ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Θέματα τιμολόγησης και χρήσεων των συμβολαίων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Φοιτητής: Κουρσάρης Νικόλαος
Επιβλέπων καθηγητής: Μιχαήλ Ανθρωπέλος

Πειραιάς, 2017

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Issues on pricing and use of the Credit Default Swaps

MSc Dissertation
Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Student: Koursaris Nikolaos
Supervisor: Michael Anthropelos

Piraeus, 2017

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργάσια αναφέρεται στην χρήση αλλά και την τιμολόγηση των συμβολαίων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου. Αρχικά παρουσιάζεται η βασική ορολογία, η λειτουργία αλλα και η μέθοδος τιμολόγησης τους χρησιμοποιόντας το μοντέλο των Cox-Ingersoll-Ross για την δημιουργία των εντάσεων αθέτησης οι οποίες είναι απαραίτητες για την τιμολόγηση.

Θα δωθεί ένα παράδειγμα, κάνοντας χρήση αλγορίθμου σε πρόγραμμα Matlab, για να δούμε πρακτικά την τιμολόγηση ενός τέτοιου συμβολαίου και θα εξετάστεί πόσο και αν επηρεάζεται η τιμή των συμβολαίων ανταλλαγής πιστωτικόυ κινδύνου απο την αλλαγή των παραμέτρων στο μοντέλο των Cox-Ingersoll-Ross. Στη συνέχεια κάνοντας χρήση του προγράμματος Matlab γίνεται η κατασκευή του αλγόριθμου για την τιμολόγηση των συμβολαίων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου που χρησιμοποιήθηκε, με βάση το θεωρητικό κομμάτι το οποίο παρουσιάζεται στα πρώτα κεφάλαια.

Abstract

The topic of the present MSc thesis is the issues on pricing and use of the Credit Default Swaps. Initially all necessary theoretical terminology, use and pricing method are presented using the Cox-Ingersoll-Ross model to produce defaults intensities which are necessary for the valuation. Then a simulation example will be given, by using a code in Matlab, in order to examine the evaluation of this particular contract. In addition we will test the effectiveness of each of the model's parameters, to the results of the contracts' price. Finally we will describe our contracts' pricing algorithm step by step process of development by using Matlab. Every step is the application of the theory which has been described in the initial chapters.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασική ορολογία

Στο κεφάλαιο που ακολουθέι αναλύονται κάποιες βασικές έννοιες, οι οποίες προέρχονται απο το [4], ώστε να είναι δυνατή η κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

1.1 The single-name Credit Default Swap (CDS)

Πρόκειται για συμβόλαια μεταφοράς του πιστωτικού κινδύνου, ο οποίος προέρχεται είτε από έναν εκδότη (reference credit) όπως μια εταιρία με δημόσιο χρέος ή μια κυβέρνηση, είτε από κάποιο ομόλογο (reference security), από τον αγοραστή προστασίας A στον πωλητή προστασίας B. Τα συμβόλαια ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (credit default swap) λειτουργούν ως ασφάλιση για τον αγοραστή της προστασίας έναντι αθέτησης, ο οποίος πληρώνει ως αντάλλαγμα ένα προσυμφωνημένο ασφάληστρο (premium) μέσω μιας ετήσιας ή εξαμηνιαίας ράντας έως ότου επέλθει η ωρίμανση (λήξη του συμβολαίου) ή συμβεί το πιστωτικό γεγονός, οποιοδήποτε συμβεί πρώτο. Στην περίπτωση που δεν συμβεί το πιστωτικό γεγονός, το οποίο καθορίζεται στο συμβόλαιο, τότε στην ωρίμανση ο πωλητής προστασίας B δεν έχει άλλη υποχρέωση. Κατά την περίπτωση όμως που συμβεί το πιστωτικό γεγονός, πριν φυσικά την ωρίμανση, τότε ο πωλητής προστασίας B οφείλει να επιστρέψει είτε την ονομαστική αξία του υποκείμενου τίτλου ως αντάλλαγμα του υποκείμενου τίτλου που αθετήθηκε (physical settlement) είτε ένα χρηματικό ποσό το οποίο είναι η διαφορά της ονομαστικής αξίας του υποκείμενου τίτλου και της αγοραστικής αξίας μετά την αθέτηση (cash settlement). Στην δεύτερη περίπτωση μπορεί το ποσό να είναι σταθερό και να συμφωνηθεί κατά την σύναψη του συμβολαίου (digital or binary default swap). Στην πρώτη περίπτωση ο πωλητής προστασίας σε περίπτωση αθέτησης μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε διάφορα ομόλογα του εκδότη που αθέτησε.

1.2 Basket default swap και First m-of-n-to-Default Swaps

Στη περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείτε από ένα σύνολο τίτλων κάποιων εκδοτών ή ένα σύνολο ομολόγων τότε αντί να ασφαλίσουμε κάθε τίτλο χωριστά, έχουμε την δυνατότητα να ασφαλίσουμε όλο το χαρτοφυλάκιο για την πρώτη αθέτηση που θα συμβεί. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται "first to default" ή " basket default"και έχει προφανώς χαμηλότερο κόστος, όμως καλύπτει ένα μέρος του χαρτοφυλακίου κ όχι ολόκληρο. Για χαρτοφυλάκια που περιέχουν μεγάλο αριθμό τίτλων η παραπάνω μέθοδος δεν είναι επαρκής και για αυτό το λόγω υπάρχει η δυνατότητα να ασφαλιστούν οι πρώτες m αθετήσεις από ένα σύνολο n τίτλων, διαδικασία η οποία ονομάζεται "first m of n" default swaps. Τέλος υπάρχει η δυνατότητα σε ένα ταξινομημένο σύνολο τίτλων να ασφαλιστεί ένα κομμάτι αυτών, για παράδειγμα σε ένα σύνολο 30 τίτλων να ασφαλιστούν από το τέταρτο μέχρι το όγδοο. Έτσι το basket default swap χρησιμοποιείται ως συμβόλαιο stop-loss και θυμίζει "στρώμα" (layer) μιας κλασικής αντασφάλισης, κατά την οποία ασφαλίζεις εκείνο μόνο το μέρος που αν αθετήσει θα σου κοστίσει την περισσότερη ζημιά. Είναι σημαντικό ωστόσο το κατά πόσο ο κίνδυνος των τίτλων διαπραγματεύονται στην αγορά, δηλαδή το κατά πόσο μπορούν να βρεθούν τα συμβόλαια για την παραπάνω διαδικασία ασφάλισης.

1.3 Collateralized Debt

Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται μια απλοϊκή περίπτωση σχεδιασμού ενός asset backed security μέσω της διαδικασίας τμηματοποίησης. Έστω ένα σύνολο από 50 ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου[1] (zero-coupon) με ωρίμανση ένα χρόνο. Υποθέτουμε ότι η ονομαστική αξία τους είναι 1 και ότι έχουν μηδενικό ποσοστό ανάκτησης σε περίπτωση αθέτησης. Έχουμε επίσης και τρία χρεόγραφα (securities) : το equity tranche το junior tranche και το senior tranche με ονομαστικές αξίες 5, 35 και 10 αντίστοιχα. Το senior tranche θα πρέπει να λάβει ολόκληρο την ονομαστική αξία των 10 σε ένα χρόνο αν δεν υπάρχουν περισσότερες από 40 αθετήσεις. Αν υπάρχουν περισσότερες από 40 αθετήσεις σε έναν χρόνο τότε το senior tranche θα λάβει όλες της χρηματορόες (οι οποίες θα είναι μικρότερες από 10 αφού αθετήθηκαν πάνω από 40 δάνεια) από το σύνολο των δανείων και τα άλλα δυο τμήματα δεν θα πάρουν τίποτα. Αν συμβούν λιγότερες από 40 αθετήσεις τότε το junior tranche θα αποπληρωθεί με μέγιστο όριο 35 αφού όμως πρώτα αποπληρωθεί το senior tranche. Τέλος το equity tranche θα αποπληρωθεί εφόσον περισσεύουν χρήματα από την αποπληρωμή των άλλων δυο και θα λάβει 5 σε περίπτωση που δεν συμβεί αθέτηση ή τίποτα αν συμβούν 5 ή περισσότερες αθετήσεις (διότι αν συμβούν περισσότερες από 5 αθετήσεις οι χρηματοροές θα εξαντληθούν στα δυο προηγούμενα tranches).

Γενικά τα Collateralized Debt Obligations (CDOs) είναι πιο περίπλοκα αλλά μέσω του παραδείγματος μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα του τι σημαίνει κατανομή-τμηματοποίηση των τίτλων ενός χαρτοφυλακίου βάση προτεραιότητας και με κριτήριο την πιθανότητα αθέτησης ή γενικότερα πιστωτικού γεγονότος. Υπάρχουν δυο είδη CDOs, τα CLOs (collateralized loans obligations) και τα CBOs (collateralized bond obligations) εκ των οποίων τα μεν πρώτα αναφέρονται σε τραπεζικά δάνεια ενώ τα δεύτερα σε ομόλογα. Τα CLOs είναι πολύ χρήσιμα για τις τράπεζες διότι τιτλοποιώντας τα μπορούν να μειώσουν τον πιστωτικό κίνδυνο που προέρχεται από αυτά, να λάβουν ρευστό από την τιτλοποίηση και συνεπώς να μειώσουν τις κεφαλαιακές απαιτήσεις. Η τιτλοποίηση των CLOs γίνεται μέσω μιας, ανεξάρτητης από την τράπεζα, εταιρείας ειδικού σκοπού που συστήνει η τράπεζα και η οποία μοναδικό σκοπό έχει την τμηματοποίηση των τίτλων σε securities και την πώληση τους σε επενδυτές. Τα δάνεια

[1]Ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου είναι ομόλογα που δεν δίνουν τοκομερίδιο, αλλά η τιμή έκδοσης τους είναι πολύ χαμηλότερη από την ονομαστική αξία τους.

αυτά πλέον δεν ανήκουν στην τράπεζα (αλλά τα διαχειρίζεται η ίδια) και ως εκ τούτου η τράπεζα λαμβάνει τα οφέλη της τιτλοποίησης που αναφέρθηκαν στο παραπάνω παράδειγμα. Ωστόσο για την αποφυγή του ηθικού κινδύνου η τράπεζα κρατάει το κομμάτι τμηματοποίησης των ιδίων κεφαλαίων (equity tranche) το οποίο είναι το πρώτο που απορροφά ζημιές, παρ΄ όλα αυτά όμως κατάφερε να αντικαταστήσει δάνεια συνολικής ονομαστικής αξίας 50 με 5 μειώνοντας έτσι τις κεφαλαιακές της απαιτήσεις κατά 10% αλλά επίσης μείωσε σε μεγάλο βαθμό και το πιστωτικό κίνδυνο αφού ο κίνδυνος του equity tranche σε σχέση με αυτόν του συνολικού χαρτοφυλακίου είναι πολύ μικρός. Όλα αυτά βέβαια εφόσον δεν συμβούν περισσότερες από 5 αθετήσεις (γεγονός όμως με πολύ μικρή πιθανότητα).

1.4 Credit Linked Notes

Στα default swaps υπάρχει πιθανότητα σε περίπτωση πιστωτικού γεγονότος ο πωλητής προστασίας να αθετήσει και αυτός, με αποτέλεσμα ο αγοραστής προστασίας να μην λάβει την αποζημίωση που δικαιούται, αφού κατά την σύναψη του συμβολαίου ο πωλητής προστασίας δεν πληρώνει τίποτα συνεπώς μπορεί να συνάψει το συμβόλαιο χωρίς να έχει τα κεφάλαια. Στα credit linked notes (CLNs), αντιθέτως ο πωλητής προστασίας B αγοράζει ένα ομόλογο, το CLN, από τον αγοραστή προστασίας A του οποίου οι χρηματοροές είναι συνδεδεμένες με την απόδοση του υποκείμενου τίτλου C. Έτσι αν αθέτησε ο C τότε η πληρωμές στον πωλητή προστασίας και κάτοχο του ομολόγου μειώνονται. Συνεπώς με τα CLNsαποφεύγετε ο κίνδυνος αθέτησης του πωλητή προστασίας (αφού πληρώνει κατά την αγορά του ομολόγου) όμως είναι εκτεθειμένος και στον κίνδυνο αθέτησης του εκδότη του υποκείμενου τίτλου C αλλά και του αγοραστή προστασίας A. Αντιθέτως ο αγοραστής προστασίας A έχει μεταφέρει πλήρως τον πιστωτικό κίνδυνο.

1.5 Το συνθετικό CDO

Στα συνθετικά CDO η ύπαρξη της εταιρίας ειδικού σκοπού (ΕΕΣ)[2] δεν αποσκοπεί στη μεταφορά περιουσιακών στοιχείων αλλά στην παροχή προστασίας στο δημιουργό της, μέσο credit default swaps. Ο δημιουργός της ΕΕΣ αγοράζει CDS απ αυτήν και η ΕΕΣ με την σειρά της δομεί CLNs των οποίων οι πληρωμές είναι συνδεδεμένες με τον εκδότη του υποκείμενου τίτλου του CDS. Τα έσοδα από τα ομόλογα επενδύονται σε κρατικά ομόλογα. Στην περίπτωση κατά την οποία συμβεί πιστωτικό γεγονός και τα συσσωρευμένα ασφάλιστρα-κουπόνια δεν επαρκούν τότε τα κρατικά ομόλογα χρηματοδοτούν την αποζημίωση και ο αγοραστής των CLNs λαμβάνει μειωμένα κουπόνια.

1.6 Αναλύωντας το CDS

Με σκοπό να αντισταθμίσουμε CDS και να καταλάβουμε τον ρόλο τους στα συνθετικά CDOs θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε κατά προσέγγιση το credit swap μέσα από

[2]Η Εταιρεία Ειδικού Σκοπού είναι μια εταιρεία που ιδρύεται ειδικά με σκοπό την πραγματοποίηση συγκεκριμένων και βραχυπρόθεσμων στόχων, όπως να απομονώσει το χρηματοοικονομικό κίνδυνο μιας επιχείρησης

μια θέση πωλητή σε ένα χωρίς-κίνδυνο floating-rate και θέση αγοραστή (short) σε ένα floating-rate με σταθερό spread (c-FRN). Επίσης το CDS αναφέρετε σε έναν μόνον εκδότη υποκειμένου τίτλου. Το χωρίς-κίνδυνο floating rate είναι μια ομολογία η οποία πληρώνει ένα short rate την στιγμή $t+1$ μέχρι την ωρίμανση T όπου η πληρωμή είναι $1+r_{T-1}$[3]. Γενικά μια τέτοια ομολογία είναι σαν να επενδύεις 1 την στιγμή 0 με ωρίμανση 1, και να συνεχίζεις να επανεπενδύεις σε κάθε περίοδο μέχρι την επιθυμητή ωρίμανση. Ως εκ τούτου η τιμή μιας τέτοιας ομολογίας είναι 1 σε κάθε πληρωμή κουπονιού. Ένα floating-rate με ωρίμανση T και σταθερό spread (c-FRN) είναι μια ομολογία εκδοθείσα από τον εκδότη αναφοράς και με ένα κουπόνι το οποίο πληρώνει το κυμαινόμενο επιτόκιο συν ένα σταθερό spread $c(T)$ το οποίο είναι αρκετά μεγάλο ώστε να κάνει την ομολογία να διαπραγματεύεται στην ονομαστική του αξία αρχικά. Υποθέτουμε ότι τιμή ανάκτησης την ημέρα της αθέτησης για κάθε μονάδα κεφαλαίου είναι $\delta(\tau)$.

Πίνακας 1.1: Οι χρηματοροές σε περίπτωση μή αθέτησης.

Time	t=0	t=1	.....	t=T-1	t=T
Long c-FRN	-1	$r_0 + c(T)$	.....	$r_{T-2} + c(T)$	$1 + r_{T-1}$
Short floater	1	$-r_0$	.....	$-r_{T-2}$	$-(1 + r_{T-1})$
Total	0	c(T)	.....	c(T)	c(T)

Αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι οι χρηματοροές ενός CDS είναι ίσες με long θέση[4] σε ένα c-FRN σε συνδυασμό με short θέση[5] σε ένα default-free floating-rate note. Για να δούμε πόσο κοντά είναι θα εξετάσουμε τις πληρωμές σε ένα σενάριο με αθέτηση πριν την ωρίμανση και ένα χωρίς αθέτηση. Θα κάνουνε ωστόσο τις εξής παραδοχές: οι χρονικές στιγμές πληρωμής των κουπονιών του ομολόγου συμπίπτουν με αυτές του CDS, επίσης σε περίπτωση αθέτησης η διευθέτηση γίνεται την αμέσως επομένη χρονική στιγμή που θα καταβαλλόταν κουπόνι χωρίς να επαύξηση επιτοκίου. Βλέποντας τους πίνακες 1.1 και 1.2 παρατηρούμε ότι οι χρηματοροές είναι παρόμοιες σε μεγάλο βαθμό με αυτές του default swap το οποίο πληρώνει ασφάλιστρα και απαιτεί πληρωμή αποζημίωσης σε περίπτωση αθέτησης και αυτό συμβαίνει και στη προηγούμενη στρατηγική με μια μικρή παραδοχή. Αυτό που την διαχωρίζει από το CDS είναι η μικρή πληρωμή τόκων από την εκκαθάριση του floater την στιγμή της αθέτησης.

Είναι ξεκάθαρο ότι τα ασφάλιστρα του CDS μπορούμε να το δούμε σαν credit spread. Επίσης οι διαφορές ανάμεσα στο spread των ομολόγων και των default swap μπορούν να αναχθούν στις υποθέσεις του παραδείγματος. Για παράδειγμα, αν ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει πουλήσει ένα CDS θα μπορούσε να αντισταθμίσει τον κίνδυνο παίρνοντας θέση αγοραστή (short) σε ένα c-FRN και αγοράζοντας ένα ακίν-

[3]Η ονομαστική αξια σύν το χωρίς-κίνδυνο floating rate την στιγμή $t+1$.

[4]Θέση αγοράς (long position) είναι η θέση την οποία έχει πάρει ένας επενδυτής αγοράζοντας ένα χρεόγραφο, ένα νόμισμα, ένα συμβόλαιο ή ένα εμπόρευμα με σκοπό την επένδυση ή την κερδοσκοπία.

[5]Ανοικτή πώληση (short selling) είναι μία τεχνική κατα την οποία οι επενδυτές δανείζονται περιουσιακά στοιχεία που δεν κατέχουν, από άλλους επενδυτές, τα πουλάνε και σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα αναγκαστούν να τα αγοράσουν πάλι για να τα επιστρέψουν στο δανειστή.

Πίνακας 1.2: Οι χρηματοροές σε περίπτωση αθέτησης σε χρόνο $t < T$, όπου η θέση στο default-free floater είναι προς εξόφλησή.

Time	t=0	t=1	.....	t=T	$t > T$
Long c-FRN	-1	$r_0 + c(T)$	.....	$\delta(\tau)$	0
Short floater	1	$-r_0$	.....	$-(1 + r_{T-1})$	0
Total	c(T)	c(T)	.....	$(\delta(\tau) - 1) - r_{\tau-1}$	0

δυνο floater[6]. Το short σε επιχειρηματικά ομόλογα γίνεται τυπικά αποκτώντας ένα security με αντίστροφη repo συναλλαγή (πρόκειται για μια συναλλαγή κατά την οποία ένα χρηματικό ποσό εκμισθώνεται και το security δίνεται ως εγγύηση) και στην συνέχεια το πουλάς. Ωστόσο το να πάρεις το ομόλογο από την αγορά repo[7] ίσως έχει μεγάλο κόστος και το κόστος της αντιστάθμισης του CDS κάνει το ίδιο το CDS ακριβότερο. Υπάρχει όμως η δυνατότητα για έναν πωλητή CDS να προστατευθεί από την αθέτηση μέσω της τιτλοποίησης περιουσιακών στοιχείων (asset securitization).

