ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Διπλωματική εργασία

«Τεκμαρτή Αξία σε Κίνδυνο (VaR) και υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο (CVaR)»

Μαίρη Ματθαίου – Λίβα

Επιβλέπων Καθηγητής: Λέκτορας Ν. Εγγλέζος

Μέλη της επιτροπής: Καθηγητής Γ. Διακογιάννης

Καθηγητής Γ. Χαρδούβελης

Πειραιάς,

Φεβρουάριος 2017

Περίληψη

Τα δικαιώματα προαίρεσης, και τα μέτρα κινδύνου Αξία σε Κίνδυνο (VaR) και υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο (CVaR) είναι δικαίως πολύ αξιοσημείωτοι τομείς ερευνάς, εφόσον και τα τρία είναι σημαντικά για τη διαχείριση κίνδυνου αλλά και την κατανόηση του. Παρόλα αυτά, η βιβλιογραφία που τα συσχετίζει είναι περιορισμένη. Σε αυτή τη διπλωματική εξάγουμε μια ανεξάρτητη μοντέλου, απλή, κλειστού τύπου, αναλυτική εξίσωση σύμφωνα με την οποία αποφαίνεται ότι η CVaR σχετίζεται με τα δικαιώματα πώλησης. Η σχέση είναι εφαρμόσιμη σε πλήρης και μη αγορές, και δείχνει πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις επιδράσεις της τεκμαρτής μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας το CVaR κίνδυνο των δικαιωμάτων προαίρεσης. Επίσης, δείχνουμε πως η σχέση μεταξύ δικαιωμάτων και CVaR έχει σημαντικές επιπτώσεις στη διαχείριση κίνδυνου, ειδικά σε όρους ολοκληρωμένης διαχείρισης κίνδυνου, και αποτρέπει τις ευκαιρίες κερδοσκοπίας. Τέλος, διεξάγουμε αριθμητικές εφαρμογές για να αποδείξουμε την εξαγωγή CVaR από εμπειρικά δεδομένα δικαιωμάτων.

Λέξεις – Κλειδιά: δικαιώματα προαίρεσης, CVaR, VaR, διαχείριση κίνδυνου, μέτρηση κίνδυνου, τεκμαρτή μεταβλητότητα, αναλογία κινδύνου

Abstract

Options, Value at Risk (VaR) and Conditional Value at Risk (CVaR) are significant areas of research in their own right, since all three are important to risk management and understanding of risk. Despite the importance and the overlap of interests in CVaR and options, the literature relating the two is virtually non-existent. In this paper, we derive a model-free, simple and closed-form analytic equation that determines the association of CVaR with put options. This relation is applicable in complete and incomplete markets, showing that we can account for implied volatility effects using the CVaR risk of options. We show also how the relation between options and CVaR has important risk management implications, particularly in terms of integrated risk management and preventing arbitrage opportunities. We conduct numerical experiments to demonstrate obtaining CVaR from empirical options data.

Keywords: options, CVaR, VaR, risk management, risk measurement, implied volatility, risk ratio

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η μέτρηση του κίνδυνου αγοράς δεν είναι κάτι καινούργιο για το τομέα των χρηματοοικονομικών. Η όλο και αυξανομένη τάση προς την αγορά options έχει οδηγήσει στην ανάγκη για ποσοτική μέτρηση και διαχείριση του κίνδυνου των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (Dowd 2011). Τα μέτρα που θα μελετηθούν στην συγκεκριμένη διατριβή ονομάζονται Value At Risk και Conditional Value At Risk και έχουν την ικανότητα να προβλέψουν τις απώλειες της αγοράς. Η έλλειψη συνέπειας των VaR έπαιξε καταληκτικό ρολό υπέρ της CVaR. Οι λόγοι που οδήγησαν στην ανάπτυξη των μέτρων αυτών παρουσιάζονται στην ενότητα αυτή. Επιπλέον, στο τέλος της ενότητας θα εκθέσουμε το σκοπό, τις οριοθετήσεις και το περίγραμμα της διατριβής αυτής.

1.1 Λόγοι ανάπτυξης

Η όλο και αυξανομένη αβεβαιότητα στις χρηματοπιστωτικές αγορές αλλά και η αγορά των options που έχει εξελιχθεί σε μια βιομηχανία τρισεκατομμυρίων κατέστησαν ζωτικής σημασίας αποτελεσματικά μετρά του κίνδυνου αγοράς. Η ευπάθεια που προκύπτει από τις εκτεταμένες κινήσεις στην αγορά οι τιμές των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων, καθώς και η αυξημένη χρήση των παράγωγων απαιτούν την λήψη μέτρων κίνδυνου που είναι σε θέση να συλλαβή ου και να μετριάσουν περισσότερο το συνεχώς αυξανόμενο χρηματοοικονομικό κίνδυνο. Ωστόσο, η ανάγκη για την ανάπτυξη των μέτρων αυτών δεν προήρθε από τις εποπτικές αρχές, αλλά και από την πλευρά της διοίκησης προκειμένου να πάρουν επενδυτικές αποφάσεις, να κάνουν καταμερισμό των κεφαλαίων τους ή να εκπληρώσουν εξωτερικούς κανονισμούς. Όπως σε γενικές γραμμές ορίζεται από τον Jordon (2001), ο κίνδυνος αγοράς είναι μια μεταβλητή των απροσδόκητων αποτελεσμάτων. Με αλλά λογία, είναι ένας κίνδυνος, με τον οποίο η επένδυση χάνει την αξία της λόγω μεταβολής των παραγόντων κίνδυνου αγοράς, όπως των ιδίων κεφαλαίων των συναλλαγματικών ισοτιμιών, των κινδύνων επιτοκίου και βασικού εμπορεύματος. Ο σκοπός των διπλωματικής εργασίας είναι περιορισμένος στην περιοχή των διαχειρίσεως του κινδύνου της αγοράς με τα προεξέχοντα εργαλεία VaR και CVaR.

1.2 Ορισμός της VaR

Ο ελληνικός ορισμός του VaR είναι η “αξία σε κίνδυνο”. Πρόκειται για ένα μέτρο αξιολόγησης κινδύνου που τα τελευταία χρόνια έχει μελετηθεί πολύ από πανεπιστημιακούς και επιστήμονες (Danielsson, 1997).

Ορίζεται ως η μέγιστη απώλεια που υπέστη ένα δεδομένο χαρτοφυλάκιο μέσα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα από μία δεδομένη πιθανότητα. Η VaR είναι ένα από τα πιο διαδεδομένα μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται τόσο εσωτερικά όσο και εξωτερικά για την υποβολή εκθέσεων για τις ρυθμιστικές αρχές.

Με ένα στατιστικό τρόπο, η VaR(a) μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$P / L_t = P_t - P_{t-1} \Rightarrow P_r [\, P/L < -VaR \,] = 1 - a \Rightarrow P_r [\, P/L > -VaR \,] = a$$

Όπου

- P_t : Αξία χαρτοφυλακίου τη στιγμή t
- P/L_t : Κέρδος / ζημία τη στιγμή t
- a : επίπεδο εμπιστοσύνης

Επομένως, η VaR είναι το (1-a) ποσοστημόριο από την κατανομή αποδόσεων, η οποία τις περισσότερες φορές πρέπει να διευκρινίζεται.

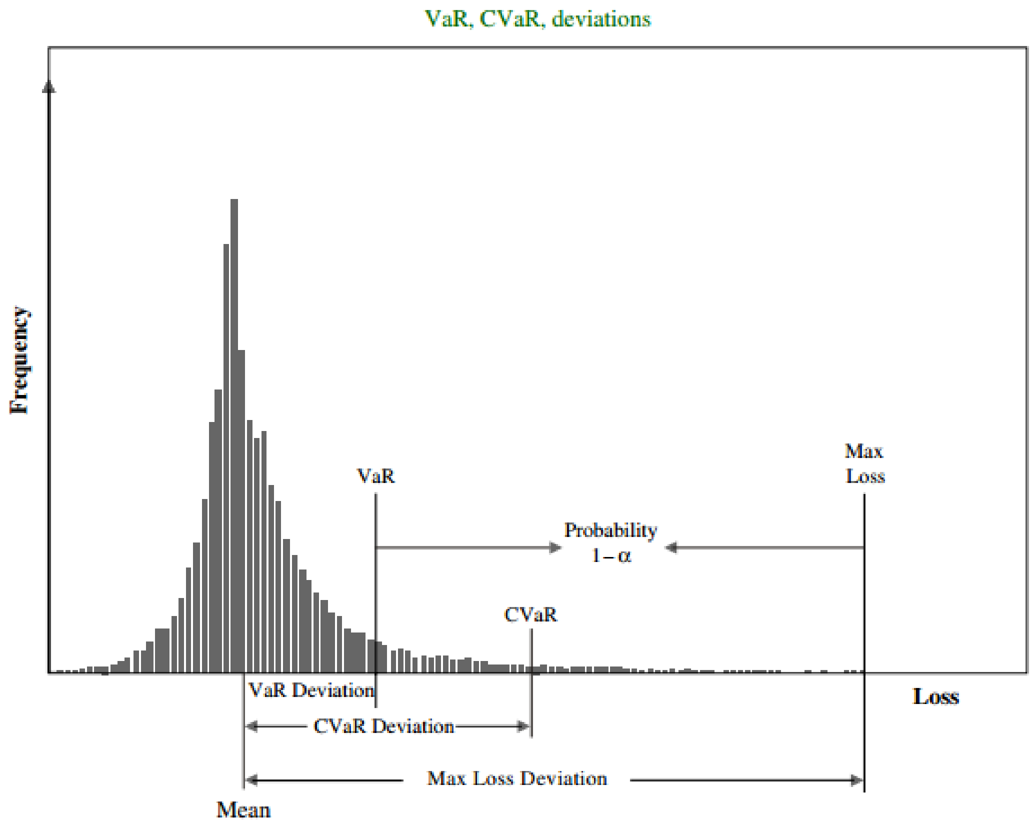
Η εμφάνιση της VaR φτάνει ως το 1952, δεδομένου ότι είναι μία φυσική εξέλιξη της θεωρίας χαρτοφυλακίου (Θ.Χ.) του Markowitz. Ωστόσο, υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ της θεωρίας χαρτοφυλακίων και της VaR του Dowd (2005, p. 11) όπως αναφέρονται παρακάτω:

1. Η Θ.Χ. ερμηνεύει το κίνδυνο όσον αφορά την τυπική απόκλιση, ενώ η VaR ερμηνεύει σε όρους μέγιστης πιθανής ζημιάς.

2. Η Θ.Χ. περιλαμβάνει κατανομές κοντά στο φυσιολογικό, ενώ η VaR φιλοξενεί ευρύ φάσμα των πιθανών κατανομών.
3. Η Θ.Χ. περιορίζεται στο κίνδυνο της αγοράς, ενώ η VaR μπορεί να εφαρμοστεί σε άλλους τύπους κινδύνου.
4. Ορισμένες προσεγγίζεις VaR δεν μοιράζονται το ίδιο variance – covariance υπόβαθρου όπως η Θ.Χ.

Όσον αφορά την ανάπτυξη των VaR, μπορεί να χρονολογηθεί πίσω στη δεκαετία του ’80 στην J. P. Morgan. Μέσα στα επόμενα 2 χρόνια, λόγω των πολλών πλεονεκτημάτων της, η VaR εδραιώθηκε ως ένα επικρατών μέτρο κινδύνου, η οποία ενδιαφέρει τους ακαδημαϊκούς από τότε.

Ακολουθεί κι ένας άλλος ορισμός της VaR (μη στατιστικός), όπως επίσης η χρήση της και κάποιες βασικές της ιδιότητες. Για την γραφική αναπαράσταση χρησιμοποιούμε το Σχήμα 1 που παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 1

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με σωρευμένη συνάρτηση κατανομής $F_X(z) = P\{X \leq z\}$. X μπορεί να έχει το νόημα της απώλειας ή του κέρδους ανάλογα. Συγκεκριμένα, εδώ θεωρείται πως το X έχει την έννοια της απώλειας και αυτό επιδρά στο πρόσημο των συναρτήσεων των ορισμών της VaR και της CVaR.

Το VaR του X με επίπεδο εμπιστοσύνης a E [0,1] είναι VaR(x) = min { z / Fx(z) ≥ a } (1)

Εξ ’ορισμού, VaR(X) είναι ένα κατώτερο α-ποσοστημόριο της τυχαίας μεταβλητής X. H VaR χρησιμοποιείται συνήθως σε πολλούς τομείς της μηχανικής που περιλαμβάνουν ασάφειες, όπως ο στρατιωτικός, των πυρηνικών, του εναέριου χώρου των υλικών, της χρηματοδότησης κ.α. Για παράδειγμα, χρηματοοικονομικούς κανονισμούς όπως η Βασιλεία I και II χρησιμοποιούν τη VaR για να ποσοτικοποιήσουν το εύρος της κατανομής της απώλειας ενός χαρτοφυλακίου σε ημερήσια βάση. Για τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή, η VaR είναι ανάλογη με την τυπική απόκλιση. Αν X ~ N (μ, σ^2) και Fx(z) είναι η σωρευμένη κατανομή του X, τότε $VaR_a(X)$ = F_X^{-1} = $F_X^{-1}(a)$ = μ+ k(a)σ. (2) όπου k(a) = √2erf^{-1}(2a-1) και erf(z)=(2/√π)$\int_0^z e^{-t^2}\,dt$.

Η ευκολία και η διαισθητικότητα της VaR αντισταθμίζονται από τις μαθηματικές της ιδιότητες. Σαν συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης, για διακριτές κατανομές, η $VaR_a(X)$ είναι μια μη κυρτή, ασυνεχής συνάρτηση αναφερόμενοι στις αριθμητικές δυσκολίες της βελτιστοποίησης των VaR.

1.3 Ορισμός της CVaR

Ένα εναλλακτικό μέτρο για τον κίνδυνο είναι η CVaR. Για τυχαίες μεταβλητές με συνεχείς συναρτήσεις κατανομής, η $CVaR_a(X)$ ισούται με την υπό όρους προσδοκία ότι για το X ισχύει X≥$VaR_a(X)$. Αυτός ο ορισμός είναι η βάση για αυτό που ονομάζουμε CVaR. Ο όρος CVaR εισήχθη από τον Rockefeller και τον Uryasev [19]. Ο γενικός ορισμός της CVaR για τυχαίες μεταβλητές με πιθανώς ασυνεχή κατανομή έχει ως εξής (Βλ. Rockefeller & Uryasev [20]). H CVaR του X με διάστημα εμπιστοσύνης $a \in [0,1]$ είναι ο μέσος όρος της γενικευμένης α-ουράς κατανομής.

$$CVaR_a(X) = \int_{-\infty}^{\infty} z dF_X{}^a(z) \quad , \quad z<VaR_a(X) \qquad (3)$$

Όπου $F_X{}^a(z) = \{^{0}_{\frac{F_X(z)-a}{1-a}}$, όταν z$\geq$ VaR$_a$(X)

Σε αντίθεση με ότι πιστεύεται συνήθως στη γενική περίπτωση, η CVaR$_a$(X) δεν ισούται με έναν μέσο όρο των αποτελεσμάτων μεγαλύτερων από τη VaR$_a$(X). Για γενικές κατανομές, μπορεί κανείς να χρειαστεί να χωρίσει μια πιθανότητα στο ελάχιστο μόριο. Για παράδειγμα, όταν η διανομή διαμορφώθηκε από τις περιπτώσεις, η CVaR μπορεί να λαμβάνεται από το μέσο όρο ενός κλασματικού αριθμού περιπτώσεων. Για να εξηγήσουμε αυτή την ιδέα με περισσότερες λεπτομέρειες, έχουμε εισάγει περαιτέρω εναλλακτικούς ορισμούς των CVaR. Θεωρώ τη CVaR$_a^+$(X), η οποία καλείται ¨ανώτερη CVaR¨, και είναι η υπό όρους προσδοκία του X για το οποίο ισχύει X > VaR$_a$(X) :

$$\mathrm{CVaR}_a^+(X) = E[X/X>\mathrm{VaR}_a(X)]$$

CVaRa(X) μπορεί να οριστεί εναλλακτικά ως σταθμισμένος μέσος όρος των VaR(X) και CVaRa+(X), όπως ακολουθεί. Αν Fx(VaRa(X))<1, τότε υπάρχει μια πιθανότητα απώλειας μεγαλύτερης από τη VaRa(X), οπότε

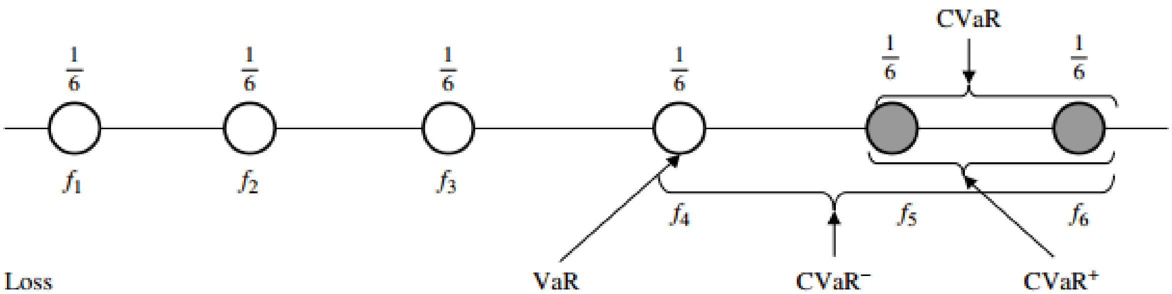
$$CVaR_a(X) = \lambda_\alpha(\mathrm{X})VaR_a(X) + (1-\lambda_\alpha(X))CVaR_a{}^+(X)$$

όπου $\lambda_\alpha(X) = \dfrac{F_X(VaR_a(X)-a}{1-a}$

Ενώ αν F$_x$(VaR$_\alpha$(X))=1, έτσι ώστε VaR$_\alpha$(X) είναι η μέγιστη απώλεια που μπορεί να συμβεί, τότε CVaR$_\alpha$(X) = VaR$_\alpha$(X).

Ο ορισμός της CVaR όπως στην εξίσωση (4) καταδεικνύει ότι η CVaR δεν ορίζεται ως μια προσδοκία υπό όρους. Η συνάρτηση CVaR$_\alpha^-$(X) = E[X/X≥VaR$_\alpha$(X)], ονομάζεται ¨κατώτερη CVaR¨, συμπίπτει με τη CVaR$_\alpha$(X) για συνεχείς κατανομές. Ωστόσο, για γενικές κατανομές, η CVaR$_\alpha$(X) είναι ασυνεχής σχετικά με το α και δεν είναι κυρτή. Η σύσταση του CVaRa ως ένας σταθμισμένος όρος των VaRa και CVaR$_\alpha^+$(X) είναι μια σημαντική καινοτομία. Ούτε η VaR, ούτε η CVaR$_\alpha$(X) συμπεριφέρεται καλά ως μέτρο κινδύνου για τις γενικές απώλειες των κατανομών (και οι δύο είναι ασυνεχής συναρτήσεις), αλλά η CVaR είναι μια πολύ ελκυστική συνάρτηση. Είναι συνεχής σε σχέση με την α και από κοινού κυρτή στο (X,α). Το ασυνήθιστο χαρακτηριστικό στον ορισμό της CVaR είναι η VaR-atom μπορεί να διασπαστεί. Εάν η $F_x(X)$ έχει ένα κατακόρυφο διάκενο ασυνέχειας, τότε υπάρχει το διάστημα όπου το επίπεδο εμπιστοσύνης α είχε την ίδια VaR. Τα κατώτερα και τα ανώτερα άκρα του εν λόγω διαστήματος, είναι: $α^- = F_x\ (VaR_a^-(x))$ και $a^+ = F_x(VaR_a(x))$, όπου $F_x(VaR_a^-(x)) = P\{X<VaR_a(X)\}$. Όταν $F_x(VaR_a(X)) < α < Fx(VaR_a(X)) < 1$ το άτομο VaR(X) που έχει ολική πιθανότητα $α^+ - α^-$ διασπάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης α σε δύο μέρη με πιθανότητες $α^+ - α$ και $α – α^-$. Η εξίσωση (4) τονίζει αυτό το διαχωρισμό.

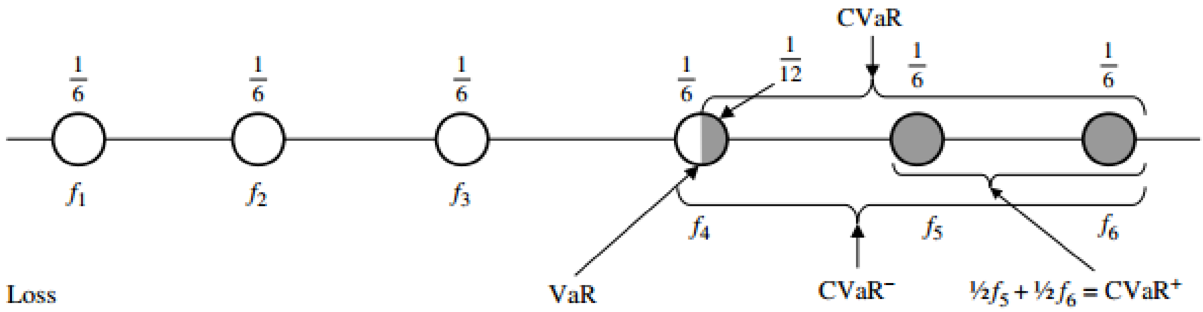
Ο ορισμός της CVaR απεικονίζεται περαιτέρω με τα ακόλουθα παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έξι εξίσου πιθανά σενάρια με απώλειες $P_1…P_6$. Έστω $α=\frac{2}{3}$ (βλέπε Σχήμα 2).



Σχημα 2. Παράδειγμα 1 CVaR: υπολογισμός CVaR όταν το α δεν διασπά το atom

Σε αυτή τη περίπτωση, το α δεν διασπά κανένα άτομο πιθανότητας. Επομένως, $VaR_a(X) < CVaR_a^-(X) < CVaR_a(X) = CVaR_a^+(X)$, $λ_α(X)=(F_x(VaR_a(X))-α)/(1-α)=0$ και $CVaR_a(X)=CVaR_a^+(X)=\frac{1}{2}f_5 + \frac{1}{2}f_6$, όπου f_5 και f_6 είναι οι απώλειες 5 και 6, αντίστοιχα. Εν συνέχεια, έστω $α=\frac{7}{12}$ (βλέπε Σχήμα 3). Σε αυτή τη περίπτωση το α διασπά το άτομο $VaR_a(X)$, $λ_α(X)=(F_x(VaR_a(X))-α)/(1-α) > 0$, και $CVaR_a(X)$

δίνεται από CVaR$_a$(X) = $\frac{1}{5}$VaR$_a$(X) + $\frac{4}{5}$CVaR$_a^+$ (X)= $\frac{1}{5}$f$_4$+$\frac{2}{5}$f$_5$+$\frac{2}{5}$f$_6$. Στη προηγούμενη περίπτωση, θεωρήσαμε τέσσερα ισοπίθανα σενάρια και το α=$\frac{7}{8}$ διέσπασε το τελευταίο άτομο (βλέπε σχήμα 4).



