Extended CIR για καθεμία από τις 61 ημέρες. Η μέση τιμή των εκτιμώμενων παραμέτρων ενδεικτικά για το πρώτο ομόλογο, για το κάθε μοντέλο παρουσιάζεται στους παρακάτω πίνακες:

σ^*	f^*
0,051591	0,033501

σ^*	f^*	y^*
0,220838	0,006752	0,388849

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις θεωρητικές τιμές των δικαιωμάτων των ομολόγων με τα δύο μοντέλα και τις αντίστοιχες εκτιμώμενες παραμέτρους που βρήκαμε με τη μέθοδο των Levenberg-Marquardt και βρίσκουμε το σχετικό σφάλμα των θεωρητικών τιμών με τις τιμές της αγοράς. Στους πίνακες που ακολουθούν φαίνεται ο μέσος όρος των σχετικών σφαλμάτων για κάθε ομόλογο για τις 61 ημέρες.

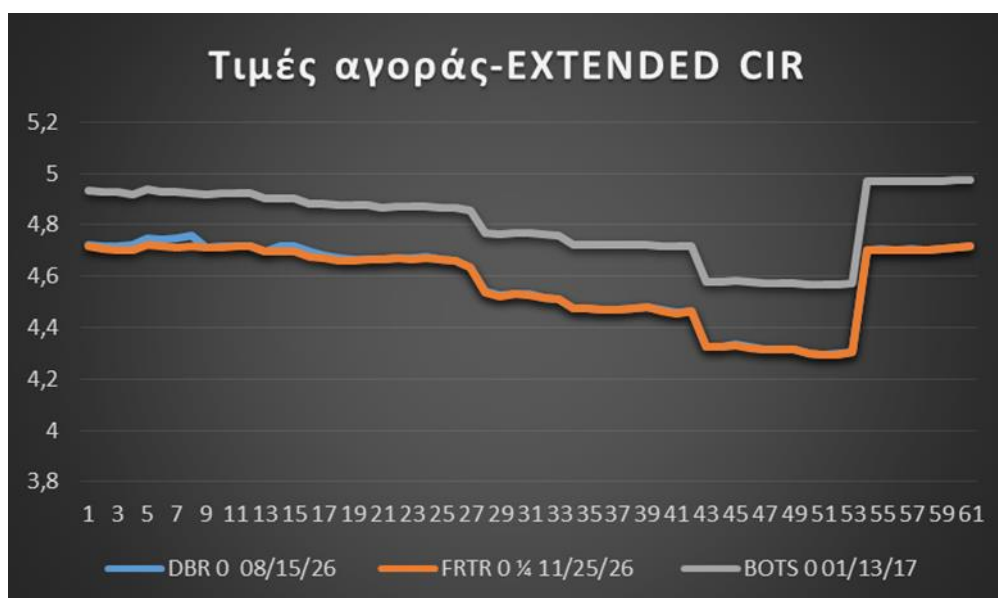
