ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στοχαστικές Διαδικασίες με υπο συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και εφαρμογές

Παππά Ελένη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Μάρτιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ / συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης
- Επίκουρος Καθηγητής Δημήτριος Στέγγος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE
AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT

Stochastic processes with conditionally independent and stationary increments and applications

by
Pappa Eleni

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
March 2017

Στην οικογένειά μου,
Στον καθηγητή κ. Μαχαιρά Νικόλαο

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Πολίτη Κωνσταντίνο και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Στέγγο Δημήτριο για την επίβλεψή τους καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα κ.Τζανίνη Σπύρο για τις πολύτιμες συμβουλές που προσέφερε. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάμε την κλάση των Στοχαστικών Διαδικασιών με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ειδική περίπτωση των οποίων είναι οι μεικτές διαδικασίες Poisson, οι διαδικασίες Cox και οι υπό συνθήκη διαδικασία Wiener. Αποδεικνύονται βασικές τους ιδιότητες, χαρακτηρισμοί τους και αποτελέσματα σχετικά με την οριακή τους συμπεριφορά.

Ως εφαρμογή παρουσιάζεται μεταξύ άλλων ένα ενδιαφέρον παράδειγμα υπό συνθήκη διαδικασιών Wiener ως ένα μοντέλο περιγραφής της κίνησης Brown ενός σωματιδίου σε ένα υγρό ή αέριο μέσο. Οι εν λόγω στοχαστικές διαδικασίες έχουν εφαρμογές στη Θεωρία Κινδύνου και στην μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών.

Για τη συστηματική τους μελέτη απαιτούνται αποτελέσματα σχετικά με τους Νόμους $0-1$, τους Νόμους των Μεγάλων Αριθμών και τις παραγόμενες $\sigma.\delta.$, που παρατίθενται σε προηγούμενα κεφάλαια.

Abstract

In the present thesis the class of stochastic processes with conditionally independent and stationary increments is examined. Special cases of these processes consist the mixed Poisson stochastic processes, the Cox processes and the conditionally Wiener stochastic processes.

These processes are equivalent to random time transformations of processes with independent stationary increments where the time process is independent of the original process. Basic properties and several limit theorems, including 0-1 Laws, weak and strong Laws of Large Numbers of the above processes are proven.

As applications some examples, including an interesting example of a conditional Wiener process as a model for depicting the Brownian motion of a particle in a liquid medium are presented. Mixed Poisson processes and conditional Wiener processes ar applied to Risk Theory and to the stock prices' modelling. In order to achieve a systematic study of the above mentioned processes, a number of results related to the Laws 0-1, the Laws of Large Numbers and the derived processes, which presented in previous chapters, are required.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ. : Τυχαία μεταβλητή

σ.(π).π. : Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

σ.κ. : Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

σ.δ/Σ.Δ.: Στοχαστική διαδικασία

μ.χ. : Μετρήσιμος χώρος

χ.π. : Χώρος Πιθανότητας

χ.σ. : Χαρακτηριστική συνάρτηση

σ.β. : Σχεδόν βέβαια

σ.ο. : Σχεδόν όλα

κ.δ.π : Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα

i.i.d : Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες

πρβλ. : Παράβαλε

MPP : Μεικτή διαδικασία Poisson

CMPP : Σύνθετη Μεικτής *σ.δ.* Poisson

Εισαγωγή

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα στη Θεωρία Κινδύνου είναι η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για τη στοχαστική διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο. Για την ανάπτυξη μιας γενικής μεθόδου επιλογής, πρέπει να υπάρχει ως βασική ιδέα η ερμηνεία ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου ως μείγματος ομοιγενών χαρτοφυλακίων. Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία του αριθμού των απιτησέων ενός ανομοιογενούς ορίζεται ως μια μείξη $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων ομοιογενών χαρτοφυλακίων, έτσι ώστε η μεικτή κατανομή της αν αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου.

Μια ενδιαφέρουσα κλάση $\sigma.\delta.$ αριθμού απαιτήσεων ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου είναι οι $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις (ειδική περίπτωση των οποίων είναι οι μεικτές $\sigma.\delta.$ Poisson). Η κλάση αυτή περιλαμβάνει $\sigma.\delta.$ των οποίων οι βασικές παράμετροι επιτρέπεται να μεταβάλλονται τυχαία μέσα στο χρόνο. Αυτές οι διαδικασίες είναι ισοδύναμες με τυχαίους χρονικούς μετασχηματισμούς διαδικασιών με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, όπου οι διαδικασίες του χρόνου είναι ανεξάρτητες των αρχικών διαδικασιών.

Αφού οι βασικές παράμετροι μεταβάλλονται τυχαία, οι προκύπτουσες διαδικασίες είναι μάλλον γενικές, αλλά θα δούμε ότι πολλές από τις ιδιότητές τους μπορούν να εξαχθούν μέσω των αντίστοιχων ιδιοτήτων των αρχικών διαδικασιών και των παραμέτρων τους. Μια ειδική περίπτωση αυτών των διαδικασιών είναι οι $\sigma.\delta.$ Poisson.

Αφού παραθέτουμε στο Κεφάλαιο 2 μια επισκόπηση της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου, στο Κεφάλαιο 3 εξετάζουμε την κλάση των μεικτών $\sigma.\delta.$ Poisson, και δίνουμε τις βασικές παραμέτρους τους όπως η μέση τιμή και η διακύμανση.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό μιας μεικτής διαδικασίας Poisson με κατανομή μείξης, εξετάζουμε τις βασικές ιδιότητες, παραθέτουμε κάποιους χαρακτηρισμούς και περιγράφουμε τη σχέση μεταξύ των δύο ορισμών. Η συνέχεια της μελέτης των μεικτών $\sigma.\delta.$ γίνεται στο Κεφάλαιο 9, το οποίο προκύπτει ως μια ειδική περίπτωση του Κεφαλαίου 8.

Στο Κεφάλαιο 4 παραθέτουμε μια επισκόπηση των $\sigma.\delta.$ συνολικών απαιτήσεων και των σύνθετων κατανομών οι οποίες χρησιμοποιούνται στο Κεφάλαιο 8. Επειδή στα Κεφάλαια 8 και 9 γίνεται μια μελέτη της οριακής συμπεριφοράς των $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, παραθέτουμε στη συνέχεια ως προπαρασκευαστικά τα Κεφάλαια 5,6 και 7.

Στο Κεφάλαιο 5 εξετάζουμε τους Νόμους 0-1 του Kolmogorov και των Hewitt-Savage. Δίνεται ο ορισμός μιας σ-άλγεβρα ουράς $\mathcal{T}_\infty$ που παράγεται από μια ανεξάρτητη ακολουθία σ-αλγεβρών και αποδεικνύεται ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{T}_\infty$ έχει πιθανότητα 1 και 0 (Νόμος $0-1$ του Kolmogorov). Ένα πολύ διαφορετικό είδος Νόμου $0-1$ σε σχέση με εκείνον του Kolmogorov είναι ο Νόμος $0-1$ των Hewitt-Savage, ο οποίος βασίζεται σε ιδιότητες συμμετρίας των σχετικών ενδεχομένων (βλ. Θεώρημα 5.2.2). Ενδιαφέρουσα συνέπεια του Νόμου 0-1 των Hewitt-Savage είναι, ότι για μια ανεξάρτητη ακολουθία $\{X_n\}$ ισόνομων τ.μ. ισχύει ένα Θεώρημα τριχοτομίας, σύμφωνα με το οποίο για την ακολουθία $\{S_n\}$ με $S_n := X_1 + ... + X_n$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

(i) $lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = +\infty \quad \sigma.\beta.$

(ii) $lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = -\infty \quad \sigma.\beta.$

(iii) $\underline{lim}_{n\longrightarrow\infty} S_n = -\infty \quad \textit{και} \quad \overline{lim}_{n\longrightarrow\infty} S_n = +\infty \quad \sigma.\beta..$

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζονται οι Νόμοι Των Μεγάλων Αριθμών (Ασθενής και Ισχυρός) του Kolmogorov (βλ. Θεώρημα 6.2.1 και 6.3.4.) Ο Ισχυρός Νόμος Των Μεγάλων Αριθμών θεωρείται ένα από τα πολύ σημαντικά αποτέλεσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων και γενικότερα της θεωρίας Μέτρου. Εφαρμογές του υπάρχουν, εκτός της Στατιστικής, και σε πολλές άλλες περιοχές των Μαθηματικών, όπως στη Μαθηματική Ανάλυση. Στην Ενότητα 6.4 αποδεικνύεται ο Ισχυρός Νόμος Των Μεγάλων Αριθμών του Etimadi (Θεώρημα 6.4.1) που γενικεύει τον Ισχυρό Νόμο Των Μεγάλων Αριθμών του Kolmogorov.

Στο Κεφάλαιο 7 εξετάζεται η ενδιαφέρουσα κλάση των παραγόμενων $\sigma.\delta.$ και ο τρόπος κατασκευής τους. Τα αποτελέσματα οφείλονται στον Stam [33]. Αρχικά ορίζονται οι παράγουσες, οι αρχικές και οι παραγόμενες $\sigma.\delta.$ (Ενότητα 7.2) και αποδεικνύεται η μεταφορά βασικών ιδιοτήτων από τις παράγουσες και αρχικές στις παραγόμενες $\sigma.\delta.$ όπως π.χ. η μετρησιμότητα (βλ. Θεώρημα 7.3.1 και Θεώρημα 7.3.6). Στην Ενότητα 7.3 αποδεικνύονται αποτελέσματα σχετικά με τη μεταφορά ειδών σύγκλισης της αρχικής και της παράγουσας στην παραγόμενη $\sigma.\delta.$ (Θεώρηματα 7.4.3 και 7.4.4), και με τη διατήρηση της ισχύος των Νόμων $0-1$ και του Νόμου Των Μεγάλων Αριθμών (Θεωρήματα 7.4.9 και 7.4.10).

Στο Κεφάλαιο 8 παρατίθεται μια συστηματική μελέτη των $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δίνεται ο ορισμός των παραπάνω $\sigma.\delta.$ (Ορισμός 8.1.2) και παρατίθονται ως ειδικές πριπτώσεις τα Παραδείγματα της μεικτής $\sigma.\delta.$ Poisson, της Cox (Παραδείγματα 8.1.3, 8.1.4) και μιας γενικότερης μεικτής $\sigma.\delta.$ Poisson (Παράδειγμα 8.1.5). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η υπό συνθήκη διαδικασία Wiener, την οποία μελετάμε αναλυτικά στο Παράδειγμα 8.1.6. Εφαρμογές της εν λόγω διαδικασίας υπάρχουν στη Φυσική και στη μοντελοποίηση των τιμών μιας μετοχής. Στην Ενότητα 8.2 αποδεικνύεται ένας χαρακτηρισμός των εν λόγω $\sigma.\delta.$ που οφείλεται στον Serfozo [32], (βλ. Θεώρημα 8.3.1 και Θεώρημα 8.3.2 μέσω των παραγόμενων $\sigma.\delta.$ του Κεφαλαίου 7. Στην Ενότητα 8.4 αποδεικνύονται αποτελέσματα της οριακής συμπεριφοράς των παραπάνω $\sigma.\delta.$ (βλ. Θεωρήματα 8.3.1, 8.3.3, 8.3.4). Στις αποδείξεις ουσιαστική είναι η συμβολή του Κεφαλαίου 7.

Στο Κεφάλαιο 9 δίνεται ο ορισμός μιας κλάσης μεικτών $\sigma.\delta.$ Poisson, που ονομάζονται υπό συνθήκη $\sigma.\delta.$ Poisson (βλ. Ορισμός 9.1.1). Πρόκειται για ειδική περίπτωση των $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αναφέρονται παραδείγματα $\sigma.\delta.$ της εν λόγω κλάσης (Παραδείγματα 9.1.2, 9.1.3), δίνεται ένας χαρακτηρισμός της και αποδεικνύονται αποτελέσματα σχετικά με την οριακή συμπεριφορά (Θεωρήματα 9.2.1, 9.2.2, 9.2.3 και 9.2.4)

Τέλος στα Παραρτήματα δίνονται βασικά στοιχεία της Θεωρίας Μέτρου (Α′), της Θεωρίας Πιθανοτήτων (Β′), της Θεωρίας Σύγκλισης (Γ′), των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων (Δ′) και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Ε′).

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.
Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του A** (σε σχέση με το Ω) και με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων** και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας οικογένειας $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i \in I}}(\mathbf{I} \neq \emptyset)$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του** Ω.
Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτησητεξτβφ** του A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Για μία απεικόνιση $f : D \longmapsto E$ με R_f ή με $f(D)$ συμβολίζεται το **σύνολο τιμών** της f, δηλ. το σύνολο $\{f(x) : x \in D\}$ και για ένα σύνολο $A \subseteq D$ με $f \upharpoonright A$ συμβολίζεται ο **περιορισμός** της f στο A, ενώ με $f(A)$ συμβολίζεται το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **ένας γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα A, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $A = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel**.
Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας **χώρος πιθανότητας** (χ.π. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων

$N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y \quad P-$σχεδόν βέβαια ($P - \sigma.\beta.$ για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν και μόνο αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$ − συναρτήσεων).

Έστω Υ ένα μη κενό σύνολο. Με π_Ω και π_Υ συμβολίζονται οι **κανονικές προβολές** από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Ω και Υ αντίστοιχα. Αν $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε για σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $f_\omega : \Upsilon \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $f_\omega(y) := f(\omega, y)$ ονομάζεται η $\boldsymbol{\omega}$**−τομή** της f. Αντίστοιχα, για σταθερό $y \in \Upsilon$ η $f^y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $f^y(\omega) := f(\omega, y)$ ονομάζετσι η y**-τομή** της f.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της** X **δοθείσης της** $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μ.χ. Μία συνάρτηση $k : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ένας $\boldsymbol{T - \Sigma}$-**Μαρκοβιανός πυρήνας** (**Markov kernel**) όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\bullet, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην T για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι $\Sigma-$μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$.

Ένας $T - \Sigma-$**Μαρκοβιανός πυρήνας** ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο**. (βλ. π.χ. [23, p. 83]).

Έστω $\Sigma - T-$μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της** X **επάνω στην** $\mathcal{F}$ είναι ένας $T - \mathcal{F}-$Μαρκοβιανός πυρήνας k, ικανοποιώντας για κάθε $B \in T$ τη συνθήκη

$$k(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Σαφώς, για κάθε $T - Z-$Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(B, \omega) := (k(B, \bullet) \circ \Theta(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad B \in T \quad \text{και} \quad \omega \in \boldsymbol{\Omega}$$

είναι ένας $T - \sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet, \theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιαδήποτε $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, θα λέμε ότι δύο $T-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1,2\}$, είναι **$P|\mathcal{F}-$ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P|\mathcal{F}-\sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B,\omega) = k_2(B,\omega)$ για κάθε $B \in T$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} \quad -\sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leq n$ και για κάθε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I.

Μια οικογένεια $\Sigma - T$-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in I}$ από το Ω στο Υ είναι:

- **P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και

- **P-υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)), \quad \text{για} \quad i,j \in I, F \in \mathcal{F} \quad \text{και B} \in \text{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., ορίζουμε:

$$\sigma\left(\{X_j\}_{j\in I}\right) = \sigma\left(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\right).$$

Η $\sigma\left(\{X_j\}_{j\in I}\right)$ ονομάζεται η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$.

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου T, $I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι σ-(υπο)άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B-y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την **n-οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** (*σ.δ.*) ή **στοχαστική ανέλιξη**. Επί πλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια *σ.δ.* **συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια *σ.δ.* **διακριτού χρόνου**.

Μια *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:

• μια *σ.δ.* **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0, t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(i \leq j \leq m, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

• μια *σ.δ.* **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\}$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{\{}X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\} = P_{\{}X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}$.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια *σ.δ.* με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο τιμών R_{X_i} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή *σ.δ.*** ή ***σ.δ.* Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P\left(\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1}\}\middle| \bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \cdots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P\left[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right] > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου B**.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση (filtration)** αν και μόνο αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία *σ.δ.* $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma(\{X_k : k \leq j\})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω I ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μία *σ.δ.* $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή ένα $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$-**martingale** αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$,

$(m2)$ για κάθε $j \in I$, η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P|\Sigma_j - \sigma.\beta.$.

Μια διαδικασία $\{X_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **συνεχής κατά πιθανότητα από δεξιά** αν για $\tau \downarrow t$ ισχύει $X(\tau) \longrightarrow X(t)$ κατά πιθανότητα.

Τέλος, για την υπόλοιπη εργασία, και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε ένα σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P).

Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π.. Με $\Sigma \otimes T$ συμβολίζεται η σ άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega \times \Upsilon$ που παράγεται από όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια $A \times B$ με $A \in \Sigma$ και $B \in T$ δηλαδή

$$\Sigma \otimes T := \sigma(\{A \times B : A \in \Sigma, B \in T\}).$$

Η $\Sigma \otimes T$ ονομάζεται **το γινόμενο** των Σ και T. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ακριβώς μία πιθανότητα $P \otimes Q : \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε

$$\boldsymbol{(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)} \quad \textit{για κάθε} \quad A \in \Sigma \quad \textit{και} \quad B \in T.$$

Η $P \otimes Q$ ονομάζεται **Πιθανότητα-γινόμενο** των P και Q. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται ο **χ.π.-γινόμενο** των (Ω, Σ, T) και (Υ, T, Q). Έστω ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών. Αν $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\bigotimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J} \Omega_i, \bigotimes_{i\in J} \Sigma_i, \bigotimes_{i\in J} P_i)$. Αν η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π., τότε συμβολίζουμε με P_I την πιθανότητα-γινόμενο επάνω στον Ω^I και με Σ_I το πεδίο ορισμού της P_I.

Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση Στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Το κεφάλαιο που ακολουθεί αναφέρεται σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Θα παρουσιαστούν ιδιότητες των *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson.

2.1 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρακάτω ενότητα αναφέρονται ορισμοί και λήμματα που αφορούν τη στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων και τη στοχαστική διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται ***σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων** ή ***σ.δ.* άφιξης**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, η $T_n(\omega) > 0$. Το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων. Με $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τη ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων** ή ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης** και ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$,
- $\mathbb{E}[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης, και τη $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης επαγόμενη από τη σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο $\Omega_T := \emptyset \in \Sigma$.

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η σ.δ. άφιξης, και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα (βλ. π.χ. [29, Λήμμα 1.1.1]).

Λήμμα 2.1.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

$$\sigma(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}) \tag{2.2}$$

Γίνεται φανερό ότι η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Λήμμα 2.1.5. *Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Πόρισμα 2.1.6. *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [2, Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7].

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει για την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(*i*) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και* *(ii)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $\mathbb{E}[W_n] = 1/\theta$ *και* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, *και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [29, Lemma 1.2.2].

2.2 Η Σ.Δ. Αριθμού των Απαιτήσεων

Αρχικά θα παρουσιαστεί η διαδικασία απαιτήσεων και πώς η *σ.δ.* απαιτήσεων και *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων ορίζει η μία την άλλη. Στη συνέχεια θα δειχθεί μια σύνδεση μεταξύ τών βασικών υποθέσεων που σχετίζονται με την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων και την κατανομή των χρόνων άφιξης. Τέλος, θα αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας που χαρακτηρίζει την (ομογενή) *σ.δ.* Poisson μέσω της *σ.δ.* των ενδιάμεσων χρόνων και μιας ιδιότητας των martingales.

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται ***σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων** ή **απαριθμήτρια *σ.δ.*** , αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

$(n1)$ $N_0(\omega) = 0$,

$(n2)$ $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

$(n3)$ $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

$(n4)$ $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \le N_t(\omega) \le \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

$(n5)$ $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,
- Όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει πως κάθε *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παράγει μία *σ.δ.* αριθμού απαιτήσεων και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.3}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.4}$$

Θεώρημα 2.2.3. *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.5}$$

τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ ισχύει

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.6}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [2, Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3] αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου θεωρούμε:

- Την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ως μια απαριθμήτρια *σ.δ.* ,
- $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ως μια *σ.δ.* άφιξης η οποία παράγεται από την απαριθμήτρια *σ.δ.*
- $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μια *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης η οποία παράγεται από την απαριθμήτρια *σ.δ.*
- Το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας *σ.δ.* ότι είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει $\Omega_N = \emptyset$.

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν:*

(a) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$ *και*

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \backslash \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων και η *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Λήμμα 2.2.5. *Ισχύει ότι:*

$$\sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}) \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό θα γίνει σύνδεση της πιθανότητας έκρηξης με τη *σ.δ.* του αριθμού απαιτήσεων ως εξής:

Λήμμα 2.2.6. *Ισχύει ότι:*

$$P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right]. \tag{2.8}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη των παραπάνω λημμάτων βλ. [2, Λήμμα 3.3.6], [2, Λήμμα 3.3.4].

Στο σημείο αυτό θα οριστούν οι έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s, t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, που συμβάλλουν στην περαιτέρω κατανόηση της *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων.

- Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leq t$, η **προσαύξηση** της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s, t]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{2.9}$$

  Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $N_0 = 0$ και $T_n > 0$, η σχέση (2.9), συμφωνεί με τον τρόπο που ορίσαμε τη τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.2.2.

- Για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι:

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.10}$$

  που ισχύει ακόμη και όταν $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

2.3 Η Διαδικασία Poisson

Ορισμός 2.3.1. Η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0, \infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0, \infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Ένα συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [2, Λήμμα Α΄1.3]).

Ορισμός 2.3.2. Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

Λήμμα (Πολυωνυμικό Κριτήριο) 2.3.3. *Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Για κάθε $t \in (0, \infty)$ η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$

και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε το $\sum_{j=1}^m k_j = n$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \middle| \{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

(*b*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Poisson με παράμετρο α.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. [4, Λήμμα 2.3.3].

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(*i*) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$, *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$

(*ii*) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, *για όλα τα* $t \in (0, \infty)$.

Στην περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0, \infty)$ ισχύει $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [29, Lemma 2.2.1].

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*i*) *Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(*ii*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.*

(*iii*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

(*iv*) *Η σ.δ. $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. π.χ. [2, Θεώρημα 4.2.4].

Κεφάλαιο 3

Μεικτές *σ.δ.* Poisson

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα μας απασχολήσει η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για τη *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο. Πρώτα θα καθοριστεί το γενικό μοντέλο, και στη συνέχεια θα μελετηθεί η μεικτή *σ.δ.* Poisson και μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση, η διαδικασία Pólya-Lundberg.

Τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 3.1 και 3.2 υπάρχουν στο [29]. Εδώ παρουσιάζονται με παραπομπές για τις αποδείξεις.

3.1 Το υπόδειγμα

Θεωρούμε στο εξής μία απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και Θ μια τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε, όπως προαναφέρθηκε, πως το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, είναι ένα μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια ίδιου μεγέθους, τα οποία είναι παρόμοια, αλλά διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο, μπορεί να προσδιοριστεί με την πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής Θ. Αυτό σημαίνει πως η κατανομή του Θ αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, υπό όρους. Οπότε οι ιδιότητες της κατανομής της *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής ως προς το Θ, και από τις ιδιότητες της κατανομής του Θ. Για το λόγο αυτό, η τυχαία μεταβλητή Θ ονομάζεται **δομική παράμετρος** (structure parameter), η κατανομή της P_Θ ονομάζεται **δομική κατανομή** (structure distribution), ενώ η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή *σ.δ.* του αριθμού απαιτήσεων** (mixed claim number process) ή **μεικτή απαριθμήτρια *σ.δ.*** (mixed counting process).

Η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει:

- **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ, και έχει

- **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_{j+h}} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ έχουν την ίδια υπό συνθήκη κατανομή ως προς το Θ, και ισχύει η σχέση:

$$P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Άμεσα προκύπτει πως, μια στοχαστική διαδικασία αριθμού απαιτήσεων με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν και μόνο αν η $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος Α'1.3 του [2].

Λήμμα 3.1.1. *Αν μία απαριθμήτρια σ.δ. έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. π.χ. [30, Lemma 4.1.1]

Αντίθετα, για μία απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, συνεπάγεται ότι δεν έχει γενικά ανεξάρτητες προσαυξήσεις όπως θα δούμε και από το Θεώρημα 3.2.5 στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 3.1.2. *Αν η απαρίθμητρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

και

$$Var[N_t] = \mathbb{E}[Var[N_t|\Theta]] + Var[\mathbb{E}[N_t|\Theta]]$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Ορισμός 3.1.3. Μια απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **πολυωνυμική ιδιότητα** αν η σχέση

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] = \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j} P[\{N_{t_m} = n_m\}]$$

ισχύει για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \cdots < t_m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ και $n_m = \sum_{j=1}^{m} k_j$.

Αν $P[\{N_{t_m} = n_m\}] > 0$, τότε η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\middle|\{N_{t_m} = n_m\}\right] = \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

το οποίο εξηγεί και το όνομα της πολυωνυμικής ιδιότητας.

Ορισμός 3.1.4. Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **διωνυμική ιδιότητα** αν η σχέση

$$P[\{N_s = k\} \cap \{N_t - N_s = n-k\}] = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \cdot P[\{N_t = n\}]$$

ισχύει για όλα τα $0 < s < t$ και $k, n \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $k \leq n$.

Λήμμα 3.1.5. *(M.Zocher Phd, Lemma 2.1.2) Έστω μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\lim_{t\to\infty} P[\{N_t \geq n\}] = 1$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1, Λήμμα 4.1.5].

Λήμμα 3.1.6. *(M.Zocher Phd, Lemma 2.2.3) Έστω μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα τότε ισχύει ότι*

$$P[\{N_t = n\}] > 0$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1, Λήμμα 4.1.6].

Ορισμός 3.1.7. Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **ιδιότητα Markov** αν η σχέση

$$\begin{aligned} & P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] \cdot P[\{N_{t_m} = n_m\}] \\ = \;& P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] \cdot P[\{N_{t_m} = n_m\} \cap \{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = k_{m+1}\}] \end{aligned} \tag{3.1}$$

ισχύει για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \cdots < t_{m+1}, k1, \ldots, k_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ και $n_m = \sum_{j=1}^m k_j$.

Παρατήρηση 3.1.8. Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα Markov αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \cdots < t_{m+1}, k1, \ldots, k_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ και $n_m = \sum_{j=1}^m k_j$ με $P[\bigcap_{j=1}^m\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}] > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} & P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = k_{m+1}\}\middle| \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] \\ = \;& P[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = k_{m+1}\}\big|\{N_{t_m} = n_m\}] \end{aligned}$$

για όλα τα $j \in \{1, \ldots, m+1\}$.

Για μία αναλυτική απόδειξη βλ. [1, Παρατήρηση 4.1.8].

Λήμμα 3.1.9. *([35, Λήμμα 2.2.7]) Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

(β) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1, Λήμμα 4.1.9]

Λήμμα 3.1.10. *([35, Λήμμα 2.2.5]) Αν η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει την πολυωνυμική ιδιότητα τότε θα έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1, Λήμμα 4.1.10]

3.2 Η μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης

Για τον παρακάτω ορισμό βλ. π.χ. [29, Section 4]

Ορισμός 3.2.1. Η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο Θ** ($P-MPP(\Theta)$ για συντομία) , εάν

- η Θ είναι μια τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει $P_\Theta[(0,\infty)]=1$, και
- η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t\in(0,\infty)$ να ισχύει η σχέση $\mathrm{P}_{N_t|\Theta}=\mathbf{P}(t\Theta)$, $\quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta.$

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0>0$ (δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\})=1$), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-*σ.δ.* Poisson με παράμετρο θ_0.

Στην συνέχεια παρατίθεται μία βασική ιδιότητα της μεικτής *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης:

Λήμμα 3.2.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο μείξης, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση:*

$$P[\{N_t=n\}]>0,$$

για όλα τα $t\in(0,\infty)$ και $n\in\mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 3.2.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια $P-MPP(\Theta)$, τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Για τις αποδείξεις του Λήμματος 3.2.2 και του Θεωρήματος 3.2.3 βλ. π.χ. [29, Lemma 4.2.2 και Theorem 4.2.3].

Λήμμα 3.2.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P-MPP(\Theta)$, τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta]<\infty$, τότε για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ ισχύει:*

$$\mathbb{E}[N_t]=t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$Var[N_t]=t\mathbb{E}[\Theta]+t^2Var[\Theta].$$

Ιδιαιτέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για μια αναλυτική απόδειξη βλ. π.χ. [29, Lemma 4.2.5].

Έτσι, αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P-MPP(\Theta)$ έτσι ώστε η κατανομή να είναι μη εκφυλισμένη και να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε, για όλα τα $t\in(0,\infty)$, ισχύει ότι $Var[N_t]>\mathbb{E}[N_t]$.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, για το αν μια $P-MPP(\Theta)$ μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Θεώρημα 3.2.5. *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P-MPP(\Theta)$, έτσι ώστε το Θ να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Η κατανομή του Θ, είναι εκφυλισμένη.*

(*b*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

(*c*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μή ομογενής σ.δ. Poisson.*

(*d*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία (ομογενής) σ.δ. Poisson.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [29, Theorem 4.2.6].

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια απαριθμήτρια σ.δ. και Θ μια τ.μ.. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- *Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P-MPP(\Theta)$.*
- *Το $P_\Theta[(0,\infty)]=1$ και ισχύει η σχέση*

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\middle|\Theta\right]=\prod_{j=1}^{m}e^{-\Theta(t_j-t_{j-1})}\frac{(\Theta(t_j-t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}\quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta. \tag{3.2}$$

για όλα τα $m\in\mathbb{N}$ και $0=t_0<\cdots<t_m\in\mathbb{R}_+$ και για όλα τα $k_j\in\mathbb{N}_0$ με $j\in\mathbb{N}_m$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [1, Θεώρημα 4.3.7].

3.3 Η μεικτή *σ.δ.* Poisson με κατανομή μείξης

Για τον παρακάτω ορισμό της μεικτής *σ.δ.* Poisson με κατανομή μείξης (βλ. π.χ. [35])

Ορισμός 3.3.1. Μια απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή στοχαστική διαδικασια Poisson με κατανομή μείξης** $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ ($P-MPP(U)$ για συντομία) αν $U[(0,\infty)] = 1$ και αν ισχύει η σχέση

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] = \int_{\mathbb{R}_+}\prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda(t_j-t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}U(d\lambda) \qquad (3.3)$$

για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $t_0,\ldots,t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < \cdots < t_m$ και όλα τα $k_j \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}_m$.

Παρατήρηση 3.3.2. Είναι εύκολο ν.δ.ο κάθε $P-MPP(\Theta)$ είναι $P-MPP(U)$.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια απαριθμήτρια σ.δ. . Επιπλέον έστω $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ μια κατανομή με $U[(0,\infty)] = 1$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P-MPP(U)$.

(ii) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα και ισχύει η σχέση

$$P[\{N_t = n\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}U(d\lambda) \qquad (3.4)$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μια πιο αναλυτική απόδειξη βλ. [1, Λήμμα 4.2.2]

Πόρισμα 3.3.4. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια $P-MPP(U)$. Τότε*

(i) η ανισότητα $P[\{N_t = n\}] > 0$ ισχύει για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις, και

(iii) η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Markov.

Για την απόδειξη βλ. [1, Πόρισμα 4.2.3]

Ορισμός 3.3.5. Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια απαριθμήτρια *σ.δ.* . Τότε για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε την απεικόνιση $\Pi_n(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ τέτοια ώστε

$$\Pi_n(t) := P[\{N_t = n\}]$$

με $t \in \mathbb{R}_+$.

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια απαριθμήτρια σ.δ. με την δυωνυμική ιδιότητα. Τότε ισχύει η σχέση*

$$P[\{N_t = n\}] = \frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^n\Pi_0}{dt^n}(t)$$

για όλα τα $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$. Επιπλέον, υπάρχει μια κατανομή U με $U[(0,\infty)] = 1$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση

$$P[\{N_t = n\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}U(d\lambda)$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Για την απόδειξη βλ. [1, Πρόταση 4.2.7]

Πόρισμα 3.3.7. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια μεικτή απαριθμήτρια σ.δ. με την διωνυμική ιδιότητα. Τότε υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ με $U[(0,\infty)] = 1$ τέτοια ώστε η σχέση*

$$P[\{N_t = n\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}U(d\lambda)$$

να ισχύει για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια μεικτή απαριθμήτρια σ.δ. . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P - MPP(U)$.

(β) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

(γ) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.

Το παραπάνω θεώρημα έχει αποδειχθεί από τον Zocher [35, Theorem 3.2.3] για τη γενικότερη περίπτωση των πολυμεταβλητών μεικτών *σ.δ.* Poisson. Για μια αναλυτική απόδειξη στα πλαίσια των μονομεταβλητών μεικτών *σ.δ.* Poisson (βλ. π.χ. [1, Θεώρημα 4.2.8])

Παρατήρηση 3.3.9. Η μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης έχει όλες τις ιδιότητες τις οποίες έχει μια μεικτή *σ.δ.* Poisson με κατανομή μείξης. Το αντίστροφο φαίνεται να μην ισχύει διότι, όπως είναι γενικά γνωστό, δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν οι δεσμευμένες πιθανότητες από τις αδέσμευτες. Επομένως, ο χαρακτηρισμός της μεικτής *σ.δ.* Poisson με κατανομή μείξης μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας δεν μπορεί να ισχύσει και για την μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης. Αρχικά δεν είμαστε σίγουροι για την ύπαρξη μιας τ.μ. με κατανομή που να προέρχεται από το Θεώρημα Bernstein - Widder για έναν δοσμένο χώρο πιθανότητας. Απο την άλλη μεριά, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια τ.μ. είναι γενικά δύσκολο να κατασκευαστούν οι δεσμευμένες πιθανότητες σύμφωνα με τον ορισμό της μεικτής *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης από τις αδέσμευτες.

Κεφάλαιο 4

Διαδικασίες συνολικών απαιτήσεων

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε και μελετάμε τις διαδικασίες των συνολικών αποζημιώσεων. Πρώτα γίνεται μια ανάλυση του μοντέλου (Ενότητα 4.1) και, στη συνέχεια, αποδεικνύονται κάποια γενικά αποτελέσματα για τις σύνθετες κατανομές (Ενότητα 4.2).

