ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ» ΜΕ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΤΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΜΕ ΕΓΓΥΗΣΗ: ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΑΝΑΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ

Μπαζίνης Χαρίλαος ΜΧΡΗ1535

Επιβλέπων Λέκτορας Νικόλαος Εγγλέζος

Επιτροπή Καθηγητής Άγγελος Αντζουλάτος
Αναπ. Καθηγητής Νικόλαος Κουρογένης

Φεβρουάριος 2017

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή έχει ως στόχο την αποτίμηση παραγώγων με εγγύηση και τη σύγκριση τους με παράγωγα χωρίς εγγύηση. Η πιστωτική κρίση του 2008 άλλαξε τον παραδοσιακό τρόπο τιμολόγησης των παραγώγων. Αρχικά, με την τοποθέτηση εγγύησης στις συναλλαγές για την μείωση του πιστωτικού κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου, όπως επίσης και με την συνειδητοποίηση ότι οι τράπεζες αντιμετωπίζουν κίνδυνο και δεν μπορούν να δανειστούν σε επιτόκια μηδενικού κινδύνου. Αυτό οδήγησε τις τράπεζες να εισάγουν μια αμφιλεγόμενη αναπροσαρμογή στις τιμές των παραγώγων, γνωστή ως αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης, η οποία συνδέεται με την εγγύηση.

Αρχικά, επεκτείνουμε το μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein συμπεριλαμβάνοντας εγγύηση και την αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτό το μοντέλο είναι διακριτό ανάλογο του μοντέλου της μερικής διαφορικής εξίσωσης του Piterbarg, όπου έχει συμπεριλάβει εγγύηση. Δείχνουμε με διαγραμματικές αναπαραστάσεις τις τιμές των δύο μοντέλων με και χωρίς εγγύηση όπως και ότι οι τιμές των δύο μοντέλων συμπίπτουν. Επίσης, εξετάζουμε τον κίνδυνο αθέτησης για διαφορετικές περιόδους αναπροσαρμογής της εγγύησης. Τέλος, πραγματοποιούμε εκτίμηση παραμέτρων και μελετάμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων.

Λέξεις κλειδιά: εγγύηση, αναπροσαρμογή αξίας χρηματοδότησης, μοντέλο Cox, Ross & Rubinstein, μοντέλο Piterbarg, κίνδυνος αθέτησης, περίοδος αναπροσαρμογής, προβλεπτική ικανότητα

Abstract

This thesis aims the pricing of derivatives with collateral and their comparison with derivatives with non-collateral. The credit crisis of 2008 changed the traditional manner of pricing derivatives. Firstly, by posting collateral in a trade to mitigate the counterparty credit risk, and by the realization that banks are not risk-free and they cannot borrow at the risk-free rate. This led banks to introduce the controversial adjustment to derivative prices, known as funding value adjustment (FVA), which is interlinked with collateral posting.

Firstly, we extend Cox, Ross and Rubinstein model to include collateral and funding value adjustment. Then we prove that this model is a discrete analogue of the Piterbarg's partial different equation (PDE) model, which has included collateral. We show a diagrammatic representation of the two models with and without collateral and that the prices of both models coincide. Also, we see that there is a default risk for different margin periods of collateral. Finally, we conduct parameter estimation and study the forecasting power of the models.

Key words: collateral, funding value adjustment (FVA), Cox, Ross & Rubinstein model, Piterbarg's model, default risk, margin periods, forecasting

Περιεχόμενα

Λίστα εικόνων

Λίστα πινάκων

Κεφάλαιο 1

1 *Εισαγωγή*

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα δικαιώματα προαίρεσης και τα χαρακτηριστικά τους, την εγγύηση που θα χρησιμοποιήσουμε στην τιμολόγηση αυτών, καθώς και μια ιστορική αναδρομή αναφερόμενη στην εγγύηση και την αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης.

1.1 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) αποτελούν μία από τις πιο διαδεδομένες κατηγορίες χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ο αγοραστής ή ο κάτοχος του δικαιώματος προαίρεσης διατηρεί το δικαίωμα, και όχι την υποχρέωση, να «αγοράσει» (δικαίωμα αγοράς, call) ή να «πουλήσει» (δικαίωμα πώλησης, put) το δείκτη σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία σε προκαθορισμένη τιμή (τιμή άσκησης). Αντίστοιχα, ο πωλητής ενός τέτοιου δικαιώματος έχει την υποχρέωση και όχι το δικαίωμα, να παραδώσει την υποκείμενη αξία στον αγοραστή αν αυτός ασκήσει το δικαίωμα του. Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι τυποποιημένα συμβόλαια, εάν είναι σε δείκτες τότε ο διακανονισμός είναι χρηματικός και πραγματοποιείται κατά την ημερομηνία εξάσκησης. Αν ο δείκτης του δικαιώματος προαίρεσης κατά την ημερομηνία λήξης του είναι πάνω από την τιμή εξάσκησης, ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς πληρώνει τη διαφορά, σε χρήματα, στον αγοραστή του δικαιώματος αγοράς. Αντίθετα, αν κατά την ημερομηνία λήξης ο δείκτης είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης, ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης πιστώνεται τη διαφορά από τον πωλητή. Ο αγοραστής καταβάλλει το τίμημα την επόμενη εργάσιμη μετά τη συναλλαγή στον πωλητή.

Ένα δικαίωμα προαίρεσης μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων του αγοραστή και του πωλητή έχει δύο είδη δικαιωμάτων: δικαιώματα αγοράς (call options) και δικαιώματα πώλησης (put options). Σε ένα δικαίωμα αγοράς- call options (πώλησης- put options), ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να αγοράσει (πουλήσει) από τον πωλητή τον υποκείμενο τίτλο σε μία προκαθορισμένη τιμή (τιμή εξάσκησης – exercise price ή strike price). Η αγορά/πώληση του υποκείμενου τίτλου (εξάσκηση του δικαιώματος) θα γίνει:

- σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον (ημερομηνία λήξης – expiry date) τα οποίο ονομάζεται δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (European style option) ή
- σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή που απομένει από τη στιγμή αγοράς/πώλησης του δικαιώματος έως τη λήξη του δικαιώματος. Αυτό το δικαίωμα ονομάζεται δικαίωμα Αμερικάνικου τύπου (American style option).

Τέσσερις βασικές θέσεις υπάρχουν στην αγορά δικαιωμάτων και από αυτές μπορεί κάποιος να φτιάξει πολύ περισσότερες και πιο σύνθετες. Οι βασικές θέσεις είναι οι παρακάτω:

- Long call όπου κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής,
- short call όπου κάποιος πωλεί το δικαίωμα αγοράς. Σε αυτή τη θέση ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να πουλήσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής,
- long put, όπου κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να πουλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής και
- short put, όπου κάποιος πουλάει το δικαίωμα να πουλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.

Τα βασικά στοιχεία που πρέπει να διακρίνουμε σε ένα δικαίωμα προαίρεσης και τα οποία ορίζονται στο συμβόλαιο ρητά είναι τα εξής:

- Ο υποκείμενος τίτλος ο οποίος μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό ή μη προϊόν. Μια μετοχή, ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα εμπορικό αγαθό ή και μία ισοτιμία είναι ενδεικτικά παραδείγματα υποκείμενων τίτλων σε ένα συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης. Αυτό που θα μας απασχολήσει ιδιαιτέρως στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η τιμή (***price***) του υποκείμενου τίτλου, η οποία καθορίζει και τις χρηματοροές στη λήξη του συμβολαίου αν αναφερόμαστε σε δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου ή τις χρηματοροές σε κάθε χρονική στιγμή ισχύς του συμβολαίου αν αναφερόμαστε σε δικαίωμα Αμερικάνικου τύπου.
- Η τιμή άσκησης του δικαιώματος (***Strike price***) η οποία είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής ενός δικαιώματος θα πραγματοποιήσει την συναλλαγή αν εξασκήσει το δικαίωμα.
- Η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (***maturity***) η οποία αναφέρεται στον χρόνο μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Σε δικαιώματα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου η ημερομηνία λήξης συμπίπτει με την ημερομηνία που μπορούν να εξασκηθούν τα δικαιώματα, ενώ σε δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου η εξάσκηση μπορεί να τελεστεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.
- Το ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος (***premium***) το οποίο είναι η χρηματική αξία που καταβάλλεται από τον αγοραστή του δικαιώματος στον πωλητή σαν αντάλλαγμα του δικαιώματος να πραγματοποιήσει συναλλαγή με τον υποκείμενο τίτλο.
- Το μέγεθος του συμβολαίου. Είναι ο αριθμός των μεριδίων του υποκείμενου τίτλου που έχει το δικαίωμα ο κάτοχος (***holder***) να αγοράσει ή να πουλήσει στον εκδότη (***writer***).

Στην συνέχεια της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης και θα τα τιμολογήσουμε με και χωρίς εγγύηση.

1.2 Εγγύηση (Collateral)

Η εγγύηση κρατείται σε μια συμφωνία από το ένα μέρος δηλαδή τον κάτοχο της εγγύησης (collateral holder), ώστε να παρέχει κάλυψη έναντι του πιστωτικού κινδύνου που λαμβάνεται σε σχέση με ένα άλλο μέρος αυτόν που δίνει την εγγύηση (collateral giver). Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι ο κύριος κίνδυνος είναι ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλομένου, ο οποίος πρέπει να αξιολογηθεί σωστά. Η εγγύηση χρησιμεύει για να περιορίσει το κίνδυνο αυτό σε περίπτωση αθέτησης της συμφωνίας από τον αντισυμβαλλόμενο. Εγγυήσεις χρησιμοποιούνται κυρίως στο πλαίσιο των εξασφαλισμένων δανείων, των συμφωνιών επαναγοράς και περιλαμβάνονται και στα παράγωγα. Η λήψη εγγυήσεων είναι μια συνηθισμένη δραστηριότητα, που συμβαίνει σε καθημερινή βάση. Σε πολλές περιπτώσεις, η ποσότητα των εγγυήσεων που απαιτείται αξιολογείται μέσα από μια καθημερινή διαδικασία αποτίμησης (mark-to-market).

Συνήθως σαν ενέχυρο χρησιμοποιούνται **χρηματοροές** αλλά υπάρχουν και άλλα είδη εγγυήσεων τα οποία είναι τα εξής:

- Ομόλογα σταθερού εισοδήματος,
- Ομόλογα,
- Προγράμματα τιτλοποιήσεων,
- Μέταλλα,
- Εμπορεύματα,
- Μετοχές,
- Κεφάλαια και
- Πιστωτικές απαιτήσεις.

Ο πληθυσμός των κάτοχων εγγυήσεων είναι τόσο ευρείς όσο και οι συμμετέχοντες στην αγορά:

- CCPs (Central (Clearing) Counterparties),
- Τραπεζικά Ιδρύματα,
- Κεντρικές τράπεζες,
- CSDs & ICSDs (Central Securities Depositories & International CSDs)
- Ασφαλιστικές εταιρείες,
- Διαχειριστές περιουσιακών στοιχείων,
- Συνταξιοδοτικά ταμεία,
- και άλλα μέρη, όπως προνομιακοί μεσίτες.

Η πιστωτική κρίση του 2008 οδήγησε τις τράπεζες σε μια αμφιλεγόμενη αναπροσαρμογή στην τιμολόγηση των παραγώγων, γνωστή ως αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης (**Funding Value Adjustment**), η οποία συνδέεται με την εγγύηση. Σε επόμενα κεφάλαια θα επεκτείνουμε το μοντέλο διακριτού χρόνου των Cox, Ross και Rubinstein (1979) ώστε να συμπεριλάβουμε στην τιμολόγηση των παραγώγων την εγγύηση, όπως και στο μοντέλο του Piterbarg (2010) Black-Scholes-Merton ΜΔΕ θα συμπεριλάβουμε εγγύηση και την αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης.

1.3 Ιστορική αναδρομή

Η εγγύηση χρησιμοποιείται ώστε να διασφαλιστεί η προστασία από τον κίνδυνο αθέτησης της συμφωνίας από τον αντισυμβαλλόμενο. Την δεκαετία του 1980, μεγάλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούσαν εγγυήσεις ενάντια στον πιστωτικό κίνδυνο. Η χρήση εγγυήσεων για την προστασία από τον πιστωτικό κίνδυνο έγινε ιδιαίτερα γνωστή στις αρχές της δεκαετίας του 1990. Στις μέρες μας, οι τράπεζες χρησιμοποιούν τις εγγυήσεις κυρίως σε έξω-χρηματιστηριακές συναλλαγές.

Η κρίση του 2008 ήταν ιδιαίτερα σημαντική για τον κόσμο της οικονομίας και ακόμα περισσότερο για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων. Πριν από την κρίση η αποτίμηση της αξίας ενός παραγώγου ήταν σημαντική αλλά και σχετικά απλή. Διεθνώς, επαγγελματίες και ακαδημαϊκοί συμφωνούσαν με τη μέθοδο τιμολόγησης που χρησιμοποιούταν για την τιμολόγηση ενός παραγώγου. Η μέθοδος ήταν η προεξόφληση των μελλοντικών αναμενόμενων ταμειακών ροών υπό το μέτρο του ουδέτερου κινδύνου με το μηδενικό επιτόκιο κινδύνου. Η τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων έχει γίνει πιο περίπλοκη επειδή πολλοί περισσότεροι παράγοντες πρέπει να εξεταστούν τώρα. Οι παράγοντες αυτοί περιλαμβάνουν τον πιστωτικό κίνδυνο αντισυμβαλλομένου και την αδυναμία να δανειστεί και να επενδύσει τα μετρητά στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Η συμπερίληψη αυτών των παραγόντων, στην τιμολόγηση των παραγώγων, δεν έχει γίνει καθολικά αποδεκτή μεταξύ των συμμετεχόντων στην βιομηχανία. Αυτό που συνηθίζαμε να αποκαλούμε "too big to fail" , όπως οι τράπεζες Lehman Brothers και Bear Stearns, οι οποίες κατάρρευσαν στην κρίση, διέψευσαν τον μύθο ότι οι τράπεζες δεν αντιμετωπίζουν κίνδυνο (C.B. Hunzinger, 2014).

Με το ξέσπασμα της κρίσης δημιουργήθηκε το ζήτημα για το πώς θα μετριαστεί σωστά ο πιστωτικός κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου στα έξω-χρηματιστηριακά παράγωγα. Η τοποθέτηση εγγύησης στην συναλλαγή αποτελεί ένα τρόπο μείωσης του κινδύνου αυτού, αφού χρησιμοποιείται ως ενέχυρο του δανειολήπτη στο δανειζόμενο κάποιων περιουσιακών στοιχείων για την εξασφάλιση της αποπληρωμής της υποχρέωσης, δεν είναι όμως υποχρεωτική. Η τοποθέτηση εγγύησης στην συναλλαγή παραγώγων ρυθμίζεται από ένα νομικό έγγραφο την πιστωτική στήριξη (εγγύηση) (Credit Support Annex). Το έγγραφο πιστωτικής στήριξης προσδιορίζει υπό ποιους όρους τοποθετείται εγγύηση μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων στις συναλλαγές έξω-χρηματιστηριακών παραγώγων.

Πριν το 2008, το επιτόκιο LIBOR θεωρούταν ότι είναι η καλύτερη προσέγγιση για το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και πως είναι το επιτόκιο το οποίο οι τράπεζες μπορούσαν να δανείζονται και να επενδύουν ελεύθερα. Το επιτόκιο LIBOR περιλαμβάνει ένα spread για τον πιστωτικό κίνδυνο των τραπεζών. Με την κρίση όμως οι τράπεζες έγιναν απρόθυμες να δανείσουν η μια στην άλλη με αποτέλεσμα το επιτόκιο LIBOR να αρχίσει να αυξάνεται (Hull και White, 2012). Από την άλλη, το επιτόκιο OIS (overnight indexed swap) είναι μια συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων που αφορά την ανταλλαγή ενός επιτοκίου μιας ημέρας με ένα σταθερό επιτόκιο. Το spread LIBOR-OIS που είναι η διαφορά μεταξύ του LIBOR και του OIS επιτοκίου πριν από την κρίση ήταν σταθερό και όχι ιδιαίτερα σημαντικό. Η διαφορά μεταξύ του τριμηνιαίου αμερικανικού LIBOR και OIS ήταν λίγες μονάδες βάσης πριν από την κρίση, εκτοξεύθηκε όμως εκατοντάδες μονάδες βάσης μετά την κατάρρευση της τράπεζας Lehman Brothers τον Σεπτέμβριο του 2008 και από τότε παρέμεινε σημαντική φτάνοντας τις 364.42 μονάδες βάσης στα μέσα Σεπτεμβρίου. Έτσι αποδείχθηκε ότι το επιτόκιο LIBOR είναι ακατάλληλο υποκατάστατο ως επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για να χρησιμοποιείται στις συναλλαγές με εγγύηση και πλέον συνήθως χρησιμοποιείται το επιτόκιο OIS.

Εικόνα 1.1: Η διαφορά του τριμηνιαίου LIBOR και OIS κατά τη διάρκεια της κρίσης. Πηγή: www.http://soberlook.com, May 31, 2009.

Με την κρίση του 2008 αποδείχθηκε ότι οι τράπεζες διαθέτουν ρίσκο και δεν μπορούν να δανειστούν και να επενδύσουν στα επιτόκια που επιθυμούν, αυτό οδήγησε σε μια επιπλέον χρέωση στις συναλλαγές γνωστή ως αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης. **Η αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης (Funding Value Adjustment) αποτελεί την**

διαφορά μεταξύ της τιμής του παραγώγου και της εγγύησης που τοποθετείται στην συναλλαγή, πολλαπλασιασμένη με την διαφορά του επιτοκίου χρηματοδότησης και του επιτοκίου της εγγύησης. Στην συνέχεια αυτό το ποσό προεξοφλείται στην αρχική χρονική στιγμή. Στην ουσία η αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης είναι μια βελτίωση που γίνεται στην τιμή χωρίς κίνδυνο του παραγώγου για ένα έξω-χρηματιστηριακό προϊόν.

Η συμπερίληψη της αναπροσαρμογής της αξίας χρηματοδότησης στην τιμολόγηση χρηματιστηριακών προϊόντων είναι ένα αμφιλεγόμενο ζήτημα. Οι Hull και White (2012) διαφωνούν με το θέμα αυτό γιατί πιστεύουν ότι παραβιάζεται ο νόμος της μιας τιμής στην αγορά, καθώς οι δύο αντισυμβαλλόμενοι θα τιμολογήσουν διαφορετικά το παράγωγο. Η συμπερίληψη εγγύησης στην τιμολόγηση του παραγώγου αλλάζει τον παραδοσιακό τρόπο τιμολόγησης παραγώγων. Η τοποθέτηση εγγύησης στην τιμολόγηση των έξω-χρηματιστηριακών προϊόντων μειώνει τον πιστωτικό κίνδυνο και τα κόστη χρηματοδότησης αλλά αυτό εξαρτάται από το πόσο συχνά αναπροσαρμόζεται η εγγύηση σύμφωνα με τις κινήσεις της αγοράς.