Όπου σχετικό σφάλμα ,

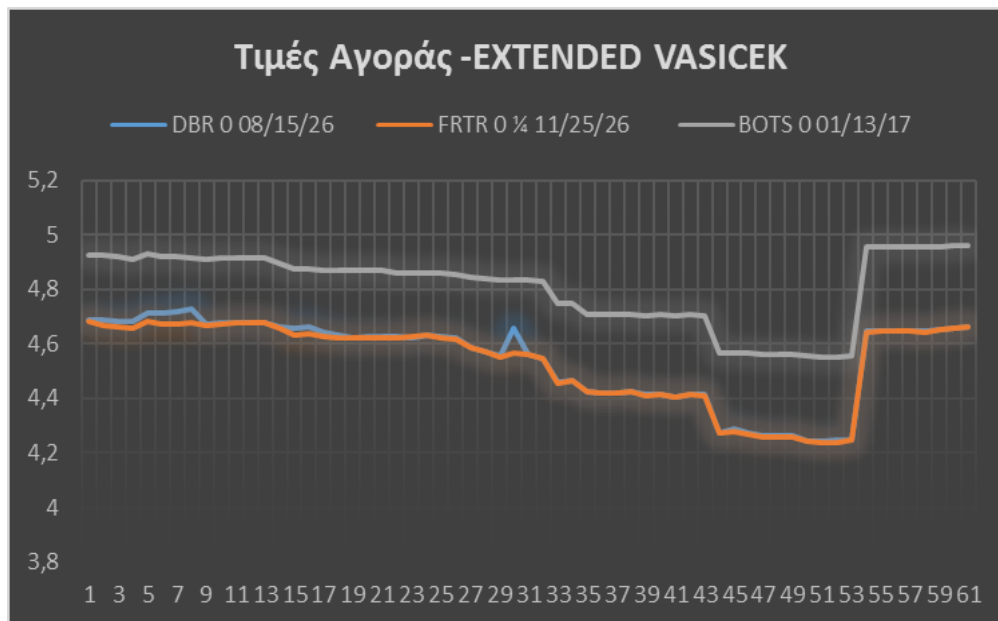
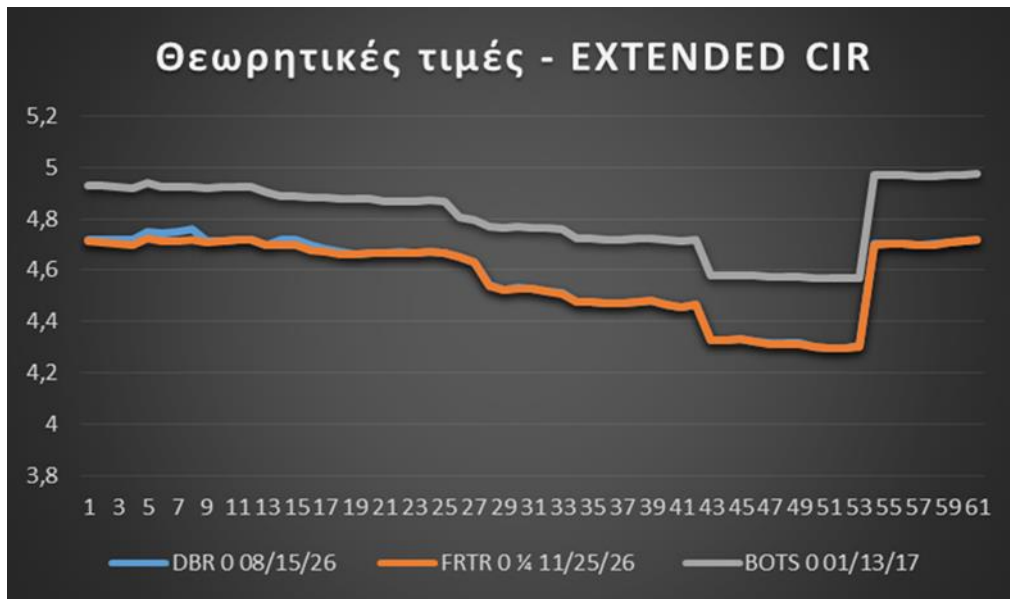
$$r_{error} = 100 * \frac{|V^{market} - V^{model}|}{|V^{market}|}$$

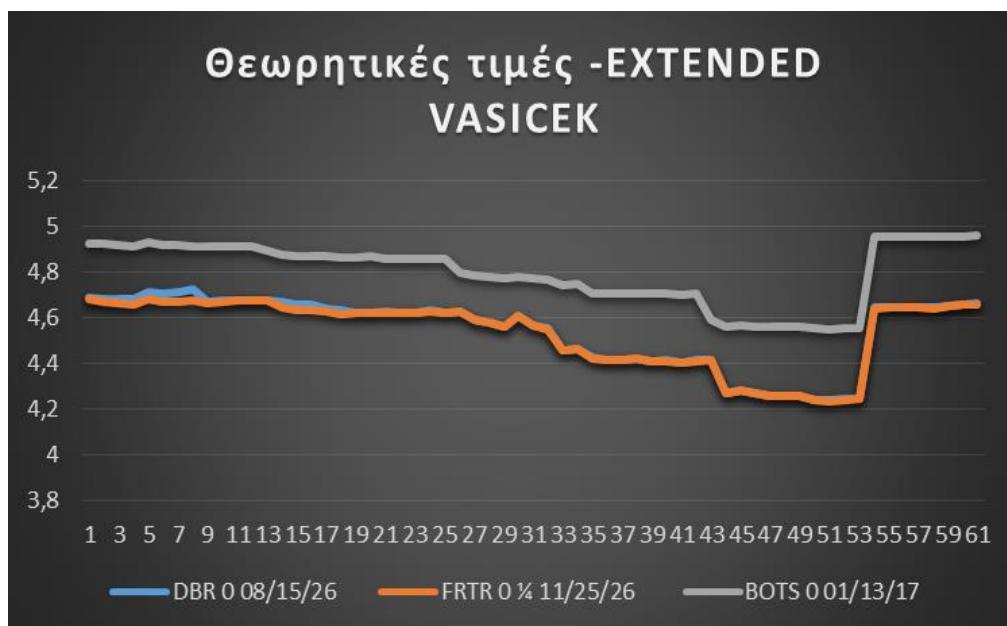
ZERO COUPON BONDS	Μέσος όρος σχετικών σφαλμάτων στο Extended VASICEK
DBR 0 08/15/26	0.0240544707
FRTR 0 ¼ 11/25/26	0.0586151528
BOTS 0 01/13/17	0,000572929

ZERO COUPON BONDS	Μέσος όρος σχετικών σφαλμάτων στο Extended CIR
DBR 0 08/15/26	0,004027951
FRTR 0 ¼ 11/25/26	0.012810240
BOTS 0 01/13/17	0.020810823

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα γραφήματα με τις θεωρητικές και αγοραίες τιμές για το καθένα μοντέλων.