Σχήμα 3. Παράδειγμα 2 CVaR: Υπολογισμός CVaR όταν το α διασπά το άτομο

Επιπλέον, όπου VaR$_a$(X) = CVaR$_{a}$-(X) = CVaR$_a$(X), είναι το ανώτατο και CVaR$_a^+$(X) δεν έχει οριστεί, λ$_α$(X) = (F$_X$ (VaR$_a$(X))-a)/(1-α) > 0, και CVaR$_a$(X) = VaR = f$_4$. Το PSG πακέτο καθορίζει τη συνάρτηση CVaR για διακριτές κατανομές ισοδύναμα, με την εξίσωση (4) μέσω του κατώτερου CVaR και του ανώτερου CVaR. Υποθέτουμε ότι το VaR$_a$(X) άτομο το οποίο έχει ολική πιθανότητα α$^+$ - α$^-$ διασπάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης σε δύο μέρη με πιθανότητες α$^+$ - α και α – α$^-$. Τότε,

$$CVaR_a(X) = \frac{a^+ - a}{a^+ - a^-}\frac{1-a^-}{1-a}CVaR^-{}_a(X) + \frac{a-a^-}{a^+ - a^-}\frac{1-a^+}{1-a}CVaR^+{}_a(X) \quad ,$$

(7)

Όπου $CVaR_a^-(X) = E[X \,/\, X \geq VaR_a(X)]$

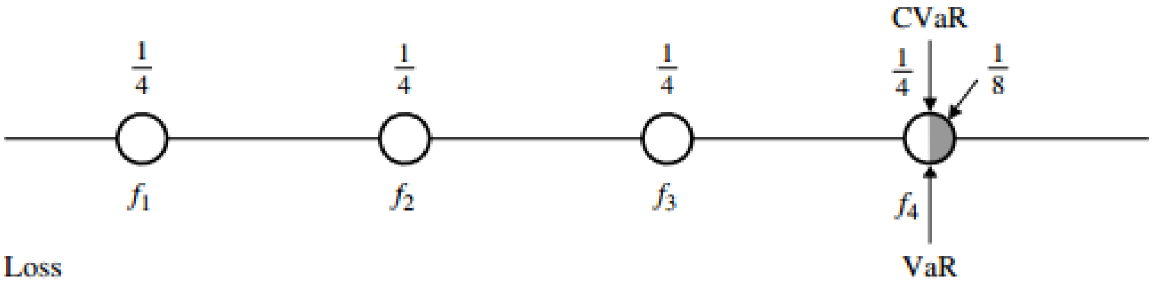
και $CVaR_a^+(X) = E[X \,/\, X < VaR_a(X)]$. (8)

Ο Pflug [15] ακολούθησε μια διαφορετική προσέγγιση και προτείνει να ορίσουμε τη CVaR μέσω ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, το οποίο δανείστηκε από τον Rockefeller και Uryasev [19]:

$$CVaR_a(X) = \min_C \left\{ C + \frac{1}{1-a} E[X-C]^+ \right\} \text{ όπου } [t]^+ = \max\{0,t\} \quad (9)$$

Μια ισοδύναμη αναπαράσταση της CVaR δόθηκε από τον Acerbi [1], ο οποίος έδειξε ότι το CVaR είναι ίσο με την «αναμενόμενη πτώση» ορισμένη ως:

$$CVaR_a(X) = \frac{1}{a}\int_0^a VaR_\beta(X)\,d\beta$$



Σχήμα 4. Παράδειγμα 2 CVaR: Υπολογισμός CVaR όταν το α διασπά το τελευταίο άτομο.

Για τυχαίες μεταβλητές με κανονική κατανομή, μια CVaR απόκλιση είναι ανάλογη με την τυπική απόκλιση. Αν X~N(μ,σ²), τότε

$$CVaR_a(X) = E[X / X \geq VaR_a(X)] = \mu + k_1(a)\sigma, \quad (10)$$

όπου $k_1(a) = (\sqrt{2\pi}\exp(erf^{-1}(2a-1))^2(1-a))^{-1}$

και $erf(z) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^z e^{-t^2}dt$.

1.4 Συγκριτική ανάλυση των VaR και CVaR

1.4.1 Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της VaR

Πλεονεκτήματα

Η VaR είναι μια σχετικά απλή έννοια στο τομέα της διαχείρισης κινδύνου. Η διαίσθηση πίσω από το α-ποσοστημόριο των α-κατανομών είναι εύκολα κατανοητή και η VaR έχει μια σαφή ερμηνεία: πόσα πολλά μπορείς να χάσεις με ορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Η VaR είναι ένας αριθμός μετρήσεις κινδύνου, ορισμένος από κάποιο καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, π.χ. α=0,95. Δύο κατανομές μπορούν να καταταχθούν συγκρίνοντας τις VaR τους για το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης. Καθορίζοντας πλήρως τη VaR για όλα τα επίπεδα εμπιστοσύνης προσδιορίζει τη κατανομή. Με αυτή την έννοια, η VaR είναι ανώτερη από τη τυπική απόκλιση. Σε αντίθεση με τη τυπική απόκλιση, η VaR εστιάζει σε ένα συγκεκριμένο κομμάτι της κατανομής καθορισμένο από το επίπεδο εμπιστοσύνης. Αυτό είναι συχνά απαραίτητο γι' αυτό η VaR είναι δημοφιλής στο τομέα της διαχείρισης κινδύνου, συμπεριλαμβανομένου του χρηματοοικονομικού τομέα, των πυρηνικών, του εναέριου χώρου καθώς και διαφόρων στρατηγικών εφαρμογών.

Μια απ' τις πιο σημαντικές ιδιότητες της VaR είναι η σταθερότητα των διαδικασιών εκτίμησης. Επειδή η VaR αγνοεί την ουρά, δεν επηρεάζεται από πολύ υψηλές απώλειες ουράς, οι οποίες είναι συνήθως δύσκολο να μετρηθούν. Η VaR υπολογίζεται με παραμετρικά μοντέλα, για παράδειγμα, η συνδιακύμανση VaR, η οποία βασίζεται στην υπόθεση της κανονικής κατανομής, είναι ευρέως γνωστή στα χρηματοοικονομικά, με μοντέλα προσομοίωσης όπως ιστορικά ή Monte Carlo ή με τη χρήση προσεγγίσεων με βάση το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης.

Μειονεκτήματα

Η VaR δεν υπολογίζεται για ιδιότητες της κατανομής πέρα από το επίπεδο εμπιστοσύνης. Αυτό σημαίνει ότι η $VaR_a(X)$ μπορεί να αυξάνεται δραματικά με μια μικρή αύξηση του α. Για να εκτιμηθεί σωστά ο κίνδυνος στην ουρά, μπορεί να χρειαστεί να υπολογίσει μερικά VaR με διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης. Είναι γεγονός πως η VaR αγνοεί την ουρά της κατανομής και αυτό μπορεί να οδηγήσει σε ακούσια ανοχής υψηλών κινδύνων. Σε χρηματοοικονομικό πλαίσιο, για παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη στρατηγική της ¨γυμνής¨ πώλησης deep out-of-the-money δικαιωμάτων προαίρεσης. Τις περισσότερες φορές, αυτό οδηγεί σε λήψη ενός premium του δικαιώματος προαίρεσης χωρίς καμία απώλεια στη λήξη. Ωστόσο, υπάρχει μια ευκαιρία για μια μεγάλη αρνητική μεταβολή της αγοράς που θα οδηγούσε σε μια εξαιρετικά μεγάλη απώλεια. Η VaR δεν μπορεί να συλλάβει αυτό το κίνδυνο.

Ο έλεγχος κινδύνου με χρήση της VaR μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητα αποτελέσματα για ασύμμετρες κατανομές. Συγκρίνοντας διάφορα προφίλ κινδύνου βελτιστοποίησης των VaR και CVaR βλέπουμε ότι το VaR βέλτιστο χαρτοφυλάκιο έχει περίπου 20% μεγαλύτερη ουρά από το CVaR βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, όπως μετράτε από τη μέγιστη απώλεια σε αυτά τα χαρτοφυλάκια.

Η VaR είναι μια μη κυρτή και ασυνεχής συνάρτηση για διακριτές κατανομές. Για παράδειγμα, σε χρηματοοικονομικό πλαίσιο, η VaR είναι μια κυρτή και ασυνεχής συνάρτηση, δηλαδή θέσεις στο χαρτοφυλάκιο όταν οι αποδόσεις έχουν διακριτές κατανομές. Αυτό κάνει την βελτιστοποίηση της VaR ένα απαιτητικό υπολογιστικό πρόβλημα (ή μια πρόκληση). Σήμερα υπάρχουν κώδικες όπως η PSG, που μπορεί να λειτουργήσει με VaR πολύ αποτελεσματικά. Η PSG μπορεί να βελτιστοποιήσει τα χαρτοφυλάκια με μια συνάρτηση απόδοσης της VaR και, επίσης, να δημιουργήσει κατανομές στο χαρτοφυλάκιο με πολλαπλούς περιορισμούς VaR. Για παράδειγμα, σε μια βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων είναι πιθανό να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση με αρκετούς περιορισμούς στη VaR σε διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης.

1.4.2 Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της CVaR

Πλεονεκτήματα

Η CVaR έχει μια σαφή ερμηνεία από μηχανική σκοπιά. Μετρά τα αποτελέσματα που βλάπτουν περισσότερο. Για παράδειγμα, αν L είναι η ζημία τότε ο περιορισμός $CVaR_a(L) \leq L^-$ εξασφαλίζει ότι ο μέσος (1-α)% της μέγιστης ζημίας δεν ξεπερνά το L^-. Προσδιορίζοντας το $CVaR_a(X)$ για όλα τα επίπεδα εμπιστοσύνης α στο (0,1) καθορίζει πλήρως την κατανομή του X. Με αυτή την έννοια, είναι ανώτερη από τη τυπική απόκλιση.

Η CVaR έχει αρκετές ελκυστικές μαθηματικές ιδιότητες. Η CVaR είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου. Η $CVaR_a(X)$ είναι συνεχώς σε σχέση με το α. Η CVaR ενός κυρτού συνδυασμού τυχαίων μεταβλητών $CVaR_a(w_1x_1 + \ldots + w_nx_n)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση σχετικά με τα $(w_1, \ldots, w_n)$. Σε χρηματοοικονομικό πλαίσιο η CVaR ενός χαρτοφυλάκιο είναι μια κυρτή συνάρτηση των θέσεων στο χαρτοφυλάκιο. Η βελτιστοποίηση της CVaR μπορεί να μειωθεί με κυρτό προγραμματισμό, σε ορισμένες περιπτώσεις με γραμμικό προγραμματισμό (για διακριτές κατανομές).

Μειονεκτήματα

Η CVaR είναι πιο ευαίσθητη από τη VaR για τον υπολογισμό των σφαλμάτων. Αν δεν υπάρχει καλό μοντέλο για την ουρά της κατανομής, η αξία της CVaR μπορεί να είναι αρκετά παραπλανητική. Η ακρίβεια της CVaR επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την ακρίβεια της μοντελοποίησης της ουράς. Για παράδειγμα, ιστορικά σενάρια συχνά δεν παρέχουν αρκετές πληροφορίες για τις ουρές. Επομένως, θα πρέπει να υποθέσουμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο για την ουρά ώστε να βαθμονομηθεί σε ιστορικά δεδομένα. Εν απουσία ενός καλού μοντέλου για την ουρά, δεν πρέπει να βασίζετε στη CVaR. Σε χρηματοοικονομικό πλαίσιο, χαρτοφυλάκια με ίδιο βάρος μπορεί να έχουν υψηλές αποδόσεις σχετικά με βέλτιστα CVaR χαρτοφυλάκια εκτός δείγματος όταν τα ιστορικά δεδομένα έχουν μέση επαναφορά χαρακτηριστικά.

1.4.3 Ποιά να χρησιμοποιήσω, VaR ή CVaR;

Οι VaR και CVaR μετρούν διαφορετικά σημεία μιας κατανομής. Ανάλογα με το τι απαιτείται, κάποιο μπορεί να προτιμάται έναντι του άλλου.

Ας δούμε αυτό το θέμα με χρηματοοικονομικές εφαρμογές των VaR και CVaR και να εξετάσουμε το θέμα ποιο απ' τα δύο μέτρα είναι καλύτερο για την βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου. Ένας trader-έμπορος μπορεί να προτιμά το VaR έναντι του CVaR, επειδή μπορεί να του αρέσουν τα υψηλό ανεξέλεγκτο ρίσκο. Η VaR δεν είναι τόσο περιοριστική όσο η CVaR με το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης. Τίποτα το δραματικό δεν συμβαίνει σε έναν έμπορο σε περίπτωση υψηλών απωλειών. Δεν θα πληρώσει τις ζημιές από την τσέπη του. Αν απολυθεί, μπορεί απλά να μετακινηθεί σε άλλη εταιρία. Ένας ιδιοκτήτης εταιρίας θα προτιμήσει κατά πάσα πιθανότητα τη CVaR, έχει να καλύψει μεγάλες απώλειες, εφόσον συμβούν. Ως εκ τούτου, ο ίδιος πρέπει πραγματικά να ελέγχει αυτά που συμβαίνουν στις ουρές. Ένα διοικητικό συμβούλιο μιας εταιρίας μπορεί να προτιμήσει να παρέχει αναφορές που βασίζονται στη VaR στους μετόχους και στις ρυθμιστικές αρχές, επειδή είναι λιγότερη (μικρότερη) από τη CVaR με το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ωστόσο η CVaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί εσωτερικά, δημιουργώντας ασσυμετρία πληροφοριών μεταξύ των δύο μεριών. Η VaR μπορεί να είναι καλύτερη για τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμα καλά μοντέλα για τις ουρές. Η VaR παραβλέπει το πιο δύσκολο που είναι να μετρήσει τα γεγονότα. Η CVaR δεν μπορεί να εφαρμοστεί καλά εκτός δείγματος όταν η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου εκτελείται με πλημμελούς κατασκευής σετ σεναρίων. Ιστορικά δεδομένα δεν μπορούν να δώσουν σωστές προβλέψεις των μελλοντικών γεγονότων ουρών εξ' αιτίας mean-reverting χαρακτηριστικών των στοιχείων του ενεργητικού. Οι υψηλές αποδόσεις συχνά ακολουθούνται από χαμηλές αποδόσεις. Επομένως, η CVaR η οποία βασίζεται σε ιστορικά δεδομένα μπορεί να είναι αρκετά παραπλανητική όσον αφορά την εκτίμηση του κινδύνου.

Αν ένα καλό μοντέλο για την ουρά είναι διαθέσιμο, τότε η CVaR μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια και η CVaR είναι αυτή που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Η

CVaR έχει ανώτερες μαθηματικές ιδιότητες και μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί στην βελτιστοποίηση και στη στατιστική.

Κατά τη σύγκριση της σταθερότητας της εκτίμησης της VaR και της CVaR πρέπει να επιλεχθούν κατάλληλα επίπεδα εμπιστοσύνης για τη VaR και τη CVaR, ώστε να αποφευχθεί η σύγκριση της VaR και της CVaR για το ίδιο επίπεδο του α επειδή αναφέρονται σε διαφορετικά μέρη της κατανομής.

1.5 Ιστορική Αναδρομή

Οι **Rockefeller** και **Uryasev** το 2000 εισήγαγαν μία νέα προσέγγιση για τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου έτσι ώστε να μειώσουν το κίνδυνο των υψηλών απωλειών. Η VaR έπαιξε μεγάλο ρόλο σε αυτή τη προσέγγιση, αλλά το κυρίαρχο ρόλο τον είχε η CVaR. Εξ' ορισμού, με σεβασμό σε μία ορισμένη πιθανότητα β, η β-VaR ενός χαρτοφυλακίου είναι η μικρότερη ποσότητα του α, με πιθανότητα β, η απώλεια να μην υπερβεί το α, ενώ η β-CVaR είναι η υπό όρους προσδοκία για τις απώλειες πάνω από το α. Στο β δίδονται συνήθως 3 τιμές: 0,90 , 0,95 και 0,99. Οι ορισμοί εξασφαλίζουν ότι η β-VaR δεν είναι ποτέ μεγαλύτερη απ' τη β-CVaR, έτσι τα χαρτοφυλάκια με χαμηλή CVaR έχουν και χαμηλή VaR.

Οι **Basak - Shapiro** αναλύουν στο βέλτιστο, δυναμικό χαρτοφυλάκιο και πολιτικές πλούτου/κατανάλωσης της μεγιστοποίησης της ωφέλειες που πρέπει επίσης να διαχειρίζονται την έκθεση της αγοράς σε κίνδυνο χρησιμοποιώντας την VaR. Αποκάλυψαν ότι οι διαχειριστές κινδύνου οι οποίοι λαμβάνουν υπόψη τη VaR συχνά (σωστά) επιλέγουν μία μεγαλύτερη έκθεση σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο από τους διαχειριστές κινδύνου που δεν λαμβάνουν υπ' όψη τη VaR. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να συμβούν μεγαλύτερες απώλειες, όταν συμβούν απώλειες. Επομένως, προτείνουν ένα εναλλακτικό μοντέλο διαχείρισης κινδύνου, βαλλόμενο στην προσδοκία της απώλειας, έτσι ώστε να διορθώνει τις αδυναμίες της VaR. Μία γενικής ισορροπίας ανάλυσης αποκαλύπτει ότι η παρουσία των διαχειριστών κινδύνου VaR ενισχύει τη μεταβλητότητα της χρηματιστηριακής αγοράς σε περιόδους ύφεσης των αγορών και των εξασθενεί σε περιόδους ανάπτυξης τη μεταβλητότητα. Σκοπός του είναι να κάνουν μια εκτενή ανάλυση της διαχείρισης των VaR ενώ διατηρούν τα πρότυπα χρηματοοικονομικά-οικονομικά παραδείγματα ορθολογικών προσδοκιών, μεγιστοποίησης της αφέλειας και εκκαθάρισης της αγοράς.

Τα κύρια συμπεράσματα του είναι τέσσερα:

1ο Ότι υπό τη γενική αβεβαιότητα της ασφάλειας των τιμών και τη γενική ανεξάρτητης-κατάστασης προτιμήσεις δείχνουν ότι ένας αντιπρόσωπος με τη VaR που στο ανώτατο όριο βέλτιστα διαλέγει να εξασφαλίσει έναντι καταστάσεων ενδιαμέσως απώλειας ενώ προκύπτουν απώλειες στη χειριστές καταστάσεις του κόσμου.

2ο Υπό προτιμήσεις σταθερής σχετικής αποστροφής κινδύνου και υπό καταστάσεις λογαριθμικών τιμών, δείχνουν ότι οι VaR διαχειριστές κανονική κινδύνου παρεκκλίνουν συνειδητά από αυτό το ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο και ένα παράγοντα αναφοράς.

3ο Αναγνωρίζοντας τις ελλείψεις της διαχείρισης κινδύνου της VaR να προέρχεται από την εστίαση της στη πιθανότητα της απώλειας, ανεξάρτητα από το μέγεθος της, προτείνουν και αξιολογούν με εναλλακτική φόρμουλα διαχείρισης κινδύνου, η οποία διατηρεί περιορισμένες τις αναμενόμενες απώλειες όταν αυτές συμβούν.

4ο Τέλος, για να ερευνήσουν τον αντίκτυπο της εκτενής χρήσης της διαχείρισης κινδύνου με VaR, μετακινούνται από τη μερική ισορροπίας ανάλυση στη γενική.

Οι **Pochart – Bouchaud** (2004) παρουσιάζουν μια ευέλικτη μέθοδο Monte – Carlo για την τιμολόγηση και την αντιστάθμιση του κινδύνου στα δικαιώματα προαίρεσης όταν η αγορά δεν είναι τέλεια, για ένα αυθαίρετο κριτήριο κινδύνου (συγκεκριμένα αυτοί διάλεξαν το αναμενόμενο έλλειμα), για μια μεγάλη τάξη στοχαστικών διαδικασιών, και με την παρουσία των εξόδων συναλλαγών. Παρουσίασαν την μέθοδό τους με απλά-βασικά δικαιώματα προαίρεσης όπου η τιμή της απόδοσης ακολουθεί μια Student-t κατανομή. Δείχνουν ότι παρουσία των far-tails (μεγάλων ουρών), η στρατηγική τους καταφέρνει να μειώσει σε μεγάλο βαθμό τους κινδύνους. Παρόμοια, η συμπερίληψη των εξόδων συναλλαγών μειώνει το Gauna της βέλτιστης στρατηγικής.

Οι **Wylie – Zhaug – Sin** (2010) έδειξαν ότι εφαρμογή των μέτρων που χρησιμοποιούνται συνήθως μπορούν να οδηγήσουν σε σοβαρά προβλήματα όταν προσπαθούμε να αντισταθμίσουμε το κίνδυνο σε χαρτοφυλάκια που περιέχουν παράγωγα. Παρέχουν ένα απλό και συγκεκριμένο παράδειγμα εξετάζοντας τη στατιστική αντιστάθμιση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης. Επιπλέον, δείχνουν ότι εάν κάποια χρησιμοποιούμενα μέτρα κινδύνου που βασίζονται σε ποσοστημόρια χρησιμοποιούνται για το προσδιορισμό της βέλτιστης αντιστάθμισης κινδύνου, μπορεί κανείς να υιοθετήσει ασυνεχή επενδυτική συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, εδώ υπάρχει διαφορά του να αντισταθμίζεις για να δανείζεσαι χρήματα από ότι για να επενδύεις στο υποκείμενο τίτλο. Επίσης, εάν εφαρμοστούν αφελώς, αυτή η βελτιστοποίηση μπορεί να οδηγήσει σε θέσεις υψηλού κινδύνου, ακόμη και όταν φαινομενικά ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο. Αξίζει να αναφερθεί ότι προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μέτρων κινδύνου που οδηγούν σε αυτή τη προβληματική συμπεριφορά. Κατά την έρευνά τους υπογραμμίζεται ότι η VaR και το αναμενόμενο έλλειμα (ES) σε παράξενες επενδυτικές αποφάσεις. Αυτό το φαινόμενο είναι θεμελιωδώς διαφορετικό από εκείνο που μελετήθηκε από τους Basak και Shapiro (2001), το οποίο επηρεάζει μόνο η VaR και όχι το αναμενόμενο έλλειμα (ES).

Ο κύριος στόχος της διατριβής τους είναι να δείξουν ότι το (ES) ότι η αντιστάθμιση χρησιμοποιώντας ES μπορεί να οδηγήσει σε μια νέα προβληματική συμπεριφορά. Το νέο αυτό πρόβλημα παρουσιάζεται επίσης όταν χρησιμοποιεί κανείς τη VaR ως μέτρο κινδύνου για να αποφασίσει τη βέλτιστη στρατηγική αντιστάθμισης. Το ES έχει ισχυρή θεωρητική υποστήριξη, ενώ η VaR είναι γνωστό ότι υποφέρει από μια σειρά προβλημάτων. Η δυναμική του φαινομένου αυτού είναι παρόμοια τόσο για τα VaR και ES, αλλά επειδή είναι πολύ πιο εύκολη να καταλάβουμε την τοποθέτηση με τη VaR, παρουσίασαν πρώτα αυτή και μετά προχώρησαν στην ανάλυση με το ES.