1.4 Περιγραφή της διπλωματικής

Στις προηγούμενες ενότητες γνωρίσαμε τα δικαιώματα προαίρεσης τα οποία θα τιμολογήσουμε ως παράγωγα συμπεριλαμβάνοντας εγγύηση. Αναφέραμε μερικές πληροφορίες σχετικά με την εγγύηση για το που χρησιμοποιείται και το ποιος την χρησιμοποιεί. Τέλος, κάναμε μια ιστορική αναδρομή για το πότε άρχισε να χρησιμοποιείται η εγγύηση και πως άλλαξε μετά το ξέσπασμα της κρίσης του 2008.

Στο κεφάλαιο 2 θα πραγματοποιήσουμε μια περιγραφή για την επέκταση του μοντέλου διακριτού χρόνου των Cox, Ross και Rubinstein (1979) συμπεριλαμβάνοντας εγγύηση και μερίσματα, καθώς και των τραπεζικών λογαριασμών που θα χρησιμοποιήσουμε και θα μας βοηθήσουν στην επέκταση αυτή. Θα προχωρήσουμε με την τιμολόγηση ενός παραγώγου με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου και n περιόδων. Τέλος, θα εξετάσουμε πως η εγγύηση επηρεάζει την αξία του παραγώγου και τον συντελεστή προεξόφλησης της.

Στο κεφάλαιο 3, αρχικά θα αναλύσουμε κάποιες βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών μαθηματικών τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Έπειτα θα θεωρήσουμε τη Μερική Διαφορική Εξίσωση Black-Scholes-Merton όπου θα συμπεριλάβουμε εγγύηση και μερίσματα. Τέλος, θα δούμε πως η διακριτοποίηση του μοντέλου του Piterbarg's (2010) ΜΔΕ Black-Scholes-Merton αποδίδει το μοντέλο των Cox et al (1979).

Στο κεφάλαιο 4, πραγματοποιείται μια εμπειρική μελέτη αποτίμησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με το μοντέλα Cox et al και τη μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton. Επίσης, θα παρουσιάσουμε διαγράμματα συγκρίνοντας τις τιμές των δύο μοντέλων με και χωρίς εγγύηση. Θα εξετάσουμε τον κίνδυνο αθέτησης για διαφορετικές περιόδους αναπροσαρμογής της εγγύησης. Τέλος, θα κάνουμε εκτίμηση παραμέτρων και προβλεπτική ικανότητα.

Στο κεφάλαιο 5 θα καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα, καθώς επίσης επισυνάπτεται και το παράρτημα με κάποιες μαθηματικές αποδείξεις και τους κώδικες της Matlab που χρησιμοποιήθηκαν για την εμπειρική μελέτη.

Κεφάλαιο 2

2 *Το μοντέλο διακριτού χρόνου των Cox, Ross και Rubinstein με μερίσματα και εγγύηση*

Για την τιμολόγηση των παραγώγων θα χρησιμοποιήσουμε την επέκταση του μοντέλου των Cox et al (1979) συμπεριλαμβάνοντας μερίσματα και εγγύηση. Ο τύπος του παραγώγου που χρησιμοποιείται σε αυτό το μοντέλο δεν προσδιορίζεται και υποθέτουμε ότι η συναλλαγή μεταξύ των δύο αντισυμβαλλόμενων δεν μπορεί να αθετηθεί κατά την διάρκεια αυτής.

Η σημειογραφία είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιείται στο άρθρο του Piterbarg (2010). Τα τρία διαφορετικά επιτόκια και η μερισματική απόδοση που απαιτούνται είναι:

- r_C το επιτόκιο που καταβάλλεται στην εγγύηση,
- r_R το επιτόκιο που καταβάλλεται σε μια συμφωνία επαναγοράς για μετοχές που δεν πληρώνουν μέρισμα,
- r_F το επιτόκιο που καταβάλλεται σε χρηματοδότηση χωρίς εγγύηση, και
- r_D η μερισματική απόδοση της μετοχής.

Η σχέση μεταξύ των επιτοκίων είναι:

$$r_C \leq r_R \leq r_F.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι σε αυτό το μοντέλο, τα επιτόκια είναι ονομαστικά ετήσια συνεχώς ανατοκιζόμενα και ντετερμινιστικά.

Το χαρτοφυλάκιο απογραφής, που προσδιορίζεται με Π_t, είναι κατασκευασμένο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να αναπαράγει τέλεια την συναλλαγή του παραγώγου σε όλες τις εποχές και σε όλα τα κράτη του κόσμου. Οι ποσότητες που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο απογραφής είναι:

- Δ ποσό των μετοχών, και
- γ ποσό των μετρητών.

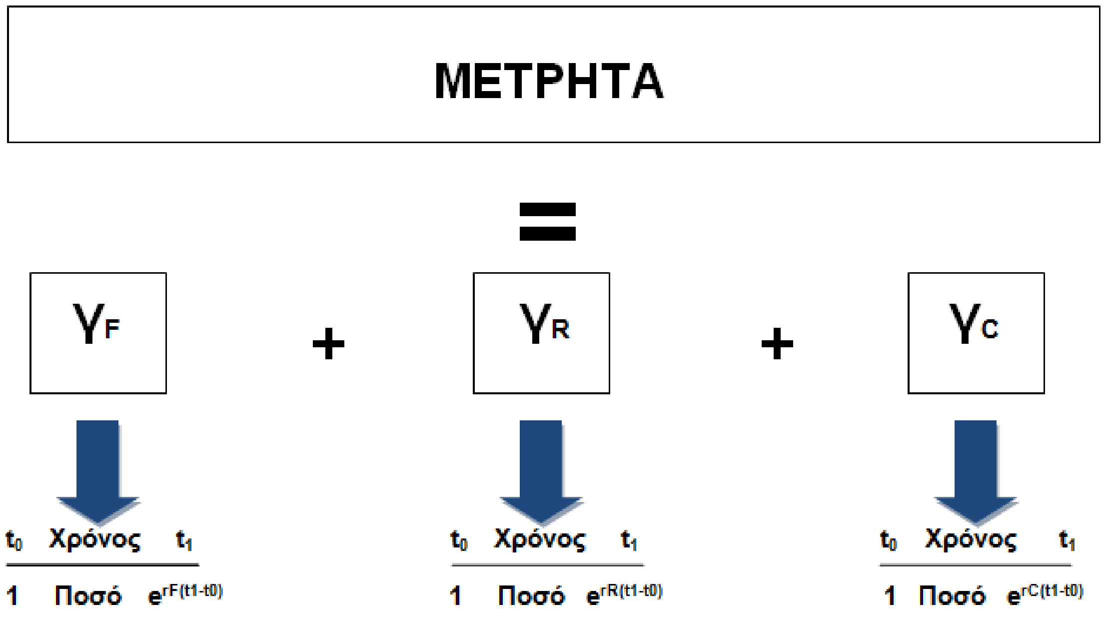
2.1 Το μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein και οι τραπεζικοί λογαριασμοί

Το χαρτοφυλάκιο Π_t περιλαμβάνει ένα ποσό χρημάτων του μοντέλου των Cox et al (1979) με εγγύηση, που θα υποδηλώνουμε ως γ, το οποίο αποτελείται από τρεις διαφορετικούς τραπεζικούς λογαριασμούς: το λογαριασμό της χρηματοδότησης, το λογαριασμό της συμφωνίας επαναγοράς και το λογαριασμό της εγγύησης:

1. Το ποσό που αποτελεί τον λογαριασμό της χρηματοδότησης θα το συμβολίζουμε γ_F. Το ποσό αυτό είναι η διαφορά μεταξύ δύο ποσών μετρητών, της τιμής του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου και του ποσού της εγγύησης. Ως γ_P συμβολίζουμε την τιμή του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου και γ_C το ποσό της εγγύησης, $\gamma_F=\gamma_P-\gamma_C$. Το ποσό του λογαριασμού αυτού είναι το ποσό που χρειάζεται να δανειστεί ή να επενδύσει σε ένα επιτόκιο δανεισμού χωρίς εγγύηση, r_F. Το μοντέλο των Cox et al (1979) υποθέτει ότι κάποιος μπορεί να δανειστεί ή να δανείσει μετρητά στο ακάλυπτο επιτόκιο χωρίς να διατρέχει πιστωτικό κίνδυνο αντισυμβαλλόμενου.
2. Το ποσό του λογαριασμού της συμφωνίας επαναγοράς το συμβολίζουμε με γ_R. Ο λογαριασμός αυτός αποτελείται από μετρητά που έχουν επενδυθεί ή δανειστεί προκειμένου να χρηματοδοτήσουν την θέση του επενδυτή στη μετοχή, ΔS_t, μέσω μιας συμφωνίας επαναγοράς.

3. Το ποσό που αποτελεί το λογαριασμό της εγγύησης συμβολίζεται με γ_C. Ο λογαριασμός περιέχει το ποσό της εγγύησης που τοποθετείται μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων, το οποίο αυξάνεται με ένα επιτόκιο εγγύησης, r_C. Οι υποθέσεις που γίνονται σχετικά με την παρεχόμενη εγγύηση στο μοντέλο αυτό είναι ότι δεν εφαρμόζεται κούρεμα στην αξία της εγγύησης και ότι το νόμισμα της εγγύησης και του υποκείμενου παραγώγου είναι το ίδιο.

Το ποσό των μερισμάτων, γ_D, είναι η αξία των μερισμάτων που πληρώνει η μετοχή. Όταν η μετοχή τοποθετείται σε μια συμφωνία επαναγοράς τότε το μέρισμα που καταβάλλεται από την μετοχή το εισπράττει ο αντισυμβαλλόμενος που κατέχει την μετοχή στην συμφωνία επαναγοράς. Ο αντισυμβαλλόμενος που τοποθετεί τα χρήματα του στην συμφωνία επαναγοράς θα χάνει το μέρισμα, ωστόσο, θα αποζημιώνεται αφού θα πληρώνει μόνο το επιτόκιο της συμφωνίας επαναγοράς μειωμένο κατά την μερισματική απόδοση αυτής. Το επιτόκιο της συμφωνίας επαναγοράς του αποθέματος που καταβάλλει μέρισμα είναι r_R- r_D. Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ενός συγκεκριμένου επιτοκίου την χρονική στιγμή t_i συμβολίζεται $r_*(t_i)$. Αυτό είναι το επιτόκιο από την χρονική στιγμή t_i έως την χρονική στιγμή t_{i+1}.



Εικόνα 2.1: Απεικόνιση των διαφόρων λογαριασμών που απαρτίζουν το λογαριασμό μετρητών και των τιμών που καταβάλλονται / κερδίζονται από τον καθένα.

2.2 Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου με εγγύηση όπου η τιμή του παρουσιάζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1. Η τιμή ενός εξασφαλισμένου παραγώγου της συναλλαγής χωρίς την ύπαρξη πιστωτικού κινδύνου μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_0 = e^{-r_F(t_0)(t_1-t_0)}\left[E_0[V_1] + C_0\left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_c(t_0)(t_1-t_0)}\right)\right]$$

Ο προσδοκώμενος αναμενόμενος συντελεστής E_n εξαρτάται από την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t_n, όπου n ένας φυσικός αριθμός.

Εάν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο της εγγύησης πλησιάζει αρκετά το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου τότε η τιμή του παραγώγου της συναλλαγής προκύπτει ως το άθροισμα της τιμής του παραγώγου με μηδενικό κίνδυνο και της αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης:

$$V_0 = e^{-r_c(t_0)(t_1-t_0)}E_0[V_1] - e^{-r_c(t_0)(t_1-t_0)}(V_0 - C_0)\left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_c(t_0)(t_1-t_0)}\right) \quad (1)$$

όπου V_1 είναι η συνάρτηση εσόδων του παραγώγου την χρονική στιγμή t_1, C_0 είναι το ποσό της εγγύησης που τοποθετείται στην συναλλαγή την χρονική στιγμή t_0 και τα $r_C(t_0)$ και $r_F(t_0)$ είναι η βραχυπρόθεσμη εγγύηση και το επιτόκιο επένδυσης την χρονική στιγμή t_0, αντίστοιχα. Η προσδοκία είναι υπό το μέτρο πιθανότητας Q^{r_R}.

Η αποδεικτική διαδικασία απαιτεί την χρήση ενός χαρτοφυλακίου απογραφής. Εάν το χαρτοφυλάκιο απογραφής είναι ίσο με το παράγωγο της συναλλαγής καθ' όλη την διάρκεια, τότε για να αποφευχθούν ευκαιρίες αρμπιτράζ θα πρέπει η τιμή του παραγώγου της συναλλαγής να είναι ίση με αυτή του χαρτοφυλακίου απογραφής. Η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου απογραφής αποτελείται από Δ_0 μετοχές και γ μετρητά:

$$\Pi_0 = \Delta_0 S_0 + \gamma.$$

Οι διάφοροι τραπεζικοί λογαριασμοί των μετρητών επενδύονται ή δανείζονται σε διαφορετικά ομόλογα, όπου κάθε ομόλογο ακολουθεί μια διαδικασία στο διωνυμικό μοντέλο, είναι:

$$dB_F(t,s) = (e^{r_F(t)(s-t)} - 1)B_F(t)\,,$$

$$dB_R(t,s) = (e^{(r_R(s)-r_D)(s-t)} - 1)B_R(t)\,,$$

$$dB_C(t,s) = (e^{r_C(s)(s-t)} - 1)B_C(t)\,,$$

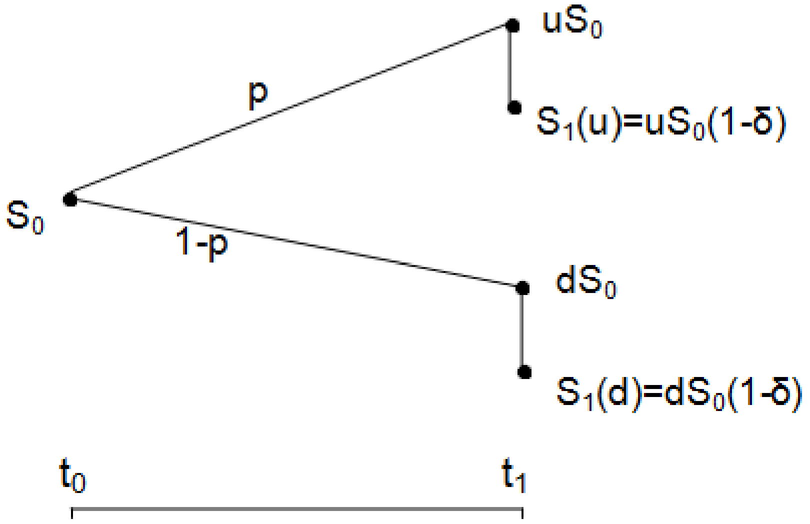
όπου $t \leq s$ και την χρονική στιγμή t όλα τα ομόλογα αξίζουν ένα, $B(t,t) = 1$. Σε αυτό το διακριτό μοντέλο, $t = t_0$. Η συνολική αξία των μετρητών των τραπεζικών λογαριασμών είναι το άθροισμα της συνολικής αξίας κάθε ομολόγου. Την χρονική στιγμή t_1, η μετοχή πληρώνει μέρισμα. Η αξία της μετοχής θα μειωθεί ακριβώς κατά το ποσό που πληρώνει μέρισμα την χρονική στιγμή t_1. Το ποσό του μερίσματος της μετοχής ισούται με $\delta = 1 - e^{-r_D(t_1 - t_0)}$. Η αξία του μερίσματος εξαρτάται από το πώς θα κινηθεί η μετοχή. Η αξία του μερίσματος την χρονική στιγμή t_1 είναι:

$\gamma_D = S_0 u\delta$ αν η μετοχή κινηθεί προς τα πάνω

ή

$\gamma_D = S_0 d\delta$ αν η μετοχή κινηθεί προς τα κάτω,

όπου u είναι ο ανοδικός παράγοντας και d είναι ο καθοδικός παράγοντας στο διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου.



Εικόνα 2.2:Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για την τιμολόγηση παραγώγου με διακριτό μέρισμα.

Την χρονική στιγμή t_1, το χαρτοφυλάκιο απογραφής έχει δύο πιθανά αποτελέσματα:

$$\Pi_1(u) = \Delta_0 u S_0(1-\delta) + \gamma_F e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - \gamma_R e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} + \gamma_C e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)},$$

$$\Pi_1(d) = \Delta_0 d S_0(1-\delta) + \gamma_F e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - \gamma_R e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} + \gamma_C e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}.$$

Τώρα οι παράμετροι Δ_0 και γ_P επιλέχτηκαν έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο απογραφής να είναι ίσο με την τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή t_1, επομένως παίρνουμε τις δύο ακόλουθες εξισώσεις:

$$V_1(u) = \Delta_0 u S_0(1-\delta) + \gamma_F e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - \gamma_R e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} + \gamma_C e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}, \quad (2)$$

$$V_1(d) = \Delta_0 d S_0(1-\delta) + \gamma_F e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - \gamma_R e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} + \gamma_C e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}, \quad (3)$$

Όπου $\gamma_F = \gamma_P - \gamma_C$. Αφαιρούμε την σχέση (3) από την σχέση (2) και λύνουμε ως προς Δ_0, το δέλτα της μετοχής είναι:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(u) - V_1(d)}{S_0(u-d)(1-\delta)}. \quad (4)$$

Για να λύσουμε ως προς γ_P, αντικαθιστούμε την αξία Δ_0 στην σχέση (2) και παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$V_1(u) = \frac{(V_1(u) - V_1(d))u}{u-d} + \gamma_F e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - \gamma_R e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} + \gamma_C e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}$$

.

