



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ «Χρηματοοικονομική και Τραπεζική» με κατεύθυνση στη
«Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Διοικητική»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΩΝ
ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ»**

Επαμεινώνδας Ματθαίος
Αρ. Μητρώου: ΜΧΡΗ1532

Επιβλέπων
Μιχάλης Ανθρωπέλος

Μέλη Επιτροπής
Δημήτρης Μαλλιάρopoulos
Νικήτας Πιπτής

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Ανθρωπέλο, λέκτορα του Πανεπιστημίου Πειραιώς, που με ενθάρρυνε στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Η συμβολή του ήταν καθοριστικής σημασίας και τον ευχαριστώ για την βοήθειά του τόσο στο θεωρητικό όσο και στο πρακτικό κομμάτι της εργασίας που χωρίς αυτήν η ολοκλήρωση της θα ήταν αδύνατη.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με στήριξε και μου έδωσε την δυνατότητα να παρακολουθήσω το συγκεκριμένο μεταπτυχιακό πρόγραμμα καθώς και τους φίλους μου που μου συμπαραστάθηκαν.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τα επιτοκιακά παράγωγα και πιο συγκεκριμένα προσπαθεί να συγκρίνει τις μεθόδους τιμολόγησης των εν λόγω χρηματοοικονομικών προϊόντων μέσω μοντέλων επιτοκίου. Αναλυτικότερα, θα παρουσιαστούν τα βασικά μοντέλα τα οποία δίνουν αναλυτικές λύσεις και είναι απαραίτητα για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων και πιο συγκεκριμένα των δικαιωμάτων προαίρεσης ανώτατου επιτοκίου (interest rate caps). Τα μοντέλα βραχυπρόθεσμου επιτοκίου που θα παρουσιαστούν είναι εκείνα των Vasicek, Cox-Ross-Ingersoll και των Ho-Lee. Τα δύο πρώτα μοντέλα είναι τα λεγόμενα μοντέλα ισορροπίας (equilibrium models) στα οποία γίνεται η υπόθεση ότι η σημερινή διάρθρωση των επιτοκίων είναι μία εξωγενής παράμετρος. Αντίθετα, το μοντέλο των Ho-Lee είναι ένα μοντέλο μη βέβαιου κέρδους (no-arbitrage model) το οποίο θεωρεί την τωρινή χρονική διάρθρωση των επιτοκίων σαν μία ενδογενή παράμετρο. Στην συνέχεια, τα παραπάνω μοντέλα αναλύονται παρουσιάζοντας τα βασικά χαρακτηριστικά τους. Έπειτα, γίνεται η προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με την μέθοδο Monte Carlo ώστε να πραγματοποιηθεί η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης ανώτατου επιτοκίου.

Λέξεις Κλειδιά: επιτοκιακά παράγωγα, μοντέλα επιτοκίων, βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, προσομοίωση, Monte Carlo, τιμολόγηση, interest rate caps

Abstract

This thesis examines interest rate derivatives and particularly tries to compare the pricing methods of these financial products through interest rate models. Specifically, they will be presented models which give closed form solutions and are necessary for the pricing of interest rate derivatives and in particular interest rate caps. The short rate models which are going to be examined are namely, Vasicek, Cox-Ross-Ingersoll and Ho-Lee model. The first two models are equilibrium models which assume that today's term structure of interest rates is an exogenous parameter. Instead, Ho-lee model considers today's term structure as an endogenous parameter. The above models are analysed by presenting their main features. After that, short rate is simulated by Monte Carlo techniques in order to pricing interest rate caps.

Key words: interest rate derivatives, interest rate models, short rate, simulation, Monte Carlo, pricing, interest rate caps

Περιεχόμενα

1. Επιτόκια και επιτοκιακά παράγωγα.....	7
1.1. Επιτόκια	11
2. Τιμολόγηση Επιτοκιακών Παραγώγων	16
2.1. Risk neutral Valuation	16
3. Στοχαστική Διαδικασία	20
3.1. Διαδικασία Markov	20
3.2. Διαδικασία Wiener	21
3.3. Γενικευμένη Διαδικασία Wiener	23
4. Μοντέλα Διάρθρωσης Επιτοκίων	25
4.1. Συνεχή και διακριτά μοντέλα.....	26
4.2. Μοντέλα τιμής ομολόγων, επιτοκίων και μοντέλα καμπύλης απόδοσης .	27
4.3. Μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων ενός ή πολλών παραγόντων.....	27
4.4. Μοντέλα ισορροπίας αγοράς και μη-βέβαιου κέρδους.....	27
4.4.1. Μοντέλο Vasicek (1977)	28
4.4.1.1. Μειονεκτήματα του μοντέλου Vasicek	30
4.4.2. Μοντέλο Cox, Ingersoll και Ross (1985)	31
4.4.3. Μοντέλο Ho-Lee (1986)	33
5. Μέθοδοι τιμολόγησης επιτοκιακών παραγώγων	35
5.1. Μοντέλο Black (1976)	35
5.2. Αριθμητικές μέθοδοι τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων.....	37
5.3. Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.....	42
6. Τιμολόγηση συμβολαίου cap με την χρήση της μεθόδου Monte Carlo.....	46
6.1. Προσομοίωση μοντέλου Vasicek	48
6.2. Προσομοίωση μοντέλου CIR.....	51
6.3. Προσομοίωση μοντέλου Ho-Lee.....	54
7. Επίλογος.....	57

Εισαγωγή

Τα επιτοκιακά παράγωγα (interest rate derivatives) είναι πολύπλοκα χρηματοοικονομικά προϊόντα και πιο συγκεκριμένα είναι χρηματοοικονομικά παράγωγα των οποίων ο υποκείμενος τίτλος είναι το επιτόκιο. Τα επιτοκιακά παράγωγα χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο για την αντιστάθμιση του επιτοκιακού κινδύνου και απευθύνονται σε εκείνους οι οποίοι θέλουν να προστατευτούν από τις απότομες μεταβολές του επιτοκίου. Ταυτόχρονα όμως υπάρχει και μία μερίδα επενδυτών οι οποίοι θέλουν να επωφεληθούν από τις έντονες διακυμάνσεις του επιτοκίου και είναι διατεθειμένοι να πάρουν θέση στην εν λόγω αγορά. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με το επενδυτικό ταμείο Phoenix Capital η συγκεκριμένη αγορά άγγιξε το 2015 τα \$555 τρις. σε τοποθετήσεις. Επομένως, είναι κατανοητό πως τα επιτοκιακά παράγωγα διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στην παγκόσμια οικονομία.

Μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που παρουσίαζαν τα επιτοκιακά παράγωγα ήταν να βρεθούν τα εργαλεία με τα οποία οι επενδυτές θα μπορούσαν να τιμολογήσουν. Αυτό διότι η συμπεριφορά του επιτοκίου είναι πολύπλοκότερη έναντι εκείνης της τιμής μιας μετοχής ή της συναλλαγματικής ισοτιμίας.

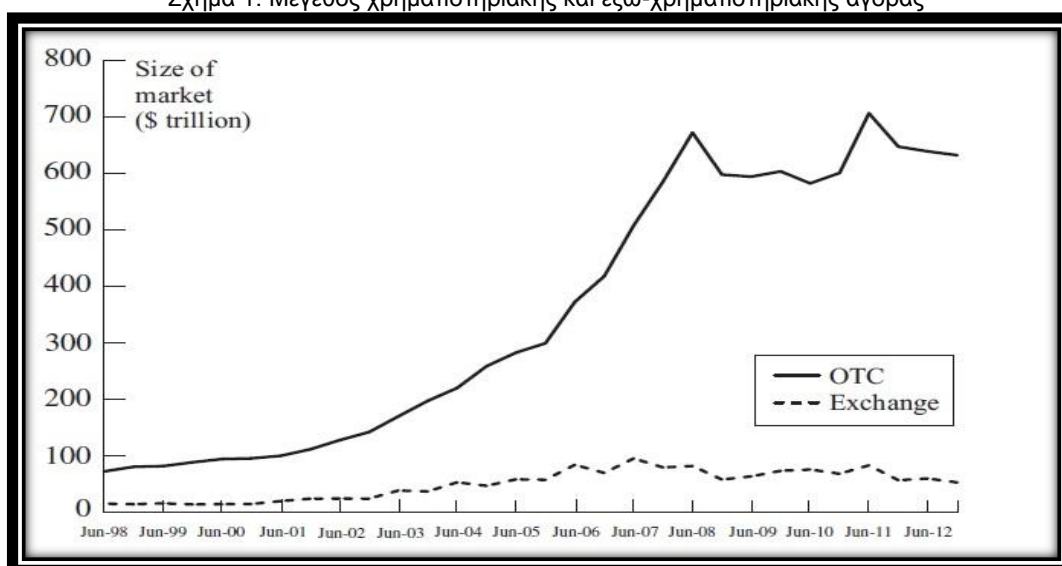
Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει την ακόλουθη διάρθρωση. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται γενικά εισαγωγικά στοιχεία σχετικά με τη διάρθρωση των επιτοκίων και παρέχονται βασικοί ορισμοί. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο του *risk neutral valuation* που είναι απαραίτητο για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων. Έπειτα, στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται οι βασικές ιδέες και έννοιες σχετικά με την στοχαστική εξέλιξη μιας μεταβλητής. Στην συνέχεια, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των μοντέλων βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και αναλύονται οι βασικές ιδιότητές τους ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο δίνεται μία σύντομη περιγραφή των μεθόδων τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων. Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο πραγματοποιείται η προσομοίωση μέσω της τεχνικής Monte Carlo και εν τέλει η τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων.

1. Επιτόκια και επιτοκιακά παράγωγα

Σύμφωνα με τον Hull [1], τα παράγωγα είναι χρεόγραφα των οποίων η τιμή τους εξαρτάται (ή προέρχεται) από την τιμή άλλων βασικότερων υποκείμενων τίτλων (τιμές άλλων χρεογράφων, συναλλαγματικές ισοτιμίες, χρηματιστηριακοί δείκτες, τιμές εμπορευμάτων, επιτόκια, κτλ.). Για παράδειγμα, η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης πάνω σε μία μετοχή εξαρτάται από τη τιμή της μετοχής. Ωστόσο υπάρχουν και άλλα παράγωγα προϊόντα (exotic derivatives) των οποίων η τιμή τους επηρεάζεται από τον καιρό (weather derivatives) ή από την τιμή των ναύλων (freight derivatives). Στην περίπτωση των επιτοκιακών παραγώγων ο υποκείμενος τίτλος είναι η τιμή του επιτοκίου. Επομένως, η τιμή ενός επιτοκιακού παραγώγου εξαρτάται από την τιμή των επιτοκίων την δεδομένη στιγμή.

Οι συναλλαγές των παραγώγων γίνονται τόσο στην χρηματιστηριακή όσο και στην εξω-χρηματιστηριακή αγορά (over the counter, OTC). Οι περισσότερες τράπεζες, μεγάλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα αλλά και επιχειρήσεις πραγματοποιούν συναλλαγές με παράγωγα στην εξω-χρηματιστηριακή αγορά. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το μέγεθος των δύο αγορών (χρηματιστηριακής και εξω-χρηματιστηριακής αγοράς) από το 1998 έως το 2012 και γίνεται εμφανές ότι οι εξω-χρηματιστηριακές αγορές κυρίως μετά το 2000 αναπτύχθηκαν σε τεράστιο βαθμό σε σχέση με τις χρηματιστηριακές αγορές.

Σχήμα 1: Μέγεθος χρηματιστηριακής και εξω-χρηματιστηριακής αγοράς

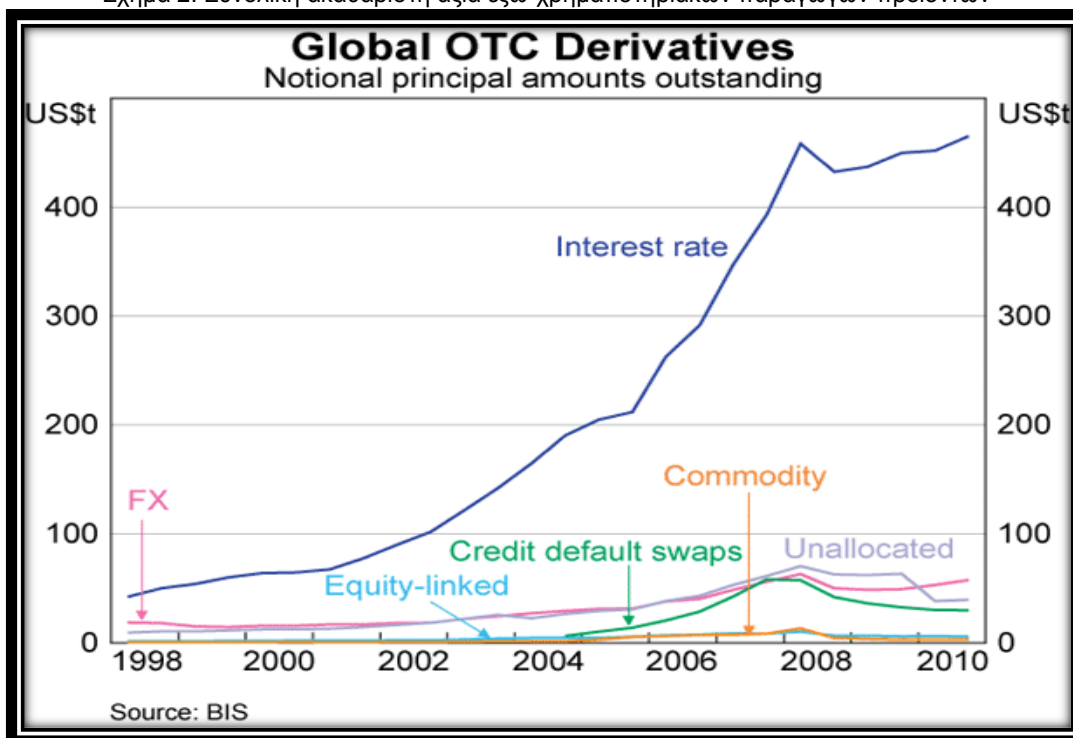


Στην εξω-χρηματιστηριακή αγορά οι συναλλαγές γίνονται κατευθείαν μεταξύ των δύο αντισυμβαλλόμενων μερών δίχως την παρουσία / επίβλεψη κάποιας κεντρικής, επίσημης πλατφόρμας όπως είναι το χρηματιστήριο. Σε μία χρηματιστηριακή αγορά όπου κάποιος μπορεί να πραγματοποιήσει τις συναλλαγές του, υπάρχει το πλεονέκτημα της πληροφόρησης και της διαφάνειας καθιστώντας με αυτό το τρόπο ασφαλέστερες τις συναλλαγές που πραγματοποιούνται. Επιπλέον, μέσω των χρηματιστηριακών αγορών ο πιστωτικός κίνδυνος που μπορεί να προέλθει από την πτώχευση ενός εκ των δύο αντισυμβαλλόμενων μερών είναι σχετικά μικρός λόγω της πληροφόρησης που κατέχει το χρηματιστήριο για τον εκάστοτε αντισυμβαλλόμενο. Ακόμα, σε μία οργανωμένη χρηματιστηριακή αγορά τα προϊόντα που αγοράζουν και πουλούν οι ενδιαφερόμενοι είναι τυποποιημένα. Αυτό σημαίνει ότι οι ημερομηνίες λήξης και εξάσκηση των συμβολαίων και των δικαιωμάτων προαίρεσης καθορίζονται εξ αρχής από το χρηματιστήριο και παραμένουν σταθερές για όλη την διάρκεια.

Αντίθετα, η εξω-χρηματιστηριακή αγορά, αποτελείται από ένα σύνολο θεσμικών επενδυτών δίχως την παρουσία κάποιου επίσημου φορέα όπως το χρηματιστήριο. Το θεσμικό πλαίσιο της εξω-χρηματιστηριακής αγοράς ελέγχεται και ρυθμίζεται από τους ίδιους τους επενδυτές με αποτέλεσμα τα προϊόντα που δημιουργούνται σε αυτή την αγορά να εξυπηρετούν αποκλειστικά τις ανάγκες τους.

Τα προϊόντα που διαπραγματεύονται στην εξω-χρηματιστηριακή αγορά κυρίως από τους μεγάλους επενδυτές [2] είναι κυρίως επιτόκια, συναλλαγματικές ισοτιμίες, μετοχές, εμπορεύματα καθώς και πιστωτικά παράγωγα. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται τα ποσά που έχουν διατεθεί στην εξω-χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων από το 1998 έως το 2010:

Σχήμα 2: Συνολική ακαθάριστη αξία εξω-χρηματιστηριακών παράγωγων προϊόντων



Σύμφωνα με την Τράπεζα Διεθνών Κανονισμών (*Bank for International Settlements – BIS*) η συνολική ακαθάριστη αξία όλων των εξω-χρηματιστηριακών παράγωγων προϊόντων έφτασε τον Δεκέμβριο του 2010 στα \$500 τρισεκατομμύρια. Από το παραπάνω σχήμα γίνεται φανερό ότι τα επιτοκιακά παράγωγα (τα οποία και εξετάζει η παρούσα διπλωματική εργασία) ήδη από το 1998 προτιμήθηκαν περισσότερο από τους επενδυτές έναντι άλλων παράγωγων προϊόντων εγγεγραμμένα πάνω σε εμπορεύματα, μετοχές, συναλλαγματική ισοτιμία κτλ.

Η αγορά των παραγώγων (τόσο η χρηματιστηριακή όσο και η εξω-χρηματιστηριακή) έγινε ευρέως διαδεδομένη διότι προσέλκυσε τριών ειδών επενδυτές [1]. Τους αντισταθμιστές, τους κερδοσκόπους και τους αρμπιτραζέρ. Όσον αφορά τους αντισταθμιστές (*hedgers*) κύριος στόχος τους είναι η εξάλειψη του κινδύνου. Ο κίνδυνος αυτός μπορεί να έχει σχέση με την μεταβλητότητα που παρουσιάζει ο υποκείμενος τίτλος όπως είναι το επιτόκιο, οι τιμές των μετοχών κτλ., και μπορεί να επηρεάσει την θέση που έχουν οι επενδυτές στα παράγωγα προϊόντα. Οι αντισταθμιστές για να μειώσουν όσο το δυνατόν πιο πολύ τον κίνδυνο μπορούν να χρησιμοποιήσουν προθεσμιακά συμβόλαια (*forward contracts*) ή δικαιώματα προαίρεσης (*options*). Υπάρχει όμως μία βασική διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δύο τεχνικές μείωσης κινδύνου. Τα προθεσμιακά συμβόλαια έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε

να εξουδετερώνουν τον κίνδυνο. Αυτό γίνεται με το 'κλείδωμα' της τιμής του περιουσιακού στοιχείου που θα πληρώσει ή θα εισπράξει ο αντισταθμιστής σε κάποιο προκαθορισμένο χρονικό σημείο. Αντίθετα, τα δικαιώματα προαίρεσης παρέχουν ασφάλεια στον κάτοχό τους. Παρέχουν την δυνατότητα στον αντισταθμιστή να προστατευτεί από την αντίθετη κίνηση της τιμής του περιουσιακού στοιχείου στο μέλλον ενώ ταυτόχρονα του δίνει την ευκαιρία να επωφεληθεί από την επιθυμητή κίνηση της τιμής του στοιχείου. Αυτή η δυνατότητα δεν υπάρχει στα προθεσμιακά συμβόλαια με αποτέλεσμα ο αντισταθμιστής να παρουσιάζεται ευάλωτος σε κινήσεις της τιμής του περιουσιακού στοιχείου αντίθετες από αυτές που επιθυμεί.

Αντίθετα, οι κερδοσκόποι (speculators) στοιχηματίζουν στην εξέλιξη αυτής της μεταβλητότητας με σκοπό να αποκομίσουν μεγάλα κέρδη. Βέβαια, όπως γίνεται αντιληπτό υπάρχει μεγάλη πιθανότητα οι κερδοσκόποι να βρεθούν αντιμέτωποι με την αντίθετη εξέλιξη της τιμής της υποκείμενης μεταβλητής με αποτέλεσμα να εμφανίσουν δυνητικά μεγάλες ζημιές. Δύο αγορές που χρησιμοποιούν οι κερδοσκόποι είναι εκείνη των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contracts) και των δικαιωμάτων προαίρεσης. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι ίσχυε και για τους αντισταθμιστές. Χρησιμοποιώντας τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης υπάρχει περίπτωση οι δυνητικές ζημιές να είναι πολύ μεγάλες. Αντίθετα, με τα δικαιώματα προαίρεσης ο κερδοσκόπος θα πληρώσει μονάχα ένα μικρό ποσό (premium) σε περίπτωση που η υποκείμενος τίτλος θα μεταβληθεί σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που είχε προβλέψει.