Οι **Boyle - Sin – Yang** λόγω της αυξανόμενης αίσθησης ότι μια επανεκτίμηση της VaR ως μέτρο κινδύνου έχει καθυστερήσει έκαναν μια διατριβή το 2002. Σε αυτή την ανάγκη οδήγησαν τα μειονεκτήματα ως μέτρο κινδύνου αγοράς από τις επιχειρήσεις εμπορίας και τις ρυθμιστικές αρχές. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα μιας ακάλυπτης θέσης ενός δικαιώματος προαίρεσης στο πλαίσιο του κλασσικού δύο-επιπέδων διωνυμικού δέντρου αξιολογούν την VaR και εναλλακτικά μέτρα κινδύνου με βάση αντικειμενικά και υποκειμενικά μέτρα πιθανοτήτων.

Η διατριβή των **Duffie – Pan** (1997) έχει σχεδιαστεί για να δώσει μια αρκετά εκτενής και προσιτή επισκόπηση της VaR. Περιγράφονται μερικά απ’ τα βασικά ζητήματα μέτρησης του κινδύνου αγοράς των χρηματοοικονομικών μια επιχείρησης και το σύνολο των θέσεων ¨βιβλίων¨ στα διάφορα μέσα που εκθέτουν την εταιρία σε χρηματοοικονομικό κίνδυνο. Αξίζει να σημειωθεί ότι επικεντρώνονται στο κίνδυνο αγοράς που είναι ο κίνδυνος των απρόβλεπτων τιμών ή επιτοκίων. Η μέτρηση και η διαχείριση του κινδύνου σε περίπτωση από τον αντισυμβαλλόμενο περιλαμβάνει μια σειρά από διαφορετικά γνωρίσματα μοντελοποίησης και χρήζουν δικιά τους θεραπεία. Δεν κάνουν καμία αξίωση των νέων ερευνητικών αποτελεσμάτων και δεν περιλαμβάνουν μια ολοκληρωμένη έρευνα της διαθέσιμης βιβλιογραφίας η οποία είναι εκτενής και ταχύτατα αναπτυσσόμενη. Ωστόσο παρουσιάζονται μερικά οικονομετρικά μοντέλα που απαιτούνται για την εκτίμηση της VaR και δεν υπήρξε εμπειρική ανάλυση.

1.6 Περιγραφή της διπλωματικής

Στην διπλωματική αυτή εργασία θα παρουσιαστεί η σχέση των VaR και CVaR με τις τιμές των options. Αυτό θα πραγματοποιηθεί μέσω μιας ανεξάρτητης από μοντέλο μεθοδολογίας όπου θα προσδιορίζει τις VaR και CVaR από τις τιμές των options. Ολοκληρώνοντας, πραγματοποιούμε έναν εκ των υστέρων έλεγχο με σκοπό να αξιολογήσουμε τις εκτιμήσεις που έχουν προκύψει.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε τους ορισμούς της VaR και της CVaR, παρουσιάζουμε τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες τους αλλά και τους λογούς που μας έκαναν να στραφούμε στη χρήση τους για διαφόρους σκοπούς. Τέλος, παραθέτουμε σημαντικούς επιστήμονες που έχουν ασχοληθεί με το θέμα μας στο παρελθόν και εν συντομία το έργο τους.

Στο κεφάλαιο 2 θα εξετάσουμε αρχικά τα VaR – CVaR και τη σχέση τους με τα δικαιώματα προαίρεσης. Στη συνέχεια θα εξάγουμε την αναλυτική σχέση μεταξύ VaR – CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης. Τέλος, θα παραθέσουμε την ιδιαίτερη σημασία της σχέσης αυτής.

Πιο συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε κάποιες σχέσεις που περιγράφουν τη VaR και CVaR με την πάροδο των ετών από διάφορους γνώστες του αντικειμένου. Θα παραθέσουμε τα πλεονεκτήματα των δικαιωμάτων προαίρεσης. Συνεχίζοντας, θα παραθέσουμε τη προέλευση της σχέσης που συνδέει την CVaR με τα δικαιώματα προαίρεσης αλλά και τη σημαντικότητα αυτής της σχέσης. Επεξηγηματικά, αυτή τονίζεται αντισταθμίζοντας τον κίνδυνο CVaR αλλά θα υπολογίσουμε και το κόστος της αντιστάθμισης αυτής. Επιπλέον, θα ποσοτικοποιήσουμε το κίνδυνο των δικαιωμάτων πώλησης που αντιμετωπίζουν οι πωλητές και θα κατανοήσουμε τις μεταβλητές που επηρεάζουν τον κίνδυνο αυτό. Πολύ ενδιαφέρον σε αυτή τη ενότητα είναι ότι η μοντελοποίηση της σχέσης CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης η οποία είναι και ανεξάρτητη μοντέλου και αυτό είναι και που μας προσφέρει αξιοσημείωτα πλεονεκτήματα τα οποία θα συζητηθούν με τη σειρά τους. Τέλος, θα αναφερθούμε στο γεγονός ότι το μέτρο κινδύνου CVaR είναι παρατηρίσιμο σε αντίθεση με πολλά άλλα μέτρα. Αυτό είναι κάτι που μας προσφέρει ακριβέστερη ικανότητα πρόβλεψης του κινδύνου σε σχέση με μέτρα που υπολογίζονται από κάποιο μοντέλο.

Στο κεφάλαιο 3 θα περιγραφούν αναλυτικά οι δυο μέθοδοι από τις οποίες θα εξάγουμε τις μεταβλητότητες στις τιμές των options και τις CVaR. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται το μοντέλο των Black – Scholes ενώ η δεύτερη είναι ανεξάρτητη μοντέλου. Αρωγός στους απαραίτητους υπολογισμούς αλλά και στην εξαγωγή των διαγραμμάτων θα είναι η Matlab.

Στο κεφάλαιο 4 θα σχολιαστούν αναλυτικά τα αποτελέσματα των δυο παραπάνω μεθόδων και φυσικά θα εκτεθούν και τα αντίστοιχα διαγράμματα και πίνακες για την τεκμηρίωση του θεωρητικού μέρους της διπλωματικής αυτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η σχέση μεταξύ VaR – CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας θα εξετάσουμε αρχικά τα VaR – CVaR τα δικαιώματα προαίρεσης. Στη συνέχεια θα εξάγουμε την αναλυτική σχέση μεταξύ VaR – CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης. Τέλος, θα παραθέσουμε την ιδιαίτερη σημασία της σχέσης αυτής.

2.1 Ανασκόπηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και των VaR – CVaR

Η όλο και αυξανομένη τάση προς την αγορά options έχει οδηγήσει στην ανάγκη για ποσοτική μέτρηση και διαχείριση του κινδύνου των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (Dowd 2011). Αυτό έχει υποστηριχθεί περαιτέρω από τις διεθνείς ρυθμιστικές απαιτήσεις, όπως είναι το Σύμφωνο της Βασιλείας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται κάποιες σχέσεις που περιγράφουν τα VaR και CVaR με τη πάροδο των ετών από διάφορους γνωστές του αντικειμένου.

Η αξία ενός χαρτοφυλακίου V(T) τη χρονική στιγμή T, το οποίο περιέχει n περιουσιακά στοιχεία $X_i(T)$ ισούται με :

$$V(T) = \Sigma^{n}_{i=1} w_i X_i (T) \quad (1)$$

Όπου i είναι ο δείκτης του περιουσιακού στοιχείου, όπου $i \in [1,..,n]$, n είναι ο αριθμός των περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο και w_i είναι ο αριθμός των μετοχών του στοιχείου X_i.

Ένα χαρτοφυλάκιο με αξία V(T) έχει όμως και την απώλεια του Z(T), η οποία ορίζεται ως:

$$Z(T) = V(t) - V(T) = \Sigma^{n}_{i=1} w_i z_i (T)$$

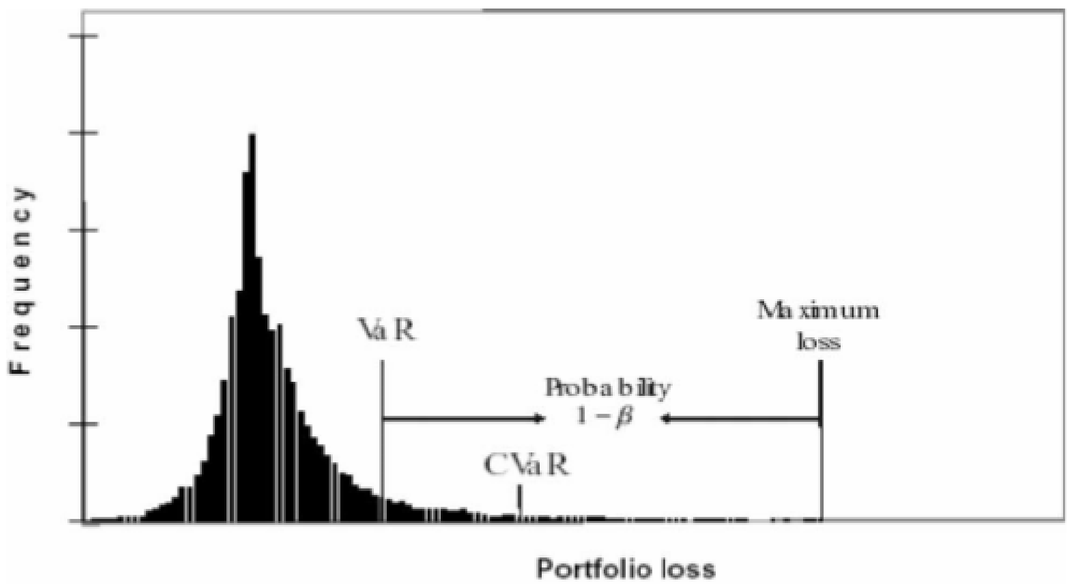
όπου η χρονική στιγμή t είναι η στιγμή που βρισκόμαστε τώρα. Επεξηγηματικά, είναι η διαφορά της αξίας του χαρτοφυλακίου αυτή τη στιγμή και της χρονικής στιγμής T.

Η απώλεια του στοιχείου i τη χρονική στιγμή T είναι:

$$z_i(T) = X_i(t) - X_i(T)$$

Επομένως η αρνητική απώλεια είναι κέρδος, δηλαδή αν η προηγούμενη διαφορά είναι αρνητική σημαίνει ότι η αξία του στοιχείου τώρα είναι μικρότερη.

Για να προσδιορίσουμε τη CVaR σε ένα χαρτοφυλάκιο πρέπει να προσδιορίσουμε τη VaR. Για ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα και ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης k, όπου $0<k<1$, VaR_k, είναι απλά η χειρότερη δυνατή απώλεια για τη συγκεκριμένη περίοδο με πιθανότητα k



Σχήμα: VaR και CVaR

Για να συνδέσουμε τον ορισμό αυτόν με τα προηγούμενα ορίζουμε μαθηματικά τη VaR ως την απώλεια που συνδέεται με το ποσοστημόριο β στη συνάρτηση κατανομής απωλειών Z(T).

$$F^{P}\,(Z(T) \leq VaR) = \beta^{P},$$

όπου όπου $F^{P}(.)$ είναι το άθροισμα συνάρτησης κατανομής πιθανότητας στο πλαίσιο του μέτρου πιθανότητας P. Αξίζει να σημειωθεί ότι το β μπορεί να αναφέρεται στο ποσοστημόριο κατανομής απώλειας όχι μόνο για ένα χαρτοφυλάκιο αλλά και για ένα περιουσιακό στοιχείο.

Πιο συγκεκριμένα αυτή η σχέση ερμηνεύεται ως εξής: Όταν η πιθανότητα οι απώλειες να είναι μικρότερες ή ίσες της VaR τότε το $F^{P}(.)$ ισούται με το βαθμό εμπιστοσύνης β^{P}.

Η $CVaR^{P}$ όπως έχει οριστεί από τον Dowd (2011) δίνεται από τη σχέση:

$$CVaR^{P} = E^{P}\,[Z(T)\ \boldsymbol{/}\ Z(T) > VaR].$$

Η $CVaR^{P}$ είναι η αναμενόμενη απώλεια, δεδομένου ότι η απώλεια έχει ξεπεράσει τη VaR. Δηλαδή αν έχουμε διάστημα εμπιστοσύνης 95% η CVaR θα μας προσδιορίσει τις απώλειες στο εναπομείναν 5%.

Συμπερασματικά, η $CVaR^{P}$ είναι ένα όριο σχεδόν σίγουρα για όλες τις απώλειες για τις οποίες ισχύει $CVaR^{P} \geq VaR$.

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) παρέχουν τη δυνατότητα αντιστάθμισης του κινδύνου επειδή μπορούν να εξασφαλίσουν ένα κατώτατο όριο ζημιών. Επιπλέον, αντισταθμίζοντας τον κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου με δικαιώματα προαίρεσης είναι φθηνότερο και πιο βολικό από την εκ νέου εξισορρόπηση (ή ρευστοποίηση) του χαρτοφυλακίου. Εκτός από τις εφαρμογές αντιστάθμισης, τα δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να είναι πιο ελκυστικά για τους κερδοσκόπους (συγκριτικά με την αγορά του υποκείμενου) λόγω της περιορισμένης απώλειας. Επίσης, η διαπραγμάτευση των δικαιωμάτων προαίρεσης μπορεί κανονικά να εκτελεστεί σε ένα πολύ υψηλότερο επίπεδο μόχλευσης σε σχέση με τη διαπραγμάτευση μετοχών, ως εκ τούτου, προσφέρει δυνητικά υψηλότερες αποδόσεις για την ίδια αρχική κατάθεση.

Ένα χαρτοφυλάκιο παραγώγων είναι ουσιαστικά το ίδιο με ένα μοναδικό περιουσιακό στοιχείο, απλά τώρα το μοναδικό περιουσιακό στοιχείο είναι ένα χαρτοφυλάκιο V(t). Σύμφωνα με το Kwok (1998) με τη μέθοδο των υπό όρους προσδοκιών ένα χαρτοφυλάκιο με δικαίωμα προαίρεσης πώλησης $L^P(V(t), t, T, K)$ είναι ένα δικαίωμα προαίρεσης πώλησης του οποίου ο υποκείμενος τίτλος είναι ένα χαρτοφυλάκιο V(t) περιουσιακών στοιχείων τη χρονική στιγμή t, αξιολογημένα υπό το μέτρο πιθανότητας P, με λήξη T και strike K, όπου strike ισχύει για τη συνολική αξία των χαρτοφυλακίων V(t) (όχι για κάθε περιουσιακό στοιχείο). Υπό ουδέτερου κινδύνου αποτίμηση μπορούμε να ορίσουμε τα $L^Q(V(t), t, T, K)$ (Benth 2004) :

$$L^Q(V(t),t, T, K) = e^{-r(T-t)}E^Q[V(T) - K]^+ = e^{-r(T-t)}E^Q \left[\sum_{i=1}^{n} w_i \; X_i(T) - K\right]^+ \quad (2)$$

όπου το Q είναι το ουδέτερου κινδύνου μέτρο στο χαρτοφυλάκιο και το r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Η σχέση (2) αποτιμά ένα δικαίωμα αγοράς (call option). Ο πρώτος όρος αφορά την προεξόφληση δηλαδή να φέρουμε την αξία του δικαιώματος αγοράς στο σήμερα. Ο δεύτερος όρος είναι οι αναμενόμενες απολαβές προεξοφλημένες βάσει του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο.

Ομοίως, ορίζεται και η αξία ενός δικαιώματος πώλησης $R^Q (V(t), t, T, K)$ σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

$$R^Q(V(t),t,T,K) = e^{-r(T-t)}E^Q[K - V(T)]^+ = e^{-r(T-t)}E^Q \left[K - \sum_{i=1}^{n} w_i \; X_i(T)\right]^+$$

Είναι επίσης χρήσιμο να εκφράσουμε την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης ενός χαρτοφυλακίου χωρίς να το προεξοφλήσουμε. Επομένως, για ένα μη προ εξοφλημένο δικαίωμα προαίρεσης R υπό μετρό πιθανότητας P, αυτή δίνεται από το $\overline{R}^P$ όπου:

$$\overline{R}^P (V(t),t,T,K) = E^P [K- V(T)]^+ \quad (3)$$

2.2 Η προέλευση της σχέσης της CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης

Για να εξάγουμε την σχέση που συνδέει το CVaR με τα δικαιώματα προαίρεσης πρέπει πρώτα να ορίσουμε το μέτρο κινδύνου της αναμενόμενης παλινδρόμησης (Expected regret risk measure). Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι το CVaR συνδέεται με τα δικαιώματα προαίρεσης σχετίζοντας την αναμενόμενη παλινδρόμηση με δικαιώματα προαίρεσης πώλησης και συνεχίζοντας χρησιμοποιούμε τη σχέση της CVaR και της αναμενόμενης παλινδρόμησης για να συνδέσουμε τη CVaR με τα δικαιώματα προαίρεσης. Η αναμενόμενη παλινδρόμηση είναι η αναμενόμενη ζημία πέρα από μία οριακή κατώτατη τιμή ζημίας με συνέπεια στη συνολική ζημία του χαρτοφυλακίου.

Δηλαδή κάνουμε ένα λογικό άλμα. Συνδέουμε τη CVaR με τα δικαιώματα προαίρεσης μέσω της expected regret την οποία τη συνδέουμε με τη CVaR και στη συνέχεια με τα options οπότε συνδέονται και τα δύο τελευταία μεταξύ τους το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Η Expected Regret είναι η αναμενόμενη απώλεια πέρα από μια οριακή κατώτατη τιμή ζημίας K με συνέπεια στη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου Z(T) –όχι μόνο στα μεμονωμένα στοιχεία- τη χρονική στιγμή T, υπό το μέτρο πιθανότητας P:

$$ER^{P}{}_{\overline{K}}\,(Z(T)) = E^{P}\,[Z(T)- \overline{K}\,]^{+}$$

Αξίζει να σημειωθεί οτι το K αναφέρεται σε μια τιμή(value) στην κατανομή απώλειας της Z(T), ενώ το strike price K του option αναφέρεται σε μια τιμή σε μια κατανομή ενός υποκείμενου τίτλου V(T).

Μπορούμε να επιλέξουμε να δώσουμε οποιαδήποτε αξία στο $\overline{K}$ και διαλέγοντας σωστά μπορούμε να συσχετίσουμε την Expected Regret με τα options. Εάν διαλέξουμε $\overline{K}$ =V(t)-K, τότε θέτουμε την αξία στην οποία το ποσοστημόριο απώλειας του χαρτοφυλακίου K λαμβάνει χώρα στην ίδια αξία με το strike K του option, αν υπήρχε ένα option σε V(t). Επομένως, τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε τη σχέση μεταξύ expected regret και ενός μη-προεξοφλημένου χαρτοφυλακίου put option.

Πρόταση 1. Η Expected Regret σε ένα χαρτοφυλάκιο $ER^p{}_{\overline{K}}$ (Z(T)) είναι πανομοιότυπη σε ένα μη-προεξοφλημένο χαρτοφυλάκιο put option $\overline{R}^P$ (V(t), t,T,K) όταν και τα δυο υπολογίζονται κάτω από τα ίδια μέτρα πιθανότητας P, με K=V(t) - $\overline{K}$:

$$ER^P{}_{\overline{K}}\,(Z(T)) = \overline{R}^P\,(V(t),t,T,K)$$

$$\text{ή } ER^P{}_{\overline{K}}\,(Z(T)) = E^P\,[K - V(T)]^+$$

(Από τη σχέση (3) έχω $\overline{R}^P$ (V(t),t,T,K) = E^P $[K - V(T)]^+$)

Απόδειξη: $ER_{\overline{K}}{}^P(Z(T)) = E^P\left[\sum_{i=1}^{n} w_i z_i(T) - \overline{K}\right]^+$

Μπορούμε να επανεκφράσουμε το $\overline{K}$ σε ορούς χαρτοφυλακίου:

$$\overline{K} = V(t) - K = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i(t) - K$$

Επομένως $(\sum_{i=1}^{n} w_i z_i(T) - \overline{K}) = \sum_{i=1}^{n} w_i (X_i(t) - X_i(T)) - (w_i X_i(t) - K),$

$$= \sum_{i=1}^{n} -w_i X_i(T) + K$$

$$= K - \sum_{i=1}^{n} w_i X_i(T)$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} w_i z_i(T) - \overline{K}\right]^+ = \left[K - \sum_{i=1}^{n} w_i X_i(T)\right]^+$$

Ανακαλώ τα $\overline{K}$, w_i, K, X_i(t), και V(t), τα οποία μένουν ανεπηρέαστα απ' τις αλλαγές στα μέτρα, επομένως:

$$\Rightarrow E^P\left[\sum_{i=1}^{n} w_i z_i(T) - \overline{K}\right]^+ = E^P\left[K - \sum_{i=1}^{n} w_i X_i(T)\right]^+,$$

$$= E^P\left[K - V(t)\right]^+,$$

έτσι ώστε $ER_{\overline{K}}^{\;P}(Z(T)) = \overline{R}^P(V(t),t,T,K)$.

Επιπλέον, αν διαλέξουμε μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q έχουμε:

$$ER_{\overline{K}}^{\;Q}(Z(T)) = \overline{R}^Q(V(t),t,T,K)$$

Επομένως προεξοφλώντας το option στο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο έχουμε

$$e^{-r(T-t)} ER_{\overline{K}}^{\;Q}(Z(T)) = R^Q(V(t),t,T,K).$$

Επομένως, έγινε η απαραίτητη σύνδεση ανάμεσα στο Expected Regret risk measure και στα option και έτσι μπορούμε να υπολογίζουμε το ένα από το άλλο.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να συνδέσουμε τη CVaR με τα options. Αυτό θα το επιτύχουμε κάνοντας χρήση της σχέσης ανάμεσα στη CVar και την Expected Regret. Η σχέση που συνδέει τα παραπάνω δίνεται από τον Szego (2005) και είναι η ακόλουθη:

$$\text{CVaR}^P = \text{VaR} + \left(\frac{1}{1-\beta^P}\right) \text{ER}^P_{\overline{K}} \qquad \text{όπου } \overline{K} = \text{VaR} \quad (4)$$

Να υπενθυμίσουμε ότι έχουμε ορίσει την απώλεια του χαρτοφυλακίου ως K σε VaR (αυτό σημαίνει επίσης ότι K=V(t)- $\overline{K}$).