Μια άλλη ανάλυση: συνδυάζουμε την αγορά ενός fixed-rate επιχειρηματικού ομολόγου με ένα CDS με physical settlement. Με την πρώτη ματιά παρατηρούμε ότι είναι ένα ομόλογο χωρίς κίνδυνο. Στη περίπτωση που δεν υπάρξει αθέτηση, το ομόλογο θα πληρώσει 1 στην ωρίμανση και θα έχουμε μια ροή από το σταθερό περιθώριο κουπόνι ίσο με την διαφορά του κουπονιού του ομολόγου και του ασφαλίστρου του CDS. Σε περίπτωση χρεοκοπίας λαμβάνουμε την ονομαστική αξία του ομολόγου σε αντάλλαγμα του αθετημένου ομολόγου που μας δίνει 1 την στιγμή της αθέτησης. Ως εκ τούτου είμαστε κοντά σε ένα χωρίς κίνδυνο fixed-rate ομόλογο αν παραβλέψουμε το γεγονός ότι λαμβάνουμε την ονομαστική αξία σε τυχαία μέρα.

Ας επιχειρήσουμε μια περαιτέρω επεξεργασία. Ένας συνδυασμός σταθερού κουπονιού και λήψης 1 σε τυχαία στιγμή δεν μας δίνει ένα ευδιάκριτο ακίνδυνο επιτόκιο, αλλά αν αντιθέτως το επιτόκιο ήταν κυμαινόμενο, ο συνδυασμός κυμαινόμενου επιτοκίου και της λήψης 1 σε τυχαίο χρόνο είναι πολύ κοντά σε ένα ακίνδυνο floater. Τώρα θα παρουσιάσουμε τα συμβόλαια swap τα οποία όχι μόνο είναι ακυρώσιμα αλλά ακυρώνονται αυτόματος σε περίπτωση αθέτησης του υποκειμένου security. Αγοράζουμε το ομόλογο, την προστασία από την αθέτηση και μπαίνουμε σε ένα ακυρώσιμο συμβόλαιο swap που παράγει ακριβώς τις ίδιες ροές με το floating-rate και με πληρωμή 1 σε σε τυχαία μέρα (το συμβόλαιο θα έχει αξία 1). Η αναγκαστική ακύρωση είναι τεχνητή σε αυτό το παράδειγμα. Αν αφήσουμε την ακυρωσιμότητα εκτός, οδηγούμαστε στο τελικό παράδειγμα μεταφοράς του πιστωτικού κινδύνου, το asset swap.

1.7 Το Asset Swap

Τα c-FRN μας παρήγαγαν το τι θα αποκτήσουμε αγοράζοντας ένα επιχειρηματικό ομόλογο με σταθερό επιτόκιο και στην συνέχεια το ανταλλάξαμε με κυμαινόμενο μέσο ενός συνηθισμένου IRS . Η μόνη διάφορα είναι ότι το IRS θα εξακολουθήσει να πλη-

[6]Είναι ένα χρηματοοικονομικό προϊόν με κυμαινόμενο κουπόνι. Έχει κουπόνι που κυμαίνεται σύμφωνα με κάποιο καθορισμένο επιτόκιο αναφοράς (reference rate). Οι τιμές του που διαμορφώνονται στην αγορά τείνουν να είναι ασταθείς ενώ η διάρκεια είναι κατά κανόνα πολύ υψηλή

[7]Συμφωνίες επαναγοράς (repos) είναι συμφωνίες μεταξύ ενός δανειστή και ενός οφειλέτη να πουλήσουν και μετά να επαναγοράσουν κάποιο χρεόγραφο μικρού κινδύνου.

ρώνει ακόμη και μετά την αθέτηση του ομολόγου. Ο συνδυασμός της αγοράς ενός ομολόγου και της αλλαγής από σταθερό επιτόκιο σε κυμαινόμενο είναι γνωστό ως asset-swap πακέτο και οφείλετε στο ότι κάποιοι επενδυτές θεωρούν ότι το κουπόνι (σταθερού επιτοκίου) με μεγάλη πιθανότητα αθέτησης ενός ομολόγου είναι υποτιμημένο αλλά δεν είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν περισσότερο επιτοκιακό κίνδυνο. Παρακάτω θα θεωρήσουμε τρεις τιμές ωριμάνσεων με εξαρτημένες τιμές (και οι τρείς είναι εξαρτημένες από την ωρίμανση).

- $C(T)$ ή απλά C: η τιμή κουπονιού ενός επιχειρηματικού ομολόγου.
- α(T) ή απλά α: asset-swap rate ή απλά: swap rate.
- $C^s(T)$ή απλά C^s: swap rate.

Θεωρούμε ένα σταθερού επιτοκίου ομόλογο του οποίου η κύρια αξία πληρώνεται μία φορά κατά την ημερομηνία ωρίμανσης T, σε αντίθεση με την απόσβεση του ομολόγου κατά τη διάρκεια ζωής του (bullet bond) που πληρώνει C ανά περίοδο. Ο αγοραστής του asset-swap λαμβάνει, μέχρι την ωρίμανση του πακέτου, τις χρηματοροές του υποκειμένου ομολόγου (συμπεριλαμβανομένου της τιμής ανάκτησης σε περίπτωση αθέτησης) και πληρώνει C στο swap κομμάτι ενώ λαμβάνει κυμαινόμενο επιτόκιο (από τις ροές που παράγει το swap rate) συν ένα σταθερό spread a (asset-swap spread). Το Cδεν είναι ίσο με το swap rate για ωρίμανση T. Το swap είναι ένα παράδειγμα ενός εκτός αγοράς swap όπου το σταθερό κουπόνι διαφέρει από το swap rate της αγοράς. Οι πληρωμές σε περίπτωση αθέτησης και μη αθέτησης φαίνονται στον προηγούμενο και τον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 1.3: Χρηματοροές από ένα asset swap σε περίπτωση αθέτησης τη στιγμή τ. Το swap συνεχίζεται και μετά την αθέτηση.

Time	t=0	t=1	.....	τ	$\tau < t < T$
Long bond	-1	C	.....	$\delta(\tau)$	0
Swap/pay fixed	1	$r_1 + \alpha - C$	.....	$r_{\tau-1} + \alpha - C$	$r_\tau - 1 + \alpha$
Total	-1	$r_0 + \alpha$	.....	$\delta(\tau) + r_{\tau-1} + \alpha - C$	$r_\tau + \alpha - C$

Το asset swap spread α ορίζεται έτσι ώστε η αρχική τιμή του πακέτου να είναι 1, ανεξάρτητα από την αγοραστική αξία του ομολόγου. Για να βρούμε την δίκαιη τιμή του α εργαζόμαστε σύμφωνα με τα παρακάτω.

- $U(0,t)$: η αξία με ωρίμανση t ενός zero-coupon ομολόγου από τον ίδιο εκδότη με το asset swap.
- $U^C(0,t)$: η αξία του bullet ομολόγου με ωρίμανση t και κουπόνι C(t).
- $p(0,t)$: η αξία ενός ομολόγου χωρίς κίνδυνο.

Αγνοούμε τον πιστωτικό κίνδυνο και των δυο μερών του asset swap και συγκεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στον κίνδυνο αθέτησης του υποκείμενου τίτλου. Καθορίζουμε την αξία μιας ακίνδυνης ράντας πληρωμών του 1 σε κάθε περίοδο και μιας παρόμοιας ράντας που εκδίδεται από τον εκδότη του asset swap:

$$\sum_{t=0}^{T} p(0,t), A^C(T) = \sum_{t=0}^{T} U(0,t). \tag{1.1}$$

Προφανώς, η αξία των πληρωμών στο επιχειρηματικό ομόλογο είναι ίση με

$$CA^C(T) + U(0,T).$$

Η τιμή των πληρωμών του interest rate ϑέλει λίγο περισσότερη προσοχή. Ο αγοραστής του asset-swap πληρώνει $C - \alpha$ για να λάβει το κυμαινόμενο επιτόκιο. Αν το swap rate της αγοράς είναι διαφορικό από την ποσότητα αυτή, τότε το swap μέσα στο asset swap δεν έχει αρχική αξία μηδέν. Έχει μια ϑετική αξία αν ο αγοραστής του asset swap πληρώνει ένα χαμηλότερο σταϑερό επιτόκιο από το να πληρώνει το swap rate της αγοράς. Η διαφορά είναι $C^S - (C - \alpha)$ και η αξία αυτής της χρηματοροής είναι $(C^S + \alpha - C)A(T)$, αφού το swap πάντα φτάνει στην ωρίμανση. Είμαστε τώρα σε ϑέση να βρούμε το asset-swap spread : για να έχουμε αρχική αξία 1, πρέπει να έχουμε:

$$U^C(0,T) + (C^S - \alpha - C)A(T) = 1$$

δηλαδή,

$$\alpha = \frac{1 - U^C(0,T)}{A(T)} + C - C^S$$

Όταν το υποκείμενο ομόλογο έχει τιμολογηϑεί στο μέσο όρο, τότε μειώνεται στο $\alpha = C - C^S$ και είναι τότε ένα spread μεταξύ του σταϑερού κουπονιού και του swap rate. Σε αυτή τη περίπτωση το α είναι καϑαρά ένα credit spread.

Όταν το υποκείμενο ομόλογο δεν είναι στο μέσο όρο, το asset-swap spread πρέπει να το αντανακλά αυτό. Αν σκεφτούμε το υποκείμενο ομόλογο σαν ένα bullet ομόλογο που πληρώνει C σε κάϑε περίοδο μέχρι την ωρίμανση και $1 + C$ στην ωρίμανση , τότε εκφράζουμε την τιμή του επιχειρηματικού ομολόγου ως $U^C(0,T) = CA^C(T) + U(0,T)$ και βρίσκουμε τελικά ότι

$$\alpha = \frac{1}{A(T)}[1 - U(0,T) + C(A(T) - A^C(T))] - C^S$$

Τώρα, αν αναρωτηϑούμε, για την ίδια πιστωτική ποιότητα, τι ϑα συμβεί στο asset-swap spread όταν μειώσουμε το κουπόνι του υποκείμενου ομολόγου. Η μείωση του κουπονιού δεν έχει επίπτωση στην τιμή του κεφαλαίου $U(0,T)$ εφόσον υποϑέσουμε ότι η πιστωτική ποιότητα παραμένει σταϑερή, αλλά εφόσον $A(T) > A^C(T)$, μειώνοντας το κουπόνι κρατώντας σταϑερή την πιστωτική ποιότητα ϑα προκύψει ένα χαμηλότερο asset-swap spread.

1.8 Τιμολογώντας ένα Default Swap

Αυτή η βασική ανάλυση, βασισμένη στο βιλίο [4], έχει σκοπό να καταλάβουμε τα CDS ωστόσο χρησιμοποιεί προϊόντα που τυπικά δεν εμπορεύονται. Σ αυτή τη παράγραφο ϑα πάμε πίσω σε μια πιο θεμελιώδη προσέγγιση και θα προσπαθήσουμε να τιμολογήσουμε τα CDS από τις βασικές χρηματοροές: βρίσκοντας την πληρωμή κουπονιού η οποία κάνει το CDS να έχει μηδενική αξία στην αρχή. Η αξία είναι υπολογισμένη κάνοντας χρήση πληροφοριών από την ένταση αθέτησης και το ποσοστό ανάκτηση σε περίπτωση χρεοκοπίας.

Παραμερίζοντας τις υποθέσεις της ανάκτησης, η παρούσα αξία των πληρωμών των κουπονιών είναι εύκολα διαχειρίσιμη. Ας υποθέσουμε ότι το υποκείμενο ομόλογο έχει ημέρες κουπονιών $1...T$ και ωρίμανση την μέρα T. Ας υποθέσουμε ότι η ανάκτηση στο ομόλογο ανά μονάδα ονομαστικής αξίας είναι δ σε περίπτωση αθέτησης έτσι ώστε ο πωλητής προστασίας να πληρώσει $1 - \delta$ σε περίπτωση αθέτησης. Οι υποθέσεις ανακτήσεις μπορούν να αλλάξουν σε κλασματική ανάκτηση ή ανάκτηση ταμείου, αλλά θα διευκρινίσουμε χρησιμοποιώντας αυτές τις υποθέσεις και θα αναφερθούμε στην προηγούμενη συζήτηση των διαφόρων υποθέσεων ανάκτησης. Θέλουμε να βρούμε το δίκαιο swap premium $C^{ds}(T)$ μέχρι την ωρίμανση T και υποθέτουμε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την ένταση αθέτησης του υποκειμένου security με τη μέθοδο Cox-Ingersol-Ross με ένταση λ. Εφόσον ο αγοραστής προστασίας πληρώνει ένα σταθερό premium, είναι εύκολο να βρούμε την τιμή αυτού του σκέλους του swap:

$$\pi^{pb} = E\sum_{i=1}^{T} e^{-\int_0^i r_s ds} I_{\{\tau > i\}} C^{ds}(T) = C^{ds}(T) E\sum_{i=1}^{T} e^{-\int_0^i (r_s+\lambda_s)ds} = C^{ds}(T)\sum_{i=0}^{T} u^0(0,i)$$

Όπου με $u^0(0,i)$ συμβολίζουμε ένα, με κίνδυνο, zero-coupon ομόλογο με μηδενική ανάκτηση. Η αξία π^{ps} των πληρωμών που γίνονται από τον πωλητή προστασίας, εάν γίνονται αμέσως κατά την χρεωκοπία την στιγμή τ, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Cox ξανά, είναι:

$$\begin{aligned}
\pi^{ps} &= E[e^{-\int_0^T r_s ds} I_{\{\tau \le T\}}(1-\delta)] = \\
&= (1-\delta)E\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^T (r_s+\lambda_s)dsdt} = \\
&= (1-\delta)\int_0^T E[\lambda_t e^{-\int_0^T (r_s+\lambda_s)ds}]dt
\end{aligned}$$

Θεωρώντας για απλοποίηση, ανεξαρτησία ανάμεσα στην ένταση αθέτησης λ_s και το επιτόκιο (short rate) r_s τότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\pi^{ps} &= (1-\delta)\int_0^T E[e^{-\int_0^t r_s ds}]E[-\frac{d}{dt}e^{-\int_0^t \lambda_s}]dt) = \\
&= \int_0^T p(0,t)(-\frac{d}{dt}S(0,t))dt = \\
&= (1-\delta)\int_0^T \hat{\lambda}(t)S(0,t)p(0,t)dt
\end{aligned}$$

Όπου $\hat{\lambda}$ είναι το hazard rate της κατανομής επιβίωσης.

$$S(0,t) = E[e^{-\int_0^t \lambda_s ds}] = e^{-\int_0^t \hat{\lambda}_s ds}$$

Εξισώνοντας τις εξισώσεις π^{pb} και πps παίρνουμε :

$$C^{ds} = \frac{(1-\delta)\int_0^T \hat{\lambda}(t)S(0,t)p(0,t)dt}{\sum_{i=1}^T u^0(0,i)} =$$
$$= \frac{(1-\delta)\int_0^T \hat{\lambda}(t)S(0,t)p(0,t)dt}{\sum_{i=1}^T p(0,i)S(0,i)}$$

Το οποίο ισχύει για διευθέτηση ακριβώς την ημέρα αθέτησης, δηλαδή σε περίπτωση αθέτησης η πληρωμή θα γίνει την αμέσως επόμενη ημέρα κουπονιού, και συμβολίσουμε την διάφορα του hazard rate:

$$\hat{Q}(\tau = i) = Q(\tau \in [i-1, i] = S(0, i-1) - S(0,i)$$

Τότε παίρνουμε το swap premium σε μια μορφή που περιλαμβάνει μόνο ένα πεπερασμένο άθροισμα:

$$C^{ds}(T) = \frac{(1-\delta)\sum_{i=1}^T p(0,i)\hat{Q}(\tau = i)}{\sum_{i=1}^T p(0,i)s(0,i)}$$

Έτσι μέσω της καμπύλη default swap που προκύπτει θεωρώντας το προηγούμενο ως συνάρτηση του T μπορούμε να αντλήσουμε την πιθανότητα αθέτησης που κρύβεται μέσα σ αυτήν.

1.8.1 Διαφορές ανάμεσα στα CDS spreads και τα spreads ομολόγων

Ένας βασικό εργαλείο που μας παρέχει η αγορά CDS είναι ότι μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για την καμπύλη του πιστωτικού κινδύνου, του κάθε εκδότη. Η έκδοση ενός CDS από μια επιχείρηση δεν επηρεάζει την κεφαλαιακή της διάρθρωση (δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο χρηματοδοτεί την λειτουργία της και την ανάπτυξη της μέσω διαφορετικών μέσων χρηματοδότησης) και επιπλέον είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η τιμή του θα συμπεριφέρεται γραμμικά σε σχέση με το ασφαλισμένο ποσό. Αυτό σημαίνει ότι η παραδοσιακή μαθηματική δομή, κατά την οποία τιμολογούμε το κουπόνι ενός ομολόγου προσθέτοντας τις αξίες των σχετικών zero-coupon ομολόγων, μπορεί να εφαρμοσθεί για συμβόλαια default swap. Επίσης, οι ωριμάνσεις των CDS μπορεί να διαφέρουν από τις ωριμάνσεις που έχουν τα υπόλοιπα χρέη.

Ωστόσο ανάμεσα στα CDS και στα ομόλογα υπάρχουν διαφορές που είναι πιθανών να αντανακλώνται στα spreads και πιο συγκεκριμένα, τα spreads των CDS θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα από αυτά των ομολόγων διότι υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στα δυο ήδη συμβολαίων σχετικά με το πιστωτικό γεγονός και με τον τρόπο παράδοσης αφού όσο αφορά το τελευταίο ο πωλητής προστασίας δεν γνωρίζει ποιο ομόλογο παραδίδεται και είναι πιθανών να το τιμολογήσει εσφαλμένα. Επίσης ο αγοραστής CDS δεν έχει ανάμιξη στην συμφωνία με τον εκδότη του υποκειμένου τίτλου (το οποίο είναι ομόλογο) και ακόμη το κόστος της θέσης short στο ομόλογο μέσω reverse repo οδηγεί σε ακόμα μεγαλύτερο CDS spread. Ωστόσο η επιλογή της αντιστάθμισης και της «ασφάλισης» από τις εταιρίες να πουλάνε συμβόλαια CDS ώστε να επωφελούνται από την έκθεση στο πιστωτικό κίνδυνο, θα μπορούσε να μειώσει τα CDS spreads.