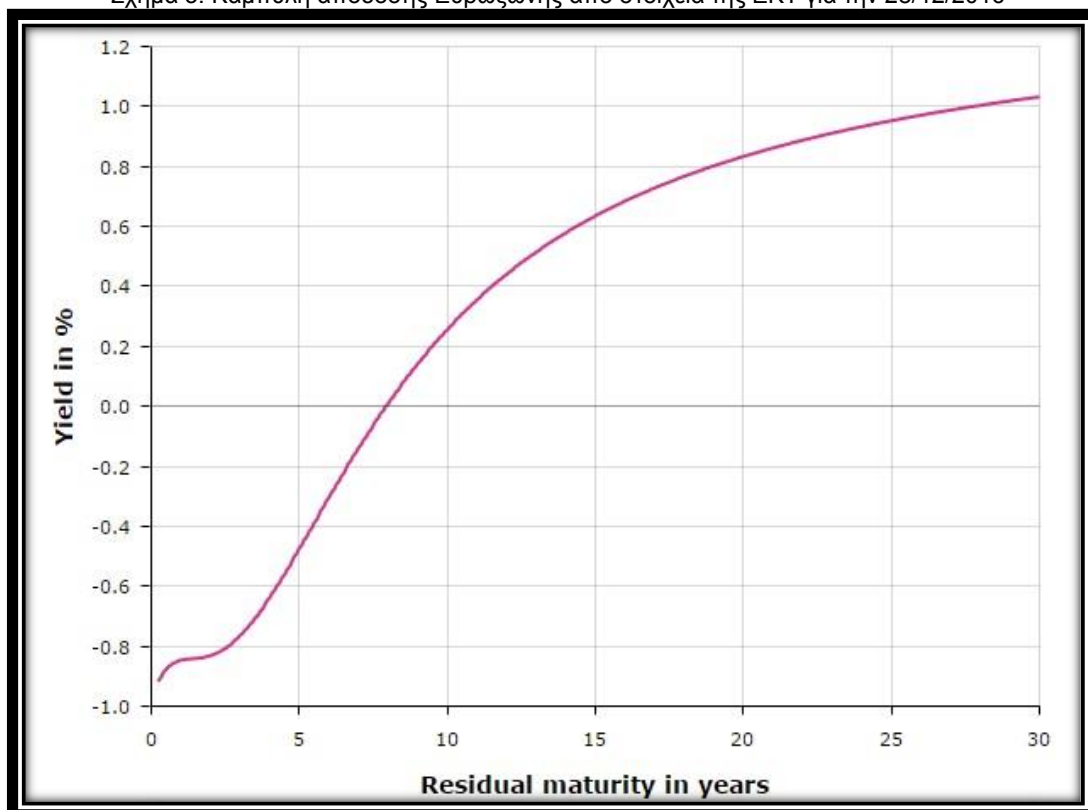
Τέλος, όσον αφορά τους αρμπιτραζέρ (arbitrageurs) κύριο μέλημά τους είναι το κέρδος χωρίς ρίσκο. Αυτό σημαίνει ότι προσπαθούν να αποκομίσουν κέρδος εκμεταλλευόμενοι την διαφορά της τιμής που έχει ένα περιουσιακό στοιχείο σε δύο διαφορετικές αγορές. Για παράδειγμα, μία μετοχή στο χρηματιστήριο της Νέα Υόρκης μπορεί να έχει \$120 και ταυτόχρονα £100 στο χρηματιστήριο του Λονδίνου με την ισοτιμία να βρίσκεται στο \$1,2575 ανά στερλίνα (τιμή 11/12/2016). Τότε ο αρμπιτραζέρ θα μπορούσε ταυτόχρονα να αγοράσει μία μετοχή από το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και ταυτόχρονα να την πουλήσει στο χρηματιστήριο του Λονδίνου ώστε με αυτό τον τρόπο να εξασφαλίσει ένα κέρδος της τάξης ανά μετοχή

$$[(\$/\text{£}1,2575 \times \text{£}100) - \$120] = \$5,75.$$

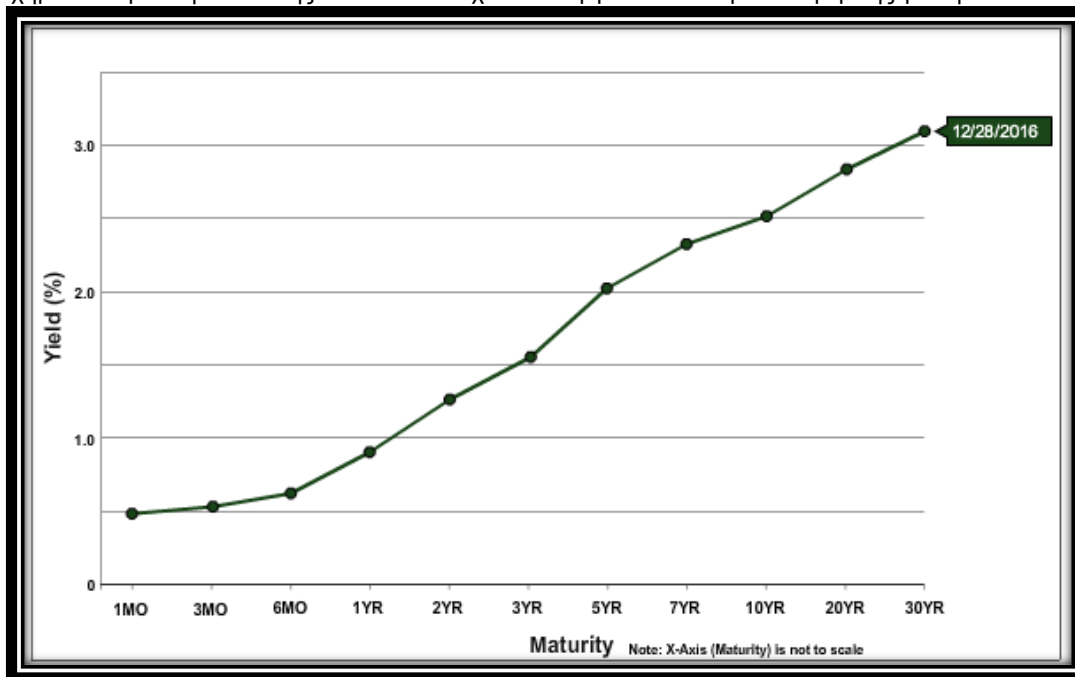
1.1. Επιτόκια

Σε αυτή την ενότητα, πριν γίνει ο σχολιασμός σχετικά με επιτοκιακά παράγωγα θα γίνει μία αναφορά όσον αφορά τον υποκείμενο τίτλο των παραγώγων αυτών, δηλαδή στο επιτόκιο. Η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα (European Central Bank – ECB) παρέχει σε καθημερινή βάση τα τρέχοντα επιτόκια (spot rates) των ευρωπαϊκών κρατικών ομολόγων. Τα ομόλογα αυτά βάσει της ιστοσελίδας της ΕΚΤ [3] πρέπει να είναι πιστοληπτικής βαθμίδας AAA και να πληρούν ορισμένα κριτήρια. Η διαγραμματική αναπαράσταση των επιτοκίων σε σχέση με τον χρόνο δίνει την χρονική διάρθρωση των επιτοκίων ή την καμπύλη απόδοσης (term structure of interest rates – yield curve). Στο σχήμα 3 και 4 αντίστοιχα παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων έτσι όπως αυτή δίνεται από την ΕΚΤ και από το Υπουργείο Οικονομικών της Αμερικής [4] για την ημερομηνία 28/12/2016.

Σχήμα 3: Καμπύλη απόδοσης Ευρωζώνης από στοιχεία της ΕΚΤ για την 28/12/2016



Σχήμα 4: Καμπύλη απόδοσης ΗΠΑ από στοιχεία Υπουργείου Οικονομικών Αμερικής για την 28/12/2016



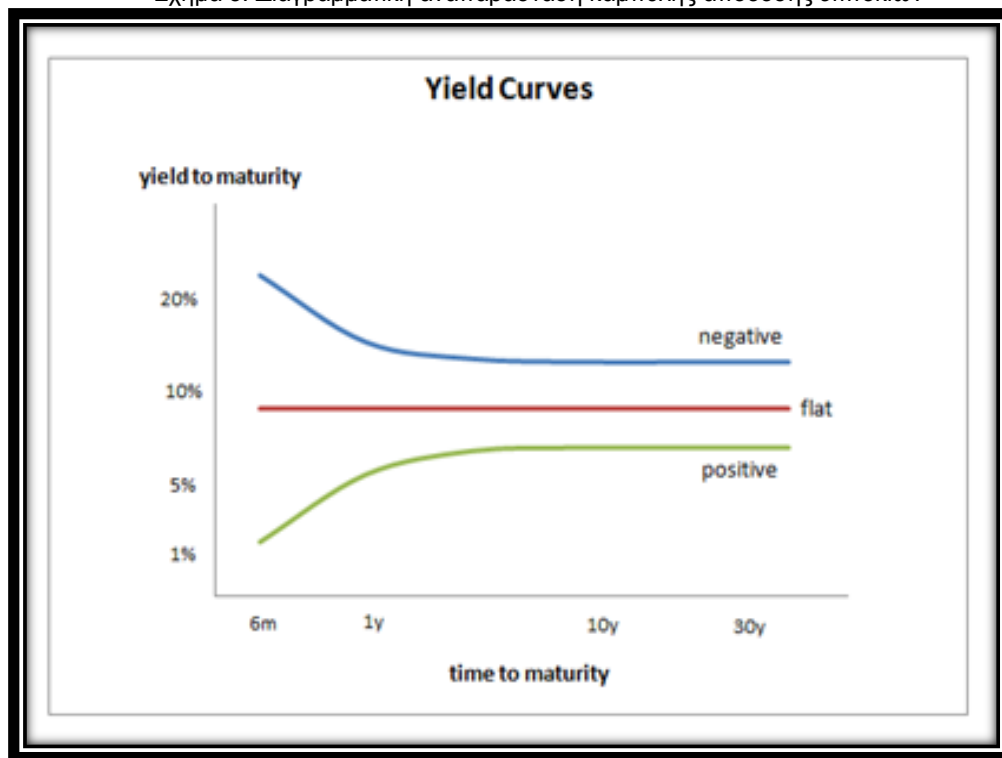
Η χρήση των επιτοκίων στην προεξόφληση αλλά και στην τιμολόγηση διαφόρων χρηματοοικονομικών προϊόντων δείχνει πόσο σημαντική είναι η καμπύλη για τους επενδυτές. Επιπλέον, η ίδια καμπύλη είναι πολύ χρήσιμη στον τομέα της χρηματοοικονομικής διοικητικής. Αυτό διότι οι περισσότερες επενδυτικές αποφάσεις σχετίζονται με τις προσδοκίες του κόστους κεφαλαίου το οποίο εξαρτάται από το επίπεδο του επιτοκίου [5].

Σύμφωνα με την Piazzesi [6] υπάρχουν δύο λόγοι ακόμα που κάνουν σημαντική την καμπύλη απόδοσης. Οι προβλέψεις και η διαχείριση του χρέους. Όσον αφορά τις προβλέψεις, αυτές παρέχουν σημαντικές πληροφορίες στις εταιρείες που έχουν νέες επενδυτικές προτάσεις καθώς επίσης και στους αποταμιευτές οι οποίοι θέλουν να αποταμιεύσουν τις καταθέσεις τους με την μεγαλύτερη δυνατή απόδοση. Σχετικά με τη διαχείριση του χρέους οι κυβερνήσεις όταν εκδίδουν νέο χρέος χρειάζεται να αποφασίσουν σχετικά με την λήξη των νέων ομολόγων που θα εκδοθούν. Τέλος, μέσω της χρονικής διάρθρωσης είναι δυνατόν να συλλεχθούν πληροφορίες σχετικά με τον πληθωρισμό και συγκεκριμένα έχει αποδειχθεί ότι για μεγαλύτερες ληκτότητες (άνω των 9 μηνών) μπορεί να προβλεφθεί πως θα κινηθεί ο αναμενόμενος πληθωρισμός στο μέλλον [7],[8].

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τριών ειδών καμπύλες αποδόσεων. Η καμπύλη αποδόσεων με θετική κλίση που είναι και η πιο συνηθισμένη

διότι τα περισσότερα χρόνια τα μακροχρόνια επιτόκια ήταν πάντα υψηλότερα έναντι των βραχυπρόθεσμων. Σε αυτή την περίπτωση η οικονομία παρουσιάζει μεγάλη πιθανότητα να αναπτυχθεί [9] και υπάρχει προσφορά κεφαλαίων στην βραχυπρόθεσμη αγορά ενώ παρατηρείται έλλειψή τους στην μακροπρόθεσμη αγορά.

Σχήμα 5: Διαγραμματική αναπαράσταση καμπύλης απόδοσης επιτοκίων



Στην περίπτωση της καμπύλης απόδοσης με αρνητική κλίση η οικονομία έχει μεγάλη πιθανότητα να επέλθει σε ύφεση [10]. Ο βραχυχρόνιος δανεισμός γίνεται ακριβότερος και υπάρχει μεγάλη ζήτηση κεφαλαίων σε σχέση με την μακροχρόνια αγορά. Τέλος, περνώντας από τις δύο φάσεις της καμπύλης υπάρχει το μεταβατικό στάδιο όπου οι αποδόσεις είναι οι ίδιες για όλα τα χρεόγραφα διαφορετικής ληκτότητας. Η επίπεδη καμπύλη απόδοσης αποτελεί ένδειξη μεγάλης αβεβαιότητας για την οικονομία και μπορεί να μετατραπεί είτε σε καμπύλη με θετική κλίση είτε σε καμπύλη με αρνητική κλίση.

Τα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου (zero coupon bonds – pure discount bonds) είναι ομόλογα τα οποία δεν δίνουν τοκομερίδιο παρά μόνο την ονομαστική τους αξία στη λήξη. Επομένως, η απόδοση του ομολόγου στην λήξη του (yield to maturity) θα είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο που ισχύει τη δεδομένη στιγμή για την χρηματοροή

που θα εισπράξει ο επενδυτής στην λήξη του ομολόγου. Η τιμή ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου στον χρόνο t που λήγει την χρονική στιγμή s είναι:

$$P(t, s) = e^{-R(t-s)(s-t)} \quad (1)$$

Επομένως, λύνοντας την εξίσωση (1) ως προς το τρέχον επιτόκιο:

$$R(t, s) = - \frac{\ln P(t, s)}{(s-t)} \quad (2)$$

Το τρέχον επιτόκιο $R(t, s)$ αναφέρεται στο συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο ενώ το $(s - t)$ είναι η χρονική στιγμή μέχρι την λήξη.

Ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο αποτελεί μία βάση για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων με χρήση της μεθόδου Monte Carlo είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο $r(t)$. Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι μία θεωρητική έννοια που δεν παρατηρείται στις αγορές ενώ προσδιορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$r(t) = \lim_{t \rightarrow s} R(t, s) \quad (3).$$

Από την σχέση (3) είναι φανερό ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι το τρέχον επιτόκιο για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα.

Στην συνέχεια, δίνεται ο ορισμός του στιγμιαίου προθεσμιακού επιτοκίου (instantaneous forward rate) $f(s, t)$. Το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο μπορεί να θεωρηθεί ως το τρέχον επιτόκιο για ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα τη χρονική στιγμή s που παρατηρείται στον χρόνο t . Έτσι λοιπόν, για την χρονική στιγμή t ισχύει ότι $f(t, t) = r(t)$. Επομένως, συνδυάζοντας την σχέση (2) με τον ορισμό του στιγμιαίου προθεσμιακού επιτοκίου ισχύει για το τρέχον επιτόκιο ότι:

$$R(t, s) = \frac{1}{s-t} \left(\int_t^s f(t, \tau) d\tau \right) \quad (4).$$

Συνδυάζοντας στην συνέχεια την σχέση (4) με την σχέση (1) σχηματίζεται η σχέση που δίνει το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο συναρτήσει της τιμής των ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου. Έτσι λοιπόν,

$$f(t, s) = - \frac{\partial}{\partial s} \ln P(t, s) \quad (5)$$

Να σημειωθεί πως το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο δεν παρατηρείται στην αγορά αλλά παραμένει ένα σημαντικό εργαλείο για την μοντελοποίηση της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων.

2. Τιμολόγηση Επιτοκιακών Παραγώγων

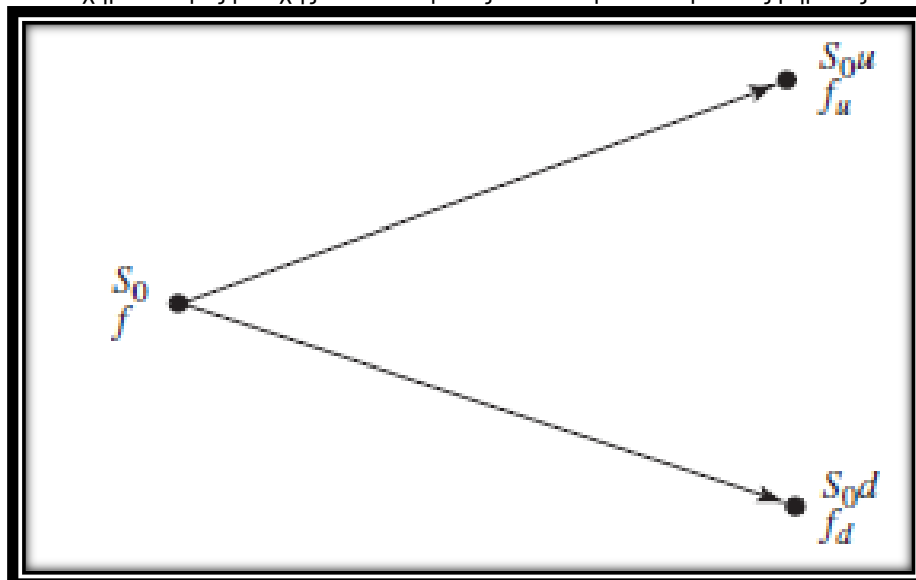
Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά το *risk neutral measure* ορίζεται ως το μέτρο πιθανότητας κατά το οποίο η σημερινή τιμή μίας μετοχής είναι ακριβώς ίση με την αναμενόμενη τιμή της, προεξοφλημένη κατά το μέτρο αυτό. Αυτή η έννοια χρησιμοποιείται σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό για τη τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων στο πλαίσιο τιμολόγησης των περιουσιακών στοιχείων. Σαν αποτέλεσμα των παραπάνω, σε μία ολοκληρωμένη αγορά η τιμή του παράγωγου προϊόντος είναι η αναμενόμενη τιμή της μελλοντικής πληρωμής του προεξοφλημένη, από το μέτρο πιθανότητας [11]. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το πλαίσιο του *risk neutral valuation* στο οποίο στηρίζεται η τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων και το οποίο είναι ανεξάρτητο από τις προτιμήσεις των επενδυτών.

2.1. Risk neutral Valuation

Ένα από τα πιο βασικά πλαίσια στα οποία στηρίζεται η τιμολόγηση των παραγώγων είναι το *risk neutral valuation*. Η μέθοδος με την οποία θα παρουσιαστεί το συγκεκριμένο πλαίσιο προέρχεται από τους Cox, Ross και Rubinstein οι οποίοι πρότειναν έναν τρόπο τιμολόγησης των παραγώγων με την χρήση δέντρων [12].

