ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
Π.Μ.Σ. ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Θεωρία Χρεοκοπίας για στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος υπό την ύπαρξη ενός κατωφλίου.

Ανδριτσάκη Μαγδαληνή (ΜΑΕ14029)

Διπλωματική Εργασία που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Συμβουλευτική επιτροπή:
Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Αναπληρωτής Καθηγητής)-Επιβλέπων
Νεκτάριος Μιλτιάδης (Αναπληρωτής Καθηγητής)
Πολίτης Κωνσταντίνος (Αναπληρωτής Καθηγητής)

Πειραιάς
Μάρτιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Νεκτάριος Μιλτιάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Πολίτης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAM IN "ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT"

Ruin Theory for stochastic surplus processes under a threshold.

Andritsaki Magdalini (MAE14029)

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members:
Chadjikonstantinidis Efstathios, (Associate Professor) - Supervisor
Nektarios Miltiadis (Associate Professor)
Politis Konstantinos (Associate Professor)

Piraeus
March 2017

This thesis was approved unanimously by the three-member committee appointed by the Department of Statistics and Insurance Science, University of Piraeus, in accordance with the rules of the MSc program in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members were:

- Chadjikonstantinidis Efstathios, Associate Professor (Supervisor)
- Nektarios Miltiadis, Associate Professor
- Politis Konstantinos, Associate Professor

Στο Γιάννη,

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της διαδρομής, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο για τη διαρκή καθοδήγηση, την πολύτιμη βοήθειά του, την υπομονή του αλλά και το χρόνο που μου αφιέρωσε για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Νεκτάριο Μιλτιάδη και τον κ. Πολίτη Κωνσταντίνο για το χρόνο που αφιέρωσαν ως μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω βαθύτατα την οικογένεια μου που με στηρίζει διαρκώς σε κάθε μου επιλογή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Αναλογιστική Επιστήμη χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα για να εκτιμήσει τη φερεγγυότητα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Τέτοια μοντέλα χρεοκοπίας δίνουν τη δυνατότητα να μελετηθούν χαρακτηριστικές ποσότητες όπως η πιθανότητα και ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στην παρούσα εργασία, θα παρουσιάσουμε αρχικά το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου και την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ένα μοντέλο με εξάρτηση ανάμεσα στα ύψη των απαιτήσεων και τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης αυτών, χρησιμοποιώντας μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει ένα κατώφλι στα ύψη των ζημιών. Τέλος, θα γενικεύσουμε με τη μελέτη ενός μοντέλου με ημι-Μαρκοβιανή δομή εξάρτησης.

Συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο, είναι μια σύντομη εισαγωγή για το τι θα μελετηθεί στη συνέχεια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αρχικά δίνονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες μέσω των οποίων στη συνέχεια παρουσιάζουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου και τη συνάρτηση των Gerber-Shiu. Μέσω των ολοκληρο-διαφορικών τους εξισώσεων και των μετασχηματισμών Laplace, παίρνουμε αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu και τις πιθανότητες χρεοκοπίας και επιβίωσης. Τελικά, αποδεικνύεται η γενική λύση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής μέσω δεξιάς ουράς σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Στο τρίτο κεφάλαιο, εξετάζουμε μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας όπου η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ δύο απαιτήσεων εξαρτάται από το ύψος της προηγούμενης απαίτησης. Στη συνέχεια, μελετάμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu και τις πιθανότητες χρεοκοπίας και επιβίωσης για το μοντέλο αυτό μέσω μετασχηματισμών Laplace. Επίσης, παρουσιάζεται η μελέτη κάποιων παρόμοιων μοντέλων με εξάρτηση και μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων γίνεται σύγκριση με το μοντέλο με ανεξαρτησία.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, εξετάζουμε ένα πιο γενικό μοντέλο με ημι-Μαρκοβιανή δομή εξάρτησης. Για το μοντέλο αυτό στη συνέχεια, γίνεται μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu, και παίρνουμε αναλυτικές εκφράσεις για το μετασχηματισμό Laplace και για την περίπτωση όπου έχουμε μηδενικό αρχικό αποθεματικό. Επιπλέον, εξετάζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής για ύψη ζημιών που ακολουθούν κατανομές με ελαφριά ουρά, και δείχνεται ένας τρόπος ώστε να εξάγουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Τελικά δείχνουμε ότι αυτό το γενικό μοντέλο, περιέχει σαν ειδικές περιπτώσεις το κλασικό μοντέλο της σύνθετης Poisson, το ανανεωτικό μοντέλο με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang (n) κατανομή, το ανανεωτικό μοντέλο με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν τη phase type κατανομή και το μοντέλο με εξάρτηση που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ABSTRACT

Actuarial Science uses mathematical models to estimate the solvency of an insurance portfolio. Ruin models help to study basic quantities of interest, such as the probability and time of ruin, and the surplus prior to and deficit at ruin. In this thesis, at first, we will present the Classical Model of Ruin Theory and the discounted penalty function. Subsequently, we will study a ruin model with dependency between claim sizes and inter-arrival times. Finally, we will consider a more generalized model with a semi-Markovian dependence structure.

More specifically, the first chapter is an introductory section.

The second chapter, presents the classical model of Ruin Theory and the discounted penalty function. We obtain results for the discounted penalty function, ruin and survival probabilities by their integro-differential equations and Laplace transforms and derive a general solution for the discounted penalty function in terms of compound geometric distribution tail.

In the third chapter, a generalization of the classical ruin model is considered, where the distribution of the time between two claim occurrences depends on the previous claim size. For this specific model, we derive exact solutions for the discounted penalty function, ruin and survival probabilities by means of Laplace transforms. We also discuss about several related models that allow for a similar treatment, give some numerical illustrations and investigate the effect of ignoring the dependence structure.

Finally, in the fourth chapter, we consider a more general model with a semi-Markovian dependence structure. For this model, we derive an explicit expression for the Laplace transform of the discounted penalty function and an explicit formula for the discounted penalty function for zero initial capital. We also investigate the asymptotic behavior of the penalty function for light-tailed claim sizes and it is shown how to obtain arbitrary moments of the time to ruin, surplus before ruin and the deficit at ruin. In the end, it is shown that this general model contains as special cases the classical compound Poisson model, the Sparre Andersen model with generalized Erlang(n) interclaim distributions, the Sparre Andersen model with phase type interclaim distributions and the model with dependency of the previous chapter.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο αναλογισμός έγινε επίσημη μαθηματική επιστήμη κατά τα τέλη του 17ου αιώνα, λόγω της αυξημένης ζήτησης για μακροπρόθεσμη ασφαλιστική κάλυψη. Ιστορικά, χρησιμοποιούσε ντετερμινιστικά μοντέλα για τη μελέτη και κατασκευή πινάκων και ασφαλίστρων. Ωστόσο, τα τελευταία 30 χρόνια εμφανίζει ραγδαία εξέλιξη και με την ενσωμάτωση στοχαστικών αναλογιστικών μοντέλων στη σύγχρονη οικονομική θεωρία. Στόχος της αναλογιστικής επιστήμης είναι η εκτίμηση των κινδύνων όχι μόνο στον τομέα της ασφάλισης αλλά και στον τομέα των χρηματοοικονομικών καθώς και άλλων βιομηχανιών και επαγγελμάτων.

Βασικότερο κομμάτι της αναλογιστικής επιστήμης αποτελεί η Θεωρία Κινδύνου, η οποία καλείται να προβλέψει και να μελετήσει το ρυθμό εμφάνισης, το ύψος, και την πιθανότητα εμφάνισης των κινδύνων, έτσι ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή διαχείριση πριν και μετά την επέλευση των κινδύνων. Η εξέλιξη των τιμών των συνολικών αποζημιώσεων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στη διάρκεια του χρόνου αποτελεί ένα από τα βασικά αντικείμενα μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου. Για παράδειγμα, η βιωσιμότητα και κερδοφορία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη δημιουργία επαρκών αποθεματικών, έτσι ώστε να έχει τη δυνατότητα να καλύψει τα λειτουργικά του έξοδα και τις βραχυπρόθεσμες αλλά και μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις του, τόσο έναντι των ασφαλισμένων αλλά και έναντι τρίτων. Στην αναλογιστική ορολογία χρησιμοποιείται ο όρος πλεόνασμα για να περιγράψει τη διαφορά ανάμεσα στα αποθεματικά της ασφαλιστικής εταιρίας και τις υποχρεώσεις της. Είναι λοιπόν, πολύ σημαντική είναι η μελέτη της πιθανότητας το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου να πέσει κάτω από το μηδέν, δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας των επιμέρους ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων.

Τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου έθεσε ο Σουηδός μαθηματικός Filip Lundberg το 1903. Το 1930 ο Harald Cramér βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg, ενσωμάτωσε στη θεωρία κινδύνου τη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων. Έτσι δημιουργήθηκε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου στο οποίο το πλήθος των κινδύνων περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Τη γενίκευση του κλασικού μοντέλου εισήγαγε αργότερα ο Νορβηγός Sparre Andersen με το ανανεωτικό μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων περιγράφονται από μια ανανεωτική διαδικασία.

Στην παρούσα εργασία περιγράφονται κάποια χαρακτηριστικά του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου, και γενικεύοντας περιγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά μοντέλων με εξάρτηση ανάμεσα στους χρόνους εμφάνισης και τα μεγέθη των απαιτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Το 1903 ο Σουηδός αναλογιστής Filip Lundberg, με τη δημοσίευση της διδακτορικής διατριβής του με τίτλο «Approximerad fremställning au sannolikheets functionen» έθεσε τα θεμέλια για την ανάπτυξη της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου. Το 1930, ο Harald Cramér δημοσίευσε μια σειρά εργασιών με βάση τη διδακτορική διατριβή του Lundberg στις οποίες ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Έτσι δημιουργήθηκε το πρώτο μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο και ονομάστηκε κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér- Lundberg. Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι η παραδοχή ότι το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Γενίκευση του μοντέλου των Cramér- Lundberg αποτελεί το ανανεωτικό μοντέλο του Sparre Andersen το οποίο εισήχθη το 1957, όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε στο 15^{ο} Αναλογιστικό Συνέδριο, την εργασία του με τίτλο «On the collective theory of risk in case of contagion between the claims», στην οποία υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

2.1 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Για τη μοντελοποίηση και τη μελέτη του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου τα πρώτα βήματα είναι ο προσδιορισμός του πλήθους των κινδύνων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, και το ύψος των απαιτήσεων που ακολουθούν αυτούς τους κινδύνους, μεγέθη που περιγράφονται κατάλληλα από τις στοχαστικές ανελίξεις. Αρχικά, θα δώσουμε τον ορισμό των στοχαστικών διαδικασιών, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την τυχαία εξέλιξη φαινομένων στο χρόνο ή το χώρο σύμφωνα με τους νόμους των πιθανοτήτων ανεξάρτητα από την περιοχή του επιστητού στην οποία υπάγεται το φαινόμενο. Εφαρμογές τους εκτός της θεωρίας κινδύνου, εκτείνονται και σε πολλούς κλάδους της επιστήμης και της τεχνολογίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 *Στοχαστική διαδικασία (ή ανέλιξη) είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών* $\{X(t): t \in T\}$. *Το σύνολο T καλείται σύνολο δεικτών της ανέλιξης και το σύνολο των τιμών I των τυχαίων μεταβλητών* $X(t): t \in T$ *καλείται χώρος καταστάσεων της στοχαστικής ανέλιξης. Συνήθως το* t *συμβολίζει χρόνο.*

Στο σημείο αυτό, μας ενδιαφέρει ένα μοντέλο που να περιγράφει κατάλληλα το πλήθος των απαιτήσεων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

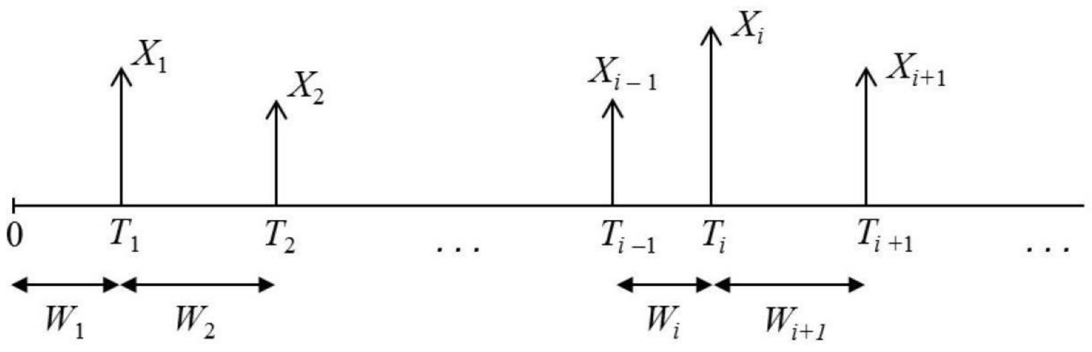
ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2 *Έστω* $\{N(t): t \geq 0\}$ *η στοχαστική διαδικασία (ή ανέλιξη) η οποία εκφράζει των αριθμό των κινδύνων που εμφανίζονται στο διάστημα* $[0,t]$. *Τότε η* $\{N(t): t \geq 0\}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία αν και μόνο αν*

- ***i.*** $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$,
- ***ii.*** $N(t)$ *είναι διακριτή,*
- ***iii.*** *αν* $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$ *και η τυχαία μεταβλητή* $N(t) - N(s)$ *ισούται με το πλήθος των ενδεχομένων στο διάστημα* $(s,t]$.

Έτσι, μια απαριθμήτρια διαδικασία είναι μη φθίνουσα και παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές. Θα λέμε επίσης ότι μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία έχει:

- Ανεξάρτητες προσαυξήσεις, αν το πλήθος των ενδεχομένων σε ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
- Ισόνομες προσαυξήσεις, αν το πλήθος των ενδεχομένων σε ένα χρονικό διάστημα $(t, t+x]$ ακολουθεί μια κατανομή η οποία εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος x.

Τόσο στη θεωρία κινδύνου, όσο και σε άλλα ερευνητικά πεδία χρησιμοποιούνται συχνά οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες, οι οποίες ανήκουν στην οικογένεια των απαριθμητριών διαδικασιών. Ο ορισμός τους βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων. Έστω $\{T_i, i = 0,1,2...\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0 = 0$ συμβολίζει τη χρονική στιγμή άφιξης του i-κινδύνου. Τότε, η ακολουθία $\{W_i, i = 1,2,...\}$ με $W_i = T_i - T_{i-1},\ i \geq 1$ είναι μια ακολουθία μη-αρνητικών, ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που αναπαριστά τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων. Δηλαδή, η W_1 εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, ενώ η $W_i, i \geq 1$ εκφράζει το χρόνο από την εμφάνιση του $i-1$ κινδύνου μέχρι την εμφάνιση του i κινδύνου. Αν $W_0 = 0$, τότε $T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n,\ n \geq 0$ και η ακολουθία $\{T_n, n = 0,1,2,...\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων.



Σχήμα 2.1 Οι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων $T_1, T_2, ...$, οι ενδιάμεσοι χρόνοι $W_1, W_2, ...$ και τα μεγέθη των αποζημιώσεων $X_1, X_2, ...$.

Έτσι, η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3 *Έστω* $\{W_i, i=1,2,...\}$ *μια ακολουθία μη-αρνητικών και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και* $\{T_i, i=0,1,2...\}$ *μια ακολουθία ανανεώσεων με* $T_i = W_1 + W_2 + ... + W_i,\ i \geq 0$ *και* $T_0 = W_0 = 0$. *Τότε, η απαριθμήτρια διαδικασία* $\{N(t): t \geq 0\}$ *που ορίζεται από τη σχέση* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n \leq t)$, *ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο* $[0,t]$.

Η στοχαστική διαδικασία $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$ ονομάζεται συνήθης ή απλή ανανεωτική διαδικασία διακριτού χρόνου με συνεχή χώρο καταστάσεων. Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ ονομάζεται απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων.

Από τον ορισμό 2.2 προκύπτει ότι για κάθε ανανεωτική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ ισχύει ότι

$$\{N(t) \geq n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_n \leq t\},$$

$$\{N(t) \leq n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_{n+1} > t\},$$

$$\{N(t) = n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_n < t < T_{n+1}\}.$$

Δηλαδή, το ενδεχόμενο να έχουμε ακριβώς *n* γεγονότα σε χρόνο *t*, ισοδυναμεί με το ενδεχόμενο ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν *n* γεγονότα να είναι *t*.

Είναι επίσης φανερό ότι $N(t) = 1 + \max\{n: T_n \leq t\}$ και $P(N(t) \geq n) = P(T_n \leq t)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 *Ο αναμενόμενος αριθμός ανανεώσεων (γεγονότων) στο διάστημα* $(0,t]$ *καλείται ανανεωτική συνάρτηση* $m(t)$, *και ορίζεται από τη σχέση*

$$m(t) = E(N(t)).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 *Η ανανεωτική συνάρτηση* $m(t)$ *ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\,dF(x),$$

όπου F *η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 *Γενικά, ανανεωτική εξίσωση καλείται μια εξίσωση της μορφής*

$$\mu(t)=Z(t)+\varphi\int_0^t Z(t-x)dF(x),$$

όπου φ *είναι μια σταθερά έτσι ώστε* $0<\varphi<1$, F *μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής* και Z *η άγνωστη συνάρτηση.*

Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται ανάλογα με την τιμή της σταθεράς φ, σε:

- ελλειμματικές (defective) για $0<\varphi<1$, και
- κανονικές (proper) ή μη ελλειμματικές (non-defective) για $\varphi=1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2 *Η γενική λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση*

$$\mu(t)=g(t)+\varphi\int_0^t g(t-x)dM(x),$$

όπου $M(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k F^{*k}(t)$, *και* g *είναι μια φραγμένη συνάρτηση.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 *Έστω* $\{N(t):t\geq 0\}$ *μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε, ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{E(W_1)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 (ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ). *Έστω* $\{N(t):t\geq 0\}$ *μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε, ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t}=\frac{1}{E(W_1)}.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή, τότε το απλούστερο παράδειγμα ανανεωτικής ανέλιξης, αποτελεί η στοχαστική διαδικασία Poisson. Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων (Lundberg 1903) μια από τις κύριες υποθέσεις είναι ότι ο αριθμός των κινδύνων περιγράφεται από την απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία Poisson.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6 *Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία* $\{N(t):t\geq 0\}$ *με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης εκθετικά κατανεμημένους με παράμετρο λ, καλείται διαδικασία Poisson με ένταση λ, όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

i. $N(0)=0,$

ii. *για κάθε* $s<t$ *η τυχαία μεταβλητή* $N(t)-N(s)$ *είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής* $N(t)$ *ή πιο γενικά έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

iii. *σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους* dt *μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός με πιθανότητα ανάλογη με το μήκος του διαστήματος*

$$P\left(N(t+dt)=n+k \middle| N(t)=n\right)=\begin{cases}1-\lambda dt+o(dt), & k=0\\ \lambda dt+o(dt), & k=1\\ o(dt), & k\geq 2\end{cases},$$

όπου $o(dt)$ *μια συνάρτηση που συγκλίνει στο μηδέν πιο γρήγορα από το* dt *καθώς το* $dt\to 0.$ *Συνεπώς έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

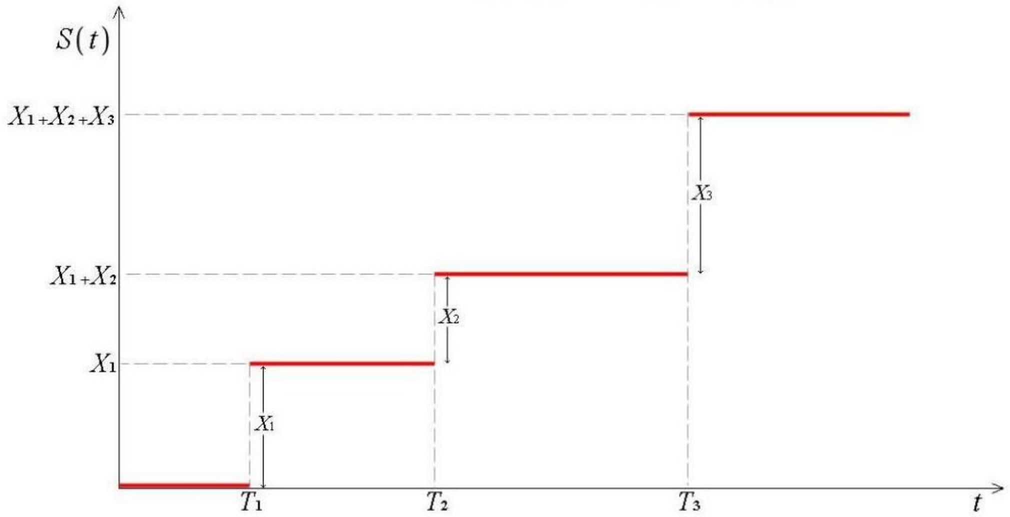
2.2 Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Κάθε ασφαλιστικός οργανισμός με την ανάληψη κινδύνων αναλαμβάνει και την υποχρέωση να αποζημιώσει τους ασφαλισμένους όταν επέλθει ο ασφαλιστικός κίνδυνος. Για να είναι αυτό δυνατό, ακόμα και σε ακραίες περιπτώσεις είναι ανάγκη η μοντελοποίηση όχι μόνο του πλήθους των ενδεχόμενων απαιτήσεων αλλά και του ύψους αυτών.

Έστω $\{X_i, i\geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, όπου X_i εκφράζει το ύψος της *i*-οστής ζημιάς που προκάλεσε το *n*-οστό ζημιογόνο ενδεχόμενο. Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X_i έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)=P(X=x)$, συνάρτηση κατανομής $F(x)=P(X\leq x)$, μέση τιμή $E(X)<\infty$ και ροπές k-τάξης γύρω από το μηδέν $\mu_k=\int_0^\infty x^k dF(x)=\int_0^\infty x^k f(x)dx.$ Προηγουμένως ορίσαμε την $N(t)=1+\max\{n:T_n\leq t\}$ που είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται έως το χρόνο $t.$ Τότε,

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7 *Η στοχαστική διαδικασία του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων* $\{S(t):t\geq 0\}$ *στο διάστημα* $[0,t]$ *ορίζεται ως εξής*

$$S(t)=\begin{cases}0, & N(t)=0\\ \sum_{i-1}^{N(t)} X_i, & N(t)>0\end{cases}, \qquad ή \qquad S(t)=X_1+X_2+...+X_{N(t)},\ t>0.$$



Σχήμα 2.2 Η στοχαστική διαδικασία του ύψους των αποζημιώσεων.

Στο σχήμα (2.2) φαίνεται ότι οι συνολικές αποζημιώσεις είναι μηδενικές μέχρι τη στιγμή άφιξης της πρώτης απαίτησης και στη συνέχεια το γράφημα της $S(t)$ εμφανίζει άλματα προς τα πάνω, ύψους ίσου με το μέγεθος της κάθε αποζημίωσης, ενώ παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια των ενδιάμεσων χρόνων W_i, δηλαδή για όσο διάστημα δεν επέρχονται κίνδυνοι. Έτσι, η δειγματοσυνάρτηση της $S(t)$ είναι μια δεξιά συνεχής κλιμακωτή συνάρτηση.

2.3 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8 *Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος* $\{U(t):t\geq 0\}$ *ορίζεται για κάθε* $t>0$ *, ως*

$$U(t)=u+P(t)-S(t) \tag{2.1}$$

όπου $S(t)$ *η στοχαστική ανέλιξη του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα* $(0,t]$, u *το αρχικό αποθεματικό* $u=U(0)$, $P(t)$ *το σύνολο των ασφαλίστρων που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα* $(0,t]$.

Τα ασφάλιστρα καθορίζονται από τον ασφαλιστή, θα θεωρήσουμε λοιπόν εδώ ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξή τους στο χρόνο, γι' αυτό και η $P(t)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση (αν και στην πραγματικότητα φυσικά επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες όπως τον πληθωρισμό και τις πιθανότητες θανάτου, εξαγοράς κτλ.). Στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου, η συνάρτηση των ασφαλίστρων θεωρείται αιτιοκρατική συνάρτηση (deterministic), και ειδικότερα μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

Έτσι, τα συνολικά ασφάλιστρα στη μονάδα του χρόνου υπολογίζονται ως

$$P(t)=ct \text{ για } t\geq 0,$$

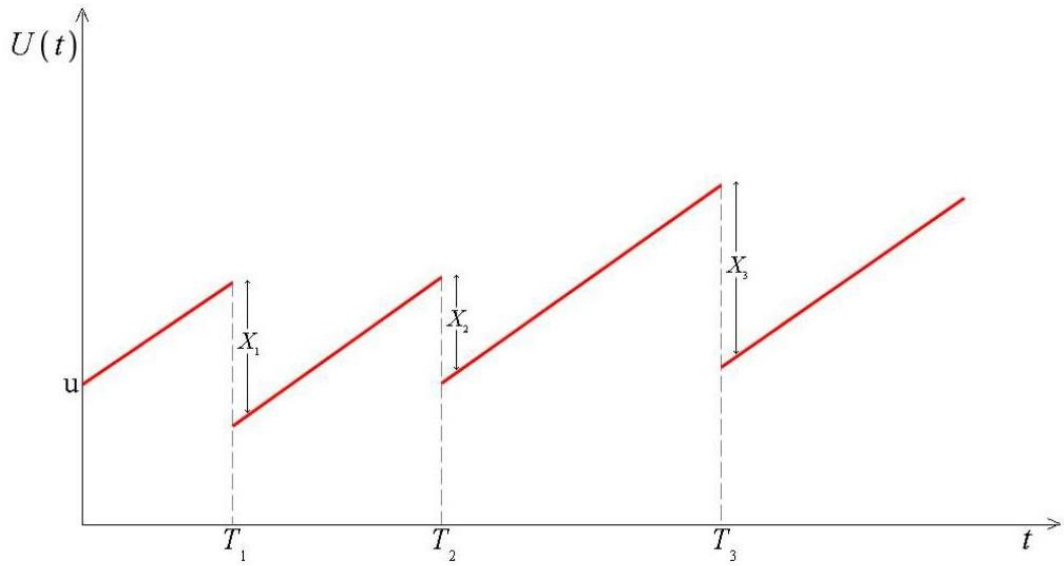
όπου λύνοντας ως προς t παίρνουμε $c=\frac{P(t)}{t}$, και c μια θετική σταθερά.

Θεωρούμε δηλαδή ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ή γενικότερα των εσόδων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, παραμένει σταθερός στη μονάδα του χρόνου. Η σταθερά c ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου (premium rate στη διεθνή βιβλιογραφία). Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος μπορεί να γραφεί ως εξής

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t\geq 0 \tag{2.2}$$

όπου όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, η $\{N(t):t\geq 0\}$, είναι η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων και στο κλασικό μοντέλο υποθέτουμε πως περιγράφεται από μια ομογενή διαδικασία Poisson.

Στο παρακάτω σχήμα (2.3) φαίνεται ότι οι δειγματοσυναρτήσεις της $U(t)$ είναι ευθύγραμμα τμήματα με κλίση ίση με την ένταση του ασφαλίστρου c και εμφανίζουν κατακόρυφα άλματα προς τα κάτω τις χρονικές στιγμές άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων, τα οποία είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα προς τα πάνω άλματα της $S(t)$.



Σχήμα 2.3 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.

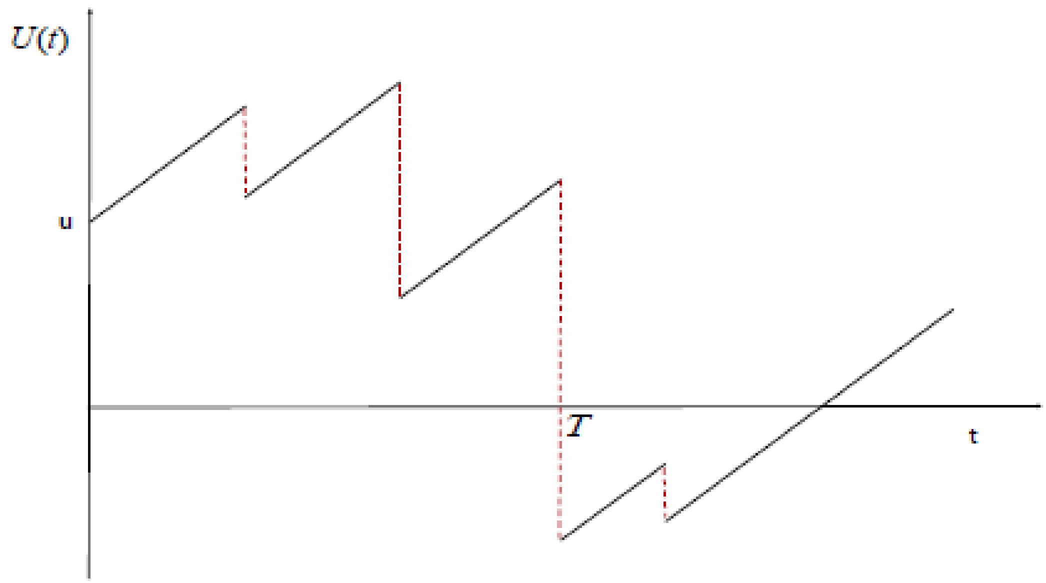
Συνοψίζοντας, μιλάμε για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, όταν ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

- Το πλήθος των αποζημιώσεων στο χρόνο $\{N(t):t\geq 0\}$, περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία Poisson, συνεπώς η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων $\{S(t):t\geq 0\}$, είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson και η ακολουθία των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, ενώ η ακολουθία των χρόνων άφιξης την κατανομή Erlang.
- Οι μεταβλητές X_i ,που δηλώνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους, και ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων $N(t)$.
- Η συνάρτηση των ασφαλίστρων είναι μια γραμμική συνάρτηση $P(t)=ct$, για κάποιο $c>0$.

2.4 Πιθανότητα χρεοκοπίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9 *Η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό (έλλειμα), ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας (time to ruin) και δίνεται από τη σχέση*

$$T=\begin{cases}\inf\{t:U(t)<0\}, & \text{για κάθε } t\\ \infty, & \text{για } U(t)>0\end{cases}.$$



Σχήμα 2.5 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος και ο χρόνος χρεοκοπίας *T*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* u *σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα να γίνει κάποια χρονική στιγμή αρνητικό, ορίζεται από τη σχέση*

$$\psi(u)=\mathrm{P}\left[T<\infty \middle| U(0)=u\right]. \tag{2.3}$$

Από τα παραπάνω φαίνεται πως το ενδεχόμενο το πλεόνασμα να είναι θετικό για κάθε χρονική στιγμή t, είναι ισοπίθανο με το ενδεχόμενο ο χρόνος χρεοκοπίας να είναι άπειρος.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα τα ασφάλιστρα δεν είναι το μόνο έσοδο για έναν ασφαλιστικό οργανισμό, όπως όπως και οι αποζημιώσεις δεν είναι το μόνο έξοδο. Έτσι, η μαθηματική χρεοκοπία όπως την ορίσαμε δεν ταυτίζεται απαραίτητα με την πραγματική, είναι όπως ένα βασικό μέτρο που χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε τη φερεγγυότητα του χαρτοφυλακίου και να διαμορφώσουμε ανάλογη οικονομική πολιτική.

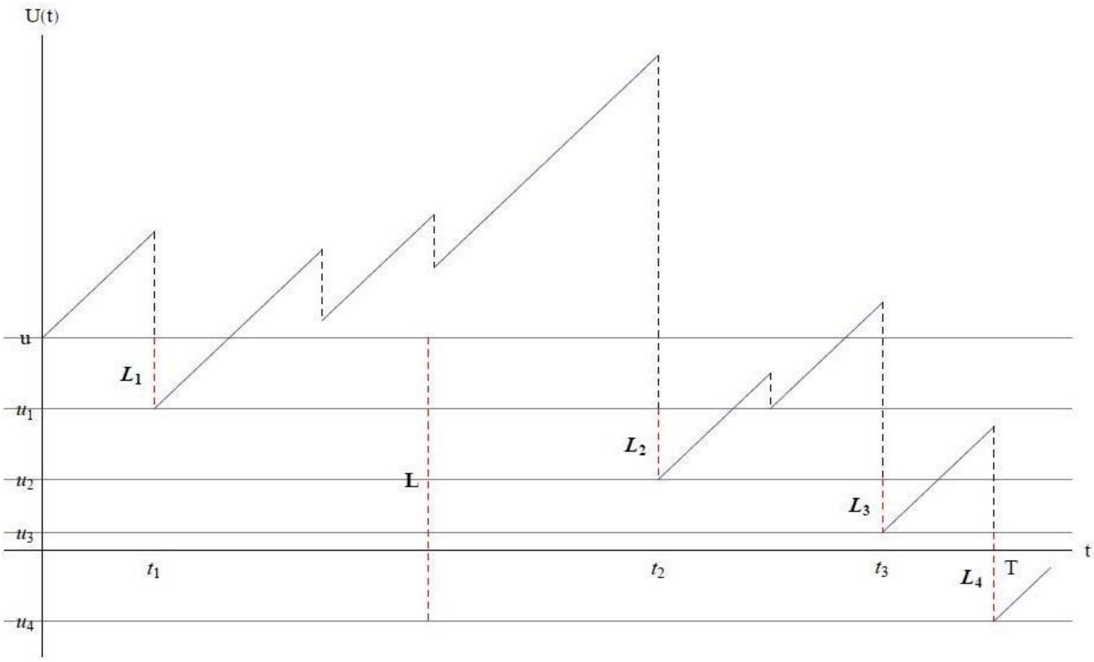
Από τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος προκύπτει άμεσα ότι για να μην είναι βέβαιη η χρεοκοπία, η ένταση ασφαλίστρου c δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Υποθέτουμε για το σκοπό αυτό ότι η ένταση του ασφαλίστρου c στο $[0,t]$ είναι αυστηρά μεγαλύτερη από το μέσο ύψος ζημιών, $E(S(t))$, που εμφανίζονται στο ίδιο χρονικό διάστημα, διαφορετικά η χρεοκοπία είναι βέβαια από την πρώτη κιόλας ζημιά. Λόγω των παραπάνω, μια ακόμα βασική υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι $c>\lambda\mu_1$, που σημαίνει ότι υποθέτουμε ότι η μέση τιμή των εσόδων του ασφαλιστή στη μονάδα του χρόνου είναι μεγαλύτερη από το μέσο ρυθμό των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο επί τη μέση αποζημίωση (δηλαδή τη μέση τιμή των εξόδων του ασφαλιστή). Συνεπώς, η παραπάνω συνθήκη απαιτεί τα έσοδα να υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα στη μονάδα του χρόνου, γι' αυτό και αναφέρεται ως συνθήκη του καθαρού κέρδους (net profit condition).

Μια ακόμη τυχαία μεταβλητή που σχετίζεται με τη στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος και παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον, είναι το μέγεθος όπως κάθετης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11 *Η σύνθετη τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια (maximal aggregate loss) και ορίζεται ως*

$$L=\max_{t\geq 0}\{u-U(t)\}=L_1+L_2+\ldots+L_k=\sum_{i=1}^{k}L_i. \tag{2.4}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $L_1+L_2+\ldots+L_k$ καλούνται κλιμακωτά ύψη (ladder heights) και εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την αρχική τιμή u έως την ελάχιστη τιμή της ανέλιξης του πλεονάσματος. Συγκεκριμένα, η μεταβλητή L_1 μας δίνει το μέγεθος της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Έστω τώρα ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από u, συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_1 , και το πλεόνασμα γίνεται $u_1=U(t_1)$, τότε $L_1=u-u_1$. Η τυχαία μεταβλητή L_2 τώρα, μας πληροφορεί για το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το u_1, έτσι $L_2=u_1-u_2$. Έτσι ορίζεται επαγωγικά η ακολουθία $L_1+L_2+...+L_k$. Όπου K η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των κλιμακωτών υψών. Η ακολουθία των κλιμακωτών υψών είναι πεπερασμένη, εφόσον λόγω της συνθήκης του καθαρού κέρδους το πλεόνασμα από κάποια χρονική στιγμή και μετά θα αυξάνεται $\left(U(t)\to\infty \text{ καθώς } t\to\infty\right)$, έτσι δεν είναι δυνατό να εμφανίζει άπειρο αριθμό ελαχίστων, ενώ η πιθανότητα να έχουμε πτώση από u_i σε u_{i+1} ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας για μηδενικό αρχικό αποθεματικό $\psi(0)$ και είναι ανεξάρτητη από το u_i.