Απλοποιώντας και αναδιατάσσοντας τους όρους και αντικαθιστώντας παίρνουμε την σχέση των αποδόσεων $\gamma_F = \gamma_P - \gamma_C$:

$$\gamma_p = e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} \left[\frac{V_1(d)u - V_1(u)d}{u-d} + \gamma_C \left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)} \right) + \gamma_R e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} \right]$$

(5)

Ο λογαριασμός της συμφωνίας επαναγοράς μπορεί να γραφτεί ως:

$$\gamma_R = S_0 \Delta_0 = \frac{V_1(u) - V_1(d)}{(u-d)(1-\delta)} \quad (6)$$

ως εκ τούτου, αντικαθιστώντας την σχέση (6) στην σχέση (5) και απλοποιώντας τις αποδόσεις:

$$\gamma_p = e^{-r_F(t_0)(t_1-t_0)} \left(\left[\frac{V_1(u)\left(e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} - d(1-\delta)\right)}{(u-d)(1-\delta)} \right] + \left[\frac{V_1(d)\left(u(1-\delta) - e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)}\right)}{(u-d)(1-\delta)} \right] \right.$$

$$\left. + \left[\gamma_C \left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)} \right) \right] \right).$$

Οι παράμετροι Δ_0 και γ_p επιλέχθηκαν έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο απογραφής να αναπαράγει τέλεια την συνάρτηση εσόδων του παραγώγου. Εάν μια ενδεχόμενη απαίτηση μπορεί να αναπαραχθεί τέλεια, τότε για να αποφευχθεί το αρμπιτράζ, θα πρέπει η τιμή του παραγώγου να ισούται με το κόστος του χαρτοφυλακίου απογραφής, ως εκ τούτου η τιμή του παραγώγου είναι:

$$V_0 = e^{-r_F(t_0)(t_1-t_0)}\left(\left[\frac{V_1(u)\left(e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} - d(1-\delta)\right)}{(u-d)(1-\delta)}\right] + \left[\frac{V_1(d)\left(u(1-\delta) - e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)}\right)}{(u-d)(1-\delta)}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\gamma_C\left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}\right)\right]\right). \quad (7)$$

Αν προσδιορίσουμε το q ως:

$$q = \frac{e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)} - d(1-\delta)}{(u-d)(1-\delta)} = \frac{e^{r_R(t_0)(t_1-t_0)} - d}{u-d}, \quad (8)$$

όπου $0 \le q \le 1$, τότε $d \le e^{r_R(t_0)(t_1-t_0)} \le u$. Άρα η σχέση (7) μπορεί να γραφτεί ως:

$$V_0 = e^{-r_F(t_0)(t_1-t_0)}\left[qV_1(u) + (1-q)V_1(d) + \gamma_C\left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}\right)\right]$$

Αν ερμηνεύσουμε το q, στη σχέση (8), σαν την πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής, τότε η προσδοκία για την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$E_0\left[S_1\right] = qS_0u + (1-q)S_0d = e^{(r_R(t_0)-r_D)(t_1-t_0)}S_0 \quad (9)$$

Ως εκ τούτου, κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q^{r_R}, η τιμή της μετοχής προεξοφλείται στο επιτόκιο της συμφωνίας επαναγοράς μειωμένο κατά την μερισματική απόδοση. Η αξία του παραγώγου της συναλλαγής την χρονική στιγμή t_0 μπορεί να γραφτεί ως:

$$V_0 = e^{-r_F(t_0)(t_1-t_0)}\left[E_0\left[V_1\right] + C_0\left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}\right)\right], \quad (10)$$

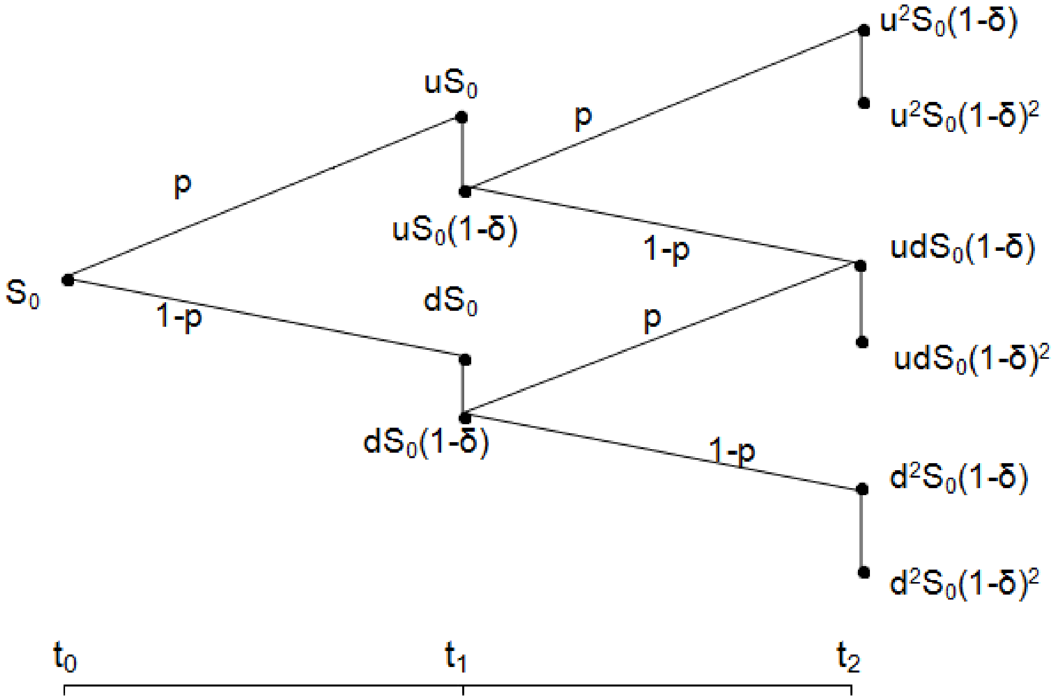
όπου η προσδοκία είναι υπό το μέτρο πιθανότητας Q^{r_R} και C_0 είναι το ποσό της εγγύησης που τοποθετείται στην συναλλαγή την χρονική στιγμή t_0. Ανασυντάσσοντας τους όρους στην παραπάνω σχέση παίρνουμε την σχέση για την τιμή του παραγώγου:

$$V_0 = e^{-r_C(t_0)(t_1-t_0)} E_0\left[V_1\right] - e^{-r_C(t_0)(t_1-t_0)} (V_0 - C_0)\left(e^{r_F(t_0)(t_1-t_0)} - e^{r_C(t_0)(t_1-t_0)}\right) \tag{11}$$

Εάν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο της εγγύησης προσεγγίζει το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, τότε η τιμή του παραγώγου της αγοράς είναι το άθροισμα της τιμής του με μηδενικό κίνδυνο και της αναπροσαρμογής της αξίας χρηματοδότησης. Η τιμή χωρίς κίνδυνο επιτυγχάνεται με την χρήση του μοντέλου Cox et al (1979) στην τιμολόγηση του παραγώγου της συναλλαγής.

2.3 Διωνυμικό μοντέλο n περιόδων

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε την επέκταση του διωνυμικού μοντέλου από μια περίοδο σε n περιόδους. Παρακάτω βλέπουμε ένα διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων για την τιμολόγηση περιουσιακού στοιχείου με διακριτά μερίσματα.



Εικόνα 2.3: Διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων για την τιμολόγηση παραγώγου με διακριτό μέρισμα.

Η ανάλυση θα στηριχτεί στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2. Η τιμή ενός εξασφαλισμένου παραγώγου της συναλλαγής χωρίς την ύπαρξη πιστωτικού κινδύνου μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων του διωνυμικού μοντέλου n-περιόδων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_0 = E_0\left[e^{-\sum_{j=0}^{n} r_F(t_J)(t_{j+1}-t_j)} V_n \right] + E_0\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i} r_F(t_J)(t_{j+1}-t_j)} C_i \left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)} \right) \right]$$

όπου η προσδοκία είναι κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q^{rR}. Εάν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο της εγγύησης πλησιάζει το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου τότε η τιμή του παραγώγου της συναλλαγής σε ένα διωνυμικό μοντέλο n περιόδων μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα της τιμής μηδενικού κινδύνου και της αναπροσαρμογής της αξίας χρηματοδότησης.

$$V_0 = E_0\left[e^{-\sum_{j=0}^{n} r_C(t_J)(t_{j+1}-t_j)} V_n \right] - E_0\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i} r_C(t_J)(t_{j+1}-t_j)} (V_i - C_i) \left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)} \right) \right]$$

όπου το V_i είναι η αξία του παραγώγου την χρονική στιγμή t_i, C_i είναι το ποσό της εγγύησης που τοποθετείται στην συναλλαγή την χρονική στιγμή t_i και $r_C(t_j)$ και $r_F(t_j)$ είναι η βραχυπρόθεσμη εγγύηση και το επιτόκιο επένδυσης την χρονική στιγμή t_j, αντίστοιχα.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί τη γνωστή ιδιότητα κυβοτισμού (Tower property) για την επέκταση του διωνυμικού μοντέλου από μια περίοδο σε n περιόδους. Το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου στην σχέση (10) ισχύει και για την i-οστή περίοδο, οπότε έχουμε:

$$V_i = e^{-r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} \left[E_i\left[V_{i+1}\right] + C_i \left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)} \right) \right], \quad (12)$$

όπου $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Η τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή t_{n-1} είναι:

$$V_{n-1} = e^{-r_F(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})}\left[E_{n-1}\left[V_n\right] + C_{n-1}\left(e^{r_F(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})} - e^{r_C(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})}\right)\right]$$

(13)

και την χρονική στιγμή t_{n-2} είναι:

$$V_{n-2} = e^{-r_F(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})}\left[E_{n-2}\left[V_{n-1}\right] + C_{n-2}\left(e^{r_F(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} - e^{r_C(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})}\right)\right]$$

(14)

Αντικαθιστώντας την σχέση (13) στην σχέση (14) παίρνουμε:

$$V_{n-2} = e^{-r_F(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} E_{n-2}\left[e^{-r_F(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})}\left[E_{n-1}\left[V_n\right]\right]\right]$$

$$+e^{-r_F(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} E_{n-2}\left[e^{-r_F(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})}\left[C_{n-1}\left(e^{r_F(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})} - e^{r_C(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})}\right)\right]\right]$$

$$+e^{-r_F(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} E_{n-2}\left[C_{n-2}\left(e^{r_F(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} - e^{r_C(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})}\right)\right]$$

(15)

Η ιδιότητα του κυβοτισμού (Tower property) δηλώνει ότι αν $0 \le n \le m$ όπου οι n και m είναι φυσικοί αριθμοί τότε:

$$E_n\left[E_m\left[V\right]\right] = E_n\left[V\right]$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του κυβοτισμού στους όρους προσδοκίας και επειδή οι τιμές είναι ντετερμινιστικές, η εξίσωση (15) γίνεται:

$$V_{n-2} = e^{-(r_F(t_{n-2}) + r_F(t_{n-1}))(t_n - t_{n-1})} E_{n-2}\left[V_n\right]$$

$$+e^{-(r_F(t_{n-2}) + r_F(t_{n-1}))(t_n - t_{n-1})} E_{n-2}\left[C_{n-1} e^{r_F(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})} - e^{r_C(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})}\right]$$

$$+e^{-r_F(t_{n-2})(t_{n-1}-t_{n-2})} C_{n-2}\left(e^{r_F(t_{n-2})(t_{n-1}-t_{n-2})} - e^{r_C(t_{n-2})(t_{n-1}-t_{n-2})}\right).$$

Εάν επαναλάβουμε αυτή την μεθοδολογία τότε η αρχική τιμή του παραγώγου της συναλλαγής γίνεται:

$$V_0 = E_0\left[e^{-\sum_{j=0}^{n} r_F(t_J)(t_{j+1}-t_j)} V_n\right] + E_0\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i} r_F(t_J)(t_{j+1}-t_j)} C_i\left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]$$

(16)

Εάν η εξίσωση (12) γραφεί ως:

$$V_i = e^{-r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)} E_i\left[V_{i+1}\right] - e^{-r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}(V_i - C_i)\left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\right)$$

(17)

και η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην εξίσωση (12), χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση (17) και το επιτόκιο της εγγύησης πλησιάζει το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, τότε η τιμή του εξασφαλισμένου παραγώγου της συναλλαγής μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα της τιμής με μηδενικό κίνδυνο και της αναπροσαρμογής της αξίας χρηματοδότησης,

$$V_0 = E_0\left[e^{-\sum_{j=0}^{n} r_C(t_J)(t_{j+1}-t_j)} V_n\right] - E_0\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i} r_C(t_J)(t_{j+1}-t_j)} (V_i - C_i)\left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]$$

(18)

Θα δείξουμε ότι αυτό είναι το διακριτό ανάλογο του μοντέλου που παρουσιάζεται στον Piterbarg (2010). Θα εξετάσουμε την εξίσωση (18) και θα δούμε ότι η τιμή του παραγώγου είναι ίση με την τιμή μηδενικού κινδύνου συν την αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης. Η αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης μπορεί να χωριστεί σε δύο όρους, την αναπροσαρμογή κέρδους χρηματοδότησης (Funding Benefit Adjustment) και την αναπροσαρμογή κόστους χρηματοδότησης (Funding Cost Adjustment):

- Funding Benefit Adjustment (FBA):

$$FVA = -E_0\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i} r_C(t_J)(t_{j+1}-t_j)} (V_i - C_i)^- \left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]$$

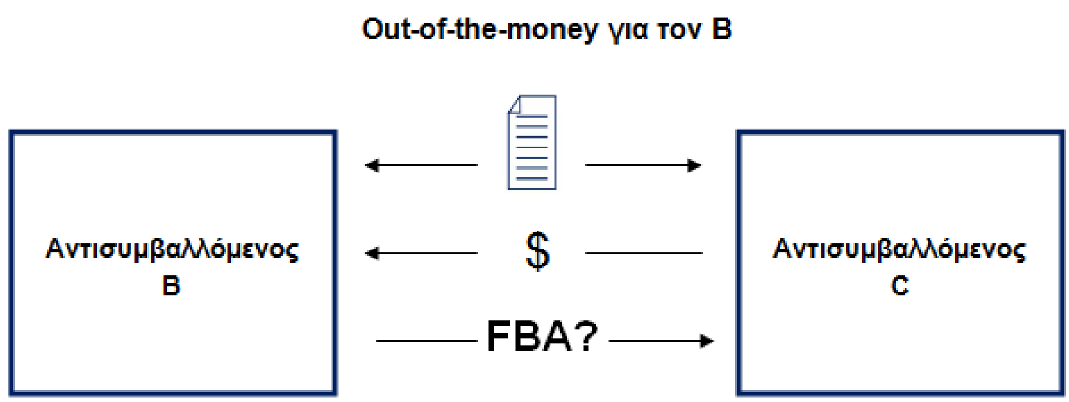
- Funding Cost Adjustment (FCA):

$$FVA = -E_0\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i} r_C(t_J)(t_{j+1}-t_j)} (V_i - C_i)^+ \left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]$$

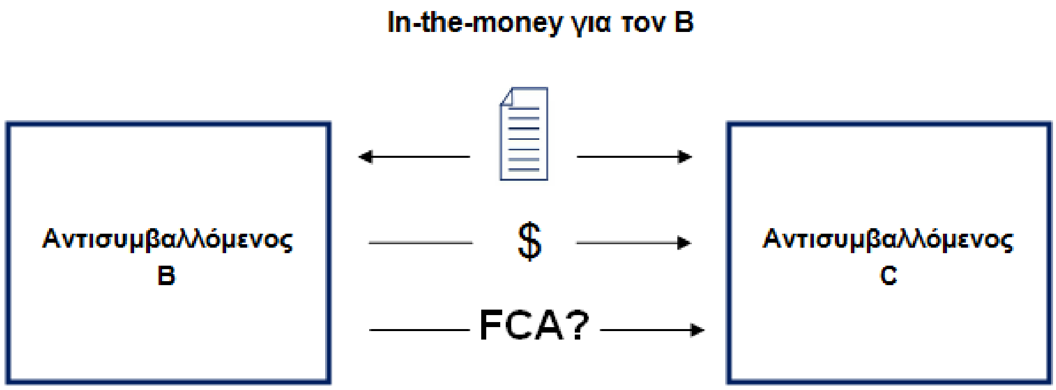
Θεωρούμε δύο αντισυμβαλλόμενους τους Β και C. Ας υποθέσουμε ότι οι δύο αντισυμβαλλόμενοι μπαίνουν σε μια συναλλαγή. Ο όρος της αναπροσαρμογής κέρδους χρηματοδότησης (κόστους) είναι το επιπλέον κέρδος (κόστος) που κερδίζεται (πληρώνεται) σε μια συναλλαγή από τα μετρητά που επενδύονται (δανείζονται) σε ένα υψηλότερο επιτόκιο από αυτό του μηδενικού κινδύνου. Ας υποθέσουμε επίσης ότι ο αντισυμβαλλόμενος Β είναι μια τράπεζα και μπαίνει σε μια συναλλαγή με δυσμενή καθημερινή αποτίμηση (mark-to-market). Ο αντισυμβαλλόμενος Β θα λάβει ένα ασφάλιστρο όταν θα μπει στην συναλλαγή. Αν ο Β δώσει πίσω το ασφάλιστρο αυτό λόγω ενός νομικού εγγράφου CSA τότε δεν υπάρχει κανένα όφελος χρηματοδότησης. Ωστόσο, εάν μπει στην συναλλαγή χωρίς ένα έγγραφο CSA, τότε ο Β θα τοποθετεί το ασφάλιστρο στην τράπεζα και θα κερδίζει ένα επιτόκιο καλύτερο από το κερδισμένο επιτόκιο της εγγύησης, εάν ο Β έπρεπε να τοποθετήσει το χρήματα αυτά ως εγγύηση στον C. Αυτή η προεξοφλημένη αξία της διαφοράς που κερδίζεται από τον Β επί της αξίας του παραγώγου είναι γνωστή ως αναπροσαρμογή κέρδους χρηματοδότησης (Funding Benefit Adjustment). Καθορίζεται από τον Β εάν θα δώσει ή όχι ένα μέρος της αναπροσαρμογής κέρδους χρηματοδότησηςστον αντισυμβαλλόμενο C (εικόνα 2.4).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι δύο αντισυμβαλλόμενοι μπαίνουν σε μια άλλη συναλλαγή. Αυτή την φορά ο αντισυμβαλλόμενος Β μπαίνει σε μια συναλλαγή που έχει μια ευνοϊκή καθημερινή αποτίμηση (mark-to-market) στην τράπεζα. Σε αυτή την περίπτωση, ο αντισυμβαλλόμενος B θα πληρώσει ένα ασφάλιστρο στον αντισυμβαλλόμενο C. Εάν απαιτείται μια πλήρης εγγύηση από το έγγραφο CSA τότε ο C θα πληρώσει πίσω το ασφάλιστρο σαν εγγύηση, χωρίς να πραγματοποιηθεί κανένα κόστος χρηματοδότησης. Σε αυτή την περίπτωση, ο αντισυμβαλλόμενος B θα έχει αποτελεσματική χρηματοδότηση του ασφαλίστρου στο επιτόκιο της εγγύησης. Ωστόσο , εάν δεν τοποθετηθεί καμία εγγύηση από τον C, τότε το ασφάλιστρο που καταβάλλεται από τον B θα πρέπει να χρηματοδοτηθεί μέσω της τράπεζας σε ένα επιτόκιο χρηματοδότησης. Αυτό το επιτόκιο χρηματοδότησης θα είναι μεγαλύτερο από το επιτόκιο που πληρώνεται για την εγγύηση. Αυτή η προεξοφλημένη αξία της διαφοράς που καταβάλλεται επί της αξίας του παραγώγου είναι γνωστής ως προσαρμογή κόστους χρηματοδότησης (Funding Cost Adjustment) (εικόνα 2.5).

Αυτά τα επιχειρήματα ισχύουν μόνο εάν οι ενεχυριάσεις είναι πιθανές. Ενεχυρίαση σημαίνει ότι οι τράπεζες και οι μεσίτες χρησιμοποιούν, για δικούς τους σκοπούς, τα περιουσιακά στοιχεία που έχουν αναρτηθεί ως εγγύηση από τους πελάτες τους. Οι Hull και White (2012) υποστηρίζουν ότι αυτοί η υπέρβαση κόστους πρέπει να απορροφηθεί από την τράπεζα και να μην περάσει στον πελάτη, όπως παρουσιάστηκε και στο παράδειγμα.



Εικόνα 2.4: Απεικονίζει μια συναλλαγή γραφικά μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων B και C, όταν ο αντισυμβαλλόμενος B είναι out-of-the-money.



Εικόνα 2.5: Απεικονίζει μια συναλλαγή γραφικά μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων B και C, όταν ο αντισυμβαλλόμενος B είναι in-the-money.