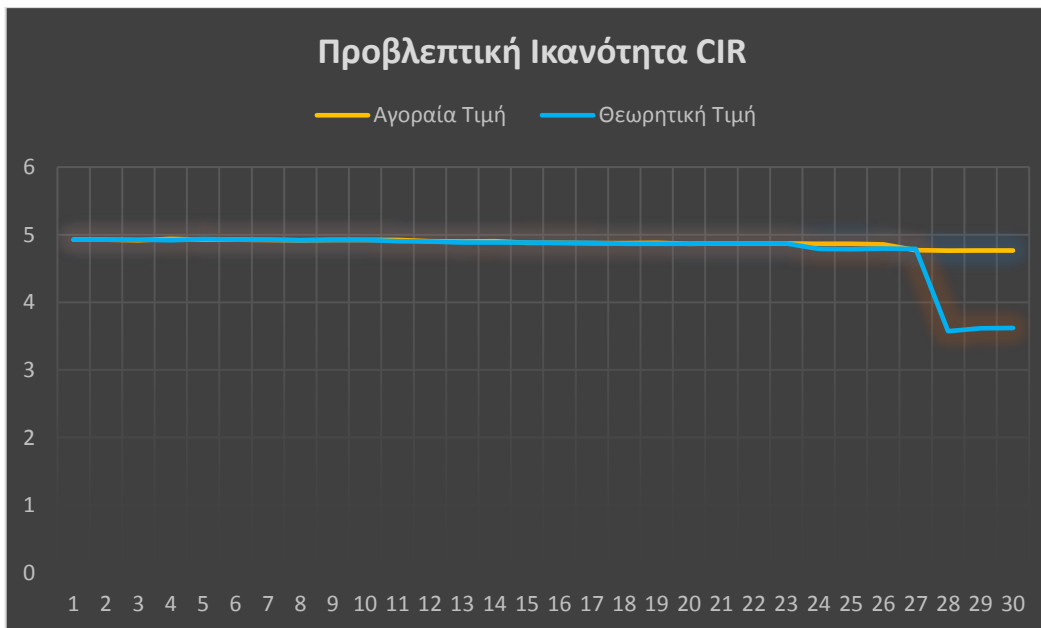
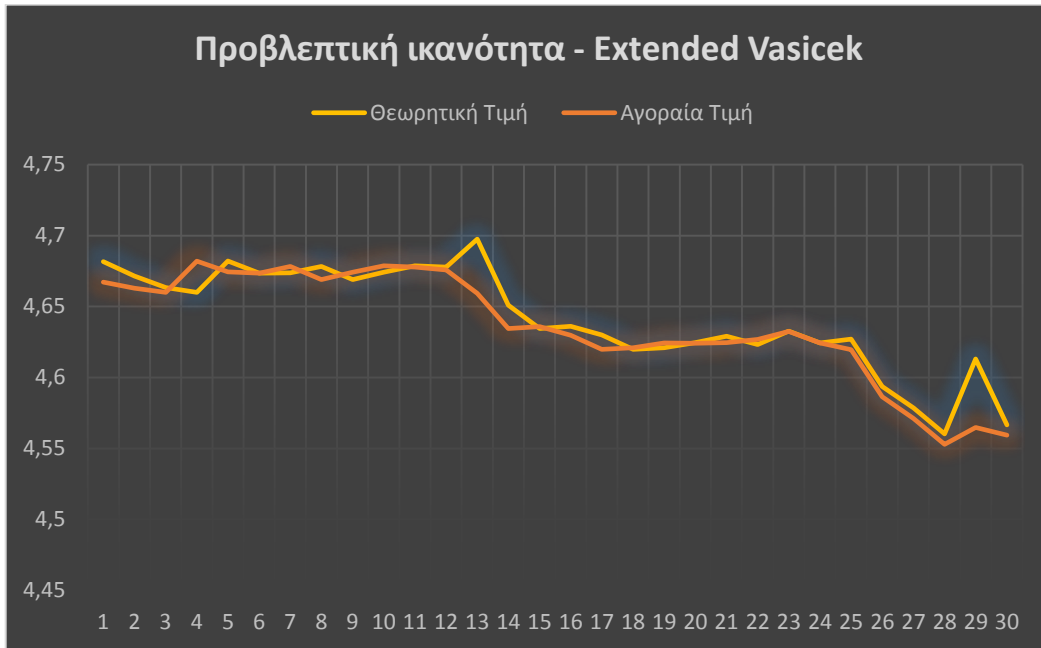


3.3.4 Προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων

Στην προηγούμενη υποενότητα παρατηρήσαμε την κίνηση των σχετικών σφαλμάτων των θεωρητικών τιμών με τις πραγματικές τιμές της αγοράς για το χρονικό διάστημα των 61 ημερών μέσα στο οποίο πραγματοποιήσαμε την εκτίμησή μας.

