

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΟΥ  
ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕΣΩ ΤΕΧΝΙΚΩΝ  
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**

*Διονυσία Αλιάζη*

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την από-  
κτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη  
Στατιστική

**Πειραιάς,  
Οκτώβριος 2017**



**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**SIMULATION TECHNIQUES  
IN INTEREST RATE RISK MANAGEMENT**

BY  
**Dionysia Aliazi**

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the  
University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the  
degree of Master of Applied Statistics

**Piraeus, Greece**

**October 2017**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ..... (Επιβλέπων)
- .....
- .....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

## **Ευχαριστίες**

Ευχαριστώ τον κύριο Μ. Μπούτσικα για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.





## Περίληψη

Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας μιας μελλοντικής ροής (π.χ. μιας επένδυσης σε ομόλογα) είναι αναγκαία η γνώση των μελλοντικών επιτοκίων της χρηματοπιστωτικής αγοράς. Τα επιτόκια όμως αυτά δεν είναι ούτε σταθερά, ούτε γνωστά εκ των προτέρων με αποτέλεσμα να ελλοχεύει ο κίνδυνος μείωσης της αξίας μιας επένδυσης λόγω απρόσμενων μεταβολών των επιτοκίων (επιτοκιακός κίνδυνος - interest rate risk). Τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί πολλά στοχαστικά μοντέλα περιγραφής της κίνησης των επιτοκίων (π.χ. το μοντέλο του Vasicek, το μοντέλο CIR κ.α.). Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η σύντομη επισκόπηση καθώς και η εφαρμογή μέσω κατάλληλου λογισμικού (Wolfram Mathematica) γνωστών τεχνικών διαχείρισης του επιτοκιακού κινδύνου που βασίζεται στην προσομοίωση των παραπάνω στοχαστικών μοντέλων. Επίσης, στα ίδια πλαίσια θα υπολογιστεί και η αξία παράγωγων προϊόντων θεωρώντας ότι το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς δεν είναι σταθερό αλλά περιγράφεται από τα παραπάνω στοχαστικά μοντέλα.



## **Abstract**

In order to evaluate the present value of a future cash flow (e.g. a bond investment), it is necessary to know the future financial market interest rates. These interest rates cannot be considered fixed or known in advance, and therefore there is a risk concerning the value of the investment which may be diminished due to unforeseen fluctuations in future interest rates (interest rate risk). In recent years, many models have been proposed in order to describe interest rate fluctuations (e.g. Vasicek model, CIR model, etc.). The purpose of this dissertation is to briefly review and implement the well-known techniques of interest rate risk management based on the simulation of the above-mentioned models using appropriate software (Wolfram Mathematica). As an application, the fair value of certain financial derivatives is also computed via monte carlo simulation assuming stochastic interest rates.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b> .....	11
<b>I<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΕΙΔΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ- ΕΙΔΗ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ)</b> .....	13
I.1 . ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ.....	13
I.2. ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ .....	13
I.2.1. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ .....	13
I.2.2: ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ .....	14
I.2.3: ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ).....	14
I.2.4: ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ .....	14
I.2.5: ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ .....	15
I.2.6: ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΡΕΥΣΤΟΤΗΤΑΣ .....	15
I.2.7: ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΚΤΟΣ ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.....	15
I.2.8: ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ .....	16
I.3. ΑΓΟΡΕΣ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗΣ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ .....	16
I.4. ΕΙΔΗ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ.....	17
I.4.1. ΜΕΤΟΧΕΣ.....	17
I.4.2. ΟΜΟΛΟΓΑ.....	18
I.4.2.1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΟΜΟΛΟΓΩΝ.....	18
<b>II<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ( ΕΝΝΟΙΕΣ – ΟΡΙΣΜΟΙ)</b> .....	20
II.1. ΚΙΝΗΣΗ BROWN.....	21
II.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN.....	22
II.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΙΤΟ.....	23
II.4. Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΙΤΟ.....	25
II.5. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ.....	26
<b>III<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ)</b> .....	27
III.1. ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΜΟΝΟ ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ.....	27
III.2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ( INTEREST RATE MODELS ).....	27
III.3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ.....	27
III.3.1. ΜΟΝΤΕΛΟ VASICEK .....	28
III.3.1.1. ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	29
III.3.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ .....	30
III.3.2.1. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ VASICEK.....	31
III.3.2.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΕΝΟΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ.....	36
III.3.2.3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ.....	37
III.3.2.4. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ VASICEK ΑΠΟ ΠΡΟ-ΣΟΜΟΙΩΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΩΝ.....	38
III.3.2.5. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΥΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VASICEK.....	41
III.3.3. ΜΟΝΤΕΛΟ COX-INGERSOLL-ROSS.....	43
III.3.3.1. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ COX-INGERSOLL-ROSS.....	44
III.3.3.2. ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ COX-INGERSOLL-ROSS (CIR) .....	47
III.3.3.3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ.....	47
III.3.3.4. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΥΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ CIR.....	48
III.3.4. ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ MERTON.....	50
III.3.4.1 ΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΥΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ MERTON.....	51
III.3.5 ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΛΥΤΕΡΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	53
<b>Βιβλιογραφία</b> .....	54

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα τελευταία έτη αντιμετωπίζουμε καθημερινά ραγδαίες οικονομικές εξελίξεις, κάποιες εντονότερες που εμφανίζονται σπανιότερα και κάποιες μικρότερης κλίμακας που είναι σχεδόν συνεχείς. Μια τέτοια ηπιότερη συνεχής αλλαγή είναι και αυτή των επιτοκίων, όπως θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία. Ο κάθε χρηματοοικονομικός οργανισμός θα πρέπει να είναι σε θέση να μπορεί να αντιμετωπίζει τέτοιες αλλαγές. Αυτό επιτυγχάνεται με την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών των επιτοκίων, μέσω της οποίας παίρνουμε αρκετές πληροφορίες. Η πρόβλεψη των μελλοντικών επιτοκίων γίνεται με την χρήση στοχαστικών μοντέλων, τα οποία είναι ευρέως γνωστά και χρήσιμα στον χρηματοοικονομικό τομέα. Τέτοια μοντέλα έχουν ως βάση τους στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, ενώ η μορφή τους συνήθως περιλαμβάνει δύο παράγοντες, της μέσης τιμής και της μεταβλητότητας της διαδικασίας. Τα μοντέλα που θα μελετήσουμε είναι τα εξής: το μοντέλο του Vasicek, το μοντέλο CIR και το μοντέλο του Merton. Αυτά τα μοντέλα βασίζονται μόνο στον παράγοντα της απόδοσης του επιτοκίου και χαρακτηρίζονται ως βραχυπρόθεσμα.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, στην συνέχεια διαχωρίζονται όλα τα είδη των κινδύνων της αγοράς, καθώς επίσης και τα είδη των χρεογράφων με εστίαση στα ομόλογα. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια της εργασίας, όπως η κίνηση Brown, η γεωμετρική κίνηση Brown, το ολοκλήρωμα Ito και ο τύπος του Ito, καθώς και άλλοι ορισμοί. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικά από τα πιο γνωστά επιτοκιακά μοντέλα, και συγκεκριμένα το μοντέλο του Vasicek, το μοντέλο CIR και το μοντέλο του Merton. Παρουσιάζονται και υλοποιούνται (μέσω Mathematica) αλγόριθμοι προσομοίωσης των συγκεκριμένων επιτοκιακών μοντέλων και παρουσιάζονται εφαρμογές στην αποτίμηση παραγώγων προϊόντων.



# Ι° ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΕΙΔΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ- ΕΙΔΗ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ)

## Ι.1 . ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Από τα αρχαία χρόνια οι λαοί προσπαθούσαν να αντιμετωπίσουν τον κίνδυνο που υπήρχε στο εμπόριο. Η πρώτη ύπαρξη παράγωγων προϊόντων, εμφανίζεται στην Αρχαία Ελλάδα και στην Ρώμη. Έμποροι και παραγωγοί κανόνιζαν την παράδοση των εμπορευμάτων σε συγκεκριμένη τιμή και σε μελλοντικό χρόνο, έτσι ώστε να είναι εξασφαλισμένοι για τις ποσότητες αγαθών που θα χρειαζόταν και η τιμή να είναι σε λογικά επίπεδα. Το ίδιο συναντάται αργότερα στην Ολλανδία και στην Ιαπωνία (εμπόριο τουλίπας και ρυζιού), όπου αναπτύχθηκαν οργανωμένες προθεσμιακές αγορές και ακόμα σήμερα αποτελούν την βάση προθεσμιακών αγορών. Στο Chicago, το 1865, δημιουργήθηκαν και καθιερώθηκαν οι κανόνες που διέπουν τις συναλλαγές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Έτσι δημιουργήθηκε το Chicago Board of Trade (CBOT), το οποίο ήταν το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων. Σήμερα, η αντιστάθμιση του κινδύνου από μεταβολές στις τιμές των πρώτων υλών, στα επίπεδα των επιτοκίων, στις τιμές των ισοτιμιών, στα επίπεδα χρηματιστηριακών δεικτών, κ.λπ., μπορεί να επιτευχθεί σε αναπτυγμένες αγορές μέσω συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, δικαιωμάτων και ανταλλαγών.

## Ι.2. ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Ως **κίνδυνος** εκλαμβάνεται κατάσταση η οποία θέτει ένα ποσοστό απειλής για τη ζωή, την υγεία, την ιδιοκτησία ή το περιβάλλον. Ο κίνδυνος χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει τα δυνατά αποτελέσματα αυτής της κατάστασης και την πιθανότητα να συμβούν. Όταν αναφερόμαστε σε μια επένδυση, κίνδυνος είναι η αδυναμία προσδιορισμού της μελλοντικής της απόδοσης με βεβαιότητα. Ο κίνδυνος συνήθως μετράται με την τυπική απόκλιση της επένδυσης, δηλαδή με το βαθμό της αναμενόμενης απόκλισης της απόδοσης από τη μέση απόδοση.

Μερικές από τις *πρωταρχικές* αιτίες που δημιουργούν αυτούς τους επενδυτικούς κινδύνους είναι:

- Οι καιρικές και γεωλογικές αλλαγές
- Οι οικονομικό-πολιτικές μεταβολές
- Η ανάπτυξη της τεχνολογίας
- Η αύξηση του ανταγωνισμού

Οι ασαφείς αυτές αιτίες, δημιουργούν κινδύνους που μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες ώστε να καταστεί δυνατή η συστηματικότερη μελέτη και αντιμετώπιση τους.

### Ι.2.1. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ

Ο **Κίνδυνος αγοράς** είναι ο κίνδυνος μείωσης της αξίας μιας επένδυσης εξαιτίας αλλαγών στους παράγοντες που διαμορφώνουν την αξία της αγοράς. Η μεταβολή στις τιμές μπορεί ενδεικτικά

να αφορά την τιμή των τίτλων στους οποίους έχει γίνει η επένδυση, την αυξομείωση των επιτοκίων, τις μεταβολές στις τιμές των εμπορευμάτων.

Πρόκειται για τον κίνδυνο υποχώρησης του επιπέδου των τιμών της αγοράς συνολικά ή ορισμένης κατηγορίας στοιχείων του ενεργητικού του εκάστοτε επενδυτικού προϊόντος. Για παράδειγμα, η τιμή ενός εταιρικού ομολόγου μπορεί να αλλάζει όχι μόνο λόγω μεταβολής όλων των επιτοκίων στην αγορά αλλά και επειδή το ασφάλιστρο πιστωτικού κινδύνου που απαιτούν οι επενδυτές μεταβάλλεται. Επομένως, όταν υπάρχει αλλαγή στον πιστωτικό κίνδυνο, υπάρχει άμεση επίδραση στην τιμή του ομολόγου, καθώς διαπραγματεύεται στην δευτερογενή αγορά. Η διακύμανση της τιμής του ομολόγου δηλώνει κίνδυνο αγοράς για τους κατόχους του, ο οποίος όμως προέρχεται στη συγκεκριμένη περίπτωση από τον πιστωτικό κίνδυνο. Επειδή υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί κίνδυνοι στην γενική έννοια «κίνδυνος αγοράς», δημιουργήθηκε μια μέθοδος μέτρησης του κινδύνου, κοινή για όλες τις μορφές. Η μεθοδολογία αυτή αναπτύχθηκε στη δεκαετία του 1990, με πρωτοστατούσα την τράπεζα J. P. Morgan (η οποία συγχωνεύτηκε με τη Chase Manhattan στο τέλος του 2000) και ονομάζεται 'Value-at-Risk'.

### **I.2.2: ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ**

Επιτοκιακός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος να αλλάξει η αξία μιας επένδυσης εξαιτίας μεταβολών στο επίπεδο των επιτοκίων. Καθώς αυξάνονται τα επιτόκια οι τιμές των ομολόγων μειώνονται στη δευτερογενή αγορά και το ανάποδο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι καθώς τα επιτόκια αυξάνονται, το κόστος ευκαιρίας διακράτησης ενός ομολόγου αυξάνεται και οι επενδυτές θα στραφούν σε επενδυτικά προϊόντα με υψηλότερες αποδόσεις. Πιο συγκεκριμένα, όταν τα επιτόκια αυξάνονται, παρουσιάζονται στην αγορά νέες εκδόσεις με υψηλότερες αποδόσεις από τις παλαιότερες, κάνοντας τις παλαιές εκδόσεις ομολόγων να αξίζουν λιγότερο. Επομένως οι τιμές τους πέφτουν.

Αντίθετα, όταν τα επιτόκια μειώνονται οι νέες εκδόσεις ομολόγων που παρουσιάζονται στην αγορά έχουν χαμηλότερες αποδόσεις από τις παλιότερες εκδόσεις κι άρα κάνουν τις παλιές εκδόσεις να παρουσιάζουν μεγαλύτερη τρέχουσα απόδοση. Επομένως οι τιμές ανεβαίνουν.

Σαν αποτέλεσμα εάν ένας επενδυτής θελήσει να πουλήσει το ομόλογο πριν την λήξη του, αυτό μπορεί να αξίζει περισσότερο ή λιγότερο απ' ό τι πλήρωσε για να το αγοράσει.

### **I.2.3: ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ**

Ο συναλλαγματικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος απώλειας μέρους της αξίας μιας επένδυσης εξαιτίας της μεταβολής της συναλλαγματικής ισοτιμίας που υπόκειται η επένδυση. Για παράδειγμα εάν κάποιος επενδυτής που βρίσκεται στην ζώνη του ευρώ αγοράσει ένα εταιρικό ομόλογο στις Η.Π.Α., αν το δολάριο υποχωρήσει 10% σε σχέση με το ευρώ, αυτομάτως η αξία του εταιρικού ομολόγου θα απολέσει το 10% της αξίας του. Ο συναλλαγματικός κίνδυνος είναι έντονος για τις εμπορικές εταιρείες που λειτουργούν ως εισαγωγείς / εξαγωγείς σε μια οικονομία. Για το σκοπό αυτό, οι σύγχρονες χρηματαγορές διαθέτουν εργαλεία αντιστάθμισης του συναλλαγματικού κινδύνου. Ένα από αυτά τα εργαλεία είναι τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης στις συναλλαγματικές ισοτιμίες που διαπραγματεύονται στην Αγορά Παραγώγων.

### **I.2.4: ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ**

Ο πιστωτικός κίνδυνος περιλαμβάνεται σε όλες τις συναλλαγές που εμπεριέχουν μελλοντικές πληρωμές και αφορά το ενδεχόμενο αθέτησης μιας προσυμφωνημένης συμφωνίας / συναλλαγής. Η

αθέτηση μιας συμφωνίας υπό την άρνηση πληρωμής επηρεάζει δυσμενώς τις ταμειακές ροές μιας επένδυσης (cash-flows) αλλά και συνήθως υποχρεώνει την μερική διαγραφή στοιχείων του ενεργητικού (assets) και συνεπώς την μείωση της λογιστικής αξίας μιας επένδυσης (book value).

### **1.2.5: ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ**

Τα τελευταία χρόνια, οι τεχνολογικές καινοτομίες στη λειτουργία των τραπεζών έχουν αλλάξει τη μέθοδο που προσφέρονται οι χρηματοπιστωτικές υπηρεσίες. Σκοπός της τεχνολογικής εξάπλωσης είναι η μείωση των λειτουργικών εξόδων, η αύξηση των εσόδων και η εξεύρεση νέων αγορών. Σκοπός της τεχνολογικής εξάπλωσης είναι η εκμετάλλευση των οικονομιών κλίμακος και εύρους. Ο όρος *οικονομίες κλίμακος* σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η ποσότητα προϊόντων και υπηρεσιών ανά υπάλληλο ή ανά υποκατάστημα τόσο μειώνεται το μέσο κόστος λειτουργίας του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος. Ο όρος *οικονομίες εύρους* σημαίνει ότι όσο περισσότερα προϊόντα και υπηρεσίες προσφέρει το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα τόσο περισσότερο μειώνεται το μέσο κόστος λειτουργίας του. Για παράδειγμα, μία τράπεζα μπορεί να χρησιμοποιήσει τις πληροφορίες που έχει για τους πελάτες της, για να πουλήσει όχι μόνο διάφορες μορφές δανείων αλλά και ασφάλειες. *Τεχνολογικός κίνδυνος* υπάρχει όταν η τεχνολογική επένδυση δεν αποφέρει την αναμενόμενη μείωση του κόστους λειτουργίας από τις οικονομίες κλίμακος και εύρους. Η μεγέθυνση μιας τράπεζας μπορεί να αυξήσει το κόστος λειτουργίας αν μεγαλώσει η γραφειοκρατία, αν περιττεύει η παλιά τεχνολογία ή αν η ζήτηση των χρηματοοικονομικών υπηρεσιών μειωθεί.

Ο επιχειρηματικός κίνδυνος είναι συνδεδεμένος με την ίδια την έννοια της επιχειρηματικότητας. Οι πηγές του επιχειρηματικού κινδύνου αφορούν τόσο εσωγενείς όσο και εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν μια επιχείρηση, όπως είναι οι αλλαγές στο περιβάλλον του ανταγωνισμού ή απρόσμενες αποχωρήσεις σε διοικητικό επίπεδο. Επομένως, πρόκειται για τον κίνδυνο μείωσης της αποδοτικότητας και της παραγωγικότητας μιας επιχείρησης λόγω λανθασμένων αποφάσεων της διοίκησης, που έχουν ως συνέπεια την εμφάνιση ζημιών. Για παράδειγμα, στις Η.Π.Α., η διατραπεζική αγορά γίνεται με ηλεκτρονικά μηνύματα. Κάποια μέρα του 1985, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές της Bank of New York δεν κατέγραψαν τις εισερχόμενες χρηματικές ροές, αλλά κατέγραψαν τις εξερχόμενες. Στο τέλος της ημέρας, η τράπεζα βρέθηκε να έχει ένα διογκωμένο παθητικό και να ψάχνει επείγοντως ρευστότητα. Τελικά, επενέβη η Ομοσπονδιακή Τράπεζα της Νέας Υόρκης και παρείχε την απαιτούμενη ρευστότητα.