1.8.2 Ένας υπολογισμός για τη πρώτη αθέτηση

Έστω $\tau_1, ..., \tau_N$ ανεξάρτητες εκθετικές μεταβλητές με παραμέτρους $\lambda_1, ..., \lambda_N$ Τότε η $\tau^* = \min_{i=1,...,N} \tau_i$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\lambda^* = \lambda^1 + ... + \lambda^N$ και αυτό διότι:

$$P(\tau^* > t) = P(\tau_1, ..., \tau_N > t) = \prod_{i=1}^{N} P(\tau_i > t) = e^{-\sum_{i=1}^{N} \lambda^i t} = e^{-\lambda^* t}$$

Από το νόμο του Bayes παίρνουμε την κατανομή της έντασης της πρώτης αθέτησης που θα συμβεί η οποία είναι ανεξάρτητη από την χρονική στιγμή της αθέτησης: $P(\tau^* = \tau_i | \tau^* = t) = \frac{\lambda^i}{\lambda}$. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση της ανεξαρτησίας (υπό όρους) των χρονικών στιγμών αθέτησης των εκδοτών (μέσω διαδικασίας Cox) Έστω $G_r = \sigma X_s : 0 \leq s \leq t$ όπου X είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή και $\tau_i = inf\{t \geq 0 : \int_0^t \lambda^i(X_s)ds > E_i\}$ για N συναρτήσεις αθέτησης $\lambda(\cdot)^i$ και ανεξάρτητες εκθετικές μεταβλητές $E_1, .., E_N$ με μέση τιμή 1.
Σημείωση: Απο το τ^* όπως το περιγράψαμε πρίν, παίρνουμε:

$$P(\tau^* > t) = E\left[P(\tau^* > t) | G_T\right] = E[\prod_{i=1}^{N} e^{-\int_0^t \lambda^i(X_s)ds}] = E[e^{-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds}] \tag{1.2}$$

όπου $\lambda^*(\cdot) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^i(\cdot)$.
Συνεπώς, η ένταση κατά την χρονική στιγμή της πρώτης αθέτησης είναι απλά το άθροισμα των επιμέρους εντάσεων ακόμη και σε αυτή την περίπτωση των τυχαίων εντάσεων. Φυσικά βασιζόμαστε στην υπόθεση των μη-ταυτόχρονων αλμάτων δηλαδή κάθε εκθετική μεταβλητή αφορά μία αθέτηση, διαφορετικά η ένταση την πρώτης αθέτησης θα πρέπει να είναι μικρότερη από το άθροισμα των επιμέρους εντάσεων.

Αυτό σημαίνει ότι η αξία των πληρωμών των premiums, από τον αγοραστή προστασίας, μπορεί να τιμολογηθεί ακριβώς σε ένα CDS, ωστόσο δεν είναι αυτό αρκετό. Για να βρούμε το ύψος της πληρωμής των premiums, τα οποία οδηγούν σε μηδενική αρχική αξία, πρέπει να κοιτάξουμε την αξία των πληρωμών του πωλητή προστασίας. Έχοντας αυτή τη πληρωμή ανεξάρτητη από το ποιος εκδότης θα αθετήσει πρώτος, μπορούμε ξανά να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από τα default swap. Ωστόσο θα πρέπει να προσέξουμε το ποσοστό ανάκτησης, αν υπάρχει. Γι' αυτό το λόγο επιπρόσθετα στη χρονική στιγμή της αθέτησης τ^*, θεωρούμε K την ταυτότητα όποιου αθετήσει πρώτου, παίρνοντας τιμές 1,2,3,..,N (ή 0 αν δεν υπάρξει αθέτηση). Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned}
&P(\tau^* \in dt, K = i) = \\
&= P(\tau_i \in dt, \tau_j > t, j \neq i) = \\
&= \lambda^i(X_t) e^{-\int_0^t \lambda^i(X_s)ds} \prod_{j \neq i} e^{(-\int_0^t \lambda^j(X_s)ds)dt} = \\
&= \lambda^i(X_t) e^{(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds)dt}
\end{aligned}$$

Έτσι παίρνουμε την πιθανότητα να αθετήσει ο i δεδομένου ότι η πρώτη αθέτηση συμβαίνει την χρονική στιγμή t:

$$P(K = i | \tau^* = t) = \frac{E(\lambda^i(X_t) e^{(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds)}}{E(\lambda^*(X_t) e^{(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds)}}$$

Έστω επίσης $h(i,t,X_t)1_{t\leqslant T})$ το οποίο δηλώνει την πληρωμή αποζημίωσης την χρονική στιγμή t στον αγοραστή προστασίας , αν $\tau^* = t$ και η αθέτηση έγινε από τον i.Τότε η αξία της υποχρέωσης του πωλητή προστασίας είναι:

$$\pi^{ps} = E[e^{(-\int_0^{\tau^*\wedge T} r_s ds)} h(K,\tau^*,X_{\tau^*})1_{\{\tau^*\leq T\}}] =$$
$$= E[E[e^{(-\int_0^{\tau^*\wedge T} r_s ds)} h(K,\tau^*,X_{\tau^*})1_{\{\{\tau^*\leq T\}\}}|G_T] =$$
$$= E[\sum_{i=1}^{N}\int_0^T e^{(-\int_0^t r_s ds)} h(i,t,X_t)\lambda^i(X_t)e^{(-\int_0^t \lambda^*(X_s)ds))}dt] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\int_0^T E[e^{(-\int_0^t (r_s+\lambda^*(X_s)ds))} h(i,t,X_t)\lambda^i(X_t)dt]$$

1.8.3 Υπολογισμοί για την m απο τις n αθετήσεις ενός default swap

Τα συγκεκριμένα συμβόλαια αποζημιώνουν τον αγοραστή για τις πρώτες m από n αποζημιώσεις από μια λίστα n εκδοτών, κάτω από την υπόθεση των μη ταυτόχρονων αθετήσεων. Αν $U^{m,n}(t)$ δηλώνει την τιμή την χρονική στιγμή t, ενός m από n συμβόλαια που αθέτησε και ${U_K}^{m-1,n-1}$ αντίστοιχα την τιμή ενός m-1 από n-1 συμβόλαια στα οποία ο εκδότης K δεν είναι ανάμεσα στα υποκείμενα securities, τότε παίρνουμε τη σχέση:

$$U^{m,n}(t) = \frac{1}{m-1}(\sum_{K=1}^{n} {U_k}^{m-1,n-1}(t) - (n-m)U^{m-1,n}(t))$$

Κεφάλαιο 2

Γνωρίζοντας τα Credit Default Swaps

Στις παρακάτω παραγράφους γίνεται μια επισκόπηση των βασικών σημείων του 8ου κεφαλαίου, σχετικά με την τιμολόγηση των Credit Default Swaps (CDS), του βιβλίου [1].

Ξεκινώντας ας περιγράψουμε τα CDS. Πρόκειται για συμβόλαια ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου στα οποία παίρνουν μέρος ο αγοραστής προστασίας A και ο πωλητής προστασίας B. O A αγοράζει από τον B ένα credit swap με σκοπό να μεταφέρει τον πιστωτικό κίνδυνο από έναν υποκείμενο τίτλο C στον B και αναλαμβάνει την υποχρέωση να πληρώνει κάποιο ποσό, σύμφωνα με μια ράντα, το οποίο ονομάζεται premium ή credit spread (συνήθως είναι η διάφορα της ονομαστικής αξίας και της αγοραστικής αξίας). Οι πληρωμές αυτές μπορούν να θεωρηθούν και σαν ασφάλιστρα, και το credit swap ως ασφάλιση έναντι ενός πιστωτικού γεγονότος το οποίο καθορίζεται κατά την σύναψη του συμβολαίου και συνήθως είναι η αθέτηση του εκδότη του υποκειμένου τίτλου C,για αυτό το λόγο πολλές φορές τα credit swaps ονομάζονται credit default swaps (CDS). Τα συμβόλαια αυτά έχουν συγκεκριμένη διάρκεια T κατά την οποία ο A είναι υποχρεωμένος να πληρώνει τα ασφάλιστρα μέχρι την ωρίμανση T ή το πιστωτικό γεγονός (όποιοι συμβεί πρώτο) και ο B να αποζημιώσει τον A σε περίπτωση αθέτησης.

Ένα άλλο πιστωτικό παράγωγο, το οποίο έχει και αυτό μορφή συμβολαίου, είναι το Total-Return Swap ή TROR (total rate of return). Στα TROR παίρνουν μέρος δυο αντισυμβαλλόμενοι οι οποίοι ανταλλάσσουν τις συνολικές αποδόσεις περιουσιακών στοιχείων που κατέχουν. Συνήθως ο λόγος που κάποιος θέλει να συνάψει έναν TROR είναι για να μεταφέρει τον πιστωτικό κίνδυνο που ενέχεται στην μεταβολή της πιστωτικής διαβάθμισης του περιουσιακού στοιχείου που κατέχει, έτσι ανταλλάσσει τις συνολικές του αποδόσεις με τις αποδόσεις ενός άλλου περιουσιακού στοιχείου, άλλου εκδότη που θεωρεί λιγότερο επικίνδυνο. Η ανταλλαγή αυτή των αποδόσεων βασίζεται στις μεταβολές της αγοραστικής αξίας των τιμών των περιουσιακών στοιχείων και των κουπονιών τους. Σε μια απλή μορφή ενός τέτοιου είδους συμβολαίου, δυο αντισυμβαλλόμενοι σε κάθε ημέρα πληρωμής κουπονιού ανταλλάσσουν ένα προσυμφωνημένο ποσό αυξημένο με την διαφορά της αγοραστικής απόδοσης μεταξύ των δυο περιουσιακών στοιχείων μέχρι την λήξη του συμβολαίου ανεξάρτητος αν υπάρξει πιστωτικό γεγονός. Θεωρητικά η αξία ενός τέτοιου συμβολαίου είναι μηδέν στην έναρξη του και αμέσως μετά από κάθε ημέρα πληρωμής κουπονιών αφού κατά την έναρξη τα δυο στοιχεία έχουν αγοραστική αξία ίση και επίσης μετά από κάθε ημέρα πληρωμής η διάφορα της αξίας τους γίνεται ξανά μηδέν. Για παράδειγμα αν δυο στοιχεία έχουν αγοραστική αξία 50 και κατά την ημέρα πληρωμής το ένα ανέβηκε 60 και το άλλο έπεσε 40 τότε θα πρέπει το πρώτο να πληρώσει το συμφωνημένο ποσό και επιπλέον 10 για να έρθουν ξανά σε ισορροπία. Φυσικά η στρατηγική που αναφέραμε δεν ισχύει στην πράξη διότι μπορεί να υπάρχουν και επιπλέον πληρωμές spreadή δικαιώματα από τον έναν αντισυμβαλλόμενο στον άλλον. Γενικά τα TRORS προσφέρουν όχι μονο προστασία από γεγονότα όπως η μείωση της πιστωτικής διαβάθμισης (ανεξαρτήτως αν συμβεί πιστωτικό γεγονός) αλλά και την δυνατότητα σε μικρότερους επενδυτές να αποκτήσουν μεγάλη έκθεση με λίγα χρήματα.

Ας αναφέρουμε τέλος και τα spread options τα οποία δίνουν στον αγοραστή την δυνατότητα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ένα ομόλογο σε συγκεκριμένη αποδοτική διάφορα (spread). Όπως και τα TROR έτσι και τα spread options παρέχουν κάλυψη αλλά και την δυνατότητα έκθεσης σε αλλαγές της πιστωτικής διαβάθμισης η οποία δεν συνεπάγεται απαραίτητα πιστωτικό γεγονός.

2.1 Βασικά στοιχεία των CDS

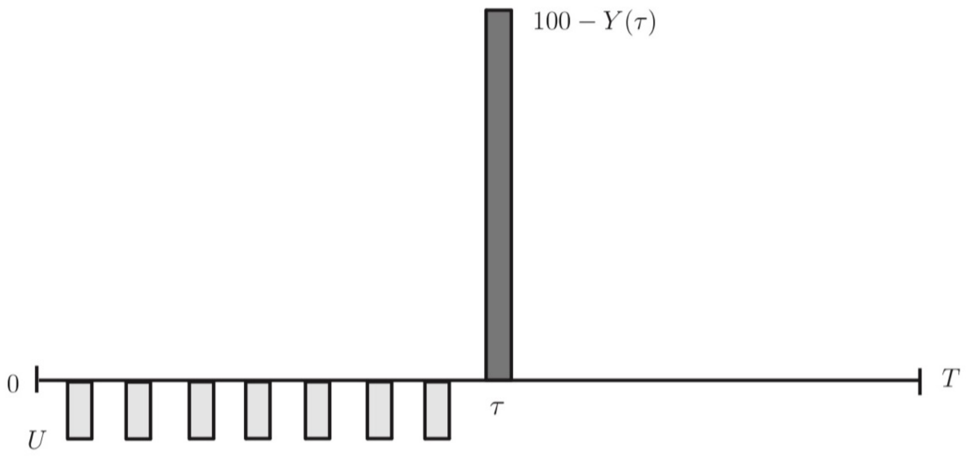
Πρόκειται για συμβόλαια με τυποποιημένους όρους από την ISDA (international swaps and derivatives association) στα οποία παίρνουν μέρος δυο αντισυμβαλλόμενοι και έχει ισχύ μέχρι να επέλθει το πιστωτικό γεγονός ή η ωρίμανση του συμβολαίου. Το πιστωτικό γεγονός δεν είναι απαραίτητο να είναι χρεωκοπία του εκδότη του υποκειμένου τίτλου (μπορεί για παράδειγμα να έχει ορισθεί ως πιστωτικό γεγονός η πιστοληπτική υποβάθμιση) ωστόσο θα πρέπει να υποστηρίζεται με αποδεικτικά στοιχεία όπως για παράδειγμα η δημοσίευση της είδησης στα μέσα μαζικής ενημέρωσης (ΜΜΕ).

Η πληρωμή της αποζημίωσης από τον B στον A, σε περίπτωση ενεργοποίησης του CDS, μπορεί να έχει την μορφή χρηματικής αποζημίωσης (cash settlement) η απλά την επιστροφή του υποκειμένου τίτλου C (ουσιαστικά την επιστροφή τίτλου ίδιας αξίας) (physical settlement). Από την άλλη μεριά ο A πληρώνει τον B, μέχρι να λήξει ή έως ότου ενεργοποιηθεί το CDS, μέσω μιας ράντας η οποία ονομάζεται credit-swap spread, CDS rate ή credit swap premium.

Στο παραπάνω σχήμα με U συμβολίζονται οι πληρωμές της ράντας από τον A στον B, ενώ με 100-$\Upsilon(\tau)$ η πληρωμή της αποζημίωσης σε περίπτωση πιστωτικού γεγονότος σε χρονική στιγμή τ πριν την ωρίμανση T, όπου 100 είναι η ονομαστική αξία και $\Upsilon(\tau)$ η αγοραστική αξία την στιγμή τ. Υπάρχει φυσικά και η δυνατότητα αντικατάστασης με άλλο χρέος του ίδιου εκδότη (physical settlement). Σε πολλές περιπτώσεις η πληρωμή της αποζημίωσης συνδυάζεται με Interest Rate Swaps (IRS) όμως ο συνδυασμός CDS με IRS επηρεάζει το credit-swap spread διότι ένα IRS[1] με λήξη μια χρονική στιγμή πριν την ωρίμανση δεν έχει αγοραστική αξία μηδέν.

Όπως ανέφερα και στην αρχή μπορούμε να σκεφτούμε τα CDS και σαν συμβόλαια ασφάλισης έναντι ενός συγκεκριμένου πιστωτικού γεγονότος κατά τα οποία ο αγοραστής της ασφάλισης πληρώνει περιοδικά ασφάλιστρα και σε περίπτωση ενεργοποίησης του συμβολαίου λαμβάνει την αποζημίωση από τον ασφαλιστή B. Υπάρχουν βέβαια δυο

[1] Είναι η συμφωνία μεταξύ δύο μερών να ανταλλάξουν σειρά πληρωμών σταθερού επιτοκίου με πληρωμές κυμαινόμενου στο ίδιο νόμισμα επί ενός δοθέντος ποσού και εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος.



Σχήμα 2.1: Οι χρηματοροές του CDS

πολύ σημαντικά προβλήματα στην τιμολόγηση αυτών των συμβολαίων. Το πρώτο είναι ότι η αγοραστική αξία τους κατά την έναρξη είναι μηδενική αφού δεν προβλέπουν ανταλλαγές χρηματοροών κατά την σύναψη τους και το δεύτερο είναι ότι μετά την έναρξη τους και με την πάροδο του χρόνου τα επιτόκια αλλά και η πιστωτική διαβάθμιση του υποκειμένου τίτλου C αλλάζουν επηρεάζοντας έτσι την αγοραστική αξία του CDS.

Η περίπτωση της φυσικής διευθέτησης (physical settlement) αποτελεί μια περισσότερο «μη δαπανηρή» λύση κατά την αποζημίωση αφού υπάρχει συνήθως λίστα με πιθανές επιλογές αντικατάστασης ως αντάλλαγμα της ονομαστικής αξίας του υποκειμένου τίτλου.

2.2 Το απλό Credit-Swap spread

Στην παρακάτω παράγραφο υποθέτουμε ότι οι αντισυμβαλλόμενοι Α και Β δεν έχουν κίνδυνο αθέτησης όπως επίσης και ότι η πληρωμή σε περίπτωση αποζημίωσης είναι όπως αναφέραμε πριν 100-Υ(τ). Επίσης ο υποκείμενος τίτλος από τον εκδότη C είναι ένα ομόλογο με κυμαινόμενο επιτόκιο (floating-rate note). Η τιμολόγηση θα εξηγηθεί σταδιακά ξεκινώντας από την απλή υπόθεση κάνοντας τις παρακάτω παραδοχές:

- Ο υποκείμενος τίτλος (floating-rate note) έχει αρχική αγοραστική αξία ίση με την ονομαστική, ας πούμε 100, του CDS.

- Η θέση πωλητή (short sell) στον υποκείμενο τίτλο του εκδότη C είναι ανέξοδη.

- Δεν υπάρχουν έξοδα συνδιαλλαγής όπως διαφορές στην τιμή προσφοράς και ζήτησης (bid-ask spread) στην αγορά για το χωρίς κίνδυνο ή τον υποκείμενο τίτλο.

- Αν με συμβολίζουμε το κουπόνι την χρονική στιγμή t ενός ομολόγου με κυμαινόμενο επιτόκιο, τότε η πληρωμή του κουπονιού θα είναι $R_t + S$, όπου S είναι μία σταθερή διαφορά (συνήθως αυτή η διαφορά στα ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου είναι συναρτήσει του Libor[2] ή κάποιου άλλου δείκτη αναφοράς κυμαινόμενων επιτοκίων) και δεν δημιουργεί πρόβλημα στην παρακάτω ανάλυση αν το χωρίς κίνδυνο κυμαινόμενο επιτόκιο και το κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς διαφέρουν κατά μία σταθερά.

- Η πληρωμή σε περίπτωση ενεργοποίησης του CDS γίνεται κατά την αμέσως επόμενη προγραμματισμένη καταβολή του κουπονιού ώστε να αποφευχθεί η περίπτωση αυξημένων τόκων.
- Το CDS θεωρείτε διευθετημένο, αν ενεργοποιηθεί από πιστωτικό γεγονός και υπάρξει φυσική διευθέτηση του υποκείμενου τίτλου σε αντάλλαγμα χρηματικού ποσού στο ύψος της ονομαστικής του αξίας.
- Αγνοούμε την επιρροή των φόρων.

Μπορούμε κάτω από αυτές τις υποθέσεις να υπολογίσουμε την τιμή του CDS κατά την δημιουργία του. Υπολογίζουμε την τιμή του credit-swap spread U (του προηγούμενου σχήματος) με την παρακάτω διαδικασία arbitrage[3], πάνω στην σύνθεση των χρηματοροών του B. Παίρνουμε θέση πωλητή (short) στον υποκείμενο τίτλο και λαμβάνουμε χρηματικό ποσό (την ονομαστική του αξία) 100, τα οποία επενδύουμε σε ένα χωρίς κίνδυνο ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου (το οποίο έχει απόδοση ίση με τα κουπόνια, δηλαδή 100) και διατηρούμε το χαρτοφυλάκιο μέχρι την ωρίμανσή του ή το πιστωτικό γεγονός (όποιο συμβεί πρώτο). Εν τω μεταξύ πληρώνουμε τα κουπόνια του ομολόγου και λαμβάνουμε τα κουπόνια από το ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου στο οποίο επενδύσαμε τα 100. Η διαφορά των δύο ροών είναι η διαφορά (spread) S πάνω στο χωρίς κίνδυνο κυμαινόμενο επιτόκιο της ονομαστικής αξίας του υποκείμενου τίτλου.