Για να θεωρηθούν τα μοντέλα μας αξιόπιστα αρκεί να εξετάσουμε την προβλεπτική τους ικανότητα. Για τον λόγο αυτό κάναμε one-day forecasting για 30 ημέρες και για τα δύο μοντέλα χρησιμοποιώντας το πρώτο ομόλογο. Χρησιμοποιώντας τις εκτιμώμενες παραμέτρους της πρώτης ημέρας κάναμε την τιμολόγηση στην δεύτερη ημέρα, στην συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εκτιμώμενες παραμέτρους της δεύτερης ημέρας κάναμε την τιμολόγηση στην τρίτη ημέρα κ.ο.κ. για το διάστημα των 30 ημερών. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε και στα δύο βασικά μας μοντέλα. Στην συνέχεια μπορούμε να διακρίνουμε στους πίνακες τον μέσο όρο σχετικών σφαλμάτων αντίστοιχα για το κάθε μοντέλο καθώς και τα γραφήματά τους.

	Μ.Ο Σχετικών σφαλμάτων προβλεπτικής ικανότητας
EXTENDED VASICEK	0,01561
EXTENDED CIR	0,00807



Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από την αριθμητική ανάλυση η οποία έγινε με την χρήση της matlab μπορούμε να δούμε ότι οι τιμές των μοντέλων στους πίνακες είναι πολύ κοντά συγκρινόμενες ανά δύο μεταξύ τους για τις διαφορετικές τιμές εξάσκησης και τιμές ληκτοτήτων όπως επίσης και για τα διάφορα cap rates. Οι μεγαλύτερες ποσοστιαίες διαφορές παρουσιάζονται σε deep-out-of-the money δικαιώματα. Σχετικά με την αριθμητική ανάλυση η οποία πραγματοποιήθηκε με δεδομένα της αγοράς σε ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου είδαμε και εκεί ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι εξίσου πάρα πολύ κοντά στα δύο μοντέλα.

Στους πίνακες (2), (3), το μοντέλο Extended Vasicek δίνει μεγαλύτερες τιμές από το CIR για αυτά τα δικαιώματα. Αυτό γίνεται καθώς πολύ χαμηλά επιτόκια και έτσι πολύ υψηλές τιμές ομολόγων έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβούν στο γενικευμένο μοντέλο του Vasicek.

Στους πίνακες (4) και (5) το επεκτεταμένο μοντέλο CIR δίνει μεγαλύτερες τιμές για αυτά τα caps σε σύγκριση με το επεκτεταμένο μοντέλο του Vasicek. Η αιτία που δικαιολογεί το αποτέλεσμα αυτό είναι ότι πολύ υψηλά επιτόκια έχουν την δυνατότητα να συμβούν στην εφαρμογή του CIR.

Στο γράφημα 1 δείξαμε πως εάν αυξήσουμε την μεταβλητότητα η τιμή του option σε zero coupon bond θα συνεχίσει να αυξάνεται όπως επίσης στο γράφημα 2 δείξαμε πως μία αύξηση της παραμέτρου γ , η οποία επηρεάζει την αγοραία τιμή του κινδύνου επιτοκίου, αυξάνει την τιμή του option σε zero coupon bond. Επιπλέον όταν ο χρόνος ως την λήξη T , αυξάνεται, τότε η τιμή του δικαιώματος επάνω στο ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου, ακολουθεί ανοδική πορεία. Με αυτόν τον τρόπο δείξαμε πόσο καλά το μοντέλο Vasicek και το μοντέλο CIR μπορούν να επεκταθούν έτσι ώστε να είναι συνεπή με την τρέχουσα διάρθρωση του τρέχοντος ή προθεσμιακού επιτοκίου. Στην περίπτωση της επέκτασης του μοντέλου Vasicek, οι παράμετροι για την διαδικασία που ακολουθήθηκε για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο και τις τιμές δικαιωμάτων ευρωπαϊκού ομολόγου ορίστηκαν αναλυτικά. Αυτό κάνει το μοντέλο πολύ ελκυστικό ως πρακτικό

εργαλείο. Μέσα από τα τελευταία βήματα της εμπειρικής μας μελέτης όπου έγινε η εκτίμηση παραμέτρων συμπεραίνουμε ότι τα μοντέλα μας είναι αρκετά ικανοποιητικά, αυτό υποδηλώνεται μέσα από το εξαιρετικά μικρό εύρος των σχετικών σφαλμάτων στο κάθε μοντέλο αντίστοιχα. Έν κατακλείδι, ελέγχοντας την προβλεπτική τους ικανότητα τα μοντέλα μας προσομοιώνουν αρκετά καλά την πραγματική τιμή της αγοράς συνεπώς εκτός από εύχρηστα θεωρούνται και αξιόπιστα.