### **1.2.6: ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΡΕΥΣΤΟΤΗΤΑΣ**

Ο κίνδυνος ρευστότητας αφορά την αδυναμία ρευστοποίησης μιας επένδυσης και κατά συνέπεια την αδυναμία συγκέντρωσης ρευστότητας. Η έλλειψη ρευστότητας μιας οικονομικής οντότητας μπορεί να προκαλέσει ως αποτέλεσμα την αθέτηση κάποιων συμφωνιών πληρωμής. Όταν οι ρήτρες αθέτησης είναι πολύ αυστηρές, η έλλειψη ρευστότητας μπορεί να οδηγήσει μια οικονομική οντότητα ακόμα και στην καταστροφή. Συνεπώς μια κερδοφόρα επένδυση δεν πρέπει να είναι μόνο ασφαλής και κερδοφόρα, αλλά και να είναι εύκολα ρευστοποιήσιμη. Η διατραπεζική αγορά και οι συμφωνίες επαναγοράς (Repos) δημιουργήθηκαν από αυτή την ανάγκη.

### **1.2.7: ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΚΤΟΣ ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μπορούν να έχουν κέρδη και από υπηρεσίες που δεν εμφανίζονται στον ισολογισμό επειδή δεν αφορούν κάποιο τρέχον δάνειο, κατάθεση ή χρεόγραφο. Ένα τέτοιο

παράδειγμα είναι οι εγγυητικές επιστολές, παρέχονται σε ιδιώτες έναντι προμήθειας αυξάνουν τον πιστωτικό κίνδυνο αλλά συμπεριλαμβάνονται στους λογαριασμούς τάξεως (εκτός ισολογισμού).

### **I.2.8: ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

Οι κίνδυνοι μπορεί να υπάρχουν μεμονωμένοι αλλά μπορεί και να εξαρτάται ο ένας από τον άλλον. Για παράδειγμα, αν αυξηθούν τα επιτόκια αυξάνεται τόσο ο επιτοκιακός κίνδυνος όσο και ο πιστωτικός κίνδυνος, καθώς οι επιχειρήσεις- δανειολήπτες αντιμετωπίζουν πρόσθετο βάρος στην αποπληρωμή του χρέους τους. Επιπλέον, άμεση σύνδεση έχουν οι αυξομειώσεις των εγχώριων και ξένων επιτοκίων με τις μεταβολές της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Μια μεταβολή στα βασικά επιτόκια μεταβάλλει, και τη συναλλαγματική ισοτιμία του εγχώριου νομίσματος.

### **I.3. ΑΓΟΡΕΣ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗΣ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ**

Υπάρχουν τρεις αγορές διαπραγμάτευσης χρεογράφων. Αυτές είναι:

- η Αγορά Χρήματος
- η Αγορά Κεφαλαίου
- η Αγορά Παραγώγων

Τα χρεόγραφα βραχυχρόνιας διάρκειας διαπραγματεύονται στην Αγορά Χρήματος και έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- Η διάρκειά τους είναι συνήθως μέχρι ένα χρόνο.
- Ο κίνδυνος να μην εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του ο εκδότης είναι χαμηλός.
- Έχουν υψηλό βαθμό ρευστοποίησης.

Οι βασικοί εκδότες αυτών των χρεογράφων είναι οι τράπεζες, το δημόσιο καθώς και μεγάλες ασφαλιστικές, βιομηχανίες και εταιρίες. Τα πιο σημαντικά χρεόγραφα που διακινούνται στην ελληνική Αγορά Χρήματος είναι τα Έντοκα Γραμμάτια του Δημοσίου, τα ομόλογα των Τραπεζών και τα διαπραγματεύσιμα πιστοποιητικά καταθέσεων.

Αντίθετα, τα χρεόγραφα μακροχρόνιας διάρκειας διαπραγματεύονται στην Αγορά Κεφαλαίου και έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ο κίνδυνος να μην εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του ο εκδότης είναι υψηλός.
- Υπάρχει σημαντική διακύμανση των τιμών τους.
- Έχουν μεγάλη διάρκεια ζωής.

Τα πιο γνωστά χρεόγραφα της Κεφαλαιαγοράς είναι οι μετοχές και τα ομόλογα. Κατά κανόνα, η διάρκεια ζωής αυτών των χρεογράφων είναι μεγαλύτερη του ενός έτους.



Η επίσημη Αγορά Παραγώγων στην Ελλάδα, ιδρύθηκε το 1997 και άρχισε να λειτουργεί τον Αύγουστο του 1999. Η οργάνωση και υποστήριξη των συναλλαγών καθώς και η παροχή του συστήματος συναλλαγών, πραγματοποιούνται από το Χρηματιστήριο Αθηνών (ΧΑ), ενώ το Γραφείο Συμφηφισμού της Ελληνικής Αγοράς Παραγώγων (που έχει το ρόλο του ως κεντρικός αντισυμβαλλόμενος) είναι η εταιρεία ATHEX Clear η οποία ανήκει στον Όμιλο Ελληνικά Χρηματιστήρια (HELEX).

Στην Αγορά Παραγώγων, οι συναλλαγές γίνονται ηλεκτρονικά (screen trading) από τους χώρους των εταιρειών – μελών του χρηματιστηρίου. Η δυνατότητα επιτυχίας της αγοράς παραγώγων προϊόντων σε μία χώρα εξαρτάται από παράγοντες, όπως η διαφάνεια της τρέχουσας αγοράς, το πόσο εύκολο είναι να γίνουν χρηματιστηριακές συναλλαγές καθώς επίσης και οι όροι διακανονισμού των παραγώγων. Με το Ο.Α.Σ.Η.Σ. (Ολοκληρωμένο Αυτόματο Σύστημα Ηλεκτρονικών Συναλλαγών), εξασφαλίζεται διαφάνεια στις συναλλαγές και αποτελεσματική διαχείριση του κινδύνου. (π.χ. βλ. Κ. Περέλης (2006), Δ. Αθανασίου Τζαβάρα (2014) )

## **I.4. ΕΙΔΗ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ**

### **I.4.1. ΜΕΤΟΧΕΣ**

**Μετοχή** είναι ένα από τα ίσα μερίδια, στα οποία διαιρείται το κεφάλαιο μιας ανώνυμης εταιρίας. Η μετοχή, ως αξιόγραφο, ενσωματώνει τα δικαιώματα του μετόχου που πηγάζουν από τη συμμετοχή του στην ανώνυμη εταιρία. Τα δικαιώματα αυτά, είναι ανάλογα του αριθμού μετοχών που κατέχει ο μέτοχος. Ενδεικτικά δικαιώματα που προκύπτουν από την κατοχή μετοχών είναι:

- 1) το ποσοστό είναι ίσο με τον αριθμό των μετοχών που κατέχει ο μέτοχος προς το σύνολο των μετοχών της εταιρείας, του μερίσματος από τα διανεμόμενα κέρδη της εταιρίας, καθώς και αντίστοιχο ποσοστό από την περιουσία της εταιρίας, σε περίπτωση που αυτή διαλυθεί.
- 2) έχει και τον αναλογούντα αριθμό ψήφων στην Γενική Συνέλευση των μετόχων, εκτός εάν κατέχει μετοχές άνευ ψήφου.

Οι μετοχές μπορεί να διακρίνονται σε κοινές, προνομιούχες και επικαρπίας, ονομαστικές και ανώνυμες, μετά ψήφου ή χωρίς ψήφο, σε διαπραγματεύσιμες σε Χρηματιστήριο ή σε μη διαπραγματεύσιμες.

**Η κοινή μετοχή** είναι ο πιο συνηθισμένος τύπος μετοχής και περιλαμβάνει όλα τα βασικά δικαιώματα ενός μετόχου, όπως δικαίωμα συμμετοχής στα κέρδη, στην έκδοση νέων μετοχών, στο προϊόν της εκκαθάρισης, καθώς και δικαίωμα ψήφου στη Γενική Συνέλευση της εταιρείας και συμμετοχής στη διαχείρισή της.

**Η προνομιούχος μετοχή** προσφέρει απλά ένα προβάδισμα έναντι των κατόχων κοινών μετοχών, στη λήψη μερίσματος και στη λήψη του προϊόντος της εκκαθάρισης σε περίπτωση διάλυσης της επιχείρησης, αλλά συνήθως στερείται του δικαιώματος ψήφου και συμμετοχής στη διαχείριση της επιχείρησης.

Στις ονομαστικές μετοχές αναγράφονται, εκτός από τα στοιχεία της εταιρείας, και τα στοιχεία του δικαιούχου. Οι τράπεζες, οι ασφαλιστικές εταιρείες, οι εταιρείες ημερήσιου τύπου και οι εταιρείες κοινής ωφέλειας είναι υποχρεωμένες να εκδίδουν μόνο ονομαστικές μετοχές. Οι ανώνυμες μετοχές φέρουν μόνο τα στοιχεία της εταιρείας. Η πλειοψηφία των μετοχών των εμποροβιομηχανικών εταιρειών είναι ανώνυμες.

Όταν μια επιχείρηση που έχει εκδώσει μετοχές έχει κέρδη, μπορεί να μοιράσει μέρος των κερδών αυτών στους μετόχους της με την μορφή μερίσματος, που αντιστοιχεί σε κάποιο ποσό ανά μετοχή.

Στις χρηματοπιστωτικές αγορές, η μετοχή είναι μια λογιστική μονάδα για τις διάφορες επενδύσεις. Αυτό συχνά σημαίνει το απόθεμα μιας εταιρείας, αλλά χρησιμοποιείται επίσης για συλλογικές επενδύσεις, όπως τα αμοιβαία κεφάλαια, ετερόρρυθμες εταιρίες και εταιρείες επενδύσεων ακινήτων.

## I.4.2. ΟΜΟΛΟΓΑ

Τα ομόλογα είναι μακροπρόθεσμα χρεόγραφα που εκδίδονται είτε από το Δημόσιο είτε από ιδιωτικούς οργανισμούς (πχ τράπεζες, επιχειρήσεις κλπ.), και χρησιμοποιούνται για το δανεισμό κεφαλαίων από το επενδυτικό κοινό. Στις περισσότερες χώρες του κόσμου υπάρχουν καλά οργανωμένες δευτερογενείς αγορές για τα ομόλογα, με αποτέλεσμα να προσθέτει σημαντική ρευστότητα στην αγορά και τα κάνει ακόμα πιο ελκυστικά στον επενδυτή. Ο αγοραστής του ομολόγου δεν αποκτά κάποιο τμήμα της περιουσίας της επιχείρησης, αλλά απλά δανείζουν στον εκδότη του ομολόγου ένα κεφάλαιο ίσο με την αξία των ομολόγων που αγοράζουν. Ο εκδότης από την πλευρά του δεσμεύεται να δίνει στον αγοραστή ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό (τοκομερίδιο, coupon) σε τακτά χρονικά διαστήματα μέχρι τη λήξη του ομολόγου (τη λήξη της επένδυσης) και κατά τη λήξη του ομολόγου να αποδώσει ένα επιπλέον ποσό, το οποίο αναπαριστά την ονομαστική αξία του ομολόγου. Υπάρχουν όμως και τα zero coupon bonds, τα οποία δεν αποδίδουν τοκομερίδιο.

### I.4.2.1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΟΜΟΛΟΓΩΝ

**Ονομαστική Αξία:** Είναι το ποσό που δανείζεται ο εκδότης ανά τίτλο (εάν η τιμή της ομολογίας στην πρωτογενή αγορά ισούται με την ονομαστική αξία του ομολόγου).

**Επιτόκιο Έκδοσης:** Είναι το επιτόκιο με το οποίο δανείστηκε η εταιρεία το κεφάλαιο από την αγορά κεφαλαίου. Υπάρχουν ομόλογα σταθερού επιτοκίου (fixed rate bond), δηλαδή ομόλογα που πληρώνουν το ίδιο τοκομερίδιο σε όλη την διάρκεια της ζωής τους, και ομόλογα μεταβλητού ή κυμαινόμενου επιτοκίου (adjustable, variable rate bond), δηλαδή ομόλογα των οποίων το επιτόκιο μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της ζωής τους σύμφωνα με κάποιο άλλο βασικό επιτόκιο. Επίσης υπάρχουν ομόλογα που δεν έχουν περιοδικές πληρωμές τόκων ( zero coupon bonds).

**Χρονική Διάρκεια:** Η διάρκεια των ομολόγων ποικίλει και κυμαίνεται συνήθως από 1 έτος έως 30 έτη. Υπάρχουν όμως και ομόλογα χρονικής διάρκειας 100 ετών (Centuries), αλλά και ομόλογα αορίστου λήξεως (Consolidated Funds ή Consols). Η χρονική διάρκεια καθορίζεται από την εταιρεία (ή το Δημόσιο) που εκδίδει τα ομόλογα.

**Επιτόκιο Αγοράς (Yield to Maturity):** Είναι το επιτόκιο που μπορεί να επιτευχθεί από ομόλογα μιας συγκεκριμένης κατηγορίας. Επίσης, αποτελεί το προεξοφλητικό επιτόκιο για τον υπολογισμό της τιμής ενός ομολόγου.

**Τιμή Ομολόγου:** Είναι η παρούσα αξία των ταμειακών εισροών του ομολόγου. Για τον υπολογισμό της απαιτούνται οι ταμειακές εισροές του ομολόγου και το επιτόκιο αγοράς.

**Ωρίμανση (Maturity):** Ωρίμανση είναι η ημερομηνία στην οποία θα εξοφληθεί ένα χρεόγραφο (π.χ. ομόλογο), δηλαδή η ημερομηνία στην οποία ο κάτοχος του χρεογράφου θα εισπράξει την ονομαστική αξία. Η διάρκεια μέχρι την ωρίμανση θα είναι ο χρόνος που απομένει μέχρι να εξοφληθεί το χρεόγραφο και είναι δεδομένη.

## II° ΚΕΦΑΛΑΙΟ ( ΕΝΝΟΙΕΣ – ΟΡΙΣΜΟΙ)

Δοθέντων των ταμειακών εισροών ενός ομολόγου και του επιτοκίου προεξόφλησης, η τιμή ενός ομολόγου προσδιορίζεται προσθέτοντας την παρούσα αξία των τόκων και την παρούσα αξία της τιμής εξόφλησης. Ακόμα και όταν αναφερόμαστε σε ένα ομόλογο μηδενικού κινδύνου, μας ενδιαφέρει κατά πόσο είναι ορθολογικά πρόθυμος ο κάτοχος του ομολόγου να πληρώσει μια υποσχόμενη καταβολή στο μέλλον (αυτό μας οδηγεί στο επιτόκιο) και στην συνέχεια θέλουμε να δούμε πώς μπορούμε να διαχειριστούμε τον κίνδυνο των επιτοκίων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την διαχείριση του επιτοκιακού κινδύνου και απαντήσεις για αυτό το θέμα παίρνουμε μέσω τεχνικών προσομοίωσης. Παρακάτω θα δούμε βασικές έννοιες και θεωρήματα για να μπορέσουμε στην συνέχεια να αναλύσουμε την διαχείριση του επιτοκιακού κινδύνου.

Ας συμβολίσουμε με  $X(t)$  την τιμή που λαμβάνει ένας τίτλος κατά την χρονική στιγμή  $t$  ( $t \geq 0$ ). Θεωρούμε ότι για κάθε  $t$  η  $X(t)$  είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  κοινό για όλα τα  $t$ . Είναι δηλαδή η  $X(t)$ , για συγκεκριμένο  $t$ , μια απεικόνιση  $X(t, \omega)$  με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης και τιμές στο  $\mathbb{R}$ , ή στο  $\mathbb{R}^k$  γενικότερα. Για συγκεκριμένο  $\omega \in \Omega$  έχουμε την συνάρτηση  $X(t, \omega) = x(t)$ ,  $t \geq 0$ , η οποία αποτελεί μια “τροχιά” (*sample path*) από όλες τις δυνατές τροχιές που μπορούν να προκύψουν από τον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και την οικογένεια των τ.μ.  $\{X(t): t \geq 0\}$ . Ως γνωστό, η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών  $\{X(t): t \in T\}$  πάνω σε ένα κοινό χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  καλείται στοχαστική ανέλιξη (σ.α.).

Μια σ.α.  $\{X(t): t \geq 0\}$  λέγεται *ανεξαρτήτων προσανξήσεων* εάν για κάθε  $n$  και κάθε  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , οι διαφορές

$$Y(t_j) = X(t_j) - X(t_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Επίσης, μια σ.α.  $\{X(t): t \geq 0\}$  ονομάζεται *martingale* όταν για κάθε  $n$  και κάθε  $t_1 < \dots < t_n$  η δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X(t_{n+1})|X(t_1), \dots, X(t_n)] = X(t_n).$$

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X(t), t \in T\}$  λέγεται *στοχαστική διαδικασία*. Δηλαδή για κάθε  $t$  του συνόλου  $T$  η  $X(t)$  είναι μια τυχαία μεταβλητή. Το σύνολο  $T$  λέγεται σύνολο δεικτών της διαδικασίας. Αν το σύνολο  $T$  είναι αριθμήσιμο τότε η στοχαστική διαδικασία  $\{X(t), t \in T\}$  λέγεται διαδικασία διακριτής παραμέτρου ή διαδικασία διακριτού χρόνου. Αν το σύνολο  $T$  είναι μη αριθμήσιμο τότε η διαδικασία  $\{X(t), t \in T\}$  λέγεται διαδικασία συνεχούς παραμέτρου ή διαδικασία συνεχούς χρόνου.

*Στοχαστική διαφορική εξίσωση* λέγεται η διαφορική εξίσωση στην οποία ένας ή περισσότεροι όροι είναι στοχαστικές διαδικασίες, που σημαίνει ότι η λύση είναι και η ίδια στοχαστική διαδικασία.

## II.1. ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Το πρώτο που πρέπει να περιγράψουμε είναι πως περίπου θα κινείται η τιμή του υποκείμενου τίτλου σε συνεχή χρόνο, καθώς οι τιμές τις αγοράς εξελίσσονται σε συνεχή χρόνο. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στην κίνηση αυτή καθώς και σε εισαγωγικές έννοιες της στοχαστικής ανάλυσης (π.χ. βλ. Boutsikas M.V. (2005-7))

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η τιμή του αυξομειώνεται σε διακριτές χρονικές στιγμές  $0, h, 2h, \dots, nh$  με κάποιες πιθανότητες. Συγκεκριμένα, συμβολίζουμε με  $S_t$  την τιμή που μπορεί να πάρει ένας τίτλος (π.χ. μετοχές) σε χρόνο  $t$  και έστω ότι:

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}b, & \text{με πιθαν. } p \\ S_{(i-1)h}a, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases}$$

για  $i = 1, 2, \dots, n$ . Για να μπορέσουμε να δημιουργήσουμε μοντέλο για συνεχές χρόνο, θεωρούμε ότι το  $h$  συγκλίνει στο 0.