2.4 Εγγύηση και συντελεστής προεξόφλησης

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι το ποσό των εγγυήσεων που τοποθετείται στην συναλλαγή θα καθορίσει το επιτόκιο που θα χρησιμοποιηθεί για την προεξόφληση των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών. Θεωρούμαι δύο διαφορετικές τιμές για την εγγύηση της εξίσωσης (12). Όταν $C_i = V_i$ για i = 0, 1, 2, …, n – 1, που συμβαίνει στην περίπτωση που ο πωλητής πρέπει να τοποθετήσει εγγύηση επί της αξίας του παραγώγου σε κάθε κόμβο του δέντρου, τότε η εξίσωση (18) γίνεται:

$$V_0 = e^{-\sum_{j=0}^{n} r_C(t_j)(t_{j+1}-t_j)} E_0\left[V_n\right] \quad (19)$$

Από την άλλη, εάν δεν τοποθετήσει καθόλου εγγύηση δηλαδή $C_i = 0$ για i = 0, 1, 2, …, n – 1, τότε η εξίσωση (16) γίνεται:

$$V_0 = e^{-\sum_{j=0}^{n} r_F(t_j)(t_{j+1}-t_j)} E_0\left[V_n\right] \quad (20)$$

Ως αποτέλεσμα προκύπτει ότι εάν τοποθετηθεί πλήρης εγγύηση σε κάθε κόμβο, τότε για να εκτιμήσουμε το παράγωγο της αγοράς θα χρησιμοποιηθεί μια καμπύλη εγγυήσεων για την προεξόφληση των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών. Ωστόσο, εάν δεν υπάρχει εγγύηση καθ' όλη τη διάρκεια της συναλλαγής, τότε για να εκτιμήσουμε το παράγωγο της αγοράς θα χρησιμοποιηθεί μια καμπύλη επενδύσεων για την προεξόφληση των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών. Θέλουμε να τονίσουμε ότι το μοντέλο αυτό είναι συναρτήσει μόνο των επιτοκίων της αγοράς. Το θεωρητικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου δεν είναι παρών στην τιμολόγηση του τύπου.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το ποσό της εγγύησης που τοποθετείται στην συμφωνία είναι ένα κλασματικό ποσό της αξίας του παραγώγου.

2.4.1 Μερική εγγύηση

Σε μια συναλλαγή που οι όροι προσδιορίζονται από ένα έγγραφο CSA τότε οι δύο αντισυμβαλλόμενοι πρέπει να συμφωνήσουν ως προς το είδος της εγγύησης που θα δοθεί, αν θα είναι μετρητά ή ομόλογα, και πόσο θα είναι αυτή. Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να γενικευθεί αφήνοντας το ποσό της εγγύησης που θα τοποθετηθεί στην συμφωνία να είναι ένα κλασματικό ποσό της αξίας του παραγώγου. Αφήνοντας το ποσό της εγγύησης να είναι ένα κλασματικό ποσό της αξίας του παραγώγου η εξίσωση (12) αποδίδει:

$$V_i = e^{-r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\left[E_i\left[V_{i+1}\right]\right] + \theta V_i\left(e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)}\right) \quad (21)$$

Λύνοντας ως προς V_i, παίρνουμε:

$$V_i = \frac{E_i\left[V_{i+1}\right]}{e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} + \theta(e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)})} \quad (22)$$

Το επιτόκιο $r_\theta(t_i)$ προσδιορίζεται ως:

$$r_\theta(t_i) = r_F(t_i) + \frac{\log(1+\theta(e^{(r_C(t_i)-r_F(t_i))(t_{i+1}-t_i)}-1))}{(t_{i+1}-t_i)} \quad (23)$$

έτσι ώστε:

$$e^{-r_\theta(t_i)(t_{i+1}-t_i)} = \frac{1}{e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)} + \theta(e^{r_C(t_i)(t_{i+1}-t_i)} - e^{r_F(t_i)(t_{i+1}-t_i)})}$$

και μπορούμε να γράψουμε:

$$V_i = e^{-r_\theta(t_{i+1}-t_i)} E\left[V_{i+1}\right].$$

Επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα επιχειρήματα, παίρνουμε ότι:

$$V_0 = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} r_\theta(t_i)(t_{i+1}-t_i)} E_0\left[V_n\right] \quad (24)$$

Οι δύο ειδικές περιπτώσεις είναι όταν $C_i = V_i$ και $C_i = 0$, που αντιστοιχούν σε τιμές θ = 1 και θ = 0. Ο συντελεστής προεξόφλησης θα είναι $r_\theta(t_i) = r_F(t_i)$ εάν δεν δοθεί εγγύηση και $r_\theta(t_i) = r_C(t_i)$ εάν έχει δοθεί εγγύηση ως προς την αξία του παραγώγου σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή σε όλο το δέντρο.

Κεφάλαιο 3

3 Το μοντέλο συνεχούς χρόνου Black-Scholes-Merton με μερίσματα και εγγύηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε το μοντέλο συνεχούς χρόνου Black-Scholes-Merton ΜΔΕ το οποίο θα περιλαμβάνει μερίσματα και εγγύηση. Πριν από την ανάλυση του όμως ας επεξηγήσουμε κάποιες μαθηματικές μεθόδους τις οποίες θα χρησιμοποιούμε στην απόδειξη του.

Στοχαστικές διαδικασίες

Για την ανάπτυξη μοντέλων τιμολόγησης χρηματοοικονομικών παραγώγων οι στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν ένα ερευνητικό πεδίο ιδιαίτερης σημασίας δεδομένου πως η μοντελοποίηση των τιμών των υποκείμενων τίτλων πραγματοποιείται σε περιβάλλον στοχαστικότητας.

Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t){:}t\epsilon T\}$, όπου t είναι μια παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T. Το σύνολο T των τιμών της παραμέτρου είναι το σύνολο δεικτών (index set) της στοχαστικής διαδικασίας. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να ταξινομηθούν σε διακριτού χρόνου ή συνεχούς χρόνου. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη όπου η τιμή της μεταβλητής μπορεί να αλλάξει μόνο σε ορισμένα σταθερά σημεία στο χρόνο, ενώ μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία είναι εκείνη όπου μπορούν να πραγματοποιηθούν αλλαγές ανά πάσα στιγμή. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν σε συνεχών μεταβλητών ή διακριτών μεταβλητών. Σε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς μεταβλητής, η υποκείμενη μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εντός ενός ορισμένου εύρους, ενώ σε μια διαδικασία διακριτής μεταβλητής, μόνο σε ορισμένες διακριτές τιμές. Οι στοχαστικές διαδικασίες κατατάσσονται βάσει του συνόλου των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X(t) σε:

- Διακριτού χρόνου και διακριτής μεταβλητής
- Διακριτού χρόνου και συνεχής μεταβλητής
- Συνεχούς χρόνου και διακριτής μεταβλητής και
- Συνεχούς χρόνου και συνεχούς μεταβλητής

Έστω $\{S(t), t \geq 0\}$ μία στοχαστική διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου. Η S(t) είναι μία τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή στο χρόνο t και η S(t,ω) είναι μία απεικόνιση από ένα χώρο πιθανότητας (Ω,A,P) στο R που ορίζεται από την σχέση:

S(t,ω)={η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο t όταν πραγματοποιηθεί το στοιχειώδες ενδεχόμενο ω $\in \Omega$}

Σε αυτή την περίπτωση η $\{S(t), t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία τιμών.

Οι τιμές περιουσιακών στοιχείων στην πραγματικότητα παίρνουν μόνο διακριτές τιμές και ο χρόνος διαπραγμάτευσης τους δεν είναι συνεχής. Παρ' όλα αυτά για την μελέτη εξέλιξης των τιμών τους γίνεται χρήση των μοντέλων που αν και δεν υπακούουν με ακρίβεια στην πραγματικότητα, είναι εύχρηστα και στην πράξη οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Διαδικασία Wiener (Κίνηση Brown)

Η διαδικασία Wiener είναι ένας συγκεκριμένος τύπος της διαδικασίας Markov με μέση μεταβολή μηδέν και διακύμανση ένα. Χρησιμοποιείται στην φυσική για να περιγράψει την κίνηση ενός σωματιδίου που υπόκειται σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών μοριακών σοκ και μερικές φορές αναφέρεται ως κίνηση Brown.

$$E(S_{t+1}-S_t|S_t)=0 \text{ και } var(S_{t+1}-S_t|S_t)=1$$

Αν μια μεταβλητή z ακολουθεί κίνηση Wiener έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

1. Η μεταβολή Δz σε μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι:

$\Delta z = \in \sqrt{\Delta t}$

Όπου το ∈ έχει μια τυπική κατανομή κατανομή φ(0,1).

2. Επιπλέον οι αξίες του Δz σε δύο μη αλληλοεπικαλυπτόμενα μικρά χρονικά διαστήματα είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Κατά την διάρκεια μίας μεγάλης περιόδου T η μεταβολή της z είναι ίση με $z(T)-z(0)$. Αυτή η μεταβολή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του z σε N μικρά χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt, όπου $N = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}$

Επομένως $z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \in_i \sqrt{\Delta t}$

Και μπορούμε εύκολα να βρούμε

mean of [z(T)-z(0)]=0

variance of [z(T)-z(0)]=NΔt=Tα

standard deviation of [z(T)-z(0)]=$\sqrt{T}$.

Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, μιας μεταβλητής x, με ρυθμό τάσης (drift rate) ίσο με μ και ρυθμό διακύμανσης (variance rate) ίσο με σ^2 ορίζεται ως:

dx=μdt+σdW

όπου μ και σ σταθερές.

Ενώ στην βασική διαδικασία Wiener ο ρυθμός τάσης είναι μηδέν και ο ρυθμός διακύμανσης είναι ένα, στην γενικευμένη διαδικασία Wiener οι μεταβλητές μ και σ μπορούν να τεθούν ίσες με οποιεσδήποτε σταθερές.

Άρα μπορούμε να πάρουμε για μια γενικευμένη διαδικασία Wiener

mean of [x(T)-x(0)]=μΔt

variance of [x(T)-x(0)]=σ^2Δt

standard deviation of [x(T)-x(0)]=σ $\sqrt{\Delta T}$.

<u>Διαδικασία Ito- Το Λήμμα του Ito</u>

Ένας περαιτέρω τύπος στοχαστικής διαδικασίας που μπορεί να οριστεί γνωστός ως διαδικασία Ito είναι μια γενικευμένη διαδικασία Wiener στην οποία οι παράμετροι α και b είναι συναρτήσεις της τιμής της μεταβλητής x και του χρόνου t. Επομένως ορίζεται ως:

dx=α(x,t)+b(x,t)dz

Ο ρυθμός τάσης και ο ρυθμός διακύμανσης στην διαδικασία Ito αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Σε μικρό διακριτό χρόνο μεταξύ t και t+Δt, η μεταβλητή αλλάζει από x σε x+Δx, όπου

Δx$\approx$α(x,t)Δt+b(x,t)∈ $\sqrt{\Delta t}$

Η εξίσωση περιλαμβάνει μια μικρή προσέγγιση. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός τάσης και ο ρυθμός διακύμανσης του x παραμένουν σταθεροί, ενώ στην πραγματικότητα αλλάζουν συνεχώς.

Συνεχίζοντας με το λήμμα του Ito. Σύμφωνα με το λήμμα του Ito εάν η τιμή μιας μεταβλητής x ακολουθεί μια διαδικασία Ito και είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη τότε η συνάρτηση G(x,t) ακολουθεί την συνάρτηση

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\alpha + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial^2 x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdz$$

Πρόκειται για μία διαδικασία Ito με ρυθμό τάσης

$$\frac{\partial G}{\partial x}\alpha + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial^2 x^2} b^2$$

και ρυθμό διακύμανσης $\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$

Η σπουδαιότητα του λήμματος του Ito έγκειται στο γεγονός πως οι τιμές των δικαιωμάτων είναι συναρτήσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου.

Στην συνέχεια του κεφαλαίου όπως και στην περίπτωση του διακριτού μοντέλου των CRR θα χρησιμοποιήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο απογραφής Π_t, το οποίο θα αποτελείται από Δ ποσό μετοχών και γ ποσό μετρητών. Τα επιτόκια r_C, r_R, r_F και η μερισματική απόδοση r_D παραμένουν τα ίδια. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η διακριτοποίηση του μοντέλου του Piterbarg's (2010) αποδίδει το μοντέλο των Cox et at (1979) με εγγύηση. Αυτό θα επιτευχθεί με την παρουσίαση της ΜΔΕ ως μια μορφή προσδοκίας της τιμής του παραγώγου τόσο σε διακριτό χρόνο όσο και στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα δύο μοντέλα εύκολα. Στην σύγκριση θα δούμε εάν οι τιμές των δύο μοντέλων καταλήγουν στα ίδια αποτελέσματα.

3.1 Η μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton

Θα θεωρήσουμε την μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton του Piterbarg's η οποία περιλαμβάνει εγγύηση σε μια μετοχή που πληρώνει μέρισμα. Η τιμή της μετοχής S_t θεωρείται ότι ακολουθεί:

$$dS_t = \left(r_R - r_D\right) S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (25)$$

όπου S_0 είναι μια σταθερά, σ είναι η μεταβλητότητα της μετοχής, W_t είναι η κανονική κίνηση Brown και η μετοχή πληρώνει μια συνεχής μερισματική απόδοση.

Ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο απογραφής κατασκευάζεται για το παράγωγο. Το χαρτοφυλάκιο απογραφής αποτελείται από Δ_0 μετοχές και από γ μετρητά,

$$\Pi_t = \Delta S_t + \gamma.$$

Όπως και στο διακριτό μοντέλο, οι διάφοροι τραπεζικοί λογαριασμοί επενδύονται ή δανείζονται σε διαφορετικά ομόλογα, όπου κάθε ομόλογο ακολουθεί μια διαδικασία:

$$dB_F\left(t,s\right) = r_F(s)B_F ds \quad (26)$$

$$dB_R\left(t,s\right) = (r_R(s) - r_D)B_R ds \quad (27)$$

$$dB_C\left(t,s\right) = r_C(s)B_C ds \quad (28)$$

όπου t ≤ s και την χρονική στιγμή t η αξία κάθε ομολόγου είναι ένα. Προκειμένου να υπολογιστεί η αλλαγή στην τιμή του παραγώγου χρησιμοποιείται το λήμμα του Ito. Το λήμμα του Ito δηλώνεται σε όρους από την ανέλιξη της μετοχής στην εξίσωση (25).

Ας υποθέσουμε ότι S_t, $t \geq 0$ είναι μια διαδικασία του Ito που προσδιορίζεται από την εξίσωση (25) και $V(t, S_t) \in C^{1,2}([0, T] \times R^d)$. Τότε η διαδικασία $V(t, S_t)$ ακολουθεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r_R - r_D)S\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial s}dWt,$$

και είναι επίσης μια διαδικασία του Ito, υπό την προϋπόθεση ότι:

$$\int_0^T \left| \frac{\partial V}{\partial t} + (r_R - r_D)S\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right| ds < \infty$$

και

$$\int_0^T \left| (\sigma S \frac{\partial V}{\partial S})^2 \right| ds < \infty$$

Η μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton του Piterbarg's με εγγύηση και μερίσματα δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.. Η αξία ενός εξασφαλισμένου παραγώγου της συναλλαγής με απουσία πιστωτικού κινδύνου σε καταβολή μερίσματος μετοχών ικανοποιεί την ακόλουθη ΜΔΕ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+(r_R-r_D)S\dfrac{\partial V}{\partial s}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}=Vr_F-C\left(r_F-r_C\right) \\ V_T \ \text{είναι η τελική συνάρτηση εσόδων του παραγώγου} \end{cases}$$

Αν $r = r_C = r_F = r_R$, όπου r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, δηλαδή η εξασφάλιση δανεισμού και μη εξασφάλιση δανεισμού πραγματοποιείται με τον ίδιο ρυθμό και με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, τότε το θεώρημα 3.1 είναι το αρχικό μοντέλο Black-Scholes-Merton ΜΔΕ για μια μετοχή που καταβάλλει μέρισμα.

3.2 Η διακριτοποίηση του μοντέλου του Piterbarg's αποδίδει το μοντέλο των Cox, Ross and Rubinstein με εγγύηση

Στην ενότητα αυτή, ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η διακριτοποίηση του μοντέλου του Piterbarg's αποδίδει το μοντέλο CRR με εγγύηση, όπως προέκυψε στο κεφάλαιο 2. Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του θεωρήματος Feynman-Kac στην μερική διαφορική εξίσωση του Piterbarg's, το οποίο αποδίδει την ΜΔΕ με μια μορφή προσδοκίας. Αυτό δείχνει ότι η τιμή ενός παραγώγου, τόσο σε διακριτό χρόνο όσο και στην περίπτωση συνεχούς χρόνου μπορεί να γραφεί ως μια προσδοκία καθιστώντας έτσι εύκολη την σύγκριση των δύο μοντέλων.

Το θεώρημα Feynman-Kac μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Υποθέτουμε ότι:

1. $V(t, S_t)$: $[0,T] \times R^d \rightarrow R^d$ είναι συνεχής, είναι της κλάσης $C^{1,2}([0,T] \times R^d)$ και ικανοποιεί το πρόβλημα Cauchy:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + kV = (r_R - r_D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + g; \text{ in } [0,T] \times R^d,$$

$$V(T, S_T) = f(S_T); \; S_t \in R^d,$$

   όπου η συνάρτηση $f(S_T)$ είναι η τελική συνάρτηση εσόδων του παραγώγου της συναλλαγής και S_t είναι η ανέλιξη της μετοχής και
2. $V(t, S_t)$ επίσης ικανοποιεί την προϋπόθεση πολυωνυμικής ανάπτυξης:

$$\max_{0 \le t \le T} |V(t, S_t)| \le M(1 + \|S_t\|^{2\mu}); \; S_t \in R^d, \text{ για } M>0, \; \mu \ge 1.$$

Τότε, $V(t, S_t)$ ικανοποιεί την στοχαστική αναπαράσταση:

$$V(t, S_t) = \mathrm{E}_t\left[f(S_T)e^{-\int_t^T k(uS_u)du} + \int_t^T g(r, S_r)e^{-\int_t^u k(u,S_u)du} dr \,|F_t \right]$$

στο $[0,T] \times R^d$, όπου το F_t είναι η διήθηση που παράγεται από την κίνηση Brown στην ανέλιξη της τιμής της μετοχής και η προσδοκία είναι υπό το μέτρο πιθανότητας της Q^{rR}. Μια τέτοια λύση είναι μοναδική.

