ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΣΥΜΒΑΣΕΩΝ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Διονυσία Παππά

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Ιούνιος 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

PRICING OF CREDIT DEFAULT SWAPS

BY

Dionysia Pappa

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

June 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ………………………………. (Επιβλέπων)
- ……………………………….
- ……………………………….

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και κυρίως τους γονείς μου για την συνεχή συμπαράσταση και υποστήριξη τους καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης, οφείλω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μιχαήλ Μπούτσικα για την πολύτιμη υποστήριξη του στη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και τους συναδέλφους μου, γιατί χωρίς την «πίεση» τους, το ενδιαφέρον και την υποστήριξη τους, η ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας θα ήταν ακόμα πιο δύσκολη.

Περίληψη

Η αποτελεσματική διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι συμμετέχοντες στην χρηματοπιστωτική αγορά. Για αυτό τον λόγο δημιουργήθηκαν οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου γνωστές και ως Credit Default Swaps (CDS), μέσω των οποίων η διαχείριση του κινδύνου επιτυγχάνεται εύκολα. Για την αποτίμηση των συμβάσεων CDS έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα αποτίμησης, καθώς η αποτίμηση τους θεωρείται μια περίπλοκη διαδικασία. Κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι η επισκόπηση των βασικών χαρακτηριστικών μιας σύμβασης CDS και η παρουσίαση του μοντέλου αποτίμησης μειωμένης προσέγγισης (reduced form) που βασίζεται στον ρυθμό κινδύνου και αναπτύχθηκε από τους D. O'Kane & S. Turnbull (2003). Επίσης, στόχος της εργασίας είναι και η πρακτική εφαρμογή του μοντέλου αποτίμησης των O'Kane & Turnbull, μέσω κατάλληλου υπολογιστικού προγράμματος χρησιμοποιώντας υποθετικά δεδομένα.

Abstract

Effective credit risk management is one of the biggest challenges that the participants in the financial market have to face. For that reason the Credit Default Swaps were created as a tool of managing and reducing the credit risk. Since the valuation of CDS contracts is considered as a complicated process, various valuation models have been developed. The main purpose of this thesis is to review the basic characteristics of a CDS contract and to present the reduced-form valuation model based on the hazard rate method developed by D. O'Kane & S. Turnbull (2003). Furthermore, aim of the thesis is the application of the valuation model of O'Kane & Turnbull by using hypothetical data, utilizing suitable software.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Πινάκων

Εισαγωγή

Με το πέρασμα του χρόνου, ο πιστωτικός κίνδυνος γίνεται όλο και περισσότερο σημαντικό θέμα συζήτησης από τον χρηματοπιστωτικό κλάδο. Πριν την μεγάλη ανάπτυξη της αγοράς των πιστωτικών παραγώγων, ο επιτοκιακός κίνδυνος ήταν ο μόνος παράγοντας που λαμβανόταν υπόψη κατά την αξιολόγηση ενός τίτλου σταθερού εισοδήματος.

Ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ο πιστωτικός κίνδυνος δεν μπορεί να κατανοηθεί, να ελεγχθεί και να διαχειριστεί αποτελεσματικά, η χρηματοπιστωτική αγορά ωθήθηκε στην ανάπτυξη πιστωτικών παραγώγων για την καλύτερη αντιμετώπιση του. Η σωστή διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου συμβάλει στην βελτίωση της ρευστότητας της αγοράς κεφαλαίων. Μέσω των πιστωτικών παραγώγων οι συμμετέχοντες έχουν την δυνατότητα να διαχωρίζουν τον πιστωτικό κίνδυνο από τα άλλα είδη κινδύνων. Επίσης έχουν την δυνατότητα να μεταφέρουν ένα κομμάτι του ανεπιθύμητου κινδύνου σε άλλους συμμετέχοντες οι οποίοι έχουν την πρόθεση να τον αναλάβουν έναντι κάποιου ανταλλάγματος.

Κυρίαρχη θέση στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων έχουν οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου γνωστές και ως Credit Default Swaps (CDS). Μια σύμβαση CDS αποτελεί μια μορφή ασφάλισης έναντι την ενδεχόμενης αθέτησης των υποχρεώσεων μιας οντότητας αναφοράς.

Δεδομένης της σημαντικότητάς τους, το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στις βασικές έννοιες και τα κύρια χαρακτηριστικά των συμβάσεων CDS, τα είδη συμβάσεων CDS που προσφέρει η αγορά καθώς και τον καθολικό τρόπο λειτουργίας.

Λόγω της φύσης του, ο πιστωτικός κίνδυνος, δεν είναι εύκολο να μετρηθεί και να υπολογιστεί. Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα πιστωτικά παράγωγα σε σχέση με άλλα είδη παραγώγων, παρουσιάζουν μεγαλύτερες δυσκολίες στην αποτίμηση τους, έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα που προσπαθούν να συμβάλλουν στην αποτίμηση τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά το μοντέλο μειωμένης προσέγγισης (reduced form) όπως αυτό παρουσιάστηκε το 1995 από τους Jarrow & Turnbull.

Δομικό στοιχείο για την αποτίμηση μιας σύμβασης CDS είναι η προεξοφλητική καμπύλη επιτοκίου καθώς και η καμπύλη επιβίωσης. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία με βάση την οποία μπορούν αυτές οι δύο καμπύλες να κατασκευαστούν.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται η υλοποίηση μιας εφαρμογής αποτίμησης μιας σύμβασης CDS με βάση το μοντέλο αποτίμησης που βασίζεται στον ρυθμό κινδύνου των O'Kane & Turnbull, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3. Όλοι οι υπολογισμοί του κεφαλαίου έχουν γίνει με την χρήση του προγράμματος Excel.

Κεφάλαιο 1: Συμβάσεις Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου

1.1 Ιστορική αναδρομή των CDS

Η ιδέα για την δημιουργία των CDS ανήκει στην JP Morgan & Co, η οποία το 1994 δάνεισε το ποσό των 4,8 δις δολαρίων στην Exxon, για να αντιμετωπίσει τον κίνδυνο καταβολής αποζημιώσεων ύψους 5 δις δολαρίων εξαιτίας της πετρελαιοκηλίδας που προκλήθηκε από το πετρελαιοφόρο Exxon Valdez (Lanchester 2009). Στην συνέχεια όμως, η JP Morgan & Co πούλησε τον πιστωτικό κίνδυνο στην Ευρωπαϊκή Τράπεζα Ανασυγκρότησης (ΕΤΑ) με αποτέλεσμα να μειώσει τα αποθεματικά που θα έπρεπε να κρατάει διαθέσιμα έναντι πιθανής αθέτησης της Exxon. Η αρχή για τα CDS είχε γίνει το 1997 όπου η JP Morgan & Co ανάπτυξε ένα προϊόν με το όνομα “BISTRO”, το οποίο μέσω τιτλοποίησης διαχώριζε τον πιστωτικό κίνδυνο σε κομμάτια κινδύνου μικρότερης αξίας με στόχο να είναι προσιτός στους επενδυτές, δεδομένου ότι οι περισσότεροι επενδυτές δεν έχουν την ικανότητα της ΕΤΑ να δεχθούν πιστωτικό κίνδυνο ύψους 4,8 δις δολαρίων. Όλα αυτά είχαν σαν αποτέλεσμα την δημιουργία των CDS ως ένα μέσο προστασίας των επενδυτών προκειμένου να προστατευθούν από τον κίνδυνο αθέτησης του εκδότη του ομολόγου είτε αυτός είναι επιχείρηση είτε δημόσιος οργανισμός.

Σημαντική εξέλιξη στην αγορά των παραγώγων από τα μέσα της δεκαετίας του 1990 είναι η ανάπτυξη των πιστωτικών παραγώγων. Η αγορά των CDS έφτασε στο απόγειο της το 2007, όπου η ονομαστική τους αξία είχε φτάσει τα 58 τρις δολάρια (Weistroffer 2009). Το 2008, ήταν μια χρονιά όπου αρκετές τράπεζες και εταιρίες κήρυξαν πτώχευση με αποτέλεσμα οι εκδότες των CDS να μην μπορούν να ανταποκριθούν στις υποχρεώσεις τους. Παράδειγμα αποτελούν οι Lehman Brothers και η AIG, οι οποίες δεν ήταν σε θέση να αποπληρώσουν τις συμβάσεις CDS που είχαν υπογράψει. Παράλληλα, με την επέλευση της κρίσης το 2008, η ονομαστική αξία των CDS μειώθηκε δραστικά και το 2010 έφτασε στο ύψος των 28 τρις. Αυτό συνέβη διότι η αδιαφάνεια και ο όγκος των εκκρεμών συναλλαγών CDS, ενίσχυσαν την ανησυχία τόσο στους συμμετέχοντες στην αγορά πιστωτικών παραγώγων όσο και των εποπτικών αρχών. Για αυτό τον λόγο εκφράστηκαν ανησυχίες και η αγορά των CDS θεωρήθηκε ως ένας υποψήφιος παράγοντας για την διατάραξη του χρηματοπιστωτικού τομέα και τέθηκε υπό στενότερη παρακολούθηση από τον Διεθνή Οργανισμό Ανταλλαγών και Παραγώγων (International Swaps and Derivatives Association – ISDA). Η αγορά των πιστωτικών παραγώγων έχει πλέον υιοθετήσει τους κανονισμούς όπως αυτοί προτάθηκαν για πρώτη φορά το 1999 από τον ISDA προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο νομικός κίνδυνος και να υπάρξει εποπτεία της εν λόγω αγοράς. Καθώς η αγορά των CDS αναπτύσσεται, ο ISDA με την πάροδο του χρόνου συνεχίζει να παρακολουθεί και να εξελίσσει αυτούς τους κανονισμούς. Τα CDS είναι over-the-counter[1] προϊόντα και οι κανονισμοί του ISDA επιτρέπουν μεγάλη ευελιξία όσον αφορά τους όρους που μπορεί μια συγκεκριμένη σύμβαση CDS να διαθέτει. Ωστόσο, ένα από τα πλεονεκτήματα των κανονισμών του ISDA είναι ότι έχει επιτρέψει στην αγορά να αναπτύξει μια τυποποιημένη σύμβαση CDS (standard CDS contract). Η standard σύμβαση είναι εκείνη η οποία έχει ένα συγκεκριμένο σύνολο χαρακτηριστικών και θεωρείται ως η πιο συνηθισμένη χρησιμοποιούμενη μορφή σύμβασης CDS αυτή την περίοδο.

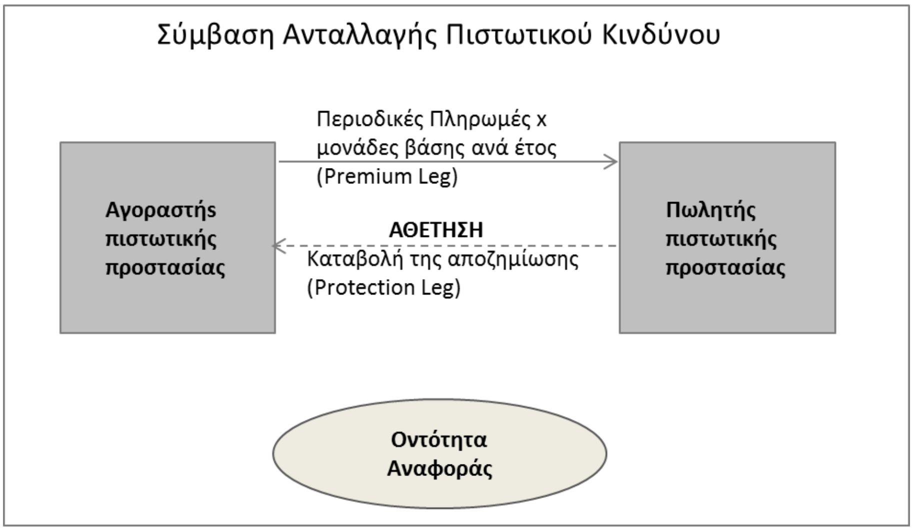
1.2 Ορισμός και δομή μιας σύμβασης CDS

Οι Συμφωνίες Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου ή Credit Default Swaps (CDS) είναι το πιο γνωστό και ευρέως διαδομένο είδος πιστωτικού παραγώγου για δύο βασικούς λόγους:

- μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αυτόνομο πιστωτικό παράγωγο για την αντιστάθμιση ή την μεταφορά πιστωτικού κινδύνου από εμπορικές και επενδυτικές τράπεζες, hedge funds, επενδυτές, συνταξιοδοτικά ταμεία ή διαχειριστές περιουσιακών στοιχείων
- μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σχηματίσουν δομημένα και πιο σύνθετα πιστωτικά παράγωγα για θεσμικούς ή ιδιώτες επενδυτές

Οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου είναι διμερείς συμβάσεις όπου, ο ένας αντισυμβαλλόμενος, ο αγοραστής προστασίας (protection buyer), καταβάλλει ένα περιοδικό ασφάλιστρο στον άλλον αντισυμβαλλόμενο, τον πωλητή προστασίας (protection seller), με αντάλλαγμα μια και μοναδική ενδεχόμενη πληρωμή από αυτόν σε περίπτωση που επέλθει πιστωτικό γεγονός (Εικόνα 1). Η παροχή της προστασίας διαρκεί από την μέρα εφαρμογής της σύμβασης (effective date), που είναι η μέρα έναρξης των πληρωμών προς τον πωλητή προστασίας, μέχρι μια καθορισμένη ημερομηνία λήξης (maturity date).

[1] Ο όρος «Over-the-counter» δηλώνει ότι η σύμβαση δεν διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο. Στην προκειμένη περίπτωση η συναλλαγή συνήθως εκτελείται μέσω τηλεφώνου ή μέσω κάποιου άλλου εργαλείου όπως μια ιστοσελίδα. Αποτελεί επίσης μια ιδιωτική συναλλαγή που πραγματοποιείται μεταξύ δύο μερών.



Εικόνα 1: Συμβάσεις Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου

Συνήθως, μια σύμβαση CDS έχει διάρκεια τρία με πέντε χρόνια. Κατά την σύναψη της σύμβασης, τα αντισυμβαλλόμενα μέρη καλούνται να διαπραγματευτούν την μέθοδο διακανονισμού που θα ακολουθηθεί σε περίπτωση έλευσης πιστωτικού γεγονότος, το ποσό που θα καταβάλλει το κάθε μέρος καθώς και το είδος του πιστωτικού γεγονότος που θα ενεργοποιήσει την σύμβαση. Αγοραστές CDS είναι συνήθως κάτοχοι ομολόγων και δανείων, ενώ πωλητές είναι κατά κανόνα ιδιωτικές τράπεζες, ασφαλιστικές εταιρίες, χρηματιστηριακές εταιρίες ή κυβερνήσεις.

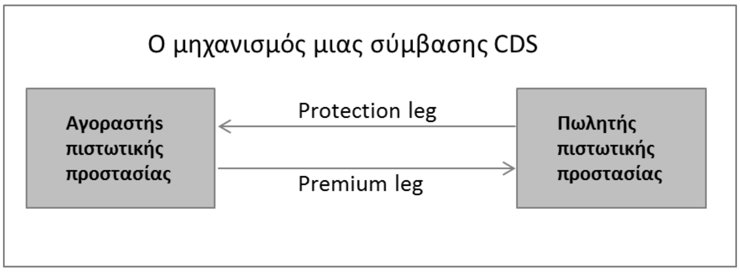
Δομικά στοιχεία ενός CDS αποτελούν οι παραδοτέες υποχρεώσεις (deliverable obligations), δηλαδή τα περιουσιακά στοιχεία υπό προστασία και ο εκδότης ή αλλιώς οντότητα αναφοράς (reference entity) που συνήθως είναι εταιρίες ή κυβερνήσεις που όμως δεν αποτελούν μέρος της σύμβασης.

1.3 Ο μηχανισμός μιας σύμβασης CDS

Για την αγορά προστασίας μέσω μιας σύμβασης CDS δεν υπάρχει αρχικό κόστος. Αντί αυτού, υπάρχουν δύο μέρη ή «legs», όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.

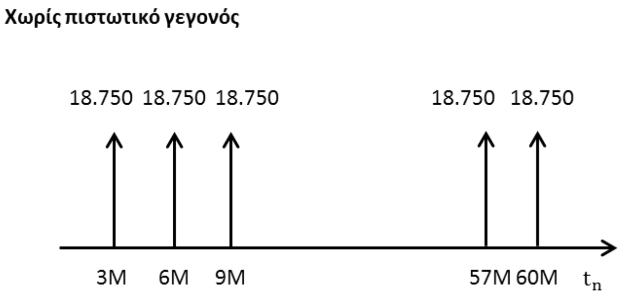
- Το **«premium leg»**: Σε αντάλλαγμα για την παροχή προστασίας έναντι στον πιστωτικό κίνδυνο, ο πωλητής προστασίας λαμβάνει τακτικά, συνήθως σε τριμηνιαία βάση, πληρωμές ασφαλίστρου από τον αγοραστή της προστασίας. Αυτές οι πληρωμές θα σταματήσουν σε περίπτωση που συμβεί πιστωτικό γεγονός ή επέλθει η λήξη της σύμβασης, όποιο από τα δύο γεγονότα συμβεί πρώτο.

- Το **«protection leg»**: Σε περίπτωση που συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός πριν την προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης της σύμβασης CDS, τότε ο πωλητής προστασίας πρέπει να αποζημιώσει τον αγοραστή προστασίας για την απώλεια της ονομαστικής αξίας των παραδοτέων υποχρεώσεων.

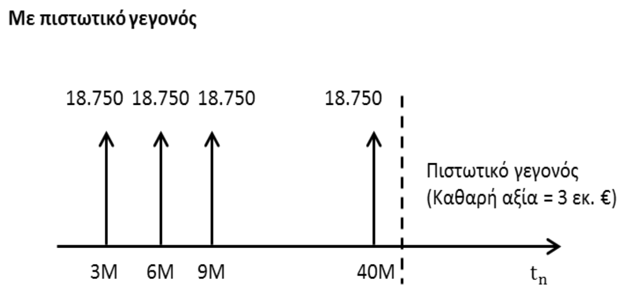


Εικόνα 2: Ο μηχανισμός μιας σύμβασης CDS

Για να καταλάβουμε καλύτερα τις έννοιες του premium leg και του protection leg ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής θέλει να προστατευτεί από τον πιστωτικό κίνδυνο ενός περιουσιακού στοιχείου αξίας 5 εκατομμυρίων ευρώ της υποκείμενης οντότητας αναφοράς Χ. Για να το πετύχει αυτό αγοράζει προστασία μέσω μις σύμβασης CDS, διάρκειας 5 ετών, με spread ίσο με 150 μονάδες βάσης (1,5% bps) ετησίως και οι πληρωμές του ασφαλίστρου, δηλαδή οι πληρωμές του premium leg να καταβάλλονται τριμηνιαίως. Οι χρηματοροές της σύμβασης CDS φαίνονται στην Εικόνα 3 και η αξία της κάθε χρηματοροής ισούται με $5.000.000 \times 0{,}0150 \times 0{,}25 = 18.750$ €. Στην περίπτωση που υπάρξει αθέτηση της υποχρέωσης το ποσοστό ανάκτησης ισούται με 40%. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως το ποσό ανάκτησης για κάθε 100 € της ονομαστικής αξίας ισούται με 40 €. Συνεπώς, ο πωλητής της προστασίας είναι υποχρεωμένος να καταβάλει στον αγοραστή προστασίας το ποσό των 3.000.000 € (= $(1 - 40\%) \times 5.000.000$). (O'Kane 2001)



Εικόνα 3: Χρηματοροές ενός CDS όταν δεν έχει συμβεί πιστωτικό γεγονός



Εικόνα 4: Χρηματοροές ενός CDS όταν έχει συμβεί πιστωτικό γεγονός

1.4 Πιστωτικό Γεγονός

Το πιστωτικό γεγονός είναι ο νομικός όρος για το γεγονός που πυροδοτεί την πληρωμή του protection leg. Είναι ένα γεγονός που παρότι μοιάζει με την αθέτηση (default) όπως αυτή ορίζεται από τους οίκους αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας, όπως θα δούμε παρακάτω δεν είναι ακριβώς το ίδιο. Στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων ο όρος «αθέτηση» (default) χρησιμοποιείται συχνά ενώ στην πραγματικότητα εννοείται ο όρος «πιστωτικό γεγονός» (credit event).

Το 2003[2] ο Διεθνής Οργανισμός Ανταλλαγών και Παραγώγων (International Swaps and Derivatives Association – ISDA) αναθεώρησε τους κανονισμούς του πιστωτικού γεγονότος που είχε εκδώσει το 1999. Ως πιστωτικό γεγονός ο ISDA ορίζει τα παρακάτω έξι γεγονότα:

Πτώχευση (Bankruptcy)	Είναι η κατάσταση στην οποία μια οντότητα, συνήθως μία επιχείρηση ή μια χώρα, καταστεί αφερέγγυα ή δεν είναι σε θέση να πληρώσει τους δανειστές ή άλλους οφειλέτες.
Πρόωρη Υποχρέωση (Obligation Acceleration)	Αφορά την κατάσταση όπου η υποκείμενη υποχρέωση καθίσταται ληξιπρόθεσμη και απαιτητή πριν από την προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης της ως αποτέλεσμα της αδυναμίας πληρωμής από την οντότητα αναφοράς. Το πιστωτικό γεγονός συμβαίνει μόνο αν το πληρωτέο πόσο είναι πάνω από ένα ελάχιστο κατώτατο όριο όπως αυτό ορίζεται στην σύμβαση.
Αθέτηση Υποχρέωσης (Obligation Default)	Αφορά και εδώ obligation acceleration, με την διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση ο υπόχρεος έχει την δυνατότητα να αναγγείλει την αδυναμία αποπληρωμής σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση που όντως υπάρχει αδυναμία αποπληρωμής της σχετικής υποχρέωσης.
Αδυναμία Πληρωμής (Failure to Pay)	Αναφέρεται σε περίπτωση αδυναμίας της οντότητας αναφοράς να πραγματοποιήσει οποιεσδήποτε πληρωμές που οφείλει σε μία ή σε περισσότερες υποχρεώσεις λόγω έλλειψης ρευστότητας. Συνήθως, δίνεται μία περίοδο χάριτος στην οντότητα αναφοράς, η οποία με την λήξη ενεργοποιεί το γεγονός.

[2] Το 2014 ο ISDA δημοσίευσε τους νέους κανονισμούς του πιστωτικού γεγονότος. Ωστόσο, λόγω μη δωρεάν διαθεσιμότητα τους στο διαδίκτυο, η παρούσα εργασία βασίζεται στους κανονισμούς όπως αυτοί δημοσιεύτηκαν από τον ISDA το 2003.