Η σχέση (4) χρήζει απόδειξης την οποία παραθέτω αμέσως:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$\text{CVaR}^P = E^P\,[Z(T)\ /\ Z(T) > \text{VaR}]$ (όπως έχουμε προαναφέρει από Dowd(2011))

$= \text{VaR} + E^{P}\,[Z(T) – \text{VaR} / Z(T) > \text{VaR}]$

$= \text{VaR} + \int_{-\infty}^{\infty}(z - VaR)\ ,\ f_{Z(T)}\,(z / Z(T) > \text{VaR})\,dz$

$= \text{VaR} + \int_{-\infty}^{\infty}(z - VaR)\ ,\ P(Z(T)=z / Z(T) > \text{VaR})\,dz$

$= \text{VaR} + \int_{-\infty}^{\infty}(z - VaR)\ ,\ \frac{\mathrm{P(Z(T)=z,Z(T) > VaR)}}{P(Z(T)>VaR)}\,dz$

(Υπενθύμιση: $P\,(\,Z(T) > \text{VaR}\,) = 1 - P\,(\,Z(T) \leq \text{VaR}\,)$)

$= \text{VaR} + \frac{1}{1-\beta^{P}}\int_{\cancel{-\infty}VaR}^{\infty}(z - VaR)P(Z(T) = z, z > VaR)dz$

$= \text{VaR} + \frac{1}{1-\beta^{P}}\int_{VaR}^{\infty}(z - VaR)P(Z(T) = z)dz$

$= \text{VaR} + \frac{1}{1-\beta^{P}}\int_{-\infty}^{\infty}(z - VaR)^{+}P(Z(T) = z)dz$

$= \text{VaR} + \frac{1}{1-\beta^{P}}\ E^{P}\,[\,Z(T) – \text{VaR})^{+}]$ από προηγούμενα

$= \text{VaR} + (\frac{1}{1-\beta^{P}})\ ER^{P}\bar{K}$

Αφού έγινε η σύνδεση της ER με τη CVaR και έχουμε εδραιώσει τη σχέση μεταξύ options και ER, δηλαδή υπάρχει σχέση μεταξύ options και CVaR, την οποία θα δηλώσουμε τώρα.

Από πρόταση 1 έχω $ER^{P}\bar{K}\,(Z(T)) = \bar{R}^{P}\,(V(t),t,T,K)$ και με απλές πράξεις η σχέση (4) γίνεται:

$\overline{R}^{P}$ (V(t),t,T,K) = (CVaR^P – VaR) (1-β^P)

Υπό οποιοδήποτε μετρό πιθανότητας *P*, η σχέση μεταξύ CVaR^P και ενός μη προ εξοφλημένου χαρτοφυλακίου δικαιώματος πώλησης $\overline{R}^{P}$ (V(t),t,T,K) οπού K=V(t)-VaR είναι η παραπάνω.

Επιπλέον, υπό το ουδέτερου κινδύνου μέτρο Q, ένα χαρτοφυλάκιο put option R^Q(V(t),t,T,K) συνδέεται με το CVaR^Q με την παρακάτω σχέση:

$$R^Q(V(t),t,T,K) = e^{-r(T-t)}(CVaR^Q - VaR)(1-\beta^Q) = \frac{\partial R}{\partial K}(CVaR^Q - VaR)$$

Απόδειξη: Ξέρω ότι ER είναι ένα μη-προεξοφλημένο put option από τα προηγούμενα (πρόταση 1).

$$ER_{\overline{K}}^{\;P}(Z(T)) = E^P[V(T)-K]^+ = \tilde{R}^P(V(t),t,T,K) \qquad (5)$$

Όπου $\overline{K} = VaR$. Αν αντικαταστήσουμε με $\tilde{R}^P$ όπου $ER_{\overline{K}}^{\;P}$ στην εξίσωση 4, έχουμε:

$$CVaR^P = VaR + (\frac{1}{1-\beta})\overline{R}^P(V(t),t,T,K)$$

$$\Rightarrow \overline{R}^P(V(t),t,T,K) = (CVaR^P - VaR)(1-\beta^P)$$

(6), (7) αντίστοιχα

Επομένως, υπό το ουδέτερου κινδύνου μέτρο Q με προεξόφληση υπό το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r, έχω:

$$R^Q(V(t),t,T,K) = (e^{-r(T-t)})(CVaR^P - VaR)(1-\beta^P)$$

Από Breeden-Litzenberger (1978) έχει αποδειχθεί η σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial K} = e^{-r(T-t)}F^Q(X(T) \le K), \qquad (9)$$

$$= e^{-r(T-t)}(1-\beta^Q) \qquad (10)$$

Απόδειξη: $1-\beta^{Q} = F^{Q}(z(t) > VaR),$

$$= F^{Q}(X(t) - X(T) > X(t) - K),$$

$$= F^{Q}(K > X(T)).$$

Για ένα χαρτοφυλάκιο put R έχουμε:

$$\frac{\partial R}{\partial K} = e^{-r(T-t)}(1-\beta^{Q})$$

Επομένως η εξίσωση (8) μπορεί να γραφεί:

$$P^{Q}(X(t),t,T,K) = (e^{-r(T-t)})(CVaR^{Q} - VaR)(1-\beta^{Q}) \qquad (11)$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση των Breeden-Litzenberger(1978), η εξίσωση (11) γίνεται:

$$P^{Q}(X(t),t,T,K) = \frac{\partial P}{\partial K}(CVaR^{Q} - VaR) \qquad (11\alpha)$$

Επίσης, αναδιατάσσοντας την εξίσωση (11) έχουμε:

$$(1-\beta^{Q}) = \frac{Pe^{-r(T-t)}}{(CVaR^{Q} - VaR)} \ ,$$

Επομένως,

$$\frac{\partial P}{\partial K} = e^{-r(T-t)}\left(\frac{Pe^{-r(T-t)}}{(CVaR^{Q} - VaR)}\right)$$

$$= \frac{P}{(CVaR^{Q} - VaR)} \ . \qquad (11\beta)$$

Αρά, το πηλίκο *P*/(CVaR – VaR) αντιπροσωπεύει την αλλαγή στη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης με συνέπεια στο K. Επιπλέον, ο όρος P/(CVaR – VaR) μπορεί να θεωρηθεί ως μια τιμή: αναλογία κίνδυνου για δικαιώματα πώλησης, ο λόγος αυτός μετρά τη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης ανά μονάδα κίνδυνου πληρωμής, όπου ο κίνδυνος του δικαιώματος μετράτε σε ορούς CVaR-VaR.

Παρατήρηση 1. Καθώς οι τιμές των option είναι ανεξάρτητες από τις προτιμήσεις κινδύνου, μπορούμε να τιμολογήσουμε κάτω από οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας, δεδομένου ότι θα χρησιμοποιήσουμε το σωστό επιτόκιο προεξόφλησης. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$R^P(V(t),t,T,K) = e^{-\tilde{r}(T-t)}(CVaR^P - VaR)(1-\beta^P)$$

Για οποιοδήποτε μετρό πιθανότητας P, όπου $\tilde{r}$ είναι ο σωστός παράγοντας προεξόφλησης για το μέτρο πιθανότητας P.

Τώρα έχουμε μια εξίσωση για να συνδέσουμε τα options με τη CVaR. Μπορούμε να δούμε ότι CVaR,VaR και β^P είναι πλήρως ορισμένα. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή του put option που απαιτείται για να αντισταθμίσει το CVar κίνδυνο. Ομοίως, το να κάνεις συγκεκριμένη την τιμή ενός put option, εξάγει μια αξία του CVaR κινδύνου του υποκείμενου τίτλου σε ένα συγκεκριμένο strike (ή VaR). Αυτό προτείνει μια σύνδεση (σχέση) μεταξύ CVaR κινδύνου και των options η οποία θα ερευνηθεί αργότερα.

Οι τιμές των options μερικές φορές εκφράζονται σε όρους σωρευμένων πιθανοτήτων και σε αυτές τις περιπτώσεις είναι πιθανό να πάρεις CVaR πιο άμεσα. Έχει αποδειχθεί ότι μπορούμε να επανεκφράσουμε το P^Q ως:

(από πρόταση 1 και σχέση 4)

$$P^Q = e^{-r(T-t)}E^Q[K - X(T) / K > X(T)] \quad (12)$$

$$= e^{-r(T-t)}E^Q[K / K > X(T)] - e^{-r(T-t)}E^Q[X(T) / K > X(T)] \quad (13)$$

$$= Ke^{-r(T-t)}F^Q(K > X(T)) - X(T)F^{Q_*}[K > X(T)] \quad (14)$$

όπου Q* είναι το Martingale μέτρο πιθανότητας με X(t) να είναι το numerative asset (αυτό είναι το Radon-Nikodym παράγωγο το οποίο δίνεται από $dQ_* = e^{-r(T-t)}(X(T) / X(t)dQ)$. Εάν αναδιατάξουμε την εξίσωση (11) έχουμε:

$$CVaR^Q = \frac{P^Q e^{-r(T-t)}}{1-\beta^Q} + VaR = \frac{P^Q e^{-r(T-t)}}{1-\beta^Q} + (X(t)-K) \qquad (15)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τη (14) μέσα στη (15) έχω:

$$CVaR^Q = \frac{KF^Q(K > X(T)) - X(t)e^{-r(T-t)}F^{Q*}(K > X(T))}{1-\beta^Q} + (X(t)-K) \qquad (16)$$

Έχω $1-\beta^Q = F^Q(K > X(T))$ (17)

(έχει αποδειχθεί όταν δείξαμε τις (9),(10))

Επομένως, αντικαθιστώντας τη (17) μέσα στη (16), γίνεται:

$$CVaR^Q = \frac{KF^Q(K > X(T)) - X(t)e^{-r(T-t)}F^{Q*}(K > X(T))}{F^Q(K > X(T))} + (X(t)-K)$$

$$= X(t)(1 - \frac{e^{-r(T-t)}F^{Q*}(K > X(T))}{F^Q(K > X(T))})$$

Άρα μπορούμε να έχουμε closed-form έκφραση για το CVaR όταν τα options εκφράζονται όπως στην εξίσωση (14).

2.3 Η σημαντικότητα της σχέσης μεταξύ CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης

Η σχέση της CVaR και των δικαιωμάτων προαίρεσης (Εξίσωση (11)) έχει κάποιες αξιοσημείωτες πτυχές, οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

2.3.1 Αντιστάθμιση Κινδύνου με τη χρήση δικαιωμάτων προαίρεσης

Η αντιστάθμιση κινδύνου αποτελεί των βασικότερο λόγο της δημιουργίας και της ραγδαίας ανάπτυξης των παραγώγων προϊόντων. Στην σύγχρονη μεταβαλλόμενη ανταγωνιστική αγορά οι επιχειρήσεις είναι εκτεθειμένες σε μεγαλύτερο κίνδυνο αναφορικά με τις συναλλαγματικές ισοτιμίες, τα επιτόκια και τις τιμές των αγαθών, με αποτέλεσμα η αντιστάθμιση κινδύνου να έχει γίνει απαραίτητη για κάθε επιχείρηση και για κάθε επενδυτή. Εκτός από την αντιστάθμιση τα παράγωγα προϊόντα έχουν και άλλες χρήσεις όπως, κερδοσκοπία, μεταφορά κινδύνου και επένδυση.

Η προσπάθεια εξουδετέρωσης των κινδύνων από τις αυξομειώσεις των τιμών των αγαθών ή αξιόγραφων στις αγορές μετρητοίς, καλείται αντιστάθμιση. Συνεπώς για να υπάρχει αντιστάθμιση από την ανάληψη θέσεων στα παράγωγα προϊόντα, θα πρέπει να υπάρχει ταυτόχρονα αντίθετη ανειλημμένη θέση στην αγορά μετρητοίς.

Η στρατηγική που ακολουθεί ένας επενδυτής ο οποίος ανοίγει μια θέση αγοράς ή πώλησης προσδοκώντας κάποιο όφελος από την μελλοντική πορεία των τιμών ενός τίτλου η αγαθού, καλείται κερδοσκοπία. Ένας κερδοσκόπος παίρνει μέρος στην αγορά παραγώγων όχι για να προστατεύσει την θέση που έχει ανοίξει στην αγορά μετρητοίς, αλλά ανοίγει θέσεις με σκοπό να αποκομίσει κέρδος από μια ενδεχόμενη μεταβολή των τιμών. Η χρήση παραγώγων προϊόντων για κερδοσκοπία απευθύνεται σε επενδυτές που είναι αποφασισμένοι να αναλάβουν αυξημένο κίνδυνο προκειμένου να επιτύχουν αυξημένες αποδόσεις. Η ύπαρξη κερδοσκόπων συμπληρώνει τους υπάρχοντες φυσικούς αντισταθμιστές στην αγορά παραγώγων, εφόσον η θέση των αντισταθμιστών είναι δεδομένη, είναι πολύ σημαντικό να υπάρχουν πρόθυμοι διαπραγματευτές για να πάρουν τις αντίθετες θέσεις και να αναλάβουν τον κίνδυνο (Μυλωνάς, 2005).

Η αντιστάθμιση κινδύνου με την χρήση παραγώγων προϊόντων αποτελεί σήμερα μια ιδιαίτερα συνηθισμένη διαδικασία από όλους όσους συμμετέχουν στις αγορές. Οι θέσεις που ανοίγονται συνήθως στα παράγωγα είναι δύο, α) η θέση αγοράς ή αλλιώς θετική θέση (long position) την οποία ανοίγει κάποιος ο οποίος κατέχει έναν συγκεκριμένο τίτλο ή έχει δεσμευθεί να παραλάβει έναν τίτλο σε μια μελλοντική ημερομηνία και β) η θέση πώλησης ή αλλιώς αρνητική θέση (short position) την οποία ανοίγει κάποιος ο οποίος έχει δανειστεί ή έχει δεσμευτεί να παραδώσει έναν τίτλο σε μια μελλοντική ημερομηνία.

Αντιστάθμιση μπορεί να επιτευχθεί με την χρήση όλων των κατηγοριών παραγώγων.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αντιστάθμιση είναι η διαδικασία που ακολουθεί ένας επενδυτής, προκειμένου να μειώσει ή να εξαλείψει των κίνδυνο που αντιμετωπίζει από ανειλημμένες θέσεις αγοράς ή πώλησης στην αγορά μετρητοίς. Έτσι και με την δικαιωμάτων η αντιστάθμιση πραγματοποιείται με την δημιουργία αντίθετης θέσης από την ανειλημμένη θέση στην αγορά μετρητοίς. Η εξασφάλιση όμως από τον κίνδυνο μεταβολής των τιμών δεν συντελείται χωρίς κόστος. Στις αγορές προθεσμιακών συμβολαίων το κόστος δεν μπορεί να υπολογιστεί από πριν, διότι εξαρτάται από τη διαφορά που υπάρχει στις τιμές στην αγορά μετρητοίς και στην προθεσμιακή κατά τις ημερομηνίες ανοίγματος και κλεισίματος της αντιστάθμισης. Στις αγορές δικαιωμάτων όμως το κόστος αντιστάθμισης μπορεί να προσδιοριστεί εκ των προτέρων και δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή απόκτησης του δικαιώματος. Ο προσδιορισμός του κόστους αντιστάθμισης επιτρέπει στους υπευθύνους μιας επιχείρησης να προγραμματίζουν την στρατηγική και τιμολογιακή πολιτική τους κάτω από την προϋπόθεση του ελαχίστου κέρδους που μπορούν να επιτύχουν ενώ ταυτόχρονα υπάρχει η δυνατότητα αύξησής του (Μυλωνάς, 2005).

Σε αντίθεση με το κόστος αντιστάθμισης, το αποτέλεσμα της αντιστάθμισης, προσδιορίζεται επαρκέστερα με την χρήση προθεσμιακών συμβολαίων και Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης, απ' ότι με την χρήση δικαιωμάτων. Το αποτέλεσμα της αντιστάθμισης με δικαιώματα προαίρεσης δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό διότι παραμένει άγνωστο κατά πόσο στη λήξη του δικαιώματος η άσκηση του θα είναι επωφελής και επιπλέον απαιτείται η συνεχής αναπροσαρμογή του αριθμού των δικαιωμάτων ώστε να προσαρμοστεί η θέση της μετρητοίς. Αντίθετα με εξαίρεση την επίδραση του κινδύνου βάσης, η μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου οδηγεί σε παρόμοια μεταβολή του Προθεσμιακού Συμβολαίου ή του Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης. Συνεπώς εάν λάβουμε μια θέση αντίθετη από τη θέση μετρητοίς, η αρχική τιμή του συμβολαίου κλειδώνεται και μεταβάλλεται ως προς την μεταβολή της βάσης.

Ο κίνδυνος περιορίζεται πολύ περισσότερο με τη χρήση δικαιωμάτων από ότι με τα προθεσμιακά συμβόλαια και τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης, διότι ο αγοραστής ενός δικαιώματος περιορίζει τις απώλειές του στην τιμή του ασφαλίστρου, ενώ στα προθεσμιακά συμβόλαια και τα ΣΜΕ ο επενδυτής είναι εκτεθειμένος σε μεγαλύτερο κίνδυνο και επιπλέον κατάθεση σε περίπτωση που προκύψει δυσμενής μεταβολή στην τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου ή του ΣΜΕ. Δηλαδή με τη χρήση δικαιωμάτων επιτρέπεται η στους αντισταθμιστές προστατευτούν από ανεπιθύμητες μεταβολές των τιμών, ενώ ταυτόχρονα μπορούν να επωφεληθούν από επιθυμητές μεταβολές.

Οι δύο βασικοί τρόποι αντιστάθμισης με την χρήση δικαιωμάτων αποτελούνται από την αγορά δικαιωμάτων αγοράς και την αγορά δικαιωμάτων πώλησης.

Όπως γνωρίζουμε, ένα δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν σε μια προσυμφωνημένη τιμή και σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία. Όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου ενός δικαιώματος αναμένεται να κινηθεί ανοδικά, τότε το δικαίωμα αυτό αποκτά αξία, ενώ όταν η όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου ενός δικαιώματος αναμένεται να κινηθεί πτωτικά τότε η αξία του δικαιώματος αυτού μηδενίζεται. Συνεπώς όταν κάποιος επενδυτής κατέχει αρνητική θέση στην αγορά μετρητοίς και θέλει να προστατευθεί από ενδεχόμενη άνοδο της τιμής του υποκείμενου τίτλου, η απόκτηση ενός δικαιώματος αγοράς αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. Σε αυτήν την περίπτωση ενδείκνυται για τον επενδυτή η αντιστάθμιση με αγορά δικαιώματος αγοράς ή πώληση δικαιώματος πώλησης.

Παράδειγμα: Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρούμε ότι έχουμε πάλι μια εταιρεία εμπορίας καυσίμων η οποία εκτιμά ότι τους επόμενους μήνες η ζήτηση για καύσιμα θα αυξηθεί, συνεπώς θα χρειαστεί αυξημένες ποσότητες αργού πετρελαίου προκειμένου να το παρασκευάσει σε καύσιμο και να το διαθέσει στους καταναλωτές. Λόγω όμως της υψηλής μεταβλητότητας των τιμών του αργού πετρελαίου διεθνώς, η εταιρεία θέλει να προστατευθεί από τον κίνδυνο να αγοράσει το αργό πετρέλαιο σε ιδιαίτερα αυξημένη τιμή στο μέλλον. Οπότε στην αγορά της μετρητοίς η εταιρεία κατέχει αρνητική θέση διότι αυξήσεις στην τιμή του αργού πετρελαίου αυξάνουν το κόστος αγοράς, ενώ μειώσεις στην τιμή του αργού πετρελαίου μειώνουν το κόστος αγοράς. Η εταιρεία έχει την δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα στην αγορά ενός δικαιώματος αγοράς ή στην πώληση ενός δικαιώματος πώλησης. Αν προτιμήσει την αγορά δικαιώματος αγοράς έχει την ευχέρεια να επιλέξει η ίδια αν τη συμφέρει η πραγματοποίηση της συναλλαγής μέσω της αγοράς των παραγώγων, ενώ με το δικαίωμα πώλησης παραχωρεί το δικαίωμα στον αντισυμβαλλόμενο.

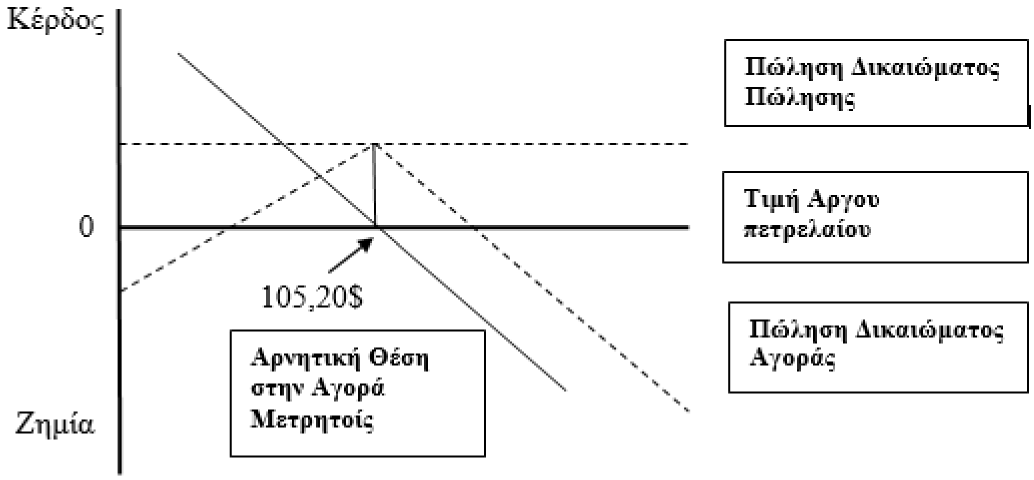
Έστω επιλέγει την αγορά δικαιώματος αγοράς. Θεωρούμε ότι η τρέχουσα τιμή του αργού πετρελαίου είναι 100 δολάρια το βαρέλι και η εταιρεία θα χρειαστεί 1.000 βαρέλια μετά από τρείς μήνες. Παρέχεται λοιπόν ένα δικαίωμα αγοράς για 1.000 βαρέλια αργού πετρελαίου προς 1$ το βαρέλι, διάρκειας τριών μηνών και τιμή άσκησης 105$.

Αν μετά από τρεις μήνες η τιμή του αργού πετρελαίου ανέβει στα 110 δολάρια το βαρέλι, η εταιρεία θα ασκήσει το δικαίωμα και θα αγοράσει το προϊόν μέσω της αγοράς παραγώγων, πληρώνοντας 105$Χ1.000=105.000$, το κόστος αγοράς του δικαιώματος ήταν 1.000Χ1$=1.000$ οπότε το συνολικό κόστος είναι 106.000$. Αν η εταιρεία δεν επέλεγε την αγορά παραγώγων θα έπρεπε να αγοράσει το προϊόν από την αγορά μετρητοίς προς 110 δολάρια το βαρέλι και θα πλήρωνε συνολικά 110.000$, συνεπώς με αυτήν την επιλογή κέρδισε 4.000$. Άρα ο κίνδυνος από την ανεπιθύμητη αύξηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος αντισταθμίστηκε. Αν μετά από τρεις μήνες στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του αργού πετρελαίου πέσει στα 90 δολάρια το βαρέλι τότε η εταιρεία δεν θα ασκήσει το δικαίωμά αγοράς αλλά θα αγοράσει το προϊόν από την αγορά μετρητής καταβάλλοντας 90$Χ1.000=90.000$ συν το κόστος αγοράς του δικαιώματος 1.000$, το συνολικό κόστος της θα είναι 91.000$.