Στην συνέχεια θα γράψουμε την ΜΔΕ του θεωρήματος 3.1 σε μορφή προσδοκίας:

Η τιμή γενικά ενός εξασφαλισμένου παραγώγου της αγοράς με απουσία πιστωτικού κινδύνου του αντισυμβαλλόμενου είναι:

$$V_0 = E_0\left[V_T e^{-\int_0^T r_F(u)du} + \int_0^T e^{-\int_0^s r_F(u)du} C_s(r_F(s) - r_C(s))ds \right],$$

όπου η προσδοκία είναι υπό το μέτρο πιθανότητας Q^{rR}. Εάν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο της εγγύησης πλησιάζει αρκετά το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου τότε η τιμή του παραγώγου της συναλλαγής προκύπτει ως το άθροισμα της τιμής του παραγώγου με μηδενικό κίνδυνο και την αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης:

$$V_0 = E_0\left[V_T e^{-\int_0^T r_C(u)du} - \int_0^T e^{-\int_0^s r_C(u)du} (V_s - C_s)(r_F(s) - r_C(s))ds \right].$$

Για την απόδειξη το θεώρημα των Feynman-Kac εφαρμόζεται τώρα στο θεώρημα 3.1 αναδιατάσσοντας τους όρους στην ΜΔΕ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + Vr_F = (r_R - r_D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + C(r_F - r_C), \quad (29)$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος των Feynman-Kac αποδίδει:

$$V_0 = E_0\left[V_T e^{-\int_0^T r_F(u)du} + \int_0^T e^{-\int_0^s r_F(u)du} C_s(r_F(s) - r_C(s))ds \right]. \quad (30)$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε την εξίσωση (29) ως εξής:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + Vr_C = (r_R - r_D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (V - C)(r_F - r_C),$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Feynman-Kac, η τιμή του παραγώγου γράφεται ως εξής:

$$V_0 = E_0\left[V_T e^{-\int_0^T r_C(u)du} - \int_0^T e^{-\int_0^s r_C(u)du} (V_s - C_s)(r_F(s) - r_C(s))ds \right]. \quad (31)$$

Εάν η εξισώσεις (30) και (31) συγκριθούν με τις εξισώσεις (16) και (18) και οι τιμές των r_F και r_C υπολογίζονται στα άκρα των διαστημάτων που μελετάμε, τότε το διακριτοποιημένο μοντέλο του Piterbarg's συμπίπτει με το μοντέλο των CRR με εγγύηση (που αποδείχθηκε στο κεφάλαιο 2).

Κεφάλαιο 4

4 Εμπειρικές εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε εμπειρικές εφαρμογές μέσω των μεθόδων του διωνυμικού πλέγματος και των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών και θα κάνουμε μια σύγκριση των αποτελεσμάτων τους. Στην συνέχεια θα δούμε τον κίνδυνο που προκαλείται από την αναπροσαρμογή της εγγύησης σε διακριτό χρόνο. Για τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις θα χρησιμοποιήσουμε την προγραμματιστική γλώσσα Matlab. Τέλος, θα δούμε την εκτίμηση παραμέτρων και την προβλεπτική ικανότητα.

4.1 Προσέγγιση με διωνυμικό πλέγμα

Με την βοήθεια του διωνυμικού πλέγματος θα τιμολογήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με και χωρίς εγγύηση. Κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος η τιμή της μετοχής μπορεί να κινηθεί είτε ανοδικά είτε καθοδικά. Συμβολίζουμε με u τον ανοδικό παράγοντα και με d τον καθοδικό παράγοντα. Κατά την κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου, οι παράμετροι u και d επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτύχουμε την μεταβλητότητα και τη τάση της ανέλιξης της τιμής της μετοχής. Οι παράμετροι u και d εκτιμώνται χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών (βλέπε Higham) για να ταιριάζουν στην μεταβλητότητα και την τάση της τιμής της μετοχής. Ο ανοδικός και ο καθοδικός παράγοντας για μια μετοχή που πληρώνει μέρισμα στο διωνυμικό δέντρο είναι οι εξής:

$$u = e^{(r_R - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1}-t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1}-t_i)}}(1-\delta)$$

και

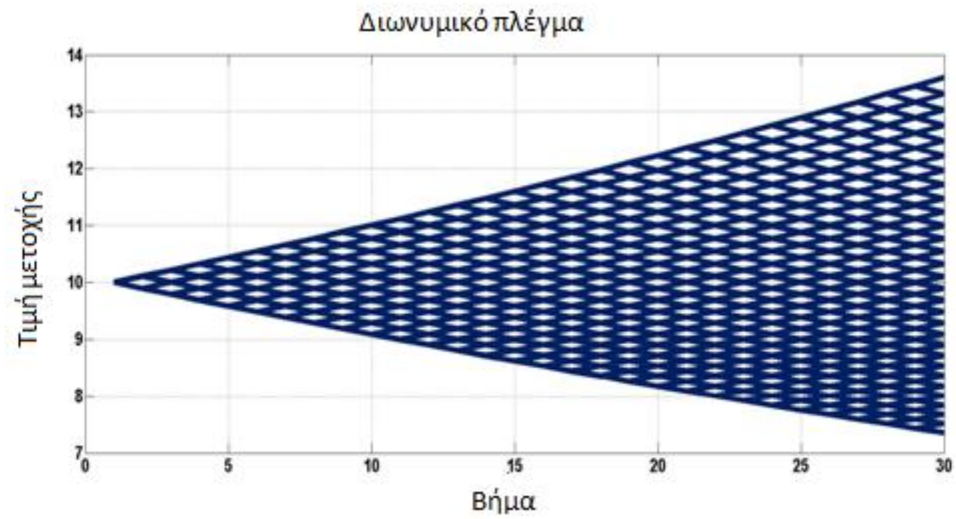
$$d = e^{(r_R - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1}-t_i) - \sigma\sqrt{(t_{i+1}-t_i)}}(1-\delta).$$

Ανοδική κίνηση συμβαίνει με πιθανότητα p και καθοδική κίνηση με πιθανότητα 1-p:

$$p = \frac{e^{(r_R - r_D)(t_{i+1}-t_i)} - d}{(u-d)}.$$

Η χρονική διάφορά μεταξύ κάθε κόμβου του δέντρου, t_{i+1}-t_i, είναι σταθερή, γι' αυτό δεν καθορίζουμε εμείς τους δείκτες u, d και p.

Οι παράμετροι για την εξέλιξη της τιμής της μετοχής είναι: S_0 = 10, t_{i+1}-t_i= 0.0001 για κάθε i, r_R= 0.05, r_D= 0.01 και σ = 0.3.



Εικόνα 4.1: Η τιμή της μετοχής διωνυμικού πλέγματος με παραμέτρους: u = 1.0395, d=0.9620, P(up)=0.5 και n = 30.

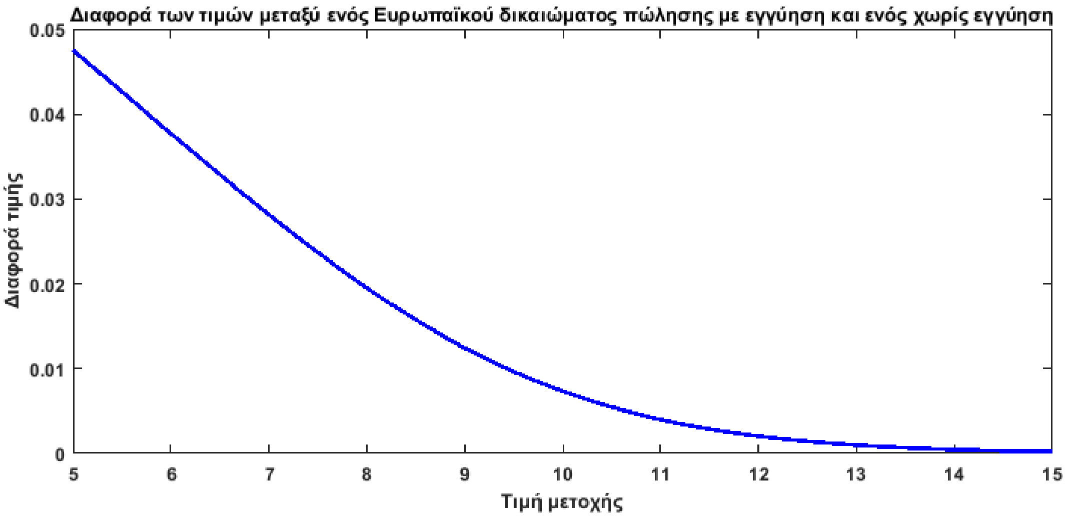
Στην συνέχεια τιμολογούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με και χωρίς εγγύηση στην συναλλαγή με τις ακόλουθες παραμέτρους: $S_0 \in [5,15]$, K = 10, dt = 0.0001(5000 χρονικά βήματα), T = 0.5, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F=

0.07, r_D= 0.02, σ = 0.3 . Η διαφορά στην τιμή των δύο δικαιωμάτων πώλησης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα για διαφορετικές αρχικές τιμές της μετοχής. Η διαφορά είναι θετική, ωστόσο η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με εγγύηση είναι υψηλότερη από την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος χωρίς εγγύηση. Η διαφορά αντιπροσωπεύει την αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης ενός δικαιώματος πώλησης χωρίς εγγύηση.

Αφού:

$$(V_s - C_s) \geq 0 \text{ για όλα τα s,}$$

για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, η αναπροσαρμογή του κέρδους χρηματοδότησης μειώνεται στο μηδέν με αποτέλεσμα η αναπροσαρμογή της αξίας χρηματοδότησης να είναι ίση με την αναπροσαρμογή του κόστους χρηματοδότησης. Το σχήμα του όρου της αναπροσαρμογής του κόστους χρηματοδότησης είναι παρόμοιο με την αρχική τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα η αναπροσαρμογή του κόστους χρηματοδότησης θα αυξάνεται όταν η αξία της τιμής του υποκείμενου δικαιώματος πώλησης αυξάνεται. Αυτό επιτυγχάνεται όταν η αρχική τιμή της μετοχής μειώνεται.



Εικόνα 4.2: Διαφορά μεταξύ της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με εγγύηση και ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης χωρίς εγγύηση για διάφορες αρχικές τιμές της μετοχής με παραμέτρους: $S_0 \in$ [5,15], K = 10, dt= 0.0001(5000 χρονικά βήματα),T = 0.5, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, σ = 0.3.

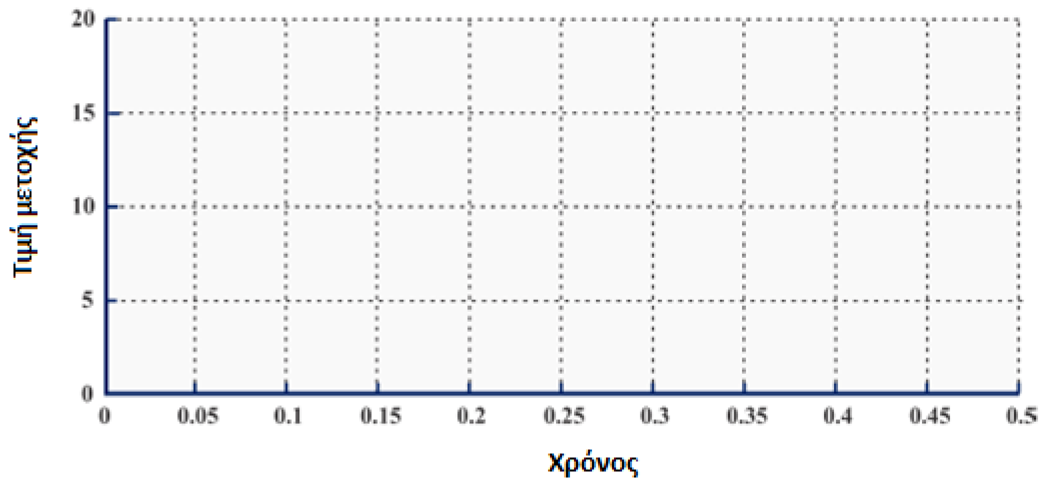
4.2 Προσέγγιση με διαφορικές εξισώσεις

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στην επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) βασίζεται στην απλή ιδέα της προσέγγισης κάθε μερικής παραγώγου από ένα πηλίκο διαφοράς, μετατρέποντας τη λειτουργική εξίσωση σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων. Τα πεπερασμένα συστήματα διαφορών χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των λύσεων στις διαφορικές εξισώσεις, η οποία είναι μια παραβολική μερική διαφορική εξίσωση σε αυτή την περίπτωση. Χρησιμοποιούμε το σχήμα του Euler για να προσεγγίσουμε την τιμή ενός παραγώγου της αγοράς που να ικανοποιεί την ΜΔΕ του Piterbarg. Η εφαρμογή για το σχήμα του Euler βασίζεται στην εργασία του Richardson.

Η διακριτοποίηση του πλέγματος ως προς το χώρο δίνεται από {0, ds, 2ds,…., Mds = S_{max}} και η διακριτοποίηση ως προς το χρόνο δίνεται από {0, dt, 2dt,…, Ndt = T}. Η αξία του παραγώγου σε κάθε σημείο του πλέγματος δίνεται από:

$$V_j^i = V(ids, jds),$$

Όπου i = 1, 2 … M και j = 1, 2 … N. Παρακάτω βλέπουμε μια απεικόνιση του πλέγματος του χώρου και του χρόνου που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της ΜΔΕ.



Εικόνα 4.3: Διακριτό πλέγμα του χρόνου και του χώρου.

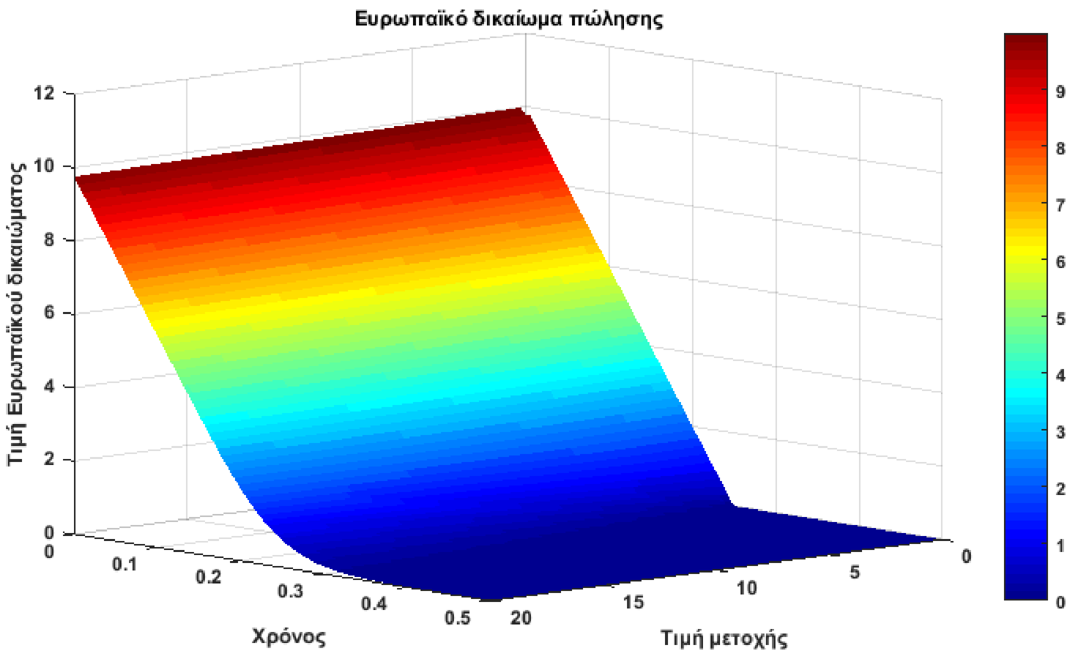
Λύνουμε προς τα πίσω ως προς τον χρόνο από την λήξη του παραγώγου, επομένως, προσεγγίζουμε την παράγωγο ως προς το χρόνο με μια οπισθοδρομική διαφορά. Κεντρική διαφορά χρησιμοποιούμε ως προς το χώρο S, διότι αποδίδει καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με την προδρομική ή την οπισθοδρομική διαφορά, και παράγωγο δεύτερης τάξης χρησιμοποιείται για την προσέγγιση ως προς το δεύτερο χώρο του παραγώγου.

Οι συνοριακές συνθήκες για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης είναι οι ακόλουθες:

- $V_N^i = \max(K - ids, 0)$
- $V_j^0 = Ke^{-r_\theta(\mathrm{N}-j)dt}$
- $V_j^{Mds} = 0$

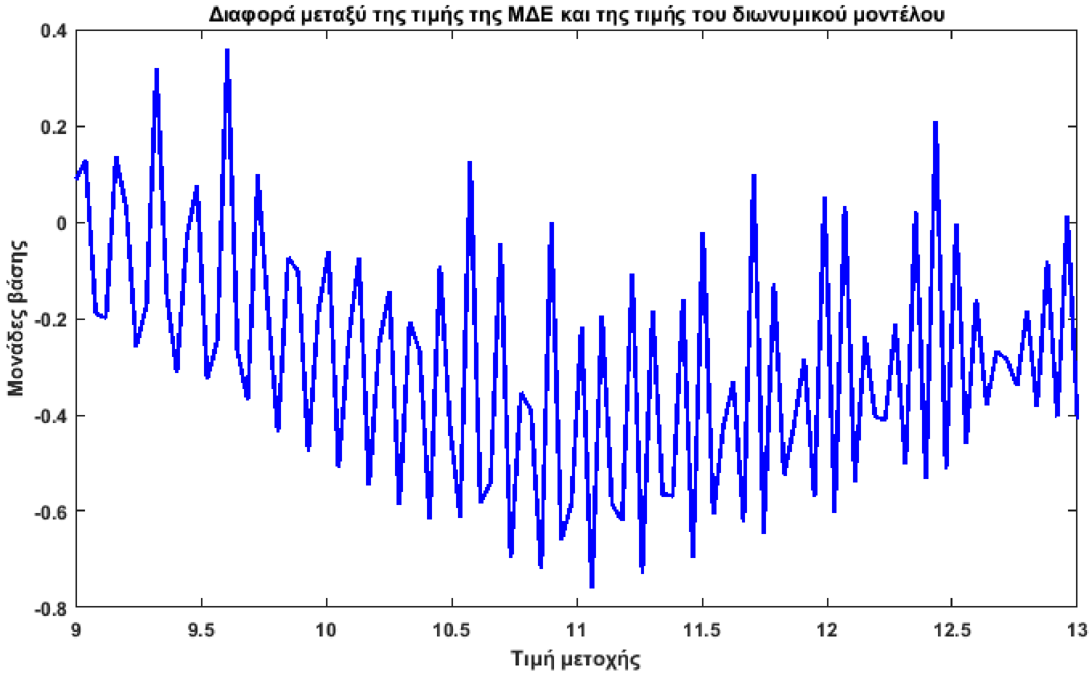
όπου το r_θ προσδιορίζεται από τη σχέση (23).

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα εξής: $S_0 \in [0,20]$, K = 10, dt = 0.0001(5000 χρονικά βήματα), ds = 0.02(1000 χωρικά βήματα), T = 0.5, $t \in [0,T]$, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, σ = 0.3 και θ = 1.



Εικόνα 4.4: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με εγγύηση που χρησιμοποιεί την προσέγγιση ΜΔΕ και παραμέτρους: $S_0 \in [0,20]$, K = 10, dt = 0.0001(5000 χρονικά βήματα), ds = 0.02(1000 χωρικά βήματα), T = 0.5, $t \in [0,T]$, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, σ = 0.3 και θ = 1.

Η διαφορά μεταξύ της μερικής διαφορικής εξίσωσης και του διωνυμικού μοντέλου απεικονίζεται γραφικά στην παρακάτω εικόνα με διαφορετικές αρχικές τιμές της μετοχής. Παρατηρούμε ότι με τα δεδομένα που δόθηκαν στις παραμέτρους οι δύο προσεγγίσεις συγκλίνουν η μια από την άλλη στις 0.4 μονάδες βάσης. Παρόμοια σύγκλιση έχουν οι δύο προσεγγίσεις και στην περίπτωση που δεν τοποθετείται εγγύηση. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την τιμολόγηση του ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης και για τα δύο μοντέλα είναι τα εξής: $S_0 \in [9,13]$, K = 11, dt = 0.0001(5000 χρονικά βήματα), T = 0.5, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, σ = 0.3 και θ = 1.