Αν συμβεί πιστωτικό γεγονός πριν την ωρίμανση τότε ρευστοποιούμε το χαρτοφυλάκιο την αμέσως επόμενη προγραμματισμένη ημέρα πληρωμής κουπονιού και παίρνουμε τα 100 από την πληρωμή του κουπονιού και χάνουμε $\Upsilon(\tau)$ από το ομόλογο στο οποίο πήραμε θέση πωλητή και πρέπει να επιστρέψουμε, άρα έχουμε την διαφορά $100\text{-}\Upsilon(\tau)$. Συνδυάζοντας τις χρηματοροές αυτές με εκείνες από το CDS παίρνουμε σαν αποτέλεσμα μια σταθερή ράντα με χρηματοροές U-S. Αν δεν υπάρχει arbitrage και άλλα έξοδα τότε έχουμε U=S .

2.3 Repos και έξοδα συναλλαγής

Μια σημαντική κοινή παράβαση των υποθέσεων που αναφέρθηκαν πριν είναι ότι μπορούμε να παίρνουμε θέση πωλητή (short sell) στον υποκείμενο τίτλο χωρίς κόστος. Η θέση πωλητή στον υποκείμενο τίτλο πραγματοποιείται μέσο των repos (repurchase agreements). Στην απλή εκδοχή των repos παίρνουμε θέση πωλητή στον τίτλο και λαμβάνουμε χρηματικό ποσό L, κατά την συμφωνημένη ωρίμανση T επιστρέφουμε το ποσό με έναν τόκο RT και μας επιστρέφεται ο τίτλος.

[2]Το LIBOR είναι το επιτόκιο προσφοράς στο οποίο οι μεγάλες διεθνείς τράπεζες στο Λονδίνο δανείζονται κεφάλαια μεταξύ τους. Χρησιμοποιείται επίσης σαν επιτόκιο αναφοράς για τον καθορισμό πολλών άλλων κυμαινόμενων επιτοκίων σε πολλές αγορές του κόσμου.

[3]Εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage) είναι η ταυτόχρονη αγορά και πώληση της ίδιας (ή παρόμοιας) επένδυσης σε δύο διαφορετικές αγορές με δύο διαφορετικές τιμές, στρατηγική η οποία μπορεί να οδηγήσει σε κέρδη χωρίς την ανάληψη κινδύνου.

Ουσιαστικά πρόκειται για ένα δάνειο κατά το οποίο ο δανειολήπτης υποθηκεύει ένα στοιχείο ως εγγύηση. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση κατά την οποία ο δανειστής παίρνει και αυτός θέση πωλητή (reserve repo), γίνεται δηλαδή δανειολήπτης, κατά την ωρίμανση ωστόσο θα πρέπει να αγοράσει ξανά τον τίτλο και να τον επιστρέψει. Βέβαια υπάρχουν περιπτώσεις που κάποιος τίτλος είναι δύσκολο να αποκτηθεί ως εγγύηση, έτσι στην περίπτωση που ο δανειστής έχει πάρει και αυτός θέση πωλητή ίσως κατά την ωρίμανση να λάβει μικρότερο επιτόκιο R από οτι είναι το γενικό επιτόκιο, αυξάνοντας έτσι το κόστος της θέσης πωλητή (αφού θα πληρώσει παραπάνω όταν έρθει η ώρα να το αγοράσει από την αγορα). Η περίπτωση αυτή, η οποία αναφέρεται ως repo special, αυξάνει την τιμή του υποκειμένου τίτλου και συνεπώς προσφέρει την δυνατότητα εξασφαλισμένου φτηνού δανεισμού.

Κατά την σύνθεση ενός CDS, τα repo specials αυξάνουν το default swap spread και πιθανότατα να πρέπει να δοθούν χρήματα για την σύναψη τους όπως επίσης υπάρχει και η πιθανότητα να υπάρχει διαφορά στην τιμή προσφοράς και ζήτησης για τα ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου με υψηλό κίνδυνο.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε διευθετήσει ένα reserve repo εξασφαλισμένο από τον υποκείμενο τίτλο με ωρίμανση ίδια με του CDS και συμβολίσουμε με Z την διαφορά του γενικού επιτοκίου εξασφάλισης και του επιτοκίου εξασφάλισης του υποκειμένου τίτλου τότε αν κάποιος θέλει να πάρει θέση πωλητή στον υποκείμενο τίτλο θα πρέπει να πληρώσει επιπλέον μια ράντα Z και το συνθετικό credit swap spread θα είναι S+Z. Εάν υπάρχει κόστος συναλλαγής στην αγορά για τον υποκείμενο τίτλο τότε αυτός που εμπορεύεται το credit swap ίσως υφίσταται κίνδυνο από το κόστος συναλλαγής ή ακάλυπτης θέσης στο credit swap και ίσως χρειαστεί να χρεώσει ένα επιπλέον ποσό στο credit swap premium. Ένας έμπορος μπορεί να πάρει την θέση του αντισυμβαλλόμενου A σε ένα default swap πληρώνοντας ένα premium S+Z και με διαφορά K ανάμεσα στη τιμή προσφοράς και την τιμή ζήτησης.
Ανακεφαλαιώνοντας :

- S: Είναι η αποδοτική διαφορά (spread)του επιτοκίου του υποκειμένου τίτλου και του δείκτη αναφοράς (LIBOR).
- Z: Αναφέρεται σε repo special και είναι η διάφορα ανάμεσα στο γενικό επιτόκιο εξασφάλισης και στο επιτόκιο του υποκειμένου τίτλου η οποία είναι κυμαινόμενη και πληρώνεται με πληρωμές ίδιας μορφής με των ομολόγων κυμαινόμενου επιτοκίου(με απόδοση στη λήξη ίση με τα κουπόνια) ή αλλιώς είναι μια τιμή (η οποία πληρώνετε μέσω ράντας) του να διατηρήσεις θέση πωλητή στον υποκείμενο τίτλο μέχρι τον τερματισμό του CDS.
- K: Αντικατοπτρίζει οποιοδήποτε κόστος συναλλαγής (το οποίο πληρώνεται μέσω ράντας) για αντιστάθμιση, οποιαδήποτε premium υπάρχει λόγο κινδύνων οι οποίοι δεν έχουν αντισταθμιστεί και περιθώρια κέρδους.

2.4 Πληρωμές επαυξημένων Credit Swap Premium

Σε ορισμένα συμβόλαια credit swap αναφέρετε ότι ο αγοραστής προστασίας θα πρέπει σε περίπτωση ενεργοποίησης του CDS να πληρώσει το επαυξημένο κουπόνι από την τελευταία ημέρα πληρωμής κουπονιού. Για μικρές πιθανότητες αθέτησης και περιόδους ανάμεσα στις πληρωμές κουπονιών, η αναμενόμενη διάφορα ανάμεσα στην χρονική στιγμή που συμβαίνει το πιστωτικό γεγονός και την αμέσως προηγούμενη πληρωμή κουπονιού είναι ελάχιστα μικρότερη από το μισό της μιας περιόδου (ανάμεσα σε δύο πληρωμές κουπονιού). Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε το CDS σαν ίσο με την πληρωμή αποζημίωσης που είναι η ονομαστική αξία μείον το ποσό ανάκτησης μείον το μισό του premium.

Σε περίπτωση μιας σταθερής, ουδέτερης στον κίνδυνο, ένταση αθέτησης (constant risk-neutral default intensity) λ^*, θα παρατηρούσαμε μια μείωση στο επαυξημένο premium περίπου κατά $\lambda^* S/2n$, όπου n είναι ο αριθμός κουπονιών ανά έτος. Για ένα απλό default swap το S είναι μικρότερο από το λ^* εξαιτίας της μερικής ανάκτησης, έτσι αυτή η διόρθωση είναι μικρότερη από $(\lambda^*)^2 S/2n$, η οποία είναι αμελητέα για μικρό λ^*.

2.5 Το Επαυξημένο επιτόκιο του υποκείμενου τίτλου

Για το συνθετικό credit swap υπάρχει και θέμα επαυξημένης πληρωμής τόκου για το χωρίς κίνδυνο ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου (στο οποίο όπως περιγράψαμε πριν επενδύουμε τα 100 από την θέση πωλητή -shortsell- που πήραμε στον υποκείμενο τίτλο). Αντίθετα το απλό CDS έχει πληρωμή η οποία είναι η διαφορά ανάμεσα στην ονομαστική αξία, χωρίς επαυξημένο τόκο, και την αγοραστική αξία του υποκείμενου τίτλου. Το χαρτοφυλακίου με το συνθετικό CDS όμως, όπως το περιγράψαμε προηγουμένως (θέση αγοραστή σε χωρίς κίνδυνο ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου και θέση πωλητή στον υποκείμενο τίτλο), έχει αξία ίση με την ονομαστική αξία συν τον επαυξημένο τόκο (του χωρίς κίνδυνο ομολόγου) μείον το ποσό ανάκτησης του υποκείμενου τίτλου.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ένα CDS με 6-μηνιαια κουπόνια και ωρίμανση ενός έτους. Επίσης ας υποθέσουμε ότι το LIBOR είναι 8% και ότι η ένταση αθέτησης δεν είναι υψηλή και δεν μεταβάλλεται σημαντικά ανάμεσα στις περιόδους πληρωμής κουπονιών. Περιμένουμε τότε περίπου το μισό από το κουπόνι να είναι επαυξημένο κατά την διάρκεια μιας περιόδου πληρωμής κουπονιού κατά την οποία συμβαίνει πιστωτικό γεγονός αγνοώντας ωστόσο το κίνδυνο αθέτησης που περιέχεται στις πληρωμές κουπονιών. Η αναμενόμενη τιμή του επαυξημένου επιτοκίου σε περίπτωση αθέτησης του χωρίς κίνδυνο ομολόγου στο παράδειγμα μας είναι 2% της ονομαστικής του αξίας και η ουδέτερη στον κίνδυνο ένταση αθέτησης είναι 4%. Τότε η αγοραστική αξία του CDS είναι μειωμένη για τον αγοραστή προστασίας κατά περίπου 8 μονάδες της ονομαστικής του αξίας και έτσι μειώνετε και το credit swap spread κατά ίσες μονάδες.

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ένα CDS με σχετικά μικρές και σταθερές πιθανότητες αθέτησης και επιτόκια χωρίς κίνδυνο με σταθερή δομή. Τότε η μείωση του credit swap spread από την επίδραση του επαυξημένου επιτοκίου είναι περίπου κατά $\lambda^* r/2n$ με r να συμβολίζει το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο.

2.6 Αν ο υποκείμενος τίτλος είναι ομόλογο με σταθερό επιτόκιο

Αν ο υποκείμενος τίτλος είναι ομόλογο σταθερού επιτοκίου τότε μπορούμε να προσφύγουμε ξανά στην υπόθεση ότι το ποσό ανάκτησης της ονομαστικής αξίας του σε περίπτωση αθέτησης είναι το ίδιο με ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου με την ίδια προτεραιότητα. Σε αυτήν τη περίπτωση θα έχουμε ξανά ένα default swap spread S+Z όπου το S και Z περιγράψαμε τι συμβολίζουν σε προηγούμενη παράγραφο. Είναι γνωστό ότι το credit spread σε ομόλογο σταθερού αλλά και κυμαινόμενου επιτοκίου τις ίδιας πιστωτικής διαβάθμισης είναι περίπου ίσα. Έτσι αν το spread είναι ένα σταθερό spread F τότε χρησιμοποιούμε το F αντί για S στον υπολογισμό του default swap spread. Σε μερικές περιπτώσεις αν ο υποκείμενος τίτλος είναι ομόλογο σταθερού επιτοκίου τότε το par floating-rate spread μπορεί να αντικατασταθεί με το asset swap spread, το οποίο είναι η διαφορά της απόδοσης του ομολόγου και της καμπύλης του LIBOR.

2.7 Μοντέλο για την τιμολόγηση CDS

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορούμε να τιμολογήσουμε ένα CDS χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο βασισμένο στην ένταση αθέτησης, σύμφωνα με το [1].

2.7.1 Υποθέτοντας σταθερή ένταση αθέτησης

Ξεκινώντας υποθέτουμε ότι η αθέτηση συμβαίνει με μια σταθερή, ουδέτερη κινδύνου, ένταση λ^*. Με $\alpha_i(\lambda^*)$ συμβολίζουμε την παρούσα αξία μιας μονάδας του i -στου κουπονιού την χρονική στιγμή T(i) στη περίπτωση που η αθέτηση συμβεί μετά από αυτήν την μέρα. Τότε έχουμε:

$$\alpha_i(\lambda^*) = e^{-(\lambda^* + y(i))T(i)}$$

Όπου με T(i) συμβολίζουμε την ωρίμανση του i -στου κουπονιού και με $y(i)$ το συνεχώς ανάτοκιζόμενο επιτόκιο για την i -οστη πληρωμή κουπονιού. Έτσι για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία των αναμενόμενων απωλειών (της μια μονάδας) την χρονική στιγμή $T(i)$ αν η αθέτηση συμβεί στο διάστημα [T(i-1), T(i)] υπολογίζουμε το :

$$\beta_i(\lambda^*) = e^{-y(i)T(i)}(e^{-\lambda^* T(i-1)} - e^{-\lambda^* T(i)})$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της ράντας (πληρωμών της μιας μονάδας) για κάθε πληρωμή κουπονιού έως την ωρίμανση $T = T(n)$ ή την αθέτηση, οποίο συμβεί πρώτο, αρκεί να υπολογίσουμε το

$$A(\lambda^*, T) = \alpha_1(\lambda^*) + \alpha_2(\lambda^*) + ... + \alpha_n(\lambda^*)$$

Συνεπώς η αξία των απωλειών την αμέσως επόμενη ημέρα πληρωμής κουπονιού μετά την αθέτηση (δεδομένου ότι η αθέτηση ήρθε πριν την ωρίμανση) είναι:

$$B(\lambda^*, T) = \beta_1(\lambda^*) + \beta_2(\lambda^*) + ... + \beta_n(\lambda^*)$$

Αν με L συμβολίσουμε την αναμενόμενη ζημία της ονομαστικής αξίας του υποκειμένου τίτλου σε περίπτωση χρεοκοπίας, τότε δεδομένου της ωρίμανσης T, του κουπονιού U και της χωρίς κίνδυνο καμπύλης επιτοκίων μπορούμε να υπολογίσουμε την αγοραστική αξία:

$$V(\lambda^*, L, T, U) = B(\lambda^*, T)L - A(\lambda^*, T)U$$

Το default swap spread της αγοράς $U(\lambda^*, T, L)$ βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση $V(\lambda^*, T, L, U) = 0$ και τελικά $U(\lambda^*, T, L) = \frac{B(\lambda^*,T)L}{A(\lambda^*,T)}$ Για μικρή ένταση αθέτησης η διαφορά ανάμεσα στο πιστωτικό γεγονός και την ακόλουθη ημέρα κουπονιού είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από το ήμισυ μιας περιόδου του CDS, υποθέτοντας βέβαια ότι οι πιθανότητες χρεωκοπίας δεν συγκεντρώνονται στις ημέρες πληρωμής κουπονιών. Διαφορετικά, μια απλή κατά προσέγγιση προσαρμογή μπορεί να γίνει παρατηρώντας ότι η επίδραση είναι ισοδύναμη με την επίδραση του επαυξημένου επιτοκίου της αρχικής αξίας (ονομαστικής αξίας) του floating-rate spread σε ένα credit swap spread. Όπως και προηγουμένως είπαμε, έχουμε ως αποτέλεσμα μια αύξηση του default swap spread της τάξης του $\lambda^* \frac{r}{2n}$. Εκτιμήσεις των L και μπορούμε να κάνουμε μέσω των ομολόγων και των γραμματίων (notes), τα οποία έχει εκδώσει ένας εκδότης C, επίσης από χωρίς κίνδυνο επιτόκια, και από δεδομένα ανάκτησης ομολόγων ή γραμματίων ίδιας προτεραιότητας.

Για παράδειγμα, έστω ότι κάποιο γραμμάτιο κυμαινόμενου επιτοκίου (floating rate note), το οποίο έχει εκδώσει κάποιος εκδότης C, πουλιέται σε τιμή $\hat{P}$, έχει ωρίμανση $\hat{T}$, spread $\hat{S}$ και αναμενόμενη απώλεια της ονομαστικής του αξίας $\hat{L}$. Αγοράζοντας λοιπόν ένα χωρίς κίνδυνο ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου και παίρνοντας θέση πωλητή (shortsell) σε ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου (μέσω repo special όπως περιγράψαμε πριν) έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με αξία:

$$1 - \hat{P} = B(\lambda^*, \hat{T})\hat{L} - A(\lambda^*, \hat{T})\hat{S}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να βρούμε την ένταση αθέτησης λ^*. Προϋποθέτοντας ότι οι τιμές αναφοράς των ομολόγων, που χρησιμοποιούνται στο παράδειγμα, είναι κοντά στην ονομαστική τους αξία, υπάρχει μια ευρωστία η οποία σχετίζεται με την αβεβαιότητα σχετικά με την ανάκτηση, αφού μια ανοδική τάση στο L έχει ως αποτέλεσμα μια καθοδική τάση στο λ^*. Ωστόσο αυτά τα σφάλματα, για μικρά λ^*, σχεδόν εξαλείφουν το ένα το άλλο όταν υπολογίζουμε την mark-to-market αξία $V(\lambda^*, L, T, U)$ του CDS. Για την αποφυγή των παραπάνω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ομόλογα τα οποία να έχουν την ίδια ωρίμανση με τα CDS.

Αν το ομόλογο, το οποίο έχει εκδοθεί από τον C, και έχει επιλεγεί για τιμή αναφοράς είναι σταθερού επιτοκίου τότε με $\hat{P}$, $\hat{L}$, $\hat{T}$ όπως αναφέρθηκαν πριν, $\hat{C}$ το επιτόκιο του κουπονιού και $\delta(0, \hat{T})$ την ανάκτηση, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$\hat{P} = A(\lambda^*, \hat{T})\hat{C} + B(\lambda^*, \hat{T})(1 - \hat{L}) + \delta(0, \hat{T})e^{-\hat{T}\lambda^*}$$

Ώστε να υπολογίσουμε την ουδέτερη στον κίνδυνο ένταση αθέτησης λ^* . Στην περίπτωση πολλαπλών ομολόγων αναφοράς με ωριμάνσεις ίδιες με του CDS, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο των εντάσεων αθέτησης, ή να βρούμε τον μ.ο. αφού πρώτα απορρίψουμε τις ακραίες τιμές ή μη γραμμική προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων ή τέλος κάποια διεξαγωγή πραγματικής προσομοίωσης. Ωστόσο ένα πρόβλημα είναι οι διαφορετικές θεσμικές διάφορες ανάμεσα στα είδη υποχρεώσεων, τα οποία επηρεάζουν την ανάκτηση.

Τα default swap είναι ένας δείκτης για την τιμολόγηση του πιστωτικού κινδύνου, για παράδειγμα αν είναι διαθέσιμο στην αγορά ένα default swap τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την, ουδέτερη κινδύνου, ένταση αθέτησης που περιέχει λύνοντας την $U(\lambda^*, T, L) = U^*$ ως προς λ^* . Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τα αποτελέσματα του μοντέλου εξαρτώνται λίγο ή πολύ γραμμικά από την υπόθεση του μοντέλου για την αναμενόμενη κλασματική απώλεια σε περίπτωση χρεοκοπίας. Η ανάλυση ευαισθησίας είναι μια καλή λύση αν ο στόχος είναι να εφαρμόσουμε τον υπολογισμό της έντασης αθέτησης ώστε να τιμολογίσουμε ένα τίτλο με διαφορετικές χρηματικές ροές μελλοντικά από το default swap που αναφέραμε.