Άρνηση Αναγνώρισης Οφειλών (Repudiation / Moratorium)	Αφορά την περίπτωση όπου η οντότητα αναφοράς αρνείται να αποπληρώσει τις υποχρεώσεις διότι αποποιείται ή αμφισβητεί την ισχύ τους.
Αναδιάρθρωση (Restructuring)	Αφορά περιπτώσεις όπου οι όροι των υποχρεώσεων της οντότητας αναφοράς επαναδιαπραγματεύονται και γίνονται λιγότερο ευνοϊκοί προκειμένου να ανακτηθεί ή να βελτιωθεί η ρευστότητά της. Η αναδιάρθρωση περιλαμβάνει αλλαγή του επιτοκίου ή αναδιοργάνωση των ημερομηνιών πληρωμής.

Στην αρχή κάθε αναδιάρθρωση αποτελούσε και πιστωτικό γεγονός και εξαιτίας αυτού, ο ISDA τον Απρίλιο του 2001 εξέδωσε συμπληρωματικούς ορισμούς (Restructuring Supplement to the 1999 ISDA Credit Derivatives Definitions ("Supplement Definition") παρέχοντας έναν τροποποιημένο ορισμό. Σύμφωνα με την τροποποίηση η αναδιάρθρωση αναγνωρίζεται ως πιστωτικό γεγονός αν 1) υπάρχουν τέσσερις ή περισσότεροι δικαιούχοι στην υποχρέωση αναφοράς και 2) θα πρέπει η αναδιάρθρωση να ισχύει για μεγαλύτερο μέρος από τα δύο τρίτα των συνολικών υποχρεώσεων που απαρτίζουν την σύμβαση CDS.

Καθώς η αγορά των πιστωτικών παραγώγων αναπτύχθηκε και οι συμμετέχοντες σε αυτή έμαθαν πολλά για το πώς να καθορίζουν καλύτερα το πιστωτικό γεγονός, ο ISDA τον Ιανουάριο του 2003 δημοσίευσε τους αναθεωρημένους ορισμούς για το πιστωτικό γεγονός (2003 ISDA Credit Derivative Definitions ("2003 Definitions")). Οι αναθεωρημένοι ορισμοί αντανακλούν τροποποιήσεις των ορισμών για το πιστωτικό γεγονός που είχε δημοσιεύσει ο ίδιος οργανισμός το 1999. Συγκεκριμένα, υπάρχουν τροπολογίες για την πτώχευση, την άρνηση αποδοχής κερδών και την αναδιάρθρωση. Η πιο σημαντική αλλαγή αναφέρεται στον ορισμό της αναδιάρθρωσης καθώς ο ISDA επιτρέπει στα συμμετέχοντα μέρη να επιλέξουν μεταξύ τεσσάρων επιλογών: α) συναλλαγή χωρίς αναδιάρθρωση β) συναλλαγή με πλήρη αναδιάρθρωση χωρίς να υπάρχει δυνατότητα τροποποίησης των υποχρεώσεων αναφοράς γ) συναλλαγή με τροποποιημένη αναδιάρθρωση και δ) συναλλαγή με τροποποιημένη αναδιάρθρωση κάτω από προϋποθέσεις.

Τα παραπάνω έξι γεγονότα προσπαθούν να συλλάβουν κάθε είδους κατάσταση που θα μπορούσε να προκαλέσει την επιδείνωση της πιστωτικής ικανότητας της οντότητας αναφοράς ή την αιτία για να προκληθεί μείωση στην αξία της υποχρέωσης αναφοράς.

Τα συμβαλλόμενα μέρη μιας σύμβασης CDS μπορούν να συμπεριλάβουν το σύνολο αυτό των γεγονότων ή μπορούν να επιλέξουν μόνο εκείνα που πιστεύουν ότι είναι τα πλέον κατάλληλα.

Όταν ένα γεγονός κριθεί ως πιστωτικό, τότε τα δύο αντισυμβαλλόμενα μέρη της σύμβασης οφείλουν να ειδοποιήσουν μέσω μίας ειδοποίησης, γνωστή ως Credit Event Notice, ότι πραγματοποιήθηκε το πιστωτικό γεγονός. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την ενεργοποίηση της σύμβασης CDS και ο πωλητής έχει την υποχρέωση να διακανονίσει την σύμβαση. Η ειδοποίηση είναι υποχρεωτική και ο ISDA δίνει την δυνατότητα στους αντισυμβαλλόμενους αυτή να γίνεται είτε γραπτά είτε προφορικά. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο ISDA ζητάει την ένδειξη αποδεικτικών στοιχείων ότι το πιστωτικό γεγονός έχει συμβεί.

Όταν έχει συμβεί το πιστωτικό γεγονός, αρχίζει ο διακανονισμός της σύμβασης. Ο διακανονισμός αναφέρεται μόνο σε εκείνες τις συμβάσεις οι οποίες απαιτούν αποζημίωση λόγω του πιστωτικού γεγονότος. Αλλιώς, αν δεν έχει συμβεί πιστωτικό γεγονός, δεν γίνεται διακανονισμός και επέρχεται η λήξη της σύμβασης. Ο διακανονισμός είναι είτε Φυσικός Διακανονισμός (Physical Settlement) είτε Χρηματικός Διακανονισμός (Cash Settlement).

1.5 Η διαδικασία διακανονισμού μιας σύμβασης CDS

Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, το protection leg είναι η ενδεχόμενη καταβολή πληρωμής από τον πωλητή προστασίας στον αγοραστή προστασίας για την απώλεια της αξίας της παραδοτέας υποχρέωσης μετά την διέλευση ενός πιστωτικού γεγονότος. Υπάρχουν δύο τρόποι για να πραγματοποιηθεί η πληρωμή του protection leg. Αυτοί είναι:

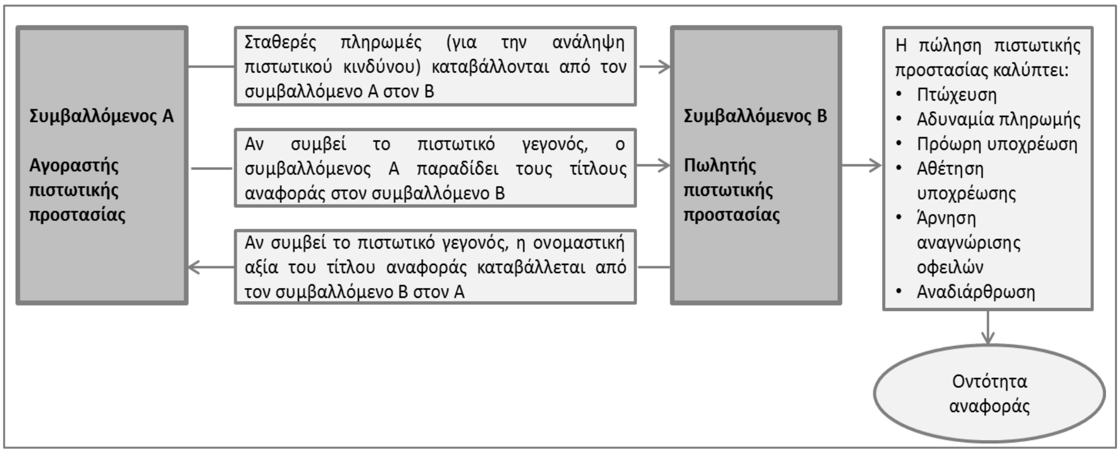
- **Φυσικός Διακανονισμός (Physical Settlement)**: Είναι η πιο διαδεδομένη μορφή διακανονισμού που χρησιμοποιείται στα πιστωτικά παράγωγα. Σε περίπτωση που συμβεί το πιστωτικό γεγονός ο αγοραστής προστασίας παραδίνει τον υποκείμενο τίτλο στον πωλητή προστασίας και σε αντάλλαγμα ο πωλητής προστασίας καταβάλλει στον αγοραστή προστασίας ένα ποσό ίσο με την συνολική ονομαστική αξία του τίτλου αναφοράς (Εικόνα 5). Το ποσό αυτό έχει συμφωνηθεί μεταξύ των δυο αντισυμβαλλόμενων κατά την στιγμή σύναψης της σύμβασης και μπορεί για παράδειγμα να ισούται με την τρέχουσα αξία του τίτλου αναφοράς τη στιγμή εκείνη.

- **Χρηματικός Διακανονισμός (Cash Settlement)**: Σε περίπτωση που συμβεί πιστωτικό γεγονός ο πωλητής προστασίας πληρώνει στον αγοραστή προστασίας τη διαφορά μεταξύ της ονομαστικής αξίας και της ανακτηθείσας αξίας της υποχρέωσης αναφοράς (Εικόνα 6). Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής προστασίας δεν είναι υποχρεωμένος να παραδώσει κάποιον τίτλο στον πωλητή προστασίας. Το κόστος του διακανονισμού για τον πωλητή προστασίας ισούται με:

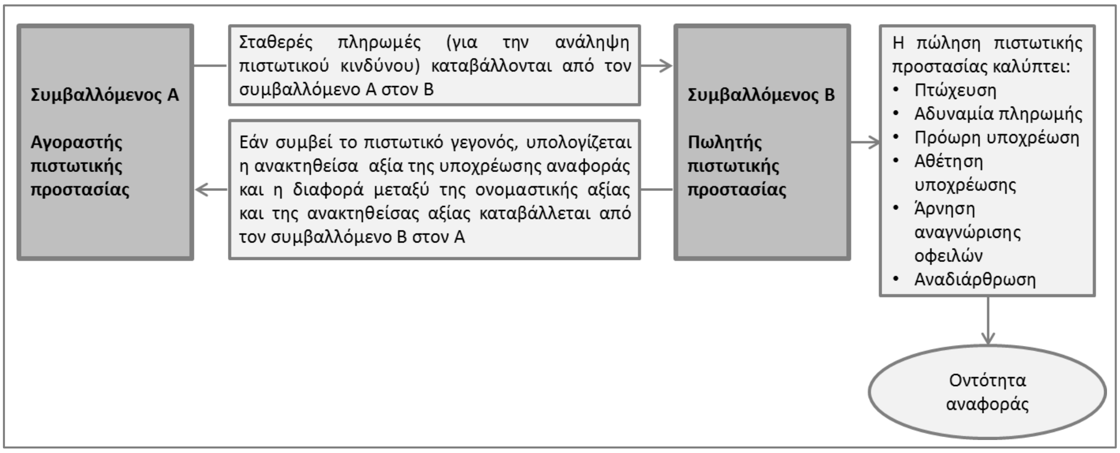
$$C = \text{Ονομαστική Αξία} - \text{Ανακτηθείσα Αξία}$$

Θεωρητικά και οι δύο τρόποι διακανονισμού θα πρέπει να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα. Ωστόσο, λόγω των αλλαγών στην τιμή της ανακτηθείσας αξίας υπάρχει περίπτωση ορισμένες φορές να επωφελείται ο αγοραστής προστασίας όταν γίνεται χρηματικός διακανονισμός. Επιπλέον, επειδή ο φυσικός διακανονισμός διέπεται από απλούστερες διαδικασίες επιλέγεται ως η μέθοδος διακανονισμού σε συμφωνίες που χρησιμοποιούνται στην δημιουργία σύνθετων προϊόντων ή όταν εμφανίζονται δυσκολίες στον προσδιορισμό της αξίας των τίτλων αναφοράς. Τέλος, στον χρηματικό διακανονισμό δεν δίνεται η δυνατότητα στον αγοραστή προστασίας να παραδώσει την φθηνότερη προς παράδοση υποχρέωση (cheapest to-deliver option), το οποίο συμβαίνει όταν ορίζεται παραπάνω από μια παραδοτέα υποχρέωση και ο αγοραστής προστασίας επιλέγει να παραδώσει το φθηνότερο περιουσιακό στοιχείο (M. Choudhry 2006).

Τα παρακάτω σχήματα παρουσιάζουν αναλυτικά την δομή των δύο τρόπων αποπληρωμής του protection leg.



Εικόνα 5: Φυσικός Διακανονισμός



Εικόνα 6: Χρηματικός Διακανονισμός

1.6 Τα είδη των συμβάσεων CDS

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές παραλλαγές με βάση τις οποίες μπορούν οι συμβάσεις CDS να ομαδοποιηθούν. Τα είδη που διαπραγματεύονται σε μεγαλύτερη έκταση στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων παρουσιάζονται παρακάτω (Meissner 2005):

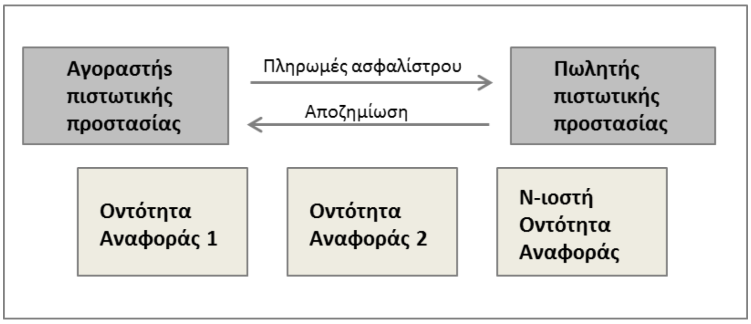
- **Basket Credit Default Swap**: Το βασικό χαρακτηριστικό ενός basket credit default swap, είναι ότι περιλαμβάνει πάνω από δύο ή περισσότερες οντότητες αναφοράς (Εικόνα 7). Συνήθως, σε ένα basket default swap υπάρχουν τρείς με πέντε οντότητες αναφοράς (Anson, Fabozzi, Choudhry, Chen 2004). Υπάρχουν τρία διαφορετικά είδη:
    - **N-οστή Σύμβαση Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου (N-th to Default Swap):** Ο πωλητής προστασίας πληρώνει το ποσό αποζημίωσης

στον αγοραστή προστασίας μόνο όταν έχει συμβεί πιστωτικό γεγονός για την Ν-οστή οντότητα αναφοράς και δεν γίνεται καμία πληρωμή σε περίπτωση έλευσης πιστωτικού γεγονότος στις πρώτες Ν-1 οντότητες αναφοράς.

- **Μειωμένη Σύμβαση Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου (Subordinate Default Swap):** Υπάρχει περιορισμός κατά ανώτατο όριο για την αποπληρωμή κάθε αθέτησης οντότητας αναφοράς και ταυτόχρονα υπάρχει περιορισμός κατά ανώτατο όριο συνολικού κέρδους, πάνω από το περιεχόμενο ανταλλαγής για όλο το σύνολο των οντοτήτων αναφοράς.

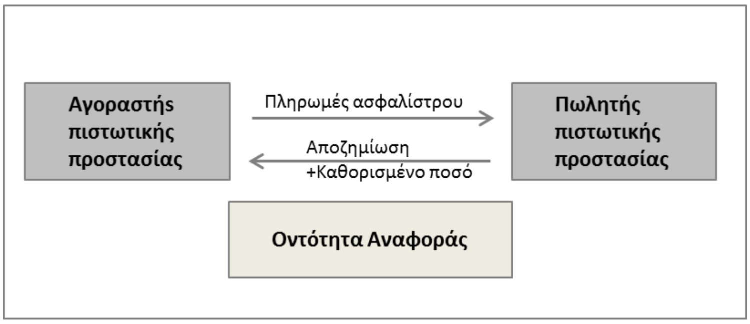
- **Ανώτερη Σύμβαση Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου (Senior Default Swap):** Υπάρχει μέγιστο όριο αποπληρωμής για κάθε οντότητα αναφοράς, αλλά η πληρωμή πραγματοποιείται μόνο μετά από ένα προκαθορισμένο όριο.

Τα basket default swaps κατέχουν υψηλότερο κίνδυνο αθέτησης, ειδικά όταν οι πιθανότητες αθέτησης των υποχρεώσεων στο basket swap έχουν μεταξύ τους μικρή συσχέτιση. Έτσι, όσο χαμηλότερη είναι η συσχέτιση των υποχρεώσεων στο basket τόσο υψηλότερο θα είναι το ασφάλιστρο που καταβάλλει ο αγοραστής του basket swap στον πωλητή και το αντίστροφο.



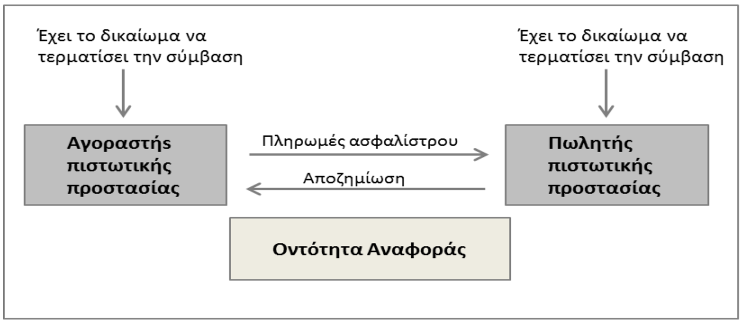
Εικόνα 7: Basket CDS

- **Binary ή Digital Credit Default Swap:** Σε ένα binary ή digital default swap σε περίπτωση πιστωτικού γεγονότος η αποπληρωμή ορίζεται ως ένα σταθερό ποσό συνήθως σε δολάρια, το οποίο καθορίζεται κατά την σύναψη της σύμβασης. Τα binary swaps γίνονται όλο και περισσότερο δημοφιλή. Ένας λόγος για την αυξανόμενη δημοτικότητα τους είναι ότι μπορούν να διαχειριστούν εύκολα. Στην περίπτωση της αθέτησης δεν υπάρχει η ανάγκη να καθοριστεί η τελική τιμή, όπως σε ένα standard default swap, αλλά το προκαθορισμένο ποσό απλώς καταβάλλεται από τον πωλητή προστασίας στον αγοραστή προστασίας (Εικόνα 8).



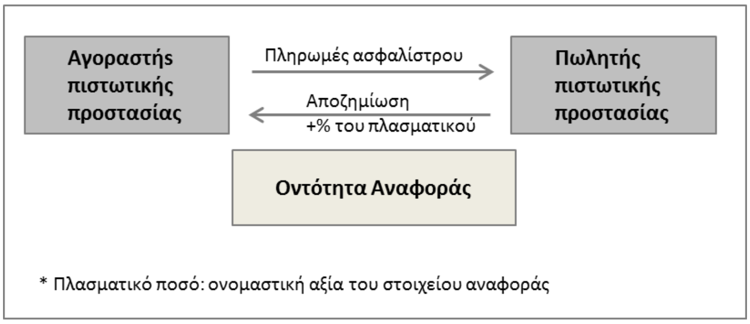
Εικόνα 8: Binary CDS

- **Cancelable Credit Default Swap:** Ένα cancelable default swap αποτελεί συνδυασμό ενός credit default swap και ενός credit default option. Το βασικό χαρακτηριστικό του είναι πως είτε ο αγοραστής προστασίας είτε ο πωλητής προστασίας είτε και οι δύο έχουν το δικαίωμα να ακυρώσουν την σύμβαση πριν την καθορισμένη λήξη της (Εικόνα 9). Στην περίπτωση που η ακύρωση γίνει από τον αγοραστή τότε ονομάζεται callable default swap ενώ αν η ακύρωση του γίνει από τον πωλητή ονομάζεται putable default swap.



Εικόνα 9: Cancelable CDS

- **Leveraged Credit Default Swap:** Σε ένα leveraged default swap η αποπληρωμή που καταβάλλει ο πωλητής ισούται με το προκαθορισμένο ποσό όπως αυτό ορίζεται σε ένα standard default swap συν ένα καθορισμένο ποσοστό του ονομαστικού ποσού (Εικόνα 10). Αυτό το είδος συνήθως χρησιμοποιείται ως τρόπος αντιστάθμισης ενός χαρτοφυλακίου.



Εικόνα 10: Leveraged CDS

- **Contingent Credit Default Swap:** Σε ένα contingent default swap για να πραγματοποιηθεί η αποζημίωση από τον πωλητή προστασίας, απαιτείται εκτός από την έλευση του πιστωτικού γεγονότος και ένα επιπλέον γεγονός (Εικόνα 11). Αυτό το επιπλέον γεγονός μπορεί να είναι είτε η έλευση ενός πιστωτικού γεγονότος σε μια άλλη οντότητα αναφοράς είτε ακόμα και κάποια μεταβολή στις συνθήκες αγοράς των CDS. Η προστασία του παρέχεται από αυτό του είδους CDS είναι μικρότερη σε σχέση με ένα απλό CDS. Σε ένα contingent default swap, η αποζημίωση από τον πωλητή προστασίας ενεργοποιείται εάν συμβεί εκτός από το πιστωτικό γεγονός, ένα ακόμα επιπλέον γεγονός. Το επιπλέον γεγονός μπορεί να είναι η αθέτηση κάποιας άλλης υποχρέωσης.

Εικόνα 11: Contingent CDS

1.7 Χρήση των συμβάσεων CDS

Τα Credit Default Swaps όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω αποτελούν ένα από τα πιο διαδεδομένα είδη πιστωτικών παραγώγων που διαπραγματεύονται είτε σε οργανωμένες αγορές και χρηματιστήρια, είτε εκτός χρηματιστηρίου (over the counter). Οι βασικοί λόγοι για τους οποίους οι επενδυτές τα χρησιμοποιούν είναι για:

- Κερδοσκοπία (Speculation)
- Αντιστάθμιση Κινδύνου (Hedging)
- Εξισορροπητική Κερδοσκοπία (Arbitrage)

Κερδοσκοπία (Speculation)

Τα CDS επιτρέπουν στους επενδυτές να κερδοσκοπήσουν, βασιζόμενοι στις πιθανές μεταβολές των αποδοσιακών διαφορών (spreads) των συμβάσεων που αναφέρονται είτε σε μια συγκεκριμένη οντότητα είτε σε κάποιο δείκτη της αγοράς. Σε αυτή την περίπτωση, ένας επενδυτής ο οποίος πιστεύει ότι τα spreads μιας οντότητας έχουν αυξηθεί ή έχουν μειωθεί σε σύγκριση με τις αποδόσεις των αντίστοιχων ομολόγων, για να επωφεληθεί προβαίνει σε μία συναλλαγή η οποία περιλαμβάνει ένα interest rate swap, ένα CDS και ένα ομόλογο. Με αυτό το χαρτοφυλάκιο ο επενδυτής έχει δυο επιλογές. Είτε να αγοράσει μια σύμβαση CDS μιας εταιρίας και να κερδοσκοπήσει μέσω της ενδεχόμενης αθέτησης της, είτε να πουλήσει την σύμβαση CDS σε περίπτωση που πιστεύει πως θα βελτιωθεί η πιστοληπτική ικανότητα της εταιρίας.