Σχήμα 2.5 (Πολίτης 2012) Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, τα κλιμακωτά ύψη και η μέγιστη σωρευτική απώλεια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3 *Στο κλασικό μοντέλο, όταν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος, τα κλιμακωτά ύψη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν μια συνεχή κατανομή με πυκνότητα* $f_e(x)=\frac{1}{\mu_1}\left[1-F(x)\right]$, *η οποία ονομάζεται κατανομή ισορροπίας της* F *και συμβολίζεται με* F_e *. Δηλαδή,* $F_e(x)=P(L_1\le x)=\int_0^x \frac{1}{\mu_1}\left[1-F(x)\right].$

Στην προσπάθεια του ασφαλιστή να ελαχιστοποιήσει την πιθανότητα χρεοκοπίας, ένας ακόμα κρίσιμος παράγοντας είναι να έχει την αίσθηση του πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα του. Με βάση τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, μας ενδιαφέρει να ξέρουμε πόσο μεγαλύτερο της μονάδας είναι το κλάσμα που προκύπτει από τα μέσα έσοδα προς τα μέσα έξοδα του ασφαλιστή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12 *Το περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor) ή αλλιώς συντελεστής ασφαλείας θ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται από τη σχέση*

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 \quad . \tag{2.5}$$

Για να μην είναι βέβαιη η χρεοκοπία πρέπει το θ να παίρνει πάντα θετικές τιμές, έτσι όσο μεγαλύτερο είναι το θ τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Διαισθητικά, ο συντελεστής θ εκφράζει το ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή και στην πράξη συνήθως παίρνει τιμές στο διάστημα $0<\theta<1$ (ή αν εκφραστεί σαν ποσοστό από 0 έως 100%) έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να είναι ανταγωνιστικό και για τον ασφαλιστή και για τον ασφαλισμένο.

Νωρίτερα, ορίσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, δηλαδή την πιθανότητα το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό ή μηδέν, αν το χαρτοφυλάκιο λειτουργεί υπό τις ίδιες υποθέσεις για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην πράξη όμως κάτι τέτοιο είναι αμφίβολο, και έτσι ο ασφαλιστής ενδιαφέρεται να μελετήσει την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο, η οποία συμβολίζεται ως $\psi(u,t)$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u,t) = P\left[U(\tau) < 0 \ \ \text{για κάποιο} \ \ 0 < \tau < t\right].$$

Ισχύει ότι η $\psi(u,t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t και φθίνουσα ως προς u και ότι

$$\forall u \geq 0, \ \ \lim_{t \to \infty} \psi(u,t) = \psi(u).$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την πιθανότητα να μη συμβεί χρεοκοπία (probability of survival) όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.13 *Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας (ή επιβίωσης) ορίζεται από τη σχέση*

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = P\left[T < \infty \middle| U(0) = u\right] = P\left[U(t) > 0, \forall t\right].$$

Η $\delta(u)$ σε αντίθεση με την $\psi(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u και $\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1.$

Για τη μελέτη των πιθανοτήτων χρεοκοπίας και επιβίωσης θα δείξουμε ότι και οι δύο ικανοποιούν ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4 *Στο κλασικό μοντέλο, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας* $\delta(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\delta'(u)=\frac{\lambda}{c}\delta(u)-\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx. \tag{2.6}$$

Ενώ η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ *την*

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx-\frac{\lambda}{c}\bar{F}(u). \tag{2.7}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος έχει την ανανεωτική ιδιότητα, τότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί ως η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν επέλθει η πρώτη απαίτηση, και στη συνέχεια η πιθανότητα μη χρεοκοπίας λαμβάνοντας υπόψιν το πλεόνασμα που απομένει μετά την πρώτη απαίτηση. Έστω, t η χρονική στιγμή εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου και x το ύψος της αντίστοιχης αποζημίωσης και έστω ότι δεν έχουμε χρεοκοπία από αυτή την αποζημίωση (συνεπώς το πλεόνασμα $u+ct$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το ύψος x της αποζημίωσης). Στη συνέχεια θέλουμε να μη συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό $u+ct-x$. Έτσι, από το νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\delta(u)=\int_0^\infty b(t)\left[\int_0^{u+ct}\delta(u+ct-x)f(x)dx\right]dt\ , \tag{2.8}$$

όπου $b(t)$ είναι η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων, στο κλασικό μοντέλο όπου η διαδικασία αποζημιώσεων είναι σύνθετη Poisson, έχουμε $b(t)=\lambda e^{-\lambda t}$. Τότε, η (2.8) γίνεται

$$\delta(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left[\int_0^{u+ct}\delta(u+ct-x)f(x)dx\right]dt\ . \tag{2.9}$$

Στην (2.9) θέτοντας $s=u+ct$, άρα $t=\dfrac{s-u}{c}$ και συνεπώς $dt=\dfrac{1}{c}ds$ και αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης από $\begin{cases}0\le x\le u+ct\\ 0\le t<\infty\end{cases}$ σε $\begin{cases}0\le x\le s\\ u\le s<\infty\end{cases}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\delta(u)&=\int_u^\infty \lambda e^{-\lambda\frac{s-u}{c}}\int_0^s\delta(s-x)f(x)dx\frac{1}{c}ds\\ &=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda(s-u)}{c}}\left[\int_0^s\delta(s-x)f(x)dx\right]ds.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Για την παραγώγιση της σχέσης (2.10) χρειαζόμαστε τον παρακάτω κανόνα του Leibnitz για την παραγώγιση υπό ολοκλήρωμα

$$\frac{d}{du}\int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)}g(u,x)dx=g(u,\varphi_2(u))\varphi_2'(u)-g(u,\varphi_1(u))\varphi_1'(u)+\int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)}\frac{\partial}{\partial u}g(u,x)dx\,.$$

Έτσι, αν $g(u,s)=e^{-\frac{\lambda(s-u)}{c}}\int_0^s \delta(s-x)f(x)dx$, τότε από την (2.10) θα είναι $\varphi_1'(u)=1$, $\varphi_2'(u)=0$ και $\dfrac{\partial g(u,s)}{\partial u}=\dfrac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda(s-u)}{c}}\int_0^s \delta(s-x)f(x)dx$. Συνεπώς, έχουμε

$$\delta'(u)=\frac{\lambda}{c}\left\{-\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx+\int_u^\infty \frac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \delta(s-x)f(x)dx\right]ds\right\},$$

εδώ παρατηρούμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι η $\delta(u)$ όπως προέκυψε στη σχέση (2.10). Άρα,

$$\delta'(u)=\frac{\lambda}{c}\delta(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx, \quad u\geq 0 \quad . \tag{2.11}$$

Επίσης, εφόσον $\delta(u)=1-\psi(u)$ θα είναι $\delta'(u)=-\psi'(u)$, οπότε για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα έχουμε

$$\begin{aligned}-\psi'(u)&=\frac{\lambda}{c}\left[1-\psi(u)\right]-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\left[1-\psi(u-x)\right]f(x)dx\\&=\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)dx+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx\\&=\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{c}F(u)-\frac{\lambda}{c}\psi(u)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx\end{aligned}$$

Άρα,

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx-\frac{\lambda}{c}\overline{F}(u), \quad u\geq 0 \tag{2.12}$$

όπου $\overline{F}(x)=1-F(x)$ είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5 *Στο κλασικό μοντέλο, η συνάρτηση* $\delta(u)$ *ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\delta(u)=\delta(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx \tag{2.13}$$

όπου $\overline{F}(x)=1-F(x)$ *είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6 *Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό είναι* $\delta(0)=\dfrac{\theta}{1+\theta}$ *, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι* $\psi(0)=\dfrac{1}{1+\theta}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με βάση την πρόταση (2.5) και τη σχέση (2.13), γνωρίζοντας ότι $\lim_{u\to\infty}\delta(u)=1$, έχουμε

$$\delta(0)+\frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx=1,$$

όπου παρατηρούμε ότι $\lim_{u\to\infty}\delta(u-x)=1$ και ότι $\lim_{u\to\infty}\int_0^\infty \overline{F}(x)dx=\int_0^\infty \overline{F}(x)dx=\mu_1$ έτσι προκύπτει ότι

$$\delta(0)+\frac{\lambda\mu_1}{c}=1 \quad \text{άρα} \quad \delta(0)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}, \tag{2.14}$$

και το περιθώριο ασφαλείας είναι

$$\theta=\frac{c}{\lambda\mu_1}-1,$$

ή

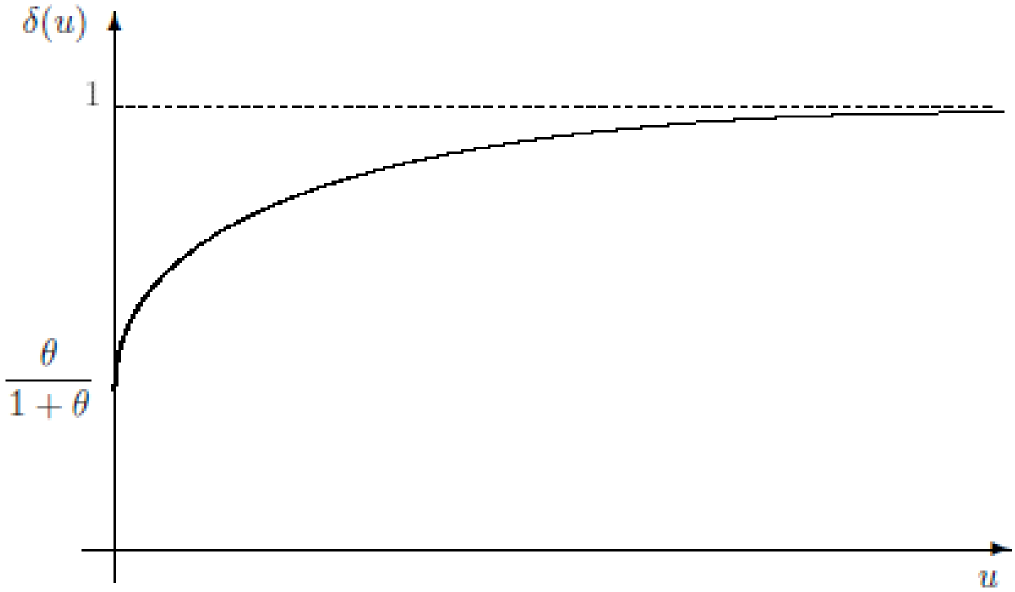
$$\theta+1=\frac{c}{\lambda\mu_1},$$

ή

$$\frac{\lambda\mu_1}{c}=\frac{1}{1+\theta}.$$

Τελικά, είναι

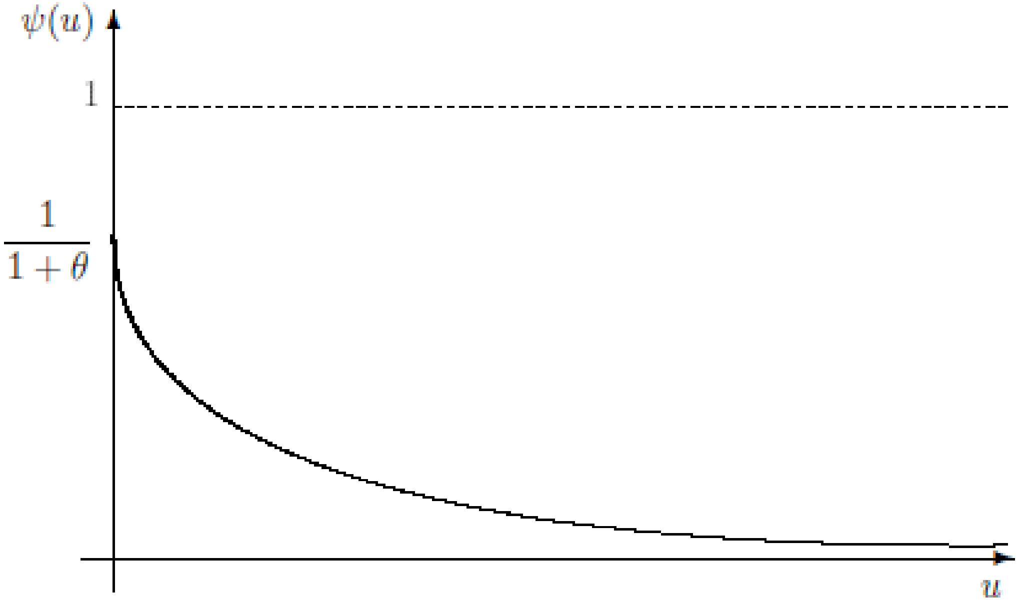
$$\delta(0)=1-\frac{1}{1+\theta}=\frac{\theta}{1+\theta}. \tag{2.15}$$



Σχήμα 2.6 (Πολίτης 2012) Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u.

Υπολογίσαμε, έτσι την πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε και την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας εφόσον $\psi(0)=1-\delta(0)$ θα είναι:

$$\psi(0)=1-\frac{\theta}{1+\theta}=\frac{1}{1+\theta} \tag{2.16}$$



Σχήμα 2.6 (Πολίτης 2012) Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u.

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ *Εφόσον το πλήθος των κλιμακωτών υψών Κ είναι πεπερασμένο, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι*

$$P(K=0)=\delta(0)=\frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K=1)=\psi(0)\delta(0)=\frac{1}{1+\theta}\frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K=2)=(\psi(0))^2\delta(0)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2\frac{\theta}{1+\theta},$$

και γενικά $P(K=k)=(\psi(0))^k\delta(0)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k\frac{\theta}{1+\theta},\ k=0,1,2,...$, *δηλαδή η* K *ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7 *Στο κλασικό μοντέλο, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας* $\delta(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\delta(u)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x), \quad u\geq 0 \; ,$$

ενώ η πιθανότητα χρεοκοπίας την

$$\psi(u)=\frac{\lambda\mu_1}{c}\overline{H}(u)+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x), \quad u\geq 0 \, .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Χρησιμοποιώντας την (2.14), η (2.13) γράφεται

$$\delta(u)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx, \quad u\geq 0, \tag{2.17}$$

Ορίζοντας μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής $H(x)$ από τη σχέση

$$H(x)=\frac{1}{\mu_1}\int_0^x \overline{F}(y)dy,$$

τότε η (2.17) παίρνει τη μορφή,

$$\delta(u)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x), \quad u\geq 0 \; . \tag{2.18}$$

Παρατηρούμε ότι (2.18) είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση αφού $\frac{\lambda\mu_1}{c}<1$,από τη συνθήκη καθαρού κέρδους. Από την (2.18) μπορούμε επίσης να βρούμε μια ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$

$$1-\psi(u)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \left[1-\psi(u-x)\right]dH(x)$$, έτσι παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\psi(u)&=\frac{\lambda\mu_1}{c}-\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u h(x)dx+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x)\\ &=\frac{\lambda\mu_1}{c}-\frac{\lambda\mu_1}{c}H(u)+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x),\end{aligned}$$

και αφού $\overline{H}(u)=1-H(u)$,

$$\psi(u)=\frac{\lambda\mu_1}{c}\overline{H}(u)+\frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x), \quad u\geq 0 \tag{2.19}$$

□

Προφανώς, και η (2.19) είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία όμως μπορεί να μετατραπεί σε κανονική αν υπάρχει ένα $R>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

$$\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda \mu_1} = 1+\theta, \tag{2.20}$$

ή ισοδύναμα, η σταθερά R είναι η θετική λύση της παρακάτω εξίσωσης, ως προς r

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r), \tag{2.21}$$

όπου

$$M_x(r) = E\left[e^{rX}\right] = \int_0^\infty e^{rX} f(x) dx, \tag{2.22}$$

η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων.

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται εξίσωση Lundberg στο κλασικό μοντέλο και η σταθερά R ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής. Ο συντελεστής προσαρμογής εξαρτάται μόνο από τη μέση τιμή των αποζημιώσεων και το περιθώριο ασφαλείας θ, και απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξή του είναι η ύπαρξη της ροπογεννήτριας της κατανομής των αποζημιώσεων.

Με προϋπόθεση την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής, η παρακάτω σχέση, γνωστή ως ανισότητα του Lundberg, μας δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) \le e^{-Ru}, \quad \forall u \ge 0,$$

Μια ακόμα χαρακτηριστική σχέση που ισχύει για την πιθανότητα χρεοκοπίας με την προϋπόθεση ότι $\int_0^\infty x e^{Rx} \overline{F}(x) dx < \infty$,

είναι ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \text{ καθώς } u \to \infty, \text{ για κάποιο } C > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1.$

2.5 Η συνάρτηση Gerber-Shiu

Οι Hans U. Gerber και Elias S.W. Shiu, το 1998 με την εργασία τους "On the time value of ruin", εισήγαγαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, μέσω της οποίας μπορούσαν να μελετήσουν ταυτόχρονα, το χρόνο χρεοκοπίας, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, μέτρα χρεοκοπίας τα οποία μέχρι τότε προσεγγίζονταν μεμονωμένα. Αρχικά μοντελοποίησαν την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (surplus prior to ruin) και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (deficit at ruin), ενώ στη συνέχεια ενσωμάτωσαν στο μοντέλο τους και το χρόνο χρεοκοπίας μέσω προεξόφλησης. Στην ίδια εργασία απέδειξαν ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

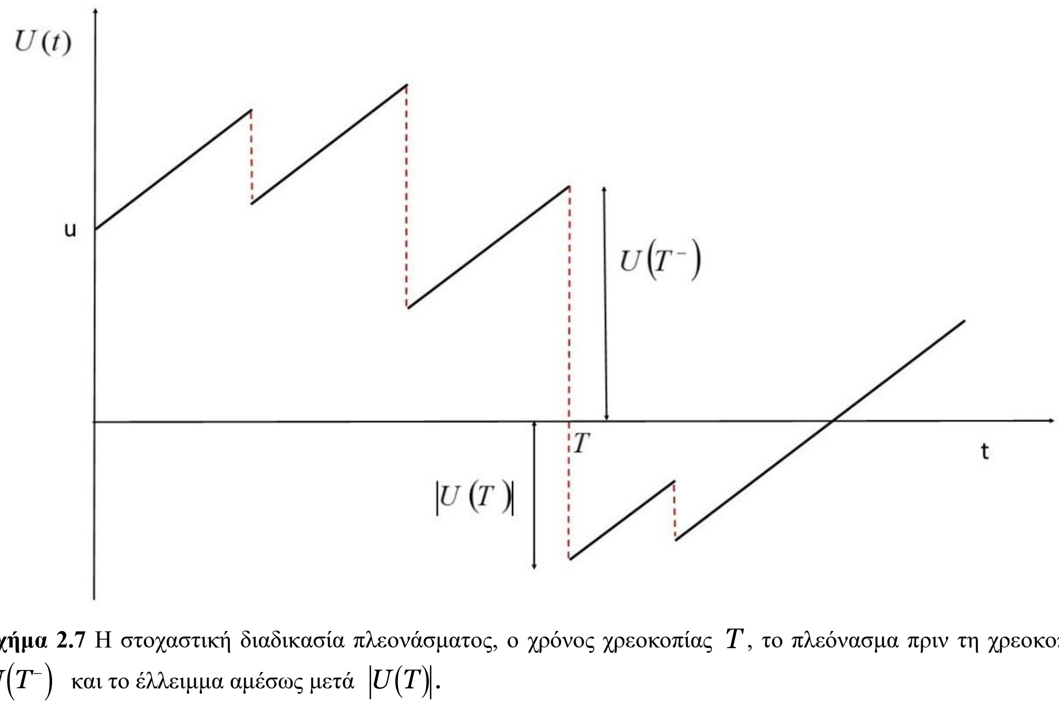
Δύο ιδιαίτερα σημαντικές ποσότητες για τη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου, και κατά συνέπεια της φερεγγυότητας αυτού είναι το πώς διαμορφώνεται το μέγεθος του πλεονάσματος ακριβώς πριν πληρωθεί η αποζημίωση που έφερε τη χρεοκοπία, καθώς και το έλλειμμα που σημειώνεται αμέσως μετά τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.14 *Συμβολίζουμε με:*

$U(T^-)$, *την τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει το πλεόνασμα ακριβώς πριν την άφιξη της απαίτησης που μας οδηγεί στη χρεοκοπία,*

$|U(T)|$, *την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας (σε απόλυτη τιμή), ή αλλιώς η σφοδρότητα της χρεοκοπίας, το μέγεθος δηλαδή της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν.*

Στο σχήμα 2.7 μπορούμε να δούμε το γραφικά τις δύο παραπάνω ποσότητες, στο γράφημα της διαδικασίας πλεονάσματος.



Σχήμα 2.7 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, ο χρόνος χρεοκοπίας T, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία $U(T^-)$ και το έλλειμμα αμέσως μετά $|U(T)|$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.15 *Για $u \geq 0$ και $\delta \geq 0$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ή αλλιώς η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, ορίζεται ως ακολούθως*

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U\left(T^-\right), |U(T)|\right) I\left(T < \infty | U(0) = u\right)\right], \tag{2.23}$$

όπου δ, *η ένταση ανατοκισμού, ή παράγοντας προεξόφλησης (discount factor), ή η παράμετρος s του μετασχηματισμού Laplace.*

T, *ο χρόνος χρεοκοπίας, δηλαδή η πρώτη στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό ή μηδέν*

$U\left(T^-\right)$, *το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία*

$|U(T)|$, *το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, ή αλλιώς η σφοδρότητα της χρεοκοπίας,*

$w\left(U\left(T^-\right), |U(T)|\right)$, *η συνάρτηση ποινής (penalty function),*

I, *μια δείκτρια συνάρτηση η οποία επισημαίνει ότι η ποινή ασκείται μόνο στην περίπτωση που συμβαίνει χρεοκοπία*

$$I\left(T < \infty | U(0) = u\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει χρεοκοπία} \\ 0, & \text{αν δεν συμβαίνει χρεοκοπία} \end{cases}$$

Προφανώς, ισχύει

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(x,y) f(x,y,t|u) dx dy dt, \tag{2.24}$$

όπου $w(x,y)$ η συνάρτηση ποινής (penalty function), και $f(x,y,t|u)$, η από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας.

Διαισθητικά, η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως η προεξοφλημένη ποινή που ασκείται όταν συμβαίνει χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $m_\delta(u)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής προκύπτουν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας, τα χαρακτηριστικότερα από αυτά θα αναφέρουμε παρακάτω:

i. Για $w\left(U\left(T^-\right), |U(T)|\right) = 1$ και $\delta > 0$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I\left(T < \infty | U(0) = u\right)\right].$$

ii. Για $w\left(U\left(T^-\right), |U(T)|\right) = 1$ και $\delta = 0$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$m_0(u) = E\left[e^{-\delta T} I\left(T < \infty | U(0) = u\right)\right] = P\left(T < \infty | U(0) = u\right) = \psi(u).$$

iii. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)\le x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\le y\right)$ και $\delta>0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U\left(T^{-}\right)$, $\left|U\left(T\right)\right|$,τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_{\delta}\left(u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(U\left(T^{-}\right)\le x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\le y\right)I\left(T<\infty\right)|U\left(0\right)=u\right]=F_{\delta}\left(x,y|u\right).$$

iv. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)\le x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\le y\right)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U\left(T^{-}\right)$, $\left|U\left(T\right)\right|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας το πολύ y.

$$\begin{aligned}m_{0}\left(u\right)&=E\left[I\left(U\left(T^{-}\right)\le x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\le y\right)I\left(T<\infty|U\left(0\right)\right)\right]\\&=P\left(U\left(T^{-}\right)\le x,\left|U\left(T\right)\right|\le y,T<\infty|U\left(0\right)=u\right)\\&=F_{0}\left(x,y|u\right).\end{aligned}$$

v. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|=y\right)$ και $\delta>0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U\left(T^{-}\right)$, $\left|U\left(T\right)\right|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_{\delta}\left(u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|=y\right)I\left(T<\infty\right)|U\left(0\right)=u\right]=f_{\delta}\left(x,y|u\right).$$

vi. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|=y\right)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U\left(T^{-}\right)$, $\left|U\left(T\right)\right|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι ίσο με x, ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας ίσο με y.

$$\begin{aligned}m_{0}\left(u\right)&=E\left[I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|=y\right)I\left(T<\infty|U\left(0\right)\right)\right]\\&=P\left(U\left(T^{-}\right)=x,\left|U\left(T\right)\right|=y,T<\infty|U\left(0\right)=u\right)\\&=f_{0}\left(x,y|u\right).\end{aligned}$$

vii. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)\leq x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq\infty\right)$ και $\delta>0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U\left(T^{-}\right)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_{\delta}\left(u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(U\left(T^{-}\right)\leq x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq\infty\right)I\left(T<\infty\right)|U\left(0\right)=u\right]=F_{\delta}\left(x|u\right).$$

viii. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)\leq x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq\infty\right)$ και $\delta=0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U\left(T^{-}\right)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το μέγεθος του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x.

$$\begin{aligned}m_{0}\left(u\right)&=E\left[I\left(U\left(T^{-}\right)\leq x\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq\infty\right)I\left(T<\infty|U\left(0\right)\right)\right]\\&=P\left(U\left(T^{-}\right)\leq x,\left|U\left(T\right)\right|\leq\infty,T<\infty|U\left(0\right)=u\right)\\&=F_{0}\left(x|u\right).\end{aligned}$$

ix. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)\leq\infty\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq y\right)$ και $\delta>0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $\left|U\left(T\right)\right|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_{\delta}\left(u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(U\left(T^{-}\right)\leq\infty\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq y\right)I\left(T<\infty\right)|U\left(0\right)=u\right]=F_{\delta}\left(y|u\right).$$

x. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)\leq\infty\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq y\right)$ και $\delta=0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $\left|U\left(T\right)\right|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y.

$$\begin{aligned}m_{0}\left(u\right)&=E\left[I\left(U\left(T^{-}\right)\leq\infty\right)I\left(\left|U\left(T\right)\right|\leq y\right)I\left(T<\infty|U\left(0\right)\right)\right]\\&=P\left(U\left(T^{-}\right)\leq\infty,\left|U\left(T\right)\right|\leq y,T<\infty|U\left(0\right)=u\right)\\&=F_{0}\left(y|u\right).\end{aligned}$$

xi. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U\left(T\right)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)$ και $\delta>0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U\left(T^{-}\right)$, τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_{\delta}\left(u\right)=E\left[e^{-\delta T}I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)I\left(T<\infty\right)|U\left(0\right)=u\right]=f_{\delta}\left(x|u\right).$$

xii. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U(T)\right|\right)=I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)$ και $\delta=0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U\left(T^{-}\right)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι ίσο με x

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\left[I\left(U\left(T^{-}\right)=x\right)I\left(T<\infty \mid U(0)\right)\right] \\ &= P\left(U\left(T^{-}\right)=x, T<\infty \mid U(0)=u\right) \\ &= f_0(x \mid u). \end{aligned}$$

xiii. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U(T)\right|\right)=I\left(\left|U(T)\right|=y\right)$ και $\delta>0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\left|U(T)\right|$, τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}I\left(\left|U(T)\right|=y\right)I(T<\infty) \mid U(0)=u\right]=f_\delta(y \mid u).$$

xiv. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U(T)\right|\right)=I\left(\left|U(T)\right|=y\right)$ και $\delta=0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\left|U(T)\right|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι ίσο με y

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\left[I\left(\left|U(T)\right|=y\right)I\left(T<\infty \mid U(0)\right)\right] \\ &= P\left(\left|U(T)\right|=y, T<\infty \mid U(0)=u\right) \\ &= f_0(y \mid u). \end{aligned}$$

xv. Για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U(T)\right|\right)=U\left(T^{-}\right)^k$ και $\delta=0$, προκύπτει η ροπή k-τάξης του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία

$$m_0(u)=E\left[U\left(T^{-}\right)^k I\left(T<\infty \mid U(0)=u\right)\right].$$

και για $w\left(U\left(T^{-}\right),\left|U(T)\right|\right)=\left|U(T)\right|^k$ και $\delta=0$, η ροπή k-τάξης του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_0(u)=E\left[\left|U(T)\right|^k I\left(T<\infty \mid U(0)=u\right)\right].$$

2.5.1 Η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Στο πρόβλημα εύρεσης ενός αναλυτικού τύπου για τον υπολογισμό της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, οι Gerber-Shiu απέδειξαν ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της εξίσωσης αυτής όπως θα δούμε παρακάτω γίνεται με χρήση μετασχηματισμών Laplace. Τη γενική λύση της συνάρτησης Gerber-Shiu, έδωσαν το 1999 οι Lin και Willmot, σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8 *Η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$cm_\delta'(u)=(\lambda+\delta)m_\delta(u)-\lambda\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx-\lambda\gamma(x),$$

όπου $\gamma(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)f(x)dx.$

1[Η] ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τη σχέση (2.24), δεσμεύοντας ως προς το χρόνο t και το μέγεθος x της πρώτης απαίτησης (δηλαδή $T_1=t$ και $X_1=x$), και αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , τότε με βάση το νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$m_\delta(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty m_\delta(u|t,x)f_{X_1}(x)f_{T_1}(t)dxdt,$$

$$=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left\{\int_0^\infty m_\delta(u|t,x)f(x)dx\right\}dt. \tag{2.25}$$

Για τη χρονική στιγμή t άφιξης της πρώτης απαίτησης, το πλεόνασμα είναι $U(t)=u+ct-x$ και επομένως αν $\begin{cases}0\le x\le u+ct, & \text{τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία}\\ x>u+ct, & \text{τότε εμφανίζεται χρεοκοπία.}\end{cases}$

Έτσι, αν $0\le x\le u+ct,$ αφού δεν εμφανίζεται χρεοκοπία τη χρονική στιγμή t , η διαδικασία ανανεώνεται ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό $u+ct-x$ Ενώ αν $x>u+ct$ τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη δηλαδή $I(T<\infty)=1$ και τότε $U(T^-)=u+ct$ και $|U(T)|=x-u-ct.$ Συνεπώς η (2.25) γίνεται

$$m_\delta(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left\{\int_0^{u+ct}e^{-\delta t}m_\delta(u+ct-x)f(x)dx+\int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t}w(u+ct,x-u-ct)f(x)dx\right\}dt,$$

ή

$$=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^{u+ct}m_\delta(u+ct-x)f(x)dxdt+\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t}\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)f(x)dxdt,$$

εδώ θέτοντας $s=u+ct$ που σημαίνει ότι $t=\frac{s-u}{c}$ και κατά συνέπεια $dt=\frac{1}{c}ds$ και αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης όπως παρακάτω

$$\begin{cases} 0\le t<\infty \\ 0\le \dfrac{s-u}{c}<\infty \end{cases} \text{ επομένως } u\le s<\infty.$$

Παίρνουμε

$$m_\delta(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dxds+\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_s^\infty w(s,x-s)f(x)dxds,$$

και θέτοντας το $\gamma(s)=\int_u^\infty w(s,x-s)f(x)dx$, είναι

$$cm_\delta(u)=\lambda\int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dxds+\lambda\int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds. \qquad (2.26)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την (2.26) ως προς *u*, με τη βοήθεια του παρακάτω κανόνα του Leibnitz

$$\frac{d}{du}\int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)}g(u,x)dx=g(u,\varphi_2(u))\varphi_2'(u)-g(u,\varphi_1(u))\varphi_1'(u)+\int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)}\frac{\partial}{\partial u}g(u,x)dx.$$

- Για να υπολογίσουμε το πρώτο κομμάτι θέτουμε $g(u,s)=e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dx$ και συνεπώς θα είναι

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dx &=-g(u,u)+\int_u^\infty\frac{\partial}{\partial u}g(u,s)ds\\ &=-\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx+\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dxds\end{aligned}$$

- Για το δεύτερο κομμάτι της (2.19), θέτοντας $g(u,s)=e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds,$ η παράγωγος είναι

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds &=\frac{d}{du}\int_u^\infty g(u,s)ds\\ &=-g(u,u)+\int_u^\infty\frac{\partial}{\partial u}g(u,s)ds\\ &=-\gamma(u)+\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds.\end{aligned}$$

Καταλήγουμε έτσι στην παράγωγο της σχέσης (2.26)

$$cm'_\delta(u)=\lambda\left\{-\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx+\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dxds\right\}$$
$$+\lambda\left\{-\gamma(u)+\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\right\},$$

ή

$$cm'_\delta(u)=\lambda\left\{\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m_\delta(s-x)f(x)dxds+\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\right\}$$
$$+\lambda\left\{-\gamma(u)-\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx\right\},$$

ή

$$cm'_\delta(u)=(\lambda+\delta)m_\delta(u)-\lambda\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx-\lambda\gamma(u). \qquad (2.27)$$

Η σχέση (2.27) είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που μας ενδιαφέρει.

2^{Η} ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εναλλακτικά, για να κατανοήσουμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ως εξής:
Έστω ένα μικρό απειροστό διάστημα μήκους dt , τότε αφού οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξής των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ και συνεπώς η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί τη διαδικασία Poisson, θα είναι:

- Αν στο διάστημα μήκους dt δεν έχουμε ζημιογόνο ενδεχόμενο, η $m_\delta(u)$ ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u+cdt$ και έτσι θα είναι $(1+\lambda dt)m_\delta(u+cdt)$.
- Αν στο διάστημα αυτό έχουμε ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο, τότε αν το ύψος της αποζημίωσης είναι $0\le x\le u+cdt$ δεν έχουμε χρεοκοπία και η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u+cdt-x$ και έχουμε $\lambda dt\int_0^{u+cdt}m_\delta(u+cdt-x)f(x)dx$, ενώ αν το ύψος της αποζημίωσης είναι $x>u+cdt$, τότε έχουμε χρεοκοπία οπότε επιβάλλεται η συνάρτηση ποινής και έχουμε $\lambda dt\int_{u+cdt}^\infty w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx.$

Τελικά, με προεξόφληση έχουμε

$$m_\delta(u)=e^{-\delta dt}\left\{(1-\lambda dt)m_\delta(u+cdt)+\lambda dt\int_0^{u+cdt}m_\delta(u+cdt-x)f(x)\right.$$
$$\left.+\lambda dt\int_{u+cdt}^\infty w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)\right\}+o(dt). \qquad (2.28)$$

όπου $o(x): \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ δηλαδή στη δική μας περίπτωση μια συνάρτηση του dt που τείνει στο μηδέν πιο γρήγορα από το dt .

