# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μελέτη αφορά στην εφαρμογή μοντέλων προσομοίωσης στη σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου προκειμένου για τον καθορισμό των άριστων ποσοστών επένδυσης μετοχικών χαρτοφυλακίων καθώς και των εξαγομένων αποδοτικών συνόρων. Το πλήθος των τεχνικών προσομοίωσης αλλά και των μοντέλων ανάλυσης και αξιολόγησης επενδυτικών χαρτοφυλακίων καθιστά αδύνατη την ολοκλήρωση της μελέτης στα πλαίσια της παρούσας εργασίας στην οποία επιχειρούμε να θέσουμε τα θεμέλιά της και να δώσουμε έναυσμα για περαιτέρω έρευνα.

Για την παρούσα εργασία θα ήθελα θερμά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Διακογιάννη Γεώργιο για την καθοδήγησή του καθόλη την διάρκεια συγγραφής της μελέτης και τις δημιουργικές προτάσεις του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Παπαδόπουλο Σάββα για τις πολύτιμες συμβουλές του καθώς και τον εξάδελφό μου, Κασσελάκη Αντώνη, η συμβολή του οποίου στο τμήμα του προγραμματισμού ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της παρούσας μελέτης.

# *ΕΙΣΑΓΩΓΗ*

Στη σύγχρονη εποχή, το μεγάλο πλήθος των διαθέσιμων επενδυτικών επιλογών και καναλιών διάθεσής τους καθιστά δύσκολες αποφάσεις που αφορούν στη διάρθρωση ενός χαρτοφυλακίου. Τις παραδοσιακές μορφές επένδυσης όπως απλές καταθέσεις, προθεσμιακές καταθέσεις, έντοκα γραμμάτια δημοσίου ή ομόλογα δημοσίου συναγωνίζονται πιο σύγχρονες μορφές επένδυσης όπως μετοχές, εταιρικά ομόλογα, **repos**, παράγωγα προϊόντα **(forwards, futures, swaps, options)**, αμοιβαία κεφάλαια κτλ. Η παγκοσμιοποίηση και η ανάπτυξη της νέας τεχνολογίας απελευθέρωσαν την κίνηση κεφαλαίων προσελκύοντας το επενδυτικό κοινό σε όλες τις χρηματαγορές και κεφαλαιαγορές παγκοσμίως, διευρύνοντας έτσι ακόμα περισσότερο το πλήθος των επενδυτικών επιλογών και καθιστώντας δυσκολότερο το προσδιορισμό τους. Περιορισμοί όπως ο χρονικός ορίζοντας επένδυσης, το διαθέσιμο επενδυτικό κεφάλαιο, το όριο ανάληψης επενδυτικού κινδύνου βοηθούν όχι σε μεγάλο βαθμό στον προσδιορισμό της ποιοτικής και ποσοτικής διάρθρωσης ενός χαρτοφυλακίου.

Την ανάγκη ύπαρξης ενός θεωρητικού πλαισίου αξιολόγησης των επενδυτικών προτάσεων έρχεται να καλύψει η Θεωρία Χαρτοφυλακίου. Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου αναπτύσσει μοντέλα βάσει των οποίων το επενδυτικό κοινό προσδιορίζει με το βέλτιστο δυνατό αποτέλεσμα τη διάρθρωση ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου. Βασικότερη κατηγορία μοντέλων αποτελούν τα μοντέλα ανάλυσης απόδοσης – κινδύνου **(mean-variance models)**, σημαντικότερα από τα οποία είναι:**i)** Το Μοντέλο του **Markowitz, ii)**το Υπόδειγμα της Αγοράς **(Market Model), iii)**το Μονοπαραγοντικό Υπόδειγμα **(Simgle Index Model), iv)**το Πολυπαραγοντικό Υπόδειγμα **(Multi Index Model), v)**το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων **(Capital Asset Pricing Model), vi)**το Υπόδειγμα Αποτίμισης Εξισορροπητικών Αγοραπωλησιών **(Arbitrage Pricing Theory)**. Στο σύνολό τους τα μοντέλα επιχειρούν να προσδιορίσουν εκείνα τα χαρτοφυλάκια για τα οποία ο επενδυτής λαμβάνει τη βέλτιστη απόδοση χαρτοφυλακίου ανά μονάδα κινδύνου που αναλαμβάνει.

Αδιαμφισβήτητα πατέρας της σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου είναι ο **H.Markowitz**, ο οποίος με το έργο του **“Portfolio Selection” (1952)**, προσδιόρισε ποσοτικά τις έννοιες της απόδοσης και του κινδύνου και άνοιξε νέους δρόμους στην επιστήμη της ποσοτικής οικονομίας. Ίσως σημαντικότερη συμβολή του συγγραφέα αποτελεί η έννοια του αποδοτικού συνόρου. Ένα χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως αποδοτικό εφόσον συντρέχουν οι εξής δύο προϋποθέσεις: α) δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο με την ίδια αναμενόμενη απόδοση και μικρότερη τυπική απόκλιση και β) δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο που να έχει την ίδια τυπική απόκλιση και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των αποδοτικών χαρτοφυλακίων ονομάζεται μέτωπο των αποδοτικών συνδυασμών ή αποδοτικό σύνορο **(efficient frontier)**. Στηριζόμενοι στην αρχική ιδέα του **H.Markowitz**, νέες προτάσεις στη Θεωρία χαρτοφυλακίου αναπτύχθηκαν από τους **Arrow, Debreu, Lintner, Miller, Modigliani, Samuelson, Sharpe Tobin Ross** κ.α.

<u>Περιεχόμενο – Αντικείμενο εργασίας</u>

Η έννοια του αποδοτικού συνόρου είναι εξαιρετικής σημασίας καθώς βάσει αυτής προσδιορίζονται τα άριστα επενδυτικά χαρτοφυλάκια και κατ’ επέκταση περιορίζονται οι επιλογές των επενδυτών. Όπως αναλύεται στην παρούσα εργασία, εφόσον είναι γνωστή η καμπύλη του αποδοτικού συνόρου, ο προσδιορισμός ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου εξαρτάται αποκλειστικά από τις προτιμήσεις του επενδυτή. Τα ερωτήματα που γενιώνται είναι πολλά. Πώς κατασκευάζεται το αποδότικό σύνορο; Θα μπορούσαμε να προβλέψουμε τα μελλοντικά αποδοτικά σύνορα; Σε τι διάστηματα επενδυτικού ορίζοντα;

Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να προσδιορίσουμε τη δυνατότητα εφαρμογής των μεθόδων προσομοίωσης για τον προσδιορισμό των μελλοντικών αποδοτικών συνόρων ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου καθώς και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της. Για σκοπούς συγκριτικής ανάλυσης επιλέχθηκαν δύο μέθοδοι προσομοίωσης, η μέθοδος **Monte Carlo** και η μέθοδος **Bootstrap**. Η διαδικασία κατασκευής του αποδοτικού συνόρου είναι σύμφωνη με το μοντέλο του **Roll** ή εναλλακτικά το τροποποιημένο μοντέλο του **Markowitz** και αφορά μόνο σε μετοχικά χαρτοφυλάκια. Τέλος, η προβλεπτική ικανότητα των μεθόδων προσομοίωσης εξετάζεται για δύο χρονικά διαστήματα, έτος και εξάμηνο.

Περιορισμοί εργασίας

Η παρούσα μελέτη διεξήχθη, για σκοπούς απλούστευσης και όχι μόνο, υπό το σύνολο των εξής περιορισμών:

- Το τελικό δείγμα που επιλέχθηκε αφορά σε εβδομαδιαίες αποδόσεις των μετοχών που περιλαμβάνονται στο Γενικό Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών της Αθήνας για την περίοδο **01/01/1997-07/07/2005**
- Για τον υπολογισμό των εβδομαδιαίων αποδόσεων χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της λογαριθμικής κεφαλαιακής απόδοσης
- Τα εξεταζόμενα επενδυτικά χαρτοφυλάκια δεν περιλαμβάνουν μηδενικού κινδύνου αξιόγραφα
- Κατά την εφαρμογή της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** γίνεται η υπόθεση της ακολουθίας κανονικής κατανομής των εξαγόμενων αποδόσεων

Διάρθρωση εργασίας

Η εργασία αποτελείται από **8** ενότητες, το περιεχόμενο των οποίων παρατίθεται συνοπτικά:

Ενότητα Ι **–** Εισαγωγή**.** Αναφέρονται συνοπτικά οι βασικές έννοιες της Θεωρία Χαρτοφυλακίου και περιγράφονται οι σκοποί και οι περιορισμοί της παρούσας μελέτης

Ενότητα ΙΙ **–** Κεφάλαιο **1**$^{ο}$**.** Περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο της ανάλυσης χαρτοφυλακίων εστιάζοντας στα βασικότερα υποδείγματα της σύγχρονης Θεωρίας χαρτοφυλακίου.

Ενότητα ΙΙΙ **–** Κεφάλαιο **2**$^{ο}$**.** Παρατίθεται ανασκόπηση παλαιότερων σχετικών μελετών αναφορικά με τον προσδιορισμό του αποδοτικού συνόρου από το **1962** έως το **2002.**

Ενότητα Ι**V –** Κεφάλαιο **3**$^{ο}$**.** Περιγράφεται η έννοια της προσομοίωσης και αναλύονται οι μέθοδοι προσομοίωσης **Monte Carlo** και **Bootstrap.**

Παρουσιάζεται συνοπτικά η ιστορική αναδρομή των μεθόδων και παρατίθενται παραδείγματα εφαρμογής τους στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου

Ενότητα **V –** Κεφάλαιο **4°.** Αναλύεται η μεθοδολογία και το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου για την επίτευξη των σκοπών της παρούσας εργασίας**.** Συγκεκριμένα περιγράφεται το δείγμα**,** η μέθοδος προσομοίωσης **Monte Carlo,** η μέθοδος επανατοποθέτησης **Bootstrap,** το μοντέλο του **Roll,** δύο στατιστικοί έλεγχοι για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της έρευνας

Ενότητα **VI –** Κεφάλαιο **5°.** Περιλαμβάνονται τα αποτελέσματα της εργασίας

Ενότητα **VII –** Κεφάλαιο **6°.** Αξιολογούνται και ερμηνεύονται τα αποτελέσματα της μελέτης και δίδονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα**.**

Ενότητα **VIII –** Παράρτημα**.** Εσωκλείει πίνακες και διαγράμματα εξαγόμενα της παρούσας μελέτης καθώς και περιγραφή των προγραμμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για την εφαρμογή των μεθόδων προσομοίωσης**.**

## ***ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{ο}$ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ***

### ***ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ MARKOWITZ***

Η θεωρία χαρτοφυλακίου αναμφισβήτητα αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες επιτυχίες στην ιστορία της ποσοτικής οικονομίας. Αυτό που σήμερα αποτελεί λίθο της χρηματοοικονομικής ανάλυσης, οι βασικές έννοιες της απόδοσης, του κινδύνου και της εμπειρικής μελέτης, εμφανίζονται για πρώτη φορά μόλις πριν από ορισμένες δεκαετίες. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο **Robert Merton (1990) «**Το πιο σοφιστικό εργαλείο ανάλυσης περίπου έναν αιώνα πριν ήταν η προεξόφλημένη αξία και η κεντρική διαμάχη μεταξύ των διανοούμενων κινείτο γύρω από την επιλογή της παρούσας αξίας ή του εσωτερικού συντελεστή απόδοσης ως μέτρο αξιολόγησης των επιχειρηματικών επενδύσεων**».** Στην ιστορία της εξέλιξης της ποσοτικής οικονομίας υπήρξαν πολλοί πρωταγωνιστές με τα έργα τους, μεταξύ άλλων οι **Arrow, Debreu, Lintner, Miller, Modigliani, Samuelson, Sharpe** και **Tobin.** Ωστόσο πατέρας της σύγχρονης χρηματοοικονομίας δικαίως μπορεί να χαρακτηριστεί ο **Harry Markowitz** δια του έργου του **«Portfolio Selection"** που δημοσίευσε το Μάρτιο του **1952** στην εφημερίδα **Journal of Finance.**

Η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από τον **Markowitz** περιλαμβάνει τρία στάδια ανάλυσης –ανάλυση χρεογράφων, ανάλυση χαρτοφυλακίου και επιλογή χαρτοφυλακίου. Εισάγοντας την έννοια του κινδύνου υπογραμμίζει τη σπουδαιότητα της διαφοροποίησης στα επενδυτικά χαρτοφυλάκια και καταλήγει στο συμπέρασμα πως το πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου για έναν επενδυτή εξαρτάται από τις προτιμήσεις του όσον αφορά στο συνδυασμό απόδοσης-κινδύνου του επενδυτικού χαρτοφυλακίου του και κατ' επέκταση καθορίζεται μέσα από τη διαδικασία μεγιστοποίησης της χρησιμότητάς του.

Η θεωρία χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από τον **Markowitz** στηρίζεται στις εξής τέσσερις υποθέσεις:

- Οι επενδυτές έχουν έναν επενδυτικό ορίζοντα.
- Οι επενδυτές αντιλαμβάνονται κάθε μεμονωμένο χρεόγραφο μέσα από την κατανομή πιθανότητας των αναμενόμενων αποδόσεών του, όπου η αναμενόμενη τιμή της κατανομής ορίζει την αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου ενώ παράλληλα η διακύμανση αυτής αποτελλεί μέτρο του κινδύνου του χρεογράφου. Οι επενδυτές ταυτόχρονα συνεκτιμούν τη συνδιακύμανση μεταξύ των αναμενόμενων αποδόσεων των χρεογράφων που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο.
- Ενα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο, το οποίο περιλαμβάνει μεμονωμένες μετοχές, περιγράφεται απόλυτα από την αναμενόμενη απόδοσή του καθώς και τη διακύμανση των αποδόσεών του.
- Οι επενδυτές στοχεύουν στη μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς τους ανά περίοδο. Η συνάρτηση χρησιμότητας βασίζεται στην τιμή και στη μεταβλητότητα της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Ως εκ τούτου, οι επενδυτές προτιμούν τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση για κάθε επίπεδο κινδύνου ή το μικρότερο δυνατό κίνδυνο για κάθε δεδομένη απόδοση.

Με βάση τις ως άνω υποθέσεις η θεωρία χαρτοφυλακίου ασχολείται με τη δυνατότητα συνδυασμού μεμονωμένων χρεογράφων σε χαρτοφυλάκια με ποσοτικά προσδιορισμένα στοιχεία κινδύνου και απόδοσης και με την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Ως βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ορίζεται εκείνο το χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή σε ορίζοντα μίας περιόδου.

Όπως προαναφέρθηκε, η θεωρία χαρτοφυλακίου, όπως αναπτύχθηκε από τον **Markowitz**, περιλαμβάνει τρία στάδια ανάλυσης:

1. **Στάδιο 1$^{ο}$ - Ανάλυση των χαρακτηριστικών των χρεογράφων.** Η ανάλυση αφορά στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών απόδοσης και κινδύνου για κάθε χρεόγραφο καθώς και στην εκτίμηση του βαθμού συσχέτισης των υπό εξεταζόμενων χρεογράφων.

2. **Στάδιο 2ο - Ανάλυση χαρτοφυλακίου.** Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πρώτου σταδίου προσδιορίζονται οι καλύτεροι δυνατοί συνδυασμοί των μεμονωμένων μετοχών που μπορούν να επιτευχθούν μέσω της διαφοροποίησης.
3. **Στάδιο 3ο – Επιλογή χαρτοφυλακίου.** Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του δεύτερου σταδίου επιλέγεται εκείνος ο συνδυασμός μετοχών που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή.

Παρατίθεται αναλυτικότερη παρουσίαση των τριών σταδίων.

## *ΣΤΑΔΙΟ 1Ο – ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ*

Το συγκεκριμένο στάδιο ανάλυσης αναφέρεται στις έννοιες κινδύνου και απόδοσης των μετοχών και ασχολείται με τις μεθόδους αριθμητικής εκτίμησής τους. Συγκεκριμένα εξετάζονται οι τύποι υπολογισμού **i)**της απόδοσης μίας μετοχής μίας περιόδου, **ii)**της αναμενόμενης απόδοσης, **iii)**της διακύμανσης των αποδόσεων, **iv)**της συνδιακύμανσης των αποδόσεων και **v)**του συντελεστή συχέτισης των αποδόσεων.

Ως απόδοση μίας μετοχής μίας περιόδου ορίζεται το καθαρό κέρδος ή η καθαρή ζημία που προέρχεται από τη διακράτηση της μετοχής για τη συγκεκριμένη περίοδο. Η θετική/αρνητική απόδοση μίας μετοχής μπορεί να προέλθει είτε από κεφαλαιακά κέρδη/ζημίες που οφείλονται στην μεταβολή της τιμής της μετοχής ανά περίοδο, ή από το εισόδημα που προκύπτει λόγω της καταβολής μερίσματος στη συγκεκριμένη περίοδο. Εναλλακτικά η απόδοση μίας μετοχής ορίζεται ως το άθροισμα της κεφαλαιακής απόδοσης της μετοχής (ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής) πλέον της μερισματικής απόδοσης της μετοχής (ποσοσταιαίο μέρισμα ανά μετοχή). Η μαθηματική έκφραση του ως άνω ορισμού δηλώνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{R_{it}} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} + \frac{D_{it}}{P_{it-1}} \qquad \mathbf{(1.1.1)}$$

όπου,

**$R_{it}$ =** η απόδοση της μετοχής

**$P_{it}$ =** η τιμή της μετοχής **i** στο τέλος της περιόδου **t**

**$P_{it-1}$ =** ο τιμή της μετοχής **i** στο τέλος της περιόδου **t-1**

**$D_{it}$ =** το μέρισμα ανά μετοχή**,** της μετοχής **i** από το τέλος της περιόδου **t-1** έως το τέλος της περιόδου **t.**

Ο μαθηματικός τύπος της απόδοσης μίας μετοχής μίας περιόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό τόσο των ιστορικών όσο και των αναμενόμενων μελλοντικών αποδόσεων αυτής**.** Συγκεκριμένα για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης μίας μετοχής για συγκεκριμένη περίοδο στο μέλλον χρησιμοποιούνται η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος της εξεταζόμενης μελλοντικής περιόδου και το αναμενόμενο μέρισμα ανά μετοχή για τη συγκεκριμένη περίοδο**.** Στην περίπτωση που δεν υφίσταται πληρωμή μερίσματος η μερισματική απόδοση ισούται με μηδέν**.** Θετική απόδοση έχουμε εφόσον στη λήξη της εξεταζόμένης περιόδου το άθροισμα της τιμής της μετοχής στη λήξη της περιόδου πλέον του διανεμόμενου μερίσματος ανά μετοχή κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι μεγαλύτερο από την τιμή της μετοχής στην αρχή της περιόδου**.** Αντίστοιχα αρνητική ή μηδενική απόδοση έχουμε όταν το άθροισμα της τιμής της μετοχής στη λήξη της περιόδου πλέον του διανεμόμενου μερίσματος ανά μετοχή κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι μικρότερο ή ίσο της τιμής της μετοχής στην αρχή της περιόδου**.**

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η μετοχή της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος**,** η οποία στις **10** Ιουνίου του **2005** έκλεισε στην τιμή των **29,54€,** αναμένεται να μοιράσει μέρισμα ίσο με **1€.** Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος του Ιουνίου είναι **32,48€.** Σύμφωνα με τον τύπο **(1.1.1)** η απόδοση της μετοχής θα ισούται με**:**

$$R_{1t} = \frac{P_{1t} - P_{1t-1}}{P_{1t-1}} + \frac{D_{1t}}{P_{1t-1}} \Rightarrow$$

$$R_{1t} = \frac{32{,}48 - 29{,}54}{29{,}54} + \frac{1}{29{,}54} \Rightarrow$$

$$R_{1t} = 0{,}0995 + 0{,}03385 \Rightarrow$$

**$R_{1t}$ = 0,1335 = 13,35%**

Δεδομένου ότι για τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής της μετοχής χρησιμοποιούμε αναμενόμενη τιμή και αναμενόμενο μέρισμα τα οποία δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων, το αποτέλεσμα του τύπου **(1.1.1)** προσδίδει μία μόνο εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής. Πιο ρεαλιστική είναι η εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής με τη βοήθεια της κατανομής πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα ως αναμενόμενη απόδοση μίας μετοχής μίας περιόδου ορίζεται το σταθμισμένο άθροισμα των πιθανών προσδοκώμενων μελλοντικών αποδόσεων όπου ως σταθμά χρησιμοποιούνται οι υποκειμενικές πιθανότητες πραγματοποίησής τους. Οι πιθανότητες αυτές είναι υποκειμενικές και ως εκ τούτου διαφέρουν για κάθε επενδυτή. Συνεπώς κάθε επενδυτής είναι δυνατόν να έχει διαφορετική κατανομή πιθανοτήτων για την ίδια μετοχή. Η μαθηματική έκφραση του ως άνω ορισμού δίνεται από τον τύπο:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^{N} P_k * R_{ik} \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

όπου,

**$E(R_i)$** = η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση της μετοχής **i**

**$R_{ik}$** = το κ πιθανό αποτέλεσμα για την απόδοση της μετοχής **i**

**$P_k$** = η υποκειμενική πιθανότητα η μετοχή **i** να έχει απόδοση **$R_{ik}$**

N = το σύνολο των πιθανών αποδόσεων

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω οτι για ένα επενδυτή η κατανομή πιθανοτήτων των αποδόσεων της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελάδος δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

| ***Πιθανότητα εμφάνισης του αποτέλεσματος*** | **Αποτέλεσμα** |
|---|---|
| **20%** | **9%** |
| **50%** | **3%** |
| **30%** | **6%** |

Σύμφωνα με τον τύπο **(1.1.2)** η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής θα ισούται με:

$$E(R_1) = \sum_{k=1}^{N} P_k * R_{1k} \quad \Rightarrow$$

$$E(R_1) = 20\%*9\% + 50\%*3\% + 30\%*6\% \quad \Rightarrow$$

$$E(R_1) = 5{,}10\%$$

Η αναμενόμενη τιμή μίας μετοχής παρέχει σημαντικές πληροφορίες που σχετίζονται με την μέση τιμή της κατανομής πιθανοτήτων των αποδόσεων της μετοχής. Ωστόσο δε μας πληροφορεί για το μέγεθος της διασποράς των αποδόσεων από το μέσο τους. Η προσδοκώμενη απόκλιση από την προβλεπόμενη απόδοση της μετοχής ορίζεται με το στατιστικό κριτήριο της διακύμανσης ή της τυπικής απόκλισης οι οποίες αποτελούν μέτρα υπολογισμού της αβεβαιότητας σχετικά με τις αποδόσεις της μετοχής ή διαφορετικά μέτρα εκτίμησης του κινδύνου της μετοχής. Ως διακύμανση ορίζεται το άθροισμα των σταθμισμένων τετραγώνων των αποκλίσεων των πιθανών αποδόσεων μίας μετοχής από την αναμενόμενη απόδοσή τους. Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης μας δίδει την τυπική απόκλιση των αποδόσεων μίας μετοχής. Οι μαθηματικές εκφράσεις των ως άνω ορισμών δίδονται από τους τύπους:

$$\sigma^2(R_i) = \sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{N} P_k (R_{ik} - E(R_i))^2 \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

$$\sigma(R_i) = \sigma_i = \sqrt{s_i^{\,2}} \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

όπου

$\sigma^2(R_i) = \sigma_i^2$ = η διακύμανση των αποδόσεων της μετοχής **i**

$\sigma(R_i) = \sigma_i$ = η τυπική απόκλιση της μστοχής **i.**

Εύκολα γίνεται αντιληπτό πως η διακύμανση των αποδόσεων μίας μετοχής αποτελεί μέτρο του εύρους της κατανομής των αποδόσεων ως προς την αναμενόμενη απόδοσή τους. Δηλαδή μετρά την κατά μέσο όρο μεταβλητότητα των πιθανών αποδόσεων από την αναμενόμενη απόδοσή τους. Όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση των αποδόσεων μίας μετοχής, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα η πραγματική απόδοση της μετοχής να αποκλίνει σημαντικά από την αναμενόμενη απόδοσή της και κατά συνέπεια τόσο μεγαλύτερη είναι η επικινδυνότητα που παρουσιάζει η μετοχή.

<u>Παράδειγμα</u>

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος και εφαρμόζοντας τον τύπο **(1.1.3)** η διακύμανση των αποδόσεων της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος θα ισούται με:

$$\sigma^2(\mathbf{R_1}) = \sigma_1^2 = \sum_{k=1}^{N} P_k (R_{1k} - E(R_1))^2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_1}) = \mathbf{20\% * (9\% - 5{,}10\%)^2 + 50\% * (3\% - 5{,}10\%)^2 + 30\% * (6\% - 5{,}10\%)^2} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_1}) = \mathbf{20\% * 15{,}21\% + 30\% * 4{,}41\% + 30\% * 0{,}81\%} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_1}) = \mathbf{3{,}042\% + 1{,}323\% + 0{,}243\%} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_1}) = \mathbf{4{,}61\%}$$

Σύμφωνα με το τύπο **(1.1.4)** η τυπική απόκλιση της μετοχής θα ισούται με

$$\sigma(\mathbf{R_1}) = \sigma_1 = \sqrt{s_1^{\,2}} \Rightarrow$$

$$\sigma(\mathbf{R_1}) = \sqrt{4{,}61\%} = \mathbf{0{,}215}$$

Είναι προφανές πως προκειμένου για την αξιολόγηση των μετοχών απαιτούνται τόσο η αναμενόμενη απόδοση κάθε μετοχής όσο και η διακύμανση ή η τυπική απόκλιση αυτών. Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα στατιστικά αυτά μέτρα δεν κρίνονται αρκετά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση δύο μετοχών Α και Β όπου η πρώτη παρουσιάζει μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση και μικρότερη τυπική απόκλιση, είναι προφανές πως ένας επενδυτής θα επιλέξει τη μετοχή Α. Στην περίπτωση όμως που η μετοχή Α έχει ταυτόχρονα μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση και τυπική απόκλιση τα πράγματα δεν είναι τόσο ξεκάθαρα. Στη διαδικασία επιλογής μεταξύ των δύο μετοχών απαιτείται ένα βοηθητικό μέτρο, ο συντελεστής μεταβλητότητας. Ο συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται ως η τυπική απόκλιση των αποδόσεων μίας μετοχής προς την αναμενόμενη τιμή τους και μετρά τον κίνδυνο μίας μετοχής ανά μονάδα αναμενόμενης απόδοσης. Η μαθηματική έκφραση του συντελεστή μεταβλητότητας ορίζεται από τον τύπο:

$$CV\ (R_i) = \frac{s\,(R_i)}{E(R_i)} \qquad (1.1.5)$$

Όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας μίας μετοχής, τόσο μικρότερος είναι ο κίνδυνος της μετοχής ανα μονάδα αναμενόμενης απόδοσης και συνεπώς τόσο ελκυστικότερη είναι η μετοχή προς έναν επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο.

Παράδειγμα

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος ο συντελεστής μεταβλητότητας των αποδόσεων της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελάδος θα ισούται με:

$$CV = \frac{s\,(R_i)}{E(R_i)} \Rightarrow$$

$$CV = \frac{0{,}215}{5{,}10\%} \Rightarrow$$

**CV = 4,21**

Παρά τη σημαντικότητα των στατιστικών κριτηριών που περιγράφησαν ανωτέρω, τα στατιστικά αυτά κριτήρια αφήνουν ένα κενό όσον αφορά στην πληροφόρηση που μας παρέχουν. Συγκεκριμένα δε δίδουν καμία πληροφόρηση σχετικά με την αλληλοσύνδεση που πιθανώς να παρουσιάζεται στις αποδόσεις δύο ή περισσοτέρων μετοχών. Το κενό αυτό καλύπτει ένα αλλο στατιστικό μέτρο, η συνδιακύμανση. Η συνδιακύμανση ορίζεται ως το άθροισμα των σταθμικών γινομένων των αποκλίσεων των αποδόσεων των μετοχών από τις αντίστοιχες αναμενόμενες αποδόσεις τους, όπου ως σταθμά ορίζονται οι κοινές πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων αποδόσεων των μετοχών. Η αλγεβρική διατύπωση του ως άνω ορισμού διδεται πό τον τύπο:

$$Cov\ (R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{N} P_k\,(R_{ik} - E(R_i)) * (R_{jk} - E(R_j)) \qquad (1.1.6)$$

όπου,

**Cov ($R_i$, $R_j$)** = $\sigma_{ij}$ = η συνδιακύμανση των αποδόσων.

**$P_k$** = η κοινή πιθανότητα εμφάνισης των αποδόσεων **$R_{ik}$** και **$R_{jk}$**

**N** = ο συνολικός αριθμός των πιθανών αποδόσεων.

Η συνδιακύμανση των αποδόσεων δύο ή περισσοτέρων μετοχών είναι ένα απόλυτο στατιστικό μέτρο υπολογισμού του βαθμού συσχέτισης των αποδόσεων των μετοχών που ταυτόχρονα αντανακλά τη διασπορά των αποδόσεων κάθε μετοχής από την αναμενόμενη απόδοσή της. Θετικό πρόσημο στην τιμή της συνδιακύμασης των αποδόσεων των μετοχών σημαίνει ότι οι αποδόσεις των μετοχών τείνουν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση ενώ αντίθετα αρνητικό πρόσημο σημαίνει πως οι αποδόσεις των μετοχών κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τη συνδιακύμανση των αποδόσεων της μετοχής του ΟΤΕ και της Εθνικής Τράπεζας της Ελλαδος και έστω ότι η μέση αναμενόμενη απόδοση της τιμής του ΟΤΕ είναι **3%,** ενώ οι κοινές πιθανότες εμφάνισης των αποδόσεων των μετοχών της, εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

| **Πιθανότητα κοινής εμφάνισης** | **Πιθανές αποδόσεις** | |
|---|---|---|
| | **ΟΤΕ** | **ΕΤΕ** |
| **25%** | **4%** | **9%** |
| **50%** | **3%** | **6%** |
| **25%** | **2%** | **5%** |

Σύμφωνα με τον τύπο **(1.1.6)** η συνδιακύμανση των αποδόσεων των δύο μετοχών θα ισούται με:

**Cov** $(R_1, R_2) = \sigma_{12} = \sum_{k=1}^{N} P_k (R_{1k} - E(R1)) * (R_{2k} - E(R_2)) \Rightarrow$

**Cov** $(R_1, R_2)$ **= 25%(4%-3%)(9%-5,10%) + 50%(3%-3%)(6%-5,10%) + 25%(2%-3%)(5%-5,10%)** $\Rightarrow$

**Cov** $(R_1, R_2)$ **= 0,00975% + 0 + 0,00025%** $\Rightarrow$

**Cov** $(R_1, R_2)$ **= 0,10%**

Συμπερασματικά η συνδιακύμανση αποκαλύπτει το εάν οι αποδόσεις των υπό εξέταση μετοχών ανταποκρίνονται ομοιόμορφα απέναντι στα ίδια πολιτικά, κοινωνικά ή οικονομικά γεγονότα. Ωστόσο δεν παρουσιάζει το πόσο ομοιόμορφα ανταποκρίνονται οι αποδόσεις των μετοχών απέναντι στα ίδια γεγονότα. Δηλαδή παρουσιάζει την κατεύθυνση όχι όμως και το βαθμό αλληλεξάρτησης των αποδόσεων. Η ένταση της αλληλεξάρτησης των αποδόσεων δύο ή περισσοτέρων μετοχών προκύπτει με τη βοήθεια του συντελεστή συσχέτισης. Ο συντελεστής συσχέτισης δύο μετοχών ορίζεται ως ο λόγος της συνδιακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών προς το γινόμενο των τυπικών τους αποκλίσεων. Η μαθηματική έκφραση του ως άνω ορίσμού δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{CC\ (R_i,\ R_j)} \quad = \quad \rho_{ij} \quad = \quad \frac{Cov(R_i, R_j)}{s\,(R_i) * s\,(R_j)} \qquad \mathbf{(1.1.7)}$$

Το πρόσημο της τιμής του συντελεστή συσχέτισης αποκαλύπτει την κατεύθυνση της συσχέτισης ενώ το μέγεθος της απόλυτης τιμής του υποδεικνύει την ισχύ της συσχέτισης. Συγκεκριμένα ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει τιμές μεταξύ του διαστήματος **[-1, +1]**. Όσο η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης πλησιάζει στη μονάδα, τόσο πιο ισχυρή, θετική ή αρνητική, είναι η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των εξεταζόμενων μετοχών. Αντίθετα όσο η τιμή του συντελεστή συσχέτισης πλησιάζει στο μηδέν τόσο πιο ανεξάρτητα κατευθύνονται οι αποδόσεις των μετοχών.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι οι τυπικές αποκλίσεις των μετοχών του ΟΤΕ και της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος είναι $\sigma_1$ **= 0,0082** και $\sigma_2$ **= 0,215** αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος και εφαρμόζοντας τον τύπο **(1.1.7)** ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των δύο μετοχών ισούται με:

$$\mathbf{CC\ (R_1,\ R_2)} \quad = \quad \rho_{12} \quad = \quad \frac{Cov(R_1, R_2)}{s\,(R_1) * s\,(R_2)} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{CC\ (R_1,\ R_2)} \quad = \quad \frac{0{,}0010}{0{,}0082 * 0{,}215} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{CC\ (R_1,\ R_2)} \quad = \quad \mathbf{0{,}567}$$

Με την παρουσίαση των βασικών στατιστικών μεγεθών της απόδοσης, της αναμενόμενης απόδοσης, της διακύμανσης και τυπικής απόκλισης, του συντελεστή μεταβλητότητας, της συνδιακύμανσης και του συντελεστή συσχέτισης ολοκληρώνεται το πρώτο στάδιο ανάλυσης στη θεωρία χαρτοφυλακίου του **Markowitz.**

## ***ΣΤΑΔΙΟ 2$^{Ο}$ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ***

Από τα βασικότερα σημεία στη θεωρία χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από το **Markowitz** και παράλληλα μέγιστη συμβολή του συγγραφεα στην εξέλιξη της επιστήμης της χρηματοοικονομίας αποτελλεί η μέτρηση της συνεισφοράς κάθε μετοχής στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου και η σήμανση της σπουδαιότητας της διαφοροποίησης αυτού. Αυτό που σήμερα φαντάζει αυτονόητο, δηλαδή το γεγονός πως η επένδυση του συνόλου ενος χρηματικού κεφαλαίου σε μία μεμονωμένη μετοχή αποτελεί μία εξαιρετικά επικίνδυνη επενδυτική επιλογή δεν χαρακτηριζόταν ανέκαθεν με όμοιο τρόπο. Προκειμένου να προσδιορισθούν οι θέσεις του συγγραφέα και να αναλυθεί η σημασία της διαφοροποίησης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων θα πρέπει να προσδιορισθούν ορισμένες βασικές έννοιες.