Το παραπάνω μοντέλο είναι *πολλαπλασιαστικό* και αν θέσουμε  $X_t = \ln S_t$  τότε έχουμε ένα απλούστερο *προσθετικό* μοντέλο,

$$X_{ih} = X_{(i-1)h} + \ln a \quad \text{ή} \quad X_{(i-1)h} + \ln b.$$

Μέσω της μελέτης του προσθετικού μοντέλου, προκύπτει και το *πολλαπλασιαστικό*. Έστω το ακόλουθο προσθετικό μοντέλο:

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h}, & \text{με πιθαν. } p \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h}, & \text{με πιθαν. } 1-p \end{cases} \quad \text{όπου} \quad p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{h} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

( $X_0 = 0$  ή  $X_0$ ) όπου  $\mu, \sigma$  είναι κάποιες σταθερές παράμετροι. Θέτοντας  $Y_i = 1$  ή  $0$  ανάλογα με το αν η  $X$  αυξάνεται ή μειώνεται κατά το  $i$ -οστό χρονικό διάστημα, έχουμε:

$$\begin{aligned} X_t = X_{nh} &= \sigma\sqrt{h} \sum_{i=1}^n Y_i - \sigma\sqrt{h} \left( n - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = 2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} \sum_{i=1}^n Y_i - n\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} \\ &= 2\sigma \sqrt{tp(1-p)} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} + \sigma\sqrt{nt}(2p-1), \end{aligned}$$

και για  $n \rightarrow \infty$ , ισχύει ότι (για την πρώτη σχέση χρησιμοποιούμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, Κ.Ο.Θ.),

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow_d N(0,1), \quad 2\sigma\sqrt{tp(1-p)} \rightarrow \sigma\sqrt{t}, \quad \sigma\sqrt{nt}(2p-1) = t\mu,$$

και άρα η κατανομή της  $X_t$  (όταν  $h \rightarrow 0$ ) είναι ίδια με την κατανομή μιας τ.μ. που έχει την μορφή

$$\sigma\sqrt{t} \cdot Z + t\mu \quad \text{όπου} \quad Z \sim N(0,1)$$

δηλαδή,

$$X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για  $h \rightarrow 0$  η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες και κανονικές προσαυξήσεις  $X_{t-y} - X_y$ . Η τυχαία μεταβλητή  $X_{t-y} - X_y, t > 0$  είναι ανεξάρτητη από τις  $X_u, 0 \leq u \leq y$ , διότι η αυξομείωση της  $X_t$  είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν (σε κάθε πολύ μικρό χρονικό διάστημα). Επίσης, αφού  $X_t \sim N(\mu t, t\sigma^2)$ , τότε και  $X_{t-y} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$  για κάθε  $y \geq 0$ . Η παραπάνω σ.α.  $X_t, t \geq 0$ , καλείται κίνηση Brown. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός.** Μία στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  (με τιμές στο  $R$ ) καλείται **κίνηση Brown** με παραμέτρους  $\mu \in R$  (τάση - drift parameter) και  $\sigma > 0$  (μεταβλητότητα - volatility) (συμβ.  $BM(\mu, \sigma^2)$ ) αν ισχύει ότι, για κάθε  $y \geq 0, t > 0$ ,

$$1) \text{ Η τ.μ. } X_{y+t} - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2).$$

$$2) \text{ Η τ.μ. } X_{y+t} - X_y, \text{ είναι ανεξάρτητη από τις } X_u, 0 \leq u \leq y.$$

Συνήθως λαμβάνεται  $X_0 = 0$  (ή  $X_0$ ).

Η κίνηση Brown είναι η μοναδική στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο που (i) οι διαδρομές της είναι συνεχείς συναρτήσεις και (ii) έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις. Για παράδειγμα, οι προσαυξήσεις (τ.μ.)

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}},$$

είναι ανεξάρτητες και αν  $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_m - t_{m-1}$  είναι και ισόνομες (κανονικές). (π.χ. βλ. P. Morters & Y. Peres (2010), Hui - Hsiung Kuo (2006), Δ Αθανασίου Τζαβάρια (2014) )

## II.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Η κίνηση Brown ως προθετικό μοντέλο δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή της εξέλιξης των τιμών αγαθών ή μετοχών καθώς:

- (i) μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι αποδεκτό
- (ii) η αύξηση ή μείωση μιας τιμής είναι, σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή.

Επομένως θα πρέπει να επανέλθουμε στο αρχικό πολλαπλασιαστικό. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι σε απειροστά χρονικά διαστήματα μήκους  $h$ , η τιμή  $S_t$  μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί με συγκεκριμένη πιθανότητα και ανεξάρτητα από το παρελθόν ως εξής:

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h} e^{\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθαν. } p \\ S_{(i-1)h} e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθαν. } 1 - p \end{cases} \quad \text{όπου } p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Δηλαδή, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής  $S_{ih}/S_{(i-1)h}$  σε κάθε πολύ μικρό διάστημα χρόνου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το παρελθόν. Παρατηρούμε τώρα ότι ο λογάριθμος της παραπάνω διαδικασίας, δηλαδή η στοχαστική ανέλιξη  $X_t = \ln S_t, t \geq 0$ , είναι μια κίνηση Brown που ορίσαμε παραπάνω. Μια στοχαστική ανέλιξη με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **γεωμετρική κίνηση Brown**. Ιδιαίτερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός.** Μία στοχαστική ανέλιξη  $S_u, t \geq 0$ , καλείται **γεωμετρική κίνηση Brown** με παραμέτρους  $\mu \in R$  (τάση - drift) και  $\sigma > 0$  (μεταβλητότητα - volatility) (συμβ.  $GBM(\mu, \sigma^2)$ ) αν ισχύει ότι, για κάθε  $y \geq 0, t > 0$ ,

- 1) Η τυχαία μεταβλητή

$$\ln \frac{S_{t+y}}{S_y} \sim N(\mu t, t\sigma^2)$$

- 2) Η τ.μ.  $S_{t+y}/S_y$  είναι ανεξάρτητη από τις  $S_u, 0 \leq u \leq y$ .

Η τιμή της  $S_t$  στην γεωμετρική κίνηση Brown μεταβάλλεται απειροστά σε κάθε πολύ μικρό διάστημα και όπως και προηγουμένως, η  $S_t(\omega), t \geq 0$  είναι μία συνεχής συνάρτηση του χρόνου  $t$  η οποία δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Είναι φανερό ότι, αν  $X_t, t \geq 0 \sim \text{BM}(\mu, \sigma^2)$ , τότε η  $S_t = e^{X_t}, t \geq 0 \sim \text{GBM}(\mu, \sigma^2)$ . Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή  $S_t$  ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμός της ακολουθεί την κανονική κατανομή,

$$\ln S_t \sim N(\mu t, t\sigma^2),$$

και επομένως, αποδεικνύεται εύκολα ότι θα είναι

$$E(S_t^k) = e^{kt\mu + \frac{1}{2}k^2t\sigma^2},$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$E(S_t) = e^{t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}, \quad V(S_t) = E(S_t^2) - E(S_t)^2 = e^{2t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}(e^{t\sigma^2} - 1).$$

Συνεπώς, η περιγραφή της εξέλιξης των τιμών ενός υποκείμενου τίτλου στον χρόνο γίνεται σχετικά εύκολα μέσω της γεωμετρικής κίνησης Brown.

### II.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΙΤΟ.

Σε πολλές περιπτώσεις θα χρειαστεί να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_0^t \Delta_x dS_x$$

όπου η  $S_t, t \geq 0$  είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Θα πρέπει να μελετήσουμε αυτό το ολοκλήρωμα και να το ορίσουμε, καθώς δεν ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του γνωστού ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes.

Θέλουμε να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα το οποίο θα εκφράζει αθροίσματα της μορφής

$$\int_0^t \Delta_x dS_x = \sum_{i=1}^{\lfloor t/h \rfloor} \Delta_{(i-1)h} (S_{ih} - S_{(i-1)h}) \quad \text{για } h \text{ «απειροστό»}$$

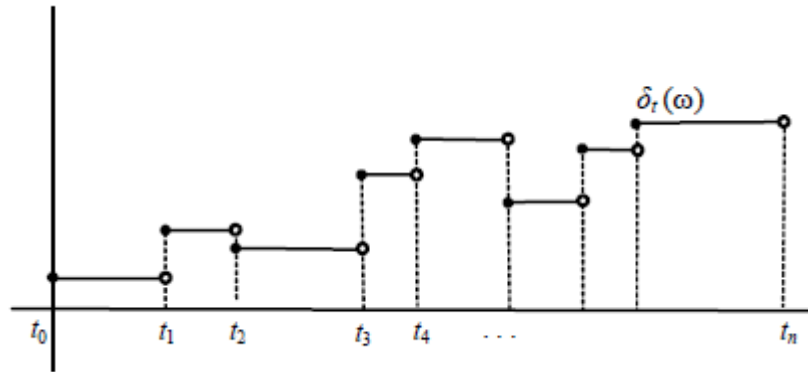
Η μελέτη μας θα βασιστεί στην κίνηση Brown. Έστω ένας χώρος  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  εφοδιασμένος με ένα φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  (αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών που μπορεί να θεωρηθεί ως η πληροφορία από την αγορά μέχρι και τον χρόνο  $t$ ) και  $W_t, t \geq 0$ , μία  $\mathcal{F}_t - \text{BM}(0, 1)$ , δηλαδή η  $W_t, t \geq 0$ , είναι μία τυπική κίνηση Brown ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ), προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ . Κάθε τυχαία μεταβλητή  $X_{t+s} - X_s$  είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας  $\mathcal{F}_y$  με  $y \leq s$ . Έστω επίσης μία στοχαστική ανέλιξη  $\delta_t, t \in [0, T]$  για κάποιο  $T > 0$  η οποία είναι επίσης προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή,

$$E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right) < \infty \quad \text{για κάθε } t \in [0, T].$$

Ορίζουμε αρχικά ως  $\delta_t$  μια απλή συνάρτηση, ενώ στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για οποιοδήποτε  $\delta_t$ , θεωρώντας το όριο ολοκληρωμάτων απλών συναρτήσεων. Με αυτή την διαδικασία θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της  $\delta_t$  ως προς την  $W_t$ .

**Ορισμός.** Έστω μία διαμέριση  $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  του  $[0, T]$  (δηλ.  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ). Μία στοχαστική ανέλιξη  $\delta_t \in [0, T]$ , θα καλείται απλή (ως προς την διαμέριση  $\Pi$ ) αν είναι  $\mathcal{F}_t$ -προσαρμοσμένη, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, και σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Μία τυχαία διαδρομή μιας απλής στοχαστικής ανέλιξης  $\delta_t$  θα έχει την παρακάτω μορφή (βλ. σημειώσεις μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», Μπούτσικας Μ. (2005-7) ).



**Ορισμός.** Ορίζουμε ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô μιας απλής  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$  ως προς την  $W_t$ ,  $t \geq 0$ , στο διάστημα  $[0, t]$ , την τυχαία μεταβλητή

$$I_t = \int_0^t \delta_x dW_x = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \delta_{t_k} (W_t - W_{t_k})$$

όπου  $k$  τέτοιο ώστε  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ .

**Ορισμός.** Ορίζουμε ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της  $\delta_t$ ,  $t \geq 0$  ως προς την  $W_t$ ,  $t \geq 0$  στο διάστημα  $[0, t]$ ,  $t \leq T$ , την τυχαία μεταβλητή

$$\int_0^t \delta_x dW_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t \delta_x^{(j)} dW_x$$

όπου  $\delta_t^{(j)}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots$  είναι μία ακολουθία απλών ανελιξεων που συγκλίνουν στην  $\delta_t$ ,  $t \in [0, T]$ . (αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντοτε μια τέτοια ακολουθία)

Το ολοκλήρωμα Itô έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- (i) Η τυχαία μεταβλητή  $I_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη.
- (ii) Ισχύει ότι

$$\int_0^t (\delta_x + \gamma_x) dW_x = \int_0^t \delta_x dW_x + \int_0^t \gamma_x dW_x \quad \text{και} \quad \int_0^t c \delta_x dW_x = c \int_0^t \delta_x dW_x,$$

όπου  $c$  είναι σταθερά ( $\gamma_t$ ,  $t \geq 0$ , είναι επίσης απλή ανέλιξη).

- (iii) (Ισομετρία Itô) Ισχύει ότι

$$E(I_t^2) = E\left(\left(\int_0^t \delta_x dW_x\right)^2\right) = E\left(\int_0^t \delta_x^2 dx\right), \quad t \in [0, T].$$

- (iv) Η στοχαστική ανέλιξη

$$I_t = \int_0^t \delta_x dW_x, \quad t \in [0, T],$$



είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ .

#### II.4. Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΙΤΟ

Ο κανόνας της αλυσίδας για δύο παραγωγίσιμες συναντήσεις  $f, g \in \mathbb{R}$  είναι ο εξής:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \text{ ή } df(g(t)) = f'(g(t))dg(t).$$

Ομοίως μπορούμε να την δούμε και σε μορφή ολοκληρώματος Riemann ως εξής:

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(x))g'(x)dx$$

Ο ανάλογος τύπος για το ολοκλήρωμα Ito δίνεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα** (τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(W_t)$ ).

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη  $f'$  και δεύτερη παράγωγο  $f''$  και  $W_t \sim BM(0,1)$ . Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x)dW_x + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_x)dx.$$

**Θεώρημα** (τύπος του Itô για συναρτήσεις της μορφής  $f(t, W_t)$ ).

Έστω  $f(t, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} f = f^{(i,j)}, i, j = 0, 1, 2$$

και  $W_t \sim BM(0,1)$ . Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t f^{(0,1)}(x, W_x)dW_x + \int_0^t f^{(1,0)}(x, W_x)dx + \frac{1}{2} \int_0^t f^{(0,2)}(x, W_x)dx.$$

(π.χ. βλ. Sanjay K. Nawalkha, Gloria M. Soto, Natalia A. Beliaeva (2005))

## II.5. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ο δειγματικός χώρος που ανήκουν όλα τα μοντέλα που θα μελετήσουμε παρακάτω είναι ο εξής:

$$(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$$

Επίσης, η σημερινή τιμή ενός ομολόγου συμβολίζεται με  $B(t, T)$  και είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία του. Αν, δηλαδή, αναφερόμαστε σε ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου, το οποίο πληρώνει μόνο στον χρόνο  $T$  μια χρηματική μονάδα, έχουμε ότι  $B(T, T)=1$ . Η απόδοση στην λήξη (yield to maturity) του ομολόγου την χρονική στιγμή  $t$ , είναι το συνεχές ανατοκίζόμενο επιτόκιο. Έχουμε:

$$B(t, T) \cdot e^{(T-t)R(t,T)} = 1$$

Άρα η απόδοση είναι:

$$R(t, T) = \frac{-\ln B(t, T)}{T - t}$$

Όσο αυξάνεται ο χρόνος, αυξάνεται και η απόδοση. Η γραφική παράσταση της απόδοσης  $R(t, T)$  (για  $t \rightarrow \infty$ ) αποτελεί την ονομαζόμενη διαμόρφωση των επιτοκίων.

Επίσης, η συνάρτηση  $r(t)$  είναι το λεγόμενο στιγμιαίο risk free επιτόκιο ή το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, όπου:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$$

Το προθεσμιακό επιτόκιο στο χρονικό διάστημα  $[T_1, T_2]$  συμβολίζεται με  $f(t, T_1, T_2)$  και είναι το επιτόκιο που πρόκειται να δανειστούμε με risk free. Έχουμε:

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln B(t, T_1) - \ln B(t, T_2)}{T_2 - T_1}$$

Αν δούμε στιγμιαία το προθεσμιακό επιτόκιο τότε έχουμε:

$$f(t, T) = f(t, T, T)$$

Αυτό μας δίνει το επιτόκιο ενός συμβολαίου με αρχή τον χρόνο  $T$  και διάρκεια στιγμιαία. Οι τιμές των ομολόγων όμως, διαφέρουν μεταξύ τους, άρα έχουμε:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} = -\frac{1}{B(t, T)} \cdot \frac{\partial B(t, T)}{\partial T}$$

Άρα η τιμή ενός ομολόγου μπορεί να οριστεί και ως:

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$$

## III<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ)

### III.1. ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΜΟΝΟ ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ

Στην σύγχρονη παγκόσμια οικονομία είναι απαραίτητη η ελεύθερη ροή επενδυτών, καθώς επίσης θα πρέπει να μπορεί να γίνεται κατάλληλη κατανομή των πόρων ούτως ώστε να γίνεται η επίτευξη του εκάστοτε οικονομικού στόχου. Ο βασικός δείκτης του συνολικού κόστους του χρήματος στην αγορά αντιστοιχεί στον βραχυχρόνιο κίνδυνο μείον το επιτόκιο.

Το επιτόκιο καθορίζεται μόνο από την προσφορά και την ζήτηση στην παγκόσμια αγορά κεφαλαίου, με αποτέλεσμα να είναι ένας από τους κυριότερους δείκτες απόδοσης της παγκόσμιας οικονομίας.

Τα στοχαστικά μοντέλα των επιτοκίων είναι απολύτως χρήσιμα στην τιμολόγηση και στην αποτίμηση των παράγωγων περιουσιακών στοιχείων και ως εκ τούτου, έχουν γίνει πολλές μελέτες για να μοντελοποιηθούν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Μια από αυτές τις μελέτες βασίζεται στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

### III.2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ( INTEREST RATE MODELS )

Όπως αναφέραμε, τα μοντέλα των επιτοκίων είναι απαραίτητα για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση των τίτλων σταθερού εισοδήματος. Για τον λόγο αυτό προσπαθούμε μέσω της μοντελοποίησής τους να προσεγγίσουμε την καμπύλη των αποδόσεων.

Πρακτικά, η καμπύλη των επιτοκίων είναι μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο. Λόγω αυτής, το αποτέλεσμα εξαρτάται από μια σταθερή και μια μεταβλητή ποσότητα, οι οποίες μας δίνουν την παρακάτω μορφή:

$$dr(t) = A_0(t) + A_1 dW(t)$$

όπου:

$A_0(t)$  : τάση (ντετερμινιστικός όρος).

$A_1$  : μεταβλητότητα (η ταχύτητα που μεταβάλλεται μια διαδικασία, η οποία μπορεί να είναι είτε ντετερμινιστική είτε στοχαστική).