Έστω ότι η εταιρεία επιλέγει την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης. Πουλάει λοιπόν διάρκειας τριών μηνών και με τιμή άσκησης 105,20$.

Αν μετά από τρεις μήνες στη λήξη του δικαιώματος η τιμή του αργού πετρελαίου είναι στα 110 δολάρια το βαρέλι, ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης δεν θα ασκήσει το δικαίωμά του, οπότε η εταιρεία θα αγοράσει το πετρέλαιο από τη αγορά μετρητοίς προς 110$ το βαρέλι και θα καταβάλει 110$Χ1.000=110.000$, ενώ θα έχει λάβει 1,20$Χ1.000=1.200$ από την πώληση του δικαιώματος, οπότε το συνολικό κόστος της επιχείρησης θα είναι 108.800$. Αν όμως μετά από τρεις μήνες στη λήξη του δικαιώματος η τιμή του αργού πετρελαίου μειωθεί στα 90$ το βαρέλι, ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης, θα ασκήσει το δικαίωμα του πουλώντας το προϊόν στην εταιρεία. Η εταιρεία θα πληρώσει 105,20$Χ1.000=105.200$ και θα εισπράξει από την πώληση του δικαιώματος 1.200$, οπότε το συνολικό κόστος της επιχείρησης θα είναι 104.000$.

Αν η εταιρεία δεν επέλεγε την αγορά παραγώγων, θα αναγκαζόταν να αγοράσει το προϊόν από την αγορά μετρητοίς προς 90$ το βαρέλι και θα πλήρωνε 90.000$. Το επιπλέον ποσό των 10.000$ (100.000-90.000) το οποίο κατέβαλε η εταιρεία οφείλεται στο γεγονός ότι πούλησε το δικαίωμα στον αγοραστή δικαιώματος πώλησης, παραχωρώντας την δυνατότητα άσκησης του δικαιώματος όταν την συμφέρει. Έτσι ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης πούλησε πλέον το προϊόν της στα 105,20$ μέσω της αγοράς παραγώγων και όχι στα 90$ που ήταν η τιμή του προϊόντος στην αγορά μετρητοίς, με αποτέλεσμα το ποσό των 10.000$ που έχασε η εταιρεία να το κερδίσει αυτός.

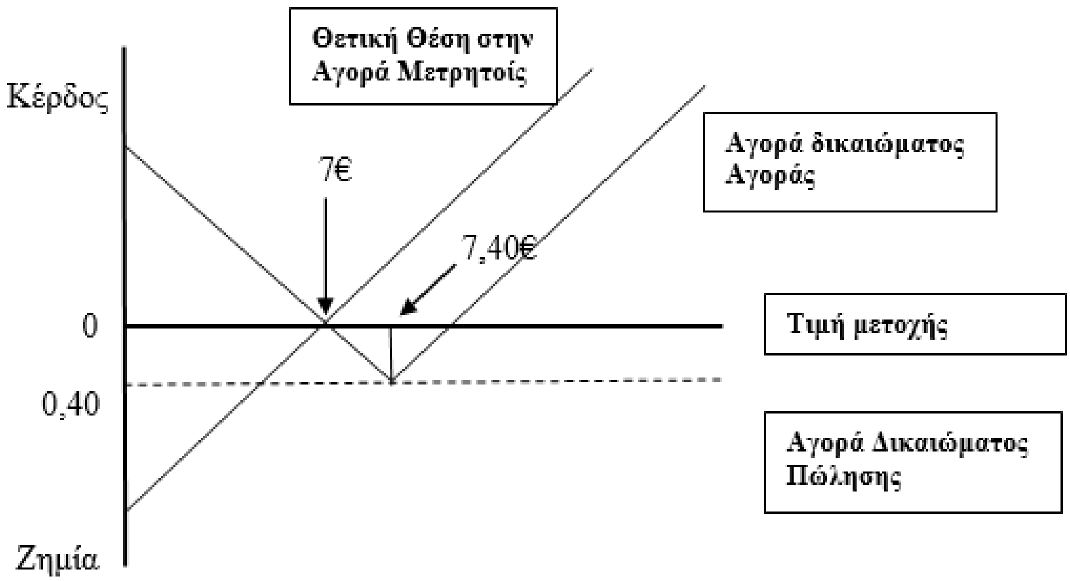


Σχήμα: Αντιστάθμιση με Πώληση Δικαιώματος Πώλησης

Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου ένας επενδυτής κατέχει θετική θέση στην αγορά μετρητής και επιθυμεί να προστατευτεί από ενδεχόμενη πτώση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος χωρίς όμως να μηδενίσει την κερδοφορία του σε περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ανέβει. Σε αυτήν την περίπτωση ενδείκνυται για τον επενδυτή η αντιστάθμιση με αγορά δικαιώματος πώλησης ή με πώληση δικαιώματος αγοράς.

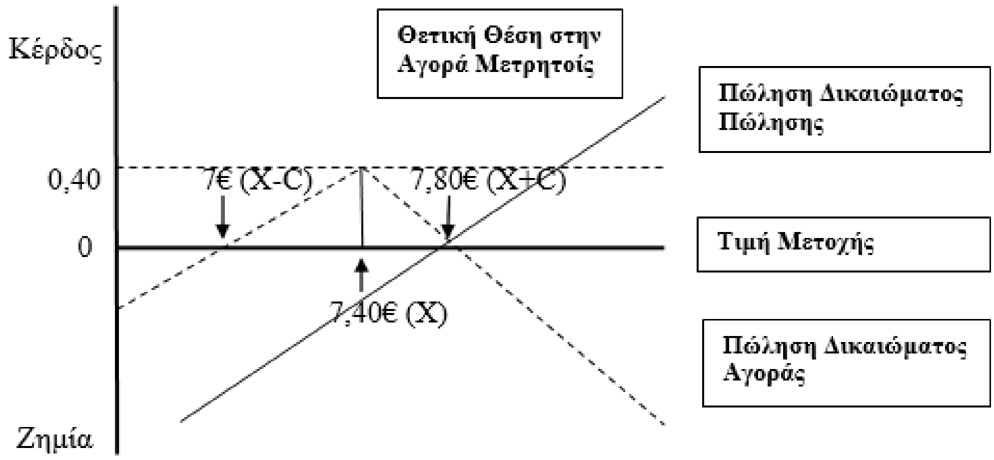
Παράδειγμα: Όπως και σε προηγούμενο παράδειγμα, έστω πάλι ότι έχουμε έναν επενδυτή ο οποίος αγόρασε 100 μετοχές μιας εταιρείας στην τιμή των 7 ευρώ. Ο επενδυτής έχει σκοπό να κρατήσει τις μετοχές και να τις πουλήσει μετά από έξι μήνες. Έτσι ο επενδυτής έχει μια θετική θέση στην αγορά μετρητοίς, διότι όσο αυξάνεται η τιμή της μετοχής αυξάνεται και το κέρδος του, ενώ όσο μειώνεται η τιμή της μετοχής το κέρδος του μειώνεται, επιπλέον αν η τιμή της μετοχής δεν μεταβληθεί ο επενδυτής δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία. Ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης ή να πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς. Αν αποφασίσει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης έχει την ευχέρεια να επιλέξει ο ίδιος αν τον συμφέρει να προχωρήσει στην συναλλαγή μέσω της αγοράς παραγώγων, ενώ αν αποφασίσει να πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς παραχωρεί το δικαίωμα στον αγοραστή να επιλέξει.

Έστω ο επενδυτής επιλέγει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης. Παρέχεται λοιπόν ένα δικαίωμα πώλησης για 100 μετοχές της εταιρείας με τιμή άσκησης 7,40 ευρώ και διάρκειας 6 μήνες. Αν μετά από 6 μήνες στην λήξη του δικαιώματος η τιμή της μετοχής πέσει στα 4 ευρώ, ο επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα πουλώντας τις μετοχές του μέσω της αγοράς παραγώγων λαμβάνοντας 7,40€Χ100=740€, το κόστος αγοράς δικαιώματος ήταν 40€ και το κόστος αγοράς των μετοχών ήταν 7€Χ100=700€, οπότε το συνολικό κέρδος θα είναι 740€ - 40€ - 700€ = 0€. Αν ο επενδυτής δεν επέλεγε την αγορά παραγώγων, θα έπρεπε να πουλήσει την μετοχή στα 4€ έχοντας ζημία 300€. Αν όμως στην λήξη του δικαιώματος η τιμή της μετοχής έχει ανέβει στα 10 ευρώ ανά μετοχή, ο επενδυτής δεν θα ασκήσει το δικαίωμά πώλησης και θα πουλήσει την μετοχή στην αγορά προς 10 ευρώ, λαμβάνοντας 10€Χ100=1.000€, ενώ θα έχει πληρώσει 0,40Χ100=40€ για την αγορά του δικαιώματος και 7€Χ100=700 ευρώ για την αγορά μετοχών, οπότε το συνολικό κέρδος θα είναι 1.000€ – 40€ – 700€ = 260€.



Σχήμα: Αντιστάθμιση με Αγορά Δικαιώματος Πώλησης

Έστω ο επενδυτής επιλέγει αντιστάθμιση με την πώληση δικαιώματος αγοράς. Οπότε πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς για 100 μετοχές της εταιρείας προς 0,40€ ανά μετοχή, διάρκειας 6 μήνες και τιμή άσκησης 7,40€. Αν μετά από έξι μήνες στην λήξη του δικαιώματος η τιμή της μετοχής πέσει στα 4 ευρώ τότε αυτός που αγόρασε το δικαίωμα αγοράς δεν θα το ασκήσει, οπότε ο επενδυτής θα πουλήσει την μετοχή στην αγορά προς 4€ και θα λάβει 4€Χ100= 400€, επίσης θα έχει λάβει 0,40€Χ100=40€ για την πώληση του δικαιώματος και θα έχει πληρώσει 7€Χ100=700€ για την αγορά των μετοχών. Η συνολική ζημία θα είναι 400€ + 40€ - 700€ = 260€. Αν ο επενδυτής δεν επέλεγε την αγορά παραγώγων θα έπρεπε να πουλήσει την μετοχή προς 4€ και η συνολική ζημία του θα ήταν 300€. Αν όμως στην λήξη του δικαιώματος η τιμή της μετοχής αυξηθεί στα 10 ευρώ, τότε αυτός που αγόρασε το δικαίωμα θα ασκήσει το δικαίωμα και θα αγοράσει τις μετοχές μέσω της αγοράς παραγώγων καταβάλλοντας 7,40€Χ100=740€. Ο επενδυτής θα λάβει 740€ από την αγορά μετοχών, εισέπραξε ήδη 40€ από την πώληση του δικαιώματος και παράλληλα πλήρωσε 700€ για την αγορά των μετοχών, οπότε το συνολικό του κέρδος θα είναι 740€ + 40€ - 700€ = 80€. Αν ο επενδυτής δεν κατέφευγε στην αγορά παραγώγων θα λάμβανε 10€Χ100=1.000€ και θα είχε κέρδος 300€, δεν θα αντιστάθμιζε όμως τον κίνδυνο από μια ανεπιθύμητη πτώση της τιμής της μετοχής.



Όπου X=Τιμή Άσκησης Δικαιώματος και C=Τιμή Δικαιώματος Αγοράς

Σχήμα: Αντιστάθμιση με Πώληση Δικαιώματος Αγοράς

2.3.2 Αντισταθμίζοντας τον κίνδυνο CVaR

Αν και έχουν αναπτυχθεί μέτρα κινδύνου (όπως οι VaR, CVaR) τα οποία ποσοτικοποιούν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, οι επιλογές για μείωση του κινδύνου με συνέπεια σε κάποιο μέτρο κινδύνου είναι επικίνδυνες. Μια μέθοδος μείωσης κινδύνου είναι η ρευστοποίηση του χαρτοφυλακίου αλλά αυτό μπορεί να είναι ακριβό καθώς μπορεί να εγείρει επενδυτικές απώλειες, κόστη συναλλαγών και ρευστοποίησης θυσιάζοντας έτσι τα μελλοντικά κέρδη.

Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να επιτυγχάνουμε μείωση του κινδύνου αγοράζοντας δικαιώματα προαίρεσης καθώς είναι μια λιγότερα ακριβή μέθοδος ρευστοποίησης. Τα δικαιώματα προαίρεσης προσφέρουν ένα κατώτατο όριο για τις απώλειες. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένη διαχείριση κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή, αν για παράδειγμα το δικαίωμα προαίρεσης δεν μπορεί να αγοραστεί στην σωστή τιμή (δηλαδή όταν κατά την μέτρηση κινδύνου της CVaR στο συγκεκριμένο όριο) μπορεί να βρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά είναι αξιοσημείωτα υψηλότερη από ότι συνεπάγεται η εξίσωση (15). Επομένως, μπορεί να είναι καλύτερα να μην αντισταθμίζουμε τον κίνδυνο με δικαιώματα προαίρεσης.

Αν, ωστόσο, χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (15) μπορούμε να αντισταθμίσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου πιο αποτελεσματικά. Πρώτον, χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα εξίσωση αντιλαμβανόμαστε ότι θα μπορούμε να εξαλείψουμε πλήρως το CVaR κίνδυνο, σε ένα συγκεκριμένο κατώτατο όριο βέβαια, αγοράζοντας δικαιώματα προαίρεσης πώλησης με strike K όπου K = V(t)-VaR. Αυτό είναι εφικτό από οικονομικής άποψης καθώς τα δικαιώματα προαίρεσης θέτουν ως κατώτατο όριο απώλειας την τιμή τους. Συμπερασματικά, η CVaR γίνεται μηδέν επειδή το δικαίωμα προαίρεσης θα αντισταθμίσει αυτές τις απώλειες.

Δεύτερον, η εξίσωση (15) θα υπολογίζει το κόστος της αντιστάθμισης κινδύνου CVaR με δικαιώματα πώλησης. Επειδή οι υποκείμενοι τίτλοι και τα δικαιώματα προαίρεσης διαπραγματεύονται σε χωριστές αγορές, είναι πιθανό για τα δικαιώματα πώλησης που δίνει η εξίσωση (15) (για ένα συγκεκριμένο CVaR) να διαφέρουν από τις τιμές που διαπραγματεύονται για τα δικαιώματα. Συνεπώς, οι αγορές που διαπραγματεύονται δικαιώματα προαίρεσης μπορεί να υπερχρεώνουν σχετικά με αυτό που υποδεικνύει η εξίσωσή μας, άρα μπορεί να είναι φθηνότερο να ρευστοποιήσουμε το χαρτοφυλάκιο με μείωση της CVaR. Αιτία για τις διαφορές στις τιμές μπορεί να είναι τα υψηλά κόστη συναλλαγών και οι συνέπειες της ρευστότητας, η οποία συνδέεται με την εκάστοτε κατάσταση της αγοράς.

2.3.3 Ο κίνδυνος των δικαιωμάτων πώλησης από τη σκοπιά των πωλητών

2.3.3.1 Συναλλαγές σε δικαιώματα προαίρεσης

Μεταβλητός βαθμός κινδύνου

Οι συναλλαγές σε δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι υψηλού κινδύνου. Οι αγοραστές και οι πωλητές δικαιωμάτων προαίρεσης πρέπει να αντιλαμβάνονται τις διαφορές των δικαιωμάτων αγοράς (calls) και των δικαιωμάτων πώλησης (puts) πριν την διενέργεια συναλλαγών. Θα πρέπει οι

Επενδυτές πριν προβούν σε οποιαδήποτε συναλλαγή να υπολογίσουν πόσο θα πρέπει να κινηθεί η υποκείμενη αξία για να καταστεί κερδοφόρος η θέση τους, συνυπολογίζοντας στο τίμημα του δικαιώματος (premium), όλες τις προμήθειες.

Ο αγοραστής Δικαιωμάτων Προαίρεσης μπορεί να αντισταθμίσει (offset) ή να ασκήσει τα Δικαιώματα Προαίρεσης ή να αφήσει τα Δικαιώματα Προαίρεσης να λήξουν. Η άσκηση Δικαιώματος Προαίρεσης έχει ως αποτέλεσμα είτε έναν χρηματικό διακανονισμό ή την απόκτηση ή την παράδοση της υποκείμενης αξίας. Εάν η υποκείμενη αξία του Δικαιώματος Προαίρεσης είναι Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης, ο αγοραστής θα αποκτήσει θέση σε Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης με τις σχετικές υποχρεώσεις και κινδύνους. Στην περίπτωση που κάποιο δικαίωμα προαίρεσης λήξει χωρίς να μπορεί να ασκηθεί, τότε ο Επενδυτής χάνει το συνολικό ποσό της επένδυσής του που είναι η τιμή αγοράς του δικαιώματος (premium), πλέον τις προμήθειες. Η αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης με τιμή εξάσκησης (strike price) σημαντικά υψηλότερη (σε περίπτωση call) ή χαμηλότερη (σε περίπτωση put), από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας, μειώνει την πιθανότητα άσκησης του δικαιώματος.

ii. Η πώληση δικαιωμάτων προαίρεσης είναι υψηλότερου κινδύνου από την αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης. Ενώ το μέγιστο κέρδος είναι συγκεκριμένο (το premium που εισπράττει ο πωλητής), η μέγιστη ζημία είναι απεριόριστη και δεν περιορίζεται στο ύψος του περιθωρίου ασφάλισης. Επίσης, ο πωλητής δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να κληθεί να καταβάλει περιθώριο ασφάλισης στην περίπτωση που η αγορά κινηθεί αντίθετα από τη θέση του.

Επίσης, ο πωλητής δικαιώματος προαίρεσης στην περίπτωση που ο αγοραστής ασκήσει το δικαίωμά του, θα αναγκαστεί να διακανονίσει το Δικαίωμα Προαίρεσης ή χρηματικώς ή με φυσική παράδοση ή παραλαβή της υποκείμενης αξίας. Εάν η υποκείμενη αξία του Δικαιώματος Προαίρεσης είναι ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης, ο πωλητής θα αποκτήσει θέση στο Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης και τις σχετικές υποχρεώσεις και κινδύνους. Εάν ο πωλητής δικαιώματος προαίρεσης έχει αντίθετη θέση στην υποκείμενη αξία, τότε ο κίνδυνος ελαττώνεται σημαντικά. Σε αντίθετη περίπτωση ο κίνδυνος μπορεί να είναι απεριόριστος.

iii. Στρατηγικές μειωμένου κινδύνου όπως οι συνδυασμένες στρατηγικές (straddles) και οι στρατηγικές διασποράς (spreads) υπό ορισμένες συνθήκες μπορεί να αποδειχθούν το ίδιο επικίνδυνες με τις ανοιχτές θέσεις (LONG-SHORT).

Κίνδυνος

Οι αγοραστές δικαιωμάτων προαίρεσης έχουν ένα μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με τους κατόχους προθεσμιακών και συμβολαίων futures και αυτό έγκειται στο αρκετά περιορισμένο μέγεθος ζημίας που ενδέχεται να υποστούν. Συγκεκριμένα, η μέγιστη ζημία τους περιορίζεται στην τιμή του συμβολαίου (premium). Από την άλλη πλευρά ο πωλητής-εκδότης του δικαιώματος έχει περιορισμένα κέρδη, αλλά απεριόριστες ζημίες. Το πλεονέκτημα του περιορισμένου κινδύνου εκμεταλλεύονται τόσο οι hedgers όσο και οι κερδοσκόποι προκειμένου να επωφεληθούν από τις ευνοϊκές κινήσεις της αγοράς, έχοντας παράλληλα περιορισμένη έκθεση στο κίνδυνο.

Για να είναι κερδοφόρα η επιλογή των επενδυτών σε options, η αγορά δεν αρκεί να κινηθεί μόνο προς την επιθυμητή κατεύθυνση αλλά να κινηθεί υψηλότερα, καλύπτοντας το κόστος της τιμής του συμβολαίου. Για παράδειγμα ένας κάτοχος δικαιώματος αγοράς (call option), θα ζημιωθεί, αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου την ημέρα παράδοσης είναι σταθερή με την τιμή εξάσκηση μου συμφωνήθηκε στη σύμβαση, ή δεν αυξήθηκε τόσο, ώστε να υπερκαλύψει το κόστος (premium) του δικαιώματος . Αντίθετα, στην προθεσμιακή αγορά, εάν η αγορά παραμένει σταθερή, ο επενδυτής δεν θα επηρεαστεί αν εξαιρέσουμε το αμελητέο κόστος συναλλαγής. Επομένως, θα μπορούσε να γίνει δεκτό ότι ο κίνδυνος στις συναλλαγές με options έγκειται στο γεγονός ότι η αγορά δεν θα κινηθεί αρκετά προς τη σωστή κατεύθυνση έτσι ώστε να ανακτήσει την πριμοδότηση. Ενώ αντίθετα, ο κίνδυνος των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι η αγορά να κινηθεί έντονα προς τη μη επιθυμητή κατεύθυνση. Θα πρέπει να γίνει επίσης κατανοητό ότι ο πωλητής των options έχει σχεδόν τον ίδιο κίνδυνο όπως ο κάτοχος ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης, με τη μόνη διαφορά ότι λάβει την πριμοδότηση (ασφάλιστρο) ως «μαξιλάρι» ασφάλειας. Η αγορά πρέπει να κινηθεί πολύ δυναμικά εναντίον του εκδότη του δικαιώματος ,προκειμένου να αντισταθμίσει το ασφάλιστρο και να του δημιουργήσει ζημίες, αλλά από τη στιγμή που ξεπεράσει το συγκεκριμένο όριο, οι απώλειες μπορεί να είναι ανυπολόγιστες για τον πωλητή.

Περιθώριο

Σε γενικές γραμμές τα περιθώρια ασφάλισης δεν ισχύουν για τον αγοραστή των δικαιωμάτων είτε αυτά είναι δικαιώματα αγοράς, είτε πώλησης, δεδομένου ότι το ασφάλιστρο που καταβάλουν καλύπτει ήδη τη μέγιστη απώλεια. Αντίθετα, ο πωλητής σε χρηματιστηριακά δικαιώματα προαίρεσης θα διατηρήσει ένα λογαριασμό περιθωρίου παρόμοιο με εκείνον των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Επιπλέον εξωχρηματιστηριακά, ανάλογα με την συμφωνία των δύο μερών, μπορεί να κρατείται λογαριασμός περιθωρίου ασφάλισης ο οποίος θα ενημερώνεται καθημερινά με την εκκαθάριση των συναλλαγών.