Βιβλιογραφία

Εμπειρικές Μελέτες

1. Bali, T. (2003), 'Modeling the Stochastic Behavior of Short-Term Interest Rates: Pricing Implications for Discount Bonds', *Journal of Banking and Finance*, 27, 2, pp. 201-228
2. Beltratti, A., & Colla, P. (2007), 'A portfolio-based evaluation of affine term structure models', *Annals Of Operations Research*, 151, 1, pp. 193-222
3. Black F., Derman E. and Toy W.(1990),' A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options ,*Financial Analysts Journal*,Vol. 46, No. 1 ,pp. 33-39
4. Black F., Karasinski P.(1991),' Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal, *Financial Analysts Journal*, Vol. 47, pp. 52-59
5. Brennan, M., & Schwartz, E. (1979), 'A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds', *Journal of Banking & Finance*, 3, 2/3/4, pp. 133-155
6. Brennan, M., & Schwartz, E. (1980), 'Analyzing Convertible Bonds', *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, 15, 4, pp. 907-929
7. Brenner, R., Harjes, R., & Kroner, K. (1996), 'Another Look at Models of the Short- Term Interest Rate', *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, 31, 1, pp. 85-107
8. Buraschi, A., & Corielli, F. (2005), 'Risk Management Implications of Time-Inconsistency: Model Updating and Recalibration of No-Arbitrage Models', *Journal of Banking and Finance*, 29, 11, pp. 2883-2907
9. Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F., & Sanders, A. (1992), 'An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate', *Journal of Finance*, 47, 3, pp. 1209-1227
10. Chaudhry, M. (2000), 'The Risk of Foreign Currency Contingent Claims At US Commercial Banks', *Journal of Banking And Finance*, 24, 9, pp. 1399-1417
11. Cox, J., & Ross, S. (1976), 'The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes', *Journal Of Financial Economics*, 3, 1/2, pp. 145-166

12. Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1980), 'An Analysis of Variable Rate Loan Contracts', *Journal of Finance*, 35, 2, pp. 389-403
13. Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985a), 'An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices', *Econometrica*, 53, 2, pp. 363-384
14. Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985b), 'A theory of the term structure of interest rates', *Econometrica*, 53, 2, pp. 385-407
15. Elliot W., Baier J., (1979) 'Econometric Models and Current Interest Rates: How Well Do They Predict Future Rates?', *The Journal of Finance* Vol. 34, Issue 4 ,pp. 975–986
16. Faff, R., & Gray, P. (2006), 'On the Estimation and Comparison of Short-Rate Models Using the Generalized Method of Moments', *Journal of Banking And Finance*, 30, 11, pp. 3131-3146
17. Gibson, R., Lhabitant, F., & Talay, D. 2010, 'Modeling the Term Structure of Interest Rates: A Review of the Literature', *Foundations and Trends in Finance*, 5, 1-2, pp. 1- 156
18. Glasserman, P., & Kou, S. (2003), 'The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk', *Mathematical Finance*, 13, 3, pp. 383-410
19. Goard, J., & Hansen, N. (2004), 'Comparison of the performance of a time-dependent short-interest rate model with time-independent models', *Applied Mathematical Finance*, 11, 2, pp. 147-164
20. Hentschel, L., & Kothari, S. (2001), 'Are Corporations Reducing or Taking Risks with Derivatives?' *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, 36, 1, pp. 93-118
21. Ho, T., & Lee, S.B. (1986), 'Term Structure Movements and Pricing Interests Rate Contingent Claims', *Journal of Finance*, 41, 5, pp. 1011-1029
22. Hull J. & White A. (1990) 'Pricing Interest Rate Derivative Securities', *Review of Financial Studies*, vol 3, 4, pp.573-592
23. Hull J. & White A. (1993), ' One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, issue 02, pages 235-254
24. Hull J. & White A. (2015), ' A Generalized Procedure for Building Trees for the Short Rate and its Application to Determining Market Implied Volatility Functions',
Quantitative Finance ,Vol. 15, No. 3, 443-454