Εικόνα 4.5: Η διαφορά μεταξύ της τιμής της ΜΔΕ και της τιμής του διωνυμικού πλέγματος για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με εγγύηση με παραμέτρους: $S_0 \in [9,13]$, K = 11, dt = 0.0001(5000 χρονικά βήματα), T = 0.5, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, σ = 0.3 και θ = 1.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις τιμές ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης για τις προσεγγίσεις της ΜΔΕ και με το διωνυμικό μοντέλο όταν τοποθετείται εγγύηση και όταν δεν τοποθετείται εγγύηση στην συναλλαγή. Βλέπουμε ότι όταν στο Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης τοποθετείται εγγύηση κατά την συναλλαγή τότε η τιμή είναι μεγαλύτερη απ' ότι εάν στην συναλλαγή δεν τοποθετηθεί εγγύηση. Παρατηρούμε επίσης ότι οι τιμές των δύο μοντέλων είτε με εγγύηση είτε χωρίς είναι περίπου ίσες.

Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης	Τιμή με ΜΔΕ	Τιμή με διωνυμικό μοντέλο
Με εγγύηση	0.8151	0.8152
Χωρίς εγγύηση	0.8070	0.8071
FCA	-0.0081	-0.0081

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικός πίνακας με τις τιμές ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με εγγύηση και ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης χωρίς εγγύηση με την ΜΔΕ προσέγγιση και του διωνυμικού πλέγματος προσέγγιση με παραμέτρους: S_0= 11, K = 11, T = 0.5, r_C= 0.04, r_R= 0.05, r_F= 0.06, r_D= 0.01, σ = 0.3.

4.3 Κίνδυνος αθέτησης που προκαλείται από την αναπροσαρμογή της εγγύησης σε διακριτό χρόνο

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τον κίνδυνο αθέτησης από την αναπροσαρμογή της εγγύησης σε διακριτό χρόνο σε μια συναλλαγή παραγώγων. Εάν επρόκειτο η αγορά να ‘‘μετακινηθεί’’ ουσιαστικά μεταξύ δύο ημερομηνιών αναπροσαρμογής (margining dates), μια σημαντική απώλεια θα μπορούσε να υπάρξει αν ο ένας αντισυμβαλλόμενος αθετούσε τη συμφωνία της συναλλαγής.

Θα δείξουμε ότι ακόμη και εάν στο παράγωγο της συναλλαγής έχει τοποθετηθεί πλήρως εγγύηση και αναπροσαρμόζεται καθημερινά (margined daily), υφίσταται ακόμη σημαντικός πιστωτικός κίνδυνος αντισυμβαλλόμενου. Θα προσομοιώσουμε ένα συγκεκριμένο μονοπάτι για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης. Το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης που θα χρησιμοποιήσουμε στο παράδειγμά μας είναι ένα μονοετές δικαίωμα πώλησης και τα δεδομένα είναι τα εξής: $S_0 = 12$, $K = 12$, $r_C = 0.05$, $r_R = 0.06$, $r_F = 0.07$, $r_D = 0.2$ και $\sigma = 0.3$. Θεωρούμε τρεις διαφορετικές περιόδους αναπροσαρμογής, πιο συγκεκριμένα μιας ημέρας, μίας εβδομάδας και ενός μήνα. Υποθέτουμε ότι ο πωλητής του δικαιώματος προαίρεσης τοποθετεί την αποτίμηση (mark-to-market) του δικαιώματος ως εγγύηση σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή. Ο πωλητής κερδίζει το επιτόκιο της εγγύησης που τοποθετείται στην αναπροσαρμογή. Την αρχική χρονική στιγμή t_0 ο πωλητής λαμβάνει ένα ασφάλιστρο από το δικαίωμα πώλησης και ταυτόχρονα, την ίδια χρονική στιγμή δίνει το ασφάλιστρο ως εγγύηση, $C_0 = V_0$. Στη συνέχεια, μετά από t_1-t_0 χρόνο η αξία της θέσης του αγοραστή στη συναλλαγή είναι:

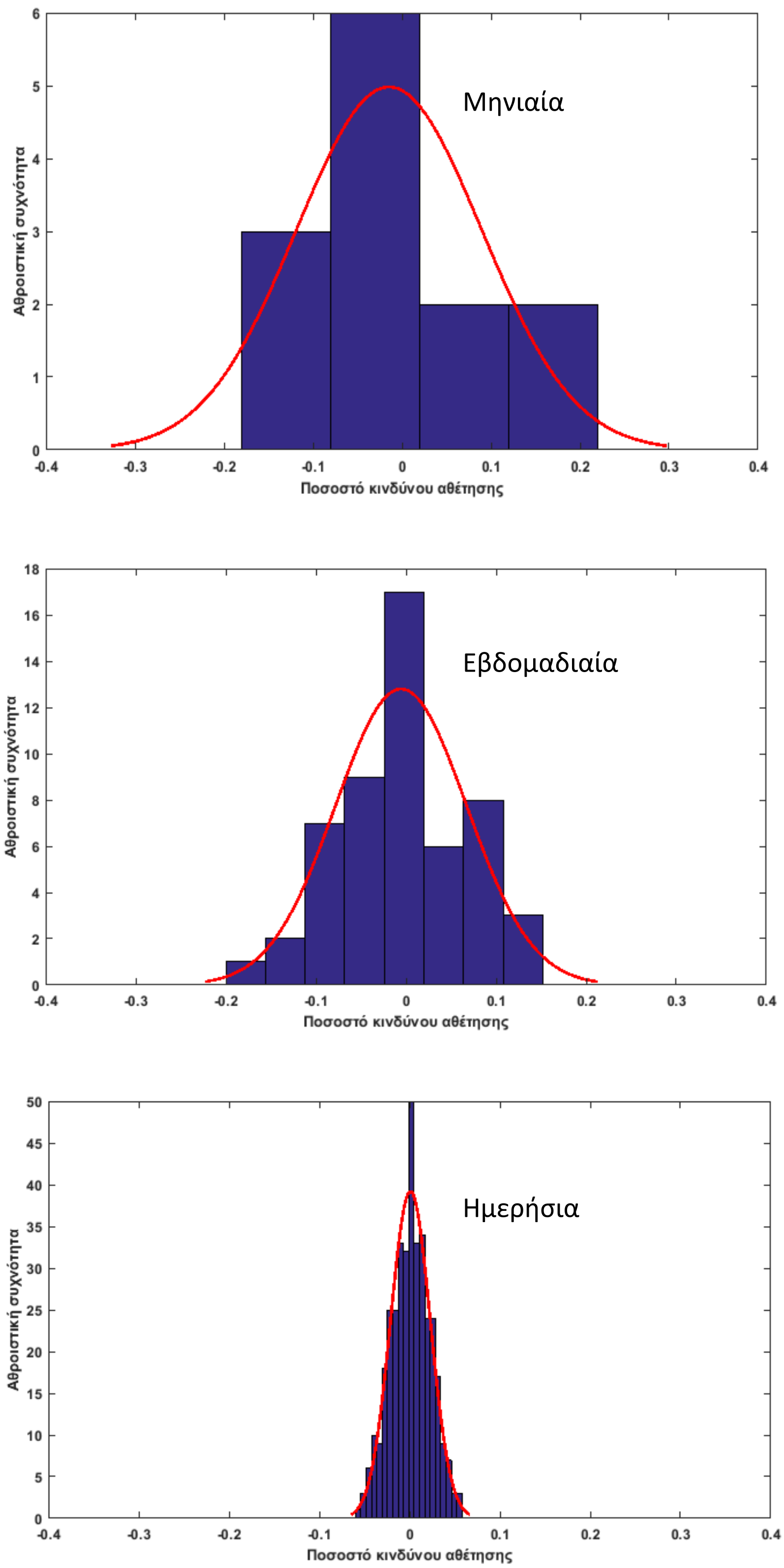
$$V_1 - V_0 e^{r_C (t_1 - t_0)}$$

όπου dt είναι η διάρκεια της περιόδου αναπροσαρμογής.

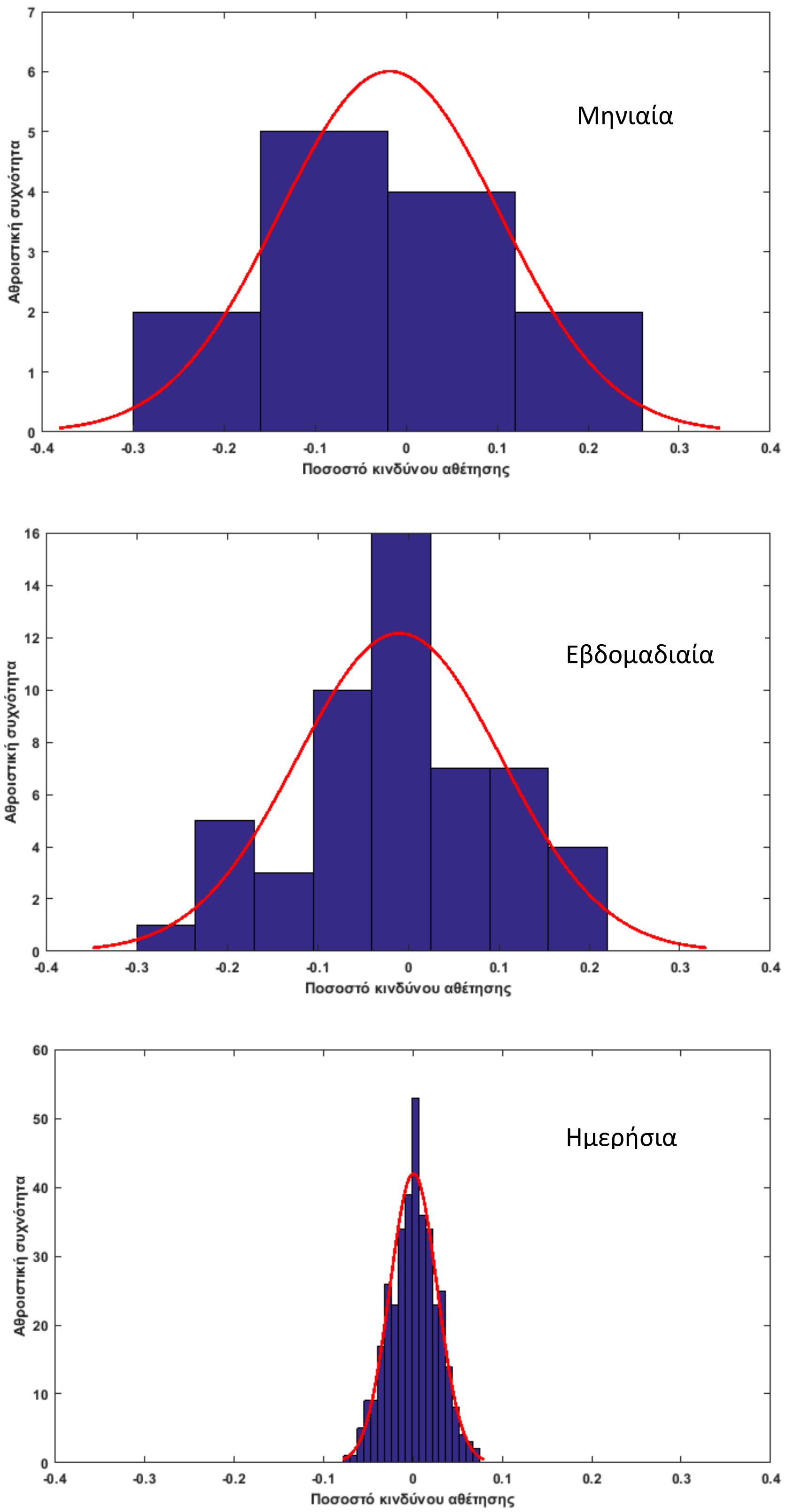
Κατά την χρονική στιγμή t_1, η εγγύηση που τοποθετείται με τον αγοραστή αναπροσαρμόζεται στην αξία του V_1. Σε κάθε χρονική στιγμή αναπροσαρμογής, η διαφορά μεταξύ της έκθεσης του δικαιώματος πώλησης και του ποσού της εγγύησης στο λογαριασμό αναπροσαρμογής πριν την αναπροσαρμογή παρουσιάζεται σαν ποσοστό της έκθεσης του δικαιώματος:

$$default\_risk_i = \frac{V_i - V_{i-1}e^{r_C(t_i - t_{i-1})}}{V_i},$$

όπου i = 1, …,n. Ο κίνδυνος αθέτησης σε κάθε i-οστή χρονική στιγμή της αναπροσαρμογής παρουσιάζεται στα παρακάτω ιστογράμματα.



Εικόνα 4.6: Η κατανομή του κινδύνου αθέτησης για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με εγγύηση με την προσέγγιση διωνυμικού μοντελου για τρεις διαφορετικές περιόδους αναπροσαρμογής της εγγύησης με παραμέτρους: S_0= 12, K = 12, , T = 0.5, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, T=1 και σ = 0.3.



Εικόνα 4.7: Η κατανομή του κινδύνου αθέτησης για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με εγγύηση με την προσέγγιση ΜΔΕ για τρεις διαφορετικές περιόδους αναπροσαρμογής της εγγύησης με παραμέτρους: S_0= 12, K = 12, , T = 0.5, r_C= 0.05, r_R= 0.06, r_F= 0.07, r_D= 0.02, T=1 και σ = 0.3.

Οι εικόνες απεικονίζουν την κατανομή αθέτησης του κινδύνου για κάθε μια από τις περιόδους t_i-t_{i-1}, δηλαδή μιας ημέρας, μιας εβδομάδας και ενός μήνα. Μια κανονική κατανομή εμφανίζεται πάνω από την κατανομή αθέτησης κινδύνου. Από το σχήμα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι καθώς η περίοδος αναπροσαρμογής (margin period) γίνεται μικρότερη, η κατανομή του κινδύνου αθέτησης έχει μικρότερη διασπορά και γίνεται πιο κανονική. Ακόμη και σε περιόδο αποτίμησης μιας ημέρας υπάρχει κίνδυνος αθέτησης. Εάν ο πωλητής του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης αθετήσει στην συναλλαγή μεταξύ περιόδων αποτίμησης, τότε ο πωλητής θα χάσει πάνω από 5% της αξίας του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης εάν η περίοδος αποτίμησης t_i-t_{i-1} για κάθε i, είναι μία ημέρα και πάνω από 20% εάν η περίοδος αποτίμησης t_i-t_{i-1} για κάθε i, είναι ένας μήνας. Η περίοδος αναπροσαρμογής για μια συναλλαγή ενός έξω-χρηματιστηριακού παραγώγου μεταξύ της τράπεζας και του πελάτη της μπορεί να είναι μέχρι ένα μήνα, καταρρίπτοντας το μύθο ότι η πλήρης εγγύηση εξαλείφει εντελώς την έκθεση σε πιστωτικό κίνδυνο. Κατώτατα όρια δεν έχουν ληφθεί υπόψη στο λογαριασμό, ωστόσο, εάν αυτά είχαν θεωρηθεί στον λογαριασμό αποτίμησης τότε η διασπορά της κατανομής της αθέτησης κινδύνου θα ήταν μεγαλύτερη.

4.4 Εκτίμηση παραμέτρων και προβλεπτική ικανότητα

Η εμπειρική μελέτη θα εστιαστεί στην ικανότητα των μοντέλων περιγραφής της τιμής του υποκείμενου τίτλου Cox, Ross & Rubinstein (Διωνυμικό μοντέλο) και ΜΔΕ Black-Scholes-Merton να αποτιμήσουν δικαιώματα με εγγύηση. Λόγω της έλλειψης δεδομένων καθώς ήταν αδύνατο να βρεθούν δεδομένα για παράγωγα με εγγύηση στις διάφορες βάσεις δεδομένων, κυρίως λόγω της ποικιλίας των επιτοκίων που χρησιμοποιούνται, έχουμε κάνει μια αριθμητική άσκηση. Στην αριθμητική άσκηση έχουμε χρησιμοποιήσει αυθαίρετα δεδομένα, αρχικά χρησιμοποιούμε αυτά τα δεδομένα για να αποτιμήσουμε τα δικαιώματα με το ένα μοντέλο και να πάρουμε τιμές ως τιμές αγοράς και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτές τις τιμές για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους με το άλλο μοντέλο. Έχουμε χρησιμοποιήσει 6 προϊόντα, 2 με λήξη 12 μήνες, 2 με λήξη 24 μήνες και 2 με λήξη 36 μήνες. Θα μελετήσουμε τα δεδομένα για διάστημα ενός μήνα (30 ημέρες).

4.4.1 Εκτίμηση παραμέτρων

Στα μοντέλα μας μελετάμε την μεταβλητότητα σ, ένα μη παρατηρήσιμο μέγεθος. Για την εκτίμηση θα χρησιμοποιήσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt όπου βρίσκουμε τιμές των παραμέτρων τέτοιες ώστε τα τετράγωνα των διαφορών από τιμές των δικαιωμάτων που εξάγονται από το μοντέλο με τις τιμές της αγοράς να έχουν την μικρότερη δυνατή τιμή.

$$\hat{\theta} = \arg\min \sum_{i=1}^{N} \left(f_i^{market}\left(T_i K_i\right) - f_i^{\mathrm{mod}el}\left(T_i K_i\right)\right)^2$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι το σετ των παραμέτρων $(\sigma*)$ και N είναι ο αριθμός των δικαιωμάτων που πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις μέσα στο δείγμα (in sample). Στην περίπτωσή μας, N=6.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt με εφαρμογή στο υπολογιστικό πακέτο matlab και την εντολή *lsqnonlin* για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στα μοντέλα για την εύρεση τιμής στα απλά δικαιώματα πώλησης. Έπειτα θα ελέγξουμε την ορθότητα των τιμών που θα μας δώσουν τα μοντέλα με τις εκτιμηθείσες τιμές και θα βρούμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων.

Ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση μη-γραμμικών least square curve fitting problems. Υποθέτουμε N παρατηρήσεις y_i, i=1,2,…,N και μια συνάρτηση g: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με n παραμέτρους $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Υποθέτουμε $N \geq n$. Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου μας $g(x;pi)=\hat{y_i}$ και βρίσκουμε τα κατάλοιπα $r_i(x) := \hat{y_i} - y_i$. Συνεπώς βρίσκουμε το $R=(r_1,\ldots,r_N)^T$ το οποίο είναι το διάνυσμα διάστασης N των καταλοίπων. Συνεπώς θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που ακολουθεί

$$\min_x f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)$$

Οι Levenberg K. (1944) και Marquardt D. (1963) πρότειναν μία λύση του προβλήματος προσαρμογής της καμπύλης χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που συνδυάζει την μέθοδο *Steepest descent* με την μέθοδο των Gauss-Newton.