Ρευστότητα

Για τους ίδιους λόγους, που τα προθεσμιακά συμβόλαια έχουν χαμηλότερη ρευστότητα από τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, τα εξωχρηματιστηριακά δικαιώματα παρουσιάζουν ακόμα χαμηλότερη ρευστότητα σε σύγκριση με τα futures. Οι λόγοι αυτοί περιλαμβάνουν τις μεγάλες διαφορές στην προσφορά και ζήτηση, προσφοράς-ζήτησης, την χρονοβόρα διαδικασία διευθέτησης των όρων και της επιθυμητής τιμής, το πιστωτικός κίνδυνος, και άλλους. Οι αγορές δικαιωμάτων που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη ρευστότητα είναι αυτές επί των futures και όχι απευθείας επί των υποκείμενων προϊόντων τους. Αυτό συμβαίνει γιατί οι αγορές των futures παρουσιάζουν μεγαλύτερη ρευστότητα από τις αγορές των υποκείμενων προϊόντων τους. Επομένως ο επενδυτής θα προτιμήσει να αναλάβει συμβόλαια σε ρευστοποιήσιμες αγορές ώστε να μπορεί με τη σειρά του ανά πάσα στιγμή να ρευστοποιήσει το συμβόλαιο του. Επιπλέον ο αγοραστής του συγκεκριμένου δικαιώματος δεν θα χρειαστεί στην παράδοση να καταβάλει τη τιμή του υποκείμενου προϊόντος αλλά μόνο ένα μικρό περιθώριο ασφάλισης. Η δυνατότητα μόχλευσης που προσφέρουν τα futures κάνουν ευρέως διαδεδομένα τα δικαιώματα προαίρεσης σε αυτά, αυξάνοντας τον όγκο συναλλαγών και το βαθμό ρευστότητας στην αγορά.

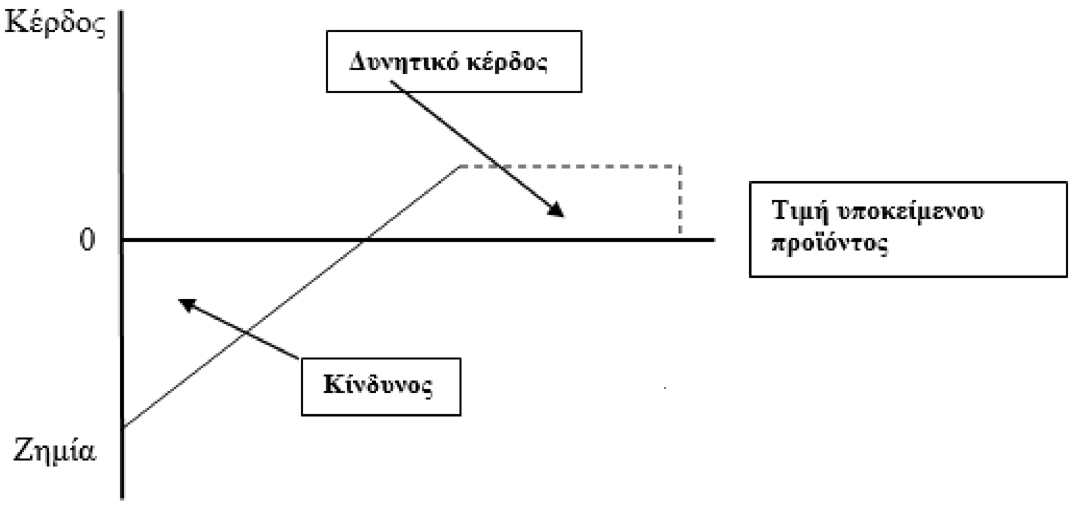
2.3.3.2 Πώληση Δικαιώματος Πώλησης (short put)

Ο πωλητής δικαιώματος πώλησης έχει διαφορετικές προσδοκίες από τον αγοραστή δικαιώματος πώλησης και εκτιμά ότι θα υπάρξουν σταθεροποιητικές ή ανοδικές τάσεις στην αγορά και γι' αυτό το λόγο δέχεται να αναλάβει την υποχρέωση να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν, στην καθορισμένη τιμή άσκησης αποκομίζοντας μια ανταμοιβή (αντίτιμο), δηλαδή την τιμή του δικαιώματος. Εφόσον οι εκτιμήσεις του πωλητή δικαιώματος πώλησης επαληθευτούν και η τιμή του υποκείμενου προϊόντος είναι υψηλότερη από την τιμή άσκησης, δεν θα συμφέρει στο αγοραστή να ασκήσει το δικαίωμά του, οπότε ο πωλητής θα πραγματοποιήσει κέρδος ίσο με την τιμή του δικαιώματος. Αντιθέτως, εάν δεν επαληθευτούν οι εκτιμήσεις του πωλητή δικαιώματος πώλησης και η τιμή του υποκείμενου προϊόντος πέσει σε τιμή χαμηλότερη από την τιμή άσκησης, ο αγοραστής θα ασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής οφείλει να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν σε τιμή υψηλότερη από αυτήν που ισχύει στην τρέχουσα αγορά. Στην περίπτωση αυτή ο πωλητής θα έχει ζημία, η οποία όμως θα είναι περιορισμένη διότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος δεν μπορεί να είναι μικρότερη του μηδενός. Όταν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος είναι ίση με την τιμή άσκησης μείον την τιμή του δικαιώματος, τότε ο πωλητής δεν πραγματοποιεί ούτε κέρδος ούτε ζημία (Αλεξάκης, 2005).

Παράδειγμα: Έστω ένας επενδυτής εκτιμά ότι η τιμή μιας μετοχής θα παραμείνει σταθερή ή θα αυξηθεί. Πουλάει λοιπόν ένα δικαίωμα πώλησης επί της μετοχής αυτής με τιμή άσκησης 7 ευρώ εισπράττοντας ασφάλιστρο (τιμή του Δικαιώματος) 0,20 ευρώ ανά μετοχή, ένα συμβόλαιο περιλαμβάνει 100 μετοχές, άρα εισέπραξε 20 ευρώ. Αν η τιμή της μετοχής την ημέρα λήξης του δικαιώματος είναι 9 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα ασκήσει το δικαίωμά του και το κέρδος του πωλητή θα είναι ίσο με το ποσό του ασφαλίστρου, δηλαδή 0,20 ευρώ ανά μετοχή ήτοι 20 ευρώ συνολικά. Στην αντίθετη περίπτωση, που η τιμή της μετοχής πέσει στα 5 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα ασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής του δικαιώματος θα υποχρεωθεί να αγοράσει τις μετοχές στην τιμή των 7 ευρώ, χάνοντας 2 ευρώ (7-5) ανά μετοχή (αφού στην αγορά θα τις έβρισκε με 5 ευρώ). Οπότε η ζημία για των πωλητή θα είναι:

Τιμή μετοχής στη λήξη	5 ευρώ
(Πλέον) Ασφάλιστρο (τιμή δικαιώματος) ανά μετοχή	0,20 ευρώ
(Μείον) Τιμή άσκησης	7 ευρώ
Καθαρή ζημία ανά μετοχή	(1,80 ευρώ)
Καθαρή συνολική ζημία	(180 ευρώ)

Αν στην ημερομηνία λήξης η τιμή της μετοχής είναι 6,80 ευρώ, ο πωλητής δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία, διότι το άθροισμα της τιμής της μετοχής στην λήξη συν το ασφάλιστρο, θα είναι ίσο με την τιμή άσκησης.



Σχήμα: Πώληση δικαιώματος πώλησης

2.3.3.3 Παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης

Οι κυριότεροι παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης και λαμβάνονται υπόψη σε όλα κατά περίπτωση τα υποδείγματα αποτίμησης δικαιωμάτων (Black and Scholes, Διωνυμικό υπόδειγμα), είναι οι εξής:

- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου
- Η τιμή άσκησης του δικαιώματος
- Η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου
- Ο χρόνος που απομένει μέχρι την λήξη του συμβολαίου
- Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο
- Η προσδοκώμενη μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια που ισχύει το συμβόλαιο

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την τιμή ενός δικαιώματος. Όπως αναφέραμε νωρίτερα η τιμή του δικαιώματος διαμορφώνεται από τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην τιμή άσκησης, την τιμή του υποκείμενου τίτλου και την αξία του χρόνου, οπότε είναι εμφανές ότι με σταθερές την τιμή άσκησης και την αξία του χρόνου, οι μεταβολές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου θα επηρεάζουν άμεσα την τιμή του δικαιώματος. Συγκεκριμένα όσο αυξάνεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου τόσο αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος. Αντίστροφα για ένα δικαίωμα πώλησης, όσο μειώνεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου, τόσο αυξάνεται η τιμή του δικαιώματος.

Η τιμή άσκησης του δικαιώματος

Κατά παρόμοιο τρόπο αν ληφθεί υπόψη η σχέση που αναφέραμε νωρίτερα και που διαμορφώνει την τιμή του δικαιώματος παρατηρούμε ότι, με σταθερή την τιμή του υποκείμενου αγαθού και την αξία του χρόνου, οι μεταβολές στην τιμή άσκησης θα επηρεάζουν άμεσα την τιμή του δικαιώματος. Συγκεκριμένα για ένα δικαίωμα αγοράς όσο αυξάνεται η τιμή άσκησης τόσο μειώνεται η τιμή του δικαιώματος. Αντίθετα για ένα δικαίωμα πώλησης όσο αυξάνεται η τιμή άσκησης τόσο αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος.

Η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου

Λέγοντας μεταβλητότητα εννοούμε την τυπική απόκλιση της απόδοσης ενός υποκείμενου αγαθού, η οποία μετρά το μέγεθος των διακυμάνσεων της τιμής του υποκείμενου τίτλου, συγκριτικά με τον μέσο όρο για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Όσο μεγαλύτερη μεταβλητότητα παρουσιάζει ένας υποκείμενος τίτλος τόσο αυξημένη προβλέπεται να είναι και η τιμή του δικαιώματος. Αυτό ισχύει για κάθε είδους δικαίωμα (Αλεξάκης, 2005).

Ο χρόνος που απομένει μέχρι την λήξη του συμβολαίου

Όσο μειώνεται ο χρόνος που ισχύει ένα δικαίωμα, τόσο μειώνεται η πιθανότητα η τιμή του υποκείμενου τίτλου να αποκλίνει σημαντικά από τα τρέχοντα επίπεδα. Άρα όσο μικρότερης διάρκειας είναι ένα δικαίωμα, τόσο η αξία του χρόνου μειώνεται. Στην λήξη η αξία του χρόνου είναι μηδενική και η τιμή του δικαιώματος είναι ίση με την εσωτερική αξία (Αλεξάκης, 2005).

Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο

Για την αγορά ενός δικαιώματος, χρειάζεται μικρότερη δέσμευση κεφαλαίου από αυτό που θα απαιτούνταν για την απόκτηση ενός υποκείμενου τίτλου στην τρέχουσα αγορά. Επομένως το μέρος του κεφαλαίου που δεν δεσμεύεται θα μπορούσε να επενδυθεί στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Όσο υψηλότερο είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο τόσο μεγαλύτερη θα είναι η απόδοση του κεφαλαίου που απομένει από την συναλλαγή σε δικαιώματα. Άρα, όταν αυξάνεται το επιτόκιο, αυξάνεται η τιμή του δικαιώματος αγοράς και, αντίστροφα, μειώνεται η τιμή του δικαιώματος πώλησης (Λιβάνης και Γεωργιάδης, 2002).

Η προσδοκώμενη μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια που ισχύει το συμβόλαιο

Ο κάτοχος ενός υποκείμενου τίτλου που είναι μια μετοχή κατά καιρούς εισπράττει μερίσματα. Το προνόμιο αυτό δεν το έχει ο κάτοχος ενός δικαιώματος και επειδή οι πληρωμές μερισμάτων έχουν σαν αποτέλεσμα την μείωση της τιμής της μετοχής (υποκείμενου τίτλου), τα μεγαλύτερα μερίσματα μειώνουν την αξία ενός δικαιώματος αγοράς και αυξάνουν την αξία ενός δικαιώματος πώλησης (Λιβάνης και Γεωργιάδης, 2002).

Συμπερασματικά, ένας πωλητής δικαιώματος πώλησης ο οποίος πουλά ένα δικαίωμα P θα είναι υπεύθυνος για την εξόφληση του όταν αυτό λήγει in the money, δηλαδή max (K - X(T),0). Επομένως, ο πωλητής ενδιαφέρεται για το ρίσκο στον οποίο εκθέτει τον εαυτό του κάθε φορά που πουλάει ένα δικαίωμα. Στην πραγματικότητα, η πώληση ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι αξιοσημείωτα πιο επικίνδυνη από την αγορά. Η εξίσωση (15) ποσοτικοποιεί τον CVaR κίνδυνο τον οποίο ένας πωλητής δικαιώματος πώλησης αντέχει και γι' αυτό η εν λόγω εξίσωση καθιστάτε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τη διαχείριση κινδύνου. Επίσης, η εν λόγω εξίσωση μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τις μεταβλητές που επηρεάζουν τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο πωλητής. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος CVaR που αναλαμβάνει πωλητής δεν είναι απλά μια συνάρτηση των μεταβλητών αποτίμησης (X(t), K, T, κτλ.) του δικαιώματος αλλά και του β, επομένως η κατανομή απωλειών επηρεάζει εξίσου τον κίνδυνο του πωλητή. Επιπρόσθετα, όταν 0 < β < 1 τότε ο κίνδυνος που αναλαμβάνει ο πωλητής είναι πάντα πολλαπλάσιο της τιμής του δικαιώματος και ο κίνδυνος αυξάνεται σημαντικά με μικρή αύξηση του β.

2.3.4 Μοντελοποίηση εφαρμογής της σχέσης μεταξύ CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης

Η σχέση μεταξύ CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης (εξίσωση 11) είναι εφαρμόσιμη σε πληθώρα μοντέλων και εφαρμογών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η σχέση είναι ανεξάρτητη μοντέλου και δεν κάνει υποθέσεις για κατανομές, προτίμηση κινδύνου και πληρότητα αγοράς, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορα μοντέλα options και σε διαφορετικούς υποκείμενους τίτλους.

Η σχέση CVaR-option (εξίσωση 11) είναι μια εύχρηστη εξίσωση, ως εκ τούτου, μπορεί κανείς να εξάγει τη CVaR για σχεδόν κάθε υποκείμενο τίτλο που αφορά μοντέλα δικαιωμάτων προαίρεσης. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο καθώς πολλά μοντέλα έχουν ιδιότητες κατανομών και αυτό καθιστά την εξαγωγή του CVaR δυσεπίλυτη. Για να πάρουμε τη CVaR από μοντέλα option χρησιμοποιώντας την εξίσωση (11), τα μόνα που πρέπει να γνωρίζουμε είναι τα β, VaR(=X(t)-K) και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (X(t), K και r είναι όλα γνωστά).

Δίνουμε τώρα ένα παράδειγμα εξαγωγής της CVaR από το μοντέλο Black-Scholes. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο αποτίμησης option, η τιμή P ενός put option είναι (Hull,2000):

$$P = Ke^{-r(T-t)}\Phi^P(-d_2) - X(t)\Phi^P(-d_1) \tag{18}$$

Όπου Φ^P (.) είναι η συνάρτηση τυπικής κανονικής αθροιστικής κατανομής, υπό το μέτρο πιθανότητας *P και τα d_1,d_2* ορίζονται ως εξής (από Black-Scholes):

$$d_1 = \frac{\ln(X(t)/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(X(t)/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$
$$= d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Τώρα υπό το μοντέλο των Black-Scholes είναι γνωστό ότι:

$$CVaR^Q = X(t)(1 - \frac{e^{r(T-t)}\Phi^P(-d_1)}{\Phi^P(-d_2)} \tag{19}$$

Ένα άλλο πλεονέκτημα της σχέσης μεταξύ CVaR και δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ότι δεν απαιτεί τεχνικές υπολογισμού πολύπλοκων παραμέτρων για να εκτιμήσει το CVaR από τα δικαιώματα προαίρεσης ή το αντίστροφο. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, για να εξάγουμε τη CVaR από options, πρέπει να γνωρίζουμε τη VaR(=X(t)-K) και το r και όλα αυτά είναι εμπειρικά παρατηρίσιμα, οπότε δε χρειάζεται καμία εκτίμηση. Για να καθορίσουμε το β, υπάρχουν πολλές σύντομες τεχνικές για εκτίμηση ποσοστημορίων και κάποια μοντέλα αποτίμησης option μπορούν να το υπολογίσουν αναλυτικά (π.χ. Heston, 1993). Θα μπορούσε κανείς να εφαρμόσει και τη χωρίς μοντέλο σχέση των Breeden-Litzenberger (εξίσωση 9) για να καθορίσει το ουδέτερου κινδύνου β^{Q} απευθείας από τα δεδομένα των options.

2.3.5 Παρατηρησιμότητα του κινδύνου CVaR

Τα περισσότερα μέτρα κινδύνου δεν είναι παρατηρήσιμα στην αγορά, επομένως θα πρέπει να υπολογίζονται από κάποιο μοντέλο. Αυτό μπορεί να προκαλέσει προβλήματα διαχείρισης του κινδύνου επειδή τα μοντέλα, γενικά, δεν αντανακλούν με ακρίβεια την άποψη της αγοράς για τον κίνδυνο (ανεξάρτητα από το μέτρο κινδύνου).Για παράδειγμα, ένα μοντέλο κινδύνου μπορεί να υπολογίζει ότι ο κίνδυνος θα είναι αρκετά χαμηλός τις επόμενες μέρες, όμως η οπτική της αγοράς να ισχυρίζεται το ακριβώς αντίθετο.

Χρησιμοποιώντας όμως την εξίσωση (11) παρατηρούμε ότι μπορούμε να παρατηρήσουμε την άποψη της αγοράς για τη CVaR από διαπραγματευόμενα δεδομένα δικαιωμάτων προαίρεσης. Πρόκειται για μεγάλο πλεονέκτημα επειδή λαμβάνουμε υπόψιν μας την άποψη της αγοράς, αντί να στηριζόμαστε αποκλειστικά στο μοντέλο ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος. Επιπλέον, καθώς γενικά πιστεύεται ότι η αγορά λαμβάνει υπόψιν της προνοητικές πληροφορίες, μπορεί να θεωρηθεί ότι προσφέρει μια ακριβέστερη ικανότητα πρόβλεψης του κινδύνου σε σχέση με αυτή που προσφέρουν τα μοντέλα διαφόρων χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.

Κεφάλαιο 3

3.1 Μέθοδοι

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε αρχικά τη μέθοδο υπολογισμού του ουδέτερου κινδύνου CVaR υπό την υπόθεση του Black – Scholes μοντέλου και στη συνέχεια τη μέθοδο που δεν βασίζεται σε καμία παραδοχή για κατανομές. Η Black – Scholes τεκμαρτή ουδέτερου κινδύνου CVaR ή πιο απλά η τεκμαρτή CVaR υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (19), όπου η μεταβλητότητα που εφαρμόζεται είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα (η μεταβλητότητα είναι συνεπής με τις χρηματιστηριακές τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης). Υποθέτοντας ότι μπορούμε να παρατηρήσουμε τα Put/Call Price, r, T, K και το X(t) για το option, η τεκμαρτή μεταβλητότητα μπορεί να υπολογιστεί με πολλά προγράμματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχθηκε η Matlab και η περιγραφή του κώδικα είναι η εξής:

- ✓ Δημιουργούμε μια συνάρτηση οπού θα έχει ως μεταβλητές εισόδου τα S(stock price), K(strike price),r, T, t, Call/Put Value και μεταβλητή εξόδου τη CVaR.
- ✓ Γράφουμε κατάλληλα την εξίσωση (19) και ξεχωριστά τις εξισώσεις που περιέχει όπως οι σχέσεις για την εύρεση των d_1,d_2.
- ✓ Για να βρούμε τη τεκμαρτή μεταβλητότητα μετασχηματίζουμε κατάλληλα τη σχέση τιμολόγησης για option από τους Black – Scholes όπου ο μονός άγνωστος στην εξίσωση αυτή είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Για να βρούμε λύση αυτής της εξίσωσης μας βοηθά η εντολή fsolve.

Συγκεκριμένα οι κώδικας για την εύρεση του CVaR είναι:

```
function [ CVaR ] =  dipl(S,K,sigma,r,T,t)
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma^2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t));
d2=d1-sigma*sqrt(T-t);
pd=makedist('Normal',0,1);
CVaR=S*(1-(exp(r*(T-t))*cdf(pd,-d1))/cdf(pd,-d2));
end
```

Αν όλα τα παραπάνω έχουν γίνει σωστά και σύμφωνα με το λογισμικό θα πάρουμε τα ζητούμενα. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της εντολής plot κατασκευάζουμε τα διαγράμματα Strike Prices – Implied Volatility και Strike Prices – Risk Neutral CVaR.

Η ανεξάρτητη παραδοχών περί κατανομών ουδέτερου κινδύνου CVaR λαμβάνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (11). Αφού τα Put/Call Price, r, T, K και το X(t) είναι γνωστά δεν χρειάζεται να τα υπολογίσουμε, όμως για να βρούμε το β^Q χρησιμοποιώντας τη σχέση Breeden – Litzenberger (εξίσωση 9) απαιτούνται στοιχεία για δικαιώματα προαίρεσης και κάποια μέθοδο παρεμβολής για να πάρουμε τις μερικές διάφορες.

Το να εφαρμόζεις παρεμβολή είναι κάτι πολύ κοινό για δεδομένα δικαιωμάτων προαίρεσης. Ωστόσο, είναι γνωστό ότι η αθροιστική κατανομή που περιέχεται είναι πολύ ευαίσθητη σε μεθόδους παρεμβολής. Επίσης, οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης τείνουν να υποφέρουν από τις επιδράσεις της έλλειψης ρευστότητας (Norden 2003, Pinder 2003) και υπάρχουν αποδείξεις ότι τα bid – ask spreads είναι μια συνάρτηση των K και T(δείτε, για παράδειγμα, Pinder 2003, George and Longstaff 1993). Επομένως, το να αποκτήσεις αμερόληπτα ή αντιπροσωπευτικά στοιχεία για δικαιώματα προαίρεσης μπορεί να είναι κάτι δύσκολο.

Τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε και στις δυο μεθόδους αφορούν δικαιώματα πώλησης του δείκτη FTSE-100 τα οποία εκδοθήκαν στις 5 Ιουλίου 2010 και είχαν λήξη 46 μέρες μετά, με τιμή του υποκείμενου τίτλου X(t)=4823 και r=5.7%.

Η ανεξάρτητη μοντέλου μέθοδος που επέλεξα να ακολουθήσω προτείνεται στο άρθρο του Jackwerth (2004). Η μέθοδος αυτή μετρά κάποια πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα, όπως ότι ο συμψηφισμός μεταξύ της ακρίβειας και της ομαλότητας της καμπύλης μπορεί να ελεγχθεί εξωγενώς. Με τον ορό ακρίβεια εννοούμε ότι οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης ταιριάζουν με τις τεκμαρτές μεταβλητότητες. Επίσης, η εν λόγω μέθοδος δεν απαιτεί πολύπλοκες μαθηματικές συναρτήσεις ή μεθόδους βελτιστοποίησης.