Με ανάπτυγμα σειράς Taylor έχουμε:

- Αν δεν συμβεί ζημιογόνο ενδεχόμενο στο απειροστό διάστημα dt

$$\begin{aligned} e^{-\delta dt}(1-\lambda dt) &= \left[1-\delta dt + o(dt)\right](1-\lambda dt) \\ &= 1-\lambda dt - \delta dt + \lambda\delta (dt)^2 + o(dt) - \lambda dt 0(dt) \\ &= 1-(\lambda+\delta)dt + o(dt) \end{aligned}$$

- Ενώ αν συμβεί

$$\begin{aligned} e^{-\delta dt}\lambda dt &= \left[1-\delta dt + o(dt)\right]\lambda dt \\ &= \lambda dt - \lambda\delta (dt)^2 + o(dt)\lambda dt \\ &= \lambda dt + o(dt) \end{aligned}$$

Έτσι η σχέση (2.28) γίνεται

$$\begin{aligned} m_\delta(u) = \left[1+(\lambda+\delta)dt\right] m_\delta(u+cdt) + \lambda\Big[\int_0^{u+cdt} m_\delta(u+cdt-x) f(x)dx \\ + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt) f(x)dx\Big] + o(dt). \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$\begin{aligned} c\frac{m_\delta(u)-m_\delta(u+cdt)}{cdt} = -(\lambda+\delta) m_\delta(u+cdt) + \lambda\int_0^{u+cdt} m_\delta(u+cdt-x) f(x)dx \\ + \lambda\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt-x) f(x)dx + o(dt). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} cm_\delta'(u) = (\lambda+\delta) m_\delta(u+cdt) - \lambda\int_0^{u+cdt} m_\delta(u+cdt-x) f(x)dx \\ - \lambda\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt) f(x)dx + o(dt.) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Οπότε για $dt \to 0$ και θέτοντας $\gamma(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f(x)dx$ καταλήγουμε στη σχέση (2.27) που αποδείξαμε παραπάνω. □

2.5.2 Η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας ως ειδική περίπτωση της Gerber-Shiu

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ειδική περίπτωση της συνάρτησης Gerber-Shiu για $w(x,y)=1$ και $\delta=0$. Έτσι, μέσω της σχέσης (2.20) μπορούμε να βρούμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας και κατά συνέπεια να πάρουμε ανάλογο αποτέλεσμα για την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας (επιβίωσης). Συγκεκριμένα από τη σχέση (2.20) και για $w(x,y)=1$ και $\delta=0$ έχουμε

$$cm_0'(u)=\lambda m_0(u)-\lambda\int_0^u m_0(u-x)f(x)dx-\lambda\gamma(u), \tag{2.30}$$

στην περίπτωση αυτή όμως το

$$\gamma(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)f(x)dx=\int_u^\infty f(x)dx=\overline{F}(x)=1-F(x).$$

Τελικά για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$c\psi'(u)=\lambda\psi(u)-\lambda\int_u^\infty \psi(u-x)f(x)dx-\lambda\overline{F}(x).$$

2.5.3 Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu

Για τη λύση της παραπάνω ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Laplace (Laplace Transform). Αρχικά θα θυμίσουμε τον ορισμό και λίγες πληροφορίες για τους μετασχηματισμούς αυτούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.16 *Έστω h(x) μια συνάρτηση που ορίζεται για x>0. Ο μετασχηματισμός Laplace της h(x) συμβολίζεται με* $\hat{h}(s)$ *και ορίζεται ως*

$$\hat{h}(x)=\int_0^\infty e^{-sx}h(x)dx,\quad s>0.$$

Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{h}(s)$ μιας συνάρτησης $h(x)$ υπάρχει, αν η συνάρτηση είναι συνεχής (ή τμηματικά συνεχής) και $\exists\, a_1, \beta>0$ τέτοια ώστε να ισχύει $|h(x)|<a_1e^{a_2x}$, $\forall x>\beta.$ Μπορεί επίσης να αποδειχτεί ότι υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ μιας συνάρτησης και του αντίστοιχου μετασχηματισμού Laplace.

Μπορούμε έτσι να μιλάμε για το μετασχηματισμό Laplace που αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση αλλά και για την αντίστροφη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ένα δοθέντα μετασχηματισμό Laplace (αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace). Συνεπώς, όταν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης μπορούμε αντίστροφα να οδηγηθούμε στον υπολογισμό της συνάρτησης.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να δώσουμε τον ορισμό της συνέλιξης συναρτήσεων και το μετασχηματισμό Laplace αυτής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.17 *Έστω οι συναρτήσεις f και g. Η συνέλιξη (convolution) των f και g είναι μια νέα συνάρτηση, έστω h, που συμβολίζεται με* $h = f * g$ *, και ορίζεται ως εξής:*

- *Έστω ότι οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα* $[0,+\infty)$ *, τότε*
$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(y) g(x-y) dy.$$
- *Έστω ότι οι f και g είναι διακριτές συναρτήσεις (ακολουθίες πραγματικών αριθμών) που ορίζονται στο σύνολο* $\{0,1,2,3,.....\}$ *, τότε* $h(x) = (f * g)(x) = \sum_{y=0}^{x} f(y) g(x-y).$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 *Έστω* $h(x) = (f * g)(x)$ $, x \geq 0$ *η συνέλιξη των συνεχών συναρτήσεων f και g. Τότε ισχύει ότι*
$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s) \hat{g}(s),$$
όπου
$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} h(x) dx, \;\; \hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \;\; \hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx$$
είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $h(x), f(x)$ *και* $g(x), x \geq 0$ *αντίστοιχα.*

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, το επόμενο βήμα για τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (σχέση 2.27) είναι να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace αυτής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9 *Ο μετασχηματισμός Laplace της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης* $cm_\delta'(u) = (\lambda+\delta) m_\delta(u) - \lambda \int_0^u m_\delta(u-x) f(x) dx - \lambda \gamma(u)$ *δίνεται από τη σχέση*
$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{cm_\delta(0) - \lambda \hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda \hat{f}(s)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ξεκινώντας τμηματικά έχουμε:
$$\hat{m}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} m_\delta(u) du$$

$$\hat{f}(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$
$$\hat{\gamma}(s)=\int_0^{\infty} e^{-su}\gamma(u)du$$

$$\hat{m}'_{\delta}(s)=\int_0^{\infty} e^{-su}m'_{\delta}(u)du=e^{-su}m_{\delta}(u)\Big|_{u=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(e^{-su}\right)' m_{\delta}(u)du$$
$$=-m_{\delta}(0)+s\int_0^{\infty} e^{-su}m_{\delta}(u)du=s\hat{m}_{\delta}(s)-m_{\delta}(0).$$

Και επειδή όπως είναι προφανές το ολοκλήρωμα $\int_0^u m_{\delta}(u-x)f(x)dx,$ είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων $m_{\delta}(x)$ και $f(x)$, ο μετασχηματισμός Laplace θα είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων αυτών.

Προκύπτει έτσι ο μετασχηματισμός Laplace της (2.27)

$$c\left[s\hat{m}_{\delta}(s)-m_{\delta}(0)\right]=(\lambda+\delta)\hat{m}_{\delta}(s)-\lambda\hat{m}_{\delta}(s)\hat{f}(s)-\lambda\hat{\gamma}(s)$$

ή

$$\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)\right]\hat{m}_{\delta}(s)=cm_{\delta}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)$$

ή

$$\hat{m}_{\delta}(s)=\frac{cm_{\delta}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)} \qquad (2.31)$$

□

2.5.4 Γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Ας εξετάσουμε τον παρονομαστή της σχέσης (2.23). Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η θετική λύση της εξίσωσης Lundberg (σχέση 2.14)

$$\lambda+cr=\lambda M_x(r).$$

Όπου για $r=-s, s>0$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως $\lambda-cs=\lambda M_x(-s)$, συνεπώς και

$$\lambda-cs=\lambda\hat{f}(s).$$

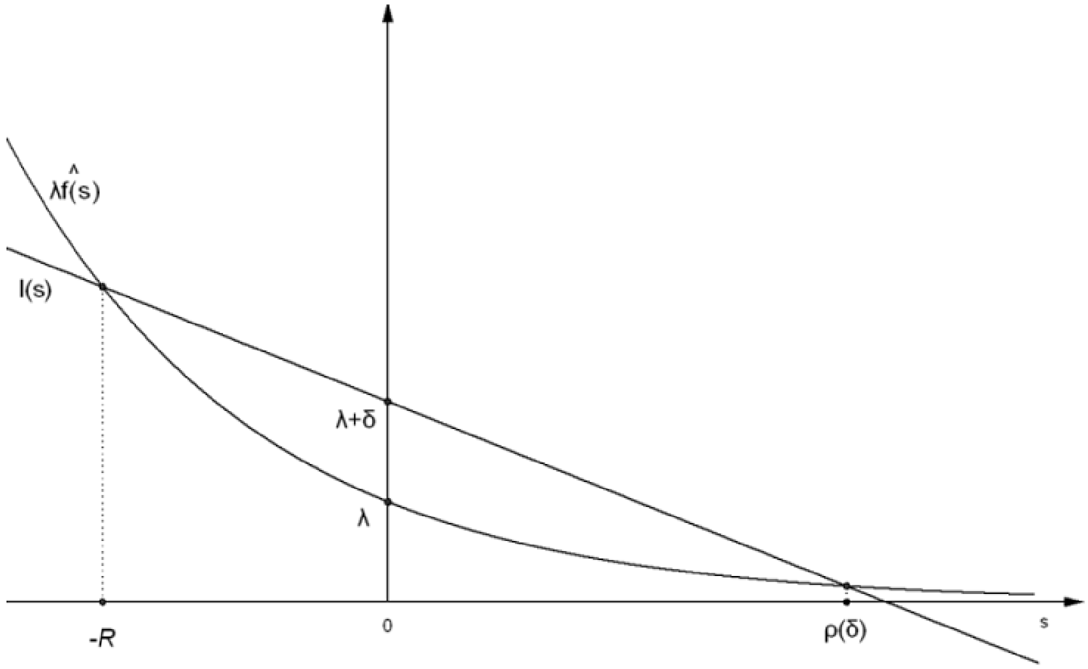
Άρα, για $\delta=0$ ο παρονομαστής της (2.23) είναι η εξίσωση Lundberg και για το λόγο αυτό θα αποκαλούμε γενικευμένη εξίσωση Lundberg την εξίσωση

$$cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)=0 \qquad (2.32)$$

Θα δείξουμε ότι η (2.32) έχει μοναδική θετική ρίζα.

Έστω $l(s)=\lambda\hat{f}(s)$ όπου $l(s)=\lambda+\delta-cs$. Τότε η (2.24) είναι η $l(s)-\lambda\hat{f}(s)=0$.
Παρατηρούμε όμως ότι $l(0)=\lambda+\delta$, ενώ $\lambda\hat{f}(0)=\lambda$, άρα αφού $l(0)\geq\lambda\hat{f}(0)$ η κλίση της $l(s)$ είναι αρνητική. Επίσης, παραγωγίζοντας την $\lambda\hat{f}(s)$ παίρνουμε ότι είναι φθίνουσα ως προς s.

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα λοιπόν, η (2.31) έχει μοναδική θετική ρίζα, έστω *ρ*.



Σχήμα 2.8 Οι λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

Στόχος είναι να βρούμε την $m_\delta(u)$, για το σκοπό αυτό θα συνεχίσουμε να δουλεύουμε πάνω στη σχέση (2.30).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10 *Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu, για ρ να είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης Lundberg, μπορεί να γραφεί και ως:*

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{\lambda\dfrac{\hat{\gamma}(\rho)-\hat{\gamma}(s)}{s-\rho}}{c-\lambda\dfrac{\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)}{s-\rho}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *Έστω* $A(s)=cm_\delta(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)$ *και* $B(s)=cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)$, *και εφόσον* $\hat{m}_\delta(s)<\infty$ *και ρ η μοναδική θετική ρίζα της* $B(s)$ *τότε θα είναι και ρίζα της* $A(s)$. *Έτσι, θα είναι*

$$B(s)=B(s)-B(\rho)=cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)-c\rho+(\lambda+\delta)-\lambda\hat{f}(\rho)$$

ή

$$B(s)=c(s-\rho)-\lambda\left[\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)\right]$$

ή

$$B(s)=(s-\rho)\left[c-\lambda\frac{\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)}{s-\rho}\right]. \tag{2.33}$$

Όμως ισχύει $A(\rho)=0$ που συνεπάγεται ότι $cm_\delta(0)-\lambda\hat{\gamma}(\rho)=0$ άρα $cm_\delta(0)=\lambda\hat{\gamma}(\rho)$ και έτσι το $A(s)$ γράφεται

$$A(s)=\lambda\hat{\gamma}(\rho)-\lambda\hat{\gamma}(s)=\lambda(s-\rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho)-\hat{\gamma}(s)}{s-\rho}. \tag{2.34}$$

Από τις (2.33), (2.34) και (2.31) παίρνουμε

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{\lambda(s-\rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho)-\hat{\gamma}(s)}{s-\rho}}{(s-\rho)\left[c-\lambda\frac{\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)}{s-\rho}\right]}$$

ή

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{\lambda\frac{\hat{\gamma}(\rho)-\hat{\gamma}(s)}{s-\rho}}{c-\lambda\frac{\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)}{s-\rho}}. \tag{2.35}$$

□

2.5.5 Τελεστής των Dickson-Hipp

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό ενός τελεστή ο οποίος θα μας βοηθήσει να προχωρήσουμε παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.18 Έστω $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $r\in\Re$. Τότε ο τελεστής Dickson-Hipp συμβολίζεται με $T_r f(x)$ και ορίζεται ως

$$T_r f(x)=\int_x^\infty e^{-r(y-x)}f(y)dy=\int_0^\infty e^{-ry}f(y+x)dy$$

ΛΗΜΜΑ 2.1 (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ DICKSON-HIPP) Έστω $T_r f(x)$ ο τελεστής Dickson-Hipp μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$. Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:

i. $T_r f(0)=\int_0^\infty e^{-ry}f(y)dy=\hat{f}(r)$,

ii. $T_r\hat{f}(s)=\dfrac{\hat{f}(s)-\hat{f}(r)}{r-s}$ κάτι που προκύπτει από τα παρακάτω.

$$T_r\hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}T_rf(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}\int_x^\infty e^{-r(y-x)}f(y)dydx$$

και με αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης από $\begin{cases}0\le x<\infty\\ x\le y<\infty\end{cases}$ σε $\begin{cases}0\le x\le y\\ 0\le y<\infty\end{cases}$ έχουμε

$$\begin{aligned}T_r\hat{f}(s)&=\int_0^\infty\left[\int_0^y e^{-sx}e^{-r(y-x)}f(y)dx\right]dy=\int_0^\infty e^{-ry}f(y)\left[\int_0^y e^{(r-s)x}dx\right]dy\\&=\int_0^\infty e^{-ry}f(y)\frac{e^{(r-s)y}-1}{r-s}dy=\frac{1}{r-s}\left[\int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy-\int_0^\infty e^{-ry}f(y)dy\right]\\&=\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(r)}{r-s}.\end{aligned}$$

.

2.5.6 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της συνάρτησης των Gerber-Shiu

Η σχέση (2.34) με χρήση της ιδιότητας (ii) του τελεστή Dickson-Hipp γράφεται

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{\lambda T_\rho\hat{\gamma}(s)}{c-\lambda T_\rho\hat{f}(s)}, \tag{2.36}$$

ή ισοδύναμα

$$c\hat{m}_\delta(s)=\lambda\hat{m}_\delta(s)T_\rho\hat{f}(s)+\lambda T_\rho\hat{\gamma}(s)\ .$$

Με χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace παίρνουμε

$$m_\delta(u)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_\delta(u-x)T_\rho f(x)dx+\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)\ ,\quad u\ge 0\ . \tag{2.37}$$

Θέτοντας $\frac{\lambda}{c}T_\rho f(x)=z(x)$, τότε

$$\int_0^\infty z(x)dx=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty T_\rho f(x)dx=\frac{\lambda}{c}T_\rho\hat{f}(0)=\frac{\lambda}{c}\frac{\hat{f}(0)-\hat{f}(\rho)}{\rho-0}=\frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho}. \tag{2.38}$$

Επειδή από την εξίσωση Lundberg $\lambda+\delta-c\rho=\lambda\hat{f}(\rho)$, συνεπάγεται $\lambda\left(1-\hat{f}(\rho)\right)=c\rho-\delta$, η σχέση (2.38) γίνεται

$$\int_0^\infty z(x)dx=\frac{c\rho-\delta}{c\rho}=1-\frac{\delta}{c\rho}<1. \tag{2.39}$$

Θέτουμε επίσης $\frac{1}{1+\xi_\delta}=\int_0^\infty z(x)dx=1-\frac{\delta}{c\rho}$, $\xi_\delta>0$ και $G_\delta(u)=\frac{\int_0^u z(x)dx}{\int_0^\infty z(x)dx}$. Τότε, η $G_\delta(u)$ είναι συνάρτηση κατανομής και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$g_\delta(u)=G'_\delta(u)=\frac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx}.$$

Συνεπώς $G_\delta(u)=(1+\xi_\delta)\int_0^u z(x)dx$ και $g_\delta(u)=(1+\xi_\delta)z(u)$.

Έτσι, η σχέση (2.37), γίνεται

$$\begin{aligned}m_\delta(u)&=\int_0^u m_\delta(u-x)z(x)dx+\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)\\&=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)(1+\xi_\delta)z(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u).\end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα $H_\delta(u)=(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)$, έχουμε

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)\ ,\quad u\geq 0 \tag{2.40}$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό (2.5), δείξαμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αφού $\frac{1}{1+\xi_\delta}<1$ και η $g_\delta(u)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

ΛΗΜΜΑ 2.2 *Ισχύει* $\frac{1}{1+\xi_\delta}=\frac{1}{1+\theta}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι $\rho=\rho(\delta)$ τότε

$$\frac{1}{1+\xi_0}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{1+\xi_\delta}=\lim_{\delta\to 0^+}\left(1-\frac{\delta}{c\rho(\delta)}\right)=1-\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\delta}{c\rho(\delta)},$$

όπου εφαρμόζοντας κανόνα De L'Hospital είναι

$$\frac{1}{1+\xi_0}=1-\frac{1}{c\lim\limits_{\delta\to 0^+}\rho'(\delta)}=1-\frac{1}{c\rho'(0)}. \tag{2.41}$$

Όμως, $\lambda+\delta-c\rho(\delta)=\lambda\hat{f}\left(\rho(\delta)\right)$ και παραγωγίζοντας ως προς δ, έχουμε $1-c\rho'(\delta)=\lambda\rho'(\delta)\hat{f}'\left(\rho(\delta)\right)$ και για δ=0 είναι $1-c\rho'(0)=\lambda\rho'(0)\hat{f}'\left(\rho(0)\right)$ και εφόσον $\rho(0)=0$ και $\hat{f}'(s)=\int_0^\infty -xe^{-sx}f(x)dx$ θα έχω $1-c\rho'(0)=\lambda\rho'(0)\hat{f}'(0)=\lambda\rho'(0)\left[-E(X)\right]$ και λύνοντας ως προς $\rho'(0)$ και από τον ορισμό του περιθωρίου ασφαλείας, η σχέση (2.33) γίνεται

$$\frac{1}{1+\xi_0}=\frac{\lambda E(X)}{c}=\frac{\lambda E(X)}{(1+\theta)\lambda E(X)}=\frac{1}{1+\theta} \quad \text{άρα και } \xi_0=\theta. \qquad \square$$

Ώστε δείξαμε το παρακάτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 *Η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:*

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)\ ,\ \ u\geq 0\ . \tag{2.42}$$

όπου $\frac{1}{1+\xi_\delta}=\frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho}=1-\frac{\delta}{c\rho}$, $\rho=\rho(\delta)$ *η θετική ρίζα της εξίσωσης Lundberg* $\lambda+\delta-c\rho=\lambda\hat{f}(\rho)$ *με* $\xi_0=\theta$ *και* $g_\delta(u)=(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho f(u)$, $H_\delta(u)=(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)$.

Παρακάτω θα δώσουμε μερικά ακόμη αποτελέσματα για τη συνάρτηση κατανομής G_δ τη δεξιά ουρά της $\overline{G}_\delta$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g_δ , τα οποία θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια.

Θα ξεκινήσουμε με το μετασχηματισμό Laplace της δεξιάς ουράς της κατανομής των αποζημιώσεων

$$\begin{aligned}\hat{\overline{F}}(s)&=\int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}(x)dx=-\frac{1}{s}\int_0^\infty\left(e^{-sx}\right)'\overline{F}(x)dx\\&=-\frac{1}{s}\left\{e^{-sx}\overline{F}(x)\Big|_{x=0}^{\infty}-\int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}'(x)dx\right\}\\&=-\frac{1}{s}\left\{0-1+\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right\}=\frac{1-\hat{f}(s)}{s}\end{aligned} \tag{2.43}$$

Από τη (2.30) παίρνουμε

$$\frac{1}{1+\xi_\delta}=\int_0^\infty z(x)dx=\frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho}=\frac{\lambda}{c}\hat{\overline{F}}(\rho)$$

το οποίο επειδή $c=(1+\theta)\lambda E(X)$ θα είναι

$$\frac{1}{1+\xi_\delta}=\frac{1}{1+\theta}\frac{\hat{\overline{F}}(\rho)}{E(X)}. \tag{2.44}$$

Για την κατανομή ισορροπίας $f_e(x)=\frac{\overline{F}(x)}{E(X)}$, έχουμε

$$\hat{f}_e(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f_e(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\overline{F}(x)}{E(X)}dx=\frac{\hat{\overline{F}}(s)}{E(X)}.$$

Άρα η σχέση (2.44) γίνεται

$$\frac{1}{1+\xi_\delta}=\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(\rho). \tag{2.45}$$

Τώρα για την g_δ έχουμε $g_\delta(u)=(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho f(u)$ και επειδή $(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}=\frac{1}{\hat{\overline{F}}(\rho)}$ παίρνουμε

$$g_\delta(u)=\frac{T_\rho f(u)}{\hat{\overline{F}}(\rho)}=\frac{\int_u^\infty e^{-\rho(y-u)}f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}=\frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho y}f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}. \tag{2.46}$$

Επίσης, $\overline{G}_\delta(u)=\int_u^\infty g_\delta(t)dt=\frac{\int_u^\infty e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho y}f(y)dydt}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$ όπου το ολοκλήρωμα του αριθμητή με αλλαγή ορίων ολοκλήρωσης από $\begin{cases}u\le t<\infty\\ t\le y<\infty\end{cases}$ σε $\begin{cases}u\le t\le y\\ u\le y<\infty\end{cases}$ γίνεται

$$\begin{aligned}\int_u^\infty e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho y}f(y)dydt&=\int_u^\infty e^{-\rho y}f(y)\left(\int_u^y e^{\rho t}dt\right)dy=\frac{1}{\rho}\int_u^\infty e^{-\rho y}f(y)\left(e^{\rho y}-e^{\rho u}\right)dy\\&=\frac{1}{\rho}\left\{\int_u^\infty f(y)dy-\int_u^\infty e^{-\rho(y-u)}f(y)dy\right\}\\&=\frac{\overline{F}(u)-T_\rho f(u)}{\rho}.\end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$\overline{G}_\delta(u)=\frac{\overline{F}(u)-T_\rho f(u)}{\rho\hat{\overline{F}}(\rho)} \tag{2.47}$$

Επειδή,

$$-T_\rho f(u) = -\int_u^\infty e^{-\rho(y-u)} f(y)dy = \int_u^\infty e^{-\rho(y-u)} \overline{F}'(y)dy$$
$$= e^{-\rho(y-u)}\overline{F}(y)\Big|_{y=u}^{\infty} - \int_u^\infty \left(e^{-\rho(y-u)}\right)' \overline{F}(y)dy$$
$$= -\overline{F}(u) + \rho\int_u^\infty e^{-\rho(y-u)}\overline{F}(y)dy = -\overline{F}(u) + \rho T_\rho \overline{F}(u).$$

η σχέση (2.47) γίνεται

$$\overline{G}_\delta(u) = \frac{T_\rho \overline{F}(u)}{\hat{\overline{F}}(\rho)}. \tag{2.48}$$

2.5.7 Γενική λύση ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης μέσω δεξιάς ουράς σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

Έστω η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m(x) = \varphi\int_0^x m(x-y)dF(y) + r(x), \quad x \geq 0$$

με $0 < \varphi < 1$, F είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής ορισμένης στο $[0,\infty)$ με $F(0) = 0$ και η r είναι μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση κατανομής *G(x)* μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, με

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)\varphi^n \overline{F}^{*n}(x) \ , \ \ x \geq 0,$$

με $G(0) = 1-\varphi$ και η *G(x)* δεν περιέχει την *r(x)*.

Δηλαδή, αν έχω στοχαστική διαδικασία ύψους αποζημιώσεων $S = X_1 + ... + X_N$ η τυχαία μεταβλητή N θα ακολουθεί γεωμετρική κατανομή

$$P(N=n) = (1-\varphi)\varphi^n, \ \ x \geq 0 \ .$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6 *Η γενική λύση της παραπάνω ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται από τη σχέση*

$$m(x) = \frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^x r(x-y)dG(y) + r(x), \tag{2.49}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $p = 1-\varphi$ και $q = \varphi,$ ο μετασχηματισμός Laplace της $S = X_1 + ... + X_N$ με $P(N=n) = (1-\varphi)\varphi^n, \ \ x \geq 0$ είναι

$$\hat{g}(s)=\frac{1-\varphi}{1-\varphi\hat{f}(s)},$$

όπου $\hat{g}(s)=\int_{0^+}^{\infty}e^{-sx}dG(x)+G(0)$ και $\hat{f}(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$.

Όμως, ο μετασχηματισμός Laplace της *m(x)* είναι

$$\hat{m}(s)=\varphi\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\hat{r}(s),$$

ή

$$\hat{m}(s)=\frac{\hat{r}(s)}{1-\varphi\hat{f}(s)}=\frac{\hat{g}(s)\hat{r}(s)}{1-\varphi}.$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}m(x)dx=\frac{1}{1-\varphi}\left\{\int_{0^+}^{\infty}e^{-sx}dG(x)+(1-\varphi)\right\}\hat{r}(s).$$

από την οποία με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

□

Επίσης,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}r(x-y)dG(y)&=-\int_0^{x}r(x-y)\overline{G}'(y)\,dy\\&=-\left\{r(x-y)\overline{G}(y)\Big|_{y=0}^{x}-\int_0^{x}r'(x-y)\overline{G}(y)dy\right\}\\&=r(x)\overline{G}(0)-r(0)\overline{G}(x)-\int_0^{x}r'(x-y)\overline{G}(y)dy.\end{aligned}$$

Και επειδή $G(0)=1-\varphi$ θα ισχύει και $\overline{G}(0)=\varphi$, η σχέση (2.49) γράφεται και ως

$$m(x)=\frac{1}{1-\varphi}r(x)-\frac{r(0)}{1-\varphi}\overline{G}(x)-\frac{1}{1-\varphi}\int_0^{x}r'(x-y)\overline{G}(y)dy \qquad (2.50)$$

2.5.8 Γενική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης της συνάρτησης Gerber-Shiu μέσω δεξιάς ουράς σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

Δείξαμε νωρίτερα, ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)\ ,\ \ u\geq 0\ .$$

Μπορούμε τώρα με τη βοήθεια όσων δείξαμε παραπάνω, να εκφράσουμε την γενική λύση αυτής μέσω κατάλληλα ορισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Έτσι, για $\varphi=\frac{1}{1+\xi_\delta}<1$, $dF(x)=dG_\delta(u)$ και $r(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)$, αν ορίσουμε τη δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής με $\overline{K}_\delta(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)^n\overline{G}_\delta^{*n}(u)$, $u\geq 0$, τότε η λύση της $m_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}m_\delta(u)&=\frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u r(u-x)dK_\delta(x)+r(u)\\&=\frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u-x)dK_\delta(x)+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u).\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$m_\delta(u)=\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)dK_\delta(x)+\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)\ . \tag{2.51}$$

Επίσης, αντίστοιχα με τη σχέση (2.50) η λύση της $m_\delta(u)$ μπορεί να γραφεί και ως

$$m_\delta(u)=\frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)-\frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(0)\overline{F}_\delta(u)-\frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u\frac{1}{1+\xi_\delta}H'_\delta(u-x)\overline{K}_\delta(x)dx$$

$$m_\delta(u)=\frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(u)-\frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(0)\overline{K}_\delta(u)-\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H'_\delta(u-x)\overline{K}_\delta(x)dx \tag{2.52}$$

Ας δούμε τώρα τη λύση της συνάρτησης Gerber-Shiu μέσω της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για $w(x,y)=1$.

Τότε $\gamma(x)=\int_x^{\infty} f(y)dy=\bar{F}(x)$ και $H_\delta(u)=\dfrac{T_\rho\gamma(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}=\dfrac{T_\rho\bar{F}(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}=\bar{G}_\delta(u)$.

Συνεπώς, η σχέση (2.42) του θεωρήματος 2.3 για $w(x,y)=1$γίνεται

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}\bar{G}_\delta(u)\ ,\ \ u\geq 0. \qquad (2.53)$$

Όμως, η $\bar{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που περιγράφει τη στοχαστική διαδικασία $S=X_1+\ldots+X_M$ όπου $M\sim G\left(\dfrac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\right)$και η X έχει συνάρτηση κατανομής την $G_\delta(u)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\hat{\bar{K}}_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\hat{\bar{K}}(s)\hat{g}_\delta(s)+\frac{1}{1+\xi_\delta}\hat{\bar{G}}_\delta(s).$$

Με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει

$$\bar{K}_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \bar{K}_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}\bar{G}_\delta(u),\ \ \ u\geq 0 \qquad (2.54)$$

Τότε από τις σχέσεις (2.53) και (2.54) έπεται ότι

$$\bar{K}_\delta(u)=m_\delta(u) \text{ για } w(x,y)=1.$$

Συνεπώς,

$$\bar{K}_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right].$$

Επομένως, η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, και ο υπολογισμός της συνάρτησης Gerber-Shiu ανάγεται στον υπολογισμό της $\bar{K}_\delta(u)$.

2.5.9 Εφαρμογή για *X*~Exp(β)

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων $S=X_1+\ldots+X_N$ με $N\sim G\left(\dfrac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\right)$ και έστω ότι η *X*~Exp(β). Επομένως, η *X* θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)=\beta e^{-\beta x},\beta,x>0$ και συνάρτηση δεξιάς ουράς $\bar{F}(x)=e^{-\beta x}$. Επίσης, ο τελεστής Dickson-Hipp της ουράς θα είναι

$$T_\rho \bar{F}(x) = \int_0^\infty e^{-\rho(y-x)} \bar{F}(y) dy = e^{\rho x} \int_0^\infty e^{-\rho y} e^{-\beta y} dy = e^{\rho x} \int_0^\infty e^{-(\beta+\rho) y} dy = e^{\rho x} \frac{1}{\beta+\rho} e^{-(\beta+\rho)x} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta+\rho}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace

$$\hat{\bar{F}}(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy = \int_0^\infty e^{-\rho y} e^{-\beta y} dy = \frac{1}{\beta+\rho}$$

Ακόμη για τη συνάρτηση ισορροπίας έχουμε

$$f_e(x) = \beta e^{-\beta x} \text{ και } \hat{f}_e(\rho) = \frac{\beta}{\beta+\rho}.$$

Έτσι, από τη σχέση (2.36) έχουμε

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{1}{1+\theta} \frac{\beta}{\beta+\rho} .$$

Επίσης για την

$$\bar{G}_\delta(x) = \frac{T_\rho \bar{F}(x)}{\hat{\bar{F}}(\rho)} = \frac{\dfrac{e^{-\beta x}}{\beta+\rho}}{\dfrac{1}{\beta+\rho}} = e^{-\beta x} .$$

Όμως, η $\overline{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής, άρα ισχύει ότι

$$\overline{K}_\delta(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta} e^{-\beta \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta} u} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ένα μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου υπό την ύπαρξη τυχαίου κατωφλίου

Το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg για να περιγράψει τη στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου βασίζεται στην υπόθεση της ανεξαρτησίας του ύψους των απαιτήσεων και της ανεξαρτησίας ανάμεσα στα ύψη και στους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων. Στην πράξη όμως αυτή η υπόθεση είναι πολύ περιοριστική και έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη για πιο γενικευμένα μοντέλα αμβλύνοντας την υπόθεση της ανεξαρτησίας. Τα τελευταία 20 χρόνια, έχουν προκύψει διάφορα αποτελέσματα που αφορούν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας για απαιτήσεις που εμφανίζουν εξάρτηση μεταξύ τους. Στην περίπτωση των αποζημιώσεων που ακολουθούν κατανομές με ελαφριά ουρά, ο Nyrhinen (1998, 1999) χρησιμοποιώντας τεχνικές μεγάλων αποκλίσεων, άντλησε οριακά αποτελέσματα τύπου Lundberg, ενώ οι Müller και Pflug (2001) εισήγαγαν διατάξεις εξάρτησης για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τη συμπεριφορά του συντελεστή προσαρμογής (Lundberg exponent ή adjustment coefficient) σαν συνάρτηση ενός εξαρτημένου μέτρου ερεύνησαν οι Albrecher και Cantor to 2002. Ενώ την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας για κατανομές αποζημιώσεων με βαριά ουρά μελέτησαν οι Asmussen et al. (1999) και οι Mikosch και Samorodnitsky (2000). Ωστόσο, όλα αυτά αφορούν ασυμπτωτικά αποτελέσματα, ενώ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η άντληση αποτελεσμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε μοντέλα με εξάρτηση ακόμα και για μικρότερες τιμές του αρχικού κεφαλαίου. Στο κεφάλαιο αυτό, βασισμένοι στη δουλεία των Albrecher και Boxma, θα μελετήσουμε μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας, όπου η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ δύο απαιτήσεων εξαρτάται από το ύψος της προηγούμενης απαίτησης. Θα πάρουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu καθώς και για τις πιθανότητες χρεοκοπίας και επιβίωσης, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών Laplace.

3.1 Ορισμός του μοντέλου και οι συναρτήσεις Gerber-Shiu

Για τον ορισμό του μοντέλου θα χρειαστεί αρχικά να δώσουμε τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Markov.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X(t), t \in T\}$ *λέγεται Μαρκοβιανή (ή αλυσίδα Markov) αν για κάθε* $n>0$ *και* $t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n$ *στο* T *με* $t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n$, *η δεσμευμένη κατανομή της* $X(t_n)$ *για δεδομένες τιμές των* $X(t_1), ..., X(t_{n-1})$ *είναι η ίδια με τη δεσμευμένη* *κατανομή της* $X(t_n)$ *όταν δίδεται μόνο η* $X(t_{n-1})$, *δηλαδή η πιο πρόσφατη τιμή. Ακριβέστερα,* $\forall\ x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n$, είναι

$$P\left[X(t_n)\le x_n \middle| X(t_1)=x_1,...,X(t_{n-1})=x_{n-1}\right]=P\left[X(t_n)\le x_n \middle| X(t_{n-1})=x_{n-1}\right].$$

Δηλαδή, η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής εξέλιξης της διαδικασίας, όταν είναι γνωστή η παρούσα της κατάσταση, δε μεταβάλλεται από επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την παρελθούσα ιστορία της.

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$$

Όπου *u* είναι το αρχικό αποθεματικό, *c* η ένταση του ασφαλίστρου, X_i το ύψος της *i*-οστής ζημιάς και *N(t)* το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων μέχρι τη χρονική στιγμή *t*. Υποθέτουμε ότι οι X_i είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $F(x)=P(X_i\le x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)=P(X_i=x)$ και μέση τιμή $\mu_1=\int_0^\infty xf(x)dx$. Κάνουμε επίσης την υπόθεση ότι η διαδικασία εμφάνισης των απαιτήσεων περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία με τον εξής τρόπο: Αν η ζημιά X_i είναι μεγαλύτερη από ένα τυχαίο κατώφλι T_i, τότε ο ενδιάμεσος χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς είναι εκθετικά κατανεμημένος με ένταση λ_1, ενώ σε αντίθετη περίπτωση κατανέμεται εκθετικά με ένταση λ_2. Οι ποσότητες T_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $T(y)=P(T\le y)$. Αντίστοιχα η συνθήκη του καθαρού κέρδους θα είναι

$$\mu_1<c\left[\frac{P(X>T)}{\lambda_1}+\frac{P(X\le T)}{\lambda_2}\right]. \tag{3.1}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.*1* *Έστω* $m_{\delta,i}(u),\ i=1,2$ *η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ_i *. Τότε η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασικό μοντέλο με τυχαίο κατώφλι έχει τη μορφή*

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(u)=&\left[1-(\lambda_i+\delta)dt\right]m_{\delta,i}(u+cdt)+\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\left[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)\right. \\ &\left.+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\right]f(x)dx+\lambda_i dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt), \end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου $o(x):\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}=0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω, ένα μικρό απειροστό διάστημα μήκους dt, τότε αφού οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξής των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ_i και συνεπώς η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί τη διαδικασία Poisson, θα είναι

- Αν στο διάστημα μήκους dt δεν έχουμε ζημιογόνο ενδεχόμενο, η $m_{\delta,i}(u),\ i=1,2$ ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u+cdt$ και έτσι θα είναι $(1+\lambda_i dt)m_{i\delta}(u+cdt)$.
- Αν στο διάστημα αυτό έχουμε ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο, τότε αν το ύψος της αποζημίωσης είναι $0\le x\le u+cdt$ τότε δεν έχουμε χρεοκοπία. Η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u+cdt-x$ και αν $X_i \ge T_i$, ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της επόμενης απαίτησης κατανέμεται εκθετικά με λ_1, ενώ αν $X_i > T_i$ με λ_2 συνεπώς έχουμε
$$\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\left[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\right]f(x)dx$$
- Αν το ύψος της αποζημίωσης είναι $x>u+cdt$, τότε έχουμε χρεοκοπία οπότε επιβάλλεται η συνάρτηση ποινής και έχουμε $\lambda_i dt\int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx$

Συνεπώς, με προεξόφληση η συνάρτηση Gerber-Shiu για $i=1,2$ θα είναι

$$\begin{aligned}m_{\delta,i}(u)&=e^{-\delta dt}(1-\lambda_i dt)m_{i\delta}(u+cdt)+e^{-\delta dt}\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\left[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)\right.\\&\left.+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\right]f(x)dx+e^{-\delta dt}\lambda_i dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Με ανάπτυγμα σειράς Taylor έχουμε:

- Αν δεν συμβεί ζημιογόνο ενδεχόμενο στο απειροστό διάστημα dt

$$\begin{aligned}e^{-\delta dt}(1-\lambda dt)&=\left[1-\delta dt+o(dt)\right](1-\lambda dt)\\&=1-\lambda dt-\delta dt+\lambda\delta(dt)^2+o(dt)-\lambda dt0(dt)\\&=1-(\lambda+\delta)dt+o(dt)\end{aligned}$$

- Ενώ αν συμβεί

$$\begin{aligned}e^{-\delta dt}\lambda dt&=\left[1-\delta dt+o(dt)\right]\lambda dt\\&=\lambda dt-\lambda\delta(dt)^2+o(dt)\lambda dt\\&=\lambda dt+o(dt)\end{aligned}$$

Συνεπώς η σχέση (3.3) γίνεται

$$\begin{aligned}m_{\delta,i}(u)&=\left[1-(\lambda_i+\delta)dt\right]m_{i\delta}(u+cdt)+\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\left[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)\right.\\&\left.+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\right]f(x)dx+\lambda_i dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt)\end{aligned} \tag{3.2}$$

Έτσι, για $i=1$ έχουμε

$$m_{\delta,1}(u)=e^{-\delta dt}(1-\lambda_1 dt)m_{\delta,1}(u+cdt)+e^{-\delta dt}\lambda_1 dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)$$
$$+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+e^{-\delta dt}\lambda_1 dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt)$$

Και από ανάπτυγμα Taylor είναι

$$m_{\delta,1}(u)=\big[1-(\lambda_1+\delta)dt\big]m_{\delta,1}(u+cdt)+\lambda_1 dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)$$
$$+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+\lambda_1 dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt) \qquad (3.4)$$

Ενώ για $i=2$

$$m_{\delta,2}(u)=e^{-\delta dt}(1-\lambda_2 dt)m_{\delta,2}(u+cdt)+e^{-\delta dt}\lambda_2 dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)$$
$$+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+e^{-\delta dt}\lambda_2 dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt)$$

Και χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor θα είναι

$$m_{\delta,2}(u)=\big[1-(\lambda_2+\delta)dt\big]m_{\delta,2}(u+cdt)+\lambda_2 dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x)$$
$$+P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+\lambda_2 dt\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt) \qquad (3.5)$$

□

3.2 Ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις και μετασχηματισμοί Laplace των $m_{\delta,i}(u)$

Για να πάρουμε τις ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι $m_{\delta,1}(u),m_{\delta,2}(u)$ θα δουλέψουμε όπως και στην παράγραφο 2.5.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2 *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu* $m_{\delta,i}(u)$, $i=1,2$ (3.2)*, δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ_i, *ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$cm'_{\delta,i}(u)=(\lambda_i+\delta)m_{\delta,i}(u)-\lambda_i\int_0^u\Big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u-x)$$
$$+P(T>x)m_{\delta,2}(u-x)\Big]f(x)dx-\lambda_i\gamma(u) \qquad (3.6)$$

και οι συναρτήσεις $m_{\delta,1}(u),m_{\delta,2}(u)$ *ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων*

$$cm'_{\delta,1}(u)=(\lambda_1+\delta)m_{\delta,1}(u)-\lambda_1\int_0^u\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u-x)\big]f(x)dx-\lambda_1\gamma(u), \tag{3.7}$$

$$cm'_{\delta,2}(u)=(\lambda_2+\delta)m_{\delta,2}(u)-\lambda_2\int_0^u\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u-x)\big]f(x)dx-\lambda_2\gamma(u), \tag{3.8}$$

όπου $\gamma(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)f(x)dx.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τη σχέση (3.2) με πράξεις έχουμε

$$c\frac{m_{\delta,i}(u)-m_{\delta,i}(u+cdt)}{cdt}=-(\lambda_i+\delta)m_{\delta,i}(u+cdt)+\lambda_i\int_0^{u+cdt}\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\big]f(x)dx+\lambda_i\int_{u+cdt}^\infty w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx+o(dt),$$

και κατά συνέπεια είναι

$$cm'_{\delta,i}(u)=(\lambda_i+\delta)m_{\delta,i}(u+cdt)-\lambda_i\int_0^{u+cdt}\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u+cdt-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u+cdt-x)\big]f(x)dx-\lambda_i\int_{u+cdt}^\infty w(u+cdt,x-u-cdt)f(x)dx.$$

Οπότε για $dt\to 0$ και $\gamma(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)f(x)dx$ είναι

$$cm'_{\delta,i}(u)=(\lambda_i+\delta)m_{\delta,i}(u)-\lambda_i\int_0^u\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u-x)\big]f(x)dx-\lambda_i\gamma(u).$$

Συνεπώς, με αντικατάσταση $i=1$ η ολοκληρωτική εξίσωση είναι

$$cm'_{\delta,1}(u)=(\lambda_1+\delta)m_{\delta,1}(u)-\lambda_1\int_0^u\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u-x)\big]f(x)dx-\lambda_1\gamma(u). \tag{3.7}$$

Ενώ για $i=2$

$$cm'_{\delta,2}(u)=(\lambda_2+\delta)m_{\delta,2}(u)-\lambda_2\int_0^u\big[P(T\le x)m_{\delta,1}(u-x) \\ +P(T>x)m_{\delta,2}(u-x)\big]f(x)dx-\lambda_2\gamma(u). \tag{3.8}$$

□

3.2.1 Ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $m_{\delta,i}(u)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3 *Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu* $m_{\delta,i}(u),\ i=1,2$ (3.2)*, δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ_i*, δίνεται από τη σχέση*

$$c\left[s\hat{m}_{\delta,i}(s)-m_{\delta,i}(0)\right]=(\lambda_i+\delta)\hat{m}_{\delta,i}(s)-\lambda_i\chi_1\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_i\chi_2\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_i\hat{\gamma}(s). \tag{3.9}$$

Και οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $m_{1\delta}(u), m_{2\delta}(u)$ *ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων*

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1}, \tag{3.10}$$

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2}, \tag{3.11}$$

το οποίο μπορεί να απλουστευτεί στο

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)\right]}{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}, \tag{3.12}$$

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)\right]-\lambda_2\chi_1(s)\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)\right]}{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}, \tag{3.13}$$

όπου

$$\chi_1(s)=E\left[e^{-sX}I_{(X>T)}\right]=\int_0^\infty e^{-sx}T(x)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T<x)f(x)dx,$$

$$\chi_2(s)=E\left[e^{-sX}I_{(X\le T)}\right]=\int_0^\infty e^{-sx}\left(1-T(x)\right)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T\ge x)f(x)dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για τη σχέση (3.6), θα πάρουμε τμηματικά τους μετασχηματισμούς Laplace για όλα τα μέλη της.

$$\hat{m}_{\delta,i}(s)=\int_0^\infty e^{-su}m_{\delta,i}(u)du,$$

$$\hat{m}'_{\delta,i}(s)=\int_0^\infty e^{-su}m'_{\delta,i}(u)du=e^{-su}m_{\delta,i}(u)\Big|_{u=0}^{\infty}-\int_0^\infty\left(e^{-su}\right)'m_{\delta,i}(u)du$$

$$=-m_{\delta,i}(0)+s\int_0^\infty e^{-su}m_{\delta,i}(u)du=s\hat{m}_{\delta,i}(s)-m_{\delta,i}(0),$$

$$\hat{\gamma}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\gamma(u)du.$$

Και έστω

$$\chi_1(s)=E\left[e^{-sX}I_{(X>T)}\right]=\int_0^\infty e^{-sx}T(x)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T<x)f(x)dx,$$

$$\chi_2(s)=E\left[e^{-sX}I_{(X\le T)}\right]=\int_0^\infty e^{-sx}\left(1-T(x)\right)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T\ge x)f(x)dx.$$

Από τα παραπάνω και από το θεώρημα 2.3 για το μετασχηματισμό Laplace των συνελίξεων, ο μετασχηματισμός Laplace της σχέσης (3.5) είναι

$$c\left[s\hat{m}_{\delta,i}(s)-m_{\delta,i}(0)\right]=(\lambda_i+\delta)\hat{m}_{\delta,i}(s)-\lambda_i\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_i\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_i\hat{\gamma}(s). \tag{3.9}$$

Η σχέση (3.9) για $i=1$ γίνεται

$$c\left[s\hat{m}_{\delta,1}(s)-m_{\delta,1}(0)\right]=(\lambda_1+\delta)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_1\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_1\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s),$$

και με πράξεις έχουμε

$$cs\hat{m}_{\delta,1}(s)-(\lambda_1+\delta)\hat{m}_{\delta,1}(s)+\lambda_1\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)=cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s),$$

$$\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\hat{m}_{\delta,1}(s)=cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s),$$

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)}. \tag{3.10}$$

Ενώ η σχέση (3.9) για $i=2$ γίνεται

$$c\left[s\hat{m}_{\delta,2}(s)-m_{\delta,2}(0)\right]=(\lambda_2+\delta)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_2\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s),$$

που με πράξεις γίνεται

$$cs\hat{m}_{\delta,2}(s)-(\lambda_2+\delta)\hat{m}_{\delta,2}(s)+\lambda_2\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)=cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s),$$

ή $$\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]\hat{m}_{\delta,2}(s)=cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s),$$

ή $$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)}. \tag{3.11}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.9) και (3.10) με αντικατάσταση της (3.10) στην (3.9) ως εξής

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2(s)\dfrac{cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)}-\lambda_1\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)}.$$

Κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις είναι

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{\dfrac{\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1(s)\hat{m}_{\delta,1}(s)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)\right]}{cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)}}{cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)\right]}{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}. \quad (3.12)$$

Με αντικατάσταση της (3.9) στην (3.10) παίρνουμε

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\chi_1(s)\dfrac{cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)}-\lambda_2\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{\dfrac{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)\right]-\lambda_2\chi_1(s)\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\chi_2(s)\hat{m}_{\delta,2}(s)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)\right]}{cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)}}{cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)},$$

και ισοδύναμα,

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda_2\hat{\gamma}(s)\right]-\lambda_2\chi_1(s)\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda_1\hat{\gamma}(s)\right]}{\left[cs-(\lambda_1+\delta)+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-(\lambda_2+\delta)+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}. \quad (3.13)$$

□

Ό παρονομαστής των σχέσεων (3.12) και (3.13) είναι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg για το κλασικό μοντέλο με τυχαίο κατώφλι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ *Αν υποθέσουμε ότι* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ *τότε η σχέση* (3.12) *γίνεται*

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\chi_2(s)\right]-\lambda\chi_2(s)\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]}{\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\chi_1(s)\right]\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\chi_2(s)\right]-\lambda^2\chi_1(s)\chi_2(s)},$$

και κάνοντας πράξεις είναι

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{cs\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]-(\lambda+\delta)\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]+\lambda\chi_2(s)cm_{\delta,1}(0)-\lambda\chi_2(s)cm_{\delta,2}(0)}{\lambda\chi_1(s)\left[cs-(\lambda+\delta)\right]+\lambda\chi_2(s)\left[cs-(\lambda+\delta)\right]+(cs)^2-2cs(\lambda+\delta)+(\lambda+\delta)^2},$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda+\delta)\right]}{\left[cs-(\lambda+\delta)\right]\left[\lambda\left[\chi_1(s)+\chi_2(s)\right]+cs-(\lambda+\delta)\right]}.$$

Όμως από τον ορισμό των $\chi_1(s),\chi_2(s)$ *είναι προφανές ότι* $\chi_1(s)+\chi_2(s)=\hat{f}(s)$ *άρα*

$$\hat{m}_{\delta,1}(s)=\frac{cm_{\delta,1}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)}. \tag{3.14}$$

Αντίστοιχα η σχέση (3.13) *γίνεται*

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\chi_1(s)\right]-\lambda\chi_1(s)\left[cm_{\delta,1}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]}{\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\chi_1(s)\right]\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\chi_2(s)\right]-\lambda^2\chi_1(s)\chi_2(s)},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{cs\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]-(\lambda+\delta)\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]+\lambda\chi_1(s)cm_{\delta,2}(0)-\lambda\chi_1(s)cm_{\delta,1}(0)}{\lambda\chi_1(s)\left[cs-(\lambda+\delta)\right]+\lambda\chi_2(s)\left[cs-(\lambda+\delta)\right]+(cs)^2-2cs(\lambda+\delta)+(\lambda+\delta)^2},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{\left[cm_{\delta,2}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)\right]\left[cs-(\lambda+\delta)\right]}{\left[cs-(\lambda+\delta)\right]\left[\lambda\left[\chi_1(s)+\chi_2(s)\right]+cs-(\lambda+\delta)\right]},$$

ή

$$\hat{m}_{\delta,2}(s)=\frac{cm_{\delta,2}(0)-\lambda\hat{\gamma}(s)}{cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)}. \tag{3.15}$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες με τη σχέση (2.30) *του προηγούμενου κεφαλαίου και* $\hat{m}_{\delta,1}(u)=\hat{m}_{\delta,2}(u)=\hat{m}_{\delta}(u)$, *συνεπώς για* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ *παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu για το κλασικό μοντέλο.*

3.3 Οι ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις και οι μετασχηματισμοί Laplace των πιθανοτήτων χρεοκοπίας και επιβίωσης στο μοντέλο με τυχαίο κατώφλι

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4 *Έστω* $\psi_i(u),\ i=1,2$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ_i *. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο με τυχαίο κατώφλι έχει τη μορφή*

$$\begin{aligned}\psi_i(u)=&[1-\lambda_i dt]\psi_i(u+cdt)+\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)\psi_1(u+cdt-x)\\&+P(T>x)\psi_2(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+\lambda_i dt\bar{F}(u+cdt)+o(dt).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Ενώ η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$c\psi_i'(u)=\lambda_i\psi_i(u)-\lambda_i\int_0^u\Big[P(T\le x)\psi_1(u-x)+P(T>x)\psi_2(u-x)\Big]f(x)dx-\lambda_i\bar{F}(u),\tag{3.17}$$

$$c\big[s\hat{\psi}_i(s)-\psi_i(0)\big]=\lambda_i\hat{\psi}_i(s)-\lambda_i\chi_1(s)\hat{\psi}_1(s)-\lambda_i\chi_2(s)\hat{\psi}_2(s)-\lambda_i\hat{\bar{F}}(s).\tag{3.18}$$

όπου

$$\chi_1(s)=E\Big[e^{-sX}I_{(X>T)}\Big]=\int_0^\infty e^{-sx}T(x)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T<x)f(x)dx,$$

$$\chi_2(s)=E\Big[e^{-sX}I_{(X\le T)}\Big]=\int_0^\infty e^{-sx}\big(1-T(x)\big)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T\ge x)f(x)dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τα προηγούμενα ξέρουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για $\delta=0$ και $w(x,y)=1$ μας δίνει την πιθανότητα χρεοκοπίας, συνεπώς η σχέση (3.2) θα είναι

$$\begin{aligned}m_{0,i}(u)=&[1-\lambda_i dt]m_{0,i}(u+cdt)+\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)m_{0,1}(u+cdt-x)\\&+P(T>x)m_{0,2}(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+\lambda_i dt\int_{u+cdt}^\infty f(x)dx+o(dt)\end{aligned}\tag{3.19}$$

Και αφού $m_{0,i}(u)=\psi(u)$ για $w(x,y)=1$ η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο θα είναι:

$$\begin{aligned}\psi_i(u)=&[1-\lambda_i dt]\psi_i(u+cdt)+\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\Big[P(T\le x)\psi_1(u+cdt-x)\\&+P(T>x)\psi_2(u+cdt-x)\Big]f(x)dx+\lambda_i dt\bar{F}(u+cdt)+o(dt).\end{aligned}$$

Από τη σχέση (3.6) με την ίδια αντικατάσταση μπορώ να βρω την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας.

$$c\psi_i'(u)=\lambda_i\psi_i(u)-\lambda_i\int_0^u\left[P(T\le x)\psi_1(u-x)+P(T>x)\psi_2(u-x)\right]f(x)dx-\lambda_i\bar{F}(u),$$

και από τη σχέση (3.9) με αντικατάσταση προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

$$c\left[s\hat{\psi}_i(s)-\psi_i(0)\right]=\lambda_i\hat{\psi}_i(s)-\lambda_i\chi_1(s)\hat{\psi}_1(s)-\lambda_i\chi_2(s)\hat{\psi}_2(s)-\lambda_i\hat{\bar{F}}(s).$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5 *Οι μετασχηματισμοί Laplace των* $\psi_1(u),\psi_2(u)$, *ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων*

$$\hat{\psi}_1(s)=\frac{\left[c\psi_1(0)-\lambda_1\hat{\bar{F}}(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)\left[c\psi_2(0)-\lambda_2\hat{\bar{F}}(s)\right]}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}, \tag{3.20}$$

$$\hat{\psi}_2(s)=\frac{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[c\psi_2(0)-\lambda_2\hat{\bar{F}}(s)\right]-\lambda_2\chi_1(s)\left[c\psi_1(0)-\lambda_1\hat{\bar{F}}(s)\right]}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}. \tag{3.21}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προκύπτει μετά από πράξεις από τη σχέση (3.18) για $i=1,2$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6 *Έστω* $\delta_i(u)$, $i=1,2$ *η πιθανότητα επιβίωσης (μη-χρεοκοπίας) δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ_i *Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο με τυχαίο κατώφλι έχει τη μορφή*

$$\begin{aligned}\delta_i(u)=&[1-\lambda_i dt]\delta_i(u+cdt)+\lambda_i dt\int_0^{u+cdt}\left[P(T\le x)\delta_1(u+cdt-x)\right.\\&\left.+P(T>x)\delta_2(u+cdt-x)\right]f(x)dx+o(dt).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ενώ η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας επιβίωσης δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$c\delta_i'(u)=\lambda_i\delta_i(u)-\lambda_i\int_0^u\left[P(T\le x)\delta_1(u-x)+P(T>x)\delta_2(u-x)\right]f(x)dx, \tag{3.23}$$

$$c\left[s\hat{\delta}_i(s)-\delta_i(0)\right]=\lambda_i\hat{\delta}_i(s)-\lambda_i\chi_1(s)\hat{\delta}_1(s)-\lambda_i\chi_2(s)\hat{\delta}_2(s), \tag{3.24}$$

όπου

$$\chi_1(s)=E\left[e^{-sX}I_{(X>T)}\right]=\int_0^\infty e^{-sx}T(x)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T<x)f(x)dx,$$

$$\chi_2(s)=E\left[e^{-sX}I_{(X\le T)}\right]=\int_0^\infty e^{-sx}\left(1-T(x)\right)f(x)dx=\int_0^\infty e^{-sx}P(T\ge x)f(x)dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (3.17),(3.18) για $\psi_i(u)=1-\delta_i(u)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7 *Οι μετασχηματισμοί Laplace των* $\delta_1(u),\delta_2(u)$, *ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων*

$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{c\delta_1(0)\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)c\delta_2(0)}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}, \tag{3.25}$$

$$\hat{\delta}_2(s)=\frac{c\delta_2(0)\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]-\lambda_2\chi_1(s)c\delta_1(0)}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}. \tag{3.26}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προκύπτει μετά από πράξεις από τη σχέση (3.24) για $i=1,2$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Είναι προφανές ότι $\lim\limits_{u\to\infty}\delta_i(u)=1$, και κατά συνέπεια από το θεώρημα αρχικής τιμής ισχύει ότι $\lim\limits_{s\to 0}s\hat{\delta}_i(s)=1,\ i=1,2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας αντικαθιστώντας με μια από τις σχέσεις (3.25),(3.26) παίρνουμε το ακόλουθο (ας το δούμε για την (3.25)):

$$1=\lim_{s\to 0}\left(s\frac{c\delta_1(0)\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)c\delta_2(0)}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)}\right),$$

ή
$$1=\frac{c\delta_1(0)\left[-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(0)\right]-c\lambda_1\chi_2(0)\delta_2(0)}{\lim\limits_{s\to 0}\left\{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)\right\}/s},$$

ή
$$1=\frac{c\lambda_2\delta_1(0)\left[-1+\chi_2(0)\right]-c\lambda_1\chi_2(0)\delta_2(0)}{c\lambda_1\left(\chi_1(0)-1\right)+c\lambda_2\left(\chi_2(0)-1\right)-\lambda_1\lambda_2\left(\chi_1'(0)+\chi_2'(0)\right)}. \tag{3.27}$$

Όμως, από τον ορισμό των $\chi_1(s),\chi_2(s)$ φαίνεται εύκολα ότι $\chi_1(0)=P(X>T)$, $\chi_2(0)=P(X\le T)$ και κατά συνέπεια ότι $\chi_1(0)+\chi_2(0)=1$. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι $\chi_1'(0)=E\left[XI_{(X>T)}\right]$, $\chi_2'(0)=E\left[XI_{(X\le T)}\right]$ από το οποίο προκύπτει ότι $\chi_1'(0)+\chi_2'(0)=-\mu_1$. Έτσι η σχέση (3.27) γίνεται:

$$\frac{\left(1-\delta_1(0)\right)\chi_1(0)}{\lambda_1}+\frac{\left(1-\delta_2(0)\right)\chi_2(0)}{\lambda_2}=\frac{\mu_1}{c}. \tag{3.28}$$

Όπου για $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ η (3.28) γίνεται $\delta_1(0)=\delta_2(0)=1-\frac{\lambda\mu_1}{c}$ που είναι ο γνωστός τύπος για την πιθανότητα επιβίωσης με μηδενικό αρχικό αποθεματικό στο κλασικό μοντέλο.

ΛΗΜΜΑ 3.1 *Ο παρονομαστής των σχέσεων* (3.12) *και* (3.13), *δηλαδή η γενικευμένη εξίσωση Lundberg για* $\delta=0$ *έχει ακριβώς μια ρίζα* ρ *με* $Re\,\rho>0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η εξίσωση του παρονομαστή των σχέσεων (3.12), (3.13) για $\delta=0$ γίνεται

$$\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)=0.$$

Μέσω των κατάλληλων πράξεων μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$cs\left[cs-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1\chi_1(s)+\lambda_2\chi_2(s)+\frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1}{c}\frac{1-\hat{f}(s)}{s\mu_1}\right]=0. \tag{3.29}$$

Στην (3.16) θέτοντας $h_1(s)=cs-\lambda_1-\lambda_2$ και $h_2(s)=\lambda_1\chi_1(s)+\lambda_2\chi_2(s)+\frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1}{c}\frac{1-\hat{f}(s)}{s\mu_1}$, έτσι έχουμε

$$cs\left[h_1(s)+h_2(s)\right]=0. \tag{3.30}$$

Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι η σχέση (3.17) έχει ακριβώς μία ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rouchè στο κλειστό περίγραμμα *C*, το οποίο συγκροτείται από τον φανταστικό άξονα από $-ir$ σε $+ir$ και ένα ημικύκλιο στο δεξί ημιεπίπεδο με ακτίνα *r* και κέντρο την αρχή των αξόνων, με $r\to\infty$. Οι συναρτήσεις $h_1(s)$ και $h_2(s)$ είναι αναλυτικές μέσα στο *C* και παρατηρούμε ότι η $\frac{1-\hat{f}(s)}{s\mu_1}$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $\int_0^x \frac{1-F(y)}{\mu_1}dy$ που είναι επίσης αναλυτική στο *C* και $\left|\frac{1-\hat{f}(s)}{s\mu_1}\right|=1$ στο δεξί ημιεπίπεδο. Η $h_1(s)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο *C*. Άρα, για να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rouchè απομένει μόνο να δείξουμε ότι $|h_2(s)|<|h_1(s)|$ στο *C*. Στον φανταστικό άξονα το $|h_1(s)|\geq\lambda_1+\lambda_2$, ενώ από τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, σχέση (3.1), φαίνεται ότι ισχύει

$$|h_2(s)|\leq\lambda_1\chi_1(0)+\lambda_2\chi_2(0)+\frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1}{c}<\lambda_1+\lambda_2.$$

Συνεπώς $|h_2(s)|<|h_1(s)|$ και η $h_1(s)+h_2(s)$ έχει τον ίδιο αριθμό ριζών με την $h_1(s)$ που όπως είπαμε έχει ακριβώς μια ρίζα στο *C*.

Είναι εύκολο επίσης να διακρίνουμε ότι η ρίζα αυτή, έστω ρ είναι πραγματική και $0<\rho<\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c}$, αφού $h_1(0)+h_2(0)<0$ και $h_1\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c}\right)+h_2\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c}\right)>0$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης επιβίωσης είναι αναλυτική συνάρτηση για $\operatorname{Re} s>0$, τότε η πραγματική ρίζα ρ της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg για

$\delta=0$, δηλαδή η ρίζα του παρονομαστή των σχέσεων (3.25),(3.26), πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή αυτών των σχέσεων. Έτσι, έχουμε

$$c\delta_1(0)\left[c\rho-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(\rho)\right]-\lambda_1\chi_2(\rho)c\delta_2(0)=0\ ,$$

$$c\delta_2(0)\left[c\rho-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(\rho)\right]-\lambda_2\chi_1(\rho)c\delta_1(0)=0\ .$$

Από τα οποία παίρνουμε την παρακάτω σχέση για τα $\delta_1(0),\delta_2(0)$

$$\delta_2(0)=\frac{c\rho-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(\rho)}{\lambda_1\chi_2(\rho)}\delta_1(0)=\frac{\lambda_2\chi_1(\rho)}{c\rho-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(\rho)}\delta_1(0). \tag{3.31}$$

Λύνοντας το σύστημα των σχέσεων (3.28) και (3.31) μπορούμε να πάρουμε αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα επιβίωσης με μηδενικό αρχικό αποθεματικό $\delta_1(0),\delta_2(0)$.

3.4 Σύγκριση με το μοντέλο με ανεξαρτησία

Η ύπαρξη αναλυτικών λύσεων για την πιθανότητα επιβίωσης, μας επιτρέπει να ερευνήσουμε το λάθος που δημιουργείται αμελώντας την παραπάνω δομή εξάρτησης. Πράγματι, υποθέτοντας ανεξαρτησία ενώ στην πραγματικότητα η εξαρτημένη δομή του μοντέλου μας υπάρχει, μια εκτίμηση για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων W_i, μας οδηγεί στη μικτή πυκνότητα

$$f_{W_i}(x)=P(X_i>T_i)\lambda_1e^{-\lambda_1x}+P(X_i\le T_i)\lambda_2e^{-\lambda_2x}\ . \tag{3.32}$$

Από την παραπάνω σχέση θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι είμαστε σε ένα ανανεωτικό μοντέλο (ή αλλιώς σε ένα μοντέλο Sparre Andersen), με υπέρ-εκθετική κατανομή ενδιάμεσων χρόνων. Σε ένα τέτοιο μοντέλο, ο συντελεστής προσαρμογής *R*, δοθέντος ότι υπάρχει, μπορεί να ορισθεί ως η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης

$$\hat{f}(-R)\hat{f}_{W_i}(cR)=1\ . \tag{3.33}$$

3.5 Αριθμητικά Παραδείγματα

Εφαρμογή 1

Έστω ότι $T \sim Exp(2)$, $X \sim Exp(1)$, $c=2$, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Θα δουλέψουμε πάνω στα προηγούμενα για να πάρουμε αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα επιβίωσης. Ας πάμε αρχικά να υπολογίσουμε τα $\chi_1(s), \chi_2(s)$.

$$\begin{aligned}\chi_1(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} T(x) f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx}\left(1-e^{-2x}\right) e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x(s+1)} dx - \int_0^\infty e^{-x(s+3)} dx \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} = \frac{2}{(s+1)(s+3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_2(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\left(1-T(x)\right) f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} e^{-2x} e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x(s+3)} dx = \frac{1}{s+3}\end{aligned}$$

Τα οποία για $s=0$ είναι $\chi_1(0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ και $\chi_2(0)=\frac{1}{3}$. Θα χρειαστούμε επίσης και τις παραγώγους των $\chi_1(s), \chi_2(s)$.

$$\chi_1'(s) = -\frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(3+s)^2} \qquad , \qquad \chi_2'(s) = -\frac{1}{(3+s)^2}.$$

Όμως από προηγούμενη παρατήρηση γνωρίζουμε ότι $\chi_1'(0)+\chi_2'(0)=-\mu_1$. Συνεπώς για τη μέση τιμή της κατανομής του ύψους των αποζημιώσεων έχουμε:

$$\mu_1 = -\chi_1'(0) - \chi_2'(0) = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

Είναι προφανές ότι η συνθήκη του καθαρού κέρδους (σχέση 3.1) για το μοντέλο ικανοποιείται. Στη συνέχεια θα λύσουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg για $\delta=0$

$$\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)=0.$$

Η οποία, με αντικατάσταση από τα δεδομένα του παραδείγματος γίνεται

$$\left[2s-3+3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\right]\left[2s-1+\frac{1}{s+3}\right]-3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\frac{1}{s+3}=0 .$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι παρακάτω

$$\{s \to -3.1612\}, \{s \to -0.0645\}, \{s \to 1.2258\}, \{s \to 0\} .$$

Όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο λήμμα, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg για $\delta=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα, έστω ρ με θετικό πραγματικό μέρος, την $\rho=1.2258$. Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε, χρειάζεται να προσδιορίσουμε τα $\delta_1(0),\delta_2(0)$, κάτι που μπορεί να γίνει με αντικατάσταση στις σχέσεις (3.28), (3.31) και λύνοντας το σύστημα

$$\frac{\left(1-\delta_1(0)\right)\frac{2}{3}}{3}+\frac{\left(1-\delta_2(0)\right)\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{2}, \tag{3.33}$$

$$\delta_2(0)=\frac{2\cdot 1.2258-1+\frac{1}{1.2258+3}}{3\frac{1}{1.2258+3}}\delta_1(0). \tag{3.34}$$

Συνεπώς, έχουμε $\delta_1(0)=0.0547$ και $\delta_2(0)=0.1302$. Τώρα έχουμε όλα τα απαραίτητα αποτελέσματα για να αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (3.25), (3.26).

$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{2\cdot 0.0547\left[2s-1+\frac{1}{s+3}\right]-3\frac{1}{s+3}2\cdot 0.1302}{\left[2s-3+3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\right]\left[2s-1+\frac{1}{s+3}\right]-3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\frac{1}{s+3}},$$

ή
$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{-\frac{0.7812}{3+s}+0.1094\left(-1+2s+\frac{1}{3+s}\right)}{-\frac{6}{(1+s)(3+s)^2}+\left(-1+2s+\frac{1}{3+s}\right)\left(-3+2s+\frac{6}{(1+s)(3+s)}\right)},$$

ή
$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{-0.25+s\left(-0.1133+(0.1915+0.0547s)s\right)}{s\left(-0.25+s\left(-3.75+s(2+s)\right)\right)}.$$

Σε αυτό το σημείο, με χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε την πιθανότητα επιβίωσης με αρχικό αποθεματικό *u*.

$$\delta_1(u)=1-0.0068e^{-3.1612u}-0.9384e^{-0.0645u}+0.000001389e^{1.2258u}.$$

Όπου όλες οι αριθμητικές τιμές είναι στρογγυλοποιημένες στα 4 δεκαδικά ψηφία και ο συντελεστής του τελευταίου εκθετικού είναι τόσο μικρός που στρογγυλοποιείται στο μηδέν, άρα

$$\delta_1(u)=1-0.0068e^{-3.1612u}-0.9384e^{-0.0645u}. \tag{3.35}$$

Επίσης, έχουμε

$$\hat{\delta}_2(s)=\frac{2\cdot 0.1302\left[2s-3+3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\right]-\frac{2}{(s+1)(s+3)}2\cdot 0.0547}{\left[2s-3+3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\right]\left[2s-1+\frac{1}{s+3}\right]-3\frac{2}{(s+1)(s+3)}\frac{1}{s+3}},$$

ή $$\hat{\delta}_2(s)=\frac{-\frac{0.2188}{(1+s)(3+s)}+0.2604\left(-3+2s+\frac{6}{(1+s)(3+s)}\right)}{-\frac{6}{(1+s)(3+s)^2}+\left(-1+2s+\frac{1}{3+s}\right)\left(-3+2s+\frac{6}{(1+s)(3+s)}\right)},$$

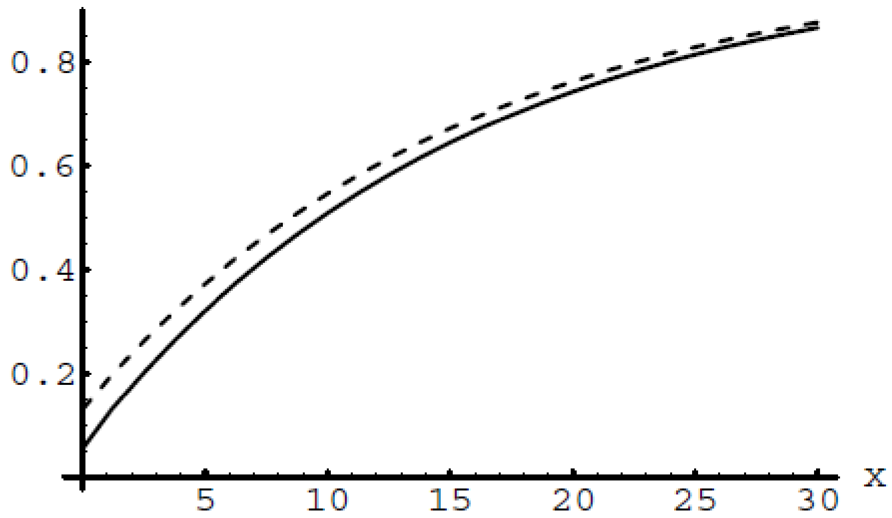
ή $$\hat{\delta}_2(s)=\frac{-0.25+s\left(-0.3906+(0.3255+0.1302s)s\right)}{s\left(-0.25+s\left(-3.75+s(2+s)\right)\right)}.$$

Και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

$$\delta_2(u)=1-0.0029\mathrm{e}^{-3.1612u}-0.8669\mathrm{e}^{-0.0645u}+0.000007852\mathrm{e}^{1.2258u}.$$

Επειδή ο συντελεστής του τελευταίου εκθετικού είναι περίπου ίσος με μηδέν, θα έχουμε

$$\delta_2(u)=1-0.0029\mathrm{e}^{-3.1612u}-0.8669\mathrm{e}^{-0.0645u} \tag{3.36}$$



Σχήμα 3.1 Οι πιθανότητες επιβίωσης $\delta_1(u)$ (σταθερή γραμμή), $\delta_2(u)$ (διακεκομμένη γραμμή).