Επιπλέον, ένας επενδυτής για να αποκομίσει κέρδος μπορεί να στηριχτεί και στην πιστοληπτική ικανότητα μιας οντότητας, καθώς συνήθως υπάρχει αύξηση των spreads όταν αυτή μειώνεται, ενώ αντίστοιχα οι τιμές των spreads μειώνονται όταν η πιστοληπτική ικανότητα βελτιώνεται. Επομένως, ο επενδυτής θα μπορούσε να προβεί στην αγορά ενός CDS μιας εταιρίας για να κερδοσκοπήσει μέσω ενδεχόμενης αθέτησης της ή εναλλακτικά να πωλήσει το CDS αν πιστεύει πως η πιστοληπτική ικανότητα της εταιρίας θα βελτιωθεί.

Για παράδειγμα, ένα hedge fund πιστεύει πως η Εταιρία Α σύντομα θα χρεοκοπήσει εξαιτίας του μεγάλου χρέους της. Οπότε, προβαίνει στην αγορά ενός CDS, αξίας 10 εκατομμυρίων ευρώ με διάρκεια δυο ετών, από την Τράπεζα Β. Η οντότητα αναφοράς είναι η Εταιρία Α και το spread είναι στις 500 μονάδες βάσης (=5%) ανά έτος. Τα πιθανά σενάρια είναι:

- Αν όντως η Εταιρία Α υποστεί αθέτηση, ας πούμε μετά από ένα έτος, τότε το hedge fund θα έχει πληρώσει 500.000 ευρώ στην Τράπεζα Β, αλλά παράλληλα θα λάβει 10 εκατομμύρια ευρώ (υποθέτοντας πως το ποσοστό ανάκτησης ισούται με μηδέν και πως η Τράπεζα Β έχει αρκετή ρευστότητα για να καλύψει την απώλεια), βγάζοντας έτσι κέρδος. Από την άλλη μεριά, η Τράπεζα Β και οι επενδυτές της θα υποστούν απώλεια κατά 9,5 εκατομμύρια ευρώ μείον το τυχόν ποσοστό ανάκτησης εκτός εάν η τράπεζα έχει κατά κάποιο τρόπο αντισταθμίσει την θέση πριν συμβεί η αθέτηση.

- Ωστόσο, αν η Εταιρία Α δεν αθετήσει μετά το πέρας των δύο ετών και έχοντας επέλθει η λήξη του CDS, το hedge fund θα έχει πληρώσει συνολικά 1 εκατομμύριο ευρώ χωρίς καμία επιστροφή, έχοντας έτσι υποστεί απώλεια. Σε αντίθεση, η Τράπεζα Β, έχει αποκομίσει κέρδος 1 εκατομμύριο ευρώ χωρίς καμία αρχική επένδυση, πουλώντας μόνο προστασία.

Επίσης, στο παραπάνω σενάριο θα μπορούσαμε να λάβουμε υπόψη και ένα τρίτο σενάριο. Ας υποθέσουμε πως το hedge fund θα αποφασίσει πως θέλει να ρευστοποιήσει την θέση του μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα σε μία προσπάθεια να αποτιμήσει τα κέρδη ή τις απώλειες του. Για παράδειγμα:

- Μετά από ένα έτος, η αγορά θεωρεί πως η Εταιρία Α έχει μεγαλύτερες πιθανότητες να αθετήσει, έχοντας σαν αποτέλεσμα τα CDS spreads της να έχουν αυξηθεί από τις 500 στις 1500 μονάδες βάσης. Το hedge fund μπορεί να επιλέξει να πουλήσει προστασία ύψους 10 εκατομμυρίων ευρώ για ένα έτος στην Τράπεζα Β σε αυτό το υψηλότερο ποσοστό. Οπότε, στην λήξη των δύο ετών, το hedge fund θα πληρώσει στην τράπεζα 2*5%*10 εκ = 1 εκατομμύριο ευρώ, αλλά λαμβάνει από την τράπεζα 1*15%*10 εκ =1,5 εκατομμύρια ευρώ, έχοντας δηλαδή συνολικό όφελος 500.000 ευρώ.

- Σε ένα άλλο σενάριο, μετά από ένα χρόνο η αγορά θεωρεί πως η Εταιρία Α έχει μικρή πιθανότητα να αθετήσει, οπότε τα CDS spreads της να έχουν μειωθεί από τις 500 στις 250 μονάδες βάσης. Όπως και παραπάνω το hedge fund επιλέγει να πουλήσει με αυτό το χαμηλότερο ποσοστό, προστασία ύψους 10 εκατομμυρίων ευρώ για ένα έτος στην Τράπεζα Β. Οπότε, στην λήξη των δύο ετών το hedge fund πληρώνει στην τράπεζα 2*5%*10 εκ = 1 εκατομμύριο ευρώ, αλλά λαμβάνει 1*2,5%*10 εκ = 250.000 ευρώ, έχοντας δηλαδή συνολική απώλεια 750.000 ευρώ. Αυτή η απώλεια είναι μικρότερη από την απώλεια του 1 εκατομμυρίου ευρώ που θα είχε υποστεί αν η δεύτερη συναλλαγή δεν είχε συναφθεί.

Συναλλαγές όπως οι παραπάνω δεν χρειάζεται καν να συμβούν μακροπρόθεσμα. Αν το spread του CDS της εταιρίας Α είχε αυξηθεί μόλις κατά δύο μονάδες βάσης κατά την διάρκεια μιας μέρας, το hedge fund θα μπορούσε αμέσως να συνάψει μια επιπλέον σύμβαση και να αποκομίσει ένα μικρό κέρδος κατά την διάρκεια ζωής των δυο συμβάσεων CDS.

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα, το hedge fund δεν είχε υπό την κυριαρχία του κανένα ομόλογο της Εταιρίας Α. Μια σύμβαση CDS, όπου ο αγοραστής προστασίας δεν είναι το κάτοχος του υποκείμενου τίτλου αναφοράς, ονοματίζεται Naked Credit Default Swap.

Αντιστάθμιση Κινδύνου (Hedging)

Αναμφίβολα, ένα από τα ισχυρότερα κίνητρα για την χρήση πιστωτικών παραγώγων είναι η αντιστάθμιση του κινδύνου (hedging). Πιο συγκριμένα, η αντιστάθμιση κινδύνου γίνεται με την συμμετοχή ενός επενδυτή σε μια δεύτερη συναλλαγή, προκειμένου να μειώσει τον κίνδυνο που διατρέχει από την αρχική συναλλαγή. Υπάρχει ένα ευρύ φάσμα χρηστών που χρησιμοποιούν πιστωτικά παράγωγα για να αντισταθμίσουν τον εν λόγω κίνδυνο. Εμπορικές και επενδυτικές τράπεζες, hedge funds, μη χρηματοπιστωτικά ιδρύματα καθώς και μεμονωμένοι επενδυτές εφαρμόζουν τα πιστωτικά παράγωγα για τη μείωση του πιστωτικού κινδύνου.

Παρακάτω αναφέρονται μερικές περιπτώσεις όπου τα CDS χρησιμοποιούνται για αντιστάθμιση κινδύνου:

- Για παράδειγμα, μια τράπεζα η οποία επιθυμεί να αντισταθμίσει τις απώλειες που θα υποστεί εάν ένας δανειολήπτης αθετήσει ως προς τις υποχρεώσεις του και δεν μπορεί να αποπληρώσει το δάνειο που του έχει χορηγηθεί, μπορεί να συνάψει μια σύμβαση CDS σαν αγοραστής προστασίας. Σε περίπτωση που το δάνειο οδεύει προς αθέτηση, τα έσοδα από την σύμβαση του CDS θα περιορίσουν τις απώλειες από την αθέτηση του υποκείμενου χρέους. Με αυτό τον τρόπο η τράπεζα δεν διαγράφει το δάνειο από το χαρτοφυλάκιο της και παράλληλα επιτυγχάνει την αντιστάθμιση του κινδύνου που επιθυμούσε.
- Για παράδειγμα, έστω ότι ένα συνταξιοδοτικό ταμείο έχει στην κατοχή του πενταετή ομόλογα ονομαστικής αξίας 10 εκατομμύρια ευρώ, που εκδίδονται από την Εταιρία Β. Για να διαχειριστεί τον κίνδυνο απώλειας χρημάτων που ενέχει αν η Εταιρία Β αθετήσει, αγοράζει μία σύμβαση CDS ύψους 10 εκατομμυρίων ευρώ από την Τράπεζα Γ. Το CDS συναλλάσσεται στις 200 μονάδες βάσης (=

2%). Σε αντάλλαγμα, το συνταξιοδοτικό ταμείο πληρώνει στην Τράπεζα Γ, 2%*10 εκ = 200.000 ευρώ ετησίως σε τριμηνιαίες δόσεις ύψους 50.000 ευρώ.

- Αν η Εταιρία Β δεν αθετήσει στις πληρωμές του ομολόγου της, τότε το συνταξιοδοτικό ταμείο καταβάλλει πληρωμές ανά τρίμηνο στην Τράπεζα Γ για πέντε χρόνια και στο τέλος των πέντε ετών λαμβάνει πίσω τα 10 εκατομμύρια ευρώ από την Εταιρία Β. Αν και οι συνολικές πληρωμές γα την παροχή προστασίας από το CDS είναι του ύψους του 1 εκατομμυρίου ευρώ, με αποτέλεσμα να μειωθεί η απόδοση των επενδύσεων του συνταξιοδοτικού ταμείου, ο κίνδυνος απώλειας λόγω της αθέτησης των ομολόγων της Εταιρίας Β έχει εξαλείφει.
- Αν η εταιρία Β χρεοκοπήσει μετά από τρία χρόνια, το συνταξιοδοτικό ταμείο θα σταματήσει να καταβάλλει τις τριμηνιαίες πληρωμές στην Τράπεζα Β και εκείνη με την σειρά της θα αποζημιώσει το ταμείο για την απώλεια του, καταβάλλοντας της το ποσό των 10 εκατομμυρίων ευρώ. Το συνταξιοδοτικό ταμείο κατά την διάρκεια των τριών ετών έχασε τα 600.000 ευρώ που πλήρωσε συνολικά στην τράπεζα, αλλά χωρίς την σύμβαση CDS θα είχε πολύ μεγαλύτερες απώλειες, ύψους 10 εκατομμυρίων ευρώ.

Εξισορροπητική κερδοσκοπία (Arbitrage)

Η τιμή της μετοχής μιας εταιρίας και η αποδοσιακή διαφορά (spread) του CDS της, οφείλουν να έχουν μεταξύ τους αρνητική συσχέτιση. Αυτό πρακτικά σημαίνει, πως σε περίπτωση που η κατάσταση της εταιρίας βελτιωθεί αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η τιμή των μετοχών της να έχει ανοδική πορεία και κατά συνέπεια οι αποδοσιακές διαφορές αναμένεται να έχουν καθοδική πορεία, καθώς η πιθανότητα η εταιρία να αθετήσει τις υποχρεώσεις της ελαττώνεται. Το αντίθετο συμβαίνει σε περίπτωση που υπάρχει επιδείνωση στην κατάσταση της εταιρίας.

Τέτοιες τεχνικές είναι γνωστές ως capital structure arbitrage επειδή εκμεταλλεύονται αδυναμίες της αγοράς μεταξύ των διαφόρων τμημάτων της κεφαλαιακής δομής της ίδιας της εταιρίας. Για παράδειγμα, τυχόν λανθασμένες αποτιμήσεις μεταξύ του χρέους μιας εταιρίας και του μετοχικού της κεφαλαίου. Ένας κερδοσκόπος επιχειρεί να εκμεταλλευτεί την αποδοσιακή διαφορά που υπάρχει μεταξύ των CDS μιας εταιρίας και των ιδίων κεφαλαίων της.

Η διαφορά μεταξύ ενός επενδυτή και ενός κερδοσκόπου που κάνει εξισορροπητική κερδοσκοπία είναι πως ο πρώτος είναι διευθετημένος να αναλάβει κίνδυνο με στόχο την μεγιστοποίηση της απόδοσης, ενώ ο δεύτερος εκμεταλλεύεται συγκυριακές ανισότητες μεταξύ των δύο αγορών (αγοράς spot και αγοράς παραγώγων) με σκοπό την δημιουργία κέρδους χωρίς να αναλαμβάνει κίνδυνο.

Κεφάλαιο 2: Μοντέλα Μειωμένης Προσέγγισης

2.1 Εισαγωγή

Πριν προχωρήσουμε με την παρουσίαση του μοντέλου αποτίμησης των Συμβάσεων Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου, χρειάζεται πρώτα να καθορίσουμε ένα πλαίσιο μοντελοποίησης, το οποίο θα μπορεί να συλλάβει όλους τους κατάλληλους κινδύνους. Αυτοί οι κίνδυνοι απαρτίζονται από τον κίνδυνο αθέτησης (default risk), τον κίνδυνο του ποσοστού ανάκτησης (recovery rate risk), τον κίνδυνο του πιστωτικού περιθωρίου (spread risk) και τον επιτοκιακό κίνδυνο (interest rate risk). Κίνδυνος αθέτησης είναι ο κίνδυνος μια προγραμματισμένη πληρωμή τόκου ή κεφαλαίου ενός ομολόγου ή ενός δανείου να μην καταβληθεί από τον δανειολήπτη στον δανειστή. Ο κίνδυνος ανάκτησης έπεται μιας αθέτησης και σχετίζεται με τον κίνδυνο το μέγεθος του ανακτήσιμου ποσού να είναι πολύ μικρότερο από το οφειλόμενο ποσό. Ο κίνδυνος του πιστωτικού περιθωρίου είναι ο κίνδυνος η αξία ενός πιστωτικού προϊόντος να μειώνεται καθώς η πιστωτική ικανότητα του δανειολήπτη μεταβάλλεται, προκαλώντας έτσι απώλεια σε κάποιον που δρα ως πωλητής του πιστωτικού προϊόντος. Ο επιτοκιακός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος που επιφέρει αλλαγές στα επίπεδα τιμών της καμπύλης Libor, έχοντας ως αποτέλεσμα την μείωση της αξίας του πιστωτικού προϊόντος.

Επομένως, κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να διαμορφώσει το πλαίσιο πάνω στο οποίο θα βασιστεί η μοντελοποίηση και το οποίο μπορεί να συλλάβει όλους τους προαναφερθέντες κινδύνους.

Ξεκινάμε αυτό το κεφάλαιο με τον καθορισμό του πλαισίου αποτίμησης με βάση το οποίο λειτουργεί σήμερα η αγορά των πιστωτικών παραγώγων. Αυτό είναι γνωστό ως ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο πλαίσιο (risk-neutral framework) και συζητάμε την έννοια της ουδέτερης ως προς τον κίνδυνο αποτίμησης. Στην συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται αναφορά στα δύο είδη προσεγγίσεων που υπάρχουν για την αποτίμηση των πιστωτικών παραγώγων. Περισσότερη έμφαση όμως δίνεται στην μειωμένη προσέγγιση (reduced-form) πάνω στην οποία στηρίζεται η αποτίμηση μέσω της μεθόδου του ρυθμού κινδύνου (hazard rate method). Στο τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου εισάγουμε το πρότυπο μοντέλο τιμολόγησης ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο που χρησιμοποιείται από την αγορά για την αποτίμηση πιστωτικών παραγώγων. Περιγράφουμε αναλυτικά το μαθηματικό πλαίσιο του μοντέλου και πως αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποτιμήσει ένα πλήθος απλών πιστωτικών αβέβαιων αποπληρωμών.

2.2 Πλαίσιο Τιμολόγησης Ουδέτερο ως προς τον Κίνδυνο

Η έννοια της ουδέτερης ως προς τον κίνδυνο αποτίμησης, η οποία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Harrison & Kreps (1979), αποτελεί θεμέλιο για την τεράστια ανάπτυξη του μεγέθους, του σκοπού και της πολυπλοκότητας της αγοράς των παραγώγων.

Εντός του ουδέτερου ως προς κίνδυνο πλαισίου, μπορεί να αποδειχθεί ότι η αξία ενός παραγώγου δίνεται από την προεξοφλημένη αναμενόμενη αξία του ποσού της αποπληρωμής. Η προεξόφληση γίνεται με βάση το επιτόκιο άνευ κινδύνου (risk-free rate). Από μαθηματική άποψη, μπορούμε να γράψουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία κατά την χρονική στιγμή 0 και έχοντας ορίσει ως T τον χρόνο της αποπληρωμής, ως ακολούθως

$$V(0) = \mathbb{E}\left[\frac{V(T)}{\beta(T)}\right]$$

όπου, η $\mathbb{E}[X]$ αναπαριστά την αναμενόμενη μέση τιμή του X κάτω από το μέτρο της ουδέτερης ως προς τον κίνδυνο πιθανότητας και ο όρος $\beta(T)$ αναπαριστά τον παράγοντα που προεξοφλεί την πληρωμή από τον χρόνο T στην σημερινή χρονική στιγμή 0,

$$\beta(T) = \exp\left(\int_0^T r(s)ds\right)$$

Η ποσότητα $r(s)$ εκφράζει το επιτόκιο άνευ κινδύνου στο χρόνο s. Αφού το επιτόκιο άνευ κινδύνου είναι το Libor, ορίζουμε τον όρο $Z(0,T)$ ως τον συντελεστή προεξόφλησης

$$Z(0,T) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\beta(T)}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right]$$

2.3 Θεωρητικό Πλαίσιο

Ο πιστωτικός κίνδυνος μπορεί να οριστεί ως ο κίνδυνος που προέρχεται από το ενδεχόμενο ένας δανειολήπτης, να μην είναι σε θέση ή να μην επιθυμεί να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του ως προς τον δανειστή του, δηλαδή να πληρώσει το κεφάλαιο του δανείου ή το κεφάλαιο των τόκων.

Όσον αφορά την μοντελοποίηση του πιστωτικού κινδύνου υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις, η **«Δομημένη Προσέγγιση» (Structural-Form)** και η «**Μειωμένη Προσέγγιση» (Reduced-Form).**

2.3.1 Δομημένη Προσέγγιση (Structural-Form)

Τα μοντέλα με βάση την δομημένη προσέγγιση έχουν την ικανότητα να περιγράψουν την εσωτερική δομή του εκδότη του υποκείμενου χρέους, έτσι ώστε το συμβάν της αθέτησης να είναι συνέπεια κάποιας εκδήλωσης ενός εσωτερικού γεγονότος. Τα μοντέλα αυτού του είδους βασίζονται στο έργο του Merton (1974). Με την πάροδο των χρόνων το μοντέλο έχει επεκταθεί και εφαρμοστεί από διάφορους ερευνητές σε μία προσπάθεια να το βελτιστοποιήσουν. Ωστόσο, σήμερα το μοντέλο Merton συνδέεται κυρίως με την πρόβλεψη της πιθανότητας εκδήλωσης αθέτησης. Για να το επιτύχει αυτό το μοντέλο μεταχειρίζεται την εκδήλωση αθέτησης ως αποτέλεσμα της εταιρίας να μην είναι σε θέση να αποπληρώσει το χρέος της. Η εκδήλωση αθέτησης αναμένεται να εμφανιστεί όταν τα περιουσιακά στοιχεία της εταιρίας πέσουν κάτω από την λογιστική αξία του χρέους της. Τα δομημένα μοντέλα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ώστε να υπολογιστεί το spread στο οποίο θα πρέπει ένα εταιρικό ομόλογο να διαπραγματεύεται στην αγορά των παραγώγων, έχοντας ως βάση την εσωτερική δομή της εταιρίας.

Μοντέλα που βασίζονται στην προσέγγιση του Merton πρέπει να έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- τα γεγονός αθέτησης είναι αναμενόμενο να συμβεί, όταν μια επιχείρηση δεν διαθέτει επαρκή περιουσιακά στοιχεία για να πληρώσει το χρέος της
- τα περιουσιακά στοιχεία μιας επιχείρησης εξελίσσονται τυχαία κατά την πάροδο του χρόνου και η πιθανότητα αθέτησης μιας επιχείρησης προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τις παραδοχές της προσέγγισης αποτίμησης Black-Scholes-Merton

2.3.2 Μειωμένη Προσέγγιση (Reduced-Form)

Τα μοντέλα με βάση την μειωμένη προσέγγιση δεν επιχειρούν να εξετάσουν τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει η αθέτηση. Αντί αυτού, στόχος τους είναι να περιγράψουν τις ιδιότητες της χρονικής στιγμής της αθέτησης όσο το δυνατόν ακριβέστερα.

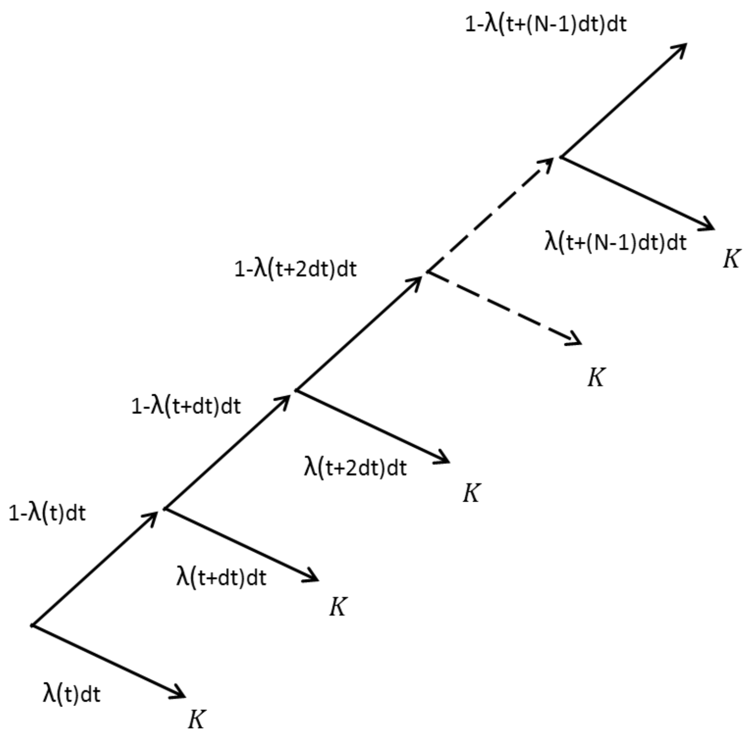
Βασικό χαρακτηριστικό των μοντέλων μειωμένης προσέγγισης, είναι ότι το πιστωτικό γεγονός μοντελοποιείται άμεσα από την μοντελοποίηση της πιθανότητας να συμβεί αυτό το γεγονός. Χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο αποτίμησης βασισμένο την μειωμένη προσέγγιση, η πιθανότητα αθέτησης της υποχρέωσης μπορεί να εξαχθεί από τις τιμές της αγοράς. Επίσης, τα μοντέλα μειωμένης προσέγγισης μπορούν να επεκταθούν και να αποτιμήσουν πιο σύνθετα πιστωτικά παράγωγα. Για αυτούς τους λόγους είναι αρκετά δημοφιλή και χρησιμοποιούνται εκτενώς στην αποτίμηση των πιστωτικών παραγώγων.

Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο μειωμένης προσέγγισης βασίζεται στο έργο των Jarrow & Turnbull (1995), οι οποίοι χαρακτηρίζουν το πιστωτικό γεγονός ως το πρώτο γεγονός μιας διαδικασίας Poisson το οποίο συμβαίνει σε κάποια χρονική στιγμή τ με την πιθανότητα να ορίζεται ως

$$\Pr[\tau < t + dt | \tau \geq t] = \lambda(t)dt$$

δηλαδή, η πιθανότητα αθέτησης στο απειροστό χρονικό διάστημα $[t, t + dt)$, δεδομένου ότι δεν έχει συμβεί ακόμη, είναι εξαρτώμενη από την συνάρτηση $\lambda(t)$, η οποία είναι γνωστή ως **ρυθμός κινδύνου (hazard rate)**. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε την μοντελοποίηση της αθέτησης για μια περίοδο ως ένα απλό διωνυμικό δέντρο στο οποίο η πιθανότητα επιβίωσης ισούται με $1 - \lambda(t)dt$ και η πιθανότητα αθέτησης ισούται με $\lambda(t)dt$, όπου εάν συμβεί λαμβάνουμε ένα ποσό ανάκτησης (recovery value) ίσο με R (D. O'Kane 2003).

Υποθέτουμε πως η συγκεκριμένη διαδικασία είναι ντετερμινιστική. Κατά επέκταση, συνεπάγεται ότι ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate) είναι ανεξάρτητος από τα επιτόκια και τα ποσοστά ανάκτησης.



Εικόνα 12: Η απεικόνιση της πιθανότητας αθέτησης ως διωνυμικό δέντρο

Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτό το μοντέλο για πολλαπλές χρονικές περιόδους (όπως φαίνεται και στο Εικόνα 12), όπου K είναι η πληρωμή κατά τον χρόνο που συμβαίνει η αθέτηση. Μπορούμε συνεπώς να θεωρήσουμε την συνεχή πιθανότητα επιβίωσης σε χρόνο T, υπό τον όρο ότι επιβιώνει για χρόνο t_v θεωρώντας το όριο $dt \rightarrow 0$. Η πιθανότητα επιβίωσης δίνεται από το τύπο

$$Q(t_v, T) = \exp\left(-\int_{t_v}^{T} \lambda(s) ds\right)$$

2.4 Μοντέλα Μειωμένης Προσέγγισης (Reduced-Form Models)

Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, για την αποτίμηση single-name πιστωτικών παραγώγων, χρειάζεται να θεσπίσουμε μια προσέγγιση μοντελοποίησης ουδέτερης ως προς τον κίνδυνο (risk-neutral approach). Συγκεκριμένα, ιδανικά θα θέλαμε ένα μοντέλο που να πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1. Να αποτυπώνει τον κίνδυνο της αθέτησης ως ένα μεμονωμένο γεγονός το οποίο μπορεί να συμβεί στο μέλλον σε άγνωστη χρονική στιγμή.
2. Να συλλαμβάνει τον κίνδυνο μια αβέβαιης πληρωμής ανάκτησης η οποία θεωρείται πως θα καταβληθεί την χρονική στιγμή εκδήλωσης της αθέτησης.

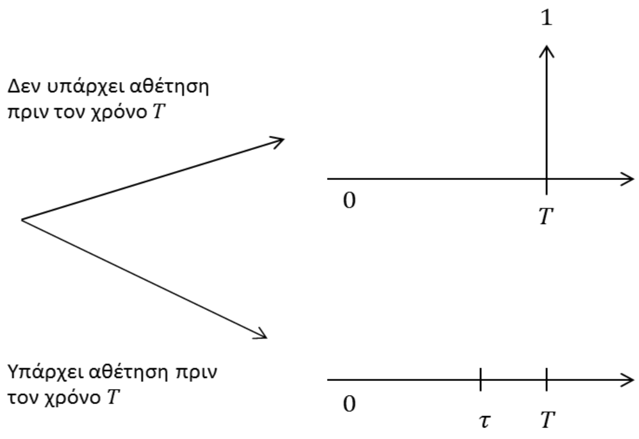
3. Να είναι αρκετά ευέλικτο ώστε να μπορεί να ταιριάζει κατάλληλα στην διάρθρωση των τιμών των ομολόγων, των CDS και των άλλων πιστωτικών μέσων της αγοράς.
4. Να μπορεί να επεκταθεί με απλό τρόπο για να αποτιμήσει ένα ευρύ φάσμα προϊόντων.
5. Να παρέχει την δυνατότητα να εξετάζει παράλληλα την ταυτόχρονη επίδραση του πιστωτικού κινδύνου και του επιτοκιακού κινδύνου.
6. Να μπορεί να συλλαμβάνει τον κίνδυνο του πιστωτικού περιθωρίου (spread risk), δηλαδή τον κίνδυνο να μεταβληθούν τα επίπεδα τιμών των spread.

Η μοντελοποίηση μέσω της παραπάνω προσέγγισης θα επιτρέψει στην αποτίμηση και την διαχείριση προϊόντων σε ένα ενιαίο και συνεκτικό πλαίσιο λαμβάνοντας υπόψη τον κίνδυνο αθέτησης, το spread, το ποσοστό ανάκτησης και τον επιτοκιακό κίνδυνο. Στην συνέχεια πρέπει να τονιστεί πως το μοντέλο στις απαιτήσεις του δεν συμπεριλαμβάνει τον κίνδυνο υποβάθμισης (downgrade risk). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αγορά πιστωτικών παραγώγων δεν θεωρεί την αλλαγή της πιστοληπτικής ικανότητας ως πιστωτικό γεγονός. Άλλωστε, οποιαδήποτε αλλαγή στην πιστοληπτική ικανότητα θα πρέπει να τιμολογούνταν στο spread, είτε πριν είτε μετά την εκδήλωση της υποβάθμισης.

Στην πιο απλή μορφή του, ένα μοντέλο αθέτησης θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένας τρόπος να μοντελοποιηθεί ο χρόνος εκδήλωσης της αθέτησης τ. Όπως είναι προφανές, υποθέτουμε ότι η εκδήλωση αθέτησης είναι ένα γεγονός που συμβαίνει μια φορά. Επίσης, υποθέτουμε πως αν επεκτείνουμε τον χρονικό μας ορίζοντα στο άπειρο όλες οι πιστωτικές οντότητες θα εκδηλώσουν αθέτηση. Έτσι κάθε πιστωτική οντότητα μπορεί δυνητικά να εκδηλώσει αθέτηση στο χρονικό διάστημα $0 < \tau < \infty$. Αν η σύμβαση μας έχει ημερομηνία λήξης T, τότε η μόνη περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι για $\tau \leq T$. Χωρίς να έχουμε προσδιορίσει πως μοντελοποιούμε το τ, μπορούμε χρησιμοποιώντας αυτή την ιδέα για να προχωρήσουμε στην αποτίμηση μερικών απλών πιστωτικών προϊόντων.

2.4.1 Ομόλογο μηδενικού κουπονιού με μηδενικό ποσοστό ανάκτησης

Θεωρούμε ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού με ονομαστική αξία 1€ το οποίο λήγει στον χρόνο T. Επίσης θεωρούμε, πως το ανακτήσιμο ποσό σε περίπτωση εκδήλωσης αθέτησης είναι ίσο με μηδέν. Οι δυο πιθανές πληρωμές φαίνονται στην Εικόνα 13. Ως αποτέλεσμα, μπορούμε να γράψουμε την παρούσα αξία του ομολόγου μηδενικού κουπονιού ως το αναμενόμενο προεξοφλημένο ποσό της πληρωμής που καταβάλλεται την χρονική στιγμή T σύμφωνα με τις αρχές της προσέγγισης ουδέτερης ως προς τον κίνδυνο.



Εικόνα 13: Ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού το οποίο πληρώνει 1€ στην λήξη, αν υπάρξει αθέτηση, αλλιώς δεν πληρώνει τίποτα

Δηλαδή έχουμε ότι η παρούσα αξία του ομολόγου μηδενικού κουπονιού θα είναι:

$$\hat{\mathrm{Z}}(0,\mathrm{T}) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{r(s)ds}\right)\mathrm{I}_{\tau>\mathrm{T}}\right]$$

όπου, ο όρος $\mathrm{r(s)}$ είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου (risk-free rate) και ο όρος $\mathrm{I}_{\tau>\mathrm{T}}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως

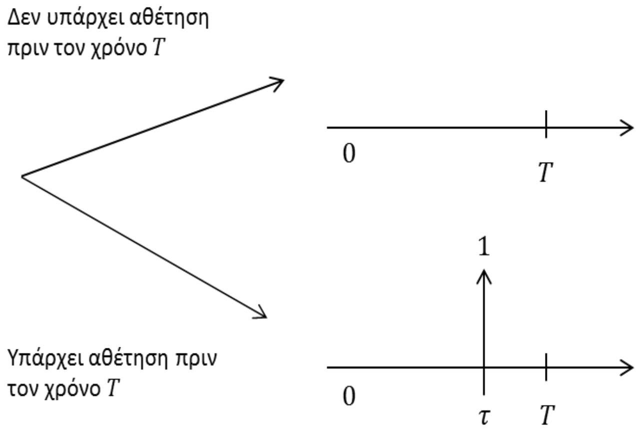
$$\mathrm{I}_{\tau>\mathrm{T}} = \begin{cases} 1, \text{αν } \tau > \mathrm{T} \Leftrightarrow \text{το ομόλογο δεν εκδηλώνει αθέτηση} \\ 0, \text{αν } \tau \leq \mathrm{T} \;\; \Leftrightarrow \text{το ομόλογο εκδηλώνει αθέτηση} \end{cases}$$

Η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[\mathrm{X}]$ θεωρείται κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου.

Για την αποτίμηση του ομολόγου μηδενικού κουπονιού, δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε το τ, αρκεί να γνωρίζουμε την πιθανότητα για το ενδεχόμενο $\tau \leq \mathrm{T}$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τυχόν χρηματοροές θα συμβούν σε γνωστό χρόνο T. Αυτή η φόρμουλα αποτίμησης είναι αρκετά κοινή καθώς δεν θεωρεί κάποια προσέγγιση για το τ. Επίσης, επιτρέπει την δυνατότητα ύπαρξης αλληλεξάρτησης του επιτοκίου άνευ κινδύνου και του χρόνου εμφάνισης της αθέτησης.

2.4.2 Σταθερή πληρωμή κατά την εκδήλωση αθέτησης

Στην συνέχεια, θεωρούμε ένα πιστωτικό προϊόν το οποίο πληρώνει 1€ την χρονική στιγμή που συμβαίνει η αθέτηση τ δεδομένου ότι ισχύει $\tau \leq T$, αλλιώς δεν πληρώνει τίποτα (Εικόνα 14).



Εικόνα 14: Ένα προϊόν το οποίο πληρώνει 1€ κατά τον χρονική στιγμή εκδήλωσης της αθέτησης, με την προϋπόθεση ότι η αθέτηση συμβαίνει, αλλιώς δεν πληρώνει τίποτα

Σε αυτή την περίπτωση η παρούσα αξία του ομολόγου θα είναι

$$D(0,T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds\right) I_{\tau \leq T}\right]$$

Αυτό το προϊόν παρουσιάζει μεγαλύτερη πρόκληση στην μοντελοποίηση του σε σχέση με την μοντελοποίηση του ομολόγου μηδενικού κουπονιού, καθώς ο χρόνος της χρηματοροής είναι άγνωστος. Αυτό δεν θα αποτελούσε πρόβλημα αν οι τιμές των επιτοκίων ήταν μηδενικές, εφόσον θα αρκούσε να γνωρίζουμε αν ισχύει η συνθήκη $\tau \leq T$. Ωστόσο, για μη μηδενικές τιμές των επιτοκίων δεν χρειάζεται μόνο η αθροιστική κατανομή $\Pr(\tau \leq T)$ αλλά είναι απαραίτητη η κατανομή της πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου της αθέτησης, δηλαδή $\Pr(t < \tau \leq t + dt)$. Τέτοιες πληρωμές εκδηλώνονται στα ομόλογα ως η πληρωμή του ανακτήσιμου ποσού και στα CDS εκδηλώνονται ως την πληρωμή του protection leg.

2.4.3 Τυχαία πληρωμή κατά την εκδήλωση αθέτησης

Τέλος θεωρούμε ένα πιστωτικό προϊόν το οποίο πληρώνει ένα τυχαίο ποσό $\Phi(\tau)$ την χρονική στιγμή της αθέτηση τ δεδομένου ότι ισχύει $\tau \leq T$, αλλιώς δεν πληρώνει τίποτα. Η αξία υπολογίζεται ως

$$\widehat{D}(0,T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^{\tau} r(s)ds\right)\Phi(\tau)I_{\tau\leq T}\right]$$

Το βασικό ερώτημα σε αυτή την περίπτωση είναι αν το μέγεθος της τυχαίας πληρωμής $\Phi(\tau)$ εξαρτάται από τον χρόνο αθέτησης τ και τις τιμές των επιτοκίων. Χρειαζόμαστε πάλι να γνωρίζουμε όχι μόνο την αθροιστική κατανομή $\Pr(\tau \leq T)$, αλλά και την κατανομή της πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου της αθέτησης, δηλαδή $\Pr(t < \tau \leq t + dt)$. Με βάση αυτή την προσέγγιση μπορεί να γίνει η αποτίμηση ενός τυχαίου ποσού ανάκτησης ή μιας σύμβασης που καταβάλλει κάποια πληρωμή σε περίπτωση αθέτησης του οποίου η αξία είναι συνδεδεμένη με τον χρόνο αθέτησης και τα επίπεδα των τιμών των επιτοκίων.

2.5 Μοντέλο βασισμένο στον Ρυθμό Κινδύνου (Hazard Rate Model)

Για να προχωρήσουμε πέρα από τους ορίζοντες αυτής της γενικής προσέγγισης αποτίμησης του χρόνου της αθέτησης χρειαζόμαστε ένα μοντέλο. Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως ένα μοντέλο που ικανοποιεί τις παραπάνω αναφερθείσες προϋποθέσεις είναι το μοντέλο που εισηγήθηκε από τους Jarrow και Turnbull (1995). Η προσέγγιση που ακολούθησαν βασίζεται στην ιδέα να μοντελοποιήσουν τον χρόνο αθέτησης ως τον πρώτο (γεγονός) χρόνο άφιξης τ μιας διαδικασίας Poisson. Η ένταση (intensity) ή ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate) της διαδικασίας δίνεται από τον παράγοντα $\lambda(t)$. Από την μαθηματική πλευρά, μπορούμε να ορίσουμε το $\lambda(t)$ ως ακολούθως

$$\lim_{dt\to 0}\frac{1}{dt}\Pr[\tau \leq t + dt | \tau > t] = \lambda(t) \tag{2.5.1}$$

Ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate) πολλαπλασιασμένος με dt δίνει την πιθανότητα της πιστωτικής αθέτησης στο χρονικό διάστημά από t έως $t + dt$ υπό τον όρο ότι έχει επιβιώσει μέχρι την χρονική στιγμή t. Σημαντική ιδιότητα της προσέγγισης μέσω του ρυθμού κινδύνου είναι ότι η αθέτηση αποτελεί ένα τυχαίο γεγονός, καθώς η μοντελοποίηση της αθέτησης γίνεται μέσω της πιθανότητας να συμβεί αθέτηση χωρίς να γνωρίζουμε αν θα συμβεί μέσα στην επόμενη περίοδο μήκους dt. Ξέρουμε μόνο ότι θα αθετήσει με πιθανότητα ίση με $\lambda(t)dt$.

2.5.1 Υπολογισμός της πιθανότητας επιβίωσης

Προηγουμένως στον ορισμό του ρυθμού κινδύνου (hazard rate), στην Εξίσωση (2.5.1), υποθέσαμε ότι το ποσοστό κινδύνου είναι ντετερμινιστικό. Τώρα όμως, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα επιβίωσης από τον χρόνο $t = 0$ στον χρόνο T. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί διαιρώντας όλη την περίοδο στ N διαστήματα μήκους $dt = T/N$. Στην συνέχεια για κάθε διάστημα υπολογίζουμε την πιθανότητα επιβίωσης. Η πιθανότητα για χρόνο T δίνεται από

$$\Pr(\tau > T) = (1 - \lambda(dt)dt)\,(1 - \lambda(2dt)dt) \ldots (1 - \lambda(T)dt)$$

Για συνεχή χρόνο θεωρούμε ότι $dt \to 0$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\Pr(\tau > T) = \exp\left(-\int_0^T \lambda(t)dt\right)$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε και την πυκνότητα πιθανότητας του χρόνου αθέτησης αρκεί να παραγωγίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$\Pr(T < \tau \leq T + dT) = -\frac{\partial \Pr(\tau > T)}{\partial T} dT$$

Οπότε έχουμε,

$$f_\tau(T)dT = \Pr(T < \tau \leq T + dT) = \lambda(T)\exp\left(-\int_0^T \lambda(t)dt\right)dT \qquad (2.5.2)$$

Η Εξίσωση 2.5.2 αποτελεί χρήσιμο εργαλείο όταν θέλουμε να αποτιμήσουμε αξιόγραφα που καταβάλλουν πληρωμή την χρονική στιγμή που συμβαίνει η αθέτηση.

2.6 Μοντελοποίηση της αθέτησης ως μια διαδικασίας Cox

Στην προηγούμενη ενότητα, θεωρήσαμε ότι ο όρος $\lambda(t)$ είναι ντετερμινιστικός. Ενώ αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε την τυχαία χρονική στιγμή της αθέτησης δεν μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε το γεγονός ότι το $\lambda(t)$ μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου καθώς οι συνθήκες που επικρατούν στην αγορά αλλάζουν συνεχώς τις προσδοκίες των συμμετεχόντων για την πιστωτική ικανότητα μιας οντότητας. Ως αποτέλεσμα, υπάρχει η ανάγκη να γενικεύσουμε το μοντέλο ώστε να δέχεται και στοχαστικούς ρυθμούς κινδύνου. Αυτό σημαίνει πως το μοντέλο θα ενσωματώνει δυο πηγές τυχαιότητας, μία από το άλμα της διαδικασίας Poisson και η άλλη από την τυχαία εξέλιξη του $\lambda(t)$. Συνεπώς το μοντέλο είναι διπλά στοχαστικό. Αν το $\lambda(t)$ είναι στοχαστικό, τότε η διαδικασία Poisson είναι γνωστή ως διαδικασία Cox. Τώρα είμαστε σε θέση να τροποποιήσουμε τους τύπους αποτίμησης που έχουν αναφερθεί στην Ενότητα 2.4.

2.6.1 Ομόλογο μηδενικού κουπονιού με μηδενικό ποσοστό ανάκτησης

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία ενός προϊόντος το οποίο πληρώνει 1€ την χρονική T όταν δεν έχει εκδηλώσει αθέτηση, δηλαδή όταν $\tau > T$, αλλιώς δεν πληρώνει τίποτα. Όπως και προηγουμένως, έχουμε ότι η παρούσα άξια του προϊόντος είναι

$$\hat{Z}(0,T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right) I_{\tau>T}\right] \tag{2.6.1}$$

Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{Z}(0,T) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right) I_{\tau>T}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right) I_{\tau>T} \middle| \{\lambda(t)\}_{t\in[0,T]}\right]\right]\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Όπου η εσωτερική αναμενόμενη τιμή προϋποθέτει ότι οι ρυθμοί κινδύνου ανήκουν στο διάστημα από 0 έως T. Έχουμε ότι,

$$\mathbb{E}\left[I_{\tau>T} \middle| \{\lambda(t)\}_{t\in[0,T]}\right] = \exp\left(-\int_0^T \lambda(t)dt\right)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην Εξίσωση (2.6.2), έχουμε

$$\hat{Z}(0,T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T \big(r(t) + \lambda(t)\big)dt\right)\right]$$

2.6.2 Σταθερή πληρωμή κατά την εκδήλωση αθέτησης

Θεωρούμε ξανά ένα πιστωτικό προϊόν που πληρώνει 1€ την χρονική στιγμή της αθέτησης εφόσον ισχύει $\tau \leq T$. Η αξία δίνεται από

$$D(0,T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^\tau r(t)dt\right) I_{\tau\leq T}\right]$$

Η παραπάνω μέση τιμή για τον υπολογισμό της απαιτεί την γνώση της πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την Εξίσωση (2.4.2).

Συνεπώς έχουμε,

$$D(0,T)=\mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)\exp\left(-\int_0^t \big(r(s)+\lambda(s)\big)ds\right)dt\right]$$

2.6.3 Πληρωμή αβέβαιου ποσού κατά την εκδήλωση αθέτησης

Τέλος εξετάζουμε ένα πιστωτικό προϊόν το οποίο πληρώνει ένα αβέβαιο ποσό $\Phi(\tau)$ την χρονική στιγμή της αθέτησης τ, εφόσον ισχύει $\tau \leq T$. Η αξία δίνεται από

$$\widehat{D}(0,T)=\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^\tau r(t)dt\right)\Phi(\tau)I_{\tau\leq T}\right]$$

Εάν η $\Phi(\tau)$ είναι τυχαία, αλλά είναι ανεξάρτητη από το επιτόκιο και τον ρυθμό κινδύνου τότε έχουμε,

$$\widehat{D}(0,T)=\mathbb{E}[\Phi]\mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)\exp\left(-\int_0^t \big(r(s)+\lambda(s)\big)ds\right)dt\right]=\mathbb{E}[\Phi]D(0,T)$$

Κεφάλαιο 3: Μοντέλο αποτίμησης μιας Σύμβασης Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου

3.1 Εισαγωγή

Δεδομένου ότι για την αγορά μιας σύμβασης CDS δεν απαιτείται κάποιο κόστος, ένα CDS δεν έχει καμία αρχική αξία. Ωστόσο, αυτό παύει να ισχύει αμέσως μετά την έναρξη της σύμβασης, καθώς τα spread των CDS της οντότητας αναφοράς μεταβάλλονται. Για αυτό τον λόγο είναι αναγκαία η χρήση ενός μοντέλου για τον υπολογισμό της αξίας της σύμβασης CDS σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Παρόλα αυτά ο προσδιορισμός της αξίας της σύμβασης είναι αρκετά περίπλοκη διαδικασία. Ο βασικός λόγος είναι ότι πρέπει να ληφθούν υπόψη πολλοί παράγοντες, όπως το προεξοφλητικό επιτόκιο, το πιστωτικό περιθώριο (spread) καθώς και η πιθανότητα που αποδίδεται στο εάν συμβεί ή όχι κάποιο πιστωτικό.