Θεωρώ τα ακόλουθα έξι **put** options prices:

Strike Price	Implied Volatility	Value
4850	0,286	191,5
4900	0,285	217
4950	0,281	245
5000	0,286	276,5
5050	0,288	310
5100	0,291	346

Χρησιμοποιούμε 22 επίπεδα του δείκτη (strike price) τα οποία απέχουν 50 μονάδες το ένα από το άλλο. Συγκεκριμένα είναι τα παρακάτω:

4450, 4500, 4550, 4600, 4650, 4700, 4750, 4800, **4850, 4900, 4950, 5000**, **5050, 5100**, 5150, 5200, 5250, 5300, 5350, 5400, 5450, 5500

Εάν η κατανομή πιθανότητας που προκύπτει είναι με πολλά ακρότατα ή δεν τείνει στο μηδέν στις ουρές, μπορούμε να εισαγάγουμε και μισά βήματα(4475, 4525, κτλ.) ή να προσθέσουμε τιμές στις άκρες(4350, 4400, 5550, 5600, κτλ.). Βρίσκουμε ότι ο παράγοντας συμψηφισμού λ, ίσος με 10^{10} θα μας δώσει καλά αποτελέσματα. (Για να τον εντοπίσει κάποιος πρέπει να κάνει δοκιμές. Αν η κατανομή γίνεται αρνητική ή είναι πολύ οδοντωτή, τότε μειώνουμε το λ. Αν οι φανταστικές μεταβλητότητες δεν ταιριάζουν με τις αντίστοιχες πραγματικές επαρκώς, τότε αυξάνουμε το λ.)

Τώρα, το πρώτο μας βήμα είναι να κατασκευάσουμε ένα σύστημα εξισώσεων (μία για κάθε επίπεδο του δείκτη) με τις τιμές 1, -4, 6, -4, 1 γύρω από τη διαγώνιο και -3 και 3 ως τις δυο τιμές στην κορυφή της πρώτης στήλης και στο τέλος της τελευταίας στήλης:

3σ1	-4σ2	1σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
-3σ1	6σ2	-4σ3	1σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
1σ1	-4σ2	6σ3	-4σ4	1σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	1σ2	-4σ3	6σ4	-4σ5	1σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	1σ3	-4σ4	6σ5	-4σ6	1σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	1σ4	-4σ5	6σ6	-4σ7	1σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	1σ5	-4σ6	6σ7	-4σ8	1σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	1σ6	-4σ7	6σ8	-4σ9	1σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	1σ7	-4σ8	6σ9	-4σ10	1σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	1σ8	-4σ9	6σ10	-4σ11	1σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	1σ9	-4σ10	6σ11	-4σ12	1σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	1σ10	-4σ11	6σ12	-4σ13	1σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	1σ11	-4σ12	6σ13	-4σ14	1σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	1σ12	-4σ13	6σ14	-4σ15	1σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	1σ13	-4σ14	6σ15	-4σ16	1σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	1σ14	-4σ15	6σ16	-4σ17	1σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	1σ15	-4σ16	6σ17	-4σ18	1σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	1σ16	-4σ17	6σ18	-4σ19	1σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	1σ17	-4σ18	6σ19	-4σ20	1σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	1σ18	-4σ19	6σ20	-4σ21	1σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	1σ19	-4σ20	6σ21	-3σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	1σ20	-4σ21	3σ22	=0

Η λύση αυτού του συστήματος εξισώσεων μέχρι εδώ είναι μηδέν για κάθε γραμμή όπου πολλαπλασιάζουμε τον κάθε συντελεστή με την αντίστοιχη φανταστική τεκμαρτή μεταβλητότητα, σ_i. Αλλά τώρα πρέπει να προσθέσουμε την πληροφορία που αφορά στα παρατηρούμενα options στις γραμμές 5,6,7(που αντιστοιχούν στα strikes 4850, 4900, 4950, 5000, 5050, 5100). Ο απαιτούμενος πολλαπλασιαστής είναι ο εξής: *Παράμετρος συμψηφισμού x (Αριθμός επιπέδων του δείκτη/[Αριθμός των options x Διαφορά μεταξύ διαδοχικών τιμών strikes υψωμένη στην τετάρτη):*

$$\lambda\left[\frac{J+1}{I(\Delta^4)}\right]=10^{10}\left[\frac{22}{6(50^4)}\right]$$

$$=5866,6667.$$

Προσθέτουμε αυτόν τον αριθμό στη διαγώνιο του συστήματός μας για κάθε option στις γραμμές 9,10,11,12,13 και 14. Οι λύσεις για τις γραμμές είναι ακόμα μηδέν όπου δεν υπάρχει παρατηρούμενο option να σχετίζεται με τη γραμμή, αλλά όταν υπάρχει, χρησιμοποιούμε τον πολλαπλασιαστή επί την τεκμαρτή μεταβλητότητα του παρατηρούμενου option. Για τα έξι put options, τα αποτελέσματα είναι 5866,6667 πολλαπλασιασμένο, αντίστοιχα, με 0.286, 0.285, 0.281, 0.286, 0.288 και 0.291. Επομένως οι λύσεις (Y-μεταβλητές) είναι οι παρακάτω:

0, 0, 0, 0, 0, 0,0, 0, 1677.867, 1672, 1648.533, 1677.786, 1689.6, 1707.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 και 0.

Το νέο σύστημα εξισώσεων (με τις X-μεταβλητές οργανωμένες σε στήλες ώστε κάθε μεταβλητή να αντιστοιχεί σε μια τιμή strike) θα έχει ως εξής:

3σ1	-4σ2	1σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
-3σ1	6σ2	-4σ3	1σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
1σ1	-4σ2	6σ3	-4σ4	1σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	1σ2	-4σ3	6σ4	-4σ5	1σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	1σ3	-4σ4	6σ5	-4σ6	1σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	1σ4	-4σ5	6σ6	-4σ7	1σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	1σ5	-4σ6	6σ7	-4σ8	1σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	1σ6	-4σ7	6σ8	-4σ9	1σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	1σ7	-4σ8	5872,6667σ9	-4σ10	1σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=1677,867
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	1σ8	-4σ9	5872,6667σ10	-4σ11	1σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=1672
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	1σ9	-4σ10	5872,6667σ11	-4σ12	1σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=1648,533
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	1σ10	-4σ11	5872,6667σ12	-4σ13	1σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=1677,786
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	1σ11	-4σ12	5872,6667σ13	-4σ14	1σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=1689,6
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	1σ12	-4σ13	5872,6667σ14	-4σ15	1σ16	0σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=1707,2
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	1σ13	-4σ14	6σ15	-4σ16	1σ17	0σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	1σ14	-4σ15	6σ16	-4σ17	1σ18	0σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	1σ15	-4σ16	6σ17	-4σ18	1σ19	0σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	1σ16	-4σ17	6σ18	-4σ19	1σ20	0σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	1σ17	-4σ18	6σ19	-4σ20	1σ21	0σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	1σ18	-4σ19	6σ20	-4σ21	1σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	1σ19	-4σ20	6σ21	-3σ22	=0
0σ1	0σ2	0σ3	0σ4	0σ5	0σ6	0σ7	0σ8	0σ9	0σ10	0σ11	0σ12	0σ13	0σ14	0σ15	0σ16	0σ17	0σ18	0σ19	1σ20	-4σ21	3σ22	=0

Τώρα πρέπει να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων, το οποίο μπορεί να γίνει μέσω οποιουδήποτε προγράμματος παλινδρόμησης (για παράδειγμα, Excel): απλώς τρέχουμε τη λύση (Y-μεταβλητή της παλινδρόμησης) με το υπόλοιπο του συστήματος (X-μεταβλητές της παλινδρόμησης, για τις οποίες χρησιμοποιούμε μόνο τους συντελεστές και όχι τα σ_i.) Η λύση είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα για κάθε τιμή strike ίση με το επίπεδο του δείκτη, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Όπως διαπιστώνετε, πετυχαίνουμε ακριβώς τις τιμές των παρατηρούμενων options της αγοράς στις γραμμές 9,10,11,12,13 και 14.

Το τελικό βήμα είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου. Προσθέτουμε τις τιμές των option στις γραμμές πάνω και κάτω από τη γραμμή της τιμής εκτέλεσης που μας ενδιαφέρει και αφαιρούμε δυο φορές την τιμή του συγκεκριμένου option.

Για όλα τα strike (4500,…,5450) οι αντίστοιχες τιμές (στρογγυλοποιημένες στα τέσσερα δεκαδικά για μεγαλύτερη ακρίβεια) είναι:

Strike Price	Implied Volatility	Put Values	Risk - Neutral Probability
4450	0,2887	51,48	-
4500	0,2887	62,74	0,0502
4550	0,2886	75,63	0,0547
4600	0,2885	90,30	0,0536
4650	0,2882	106,72	0,0590
4700	0,2879	125,05	0,0565
4750	0,2874	145,22	0,0593
4800	0,2868	167,32	0,0575
4850	0,2860	191,28	0,0403
4900	0,2850	217,11	0,0015
4950	0,2810	242,90	0,2461
5000	0,2860	276,68	0,0076
5050	0,2880	310,21	0,0705
5100	0,2910	346,04	0,0349
5150	0,2934	383,00	0,0341
5200	0,2953	421,08	0,0318
5250	0,2967	460,18	0,0313
5300	0,2977	500,30	0,0291
5350	0,2983	541,37	0,0288
5400	0,2987	583,41	0,0273
5450	0,2989	626,33	0,0260
5500	0,2990	670,10	-

Οι τιμές που προέκυψαν με την παραπάνω διαδικασία δεν άθροιζαν στη μονάδα γι' αυτό στο τέλος διαιρέσαμε κάθε μια με το άθροισμα των 20 τιμών. Οι νέες τιμές είναι αυτές που εκτίθενται στο παραπάνω πίνακα.

Η παραπάνω μέθοδος σχετίζεται με τις μεθόδους που προτείνουν οι Jackwerth και Rubinstein (1996) και Jackwerth (2000). Βρίσκει μια ομαλή ουδετέρου κινδύνου κατανομή η οποία, την ίδια στιγμή, εξηγεί τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης. Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο, διαφοροποιήσαμε τις αξίες του δείκτη έτσι ώστε η απόσταση να συμπίπτει με τις τιμές strike:

$S_j = S_0 + j\Delta,$ με $j = 0,..., J$

όπου S_j = τιμές του δείκτη

S_0 = η μικρότερη τιμή του δείκτη που διαιρείται από το Δ

Δ = διαφορά μεταξύ δυο διαδοχικών τιμών του δείκτη

Για να βρούμε την ουδετέρου κινδύνου κατανομή πιθανότητας, ελαχιστοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση, για την οποία οι συνθήκες πρώτες τάξης μπορούν να λυθούν σε κλειστή μορφή:

$$\min_{\sigma_j} \frac{\Delta^4}{2(J+1)} \sum_{j=0}^{J} (\overset{=}{\sigma}_j)^2 + \frac{\lambda}{2\mathrm{I}} \sum_{i=1}^{I} (\sigma_i - \overline{\sigma}_i)^2$$

όπου σ_j = τεκμαρτή μεταβλητότητα σχετιζόμενη με τη τιμή strike K_j

λ = παράμετρος συμψηφισμού για ισορροπία της ομαλότητας έναντι του ταιριάσματος των τιμών

$\overset{=}{\sigma}_j$ = δεύτερη παράγωγος της τεκμαρτής μεταβλητότητας ως προς τις τιμές εκτέλεσης, αριθμητικά προσεγγίζεται $\overset{=}{\sigma}_j = (\sigma_{j-1} - 2\sigma_j + \sigma_{j+1}) / \Delta^2$

σ_i = τεκμαρτή μεταβλητότητα σχετιζόμενη με τη τιμή strike K_i

$\overline{\sigma}_i$ = παρατηρούμενη τεκμαρτή μεταβλητότητα του δικαιώματος προαίρεσης σχετιζόμενη με τη τιμή strike K_i

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για το δείκτη j όπου δεν υπάρχουν παρατηρούμενα δικαιώματα προαίρεσης είναι:

$$\sigma_{j-2} - 4\sigma_{j-1} + 6\sigma_j - 4\sigma_{j+1} + \sigma_{j+2} = 0$$

Για j = 0, 1, J – 1, και J, για τις τεκμαρτές μεταβλητότητες που λείπουν χρησιμοποιούμε τις σ_0, σ_J αντίστοιχα.

Όταν έχουμε ένα παρατηρούμενο δικαίωμα προαίρεσης για το δείκτη j, οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\sigma_{j-2} - 4\sigma_{j-1} + \left[6 + \frac{\lambda(J+1)}{I\Delta^4}\right]\sigma_j - 4\sigma_{j+1} + \sigma_{j+2} = \frac{\lambda(J+1)}{I\Delta^4}\bar{\sigma} j .$$

Εφόσον έχουμε τις τεκμαρτές μεταβλητότητες μπορούμε να υπολογίσουμε αντίστοιχα και την αξία καθενός από αυτά τα put options. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε απλά με την εντολή της Matlab «blsprice» η οποία τιμολογεί option σύμφωνα με το Black – Scholes μοντέλο. Αφού έχουμε τις τιμές και τα strike price των option μπορούμε να βρούμε την ακόλουθη μερική παραγωγό:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{P(K+h) - P(K-h)}{2h}$$

όπου K είναι το strike price, P είναι η τιμή του και h είναι το βήμα (η διαφορά μονάδων που χωρίζει το ένα strike price από το επόμενο). Επεξηγηματικά, το κλάσμα είναι: Τιμή του επόμενου από το K option – Τιμή του προηγούμενου option από το K / Τιμή strike του επόμενου option από το K – Τιμή strike του προηγούμενου option από το K.

Τη VaR στο Κεφάλαιο 2 την έχουμε ορίσει τη διαφορά της τιμής του υποκείμενου τίτλου και της εκάστοτε τιμής strike του option, δηλαδή VaR= X(t) – K, όπου X(t)=4823. Επομένως είναι πολύ εύκολο να προσδιορίσουμε τα VaR για όλες τις τιμές strike που έχουμε. Τώρα είμαστε έτοιμοι να βρούμε τη CVaR για κάθε option επιλύοντας τη σχέση (11α) ως προς CVaR και γίνεται ως εξής:

$$CVaR^Q = \frac{P^Q(X(t), t, T, K)}{\frac{\partial P}{\partial K}} + VaR$$

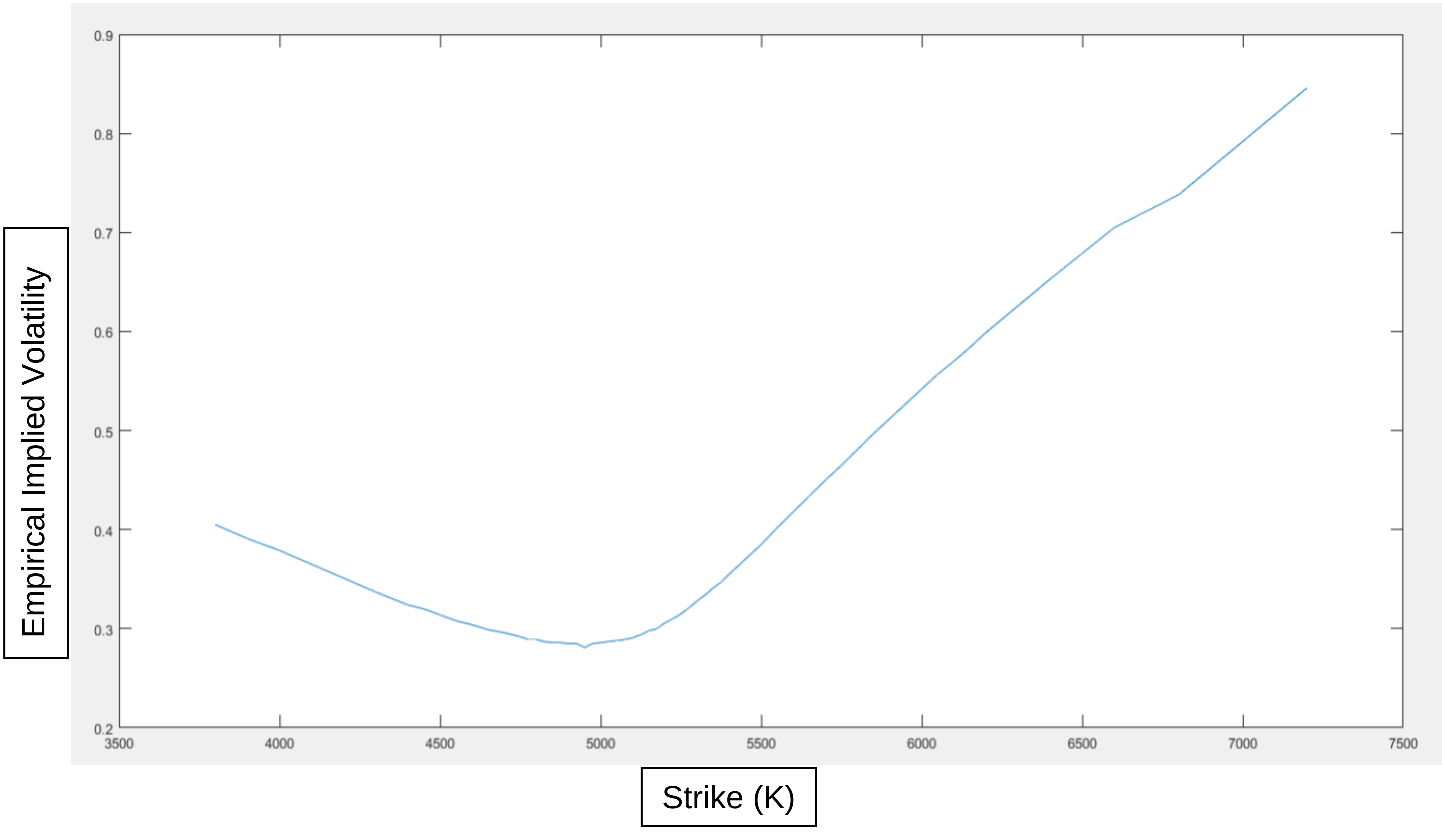
Χρησιμοποιώντας τις τιμές strike του παραπάνω πίνακα και τα CVaR που προέκυψαν από τον ακριβώς προηγούμενο με την εντολή plot της Matlab κατασκευάζουμε το αντίστοιχο γράφημα.

Από την εξίσωση (11β) έχουμε ότι ο λόγος Price:Risk ισούται με θP/θK (έχει εξηγηθεί παραπάνω πως υπολογίζεται ο λόγος αυτός) οπότε μπορούμε να βρούμε τα αντίστοιχα σχήματα για το ανεξάρτητο μοντέλου λόγο αλλά και για αυτόν που βασίζεται στο μοντέλο των Black – Scholes και πάλι με τη βοήθεια της Matlab και συγκεκριμένα της εντολής plot.

Κεφάλαιο 4

4.1 Αποτελέσματα και συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των αριθμητικών δοκιμών που κάναμε χρησιμοποιώντας δεδομένα από το δείκτη FTSE100 για δικαιώματα προαίρεσης πώλησης που εκδόθηκαν στις 14/10/2003 με ληκτότητα 46 ημέρες, επιτόκιο 5,7% και τιμή υποκείμενου τίτλου 4823. Η καμπύλη της τεκμαρτής μεταβλητότητας ως προς τις τιμές εκτέλεσης K για τα δεδομένα αυτά απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα και εμφανίζει ένα «χαμόγελο».

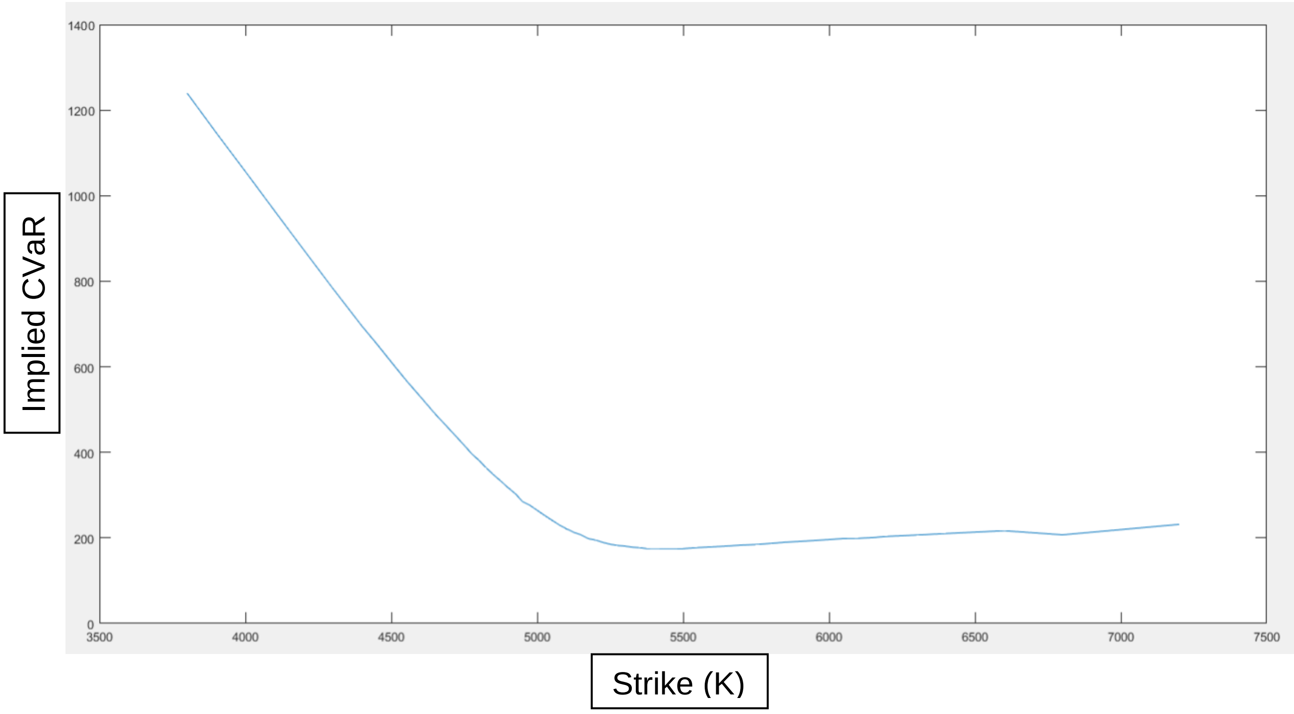


Γράφημα 1:Εμπειρικη τεκμαρτή μεταβλητότητα για τον δείκτη δικαιωμάτων προαίρεσης FTSE-100.