25. Hutchinson, W., & Toma, M. (1991), 'The Bond Price Support Program as a Change in Policy Regimes: Evidence from the Term Structure of Interest Rates', *Journal of Money, Credit, And Banking*, 23, 3, pp. 367-382
26. Koski, J., & Pontiff, J. (1999), 'How Are Derivatives Used? Evidence from the Mutual Fund Industry', *Journal of Finance*, 54, 2, pp. 791-816
27. Jamshidian, F. (1991), 'Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model', *Research in Finance*, 9, 131-170
28. Johansson H. (1994), 'The Economics of Export Processing Zones Revisited', *Development Policy Review*, Vol. 12, 4, pp 387-402
29. Longstaff, F., & Schwartz, E. (1992), 'Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model', *Journal of Finance*, 47, 4, pp. 1259-1282
30. Mahdavi, M. (2008), 'A Comparison of International Short-Term Rates under No Arbitrage Condition', *Global Finance Journal*, 18, 3, pp. 303-318
31. Mato, M. (2005), 'Classic and modern measures of risk in fixed-income portfolio optimization', *Journal of Risk Finance (Emerald Group Publishing Limited)*, 6, 5, pp. 416-423
32. Merton, R. C. (1973) ' The Theory of Rational Option Pricing, ' *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
33. Renò, R., Roma, A., & Schaefer, S. (2006), 'A Comparison of Alternative Non- parametric Estimators of the Short Rate Diffusion Coefficient', *Economic Notes*, 35, 3, pp. 227-252
34. Sanford, A., & Martin, G. (2006), 'Bayesian comparison of several continuous time models of the Australian short rate', *Accounting & Finance*, 46, 2, pp. 309-326
35. Telser, L. (1967), 'A Critique of some Recent Empirical Research on the Explanation of the Term Structure of Interest Rates', *Journal of Political Economy*, 75, 4, pp. 546
36. Turnovsky, S. (1989), 'The Term Structure of Interest Rates and the Effects of Macroeconomic Policy', *Journal of Money, Credit & Banking (Ohio State University Press)*, 21, 3, pp. 321-347
37. Vasicek, O. (1977), 'An equilibrium characterization of the term structure', *Journal of Financial Economics*, 5, 2, pp. 177-188

Βιβλία

1. John C. Hull ,2015, '*Options, Futures and other Derivatives*' ,9th edition
2. Stewart Hodges, 1992, '*Options, Recent advances in theory and practice*', Volume 2
3. Kienitz J.,Wetterau D. '*Financial Modelling, Theory, Implementation and Practice with MATLAB Source*' 2012,Pbl Wiley
4. Σημειώσεις μαθήματος «*Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στα Χρηματοοικονομικά*», Νικόλαος Εγγλέζος, Χειμερινό Εξάμηνο 2016, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιά

Internet Sites

- ❖ www.bloomberg.com
- ❖ www.euretirio.com
- ❖ www.investopedia.com
- ❖ www.ssrn.com/en
- ❖ www.sciencedirect.com

Παράρτημα

Αριθμητική Ανάλυση : Κώδικες MatLab

ΜΟΝΤΕΛΟ Extended Vasicek

Κώδικας 1: Ορισμός μεταβλητής $A(t_1, t_2)$, Extended Vasicek

```
function[A]=EXTVASICEK_A(t1,t2,a,sigma,f)
A=exp((EXTVASICEK_B(t1,t2,a)-t2+t1)*((a*f)-(sigma^2)/2))/(a^2)-
((sigma^2)*(EXTVASICEK_B(t1,t2,a)^2))/(4*a);
end
```

Κώδικας 2: Ορισμός μεταβλητής $B(t_1, t_2)$, Extended Vasicek

```
function[B]=EXTVASICEK_B(t1,t2,a)
B=(1-exp(-a*(t2-t1)))/a;
end
```

Κώδικας 3 : Τιμολόγηση ομολόγου , Extended Vasicek

```
function[P]=EXTVASICEK_P(t1,t2,sigma,f,a,r)
P=EXTVASICEK_A(t1,t2,a,sigma,f)*exp(-r*EXTVASICEK_B(t1,t2,a));
end
```

Κώδικας 4 : Εύρεση επιτοκίου r_k , Extended Vasicek

```
function F =EXTVASICEKF(r)
global T
global K
F=0;
h=T+0.5;
s=h:0.5:5;
n=length(s);
for i=1:n-1
```

```
F=F+5*EXTVASICEK_P(T,s(i),0.06,0.02,1,r);  
end  
F=F+105*EXTVASICEK_P(T,s(n),0.06,0.02,1,r)-K;
```

Κώδικας 5 :Τιμή για ένα call option

```
function[optionprice]=EXTVAS_Option(t1,t2,sigma,f,a,r,X,L)  
sigmap=(sigma/a)*(1-exp(-a*(t2-t1)))*sqrt((1-exp(-2*a*t1))/(2*a));  
b=(1/sigmap)*log((L*EXTVASICEK_P(0,t2,sigma,f,a,r))/(EXTVASICEK_P(0,t1,sigma,f,a,r)*X))+sigmap/2  
;  
d=b-sigmap;  
optionprice=L*EXTVASICEK_P(0,t2,sigma,f,a,r)*normcdf(b)-  
X*EXTVASICEK_P(0,t1,sigma,f,a,r)*normcdf(d);
```

Κώδικας 6 :Τιμολόγηση δικαιωμάτων σε μη μηδενικό ομόλογο

```
function[optionpricezero]=EXTVAS_Option_Non_Zero(t1,sigma,f,a,r,rk,c)  
global L;  
h=t1+0.5;  
s=h:0.5:5;  
n=length(s);  
optionpricezero=0;  
for i=1:n-1  
optionpricezero=optionpricezero+EXTVAS_Option(t1,s(i),sigma,f,a,r,c*EXTVASICEK_P(t1,s(i),sigma,f,  
a,rk),c);  
end  
optionpricezero=optionpricezero+EXTVAS_Option(t1,s(n),sigma,f,a,r,(L+c)*EXTVASICEK_P(t1,s(n),sig  
ma,f,a,rk),L+c);  
end
```