Έστω μία μετοχή της οποίας η τιμή είναι S_0 και ένα δικαίωμα προαίρεσης πάνω σε αυτή τη μετοχή του οποίου η σημερινή τιμή είναι f . Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση ότι η διάρκεια του δικαιώματος προαίρεσης μέχρι την λήξη είναι T και ότι στον χρόνο αυτό η τιμή της μετοχής μπορεί να κινηθεί είτε ανοδικά από την τιμή S_0 σε μια νέα τιμή S_0u όπου το $u > 1$ είτε καθοδικά από την τιμή S_0 σε μια νέα τιμή S_0d όπου το $d < 1$. Η πιθανότητα ανόδου της μετοχής είναι $u - 1$ ενώ η πιθανότητα καθόδου είναι $1 - d$. Εάν η μετοχή κινηθεί ανοδικά γίνεται η υπόθεση ότι η πληρωμή από το δικαίωμα προαίρεσης είναι f_u ενώ εάν κινηθεί καθοδικά η πληρωμή θα είναι ίση με f_d . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μία αναπαράσταση του διωνυμικού δέντρου:

Σχήμα 6: Τιμές μετοχής και δικαιώματος σε διωνυμικό δέντρο ενός βήματος



Στην συνέχεια γίνεται η υπόθεση ύπαρξης χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από Δ μετοχές και από μία θέση πώλησης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Αυτό γίνεται για να βρεθεί η τιμή του Δ όπου θα κάνει το χαρτοφυλάκιο ουδέτερο στον κίνδυνο. Στην περίπτωση όπου η τιμή της μετοχής ανέβει η αξία του χαρτοφυλακίου στην λήξη T θα είναι ίση με $S_0u\Delta - f_u$. Αντίθετα, εάν η τιμή της μετοχής κινηθεί προς τα κάτω η αξία του χαρτοφυλακίου στην λήξη T θα ισούται με $S_0d\Delta + f_d$. Εξισώνοντας τις τιμές του χαρτοφυλακίου έχουμε ότι

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta + f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (6)$$

Η σχέση (6) δείχνει τον λόγο μεταβολής της τιμής του δικαιώματος προς την μεταβολή της τιμής της μετοχής κατά την κίνηση μεταξύ των κόμβων στην λήξη T . Κάτω από αυτό τον αριθμό Δ των μετοχών, το χαρτοφυλάκιο δεν παρουσιάζει κίνδυνο και ευκαιρίες arbitrage δεν υπάρχουν. Σύμφωνα με αυτό, χαρτοφυλάκια με την ίδια πληρωμή σε μελλοντικό χρόνο πρέπει να έχουν τη ίδια τιμή σήμερα. Στην περίπτωση του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από Δ μετοχές και μία θέση πώλησης σε ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς πάνω στις ίδιες μετοχές δεν παρατηρείται καθόλου ρίσκο. Επομένως, σύμφωνα με την υπόθεση ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage η απόδοση του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r . Το Δ εξασφαλίζει ότι η αξία του χαρτοφυλακίου θα παραμείνει ίδια ανεξάρτητα αν η

τιμή της μετοχής μειωθεί ή αυξηθεί και κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι η τιμή του χαρτοφυλακίου είναι ίση με $S_0 u \Delta - f_u$. Συμπερασματικά, η προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου την χρονική στιγμή της λήξης T πρέπει να είναι ίση με το κόστος του χαρτοφυλακίου σήμερα δηλαδή:

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

Αντικαθιστώντας τον αριθμό των μετοχών Δ της σχέσης (6) στην παραπάνω σχέση και λύνοντας ως προς την τωρινή αξία του χαρτοφυλακίου f

$$f = e^{-rT} [p h_u + (1 - p) h_d]$$

όπου το p είναι η πιθανότητα ανόδου και ισούται με

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Σε αυτή εδώ την περίπτωση το p μπορεί να θεωρηθεί σαν μια πιθανότητα. Αυτή η πιθανότητα ονομάζεται και *risk neutral probability*. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πιθανότητες αυτές ορίζονται στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, δεν έχουν σχέση με τις πιθανότητες του πραγματικού κόσμου και γι' αυτό ονομάζονται ψευδοπιθανότητες.

Το risk neutral valuation όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως αποτελεί ένα από τα βασικότερα πλαίσια για την τιμολόγηση των παραγώγων. Το συγκεκριμένο πλαίσιο στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι στον κίνδυνο στο κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδυτές δεν αναζητούν μεγαλύτερες αποδόσεις για να αντισταθμίσουν τον αυξημένο κίνδυνο σε αντίθεση με τον πραγματικό κόσμο.

Ο κόσμος ουδέτερου κινδύνου έχει δύο χαρακτηριστικά που απλοποιούν την τιμολόγηση των παραγώγων [1]:

- Η αναμενόμενη απόδοση μία μετοχής (ή οποιασδήποτε άλλης επένδυσης) είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου
- Το προεξοφλητικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται στην αναμενόμενη πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Αυτό ακριβώς δείχνει και η σχέση $f = e^{-rT}[ph_u + (1 - p)h_d]$ όπου το

$$ph_u + (1 - p)h_d$$

είναι η αναμενόμενη μελλοντική πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου η οποία προεξοφλείται από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

3. Στοχαστική Διαδικασία

Στοχαστική διαδικασία ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία η τιμή μίας μεταβλητής μεταβάλλεται στον χρόνο κατά τυχαίο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι η μεταβλητή αυτή ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία. Μέσω της στοχαστικής εξέλιξης θα μας επιτραπεί να κάνουμε προσομοίωση στις αλλαγές μίας μεταβλητής και συγκεκριμένα στις αλλαγές του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $r(t)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο Monte Carlo.

Η στοχαστική διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε προβλήματα διακριτού χρόνου (discrete time) όσο και σε προβλήματα όπου ο χρόνος είναι συνεχής (continuous time). Επίσης, η ίδια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε καταστάσεις όπου η μεταβλητή μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές (discrete variable) ή και συνεχείς τιμές (continuous variable) εντός συγκεκριμένου εύρους τιμών.

3.1. Διαδικασία Markov

Η διαδικασία Markov είναι μία στοχαστική διαδικασία στην οποία η μόνη διαθέσιμη πληροφορία για την υπό εξέταση μεταβλητή σχετικά με την μελλοντική της εξέλιξη στο χρόνο είναι η τιμή της σήμερα. Με βάση αυτή την ιδιότητα η διαδικασία Markov εμπεριέχει μέσα της την μορφή ασθενούς αποτελεσματικότητας της αγοράς (weak – form efficiency market) σύμφωνα με την οποία η σημερινή τιμή της μεταβλητής (π.χ. η τιμή μίας μετοχής) αντικατοπτρίζει όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που υπάρχουν για αυτήν μέχρι σήμερα [13]. Λόγω της ασθενούς αποτελεσματικότητας της αγοράς οι επενδυτές δεν μπορούν να προβλέψουν τις μελλοντικές τιμές της μεταβλητής και με αυτό τον τρόπο να πετύχουν υπερβολικές αποδόσεις.

3.2. Διαδικασία Wiener

Η διαδικασία Wiener είναι ένας ειδικός τύπος της στοχαστικής διαδικασίας Markov με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση 1 ανά έτος. Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο ονομάζεται η συγκεκριμένη διαδικασία είναι και ως Brownian Motion προερχόμενο από την σωματιδιακή φυσική που περιγράφει την τυχαία κίνηση ενός σωματιδίου στον χώρο. Μία τυχαία μεταβλητή z η οποία ακολουθεί μία διαδικασία Wiener έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

- Η μεταβολή της τιμής Δz για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

- Οι τιμές της μεταβολής Δz για δύο χρονικές στιγμές Δt είναι ανεξάρτητες.

Μέσω της δεύτερης ιδιότητας προκύπτει ότι η μεταβλητή z ακολουθεί μία διαδικασία Markov. Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα T και διαιρώντας αυτό το διάστημα σε N μικρότερα διαστήματα διάρκειας Δt η διαφορά της μεταβλητής z μπορεί να οριστεί σαν:

$$N = T / \Delta t$$

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (8)$$

όπου ε_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ακολουθεί μία κανονική κατανομή $N(0,1)$

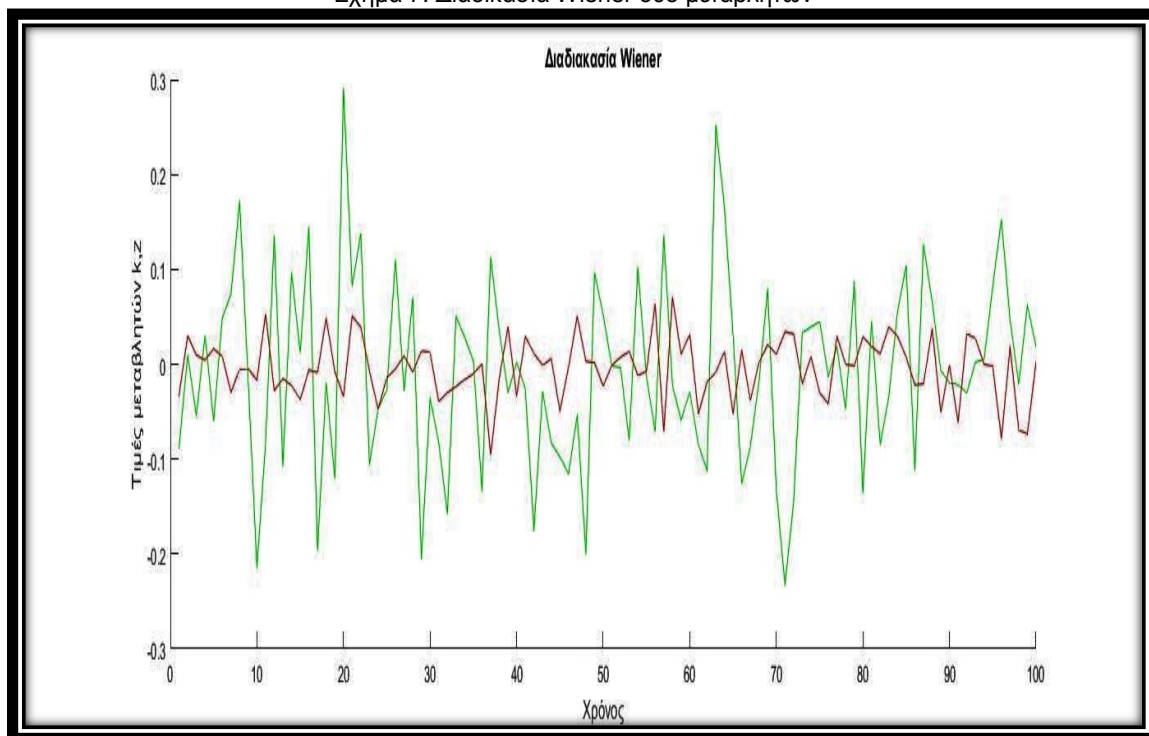
Μέσω της εξίσωσης (8) είναι φανερό ότι η μεταβολή της τιμής μίας μεταβλητής που ακολουθεί μία διαδικασία Wiener για ένα χρονικό διάστημα T ισούται με το άθροισμα των μεταβολών της μεταβλητής για N χρονικά διαστήματα μεγέθους Δt . Παρακάτω, παρουσιάζεται το διάγραμμα που εμφανίζει δύο μεταβλητές z , k (με πράσινο συμβολίζεται η μεταβλητή z και με κόκκινο η μεταβλητή k) οι οποίες ακολουθούν μία κατανομή Wiener. Η μεταβλητή z αλλάζει τιμές 100 φορές τον χρόνο σε αντίθεση με την μεταβλητή k όπου αλλάζει 1000 φορές τον χρόνο. Επομένως η μεταβολή των τιμών τους σύμφωνα και με την σχέση (7) είναι:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{100}} \text{ όπου } \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$\Delta k = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{1000}} \text{ όπου } \varepsilon \sim N(0,1).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι το χρονικό βήμα της μεταβολής της τιμής για την μεταβλητή z είναι 10 φορές μεγαλύτερο από εκείνο της μεταβλητής k . Επομένως, οι μεταβολές της μεταβλητής z θα είναι πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες μεταβολές της μεταβλητής k κάτι το οποίο είναι εμφανές και στο παρακάτω σχήμα. Οι τιμές των μεταβλητών δημιουργήθηκαν και στην συνέχεια έγινε η αναπαράστασή τους μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Matlab.

Σχήμα 7: Διαδικασία Wiener δύο μεταβλητών



3.3. Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Όπως αναλύθηκε και στην προηγούμενη ενότητα η διαδικασία Wiener ορίζεται ως η στοχαστική διαδικασία η οποία έχει μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ένα για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Η μέση μεταβολή της μεταβλητής ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται ποσοστό μεταβολής (drift rate) ενώ η διακύμανση ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται ποσοστό διασποράς (variance rate). Για μία μεταβλητή x που ακολουθεί την γενικευμένη διαδικασία Wiener ισχύει:

$$dx = a dt + b dz \quad (9)$$

όπου τα a και b είναι σταθερές. Για μικρές μεταβολές του χρόνου οι μεταβολές στις τιμές της μεταβλητής x είναι

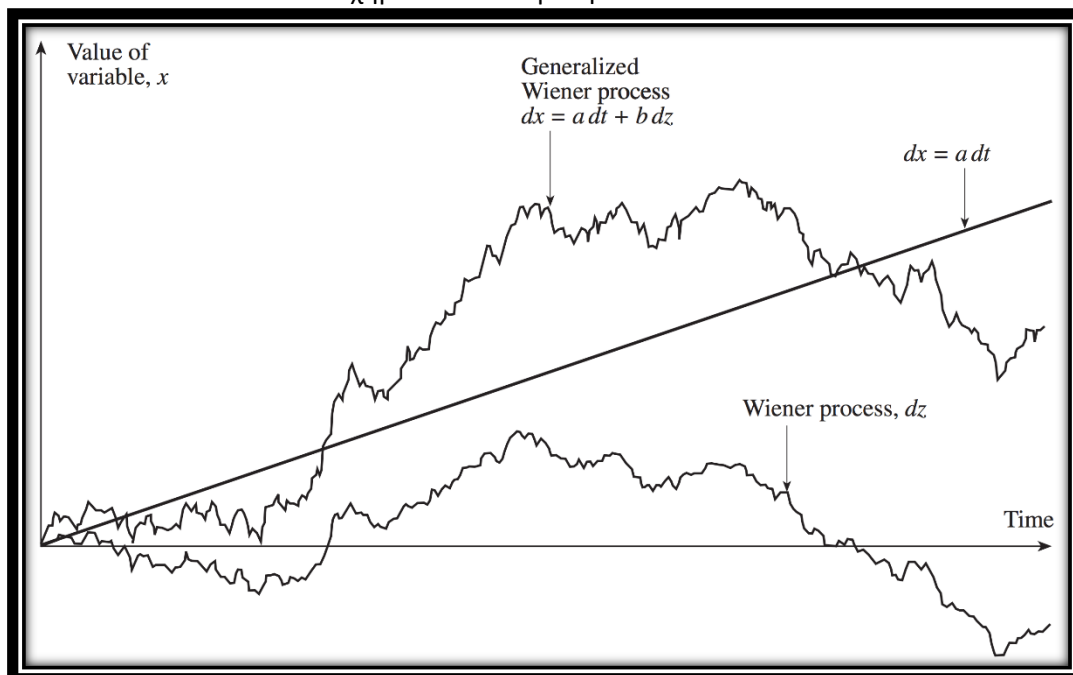
$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (10)$$

όπου το ε ακολουθεί μία τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$. Συνεπώς, το Δx ακολουθεί μία κανονική κατανομή με

- Μέση τιμή $\Delta x = a \Delta t$
- Διασπορα $\Delta x = b^2 \Delta t$

Στο σχήμα 8 δίνεται η αναπαράσταση της γενικευμένης διαδικασίας Weiner με ποσοστό μεταβολής a και ποσοστό διακύμανσης b^2 .

Σχήμα 8: Γενικευμένη διαδικασία Wiener



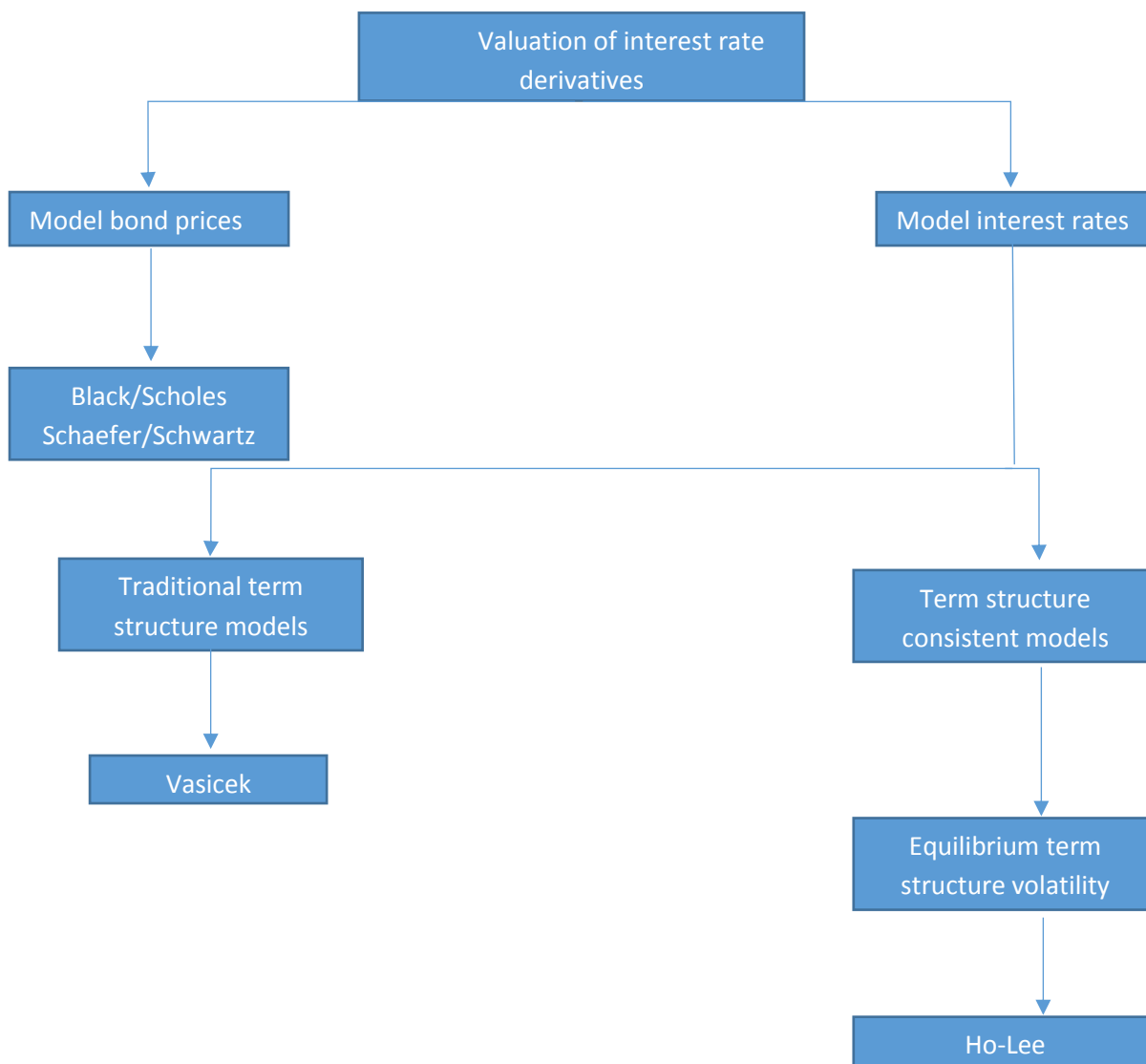
Όπως θα φανεί και στην συνέχεια υπάρχει περίπτωση οι παράμετροι a , b της γενικευμένης διαδικασίας Wiener να είναι συναρτήσεις τόσο του x όσο και του χρόνου t και η μεταβολή της μεταβλητής από το x στο $x + \Delta x$ να είναι:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (11)$$

Σε αυτή την περίπτωση τόσο η παράμετρος a όσο και η παράμετρος b μεταβάλλονται ανάλογα το χρόνο t . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *Ito-Process* και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον κατά την τιμολόγηση παραγώγων χρησιμοποιώντας την μέθοδο Monte Carlo.

4. Μοντέλα Διάρθρωσης Επιτοκίων

Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο $r(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το τρέχον επιτόκιο για ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί κάποιος να προσεγγίσει την κίνηση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Στην παρούσα διπλωματική θα χρησιμοποιηθούν δύο κατηγορίες μοντέλων. Τα μοντέλα ισορροπίας (equilibrium models) και τα μοντέλα μη-βέβαιου κέρδους (no arbitrage models) όπως αναφέρονται και στον Hull [1]. Στο σχήμα 6 [14] παρουσιάζονται διάφορες προσεγγίσεις που μπορεί να κάνει κάποιος για να τιμολογήσει τα επιτοκιακά παράγωγα.



Σχήμα 9: Παρουσίαση των πιθανών τρόπων τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων (Clewlow, Strickland [4], σελίδα 189)

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα το *Traditional term structure models* αναφέρεται στα μοντέλα ισορροπίας ενώ το *Equilibrium term structure volatility* αναφέρεται στα μοντέλα μη-βέβαιου κέρδους.

Το μοντέλο του Black (1976) που χρησιμοποιείται ευρέως για την τιμολόγηση εμπορευμάτων καθώς και χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως τα interest rate caps/floors, τα European Bond Options και τα European Swap Options παρουσιάζει κάποιους περιορισμούς (στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει εκτενής περιγραφή τους) με βασικότερο εξ αυτών ότι δεν μπορεί να περιγράψει πλήρως την χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα προϊόντα αμερικανικού τύπου που μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την λήξη τους να μην μπορούν να τιμολογηθούν σωστά. Επομένως, υπήρχε βασική ανάγκη να αναπτυχθούν μοντέλα (term structure models) τα οποία να μπορούν να περιγράψουν την κίνηση των επιτοκίων στον χρόνο και πιο συγκεκριμένα των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποια βασικά χαρακτηριστικά και διαφορές των μοντέλων αυτών όπως αυτά παρουσιάζονται από τους Gibson, Lhabitant και Talay [15]:

4.1. Συνεχή και διακριτά μοντέλα

Τα περισσότερα μοντέλα χρονικής διάρθρωσης είναι συνεχή στο χρόνο. Μέσω της συνεχούς διάρθρωσης των επιτοκίων και της στοχαστικής τους εξέλιξης τα μοντέλα αυτά κατάφεραν να δώσουν αναλυτικότερες λύσεις και καλύτερες εμπειρικές υποθέσεις με σαφώς μεγαλύτερης δυσκολίας μαθηματικές μεθόδους. Όσον αφορά τα μοντέλα χρονικής διάρθρωσης τα οποία είναι διακριτά στον χρόνο, έχουν αναπτυχθεί τέτοιου είδους μοντέλα ώστε να περιγράφουν φαινόμενα τα οποία μπορεί να συμβούν σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα όπως είναι για παράδειγμα οι παρεμβάσεις μιας Κεντρικής Τράπεζας.

4.2. Μοντέλα τιμής ομολόγων, επιτοκίων και μοντέλα καμπύλης απόδοσης

Τα αρχικά μοντέλα προσπαθούσαν να εξηγήσουν την διάρθρωση των επιτοκίων μέσω της δυναμικής συμπεριφοράς της τιμής των ομολόγων. Τα συγκεκριμένα μοντέλα δεν ήταν ιδιαίτερα δημοφιλή μιας και αποτύγχαναν να δώσουν μία σαφή εξήγηση της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων. Τα μοντέλα επιτοκίων όπως αυτό του Vasicek (1977) ή το μοντέλο των Cox, Ingersoll και Ross (1985) και άλλα περιγράφουν την στοχαστική εξέλιξη των επιτοκίων και ποιο συγκεκριμένα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Μία πολύ βασική υπόθεση αυτών των μοντέλων είναι ότι η τιμή του επιτοκίου δεν εξαρτάται από τις προηγούμενες τιμές παρά μόνο από την τρέχουσα τιμή του. Τέλος, υπάρχουν και τα μοντέλα τα οποία είναι σε θέση να προσεγγίσουν την στοχαστική κίνηση ολόκληρης της καμπύλης επιτοκίων χρησιμοποιώντας είτε το σύνολο των αποδόσεων των μελλοντικών επιτοκίων είτε τα προθεσμιακά επιτόκια. Η πολυπλοκότητά τους όμως τα κάνει λιγότερο ελκυστικά.

4.3. Μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων ενός ή πολλών παραγόντων

Τα μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων που έχουν αναπτυχθεί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Εκείνων του ενός παράγοντα και εκείνων που βασίζονται σε παραπάνω από έναν. Τα μοντέλα ενός παράγοντα (single factor model) θεωρούν πως το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο (short rate) είναι ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει την μελλοντική κίνηση των επιτοκίων. Αντίθετα, τα μοντέλα πολλών παραγόντων έχουν ενσωματωμένες παραπάνω από δύο πηγές αβεβαιότητας. Τα μοντέλα αυτά έχουν αντικατασταθεί σε μεγάλο βαθμό από άλλα μοντέλα της αγοράς. Παρόλα αυτά χρησιμοποιούνται ακόμα στην διαχείριση κινδύνου καθώς επίσης και για την τιμολόγηση υβριδικών, πιστωτικών παραγώγων αλλά και παραγώγων σταθερού εισοδήματος [16].

4.4. Μοντέλα ισορροπίας αγοράς και μη-βέβαιου κέρδους

Τα μοντέλα ισορροπίας (equilibrium models) βασίζονται σε υποθέσεις σχετικά με το πώς λειτουργεί μία οικονομία. Τα συγκεκριμένα μοντέλα παίρνουν υπόψιν τους τις διαφορετικές προτιμήσεις των επενδυτών και προσπαθούν να φέρουν σε ισορροπία την προσφορά των διάφορων χρεογράφων και την ζήτηση αυτών από τους

επενδυτές (ισορροπία αγοράς) φτιάχνοντας ενδογενώς την καμπύλη επιτοκίων. Ένα βασικό μειονέκτημα των μοντέλων αυτών είναι ότι δεν συμπίπτουν απόλυτα με τη σημερινή χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Επίσης, η διαφορά μεταξύ των πραγματικών τιμών και των θεωρητικών ενός μοντέλου ισορροπίας μπορεί να δώσει μία τεράστια απόκλιση όταν γίνεται τιμολόγηση παραγώγων. Για παράδειγμα ένα λάθος 1% στην θεωρητική τιμή του υποκείμενου ομολόγου μπορεί να οδηγήσει σε ένα λάθος 10% στην τιμή του δικαιώματος προαίρεσης με τον ίδιο υποκείμενο τίτλο. Από την άλλη τα μοντέλα μη βέβαιου κέρδους (no-arbitrage models) έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να ταιριάζουν απόλυτα στη σημερινή χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Επομένως, η βασική διαφορά των δύο αυτών κατηγοριών μοντέλων είναι ότι στα μοντέλα ισορροπίας η σημερινή χρονική διάρθρωση των επιτοκίων είναι μία εξωγενής παράμετρος ενώ στα no-arbitrage μοντέλα η σημερινή χρονική διάρθρωση των επιτοκίων είναι μία ενδογενής. Τέλος, μία ακόμα διαφορά μεταξύ των δύο κατηγοριών είναι ότι στα μοντέλα ισορροπίας η σταθερά του όρου dt δεν είναι συνάρτηση του χρόνου σε αντίθεση με τα μοντέλα μη βέβαιου κέρδους.

Στην συνέχεια θα γίνει μία λεπτομερής παρουσίαση των μοντέλων που θα χρησιμοποιηθούν από την παρούσα διπλωματική εργασία με σκοπό τη τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων.

Μοντέλα Ισορροπίας

4.4.1. Μοντέλο Vasicek (1977)

Ο Vasicek [17] ξεκίνησε την ανάλυσή του υποθέτοντας ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία η οποία εξαρτάται από τις δύο παραμέτρους που χαρακτηρίζουν μία διαδικασία Wiener που είναι το ποσοστό μεταβολής (drift rate) και το ποσοστό διασποράς (variance rate) Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο περιγράφεται μέσω μίας διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck [18]:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (12)$$

όπου κ , θ , σ είναι μη-αρνητικές σταθερές και ο όρος $W(t)$ υποδηλώνει την κίνηση Brown. Το θ αναπαριστά τη τιμή γύρω από την οποία θα κινηθεί το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ενώ το κ είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται γύρω από την τιμή αυτή. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται και ως mean reversion των επιτοκίων. Αν το r είναι πάνω

από το επίπεδο θ τότε το r θα μειωθεί. Το αντίθετο θα συμβεί σε περίπτωση που το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r είναι μικρότερο από το επίπεδο θ . Η συγκεκριμένη ιδιότητα του mean reversion μπορεί να ερμηνευτεί και από οικονομικούς όρους σύμφωνα με τους Zeytun και Gupta [19]. Αναλυτικότερα, υψηλά επιτόκια τείνουν να επιβραδύνουν μία οικονομία με συνέπεια οι δανειζόμενοι να απαιτούν όλο και λιγότερα κεφάλια. Αυτό με την σειρά του έχει σαν συνέπεια τα επιτόκια να μειώνονται προς ένα επίπεδο ισορροπίας σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Από την αντίθετη μεριά, χαμηλά επιτόκια σηματοδοτούν μεγάλη ζήτηση κεφαλαίων από την μεριά των δανειζόμενων με αποτέλεσμα τα επιτόκια να αυξάνονται προς ένα επίπεδο ισορροπίας.

Το μοντέλο του Vasicek [17] υπέθετε ότι το "τωρινό" βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι γνωστό και ότι είναι μία συνεχής συνάρτηση του χρόνου δίχως να παρουσιάζει "άλματα" στην διάρκεια του χρόνου ακολουθώντας μία διαδικασία Markov. Αυτό συνεπάγεται ότι το μοντέλο δεν διαθέτει "μνήμη" δηλαδή ότι οι μελλοντικές τιμές του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι ανεξάρτητες από τις παρελθοντικές κινήσεις. Επιπλέον, σύμφωνα με την Snoboda [20] το συγκεκριμένο μοντέλο υποθέτει ότι οι αγορές είναι "αποτελεσματικές". Αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν κόσθη μεταφοράς, η πληροφορία είναι ομοιογενώς κατανεμημένη σε όλους τους επενδυτές, οι επενδυτές είναι ορθολογικοί ενώ δεν υπάρχουν ευκαιρίες κέρδους δίχως ρίσκο.

Όσον αφορά τον δεύτερο όρο της σχέσης (12), αυτός προσπαθεί να ενσωματώσει όλη τη στιγμιαία μεταβλητότητα η οποία μπορεί να προέλθει από μία σειρά απρόβλεπτων παραγόντων. Το σ είναι η μεταβλητότητα ενώ το $W(t)$ είναι η διαδικασία Wiener. Το μοντέλο του Vasicek [18] υποθέτει ακόμα ότι η τιμή λ του κινδύνου της αγοράς παραμένει σταθερή καθ' όλη την διάρκεια. Αν η τιμολόγηση των παραγώγων γίνει στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου τότε αυτό δεν επηρεάζει την τιμολόγηση μιας και δεν θα χρειάζεται η συγκεκριμένη τιμή. Η τιμή λ χρειάζεται μόνο κατά την μεταφορά από τον κόσμο ουδέτερου κινδύνου στον πραγματικό κόσμο και αντίστροφα.

Στο ίδιο μοντέλο η χρονική διάρθρωση των επιτοκίων μπορεί να καθοριστεί από τις παραμέτρους κ , θ , σ , και από την αρχική τιμή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Συνεπώς, οι τιμές των ομολόγων (μηδενικού κινδύνου) και οι αντίστοιχες αποδόσεις τους είναι:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)B(t, T)} \quad (13)$$

$$R(t, T) = -\frac{\ln A(t, T)}{T-t} + \frac{B(t, T)}{T-t}r(t) \quad (14)$$

όπου οι μεταβλητές A, B ορίζονται ως:

$$A(t, T) = \exp\left(\frac{(B(t, T)-T+t)(\kappa^2\theta - \sigma^2/2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4\kappa}\right) \quad (15)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad (16)$$

Συμπερασματικά, για διάφορες τιμές των σταθερών κ , θ , σ η καμπύλη απόδοσης μπορεί να πάρει διάφορα σχήματα. Για να μπορέσει να γίνει η προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου θα πρέπει να βρεθεί μία εξίσωση η οποία θα μπορεί να δώσει την επόμενη τιμή του γνωρίζοντας την προηγούμενη. Με βάση το θεώρημα Euler η σχέση (12) γίνεται

$$r(t+1) = r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma\varepsilon_{t+1}\sqrt{\Delta t} \quad (17)$$

κρατώντας την υπόθεση ότι οι σταθερές κ , θ , σ παραμένουν σταθερές στον χρόνο.

4.4.1.1. Μειονεκτήματα του μοντέλου Vasicek

Παρότι το συγκεκριμένο μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετές εμπειρικές μελέτες ταυτόχρονα παρουσιάζει και κάποια μειονεκτήματα σχετικά με την χρήση του τα οποία πρέπει να αναφερθούν.

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι ένα μοντέλο ενός παράγοντα δηλαδή το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο (short rate) είναι ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει την μελλοντική κίνηση των επιτοκίων. Αυτό σημαίνει ότι τα σχήματα που μπορεί να πάρει η θεωρητική καμπύλη απόδοσης επηρεάζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό από αυτό το χαρακτηριστικό του μοντέλου και επομένως να μην υπάρχει πλήρης ταύτιση με την πραγματική καμπύλη αποδόσεων.

Το πιο ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι μπορεί να επιτρέψει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων. Βέβαια όπως είναι γνωστό τα πραγματικά επιτόκια μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές σε αντίθεση με τα ονομαστικά. Αυτό μακροπρόθεσμα δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα μιας και η κατανομή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι γκαουσιανή η οποία χαρακτηρίζεται από την αναμενόμενη μέση τιμή και διακύμανση [21]. Αυτές προκύπτουν από την παρακάτω σχέση:

$$r(t) = \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_s^t e^{ku} dW_u \quad (18)$$

με $0 \leq s < t$, και είναι

$$E_s[r_t] = \theta + (r_t - \theta)e^{-\kappa(t-s)} \quad (19)$$

$$Var[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \quad (20)$$

Οι σχέσεις (19) και (20) για μεγάλο χρονικό διάστημα $T \rightarrow \infty$ δίνουν αντίστοιχα ότι η αναμενόμενη μέση τιμή οδηγείται στην τιμή θ ενώ η διακύμανση θα έχει τιμή $\sigma^2/2\kappa$. Τέλος, το μοντέλο έχει απορριφθεί αρκετές φορές. Για παράδειγμα ο Murto [22] απέρριψε το μοντέλο του Vasicek. Αναλυτικότερα, εξετάζοντας την αγορά χρήματος της Φιλανδίας και χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα βραχυπρόθεσμων επιτοκίων απέρριψε το μοντέλο του Vasicek λόγω των σφαλμάτων που παρουσιαζόντουσαν μεταξύ της θεωρητικής καμπύλης απόδοσης και της πραγματικής.

4.4.2. Μοντέλο Cox, Ingersoll και Ross (1985)

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ένα από τα βασικά μειονεκτήματα που παρουσίαζε το μοντέλο του Vasicek ήταν η ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων. Αυτό σήμαινε ότι ο δανειστής έπρεπε να πληρώσει τον δανειζόμενο. Ο Cox, Ingressol και Ross [23] διόρθωσαν αυτό το πρόβλημα τοποθετώντας στο όρο διάχυσης την τετραγωνική ρίζα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Έτσι λοιπόν η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου είναι:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r}dW(t) \quad (21)$$

όπου τα κ , θ , σ είναι θετικές σταθερές. Για να εξασφαλιστεί ότι το επιτόκιο δεν θα πάρει αρνητικές τιμές θα πρέπει να ισχύει η σχέση $2\kappa\theta > \sigma^2$. Επιπλέον, όπως φαίνεται και στην σχέση (21) η μεταβλητότητα είναι ανάλογη του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Αυτό συνεπάγεται ότι όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η τυπική απόκλιση. Όταν το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο πλησιάζει το μηδέν τότε ο στοχαστικός όρος $\sigma\sqrt{r}$ πλησιάζει το μηδέν ακυρώνοντας το φαινόμενο της τυχαιότητας και άρα το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο παραμένει πάντοτε θετικό [19]. Δουλεύοντας στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου η αναμενόμενη μέση τιμή και διακύμανση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι αντίστοιχα:

$$E_s[r_t] = r(t)e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \quad (22)$$

$$Var[r_t] = r \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 \quad (23)$$

Μοντέλα μη-βέβαιου κέρδους

Όπως αναλύθηκε και στην προηγούμενη ενότητα το βασικό μειονέκτημα των μοντέλων ισορροπίας είναι ότι η θεωρητική καμπύλη των αποδόσεων δεν ταιριάζει απόλυτα με την πραγματική, αυτή δηλαδή που παρατηρείται στην αγορά. Κάνοντας κατάλληλη βαθμονόμηση του συστήματος και μέσω συγκεκριμένων μοντέλων μπορεί να προσεγγιστεί σε ικανοποιητικό βαθμό η καμπύλη απόδοσης των επιτοκίων που παρατηρείται.

Αντίθετα, τα μοντέλα μη-βέβαιου κέρδους έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να ταιριάζουν απόλυτα στην καμπύλη απόδοσης των επιτοκίων που παρατηρείται. Έτσι λοιπόν, η κύρια διαφορά μεταξύ των μοντέλων ισορροπίας και μη-βέβαιου κέρδους είναι ότι στα πρώτα η καμπύλη απόδοσης είναι εξωγενής παράμετρος ενώ στα δεύτερα είναι ενδογενής.

Μία άλλη διαφορά που παρατηρείται στα μοντέλα μη-βέβαιου κέρδους είναι ότι ο όρος του ποσοστού μεταβολής (drift rate) είναι συνάρτηση του χρόνου σε αντίθεση με τα μοντέλα ισορροπίας. Η παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθεί με το μοντέλο των Ho-Lee όσον αφορά τα μοντέλα μη-βέβαιου κέρδους. Η διαδικασία την οποία ακολουθεί το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο έχει την ακόλουθη μορφή:

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dZ \quad (24)$$

Ο όρος $\theta(t)$ συνεπάγεται μία πιο ευέλικτη διαδικασία όσον αφορά το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο με σκοπό η θεωρητική καμπύλη απόδοσης να ταιριάζει με την πραγματική.

4.4.3. Μοντέλο Ho-Lee (1986)

Οι Ho-Lee παρουσίασαν το πρώτο μοντέλο μη-βέβαιου κέρδους που έδινε την εξέλιξη του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου το 1986 [24]. Αρχικά το μοντέλο παρουσιάστηκε υπό μορφή διωνυμικού δέντρου για τις τιμές των ομολόγων με 2 παραμέτρους:

- Την τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου
- Τιμή του ρίσκου αγοράς

Το μοντέλο σε συνεχή χρόνο περιγράφεται στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου από την παρακάτω σχέση:

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dZ \quad (25)$$

όπου σ είναι η στιγμιαία τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου η οποία είναι σταθερή ενώ ο όρος $\theta(t)$ ο οποίος είναι συνάρτηση του χρόνου είναι αυτός που θα δώσει την δυνατότητα στο μοντέλο να δώσει μία καμπύλη απόδοσης επιτοκίων ίδια με αυτήν που παρατηρείται. Ο ίδιος όρος υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (26)$$

όπου το $f(0, t)$ είναι το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο την χρονική στιγμή t όπως αυτό παρατηρείται την χρονική στιγμή μηδέν. Επομένως, όπως γίνεται αντιληπτό η κλίση της καμπύλης των στιγμιαίων προθεσμιακών επιτοκίων καθορίζει προσεγγιστικά την μέση κατεύθυνση που θα ακολουθήσει το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στο μέλλον.

Η διακριτοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου στο μοντέλο των Ho-Lee είναι η κάτωθι όπως αυτή παρουσιάζεται από τον Glasserman [25]:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(s) ds + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}$$

όπου Z_1, Z_2, \dots ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή $N(0,1)$. Η παραπάνω σχέση απλοποιείται σε

$$r(t+1) = r(t) + [f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} [t_{i+1}^2 - t_i^2] + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} \varepsilon_{i+1} \quad (27)$$

όπου το ε_{i+1} είναι μία ανεξάρτητη, τυχαία μεταβλητή από την κανονική κατανομή $N(0,1)$. Το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο $f(0, t_i)$ μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από την καμπύλη απόδοσης των επιτοκίων. Εφαρμόζοντας λοιπόν τα στιγμιαία προθεσμιακά επιτόκια που παρατηρούνται στην αγορά το μοντέλο των Ho-Lee ταιριάζει απόλυτα με την πραγματική καμπύλη χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων. Παρόλα αυτά λόγω του ότι η μεταβλητότητα θεωρείται σταθερή στο μοντέλο και με πιθανές αποκλίσεις σε σχέση με τα πραγματικά δεδομένα της αγοράς ίσως οδηγήσουν σε πιθανές διαφορές μεταξύ της θεωρητικής καμπύλης και της πραγματικής.

5. Μέθοδοι τιμολόγησης επιτοκιακών παραγώγων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να κάνει την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων. Όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 9 υπάρχουν 2 βασικοί τρόποι τιμολόγησης των συγκεκριμένων παραγώγων. Ο πρώτος τρόπος είναι μέσω της μοντελοποίησης των τιμών των ομολόγων. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του υποδείγματος του Black [26] το οποίο είναι γνωστό και ως Black-76. Το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι μια τροποποίηση του υποδείγματος των Black-Scholes-Merton [27] και είναι ιδιαίτερα δημοφιλές για την τιμολόγηση επιτοκιακών παραγώγων. Ο δεύτερος τρόπος τιμολόγησης των παραγώγων αυτών είναι μέσω της μοντελοποίησης των επιτοκίων με βάση τα μοντέλα που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα και τα οποία θα είναι αυτά που θα χρησιμοποιηθούν από την παρούσα διπλωματική εργασία.

5.1. Μοντέλο Black (1976)

Το υπόδειγμα του Black (γνωστό και ως υπόδειγμα Black-76) χρησιμοποιήθηκε για να τιμολογηθούν τα δικαιώματα προαίρεσης πάνω στα εμπορεύματα [26]. Αποτελεί μία παραλλαγή του υποδείγματος Black-Scholes-Merton [27] που χρησιμοποιείται για να γίνει η τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων ή τιμή των οποίων μοντελοποιείται με την γεωμετρική κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion). Η βασική διαφορά των δύο αυτών υποδειγμάτων είναι ότι σε εκείνο του Black χρησιμοποιούνται οι προθεσμιακές τιμές (forward prices) έναντι των τωρινών τιμών (spot prices) που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο του Black-Scholes-Merton. Το υπόδειγμα του Black θεωρείται ως ένα ευρέως αποδεκτό εργαλείο τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων και αυτό διότι είναι πολύ απλό στην εφαρμογή του.

Το συγκεκριμένο υπόδειγμα υποθέτει ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή στον μελλοντικό χρόνο λήξης T . Για παράδειγμα, κάποιος που θέλει να κάνει τιμολόγηση με το συγκεκριμένο υπόδειγμα θα πρέπει να υποθέσει ότι τα επιτόκια για τα επιτοκιακά παράγωγα, η τιμή των ομολόγων για δικαιώματα πάνω σε ομόλογα ή το swap rate για τα swaptions ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή την προθεσμιακή τιμή της υποκείμενης μεταβλητής και τυπική απόκλιση ίση με $\sigma\sqrt{T}$ όπου το σ είναι η μεταβλητότητα.

Σύμφωνα με τον Reibner [28] ένα από τα βασικά μειονεκτήματα του συγκεκριμένου υποδείγματος είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψιν του ολόκληρη την διάρθρωση των επιτοκίων και για αυτό δεν αποτελεί την καταλληλότερη μέθοδο για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από την προϋπόθεση κάτω από την οποία δουλεύει το συγκεκριμένο υπόδειγμα και θεωρεί ότι η μεταβλητότητα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι σταθερή. Επιπλέον ένα άλλο μειονέκτημα που αναφέρει ο Reibner για το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι ότι η συμπεριφορά των ομολόγων είναι διαφορετική από εκείνη των μετοχών. Αυτό απορρέει από το ότι το υπόδειγμα του Black είναι μία γενίκευση του υποδείγματος των Black-Scholes-Merton οι οποίοι ανέπτυξαν ένα μοντέλο που τιμολογούσε τα δικαιώματα προαίρεσης πάνω σε μετοχές.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης ενός δικαιώματος προαίρεσης εγγεγραμμένο πάνω σε μία υποκείμενη μεταβλητή X . Η πληρωμή ενός δικαιώματος αγοράς στην λήξη δίνεται από την σχέση $\max(X_T - K, 0)$ υποθέτοντας ότι η υποκείμενη μεταβλητή X ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{T}$ και αναμενόμενη μέση τιμή ίση με $F(0, T)$. Η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος προαίρεσης με τιμή εξάσκησης K μπορεί να γραφεί ως:

$$E_T[\max(X_T - K, 0)] = E_T(V_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

όπου το E είναι η αναμενόμενη τιμή και το $N()$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κανονικής κατανομής. Οι ποσότητες $N(d_1)$, $N(d_2)$ μπορούν να οριστούν ως εξής

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{E_T(X_T)}{K}\right] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left[\frac{E_T(X_T)}{K}\right] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τον χρόνο λήξης η στιγμιαία τιμή του υποκείμενου χρεόγραφου είναι ίση με την προθεσμιακή του τιμή δηλαδή ισχύει $X_T = F_T$ όπου F_T είναι η προθεσμιακή τιμή του χρεόγραφου την χρονική στιγμή T . Επομένως, η πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης κατά την χρονική λήξη T είναι

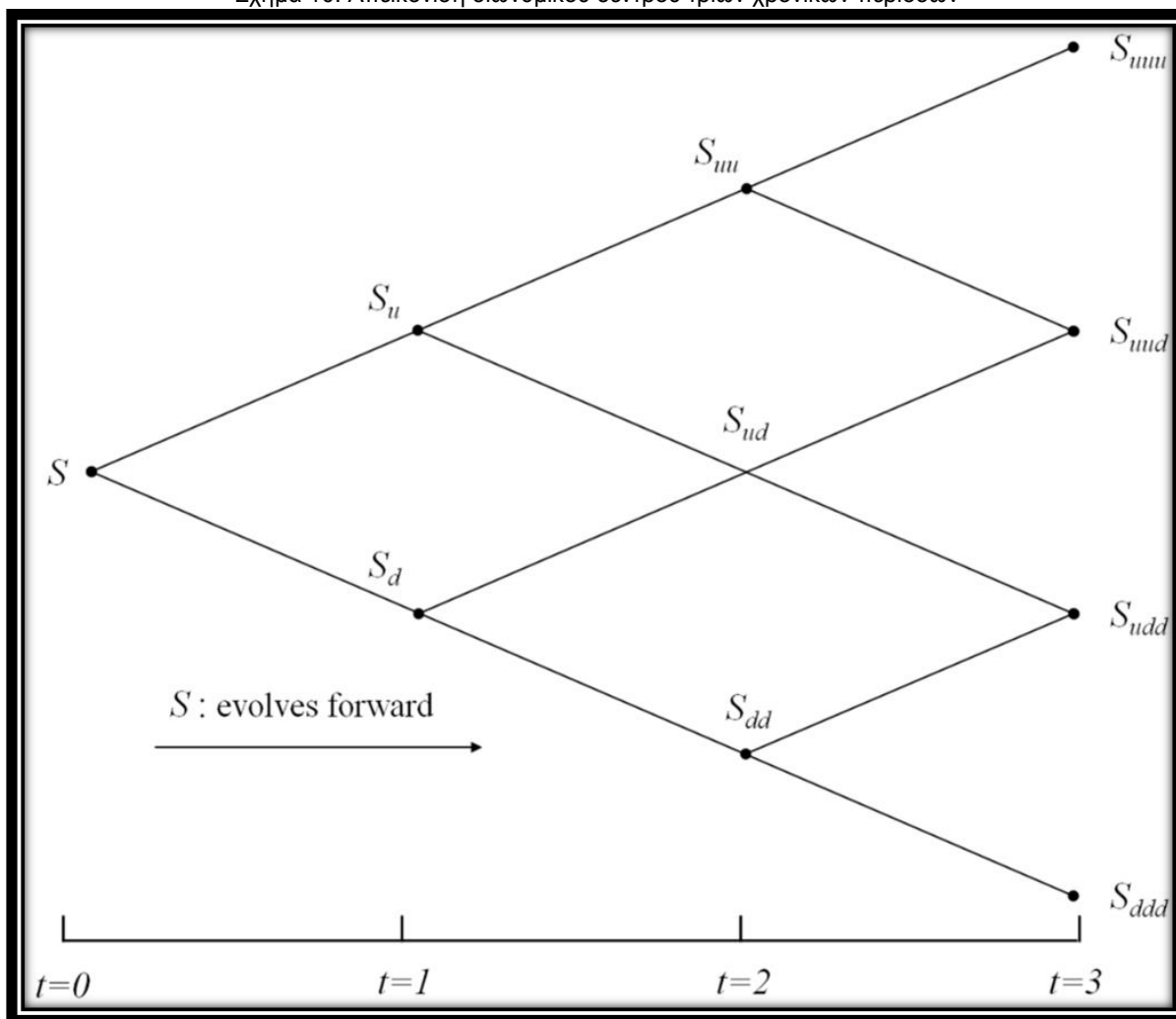
$$E_T[\max(F_T - K, 0)] = E_T(F_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

5.2. Αριθμητικές μέθοδοι τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων

Εκτός από το υπόδειγμα του Black, υπάρχουν και άλλοι τρόποι τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων. Τέτοιοι τρόποι είναι οι αριθμητικές μέθοδοι οι οποίες σε ορισμένες περιπτώσεις λόγω της ιδιαιτερότητας που παρουσιάζει η υποκείμενη μεταβλητή που στην προκειμένη περίπτωση είναι το επιτόκιο είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθούν για να πραγματοποιηθεί η τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων.

Μία μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι μέσω πλεγμάτων ή αλλιώς δέντρα επιτοκίων. Τα πλέγματα αυτά είναι μια απεικόνιση της κίνησης που ακολουθεί το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο σε διακριτό χρόνο. Για παράδειγμα, σε ένα διωνυμικό δέντρο το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο έχει δύο τρόπους να κινηθεί (ή να αυξηθεί ή να μειωθεί) σε μία υπο-περίοδο. Οι πιθανότητες ανόδου ή καθόδου του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου κατά την επόμενη υπο-περίοδο υπολογίζονται υποθέτοντας ότι η κίνηση του επιτοκίου πραγματοποιείται στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Μία από τις βασικές διαφορές που υπάρχει μεταξύ ενός δέντρου που απεικονίζει την κίνηση του επιτοκίου και ενός δέντρου που απεικονίζει την κίνηση μίας μετοχής είναι η μέθοδος που ακολουθείται κατά την προεξόφληση. Στο δέντρο όπου απεικονίζεται η κίνηση του επιτοκίου ο προεξοφλητικός παράγοντας αλλάζει από κόμβο σε κόμβο σε αντίθεση με το δέντρο όπου απεικονίζεται η κίνηση της μετοχής όπου ο προεξοφλητικός παράγοντας παραμένει σταθερός από κόμβο σε κόμβο. Ο Hull [1] αναφέρει ότι είναι προτιμότερο να εφαρμόσει κάποιος που θέλει να κάνει τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων ένα τριωνυμικό δέντρο το οποίο παρέχει ένα βαθμό ελευθερίας περισσότερο από τι το διωνυμικό. Με αυτό τον τρόπο μπορεί κάποιος να εισαγάγει την ιδιότητα του mean reversion στην κίνηση του επιτοκίου.

Σχήμα 10: Απεικόνιση διωνυμικού δέντρου τριών χρονικών περιόδων



Ένας άλλος τρόπος τιμολόγησης των επιτοκιακών παραγώγων είναι η χρήση και εν συνεχεία η λύση της συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες ικανοποιούν τα εν λόγω παράγωγα. Τέλος, θα παρουσιαστεί η μέθοδος Monte Carlo μέσω της οποίας μπορεί να γίνει η προσομοίωση της εξέλιξης διάφορων στοχαστικών παραμέτρων της είναι το επιτόκιο.

Η μέθοδος Monte Carlo είναι μία στοχαστική διαδικασία όπου με χρήση τυχαίων αριθμών επιχειρείται να γίνει μία ανάλυση σε προβλήματα τα οποία δεν είναι ντετερμινιστικά, δηλαδή υπάρχει αβεβαιότητα σε αυτά.

Ο Winston [30] δίνει μία εικόνα σχετικά με το πόσο ευρεία είναι η χρήση αυτής της υπολογιστικής μεθόδου. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι μεγάλες επιχειρήσεις και εταιρείες χρησιμοποιούν αυτή την τεχνική για να καταλήξουν σε συγκεκριμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, εταιρείες όπως οι General Motors, Procter and

Gamble, Pfizer, Bristol-Myers Squibb και Eli Lilly χρησιμοποιούν την συγκεκριμένη τεχνική προσομοίωσης για να υπολογίσουν την μέση απόδοση αλλά και τον παράγοντα κινδύνου για τα νέα τους προϊόντα. Η General Motors χρησιμοποιεί αυτές τις πληροφορίες για να αποφασίσει ποια προϊόντα τελικά θα βγουν στην αγορά. Επιπλέον, η ίδια εταιρεία χρησιμοποιεί τις προσομοιώσεις για να κάνει προβλέψεις σχετικά με τα καθαρά έσοδα της εταιρείας, να κάνει εκτίμηση του κόστους αλλά και για να γνωρίζει την ευαισθησία που παρουσιάζει η επιχείρηση σε διάφορους κινδύνους (όπως αλλαγές στα επιτόκια αλλά και στις διακυμάνσεις τις συναλλαγματικής ισοτιμίας). Η εταιρεία Procter and Gamble χρησιμοποιεί την ίδια μέθοδο για να μοντελοποιήσει και να βελτιστοποιήσει την αντιστάθμιση του συναλλαγματικού κινδύνου. Ακόμα οι εταιρείες πετρελαίου και οι φαρμακοβιομηχανίες χρησιμοποιούν την τεχνική Monte Carlo για να τιμολογήσουν συμβάσεις ή για να αξιολογήσουν τις επιπτώσεις μίας καθυστέρησης ενός έργου.

Η μέθοδος Monte Carlo είναι μία σειρά από υπολογιστικούς αλγόριθμους που στηρίζεται στην επαναλαμβανόμενη τυχαία δειγματοληψία για τον υπολογισμό αποτελεσμάτων των παραπάνω προβλημάτων. Η συγκεκριμένη μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά επιστημονικά πεδία της εκείνο όπως εκείνο της Φυσικής, των Μαθηματικών αλλά και των Οικονομικών όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός των αναλαμβανόμενων κινδύνων στον τομέα των επιχειρήσεων. Έτσι λοιπόν, μέσω των στοχαστικών αλγορίθμων μπορούν να δημιουργηθούν ρεαλιστικά μοντέλα για προβλήματα τα οποία έχουν πολύπλοκες αναλυτικές λύσεις.

Ποιο αναλυτικά όσον αφορά την επιστήμη των Οικονομικών η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται στην τιμολόγηση πολύπλοκων παράγωγων προϊόντων για τα οποία δεν υπάρχουν έτοιμες λύσεις κλειστού τύπου. Ο Glasserman [25] υποστηρίζει ότι η προσομοίωση Monte Carlo αποτελεί μία από τις συχνότερες επιλογές για την τιμολόγηση παραγώγων αλλά και στον τομέα της διαχείρισης κινδύνου. Τέλος, ιδιαίτερη είναι η συμβολή της μεθόδου στην ανάλυση ευαισθησίας της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης της διάφορες παραμέτρους (Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho ή αλλιώς Greeks) που την επηρεάζουν. Κατά την διάρκεια της προσομοίωσης Monte Carlo παράγονται ψευδο-τυχαίες μεταβλητές από της κατανομές πιθανοτήτων. Μέσω αυτών των μεταβλητών αυτών δημιουργούνται δείγματα (samples) και λόγω της δυνατότητας να πραγματοποιηθεί αυτή η διαδικασία

εκατοντάδες φορές κάποιος έχει την δυνατότητα να έχει μία ευρεία γνώση για το τί μπορεί να γίνει και πόσο πιθανό είναι να πραγματοποιηθεί.

Για να μπορέσει κάποιος να προχωρήσει στην τιμολόγηση ενός παραγώγου είναι απαραίτητο να απεικονίσει την εξέλιξη της υποκείμενης μεταβλητής και να υπολογίσει την τιμή του παραγώγου βασιζόμενος στις τιμές που έχουν οι μεταβλητές αυτές στην λήξη. Τέλος, το μόνο που απομένει είναι η προεξόφληση των τιμών αυτών στην λήξη. Επομένως, είναι αναγκαίο να δοθεί ολόκληρη η εξέλιξη της υποκείμενης μεταβλητής όπως για παράδειγμα του επιτοκίου ή της τιμής της μετοχής. Στην συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα για το πώς μπορεί κάποιος να τιμολογήσει ένα δικαίωμα αγοράς μέσω αυτής της τεχνικής.

Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) εγγεγραμμένο σε μία μετοχή στην λήξη του αξίζει είτε $S(T) - K$ εάν η τιμή της μετοχής $S(T)$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K ή μηδέν εάν ισχύει το αντίθετο. Οι Black-Scholes-Merton παρουσίασαν ένα μοντέλο το οποίο έδινε την εξέλιξη της τιμής της μετοχής μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dz(t) \quad (28)$$

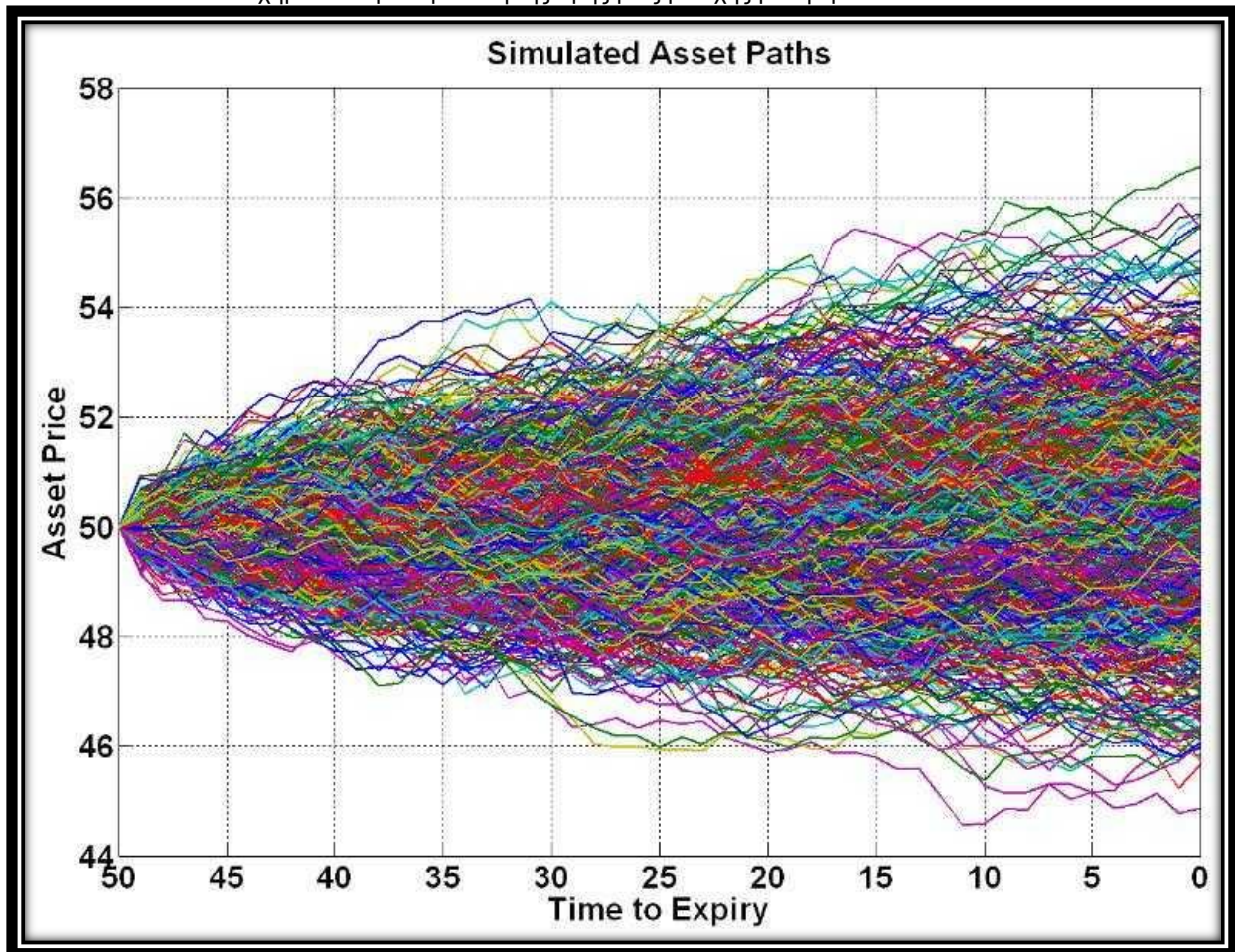
Μέσω της (28) είναι φανερό ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής ισούται με τον μέσο ρυθμό απόδοσης αυξημένο κατά μία ποσότητα $dz(t)$ από την διαδικασία Wiener. Ο μέσος ρυθμός απόδοσης ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r μιας και το υπόδειγμα των Black-Scholes-Merton στηρίζεται στην υπόθεση του κόσμου δίχως κίνδυνο. Η λύση που παίρνει κάποιος λύνοντας την διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού (28) είναι:

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \quad (29)$$

Επομένως, γνωρίζοντας την αρχική τιμή της μετοχής $S(0)$ και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου μπορεί πλέον να γίνει η προσομοίωση της τιμής της μετοχής για μία ολόκληρη περίοδο ή μπορεί αυτή η περίοδος να υποδιαιρεθεί σε μικρότερα διαστήματα βλέποντας ολόκληρη την εξέλιξη της τιμής της. Το σχήμα [11] δίνει την προσομοίωση της εξέλιξης της τιμής μίας μετοχής με την αρχική τιμή να ξεκινά από το

50, η προσομοίωση να αποτελείται από 1000 μονοπάτια και να είναι διάρκειας 50 ημερών.

Σχήμα 11: Προσομοίωση της τιμής μίας μετοχής με την μέθοδο Monte Carlo



Υπολογίζοντας επομένως την πληρωμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην λήξη του και κάνοντας την προεξόφληση, η μέθοδος Monte Carlo δίνει 1000 διαφορετικές τιμές της αξίας του δικαιώματος. Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών η μέση τιμή όλων των προεξοφλήσεων είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της πραγματικής τιμής. Οι Clewlow και Strickland [31] παρατήρησαν ότι για να έχει κάποιος μία ακριβή εκτίμηση της πραγματικής τιμής πρέπει να κάνει την προσομοίωση με παραπάνω από ένα εκατομμύριο μονοπάτια. Επιπλέον, όπως αναφέρει ο Glasserman [25] για να μειωθεί το σφάλμα της διακριτοποίησης του χρόνου και να προσεγγιστεί όσο το δυνατόν περισσότερο η εξέλιξη της μεταβλητής σε συνεχή χρόνο θα πρέπει κανείς να σπάσει την περίοδο που μελετά σε όσο το δυνατόν μικρότερα υποδιαστήματα. Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι ο χρόνος της προσομοίωσης αυξάνεται σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Σύμφωνα με τον Hull [1], σε αντίθεση με τα παράγωγα εγγεγραμμένα πάνω σε μετοχές και νομίσματα, τα επιτοκιακά παράγωγα είναι πιο δύσκολο να τιμολογηθούν για τους εξής λόγους:

- Η συμπεριφορά του επιτοκίου είναι περισσότερο σύνθετη από εκείνη της τιμής των μετοχών ή της συναλλαγματικής ισοτιμίας.
- Για την τιμολόγηση πολλών προϊόντων είναι απαραίτητο να αναπτύξει μοντέλα τα οποία περιγράφουν την συμπεριφορά ολόκληρης της καμπύλης απόδοσης των ομολόγων μηδενικού κουπονιού.
- Η μεταβλητότητα μπορεί να μην είναι σταθερή στον χρόνο στα διάφορα σημεία της καμπύλης απόδοσης.
- Τα επιτόκια που χρησιμοποιούνται για την προεξόφληση των παραγώγων χρησιμοποιούνται επίσης και στην πληρωμή.

5.3. Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Τα Interest Rate Caps/Floors είναι προϊόντα διαχείρισης επιτοκιακού κινδύνου και απευθύνονται σε όσους θέλουν να αντισταθμίσουν την έκθεση τους σε αυτόν. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από επενδυτές που θέλουν να πάρουν θέση στην αγορά επιτοκίων προσδοκώντας όφελος είτε από την άνοδο είτε από την πτώση των επιτοκίων.

Οι συναλλαγές ανώτατου επιτοκίου (interest rate caps) είναι συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης παρέχοντας την δυνατότητα στον αγοραστή να προστατευτεί από την άνοδο των επιτοκίων επιτρέποντας του παράλληλα να ωφεληθεί από πιθανή πτώση τους. Όταν τα κυμαινόμενα επιτόκια (π.χ. Libor/Euribor) ξεπεράσουν μία συμφωνηθείσα τιμή (cap rate) ο αγοραστής του δικαιώματος το εξασκεί εισπράττοντας τη διαφορά με το επιτόκιο που επικρατεί εκείνη την στιγμή. Ταυτόχρονα, ο πωλητής του δικαιώματος (π.χ. τράπεζα) είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στον αγοραστή την διαφορά του τόκου σε περίπτωση που το τρέχον κυμαινόμενο επιτόκιο είναι υψηλότερο από το επιτόκιο cap rate που έχει συμφωνηθεί. Το interest rate cap μπορεί να χρησιμοποιηθεί από όσους θέλουν να αντισταθμίσουν τον επιτοκιακό κίνδυνο που μπορεί να δημιουργηθεί από ένα δάνειο το οποίο έχουν λάβει με κυμαινόμενο επιτόκιο. Για παράδειγμα, ένας δανειζόμενος που έχει δανειστεί ένα ποσό σε κυμαινόμενο επιτόκιο Euribor μπορεί να προστατευτεί από την άνοδο

του euribor αγοράζοντας το προϊόν αυτό. Όταν το Euribor που παρατηρείται την χρονική στιγμή t_k ($1 \leq k \leq n$) υπερβεί το cap rate τότε ο δανειζόμενος εξασκώντας το, λαμβάνει από το επιτοκιακό παράγωγο μία πληρωμή την χρονική στιγμή t_{k+1} (όπου $k=1,2,\dots,n$)

$$L\delta_k \max\{\text{Interest Rate} - \text{Cap Rate}, 0\} \quad (30)$$

όπου L είναι το αρχικό ποσό του συμβολαίου (π.χ. του δανείου) και $\delta_k = (\text{Actual Days}/360)$. Να σημειωθεί ότι η παραπάνω απόδοση είναι παρόμοια με εκείνη ενός call option και ότι ένα cap μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο από n call options (caplets) με ίδια τιμή εξάσκησης (strike price) αλλά με διαφορετική ημερομηνία λήξης (maturity). Το κυμαινόμενο επιτόκιο παρατηρείται τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ενώ οι πληρωμές γίνονται την χρονική στιγμή $t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n+1}$.

Αντίστοιχα, οι συναλλαγές κατώτατου επιτοκίου (interest rate floors) είναι συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης και παρέχουν στον αγοραστή την κάλυψη έναντι της μείωσης των κυμαινόμενων επιτοκίων δίνοντας του ταυτόχρονα την ευκαιρία να επωφεληθεί από την πιθανή άνοδο τους. Ο πωλητής του δικαιώματος (π.χ. τράπεζα) πρέπει να πληρώσει την διαφορά του τόκου στην περίπτωση που το τρέχον κυμαινόμενο επιτόκιο είναι μικρότερο από το επιτόκιο floor rate που έχει συμφωνηθεί. Επομένως, ο αγοραστής του δικαιώματος στην περίπτωση που τα επιτόκια είναι μικρότερα από την τιμή εξάσκησης Floor, το εξασκεί εισπράττοντας έτσι τη διαφορά. Το interest rate floor οδηγεί σε μία πληρωμή την χρονική στιγμή t_{k+1} (όπου $k=1,2,\dots,n$)

$$L\delta_k \max\{\text{Floor Rate} - \text{Interest Rate}, 0\} \quad (31)$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο από n put options (floorlets).

Στην συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα για το πως μπορούν τα interest rate caps να χρησιμοποιηθούν για να αντισταθμίσουν τον επιτοκιακό κίνδυνο για έναν επενδυτή ο οποίος έχει δανειστεί ένα ποσό σε κυμαινόμενο επιτόκιο Euribor (3μηνιαίο). Έστω ότι η αξία του συμβολαίου L είναι €1 εκατομμύριο, με χρόνο ζωής τα 2 χρόνια (από 31/12/2013 έως 31/12/2015) και cap rate ίσο με 0.05%. Να σημειωθεί ότι τα interest rate caps ορίζονται έτσι ώστε την χρονική στιγμή t_0 να μην παρέχουν πληρωμή ακόμα

και αν το Euribor είναι μεγαλύτερο από το cap rate. Επομένως, οι χρονικές στιγμές όπου παρατηρείται το Euribor είναι οι χρονικές στιγμές 0.25, 0.50, 0.75,..., 1.75 (σε χρόνια) ενώ οι πιθανές πληρωμές γίνονται τις χρονικές στιγμές 0.50, 0.75,..., 2 (σε χρόνια). Παρακάτω βρίσκεται ο πίνακας με τις τιμές του τριμηνιαίου Euribor που παρατηρήθηκαν στο διάστημα 31/03/2014 έως 30/09/2015:

31/03/2014	0.313%
30/06/2014	0.207%
30/09/2014	0.083%
31/12/2014	0.078%
31/03/2015	0.019%
30/06/2015	-0.014%
30/09/2015	-0.04%

Έχοντας τα στοιχεία (Bloomberg Database) και βάση της σχέσης (31) μπορούμε να βρούμε τα ποσά που θα εισπράξει ο αγοραστής του interest rate cap από τον πωλητή του (π.χ. τράπεζα) για κάθε μία από τις 7 χρονικές περιόδους εφόσον το Euribor είναι μεγαλύτερο από το cap rate:

- Περίοδος $t_1 = 0.25$

Πρώτη πληρωμή την χρονική στιγμή t_2 :

$$€1.000.000 \times (90/360) \times (0.313 - 0.05) \times 0.01 = €657.5$$

- Περίοδος $t_2 = 0.50$

Δεύτερη πληρωμή την χρονική στιγμή t_3 :

$$€1.000.000 \times (90/360) \times (0.207 - 0.05) \times 0.01 = €392.5$$

- Περίοδος $t_3 = 0.75$

Τρίτη πληρωμή την χρονική στιγμή t_4 :

$$€1.000.000 \times (90/360) \times (0.083 - 0.05) \times 0.01 = €82.5$$

- Περίοδος $t_4 = 1.00$

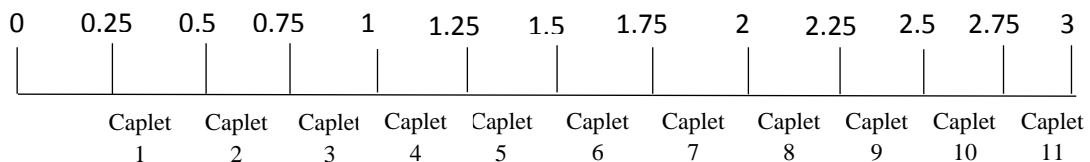
Τέταρτη πληρωμή την χρονική στιγμή t_5 :

$$€1.000.000 \times (90/360) \times (0.078 - 0.05) \times 0.01 = € 70$$

Από τις 31/03/2015 παρατηρούμε ότι το Euribor είναι μικρότερο από το cap rate. Επομένως, ο αγοραστής σύμφωνα και με την σχέση (31) δεν θα λάβει κάποια πληρωμή από τον πωλητή του interest rate cap.

6. Τιμολόγηση συμβολαίου cap με την χρήση της μεθόδου Monte Carlo

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμοστούν τα μοντέλα των Vasicek, CIR και Ho-Lee για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων και πιο συγκεκριμένα των interest rate caps. Στο σημείο αυτό θα δοθεί μία λεπτομερής περιγραφή του interest rate cap που θα χρησιμοποιηθεί και μία διαγραμματική αναπαράσταση των caplets που το cap απαρτίζεται. Το interest rate cap επιλέχτηκε να έχει διάρκεια 3 έτη καλύπτοντας το τριμηνιαίο Euribor. Αυτό σημαίνει ότι η πληρωμή γίνεται κάθε τρίμηνο στην λήξη του κάθε caplet. Να σημειωθεί ότι το reset date του πρώτου caplet ξεκινάει ακριβώς 3 μήνες μετά την αρχή του συμβολαίου του cap και επομένως η πρώτη πληρωμή θα είναι έπειτα από 3 μήνες. Επομένως, στη διάρκεια των 3 ετών θα υπάρχουν 11 reset dates στους χρόνους (0.25, 0.50, 0.75, ..., 2.75 χρόνια) ενώ θα υπάρχουν 11 πληρωμές στους χρόνους (0.50, 0.75, ..., 3 χρόνια). Στην συνέχεια δίνεται ένα διαγραμματική αναπαράσταση στον χρόνο του interest rate cap:



Σχήμα 8: Διαγραμματική αναπαράσταση ενός συμβολαίου cap 3 ετών

Παρακάτω θα αναλυθεί η στρατηγική που επιλέχτηκε για να γίνει η προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με την μέθοδο Monte Carlo μέσω των τριών μοντέλων που εξετάζει η παρούσα διπλωματική εργασία. Τα μοντέλα ισορροπίας Vasicek και CIR και το μοντέλο μη-βέβαιου κέρδους των Ho-Lee.

Βασιζόμενοι στις σχέσεις που δίνουν την διακριτή μεταβολή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και εισάγοντας διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους των μοντέλων πραγματοποιείται η προσομοίωση μέσω της μεθόδου Monte Carlo. Η

στρατηγική που ακολουθήθηκε για να γίνει η προσομοίωση και εκτελέστηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab είναι η εξής:

- Αρχικά, επιλέγουμε τον αριθμό M των σεναρίων (μονοπάτια) που θα χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση Monte Carlo.
- Έπειτα, θέτουμε τη τιμή του αρχικού επιτοκίου r_0 για την χρονική στιγμή $t = 0$ για όλα τα σενάρια M .
- Ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης είναι ίσος με $T = 3$ (χρόνια).
- Υπολογίζουμε την διαφορά δύο χρονικών στιγμών $d = t_{N+1} - t_N$.
- Αναπαράγουμε N τυχαίους αριθμούς από την κανονική κατανομή $N(0,1)$.
- Εφαρμόζουμε την παραπάνω στρατηγική για κάθε σενάριο $j = 1, \dots, M$.
- Αποθηκεύουμε τις τιμές του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $r(t)$ στην λήξη κάθε περιόδου ενός εκ των carlets και υπολογίζουμε την πληρωμή στην λήξη τους.
- Έχοντας βρει όλες τις πληρωμές των carlets στην λήξη τους τις προεξοφλούμε στο χρόνο $t = 0$ και
- τέλος, αθροίζουμε τις τιμές των carlets για να βρούμε την τιμή του interest rate cap στο χρόνο $t = 0$

6.1. Προσομοίωση μοντέλου Vasicek

Όπως γράφτηκε και στο κεφάλαιο 5 (4.4.1) για την προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του μοντέλου του Vasicek χρησιμοποιήθηκε η σχέση:

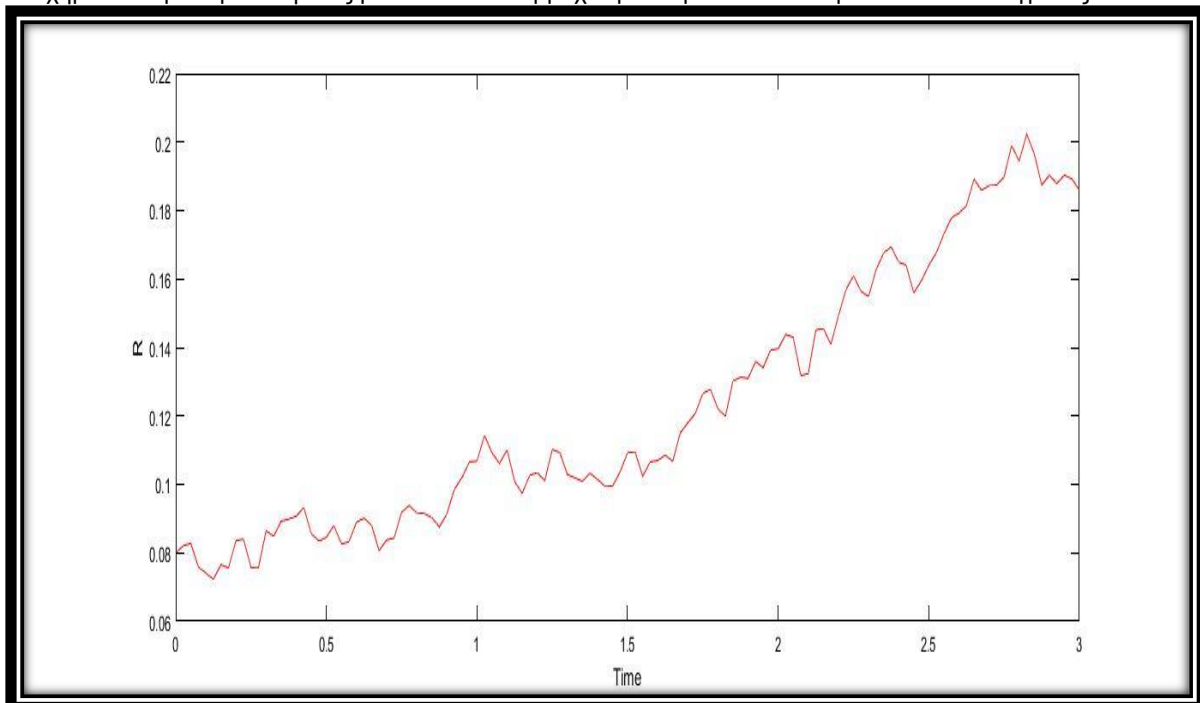
$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

όπου χρησιμοποιώντας την διακριτοποίηση του χρόνου του Euler με χρονικό βήμα $\Delta t = t_{N+1} - t_N$ η παραπάνω σχέση αλλάζει σε

$$r(t + 1) = r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma \varepsilon_{t+1} \sqrt{\Delta t}$$

με το ε_{t+1} να είναι μία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Παρακάτω βρίσκεται το σχήμα από την προσομοίωση ενός μονοπατιού (path) της εξέλιξης του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του μοντέλου του Vasicek με την χρήση της μεθόδου Monte Carlo:

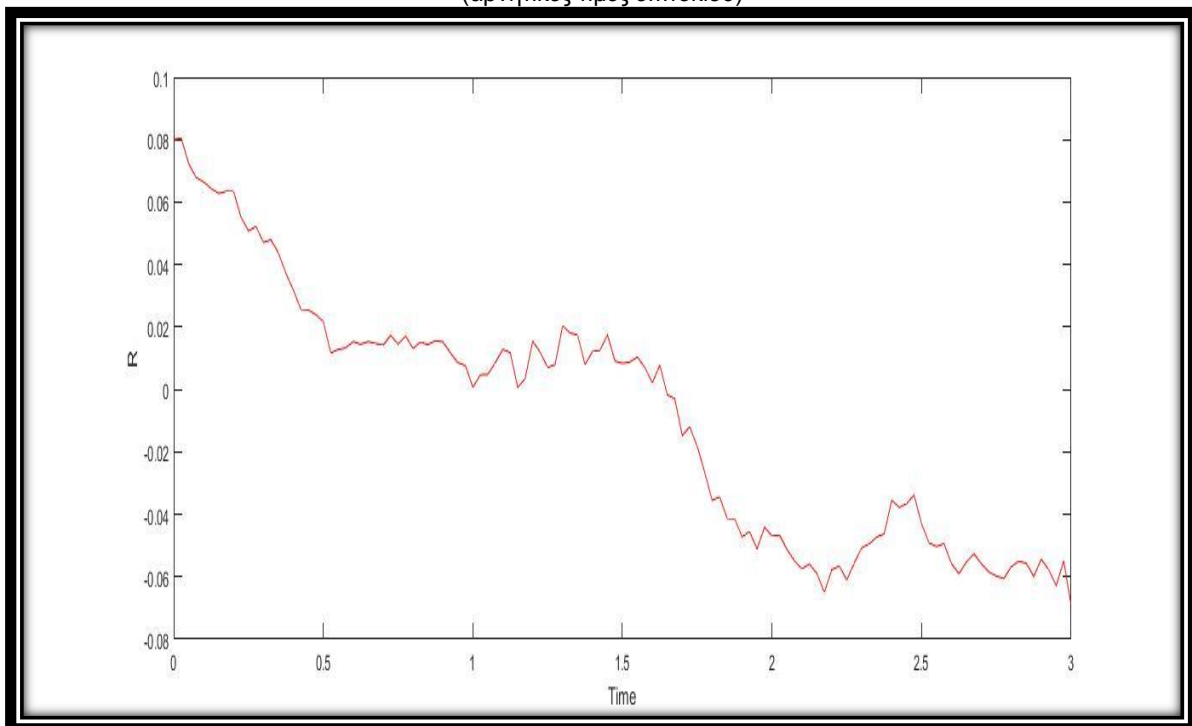
Σχήμα 12: Προσομοίωση ενός μονοπατιού του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος Vasicek



Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι για την προσομοίωση θεωρήσαμε σαν αρχική τιμή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $r_0 = 8\%$, ο συντελεστής θ που είναι το mean reversion του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου να είναι ίσος με 6% ενώ η ταχύτητα με την οποία κινείται το $r(t)$ είναι ίση με $\kappa = 0.07$. Όσον αφορά την διακύμανση θεωρήσαμε ότι είναι ίση με $\sigma = 3\%$ ενώ τέλος σαν τιμή του cap rate θέσαμε την τιμή 0.05 .

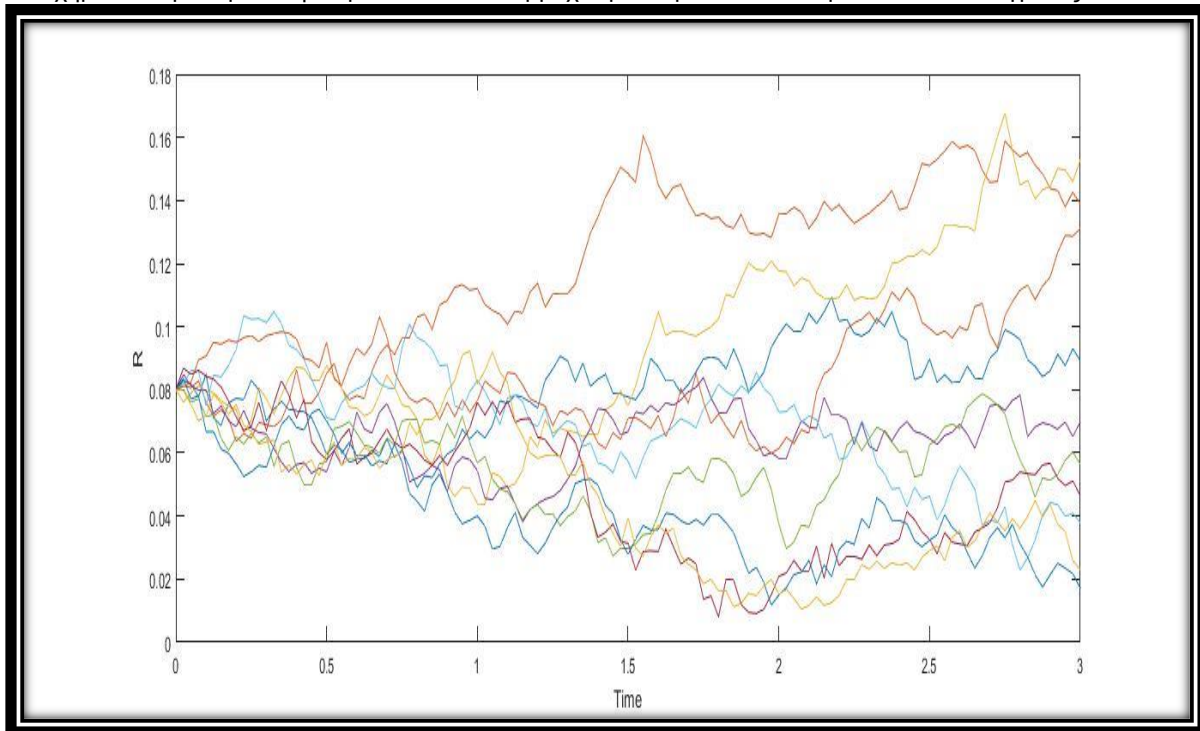
Κάνοντας πολλαπλές προσομοιώσεις για ένα μονοπάτι διαπιστώθηκε το βασικότερο ίσως μειονέκτημα του συγκεκριμένου μοντέλου το οποίο είναι η ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων το οποίο διακρίνεται στο επόμενο σχήμα:

Σχήμα 13: Προσομοίωση ενός μονοπατιού του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος Vasicek (αρνητικές τιμές επιτοκίου)

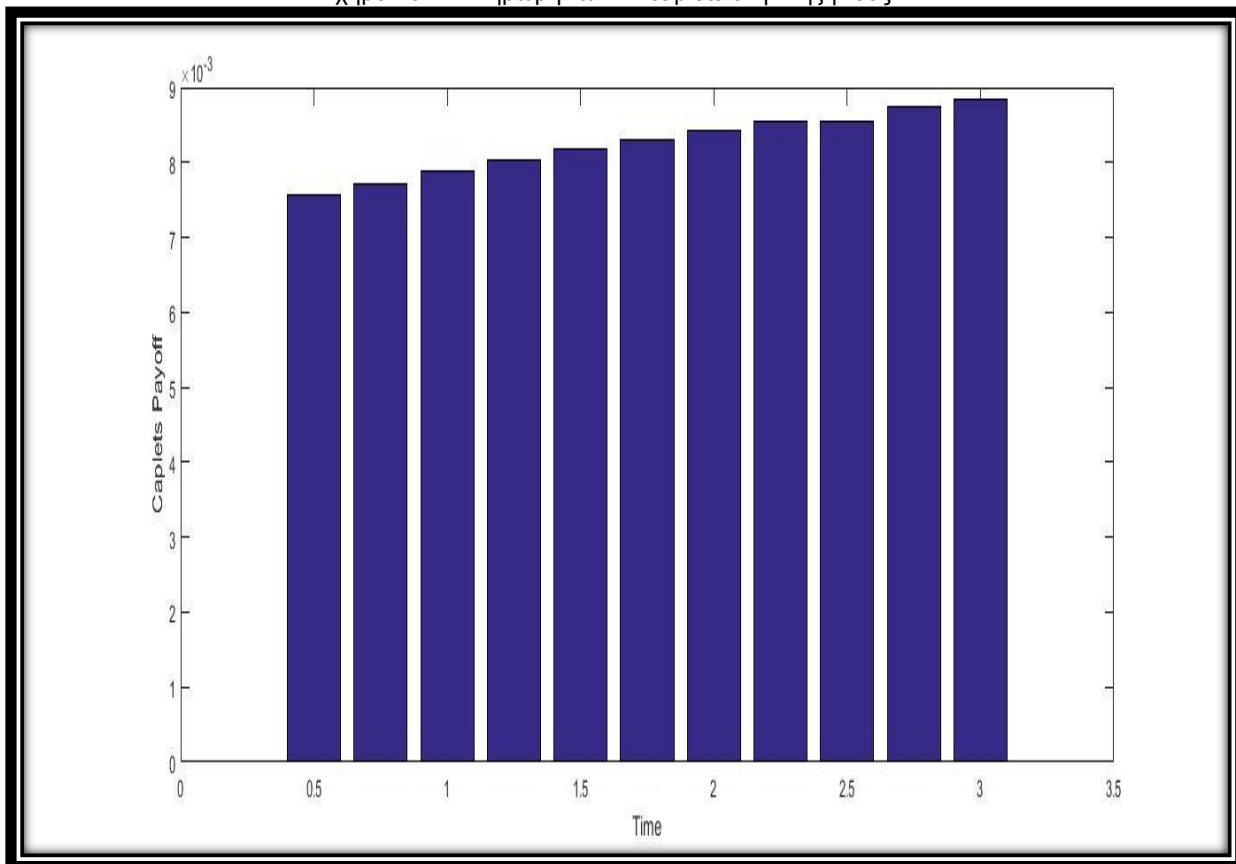


Τέλος παρουσιάζεται η προσομοίωση 10 μονοπατιών μέσω του μοντέλου του Vasicek και η πληρωμή των caplets, χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές για τις παραμέτρους του μοντέλου:

Σχήμα 14: Προσομίωση 10 μονοπατιών του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος Vasicek



Σχήμα 15: Η πληρωμή των 11 caplets στην λήξη τους



Από το σχήμα 15 γίνεται φανερό ότι τα τελευταία caplets δίνουν μεγαλύτερες πληρωμές σε σχέση με τα αρχικά. Αυτό είναι λογικό διότι καθώς ο χρόνος περνάει και φτάνουμε προς την λήξη του συμβολαίου του interest rate cap η μέση τιμή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου των μονοπατιών M που έχουμε επιλέξει είναι μεγαλύτερη έναντι εκείνης των αρχικών στιγμών του συμβολαίου (είναι φανερό και από το σχήμα 14). Επομένως, παρατηρούνται μεγαλύτερες πληρωμές από τα caplets τα οποία βρίσκονται στην λήξη του συμβολαίου.

6.2. Προσομοίωση μοντέλου CIR

Στην συνέχεια γίνεται η προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του μοντέλου του CIR όπου χρησιμοποιείται η σχέση:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r}dW(t)$$

και μέσω της διακριτοποίησης του χρόνου του Euler με χρονικό βήμα $\Delta t = t_{N+1} - t_N$ η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε:

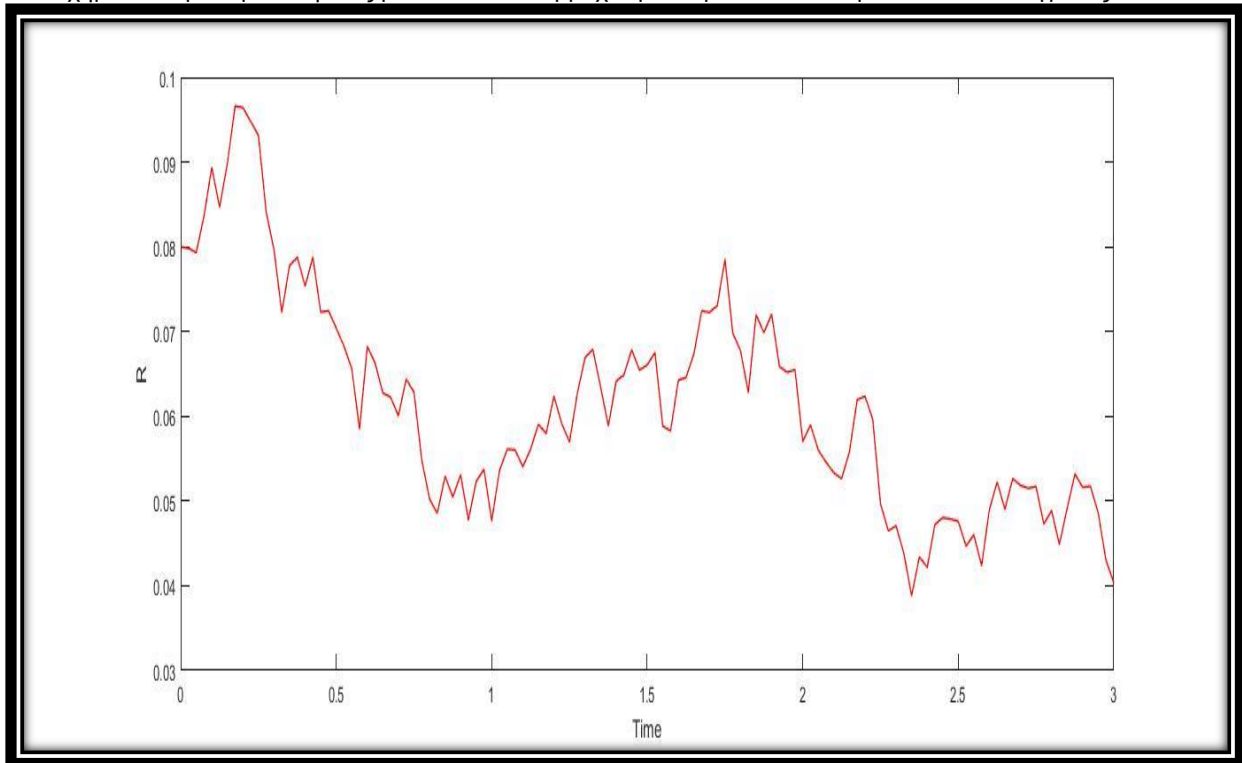
$$r(t + 1) = r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma\varepsilon_{t+1}\sqrt{r(t)}\sqrt{\Delta t}$$

όπου το ε_{t+1} είναι μία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

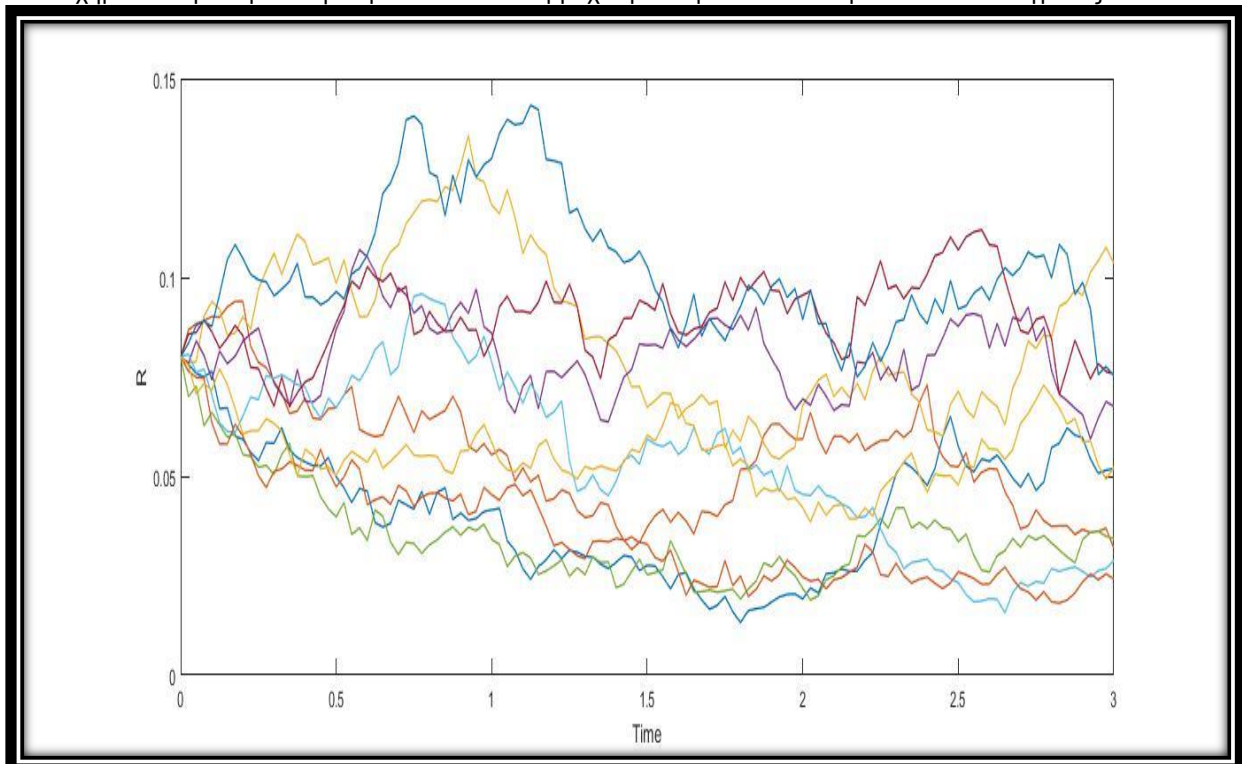
Εδώ να επισημανθεί ότι για την προσομοίωση θεωρήσαμε τις ίδιες παραμέτρους με αυτές που χρησιμοποιήσαμε στο μοντέλο του Vasicek με μόνη αλλαγή την τιμή της μεταβλητότητας. Πιο συγκεκριμένα από την σχέση $\frac{\sigma_{Vasicek}}{\sqrt{r_0}} = \frac{3\%}{\sqrt{8\%}} = 10.6\%$ καταλήγουμε ότι η μεταβλητότητα για το μοντέλο του CIR πρέπει να είναι ίση με 10.6% ώστε να είναι σε παρόμοιους όρους και με αυτόν τον τρόπο να είναι συγκρίσιμη και για τα δύο μοντέλα. Επομένως, σαν αρχική τιμή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου θέσαμε $r_0 = 8\%$, ο συντελεστής θ που είναι το mean reversion του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου να είναι ίσος με 6% ενώ η ταχύτητα με την οποία θα κινείται το $r(t)$ είναι ίση με $\kappa = 0.07$. Τέλος η τιμή του cap rate τέθηκε ίση με 0.05.

Παρακάτω βρίσκεται το σχήμα από την προσομοίωση ενός μονοπατιού (path) της εξέλιξης του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του μοντέλου των CIR:

Σχήμα 16: Προσομοίωση ενός μονοπατιού του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος CIR



Σχήμα 17: Προσομοίωση 10 μονοπατιών του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος CIR



Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές της αξίας του συμβολαίου cap με τις ίδιες τιμές παραμέτρων που αναφέρθηκαν και προηγουμένως:

Αξία cap την $t = 0$	
Vasicek	CIR
0.0745	0.0717
0.0749	0.0707
0.0742	0,0710
0.0746	0.0708
0.0747	0.0720
0.0753	0.0715
0.0744	0.0713

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα παρότι έχουμε δώσει τις ίδιες τιμές για τις παραμέτρους και στα δύο μοντέλα βλέπουμε ότι το μοντέλο του Vasicek δίνει σταθερά μεγαλύτερες τιμές του cap έναντι εκείνου του CIR. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί με τον εξής τρόπο. Όταν παρατηρείται αύξηση της μεταβλητότητας σ του επιτοκίου δηλαδή του όρου που βρίσκεται μπροστά από την κίνηση Brown, η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης εγγεγραμμένο πάνω στην κίνηση του επιτοκίου θα αυξηθεί. Οι όροι variance rate των δύο μοντέλων είναι αντίστοιχα:

Μοντέλο	Όρος variance rate
Vasicek	$\sigma dW(t)$
CIR	$\sigma\sqrt{r}dW(t)$

Με βάση τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι η μόνη διαφορά των όρων του variance rate μεταξύ των δύο μοντέλων είναι το \sqrt{r} που υπάρχει στο μοντέλο του CIR. Επειδή, το επιτόκιο είναι μικρότερο της μονάδας $r < 1$ έχουμε και ότι $\sqrt{r} < 1$ με αποτέλεσμα ο όρος διακύμανσης του μοντέλου του CIR να είναι πάντοτε μικρότερος από τον αντίστοιχο του Vasicek. Κατά συνέπεια η μεταβολή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $dr(t)$ είναι μικρότερη και επομένως το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο που δίνει το μοντέλο του CIR είναι μικρότερο από εκείνο του Vasicek.

6.3. Προσομοίωση μοντέλου Ho-Lee

Σε αυτή την ενότητα γίνεται η προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του μοντέλου των Ho Lee όπου χρησιμοποιείται η σχέση:

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dZ$$

και μέσω της διακριτοποίησης του χρόνου του Euler με χρονικό βήμα $\Delta t = t_{N+1} - t_N$ η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε:

$$r(t+1) = r(t) + [f(0, t_{N+1}) - f(0, t_N)] + \frac{\sigma^2}{2} [t_{N+1}^2 - t_N^2] + \sigma \sqrt{t_{N+1} - t_N} \varepsilon_{t+1}$$

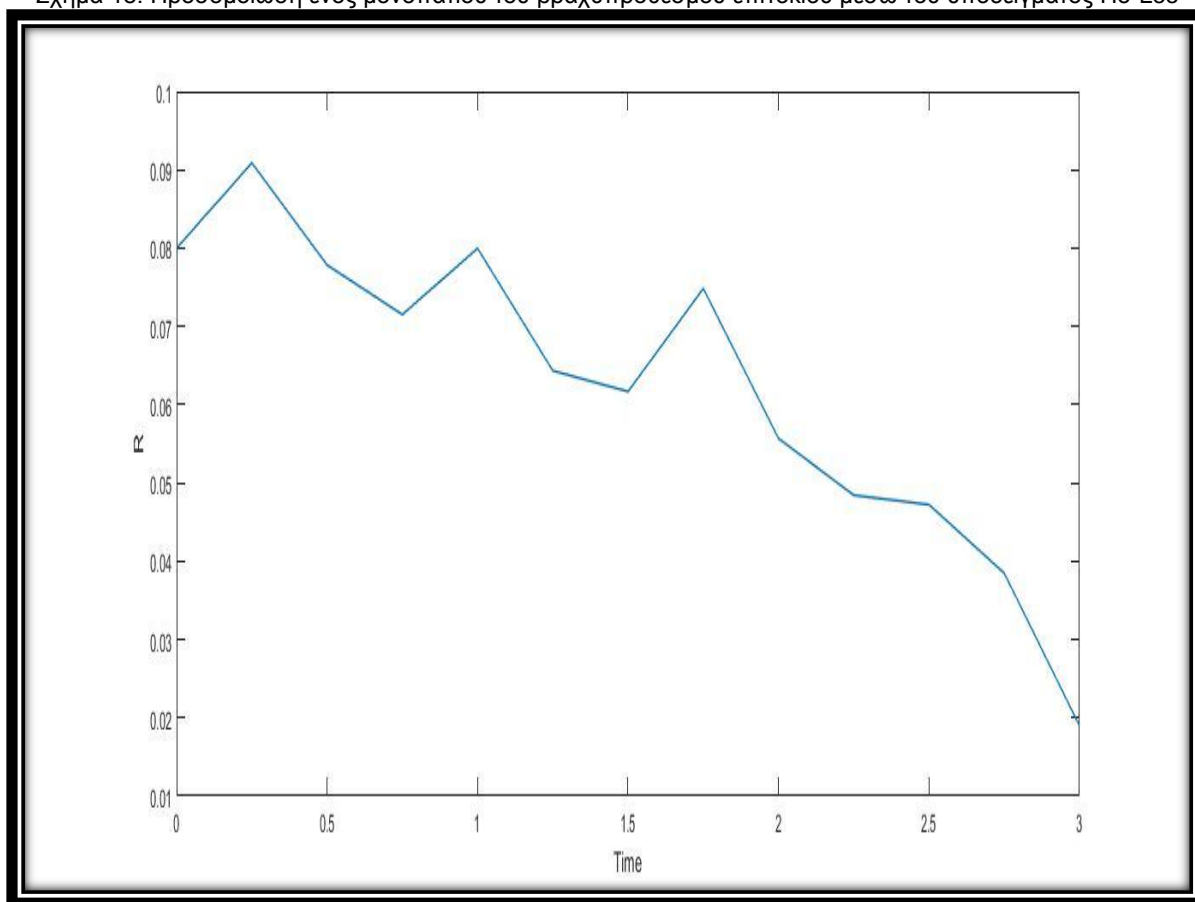
όπου το ε_{t+1} είναι μία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 και το $f(0, t_N)$ είναι το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο το οποίο μπορεί να βρεθεί από την σελίδα της EKT [3]. Να σημειωθεί ότι το μοντέλο των Ho-Lee είναι ένα no-arbitrage μοντέλο που ταιριάζει απόλυτα με την πραγματική καμπύλη χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων αφού την θεωρεί ως μία ενδογενή παράμετρο. Στον παρακάτω πίνακα βρίσκονται οι τιμές του προθεσμιακού επιτοκίου όπως αυτές βρέθηκαν για την ημερομηνία 5/1/2017 και οι οποίες είναι απαραίτητες για την προσομοίωση του μοντέλου:

$f(0, 3_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.771%
$f(0, 6_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.754%
$f(0, 9_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.761%
$f(0, 12_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.773%
$f(0, 15_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.779%
$f(0, 18_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.771%
$f(0, 21_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.756%
$f(0, 24_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.704%
$f(0, 27_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.646%
$f(0, 30_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.573%
$f(0, 33_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.488%
$f(0, 36_{\mu\eta\nu\omega\nu\nu})$	-0.394%

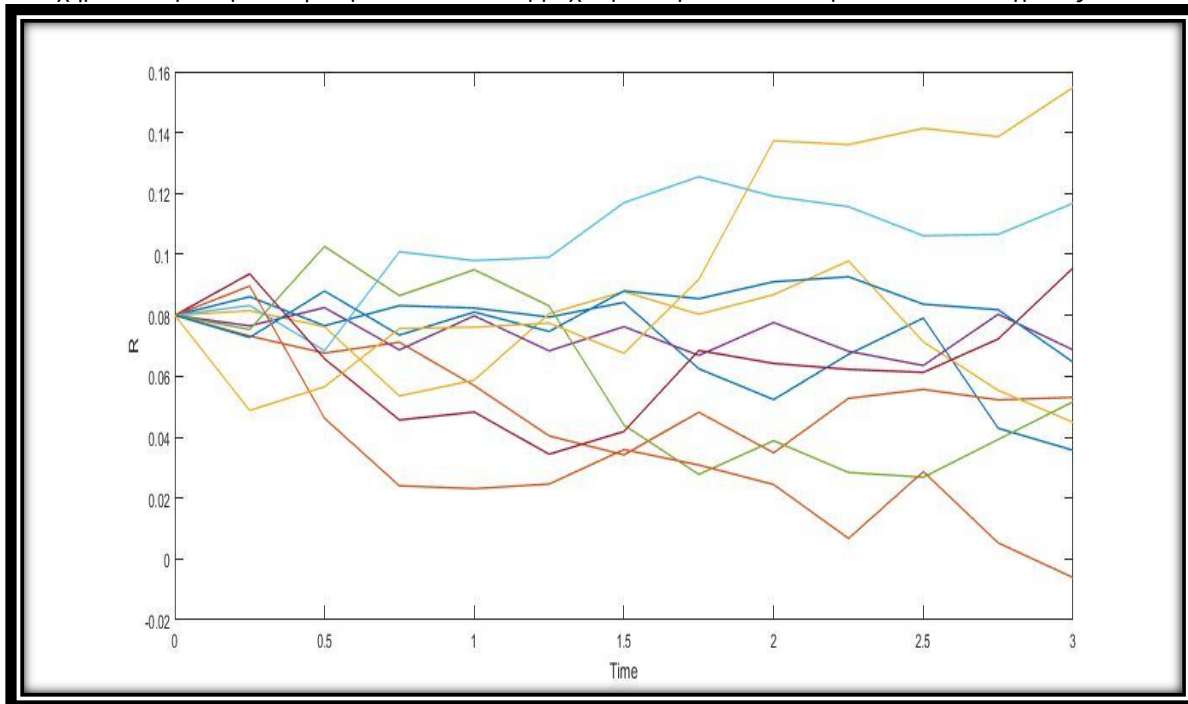
Σε αυτό το σημείο να αναφερθεί ότι για την προσομοίωση θεωρήσαμε σαν αρχική τιμή του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $r_0 = 8\%$. Όσον αφορά την διακύμανση θεωρήσαμε ότι είναι ίση με $\sigma = 3\%$ ενώ τέλος σαν τιμή του cap rate θέσαμε την τιμή του cap rate ίση με 0.05.

Παρακάτω βρίσκονται οι προσομοιώσεις 1 μονοπατιού και 10 μονοπατιών αντίστοιχα με βάση το μοντέλο των Ho-Lee:

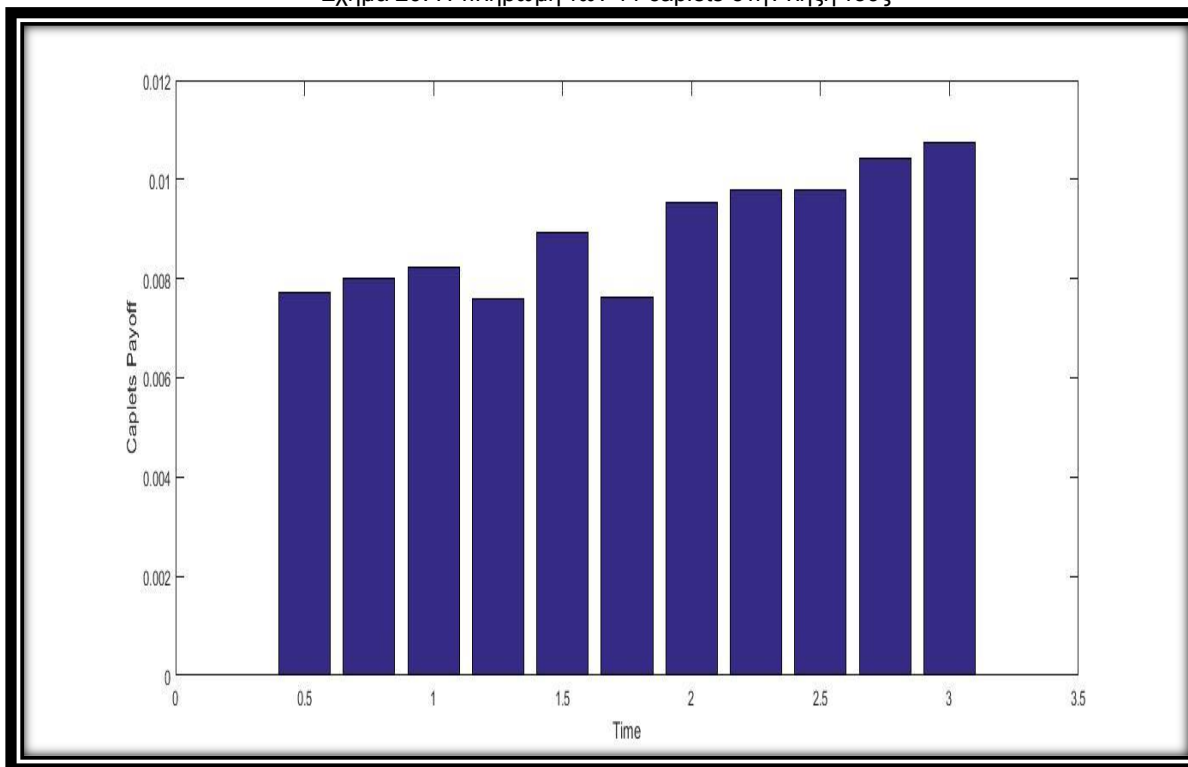
Σχήμα 18: Προσομοίωση ενός μονοπατιού του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος Ho-Lee



Σχήμα 19: Προσομοίωση 10 μονοπατιών του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω του υποδείγματος Ho-Lee



Σχήμα 20: Η πληρωμή των 11 caplets στην λήξη τους



7. Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάστηκαν τα επιτοκιακά παράγωγα και πιο συγκεκριμένα τα *interest rate caps* καθώς και ο τρόπος τιμολόγησής τους. Τα επιτοκιακά παράγωγα είναι χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία παρέχουν ασφάλεια απέναντι στις μεταβολές του επιτοκίου. Επίσης, δίνουν την δυνατότητα στους επενδυτές να τοποθετηθούν ώστε να αποκομίσουν κέρδη από τις μεταβολές του επιτοκίου. Στην συνέχεια αναλύθηκαν τα μοντέλα τα οποία δίνουν την χρονική εξέλιξη του επιτοκίου και πιο συγκεκριμένα του βραχυπρόθεσμου και τα οποία είναι απαραίτητα για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων. Τα μοντέλα που αναλύθηκαν είναι τα μοντέλα ισορροπίας των Vasicek και CIR και το μοντέλο μη-βέβαιου κέρδους των Ho-Lee.

Έπειτα, θεωρώντας ένα *interest rate cap* διάρκειας 3 ετών το οποίο καλύπτει το τριμηνιαίο Euribor και αποτελείται από 11 *caplets* διάρκειάς 3 μηνών το καθένα πραγματοποιήθηκε η προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω της μεθόδου Monte Carlo και για τα 3 μοντέλα. Στην συνέχεια υπολογίστηκε η πληρωμή που δίνει κάθε ένα *caplet* και έπειτα ακολούθησε η προεξόφλησή τους σύμφωνα με το πλαίσιο του *risk neutral valuation* το οποίο αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος υπολογίστηκε το άθροισμα της προεξοφλημένης τιμής των 11 *caplets* το οποίο μας δίνει την τωρινή τιμή του *interest rate cap*.

Παράρτημα (Κώδικες Προσομοίωσης Matlab)

Προσομοίωση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και τιμολόγηση του interest rate cap μέσω του μοντέλου Vasicek

```
function
[Caplet1,Caplet2,Caplet3,Caplet4,Caplet5,Caplet6,Caplet7,Caplet8,Caplet9,Ca
plet10,Caplet11,Cap]=VasSimulation(r0,a,b,sigma,K,T,N,M)

d=T/(12*N);
R=zeros(12*N+1,M);
R(1,:)=r0;
for j=1:M
    for i=2:12*N+1
        dR=a*(b-R(i-1,j))*d+sigma*sqrt(d)*randn(1);
        R(i,j)=R(i-1,j)+dR;
    end
end

%1o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(N+1:2*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^0.5))*max(R(2*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet1=SUM/M;

%2o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(2*N+1:3*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^0.75))*max(R(3*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet2=SUM/M;

%3o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
```

```

        S(1,j)=sum(R(3*N+1:4*N+1,j));
        Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1))*max(R(4*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet3=SUM/M;

%4o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(4*N+1:5*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.25))*max(R(5*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet4=SUM/M;

%5o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(5*N+1:6*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.5))*max(R(6*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet5=SUM/M;

%6o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(6*N+1:7*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.75))*max(R(7*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet6=SUM/M;

%7o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M

```

```

        S(1,j)=sum(R(7*N+1:8*N+1,j));
        Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
    end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2))*max(R(8*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet7=SUM/M;

%8o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(8*N+1:9*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.25))*max(R(9*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet8=SUM/M;

%9o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(9*N+1:10*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.5))*max(R(9*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet9=SUM/M;

%10o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(10*N+1:11*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.75))*max(R(11*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet10=SUM/M;

%11o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M

```

```

        S(1,j)=sum(R(11*N+1:12*N+1,j));
        Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
    end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^3))*max(R(12*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet11=SUM/M;

Cap=(Caplet1+Caplet2+Caplet3+Caplet4+Caplet5+Caplet6+Caplet7+Caplet8+Caplet
9+Caplet10+Caplet11);
plot(0:d:T,R)
x=0.5:0.25:3;
y=[Caplet1 Caplet2 Caplet3 Caplet4 Caplet5 Caplet6 Caplet7 Caplet8 Caplet9
Caplet10 Caplet11];
bar(x,y)
end

```

Προσομοίωση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και τιμολόγηση του interest rate cap μέσω του μοντέλου CIR

```

function
[Caplet1,Caplet2,Caplet3,Caplet4,Caplet5,Caplet6,Caplet7,Caplet8,Caplet9,Ca
plet10,Caplet11,Cap]=CIRSimulation(r0,a,b,sigma,K,T,N,M)

d=T/(12*N);
R=zeros(12*N+1,M);
R(1,:)=r0;
for j=1:M
    for i=2:12*N+1
        dR=a*(b-R(i-1,j))*d+sigma*sqrt(d)*sqrt(R(i-1,j))*randn(1);
        R(i,j)=R(i-1,j)+dR;
    end
end

%1o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(N+1:2*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^0.5))*max(R(2*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet1=SUM/M;

%2o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(2*N+1:3*N+1,j));

```

```

    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^0.75))*max(R(3*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet2=SUM/M;

%3o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(3*N+1:4*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1))*max(R(4*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet3=SUM/M;

%4o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(4*N+1:5*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.25))*max(R(5*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet4=SUM/M;

%5o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(5*N+1:6*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.5))*max(R(6*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet5=SUM/M;

%6o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(6*N+1:7*N+1,j));

```

```

    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.75))*max(R(7*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet6=SUM/M;

%7o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(7*N+1:8*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2))*max(R(8*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet7=SUM/M;

%8o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(8*N+1:9*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.25))*max(R(9*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet8=SUM/M;

%9o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(9*N+1:10*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.5))*max(R(9*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet9=SUM/M;

%10o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(10*N+1:11*N+1,j));

```

```

    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.75))*max(R(11*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet10=SUM/M;

%11o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(11*N+1:12*N+1,j));
    Average(1,j)=S(1,j)/(N+1);
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^3))*max(R(12*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet11=SUM/M;

Cap=(Caplet1+Caplet2+Caplet3+Caplet4+Caplet5+Caplet6+Caplet7+Caplet8+Caplet
9+Caplet10+Caplet11);
plot(0:d:T,R)
x=0.5:0.25:3;
y=[Caplet1 Caplet2 Caplet3 Caplet4 Caplet5 Caplet6 Caplet7 Caplet8 Caplet9
Caplet10 Caplet11];
bar(x,y)
end

```

Προσομοίωση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και τιμολόγηση του interest rate cap μέσω του μοντέλου Ho-Lee

```

function
[Caplet1,Caplet2,Caplet3,Caplet4,Caplet5,Caplet6,Caplet7,Caplet8,Caplet9,Ca
plet10,Caplet11,Cap]=HoLeeSimulation(r0,sigma,K,T,N,M)

t=0;
d=T/(12*N);
R=zeros(12*N+1,M);
R(1,:)=r0;
for j=1:M
    for i=2:12*N+1
        k=t+d;
        dR=((sigma^2)/2)*(d*(2*i-1))*d+sigma*sqrt(d)*randn(1);
        R(i,j)=R(i-1,j)+dR;
        t=k;
    end
end

%1o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M

```



```

        S(1,j)=sum(R(N+1:2*N+1,j));
        Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00017;
    end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^0.5))*max(R(2*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet1=SUM/M;

%2o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(2*N+1:3*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))-0.00007;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^0.75))*max(R(3*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet2=SUM/M;

%3o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(3*N+1:4*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))-0.00012;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1))*max(R(4*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet3=SUM/M;

%4o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(4*N+1:5*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))-0.00006;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.25))*max(R(5*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet4=SUM/M;

%5o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M

```

```

        S(1,j)=sum(R(5*N+1:6*N+1,j));
        Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00008;
    end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.5))*max(R(6*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet5=SUM/M;

%6o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(6*N+1:7*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00015;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^1.75))*max(R(7*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet6=SUM/M;

%7o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(7*N+1:8*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00052;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2))*max(R(8*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet7=SUM/M;

%8o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(8*N+1:9*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00058;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.25))*max(R(9*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet8=SUM/M;

%9o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M

```

```

        S(1,j)=sum(R(9*N+1:10*N+1,j));
        Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00073;
    end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.5))*max(R(9*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet9=SUM/M;

%10o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(10*N+1:11*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00085;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^2.75))*max(R(11*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet10=SUM/M;

%11o caplet
S=zeros(1,M);
Average=zeros(1,M);
for j=1:M
    S(1,j)=sum(R(11*N+1:12*N+1,j));
    Average(1,j)=(S(1,j)/(N+1))+0.00094;
end
V=zeros(1,M);
for j=1:M
    V(1,j)=(1/((1+Average(1,j))^3))*max(R(12*N+1,j)-K,0)*(90/360);
end

SUM=sum(V);
Caplet11=SUM/M;

Cap=(Caplet1+Caplet2+Caplet3+Caplet4+Caplet5+Caplet6+Caplet7+Caplet8+Caplet
9+Caplet10+Caplet11);
plot(0:d:T,R)
x=0.5:0.25:3;
y=[Caplet1 Caplet2 Caplet3 Caplet4 Caplet5 Caplet6 Caplet7 Caplet8 Caplet9
Caplet10 Caplet11];
bar(x,y)
end

```

Βιβλιογραφία

- [1]. John C. Hull, (2014) *“Options, Futures, and Other Derivatives”*, 9th edition, University of Toronto
- [2]. Gregory, Jon (2011), *“Counterparty Credit Risk: The new challenge for global financial markets”*, John Wiley & Sons
- [3]. European Central Bank. Euro area yield curve, 2016,
<http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html>
- [4]. U.S Department of the Treasury. Treasury Yield Curve, Δεκέμβριος 2016
<https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/Historic-Yield-Data-Visualization.aspx>
- [5]. Benniga, Simon & Wiener, Zvi. (1998), *“Term Structure of Interest Rates”*, Mathematica in Education and Research Vol. 7 no. 2, Available at:
<http://finance.wharton.upenn.edu/~benninga/mma/MiER72.pdf>
- [6]. Piazzesi, Monica, (2003), *“Affine Term Structure Models. Published in Handbook of Financial Econometrics”*, Available at: <http://home.uchicago.edu/~lhansen/s.pdf>.
- [7]. Fama, Eugene F. (1990), “Term-structure forecasts of interest rates, inflation, and real returns.” *Journal of Monetary Economics* 25, 59-76
- [8]. Mishkin, Frederik S. (1990), “What does the term structure tell us about future inflation?”, *Journal of Monetary Economics* 25, 77-95.
- [9]. Ruben D Cohen, (2006), *“A VaR-Based Model for the Yield Curve”*, *Wilmott Magazine*, May Issue
- [10]. Paul F. Cwik, (2005), *“The Inverted Yield Curve and the Economic”*, *New Perspectives on Political Economy*, Volume 1, Number 1, 2005, pp. 1–37
- [11]. Glyn A. Holton (2005), *“Fundamental Theorem of Asset Pricing”*, *riskglossary.com*. Retrieved October 20, 2011.
- [12]. J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein, (1979), *“Option Pricing: A simplified Approach. Journal of Financial Economics”*, 7:229–264
- [13]. Cootner, P.H. (ed.), (1964), *“The Random Character of Stock Market Prices”*, Cambridge, MA: MIT Press
- [14]. Les Clewlow and Chris Strickland, (2003) *“Implementing derivatives models”*, Wiley
- [15]. R. Gibson, F.-S. Lhabitant, D. Talay, (2001) *“Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature”*

- [16]. Mishkin, Frederik S. (1990). 'What does the term structure tell us about future inflation?', *Journal of Monetary Economics* 25, 77-95
- [17]. Oldrich Vasicek (1977) 'An equilibrium characterisation of the term structure', *Journal of Financial Economics*, 5:177-188
- [18]. G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. (1930) 'On the theory of Brownian Motion', *Physical Review*, 36:823-841
- [19]. Zeytun & Gupta (2007) 'A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate', Fraunhofer – Institut für Techno und Wirtschaftsmathematik
- [20]. Svoboda Simona (2004) 'Interest Rate Modelling', Palgrave Macmillan, chapter 1
- [21]. Brigo, Damiano, Dalessandro, Antonio, Neugebauer, Matthias & Triki, Fares (2007) 'A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management', Διαθέσιμο στο SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1109160>
- [22]. Murto, Risto (1992) 'Testing Continuous Time Models of the Term structure of Interest Rates in the Finnish Money Market', *Etlän keskustelualoitteita* 392, p. 33-34
- [23]. J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross (1985) 'A Theory of the Term Structure of Interest Rates', *Econometrica*, 53: 385-407
- [24]. T.S.Y Ho and S.-B. Lee (1986) 'Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims', *Journal of Finance*, 41:1011-1029
- [25]. Paul Glasserman (2004) 'Monte Carlo in Financial Engineering', Springer
- [26]. Fischer Black (1976) 'The pricing of commodity Contracts', *Journal of Financial Economics*, 3:167-179
- [27]. F. Black and M. Scholes (1973) 'Pricing of Options and Corporate Liabilities', *Journal of Political Economy*, 81:637-654
- [28]. P. Reißner (1991) 'Zur analytischen Bewertung von Zinsoptionen', Reter Lang Verlag
- [29]. John C. Hull (2006) 'Optionen, Futures und andere Derivate', Pearson Studium
- [30]. Wayne L. Winston (2009) 'Introduction to Monte Carlo simulation adapted from Microsoft Office Excell 2007 Data Analysis and Business Modeling by Wayne L. Winston', <http://office.microsoft.com/en-us/excel>, Mar. 2009.
- [31]. Les Clewlow and Chris Strickland (2003) 'Implementing derivatives models', Wiley