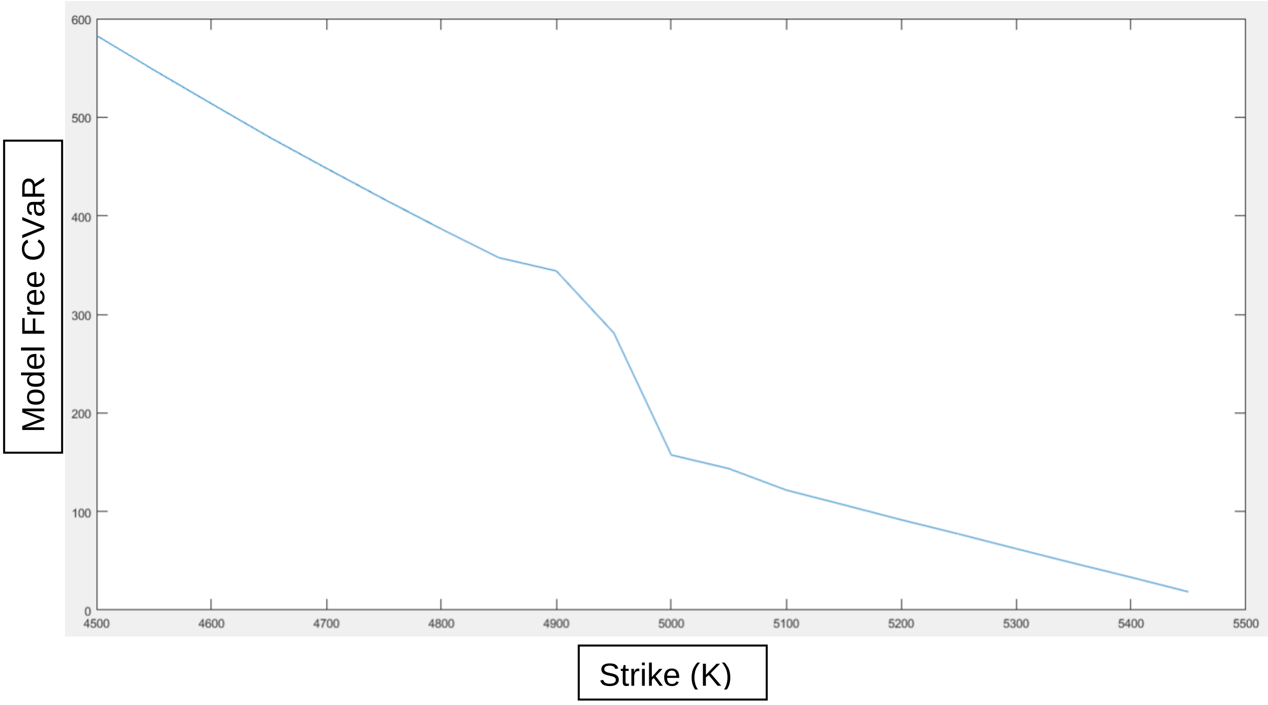
Στο επόμενα δυο γραφήματα απεικονίζεται η σχέση των τιμών εκτέλεσης με το ανεξάρτητο μοντέλου CVaR και των τιμών εκτέλεσης με το CVaR υπό το μοντέλο Black - Scholes. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το ανεξάρτητο μοντέλου CVaR μειώνεται, όσο το K αυξάνεται. Επίσης, για K >> X(t) το CVaR είναι σχεδόν σταθερό όσο το K αυξάνεται.

Συνεχίζοντας, το Black – Scholes CVaR δεν διαφέρει πολύ από το ανεξάρτητου μοντέλου CVaR για K < X(t), όμως για K > X(t) το ανεξάρτητο μοντέλου CVaR αυξάνει πολύ περισσότερο από ότι το Black – Scholes CVaR. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο Black – Scholes για τα δικαιώματα προαίρεσης υποτιμά σημαντικά το CVaR κίνδυνο του υποκείμενου τίτλου για χαμηλό K, ακόμα και όταν λαμβάνεται υπόψιν η επιρροή της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Αυτό είναι συνεπές με εμπειρικές μελέτες, οι οποίες δηλώνουν ότι το μοντέλο Black – Scholes για κατανομές υποκείμενων τίτλων υποτιμά σημαντικά παχιές ουρές και απώλειες. Επομένως, αναμένουμε ότι η πραγματική ή η ανεξάρτητη κατανομής CVaR να είναι υψηλοτέρα από την «τεκμαρτή CVaR».

Στη πραγματικότητα, για τη «τεκμαρτή CVaR» μια αύξηση στη CVaR λόγω του K μπορεί να αντισταθμιστεί με αύξηση στη CVaR λόγω της αλλαγής της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της «τεκμαρτής CVaR» είναι πολύ πιο ομαλή και καλά συμπεριφερόμενη από την ανεξάρτητου μοντέλου CVaR. Αυτό οφείλεται στη μέθοδο παρεμβολής που χρησιμοποιήσαμε.

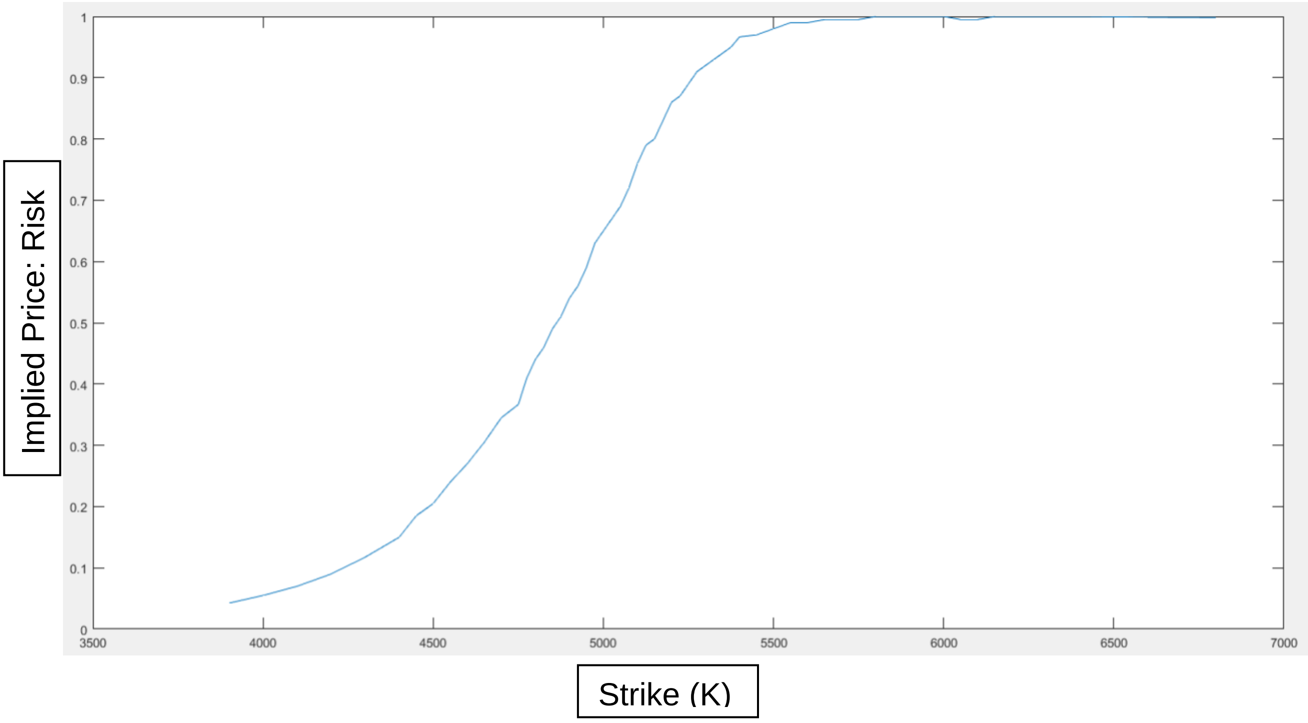


Γράφημα 2: Ουδετέρου Κινδύνου τεκμαρτό CVaR για τα δικαιώματα του δείκτη FTSE-100

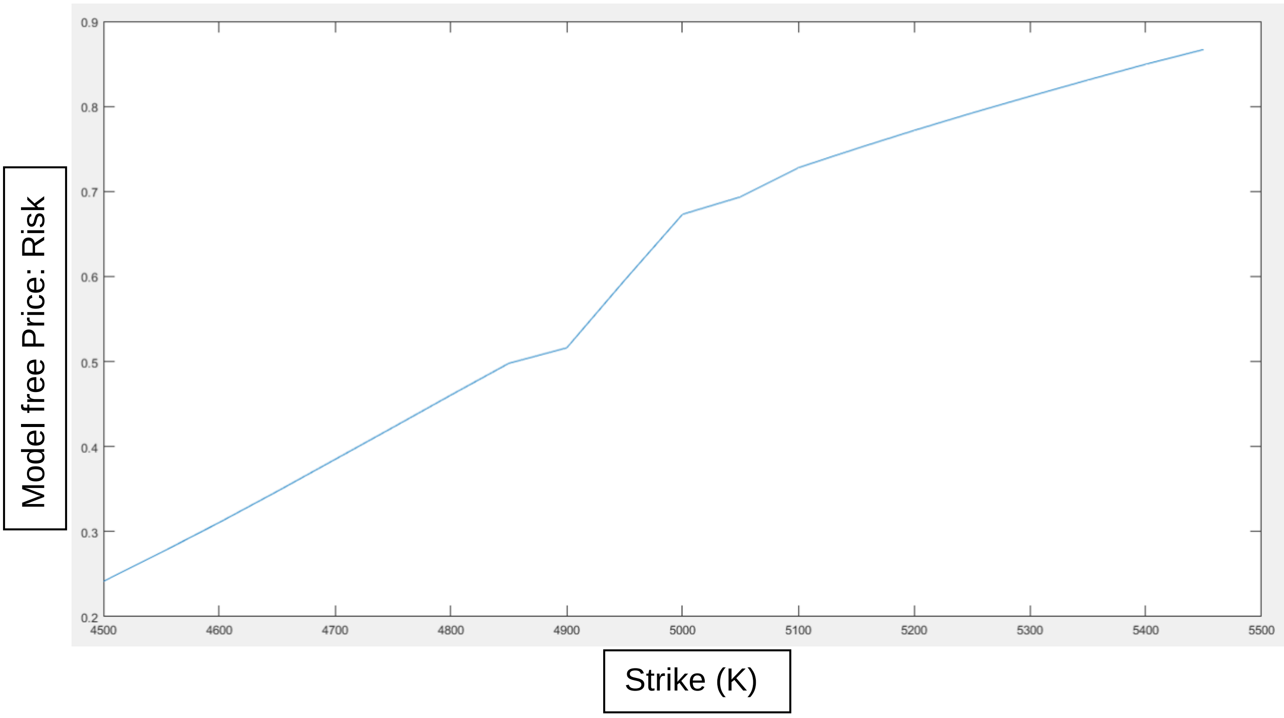


Γράφημα 3: Ουδέτερου Κινδύνου ανεξάρτητο μοντέλου CVaR για τα δικαιώματα του δείκτη FTSE-100.

Στα επόμενα δυο γραφήματα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι ο λόγος της τεκμαρτής τιμής και κινδύνου δείχνει ότι το μοντέλο Black – Scholes υπετιμά τη πραγματική τιμή του πηλίκου της τιμής/κίνδυνο για K > X(t) αλλά τον υποτιμά για K < X(t).



Γράφημα 4:Τεκμαρτος λόγος Τιμή/Κίνδυνος για δικαιώματα του δείκτη FTSE-100

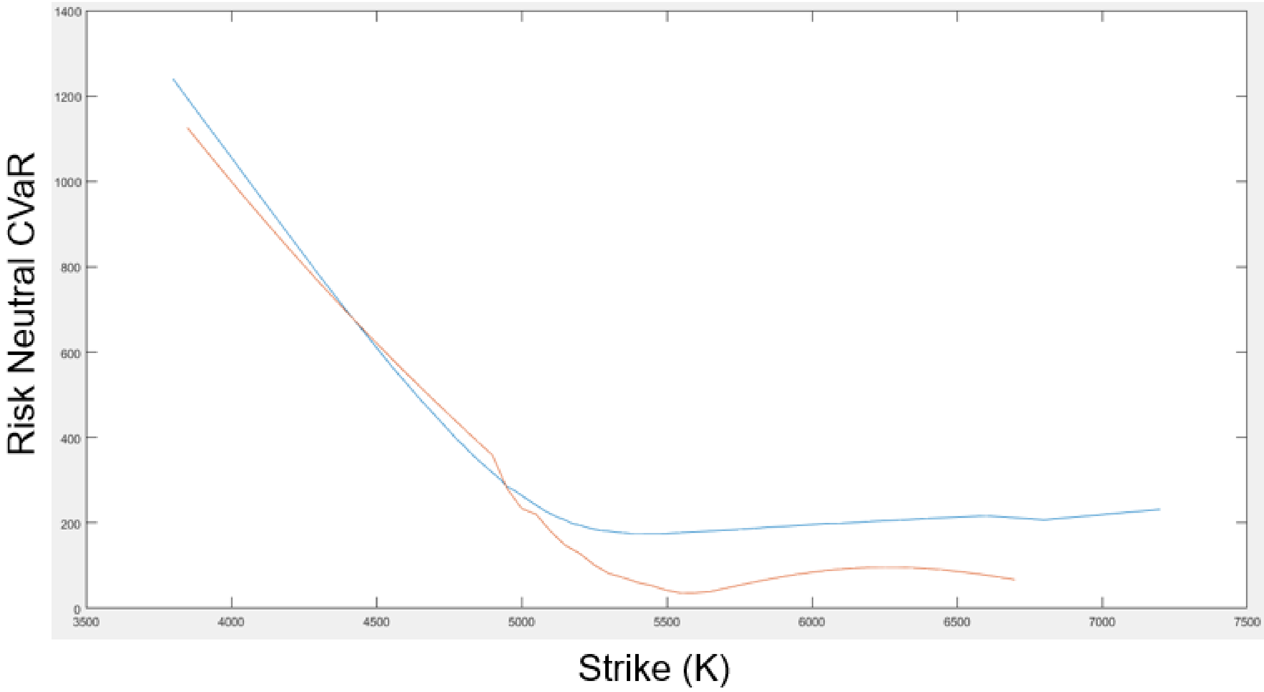


Γράφημα 5:Ανεξαρτήτου μοντέλου λόγος Τιμή/Κίνδυνος για δικαιώματα του FTSE-100

Αν επαναλάβουμε την ανεξάρτητη μοντέλου μέθοδο για εξήντα τιμές εκτέλεσης δηλαδή όσες περίπου χρησιμοποιήσαμε και στην εξαρτημένη μοντέλου μέθοδο μπορούμε να συγκρίνουμε καλύτερα τα αποτελέσματα μας αφού είναι δυνατό να τα παραθέσουμε σε κοινό διάγραμμα.

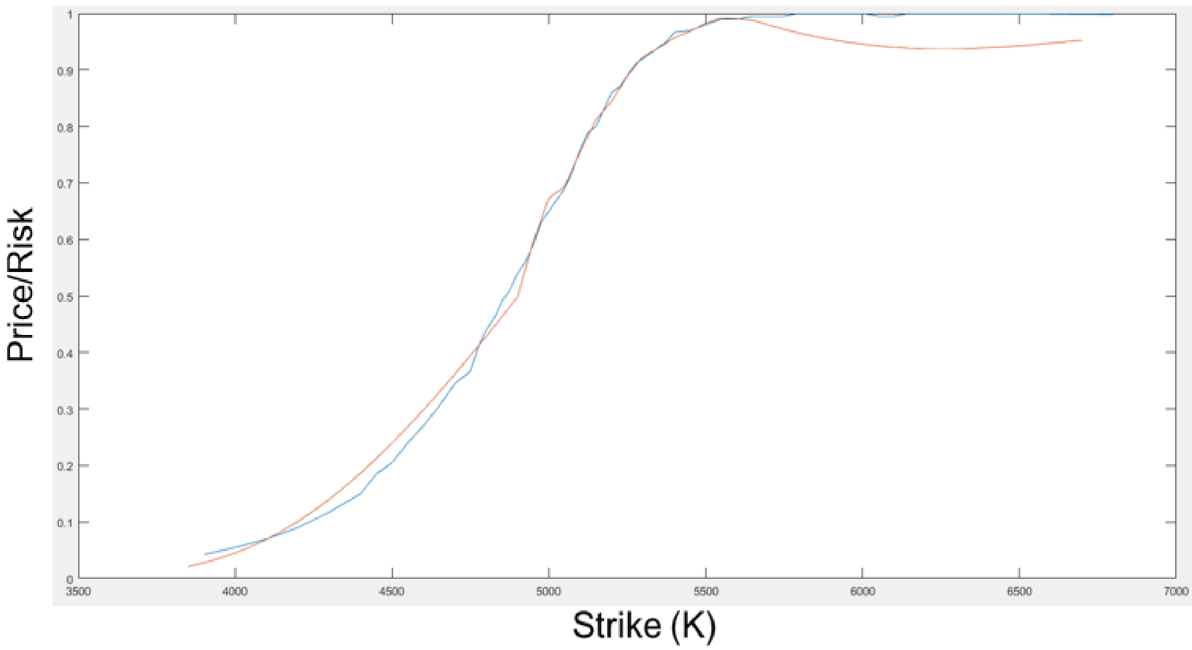
Κόκκινη γραμμή: Ανεξάρτητη μοντέλου CVaR

Μπλε γραμμή: Τεκμαρτή CVaR



Κόκκινη γραμμή: Ανεξάρτητος μοντέλου λόγος Τιμή : Κίνδυνο

Μπλε γραμμή: Τεκμαρτός λόγος Τιμή : Κίνδυνος



Κεφάλαιο 5

5.1 Επίλογος

Σε αυτή την εργασία εξήγαμε μια απλή, κλειστού τύπου και αναλυτική σχέση αναμεσά στις VaR - CVaR και τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα. Μιλήσαμε για τη σημαντικότητα και της εξίσωσης και της σχέσης τους, συγκεκριμένα με συνέπεια στη τεκμαρτή μεταβλητότητα και στη διαχείριση κινδύνου. Δείξαμε ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε την επίδραση του «χαμόγελου» της τεκμαρτής μεταβλητότητας όταν μετράμε το κίνδυνο σε όρους CVaR.

Οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης μας παρέχουν πληροφορίες για την κατανομή των ενδεχόμενων απωλειών στις απολαβές μας. Το παράγωγο μιας τιμής δικαιώματος πώλησης με συνέπεια στη τιμή εκτέλεσης του μας επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό των VaR – CVaR υπό το μοντέλο αποτίμησης. Αυτό το παράγωγο μπορεί να προσεγγιστεί από τις διαφορές στις τιμές των δικαιωμάτων πώλησης και των τιμών εκτέλεσης του.

Για τη λογοκανονική κατανομή, η VaR είναι πιο ευαίσθητη από τη CVaR στην αλλαγή του μέτρου. Για οποιαδήποτε κατανομή, η εξάρτηση και της VaR και της CVaR από τις αλλαγές του μέτρου εξαφανίζεται για μικρές ληκτοτητες, όπου οι τιμές των δικαιωμάτων παρέχουν καλές προσεγγίσεις για τις VaR και CVaR υπό μέτρο πιθανότητας πραγματικού κόσμου. Αυτό είναι πολύ σημαντικό επειδή η CVaR δεν είναι ένα μέτρο που μπορεί να εκμαιευθεί, κάνοντας προβληματικά τα στατιστικά συμπεράσματα για τις απολαβές των χαρτοφυλακίων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adesi Giovanni Barone. 2015. “VaR and CVaR Implied in Option Prices” Swiss Finance Institute

Aparicio D. Silio, and Hodges Stewart. 1998. “Implied Risk-Neutral Distribution: A Comparison of Estimation Methods” University of Warwick

Basak, S., and A. Shapiro. 2001. “Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices.” Review of Financial Studies 14 (2): 371–405.

Benth, F. 2004. Option Theory With Stochastic Analysis: An Introduction to Mathematical Finance. Oslo, Norway: Springer.

Black, F., and M. Scholes. 1973. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities.” The Journal of Political Economy 81 (3): 637–654.

Breeden T. Douglas, and Litzenberger H. Robert. 1978. “Prices of State-Contigent Claims Implicit in Option Prices”. Journal of Business, Vol 51, Issue 4, 621-651

Boyle, P., T. K. Siu, and H.Yang. 2002. “Risk and Probability Measures.” Risk 15 (7): 53–57.

Cox, J. C., and S. A. Ross. 1976. “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes.” Journal of Financial Economics 3 (1): 145–166.

Derman, E., and I. Kani. 1994. “Riding on a Smile.” Risk 7 (2): 32–39.

Dowd, K. 2011. An Introduction to Market Risk Measurement. Chichester, West Sussex: Wiley Finance.

Duffie, D., and J. Pan. 1997. “An Overview of Value at Risk.” The Journal of Derivatives 4 (3): 7–49.

Dupire, B. 1994. “Pricing with a Smile.” Risk 7 (1): 18–20.

Garman, M. B., and S. W. Kohlhagen. 1983. “Foreign Currency Option Values.” Journal of International Money and Finance 2 (3): 231–237.

Hull, J., and A. White. 1987. “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities.” The Journal of Finance 42 (2): 281–300.

Jackwerth, J., and Rubinstein M. 1996 Recovering Probability Distributions from Option Prices, The Journal Of Finance

Jackwerth, J. 2000 Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns, University Wisconsin Madison

Jackwerth, J. 2004. Option-Implied Risk-Neutral Distributions and Risk Aversion. Charlotteville: Research Foundation of AIMR.

Kwok,Y. 1998. Mathematical Models of Financial Derivatives. NewYork: Springer.

Lambadiaris, G., Papadopoulou, L., Skiadopoulos, G., and Zoulis, I. (2003). “VAR: History or Simulation?”, RISK, 16:9, pp. 122-127.

Leland, H. E. 1985. “Option Pricing and Replication with Transactions Costs.” The Journal of Finance 40 (5): 1283–1301.

Malz M. Allan. 2014. “A Simple and Reliable Way to Compute Option – Based Risk Neutral Distributions”. Federal Reserve Bank of New York Staff Reports.

Merton,R.C.1976.“Option Pricing When Underlying Stock Returnsare Discontinuous.” Journal of Financial Economics 3 (1): 125–144.

Mitra, S. 2010. “Multifactor Option Pricing: Pricing Bounds and Option Relations.” International Journal of Applied Decision Sciences 3 (1): 15–33.

Mitra, S., and P. Date. 2010. “Regime Switching Volatility Calibration by the Baum–Welch Method.” Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (12): 3243–3260.

Mitra, S. 2015 “The relationship between conditional value at risk and option prices with a closed-form solution”The European Journal of Finance, 2015, vol. 21, issue 5, pages 400-425

Musiela, M., and M. Rutkowski. 2005. “Martingale Methods in Financial Modelling”. NewYork, NY: Springer.

Pochart, B., and J. P. Bouchaud. 2004. “Option Pricing and Hedging with Minimum Local Expected Shortfall.” Quantitative Finance 4 (5): 607–618.

Rockafellar, R., and S. Uryasev. 2000. “Optimization of Conditional Value-at-Risk.” Journal of Risk 2 (3): 21–41.

Sarykalin Sergey. 2008. “Value-at-Risk vs Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization”. Tutorials in operations research, Informs.

Scott, L. O. 1987. “Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application.” The Journal of Financial and Quantitative Analysis 22 (4): 419–438.

Siddharth Alexander, Coleman F. Thomas, and Yuing Li. 2003. “Derivative Portfolio Hedging Based on Conditional Value-at-Risk.’’

Sime Corkalo. 2011. “Comparison of Value at Risk approaches on a stock portfolio”. Croation Operational Research Review, vol 2.

Szegö, G. 2005. “Measures of Risk.” European Journal of Operational Research 163 (1): 5–19.

Wylie, J. J., Q. Zhang, and T. Kuen Siu. 2010. “Can Expected Shortfall and Value-at-Risk be Used to Statically Hedge Options?” Quantitative Finance 10 (6): 575–583.