Ας συγκρίνουμε τώρα, τα αποτελέσματα μας με την πιθανότητα επιβίωσης σε ένα μοντέλο με υπόθεση ανεξαρτησίας, όπως το περιγράψαμε στην παράγραφο πριν την εφαρμογή. Η πυκνότητα σε αυτό το μοντέλο δίνεται από τη σχέση (3.32) και είναι

$$f_{W_i}(x)=\chi_1(0)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}+\chi_2(0)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x},$$

$$f_{W_i}(x)=2e^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-x}.$$

Επίσης, ο συντελεστής προσαρμογής είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης (3.33), η οποία γίνεται

$$\frac{1}{1-R}\left(\frac{1}{3+3cR}+\frac{2}{3+cR}\right)=1.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$\{R\to -1.077\},\{R\to 0.077\},\{R\to 0\}.$$

Αφού σύμφωνα με τη σχέση (3.32) βρισκόμαστε σε ανανεωτικό μοντέλο, η πιθανότητα επιβίωσης θα είναι

$$\delta_{ind}(u)=1-e^{-Ru}+Re^{-Ru} \ ,$$

$$\delta_{ind}(u)=1-0.923e^{-0.077u} \ .$$

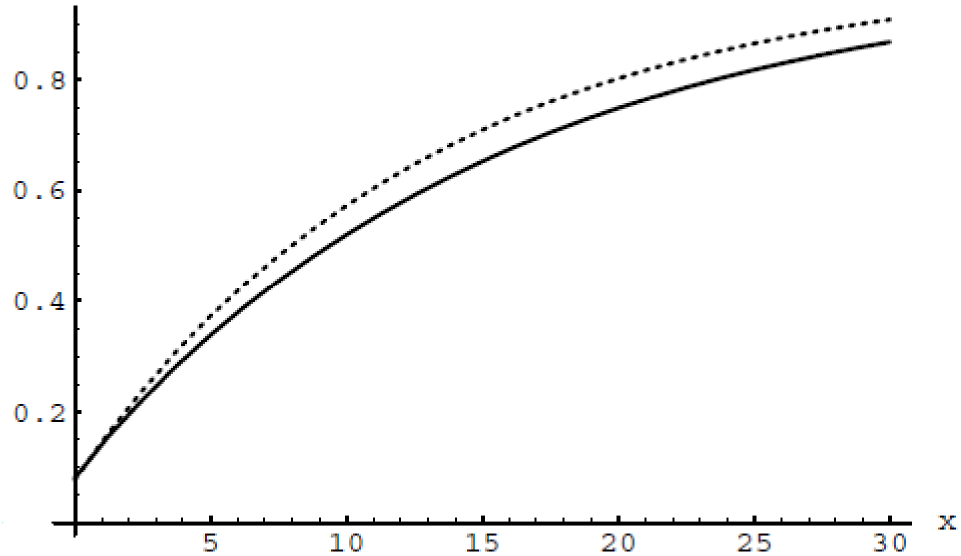
Κάτι που μπορούμε να συγκρίνουμε με την στάσιμη εκδοχή της δομής με εξάρτηση

$$\delta_{dep}(u)=\chi_1(0)\delta_1(u)+\chi_2(0)\delta_2(u) \ ,$$

$$\delta_{dep}(u)=\frac{2}{3}\left(1-0.0068\mathrm{e}^{-3.1612u}-0.9384\mathrm{e}^{-0.0645u}\right)+\frac{1}{3}\left(1-0.0029\mathrm{e}^{-3.1612u}-0.8669\mathrm{e}^{-0.0645u}\right) \ ,$$

$$\delta_{dep}(u)=1-0.006\mathrm{e}^{-3.1612u}-0.915\mathrm{e}^{-0.0645u} \ .$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα επιβίωσης $\delta_{dep}(u)$ είναι μικρότερη από την $\delta_{ind}(u)$, πράγμα που μας δείχνει ότι αν αγνοήσουμε τη δομή εξάρτησης χάνουμε από τους υπολογισμούς μας ένα κομμάτι κινδύνου, ειδικά για μεγαλύτερες τιμές του αρχικού κεφαλαίου *u*.



Σχήμα 3.2 Οι πιθανότητες επιβίωσης $\delta_{dep}(u)$ (σταθερή γραμμή), $\delta_{ind}(u)$ (διακεκομμένη γραμμή).

Εφαρμογή 2

Έστω ότι $T \sim Exp(1)$, $X \sim Exp(1)$, $c=2$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Στην περίπτωση αυτή για τα $\chi_1(s), \chi_2(s)$, έχουμε

$$\chi_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{και} \qquad \chi_2(s)=\frac{1}{s+2}.$$

Επίσης, $\chi_1(0)=\chi_2(0)=\frac{1}{2}$ και $\mu_1=-\chi_1'(0)-\chi_2'(0)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Άρα, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg για $\delta=0$ θα είναι

$$\left[2s-1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\left[2s-2+2\frac{1}{s+2}\right]-2\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s+2}=0.$$

Και οι λύσεις της

$$\{s\to -1.889\},\{s\to 0.745\},\{s\to -0.355\},\{s\to 0\}.$$

Συνεπώς, $\rho=0.745$ και για τις $\delta_1(0), \delta_2(0)$ θα έχουμε

$$\frac{(1-\delta_1(0))\frac{1}{2}}{1}+\frac{(1-\delta_2(0))\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2},$$

και

$$\delta_2(0)=\frac{2\cdot 0.745-2+\frac{2}{0.745+2}}{\frac{1}{0.745+2}}\delta_1(0).$$

Άρα, $\delta_1(0)=0.385$ και $\delta_2(0)=0.231$ και από τις σχέσεις (3.25), (3.26) έχουμε

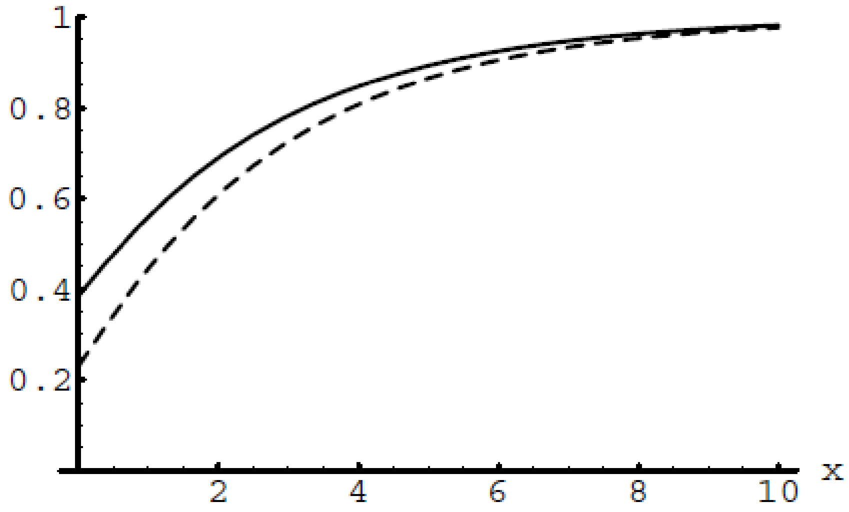
$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{2\cdot 0.385\left[2s-2+2\frac{1}{s+2}\right]-\frac{1}{s+2}2\cdot 0.231}{\left[2s-1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\left[2s-2+\frac{2}{s+2}\right]-2\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s+2}},$$

και

$$\hat{\delta}_2(s)=\frac{2\cdot 0.231\left[2s-1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]-2\frac{1}{(s+1)(s+2)}2\cdot 0.385}{\left[2s-1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\left[2s-2+\frac{2}{s+2}\right]-2\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s+2}},$$

και με χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace παίρνουμε

$$\delta_1(u)=1-0.632e^{-0.355u}+0.017e^{-1.889u} \quad \text{και} \quad \delta_2(u)=1-0.798e^{-0.355u}+0.028e^{-1.889u}.$$



Σχήμα 3.3 Οι πιθανότητες επιβίωσης $\delta_1(u)$ (σταθερή γραμμή), $\delta_2(u)$ (διακεκομμένη γραμμή).

Θα συγκρίνουμε πάλι με την πιθανότητα επιβίωσης στο μοντέλο με την υπόθεση ανεξαρτησίας. Τώρα, η πυκνότητα της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων είναι

$$f_{W_i}(x)=e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-x} \ ,$$

και ο συντελεστής προσαρμογής είναι η μοναδική θετική ρίζα της

$$\frac{1}{1-R}\left(\frac{1}{2+4R}+\frac{1}{2+2R}\right)=1 \ ,$$

οι ρίζες της οποίας είναι

$$\{R\to-0.809\},\{R\to 0.309\},\{R\to 0\} \ .$$

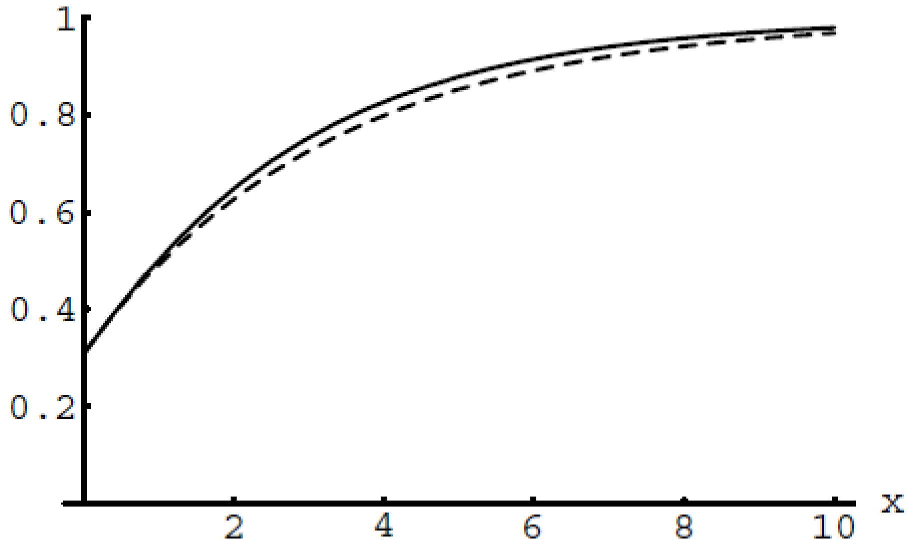
Έτσι, η πιθανότητα επιβίωσης στο μοντέλο με ανεξαρτησία είναι

$$\delta_{ind}(u)=1-0.691e^{-0.309u} \ .$$

Και η πιθανότητα επιβίωσης στη στάσιμη εκδοχή του μοντέλου με εξάρτηση

$$\delta_{dep}(u)=1-0.715\mathrm{e}^{-0,355u}+0.023\mathrm{e}^{-1.889u} \ .$$

Στην περίπτωση αυτή, η επιλογή των παραμέτρων οδήγησε σε πιθανότητα επιβίωσης $\delta_{dep}(u)$ μεγαλύτερη από την $\delta_{ind}(u)$, πράγμα που συμβαίνει γιατί με αυτή την επιλογή παραμέτρων μια μεγαλύτερη ζημιά είναι πιθανότερο να ακολουθείται από ένα μεγαλύτερο ενδιάμεσο χρόνο.



Σχήμα 3.4 Οι πιθανότητες επιβίωσης $\delta_{dep}(u)$ (σταθερή γραμμή), $\delta_{ind}(u)$ (διακεκομμένη γραμμή).

3.6 Παρόμοια μοντέλα με δομή εξάρτησης

Παρακάτω θα δώσουμε δύο παραδείγματα από παρόμοια μοντέλα με εξάρτηση, για τα οποία μπορούμε με ανάλογο τρόπο να πάρουμε αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα επιβίωσης.

Μοντέλο 1

Έστω ότι για κάθε $t>0$ η διαδικασία μπορεί να είναι σε μια από τις δύο καταστάσεις $i=1,2$, αντίστοιχα με την ένταση λ_i της εκθετικής κατανομής του χρόνου μέχρι την επόμενη απαίτηση. Τη στιγμή που εμφανίζεται μια απαίτηση, η κατάσταση της διαδικασίας μπορεί να αλλάξει, ανάλογα με το ύψος της απαίτησης. Αν το ύψος της ζημιάς X_j είναι μικρότερο από ένα κατώφλι T_j, τότε η κατάσταση της διαδικασίας αλλάζει, αλλιώς παραμένει ίδια. Οι ποσότητες T_j είναι και σε αυτό το μοντέλο, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $T(y)=P(T\le y)$. Ενώ η συνθήκη του καθαρού κέρδους σε αυτή την περίπτωση είναι

$$2\mu_1 < c\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) \quad . \tag{3.36}$$

Έστω $\delta_i(u),\ i=1,2$ η συνάρτηση επιβίωσης δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i. Τότε, για το συγκεκριμένο μοντέλο οι συναρτήσεις επιβίωσης $\delta_1(u),\delta_2(u)$ ικανοποιούν τις παρακάτω ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$c\delta_1'(u)=\lambda_1\delta_1(u)-\lambda_1\int_0^u\left[P(T\le x)\delta_1(u-x)+P(T>x)\delta_2(u-x)\right]f(x)dx, \quad (3.37)$$

$$c\delta_2'(u)=\lambda_2\delta_2(u)-\lambda_2\int_0^u\left[P(T\le x)\delta_2(u-x)+P(T>x)\delta_1(u-x)\right]f(x)dx. \quad (3.38)$$

Ενώ οι μετασχηματισμοί Laplace των $\delta_1(u),\delta_2(u)$ σε αυτό το μοντέλο ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{c\delta_1(0)\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_1(s)\right]-\lambda_1\chi_2(s)c\delta_2(0)}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_1(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_2^2(s)}, \quad (3.39)$$

$$\hat{\delta}_2(s)=\frac{c\delta_2(0)\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]-\lambda_2\chi_2(s)c\delta_1(0)}{\left[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(s)\right]\left[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_1(s)\right]-\lambda_1\lambda_2\chi_2^2(s)}. \quad (3.40)$$

Χρειάζεται τώρα να βρούμε τις ποσότητες $\delta_1(0),\delta_2(0)$. Όπως εργαστήκαμε και στο προηγούμενο μοντέλο, θα βρούμε μια σχέση γι' αυτές τις ποσότητες από το θεώρημα αρχικής τιμής, δηλαδή από τη σχέση $\lim_{u\to\infty}\delta_i(u)=\lim_{s\to 0}s\hat{\delta}_i(s)=1$, με τις κατάλληλες πράξεις παίρνουμε

$$\lambda_2\left(1-\delta_1(0)\right)+\lambda_1\left(1-\delta_2(0)\right)=2\frac{\lambda_1\lambda_2}{c}\mu_1. \quad (3.41)$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε μια ακόμα σχέση για τα $\delta_1(0),\delta_2(0)$ όπως και στο προηγούμενο μοντέλο αν υποθέσουμε ότι η μοναδική θετική ρίζα, έστω τ, του παρονομαστή των σχέσεων (3.39),(3.40), θα είναι και ρίζα του αριθμητή των σχέσεων αυτών, αφού είναι αναλυτικές συναρτήσεις. Δεν έχουμε δείξει ότι ο παρονομαστής των (3.39),(3.40) έχει μοναδική ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος, καθώς η εφαρμογή του θεωρήματος του Rouchè στο μοντέλο αυτό είναι πολύ περισσότερο πολύπλοκη. Ωστόσο δεν χρειάζεται να το δείξουμε, διότι σύμφωνα με τους Albrecher και Boxma, οι οποίοι μας παραπέμπουν στη μελέτη των Cohen και Down(1996) για πιο γενικές ιδέες πάνω στη θεωρία ουρών χωρίς στην προσφυγή στο θεώρημα του Rouchè, αν η συνθήκη του καθαρού κέρδους (3.36) ικανοποιείται, τότε θα υπάρχουν μοναδικές λύσεις $\delta_1(u),\delta_2(u)$ από τις ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις (3.37),(3.38) και οι σχέσεις (3.39),(3.40) είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $\delta_1(u),\delta_2(u)$. Συνεπώς, η δεύτερη σχέση που έχουμε για να προσδιορίσουμε τις ποσότητες $\delta_1(0),\delta_2(0)$, είναι

$$\delta_2(0)=\frac{c\tau-\lambda_2+\lambda_2\chi_1(\tau)}{\lambda_1\chi_2(\tau)}\delta_1(0)=\frac{\lambda_2\chi_2(\tau)}{c\tau-\lambda_1+\lambda_1\chi_1(\tau)}\delta_1(0). \quad (3.42)$$

Μοντέλο 2

Σε αυτή την παράγραφο, θα δούμε μια παραλλαγή του κλασικού μοντέλου με τυχαίο κατώφλι, που έχει εφαρμογή στην αντασφάλιση. Όπως και στο μοντέλο που μελετήσαμε, για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των ζημιών έχουμε ότι $W_{i+1} \sim Exp(\lambda_1)$ $\alpha\nu$ $X_i > T_i$ και $W_{i+1} \sim Exp(\lambda_2)$ $\alpha\nu$ $X_i \le T_i$ για όλα τα $i \ge 1$ όπου οι ποσότητες T_i είναι και πάλι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Ωστόσο, τώρα το ύψος της ζημιάς θα είναι $\min(X_i, T_i)$. Έτσι, το κατώφλι T_i μπορεί να θεωρηθεί ως το ποσό ιδίας κράτησης σε μια excess of loss αντασφάλιση. Οι διαφορές που συναντάμε στην ανάλυση αυτού του μοντέλου είναι μικρές οπότε θα δώσουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα για την πιθανότητα επιβίωσης. Γι' αυτή την παραλλαγή θα χρειαστούμε το μετασχηματισμό Laplace

$$\chi_3(s) = E\left[e^{-sT} I_{(T<X)}\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\left(1 - F(x)\right) dT(x). \tag{3.43}$$

Σημειώνουμε, ότι ισχύει $\chi_2(s) + \chi_3(s) = E\left[e^{-s \cdot \min(X,T)}\right]$ και $-\chi_2'(0) - \chi_3'(0) = E\left[\min(X,T)\right]$,

και με το ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε στο αρχικό μοντέλο, παίρνουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας επιβίωσης ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\hat{\delta}_1(s) = \frac{c\delta_1(0)\left[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)\right] - \lambda_1\chi_2(s)c\delta_2(0)}{\left[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_3(s)\right]\left[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)\right] - \lambda_1\lambda_2\chi_3(s)\chi_2(s)}, \tag{3.44}$$

$$\hat{\delta}_2(s) = \frac{c\delta_2(0)\left[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_3(s)\right] - \lambda_2\chi_3(s)c\delta_1(0)}{\left[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_3(s)\right]\left[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)\right] - \lambda_1\lambda_2\chi_3(s)\chi_2(s)}. \tag{3.45}$$

Όπου οι ποσότητες $\delta_1(0), \delta_2(0)$ είναι η λύση του παρακάτω συστήματος

$$\lambda_2\chi_3(0)\left(1 - \delta_1(0)\right) + \lambda_1\chi_2(0)\left(1 - \delta_2(0)\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{c} E\left[\min(X,T)\right], \tag{3.46}$$

$$\delta_2(0) = \frac{c\sigma - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(\sigma)}{\lambda_1\chi_2(\sigma)}\delta_1(0) = \frac{\lambda_2\chi_3(\sigma)}{c\sigma - \lambda_1 + \lambda_1\chi_3(\sigma)}\delta_1(0). \tag{3.47}$$

Όπου σ η μοναδική θετική λύση του παρονομαστή των σχέσεων (3.44),(3.45), όπως μπορεί να δειχτεί αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rouchè.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ένα πιο γενικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, με ημι-Μαρκοβιανή δομή εξάρτησης. Σε αυτή την ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία, πρώτοι αναφέρθηκαν οι Janssen και Reinhard το 1985, όπου έδωσαν αποτελέσματα για τις πιθανότητες επιβίωσης σε όρους μιας άπειρης σειράς από συνελίξεις πινάκων. Εμείς, με βάση τη δουλειά των Albrecher και Boxma (2005), “On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model”, θα δούμε μια γενίκευση της προσέγγισης των Janssen και Reinhard, και θα εξετάσουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής σε ένα τέτοιο μοντέλο, μέσω μετασχηματισμών Laplace. Το μοντέλο που θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι αρκετά γενικό, γιατί εκτός των άλλων περιέχει ορισμένα από τα πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα της Θεωρίας Κινδύνου. Για παράδειγμα το μοντέλο με ημι-Μαρκοβιανή εξάρτηση περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις:

- Το κλασσικό μοντέλο (της σύνθετης Poisson).
- Το ανανεωτικό μοντέλο ή μοντέλο του Sparre Andersen για το οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang κατανομή.
- Το ανανεωτικό μοντέλο ή μοντέλο του Sparre Andersen για το οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια κατανομή τύπου φάσης (phase-type distribution).
- Το μοντέλο με εξάρτηση ανάμεσα στα ύψη και τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ζημιών, που εξετάσαμε διεξοδικά στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.1 Ορισμός του μοντέλου και η συνάρτηση Gerber-Shiu

Για τον ορισμό του μοντέλου θα χρειαστεί αρχικά να ορίσουμε κάποιες έννοιες σχετικές με τις ιδιότητες της αλυσίδας Markov.

Μια αλυσίδα Markov χαρακτηρίζεται από έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, τον οποίο θα συμβολίζουμε με P και του οποίου το στοιχείο (i,j) είναι η δεσμευμένη πιθανότητα p_{ij} μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 *Μια αλυσίδα Markov καλείται χρονικά ομογενής αν η πιθανότητα* $p_{ij} = P(Z_n = j | Z_{n-1} = i)$ *είναι ανεξάρτητη του n. Δηλαδή η αλυσίδα Markov μεταβαίνει από μια κατάσταση i σε μια κατάσταση j, με πιθανότητα μετάβασης ανεξάρτητη του χρόνου που πραγματοποιείται η μετάβαση.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2 *Έστω* $p_{ij}^{n}=P\left(Z_{k+n}=j|Z_k=i\right)$ *η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε n βήματα. Τότε:*

- *Η κατάσταση j λέγεται προσβάσιμη (reachable) από την κατάσταση i, αν υπάρχει* $n\geq 0$ *τέτοιο ώστε* $p_{ij}^{n}>0$.
- *Μια διαδικασία Markov καλείται μη αναγώγιμη (irreducible) αν οποιαδήποτε κατάσταση j, είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη κατάσταση i.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3 *Μια μη αναγώγιμη (irreducible) διαδικασία Markov Μ καταστάσεων, καλείται ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία αν ισχύει ότι κάθε φορά που η διαδικασία μεταβαίνει σε μια κατάσταση i, παραμένει εκεί για τυχαίο χρόνο και στη συνέχεια μεταπηδά στην κατάσταση j με πιθανότητα* p_{ij}. *Σε περίπτωση που ο χρόνος παραμονής της διαδικασίας σε μια κατάσταση είναι ίσος με μια χρονική μονάδα, τότε η διαδικασία είναι απλά Μαρκοβιανή.*

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

$$U(t)=u+ct-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j \ ,$$

όπου *u* είναι το αρχικό αποθεματικό, *c* η ένταση του ασφαλίστρου την οποία θεωρούμε σταθερή, X_j το ύψος της *j*-οστής ζημιάς και *N(t)* το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων μέχρι τη χρονική στιγμή *t*. Στην κλασική θεωρία κινδύνου, οι απαιτήσεις X_j και η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των αποζημιώσεων θεωρούνται ανεξάρτητες. Ωστόσο, η υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι πολύ περιοριστική και δημιουργείται η ανάγκη για πιο γενικά μοντέλα για την καλύτερη περιγραφή της διαδικασίας του πλεονάσματος.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο, θεωρούμε ότι έχουμε μια ημι-Μαρκοβιανή δομή εξάρτησης με τον εξής τρόπο: Έστω W_i ο χρόνος που μεσολαβεί από την άφιξη της $(i-1)-$ζημιάς μέχρι την εμφάνιση της $i-$ζημιάς και $W_0=X_0=0$, τότε

$$\begin{aligned}&P\left(W_{n+1}\leq x, X_{n+1}\leq y, Z_{n+1}=j|Z_n=i,\left(W_r,X_r,Z_r\right),0\leq r\leq n\right)\\&\qquad=P\left(W_1\leq x, X_1\leq y, Z_1=j|Z_0=i\right)=\left(1-e^{-\lambda_i x}\right)p_{ij}F_j\left(y\right)\end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου $\{Z_n, n\geq 0\}$ είναι μια μη αναγώγιμη (irreducible) ημι-Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $\{1,...,M\}$ και πίνακα μετάβασης $P=\left(\left(p_{ij}\right),1\leq i,j\leq M\right)$. Έτσι, σε κάθε στιγμή μιας απαίτησης, η Μαρκοβιανή αλυσίδα εμφανίζει άλμα στην κατάσταση j, και η κατανομή του ύψους των απαιτήσεων B_j εξαρτάται από τη νέα κατάσταση j. Τότε ο επόμενος ενδιάμεσος χρόνος κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο λ_j. Σημειώνουμε επίσης, ότι δοθέντος των καταστάσεων Z_{n-1} και Z_n, οι ποσότητες W_n και X_n είναι ανεξάρτητες αλλά υπάρχει αυτοσυσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών υψών ζημιών και των διαδοχικών ενδιάμεσων χρόνων, όπως επίσης και συσχέτιση μεταξύ των W_n και X_n. Έστω ότι $\mu_i^{(j)}$ είναι η ροπή *j*-τάξης της κατανομής των X_i, τότε δοθέντος ότι υπάρχει η $\mu_i^{(j)}$ και ότι $\mu_i = \mu_i^{(1)}$, η συνθήκη του καθαρού κέρδους για το μοντέλο αυτό θα είναι

$$\sum_{i=1}^{M} \pi_i \mu_i < c \sum_{i=1}^{M} \pi_i \lambda_i^{-1}, \tag{4.2}$$

όπου $\pi = (\pi_1, ..., \pi_M)$ είναι η στάσιμη κατανομή της $\{Z_n\}$.

Όπως γνωρίζουμε, το 1998 οι Gerber και Shiu εισήγαγαν την κλασσική αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, την οποία θα μελετήσουμε υπό τη μορφή της ημι-Μαρκοβιανής εξάρτησης που περιγράψαμε παραπάνω. Έστω $m_{\delta,i}(u)$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι $Z_0 = i$, τότε

$$m_{\delta,i}(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U(T^-), |U(T)|\right) I(T < \infty) | Z_0 = i\right],$$

και από τις σχέσεις (4.1) και (4.2) έπεται ότι η ζητούμενη συνάρτηση $m_\delta(u)$ των Gerber-Shiu είναι

$$m_\delta(u) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i m_{\delta,i}(u) .$$

Επομένως, για να μελετήσουμε διάφορα μέτρα χρεοκοπίας μέσω της συνάρτησης $m_\delta(u)$, αρκεί να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $m_{\delta,i}(u)$ για $i = 1, ..., M$. Για τον υπολογισμό των $m_{\delta,i}(u)$ αρχικά θα βρούμε τις ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις αυτές και στη συνέχεια με τη βοήθεια μετασχηματισμών Laplace θα λύσουμε αυτές τις συναρτήσεις.

4.2 Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και μετασχηματισμός Laplace της $m_{\delta,i}(u)$

Θα δουλέψουμε όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια με σκοπό να πάρουμε μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που να ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu, και από αυτήν το μετασχηματισμό Laplace της Gerber-Shiu.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2 *Έστω $m_{\delta,i}(u)$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι $Z_0 = i$, δηλαδή ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση i. Τότε η συνάρτηση $m_{\delta,i}(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$c m'_{\delta,i}(u) = (\lambda_i + \delta) m_{\delta,i}(u) - \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_0^u m_{\delta,j}(u-x) dB_j(x) - \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} w_j(u), \tag{4.3}$$

όπου $w_j(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) dB_j(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα μήκους dt, δηλαδή το $(0,dt)$ και εξετάζουμε τι συμβαίνει σε αυτό το διάστημα. Έτσι, για το διάστημα $(0,dt)$ δοθέντος ότι $Z_0 = i$, είναι δυνατόν να συμβούν τα εξής ενδεχόμενα:

- να μην εμφανιστεί ζημιά με πιθανότητα $1-\lambda_i dt$
- να εμφανιστεί ζημιά με πιθανότητα $\lambda_i dt$ και η διαδικασία να μεταβεί στην κατάσταση $j,\ j\in\{1,...,M\}$ χωρίς να εμφανιστεί χρεοκοπία
- να εμφανιστεί ζημιά με πιθανότητα $\lambda_i dt$ έτσι ώστε η διαδικασία να μεταβεί στην κατάσταση $j,\ j\in\{1,...,M\}$ και να εμφανιστεί χρεοκοπία
- να εμφανιστούν τουλάχιστον δυο ζημιές

τότε, από τα παραπάνω για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής έπεται ότι

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(u) &= (1-\lambda_i dt)e^{-\delta dt} m_{\delta,i}(u+cdt) + \lambda_i dt \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_0^{u+cdt} e^{-\delta dt} m_{\delta,j}(u+cdt-x)\,dB_j(x) \\ &\quad + \lambda_i dt \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} e^{-\delta dt} w(u+cdt, x-u-cdt)\,dB_j(x) + o(dt) \quad , \quad i=1,...,M \end{aligned} \tag{4.4}$$

όπου $o(x): \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$

Επειδή, από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor έχουμε ότι $e^{-\delta dt} = 1-\delta dt + o(dt)$ είναι

$$\begin{aligned} e^{-\delta dt}(1-\lambda dt) &= \left[1-\delta dt + 0(dt)\right](1-\lambda dt) \\ &= 1-\lambda dt - \delta dt + \lambda\delta(dt)^2 + 0(dt) - \lambda dt 0(dt) \\ &= 1-(\lambda+\delta)dt + 0(dt) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} e^{-\delta dt}\lambda dt &= \left[1-\delta dt + 0(dt)\right]\lambda dt \\ &= \lambda dt - \lambda\delta(dt)^2 + 0(dt)\lambda dt \\ &= \lambda dt + 0(dt) \end{aligned}$$

τότε, με αντικατάσταση στη σχέση (4.4), παίρνουμε ότι,

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(u) &= (1-(\lambda_i+\delta)dt) m_{\delta,i}(u+cdt) + \lambda_i dt \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_0^{u+cdt} m_{\delta,j}(u+cdt-x)\,dB_j(x) \\ &\quad + \lambda_i dt \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)\,dB_j(x) + o(dt), \end{aligned}$$

από την οποία έπεται ότι

$$c\frac{m_{\delta,i}(u)-m_{\delta,i}(u+cdt)}{cdt}=-(\lambda_i+\delta)m_{\delta,i}(u+cdt)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\int_0^{u+cdt}m_{\delta,j}(u+cdt-x)dB_j(x)$$
$$+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt,x-u-cdt)dB_j(x)+o(dt)$$

Παίρνοντας $dt\to 0$ και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και θέτοντας $w_j(u)=\int_u^{\infty}w(u,x-u)dB_j(x)$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.3). □

Από τη σχέση (4.3) παρατηρούμε τελικά ότι οι $m_{\delta,i}(u)$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των $m_{\delta,i}(u)$.

Έστω,
$$\hat{m}_{\delta,i}(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}m_{\delta,i}(u)du,$$
$$\hat{b}_j(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}b_j(x)dx,$$
$$\hat{w}_j(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}w_j(u)du=\int_0^{\infty}e^{-su}\int_u^{\infty}w(u,x-u)dB_j(x)du,$$

οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $m_{\delta,i}(u),\ b_j(x),\ w_j(u)$.

Επειδή,

$$\hat{m}'_{\delta,i}(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}m'_{\delta,i}(u)du=e^{-su}m_{\delta,i}(u)\Big|_{u=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(e^{-su}\right)'m_{\delta,i}(u)du$$
$$=-m_{\delta,i}(0)+s\int_0^{\infty}e^{-su}m_{\delta,i}(u)du=s\hat{m}_{\delta,i}(s)-m_{\delta,i}(0),$$

και

$$\int_0^{\infty}e^{-su}\left(\int_0^{u}m_{\delta,j}(u-x)dB_j(x)\right)du=\hat{m}_{\delta,i}(s)\hat{b}_j(s),$$

παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (4.3) έπεται ότι

$$c\left[s\hat{m}_{\delta,i}(s)-m_{\delta,i}(0)\right]=(\lambda_i+\delta)\hat{m}_{\delta,i}(s)-\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{m}_{\delta,j}(s)\hat{b}_j(s)-\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{w}_j(s),$$

από την οποία παίρνουμε άμεσα το παρακάτω

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3 *Έστω $m_{\delta,i}(u)$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι $Z_0=i$, δηλαδή ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση i. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $m_{\delta,i}(u)$ είναι*

$$\left[cs-(\lambda_i+\delta)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)\right]\hat{m}_{\delta,i}(s)=cm_{\delta,i}(0)-\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{w}_j(s),\ i=1,\dots,M. \quad (4.5)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4 *Η σχέση* (4.5) *μπορεί να γραφεί και σε μορφή πινάκων με τον παρακάτω τρόπο*

$$\left((cs-\delta)I-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)\right)\vec{\hat{m}}_{\delta}(s)=c\vec{m}_{\delta}(0)-\Lambda P\vec{\hat{w}}(s) \tag{4.6}$$

όπου:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},\quad \vec{\hat{m}}_{\delta}(s)=\begin{pmatrix}\hat{m}_{\delta,1}(s)\\ \hat{m}_{\delta,2}(s)\\ \vdots\\ \hat{m}_{\delta,M}(s)\end{pmatrix},\quad \vec{m}_{\delta}(0)=\begin{pmatrix}m_{\delta,1}(0)\\ m_{\delta,2}(0)\\ \vdots\\ m_{\delta,M}(0)\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1M}\\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM}\end{pmatrix},\quad \hat{B}(s)=\begin{pmatrix}\hat{b}_1(s) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \hat{b}_2(s) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \hat{b}_M(s)\end{pmatrix},\quad \vec{\hat{w}}(s)=\begin{pmatrix}\hat{w}_1(s)\\ \hat{w}_2(s)\\ \vdots\\ \hat{w}_M(s)\end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εύρεση των $\hat{m}_{\delta,i}(s)$ ανάγεται στη λύση ενός συστήματος M γραμμικών εξισώσεων, το οποίο για να λυθεί πρέπει πρώτα να υπολογισθούν οι ποσότητες $m_{\delta,i}(u),\ i=1,\dots,M.$

Έστω, $A_{\delta}(s)=(cs-\delta)I-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s),$ ο $M\times M$ πίνακας που είναι ο συντελεστής του διανύσματος $\vec{\hat{m}}_{\delta}(s)$ στη σχέση (4.6).

Τότε, η εξίσωση της ορίζουσας του πίνακα $A_{\delta}(s)$, δηλαδή η

$$\det\left(A_{\delta}(s)\right)=0, \tag{4.7}$$

είναι η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg.