Ο Levenberg προτείνει να υπολογίσουμε την κατεύθυνση d_k ως τη λύση στη παρακάτω τροποποιημένη εξίσωση των Gauss-Newton.

$$(R'(x^k)^T R'(x^k) + \lambda_k I) d_k = -(R'(x^k)^T R(x^k))$$

Όπου I είναι μοναδιαία μήτρα και $\lambda_k > 0$ είναι μία παράμετρος απόσβεσης. Η μήτρα στο δεξί μέρος της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένη. Με αυτόν τον τρόπο η λύση d_k εγγυάται πως είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για την συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης. Για μικρές τιμές του λ_k η μέθοδος του Levenberg συμπεριφέρεται σαν την επανάληψη των Gauss-Newton και δείχνει έναν ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών x^k που είναι κοντά στο x^*. Για επαναλήψεις μακριά από το βέλτιστο η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση μπορεί να δοθεί με την σχέση

$$d_k \approx -(1/\lambda_k)(R'(x^k)^T R(x^k))$$

Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης λ_k επηρεάζει το d_k καθώς επίσης και την διάρκεια κάθε βήματος Levenberg-Marquardt. Από την στιγμή που η επιλογή έχει άμεσο αντίκτυπο στην σταθερότητα της μεθόδου είναι σημαντικό πως θα ορίσουμε το λ_k και πως θα αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη.

Μία συνήθης επιλογή είναι

$$\lambda_0 := .\min_i \{D_0(i,i)\}_{i=1,\dots n}.$$

Η παράμετρος τ σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη του μοντέλου για τις τιμές των παραμέτρων.

Στην εικόνα 4.8 παρουσιάζονται η σύγκριση των τιμών τριών δικαιωμάτων με διαφορετικές λήξεις του Διωνυμικού μοντέλου με τις εκτιμημένες παραμέτρους, όταν έχουν χρησιμοποιηθεί σαν τιμές αγοράς οι τιμές της ΜΔΕ. Ενώ στην εικόνα 4.9 παρουσιάζονται η σύγκριση των τιμών τριών δικαιωμάτων με διαφορετικές λήξεις του μοντέλου της ΜΔΕ με τις εκτιμημένες παραμέτρους, όταν έχουν χρησιμοποιηθεί σαν τιμές αγοράς οι τιμές του Διωνυμικού μοντέλου.

Στην εικόνα 4.10 παρουσιάζεται η μέση τιμή των καταλοίπων για τις τιμές των δικαιωμάτων των δύο μοντέλων, όπου παρατηρούμε ότι το Διωνυμικό μοντέλο έχει μια καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με τη ΜΔΕ. Στην εικόνα 4.11 παρουσιάζεται η μέση τιμή των καταλοίπων της μεταβλητότητας με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα όπου βλέπουμε ότι στην πλειοψηφία των σημείων τα δύο μοντέλα προσεγγίζουν το ένα το άλλο, κάτι το οποίο ήταν και αναμενόμενο λόγω των δεδομένων που έχουν χρησιμοποιηθεί.

4.4.2 Προβλεπτική ικανότητα

Σε αυτή την ενότητα συνεχίζουμε με την προβλεπτική ικανότητα των δύο μοντέλων μας. Αρχικά στην εικόνα 4.12 παρουσιάζεται η μέση τιμή καταλοίπων με πρόβλεψη των τιμών των δικαιωμάτων της επομένης ημέρας με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα της προηγούμενης ημέρας για ένα μήνα. Τέλος, στην εικόνα 4.13 παρουσιάζεται η μέση τιμή καταλοίπων με πρόβλεψη των τιμών των δικαιωμάτων για 4 ημέρες με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα της πρώτης ημέρας όπου παρατηρούμε ότι τα κατάλοιπα έχουν μια ανοδική πορεία καθώς οι μέρες περνούν.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Ο τρόπος τιμολόγησης των παραγώγων μετά την κρίση άλλαξε κυρίως όταν έγινε γνωστό ότι η τράπεζες αντιμετωπίζουν κίνδυνο και δεν μπορούν να δανειστούν στα επιτόκια μηδενικού κινδύνου. Αυτό οδήγησε τις τράπεζες στην αναπροσαρμογή της χρηματοδοτούμενης αξίας, η οποία συνδέεται με την τοποθέτηση εγγύησης στην συναλλαγή.

Στην διπλωματική αυτή χρησιμοποιήσαμε ένα χαρτοφυλάκιο απογραφής για την επέκταση του διωνυμικού μοντέλου των Cox et al ώστε να συμπεριλάβουμε εγγύηση και μερίσματα.

Θεωρήσαμε το μοντέλο συνεχούς χρόνου του Piterbarg, όπου επεκτείνει το μοντέλο Black-Scholes-Merton συμπεριλαμβάνοντας εγγύηση και μερίσματα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Feynman-Kac διακριτοποιήσαμε τη ΜΔΕ του Piterbarg όπου μας παρέχεται η δυνατότητα να περιγράψουμε το μοντέλο του Piterbarg σε όρους υπό τη μορφή προσδοκίας. Η διακριτοποιήση αυτή μας βοήθησε να να δείξουμε ότι οι τιμές των δυο μοντέλων συμπίπτουν.

Η περιγραφή του μοντέλου του Piterbarg σε όρους υπό τη μορφή προσδοκίας δείχνει επίσης ότι το ποσό της εγγύησης που τοποθετείται στην συναλλαγή προσδιορίζει το συντελεστή προεξόφλησης που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση του παραγώγου. Εάν η αξία της εγγύησης είναι ίση με την αξία του παραγώγου κατά τη διάρκεια της συναλλαγής, τότε για την τιμολόγηση του παραγώγου, οι αναμενόμενες μελλοντικές ταμειακές ροές προεξοφλούνται με μια καμπύλη εγγυήσεων. Εάν δεν τοποθετηθεί εγγύηση στη συναλλαγή τότε οι αναμενόμενες μελλοντικές ταμειακές ροές προεξοφλούνται με μια καμπύλη επενδύσεων.

Τέλος, ακολούθησε η εμπειρική μελέτη όπου δείξαμε ότι οι τιμές των δύο μοντέλων συμπίπτουν είτε τιμολογούνται με εγγύηση είτε χωρίς εγγύηση. Ακόμη, είδαμε ότι η τιμή ενός παραγώγου με εγγύηση είναι μεγαλύτερη από ένα παράγωγο χωρίς εγγύηση, αλλά και ότι προκαλείται κίνδυνος αθέτησης της συναλλαγής από διαφορετικές περιόδους αναπροσαρμογής της εγγύησης. Άρα καταλήξαμε ότι ακόμη και με εγγύηση υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος στις συναλλαγές. Επιπλέον, κάναμε εκτίμηση παραμέτρων όπου εκτιμήσαμε την μεταβλητότητα και προβλεπτική ικανότητα μεταξύ των μοντέλων.

Βιβλιογραφία

Άρθρα

1. A. Castagna. Pricing of derivatives contracts under collateral agreements: Liquidity and funding value adjustments. Iason research paper. Available at http://iasonltd.com/resources.php, 2012.

2. Amanda Langgaard-S_rensen and Nicoline Maibomm Nielsen, Default risk and funding costs in derivatives valuation, master thesis, Copenhagen Business School, 2014.

3. Brandimarte, P. Numerical Methods in Finance & Economics, 2nd ed., John Wiley & Sons Publications: New Jersey, NJ, USA, 2006.

4. Burgard, C.; Kjaer, M. Partial differential equation representations of derivatives with bilateral counterparty risk and funding costs. J. Credit Risk 2011, 7, 75–93.

5. Burgard, C., Kjaer, M. Generalised CVA with funding and collateral via semi-replication, doi:10.2139/ssrn.2027195.

6. Chadd B. Hunzinger and Coenraad C.A. Labuschagne, Pricing a Collateralized Derivative Trade with a Funding Value Adjustment, Journal of Risk and Financial Management, 2015, 17-42.

7. Chadd B. Hunzinger, C.C. Labuschagne and C.J. Reinecke, Reviewing a framework to price a credit risky derivative post the credit crisis, 2014.

8. Chadd B. Hunzinger, C.C. Labuschagne. The Cox, Ross and Rubinstein tree model which includes counterparty credit risk and funding costs. North Am. J. Econ. Financ. 2014, 29, 200–217.

9. CICF, Collateral Fundamentals paper, November 2012.

10. Cox, J.; Ross, S.; Rubinstein, M. Option pricing: A simplified approach.J. Financ. Econ. 1979, 7 , 229–263.

11. Gregory, J. Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment—A Continuing Challenge for Global Financial Markets, 2nd ed.; Wiley & Sons Ltd.: London, UK, 2012.

12. Higham, D. An Introduction to Financial Option Valuation; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2008.

13. Hull, J., White, A. LIBOR vs. OIS: The derivatives discounting dilemma. J. Invest. Manag. 2013, 11, 14–27.

14. Hull, J., White, A. The FVA debate. Risk Mag. 2012, 25, 83–85.

15. Hull, J.; White, A. Collateral and credit issues in derivatives pricing. Forthcoming J. Credit Risk, doi:10.2139/ssrn.2212953.

16. Itô, K. On stochastic differential equations. Mem. Am. Math. Soc. 1951, 4, 1–51.

17. Itô, K. Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo 1944, 20, 519–524.

18. Karatzas, I.; Shreve, S.E. Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd ed., Springer: New York, NY, USA, 1991.

19. Levenberg, K., "A Method for the Solution of Certain Problems in Least - Squares," Quarterly Applied Math. 2, pp. 164–168, 1944.

20. Laughton, S.; Vaisbrot, A. In defence of FVA. Risk Mag. 2012, 25, 18–24.

21. Marquardt, D., "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters," SIAM Journal Applied Math., Vol. 11, pp. 431–441, 1963.

22. Piterbarg, V. Funding beyond discounting: Collateral agreements and derivatives pricing. Risk Mag. 2010, 23, 97–102.

23. Richardson, M. Numerical Methods for Option Pricing. PhD Thesis, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford, UK, 2009.

24. Shreve, S. Stochastic Calculus for Finance 1—The Binomial Asset Pricing Model, 1st ed., Springer: New York, NY, USA, 2004.

Βιβλία

1. John C. Hull (2009) “Options, Futures and Other Derivatives” 9th edition, Prentice Hall.

2. Kienitz J., Wetterau D. “Financial Modelling, Theory, Implementation and Practice with MATLAB Source” 2012, Pbl Wiley.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Εξαγωγή παραμέτρων του διωνυμικού μοντέλου

Πολλές προσεγγίσεις έχουν υπάρξει από διάφορους συγγραφείς για την εξαγωγή παραμέτρων, όλες όμως βασίζονται στο βασική διωνυμική μέθοδο των Cox et al. Εμείς θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση από το βιβλίο του Higham. Η μέθοδος των ροπών χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων u και d.

Ας υποθέσουμε q την πιθανότητα για μια ανοδική κίνηση μιας τυχαία μεταβλητή Ri, έτσι ώστε:

$$R_i = \begin{cases} 1 \ \mu\varepsilon \ \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ q \\ 0 \ \mu\varepsilon \ \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ (1-q) \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι η Ri είναι μια κατανομή Bernoulli τυχαία μεταβλητή με παράμετρο q και θα δούμε ότι E[Ri]=q και Var[Ri]=q(1-q). Αν Ri=1 τότε η μετοχή μετακινείται προς τα πάνω, ενώ αν Ri=0 τότε η μετοχή μετακινείται προς τα κάτω στο i-στο βήμα. Επομένως η τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή $T = \sum_{i=0}^{n}(t_{i+1} - t_i)$ δίνεται από τον τύπο:

$$S_T = S_0 u \sum_{i=1}^{n} R_i d^{\,n-\sum_{i=1}^{n} R_i} \qquad \text{(A1)}$$

όπου n είναι ο αριθμός των βημάτων στο δέντρο. Ανασυντάσσοντας την σχέση (A1) παίρνουμε ότι:

$$\frac{S_T}{S_0} = d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^{n} R_i} .$$

Παίρνοντας λογαρίθμους έχουμε:

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = n\log(d) + \log\left(\frac{u}{d}\right)\sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{(A2)}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση της σχέσης (A2), άρα:

$$\mathrm{E}\left[\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = n\log(d) + \log\left(\frac{u}{d}\right)nq \text{, (A3)}$$

και

$$Var\left[\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \log\left(\frac{u}{d}\right)^2 nq(1-q) \text{. (A4)}$$

Πριν από τη χρήση της μεθόδου των ροπών ας υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή και διακύμανση των λογαριθμικών αποδόσεων για την ανέλιξη της μετοχής. Η ανέλιξη της μετοχής δίνεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_R - r_D)dt + \sigma dWt \text{, (A5)}$$

Από το λήμμα του Ito, ξέρουμε ότι:

$$d\log(S_t) = \left((r_R - r_D) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dWt$$

και κάνοντας πράξεις:

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left((r_R - r_D) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma dWt \text{, (A6)}$$

όπου W_t~N(0, $\sqrt{t}$). Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση της σχέσης (A6) παίρνουμε:

$$E\left[\log(\frac{S_t}{S_0})\right] = \left((r_R - r_D) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \quad \text{(A7)}$$

και

$$Var\left[\log(\frac{S_t}{S_0})\right] = \sigma^2 t \,. \quad \text{(A8)}$$

Τώρα ταιριάζουμε τις αναμενόμενες τιμές των σχέσεων (Α3) και (Α7) και τις διακυμάνσεις των σχέσεων (Α4) και (Α8) και παίρνουμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις:

$$\log(d) + \log\left(\frac{u}{d}\right)q = \left((r_R - r_D) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt \,, \quad \text{(A9)}$$

$$\log\left(\frac{u}{d}\right)^2 q(1-q) = \sigma^2 dt \,. \quad \text{(A10)}$$

Έχουμε δύο σχέσεις και τρεις άγνωστες παραμέτρους, τις q, u, και d. Θα καθορίσουμε τη μια παράμετρο και θα λύσουμε ως προς τις άλλες δύο. Η παράμετρος της πιθανότητας ορίζεται q=1/2, άρα οι άλλες δύο παράμετροι λύνονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Α9) και (Α10) για όλα τα i=0,1,2…N:

$$u = e^{\left(r_R - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}}(1-\delta)$$

και

$$d = e^{\left(r_R - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) - \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}}(1-\delta)$$

όπου $e^{-r_D(t_{i+1} - t_i)} = 1-\delta$.

Β. Λύνοντας αριθμητικά την ΜΔΕ του Piterbarg

Χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις που αναφέραμε και στην ενότητα 4.2, η διακριτοποίηση της ΜΔΕ του Piterbarg που δόθηκε από το θεώρημα 3.1 είναι:

$$\frac{V_j^i - V_{j-1}^i}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 (ids)^2 \frac{V_{j-1}^{i+1} - V_{j-1}^i + V_{j-1}^{i-1}}{(ds)^2} + (r_R - r_D)\frac{V_{j-1}^{i+1} - V_{j-1}^{i-1}}{2ds}(ids) - r_F V_{j-1}^i + C_{j-1}^i (r_F - r_C) = 0$$

(A11)

όπου C_j^i είναι η αξίας της εγγύηση που τοποθετείται στην συναλλαγή την χρονική στιγμή jdt και τιμή μετοχής ids. Κατά την εφαρμογή του μοντέλου, σε όλες τις διάφορες μεθόδους, υποθέτουμε ότι όλα τα επιτόκια είναι σταθερά. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το ποσό της εγγύησης μπορεί να γραφτεί σαν κλασματικό ποσό της αξίας του παραγώγου,

$$C_j^i = \theta V_j^i ,$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{V_j^i - V_{j-1}^i}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 (ids)^2 \frac{V_{j-1}^{i+1} - V_{j-1}^i + V_{j-1}^{i-1}}{(ds)^2} + (r_R - r_D)\frac{V_{j-1}^{i+1} - V_{j-1}^{i-1}}{2ds}(ids) - r_F V_{j-1}^i + \theta V_{j-1}^i (r_F - r_C) = 0$$

(A12)

Ανασυντάσσοντας την σχέση (A12) έχουμε:

$$V_j^i = X_i V_{j-1}^{i-1} + Y_i V_{j-1}^i + Z_i V_{j-1}^{i+1} ,$$

όπου:

$$X_i = \frac{1}{2}((r_R - r_D)i - \sigma^2 i^2)dt ,$$

$$Y_i = 1 + (\sigma^2 i^2 + r_F - \theta(r_F - r_C))dt , \quad \text{(A13)}$$

$$Z_i = -\frac{1}{2}((r_R - r_D)i + \sigma^2 i^2)dt .$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφούν σε μήτρες ως εξής:

$$\overline{V}_j = M\overline{V}_{j-1}, \text{ (A14)}$$

Όπου η μήτρα M και το διάνυσμα $\overline{V}_j$ προσδιορίζονται ως:

$$M = \begin{bmatrix} Y_1 & Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & 0 \\ 0 & X_3 & Y_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & Z_{M-1} \\ 0 & \cdots & 0 & X_M & Y_M \end{bmatrix} \text{ και } \overline{V}_j = \begin{bmatrix} V_j^1 \\ V_j^2 \\ V_j^3 \\ \vdots \\ V_j^M \end{bmatrix}.$$

Η αξία του $\overline{V}_j$ είναι γνωστή , και ψάχνουμε την αξία του $\overline{V}_{j-1}$, επομένως:

$$M^{-1}\overline{V}_j = \overline{V}_{j-1}$$

για j=1,0,…,N. Θεωρούμε τις δύο ακραίες περιπτώσεις για την αξία της εγγύησης. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν η αξία της εγγύησης είναι μηδέν, θ=0. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (A13) γίνεται:

$$X_i = \frac{1}{2}((r_R - r_D)i - \sigma^2 i^2)dt,$$

$$Y_i = 1 + (\sigma^2 i^2 + r_F)dt, \text{ (A15)}$$

$$Z_i = -\frac{1}{2}((r_R - r_D)i + \sigma^2 i^2)dt.$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν έχουμε πλήρης εγγύηση ως προς την αξία του παραγώγου, θ=1. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (A13) γίνεται:

$$X_i = \frac{1}{2}((r_R - r_D)i - \sigma^2 i^2)dt,$$

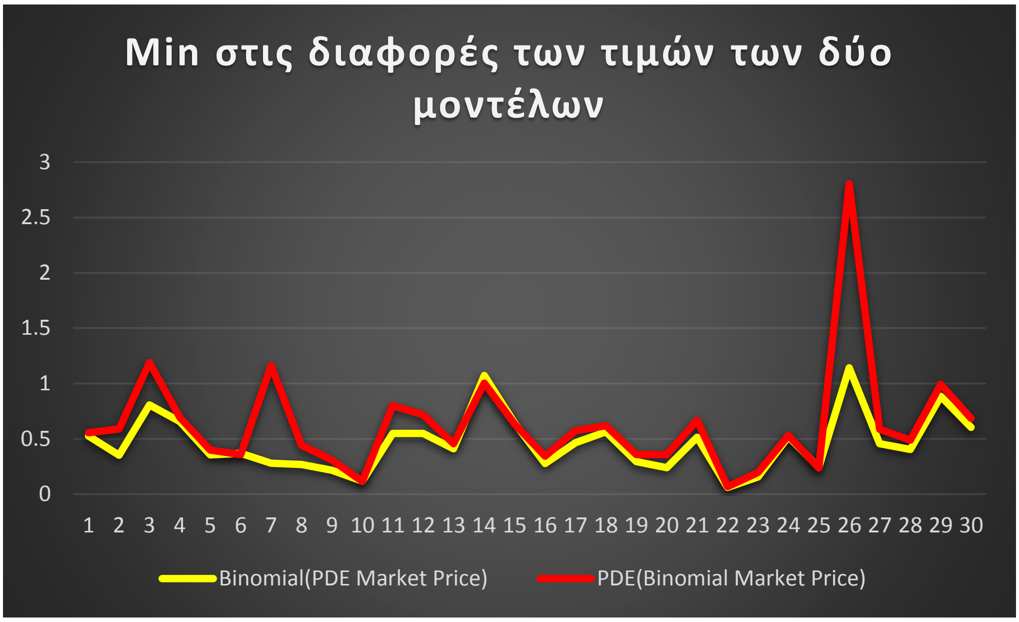
$$Y_i = 1 + (\sigma^2 i^2 + r_C)dt \text{ , (A16)}$$

$$Z_i = -\frac{1}{2}((r_R - r_D)i + \sigma^2 i^2)dt \text{ .}$$

Γ. Γραφήματα

Εικόνα 4.8: Παρουσίαση σύγκριση των τιμών των δικαιωμάτων της αγοράς(ΜΔΕ) με τις τιμές του Διωνυμικού μοντέλου βάσει εκτίμησης για λήξη του δικαιώματος σε 12 μήνες, 24 μήνες και 36 μήνες.