4.1 Το υπόδειγμα

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε μια απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τη $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων που εξαρτάται από την απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$. Υποθέτουμε ότι το μηδενικό σύνολο εξαίρεσης είναι το κενό και ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με μηδέν.
Επιπλέον, θεωρούμε την ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίων μεταβλητών. Για $t \in \mathbb{R}_+$, ισχύει

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k, \tag{4.1}$$

με $S_0 := 0$, όπου

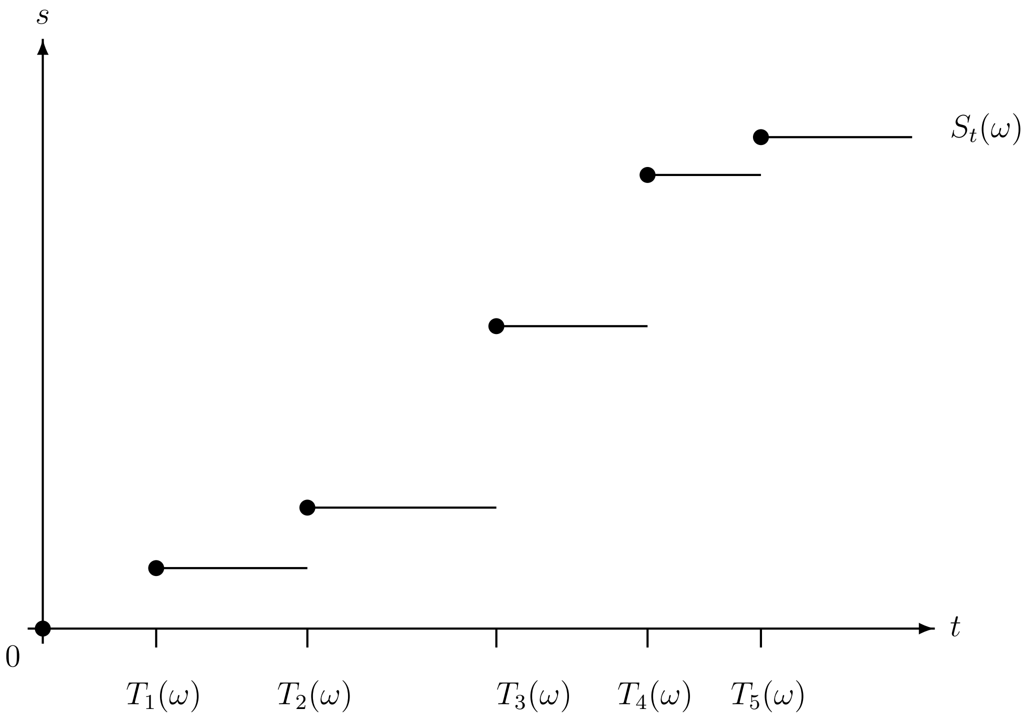
- X_n είναι το μέγεθος ή το ποσό της n- οστής απαίτησης.
- S_t είναι το μέγεθος των συνολικών απαιτήσεων που έχουν συμβεί σε χρόνο t.

Πράγματι, έστω $t \geq 0$ και $\omega \in \Omega$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\omega \in \{N_t = n_0\}$, δηλαδή τέτοιο ώστε $N_t(\omega) = n_0$. Επομένως ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \chi_{\{N_t=n_0\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{N_t} X_k(\omega).$$

Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **η $\sigma.\delta.$ του μεγέθους των απαιτήσεων**, ενώ η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **η $\sigma.\delta.$ των συνολικών απαιτήσεων**, που παράγεται απο την $\sigma.\delta.$ του αριθμού απαιτήσεων και της $\sigma.\delta.$ του μεγέθους των απαιτήσεων.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, θεωρούμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι i.i.d. και ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του μεγέθους των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες.



Τα παρακάτω αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου, εκτός του Πορίσματος 4.1.2, αναφέρονται στο βιβλίο [29] του Klaus D. Schmidt. Παραθέτουμε αναλυτικότερες αποδείξεις.

Λήμμα 4.1.1. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει ότι:*

$$P[\{S_t \in B\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] P\left[\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\right\}\right]. \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k \in B\right\} = \biguplus \left(\{N_t = n\} \cap \left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\}\right\}\right). \tag{4.3}$$

Προφανώς η ακολουθία $\big\{\{N_t = n\}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια διαμέριση του Ω.

Επομένως, για οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\omega \in \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k \in B\right\} \\
\iff\ & \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \in B \\
\iff\ & \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \left(\omega \in \{N_t = n_0\}, \quad \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) \in B\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \omega \in \{N_t = n_0\} \cap \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) \in B \right\} \\
&\iff \omega \in \left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}_0} \{N_t = n\} \cap \left\{ \sum_{k=1}^{n} X_k \in B \right\} \right),
\end{aligned}$$

άρα ισχύει η (4.3). Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
P\left[\{S_t \in B\}\right] &= P\left[\left\{ \sum_{k=1}^{N_t} X_k \in B \right\}\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} P\left[\sum_{n=0}^{\infty} \{N_t = n\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{n} X_k \in B \right\}\right] \\
&\overset{(4.3)}{=} P\left[\biguplus_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\{N_t = n\} \cap \left\{ \sum_{k=1}^{n} X_k \in B \right\} \right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\{N_t = n\} \cap \left\{ \sum_{k=1}^{n} X_k \in B \right\}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\{N_t = n\}\right] P\left[\left\{ \sum_{k=1}^{n} X_k \in B \right\}\right],
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Πόρισμα 4.1.2. *Για $s, t \in \mathbb{R}_+$, με $s \le t$, για τις προσαυξήσεις της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ των συνολικών απαιτήσεων στο διάστημα $(s, t]$ ισχύει:*

$$S_t - S_s = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k. \tag{4.4}$$

με $S_0 = 0$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της S_t ισχύει ότι:

$$S_t - S_s = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - \sum_{k=1}^{N_s} X_k = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k.$$

□

Σύμφωνα με τον ορισμό της S_t, ισχύει ότι:

$$S_t(\omega) = (S_t - S_s)(\omega) + S_s(\omega),$$

ακόμα και όταν το $S_s(\omega)$ απειρίζεται. Για την σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων, οι ιδιότητες των ανεξάρτητων ή στάσιμων προσαυξήσεων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Θεώρημα 4.1.3. *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε και η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Απόδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$. Για κάθε $n_0, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}_0$ ώστε $0 = n_0 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_m$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
& P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right)\right] \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] \cdot P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right] \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right] \cdot P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{m} P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right] \cdot \prod_{j=1}^{m} P\left[\left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{m}\left(P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right] P\left[\left\{\sum_{k=1}^{n_j - n_{j-1}} X_k \in B_j\right\}\right]\right).
\end{aligned}
$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{S_{t_j} - S_{t_{j-1}} \in B_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{k=N_{t_{j-1}}+1}^{N_{t_j}} X_k \in B_j\right\}\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{n_j=0}^{\infty}\{N_{t_j} = n_j\} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\left[\biguplus_{n_j \in \mathbb{N}_0}\left(\{N_{t_j} = n_j\} \cap \left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right)\right]\right] \\
&= P\left[\biguplus_{n_1=0}^{\infty}\biguplus_{n_2=n_1}^{\infty}\cdots\biguplus_{n_m=n_{m-1}}^{\infty}\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right)\right]\right] \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=n_1}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty} P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m}\left\{\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k \in B_j\right\}\right)\right] \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=n_1}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right] P\left[\left\{\sum_{k=1}^{n_j - n_{j-1}} X_k \in B_j\right\}\right]\right) \\
&= \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_m=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(P[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = l_j\}] P\left[\left\{\sum_{k=1}^{l_j} X_k \in B_j\right\}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{l_j=0}^{\infty} P[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = l_j\}] P\left[\left\{ \sum_{k=1}^{l_j} X_k \in B_j \right\} \right] \right).$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος 4.1.2. □

Θεώρημα 4.1.4. *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε και η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.1.3 η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
Θεωρούμε $t, h \in \mathbb{R}_+$. Για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ από το Λήμμα 4.1.1 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&P\left[\{S_{t+h} - S_t \in B\}\right] \\
&\quad = P\left[\left\{ \sum_{k=N_t+1}^{N_{t+h}} X_k \in B \right\} \right] \\
&\quad = P\left[\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} \biguplus_{m\in\mathbb{N}_0} \left[\{N_t = n\} \cap \{N_{t+h} - N_t = m\} \cap \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \in B \right\} \right] \right] \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] P[\{N_{t+n} - N_t = m\} P\left[\left\{ \sum_{k=n+1}^{n+m} X_k \in B \right\} \right] \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] \sum_{m=0}^{\infty} P[\{N_h = m\}] P\left[\left\{ \sum_{k=1}^{m} X_k \in B \right\} \right] \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} P[\{N_h = m\}] P\left[\left\{ \sum_{k=1}^{m} X_k \in B \right\} \right] \\
&\quad = P[\{S_h \in B\}],
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της (4.3), η τρίτη προκύπτει από την ανεξαρτησία της $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, καθώς και την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. □

4.2 Σύνθετες κατανομές

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον τρόπο υπολογισμού της κατανομής του συνολικού μεγέθους των απαιτήσεων S_t σε χρόνο t.
Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή N που ικανοποιεί την συνθήκη $P_N[\mathbb{N}_0] = 1$ και ορίζουμε

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k. \tag{4.5}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές N και S θα αναφέρονται πάλι ως η απαριθμήτρια *σ.δ.* και η *σ.δ.* των συνολικών απαιτήσεων αντίστοιχα.

Θεωρούμε επιπλέον ότι οι τ.μ. N και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι i.i.d.. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή P_S των συνολικών απαιτήσεων ονομάζεται **σύνθετη κατανομή** και συμβολίζεται με

$$\mathbf{C}(P_N, P_X)$$

Οι σύνθετες κατανομες συνήθως προσδιορίζονται απο την κατανομή της απαριθμήτριας *σ.δ.* . Για παράδειγμα, αν η P_N ακολουθεί την κατανομή Poisson, τότε και η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ ονομάζεται **σύνθετη κατανομή Poisson**.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια αναδιατύπωση του Λήμματος 4.1.1

Λήμμα 4.2.1. *Για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει*

$$P_S[B] = \sum_{n=0}^{\infty} P_N[\{n\}] P_X^{*n}[B]. \tag{4.6}$$

Σε μερικές περιπτώσεις είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιείται η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων.

Λήμμα 4.2.2. *Η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί τη σχέση*

$$\varphi_S(z) = m_N(\varphi_X(z)) \tag{4.7}$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$m_S(z) = m_N(m_X(z)).$$

Απόδειξη. **(a)** Για κάθε $z \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\varphi_S(z) &= \mathbb{E}\left[e^{izS}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iz\sum_{k=1}^{N} X_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} e^{iz\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} e^{izX_k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{izX_k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \mathbb{E}\left[e^{izX_1}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \varphi_X(z)^n = \mathbb{E}\left[\varphi_X(z)^N\right] \\
&= m_N(\varphi_X(z)),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει όπως η (4.1) και η πέμπτη ισότητα προκύπτει από το Πόρισμα Beppo-Levi (βλ. [3, Πόρισμα 2.3.2]) και $\varphi_X := \varphi_{X_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(b) Πάλι για κάθε $z \in [-1,1]$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}
m_S(z) &= \mathbb{E}\left[z^S\right] = \mathbb{E}\left[z^{\sum_{k=1}^N X_k}\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} z^{\sum_{k=1}^n X_k}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} z^{X_k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[z^{X_k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \mathbb{E}\left[z^{X_1}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] m_X(z)^n = \mathbb{E}\left[m_X(z)^N\right] \\
&= m_N(m_X(z)),
\end{aligned}$$

όπου πάλι η πέμπτη ισότητα προκύπτει από το Πόρισμα Beppo-Levi (βλ. [3, Πόρισμα 2.3.2]) και ισχύει ότι $m_X := m_{X_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

□

Πόρισμα 4.2.3. *Αν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί την*

$$\varphi_S(z) = e^{\alpha(\varphi_X(z)-1)}. \tag{4.8}$$

Αν η κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή Bernoulli ή μια λογαριθμική κατανομή, τότε ο υπολογισμός της σύνθετης κατανομής Poisson μπορεί να απλοποιηθεί σύμφωνα με τα παρακάτω Πορίσματα.

Πόρισμα 4.2.4. *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\eta \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{B}(\eta)) = \mathbf{P}(\alpha\eta). \tag{4.9}$$

Πόρισμα 4.2.5. *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\eta \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{Log}(\eta)) = \mathbf{NB}\left(\frac{\alpha}{|\log(1-\eta)|}, 1-\eta\right). \tag{4.10}$$

Λήμμα 4.2.6. (Οι ταυτότητες του Wald) *Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}[N] < \infty$ και $\mathbb{E}[X] < \infty$. Τότε για την μέση τιμή και την διακύμανση της S ισχύει*

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] \tag{4.11}$$

και

$$Var[S] = \mathbb{E}[N]Var[X] + Var[N]\mathbb{E}[X]^2 \tag{4.12}$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &:= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}]\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}] n\mathbb{E}[X] \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X],
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος Beppo-Levi (βλ. [3, Πόρισμα 2.3.2]) και της ανεξαρτησίας των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Παρόμοια ισχύει

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)^2\right] \\
&\overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}] \left(Var\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] + \left(\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right)^2\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}] \left(nVar[X] + n^2\mathbb{E}[X]^2\right) \\
&= \mathbb{E}[N]Var[X] + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2,
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος Beppo-Levi και της ανεξαρτησίας των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Επομένως

$$
\begin{aligned}
Var[S] &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 \\
&= \left(\mathbb{E}[N]Var[X] + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2\right) - \left(\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}[N]Var[X] + \left(\mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2\right)\mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[N]Var[X] + Var[N]\mathbb{E}[X]^2.
\end{aligned}
$$

□

Κεφάλαιο 5

Νόμοι 0-1

Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ αντίθετα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ συγκλίνει. Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τι συμπεράσματα μπορούμε να αποδείξουμε για τη σύγκλιση ή την απόκλιση σειρών της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}$, όπου η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ανεξάρτητη ακολουθία ισοκατανεμημένων τ.μ. Bernoulli με

$$P[\{X_1 = 1\}] = P[\{X_1 = -1\}] = \frac{1}{2}.$$

Διατυπώνοντάς το διαφορετικά, εξατάζουμε την απάντηση στο ερώτημα, τι μπορεί να συμπεράνει κανείς για τη σύγκλιση σειρών με γενικό όρο $\pm\frac{1}{n}$, όπου τα πρόσημα $+$ και $-$ εμφανίζονται με μια τυχαία σειρά σύμφωνα με τις τιμές της ακολουθίας Bernoulli $X_1, X_2, ...$

Με $A := \{\omega \in \Omega : \exists_1 \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{X_n(\omega)}{n} \in \mathbb{R}\}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων $\omega \in \Omega$, ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}$ να συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Θεωρούμε την πιθανότητα $P(A)$ αυτού του συνόλου. Δεν είναι εκ των προτέρων σαφές ποιά τιμή μπορεί να έχει αυτή η πιθανότητα. Όμως αξιοσημείωτο αποδεικνύεται το γεγονός ότι μπορεί εκ των προτέρων να υποστηριχθεί ότι αυτή η πιθανότητα μπορεί να έχει μόνο τις τιμές 0 ή 1. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια των λεγόμενων Νόμων $0-1$ του Kolmogorov και των Hewitt-Savage η διατύπωση και η απόδειξη των οποίων αποτελούν το κύριο περιεχόμενο της παρούσας ενότητας.

5.1 Νόμοι 0-1 του Kolmogorov

Για όλη την ενότητα θεωρούμε (Ω, Σ, P) χ.π..

Ορισμός 5.1.1. Έστω $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία $\sigma-$αλγεβρών στο Ω με $\Sigma_n \subseteq \Sigma$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\mathcal{T} := \sigma(\bigcup_{m\geq n}^{\infty}\Sigma_m)$$

η $\sigma-$άλγεβρα που παράγεται από τις $\Sigma_n, \Sigma_{n+1}, \ldots$. Τότε η οικογένεια

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$$

ονομάζεται η $\sigma-$άλγεβρα των **τερματικών ενδεχομένων** της ακολουθίας $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ή **η τελική** ή **τερματική $\sigma-$άλγεβρα** ή **$\sigma-$ άλγεβρα ουρά**.

Θεώρημα 5.1.2. *(Νόμος $0-1$ του Kolmogorov) Έστω $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητη ακολουθία $\sigma-$αλγεβρών με $\Sigma_n \subseteq \Sigma$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{T}_\infty$ ισχύει $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{T}_\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια $\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \mathcal{T}_{n+1}\}$ είναι ανεξάρτητη βλ. π.χ. [3, (α)]. Άρα η $\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \mathcal{T}_\infty\}$ είναι ανεξάρτητη διότι $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της $\{\mathcal{T}_\infty, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητη, άρα όλη η οικογένεια είναι ανεξάρτητη βλ. π.χ. [3]. Επομένως η οικογένεια $\{\mathcal{T}_\infty, \mathcal{T}_1\}$ είναι ανεξάρτητη βλ. π.χ. [3]. Αφού $A \in \mathcal{T}_\infty$ έχουμε $A \in \mathcal{T}_1$, άρα πρέπει να ισχύει

$$P(A \cap A) = P(A)P(A)$$

δηλ. $P(A) = P(A)^2$. Επομένως $P(A) \in \{0, 1\}$. □

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.1.2 προκύπτει ένας Νόμος $0-1$ που αποδείχθηκε από τον Borel.

Για μια ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδεχομένων από την Σ, ορίζουμε το ενδεχόμενο

$$\overline{lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n := lim_{n\in\longrightarrow\infty} \sup A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

Το $\overline{lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n$ ονομάζεται το πάνω όριο των A_n $(n \in \mathbb{N})$.

Πόρισμα 5.1.3. *(Νόμος $0-1$ του E. Borel) Για κάθε ανεξάρτητη ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδεχομένων από τη Σ ισχύει $P(\{A_n \quad \text{για άπειρα} \quad n\}) = 0$ ή 1, δηλαδή $P(\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n) = 0$ ή 1.*

Απόδειξη. Έστω $\Sigma_n := \sigma(\{A_n\}) = \{0, A_n, A_n^c, \Omega\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη. Για $Q_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ ισχύει $Q_N \in \mathcal{T}_n$ και επειδή η ακολουθία $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα προκύπτει ότι $Q_m \in \mathcal{T}_n$ για κάθε $m \geq n \in \mathbb{N}$, συνεπώς

$$\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_k = \bigcap_{k\geq j}^{\infty} Q_k \in \mathcal{T}_j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$, δηλ. $\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n \in \mathcal{T}_\infty$. Άρα από το Θεώρημα 5.1.2 προκύπτει ότι $P(\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n) = 0$ ή 1. □

Ερώτημα 5.1.4. Κάτω από ποιές συνθήκες ισχύει η σχέση $P(\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}A_n)=0$ αντίστοιχα $P(\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}A_n)=1$

Το κλειδί για την απάντηση του παραπάνω ερωτήματος είναι η συμπεριφορά σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$. Αρχικά προκύπτει για οποιαδήποτε ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εύκολα η συνεπαγωγή

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty\Longrightarrow P(\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}A_n)=0. \tag{5.1}$$

Πράγματι, θέτωντας $A:=\overline{\lim}_{n\in\longrightarrow\infty}A_n$ έχουμε $A\subseteq\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$ άρα,

$$P(A)\le\sum_{i=n}^{\infty}P(A_i)\Longrightarrow P(A)\le\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=n}^{\infty}P(A_i)=0\Longrightarrow P(A)=0.$$

Γενικά είναι εύκολο να δούμε, ότι χωρίς επιπλέον προϋποθέσεις δεν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=+\infty\Longrightarrow P(A)=1. \tag{5.2}$$

Αρκεί να θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο A_0 με $0<P(A_0)<1$ και να διαλέξουμε για $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τη σταθερή ακολουθία $A_0,A_0,\dots$. Τότε ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ αλλά για $A:=\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}A_n$ ισχύει $P(A)=P(A_0)<1$.

Τώρα όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι για ανεξάρτητες ακολουθίες $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει η συνεπαγωγή 5.2, δηλ. μπορεί να αποδειχθεί το αντίστροφο της συνεπαγωγής 5.1. Αυτό είναι η θέση του Λήμματος Borel-Cantelli (1875-1966). Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε αυτό το λήμμα σύμφωνα με μια βελτίωση που έγινε από τον Chung [12] το 1968. Εδώ αρκεί να υποθέσει κανείς την κατά ζεύγη ανεξαρτησία των ενδεχομένων $A_1,A_2,\dots$.

Λήμμα (Borel-Cantelli) 5.1.5. *Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ενδεχομένων σε ένα χ.π. (Ω,Σ,P). Τότε ισχύει η συνεπαγωγή (5.1). Αν επιπλέον τα ενδεχόμενα είναι ανα δύο ανεξάρτητα, τότε ισχύει η συνεπαγωγή (5.2).*

Απόδειξη. Έχουμε να αποδείξουμε μόνο τη συνεπαγωγή (5.2). Θέτουμε

$$A:=\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}A_n,\quad I_n:=\chi_{A_n},\quad S_n:=\sum_{j=1}^{n}I_j\quad\textit{και}\quad S:=\sum_{n=1}^{\infty}I_n.$$

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων A_n $(n\in\mathbb{N})$ ανά δύο ισοδυναμέι με την απαίτηση ότι οι τ.μ. I_n $(n\in\mathbb{N})$ είναι ανά δύο ασυχέτιστες. Λαμβάνοντας υπόψη την $I_n^2=I_n$ $(n\in\mathbb{N})$ έχουμε

$$Var[S_n]=\sum_{j=1}^{n}Var[I_j]\;\;=\;\;\sum_{j=1}^{n}[\mathbb{E}[I_j^2]-\mathbb{E}[I_j]^2] \tag{5.3}$$

$$= \mathbb{E}[S_n] - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[I_j]^2 \leq E[S_n].$$

Η υπόθεση της συνεπαγωγής (5.2) μας λέει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_n] = +\infty$, ή λόγω της $S_n \uparrow S$, ισοδύναμα,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[S] = \infty. \tag{5.4}$$

Ένα στοιχείο $\omega \in \Omega$ ανήκει ακριβώς στο A, δηλαδή στο A_n για άπειρα n, όταν $S(\omega) = \infty$. Αυτό που ζητάμε να αποδείξουμε είναι:

$$P[\{S = \infty\}] = 1.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε

$$P[\{|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \leq n\}] \geq 1 - n^2 Var[S_n], \quad \textit{για κάθε} \quad n > 0.$$

Εξαιτίας της (5.4) μπορούμε για το υπόλοιπο της απόδειξης να υποθέσουμε ότι $\mathbb{E}[S_n] > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε όμως έχουμε

$$P[\{S_n \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]\}] \geq P[\{|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]\}] \geq 1 - 4\frac{Var[S_n]}{\mathbb{E}[S_n]^2}.$$

Λόγω των (5.3) και (5.4) προκύπτει $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Var[S_n]}{\mathbb{E}[S_n]^2} = 0$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $P[S_n \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n] \geq 1 - \varepsilon$ για τελικά όλα τα n και έτσι αφού $S_n \leq S$ έχουμε $P[\{S \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]\}] \geq P[\{S_n \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]\}] \geq 1 - \varepsilon$ για τελικά όλα τα n. Από τη σύγκλιση $S_n \uparrow S$ προκύπτει και λόγω της (5.4) ότι $\mathbb{E}[S_n] \uparrow \mathbb{E}[S] = \infty$. Άρα $P[\{S = \infty\}] \geq 1 - \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως $P[\{S = \infty\}] = 1$. □

Ορισμός 5.1.6. Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τ.μ.. Η οικογένεια $\mathcal{T}_\infty := \mathcal{T}_\infty(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ όπου $\mathcal{T}_n := \sigma(\{X_k\}_{k\geq n})$ ονομάζεται **τελική $\sigma-$άλγεβρα** ή **$\sigma-$άλγεβρα ουρά** της ακολουθίας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Θεώρημα 5.1.7. *(Νόμος 0-1 του Kolmogorov για τ.μ.) Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ.. Τότε για κάθε ενδεχόμενο*

$$\mathcal{T}_\infty(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$$

ισχύει $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$.

Πόρισμα 5.1.8. *Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ.. Τότε κάθε $\mathcal{T}_\infty(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$-μετρήσιμη τ.μ. T είναι $P - \sigma.\beta.$ σταθερή, δηλαδή υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $P[\{T = \alpha\}] = 1$. Η τ.μ. $T : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται* **τελική συνάρτηση** *ή* **(συνάρτηση ουρά)** *της ακολουθίας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ ισχύει $\{T \leq \gamma\} \in \mathcal{T}_\infty$. Επομένως από το Θεώρημα 5.1.7 προκύπτει ότι $P[\{T \leq \gamma\}] = 0$ ή 1. Για $\gamma = +\infty$ ισχύει προφανώς $P[\{T \leq \gamma\}] = P(\Omega) = 1$. Έστω $C := \{\gamma \in \overline{\mathbb{R}}, P\{T \leq \gamma = 1\} = \emptyset\}$ και $\alpha := \inf C \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $\gamma_n \downarrow \alpha$ για μια κατάλληλη φθίνουσα $\{\gamma_n\}$ στο C και επειδή $\{T \leq \gamma_n\} \downarrow \{T \leq \alpha\}$ θα έχουμε $\alpha \in C$, δηλαδή $\alpha = \min C$. Άρα $P[\{T < \alpha\}] = 0$ και έτσι $P[\{T = \alpha\}] = 1$. □

Απόδειξη. (Θεωρήματος 5.1.7) Έστω $A \in \mathcal{T}_\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια $\{\sigma(X_1, ..., X_n)$, $\{\sigma(\{X_k\}_{k>n+1}\}$ είναι ανεξάρτητη (βλ. π.χ. [3]). Άρα η $\{\sigma(X_1, ..., X_n), \mathcal{T}_\infty\}$ είναι ανεξάρτητη διότι $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της $\{\mathcal{T}_\infty, \sigma(X_1), \sigma(X_2), ...\}$ είναι ανεξάρτητη, άρα όλη η οικογένεια είναι ανεξάρτητη (βλ. π.χ. [3]). Επομένως η οικογένεια $\{\mathcal{T}_\infty, \mathcal{T}_1\}$ είναι ανεξάρτητη (βλ. π.χ. [3]). Αφού $A \in \mathcal{T}_\infty$ έχουμε $A \in \mathcal{T}_1$ άρα $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, δηλαδή $P(A) = P(A)^2$. Άρα $P(A) \in \{0, 1\}$. □

5.2 Νόμος 0-1 των Hewitt-Savage

Ένα πολύ διαφορετικό είδος Νόμου $0-1$ σε σχέση με εκείνον του Kolmogorov είναι ο Νόμος $0-1$ των Hewitt-Savage [21]. Βασίζεται σε ιδιότητες συμμετρίας των σχετικών ενδεχομένων.

Μια συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ είναι μια **πεπερασμένη μετάθεση** του $\mathbb{N}_0$, αν είναι $1-1$ και επί και $\tau(n) = n$ για τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$. Η τ μπορεί να ερμηνευθεί τότε ως μια μετάθεση ενός τμήματος $\{1, ..., n_0\}$ του $\mathbb{N}_0$, η οποία μπορεί να επεκταθεί στο $\mathbb{N}_0$ μέσω της ταυτοτικής απεικόμισης $id_{\mathbb{N}_0 \setminus \{1,...,n_0\}}$.

Θεωρούμε μια ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ πραγματικών τ.μ. επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P). Η ακολουθία ορίζει την $\Sigma - \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}-$μετρήσιμη συνάρτηση

$$X := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0} X_n : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$$

με $X(\omega) := (X_1(\omega), X_2(\omega), ...)$ και κατανομή πιθανότητας P_X. Αν η τ είναι μια πεπερασμένη μετάθεση του $\mathbb{N}_0$, τότε συμβολίζουμε με $\tau X := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0} X_{\tau(n)}$ την αντίστοιχη $\Sigma - \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}-$μετρήσιμη συνάρτηση. Αυτή παράγεται από την X με αυτόν τον τρόπο, ώστε ένα πεπερασμένο τμήμα $X_1, ..., X_{n-1}$ της ακολουθίας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ να μετατίθεται μέσω της τ και τα επόμενα μέλη της ακολουθίας να μένουν αμετάβλητα ($\tau(n) = n$ για όλα τα $n \geq n_0$).

Ορισμός 5.2.1. Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ακολουθία πραγματικών τ.μ. επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) και $X := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$. Μια $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0} - \overline{\mathfrak{B}}-$μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται **πεπερασμένα μεταθέσιμη** ως προς την X αν

$$g(\tau X(\omega)) = g(X(\omega)) \tag{5.5}$$

για όλα τα $\omega \in \Omega$ και για όλες τις πεπερασμένες μεταθέσεις $\tau : \mathbb{N}_0 \longmapsto \mathbb{N}_0$. Ένα σύνολο $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **πεπερασμένα μεταθέσιμο** ως προς την X, αν η χ_A είναι πεπερασμένα μεταθέσιμη ως προς X, δηλαδή αν ισχύει

$$\{\tau X \in A\} = \{X \in A\}. \tag{5.6}$$

Για την καλύτερη κατανόηση θα βοηθήσει η παρακάτω σημείωση: Οι κανονικές προβολές $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \longmapsto \mathbb{R}$ είναι τ.μ. επάνω στον χ.π. $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}, P_X)$. Κάθε τελικό ενδεχόμενο T ως προς την ακολουθία $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, δηλαδή κάθε στοιχείο T της $\sigma-$άλγεβρας $\mathcal{T}_\infty := \mathcal{T}_\infty(\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, είναι μεταθέσιμο ως προς X. Συγκεκριμένα, αν η τ είναι μια πεπερασμένη μετάθεση του $\mathbb{N}_0$ με $\tau(n) = n$ για όλα τα $n \geq n_0$ με $n_0 \geq 1$, τότε το T ανήκει στη $\sigma-$άλγεβρα $\sigma(\{\pi_n\}_{n\geq n_0})$, διότι πρόκειται για τελικό ενδεχόμενο. Η $\sigma-$άλγεβρα $\sigma(\{\pi_n\}_{n\geq n_0})$, στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ είναι ίση με τη $\sigma-$άλγεβρα των «κυλινδρικών» συνόλων $z = p_{n_0}^{-1}(B)$, όπου $B \in \otimes_{n=n_0}^{\infty}\mathcal{A}_n$ με $\mathbb{A}_n := \mathfrak{B}$ για $n \geq n_0$ και οι

$$p_{n_0} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \mathbb{R}^{n_0-1} \times \prod_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{R}_n \longmapsto \prod_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{R}_n,$$

με $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$ για $n \geq n_0$, είναι οι κανονικές προβολές επάνω στον δεύτερο παράγοντα. Τότε ισχύει $\{\tau X \in p_{n_0}^{-1}(B)\} = \{X \in p_{n_0}^{-1}(B)\}$ επειδή $p_{n_0}(\tau X) = \otimes_{n=n_0}^{\infty} X_n = p_{n_0}(X)$.

Άρα ισχύει η συνθήκη (5.6) για $A = T = p_{n_0}^{-1}(B)$. Για ένα τέτοιο τελικό ενδεχόμενο $T \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}$ ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας της ακολουθίας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (από αυτή εξαρτάται η ανεξαρτησία της ακολουθίας $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$) ο Νόμος $0-1$ του Kolomogorov $P_X(T) = 0$ ή 1. Κάτω από την επί πλέον υπόθεση, ότι όλες οι X_n είναι ισόνομες, μας επιτρέπει ο Νόμος $0-1$ των Hewitt-Savage να γενικεύσουμε το Νόμο $0-1$ του Kolmogorov σε μεταθέσιμα ενδεχόμενα.