2.8 Η δομή ενός Forward Default Rates

Σε περίπτωση που πληροφορίες που έχουμε για την τιμολόγηση του πιστωτικού κινδύνου είναι για ωρίμανση διαφορετική από αυτή του credit swap, θα ήταν ορθό να υπολογίσουμε την διόρθωση των μελλοντικών ποσοστών αθέτησης (forward default rates) τα οποία είναι ουδέτερα στο κίνδυνο. Τα ουδέτερα στο κίνδυνο μελλοντικά ποσοστά αθέτησης συμπίπτουν με τις ουδέτερες κινδύνου εντάσεις αθέτησης όταν αυτές είναι ντετερμινιστικές.

Για παράδειγμα, αν τα ουδέτερα κινδύνου μελλοντικά ποσοστά αθέτησης μετάξι των κουπονιών στις χρονικές στιγμές $T(i-1)$ και $T(i)$ συμβολίζεται με $f^*(i)$, επίσης υποθέτοντας ανεξαρτησία ανάμεσα στον κίνδυνο αθέτησης και τους υπόλοιπους κινδύνους και δοθέντος της διόρθωσης $f^* = (f^*(1), f^*(2), ..., f^*(n))$ των μελλοντικών ποσοστών αθέτησης, παίρνουμε τότε την

$$\alpha_i(f^*) = e^{-[H(i)+y(i)]T(i)}$$

με

$$H(i) = \frac{[f^*(1) + ... + f^*(i)]}{i}$$

και

$$\beta_i(f^*) = e^{-y(i)T(i)}(e^{-H(i-1)T(i-1)} - e^{H(i)T(i)})$$

η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών τη στιγμή i. Με αυτές τις αλλαγές όλα τα αποτελέσματα τις προηγούμενης παραγράφου για σταθερή ένταση αθέτησης ισχύουν. Εφόσον υπάρχει εξάρτηση των credit spreads από την ωρίμανση, είναι λογικό να την λάβουμε υπόψιν μας όταν η διάρκεια των τίτλων που χρησιμοποιούμε για την τιμολόγηση δεν είναι ίδια με αυτή του credit swap. Μια καλύτερη προσέγγιση θα ήταν να φτιάξουμε ένα μοντέλο διάρθρωσης για μια στοχαστικά μεταβλητή, ουδέτερη κινδύνου, διαδικασία έντασης αθέτησης λ^* .

Αν οι τίτλοι που χρησιμοποιούμε για την τιμολόγηση είναι "special" στην αγορά των repos (είναι δηλαδή δύσκολο να βρεθούν), ένας υπολογισμός του «κρυμμένου» Z θα πρέπει να περιέχεται στους προηγούμενους υπολογισμούς, σαν επιπρόσθετο στο κυμαινόμενο επιτοκιακό spread S˜ή το κουπόνι σταθερού επιτοκίου, όταν υπολογίζουμε το ουδέτερο κινδύνου μελλοντικό ποσοστό αθέτησης f^*. Υποθέτοντας, για απλοποίηση, ότι σε περίπτωση αθέτησης η πληρωμή αποζημίωσης γίνεται εκείνη τη στιγμή και όχι την αμέσως επόμενη ημέρα πληρωμής κουπονιού όπως υποθέσαμε πριν, τότε το $\beta_i^*(f^*)$ αντικαθίσταται από το

$$\beta_i^*(f^*) = e^{-[y(i-1)+H(i-1)]T(i-1)}k_i(f^*(i))$$

όπου

$$k_i(f^*(i)) = \frac{f^*(i)}{f^*(i)+\phi(i)}(1 - e^{-[f^*(i)+\phi(i)][T(i)-T(i-1)]})$$

είναι η τιμή μιας απαίτησης την $T(i-1)$ η οποία πληρώνει μια μονάδα την στιγμή της αθέτησης, αν η αθέτηση γίνει πριν την $T(i)$ και $\phi(i)$ το στιγμιαίο , χωρίς κίνδυνο, προθεσμιακό επιτόκιο το οποίο είναι σταθερό μεταξύ $T(i-1)$ και $T(i)$.

2.9 Ο ρόλος των Asset Swaps

Τα asset swaps είναι παράγωγα securities τα οποία μπορούν να περιγράφουν, σε μια απλή εκδοχή τους, ως χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από ομόλογα σταθερού επιτοκίου και interest rate swap, ίδιας ποσότητας, το οποίο πληρώνει σταθερό επιτόκιο και λαμβάνει κυμαινόμενο (π.χ. Libor) και έχει την ίδια ωρίμανση με το ομόλογο. Το σταθερό επιτόκιο του IRS επιλέγεται κατάλληλα ώστε η αγοραστική αξία του asset swap να είναι ίση με την ονομαστική αξία του υποκείμενου ομολόγου. Θα μπορούσαμε να δούμε το IRS σαν κάποιον ο οποίος πληρώνει σταθερά κουπόνια σε ένα ποσοστό ίσο με το κουπόνι C στο ομόλογο σταθερού επιτοκίου, και λαμβάνει κουπόνια με κυμαινόμενο επιτόκιο σε ένα ποσοστό ίσο με το Libor+S, όπου S είναι ένα σταθερό spread και ονομάζεται asset swap spread.

Ένα asset swap μπορεί επίσης να περιγράφει και σαν ένα par-value floating rate note. Τα καθαρά κουπόνια του IRS ανταλλάσσονται έως την ωρίμανση ακόμη και σε περίπτωση αθέτησης του υποκειμένου τίτλου (και άρα διακοπής της πληρωμής κουπονιών).

Έτσι με τον κίνδυνο αθέτησης ένα asset swap δεν είναι ισοδύναμο με ένα par-value floating rate note διότι σε περίπτωση αθέτησης οι πληρωμές του IRS συνεχίζουν. Έτσι, το asset swap spread S πρέπει να μην είναι ίδιο με το par floating rate spread τις ίδιας πιστωτικής ποιότητας. Τα asset swap spreads συχνά χρησιμοποιούνται ως δείκτης αναφοράς για την τιμολόγηση των CDS (επειδή είναι στενά συνδεδεμένα με αυτά). Εξαιτίας των IRS τα οποία περιλαμβάνονται στα asset swap, μετά την αθέτηση, το asset swap spread δεν είναι ακριβής ένδειξη για το CDS rate. Ωστόσο η διάρθρωση των, χωρίς κίνδυνο, επιτοκίων και τα asset swap spread, μπορούν από κοινού να περιλαμβάνουν ένα υπονοούμενο par floating rate spread, από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε το default swap spread.

Κεφάλαιο 3

Το υπόδειγμα των Cox-Ingersoll-Ross

3.1 Μελέτη του απλού μοντέλου χωρίς άλματα.

Το μοντέλο των Cox-Ingersoll-Ross σύμφωνα με το [1] είναι ένα παραμετρικό μοντέλο εντάσεων σύμφωνα με το οποίο οι εντάσεις αθέτησης περιγράφονται από την στοχαστική εξίσωση:

$$d\lambda_t = k(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dB_t \tag{3.1}$$

όπου B_t είναι μία κίνηση Brown.

Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία B_t η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Αν $t_0 < t_1 < ... < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες.

- Αν $s, t \geq 0$, τότε

  $$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}},$$

  όπου A κάποιο σύνολο Borel, δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή.

- Οι τροχίες της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Οι συντελεστές του μοντέλου (όλοι θετικοί) κ, θ και σ είναι:

- θ: ο μέσος των εντάσεων λ. Αν το t είναι σταθερό τότε το $E_t(\lambda_s)$ συγκλίνει στο θ καθώς το s πηγαίνει στο άπειρο.

- κ: είναι η ταχύτητα επιστροφής στο μέσο θ.

- σ: η τυπική απόκλιση του τυχαίου παράγοντα.

Για την προσέγγισή σε διακριτό χρόνο :

$$\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t \approxeq k(\theta - \lambda_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\lambda_t}E_t$$

ή

$$\lambda_{t+\Delta t} \approxeq k(\theta - \lambda_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\lambda_t}E_t + \lambda_t \tag{3.2}$$

όπου Δt είναι το διάστημα μίας μικρής περιόδου και E_t μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή από την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση Δt.
Για την τιμολόγηση ενός ομολόγου χρειαζόμαστε τις πιθανότητες επιβίωσης:

$$p(0,t) = E[e^{-\int_0^t \lambda(u)du}] \tag{3.3}$$

και για τον υπολογισμό των παραπάνω πιθανοτήτων υπάρχει ο κλειστός τύπος:

$$p(0,t) = e^{\alpha(t)+\beta(t)\lambda(t)} \tag{3.4}$$

όπου οι συναρτήσεις α(t) και β(t) σύμφωνα με το βιβλίο [1] είναι οι ακόλουθες:

$$\beta(t) = -\frac{1-e^{-kt}}{k} \tag{3.5}$$

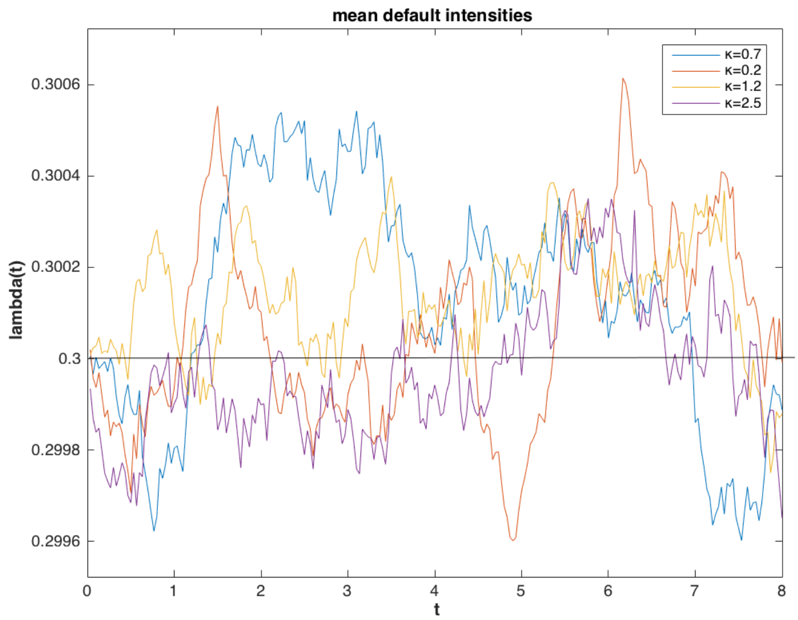
$$\alpha(t) = -\theta\left(t - \frac{1-e^{-kt}}{k}\right) \tag{3.6}$$

Στη συνέχεια θα δοθεί ένα παράδειγμα τιμολόγησης ομολόγου και θα υπολογίσουμε αυτές τις πιθανότητες με τους παραπάνω τύπους, με αθροίσματα Riemann αλλά και αριθμητικά ώστε να εξακριβώσουμε αν υπάρχει απόκλιση στα αποτελέσματα. Επίσης θα εξετάσουμε πως επηρεάζεται η καμπύλη των πιθανοτήτων αυτών από την αλλαγή των παραμέτρων.

Ξεκινώντας παράγουμε τις εντάσεις αθέτησης από τον τύπο (3.2). Στις παραμέτρους δίνουμε αρχικά τις τιμές (κ=0.7, ϑ=λ(0)=0.4, σ=0.09). Το ομόλογο πού θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα έχει διάρκεια T= 8 χρόνια. Χωρίζοντας τα 8 χρόνια σε N=240 κομμάτια θα φτιάξουμε τα διαστήματα Δt δηλαδή $\Delta t = T/N$. Έτσι λοιπόν μπορούμε να δημιουργήσουμε τις πρώτες 240 εντάσεις μία για κάθε διάστημα Δt. Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε την διαδικασία άλλες 100 φορές και παίρνουμε για κάθε Δt τη μέση τιμή των αντίστοιχων εντάσεών της. Έτσι κάνοντας προσομοίωση Monte Carlo δημιουργούμε τις τελικές εντάσεις οι οποίες φαίνονται γραφικά στο Σχήμα 3.1, στο οποίο μεταβάλλουμε και το κ και όπως παρατηρούμε έχουν την τάση να επιστρέφουν στο μακροχρόνιο μέσο θ (Mean reverting process).

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες επιβίωσης για κάθε Δt χρησιμοποιόντας το κλειστό τύπο (3.3) καθώς επίσης άθροισμα Riemann αλλά και αριθμητικό υπολογισμό.

Αν το ομόλογο έχει αρχική αξία 100 μον., κουπόνι 5 μον., 8 πληρωμές το χρόνο και το επιτόκιο είναι 0.01 τότε η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών χρησιμοποιώντας τον κλειστό τύπο είναι 35.1147 μονάδες.



Σχήμα 3.1: Οι εντάσεις αθέτησης λ_t (σ=0.09)

3.1.1 Υπολογισμός της παρούσας αξίας με χρήση αθροίσματος Riemann

Για τον υπολογισμό μέσω αθροισμάτων Riemann διαμερίζουμε κάθε ένα από τα N κομμάτια σε επιμέρους n διαστήματα, κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα έχει μήκος $dx = \Delta t/n$. Υπολογίζοντας το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου που σχηματίζεται και προσθέτοντας τις τιμές βρίσκουμε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^t \lambda(u)du$, στη συνέχεια υπολογίζουμε τις πιθανότητα επιβίωσης. Η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών για το προηγούμενο παράδειγμα είναι 35.2060.

Για τον αριθμητικό υπολογισμό αρκεί να υπολογίσουμε για κάθε χρονική στιγμή τ τις πιθανότητες αθέτησης από τον τύπο (3.3).

Έτσι για την χρονική στιγμή t_1 έχουμε :

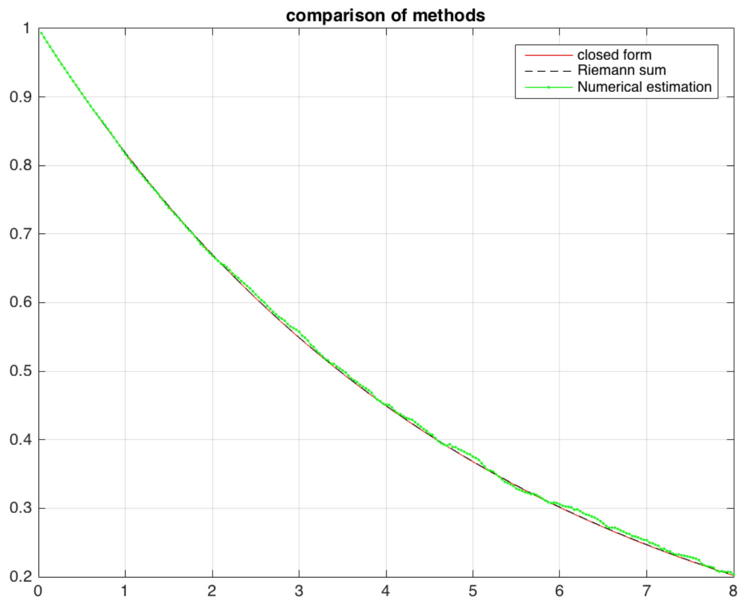
$$p(0,t_1) = e^{-\int_0^{t_1} \lambda_1 du} = e^{-\lambda_1 t_1}$$

για τη t_2:

$$p(0,t_2) = e^{-\int_0^{t_2} (\lambda_1+\lambda_2) du} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t_2}$$

και έτσι υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες. Η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών για το παράδειγμά μας είναι 34.1179.
Στο σχήμα 3.2 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των πιθανοτήτων αθέτησης και με τις τρείς μεθόδους.

Τέλος στον επόμενο πίνακα παρουσιάζετε η μέση απόκλιση κάθε μεθόδου συγκριτικά με τις άλλες δύο.



Σχήμα 3.2: Σύγκριση των τριών μεθόδων

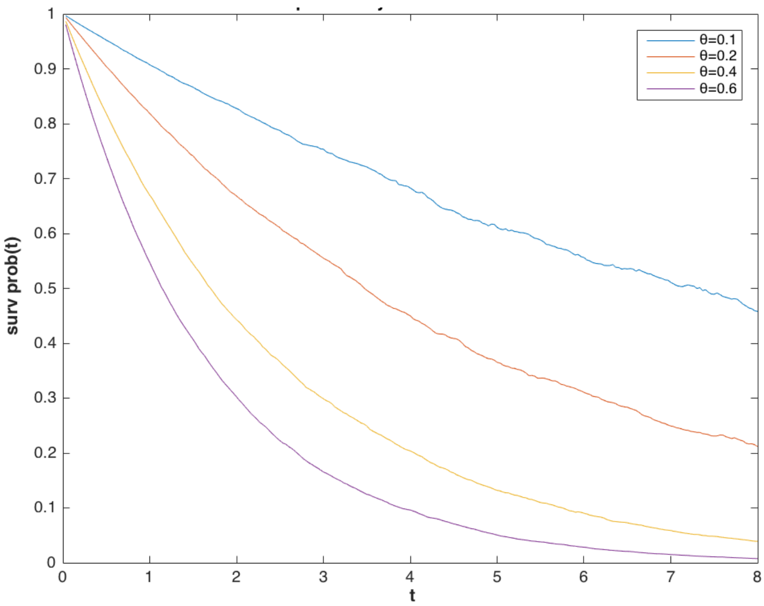
Κλειστός τύπος-Αριθμ. υπολ.	Riemann-Κλειστός τύπος	Αριθμ. υπολ.- Riemann
0.0025	0.0004	0.0022

3.2 Πώς επηρεάζει κάθε παράμετρος την καμπύλη των πιθανοτήτων επιβίωσης.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη των πιθανοτήτων επιβίωσης στην αλλαγή των παραμέτρων θ, κ και σ. Για την σύγκριση θα χρησιμοποιήσουμε τον αριθμητικό υπολογισμό, άλλωστε όπως είδαμε και οι τρείς μέθοδοι έχουν αμελητέα απόκλιση.

3.2.1 Μεταβολή του μέσου των εντάσεων (ϑ)

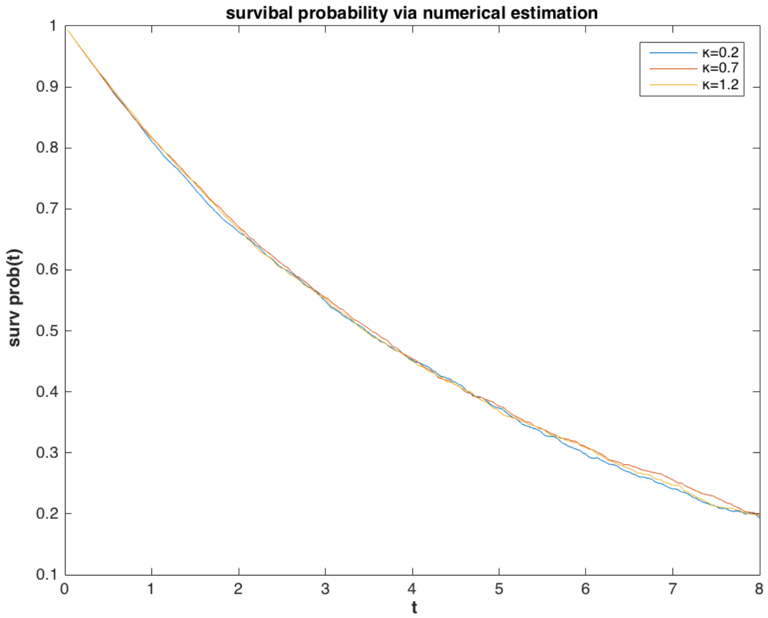
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3 όσο μεγαλώνει ο μέσος των εντάσεων, η πιθανότητα επιβίωσης μικραίνει και, όπως βλέπουμε στο παρακάτω πίνακα, η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών μικραίνει.