### III.3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

Τα μοντέλα ισορροπίας ειδικεύονται σε μια διαδικασία για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια, η οποία βασίζεται σε υποθέσεις σχετικές με οικονομικές μεταβλητές. Για τον λόγο αυτό τα δεδομένα της αγοράς δεν ταιριάζουν κάθε χρονική στιγμή. Τα πιο σημαντικά μοντέλα είναι τα μοντέλα Vasicek, Cox- Ingeroll- Ross και Merton, τα οποία ανάγονται σε διαφορετικές συναρτήσεις και θεωρούνται αρκετά απλές και εύκολες στην χρήση με τη βοήθεια υπολογιστή. Τα μοντέλα αυτά είναι πολύ χρήσιμα και προσφέρουν λύσεις κλειστού τύπου και σταθερές συναρτήσεις πυκνότητας.

Τα μοντέλα Vasicek, Cox- Ingeroll- Ross και Merton προέρχονται από τη διαδικασία επαναφοράς στο μέσο. Υπάρχουν όμως και άλλα μοντέλα όπου δεν υπάρχει ασάφεια τόσο στον δεύτερο όρο, αλλά στον πρώτο όρο, ο οποίος είναι γραμμικός.

Τα τρία αυτά μοντέλα ισορροπίας που αναφέραμε, έχουν και κάποια αρνητικά χαρακτηριστικά. Δεν επιτρέπεται η ταυτόχρονη αρνητική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών που περιγράφουν την κατάσταση, ούτε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι τα επιτόκια θα είναι θετικά. Επίσης, η μη γραμμικότητα των δεδομένων δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί στον βέλτιστο βαθμό.

### III.3.1. ΜΟΝΤΕΛΟ VASICEK

Το μοντέλο Vasicek (1977) θεωρείται ως ένα στοχαστικό μοντέλο για επενδύσεις, το οποίο περιγράφει την εξελικτική πορεία των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων, όπως αυτή ανέρχεται από την επίδραση του κινδύνου της αγοράς.

Όπως αναφέρθηκε, η στοχαστικότητα του έχει ως χαρακτηριστικό την επαναφορά στην μέση τιμή. Όταν τα επιτόκια είναι υψηλά, τότε δημιουργείται μια φθίνουσα πορεία στην αγορά απαιτώντας έτσι πιο μικρές χρηματοδοτήσεις οι δανειολήπτες. Επομένως, τα επιτόκια τείνουν να ισορροπήσουν μακροπρόθεσμα στο μέσο. Αντίθετα, όταν τα επιτόκια πέφτουν, οι δανειολήπτες ζητούν μεγαλύτερα κεφάλαια με αποτέλεσμα να τείνουν προς τον μακροπρόθεσμο μέσο, καθώς τα επιτόκια θα αρχίσουν να αυξάνονται.

Πολλοί αναλυτές χρησιμοποιούν λανθασμένα αυτό το μοντέλο για την εκτίμηση των παραγώγων του επιτοκίου, ακόμα και σε αγορές που υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος. Είναι λάθος αυτή η χρήση του καθώς προκύπτουν αρνητικές πιθανότητες. Ωστόσο, μέσω της χρήσης αυτού του απλού μοντέλου, μπορούμε να έχουμε μια καλή βάση για την κατανόηση του σύνθετου κόσμου των επιτοκίων.

Το μοντέλο Vasicek περιγράφεται από την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

με αρχική συνθήκη  $r(0)$  (διαδικασία *Ornstein-Uhlenbeck*).

Η  $r(t)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου  $t$  και ακολουθεί μια μαρκοβιανή διαδικασία, δηλαδή στο σύστημα δεν έχει μνήμη. Άρα οι μελλοντικές μεταβολές των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων είναι ανεξάρτητες από τις παρελθοντικές μεταβολές. Βασικά προϋπόθεση είναι η αγορά να είναι αποτελεσματική, δηλαδή οι χρηματαγορές να είναι πλήρως ενημερωμένες και οι παρούσες τιμές να αλλάζουν με κάθε νέα πληροφορία.

Ο δεύτερος όρος  $W(t)$  είναι μια τυπική κίνηση Brown (ή διαδικασία Wiener), δηλαδή μια στοχαστική διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας μπορούμε να εντοπίσουμε την στιγμιαία μεταβλητότητα. Η στιγμιαία μεταβλητότητα είναι αποτέλεσμα αναρίθμητων και απρόβλεπτων παραγόντων.

Η παράμετρος  $\sigma$  δηλώνει την τυπική απόκλιση, από την οποία ορίζεται η μεταβλητότητα του επιτοκίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο μεγαλύτερη είναι η στιγμιαία μεταβλητότητα ( $\sigma^2$ ), τόσο μεγαλύτερη είναι και η τυχαιότητα που εισέρχεται στο σύστημα.

Η παράμετρος  $\theta$  καθορίζει το πεδίο του μακροπρόθεσμου μέσου και δηλώνει ότι όλα τα  $r$  μελλοντικά διανύσματα που θα κινούνται γύρω από την συγκεκριμένη τιμή  $\theta$  μακροπρόθεσμα.

- Για  $r > \theta$  : τότε  $\kappa > 0$  δίνει αρνητική τιμή στην τάση και το επιτόκιο γυρνάει πίσω στον μακροπρόθεσμο μέσο.
- Για  $r < \theta$  : ισχύει το αντίθετο.

Άρα το  $\kappa$  μας δείχνει πόσο γρήγορα το  $r$  επιστρέφει στο  $\theta$ .

Η ποσότητα  $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$  αναφέρεται ως μακροπρόθεσμη μεταβλητότητα και με την οποία τα μελλοντικά  $r$  θα τείνουν στον μακροπρόθεσμο μέσο  $\theta$ . Οι ποσότητες  $\kappa$  και  $\sigma$  προσπαθούν να εξουδετερώσουν η μια την άλλη. Δηλαδή, όσο αυξάνεται η  $\sigma$ , τόσο περισσότερη ταχύτητα εισέρχεται στο σύστημα και το αντίθετο.

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι ότι έχει κλειστή μορφή λύσης. Για να αποδείξουμε αυτό, παρατηρούμε από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$d(e^{\kappa t}r(t)) = e^{\kappa t}dr(t) + r(t)de^{\kappa t} = e^{\kappa t}dr(t) + r(t)\kappa e^{\kappa t}dt$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω την  $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$  θα είναι

$$d(e^{\kappa t}r(t)) = e^{\kappa t}(\kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)) + r(t)\kappa e^{\kappa t}dt = e^{\kappa t}\kappa\theta dt + e^{\kappa t}\sigma dW(t)$$

από όπου προκύπτει άμεσα η ισοδύναμη ολοκληρωτική μορφή

$$e^{\kappa t}r(t) - e^{\kappa \cdot 0}r(0) = \int_0^t e^{\kappa s}\kappa\theta ds + \int_0^t e^{\kappa s}\sigma dW(s) = \theta(e^{\kappa t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\kappa s}dW(s)$$

από όπου τελικά έχουμε

$$r(t) = r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW(s)$$

και επειδή το παραπάνω ολοκλήρωμα Ito είναι martingale με μέση τιμή 0, η αναμενόμενη τιμή του στιγμιαίου επιτοκίου  $r(t)$  θα είναι

$$E_{Q_0}[r(t)] = r_0e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})$$

όπου  $Q_0$  είναι το μέτρο πιθανότητας της αρχικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Η διακύμανση της  $r(t)$  προκύπτει από την ισομετρία Ito:

$$\text{Var}[r(t)] = E\left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW(s)\right)^2\right] = \sigma^2 E\left[\int_0^t e^{-2\kappa(t-s)}ds\right] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$$

Το μοντέλο Vasicek, εκτός από έναν παράγοντα, μπορεί να βασιστεί και σε περισσότερους. Αυτό γίνεται αν λάβουμε υπόψιν μας και άλλους παράγοντες, τους οποίους τους χρησιμοποιούμε με τον ίδιο τρόπο όπως και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο. Δεν θα επεκταθούμε όμως σε πολυπαραγοντικό μοντέλο Vasicek. (π.χ. βλ. N. H. Chan & H. Y. Wong (2006), Rebonato R. (1998 & 2002))

### III.3.1.1. ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Επειδή το μοντέλο εξαρτάται μόνο από έναν παράγοντα, έχει κάποια μειονεκτήματα:

1. Βασίζεται σε ένα μόνο παράγοντα, με αποτέλεσμα η θεωρητική καμπύλη των αποδόσεων να μην συμπίπτει (σχεδόν πάντα) με την καμπύλη της αγοράς.
2. Υπάρχει υψηλή συσχέτιση σε όλο το χρονικό διάστημα των αποδόσεων.
3. Το μοντέλο παράγει αρνητικά επιτόκια.

Το τελευταίο μειονέκτημα αποτελεί πρόβλημα μόνο όταν εξετάζουμε ονομαστικά επιτόκια, που είναι αδύνατον να είναι αρνητικά. Μακροπρόθεσμα όμως, οι αρνητικές τιμές των επιτοκίων δεν είναι τόσο προβληματικές, καθώς η κατανομή των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων είναι στάσιμη και κανονική με μέση τιμή  $\theta$  και διακύμανση  $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$ .

### III.3.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Για την μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου υπάρχουν δύο τρόποι, ο «εμπειρικός» ή «πειραματικός» τρόπος και ο τρόπος που βασίζεται στην υπολογιστική ισχύ που προσφέρουν οι Η/Υ τις τελευταίες δεκαετίες.

Χρησιμοποιώντας τον εμπειρικό τρόπο μελέτης του φαινομένου, παρακολουθούμε την εξέλιξη του και καταγράφουμε τα όποια αποτελέσματα πάrouμε, καθώς επίσης εξάγουμε και κάποια «εμπειρικά» συμπεράσματα.

Η παραπάνω μέθοδος είναι καλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των πραγματοποιήσεων που παρατηρούμε. Αυτό όμως έχει ως αποτέλεσμα να είναι πολυέξοδο και χρονοβόρο. Για το λόγο αυτό, η ισχύς που έχουν σήμερα οι υπολογιστές, μπορούν να αναπαραστήσουν το φαινόμενο δυαδικά. Όταν γίνει σωστή αναπαράσταση του φαινομένου, τότε μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε όσες φορές θέλουμε και να καταγράψουμε τα χαρακτηριστικά του. Όλη αυτή η ιδέα της εικονικής πειραματικής μεθόδου είναι γνωστή ως «προσομοίωση».

Για να μελετήσουμε ένα στοχαστικό φαινόμενο μέσω προσομοίωσης θα χρειαστεί να παράγουμε «τυχαίους αριθμούς». Αυτό χρειάζεται διότι το φαινόμενο που μελετάμε είναι στοχαστικό, και έχει επιρροή διάφορων άγνωστων εκ των προτέρων μεταβλητών. Άρα αρχικά πρέπει να δούμε πως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς, οι οποίοι θα εκφράζουν την εξέλιξη του εικονικού φαινομένου. Οι τυχαίοι αριθμοί είναι τα αποτελέσματα μιας πραγματοποίησης μιας πεπερασμένης ακολουθίας  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, όπου η κάθε μια ακολουθεί αρχικά την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ . Δηλαδή,

$$F_{X_i}(X) = P(X_i \leq x) = x, \quad x \in [0,1].$$

Για να παράγουμε μια μεγάλη ακολουθία τυχαίων αριθμών, είναι αρκετά δύσκολο και για αυτό καταφεύγουμε στην παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών μέσω του Η/Υ. Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί δεν είναι στην πραγματικότητα τυχαίοι αλλά παράγονται μέσα από κάποιες συγκεκριμένες επαναληπτικές διαδικασίες έχοντας πάντα μια αρχική τιμή (συνήθως τυχαία). Αρκετές όμως φορές, οι αριθμοί αυτοί “ξεγελούν” αρκετούς γνωστούς ελέγχους τυχαιότητας.

Η απλούστερη μέθοδος για να παράγουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς μέσω Η/Υ είναι η εξής:

#### Πολλαπλασιαστική Μέθοδος :

Ως αρχική τιμή θέτουμε ένα  $x_0 \in N$  (η οποία καλείται seed). Παίρνουμε είτε μια τιμή που δηλώνουμε εμείς είτε π.χ. από τα εκατοστά του δευτερολέπτου που δείχνει το ρολόι του Η/Υ.

Υπολογίζουμε την νέα τιμή (ψευδοτυχαία) ως εξής:

$$x_1 = ax_0 \bmod m$$

όπου  $a, m$  είναι προεπιλεγμένοι φυσικοί αριθμοί. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο υπολογισμού και έτσι έχουμε:

$$U_i = \frac{x_i}{m} \in \left\{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\right\} \subseteq [0,1]$$

όπου  $U_i$  είναι ένας ψευδοτυχαίος αριθμός στο διάστημα  $[0,1)$ . Στη συνέχεια αν θέλουμε να πάρουμε τυχαίο αριθμό από άλλη κατανομή με σ.κ.  $F$  τότε ο απλούστερος τρόπος είναι να εκτελέσουμε τον μετασχηματισμό (μέθοδος αντιστροφής)

$$X_i = F^{-1}(U_i),$$

όπου  $F^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $F$ . Πράγματι, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι οι νέοι ψευδοτυχαίοι αριθμοί ακολουθούν την σ.κ.  $F$ ,

$$P(X_i \leq x) = P(F^{-1}(U_i) \leq x) = P(U_i \leq F(x)) = F(x), \quad x \in R.$$

Είναι φανερό ότι οι αριθμοί αυτοί δεν είναι καθόλου τυχαίοι, καθώς αν κάνουμε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων ( $\leq m$ ) της παραπάνω διαδικασίας, θα εμφανιστεί ένας  $x_p$  αριθμός που θα έχει ήδη εμφανιστεί και θα έχουμε ξανά την ίδια ακολουθία. Για να μην συμβεί αυτό, θα πρέπει να επιλέξουμε  $a, m$ , όπου για κάθε  $x_0$  το πλήθος των βημάτων μέχρι την επανάληψη της διαδικασίας να είναι αρκετά μεγάλο. Υπάρχουν πολύ πιο σύνθετες και εξελιγμένες μέθοδοι παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ενσωματωμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών του Mathematica θεωρώντας ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που λαμβάνουμε είναι πράγματι τυχαίοι.

### III.3.2.1. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ VASICEK

Η προσομοίωση του μοντέλου του Vasicek και ο υπολογισμός του επιτοκίου μέσω του μοντέλου αυτού γίνεται με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

#### ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

**Βήμα 1:** Ορίζουμε ως  $r_0$  το τρέχον επιτόκιο της αγοράς, ως  $\kappa$  την ταχύτητα με την οποία θα συγκλίνει στο  $\theta$ , ως  $\sigma$  την μεταβλητότητα,  $n$  το πλήθος των προσομοιωμένων τιμών μέχρι το χρόνο  $t$ . Χωρίζουμε το  $[0, t]$  σε  $n$  διαστήματα μήκους  $dt = t/n$ .

Για  $i = 1, 2, \dots, n$ :

**Βήμα 2:** Παράγουμε τυχαίο αριθμό  $e_i \sim N(0,1)$ .

**Βήμα 3:** Θέτουμε  $r_{i+1} = r_i + \kappa(\theta - r_i)dt + \sigma\sqrt{dt} \cdot e_i$ .

Αφού προσομοιώσουμε τα  $r_i$  μπορούμε να πάρουμε και την αντίστοιχη (προσομοιωμένη) παρούσα αξία ενός ομολόγου  $B(0, t)$  με στοχαστικό επιτόκιο  $r(s), s \in [0, t]$  μέσω του

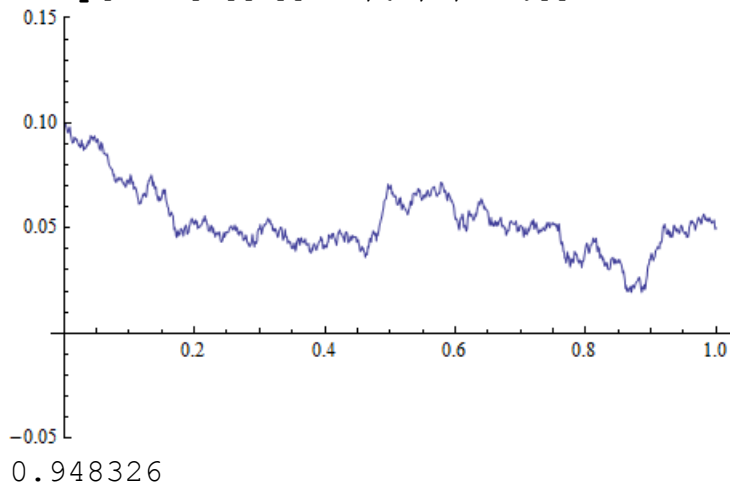
$$B(0, t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) \approx \exp\left(-\sum_{i=1}^n r_i dt\right)$$

Υλοποιούμε μέσω του Mathematica τον παραπάνω αλγόριθμο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων  $\theta, \kappa, \sigma$ , σε συγκεκριμένο χρόνο  $t$  και στο τρέχον επιτόκιο της αγοράς.

```

r0=0.1;t=1;θ=0.05;κ=5;σ=0.05;
n=1000;r=Table[r0,{n+1}];dt=t/n;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ*dt^0.5*Z,{i,1,n}]
rt=Table[{dt*(i-1),r[[i]]},{i,1,n+1}];
ListPlot[rt,Joined→True,PlotRange→{-0.05,0.15}]
B=Exp[-Sum[r[[i]]*dt,{i,2,n+1}]]

```



Από τον παραπάνω αλγόριθμο παίρνουμε την πιθανή διαδρομή που θα έχει το κυμαινόμενο επιτόκιο, καθώς και την εκτίμηση για την τιμή του  $B = 0.948326$  στο χρονικό διάστημα  $[0,1]$ . Παρατηρούμε ότι για μικρή μεταβλητότητα  $\sigma^2 = 0,0025$ , αργεί να συγκλίνει στον μέσο  $\theta = 0,05$ . Άρα αποδεικνύεται και αυτό που αναφέραμε προηγουμένως, ότι όσο μεγαλύτερη είναι η στιγμιαία μεταβλητότητα ( $\sigma^2$ ), τόσο μεγαλύτερη είναι και η τυχαιότητα που εισέρχεται στο σύστημα. Παρακάτω παραθέτουμε και άλλα παραδείγματα με διάφορες τιμές στις παραμέτρους  $\sigma^2$  και  $\theta$ .