Το μοντέλο αποτίμησης των συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου που παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο είναι το μοντέλο που αναπτύχθηκε από τον D. O'Kane και τον S. Turnbull (2003), όπως αυτό παρουσιάζεται στο βιβλίο του D. O'Kane (2008) με τίτλο «Modelling single-name and multi-name Credit Derivatives».

3.2 Μοντέλο αποτίμησης μιας σύμβασης CDS

Πλέον είμαστε σε θέση να μοντελοποιήσουμε την αξία μιας σύμβασης CDS κάνοντας χρήση του μοντέλου της μειωμένης προσέγγισης. Υποθέτουμε πως οι ρυθμοί κινδύνου (hazard rates), τα επιτόκια και τα ποσοστά ανάκτησης (recovery rates) είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Εντός των ορίων ενός μοντέλου αποτίμησης χρειαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε τον χρόνο. Καθορίζουμε λοιπόν ως μονάδα του χρόνου το έτος και ο χρόνος μεταξύ δυο ημερομηνιών d_1 και d_2 δίνεται από

$$t = \frac{\mathrm{DayDiff}(d_1, d_2)}{\text{Days in year}}$$

όπου, ο όρος $\mathrm{DayDiff}(d_1, d_2)$ είναι μια συνάρτηση που επιστρέφει τον αριθμό των ημερολογιακών ημερών μεταξύ των d_1 και d_2. Η τιμή του παρανομαστή είναι ένα μέτρο του αριθμού των ημερών σε ένα έτος.

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε πως η ονομαστική αξία της σύμβασης CDS είναι ίση με 1€. Εκτιμούμε όλες τις χρηματοροές του CDS στην ημερομηνία αποτίμησης t. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την αξία του CDS σε χρόνο "$T + n$", όπου το T δηλώνει την ημερομηνία εκτέλεσης της συναλλαγής και το n δηλώνει τον αριθμό των ημερών που έχουν επέλθει από εκείνη την ημερομηνία. Ο χρόνος μηδέν για την προεξοφλητική καμπύλη Libor και την πιθανότητα επιβίωσης του CDS αντιστοιχούν στην ημερομηνία "$T + 1$". Αυτός είναι και ο χρόνος έναρξης της ημερομηνίας ισχύος παροχής της προστασίας. Εκείνη την χρονική στιγμή τόσο ο συντελεστής προεξόφλησης όσο και η πιθανότητα επιβίωσης ισούνται με 1.0. Ωστόσο, οι δυο παράγοντες αρχίζουν αμέσως να μειώνονται δεδομένου ότι η σύμβαση εκτίθεται στον κίνδυνο πιστοληπτικής ικανότητας της υποκείμενης οντότητας αναφοράς.

Μπορούμε τώρα να καθορίσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

t: Η ημερομηνία έναρξης ισχύος της σύμβασης CDS.

$\mathbf{Z(t, T)}$**:** Ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor για την χρονική στιγμή t

$\mathbf{Q(t, T)}$**:** Η πιθανότητα επιβίωσης της οντότητας αναφοράς από χρόνο t σε χρόνο T.

$\mathbf{t_n}$**:** Οι ημερομηνίες πληρωμής του ασφαλίστρου, για $n = 1, \dots, N$. Θέτουμε $t_0 = t$.

T: Η χρονική στιγμή που λήγει η προστασία, δηλαδή $t_N = T$.

$\mathbf{S_0}$**:** το σταθερό spread της σύμβασης CDS που διαπραγματεύεται σε χρόνο 0 και ωριμάζει σε χρόνο T, δηλαδή $S(0, T)$.

$\mathbf{\Delta(t_{n-1}, t_n)}$**:** Ο αριθμός των ημερών μεταξύ των ημερομηνιών t_{n-1} και t_n

R: Το αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης, το οποίο υπολογίζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό της ονομαστικής αξίας.

Για να ξεκινήσουμε, χωρίζουμε την σύμβασης CDS σε δυο μέρη, το premium leg και το protection leg.

3.2.1 Αποτίμηση του Premium Leg

Το premium leg είναι μια σειρά προκαθορισμένων πληρωμών ασφαλίστρου που γίνονται από τον αγοραστή προστασίας στον πωλητή προστασίας, έχοντας ως στόχο την προστασία από τον πιστωτικό κίνδυνο. Για την αποτίμηση του premium leg θα υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε μια ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Υπάρχουν δυο είδη πληρωμών που συνεισφέρουν στην αξία του premium leg. Πρώτον, υπάρχουν οι προγραμματισμένες πληρωμές του ασφαλίστρου, οι οποίες καταβάλλονται για όσο διάστημα κατά τις ημερομηνίες πληρωμής η οντότητα αναφοράς επιβιώνει. Δεύτερον, αν υπάρξει κάποιο πιστωτικό γεγονός, υπάρχει μια πληρωμή ασφαλίστρου η οποία έχει συσσωρευτεί από την προηγούμενη ημερομηνία καταβολής του ασφαλίστρου.

Ξεκινάμε με την αναμενόμενη παρούσα αξία των πληρωμών των ασφαλίστρων που καταβάλλονται υπό την προϋπόθεση ότι η οντότητα αναφοράς έχει επιβιώσει στις ημερομηνίες πληρωμής του ασφαλίστρου. Συνεπώς η παρούσα αξία δίνεται από

$$\hat{Z}(t, t_n) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^{t_n} r(s)ds\right) I_{\tau > t_n}\right]$$

όπου, ο όρος $r(t)$ είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Υποθέτοντας, ότι μεταξύ του επιτοκίου και του χρόνου αθέτησης υπάρχει ανεξαρτησία, η αναμενόμενη τιμή μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη δίνοντας

$$\hat{Z}(t, t_n) = Z(t, t_n) Q(t, t_n)$$

Έχοντας υιοθετήσει την υπόθεση ανεξαρτησίας, η παρούσα αξία του premium leg μπορεί να γραφτεί ως

$$S_0 \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1}, t_n)\, Q(t, t_n) Z(t, t_n)$$

Έχουμε αθροίσει κάθε μία πληρωμή ασφαλίστρου, $S_0\, \Delta(t_{n-1}, t_n)$, σταθμίζοντας την με την πιθανότητα να επιβιώσει μέχρι την ημερομηνία πληρωμής και στην συνέχεια την προεξοφλούμε με το επιτόκιο άνευ κινδύνου.

Εκτός από τις πληρωμές του ασφαλίστρου που καταβάλλονται στις προκαθορισμένες ημερομηνίες πληρωμής, θα πρέπει να εξεταστεί και η επίδραση των ασφαλίστρων που συσσωρεύονται ανάμεσα στην τελευταία ημερομηνία πληρωμής του ασφαλίστρου και του χρόνου της αθέτησης. Αυτή η πληρωμή καταβάλλεται από τον αγοραστή της προστασίας στον πωλητή της προστασίας αμέσως μετά την έλευση του πιστωτικού γεγονότος. Συνεπώς, το ύψος του ποσού των συσσωρευμένων ασφαλίστρων προσδιορίζεται από τον χρόνο έλευσης της αθέτησης, αν πράγματι συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός. Πρόκειται για μια ενδεχόμενη πληρωμή το προφίλ της οποίας αναφέρθηκε στην Ενότητα 2.4.2, όπου παρουσιάστηκε ότι η σημερινή αξία που έχει 1€ καταβαλλόμενο σε περίπτωση αθέτησης που συμβαίνει στο διάστημα $[s, s + ds]$ δίνεται από

$$Z(t,s)\big(-dQ(t,s)\big)$$

Όπως είναι λογικό, εάν το πιστωτικό γεγονός συμβεί στην έναρξη της περιόδου, τότε κανένα ποσό ασφαλίστρου δεν θα έχει συσσωρευτεί. Αντιθέτως, αν το πιστωτικό γεγονός συμβεί στο τέλος της περιόδου, τότε μία ολόκληρη πληρωμή ασφαλίστρου θα καταβληθεί. Αν το πιστωτικό γεγονός συμβεί σε κάποια χρονική στιγμή s ανάμεσα σε δυο ημερομηνίες πληρωμής ασφαλίστρου, δηλαδή $t_{n-1} < s < t_n$, τότε ο αγοραστής προστασίας χρειάζεται να καταβάλλει στον πωλητή της προστασίας το ποσό του ασφαλίστρου που έχει συσσωρευτεί, το οποίο δίνεται από

$$S_0\Delta(t_{n-1},s)$$

Η αναμενόμενη παρούσα αξία του ασφαλίστρου που έχει συσσωρευτεί λόγω της εκδήλωσης αθέτησης στο διάστημα $[s, s+ds]$ κατά την ν-οστή περίοδο πληρωμής ασφαλίστρου δίνεται από

$$S_0\,\Delta(t_{n-1},s)Z(t,s)(-dQ(t,s))$$

Ωστόσο, η αθέτηση μπορεί να επέλθει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά της περιόδου καταβολής του ασφαλίστρου. Τότε, η αξία του συσσωρευμένου ασφαλίστρου γράφεται ως

$$S_0\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Delta(t_{n-1},s)Z(t,s)(-dQ(t,s))$$

Χρειαζόμαστε επίσης για τον υπολογισμό της αναμενόμενης παρούσας αξίας του συσσωρευμένου ασφαλίστρου να αθροίσουμε όλες τις παραπάνω πληρωμές.

Ως αποτέλεσμα, η αξία του συσσωρευμένου ασφαλίστρου υπολογίζεται ως:

$$S_0\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Delta(t_{n-1},s)Z(t,s)(-dQ(t,s))$$

Κατά συνέπεια, η παρούσα αξία του premium leg δίνεται από

$$\text{PV Premium Leg} = S_0\,\text{RPV01}(t,T) \qquad (3.2.1)$$

όπου η Risky PV01 ορίζεται ως

$$\mathrm{RPV01}(t,T) = \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1},t_n) Z(t,t_n) Q(t,t_n)$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Delta(t_{n-1},s) Z(t,s) \big(-dQ(t,s)\big)$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \Delta(t_{n-1}\,,s) Z(t,s) \big(-dQ(t,s)\big) \cong \frac{1}{2} \Delta(t_{n-1},t_n) Z(t,t_n) (Q(t,t_{n-1}) - Q(t,t_n))$$

Η παραπάνω προσέγγιση βασίζεται στην παρατήρηση ότι αν επέλθει αθέτηση κατά την διάρκεια της περιόδου πληρωμής ασφαλίστρου, κατά μέσο όρο αυτή θα συμβεί κοντά στα μέσα της περιόδου, οπότε το δεδουλευμένο ασφάλιστρο σε αυτή την περίπτωση ισούται με $S_0 \Delta(t_{n-1},t_n)/2$. Η πιθανότητα να συμβεί αθέτηση κατά την ν-οστή περίοδο πληρωμής ασφαλίστρου ισούται με $Q(t,t_{n-1}) - Q(t,t_n)$ και στη συνέχεια προεξοφλούμε αυτή την πληρωμή κάνοντας χρήση του συντελεστή προεξόφλησης στο τέλος της περιόδου. Για λόγους συνέπειας με την υιοθέτηση της προσέγγισης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν συντελεστή προεξόφλησης που να αντιστοιχεί σε χρόνο $(t_{n-1} + t_n)/2$.

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της RPV01 ως τον συνδυασμό των προκαθορισμένων πληρωμών ασφαλίστρου συν το ποσό των συσσωρευμένων ασφαλίστρων κατά τον χρόνο της αθέτησης ως ακολούθως

$$\mathrm{RPV01}(t,T) = \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1},t_n) Z(t\,,t_n) Q(t,t_n)$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1},t_n) Z(t,t_n) (Q(t,t_{n-1}) - Q(t,t_n))$$

Η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται

$$\mathrm{RPV01}(t,T) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1},t_n) Z(t,t_n) (Q(t,t_{n-1}) + Q(t,t_n)) \qquad (3.2.2)$$

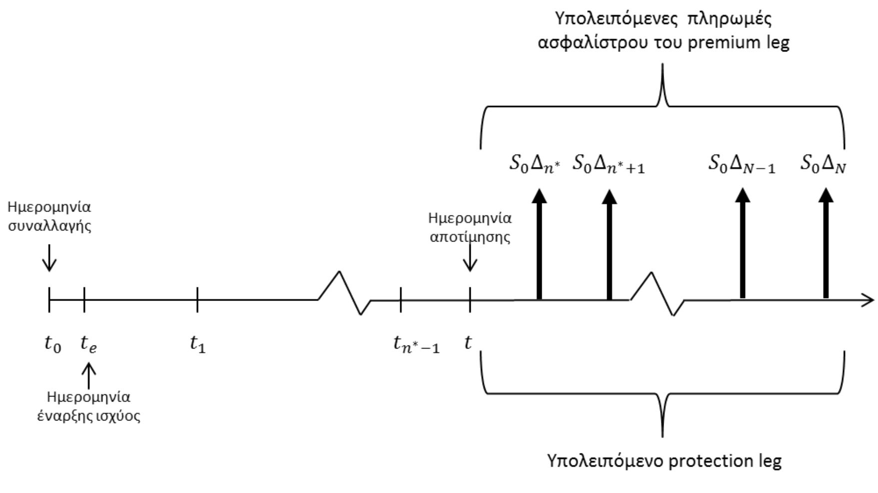
Η RPV01 (risky present value 1 bps) είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία 1 bps που καταβάλλεται για το premium leg είτε μέχρι την προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης, είτε μέχρι την χρονική στιγμή που επέλθει το πιστωτικό γεγονός, όποιο από τα δυο γεγονότα συμβεί πρώτο. Η RPV01 επειδή είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία μιας αβέβαιης σειράς πληρωμών ασφαλίστρου, εκφράζει την έννοια του κινδύνου. Η αβεβαιότητα οφείλεται στο γεγονός ότι οι πληρωμές του ασφαλίστρου σταματούν, αν εμφανιστεί κάποιο πιστωτικό γεγονός.

3.2.2 Αποτίμηση μεταξύ ημερομηνιών πληρωμής ασφαλίστρου

Η Εξίσωση (3.2.1) που παριστάνει την αξία του premium leg, λαμβάνει υπόψη της την επίδραση της πληρωμής των συσσωρευμένων ασφαλίστρων την χρονική στιγμή της αθέτησης. Ωστόσο, αυτό έχει προκύψει έχοντας υποθέσει ότι η ημερομηνία αποτίμησης συμπίπτει με μια ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Ως αποτέλεσμα, έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχει σήμερα συσσωρευμένο ασφάλιστρο. Αυτό όμως δεν θα ισχύει όταν θα βρισκόμαστε μεταξύ ημερομηνιών πληρωμής ασφαλίστρων (Εικόνα 15). Ας ορίσουμε ως t_{n^*} τον χρόνο της πρώτης χρηματοροής που θα συμβεί μετά την σημερινή ημερομηνία. Ως εκ τούτου, πρέπει να προσαρμόσουμε την εξίσωση με την παρούσα αξία του premium leg.

Η εξίσωση δίνεται από

$$\begin{aligned} \text{PV Premium Leg} = {} & S_0 \int_{t}^{t_{n^*}} \Delta(t_{n^*}, s) Z(t,s)\big(-dQ(t,s)\big) \\ & + S_0 \sum_{n=n^*+1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Delta(t_{n-1}, s) Z(t,s)\big(-dQ(t,s)\big) \\ & + S_0 \sum_{n=n^*}^{N} \Delta(t_{n-1}, t_n) Z(t,t_n) Q(t,t_n) \end{aligned}$$



Εικόνα 15: Απεικόνιση μιας σύμβασης CDS της οποίας η ημερομηνία αποτίμησης είναι μεταξύ δυο ημερομηνιών πληρωμής ασφαλίστρου

Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση με προηγουμένως, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως

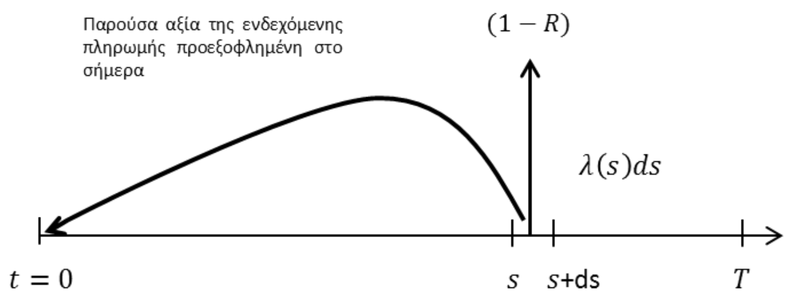
$$\begin{aligned}\text{PV Premium Leg} = {} & S_0\Delta(t_{n^*}, t)Z(t, t_{n^*})\big(1 - Q(t, t_{n^*})\big) \\ & + \frac{S_0}{2}\Delta(t, t_{n^*})Z(t, t_{n^*})\big(1 - Q(t, t_{n^*})\big) \\ & + S_0\Delta(t_{n^*-1}, t_{n^*})Z(t, t_{n^*})Q(t, t_{n^*}) \\ & + \frac{S_0}{2}\sum_{n=n^*-1}^{N} \Delta(t_{n-1}, t_n)Z(t, t_n)\big(Q(t, t_{n-1}) + Q(t, t_n)\big)\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης αφορά την πληρωμή του ασφαλίστρου που έχει συσσωρευτεί κατά το χρονικό διάστημα ανάμεσα της προηγούμενης ημερομηνίας πληρωμής ασφαλίστρου και της ημερομηνίας αποτίμησης. Αυτή καταβάλλεται στο α-κέραιο εφόσον υπάρξει πιστωτικό γεγονός από τώρα μέχρι την επόμενη ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Ο δεύτερος όρος εκφράζει την αναμενόμενη παρούσα αξία του ασφαλίστρου που αναλογεί από την ημερομηνία αποτίμησης στην ημερομηνία του επό-μενου ασφαλίστρου. Όπως και προηγουμένως, υποθέτουμε ότι αν συμβεί αθέτηση κατά την διάρκεια της περιόδου, κατά μέσο όρο, αυτή θα συμβεί στα μισά της περιόδου και έτσι το μισό ποσό του συσσωρευμένου ασφαλίστρου θα καταβληθεί. Ο τρίτος όρος α-ντιπροσωπεύει ολόκληρο το ασφάλιστρο που καταβάλλεται για όσο διάστημα δεν υ-πάρχει πιστωτικό γεγονός πριν από την επόμενη ημερομηνία ασφαλίστρου. Ο τέταρτος και τελευταίος όρος αναπαριστά τις υπολειπόμενες πληρωμές ασφαλίστρου, οι οποίες χειρίζονται όπως έχει περιγραφτεί παραπάνω στην ενότητα.

3.2.3 Αποτίμηση του Protection Leg

Το protection leg είναι η ενδεχόμενη πληρωμή αποζημίωσης που καταβάλλεται μετά το πιστωτικό γεγονός και ισούται με το ποσοστό ανάκτησης (1 - R) επί την ονομαστική αξία της προστασίας (Εικόνα 16). Αποτελεί ένα αβέβαιο ποσό το οποίο καταβάλλεται κατά την στιγμή της αθέτησης. Η μοντελοποίηση τέτοιων πληρωμών, όπου καταβάλλε-ται μια πληρωμή $\Phi(\tau)$ κατά τον χρόνο της αθέτησης τ αν $\tau \leq T$, που ισούται με

$$\widehat{D}(t, T) = \mathbb{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^{\tau} r(s)ds\right)\Phi(\tau)I_{\tau\leq T}\right]$$



Εικόνα 16: Γραφική απεικόνιση της ενδεχόμενης πληρωμής του protection leg

Υποθέτουμε, ότι η αναμενόμενη αξία της πληρωμής προστασίας $\mathbb{E}[\Phi(\tau)] = (1 - \mathrm{R})$ είναι ανεξάρτητη από τα επιτόκια και τον χρόνο αθέτησης. Έχουμε ήδη υποθέσει ότι ο χρόνος αθέτησης είναι ανεξάρτητος από τις τιμές των επιτοκίων. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\text{PV Protection Leg}\,(\mathrm{t},\mathrm{T}) = (1-\mathrm{R})\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{s})(-\mathrm{dQ}(\mathrm{t},\mathrm{s}))$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα ως προς s μπορεί να προσεγγιστεί με διαχωρισμό του χρόνου μεταξύ t και T, σε K διαστήματα ίσου μήκους με $\mathrm{K} = \mathrm{int}(\mathrm{M} \times (\mathrm{T} - \mathrm{t}) + 0.5)$, όπου M είναι ο αριθμός των βημάτων ανά έτος. Όσο περισσότερο αυξάνεται το M τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχουμε. Ορίζοντας ως $\epsilon = (\mathrm{T} - \mathrm{t})/\mathrm{K}$, έχουμε

$$\text{PV Protection Leg} = (1-\mathrm{R})\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{k}\epsilon)(\mathrm{Q}(\mathrm{t},(\mathrm{k}-1)\epsilon) - \mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{k}\epsilon))$$

Εφόσον, η συνάρτηση του προεξοφλητικού παράγοντα $\mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{T})$, είναι μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του T, μπορούμε να ορίσουμε ένα άνω φράγμα και ένα κάτω φράγμα για την παρούσα αξία του protection leg.

Το κάτω φράγμα ορίζεται ως

$$\mathrm{L} = (1-\mathrm{R})\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}})(\mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}) - \mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}}))$$

ενώ το άνω φράγμα ορίζεται ως

$$\mathrm{U} = (1-\mathrm{R})\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})(\mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}) - \mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}}))$$

Ένας τρόπος ο οποίος μπορεί να βοηθήσει στην βελτίωση της ακρίβειας στην προσέγγιση του ολοκληρώματος που υιοθετήσαμε παραπάνω, είναι μέσω θέτοντας την παρούσα αξία του protection leg ίση με το μέσο όρο των δυο αυτών φραγμάτων. Οπότε η παρούσα αξία του protection leg γίνεται

$$\text{PV Protection Leg} = \frac{(1-R)}{2}\sum_{k=1}^{K}\big(Z(t,t_k)+Z(t,t_{k-1})\big)\big(Q(t,t_{k-1})-Q(t,t_k)\big) \qquad (3.2.3)$$

3.3.Η τρέχουσα αξία (mark-to-market) μιας σύμβασης CDS

Η τρέχουσα αξία ή mark-to-market μιας σύμβασης CDS εκφράζει το ποσό των χρημάτων που θα λάβει ο κάτοχος της σύμβασης (εάν η τιμή είναι θετική) ή το ποσό των χρημάτων που υποχρεούται να πληρώσει (εάν η τιμή είναι αρνητική), σε περίπτωση ρευστοποίησης της σύμβασης.

Η τρέχουσα αξία (mark-to-market)[3] ενός CDS σε χρόνο t, με ονομαστική αξία 1€, spread ύψους S_0 και χρόνο λήξης T δίνεται από

$$\begin{aligned} V(t) &= \text{PV Protection Leg} - \text{PV Premium Leg} \\ &= \frac{(1-R)}{2}\sum_{k=1}^{K}(Z(t,t_{k-1})+Z(t,t_k))(Q(t,t_{k-1})-Q(t,t_k)) - S_0\text{RPV01}(t,T) \end{aligned}$$

όπου,

$$\begin{aligned} \text{RPV01} = {} & \Delta(t_{n^*},t)Z(t,t_{n^*})\big(1-Q(t,t_{n^*})\big) \\ & +\frac{1}{2}\Delta(t,t_{n^*})Z(t,t_{n^*})\big(1-Q(t,t_{n^*})\big) \\ & +\Delta(t_{n^*-1},t_{n^*})Z(t,t_{n^*})Q(t,t_{n^*}) \\ & +\frac{1}{2}\sum_{n=n^*-1}^{N}\Delta(t_{n-1},t_n)Z(t,t_n)(Q(t,t_{n-1})+Q(t,t_n)) \end{aligned}$$

[3] Η Mark-to-market (MTM) είναι μία λογιστική μέθοδος που καταγράφει την αξία ενός περιουσιακού στοιχείου σύμφωνα με την τρέχουσα τιμή που έχει στην αγορά.

3.4 Καθορισμός του Breakeven Spread

Το breakeven spread είναι το spread του CDS που καταβάλλεται για μια νέα σύμβαση. Δεδομένου ότι μια νέα σύμβαση CDS δεν έχει κάποιο αρχικό κόστος την στιγμή αγοράς του, κατά τον χρόνο έναρξης της σύμβασης, δηλαδή για $t = 0$ θα πρέπει να ισχύει

$$V(0) = 0$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τον καθορισμό του spread S_0 ως η αξία που λύνει αυτή την εξίσωση.

Έτσι λοιπόν έχουμε,

$$S_0 = \frac{(1-R)}{2} \frac{\sum_{k=1}^{K}(Z(0,t_{k-1}) + Z(0,t_k))(Q(0,t_{k-1}) - Q(0,t_k))}{RPV01(0,T)} \tag{3.4}$$

Πρέπει να επισημάνουμε πως η PRV01 κατά την έναρξη ενός CDS έχει απλούστερη μορφή από την γενική σχέση που παρουσιάστηκε προηγουμένως, δεδομένου ότι δεν υπάρχει συσσωρευμένο ασφάλιστρο.

Επομένως έχουμε,

$$RPV01(0,T) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1},t_n)Z(0,t_n)(Q(0,t_{n-1}) + Q(0,t_n))$$

3.5 Το Πιστωτικό Τρίγωνο (The Credit Triangle)

Ας χρησιμοποιήσουμε αυτά που έχουμε αναφέρει έως τώρα για να υπολογίσουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σύμβαση CDS που είναι συνδεδεμένο με έναν εκδότη με κάποιο ντετερμινιστικό ρυθμό κινδύνου $\lambda(t)$. Η σύμβαση πληρώνει $(1 - R)$ κατά την χρονική στιγμή της αθέτησης, εάν η αθέτηση συμβεί πριν την λήξη της σύμβασης T. Ας υποθέσουμε επίσης, πως για να πληρώσει για αυτή την προστασία ο αγοραστής της σύμβασης, καταβάλλει περιοδικά ένα ασφάλιστρο ή spread S μέχρι την λήξη ή μέχρι να συμβεί η αθέτηση, όποιο από τα δυο γεγονότα συμβεί πρώτο. Η αξία του spread ορίζεται ως η καθαρή παρούσα αξία της σύμβασης που κατά την έναρξη του ισούται με το μηδέν.

Ας εξετάσουμε τώρα την αξία του premium leg. Μεταξύ του χρονικού διαστήματος t και $t + dt$ έχουμε μια πληρωμή ίση με $S \times dt$, υπό την προϋπόθεση πως δεν έχει επέλθει α-θέτηση. Προεξοφλώντας αυτή την πληρωμή και ολοκληρώνοντας για όλη την διάρκεια ζωής της σύμβασης έχουμε

$$\text{PV Premium leg }(0, T) = S \int_0^T Z(0, t) Q(0, t) dt$$

Τώρα ας εξετάσουμε την πληρωμή του protection leg. Η αξία του δίνεται από

$$\text{PV Protection leg }(0, T) = (1 - R) \int_0^T Z(0, t)(-dQ(0, t))$$

Αφού ισχύει $dQ(0, t) = -\lambda(t) Q(0, t) dt$, έχουμε ότι

$$\text{PV Protection leg }(0, T) = (1 - R) \int_0^T Z(0, t) \lambda(t) Q(0, t) dt$$

Αν στην συνέχεια κάνουμε την τελική παραδοχή ότι ο ρυθμός κινδύνου είναι σταθερός, αυτό μας δίνει

$$\text{PV Protection leg }(0, T) = \lambda(1 - R) \int_0^T Z(0, t) Q(0, t) dt$$

Η αξία του spread S, το οποίο καθιστά την αξία του protection leg ίση με την αξία του premium leg δίνεται από

$$S = \lambda(1 - R) \qquad (3.5)$$

Ονομάζουμε Εξίσωση (3.5) πιστωτικό τρίγωνο, επειδή είναι μια συνάρτηση τριών μεταβλητών και η γνώση οποιωνδήποτε δύο είναι επαρκής για τον υπολογισμό της τρίτης.

Κεφάλαιο 4: Κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης και της καμπύλης επιβίωσης

4.1 Κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης Libor

Απαραίτητη προϋπόθεση για την αποτίμηση ενός πιστωτικού παραγώγου είναι μια προεξοφλητική καμπύλη. Χρειαζόμαστε μια προεξοφλητική καμπύλη, διότι η αποτίμηση όλων των πιστωτικών παραγώγων με μελλοντικές χρηματοροές απαιτεί να έχουμε λάβει υπόψη μας την χρονική αξία του χρήματος. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων. Το επιτόκιο που χρησιμοποιείται για την προεξόφληση αυτών των μελλοντικών χρηματοροών επιφέρει σημαντική επίδραση στην τιμή του παραγώγου.

Επομένως, το βασικό ερώτημα που τίθεται τώρα είναι ποιο επιτόκιο πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της καμπύλης. Εφόσον οι πωλητές των πιστωτικών παραγώγων, όπου κατά κανόνα είναι εμπορικές και επενδυτικές τράπεζες, επιθυμούν να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο τους, το επιτόκιο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την προεξόφληση των χρηματοροών είναι εκείνο με το οποίο θα πρέπει να χρηματοδοτήσουν την αγορά των παραγώγων αντιστάθμισης. Το επιτόκιο αυτό είναι γνωστό ως Libor. Το επιτόκιο Libor αποτελεί το επιτόκιο με το οποίο οι εμπορικές τράπεζες μπορούν να δανειστούν στην διατραπεζική αγορά. Συνεπώς, η τιμολόγηση των παραγώγων απαιτεί μια προεξοφλητική καμπύλη η οποία να συνδέεται με το επίπεδο των τιμών του δείκτη Libor.

4.2 Κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης Libor

Για την κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης θα βασιστούμε στην μέθοδο bootstrap, η οποία γενικά αποτελεί την κυριότερη προσέγγιση που χρησιμοποιείται για την κατασκευή μιας καμπύλης Libor. Σημειώνεται ότι η μέθοδος αυτή δεν σχετίζεται με την γνωστή μέθοδο bootstrap της Στατιστικής κατά την οποία γίνεται δειγματοληψία.
Γενικά, η συγκεκριμένη μέθοδος bootstrap δουλεύει επαναληπτικά, ξεκινώντας από μια γνωστή τιμή επιτοκίου που έχει την μικρότερη ημερομηνία λήξης (shortest maturity) και υπολογίζει την τιμή του επιτοκίου για την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή που ακολουθεί. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται χρησιμοποιώντας κάθε φορά την τιμή που υπολογίζεται για την εύρεση της επόμενης τιμής. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όσες φορές είναι απαραίτητο μέχρι να υπολογιστούν όλες οι επιθυμητές τιμές των

επιτοκίων. Έχοντας υπολογίσει πλέον τις τιμές των επιτοκίων για κάθε χρονική στιγμή, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τους προεξοφλητικούς παράγοντες.

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε πως εάν έχουμε κάποια χρηματοροή της οποίας η ημερομηνία βρίσκεται ανάμεσα σε δυο ημερομηνίες με γνωστές τιμές επιτοκίων, το επιτόκιο για αυτή την χρηματοροή είναι εύκολο να προσεγγιστεί μέσω μιας γραμμικής παρεμβολής (linear interpolation) και κατά επέκταση να υπολογιστεί και ο προεξοφλητικός παράγοντας της. Η διαδικασία αυτή έχει σαν αποτέλεσμα σε κάθε βήμα να υπολογίζεται και ένα μέρος της προεξοφλητικής καμπύλης.

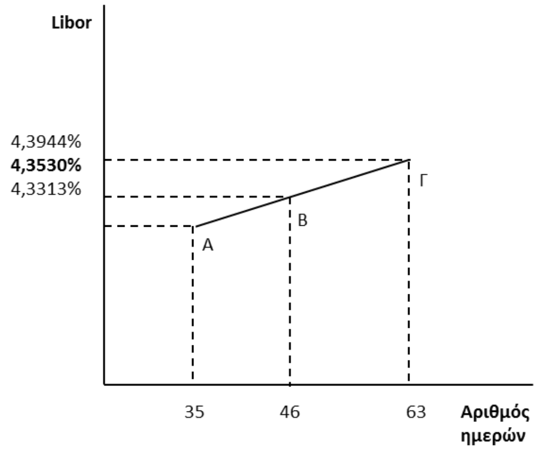
Παρακάτω θα παραθέσουμε μια εφαρμογή της γραμμικής παρεμβολής καθώς και τον γενικό τύπο της.

Παράδειγμα γραμμικής παρεμβολής

Αν υποθέσουμε ότι η σημερινή μέρα είναι 5 Μάιου 2016 και πως μια τράπεζα χρειάζεται να καθορίσει το επιτόκιο Libor για τη μέρα 20 Ιουνίου 2016, η οποία απέχει περίπου 1,5 μήνα από την σημερινή ημερομηνία. Δεν υπάρχει διαθέσιμη τιμή Libor για την απαιτούμενη ημερομηνία, οπότε είναι απαραίτητο να εκτιμηθεί η άγνωστη τιμή Libor μέσω γραμμικής παρεμβολής.

Ας θεωρήσουμε ως R_n την άγνωστη τιμή Libor με ημερομηνία λήξης n. Οι πιο κοντινές διαθέσιμες ημερομηνίες λήξης είναι εκείνη του ενός μήνα (R_1) και των δυο μηνών (R_2), οι οποίες περικλείουν σαν άνω και κάτω φράγμα για την άγνωστη τιμή Libor. Η άγνωστη τιμή Libor, μέσω της γραμμικής παρεμβολής υπολογίζεται σαν να βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία γραμμή μεταξύ των δυο γνωστών επιτοκίων.

Σημερινή Ημερομηνία	5/5/2016
Ημερομηνία λήξης άγνωστου επιτοκίου	20/6/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου (t_n)	46
Επιτόκιο Libor για 1-μήνα (R_1)	4,3313%
Ημερομηνία λήξης του R_1	9/6/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	35
Επιτόκιο Libor για 2-μήνες (R_2)	4,3944%
Ημερομηνία λήξης του R_2	7/7/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	63



Εικόνα 17: Γραμμική Παρεμβολή

Η Εικόνα 17 δείχνει την σχέση μεταξύ των δύο επιτοκίων και των ημερών μέχρι την ημερομηνία λήξης. Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής υποθέτει ότι το άγνωστο επιτόκιο (R_n) βρίσκεται επί την γραμμής (ΑΓ) μεταξύ των δυο γνωστών επιτοκίων. Επειδή, η ΑΓ είναι γραμμική, δηλαδή είναι μια ευθεία γραμμή, η κλίση της γραμμής (ΑΒ) που συνδέει τα επιτόκια R_1και R_n είναι η ίδια με την κλίση της ευθείας ΑΓ.

Επομένως, το άγνωστο επιτόκιο R_n υπολογίζεται ως εξής:

$$R_n = 4{,}3313\% + \frac{4{,}3944\% - 4{,}3313\%}{63 - 35} \times (46 - 35)$$

Επομένως, το ζητούμενο επιτόκιο ισούται με 4,3530%, το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις δύο γνωστές τιμές των επιτοκίων R_1 και R_2.

Γενικός τύπος της γραμμικής παρεμβολής

Λαμβάνοντας υπόψη δύο γνωστές τιμές επιτοκίων καθώς και τις ημερομηνίες λήξης τους, έχουμε:

$\mathbf{R_1}$ = Γνωστό επιτόκιο με την μικρότερη ημερομηνία λήξης

$\mathbf{t_1}$ = Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1

$\mathbf{R_2}$ = Γνωστό επιτόκιο με την μεγαλύτερη ημερομηνία λήξης

$\mathbf{t_2}$ = Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2

$\mathbf{R_n}$ = Άγνωστο επιτόκιο μεταξύ του R_1 και του R_2

$\mathbf{t_n}$ = Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_n

Ο γενικός τύπος της γραμμικής παρεμβολής δίνεται από την:

$$\frac{R_n - R_1}{t_n - t_1} = \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow\; R_n = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} \times (t_n - t_1) \qquad (4.1)$$

4.3 Κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης

Μια σύμβαση CDS μπορεί να αποτιμηθεί έχοντας ως δεδομένα μια καμπύλη επιβίωσης, μια καμπύλη Libor και το αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης R. Ωστόσο, εάν η καμπύλη επιβίωσης δεν έχει βαθμονομηθεί (calibrated) στα CDS spreads στης αγοράς για την συγκεκριμένη οντότητα αναφοράς, οποιαδήποτε τρέχουσα τιμή CDS και να υπολογιστεί δεν θα έχει απολύτως κανένα νόημα. Οπότε, σύμφωνα με τους O' Kane & Turnbull, η βαθμονόμηση της καμπύλης επιβίωσης επιτυγχάνεται μέσω της κατασκευής μιας πλήρους χρονικής διάρθρωσης των πιθανοτήτων επιβίωσης από έναν πεπερασμένο αριθμό διαθέσιμων τιμών CDS spreads της αγοράς.

Η διαδικασία για την κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης ξεκινάει παίρνοντας ως δεδομένο την σύμβαση με την μικρότερη ημερομηνία λήξης και την χρησιμοποιεί για να υπολογίσει την πρώτη πιθανότητας επιβίωσης. Πιο συγκεκριμένα, έχοντας ως δεδομένο την γνωστή τιμή του spread του πρώτου έτους μιας σύμβασης CDS, υπολογίζουμε εύκολα την τιμή $\lambda_{0,1}$.

Έχοντας υποθέσει ότι οι πληρωμές του ασφαλίστρου καταβάλλονται ανά τρίμηνο και ότι έχουμε γνωστές τιμές CDS spreads για 1,2,3,4, και 5 χρόνια, η πιθανότητα επιβίωσης για ανά έτος δίνεται από:

$$\textbf{Survival Probability}_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 1 & ,\text{για } i = 0 \\ \exp(-\lambda_{0,1}) & ,\text{για } i = 1 \\ \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2}) & ,\text{για } i = 2 \\ \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,3}) & ,\text{για } i = 3 \\ \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,3} - \lambda_{3,4}) & ,\text{για } i = 4 \\ \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,3} - \lambda_{3,4} - \lambda_{4,5}) & ,\text{για } i = 5 \end{cases}$$

Για λόγους απλότητας θεωρούμε πως δεν έχουμε συσσωρευμένο ασφάλιστρο μεταξύ δύο περιόδων καταβολής ασφαλίστρου.

Η τιμή του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{0,1}$ για το 1ο έτος υπολογίζεται από την παρακάτω εξίσωση[4]:

$$\textbf{PV Premium Leg} = \textbf{PV Protection Leg} \qquad (4.2)$$

[4] Η λύση της εξίσωσης βρίσκεται αρκετά εύκολα π.χ. μέσω του Excel με την χρήση του add-in SOLVER.

Η παρούσα αξία του premium leg δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\textbf{PV Premium Leg} = \mathrm{Spread}_1 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{1,m}\mathrm{SP}_{1,m} = \mathrm{Spread}_1 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{1,m} \exp(-\lambda_{0,1}\tau_m) \qquad (4.3)$$

Όπου,

$\mathbf{Spread_1}$**:** η τιμή του spread για το 1ο έτος

$\mathbf{DF_{1,m}}$**:** η τιμή του προεξοφλητικού παράγοντα κατά το πρώτο έτος για το m τρίμηνο

$\mathbf{SP_{1,m}}$**:** η τιμή της πιθανότητας επιβίωσης κατά το πρώτο έτος για το m τρίμηνο

$\boldsymbol{\lambda_{0,1}}$: η ζητούμενη τιμή του ρυθμού κινδύνου για το 1ο έτος

τ: 0,25 για το 1ο τρίμηνο του έτους, 0,50 για το 2ο τρίμηνο του έτους, 0,75 για το 3ο τρίμηνο του έτους και 1 για το 4ο τρίμηνο του έτους

Ενώ, η παρούσα αξία του protection leg δίνεται από την εξίσωση:

$$\textbf{PV Protection Leg} = (1-\mathrm{R})\mathrm{DF}_1(\mathrm{SP}_0 - \mathrm{SP}_1) = (1-\mathrm{R})\mathrm{DF}_1\big(1-\exp(-\lambda_{0,1})\big) \qquad (4.4)$$

Όπου,

R: το ποσοστό ανάκτησης

$\mathbf{DF_1}$**:** η τιμή του προεξοφλητικού παράγοντα στο τέλος του 1ου έτους

$\mathbf{SP_0}$**:** η τιμή της πιθανότητας επιβίωσης για σήμερα (δηλαδή για έτος μηδέν), η οποία ισούται με την μονάδα

$\mathbf{SP_1}$**:** η τιμή της πιθανότητας επιβίωσης κατά το τέλος του πρώτου χρόνου

$\boldsymbol{\lambda_{0,1}}$: η ζητούμενη τιμή του ρυθμού κινδύνου για το 1ο έτος

Συνεχίζουμε με το 2ο έτος, όπου έχοντας ως γνωστό το $\lambda_{0,1}$ το χρησιμοποιούμε για να βρούμε το $\lambda_{0,2}$.

Επομένως έχουμε:

PV Premium Leg (έτος 1)

$$= \mathrm{Spread}_2 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{1,m}\, \mathrm{SP}_{1,m} = \mathrm{Spread}_2 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{1,m} \exp(-\lambda_{0,1}\tau_m) \qquad (4.5)$$

PV Premium Leg (έτος 2)

$$= \mathrm{Spread}_2 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{2,m}\, \mathrm{S}_{2,m} = \mathrm{Spread}_2 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{2,m} \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2}\tau_m) \quad (4.6)$$

Η συνολική παρούσα αξία του Premium Leg κατά το 2ο έτος δίνεται από το άθροισμα των παραπάνω δύο εξισώσεων, δηλαδή

$$\textbf{PV Premium Leg} = \textbf{PV Premium Leg}\ (\text{έτος } 1) + \textbf{PV Premium Leg}\ (\text{έτος } 2) \qquad (4.7)$$

Όπου,

$\mathbf{Spread_2}$**:** η τιμή του spread για το 2ο έτος

$\mathbf{DF_{2,m}}$**:** η τιμή του προεξοφλητικού παράγοντα κατά το 2ο έτος για το m τρίμηνο

$\mathbf{SP_{2,m}}$**:** η τιμή της πιθανότητας επιβίωσης κατά το 2ο έτος για το m τρίμηνο

$\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$: η ζητούμενη τιμή του ρυθμού κινδύνου για το 2ο έτος

$\boldsymbol{\tau}$: 0,25 για το 1ο τρίμηνο του έτους, 0,50 για το 2ο τρίμηνο του έτους, 0,75 για το 3ο τρίμηνο του έτους και 1 για το 4ο τρίμηνο του έτους

Χρειαζόμαστε ακόμα την εξίσωση που δίνει την παρούσα αξία του protection leg, η οποία δίνεται από:

PV Protection Leg

$$= (1-\mathrm{R}) \sum_{i=1}^{2} \mathrm{DF_i}\,(\mathrm{SP_{i-1}} - \mathrm{SP_i}) = (1-\mathrm{R})\big(\mathrm{DF_1}(\mathrm{SP_0} - \mathrm{SP_1}) + \mathrm{DF_2}(\mathrm{SP_1} - \mathrm{SP_2})\big)$$
$$= (1-\mathrm{R})(\mathrm{DF_1}(1 - \exp(-\lambda_{0,1}) + \mathrm{DF_2}\big(\exp(-\lambda_{0,1}) - \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2})\big) \quad (4.8)$$

Όπου,

R: το ποσοστό ανάκτησης

$\mathbf{DF_2}$**:** η τιμή του προεξοφλητικού παράγοντα στο τέλους του 2ου έτους

$\mathbf{SP_2}$**:** η τιμή της πιθανότητας επιβίωσης κατά το τέλους του 2ου χρόνου

$\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$: η ζητούμενη τιμή του ρυθμού κινδύνου για το 2ο έτος

Όπως και προηγουμένως, η τιμή του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{1,2}$ για το 2ο έτος υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\textbf{PV Premium Leg} = \textbf{PV Protection Leg}$$

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές είναι απαραίτητο μέχρι να βρεθούν όλοι οι ρυθμοί κινδύνου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση μέχρι να βρεθεί ο ρυθμός κινδύνου $\lambda_{4,5}$ για το 5ο έτος. Μέσω της διαδικασίας αυτής προκύπτει βήμα με βήμα η καμπύλη επιβίωσης, η οποία είναι προσαρμοσμένη στις τιμές των CDS spreads της αγοράς για την υποκείμενη οντότητα.

Υπενθυμίζουμε πως ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate) είναι η τιμή μέσω της οποία υπολογίζεται η πιθανότητα αθέτησης της υποχρέωσης για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, χωρίς να λαμβάνει υπόψη τυχόν άλλα πιστωτικά γεγονότα που μπορεί να έχουν συμβεί παρελθοντικά. Δηλαδή, ο ρυθμός κινδύνου συλλαμβάνει την πιθανότητα εκδήλωσης ενός πιστωτικού γεγονότος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, υπό την υπόθεση ότι το γεγονός δεν έχει ακόμα πραγματοποιηθεί.

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογή του μοντέλου αποτίμησης

5.1 Εισαγωγή

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η εφαρμογή του μοντέλου αποτίμησης συμβολαίων CDS το οποίο προτάθηκε από τους O’ Kane & Turnbull και όπως αυτό περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3. Η υλοποίηση των υπολογισμών θα γίνει με την χρήση του Excel.

5.2 Κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης Libor

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια υποθετική σύμβαση CDS τα χαρακτηριστικά της οποίας παρουσιάζονται αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα:

Ονομαστική αξία	10.000.000 €
CDS spread	200 bps
Συχνότητα πληρωμών ασφαλί-στρου	Τριμηνιαίες
Ποσοστό ανάκτησης	40%
Ημερομηνία έναρξης ισχύος	20/6/2011
Ημερομηνία λήξης	23/12/2016
Ημερομηνία αποτίμησης	20/12/2011

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά της σύμβαση CDS

Σημαντικό είναι επίσης να αναφέρουμε και τι θέση θα λάβουμε ως προς την σύμβαση CDS. Πιο συγκεκριμένα, εάν ενεργήσουμε ως αγοραστής προστασίας, τότε έχουμε *θέση long* ή αν ενεργήσουμε ως ο πωλητής προστασίας, τότε έχουμε *θέση short*. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα επιλέξουμε να έχουν *θέση long*.

Πρέπει πρώτα όμως να καθορίσουμε τις ημερομηνίες των τριμηνιαίων πληρωμών ασφαλίστρου. Έχοντας ως ημερομηνία αποτίμησης την 20η Δεκεμβρίου 2011, οι τριμηνιαίες πληρωμές ασφαλίστρου ξεκινάνε από την 20η Μαρτίου 2012 και τελειώνουν την 23η Δεκεμβρίου 2016, όπου αποτελεί και την ημερομηνία λήξης της σύμβασης CDS. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε πως αν μια ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου πέφτει σε κάποια αργία ή μέσα στο Σαββατοκύριακο, η ημερομηνία πληρωμής μεταφέρεται στην αμέσως επόμενη εργάσιμη μέρα.

Οι ημερομηνίες πληρωμής του τριμηνιαίου ασφαλίστρου εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημερομηνίες Πληρωμής Ασφαλίστρου
20/3/2012
20/6/2012
20/9/2012
20/9/2012
20/3/2013
20/6/2013
20/9/2013
20/12/2013
20/3/2014
20/6/2014
22/9/2014
22/12/2014
23/3/2015
23/6/2015
23/9/2015
23/12/2015
23/3/2016
23/6/2016
23/9/2016
23/12/2016

Πίνακας 2: Ημερομηνίες πληρωμής του ασφαλίστρου

Επόμενο βήμα είναι η κατασκευή της καμπύλης Libor. Έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 4 ποια είναι η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για την κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης Libor. Θεωρούμε ότι για τις ημερομηνίες που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα το επιτόκιο Libor είναι γνωστό[5].

Ημερομηνία	Επιτόκιο Libor
20/3/2012	1,435%
20/3/2013	1,646%
20/3/2014	1,976%
23/3/2015	2,532%
23/3/2016	2,956%
23/3/2017	3,321%

Πίνακας 3: Γνωστές τιμές επιτοκίου Libor

[5] Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι τιμές επιτοκίου που εμφανίζονται στον Πίνακα 3 δεν βασίζονται σε πραγματικές τιμές του Libor.

Το επιτόκιο για την ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου 20/3/2012 είναι γνωστό και όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3 ισούται με 1,435%. Συνεχίζουμε με την αμέσως επόμενη ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου, όπου σύμφωνα με τον Πίνακα 2 είναι η 20/6/2012. Η εύρεση του επιτοκίου κατά την 20/6/2012 θα γίνει μέσω γραμμικής παρεμβολής χρησιμοποιώντας τα γνωστά επιτόκια για τις ημερομηνίες 20/3/2012 (1,435%) και 20/3/2013 (1,646%).

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Ημερομηνία αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης άγνωστου επιτοκίου	20/6/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου (t_n)	183
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,435%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/3/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	91
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,646%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/9/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	456

Πίνακας 4: Υπολογισμός του επιτοκίου Libor κατά την 20/12/2012

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 4.1 έχουμε ότι το ζητούμε επιτόκιο για την ημερομηνία 20/6/2012 ισούται με:

$$\mathrm{R_n} = 1{,}435\% + \frac{1{,}646\% - 1{,}435\%}{457 - 92} \times (183 - 92) = 1{,}488\%$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να υπολογιστεί το επιτόκιο Libor για κάθε μια ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Στον πίνακα που παρατίθεται ακολούθως εμφανίζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των επιτοκίων για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Τα αναλυτικά αποτέλεσμα για κάθε ημερομηνία χωριστά παρουσιάζονται στο Παράρτημα 1.

Ημερομηνίες Πληρωμής Ασφαλίστρου	Επιτόκιο Libor
20/3/2012	1,435%
20/6/2012	1,488%
20/9/2012	1,541%
20/12/2012	1,594%
20/3/2013	1,646%
20/6/2013	1,729%

20/9/2013	1,812%
20/12/2013	1,895%
20/3/2014	1,976%
20/6/2014	2,115%
22/9/2014	2,257%
22/12/2014	2,395%
23/3/2015	2,532%
23/6/2015	2,639%
23/9/2015	2,745%
23/12/2015	2,851%
23/3/2016	2,956%
23/6/2016	3,048%
23/9/2016	3,140%
23/12/2016	3,231%

Πίνακας 5: Τιμή επιτοκίου Libor για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου

Πλέον είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον προεξοφλητικό παράγοντα για την κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου.

Αναφέρουμε πως ο προεξοφλητικός παράγοντας υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\text{Προεξοφλητικός Παράγοντας} = \frac{1}{(1 + \text{Επιτόκιο Libor}_\mathrm{i})^{\mathrm{t_i}}} \qquad (5.1)$$

Ο όρος $\mathrm{t_i}$ αναφέρεται το χρονικό διάστημα που έχει επέλθει μεταξύ της i-ημερομηνίας πληρωμής ασφαλίστρου και της ημερομηνίας αποτίμησης.

Συνεπώς ορίζουμε τον χρόνο t_i ως

$$\mathrm{t_i} = \frac{\mathrm{DayDiff(d_i, d)}}{\text{Days in year}} \qquad (5.2)$$

Όπου, $\mathrm{DayDiff(d_i, d)}$ είναι ο αριθμός των ημερών μεταξύ της i-ημερομηνίας πληρωμής ασφαλίστρου και της ημερομηνίας αποτίμησης, ενώ ο παρανομαστής Days in year, είναι μια σταθερά που αντιπροσωπεύει των αριθμό των ημερών σε ένα έτος. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα θεωρήσουμε πως η σταθερά αυτή ισούται με 360.

Χρησιμοποιώντας τις ημερομηνίες πληρωμής ασφαλίστρου, όπως αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 2, τις τιμές των επιτοκίων, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 5, καθώς και τις Εξισώσεις (5.1) και (5.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τον προεξοφλητικό παράγοντα για κάθε μια ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Κατά συνέπεια, αυτό αποτελεί το τελευταίο βήμα για την κατασκευή της προεξοφλητικής καμπύλης Libor.

Τα αποτελέσματα των προεξοφλητικών παραγόντων ανά ημερομηνία πληρωμής α-σφαλίστρου παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημερομηνίες Πληρωμής Ασφαλίστρου	Αριθμός Ημερών / 360	Επιτόκιο Libor	Προεξοφλητικός Παράγοντας
20/3/2012	0,253	1,435%	0,99640
20/6/2012	0,508	1,488%	0,99252
20/9/2012	0,764	1,541%	0,98838
20/12/2012	1,017	1,594%	0,98405
20/3/2013	1,267	1,646%	0,97953
20/6/2013	1,522	1,729%	0,97424
20/9/2013	1,778	1,812%	0,96857
20/12/2013	2,031	1,895%	0,96261
20/3/2014	2,281	1,976%	0,95636
20/6/2014	2,536	2,115%	0,94830
22/9/2014	2,797	2,257%	0,93948
22/12/2014	3,050	2,395%	0,93037
23/3/2015	3,303	2,532%	0,92073
23/6/2015	3,558	2,639%	0,91149
23/9/2015	3,814	2,745%	0,90187
23/12/2015	4,067	2,851%	0,89199
23/3/2016	4,319	2,956%	0,88176
23/6/2016	4,575	3,048%	0,87165
23/9/2016	4,831	3,140%	0,86127
23/12/2016	5,083	3,231%	0,85074

Πίνακας 6: Τιμές των προεξοφλητικών παραγόντων ανά ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου

5.3 Κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης

Το επόμενο βήμα για την αποτίμηση μιας σύμβασης CDS απαιτεί την κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης. Η διαδικασία που ακολουθείται έχει αναλυθεί στην Ενότητα 4.3 του Κεφαλαίου 4.

Ξεκινάμε την διαδικασία έχοντας ως γνωστές τις τιμές των CDS spreads της αγοράς για πέντε χρόνια. Οι τιμές των CDS spreads της αγοράς παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Έτος	CDS Spreads σε bps
1	120
2	130
3	140
4	150
5	160

Πίνακας 7: Τιμές των spreads της αγοράς

Μια πρώτη παρατήρηση σε σχέση με τις τιμές των CDS spreads που εμφανίζονται στον Πίνακα 7 , είναι ότι ο επενδυτής έχει μια σύμβαση CDS της οποίας η αξία έχει μειωθεί, διότι εκείνος πληρώνει 200bps για κάτι το οποίο η αγορά ένα έτος μετά την σύναψη της σύμβασης είναι πρόθυμη να πληρώσει 120bps, 130bps μετά το δεύτερο έτος, 140bps μετά το τρίτο έτος, 150bps μετά το τέταρτο έτος και τέλος 160bps κατά το πέμπτο και τελευταίο έτος της σύμβασης. Αυτό πρακτικά σημαίνει, πως οι εκτιμήσεις των επενδυτών για την οντότητα και κατά επέκταση για το στοιχείο αναφοράς, έχουν βελτιωθεί το και αντικατοπτρίζεται στις τιμές των CDS spreads της αγοράς.

Θα ξεκινήσουμε με την εύρεση του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{0,1}$.

Χρειαζόμαστε πρώτα να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του premium leg και την παρούσα αξία του protection leg.

Ξεκινάμε με την παρούσα αξία του premium leg σύμφωνα με την Εξίσωση (4.3).

Άρα έχουμε:

$$\textbf{PV Premium Leg} = \mathrm{Spread}_1 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{1,m} \exp\left(-\lambda_{0,1}\tau_m\right)$$

$$= 30.000 \times (0{,}9964 \times \exp\left(-\lambda_{0,1}0{,}25\right) + 0{,}9925 \times \exp\left(-\lambda_{0,1}0{,}5\right) +$$
$$+0{,}9884 \times \exp\left(-\lambda_{0,1}0{,}75\right) + 0{,}9841 \times \exp(-\lambda_{0,1}))$$

Όπου, το Spread_1 υπολογίζεται βάση της τιμής του spread της αγοράς για τον 1ο έτος, της ονομαστικής αξίας τους CDS και την παράμετρο α, όπου στην προκειμένη περίπτωση ισούται με 0,25 γιατί οι πληρωμές του ασφαλίστρου καταβάλλονται ανά τρίμηνο, δηλαδή

$$\text{Spread}_1 = \frac{120}{10.000} \times 0{,}25 \times 10.000.000$$

και οι τιμές των προεξοφλητικών παραγόντων $\text{DF}_{1,m}$ τις υπολογίσαμε στην Ενότητα 5.2 και παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.

Συνεχίζουμε με την παρούσα αξία του protection leg και σύμφωνα με την Εξίσωση (4.4.) έχουμε:

$$\textbf{PV Protection Leg} = (1 - \text{R})\text{DF}_1\big(1 - \exp\big(-\lambda_{0,1}\tau_4\big)\big)$$

$$= 60.000.000 \times 0{,}9841 \times \big(1 - \exp\big(-\lambda_{0,1}\big)\big)$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (4.2) για την εύρεση του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{0,1}$ θέλουμε να ισχύει ότι

$$\textbf{PV Premium Leg} = \textbf{PV Protection Leg} \ \Rightarrow \textbf{PV Premium Leg} - \textbf{PV Pretection Leg} = \mathbf{0}$$

Η μόνη άγνωστη τιμή στην παραπάνω εξίσωση είναι ο ρυθμός κινδύνου $\lambda_{0,1}$. Ουσιαστικά, ψάχνουμε το $\lambda_{0,1}$ που θέτει ίσες τις δύο παρούσες αξίες. Η συγκεκριμένη εξίσωση δεν λύνεται αναλυτικά αλλά στην πράξη μπορεί εύκολα να λυθεί προσεγγιστικά. Για παράδειγμα, το $\lambda_{0,1}$ βρίσκεται εύκολα μέσω του Solver, το οποίο είναι ένα add-in του Excel. Στον Solver θέτουμε ποιο κελί θέλουμε να ισούται με μηδέν (στην προκειμένη περίπτωση την διαφορά των δυο παρουσών αξιών) και παράλληλα θέτουμε με βάση ποιο κελί θα κάνει δοκιμές μέχρι να βρεθεί η τιμή του μηδενίζει την ζητούμενη διαφορά, δηλαδή το κελί που περιλαμβάνει τον ρυθμό κινδύνου $\lambda_{0,1}$.

Εφόσον, έχουμε βρει τον ρυθμό κίνδυνου $\lambda_{0,1}$ μπορούμε να προβούμε στην εύρεση των πιθανοτήτων επιβίωσης μέσω τις σχέσης

$$\text{Q}(\tau_\text{m}) = \exp(-\lambda_{0,1}\tau_\text{m})$$

Όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα ο ρυθμός κινδύνου $\lambda_{0,1}$ισούται με 0,200078, ενώ οι πιθανότητες κινδύνου για το πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τρίμηνο του 1ου έτους είναι 0,99499, 0,99001, 0,98505 και 0,98012 αντιστοίχως.

Επιπρόσθετα, στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε και τις τιμές των παρουσών αξιών του premium leg και protection leg.

Έτος 0-1	Q1	Q2	Q3	Q4
t_m	0,25	0,5	0,75	1
CDS spreads	30.000	30.000	30.000	30.000
Προεξοφλητικός παράγοντας	0,9964	0,9925	0,9884	0,9841
Ρυθμός κινδύνου $\lambda_{0,1}$	**0,020078**			
Πιθανότητα επιβίωσης	0,99499	0,99001	0,98505	0,98012
PV Protection Leg	**117.364**			
PV Premium Leg	29.742	29.478	29.208	28.935
Συνολική PV Premium Leg	**117.364**			
Διαφορά	0,0000			

Πίνακας 8: Υπολογισμός του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{0,1}$ για το 1ο έτος

Συνεχίζουμε με την εύρεση του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{1,2}$ για το δεύτερο έτος. Όπως και προηγουμένως, για την εύρεση του ζητούμενου $\lambda_{1,2}$ θα πρέπει η διαφορά μεταξύ της παρούσας αξίας του premium leg και της παρούσας αξίας του protection leg να ισούται με μηδέν.

Ας ορίσουμε πρώτα την παρούσα αξία του premium leg. Σύμφωνα με την Εξισώσεις (4.5) και (4.6) έχουμε:

$$\textbf{PV Premium Leg}\ (\text{έτος } 1) = \mathrm{Spread}_2 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{1,m} \exp\left(-\lambda_{0,1}\tau_m\right)$$

$$= 32.500 \times \Big(\big(0{,}9964 \times \exp(-\lambda_{0,1} \times 0{,}25)\big) + \big(0{,}9925 \times \exp(-\lambda_{0,1} \times 0{,}5)\big)$$

$$+ (0{,}9884 \times \exp(-\lambda_{0,1} \times 0{,}75) + (0{,}9841 \times \exp(-\lambda_{0,1} \times 1)\Big)$$

$$\textbf{PV Premium Leg}\ (\text{έτος } 2) = \mathrm{Spread}_2 \sum_{m=1}^{4} \mathrm{DF}_{2,m} \exp\left(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2}\tau_m\right)$$

$$= 32.500 \times \Big(\big(0{,}9795 \times \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} \times 0{,}25\big) + \big(0{,}9742 \times \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} \times 0{,}5\big)$$

$$+ \big(0{,}9686 \times \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} \times 0{,}75\big) + \big(0{,}9626 \times \exp(-\lambda_{0,1} - \lambda_{1,2} \times 1)\big)\Big)$$

Όπου, ο ρυθμός του κινδύνου $\lambda_{0,1}$ είναι γνωστός και ίσος με 0,020078, οι τιμές των προεξοφλητικών παραγόντων $\mathrm{DF}_{2,m}$ είναι γνωστές και παρουσιάζονται στον Πίνακα 6 και το Spread_2 όπως και προηγουμένως υπολογίζεται με βάση το spread της αγοράς για το 2ο έτος, δηλαδή

$$\mathrm{Spread}_2 = \frac{130}{10.000} \times 0{,}25 \times 10.000.000$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (4.7) η συνολική παρούσα αξία του premium leg για το 2ο έτος ισούται με

$$\textbf{PV Premium Leg} = \textbf{PV Premium Leg}\ (\text{έτος } 1) + \textbf{PV Premium Leg}\ (\text{έτος } 2)$$

Συνεχίζοντας με την παρούσα αξία του protection leg και σύμφωνα με την Εξίσωση (4.8) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}\textbf{PV Protection Leg} &= (1-R)\big(DF_1(1-\exp(-\lambda_{0,1})) + DF_2\big(\exp(-\lambda_{0,1}) - \exp(-\lambda_{0,1}-\lambda_{1,2})\big)\big) \\ &= \Big(6.000.000 \times 0{,}9841 \times \big(1-\exp(-\lambda_{0,1})\big)\Big) + \\ &+ \Big(6.000.000 \times 0{,}9626 \times \big(\exp(-\lambda_{0,1}) - \exp(-\lambda_{0,1}-\lambda_{1,2})\big)\Big)\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (4.2) για την εύρεση του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{1,2}$ θέλουμε να ισχύει ότι

$$\textbf{PV Premium Leg} = \textbf{PV Protection Leg} \Rightarrow \textbf{PV Premium Leg} - \textbf{PV Protection Leg} = \mathbf{0}$$

Η μόνη άγνωστη τιμή στην παραπάνω εξίσωση είναι ο ρυθμός κινδύνου $\lambda_{1,2}$. Εφόσον, έχουμε βρει τον ρυθμό κίνδυνου $\lambda_{1,2}$ μπορούμε να προβούμε στην εύρεση των πιθανοτήτων επιβίωσης μέσω της σχέσης

$$Q(\tau_m) = \exp(-\lambda_{1,2}\tau_m)$$

Όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα ο ρυθμός κινδύνου $\lambda_{1,2}$ισούται με 0,023546, ενώ οι πιθανότητες κινδύνου για το πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τρίμηνο του 2ου έτους είναι 0,97437, 096865, 0,96297 και 0,95731 αντιστοίχως. Επιπρόσθετα, στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε και τις τιμές των παρουσών αξιών του premium leg και protection leg.

Έτος 1-2	Q5	Q6	Q7	Q8
t_m	0,25	0,5	0,75	1
CDS spreads	32.500	32.500	32.500	32.500
Προεξοφλητικός παράγοντας	0,9795	0,9742	0,9686	0,9626
Ρυθμός κινδύνου $\lambda_{1,2}$	**0,023546**			
Πιθανότητα επιβίωσης	0,97437	0,96865	0,96297	0,95731
PV Protection Leg	**249.095**			
PV Premium Leg (έτος 1)	31.019	30.670	30.313	29.949
PV Premium Leg (έτος 1)	32.221	31.935	31.642	31.346
Συνολική PV Premium Leg	**249.095**			
Διαφορά	0,0000			

Πίνακας 9: Υπολογισμός του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{1,2}$ για το 2ο έτος

Επαναλαμβάνοντας της παραπάνω διαδικασία για τα επόμενα τρία έτη βρίσκουμε και υπολειπόμενους ρυθμούς κινδύνου $\lambda_{2,3}$ για το 3ο έτος, $\lambda_{3,4}$ για το 4ο έτος και $\lambda_{4,5}$ για το 5ο έτος. Οι πίνακες με τα αναλυτικά αποτελέσματα παρατίθενται στο Παράρτημα 1.

Ο Πίνακας 10 και ο Πίνακας 11 παρουσιάζουν αντιστοίχως, τις τιμές του ρυθμού κινδύνου ανά έτος και τις τιμές των πιθανοτήτων επιβίωσης ανά τρίμηνο, δηλαδή ανά τριμηνιαία πληρωμή ασφαλίστρου, ανά έτος.

Έτος	Ρυθμός Κινδύνου	
0 - 1	$\lambda_{0,1}$	0,020078
1 – 2	$\lambda_{1,2}$	0,023546
2 – 3	$\lambda_{2,3}$	0,027223
3 – 4	$\lambda_{3,4}$	0,031025
4 – 5	$\lambda_{4,5}$	0,035061

Πίνακας 10: Τιμές του ρυθμού κινδύνου ανά έτος

Έτος	Τρίμηνο	Ημερομηνίες Πληρωμής Ασφαλίστρου	Πιθανότητα Επιβίωσης	Πιθανότητα Αθέτησης
1	Q1	20/3/2012	0,99499	0,00501
1	Q2	20/6/2012	0,99001	0,00999
1	Q3	20/9/2012	0,98505	0,01495
1	Q4	20/12/2012	0,98012	0,01988
2	Q1	20/3/2013	0,97437	0,02563
2	Q2	20/6/2013	0,96865	0,03135
2	Q3	20/9/2013	0,96297	0,03703
2	Q4	20/12/2013	0,95731	0,04269
3	Q1	20/3/2014	0,95082	0,04918
3	Q2	20/6/2014	0,94437	0,05563
3	Q3	22/9/2014	0,93797	0,06203
3	Q4	22/12/2014	0,93161	0,06839
4	Q1	23/3/2015	0,92441	0,07559
4	Q2	23/6/2015	0,91727	0,08273
4	Q3	23/9/2015	0,91018	0,08982
4	Q4	23/12/2015	0,90315	0,09685
5	Q1	23/3/2016	0,89527	0,10473
5	Q2	23/6/2016	0,88745	0,11255
5	Q3	23/9/2016	0,87971	0,12029
5	Q4	23/12/2016	0,87203	0,12797

Πίνακας 11: Πιθανότητα επιβίωσης ανά πληρωμή ασφαλίστρου

Από τον Πίνακα 10 βλέπουμε ότι από έτος σε έτος ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate) αυξάνεται. Αυτό μπορεί εύκολα να δικαιολογηθεί καθώς οι αυξανόμενες τιμές των spreads της αγοράς (Πίνακας 7) επιφέρουν σαν αποτέλεσμα και την παράλληλη αύξηση του ρυθμού κινδύνου από έτος σε έτος. Ταυτόχρονα η αύξηση του ρυθμού κινδύνου επιφέρει την αύξηση της πιθανότητας αθέτησης (Default Probability). Είναι λογικό, η πιθανότητα αθέτησης της υποχρέωσης να είναι συμπληρωματική της πιθανότητας επιβίωσης (Survival Probability) και το άθροισμα τους πρέπει πάντα να ισούται με την μονάδα.

Αφού έχουμε υπολογίσει τις τιμές του προεξοφλητικού παράγοντα και τις πιθανότητες επιβίωσης και αθέτησης της υποχρέωσης για κάθε χρονική στιγμή πληρωμής ασφαλίστρου, είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε την RPV01 (Risky Present Value 1 bps).

Η RPV01 αποτελεί την αναμενόμενη παρούσα αξία 1 bps που καταβάλλεται για το premium leg, είτε μέχρι να συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός ή είτε μέχρι να επέλθει η λήξη της σύμβασης CDS, όποιο από τα δυο γεγονότα συμβεί νωρίτερα. Η RPV01 εκφράζει την έννοια του κινδύνου, διότι αναφέρεται σε μια αβέβαιη σειρά πληρωμών ασφαλίστρου, όπου η καταβολή των πληρωμών ασφαλίστρου είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με το αν συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός ή όχι.

Η PRV01 σύμφωνα με την Εξίσωση (3.2.2) του Κεφαλαίου 3, υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathrm{RPV01(t,T)} = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{N}} \Delta(\mathrm{t_{n-1}},\mathrm{t_n})\mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{t_n})(\mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t_{n-1}}) + \mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t_n}))$$

Όπου,

$\boldsymbol{\Delta(\mathbf{t_{n-1}},\mathbf{t_n})}$**:** ο αριθμός των ημερών ανάμεσα σε δυο ημερομηνίες πληρωμής ασφαλίστρου

$\mathbf{Z(t,t_n)}$**:** ο προεξοφλητικός παράγοντας για την ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου $\mathrm{t_n}$

$\mathbf{Q(t,t_{n-1}) + Q(t,t_n)}$**:** το άθροισμα της πιθανότητας επιβίωσης για την ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου $\mathrm{t_{n-1}}$ και της πιθανότητας επιβίωσης για την ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου $\mathrm{t_n}$

Το ½ στον παραπάνω τύπο βασίζεται στην παρατήρηση ότι αν συμβεί αθέτηση κατά το χρονικό διάστημα μιας πληρωμής ασφαλίστρου, κατά μέσο όρο θα συμβεί στα μέσα της περιόδου.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι αναλυτικοί υπολογισμοί που απαιτούνται για τον υπολογισμό της RPV01.

Ημερομηνίες Πληρωμής Ασφαλί-στρου	Αριθμός Ημερών	Προεξοφλητικός Παράγοντας	Πιθανότητα Επιβίωσης	$\mathrm{Q}(\mathrm{t}, \mathrm{t}_{\mathrm{n}-1}) + \mathrm{Q}(\mathrm{t}, \mathrm{t}_{\mathrm{n}})$	RPV01 ανά πληρωμή
20/3/2012	0,2528	0,996405	0,99499	1,99499	0,251238
20/6/2012	0,2556	0,992519	0,99001	1,98500	0,251742
20/9/2012	0,2556	0,988383	0,98505	1,97507	0,249438
20/12/2012	0,2528	0,984051	0,98012	1,96518	0,244415
20/3/2013	0,2500	0,979533	0,97437	1,95449	0,239311
20/6/2013	0,2556	0,974241	0,96865	1,94302	0,241880
20/9/2013	0,2556	0,968573	0,96297	1,93162	0,239061
20/12/2013	0,2528	0,962605	0,95731	1,92028	0,233626
20/3/2014	0,2500	0,956357	0,95082	1,90814	0,228107
20/6/2014	0,2556	0,948305	0,94437	1,89519	0,229645
22/9/2014	0,2611	0,939477	0,93797	1,88234	0,230876
22/12/2014	0,2528	0,930371	0,93161	1,86957	0,219840
23/3/2015	0,2528	0,920733	0,92441	1,85601	0,215985
23/6/2015	0,2556	0,911492	0,91727	1,84167	0,214497
23/9/2015	0,2556	0,901869	0,91018	1,82745	0,210593
23/12/2015	0,2528	0,891988	0,90315	1,81333	0,204430
23/3/2016	0,2528	0,881763	0,89527	1,79841	0,200424
23/6/2016	0,2556	0,871654	0,88745	1,78272	0,198556
23/9/2016	0,2556	0,861270	0,87971	1,76716	0,194478
23/12/2016	0,2528	0,850743	0,87203	1,75174	0,188355

Πίνακας 12: Υπολογισμός της RPV01 ανά πληρωμή ασφαλίστρου

Πιο συγκεκριμένα, το RPV01 ισούται με RPV01 = 4,48650, δηλαδή με το άθροισμα των "RPV01 ανά πληρωμή" της τελευταίας στήλης του παραπάνω πίνακα.

Επομένως, ως συμπέρασμα έχουμε ότι ο επενδυτής της υποκείμενης σύμβασης CDS πρέπει να καταβάλλει 4,48650 χρηματικές μονάδες για κάθε 1 bps του εκτιμώμενου spread (breakeven spread).

Συνεχίζουμε με το protection leg, το οποίο αποτελεί την ενδεχόμενη καταβολή της αποζημίωσης που καταβάλλεται μετά από την εμφάνιση του πιστωτικού γεγονότος από τον πωλητή προστασίας στον αγοραστή προστασίας και ισούται με την παρούσα αξία του ποσοστού ανάκτησης (1-R) επί την ονομαστική αξία της σύμβασης CDS.

Το protection leg συμφώνα με την Εξίσωση (3.2.3) του Κεφαλαίου 3 ισούται με

$$\mathrm{PV\ Protecion\ Leg} = \frac{(1-\mathrm{R})}{2}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}}(\mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}}) + \mathrm{Z}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}))(\mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}) - \mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{t}_{\mathrm{k}}))$$

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τα αποτελέσματα της εφαρμογής του παραπάνω τύπου.

Ημερομηνίες Πληρωμής Ασφαλίστρου	Προεξοφλητικός Παράγοντας	Πιθανότητα Επιβίωσης	$Z(t,t_k)$ + $Z(t,t_{k-1})$	Q(t,tk-1)-Q(t,tk)	PV Protection Leg ανά πληρωμή
20/3/2012	0,996405	0,99499	1,99640	0,00501	0,00300
20/6/2012	0,992519	0,99001	1,98892	0,00498	0,00297
20/9/2012	0,988383	0,98505	1,98090	0,00496	0,00295
20/12/2012	0,984051	0,98012	1,97243	0,00493	0,00292
20/3/2013	0,979533	0,97437	1,96358	0,00575	0,00339
20/6/2013	0,974241	0,96865	1,95377	0,00572	0,00335
20/9/2013	0,968573	0,96297	1,94281	0,00569	0,00331
20/12/2013	0,962605	0,95731	1,93118	0,00565	0,00327
20/3/2014	0,956357	0,95082	1,91896	0,00649	0,00374
20/6/2014	0,948305	0,94437	1,90466	0,00645	0,00368
22/9/2014	0,939477	0,93797	1,88778	0,00641	0,00363
22/12/2014	0,930371	0,93161	1,86985	0,00636	0,00357
23/3/2015	0,920733	0,92441	1,85110	0,00720	0,00400
23/6/2015	0,911492	0,91727	1,83223	0,00714	0,00393
23/9/2015	0,901869	0,91018	1,81336	0,00709	0,00386
23/12/2015	0,891988	0,90315	1,79386	0,00703	0,00378
23/3/2016	0,881763	0,89527	1,77375	0,00788	0,00419
23/6/2016	0,871654	0,88745	1,75342	0,00781	0,00411
23/9/2016	0,861270	0,87971	1,73292	0,00774	0,00403
23/12/2016	0,850743	0,87203	1,71201	0,00768	0,00394

Πίνακας 13: Υπολογισμός της παρούσας αξία protection leg ανά πληρωμή ασφαλίστρου

Αθροίζοντας επομένως την τελευταία στήλη του Πίνακα 13 έχουμε ότι η παρούσα αξία του protection leg ισούται με PV Protection Leg = 0,071617517. Αυτό συνεπάγει ότι ο πωλητής προστασίας της σύμβασης CDS θα πρέπει να αποζημιώσει τον αγοραστή προστασίας με το εξής ποσό:

$$\text{Αποζημίωση} = \text{PV Protection Leg} \times \text{Ονομαστική Αξία} = 0{,}071617517 \times 10.000.000$$

$$\text{Αποζημίωση} = 716.175\ €$$

Το breakeven spread υπολογίζεται με βάση την Εξίσωση (3.4) του Κεφαλαίου 3 και ισούται με Breakeven Spread = 159,63 bps. Η αγορά των spreads έχει ενταθεί και ενώ η προστασία αγοράστηκε στα 200 bps, το τρέχον spread της αγοράς για την υπολειπόμενη διάρκεια της σύμβασης αγγίζει τα 159,63 bps. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η τρέχουσα τιμή του breakeven spread βρίσκεται ανάμεσα στα δυο τελευταία spreads της αγοράς 150 bps και στο 160 bps, αλλά είναι πιο κοντά στο τελευταίο δεδομένου ότι η υφιστάμενη σύμβαση έχει εναπομένουσα διάρκεια 5 ετών.

Επιπλέον, θα υπολογίσουμε την τρέχουσα αξία (mark-to-market) της σύμβασης. Η τρέχουσα αξία υποδηλώνει το ποσό που θα λάβει ο κάτοχος της σύμβασης, εάν η τιμή είναι θετική, ή που υποχρεούται να πληρώσει, εάν η τιμή είναι αρνητική, σε περίπτωση ρευστοποίησης της σύμβασης.

Η τρέχουσα αξία της σύμβασης CDS δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathrm{MTM}(t, t_n) = \pm(S(t, t_n) - S(t_0, t_n)) \times \mathrm{RPV01}(t, t_n)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση έχουμε,

Τρέχουσα Αξία $= 10.000.000 \times (158{,}63 - 200) \times 4{,}48650$

Τρέχουσα Αξία $= -181.125$ €

Μιας και η τρέχουσα τιμή ρευστοποίησης της σύμβασης CDS είναι αρνητική, συμπεραίνουμε πως ο αγοραστής προστασίας είναι υποχρεωμένος να πληρώσει το ποσό των 181.125 € για να κλείσει την θέση του. Η ρευστοποίηση της σύμβασης CDS γίνεται με την καταβολή ενός συγκεκριμένου ποσού στον κάτοχο της σύμβασης, καθώς το spread της σύμβασης είναι χαμηλότερο από τις τρέχουσες συνθήκες της αγοράς. Η τρέχουσα αξία είναι αρνητική δεδομένου ότι θα ήταν πιο δαπανηρό για έναν επενδυτή να αγοράσει τον αντίστοιχο τύπο προστασίας σήμερα.

Παράρτημα

Πίνακες με τον υπολογισμό του επιτοκίου Libor μέσω γραμμικής παρεμβολής, για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου.

Ημερομηνία Αποτίμησης	**20/12/2011**
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/6/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτο-κίου t_n	183
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,4350%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/3/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	91
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,6460%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/3/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	456
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**1,488%**

Πίνακας 14: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/6/2012

Ημερομηνία Αποτίμησης	**20/12/2011**
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/9/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτο-κίου t_n	275
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,4882%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/6/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	183
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,6460%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/3/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	456
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**1,5414%**

Πίνακας 15: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/9/2012

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/12/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	366
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,5414%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/9/2012
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	275
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,6460%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/3/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	456
Άγνωστο επιτόκιο R_n	1,594%

Πίνακας 16: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/12/2012

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/6/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	548
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,6460%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/3/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	456
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,9760%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/3/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	821
Άγνωστο επιτόκιο R_n	1,729%

Πίνακας 17: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/6/2013

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/9/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	640
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,7292%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/6/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	548
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,9760%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/3/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	821
Άγνωστο επιτόκιο R_n	1,81%

Πίνακας 18: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/9/2013

Ημερομηνία Αποτίμησης	**20/12/2011**
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/12/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	731
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,8124%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/9/2013
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	640
Γνωστό επιτόκιο R_2	1,9760%
Ημερομηνία λήξης του R_2	20/3/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	821
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**1,89%**

Πίνακας 19: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/12/2013

Ημερομηνία Αποτίμησης	**20/12/2011**
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	20/6/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	913
Γνωστό επιτόκιο R_1	1,9760%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/3/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	821
Γνωστό επιτόκιο R_2	2,5320%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1189
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**2,12%**

Πίνακας 20: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 20/6/2014

Ημερομηνία Αποτίμησης	**20/12/2011**
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	22/9/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1007
Γνωστό επιτόκιο (R_1	2,1150%
Ημερομηνία λήξης του R_1	20/6/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	913
Γνωστό επιτόκιο (R_2)	2,5320%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1189
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**2,26%**

Πίνακας 21: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 22/9/2014

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	22/12/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1098
Γνωστό επιτόκιο R_1	2,2570%
Ημερομηνία λήξης του R_1	22/9/2014
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1007
Γνωστό επιτόκιο R_2	2,5320%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1189
Άγνωστο επιτόκιο R_n	2,39%

Πίνακας 22: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 22/12/2014

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	23/6/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1281
Γνωστό επιτόκιο R_1	2,5320%
Ημερομηνία λήξης του R_1	23/3/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1189
Γνωστό επιτόκιο R_2	2,9560%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1555
Άγνωστο επιτόκιο R_n	2,64%

Πίνακας 23: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 23/6/2015

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	23/9/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1373
Γνωστό επιτόκιο R_1	2,6386%
Ημερομηνία λήξης του R_1	23/6/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1281
Γνωστό επιτόκιο R_2	2,9560%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1555
Άγνωστο επιτόκιο Rn	2,75%

Πίνακας 24: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 23/9/2015

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	23/12/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1464
Γνωστό επιτόκιο R_1	2,7452%
Ημερομηνία λήξης του R_1	23/9/2015
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1373
Γνωστό επιτόκιο R_2	2,9560%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1555
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**2,85%**

Πίνακας 25: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 23/12/2015

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	23/6/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1647
Γνωστό επιτόκιο R_1	2,9560%
Ημερομηνία λήξης του R_1	23/3/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1555
Γνωστό επιτόκιο R_2	3,3210%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2017
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1920
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**3,05%**

Πίνακας 26: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 23/6/2016

Ημερομηνία Αποτίμησης	20/12/2011
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	23/9/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1739
Γνωστό επιτόκιο R_1	3,0480%
Ημερομηνία λήξης του R_1	23/6/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1647
Γνωστό επιτόκιο R_2	3,3210%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2017
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1920
Άγνωστο επιτόκιο Rn	**3,14%**

Πίνακας 27: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 23/9/2016

Ημερομηνία Αποτίμησης	**20/12/2011**
Ημερομηνία λήξης του άγνωστου επιτοκίου	23/12/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του άγνωστου επιτοκίου t_n	1830
Γνωστό επιτόκιο R_1	3,14%
Ημερομηνία λήξης του R_1	23/9/2016
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_1 (t_1)	1739
Γνωστό επιτόκιο R_2	3,3210%
Ημερομηνία λήξης του R_2	23/3/2017
Αριθμός ημερών μέχρι την λήξη του R_2 (t_2)	1920
Άγνωστο επιτόκιο R_n	**3,23%**

Πίνακας 28: Υπολογισμός επιτοκίου Libor κατά την 23/12/2016

Πίνακες με τον υπολογισμό του ρυθμού κινδύνου και των πιθανοτήτων επιβίωσης για το 3ο, 4ο και 5ο έτος.

Έτος 2-3	Q1	Q2	Q3	Q4
t_m	0,25	0,5	0,75	1
CDS spreads	35.000	35.000	35.000	35.000
Προεξοφλητικός Παράγοντας	0,9564	0,9483	0,9395	0,9304
Ρυθμός Κινδύνου $\lambda_{2,3}$	**0,027223**			
Πιθανότητα Επιβίωσης	0,95082	0,94437	0,93797	0,93161
PV Protection Leg	**392.605**			
PV Premium Leg (έτος 3)	31.826	31.344	30.842	30.336
PV Premium Leg (έτος 2)	33.405	33.029	32.645	32.253
PV Premium Leg (έτος 1)	34.700	34.391	34.076	33.757
Συνολική PV Premium Leg	**392.605**			
Διαφορά	0,0000			

Πίνακας 29: Υπολογισμός του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{2,3}$ για το 3ο έτος

Έτος 3-4	Q1	Q2	Q3	Q4
t_m	0,25	0,5	0,75	1
CDS spreads	37.500	37.500	37.500	37.500
Προεξοφλητικός Παράγοντας	0,9207	0,9115	0,9019	0,8920
Ρυθμός Κινδύνου $\lambda_{3,4}$	**0,031025**			
Πιθανότητα Επιβίωσης	0,92441	0,91727	0,91018	0,90315
PV Protection Leg	**544.911**			
PV Premium Leg (έτος 4)	31.917	31.353	30.782	30.210
PV Premium Leg (έτος 3)	34.100	33.583	33.045	32.503
PV Premium Leg (έτος 2)	35.791	35.389	34.976	34.557
PV Premium Leg (έτος 1)	37.178	36.848	36.510	36.168
Συνολική PV Premium Leg	**544.911**			
Διαφορά	0,0000			

Πίνακας 30: Υπολογισμός του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{3,4}$ για το 4ο έτος

Έτος 4-5	Q1	Q2	Q3	Q4
t_m	0,25	0,5	0,75	1
CDS spreads	40.000	40.000	40.000	40.000
Προεξοφλητικός Παράγοντας	0,8818	0,8717	0,8613	0,8507
Ρυθμός Κινδύνου $\lambda_{4,5}$	**0,035061**			
Πιθανότητα Επιβίωσης	0,89527	0,88745	0,87971	0,87203
PV Protection Leg	**703.739**			
PV Premium Leg (έτος 5)	31.577	30.942	30.307	29.675
PV Premium Leg (έτος 4)	34.045	33.443	32.835	32.224
PV Premium Leg (έτος 3)	36.373	35.822	35.248	34.670
PV Premium Leg (έτος 2)	38.177	37.748	37.308	36.861
PV Premium Leg (έτος 1)	39.657	39.304	38.944	38.580
Συνολική PV Premium Leg	**703.739**			
Διαφορά	0,0000			

Πίνακας 31: Υπολογισμός του ρυθμού κινδύνου $\lambda_{4,5}$ για το 5ο έτος

Οι παρακάτω πίνακες συνοψίζουν τα αποτελέσματα του ρυθμού κίνδυνου, της RPV01, του Breakeven Spread, της τρέχουσας τιμής (MTM) καθώς και της παρούσας αξίας του protection leg, θεωρώντας διάφορες τιμές για το ποσοστό ανάκτησης (R).

R	R = 40%	R = 15%	R = 20%	R = 25%	R = 30%	R = 35%
Έτος	**Ρυθμός Κινδύνου**					
$\lambda_{0,1}$	0,020078	0,014183	0,015068	0,016071	0,017216	0,018538
$\lambda_{1,2}$	0,023546	0,016627	0,017665	0,018842	0,020186	0,021737
$\lambda_{2,3}$	0,027223	0,019207	0,020409	0,021771	0,023328	0,025125
$\lambda_{3,4}$	0,031025	0,021859	0,023232	0,024789	0,026569	0,028624
$\lambda_{4,5}$	0,035061	0,024655	0,026210	0,027976	0,029996	0,032331

Πίνακας 32: Τιμές του ρυθμού κινδύνου για διάφορες τιμές του R

R	R = 40%	R = 15%	R = 20%	R = 25%	R = 30%	R = 35%
RPV01	4,48650	4,56343	4,55177	4,53861	4,52363	4,50644
Breakeven Spread	159,63	159,79	159,77	159,74	159,71	159,67
MTM	-181.125	-183.491	-183.133	-182.729	-182.268	-181.739
PV Protection Leg	0,071618	0,072919	0,072722	0,072499	0,072246	0,071955
Protection Leg	716.175	729.194	727.220	724.993	722.458	719.549

Πίνακας 33: Αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του R

Βιβλιογραφία

1. Anson J.P Anson., Fabozzi J. Frank, Choudhry Moorad, Chen Ren-Raw (2004). “*Credit Derivatives: Instruments, Applications and Pricing”*. John Wiley & Sons Inc.
2. Choudhry Moorad (2006). “*The Credit Default Swap Basis”.* Bloomberg Press
3. ISDA (2003). *ISDA Credit Derivatives Definitions*. International Swaps and Derivatives Association
4. Jarrow A. Robert, Turnbull M. Stuart (1995). “Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk”. Journal of Finance, Vol. 50
5. Lanchester John (2009). *"Outsmarted"*. New Yorker
6. Meissner Gunter (2005). “*Credit Derivatives: Application, Pricing and Risk Management”.* Blackwell Publishing.
7. O’Kane Dominic (2001). “*Credit Derivatives Explained: Market, Products and Regulations”*. Lehman Brothers: Structured Credit Research
8. O’Kane Dominic (2008). “*Modelling single-name and multi-name Credit Derivatives”*. John Wiley & Sons
9. O’Kane Dominic & Turnbull Stuart (2003). “*Valuation of Credit Default Swaps”*. Lehman Brothers Quantitative Credit Research
10. Weistroffer Christian (2009). *“Credit default swaps: Heading towards a more stable system*”. Deutsche Bank Research