Σχήμα 3.3: Η καμπύλη των πιθανοτήτων μεταβάλλοντας το $\vartheta(\kappa,\sigma)$

Παράμετρος	Π.Α.
ϑ=0.05	89.220
ϑ=0.1	64.2867
ϑ=0.2	34.9299
ϑ=0.3	21.0960
ϑ=0.4	13.1264
ϑ=0.5	9.9265
ϑ=0.6	6.5056
ϑ=0.7	5.1432
ϑ=0.8	4.1444
ϑ=0.9	3.4129
ϑ=2	0.7745

3.2.2 Μεταβολή της ταχύτητας επιστροφής στο μέσο (κ)

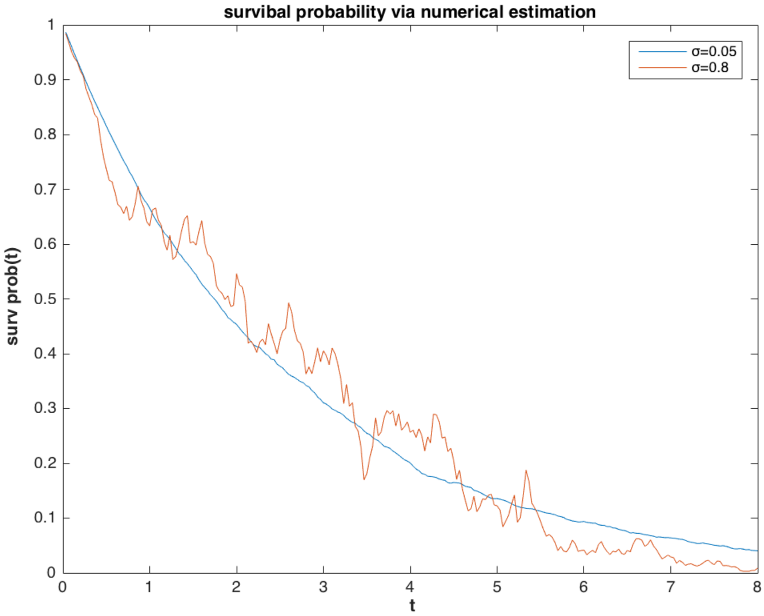


Σχήμα 3.4: Η καμπύλη των πιθανοτήτων μεταβάλλοντας το κ(ϑ,σ)

Στο Σχήμα 3.4 παρατηρούμε οτι η αλλαγή στο κ δεν μεταβάλει σημαντικά την καμπύλη και επομένως ούτε και τις τιμές των παρουσών αξιών.

Παράμετρος	Π.Α.
κ=0.05	64.6654
κ=0.1	64.8469
κ=0.2	64.7517
κ=0.3	64.6076
κ=0.4	64.7116
κ=0.5	64.9347
κ=0.6	64.6869
κ=0.7	64.6800
κ=0.8	64.9062
κ=0.9	64.6957
κ=1.2	64.7264
κ=3	64.5691
κ=4	64.5188

3.2.3 Μεταβολή της τυπικής απόκλισης (σ)



Σχήμα 3.5: Η καμπύλη των πιθανοτήτων μεταβάλλοντας το σ(κ,ϑ)

Αύξηση στην μεταβλητότητα οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας αθέτησης. Η αύξηση αυτή στην μεταβλητότητα των εντάσεων λ δεν μεταβάλει τον μέσο των εκθετών $\int_0^t -\lambda(s)ds$, αλλά αυξάνει την διασπορά των εντάσεων λ γύρω από από αυτόν τον μέσο, όπως φαίνετε στο σχήμα 3.5, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε αύξηση της πιθανότητας επιβίωσης.

Παράμετρος	Π.Α.
σ=0.5	20.4343
σ=1.5	20.7616
σ=2.5	21.1460
σ=3.5	21.6766

3.3 Γενίκευση του μοντέλου Cox-Ingersoll-Ross

Το προηγούμενο υπόδειγμα μπορεί να γενικευτεί βάζοντας και τυχαία άλματα σε διακριτούς χρόνους. Έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$d\lambda_t = k(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dB_t + dJ_t \tag{3.7}$$

όπου J_t είναι η διαδικασία που μετρά το αποτέλεσμα των αλμάτων που έχουν γίνει μέχρι την στιγμή t.
Η προσέγγιση σε διακριτό χρόνο γίνεται ως εξής:

$$\lambda_{t+\Delta t} \approxeq k(\theta - \lambda_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\lambda_t} \approxeq E_t + \lambda_t + (J_{t+\Delta t} - J_t) \tag{3.8}$$

Ο κλειστός τύπος για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιβίωσης είναι

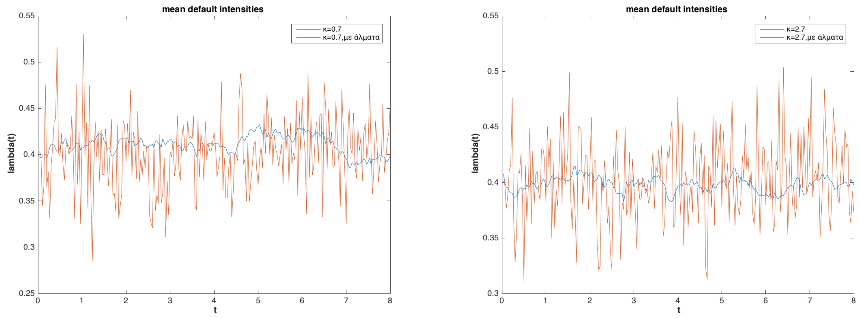
$$p(0,t) = e^{\alpha(t)+\beta(t)\lambda(t)}$$

όπου οι συναρτήσεις α(t)και β(t) σύμφωνα με το βιβλίο [1] είναι οι παρακάτω.

$$\beta(t) = -\frac{1-e^{-kt}}{k}$$

$$\alpha(t) = -\theta\left(t - \frac{1-e^{-kt}}{k}\right) - \frac{c}{J+k}\left[Jt - ln\left(1 + \frac{1-e^{-kt}}{k}J\right)\right]$$

με c να είναι η χρονική συχνότητα των αλμάτων και J ο μέσος του μεγέθους των αλμάτων τα οποία ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Στα Σχήματα 3.6α′ και 3.6β′ βλέπουμε τις εντάσεις αθέτησης με την προσθήκη των αλμάτων και για διαφορετικές τιμές τις παραμέτρου κ.



(α′) Οι εντάσεις αθέτησης για κ=0.7 (β′) Οι εντάσεις αθέτησης για κ=2.7

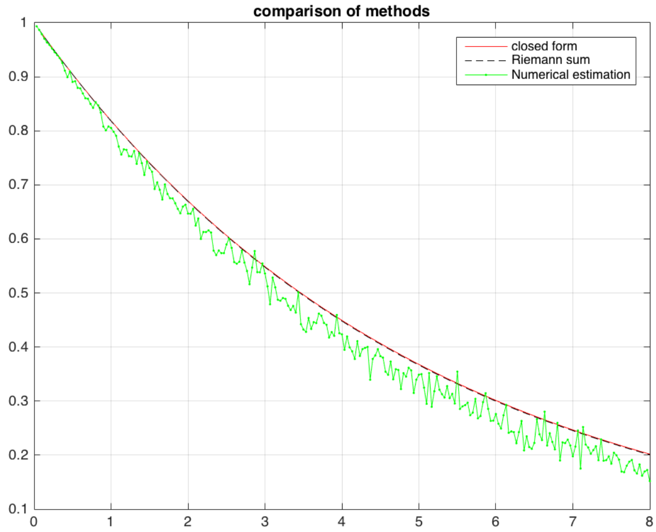
Σχήμα 3.6: Οι εντάσεις αθέτησης με άλματα και χωρίς για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου κ.

Οι τιμές των δύο νέων παραμέτρων c και j είναι 0.02 και 0.0001 αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων αθέτησης θα χρησιμοποιήσουμε τρείς μεθόδους, το κλειστό τύπο, το άθροισμα Riemann και τον αριθμητικό υπολογισμό, τις οποίες περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η απόκλιση των μεθόδων φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 3.7. Επίσης στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η μέση απόκλιση των μεθόδων.

Κλειστός τύπος-Αριθμ. υπολ.	Riemann-Κλειστός τύπος	Αριθμ. υπολ.- Riemann
0.0278	0.011	0.0267

Έτσι η παρούσα αξία των αναμενόμενων πληρωμών του ομολόγου που τιμολογήσαμε προηγουμένως χωρίς άλματα είναι :

Κλειστός τύπος	Άθροισμα Riemann	Αριθμητικός υπολογισμός
35.1145	34.9700	29.7085



Σχήμα 3.7: Σύγκριση των τριών μεθόδων.

3.4 Υπολογίζοντας το Credit Swap Spread

Έστω λοιπόν οτι έχουμε ένα CDS το οποίο αναφέρεται στο προηγούμενο ομόλογο του παραδείγματός μας και έχει ποσοστό ανάκτησης $g = 20\%$, τότε σύμφωνα με τους τύπους της παραγράφου 2.7[1], το Credit Swap Spread είναι η λύση της εξίσωσης:

$$V(\lambda, T, L) = 0 \Rightarrow P(\lambda, T)L - D(\lambda, T)U = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U(\lambda, T, L) = \frac{P(\lambda, T)L}{D(\lambda, T)}$$

όπου όπως είδαμε πρίν για $T = T(i)$: ημέρες πληρωμής κουπονιών και λ_i: μή-σταθερές εντάσεις αθέτησης, έχουμε:

$$P(\lambda, T) = p_1(\lambda_1) + p_2(\lambda_2) + ... + p_n(\lambda_n)$$

με

$$p_i(\lambda_i) = e^{-y(i)T(i)}(e^{-\lambda_i T(i-1)} - e^{-\lambda_i T(i)})$$

και

$$D(\lambda, T) = d_1(\lambda_1) + d_2(\lambda_2) + ... + d_n(\lambda_n)$$

με

$$d_i(\lambda) = e^{-(\lambda_i + y(i))T(i)}$$

Τελικά ο υπολογισμός του Credit Default Swap προκύπτει απο τον παρακάτω τύπο με $L = 1 - g$

$$U = (1-g)\frac{\sum_{i=1}^{n} e^{-y(i)T(i)}(e^{-\lambda_i T(i-1)} - e^{-\lambda_i T(i)})}{\sum_{i=0}^{n-1} e^{-(\lambda_i + y(i))T(i)}} \tag{3.9}$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω τύπου η τιμή του U για το παράδειγμα που μελετάμε είναι: $U(\lambda^*, T, L) = 0,3998$.

[1]με αλλαγή στο συμβολισμό των εξισώσεων του B με P και του A με D καθώς επίσης β_i με p_i και α_i με d_i.

3.5 Εκμαιεύοντας την μεταβλητότητα (Implied volatility)

Η μεταβλητότητα είναι ένα θέμα τεράστιας σημασίας για σχεδόν οποιονδήποτε εμπλέκεται στις χρηματοπιστωτικές αγορές. Ο όρος της είναι συνώνυμος του κινδύνου και οι υψηλές τιμές της είναι σύμπτωμα διαταραχής της αγοράς και φανερώνει οτι το CDS δεν έχει τιμολογηθεί δίκαια.

Το 1973 οι $Black$ και $Scholes$ απέδωσαν στην μεταβλητότητα κεντρικό ρόλο για την δίκαιη τιμολόγηση ενός $option$. Αν και αποτελεί μία από τις 5 βασικές παραμέτρους στο μοντέλο των $Cox - Ingersoll - Ross$, η μεταβλητότητα είναι η μόνη η οποία δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη. Για παράδειγμα σε ένα $option$ η τιμή της μετοχής, η τιμή εξάσκησης, η ημερομηνία λήξης και το επιτόκιο είναι γνωστά ή μπορούμε εύκολα να αντλήσουμε πληροφορίες γι΄ αυτά από την αγορά, η μεταβλητότητα όμως πρέπει να εκτιμηθεί και αν και είναι σύνηθες να χρησιμοποιούνται τιμές προηγούμενων περιόδων από ιστορικά στοιχεία, η τιμή ενός παραγώγου εξαρτάται από την μεταβλητότητα που θα βιώσει στο μέλλον καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του.

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Cox-Ingersoll-Ross που περιγράψαμε, μπορούμε για μια δεδομένη τιμή του Credit Swap Spread ενός CDS να βρούμε το συνδυασμό των παραμέτρων ϑ(μέσος των εντάσεων) και σ (μεταβλητότητα) που δίνουν τη συγκεκριμένη τιμή. Έτσι σε μία συναλλαγή με CDS υποθέτοντας οτι είμαστε στη θέση του αγοραστή θα μπορούσαμε από την τιμή του, να έχουμε μια εκτίμηση για τον συνδυασμό αυτών των δύο παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για την τιμολόγηση. Η διαδικασία αυτή πρακτικά γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Δίνουμε μια αρχική τιμή στις παραμέτρους θ, σ και παίρνουμε μια τιμή αναφοράς για το Credit Swap Spread την οποία θεωρούμε ως τιμή πώλησης για το προηγούμενο παράδειγμα. Στη συνέχεια δίνουμε μια διαφορετική τιμή στο θ και μια χαμηλή τιμή εκκίνησης στη παράμετρο σ και προσομοιώνουμε συνεχώς το μοντέλο αυξάνοντας το σ μέχρι η τιμή που θα πάρουμε να είναι κοντά στη τιμή αναφοράς με απόκλιση 0.02. Όλες οι υπόλοιπες παράμετροι τις εξίσωσης 3.2 θεωρούνται γνωστοί και έχουν τιμές τέτοιες ώστε αν δώσουμε στις μεταβαλλόμενες παραμέτρους θ και σ τις αρχικές τους τιμές να παίρνουμε τη τιμή αναφοράς του Credit Swap Spread. Στους πίνακες που ακολουθούν φαίνεται ο συνδυασμός των θ και σ οι οποίοι μας δίνουν την τιμή αναφοράς U.

3.5.1 Συμπεράσματα

Για σταθερές εντάσεις αθέτησης οι παράμετροι θ και σ συνδέονται από τη σχέση

$$\theta = \sigma \left(\frac{\sqrt{\lambda_t}}{k\Delta_t} \right) + \frac{\Delta\lambda_t}{\Delta_t k} + \lambda_t$$

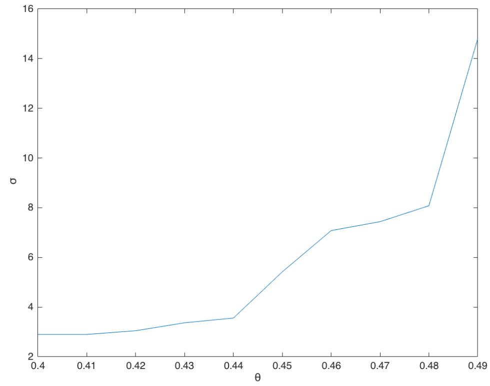
η οποία αποτελεί εξίσωση ευθείας της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Το να θεωρήσουμε όμως οτι οι εντάσεις αθέτησης είναι σταθερές αποτελεί μεγάλη απλούστευση για τη σχέση των δύο παραμέτρων που θέλουμε να μελετήσουμε. Αυτό συμβαίνει διότι οι εντάσεις αθέτησης προκύπτουν από την στοχαστική εξίσωση 3.2 για κάθε t_i, $i = 1, 2, ..., N$ και εξαρτώνται και από τη παράμετρο E_t η οποία είναι ένας τυχαίος αριθμός από την κατανομή $N(0, \Delta_t)$. Συνεπώς δεν μπορούμε να τις θεωρήσουμε σταθερές, μπορούμε

$U = 0.40$		$U = 0.50$		$U = 0.81$	
ϑ	σ	ϑ	σ	ϑ	σ
0.40	2.90	0.50	3.90	0.70	0.90
0.41	2.90	0.51	3.98	0.71	1.21
0.42	3.05	0.52	4.52	0.72	2.08
0.43	3.37	0.53	4.64	0.73	3.63
0.44	3.56	0.54	5.02	0.74	4.94
0.45	5.42	0.55	7.26	0.75	5.92
0.46	7.08	0.56	7.50	0.76	6.46
0.47	7.44	0.57	8.90	0.77	9.15
0.48	8.08	0.58	11.11	0.78	10.19
0.49	14.81	0.59	13.44	0.79	25.81

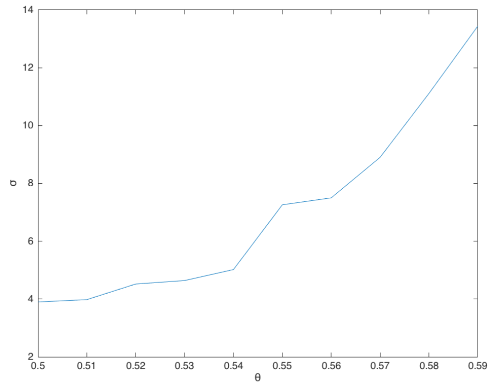
Πίνακας 3.1: Συνδιασμός των παραμέτρων θ και σ για συγκεκριμένο U.

ωστόσο μέσο τις μεθόδου Monte Carlo και για έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων να πάρουμε μία εκτίμηση.

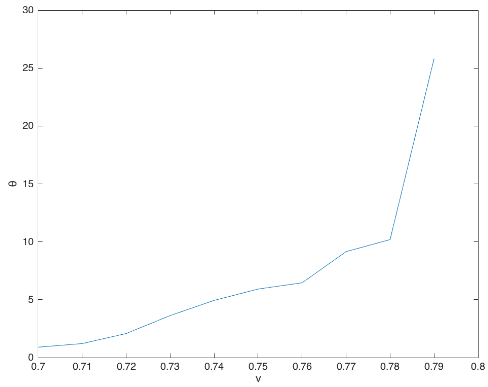
Στις γραφικές παραστάσεις 3.8α΄, 3.8β΄ και 3.8γ΄ παρατηρούμε οτι οι γραφική παράσταση που απεικονίζει τη σχέση των δύο παραμέτρων είναι αύξουσα καθώς η αύξηση της τιμής του μέσου των εντάσεων οδηγεί σε αύξηση της μεταβλητότητας η οποία προμηνύει μεγάλες αυξήσεις ή μειώσεις των εντάσεων αθέτησης. Επίσης παρατηρούμε ότι ενώ στην αρχή κάθε γραφικής παράστασης μια μικρή αύξηση της μίας παραμέτρου οδηγεί σε μικρή, σχετικά, αύξηση της άλλης, όσο αυξάνεται το θ αυτή η διαφορά μεταξύ τους τείνει να γίνεται όλο και μεγαλύτερη. Όσο δηλαδή αυξάνεται ο μέσος των εντάσεων τόσο η μεταβλητότητα παίρνει μεγαλύτερες τιμές ώστε να πάρουμε τη τιμή που θέλουμε για το Credit Swap. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως καθώς η τιμή της παραμέτρου θ αυξάνεται η μεταβλητότητα γίνεται όλο και πιο ευαίσθητη στην αύξηση αυτή.



(α′) U=0.40



(β′) U=0.50



(γ′) U=0.81

Σχήμα 3.8: Γραφική παράσταση του συνδιασμού των παραμέτρων θ και σ για τους πίνακες 3.1

Κεφάλαιο 4

Κατασκευή κώδικα και συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η αναλυτική επεξήγηση του κώδικα με όνομα $CirIntensityModels$ και τον συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την μελετή του μοντέλου Cox-Ingersoll-Ross. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του κώδικα και των συναρτήσεων είναι το $MATLAB\_R2015b$.