Αρχικά ως επενδυτικό χαρτοφυλάκιο ορίζεται ένα σύνολο μετοχών οι οποίες περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο με συγκεκριμένη αναλογία βάσει των ποσοστών επένδυσης του επενδυτή του χαρτοφυλακίου σε αυτές. Συνεπώς ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο καθορίζεται τόσο από το είδος και τον αριθμό των μετοχών που περιλαμβάνει, όσο και από τα ποσοστά των επενδύσεων στις μετοχές που το απαρτίζουν. Τα ποσοστά των επενδύσεων αθροίζουν πάντοντε στη μονάδα και συμφωνα με την ανάλυση του **Markowitz** είναι θετικοί αριθμοί, δηλαδή δε λαμβάνεται υπ' όψιν η δυνατότητα του **short selling.**

Η απόδοση ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου ορίζεται ως ο σταθμικός μέσος των μεμονωμένων αποδόσεων των μετοχών που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο, όπου ως σταθμά χρησιμοποιούνται τα ποσοστα της επένδυσης σε κάθε μετοχή. Εναλλακτικά,

$$\mathbf{E(R_p)} = \sum_{i=1}^{N} W_i * E(R_i) \qquad \mathbf{(1.2.1)}$$

όπου,

**$E(R_p)$ =** η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου **p**

**$w_i$ =** το ποσοστό επένδυσης στη μετοχή **i**

**$E(R_i)$ =** η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής **i**

**N =** ο αριθμός των μετοχών

Παράδειγμα

Έστω ένας επενδυτής έχει στο χαρτοφυλάκιό του δύο μετοχές- της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος και του ΟΤΕ. Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου του παρουσιάζεται από τον παρακάτω πίνακα

| **Ποσοστά επένδυσης** | **Μέσες αναμενόμενες αποδόσεις** | |
|---|---|---|
| | **ΟΤΕ** | **ΕΤΕ** |
| **50%** | **3%** | **5,10%** |
| **50%** | | |

Σύμφωνα με τον τύπο **(1.2.1)** η αναμενόμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή θα ισούται με:

$$\mathbf{E(R_p)} = \sum_{i=1}^{N} W_i * E(R_i) \Rightarrow$$

$$\mathbf{E(R_p)} = \mathbf{50\% * 3\% + 50\% * 5{,}10*} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E(R_p)} = \mathbf{4{,}05\%}$$

Η επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου μπορεί να οριστεί με τα ίδια στατιστικά μέτρα που ορίζουν τον κίνδυνο μίας μετοχής δηλαδή τη διακύμανση ή την τυπική απόκλιση. Για τον προσδιορισμό της διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου απαιτείται η εκτίμηση των τυπικών αποκλίσεων των τίτλων του χαρτοφυλακίου, της συνδιακύμανσης αυτών καθώς και των ποσοστών της αξίας κάθε τίτλου στο σύνολο της αξίας του χαρτοφυλακίου. Ο μαθηματικός τύπος υπολογισμού της διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i}^2 * \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{x_i} * \mathbf{x_j} * \mathbf{Cov(R_i,R_j)} \qquad \mathbf{(1.2.2.}\alpha\mathbf{)}$$

ή

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i}^2 * \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{x_i} * \mathbf{x_j} * \rho * \sigma_i * \sigma_j \qquad \mathbf{(1.2.2}\beta\mathbf{)}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο υπολογισμού της διακύμανσης για ένα χαρτοφυλάκιο δύο μετοχών προκύπτει:

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \mathbf{x_i}^2 * \sigma_1^2 + \mathbf{x_2}^2 * \sigma_2^2 + \mathbf{2x_1} * \mathbf{x_2} * \mathbf{Cov(R_1,R_2)} \qquad \mathbf{(1.2.3.}\alpha\mathbf{)}$$

ή

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \mathbf{x_i}^2 * \sigma_1^2 + \mathbf{x_2}^2 * \sigma_2^2 + \mathbf{2x_1} * \mathbf{x_2} * \rho * \sigma_1 * \sigma_2. \qquad \mathbf{(1.2.3.}\beta\mathbf{)}$$

Παρατηρώντας τους τύπους **(1.2.3.**β**)** και **(1.2.4.**β**)** διαπιστώνουμε πως ο συντελεστής συσχέτισης αποτελεί άκρως σημαντικό μέγεθος για έναν επενδυτή καθώς εκφράζει τη δυνατότητα μείωσης του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Πρώτος ο **Markowitz** υπογραμμίζει πως κατά την αξιολόγηση των μετοχών που περιλαμβάνονται σε ένα χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να εξετάζεται όχι μόνο ο κίνδυνος αυτών αλλά και η συμμετοχή τους στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Τα οφέλη της διαφοροποίησης μπορούν να προκύψουν μόνο εφόσον σε ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο συνδυαστούν μετοχές των οποίων οι αποδόσεις να μην έχουν τέλεια θετική συσχέτιση μεταξύ τους. Ετσι ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μειώνεται σε σχέση με τον αντίστοιχο κίνδυνο των μεμονωμένων μετοχών που περιλαμβάνει, με το μέγεθος της μείωσης να εξαρτάται αντίστροφα από το βαθμό συσχέτισης των αποδόσεων των μετοχών. Όσο μικρότερος ο συντελεστής συσχέτισης τόσο μεγαλύτερη η μείωση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου.



<u>Παράδειγμα</u>

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και τα εξαγόμενα αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων και εφαρμόζοντας τον τύπο **(1.2.3.**β**)** η διακύμανση του χαρτοφύλακίου θα ισούται με:

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \mathbf{x_i}^2 * \sigma_1^2 + \mathbf{x_2}^2 * \sigma_2^2 + 2\mathbf{x_1} * \mathbf{x_2} * \rho * \sigma_1 * \sigma_2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = 50\% * (0{,}0082)^2 + 50\% * (0{,}215)^2 + 2 * 0{,}50 * 0{,}50 * 0{,}567 * 0{,}0082 * 0{,}215 \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = 0{,}00336\% + 2{,}31\% + 0{,}00499\% \Rightarrow$$

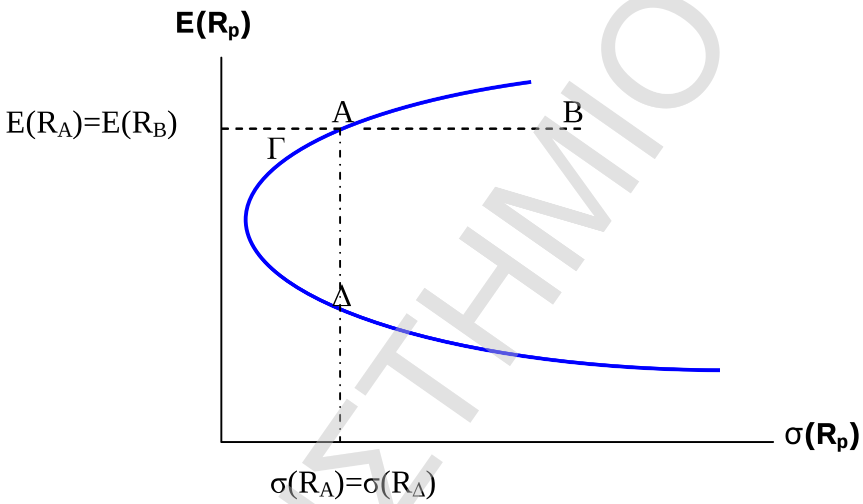
$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = 2{,}32\%$$

Εμπειρικά έχει αποδειχθεί ότι οι αποδόσεις των μετοχών δεν έχουν τέλεια συσχέτιση μεταξύ τους. Στην Ελλάδα οι αποδόσεις των μετοχών παρουσιάζουν μη τέλεια και θετική συσχέτιση καθώς γενικότεροι ποιοτικοί, οικονομικοί και κοινωνικοί παραγοντες τις επηρεάζουν ομοιοτρόπως αλλα σε διαφορετικό βαθμό.[1] Ως εκ τούτου υπάρχει περιθώριο μείωσης του κινδύνου ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου μέσω της διαφοροποίησης.
Πιο συγκεκριμένα ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να διακριθεί σε δύο τμήματα. Τον μη συστηματικό κίνδυνο $\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i}^2 * \sigma_i^2\right)$ και τον συστηματικό κίνδυνο $\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{x_i} * \mathbf{x_j} * \mathbf{Cov(R_i,R_j)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{x_i} * \mathbf{x_j} * \rho * \sigma_i * \sigma_j\right)$. Ο μη συστηματικός κίνδυνος περιλαμβάνει παράγοντες κινδύνου που αφορούν αποκλειστικά στην επιχείρηση που εξέδωσε τη μετοχή και μπορεί να μειωθεί ή ακόμα και να εξαληφθεί μέσω ενός καλά διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου. Στο συστηματικό κίνδυνο περιλαμβάνονται όλοι εκείνοι οι παράγοντες της αγοράς που επηρεάζουν, περισσότερο ή λιγότερο, τη μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών στο σύνολό τους. Πρόκειται για όλους τους βασικούς μακροοικονομικούς παράγοντες όπως το γενικό επίπεδο τιμών, τα επίπεδα επιτοκίων, τα δημοσιονομικά ελείμματα κ.α., καθώς και γενικότερους κοινωνικούς ή πολιτικούς παράγοντες.

[1]Γεώργιος Διακογιάννης-Εμμανουήλ Τσιριτάκης, «Μακροοικονομικοί παράγοντες και οι αποδόσεις των μετοχών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών.»

Ολοκληρώνοντας με τη σημασία της διαφοροποίησης όπως υπογραμμίστηκε από το **Markowitz** στη θεωρία χαρτοφυλακίου που ανέπτυξε το **1952**, περνάμε στη δεύτερη μεγάλη συμβολή του συγγραφέα, την έννοια του αποδοτικού χαρτοφυλακίου. Ένα χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως αποδοτικό εφόσον συντρέχουν οι εξής δύο προϋποθέσεις: α) δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο με την ίδια αναμενόμενη απόδοση και μικρότερη τυπική απόκλιση και β) δεν υπάρχει κανένα άλλο χαρτοφυλάκιο που να έχει την ίδια τυπική απόκλιση και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των αποδοτικών χαρτοφυλακίων ονομάζεται μέτωπο των αποδοτικών συνδυασμών ή αποδοτικό σύνορο **(efficient frontier).**

***Διάγραμμα Ι- Το Αποδοτικό Σύνορο***




Το τμήμα του ανωτέρω γραφήματος που έχει θετική κλίση περιλαμβάνει όλους τους εφικτούς συνδυασμούς αποδόσεων και τυπικών αποκλίσεων των μετοχών που συνθέτουν χαρτοφυλάκια τα οποία έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση με δεδομένο κίνδυνο, ή τον ελάχιστο κίνδυνο δεδομένης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Συνεπώς πρόκειται για μία γραφική απεικόνιση του αποδοτικού συνόρου του **Markowitz.** Οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο κοίτεται κατω ή δεξιά της γραμμής του αποδοτικού συνόρου δεν είναι αποδοτικό. Παραδείγματος χάρη, το χαρτοφυλάκιο Β έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση με το χαρτοφυλάκιο Α αλλά μεγαλύτερη τυπική απόκλιση, συνεπως μεγαλύτερο κίνδυνο. Ως εκ τούτου το χαρτοφυλάκιο Α υπερέχει του χαρτοφυλακίου Β. Γενικεύοντας, όλα τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται πάνω στο αποδοτικό σύνορο του **Markowitz** υπερέχουν ένατι αυτών που βρίσκονται κάτω ή δεξία αυτού. Είναι προφανές πως κάθε επενδυτής έχει συμφέρον να επιλέξει ένα μεταξύ των χαρτοφυλακίων που κοίτονται επι του αποδοτικού συνόρου. Ο προσδιορισμός του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου που θα επιλέξει κάθε επενδυτής εξαρτάται από τις προτιμήσεις του επενδυτή και αποτελλεί το τρίτο στάδιο ανάλυσης στη θεωρία του **Markowitz.**

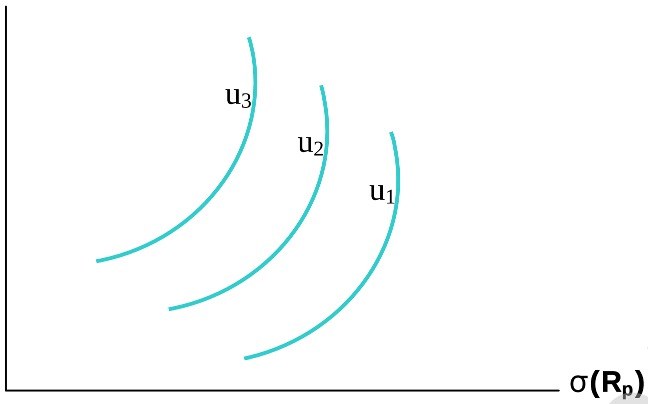
### ***ΣΤΑΔΙΟ 3$^{Ο}$ – ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ***

Όπως προαναφέρθηκε, το τελικό χαρτοφυλάκιο που θα επιλέξει ένας επενδυτής εξαρτάται από τις προτιμήσεις του απέναντι στον κίνδυνο. Συγκεκριμένα, ένας ριψοκίνδυνος επενδυτής θα αποζητά υψηλή αναμενόμενη απόδοση όντας παράλληλα πρόθυμος να αναλάβει σημαντικό κίνδυνο προκειμένου να την επιτύχει. Αντίθετα ένας περισσότερο συντηρητικός επενδυτής θα αρκεστεί σε μικρότερη αναμενόμενη απόδοση προκειμένου να αποφύγει την ανάλυψη υψηλού επιπέδου κινδύνου. Στο διάγραμμα Ι ο πρώτος επενδυτής θα επέλεγε το χαρτοφυλάκιο Α ενώ ο δεύτερος το Χαρτοφυλάκιο Γ. Είναι προφανές πως η τελική επιλογή χαρτοφυλακίου από τον επενδυτή εξαρτάται από τις προσωπικές του προτιμήσεις που στοχεύουν κάθε φορά στη μεγιστοποίηση της ωφελιμότητάς του. Σύμφωνα με τη μικροοικονομική θεωρία ο καλύτερος τρόπος για να εκφράσουμε την έννοια της ωφελιμότητας, είναι οι καμπύλες αδιαφορίας.

Η καμπύλη αδιαφορίας ενός επενδυτή στα πλάισια της ανάλυσης χαρτοφυλακίων ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των συνδυασμών αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου χαρτοφυλακίων, που προσδίδουν στον επενδυτή την ίδια ωφέλεια. Στο διάγραμμα ΙΙ παρουσιάζονται ενδεικτικές καμπύλες αδιαφορίας.

***Διάγραμμα ΙΙ- Καμπύλες Αδιαφορίας Επενδυτή Χαρτοφυλακίου***

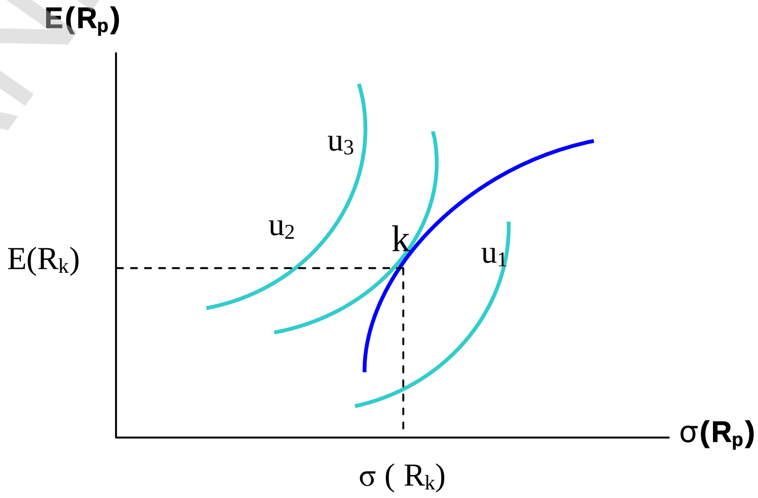
**$E(R_p)$**




Όλοι οι συνδυασμοί απόδοσης-κινύνδύνου που απεικονίζονται με την καμπύλη αδιαφορίας $\mathbf{u_1}$ παρέχουν την ίδια ωφελιμότητα για τον επενδυτή. Ομοίως ισχύει για τις παράλληλες καμπύλες $\mathbf{u_2}$ και $\mathbf{u_3}$ οι οποίες όμως υπερτερούν από τη $\mathbf{u_1}$ καθώς για κάθε επίπεδο κινδύνου προσδίδουν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση ή για κάθε επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης προσδίδουν μικρότερο κίνδυνο. Είναι προφανές πως οι καμπύλες $\mathbf{u_2}$ και $\mathbf{u_3}$ παρέχουν υψηλότερα επίπεδα ωφέλειας απο την $\mathbf{u_1}$ και ως εκ τούτου είναι προτιμητέες από τον επενδυτή στον οποίο αναφέρονται.

Συνδυάζοντας το σύνολο των επιθυμητών συνδυασμών απόδοσης και κινδύνου ενός επενδυτή, όπως αυτό παρουσιάζεται από τις καμπύλες αδιαφορίας του, με το σύνολο των εφικτών άριστων συνδυασμών απόδοσης και κινδύνου, όπως αυτό παρουσιάζεται από το αποδοτικό σύνορο, προκύπτει ο συγκεκριμένος συνδυασμος – συγκεκριμένο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο - μέσω του οποίου μεγιστοποιείται η ωφέλεια του επενδυτή.

***Διάγραμμα III- Επιλογή Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου***



Όπως παρουσιάζεται στο Διάγραμμα III, στο σημείο επαφής του αποδοτικού συνόρου με την όσο το δυνατόν αριστερότερα ευρισκόμενης καμπύλης αδιαφορίας (στο διάγραμμα III το σημείο **k**), ο επενδυτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του. Ο συνδυασμός αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου που ορίζεται από το συγκεκριμένο σημείο, καθορίζει το άριστο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο.

**<u>Σύνοψη</u>**

Σύμφωνα με τη θεωρία χαρτοφυλακίου του **Markowitz** μεμονωμένες μετοχές μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους προκειμένου να συνθέσουν ένα ή περισσότερα επενδυτικά χαρτοφυλάκια. Ολοι οι πιθανοί συνδυασμοί μεταξύ τους, προσδίδουν ένα σύνολο επενδυτικών χαρτοφυλακίων τα οποία με τη σειρά τους αποτελλούν ένα σύνολο επενδυτικών επιλογών. Μεταξύ αυτών των επιλογών υπάρχει ένα υποσύνολο χαρτοφυλακίων τα οποία προσδίδουν τη μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση για το ίδιο επιπεδο κινδύνου ή το μικρότερο κινδυνο για την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Το σύνολο αυτών των χαρτοφυλακίων ονομάζεται αποδοτικό σύνορο. Εν γένη, η εύρεση του αποδοτικού συνόρου αποτελλεί λύση ενός προβήματος διτετραγωνικού προγραμματισμού. Με τον καθορισμό του αποδοτικού συνόρου ο επενδυτής, λαμβάνοντας υπ' όψιν του τις προσωπικές του προτιμήσεις, επιλέγει εκείνο το χαρτοφυλάκιο για το οποίο οι συνδυασμοί απόδοσης και κινδύνου μεγιστοποιούν την αναμενόμενη χρησιμότητά του. Λιγότερο συντηρητικοί επενδυτές θα επιλέξουν υψηλά επίπεδα κινδύνου με αντάλλαγμα υψηλά επιπεδα απόδοσης και το αντίστροφο.

Η θεωρία χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από τον **Markowitz** υποθέτει πως τα ποσοστά επένδυσης σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών κυμαίνονται μετάξύ **0%** και **100%**. Το γεγονός ότι αναγνωρίζει μόνο θετικές τιμές στα ποσοστά επένδυσης, ισοδυναμεί με αδυναμία των επενδυτών για προ-πώληση των μετοχών - **short selling.** Ο όρος **short selling** αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία οι επενδυτές πωλούν μετοχές που δεν ανήκουν στο χαρτοφυλάκιό τους, με προσδοκία ότι θα πέσει η τιμή τους και σκοπό να τις αγοράσουν φθηνότερα στο μέλλον. Η υπόθεση για θετικές τιμές των ποσοστών επενδυσης του **Markowitz**, αίρεται για πρώτη φορά το **1972** από τον **Black.** Στη συνέχεια, το **1977** ο **Roll** τροποποιεί το υπόδειγμα του **Makowitz** επιτρέποντας τη δυνατότητα του **short selling** στις μετοχές. Η ανάλυση του **Roll** έχει επικρατήσει ως «Η τροποποιημένη θεωρία αποδοτικού συνόρου» **(The modified efficient frontier).**

Ο **Roll** το **1977** εκτίμησε το σύνολο των χαρτοφυλακίων ελάχιστης διακύμανσης ως αποτέλεσμα ενός μαθηματικού προβλήματος μεγιστοποίησης. Δεδομένου ενός συνόλου μετοχών που απαρτίζουν το εξεταζόμενο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο και λαμβάνοντας υπ' όψιν τα εξής δεδομένα, **i)** το χαρτοφυλάκιο χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένη αναμενόμενη απόδοση και **ii)** το άθροισμα των ποσοστών επένδυσης στις μετοχές που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο ισούται με τη μονάδα, στόχευσε στην εύρεση των άριστων ποσοστών επένδυσης, σύμφωνα με τα οποία επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου. Η μαθηματική έκφραση του προβλήματος υπό τη μορφή πινάκων ορίζεται ως εξής:

**Minimize** $\sigma^2(R_p)$
**s.t. (a)** $X_p^T * R = E(R_p)$
**(b)** $X_p^T * u = 1$

όπου,
$X_p$ = ο **n * 1** πίνακας που περιλαμβάνει τα ποσοστά επένδυσης $x_1, x_2, \ldots x_n$, στις μετοχές του χαρτοφυλακίου **p**
$X_p^T$ = ο ανάστροφος πίνακας **1 * n** που προκύπτει από τον πίνακα $X_p$ κάνοντας τις στήλες γραμμές ή ισοδύναμα τις γραμμές στήλες
**R** = ο **n * 1** πίνακας των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών του χαρτοφυλακίου
**u** = ο **n * 1** μοναδιαίος πίνακας
$E(R_p)$ = η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος υπολογισμού των «άριστων ποσοστών επένδυσης» δίνεται από τον τύπο,

$$X_p = V^{-1}\,(Ru) * A^{-1} * \begin{bmatrix} E(R_p) \\ ....1 \end{bmatrix} \qquad (1.3.1)$$

όπου,

**V =** ο **n * n** συμμετρικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα αποτελλούν τις διακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών που περιλαμβάνονται στο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι οι συνδιακυμάνσεις αυτών.

$\mathbf{V^{-1}}$ **=** ο αντίστροφος πίνακας των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, για τον οποίο ισχύει $\mathbf{V * V^{-1} = I}$

**Ru =** ο **n * 2** πίνακας τα στοιχεία της πρώτης στήλης του οποίου είναι τα στοιχεία του πίνακα **R** και τα στοιχεία της δεύτερης στήλης είναι ο μοναδιαίος πίνακας

**A =** ο **n * n** πίνακας υπερβαλλουσών αποδόσεων που ορίζεται ως,

$A = (\mathbf{Ru})^{T} * \mathbf{V^{-1}} * \mathbf{Ru}$

$A^{-1}$ **= ο** αντίστροφος πίνακας υπερβαλουσών αποδόσεων, για τον οποίο ισχύει $A * A^{-1} = I$

Μελετώντας το αρχικό υπόδειγμα του **Markowitz** και την τροποποίησή του από τον **Roll** είναι προφανής η διαπίστωση πως όσο ο αριθμός των μετοχών που περιλαμβάνονται σε ένα χαρτοφυλάκιο αυξάνεται, τόσο οι υπολογιστικές απαιτήσεις του μοντέλου πολλαπλασιάζονται καθιστώντας την πρακτική εφαρμογή του μη λειτουργική. Συγκεκριμένα, για ένα χαρτοφυλάκιο **n** μετοχών απαιτείται ο υπολογισμός **n** διακυμάνσεων, **n** αναμενόμενων αποδόσεων και $\frac{n(n-1)}{2}$ συνδιακυμάνσεων. Ενδεικτικά για ένα χαρτοφυλάκιο **60** μετοχών απαιτείται ο υπολογισμός **60** διακυμάνσεων, **60** αναμενόμενων αποδόσεων και **1770** συνδιακυμάνσεων. Εναλλακτικα, ο **William Sharpe** προσεγγίζοντας με ένα διαφορετικό υπόδειγμα τη θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου μειώνει σημαντικά τις υπολογιστικές απαιτήσεις του προβλήματος σύνθεσης αποδοτικών χαρτοφυλακίων. Προβλήματα που απαιτούσαν για την επίλυσή τους **33** λεπτά χρόνου στο υπολογιστή μέσω της εφαρμογής του μοντέλου του **Markowitz** απαιτούν μόνο **30** δεπτερόλεπτα εφαρμόζοντας το μοντέλο του **Sharp**[2]**.** Αυτό επιτυγχάνεται

– [2] Hal Varian, “A portfolio of Nobel Laureates: Markowitz, Miller and Sharpe”. The Journal of Economic Perspectives, Vol.7, No.1, (Winter 1993), 159-169.

μέσω της άποψης του συγγραφέα πως αντί να λογίζουμε τη συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων μίας δεδομένης μετοχής και όλων των άλλων**,** αρκεί να υπολογίσουμε τη συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων της δεδομένης μετοχής και καποιου δείκτη της αγοράς**.** Το μοντέλο του **Sharpe** είναι γνωστό ως **«**Το Υπόδειγμα της Αγοράς**»**

## *ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ*

Το Υπόδειγμα της Αγοράς περιγράφει μία γραμμική σχέση μεταξύ των αποδόσεων μεμονωμένων χρεογράφων ή χαρτοφυλακίων και της απόδοσης της συνολικής αγοράς. Βασίζεται στην υπόθεση ότι η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου ή μίας μετοχής έχει την τάση να κυμαίνεται όμοια με την απόδοση του δείκτη της αγοράς. Η μαθηματική έκφραση του υποδείγματος ορίζεται ως εξής:

$$R_{it} = a_i + b_i * R_{mt} + e_{it} \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

όπου,

$a_i + e_i$ = το συστατικό της απόδοσης του χρεογράφου **i** που δε σχετίζεται με τις διακυμάνσεις της απόδοσης του δείκτη της αγοράς **m**, το οποίο διακρίνεται σε δύο τμήματα, την αναμενόμενη μέση τιμή της απόδοσης του χρεογράφου που δε σχετίζεται με την αγορά **($a_i$)** και τη διακύμανση αυτής **($e_i$)**

$b_i$ = ο συστηματικός κίδυνος του χρεογράφου που εκφράζεται μέσω του συντελεστή **beta** και μετρά το βαθμό ευαισθησίας των αποδόσεων του χρεογράφου **i** στις μεταβολές ων αποδόσεων του δείκτη **m**

Για την εκτίμηση του υποδείγματος εφαρμόζεται η μέθοδος της παλινδρόμησης των ελαχίστων τετραγώνων, η υιοθέτηση της οποίας βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

1. $E(e_{it}) = 0$, η μέση τιμή του σφάλματος ισούται με μηδέν.
2. $Cov(e_{it}, e_{it-1}) = 0$, δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση μεταξύ των τιμών του στοχαστικού όρου
3. $Cov(e_{it}, R_{mt}) = 0$, η μεταβλητή **e** που εκφράζει την επίδραση τυχαίων παραγόντων στις αποδόσεις του χρεογράφου είναι ανεξάρτητη από τις μεταβολές του συστηματικού παράγοντα δηλαδή δεν εσωκλείει παράγοντες που σχετίζονται με την αγορά.
4. $Var(e_{it}) = \sigma^2_{ei}$, δηλαδή υπάρχει ομοσκεδαστικότητα.

Η ισχύς των ως άνω υποθέσεων κρίνεται αναγκαία προκειμένου οι εκτιμητές των ελαχίστων τετραγώνων να είναι αμερόληπτοι και οι εξαγόμενες τιμές αξιόπιστες.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα της αγοράς, η απόδοση ενός χρεογράφου διακρίνεται στην απόδοση που συσχετίζεται με την απόδοση του δείκτη της αγοράς **($b_i * R_{mt}$)** και στην απόδοση που είναι ανεξάρτητη από την απόδοση του δείκτη της αγοράς **($a_i + e_{it}$)**. Το πρώτο τμήμα αφορά στους παράγοντες εκείνους της αγοράς που επηρεάζουν τις αποδόσεις του χρεογράφου, ενώ το δεύτερο στους παράγοντες οι οποίοι είναι μοναδικοί για κάθε εταιρία και δε σχετίζονται με το γενικό δείκτη.

Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα της αγοράς η αναμενόμενη απόδοση ενός χρεογράφου **i** μπορούν να εκφραστεί ως:

$$E(R_i) = a_i + b_i * E(R_m) \qquad (1.4.2)$$

όπου,
**$E(R_i)$ =** η αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου
**$E(R_m)$ =** η αναμενόμενη απόδοση του δείκτη της αγοράς

<u>Απόδειξη</u>

$E(R_i) = E\,(a_i + b_i * R_m + e_i) \Rightarrow$

$E(R_i) = E(a_i) + E(b_i * R_m) + E(e_i) \Rightarrow$

$E(R_i) = a_i + b_i * E(R_m) + 0 \Rightarrow$

$E(R_i) = a_i + b_i * E(R_m)$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα της αγοράς η διακύμανση των αποδόσεων ενός χρεογράφου **i** μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\sigma^2_i = b_i^2 * \sigma^2_m + \sigma^2_{ei} \qquad (1.4.3)$$

όπου,
$\sigma^2_i$ = η διακύμανση της απόδοσης της μετοχής **i**
$\sigma^2_m$ = η διακύμανση της απόδοσης του Δείκτη της αγοράς
$\sigma^2_{ei}$ = η διακύμανση του στοχαστικού όρου

<u>Απόδειξη</u>

$\sigma^2_i = E\,[R_i - E(R_i)]^2 \Rightarrow$

$\sigma^2_i = E\,[(a_i + b_i * R_m + e_i) - E(a_i + b_i * R_m + e_i)]^2 \Rightarrow$

$\sigma^2_i = E\,[(a_i + b_i * R_m + e_i) - (a_i + b_i * E(R_m))]^2 \Rightarrow$

$$\sigma^2_i = E\,[b_i * (R_m - E(R_m) + e_i)]^2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2_i = b_i^2 * E(R_m - E(R_m))^2 + 2 * b_i * E[R_m - E(R_m))] + E(e_i)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2_i = b_i^2 * E(R_m - E(R_m))^2 + 0 + E(e_i)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2_i = b_i^2 * \sigma^2_m + \sigma^2_{ei}$$

Το πρώτο μέρος του συνολικού κινδύνου του χρεογράφου **($b_i^2$ * $\sigma^2_m$)** περιγράφει τις μεταβολές των αποδόσεων του χρεογράφου **i** που οφείλονται στις μεταβολές των αποδόσεων του δείκτη της αγοράς**.** Δεδομένου ότι η διακύμανση του δείκτη της αγοράς είναι σταθερή σε σχέση με τα υπόλοιπα χρεόγραφα του δείκτη**,** ο συντελεστής **bi** παρέχει ένα μέτρο του συστηματικού ή μη διαφοροποιήσιμου κινδύνου του χρεογράφου**.** Το δεύτερο μερος του συνολικού κινδύνου **($\sigma^2_{ei}$)** μετρά τη μεταβλητότητα των αποδόσεων του χρεογράφου που δε σχετίζονται με το γενικό δείκτη αλλά με παράγοντες που αφορούν αποκλειστικά στην εταιρία και ορίζεται ως ο μή συστηματικός κίνδυνος της μετοχής**.** Ο μη συστηματικός κίνδυνος μπορεί να μειωθεί ή και να εξαλειφθεί μέσω της διαφοροποίησης

Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα της αγοράς η συνδιακύμανση των αποδόσεων ενός χρεογράφου **i** μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\sigma^2_{ij} = b_i * b_j * \sigma^2_m \quad (1.4.4)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\sigma^2_{ij} = E\,[(R_i - E(R_i)) * (R_j - E(R_j))] \Rightarrow$$

$$\sigma^2_{ij} = E\,[(a_i + b_i * R_m + e_i) - (a_i + b_i * E(R_m))] * [(a_j + b_j * R_m + e_j) - (a_j + b_j * E(R_m))] \Rightarrow$$

$$\sigma^2_{ij} = E\,[(b_i * (R_m - E(R_m)) + e_i) * (b_j * (R_m - E(R_m)) + e_j) \Rightarrow$$

$$\sigma^2_{ij} = b_i * b_j * E(R_m - E(R_m))^2 + b_j * E[e_i(R_m - E(R_m))] + b_i * E[e_j(R_m - E(R_m))] + E(e_i * e_j) \Rightarrow$$

$$\sigma^2_{ij} = b_i * b_j * \sigma^2_m$$

Σε αντίθεση με την αναμενόμενη απόδοση και τη διακύμανση των αποδόσεων του χρεογράφου**,** όπως αυτά ορίζονται από το Υπόδειγμα της Αγοράς**,** η συνδιακύμανση των αποδόσεων εξαρτάται αποκλειστικά από τον κίνδυνο της αγοράς**.** Η διαπίστωση αυτή αποτελεί ταυτόχρονα και βασική υπόθεση του μοντέλου καθώς έχει υποτεθεί πως ο μοναδικός λόγος συνδυασμένης κίνησης των αποδόσεων των μετοχών είναι η κοινή τους ανταπόκριση στις μεταβολές ττων αποδόσεων της αγοράς.

Βασιζόμενοι στο Υπόδειγμα της Αγοράς αναμένουμε οι επενδυτές να επιλέγουν επιθετικά χρεόγραφα όταν προσδοκούν άνοδο της αγοράς και αμυντικά χρεόγραφα όταν προσδοκούν πτώση της αγοράς. Ο χαρακτηρισμός ενός χρεογράφου ως επιθετικό ή αμυντικό εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή **beta.** Έαν η τιμη του **b**$_i$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας, η μεταβολή της αναμενόμενης απόδοσης του Δείκτη της αγοράς κατά **x%** θα επιφέρει μεταβολή στην αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου μεγαλύτερη από **x%.** Αντίθετα έαν η τιμή του **b**$_i$ είναι μικρότερη της μονάδας η αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου θα μεταβληθεί λιγότερο από **x%.** Τέλος έαν η τιμή του **b**$_i$ ισούται με τη μονάδα η μεταβολή της αναμενόμενης απόδοσης του χρεογράφου θα ισούται με την αντίστοιχη του δείκτη και το χρεόγραφο χαρακτηρίζεται ως ουδέτερο.

Συνοψίζοντας,

| | | |
|---|---|---|
| **beta < 1** | **Αμυντικό** | **Επιλογή σε πτωτικές αγορές** |
| **beta = 1** | **Ουδέτερο** | **Επιλογή για τη δημιουργία Index Funds** |
| **beta > 1** | **Επιθετικό** | **Επιλογή σε ανοδίκές αγορές** |

Ο υπολογισμός του **beta** γίνεται τόσο με ιστορικά στοιχεία όσο και και με μελλοντικές εκτιμήσεις στηριζόμενοι στα ιστορικά στοιχεία. Μελέτες έχουν δείξει ότι τα ιστορικά στοιχεία μπορούν να δώσουν αρκετά καλές προβλέψεις για την εκτίμηση της μελλοντικής τιμής του **beta** των μετοχών. Ο μαθηματικός ορισμός του συστηματικού κινδύνου δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{b_i} = \frac{s_{im}}{s_m^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(R_i - E(R_i))*(R_m - E(R_m)]}{\sum_{i=1}^{n}(R_m - E(R_m))^2} \qquad \mathbf{(1.4.5)}$$

Αν και ο συντελεστής **beta** μετρά τον κίνδυνο των αποδόσεων μίας μετοχής που σχετίζεται με τις αποδόσεις της αγοράς, ερώτημα πολλών μελετητών αποτελεί η ύπαρξη συσχέτισης ή μη του συντελεστή **beta** και των θεμελιωδών μεγεθών των επιχειρήσεων. Μία από τις αρχικές έρευνες επί του θέματος, υπήρξε αυτή των **Beaver, Ketler** και **Scholes.** Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας υπάρχουν έξι παράγοντες που επιδρούν στην τιμή του **beta,** οι εξής:

1. Η μερισματική απόδοση. Η σχέση μεταξύ της μερισματικής απόδοσης και της τιμής του **Beta** είναι αρνητική καθώς το εισόδημα από μερίσματα εμπεριέχει λιγότερο κίνδνο από τα κεφαλαιακά κέρδη.
2. Η ανάπτυξη του ενεργητικού. Σχετίζεται θετικά με το συντελεστή **beta** καθώς εταιρίες με μεγάλη και ταχεία ανάπτυξη του πάγιου ενεργητικού τους χαρακτηρίζονται ως περισσότερο επικίνδυνες.
3. Η μόχλευση. Η μόχλευση έχει θετική σχέση με το συντελεστή **beta** καθώς τείνει να αυξάνει τη μεταβλητότητα των κερδών και κατ᾽επέκταση τον κίνδυνο της επιχείρησης.
4. Η ρευστότητα. Υψηλοί δείκτες ρευστότητας σε μία επιχείρηση αντικατοπτρίζουν συνήθως υγιείς επιχειρήσεις με μικρότερο κίνδυνο, κατ' επέκταση ο δείκτης της ρευστότητας σχετίζεται αρνητικά με το συντελεστή **beta.**
5. Το μέγεθος των εταιρειών. Εταιρείες με μεγάλο μέγεθος έχουν ευκολότερη πρόσβαση στις κεφαλαιαγορές, μεγαλύτερη ευελιξία στα χρηματοοικονομικά εργαλεία που μπορούν να επιλέξουν για τη διαχείριση του ενεργητικού τους ή τη χρηματοδότηση των επενδυτικών τους σχεδίων. Ως εκ τούτου θεωρούνται λιγότερο επικίνδυνες και εμφανίζουν μικρότερους συντελεστές **beta** από τους αντίστοιχους των μικρών εταιρειών.
6. Η μεταβλητότητα των κερδών. Όπως προαναφέρθηκε, όσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα των κερδών των επιχειρήσεων, τόσο μεγαλύτερη η επικινδυνότητα που παρουσιάζουν και τόσο μεγαλύτερος ο συντελεστής **beta.**

Εκτός από τον υπολογισμό του συστηματικού κινδύνου μίας μετοχής το Υπόδειγμα της Αγοράς μας βοηθά στον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης και του συνολικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το υπόδειγμα η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου ισούται με την αναμενόμενη απόδοση του δείκτη της αγοράς σταθμισμένη με το συντελεστή **beta** του χαρτοφυλακίου πλέον της μη συστηματικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Ο μαθηματικός ορισμός δίνεται από τον τύπο:

$$E(\mathbf{R_p}) = \mathbf{a_p} + \mathbf{b_p} * \mathbf{E(R_m)} \qquad \mathbf{(1.4.6)}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$E(\mathbf{R_p}) = \sum_{i=1}^{N} w_i * E(R_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i * [a_i + b_i * E(R_m)] \Rightarrow$$

$$E(\mathbf{R_p}) = \sum_{i=1}^{N} w_i * a_i + \sum_{i=1}^{N} w_i * b_i * E(R_m) \Rightarrow$$

$$E(\mathbf{R_p}) = \mathbf{a_p} + \mathbf{b_p} * \mathbf{E(R_m)}$$

όπου,

$E(\mathbf{R_p})$ = η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

$\mathbf{w_i}$ = το ποσοστό επένδυσης στη μετοχή **i**

$\mathbf{b_p}$ = το **beta** του χαρτοφυλακίου P

$\mathbf{E(R_m)}$ = η αναμενόμενη απόδοση του Δείκτη της αγοράς

$\mathbf{a_p} = \sum_{i=1}^{N} w_i * a_i$ = το τμήμα της απόδοσης του χαρτοφυλακίου που δεν σχετίζεται με την απόδοση του δείκτη της αγοράς

Αντίστοιχα η διακύμανση του χαρτοφυλακίου ορίζεται από τον τύπο

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \mathbf{b_p}^2 * \sigma^2_{\mathbf{m}} + \sigma^2_{\mathbf{ep}} \qquad \mathbf{(1.4.7)}$$

όπου,

$\sigma^2(\mathbf{R_p})$ = η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

$\sigma^2_{\mathbf{m}}$ = η διακύμανση των αποδόσεων του δείκτη της αγοράς

$\mathbf{b_p}^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i * b_i$ = το **beta** του χαρτοφυλακίου

$\sigma^2_{\mathbf{ep}} = \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} * s^{\,2}_{ei}$ = η διακύμανση των καταλοίπων

$\mathbf{w_i}$ = Τα ποσοστά επένδυσης στις μετοχές του χαρτοφυλακίου

Από τον τύπο **(1.4.5)** το πρώτο σκέλος αφορά στο συστηματικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου **($b_p^2$ * $σ^2_m$)** και οφείλεται στη μεταβλητότητα των αποδόσεων του δείκτη της αγοράς, ενώ το δεύτερο σκέλος **(**$\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} * s^{\,2}_{ij}$**)** αποτελεί το μη συστηματικό κίνδυνο και οφείλεται σε παράγοντες εκτός αγοράς. Όσο το μέγεθος του χαρτοφυλακίου αυξάνει, τόσο το τμήμα του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου που δε σχετίζεται με την αγορα, δηλαδή ο μη συστηματικός κίνδυνος τείνει να μειώνεται. Όπως έχει προαναφερθεί μέσω της διαφοροποίησης υπάρχει δυνατότητα μείωσης έως και εξάλειψης του μη συστηματικού κινδύνου.

Το Υπόδειγμα της Αγοράς όπως αναπτύχθηκε από τον **William Sharpe** το **1964** στηρίζεται στο συσχετισμό των αποδόσεων των μετοχών με τις αποδόσεις ενός δείκτη της αγοράς. Το μοντέλο στηριζόμενο στις βασικές έννοιες του υποδείγματος του **Markowitz,** απλοποίησε σημαντικά τις υπολογιστικές ανάγκες που συνθέτει η θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου. Ενώ με το μοντέλο του **Markowitz** για ένα χαρτοφυλάκιο **n** μετοχών η ανάλυσή μας απαιτούσε των υπολογισμό **n** αποδόσεων, **n** διακυμάνσεων και $\frac{n*(n-1)}{2}$ συνδιακυμάνσεων, εφαρμόζοντας το υπόδειγμα της αγοράς αντίστοιχα απαιτείται ο υπολογισμός **n - $a_i$, n - $b_i$, n -** $σ_{ei}$, της αναμενόμενης απόδοσης και της διακύμανσης της αγοράς. Δηλαδή απαιτούνται **3n+2** πληροφορίες. Όπως ήταν αναμενόμενο, το Υπόδειγμα της Αγοράς με τη σειρά του αποτέλεσε βάση ανάπτυξης νέων θεωριών. Η διεύρυνση του υποδείγματος γίνεται από τους **Sharp (1964)**, **Lintner (1965)** και **Mossin (1966)** με την εισαγωγή μίας νέας έννοιας στην ανάλυση, αυτής του αξιόγραφου μηδενικού κινδύνου. Στο νέο υπόδειγμα διακρίνουμε «Τη Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς» και «Το Μοντέλο Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων».

Οι θέσεις που ανέπτυξαν οι προαναφερθέντες ερευνητές στηρίζονται στις εξής υποθέσεις:

1. Οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο και επιλέγουν σύνθεση χαρτοφυλακίων που να δίδουν όσο το δυνατό υψηλότερες αποδόσεις και όσο το δυνατό χαμηλότερα επίπεδα κινδύνου. Ως εκ

τούτου οι επενδυτές προτιμούν συνδυασμούς απόδοσης και κινδύνου οι οποίοι κοίτονται πάνω στο αποδοτικό σύνορο.

2. Όλοι οι επενδυτές έχουν ένα κοινό επενδυτικό ορίζοντα και όμοιες προσδοκίες αναφορικά με την κατανομή των αποδόσεων των μετοχών που περιλαμβάνονται στο εξεταζόμενο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο κατά τη λήξη του επενδυτικού τους ορίζοντα. Συνεπώς όλοι οι επενδυτές έχουν το ίδιο αποδοτικό σύνορο, όπως αυτό περιγράφεται στο μοντέλο του **Markowitz.**
3. Υπάρχει ένα χρεόγραφο άνευ κινδύνου, στο οποίο οι επενδυτές δύναται να δανείζουν ή να δανείζονται ποσά με ειδικό επιτόκιο που χαρακτηρίζεται ως το επιτόκιο άνευ κινδύνου.
4. Τόσο για τους μεμονωμένους επενδυτές όσο και για τις εταιρείες, δεν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος.
5. Η κεφαλαιακή αγορά χαρακτηρίζεται ως τέλεια, πληρώντας τις εξής προυποθεσεις: **i)** Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, **ii)** Δεν υπάρχουν φόροι, **iii)** Υπάρχει απόλυτη κινητικότητα και μετατρεψιμότητα στα προιόντα της αγοράς, **iv)** Υπάρχει πλήρης πληροφόρηση προς όλους τους επενδυτές, **v)** Κανένας επενδυτής δεν μπορεί να επηρεάσει τις τιμές των μετοχών.
6. Όλα τα χρεόγραφα που εμπεριέχουν κίνδυνο είναι εμπορεύσιμα.

Οι υποθέσεις **4** και **5** εξάγουν το συμπέρασμα πως στην αγορά υπάρχει μόνο ένα χρεόγραφο άνευ κινδύνου. Η ύπαρξη δύο χρεογράφων άνευ κινδύνου με διαφορετικά χαρατηριστικά απόδοσης θα οδηγούσε την αγορά σε ανισορροπία. Προσωρινά όμως καθώς οι δυνάμεις της προσφοράς και της ζήτησης σταδιακά θα οδηγούσαν σε εξίσωση των διαφορετικών αποδόσεων επαναφέροντας την ισοορροπία στην αγορά.

Αξιολογόντας τις ανωτέρω υποθέσεις του υποδείγματος εύκολα θα έλεγε κανείς πως απέχουν αρκετά από την πραγματικότητα. Η υπόθεση του κοινού επενδυτικού ορίζοντα και των κοινών προσδοκιών των επενδυτών ασφαλώς παραβιάζεται. Ομοίως ισχύει για την υπόθεση ότι το επιτόκιο των δανειστών και δανειζομένων είναι ενιαίο. Στην πραγματικότητα τα επιτόκια καταθέσεων και δανείων απέχουν σημαντικά μεταξύ τους κυρίως λόγω του περιθωρίου κέρδους που ορίζεται από τις εμπορικές τράπεζες ή άλλους διαμεσολαβητικούς χρηματοοικονομικούς οργανισμούς. Η υπόθεση της τέλειας αγοράς επίσης παραβιάζεται καθώς στην πραγματική οικονομία υπάρχουν τόσο φόροι όσο και κόστη συναλλαγών. Τέλος, η υπόθεση πως όλα τα χρεόγραφα της αγοράς είναι εμπορεύσιμα είναι προφανώς άκυρη.

Αγνοώντας προσωρινά την ισχύ των ανωτέρω υποθέσεων και στηριζόμενοι σε αυτές παρουσιάζονται αναλυτικά οι εξής θέσεις: α) Η Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς, β) Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων **(Capital Asset Pricing Model)**

## *Η ΓΡΑΜΜΗ ΤΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑΓΟΡΑΣ*

Σύμφωνα με τη Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς όλοι οι επενδυτές έχουν τις ίδιες προσδοκίες και κατ' επέκταση αντιμετωπίζουν το ίδιο αποδοτικό σύνορο χαρτοφυλακίων όπως αυτό προσδιορίστηκε από το **Markowitz (1952).** Οι επενδυτές έχουν να επιλέξουν μεταξύ ενός χρεογράφου άνευ κινδύνου και των διαφόρων αποδοτικών χαρτοφυλακίων που περιλαμβάνονται στο αποδοτικό σύνορο. Το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι επίσης ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο. Σύμφωνα με τη Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς ο γραμμικός συνδυασμός του χαρτοφυλακίου της αγοράς με το στοιχείο μηδενικού κινδύνου δημιουργεί ένα νέο αποδοτικό σύνορο, κοινό προς όλους τους επενδυτές. Το νέο αποδοτικό σύνορο που δημιουργείται, σε αντίθεση με το αποδοτικό σύνορο του **Markowitz**, είναι μία ευθεία γραμμή. Η συγκεκριμένη αναλογία μεταξύ του χαρτοφυλακίου της αγοράς και του χρεογράφου μηδενικού κινδύνου σε κάθε επενδυτικό χαρτοφυλάκιο εξαρτάται κάθε φορά από τις προτιμήσεις του επενδυτή.

Η μαθηματική έκφραση της Γραμμής της Κεφαλαιαγοράς ορίζεται από τον τύπο:

$$E(\mathbf{R_q}) = \mathbf{R_f} + \frac{E(R_m) - R_f}{s_m} * \sigma_q \qquad \mathbf{(1.5.1)}$$

όπου,

$E(\mathbf{R_q})$ = η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου **q**

$\mathbf{R_f}$ = η απόδοση του χρεογράφου μηδενικού κινδύνου

$\mathbf{E(R_m)}$ = η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς

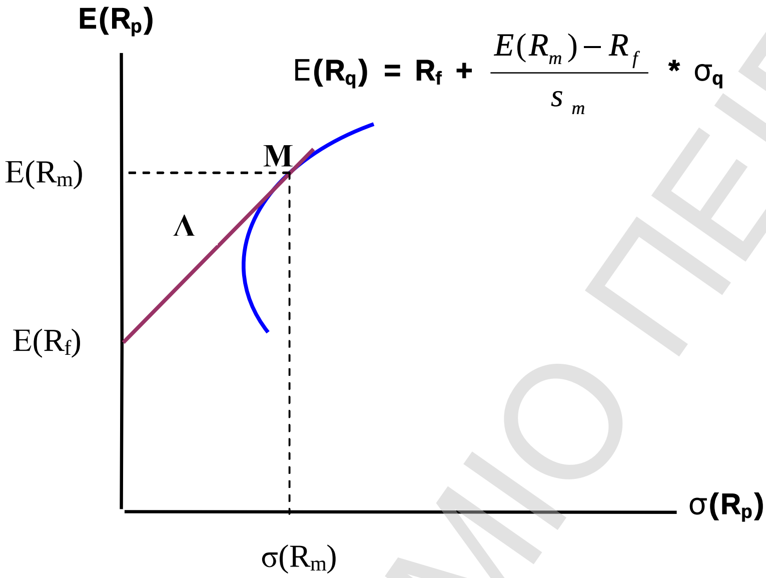
$\sigma_\mathbf{q}$ = η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου **q**

$\sigma_\mathbf{m}$ = η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Σύμφωνα με τη Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς, η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου ορίζεται από την απόδοση του χρεογράφου μηδενικού κινδύνου πλέον ενός ασφαλίστρου κινδύνου. Το μέγεθος αυτου εξαρτάται από τον κίνδυνο της αγοράς και τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, όπως αυτοί ορίζονται μέσω των τυπικών αποκλίσεων των αποδόσεών τους. Εναλλακτικά, οι επενδυτές αποζητούν μεγαλύτερη απόδοση στο χαρτοφυλάκιό τους, αναλογικά με τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν.

Παρατίθεται η γραφική απεικόνιση της Γραμμής της Κεφαλαιαγοράς

***Διάγραμμα IV- Η Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς***




Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, κάθε επενδυτής έχει τη δυνατότητα να τοποθετήσει τα κεφάλαιά του είτε στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς, είτε στο χρεόγραφο μηδενικού κινδύνου ή σε ένα συνδυασμό των δύο. Ο γεωμετρικός τόπος των συνδυασμών αυτών συνθέτουν τη Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς η οποία ισχύει μόνο για αποδοτικά χαρτοφυλάκια και εκφράζει μία σχέση ισορροπίας μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου. Προκειμένου για τον υπολογισμό της σχέσης ισορροπίας μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου για μεμονωμένες μετοχές ή μη αποδοτικά χαρτοφυλάκια εφαρμόζεται το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων.

## *ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ-ΥΑΚΣ (CAPITAL ASSET PRICING MODEL-CAPM)*

Όπως προαναφέρθηκε, το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων είναι μία σχέση ισορροπίας μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου μίας μεμονωμένης μετοχής ή ενός χαρτοφυλακίου. Σε αντίθεση με την Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς, ο κίνδυνος μετριέται με το συντελεστή **beta** ο οποίος εκφράζει την ευαισθησία των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου στις μεταβολές των υπερβαλουσών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Ο μαθηματικός ορισμός δίνεται από τον τύπο:

$$E(Ri) = R_f + [E(R_m) - R_f]*b_i \quad (1.6.1)$$

όπου,

$E(Ri)$ = η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ή του χαρτοφυλακίου **i**

$R_f$ = η απόδοση του χρεογράφου μηδενικού κινδύνου

$E(R_m)$ = Η αναμενόμενη απόδοση της αγοράς

$b_i$ = ο συντελεστής **beta** της μετοχής ή του χαρτοφυλακίου ι

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων ορίζει πως ένας επενδυτής μπορεί να λάβει απόδοση μεγαλύτερη από εκείνη του χρεογράφου μηδενικού κινδύνου μόνο εφόσον αναλάβει κάποιο ρίσκο. Ο κίνδυνος που αναλαμβάνει ο επενδυτής μετριέται με το συντελεστή και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$b_i = \sigma_{im}/\sigma_m^2 \quad (1.6.2)$$

όπου,

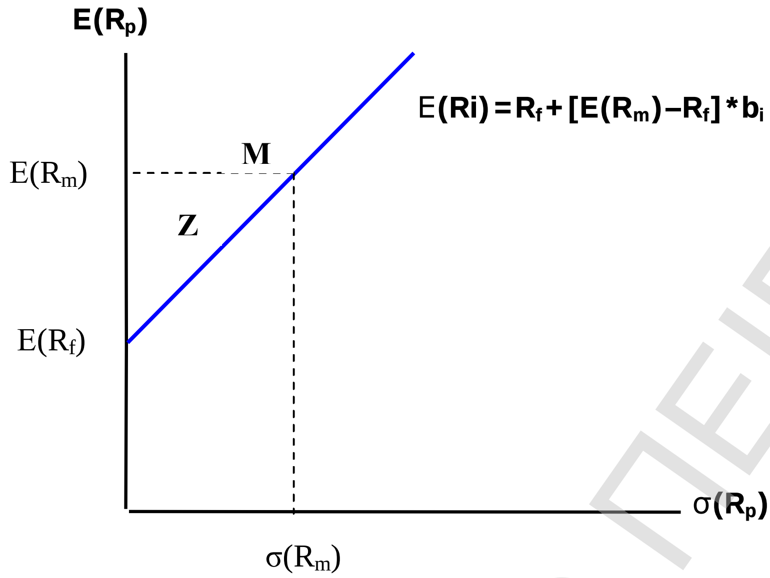
$b_i$ = ο συντελεστής **beta**

$\sigma_m^2$ = η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς

$\sigma_{im}$ = η συνδιακύμανση μεταξύ των αποδόσεων της μετοχής ή του χαρτοφυλακίου **i** και των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς

Παρατίθεται η γραφική απεικόνιση του Υποδείγματος Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων:

***Διάγραμμα V- Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων***




Η ευθεία γραμμή που παρουσιάζεται στο ανωτέρω διάγραμμα ορίζεται ως **«**Η Γραμμή των Αξιογράφων**»** και καθορίζει τη σχέση μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης και του συστηματικού κινδύνου για κάθε μετοχή**.** Όπως ισχύει και με τη Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς**,** η Γραμμή των Αξιογράφων αποτελλεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων ισορροπίας μεταξύ απόδοσης και κινδύνου**.** Σε αντίθεση με την Γραμμή της Κεφαλαιαγοράς**,** εφαρμόζεται για μη αποδοτικά χαρτοφυλάκια καθώς χρησιμοποιεί το συντελεστή **beta** ως μέτρο κινδύνου**.**

Πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί έως σήμερα**,** προκειμένου να ελεγχθεί η αξιοπιστία του Υποδείγματος Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων με σημαντικότερες αυτές των **Lintner(1968), Jacob (1971), Miller** και **Scholes (1972), Black (1972), Blume** και **Friend (1973), Fama** Και **MacBeth(1973).** Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών υπέδειξαν τρία βασικά σημεία**:**

α**)** Η σχέση μεταξύ των ιστορικών μέσων αποδόσεων και του συντελεστή **beta** είναι γραμμική

β**)** Ο κίνδυνος που σχετίζεται με τις μέσες ιστορικές αποδόσεις εκφράζεται μόνο μέσω του συντελεστή **beta**

γ**)** Το ασφάλιστρο κινδύνου του δείκτη της αγοράς είναι θετικό**.**

Σύμφωνα με τα υποδείγματα θεωρίας χαρτοφυλακίου που αναπτύχθηκαν έως τώρα, η ανάλυση των επενδυτών για τη σύνθεση των χαρτοφυλακίων τους στηρίζεται στη βάση του κριτηρίου της μέσης αναμενόμενης απόδοσης και της διασποράς. Το **1976** αναπτύχθηκε μία διαφορετική προσέγγιση αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων γνωστή ως Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Εξισορροπητικών Αγοραπωλησιών **(Arbitrage Pricing Theory)**. Στο Υπόδειγμα, που αναπτύχθηκε από τον **Stephen Ross (1976-1977)**, ο συγγραφέας υποστηρίζει ότι οι αποδόσεις των αξιογράφων αποτελούν ένα γραμμικό συνδυασμό κ παραγόντων οι οποίοι είναι κοινοί για όλα τα αξιόγραφα και εσωκλείουν το σύνολο του συστηματικού κινδύνου. Ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση των θέσεων του συγγραφέα.

## *ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΕΞΙΣΟΡΡΟΠΗΤΙΚΩΝ ΑΓΟΡΑΠΩΛΗΣΙΩΝ (ARBITRAGE PRICING THEORY - APT)*

Όπως προαναφέρθηκε, το Υπόδειγμα Αποτίμησης Εξισορροπητικών αγοραπωλησιών εισηγείται μία συνθήκη ισορροπίας όπου η απόδοση κάθε μετοχής είναι γραμμική συνάρτηση κ παραγόντων.

Οι βασικές υποθέσεις του υποδείγματος είναι οι εξής:

1. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για **arbitrage** στην αγορά, δηλαδή οι επενδυτές δε μπορούν να δημιουργήσουν χαρτοφυλάκια με οριακό μηδενικό κίνδυνο και θετική αναμενόμενη απόδοση.
2. Ο αριθμός των αξιογράφων στην αγορά είναι τόσο μεγάλος ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί ο νόμος των μεγάλων αριθμών
3. Οι επενδυτές έχουν ομογενοποιημένες προσδοκίες
4. Ισχύει ο νόμος της μιάς τιμής. Δηλαδή, δύο χρεόγραφα με κοινά χαρακτηριστικά δε δύναται να πωλούνται σε διαφορετικές τιμές.
5. Ισχύουν οι βασικές υποθέσεις της τέλειας αγοράς.

Ο μαθηματικός ορισμός της θεωρίας του υποδείγματος δίνεται από τον τύπο:

$$R_i = a_i + b_{i,1}*(f_i) + b_{i,2}*(f2) + b_{i,3}*(f_3) + \dots + b_{n,k}*(f_{n,k}) + e_i \quad (1.7.1)$$

όπου,

**E(R$_i$)** = η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής

**$f_{i,k}$** = η τιμή του άγνωστου κοινού παράγοντα **k** που επηρεάζει τις αποδόσεις των αξιογράφων καθόλη τη διάρκεια της εξεταζόμενης περιόδου

**$b_{i,k}$** = το μέτρο ευαισθησίας της απόδοσης της **i** μετοχής στις διακυμάνσεις του κοινού παράγοντα **$f_{i,k}$** `

**i = 1, 2, …n**

**$e_i$** = ο μη συστηματικός κίνδυνος της μετοχής **i** για τον οποίο ισχύει ότι:

$E(e_{it}) = 0,$

$Var(e_{it}) = \sigma^2_{ei} = c_o,$

$Cov(e_{it}, e_{it-1}) = 0,$

$Cov(e_{it}, f_{i,k}) = 0$

**Α**φαιρόντας από την απόδοση μίας μετοχής **(**όπως ορίζεται από τον τύπο **(1.7.1))** την αναμενόμενη τιμή της προκύπτει ότι**:**

$$R_i = E(R_i) + b_{i,1}*(f_1 - E(f_1)) + b_{i,2}*(f_2 - E(f_2)) + \ldots + b_{n,k}*(f_{n,k} - E(f_{n,k}) + e_i \quad (1.7.2)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$R_i - E(R_i) = a_i + b_{i,1}*(f_1) + b_{i,2}*(f_2) \ldots + b_{n,k}*(f_{n,k}) + e_i$$
$$- E[a_i + b_{i,1}*(f_1) + b_{i,2}*(f_2) \ldots + b_{n,k}*(f_{n,k}) + e_i\,] \Rightarrow$$

$$R_i - E(R_i) = a_i + b_{i,1}*(f_1) + b_{i,2}*(f_2) \ldots + b_{n,k}*(f_{n,k}) + e_i$$
$$- a_i + b_{i,1}*E(f_1) + b_{i,2}*E(f_2) \ldots + b_{n,k}*E(f_{n,k}) + e_i \Rightarrow$$

$$R_i - E(R_i) = b_{i,1}*(f_1 - E(f_1)) + b_{i,2}*(f_2 - E(f_2)) + \ldots + b_{n,k}*(f_{n,k} - E(f_{n,k}) + e_i \Rightarrow$$

$$R_i = E(R_i) + b_{i,1}*(f_1 - E(f_1)) + b_{i,2}*(f_2 - E(f_2)) + \ldots + b_{n,k}*(f_{n,k} - E(f_{n,k}) + e_i$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο **p** που επηρεάζεται από δύο παράγοντες και στο οποίο δεν υπάρχει πλούτος και έχει μηδενικό συστηματικό κίνδυνο**.** Σύμφωνα με τη θεωρία του υποδείγματος το χαρτοφυλάκιο αναμένεται να έχει μηδενική προσδοκώμενη απόδοση**.** Για το χαρτοφυλάκιο αυτό ισχουν**:**

1. $X^t_p * u = 0$
2. $X^t_p * B_1 = 0$
3. $X^t_p * B_2 = 0$
4. $X^t_p * e \approx 0$
5. $X^t_p * R = 0$ **(**εξ' υποθέσεως μηδενικής απόδοσης**)**

όπου,

$X_p$ =ο **n*1** πίνακας των ποσοστών επενδυσης του χαρτοφυλακίου

$X^t_p$ = α ανάστροφος του $X_p$

**u** = ο μοναδιαίος πίνακας **n*1**

$B_1$ = ο **n*1** πίνακας των συντελεστών **beta** που σχετίζονται με τον παράγοντα $f_1$

$B_2$ = ο **n*1** πίνακας των συντελεστών **beta** που σχετίζονται με τον παράγοντα $f_2$

**e =** ο **n*1** πίνακας του διαταρακτικού όρου

**R =** ο πίνακας **n*1** των αποδόσεων των μετοχών του χαρτοφυλακίου **p**

Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω εξισώσεις μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα των αποδόσεων ως ένα γραμμικό συνδυασμό των πινάκων Β**.** Ητοι**,**

$R = h_1*u + h_2*B1 + h_3*B_2$, **(1.7.3.**α.**)** και

$E(R_i) = h_1 + h_2*b_{i1} + h_3*b_{i2}$ **(1.7.3.**β.**)**

Ταυτόχρονα για ένα χαρτοφυλάκιο **z** με μηδενικό συνολικό κίνδυνο θα ισχύει $E(R_z) = h_1$

Έστω δύο χαρτοφυλάκια $p_1$ και $p_2$, όπου το χαρτοφυλάκιο $p_1$ έχει απόλυτη ευαισθησία στις μεταβολές του παράγοντα $f_1$ και μηδενική ευαισθησία στις μεταβολές του παράγοντα $f_2$ και το χαρτοφυλάκιο $p_2$ έχει μηδενική ευασθησία στις μεταβολές του παράγοντα $f_1$ και απόλυτη ευαισθησία στις μεταβολές του παράγοντα $f_2$**.** Για αυτά τα χαρτοφυλάκια θα ισχύει

$h_2 = E(R_{p1}) - E(R_z)$

$h_3 = E(R_{p2}) - E(R_z)$

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις των ανωτέρων εξισώσεων στην αρχική εξίσωση **(1.7.3.**β.**)** καταλήγουμε ότι**:**

$E(R_i)=E(R_z)+[E(R_{p1})-E(R_z)]*b_{i1}+E(R_{p2})-E(R_z)*\ b_{i2}$

όπου

$E(R_{p1})-E(R_z)$ **=** το ασφάλιστρο κινδύνου που σχετίζεται με τον πρώτο κοινό παράγοντα $f_1$

$E(R_{p2}) - E(R_z)$ **=** το ασφάλιστρο κινδύνου που σχετίζεται με τον δεύτερο κοινό παράγοντα $f_2$

Γενικεύοντας το συμπέρασμα του παραπάνω παραδείγματος**,** σύμφωνα με το Υπόδειγμα Αποτίμησης Εξισορροπητικών Αγοραπωλησιών το αναμενόμενο ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιογράφου **-**δηλαδή η απόδοση που ζητούν οι επενδυτές ώστε να αναλάβουν επιπλέον κίνδυνο**-** εξαρτάται από το αναμενόμενο ασφάλιστρο κινδύνου συσχετιζόμενο με κάθε παράγοντα **$f_i$** και την ευαισθησία της μετοχής στις μεταβολές κάθε παράγοντα.