Θεώρημα 5.2.2. *(Νόμος 0-1 των Hewitt-Savage) Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων, πραγματικών τ.μ.. Τότε για κάθε μεταθέσιμο σύνολο $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}$ ως προς την $X = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ ισχύει*

$$P(\{X \in A\}) = P_X(A) = 0 \quad ή \quad 1.$$

Απόδειξη. Η $\sigma-$άλγεβρα $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0} = \sigma(\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0})$ παράγεται από την άλγεβρα $\mathcal{A}_0 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n$ στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, όπου $\mathcal{F}_n := \sigma(\pi_1, ..., \pi_n)$ για $n \in \mathbb{N}_0$. Είναι γνωστό, ότι για κάθε $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα σύνολο $C \in \mathcal{A}_0$ ώστε $P_X(A \triangle C) < \varepsilon$ (βλ. π.χ.) Έτσι, επειδή η $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι αύξουσα ακολουθία, για το $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}$ υπάρχει πάντα μια υπακολουθία $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ της ακολουθίας των φυσικών αριθμών και ενδεχόμενα $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$, ώστε

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} P_X(A \triangle C_k) = 0. \tag{5.7}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε την πεπερασμένη μετάθεση τ_k του $\mathbb{N}_0$ ως εξής:

$$\tau_k(n) = \begin{cases} n_k + n, & αν \quad 1 \leq n \leq n_k \\ n - n_k, & αν \quad n_k + 1 \leq n \leq 2n_k \\ n, & αν \quad n > 2n_k. \end{cases}$$

Αν το $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}$ είναι μεταθέσιμο, τότε

$$\{\tau_k X \in A\} = \{X \in A\} \quad \textit{για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{5.8}$$

Επειδή $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$, υπάρχει ένα σύνολο Borel $B \in \mathfrak{B}_{n_k}$ στον $\mathbb{R}^{n_k}$ ώστε

$$C_k = \{(\pi_1, ..., \pi_{n_k}) \in B_k\}. \tag{5.9}$$

Αν θέσουμε

$$M_k := \{(\pi_{\tau_k(1)}, ..., \pi_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\} = \{(\pi_{n_k+1}, ..., \pi_{2n_k}) \in B_k\}, \tag{5.10}$$

τότε $M_k \in \sigma(\{\pi_n\}_{n \geq n_{k+1}})$. Επειδή $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$ και επειδή η ακολουθία $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι ανεξάρτητη ως προς την P_X, θα έχουμε την ανεξαρτησία των C_k και M_k (βλ. π.χ. Πόρισμα 3.2.8 [3]), επομένως ισχύει

$$P_X(C_k \cap M_k) = P_X(C_k) P_X(M_k). \tag{5.11}$$

Η ακολουθία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ από την υπόθεση είναι ανεξάρτητη και οι τ.μ. X_n είναι ισόνομες. Οι X και οι τ_X έχουν ίδια κατανομή $P_X = (P_{X_1})_{\mathbb{N}_0} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}_0} \mu_n$, όπου $\mu_n := P_{X_1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Από τις ισότητες (5.9) και (5.10) προκύπτει $\{X \in C_k\} = \{(X_1, ..., X_{n_k}) \in B_k\}$ και $X \in M_k\} = \{(X_{\tau_k(1)}, ..., X_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\}$, αντίστοιχα, άρα $\{tau_k X \in C_k\} = \{X \in M_k\}$. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και την (5.8) παίρνουμε

$$\{\tau_k X \in A \triangle C_k\} = \{X \in A \triangle M_k\}$$

και επομένως λόγω της ισότητας $P_X = P_{\tau_k} X$ προκύπτει

$$P_X(A \triangle C_k) = P_X(A \triangle M_k). \tag{5.12}$$

Όμως από τη σχέση $A \triangle (C_k \cap M_k) \subseteq (A \cap \triangle C_k) \bigcup (A \triangle M_k)$ παιρνουμε

$$P_X\left(A \triangle (C_k \cap M_k)\right) \leq P_X(A \triangle C_k) + P_X(A \triangle M_k) \stackrel{(5.12)}{=} 2P_X(A \triangle C_k).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} P_X(A \triangle C_k \cap M_k)) \stackrel{(5.7)}{=} 0$$

και επομένως

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} P_X(C_k \cap M_k)) = P_X(A).$$

Από την (5.12) έχουμε επίσης

$$P_X(A) = \lim_{k \longrightarrow \infty} P_X(C_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} P_X(M_k).$$

Από την παραπάνω σχέση και την (5.11) προκύπτει $P_X(A) = P_X(A)^2$, δηλαδή $P_X(A) = 0$ ή 1. $\square$

Με τον ίδιο τρόπο προέκυψε το Πόρισμα 5.1.8 από το Νόμο $0-1$ του Kolmogorov για τ.μ. έτσι και από το Νόμο $0-1$ των Hewitt-Savage μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 5.2.3. *Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων τ.μ. επάνω σε έναν χ.π. (Ω, Σ, P). Αν η g είναι $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0}-$μετρήσιμη συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ στον $\overline{\mathbb{R}}$, η οποία είναι μεταθέσιμη ως προς την ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, τότε η g είναι $P_X-\sigma.\beta.$ σταθερή και επομένως η $g\circ X$ έιναι $P-\sigma.\beta.$ σταθερή.*

Απόδειξη. Για κάθε $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο $A := \{g \le \gamma\}$ είναι μεταθέσιμο ως προς την $X := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.5) έχουμε

$$\{X \in A\} = \{g(X) \le \gamma\} = \{g(\tau X) \le \gamma\} = \{\tau X \in A\}$$

για κάθε πεπερασμένη μετάθεση τ του $\mathbb{N}_0$. Έτσι από το Θεώρημα 5.2.2 η $P_X(\{g \le \gamma\}) = P(\{g\circ X \le \gamma\})$ παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1. Η συνέχεια της απόδειξης γίνεται όπως στο Πόρισμα 5.1.8. □

Το παρακάτω παράδειγμα και οι συνέπειες του μας δείχνουν πως μπορεί να εφαρμοστεί ο Νόμος $0-1$ των Hewitt-Savage.

Παράδειγμα 5.2.4. Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων πραγματικών τ.μ.. Έστω

$$S_n := X_1 + ... + X_n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Τότε οι τ.μ.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup S_n \quad \textit{και} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n$$

είναι $P-\sigma.\beta.$ σταθερές.

Πράγματι, η συνάρτηση

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup(x_1 + ... + x_n)$$

είναι μία $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}_0} - \overline{\mathfrak{B}}-$μετρήσιμη συνάρτηση g από τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ στον $\overline{\mathbb{R}}$. Για αυτή τη συνάρτηση ισχύει

$$g\circ X = g(X) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup S_n.$$

Η g είναι μεταθέσιμη ως προς την ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, επειδή ισχύει $S_{\tau(n)} = S_n$ για οποιαδήποτε πεπερασμένη μετάθεση τ του $\mathbb{N}_0$ και για ικανοποιητικά μεγάλο $n \in \mathbb{N}_0$. Ανάλογα ή μέσω της ακολουθίας $\{-X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα για το $\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n$. Από το Πόρισμα 5.2.3 προκύπτει ότι οι τ.μ.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup S_n \quad \textit{και} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n$$

έιναι $P-\sigma.\beta.$ σταθερές.

Επιπλέον, εύκολα προκύπτει μια αξιοσημείωτη τριχοτομία για την οριακή συμπεριφορά αθροισμάτων τ.μ..

Θεώρημα 5.2.5. *Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων, πραγματικών τ.μ.. Υποθέτουμε ότι η ανεξάρτητη του n κατανομή πιθανότητας P_{X_n} είναι διάφορη του μέτρου Dirac δ_0. Τότε για την ακολουθία των αθροισμάτων $S_n := X_1 + ... + X_n$, με $n \in \mathbb{N}_0$, ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:*

(i) $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = +\infty \quad P-\sigma.\beta.$,

(ii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = -\infty \quad P-\sigma.\beta.$,

(iii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n = -\infty$ *και* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup S_n = +\infty \quad P-\sigma.\beta.$.

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 5.2.4 προκύπτει ως συνέπεια του Νόμου $0-1$ των Hewitt-Savage ότι

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n = \gamma \quad P-\sigma.\beta.,$$

όπου $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι μια κατάλληλη σταθερά. Επίσης η ακολουθία $\{X_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ικανοποιεί τις δύο υποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.2, όπου και οι δύο ακολουθίες έχουν την ίδια από κοινού κατανομή $P_X = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0} P_{X_n}$ με τις P_{X_n} ανεξάρτητες του n. Τα επιχειρήματα του Παραδείγματος 5.2.4 μας οδηγούν στο ότι για την ακολουθία των αθροισμάτων $S'_n := X_2 + ... + X_{n+1}$ ισχύει

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S'_n = \gamma \quad P-\sigma.\beta..$$

Αφού $S_{n+1} = X_1 + S'_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, προκύπτει ότι $\gamma = X_1 + \gamma \quad P-\sigma.\beta.$ και επομένως $\gamma = \pm\infty$, επειδή από την υπόθεση ότι η X_1 έχει πραγματικές τιμές και δεν είναι $P-\sigma.\beta.$ ίση με 0. Έτσι θα ισχύει $(P-\sigma.\beta.)$ ακριβώς μία από τις δύο ισότητες

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n = -\infty, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf S_n = +\infty$$

δηλαδή, $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = +\infty$. Ανάλογα (ή με το πέρασμα στην ακολουθία $\{-X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$) προκύπτει ότι $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup S_n = -\infty \quad P-\sigma.\beta.$. Άρα ισχύει το αποτέλεσμα του θεωρήματος. □

Κεφάλαιο 6

Νόμοι των μεγάλων αριθμών

6.1 Θέση του προβλήματος

Η έννοια της ανεξαρτησίας έχει την πρώτη της σημαντική εφαρμογή στους νόμους των μεγάλων αριθμών, που είναι ένα κλασσικό θέμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Στα πειράματα τύχης συχνά μας ενδιαφέρει αν ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο A πραγματοποιείται ή όχι. Αν P είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A τότε βλέπει κανείς αμέσως, μέσω της δείκτριας συνάρτησης χ_A και της κατανομής της, ότι ο απλούστερος χ.π. $(\Omega_0, \Sigma_0, P_0)$ για τη μαθηματική περιγραφή αυτού του πειράματος είναι ο εξής:

$$\Omega_0 := \{0, 1\}, \quad \Sigma_0 := \mathcal{P}(\Omega_0), \quad A = \{1\}$$

$$P_0(A) = p, \quad P_0(A^c) := q := 1 - p$$

με $0 \leq p \leq 1$.

Αυτό το πείραμα επαναλαμβάνεται άπειρες φορές ανεξάρτητα. Το συνολικό πείραμα που προκύπτει ανομάζεται συχνά **δοκιμές Bernoulli** ή **ακολουθία παρατηρήσεων Bernoulli**. Ένα τέτοιο πείραμα θα μπορούσε να είναι η ρίψη ενός ζαριού άπειρες φορές η μία μετά την άλλη, όπου μας ενδιαφέρουν τα ενδεχόμενα «έρχεται 6» ή «δεν έρχεται 6». Το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο είναι ο χ.π. (Ω, Σ, P) με

$$\Omega := \Omega_0^{\mathbb{N}}, \quad \Sigma := (\Sigma_0)_{\mathbb{N}}, \quad P := (P_0)_{\mathbb{N}}.$$

Το Ω είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ των αριθμών 1 και 0, αν το αποτέλεσμα $n-$ρίψης είναι «επιτυχία» ή «αποτυχία», αντίστοιχα. Η τ.μ.

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

παίρνει τις τιμές $0, 1, ..., n$ και δίνει τον αριθμό των επιτυχιών στις πρώτες $n-$ρίψεις του ζαριού. Η διαίσθησή μας και η πείρα μας λεεί ότι η σχετική συχνότητα των επιτυχιών, δηλαδή η ακολουθία $\{\frac{1}{n}S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τείνει με μεγάλη πιθανότητα στο p. Έτσι, προκύπτει το ερώτημα, αν και με ποιόν τρόπο το μοντέλο μας αυτής της οριακή συμπεριφοράς της ακολουθίας $\{\frac{1}{n}S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει για κάθε $\omega \in \Omega$ στο p όταν $n \longrightarrow \infty$. Για τη σταθερή ακολουθία $\omega = (0, 0, ...)$ ή $\omega = (1, 1, ...)$ προκύπτει $\frac{1}{n}S_n(\omega) = 0$ ή $\frac{1}{n}S_n(\omega) = 1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Για τη μετάφραση της έκφρασης «με μεγάλη πιθανότητα» προσφέρονται δύο δυνατότητες: η σύγκλιση μπορεί να είναι η στοχαστική ή η σχεδόν βέβεαι σύγκλιση. Επειδή κάθε τ.μ. X_n ακολουθεί τη δίτιμη κατανομή και άρα

$$\mathbb{E}[X_n] = p \quad \textit{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

μπορεί το ερώτημα της σύγκλισης $\{\frac{1}{n}S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο p να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:

Ερώτημα 6.1.1. Ισχύει

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) = 0 \tag{6.1}$$

με την έννοια της στοχαστικής ή της σχεδόν βέβαιας σύγκλισης ως προς το P

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει ενδιαφέρον πέρα από τη μέχρι τώρα γνωστή περίπτωση της ακολουθίας δοκιμών Bernoulli. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται (και αυτό οφείλεται στη μετροθεωρητική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων) ότι μια θετική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα ισχύει για πολλές ακολουθίες $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών, ολοκληρώσιμων τ.μ. με την έννοια της στοχαστικής ή της σχεδόν βέβαιας σύγκλισης.

Ορισμός 6.1.2. Μια ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ολοκληρώσιμων τ.μ. ικανοποιεί τον **Ασθενή**, αντίστοιχα τον **Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών**, αν ισχύει

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}[X_k]) = 0 \tag{6.2}$$

κατά πιθανότητα αντίστοιχα $P - \sigma.\beta.$.

Η μελέτη των νόμων των μεγάλων αριθμών έχει μια μεγάλη ιστορία. Ο Jacob Bernoulli (1654-1705) ήξερε ήδη τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών για την περίπτωση μιας ακολουθίας που φέρει το όνομά του. Ο E. Borel απέδειξε πρώτος το 1909 τον ισχυρό νόμο των μεγάλο αριθμών για ακολουθίες Bernoulli. Πρωτοποριακές εργασίες στην περιοχή των ασθενών και ισχυρών νόμων των μεγάλων αριθμών έγραψαν οι A.J. Kintchine(1894-1959) και Kolmogorov.

6.2 Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών

Οι τ.μ. $X_i, i \in I$ ονομάζονται ισόνομες αν όλες έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδη $P_{X_i} = P_{X_j}$ για όλα τα i, j στο I. Οι ακολουθίες $\{X_n\}$ τυχαίων μεταβλητών συμβαίνει συχνά να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και συνήθως για αυτές χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία $i.i.d.$.

Θεώρημα 6.2.1. *(Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $\{X_n\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων πραγματικών τ.μ. με πεπερασμένες ροπές 2ης τάξης. Για κάθε n έστω $S_n := X_1 + ... + X_n$. Τότε η $\{\frac{S_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει στην $E(X_1)$ κατά πιθανότητα.*

Απόδειξη. Έστω ε ένας θετικός αριθμός. Από $Var[S_n/n] = (1/n)Var[X_1]$ προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon) &= P(|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}|^2 > \varepsilon^2) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n])}{n})^2]}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\mathbb{E}[S_n^2 - 2S_n\mathbb{E}[S_n] + \mathbb{E}[S_n]^2] \\
&= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\mathbb{E}[[S_n]^2 - 2\mathbb{E}[S_n]^2 + \mathbb{E}[S_n]^2] \\
&= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}Var[S_n] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}Var[S_n/n] \\
&= \frac{Var[X_1]}{n\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

(βλ. Ανισότητα Biemayme-Chebyshev) και έτσι $\{\frac{S_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει στην $\mathbb{E}[X_1]$ κατά πιθανότητα. □

Αν αναλύσει κανείς τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2.1 και αγνοήσει τις μη αναγκαίες ειδικές υποθέσεις, τότε μπορεί να οδηγηθεί σε ένα γενικότερο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Khintchine.

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ολοκληρώσιμων κια ανά δύο ασυσχέτιστων πραγματικών ώστε*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = 0. \tag{6.3}$$

Τότε η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.

Απόδειξη. Προφανώς κάθε X_n είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Θέτουμε

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i]).$$

Τότε, από την υπόθεση ότι οι X_n είναι ανά δύο ασυσχέτιστες, προκύπτει ότι

$$Var(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

και άρα

$$Var(\frac{1}{n}Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Το αποτέλεσμα προκύπτει πάλι από την ανισότητα του Chebyshev. □

Ας σημειωθεί ότι από τη συνθήκη 6.3 προκύπτει η τετραγωνική ολοκληρωσιμότητα των X_n. Η συνθήκη 6.3 ικανοποιείται αν η ακολουθία $\{Var(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Ιδιαιτέρως η 6.3 ικανοποιείται όταν όλες οι X_n είναι μεταξύ τους ίσες. Αυτή η κατάσταση υπάρχει σε μια υπακολουθία δοκιμών Bernoulli.

6.3 Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών

Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών όπως και το θεώρημα του Fubini, είναι ένα από τα κρίσιμα βήματα στη Θεωρία Μέτρου.

Τα παρακάτω δύο αποτελέσματα βοηθούν στην απόδειξη του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών.

Υποθέτουμε ότι (Ω, Σ, P) χ.π. και ότι $\{A_n\}$ μια ακολουθία ενδεχομένων στο Σ. Τότε

$$\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \quad \textit{για άπειρα} \quad n\} = \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Αυτό είναι το ενδεχόμενο ότι συμβαίνουν άπειρα από τα ενδεχόμενα A_n. και αυτό συνήθως συμβολίζεται με $\{A_n : i.o\}$ όπου i.o. είναι μια συντομογραφία για την έκφραση *απείρως συχνά (infinitely often)*. Για παράδειγμα, αν έχουμε να κάνουμε με μια πεπερασμένη ακολουθία ρίψης ενός νομίσματος και αν για κάθε n με A_n συμβολίζεται το ενδεχόμενο εμφάνισης κορώνας στη n-οστη ρίψη τότε το $\{A_n \quad i.o.\}$ είναι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί κορώνα σε απείρως πολλές ρίψεις.

Σημειώνουμε ότι η συνεπαγωγή (5.2) του Λήμματος Borel-Cantelli 5.1.5 υποδηλώνει ότι αν τα ενδεχόμενα $\{A_n\}$ είναι ανεξάρτητα και ικανοποιούν την $P(\{A_n : i.o.\}) = 0$, τότε $\sum_n P(A_n) < +\infty$. Συνδυάζοντας αυτό με τη συνεπαγωγή (5.1) βλέπουμε ότι για ανεξάρτητα ενδεχόμενα οι συνθήκες $P(\{A_n : i.o.\}) = 0$ και $\sum_n P(A_n) < +\infty$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Longleftrightarrow P\{A_n : i.o.\}) = 0 \tag{6.4}$$

Πρόταση 6.3.1. *(Ανισότητα Kolmogorov) Έστω $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τ.μ., καθεμιά από τις οποίες έχει μέσο 0 και πεπερασμενη ροπή 2ης τάξης και για κάθε i έστω $S_i = X_1 + ... + X_i$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$P(\{\max_{1\le i\le n} |S_i| > \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[{X_i}^2]. \tag{6.5}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A και $A_1, ..., A_n$ ως εξής

$$A := \{\max_i |S_i| > \varepsilon\}$$

$$A_i := \{|S_i| > \varepsilon, \quad |S_j| \le \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad j \in \{1, 2, ..., i-1\}\}.$$

Ισχυρισμός: Για κάθε $i \leq n$ ισχύει

$$\int_{A_1} {S_i}^2 dP \leq \int_{A_i} {S_n}^2 dP. \tag{6.6}$$

Πράγματι, ότι οι τ.μ. $\chi_{A_i} S_i$ και $S_n - S_i$ είναι ανεξάρτητες, ενώ $\mathbb{E}[S_n - S_i] = 0$ και έτσι προκύπτει ότι $\mathbb{E}[\chi_{A_i} S_i (S_n - S_i)] = \mathbb{E}[\chi_{A_i} S_i]\mathbb{E}[S_n - S_i] = 0$. Ως εκ τούτου αν γράψουμε το ${S_n}^2$ ως $(S_i + (S_n - S_i))^2$ τότε βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{A_i} {S_n}^2 dP &= \int_{A_i} {S_i}^2 dP + 2\int_{A_i} S_i(S_n - S_i) dP + \int_{A_i} (S_n - S_i)^2 dP \\
&= \int_{A_i} {S_i}^2 dP + \int_{A_i} (S_n - S_i)^2 dP \geq \int_{A_i} {S_i}^2 dP
\end{aligned}$$

και προκύπτει η (6.6). Χρησιμοποιώντας την [13, Proposition 2.3.10] και τη σχέση (6.6) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 P(A) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 [P(A_i)] \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} {S_i}^2 dP \\
&\leq \sum_i \int_{A_i} {S_n}^2 dP = \int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} {S_n}^2 dP \\
&= \int_A {S_n}^2 dP \leq \int_\Omega {S_n}^2 dP \\
&= \int {S_n}^2 dP
\end{aligned}$$

αφού οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες και έχουν μέση τιμή 0 έχουμε ότι $E[{S_n}^2] = \sum_{i=1}^n E[{X_i}^2]$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Πρόταση 6.3.2. *Έστω $\{X_n\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ. με μέση τιμή 0 και $\sum_n \mathbb{E}[{X_n}^2] < +\infty$. Τότε $\sum_n X_n$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια.*

Απόδειξη. Για κάθε n ορίζουμε S_n με $S_n = X_1 + ... + X_n$. Αν για κάθε m και n τέτοια ώστε $m > n$ εφραμόσουμε την ανισότητα Kolmogorov (Πρόταση 6.3.1) στην ακολουθία $X_{n+1} + ... + X_m$ και έστω m να τείνει προς το άπειρο, βρίσκουμε ότι

$$P(\{sup_{i>n}|S_i - S_n| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[{X_i}^2].$$

Επιλέγουμε μια ακολουθία $\{\varepsilon_k\}$ θετικών αριθμών που φθίνει στο 0 και για κάθε k επιλέγουμε έναν θετικό ακέραιο n_k τέτοιο ώστε $\sum_{i=n_k+1}^{\infty} \mathbb{E}[{X_i}^2] < \frac{{\varepsilon_k}^2}{2^k}$. Για κάθε k ορίζουμε το A_k με $A_k := \{sup_{i>n_k}|S_i - S_{n_k}| > \varepsilon_k\}$. Τότε $\sum_k P(A_k) \leq \sum_k \frac{1}{{\varepsilon_k}^2}\frac{{\varepsilon_k}^2}{2^k} = \sum_k \frac{1}{2^k} < +\infty$ και έτσι σύμφωνα με την (6.4) $P(\{A_k \quad i.o.\}) = 0$. Ωστόσο, για κάθε ω έξω από το $\{A_k \quad i.o.\}$ η ακολουθία $\{S_n(\omega)\}$ είναι μια ακολουθία Cauchy και έτσι η $\{S_n\}$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια. □

Το παρακάτω Λήμμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια άσκηση Απειροστικού Λογισμού

Λήμμα 6.3.3. *Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, ώστε $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_1+...+x_n}{n} = x$.*

Απόδειξη. Αφού $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 := n_0(\varepsilon) > 0$ ώστε για κάθε $n \leq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\frac{x_1+...+x_n}{n} = x| &= |\frac{(x_1-x)+...+(x_n-x)}{n}| \\
&\leq |\frac{(x_1-x)+...+(x_{n_0}-x)}{n}| + \frac{n-n_0}{n}|\frac{(x_{n_0+1}-x)+...+(x_n-x)}{n}| \\
&\leq \frac{c}{n} + (1-\frac{n_0}{n})\frac{|x_{n_0+1}-x|+...+|x_n-x|}{n} \leq \frac{c}{n} + (1-\frac{n_0}{n})\varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου το $c := |(x_1-x)+...+(x_{n_0}-x)|$ είναι ανεξάρτητο του n. Παίρνοντας τα όρια για $n \longrightarrow \infty$ έχουμε $\lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{x_1+...+x_n}{n}| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty}[(1-\frac{n_0}{n})\varepsilon] = \varepsilon$, άρα

$$0 \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{x_1+...+x_n}{n}| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \varepsilon = 0,$$

δηλαδή $\lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{x_1+...+x_n}{n}| = 0$ ή ισοδύναμα $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_1+...+x_n}{n} = x$. □

Θεώρημα (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών του Kolmogorov) 6.3.4. *Έστω $\{X_n\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων τ.μ. με πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές. Για κάθε n έστω $S_n = X_1 + ... + X_n$. Τότε η $\{S_n/n\}$ συγκλίνει στο $\mathbb{E}[X_1]$ σ.β..*

Απόδειξη. Για κάθε i έστω η τ.μ. Y_i που ορίζεται ως

$$Y_i(\omega) := \begin{cases} X_i(\omega), & \text{αν} \quad |X_i(\omega)| \leq i \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{6.7}$$

Προφανώς η ακολουθία $\{Y_i\}$ είναι ανεξάρτητη με πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές.

Ισχυρισμός: Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{Y_i-\mathbb{E}[Y_i]}{i}$ συγκλίνει σ.β..

Αφού $E[[Y_i - \mathbb{E}(Y_i)]^2] \leq \mathbb{E}[Y_i^2]$ ο ισχυρισμός προκύπτει από την Πρόταση 6.3.2 αν επαληθεύσουμε ότι $\sum_i \mathbb{E}[Y_i^2]/i^2 < +\infty$. Έστω μ η κοινή κατανομή των X_i και για κάθε θετικό ακέραιο j ορίζουμε $I_j := \{x \in \mathbb{R} : j-1 < |x| \leq j\}$. Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $\sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq C/j$ να ισχύει για κάθε j και έτσι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_i^2/i^2] &= \sum_{i}^{\infty} \frac{1}{i^2}\int_{[-i,i]} x^2\mu(dx) \\
&= \sum_{i}\sum_{j\leq i} \frac{1}{i^2}\int_{I_j} x^2\mu(dx) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\geq j} \frac{1}{i^2}\int_{I_j} x^2\mu(dx)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} C \int_{I_j} \frac{x^2}{j} \mu(dx) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |x| \mu(dx) \\
&\leq C\mathbb{E}[|X_1|] \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

□

Για κάθε n έστω $T_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \mathbb{E}[Y_i]}{i}$ το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{Y_i - \mathbb{E}[Y_i]}{i}$. Στόχος είναι να συσχετίσουμε τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{i=1}^{\infty}(Y_i - \mathbb{E}[Y_i])$ με το T_n και την $\{\frac{S_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ προκειμένου να ξέρουμε ό,τι είναι αναγκαίο για την ακολουθία $\{\frac{S_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Αρχικά σημειώνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbb{E}[Y_i]) = \sum_{i=1}^{n} i(T_i - T_{i-1}) = nT_n - \sum_{i=1}^{n-1} T_i.$$

Αφού από τον παραπάνω ισχυρισμό $\lim_n T_n$ υπάρχει $\sigma.\beta.$ αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας με το n τότε από Λήμμα 6.3.3 βρίσκουμε ότι

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbb{E}[Y_i]) = \lim_n (T_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T_i) = 0 \quad \sigma.\beta.. \tag{6.8}$$

Σαν προετοιμασία του τελευταίου βήματος θα ελέγξουμε ότι

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) = 0 \quad \sigma.\beta. \tag{6.9}$$

και ότι

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[X_1]. \tag{6.10}$$

Ας ξεκινήσουμε από την ισότητα (6.9). Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_1|] > i], \tag{6.11}$$

από το οποίο μαζί με την υπόθεση $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ και από τον ορισμό των Y_i προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} P(\{X_i \neq Y_i\}) &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{|X_i| > i\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| > i] = \mathbb{E}[|X_1|] < \infty,
\end{aligned}
$$

δηλαδή $\sum_{i=1}^{\infty} P[\{X_i \neq Y_i\}] < +\infty$ Από την τελευταία σχέση σε συνδυασμό με το Λήμμα Borel-Cantelli παίρνουμε $P[\{X_i \neq Y_i \quad i.o.\}] = 0$ και συνεπώς ισχύει η 6.9 Η ισότητα (6.10) προκύπτει από το γεγονός ότι $\lim_i \mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[X_1]$ και επιπλέον από χρήση του Λήμματος 6.3.3. Τελικά από τις ισότητες (6.8) και (6.10) συνεπάγεται ότι

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathbb{E}[X_1]$$

που ισχύει $\sigma.\beta.$ και από την ισότητα (6.9) καταλήξουμε στο ότι $\lim_n S_n/n = \mathbb{E}[X_1]$ που ισχύει $\sigma.\beta.$. Άρα η απόδειξη του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 6.3.5. *(Αντίστροφο του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $\{X_n\}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων τ.μ. οι οποίες δεν έχουν πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές (μέσες τιμές). Για κάθε n έστω $S_n = X_1 + ... + X_n$. Τότε $\limsup_n |S_n/n| = +\infty \quad \sigma.\beta.$.*

Απόδειξη. Έστω K ένας θετικός σταθερός ακέραιος και για κάθε n έστω $A_n := \{|X_n| \geq nK\}$. Αφού οι τ.μ. X_i έχουν μια κοινή κατανομή αλλά δεν έχουν πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή προκύπτει από την 6.11 ότι $\sum_n P(A_n) = +\infty$. Από το δεύτερο μέρος του Λήμματος Borel-Cantelli παίρνουμε $P(\{A_n \quad i.o.\}) = 1$ και συνεπώς ότι

$$P(\limsup_n \frac{|X_n|}{n} \geq K) = 1.$$

Αυτό είναι σωστό για κάθε θετικό ακέραιο K και έτσι προκύπτει ότι $\limsup_n |X_n/n| = +\infty \quad \sigma.\beta.$. Ωστόσο,

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1}$$

από όπου προκύπτει ότι $\limsup_n |X_n/n| \leq 2 \limsup_n |S_n/n|$ άρα το $\limsup_n |S_n/n|$ είναι άπειρο $\sigma.\beta.$. □

6.4 Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών του Etimadi

Κύριος σκοπός αυτής της ενότητας είναι η απόδειξη του ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών στη μορφή που δόθηκε από τον Etimadi το 1981 ([17]).

Θεώρημα του Etimadi 6.4.1. *Κάθε ακολουθία ολοκληρώσιμων, ισόνομων και ανά δύο ανεξάρτητων τ.μ. ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.*

Οι υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος ικανοποιούνται αν αντί της ανεξαρτησίας ανά ζεύγη των τ.μ. απαιτηθεί η ανεξαρτησία της ακολουθίας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Αυτόν τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών για ανεξάρτητες ακολυθίες δημοσίευσε ο Kolmogorov το 1930.

Πόρισμα 6.4.2. *(Ισχυρός Νόμος των μεγάλων αριθμών Kolmogorov) Κάθε ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων και ολοκληρώσιμων τ.μ. ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.1 χρειαζόμαστε τις παρακάτω παρατηρήσεις

Παρατηρήσεις 6.4.3. **(a)** Επειδή όλες οι τ.μ. X_n έχουν την ίδια κατανομή $\mu := P_{X_n}$ ο αριθμός

$$\eta := \mathbb{E}[X_n] = \int X\mu(dx) = \mathbb{E}[X_1]$$

δεν εξαρτάται από το $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε πάλι

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Τότε, ισχύει

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i]) = \frac{1}{n}S_n - \eta \quad \textit{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

Θα αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}S_n = \eta \quad P - \sigma.\beta.. \tag{6.13}$$

(b) Αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.4.1 το ίδιο ισχύει και για τις ακολουθίες $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$. Λόγω της ιδιότητας της μεταβατικότητας το μέτρο-εικόνα $\mu := \mu \circ g_i^{-1}, \quad i = 1, 2$ είναι η κατανομή κάθε τ.μ. της πρώτης αντίστοιχα της δεύτερης ακολουθίας, αν θέσουμε

$$g_1(x) := \max\{x, 0\} \quad \textit{και} \quad g_2(x) := g_1(-x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ανεξαρτησία ανά ζεύγη των τ.μ. της $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ και αντίστοιχα της $\{X_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ διατηρείται (βλ. π.χ. Πόρισμα 3.2.6 [3]). Λόγω της σχέσης $X_n = X_n^+ - X_n^-$ αν οι $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιούν τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, το ίδιο θα ισχύει για την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να υποτεθεί ότι $X_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\mu((-\infty, 0)) = 0.$$

(c) Οι τ.μ. X_n (από τώρα ≥ 0) μπορούν να αντικατασταθούν από τις τ.μ.

$$Y_n := X_n \chi_{\{X_n < n\}} \quad \textit{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.14}$$

Μέσω αυτής της αντικατάστασης χάνεται η αρχική κοινή κατανομή των X_n. Με $\mu_1 := \mu \circ \zeta_n^{-1}$ συμβολίζουμε την κατανομή της Y_n όπου

$$f_n(x) := \begin{cases} x, & \textit{αν} \quad 0 \leq x < n \\ 0, & \textit{αλλιώς.} \end{cases} \tag{6.15}$$

Με αυτόν τον τρόπο κερδίζουμε την τετραγωνική ολοκληρωσιμότητα όλων των Y_n. Πράγματι, από τη σχέση $Y_n = f_n \circ X_n$ προκύπτει

$$\mathbb{E}[Y_n^2] = \mathbb{E}[f_n^2 \circ X_n] = \int f_n^2 d\mu = \int_{[0,n)} x^2 \mu(dx) < \infty. \tag{6.16}$$

(d) Ισχυρισμοί για την ακολουθία $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούν σε κάποια κατάλληλη χρονική στιγμή να μεταφερθούν σε αντίστοιχους ισχυρισμούς για την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Η μέθοδος για αυτό είναι η εξής: Αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\{X_n \neq Y_n\}] < \infty. \tag{6.17}$$

Πράγματι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\{X_n \neq Y_n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P[\{X_n \geq n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu([n,\infty)) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} \mu([i,i+1)). \tag{6.18}$$

Μια εναλλαγή των αθροισμάτων μας δίνει:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P[\{X_n \neq Y_n\}] &= \sum_{i=1}^{\infty} i\mu([i,i+1)) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{[i,i+1)} i d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{[i,i+1)} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}_+} x\mu(dx) \\ &= \mathbb{E}[X_1] < \infty.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Αφού ισχύει η (6.17) μια εφαρμογή του πρώτου Λήμματος Borel-Cantelli μας δίνει

$$P[\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}\{X_n \neq Y_n\}] = P[\{X_n \neq Y_n \quad \textit{για άπειρα} \quad n\}] = 0. \tag{6.20}$$

Έστω

$$A := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \quad \textit{για το πολύ πεπερασμένα στο πλήθος} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Τότε

$$P(A) = 1.$$

(e) Έστω $\alpha > 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $k_n := [\alpha^n]$ το ακέραιο μέρος του α^n. Τότε $k_n \leq \alpha^n < k_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} = 1$, υπάρχει $c_\alpha \in (0,1)$ με

$$c_\alpha \alpha^n < \alpha^n - 1 < k_n \quad \textit{για τελικά όλα τα} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.21}$$

Πράγματι, αφού $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\alpha^n-1}{\alpha^n} = 1$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $1 - \frac{\alpha^n-1}{a^n} < \varepsilon$. Η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με $1 - \beta_n > 1 - \varepsilon$ για $\beta_n := \frac{\alpha^n-1}{\alpha^n}$ ή

$$\beta_n > 1 - \varepsilon. \tag{6.22}$$

Άρα για $\varepsilon := 1 - c_\alpha$ όπου $c_\alpha \in (0,1)$ η (6.21) ισοδυναμεί με την $\frac{\alpha^n-1}{a^n} > c_\alpha$ ή $c_\alpha \alpha^n < \alpha^n - 1$. Άρα για το $\varepsilon := 1 - c_\alpha > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $c_\alpha \alpha^n < \alpha^n - 1 < k_n$.