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι στενά συνδεδεμένες με τη συμπεριφορά της $m_{\delta}(u)$. Οι ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος καθορίζουν την ασυμπτωτική της συμπεριφορά, ενώ οι ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο, τις σταθερές στις αναλυτικές εκφράσεις της $m_{\delta}(u)$. Για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης (4.7) θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις $\delta=0$ και $\delta>0$. Έτσι, έχουμε την επόμενη πρόταση, για την απόδειξη της οποίας θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4 *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n με στοιχεία a_{ij}. Τότε, ο A ονομάζεται διαγώνια κυρίαρχος πίνακας αν για κάθε γραμμή του πίνακα, το μέτρο του διαγώνιου στοιχείου της γραμμής είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το άθροισμα των μέτρων των υπολοίπων στοιχείων της γραμμής. Δηλαδή,*

$$|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad \forall i.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5

i. *Για* $\delta=0$*, η εξίσωση* $\det(A_0(s))=0$ *έχει μια ρίζα* $s_1=0$ *και* $M-1$ *ρίζες* $s_2,...,s_M$ *με πραγματικό μέρος* $\mathrm{Re}(s_i)>0$

ii. *Αν* $\delta>0$*, τότε η εξίσωση* $\det(A_\delta(s))=0$ *έχει* M *ρίζες* $s_1,...,s_M$ *με πραγματικό μέρος* $\mathrm{Re}(s_i)>0$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

i. Η απόδειξη είναι αρκετά πολύπλοκη και μακροσκελής γι' αυτό παραπέμπουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.2 στην εργασία των Adan και Kulkarni (2003).

ii. Θα ακολουθήσουμε μια ιδέα από την εργασία του de Smit (1983), όπως επίσης και των Adan και Kulkarni (2003) γι' αυτή την απόδειξη. Έστω *C* ένας κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το $\dfrac{\delta+\max_{1\le i\le M}\lambda_i}{c}$ και ακτίνα $\dfrac{\delta+\max_{1\le i\le M}\lambda_i}{c}$ και έστω

$$A_\delta(s,u)=(cs-\delta)I-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)\ ,\ 0\le u\le 1.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι για $0\le u\le 1$, ισχύει $\det(A_\delta(s,u))\neq 0$, *για* $s\in C$.

Ο πίνακας $A_\delta(s,u)$ είναι διαγώνια κυρίαρχος για $0\le u\le 1$, επειδή

$$\left|cs-\delta-\lambda_i+u\lambda_i p_{i,i}\hat{b}_i(s)\right|\ge\left|\delta+\lambda_i-cs\right|-\left|u\lambda_i p_{i,i}\hat{b}_i(s)\right|\ge\left|\delta+\lambda_i-u\lambda_i p_{i,i}\hat{b}_i(0)\right|$$

$$>u\lambda_i\left(1-p_{i,i}\hat{b}_i(0)\right)=u\lambda_i\sum_{j\neq i}p_{i,j}\hat{b}_j(0)\ge\left|u\lambda_i\sum_{j\neq i}p_{i,j}\hat{b}_j(s)\right|.$$

Η διαγώνια κυριαρχία συνεπάγεται ότι $\det(A_\delta(s,u))\neq 0$, *για* $s\in C$ (βλέπε Marcus και Minc, 1964). Δείξαμε λοιπόν, ότι δεν υπάρχουν ρίζες της εξίσωσης πάνω στο κύκλο *C*. Έστω τώρα, ότι η συνάρτηση $f(u)$ μας δίνει τον αριθμό των ριζών της $\det(A_\delta(s,u))=0$ στο C^+, το εσωτερικό του *C*. Τότε, είναι

$$f(u)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\frac{d}{ds}\det(A_\delta(s,u))}{\det(A_\delta(s,u))}ds.$$

Επομένως, η συνάρτηση $f(u)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, ακέραια και επομένως σταθερή. Παρατηρούμε επίσης ότι για $u=0$ η

$$\det A_\delta(s,0)=\det((cs-\delta)I-\Lambda)=(cs-\delta-\lambda_1)(cs-\delta-\lambda_2)...(cs-\delta-\lambda_M)=0,$$

έχει M λύσεις $s=\left(\dfrac{\delta+\lambda_i}{c}\right)$ για κάθε $i=1,...M$, άρα $f(0)=M$ και αφού είναι σταθερή συνάρτηση θα είναι και $f(1)=M$. □

Υπό την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις $m_{\delta,i}(u)$ δεν αυξάνουν υπερ-εκθετικά, οι $\hat{m}_{\delta,i}(s)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$, συνεπώς για κάθε μια από τις M ρίζες $s_1,...,s_M$ μπορούμε με τον ακόλουθο τρόπο να προσδιορίσουμε τα $m_{\delta,1}(0),...,m_{\delta,M}(0)$:

Έστω $\vec{k}_i$ μια μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης

$$A_\delta^T(s_i)\vec{k}_i=\vec{0}\ , \quad \forall i=1,...,M\ . \tag{4.8}$$

όπου $A_\delta^T(s_i)$ ο ανάστροφος πίνακας του $A_\delta(s_i)$, τότε από τη σχέση (4.6) έχουμε

$$\vec{0}=\vec{\hat{m}}_\delta(s_i)^T A_\delta^T(s_i)\vec{k}_i=\left(c\vec{m}_\delta(0)-\Lambda P\vec{\hat{w}}(s_i)\right)^T\vec{k}_i\ . \tag{4.9}$$

από την οποία παίρνουμε M γραμμικές εξισώσεις για τα $m_{\delta,1}(0),...,m_{\delta,M}(0)$.

4.3 Μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6 *Έστω* $K=\left(\vec{k}_1,...,\vec{k}_M\right)^T$ *ο ανάστροφος πίνακας των μη-τετριμμένων λύσεων της (4.8) για κάθε* s_i, $i=1,...,M$ *και έστω ότι* $\det K_{j_2,i}$ *είναι η ελάσσονα ορίζουσα που λαμβάνεται από τη διαγραφή της* $j_2-οστής$ *γραμμής και* $i-οστής$ *στήλης. Τότε,*

$$m_{\delta,i}(0)=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)\hat{w}_{j_1}(s_{j_2})\ , \quad (i=1,...,M) \tag{4.10}$$

όπου οι συντελεστές $C_{j_1,j_2}^{(i)}$ *με* $j_1,j_2=1,...,M$ *δίνονται από τη σχέση*

$$C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)=\frac{(-1)^{i+j_2}\det K_{j_2,i}\sum_{l=1}^{M}\lambda_l p_{l,j_1}k_{j_2,l}}{c\det K}, \tag{4.11}$$

και $k_{j_2,l}$ *συμβολίζει το* $l-οστό$ *στοιχείο του διανύσματος* $\vec{k}_{j_2}$ *με* $l=1,...,M$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τη σχέση (4.9) έχουμε $c\vec{m}_\delta^T(0)\vec{k}_i=\left(\Lambda P\vec{\hat{w}}(s_i)\right)^T\vec{k}_i$, όπου για $i=1,...,M$ και $K=\left(\vec{k}_1,...,\vec{k}_M\right)^T$, κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς στο δεξί μέλος μπορεί να γραφεί και ως

$$cK\bar{m}_\delta(0)=\begin{pmatrix}\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\lambda_l p_{l,j_1}k_{1,l}\hat{w}_{j_1}(s_1)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \sum_{j_1=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\lambda_l p_{l,j_1}k_{M,l}\hat{w}_{j_1}(s_M)\end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $\frac{K^{-1}}{c}$ και αφού ο πίνακας K είναι τετραγωνικός, ισχύει ότι $K^{-1}=\frac{K_{adj}}{\det K}$, όπου K_{adj} ο κλασσικός προσαρτημένος πίνακας του K, ο οποίος αποτελείται από τα στοιχεία $(-1)^{i+j_2}\det K_{j_2,i}$ για $i=1,...,M$, $j_2=1,...,M$. Έτσι, η σχέση (4.12) γίνεται

$$m_{\delta,i}(0)=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}\frac{(-1)^{i+j_2}\det K_{j_2,i}}{c\det K}\sum_{l=1}^{M}\lambda_l p_{l,j_1}k_{j_2,l}\hat{w}_{j_1}(s_{j_2}) \ , \quad (i=1,...,M)$$

και θέτοντας $C_{j_1,j_2}^{(i)}=\frac{(-1)^{i+j_2}\det K_{j_2,i}\sum_{l=1}^{M}\lambda_l p_{l,j_1}k_{j_2,l}}{c\det K}$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.10). □

Έστω $f_i(y_1,y_2,t|u)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος αμέσως μετά τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση $Z_0=i$. Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δίνεται από τη σχέση:

$$m_{\delta,i}(u)=\int_{y_1=0}^{\infty}\int_{y_2=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}w(y_1,y_2)e^{-\delta t}f_i(y_1,y_2,t|u)dt\,dy_2\,dy_1 \ . \tag{4.13}$$

Επίσης ορίζουμε την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία από τη σχέση

$$f_i(y_1,y_2|u)=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}f_i(y_1,y_2,t|u)dt. \tag{4.14}$$

Τότε, για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο προκύπτει το ακόλουθο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1 *Έστω ότι οι κατανομές του ύψους των ζημιών* B_i με $i=1,\ldots,M$ *είναι συνεχείς με συναρτήσεις πυκνότητας* $b_i(y)$. *Τότε,*

$$f_i(y_1,y_2|0)=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,\ldots,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_1}b_{j_1}(y_1+y_2)\ ,\quad (i=1,\ldots,M)\ . \tag{4.15}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τις σχέσεις (4.12) και (4.13) για $u=0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(0)&=\int_{y_1=0}^{\infty}\int_{y_2=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}w(y_1,y_2)e^{-\delta t}f_i(y_1,y_2,t|0)dt\,dy_2\,dy_1\\ &=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}w(y_1,y_2)\left[\int_0^{\infty}e^{-\delta t}f_i(y_1,y_2,t|0)dt\right]dy_2\,dy_1\\ &=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}w(y_1,y_2)f_i(y_1,y_2|0)dy_2\,dy_1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Επειδή ισχύει

$$\begin{aligned} \hat{w}_{j_1}(s_{j_2})&=\int_0^{\infty}e^{-s_{j_2}y_1}\int_{y_1}^{\infty}w(y_1,y_2-y_1)b_{j_1}(y_2)dy_2\,dy_1\\ &=\int_0^{\infty}e^{-s_{j_2}y_1}\int_0^{\infty}w(y_1,y_2)b_{j_1}(y_1+y_2)dy_2\,dy_1, \end{aligned}$$

από την προηγούμενη πρόταση για $i=1,\ldots,M$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} m_{\delta,i}(0)&=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,\ldots,s_M,\delta)\hat{w}_{j_1}(s_{j_2})\\ &=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,\ldots,s_M,\delta)\int_0^{\infty}e^{-s_{j_2}y_1}\int_0^{\infty}w(y_1,y_2)b_{j_1}(y_1+y_2)dy_2\,dy_1\\ &=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}w(y_1,y_2)\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,\ldots,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_1}b_{j_1}(y_1+y_2)dy_2\,dy_1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Έτσι, από τις (4.15) και (4.16) παίρνουμε ότι

$$f_i(y_1,y_2|0)=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,\ldots,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_1}b_{j_1}(y_1+y_2)\ ,\quad (i=1,\ldots,M)$$ □

Αναλόγως, για την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι έχουμε μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, είναι:

$$f_i(y_1|0)=\int_0^\infty f_i(y_1,y_2|0)dy_2=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_1}\int_0^\infty b_{j_1}(y_1+y_2)dy_2$$
$$=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_1}\int_{y_1}^\infty b_{j_1}(x)dx \tag{4.18}$$
$$=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_1}\left(1-B_{j_1}(y_1)\right).$$

Ενώ για την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι έχουμε μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, είναι

$$f_i(y_2|0)=\int_0^\infty f_i(y_1,y_2|0)dy_1$$
$$=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)\int_0^\infty e^{-s_{j_2}y_1}b_{j_1}(y_1+y_2)dy_1$$
$$=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)\int_{y_2}^\infty e^{-s_{j_2}(z-y_2)}b_{j_1}(z)dz \tag{4.19}$$
$$=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)T_{s_{j_2}}b_{j_1}(y_2).$$
$$=\sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M}C_{j_1,j_2}^{(i)}(s_1,...,s_M,\delta)e^{-s_{j_2}y_2}\left(\hat{b}_{j_1}(s_{j_2})-\int_0^{y_2}e^{-s_{j_2}z}b_{j_1}(z)dz\right)$$

4.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Από τη σχέση (4.6) συνεπάγεται ότι το

$$\hat{\vec{m}}_\delta(s)=\frac{A_{\delta,adj}(s)\left(c\vec{m}_\delta(0)-\Lambda P\hat{\vec{w}}(s)\right)}{\det A_\delta(s)} \quad , \tag{4.20}$$

είναι ένα διάνυσμα αναλυτικών συναρτήσεων για $\mathrm{Re}(s)>0$, όπου $A_{\delta,adj}(s)$ είναι ο προσαρτημένος πίνακας του $A_\delta(s)$ για τον οποίο ισχύει ότι $A_{\delta,adj}(s)=A_\delta^{-1}(s)\det A_\delta(s)$.

Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{b}_i(s)$ των κατανομών του ύψους των ζημιών B_i, υπάρχουν σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων. Τότε, λόγω της δομής της (4.17), οι συναρτήσεις $\hat{m}_{\delta,i}(s)$ είναι αναλυτικές για όλα τα s με $\mathrm{Re}(s)>-R_\delta$, όπου το $-R_\delta$ είναι η ρίζα της γενικευμένης θεμελιώδους εξίσωσης του Lundberg με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος στο αρνητικό ημιεπίπεδο. Επειδή, προφανώς ισχύει ότι $L\left(e^{R_\delta u}m_{\delta,i}(u)\right)=\hat{m}_{\delta,i}(s-R_\delta)$, όπου με $L\left(f(u)\right)=\hat{f}(s)$, συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης, έπεται ότι

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta u}\vec{m}_\delta(u)=\lim_{s\to 0} s\hat{\vec{m}}_\delta(s-R_\delta)=\vec{C}, \tag{4.21}$$

δοθέντος ότι το όριο υπάρχει, κάτι που ισχύει, για παράδειγμα, αν η συνάρτηση $e^{R_\delta u}m_{\delta,i}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u για κάθε $i=1,\ldots,M$ (βλέπε Doetsch, 1937).

Έστω ότι ο $s=-R_\delta$ είναι ένας απλός πόλος της $\hat{m}_{\delta,i}(s)$, τότε

$$\begin{aligned}\vec{C}&=\lim_{s\to 0} s\hat{\vec{m}}_\delta(s-R_\delta)=\lim_{s\to 0} s\frac{A_{\delta,adj}(s-R_\delta)\left(c\vec{m}_\delta(0)-\Lambda P\hat{\vec{w}}(s-R_\delta)\right)}{\det A_\delta(s-R_\delta)}\\ &=\frac{\lim_{s\to 0}\left[A_{\delta,adj}(s-R_\delta)\left(c\vec{m}_\delta(0)-\Lambda P\hat{\vec{w}}(s-R_\delta)\right)\right]}{\lim_{s\to 0}\frac{\det A_\delta(s-R_\delta)}{s}},\end{aligned}$$

από την οποία με χρήση κανόνα de L' Hospital έπεται ότι

$$\vec{C}=\frac{A_{\delta,adj}(-R_\delta)\left(c\vec{m}_\delta(0)-\Lambda P\hat{\vec{w}}(-R_\delta)\right)}{\frac{\partial}{\partial s}\left(\det A_\delta(s)\right)\Big|_{s=-R_\delta}}. \tag{4.22}$$

Έτσι, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, φθίνει εκθετικά με ρυθμό R_δ και οι αντίστοιχοι συντελεστές δίνονται από τη σχέση (4.22).

4.5 Οι ροπές τριών χαρακτηριστικών της διαδικασίας πλεονάσματος

4.5.1 Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας *T*

Υποθέτοντας ότι $w(x,y)=1$ και $\delta>0$, τότε η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι $Z_0=i$ είναι,

$$m_{\delta,i}(u)=E\left[e^{-\delta T}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right].$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά *n*-φορές την $m_{\delta,i}(u)$ ως προς δ και θέτοντας $\delta=0$ παίρνουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας

$$\left.\frac{\partial m_{\delta,i}(u)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}=E\left[-Te^{-\delta T}I\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)\middle|Z_0=i\right]\Big|_{\delta=0}=E\left[-T\,I\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)\middle|Z_0=i\right],$$

$$\left.\frac{\partial^2 m_{\delta,i}(u)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta=0}=E\left[T^2e^{-\delta T}I\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)\middle|Z_0=i\right]\Big|_{\delta=0}=E\left[T^2\,I\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)\middle|Z_0=i\right],$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^n m_{\delta,i}(u)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}&=E\left[(-1)^n T^n e^{-\delta T}I\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)\middle|Z_0=i\right]\Big|_{\delta=0}\\&=E\left[(-1)^n T^n\,I\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)\middle|Z_0=i\right].\end{aligned}$$

Ορίζοντας τώρα ως

$$f_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}\tag{4.23}$$

τη *n*-οστή παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu ως προς δ ή αλλιώς το μετασχηματισμό Laplace της *n*-οστής ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, τότε ισχύει το παρακάτω.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7 *Για τη n-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας T, ισχύει η παρακάτω αναδρομική σχέση*

$$(cs-\lambda_i)f_{n,i}(s)-nf_{n-1,i}(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)f_{n,j}(s)=c\left.\frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0},\tag{4.24}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$A_0(s)\vec{f}_n(s)=c\left.\frac{\partial^n \vec{m}_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}+n\vec{f}_{n-1}(s).\tag{4.25}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η σχέση (4.5) μπορεί να γραφεί και ως

$$(cs-\lambda_i)\hat{m}_{\delta,i}(s)-cm_{\delta,i}(0)-\delta\hat{m}_{\delta,i}(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{m}_{\delta,j}(s)\hat{b}_j(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{w}_j(s)=0,$$

την οποία παραγωγίζοντας διαδοχικά *n*-φορές ως προς δ και θέτοντας στη συνέχεια $\delta=0$, έχουμε

$$(cs-\lambda_i)\frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}-c\frac{\partial m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}-\left[\hat{m}_{\delta,i}(s)+\delta\frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}\right]+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)\frac{\partial \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}=0,$$

$$(cs-\lambda_i)\frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta=0}-c\frac{\partial^2 m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta=0}-\left[\frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}+\frac{\partial \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}+\delta\frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta=0}\right]$$
$$+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)\frac{\partial^2 \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta=0}=0,$$

.

.

.

$$(cs-\lambda_i)\frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}-c\frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}-\left[n\frac{\partial^{n-1} \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^{n-1}}\bigg|_{\delta=0}+\delta\frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,i}(s)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}\right]$$
$$+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)\frac{\partial^n \hat{m}_{\delta,j}(s)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}=0,$$

όπου με απλή αντικατάσταση από την (4.23) προκύπτει ότι

$$(cs-\lambda_i)f_{n,i}(s)-nf_{n-1,i}(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)f_{n,j}(s)=c\frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}.$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και σε μορφή πινάκων ως

$$\left[csI-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)\right]\vec{f}_n(s)=c\frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}+n\vec{f}_{n-1}(s),$$

και επειδή $A_0(s)=csI-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)$, παίρνουμε τελικά ότι

$$A_0(s)\vec{f}_n(s)=c\frac{\partial^n \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0}+n\vec{f}_{n-1}(s).$$ □

Σημειώνουμε ότι το

$$\vec{f}_0(s)=\begin{pmatrix} f_{0,1}(s)\\ \vdots \\ f_{0,M}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{m}_{0,1}(s)\\ \vdots \\ \hat{m}_{0,M}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(s)\\ \vdots \\ \hat{\psi}_M(s)\end{pmatrix}=\vec{\psi}(s)\lim_{x\to\infty},$$

όπου $\vec{\psi}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας. Έτσι, για να βρούμε τη n-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας T, πρέπει να προσδιορίσουμε τις M σταθερές $\frac{\partial^n m_{\delta,i}(0)}{\partial \delta^n}\Big|_{\delta=0}$ με τον τρόπο που είδαμε στην παράγραφο 4.3, χρησιμοποιώντας τις M ρίζες της εξίσωσης $\det A_0(s)=0$ στο θετικό ημιεπίπεδο.

4.5.2 Ροπές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T^{-})$

Υποθέτουμε ότι $w(x,y)=e^{-ax}$, οπότε

$$\hat{w}_i(s)=\int_0^\infty e^{-su}w_i(u)du=\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty e^{-ax}dB_i(x)du.$$

Έστω επίσης $\delta=0$. Τότε, η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι $Z_0=i$, είναι

$$m_{0,i}(u)=E\left[e^{-aU(T^{-})}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right].$$

Παραγωγίζοντας και πάλι διαδοχικά την $m_{0,i}(u)$ ως προς *α* και θέτοντας στη συνέχεια $\alpha=0$, παίρνουμε τη *n*-οστή ροπή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

$$\left.\frac{\partial m_{0,i}(u)}{\partial a}\right|_{a=0}=E\left[-U(T^{-})e^{-aU(T^{-})}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right]_{a=0}$$
$$=E\left[-U(T^{-})I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right],$$

$$\left.\frac{\partial^2 m_{0,i}(u)}{\partial a^2}\right|_{a=0}=E\left[\left(U(T^{-})\right)^2 e^{-aU(T^{-})}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right]_{a=0}$$
$$=E\left[\left(U(T^{-})\right)^2 I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right],$$

.
.
.

$$\left.\frac{\partial^n m_{0,i}(u)}{\partial a^n}\right|_{a=0}=E\left[(-1)^n\left(U(T^{-})\right)^n e^{-aU(T^{-})}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right]_{a=0}$$
$$=E\left[(-1)^n\left(U(T^{-})\right)^n I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right].$$

Έστω $g_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}$ η *n*-οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu ως προς *α*, για $\alpha=0$, ή ο μετασχηματισμός Laplace της *n*-οστής ροπής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία. Επίσης, έστω $\xi_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}$ η *n*-οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace των ποσοτήτων $w_j(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)dB_j(x)$ ως προς *α* για $\alpha=0$. Τότε, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8 *Για τη n-οστή ροπή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, ισχύει η αναδρομική σχέση*

$$A_0(s)\bar{g}_n(s)=c\left.\frac{\partial^n \bar{m}_0(0)}{\partial a^n}\right|_{a=0}-\Lambda P diag\left(\xi_{n,1}(s),...,\xi_{n,M}(s)\right), \tag{4.26}$$

όπου

$$\xi_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}=\frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}\left(1-\hat{b}_i(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-s)^j}{j!}\frac{\partial^j \hat{b}_i(s)}{\partial a^j}\right),\quad \forall n\geq 1, n\in N. \tag{4.27}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η σχέση (4.5) για $\delta=0$ γίνεται

$$(cs-\lambda_i)\hat{m}_{0,i}(s)-cm_{0,i}(0)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{m}_{0,j}(s)\hat{b}_j(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{w}_j(s)=0.$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά *n*-φορές ως προς *α,* και θέτοντας στη συνέχεια $a=0$, έχουμε,

$$(cs-\lambda_i)\left.\frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}-c\left.\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n}\right|_{a=0}+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)\left.\frac{\partial^n \hat{m}_{0,j}(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\left.\frac{\partial^n \hat{w}_j(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}=0,$$

από την οποία παίρνουμε ότι

$$(cs-\lambda_i)g_{n,i}(s)-c\left.\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n}\right|_{a=0}+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{b}_j(s)g_{n,j}(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\xi_{n,j}(s)=0\cdot$$

Σε μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\left[csI-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)\right]g_n(s)=c\left.\frac{\partial^n \bar{m}_0(0)}{\partial \delta^n}\right|_{\delta=0}-\Lambda P diag\left(\xi_{n,1}(s),...,\xi_{n,M}(s)\right)$$

και επειδή $A_0(s)=csI-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)$, τότε προκύπτει άμεσα η ζητούμενη αναδρομική σχέση.

Για την απόδειξη της σχέσης (4.27), αρχικά υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $w_j(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)dB_j(x)$ για $w(x,y)=e^{-ax}$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{w}_j(s)&=\int_0^\infty e^{-su}w_j(u)du=\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty e^{-au}dB_j(x)du\\&=\int_0^\infty e^{-su}e^{-au}\int_u^\infty b_j(x)dxdu=\int_0^\infty e^{-(s+a)u}\bar{B}_j(u)du.\end{aligned}$$

Όμως για το μετασχηματισμό Laplace της δεξιάς ουράς μιας τυχαίας μεταβλητής ισχύει ότι $\hat{\bar{B}}(s)=\frac{1-\hat{b}(s)}{s}$ και επειδή $L\left(e^{ax}b(x)\right)=\hat{b}(s-a)$, έπεται ότι

$$\hat{w}_j(s)=\frac{1-\hat{b}_j(s+a)}{s+a}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση διαδοχικά ως προς a, παίρνουμε

$$\frac{\partial \hat{w}_j(s)}{\partial a}=\frac{-\frac{\partial \hat{b}_j(s+a)}{\partial a}(s+a)-1+\hat{b}_j(s+a)}{(s+a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_j(s)}{\partial a^2}=\frac{\left[-\left(\frac{\partial^2 \hat{b}_j(s+a)}{\partial a^2}(s+a)+\frac{\partial \hat{b}_j(s+a)}{\partial a}\right)+\frac{\partial \hat{b}_j(s+a)}{\partial a}\right](s+a)-2\left[-\frac{\partial \hat{b}_j(s+a)}{\partial a}(s+a)-1+\hat{b}_j(s+a)\right]}{(s+a)^3},$$

.

.

.

$$\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n}=\frac{(-1)^n n!}{(s+a)^{n+1}}\left(1-\hat{b}_i(s+a)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-(s+a))^j}{j!}\frac{\partial^j \hat{b}_i(s+a)}{\partial a^j}\right),$$

οπότε θέτοντας $a=0$, προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Έτσι, μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace της n-οστής ροπής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, αφού πρώτα προσδιορίσουμε τις M σταθερές $\left.\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n}\right|_{a=0}$ χρησιμοποιώντας τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg και στη συνέχεια λύνοντας το παραπάνω σύστημα των γραμμικών εξισώσεων της σχέσης (4.26).

4.5.3 Ροπές του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$

Υποθέτουμε ότι $w(x,y)=e^{-ay}$, οπότε

$$\hat{w}_i(s)=\int_0^\infty e^{-su}w_i(u)du=\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty e^{-a(x-u)}dB_i(x)du.$$

Έστω επίσης $\delta=0$. Έτσι, η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι $Z_0=i$, είναι

$$m_{0,i}(u)=E\left[e^{-a|U(T)|}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right].$$

Παραγωγίζοντας και πάλι διαδοχικά την $m_{0,i}(u)$ ως προς a και θέτοντας στη συνέχεια $a=0$ παίρνουμε τη n-οστή ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Είναι

$$\left.\frac{\partial m_{0,i}(u)}{\partial a}\right|_{a=0}=E\left[-|U(T)|e^{-a|U(T)|}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right]_{a=0}$$
$$=E\left[-|U(T)|I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right],$$
$$\left.\frac{\partial^2 m_{0,i}(u)}{\partial a^2}\right|_{a=0}=E\left[|U(T)|^2 e^{-a|U(T)|}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right]_{a=0}$$
$$=E\left[|U(T)|^2 I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right],$$

.

.

.

$$\left.\frac{\partial^n m_{0,i}(u)}{\partial a^n}\right|_{a=0}=E\left[(-1)^n|U(T)|^n e^{-a|U(T)|}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right]_{a=0}$$
$$=E\left[(-1)^n|U(T)|^n I\left(T<\infty|U(0)=u\right)|Z_0=i\right].$$

Έστω $k_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}$ η *n*-οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu, ως προς *α* για $a=0,$ ή ο μετασχηματισμός Laplace της *n*-οστής ροπής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Επίσης, έστω $\eta_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}$ η *n*-οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace των ποσοτήτων $w_j(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)dB_j(x)$ ως προς *α* για $a=0$. Τότε, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9 *Για τη n-οστή ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, ισχύει η αναδρομική σχέση*

$$A_0(s)k_n(s)=c\left.\frac{\partial^n m_0(0)}{\partial a^n}\right|_{a=0}-\Lambda P diag\left(\eta_{n,1}(s),...,\eta_{n,M}(s)\right), \tag{4.28}$$

όπου

$$\eta_{n,i}(s)=\left.\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n}\right|_{a=0}=-\frac{n!}{s^{n+1}}\left(\hat{b}_i(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-s)^j}{j!}E\left(B_i^j\right)\right),\quad \forall n\geq 1, n\in N. \tag{4.29}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η σχέση (4.5) για $\delta=0$ γίνεται

$$(cs-\lambda_i)\hat{m}_{0,i}(s)-cm_{0,i}(0)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{m}_{0,j}(s)\hat{b}_j(s)+\lambda_i\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\hat{w}_j(s)=0.$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά *n*-φορές ως προς *α,* και θέτοντας $a=0$, παίρνουμε

$$(cs-\lambda_i)\frac{\partial^n \hat{m}_{0,i}(s)}{\partial a^n}\bigg|_{a=0} - c\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n}\bigg|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\hat{b}_j(s)\frac{\partial^n \hat{m}_{0,j}(s)}{\partial a^n}\bigg|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\frac{\partial^n \hat{w}_j(s)}{\partial a^n}\bigg|_{a=0} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$(cs-\lambda_i)k_{n,i}(s) - c\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n}\bigg|_{a=0} + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\hat{b}_j(s)k_{n,j}(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\eta_{n,j}(s) = 0.$$

Σε μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\left[csI - \Lambda + \Lambda P\hat{B}(s)\right]\vec{k}_n(s) = c\frac{\partial^n \vec{m}_0(0)}{\partial \delta^n}\bigg|_{\delta=0} - \Lambda P diag\left(\eta_{n,1}(s),\ldots,\eta_{n,M}(s)\right),$$

και επειδή $A_0(s) = csI - \Lambda + \Lambda P\hat{B}(s)$, προκύπτει άμεσα η ζητούμενη αναδρομική σχέση.

Για την απόδειξη της σχέσης (4.29), αρχικά υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $w_j(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)dB_j(x)$ για $w(x,y) = e^{-ay}$. Είναι,

$$\hat{w}_j(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_j(u)du = \int_0^\infty e^{-su}\left(\int_u^\infty e^{-a(x-u)}dB_j(x)\right)du.$$

Όμως, επειδή το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι ο τελεστής των Dickson-Hipp $T_a b_j(u)$, έπεται ότι (βλέπε κεφάλαιο 2)

$$\hat{w}_j(s) = \frac{\hat{b}_j(s) - \hat{b}_j(a)}{a-s}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση διαδοχικά ως προς a, παίρνουμε

$$\frac{\partial \hat{w}_j(s)}{\partial a} = \frac{-\frac{\partial \hat{b}_j(a)}{\partial a}(a-s) + \hat{b}_j(s) - \hat{b}_j(a)}{(a-s)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_j(s)}{\partial a^2} = \frac{\left[-\frac{\partial^2 \hat{b}_j(a)}{\partial a^2}(a-s) - \frac{\partial \hat{b}_j(a)}{\partial a} - \frac{\partial \hat{b}_j(a)}{\partial a}\right](a-s) - 2\left[-\frac{\partial \hat{b}_j(a)}{\partial a}(a-s) + \hat{b}_j(s) - \hat{b}_j(a)\right]}{(a-s)^3},$$

.

.

.

$$\frac{\partial^n \hat{w}_i(s)}{\partial a^n} = -\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\left(\hat{b}_i(s-a) - \sum_{j=1}^{n}\frac{(-(s-a))^j}{j!}\frac{\partial^j \hat{b}_i(a)}{\partial a^j}\right).$$

οπότε θέτοντας $a=0$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Έτσι, μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace της n-οστής ροπής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, αφού πρώτα προσδιορίσουμε τις M σταθερές $\left.\frac{\partial^n m_{0,i}(0)}{\partial a^n}\right|_{a=0}$ χρησιμοποιώντας τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg και στη συνέχεια λύνοντας το παραπάνω σύστημα των γραμμικών εξισώσεων της σχέσης (4.28).

4.6 Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου με ημι-Μαρκοβιανή εξάρτηση

4.6.1 Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Για την ειδική περίπτωση όπου $M=1$ παίρνουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου στο οποίο αναφερθήκαμε εκτενώς στο 2ο κεφάλαιο. Πράγματι, από τη σχέση (4.6) για $M=1$ έχουμε

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{cm_\delta(0)-\lambda\hat{w}(s)}{cs-(\delta+\lambda)+\lambda\hat{b}(s)}, \tag{4.30}$$

που όπως έχουμε ήδη δείξει, είναι η σχέση που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο. Έχουμε επίσης δείξει ότι η εξίσωση του Lundberg για το κλασσικό μοντέλο έχει ακριβώς μια θετική ρίζα, έστω s_1. Έτσι, από την (4.6) έχουμε

$$\left[cs_1-(\delta+\lambda)+\lambda\hat{b}(s_1)\right]\hat{m}_\delta(s_1)=cm_\delta(0)-\lambda\hat{w}(s_1),$$

ή

$$0\cdot\hat{m}_\delta(s_1)=cm_\delta(0)-\lambda\hat{w}(s_1),$$

ή ισοδύναμα

$$cm_\delta(0)=\lambda\hat{w}(s_1). \tag{4.31}$$

Από τις (4.30) και (4.31), παίρνουμε ότι

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{cm_\delta(0)-\lambda\hat{w}(s)}{cs-(\delta+\lambda)+\lambda\hat{b}(s)}=\frac{\lambda\left(\hat{w}(s_1)-\hat{w}(s)\right)}{cs-(\delta+\lambda)+\lambda\hat{b}(s)}. \tag{4.32}$$

Για να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στην ειδική περίπτωση του κλασσικού μοντέλου, από τις σχέσεις (4.21) και (4.22), έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = C = \frac{A_{\delta,adj}(-R_\delta)\left(cm_\delta(0) - \Lambda P\hat{w}(-R_\delta)\right)}{\frac{\partial}{\partial s}\left(\det A_\delta(s)\right)\big|_{s=-R_\delta}},$$

όπου στην περίπτωσή μας ο πίνακας $A_\delta(s) = cs - (\delta+\lambda) + \lambda\hat{b}(s)$, είναι πίνακας 1×1 (δηλαδή είναι αριθμός) και κατά συνέπεια ο προσαρτημένος πίνακας (adjoint matrix), είναι $A_{\delta,adj}(-R_\delta) = 1$. Για τον παρονομαστή, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\det A_\delta(s)\right)\big|_{s=-R_\delta} = \frac{\partial}{\partial s}\left[cs - (\delta+\lambda) + \lambda\hat{b}(s)\right]\big|_{s=-R_\delta} = c + \lambda\hat{b}'(s)\big|_{s=-R_\delta} = c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta).$$

Επομένως, είναι

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = \frac{cm_\delta(0) - \lambda\hat{w}(-R_\delta)}{c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta)} = \frac{\lambda\left(\hat{w}(s_1) - \hat{w}(-R_\delta)\right)}{c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta)}. \tag{4.33}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $w(x,y) = 1$ και $\delta = 0$, έχουμε $s_1 = 0$ και

$$\hat{w}(s) = \int_0^\infty e^{-su} w(u)\,du = \int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty dB(x)\,du = \frac{1-\hat{b}(s)}{s},,$$

όπου για $s = -R_0$, είναι $\hat{w}(-R_0) = \dfrac{1-\hat{b}(-R_0)}{-R_0}$. Επίσης,

$$\hat{w}(s_1) = \hat{w}(0) = \lim_{s\to 0}\hat{w}(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1-\hat{b}(s)}{s},$$

οπότε με εφαρμογή του κανόνα de L' Hospital, παίρνουμε $\hat{w}(s_1) = \lim_{s\to 0}\dfrac{-\hat{b}'(s)}{1} = -\hat{b}'(0) = \mu.$

Η $s = -R_0$ είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης Lundberg, άρα

$$c(-R_0) - \lambda + \lambda\hat{b}(-R_0) = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\left[1 - \hat{b}(-R_0)\right] = c(-R_0).$$

Έτσι, από τη σχέση (4.33) και τα παραπάνω, για $w(x,y) = 1$ και $\delta = 0$, τελικά έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta u} m_\delta(u) = \frac{\lambda\left(\hat{w}(s_1) - \hat{w}(-R_\delta)\right)}{c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta)} = \frac{\lambda\mu - \frac{c(-R_\delta)}{-R_\delta}}{c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta)} = \frac{\lambda\mu - c}{c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta)},$$

δηλαδή,

$$m_\delta(u) \sim \frac{\lambda\mu - c}{c + \lambda\hat{b}'(-R_\delta)} e^{-R_\delta u}, \text{ για } u \to \infty.$$

Στην παράγραφο 4.5.1 είδαμε ότι η *n*-οστή παράγωγος της συνάρτησης Gerber-Shiu για $w(x,y)=1$ μας δίνει τη *n*-οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Δηλαδή, είναι

$$\left.\frac{\partial^n m_{\delta,i}(u)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0} = E\left[(-1)^n T^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right] = (-1)^n E\left[T^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right]. \quad (4.34)$$

Έστω τώρα ότι

$$\psi_n(u) = E\left[T^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right], \quad n \in N, \quad (4.35)$$

οπότε για $n=0$ παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_0(u) = \psi(u) = E\left[I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right] = P\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right). \quad (4.36)$$

Από τις σχέσεις (4.35) και (4.36) προκύπτει ότι,

$$\psi_n(u) = E\left[T^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right] = E\left[T^n \middle| T<\infty, U(0)=u\right] P\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right),$$

ή $$E\left[T^n \middle| T<\infty, U(0)=u\right] = \frac{\psi_n(u)}{P\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)},$$

ή ισοδύναμα $$E\left[T^n \middle| T<\infty, U(0)=u\right] = \frac{\psi_n(u)}{\psi(u)}. \quad (4.37)$$

Επίσης, από τις (4.34) και (4.35) έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial^n m_{\delta,i}(u)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0} = (-1)^n \psi_n(u). \quad (4.38)$$

Επομένως, για τη συνάρτηση $f_n(s) = \left.\frac{\partial^n \hat{m}_\delta(s)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}$, έχουμε

$$f_n(s) = \left.\frac{\partial^n \hat{m}_\delta(s)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0} = \int_0^\infty e^{-su} \left.\frac{\partial^n m_\delta(s)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0} du = \int_0^\infty e^{-su} (-1)^n \psi_n(u) du = (-1)^n \hat{\psi}_n(s). \quad (4.39)$$

Ενώ η σχέση (4.25) για $M=1$ είναι

$$\left[cs - \lambda + \lambda\hat{b}(s)\right] f_n(s) = c \left.\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0} + n f_{n-1}(s). \quad (4.40)$$

ΛΗΜΜΑ 4.1 *Για το κλασσικό μοντέλο και για* $w(x,y)=1$*, ισχύει η παρακάτω αναδρομική σχέση για* $n\geq 1,\ n\in N$

$$\left.\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}=(-1)^n\frac{n}{c}\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du. \tag{4.41}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν λύσουμε την (4.40) ως προς $\left.\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}$, βρίσκουμε ότι

$$\left.\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}=\frac{f_n(s)}{c}\left[cs-\lambda+\lambda\hat{b}(s)\right]-\frac{n}{c}f_{n-1}(s).$$

Όμως η συνάρτηση (4.40) είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$ και αφού $s=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης Lundberg στο θετικό ημιεπίπεδο, το όριο της καθώς το s τείνει στο μηδέν είναι

$$\lim_{s\to 0}\left(\left.\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{f_n(s)}{c}\left[cs-\lambda+\lambda\hat{b}(s)\right]-\frac{n}{c}f_{n-1}(s)\right).$$

Συνεπώς με αντικατάσταση από την (4.39) έχουμε

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^n m_\delta(0)}{\partial\delta^n}\right|_{\delta=0}&=\lim_{s\to 0}\left(-\frac{n}{c}f_{n-1}(s)\right)=-\frac{n}{c}\lim_{s\to 0}f_{n-1}(s)\\&=-\frac{n}{c}\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-su}(-1)^n\psi_{n-1}(u)du=-\frac{(-1)^n n}{c}\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10 *Ο μετασχηματισμός Laplace της* $\psi_n(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική σχέση*

$$\hat{\psi}_n(s)=n\left(\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du-\hat{\psi}_{n-1}(s)\right)\frac{\frac{1}{s}-\psi(s)}{c-\lambda\mu}, \tag{4.42}$$

και η $\psi_n(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική σχέση*

$$\psi_n(u)=\frac{n}{c-\lambda\mu}\left(\int_0^u \psi_n(u-x)\psi_{n-1}(x)dx+\int_u^\infty \psi_{n-1}(x)dx-\psi(u)\int_0^\infty \psi_{n-1}(x)dx\right). \tag{4.43}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η σχέση (4.40) με αντικατάσταση από τις (4.39) και (4.41) μας δίνει

$$(-1)^n \hat{\psi}_n(s)=f_n(s)=\frac{c(-1)^n \frac{n}{c}\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du+n(-1)^{n-1}\hat{\psi}_{n-1}(s)}{cs-\lambda+\lambda\hat{b}(s)}$$
$$=\frac{(-1)^n n\left(\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du-\hat{\psi}_{n-1}(s)\right)}{cs-\lambda+\lambda\hat{b}(s)}. \qquad (4.44)$$

Με χρήση του τύπου των Pollaczek-Khintchine, έχουμε ότι

$$\hat{\psi}(s)=\frac{1}{s}-\frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda+\lambda\hat{b}(s)},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{cs-\lambda+\lambda\hat{b}(s)}=\frac{\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)}{c-\lambda\mu}.$$

Τότε, η (4.44) γίνεται

$$\hat{\psi}_n(s)=n\left(\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du-\hat{\psi}_{n-1}(s)\right)\frac{\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)}{c-\lambda\mu},$$

ή

$$\hat{\psi}_n(s)=\frac{n}{c-\lambda\mu}\left(\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du\cdot\left(\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)\right)-\frac{1}{s}\hat{\psi}_{n-1}(s)+\hat{\psi}_{n-1}(s)\hat{\psi}(s)\right),$$

απ' όπου με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace παίρνουμε

$$\psi_n(s)=\frac{n}{c-\lambda\mu}\left(\int_0^\infty \psi_{n-1}(u)du\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s}\hat{\psi}_{n-1}(s)\right)+L^{-1}\left(\hat{\psi}_{n-1}(s)\hat{\psi}(s)\right)\right). \qquad (4.45)$$

Όμως από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace έχουμε ότι

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-L^{-1}\left(\hat{\psi}(s)\right)=1-\psi(u),$$

από την ιδιότητα ολοκλήρωσης $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\hat{\psi}_{n-1}(s)\right)=\int_0^u \psi_{n-1}(x)dx,$

και μέσω συνελίξεων $L^{-1}\left(\hat{\psi}_{n-1}(s)\hat{\psi}(s)\right)=\int_0^u \psi(u-x)\psi_{n-1}(x)dx.$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στη σχέση (4.45), προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.43) η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση (6.29) των Lin και Willmot (2000) που όμως κατέληξαν σε αυτή χρησιμοποιώντας ουρές σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. □

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την $\psi_n(u)$ από τη σχέση (4.43) στην (4.37), για $n=1$ και με χρήση της $\int_0^\infty \psi(x)dx=\frac{\lambda\mu^{(2)}}{2(c-\lambda\mu)}$ που είναι άμεση συνέπεια του τύπου των Pollaczek-Khintchine για $\mu^{(2)}<\infty$, παίρνουμε ότι η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία είναι ίση με:

$$E\left[T^n \middle| T<\infty, U(0)=u\right]=\frac{\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx+\int_u^\infty \psi(x)dx-\psi(u)\frac{\lambda\mu^{(2)}}{2(c-\lambda\mu)}}{(c-\lambda\mu)\psi(u)},,$$

που είναι η σχέση (6.23) από την εργασία των Lin και Willmot (2000).

Έστω τώρα $\delta=0$. Τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, η ρίζα της εξίσωσης Lundberg θα είναι η $s_1=0$. Επομένως, από την (4.32) και τον τύπο των Pollaczek-Khintchine, παίρνουμε

$$\hat{m}_0(s)=\lambda\left(\hat{w}(0)-\hat{w}(s)\right)\frac{\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)}{c-\lambda\mu},$$

από την οποία με χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace προκύπτει

$$\begin{aligned} m_0(u)&=E\left[w\left(U(T^-),|U(T)|\right)I\left(T<\infty|U(0)=u\right)\right] \\ &=\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\left(\hat{w}(0)\left(1-\psi(u)\right)-\int_0^u\left(1-\psi(u-x)\right)\int_x^\infty w(x,y-x)b(y)dydx\right). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να μας δώσει τις περιθώριες πυκνότητες και τις ροπές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία καθώς και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

- Για $w(x,y)=e^{-ax}$, είδαμε προηγουμένως ότι $\hat{w}(s)=\frac{1-\hat{b}(s+a)}{s+a}$, οπότε για $s=0$ είναι $\hat{w}(0)=\frac{1-\hat{b}(a)}{a}$. Συνεπώς με αντικατάσταση στη σχέση (4.45) έχουμε

$$E\left[e^{-aU(T^-)}I\left(T<\infty|U(0)=u\right)\right]=\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\left(\frac{1-\hat{b}(a)}{a}\left(1-\psi(u)\right)-\int_0^u\left(1-\psi(u-x)\right)e^{-ax}\overline{B}(x)dx\right). \tag{4.46}$$

Με χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace παίρνουμε την ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (η σχέση αυτή έχει δειχτεί και από τον Dickson το 1992):

$$f(x|u)=\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\left(\overline{B}(x)\left(1-\psi(u)\right)-\left(1-\psi(u-x)\right)\overline{B}(x)I(x<u)\right).$$

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, παραγωγίζοντας την (4.46) *n*-φορές ως προς *a* και αντικαθιστώντας $a=0$, παίρνουμε τη *n*-οστή ροπή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία. Έτσι, έχουμε

$$E\left[(-1)^n\left(U\left(T^-\right)\right)^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right]$$
$$=\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial^{n+1}\hat{b}(a)}{\partial a^{n+1}}\bigg|_{a=0}\left(1-\psi(u)\right)-\int_0^u(-1)^n x^n\left(1-\psi(u-x)\right)\bar{B}(x)dx\right).$$

Θέτοντας $\mu^{(i)}=(-1)^i\frac{\partial^i\hat{b}(a)}{\partial a^i}\bigg|_{a=0}$, και επειδή

$$E\left[\left(U\left(T^-\right)\right)^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right]=E\left[\left(U\left(T^-\right)\right)^n \middle| T<\infty,U(0)=u\right]P\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)$$
$$=E\left[\left(U\left(T^-\right)\right)^n \middle| T<\infty,U(0)=u\right]\psi(u),$$

η *n*-οστή ροπή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$E\left[\left(U\left(T^-\right)\right)^n \middle| T<\infty,U(0)=u\right]=\frac{\lambda}{(c-\lambda\mu)\psi(u)}\left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1}\left(1-\psi(u)\right)-\int_0^u x^n\left(1-\psi(u-x)\right)\bar{B}(x)dx\right),$$

μια σχέση που συμφωνεί με την εξίσωση (5.3) των Lin και Willmot (2000).

- Για $w(x,y)=e^{-ay}$, είδαμε προηγουμένως ότι $\hat{w}(s)=\frac{\hat{b}(a)-\hat{b}(s)}{s-a}$ οπότε για $s=0$ είναι $\hat{w}(0)=\frac{\hat{b}(a)-\hat{b}(0)}{-a}=\frac{1-\hat{b}(a)}{a}$. Συνεπώς με αντικατάσταση στη σχέση (4.45) έχουμε

$$E\left[e^{-a|U(T)|}I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right]$$
$$=\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\left(\frac{1-\hat{b}(a)}{a}\left(1-\psi(u)\right)-\int_0^u\left(1-\psi(u-x)\right)\int_x^\infty e^{-a(y-x)}b(y)dydx\right). \quad (4.47)$$

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, παραγωγίζοντας την (4.47) *n*-φορές ως προς *α* και αντικαθιστώντας $a=0$, παίρνουμε τη *n*-οστή ροπή του ελλείμματος τη στιγμή τη στιγμή της χρεοκοπίας. Άρα, είναι

$$E\left[(-1)^n\left|U\left(T^-\right)\right|^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right]$$
$$=\frac{\lambda}{c-\lambda\mu}\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial^{n+1}\hat{b}(a)}{\partial a^{n+1}}\bigg|_{a=0}\left(1-\psi(u)\right)-\int_0^u\left(1-\psi(u-x)\right)\int_x^\infty(-1)^n(y-x)^n b(y)dydx\right).$$

Επειδή,

$$E\left[\left|U\left(T^-\right)\right|^n I\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)\right]=E\left[\left|U\left(T^-\right)\right|^n \middle| T<\infty,U(0)=u\right]P\left(T<\infty \middle| U(0)=u\right)$$
$$=E\left[\left|U\left(T^-\right)\right|^n \middle| T<\infty,U(0)=u\right]\psi(u),$$

η n-οστή ροπή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$E\left[\left|U\left(T^{-}\right)\right|^{n}\left|T<\infty,U(0)=u\right.\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{(c-\lambda\mu)\psi(u)}\left(\frac{\mu^{(n+1)}}{n+1}(1-\psi(u))-\int_0^u\left(1-\psi(u-x)\right)\int_x^\infty (y-x)^n b(y)dydx\right),$$

που είναι ένας άλλος τρόπος να γραφεί η εξίσωση (4.5) των Lin και Willmot (2000).

Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι από τις σχέσεις (4.46) και (4.47), έπεται ότι οι κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας συμπίπτουν για $u=0$ (βλέπε επίσης Dufresne και Gerber, 1988).

4.6.2 Το ανανεωτικό μοντέλο για το οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang(n) κατανομή

Αρχικά, θα δώσουμε τον ορισμό της γενικευμένης Erlang(n) (generalized Erlang(n)) ή υποεκθετικής κατανομής (hypoexponential distribution).

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 *Αν* $X_1,X_2,...,X_n$ *ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους αντίστοιχα* $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\left(\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j\right)$, *τότε το άθροισμά τους,* $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ *είναι τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί την γενικευμένη Erlang(n) ή υποεκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i e^{-\lambda_i x}, x>0 \text{ όπου } a_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}, \qquad 1\leq i\leq n.$$

Συμβολικά γράφουμε, $X\sim Gerl(n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$. *Προφανώς, για* $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=\lambda$, *η τυχαία μεταβλητή* $X\sim Erl(n,\lambda)$, *ενώ για* $n=1$, *είναι* $X\sim Exp(\lambda_1)$.

Υποθέτουμε ότι η μαρκοβιανή διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 1 και ότι ο πίνακας μετάβασης είναι

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Υποθέτουμε επίσης, ότι $M=n$ και ότι μια απαίτηση μπορεί να εμφανιστεί μόνο στην κατάσταση 1, με κατανομή του ύψους της απαίτησης $B_1=B$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{b}(s)$, και οι κατανομές του ύψους των απαιτήσεων σε όλες τις άλλες καταστάσεις $B_2,...,B_n$, εκφυλίζονται στο μηδέν. Έτσι, έχουμε ότι

$$\hat{B}(s)=\begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \vec{\hat{w}}(s)=\begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε $m_\delta(u)=m_{\delta,1}(u)$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για ένα ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν την γενικευμένη Erlang(n) κατανομή. Ο πίνακας $A_\delta(s)$ εδώ, έχει την παρακάτω απλή μορφή

$$A_\delta(s)=\begin{pmatrix} cs-\delta-\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cs-\delta-\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & cs-\delta-\lambda_{n-2} & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & cs-\delta-\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n\hat{b}(s) & 0 & \dots & \dots & 0 & cs-\delta-\lambda_n \end{pmatrix},$$

και κατά συνέπεια η ορίζουσά του είναι

$$\det A_\delta(s)=(-1)^n\left(\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j+\delta-cs)-\hat{b}(s)\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right).$$

Επίσης, λόγω της απλότητας του πίνακα μετάβασης P , από την (4.4) προκύπτει ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\delta-cD}{\lambda_j}\right)m_\delta(u)=\int_0^u m_\delta(u-x)b(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)b(x)dx,$$

όπου D είναι ο τελεστής παραγώγισης ως προς u.

Αυτό το μοντέλο έχει μελετηθεί με λεπτομέρεια από τους Gerber και Shiu το 2005, ενώ για $\lambda_1=...=\lambda_n$ από τους Li και Garrido το 2004. Η ειδική περίπτωση όπου $n=2,$ έχει μελετηθεί από τους Dickson και Hipp (2001), Sun και Yang (2004) και Cheng και Tang (2003).

Μπορούμε τώρα και γι' αυτή την ειδική περίπτωση να πάρουμε τα αποτελέσματα που αναλύσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

Για την $m_\delta(u)$ με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, από την πρόταση 4.6 και αφού η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση $i=1$ και μόνο σε αυτή την κατάσταση υπάρχει μη-εκφυλισμένη κατανομή ύψους των ζημιών, έχουμε

$$m_{\delta}(0)=\sum_{j_2=1}^{n}C_{1,j_2}^{(1)}(s_1,\dots,s_n,\delta)\hat{w}(s_{j_2}). \tag{4.48}$$

Χρειάζεται τώρα να προσδιορίσουμε τις σταθερές

$$C_{1,j_2}^{(1)}(s_1,\dots,s_n,\delta)=\frac{(-1)^{1+j_2}\lambda_n k_{j_2,n}\det K_{j_2,1}}{c\det K}. \tag{4.49}$$

Από τη σχέση (4.9) βρίσκουμε τα διανύσματα $\vec{k}_i$, από τα οποία παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα *K*,

$$K=\begin{pmatrix} \prod_{j=2}^{n}\frac{\lambda_j+\delta-cs_1}{\lambda_{j-1}} & \prod_{j=3}^{n}\frac{\lambda_j+\delta-cs_1}{\lambda_{j-1}} & \cdots & \frac{\lambda_n+\delta-cs_1}{\lambda_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \prod_{j=2}^{n}\frac{\lambda_j+\delta-cs_n}{\lambda_{j-1}} & \prod_{j=3}^{n}\frac{\lambda_j+\delta-cs_n}{\lambda_{j-1}} & \cdots & \frac{\lambda_n+\delta-cs_n}{\lambda_{n-1}} & 1 \end{pmatrix},$$

του οποίου η ορίζουσα είναι ίση με

$$\det K=\frac{c^{n(n-1)/2}}{\lambda_1\lambda_2^2\dots\lambda_{n-1}^{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & s_1 & \dots & s_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_n & \dots & s_n^{n-1} \end{vmatrix}=\frac{c^{n(n-1)/2}}{\lambda_1\lambda_2^2\dots\lambda_{n-1}^{n-1}}\prod_{\substack{j,k=1\\k>j}}^{n}(s_k-s_j),$$

ενώ η ελάσσων ορίζουσα του πίνακα *K* ως προς την $j_2-\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}$ και την 1η στήλη είναι

$$\det K_{j_2,1}=\frac{c^{(n-1)(n-2)/2}}{\lambda_1\lambda_2^2\dots\lambda_{n-1}^{n-2}}\prod_{j,k=1}^{n}(s_k-s_j),\quad k>j,k\neq j_2,j\neq j_2.$$

Έτσι, η (4.49) γίνεται

$$C_{1,j_2}^{(1)}(s_1,\dots,s_n,\delta)=\frac{\lambda_1\dots\lambda_n}{c^n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{1}{s_k-s_{j_2}},$$

και τελικά η συνάρτηση Gerber-Shiu με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, δίνεται από τη σχέση

$$m_{\delta}(0)=\sum_{j_2=1}^{n}\frac{\lambda_1\dots\lambda_n}{c^n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{1}{s_k-s_{j_2}}\hat{w}(s_{j_2}). \tag{4.50}$$

Επίσης, από το πόρισμα 4.1 έπεται άμεσα ότι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό δίνεται από τη σχέση:

$$f(y_1,y_2|0)=\sum_{j_2=1}^{n}\frac{\lambda_1\dots\lambda_n}{c^n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{1}{s_k-s_{j_2}}e^{-s_{j_2}y_1}b_{j_1}(y_1+y_2), \tag{4.51}$$

που είναι η σχέση (8.3) στην εργασία των Gerber και Shiu (2005).

Η σύγκριση ανάμεσα στη σχέση (4.50) και τις σχέσεις (4.46), (4.47) αποσαφηνίζει ότι για $n \geq 2$ η παρουσία αυστηρά θετικών ριζών s_j, στρεβλώνει τη συμμετρία που παρουσιάζει το κλασικό μοντέλο για $u=0$, ανάμεσα στις κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Μπορούμε να πάρουμε μια γενική έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu γι' αυτό το μοντέλο, υπολογίζοντας την πρώτη γραμμή του αριθμητή της σχέσης (4.20).

ΛΗΜΜΑ 4.2 *Η πρώτη γραμμή του διανύσματος* $A_{\delta,adj}(s)m_\delta(0)$ *δίνεται από τη σχέση*

$$\left(A_{\delta,adj}(s)m_\delta(0)\right)_1 = \frac{(-1)^{n+1}\lambda_1 \ldots \lambda_n}{c}\sum_{j=1}^{n}\hat{w}(s_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{s-s_k}{s_j-s_k}. \tag{4.52}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η πρώτη γραμμή του προσαρτημένου πίνακα $A_{\delta,adj}(s)$ του $A_\delta(s)$, δίνεται από την

$$\left(A_{\delta,adj}(s)\right)_1 = \left(\prod_{i=2}^{n}(cs-\delta-\lambda_i), -\lambda_1\prod_{i=3}^{n}(cs-\delta-\lambda_i), \lambda_1\lambda_2\prod_{i=4}^{n}(cs-\delta-\lambda_i), \ldots, (-1)^n\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\right).$$

Από τις σχέσεις (4.10) και (4.11) έχουμε

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda_n}{c\det K}\begin{pmatrix} \det K_{1,1}\hat{w}(s_1) - \det K_{2,1}\hat{w}(s_2) + \ldots + (-1)^{n+1}\det K_{n,1}\hat{w}(s_n) \\ -\det K_{1,2}\hat{w}(s_1) + \det K_{2,2}\hat{w}(s_2) + \ldots + (-1)^{n+2}\det K_{n,2}\hat{w}(s_n) \\ \vdots \\ (-1)^{n+1}\det K_{1,n}\hat{w}(s_1) + (-1)^{n+2}\det K_{2,n}\hat{w}(s_2) + \ldots + \det K_{n,n}\hat{w}(s_n) \end{pmatrix}.$$

Μαζεύοντας τώρα όλους τους συντελεστές των $\hat{w}(s_j)$, $j=1,\ldots,n$ στην $\left(A_{\delta,adj}(s)m_\delta(0)\right)_1$ παίρνουμε

$$\frac{(-1)^{j+1}\lambda_n}{c\det K}\left(\prod_{i=2}^{n}(cs-\delta-\lambda_i)\det K_{j,1} + \lambda_1\prod_{i=3}^{n}(cs-\delta-\lambda_i)\det K_{j,2} + \ldots + \lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\det K_{j,n}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}\lambda_1\ldots\lambda_n}{c\det K}\left((-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i+\delta-cs}{\lambda_i-1}\det K_{j,1} + (-1)^{n-2}\prod_{i=3}^{n}\frac{\lambda_i+\delta-cs}{\lambda_i-1}\det K_{j,2} + \ldots + \det K_{j,n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\lambda_1\ldots\lambda_n}{c\det K}\left((-1)^{j+1}\prod_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i+\delta-cs}{\lambda_i-1}\det K_{j,1}\right.$$

$$\left. + (-1)^{j+2}\prod_{i=3}^{n}\frac{\lambda_i+\delta-cs}{\lambda_i-1}\det K_{j,2} + \ldots + (-1)^{j+n}\det K_{j,n}\right).$$

Όμως η παρένθεση του τελευταίου όρου είναι η ορίζουσα ενός πίνακα K_j^*, που είναι ο πίνακας K με ρίζες s αντί για s_j, για το οποίο ισχύει $\dfrac{\det K_j^*}{\det K}=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\dfrac{s-s_k}{s_j-s_k}$.

Έτσι, έχουμε

$$\left(A_{\delta,adj}(s)\vec{m}_\delta(0)\right)_1=\frac{(-1)^{n-1}\lambda_1\ldots\lambda_n}{c\det K}\left(\hat{w}(s_1)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{s-s_k}{s_1-s_k}+\ldots+\hat{w}(s_n)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{s-s_k}{s_n-s_k}\right),$$

απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.52). □

Επίσης, η πρώτη γραμμή του διανύσματος $A_{\delta,adj}(s)\Lambda P\hat{\vec{w}}(s)$ είναι

$$\left(A_{\delta,adj}(s)\Lambda P\hat{\vec{w}}(s)\right)_1=(-1)^{n+1}\lambda_1\ldots\lambda_n\hat{w}(s)$$

Έτσι, η σχέση (4.20) για το μετασχηματισμό Laplace της $m_\delta(u)$, γίνεται

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{\hat{w}(s)-\sum_{j_2=1}^{n}\hat{w}(s_{j_2})\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{s-s_k}{s_{j_2}-s_k}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\delta-cs}{\lambda_j}\right)-\hat{b}(s)}. \tag{4.53}$$

Για τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της συνάρτησης Gerber-Shiu, αν ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής του ύψους των αποζημιώσεων υπάρχει σε μια περιοχή του μηδέν και υπάρχει το όριο $\lim_{u\to\infty}e^{R_\delta u}m_\delta(u)$, όπου $-R_\delta$ είναι η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της εξίσωσης Lundberg, τότε οι σχέσεις (4.21) και (4.22), δίνουν

$$\lim_{u\to\infty}e^{R_\delta u}m_\delta(u)=\frac{\sum_{j_2=1}^{n}\hat{w}(s_{j_2})\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{-R_\delta-s_k}{s_{j_2}-s_k}-\hat{w}(R_\delta)}{\sum_{j=1}^{n}\frac{c}{\lambda_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(1+\frac{\delta+cR_\delta}{\lambda_k}\right)+\hat{b}'(-R_\delta)}.$$

Μπορούμε τώρα σε συνδυασμό με την προσέγγιση που μας οδήγησε στη σχέση (4.45), να δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη της σχέσης (3.4) των Dickson και Drekic (2004).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11 *Η ελλειμματική από κοινού πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο του Sparre Andersen με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν γενικευμένη Erlang κατανομή, δίνεται από τη σχέση*

$$f(y_1,y_2|u)=\frac{\lambda_1...\lambda_n b(y_1+y_2)}{c^n\varphi(0)}\sum_{j_2=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{1}{s_k-s_{j_2}}\right)e^{-s_{j_2}(y_1-u)}\int_{\max(0,u-y_1)}^{u}e^{-s_{j_2}z}d\varphi(z), \qquad (4.54)$$

όπου $\varphi(u)=1-\psi(u)$ *είναι η πιθανότητα επιβίωσης για αρχικό αποθεματικό* u.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $\delta=0$ και $w(y_1,y_2)=1$ η σχέση (4.53) δίνει

$$\hat{\psi}(s)=\frac{\frac{1-\hat{b}(s)}{s}-\sum_{j_2=1}^{n}\frac{1-\hat{b}(s_{j_2})}{s_{j_2}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{s-s_k}{s_{j_2}-s_k}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{cs}{\lambda_j}\right)-\hat{b}(s)},$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας, είναι

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{cs}{\lambda_j}\right)-1+s\sum_{j_2=1}^{n}\frac{1-\hat{b}(s_{j_2})}{s_{j_2}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{s-s_k}{s_{j_2}-s_k}}{s\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{cs}{\lambda_j}\right)-\hat{b}(s)\right)}.$$

Προφανώς, ο αριθμητής της παραπάνω σχέσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, ως προς s. Όμως, η $\hat{\varphi}(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\mathrm{Re}(s)>0$ και έχει έναν απλό πόλο στο $s=0$, έτσι ώστε ο αριθμητής να έχει ρίζες $s_1,...,s_n$ (αφού για $\delta=0$ έχουμε $s_1=0$, η τελευταία είναι ρίζα πολυπλοκότητας 2 στον παρονομαστή). Έτσι, ο αριθμητής θα είναι της μορφής $\beta\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)$ για μια σταθερά $\beta\in\mathbb{R}$. Από το παρακάτω όριο

$$\varphi(0)=\lim_{s\to\infty}s\hat{\varphi}(s)=\frac{(-1)^n\beta\lambda_1\cdots\lambda_n}{c^n},$$

προκύπτει ότι

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{(-1)^n c^n\varphi(0)\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)}{\lambda_1\cdots\lambda_n s\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{cs}{\lambda_j}\right)-\hat{b}(s)\right)}. \qquad (4.55)$$

Γνωρίζουμε ότι η $f(y_1,y_2|u)$ προκύπτει από τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για $\delta=0$ και $w(y_1,y_2)$ να είναι η συνάρτηση Δέλτα του Dirac στο $x_1=y_1$ και $x_2=y_2$, έτσι ώστε

$\hat{w}(s)=e^{-sy_1}b(y_1+y_2)$. Συνεπώς, ο μετασχηματισμός Laplace της $f(y_1,y_2|u)$ όπως προκύπτει από τη σχέση (4.53), είναι

$$\hat{f}(y_1,y_2\,|\,s)=b(y_1+y_2)\frac{e^{-sy_1}-\sum_{j_2=1}^{n}e^{-s_{j_2}y_1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{s-s_k}{s_{j_2}-s_k}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{cs}{\lambda_j}\right)-\hat{b}(s)},$$

όπου με αντικατάσταση από τη σχέση (4.55) γίνεται

$$\hat{f}(y_1,y_2\,|\,s)=b(y_1+y_2)\frac{(-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n s\hat{\varphi}(s)}{c^n\varphi(0)}\left(\frac{e^{-sy_1}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s-s_{j_2}\right)}-\sum_{j_2=1}^{n}\frac{e^{-s_{j_2}y_1}}{s-s_{j_2}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{1}{s_{j_2}-s_k}\right).$$

Με χρήση της τεχνικής μερικών κλασμάτων, ο πρώτος όρος της παρένθεσης μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{e^{-sy_1}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s-s_j\right)}=\sum_{j_2}^{n}\frac{e^{-sy_1}}{\left(s-s_{j_2}\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\left(s_{j_2}-s_k\right)}.$$

Έτσι, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\hat{f}(y_1,y_2\,|\,s)=b(y_1+y_2)\frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{c^n\varphi(0)}\left(\sum_{j_2=1}^{n}s\hat{\varphi}(s)\frac{e^{-s_{j_2}y_1}-e^{-sy_1}}{s-s_{j_2}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j_2}}^{n}\frac{1}{s_k-s_{j_2}}\right), \qquad (4.56)$$

από την οποία κάνοντας χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.54). □

4.6.3 Το ανανεωτικό μοντέλο για το οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν μια phase type κατανομή

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση του γενικού ημι-Μαρκοβιανού μοντέλου, σε ένα ανανεωτικό μοντέλο στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων ακολουθούν μια κατανομή τύπου φάσης και η στοχαστική διαδικασία του ύψους των ζημιών μια αυθαίρετη κατανομή. Αρχικά λοιπόν, θα δώσουμε κάποιες πληροφορίες για τις κατανομές τύπου φάσης, οι οποίες αρχικά εισήχθησαν από τον Neuts στις εργασίες του το 1975 και 1981 και εφαρμογές τους συναντάμε στα δίκτυα επικοινωνίας, στη θεωρία κινδύνου, στη θεωρία αξιοπιστίας, στη θεωρία ουρών και αλλού.

Οι phase type κατανομές περιγράφουν το χρόνο απορρόφησης σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία αποτελείται από μια απορροφητική κατάσταση και από ένα πεπερασμένο πλήθος μεταβατικών καταστάσεων, οι οποίες καλούνται φάσεις ή στάδια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5

- *Η στοχαστική διαδικασία* $\{X(t), t \geq 0\}$ *με τιμές στο διακριτό χώρο καταστάσεων Ε ονομάζεται Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου αν για όλα τα* $s,t \geq 0$ *η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση* i*, στην κατάσταση* j*, με* $i,j \in E$ *σε* t *χρονικές μονάδες είναι*

$$p_{ij}(t) = P\left[X(s+t) = j \middle| X(s) = i, \{X(u): 0 \leq u \leq s\}\right] = P\left[X(s+t) = j \middle| X(s) = i\right]$$

- *Η Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου καλείται χρονικά ομογενής αν η διαδικασία μεταβαίνει από μια κατάσταση* i*, σε μια κατάσταση* j *με πιθανότητα μετάβασης ανεξάρτητη του χρόνου μετάβασης.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.6

- *Μια κατάσταση ονομάζεται μεταβατική (transient) αν η πιθανότητα η διαδικασία να μην επιστρέψει ποτέ στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε, είναι μη μηδενική.*
- *Μια κατάσταση ονομάζεται απορροφητική (absorbing) αν η πιθανότητα η διαδικασία να μεταπηδήσει έξω από αυτήν ξανά, είναι μηδέν.*

Εξ' ορισμού οι phase type κατανομές είναι ο χρόνος ζωής μια Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{J_t\}$ με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων *E* με χρονικά ομογενείς ρυθμούς μετάβασης. Στο γενικό μοντέλο των *M* καταστάσεων, θεωρούμε την κατάσταση 1 ως την απορροφητική της διαδικασίας $\{J_t\}$, και ότι οι πιθανότητες μετάβασης p_{ij} $με\ i,j = 2,...,M$ συμπίπτουν με τις πιθανότητες μετάβασης της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας της J_t. Έτσι, μια απαίτηση με κατανομή *B*, μπορεί να εμφανιστεί μόνο όταν η διαδικασία μας βρίσκεται στην κατάσταση 1. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο οι κατανομές B_i για $i = 2,...,M$ εκφυλίζονται στο μηδέν, οπότε θα έχουμε και πάλι

$$\hat{B}(s) = \begin{pmatrix} \hat{b}(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \ και\ \vec{\hat{w}}(s) = \begin{pmatrix} \hat{w}(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Επίσης, αν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1 και εμφανιστεί απαίτηση σε μια από τις άλλες καταστάσεις με πιθανότητα $a_j = p_{1,j}$, $j = 2,...,M$, έτσι ο πίνακας *P* σε αυτό το μοντέλο ενσωματώνει τις πιθανότητες αρχικής κατάστασης $a_j\ για\ j = 2,...,M$, τις πιθανότητες απορρόφησης $p_{i,j}\ για\ i,j = 2,...,M$ από τη μεταβατική κατάσταση i, στην απορροφητική κατάσταση 1 και τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων $p_{i,j}\ για\ i,j=2,...,M$ για τις οποίες ισχύει ότι $\sum_{j=2}^{M}a_j=1,\ με\ a_j\geq 0$ και $\sum_{j=1}^{M}p_{i,j}=1,\ με\ i=2,...,M$.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_M \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix}.$$

Ο διαγώνιος πίνακας Λ^{Ph} περιέχει τις παραμέτρους λ_i των κατανομών των χρόνων παραμονής της διαδικασίας σε μια κατάσταση i, ενώ για την απορροφητική κατάσταση 1 είναι $\lambda_1=1$, λόγω της άμεσης μεταπήδησης από την κατάσταση 1 σε άλλη κατάσταση, μόλις εμφανιστεί ζημιογόνο ενδεχόμενο.

$$\Lambda^{Ph}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix}.$$

Έτσι, από την (4.4) για το μοντέλο που μελετάμε για την κατάσταση $i=1$ είναι

$$m_\delta(u)=m_{\delta,1}(u)=\sum_{j=2}^{M}a_j m_{\delta,j}(u) \quad , \tag{4.57}$$

και παίρνοντας το όριο για $\lambda_1\to\infty$, η σχέση (4.5) γι' αυτό το μοντέλο γράφεται ως

$$A_\delta^{Ph}(s)\vec{m}_\delta(s)=c\left(0,m_{\delta,2}(0),...,m_{\delta,M}(0)\right)^T-\Lambda^{Ph}P\vec{\tilde{w}}(s)\ ,$$

όπου

$$A_\delta^{Ph}(s)=\left((cs-\delta)I-\Lambda^{Ph}+\Lambda^{Ph}P\hat{B}(s)\right)-(cs-\delta)I\vec{e}_1\vec{e}_1^{\,T},\ όπου\ \vec{e}_1=(1,0,...,0)^T.$$

Έτσι, ο πίνακας $A_\delta^{Ph}(s)$ είναι

$$A_\delta^{Ph}(s)=\begin{pmatrix} -1 & a_2 & a_3 & \dots & a_M \\ \lambda_2 p_{21}\hat{b}(s) & cs-\delta-\lambda_2(1-p_{22}) & \lambda_2 p_{23} & \dots & \lambda_2 p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_M p_{M1}\hat{b}(s) & \lambda_M p_{M2} & \dots & \dots & cs-\delta-\lambda_M(1-p_{MM}) \end{pmatrix}.$$

Από τη σχέση (4.20), για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu έχουμε

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{A^{Ph}_{\delta,adj}(s)\begin{pmatrix}0\\ m_{\delta,2}(0)-\lambda_2 p_{21}\hat{w}(s)\\ \vdots\\ m_{\delta,M}(0)-\lambda_M p_{M1}\hat{w}(s)\end{pmatrix}}{\det A^{Ph}_\delta(s)} \quad . \tag{4.58}$$

Η εξίσωση $\det A^{Ph}_\delta(s)=0$ έχει ακριβώς M-1 ρίζες $s_1,...,s_{M-1}$ στο θετικό ημιεπίπεδο, οι οποίες για ευκολία θα θεωρούμε ότι είναι διακριτές. Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες ποσότητες $m_{\delta,j}(0)$ με $j=2,...,M$ μέσω των σχέσεων (4.9) και (4.10). Ωστόσο, στη διακριτή περίπτωση μπορούμε να πάρουμε τα $m_\delta(0)$ από τη σχέση (4.58) με τον εξής τρόπο: Μια προσεκτική ανάλυση της δομής του προσαρτημένου πίνακα $A^{Ph}_{\delta,adj}(s)$, μας δίνει τη δυνατότητα να γράψουμε την (4.58) στη μορφή

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{q_\delta(s)-g_\delta(s)\hat{w}(s)}{\det A^{Ph}_\delta(s)} \quad , \tag{4.59}$$

όπου $q_\delta(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού M-2 ως προς s, με τους συντελεστές του να περιέχουν τα $m_{\delta,j}(0)$ με $j=2,...,M$. Ενώ η $g_\delta(s)$ είναι

$$g_\delta(s)=\det\left((cs-\delta)I-\Lambda^{Ph}+\Lambda^{Ph}P\right)+{}^{(1,1)}A^{Ph}_\delta(s) \ ,$$

όπου ο πίνακας ${}^{(1,1)}A^{Ph}_\delta(s)$ είναι ο υποπίνακας του $A^{Ph}_\delta(s)$ που προκύπτει από τη διαγραφή της 1ης γραμμής και στήλης. Έτσι, η $g_\delta(s)$ είναι επίσης πολυώνυμο βαθμού M-2 ως προς s. Εφόσον η $\hat{m}_\delta(s)$ είναι αναλυτική στο θετικό ημιεπίπεδο, οι ρίζες $s_1,...,s_{M-1}$ του παρονομαστή, θα είναι και ρίζες του αριθμητή της σχέσης (4.59). Με παρεμβολή κατά Lagrange παίρνουμε

$$q_\delta(s)=\sum_{j=1}^{M-1} g_\delta(s_j)\hat{w}(s_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{s-s_k}{s_j-s_k} \ .$$

Τώρα $m_\delta(0)=\lim_{s\to\infty} s\hat{m}_\delta(s)$ και μένει μόνο να υπολογίσουμε το τελευταίο όριο. Εφόσον για $s\to 0$, $\hat{b}(s)\to 0$ και $\hat{w}(s)=0(1/s)$ (το τελευταίο ισχύει για συναρτήσεις ποινής που δεν αυξάνουν υπερ-εκθετικά), πρέπει να συλλέξουμε τους κυρίαρχους όρους του αριθμητή και παρονομαστή της (4.58). Έτσι,

$$q_\delta(s)\sim s^{M-2}\sum_{j=1}^{M-1} g_\delta(s_j)\hat{w}(s_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j-s_k} \ , \quad \text{και}$$

$$\det\left((cs-\delta)I-\Lambda^{Ph}+\Lambda^{Ph}P\right)\sim -c^{M-1}s^{M-1} \ .$$

Η προηγούμενη σχέση τελικά μας οδηγεί στο

$$m_\delta(0)=\lim_{s\to\infty} s\hat{m}_\delta(s)=-\frac{1}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1} g_\delta(s_j)\hat{w}(s_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j-s_k}\ , \tag{4.60}$$

που είναι η εξίσωση 20 από την εργασία των Li και Garrido (2005). Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι $w(y_1,y_2)$ είναι η συνάρτηση Δέλτα του Dirac στο $x_1=y_1$ και $x_2=y_2$, έτσι ώστε $\hat{w}(s)=e^{-sy_1}b(y_1+y_2)$, τότε από τη σχέση (4.60) παίρνουμε την από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για μηδενικό αρχικό αποθεματικό

$$f(y_1,y_2|0)=(-1)^{M-1}\frac{b(y_1+y_2)}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1} g_\delta(s_j)e^{-s_j y_1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_k-s_j}\ .$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί γενίκευση των τύπων 27 και 4.6 από την εργασία των Dickson και Drekic (2004).

Αν η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων *B* έχει ρητό μετασχηματισμό Laplace και για αυθαίρετο αρχικό αποθεματικό $u>0$, η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $f(y_1,y_2|u)$, προκύπτει από τη σχέση (4.57), ότι είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της

$$\hat{f}(y_1,y_2|s)=b(y_1+y_2)\frac{\sum_{j=1}^{M-1} g_\delta(s_j)e^{-s_j y_1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{s-s_k}{s_j-s_k}-g_\delta(s)e^{-sy_1}}{\det A_\delta^{Ph}(s)}\ . \tag{4.61}$$

Από την άλλη πλευρά, για αυθαίρετη κατανομή *B* και $\delta=0$, προκύπτει η ακόλουθη γενίκευση της σχέσης (4.54).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12 *Η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά τη χρεοκοπία στο μοντέλο του Sparre Andersen με phase type κατανομή ενδιάμεσων χρόνων, ικανοποιεί την παρακάτω σχέση*

$$f(y_1,y_2\,|\,u)=-\frac{b(y_1+y_2)}{c^{M-1}\varphi(0)}\sum_{j=1}^{n} g_0(s_j)\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{s_k-s_j}\right)e^{-s_j(y_1-u)}\int_{\max\{0,u-y_1\}}^{u} e^{-s_j z}d\varphi(z). \tag{4.62}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο με την απόδειξη της πρότασης (4.11), αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{1}{s}-\hat{\psi}(s)=\frac{\det A_0^{Ph}(s)-s\sum_{j=1}^{M-1} g_0(s_j)\frac{1-\hat{b}(s_j)}{s_j}\prod_{\substack{k=1\\j\neq k}}^{M-1}\frac{s-s_k}{s_j-s_k}+g_0(s)\left(1-\hat{b}(s)\right)}{s\det A_0^{Ph}(s)}. \tag{4.63}$$

Το πολυώνυμο $g_0(s)$ γράφεται και ως

$$g_0(s)=\frac{\det A_0^{Ph}(s)+{}^{(1,1)}A_0^{Ph}(s)}{\hat{b}(s)},$$

έτσι, καταλήγουμε στην

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{-{}^{(1,1)}A_0^{Ph}(s)-s\sum_{j=1}^{M-1}g_0(s_j)\frac{1-\hat{b}(s_j)}{s_j}\prod_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{M-1}\frac{s-s_k}{s_j-s_k}+g_0(s)}{s\det A_0^{Ph}(s)},$$

ο αριθμητής της οποίας είναι και πάλι ένα πολυώνυμο βαθμού M-1 ως προς s. Όπως και στην πρόταση (4.11), μέσα από αναλυτικά επιχειρήματα έπεται ότι

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{-c^{M-1}\varphi(0)\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)}{s\det A_0^{Ph}(s)}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (4.60), παίρνουμε

$$\hat{f}(y_1,y_2\,|\,s)=\frac{b(y_1+y_2)s\hat{\varphi}(s)}{c^{M-1}\varphi(0)}\left(\frac{g_0(s)e^{-sy_1}}{\prod_{k=1}^{M-1}(s-s_k)}-\sum_{j=1}^{M-1}\frac{g_0(s_j)e^{-s_jy_1}}{s-s_j}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j-s_k}\right).$$

Με τεχνική μερικών κλασμάτων, ο πρώτος όρος της παρένθεσης γράφεται

$$\frac{g_0(s)}{\prod_{k=1}^{M-1}(s-s_k)}=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{g_0(s_j)}{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M-1}(s_j-s_k)}\frac{1}{s-s_j},$$

συνεπώς, έχουμε

$$\hat{f}(y_1,y_2\,|\,s)=\frac{b(y_1+y_2)}{c^{M-1}\varphi(0)}\sum_{j=1}^{M-1}g_0(s_j)s\hat{\varphi}(s)\frac{e^{-sy_1}-e^{-s_jy_1}}{s-s_j}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j-s_k}, \tag{4.64}$$

απ' όπου με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.62). □

Σημειώνουμε ότι για ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν γενικευμένη Erlang(n) κατανομή, έχουμε $g_0(s)=(-1)^{M+1}\lambda_2\ldots\lambda_M$ (αντίστοιχα με το $(-1)^n\lambda_1\ldots\lambda_n$ της παραγράφου 4.6.2), έτσι σε αυτή την περίπτωση η σχέση (4.64) συμπίπτει με τη σχέση (4.56) της προηγούμενης παραγράφου.

Τέλος, μπορούμε να προσεγγίσουμε με εναλλακτικό τρόπο την απόδειξη της εξίσωσης (4) των Dickson και Drekic (2004).

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.2 Για $\delta=0$ έχουμε

$$f(y_1,y_2\,|\,u)=\frac{b(y_1+y_2)}{\varphi(0)}\int_{\max\{0,u-y_1\}}^{u}\frac{f(y_1-u+z\,|\,0)}{1-B(y_1-u+z)}d\varphi(z) \tag{4.65}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, προκύπτει από την $m_\delta(u)$ για $\delta=0$ και $w(y_1,y_2)$ να είναι η συνάρτηση Δέλτα του Dirac στο $x_1=y_1$, έτσι ώστε $\hat{w}(s)=e^{-sy_1}\left(1-B(y_1)\right)$. Τότε, από τη σχέση (4.60) παίρνουμε

$$f(y_1\,|\,0)=-\frac{1-B(y_1)}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1}g_0(s_j)e^{-s_jy_1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j-s_k}.$$

Αν τώρα σκεφτούμε τη συνάρτηση $\dfrac{f(y_1-u\,|\,0)}{1-B(y_1-u)}I_{\{y_1\geq u\}}$, της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace ως προς *u* είναι

$$-\frac{1}{c^{M-1}}\sum_{j=1}^{M-1}g_0(s_j)e^{-s_jy_1}\frac{1-e^{-(s-s_j)y_1}}{s-s_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M-1}\frac{1}{s_j-s_k},$$

τότε, με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace μέσω της σχέσης (4.64) προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.65). □

4.6.4 Το μοντέλο με τυχαίο κατώφλι ως ειδική περίπτωση αυτού του μοντέλου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε ένα μοντέλο στο οποίο η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων εξαρτάται από μέγεθος της προηγούμενης ζημιάς, με τον εξής τρόπο: αν η ζημιά υπερβαίνει ένα τυχαίο κατώφλι *T*, τότε ο επόμενος ενδιάμεσος χρόνος κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο λ_1, ενώ σε αντίθετη περίπτωση κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο λ_2. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το προηγούμενο μοντέλο αποτελεί ειδική περίπτωση της προσέγγισης που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, για $M=2$ και

$$dB_1(y)=\frac{1}{P(T<B)}T(y)dB(y)\ \ \text{και}\ \ dB_2(y)=\frac{1}{P(T>B)}\left(1-T(y)\right)dB(y)\ ,$$

για τη γενική κατανομή μεγέθους ζημιών $B(y)$ και την τυχαία μεταβλητή (κατώφλι) *T* μαζί με τις πιθανότητες μετάβασης $p_{i1}=P(B>T)$ *και* $p_{i2}=P(T>B)$ *για* $i=1,2$. Έτσι, μπορούμε μέσα από όσα είδαμε στο κεφάλαιο αυτό για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu, να επεκτείνουμε την ανάλυση αυτής της ειδικής περίπτωσης. Αρχικά, θα δούμε την απόδειξη της πρότασης 4.5 για την ειδική περίπτωση που $M=2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7

i. Για $\delta=0$, *η εξίσωση* $\det(A_0(s))=0$ *έχει μια ρίζα* $s_1=0$ *και* 1 *ρίζα* s_2 *με θετικό πραγματικό μέρος* $\mathrm{Re}(s_i)>0$

ii. Αν $\delta>0$, *τότε η εξίσωση* $\det(A_\delta(s))=0$ *έχει* 2 *ρίζες* s_1,s_2 *με πραγματικό μέρος* $\mathrm{Re}(s_i)>0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i. Έχει αποδειχθεί στο λήμμα 3.1 του προηγούμενου κεφαλαίου.

ii. Έστω *C* ένας κύκλος με κέντρο το $\frac{\delta+\max\lambda_i}{c}$ και ακτίνα $\frac{\delta+\max\lambda_i}{c}$ και έστω

$$A_\delta(s,u)=(cs-\delta)I-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)\ ,\ 0\le u\le 1.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι για $0\le u\le 1$, ισχύει $\det(A_\delta(s,u))\neq 0$, *για* $s\in C$.

Ο πίνακας $A_\delta(s,u)$ είναι διαγώνια κυρίαρχος για $0\le u\le 1$, αφού όπως είναι προφανές στην περίπτωσή μας που ο $A_\delta(s,u)$ είναι ένας πίνακας 2×2, ισχύει ότι:

$$\left|cs-\delta-\lambda_i+u\lambda_i p_{i,i}\hat{b}_i(s)\right|\ge\left|\delta+\lambda_i-cs\right|-\left|u\lambda_i p_{i,i}\hat{b}_i(s)\right|\ge\left|\delta+\lambda_i-u\lambda_i p_{i,i}\hat{b}_i(0)\right|$$
$$>u\lambda_i\left(1-p_{i,i}\hat{b}_i(0)\right)=u\lambda_i\sum_{j\neq i}p_{i,j}\hat{b}_j(0)\ge\left|u\lambda_i\sum_{j\neq i}p_{i,j}\hat{b}_j(s)\right|.$$

Η διαγώνια κυριαρχία συνεπάγεται ότι $\det(A_\delta(s,u))\neq 0$, *για* $s\in C$ (βλέπε Marcus και Minc, 1964). Δείξαμε λοιπόν, ότι δεν υπάρχουν ρίζες της εξίσωσης πάνω στο κύκλο *C*. Έστω τώρα, ότι η συνάρτηση $f(u)$ μας δίνει τον αριθμό των ριζών της $\det(A_\delta(s,u))=0$ στο C^+, το εσωτερικό του *C*. Τότε ξέρουμε ότι

$$f(u)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\frac{d}{ds}\det(A_\delta(s,u))}{\det(A_\delta(s,u))}ds\ .$$

Όμως, η συνάρτηση $f(u)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, ακέραια και επομένως σταθερή. Παρατηρούμε επίσης ότι για $u=0$ η

$$\det A_\delta(s)=\det((cs-\delta)I-\Lambda)=(cs-\delta-\lambda_1)(cs-\delta-\lambda_2)=0\ ,$$

έχει δύο λύσεις, άρα $f(0)=2$ και αφού είναι σταθερή συνάρτηση θα είναι και $f(1)=2$. □

Για καλύτερη κατανόηση θα δουλέψουμε πάνω σε ένα αριθμητικό παράδειγμα, μάλιστα θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα της εφαρμογής 3.1 του προηγούμενου κεφαλαίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4.1 Έστω ότι $T \sim Exp(2)$, $X \sim Exp(1)$, $c=2$, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Έτσι, έχουμε

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{b}_1(s)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+s}-\frac{1}{3+s}\right), \qquad \hat{b}_2(s)=\frac{3}{3+s} ,$$

Έτσι ο πίνακας $A_\delta(s)=(cs-\delta)I-\Lambda+\Lambda P\hat{B}(s)$ για $M=2$ θα είναι

$$A_\delta(s)=\begin{pmatrix} cs-\delta-\lambda_1+\lambda_1 p_{11}\hat{b}_1(s) & \lambda_1 p_{12}\hat{b}_2(s) \\ \lambda_2 p_{21}\hat{b}_1(s) & cs-\delta-\lambda_2+\lambda_2 p_{22}\hat{b}_2(s) \end{pmatrix},$$

και

$$\det A_\delta(s)=\left[cs-\delta-\lambda_1+\lambda_1 p_{11}\hat{b}_1(s)\right]\left[cs-\delta-\lambda_2+\lambda_2 p_{22}\hat{b}_2(s)\right]-\lambda_1\lambda_2 p_{12}p_{21}\hat{b}_1(s)\hat{b}_2(s).$$

Έτσι, με αντικατάσταση των δεδομένων και για $\delta=0$ παίρνουμε την ορίζουσα

$$\det A_0(s)=4s^2-8s+3+\frac{6s-3}{s+1}-\frac{4s}{s+3} , \tag{4.66}$$

της οποίας οι ρίζες, όπως είδαμε και στην εφαρμογή 3.1 είναι

$$\{s\to-3.161\},\{s\to-0.065\},\{s\to1.226\},\{s\to0\}.$$

Λύνοντας την εξίσωση (4.8) για $s_1=0$ και $s_2=1.226$ παίρνουμε τον πίνακα K των μη-τετριμμένων λύσεων

$$K=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ -0.922 & 0.388 \end{pmatrix}.$$

Από την πρόταση 4.6 παίρνουμε τις

$$m_{0,1}(0)=0.328\hat{w}_1(0)+0.672\hat{w}_1(1.226)+0.164\hat{w}_2(0)+0.336\hat{w}_2(1.226) ,$$

και

$$m_{0,2}(0)=0.781\hat{w}_1(0)-0.448\hat{w}_1(1.226)+0.391\hat{w}_2(0)-0.224\hat{w}_2(1.226) .$$

Επίσης, για την ειδική περίπτωση όπου $w(x,y)=1$, έχουμε

$$\hat{w}_1(s)=\frac{1}{s}\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s+3}\right) \qquad \text{και} \qquad \hat{w}_2(s)=\frac{1}{s}\left(1-\frac{3}{s+3}\right).$$

Συνεπώς, από τη σχέση (4.6) και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

$$\psi_1(u)=0.007e^{-3.161u}+0.938e^{-0.065u} \qquad \text{και} \qquad \psi_2(u)=0.003e^{-3.161u}+0.867e^{-0.065u},$$

που είναι οι πιθανότητες χρεοκοπίας όπως προκύπτουν και για την εφαρμογή 3.1.

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Gerber-Shiu για $\delta=0$, από τη σχέση (4.18) και αφού η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της (4.20) είναι η $-R_0=-0.065$, έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} e^{0.065u}\vec{m}_{0,i}(u)=\vec{C},$$

και μετά από υπολογισμούς, η σχέση (4.19) μας δίνει

$$\vec{C}=\begin{pmatrix}6.014\\5.555\end{pmatrix}\hat{w}_1(-0.065)-\begin{pmatrix}5.631\\5.202\end{pmatrix}\hat{w}_1(0)-\begin{pmatrix}0.383\\0.354\end{pmatrix}\hat{w}_1(1.226)+\begin{pmatrix}3.007\\2.778\end{pmatrix}\hat{w}_2(-0.065)$$
$$-\begin{pmatrix}2.815\\2.601\end{pmatrix}\hat{w}_2(0)-\begin{pmatrix}0.191\\0.177\end{pmatrix}\hat{w}_2(1.226).$$

Έστω τώρα ότι $\delta=0$ και ότι $w(y_1,y_2)$ η συνάρτηση Δέλτα του Dirac στο $x_1=y_1$ και $x_2=y_2$, έτσι ώστε $\hat{w}(s)=e^{-sy_1}b(y_1+y_2)$, τότε η $m_{0,i}(u)$ είναι η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας $f_i(y_1,y_2\,|\,u)$ του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Από τη σχέση (4.67) παίρνουμε τις ποσότητες $\vec{m}_0(0)$ και τότε από τη σχέση (4.6) με χρήση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace έχουμε

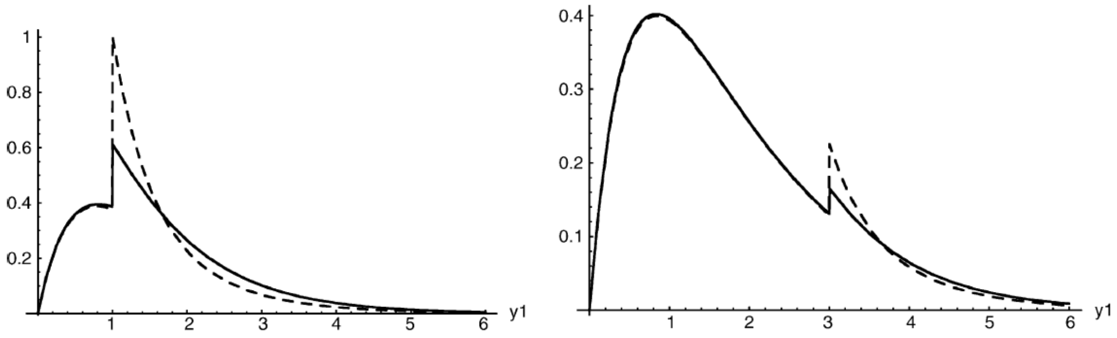
$$\vec{f}(y_1,y_2\,|\,u)=e^{-y_2}\vec{f}(y_1\,|\,u),$$

με

$$\vec{f}(y_1\,|\,u)=1_{\{x\le y_1\}}\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}e^{-y_1}+e^{-3.161u}\left(\begin{pmatrix}0.106\\0.045\end{pmatrix}e^{-2.226y_1}-\begin{pmatrix}0.061\\0.026\end{pmatrix}e^{-y_1}\right)$$
$$+e^{-0.065u}\left(\begin{pmatrix}-0.574\\-0.531\end{pmatrix}e^{-2.226y_1}-\begin{pmatrix}8.446\\7.802\end{pmatrix}e^{-y_1}\right)+I_{\{u\le y_1\}}e^{1.226u-2.226y_1}\begin{pmatrix}1.476\\-0.186\end{pmatrix}$$
$$+I_{\{x\ge y_1\}}\left(\begin{pmatrix}9.020\\8.333\end{pmatrix}e^{-0.0645u-0.935y_1}-\begin{pmatrix}0.045\\0.019\end{pmatrix}e^{-3.161u+2.161y_1}\right).$$

Λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, είναι και η κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας εκθετική και ανεξάρτητη του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία. Εναλλακτικά, μπορούμε να πάρουμε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας την

$w(y_1, y_2) = e^{-ay_1}$ (έτσι ώστε η $m(x)$ να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία), τη σχέση (4.67), και παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace της σχέσης (4.6) ως προς s και ως προς α. Το παρακάτω σχήμα (4.1) παριστά τη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι αυτή θα συμβεί $\frac{f_i(y_1 | x)}{\psi_i(x)}$ για δύο συγκεκριμένες τιμές του αρχικού κεφαλαίου $u=1$ και $u=3$.



Σχήμα 4.1 Η συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι αυτή θα συμβεί, για u=1(αριστερά) και u=2(δεξιά). Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει την αρχική κατάσταση $Z_0=1$ ενώ η σταθερή γραμμή την κατάσταση $Z_0=2$.

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τις ροπές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, είτε από την παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας, είτε παραγωγίζοντας το μετασχηματισμό Laplace του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία που μόλις αναφέραμε. Για παράδειγμα,

$$E\left(U(T^-)I_{\{T<\infty\}}\right) = \begin{pmatrix} 1.746 \\ 1.613 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 0.050 \\ 0.021 \end{pmatrix} e^{-3.161u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0.056 \end{pmatrix} e^{-u},$$

και

$$E\left(\left(U(T^-)\right)^2 I_{\{T<\infty\}}\right) = \begin{pmatrix} 5.041 \\ 4.657 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 0.095 \\ 0.040 \end{pmatrix} e^{-3.161u} - \begin{pmatrix} 2u+3.778 \\ 1.111u+2.395 \end{pmatrix} e^{-u}.$$

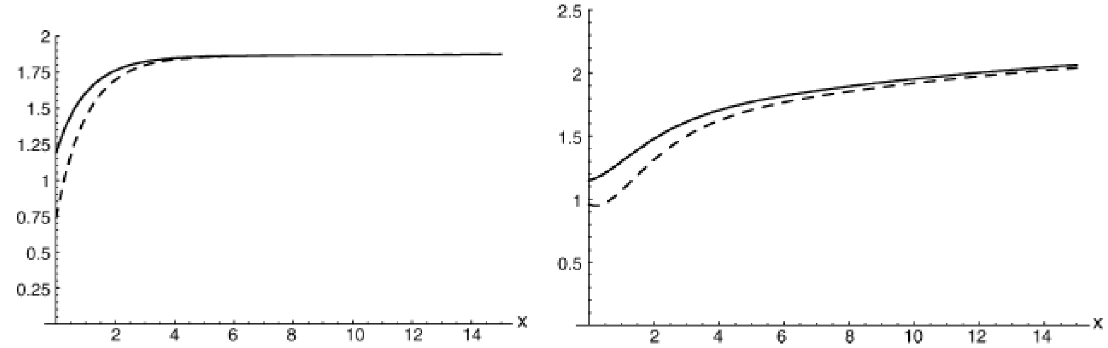
Η μέση τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία δοθέντος ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση i είναι

$$E\left(U(T^-) | T<\infty, Z_0=i\right) = \frac{E\left(U(T^-)I_{\{T<\infty\}} | Z_0=i\right)}{\psi_i(u)},$$

και η τυπική απόκλιση σαν συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου u

$$SD_{U(T^-)} = \sqrt{E\left(\left(U(T^-)\right)^2 | T<\infty, Z_0=i\right) - E^2\left(U(T^-) | T<\infty, Z_0=i\right)}.$$

Παρατηρούμε ότι για τις παραπάνω αναλυτικές εκφράσεις είναι $\lim_{u\to\infty} E\left(U\left(T^-\right) | T<\infty\right)=1.86$ και $\lim_{u\to\infty} SD_{U\left(T^-\right)}=2.32$, κάτι το οποίο ισχύει και για τις δύο καταστάσεις $Z_0=1,2$. Το παρακάτω σχήμα (4.2) παριστά τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για $Z_0=1$ και $Z_0=2$.



Σχήμα 4.2 Η μέση τιμή (αριστερά) και η τυπική απόκλιση (δεξιά) του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία για αρχική κατάσταση $Z_0=1$ (διακεκομμένη γραμμή) και $Z_0=2$ (σταθερή γραμμή).

Τέλος, ακολουθώντας τη διαδικασία της παραγράφου 4.5.1 μπορούμε να βρούμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Η σχέση (4.25) για $n=1$ μας δίνει

$$A_0(s)\vec{f}_1(s)=c\left.\frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta}\right|_{\delta=0}+\vec{\psi}(s). \tag{4.67}$$

Η $\vec{f}_1(s)$ είναι αναλυτική στο δεξί ημιεπίπεδο και έτσι παίρνουμε

$$c\left.\frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta}\right|_{\delta=0}=-\begin{pmatrix}7.949\\17.841\end{pmatrix},$$

στη συνέχεια, λύνοντας την (4.68) ως προς $\vec{f}_1(s)$

$$\vec{f}_1(s)=\left.\frac{\partial \vec{m}_\delta(s)}{\partial \delta}\right|_{\delta=0}=\frac{A_{0,adj}(s)}{\det A_0(s)}\left(c\left.\frac{\partial \vec{m}_\delta(0)}{\partial \delta}\right|_{\delta=0}+\vec{\psi}(s)\right),$$

παίρνουμε

$$E\left(T\cdot I_{\{T<\infty\}}\right)=\begin{pmatrix}4.330u+4.431\\4u+9.114\end{pmatrix}e^{-0.065u}-\begin{pmatrix}0.457\\0.193\end{pmatrix}e^{-3.161u}.$$

Ανάλογα, για τη δεύτερη ροπή, η (4.25) για $n=2$ μας δίνει

$$A_0(s)\bar{f}_2(s) = c\left.\frac{\partial^2 \tilde{m}_\delta(0)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta=0} + \bar{f}_1(s),$$

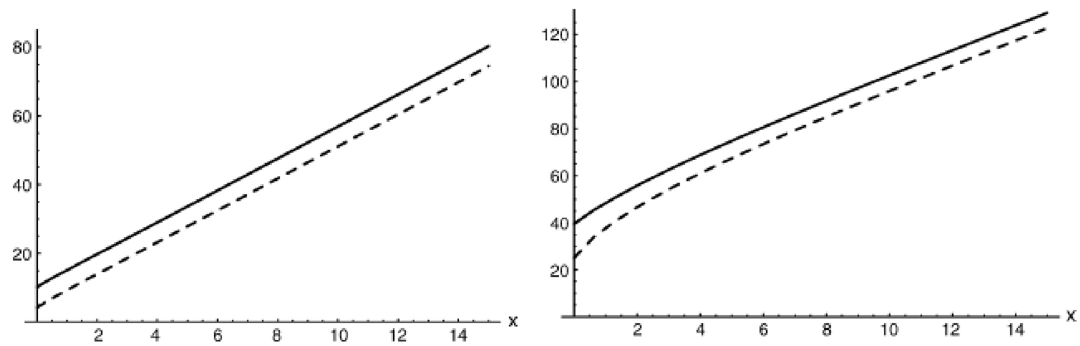
από την οποία παίρνουμε

$$\bar{f}_2(s) = \left.\frac{\partial^2 \tilde{m}_\delta(s)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta=0} = \frac{A_{0,adj}(s)}{\det A_0(s)}\left(c\left.\frac{\partial^2 \tilde{m}_\delta(0)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta=0} + 2\bar{f}_1(s)\right),$$

και τελικά

$$E\left(T^2 \cdot I_{\{T<\infty\}}\right) = \begin{pmatrix} 19.980u^2 + 711.096u + 681.816 \\ 18.458u^2 + 703.242u + 1469.25 \end{pmatrix} e^{-0.065u} - \begin{pmatrix} 75.485 \\ 32.806 \end{pmatrix} e^{-3.161u}.$$

Το παρακάτω σχήμα (4.3) απεικονίζει συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού u τη μέση τιμή $E\left(T \mid T<\infty, Z_0 = i\right) = \dfrac{E\left(T \cdot I_{\{T<\infty\}} \mid Z_0 = i\right)}{\psi_i(u)}$, $i = 1,2$ και την τυπική απόκλιση του χρόνου χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι η τυπική απόκλιση υπερβαίνει τη μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας, πράγμα που δείχνει ότι σε αυτό το μοντέλο με εξάρτηση είναι επικίνδυνο να θεωρήσουμε την πρώτη ροπή ως αντιπροσωπευτικό δείκτη κινδύνου στη διαχείριση του χαρτοφυλακίου.



Σχήμα 4.3 Η μέση τιμή (αριστερά) και η τυπική απόκλιση (δεξιά) του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία για τις αρχικές καταστάσεις $Z_0 = 1$ (διακεκομμένη γραμμή) και $Z_0 = 2$ (σταθερή γραμμή).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Απόστολος Δ. Παπαϊωάννου, Μελέτη μη ανανεωτικών στοχαστικών μοντέλων στη θεωρία κινδύνου, Πειραιάς 2011, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
2. Πολίτης Κ. 2015, Θεωρία Κινδύνου ΙΙ, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.
3. Πολίτης Κ. Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, 2015 Εκδόσεις Σταμούλη.
4. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. 2014,Θεωρία κινδύνου Ι, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.
5. Lipschutz S., Lipson M.L., Γραμμική Άλγεβρα, 3η Έκδοση, Μετάφραση Αντωνιάδης Π.Ι., Μπλέρης Λ.Γ., 2005 Εκδόσεις Τζιόλα.
6. Θ.Ν. Κακούλλος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών, Στοχαστικές Ανελίξεις, 1978 Β' Έκδοση.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Adan, I., Kulkarni, V., 2003. Single-server queue with Markov dependent inter-arrival and service times. Queueing Systems 45 (2), 113–134.
2. Albrecher, H. & Boxma, O. (2004). A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. Insurance: Mathematics and Economics 35, 245_254.
3. Albrecher, H. & Boxma, O. (2005). On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model. Insurance: Mathematics and Economics 37, 650_672.
4. Albrecher, H., Kantor, J., 2002. Simulation of ruin probabilities for risk processes of Markovian type. Monte Carlo Methods and Applications 8 (2), 111–127.
5. Asmussen, S., 2000a. Matrix-analytic models and their analysis. Scandinavian Journal of Statistics 27 (2), 193–226.
6. Asmussen, S., 2000b. Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore.
7. Cheng, Y. & Tang, Q. (2003). Moments of the surplus before ruin and the deficit of ruin in the Erlang (2) risk process. North American Actuarial Journal 7, 1_12.
8. Cohen, J., Down, D., 1996. On the role of Rouché's theorem in queueing analysis. Queueing Systems 23, 281–291.
9. de Smit, J., 1983. The queue GI/M/s with customers of different types or the queue GI/Hm/s. Advances in Applied Probability 15, 392–419.
10. Dickson, D., 1998. Discussion on " On the time value of ruin" by H. Gerber and E. Shiu. North American Actuarial Journal 2 (1), 74.
11. Dickson, D., Drekic, S., 2004. The joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in some Sparre Andersen models. Insurance Mathematics and Economics 34, 97–107.
12. Dickson, D., Hipp, C., 2001. On the time to ruin for Erlang (2) risk processes. Insurance Mathematics and Economics 29, 333–344.
13. Doetsch, G., 1937. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Springer, Berlin.
14. Dufresne, F., Gerber, H., 1988. The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. Insurance Mathematics and Economics 7 (3), 193–199.

15. Gerber, H. & Shiu, E. (1998). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal 2, 48_78.
16. Gerber, H., Shiu, E., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen Model. North American Actuarial Journal 9 (2), 49–69.
17. Janssen, J., Reinhard, J., 1985. Probabilit´es de ruine pour une classe de modèles de risque semi-Markoviens. ASTIN Bulletin 15 (2), 123–134.
18. Li, S., Garrido, J., 2004. On ruin for the Erlang(n) risk process. Insurance Mathematics and Economics 34 (3), 391–408.
19. Li, S., Garrido, J., 2005. On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber–Shiu function. Advances in Applied Probability, in press.
20. Lin, X. S. & Willmot, G. E. (1999). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. Insurance: Mathematics and Economics 25, 63_84.
21. Lin, X., Willmot, G., 2000. The moments of the time to ruin, the surplus before ruin and the deficit at ruin. Insurance Mathematics and Economics 27, 19–44.
22. Marcus, M., Minc, H., 1964. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Allyn and Bacon, Boston.
23. Mikosch, T., Samorodnitsky, G., 2000a. Ruin probability with claims modeled by a stationary ergodic stable process. Annals of Probability 28 (4), 1814–1851.
24. Mikosch, T., Samorodnitsky, G., 2000b. The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. Annals of Applied Probability 10 (3), 1025–1064.
25. Müller, A., Pflug, G., 2001. Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments. Insurance: Mathematics and Economics 28 (3), 381–392.
26. Nyrhinen, H., 1998. Rough descriptions of ruin for a general class of surplus processes. Advances in Applied Probability 30, 1008–1026.
27. Nyrhinen, H., 1999. Large deviations for the time of ruin. Journal of Applied Probability 36 (3), 733–746.
28. Sun, L., Yang, H., 2004. On the joint distributions of surplus immediately before ruin and the deficit at ruin for Erlang (2) risk processes. Insurance Mathematics and Economics 34, 121–125.