Η θεωρία ωστόσο δεν προσδιορίζει σε ποιους παράγοντες αναφέρεται. Θα μπορούσε να είναι ο πληθωρισμός, τα επιτόκια, η βιομηχανική παραγωγή, οι τιμές του πετρελαίου, το επίπεδο του ΑΕΠ και άλλες αναμενόμενες ή απρόβλεπτες αλλαγές στην οικονομία. Το βέβαιο είναι ότι οι αλλαγές αυτές επιδρούν σε όλες τις μετοχές κατά ένα συστηματικό τρόπο και η αντίδραση της κάθε μετοχής εξαρτάται από την ευαισθησία της στο γενικότερο οικονομικό περιβάλλον. Παράλληλα οι αποδόσεις των αξιογράφων επηρεάζονται από παράγοντες που δεν είναι συστηματικοί για όλη την οικονομία. Αυτοί οι παράγοντες είναι αφορούν στις δυνάμεις που καθορίζουν τις συγκεκριμένες επιχειρήσεις και ονομάζονται μή συστηματικοί κίνδυνοι. Οπως έχει αναφερθεί επανειλημμένως, μέσω της διαφοροποίησης υπαρχει δυνατότητα μείωσης των παραγόντων που αναφέρονται στο μη συστηματικό κίνδυνο των μετοχών.

Με τη παρούσα ανάλυση ολοκληρώνουμε την παρουσίαση των βασικότερων υποδειγμάτων της θεωρίας χαρτοφυλακίου, η ιστορία της οποίας αριθμεί στην παρούσα μορφή περίπου πενήντα έτη. Αυτό που σήμερα φαντάζει αυτονόητο, δηλαδη η συνδυασμένη ανάλυση των στοιχείων της απόδοσης και του κινδύνου για την αξιολόγηση επενδυτικών χαρτοφυλακίων καθώς και η υποστήριξη της θεωρίας μέσω των εμπειρικών μελετών προτοεμφανίζεται στην ερευνητική εργασία **«Portfolio Selection»** του **Harry Markowitz** το **1952.** Όπως ήταν αναμενόμενο η θεωρία χαρτοφυλακίου του **Markowitz** επέφερε πολλές αλλαγές στον τρόπο σκέψης και ανάλυσης του προβλήματος των επενδυτικών επιλογών. Πάνω σε αυτή στηρίχτηκαν πολλοί μεταγενέστεροι οικονομολόγοι και ερευνητές προκειμένου να αναπτύξουν τις θεωρίες τους. Φαντάζει παράδοξο και όμως είναι αληθινό πως για την ερευνητική του εργασία ο καθηγητής του στο Πανεπιστήμιο του **Chicago, Milton Friedman,** αρνείτο να του απονείμει τον τίτλο του **Ph.D** με την αιτιολογία ότι το αντικείμενο της ερευνητικής του εργασίας ήταν έξω από το πλαίσιο της οικονομικής θεωρίας. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο **Markowitz**[3] το **1991, «**την περίοδο παράδοσης

– [3] Markowitz Harry, "Foundations of Portfolio Theory", The Journal of Finance, Vol.46, No.2 (June 1991), 469-477.

της ερευνητικής μου εργασίας, η ανάλυση χαρτοφυλακίων δεν περιλαμβανόταν στο πεδίο της οικονομικής ανάλυσης. Τώρα περιλαμβάνεται».

# ***ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{Ο}$ - ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΛΕΤΩΝ***

Αυτό που σήμερα γνωρίζουμε ως σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου, η συνδυασμένη χρήση των υποδειγμάτων ανάλυσης επενδυτικών χαρτοφυλακίων, εφαρμογής των ποσοτικών κριτηρίων αξιολόγησής τους και τεκμηρίωσης των αποτελεσμάτων μέσω της εμπειρικής έρευνας, αποτελεί συνέπεια μία δυναμικής πορείας πραγματοποίησης ερευνών και αξιολόγησης θεωριών η οποία ξεκινά το **1952** με τη θεωρία χαρτοφυλακίου του **Markowitz.** Η απλή υπόθεση του **Markowitz** ότι οι ορθολογικοι επενδυτές επιθυμούν υψηλή απόδοση στις επενδύσεις τους ενώ ταυτόχρονα αποστρέφονται τον κίνδυνο, υπογράμμισε για πρώτη φορά τη σημασία της διαφοροποίησης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων προκειμένου για τη μείωση του συνολικού τους κινδύνου. Στόχος της επιστημονικής ανάλυσης θα πρέπει να αποτελεί η εύρεση εκείνης της ομάδας χαρτοφυλακίων για τα οποία ο επενδυτής λαμβάνει τη μέγιστη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου ή όπως προσδιορίζεται από τον συγγραφέα του «αποδοτικού συνόρου». Ο προσδιορισμός του αποδοτικού συνόρου σε συνδυασμο με τις προτιμήσεις των επενδυτών θα καθορίσει τα άριστα επενδυτικά χαρτοφυλάκια.

Οι πρωτοποριακές προτάσεις της θεωρίας του **Markowitz** αλλά και τα προβλήματα που παρουσίασε η εφαρμογή της όπως ήταν αναμενόμενο αποτέλεσαν βάση για την ανάπτυξη νέων θεωριών όπως αυτές του μονοπαραγοντικού ή των πολυπαραγοντικών υποδειγμάτων. Τόσο το μοντέλο του **Markowitz** όσο και τα νεότερα υποδείγματα αποτέλεσαν με τη σειρά τους αντικείμενα μελέτης και κριτικής, οι οποίες συνεχίζονται έως και στις μέρες μας. Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένες από αυτές τις μελέτες, με αφετηρία το έτος **1962.**

### *Farar (1962)*
### *«The Investment Decision Under Uncertainty»*
### *The Journal of Finance, Vol.17, No.4, p.671-672*

Το μοντέλο του **Markowitz** επιχείρησε να αξιολογήσει ο **Farrar** στο έργο του, συγκρίνοντας τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια όπως αυτά προσδιορίζονται από τον **Markowitz**, με πραγματικά χαρτοφυλάκια αμοιβαίων κεφαλαίων. Ελέγχοντας τα χαρακτηριστικά της απόδοσης και του κινδύνου τόσο στα αποδοτικά όσο και στα πραγματικά χαρτοφυλάκια κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υφίσταται ομοιότητα στα χαρακτηριστικά τους. Χρησιμοποιώντας ένα πληθυσμό δέκα μεταβλητών κατασκεύασε το αποδοτικό σύνορο των βέλτιστων χαρτοφυλακίων και συνέκρινε τους συνδυασμούς απόδοσης και κινδύνου με τους αντίστοιχους δέκα αμοιβαίων κεφαλαίων. Σύμφωνα με την έρευνα του **Farrar** τα αμοιβαία κεφάλαια έτειναν να τοποθετούνται δίπλα στο αποδοτικό σύνορο αντίστοιχα με την επικινδυνότητά τους. Πιο συγκεκριμένα, τα υψηλού κινδύνου αμοιβαία κεφάλαια ομοίαζαν στα χαρακτηριστικά τους με τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια υψηλού κινδύνου και απόδοσης ενώ αντιθέτως τα χαμηλού κινδύνου αμοιβαία κεφάλαια τοποθετούνται κοντά σε χαμηλού κινδύνου αποδοτικά χαρτοφυλάκια. Τα αποτελέσματα της μελέτης του **Farrar** αναγνωρίζονται ως σημαντικά καθώς υποδεικνύουν την δυνατότητα εφαρμογής των θεωρητικών μοντέλων σαν εκτιμητές της συμπεριφοράς των πραγματικών χαρτοφυλακίων

### *B. F. King (1966)*
### *«Market and Industry Factors in Stock Behavior»*
### *Journal of Business, Vol 39, p139-190*

Ο **King** στο έργο του **«Market and Industry Factors in Stock Behavior»** επιχειρεί να αξιολογήσει τη σημασία του μονοπαραγοντικού υποδείγματος στη θεωρία ανάλυσης χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα αμφισβητεί την αποκλειστική εξάρτηση των αποδόσεων των μετοχών από τις μεταβολές του δείκτη της αγοράς και αναδεικνύει τη συσχέτιση των αποδόσεων των μετοχών με βιομηχανικούς παράγοντες. Χρησιμοποιώντας τεχνικές ανάλυσης παραγόντων συμπέραναν ότι οι αποδόσεις των μετοχών επηρεάζονται κατά ένα ποσοστό από βιομηχανικούς παράγοντες.

***Kalman J. Cohen – Jerry A. Pogue (1967)***
***«An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models»***
***The Journal of Business, Vol.40, No.2, p.166-193***

Οι **Cohen** και **Pogue** στο άρθρο τους αναφέρονται στις αδυναμίες που παρουσιάζει το μοντέλο του **Markowitz** όσον αφορά στις μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις του καθώς και στο γεγονός ότι αγνοεί τη δυνατότητα δυναμικής αναπροσαρμογής των χαρτοφυλακίων **(rebalancing).** Εξ΄αφορμής αυτών επιχειρούν να αξιολογήσουν εμπειρικά εναλλακτικά μοντέλα επιλογής χαρτοφυλακίου όπως τα πολυπαραγοντικά και μονοπαραγοντικά μοντέλα. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας κοινές μετοχές, εφήρμοσαν τις τεχνικές του μοντέλου του **Markowitz,** του μονοπαραγοντικού υποδείγματος καθώς και δύο τύπους πολυπαραγοντικών υποδειγμάτων **- covariance form** και **diagonal model –** προκειμένου για τον υπολογισμό του αποδοτικού συνόρου στο εκάστοτε μοντέλο.

Η εμπειρική μελέτη στηρίχτηκε σε δύο δείγματα των εβδομήντα πέντε και εκατό πενήντα κοινών μετοχών για τις περιόδους **1947-1957** και **1958-1964.** Οι μελετητές επίσης χρησιμοποίησαν άνω όρια στα ποσοστά επένδυσης των αποδοτικών χαρτοφυλακίων τους προκειμένου να συνάδουν με τους νομικούς περιορισμούς της εποχής. Τα αποδοτικά σύνορα που προέκυψαν αξιολογήθηκαν σε σχέση με μετοχικά χαρτοφυλάκια τυχαίας σύνθεσης και με εβδομηντα οκτώ μετοχικά αμοιβαία κεφάλαια της εποχής. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν την υπεροχή του μονοπαραγοντικού υποδείγματος έναντι των πολυπαραγοντικών καθώς και την υπεροχή των χαρτοφυλακίων που κοίτονταν στα αποδοτικά σύνορα των μοντέλων, έναντι των χαρτοφυλακίων τυχαίας σύνθεσης. Ωστόσο διαπιστώθηκε πως στο σύνολοό τους τα αμοιβαία κεφάλαια υπέδειξαν ανώτερες αποδόσεις απο τις αντίστοιχες των αποδοτικών χαρτοφυλακίων τόσο του μονοπαραγοντικού όσο και των πολυπαραγοντικών υποδειγμάτων.

***Buckner A. Wallingford (1967)***

***«A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models»***

***The Journal of Financial and Quantitative Analysis,Vol. 2, No.2, p.85-106***

Ο αρθρογράφος στηριζόμενος στις μελέτες των **Farrar, Cohen** και **Pogue** καθώς και στα μοντέλα των **Markowitz** και **Sharp** επιχειρεί να αξιολογήσει τα διαφορετικά υποδείγματα επιλογής χαρτοφυλακίων. Ξεκινώντας με τα βασικότερα μειονεκτήματα – θεωρητικού και πρακτικού επιπέδου – του μοντέλου του **Markowitz** και αναφέροντας τις απλουστεύσεις του μοντέλου του **Sharp** αρχικώς σκιαγραφεί τη θεωρία χαρτοφυλακίου όπως είχε παρουσιαστεί έως τότε. Στη συνέχεια, με τη χρήση εμπειρικών και πλασματικών δεδομένων προβαίνει στην αξιολόγηση των μοντέλων.

Συγκεκριμένα ο **Wallingford,** στηριζόμενος στις παρατηρήσεις των **Cohen** και **Pogue** επιχειρεί να αξιολογήσει τη δυναμική του μονοπαραγοντικού υποδείγματος έναντι του δι-παραγοντικού υποδείγματος. Για το σκοπό του χρησιμοποιεί δύο δείγματα είκοσι μετοχών κοινών και προνομιούχων αντίστοιχα. Για τη μελέτη εφαρμόζονται τόσο πραγματικά όσο και προσομειωμένα στοιχεία ενώ, σε αντίθεση με την έρευνα των **Cohen** και **Pogue,** δεν εφαρμόζονται περιορισμοί στα ποσοστά επένδυσης των χαρτοφυλακίων. Τα αποτελέσματα της μελέτης αναδεικνύουν την υπεροχή των πολυπαραγοντικών μοντέλων επιλογής χαρτοφυλακίων γεγονός που σύμφωνα με τον **Wallingford** πιθανώς να οφείλεται στους ιδιαίτερους περιορισμούς της έρευνας.

***Anthony J. Curley (1969)***

***«A stochastic simulation of the personal investment decision»***

***Journal of Finance, Vol.24, No. 4, p.723-724***

Σύμφωνα με τον **Curley** η συσώρρευση πλούτου είναι μία διαδικασία που χαρακτηρίζεται από δύο στοιχεία:**i)** το μέγεθος του επενδυτικού κεφαλαίου και **ii)** τη διάρθρωση του επενδυτικού χαρτοφυλακίου, δηλαδή το είδος των χρεογράφων που θα ενταχθούν στο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο. Στο έργο του αναγνωρίζει ότι οι έως τότε μελέτες για την άριστη επιλογή χαρτοφυλακίου, επεξεργάζονται μόνο το δεύτερο χαρακτηριστικό, μέσω της ανάλυσης απόδοσης – κινδύνου των χαρτοφυλακίων, και επιχειρεί την κατασκευή ενός νέου τύπου μοντέλου επενδυτικών αποφάσεων.

Σκοπός του νέου μοντέλου είναι η δυναμική επεξεργασία και αναπροσαρμογή των επενδυτικών αποφάσεων λαμβανομένων υπ' όψιν τόσο του μεγέθους του επενδυτικού χαρτοφυλακίου, όσο και της διάρθρωσης αυτού. Για να το πετύχει αυτό, ο συγγραφέας εκφράζει τις βασικές οικονομικές έννοιες του αναμενόμενου εισοδήματος, της απόδοσης του χαρτοφυλακίου, της αρχικής επενδυτικής θέσης, των καταναλωτικών προτιμήσεων, μέσω μαθηματικών συναρτήσεων και τις συσχετίζει με τη βασική έννοια του πλούτου. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο **Monte Carlo** κατασκευάζει μία κατανομή πλούτου στην οποία ορίζεται το μέγεθος του πλούτου που δύναται να αποκτήσει ένας επενδυτής για κάθε συνδυασμό τύπου και μεγέθους επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

***Pao Lun Cheng (1971)***

***«Efficient Portfolio Selections Beyond The Markowitz Frontier»***

***The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.6, No.5, p1207-1234***

Ο συγγραφέας, στηριζόμενος στις εμπειρικές μελέτες των **Evans, Latene** και **Young**, επιθυμεί να τεκμηριώσει την ύπαρξη ενός αποδοτικού συνόρου χαρτοφυλακίων, ανωτέρου από εκείνο που ορίζει το υπόδειγμα του **Markowitz.** Συγκεκριμένα υποθέτοντας ότι δεν υπάρχον φόροι και κόστη συναλλαγών, υποστηρίζει πως μέσω της δυναμικής αναδιάρθρωσης του χαρτοφυλακίου, δηλαδή της συνεχούς αγοράς και πώλησης μετοχών, οι επενδυτές μπορούν να επιτύχουν άριστους συνδυασμούς ποσοστών επένδυσης ικανούς να τους αποδόσουν καλύτερους συνδυασμούς απόδοσης και κινδύνου από εκείνους που δίνει το αποδότικό σύνορο του **Warkowitz.**

Στο έργο του αρχικώς αποδεικνύει ότι σε στατικές συνθήκες, δηλαδή αγνοώντας τη δυνατότητα αναπροσαρμογής των ποσοστών επένδυσης, το αποδοτικό σύνορο που εξάγεται για μία περίοδο είναι διαφορετικό από εκείνο που εξάγεται για μεγαλύτερη ή μικρότερη περίοδο. Στη συνέχεια στηριζόμενος στις υποθέσεις της μη ύπαρξης φόρων και τόκων, αποδεικνύει ότι το αποδοτικό σύνορο που προκύπτει μέσα από τη δυναμική αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου είναι ανώτερο από εκείνο που προκύπτει μέσα από τη διακράτηση των αρχικών άριστων ποσοστών επένδυσης. Επιπλέον η ανωτερότητα του χαρτοφυλακίου σε συνθήκες δυναμικής αναπροσαρμογής των ποσοστών επένδυσης ενισχύεται αναλογικά με τον αριθμό των μετοχών που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο και την συχνότητα της αναπροσαρμογής των ποσοστών επένδυσής τους.

***Harbans Lal Dhingra (1975)***

***«Stability of Efficient Portfolios Under Uncertainty»***

***The of Finance, Vol.30, No. 3, p.912-914***

Στο έργο **«Stability of Efficient Portfolios Under Uncertainty»** επιχειρείται να αναδείχθεί το πρόβλημα της αβεβαιότητας στη διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίων που προέρχεται από την ύπαρξη σφαλμάτων στους εκτιμητές των παραμέτρων των βασικών μοντέλων των **Sharp** και **Markowitz.**

Η αρθρογράφος χρησιμοποιεί τα ιστορικά στοιχεία τριμηνιαίων αποδόσεων των μετοχών των εκατό μεγαλύτερων κατασκευαστικών εταιρειών της Αμερικής για την περίοδο **1957 – 1971** διακρίνοντας τη μελέτη της σε τέσσερις δειγματικές περιόδους **(10** τρίμηνα**, 20** τρίμηνα**, 40** τρίμηνα**, 60** τρίμηνα**).** Για κάθε δειγματική περίοδο εφαρμόζει τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης των ελαχίστων τετραγώνων προκειμένου να εξάγει τη σχέση μεταξύ των τριμηνιαίων αποδόσεων των μετοχών κάθε εταιρείας με τις αντίστοιχες του γενικού δείκτη των κατασκευών **(Standard and Poors Industrial Index)** και να υπολογίσει τους εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου**.** Στη συνέχεια εκτιμάται η επιδραση των σφαλμάτων των εκτιμητών των παραμέτρων στις αντίστοιχες εκτιμήσεις των χαρακτηριστικών απόδοσης και κινδύνου**.** Συγκεκριμένα**,** στη μελέτη υποστηρίζεται ότι λογω ύπαρξης σφαλμάτων στους εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου του **Sharp,** το μοντέλο προσδίδει διαφορετικές εκτιμήσεις του κινδύνου και της απόδοσης των χαρτοφυλακίων που κοίτονται πάνω στο αποδοτικό σύνορο από τις ανρίστοιχες πραγματικές**.** Εν κατακλείδη**,** υποστηρίζεται ότι το μοντέλο του **Sharp** παραπλανεί τους επεμδυτές όσον αφορά στην επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου καθώς στην πραγματικότητα**,** λόγω ύπαρξης σφαλμάτων στους εκτιμητές των παραμέτρων**,** θα απολαμβάνουν περισσότερο κίνδυνο και μικρότερη απόδοση από εκείνα που ορίζει το αποδοτικό σύνορο του **Sharp.**

***Michael J. Best – Robert R. Grauer (1991)***
***«On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Rasults»***
***The Review of Financial Studies 1991, Vol.4, No2, p315-342***

Οι **Best** και **Grauer** μελέτησαν την ελαστικότητα που παρουσιάζουν τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια στις μεταβολές των μέσων αποδόσεων των μεμονωμένων μετοχών που τα απαρτίζουν. Εναλλακτικά, εξέτασαν την ευαισθησία των βασικών χαρακτηριστικών των αποδοτικών χαρτοφυλακίων –της μέσης απόδοσης, της τυπικής απόκλισης και των ποσοστών επένδυσης- στις μεταβολές των αποδόσεων ενός ή περισσοτέρων αξιογράφων. Στηριζόμενοι στη θεωρία χαρτοφυλακίου και την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών, αναγνωρίζουν την ανάγκη των επενδυτών να διακρατούν διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια. Ταυτόχρονα παρατηρούν τη δυναμική αναπροσαρμογή των ποσοστών επένδυσης καθώς και της διαρθρωσης των χαρτοφυλακίων από τους διαχειριστές τους.

Παρατηρώντας την πρακτική της δυναμικής αναπροσαρμογής των χαρτοφυλακίων σε δυσανάλογο μέγεθος από το αντίστοιχο των μεταβολών των χαρακτηριστικών των μεμονωμένων μετοχών, επιχειρούν να εξετάσουν τους λόγους για τους οποίους οι διαχειριστές χαρτοφυλακίων υπερβάλλουν στην αναδιάρθρωση των χαρτοφυλακίων τους στην περίπτωση υποτίμησης ή υπερτίμησης των αξιογράφων που διαχειρίζονται. Οι **Best** και **Grauer** χρησιμοποιώνας εμπειρικά δεδομένα και προσδιορίζοντας το αποδοτικό σύνορο μέσω του προβλήματος του διτετραγωνικού προγραμματισμού, απέδειξαν ότι τα ποσοστά επένδυσης ενός αποδοτικού χαρτοφυλακίου μεταβάλλονται κατά πολύ περισσότερο από οποιαδήποτε μεταβολή στην ελαστικότητα των αποδόσεων των μεμονωμένων μετοχών. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση μεταβολής της μεσης απόδοσης ενός αξιογράφου από **18%** σε **20,1%** και για ενα χαρτοφυλάκιο **100** μετοχών, τα ποσοστά επένδυσης θα αλλάξουν κατά το ήμισι. Ωστόσο η απόδοση και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου δεν παρουσιάζουν τόσο σημαντικές μεταβολές.

Η ιδιαίτερα μεγάλη ελαστικότητα που παρουσιάζει η σύνθεση των αποδοτικών χαρτοφυλακίων στις μεταβολές των αποδόσεων των μεμονωμένων μετοχών, σύμφωνα με τους αρθρογράφους, οφείλεται σε δύο κυρίως παράγοντες. Στη δυνατότητα προπώλησης μετοχών **(short selling)** και στους δεσμευτικούς περιορισμούς που συνάδουν με τα πραγματικά προβλήματα επιλογής χαρτοφυλακίου.

***John B. Guerard – John Blin, Steve Bender (1998)***
***«Forecasting earnings composite variables, financial anomalies, and efficient Japanese and U.S portfolios »***
***International Journal of Forecasting 1998, p255-259***

Στο έργο **«Forecasting earnings composite variables, financial anomalies, and efficient Japanese and U.S portfolios »**, οι αρθρογράφοι μελετούν συγκριτικά την απόδοση ανά δεδομενο κίνδυνο που προσδίδουν τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια **long** θέσης με τα αντίστοιχα ουδέτερα χαρτοφυλάκια αγοράς. Το μοντέλο αξιολόγησης που εφαρμόζεται στην ανωτέρω μελέτη είναι το πολυπαραγοντικό, με ιδιαίτερη έμφαση στις μεταβλητές των εκτιμώμενων και αναθεωρούμενων επιχειρηματικών κερδών.

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το πολυπαραγοντικό μοντέλο με εξεταζόμενες ανεξάρτητες μεταβλητές τους τρέχοντες χρηματο-οικονομικούς δείκτες **PE (Price to Earnings Ratio)** και **PB (Price to Book to Value ratio)** καθώς και τους σχετικούς χρηματοοικονομικούς δείκτες **RPE (Relative Price to Earnings Ratio)** και **RPB (Relative Price to Book to Value ratio)** οι οποίοι προκύπτουν συγκρίνοντας τους τρέχοντες δείκτες με τους αντίστοιχους μέσους ετήσιους δείκτες της τελευταίας πενταετίας. Ορίζοντας το βασικό μοντέλο $TR_T = ao + a_1PE_t + a_2PB_t + a_3RPEt + a_4RPB_t + e_t$, και χρησιμοποιώντας μετοχές **1200** ιαπωνικών εταιριών του Χρηματιστηρίου Αξιών του Τόκυο και **2800** αμερικάνικων εταιριών που περιλαμβάνονται στη βάση δεδομένων **WorldScope** μελετήθηκε η απόδοση των επιθετικών και των ουδέτερων χαρτοφυλακίων για την περίοδο **1988-1997.**

Το εξαγόμενο συμπέρασμα της ανωτέρω μελέτης ορίζει πως ο συνυπολογισμός των αναθεωρήσεων των βασικών χρηματοοικονομικών δεικτών στο οικονομετρικό μοντέλο καθών και των προβλέψεών τους καθιστά σαφή την υπεροχή των ουδέτερων μετοχικών χαρτοφυλακίων έναντι των επιθετικών αποδοτικών χαρτοφυλακίων. Το ως άνω συμπέρασμα ισχύει τόσο για χαρτοφυλάκια που περιλαμβάνουν μετοχές αμερικάνικων εταιριών όσο και μετοχές ιαπωνικών εταιριών.

***Wayne E. Ferson – Andriew F. Siegel (2001)***
***«The Efficient Use of Conditioning Information in Portfolios »***
***The Journal of Finance, June 2001, Vol.LVI, No.3***

Οι **Ferson** και **Siegel** επιχειρούν να προσδιορίσουν κλειστούς μαθηματικούς τύπους για την επίλυση των προβλημάτων επιλογής χαρτοφυλακίων ελάχιστης αδέσμευτης διακύμανσης, λαμβάνοντας υπ΄όψιν πιθανή δεσμευτική πληροφόρηση. Η ανωτέρω μελέτη διακρίνεται σε τρεις κατηγορίες: α) Οικονομίες στις οποίες περιλαμβάνονται ένα χρεογράφο μηδενικού κινδύνου και ένα χρεογράφο με κίνδυνο, β) Οικονομίες στις οποίες περιλαμβάνονται ν χρεόγραφα με κίνδυνο και ένα χρεόγραφο με μηδενικό κίνδυνο, γ) Οικονομίες στις οποίες περιλαμβάνονται μόνο χρεόγραφα με κίνδυνο.

Σύμφωνα με τους συγγραφείς, η εκτίμηση αποδοτικών χαρτοφυλακίων άνευ περιορισμών με τις κοινές μεθοδολογικές πρακτικές μπορεί να οδηγήσει σε λαθεμένα συμπερασματα καθώς, κατά την εξαγωγή των εκτιμώμενων αποδόσεων των εξεταζόμενων χαρτοφυλακίων υιοθετούνται και περιλαμβάνονται στις εκτιμήσεις πληροφορίες οι οποίες εμπεριέχουν δεσμευτικά στοιχεία. Δεδομένου ότι δε δύναται κάθε επενδυτής να έχει πρόσβαση στο σύνολο των πληροφοριών που εμπεριέχουν δεσμευτικά στοιχεία για την εξαγωγή των εκτιμήσεων των εξεταζόμενων μεταβλητών, είναι επεβεβλημένη η αναθεώρηση των μαθηματικών λύσεων των προβλημάτων αριστοποίησης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

Σε αυτό το σημείο εσωκλείεται η συνεισφορά των αρθρογράφων. Στη μελέτη τους παρουσιάζονται αναλυτικά κλειστού τύπου λύσεις στο πρόβλημα του προσδιορισμού των άριστων ποσοστών επένδυσης ενός χαρτοφυλακίου δηλαδή της ελαχιστοποίησης του κινδύνου του ανά κατηγορία χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που παρουσιάστηκε παραπάνω.

***Aslihan Altay Salih–Gülnur Muradoglu–Muhammet Mercan (2002) «Performance of the Efficient Frontier in an Emerging Market Setting »***

***Applied Economic Letters, Sept 2002, p.177-183***

Η ανωτέρω μελέτη αφορά στην εμπειρική αξιολόγηση των αποδοτικών χαρτοφυλακίων όπως αυτά ορίστηκαν και προσδιορίστηκαν μαθηματικώς από τον **H.Markowitz** το **1952,** σε αναδυόμενες αγορές και συγκεκριμένα στο Χρηματιστήριο Αξιών της Κωνσταντινούπολης. Αφορμή της ανωτέρω μελέτης αποτελεί η σημαντική διαφοροποίηση των βασικών μεγεθών και χαρακτηριστικών μεταξύ των αναπτυγμένων και των αναπτυσόμενων οικονομιών. Είναι γεγονός πως οι τελευταίες χαρακτηρίζονται από ταχείες και συχνές αλλαγές στα θεμελιώδη μεγέθη των χρηματαγορών και κεφαλαιαγορών τους, οι οποίες ενισχυονται από επαναλαμβανόμενες διαρθρωτικές αλλαγές στην πορεία προς την εξίσωση με τις αναπτυγμένες οικονομίες παγκοσμίως.

Συγκεκριμένα, στο άρθρο **«Performance of the Efficient Frontier in an Emerging Market Setting »,** οι συγγραφείς κατασκευάζουν αποδοτικά χαρτοφυλάκια και εξετάζουν την απόδοσή τους, χρησιμοποιώντας μετοχές εταιριών που διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο Αξιών της Κωνσταντινούπολης για την περίοδο **1986 – 1997.** Λαμβάνοντας υπ'οψιν τη δυνατότητα αναθεώρησης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων σε μηνιαία βάση χρησιμοποιούν μηνιαίες αποδόσεις για τις εξεταζόμενες μετοχές προκειμένου για την κατασκευή των αποδοτικών συνόρων. Η αξιολόγηση των αποδοτικών χαρτοφυλακίων πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας ύο δείκτες αναφοράς, τους **ISE-100** Και **IFC-Turkish Index.** Για τα χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης πραγματοποιείται σύγκριση της απόδοσής τους με τη αντίστοιχη απόδοση του χρεογράφου μηδενικού κινδύνου.

Τα αποτελέσματατης έρευνας έδειξαν ότι για τα έτη **1989, 1990, 1992, 1993** και **1995** τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια ενεργητικής διαχείρησης είχα μεγαλύτερη μέση απόδοση από τα αντίστοιχα χαρτοφυλάκια παθητικής διαχείρησης, δηλ. από τον αντίστοιχο δείκτη αναφοράς. Αντιθέτως από το **1993** έως το **1994** η παθητική διαχείριση υπερισχύει με μέτρο σύγκρισης τη μέση απόδοση, από την αντίστοιχη ενεργητική των αποδοτικών χαρτοφυλακίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά το έτος **1994** το Χρηματιστήριο Αξιών της Κωνσταντινούπολης, λόγω σημαντικής χρηματοοικονομικής κρίσης, προέβη σε σημαντικές διαρθρωτικές αλλαγές. Παράλληλα, δύο έτη νωρίτερα, υπήρξε σημαντική εισροή ξένων κεφαλαίων στο χρηματιστήριο, λόγω της πλήρους ένταξης του Χρηματιστηρίου της Κωνσταντινούπολης στο **FIBV (Federation Internationale des Bourses de Valeurs)** και επίσημης αναγνώρησής του από την αμερικανική επιτροπή χρεογράφων και συναλαγματος ως **"Designated Off-Shore Securities Market".** Η εισροή ξένων κεφαλαίων στη χρηματιστηριακή αγορά είχε ως αποτέλεσμα την βελτίωση της ποιοτικής και αύξηση της διαθέσιμης πληροφόρησης.

Συμπερασματικά αν και η θεωρία του **Markowitz** για την κατασκευή και επιλογή βέλτιστων χαρτοφυλακίων, αρχικώς υπερίσχυσε τη παθητικής διαχείρησης χαρτοφυλακίων στην αναδυόμενη χρηματιστηριακή αγορά της Κωνσταντινούπολης, η πρακτική χρησιμότητά της έπαψε να ισχύει από τη στιγμή που η εισροή νέων κεφαλαίων κατέστησε ανεπαρκή την χρησιμοποιήση παρελθούσας πληροφόρησης για την κατασκευή εκτιμήσεων των αναμενόμενων αποδόσεων, διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων των εξεταζόμενων χρεογράφων.

## *ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{ο}$ – Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO - BOOTSTRAP*

### *Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΣΜΟΙΩΣΗΣ*

Στο κεφάλαιο **1** της παρούσας εργασίας παρουσιάστηκαν οι βασικότερες θεωρίες χαρτοφυλακίου, αναλύθηκαν οι έννοιες τις απόδοσης και του κινδύνου και υπογραμμίστηκε η σπουδαιότητα εκτίμησης αυτών. Η έννοια του κινδύνου χρησιμοποιείται για να εκφράσει το στοιχείο της τυχαιότητας που παρουσιάζεται στο εκάστοτε οικονομικό μοντέλο, επενδυτικό πρόγραμμα ή γενικότερα φαινόμενο το οποίο εξετάζουμε. Φαινόμενα των οποίων η εξέλιξη ή το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων ή των οποίων η συμπεριφορά δεν μπορεί να περιγραφεί μέσω μίας ακριβούς μαθηματικής εξίσωσης ονομάζονται στοχαστικά. Παραδείγματα στοχαστικών φαινομένων είναι η εξέλιξη του πληθυσμού στο χρόνο, η κίνηση των τιμών των μετοχών, ο πληθωρισμός, οι καιρικές συνθήκες κτλ. Αντιθέτως, φαινόμενα των οποίων η συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί επακριβώς μέσω ενός μαθηματικού μοντέλου, ονομάζονται ντετερμινιστικά.

Η μελέτη των διαφόρων στοχαστικών φαινομένων εν γένη μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας κυρίως τρεις μεθόδους:

1. <u>Αναλυτικές μεθόδους</u>: Πρόκειται για μεθόδους μέσω των οποίων το εξεταζόμενο φαινόμενο μελετάται αναλυτικά μέσω ενός κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου και για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του. Στα μειονεκτήματα της μεθόδου ανήκει το γεγονός ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε σχετικά απλουστευμένα μοντέλα.
2. <u>Αριθμητικές μεθόδους</u>: Πρόκειται για μεθόδους μέσω των οποίων το εξεταζόμενο φαινόμενο μελετάται αναλυτικά μέσω ενός κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου και για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Σε αντίθεση με τις αναλυτικές μεθόδους, οι αριθμητικές μέθοδοι δύναται να εφαρμοστούν σε πιο σύνθετα μοντέλα.
3. <u>Μέθοδοι προσομοίωσης</u>: Πρόκειται για μεθόδους μέσω των οποίων το υπό εξέταση στοχαστικό φαινόμενο αναπαριστάται εικονικά και

στη συνέχεια μέσω της αναπαράστασης της συμπεριφοράς του παρατηρούμε τα χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν.

Είναι γεγονός πως ο καλύτερος τρόπος μελέτης ενός στοχαστικού φαινομένου είναι η παρακολούθησή του στο χρόνο, η καταγραφή και επεξεργασία των διαφόρων παρατηρήσεων και η εξαγωγή εμπειρικών συμπερασμάτων. Προφανώς τα εξαγόμενα συμπεράσματα εξαρτώνται από το σύνολο των εξεταζόμενων παρατηρήσεων, ενώ η ποιότητα και ο βαθμός αξιοπιστίας τους σχετίζονται θετικά με το μέγεθος των εξεταζόμενων παρατηρήσεων ή εναλλακτικά με το μέγεθος του δείγματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα που εξετάζουμε, τόσο καλύτερη είναι η πειραματική μελέτη που πραγματοποιούμε. Όπως είναι αναμενόμενο, η ανεύρεση τεράστιου πλήθους πραγματικών παρατηρήσεων είναι αρκετά δύσκολη έως και αδύνατη, ανάλογα με το υπό εξέταση στοχαστικό φαινόμενο. Αντί λοιπόν να χρησιμοποιούμε πραγματικές παρατηρήσεις του φαινομένου μπορούμε, με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών, να αναπαριστούμε το εξεταζόμενο στοχαστικό φαινόμενο, να δημιουργούμε τεράστιο πλήθος εικονικών παρατηρήσεων και να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας μέσω της μελέτης και επεξεργασίας των εικονικών παρατηρήσεων που έχουμε δημιουργήσει. Η παραπάνω περιγραφόμενη διαδικασία αποτελεί την ουσία της έννοιας της προσομοίωσης.

## ***ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ***

Το όνομα και η συστηματική χρήση της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** χρονολογούνται από το **1944.** Υπάρχει ωστόσο ένας αριθμός μεμονωμένων περιπτώσεων αναφορών εφαρμογής της μεθόδου σε προγενέστερα έτη. Στις αρχές του εικοστού αιώνα βρετανικά πανεπιστήμια διδασκαλίας της Στατιστικής Επιστήμης εφαρμόζουν τη μέθοδο προσομοίωσης **Monte Carlo,** στηριζόμενα στην πεποίθηση ότι οι φοιτητές μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα τις δυνατότητες της στατιστικής θεωρίας μέσω απλοποιημένων παραδειγμάτων με τη βοήθεια εργαστηριακών συσκευών. Ωστόσο οι εφαρμογές της μεθόδου είχαν περισσότερο ως σκοπό τη βελτιστοποίηση της διδασκαλίας της στατιστικής επιστήμης και λιγότερο τη διεξαγωγή εμπειρικών πειραμάτων για ερευνητικούς σκοπούς. Μεμονωμένη περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** έως τότε με σκοπό την έρευνα αποτελεί η χρήση της μεθόδου από τον **W.S.Gosset** το **1908** ο οποίος χρησιμοποίησε εικονικά εμπειρικά δείγματα προκειμένου για την εκτίμηση της κατανομής του συντελεστή συσχέτισης.

Εφαρμογές της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** ως συστηματικό εργαλείο έρευνας εμφανίζονται για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια του δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου με το έργο των **Neumann** και **Ulam** στο στάδιο δημιουργίας της πρώτης ατομικής βόμβας, ακολουθώντας με τα έργα τους οι **Harris** και **Herman Kahn.** Η ονομασία της μεθόδου επίσης χρονολογείται στην ίδια περίοδο και προέρχεται από την πρωτεύουσα του Μονακό, το **Monte Carlo.** Συγκεκριμένα την περίοδο εκείνη, η πρωτεύουσα του Μονακό αποτελούσε το κέντρο των τυχερών παιχνιδιών και πόλο έλξης των οπαδών τους. Το κοινό στοιχείο των τυχερών παιχνιδιών και της στατιστικής μεθόδου της προσομοίωσης - η τυχαιότητα – αποτέλεσε το αίτιο σύνδεσης της ονομασίας της τεχνικής που σήμερα γνωρίζουμε ως μέθοδο προσομοίωσης **Monte Carlo** με την πρωτεύουσα του Μονακό.

Από το **1948** και έπειτα παρατηρείται συστηματικότερη εφαρμογή της μεθόδου για ερευνητικούς σκοπούς. Ως «αρχιτέκτονες» της ανάπτυξης της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** οφείλουμε να αναγνωρίσουμε τους **Neumann, Ulam** και **Fermi** όχι μόνο για την ανεξάρτητη εφαρμογή της μεθόδου στις πειραματικές τους έρευνες, αλλά και για τη ευρεία διάδοση των δυνατοτήτων και των πρακτικών εφαρμογών της μεθόδου στους συναδέλφους τους.

Κατά την δεκαετία του **1950** η διεξοδική μελέτη και εφαρμογή της μεθόδου **Monte Carlo,** κυρίως στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, παραδόξως οδήγησε στη δυσφήμισή της. Η επικράτηση της εφαρμογής της μεθόδου για την επίλυση κάθε λογής προβλήματος οδήγησε στη χρήση της μεθόδου για την επίλυση προβλημάτων στα οποία δεν μπορούσε να ανταποκριθεί ικανοποιητικά. Η αποφυγή της σύγκρισης των μη ικανοποιητικών αποτελεσμάτων της μεθόδου με τα αντίστοιχα αποτελέσματα εναλλακτικών μεθόδων ήταν αναπόφευκτη.

Από το **1960** και έπειτα η τεχνική της προσομοίωσης **Monte Carlo** παρουσιάζεται σε πολλαπλές εφαρμογές. Η ανάπτυξη της μεθόδου οφείλεται κυρίως στην αναγνώριση των προβλημάτων εκείνων στα οποία μπορεί να δώσει αποδοτικές λύσεις αλλά και στο γεγονός ότι μπορεί να εφαρμοστεί για τη μελέτη ιδιαίτερα πολύπλοκων προβλημάτων. Η εφαρμογή της μεθόδου **Monte Carlo** στον τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης εμφανίζεται για πρώτη φορά το **1968** από τον **David Hertz** και **McKinsey -** εταιρεία συμβούλων επιχειρήσεων. Δεδομένου ότι η αβεβαιότητα αποτελεί χαρακτηριστικό στοιχείο των επιχειρηματικών σχεδίων, η προσομοίωση **Monte Carlo** δεν άργησε να εξαπλωθεί στον τομέα της επιχειρησιακής οικονομικής.

***Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΩΣ ΤΕΧΝΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΩΝ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΤΟΥΣ***

Παρότι συνήθως στα αρχικά στάδια διδασκαλίας της οικονομικής των επιχειρήσεων ως κριτήριο στην αξιολόγηση των επενδυτικών σχεδίων αναφέρεται αυτό της καθαρής παρούσας αξίας των επενδύσεων - λαμβανομένων των μελλοντικών χρηματοροών ως δεδομένων - στην πραγματικότητα σχεδόν για κανένα επενδυτικό πρόγραμμα δε γνωρίζουμε με ακρίβεια τις μελλοντικές καθαρές χρηματοροές του. Η αναγνώριση του στοιχείου της αβεβαιότητας ως παράγοντα άρρηκτα συνδεδεμένου με τη διαδικασία της αξιολόγησης επενδυτικών σχεδίων καθιστά αναγκαία την εύρεση μεθόδων αξιολόγησης των επενδύσεων υπό το πρίσμα του κινδύνου που εμπεριέχουν αυτές.

Υπάρχει ένα πλήθος εναλλακτικών προσεγγίσεων αξιολόγησης των επενδυτικών σχεδίων τα οποία λαμβάνουν υπ' όψιν την τυχαιότητα που εμπεριέχεται σε κάθε επενδυτικό πλάνο. Οι συνηθέστερες πρακτικές που ακολουθούνται είναι αυτές της ανάλυσης ευαισθησίας, της ανάλυσης σεναρίων, του δέντρου αποφάσεων και της προσομοίωσης **Monte Carlo.**

Η μέθοδος της ανάλυσης ευαισθησίας εξετάζει την επίδραση που μπορεί να έχει στο καθαρό αποτέλεσμα ενός επενδυτικού σχεδίου, η μεταβολή ενός και μόνο προσδιοριστικού παράγοντα του επενδυτικού σχεδίου. Η μέθοδος της ανάλυσης σεναρίων επιτρέπει την εξέταση της μεταβολής περισσοτέρων εκ του ενός, περιορισμένου αριθμού όμως, παραγόντων και της επίδρασης αυτών στην καθαρή παρούσα αξία μίας επένδυσης. Η μέθοδος **Monte Carlo** επιτρέπει την εξέταση όλων των πιθανών συνδυασμών μεταβολής των προσδιοριστικών παραγόντων ενός επενδυτικού σχεδίου και της συνδυασμένης επίδρασής τους στις καθαρές χρηματοροές του. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας προκαθορισμένες κατανομές πιθανοτήτων και τυχαίους αριθμούς, με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, εκτιμάται μία κατανομή τιμών της καθαρής παρούσας αξίας του επενδυτικού σχεδίου ή του εσωτερικού συντελεστή απόδοσης.

Η διαδικασία της μεθόδου αρχικά απαιτεί την κατασκευή μίας κατανομής πιθανοτήτων για κάθε παράγοντα ο οποίος επηρεάζει τις καθαρές χρηματοροές της επένδυσης. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, επιλέγεται μία τυχαία τιμή από κάθε κατανομή και αντικαθίσταται στο μαθηματικό μοντέλο που έχει σχεδιαστεί και περιγράφει το επενδυτικό πλάνο. Το σύνολο των τυχαία επιλεγμένων τιμών μέσω του μαθηματικού μοντέλου προσδίδει επίσης μία τυχαία τιμή για την καθαρή χρηματοροή της επένδυσης. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία πολλές φορές, προκύπτει ένα σύνολο τιμών καθαρών χρηματοροών το οποίο χρησιμοποιείται προκειμένου να κατασκευάσουμε μία κατανομή πιθανών τιμών της καθαρής παρούσας αξίας της επένδυσης ή του εσωτερικού συντελεστή απόδοσης.

Αναλυτικότερα, η κατασκευή της μεθόδου **Monte Carlo** απαιτεί τα εξής στάδια:

1. Μοντελοποίηση του υπό εξέταση επενδυτικού σχεδίου. Καθορίζονται με μαθηματικές εκφράσεις οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των προσδιοριστικών παραγόντων της επένδυσης και των καθαρών χρηματικών ροών της.
   Π.χ. Καθαρή χρηματική ροή **=** (Έσοδα **–** Κόστος **–** Αποσβέσεις**)** *****
   **(1–**Φορολογικός Συντελεστής**)** **+** Αποσβέσεις

2. Για κάθε προσδιοριστικό παράγοντα ορίζεται μία υποκειμενική κατανομή πιθανοτήτων των τιμών του, της οποίας υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση. Στη συνέχεια ο παράγοντας εκφράζεται μέσω μίας στοχαστικής εξίσωσης όπου η τυχαία μεταβλητή της εξίσωσης αποτελεί το διαταρακτικό όρο της τιμής του παράγοντα από το μέσο της. Επιλέγεται μία τυχαία τιμή του διαταρακτικού όρου, αντικαθίσταται στη στοχαστική εξίσωση και προκύπτει μία τυχαία τιμή για τον προσδιοριστικό παράγοντα.

3. Αντικαθιστώντας τις τυχαίες τιμές που προκύπτουν για κάθε παράγοντα βάσει της ανωτέρω διαδικασίας στο αρχικό μοντέλο, επιπρόσθετα με λοιπές πληροφορίες που απαιτούνται (π.χ φορολογικός συντελεστής, αποσβέσεις κτλ), προκύπτει μία τυχαία

τιμή για την χρηματοροή της επένδυσης. Η τιμή αυτή προεξοφλείται και μέσω αυτής εκτιμάται η καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης.

4. Η διαδικασία επαναλαβάνεται πολλαπλώς, προκειμένου να υπολογιστεί ένα σύνολο τιμών για την καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης, δηλαδή ωσότου δημιουργηθεί μία κατανομή τιμών της καθαρής παρούσας αξίας της οποίας εκτιμάται η μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

Η μέθοδος προσομοίωσης **Monte Carlo** χρησιμοποιεί την κατανομή των τιμών της καθαρής παρούσας αξίας που μπορεί να προκύψει από ένα επενδυτικό σχέδιο και τα χαρακτηριστικά της (μέση τιμή και τυπική απόκλιση) προκειμένου να προσδιορίσει εάν το επενδυτικό πρόγραμμα πρέπει να γίνει αποδεκτό ή όχι. Μέσω του τύπου της κατανομής παρέχονται πληροφορίες σχετικά με τον κίνδυνο που εμπεριέχει το επενδυτικό σχέδιο.

Στα πλεονεκτήματα της μεθόδου ανήκει η δυνατότητα επεξεργασίας ιδιαίτερα πολύπλοκων προβλημάτων. Επίσης, η αναγκαιότητα συσχέτισης των προσδιοριστικών παραγόντων της επένδυσης μέσω ακριβών μαθηματικών εκφράσεων και η σύνδεσή τους με τις χρηματοροές της επένδυσης βοηθά τον κατασκευαστή του μοντέλου στην καλύτερη αφομοίωση όλων των παραγόντων που επηρεάζουν το επενδυτικό σχέδιο και του κινδύνου που εμπεριέχουν αυτές. Ωστόσο, λόγω του χαρακτηριστικού της πολυπλοκότητας, συχνά ο κατασκευαστής του μοντέλου διαφέρει από τον οικονομικό αναλυτή που θα αποφασίσει για την ανάληψη ή μη της επένδυσης και ενδέχεται ο προσδιορισμός των σχέσεων μεταξύ των παραγόντων της επένδυσης, όπως προσδιορίζονται στο μοντέλο να μην είναι πάντα ο άριστος.

Στα μειονεκτήματα της μεθόδου συγκαταλέγεται το γεγονός ότι οι αρχικές κατανομές πιθανοτήτων στις οποίες βασίζεται το μοντέλο είναι υποκειμενικές, διαφέρουν μεταξύ των αναλυτών και πιθανότατα διαφέρουν από τις αντίστοιχες πραγματικές κατανομές. Επίσης η προσέγγιση δεν δίνει ένα κριτήριο – κανόνα – βάσει του οποίου θα ληφθεί η απόφαση ανάληψης ή μη της επένδυσης. Τέλος, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η τεχνική της προσομοίωσης **Monte Carlo** δε λαμβάνει υπ' όψιν της τη δυνατότητα αναπροσαρμογής των αρχικών επενδυτικών επιλογών ανάλογα με τις επικρατούσες συνθήκες. Για παράδειγμα στην περίπτωση υψηλής καθαρής παρούσας αξίας τα στελέχη μίας επιχείρησης θα επέλεγαν την επέκταση της επένδυσης, γεγονός που θα αύξανε ακόμα περισσότερο τις χρηματοροές της επένδυσης. Αντίθετα, στην περίπτωση αρνητικών αποτελεσμάτων τα στελέχη θα επέλεγαν ακύρωση του επενδυτικού σχεδίου προκειμένου να μειώσουν τις ζημίες. Η μέθοδος **Monte Carlo**, μη λαμβάνοντας υπ’ όψιν τις ανωτέρω ενδεχόμενες αποφάσεις, παρουσιάζει μία κατανομή πιθανών τιμών της καθαρής παρούσας αξίας μίας επένδυσης, της οποίας οι ακραίες τιμές αποκλίνουν από την πραγματικότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση των πραγματικών τιμών των προσδιοριστικών παραγόντων της επένδυσης από τις αναμενόμενες τιμές τους, τόσο λιγότερο έγκυρο είναι το αποτέλεσμα της προσομοίωσης **Monte Carlo.**

## *Η ΜΕΘΟΔΟΣ MONTE CARLO ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ*

Η τεχνική της προσομοίωσης **Monte Carlo** επί σειρά δεκαετιών χρησιμοποιείται ως εργαλείο στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου, προκειμένου για τη μελέτη των κλασικών υποδειγμάτων ή την παρουσίαση νέων μοντέλων αξιολόγησης και επιλογής χαρτοφυλακίου. Η χρησιμότητα της μεθόδου έγκειται στη δυνατότητα δημιουργίας ενός συνόλου εικονικών αποδόσεων, πολλαπλώς μεγαλύτερου μεγέθους από το αντίστοιχο του πραγματικού δείγματος, βάσει των οποίων διεξάγονται έρευνες στο πλαίσιο της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, αντί να χρησιμοποιούμε πραγματικές παρατηρήσεις, δηλαδή ιστορικές αποδόσεις, μπορούμε στηριζόμενοι στις ιστορικές αποδόσεις και με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών, να αναπαριστούμε το εξεταζόμενο παράγοντα (π.χ. τιμές μετοχών, αποδόσεις, όγκο συναλλαγών κτλ), να δημιουργούμε τεράστιο πλήθος εικονικών παρατηρήσεων και να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας μέσω της μελέτης και επεξεργασίας των εικονικών παρατηρήσεων που έχουμε δημιουργήσει.

Ενδεικτικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** αποτελούν οι έρευνες των: **Anthony Curley (1969), Harbans Lai Dhingra (1975), J.D.Jobson-B.Korkie (1980)** και **Jerome Detemple, Rene Garcia, Marcel Rindisbacher (2003)**.

Προκειμένου για τη βαθύτερη κατανόηση της εφαρμογής της μεθόδου **Monte Carlo** στη θεωρία χαρτοφυλακίου, παρατίθεται αναλυτικό παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την εξέλιξη των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου, το οποίο αποτελείται από τις εξής μετοχές:
ΑΒΑΞ, ΑΚΤΟΡ, ΑΛΕΚ και ΑΛΦΑ.
Το χαρτοφυλάκιο έχει ίσα ποσοστά επένδυσης δηλαδή το ποσοστό συμμετοχής κάθε μετοχής στο χαρτοφυλάκιο ισούται με **25%.** Προκειμένου για τον υπολογισμό των προσομοιούμενων αποδόσεων, χρησιμοποιούμε τις ιστορικές τιμές των μετοχών για την περίοδο **01.01.2004** έως και **10.03.2004.**

Στη στήλη «Ημ/νία Παρατήρησης» του πίνακα I παρουσιάζονται οι ημέρες παρατήρησης των τιμών των μετοχών. Στη στήλη «Τιμές» παρουσιάζονται οι ιστορικές τιμές των μετοχών για την εξεταζόμενη περίοδο. Στη στήλη «Αποδόσεις» παρουσιάζονται οι λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών όπως προσδιορίζονται από τον τύπο:

$$\mathbf{R_i = \ln (S_{t+1} / S_t)}$$

Η χρήση του ανωτέρω τύπου κρίνεται αναγκαία προκειμένου για τον προσδιορισμό των συνεχώς επανατοκιζόμενων αποδόσεων καθώς και λόγω της αδυναμίας ευρέσεως της ύπαρξης ή μη διανεμόμενου μερίσματος για την ως άνω εξεταζόμενη περίοδο.

Στη στήλη Αποδόσεις Χαρτοφυλακίου, του πίνακα I προσδιορίζονται οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως αυτές προκύπτουν από τον τύπο:

$$\mathbf{R_p = w_1 * R_1 + w_2 * R_2 + w_3 * R_3 + w_4 * R_4}$$

ή

$$\mathbf{R_p = 0{,}25 * R_1 + 0{,}25 * R_2 + 0{,}25 * R_3 + 0{,}25 * R_4}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις ημερήσιες ιστορικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως παρουσιάζονται στην τελευταία στήλη του πίνακα I υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

$$E(\mathbf{R_p}) = \mathbf{-\ 0{,}0009}$$

$$\sigma(\mathbf{R_p}) = \mathbf{0{,}01008}$$

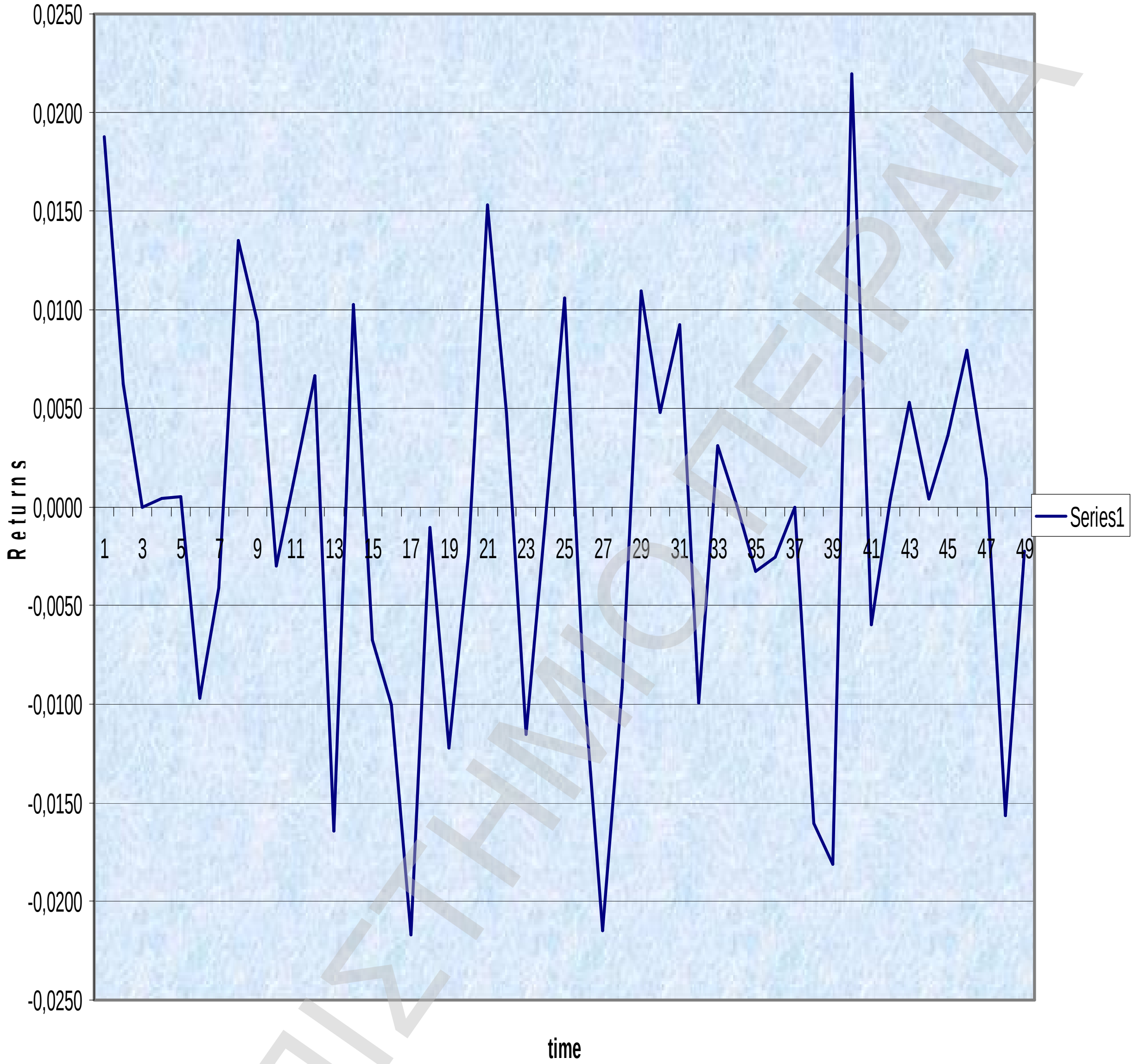
$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \mathbf{0{,}0100010164}$$

Στο Διάγραμμα I παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση των ιστορικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

### ΠΙΝΑΚΑΣ Ι - ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

| | | ΑΒΑΞ | | ΑΚΤΩΡ | | ΑΛΕΚ | | ΑΛΦΑ | | Αποδόσεις Χαρτοφυλακίου |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ημ/νία Παρατήρησης | No | Τιμές | Αποδόσεις | Τιμές | Αποδόσεις | Τιμές | Αποδόσεις | Τιμές | Αποδόσεις | |
| 1/1/2004 | 1 | 5,18 | | 4,35 | | 16,12 | | 16,65 | | |
| 2/1/2004 | 2 | 5,32 | 0,02667 | 4,37 | 0,00459 | 16,36 | 0,01478 | 17,14 | 0,02900 | 0,0188 |
| 5/1/2004 | 3 | 5,32 | 0,00000 | 4,32 | -0,01151 | 16,82 | 0,02773 | 17,29 | 0,00871 | 0,0062 |
| 6/1/2004 | 4 | 5,32 | 0,00000 | 4,32 | 0,00000 | 16,82 | 0,00000 | 17,29 | 0,00000 | 0,0000 |
| 7/1/2004 | 5 | 5,34 | 0,00375 | 4,27 | -0,01164 | 17,08 | 0,01534 | 17,19 | -0,00580 | 0,0004 |
| 8/1/2004 | 6 | 5,3 | -0,00752 | 4,23 | -0,00941 | 16,86 | -0,01296 | 17,75 | 0,03206 | 0,0005 |
| 9/1/2004 | 7 | 5,24 | -0,01139 | 4,22 | -0,00237 | 16,5 | -0,02158 | 17,69 | -0,00339 | -0,0097 |
| 12/1/2004 | 8 | 5,18 | -0,01152 | 4,22 | 0,00000 | 16,42 | -0,00486 | 17,69 | 0,00000 | -0,0041 |
| 13/1/2004 | 9 | 5,2 | 0,00385 | 4,25 | 0,00708 | 16,82 | 0,02407 | 18,03 | 0,01904 | 0,0135 |
| 14/1/2004 | 10 | 5,2 | 0,00000 | 4,22 | -0,00708 | 16,94 | 0,00711 | 18,72 | 0,03756 | 0,0094 |
| 15/1/2004 | 11 | 5,18 | -0,00385 | 4,23 | 0,00237 | 16,9 | -0,00236 | 18,57 | -0,00805 | -0,0030 |
| 16/1/2004 | 12 | 5,16 | -0,00387 | 4,28 | 0,01175 | 16,92 | 0,00118 | 18,54 | -0,00162 | 0,0019 |
| 19/1/2004 | 13 | 5,22 | 0,01156 | 4,45 | 0,03895 | 16,98 | 0,00354 | 18,04 | -0,02734 | 0,0067 |
| 20/1/2004 | 14 | 5,18 | -0,00769 | 4,35 | -0,02273 | 16,8 | -0,01066 | 17,6 | -0,02469 | -0,0164 |
| 21/1/2004 | 15 | 5,26 | 0,01533 | 4,4 | 0,01143 | 16,86 | 0,00357 | 17,79 | 0,01074 | 0,0103 |
| 22/1/2004 | 16 | 5,26 | 0,00000 | 4,35 | -0,01143 | 16,74 | -0,00714 | 17,64 | -0,00847 | -0,0068 |
| 23/1/2004 | 17 | 5,28 | 0,00380 | 4,25 | -0,02326 | 16,52 | -0,01323 | 17,51 | -0,00740 | -0,0100 |
| 26/1/2004 | 18 | 5,2 | -0,01527 | 4,18 | -0,01661 | 16,24 | -0,01709 | 16,86 | -0,03783 | -0,0217 |
| 27/1/2004 | 19 | 5,2 | 0,00000 | 4,18 | 0,00000 | 16,24 | 0,00000 | 16,79 | -0,00416 | -0,0010 |
| 28/1/2004 | 20 | 5,16 | -0,00772 | 4,13 | -0,01203 | 16,06 | -0,01115 | 16,49 | -0,01803 | -0,0122 |
| 29/1/2004 | 21 | 5,14 | -0,00388 | 4,12 | -0,00242 | 15,9 | -0,01001 | 16,6 | 0,00665 | -0,0024 |
| 30/1/2004 | 22 | 5,18 | 0,00775 | 4,07 | -0,01221 | 16,34 | 0,02730 | 17,25 | 0,03841 | 0,0153 |
| 2/2/2004 | 23 | 5,18 | 0,00000 | 4,05 | -0,00493 | 16,44 | 0,00610 | 17,56 | 0,01781 | 0,0047 |
| 3/2/2004 | 24 | 5,08 | -0,01949 | 4 | -0,01242 | 16,46 | 0,00122 | 17,29 | -0,01550 | -0,0115 |
| 4/2/2004 | 25 | 5 | -0,01587 | 3,97 | -0,00753 | 16,8 | 0,02045 | 17,28 | -0,00058 | -0,0009 |
| 5/2/2004 | 26 | 5,06 | 0,01193 | 4,07 | 0,02488 | 16,68 | -0,00717 | 17,5 | 0,01265 | 0,0106 |
| 6/2/2004 | 27 | 4,96 | -0,01996 | 4,08 | 0,00245 | 16,46 | -0,01328 | 17,42 | -0,00458 | -0,0088 |
| 9/2/2004 | 28 | 4,8 | -0,03279 | 3,95 | -0,03238 | 16,28 | -0,01100 | 17,25 | -0,00981 | -0,0215 |
| 10/2/2004 | 29 | 4,8 | 0,00000 | 3,9 | -0,01274 | 16,12 | -0,00988 | 17,01 | -0,01401 | -0,0092 |
| 11/2/2004 | 30 | 4,86 | 0,01242 | 3,93 | 0,00766 | 16,24 | 0,00742 | 17,29 | 0,01633 | 0,0110 |
| 12/2/2004 | 31 | 4,86 | 0,00000 | 3,95 | 0,00508 | 16,3 | 0,00369 | 17,47 | 0,01036 | 0,0048 |
| 13/2/2004 | 32 | 4,96 | 0,02037 | 4,07 | 0,02993 | 16,3 | 0,00000 | 17,24 | -0,01325 | 0,0093 |
| 16/2/2004 | 33 | 4,82 | -0,02863 | 4,08 | 0,00245 | 16,08 | -0,01359 | 17,24 | 0,00000 | -0,0099 |
| 17/2/2004 | 34 | 4,8 | -0,00416 | 4,08 | 0,00000 | 16,08 | 0,00000 | 17,53 | 0,01668 | 0,0031 |
| 18/2/2004 | 35 | 4,86 | 0,01242 | 4 | -0,01980 | 16,1 | 0,00124 | 17,64 | 0,00626 | 0,0000 |
| 19/2/2004 | 36 | 4,86 | 0,00000 | 3,95 | -0,01258 | 16,4 | 0,01846 | 17,31 | -0,01888 | -0,0033 |
| 20/2/2004 | 37 | 4,86 | 0,00000 | 3,97 | 0,00505 | 16,2 | -0,01227 | 17,26 | -0,00289 | -0,0025 |
| 23/2/2004 | 38 | 4,86 | 0,00000 | 3,97 | 0,00000 | 16,2 | 0,00000 | 17,26 | 0,00000 | 0,0000 |
| 24/2/2004 | 39 | 4,72 | -0,02923 | 3,92 | -0,01267 | 16,02 | -0,01117 | 17,07 | -0,01107 | -0,0160 |
| 25/2/2004 | 40 | 4,62 | -0,02141 | 3,92 | 0,00000 | 16 | -0,00125 | 16,24 | -0,04985 | -0,0181 |
| 26/2/2004 | 41 | 4,76 | 0,02985 | 4,02 | 0,02519 | 16,02 | 0,00125 | 16,76 | 0,03152 | 0,0220 |
| 27/2/2004 | 42 | 4,7 | -0,01269 | 3,93 | -0,02264 | 16,04 | 0,00125 | 16,93 | 0,01009 | -0,0060 |
| 1/3/2004 | 43 | 4,78 | 0,01688 | 3,85 | -0,02057 | 16 | -0,00250 | 17,06 | 0,00765 | 0,0004 |
| 2/3/2004 | 44 | 4,74 | -0,00840 | 3,87 | 0,00518 | 16,02 | 0,00125 | 17,46 | 0,02318 | 0,0053 |
| 3/3/2004 | 45 | 4,82 | 0,01674 | 3,85 | -0,00518 | 15,98 | -0,00250 | 17,33 | -0,00747 | 0,0004 |
| 4/3/2004 | 46 | 4,82 | 0,00000 | 3,87 | 0,00518 | 15,9 | -0,00502 | 17,58 | 0,01432 | 0,0036 |
| 5/3/2004 | 47 | 4,82 | 0,00000 | 3,9 | 0,00772 | 15,9 | 0,00000 | 18,01 | 0,02417 | 0,0080 |
| 8/3/2004 | 48 | 4,86 | 0,00826 | 3,83 | -0,01811 | 15,78 | -0,00758 | 18,43 | 0,02305 | 0,0014 |
| 9/3/2004 | 49 | 4,78 | -0,01660 | 3,77 | -0,01579 | 15,64 | -0,00891 | 18,04 | -0,02139 | -0,0157 |
| 10/3/2004 | 50 | 4,74 | -0,00840 | 3,85 | 0,02100 | 15,4 | -0,01546 | 17,93 | -0,00612 | -0,0022 |

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Ι - ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ



Σύμφωνα με την προηγηθείσα ανάλυση, η μέθοδος **Monte Carlo** εφαρμόζεται προκειμένου για την τυχαία αναπαραγωγή αποδόσεων. Η εφαρμογή της μεθόδου, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα ΙΙ έγινε με τη βοήθεια του **excel.** Συγκεκριμένα, μέσω του **data analysis** στο **excel** και της εφαρμογής **"Random Number Generator"** επιλέχθηκε ένα σύνολο τυχαίων αριθμών που ακολουθούν τυποποιημένη κανονική κατανομή με μέσο **0** και διακύμανση **1.** Στη συνέχεια, για κάθε μετοχή, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική κίνηση κατά **Brown,** όπου $S_1 = S_o * e^{(\mu - 0,5\sigma^2)*\Delta t + \varepsilon*\sigma*\sqrt{\Delta t}}$ και αντικαθιστώντας όπου μ τη μέση ετήσια απόδοση κάθε μετοχής, όπου σ και $\sigma^2$ την τυπική απόκλιση και διακύμανση των αποδόσεων αντίστοιχα, όπου ε έναν τυχαίο αριθμό ο οποίος κατανέμεται σύμφωνα με την τυποποιημένη κατανομή και όπου **Δt = 1/252** για ημερήσια στοιχεία καταλήγουμε σε μία σειρά ημερήσιων αποδόσεων. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία **1000** φορές εξάγουμε τον μέσο όρο των ημερήσιων αποδόσεων προκειμένου να αποφύγουμε την ύπαρξη ακραίων τιμών. Τέλος μέσω της συνάρτησης $S_{t+1}=S_t*(1+R_t)$ καταλήγουμε στη σειρά των τιμών κάθε μετοχής. Το σύνολο των εξαγόμενων προσομοιωμένων τιμών και προσομοιωμένων αποδόσεων παρουσιάζεται στον πίνακα ΙΙ, στήλες τιμές και αποδόσεις αντίστοιχα. Στην τελευταία στήλη παρουσιάζονται οι προσομοιωμένες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως προκύπτουν από τον τύπο

$$R_p = w_1 * R_1 + w_2 * R_2 + w_3 * R_3 + w_4 * R_4$$

ή

$$R_p = 0,25 * R_1 + 0,25 * R_2 + 0,25 * R_3 + 0,25 * R_4$$

Χρησιμοποιώντας τις ημερήσιες προσομοιωμένες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως παρουσιάζονται στην τελευταία στήλη του πίνακα Ι υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

$$E(R_p) = -0,0027$$

$$\sigma(R_p) = 0,000864$$

$$\sigma^2(R_p) = 0,0000747364$$

Στο Διάγραμμα ΙΙ εμφανίζεται η γραφική απεικόνιση των ημερήσιων προσομοιωμένων αποδόσεων του υπό εξέταση χαρτοφυλακίου.

Εκ πρώτης όψεως ελέγχοντας την τυπική απόκλιση και διακύμανση του χαρτοφυλακίου παρατηρούμε ότι το προσομοιωμένο χαρτοφυλάκιο εμφανίζει μικρότερη επικινδυνότητα**.** Προκειμένου να διαπιστώσουμε την ικανότητα της προσομοίωσης να αναπαριστά την κίνηση της τιμής της μετοχής παρουσιάζονται διαγραμματικά οι ιστορικές και προσομοιωμένες τιμές κάθε μετοχής ξεχωριστά**. (EXL.** ΚΕΦ **3)**

## ***ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ BOOTSTRAP***

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα στην εφαρμοσμένη στατιστική είναι ο προσδιορισμός του εκτιμητή μίας συγκεκριμένης παραμέτρου, και ο υπολογισμός της ακρίβειας και αξιοπιστίας του, όπως προκύπτει από το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή στα εκάστοτε διαστήματα εμπιστοσύνης. Στο πρόβλημα αυτό έδωσε σημαντική πρόοδο μία ειδική μέθοδος προσομοίωσης, η μέθοδος **Bootstrap** που (αν και παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τον **Simon** το **1969)** έγινε γνωστή από τον Β. **Efron** το **1982**, στο έργο του **The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling plans** Ειδικότερα, ο έλεγχος υποθέσεων χρησιμοποιεί τη γνώση των δειγματικών κατανομών των εκτιμητών για να κατασκευάσει τυπικά σφάλματα και διαστήματα εμπιστοσύνης βάσει των οποίων στηρίζεται η πραγματοποίησή του. Συχνά όμως γίνονται υποθέσεις και παραδοχές αμφίβολου εμπιστοσύνης, όπως:

- Υποθέσεις για την κατανομή του διαταρακτικού όρου. Π.χ. ό,τι ο διαταρακτικός όρος κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική ή και την τυποποιημένη κανονική κατανομή
- Ανάγκη εφαρμογής ασυμπτωτικών ιδιοτήτων των εκτιμητών προκειμένου για την επίλυση αλγεβρικών δυσκολιών, η οποία προϋποθέτει άπειρο δείγμα, γεγονός ασύμφωνο στα μικρά δείγματα.

Η μέθοδος **Bootstrap** στη γενική της μορφή αφορά στην επανατοποθέτηση του εμπειρικού δείγματος και μέσω αυτής δημιουργίας νέου δείγματος προς επεξεργασία. Ως εκ τούτου ο υπολογισμός των εκτιμητών γίνεται βάσει του εμπειρικού δείγματος, είτε αναλυτικά ή προσεγγιστικά μέσω της μεθόδου **Monte Carlo**. Ειδικότερα η μη παραμετρική μέθοδος **Bootstrap** σύμφωνα με τον **Efran** ορίζεται ως εξής:

Έστω ένα δείγμα $\mathbf{F}$: $[f_1, f_2, \ldots f_n]$ και $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n]$ τυχαίοι αριθμοί από την ομοιόμορφη διακριτή κατανομή, στο διάστημα $[1,n]$. Ένα νέο δείγμα με τη μέθοδο **Bootstrap** είναι το $F^B$:$[f_{a1}, f_{a2}, \ldots, f_{an}]$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία δημιουργούνται αρκετά δείγματα έτσι ώστε να είναι δυνατή η εκτίμηση του εκτιμητή αλλά και το τυπικό σφάλμα αυτού. Η μέθοδοςστηρίζεται στη λογική ότι εφόσον μελετάμε μία **iid** στοχαστική ανέλιξη, τότε μπορούμε από τη δειγματική της κατανομή να εφαρμόσουμε δειγματοληψία και να παράγουμε μία ή περισσότερες πραγματοποιήσεις της στοχαστικής ανέλιξης.

Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου **Bootstrap** απαιτεί τα ακόλουθα βήματα:

1. Δημιουργία ενός δείγματος **n** στοιχείων (όπου **n** το πλήθος των στοιχείων του εμπειρικού δείγματος) με επανατοποθέτηση από την εμπειρική κατανομή
2. Εκτίμηση της εξεταζόμενης παραμέτρου **a*** - τιμής του εκτιμητή $\hat{a}$ – χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του νέου δείγματος που έχουμε δημιουργήσει
3. Επανάληψη των βημάτων **1** και **2** **k** φορές, προκειμένου να λάβουμε μία προσέγγιση της κατανομής τιμών του εκτιμητή

Βασικό πλεονέκτημα της προαναφερθείσας μεθόδου έναντι της μεθόδου **Monte Carlo,** είναι το γεγονός ότι το προσομοιωμένο δείγμα έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το πραγματικό δείγμα. Σύμφωνα δε με τη βιβλιογραφία, οι εκτιμητές που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι αμερόληπτοι **(plim($\hat{a}$) = $\tilde{a}$)** και για την εκτίμηση των σφαλμάτων τους αρκούν **100** δείγματα[4]. Η μορφή δειγματοληψίας που αφορά **iid** χρονοσειρές λέγεται **non parametric bootstrap.** Ασφαλώς το προσομοιωμένο δείγμα διαφέρει κάθε φορά από το πραγματικό καθώς πλήθος παρατηρήσεων επαναλαμβάνονται περισσότερες από μία φορές ενώ κάποιες παρατηρήσεις του εμπειρικού δείγματος ενδέχεται να μην παρουσιάζονται καθόλου στο νέο δείγμα.

Στην περίπτωση που οι εξεταζόμενες χρονοσειρές παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση ή ετεροσκεδαστικότητα ή γενικά δεν είναι **iid,** εφαρμόζεται η μέθοδος **parametric bootstrap.** Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή εκτιμάται ένα μοντέλο το οποίο περιγράφει την αυτοσυσχέτιση ή και την ετεροσκεδαστικότητα της χρονοσειράς αφήνοντας τα κατάλοιπα να είναι **iid.** Εναλλακτικά, η υπό εξέταση χρονοσειρά ορίζεται από το συνδυασμό ενός ντετερμινιστικού μοντέλου και μίας στοχαστικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τη μέθοδο **bootstrap** στα κατάλοιπα του μοντέλου, κατασκευάζουμε ένα νέο δείγμα για τα κατάλοιπα και αντικαθιστώντας τα στο μοντέλο καταλήγουμε στο να κατασκευάσουμε ένα νέο δείγμα παρατηρήσεων.

---

[4] “Bootstrap Methods A practitioner’s guide”, Michael R. Chernick,

Η χρησιμότητα της μεθόδου προσομοίωσης όπως προναφέρθηκε, έγκειται στη δυνατότητα δημιουργίας ενός συνόλου εικονικών αποδόσεων, πολλαπλώς μεγαλύτερου μεγέθους από το αντίστοιχο του πραγματικού δείγματος, βάσει των οποίων διεξάγονται έρευνες στο πλαίσιο της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου. Η μέθοδος **Bootstrap** δίνει ένα συγκριτικό πλεονέκτημα στον αναλυτή καθώς επιτρέπει στο προσομοιωμένο να δείγμα να διατηρεί να χαρακτηριστικά του πραγματικού δείγματος. Π.χ. στην εξέταση χρονολογικών σειρών των αποδόσεων μετοχών εμφανίζεται το στοιχείο της κύρτωσης, που αποτελεί χαρακτηριστικό των πραγματικών αποδόσεων.
Η μεθοδολογία της προσομοίωσης **Bootstrap** περιγράφηκε αναλυτικά στο παραπάνω τμήμα της ανάλυσης. Προκειμένου για τη βαθύτερη κατανόηση της εφαρμογής της μεθόδου στη θεωρία χαρτοφυλακίου, παρατίθεται αναλυτικό παράδειγμα.

Έστω ότι μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την εξέλιξη των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου, το οποίο αποτελείται από τις μετοχές: ΑΒΑΞ, ΑΚΤΟΡ, ΑΛΕΚ και ΑΛΦΑ. Το χαρτοφυλάκιο έχει ίσα ποσοστά επένδυσης δηλαδή το ποσοστό συμμετοχής κάθε μετοχής στο χαρτοφυλάκιο ισούται με **25%**. Προκειμένου για τον υπολογισμό των προσομοιούμενων αποδόσεων, χρησιμοποιούμε τις ιστορικές τιμές των μετοχών για την περίοδο **01.01.2004** έως και **10.03.2004.** Αντίστοιχα με το παράδειγμα της μεθόδου **Monte Carlo** που προηγήθηκε, χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του Πίνακα Ι.Στη στήλη «Ημ/νία Παρατήρησης» παρουσιάζονται οι ημέρες παρατήρησης των τιμών των μετοχών. Στη στήλη «Τιμές» παρουσιάζονται οι ιστορικές τιμές των μετοχών για την εξεταζόμενη περίοδο. Στη στήλη «Αποδόσεις» παρουσιάζονται οι λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών όπως προσδιορίζονται από τον τύπο:

$$\mathbf{R_i = ln\ (S_{t+1} / S_t)}$$

Στη στήλη Αποδόσεις Χαρτοφυλακίου, του πίνακα Ι προσδιορίζονται οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως αυτές προκύπτουν από τον τύπο:

$$\mathbf{R_p = w_1 * R_1 + w_2 * R_2 + w_3 * R_3 + w_4 * R_4}$$

ή

$$R_p = 0{,}25 * R_1 + 0{,}25 * R_2 + 0{,}25 * R_3 + 0{,}25 * R_4$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις ημερήσιες ιστορικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως παρουσιάζονται στην τελευταία στήλη του πίνακα Ι υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

$$E(R_p) = -\ 0{,}0009$$
$$\sigma(R_p) = 0{,}01008$$
$$\sigma^2(R_p) = 0{,}0100010164$$

Σύμφωνα με την προηγηθείσα ανάλυση, η μέθοδος **Bootstrap** εφαρμόζεται προκειμένου για την τυχαία αναπαραγωγή αποδόσεων. Η εφαρμογή της μεθόδου, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα ΙΙ έγινε με τη βοήθεια του **excel.** Συγκεκριμένα, μέσω του **data analysis** στο **excel** και της εφαρμογής **"Sampling"** δημιουργήθηκε ένα τυχαίο νέο δείγμα αποδόσεων μέσω της μεθόδου επανατοποθέτησης. Η διαδικασία επαναλήφθηκε **100** φορές και κατασκευάστηκε από το μέσο όρο των επαναλήψεων μία σειρά αποδόσεων για κάθε μετοχή όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα ΙΙ. Εν συνεχεία σύμφωνα με τον τύπο $S_{t+1}=S_t*(1+R_t)$, αντικαθιστώντας όπου $R_t$ τη σειρά αποδόσεων μέσω της μεθόδου επανατοποθέτησης κατασκευάστηκε η πορεία της τιμής κάθε μετοχής στο χρόνο η οποία παρουσιάζεται στη στήλη «τιμές» του πίνακα ΙΙ. Τέλος από τις προσομοιωμένες τιμές εξαγάγαμε τις αντίστοιχες αποδόσεις κάθε μτοχές μέσω της συνάρτησης $R_i = \ln(S_{t+1} / S_t)$, οι οποίες και παρουσιάζονται στη στήλη «Αποδόσεις του Πίνακα ΙΙΙ». Στην τελευταία στήλη παρουσιάζονται οι προσομοιωμένες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως προκύπτουν από τον τύπο

$$R_p = w_1 * R_1 + w_2 * R_2 + w_3 * R_3 + w_4 * R_4$$

ή

$$R_p = 0{,}25 * R_1 + 0{,}25 * R_2 + 0{,}25 * R_3 + 0{,}25 * R_4$$

Χρησιμοποιώντας τις ημερήσιες προσομοιωμένες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου όπως παρουσιάζονται στην τελευταία στήλη του πίνακα Ι υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

$$E(R_p) = -\ 0{,}00001343$$
$$\sigma(R_p) = 0{,}006391$$

$$\sigma^2(R_p) = 0{,}000040841$$

Στο Διάγραμμα ΙΙ εμφανίζεται η γραφική απεικόνιση των ημερήσιων προσομοιωμένων αποδόσεων του υπό εξέταση χαρτοφυλακίου.

Αντίστοιχα με την παρουσίαση της μεθόδου **Monte Carlo,** προκειμένου να διαπιστώσουμε την ικανότητα της προσομοίωσης μέσω **Bootstrapping** να αναπαριστά την κίνηση της τιμής της μετοχής παρουσιάζονται διαγραμματικά οι ιστορικές και προσομοιωμένες τιμές κάθε μετοχής ξεχωριστά. **(EXL** ΚΕΦ **3)**

## ***ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{O}$ - ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ***

Η παρούσα εργασία στηρίζεται **i)** στη μελέτη της **Wayne Winston** για την εφαρμογή των μεθόδων προσομοίωσης στα χρηματοοικονομικά μοντέλα όπως αυτή περιγράφεται στο βιβλίο της **"Financial Models Using Simulation And Optimization"** κεφάλαια **9** και **31,** καθώς και **ii)** στην έρευνα του **Richard Roll** για τα αποδοτικά σύνορα χαρτοφυλακίων με βάση το υπόδειγμα του **Markowitz** που αναπτύχθηκε στο άρθρο του **"A critique of the asset pricing theory's test – Part I".** Στην παρούσα εργασία συνδυάζοντας τις ανωτέρω περιγραφόμενες μελέτες, θα εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου προσομοίωσης για τον υπολογισμό του αποδοτικού συνόρου σύμφωνα με το μοντέλο του **Roll** καθώς και την προβλεπτική ικανότητα αυτής σε βραχυχρόνιους επενδυτικούς ορίζοντες.

Προκειμένου για την επιλογή του κατάλληλου δείγματος εμπειρικών παρατηρήσεων τέθηκαν δύο βασικοί στόχοι. Αρχικώς η επίτευξη όσο το δυνατόν μεγαλύτερου όγκου παρατηρήσεων ανά εξεταζόμενη μετοχή και η περίληψη όσο το δυνατόν μεγαλύτερου αριθμού χρεογράφων στο επεξεργαζόμενο χαρτοφυλάκιο προκειμένου να ενισχυθεί η στατιστική σημαντικότητα των εμπειρικών αποτελεσμάτων αλλά και να έχει νόημα η έννοια του αποδοτικού συνόρου. Δευτερευόντως, η συμμετοχή στο χαρτοφυλάκιο μετοχών εταιριών, οι οποίες παρουσιάζουν εμπορευσιμότητα καθ' όλη τη χρονική περίοδο για την οποία πραγματοποιείται η έρευνα. Στο σύνολό τους οι μετοχές επιλέχθηκαν να ανήκουν στο Γενικό Δείκτη. Η χρησιμοποίηση του Γενικού Δείκτη σαν πηγή επιλογής των μετοχών ορίστηκε για τους εξής λόγους: **i)**Περιλαμβάνει το μεγαλύτερο τμήμα της κεφαλαιοποίησης του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και παρά τις ατέλειές του (ετεροβαρής, αντιπροσώπευση κυρίως τραπεζικού κλάδου) αποδίδει την πορεία της αγοράς όσον αφορά στην τάση της **ii)**Παρακολουθεί τη συντριπτική πλειοψηφία των εταιριών που δραστηριοποιούνται στην ελληνική χρηματιστηριακή αγορά, **iii)**Στο εξεταζόμενο χρονικό διάστημα **(01/01/1997-31/05/2005)** δεν έχει υποστεί καμία ουσιαστική αλλαγή.

Τελικό Δείγμα

Για την παρούσα εργασία επεξεργάστηκαν στο σύνολό τους **40** μετοχές για την περίοδο **01/01/1997-31/05/2005.** Πηγή δεδομένων για το ανωτέρω διάστημα υπήρξε η βάση δεδομένων της **Datastream.** Προκειμένου για την επανάληψη της εμπειρικής μελέτης οι μετοχές διαχωρίστηκαν σε δύο δείγματα και επεξεργάστηκαν ανά τριετία**.** Παρακάτω παρουσιάζονται οι συμβολισμοί των μετοχών ανά δείγμα καθώς και οι ονομασίες τους στη βάση δεδομένων της **DataStream (**εντός παρενθέσεως**).**

Δείγμα **1**ο

1. **ΑΒΑΞ** (J & P AVAX)
2. **ΑΚΤΩΡ** (AKTOR)
3. **ΑΛΕΚ** (ALUMINIUM OF GREECE)
4. **ΑΛΦΑ** (ALPHA BANK)
5. **ΑΤΤΙΚΑ** (ATTICA HOLDINGS)
6. **ΒΙΟΧΚ** (VIOHALCO CB)
7. **ΒΣΤΑΡ** (BLUE STAR MARITIME)
8. **ΓΕΝΑΚ** (HELLENIC INVESTMENT CO.)
9. **ΕΕΓΑ** (ETHNIKI GREEK GEN IN CO)
10. **ΕΕΕΚ** (COCA-COLA HLC.BT.)
11. **ΕΘΝΕΧ** (NATIONAL INVESTMENT CO)
12. **ΕΛΑΙΣ** (ELAIS OLEAGINOUS)
13. **ΕΛΒΑ** (ELVAL)
14. **ΕΧΑΕ** (ETHNIKI GREEK GEN IN CO)
15. **ΕΛΜΕΚ** (ELMEC SPORT)
16. **ΕΛΤΕΧ** (HELLENIC TECHNODOMIKI)
17. **ΕΜΠ** (EMPORIKI BK.OF GREECE)
18. **ΕΤΕ** (NATIONAL BK.OF GREECE)
19. **ΕΥΡΩΒ** (EFG EUROBANK ERGASIAS)
20. **ΕΦΤΖΙ** (FG EUROPE)

Δείγμα **2**ο

1. **ΕΧΑΕ** (ETHNIKI GREEK GEN IN CO)
2. **ΗΡΑΚ** (HERACLES)
3. **ΙΑΤΡ** (ATHENS MEDICAL)
4. **ΙΝΤΚΑ** (INTRACOM)
5. **ΛΑΜΨΑ** (LAMPSA HOTEL)
6. **ΜΑΙΚ** (M J MAILIS)
7. **ΜΕΤΚ** (METKA)
8. **ΜΗΧΚ** (MICHANIKI CR)

9. **ΜΠΕΝΚ** (BENRUBI)
10. **ΜΥΤΙΛ** (MYTILINEOS HLDGS)
11. **ΝΟΤΟΣ** (NOTOS COM HOLDINGS)
12. **ΟΛΥΜΠ** (TECHNICAL OLYMPIC)
13. **ΟΤΕ** (OTE-HELLENIC TELC)
14. **ΡΟΚΚΑ** (ARCADIA METAL ROKAS CR)
15. **ΣΑΡ** (GR SARANTIS)
16. **ΣΙΔΕ** (SIDENOR METAL PROC)
17. **ΤΕΡΝΑ** (TERNA)
18. **ΤΗΛΕΤ** (TELETYPOS)
19. **ΤΙΤΚ** (TITAN CEMENT CR)
20. **ΤΣΙΠ** (CHIPITA INTERNATIONAL)

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία συνοψίζεται στα εξής βήματα**:**

Α**)** Υπολογισμός λογαριθμικών αποδόσεων του συνόλου των εξεταζόμενων μετοχών

Β**)** Εκτίμηση της μέσης ετήσιας απόδοσης και της μέσης ετήσιας τυπικής απόκλισης

Γ**1)**Χρησιμοποίηση της γεωμετρικής κίνησης κατά **Brown** για την προσομοίωση της τιμής κάθε εξεταζόμενης μετοχής για κάθε τριετία και την εφαρμογή της μεθόδου **Monte Carlo.** Υπολογισμός προσομοιωμένων αποδόσεων

Γ**2)**Εφαρμογή της μεθόδου επανατοποθέτησης για την προσομοίωση της τιμής κάθε εξεταζόμενης μετοχής για κάθε τριετία μέσω της μεθόδου **Bootstrap.** Υπολογισμός προσομοιωμένων αποδόσεων

Δ**)**Υπολογισμός αποδοτικού συνόρου σύμφωνα με το μοντέλο του **Roll** για τις προσομοιωμένες αποδόσεις ανά τριετία

Ε**)**Υπολογισμός αποδοτικού συνόρου σύμφωνα με το μοντέλο του **Roll** των πραγματικών αποδόσεων ακολουθούμενου**,** της εξεταζόμενης τριετίας**,** εξαμήνου

ΣΤ**)** Έλεγχος διαχρονικής στασιμότητας των πινάκων μέσης απόδοσης και διακύμανσης-συνδιακύμανσης σύμφωνα με τις ελεγχοσυναρτήσεις **F-stat** και **T-stat** και κατά συνέπεια έλεγχος προβλεπτικής ικανότητας**.**

Παρατίθεται αναλυτικότερη παρουσίαση των ανωτέρω βημάτων

<u>Α**)**Υπολογισμός λογαριθμικών αποδόσεων**.**</u>

Χρησιμοποιώντας εβδομαδιαίες παρατηρήσεις και προκειμένου για τον υπολογισμό των εβδομαδιαίων και ετησίων συνεχών επανατοκιζόμενων κεφαλαιακών αποδόσεων των εξεταζόμενων μετοχών χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της λογαριθμικής απόδοσης:

$$R_{it} = \ln \frac{P_{it}}{P_{it-1}} \qquad (4.1)$$

<u>Β)Εκτίμηση μέσης ετήσιας και εβδομαδιαίας απόδοσης και μέσης ετήσιας και εβδομαδιαίας τυπικής απόκλισης και διακύμανσης για κάθε εξεταζόμενη περίοδο.</u>

Το δείγμα διαχωρίστηκε σε τριετίες και προσδιορίστηκε η μέση εβδομαδιαία και ετήσια απόδοση ανά τριετία σύμφωνα με τον τύπο:

$$R_i = \sum_{i=1}^{t} \frac{R_{it}}{t} \qquad (4.2)$$

όπου,

**t =** το σύνολο των παρατηρήσεων **(156** ή **157** κατά περίπτωση ανά τριετία**)**

**$R_{it}$ =** η εβδομαδιαίας ή **y-o-y** αντίστοιχα απόδοση της **i** μετοχής την **t** εβδομάδα

Στο σύνολό τους εκτιμήθηκαν **40 (**μετοχές**) * 7 (**τριετίες**) = 280** μέσες ετήσιες αποδόσεις και **280** μέσες εβδομαδιαίες αποδόσεις**.**

Οι περίοδοι επεξεργασίας διαχωρίστηκαν ως εξής:

έτη **1997 – 1999**

έτη **1998 – 2000**

έτη **1999 – 2001**

έτη **2000 – 2002**

έτη **2001 -2003**

έτη **2002 - 2004**

Αντιστοίχως υπολογίστηκε η μέση ετήσια και μέση εβδομαδιαία διακύμανση κάθε μετοχής σύμφωνα με τον τύπο

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{t} * \sum_{i=1}^{t} (R_{it} - R_i)^2 \qquad (4.3)$$

Τέλος εκτιμήθηκαν οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις κάθε μετοχής σύμφωνα με τον τύπο

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{t}\sum_{1}^{t}(R_{it} - R_i)^2} \quad \textbf{(4.4)}$$

<u>Γ**1)**Χρησιμοποίηση της γεωμετρικής κίνησης κατά **Brown** για την προσομοίωση της τιμής κάθε εξεταζόμενης μετοχής για κάθε τριετία και την εφαρμογή της μεθόδου **Monte Carlo.** Υπολογισμός προσομοιωμένων εβδομαδιαίων αποδόσεων**.**</u>

Σύμφωνα με τη Γεωμετρική Κίνηση κατά **Brown** η κίνηση μίας μετοχής ορίζεται από την εξής στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{dt} = \mu * \mathbf{dt} + \mathbf{v} * \mathbf{dz} \quad \textbf{(4.5.1)}$$

όπου,

μ **=** η μέση ετήσια απόδοση της εξεταζόμενης μετοχής

**dt =** η εξεταζόμενη χρονική περίοδος **(1/52** για εβδομαδιαίες αποδόσεις, **1/252** για ημερήσιες αποδόσεις**)**

**v =** η διακύμανση των αποδόσεων της εξεταζόμενης μετοχής

**dz =** το διαφορικό της τυχαίας μεταβλητής **z** για την οποία Δ**z =** ε ***** $\sqrt{\Delta t}$

ε **=** διαταρακτικός όρος που κατανέμεται σύμφωνα με την τυποποιημένη κανονική κατανομή**,** δηλ**.** ε ~ Ν**(0,1).**

Με βάση τον τύπο **(4.4.1)** και με διαδοχικές αναπροσαρμογές καταλήγουμε στο τύπο**:**

$$S_t = S_o * e^{(m-0.5*s^2)*\Delta t+s*e*\sqrt{\Delta t}} \quad \textbf{(4.5.2)}$$

ή

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (\mu - 0.5\,\sigma^2)*\Delta t + \varepsilon*\sigma*\sqrt{\Delta t} \quad \textbf{(4.5.3)}$$

σύμφωνα με τον οποίο η απόδοση μίας μετοχής εξαρτάται από α**)** τη μέση ετήσια απόδοση της μετοχής**,** β**)**τη διακύμανση των ετήσιων αποδόσεων της μετοχής**,** γ**)**τη χρονική περίοδο εξέτασης **-**π**.**χ**.** εβδομάδα**,** ημέρα κ**.**τ**.**λ**.-** και το διαταρακτικό όρο ε**.** Εναλλακτικά**,** η κίνηση της μετοχής καθορίζεται από την τάση της **–** μ***dt** και τη διακύμανση από την τάση της **–** σ *** dz.**

Προκειμένου για την κατασκευή του προσομοιωμένου δείγματος αποδόσεων, αρχικώς υπολογίστηκαν οι ετήσιες αποδόσεις κάθε μετοχής ανά εβδομάδα, δηλαδή υπολογίστηκαν **40 * 52 * 3 = 6.240 y-o-y** αποδόσεις για κάθε τριετία. Βάσει αυτών εκτιμήθηκε η μέση ετήσια απόδοση κάθε τριετίας, η τυπική απόκλιση και η διακύμανση των αποδόσεων κάθε μετοχής. Στη συνέχεια, έχοντας ως τιμή εκκίνησης **So** την τιμή της μετοχής της πρώτης εβδομάδας κάθε τριετίας εφαρμόσαμε τον τύπο **(4.5.2)** όπου μ=η μέση ετήσια απόδοση της τριετίας και σ = η τυπική απόκλιση των αποδόσεων υπολογίζοντας τις τιμές $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, … $\mathbf{S_{156}}$. Η διαδικασία κατασκευής των τιμών των μετοχών επαναλήφθηκε **1000** φορές και σε κάθε επανάληψη υπολογίστηκε η αντίστοιχη εβδομαδιαία προσομοιωμένη απόδοση κάθε μετοχής σύμφωνα με τον τύπο $\mathbf{R_{it}} = \ln \frac{P_{it}}{P_{it-1}}$.

Δηλαδή υπολογίστηκαν $\mathbf{1000S_1}$, $\mathbf{1000S_2}$, … $\mathbf{1000S_{156}}$ και $\mathbf{1000R_1}$, $\mathbf{1000R_2}$, … $\mathbf{1000R_{156}}$ για κάθε μετοχή. Τέλος εκτιμήθηκε ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων κάθε εβδομάδας. Πιο συγκεκριμένα υπολογίστηκαν ο μέσος όρος των εκτιμώμενων τιμών κάθε μετοχής για κάθε εβδομάδα σύμφωνα με τον τύπο:

$$\overline{S_t} = \frac{1}{1000} * \sum_{j=1}^{1000} S_{jt}$$

όπου,

$\overline{S_t}$ = η μέση τιμή της εξεταζόμενης μετοχής της εβδομάδας **t** κατόπιν των **1000** επαναλήψεων

$\mathbf{S_{jt}}$ = η εκτιμώμενη τιμή της εξεταζόμενης μετοχής της **j** επανάληψης για την εβδομάδα **t**

και ο μέσος όρος κάθε εβδομαδιαίας απόδοσης σύμφωνα με τον τύπο

$$\overline{R_t} = \frac{1}{1000} * \sum_{j=1}^{1000} R_{jt}$$

όπου,

όπου,

$\overline{R_t}$ = ο μέσος όρος της απόδοσης της εξεταζόμενης μετοχής για την εβδομάδα **t** κατόπιν των **1000** επαναλήψεων

$\mathbf{R_{jt}}$ = η εκτιμώμενη απόδοση της εξεταζόμενης μετοχής της **j** επανάληψης για την εβδομάδα **t**

Για τη δημιουργία τυχαίων τιμών του διαταρακτικού όρου ε χρησιμοποιήθηκε η λειτουργία **“Random Number Generation”** από το **Data Analysis** του **Excel** επιλέγοντας για κατανομή την τυποποιημένη κανονική.

Το σύνολο των εξαγόμενων μέσων όρων των τιμών και των εβδομαδιαίων αποδόσεων αποτέλεσε το προσομοιωμένο σύμφωνα με τη μέθοδο **Monte Carlo** δείγμα προς επεξεργασία της παρούσα μελέτης.

<u>Γ**2)**Εφαρμογή της μεθόδου επανατοποθέτησης για την προσομοίωση της τιμής κάθε εξεταζόμενης μετοχής για κάθε τριετία μέσω της μεθόδου **Bootstrapping.** Υπολογισμός προσομοιωμένων αποδόσεων.</u>

Σύμφωνα με τη μέθοδο **Bootstrapping,** όπως αναλυτικά παρουσιάστηκε στο κεφ. **3,** χρησιμοποιούμε την επανατοποθέτηση προκειμένου να δημιουργήσουμε ένα πλήθος προς επεξεργασία δεδομένων. Στην προκείμενη περίπτωση αφού διαχωρίσουμε το δείγμα των πραγματικών αποδόσεων ανά τριετίες και χρησιμοποιώντας τη λειτουργία **“Sampling”** από το **Data Analysis** του **Excel** καθορίζουμε μία νέα σειρά εβδομαδιαίων πραγματικών αποδόσεων για κάθε μετοχή. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία **100** φορές και εκτιμούμε τις μέσες αποδόσεις. Έχοντας ως τιμή εκκίνησης την τιμή της πρώτης εβδομάδας κάθε μετοχής υπολογίζουμε την τιμή των επόμενων εβδομάδων σύμφωνα με τον τύπο

$$\ln(S_{it}) - \ln(S_{it-1}) = R^*_{it}$$

όπου,

$S^*_{it}$ = η εκτιμώμενη τιμή της μετοχής **i** την εβδομάδα **t**

$S^*_{it-1}$ = η εκτιμώμενη τιμή της μετοχής **i** την εβδομάδα **t-1**

$R^*_{it}$ = η απόδοση που προέκυψε μετά την επανατοποθέτηση της μετοχής **i** για την εβδομάδα **t**

Τέλος υπολογίζουμε τις εβδομαδιαίες αποδόσεις κάθε μετοχής σύμφωνα με τον τύπο $R_{it} = \ln\left(\frac{S^*_t}{S^*_{t-1}}\right)$. Το σύνολο των εξαγόμενων αποτελεσμάτων αποτελεί το προσομοιωμένο σύμφωνα με τη μέθοδο **Bootstrapping** δείγμα προς περαιτέρω επεξεργασία.

Δ)Υπολογισμός αποδοτικού συνόρου σύμφωνα με το μοντέλο του **Roll** για τις προσομοιωμένες αποδόσεις ανά τριετία

Βασική εφαρμογή της παρούσας εργασίας αποτελεί ο υπολογισμός των αποδοτικών συνόρων των μετοχικών χαρτοφυλακίων σύμφωνα με το τροποποιημένο υπόδειγμα του **Markowitz,** όπως αυτό αναπτύχθηκε από τον **Roll** το **1977** στο άρθρο του **"A critique of the asset pricing theory's test – Part I".** Η έννοια του αποδοτικού συνόρου αναφέρεται σε άριστους συνδυασμούς αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης ενός χαρτοφυλακίου. Η συνεισφορά του **Roll** στη θεωρία του **Markowitz** έγκειται στην προσθήκη της δυνατότητας προθεσμιακής πώλησης χρεογράφων **(short selling).** Αποτέλεσμα της αποδοχής αυτής είναι η άρση του περιορισμού των θετικών ποσοστών επένδυσης σε κάθε χρεόγραφο. Συνεπώς σύμφωνα με τον **Roll** τα άριστα ποσοστά επένδυσης, δηλαδή οι συνδυασμοί επένδυσης σε κάθε μετοχή του χαρτοφυλακίου που δίνουν το αποδοτικό σύνορο, μπορούν να παίρνουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.

Αναλυτικότερα, η καμπύλη αποδοτικού συνόρου συνθέτεται από χαρτοφυλάκια με ελάχιστη διακύμανση για κάθε δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης μέσης απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Δεδομένων των βασικών χαρακτηριστικών της μέσης απόδοσης, της διακύμανσης και της συνδιακύμανσης των χρεογράφων που περιλαμβάνονται σε ένα χαρτοφυλάκιο, το τελευταίο προσδιορίζεται από τα ποσοστά επένδυσης σε κάθε μετοχή. Ως εκ τούτου για τον προσδιορισμό του αποδοτικού συνόρου απαιτείται η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του εξεταζόμενου χαρτοφυλακίου δεδομένων ότι α)Τα ποσοστά επένδυσης αθροίζουν στη μονάδα και β) Η αναμενόμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι γραμμικός συνδυασμός των ποσοστών επένδυσης στις μετοχές του χαρτοφυλακίου καθώς και των μέσων αναμενόμενων αποδόσεων αυτών. Ο μαθηματικός ορισμός της ως άνω έκφρασης προκύπτει ως:

$$\min \sigma^2(R_p) \equiv \min \sum_{i=1}^{N} x_i^2 * \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i * x_j * Cov(R_i,R_j)$$

$$\text{s.t. i) } E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i * E(R_i)$$

**ii)** $\sum_{i=1}^{N} x_i$ **= 1**

Με τη βοήθεια των πινάκων το ανωτέρω πρόβλημα ελαχιστοποίησης ορίζεται ως:

**Minimize** $\sigma^2(R_p) = X_p^T * V * X_p$

**s.t. (i)** $E(R_p) = X_p^T * R = r_p$

**(ii)** $X_p^T * u = 1$

όπου,

$X_p$ **=** ο **n * 1** πίνακας **-** διάνυσμα στήλη **-** που περιλαμβάνει τα ποσοστά επένδυσης $x_1, x_2, \dots x_n$, στις μετοχές $S_1, S_2, \dots S_n$ του χαρτοφυλακίου **p**

$$X_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$X_p^T$ **=** ο ανάστροφος πίνακας **–** το διάνυσμα γραμμή **- 1 * n** που προκύπτει από τον πίνακα $X_p$ κάνοντας τις στήλες γραμμές ή ισοδύναμα τις γραμμές στήλες

$$X_p^T = \begin{bmatrix} x_{1.}\, x_2 \dots\dots\ x_n \end{bmatrix}$$

**V =** ο **n * n** συμμετρικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων των χρεογράφων του χαρτοφυλακίου**.** Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα αποτελούν τις διακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών που περιλαμβάνονται στο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο**,** ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι οι συνδιακυμάνσεις αυτών**.**

$$V = \begin{bmatrix} s_1^{\,2} . s_{12} \dots\dots\ s_{1n} \\ s_{21} . s_{22} \dots\dots\ s_{2n} \\ . \\ . \\ s_{n1} . s_{n2} \dots\dots\ s_n^{\,2} \end{bmatrix}$$

**R = ο n * 1** πίνακας – διάνυσμα στήλη - των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών του χαρτοφυλακίου

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ . \\ . \\ . \\ R_n \end{bmatrix}$$

**u = ο n * 1** μοναδιαίος πίνακας

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ε$(\mathbf{R_p})$ **=** η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

Ο **Roll** απέδειξε πως η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος ελαχιστοποίησης για τον προσδιορισμό των «άριστων ποσοστών επένδυσης» δίνεται από τον τύπο,

$$\mathbf{X_p = V^{-1}\ (Ru) * A^{-1} *} \begin{pmatrix} \mathbf{r_p} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{(4.6)}$$

όπου,

**V = ο n * n** συμμετρικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων όπως προαναφέρθηκε.

$\mathbf{V^{-1}}$ **=** ο αντίστροφος πίνακας των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, για τον οποίο ισχύει $\mathbf{V * V^{-1} = u}$

**Ru = ο n * 2** πίνακας τα στοιχεία της πρώτης στήλης του οποίου είναι τα στοιχεία του πίνακα **R** και τα στοιχεία της δεύτερης στήλης είναι ο μοναδιαίος πίνακας

**A = ο n * n** πίνακας υπερβαλουσών αποδόσεων που ορίζεται ως,

$$\mathrm{A} = \mathbf{(Ru)^T * V^{-1} * Ru}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

με **a** = $R^T * V^{-1} * R$, **b** = $R^T * V^{-1} * u$, **c** = $u^T * V^{-1} * u$

$A^{-1}$ = **ο** αντίστροφος πίνακας υπερβαλουσών αποδόσεων, για τον οποίο ισχύει $A * A^{-1} = u$

Απόδειξη

Με τη βοήθεια της συνάρτησης του **Lagrange** το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης ορίζεται ως:

$$L = X_p^T * V * X_p - \lambda_1 * (X_p^T * R - r_p) - \lambda_2 * (X_p^T * u - 1)$$

Από την πρώτη συνθήκη προκύπτει ότι:

$$V * X = \frac{1}{2} * (\lambda_1 * R + \lambda_2 * u) \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} * V^{-1} * (Ru) * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Η σχέση **(4.7)** ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός μεταξύ των χρεογράφων των χαρτοφυλακίων ο οποίος να δίνει τέλεια συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεών τους, ενώ παράλληλα κανένα χρεόγραφο εντός του χαρτοφυλακίου δεν έχει μηδενική διακύμανση, δηλαδή δεν είναι μηδενικού κινδύνου.

Πολλαπλασιάζοντας στη σχέση **(4.7)** με τον πίνακα $(Ru)^T$ και στη συνέχει εφαρμόζοντας τους περιορισμούς **s.t.1** και **s.t.2** και χρησιμοποιώντας τον πίνακα υπερβαλουσών αποδόσεων (όπως ορίστηκε ανωτέρω) προκύπτει ότι:

$$(Ru)^T * X = (Ru)^T * \frac{1}{2} * V^{-1} * (Ru) * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(Ru)^T * X = \frac{1}{2} * (Ru)^T * V^{-1} * (Ru) * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(Ru)^T * X = \frac{1}{2} * A * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = A^{-1} * (Ru)^T * X \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} r_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Τέλος αντικαθιστώντας τη σχέση **(4.8)** στη σχέση **(4.7)** προκύπτει:

$$X = \frac{1}{2} * \mathbf{V^{-1}} * \mathbf{(Ru)} * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \mathbf{V^{-1}} * \mathbf{(Ru)} * \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \mathbf{V^{-1}} * \mathbf{(Ru)} * A^{-1} * \begin{pmatrix} r_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, ο προσδιορισμός των άριστων ποσοστών επένδυσης σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, δηλαδή των ποσοστών επένδυσης που δίνουν την ελάχιστη διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου για κάθε επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης του δίνονται από τον τύπο **(4.6).** Εναλλακτικά ο τύπος **(4.6)** εκφράζει τα ποσοστά επένδυσης ως συνάρτησης της μέσης απαιτούμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Ο επενδυτής καλείται να εισάγει την επιθυμητή (απαιτούμενη) απόδοση προκειμένου να λάβει τα ποσοστά επένδυσης σε κάθε αξιόγραφο που θα του ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Η τεχνική του **Roll,** επιτρέπει την προθεσμιακή πώληση χρεογράφων και ως εκ τούτου είναι δυνατή η εξεύρεση αρνητικών ποσοστών επένδυσης σε ένα ή περισσότερα χρεόγραφα. Θα πρέπει να υπογραμμισθεί ο περιορισμός ότι ο τύπος **(4.6)** ισχύει ως λύση του μαθηματικού προβλήματος ελαχιστοποίησης μόνο στην περίπτωση που κανένα από τα χρεόγραφα που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο δεν έχει μηδενική διακύμανση καθώς και εφόσον δεν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των χρεογράφων με τέλεια συσχέτιση ή μηδενική διακύμανση αντίστοιχα. Οι περιορισμοί προκύπτουν από την ανάγκη της δυνατότητας αναστροφής των πινάκων A και **V.**

Εν συνεχεία ο **Roll** εξέφρασε την ελάχιστη διακύμανση του ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου ως συνάρτηση της απαιτούμενης μέσης απόδοσής του, αποδεικνύοντας ότι:

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \frac{a - 2*b*r_p + c*r_p^2}{a*c - b^2} \equiv \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * A^{-1} * \begin{pmatrix} r_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Με τη βοήθεια πινάκων η διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου ορίζεται ως $\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \mathbf{X_p}^{T} * \mathbf{V} * \mathbf{X_p}$.

Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση **(4.6)** προκύπτει ότι,

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * A^{-1} * (\mathbf{Ru})^{T} * \mathbf{V}^{-1} * \mathbf{V} * \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Ru}) * A^{-1} * \begin{pmatrix} \mathbf{r_p} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * A^{-1} * (\mathbf{Ru})^{T} * \mathbf{V}^{-1} * (\mathbf{Ru}) * A^{-1} * \begin{pmatrix} \mathbf{r_p} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * A^{-1} * A * A^{-1} * \begin{pmatrix} \mathbf{r_p} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * A^{-1} * \begin{pmatrix} \mathbf{r_p} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \dfrac{c}{ac-b^2} & \dfrac{-b}{ac-b^2} \\ \dfrac{-b}{ac-b^2} & \dfrac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{r_p} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \begin{pmatrix} r_p & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \dfrac{c*r_p-b}{ac-b^2} \\ \dfrac{-b*r_p+a}{ac-b^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^2(\mathbf{R_p}) = \frac{a-2*b*r_p+c*r_p^2}{a*c-b^2}.$$

Στο χώρο της αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης, η καμπύλη του συνόρου απεικονίζεται γραφικά ως υπερβολή.

Για τον υπολογισμό του αποδοτικού συνόρου της εξεταζόμενης ομάδας μετοχών κάθε τριετίας, ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

α) Υπολογίστηκε ο πίνακας μέσων αποδόσεων **R** από το προσομοιωμένο δείγμα που προέκυψε από το στάδιο Γ.**1** ή Γ.**2.** και μέσω αυτού ο πίνακας διακυμάνσεων **–** συνδιακυμάνσεων με τον αντίστροφό του **V** και $\mathbf{V}^{-1}$ **(**Παράρτημα Ι **- Variance-Covariance Matrix** και **Inversed Variance-Covariance Matrix).**

β**)** Εκτιμήθηκαν τα στοιχεία του πίνακα Α από τον τύπο Α**=(Ru)**$^{T}$ ***** **V**$^{-1}$ *** Ru** και ο αντίστροφός του Α$^{-1}$ **(**Παράρτημα ΙΙ **- Matrix A** και **Inversed Matrix A).**

γ**)** Υπολογίστηκε ο πίνακας **V**$^{-1}$ ***** **(Ru)** ***** Α$^{-1}$ και εν συνεχεία θέτοντας ως επιθυμητή απόδοση **1**‰ και **5**‰ αντίστοιχα**,** εκτιμήθηκαν τα άριστα ποσοστά επένδυσης βάσει των οποίων επιτυγχάνεται η επιθυμητή απόδοση με την ελάχιστη διακύμανση **(**Παράρτημα ΙΙ **- Optimal investment proportions).**

δ**)** Υπολογίστηκε βάσει του τύπου $\sigma^2(R_p) = \dfrac{a-2*b*r_p+c*r_p^2}{a*c-b^2}$ η ελάχιστη διακύμανση του εξεταζόμενου χαρτοφυλακίου για διάφορα επίπεδα μέσης απόδοσης και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση **(**Παράρτημα ΙΙ **- Efficient Frontier)**

ε**)** Απεικονίστηκε διαγραμματικά το αποδοτικό σύνορο ως συνδυασμοί των τυχαίων επιλεγμένα μέσων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και της αντίστοιχης ελάχιστης τυπικής απόκλισης αυτών **(**Παράρτημα ΙΙΙ**)**

<u>Ε**)**Υπολογισμός αποδοτικού συνόρου σύμφωνα με το μοντέλο του **Roll** των πραγματικών αποδόσεων ακολουθούμενου, της εξεταζόμενης τριετίας, εξαμήνου</u>

Ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το στάδιο Δ όπου για τον υπολογισμό των πινάκων μέσης απόδοσης **R,** διακυμάνσεων**-**συνδιακυμάνσεων **V,** υπερβαλουσών αποδόσεων Α καθώς και των αντίστροφων τους**,** χρησιμοποιήθηκε το δείγμα των πραγματικών αποδόσεων για το εξεταζόμενο εξάμηνο**,** όπως αυτές προκύπτουν από τον τύπο $R_{it} = \ln \dfrac{P_{it}}{P_{it-1}}$ **.**

<u>ΣΤ**)** Έλεγχος διαχρονικής στασιμότητας των πινάκων μέσης απόδοσης και διακύμανσης**-**συνδιακύμανσης σύμφωνα με τις ελεγχοσυναρτήσεις **F-stat** και **T-stat** και κατά συνέπεια έλεγχος προβλεπτικής ικανότητας των μεθόδων προσομοίωσης**.**</u>

Προκειμένου για να διαπιστώσουμε την προβλεπτική ικανότητα των μεθόδων προσομοίωσης στο υπολογισμό των άριστων ποσοστών επένδυσης ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου και κατ' επέκταση στον υπολογισμό του αποδοτικού συνόρου για το ακολουθούμενου της χρονικής στιγμής $\mathbf{t_o}$ εξαμήνου, χρησιμοποιούμε τον τύπο X **=** $\mathbf{V^{-1}}$ *** (Ru) *** $A^{-1}$ ***** $\begin{pmatrix} r_p \\ 1 \end{pmatrix}$

Δεδομένου ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} r_p \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι κοινός ενώ ο πίνακας $A^{-1}$ ορίζεται από τους πίνακες **Ru** και **V** αντίστοιχα, αρκεί να ελέγξουμε τις μήτρες μέσης απόδοσης **R** και διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων **V** των προσομοιωμένων αποδόσεων με τις αντίστοιχες των πραγματικών αποδόσεων του ακολουθούμενου εξαμήνου. Ο έλεγχος της ομοιότητας των μέσων αποδόσεων πραγματοποιείται μέσω της ελεγχοσυνάρτησης **t-test**[5] ενώ ο έλεγχος της ομοιότητας των δικαυμάνσεων συνδιακυμάνσεων πραγματοποιείται μέσω της ελεγχοσυνάρτησης **f-test**[6].

α) Για τον έλεγχο των μέσων αποδόσεων χρησιμοποιείται η συνάρτηση

$$t_c = \frac{(r_i - r_i^*)}{S_i * \sqrt{2/T}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

όπου,

$\mathbf{t_c}$ **=** κεντρική **t** κατανομή με **2(T-1)** βαθμούς ελευθερίας

T = ο αριθμός των παρατηρήσεων

$\mathbf{r_i}$, $\mathbf{r_i^*}$ **=** οι μέσες αποδόσεις της μετοχής **i** εκτιμώμενες χρησιμοποιώντας τις προσομοιωμένες αποδόσεις της μετοχής για την εξεταζόμενη τριετία και τις αντίστοιχες πραγματικές του ακολουθούμενου εξαμήνου

$\mathbf{s_i}$ **=** $\sqrt{\dfrac{s^2 + s^{*2}}{2}}$ **=** ένας αμερόληπτος εκτιμητής της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού.

Ο έλεγχος των μέσων αποδόσεων των προσομοιωμένων και πραγματικών αποδόσεων μπορεί να στηριχθεί στην είτε στην υπόθεση ότι το πλήθος των παρατηρούμενων αποδόσεων έχουν την ίδια διακύμανση ή ότι δεν έχουν την ίδια διακύμανση. Στην περίπτωση που τα δείγματα έχουν τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι το ίδιο ανεξαρτήτως υποθέσεως.

---

[5] Blalock (1972)
[6] Box (1949)

Για τον έλεγχο της ισότητας των μέσων αποδόσεων θέτουμε ως μηδενική υπόθεση την $H_o$ **=** $\mathbf{r_i = r_i^*}$**,** έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_\mathbf{1}$ **=** $\mathbf{r_i \neq r_i^*}$**.** Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεκτή εφόσον $|.t_c|$ **<** $\mathbf{t_{\alpha,2(T-1)}}$**.** Δεδομένου ότι το επίπεδο σημαντικότητας α **= 0,05** και **T = 20** σύμφωνα με τους πίνακες της ελεγχοσυνάρτησης **t** η κρίσιμη τιμή είναι **t = 1,65**

β**)** Για τον έλεγχο των διακυμάνσεων **–** συνδιακυμάνσεων χρησιμοποιείται η συνάρτηση**:**

$$\mathbf{F} = \frac{f_1(T-1)}{1-\frac{2p^2+3p+1}{4(p+1)(T-1)}-\frac{f_1}{f_2}} * \ln \frac{\frac{(|S_g+S_g^*|)^2}{4}}{|S_g| * |S_g^*|}$$

όπου**,**

$$\mathbf{f_1} = \frac{1}{2} * \mathbf{p} * (\mathbf{p} + \mathbf{1})$$

$$\mathbf{f_2} = \frac{24[(p+1)^2(T-1)[p(p+1)+4]}{14(p-1)(p+2)(p+1)^2-3(2p^2+3p-1)^2}$$

**p =** ο αριθμός των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο

$\mathbf{S_g}$**,** $\mathbf{S_g^*}$ **=** οι αμερόληπτοι πίνακες διακυμάνσεων **-** συνδιακυμάνσεων χρησιμοποιώντας τις προσομοιωμένες αποδόσεις της μετοχής για την εξεταζόμενη τριετία και τις αντίστοιχες πραγματικές του ακολουθούμενου εξαμήνου

$|S|$ **=** η ορίζουσα του πίνακα διακυμάνσεων **-** συνδιακυμάνσεων

Για τον έλεγχο της ισότητας των πινάκων διακύμανσης**-**συνδιακύμανσης θέτουμε ως μηδενική υπόθεση την $H_o$ **=** $\mathbf{S_g}$**, =** $\mathbf{S_g^*}$**,** έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_\mathbf{1}$ **=** $\mathbf{S_g \neq S_g^*}$**.** Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεκτή εφόσον $|.F|$ **<** $\mathbf{F_{\alpha,f1,f2}}$**.**

# *ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5$^{ο}$ – ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ*

Όπως έχει εως τώρα προσδιοριστεί, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εξέταση της δυνατότητας εφαρμογής της μεθόδου προσομοίωσης **Monte Carlo** προκειμένου για την ικανοποιητική πρόβλεψη των άριστων ποσοστών επένδυσης ενός χαρτοφυλακίου και την εξαγωγή του συνεπαγόμενου αποδοτικού συνόρου. Λόγω των βασικών μειονεκτημάτων της μεθόδου οι οποίες αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο **4** και παρουσιάζονται παρακάτω, για λόγους σύγκρισης και αξιολόγησης προστέθηκε στην παρούσα ανάλυση η μέθοδος επανατοποθέτσης **Bootstrap.** Αρχικώς η μελέτη προσδιορίστηκε στη σύγκριση των αποδοτικών συνόρων που προκύπτουν ανά εξεταζόμενη τριετία με τις μεθόδους **monte carlo** και **bootstrap** με το αντίστοιχο αποδοτικό σύνορο των πραγματικών αποδόσεων του ακολουθούμενου της τριετίας εξαμήνου. Προκειμένου να διερευνηθεί η σημασία της χρονικής περιόδου εξέτασης προστέθηκε στην ανάλυση μας η παράλληλη εξαγωγή και συγκριτική μελέτη των αποδοτικών συνόρων των πραγματικών αποδόσεων του ακολουθούμενου της εξεταζόμενης τριετίας, έτους.

Συνοπτικά, προσδιορίσαμε χρησιμοποιώντας τις μεθόδους προσομοίωσης **monte carlo** και **bootstrap,** τα άριστα ποσοστά επένδυσης και τα αποδοτικά σύνορα για τις τριετίες **1997-1999, 1998-2000, 1999-2001, 2000-2002, 2001-2003, 2002-2004.** Εν συνεχεία προσδιορίσαμε τα αποδοτικά σύνορα των πραγματικών αποδόσεων και τα άριστα ποσοστα επένδυσης για τα έτη **2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005** καθώς και τα αντίστοιχα των πρώτων εξαμήνων των προαναφερθέντων ετών. Τα άριστα ποσοστά επένδυσης προέκυψαν σύμφωνα με τη μέθοδο του **Roll,** για μέση εβδομαδιαία απόδοση χαρτοφυλακίου **0,1%** και **0,5%** αντίστοιχα.

Ακολουθούν συγκεντρωτικοί πίνακες των άριστων ποσοστών επένδυσης κάθε μεθόδου,για κάθε εξεταζόμενη περίοδο ανά ομάδα χαρτοφυλακίου.

**(FOLDER** ΣΥΝΟΛΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΩΝ **– SHEET 1)**

Παρατηρώντας τους ανωτέρω πίνακες άριστων ποσοστών επένδυσης ανά ομάδα χαρτοφυλακίου, εξ' αρχής διαπιστώνει κανείς ότι οι μέθοδοι προσομοίωσης δε φαίνεται να προσδιορίζουν με ικανότητα τα πραγματικά άριστα ποσοστά επένδυσης των πραγματικών αποδόσεων ανά έτος ή ανά τριετία. Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε μέσω της σταστικής επιστήμης την εικόνα των παραπάνω πινάκων εφαρμόζουμε δύο ελέγχους μηδενικής υπόθεσης.

Σύμφωνα με το μοντέλο του **Roll** τα άριστα ποσοστά επένδυσης σε ένα χαρτοφυλάκιο με αξιόγραφα κινδύνου, προσδιορίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{X_p = V^{-1}\ (Ru) * A^{-1} *} \begin{pmatrix} r_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου,

**$X_p$ =** ο **n * 1** πίνακας που περιλαμβάνει τα ποσοστά επένδυσης **$x_1$, $x_2$, … $x_n$,** στις μετοχές του χαρτοφυλακίου **p**

**R =** ο **n * 1** πίνακας των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών του χαρτοφυλακίου

**u =** ο **n * 1** μοναδιαίος πίνακας

Ε**($R_p$) =** η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

**V =** ο **n * n** συμμετρικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα αποτελλούν τις διακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών που περιλαμβάνονται στο επενδυτικό χαρτοφυλάκιο, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι οι συνδιακυμάνσεις αυτών.

**$V^{-1}$ =** ο αντίστροφος πίνακας των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, για τον οποίο ισχύει **$V * V^{-1} = I$**

**Ru =** ο **n * 2** πίνακας τα στοιχεία της πρώτης στήλης του οποίου είναι τα στοιχεία του πίνακα **R** και τα στοιχεία της δεύτερης στήλης είναι ο μοναδιαίος πίνακας

**A =** ο **n * n** πίνακας υπερβαλλουσών αποδόσεων που ορίζεται ως,

$A = (Ru)^T * V^{-1} * Ru$

$A^{-1}$ **= ο** αντίστροφος πίνακας υπερβαλουσών αποδόσεων, για τον οποίο ισχύει $A * A^{-1} = I$

Είναι προφανές πως για το εκάστοτε εξεταζόμενο χαρτοφυλάκιο η επιθυμητή απόδοση **$r_p$** καθώς και ο μοναδιαίος πίνακας είναι κοινοί.

Λαμβανομένου υπόψιν πως ο πίνακας υπερβαλουσών αποδόσεων πρσδιορίζεται από τον πίνακα αποδόσεων και τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η ομοιότητα ή διαφοροποίηση των άριστων ποσοστών επένδυσης ενός χαρτοφυλακίου προσδιορίζονται από τους τελευταίους. Προκειμένου για τον προσδιορισμό της μεταβλητότητας του πίνακα αποδόσεων προβαίνουμε σε έλεγχο υποθέσεων σύμφωνα με την ελεγχοσυνάρτηση **t-test,** ενώ για τη μεταβλητότητα των πινάκων διακύμανσης-συνδιακύμανσης προχωρήσαμε σε έλεγχο υποθέσεων βάσει της ελεγχοσυνάρτησης **F-test.** Ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση των ανωτέρω ελέγχων.