Εικόνα 4.9: Παρουσίαση σύγκριση των τιμών των δικαιωμάτων της αγοράς(Διωνυμικό) με τις τιμές της ΜΔΕ βάσει εκτίμησης για λήξη του δικαιώματος σε 12 μήνες, 24 μήνες και 36 μήνες.



Εικόνα 4.10: Παρουσίαση της μέσης τιμής των καταλοίπων για τις τιμές των δικαιωμάτων των δύο μοντέλων.

Εικόνα 4.11: Παρουσίαση της μέσης τιμής των καταλοίπων για την μεταβλητότητα και την εκτιμώμενη μεταβλητότητα.

Εικόνα 4.12: Παρουσίαση της μέσης τιμής καταλοίπων με πρόβλεψη των τιμών των δικαιώματων της επόμενης ημέρας με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα της προηγούμενης ημέρας για ένα μήνα.

Εικόνα 4.13: Παρουσίαση της μέσης τιμής καταλοίπων με πρόβλεψη των τιμών των δικαιώματων για 4 ημέρες με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα της πρώτης ημέρας.

Δ. ΚώδικεςMatlab

Κώδικας αποτίμησης παραγώγων με το διωνυμικό μοντέλο

```
function [price, lattice]=LatticeEurPutd(S0, K, rC, rR, rF, rD, th,
T, sigma, N)
deltaT=T/N;
div= 1-exp(-rD*deltaT);
u=exp((rR-0.5*sigma^2)*deltaT+sigma*sqrt(deltaT))*(1-div);
d=exp((rR-0.5*sigma^2)*deltaT-sigma*sqrt(deltaT))*(1-div);
p=(exp((rR-rD)*deltaT)-d)/(u-d);
rth=rF+(log(1+th*(exp((rC-rF)*deltaT)-1)))/deltaT;
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
    lattice(i+1,N+1)=max(0,K-S0*(u^i)*(d^(N-i)));
end
for j=N-1:-1:0
for i=0:j
      lattice(i+1,j+1)=exp(-rth*deltaT)*((p*lattice(i+2,j+2)+(1-
p)*lattice(i+1,j+2)));
end
end
price=lattice(1,1);

end
```

Κώδικας αποτίμησης παραγώγων μ ετη ΜΔΕ Black-Scholes-Merton

```
function  price= EurPutImpld(S0, K, rC, rR, rF, rD,th, T, sigma,
Smax, dS, dt)
M=round(Smax/dS);
ds=Smax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
matval=zeros(M+1,N+1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1);
veti=0:M;
vetj=0:N;
rth=rF+(log(1+th*(exp((rC-rF)*dt)-1)))/dt;
matval(:,N+1)=max(K-vetS,0);
matval(1,:)=K*exp(-rth*dt*(N-vetj));
matval(M+1,:)=0;
a=0.5*((rR-rD)*veti-sigma^2*veti.^2)*dt;
b=1+(sigma^2*veti.^2+rF-th*(rF-rC))*dt;
c=-0.5*((rR-rD)*veti+sigma^2*veti.^2)*dt;
coeff=diag(a(3:M),-1)+diag(b(2:M))+diag(c(2:M-1),1);
[L,U]=lu(coeff);
aux=zeros(M-1,1);
for j=N:-1:1
    aux(1)=-a(2)*matval(1,j);
    matval(2:M,j)=U\(L\(matval(2:M,j+1)+aux));
end
price=interp1(vetS,matval(:,1),S0);
end
```

Κώδικας προσομοίωσης μονοπατιού για τον υπολογισμού του κίνδυνου αθέτησης με το διωνυμικό μοντέλο

```
function dr=AssetPathBinomial(S0,K,rC,rR,rF,rD,sigma,T,n,deltat,N,
deltaT)
SPath=zeros(1,n+1);
SPath(1,1)=S0;
nudt=((rR-rD)-0.5*sigma^2)*deltat;
sidt=sigma*sqrt(deltat);
V=zeros(1,n+1);
dr=zeros(1,n+1);
for i=1:1:n
        V(1,i)=LatticeEurPutd(SPath(1,i), K, rC, rR, rF, rD, 1,  T-
(i-1)*deltat, sigma, N,deltaT);
        SPath(1,i+1)=SPath(1,i)*exp(nudt+sidt*randn);
end
V(1,n+1)= LatticeEurPutd(SPath(1,n+1), K, rC, rR, rF, rD, 1, T-(i-
1)*deltat, sigma, N,deltaT);
for i=2:1:n+1
        dr(1,i)=((V(1,i)-exp(rC*(deltat))*V(1,i-1))/V(1,i));
end
```

Κώδικας προσομοίωσης μονοπατιού για τον υπολογισμού του κίνδυνου αθέτησης με τη ΜΔΕ Black-Scholes-Merton

```
function dr=AssetPath(S0,K,rC,rR,rF,rD,sigma,T,n,deltat,
Smax,dS,dt,N)
SPath=zeros(1,n+1);
SPath(1,1)=S0;
nudt=((rR-rD)-0.5*sigma^2)*deltat;
sidt=sigma*sqrt(deltat);
V=zeros(1,n+1);
dr=zeros(1,n+1);
for i=1:1:n
        V(1,i)= EurPutImpld(SPath(1,i), K, rC, rR, rF, rD,1, T-(i-
1)*deltat, sigma, Smax, dS,dt,N);
        SPath(1,i+1)=SPath(1,i)*exp(nudt+sidt*randn);
end
V(1,n+1)= EurPutImpld(SPath(1,n+1), K, rC, rR, rF, rD,1, T-(i-
1)*deltat, sigma, Smax, dS,dt,N);
for i=2:1:n+1
        dr(1,i)=((V(1,i)-exp(rC*(deltat))*V(1,i-1))/V(1,i));
end
```

Κώδικας για εκτίμηση του διωνυμικού μοντέλου

```
function [x, resnorm, residual,exitflag]= BINOMIAL(~)
clear all;
globalS; % Τρέχουσα τιμή
global strike;% Strike price
global rateC;% Επιτόκιο εγγύησης
globalrateR;% Επιτόκιο συμφωνίας επαναγοράς
globalrateF;% Επιτόκιο χρηματοδότησης
globalrateD;% Μερισματική απόδοση
global theta;% Εγγύηση
globalTTM;% Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global imp_vol;% Implied volatility
```

```
global NN;
global dt;
global Smax;
global dS;
globalk;% Βοηθητική μεταβλητή
% Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel με τα δεδομένα
S=zeros(30);
strike=zeros(30,6);
rateC=zeros(30);
rateR=zeros(30);
rateF=zeros(30);
rateD=zeros(30);
TTM=zeros(30,6);
imp_vol=zeros(30,6);
theta=1;
NN=5000;
dt=0.001;
Smax=20;
dS=0.02;
parameter=zeros(30,1);
res=zeros(30,1);
%Εισάγω δεδομένα
S=xlsread('data.xlsx','data1','B2:B31');
strike=xlsread('data.xlsx','data2','B2:G31');
rateC=xlsread('data.xlsx','data3','B2:B31');
rateR=xlsread('data.xlsx','data4','B2:B31');
rateF=xlsread('data.xlsx','data5','B2:B31');
rateD=xlsread('data.xlsx','data6','B2:B31');
TTM=xlsread('data.xlsx','data7','B2:G31');
imp_vol=xlsread('data.xlsx','data8','B2:G31');
pde_price=zeros(30,6);
Binomial_put_matrix=zeros(30,6);
fori=1:30
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω, διαλέγω την
πιο ρεαλιστική των δεδομένων (μέσος των implied volatilities των
δεδομένων)
x0=(0.3767);
% Θέτω τα όρια της άγνωστης παραμέτρου
lb=(0.01);
    ub=(2);
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@BIOLSQD,x0,lb,ub);
    parameter(i)= x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
% Αποθηκεύω τις τιμές που έχω για κάθε ένα από τα 6 δικαιώματα με την
εκτιμημένη παράμετρο στο μοντέλο
for j=1:6
        Binomial_put_matrix(i,j)=LatticeEurPutd(S(i),
strike(i,j),rateC(i),rateR(i),rateF(i),rateD(i),theta,TTM(i,j),x(1),N
N,dt);
        pde_price(k,j)=EurPutImpld(S(k),
strike(k,j),rateC(k),rateR(k),rateF(k),rateD(k),theta,
TTM(k,j),imp_vol(k,j), Smax, dS, dt);
end
    pricedata=[Binomial_put_matrix];
end
xlswrite('databio.xls',pricedata,'resultsBio5','A1:F30');
xlswrite('databio.xls',res,'resultsBio6','A1:A30');
xlswrite('databio.xls',parameter,'resultsBio7','A1:A30');
```

```
xlswrite('databio.xls',pde_price,'resultsBio8','A1:F30')
end

function [Bio_lsqd]= BIOLSQD( x )
% καλείται από το BINOMIAL.m
% Εύρεση διαφορών
globalS; % Τρέχουσα τιμή
global strike;% Strike price
globalrateC;% Επιτόκιο εγγύησης
globalrateR;% Επιτόκιο συμφωνίας επαναγοράς
globalrateF;% Επιτόκιο χρηματοδότησης
globalrateD;% Μερισματική απόδοση
globaltheta;% Εγγύηση
globalTTM;% Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global imp_vol;% Implied volatility
global NN;
global dt;
global k;% Βοηθητική μεταβλητή
Smax=20;
dS=0.02;
Bio_lsqd=zeros(1,6);
for j=1:6
    Bio_lsqd(j)=EurPutImpld(S(k),
strike(k,j),rateC(k),rateR(k),rateF(k),rateD(k),theta,
TTM(k,j),imp_vol(k,j), Smax, dS, dt)-LatticeEurPutd(S(k),
strike(k,j),rateC(k),rateR(k),rateF(k),rateD(k),theta,TTM(k,j),x(1),N
N,dt);
end
end

function [bin_res]= FORECAST1(~)
clear all;
global S;% Τρέχουσα τιμή
global strike;% Strike price
globalrateC;% Επιτόκιο εγγύησης
globalrateR;% Επιτόκιο συμφωνίας επαναγοράς
globalrateF;% Επιτόκιο χρηματοδότησης
globalrateD;% Μερισματική απόδοση
globaltheta;% Εγγύηση
globalTTM;% Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global imp_vol;% Implied volatility
global est_vol;% Εκτιμημένη volatility
globalNN;
globaldt;
% Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel με τα δεδομένα
S=zeros(30);
strike=zeros(30,6);
rateC=zeros(30);
rateR=zeros(30);
rateF=zeros(30);
rateD=zeros(30);
TTM=zeros(30,6);
imp_vol=zeros(30,6);
est_vol=zeros(30);
pde_price=zeros(30,6);
theta=1;
NN=5000;
dt=0.001;
%Εισάγω δεδομένα
S=xlsread('data.xlsx','data1','B2:B31');
```

```
strike=xlsread('data.xlsx','data2','B2:G31');
rateC=xlsread('data.xlsx','data3','B2:B31');
rateR=xlsread('data.xlsx','data4','B2:B31');
rateF=xlsread('data.xlsx','data5','B2:B31');
rateD=xlsread('data.xlsx','data6','B2:B31');
TTM=xlsread('data.xlsx','data7','B2:G31');
imp_vol=xlsread('data.xlsx','data8','B2:G31');
est_vol=xlsread('data.xlsx','data9','B2:B31');
pde_price=xlsread('data.xlsx','data10','B2:G31');
Bin_res=zeros(30,6);
for i=16:19
for j=1:6
        Bin_res(i,j)=(pde_price(i,j)-LatticeEurPutd(S(i),
strike(i,j),rateC(i),rateR(i),rateF(i),rateD(i),theta,TTM(i,j),est_vo
l(1),NN,dt))^2;
end
end
xlswrite('databio.xls',Bin_res,'resultsBio8','A1:F30')
end
```

Κώδικας για εκτίμηση της ΜΔΕ Black-Scholes-Merton

```
function [x, resnorm, residual,exitflag]= IMPL(~)
clear all;
global S; % Τρέχουσα τιμή
global strike;% Strike price
globalrateC;% Επιτόκιο εγγύησης
globalrateR;% Επιτόκιο συμφωνίας επαναγοράς
globalrateF;% Επιτόκιο χρηματοδότησης
globalrateD;% Μερισματική απόδοση
globaltheta;% Εγγύηση
globalTTM;% Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global imp_vol;% Implied volatility
global dt;
global dS;
global Smax;
global NN;
globalk;% Βοηθητική μεταβλητή
% Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel με τα δεδομένα
S=zeros(30);
strike=zeros(30,6);
rateC=zeros(30);
rateR=zeros(30);
rateF=zeros(30);
rateD=zeros(30);
TTM=zeros(30,6);
imp_vol=zeros(30,6);
theta=1;
Smax=20;
dS=0.02;
dt=0.001;
NN=5000;
parameter=zeros(30,1);
res=zeros(30,1);
%Εισάγω δεδομένα
S=xlsread('data.xlsx','data1','B2:B31');
strike=xlsread('data.xlsx','data2','B2:G31');
```

```
rateC=xlsread('data.xlsx','data3','B2:B31');
rateR=xlsread('data.xlsx','data4','B2:B31');
rateF=xlsread('data.xlsx','data5','B2:B31');
rateD=xlsread('data.xlsx','data6','B2:B31');
TTM=xlsread('data.xlsx','data7','B2:G31');
imp_vol=xlsread('data.xlsx','data8','B2:G31');
lattice_price=zeros(30,6);
Impl_put_matrix=zeros(30,6);
fori=1:30
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω, διαλέγω την
πιο ρεαλιστική των δεδομένων (μέσος των implied volatilities των
δεδομένων)
x0=(0.3767);
% Θέτω τα όρια της άγνωστης παραμέτρου
lb=(0.01);
    ub=(2);
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@IMPLLSQD,x0,lb,ub);
    parameter(i)= x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
% Αποθηκεύω τις τιμές που έχω για κάθε ένα από τα 6 δικαιώματα με την
εκτιμημένη παράμετρο στο μοντέλο
for j=1:6
        Impl_put_matrix(i,j)=EurPutImpld(S(i),
strike(i,j),rateC(i),rateR(i),rateF(i),rateD(i),theta, TTM(i,j),x(1),
Smax, dS, dt);
        lattice_price(k,j)=LatticeEurPutd(S(k),
strike(k,j),rateC(k),rateR(k),rateF(k),rateD(k),theta,TTM(k,j),imp_vo
l(k,j),NN,dt);
end
    pricedata=[Impl_put_matrix];
end
xlswrite('dataimpl.xls',pricedata,'resultsImpl1','A1:F30');
xlswrite('dataimpl.xls',res,'resultsImpl2','A1:A30');
xlswrite('dataimpl.xls',parameter,'resultsImpl3','A1:A30');
xlswrite('dataimpl.xls',lattice_price,'resultsImpl4','A1:F30');
end


function [Impl_lsqd]= IMPLLSQD( x )
% Καλείται από το IMPL.m
% Εύρεση διαφορών
global S; % Τρέχουσα τιμή
global strike;% Strike price
globalrateC;% Επιτόκιοεγγύησης
globalrateR;% Επιτόκιο συμφωνίας επαναγοράς
globalrateF;% Επιτόκιο χρηματοδότησης
globalrateD;% Μερισματική απόδοση
globaltheta;% Εγγύηση
globalTTM;% Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global imp_vol;% Implied volatility
global NN;
global Smax;
global dS;
global dt;
global k;% Βοηθητική μεταβλητή
Impl_lsqd=zeros(1,6);
for j=1:6
    Impl_lsqd(j)=LatticeEurPutd(S(k),
strike(k,j),rateC(k),rateR(k),rateF(k),rateD(k),theta,TTM(k,j),imp_vo
```

```
l(k,j),NN,dt)-EurPutImpld(S(k),
strike(k,j),rateC(k),rateR(k),rateF(k),rateD(k),theta, TTM(k,j),
x(1), Smax, dS, dt);
end
end


function [pde_res]= FORECAST2(~)
clear all;
global S;% Τρέχουσα τιμή
global strike;% Strike price
globalrateC;% Επιτόκιο εγγύησης
globalrateR;% Επιτόκιο συμφωνίας επαναγοράς
globalrateF;% Επιτόκιο χρηματοδότησης
globalrateD;% Μερισματική απόδοση
globaltheta;% Εγγύηση
globalTTM;% Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global imp_vol;% Implied volatility
global est_vol; % Εκτιμημένη volatility
global NN;
global dt;
global dS;
globalSmax;
% Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel με τα δεδομένα
S=zeros(30);
strike=zeros(30,6);
rateC=zeros(30);
rateR=zeros(30);
rateF=zeros(30);
rateD=zeros(30);
TTM=zeros(30,6);
imp_vol=zeros(30,6);
est_vol=zeros(30);
lattice_price=zeros(30,6);
theta=1;
NN=5000;
dt=0.001;
dS=0.02;
Smax=20;
%Εισάγω δεδομένα
S=xlsread('data.xlsx','data1','B2:B31');
strike=xlsread('data.xlsx','data2','B2:G31');
rateC=xlsread('data.xlsx','data3','B2:B31');
rateR=xlsread('data.xlsx','data4','B2:B31');
rateF=xlsread('data.xlsx','data5','B2:B31');
rateD=xlsread('data.xlsx','data6','B2:B31');
TTM=xlsread('data.xlsx','data7','B2:G31');
imp_vol=xlsread('data.xlsx','data8','B2:G31');
est_vol=xlsread('data.xlsx','data11','B2:B31');
lattice_price=xlsread('data.xlsx','data12','B2:G31');
Pde_res=zeros(30,6);
for i=16:19
for j=1:6
        Pde_res(i,j)=(lattice_price(i,j)-EurPutImpld(S(i),
strike(i,j),rateC(i),rateR(i),rateF(i),rateD(i),theta, TTM(i,j),
est_vol(1), Smax, dS, dt))^2;
end
end
xlswrite('dataimpl.xls',Pde_res,'resultsImpl7','A1:F30')
end
```