Προσομοιώνονται 5 διαδρομές της  $r(t), t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) και  $\theta = 0.05$  (οριακή μέση τιμή),  $\sigma = 0.05$  για διάφορες τιμές του  $\kappa$  προκειμένου να διαφανεί η ταχύτητα σύγκλισης στην οριακή στάσιμη διαδικασία:

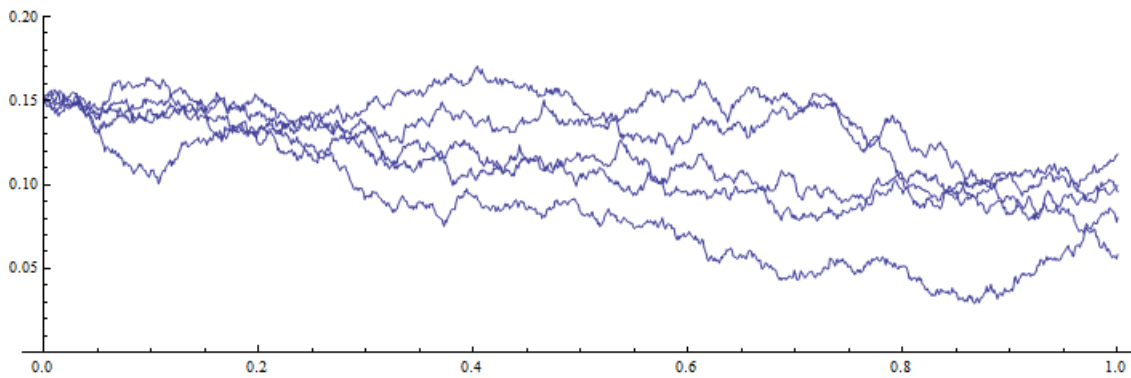
```

r0=0.15;t=1;θ=0.05;κ=1;σ=0.05;
n=1000;
Do[
  r=Table[r0,{n+1}];dt=t/n;
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ*dt^0.5*Z,{i,1,n}];
  rt=Table[{dt*(i-1),r[[i]]},{i,1,n+1}];
  fig[j]=ListPlot[rt,Joined→True,PlotRange→{0,0.20}];
  ,{j,1,5}]
Show[Table[fig[j],{j,1,5}],AspectRatio→0.3]
Print["κ = ", κ, ", σ = ", σ]

```

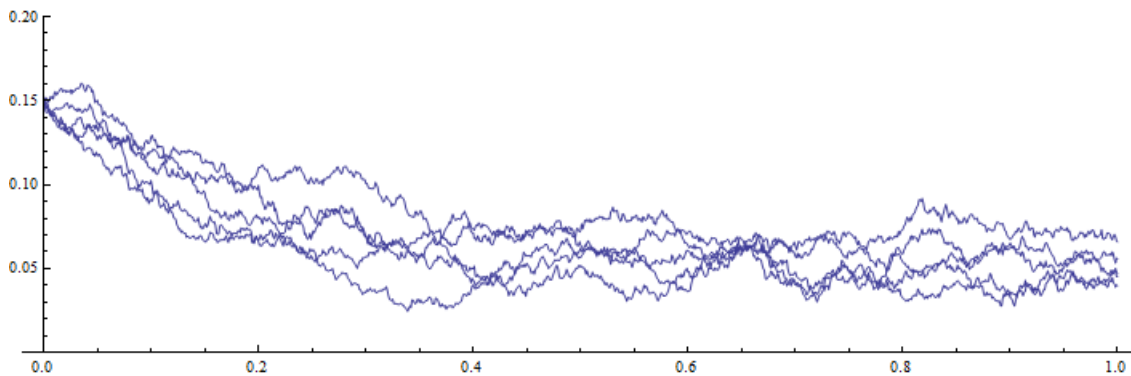


**Για  $\kappa = 1$ ,  $\sigma = 0.05$**



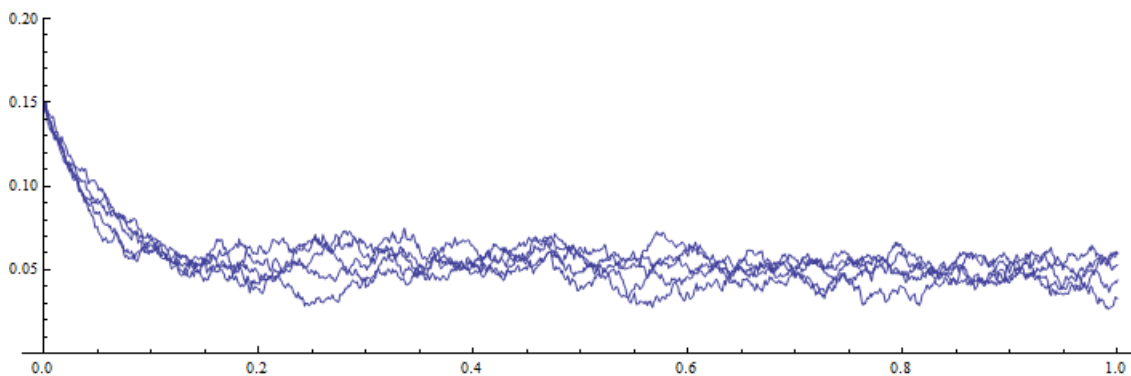
Παρατηρούμε ότι για τις 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  αργεί να επέλθει, καθώς επίσης βλέπουμε ότι υπάρχει και μεγάλη διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών.

**Για  $\kappa = 5$ ,  $\sigma = 0.05$**



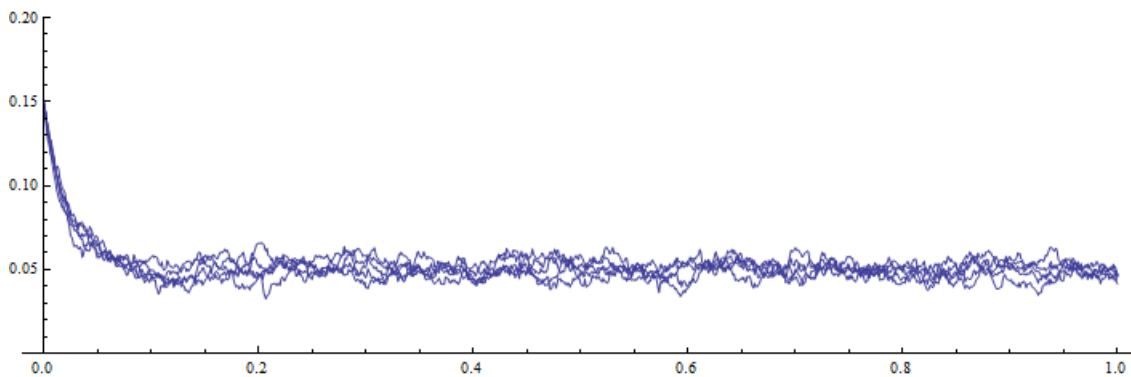
Παρατηρούμε ότι για τις 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται πιο γρήγορα (αφού το  $\kappa$  τώρα παίρνει μεγαλύτερη τιμή και ίση με 5), ενώ βλέπουμε επίσης ότι η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών έχει μειωθεί αισθητά.

**Για  $\kappa = 20$ ,  $\sigma = 0.05$**



Παρατηρούμε τώρα ότι για τις 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται ακόμα πιο γρήγορα και με απότομο τρόπο (αφού το  $\kappa$  τώρα παίρνει τιμή ίση με 20), ενώ βλέπουμε επίσης ότι η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών είναι πολύ μικρή.

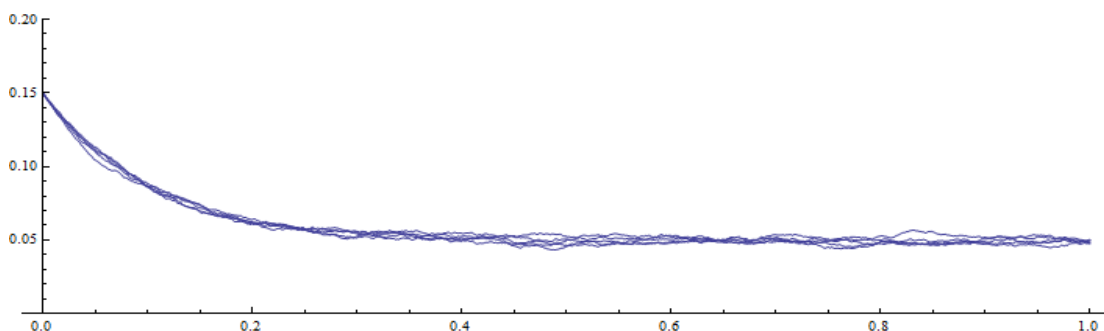
### **Για $\kappa = 50$ , $\sigma = 0.05$**



Τέλος, για τις 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) παρατηρούμε ότι η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται απότομα και άμεσα με πολύ γρήγορο τρόπο (με  $\kappa = 50$ ), ενώ βλέπουμε επίσης ότι η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών έχει μειωθεί στο ελάχιστο.

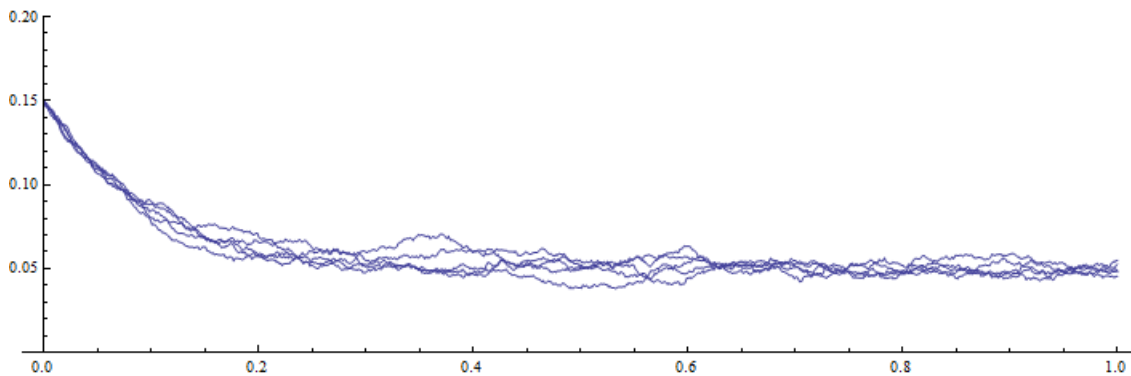
Προσομοιώνονται πάλι 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) και  $\theta = 0.05$  (οριακή μέση τιμή),  $\kappa = 10$  για διάφορες τιμές του  $\sigma$  προκειμένου να διαφανεί η μεταβολή της μεταβλητότητας της διαδικασίας:

### **Για $\kappa = 10$ , $\sigma = 0.01$**



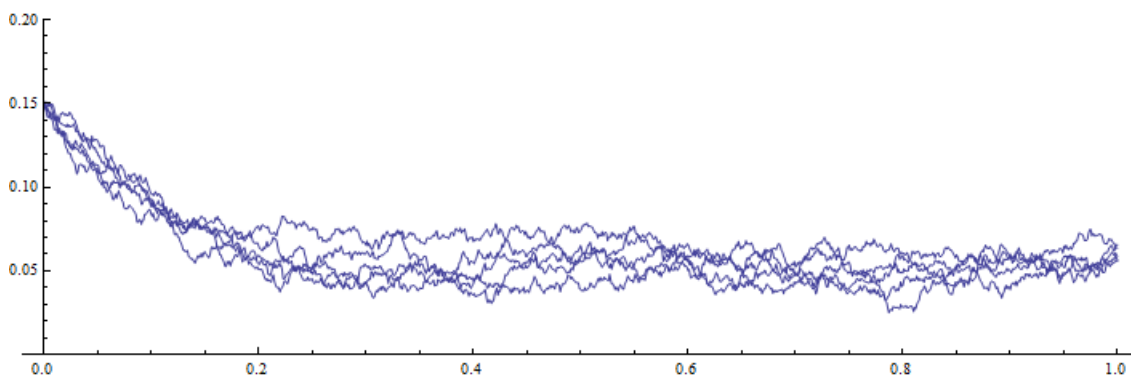
Παρατηρούμε ότι για τις 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται πολύ γρήγορα και απότομα, ενώ βλέπουμε ότι η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών είναι απειροελάχιστη.

**Για  $\kappa = 10$  ,  $\sigma = 0.02$**



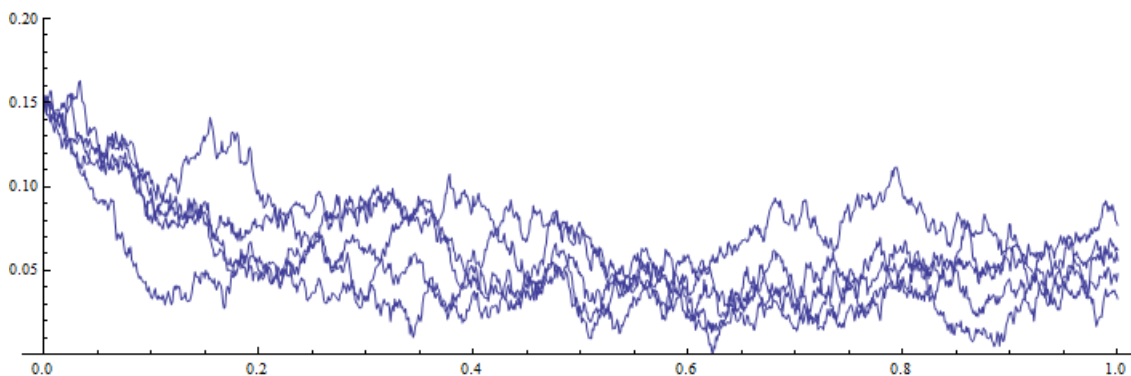
Παρατηρούμε τώρα ότι για τις 5 διαδρομές της  $r(t), t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται πάλι πολύ γρήγορα και απότομα, αλλά η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών αρχίζει και μεγαλώνει.

**Για  $\kappa = 10$  ,  $\sigma = 0.05$**



Πάλι, για τις 5 διαδρομές της  $r(t), t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται γρήγορα και λιγότερο απότομα σε σχέση με πριν, αλλά η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών μεγαλώνει όλο και περισσότερο.

**Για  $\kappa = 10$  ,  $\sigma = 0.1$**



Τέλος, για τις 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) η σύγκλιση στο μέσο  $\theta = 0,05$  επέρχεται πολύ πιο αργά σε σχέση με πριν και η διακύμανση μεταξύ των τιμών των διαδρομών αυτών είναι φανερά πολύ μεγάλη.

### III.3.2.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΕΝΟΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Για να εκτιμήσουμε την παρούσα αξία ενός ομολόγου στο χρόνο  $T$  με επιτόκιο που ακολουθεί το μοντέλο του Vasicek θα πρέπει να εκτιμήσουμε την μέση τιμή

$$B_T = E(B(0, T)) = E\left(\exp\left(-\int_0^T r(s) ds\right)\right)$$

Για το σκοπό αυτό παράγουμε  $m$  το πλήθος διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0, t]$  όπως στην προηγούμενη παράγραφο :

$$\begin{aligned} & r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \dots, r_n^{(1)} \\ & r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, \dots, r_n^{(2)} \\ & \dots \\ & r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_n^{(m)} \end{aligned}$$

και για κάθε μια από αυτές υπολογίζουμε την προσομοιωμένη τιμή του ομολόγου. Εκτιμούμε το  $B_T$  από το μέσο όρο των προσομοιωμένων αυτών τιμών (Monte Carlo estimation):

$$B_T = E\left(\exp\left(-\int_0^T r(s) ds\right)\right) \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \exp\left(-\sum_{i=1}^n r_i^{(j)} dt\right)$$

Στην συνέχεια παραθέτουμε τον αλγόριθμο για την εκτίμηση της τιμής του B στο χρονικό διάστημα  $[0,1]$  με  $\theta = 0.05$  και  $\sigma = 0.4$  και μέσο  $r = \theta = 0.05$  (ξεκινώντας και από την ίδια τιμή,  $r(0) = 0.05$ ).

```
r0=0.05;t=1;θ=0.05;k=1;σ=0.4;
n=100;m=10000;B=Table[0,{m}];dt=t/n;
Do[s=0;r=Table[r0,{n+1}];
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    r[[i+1]]=r[[i]]+k(θ-r[[i]])*dt+σ*dt^0.5*Z;
    s=s+r[[i+1]]*dt,{i,1,n}];
  B[[j]]=Exp[-s],{j,1,m}];
Print["Bond price (Vasicek model) =",Mean[B],", (Constant r) =",Exp[-
θ*t]]

Bond price (Vasicek model) =0.965729, (Constant r) =0.951229
```

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή του B στο χρονικό διάστημα  $[0,1]$  είναι 0,965729.

Στη συνέχεια δίνεται ένας ενδεικτικός πίνακας τιμών της  $B_T$  σε σύγκριση με την τιμή  $e^{-rt}$  που ισχύει για σταθερό  $r = \theta$ , για διάφορες τιμές του  $\sigma$  ( $\theta = 0.05, t = 1, \kappa = 1$ ).

$\sigma$	Vasicek model	Constant r	Διαφορά
1	1.03267	0.951229	0,0814410
0.75	1.00626	0.951229	0,0550310
0.5	0.971185	0.951229	0,0199560
0.25	0.956573	0.951229	0,0053440
0.1	0.951789	0.951229	0,0005600

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το  $\sigma$ , αυξάνεται και η τιμή του ομολόγου, ενώ όσο μικραίνει το  $\sigma$ , η τιμή του μοντέλου του Vasicek τείνει να είναι ίδια με του κλασικού μοντέλου. (π.χ. βλ. Η. Τ. Huynh, V. S. Lai & I. Soumare (2008))

### III.3.2.3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους  $\kappa, \theta$  και  $\sigma$  του μοντέλου Vasicek, εφαρμόζουμε την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Οι τιμές των παραμέτρων εκτιμώνται έτσι ώστε το αποτέλεσμα να έχει τη μέγιστη πιθανοφάνεια.