Η επεξήγηση του κώδικα γίνεται ανα κομμάτια και στο παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικα ολοκληρωμένος μαζί με τις συναρτήσεις που περιέχει.

4.1 Ο βασικός κώδικας

4.1.1 Παραγωγή των εντάσεων αθέτησης

Το πρώτο κομμάτι του κώδικα που θα αναλύσουμε είναι το ακόλουθο:

```
% Cox-Ingersoll-Ross Model
h=100;
rs=0.7; mu=0; l=0; m=0.2; v=0.09;
T=8; N=240; dt=T/N; lzero=m;
for u=1:h
  lt=lzero; tint=0; DJ=0;

   for j=1:N
     Nt=pointpoissonNt(l,j);
           if j>2 &&  Nt~=0;
             J(j)=CPP(mu,Nt,v);
              DJ=J(j)-J(j-1);
           else
             DJ=0;
           end
     et(j)=normrnd(0,dt);
     ltdt = rs*(m-lt)*dt+v*sqrt(lt)*et(j)+lt+DJ;
     if ltdt<0
       ltdt=0;
     end
    lt=ltdt;
```

```
    lamda(u,j)=ltdt;
    t(j)=tint+dt;
    tint=t(j);
    mo(j)=DJ;
  end
end
```

Ξεκινώντας δηλώνουμε τις παραμέτρους :

- h : επαναλύψεις της μεθόδου Monte Carlo.
- rs : ταχύτητα επιστροφής στο μέσο κ.
- mu : μέσος του μεγέθους των αλμάτων.
- l : η χρονική συχνότητα των αλμάτων.
- m : ο μέσος των εντάσεων αθέτησης.
- r : η μεταβλητότητα.
- T : η διάρκεια του CDS.
- N : οι περίοδοι στις οποίες χωρίσαμε την διάρκεια του CDS.
- dt : το μήκος κάθε μιάς απο τις N περιόδους.

Με την εντολή $lzero = m$ δίνουμε στην ένταση αθέτησης για τη χρονική στιγμή μηδέν την τιμή m και η πρώτη εντολή for που περιέχει ολόκηρο το κώδικα αφορά τη μέθοδο Monte Carlo.

Στο πρώτο κομμμάτι παράγονται οι εντάσεις αθέτησης για τις N περιόδους μέσο της εντολής επανάληψης $forj = 1 : N$. Η μεταβλητή N_t περιέχει τον αριθμό των αλμάτων που επιστρέφει η συνάρτηση $pointpoisonNt$.[1]

Αν ο αριθμός των αλμάτων N_t είναι διάφορος του μηδενός και ο δείκτης j μεγαλύτερος του 2^2, με την εντολή $J(j) = CPP(mu, Nt, v)$; αποθηκεύουμαι στον πίνακα J την τιμή που επιστρέφει η συνάρτηση CPP[3], δηλαδή το άθροισμα των αλμάτων μέχρι την στιγμή j.Στην μεταβλητή DJ αποθηκεύουμε τη διαφορά της τιμής των αλμάτων για τις χρονικές στιγμές $j, j-1$. Διαφορετικά, αν $N_t = 0$, η μεταβλητή DJ παίρνει την τιμή μηδέν.

Στη συνέχεια με την εντολή $et(j) = normrnd(0, dt)$; παράγουμε γία κάθε βήμα j έναν τυχαίο αριθμό από την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διασπορά dt που αντιστοιχεί στην μεταβλητή E_t της εξίσωσης 3.2. Έτσι τελικά κατασκευάζουμε την εξίσωση 3.2 με την εντολή

$$ltdt = rs * (m - lt) * dt + v * sqrt(lt) * et(j) + lt + DJ; .$$

Η εξίσωση αφορά και το απλό μοντέλο σε περίπτωση που mu, l είναι μηδέν, οπότε $N_t = 0$ και $DJ = 0$, αλλά και το μοντέλο με άλματα σε περίπτωση που το N_t είναι διάφορο του μηδενός (οπότε και πραγματοποιούνται άλματα).

[1] Η συνάρτηση αναλύεται στο επόμενο υποκεφάλαιο.

[2] Ο δείκτης ξεκινάει να μετράει απο τη χρονική στιγμή 1 στην οποία δεν πραγματοποιείται άλμα.

[3] Η συνάρτηση αναλύεται στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Με την εντολή $lt = ltdt$ δίνουμε στην μεταβλητή lt την τιμή της έντασης αθέτησης που αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή j ώστε να χρησιμοποιήσουμε την lt για να αποθηκεύσουμε την τιμή για την χρονική στιγμή $j + 1$. Όλες οι τιμές $ltdt$ των εντάσεων αθέτησης αποθηκεύονται στον πίνακα $lamda(u, j)$ με την εντολή $lamda(u, j) = ltdt$;, όπου u είναι ο αριθμός της επανάληψης της μεθόδου Monte Carlo.Τέλος η εντολή $t(j) = tint + dt$; αποθηκεύει τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε κάθε βήμα j και η εντολή $mo(j) = DJ$; δημιουργεί έναν πίνακα ο οποίος σε κάθε ένα απο τα j κελιά του περιέχει την αντίστοιχη τιμή του άλματος.

Ο πίνακας $mean\_lamda$ περιέχει τις μέσες εντάσεις αθέτησης, για παράδειγμα στο πρώτο απο τα N κελιά περιέχει το άθροισμα του πρώτου στοιχείου κάθε γραμμής του πίνακα $lamda$ διαιρεμένο με τον αριθμό h των επαναλήψεων της μεθόδου Monte Carlo: $mean\_lamda = sum(lamda)/h$; .

4.1.2 Υπολογισμός των πιθανοτήτων επιβίωσης.

Στο επόμενο κομμάτι θα αναλύσουμε τον κώδικα τον οποίο χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιβίωσης μέσο των κλειστών τύπων 3.5 και 3.6, του αθροίσματος Riemann και του αριθμητικού υπολογισμού.

Με μία επανάληψη $for\ i = 1 : N$ θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες επιβίωσης για κάθε περίοδο. Αρχικά αποθηκεύουμε στη μεταβλητή s την χρονική στιγμή $t(i)$[4]. Στη συνέχεια απο το τύπο 3.4 και με την εντολή $sp = exp(a\_function(rs, m, s, mu, l) + b\_function(rs, s) * lzero)$; βρίσκουμε τις τιμές και τις αποθηκεύουμαι στον πίνακα $surv\_prob(i)$ με την εντολή $surv\_prob(i) = sp$; .

```
for i=1:N
 s=t(i);
 sp=exp(a_function(rs,m,s,mu,l)+b_function(rs,s)*lzero);
 surv_prob(i)=sp;
end
```

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιβίωσης με αθροίσματα Riemann δηλώνουμε αρχικά σε πόσες υποπεριόδους θα χωρίσουμε την κάθε περίοδο με την εντολή $n = 100$;, στη συνέχεια η εντολή $Rsurv\_prob(i) = exp(-rsum1(mean\_lamda, 0, s, n))$; καλεί την συνάρτηση $rsum1$[5] η οποία δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές : το πίνακα $lamda$, την αρχή της περιόδου 0, καθώς και των αριθμό των υποπεριόδων n.

```
 for i=1:N
  n=100;
  Rsurv_prob(i)=exp(-rsum1(mean_lamda,0,s,n));
 end
```

Τέλος για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιβίωσης με αριθμητικό υπολογισμό, μέσα σε μία εντολή επανάληψης $for\ i = 1 : N$ δημιουργούμε μία μεταβλητή με όνομα $cint$ η οποία μετράει το άθροισμα των εντάσεων αθέτησης μέχρι την επανάληψη i, με την εντολή $lint = 0; cint = lint + mean_lamda(i)$;. Έτσι θα υπολογίσουμε απο τον τύπο 3.4 την πιθανότητα επιβίωσης με την εντολή $Nsurv\_prob(i) = exp(-cint * s)$;

[4] περιέχει τις χρονικές στιγμές των N περιόδων.

[5] Η συνάρτηση αναλύεται στο επόμενο υποκεφάλαιο

```
for i=1:N
 lint=0;
 cint=lint+mean_lamda(i);
 Nsurv_prob(i)=exp(-cint*s);
 lint=cint;
end
```

4.1.3 Οι γραφικές απεικονίσεις.

Ακολουθούν οι εντολές plot οι οποίες μας δίνουν τις γραφικές απεικονίσεις :

- figure(1): τις εντάσεις αθέτησης.

```
figure(1)
plot(t,mean_lamda) % plots the columns of lamda versus their index.
xlabel('\bf t')
ylabel('\bf lambda(t)')
title('mean default intensities ')
```

- figure(2): σύγκριση των μεθόδων.

```
figure(2)
y1=surv_prob;
y2=Rsurv_prob;
y3=Nsurv_prob;
plot(t,y1,'r',t,y2,'k--',t,y3,'g.-');
title('comparison of methods')
grid
legend('closed form','Riemann sum','Numerical estimation')
```

- figure(3): πιθανότητες επιβίωσης με κλειστό τύπο.

```
figure (3)
plot(surv_prob)
xlabel('\bf t')
ylabel('\bf surv_ prob(t)')
title('survival probabilities via closed form')
```

- figure(4): πιθανότητες επιβίωσης με αθροίσματα Riemann.

```
figure(4)
plot(Rsurv_prob);
xlabel('\bf t')
ylabel('\bf surv_ prob(t)')
title('survival probabilities via Riemann sum')
```

- figure(5): πιθανότητες επιβίωσης με αριθμητικό υπολογισμό.

```
figure (5)
plot(t,Nsurv_prob);
xlabel('\bf t')
ylabel('\bf surv_ prob(t)')
title('survival probability via numerical estimation')
```

Για τον υπολογισμό της απόκλισης των τριών μεθόδων θα κατασκευάσουμε τρείς πίνακες difsR(i), difsN(i), difNR(i) οι οποίοι θα περιέχουν σε κάθε κελί i τη διαφορά αντίστοιχα των τιμών των μεθόδων:

- $surv\_prob(i) - Rsurv\_prob(i)$
- $surv\_prob(i) - Nsurv\_prob(i)$
- $Nsurv\_prob(i) - Rsurv\_prob(i)$

Δηλαδή τη διαφορά των εντάσεων αθέτησης για τις μεθόδους:

- κλειστός τύπος - αθροίσματα Riemann.
- κλειστός τύπος - αριθμητικός υπολογισμός.
- αριθμητικός υπολογισμός - αθροίσματα Riemann.

```
for i=1:N
  difsR(i)=surv_prob(i)-Rsurv_prob(i);
  difsN(i)=surv_prob(i)-Nsurv_prob(i);
  difNR(i)=Nsurv_prob(i)-Rsurv_prob(i);
end
```

4.1.4 Κώδικας τιμολόγησης ομολόγου

Σ' αυτή τη παράγραφο θα αναλύσουμε τον κώδικα ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για την τιμολόγηση του ομολόγου. Αρχικά ορίζουμε τις νέες μεταβλητές και δίνουμε κάποιες αρχικές τιμές:

- κ: αριθμός πληρωμών κουπονιών στο χρονικό διάστημα [0,T].
- par_value: ονομαστική αξία ομολόγου.
- $coupon$: κουπόνι ομολόγου.
- r: επιτόκιο προεξόφλησης.

Ο υπολογισμός της παρούσας αξίας θα γίνει και με τους τρείς τρόπους που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Για τον υπολογισμό απο το κλειστό τύπο ορίζουμε με εντολή $for\ i = 1 : \kappa$ ώστε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία για κάθε μία απο τις κ πληρωμες. Στη συνέχεια για όλες τις πληρωμές εκτός της τελευταίας ($i < \kappa$) βρίσκουμε την παρούσα αξία απο τον τύπο

$$coupon * e^{-r*t} * e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

με την εντολή

```
  if i<k
        c(i)=coupon;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*surv_prob(i*(N/k));
```

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την τελευταία πληρωμή με την εντολή (σε συνέχεια της εντολής if)

```
    else
        c(i)=par_value;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*surv_prob(i*(N/k));
    end
 end
spv=sum(pv);
```

Αντί για $t(i)$ στις παραπάνω εντολές χρησιμοποιούμε το $t(i * (N/k))$ διότι απο τον πίνακα $t(i)$ θέλουμε τους χρόνους που αντιστοιχούν σε πληρωμές κουπονιών[6]. Έτσι αν για παράδειγμα $N/k = 4$, τότε απο τις στήλες του πίνακα θα πάρουμε τις τιμές του 4,8,12,... κλπ κελιού.

Ακολουθούν ο υπολογισμός με της παρούσας αξίας με αθροίσματα Riemann και αριθμητικά. Ο κώδικας είναι ο ίδιος με την διαφορά οτι αντί για τον πίνακα *surv_prob*, χρησιμοποιούμε τους πίνακες *Rsurv_prob* και *Nsurv_prob* αντίστοιχα. Στο τέλος κάθε εντολής if παίρνουμε αντίστοιχα τις μεταβλητές *spv*, *Rspv* και *Nspv* οι οποίες περιέχουν τις παρούσες αξίες.

```
for i=1:k
  if i<k
        c(i)=coupon;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Rsurv_prob(i*(N/k));
    else
        c(i)=par_value;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Rsurv_prob(i*(N/k));
    end
end
Rspv=sum(pv);

for i=1:k
    if i<k
        c(i)=coupon;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Nsurv_prob(i*(N/k));
    else
        c(i)=par_value;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Nsurv_prob(i*(N/k));
    end
end
Nspv=sum(pv);
```

[6] Θα πρέπει το N/k να είναι ακέραιος αριθμός.

4.1.5 Υπολογισμός του credit swap spread.

Τέλος υπολογίζουμε με την συνάρτηση *pppv*[7] την αναμενώμενη παρούσα αξία των πληρωμών των κουπονιών με την εντολή $A = pppv(r, mean_lamda, t, N, k, c, par_value);$ όπου οι μεταβλητές οι οποίες δέχεται σαν ορίσματα περιγράφηκαν σε προηγούμενες παραγράφους. Η μεταβλητή g είναι το ποσοστό ανάκτησης και με την εντολή $M = par_value;$ δίνουμε στην μεταβλητή M την ονομαστική αξία του ομλόγου. Στην μεταβλητή V αποθηκεύουμε την παρούσα αξία των αναμενώμενων απωλειών την οποία επιστρέφει η συνάρτηση *elpv*[8], τα ορίσματα της οποίας επίσης έχουν περιγραφεί.

```
A=pppv(r,mean_lamda,t,N,k,c,par_value);
g=0.2;
M=par_value;
V=elpv(r,t,mean_lamda,g,M,N,k);
```

Έτσι υπολογίζουμε τελικά τη τιμή του credit swap spread απο την εντολή $css = V/A;$

4.2 Οι συναρτήσεις.

4.2.1 Οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\beta(t)$

Ακολουθούν οι συναρτήσεις *a_fuction* και *b_function* οι οποίες υπολογίζουν τα α και β των τύπων 3.5 και 3.6 .

Η συνάρτηση *a_fuction* δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές, οι οποίες περιγράφηκαν στον βασικό κώδικα, rs, m, t, mu και l, οι οποίες δίνουν τις τιμές τους στις νέες μεταβλητές τις συνάρτησης: $g = m$, $k = rs$, $J = mu$ και $c = l$. Στη συνέχεια ο τύπος σπάει σε τρία κομμάτια.

- Στο πρώτο κομμάτι υπολογίζουμε το πρώτο όρο: $a1 = -g(t - (1 - \frac{e^{-kt}}{k}))$
- ακολουθεί ο πρώτος παράγοντας του δεύτερου όρου: $a2 = \frac{c}{J+k}$
- το όρισμα του λογαρίθμου: $aln = 1 + \frac{1-e^{-kt}}{k}J$
- έτσι δημιουργούμε το δεύτερο παράγοντα του δεύτερου όρου: $a3 = Jt - \ln(aln)$

Τέλος η εντολή $a = a1 - a2 * a3;$ δημιουργεί τον τύπο 3.5.

```
function a = a_function(rs,m,t,mu,l)
g=m;
k=rs;
J=mu;
c=l;
a1=-g*(t-(1-exp(-k*t))/k);
a2=c/(J+k);
aln=1+[(1-exp(-k*t))/k]*J;
a3=J*t-log(aln);
a=a1-a2*a3;
```

[7] Η συνάρτηση αναλύεται στο επόμενο υποκεφάλαιο

[8] Η συνάρτηση αναλύεται στο επόμενο υποκεφάλαιο

Για την δεύτερη συνάρτηση $\beta(t)$, η οποία δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές rs και t, δημιουργούμε τη μεταβλητή k η οποία παίρνει τη τιμή της rs και στη συνέχεια στη b, την οποία επιστρέφει η συνάρτηση, δημιουργούμε το τύπο $-\frac{1-e^{-kt}}{k}$

```
function b = b_function(rs,t)
k=rs;
b=-[1-exp(-k*t)]/k;
```

4.2.2 Η συνάρτηση $rsum1$

Η συνάρτηση $rsum1$ υπολογίζει το άθροισμα Riemann μίας συνάρτησης στο διάστημα [α,β] με μία θετική διαμέριση σε n μέρη. Δέχεται ως ορίσματα το πίνακα $mean\_lamda$ και τις μεταβλητές t, s και n όπως περιγράφηκαν στο βασικό κώδικα. Αρχικά δίνουμε στις μεταβλητές a και b τις τιμές αντίστοιχα της αρχής και του τέλους του διαστήματος και στη συνέχεια στη μεταβλητή dx το μήκος κάθε ενός απο τα n διαστήματα. Μέσα σε μία εντολή επανάληψης for υπολογίζουμε κάθε φορά σε ποίο κατα σειρά ορθογώνιο βρισκόμαστε με την εντολή $c = a+k*dx$;, στη συνέχεια στη μεταβλητή i αποθηκεύουμε τον αριθμό του διαστήματος στρογγυλοποιημένο ώστε να βρούμε απο τον πίνακα $mean\_lamda$ την ένταση αθέτησης που του αντιστοιχεί. Έτσι αθρόιζουμε ολές αυτές τις τιμές στη μεταβλητή $value$ και τελικά βρίσκουμε το εμβαδόν πολλαπλασιάζοντας την τιμή αυτή με το μήκος των διαστημάτων dx.

```
function value=rsum1(mean_lamda,t,s,n)
a=t;
b=t+s;
dx = (b-a)/n;
value=0;
for k=1:n
   c=a+k*dx;
   i=round(c);
   value=value+mean_lamda(i);
end
value = dx*value;
```

4.2.3 Οι συναρτήσεις $pointpoissonNt$ και CPP

Οι συναρτήσεις $pointpoissonNt$ και CPP χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson. Η σύνθετη διαδικασία Poisson είναι μία στοχαστική διαδικασία (σε συνεχή χρόνο) με άλματα τα οποία συμβαίνουν τυχαία, σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson, αλλα και με τυχαίο μέγεθος αλμάτων το οποίο ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας. Στο παρακάτω κώδικα της συνάρτησης CPP υπάρχουν δύο επιλογές για την τυχαία μεταβλητή Z, είτε να λαμβάνει έναν αριθμό απο την εκθετική κατανομή με παράμετρο mu (ο μέσος του μεγέθους των αλμάτων) όταν χρησιμοποιούμε τους τύπους 3.5, 3.6 όπως αναφέρεται στο [1], είτε να λαμβάνει έναν αριθμό από την κανονική κατανομή. Αυτό συμβαίνει διότι το σωρευτικό άθροισμα j του κώδικα βγαίνει υπερβολικά μεγάλο αν κάθε φόρα προστίθεται ένας θετικός αριθμός από την εκθετική κατανομή και δίνει λάθος αποτελέσματα όταν χρησιμοποιούμε αθροίσματα

Riemann. Η συνάρτηση *pointpoissonNt* είναι μια απλή διαδικασία *Poisson* η οποία επιστρέφει τον αριθμό των αλμάτων N_t. Στη συνέχεια η συνάρτηση *CPP* υπολογίζει το άθροισμα

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N_t} D_i$$

όπου τα D_i είναι μη-αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές.