Απόδειξη. (του θεωρήματος 6.4.1) (**a**) Λόγω της παρατήρησης 6.4.3 (**b**) μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $X_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που ορίστηκε στην Παρατήρηση 6.4.3 (**c**). Τότε οι τ.μ. Y_n είναι ολοκληρώσιμες, μη-αρνητικές και ανά δύο ανεξάρτητες. Έστω

$$S'_n := \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbb{E}[Y_i]) \quad \textit{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\alpha > 1$ σταθερά αλλά αυθαίρετα. Από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε:

$$P[\{|\frac{1}{n}S'_n| > \varepsilon\}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}Var[\frac{1}{n}S'_n] = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[Y_i] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i^2],$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τις σχέσεις

$$Var[Y_i] = \mathbb{E}[Y_i^2] - \mathbb{E}[Y_i]^2 \leq \mathbb{E}[Y_i].$$

Για $k_n := [\alpha^n]$ έχουμε :

$$P[\{|\frac{1}{k_n}S'_{k_n}| > \varepsilon\}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k_n^2}\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{E}[Y_i^2]$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\{|\frac{1}{k_n}S'_{k_n}| > \varepsilon\}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}[Y_i^2].$$

Δεξιά είναι το άθροισμα όλων των αθροισμάτων των γραμμών νός άπειρου πίνακα, όπου στην $n-$γραμμή το πολύ k_n-πρώτα μέλη, συγκεκριμένα τα $k_n^{-2}\mathbb{E}[Y_1^2], ..., k_n^{-2}\mathbb{E}[Y_{k_n}^2]$, είναι διάφορα του 0. Αν αντί αυτού του αθροίσματος θεωρήσουμε το άθροισμα όλων των αθροισμάτων των στηλών αυτού του πίνακα, των οποίων όλα τα μέλη είναι ≥ 0, τότε προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\{|\frac{1}{k_n}S'_{k_n}| > \varepsilon\}] \leq \varepsilon^{-2}\sum_{j=1}^{\infty} t_j\mathbb{E}[Y_j^2],$$

όπου

$$t_j := \sum_{n=n_j}^{\infty}\frac{1}{k_n^2} \quad \textit{για κάθε} \quad j \in \mathbb{N}$$

και ο n_j είναι ο ελάχιστος φυσικός ανθρωπός n με $k_n \geq j$. Για το t_j χρησιμοπιώντας την (6.20) έχουμε

$$t_j \leq c_\alpha^{-2}\sum_{n=n_j}^{\infty}\alpha^{-2n} = c_\alpha^{-2}\alpha^{-2n_j}\frac{1}{1-\alpha^{-2}} = c_\alpha\alpha^{-2n_j},$$

όπου

$$c_\alpha := c_\alpha^{-2}(1-\alpha^{-2})^{-1} > 0.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $t_j \leq c_\alpha j^{-2}$ επειδή $j \leq k_{n_j} \leq \alpha^{n_j}$. Έτσι, εφαρμόζοντας την (6.16) παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\{|\frac{1}{k_n} S'_{k_n}| < \varepsilon\}] \leq \varepsilon^{-2} c_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \int_{[k-1,k)} x^2 \mu(dx). \tag{6.23}$$

Πάλι μπορούμε να εναλλάξουμε τα αθροίσματα γραμμών και στηλών και έτσι να προκύψει

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{j} \int_{[k-1,k)} x^2 \mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2}) \int_{[k-1,k)} x^2 \mu(dx). \tag{6.24}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2} &< \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k+1)} + ... \\ &= \frac{1}{k^2} + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) + ... \\ &= \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \leq \frac{2}{k}, \end{aligned}$$

από τις (6.23) και (6.24) προκύπτει

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P[\{|\frac{1}{k_n} S'_{k_n}| > \varepsilon\}] &\leq 2\varepsilon^{-2} c_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k-1,k)} \frac{x^2}{k} \mu(dx) \\ &\leq 2\varepsilon^{-2} c_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[k-1,k)} \frac{x^2}{k} \mu(dx) = 2\varepsilon^{-2} c_\alpha \mathbb{E}[X_1] < \infty. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα Borel-Cantelli προκύπτει τώρα ότι

$$P[\{\frac{1}{k_n} S'_{k_n} > \varepsilon \quad \text{για άπειρα} \quad n\}] = 0,$$

και έτσι χρησιμοποιωντας την (6.1.2) έχουμε ότι

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} S'_{k_n} = 0 \quad P - \sigma.\beta.. \tag{6.25}$$

(**b**) Ισχύει ότι

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Y_i = \mathbb{E}[X_1] \quad P - \sigma.\beta..$$

Πράγματι, από την Παρατήρηση 6.4.3 (c) η $\mu_n := \mu \circ f_n$ είναι η κατανομή της Y_n και επομένως ισχύει η σχέση

$$\mathbb{E}[Y_n] = \int_{[0,n)} x \mu(dx),$$

από την οποία προκύπτει μέσω του Θεωρήματος της Μονότονης Σύγκλισης ότι

$$\mathbb{E}[X_1] = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n]. \tag{6.26}$$

Από την τελευταία σχέση, μέσω μιας γνωστής άσκησης του Απειροστικού Λογισμού, παίρνουμε

$$\mathbb{E}[X_1] = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i]. \tag{6.27}$$

Από τον ορισμό των αθροισμάτων S'_n έχουμε

$$\frac{1}{k_n} S'_{k_n} = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Y_i - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[Y_i].$$

Άρα μέσω των (6.26) και (6.27) προκύπτει ότι

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathbb{E}[X_1] \quad P - \sigma.\beta..$$

(**c**) Ισχύει η σχέση

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_{k_n} = \mathbb{E}[X_1] \quad P - \sigma.\beta..$$

Πράγματι, από την Παρατήρηση 6.4.3 (d) έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} P[\{X_n \neq Y_n\}] < \infty$ και $P(A) = 1$ όπως στην Παρατήρηση 6.4.3 (d). Άρα στο (b) μπορεί η ακολουθία $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ να αντικατασταθεί από την $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και έτσι να προκύψει το βήμα (c).

(**d**) Υπάρχει $\Omega_1 \subseteq \Omega$ με $P(\Omega_1) = 1$ ώστε

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} S_m(\omega) = \mathbb{E}[X_1] \quad \textit{για κάθε} \quad \omega \in \Omega_1.$$

Πράγματι, θεωρούμε ακόμα τα $\alpha > 1$ και την ακολουθία $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ σταθερά. Επειδή $k_n \uparrow \infty$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m > k_1$ υπάρχει ακριβώς ένα $n \in \mathbb{N}$ με $k_n < m \leq k_{n+1}$. Από αυτό και το γεγονός ότι $X_i \geq 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ προκύπτει

$$S_{k_n} \leq S_m \leq S_{k_{n+1}}$$

άρα,

$$\frac{S_{k_n}}{k_n} \cdot \frac{k_n}{m} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} \cdot \frac{k_{n+1}}{m}.$$

Έτσι, από τον ορισμό των k_n έχουμε

$$k_n \leq \alpha^n < k_n + 1 \leq m \leq k_{n+1} \leq \alpha^{n+1}$$

άρα

$$\frac{k_{n+1}}{m} < \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha^n} = \alpha \quad \textit{και} \quad \frac{k_n}{m} > \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}}.$$

Ισχύει $\alpha^n - 1 > \alpha^{n-1}$ για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ π.χ. για $n \geq n_0$. Αν το m είναι αρκετά μεγάλο, π.χ. $m > k_{n_0}$ και το $n \geq n_0$ είναι εκείνο που αντιστοιχεί στο m ώστε $k_n < m \leq k_{n+1}$ (όπως παραπάνω), τότε

$$\frac{k_n}{m} > \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}} = \alpha^{-2}.$$

Από το (c) για κάθε $\alpha > 1$ υπάρχει το ενεδεχόμενο $\Omega \in \Sigma$ με $P(\Omega) = 1$, ώστε

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} S_{k_n}(\omega) = \mathbb{E}[X_1] \quad \textit{για κάθε} \quad \omega \in \Omega_\alpha.$$

Αν $\mu = \delta_0$ τότε $X_n = 0 \quad P - \sigma.\beta.$ για κάθε n και τότε ισχύει το (d). Υποθέτουμε, επομένως, από εδώ και κάτω ότι $[x_1] > 0$ ή ισοδύναμα ότι $\mu \neq \delta_0$. Αφού $\alpha > 1$, έχουμε

$$\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[X_1] < \frac{1}{k_n} S_{k_n}(\omega) < \alpha^2 \mathbb{E}[X_1]$$

για κάθε $\omega \in \Omega_\alpha$ και για τελικά όλα τα n, άρα επίσης

$$(\alpha^{-3}\mathbb{E}[X_1] < \frac{1}{m} S_m(\omega) < \alpha^2 \mathbb{E}[X_1]$$

συνεπώς

$$(\alpha^{-3}\mathbb{E}[X_1] < \frac{1}{m} S_m(\omega) - \mathbb{E}[X_1] < (\alpha^2 - 1)\mathbb{E}[X_1]$$

για κάθε $\omega \in \Omega_\alpha$ και για όλα τα (σε εξάρτηση από τα ω και α) αρκετά μεγάλα $m \in \mathbb{N}$. Έστω $\Omega_1 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{1+\frac{1}{n}}$. Τότε $P(\Omega_1) = 1$ και $\lim_{m \longrightarrow \infty} S_m(\omega) = \mathbb{E}[X_1]$ για κάθε $\omega \in \Omega_1$. $\square$

Κεφάλαιο 7

Παραγόμενες Στοχαστικές Διαδικασίες και η κατασκευή τους

7.1 Μετρήσιμες *σ.δ.*

Ορισμός 7.1.1. Μία *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο μ.χ. (Ω, Σ) **μετρήσιμη**, αν η συνάρτηση $\widetilde{X} : \mathbb{R} \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $\widetilde{X}(t, \omega) := X_t(\omega)$ για κάθε $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$ είναι $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \Sigma$ μετρήσιμη.

Παρατήρηση 7.1.2. *Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Fubini είναι ότι οι τροχιές μιας μετρήσιμης σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Borel - μετρήσιμες συναρτήσεις του $t \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει η $\mathbb{E}[X_t] \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $m : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $m(t) := \mathbb{E}[X_t]$ έιναι Borel - μετρήσιμη συνάρτηση του $t \in \mathbb{R}$. Επίσης κάθε δεξιά συνεχής σ.δ. είναι μετρήσιμη.*

7.2 Ορισμοί και Συμβολισμοί

Οι παρακάτω ορισμοί και συμβολισμοί ισχύουν για όλο το κεφάλαιο.

Η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π.. Τα σημεία του Ω συμβολίζονται με ω. Στο Ω ορίζεται μια *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in T}$. Το σύνολο παραμέτρων T είναι ένα Borel σύνολο της πραγματικής ευθείας και ξεκινάμε από την παραδοχή ότι οι X_t, $t \in T$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις στο (Ω, Σ) μέσα στο $(E, \mathcal{E})$ όπου $\mathcal{E}$ είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του χώρου X.

Επιπλέον, η τριάδα $(\Gamma, \mathcal{C}, Q)$ είναι ένας χ.π. πάνω στον οποίο ορίζεται η *σ.δ.* $\{\tau_s\}_{s\in S}$. Το παραμετρικό σύνολο S είναι ένα Borel σύνολο της πραγματικής ευθείας και ο χώρος καταστάσεων N της διαδικασίας υποτίθεται ότι είναι υποσύνολο του T.

Έστω $(\Omega, \Sigma, P) \otimes (\Gamma, \mathcal{C}, Q) := (\Omega \times \Gamma, \Sigma \otimes \mathcal{C}, P \otimes Q)$ το γινόμενο των χ.π. (Ω, Σ, P) και $(\Gamma, \mathcal{C}, Q)$. Οι τ.μ. X_t, $t \in T$ και τ_s, $s \in S$ μπορούν να θεωρηθούν ως τ.μ. στο $(\Omega, \Sigma, P) \otimes (\Gamma, \mathcal{C}, Q)$ όπου η X_t εξαρτάται μόνο από το ω και η τ_s μόνο από το γ.

Για κάθε $s \in S$ ορίζουμε τη συνάρτηση $Y_s : \Omega \times \Gamma \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε

$$Y_s(\omega, \gamma) := X_{\tau_s(\gamma)}(\omega), \quad \textit{για κάθε} \quad (\omega, \gamma) \in \Omega \times \Gamma. \tag{7.1}$$

Στην παρακάτω ενότητα δίνονται οι συνθήκες υπό τις οποίες η $\{Y_s\}_{s\in S}$ είναι μια $\sigma.\delta.$, συνθήκες δηλαδή κάτω από τις οποίες η Y_s για κάθε $s \in S$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από τον $(\Omega \times \Gamma, \Sigma \otimes \mathcal{C})$ στον $(X, \mathcal{X})$.

Η διαδικασία X_t, $t \in T$ ονομάζεται **η αρχική διαδικασία** και η Y_s, $s \in S$ **η παραγόμενη διαδικασία**, δηλαδη η διαδικασία που παράγεται από την X_t, $t \in T$ μέσω της **παράγουσας διαδικασίας** $\{\tau_s\}_{s\in S}$.

Υποθέτουμε ότι $N \subset T$ ώστε $\tau_s(\gamma) \in T$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Έτσι ο ορισμός (7.1) έχει έννοια για κάθε $s \in S$. Θεωρούμε το γινόμενο $(\Omega \times \Gamma, \Sigma \otimes \mathcal{C}, P \otimes Q)$ των (Ω, Σ, P) και $(\Gamma, \mathcal{C}, Q)$ αφού αυτό είναι ο απλούστερος τρόπος για να ορίσουμε την ανεξαρτησία της αρχικής και της παράγουσας διαδικασίας.

Με $\mathbb{E}_{P\otimes Q}$ και $\mathbb{E}_P$ συμβολίζουμε τις μέσες τιμές ως προς $P\otimes Q$ και P, αντίστοιχα $\mathcal{T} := \mathfrak{B}(T)$, $\mathcal{S} := \mathfrak{B}(S)$ (βλ. Ορισμό Β΄.1.7).

7.3 Γενικά Θεωρήματα

Σε αυτή την ενότητα θα αποδειχθούν κάποια θεωρήματα του γενικού Ορισμού 7.1. Για πιο λεπτομερή επεξεργασία αυτών των θεωρημάτων παραπέμπουμε στο [34].

Θεώρημα 7.3.1. *Αν ο χώρος καταστάσεων N της παράγουσας διαδικασίας είναι αριθμήσιμος, ή αν η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη, τότε η Y_s για κάθε $s \in S$ είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}$-μετρήσιμη. Ιδιαιτέρως, η Y_s είναι $\Sigma\otimes\sigma(\tau_s)$-μετρήσιμη όπου $\sigma(\tau_s) \subset \mathfrak{B}(T)$ είναι η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την πραγματική τ.μ. $\tau_s : \Gamma \longmapsto \mathbb{R}$.*

Με τον όρο ότι η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathfrak{B}(T)$**-μετρήσιμη** εννούμε ότι η συνάρτηση $\widetilde{X}$: $\Omega \times T \longmapsto E$, ώστε $\widetilde{X}(\omega, t) := X_t(\omega)$ για κάθε $(\omega, t) \in \Omega \times T$, είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$-μετρήσιμη.

Σε ολο το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι η αρχική διαδικασία ικανοποιεί μια από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.3.1.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $N = \{n_1, n_2, ...\}$. Τότε ο ισχυρισμός του θεωρήματος προκύπτει από τη σχέση

$$\{Y_s \in B\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} [\{X_{n_k} \in B\} \times \{\tau_s = n_k\}], \quad \textit{για κάθε} \quad B \in \mathcal{E} \tag{7.2}$$

ή

$$Y_s{}^{-1}(B) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [(X_{n_k})^{-1} \times \tau_s{}^{-1}(\{n_k\})], \quad \textit{για κάθε} \quad B \in \mathcal{E} \tag{7.3}$$

Στη δεύτερη περίπτωση ορίζουμε την απεικόνιση $M : \Omega \times \Gamma \longmapsto \Omega \times T$, ώστε

$$M(\omega,\gamma) := (\omega, \tau_s(\gamma)), \quad \textit{για κάθε} \quad (\omega,\gamma) \in \Omega \times T, \tag{7.4}$$

όπου το $s \in S$ είναι σταθερό. Είναι εύκολο να δούμε ότι η M είναι $\Sigma \otimes \sigma(\tau_s) - \Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη. Πράγματι για κάθε $E \times B \in \Sigma \times \mathfrak{B}(T)$ ισχύει

$$\begin{aligned}
M^{-1}(E \times B) : &= \{(\omega,\gamma) \in \Omega \times \Gamma : M(\omega,\gamma) \in E \times B\} \\
&= \{(\omega,\gamma) \in \Omega \times \Gamma : \omega \in E, \tau_s(\gamma) \in B\} \\
&= \{(\omega,\gamma) \in \Omega \times \Gamma : \omega \in E, \gamma \in {\tau_s}^{-1}(B)\} \\
&= E \times {X_{\tau_s}}^{-1}(B) \in \Sigma \otimes \sigma(\tau_s).
\end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε την απεικόνιση μετασχηματισμό $L : \Omega \times T \longmapsto E$ ώστε $L(\omega,t) := X_t(\omega)$ για κάθε $(\omega,t) \in \Omega \times T$. Αφού από την υπόθεση η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι $\Sigma \times \mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$-μετρήσιμη, προκύπτει ότι η L είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$-μετρήσιμη. Πράγματι, έστω $D \in \mathcal{E}$. Τότε

$$\begin{aligned}
L^{-1}(D) &= \{(\omega,t) \in \Omega \times T : L(\omega,t) \in D\} \\
&= \{(\omega,t) \in \Omega \times T : X_t(\omega) \in D\} \\
&= \{(\omega,t) \in \Omega \times T : \widetilde{X}(\omega,t) \in D\} \\
&= \widetilde{X}^{-1}(D) \in \Sigma \otimes \mathfrak{B}(T).
\end{aligned}$$

Αφού η M είναι $\Sigma \otimes \sigma(\tau_\gamma) - \Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη και η L είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$-μετρήσιμη, η σύνθεση $L \circ M = Y_s$ θα είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$-μετρήσιμη, συνεπώς, αφού $\Sigma \otimes \sigma(\tau_s)) \subset \Sigma \otimes \mathcal{C}$,η Y_s είναι $\Sigma \otimes \mathcal{C}$-μετρήσιμη. □

Παρατήρηση 7.3.2. Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει ότι για σταθερά $s \in S$ και $\gamma \in \Gamma$ η απεικόνιση $Y_s(\cdot,\gamma) : \Omega \longmapsto \mathcal{E}$ είναι $\Sigma - \mathcal{E}$- μετρήσιμη.

Χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα σχετικά με τη μετρησιμότητα των σ.δ. .

Λήμμα 7.3.3. *Έστω (Ω,Σ) μ.χ. και $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ οικογένεια είναι $\Sigma - \mathcal{E}$ μετρήσιμων συναρτήσεων $X_t : \Omega \longmapsto \mathcal{E}$. Αν η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in t}$ είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη τότε η απεικόνιση $K : \Omega \times T^n \longmapsto E^n$ ώστε*

$$K(\omega, t_1, ..., t_n) := (x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), ..., x_{t_n}(\omega)) \tag{7.5}$$

είναι μία $\Sigma \otimes \mathbb{B}(T)_n - \mathcal{E}_n$ μετρήσιμη απεικόνιση, δηλαδή

$$K^{-1}(F) := \{(\omega, t_1, ..., t_n) : K(\omega, t_1, ..., t_n) \in F\} \in \Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)_n \tag{7.6}$$

για κάθε $F \in \mathcal{E}_n$.

Απόδειξη. Έστω $A_1 \times ... \times A_n \in \mathcal{E}_n$. Τότε $K^{-1}(A_1 \times ... \times A_n) = \bigcap_{r=1}^n C_r$, όπου

$$C_r := \{(\omega, t_1, ..., t_n) \in \Omega \times E^n : X_{t_r}(\omega) \in A_r\} = \Omega \times X_{t_1} \times ... \times X_{t_{r-1}} \times A_r \times X_{t_{r+1}} \times ... \times X_{t_n} \in \Sigma \otimes \mathcal{E}_n$$

με $X_{t_1} = ... = X_{t_{r-1}} = X_{t_{r+1}} = ... = X_{T_n} = X$. Άρα, αφού $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_n$ με $\mathcal{G} := \{A_1 \times ... \times A_n \in \mathcal{E}_n\}$, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.4.4 [3] παίρνουμε ότι η K είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)_n - \mathcal{E}_n$-μετρήσιμη. □

Λήμμα 7.3.4. *Αν η οικογένεια $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$- μετρήσιμη και η συνάρτηση $f : E^n \times T^n \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{E}_n \otimes \mathfrak{B}(T)_n - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$- μετρήσιμη, τότε η συνάρτηση $F : \Omega \times T^n \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$, που ορίζεται από τον τύπο*

$$F(\omega, t_1, ..., t_n) := f(X_{t_1}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega), t_1, ..., t_n)$$

για κάθε $(\omega, t_1, ..., t_n) \in \Omega \times T^n$ είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)_n - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$- μετρήσιμη. Αν επιπλέον για κάθε $(t_1, ..., t_n) \in T^n$ υπάρχει η $\mathbb{E}_P[f(X_{t_1}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega), t_1, ..., t_n)]$ τότε η $\mathbb{E}_P[f(X_{t_1}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega), t_1, ..., t_n)]$ είναι $\mathfrak{B}(T)_n$ μετρήσιμη συνάρτηση του $(t_1, ..., t_n) \in T^n$. Ιδιαιτέρως, οι $\mathbb{E}_p[g(X_{t_1}, ..., X_{t_n})]$ και $P[(X_{t_1}, ..., X_{t_1} \in B]$ είναι $\mathfrak{B}(T)_n$ μετρήσιμες συναρτήσεις του $(t_1, ..., t_n) \in T^n$, αν η $g : E^n \longmapsto \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{E}_n - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}$-μετρήσιμη, αν υπάρχει η μέση τιμή $\mathbb{E}_P[g(X_{t_1}, ..., X_{t_n})]$ και αν $B \in \mathcal{E}_n$.

Απόδειξη. Έστω η απεικόνιση $H : \Omega \times T^n \longmapsto E^n \times T^n$ ώστε

$$\begin{aligned} H(\omega, t_1, ..., t_n) : &= (X_{t_1}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega), t_1, ..., t_n) \\ &= (K(\omega, t_1, ..., t_n), t_1, ..., t_n) \\ &= (K(\omega, t_1, ..., t_n) id_{T^n}(t_1, ..., t_n)) \end{aligned}$$

για κάθε $(\omega, t_1, ..., t_n) \in \Omega \times T^n$. Τότε $H = (K, id_{T^n})$ και αφού η K είναι σύμφωνα με το Λήμμα 7.3.3 $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)_n - \mathcal{E}$-μετρήσιμη και η id_{T^n} είναι $\mathfrak{B}(T)_n - \mathfrak{B}(T)_n-$-μετρήσιμη έπεται ότι η H είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)_n - \mathcal{E}_n \otimes \mathfrak{B}(T)_n$-μετρήσιμη. Άρα η $F = f \circ H$ είναι $\Sigma \otimes \mathfrak{B}(T)_n - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει απο το Θεώρημα του Fubini (βλ. Α′.1.6). □

Το παρακάτω Θεώρημα συνδέει τις πεπερασμένης διάστασης κατανομές των παραγόμενων και των αρχικών διαδικασιών μέσω των πεπερασμένης διάστασης κατανομών της παράγουσας διαδιακσίας.

Θεώρημα 7.3.5. *Έστω $f : E^n \times \mathcal{T}^n - \overline{\mathbb{R}}$ μια $\mathcal{E}^n \otimes T^n - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $(s_1, ...s_n) \in S^n$ έχουμε κάτω από τις συνθήκες του Θεωρήματος: 7.3.1:*

$$\mathbb{E}_{P \otimes Q}[f(Y_{s_1}, ..., Y_{s_1}, \tau_{s_1}, ..., \tau_{s_n})] = \int_{T^n} \mathbb{E}_P[f(X_{t_1}, ..., X_{t_n}, t_1, ..., t_n) Q_{s_1, ..., s_n}(dt_1 \times ... \times dt_n) \tag{7.7}$$

όπου $Q_{s_1,...,s_1} := Q_{\tau_{s_1},...,\tau_{s_n}}$ *είναι η κατανομή πιθανότητας* $Q_{\tau_{s_1},...,\tau_{s_n}} : \mathfrak{B}(T)_n \longmapsto [0,1]$. *Ιδιαιτέρως, για κάθε* $\mathcal{E}_n - \mathfrak{B}([0,\infty])$*-μετρήσιμη συνάρτηση* $g : E^n \longmapsto [0,\infty]$ *και για κάθε* $B \in \mathcal{E}_n$ *ισχύει*

$$\mathbb{E}_{P\otimes Q}[g(Y_{s_1},...,Y_{s_1})] = \int_{T^n} \mathbb{E}_P[g(X_{t_1},...,X_{t_n})Q_{s_1,...,s_n}(dt_1 \times ... \times dt_n) \tag{7.8}$$

και

$$(P\otimes Q)(\{Y_{s_1},...,Y_{s_n}) \in B\}) = \int_{T^n} P(\{(X_{t_1},...,X_{t_n}) \in B\})Q_{s_1,...,s_n}(dt_1 \times ... \times dt_n). \tag{7.9}$$

Σημειώνουμε ότι τα ολοκληρώματα των (7.7), (7.8), (7.9) ως προς $Q_{s_1,...,s_n}$ *είναι καλά ορισμένα. Αν το* N *είναι αριθμήσιμο, αυτά τα ολοκληρώματα είναι αθροίσματα, ενώ αν η αρχική διαδικασία είναι μετρήσιμη, οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι μετρήσιμες συναρτήσεις των* $\tau_1,...,\tau_n$ *από το Λήμμα 7.3.3.*

Αν η f *μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, το θεώρημα μπορεί αν εφαρμοστεί με ανάλυση της* f *στο θετικό και το αρνητικό της μέρος.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.3.1 προκύπτει ότι η $f(Y_{s_1},...,Y_{s_n},\tau_{s_1},...\tau_{s_n})$ είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}_n - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη συνάρτηση από το $\Omega\times\Gamma$ στο $\overline{\mathbb{R}}$. Έτσι από το Θεώρημα του Fubini έχουμε

$$\begin{aligned} &E_{P\otimes Q} f(Y_{s_1},...,Y_{s_n},\tau_{s_1},...,\tau_{s_n}) \\ &\qquad = \int_\Gamma Q(d\gamma)\int_\Omega f(X_{\tau_{s_1}(\gamma)}(\omega),...,X_{\tau_{s_n}(\gamma)}(\omega),\tau_{s_1}(\gamma),...,\tau_{s_n}(\gamma))P(d\omega). \end{aligned}$$

Αν το N είναι αριθμήσιμο, η ολοκλήρωση ως προς Q είναι αθροισμα και προκύπτει η (7.7). Αν η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(T) - \mathcal{E}$-μετρήσιμη, τότε το ολοκλήρωμα πάνω στον Ω είναι μια $\mathfrak{B}(T)_n$- μετρήσιμη συνάρτηση των $\tau_{s_1},...,\tau_{s_n}$ από το Λήμμα 7.3.4 και η (7.7) προκύπτει από ένα πολύ γνωστό Θεώρημα της Θεωρίας Μέτρου (πρβλ. π.χ. Θεώρημα Α΄.1.6).

Μια παραγόμενη διαδικασία μπορεί να είναι εκ νέου μια ακόμα παραγόμενη διαδικασία. Έστω $\{\sigma_w\}_{w\in W}$ μια σ.δ. με πραγματικές τιμές με χώρο καταστάσεων $N'' \subset S$ και έστω $(\Gamma'',\mathcal{C}'',Q'')$ ο υποκέιμενος χ.π.. Παράγοντας τη διαδικασία $\{Y_s\}_{s\in S}$ από την $\{\sigma_w\}_{w\in W}$ παίρνουμε τη διαδικασία $\{Z_w\}_{w\in W}$ πάνω στο σύνολο $\Omega\times\Gamma\times\Gamma''$ που ορίζεται από τη σχέση

$$Z_w(\omega,\gamma,\gamma'') := Y_{\sigma_w(\gamma'')}(\omega,\gamma), \quad \textit{για κάθε} \quad w \in W. \tag{7.10}$$

Με επαναλαμβανόμενη παραγωγή έχουμε μια «προσεταιριστική ιδιότητα». Παράγοντας τη διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in S}$ από τη διαδικασία $\{\sigma_w\}_{w\in W}$ παίρνουμε τη διαδικασία $\{V_w\}_{w\in W}$ πάνω στο σύνολο $\Gamma\times\Gamma''$ που ορίζεται από τη σχέση

$$V_w(\gamma,\gamma'') := \tau_{\sigma_w(\gamma'')}(\gamma), \quad \textit{για κάθε} \quad w \in W, \tag{7.11}$$

και έτσι προκύπτει η σχέση

$$Z_w(\omega,\gamma,\gamma'') = X_{V_w(\gamma,\gamma'')}(\omega), \quad \textit{για κάθε} \quad (\omega,\gamma,\gamma'') \in (\Omega,\Gamma,\Gamma'') \quad \textit{και} \quad w \in W. \tag{7.12}$$

Ότι ισχύει η (7.12) είναι εύκολο να το δει κανείς από τη (7.10), (7.1) και την (7.11). Έτσι η διαδικασία $\{Z_w\}_{w\in W}$ λαμβάνεται από την αρχική διαδικασία που παράγεται από τη διαδικασία $\{V_w\}_{w\in W}$ με παραγωγή της αρχικής διαδικασίας$\{\sigma_w\}_{w\in W}$ από τη διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in S}$.

Η σχέση (7.12) ισχύει είτε οι $\{Y_s\}_{s\in S}, \{V_w\}_{w\in W}$ και $\{Z_w\}_{w\in W}$ είναι τ.μ. είτε όχι. Αν η διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in S}$ είναι $\mathcal{C}\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη, η διαδικασία $\{V_w\}_{w\in W}$ αποτελείται απο τ.μ. στον μ.χ. $(\Gamma\times\Gamma'', \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'')$ όπως φαίνεται από την εφαρμογή του Θεωρήματος 7.3.1 στον παράγοντα τελεστή (7.11). Έτσι από την (7.12) η διαδικασία $\{Z_w\}_{w\in W}$ αποτελείται από τ.μ. στον μ.χ. $(\Omega\times\Gamma\times\Gamma'', \Sigma\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'')$. Το τελευταίο συμπέρασμα μπορεί επίσης να εξαχθεί από την (7.10) και το γεγονός ότι η διαδικασία $\{Y_s\}_{s\in S}$ είναι μετρήσιμη αν οι διαδικασίες $\{X_t\}_{t\in T}$ και $\{\tau_s]_{s\in S}$ είναι μετρήσιμες. □

Θεώρημα 7.3.6. *Αν η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ ικανοποιεί μία από τις συνθήκες του Θεωρήματος 7.3.1 και η διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in S}$ είναι $\mathcal{C}\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη, τότε η διαδικασία $\{Y_s\}_{s\in S}$είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}\otimes\mathfrak{B}(T)$- μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αρκεί να εξεταστεί η $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρησιμότητα της διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in T}$, αφού αν το N είναι αριθμήσιμο η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ γίνεται $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη αν πάρουμε $T=N$ το οποίο δε μεταβάλλει τη διαδικασία $\{Y_s\}_{s\in S}$.

Έστω $\mathcal{N}$ η τομή $N\bigcap\mathfrak{B}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $H:\Omega\times\Gamma\times S\longmapsto\Omega\times N$ ως εξής:

$$H(\omega,\gamma,s) := (\omega,\tau_s(\gamma)).$$

Από τη $\mathcal{C}\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρησιμότητα της διαδικασίας $\{\tau_s\}_{s\in S}$ προκύπτει ότι η H είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}\otimes\mathfrak{B}(S)-\Sigma\otimes\mathfrak{B}(N)$-μετρήσιμη απεικόμιση από το σύνολο $\Omega\times\Gamma\times S$ στο $\Omega\times N$. Ορίζουμε την απεικόνιση $M:\Omega\times N\longmapsto E$ ώστε

$$M(\omega,t) := X_t(\omega).$$

Αφού η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(T)$-μετρήσιμη η απεικόνιση M είναι $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(N)-\mathcal{E}$-μετρήσιμη. Αφού ισχύει

$$Y_s(\omega,\gamma) = X_{\tau_s(\gamma)}(\omega) = M(\omega,\tau_s(\gamma)) = (M\circ H)(\omega,\gamma,s)$$

και η σύνθεση δύο μετρήσιμων απεικονίσεων είναι μετρήσιμη απεικόνιση έχουμε,

$$\{(\omega,\gamma,s): X_s(\omega,\gamma)\in F\}\in\Sigma\otimes\mathcal{C}\otimes\mathfrak{B}(T), \quad \textit{για κάθε} \quad F\in\mathcal{E}$$

το οποίο αποδεικνύει το Θεώρημα. □

Παρατηρήσεις 7.3.7. **(a)** Οι υποθέσεις των Θεωρημάτων αυτής της ενότητας μπορούν να αποδυναμωθούν στην $\Sigma\widehat{\otimes}\mathfrak{B}(T)$-μετρησιμότητα της αρχικής διαδικασίας. Εδώ $\Sigma\widehat{\otimes}\mathfrak{B}(T)$ είναι η πλήρωση της $\Sigma\otimes\mathfrak{B}(T)$ ως προς το μέτρο $P\otimes\lambda_0$, όπου λ_0 είναι κάποιο μέτρο στη $\mathfrak{B}(T)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \in N$ και κάθε $(s_1, ..., s_n) \in S^n$, η κατανομή $(P \otimes \lambda_0)_{(\tau_{s_1}, ..., \tau_{s_n})}$ είναι απολύτως συνεχής ως προς λ_0^n.

Κάτω από αυτή την υπόθεση, η Y_s για κάθε $s \in S$ είναι $\Sigma \widehat{\otimes} \mathcal{C}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Εδώ η $\Sigma \widehat{\otimes} \mathcal{C}$ είναι η πλήρωση της $\Sigma \otimes \mathcal{C}$ ως προς το μέτρο $P \otimes Q$.

(b) Αν η συνθήκη μετρησιμότητας της αρχικής διαδικασίας αντικατασταθεί απο τη συνθήκη ότι η $P(\{\omega : (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \in E\})$ για $n = 1, 2, ...$ και για κάθε $E \in \mathcal{E}^n$ είναι μια $\mathfrak{B}(T)_n$-μετρήσιμη συνάρτηση των $t_1, ..., t_n$ τότε μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχει μια σ-άλγεβρα $(\Sigma \otimes \mathcal{C})^*$ υποσυνόλων του $\Omega \times \Gamma$ τέτοια ώστε οι Y_s να είναι $(\Sigma \otimes \mathcal{C})$-μετρήσιμες συναρτήσεις στο $\Omega \times \Gamma$. Επιπλέον το μέτρο $P \otimes Q$ στην $\Sigma \otimes \mathcal{C}$ μπορεί να επεκταθεί στη $_(\Sigma \otimes \mathcal{C})$ με τέτοιον τρόπο ώστε οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της διαδικασίας $\{Y_s\}_{s \in S}$ να δίνονται από την (7.9). Ωστόσο η σ-άλγεβρα $(\Sigma \otimes \mathcal{C})$ περιέχει τις $\Sigma \otimes \mathcal{C}$ ή $\Sigma \widehat{\otimes} \mathcal{C}$, έτσι το σημαντικό πλεονέκτημα της μετρησιμότητας ως προς τη σ-άλγεβρα-γινόμενο $\Sigma \otimes \mathcal{C}$ χάνεται. Οι αποδείξεις δίνονται στο [34, II].

(c) Στη μελέτη διαδικασιών συνεχούς παραμέτρου συχνά χρειάζονατι οι υποθέσεις της μετρησιμότητας και της διαχωριστικότητας. Αν η αρχική διαδικασία και η παράγουσα διαδικασία είναι μετρήσιμες, τότε η παραγόμενη διαδικασία είναι μετρήσιμη από το Θεώρημα 7.3.6. Σχετικά με τη διαχωρισιμότητα η κατάσταση είναι διαφορετική. Αν η αρχική διαδικασία και η παράγουσα διαδικασία είναι διαχωρίσιμες, τότε η παραγόμενη διαδικασία μπορεί και να μην είναι διαχωρίσιμη. Οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της διαδικασίας $\{X_t\}_{t \in T}$ και της διαδικασίας $\{\tau_s\}_{s \in S}$ μπορεί να είναι τέτοιες ώστε σε κάθε αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο Λ του $\mathbb{R}_+$ να αντιστοιχεί ένα $\Sigma \otimes \mathcal{C}$-μηδενικό ενδεχόμενο που περιλαμβάνει όλες τις Λ-διαχωρίσιμες τροχιές της διαδικασίας $\{X_t\}_{t \in T}$ που ορίζονται από την (7.1). Αυτή η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί με την αντικατάσταση της $\{Y_s\}_{s \in S}$ από μια διαχωρίσιμη τυπική τροποποίηση. Οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές αυτής της τυπικής τροποποίησης δίνονται επίσης από την (7.9), έτσι η τυπική τροποποίηση παρέχει μια ερμηνεία των παραγόμενων κατανομών στα πλαίσια των τ.μ.. Η σχέση (7.1), ωστόσο, τώρα ισχύει έξω από ένα $\Sigma \otimes \mathcal{C}$-μηδενικό σύνολο που εξαρτάται από το s.

7.4 Ιδιότητες Σύγκλισης

Αν $\lim_{s \longrightarrow \infty} \tau_s(\gamma) = +\infty$, τότε η $Y_s(\omega, \gamma) = X_{\tau_\gamma(\gamma)}(\omega)$, θεωρούμενη ως μια συνάρτηση του s, είναι μια υπακολουθία της $\{X_t(\omega)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Για αυτό αν η αρχική διαδικασία συγκλίνει με κάποιον τρόπο για $t \longrightarrow \infty$, είναι αναμενόμενο ότι η παραγόμενη διαδικασία θα έχει την ίδια οριακή συμπεριφορά για $s \longrightarrow \infty$, αν $\tau_s \longrightarrow +\infty$ με κατάλληλο τρόπο. Για συγκλίσεις $\sigma.\beta.$ το παραπάνω επιχείρημα μας δίνει:

Θεώρημα 7.4.1. *Έστω* $+\infty$ *ένα οριακό σημείο των* T *και* S, *και έστω* $f : X \longmapsto \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Αν* $\lim_{s\longrightarrow\infty} \tau_s(\gamma) = +\infty$ *για κάθε* $\gamma \in \Gamma$ *τότε για κάθε* $\gamma \in \Gamma$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t) &\leq \underline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s) \\ &\leq \overline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s) \\ &\leq \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t). \end{aligned}$$

Πόρισμα 7.4.2. *Αν* $\lim_{t\longrightarrow\infty} f(X_t) = k \quad P - \sigma.\beta.$ *και* $\lim_{s\longrightarrow\infty} \tau_s = +\infty \quad Q - \sigma.\beta.$ *τότε* $\lim_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s) = k \quad P \otimes Q - \sigma.\beta.$. *Η σχέση του θεωρήματος 7.4.1 ισχύει ανεξαρτήτως των θεωρήσεων μετρησιμότητας.*

Για τη σύγκλιση κατά κατανομή και κατά πιθανότητα έχουμε

Θεώρημα 7.4.3. *Έστω* $+\infty$ *ένα οριακό σημείο των* T *και* S. *Αν για σταθερό* $E \in \mathcal{E}$

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} P(\{X_t \in E\}) = p, \tag{7.13}$$

και αν $\tau_s \xrightarrow{Q} +\infty$ *για* $s \longrightarrow \infty$, *τότε*

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} (P \otimes Q)(\{Y_s \in E\}) = p. \tag{7.14}$$

Απόδειξη. Το Θεώρημα προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις που λαμβάνονται από την (7.9):

$$\begin{aligned} &|p - (P \otimes Q)(\{Y_s \in E\})| \\ &= \ |\int_T [p - P(\{X_t \in E\})] Q_s(dt)| \\ &\leq \ \int_{(-\infty,a]\bigcap T} |p - P(\{X_t \in E\})| Q_s(dt) + \int_{(a,+\infty)\bigcap T} |p - P(\{X_t \in E\})| Q_s(dt) \\ &\leq \ Q(\{\tau_s \leq a\}) + \sup_{t\geq a} |p - P(\{X_t \in E\})| \end{aligned}$$

όπου $\lim_{s\longrightarrow\infty} Q(\{\tau_s \leq a\}) = 0$ αφού $\tau_s \xrightarrow{Q} +\infty$. □

Θεώρημα 7.4.4. *Έστω* $+\infty$ *ένα οριακό σημείο των* T *και* S *και έστω* $f : E \longmapsto \mathbb{R}$ *μια* $\mathcal{E}$-*μετρήσιμη συνάρτηση. Αν* $f(X_t) \xrightarrow{P} l$ *για* $t \longrightarrow \infty$ *και αν* $\tau_s \xrightarrow{Q} +\infty$ *για* $s \longrightarrow \infty$ *τότε* $f(Y_s) \xrightarrow{P\otimes Q} l$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.4.3 στην αρχική διαδικασία $R_t := f(X_t) - l, \quad t \in T$ και στην παραγόμενη διαδικασία $U_s := R_{\tau_s} = f(Y_s) - l, \quad s \in S$ όπου $\lim_{t\longrightarrow\infty} P(\{|R_t| \geq \varepsilon\}) = 0$. □

Σε ειδικές περιπτώσεις το Θεώρημα 7.4.3 έχει αντίστροφο όπως στο παρακάτω

Θεώρημα 7.4.5. *Έστω $T = \mathbb{Z}$ ή $T = \mathbb{N}_0$ και $S = \mathbb{N}_0$ ή $S = \mathbb{R}_+$. Αν η διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in S}$ έχει ανεξάρτητες στάσιμες απεριοδικές προσαυξήσεις και αν $\mathbb{E}[|\tau_{s+1} - \tau_s|] < \infty$, $\mathbb{E}[\tau_{s+1} - \tau_s] > 0$, τότε για κάθε $\mathcal{E}$-μετρήσιμη $f : E \longmapsto \mathbb{R}$ ισχύει:*

$$\underline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s) = \underline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t) \quad P \otimes Q - \sigma.\beta., \tag{7.15}$$

$$\overline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s) = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t) \quad P \otimes Q - \sigma.\beta., \tag{7.16}$$

Ιδιαιτέρως, βάσει των υποθέσεων αυτού του Θεωρήματος η σ.β. σύγκλιση της παραγόμενης διαδικασίας και η σ.β. σύγκλιση της αρχικής διαδικασίας είανι ισοδύναμες.

Οι προσαυξήσεις της διαδικασίας $\{\tau_s\}_{s\in S}$ λέγονται απεριοδικές αν το 1 είναι ο Μ.Κ.Δ. όλων των k για τα οποία $P[\{\tau_{s+1} - \tau_s = k\}] > 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $S = \mathbb{N}_0$. Τότε και οι δύο πλευρές των (7.15) και (7.16) είναι μετρήσιμες συναρτήσεις επάνω στον $(\Omega \times \Gamma, \Sigma \otimes \mathcal{C})$ και έτσι

$$G := \{\underline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s) \neq \underline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t)\} \in \Sigma \otimes \mathcal{C}.$$

Παίρνουμε ω σταθερό. Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $k_1, k_2, ...$ με $k_n \longrightarrow \infty$ που εξαρτάται από το ω, τέτοιο ώστε $\underline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t(\omega)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(X_{k_n}(\omega))$. Υπάρχει ένα σύνολο $W \in \mathcal{C}$ με $Q(W) = 0$ τέτοιο ώστε $\lim_{s\longrightarrow\infty} \tau_s(\gamma) = +\infty$ για $\gamma \notin W$. Επιπλέον, από ένα Θεώρημα των Chung and Derman[11] υπάρχει ένα $V_\omega \in \mathcal{C}$ με $Q(V_\omega) = 0$, τέτοιο ώστε $\tau_s(\gamma) \in \{k_1, k_2, ...\}$ για άπειρες τιμές των s, αν $\gamma \notin V_\omega$. Έτσι για $\gamma \notin W \cup V_\omega$, έχουμε

$$\underline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s(\omega,\gamma)) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} f(X_{k_n}(\omega)) = \underline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t(\omega)).$$

Από το Θεώρημα 7.4.1, για $\gamma \notin W$:

$$\underline{\lim}_{s\longrightarrow\infty} f(Y_s(\omega,\gamma)) \geq \underline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} f(X_t(\omega)).$$

Έτσι κάθε ω-section του G είναι Q-μηδενικό σύνολο, το οποίο συνεπάγεται ότι $(P\otimes Q)(G) = 0$ αφού $G \in \Sigma\otimes\mathcal{C}$. Αν $S = \mathbb{R}_+$ τότε η (7.15) προκύπτει από το Θεώρημα 7.4.1 και ότι αποδείχθηκε παραπάνω, αφού αν $D := \mathbb{N}_0$, έχουμε για κάθε (ω, γ) :

$$\lim_{s\in S} \inf f(Y_s(\omega,\gamma)) \leq \lim_{s\in\mathcal{S}} \inf(Y_s(\omega,\gamma)).$$

Η απόδειξη της (7.16) προκύπτει με τον ίδιο τρόπο. □

Παρατήρηση 7.4.6. Το Θεώρημα 7.4.5 δεν ισχύει αν η αρχική διαδικασία έχει συνεχή παράμετρο ακόμα κάτω από αρκετά περιοριστικές υποθέσεις συνέχειας της διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in T}$ βλ. [33, page 112].

Στο παρακάτω Θεώρημα με $\mathcal{F}[t,\infty)$, $\mathcal{C}[s,\infty)$ και $\mathcal{F}_2[s,\infty)$ συμβολίζονται οι σ-άλγεβρες $\sigma(\{X_\tau : \tau \in T, \tau \geq t\})$, $\sigma(\{\tau_\sigma : \sigma \in S, \sigma \geq s\})$ και $\sigma(\{Y_\sigma : \sigma \in S, \sigma \geq s\})$ υποσυνόλων των Ω, Γ και $\Omega \times \Gamma$, αντίστοιχα. Επιπλέον $\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{t\in T} \mathcal{F}[t,\infty)$, $\mathcal{C}_\infty := \bigcap_{s\in S} \mathcal{C}[s,\infty)$ και $\mathcal{F}_{2,\infty} := \bigcap_{s\in S} \mathcal{F}_2[s,\infty)$.

Θεώρημα 7.4.7. *Αν η διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in S}$ ικανοποιεί τον Νόμο $0-1$, δηλ. αν κάθε $\mathcal{C}_\infty$-μετρήσιμη συνάρτηση γ είναι σταθερή $Q-\sigma.\beta.$ τότε κάθε $\mathcal{F}_{2,\infty}$-μετρήσιμη συνάρτηση είναι ίση $P\otimes Q-\sigma.\beta.$ με μια Σ-μετρήσιμη συνάρτηση.*

Αν η αρχική και η παράγουσα διαδικασία ικανοποιούν τον Νόμο $0-1$ και $\tau_s \longrightarrow \infty \quad Q-\sigma.\beta.$ τότε η παραγόμενη διαδικασία ικανοποιεί τον Νόμο $0-1$.

Απόδειξη. Έστω f μια $\mathcal{F}_{2,\infty}$- μετρήσιμη συνάρτηση στο $\Omega\times\Gamma$. Δεν είναι περιορισμός αν υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα 7.3.1 η f είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}[s,\infty)$-μετρήσιμη για κάθε $s\in S$. Έτσι κάθε ω-τομή $f(\omega,\cdot)$ είναι $\mathcal{C}_{[s,\infty)}$-μετρήσιμη για κάθε s, και επομένως $\mathcal{C}_\infty$-μετρήσιμη. Αφού η παραγόμενη διαδικασία ικανοποιεί τον Νόμο $0-1$, υπάρχει μια συνάρτηση φ του ω τέτοια ώστε

$$Q(\{\gamma : f(\omega,\gamma)\neq\varphi(\omega)\})=0, \quad \text{για κάθε} \quad \omega\in\Omega. \tag{7.17}$$

Από το θεώρημα του Fubini, αφού η f είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}_{[s,\infty)}$-μετρήσιμη, η $\int f(\omega,\gamma)Q(d\gamma)$ είναι μια Σ- μετρήσιμη συνάρτηση του ω. Αλλά από την (7.17)

$$\int f(\omega,\gamma)Q(d\gamma)=\varphi(\omega), \quad \text{για κάθε} \quad \omega\in\Omega. \tag{7.18}$$

Έτσι, η φ είναι Σ-μετρήσιμη. Επομένως το σύνολο: $\{(\omega,\gamma) : f(\omega,\gamma)\neq\varphi(\omega)\}=0$ είναι $\Sigma\otimes\mathcal{C}$-μετρήσιμο. Αφού από την (7.17) όλες οι ω-τομές είναι Q-μηδενικές, έχουμε

$$f(\omega,\gamma)=\varphi(\omega), \quad P\otimes Q-\sigma.\beta. \tag{7.19}$$

που αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του Θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο ισχυρισμό σημειώνουμε ότι υπάρχει ένα $F\in\mathcal{C}$ με $Q(F)=0$, έτσι για κάθε $\gamma\notin F$ να έχουμε $\lim_{s\longrightarrow\infty}\tau_s(\gamma)=+\infty$ και $P(\{\omega : f(\omega,\gamma)\neq\varphi(\omega)\})=0$ από την (7.19). Παίρνουμε γ_0 σταθερό, $\gamma_0\notin F$. Τότε μπορεί να δειχθεί ότι η γ_0-τομή $f(\cdot,\gamma_0)$ είναι $\mathcal{F}[t,\infty)$-μετρήσιμη για κάθε $t\in T$ και επομένως $\mathcal{F}_\infty$-μετρήσιμη. Έτσι η $f(\cdot,\gamma_0)$ είναι ίση με μια σταθερά $P-\sigma.\beta.$ και επομένως η φ πρέπει να είναι ίση με μια σταθερά $P-\sigma.\beta.$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Τα θεωρήματα που ακολουθούν σχετίζονται με το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και την κεντρική σύγκλιση.

Θεώρημα 7.4.8. *Έστω $+\infty$ ένα οριακό σημείο των T και S και έστω E η πραγματική ευθεία. Αν*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{X_t}{t}=a \quad P-\sigma.\beta.,$$

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{\tau_s}{s}=b \quad Q-\sigma.\beta.,$$

και

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\tau_s=+\infty \quad Q-\sigma.\beta.,$$

τότε

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{Y_s}{s}=ab \quad P\otimes Q-\sigma.\beta..$$

Απόδειξη. Το θεώρημα είναι άμεσο από τη σχέση

$$\frac{Y_s}{s}=\frac{X_{\tau_s}}{\tau_s}\frac{\tau_s}{s}.$$

□

Θεώρημα 7.4.9. *Έστω $T=\mathbb{N}_0$ και $S=\mathbb{R}_+$ ή $S=\mathbb{N}_0$ και έστω E η πραγματική ευθεία. Αν η διαδικασία $\{\tau_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ έχει στάσιμες απεριοδικές προσαυξήσεις με*

$$0<\mu:=\mathbb{E}[\{\tau_{s+1}-\tau_s\}]<\infty$$

και αν

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{Y_s}{s}=c \quad R-\sigma.\beta.,$$

τότε

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{X_t}{t}=\frac{1}{\mu}c \quad P-\sigma.\beta..$$

Απόδειξη. Αφού $\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{\tau_s}{s}=\mu \quad Q-\sigma.\beta.$, έχουμε

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{X_{\tau_s}}{\tau_s}=\frac{1}{\mu}c \quad R-\sigma.\beta..$$

Από ένα ισχυρισμό παρόμοιο με την απόδειξη του Θεωρήματος 7.4.5 φαίνεται ότι

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{X_t}{t}=\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{X_{\tau_s}}{\tau_s}=\frac{1}{\mu}c.$$

□

Θεώρημα 7.4.10. *Έστω $+\infty$ ένα οριακό σημείο των T και S και έστω E η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Έστω*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\mathbb{E}_P[e^{iu\frac{X_t-\alpha t}{b(t)_1}}]=g(u), \quad -\infty<u<\infty, \tag{7.20}$$

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\mathbb{E}_Q[e^{iu\frac{\tau_s-\alpha s}{\beta(s)}}]=h(u), \quad -\infty<u<\infty, \tag{7.21}$$

$$\tau_s\xrightarrow{Q}+\infty \quad \gamma\iota\alpha \quad s\longrightarrow\infty, \tag{7.22}$$

$$\frac{b_1(\tau_s)}{b_2(s)}\xrightarrow{Q}c \quad \gamma\iota\alpha \quad s\longrightarrow\infty, \tag{7.23}$$

$$\frac{\beta(s)}{b_2(s)}\longrightarrow\lambda \quad \gamma\iota\alpha \quad s\longrightarrow\infty, \tag{7.24}$$

όπου $g(\cdot)$ *και* $h(\cdot)$ *είναι χ.σ.,* $b_1(\cdot), b_2(\cdot)$ *και* $\beta(\cdot)$ *είναι μη αρνητικές αύξουσες συναρτήσεις που συγκλίνουν στο* $+\infty$ *ενώ* c *και* λ *είναι πεπερασμένες σταθερές. Τότε έχουμε*

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} \mathbb{E}_{P\otimes Q}[e^{iu\frac{Y_s - a\alpha(s)}{2^{b(s)}}}] = g(cu)h(\alpha\lambda u), \quad -\infty < u < \infty \tag{7.25}$$

Αν $\alpha = 0$ οι συνθήκες (7.21) και (7.24) μπορούν να παραλειφθούν.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.4.10 χρειάζεται το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 7.4.11. *Για κάθε* s *έστω* $f_s(\cdot)$ *και* $\varphi_s(\cdot)$ *μετρήσιμες συναρτήσεις από το* Γ *στο* $\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$|f_s(\gamma)| \leq M, \quad |\varphi_s(\gamma)| \leq M \quad Q - \sigma.\beta.,$$

$$\varphi_s(\gamma) \xrightarrow{Q} \mu \quad \gamma\iota\alpha \quad s \longrightarrow \infty,$$

$$\int f_s(\gamma)Q(d\gamma) \longrightarrow \nu \quad \gamma\iota\alpha \quad s \longrightarrow \infty,$$

όπου μ *και* ν *είναι σταθερές. Τότε*

$$\int f_s(\gamma)\varphi_s(\gamma)Q(d\gamma) \longrightarrow \mu\nu.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\int f_s(\gamma)\varphi_s(\gamma)Q(d\gamma) = \mu \int f_s(\gamma)Q(d\gamma) + \int f_s(\gamma)[\varphi_s(\gamma) - \mu]Q(d\gamma). \tag{7.26}$$

Αφού $(\varphi_s - \mu)f_s \xrightarrow{Q} 0$ και

$$|f_s(\gamma)[\varphi_s(\gamma) - \mu]| \leq M^2 + M\mu,$$

ο τελευταίος όρος στην (7.26) συγκλίνει στο 0 για $s \longrightarrow \infty$. □

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 7.4.10) Από το Θεώρημα του Fubini έχουμε

$$\mathbb{E}_{P\otimes Q}[e^{iu\frac{Y_s - \alpha\alpha(s)}{b_2(s)}}] = \int f_s(\gamma)\varphi_s(\gamma)Q(d\gamma), \tag{7.27}$$

όπου

$$f_s(\gamma) = e^{iu\frac{\beta(s)}{2^{b(s)}}\frac{\tau_s - \alpha(s)}{\beta(s)}},$$

$$\varphi_s(\gamma) = \mathbb{E}_P e^{iu\frac{b_1(\tau_s(\gamma))}{b_2(s)}\frac{X_{\tau_s}(\gamma) - \alpha\tau_s(\gamma)}{b_1(\tau_s(\gamma))}}.$$

Από τις συνθήκες (7.21), (7.24) και από το γνωστό Θεώρημα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων (βλ. π.χ. [25, Corollary 1, p. 192]) προκύπτει ότι

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} \int f_s(\gamma)Q(d\gamma) = h(\alpha\lambda u). \tag{7.28}$$

Επιπλέον

$$\varphi_s(\cdot) \xrightarrow{Q} g(cu). \tag{7.29}$$

Πράγματι, έστω $\{s_n\}$ μια ακολουθία στο S με $s_n \longrightarrow +\infty$. Από την (7.22), την (7.23) και την Πρόταση Γ΄.1.13 υπάρχει μια υπακολουθία $\{\sigma_n\}$ της $\{s_n\}$ τέτοια ώστε

$$\tau_{\sigma_n}(\gamma) \longrightarrow +\infty, \quad \gamma \notin F, \tag{7.30}$$

$$\frac{b_1(\tau_{\sigma_n}(\gamma))}{b_2(\sigma_n)} \longrightarrow c, \quad \gamma \notin F, \tag{7.31}$$

με $Q(F) = 0$, όπου το σύνολο F εξαρτάται από τη $\{\sigma_n\}$. Από τις (7.30), (7.31), (7.20) και το Θεώρημα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων που αναφέρεται πιο πάνω, προκύπτει ότι $\varphi_{\sigma_n}(\gamma) \longrightarrow g(cu)$ για κάθε $\gamma \in F$. Έτσι κάθε ακολουθία $\{s_n\} \in S$ με $s_n \longrightarrow +\infty$ περιέχει μια υπακολουθία $\{\sigma_n\}$ τέτοια ώστε $\varphi_{\sigma_n}(\cdot) \longrightarrow g(cu) \quad Q - \sigma.\beta.$ που αποδεικνύει την (7.29).

Το θεώρημα προκύπτει από τις (7.28), (7.29) και το Λήμμα 7.4.11. □

Κεφάλαιο 8

Στοχαστικές διαδικασίες με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί η κλάση των διαδικασιών με ανεξάρτητες και στάσιμες προσυαξήσεις των οποίων οι βασικές παράμετροι μπορούν να αλλάζουν τυχαία στο χρόνο.

Στην Ενότητα 8.1 ορίζονται αυτές οι διαδικασίες και παρατίθονται διάφορα παραδείγματα που ονομάζουμε υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson, υπό συνθήκη διαδικασίες Wiener και υπό συνθήκη σύνθετες διαδικασίες Poisson. Αυτές οι διαδικασίες έχουν φυσικές εφραμογές στα πλαίσια που χρησιμοποιούνται οι διαδικασίες με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Στην Ενότητα 8.2 δείχνουμε πως αυτές οι διαδικασίες μπορούν να χαρακτηριστούν ως τυχαίοι χρονικοί μετασχηματισμοί των διαδικασιών με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Τέλος, στην Ενότητα 8.3 μελετάμε την οριακή συμπεριφορά αυτών των διαδικασιών.

8.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

Για όλη την ενότητα η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 8.1.1. Έστω $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ τ.μ. με χ.σ. $\varphi := \varphi_X$. Η φ ονομάζεται **άπειρα διαιρετή (infinitely divisible)** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η $\varphi^{1/n}$ είναι πάλι μια χ.σ. μιας τ.μ.

Στα πλαίσια των $\sigma.\kappa.$ λέμε ότι η κατανομή $F := F_X$ μιας τ.μ. είναι **άπειρα διαιρετή**, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει μία $\sigma.\kappa.$ F_n μιας τ.μ. ώστε $F = {F_n}^{n*} := \underbrace{F_n * \ldots * F_n}_{n-\text{φορές}}$

Ορισμός 8.1.2. Έστω $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια μη αρνητική $\sigma.\delta.$ με πραγματικές τιμές επάνω στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) με δειγματικές τροχιές, οι οποίες είναι μη- φθίνουσες, δεξιά συνεχείς με $\Theta_0 = 0 \quad P-\sigma.\beta.$ Έστω $\mathcal{F} = \sigma(\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ η κανονική διύλιση της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία μετρήσιμη $\sigma.\delta.$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(C1) Για όλα τα $0 \le s_1 < t_1 < ... < s_n < t_n$ και τα $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{k=1}^{n}\{X_{t_k} - X_{s_k} \le x_k\}|\mathcal{F}\right] = \prod_{k=1}^{n} P[X_{t_k} - X_{s_k} \le x_k|\mathcal{F}], \quad P \upharpoonright \mathcal{F} \quad \sigma.\beta. \tag{8.1}$$

(C2) Για κάθε $0 \le s \le t$ και ένα $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}] = \varphi(\zeta)^{\Theta_t - \Theta_s}, \quad P \upharpoonright \mathcal{F} - \sigma.\beta. \tag{8.2}$$

όπου φ είναι μια απείρως διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση. Μία $\sigma.\delta.$ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ικανοποιεί τις (C1) και (C2) ονομάζεται **$\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς την $\sigma.\delta.$ $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.**

Μια $\sigma.\delta.$ διακριτής παραμέτρου με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ορίζεται όπως παραπάνω αν η t είναι διακριτή παράμετρος. Όλα τα αποτελέσματα εδώ εφαρμόζονται σε συνεχείς και διακριτές διαδικασίες. Για λόγους σαφήνειας θα περιοριστούμε σε διαδικασίες με συνεχή παράμετρο.

Η συνθήκη (C1) δείχνει ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις δοσμένης της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Η (C2) δείχνει ότι δεσμευμένη η κατανομή της $X_t - X_s$ ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ εξαρτάται από το χρόνο μόνο μέσω της κατανομής της $\Theta_t - \Theta_s$ και ότι η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η φ καθορίζουν πλήρως τη συμπεριφορά της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Για παράδειγμα αν η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι συνεχής κατά πιθανότητα τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι συνεχής κατά πιθανότητα. Αυτό προκύπτει αφού από την (C2) και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{t\to s}\mathbb{E}[e^{i\zeta(X_t - X_s)}] = \lim_{t\to s}\mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\zeta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}]] = \lim_{t\to s}\mathbb{E}[\varphi(\zeta)^{\Theta_t - \Theta_s}] = 1 \tag{8.3}$$

Όταν η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ισχυρώς αύξουσα στο άπειρο, η (C2) μπορεί να αντικατασταθεί με μια πιο αδύναμη συνθήκη $(C2')$ του Πορίσματος 3.3 που αποδεικνύεται παρακάτω.

Η διαδικασία $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε αυθαίρετη μη φθίνουσα διαδικασία. Δε μπορεί να αυξάνεται $P - \sigma.\beta.$ στο ∞. Κάποιες δυνατότητες για την $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τα υπό-martingales, διαδικασίες με στάσιμες, μη αρνητικές και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, απαριθμήτριες ανανεωτικές διαδικασίες (π.χ. διαδικασία εξόδου από μια ουρά). Σε πολλές εφαρμογές είναι φυσικό να πάρουμε

$$\Theta_t = \int_0^t f(\xi_u)du \tag{8.4}$$

όπου f είναι μια μή αρνητική συνάρτηση Borel, με πραγματικές τιμές και $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια Μαρκοβιανή, ημι- Μαρκοβιανή, ασθενώς ή ισχυρώς στάσιμη διαδικασία, martingale κτλ. Σε αυτά τα πλαίσια μπορεί κανείς να σκεφτεί τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σαν μια διαδικασία με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις λειτουργώντας σε τυχαία αλλαγή περιβάλλοντος που δίνεται από την $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αν $\xi_t = \gamma$ για $a \le t \le b$ τότε η $\{X_t\}_{t\in[a,b]}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta(X_{t+a} - X_a)}|\xi_u = \gamma, a \le u \le b] = [\varphi(\zeta)^{f(\gamma)}]^t. \tag{8.5}$$

Μερικά παραδείγματα της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχουν ως εξής:

Παράδειγμα 8.1.3. Προφανώς από τον Ορισμό 7.1.1 προκύπτει ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν $\Theta_t = ct$ για κάποια σταθερά c. Ωστόσο μπορούμε να περιγράψουμε μια ακόμα πιο ισχυρή κατάσταση. Συγκεκριμένα, αν η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες μη αρνητικες προσαυξήσεις, τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αυτό αποδεικνύεται στην [18, Section X.7] και στο [33] όπου υπάρχουν διάφορα παραδείγματα. Ο Bochner έδειξε ότι όλες οι stable διαδικασίες είναι αυτής της μορφής βλ. [10, p. 317].

Παράδειγμα 8.1.4. Για την περίπτωση όπου $\varphi(\zeta) = e^{e^{i\zeta}-1}$ η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι υπό συνθήκη μη-ομογενής διαδικασία Poisson, με μέση τιμή τη συνάρτηση Θ_t, δοσμένης της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$. Ονομάζουμε την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια **υπό συνθήκη διαδικασία Poisson με μέση τιμή τη διαδικασία** $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Συγκεκριμένα παραδείγματα για αυτή τη διαδικασία έχουν διερευνηθεί στα [7], [15], [16], [20], [24], [27]. Η υπό συνθήκη διαδικασία Poisson μελετάται περαιτέρω στο [27].

Παράδειγμα 8.1.5. Ονομάζουμε την οικογένεια $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ **υπό συνθήκη διαδικασία Poisson ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$**, όταν $\varphi(\zeta) = e^{\Psi(\zeta)-1}$ όπου Ψ είναι μια χαρακτηριστική συνάρτηση. Αυτή είναι μια απλή διαδικασία (step process) παρόμοια με την υπό συνθήκη διαδικασία Poisson με μέση τιμή $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με εξαίρεση ότι το μέγεθος κάθε άλματος έχει τη χαρακτηριστική συνάρτηση Ψ και είναι ανεξάρτητο από το υπόλοιπο της διαδικασίας. Στη [18, p. 532] αποδεικνύεται ότι κάθε απείρως διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση είναι το όριο μια ακολουθίας σύνθετων χαρακτηριστικών συναρτήσεων Poisson. Από αυτό προκύπτει ότι κάθε διαδικασία με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και συνεχής κατά πιθανότητα είναι το όριο κατά κατανομή μιας ακολουθίας από σύνθετες διαδικασίες Poisson, βλ [10]. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορεί κανείς να αποδείξει ότι οποιαδήποτε διαδικασία με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι το όριο κατά κατανομη μιας ακολουθίας σύνθετων διαδικασιών Poisson. Μια περίπτωση αυτού του γεγονότος παρατίθεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.1.6. Η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **υπό συνθήκη διαδικασία Wiener με διακύμανση τη διαδικασία** $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν $\varphi(\zeta) = e^{-\zeta^2/2}$. Μια διαδικασία Wiener χρησιμοποιείται σαν πρότυπο για την απεικόνιση της κίνησης Brown ενός σωματιδίου σε ένα υγρό ή αέριο μέσο (ιδιαίτερα για μεγάλες χρονικές περιόδους βλ. [10] για τη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck). Αν η θερμοκρασία είναι μια σταθερά T τότε η μέση τετραγωνική μετατόπιση (στην πραγματική ευθεία ενός σωματιδίου σε ένα αέριο σε χρόνο t είναι $\frac{4RTt}{Nf(T)}$ όπου R η παγκόσμια σταθερά αερίων, N ο αριθμός Avogadro, και $f(T)$ ο συντελεστής τριβής του μέσου βλ. [28]). Ας υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από μια $\sigma.\delta.$ $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Ας υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι σχετικά ομοιόμορφη σε όλο το μέσο. Τότε η κίνηση ενός σωματιδίου θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί απο μια υπό συνθήκη διαδικασία Wiener με διαδικασία διακύμανσης τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπου $\Theta_t = \frac{4R}{N}\int_0^t f(T_u)^{-1}T_u du$. Η αιτιολόγηση για αυτό είναι η εξής : Φαίνεται εύλογο ότι ένα σωματίδιο που κινείται γραμμικά σε ένα τυχαία μεταβαλλόμενο μέσο μπορεί να περιγραφεί όπως παρακάτω βλ. [28, p. 98]. Ας υποθέσουμε ότι σε χρόνο 0 το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση 0 καθώς και ότι το μέσο αλλάζει τυχαία έτσι ώστε σε χρόνο t η ένταση των επιπτώσεων να κάνει το σωματίδιο να δίνεται από μια τ.μ. Θ_t. Τότε σύμφωνα με τις συνήθεις υποθέσεις της κίνησης Brown σχετικά με τις επιπτώσεις των σωματιδίων από το μεσο, προκύπτει ότι ο αριθμός N_t των επιπτώσεων στο σωματίδιο σε χρόνο t είναι μια υπό συνθήκη διαδικασία Poisson με μέση τιμή τη διαδικασία $\Theta_t = \int_0^t \theta_u du$. Υποθέτουμε ότι κάθε επίδραση πάνω στο σωματίδιο αλλάζει τη θέση του κατά μία ποσότητα α ή $-\alpha$ και ότι κάθε ενδεχόμενο συμβαίνει με πιθανότητα 1/2. Τότε η θέση του σωματιδίου μπορεί να δοθεί από την υπό συνθήκη σύνθετη διαδικασία Poisson $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ όπου $\{Y_k\}$ είναι οι διαδοχικές αλλαγές στη θέση του σωματιδίου οι οποίες υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες, με την κατανομή

$$P[Y_k = -\alpha] = P[Y_k = \alpha] = \frac{1}{2} \tag{8.6}$$

και ανεξάρτητες της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Στην παραγματικότητα το θ_t είναι πολύ μεγάλο και το α πολύ μικρό. Υποθέτουμε ότι αν $\theta_t \longrightarrow \infty \quad P-\sigma.\beta.$ για $t \longrightarrow \infty$ και αν $\alpha \longrightarrow 0$ τότε

$$\alpha^2 \int_0^t \theta_u du \longrightarrow \Theta_t \quad P-\sigma.\beta. \tag{8.7}$$

Τότε μπορεί να αποδειχθεί όπως στο [28] ότι υπό αυτές τις συνθήκες

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta S_t}|\mathcal{F}] \longrightarrow e^{-\zeta^2\Theta_t/2}] \quad P\restriction\mathcal{F}-\sigma.\beta. \tag{8.8}$$

Δηλαδή η θέση του σωματιδίου S_t συμπεριφέρεται σαν μια υπό συνθήκη διαδικασία Wiener.

Η υπό συνθήκη διαδικασία Wiener μπορεί επίσης να είναι χρήσιμη για τη μοντελοποίση του θερμικού θορύβου (τάση) κατά μήκος μιας αντίσατσης σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, όταν η αντίσταση ή η θερμοκρασία μεταβάλλεται τυχαία στο χρόνο, καθώς και σε άλλους τομείς όπως η κβαντική μηχανική βλ. [28]. Ένας άλλος τομέας εφαρμογής της υπό συνθήκη διαδικασίας Wiener είναι η μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο. Εδώ το S_t θα μπορούσε να αποτελεί την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμη t (ή το λογάριθμο της τιμής στο χρόνο t (βλ. [14]) και ως Θ_t μια τυχαία συνάρτηση των βασικών συνθηκών της αγοράς που επηρεάζουν την τιμή. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο [26] όπου η Θ_t θεωρείται ανάλογη με το συνολικό αριθμό συναλλαγών για τη μετοχή στο χρόνο t. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή μιας μετοχής έχει μια τυχαία τάση $\{\mu\}$ όπως στο [5].

8.2 Ένας χαρακτηρισμός

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι μια διαδικασία με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι ισοδύναμη με κάποιον τυχαίο μετασχηματισμό του χρόνου μιας διαδικασίας με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αυτό συνεπάγεται ότι μια τυχαία μεταβολή σε ορισμένες παραμέτρους μιας διαδικασίας με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι ισοδύναμη με ένα τυχαίο μετασχηματισμό του χρόνου αυτής της διαδικασίας.

Θεώρημα 8.2.1. *Έστω $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια σ.δ. επάνω στο χώρο πιθανότητας (Ω,Σ,P) όπως στην προηγούμενη ενότητα. Έστω $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια μετρήσιμη σ.δ. με πραγματικές τιμές επάνω στο χώρο (Ω,Σ,P), με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ανεξάρτητη της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και τέτοια ώστε η Y_t να έχει χ.σ. φ^t όπου φ μια άπειρα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση. Τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με*

$$X_t := Y(\Theta_t) \quad \text{για κάθε} \quad t\in\mathbb{R}_+ \tag{8.9}$$

είναι μια διαδικασία με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προασαυξήσεις ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αντιστρόφως, κάθε διαδικασία με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι ίση κατά κατανομή με μια διαδικασία της παραπάνω μορφής.

Απόδειξη. Ευθύ. Έστω $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπως στο θεώρημα. Θα δείξουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Πράγματι, έστω $n\in\mathbb{N}_0$, $0\le s_1<t_1<...<s_n<t_n$ και $x_1,...,x_n$. Τότε

$$\begin{aligned}
P[\bigcap_{k=1}^{n}\{X_{t_k}-X_{s_k}\le x_k\}|\mathcal{F}] &= P[Y_{\Theta_{t_1}}-Y_{\Theta_{s_1}}\le x_1,...,Y_{\Theta_{t_n}}-Y_{\Theta_{s_n}}\le x_n|\mathcal{F}]\\
&= P[Y_{\Theta_{t_1}}-Y_{\Theta_{s_1}}\le x_1,...,Y_{\Theta_{t_n}}-Y_{\Theta_{s_n}}\le x_n]\\
&= P[Y_{\Theta_{t_1}}-Y_{\Theta_{s_1}}\le x_1]...P[Y_{\Theta_{t_n}}-Y_{\Theta_{s_n}}\le x_n]\\
&= P[Y_{\Theta_{t_1}}-Y_{\Theta_{s_1}}\le x_1|\mathcal{F}]...P[Y_{\Theta_{t_n}}-Y_{\Theta_{s_n}}\le x_n|\mathcal{F}]\\
&= P[X_{t_1}-X_{s_1}|\mathcal{F}]...P[X_{t_n}-X_{s_n}|\mathcal{F}],
\end{aligned}$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P\restriction\mathcal{F}-\sigma.\beta.$ Επομένως, ισχύει ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Επίσης, για κάθε $0\le s\le t$ και $\zeta\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i\zeta(X_t-X_s)}|\mathcal{F}] &= \mathbb{E}[e^{i\zeta(Y_{\Theta_t}-Y_{\Theta_s})}|\mathcal{F}]\\
&= \mathbb{E}[e^{i\zeta(Y_{\Theta_t}-Y_{\Theta_s})}]\\
&= \varphi(\zeta)^{\Theta_t-\Theta_s} \quad P\restriction\mathcal{F}-\sigma.\beta.
\end{aligned}$$

Το αντίστροφο προκύπτει από την κατασκευή κατάλληλων διαδικασιών $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σε δύο χ.π. (Ω_1,Σ_1,P_1), (Ω_2,Σ_2,P_2) και στη συνέχεια λαμβάνοντας (Ω,Σ,P) να είναι ο χώρος γινόμενο των (Ω_1,Σ_1,P_1) και (Ω_2,Σ_2,P_2). □

Για διαδικασίες με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς μια αυστηρώς αύξουσα διαδικασία $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, έχουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό στα πλαίσια των διαδικασιών επάνω σε ένα χ.π.

Θεώρημα 8.2.2. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ.δ. επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) όπως περιγράφηκαν στον ορισμό 8.1.2 της παραγράφου 7.1 και επιπλέον υποθέτουμε ότι η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει αυστηρώς αύξουσες δειγματικές τροχιές οι οποίες τείνουν $P-$ σ.β. στο άπειρο. Τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ότι*

$$X_t = Y\left(\Theta_t\right), \tag{8.10}$$

όπού $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μετρήσιμη σ.δ. με πραγματικές τιμές επάνω στο (Ω, Σ, P), με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, συνεχής κατά πιθανότητα και ανεξάρτητη της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έστω $\omega \in \Omega$ σταθερά, $t \in \mathbb{R}_+$, $u_0 := sup\{u \in \mathbb{R}_+ : \Theta_u(\omega) \leq t\}$

(a) Το $u_0 \in \mathbb{R}_+$. Δηλαδή υπάρχει το $supA_t$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, όπου $A_{t,\omega} := \{u \in \mathbb{R}_+ : \Theta_u(\omega) \leq t\}$, διότι το $A_{t,\omega} \neq \emptyset$ αφού $0 \in A_{t,\omega}$ και το $A_{t,\omega}$ είναι άνω φραγμένο, αφού αν δεν ήταν άνω φραγμένο θα είχαμε $u_0 = \infty$, συνεπώς για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ θα ισχύει $\Theta_u(\omega) \leq t$, άρα $\lim_{u\to\infty} \Theta_u(\omega) \leq t$, άτοπο διότι από την υπόθεση $\lim_{u\to\infty} \Theta_u(\omega) = \infty$.

(b) Αν $u_1 := \Theta_t^{-1}(\omega)$, τότε $u_1 = u_0$. Πράγματι,

(α) έστω ότι $u_0 < u_1$. Τότε $\Theta_{u_0}(\omega) < \Theta_{u_1}(\omega) = t$ αφού από την $u_1 = \Theta_t^{-1}(\omega)$ προκύπτει ότι $\Theta_{u_1}(\omega) = t$. Άρα θα υπάρχει $u_2 \in (u_0, u_1)$ ώστε $\Theta_{u_0}(\omega) < \Theta_{u_2}(\omega) < \Theta_{u_1}(\omega) = t$ δηλαδή υπάρχει $u_2 > u_0$ ώστε $\Theta_{u_2}(\omega) \leq t$, άτοπο από τον ορισμό του u_2.

(β) Έστω, $u_0 > u_1$. Τότε $t = \Theta_{u_1}(\omega) < \Theta_{u_0}(\omega)$ συνεπώς για κάθε $u \in (u_1, u_0)$ ισχύει $t = \Theta_{u_1}(\omega) < \Theta_u(\omega) < \Theta_{u_0}(\omega)$, δηλαδή για κάθε $u \in (u_1, u_0)$ θα ισχύει $\Theta_u(\omega) > t$, άτοπο από τον ορισμό του u_0.

Άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $\Theta_t^{-1}(\omega) = sup\{u \in \mathbb{R}_+ : \Theta_u(\omega) \leq t\}$. Στη συνέχεια θέτουμε

$$Y_t := X(\Theta_t^{-1}) \quad \text{για} \quad t \geq 0. \tag{8.11}$$

Η διαδικασία $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μετρήσιμη αφού η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η $\{\Theta_t^{-1}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μετρήσιμες. Η τελευταία είναι μετρήσιμη αφού μπορεί να δειχθεί ότι είναι δεξιά συνεχής. Αφού η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αυστηρώς αύξουσα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$

$$\Theta_t^{-1}(\Theta_t) = t, \tag{8.12}$$

άρα

$$X_t = X(\Theta_t^{-1}(\Theta_t)) = Y(\Theta_t) \quad P - \sigma.\beta. \tag{8.13}$$

Για κάθε $s \leq t$, κάνοντας χρήση της (C2) και από την (8.12) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i\zeta(Y_t - Y_s)}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\zeta(X(\Theta_t^{-1}) - X(\Theta_s^{-1}))}|\mathcal{F}]] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(\zeta)^{(\Theta_{\Theta_t^{-1}} - \Theta_{\Theta_s^{-1}})}] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(\zeta)^{(\Theta_t \circ \Theta_t^{-1} - \Theta_t \circ \Theta_s^{-1})}] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(\zeta)^{t-s}] \\
&= \varphi(\zeta)^{t-s},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta(Y_t - Y_s)}] = \varphi(\zeta)^{t-s}, \tag{8.14}$$

άρα η $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις.

Επιπλέον, η $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αφού για κάθε $s_1 < t_1 < ... < s_n < t_n$ και $\zeta_1, ..., \zeta_n$ κάνοντας χρήση των (C1), (C2) και της (8.12) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\sum_{k-1}^{n} i\zeta_k (Y_{t_k} - Y_{s_k})}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\sum_{k=1}^{n} i\zeta_k (X_{\Theta_{t_k}}^{-1} - X_{\Theta_{s_k}}^{-1})}|\mathcal{F}]] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{i\zeta_k (X_{\Theta_{t_k}}^{-1} - X_{\Theta_{s_k}}^{-1})}|\mathcal{F}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{i\zeta_k (X_{\Theta_{t_k}}^{-1} - X_{\Theta_{s_k}}^{-1})}|\mathcal{F}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \varphi(\zeta_k)^{t_k - t_s}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \varphi(\zeta_k)^{t_k - t_s} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\varphi(\zeta_k)^{t_k - t_s}] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{i\zeta_k (X_{\Theta_{t_k}^{-1}} - X_{\Theta^{-1} s_k})}|\mathcal{F}\right]\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{i\zeta_k (Y_{t_k} - Y_{s_k})}].
\end{aligned}$$

Έτσι, η $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και από την (8.14) προκύπτει ότι είναι συνεχής κατά πιθανότητα, βλ. [10, p. 304]. Ότι η $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ανεξάρτητη της $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ προκύπτει από το ότι για κάθε $s_1 < t_1 < ... < s_n < t_n$ και $x_1, ..., x_n$ χρησιμοποιώντας παρόμοιο σκεπτικό με τα παραπάνω παίρνουμε

$$P[Y_{t_1} - Y_{s_1} \leq x_1, ..., Y_{t_n} - Y_{s_n} \leq x_n | \mathcal{F}] = \prod_{k=1}^{n} P[Y_{t_k} - Y_{s_k} \leq x_k]. \tag{8.15}$$

Έτσι, το αναγκαίο του θεωρήματος αποδείχθηκε. Το ικανό προκύπτει από το Θεώρημα 8.2.1.

□

Πόρισμα 8.2.3. *Μια μετρήσιμη διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με πραγματικές τιμές έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις σε σχέση με μια ισχυρώς αύξουσα διαδικασία $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται η (C1) και η παρακάτω συνθήκη:*

(C2′) Για κάθε $0 \leq s \leq t$ η υπό συνθήκη σ.κ. είναι συνάρτηση μόνο των $\Theta_t - \Theta_s$ και x.

Απόδειξη. Το αναγκαίο είναι προφανές (Θεώρημα Δ′.1.5). Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι (C1) και (C2′). Τότε αφού η $Y_t = X(\Theta_t^{-1}(t))$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και είναι ανεξάρτητη της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.2) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[e^{i\zeta(Y(\Theta_t)-Y(\Theta_s))}|\mathcal{F}] = \varphi(\zeta)^{\Theta_t - \Theta_s}, \tag{8.16}$$

όπου

$$\varphi(\zeta) = \mathbb{E}[e^{i\zeta X(\Theta_t^{-1}(1)}|\mathcal{F}]. \tag{8.17}$$

□

8.3 Οριακή συμπεριφορά

Σε αυτή την ενότητα παίρνουμε τη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια διαδικασία με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Υπό το πρίσμα αυτής της ενότητας χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_t = Y(\Theta_t)$ όπως στο Θεώρημα 8.2.1. Έστω

$$\mu := \mathbb{E}[Y_1] \quad \text{και} \quad \sigma^2 := Var[Y_1] \tag{8.18}$$

όποτε αυτές οι ποσότητες υπάρχουν.

Οι ιδιότητες της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση των υπό συνθήκη μέσων τιμών, μέσω των $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (ή της φ η οποία καθορίζει την $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$). Για παράδειγμα, θεωρούμε τον χρόνο πρώτης διέλευσης (the first passage time).

$$T_\alpha := inf\{t : X_t \geq \alpha\} \quad \text{για κάποιο παραγματικό} \quad \alpha. \tag{8.19}$$

Σαφώς ισχύει

$$P[T_\alpha \leq t] = \int_0^\infty P[\Theta_t \leq u] P_{U_\alpha(du)}, \tag{8.20}$$

όπου $U_\alpha := inf\{t : Y_t \geq \alpha\}$. Όπως αποδεικνύεται η οριακή συμπεριφορά της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μπορει να εκφραστεί πολύ καλά στα πλαίσια της οριακής συμπεριφοράς της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπως θα δειχθεί σε αυτή την ενότητα. Το πρώτο αποτέλεσμα στο Θεώρημα 8.3.1 αφορά στο όριο της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ χωρίς καμία κανονικοποίηση. Το Θεώρημα 8.3.2 περιλαμβάνει έναν ασθενή και έναν ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών για την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Τα όρια του μέσου και της διακύμανσης της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παρατίθενται στο Θεώρημα 8.3.3. Εργοδικά θεωρήματα για τη σύγκλιση της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ κατά μέσο και κατά μέσο τετράγωνο αναφέρονται στο Θεώρημα 8.3.4. Τέλος θα παρουσιαστεί μια ολοκληρωμένη εικόνα του κεντρικού οριακού θεωρήματος για τη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Ειδικές εφαρμογές αυτών των αποτελεσμάτων για υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson σε Μαρκοβιανή περιβάλλοντα εμφανίζονται στο [31].

Θεώρημα 8.3.1. *(α) Αν $\Theta_t \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta.$ όπου Θ μια πεπερασμένη τ.μ. τότε $X_t \longrightarrow Y(\Theta) \quad P-\sigma.\beta.$*

(β) Υποθέτουμε ότι $\Theta_t \longrightarrow +\infty \quad P-\sigma.\beta.$ Τότε $X_t \longrightarrow +\infty$, ή $-\infty$ ή δε συγκλίνει $P-\sigma.\beta.$ καθώς το $\mu > 0$, ή $\mu < 0$, ή $\mu = 0$, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Το (α) είναι προφανές. Το (β) είναι επίσης προφανές παρατηρώντας ότι αν $\mu = 0$ τότε η Y_t δε συγκλίνει $P-\sigma.\beta.$ και αν $\mu > 0$ ή $\mu < 0$ τότε Y_t συγκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα. Αυτή είναι μια στοιχειώδης ιδιότητα των διαδικασιών με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις από το κριτήριο τριών σειρών και το νόμο των μεγάλων αριθμών. □

Το παραπάνω θεώρημα είναι επίσης σωστό αν η σύγκλιση $P-\sigma.\beta.$ αντικατασταθεί από τη σύγκλιση κατά πιθανότητα, η τη σύγκλιση κατά κατανομή, βλ. [33]. Για την περίπτωση που η Θ_t συγκλίνει, με όποια από τις παραπάνω μορφές, σε μια τ.μ. $\Theta : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούν να συνδυαστούν για να ορίσουν το όριο της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Θεώρημα 8.3.2. *Υποθέτουμε ότι $\mu \leq +\infty$ και ότι η $\Theta : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ είναι μια τ.μ.. Τότε μια ικανή συνθήκη για την*

$$t^{-1}X_t \longrightarrow \Theta\mu \quad P-\sigma.\beta. \quad (\textit{κατά πιθανότητα}), \tag{8.21}$$

είναι η

$$t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta. \quad (\textit{κατά πιθανότητα}). \tag{8.22}$$

Αν επιπλέον $\mu < +\infty$ τότε η (8.22) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την (8.21).

Απόδειξη. Αφού η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις προκύπτει ότι

$$t^{-1}Y_t \longrightarrow \mu \quad P-\sigma.\beta. \tag{8.23}$$

Τότε τα αποτελέσματα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των Θεωρημάτων 7.4.8, 7.4.9. □

Θεώρημα 8.3.3. *Υποθέτουμε ότι μ και σ^2 υπάρχουν στον $\mathbb{R}$.*

(α) Αν $\Theta_t \longrightarrow \Theta$ κατά πιθανότητα για κάποια τ.μ. Θ τότε

$$\mathbb{E}[X_t] \longrightarrow \mu\mathbb{E}[\Theta], \quad \textit{όπου} \quad \mathbb{E}[\Theta] \leq \infty. \tag{8.24}$$

Αν επιπλέον $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε

$$Var[X_t] \longrightarrow \sigma^2\mathbb{E}[\Theta] + \mu^2 Var[\Theta]. \tag{8.25}$$

(β) Υποθέτουμε ότι $t^{-1}\mathbb{E}[\Theta_t] \longrightarrow \alpha$. Τότε,

$$t^{-1}\mathbb{E}[(X_t - \mu\alpha t)^2] \longrightarrow \sigma^2\alpha + \mu^2 b^2 \tag{8.26}$$

αν και μόνο αν

$$t^{-1}\mathbb{E}[(\Theta_t - \alpha t)^2] \longrightarrow b^2. \tag{8.27}$$

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος του (α) προκύπτει, αφού από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y(\Theta_t)|\Theta_t]] = \mu\mathbb{E}[\Theta_t] \longrightarrow \mu\mathbb{E}[\Theta], \quad \text{καθώς} \quad t \longrightarrow \infty. \tag{8.28}$$

Για το δεύτερο μέρος του (α) έχουμε $\Theta_t \longrightarrow \Theta$ κατά πιθανότητα, και έτσι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης , κάνοντας χρήση της $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, παίρνουμε

$$Var[\Theta_t] = \mathbb{E}[\Theta_t]^2 - (\mathbb{E}[\Theta_t])^2. \tag{8.29}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} Var[X_t] &= \mathbb{E}[Var[Y(\Theta_t)|\Theta_t]] + Var[\mathbb{E}[Y(\Theta_t)|\Theta_t]] && (8.30)\\ &= \sigma^2\mathbb{E}[\Theta_t] + \mu^2 Var[\Theta_t] \longrightarrow \sigma^2\mathbb{E}[\Theta] + \mu^2 Var[\Theta], && (8.31) \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτεί από το Λήμμα 3.1.2.. Το (β) προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t - \mu\alpha t)^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[((Y(\Theta_t) - \mu\Theta_t) + \mu(\Theta_t - \alpha t))^2|\Theta_t]]\\ &= \mathbb{E}[Var[Y(\Theta_t)|\Theta_t]] + \mu^2\mathbb{E}[(\Theta_t - \alpha t)^2]\\ &= \sigma^2\mathbb{E}[\Theta_t] + \mu^2\mathbb{E}[(\Theta_t - \alpha t)^2]. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 8.3.4. *(α) Αν $t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta$ κατά L_1 και $\mu < \infty$, τότε $t^{-1}X_t \longrightarrow \mu\Theta$ κατά L_1.*

(β) Αν $t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta$ κατά L_2 και $\sigma^2 < \infty$, τότε $t^{-1}X_t \longrightarrow \mu\Theta$ κατά L_2.

Απόδειξη. Αφού

$$t^{-1}\mathbb{E}[|X_t - t\mu\Theta|] \leq t^{-1}\mathbb{E}[|X_t - \mu\Theta_t|] + t^{-1}|\mu|\mathbb{E}[|\Theta_t - t\Theta|], \tag{8.32}$$

προκειμένου να αποδειχθεί το (α) είναι αρκετό να δείχθεί ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (8.32) συγκλίνει στο 0. Λόγω της υπόθεσης έχουμε:

$$t^{-2}\mathbb{E}[(X_t - \mu\Theta_t)^2] = t^{-2}\mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_t - \mu\Theta_t)^2|\Theta_t]] = t^{-2}\sigma^2\mathbb{E}[\Theta_t] \longrightarrow 0 \tag{8.33}$$

Με άλλα λόγια $t^{-1}X_t - \mu\Theta_t \longrightarrow 0$ κατά L_2 και έτσι $t^{-1}X_t - \mu\Theta_t \longrightarrow 0$ κατά L_1 και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. Για το (β) από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$t^{-1}(\mathbb{E}[|X_t - t\mu\Theta|^2])^{\frac{1}{2}} \leq t^{-1}(\mathbb{E}[|Y(\Theta_t) - \mu\Theta_t|^2])^{\frac{1}{2}} + t^{-1}|\mu|(\mathbb{E}[|\Theta_t - t\Theta|^2])^{\frac{1}{2}}. \tag{8.34}$$

Από την υπόθεση προκύπτει ότι $t^{-2}\Theta_t \longrightarrow 0$ κατά L_1 και άρα $t^{-2}E\Theta_t \longrightarrow 0$. Τότε από την (8.33) βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (8.34) συγκλίνει στο 0. Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της (8.34) συγκλίνει στο 0 λόγω της υπόθεσης. Άρα προκύπτουν αυτά τα αποτελέσματα. □

Τώρα θα παρουσιαστούν συνθήκες κάτω από τις οποίες η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, όταν ομαλοποιείται κατάλληλα, έχει μια οριακή κατανομή. Για αυτό θα υποθέσουμε ότι η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ διαχωρίσιμη και ότι η άπειρα διαιρετή χ.σ. φ της Y_1 ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας ευσταθούς κατανομής με εκθέτη $0 < \alpha \leq 2$. Τότε προκύπτει ότι (αφού η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι διαχωρίσιμη και συνεχής κατά πιθανότητα) υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί A_t και B_t τέτοια ώστε για $t \longrightarrow \infty$

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta(A_t^{-1}Y_t - B_t)}] = e^{-i\zeta B_t}\varphi^t(\zeta A_t^{-1}) \longrightarrow g_\alpha(\zeta), \tag{8.35}$$

όπου $g_\alpha(\zeta)$ είναι η χ.σ. μιας ευσταθούς κατανομής με εκθέτη α και μέσο 0. Για την ειδική περίπτωση που $\alpha = 2$ (η κανονική κατανομή) και $\sigma^2 < \infty$ αυτό γίνεται

$$(Y_t - t\mu)/\sqrt{t} \longrightarrow N(0, \sigma^2) \quad \text{κατά κατανομή}, \tag{8.36}$$

όπου $N(0, \sigma^2)$ είναι μια κανονική τ.μ. με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ^2.

Θεώρημα 8.3.5. *Έστω Ψ_a μια τ.μ. με χ.σ. την $g_\alpha(\zeta)$.*

(α) Υποθέτουμε ότι $0 < \alpha < 1$ και $t^{-1}\Theta_t \longrightarrow b\Psi_a$ για κάποια σταθερά b. Τότε

$$A_t^{-1}X_t - bB_t \longrightarrow b\Psi_a \quad \text{για} \quad t \longrightarrow \infty. \tag{8.37}$$

(β) Υποθέτουμε ότι $\alpha = 1$, $\quad B_t/t^{1/2} \longrightarrow C \quad (C^2 \geq 0)$ και ότι υπάρχουν σταθερές α και b τέτοιες ώστε

$$(\Theta_t - bt)/\sqrt{t} \longrightarrow N(0, \alpha^2) \quad \text{κατά κατανομή}, \quad \text{για} \quad t \longrightarrow \infty. \tag{8.38}$$

Τότε,

$$A - t^{-1}X_t - bB_t \longrightarrow b\Psi_a + N(0, C^2\alpha^2) \quad \textit{κατά κατανομή}, \quad \textit{για} \quad t \longrightarrow \infty, \tag{8.39}$$

όπου Ψ_a *είναι ανεξάρτητη της* $N(0, C^2\alpha^2)$.

(γ) *Υποθέτουμε ότι* $1 < \alpha \leq 2$, $\sigma^2 = +\infty$ *και* $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι όπως στο (β). Τότε,*

$$A - t^{-1}X_t - bB_t \longrightarrow b\Psi_a \quad \textit{κατά κατανομή}, \quad \textit{για} \quad t \longrightarrow \infty. \tag{8.40}$$

(δ) *Υποθέτουμε ότι* $\alpha = 2$, $\sigma^2 < \infty$ *και ότι υπάρχουν σταθερές* α_t *και* b_t *με* $\alpha_t \longrightarrow \infty$ *και* $b_t/\alpha_t \longrightarrow c^2$ $(c^2 \geq 0)$ *και μια τ.μ.* Φ *τέτοια ώστε*

$$\alpha_t^{-1}\Theta_t - b_t \longrightarrow \Phi \quad \textit{κατά κατανομή}, \quad \textit{για} \quad t \longrightarrow \infty. \tag{8.41}$$

Τότε,

$$\alpha_t^{-1}X_t - \mu b_t \longrightarrow \mu\Phi + N(0, c^2\sigma^2) \quad \textit{κατά κατανομή}, \quad \textit{για} \quad t \longrightarrow \infty, \tag{8.42}$$

όπου Φ *ανεξάρτητη* $N(0, c^2\sigma^2)$.

Κεφάλαιο 9

Υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθούν οι υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson που συχνά ονομάζονται και διπλές $\sigma.\delta.$ Poisson (double stochastic Poisson processes). Μία υπό συνθήκη διαδικασία Poisson χαρακτηρίζεται ως τυχαίος μετασχηματισμός του χρόνου μιάς διαδικασίας Poisson με μοναδιαία ένταση. Αυτός ο χαρακτηρισμός χρησιμοποιείται για να δειχθούν τα χρονικά άλματα αυτών των διαδικασιών και να μελετηθεί η οριακή συμπεριφορά τους.

Μια υπό συνθήκη διαδικασία Poisson είναι κατ΄ ουσία μια μη ομογενής διαδικασία Poisson της οποίας η συνάρτηση έντασης (μέση τιμή) είναι $\sigma.\delta.$. Αυτές οι διαδικασίες, με αυστηρά στάσιμες διαδικασίες έντασης έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς με το όνομα διπλές $\sigma.\delta.$ Poisson βλ. [7], [15], [16], [19], [20], [24], [27] και τις αντίστοιχες αναφορές.

Επιπλέον μπορούν να θεωρηθούν ως μια υποκλάση της πιο γενικής κλάσης των διαδικασιών με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις βλ. [32].

Θα δειχθεί πως μια υπό συνθήκη διδικασία Poisson μπορεί να χαρακτηριστεί ως τυχαίος μετασχηματισμός του χρόνου μιας διαδικασίας Poisson με μοναδιαία ένταση. Αυτός ο χαρακτηρισμός χρησιμοποιείται για να δειχθούν οι χρόνοι και τα μεγέθη των αλμάτων αυτών των διαδικασιών. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε για αυτές τις διαδικασίες οριακά θεωρήματα, έναν ασθενή και έναν ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Η ανάλυση που παρουσιάζεται μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε διαδικασία με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

9.1 Ορισμός και Σχόλια

Ορισμός 9.1.1. Έστω $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια $\sigma.\delta.$ με πραγματικές τιμές που είναι μη-φθίνουσα και δεξιά συνεχής $\sigma.\delta.$ επάνω στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) με $\Theta_0 = 0 \quad P-\sigma.\beta.$ και $\mathcal{F} = \sigma(\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ η κανονική διύλιση της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Μια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ στον ίδιο χώρο πιθανότητας ονομαζεται **υπό συνθήκη διαδικασία Poisson** με ένταση $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι υπό συνθήκη μη ομογενής διαδικασία Poisson δοσμένης της σ-

άλγεβρας $\mathcal{F}$. Δηλ. αν $N_0 = 0$ και για όλα τα $s_1 < t_1 < ... < s_n < t_n$ και τα $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$P[N_{t_1} - N_{s_1} \leq x_1, ..., N_{t_n} - N_{s_n} \leq x_n|\mathcal{F}] = \prod_{k=1}^{n} P[N_{t_k} - N_{s_k} \leq x_k|\mathcal{F}] \quad P \restriction \mathcal{F} \quad \sigma.\beta \tag{9.1}$$

και για κάθε $0 \leq s \leq t$ και $x \in \mathbb{N}_0$

$$P[N_t - N_s = x|\mathcal{F}] = \frac{(\Theta_t - \Theta_s)^x}{x!} e^{-(\Theta_t - \Theta_s)} \quad P \restriction \mathcal{F} \quad \sigma.\beta \tag{9.2}$$

Το όνομα **υπό συνθήκη διαδικασία Poisson** προήλθε από τη χρήση του όρου *υπό συνθήκη* στις ονομασίες *υπό συνθήκη διαδικασίες Markov*, *υπό συνθήκη ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές*, *υπό συνθήκη διαδικασίες Wiener*, *διαδικασίες με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις*.

Μια υπό συνθήκη διαδικασία Poisson είναι μη-φθίνουσα,μη-αρνητική με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ και *άλματα* μεγαλύτερα ή ίσα της μονάδας (9.7),(9.8) τα οποία είναι πιθανό να είναι φραγμένα. Για την ειδική περίπτωση που η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι *ντετερμινιστική* συνάρτηση του t η διαδικασία είναι μή ομογενής $\sigma.\delta.$ Poisson βλ. [28].

Σε πολλές εφαρμογές έχουμε $\Theta_t = \int_0^t \theta_u d\theta$, όπου η $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Μαρκοβιανή, ημι-Μαρκοβιανή, ισχυρώς ή ασθενώς στάσιμη, Γκαουσσιανή $\sigma.\delta.$ κτλ. Η $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **διαδικασία έντασης** της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αν η $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ισχυρώς στάσιμη η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία στάσιμη σημειακή διαδικασία (stationary point process) βλ. [7], [15], [16] και [24].

Η ειδική περίπτωση $\Theta_t = t\Theta$ για κάποια τ.μ. Θ μελετάται στο [27] όπου ο συγγραφέας την ονομάζει **μεικτη διαδικασία Poisson** (**mixed Poisson process**).

Άλλες δυνατότητες που υπάρχουν για τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τα υπο-martingales, $\sigma.\delta.$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ανανεωτικές απαριθμήτριες $\sigma.\delta.$ ή άλλες απαριθμήτριες $\sigma.\delta.$.

Κάποιες φορές η ένταση είναι $\theta_t = \rho(\zeta_t)$ όπου ρ είναι μια συνάρτηση Borel και $\{\zeta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια ενδιαφέρουσα συνάρτηση. Σ' αυτά τα πλαίσια η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία Poisson που λειτουργεί σε κάποια τυχαία αλλαγή περιβάλλοντος. Σε χρόνο t είναι στο περιβάλλον ζ_t, όπου η ένατση των αλμάτων είναι $\rho(\zeta_t)$. Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ως **Poisson με τυχαία περιβάλλοντα** (random environments) και τη $\{\zeta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως τη **διαδικασία περιβάλλοντος** (environment process) της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Οι υπο συνθήκη διαδικασίες Poisson έχουν πολλές εφαρμογές σε πολλές περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται οι συνήθεις διαδικασίες Poisson.

Παράδειγμα 9.1.2. Έστω ένα άθροισμα διαδικασιών Poisson όπου ο αριθμός των $\sigma.\delta.$ αλλάζει τυχαία στο χρόνο. Υποθέτουμε δηλαδη n ανεξάρτητες ροές Poisson με εντάσεις $a_1, ..., a_n$ που είναι είτε εντός είτε εκτός σύμφωνα με τη $\sigma.\delta.$ $\zeta_t = (\zeta_1(t), ..., \zeta_n(t)), t \geq 0$. Αν

$\zeta_k(t) = 1(= 0)$ η ροή k είναι εντός (εκτός) στο χρόνο t. Ο αριθμός των συμβάντων στη σύνθετη ροή στο $(0, t]$ είναι μια υπό συνθήκη διδικασία Poisson με ένταση $\theta_t = \sum_{k=1}^{n} a_k \zeta_k(t)$

Όλες οι υπό συνθήκη διδικασίες Poisson είναι ίσες κατά κατανομή με διαδικασίες της μορφής

$$N_t = N(\Theta_t) \tag{9.3}$$

όπου η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι όπως περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι διαδικασία Poisson με ένταση ίση με 1 ορισμένη στον ίδιο χώρο πιθανότητας με τη $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ανεξάρτητη της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Όταν η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο άπειρο τότε αυτή η ισότητα ισχύει σχεδόν βέβαια κάτι που προκύπτει από τα θεωρήματα χαρακτηρισμών του [32]. Δηλ. όλες οι υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson είναι τυχαίοι μετασχηματισμοί του χρόνου (ή ανάγονται) σε μια ομογενή διαδικασία Poisson με μοναδιαία ένταση.

Είναι προφανές ότι οι υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson είανι χρήσιμες σε εφαρμογές όπου ένα συμβάν απεικονίζεται απο μια διαδικασία Poisson $\{N_s\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ με την παράμετρο s να αυξάνεται στο χρόνο σύμφωνα με τη Θ_t και ενδιαφέρον παρουσιάζει η $N(\Theta_t)$ ως ένα συμβάν που εξαρτάται από το χρόνο.

Μια υπό συνθήκη διδικασία Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για την οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι της μορφής (9.3) μπορεί επίσης να παρασταθεί ως διαδικασία σημειακών αλμάτων.

Η διαδικασία Poisson στη (9.3) γράφεται ως

$$N_t = n, \quad \text{αν} \quad T_n \leq t < T_{n+1} \tag{9.4}$$

όπου $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι τα σημεία αλμάτων με την ιδιότητα ότι η $\{T_n - T_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ανεξάρτητη *σ.δ.* ώστε κάθε τ.μ. $T_n - T_{n-1}$ να έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Δηλ. από τις (9.3) και (9.4) έπεται ότι

$$N_t = N(\Theta_t) = n, \quad \text{αν} \quad T_n \leq \Theta_t < T_{n+1}. \tag{9.5}$$

Θέτοντας $\zeta = sup_{t\in\mathbb{R}_+}\Theta_t$ μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφο της Θ_t για κάθε $t < \zeta$ μέσω της σχέσης

$$\Theta_t^{-1} = sup\{u : \Theta_u \leq t\}. \tag{9.6}$$

Τότε από τις ιδιότητες των αντιστρόφων διαδικασιών προκύπτει ότι:

$$N_t = \begin{cases} n \quad \text{αν} \quad \Theta_{T_n}^{-1} \leq t < \Theta_{T_{n+1}}^{-1} \quad \text{και} \quad t < \zeta \\ N_\zeta, \quad \text{αν} \quad t \geq \zeta \quad \text{και} \quad \zeta < \infty \end{cases} \tag{9.7}$$

έτσι τα σημεία αλμάτων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δίνονται από $\{\Theta_{T_n}^{-1} : n < N(\zeta)\}$.

Για τις περιπτώσεις που η Θ_t είναι συνεχής (π.χ. αν $\Theta_t = \int_0^t \theta_u du$) η διαδικασία Θ_t^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και έτσι τα σημεία αλμάτων είναι διακριτά. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πρέπει να έχει μοναδιαία άλματα.

Παράδειγμα 9.1.3. Οι μεικτές διαδικασίες Poisson με $\Theta_t = t\Theta$ έχουν $\Theta_t^{-1} = t/\Theta$ και γίνονται $N_t = n$ αν $T_n/\Theta \leq t < T_{n+1}/\Theta$

Για την περίπτωση που $\Theta_t = \int_0^t \theta_u du$, με $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχυρώς στάσιμη τα σημεία αλμάτων $\{\Theta_{T_n}^{-1} : n > 0\}$ έχουν τη μορφή μιας στάσιμης διαδικασίας βλ. π.χ. [24]. Για τη γενική περίπτωση τα δικριτά άλματα μπορούν να συμβολιστούν με $\{\Theta_{T_{\nu_n}}^{-1} : n \leq M\}$. Εδώ $M = card\{\Theta_{T_n}^{-1} : n \leq N(\zeta)\}$ και $\nu_0 = 0$ και για $n \leq M$

$$\nu_n := min\{m : \Theta_{T_m}^{-1} > \Theta_{T_{v-1}}^{-1}\}. \tag{9.8}$$

Τότε μπορεί να γραφεί ως:

$$N_t = \begin{cases} \nu_n, & \text{αν} \quad \Theta_{T_{\nu_n}}^{-1} \leq t < \Theta_{T_{\nu_{n+1}}}^{-1} \quad \text{και} \quad t < \zeta \\ N_\zeta, & \text{αν} \quad t \geq \zeta \quad \text{και} \quad \zeta < \infty \end{cases} \tag{9.9}$$

Οι διαδοχικές προσαυξήσεις της $\{N_t\}_{y\in\mathbb{R}_+}$ δίνονται από την $\{\nu_n - \nu_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Στα πλαίσια όπου η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θεωρείται ως μια διαδικασία Poisson με τυχαία περιβάλλοντα, ενδιαφέρον μπορεί να έχει η συμπεριφορά της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σε συνδυασμό με τις αλλαγές περιβάλλοντος. Σε αυτά τα πλαίσια φυσικός υποψήφιος για μια διαδικασία περιβάλλοντος είναι μια απλή διαδικασία (step process) της μορφής

$$\zeta_t = \xi_n \quad \text{αν} \quad \tau_n \leq t < \tau_{n+1} \tag{9.10}$$

όπου $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με τ_0 είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία που συγκλίνει $P - \sigma.\beta.$ στο ∞ . Παρόμοιες παραδοχές σχετικά με τη διαδικασία χώρου - χρόνου $\{\xi_n, \tau_{n+1} - \tau_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ότι είναι Μαρκοβιανή, ισχυρώς ή ασθενώς στάσιμη, κ.τ.λ. ή ότι οι $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_n}$ και $\{\tau_{n+1} - \tau_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες κάποιων κατάλληλων μορφών. Δηλ. δύο τυπικές διαδικασίες που σχετίζονται με τη $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και τα περιβάλλοντα που θα μπορούσαν να έχουν ενδιαφέρον είναι η $\{N(\tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και η $\{N(\tau_\nu)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπου $\nu_t = sup\{n : \tau_n \leq t\}$. Εδώ $N(\tau_n)$ είναι ο αριθμός των αλμάτων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στα πρώτα $n-1$ περιβάλλοντα και $N(\tau_\nu)$ ο αριθμός των αλμάτων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στα περιβάλλοντα πριν το χρόνο t.

Αυτές οι διαδικασίες υπάρχουν για υπό συνθήκη διαδικασίες Poisson με μέση τιμή μια διαδικασία της μορφής

$$\Theta_t = \xi_n, \quad \text{αν} \quad \tau_n \leq t < \tau_{n+1}. \tag{9.11}$$

Άλλες διαδικαίες σχετικές με τη $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα μελετηθούν παρακάτω.

9.2 Οριακή συμπεριφορά

Σ' αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια υπό συνθήκη διαδικασία Poisson της μορφής 9.3. Οι ιδιότητες της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για πεπερασμένο χρονικό διάστημα μπορούν εύκολα να καθοριστούν κάνοντας χρήση των υπό συνθήκη μέσων τιμών στα πλαίσια της συμπεριφοράς της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αποδεικνύεται επίσης ότι η οριακή συμπεριφορά της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καθορίζεται στα πλαίσια της οριακής συμπεριφοράς της $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Η οριακή συμπεριφορά της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όταν η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παραμένει φραγμένη δίνεται από το Θεώρημα 9.2.1. Ασθενής και ισχυροί νόμοι των μεγάλων αριθμών καθώς κα εργοδικάι θεωρήματα για σύγκλιση κατά μέσο και τετραγωνικό μέσο δίνονται στο Θεώρημα 9.2.2. Η συμπεριφορά της μέσης τιμής και της διακύμανσης δίνονται στο Θεώρημα 9.2.3. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι ένα κεντρικό οριακό θεώρημα για τη $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αυτά τα θεωρήματα χρησιμοποιούνται και παρακάτω για ένα ειδικό παράδειγμα.

Θεώρημα 9.2.1. *(α) Έστω ότι*

$$\Theta_t \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta. \quad \text{κατά πιθανότητα, κατά κατανομή} \tag{9.12}$$

όπου Θ είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}_+$ Τότε

$$N_t \longrightarrow Z \quad P-\sigma.\beta. \quad \text{κατά πιθανότητα, κατά κατανομή} \tag{9.13}$$

αντίστοιχα, όπου

$$Z := \begin{cases} N(\Theta), & \text{αν} \quad \Theta < \infty \\ +\infty, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{9.14}$$

(β) Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την

$$N_t \longrightarrow N(\Theta), \quad \text{κατά} \quad L_1, \quad \text{κατά} \quad L_2 \tag{9.15}$$

είναι η

$$\Theta_t \longrightarrow \Theta, \quad \text{κατά} \quad L_1, \text{κατά} \quad L_2 \quad \text{αντίστοιχα.} \tag{9.16}$$

Απόδειξη. (α) • Αν $Z = N(\Theta)$ τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές.

- Αν $Z = +\infty$ ισχύει ότι αν $\Theta_t \longrightarrow +\infty \quad P-\sigma.\beta$ τότε $N_t \longrightarrow +\infty$.

(β) Προκύπτει από τις σχέσεις

$$\mathbb{E}[|N_t - N(\Theta)|] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(\Theta) - N(\Theta_t)|\Theta - \Theta_t]] = \mathbb{E}[\Theta - \Theta_t] \tag{9.17}$$

και

$$\mathbb{E}[|N_t - N(\Theta)|]^2 = \mathbb{E}[\Theta - \Theta_t] + \mathbb{E}[\Theta - \Theta_t]^2 \tag{9.18}$$

οι οποίες ισχύουν αφού:

Η (9.17) λόγω της μεικτής Poisson και η (9.18) καθώς ισχύει:

$$\mathbb{E}[|N_t - N(\Theta)|]^2 \;=\; \mathbb{E}[\mathbb{E}[|N_t - N(\Theta)|^2|\Theta - \Theta_t]]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[Var[N(\Theta) - N_t|\Theta - \Theta_t]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[|N_t - N(\Theta)||\Theta - \Theta_t]^2] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(\Theta) - N_t|\Theta - \Theta_t]] + \mathbb{E}[\Theta - \Theta_t]^2 \\
&= \mathbb{E}[N(\Theta) - N_t] + \mathbb{E}(\Theta - \Theta_t)^2 \stackrel{(9.17)}{=} \mathbb{E}[\Theta - \Theta_t] + \mathbb{E}[\Theta - \Theta_t]^2
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα 9.2.2. *(α) Μια ικανή συνθήκη για τη σχέση*

$$t^{-1}N_t \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta., \quad \textit{κατά πιθανότητα} \tag{9.19}$$

όπου Θ *μια τ.μ. με τιμές στο* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *είναι η*

$$t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta., \quad \textit{κατά πιθανότητα}, \tag{9.20}$$

αντίστοιχα. Αν επιπλέον $\Theta_t \longrightarrow \infty \quad P-\sigma.\beta.$ *τότε η (9.20) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την (9.19)*

(β) Αν $t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta$ *κατά* L_1*, κατά* $L2$*, τότε* $t^{-1}N_t \longrightarrow \Theta$ *κατά* L_1*, κατά* L_2*, αντίστοιχα.*

Απόδειξη. (α) Σύμφωνα με το [32, Theorem 4.2] ισχύει ότι μια ικανή συνθήκη για την

$$t^{-1}N_t \longrightarrow \Theta\mu \quad P-\sigma.\beta., \quad \text{κατά πιθανότητα} \tag{9.21}$$

είναι η

$$t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta\mu \quad P-\sigma.\beta. \quad \text{κατά πιθανότητα, αντίστοιχα} \tag{9.22}$$

Επιπλέον, αν $\Theta_t \longrightarrow +\infty \quad P-\sigma.\beta.$ τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την (9.21) είναι η (9.22), αφού για την $\{N_{\Theta_t^{-1}}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ισχύει ότι $t^{-1}N_{\Theta_t^{-1}} \longrightarrow \mu$ (για $\mu = 1$)

(β) Έστω ότι

$$t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta \quad \text{κατά} \quad L_1. \tag{9.23}$$

Τότε σύμφωνα με το [32, Theorem 4.4, (α)] έχουμε ότι

$$t^{-1}N_t \longrightarrow \Theta \quad \text{κατά} \quad L_1 \tag{9.24}$$

ομοίως αν

$$t^{-1}\Theta_t \longrightarrow \Theta \quad \text{κατά} \quad L_2 \tag{9.25}$$

τότε από το [32, Theorem 4.4, (β)] προκύπτει ότι

$$t^{-1}N_t \longrightarrow \Theta \quad \text{κατά} \quad L_2. \tag{9.26}$$

□

Το Θεώρημα 9.2.2 είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος 7.4.8

Θεώρημα 9.2.3. *(α) Αν $\Theta_t \longrightarrow \Theta$ κατά πιθανότητα τότε*

$$EN_t \longrightarrow E\Theta, \quad \text{όπου} \quad E\Theta \leq \infty. \tag{9.27}$$

Αν επιλπέον $E\Theta < \infty$ τότε

$$VarN_t \longrightarrow E\Theta + Var\Theta, \quad \text{όπου} \quad Var\Theta \leq \infty. \tag{9.28}$$

(β) Αν $t^{-1}E\Theta_t \longrightarrow a$ όπου $a \leq \infty$, τότε $t^{-1}EN_t \longrightarrow a$. Αν επιπλέον $\alpha < \infty$ τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την

$$t^{-1}\mathbb{E}[N_t - at]^2 \longrightarrow a + b^2 \tag{9.29}$$

είναι η

$$t^{-1}\mathbb{E}[\Theta - at] \longrightarrow b^2 \tag{9.30}$$

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί ειδική περίπτωση του [32, Theorem 4.3].

Θεώρημα 9.2.4. *Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a_t και b_t με $a_t > 0$ και $b_t/a_t \longrightarrow \sigma^2, \quad 0 \leq \sigma^2 < \infty$ και μια Ψ τέτοια ώστε*

$$a_t^{-1}\Theta_t - b_t \longrightarrow \Psi \quad \text{κατά κατανομή}. \tag{9.31}$$

Τότε

$$a_t^{-1}N_t - b_t \longrightarrow \Psi + N(0,\sigma^2) \quad \text{κατά κατανομή}, \tag{9.32}$$

όπου $N(0,\sigma^2)$ είναι μια κανονική τ.μ. με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ^2 που είναι ανεξάρτητη της Ψ.

Απόδειξη. Αποτελεί ειδική περίπτωση της (4.1.9) του [32]. □

Σημειώνουμε ότι για την ειδική περίπτωση που $(\Theta_t - At)/\sqrt{t} \longrightarrow N(0, B^2)$ το θεώρημα δηλώνει ότι

$$(N_t - At)\sqrt{t} \longrightarrow N(0, A + B^2) \quad \text{κατά κατανομή}. \tag{9.33}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί αναφέρεται στις ισχυρώς στάσιμες εντάσεις.

Μπορεί κανείς να κάνει χρήση των παραπάνω θεωρημάτων για τις διαδικασίες $\{N_{\tau_n}\}$ και $\{N_{\tau_\nu}\}$ που αναφέρονται παρακάτω. Για παράδειγμα αν $\Theta_t \longrightarrow \infty \quad P{-}\sigma.\beta.$ έχουμε $n^{-1}N_{\tau_n} \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta.$ αν και μόνο αν $\nu_t^{-1}\Theta_{\tau_{\nu_t}} \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta.$ και $\nu_t^{-1}N_{\tau_{\nu_t}} \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma.\beta.$ αν και μόνο αν $\nu_t^{-1}(\tau_{\nu_t}) \longrightarrow \Theta \quad P-\sigma\beta.$ Επίσης μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει κεντρικά οριακά θεωρήματα για τη $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπως στο [32].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α′ Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Β′ Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Γ′ Θεωρήματα Σύγκλισης

Δ′ Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Ε′ Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Παράρτημα Α′

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Α′.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός Α′.1.1. *Έστω* (Ω, Σ, P) *και* (Υ, T, Q) *δύο χ.π. και* $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.

(a) *Η οικογένεια* $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ *ονομάζεται η* **σ-άλγεβρα γινόμενο** *της* Σ *και* T.

(b) *Για κάθε* $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, *και* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα*

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** *και η* **y-τομή** *(x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.*

(c) *Αν η* $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις*

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** *της* f *και η* **y-τομή** *της* f, *αντίστοιχα.*

Λήμμα Α′.1.2. *Έστω* (Ω, Σ) *και* (Υ, T) *μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

(i) Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ *και για κάθε* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *έχουμε* $E_x \in T$ *και* $E^y \in \Sigma$.

(ii) Για κάθε $\Sigma \otimes T$*- μετρήσιμη συνάρτηση* $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *και για κάθε* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *οι συναρτήσεις* $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *και* $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.*

Θεώρημα Α΄.1.3. *(Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $x \longmapsto Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $y \longmapsto P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy). \tag{Α΄.1}$$

Θεώρημα Α΄.1.4. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** *των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [13, Theorem 5.1.3]

Θεώρημα Α΄.1.5. *(Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π.. Για κάθε $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto [0, \infty]$ $\Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε*

$$\varphi_f : \Omega \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f είναι $\Sigma - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη, η η ψ_f είναι $T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f dP \otimes Q = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)P(dx)Q(dy)\end{aligned}$$

Για την απόδειξη βλ. [13, Proposition 5.2.1]

Θεώρημα Α΄.1.6. *(Fubini) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. και $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με $f \in \mathcal{L}^1(P \otimes Q)$. Τότε*

(i)

$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P - \sigma.o \quad \text{τα} \quad x \in \Omega$$

και

$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q - \sigma.o \quad \text{τα} \quad y \in \Upsilon,$$

(ii) οι συναρτήσεις $\varphi_f : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με $\varphi_f(x) := \begin{cases} \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q) \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$ και

$\psi_f : \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με $\psi_f(y) := \begin{cases} \int_\Omega f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ ανήκουν στον $\mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{L}^1(Q)$, αντίστοιχα,

(iii) ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x,y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x,y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

όπου θέτουμε

$$\int_\Upsilon f(x,y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$

και

$$\int_\Omega f(x,y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. [13, Theorem 5.2.2].

Α′.2 Vague και ασθενής σύγκλιση μέτρων

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε έναν τοπικά συμπαγή διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X εφοδιασμένο με την Borel σ-άλγεβρά του $\mathfrak{B}(X)$. Συμβολίζουμε με $\mathscr{M}(X)$ τον χώρο όλων των Radon μέτρων επάνω στην $\mathfrak{B}(X)$. Θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα $\mu, \nu, \ldots$ για να δήλώσουμε τα στοιχεία του $\mathscr{M}(X)$. Με $\mathscr{M}_b(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μέτρων $\mu \in \mathscr{M}(X)$ ώστε $\mu(X) < \infty$. Πλήρεις αποδείξεις των αποτελεσμάτων της Ενότητας Α′.2 μπορούν να βρεθούν στο [8, Sections 30, 31].

Ορισμός Α′.2.1. *Μια ακολουθία $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στο $\mathscr{M}(X)$ είναι* **vague συγκλίνουσα** *ή* **συγκλίνει ως προς την vague τοπολογία** *στο $\mu \in \mathscr{M}(X)$, αν*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u(x)\mu_n(dx) = \int_X u(x)\mu(dx) \quad \text{για κάθε } u \in C_c(X). \tag{Α′.2}$$

Μια ακολουθία πεπερασμένων μέτρων $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στο $\mathscr{M}_b(X)$ **συγκλίνει ασθενώς** *στο $\nu \in \mathscr{M}_b(X)$, αν*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u(x)\nu_n(dx) = \int_X u(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε } u \in C_b(X). \tag{Α′.3}$$

Συμβολισμοί Α′.2.2. (a) *Συμβολίζουμε με $C_\infty(X)$ την κλειστότητα του $C_c(X)$ ως προς την ομοιόμορφη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Τα στοιχεία του $C_\infty(X)$ είναι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται στο άπειρο. Σημειώνουμε ότι το ζευγάρι $(C_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι ένα χώρος Banach. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (Α′.2) με την*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u(x)\mu_n(dx) = \int_X u(x)\mu(dx) \quad \text{για κάθε } u \in C_\infty(X). \tag{Α′.4}$$

(b) *Με $\mathscr{M}^1(X)$ συμβολίζεται ο χώρος όλων των μέτρων πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}(X)$.*

Παρατήρηση Α′.2.3. *Μία ακολουθία $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στον χώρο $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ είναι ακριβώς τότε vague συγκλίνουσα, όταν η ακολουθία $\{\int f d\mu_n\}_{n\in\mathbb{M}}$ συγκλίνει για κάθε $f \in C_c(\mathbb{R}_+)$. Τότε η απεικόνιση $f \longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int f d\mu_n$ είναι ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές επάνω στον $C_c(\mathbb{R}_+)$.*

Από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο $\mu \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$, ώστε η $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ να είναι vague συγκλίνουσα στο μ. Απ΄ αυτό προκύπτει ότι το vague όριο μιας ακολουθίας στον $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Έχουμε την επόμενη σχέση ανάμεσα στην vague και την ασθενή σύγκλιση των μέτρων.

Θεώρημα Α′.2.4. *Μια ακολουθία μέτρων $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, με $\mu_n \in \mathscr{M}_b(X)$, συγκλίνει ασθενώς στο μ, αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την vague τοπολογία στο μ και αν οι συνολικές μάζες συγκλίνουν στη συνολική μάζα του ορίου*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X).$$

Πόρισμα Α′.2.5. *Μία ακολουθία $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στο $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mu \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ τότε και μόνο τότε, όταν συγκλίνει στο μ ως προς την vague τοπολογία.*

Ορισμοί Α′.2.6. (a) *Ένα σύνολο $H \subseteq \mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ ονομάζεται φραγμένο, αν $\sup\limits_{\mu\in H}|\int f d\mu| < \infty$ για κάθε $f \in C_c(\mathbb{R}_+)$.*

(b) *Ένα σύνολο $H \subseteq \mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ είναι σχετικά συμπαγές ως προς την vague τοπολογία στο $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+)$ αν το clH είναι συμπαγές ως προς την ίδια τοπολογία.*

Παρατήρηση Α′.2.7. *Μια vague συγκλίνουσα ακολουθία μέτρων $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με $\mu_n \in \mathscr{M}^1(X)$, είναι κατ΄ ανάγκη φραγμένη ως προς την vague τοπολογία, αφού για κάθε $u \in C_c(X)$ έχουμε*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left|\int u \, d\mu_n\right| < \infty.$$

Ισχύει και το παρακάτω είδος αντιστρόφου.

Θεώρημα Α′.2.8. *Το υποσύνολο $H \subseteq \mathscr{M}(X)$ είναι σχετικά συμπαγές ως προς την vague τοπολογία, αν και μόνο αν το H είναι φραγμένο ως προς την vague τοπολογία.*

Αυτό σημαίνει ειδικότερα ότι κάθε φραγμένη ως προς την vague τοπολογία ακολουθία Radon μέτρων έχει τουλάχιστον μια vague συγκλινουσα υπακολουθία.

Θεώρημα Α′.2.9. *Μια ακολουθία μέτρων $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με $\mu_n \in \mathscr{M}_b(X)$, συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mu \in \mathscr{M}_b(X)$ αν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες.*

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *για όλα τα κλειστά σύνολα* $F \subset X$

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ *για όλα τα ανοιχτά σύνολα* $G \subset X$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ *για όλα τα Borel σύνολα* $B \subset X$ *με* $\mu(\vartheta B) = 0$.

Αν μ_n, μ είναι πεπερασμένα μέτρα πάνω στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, μπορούμε να προσθέσουμε μια επιπλέον ισοδυναμία στις συνθήκες για τις συναρτήσεις κατανομών.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(-\infty, x] = \mu(-\infty, x]$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $\mu\{x\} = 0$.

Η $F(x) := \mu(-\infty, x]$ είναι μια συνάρτηση κατανομής και υπάρχει ένα προς ένα σχέση ανάμεσα στα πεπερασμένα μέτρα πάνω στην πραγματική ευθεία και σε όλες τις φραγμένες, μη-φθίνουσες και δεξιά συνεχείς συναρτήσεις $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Στα πλαίσια της vague και της ασθενούς σύγκλισης το κλασσικό Θεώρημα επιλογής του Helly γίνεται:

Πόρισμα Α′.2.10 (Helly)**.** *Αν $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομης οι οποίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες, δηλαδή $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0, x\in\mathbb{R}} |F_n(x)| < \infty$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και μια υπακολουθία $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x) \quad \text{σε όλα τα σημεία συνέχειας της } F.$$

Η αντίστοιχή ακολουθία των πεπερασμένων μέτρων, $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ συγκλινει ως προς την vague τοπολογία στο πεπερασμένο μέτρο μ που επάγεται απο την F.

Συγκλίνει ασθενώς, αν και μόνο αν $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{k} [F_{n_k}(R) - F_{n_k}(-R)] = 0$, ή ισοδύναμα, αν $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$.

Παράρτημα Β′

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

Β′.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός Β′.1.1. *Η συνάρτηση* $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *που δίνεται από την*

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{Β′.1}$$

Δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός Β′.1.2. *Η συνάρτηση* $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ *που δίνεται από την*

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότητα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός B′.1.3. *Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι*

$$\binom{\alpha}{m} := \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a-j}{m-j}. \tag{B′.2}$$

Πόρισμα B′.1.4. *Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει*

$$\binom{a+m-1}{m} = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{B′.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a+m-1-j}{m-j} = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!} = \frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!}\\ &= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (B′.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός B′.1.5. *Έστω (Ω,Σ,P) ένας χ.π. Μία συνάρτηση $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται* **τυχαία μεταβλητή** *(τ.μ. για συντομία), αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $X^{-1}(B) \in \Sigma$. Για μια τ.μ X: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. *Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται* **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** *(degenerate (probability) distribution).*

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** *(σ.κ.) $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$* **της τ.μ.** *$X$, που ορίζεται από τον τύπο:*

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [3], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι σ.κ. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η σ.κ. F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [3], Πρόταση 1.4.10).

Μια (σ.κ.) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** *αν και μόνο αν είναι της μορφής*

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ *και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση* $f : K \to \mathbb{R}_+$. *Η* f *ονομάζεται με τη σειρά της* **συνάρτηση πιθανότητας** *(σ.π.) της* F.

- **Συνεχής** *αν η* F *είναι συνεχής συνάρτηση.*

- **Απόλυτα Συνεχής** *αν είναι της μορφής:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *με την ιδιότητα* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. *Η* f *ονομάζεται με τη σειρά της* **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (*σ.π.π.*).

Προφανώς, αν η τ.μ. X *είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ.* X *με σύνολο τιμών* R_X *ακολουθεί την κατανομή* $\mathbf{K}(\theta)$ *με παραμετρικό διάνυσμα* $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, *όπου* $m \in \mathbb{N}$ *και* $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, *και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας* $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ *αν και μόνο αν*

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x)d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X *η αντίστοιχη σ.(π.)π., και* ν *το αριθμητικό μέτρο επάνω στο* $\mathbb{N}_0$ *ή το μέτρο του Lebesgue* λ *επάνω στο* $\mathbb{R}$ *ανάλογα με το αν η τ.μ.* X *είναι συνεχής ή διακριτή.*
Αν η τ.μ. X *είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το* R_X *είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.*

Ορισμός Β΄.1.6. *Για μια τ.μ.* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *το ολοκλήρωμα*

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** *ή* **αναμενόμενη τιμή** *ή* **μαθηματική ελπίδα** *της τ.μ.* X. *Για λόγους απλοποίησης μπορούμε να γράψουμε* $\mathbb{E}[X]$ *αντί* $\mathbb{E}_P[X]$. *Ειδικά αν η τ.μ.* $X \in \mathcal{L}^1(P)$ *τότε η* $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, *και είναι ένας αριθμός.*

Ορισμός Β΄.1.7. *Έστω* (Ω, Σ, P) *και* (Υ, T, Q) *χ.π. Ένα* $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ *ονομάζεται* **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ *αν γράφεται* $R = A \times B$, *όπου* $A \in \Sigma$ *και* $B \in T$. *Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται* **σ-άλγεβρα γινόμενο** *των* Σ *και* T *και συμβολίζεται με* $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. *Το μέτρο* ρ *ονομάζεται* **μέτρο γινόμενο των** P **και** Q *και συμβολίζεται με* $P \otimes Q$, *αν και μόνο αν για κάθε* $A \in \Sigma$ *και* $B \in T$ *ικανοποιεί την ιδιότητα* $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. *Η τριάδα* $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ *ονομάζεται* **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός Β΄.1.8. *Εάν* I *είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και* $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i \in I}$ *είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε* $\varnothing \neq J \subseteq I$ *συμβολίζουμε με* $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ *τον χ.π. γινόμενο* $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i \in J} \Omega_i \otimes_{i \in J} \Sigma_i \otimes_{i \in J} P_i)$. *Αν* (Ω, Σ, P) *είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με* P^I *την* **πιθανότητα γινόμενο** *στον* Ω^I *και με* Σ^I *το πεδίο ορισμού του* P^I.

Ορισμοί Β΄.1.9. *Τα ενδεχόμενα* $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ *ονομάζονται* **ανεξάρτητα** *αν και μόνο αν* $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$ *για κάθε* $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ *και για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Ομοίως, οι τ.μ.* $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ *ονομάζονται* **ανεξάρτητες** *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα* $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ.* $X_1, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *στοιχείων της* $\mathfrak{B}$ *τα ενδεχόμενα* $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[3, Παρατήρηση 3.2.5], (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται* **ανεξάρτητη** *αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.*

Οι σ*-υποάλγεβρες* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ *της* Σ *ονομάζονται* **ανεξάρτητες** *αν και μόνο αν για κάθε* $k \in \mathbb{N}_n$ *και για κάθε* $A_k \in \Sigma_k$ *τα* $A_1, \ldots, A_n$ *είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια* σ*-υποαλγεβρών της* Σ *ονομάζεται* **οικογένεια ανεξάρτητων** $\boldsymbol{\sigma}$**-υποαλγεβρών της** Σ *αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.*

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$. Για $n \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

Β΄.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0, 1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).
Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός Β′.2.1. *Αν*

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** *της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση*

$$\mathbb{E}[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|Q(dx) < \infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή**.

Ορισμός Β′.2.2. *Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** *ή έχει* **n−οστή ροπή** *που ορίζεται από την σχέση*

$$\mathbb{E}[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός Β′.2.3. *Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε* **η διακύμανση** *της Q ορίζεται να είναι*

$$Var[Q] := \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[Q])^2 Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$Var[Q] = \mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q]^2.$$

Ορισμός Β′.2.4. *Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+ = 1$ και $\mathbb{E}[Q] \in (0, \infty)$,τότε* **ο συντελεστής μεταβλητότητας** *της Q ορίζεται από την σχέση*

$$v[Q] := \frac{\sqrt{Var[Q]}}{\mathbb{E}[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Β′.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση *ή* **ο μετασχηματισμός Fourier** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την*

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β′.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την*

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{Β′.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β′.2.7. *Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε* **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την*

$$m_Q(z) \;\; := \;\; \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}].$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B΄.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση Β΄.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$\mathbb{E}[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B΄.6}$$

$$\mathbb{E}[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B΄.7}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό Β΄.2.7 ισχύει

$$m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

επομένως αν παραγωγίσουμε ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d}{dz} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x z^{x-1} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} = \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) = \mathbb{E}[Q].$$

Αν βρούμε και την δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x(x-1) z^{x-2} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} &= \int_{\mathbb{R}} x(x-1) Q(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) - \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) \\
&= \mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q]
\end{aligned}$$

επομένως για την δεύτερη ροπή θα ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q^2] &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \mathbb{E}[Q] \\
&= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1}
\end{aligned}$$

□

Συνέλιξη

Ορισμός Β′.2.9. *Αν η* $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *είναι μια απεικόνιση με* $+(x, y) := x + y$, *τότε η* $Q * R := (Q \otimes R)_+$ *είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται* **συνέλιξη** *των* Q *και* R.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού Β′.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα Α′.1.4).

Πρόταση Β′.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. *Ιδιαιτέρως ισχύει*

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B - y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ *και* $b \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\begin{aligned}
(Q * R)(B) &= (Q \otimes R)_+(B) \\
&:= (Q \otimes R)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(\{x \in \mathbb{R} : x \in B - y\})R(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α′.1.4.

Ιδιαιτέρώς για οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(Q * \delta_y)(B) &= (\delta_y * Q)(B) \\
&= (Q \otimes \delta_y)_+(B) \\
&= Q \otimes \delta_y(\{(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : x + \bar{y} \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B - \bar{y})\delta_y(d\bar{y}) \\
&= Q(B - y),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α′.1.4. □

Πρόταση Β′.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$

$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$

$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, *τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση Β΄.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$\mathbb{E}[Q*R] = \mathbb{E}[Q] + \mathbb{E}[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q*R] = Var[Q] + Var[R].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση Β΄.2.12 για την ροπογεννήτρια της $Q*R$ ισχύει $M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$. Επιπλέον από την Β΄.4 ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[Q*R] = \frac{dM_{Q*R}}{dz}(0), \quad \mathbb{E}[(Q*R)^2] = \frac{d^2M_{Q*R}}{dz^2}(0).$$

Επομένως θα ισχύει

$$\begin{aligned}
M'_{Q*R}(z) &= \Big(M_Q(z)\cdot M_R(z)\Big)' = M'_Q(z)M_R(z) + M_Q(z)M'_R(z)\\
M''_{Q*R}(z) &= \Big(M_Q(z)\cdot M_R(z)\Big)'' = M''_Q(z)M_R(z) + 2M'_Q(z)M'_R(z) + M_Q(z)M''_R(z)
\end{aligned}$$

και άρα θα ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q*R] &= M'_{Q*R}(0) \overset{(\text{Β΄.4})}{=} \mathbb{E}[Q] + \mathbb{E}[R]\\
\mathbb{E}[(Q*R)^2] &= M''_{Q*R}(0) \overset{(\text{Β΄.4})}{=} E[Q^2] + 2\mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[R] + \mathbb{E}[R^2].
\end{aligned}$$

Επομένως για την διακύμανση θα ισχύει

$$\begin{aligned}
Var[Q*R] &= \mathbb{E}[(Q*R)^2] - \mathbb{E}[Q*R]^2\\
&= \mathbb{E}[Q^2] + 2\mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[R] + \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[Q]^2 - 2\mathbb{E}[Q]\mathbb{E}[R] - \mathbb{E}[R]^2\\
&= \mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q]^2 + \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[R]^2\\
&= Var[Q] + Var[R]
\end{aligned}$$

□

Πρόταση Β΄.2.13. *Αν* $Q = \int f\, d\nu$ *και* $R = \int g\, d\nu$ *για* $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, *τότε* $Q*R = \int f*g\, d\nu$, *όπου η απεικόνιση* $f*g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ορίζεται*

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\nu(dy).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση Β′.2.10, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}[Q * R](B) &= \int_{\mathbb{R}} Q[B-y]R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} f(x)\nu(dx)\, g(y)\nu(dy)\end{aligned}$$

□

Ορισμός Β′.2.14. *Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q ορίζεται από την σχέση*

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f \, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

Β′.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός Β′.3.1. *Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται* **διακριτή**, *αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.*

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός Β′.3.2. *Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, η* **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m,\theta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0, 1, \ldots, m\}$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = m\theta$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = m\theta(1-\theta)$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta) + \theta e^{iz}\big)^m$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = ((1-\theta) + \theta e^z)^m$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = ((1-\theta) + \theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1, \theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός Β′.3.3. *Για $\alpha \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0,1)$,* **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha, \theta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha + x - 1}{x} \theta^\alpha (1-\theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$\mathbb{E}[Q] = \alpha \frac{1-\theta}{\theta}$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = \alpha \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)e^{iz}} \right)^\alpha$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)e^{z}} \right)^\alpha \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1-\theta))$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)z} \right)^\alpha$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m, \theta)$ για $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός Β′.3.4. *Για $\alpha \in (0, \infty)$,* **η κατανομή PoissonP**(α) $\mathbf{P}(\alpha)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \alpha$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^{z}-1)}$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός Β΄.3.5. *Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$,* **η κατανομή Delaporte Del**(α, β, θ) *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta, \theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός Β΄.3.6. *Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0, 1)$,* **η γεωμετρική κατανομή Geo**(m, θ) *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m, \theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1, \theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός Β΄.3.7. *Για $\theta \in (0, 1)$,* **η λογαριθμική κατανομή Log**(θ) *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση*
$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|} \frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|} \frac{\theta}{1-\theta}$$

- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{|\ln(1-\theta)| - \theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

Β′.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός Β′.4.1. *Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται* **συνεχής**, *αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue $\boldsymbol{\lambda}$.*

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός Β′.4.2. *Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$,* **η κατανομή Βήτα** $\mathbf{Be}(\alpha,\beta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός Β′.4.3. *Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$,* **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \int \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1}\chi_{(0,\infty)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$

- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^{\beta}$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^{\beta} \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang** $\mathbf{Ga}(\alpha, m)$, με $m \in \mathbb{N}_0$.
- **Η εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η** $\boldsymbol{\chi}^2$ **κατανομή**, $\boldsymbol{\chi}^2_m := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός Β′.4.4. *Για* $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ *και* $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha, \beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta) = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, 0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός Β′.4.5. *Για* $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto** $\mathbf{Par}(\alpha, \beta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x}\right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Παράρτημα Γ′

Θεωρήματα σύγκλισης

Γ′.1 Είδη συγκλίσεων

Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Σ-μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ πραγματικων τ.μ..

Ορισμός Γ′.1.1. *Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι* **συνεχής κατά πιθανότητα** *αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε ακολουθία $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = t$, ισχύει $\lim_{n\longrightarrow\infty} X_{t_n} \overset{P}{=} X_t$.*

Ορισμός Γ′.1.2. *Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και έστω X και $X_1, X_2, \ldots$ Σ-μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις στον X. Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει* **κατά πιθανότητα** *αν ισχύει*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{x \in X : |X_n(x) - X(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

για κάθε θετικό ε. Συμβολισμός $X_n \xrightarrow{P} X$ ή $\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n \overset{P}{=} X$.

Ορισμός Γ′.1.3. *Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in N}$ συγκλίνει* **σχεδόν βέβαια** *ή* **με πιθανότητα 1** *ή* **ισχυρά** *στην τ.μ. X, αν $P[\{\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = X\}] = 1$ ή ισοδύναμα $P[\{\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n \neq X\}] = 0$. Συμβολισμός: $X_n \longrightarrow X, \quad P-\sigma.\beta.$ ή $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$.*

Παρατήρηση Γ′.1.4. *Αν $A := \{\omega \in \Omega : X_n \longrightarrow X, \quad P-\sigma.\beta.\}$ τότε $A \in \Sigma$ και $X_n \longrightarrow X, \quad P-\sigma.\beta. \Longleftrightarrow P[A] = 1$. Πράγματι,*

$$A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_k - X| \leq \frac{1}{m}\} \in \Sigma, \tag{Γ′.1}$$

άρα έχει νόημα η πιθανότητα $P(A)$ και $P(A) = 1 \Longleftrightarrow X_n \longrightarrow X \quad P-\sigma.\beta.$

Λήμμα Γ′.1.5. *Ισχύει $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \quad P-\sigma.\beta.$ αν και μόνο αν*

$$\text{για κάθε} \quad \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} P[\{\sup_{k\geq n} |X_n - X| \geq \varepsilon\}] = 0, \tag{Γ′.2}$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$Y_n := \sup_{k\geq n} |X_n - X| \xrightarrow{P} 0. \tag{Γ′.3}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n^\varepsilon := \{\sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\}.$$

Τότε οι απεικονίσεις $n \longmapsto A_n^\varepsilon$ και $\varepsilon \longmapsto A_n^\varepsilon$ είναι φθίνουσες. Επομένως η απεικόνιση $k \longmapsto A_n^{\frac{1}{k}} \quad (k \in \mathbb{N})$ είναι αύξουσα. Θέτουμε επίσης

$$A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}.$$

Έτσι το σύνολο

$$A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^{\frac{1}{k}})^c = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^\varepsilon)^c \tag{Γ'.4}$$

είναι στοιχείο της Σ. Από την (Γ'.4) προκύπτει

$$A^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\frac{1}{k}} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^\varepsilon, \tag{Γ'.5}$$

επομένως $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^\varepsilon \subseteq A^c$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n^\varepsilon) = P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^\varepsilon) \leq P(A^c). \tag{Γ'.6}$$

(βλ. π.χ. ΣΣΑ) Αφού $X_n \longrightarrow X \quad P - \sigma.\beta.$, από την Παρατήρηση Γ'.1.4 έχουμε $P(A^c) = 0$, άρα ισχύει η (Γ'.2).

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η (Γ'.2). Από την (Γ'.5) και το γεγονός ότι η ακολουθία $\{A_n^\varepsilon\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει ότι

$$P(A^c) = \lim_{k \longrightarrow \infty} P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\frac{1}{k}}) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n^{\frac{1}{k}}).$$

Αφού ισχύει η (Γ'.2) για κάθε $\varepsilon > 0$, θα ισχύει για $\varepsilon := \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N})$ και έτσι προκύπτει $P(A^C) = 0$ δηλαδή $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. □

Παρατήρηση Γ'.1.6. *Από την απόδειξη του Λήμματος Γ'.1.5 προκύπτει ότι* $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$ *ακριβώς τότε όταν*

$$P[\overline{\lim}_{n \longrightarrow \infty}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}] = 0 \quad \text{για κάθε} \quad \varepsilon > 0$$

τότε και μόνο τότε

$$P[\{|X_n - X| \geq \varepsilon \quad \text{για άπειρα} \quad n\}] = 0 \quad \text{για κάθε} \quad \varepsilon > 0.$$

Ορισμός Γ'.1.7. *Έστω ότι* $X \in \mathcal{L}^p(P)$ *και* $X_n \in \mathcal{L}^p(P)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N} \quad (1 \leq p < \infty)$. *Η* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *συγκλίνει στην* X **κατά $p-$μέσο** *αν*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Συμβολισμός: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$. *Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις προκύπτουν για* $p = 1$ *και* $p = 2$. *τότε η σύκλιση* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ *ονομάζεται και* **σύγκλιση κατά μέσο** *και η* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X$ **σύγκλιση κατά μέσο τετράγωνο**.

Θεώρημα Γ′.1.8. *(της κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω η ακολουθία* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει σ.β. και* $X_n \in \mathcal{L}^p$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Έστω επίσης ότι υπάρχει μια συνάρτηση* $g : \Omega \longmapsto [0,\infty]$ *με* $\int |g|^p dP < \infty$ *και* $X_n| \leq g$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ $\quad (1 \leq p < \infty)$. *Τότε υπάρχει μια πραγματική τ.μ.* X *ώστε* $X_n \longrightarrow X \quad P-\sigma.\beta.$. *Κάθε τέτοια* X *είναι στοιχείο του* $\mathcal{L}^p(P)$ *και ισχύει* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \quad (1 \leq p < \infty)$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει ένα σύνολο $M_1 \in \Sigma$ με $P(M_1) = 0$, ώστε για κάθε $\omega \notin M_1$ να υπάρχει το $\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n(\omega)$. Αφού $\int g^p dP < \infty$ θα υπάρχει ένα σύνολο $M_2 \in \Sigma$ με $P(M_2) = 0$ ώστε για κάθε $\omega \notin M_2$ να ισχύει $g(\omega) < \infty$ (βλ. π.χ. [13, Cor. 2.3.12]. Θέτουμε

$$X(\omega) := \begin{cases} lim_{n\longrightarrow\infty} X_n(\omega), & \alpha\nu \quad \omega \notin M_1 \bigcup M_2 \\ 0, \quad \alpha\nu \quad \omega \in M_1 \bigcup M_2 \end{cases} \tag{Γ′.7}$$

Τότε η X είναι πραγματική τ.μ., ισχύει $X_n \longrightarrow X, \quad P-\sigma.\beta.$ και $|X| \leq gP-\sigma.\beta.$. Συνεπώς, αφού $\int g^p dP < \infty$, θα έχουμε $|X|^p \in \mathcal{L}^1(P)$, άρα $X \in \mathcal{L}^p(P)$. Θέτουμε $g_n := |X_n - X|^p$. Τότε

$$\int g_n dP = 0 \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\vartheta\varepsilon \quad n \in \mathbb{N}. \tag{Γ′.8}$$

Πράγματι, από τον ορισμό της g_n έχουμε $0 \leq g_n \leq (|X_n| + |X|)^p \leq (|X| + g)^p$. Θέτουμε $h := (|X| + g)^p$. Τότε $h \in \mathcal{L}^p(P)$ και $g_n \in \mathcal{L}^p(P)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την ακολουθία $\{h - g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει λόγω του Λήμματος Fatou ότι

$$\begin{aligned} \int \underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}(h-g_n)dP &\leq \underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}\int(h-g_n)dP \\ &= \int hdP - \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}\int(h-g_n)dP \end{aligned}$$

(βλ. π.χ. [13, Thm. 2.4.3]. Αφού $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, προκύπτει ότι $h - g_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} h$. Επομένως, $\underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}(h-g_n) = h$, συνεπώς $\int \underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}(h-g_n)dP = \int hdP$. Άρα $\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} g_n dP \leq 0$. Επειδή όμως $g_n \geq 0$, θα έχουμε $\int g_n dP = 0$. Από την (Γ′.8) προκύπτει ότι $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$. □

Ορισμός Γ′.1.9. *Η ακολουθία* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει* **κατά κατανομή** *ή* **ασθενώς** *στην τ.μ.* X, *αν*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P[\{X_n \leq x\}] = P[\{X \leq x\}]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *με* $P[\{X = x\}] = 0$. *Συμβολισμός:* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Παρατηρήσεις Γ′.1.10. (a) *Ισχύει ότι* $X_n \xrightarrow{d} X$. *αν και μόνο αν* $\lim_{n\longrightarrow\infty} F_n(x) = F(x)$ *για κάθε σημείο* x *συνέχειας της* F.

(b) *Η ασθενής σύγκλιση εξαρτάται αποκλειστικά από τη συμπεριφορά των επαγόμενων μέτρων πιθανότητας στην* $\mathfrak{B}$, *αφού περιγράφονται πλήρως από τις τ.μ.* X_n *και* X *σε αντίθεση με τα άλλα είδη συγκλίσεων.*

Πρόταση Γ΄.1.11. *Αν* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \quad (1 \leq p \leq \infty)$ *τότε* $X_n \xrightarrow{P} X$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Chebyshev-Markov

$$P[\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}] \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |X_n - X|^p dP,$$

αφού σύμφωνα με τον ορισμό κατά p-μέαο ισχύει $\lim_{n \longrightarrow \infty} \int |X_n - X|^p dP = 0$. □

Πρόταση Γ΄.1.12. *Έστω* (Ω, Σ, P) *χ.π. και έστω* $\{X_n\}$ *ακολουθία* Σ*-μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεεων* $X : \Omega$. *Αν η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει στην* f *σ.β. τότε η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει κατά πιθανότητα.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_n P(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

ισχύει για κάθε θετικό ε. Αν ε είναι ένας θετικός αριθμός και ορίσουμε τα σύνολα $A_1, A_2, ...$ και $B_1, B_2, ...$ με

$$A_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

και

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Η ακολουθία $\{B_n\}$ είναι φθίνουσα και η τομή της είναι

$$\{x \in X : \{f_n(x)\} \quad \text{δε συγκλίνει στο} \quad f(x)\}.$$

Άρα $P(\bigcap_n B_n) = 0$ και έτσι από [13, Proposition 1.2.5] $\lim_n P(B_n) = 0$. Αφού $A_n \subseteq B_n$ προκύπτει ότι

$$\lim_n P(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = \lim_n P(A_n) = 0.$$

Άρα η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά πιθανότητα. □

Πρόταση Γ΄.1.13. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, P)$ *χ.π. και έστω* f *και* $f_1, f_2, ...$ $\mathcal{A}$*-μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις στον* X. *Αν* $\{f_n\}$ *συγκλίνει στην* f *κατά πιθανότητα τότε υπάρχει μια υπακολουθία της* $\{f_n\}$ *συγκλίνει σ.β..*

Απόδειξη. Η υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά πιθανότητα σημαίνει ότι

$$\lim_n P(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

ισχύει για κάθε θετικό αριθμό ε. Χρησιμοποιούμε αυτή τη σχέση για να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{n_k\}$ θετικών ακεραίων, επιλέγοντας n_1 τέτοιο ώστε

$$P(\{x \in X : |f_{n_1}(x) - f(x)| > 1\}) \leq \frac{1}{2}$$

και τότε επιλέγοντας τους υπόλοιπους όρους της $\{n_k\}$ επαγωγικά έτσι ώστε οι σχέσεις

$$n_k > n_{k-1}$$

και

$$P(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}) \leq \frac{1}{2^k}$$

ισχύουν για κάθε $k = 1, 2, ...$ Ορίζουμε τα σύνολα $A_k \quad k = 1, 2, ...$ με

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}.$$

Αν $x \notin \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$ τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος j τέτοιος ώστε $x \notin \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$ και συνεπώς ότι $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ ισχύει για $k = j, j+1, ...$ Άρα $\{f_{n_k}\}$ συγκλίνει στην f για κάθε x έξω από το $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$. Αφού $P(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} P(A_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}}$ ισχύει για κάθε j προκύπτει ότι $P(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k = 0)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Θεώρημα Γ′.1.14. *Ισχύουν τα εξης:*

(i) *Αν* $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, *τότε* $X_n \xrightarrow{P} X$.

(ii) *Αν* $X_n \xrightarrow{P} X$, *τότε* $X_n \xrightarrow{d} X$

(iii) *Αν* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \quad (1 \leq p < \infty)$, *τότε* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός (i) είναι συνέπεια της Πρότασης Γ′.1.12. Μένει να αποδείξουμε τον ισχυρισμό (ii): Έστω ότι το $x \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συνέχειας της F_X. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
F_X(x - \frac{1}{k}) &= P[\{X \leq x - \frac{1}{k}\}] \\
&= P[\{X \leq x - \frac{1}{k}\} \bigcap \{X_n \leq x\}] + P[\{X \leq x - \frac{1}{k}\} \bigcap \{X_n > x\}] \\
&\leq P[\{X_n \leq x\}] + P[\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\}] \\
&= F_{X_n}(x) + P[\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\}],
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
F_{X_n} &= P[\{X_n \leq x\}] \\
&= P[\{X_n \leq x\} \bigcap \{X \leq x + \frac{1}{k}\}] + P[\{X_n \leq x\}] \bigcap \{X > x + \frac{1}{k}\}] \\
&\leq P[\{X \leq x + \frac{1}{k}\}] + P[\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\}] \\
&= F_X(x + \frac{1}{k}) + P[\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\}].
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις προκύπτει ότι

$$F_X(x - \frac{1}{k}) - P[\{|X_n - X| \leq \frac{1}{k}\}] \leq F_{X_n}(x),$$

συνεπώς
$$F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\frac{1}{k}) + P[\{|X_n - X| \leq \frac{1}{k}\}].$$
Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$ σταθερό έχουμε

$$F_X(x-\frac{1}{k}) \leq \underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} F_{X_n}(x) \leq \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\frac{1}{k})$$

και συνεπώς

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} F(x-\frac{1}{k}) = F(x) \leq \underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} F_{X_n}(x) \leq \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} F_{X_n}(x) \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} F_X(x+\frac{1}{k} = F_X(x).$$

Επομένως, $\lim_{n\longrightarrow\infty} F_{X_n}(x) = F_x(x)$, δηλαδή $X_n \xrightarrow{d} X$. (iii) Έστω ότι $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^P} X$. Τότε από την Πρόταση Γ′.1.11 έχουμε ότι $X_n \xrightarrow{P} X$. Άρα από το (ii) προκύπτει ότι $X_n \xrightarrow{d} X$. □

Παράρτημα Δ΄

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Η Θεωρία των χαρακτηριστικών συναρτήσεων θεωρείται ως ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία που παρέχει η Μαθηματική Ανάλυση στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Με τη βοήθεια της θεωρίας των χ.σ., επιλύοντας με κομψό τρόπο πολλά προβλήματα που αφορούν ιδιαιτέρως στη συνέλιξη κατανομών πιθανότητας.

Δ΄.1 Βασικά Αποτελέσματα

Ορισμός Δ΄.1.1. *Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και X τ.μ. με σ.κ. F_X. Η συνάρτηση $\varphi_x : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ ώστε*

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itx}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tx)] \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}$$

ονομάζεται η χ.σ. της X (ή της F_X).

Λήμμα Δ΄.1.2. *Για κάθε χ.σ. φ_X οποιασδήποτε τ.μ. X ισχύουν τα εξής:*

(i) $\varphi_X(0) = 1$

(ii) $|\varphi_X(t)| \leq 1$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$

(iii) $\varphi_(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, *όπου* $\overline{z} = \overline{x + iy} := x - iy$.

(iv) *η* φ_X *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(v) *Αν* $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ *για κάποιο* $n \in \mathbb{N}_0$, *τότε για κάθε* $r \leq n$ *οι παράγωγοι* $\varphi_X^{(r)}(t)$ *και ισχύει* $\varphi_X^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} dF(x)$,

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{\varphi_x^{(r)}(0)}{i^r} \quad (Sirjaev)$$

και

$$\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(it)^r}{r!} + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),$$

όπου $\lim_{t\longrightarrow 0}\varepsilon_n(t)=0$ *και* $|\varepsilon_n(t)\leq 3\mathbb{E}[|X|^n]$.

(vi) *Αν υπάρχει η* $\varphi_X^{(2n)}(0)<\infty$, *τότε* $\mathbb{E}[|X|^2n]<\infty$.

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι η χ.σ. ορίζει μονοσήμαντα την κατανομή.

Θεώρημα Δ΄.1.3. *(Sirjaev, II, par. 12, Satz 2) Αν* X *και* Y *είναι δύο τ.μ. με σ.κ.* F_X, F_Y *και χ.σ.* φ_X, φ_Y, *αντίστοιχα, τότε*

$$F_X=F_Y \Longleftrightarrow \varphi_x=\varphi_y.$$

Θεώρημα Δ΄.1.4. *(της αντιστροφής) Έστω* X *τ.μ. με σ.κ.* F_x *και χ.σ.* φ_x.

(i) *(a) Για οποιαδήποτε δύο σημεία* $a, b \quad (a<b)$, *στα οποία η* F_x *είναι συνεχής, ισχύει*

$$F_X(b)-F_X(a)=\lim_{c\longrightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{it}\varphi_x(t)dt.$$

(ii) *(b) Αν ισχύει* $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_x(t)|dt<\infty$, *τότε η* F_X *έχει μια πυκνότητα* f_X *με*

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(y)dy$$

και

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Θεώρημα Δ΄.1.5. *(της συνέχειας) Έστω* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *μια ακολουθία τ.μ.,* $\{F_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad \{\varphi_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *οι αντίστοιχες ακολουθίες σ.κ της χ.σ. και η τ.μ.* X, F_X *η σ..κ. και* φ_X *η χ.σ. της. Τότε,* $X_n \xrightarrow{d} X$ *αν και μόνο αν* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\varphi_{X_n}(t)=\varphi_X(t)$ *για κάθε* $t\in\mathbb{R}$.

Παράρτημα Ε′

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, του οποίου το όνομα οφείλεται στον G. Polya, είναι «κεντρικής» σημασίας στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Πλήθος εφαρμογών, ιδιαιτέρως επίσης στη Μαθηματική Στατιστική, υπογραμμίζουν τη σημαντικότητα του προβλήματος των οριακών κατανομών, του οποίου η λύση για μεγάλο χρονικό διάστημα μία από τις κύριες ενασχολήσεις στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ε′.1 Ένα παράδειγμα οριακού θεωρήματος

Έστω $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ακολουθία πραγματικών τ.μ. επάνω σε ένα χ.π. (Ω, Σ, P). Έστω κάθε τ.μ. S_n είναι το άθροισμα μιας ανεξάρτητης πεπερασμένης οικογένειας $\{X_{nj}\}_{j\in\{1,\ldots,k_n\}}$ πραγματικών τ.μ., δηλαδή

$$S_n := X_{n,1} + ... + X_{n,k_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, ισόνομων πραγματικών τ.μ. με διακύμανση $Var[X_n] > 0$ ανεξάρτητη του n. Έστω $k_n := n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και

$$X_{nj} := \frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sigma(X_1 + ... + X_n)} \quad \textit{για κάθε} \quad j \in \{1, ..., n\}.$$

Τότε ισχύει

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mathbb{E}(X_j)), \tag{Ε′.1}$$

όπου $\sigma := \sigma(X_n)$ είναι η ανεξάρτητη του n τυπική απόκλιση της X_n. Το ερώτημα αν η ακολουθία $\{F_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει ασθενώς οδηγεί στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα Ε′.1.1. *(των de Moivre-Laplace) Για κάθε ανεξάρτητη ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισόνομων, τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών τ.μ. με τυπική απόκλιση $\sigma > 0$, η ακολουθία $\{P_{S_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, όπου η S_n ορίζεται όπως στην (Ε′.1) συγκλίνει ασθενώς στην τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$.*

Παρατήρηση Ε'.1.2. *Η σπουδαιότητα του Θεωρήματος των de Moivre-Laplace έγκειται στην εμφάνιση της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$ ως μιας οριακής κατανομής.*

Ένας πρώτος λόγος για αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι μια από τις υποθέσεις που ικανοποιεί η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών του Kolmogorov, ότι δηλαδή η ακολουθία $\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει P σ.β. στη μέση τιμή $\eta := \mathbb{E}[X_n]$ που είναι ανεξάρτητη του n. Η ασθενής σύγκλιση της ακολουθίας $\{F_{S_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με $S_n := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ ατην κατανομή $N(0,1)$ μπορεί στη συνέχεια αν χρησιμοποιθεί για τον υπολογισμό κτά προσεέγγιση της πιθανότητας με την οποία η τ.μ. $\frac{1}{n}\sigma_{j=1}^{n}X_j$ αποκλίνει από τη μέση τιμή η με ένα συγκεκριμένο σφάλμα. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P[\{a \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\eta) < \beta\}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\beta e^{-x^2/2}dx \tag{Ε'.2}$$

ομοιόμορφα στα a και β με $-\infty \leq a < \beta \leq \infty$. Οι αριθμοί $P[\{\gamma \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \eta < \delta\}]$ και $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma_n}^{\delta_n} e^{-x^2/2}dx$ με $\gamma_n := \frac{\gamma}{\sigma}\sqrt{n}$ και $\delta_n := \frac{1}{\sigma}\sqrt{n}$ αποκλίνουν για μεγάλα n αυθαίρετα λίγο ο ένας από τον άλλον, και μάλιστα ομοιόμορφα στα γ και $\delta \in \mathbb{R}$.

Ένας δεύτερος λόγος για τη σπουδαιότητα του Θεωρήματος de Moivre-Laplace προκύπτει από τη διαπίστωση ότι σε εφαρμογές συχνά συναντώνται κανονικά κατανεμημένες τ.μ., όταν αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως ένα άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.. Μια τέτοια κατάσταση παρουσιάζεται, για παράδειγμα, σε αθροιστικά σφάλματα μαις μέτρησης.

Ε'.2 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Από την Παρατήρηση Ε'.1.2 της προηγούμενης ενότητας προκύπτει γενικά το ερώτημα, πότε για μια ανεξάρτητη ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμων, πραγματικών (όχι κατ' ανάγκη ισόνομων) τ.μ. με $Var[X_n] > 0$ η αντίστοιχη ακολουθία $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ που ορίζεται όπως στην (Ε'.1), συγκλίνει κατά κατανομή στην $N(0,1)$. Αυτό είναι το ερώτημα της ισχύος του Κεντρικού Οριακό Θεωρήματος κατά την ένοια του παρακάτω ορισμού.

Από εδώ και στο εξής θέτουμε για απλοποίηση $\sigma_n := \sigma(X_n), \quad s_n := \sigma(X_1 + ... + X_n) = (\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}$ και $\eta_n := \mathbb{E}[X_n]$.

Ορισμός Ε'.2.1. *Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια ανεξάρτητη ακολουθία τετραγωνικά ολοκληρωσιμών τ.μ. με διακύμανση $Var[X_n] > 0$. Λέμε ότι για την ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύει το* **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα** *αν η ακολουθία $\{P_{S_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει ασθενώς στην $N(0,1)$, όπου*

$$S_n := \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}[X_j])}{\sigma(X_1 + ... + X_n)} = \frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \eta_j).$$

Αρχικά, αντιμετωπίζουμε το καθήκον να καθορίσουμε πότε δεν προκύπτει μαι κυρίαρχη επιρροή των επί μέρους προσθετέων στη συμπεριφορά των αθροισμάτων S_n. Ο παρακάτω ορισμός αποδεικνύεται κατάλληλος για αυτό.

Ορισμός Ε΄.2.2. *Η οικογένεια* $\{X_{nj}\}_{(n,j)\in\mathbb{N}_0\times\{1,\ldots,k_n\}}$ *ονομάζεται* **ασυμπτωτικά αμελητέα**, *αν ισχύει*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\max_{i\leq j\leq n} P[\{|X_{nj}\leq\varepsilon\}]=0 \quad \text{για κάθε} \quad \varepsilon>0.$$

Έτσι, απαιτείται ότι $\lim_{n\longrightarrow\infty} X_{nj} \stackrel{P}{=} 0$ *ομοιόμορφα στο* j.

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος, για αν μην ασκούν μια κυρίαρχη επιρροή οι επί μέρους προσθετέοι στην κατανομή των S_n, δεν είναι αρκετό να απαιτήσουμε ότι η οικογένεια

$$X_{nj}=\frac{1}{s_n}(X_j-\eta_j) \quad (j\in\{1,...,k_n\}, n\in\mathbb{N}_0) \tag{Ε΄.3}$$

είναι ασυμπτωτικά αμελητέα. Πολύ περισσότερο η παρακάτω συνθήκη αποδείχθηκε ότι είναι αποφασιστικής σημασίας

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} L_n(\varepsilon)=0 \quad \text{για κάθε} \quad \varepsilon>0 \tag{Ε΄.4}$$

όπου

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= s_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j-\eta_j)^2 : |X_j-\eta_j|\geq\varepsilon s_n] \\ &= s_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|X-\eta_j|\geq\varepsilon s_n\}}(x-\eta_j)^2 P_{X_j}(dx). \end{aligned}$$

Ορισμός Ε΄.2.3. *Η συνθήκη (Ε΄.4) ονομάζεται* **συνθήκη Lunberg**, *αφού οφείλεται στο Φινλανδό Μαθηματικό J.W.Lunberg (1876-1932).*

Λήμμα και Ορισμός Ε΄.2.4. *Αν η ακολουθία* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ικανοποιεί τη συνθήκη Lunberg, τότε ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(\max_{i\leq j\leq n}\frac{\sigma_j}{s_n})=0, \tag{Ε΄.5}$$

η οποία ονομάζεται **συνθήκη Feller**. *Από την (Ε΄.5) προκύπτει πάλι ότι η οικογένεια* $\{X_{nj}\}_{(j\in\{1,\ldots,k_n\},n\in\mathbb{N}_0}$ *είναι ασυμπτωτικά αμελητέα.*

Θεώρημα Ε΄.2.5. *Για κάθε ανεξάρτητη ακολουθία* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τ.μ. με διακύμανση* $Var[X_n]>0$ *τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(**a**) *Ισχύει το ΚΟΘ και και η ακολουθία ικανοποιεί τη συνθήκη Feller*

(**b**) *Ισχύει το ΚΟΘ και η οικογένεια* $\{X_{nj}\}_{(j\in\{1,\ldots,k_n\},n\in\mathbb{N}_0)}$ *είναι ασυμπτωτικά αμελητέα*

(**c**) *Η ακολουθία ικανοποιεί τη συνθήκη Lundberg.*

Βιβλιογραφία

[1] Ερμίδης, (2016), *Μεικτές κατανομές Hofmann με Εφαρμογές στον Αναλογισμό*, Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006), *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς.

[4] Μπότση, Α. (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υπο σηνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς .

[5] Albert, A. (1970), *Optimally timing the sale of a stock when the tax man is breathing down your neck*, Ann. Math. Statist. 41, 626-641

[6] Bachelier, (1900), *Theorie de la speculation*(doctoral dissertation in mathematics University of Paris) *Annales de l Ecole Normale Superieure, Ser.3,17,21-86* English translation:pp15-75 of P.H.Cootner (ed.) *The Random Character of Stock Market Prices* , MIT Press, Cambridge, Mass, 1964

[7] Bartlet, M.S. (1963), *The spectral analysis of point processes*, J.R. Statist Soc. B 25, 264-296

[8] Bauer, H. (2001), *Measure and Integration Theory*, de Gruyter, Studies in Math. 26.

[9] Brada, Ernst and Van Tassel (1966), *The Distribution of Stock Price Differences:Gaussian After All*, Opns. Res. 14, 334-340

[10] Breiman, L. (1968) *Probability*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts

[11] Chung K.L. and Derman C. (1956) *Non-recurrent random walks*, Pac. Journ. of Math. 6., 441-447

[12] Chung K.L. (1968) *A course in Probability* (2nd Edition 1974). Academic Press, Orlando, Florida

[13] Cohn, D. L. (2013), *Measure Theory* Second Edition Springer

[14] Cootner, P. et al. (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, M.I.T. Press

[15] Cox, D.R. (1955) *Some statitical models connected with series of events*, J.R. Statist. Soc. B 17, 129-164

[16] Cox, D.R. and Lewis, P.A.W. (1966) *Statistical analysis of series and events*, Methuen, London

[17] Etimadi N. (1981) *An elementary proof of the strong law of large numbers*, 7, Wahrscheilrdhkertsteariee verm. Gebiete 55, 119-122

[18] Feller, W. (1966), *An introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II, John Wiley, New York

[19] Freedman, D. (1962) *Poisson processes with random arrival rate*, Ann. Math. Statist. 33,924-929

[20] Gaver, D.P. (1963) *Random hazard in reability problems*, Technometrics 5, 211-225

[21] Hewitt, E., Savage, E.J. (1955), *Symmetric Measures on Cartesian Products*, Trans. Anner. Math. Soc., 470-501

[22] Iglehart, D. L. and Kennedy, D. P. (1970), *Weak convergence of the average of flag processes*, J. Appl. Prob. 7, 747-753

[23] Kallenberg, O. (2005), *Probability Symmetries and Invariance Principles*, Springer.

[24] Kingman, J.F.C. (1964,) *On double stochastic Poisson processes*, Proc.Camb. Phil. Soc 60, 923-930

[25] Loeve M. (1960) *Probability Theory*, Sec. Ed. Van. Nostrand

[26] Mandelbrot, B. and Taylor, H. (1967), *On the distribution of stock price differences*, Operat. Res. 15, 1057-1062

[27] McFadden, J.A. (1965), *The mixed Poisson process*, Sankhya A. 27, 83-92

[28] Parzen, E. (1962), *Stochastic processes*, Hodden-Day, San Francisco

[29] Schmidt, K.D. (1996), *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[30] Schmidt, K. D. and Wünsche, A. (1998), *Chain-ladder, marginal-sum and maximum-likelihood estimation.* Blätter DGVM 23, 289-307.

[31] Serfozo, R.F. (1972) *Conditional Poisson Processes*, J. Appl. Prob. 9, 288-302

[32] Serfozo, R.F. (1972) *Processes with conditional stationary independent increments*, J. Appl. Prob. 9, 305-315

[33] Stam, A.J. (1966) *Derived stochastic processes*, Compositio Math 17, 102-140

[34] Stam, A.J. (1961) *On defining derived processes*, I, II. Reports of the Mathematical Institute Technological University Delft, Oct., Dec.

[35] Zocher, M., *Multivariate Mixed Poisson Processes*, Doctoral Thesis, Technische Universität Dresden. http://tud.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/1416/1134744627176-0957.pdf

Ευρετήριο