Από παραπάνω (ξεκινώντας τώρα από χρόνο  $t_{i-1}$  έως χρόνο  $t_i$ ) έχουμε ότι

$$r(t_i) = r(t_{i-1})e^{-\kappa\Delta t_i} + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t_i}) + \sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\kappa(t_i-u)} dW(u)$$

όπου  $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ , και άρα αν θέσουμε  $Y_i = r(t_i) - r(t_{i-1})e^{-\kappa\Delta t_i} - \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t_i})$  προκύπτει από την παραπάνω ότι

$$Y_i = \sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\kappa(t_i-u)} dW(u) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t_i})\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

και οι τ.μ.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  θα είναι ανεξάρτητες λόγω των ανεξάρτητων προσανξήσεων της  $W$ . Η συνάρτηση του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας των  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  τώρα είναι η εξής (θεωρώντας για απλότητα ίσες χρονικές προσανξήσεις,  $\Delta t_i = \Delta t, i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$l(\kappa, \theta, \sigma^2) = \ln \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) = \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{-\frac{y_i^2}{2v^2}} = -\frac{n}{2} \ln 2\pi v^2 - \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{2v^2}$$

όπου  $v^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})$ . Επομένως, αντικαθιστώντας τα  $y_i$  στην παραπάνω και συμβολίζοντας  $r(t_i) = r_i$  θα έχουμε

$$l(\alpha, \beta, v^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi v^2 - \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - \alpha r_{i-1} - \beta)^2}{2v^2}$$

όπου για απλοποίηση έχουμε κάνει την αναπαραμετροποίηση

$$\alpha = e^{-\kappa\Delta t}, \quad \beta = \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}), \quad v^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})$$

Αν πάρουμε τις μερικές παραγώγους της παραπάνω  $l(\alpha, \beta, v^2)$  ως προς τις τρεις παραμέτρους και τις θέσουμε ίσες με το 0 προκύπτει το ακόλουθο σύστημα

$$\frac{\partial}{\partial v^2} l(\alpha, \beta, v^2) = 0 \Leftrightarrow v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \alpha r_{i-1} - \beta)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta, v^2) = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \alpha r_{i-1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta, v^2) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_{i-1} r_i - \alpha \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - \beta \sum_{i=1}^n r_{i-1} = 0$$

αντικαθιστώντας την 2<sup>η</sup> στην 3<sup>η</sup> θα είναι και,

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1} - n \sum_{i=1}^n r_{i-1} r_i}{(\sum_{i=1}^n r_{i-1})^2 - n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2}$$

### III.3.2.4. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ VASICEK ΑΠΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΩΝ

Παρακάτω παραθέτουμε τον αλγόριθμο της εκτίμησης των παραμέτρων που βρήκαμε μέσω της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας (μέσω του Mathematica). Αρχικά παράγουμε τιμές του  $r_i$  με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων  $\kappa, \theta, \sigma$ , και στη συνέχεια εκτιμάμε τις παραμέτρους  $\alpha, \beta$  και  $v^2$  από τα  $r_i, i = 1, 2, \dots, n$ , τις οποίες μετασχηματίζουμε για να πάρουμε τις εκτιμήσεις των αρχικών παραμέτρων  $\kappa, \theta, \sigma$ . Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε αν η εκτίμηση των παραμέτρων μέσω της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ικανοποιητική.

```

r0=0.05;t=1;θ=0.05;κ=5;σ=0.1;
n=1000;r=Table[r0,{n+1}];dt=t/n;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ*dt^0.5*Z,{i,1,n}]

α=Exp[-κ*dt];β=θ(1-Exp[-κ*dt]);v2=σ^2/(2κ)*(1-Exp[-2κ*dt]);
Print[N[α]," ",β," ",v2]
estα=(Sum[r[[i]],{i,2,n+1}]*Sum[r[[i-1]],{i,2,n+1}]-n*Sum[r[[i]]*r[[i-1]],{i,2,n+1}])/(Sum[r[[i-1]],{i,2,n+1}]^2-n*Sum[r[[i-1]]^2,{i,2,n+1}]);
estβ=Sum[r[[i]]-estα*r[[i-1]],{i,2,n+1}]/n;
estv2=Sum[(r[[i]]-estα*r[[i-1]]-estβ)^2,{i,2,n+1}]/n;
Print[N[estα]," ",estβ," ",estv2]
estκ=-Log[estα]/dt
estθ=estβ/(1-estα)
estσ=(2*estκ*estv2/(1-estα^2))^(1/2)

0.995012 0.000249376 9.95017*10^-6
0.99015 0.000289548 0.0000102473
9.89925
0.0293945
0.10173

```

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία  $m = 10000$  φορές για να ελέγξουμε την αποτελεσματικότητα των εκτιμητριών των παραμέτρων

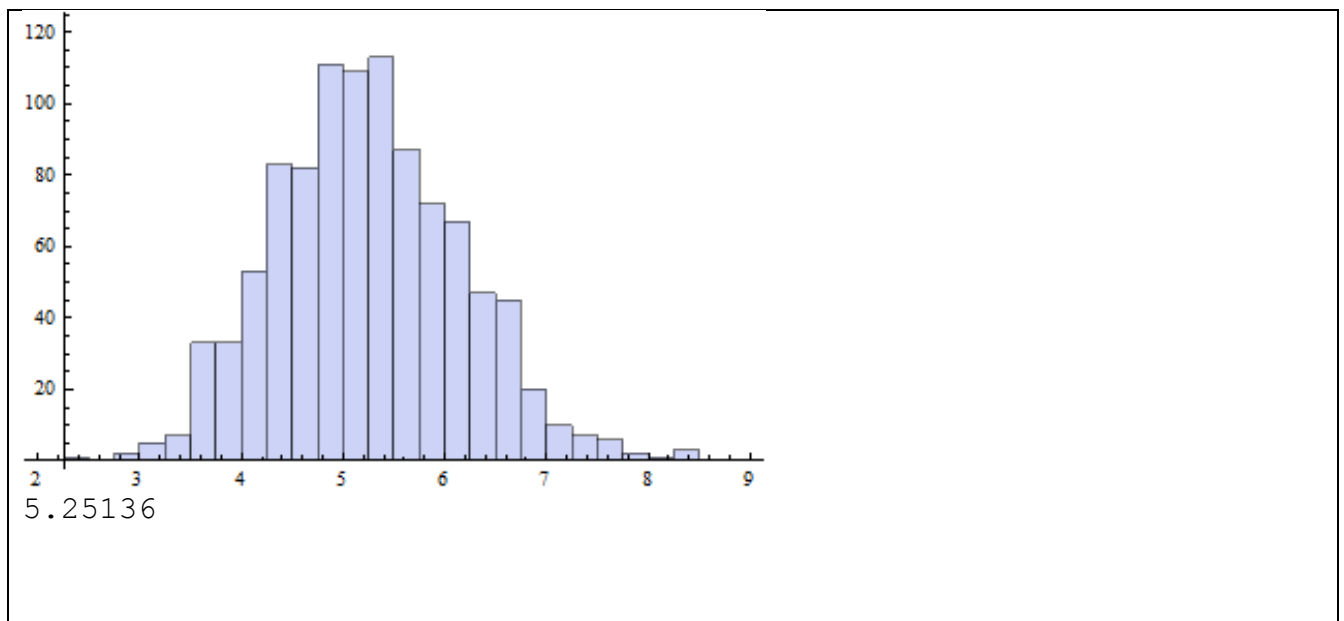
```

r0=0.5;t=1;θ=0.05;κ=5;σ=0.1;
n=1000;r=Table[r0,{n+1}];dt=t/n;
m=10000;estκ=Table[0,{m}];estθ=Table[0,{m}];estσ=Table[0,{m}];
Do[
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ*dt^0.5*Z,{i,1,n}];

  α=Exp[-κ*dt];β=θ(1-Exp[-κ*dt]);v2=σ^2/(2κ)*(1-Exp[-2κ*dt]);
  estα=(Sum[r[[i]],{i,2,n+1}]*Sum[r[[i-1]],{i,2,n+1}]-n*Sum[r[[i]]*r[[i-1]],{i,2,n+1}])/(Sum[r[[i-1]],{i,2,n+1}]^2-n*Sum[r[[i-1]]^2,{i,2,n+1}]);
  estβ=Sum[r[[i]]-estα*r[[i-1]],{i,2,n+1}]/n;
  estv2=Sum[(r[[i]]-estα*r[[i-1]]-estβ)^2,{i,2,n+1}]/n;
  estκ[[j]]=-Log[estα]/dt;
  estθ[[j]]=estβ/(1-estα);
  estσ[[j]]=(2*estκ[[j]]*estv2/(1-estα^2))^(1/2);
  ,{j,1,m}]
Histogram[estκ,{2,9,0.25}]
Mean[estκ]
Histogram[estθ,{-0.02,0.17,0.005}]
Mean[estθ]
Histogram[estσ,{0.097,0.103,0.0002}]
Mean[estσ]

```

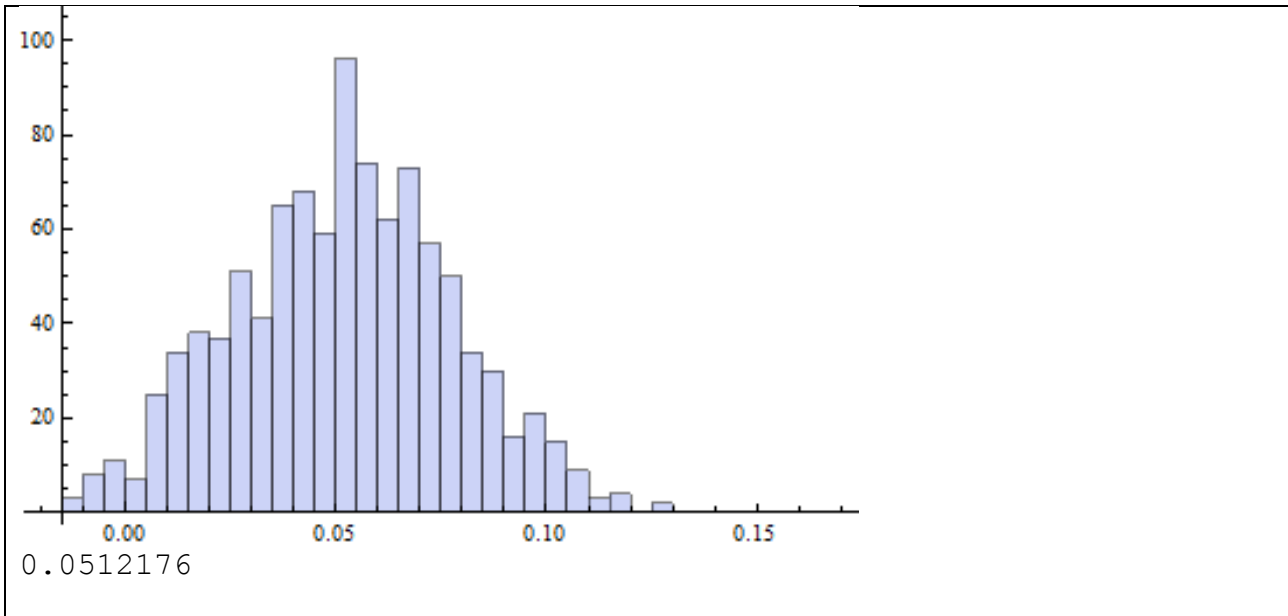
Εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του  $\hat{\kappa}$  και ιστόγραμμα της κατανομής του.



Από τα αποτελέσματα που παίρνουμε μέσω της προσομοίωσης στο Mathematica, παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του  $\hat{\kappa}$  αποκλίνει ελάχιστα από την πραγματική τιμή του  $\kappa$  ( $\kappa =$

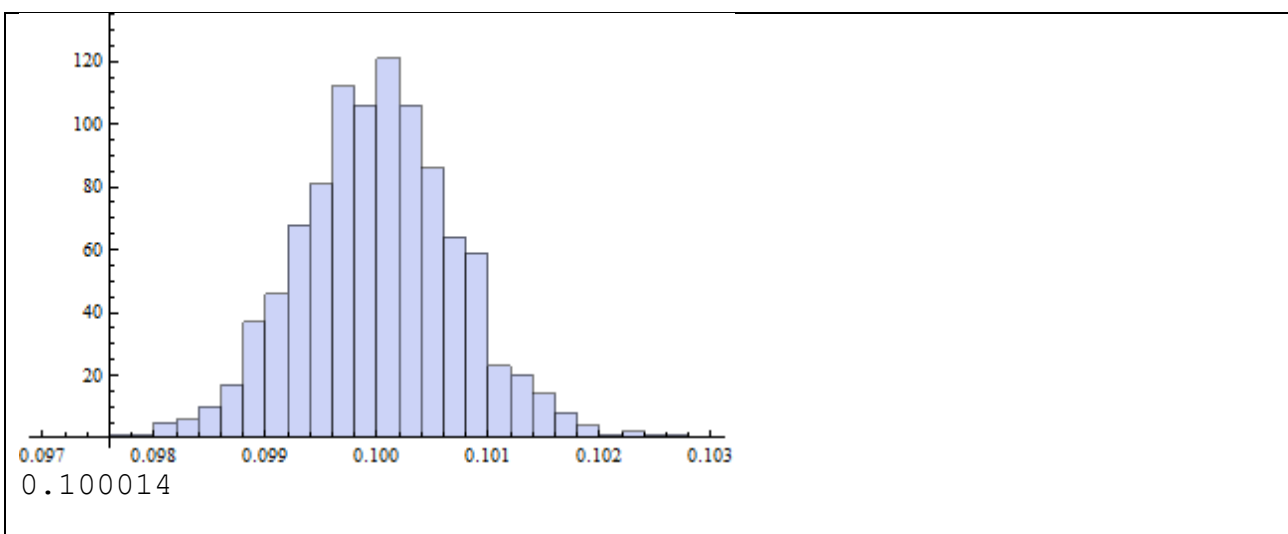
5). Επίσης, οι τιμές που μπορεί να λαμβάνει το  $\kappa$  ανήκουν διάστημα  $[3,8]$  και το  $\kappa$  τείνει να ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του  $\hat{\theta}$  & ιστόγραμμα της κατανομής του.



Από την προσομοίωση του  $\hat{\theta}$  έχουμε ως αποτέλεσμα ότι η εκτίμηση την αναμενόμενης τιμής του  $\hat{\theta}$  είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή 0,05. Επίσης, το  $\hat{\theta}$  λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $[0, 0.12]$  και ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή.

Εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του  $\hat{\sigma}$  & ιστόγραμμα της κατανομής του.



Τέλος, μέσω της προσομοίωσης για το  $\hat{\sigma}$  παρατηρούμε ότι η εκτίμηση την αναμενόμενης τιμής του  $\hat{\sigma}$  είναι σχεδόν ίδια με την πραγματική τιμή του  $\sigma$  ( $\sigma=0,1$ ). Το διάστημα που λαμβάνει τιμές το  $\hat{\sigma}$



είναι το διάστημα  $[0.097, 0.103]$  και είναι φανερό ότι το  $\hat{\sigma}$  ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή.

### III.3.2.5. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΥΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VASICEK

Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς δίνεται από τον εξής τύπο:

$$Call = E[B(0, T) \max(S_T - K, 0)]$$

Δυο χαρακτηριστικά στοχαστικού επιτοκίου είναι:

1. Το  $B(0, T)$  πρέπει να υπολογίζεται βάση ενός στοχαστικού επιτοκιακού μοντέλου.
2. Η κίνηση του επιτοκίου μπορεί να επηρεάσει την τιμή της μετοχής.

Το πρώτο χαρακτηριστικό μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον υπολογισμό του  $B(0, T)$ . Για το δεύτερο χαρακτηριστικό, βασιζόμαστε στο μοντέλο των Black-Scholes. Η κίνηση της μετοχής και η κίνηση των επιτοκίων δίνεται αντίστοιχα παρακάτω:

$$\begin{aligned} dS_t &= r(t)S_t dt + \sigma_1 S_t dW_1(t) \\ dr(t) &= \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_s dW_2(t) \end{aligned}$$

όπου  $(W_1(t), W_2(t)), t \geq 0$  είναι μια τυπική διδιάστατη κίνηση Brown με συντελεστή συσχέτισης  $\rho$  (δηλαδή οι προσανξήσεις της σε διάστημα μήκους  $\Delta t$  ακολουθούν μια διδιάστατη κανονική με μέσες τιμές 0, διασπορές  $\Delta t$  και συνδιακύμανση  $\Delta t \cdot \rho$ ). Ή ισοδύναμα, διακριτοποιώντας το χρόνο,

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + r(t)S_t \Delta t + \sigma_1 S_t e_1 \sqrt{\Delta t} \\ r(t+1) &= r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma_s e_2 \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης της μετοχής και του επιτοκίου είναι  $\rho$  και επομένως:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Μέσω των λογισμικών, δημιουργούνται συνήθως ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Για την δημιουργία συσχετισμένων τυχαίων μεταβλητών, κάνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό των μεταβλητών:

$$\begin{aligned} z_1 &= e_1 \\ z_2 &= \frac{e_2 - \rho e_1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \end{aligned}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_1) &= 1 \\ \text{Var}(z_2) &= 1 \\ \text{Cov}(z_1, z_2) &= 0 \end{aligned}$$

άρα οι  $z_1, z_2$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από κανονική κατανομή. Δημιουργούμε τις  $(e_1, e_2)$  μέσω της ακόλουθης διαδικασίας:

Βήμα 1: Δημιουργούμε  $(z_1, z_2) \sim N(0,1)$  i.i.d.

Βήμα 2: Θέτουμε  $e_1 = z_1$  και  $e_2 = z_2\sqrt{1-p^2} + pz_1$

Αντικαθιστώντας τα  $e_1$  και  $e_2$  στις παραπάνω συναρτήσεις των μετοχών και των επιτοκίων δημιουργούμε μελλοντικές πιθανές τιμές των περιουσιακών στοιχείων και των επιτοκίων.

Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς επιτυγχάνεται με την μέθοδο Monte Carlo ως:

$$c(s, 0) = B(0, T) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max(S_j(T) - K, 0)$$

όπου  $B(0, T)$  είναι η Vasicek τιμή του ομολόγου και  $S_j(T)$  είναι η τελική τιμή των περιουσιακών στοιχείων για το  $j$ -οστό μονοπάτι. (π.χ. βλ. A. Gupta (2013), H. T. Huynh, V. S. Lai & I. Soumare (2008), N. H. Chan & H. Y. Wong (2006))

Μέσω του Mathematica προσομοιώνουμε την τιμή δικαιώματος αγοράς του μοντέλου Vasicek με την χρήση του μοντέλου Black & Scholes και με την χρήση του μοντέλου Vasicek. Επομένως έχουμε:

```
r0=0.05;t=1;θ=0.05;κ=1;σ1=0.4;σ2=0.4;p=0.5;
n=100;m=10000;dt=t/n;
S0=100;K=100;S=Table[S0,{n+1}];S2=Table[S0,{n+1}];
call=Table[0,{m}];call2=Table[0,{m}];
Do[s=0;r=Table[r0,{n+1}];
  Do[Z1=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    Z2=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    e1=Z1;e2=p*Z1+(1-p^2)^0.5*Z2;
    S[[i+1]]=S[[i]]+r[[i]]*S[[i]]*dt+σ1*S[[i]]*e1*dt^0.5;
    S2[[i+1]]=S2[[i]]+θ*S2[[i]]*dt+σ1*S2[[i]]*e1*dt^0.5;
    r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ2*e2*dt^0.5;
    s=s+r[[i+1]]*dt,{i,1,n}];
  call[[j]]=Exp[-s]*Max[S[[n+1]]-K,0];
  call2[[j]]=Exp[-θ*t]*Max[S2[[n+1]]-K,0];,{j,1,m}];
Print["Call price (Vasicek model) =",Mean[call]]
Print["Call price (Classical model) =",Mean[call2]]

Call price (Classical model) =18.9239
Call price (Vasicek model) =21.9155

omega=(θ*t+σ1^2*t/2-Log[K/S0])/(σ1*t^0.5);
C0=S0*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K*Exp[-θ*t]*CDF[NormalDistri-
bution[0,1],omega-σ1*t^0.5]
```

18.023

Παρατηρούμε ότι η τιμή που δίνει το μοντέλο Vasicek (21.002) είναι μεγαλύτερη από την τιμή που παίρνουμε με την χρήση του μοντέλου Black & Scholes (18.3266), χωρίς όμως να έχουμε πολύ μεγάλη απόκλιση.