Η συνάρτηση *pointpoisson* δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές l και t. Ξεκινόντας αποθηκεύουμε στη μεταβλητή $Tkzero$ έναν αριθμό απο την εκθετική κατανομή $exp(l)$. Στη συνέχεια μία εντολή επανάληψης $for\ k = 1 : 200$ για 200[9] επαναλήψεις προσθέτει κάθε φορά στην $Tkzero$ έναν αριθμό απο την $exp(l)$, έτσι αν το άθροισμα αυτό είναι μικρότερο της μεταβλητής t τότε αποθηκεύεται ο αριθμός ένα σ' έναν πίνακα με όνομα $x(k)$, διαφορετικά αποθηκεύεται στον ίδιο πίνακα η τιμή μηδέν. Στο τέλος κάθε επανάληψης δίνεται στη μεταβλητή $Tkzero$ η τιμή της $Tk(k)$. Τέλος αθροίζοντας τα κελία του πίνακα $x(k)$ παίρνουμε τον αριμό των αλμάτων των οποίο και αποθηκεύουμε στη μεταβλητή N_t.

```
function [Nt]=pointpoissonNt(l,t)
Tkzero=exprnd(l);
for k=1:200
    Tk(k)=Tkzero+exprnd(l);
    if t>Tk(k)
        x(k)=1;
   else
        x(k)=0;
   end
   Tkzero=Tk(k);
end
Nt=sum(x);
end
```

Η συνάρτηση *CPP* δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές mu, N_t και v και επιστρέφει το μέγεθος του άλματος J. Ξεκινόντας δίνουμε στην μεταβλητή h την τιμή N_t που επιστρέφει η συνάρτηση *pointpoisson* και στην μεταβλητή $zzero$ την τιμή μηδέν. Στη συνέχεια σε μία εντολή επανάληψης $for\ k = 1 : h$ για h επαναλήψεις (όσα είναι και τα άλματα) αποθηκεύουμε στη μεταβλητή z έναν αριθμό απο την κανονική κατανομή με μέσο mu και διασπορά v^2 και δημιουργούμε μία μεταβλητή j η οποία παίρνει ως τιμή το σωρευτικό κάθε φορά άθροισμα των μεταβλητών z. Στο τέλος κάθε επανάληψεις δίνουμε στη $zzero$ την τιμή της j και τέλος παίρνουμε την μεταβλητή J η οποία περιέχει το σωρευτικό άθροισμα των z.

```
function [J]=CPP(mu,Nt,v)
h=Nt;
zzero=0;
for k=1:h
   z=normrnd(mu,v^2);
%  z=exprnd(mu); %otan theloyme apotelesma apo ton kleisto typo
% to gyrname apo kanoniki se ekthetiki
```

[9] Ο αριθμός είναι ενδεικτικός και μπορεί να αλλάξει χωρίς να δημιουργεί αστάθεια στον κώδικα.

```
    j=z+zzero;
    zzero=j;
end
J=j;
end
```

4.2.4 Οι συναρτήσεις *pppv* και *elpv*

Η συνάρτηση *pppv* υπολογίζει την αναμενόμενη παρούσα αξία των premium payments δηλαδή των παρονομαστή του τύπου 3.9, ενώ η συνάρτηση elpv υπολογίζει την παρούσα αξία των αναμενόμενων απωλειών, δηλαδή των αριθμητή του τύπου 3.9.

Η συνάρτηση *pppv* δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλήτες r, $mean\_lamda$, t, N, k, c και par_value όπως αυτές περιγράφηκαν στον βασικό κώδικα και επιστρέφει την μεταβλητή A η οποία περιέχει την τιμή του παρονομαστή του τύπου 3.9. Με μία εντολή $for\ i = 1 : k$ και αριθμό επαναλήψεων ίσο με τον αριθμό πληρωμών k του ομολόγου, υπολογίζουμε το $e^{-(\lambda_i+y(i))T(i)}$ για κάθε επανάληψη και αποθηκεύουμε τις τιμές σε ένα πίνακα $a(i)$. Έτσι αθροίζοντας τα κελία του πίνακα παίρνουμε τη ζητούμενη τιμή, η οποία επιστρέφεται ως τιμή της μεταβλητής A.

```
function A = pppv(r,mean_lamda,t,N,k,c,par_value)
for i=1:k
    a(i)=exp(-[r+mean_lamda(i*(N/k))]*t(i*(N/k)));
end
A=sum(a);
end
```

Η συνάρτηση *elpv* δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές r, t, $mean\_lamda$, g, M, N και k. Ξεκινόντας δίνουμε στη μεταβλητή με όνομα t_zero την τιμή μηδέν και υπολογίζουμε για $i = 1$ τον αριθμητή $e^{-y(i)T(i)}(e^{-\lambda_i T(i-1)} - e^{-\lambda_i T(i)})$ του τύπου 3.9. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε μια εντολή επανάληψης $for\ 2 : k$ για τον υπολογισμό των υπόλοιπων προσθετέων του αριθμητή τα οποία αποθηκεύονται σε μία μεταβλητή με όνομα $vint(i)$. Ο λόγος που υπολογίζουμε ξεχωριστά για $i = 1$ και η εντολή επανάληψης ξεκινάει απο τον αριθμό 2, είναι διότι στο τύπο υπάρχει το $T(i-1)$ και για $i = 1$ παίρνουμε $T(0)$ το οποίο σημαίνει το μηδέν κελί του πίνακα T το οποίο και δεν στέκει. Τελικά για τον υπολογισμό του αριθμητή προσθέτουμε τα κελία του $vint(i)$ και τα πολλαπλασιάζουμε με το $1 - g$ ώστε να προκύψει και το τελίκο αποτέλεσμα το οποίο αποθηκεύεται στην επιστρεφόμενη μεταβλητή V.

```
function V=elpv(r,t,mean_lamda,g,M,N,k)
% expected losses present value function
t_zero=0;
vint(1)=exp(-r*t(1*(N/k)))*(exp(-mean_lamda(1*(N/k))*t_zero)-
           -exp(-mean_lamda(1*(N/k))*t(1*(N/k))));

for i=2:k
     vint(i)=exp(-r*t(i*(N/k)))*(exp(-mean_lamda(i*(N/k))*t((i-1)*(N/k)))-
                -exp(-mean_lamda(i*(N/k))*t(i*(N/k))));
end
V=(1-g)*sum(vint);
```

4.2.5 Ο κώδικας της τεκμαρτής μεταβλητότητας

Ο παρακάτω κώδικας χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 3.5 για την εκαμίευση της μεταβλητότητας. Αρχικά δηλώνουμε τις μεταβλητές v και m όπου είναι αντίστοιχα η μεταβλητότητα σ και ο μέσος των εντάσεων αθέτησης m. Στη συνέχεια γιάυτές τις τιμές τρέχουμε το βασικό κώδικα[10], αφού κάνουμε στρογγυλοποίηση στην τιμή του credit swap spread που επιστρέφει ο κώδικας, αποθηκεύουμε την τιμή στη μεταβλητή με όνομα U_g[11].

```
v=2.9;
m=0.4;
CirIntensityModels
Ug=round(css,2);
```

Στην εντολή for που ακολουθεί αυξάνουμε τη μεταβλητή m κατά $0,01$ και τρέχουμε ξανά τον αλγόριθμο $CirIntensityModels$. Η τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος αποθηκεύεται στρογγυλοποιημένη, στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, στη μεταβλητή U_w. Στη συνέχεια στη μεταβλητή d αποθηκεύεται η διαφορά $U_g - U_w$ των δύο τιμών. Αν αυτή η διαφορά είναι ανάμεσα στο διάστημα (-0.005,0.005) τότε η εντολή for τερματίζεται, διαφορετικά με μία εντολή $while$ τρέχουμε συνεχώς το κώδικα $CirIntensityModels$ αυξάνοντας κάθε φορά τη μεταβλητή v κατά 0.01 (m σταθερό) μέχρι η διαφορά της τιμής του d να ανήκει στο διάστημα (-0.005,0.005). Τέλος η συνάρτηση επιστρέφει τον πίνακα $tarray$ ο οποίος περιέχει i-γραμμές (όσες και οι επαναλύψεις της εντολής for) και πέντε στείλες. Οι στήλες του πίνακα για κάθε γραμμή περιέχουν τις μεταβλητές: m, v, U_w, U_g και d.

```
for li=1:9
m=m+0.01;
CirIntensityModels
Uw=round(css,2);% h metavalomeni timi toy css
d=Uw-Ug;
while d<-0.005 || d>0.005
    v=v+0.01;
    CirIntensityModels
    Uw=round(css,2);
    d=Uw-Ug;
end
tarray=[m,v,Uw,Ug,d]
end
```

[10] CirIntensityModels.

[11] Αποτελεί τη τιμή στόχο που θέλουμε να πετύχει το credit swap spread.

Παράρτημα Α΄

Κώδικες και συναρτήσεις

Στα παρακάτω κεφάλαια παρουσιάζονται οι συναρτήσεις και ο βασικός κώδικας που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 4 ολοκληρωμένοι.

Α΄.1 Ο βασικός κώδικας CirIntensityModels

```
% Cox-Ingersoll-Ross Model

h=10; % the number of mc

rs=2.7;  mu=0; l=0;% input values for the variables: return speed (rs)
  m=0.01;                                     %l xroniki syxnotita almatwn, mu o
  v=0.9;                              %mesos toy megethoys twn almatwn
                                      % the long-run mean(m) ,parameter of CPP (mu)
                                      % volatility coefficient(v),parameter
                                      % of point poisson process N(t) (l)

 T=8; N=240; dt=T/N;     % discretize a T period to N pieces with length dt
 lzero=m;
for u=1:h

lt=lzero;
tint=0;
DJ=0;

 for j=1:N%xwrizoume to T se N periodoys diastimatos dt kai theloume ti timi
             % toy lamda gia kathe mia apo aytes tis periodoys
  %***  Jumps
      Nt=pointpoissonNt(l,j);
     if j>2 &&  Nt~=0;  % prepei kai Nt>0 alla einai etsi k alliws gia j>2
       J(j)=CPP(mu,Nt,v);
       DJ=J(j)-J(j-1);
     else
       DJ=0;
     end
     et=normrnd(0,sqrt(dt));
     ltdt = rs*(m-lt)*dt+v*sqrt(lt)*et+lt+DJ;
   if ltdt<0     % any negative outcome for ltdt
```

```
        ltdt=0;  % could be trancated at zero
    end
     lt=ltdt;  % redifine the lt
     lamda(u,j)=ltdt;% save ltdt values to lambda(j) matrix
     t(j)=tint+dt;
     tint=t(j);
     mo(j)=DJ;
    end
  end

%ypologismos toy mesoy twn entasewn
mean_lamda=sum(lamda)/h;

for i=1:N
 %estimation of the probability surv_prob(t,s) of no default before time s,
 % in the event of no default by t
 s=t(i);
 sp=exp(a_function(rs,m,s,mu,l)+b_function(rs,s)*lzero);
 surv_prob(i)=sp;

 %estimation of the probability surv_prob(t,s) via Riemann sum
 n=100;%i diamerisi toy diastimatos t,t+s...
 Rsurv_prob(i)=exp(-rsum1(lamda,0,s,n));

 %numerical estimation of the probability surv_prob(t,s)
  lint=0;
  cint=lint+mean_lamda(i); %ta athroismata twn lamda
  Nsurv_prob(i)=exp(-cint*s);
  lint=cint;
end

 figure(1)
 plot(t,mean_lamda) % plots the columns of lamda versus their index.
 xlabel('\bf t')
 ylabel('\bf lambda(t)')
 title('mean default intensities ')

 figure(2)
 y1=surv_prob;
 y2=Rsurv_prob;
 y3=Nsurv_prob;
 plot(t,y1,'r',t,y2,'k--',t,y3,'g.-');
 title('comparison of methods')
 grid
 legend('closed form','Riemann sum','Numerical estimation')
 figure (3)
 plot(surv_prob)
 xlabel('\bf t')
 ylabel('\bf surv_ prob(t)')
 title('survival probabilities via closed form')
 figure(4)
 plot(Rsurv_prob);
 xlabel('\bf t')
 ylabel('\bf surv_ prob(t)')
 title('survival probabilities via Riemann sum')
 figure (5)
```

```
 plot(t,Nsurv_prob);
 xlabel('\bf t')
 ylabel('\bf surv_ prob(t)')
 title('survival probability via numerical estimation')

%ypologismos tis diaforas twn triwn methodwn
for i=1:N
  difsR(i)=surv_prob(i)-Rsurv_prob(i);
  difsN(i)=surv_prob(i)-Nsurv_prob(i);
  difNR(i)=Nsurv_prob(i)-Rsurv_prob(i);
end

%*** Paradeigma timologisis omologoy
k=8; % arithmos plhromwn sto xrono [0,T]
par_value=100;
coupon=5;
r=0.01; %epitokio
%*** ypologismos paroysas axias xrimatorown apo kleisto typo
for i=1:k
    if i<k
        c(i)=coupon;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*surv_prob(i*(N/k));  %to i*N/k prepei na vgazei
    else
        c(i)=par_value;   %teliki plirwmi
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*surv_prob(i*(N/k)); %to i*N/k prepei na vgazei a
%           pv(i)=e+par_value;
    end
end
spv=sum(pv);

%*** ypologismos paroysas axias xrimatorown apo me athroismata Riemann

for i=1:k
  if i<k
        c(i)=coupon;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Rsurv_prob(i*(N/k));  %to i*N/k prepei na vgaze
    else
        c(i)=par_value;   %teliki plirwmi
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Rsurv_prob(i*(N/k)); %to i*N/k prepei na vgazei
%           pv(i)=e+par_value;
    end
end
Rspv=sum(pv);
%*** ypologismos paroysas axias xrimatorown arithmitika
for i=1:k
    if i<k
        c(i)=coupon;
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Nsurv_prob(i*(N/k));  %to i*N/k prepei na vgaze
    else
        c(i)=par_value;   %teliki plirwmi
        pv(i)=c(i)*exp(-r*t(i*(N/k)))*Nsurv_prob(i*(N/k)); %to i*N/k prepei na vgazei
%           pv(i)=e+par_value;
    end
end
Nspv=sum(pv);
```

```
%***** estimation of the expected present value of premium payments
A=pppv(r,mean_lamda,t,N,k,c,par_value);
g=0.2;% recovery rate
M=par_value;% face value of bond
V=elpv(r,t,mean_lamda,g,M,N,k);
%****estimation of credit swap spread*****
css=V/A;
```

Α΄.2 Οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\beta(t)$

```
function a = a_function(rs,m,t,mu,l)
g=m;
k=rs;
J=mu; %the jump sizes are normally distributed with mean J
c=l;     %that jumps occur at Poisson-arrival times with an intensity c

%***closed form with jumps******
a1=-g*(t-(1-exp(-k*t))/k);
a2=c/(J+k);
aln=1+[(1-exp(-k*t))/k]*J;
a3=J*t-log(aln);
 a=a1-a2*a3;



function b = b_function(rs,t)
k=rs;
b=-[1-exp(-k*t)]/k;
```

Α΄.3 Η συνάρτηση $rsum1$

```
function value=rsum1(lamda,t,s,n)
a=t;
b=t+s;
dx = (b-a)/n;
value=0;
for k=1:n
   c=a+k*dx;
   i=round(c);
   value=value+lamda(k);
end
value = dx*value;
```

Α΄.4 Οι συναρτήσεις $pointpoissonNt$ και CPP

```
function [Nt]=pointpoissonNt(l,t)
Tkzero=exprnd(l);
for k=1:200
    Tk(k)=Tkzero+exprnd(l);
```

```
    if t>Tk(k)
        x(k)=1;
   else
        x(k)=0;
   end
   Tkzero=Tk(k);
end
Nt=sum(x);
end
```

```
function [J]=CPP(mu,Nt,v)
h=Nt;
zzero=0;
for k=1:h
   z=normrnd(mu,v^2);
%  z=exprnd(mu); %otan theloyme apotelesma apo ton kleisto typo
% to gyrname apo kanoniki se ekthetiki
    j=z+zzero;
    zzero=j;
end
J=j;
end
```

Α΄.5 Οι συναρτήσεις *pppv* και *elpv*

```
function A = pppv(r,mean_lamda,t,N,k,c,par_value)
%pppv is a function which estimate the expect present value of premium
%payments
for i=1:k
    a(i)=exp(-[r+mean_lamda(i*(N/k))]*t(i*(N/k)));
end

A=sum(a);%prosthetoyme kai to 1 wste to a8roism na ksekinaei apo to 0

end
```

```
function V=elpv(r,t,mean_lamda,g,M,N,k)
% expected losses present value function
t_zero=0;
vint(1)=exp(-r*t(1*(N/k)))*(exp(-mean_lamda(1*(N/k))*t_zero)-
           -exp(-mean_lamda(1*(N/k))*t(1*(N/k))));

for i=2:k

    vint(i)=exp(-r*t(i*(N/k)))*(exp(-mean_lamda(i*(N/k))*t((i-1)*(N/k)))-
              -exp(-mean_lamda(i*(N/k))*t(i*(N/k))));
end

V=(1-g)*sum(vint);
```

Α′.6 Ο κώδικας της τεκμαρτής μεταβλητότητας

```
v=0.9;
m=0.01;
CirIntensityModels
Ug=round(css,2);
for li=1:30
m=m+0.03;
v=0.01;
CirIntensityModels
Uw=round(css,2);
d=Ug-Uw;

while d<-0.02 || d>0.02
    v=v+0.01;
    CirIntensityModels
    Uw=round(css,2);
    d=Ug-Uw;
end
tarray=[m,v,Uw,Ug,d]
end
```

Βιβλιογραφία

[1] Darrell Duffie & Kenneth J. Singleton : "Credit Risk: Pricing,Measurement and Management" ,2003,

[2] Darrell Duffie: "Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations", 2001.

[3] Darrel Duffie and J. Pan (2001) : " Analytical Value-at-Risk with Jumps and Credit Risk". Finance and Stochastics 5, 155–180.

[4] David Lando : "Credit Risk Modeling: Theory and Applications", 2004.

[5] Stephen Figlewski : "Forecasting Volatility", 2004.

[6] International Swaps Derivative Association at http://www.isdacdsmarketplace.com.

[7] Hull, J. and A. White : "Valuing credit default swaps 1. No counterparty default risk", 2001.a

[8] Hull, J. and A. White : "Valuing credit default swaps 2.Modeling default correlation", 2001.b

[9] G. Delianedis and R. Geske, (2001) : "The components of corporate credit spreads. Default, recovery, tax, jumps, liquidity and market factors", Working Paper, UCLA.

[10] Hull John C. : "Option, Futures and Other Derivatives, Seventh edition".

[11] M. R. Grasselli and T. R. Hurd (2010) : "Math 774 - Credit Risk Modeling, Dept. of Mathematics and Statistics McMaster University Hamilton".

[12] Yu Wang (2009): "Structural Credit Risk Modeling: Merton and Beyond, Society of Actuaries, Article from Risk Management".

[13] S. J. Chapman. MATLAB Programming for Engineers. Thomson, 2004.

[14] D. J. Higham and N. J. Higham. MATLAB Guide. Siam, second edition edition, 2005.