## *ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕΣΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ : T-TEST*

Για τον έλεγχο της ισότητας των μέσων αποδόσεων χρησιμοποιούμε την ελεγχοσυνάρτηση **t-test** οποία προσδιορίζεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$t_c = \frac{r_i - r_i^*}{S_i * \sqrt{\frac{2}{T}}}$$

όπου,

$t_c$ ακολουθεί την **t** κατανομή με **2(**T**-1)** βαθμούς ελευθερίας

$r_i$, $r_i^*$ = οι μέσες πραγματικές και προσομοιούμενες αποδόσεις αντίστοιχα του χρεογράφου **I**

$S_i$ = ένας αμερόληπτος εκτιμητής της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού που ορίζεται ως $S_i = \sqrt{\frac{s^2 + s^{*2}}{2}}$

**T** = το πλήθος των παρατηρήσεων

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο **4** προκειμένου για την πραγματοποίηση του ελέγχου θέτουμε ως μηδενική υπόθεση την $H_o$ = $r_i = r_i^*$, έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1$ = $r_i \neq r_i^*$. Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεκτή εφόσον $|.t_c|$ < $t_{\alpha,2(T-1)}$. Δεδομένου ότι το επίπεδο σημαντικότητας α = **0,05** και **T = 20** αντίστοιχα, $t_{\alpha,2(T-1)} = t_{0,05,2(20-1)}$. Σύμφωνα με τους πίνακες της ελεγχοσυνάρτησης **t** η κρίσιμη τιμή είναι **t = 1,65.** Ακολουθεί πίνακας των αποτελεσμάτων του ελέγχου για κάθε εξεταζόμενη περίοδο. **(EXL TESTS)**

## *ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ : F-TEST*

Για τον έλεγχο της ισότητας των πινάκω διακύμανσης - συνδιακύμανσης χρησιμοποιούμε την ελεγχοσυνάρτηση **t-test** οποία προσδιορίζεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathbf{F} = \frac{f_1(T-1)}{1-\frac{2p^2+3p+1}{4(p+1)(T-1)}-\frac{f_1}{f_2}} * \ln \frac{\frac{(|S_g+S_g^*|)^2}{4}}{|S_g| * |S_g^*|}$$

όπου,

**F** ακολουθεί την κεντρική **F** κατανομή με $\mathbf{f_1}$ και $\mathbf{f_2}$ βαθμούς ελευθερίας

$$\mathbf{f_1} = \frac{1}{2} * p * (p+1)$$

$$\mathbf{f_2} = \frac{24[(p+1)^2(T-1)[p(p+1)+4]}{14(p-1)(p+2)(p+1)^2-3(2p^2+3p-1)^2}$$

όπου,

**p** = ο αριθμός των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο

$\mathbf{S_g}$, $\mathbf{S_g^*}$ = οι αμερόληπτοι πίνακες διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων χρησιμοποιώντας τις προσομοιωμένες αποδόσεις της μετοχής για την εξεταζόμενη τριετία και τις αντίστοιχες πραγματικές του ακολουθούμενου εξαμήνου

$|S|$ = η ορίζουσα του πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων

**T** = το σύνολο των παρατηρήσεων και των δύο περιόδων

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο **4** για τον έλεγχο της ισότητας των πινάκων διακύμανσης-συνδιακύμανσης θέτουμε ως μηδενική υπόθεση την $H_o$ = $\mathbf{S_g}$, = $\mathbf{S_g^*}$, έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1$ = $\mathbf{S_g} \neq \mathbf{S_g^*}$. Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεκτή εφόσον $|.F|$ < $\mathbf{F_{\alpha,f1,f2}}$. Δεδομένου ότι το επίπεδο σημαντικότητας α = **0,05,** οι βαθμοί ελευθερίας $\mathbf{f_1}$ = **210,** $\mathbf{f_2}$ = **2078,665** για T = **208** παρατηρήσεις και $\mathbf{f_2}$ = **1589,282** για T = **182** παρατηρήσεις σύμφωνα με τους πίνακες της ελεγχοσυνάρτησης **F** η κρίσιμη τιμή είναι **F = 1** για τη σύγκριση των πινάκων διακύμανσης συνδιακύμανσης της εξεταζόμενης τριετίας τόσο με τους αντίστοιχους του ακολουθούμενου έτους όσο και με του ακολουθούμενου εξαμήνου**.** Ακολουθούν πίνακες των απαιτούμενων για τους υπολογισμούς μας οριζουσών καθώς και συνοπτικός πίνακας των αποτελεσμάτων των ελέγχων για κάθε εξεταζόμενη περίοδο.

| group a | V - MC | V-Bootstrap | V -Y | V - Sem |
|---|---|---|---|---|
| 1997-1999 | 2,63471E-48 | 1,49041E-50 | 2,69123E-57 | 2,59231E-65 |
| 1998-2000 | 3,04361E-43 | 4,13717E-51 | 2,42299E-59 | 4,10301E-68 |
| 1999-2001 | 7,27306E-41 | 3,83292E-51 | 1,06005E-61 | 7,33092E-72 |
| 2000-2002 | 4,85955E-50 | 5,66837E-57 | 1,88379E-65 | 5,91543E-60 |
| 2001-2003 | 4,21686E-56 | 6,14373E-59 | 4,65482E-62 | 1,10E-67 |
| 2002-2004 | 1,54131E-54 | 2,82E-62 | 1,67793E-68 | 1,67793E-68 |
| | | | | |
| **group b** | **V - MC** | **V-Bootstrap** | **V -Y** | **V - Sem** |
| 1997-1999 | 1,3213E-48 | 1,28821E-49 | 2,2245E-54 | 3,24978E-59 |
| 1998-2000 | 1,65347E-41 | 9,20284E-50 | 4,59592E-56 | 1,98494E-61 |
| 1999-2001 | 1,47685E-37 | 1,35869E-50 | 6,24947E-61 | 7,57119E-71 |
| 2000-2002 | 1,68509E-45 | 2,09855E-55 | 4,19521E-58 | 1,5014E-64 |
| 2001-2003 | 8,12015E-52 | 2,81489E-56 | 2,21461E-59 | 1,92837E-65 |
| 2002-2004 | 1,55836E-53 | 1,65477E-57 | 1,28102E-63 | 1,24339E-66 |
| | | | | |
| | | **[S+S*]** | | |
| **group a** | **M.C - Y** | **M.C - Sem** | **Bootstrap - Y** | **Bootstrap - Sem** |
| 1997-1999 | 1,15479E-43 | 3,84835E-44 | 5,8973E-46 | 2,05742E-46 |
| 1998-2000 | 9,72028E-41 | 4,73874E-41 | 5,66552E-47 | 1,35885E-47 |
| 1999-2001 | 2,67218E-39 | 7,11814E-40 | 1,39377E-47 | 1,0269E-48 |
| 2000-2002 | 4,36123E-46 | 1,89612E-46 | 5,64244E-51 | 9,62814E-52 |
| 2001-2003 | 1,0647E-50 | 1,81363E-51 | 5,09897E-47 | 1,22296E-47 |
| 2002-2004 | 9,40403E-50 | 9,40403E-50 | 1,25439E-47 | 1,25E-47 |
| | | | | |
| **group b** | **M.C - Y** | **M.C - Sem** | **Bootstrap - Y** | **Bootstrap - Sem** |
| 1997-1999 | 1,00466E-43 | 3,34807E-44 | 5,13065E-46 | 1,78995E-46 |
| 1998-2000 | 8,45664E-41 | 4,12271E-41 | 4,929E-47 | 1,1822E-47 |
| 1999-2001 | 2,32479E-39 | 6,19278E-40 | 1,21258E-47 | 8,93407E-49 |
| 2000-2002 | 3,79427E-46 | 1,64963E-46 | 4,90892E-51 | 8,37648E-52 |
| 2001-2003 | 9,26285E-51 | 1,57786E-51 | 4,4361E-47 | 1,06398E-47 |
| 2002-2004 | 8,18151E-50 | 8,18151E-50 | 1,09132E-47 | 1,09132E-47 |

| | | **F - test** | | |
|---|---|---|---|---|
| **group a** | **M.C - Y** | **M.C - Sem** | **Bootstrap - Y** | **Bootstrap - Sem** |
| 1997-1999 | 7212724,66 | 7417208,19 | 7207490,48 | 7414639,23 |
| 1998-2000 | 7201898,37 | 7506571,40 | 7394229,59 | 7649511,73 |
| 1999-2001 | 7369206,56 | 7781281,77 | 7604342,22 | 7936433,17 |
| 2000-2002 | 8092479,19 | 6777278,72 | 8333445,58 | 6954154,78 |
| 2001-2003 | 7863454,90 | 7723949,56 | 8631345,56 | 8443138,30 |
| 2002-2004 | 8549983,05 | 7828229,30 | 9712223,44 | 8892450,46 |
| | | | | |
| **group b** | **M.C - Y** | **M.C - Sem** | **Bootstrap - Y** | **Bootstrap - Sem** |
| 1997-1999 | 6897166,38 | 6785187,53 | 6746242,78 | 6649149,33 |
| 1998-2000 | 6604075,43 | 6591757,80 | 6842100,75 | 6776457,50 |
| 1999-2001 | 6881544,05 | 7308592,87 | 7441664,22 | 7761217,32 |
| 2000-2002 | 6684592,95 | 6776807,63 | 7275705,56 | 7274205,07 |
| 2001-2003 | 7035983,98 | 7012976,19 | 7995180,76 | 7907243,48 |
| 2002-2004 | 7849111,89 | 7511653,39 | 8567776,66 | 8169658,31 |

Είναι προφανές πως για κάθε περίοδο και μέθοδο προσημείωσης καταλήγουμε στην απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης καθώς $\left|.F\right|$ **> 1.**

Τα αποτελέσματα της παρούσας ανάλυσης ολοκληρώνονται και επιβεβαιώνονται με τη συγκεντρωτική παρουσίαση των γραφημάτων των αποδοτικών συνόρων ανά εξεταζόμενη περίοδο**.**

**(FOLDER** ΣΥΝΟΛΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΩΝ **– CHARTS)**

## *ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6$^{O}$ - ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ*

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ελέγχων που προηγήθηκαν η επιλογή των μεθόδων προσομοίωσης **Monte Carlo** και **Bootstrap** δε διαγράφει ικανή προβλεπτική ικανότητα στον προσδιορισμό των αποδοτικών συνόρων ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, εξετάζοντας τα συγκεντρωτικά διαγράμματα παρατηρουμε τα εξής:

Για τα έτη **1997 – 1999** έναντι του έτους **2000** καθώς και του πρώτου εξάμηνου του **2000** παρατηρούμε ότι η μέθοδος **Monte Carlo** και **bootstrap** για τις δύο ομάδες χαρτοφυλακίων προσδιορίζουν το αποδοτικό σύνορο του εξεταζόμενου χαρτοφυλακίου αριστερότερα από τα αντίστοιχα των πραγματικών αποδόσεων. Ως εκ τούτου σύμφωνα με τη μέθοδο προσομοίωσης **m.c.** και **bootstrap** το επενδυτικό χαρτοφυλάκιο εμφανίζει μικρότερα επίπεδα κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης. Στην πραγματικότητα ένας επενδυτής κατά το έτος **2000** θα απολάμβανε την ίδια απόδοση στο χαρτοφυλάκιό του με μεγαλύτερο κίνδυνο, από αυτόν που προσδιορίζεται από τις προσομοιωμένες αποδόσεις.

Για τα έτη **1998 – 2000** παρατηρούμε ότι η μέθοδος **Monte Carlo** εμφανίζει υψηλότερα επίπεδα κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης στα υψηλά επίπεδα αποδόσεων και χαμηλότερα επίπεδα κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης στα χαμηλότερα επίπεδα αποδόσεων σε σχέση με το αντίστοιχο αποδοτικό σύνορο πραγματικών αποδόσεων του εξαμήνου **2001** για τις ομάδες μετοχικών χαρτοφυλακίων α και β αντίστοιχα. Αντιθέτως, εμφανίζει χαμηλότερα επίπεδα κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης σε σχέση με τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια που κείτονται επί του αποδοτικού συνόρου του έτους **2001**. Τέλος η μέθοδος **bootstrap** εμφανίζει χαμηλότερα επίπεδα κινδύνου τόσο σε σχέση με το αποδοτικό συνόρο του έτους **2001** όσο και με το αποδοτικό συνορο του πρώτου εξαμήνου του ίδιο έτους.

Για τα έτη **1999-2001** τα εξαγόμενα αποδοτικά σύνορα των **2** μετοχικών χαρτοφυλακίων μέσω της μεθόδου **Monte Carlo** εμφανίζονται δεξιότερα των αντιστοίχων εξαγομένων αποδοτικών συνόρων των πραγματικών αποδόσεων, για το έτος **2002** και το πρώτο εξάμηνο του **2002.** Αντίθετα ισχύει για τη μέθοδο **bootstrap** η οποία εξακολουθεί να προσδιορίζει χαμηλότερα επίπεδα κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης σε σχέση με τα αντίστοιχα αποδοτικά σύνορα των πραγματικών αποδόσεων.

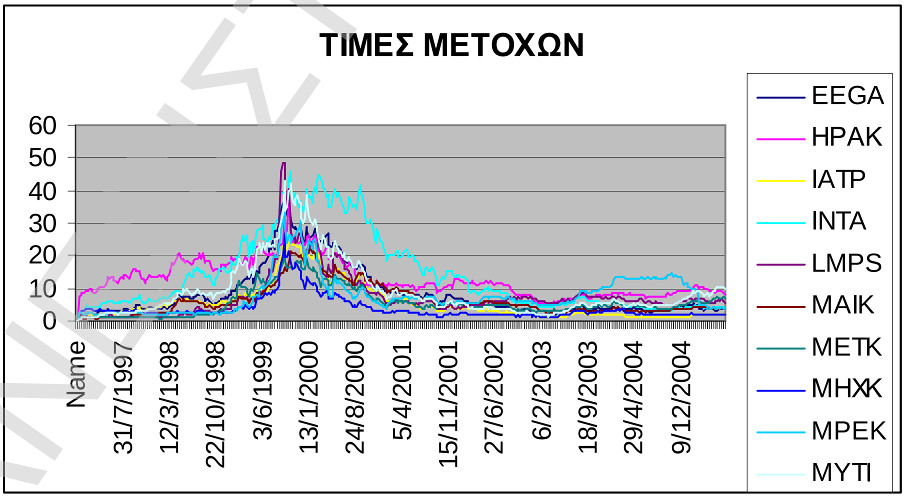
Για τα έτη **2000 – 2002** έναντι του έτους **2003** καθώς και του πρώτου εξάμηνου του **2003** παρατηρούμε ότι η μέθοδος **Monte Carlo** και για τις δύο ομάδες χαρτοφυλακίων προσδιορίζει αποδοτικό σύνορο το οποίο κείτεται χαμηλότερα και δεξιότερα των αντιστοίχων εξαγομένων αποδοτικών συνόρων όπως προκύπτουν από τις ιστορικές αποδόσεις. Τα αποτελέσματα είναι όμοια με τα αντίστοιχα του προηγούμενου έτους τόσο σε σύγκριση της μεθόδου **m.c.** με τα πραγματικά αποδοτικά σύνορα, όσο και με το εξαγόμενο της μεθόδου **bootstrap** αποοτικό σύνορο.

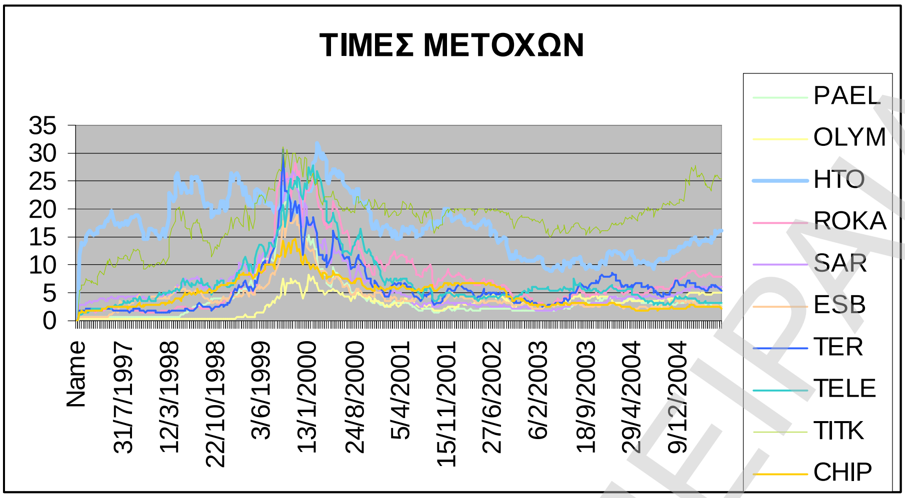
Για τα έτη **2001 – 2003** έναντι του έτους **2004** οι προσομοιωμένες αποδόσεις μέσω της μεθόδου **monte carlo** σε αντίθεση με τη μέθοδο **bootstrap** εξακολουθούν να προσδίδουν αποδοτικά χαρτοφυλάκια με υψηλότερα επίπεδα κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης.

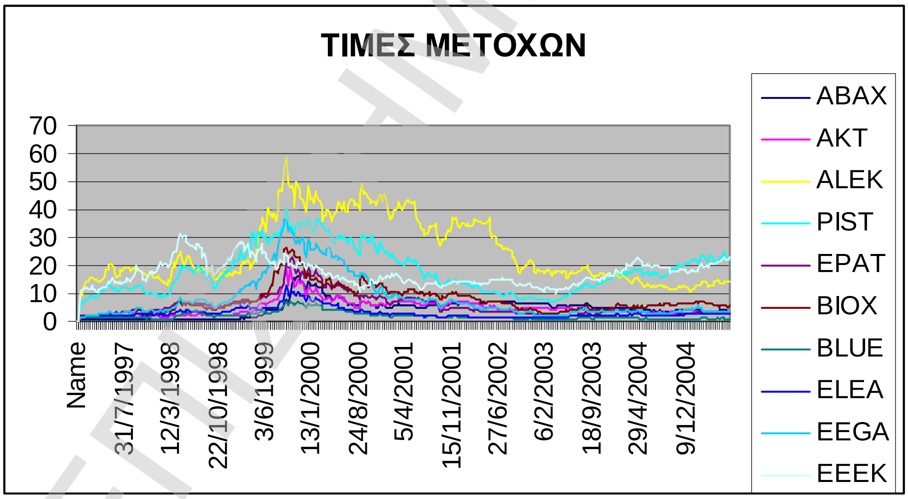
Για τα έτη **2002 – 2004** έναντι του έτους **2005** τα αποδοτικά σύνορα των αποδοτικών χαρτοφυλακίων εξαγόμενα των προσομοιωμένων αποδόσεων της μεθόδου **mc** κείτονται χαμηλότερα και δεξιότερα των αντιστοίχων αποδοτικών συνόρων των πραγματικών αποδόσεων. Παρόμοια με ανωτέρω προσδίδονται χαρτοφυλάκια με υψηλότερα επίπεδα κινδύνου ανα μονάδα απόδοσης.

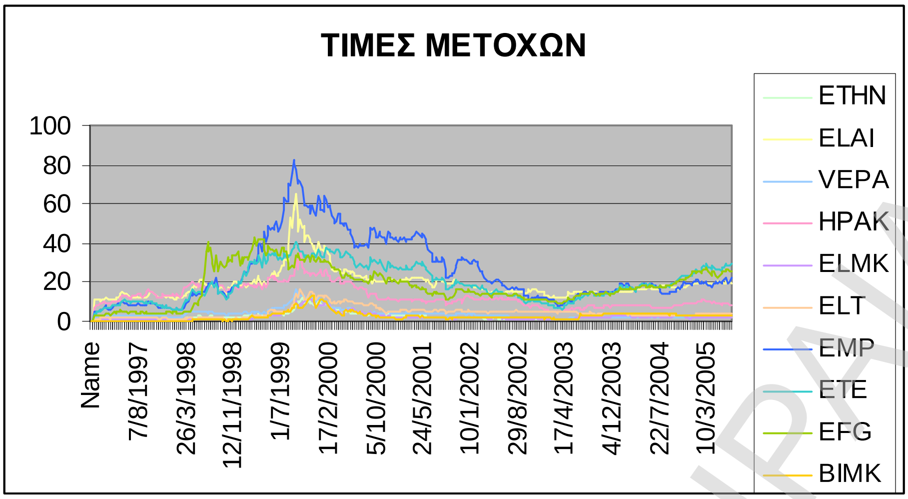
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τα ανωτέρω διαγράμματα η μέθοδος **monte carlo** δείχνει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα στον μεσοπρόθεσμο ορίζοντα έτους παρά τον βραχυπρόθεσμο του εξαμήνου. Αντιθέτως η μέθοδος **bootstrap** δεν εμφανίζει καλή προβλεπτικη ικανότητα καθώς σταθερά υποτιμά τον κίνδυνο των πραγματικών αποδοτικών χαρτοφυλακίων.

Πρωτού προχωρήσουμε σε περαιτέρω διερεύνηση των παραπάνω αποτελεσμάτων αξίζει να σκιαγραφήσουμε την ελληνική χρηματιστηριακή αγορά καθόλη την εξεταζόμενη περίοδο. Είναι εν γένει γνωστό πως το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών παρά τις προόδους που έχουν σημειωθεί τις τελευταίες δεκαετίες εξακολουθεί να παρουσιάζει σημαντικά προβλήματα σε σχέση με άλλες χρηματιστηριακές αγορές του εξωτερικού. Ορισμένα από αυτά είναι η χαμηλή εμπορευσιμότητα των μετοχών, η εταιροβαρής αντιπροσώπευση πολλών δεικτων συμπεριλαμβανομένου και του Γενικού Δείκτη, η ρηχότητα, και ορισμένες φορές το φαινόμενο της χειραγώγησης των επενδυτών. Θα πρέπει αν υπογραμμισθεί ότι κατά την εξεταζόμενη περίοδο **1997-2005** η χρηματιστηριακή αγορά των Αθηνών υπέστη σημαντικές διακυμάνσεις με μία τραγικά απότομη στις αποδόσεις των μετοχών άνοδο κατά τα έτη **1997-1999** την οποία ακολούθησε κατακόρυφη πτωση στα έτη **2000-2002** και σταθεροποίηση έως ικρή άνοδο κατά τα έτη **2003-2005**. Παρατίθενται γραφήματα της κίνησης των τιμών των μετοχών που περιλαμβάνονται στα εξεταζόμενα χαρτοφυλάκια προκειμένου για την τεκμηρίωση της ανωτέρω πρότασης.




ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΟΧΩΝ
35
30
25
20
15
10
5
0
Name
31/7/1997
12/3/1998
22/10/1998
3/6/1999
13/1/2000
24/8/2000
5/4/2001
15/11/2001
27/6/2002
6/2/2003
18/9/2003
29/4/2004
9/12/2004
PAEL
OLYM
HTO
ROKA
SAR
ESB
TER
TELE
TITK
CHIP


ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΟΧΩΝ
70
60
50
40
30
20
10
0
Name
31/7/1997
12/3/1998
22/10/1998
3/6/1999
13/1/2000
24/8/2000
5/4/2001
15/11/2001
27/6/2002
6/2/2003
18/9/2003
29/4/2004
9/12/2004
ABAX
AKT
ALEK
PIST
EPAT
BIOX
BLUE
ELEA
EEGA
EEEK




Περαιτέρω διερεύνηση των διαγραμμάτων των αποδοτικών συνόρων καθιστά αναγκαία τη συνδιασμένη μελέτη των χαρακτηριστικών των μοντέλων προσομοίωσης και της χρηματιστηριακής συγκυρίας κατά την εξεταζόμενη περίοδο. Αρχικώς παρατηρούμε ότι μόνο για τη περίοδο **1997-1999** η μέθοδος **monte carlo** προσδιορίζει αποδοτικά χαρτοφυλάκια με μέση αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου υψηλότερη από την αντίστοιχη των εξαγομένων αποδοτικών συνόρων του έτους **2000** και του ά εξαμήνου του ίδιου έτους. Λαμβανομένου του γεγονότος ότι οι μέσες αποδόσεις των μετοχών για την περίοδο **1997-1999** όπου το χρηματιστήριο ήταν σε ανοδική πορεία ήταν σαφώς υψηλότερες από τις αντίστοιχες του **2000** όπου το ΧΑΑ επήλθε σε καθοδική τροχιά μερικώς μας δίνει το δικαίωμα να προσδιορίσουμε την απόκλιση των προαναφερθέντων αποδοτικών συνόρων. Αντιστοίχως μπορεί να ερμηνευτεί η αντίθετη θέση των αποδοτικών συνόρων εξαγομένων των προσομοιωμένων αποδόσεων από τα αντίστοιχα εξαγόμενα αποδοτικά σύνορα των πραγματικών αποδόσεων.

Ένα δεύτερο στοιχείο της παρούσας ανάλυσης είναι η διαφοροποίηση των εξεταζόμενων περιόδων. Εξετάζοντας προσεχτικά τα αποδοτικά σύνορα των πραγματικών αποδόσεων ανά έτος και ιδίου έτους εξαμήνου παρατηρούμε ότι το αποδότικό σύνορο των αποδόσεων του πρώτου εξαμηνου για κάθε έτος κείτεται σταθερά αριστερότερα από το αντίστοιχο των πραγματικών αποδόσεων του έτους. Εξαίρεση αποτελεί το έτος **2005** όπου τα δύο αποδοτικά σύνορα προσεγγίζουν το ένα το άλλο. Ωστόσο η εξαίρεση εξηγείται λαμβανομένου υπ' όψιν του περιορισμού των στοιχείων των αποδόσεων κατά το έτος **2005** έως την ημερομηνία **07/07/2005.**

Ένα τρίτο στοιχείο το οποιο θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και βασίζεται σε προυπάρχουσες μελέτες[7] είναι το γεγονός ότι τα αποδοτικά σύνορα μεταβάλλονται διαχρονικά. Η εξέταση αποδοτικών συνόρων που προκύπτουν μέσω προσομοιωμένων και πραγματικών αποδόσεων σε διαφορετικές χρονικές περιόδους μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα όσον αφορά στα αίτια της διαφοροποίησής τους

Πέραν της χρηματιστηριακής ανάλυσης θα πρέπει να επαναλάβουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου προσομοίωσης **monte carlo** τα οποία διαφοροποιούν σημαντικά το δείγμα των αποδόσεων βάσει των οποίων εξάγονται τα αποδοτικά σύνορα. Όπως έχει προαναφερθεί, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική κίνηση κατά **Brown** για την κατασκευή του προσομοιωμένου δείγματος συνειδητά πραγματοποιούμε υποθέσεις για την κατανομή του διαταρακτικού όρου. Συγκεκριμένα, ότι ο διαταρακτικός όρος κατανέμεται σύμφωνα με την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Περαιτέρω υποθέσεις για την κατανομή του διαταρακτικού όρου μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά τα χαρακτηριστικά του προσομοιωμένου δείγματος και κατά συνέπεια τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης. Η μέθοδος **Bootstrap** επιτρέπει στο προσομοιωμένο να δείγμα να διατηρεί να χαρακτηριστικά του πραγματικού δείγματος. Π.χ. στην εξέταση χρονολογικών σειρών των αποδόσεων μετοχών εμφανίζεται το στοιχείο της κύρτωσης, που αποτελεί χαρακτηριστικό των πραγματικών αποδόσεων. Ωστόσο και μέσω της μεθόδου **bootstrap** λόγω της επανατοποθέτησης των αποδόσεων χάνουμε ένα σημαντικό στοιχείο του πραγματικού δείγματος, του στοιχείου της αλληλεξάρτησης των αποδόσεων.

<u>Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα:</u>

1. Προκειμένου για την επαλήθευση ή μη των ανωτέρω συμπερασμάτων συνίσταται η επανεξέταση των μεθόδων προσομοίωσης **Monte Carlo** και **Bootstrap** σε χρονικές περιόδους σχετικά μικρών μεταβολών του ΧΑΑ

[7] "Some Empirical Evidence on the Intertemporal Stationarity of Security Return Distributions", George P. Diacogiannis, 1986

2. Επιπλέον συνίσταται η επανάληψη της έρευνας με μεγαλύτερο αριθμό μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο καθώς σύμφωνα με την ισχύουσα βιβλιογραφία η ύπαρξη τουλάχιστον **30** μετοχών ανά χαρτοφυλάκιο κρίνεται αναγκαία για τον προσδιορισμό του ως αποδότικό. Στη παρούσα μελέτη λόγω περιορισμών οι οποίοι αναφέρθηκαν στο εισαγωγικό κεφάλαιο συμπεριλήφθηκαν **20** μετοχές ανά χαρτοφυλάκιο
3. Σημαντική είναι η επανέξεταση του προβληματος χρησιμοποιώντας ημερήσιες και όχι εβδομαδιαίες αποδόσεις. Η αύξηση των παρατηρήσεων αλλά και το γεγονός της ύπαρξης σχεδόν μηδενικών ημερήσιων απδόσεων θα μπορούσε να διαφοροποιήσει σημαντικά τα αποτελέσματα σχετική μελέτης.
4. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αποτελέσματα των εξαγόμενων αποδοτικών συνόρων έτους και εξαμήνου με πραγματικά στοιχεία προτείνεται η περαιτέρω διερεύνηση των μεθόδων προσομοίωσης ανά εξεταζόμενες περιόδους ιδίου διαστήματος, π.χ. έτος – έτος, τριετία –τριετία κ.ο.κ.
5. Αναγνωρίζοντας τη μή διαχρονική σταθερότητα των αποδοτικών συνόρων, προτείνεται η επανάληψη του πειράματος για βραχυχρόνια χρονικά διαστήματα προκειμενου να προσδιοριστεί ο βαθμός κατά τον οποίο η μεταβολή στα αποδοτικά σύνορα οφείλεται σε προσδιοριστικούς παράγοντες που αφορούν στις μεθόδους προσομοίωσης ή εξωγενείς παράγοντες που αφορούν σε γενικότερες οικονομικές καταστάσεις.
6. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί η πρόταση επανάληψης της μελέτης με τη μεθοδο **bootstrap** χρησιμοποιώντας επανατοποθετήσεις περιόδων αποδόσεων και όχι μεμονωμένων αποδόσεων έτσι ώστε να συμπεριληφθεί στο μοντέλο η ιδιότητα της αλληλεξάρτησης των αποδόσεων που υπάρχει στο εμπειρικό δειγμα άλλα χάνεται κατά το στάδι της προσομοίωσης με επανατοποθέτηση.

## ***ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ***

### ***ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ***


– Διακογιάννης Γεώργιος - Τσιριτάκης Εμμανουήλ, «Μακροοικονομικοί παράγοντες και οι αποδόσεις των μετοχών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών».

– Καραθανάσης Γ. - Φίλιππας Ν., «Έλεγχοι παραβίασης των υποθέσεων του υποδείγματος της αγοράς στη χρηματιστηριακή αγορά των Αθηνών», Σπουδαι, Τόμος **44**, Τευχος **$1^{o}$-$2^{o}$**, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.


### ***ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ***


– **Aslihan Altay Salih–Gülnur Muradoglu–Muhammet Mercan (2002), «Performance of the Efficient Frontier in an Emerging Market Setting », Applied Economic Letters, Sept 2002, p.177-183**

– **Michael J. Best – Robert R. Grauer (1991), «On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Rasults», The Review of Financial Studies 1991, Vol.4, No2, p315-342**

– **Blalock, H. M., Social Statistics, New York Mc Graw Hill (1972)**

– **Box G.E.P., "A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria", Biometrika (1949).**

– **Chernick Michael, "Bootstrap Methods – A Practitioner's Guide"**

– **Anthony J. Curley (1969), «A stochastic simulation of the personal investment decision», Journal of Finance, Vol.24, No. 4, p.723-724**

– **Pao Lun Cheng (1971), «Efficient Portfolio Selections Beyond The Markowitz Frontier», The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.6, No.5, p1207-1234**

– **Diacogiannis George, "Some Empirical Evidence on the Intertemporal Stationarity of Security Return Distributions", Winter 1986**

– **Diacogiannis George, "Financial Management", P.258-368.**

– Brigham Eugene – Ehrhardt Michael, "Financial Management Theory and Practice", (2002), P. 563-573, P. 600-605

– Harbans Lal Dhingra (1975), «Stability of Efficient Portfolios Under Uncertainty», The of Finance, Vol.30, No. 3, p.912-914

– Efron B. "The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling plans", Applied mathematics, No 38

– Farar (1962), «The Investment Decision Under Uncertainty», The Journal of Finance, Vol.17, No.4, p.671-672

– Wayne E. Ferson – Andriew F. Siegel (2001), «The Efficient Use of Conditioning Information in Portfolios », The Journal of Finance, June 2001, Vol.LVI, No.3

– Gruber Martin - Elton Edwin, "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", P.131-152

– John B. Guerard – John Blin, Steve Bender (1998), «Forecasting earnings composite variables, financial anomalies, and efficient Japanese and U.S portfolios », International Journal of Forecasting 1998, p255-259

– Hal Varian, "A portfolio of Nobel Laureates: Markowitz, Miller and Sharpe". The Journal of Economic Perspectives, Vol.7, No.1, (Winter 1993), 159-169.

– J.M.Hammersley – D.C.Handscomb, " Monte Carlo Methods" (1964), P.6-9

– Hull John, "Options, Futures and Other Derivatives", (2003) P.200-216

– Mary Jackson – Mike Staunton, "Advanced Modelling in Finance Using Excel And VBA", Oct.2003

– Kalman J. Cohen – Jerry A. Pogue (1967), «An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models», The Journal of Business, Vol.40, No.2, p.166-193

– B. F. King (1966), «Market and Industry Factors in Stock Behavior», Journal of Business, Vol 39, p139-190

– Markowitz Harry, "Portfolio Selection", The Journal of Finance, Vol.7, No.1 (March 1952), 77-91

– Markowitz Harry, "Foundations of Portfolio Theory", The Journal of Finance, Vol.46, No.2 (June 1991), 469-477.

– Myers Brealy, "Principles of Corporate Finance", (2003), P.255-278

**– Roll R. “A critique of the asset pricing theory’s tests”. The Journal of Financial Economics, (March 1977)**

**– Rubinstein Mark, “Markowitz’s Portfolio Selection: a Fifty-Year Retrospective”. The Journal of Finance Vol.LVII, No.3, (June 2002).**

**– Sharp William - Gordon Alexander, “INVESTEMENTS’, P.154-265**

**– Buckner A. Wallingford (1967), «A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models», The Journal of Financial and Quantitative Analysis,Vol. 2, No.2, p.85-106**

**– Winston Wayne, “Financial Models Using Simulation And Optimization”, P39-42, P177-178.**