Στη συνέχεια δίνεται ένας ενδεικτικός πίνακας τιμών του δικαιώματος αγοράς (υπό το μοντέλο επιτοκίων του Vasicek model) σε σύγκριση με την τιμή του ίδιου δικαιώματος (υπό το κλασσικό μοντέλο) που ισχύει για σταθερό  $r = \theta$ , για διάφορες τιμές του  $\sigma_2$  ( $\theta = 0.05, t = 1, \kappa = 1$ ).

$\sigma_2$	Vasicek model	Classical model	Διαφορές
1	25.4448	18.0937	7,3511
0.75	23.4521	17.7435	5,7086
0.5	22.1631	18.2954	3,8677
0.25	20.1808	18.3738	1,8070
0.1	19.3807	18.6407	0,7400

Τέλος, δίνεται ο ακόλουθος πίνακας σύγκρισης των τιμών των Call price (Vasicek model) και Call price (Classical model), στον οποίον  $r_0 = 0.02$  και οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν ίδιες, για τις διάφορες τιμές του  $\sigma_2$ .

$\sigma_2$	Vasicek model	Classical model	Διαφορές
1	24.5026	17.8796	6,6230
0.75	22.6413	17.7629	4,8784
0.5	20.3840	17.3375	3,0465
0.25	18.7632	17.8369	0,9263
0.1	17.6201	17.7121	-0,0920

### III.3.3. ΜΟΝΤΕΛΟ COX-INGERSOLL-ROSS

Το μοντέλο Cox-Ingersoll-Ross (CIR model) περιγράφει την εξέλιξη των επιτοκίων, όπως και το μοντέλο Vasicek. Και αυτό το μοντέλο βασίζεται σε έναν μόνο παράγοντα, τον κίνδυνο της αγοράς. Είναι χρήσιμο για την εκτίμηση των παραγώγων του επιτοκίου και είναι μια επέκταση του μοντέλου Vasicek. Η стоχαστική διαδικασία που ακολουθεί το στιγμιαίο επιτόκιο μοιάζει με την стоχαστική διαφορική εξίσωση του Vasicek και είναι:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

όπου:

- $W(t)$ : διαδικασία Wiener, η οποία μοντελοποιεί τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου της αγοράς.
- $\kappa$ : δηλώνει το πόσο γρήγορα η παράμετρος  $\theta$  τείνει στον μέσο.
- $\sigma$ : η μεταβλητότητα.
- $\kappa(\theta - r(t))$ : παράγοντας τάσης που δηλώνει ότι οι τιμές του επιτοκίου θα επιστρέψουν στην μέση τιμή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι η τιμή του επιτοκίου κινείται στην κατεύθυνση του  $\theta$  με ταχύτητα  $\kappa$ .

Θεωρούμε το διάνυσμα  $\underline{\theta}$  με παραμέτρους  $\kappa, \theta, \sigma$  δηλαδή:

$$\underline{\theta} = (\kappa, \theta, \sigma)$$

Ο παράγοντας της τυπικής απόκλισης είναι ο εξής:

$$\sigma\sqrt{r(t)}$$

Αυτός ο παράγοντας μας εξασφαλίζει ότι δεν θα έχουμε αρνητικά επιτόκια, για κάθε  $\kappa, \theta > 0$ . Η συνθήκη που ισχύει είναι η εξής:

$$2\kappa\theta > \sigma^2$$

Ο παράγοντας  $\sigma^2(r(t), \theta) = r(t)\sigma^2$  είναι η συνάρτηση του επιτοκίου που εξασφαλίζει πως η διαδικασία παραμένει θετική. Δηλαδή, όταν τη τιμή του επιτοκίου είναι κοντά στο μηδέν, τότε η τυπική απόκλιση είναι πολύ μικρή με αποτέλεσμα να προφυλάσσει το σύστημα από τυχόν μεγάλες μεταβολές του επιτοκίου. Άρα, όταν το  $r(t) \rightarrow 0$ , η εξέλιξή του καθοδηγείται από την τάση, που ωθεί το επιτόκιο προς τα πάνω, δηλαδή στο σημείο ισορροπίας.

### III.3.3.1. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ COX-INGERSOLL-ROSS

Η προσομοίωση του μοντέλου των Cox- Ingersoll-Ross και ο υπολογισμός του επιτοκίου μέσω του μοντέλου αυτού γίνεται με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

#### ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

**Βήμα 1:** Ορίζουμε ως  $r_0$  το τρέχον επιτόκιο της αγοράς, ως  $\kappa$  την ταχύτητα με την οποία θα συγκλίνει στο  $\theta$ , ως  $\sigma$  την μεταβλητότητα,  $n$  το πλήθος των προσομοιωμένων τιμών μέχρι το χρόνο  $t$ . Χωρίζουμε το  $[0, t]$  σε  $n$  διαστήματα μήκους  $dt = t/n$ .

Για  $i = 1, 2, \dots, n$ :

**Βήμα 2:** Παράγουμε τυχαίο αριθμό  $e_i \sim N(0,1)$ .

**Βήμα 3:** Θέτουμε  $r_{i+1} = r_i + \kappa(\theta - r_i)dt + \sigma\sqrt{r_i dt} \cdot e_i$ .

Αφού προσομοιώσουμε τα  $r_i$  μπορούμε όμοια με την περίπτωση του μοντέλου του Vasicek να πάρουμε και την αντίστοιχη (προσομοιωμένη) παρούσα αξία ενός ομολόγου  $B(0, t)$  με στοχαστικό επιτόκιο  $r(s), s \in [0, t]$  μέσω του

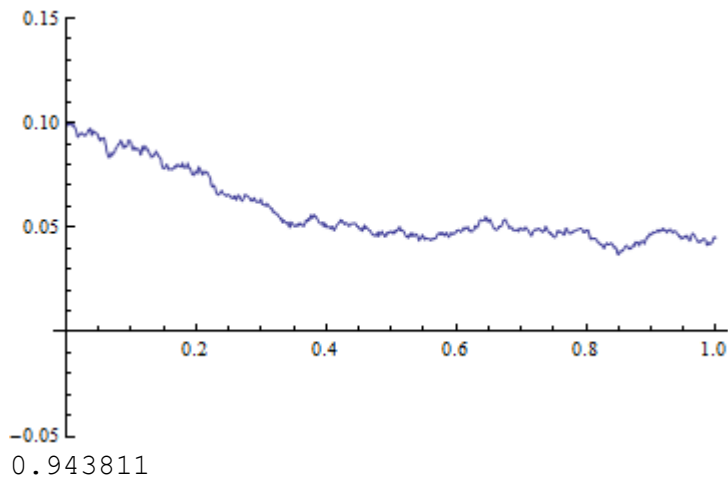
$$B(0, t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) \approx \exp\left(-\sum_{i=1}^n r_i dt\right)$$

Υλοποιούμε μέσω του Mathematica τον παραπάνω αλγόριθμο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων  $\theta, \kappa, \sigma$ , σε συγκεκριμένο χρόνο  $t$  και στο τρέχον επιτόκιο της αγοράς.

```

r0=0.1;t=1;θ=0.05;κ=5;σ=0.1;
n=1000;r=Table[r0,{n+1}];dt=t/n;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ*(r[[i]]*dt)^0.5*Z,{i,1,n}]
rt=Table[{dt*(i-1),r[[i]]},{i,1,n+1}];
ListPlot[rt,Joined->True,PlotRange->{-0.05,0.15}]
B=Exp[-Sum[r[[i]]*dt,{i,2,n+1}]]

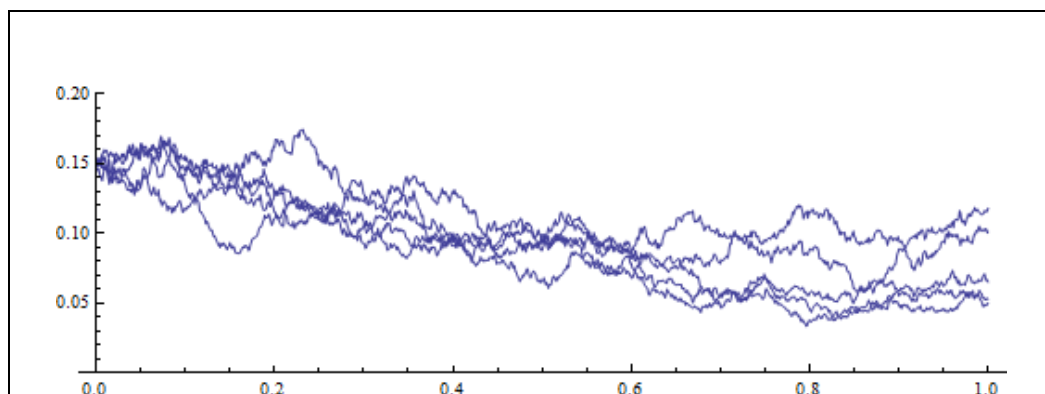
```



Από τον παραπάνω αλγόριθμο παίρνουμε την πιθανή διαδρομή που θα έχει το κυμαινόμενο επιτόκιο, καθώς και την εκτίμηση για την τιμή του  $B = 0.943811$  στο χρονικό διάστημα  $[0,1]$ . Παρατηρούμε ότι για μεταβλητότητα  $\sigma^2 = 0,1$ , αργά να συγκλίνει στον μέσο  $\theta = 0,05$ . Παρακάτω παραθέτουμε και άλλα παραδείγματα με διάφορες τιμές στις παραμέτρους  $\sigma^2$  και  $\kappa$ .

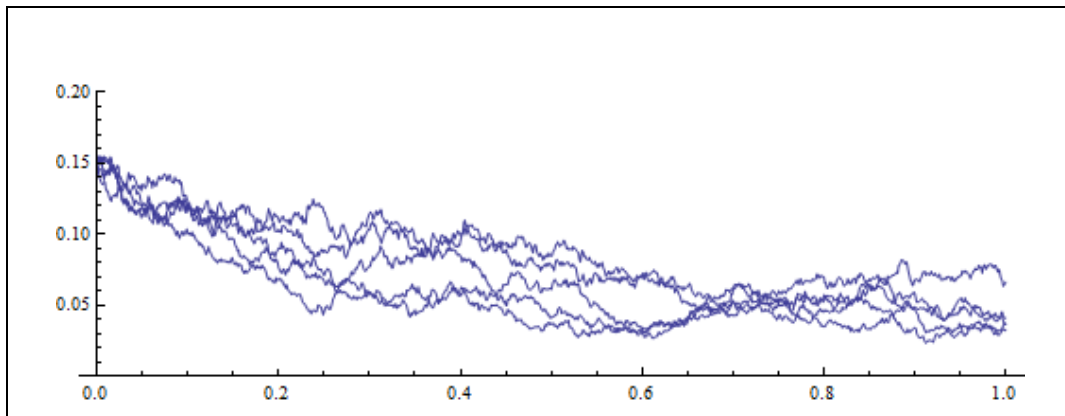
Προσομοιώνονται 5 διαδρομές της  $r(t)$ ,  $t \in [0,1]$  για  $r(0) = 0.15$  (αρχική τιμή) και  $\theta = 0.05$  (οριακή μέση τιμή),  $\sigma = 0.05$  για διάφορες τιμές του  $\kappa$  προκειμένου να διαφανεί η ταχύτητα σύγκλισης στην οριακή στάσιμη διαδικασία:

**Για  $\kappa = 1$ ,  $\sigma = 0.2$**



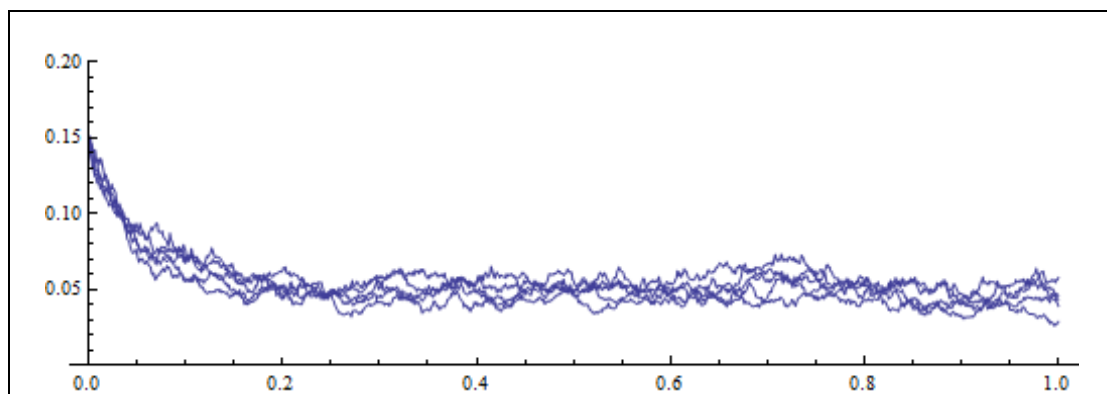
Παρατηρούμε ότι και οι 5 διαδρομές  $r(t)$  κινούνται με τον ίδιο τρόπο, ενώ βλέπουμε ότι η διακύμανση παραμένει μικρή και σταθερή και στις 5 διαδρομές και τείνουν σταδιακά να προσεγγίσουν την μέση τιμή  $\theta = 0,05$ .

**Για  $\kappa = 5$ ,  $\sigma = 0.2$**



Παρατηρούμε ότι και οι 5 διαδρομές  $r(t)$  κινούνται με τον ίδιο τρόπο πάλι, η διακύμανση παραμένει μικρή και σταθερή και στις 5 διαδρομές, ενώ προσπαθούν να προσεγγίσουν την μέση τιμή  $\theta = 0,05$  με ελάχιστα πιο γρήγορο ρυθμό σε σχέση με το προηγούμενο γράφημα.

**Για  $\kappa = 20$ ,  $\sigma = 0.2$**



Ομοίως, και για  $\kappa = 20$  οι 5 διαδρομές  $r(t)$  κινούνται με τον ίδιο τρόπο πάλι, η διακύμανση παραμένει μικρή και σταθερή και στις 5 διαδρομές, ενώ προσπαθούν να προσεγγίσουν την μέση τιμή  $\theta = 0,05$  με πολύ πιο γρήγορο και εμφανή ρυθμό σε σχέση με τα προηγούμενα γραφήματα.

Αν τώρα ελαττώσουμε το  $\sigma$  τότε θα πάρουμε τα ίδια γραφήματα με μικρότερη όμως διακύμανση.

### III.3.3.2. ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ COX-INGERSOLL-ROSS (CIR)

Για να εκτιμήσουμε την μέγιστη πιθανοφάνεια του  $\underline{\theta} = (\kappa, \theta, \sigma)$ , χρειαζόμαστε τις μετασχηματισμένες πυκνότητες. Η μετατοπισμένη πυκνότητα της CIR έχει κλειστή μορφή. Επομένως, για  $r(t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ , η πυκνότητα της ποσότητας  $r(t + \Delta t) = r_{t+\Delta t}$  τον χρόνο  $t + \Delta t$  είναι η εξής:

$$p(r_{t+\Delta t} | r_t; \underline{\theta}, \Delta t) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv})$$

όπου:

- $c = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1-e^{-\kappa\Delta t})}$
- $u = c r(t) e^{-\kappa\Delta t}$
- $v = c r(t + \Delta t)$
- $q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$
- $I_q$ : τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξης  $q$ .

Άρα η συνάρτηση πυκνότητας που προκύπτει είναι:

$$g(s(t + \Delta t) | s(t); \underline{\theta}, \Delta t) = g(2a(t + \Delta t)/2cr(t); \underline{\theta}, \Delta t) = \frac{1}{2c} p(r(t + \Delta t) | r(t); \underline{\theta}, \Delta t)$$

η οποία είναι μια μη κεντρική  $X^2$  κατανομή με  $2q + 2$  βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας  $2u$ . (π.χ. βλ. N. H.Chan & H. Y. Wong (2006))

### III.3.3.3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Μέσω των χρονολογικών σειρών των επιτοκίων, με  $N$  έστω το πλήθος παρατηρήσεις, εκτιμάμε τις παραμέτρους. Επίσης,  $\Delta t$  έστω το χρονικό διάστημα από την μια παρατήρηση στην αμέσως επόμενη. Η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για αυτές τις χρονολογικές σειρές είναι η εξής:

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{N-1} p(r_{t_{i+1}} | r_{t_i}; \underline{\theta}, \Delta t)$$

Λογαριθμίζουμε την  $L(\underline{\theta})$  και έχουμε:

$$\ln L(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln p(r_{t_{i+1}} | r_{t_i}; \underline{\theta}, \Delta t)$$

Άρα η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας της διαδικασίας CIR είναι η εξής:

$$\ln L(\underline{\theta}) = (N - 1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ -u_{t_i} - v_{t_{i+1}} + 0.5 q \ln \left( \frac{v_{t_{i+1}}}{u_{t_i}} \right) + \ln [I_q(2\sqrt{u_{t_i} v_{t_{i+1}}})] \right\}$$

όπου  $u_{t_i} = c r(t_i) e^{-\kappa \Delta t}$ ,  $v_{t_{i+1}} = c r(t_{i+1})$ . Αν μεγιστοποιήσουμε την παραπάνω συνάρτηση ως προς το  $\underline{\theta}$  έχουμε:

$$\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = \arg \max \ln L(\underline{\theta}).$$

Η παραπάνω συνάρτηση μεγιστοποιείται μέσω κατάλληλης επαναληπτικής μεθόδου της αριθμητικής ανάλυσης. Οι παράμετροι μπορούν επίσης να εκτιμηθούν μέσω κατάλληλης εφαρμογής της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

### III.3.3.4. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΥΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ CIR

Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς υπό το μοντέλο CIR επιτυγχάνεται με την μέθοδο Monte Carlo ως:

$$c(s, 0) = B(0, T) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max(S_j(T) - K, 0)$$

όπου  $B(0, T)$  είναι η CIR τιμή του ομολόγου και  $S_j(T)$  είναι η τελική τιμή των περιουσιακών στοιχείων για το j-οστό μονοπάτι.

Η διαδικασία εύρεσης της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς υπό το μοντέλο CIR είναι όμοια με την διαδικασία υπό το μοντέλο Vasicek.