Κώδικας 7 :Τιμολόγηση interest rate cap .

```
function[price]=EXTVASICEK_CAP(t,tnext,sigma,f,a,r,F,R,L)
delta=tnext-t;
d1=(log(F/R)+((sigma^2)*t)/2)/(sigma*sqrt(t));
d2=(log(F/R)-((sigma^2)*t)/2)/(sigma*sqrt(t));
price=L*delta*EXTVASICEK_P(0,tnext,sigma,f,a,r)*(F*normcdf(d1)-R*normcdf(d2))
```

ΜΟΝΤΕΛΟ Extended CIR

Κώδικας 8: Ορισμός μεταβλητής $A(t_1, t_2)$, CIR

```
function[A]=CIR_A(t1,t2,y,sigma,f)
g=sqrt((y^2)+2*(sigma^2));
A=(2*g*exp((g+y)*(t2-t1)/2)/((g+y)*(exp(g*(t2-t1))-1)+2*g))^((2*f)/sigma^2);
end
```

Κώδικας 9: Ορισμός μεταβλητής $B(t_1, t_2)$, CIR

```
function[B]=CIR_B(t1,t2,y,sigma)
g=sqrt((y^2)+2*(sigma^2));
B=(2*(exp(g*(t2-t1))-1)/((g+y)*(exp(g*(t2-t1))-1)+2*g));
```

Κώδικας 10: Τιμολόγηση ομολόγου, CIR

```
function[P]=CIR_P(t1,t2,y,sigma,f,r)
P=CIR_A(t1,t2,y,sigma,f)*exp(-r*CIR_B(t1,t2,y,sigma));
End
```

Κώδικας 11: Εύρεση επιτοκίου r_k , CIR

```
function F=CIR1F(r)%βρίσκω το νέο r
global T
```

```

global K
F=0;
h=T+0.5;
s=h:0.5:5;
n=length(s);
for i=1:n-1
F=F+5*CIR_P(T,s(i),0.2,0.06,0.02,r);
end
F=F+105*CIR_P(T,s(n),0.2,0.06,0.02,r)-K;

```

Κώδικας 12 :Τιμή για ένα call option ,CIR

```

function[optionprice]=CIR_Option(t1,t2,y,sigma,f,r,X,L)
global a;
sigma_p=(sigma/a)*(1-exp(-a*(t2-t1)))*sqrt((1-exp(-2*a*t1))/(2*a));
b=(1/sigma_p)*log((L*CIR_P(0,t2,y,sigma,f,r))/(CIR_P(0,t1,y,sigma,f,r)*X))+sigma_p/2;
d=b-sigma_p;
optionprice=L*CIR_P(0,t2,y,sigma,f,r)*normcdf(b)-X*CIR_P(0,t1,y,sigma,f,r)*normcdf(d);

```

Κώδικας 13 :Τιμολόγηση δικαιωμάτων σε μη μηδενικό ομόλογο,CIR

```

function[optionpricezero]=CIR_Option_Non_Zero(t1,y,sigma,f,r,rk,c)
global L;
h=t1+0.5;
s=h:0.5:5;
n=length(s);
optionpricezero=0;
for i=1:n-1
optionpricezero=optionpricezero+CIR_Option(t1,s(i),y,sigma,f,r,c*CIR_P(t1,s(i),y,sigma,f,rk),c);
end
optionpricezero=optionpricezero+CIR_Option(t1,s(n),y,sigma,f,r,(L+c)*CIR_P(t1,s(n),y,sigma,f,rk),L+c);
end

```

Κώδικας 14 : Τιμολόγηση ενός interest rate cap

```
function[price]=CIR_CAP(t,tnext,y,sigma,f,r,F,R,L)
delta=tnext-t;
d1=(log(F/R)+((sigma^2)*t)/2)/(sigma*sqrt(t));
d2=(log(F/R)-((sigma^2)*t)/2)/(sigma*sqrt(t));
price=L*delta*CIR_P(0,tnext,y,sigma,f,r)*(F*normcdf(d1)-R*normcdf(d2))
```

ΚΩΔΙΚΑΣ 15: Εκτίμηση παραμέτρων με EXTENDED VASICEK

```
function[ x,resnorm,residual,exitflag,output] =
EXTVASICEKCalibration(~)
%clear all %#ok<CLALL>
%global sigma;
global a ; %#ok<NUSED>
global TTMO;
global TTMB;
global irate;%επιτόκιο ως το yield 10-year american treasury bond
global mktprice;%αγοραία τιμή δικαιώματος
global strikes;%strike price
%global N;
global k;%βοηθητική μεταβλητή
%φτιάχνω μηδενικούς πίνακες για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel τα δεδομένα
irate=zeros(61,1); %#ok<PREALL>
TTMO=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
TTMB=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
mktprice=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
strikes=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
parameter=zeros(61,2); % πλήθος στηλών = πλήθος παραμέτρων για
εκτίμηση
res=zeros(61,1);
exit=zeros(61,1); %#ok<NASGU>
%N=xlsread
mktprice=xlsread('prices.xlsx','A1:C61');
TTMO=xlsread('TTMO.xlsx','A1:C61');
TTMB=xlsread('TTMB.xlsx','A1:C61');
irate=xlsread('interestrates.xlsx','A1:A61')
strikes=xlsread('strikes.xlsx','A1:C61');
extvasicek_matrix=zeros(61,3);
for i=1:61
    x0=[0.06,0.02];
    lb=[0,0];
    ub=[];
    k=i
    x=zeros(1,2); %#ok<PREALL>
    [ x,resnorm,residual,exitflag,output] =
    lsqnonlin(@EXTVAS_OPTION_LSQD2,x0,lb,ub)
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
```

```
for j=1:3
extvasicek_matrix(i,j)
=EXTVAS_Option(TTMO(i,j),TTMB(i,j),x(1),x(2),irate(i,1),strikes(i,j));
end
pricedata = [extvasicek_matrix];    %#ok<NBRAK>
end

xlswrite('bbb.xls',pricedata,'results','H2:J62')
xlswrite('bbb.xls',res,'results','E2:G62')
xlswrite('bbb.xls',parameter,'results','A2:B62')
```

Βοηθητική συνάρτηση που καλείται από τον κώδικα 15

```
function [ extvas_option_lsqd ] = EXTVAS_OPTION_LSQD2(x)
global TTMO;
global TTMB;
global mktprice;
global irate ;
global strikes;
global k;
extvas_option_lsqd = zeros(1,2);
for j=1:3
    extvas_option_lsqd(1,j)= mktprice(k,j)-
EXTVAS_Option(TTMO(k,j),TTMB(k,j),x(1),x(2),irate(k,1),strikes(k,j)
);
end
```

Κώδικας 16 : Εκτίμηση παραμέτρων με το μοντέλο EXTENDED CIR

```
function[ x,resnorm,residual,exitflag,output] = CIRCalibration(~)
%clear all %#ok<CLALL>

global a ; %#ok<NUSED>
global TTMO;
global TTMB;
global irate;%επιτόκιο ως το yield 10-year american treasury bond
global mktprice;%αγοραία τιμή δικαιώματος
global strikes;%strike price
%global N;
global k;%βοηθητική μεταβλητή
%φτιάχνω μηδενικούς πίνακες για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
τα δεδομένα
irate=zeros(61,1); %#ok<PREALL>
TTMO=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
TTMB=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
mktprice=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
strikes=zeros(61,3); %#ok<PREALL>
parameter=zeros(61,3); % πλήθος στηλών = πλήθος παραμέτρων για εκτίμηση
res=zeros(61,1);
exit=zeros(61,1); %#ok<NASGU>
%N=xlsread
mktprice=xlsread('prices.xlsx','F1:H61')
TTMO=xlsread('TTMO.xlsx','A1:C61')
TTMB=xlsread('TTMB.xlsx','A1:C61')
irate=xlsread('interestrates.xlsx','A1:A61')
strikes=xlsread('strikes.xlsx','A1:C61')
cir_matrix=zeros(61,3);
for i=1:61
    x0=[0.2,0.02,0.06]
    lb=[0,0,0]
    ub=[]
    k=i
    x=zeros(1,3); %#ok<PREALL>
    [ x,resnorm,residual,exitflag,output] =
lsqnonlin(@CIR_OPTION_LSQD2,x0,lb,ub)
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
for j=1:3
cir_matrix(i,j)
=CIR_option(TTMO(i,j),TTMB(i,j),x(1),x(3),x(2),irate(i,1),strikes(i,j));
end
pricedata = [cir_matrix]; %#ok<NBRAK>
end

xlswrite('aaa.xls',pricedata,'results','H2:J62')
xlswrite('aaa.xls',res,'results','E2:G62')
xlswrite('aaa.xls',parameter,'results','A2:C62')
```

Βοηθητική συνάρτηση που καλείται από τον κώδικα 16

```
function [ cir_option_lsqd ] = CIR_OPTION_LSQD2(x)
global TTMO;
global TTMB;
global mktprice;
global irate ;
global strikes;
global k;
cir_option_lsqd = zeros(1,3);
for j=1:3
    cir_option_lsqd(1,j)= mktprice(k,j)-
    CIR_Option(TTMO(k,j),TTMB(k,j),x(1),x(3),x(2),irate(k,1),strikes(k,j));
end
```