Μέσω του Mathematica προσομοιώνουμε την τιμή δικαιώματος αγοράς του μοντέλου CIR με την χρήση του μοντέλου Black & Scholes και με την χρήση του μοντέλου CIR. Επομένως έχουμε:

```
r0=0.05;t=1;θ=0.05;κ=1;σ1=0.4;σ2=0.4;p=0.5;
n=100;m=10000;dt=t/n;
S0=100;K=100;S=Table[S0,{n+1}];S2=Table[S0,{n+1}];
call=Table[0,{m}];call2=Table[0,{m}];
Do[s=0;r=Table[r0,{n+1}];
  Do[Z1=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    Z2=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    e1=Z1;e2=p*Z1+(1-p^2)^0.5*Z2;
    S[[i+1]]=S[[i]]+r[[i]]*S[[i]]*dt+σ1*S[[i]]*e1*dt^0.5;
    S2[[i+1]]=S2[[i]]+θ*S2[[i]]*dt+σ1*S2[[i]]*e1*dt^0.5;
    r[[i+1]]=r[[i]]+κ(θ-r[[i]])*dt+σ2*e2*(Abs[r[[i]]]*dt)^0.5;
    s=s+r[[i+1]]*dt,{i,1,n}];
  call[[j]]=Exp[-s]*Max[S[[n+1]]-K,0];
  call2[[j]]=Exp[-θ*t]*Max[S2[[n+1]]-K,0];,{j,1,m}];
Print["Call price (CIR model) =",Mean[call]]
Print["Call price (Classical model) =",Mean[call2]]

Call price (CIR model) = 18.3772,

Call price (Classical model) = 17.7999
```



Σημειώνεται ότι στον παραπάνω αλγόριθμο έχουμε θεωρήσει την δ.ε. των CIR προσεγγιστικά ως την εξίσωση διαφορών,

$$r(t + 1) = r(i) + \kappa(\theta - r(i))dt + \sigma\sqrt{|r(i)|}dW(i)$$

θέτοντας  $|r(i)|$  στην θέση του  $r(i)$  που κανονικά προβλέπεται από το μοντέλο των CIR διότι κατά την διακριτοποίηση του συνεχούς χρόνου ενδέχεται (ιδιαίτερα για μεγάλο  $\sigma$ ) το  $r(i)$  να περνά ελάχιστα κάτω από το 0, κάτι που σε συνεχή χρόνο δεν μπορεί να ισχύει.

Παρατηρούμε ότι η τιμή που δίνει το μοντέλο CIR είναι μεγαλύτερη από την τιμή που παίρνουμε με την χρήση του μοντέλου Black & Scholes, με ελάχιστη όμως απόκλιση.

Στη συνέχεια δίνεται ένας ενδεικτικός πίνακας τιμών της Call price (CIR model) σε σύγκριση με την τιμή Call price (Classical model) που ισχύει για σταθερό  $r = \theta$ , για διάφορες τιμές του  $\sigma_2$  ( $\theta = 0.05, t = 1, \kappa = 1$ ). (προσομοίωση  $10^4$  επαναλήψεων)

$\sigma_2$	CIR model	Classical model	Διαφορά
0.4	18.3772	17.7999	0,5773
0.2	18.4957	18.1891	0,3066
0.15	18.0744	17.8549	0,2195
0.1	18.4926	18.336	0,1566
0.05	18.3065	18.2291	0,0774

Παρατηρούμε ότι όσο η μεταβλητότητα του μοντέλου CIR μειώνεται, πλησιάζει φυσιολογικά το κλασσικό μοντέλο αφού σε αυτό έχουμε μηδενική μεταβλητότητα επιτοκίου.

Τέλος, δίνεται ο ακόλουθος πίνακας σύγκρισης των τιμών των Call price (CIR model) και Call price (Classical model), στον οποίον  $r_0 = 0.02$  και οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν ίδιες, για τις διάφορες τιμές του  $\sigma_2$ .

$\sigma_2$	CIR model	Classical model	Διαφορά
0.4	17.827	18.2437	-0,4167
0.2	17.1563	17.7514	-0,5951
0.15	16.7822	17.4553	-0,6731
0.1	16.9572	17.6771	-0,7199
0.05	17.0476	17.8302	-0,7826

Παρατηρούμε ότι όσο η μεταβλητότητα του μοντέλου CIR μειώνεται, αυξάνεται η διαφορά με το κλασσικό μοντέλο διότι σε αυτή την περίπτωση το επιτόκιο του μοντέλου CIR ξεκινά από το  $r_0 = 0.02$  και συγκλίνει στο  $\theta = 0.05$  του κλασσικού. (π.χ. βλ. Rebonato R. (2002), H. T. Huynh, V. S. Lai & I. Soumare (2008))

### III.3.4. ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΜΕΡΤΟΝ

Ο Merton είναι ο πρώτος που ασχολήθηκε με μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων ενός παράγοντα και συγκεκριμένα πρότεινε το μοντέλο το 1973 στο άρθρο του “Theory of rational option pricing”. Το μοντέλο αυτό ήταν η βάση και η αρχή στο να αναπτυχθούν και να δημιουργηθούν αργότερα κι άλλα μοντέλα. Πολλοί, βασιζόμενοι σε αυτό το μοντέλο, δημιούργησαν άλλα μοντέλα πιο βέλτιστα ούτως ώστε να γίνεται καλύτερη πρόβλεψη της διάρθρωσης των επιτοκίων.

Το μοντέλο αυτό, έχει τα εξής μειονεκτήματα:

- Μπορούν να εμφανιστούν επιτόκια αρνητικά.
- Η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή.

Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, σύμφωνα με το μοντέλο του Merton δίνεται από την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr(t) = \mu_r dt + \sigma_r dW(t)$$

όπου:

- $\mu_r$ : μέση τιμή (σταθερή)
- $\sigma_r$ : μεταβλητότητα (σταθερή)
- $W(t)$ : τυπική κίνηση Brown

Ουσιαστικά πρόκειται για απλοποιημένο μοντέλο του Vasicek,  $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$ , όπου στην θέση του παράγοντα  $\kappa(\theta - r(t))dt$  έχουμε τώρα τον  $\mu_r dt$ .

Η ισοδύναμη ολοκληρωτική μορφή της παραπάνω εξίσωσης είναι (ολοκληρώνοντας από  $t$  έως  $s$

$$r(s) = r(t) + \mu_r(s - t) + \sigma_r \int_t^s dW(x) = r(t) + \mu_r(s - t) + \sigma_r(W(s) - W(t)),$$

για κάθε  $s \geq t$ . Επομένως, δεδομένης της πληροφορίας  $F_s$  μέχρι και το χρόνο  $s$ , η  $r(t)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους:

$$r(s)|F_s \sim N(r(t) + \mu_r(s - t), (s - t)\sigma_r^2).$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$\begin{aligned} E(B(t, T)) &= E\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right) = E\left(e^{-\int_t^T (r(t) + \mu_r(s-t) + \sigma_r(W(s)-W(t)))ds}\right) \\ &= E\left(e^{-\int_t^T r(t)ds - \int_t^T \mu_r(s-t)ds - \int_t^T \sigma_r(W(s)-W(t))ds}\right) \\ &= e^{-r(t)(T-t) - \frac{\mu_r(T-t)^2}{2}} E\left(e^{-\sigma_r \int_0^{T-t} W(s)ds}\right) \end{aligned}$$

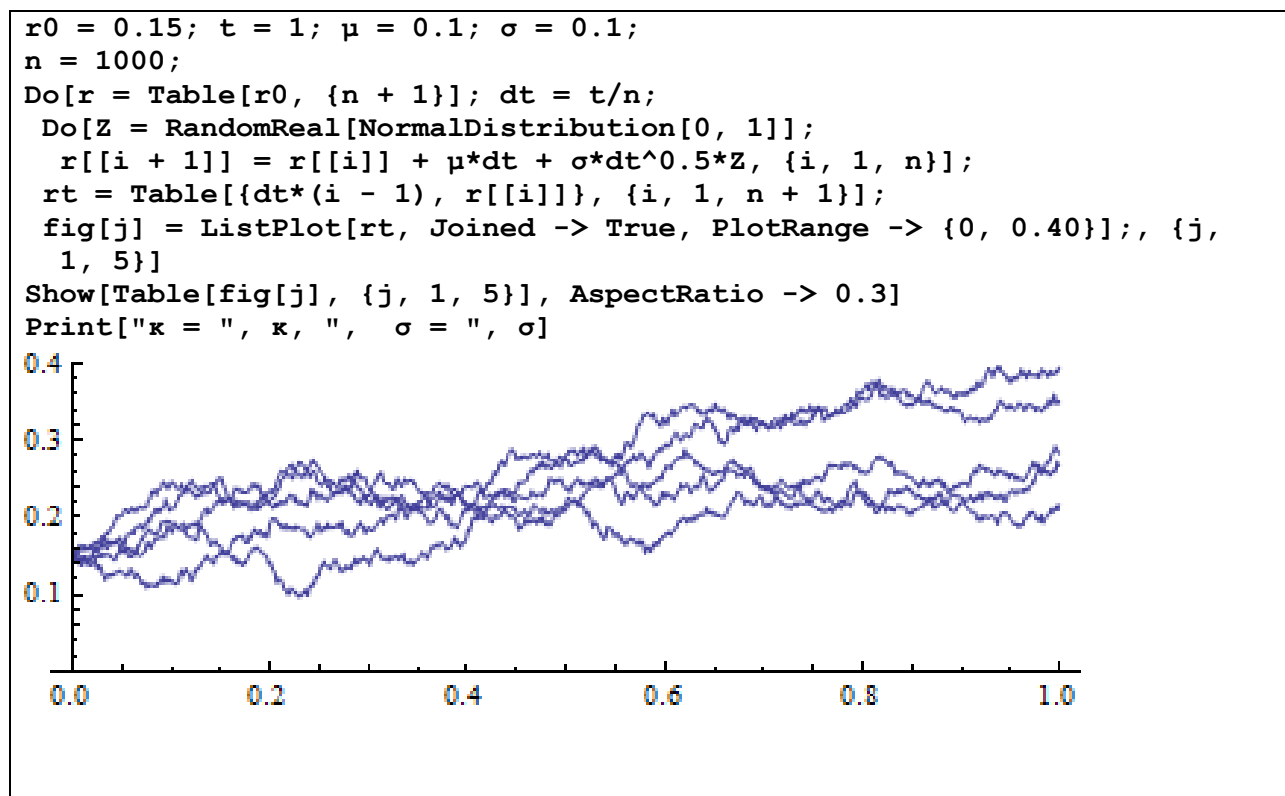
Αλλά η τ.μ.  $X_{T-t} = \int_0^{T-t} W(s)ds$  είναι γνωστό ότι ακολουθεί  $N(0, (T-t)^3/3)$  και επομένως

$$E\left(e^{-\sigma_r \int_0^{T-t} W(s)ds}\right) = E(e^{-\sigma_r X_{T-t}}) = e^{-\frac{\sigma_r^2 (T-t)^3}{6}}$$

από όπου τελικά προκύπτει ότι

$$E(B(t, T)) = e^{-r(t)(T-t) - \frac{\mu_r(T-t)^2}{2} + \frac{\sigma_r^2(T-t)^3}{6}}$$

Μια πραγματοποίηση 5 διαδρομών της διαδικασίας αυτής φαίνεται στο παρακάτω αλγόριθμο.



### III.3.4.1 ΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΥΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ MERTON

Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς υπό το μοντέλο Merton επιτυγχάνεται με την μέθοδο Monte Carlo ως:

$$c(s, 0) = B(0, T) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max(S_j(T) - K, 0)$$

όπου  $B(0, T)$  είναι η Merton τιμή του ομολόγου και  $S_j(T)$  είναι η τελική τιμή των περιουσιακών στοιχείων για το  $j$ -οστό μονοπάτι. (π.χ. βλ. N. H. Chan & H. Y. Wong (2006)). Η διαδικασία εύρεσης της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς υπό το μοντέλο Merton είναι όμοια με την διαδικασία υπό το μοντέλο Vasicek. Μέσω του Mathematica προσομοιώνουμε την τιμή δικαιώματος αγοράς του μοντέλου Merton με την χρήση του μοντέλου Black & Scholes και με την χρήση του μοντέλου CIR. Επομένως έχουμε:

```

r0=0.05;t=1;θ=0.05;κ=1;μ=0.0;σ1=0.4;σ2=0.4;p=0.5;
n=100;m=10000;dt=t/n;
S0=100;K=100;S=Table[S0,{n+1}];S2=Table[S0,{n+1}];
call=Table[0,{m}];call2=Table[0,{m}];
Do[s=0;r=Table[r0,{n+1}];
  Do[Z1=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    Z2=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    e1=Z1;e2=p*Z1+(1-p^2)^0.5*Z2;
    S[[i+1]]=S[[i]]+r[[i]]*S[[i]]*dt+σ1*S[[i]]*e1*dt^0.5;
    S2[[i+1]]=S2[[i]]+θ*S2[[i]]*dt+σ1*S2[[i]]*e1*dt^0.5;
    r[[i+1]]=r[[i]]+μ*dt+σ2*e2*dt^0.5;
    s=s+r[[i+1]]*dt,{i,1,n}];
  call[[j]]=Exp[-s]*Max[S[[n+1]]-K,0];
  call2[[j]]=Exp[-θ*t]*Max[S2[[n+1]]-K,0];,{j,1,m}];
Print["Call price (Merton model) =",Mean[call]]
Print["Call price (Classical model) =",Mean[call2]]

Call price (Merton model) =21.9831

Call price (Classical model) =17.9029

```

Παρατηρούμε ότι η τιμή που δίνει το μοντέλο Merton είναι μεγαλύτερη από την τιμή που παίρνουμε με την χρήση του μοντέλου Black & Scholes, με μικρή όμως απόκλιση.

Στη συνέχεια δίνεται ένας ενδεικτικός πίνακας τιμών της Call price (Merton model) σε σύγκριση με την τιμή Call price (Classical model) που ισχύει για σταθερό  $r = \theta$ , για διάφορες τιμές του  $\sigma_2$  ( $\theta = 0.05, t = 1, \kappa = 1$ ).

$\sigma_2$	Merton model	Classical model	Διαφορές
1	27.4964	17.7982	9,6982
0.75	26.1525	18.5880	7,5645
0.5	23.3855	18.2505	5,1350
0.25	20.9265	18.4055	2,5210
0.1	19.3016	18.3127	0,9889

Τέλος, δίνεται ο ακόλουθος πίνακας σύγκρισης των τιμών των Call price (Merton model) και Call price (Classical model), στον οποίον  $r_0 = 0.02$  και οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν ίδιες, για τις διάφορες τιμές του  $\sigma_2$ .

$\sigma_2$	Merton model	Classical model	Διαφορές
1	27.0623	17.6667	9,3956
0.75	24.2001	17.6982	6,5019
0.5	21.8776	17.8793	3,9983
0.25	18.9340	17.6886	1,2454
0.1	17.4844	17.8425	-0,3581

Τέλος, παραθέεται ένας πίνακας για τα τρία μοντέλα που μελετήσαμε, όταν υπάρχει θετική συσχέτιση ( $\rho = 0.95, 0.75, \dots, 0$ ). οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν ίδιες με τα παραπάνω παραδείγματα

$\rho$	Vasicek Model	CIR Model	Merton Model
0.95	23.0740	18.5444	24.3055
0.75	22.1685	18.9296	23.4318
0.5	21.4103	18.1348	22.1867
0.25	19.7415	18.5008	20.6293
0	18.5782	18.1223	19.0506

### III.3.5 ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΛΥΤΕΡΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Ύστερα από την εξέταση και την μελέτη των παραπάνω μοντέλων, μπορούμε να φτάσουμε σε κάποια συμπεράσματα κάνοντας την χρήση των μοντέλων αυτών, καθώς επίσης και να συγκρίνουμε κάποια χαρακτηριστικά τους. Και τα τρία μοντέλα είναι μοντέλα διάρθρωσης των επιτοκίων ενός μόνο παράγοντα, ο οποίος είναι χρονικά αμετάβλητος. Σε αντίθεση με το μοντέλο CIR, τα μοντέλα του Vasicek και του Merton παράγουν και αρνητικά επιτόκια.

Οι τράπεζες σήμερα χρησιμοποιούν τα μοντέλα που παραθέσαμε στην εργασία αυτή. Είναι φανερό ότι κάθε ένα από αυτά τα μοντέλα υποθέτουν ότι τα ιστορικά δεδομένα των τιμών των επιτοκίων αποτελούν και τις καλύτερες προβλέψεις των μελλοντικών τιμών. Γι' αυτό πρέπει να κάνουμε σωστές εκτιμήσεις των παραμέτρων που βασίζονται στις ιστορικές κινήσεις των τιμών χωρίς να μεροληπτούμε και φυσικά να επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο που ταιριάζει καλύτερα στα ιστορικά δεδομένα. Με αυτό τον τρόπο θα μπορούμε να κάνουμε καλύτερη πρόβλεψη, έτσι ώστε να έχουμε την δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε και καλύτερα τον κίνδυνο.

Για να δούμε ποιο μοντέλο θα χρησιμοποιήσουμε στην πράξη, εκτιμούμε τις παραμέτρους τους από ιστορικά δεδομένα, και εξετάζουμε πόσο διαφέρουν οι προσαρμοσμένες τιμές της χρονοσειράς από τις παρατηρούμενες ενώ και επίσης εξετάζουμε και αν ικανοποιούνται οι βασικές υποθέσεις του μοντέλου (κατάλοιπα ανεξάρτητα και κανονικά με μηδενική μέση τιμή και σταθερή διασπορά). Επιλέγεται το μοντέλο που θα έχει την καλύτερη προσαρμογή και δεν παραβιάζει τις βασικές υποθέσεις.

# Βιβλιογραφία

Chan Hang Ngai & Wong Ying Hoi (2006). *Simulation Techniques in Financial Risk Management*, 9, John Wiley and Sons Inc.

Gupta A. (2013). *Risk Management and Simulation*, 8, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC.

Huynh Tue Huu, Lai Son Van & Soumare Issouf (2008). *Stochastic Simulation and Applications in Finance with MATLAB programs*, John Wiley and Sons Inc.

Rebonato R. (1998). *Interest Rate Models*, John Wiley and Sons Inc.

Rebonato R. (2002). *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives*, The LOBOR market and beyond Princeton University Press.

Taylor H. & Karlin S. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*, 3<sup>rd</sup> ed. Academic Press, San Diego.

Embrechts P., Kluppelberg C. & Mikosch T. (1997). *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer – Verlag, Berlin.

Jarrow, R.A. (2002). *Modeling Fixed – Income Securities and Interest Rate Options*, Stanford University Press, Stanford, California.

Bayazit Dervis (2004). *Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model*, METU.

Morters Peter & Peres Yuval (2010). *Brownian Motion (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics)*, Cambridge University Press

Kuo Hui – Hsiung (2006). *Introduction to Stochastic Integration (Universitext)*, Springer Science+Business Media, Inc.

Sanjay K., Nawalkha, Gloria M., Soto, Natalia A. Beliaeva (2005). *Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course*, John Wiley and Sons Inc.

Μπούτσικας Μιχαήλ (2005-7). *Σημειώσεις μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα»*. Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πάκος Γεώργιος (2012). *Μοντέλα Χρονικής Διάρθρωσης Επιτοκίων*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Διοίκηση Επιχειρήσεων, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Περέλης Κομνηνός (2006). *Αντιστάθμιση Κινδύνων με εργαλεία τα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*, 1, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρικών Βιομηχανικών Διατάξεων & Συστημάτων Αποφράξεων, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Τζαβάρα Αθανασίου Δήμητρα (2014). *Στοχαστικά Μοντέλα με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, 3, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών