Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων και εφαρμογές στην Οικονομία και τις Διαπραγματεύσεις** **Introduction to Game Theory and applications on Economics and Negotiations**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Δημήτριος-Βασίλειος Πανταζάτος**
Πατρώνυμο	**Σταύρος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ13061**
Επιβλέπων	**Γ. Τσιχριντζής, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Οκτώβριος 2016**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα

Περίληψη

Στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής επιχειρείται η παρουσίαση των βασικών εννοιών της θεωρίας παιγνίων και η επίλυση αυτών ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους. Στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστούν εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στα οικονομικά αναλύοντας το πως λειτουργεί το δυοπώλιο, πώς η επιχείρηση λαμβάνει αποφάσεις υπό το καθεστώς ανταγωνισμού και άλλες εφαρμογές από την καθημερινή λειτουργία μιας επιχείρησης. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των βασικών εννοιών που ορίζουν την διαπραγμάτευση και παρουσίαση εφαρμογών με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων. Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μία συνοπτική παρουσίαση των γενετικών αλγορίθμων και στη συνέχεια παρουσιάζεται πως επιλύονται παίγνια με την βοήθεια αυτών των αλγορίθμων.

Λέξεις κλειδιά: Θεωρία Παιγνίων, Οικονομία, Διαπραγματεύσεις, Γενετικοί Αλγόριθμοι.

Abstract

For the purpose of this master thesis was conducted a study in order to present the basic concepts of game theory. On the second chapter there are applications of game theory in economics like duopoly, decisions under competition rules etc. The third chapter is a presentation of the basic concepts that define one negotiation and there are also applications of game theory on different kinds of negotiation. On the final chapter will make a brief presentation of genetic algorithms and how games can be solved with these algorithms.

Keywords: Game Theory, Economics, Negotiations, Genetic Algorithms.

Στους γονείς μου,

Για την αμέριστη στήριξη και συμπαράστασή τους μέχρι και σήμερα

Περιεχόμενα

Πίνακες

Εισαγωγή

Η Θεωρία Παιγνίων ασχολείται με την μελέτη των διάφορων στρατηγικών που οδηγούν στην λήψη μίας απόφασης. Είναι ένα ισχυρό εργαλείο μέσω του οποίου γίνονται κατανοητές οι σχέσεις που δημιουργούνται ή διαλύονται από τους παίκτες που συμμετέχουν κατά τη διάρκεια τόσο μίας κατάστασης ανταγωνισμού όσο και μίας κατάστασης συνεργασίας. Η Θεωρία Παιγνίων έχει ευρύτατες εφαρμογές στους κλάδους της οικονομίας, της ψυχολογίας, της κοινωνιολογίας καθώς και της εξελικτικής βιολογίας. Σύμφωνα με τον Hutton(1996) η θεωρία παιγνίων είναι ένα πλαίσιο θεωρητικών εργαλείων για την εξέταση των αποφάσεων που θα πρέπει να λάβουν διαφορετικά μέλη με δεδομένο το γεγονός ότι έχουν ελάχιστη πληροφορία και διαφορετικούς στόχους. Αυτός ο ορισμός περιγράφει όμως σε τι μπορεί να φανεί χρήσιμη η θεωρία παιγνίων παρά στο τι ακριβώς είναι.

Μια πιο δόκιμη περιγραφή ως προς το τι είναι η θεωρία παιγνίων είναι η εξής: « Η θεωρία παιγνίων είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται για την ανάλυση περιπτώσεων όπου το αποτέλεσμα των αποφάσεων δύο ή περισσότερων μελών (ή συνασπισμών) είναι σε άμεση εξάρτηση με τις αποφάσεις των άλλων μελών(ή συνασπισμών)». Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι αποφάσεις που θα ληφθούν δεν μπορούν να ληφθούν όντας απομονωμένοι αλλά θα πρέπει να λαμβάνονται και οι αποφάσεις των αντιπάλων υπόψη. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται **στρατηγική αλληλεξάρτηση**[1] και αυτή η κατάσταση αντικατοπτρίζεται από τα παίγνια στρατηγικής όπου τα εμπλεκόμενα μέλη γνωρίζουν τις πιθανές κινήσεις του άλλου ή άλλων μελών. Γι 'αυτό το λόγο για την επιλογή μίας απόφασης θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι απόψεις των άλλων παικτών.

Σε αρκετές περιπτώσεις οι παίκτες δεν μπορούν να έχουν πληροφόρηση σχετικά με τις κινήσεις των άλλων παικτών. Σε αυτή την περίπτωση μπορούν μόνο να εικάσουν τις πιθανές αποφάσεις που θα πάρουν τα άλλα μέλη. Για να είναι σε θέση να «μαντέψουν» τις αποφάσεις των αντιπάλων τους, οι παίκτες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη **στρατηγική σκέψη** (strategic thinking) ώστε να κάνουν όσο γίνεται πιο ασφαλή πρόβλεψη για τις αποφάσεις των αντιπάλων τους. Η στρατηγική σκέψη χαρακτηρίζει πολλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των ανθρώπων. Μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

Δύο εταιρείες με μεγάλα μερίδια αγοράς σε έναν συγκεκριμένο κλάδο λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με την τιμή και την παραγωγή.

Οι αρχηγοί δύο κρατών απειλούν ο ένας τον άλλο με την κήρυξη πολέμου.

Η απόφαση από μία εταιρεία για να δραστηριοποιηθεί σε μία νέα αγορά όπου υπάρχει ρίσκο ότι οι εταιρείες που ήδη δραστηριοποιούνται στον κλάδο δεν θα της επιτρέψουν την είσοδο.

Η προσπάθεια υπογραφής συνθήκης ειρήνης από δύο αντιμαχόμενες πλευρές σε έναν εμφύλιο πόλεμο.

Αν ένας κρατούμενος θα ομολογήσει ή όχι ένα έγκλημα το οποίο διέπραξε με συνεργό ο οποίος έχει συλληφθεί και αυτός από την αστυνομία.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι παίκτες είναι ουσιαστικά μέλη ενός παίγνιου στρατηγικής. Το αποτέλεσμα των πράξεων που ακολούθησαν βάσει σχεδίου εξαρτάται από τις ενέργειες των άλλων παικτών. Για να γίνει αυτό κατανοητό ένα απλό παράδειγμα είναι η λειτουργία ενός ολιγοπωλίου σε ένα κλάδο της Οικονομίας. Ένας κλάδος της οικονομίας που μπορεί να χαρακτηριστεί ως ολιγοπώλιο είναι αυτός της αυτοκινητοβιομηχανίας όπου είναι περιορισμένος ο αριθμός των εταιρειών που δραστηριοποιούνται λόγω και του μεγάλου κόστους εισαγωγής στον κλάδο. Οι εταιρείες λοιπόν που δραστηριοποιούνται στον κλάδο είναι λίγες και έτσι έχουν μεγάλο μερίδιο αγοράς η κάθε μία, συνεπώς οι ενέργειες των εταιρειών μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες. Για παράδειγμα αν μία εταιρεία μειώσει τις τιμές της

[1] Fiona Carmichael, A Guide to Game Theory, Prentice Hall 2005, pp. 3-7

τότε οι ανταγωνιστές της ενδεχομένως να χάσουν μέρος του μεριδίου αγοράς τους ή αν μία εταιρεία αυξήσει την παραγωγή της κατά ένα σημαντικό ποσοστό τότε οι τιμές που θα υπάρχουν στην αγορά ενδεχομένως να πέσουν. Και στις δύο περιπτώσεις τα κέρδη των άλλων εταιρειών θα είναι μικρότερα εξαιτίας της στρατηγικής που ακολούθησε η πρώτη εταιρεία.

Η θεωρία Παιγνίων θεμελιώθηκε ουσιαστικά από τον John von Neumann και Oskar Morgenstern μέσα από το βιβλίο τους "Theory of Games and Economic Behavior" που αφορά παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Στο συγκεκριμένο βιβλίο, το οποίο και εκδόθηκε το 1944, ο John von Neumann και ο Oskar Morgenstern όρισαν την θεωρία της χρησιμότητας, μελέτησαν τις βέλτιστες λύσεις σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος και εισήγαγαν τα συνεργατικά παίγνια.

Επόμενος κομβικός σταθμός στην θεμελίωση της Θεωρίας Παιγνίων (από εδώ και κάτω θα αναφέρεται ως Θ.Π) υπήρξε η εισαγωγή της έννοιας της ισορροπίας από τον John Nash από το 1950 μέχρι το 1953 με τα έργα του "Equilibrium Points in N-Person Games"(1950),"The Bargaining Problem"(1950),"Non-cooperative Games"(1951) και "Two-person Cooperative Games". Από εκεί και πέρα εκδόθηκαν και άλλα έργα αλλά σημαντική θέση κατέχει το βιβλίο του Thomas Schelling, ‘’The Strategy of Conflict” (1960) που είναι από τα σημαντικότερα έργα που αφορούν τις κοινωνικές επιστήμες.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι εισάγοντας αρχικά τον αναγνώστη στις βασικές έννοιες και τρόπους επίλυσης παιγνίων να δείξει ότι πολλές διαδικασίες που αφορούν την λειτουργία μιας επιχείρησης όπως η σχέσεις με τους ανταγωνιστές της, η διάρθρωση της αγοράς, η διαφημιστική δαπάνη, οι συλλογικές διαπραγματεύσεις κ.α. είναι διαδικασίες που μπορούν να παρουσιαστούν με την βοήθεια των αριθμών και να αναλυθούν διεξοδικά ώστε να λαμβάνονται όσο το δυνατό πιο ορθές αποφάσεις. Το ζητούμενο για μία επιχείρηση στη σημερινή εποχή πρέπει να είναι η χρήση όλων των παρεχόμενων εργαλείων ανάλυσης του χώρου στον οποίο δραστηριοποιείται μία επιχείρηση ώστε οι αποφάσεις της να είναι ορθολογικές. Οι μη ορθολογικές αποφάσεις οδηγούν συνήθως σε μη αναστρέψιμες αποφάσεις.

Με βάση τον στόχο στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων όπως ο διαχωρισμός τους σε παίγνια μηδενικού και μη μηδενικού αθροίσματος, τρόποι επίλυσης των προβλημάτων και κριτήρια αποφάσεων σε περιπτώσεις παιγνίων ΄που υπάρχει αβεβαιότητα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων σε όλες τις εκφάνσεις της λειτουργίας μίας επιχείρησης στα πλαίσια μίας αγοράς καθώς παρουσιάζονται παίγνια που αφορούν τη λήψη στρατηγικών αποφάσεων που αφορούν, την παραγωγή, την προώθηση και την ανάλυσης της αγοράς.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση της θεωρίας παιγνίων σε ότι έχει να κάνει με τις διαπραγματεύσεις καθώς πολλές φορές μία επιχείρηση μπορεί να αντιμετωπίσει περιπτώσεις όπου θα πρέπει να διαπραγματευτεί για αρκετά σοβαρά θέματα είτε με τους εργαζόμενους σε αυτή, είτε με άλλες επιχειρήσεις.

Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στους γενετικούς αλγορίθμους οι οποίοι αποτελούν ένα αρκετά αξιόλογο εργαλείο επίλυσης δυναμικών παιγνίων και μπορούν να φανούν χρήσιμοι και στην επίλυση παιγνίων όπου υπάρχει αβεβαιότητα για τις ενέργειες του αντιπάλου.

Κεφάλαιο 1°

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Η Θ.Π. όπως αναφέρθηκε και κατά την εισαγωγή στηρίζεται σε καταστάσεις συγκρούσεως μεταξύ των συμμετεχόντων σε αυτά. Οι συμμετέχοντες αυτοί ονομάζονται **παίκτες**. Η έννοια του παίκτη όμως δεν σημαίνει ότι μπορεί να είναι ένα άτομο, μπορεί να είναι μία ομάδα ατόμων, μια εταιρεία ή και ένα ολόκληρο κράτος.

Η θεωρία ων παιγνίων ουσιαστικά έχει δύο ρόλους: Ο ένας είναι η ερμηνεία της πραγματικότητας που ουσιαστικά δεν είναι τίποτα άλλο από τις στρατηγικές που μπορούν να ακολουθήσουν οι παίκτες με δεδομένο ότι κινούνται εν μέσω συγκρούσεων. Ο δεύτερος ρόλος έχει να κάνει με τις καταστάσεις με τις οποίες το παίγνιο έρχεται σε μία ισορροπία.

Οι παράγοντες από τους οποίους προκύπτει και ο τρόπος επίλυσης ενός παίγνιου στη Θ.Π. είναι οι εξής:[2]

1. Ο αριθμός των παικτών: Αν το παίγνιο εξελίσσεται μόνο μεταξύ δύο παικτών, τότε ονομάζεται παίγνιο δύο ατόμων (two-person game). Αν ο αριθμός των παικτών είναι μεγαλύτερος από δύο, τότε το παίγνιο ονομάζεται n-ατόμων (n-person game).
2. Άθροισμα κερδών και ζημιών: Αν σε ένα παίγνιο τα κέρδη του ενός παίκτη ισούνται με τις ζημιές του άλλου, τότε αυτό ονομάζεται παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (zero-sum game). Σε αντίθετη περίπτωση το παίγνιο ονομάζεται μη-μηδενικού αθροίσματος (no-zero sum game).
3. Στρατηγική: Είναι η δυνατότητα επεμβάσεως που προσφέρουν σε κάθε παίκτη οι κανόνες του παίγνιου.

Η θεωρία παιγνίων διερευνά εκείνες τις στρατηγικές που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση του παίκτη. Σε ένα παίγνιο οι στρατηγικές που υπάρχουν είναι οι εξής:

1. Η καθαρή στρατηγική (pure strategy): Σε αυτού του είδους τη στρατηγική ο παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις επιλογές του, με πιθανότητα ίση με τη μονάδα ενώ δεν επιλέγει καμία από τις υπόλοιπες.
2. Η μικτή στρατηγική (mixed strategy): Σε αυτού του είδους τη στρατηγική περιλαμβάνονται συνδυασμοί στρατηγικών, καθεμιά από τις οποίες επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.

Από μαθηματικής άποψης, μία μικτή στρατηγική για ένα παίκτη με δύο η περισσότερες δυνατότητες επιλογής είναι ένα σύνολο S με n μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς (πιθανότητες) που το άθροισμά τους ισούται με τη μονάδα ενώ ο αριθμός n είναι ο αριθμός των καθαρών στρατηγικών του παίκτη.

Αν P_j, j=1,2,…,n είναι οι πιθανότητες με τις οποίες θα επιλεγεί η καθαρή στρατηγική τότε ισχύει:

$S=\{P_1,P_2,\dots,P_n\}$ με $P_1+P_2+\dots+P_n=1$ και $P_j \geq 0 \ \forall j$.

[2] Ε.Χ. Φούντας - Α.Γ. Βλάχος, Ασκήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού & Θεωρία Παιγνίων 1, Εκδόσεις Βαρβαρήγου, σελ. 132

1.2 Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

1.2.1 Παίγνια Δύο Προσώπων

Τα πλέον απλά παίγνια μηδενικού αθροίσματος είναι τα παίγνια δύο προσώπων. Σε αυτού του είδους τα παίγνια τα κέρδη του ενός ισούνται με τις ζημίες του άλλου όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ενώ τα μέλη έχουν ένα κοινό σκοπό, την αριστοποίηση του κοινού κέρδους. Ένα απλό παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο προσώπων είναι το εξής:

Παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί[3]

Έστω δύο παίκτες Α και Β ότι ανακοινώνουν συγχρόνως μία από τις λέξεις «πέτρα», «ψαλίδι», «χαρτί».

Αν και οι δύο παίκτες ανακοινώσουν ταυτόχρονα την ίδια λέξη (π.χ. «πέτρα») τότε κανείς από τους δύο παίκτες δεν κερδίζει. Στις άλλες περιπτώσεις το «ψαλίδι» υπερέχει του «χαρτιού» (γιατί μπορεί να το κόψει), το «χαρτί» υπερέχει της «πέτρας» (γιατί την καλύπτει) και η «πέτρα» υπερέχει του «ψαλιδιού» (γιατί το ψαλίδι δεν μπορεί να κόψει την πέτρα).

Για λόγους ευκολίας όταν ένας παίχτης κερδίζει πληρώνεται από τον αντίπαλο μία χρηματική μονάδα (αντίστοιχα όταν χάνει πληρώνει μία χρηματική μονάδα), ενώ όταν και οι δύο παίκτες ανακοινώνουν την ίδια λέξη τότε κανείς από τους δύο δεν κερδίζει.

Το παίγνιο το οποίο και προκύπτει με βάση τα παραπάνω είναι το εξής:

Παίκτης Α / Παίκτης Β	*Π*	*Ψ*	*Χ*
Π	0	1	-1
Ψ	-1	0	1
Χ	1	-1	0

Πίνακας 1:Μήτρα Παιγνίου Πέτρα, Ψαλίδι, Χαρτί

Με Π,Ψ,Χ σημειώνονται ο τακτικές των παικτών.

1.2.2 Παίγνια Καθαρής Στρατηγικής

Στα παίγνια καθαρής στρατηγικής ο παίκτης επιλέγει μόνο μία στρατηγική με την πιθανότητα αυτής να είναι ίση με τη μονάδα και δεν επιλέγει καμία από τις υπόλοιπες.

Έστω ότι σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δύο παικτών Α και Β ισχύει ο παρακάτω πίνακας κερδών του παίκτη Α:

[3] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 18

Παίκτης A / Παίκτης B	*(1)*	*(2)*	…	*(j)*	…	*(n)*
(1)	α_{11}	α_{12}	…	α_{1j}	…	α_{1n}
(2)	α_{21}	α_{22}	…	α_{2j}	…	α_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
(i)	α_{i1}	α_{i2}	…	α_{ij}	…	α_{in}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
(m)	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mj}	…	α_{mn}

Πίνακας 2: Μήτρα Παιγνίου Μηδενικού Καθαρής Στρατηγικής

Το α_{ij} είναι το κέρδος του Α όταν ακολουθεί την τακτική i και ο Β την τακτική j.

Αν ο παραπάνω πίνακας είναι γνωστός και στους δύο παίκτες, τότε ο παίκτης Α έχει ως σκοπό να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του και ο παίκτης Β να ελαχιστοποιήσει αυτό το αποτέλεσμα.

Αν ο παίκτης Α λειτουργήσει με σύνεση και εφαρμόσει τη τακτική i θα πρέπει να καταλάβει ότι ο παίκτης Β είναι σε θέση να του περιορίσει το κέρδος, με άλλα λόγια ο παίκτης Β μπορεί να του επιτρέψει κέρδος ίσο με $\min_j a_{ij}$. Άρα ο παίκτης Α καλείται να επιλέξει εκείνη τη τακτική i για την οποία το αντίστοιχο $\min_j a_{ij}$ είναι μέγιστο, δηλαδή να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο με:

$$e_A = \max_i \min_j a_{ij} \text{ (Σχέση 1)}$$

Ο παίκτης Β από την άλλη αν θέλει να λειτουργήσει και αυτός με σύνεση γνωρίζει πως έχει «χάσει» το συγκεκριμένο παίγνιο και έτσι ο στόχος του δεν είναι άλλος από το να μην επιτρέψει στον παίκτη Α να του αυξήσει τη ζημιά, δηλαδή να του προξενήσει ζημιά ίση με $\max_i a_{ij}$. Άρα ο παίκτης Β θα πρέπει να επιλέξει εκείνη τη στρατηγική j όπου το αντίστοιχο $\max_i a_{ij}$,δηλαδή να έχει ζημιά το πολύ ίση με:

$$e_B = \min_j \max_i a_{ij} \text{ (Σχέση 2)}$$

Για τις τιμές e_A και e_B γενικά ισχύει ότι : $e_A \le e_B$.

Αν σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με δύο πρόσωπα ισχύει η ισότητα , τότε αυτό το παίγνιο είναι παίγνιο καθαρής στρατηγικής.

Σε ένα παίγνιο καθαρής στρατηγικής υπάρχει (τουλάχιστον) ένα ζεύγος (i,j) για το οποίο ισχύει:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon \text{ (Σχέση 3)}$$

Αυτό το ζεύγος είναι το σημείο ισορροπίας του παιγνίου (ή σαγματικό σημείο), ενώ η αντίστοιχη τιμή υ ονομάζεται τιμή του παιγνίου και αντιπροσωπεύει την μικρότερη της γραμμής της και την μεγαλύτερη της στήλης της.

1.2.3 Παίγνια Μικτής Στρατηγικής

Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος με δύο πρόσωπα για τα οποία και δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας (ή σαγματικό σημείο), ονομάζονται παίγνια μικτής στρατηγικής.[4]

Ένα παίγνιο το οποίο είναι μικτής στρατηγικής είναι το παρακάτω:

Παίκτης Α / Παίκτης Β	*(1)*	*(2)*	*(3)*
(1)	5	-1	2
(2)	-2	3	1

Πίνακας 3: Παίγνιο Μικτής Στρατηγικής

Έστω ότι στο παραπάνω παίγνιο ο παίκτης Α ακολουθήσει τη τακτική (1) με πιθανότητα 80% (ή 0,8) και τη τακτική (2) με πιθανότητα 20% (ή 0,2) τότε το μέσο κέρδος το οποίο και θα προσδοκά είναι το εξής:

Αν ο παίκτης Β ακολουθήσει την πρώτη στρατηγική του ο παίκτης Α θα έχει μέσο κέρδος ίσο με: 5*0,8+(-2)*0,2=3,6.

Αν ο παίκτης Β ακολουθήσει τη δεύτερη στρατηγική του ο παίκτης Α θα έχει μέσο κέρδος ίσο με: (-1)*0,8+3*0,2=-0,2.

Αν ο παίκτης Β ακολουθήσει τη τρίτη στρατηγική του ο παίκτης Α θα έχει μέσο κέρδος ίσο με: 2*0,8+1*0,2=1,8

Το διατεταγμένο ζεύγος (0,80, 0,2) ονομάζεται μικτή στρατηγική του παίκτη Α. Για τον παίκτη Α υπάρχει μία απειρία μικτών στρατηγικών.

Αν ο παίκτης Β ακολουθήσει την πρώτη στρατηγική με πιθανότητα 30% (ή 0,3), τη δεύτερη στρατηγική του με πιθανότητα 30% (ή 0,3) και τη τρίτη με πιθανότητα 40% (ή 0,4) τότε η μέση ζημία που θα έχει ανά περίπτωση θα είναι η εξής:

Αν ο παίκτης Α ακολουθήσει την πρώτη στρατηγική του ο παίκτης Β θα έχει μέση ζημία ίση με: 5*0,3+(-1)*0,3+2*0,4=2.

Αν ο παίκτης Α ακολουθήσει τη δεύτερη στρατηγική του ο παίκτης Β θα έχει μέση ζημία ίση με: (-2)*0,3+3*0,3+1*0,4=0,7.

Η διατεταγμένη τριάδα (0,3, 0,3, 0,4) είναι η μικτή στρατηγική του Β ενώ και για τον παίκτη Β υπάρχει απειρία μικτών στρατηγικών.

---

[4] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου, σελ. 22

Σε αυτού του είδους τα παίγνια εξετάζεται και η έννοια της μαθηματικής ελπίδας. Η μαθηματική ελπίδα δεν είναι τίποτα άλλο από τον σταθμικό μέσο όταν ως συντελεστές στάθμισης χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες πιθανότητες.

Στη γενική περίπτωση των παίγνιων μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες και m τακτικές για τον παίκτη Α και n τακτικές για τον παίκτη Β η μαθηματική ελπίδα ορίζεται ως εξής:

$$E(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = XAY \text{ (Σχέση 4)}$$

Όπου:

Χ είναι η μήτρα-γραμμή της μικτής στρατηγικής του παίκτη Α.

Υ είναι η μήτρα-στήλη της μικτής στρατηγικής του παίκτη Β.

Α είναι η μήτρα των κερδών του παίκτη Α.

Ο σκοπός του παίκτη Α είναι να μεγιστοποιήσει το αποτέλεσμα αυτό και ο παίκτης Β να το ελαχιστοποιήσει.

1.2.4 Το Θεώρημα Neumann

Το θεώρημα Neumann (ή αλλιώς το κριτήριο Minimax ή Maxmin) ουσιαστικά αποτελεί τη βάση της θεωρίας παιγνίων καθώς μέσω αυτού ο προσδιορισμός των άριστων μικτών στρατηγικών των δύο αντιπάλων γίνεται με τη βοήθεια γραμμικών προγραμμάτων.[5]

Το συγκεκριμένο θεώρημα ορίζεται ως εξής:

«Για τον παίκτη Α υπάρχει μία άριστη μικτή στρατηγική, με την οποία το μέσο κέρδος του είναι μεγαλύτερο ή ίσο της τιμής του παιγνίου. Για τον παίκτη Β υπάρχει μία άριστη μικτή στρατηγική, με την οποία η μέση ζημιά του είναι μικρότερη ή ίση της τιμής του παιγνίου».[6]

Έστω ότι $x_1,x_2,\ldots,x_m$, ($p_i \geq 0$) είναι οι πιθανότητες του παίκτη Α να επιλέξει τις μικτές στρατηγικές $s_1,s_2,\ldots,s_m$ ενώ με $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ($y_j \geq 0$) συμβολίζονται οι πιθανότητες με τις οποίες ο παίκτης Β επιλέγει μία από τις μικτές στρατηγικές $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \text{ και } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \text{ (Σχέσεις 5 και 6)}$$

Αν η μήτρα των αποτελεσμάτων για τους παίκτες Α και Β είναι $\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ τότε το κέρδος του παίκτη Α θα είναι ίσο με:

$$E(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \text{ (Σχέση 7)}$$

[5] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 24-27

[6] John Von Neumann – Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press 1953, σελ. 143-165

Αν εφαρμοστεί το Minimax και Maxmin κριτήριο στη συνάρτηση E(x,y), στην περίπτωση ενός παιγνίου μικτής στρατηγικής θα προκύπτουν τα εξής για τους παίκτες Α και Β:

Παίκτης Α

$$\begin{aligned} \upsilon &= \max_x \min_y E(x,y) \\ &= \max_x \left[\min_j \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \right\} \right] \qquad \text{(Σχέση 8)} \\ &= \max_x \left[\min_j \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m x_i a_{i2}, ..., \sum_{i=1}^m x_i a_{in} \right\} \right] \end{aligned}$$

Ο παράγοντας $\min_j \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \right\}$ δηλώνει το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη Α όταν ο παίκτης Β ακολουθεί τη j-στη καθαρή στρατηγική.

Παίκτης Β

Με αντίστοιχο τρόπο (με τη διαφορά ότι εδώ είναι Minimax) προκύπτει ότι:

$$\bar{\upsilon} = \min_y \left[\max_i \left\{ \sum_{j=1}^n y_j a_{1j}, \sum_{j=1}^n y_j a_{2j}, ..., \sum_{j=1}^n y_j a_{mj} \right\} \right] \qquad \text{(Σχέση 9)}$$

Ο παράγοντας $\max_i \left\{ \sum_{j=1}^n y_j a_{1j} \right\}$ δηλώνει την αναμενόμενη ζημιά του παίκτη Β όταν ο παίκτης Α ακολουθεί τη i-στη καθαρή στρατηγική.

Η σχέση $\bar{\upsilon} \geq \upsilon$ εξυπηρετεί στην περίπτωση όπου το παίγνιο είναι καθαρής στρατηγικής. Όταν τα x_i και y_i αντιστοιχούν σε μία βέλτιστη λύση ενός παιγνίου, τότε η σχέση οδηγεί προς την κατεύθυνση της «ισότητας» και οι αναμενόμενες τιμές για τους παίκτες γίνονται ίσες με τη βέλτιστη αναμενόμενη τιμή του παιγνίου.

Όταν $\bar{\upsilon} = \upsilon$ ή $e_A = e_B$ όπως είχε αναφερθεί και σε προηγούμενη παράγραφο το σημείο ονομάζεται σαγματικό σημείο.

1.2.5 Τα Γραμμικά Προγράμματα του Παιγνίου

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο το θεώρημα Neumann ουσιαστικά επιτρέπει την επίλυση των παιγνίων με τη χρήση γραμμικών προγραμμάτων. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με m στρατηγικές για τον παίκτη Α, n τακτικές για τον παίκτη Β και $A = [a_{ij}]$ μήτρα κερδών για τον παίκτη Α.

Από τη μήτρα A του παιγνίου μπορεί να προκύψει αν η τιμή υ του είναι θετική (με δεδομένο ότι ισχύει για το υ $e_A \le \upsilon \le e_B$). Στην περίπτωση αυτή, με βάση το θεώρημα του Neumann προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα για τον παίκτη A:

$$\max \upsilon$$

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{mj}x_m \ge \upsilon \text{ με j=1,2,..,n (Σχέση 10)}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \text{ (Σχέση 11)}$$

$$x_1, x_2, ..., x_m \ge 0 \text{ (Σχέση 12)}$$

Για τον παίκτη B θα ισχύει η ακόλουθη μορφή:

$$\min \upsilon$$

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{in}y_n \le \upsilon \text{ με i=1,2,..,m (Σχέση 13)}$$

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = 1 \text{ (Σχέση 14)}$$

$$y_1, y_2, ..., y_n \ge 0 \text{ (Σχέση 15)}$$

Οι παραπάνω τύπου μπορούν να γραφτούν σε άλλη μορφή και με τις μήτρες που είχαν αναφερθεί στην παράγραφο 1.2.4.

Συμπληρωματικά με τις έννοιες που αναλύθηκαν τόσο σε αυτή όσο και στην προηγούμενη παράγραφο ισχύουν και οι παρακάτω ιδιότητες:[7]

1. **Τα γραμμικά προγράμματα ενός παιγνίου είναι δυικά.** Τα δυικά προβλήματα σε ένα πρωτεύων πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού προκύπτουν με απλούς μετασχηματισμούς από το πρωτεύον και ουσιαστικά αποτελεί εναλλακτική λύση του ίδιου προβλήματος (δίνει τα ίδια αποτελέσματα). Η δυική θεωρία είναι δυνατό να δώσει μία δεύτερη ματιά στο αρχικό πρόβλημα και να φανερώσει κάποια χαρακτηριστικά που δεν θα ήταν ορατά. Σχετικά με το δυικό πρόβλημα θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:
   - Να έχει τόσες μεταβλητές όσοι είναι οι περιορισμοί του πρωτεύοντος.
   - Να έχει τόσους περιορισμούς όσες είναι οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος.
   - Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυικού είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος.
   - Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυικού είναι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος.
   - Όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης το δυικό είναι ελαχιστοποίησης και αντιστρόφως.

Ο δυϊσμός που ισχύει στα γραμμικά προγράμματα συνέβαλε και στην απόδειξη του θεωρήματος Neumann.

[7] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 32-36

2. **Οι άριστες μικτές στρατηγικές ενός παιγνίου δεν αλλάζουν, όταν σε όλα τα στοιχεία της μήτρας του προστεθεί ο ίδιος αριθμός.** Η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι αρκετά σημαντική καθώς ένα παίγνιο μπορεί να λυθεί μέσω γραμμικών προγραμμάτων ακόμα και αν η τιμή υ προβλέπεται αρνητική και έτσι με αυτή την ιδιότητα μπορεί να γίνει θετική για να λυθεί το γραμμικό πρόγραμμα. Πρακτικά σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται πρόσθεση σε όλα τα στοιχεία της μήτρας του παιγνίου ένας θετικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από την απόλυτη τιμή του μικρότερου στοιχείου της.

3. **Οι άριστες μικτές στρατηγικές και η τιμή ενός παιγνίου δεν αλλάζουν, όταν από τη μήτρα του παιγνίου παραληφθεί μία γραμμή όπου τα στοιχεία της είναι αντίστοιχα μικρότερα από τα στοιχεία μίας άλλης γραμμής.** Η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι πολύ σημαντική καθώς μπορεί να μειώσει τις διαστάσεις της μήτρας και να διευκολύνει τον υπολογισμό των άριστων μικτών στρατηγικών της.

4. **Οι άριστες μικτές στρατηγικές και η τιμή ενός παιγνίου δεν αλλάζουν, όταν από τη μήτρα του παιγνίου παραληφθεί μία στήλη της οποίας τα στοιχεία της είναι αντίστοιχα μεγαλύτερα από τα στοιχεία μίας άλλης στήλης.** Η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι πολύ σημαντική καθώς μπορεί να μειώσει τις διαστάσεις της μήτρας και να διευκολύνει τον υπολογισμό των άριστων μικτών στρατηγικών της. Ουσιαστικά με αυτόν τον τρόπο ο Β «πετάει» την στρατηγική που θα του προκαλούσε τη μεγαλύτερη ζημιά.

5. **Οι άριστες μικτές στρατηγικές ενός παίγνιου δεν αλλάζουν όταν όλα τα στοιχεία της μήτρας του πολλαπλασιαστούν επί ένα θετικό αριθμό.** Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να απλοποιηθεί η μήτρα κερδών ώστε να είναι πιο εύκολοι οι υπολογισμοί.

1.2.6 Παίγνια Εναντίον της Φύσης

Τα παίγνια εναντίον της φύσης (δηλαδή απέναντι σε φυσικά φαινόμενα και όχι μόνο με τη στενή έννοια του όρου) διαφέρουν σε σχέση με τα παίγνια μεταξύ δύο παικτών καθώς λόγω του απρόβλεπτου που παρουσιάζει η φύση την μήτρα θα πρέπει να την φτιάξει ο παίκτης Α χωρίς όμως να είναι σίγουρος για τα αποτελέσματα. Ουσιαστικά ο παίκτης πρέπει να λάβει απόφαση απέναντι σε καταστάσεις της φύσης.[8]

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ενός παιγνίου εναντίον της φύσης.

Έστω ότι οι επενδύσεις ενός κεφαλαίου προβλέπουν τον ακόλουθο πίνακα κερδών:

Παίκτης Α/ Φύση	*Ε*	*Ψ*	*Π*
Χ	5	4	3
Μ	2	12	20
Ο	16	10	5

Πίνακας 4:Παίγνιο Εναντίον της Φύσης

[8] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 44-45

Με Χ, Μ, Ο σημειώνονται οι τακτικές του επενδυτή αν θα επενδύσει σε χρυσό, μετοχές πολεμικής βιομηχανίας και ομόλογα κρατών και με Ε,Ψ,Π οι εκτιμήσεις την κατάσταση (ειρήνη, ψυχρός πόλεμος και πόλεμος αντίστοιχα).

Αρχικά να σημειωθεί ότι όπως αναφέρθηκε με την έννοια των φυσικών φαινομένων ορίζουμε ένα πιο ευρύ πλαίσιο απρόβλεπτων καταστάσεων. Σε αυτού του είδους τα παίγνια οι αποφάσεις λαμβάνονται βάση συγκεκριμένων κριτηρίων. Ουσιαστικά αυτά τα κριτήρια δημιουργήθηκαν ακριβώς λόγω της πλήρους αβεβαιότητας στα οποία πρέπει ο παίκτης να αποφασίσει τι στρατηγική θα επιλέξει. Τα κριτήρια αυτά πρέπει να χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση λαμβάνοντας υπόψη το περιβάλλον, τις επιλογές, τις καταστάσεις και την υποκειμενικότητά τους. Τα κριτήρια αποφάσεων για τα παίγνια ενάντια στη φύση είναι τα εξής:[9]

- **Κριτήριο Laplace**

Το κριτήριο αυτό υποθέτει ότι οι δυνατές καταστάσεις της φύσης είναι ισοπίθανες (άρα $y_1 = y_2 = ... = y_n = \frac{1}{n}$) συνεπώς η μαθηματικής ελπίδα του i τρόπου απόφασης ισούται με:

$$\frac{1}{n}a_{i1} + \frac{1}{n}a_{i2} + ...\frac{1}{n}a_{in} = \frac{a_{i1} + a_{i2} + ...a_{in}}{n} \quad \text{(Σχέση 16)}$$

Άρα η επιλογή της απόφαση με τη μεγαλύτερη μαθηματική ελπίδα άρα θα ισχύει:

$$\max_i \frac{a_{i1} + a_{i2} + ...a_{in}}{n} \quad \text{(Σχέση 17)}$$

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη τη διασπορά τιμών που μπορεί να υπάρχει.

- **Κριτήριο Wald**

Αυτό το κριτήριο είναι ουσιαστικά επίλυση με το θεώρημα του Von Neumann όπου ουσιαστικά εξετάζεται το Maxmin του παίκτη Α όπου το κέρδος σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με $e_A = \max_i \min_j a_{ij}$. Το μειονέκτημα αυτού του κριτηρίου είναι ότι εκφράζει αισιοδοξία ως προς τις προβλέψεις και σύνεση από τον αντίπαλο παίκτη που αυτό δεν μπορεί να είναι δεδομένο στα παίγνια εναντίον της φύσης.

- **Κριτήριο Max-Max**

Το κριτήριο αυτό ουσιαστικά είναι το ακριβώς αντίθετο σε σχέση με το κριτήριο Wald καθώς εδώ αντιστοιχεί η απόφαση με το μεγαλύτερο κέρδος, δηλαδή $\max_i \max_j a_{ij}$. Αν το κριτήριο Wald κρίνεται ότι είναι αισιόδοξο το κριτήριο Max-Max είναι υπεραισιόδοξο καθώς προσδοκά τη μέγιστη τιμή για τον παίκτη. Για να χρησιμοποιηθεί λοιπόν το συγκεκριμένο κριτήριο βασική προϋπόθεση είναι η ύπαρξη ενός περιβάλλοντος το οποίο και θα είναι εξαιρετικά φιλικό και αρκετά γνωστό στον παίκτη Α ώστε να λάβει απόφαση με αυτόν τον τρόπο.

[9] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 45-48

- **Κριτήριο Savage**

Το συγκεκριμένο κριτήριο στηρίζεται στη διαφορά μεταξύ του εφικτού και του επιθυμητού αποτελέσματος. Η απόφαση που λαμβάνεται προκύπτει από τη «μήτρα λύπης» που προκύπτει από τη διαφορά του εφικτού και του επιθυμητού αποτελέσματος. Από αυτή τη μήτρα επιλέγεται η απόφαση που ελαχιστοποιεί την πιο μεγάλη «λύπη». Για το συγκεκριμένο κριτήριο το πρόβλημα είναι ότι πρέπει να έχουν καθοριστεί σωστά οι επιλογές.

- **Κριτήριο Hurwitz**

Το συγκεκριμένο κριτήριο βασίζεται σε ένα δείκτη αισιοδοξίας $\xi \in [0,1]$ της χρησιμότητας $u_i = \xi A_i + (1-\xi) a_i$ όπου $\mathrm{A}_i = \max\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\}$ και $a_i = \min\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\}$. Έτσι στο κριτήριο αντιστοιχεί η απόφαση με τη μεγαλύτερη χρησιμότητα δηλαδή $\max\limits_i u_i$. Ο προσδιορισμός των διαστημάτων των τιμών του δείκτη αισιοδοξίας και των αντίστοιχων επιλογών γίνεται με τη βοήθεια γραφικής μεθόδου με άξονες τα ξ, u. Το κριτήριο αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις που υπάρχει σημείο ισορροπίας τέτοιο ώστε η σύνεση που επιβάλλει η θεωρία υποχωρεί στην τόλμη του παίκτη.

1.2.7 Παίγνια με Απέραντες Στρατηγικές

Στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας μήτρας πληρωμών (που πρακτικά σημαίνει ότι δεν υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών) τότε τα κέρδη προσδιορίζονται μέσω μίας πραγματικής συνάρτησης f.

Έστω ότι τα κέρδη του παίκτη Α προκύπτουν από μία πραγματική συνάρτηση f δύο πραγματικών μεταβλητών x, y εκ των οποίων η πρώτη είναι οι επιλογές του παίκτη Α από ένα σύνολο Α και η δεύτερη τις επιλογές του παίκτη Β από ένα σύνολο Β. Και τα δύο σύνολα Α, Β είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Ο παίκτης Α ενεργώντας με σύνεση αι επιλέγοντας τη τιμή x θα πρέπει να δεχτεί ότι ο Β είναι σε θέση να του περιορίσει το κέρδος ,άρα να του επιτρέψει κέρδος ίσο με $\min\limits_{y \in B} f(x, y)$. Άρα θα πρέπει να επιλέξει εκείνη τη τιμή x για την οποία το αντίστοιχο $\min\limits_{y \in B} f(x, y)$ είναι μέγιστο δηλαδή να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο με:

$$e_A = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \text{ (Σχέση 17)}$$

Με παρόμοιο σκεπτικό θα λειτουργήσει και ο παίκτης Β θα εντοπίσει ότι θα πρέπει απλώς να περιορίσει τη ζημιά που μπορεί να του προκαλέσει ο παίκτης Α. Για να το καταφέρει αυτό θα πρέπει να επιλέξει εκείνη τη τιμή y για την οποία το $\max\limits_{x \in A} f(x, y)$ θα είναι το μικρότερο δυνατό ώστε να έχει και τη μικρότερη ζημιά όπου θα είναι το πολύ ίση με:

$$e_B = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y) \text{ (Σχέση 18)}$$

Με δεδομένο ότι υπάρχει απειρία ως προς τα σύνολα Α και Β των δύο παικτών, προκύπτει ότι και οι στρατηγικές τους θα είναι άπειρες. Σε αντίθεση μάλιστα με τα πεπερασμένα δεν είναι σε καμία περίπτωση σίγουρο ότι θα υπάρχουν τα u_A και u_B ή ότι θα ισχύει η ισότητα μεταξύ τους.

Αν όμως υπάρχουν οι τιμές αυτές και είναι ίσες, δηλαδή υπάρχει ένα ζεύγος x_0 και y_0 που να ανήκει στα δύο σύνολα τότε το σημείο αυτό είναι το σημείο ισορροπίας και η τιμή της f στο συγκεκριμένο σημείο ονομάζεται τιμή του παιγνίου.

1.2.8 Παίγνια Ν Προσώπων

Στα παίγνια όπου υπάρχουν πάνω από δύο παίκτες (έστω n ο αριθμός αυτών των παικτών) σύμφωνα με τους Neumann και Morgenstern οι παίκτες δημιουργούν συνασπισμούς.[10]

Έτσι αν N={1,2,…,n} είναι το σύνολο των παικτών και $\mathrm{T} \subset \mathrm{N}$, $\overline{\mathrm{T}} = \mathrm{N} - \mathrm{T}$ είναι δύο συνασπισμοί τους, που ενεργούν όπως οι παίκτες ενός μηδενικού αθροίσματος δύο προσώπων, τότε η τιμή υ του παιγνίου αυτού ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση του παιγνίου των n προσώπων.

Για τη χαρακτηριστική συνάρτηση υ ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με n πρόσωπα ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $\upsilon(\mathrm{N}) = 0$

ii. $\upsilon(\overline{\mathrm{T}}) = -\upsilon(\mathrm{T})$

iii. $\upsilon(\mathrm{T} \cup \mathrm{P}) \geq \upsilon(\mathrm{T}) + \upsilon(\mathrm{P})$ με $\mathrm{T} \cap \mathrm{P} = \varnothing$

Οι δύο πρώτες ιδιότητες προκύπτουν λόγω του γεγονότος ότι το άθροισμα των κερδών είναι μηδέν και ότι τα κέρδη του ενός συνασπισμού ισούνται με τις ζημιές του συμπληρωματικού του συνασπισμού. Ο συνδυασμός τους δίνει $\upsilon(\varnothing) = 0$ με δεδομένο ότι $\upsilon(\varnothing) = -\upsilon(\mathrm{N}) = 0$.

Η τρίτη ιδιότητα που αναφέρεται σε δύο συνασπισμούς T και P ξένους μεταξύ τους και όχι οπωσδήποτε συμπληρωματικούς, ερμηνεύει ότι η ένωση αυτών των συνασπισμών έχει νόημα μόνο όταν δεν ζημιώνονται τα συνασπιζόμενα μέρη.

Όταν $\upsilon(\mathrm{T} \cup \mathrm{P}) = \upsilon(\mathrm{T}) + \upsilon(\mathrm{P})$ τότε οι δύο συνασπισμοί T και P από όσα κερδίζουν και μόνοι οπότε το παίγνιο καλείται μη ουσιώδες.

Όταν $\upsilon(\mathrm{T} \cup \mathrm{P}) > \upsilon(\mathrm{T}) + \upsilon(\mathrm{P})$ τότε οι δύο συνασπισμοί κερδίζουν περισσότερα μαζί από ότι μεταξύ τους το παίγνιο ονομάζεται ουσιώδες.

Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με n παίκτες, κάθε παίκτης λαμβάνει ή δίδει ένα ποσό που σημειώνεται με $x_i, i \in \mathbb{N}$.

Το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ονομάζεται επιμερισμός.

Για κάθε επιμερισμό εντός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ μέσω της οποίας εκφράζεται το μηδενικό άθροισμα των κερδών.

ii. $x_i \geq \upsilon(\{i\}), i \in \mathbb{N}$ μέσω της οποίας εκφράζεται ότι το ποσό κάθε παίκτη δεν μπορεί να είναι μικρότερο από εκείνο που λαμβάνει όταν είναι μόνος του.

[10] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 51-52

Ο επιμερισμός $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ κυριαρχεί του επιμερισμού $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ για τους παίκτες ενός συνασπισμού $\mathrm{P} \subset \mathrm{N}$ όταν:

i. $x_i > y_i, i \in \mathrm{P}$

ii. $\upsilon(\mathrm{P}) \geq \sum_{i \in \mathrm{P}} y_i$

Η πρώτη ανισότητα εκφράζει ότι τα ποσά του επιμερισμού x είναι μεγαλύτερα από εκείνα του επιμερισμού y, σε ότι έχει να κάνει με τους παίκτες του συνασπισμού P, ενώ η δεύτερη ότι τα κέρδη τους δεν υπερβαίνουν το ποσό που αντιστοιχεί στον συνασπισμό τους.

Οι Neumann και Morgenstern όρισαν ως λύση ενός ουσιώδους παιγνίου το σύνολο V των επιμερισμών που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Κανένας επιμερισμός του V δεν κυριαρχείται από άλλο επιμερισμό του.
- Κάθε εκτός του V επιμερισμός κυριαρχείται τουλάχιστον από ένα επιμερισμό του.

Αυτή η λύση αντιστοιχεί στους δυνατούς τρόπους διανομής των κερδών στο τέλος του παιγνίου.

1.3 Παίγνια μη Μηδενικού Αθροίσματος

1.3.1 Παίγνια Δύο Προσώπων

Όπως και στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος έτσι και εδώ τα πλέον απλά παίγνια είναι αυτά των δύο προσώπων. Σε αντίθεση όμως με πριν τα κέρδη του ενός δεν ισούνται με τις ζημιές του άλλου παίκτη. Συνεπώς προκύπτει πρόβλημα ως προς το αν θα υπάρξει συνεργασία ή όχι. Σε αυτές τις περιπτώσεις η λύση αναζητείται μέσα σε ένα τετράπλευρο που θα ορίζουν τα ζεύγη των τιμών του παιγνίου.

1.3.2 Παίγνια Συνεργασίας

Για να γίνει πλήρως κατανοητή η έννοια των παιγνίων συνεργασίας ακολουθεί το παρακάτω παράδειγμα.

Έστω ότι σε ένα παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος μεταξύ των A, B ισχύει ο ακόλουθος πίνακας κερδών του A:

Παίκτης Α / Παίκτης Β	*(1)*	*(2)*
(1)	(1,1)	(-2,3)
(2)	(-1,4)	(1,-1)

Πίνακας 5:Παίγνιο Συνεργασίας

Από αυτόν τον πίνακα προκύπτουν δύο χωριστά παίγνια εναντίον της φύσης με τις παρακάτω τιμές και μικτές στρατηγικές -1/5 και [2/5,3/5] για τον παίκτη Α και 13/7 και [4/7,3/7] για τον παίκτη Β:

Παίκτης Α

1	2
-1	1

Παίκτης Β

1	3
4	-1

Αν οι παίκτες Α και Β συνεργασθούν, τότε θα επιλέξουν τις τακτικές (2) και (1) αντίστοιχα, που τους δίνουν ως μεγαλύτερο κοινό κέρδος -1+4=3. Στη συνέχεια θα επιμερίσουν τις 3 μονάδες του κοινού τους κέρδους ώστε να κερδίσουν όχι λιγότερα από -1/5 και 13/7.

Οι βασικοί τρόποι επίλυσης παιγνίων συνεργασίας είναι κατά Nash, Sharpley και Raiffa. Η παρουσίαση που ακολουθεί θα γίνει με τη βοήθεια του παιγνίου της διαμάχης των δύο φύλων. [11]

Η «μάχη των φύλων» είναι ένα συνεργατικό παίγνιο δύο παικτών. Ουσιαστικά έχει να κάνει με ένα αντρόγυνο όπου συμφωνεί να βρεθεί το βράδυ, αλλά δεν μπορούν να θυμηθούν αν θα πήγαιναν στην όπερα ή σε ένα ποδοσφαιρικό αγώνα. Ο σύζυγος θα προτιμούσε να πάει στον ποδοσφαιρικό αγώνα και η γυναίκα θα προτιμούσε να πάει στην όπερα. Και οι δύο θα προτιμούσαν να πάνε στο ίδιο σημείο πάρα σε διαφορετικά. Αν δεν μπορούν να επικοινωνήσουν όμως που θα πήγαιναν; Η μήτρα πληρωμών παρουσιάζει τις διάφορες στρατηγικές. Για το συγκεκριμένο παίγνιο υπάρχουν αρκετές παραλλαγές ενώ μπορεί να συναντηθεί και ως παίγνιο Bach ή Stravinsky όπου πλέον οι δύο παίκτες αποκαλούνται γενικά παίκτης Α και παίκτης Β παρά ως άνδρας και γυναίκα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μήτρα πληρωμών θα είναι η εξής:

Άνδρας / Γυναίκα	*Α*	*Μ*
Α	(2,0)	(-1,-2)
Μ	(-2,-1)	(0,2)

Με Α (αντίστοιχα με Μ) σημειώνεται η τακτική (επιθυμία ή αναγκασμός) να παρακολουθήσουν τον αγώνα (ή αντίστοιχα να πάνε στην όπερα).

- **Λύση κατά Nash**

Η λύση του Nash προκύπτει με βάση τον προσδιορισμό του επιμερισμού που μεγιστοποιεί το γινόμενο των «χρησιμοτήτων» των δύο παικτών και ικανοποιεί τα ακόλουθα τέσσερα αξιώματα:

[11] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 63-68

i. Εξαρτάται από ένα σημείο που αποτελεί το status quo και για τους δύο παίκτες.
ii. Πρέπει να ανήκει στο σύνολο των δυνατών συμφωνιών.
iii. Δεν επηρεάζεται από γραμμικούς μετασχηματισμούς των κερδών.
iv. Δεν εξαρτάται από τα «ονόματα» των παικτών.

Έτσι αν τα X,Y είναι αντίστοιχα τα κέρδη των Α και Β και S το σύνολο των δυνατών συμφωνιών των διαπραγματεύσεων, τότε σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα το status quo είναι ένα σημείο που θα ανήκει στο S (έστω το σημείο (x_0,y_0)) που παραμένει αναλλοίωτο σε όλη τη διάρκεια των διαπραγματεύσεων και αποτελεί το σημείο εκκίνησής τους.

Με βάση το δεύτερο αξίωμα το σύνολο S πρέπει να είναι κυρτό και συμπαγές και οι Α, Β να μην συμφωνούν όταν μπορούν να βελτιώσουν ακόμα τα κέρδη τους δηλαδή η λύση να έχει την ιδιότητα του Pareto Optimum. Η βελτιστοποίηση κατά Pareto (ή Pareto Optimum) ουσιαστικά αναφέρει ότι η κατάσταση κάποιου δεν μπορεί να βελτιωθεί αν χειροτερεύσει αυτή του άλλου.

Το τρίτο αξίωμα αναφέρεται στην ιδιότητα της λύσης να παραμένει η ίδια, όταν γίνεται αλλαγή στις κλίμακες κερδών των παικτών (με τη βοήθεια γραμμικών μετασχηματισμών) που να διευκολύνει τον υπολογισμό.

Το τέταρτο αξίωμα ουσιαστικά εξηγεί γιατί η λύση παραμένει η ίδια αν οι παίκτες αλλάξουν τη θέση τους.

Ο Nash απέδειξε ότι, όταν είναι γνωστή η συναρτησιακή σχέση των κερδών Y=f(x), το σημείο που μεγιστοποιεί το γινόμενο (X-x_0)(Y-y_0) επαληθεύει τα τέσσερα αξιώματα και αποτελεί λύση και μάλιστα βρίσκεται στο σύνορο του S.

Ως εκ τούτου το παίγνιο της διαμάχης των δύο φύλων είναι Y=2-X, ενώ το σημείο status quo αντιστοιχεί στις μαθηματικές ελπίδες των παικτών, δηλαδή:

$$x_0 = [x \ \ 1-x]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = 5xy - x - 2y \text{ (Σχέση 19)}$$

$$y_0 = [x \ \ 1-x]\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = 5xy - 4x - 3y + 2 \text{ (Σχέση 20)}$$

Με $[x \ \ 1-x]$ και $\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}$ να είναι οι αντίστοιχες μήτρες των μικτών στρατηγικών. Εξάλλου η συνάρτηση $F = (X - x_0)(Y - y_0)$ μπορεί να γίνει ως εξής:

$$F = (X - x_0)(2 - X - y_0) = -X^2 + (2 + x_0 - y_0)X - 2x_0 + x_0 y_0$$

Η παραπάνω συνάρτηση για να μεγιστοποιηθεί θα πρέπει να ισχύουν οι εξής συνθήκες:

- F’=0
- F”<0

Άρα θα πρέπει $2X + 2 + x_0 - y_0 = 0$ και -2<0 συνεπώς $X = 1 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$ και $Y = 1 - \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$.

Η διαφορά μεταξύ των x_0 και y_0 είναι η μαθηματική ελπίδα του μηδενικού αθροίσματος παιγνίου με δύο πρόσωπα και πίνακα κερδών τον εξής:

	Γ	
Α	2	1
	-1	-2

Όπου $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Πράγματι είναι:

$$[x \;\; 1-x]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = 3x + y - 2 = x_0 - y_0$$

Και με δεδομένο ότι αυτό το παίγνιο είναι καθαρής στρατηγικής έπεται ότι για x=1 και y=0 μεγιστοποιείται η X και ελαχιστοποιείται η Y, άρα οι αντίστοιχες τιμές των κερδών X=3/2 και Y=1/2 είναι η λύση κατά Nash.

- **Λύση κατά Sharpley**[12]

Η λύση κατά Sharpley δέχεται στο σκεπτικό της λύσης του Nash, με τη διαφορά ότι ορίζει ως status quo τα μεμονωμένα κέρδη των δύο παικτών. Συνεπώς στο παίγνιο διαμάχης των δύο φύλων, που αντιστοιχούν τα ακόλουθα δύο χωριστά παίγνια εναντίον της φύσης:

- Άνδρας

2	-1
-2	0

- Γυναίκα

0	-2
-1	2

Με τιμές και μικτές στρατηγικές -2/5 και [2/5,3/5] για τον άνδρα και -2/5 και [4/5,1/5] για τη γυναίκα, θα είναι x_0=-2/5 και y_0=-2/5. Με βάση αυτά η συνάρτηση $F = (X + \frac{2}{5})(Y + \frac{2}{5})$ ή $F = (X + \frac{2}{5})(Y + \frac{2}{5}) = -X^2 + 2X + \frac{24}{25}$ θα μεγιστοποιηθεί όταν θα ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

[12] Philip D. Straffin, Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America 1993 σελ. 171-176

- F’=0
- F”<0

Άρα θα πρέπει -2X+2=0 και -2<0 συνεπώς $X = 1 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$ και . $Y = 1 - \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$, άρα X=1 και Y=1 που θα είναι και οι αντίστοιχες τιμές κερδών που συνιστούν τη λύση κατά Sharpley.

- **Λύση κατά Raiffa**

Η λύση κατά Raiffa προκύπτει από τον πίνακα των διαφορών του αρχικού πίνακα κερδών. Έτσι στο παίγνιο διαμάχης των δύο φύλων θα αντιστοιχεί ο παρακάτω πίνακας διαφορών:

Γ

Α

2	1
-1	-2

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει αν και πόσο υπερέχει ή μειονεκτεί ο άνδρας από τη γυναίκα. Ο πίνακας αυτός, θεωρούμενος ως πίνακας κερδών ενός μηδενικού αθροίσματος παιγνίου με δύο πρόσωπα, έχει σημείο ισορροπίας με τιμή υ=1. Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι ο άνδρας δεν πρέπει να δεχτεί να λάβει λιγότερο από 1. Έτσι οι τιμές X=1 και Y=1 είναι αυτές που συνιστούν τη λύση κατά Raiffa.

1.3.3 Μη Συνεργατικά Παίγνια

Στα συνεργατικά παίγνια οι παίκτες πρέπει να τηρούν τις υποσχέσεις τους. Στα μη συνεργατικά παίγνια αυτό δεν είναι δυνατό. Αν και μερικές φορές υπάρχει η άποψη ότι στα συνεργατικά παίγνια επιτρέπεται η επικοινωνία και στα μη συνεργατικά όχι αυτό δεν ισχύει πάντα. Η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ συνεργατικών και μη συνεργατικών παιγνίων είναι ότι τα μη συνεργατικά παίγνια είναι σε θέση να διαμορφώσουν καταστάσεις έως και τη τελευταία λεπτομέρεια, παράγοντας ακριβή αποτελέσματα, ενώ τα συνεταιριστικά παίγνια επικεντρώνονται στο παιχνίδι γενικότερα. Για να φανούν περισσότερο οι διαφορές ακολουθεί το εξής παράδειγμα:[13]

Έστω ότι σε ένα παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος μεταξύ των παικτών Α και Β ισχύει ο ακόλουθος πίνακας κερδών τους:[14]

Παίκτης Α / Παίκτης Β	*(1)*	*(2)*
(1)	(1,1)	(0,2)
(2)	(2,0)	(1,1)

Πίνακας 6: Συνεργατικό Παίγνιο Μη Μηδενικού Αθροίσματος

[13] L.C. Thomas, Games Theory and Applications, John Wiley Publications σελ. 85

[14] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 69-71

Από αυτόν προκύπτουν τα ακόλουθα δύο χωριστά παίγνια εναντίον της φύσης:

<u>Παίκτης Α</u>

~~1~~	~~0~~
2	1

<u>Παίκτης Β</u>

~~1~~	2
~~0~~	1

Στα οποία η δεύτερη τακτική κυριαρχεί της πρώτης. Συνεπώς αν η συνεργασία των δύο παικτών αποκλείεται, τότε ακολουθώντας αμφότεροι τη δεύτερη τακτική τους θα έχουν κέρδος αντίστοιχα 1. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας για το παίγνιο. Το ορίζει το ζεύγος (2,2) των τακτικών των παικτών, που χρησιμοποιούν καθαρές στρατηγικές. Είναι φανερό ότι κανένας παίκτης δεν κερδίζει περισσότερα αν αλλάζει τακτική μονομερώς.

Έστω τώρα το παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος και μη συνεργατικό μεταξύ των παικτών Α και Β για το οποίο ισχύει ο ακόλουθος πίνακας κερδών:

Παίκτης Α / Παίκτης Β	*(1)*	*(2)*
(1)	(1,1)	(-2,2)
(2)	(2,-2)	(5,-5)

Πίνακας 7:Μη Συνεργατικό Παίγνιο Μη Μηδενικού Αθροίσματος

Για το παραπάνω παίγνιο αποδεικνύεται μέσω των παρακάτω πινάκων ότι δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές.

Παίκτης Α

1	-2
2	5

Παίκτης Β

1	2
-2	-5

Στην περίπτωση αυτή αν $[x \quad 1-x]$ και $\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}$ είναι οι μικτές τους στρατηγικές, τότε οι μαθηματικές τους ελπίδες θα είναι ίσες με:

$$e_A = [x \ \ 1-x]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = -4xy + 3x + 7y - 5 \text{ (Σχέση 19)}$$

$$e_B = [x \ \ 1-x]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = -4xy + 7x + 3y - 5 \text{ (Σχέση 20)}$$

Για τον παίκτη Α:

$$e_A = x(3-4y) + 7y - 5 \text{ (Σχέση 21)}$$

Η μεγιστοποίηση του κέρδους του γίνεται για x=1 (αντίστοιχα x=0) όταν ο παίκτης Β εκλέγει y<3/4 (αντίστοιχα y>3/4) γιατί η διαφορά 3-4y είναι θετική (αντίστοιχα αρνητική).

Για τον παίκτη Β:

$$e_{\mathrm{B}} = y(3-4x) + 7x - 5 \text{ (Σχέση 22)}$$

Η μεγιστοποίηση του κέρδους του γίνεται για y=1 (αντίστοιχα y=0) όταν ο παίκτης Α εκλέγει x<3/4 (αντίστοιχα x>3/4) γιατί η διαφορά 3-4x είναι θετική (αντίστοιχα αρνητική).

Αν και οι δύο παίκτες επιλέξουν x=y=3/4 τότε 3-4y=3-4x=0 και $e_A = e_{\mathrm{B}} = 7\frac{3}{4} - 5 = \frac{1}{4}$.

Έτσι η μικτή στρατηγική [3/4,1/4] και για τους δύο παίκτες ορίζει, στην περίπτωση της μη συνεργασίας, ένα σημείο ισορροπίας με τιμή υ=1/4. Ο Nash απέδειξε ότι σε κάθε παίγνιο μη συνεργασίας υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

1.3.4 Παίγνια Ν προσώπων

Τα παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος με n παίκτες (n-persons non-zero-sum games) διακρίνονται σε παίγνια συνεργασίας και σε παίγνια μη συνεργασίας.[15]

Στα παίγνια συνεργασίας κάθε παίκτης λαμβάνει ή δίνει ένα ποσό που σημειώνεται με $x_i, i \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n\}$.

Το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ονομάζεται επιμερισμός και ισχύουν για αυτό οι ιδιότητες:

i. Το άθροισμα των κερδών είναι μη μηδενικό $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$.

ii. Το ποσό του κάθε παίκτη δεν μπορεί να είναι μικρότερο από εκείνο που λαμβάνει όταν είναι μόνος του $x_i \geq \upsilon(\{i\}), i \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε επιμερισμός του παιγνίου ικανοποιεί τις ιδιότητες του βέλτιστου σημείου κατά Pareto, ενώ ισχύουν για αυτό οι έννοιες της κυριαρχίας και λύσης που αναλύθηκαν για την επίλυση των παιγνίων και στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

---

[15] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 74

Κεφάλαιο 2ο

2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή η θεωρία των παιγνίων αναπτύχθηκε για πρώτη φορά το 1944 από τους John von Neumann και Oskar Morgenstern για τη μελέτη της οικονομικής συμπεριφοράς και της συμπεριφορικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων. Σε κάθε παίγνιο ο κάθε ανταγωνιστής έχει στη διάθεσή του ένα σύνολο μεταβλητών πολιτικής (policy variables) με τις οποίες επιδιώκει την ικανοποίησή ορισμένων στόχων. Αυτές οι μεταβλητές μπορεί να είναι οι τιμές, οι δαπάνες διαφήμισης των προϊόντων , οι δαπάνες για την έρευνα και την ανάπτυξη, ο αριθμός των παραγόμενων προϊόντων κλπ.

Όπως ισχύει και για τα υπόλοιπα παίγνια έτσι και στα παίγνια στην οικονομία ο παίκτης (ή αν μιλάμε για μία επιχείρηση ο ανταγωνιστής) έχει ένα καθορισμένο τρόπο ενέργειας και αντίδρασης με σαφώς καθορισμένες τιμές στις μεταβλητές πολιτικής, που ονομάζεται στρατηγική. Ο κάθε ανταγωνιστής έχει διάφορες εναλλακτικές στρατηγικές. Σε κάθε περίπτωση ο ανταγωνιστής εφαρμόζει τη στρατηγική εκείνη που θα του αποφέρει το καλύτερο (άριστο) αποτέλεσμα.

Για κάθε ανταγωνιστή - παίκτη υπάρχει μία άριστη επιλογή στρατηγικής ανεξάρτητα από το τρόπο με τον οποίο ενεργεί ο αντίπαλός του. Αυτή η στρατηγική ονομάζεται επικρατούσα στρατηγική (dominant strategy). Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν εφαρμογές που αφορούν το δυοπώλιο και λύση κατά Cournot και Stackelberg καθώς και άλλες εφαρμογές των παιγνίων από την καθημερινή λειτουργία μιας επιχείρησης.

2.2 Εφαρμογή στο Δυοπώλιο

Έστω ότι σε μία δυοπωλιακή αγορά ο δυοπωλητής ενδιαφέρεται για τη μεγιστοποίηση του κέρδους του. Αυτό όμως που θα πρέπει να εξεταστεί κατά περίπτωση είναι αν η αύξηση του μεριδίου της αγοράς θα οδηγήσει και σε ισόποση μείωση του μεριδίου της άλλης επιχείρησης, με άλλα λόγια αν το όφελος στη μία επιχείρηση αντισταθμίζεται από απώλειες της άλλης επιχείρησης, έτσι ώστε το καθαρό συνολικό αποτέλεσμα να είναι ίσο με μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:[16]

i. Οι επιχειρήσεις - παίκτες έχουν ένα σαφώς προσδιορισμένο στόχο. Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι η μεγιστοποίηση του μεριδίου της αγοράς.
ii. Κάθε επιχείρηση γνωρίζει τις στρατηγικές της, όπως και τις στρατηγικές του αντιπάλου της.
iii. Κάθε επιχείρηση γνωρίζει με βεβαιότητα τις αποδόσεις (πληρωμές) όλων των συνδυασμών των στρατηγικών που έχει στη διάθεσή της.
iv. Στο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, οι στόχοι των επιχειρήσεων είναι εκ διαμέτρου αντίθετοι και με αυτή την έννοια στα παίγνια αυτής της μορφής δεν υπάρχει κίνητρο για συνεργασία.
v. Ο κάθε παίκτης - επιχείρηση επιλέγει τη στρατηγική της, αναμένοντας τη χειρότερη επιλογή από τον αντίπαλό του, δηλαδή η ενέργεια της κάθε επιχείρησης στηρίζεται στην πρόβλεψη της ότι ο αντίπαλος της θα επιλέξει την καλύτερη δυνατή αντι-στρατηγική που είναι διαθέσιμη σε αυτόν. Αυτή η συμπεριφορά των παικτών θεωρείται ορθολογική.

Στο παραπάνω πρόβλημα θα υπάρχουν αρχικά δύο μήτρες πληρωμών κάθε μία για κάθε επιχείρηση όπως είναι οι παρακάτω:

[16] Γ.Μ. Παλαιολόγος, Σύγχρονη Μικροοικονομική θεωρία, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, σελ. 705-729

Επιχείρηση 1

Επιχ. Α / Επιχ.Β	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*
(1)	0,2	0,3	0,25	0,4
(2)	0,5	0,4	0,6	0,65
(3)	0,45	0,35	0,3	0,5
(4)	0,35	0,25	0,45	0,7

Πίνακας 8:Δυοπώλιο, Μήτρα Κερδών Επιχείρησης Α

Επιχείρηση 2

Επιχ. Α / Επιχ.Β	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*
(1)	0,8	0,7	0,75	0,6
(2)	0,5	0,6	0,4	0,35
(3)	0,55	0,65	0,7	0,5
(4)	0,65	0,75	0,55	0,3

Πίνακας 9:Δυοπώλιο, Μήτρα Κερδών Επιχείρησης Β

Για το παραπάνω παίγνιο η κάθε επιχείρηση έχει από 4 στρατηγικές. Η επιχείρηση Α θα έχει maxmin ίσο με 0,4 ως μερίδιο αγοράς και η επιχείρηση 2 θα έχει maxmin ίσο με 0,6.

Σε ένα παίγνιο όμως μηδενικού συνολικού αθροίσματος δεν χρειάζεται η μήτρα πληρωμών της επιχείρησης Β καθώς οι στήλες της μήτρας πληρωμών της επιχείρησης Α παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τις αποδόσεις (πληρωμές) των στρατηγικών της επιχείρησης Β. Με άλλα λόγια η δομή του παιγνίου είναι συμμετρική.

Όπως φαίνεται στη μήτρα πληρωμών υπάρχει πράγματι λύση ισορροπίας όπως φαίνεται και από τη συνδυασμένη μήτρα πληρωμών καθώς:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \text{ (Σχέση 23).}$$

Επ. Α / Επ. Β	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*	*Maxmin*
(1)	0,2	0,3	0,25	0,4	0,2
(2)	0,5	0,4	0,6	0,65	0,4
(3)	0,45	0,35	0,3	0,5	0,3
(4)	0,35	0,25	0,45	0,7	0,25
Minimax	0,5	0,4	0,6	0,7	

Πίνακας 10:Δυοπώλιο, Συνδυασμένη Μήτρα Κερδών

Στην περίπτωση όπου το παίγνιο δεν ήταν μικτής στρατηγικής δηλαδή $\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$ τότε σε αυτή την περίπτωση οι τρόποι επίλυσης του συγκεκριμένου παιγνίου θα ήταν ίδιοι με αυτοί που αναφέρθηκαν και στο κεφάλαιο 1 για τα παίγνια μικτής στρατηγικής.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως στην περίπτωση του δυοπωλίου είναι αυτές όπου το παίγνιο είναι μη μηδενικού αθροίσματος. Από εκεί και πέρα αυτό που θα πρέπει να διευκρινιστεί είναι αν οι δύο επιχειρήσεις θα συνεργαστούν ή δεν θα υπάρχει κοινός τόπος για κάτι τέτοιο. Έτσι προκύπτουν οι δύο περιπτώσεις:

1. Δυοπώλιο ως παίγνιο συνεργασίας[17]

Σε αυτή την περίπτωση οι δύο επιχειρήσεις που διαθέτουν στην αγορά αποφασίζουν να συνεργαστούν ώστε να πουλήσουν από κοινού το προϊόν με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το αντίστοιχο κέρδος. Σε αυτή την περίπτωση ενώ αρχικά οι επιχειρήσεις A και B διαθέτουν ποσότητες q_1 και q_2, συγκροτούν πλέον την ποσότητα $q=q_1+q_2$ με στόχο να μεγιστοποιήσουν το κοινό τους κέρδος. Ως εκ τούτου όταν είναι γνωστή η συνάρτηση της ζήτησης και ότι το κόστος παραγωγής (αγοράς) είναι σταθερό, τότε η μεγιστοποίηση του κοινού κέρδους ανάγεται στη μεγιστοποίηση των ολικών εσόδων.

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης δίνει $p=6-q$, τότε θα είναι $R=p*q=(6-q)q=6q-q^2$.Αρχικά θα πρέπει $R'=0$ και $R''<0$ για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση των συνολικών εσόδων, Οι παράγωγοι θα είναι οι εξής:

$$\frac{dR}{dq} = 6 - 2q$$

και

$$\frac{d^2R}{dq^2} = -2$$

Από εδώ και πέρα η επίλυση του συγκεκριμένου παίγνιου μπορεί να γίνει με επίλυση κατά Nash ή με όποιον άλλο τρόπο επίλυσης συνεργατικών παιγνίων. Από την συγκεκριμένη επίλυση θα βρεθούν οι ποσότητες q_1 και q_2 που θα πρέπει να διαθέσουν οι δύο επιχειρήσεις ώστε να μεγιστοποιήσουν τα συνολικά τους έσοδα. Τα κοινά τους έσοδα στο δοθέν υπόδειγμα θα είναι ίσα με $R=9$ και $q_1+q_2=3$.

2. Δυοπώλιο ως μη συνεργατικό παίγνιο[18]

Σε αυτή την περίπτωση οι δύο επιχειρήσεις που διαθέτουν το ίδιο προϊόν, δεν μπορούν να συνεργαστούν και ως εκ τούτου ανταγωνίζονται με σκοπό να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους χωριστά.

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση ζήτησης είναι γνωστή και το κόστος παραγωγής (αγοράς) είναι σταθερό, τότε η μεγιστοποίηση των κερδών τους ανάγεται στη μεγιστοποίηση των ολικών τους εσόδων $R_1=p*q_1$ και $R_2=p*q_2$ αντίστοιχα, όπου p είναι η τιμή του προϊόντος και q_1, q_2 οι ποσότητες που μπορούν να διαθέσουν η επιχείρηση A και η επιχείρηση B αντίστοιχα.

Με δεδομένο όμως ότι η τιμή p είναι συνάρτηση της ποσότητας $q=q_1+q_2$ του μονοπωλίου, συνεπάγεται ότι τα έσοδα R_1 και R_2 των δύο επιχειρήσεων είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων q_1 και q_2 που διαθέτουν. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι τα έσοδα και κατ' επέκταση και τα κέρδη κάθε επιχείρησης δεν εξαρτώνται μόνο από την ποσότητα που διαθέτει η επιχείρηση, αλλά και από την ποσότητα που διαθέτει η ανταγωνίστρια της. Τέτοιου είδους παίγνια λύνονται με δύο τρόπους:

- **Κατά Cournot**

[17] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 68-69
[18] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 71-73

Ο Cournot υποθέτει ότι κάθε επιχείρηση θεωρεί την ποσότητα παραγωγής της ανταγωνίστριας της σταθερή άρα $R_1 = f_1(q_1)$ και $R_2 = f_2(q_2)$ αντίστοιχα. Έτσι για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα ισχύουν τα εξής:

$$R_1 = p \cdot q_1 = (6 - q_1 - q_2)q_1 = 6q_1 - q_1^2 - q_1 q_2 \text{ (Σχέση 24)}$$

και

$$R_2 = p \cdot q_2 = (6 - q_1 - q_2)q_2 = 6q_1 - q_1 q_2 - q_2^2 \text{ (Σχέση 25)}$$

Άρα από τις παραγώγους προκύπτουν τα εξής:

Για την επιχείρηση Α η πρώτη παράγωγος θα είναι ίση με $\frac{dR_1}{dq_1} = 6 - 2q_1 - q_2$ και η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με $\frac{d^2R_1}{dq_1^2} = -2$.

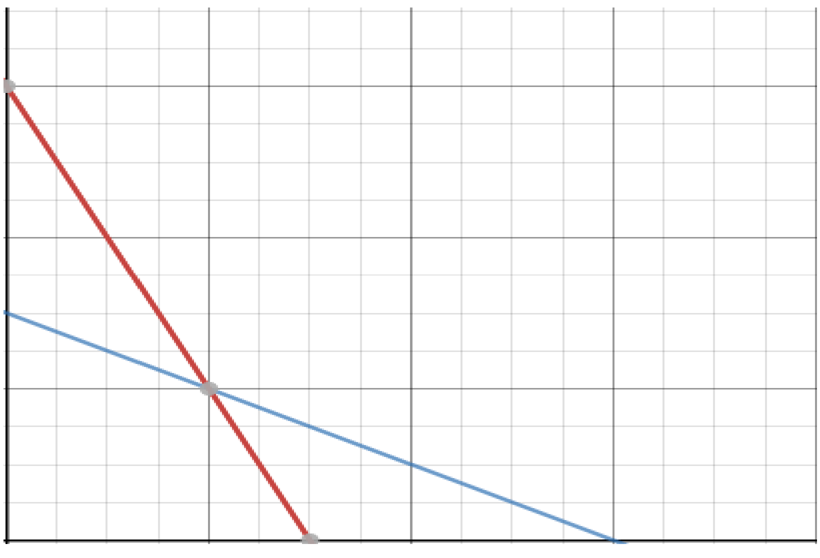
Για την επιχείρηση Β η πρώτη παράγωγος θα είναι ίση με $\frac{dR_2}{dq_2} = 6 - q_1 - 2q_2$ και η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με $\frac{d^2R_2}{dq_2^2} = -2$.

Από τις παραπάνω παραγώγους προκύπτει το σύστημα:

$$6 - 2q_1 - q_2 = 0 \text{ (Σχέση 26)}$$

και

$$6 - q_1 - 2q_2 = 0 \text{ (Σχέση 27)}$$



Εικόνα 1: Γραφική Απεικόνιση Εξισώσεων Ευθειών σε μη Συνεργατικό Παίγνιο και επίλυση κατά Cournot

Για το οποίο η λύση θα είναι $q_1=q_2=2$ και τα έσοδα των επιχειρήσεων θα είναι $R_1=R_2=4$ Το σημείο τομής των δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι η λύση του παιγνίου.

- **Κατά Stackelberg**

Ο Stackelberg υποθέτει ότι η μία από τις επιχειρήσεις κυριαρχεί στην αγορά καθορίζοντας έτσι τη τιμή και την ποσότητα που μεγιστοποιούν τα έσοδά της. Έτσι αν στο παράδειγμα κυριαρχεί η πρώτη επιχείρηση προσφέροντας ποσότητα q_1, τότε η δεύτερη επιχείρηση είναι υποχρεωμένη να προσφέρει ποσότητα $q_2=3-0,5q_1$ (όπως προκύπτει και από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος της λύσης του Cournot). Στην περίπτωση αυτή η επιχείρηση έχει έσοδα:

$$R_1 = p \cdot q_1 = (6 - q_1 - (3 - 0,5q_1))q_1 \quad \text{(Σχέση28)}$$

$$R_1 = 3q_1 - 0,5q_1^2 \quad \text{(Σχέση 29)}$$

Για τα οποία η μέγιστη τιμή προκύπτει όταν $3 - q_1 = 0$ άρα το $q_1 = 3$.

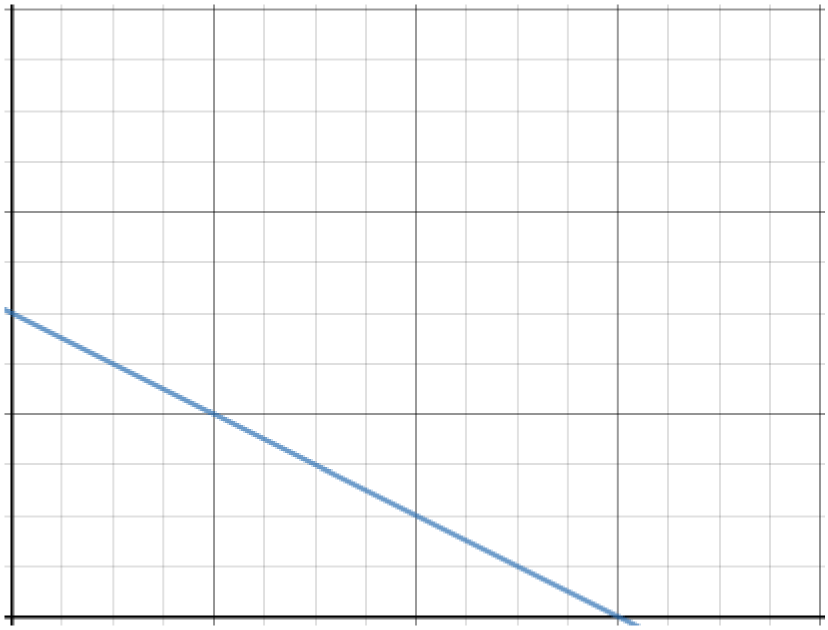
Συνεπώς:

$R_1=3*3-0,5*3^2=4,5$

$p=6-3-1,5=1,5$

$q_2=3-0,5*3=1,5$

$R_2=1,5*1,5=2,25$



Εικόνα 2: Γραφική Απεικόνιση Ευθειών σε μη Συνεργατικό Παίγνιο και επίλυση κατά Stackelberg

2.3 Αποφάσεις στον Ανταγωνισμό (1)

Στον χώρο των επιχειρήσεων οι εταιρείες πρέπει να κάνουν επιλογές υπό το καθεστώς αβεβαιότητας για μία σειρά από παράγοντες. Σε αυτές τις περιπτώσεις η δυνατότητα η επιχείρηση να έχει σωστή πληροφόρηση για τους ανταγωνιστές της καθίσταται αναγκαία. Έστω ότι υπάρχει ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μεταξύ δύο εταιριών που δραστηριοποιούνται στην κατασκευή συστημάτων ήχου. Η πρώτη εταιρεία είναι αρκετά γνωστή στην αγορά ενώ η δεύτερη αν και λιγότερο γνωστή έχει τη φήμη ότι παρέχει ποιοτικές λύσεις. Και οι δύο λοιπόν εταιρείες αναπτύσσουν μία νέα τεχνολογία στα συστήματα ήχου όπου θα δημιουργήσει μία νέα αγορά. Οι προβλέψεις δεν μπορούν να είναι σε καμία περίπτωση σίγουρες για το ύψος του ετήσιου τζίρου της αγοράς καθώς μπορεί να είναι από 24 έως 40 εκατομμύρια ευρώ το χρόνο ενώ οι πιθανότητες για να πετύχει μία μικρή ή μία μεγάλη εταιρεία είναι 50-50.

Αυτό που μένει να αποφασίσουν οι δύο εταιρείες είναι αν θα φτιάξουν ένα σύστημα που να είναι πολύ ποιοτικό ή ένα σύστημα πιο κοντά στον μέσο χρήστη. Αν η αγορά είναι μικρή τότε το σαφώς πιο ποιοτικό σύστημα θα υπερισχύσει ενώ αν το μέγεθος της αγοράς είναι μεγάλο τότε θα υπερισχύσει το λιγότερο ποιοτικό σύστημα. Το παρακάτω υπόδειγμα είναι ουσιαστικά του Παιγνίου του Harvard Business School που είναι γνωστό ως “Competitive Decision Making”.[19]

Η εταιρεία Α πιστεύει ότι θα έχει μεγαλύτερο μερίδιο αγοράς λόγω του ονόματός της και μπορεί να «προμοτάρει» καλύτερα ένα σύστημα έστω και χειρότερης ποιότητας. Μετά από έρευνα αγοράς λοιπόν η εταιρεία Α κατέληξε στα πιθανά μερίδα αγοράς. Και οι δύο εταιρείες έχουν μόνο δύο στρατηγικές ή θα παρασκευάσουν ένα ποιοτικό σύστημα ή ένα λιγότερο ποιοτικό σύστημα. Η μήτρα που προκύπτει λοιπόν σε αυτή την περίπτωση είναι η εξής (τα μερίδια αγοράς είναι εκφρασμένα σε εκατομμύρια ευρώ):

Επ. Α / Επ. Β	*(Μη Ποιοτικό)*	*(Ποιοτικό)*
(Μη Ποιοτικό)	(23,9)	(18,14)
(Ποιοτικό)	(18,14)	(20,12)

Πίνακας 11: Παίγνιο Μηδενικού Αθροίσματος-Αποφάσεις με βάση τον Ανταγωνισμό

Το παραπάνω παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος και μικτής στρατηγικής με e_A=19*3/7 και e_B=12*4/7.

Έστω εταιρεία Α ως εταιρεία πιο γνωστή αποφασίζει πρώτη τι θα παράγει και η εταιρεία Β ως πιο μικρή και σαφώς πιο ευέλικτη μπορεί να περιμένει να δει τι θα κάνει η εταιρεία Α και μετά να κινηθεί ανάλογα. Σε αυτή την περίπτωση η εταιρεία Α συνεχίζει να έχει δύο στρατηγικές διαθέσιμες αλλά πλέον η εταιρεία Β όντως πιο ευέλικτη σε αυτή την περίπτωση έχει πλέον τέσσερις διαθέσιμες στρατηγικές. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί πλέον σε κάθε απόφαση της εταιρείας Α η εταιρεία Β θα έχει την ευχέρεια να αποφασίσει μεταξύ της παραγωγής πιο ποιοτικού συστήματος και της παραγωγής ενός μη ποιοτικού συστήματος. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει η παρακάτω μήτρα πληρωμών για τον παίκτη Α:

Επ. Α / Επ. Β	*(Μη Ποιοτ ./ Μη Ποιοτ.)*	*(Μη Ποιοτ. / Ποιοτ.*	*Ποιοτ. / Μη Ποιοτ.*	*Ποιοτ. / Ποιοτ.*
Μη Ποιοτικό	23	23	18	18
Ποιοτικό	18	20	18	20

Πίνακας 12:Παίγνιο Μη Μηδενικού Αθροίσματος, Περίπτωση 1-Αποφάσεις με βάση τον Ανταγωνισμό

---

[19] Philip D. Straffin, Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America 1993 σελ. 44-49

Το συγκεκριμένο παίγνιο είναι καθαρής στρατηγικής και μάλιστα έχει δύο σημεία ισορροπίας (ή σαγματικά σημεία) όπου η μήτρα θα δώσει μερίδιο 18 εκατομμύρια στην εταιρεία Α και 14 στην εταιρεία Β και αυτό συμβαίνει όταν η εταιρεία Β κάνει το αντίθετο από την εταιρεία Α. Σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με πριν Η εταιρεία Α παρότι είναι η ηγέτιδα στην αγορά λόγω του ονόματος της δεν κινήθηκε σωστά καθώς σε σχέση με την περίπτωση που κινήθηκαν ταυτόχρονα έχει ήδη μία ζημία περίπου 1,5 εκατομμύρια ευρώ.

Η επόμενη υπόθεση δεν διαφέρει πολύ από την προηγούμενη, αυτή τη φορά όμως η εταιρεία Α πριν αποφασίσει τι θα παράγει θα διενεργήσει μία εκτεταμένη και ακριβή έρευνα αγοράς για να δει αν η αγορά στην οποία θα δραστηριοποιηθεί θα είναι μικρή ή μεγάλη. Η εταιρεία Β θα γνωρίζει ότι η Α θα κάνει έρευνα αλλά δεν θα ξέρει το αποτέλεσμα της. Σε αυτή την περίπτωση το παίγνιο θα είναι σαφώς πιο σύνθετο καθώς μέσω της έρευνας η επιχείρηση Α θα έχει περισσότερες στρατηγικές (από δύο θα έχει πλέον τέσσερις στρατηγικές). Αυτή η διαφορά δεν οφείλεται στην επιχείρηση Β όπου θα λειτουργήσει με τον ίδιο τρόπο με πριν αλλά στην Α καθώς πλέον η Α ανάλογα με το μέγεθος της αγοράς και τι μπορεί να κάνει η επιχείρηση Β μετά από αυτή θα έχει εικόνα σχετικά με την βέλτιστη στρατηγική. Με βάση τα παραπάνω ο παίγνιο που προκύπτει είναι το εξής:

Επ. Α / Επ. Β	*(Μη Ποιοτ. / Μη Ποιοτ.)*	*(Μη Ποιοτ. / Ποιοτ.)*	*(Ποιοτ. / Μη Ποιοτ.)*	*(Ποιοτ. / Ποιοτ.)*
(Μη Ποιοτ. / Μη Ποιοτ.)	23	23	18	18
(Μη Ποιοτ. / Ποιοτ.)	16	20	12	16
(Ποιοτ. / Μη Ποιοτ.)	25	23	24	22
(Ποιοτ. / Ποιοτ.)	18	20	18	20

Πίνακας 13:Παίγνιο μη Μηδενικού Αθροίσματος, Περίπτωση 2-Αποφάσεις με βάση τον Ανταγωνισμό

Ουσιαστικά η εταιρεία Β συνεχίζει στην ίδια τακτική να εξαρτάται από την επιλογή της Α αλλά η Α πλέον κινείται με βάση τις πιθανότητες σχετικά με το μέγεθος της αγοράς. Αν το μέγεθος της αγοράς είναι μικρό τότε η επιχείρηση Α θα παράγει ποιοτικό σύστημα ενώ αν είναι μεγάλη τότε θα παράγει ένα λιγότερο ποιοτικό σύστημα. Με βάση το παραπάνω επίσης αυτό που φαίνεται είναι ότι η επιχείρηση Β θα πρέπει να παράγει πάντα ποιοτικό σύστημα ανεξάρτητα από το τι θα κάνει η επιχείρηση Α και η πληρωμή θα είναι 22 εκατομμύρια ευρώ για την επιχείρηση Α και 10 εκατομμύρια ευρώ για την επιχείρηση Β.

Αρχικά παρατηρείται ότι η επιχείρηση Α σε σχέση με τις προηγούμενες υποθέσεις είναι κερδισμένη. Ιδίως σε σχέση με την προηγούμενη υπόθεση η εταιρεία Α θα έχει έσοδα 22 εκατομμύρια ευρώ άρα 4 εκατομμύρια ευρώ σε σχέση με πριν. Άρα αν η έρευνα αγοράς που έκανε η επιχείρηση Α στοίχησε κάτω από 4 εκατομμύρια τότε η λογική που ακολούθησε η Α ήταν η σωστή. Σχετικά με την επιχείρηση Β ΄πως επισημάνθηκε και πριν πλέον θα παράγει ποιοτικά συστήματα σε κάθε περίπτωση. Αν η επιχείρηση Β δεν γνώριζε για την έρευνα της Α τότε τι θα γίνονταν; Τότε η Β θα λειτουργούσε με βάση τη λογική του δεύτερου παιγνίου και θα επέλεγε το αντίθετο από την επιχείρηση Α. Σε αυτή την περίπτωση η επιχείρηση Α θα είχε ακόμα μεγαλύτερα έσοδα (από 22 σε 24 εκατομμύρια) και η επιχείρηση Β θα είχε μικρότερα έσοδα.

Γενικά από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό γιατί η ενημέρωση ή μη των ανταγωνιστών παίζει καθοριστικό ρόλο στις ενέργειες που θα κάνουν.

2.4 Αποφάσεις στον Ανταγωνισμό (2)

Σε αντίστοιχο πλαίσιο με πριν ακολουθεί ένα ακόμα παράδειγμα εφαρμογής ενός παιγνίου που απαιτεί αποφάσεις με βάση τον ανταγωνισμό στις επιχειρήσεις. Σε αυτό το παράδειγμα σημαντικό ρόλο παίζει η σειρά με την οποία θα κινηθούν οι δύο ανταγωνιστές. Έστω ότι υπάρχουν δύο εταιρείες που παράγουν Η/Υ. Η κάθε εταιρεία μπορεί να παράγει είτε ένα γρήγορο υπολογιστή υψηλής ποιότητας ή έναν Η/Υ που θα είναι πιο αργός και λιγότερο ποιοτικός. Μέσω της έρευνας αγοράς προκύπτει η παρακάτω μήτρα πληρωμών για τα προσδοκώμενα έσοδα των δύο εταιρειών ανάλογα με τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν (τα έσοδα είναι εκφρασμένα σε εκατομμύρια ευρώ).

Επ. Α / Επ. Β	*(Ποιοτικός Η/Υ)*	*(Μη Ποιοτικός Η/Υ)*
(Ποιοτικός)	(30,30)	(50,35)
(Μη Ποιοτικός)	(40,60)	(20,20)

Πίνακας 14:Παίγνιο Παραγωγής Η/Υ

Αρχικά για το συγκεκριμένο παίγνιο δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική. Επίσης το συγκεκριμένο έχει δύο σημεία ισορροπίας κατά Nash. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι τι θα συμβεί ανάλογα με τις κινήσεις που θα κάνει ο κάθε παίκτης.

Στην περίπτωση όπου και οι δύο παίκτες κινηθούν με βάση το κριτήριο maxmin θα συμβούν τα εξής:[20]

- Για την εταιρεία Α: Αν η εταιρεία Α κινηθεί με βάση το κριτήριο maxmin τότε σίγουρα θα αποφύγει το χειρότερο σενάριο (20,20) όπου θα ισχύει αν παράγει Η/Υ χαμηλής ποιότητας. Συνεπώς θα επιλέξει να παράγει υπολογιστές γρήγορους και ποιοτικούς.
- Για την εταιρεία Β: Η εταιρεία Β με ανάλογο σκεπτικό με την εταιρεία Α θα προσπαθήσει να αποφύγει το χειρότερο σενάριο (20,20) κι θα παράγει επίσης συστήματα υψηλής ποιότητας.
- Με δεδομένο λοιπόν ότι οι δύο επιχειρήσεις θα κινηθούν στην παραγωγή συστημάτων υψηλής ποιότητας. Το άριστο όμως που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση είναι το σημείο (30,30) όπου με βάση τα βέλτιστα κατά Nash αυτό το σημείο είναι λιγότερο καλό. Όμως με δεδομένο ότι και οι δύο εταιρείες παίζουν ταυτόχρονα ο συντονισμός τους μεταξύ των παικτών θα είναι δύσκολος. Αυτό το γεγονός είναι αρκετά σημαντικό από τη στιγμή που δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική.
- Γενικά το κριτήριο maxmin έχει νόημα όταν οι δύο εταιρείες κινούνται ταυτόχρονα και ως εκ τούτου ο συντονισμός τους καθίσταται δύσκολος.

Στην περίπτωση όμως όπου οι παίκτες δεν κινηθούν ταυτόχρονα τότε θα ισχύουν τα εξής:

- Αν ξεκινήσει η εταιρεία Α: Η εταιρεία Α ξέρει ποια θα είναι η αντίδραση της εταιρείας Β είτε παράγει γρήγορους και ποιοτικούς Η/Υ, είτε παράγει αργούς και λιγότερο ποιοτικούς Η/Υ. Σε αυτή την περίπτωση η εταιρεία Α θα επιλέξει τη στρατηγική εκείνη που θα της αποφέρει το μεγαλύτερο κέρδος. Στο δοθέν παίγνιο την εταιρεία Α την συμφέρει να παράγει ποιοτικούς Η/Υ και η εταιρεία μη ποιοτικούς Η/Υ.
- Αν ξεκινήσει η εταιρεία Β: Με παρόμοιο σκεπτικό η εταιρεία Β ξέρει την αντίδραση της εταιρείας Α σε κάθε περίπτωση. Ως εκ τούτου η εταιρεία Β θα επιλέξει εκείνη τη στρατηγική που θα της αποφέρει το μεγαλύτερο κέρδος που στη συγκεκριμένη περίπτωση θα επιλέξει να παράγει ποιοτικούς Η/Υ ώστε η εταιρεία Α να παράγει λιγότερο ποιοτικούς.

[20] D. Avinash – S. Skeath – D. Reiley. Games of Strategy. 3rd ed., W. W. Norton & Company 2009, σελ. 470

- Το αποτέλεσμα ουσιαστικά δείχνει ότι αυτός που θα αναλάβει το ρίσκο και θα παράγει πρώτος έναντι του άλλου θα έχει πλεονέκτημα έναντι του άλλου παίκτη.

Έστω ότι οι παίκτες δεν κινούνται ταυτόχρονα. Είναι πρόθυμοι να κινηθούν πρώτοι όμως αυτή η κίνηση «κοστίζει». Σε αυτή την περίπτωση ποια εταιρεία θα κινηθεί πρώτη; Η εταιρεία Α μπορεί με βάση τη μήτρα να διαθέσει 50-40=10 εκατομμύρια ευρώ για να ξεκινήσει πρώτη. Η διαφορά αυτή προκύπτει από τα έσοδα που μπορεί να έχει στην περίπτωση που ξεκινήσει πρώτη και στην περίπτωση όπου ξεκινήσει δεύτερη και με δεδομένο ότι κινείται ορθολογικά. Αντίστοιχα η εταιρεία Β για να ξεκινήσει πρώτη μπορεί να διαθέσει 60-35=25 εκατομμύρια ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση η εταιρεία που μπορεί να εκκινήσει πρώτη είναι η επιχείρηση Β καθώς μπορεί να διαθέσει περισσότερα χρήματα από την εταιρεία Α και παράλληλα να έχει κέρδος, καθώς στην περίπτωσή μας της αρκούν 11 από τα 25 εκατομμύρια τα οποία και έχει διαθέσιμα.

2.5 Δέσμευση και Αξιοπιστία

Στο παίγνιο που ακολουθεί αναδεικνύεται το πρόβλημα μίας μεγάλης εταιρείας να «δεχτεί» πλήγμα στο κύρος και την αξιοπιστία της όχι από έναν ανταγωνιστή της αλλά από έναν προμηθευτή της και μάλιστα χωρίς αυτός να έχει τον κυρίαρχο ρόλο. Έστω λοιπόν ότι η επιχείρηση Α είναι μία αυτοκινητοβιομηχανία και η επιχείρηση Β παράγει μόνο κινητήρες αυτοκινήτων και προμηθεύει κατά κύριο λόγο μόνο την Α. Σε αυτή την περίπτωση τη θέση του ηγέτη την κατέχει η εταιρεία Α καθώς η εταιρεία Β σε πρώτη φάση δεν μπορεί να επιλέξει τι θα παραχθεί καθώς η εταιρεία Α είναι αυτή που παράγει το τελικό προϊόν (το αυτοκίνητο). Η εταιρεία Α μπορεί να κατασκευάσει είτε μικρά, είτε μεγάλα αυτοκίνητα και ανάλογα και η εταιρεία Β παράγει και τους αντίστοιχους κινητήρες.[21] Το συγκεκριμένο παίγνιο είναι ένα διαδοχικό παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος καθώς οι παίκτες κινούνται σε γύρους. Σε αυτά τα παίγνια οι παίκτες καλούνται να σκεφτούν όλες τις πιθανές ενέργειες και τι αντιδράσεις θα έχουν από τους αντιπάλους τους. Η μήτρα κερδών λοιπόν για το συγκεκριμένο πρόβλημα θα είναι η εξής:

Επ. Β / Επ. Α	*(Μικρά Αυτοκίνητα)*	*(Μεγάλα Αυτοκίνητα)*
(Μικροί Κινητήρες)	(3,6)	(3,0)
(Μεγάλοι Κινητήρες)	(1,1)	(8,3)

Πίνακας 15:Παίγνιο Μεγάλης Επιχείρησης και Προμηθευτή-Αξιοπιστία

Όπως προκύπτει και από το παραπάνω παίγνιο η επιχείρηση Α έχει κάθε συμφέρον να παράγει μικρά αυτοκίνητα καθώς το κέρδος της θα είναι ίσο με 6 χρηματικές μονάδες. Αυτή η στρατηγική επιλογή όμως της επιχείρησης Α δεν εξυπηρετεί την επιχείρηση Β καθώς αυτή την συμφέρει να γίνονται μεγάλα αυτοκίνητα και η ίδια να κατασκευάζει μεγάλους κινητήρες. Η Α το μόνο που έχει ως δεδομένο ότι αν η ίδια κατασκευάζει μικρά αυτοκίνητα τότε τη Β τη συμφέρει να φτιάχνει μικρούς κινητήρες. Έτσι λοιπόν το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Μπορεί η εταιρεία Β να κάνει την Α να αλλάξει στρατηγική;

Ας γίνει η υπόθεση ότι η εταιρεία Β απειλεί ότι θα παράγει μόνο μεγάλες μηχανές ότι και αν επιλέξει να κάνει η εταιρεία Α. Αυτό μπορεί να το επιτύχει η εταιρεία Β καταστρέφοντας ενδεχομένως ένα μέρος του stock της από μικρές μηχανές ώστε να «περάσει» τις δικές της προτιμήσεις διακινδυνεύοντας όμως να φανεί αναξιόπιστη μιας και η εταιρεία Α την είχε ενημερώσει για τις προθέσεις της. Τότε θα προκύψει η παρακάτω μήτρα πληρωμών:

[21] D. Avinash – S. Skeath – D. Reiley. Games of Strategy. 3rd ed., W. W. Norton & Company 2009, σελ. 481

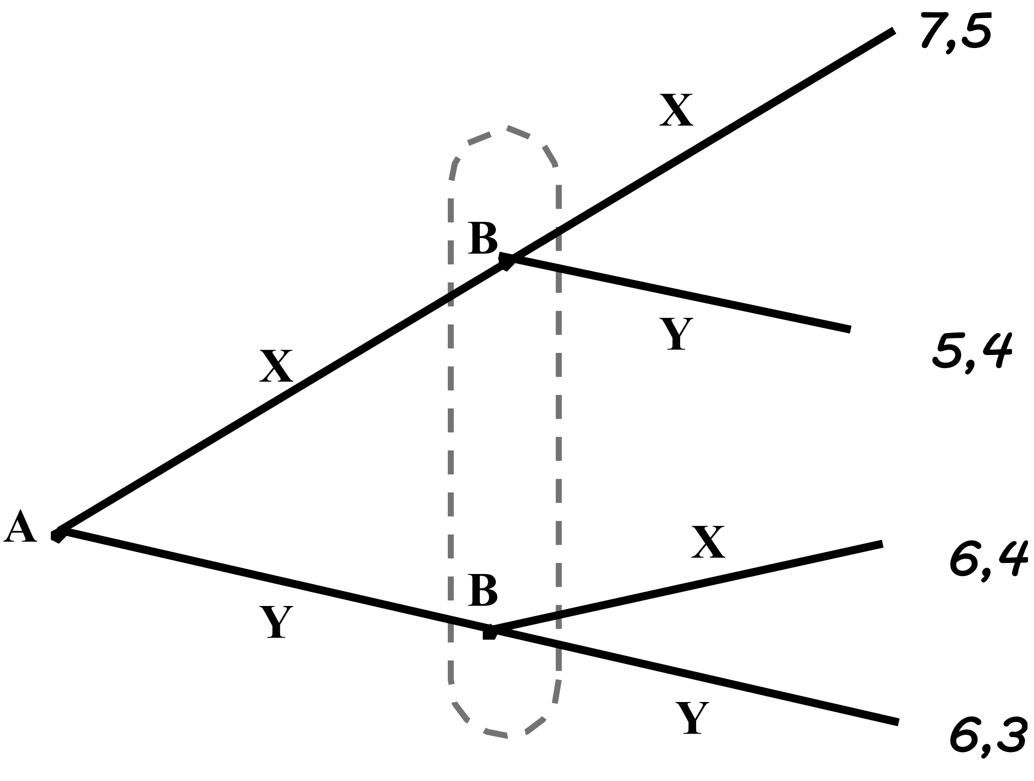
Επ. Β / Επ. Α	*(Μικρά Αυτοκίνητα)*	*(Μεγάλα Αυτοκίνητα)*
(Μικροί Κινητήρες)	(0,6)	(0,0)
(Μεγάλοι Κινητήρες)	(1,1)	(8,3)

Πίνακας 16:Παίγνιο μεγάλης Επιχείρησης και Προμηθευτή μετά την απόφαση του Προμηθευτή

Αν η Β συνεχίσει αυτή την πολιτική τότε θα αποκτήσει τη φήμη μίας παράλογης εταιρείας μακριά από τις απαιτήσεις της αγοράς μιας και απειλούν ουσιαστικά την Α ότι θα συνεχίσουν να παράγουν μεγάλες μηχανές ότι και αν γίνει. Αυτή η απειλή μπορεί να γίνει πιστευτή μιας και ένας παράλογος παίκτης δεν λειτουργεί με στρατηγικές που να μεγιστοποιούν το κέρδος.

2.6 Παίγνιο για τη διαφήμιση

Μία αρκετά σημαντική εφαρμογή πάνω στις αποφάσεις που καλείται να πάρει μία επιχείρηση είναι και αυτή της διαφημιστικής δαπάνης. Η απόφαση αυτή εξαρτάται και από ενδογενείς παράγοντες αλλά και από εξωγενείς.[22] Ένας ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας είναι η διαφημιστική δαπάνη των ανταγωνιστών της καθώς ανάλογα θα κινηθεί και η επιχείρηση. Αυτή η απόφαση μπορεί να ληφθεί με τη βοήθεια ενός παιγνίου μη μηδενικού αθροίσματος. Έστω ότι σε ένα κλάδο δραστηριοποιούνται δύο επιχειρήσεις η Α και η Β. Αυτές οι επιχειρήσεις πρέπει να αποφασίσουν πόση θα είναι η διαφημιστική δαπάνη για το επόμενο έτος. Η κάθε επιχείρηση μπορεί να επιλέξει η διαφημιστική δαπάνη να είναι είτε υψηλή (Υ) ή χαμηλή (Χ). Οι πιθανοί συνδυασμοί των αποφάσεων των επιχειρήσεων Α και Β μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια ενός δένδρου:



[22] L. Friedman, Game Theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures, Operations Research Vol. 6, No. 5 (Sep. - Oct., 1958) σελ. 699-709

Έστω ότι η επιχείρηση Α κάνει την πρώτη κίνηση επιλέγοντας είτε να έχει υψηλή, είτε χαμηλή διαφημιστική δαπάνη. Η επιχείρηση Β με τη σειρά της μπορεί να επιλέξει είτε να έχει υψηλή είτε χαμηλή διαφημιστική δαπάνη όμως η επιχείρηση Β δεν ξέρει πως θα κινηθεί η Α οπότε καλείται να εξετάσει όλες τις πιθανές λύσεις. Στο τέλος κάθε «κλαδιού» του δέντρου είναι εκφρασμένα σε εκατομμύρια ευρώ τα κέρδη που θα έχει η επιχείρηση Α και η επιχείρηση Β αντίστοιχα. Η μήτρα που προκύπτει για το παραπάνω παίγνιο είναι η εξής:

Επ. Α / Επ. Β	*(X)*	*(Y)*
(X)	(7,5)	(5,4)
(Y)	(6,4)	(6,3)

Πίνακας 17: Διαφημιστική Δαπάνη Μεταξύ Δύο Εταιρειών

Με βάση την μήτρα πληρωμών και το δένδρο όπως παρουσιάστηκε προκύπτει ότι υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για την επιχείρηση Β και αυτή είναι να έχει χαμηλή διαφημιστική δαπάνη. Η στρατηγική αυτή της Β είναι η ενδεδειγμένη ανεξάρτητα από τις αποφάσεις της επιχείρησης Α. Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει ως εξής:

- Αν η επιχείρηση Α επιλέξει την υψηλή διαφημιστική δαπάνη, τότε η επιχείρηση Β θα ακολουθήσει την πολιτική της χαμηλής διαφημιστικής δαπάνης όπου θα έχει κέρδος 5 εκατομμύρια ευρώ.
- Αν η επιχείρηση Α επιλέξει τη χαμηλή διαφημιστική δαπάνη, τότε η επιχείρηση Β θα ακολουθήσει την πολιτικής της χαμηλής διαφημιστικής δαπάνης καθώς θα έχει παραπάνω κέρδος σε σχέση με αυτή της υψηλής.
- Με δεδομένο ότι η επιχείρηση Β θα επιλέξει σε κάθε περίπτωση χαμηλή διαφημιστική δαπάνη η επιχείρηση Α θα επιλέξει και αυτή χαμηλή διαφημιστική δαπάνη καθώς εκεί έχει το μεγαλύτερο κέρδος
- Άρα η στρατηγική που θα ακολουθήσουν (Χ,Χ) θα έχει κέρδη 7 εκατομμύρια για την Α και 5 για την Β.

Στο συγκεκριμένο παίγνιο δεν υπάρχει άλλο σημείο ισορροπίας κατά Nash ενώ πληροί και την προϋπόθεση της συμμετρίας.

Ένα άλλο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις σχετικά με τις διαφημίσεις δεν είναι μόνο το συνολικό budget που θα διαθέσουν αλλά και ο τρόπος με τον οποίο θα διαφημιστούν σε συνδυασμό με τις επιλογές των ανταγωνιστών τους. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα τέτοιο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος αυτή τη φορά μεταξύ δύο ανταγωνιστικών επιχειρήσεων Α και Β όπου αυτή τη φορά θα εξετάσουν τις εναλλακτικές που έχουν ως προς τους τρόπους προβολής τους.[23] Έστω ότι οι τρόποι προβολής είναι οι εξής:

- (1) Τηλεοπτικά.
- (2) Ραδιοφωνικά.
- (3) Μέσω Έντυπου Τύπου.
- (4) Μέσω Ηλεκτρονικού Τύπου.
- (4) Μέσω Δικτύων Κοινωνικής Δικτύωσης.

Η μήτρα πληρωμών που ακολουθεί εμφανίζει τους πελάτες (σε χιλιάδες) για την επιχείρηση Α.

[23] Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών, Εκδόσεις Βαρβαρήγου σελ. 114-115

Επ. Α / Επ. Β	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*	*(5)*
(1)	60	150	150	150	150
(2)	100	40	100	100	100
(3)	80	80	32	80	80
(4)	60	60	60	24	60
(5)	20	20	20	20	8

Πίνακας 18:Μήτρα Πληρωμών μεριδίων αγοράς μεταξύ δύο εταιρειών ανάλογα με τον τρόπο προβολής τους.

Το παίγνιο αυτό είναι μικτής στρατηγικής με υ≈84 και άριστες μικτές στρατηγικές τις εξής: x=(0,4 0,6 0 0 0) και y=(0,73, 0,27 0 0 0). Αυτό όμως που παρουσιάζει ενδιαφέρουν στο συγκεκριμένο παίγνιο είναι ότι η Α υπερτερεί όταν επιλέγει διαφήμιση διάφορη από την επιχείρηση Β και αν επιλέξει την ίδια τότε η επιχείρηση Α περιορίζεται σε ποσοστό 40%. Αυτό το παίγνιο θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε προεκλογικές εκστρατείες όπου τα αντίπαλα κόμματα θα έπρεπε να επιλέξουν για παράδειγμα και τα μέσα προβολής τους ή ακόμα και σε ποιες πόλεις θα δώσουν μεγαλύτερη έμφαση στην προεκλογική τους εκστρατεία.

2.7 Δημοπρασίες

Η δημοπρασία γενικά ορίζεται ως μία διαδικασία κατά την οποία κατανέμονται πόροι. Κατανέμει στοιχεία ανάμεσα στους πλειοδότες/αγοραστές και καθορίζει το τελικό αντίτιμο για τη κτήση κάποιων αγαθών. Στις δημοπρασίες μπορεί να υπάρχουν πάνω από ένας πωλητές, πάνω από ένας αγοραστές και πάνω από ένα προϊόντα. Ένα πιο συχνό φαινόμενο είναι οι πωλητές να είναι μόνο ένας και από και πέρα να υπάρχουν πολλοί αγοραστές και πολλά αγαθά προς δημοπράτηση.[24] Η προσφορά από έναν πλειοδότη / αγοραστή μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους και μπορεί να γίνει είτε δημόσια ,είτε ιδιωτικά. Στις δημοπρατήσεις που γίνονται δημόσια υπάρχουν δύο είδη δημοπρασίας:

- **Δημοπρασία αύξουσας τιμής** : Σε αυτή τη περίπτωση ο δημοπράτης ανακοινώνει μία αρχική τιμή και στη συνέχεια ο κάθε υποψήφιος αγοραστής μπορεί με ανάταση χειρός να προσφέρει μία υψηλότερη τιμή. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι ένας πλειοδότης να προσφέρει μία τιμή που δεν μπορούν να την «κοντράρουν» οι άλλοι επίδοξοι αγοραστές και το προϊόν κατοχυρώνεται στον συγκεκριμένο πλειοδότη.
- **Δημοπρασία φθίνουσας τιμής** : Σε αυτή την περίπτωση ένας δημοπράτης ανακοινώνει μία υψηλή τιμή, που κανένας πλειοδότης δεν μπορεί να αποδεχτεί. Ο διοργανωτής της δημοπρασίας, σταδιακά μειώνει την αρχική τιμή, μέχρι να υπάρξει πλειοδότης που θα πει «ΟΚ». Το αντικείμενο σε αυτή την περίπτωση κατωχυρώνεται σε αυτόν τον πλειοδότη, ο οποίος πληρώνει τη τιμή που ανακοίνωσε όταν είπε «ΟΚ».

Αν η δημοπρασία δεν γίνει δημόσια, τότε μπορεί να γίνει με τη διαδικασία των σφραγισμένων φακέλων. Αυτή η περίπτωση με παραλλαγές χρησιμοποιείται και για την εκποίηση χώρου από την Google και για την πώληση αγαθών από το E-bay. Κάθε προσφορά σε αυτού του είδους τις δημοπρασίες υποβάλλεται από τον πλειοδότη σε ένα σφραγισμένο φάκελο. Όλες οι προσφορές αποκαλύπτονται ταυτόχρονα στο δημοπράτη και αυτός στη συνέχεια θα αποφασίσει ποιος θα είναι ο πλειοδότης και τι τίμημα θα καταβάλει. Το ποιος θα είναι ο πλειοδότης είναι αρκετά απλό, είναι αυτός που έχει καταέσει τη μεγαλύτερη προσφορά όμως για το τίμημα που θα πρέπει να καταβάλει δεν είναι τόσο απλά τα πράγματα:

[24] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 34-38

i. Αν η δημοπρασία είναι πρώτης τιμής τότε ο πλειοδότης θα πρέπει να καταβάλει την δική του προσφορά ως μεγαλύτερη
ii. Αν όμως η δημοπρασία είναι δεύτερης τιμής τότε ο πλειοδότης θα πληρώσει τη δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

Σχετικά με τη δημοπρασία δεύτερης τιμής μπορεί να υπάρχουν ενστάσεις ότι οι πλειοδότες υποβάλλουν υψηλές προσφορές απλώς για να κερδίσουν τη δημοπρασία αυτό όμως δεν ισχύει καθώς οι πλειοδότες πρέπει να γνωρίζουν ότι αυτή η πρακτική θα αυξήσει το τίμημα. Αυτό το δεδομένο οδηγεί τους πλειοδότες να υποβάλλουν «ειλικρινείς προσφορές», δηλαδή προσφορές που είναι κοντά στην εκτίμηση που έχουν οι πλειοδότες για το αγαθό ή την υπηρεσία που δημοπρατείται. Οι εκτιμήσεις αυτές καλό είναι να είναι ιδιωτικές και ανεξάρτητες. Ιδιωτική σημαίνει ότι η τιμή είναι άγνωστη στους άλλους και ανεξάρτητη σημαίνει ότι η εκτίμηση αυτή δεν εξαρτάται από τις εκτιμήσεις των άλλων πλειοδοτών, εν πολλοίς απόρροια και της ιδιωτικότητας. Στην πράξη αρκετές φορές οι εκτιμήσεις εξαρτώνται, έστω και έμμεσα η μία από την άλλη, μπορεί να είναι δημόσιες και μερικές φορές δεν είναι γνωστές με ακρίβεια ακόμα και στον πλειοδότη.

Όταν τα αντικείμενα που πλειοδοτούνται είναι άνω του ενός (όπως είναι οι διαφημιστικοί χώροι της Google μέσω του Google Adwords) και αν ακολουθηθεί η διαδικασία της δεύτερης τιμής τότε προκύπτει ο μηχανισμός «Γενικευμένης Δεύτερης Τιμής» (GSP). Με βάση το συγκεκριμένο μηχανισμό ο διαφημιστικός χώρος πηγαίνει στον πλειοδότη που τοποθετιεί την υψηλότερη i-οστή προσφορά και η χρέωση ανά επίσκεψη βάση του ρυθμού επισκεψιμότητας, είναι η (i+1)-οστή προσφορά. Για παράδειγμα αν η διάταξη της ιστοσελίδας είναι κάθετα, ο διαφημιζόμενος σε ένα δεδομένο διαφημιστικό χώρο, πληρώνει τη τιμή που είναι ίδια με την προσφορά από το διαφημιζόμενο στο διαφημιστικό χώρο ακριβώς κάτω από το δικό του.[25] Το ζήτημα όμως με τον συγκεκριμένο τύπο δημοπράτησης είναι ότι δεν προκαλεί ειλικρινή προσφορά και μπορεί να υπάρχουν πολλές ισορροπίες κατά Nash αν αναλυθεί ως παίγνιο.[26] Αυτό αντιμετωπίζεται με εναλλακτικούς τύπου δημοπρατήσεων όπως η Vickey Clark Groves (VCG) μέσω της οποίας εκτείνεται η ειλικρινής προσφορά των δημοπρασιών δεύτερης τιμής σε δημοπρασίες πολλαπλών στοιχείων.

Η δημοπρασία γενικά μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα παίγνιο:[27]

- Το σύνολο των παικτών είναι το σύνολο N πλειοδοτών, που συμβολίζονται με i.
- Η στρατηγική είναι η προσφορά b_i του κάθε πλειοδότη και ο καθένας έχει ένα χώρο στρατηγικών, ο οποίος είναι το εύρος των προσφορών που θα μπορούσε να θέσει.
- Κάθε συνάρτηση κέρδους του πλειοδότη υ_i είναι η διαφορά μεταξύ της εκτίμησης του v_i για το αντικείμενο και της τιμής p_i που πρέπει να πληρώσει τελικά για τη δημοπρασία:

$$\upsilon_i(b) = v_i - p_i(b) \quad \text{(Σχέση 30)}$$

Το κέρδος μπορεί να είναι μηδενικό αν ο πλειοδότης χάσει τη δημοπρασία καθώς ούτε πληρώνει, ούτε παίρνει και το αντικείμενο της δημοπρασίας. Αν από εκεί και πέρα η δημοπρασία είναι πετυχημένη ή όχι είναι ένα αποτέλεσμα που εξαρτάται από το b. Η σύζευξη των επιλογών της προσφοράς του πλειοδότη φαίνεται μέσα από την εξάρτηση της υ από ολόκληρο το διάνυσμα b, παρόλο που η εκτίμηση είναι ανεξάρτητη καθώς η υ_i εξαρτάται μόνο από το i.[28]

Γενικά η λογική που πρέπει να ακολουθεί κάθε πλειοδότης θα πρέπει να επιλέξει το κατάλληλο b_i ώστε να μεγιστοποιήσει το υ_i. Στην περίπτωση όπου η δημοπρασία είναι πρώτης τιμής σφραγισμένου φακέλου η τιμή που θα πληρώσει κάποιος είναι ίση με την προσφορά που έχει κάνει. Στόχος τους σε αυτή την περίπτωση είναι η βελτιστοποίηση της παραπάνω σχέσης αν και αυτή η διαδικασία είναι πολύπλοκη μιας και περιλαμβάνει και τις στρατηγικές των άλλων

[25] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 36
[26] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 37
[27] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 39-40
[28] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 39

πλειοδοτών. Αυτό όμως που είναι δεδομένο σε κάθε περίπτωση, είναι ο ότι ο κάθε πλειοδότης πρέπει να προσφέρει λιγότερο από την πραγματική εκτίμησή του ώστε το καλύτερο κέρδος που μπορεί να λάβει να είναι μηδέν.[29]

Αν η δημοπρασία είναι δεύτερης τιμής σφραγισμένου φακέλου τότε αποδεικνύεται ότι δεν έ-χει σημασία τι μπορεί να προσφέρουν οι άλλοι πλειοδότες με δεδομένο ότι ο κάθε πλειοδότης μπορεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του με το να προσφέρει την πραγματική του εκτίμηση, με άλλα λόγια η ειλικρινής προσφορά αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική. Στις δημοπρασίες όπου υ-πάρχει άνω του ενός αντικείμενα και ακολουθείται το μοντέλο της GSP τότε η ειλικρινής προ-σφορά δεν αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική. Αυτό μπορεί να φανεί μέσω του παρακάτω παρα-δείγματος: [30]

Έστω ότι σε μία ιστοσελίδα υπάρχουν δύο διαφημιστικοί χώροι και τρεις πλειοδότες. Μια διαφήμιση στον πρώτο χώρο δέχεται 400 επισκέψεις την ημέρα, ενώ ο δεύτερος δέχεται 200 επισκέψεις. Οι πλειοδότες 1, 2, 3 έχουν εκτιμήσεις των 12, 8 και 4 ευρώ ανά επίσκεψη, αντί-στοιχα.

Αν όλοι οι διαφημιστές πραγματοποιούν ειλικρινείς προσφορές, τότε οι προσφορές (σε ευ-ρώ) θα είναι [4200, 2400] από τον πλειοδότη 1, [3200, 1600] από τον πλειοδότη 2 και [1600, 800] για το τρίτο πλειοδότη. Ο πρώτος πλειοδότης κερδίζει την πρώτη θέση, πληρώνοντας 8 ευρώ ανά επίσκεψη, ενώ ο δεύτερος κερδίζει τη δεύτερη θέση πληρώνοντας 4 ευρώ ανά επί-σκεψη. Αν ο ρυθμός των επισκέψεων είναι ίδιος με τον εκτιμώμενο ρυθμό, τότε τα ποσά που θα πληρώσουν οι πλειοδότες 1 και 2 θα είναι 3200 και 800 ευρώ και το κέρδος 1600 και 800 ευρώ αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ισορροπία λόγω της ειλικρίνειας καθώς κανέ-νας πλειοδότης δεν μπορεί να επωφεληθεί αλλάζοντας την προσφορά του λόγω και της αναλο-γίας. Όμως όπως αναφέρθηκε η ειλικρίνεια δεν είναι κυρίαρχη στρατηγική στις δημοπρασίες GSP και αυτό αποδεικνύεται σχετικά εύκολα αν στο παράδειγμα γίνουν μερικές αλλαγές. Αν για παράδειγμα αλλάξει η επισκεψιμότητα στο δεύτερο χώρο και από 200 επισκέψεις ανά ημέρα είναι 300 οι επισκέψεις. Σε αυτή την περίπτωση για τον πρώτο χώρο το κέρδος για τον πλειοδό-τη 1 θα είναι 1600 ευρώ με την εκτίμηση να είναι στα 12 ευρώ και τη δεύτερη τιμή να είναι 8 ευ-ρώ. Όμως αν ο πλειοδότης 1 δεν υποβάλλει ειλικρινή προσφορά και προφέρει 7 ευρώ για να πάρει τη δεύτερη θέση το κέρδος του θα είναι (12-4)*300=2400 ευρώ. Οπότε θα είχε προσφέρει λιγότερα και θα είχε πολύ μεγαλύτερο κέρδος. Αυτό προκύπτει λόγω της μη επαρκούς διαφοράς του ρυθμού επισκεψιμότητας μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου διαφημιστικού χώρου σε σχέση με το ανά επίσκεψη κέρδος, ώστε να υπάρχει στρατηγική ειλικρίνειας.

Το παραπάνω ζήτημα μπορεί να λυθεί με τη δημοπράτηση VCG όπου εδώ σημαντικό ρόλο παίζει και ο πωλητής ρυθμίζοντας ουσιαστικά την διαδικασία δημοπράτησης. Η Google χρησι-μοποιεί τη GSP ενώ άλλες εταιρείες χρησιμοποιούν την VCG.[31] Σχετικά με την Google οι λόγοι που ενδεχομένως χρησιμοποιεί την GSP είναι γιατί είναι σαφώς πιο εύκολη στην κατανόηση από τους διαφημιστές ως διαδικασία ενώ και η μετάβαση από την GSP στη VCG μπορεί να έχει αρκετά μεγάλο κόστος μετάπτωσης λόγω παράλογης συμπεριφοράς από τους διαφημιστές.

[29] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 40

[30] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 47

[31] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ. 53-54

Κεφάλαιο 3°

3.1 Εισαγωγή

Η διαπραγμάτευση αποτελεί τη διαδικασία κατά την οποία δύο ή περισσότερα μέρη προσπαθούν να καταλήξουν σε μία συμφωνία ή να επιλύσουν κάποια διαφορά. Αυτή η προσπάθεια προϋποθέτει ανεπτυγμένες επικοινωνιακές δεξιότητες από τους διαπραγματευτές, και σταδιακά μέσω της πειθούς και της εμπιστοσύνης να καταλήξουν σε μία συμφωνία. Αυτό είναι το ιδεατό σενάριο. Στην πράξη οι διαπραγματεύσεις και κυρίως το αποτέλεσμα αυτών μπορεί να καθοριστεί από τη βία και την εξουσία που μπορεί να ασκεί ένα από τα μέρη ή ακόμα και από άλλους φορείς εκτός των εμπλεκόμενων μερών, όπως είναι τα δικαστήρια ή στον κλάδο των Οικονομικών από τις αγορές.

Ο τρόπος προσέγγισης της διαπραγμάτευσης από τα εμπλεκόμενα μέλη μπορεί να διαφέρει καθώς αν υπάρχει η λογική της συνεργασίας τότε οι διαπραγματευτές είναι σαφώς πιο ήπιοι σε σχέση με τους διαπραγματευτές που λειτουργούν με τη λογική του ανταγωνισμού. Σε αυτές τις περιπτώσεις μάλιστα και τα αντίστοιχα παίγνια που προκύπτουν είναι μηδενικού αθροίσματος τις περισσότερες φορές. Οι διαπραγματεύσεις παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο μεταξύ επιχειρήσεων, όσο και μεταξύ κρατών. Οι θεωρήσεις που μπορεί να υπάρξουν σε μία διαπραγμάτευση είναι οι εξής:[32]

- **Διαρθρωτική:** Η διαρθρωτική προσέγγιση εξετάζει το αποτέλεσμα μίας διαπραγμάτευσης ως μία συνάρτηση από χαρακτηριστικά η δομικά στοιχεία που μπορούν να καθορίσουν τη διαπραγμάτευση. Στο συγκεκριμένο είδος διαπραγμάτευσης. Σε αυτού του είδους τις διαπραγματεύσεις τα μέρη έχουν στόχους που δεν μπορούν με κάποιο τρόπο να συγκεραστούν. Συνεπώς δίνεται ιδιαίτερη αξία στη διαπραγματευτική δύναμη που έχει κάθε μέρος. Η δύναμη άλλες φορές μπορεί να ορίζεται ως η ικανότητα να νικήσει ή αλλιώς ορίζεται μέσω των μέσων που έχει στα χέρια του το συγκεκριμένο μέρος. Εδώ ένα μόνο μέρος θα κερδίσει και το άλλο θα χάσει.
- **Στρατηγική:** Αυτού του είδους η προσέγγιση στηρίζεται στη θέση που έχουν τα μέρη, στην πιθανή αντίδρασή τους στο αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης και στο αποτέλεσμα αυτής. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της θεωρίας παιγνίων. Εδώ η διαδικασία είναι χωρίς να στηρίζεται στην διαπραγματευτική ισχύ των μερών και αυτό αποτελεί το μεγάλο μειονέκτημα της συγκεκριμένης προσέγγισης. Και εδώ υπάρχει χαμένος και κερδισμένος αλλά παράλληλα υπάρχει και μία βέλτιστη λύση ενώ δίνεται έμφαση στην αντίδραση των μερών. Αυτού του είδους η προσέγγιση είναι εφικτή μέσω της θεωρίας παιγνίων.
- **Συμπεριφορική:** Αυτού του είδους η προσέγγιση στηρίζεται κυρίως στα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας των διαπραγματευόμενων μερών. Εδώ οι παραδοχές είναι ότι πάλι ένας θα είναι ο χαμένος και ο άλλος ο κερδισμένος και εξετάζονται οι αντιλήψεις και οι προσδοκίες των μερών. Σε αυτή την περίπτωση ο περιορισμός και παράλληλα μειονέκτημα είναι ότι δίνεται έμφαση στις θέσεις που έχουν τα μέρη.
- **Διαδικαστική:** Σε αυτή τη προσέγγιση δίνεται έμφαση στο αν κάποιο από τα μέρη δύναται να παραχωρήσει κάποια πράγματα. Και εδώ η λογική είναι ότι κάποιος χάνει και κάποιος κερδίζει, ενώ εξετάζονται και οι αντιδράσεις των μερών. Και εδώ το μειονέκτημα είναι ότι δίνεται έμφαση στις θέσεις που κατέχουν τα δύο μέρη ενώ δεν είναι εύκολη και η πρόβλεψη για το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης.

---

[32] T. Alfredson – Azeta Cungu, Negotiation Theory and Practice - A Review of the Literature, Food and Agriculture Organization of the United Nations 2008 σελ. 9-17

- **Ενοποιητικές:** Σε αυτού του είδους τις διαπραγματεύσεις δίνεται έμφαση στην επίλυση των προβλημάτων μέσω της αμοιβαίας επικοινωνίας και κατανόησης. Εδώ το αποτέλεσμα είναι αμοιβαία επωφελές. Το μειονέκτημα όμως αυτών των διαπραγματεύσεων είναι ότι μπορούν να διαρκέσουν παρά πολύ χρόνο και μπορεί να υπάρξουν παράλληλα και αντιπροτάσεις που να δυσχεραίνουν τη διαπραγμάτευση.

Στην πράξη οι θεωρήσεις που υπάρχουν δεν δίνουν τη λύση αλλά αποτελούν απλώς ένα εργαλείο ανάλυσης σχετικά με τη διαδικασία.

3.2 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Όπως έγινε αναφορά και στην προηγούμενη παράγραφο σε μία διαπραγμάτευση υπάρχει και η στρατηγική της θεώρηση όπου μπορεί να προσφέρει και βέλτιστες λύσεις και να εξετάσει την αντίδραση των μερών ανάλογα με τη λύση που θα δοθεί. Σημαντική θέση σε αυτού του είδους τη θεώρηση έχει το παίγνιο των φυλακισμένων όπου έχει αρκετές εφαρμογές. Ως παίγνιο χαρακτηρίζεται ως το παίγνιο που απαιτεί από τους παίκτες να σκεφτούν τόσο το δικό τους καλό, όσο και το κοινό καλό[33]. Αυτό απαιτεί από τα μέλη συνεργασία και αυτό είναι που κάνει το παίγνιο δύσκολο. Αρχικά το συγκεκριμένο παίγνιο αναπτύχθηκε το 1950 από τη RAND. Αρχικά αναπτύχθηκε από τους Flood και Dresher αλλά πήρε τη τελική του μορφή από τον Tucker. Η υπόθεση είναι η εξής:

«Δύο μέλη από μία συμμορία συνελήφθησαν και φυλακίστηκαν. Κάθε κρατούμενος είναι σε απομόνωση και δεν έχει τη δυνατότητα επικοινωνίας με τον συνεργό του. Το πρόβλημα όμως είναι ότι οι εισαγγελείς δεν έχουν επαρκή στοιχεία ώστε να καταδικάσουν τη συμμορία. Ελπίζουν όμως να φυλακιστούν έστω με μικρότερη ποινή που θα είναι ένα έτος. Παράλληλα οι εισαγγελείς προτείνουν σε κάθε φυλακισμένο να κατηγορήσει το συνεργό του με αποτέλεσμα οι φυλακισμένοι να έχουν δύο επιλογές, ή να ομολογήσουν και να προδώσουν τον συγκατηγορούμενό τους ή να μην ομολογήσουν και έτσι να συνεργαστεί ο ένας με τον άλλο έστω και ας μην το γνωρίζουν. Η ποινή αν δεν ομολογήσουν θα είναι από ένα χρόνο στον κάθε κρατούμενο. Αν ο ένας καταδώσει τον άλλο και ο άλλος δεν μιλήσει τότε αυτός που κατέδωσε θα αφεθεί ελεύθερος και ο άλλος θα φυλακιστεί για 3 χρόνια. Αν τέλος ομολογήσουν και οι δύο την ενοχή του άλλου παίκτη, τότε και οι δύο θα καταδικαστούν σε φυλάκιση δύο ετών.»

Με βάση τα παραπάνω η μήτρα του παιγνίου σε αυτή τη περίπτωση θα είναι η εξής:

Παίκτης Α / Παίκτης Β	*(Συνεργασία)*	*(Μη συνεργασία)*
(Συνεργασία)	(1,1)	(3,0)
(Μη συνεργασία)	(0,3)	(2,2)

Πίνακας 19: Μήτρα Παιγνίου Φυλακισμένων

Με βάση τη μήτρα προκύπτει το εξής ενδιαφέρον στοιχείο. Στο συγκεκριμένο παίγνιο ο κάθε παίκτης - φυλακισμένος έχει κάθε συμφέρον να καταδώσει τον συγκρατούμενο του καθώς έχει πιθανότητα να αφεθεί ελεύθερος άρα οι δύο φυλακισμένοι δεν θα συνεργαστούν. Πιο συγκεκριμένα αν ο παίκτης Β συνεργαστεί τότε τον παίκτη Α δεν τον συμφέρει να συνεργαστεί μαζί του καθώς θα μείνει φυλακισμένος για ένα χρόνο, έτσι επιλέγει την εύκολη λύση να ομολογήσει και να μην συνεργαστεί με τον Β. Αντίστοιχη λογική ισχύει και για τον Β. Το ζήτημα όμως είναι ότι με αυτή τη λογική μιας και υπάρχει συμμετρία στο τέλος κανείς από τους δύο δεν θα συνεργαστεί και θα ομολογήσουν και οι δύο. Έτσι θα καταλήξουν στη λύση (2,2) ενώ η αμοιβαίως συμφέρουσα λύση και για τους δύο είναι να συνεργαστούν και να μην ομολογήσουν. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα να φυλακιστούν μόνο για ένα χρόνο. Σε αυτό το

[33] R. V. Dodge, Schelling’s Game Theory – How to Make Decisions, Oxford University Press 2012 σελ. 137-147

παίγνιο η κρίσιμη πληροφορία είναι ότι δεν μπορούν να έχουν ενημέρωση για τις ενέργειες του άλλου. Αυτή η λογική επικρατεί σε πολλές διαπραγματεύσεις μιας και τα μέρη πολλές φορές έχουν ελλιπή ενημέρωση για τις διαθέσεις των άλλων μερών. Στις διαπραγματεύσεις κάτι τέτοιο θα υποδήλωνε ότι τα μέρη που διαπραγματεύονται έχουν κάθε συμφέρον να μην συνεργαστούν ώστε να μεγιστοποιήσει το καθένα τα κέρδη του. Όμως μία τέτοια λύση συνολικά θα ήταν χειρότερη από τη συνεργασία γι'αυτό και στη πραγματικότητα η συνεργασία υφίσταται.[34]

Η λογική του tit-for-tat

Αυτό αποδεικνύεται μέσω της επιλογήςtit for tat. Η πολιτική tit for tat ουσιαστικά στηρίζεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των μερών και επίσης απαιτεί και ένα παίγνιο το οποίο και επαναλαμβάνεται.[35] Έστω ότι ένας παίκτης επιλέγει την λύση της μη συνεργασίας, τότε με βάση τη διαδικασία tit for tat ο άλλος παίκτης θα συνεργαστεί και μετά θα κάνει ότι θα κάνει ο πρώτος παίκτης στην προηγούμενή του κίνηση. Στο τέλος οι δύο παίκτες ισορροπούν τελικά στο να συνεργαστούν. Ένα τέτοιο παράδειγμα επαναληπτικού παιγνίου στο δίλημμα του φυλακισμένου είναι η απεικόνιση του πολέμου χαρακωμάτων μεταξύ βρετανικών και γερμανικών στρατευμάτων στο Δυτικό μέτωπο κατά τη διάρκεια του Πρώτου Παγκοσμίου Πολέμου του Robert Axelrod. Κατά τη διάρκεια του πολέμου, οι στρατιώτες έσκαψαν σε θέσεις κατά μήκος των συνόρων μεταξύ της Γαλλίας και του Βελγίου σε μήκος πεντακοσίων χιλιομέτρων. Από τη στιγμή που οι δύο στρατοί ήταν περιχαρακωμένοι, που αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ούτε η μία πλευρά ούτε η άλλη ήταν σε θέση να κερδίσει κάτι παρά μόνο να κρατήσει τη θέση της, μερικές μικρές ομάδες από τις δύο στρατιωτικές δυνάμεις συχνά παρατηρούσαν ότι προξενώντας ζημίες στην άλλη πλευρά δεν κέρδιζαν κάτι περισσότερο. Αυτές οι περιχαρακωμένες μικρές ομάδες στρατιωτών από τα δύο στρατόπεδο, αντιμετώπιζαν η μία την άλλη μέσα σε μία μία μικρή έκταση γης για μεγάλα χρονικά διαστήματα, το παίγνιο άλλαξε και σταδιακά από το δίλημμα του φυλακισμένου σε μία κίνηση (όπου σε αυτό η επιθυμητή λύση από τις δύο πλευρές είναι η μη συνεργασία) το παίγνιο μετεξελίχθηκε σε μία επαναλαμβανόμενη έκδοση του συγκεκριμένου παιγνίου που ευνοούν στο τέλος τη συνεργασία.

Η αλλαγή που παρουσιάζεται επήλθε με τον εξής τρόπο: Οι απομονωμένες ομάδες των στρατιωτών από την κεντρική διοίκηση κατάλαβαν ότι δεν μπορούσαν οι ίδιες από μόνες τους να επικρατήσουν σε όλο το μήκος των χαρακωμάτων μεταξύ των συνόρων Γαλλίας και Βελγίου και βλέποντας ότι οι φθορά που προκαλούσαν στον αντίπαλο ήταν ελάχιστη και όχι ικανή να τους δώσει τη νίκη κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η συνεργασία είναι η αμέσως καλύτερη λύση. Αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μία ήπια μορφή του tit-for-tat όπου είναι στη λογική του "live and let live". Αυτή η συμπεριφορά στο δοθέν παράδειγμα μπορεί να συμβεί αν η μία πλευρά κάνει σινιάλο στην αντίπαλη πλευρά για κατάπαυση του πυρός. Αυτό απαιτεί μία πλευρά που θα κάνει το πρώτο βήμα και παράλληλα να έχει αναγνωρίσει και η άλλη πλευρά ότι η συνεργασία είναι η καλύτερη δυνατή λύση. [36]

3.3 Το Παίγνιο του Δειλού

Τον Οκτώβριο του 1962 υπήρξε η λεγόμενη «κρίση των πυραύλων της Κούβας». Αυτή η κρίση συγκεκριμένα προκλήθηκε από την πρόθεση της Σοβιετικής Ένωσης να εγκαταστήσει ατομικούς πυραύλους στην Κούβα. Αυτό έκανε την Κυβέρνηση των Η.Π.Α. να συνεδριάσει άμεσα για το θέμα καθώς θεωρούσαν ότι αυτή η ενέργεια ήταν ξεκάθαρα μία απειλή ενάντια στις Η.Π.Α. Σύμφωνα με άρθρα της εποχής ο τότε υπουργός εξωτερικών Robert McNamara

[34] T. Alfredson – Azeta Cungu, Negotiation Theory and Practice - A Review of the Lit-erature, Food and Agriculture Organization of the United Nations 2008 σελ. 9-17

[35] R. Axelrod, The Evolution of Cooperation, Basic Books 1984. σελ. 13

[36] R. Axelrod, The Evolution of Cooperation, Basic Books 1984. σελ. 73-84

ανέφερε στο υπουργικό συμβούλιο ότι οι επιλογές για την αντιμετώπιση της κρίσης που προέκυψε ήταν τρεις: να λυθεί το ζήτημα μέσω της διπλωματίας ή να συνεχιστεί η παρακολούθηση των πλοίων που θα πήγαιναν τους πυραύλους και να τους αποτραπεί η άφιξη στην Κούβα ή να ληφθούν στρατιωτικά μέτρα ενάντια στην Κούβα. Τελικά οι Η.Π.Α αποφάσισαν να μην επιτρέψουν την άφιξη των σοβιετικών πλοίων με τους πυραύλους στην Κούβα. Όσο πλοία της Σοβιετικής Ένωσης συνέχιζαν να πηγαίνουν προς την Κούβα, τόσο υπήρχε ο κίνδυνος μίας σύγκρουσης μεταξύ Η.Π.Α και Σοβιετικής Ένωσης. Αρκετές μέρες μετά τον αμερικάνικο αποκλεισμό στα σοβιετικά πλοία και με παράλληλες διπλωματικές διαβουλεύσεις τα σοβιετικά πλοία τελικά αποχώρησαν μαζί με τους πυραύλους από την Κούβα. Αυτή η κρίση θα μπορούσε να περιγραφεί με το «παίγνιο του δειλού» (chicken game) η αλλιώς το παίγνιο του γερακιού και του περιστεριού.[37]

Στο συγκεκριμένο παίγνιο και οι δύο παίκτες κινούνται ταυτόχρονα και κινούνται μόνο μία φορά και έχουν μόνο δύο επιλογές. Η μία επιλογή είναι να κάνουν την κίνηση του γερακιού δηλαδή να μείνουν ακλόνητοι στις θέσεις του ή να κάνουν την κίνηση του περιστεριού και να αποχωρήσουν. Αν και οι δύο παίκτες-κράτη στο συγκεκριμένο παράδειγμα έμεναν αμετακίνητοι τότε ο πόλεμος μεταξύ τους θα ήταν αναπόφευκτος. Με δεδομένο επίσης ότι ο πόλεμος θα ήταν πυρηνικός τότε το αποτέλεσμα και για τις δύο πλευρές θα ήταν το χειρότερο δυνατό. Αν υποχωρούσαν και οι δύο παίκτες τότε δεν θα άλλαζαν και πολλά αλλά αν ο ένας παίκτης υποχωρούσε και ο άλλος έμενε ακλόνητος στη θέση του, τότε αυτός που θα είχε την ίδια στάση θα είχε και ένα ελαφρύ προβάδισμα γιατί και θα επιτύγχανε το σκοπό του και θα ανέβαζε τη δημοφιλία του στην κοινή γνώμη.

Αυτό το μοντέλο που παρουσιάστηκε μπορεί να δεχτεί κριτική καθώς είναι αρκετά απλό. Είναι για παράδειγμα λογικό οι παίκτες να έχουν τη δυνατότητα να κινηθούν μόνο μία φορά και μάλιστα ταυτόχρονα όταν η διαμάχη μπορεί να διαρκέσει αρκετό καιρό; Μπορεί η διαμάχη σύμφωνα με τον Prisner να περιγραφεί ως ένα παίγνιο πολλαπλών κινήσεων όπου αν για παράδειγμα ο ένας παίκτης θέλει να μείνει αμετακίνητος στις θέσεις του θα πρέπει να επικυρώνει αυτή του την απόφαση επαναλαμβανόμενα. Παράλληλα με το πέρας των γύρων ο κίνδυνος του πολέμου θα αυξάνονταν και εν τέλει θα πραγματοποιούνταν αν και οι δύο πλευρές δεν άλλαζαν στρατηγική.

Η διαμάχη κατά την κρίση των πυραύλων στην Κούβα μπορεί να αποτυπωθεί με την παρακάτω μήτρα πληρωμών:

Η.Π.Α / Ε.Σ.Σ.Δ.	*(Υποχώρηση)*	*(Αμετακίνητοι)*
(Υποχώρηση)	(0,0)	(-1,1)
(Αμετακίνητοι)	(1,-1)	(-10,-10)

Πίνακας 20: Μήτρα Παιγνίου Δειλού

Με βάση το παραπάνω πίνακα αν και οι δύο παίκτες-κράτη επέλεγαν να υποχωρήσουν οι Η.Π.Α θα απέσυραν τα πλοία τους από το μπλόκο και η Ε.Σ.Σ.Δ θα ανακαλούσε τα πλοία της και έτσι τίποτα δεν θα άλλαζε για τους δυο παίκτες γι'αυτό και η τιμή είναι 0 και για τους δύο. Αν και οι δύο παίκτες επέλεγαν να μείνουν αμετακίνητοι στις επιλογές τους τότε οι δύο παίκτες θα διεξήγαγαν έναν πυρηνικό πόλεμο με πολύ μεγάλο κόστος για τον κάθε παίκτη ίσο με -10. Αυτή η πολύ μεγάλη αρνητική τιμή δείχνει ξεκάθαρα ότι ένας τέτοιος πόλεμος θα ήταν τόσο καταστρεπτικός και για τις δύο πλευρές οπότε και ο νικητής του δεν θα είναι κάποιο νόημα. Στις περιπτώσεις που ο ένας παίκτης θα επέλεγε να μείνει ακλόνητος και ο άλλος να υποχωρήσει τότε ο παίκτης που θα έμενε ακλόνητος θα είχε ένα ελαφρύ κέρδος και αυτός που θα υποχωρούσε μία μικρή απώλεια. Στο συγκεκριμένο παίγνιο υπάρχουν δύο σημείο ισορροπίας καθαρής στρατηγικής κατά Nash και αυτά τα σημεία δεν είναι άλλα από τις περιπτώσεις όπου ο ένας παίκτης υποχωρεί και ο άλλος παίκτης μένει σταθερός. Επίσης

[37] E. Prisner, Game Theory through Examples, Mathematical Association of America Inc. 2014 σελ. 237 - 239

υπάρχει ένα ακόμα σημείο ισορροπίας κατά Nash με μικτή στρατηγική όπου και οι δύο παίκτες αν επέλεγαν να μείνουν ακλόνητοι στις θέσεις τους κατά 10% θα είχαν μία ζημία ίση με 0,1 με την πιθανότητα πολέμου να είναι ίση με 10%*10%=1% των περιπτώσεων. Αυτή είναι η μόνη συμμετρική λύση κατά Nash.

Το παίγνιο του δειλού μπορεί να γίνει και σε πολλούς γύρους με τη χρήση γράφων.

3.4 Λύση κατά Rubinstein

Το μοντέλο διαπραγμάτευσης Rubinstein αναφέρεται σε μια κατηγορία διαπραγματευτικών παιγνίων που διαθέτουν εναλλασσόμενες προσφορές σε ένα άπειρο χρονικό ορίζοντα. Η επίλυση τέτοιου είδους παιγνίων αρχικά ήταν εξαιρετικά δύσκολη καθώς θα έπρεπε η ανάλυση τέτοιων παιγνίων να γίνεται ανά στάδιο δηλαδή προσφορά προς προσφορά, απειλή προς απειλή. [38]

Για ένα μοντέλο διαπραγμάτευσης που επιλύεται με τη μέθοδο Rubinstein θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- Να συμμετέχουν δύο παίκτες.
- Οι παίκτες πρέπει να έχουν πλήρη πληροφόρηση.
- Οι προσφορές είναι απεριόριστες και το παίγνιο συνεχίζεται μέχρι ένας από τους παίκτες να δεχθεί μία προσφορά.
- Οι προσφορές είναι εναλλασσόμενες. Ο πρώτος παίκτης κάνει μία πρόταση στη πρώτη περίοδο του παιγνίου και αν ο άλλος παίκτης την αρνηθεί τότε το παίγνιο πάει στη δεύτερη περίοδο. Στη δεύτερη φάση ο δεύτερος παίκτης κάνει μία προσφορά και αν ο πρώτος παίκτης δεν την δεχτεί τότε το παίγνιο πάει σε τρίτη περίοδο κ.ο.κ.
- Η καθυστέρηση στην επίλυση έχει κόστος.

Έστω δύο παίκτες Α και Β οι οποίοι διαπραγματεύονται για το πως θα χωρίσουν ένα κομμάτι πίτας μεγέθους 1. Στο τέλος κάθε διακριτής χρονο-μερίδας με διάρκεια Τ (περίοδος), κάθε άτομο παίρνει σειρά να προσφέρει στο άλλο άτομο πως να μοιραστεί την πίτα. Είναι ουσιαστικά ένα νούμερο $x_1 \in [0,1]$ για το Α και $x_2 = 1 - x_1$ για τον παίκτη Β. Αυτή η διαδικασία που επαναλαμβάνεται ξεκινά από το χρονικό σημείο 0 από τον παίκτη Α στον παίκτη Β. Αν η προσφορά γίνει δεκτή, τότε επέρχεται συμφωνία. Αν απορριφθεί, το άλλο άτομο κάνει μία αντιπροσφορά στην επόμενη χρονο-μερίδα (περίοδο).[39]

Αυτή η διαδικασία όπως περιγράφεται μπορεί όμως να συνεχιστεί επ'αόριστον κάτι όμως που δεν γίνεται να συμβεί. Για ποιο λόγο οποιοσδήποτε από τους δύο παίκτες να έχει κίνητρο να δεχθεί μία προσφορά πέρα από αυτή που του δίνει ολόκληρη την πίτα; Θα πρέπει να υπάρχει ένα τίμημα το οποίο και θα πρέπει να πληρωθεί για τη διαφωνία. Με βάση το υπόδειγμα που παρουσιάστηκε, το τίμημα αυτό είναι ο χρόνος. Αν μία συμφωνία επέλθει στην κ επανάληψη , η πληρωμή του ατόμου θα είναι:

$$\upsilon_i = x_i e^{-r_i \kappa \mathrm{T}} \quad i = 1,2 \quad \text{(Σχέση 31).}$$

Το r_i στην παραπάνω σχέση είναι ένας θετικός αριθμός που ουσιαστικά αποτυπώνει «την ανοχή της αναμονής και διατήρησης της διαπραγμάτευσης». Άρα η πληρωμή εξαρτάται και από την ίδια τη συμφωνία (x_i) καθώς και από το πότε κλείνεται η συμφωνία (κ), με τη δεύτερη εξάρτηση ευαίσθητη στη διαπραγματευτική Δύναμη του κάθε ατόμου καθώς αυτός με το μεγαλύτερο r έχει περισσότερα να χάσει με το να συνεχίζει να διαπραγματεύεται και να απορρίπτει προσφορές.

[38] Γ. Βαρουφάκης, Θεωρία Παιγνίων, Εκδόσεις Gutenberg 2007 σελ. 377.

[39] Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014 σελ.158-159.

Αυτό που φαίνεται να προκύπτει ως συμπέρασμα είναι ότι αν ένας παίκτης περιμένει για τον επόμενο γύρο διαπραγματεύσεων θα έχει την ίδια πληρωμή με το να δέχονταν την προσφορά του τρέχοντα γύρου, τότε θα δέχονταν την προσφορά στο τρέχοντα γύρο. Οι προσφορές ισορροπίας (x_{1^*},x_{2^*}) της κάθε πλευράς σε αυτή την περίπτωση ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις ταυτόχρονα:

$$1 - x_1^* = x_2^* e^{-r_2 T} \quad \text{(Σχέση 32)}$$

και

$$1 - x_2^* = x_1^* e^{-r_1 T} \quad \text{(Σχέση 33)}$$

Η μοναδική λύση που προκύπτει για το παραπάνω σύστημα των δύο εξισώσεων θα είναι η εξής:

$$x_1^* = \frac{1 - e^{-r_2 T}}{1 - e^{-(r_1 + r_2)T}} \quad \text{(Σχέση 34)}$$

και

$$x_2^* = \frac{1 - e^{-r_1 T}}{1 - e^{-(r_1 + r_2)T}} \quad \text{(Σχέση 35)}$$

Όσο οι διαπραγματευτικοί κύκλοι γίνονται πιο αποδοτικοί, δηλαδή όσο το T πλησιάζει στο 0, το εκθετικό τίμημα της διαφωνίας γίνεται γραμμικό και η λύση απλοποιείται όπως φαίνεται παρακάτω όταν το T είναι μικρό:

$$x_1^* = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{(Σχέση 36)}$$

και

$$x_2^* = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad \text{(Σχέση 37)}$$

Αυτή η αναλογική κατανομή βγάζει νόημα καθώς ένα μεγαλύτερο r_2 σημαίνει ασθενέστερη επιρροή του Β, οπότε μεγαλύτερο μερίδιο του Α στην ισορροπία.

Η επίλυση κατά Rubinstein είναι αρκετά δημοφιλής καθώς έχει πολλές ιδιότητες που καθιστούν επιθυμητή τη συγκεκριμένη λύση σε ένα διαπραγματευτικό παίγνιο:

- Οι υποθέσεις του υποδείγματος είναι αρκετά κοντά στην πραγματικότητα σε ότι έχει να κάνει με τις διαπραγματεύσεις.
- Υπάρχει μία μοναδική λύση.
- Η λύση αυτή είναι ξεκάθαρη παρότι έχει να κάνει με παίγνια που μπορεί να εξελίσσονται επ'αόριστον.
- Δεν υπάρχει κάποια καθυστέρηση στη συναλλαγή.
- Καθώς και οι δύο παίκτες έχουν μεγαλύτερο r (δηλαδή έχουν ασθενέστερη επιρροή στον άλλο παίκτη). Ή κάνουν αντιπροσφορές πολύ γρήγορα, τότε και οι δύο παίκτες θα θεωρούν τους εαυτούς τους ευχαριστημένους καθώς θα πάρουν από μισό μερίδιο στην πίτα.
- Επίσης φαίνεται ότι ο πρώτος παίκτης που θα κάνει προσφορά έχει ένα πλεονέκτημα άρα και οι δύο παίκτες έχουν κίνητρο να ξεκινήσουν πρώτοι.

3.5 Εφαρμογή στη Διαπραγμάτευση μεταξύ Σωματείων και Εργοδοσίας για τη Σύμβαση Εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο έγινε αναφορά στην επίλυση παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος κατά Nash. Στο δοθέν παράδειγμα θα γίνει μία εφαρμογή αυτής της λύσης σε ένα διαπραγματευτικό παίγνιο που αφορά ένα εξαιρετικά σημαντικό ζήτημα για τις επιχειρήσεις, αυτό της διαπραγμάτευσης με τους εργαζόμενους.

Έστω ότι η διοίκηση μίας επιχείρησης διαπραγματεύεται μία νέα Σύμβαση Εργασίας με το σωματείο που εκπροσωπεί τους εργαζόμενους. Το σωματείο έχει ζητήσει μερικές νέες παροχές για τα μέλη του: αύξηση ενός ευρώ την ώρα και παραπάνω συνταξιοδοτικές παροχές. Με τη σειρά της η επιχείρηση ζήτησε μερικές υποχωρήσεις από το σωματείο. Η επιχείρηση θέλει να καταργηθεί το διάλειμμα για καφέ στις 10:00 καθώς οι εργαζόμενοι αργούν να γυρίσουν στις θέσεις τους και να συνεχίσουν απρόσκοπτα την εργασία τους καθώς και να αυτοματοποιηθεί μία σειρά από διαδικασίες. Το σωματείο δεν δέχεται κανένα από τα δύο αιτήματα της επιχείρησης, ιδίως το δεύτερο καθώς η αυτοματοποίηση κάποιων διαδικασιών θα σημάνει και απολύσεις. Αυτή η διαφωνία δεν έχει επιλυθεί αλλά και οι δύο πλευρές είναι διατεθειμένες να δοκιμάσουν μία συμβιβαστική λύση πριν προχωρήσουν με ποιο επιθετικές λύσεις. Αυτό που ζητείται είναι μέσω της διαιτησίας να βρεθεί μία συμβιβαστική λύση για τα δύο μέρη.[40]

Ένα πρώτο βήμα που θα πρέπει να γίνει είναι τόσο η εργοδοσία, όσο και το σωματείο να ιεραρχήσουν τις χρησιμότητές τους για τις διάφορες προτάσεις που υπάρχουν. Αυτή η διαδικασία θα πρέπει να γίνει ξεχωριστά από το κάθε μέρος. Οι προτάσεις που υπάρχουν με βάση τις υποθέσεις θα είναι η εξής:

- A: Η αυτοματοποίηση κάποιων διαδικασιών.
- C: Η κατάργηση του διαλείμματος.
- R: Η αύξηση ενός ευρώ την ώρα ανά εργαζόμενο.
- P: Παραπάνω συνταξιοδοτικές παροχές.
- SQ: status quo.

Η χρησιμότητα μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια μίας κλίμακας, τέτοια ώστε στο σημείο SQ η χρησιμότητα και για τα δύο μέρη να είναι ίση με μηδέν. Από εκεί και πέρα η επιχείρηση προβλέπεται να έχει θετική χρησιμότητα για την αυτοματοποίηση κάποιων διαδικασιών (A) και για την κατάργηση του διαλείμματος (C) ενώ θα έχουν θετική χρησιμότητα για την αύξηση (R) και στις παραπάνω συνταξιοδοτικές παροχές (P). Η συμπεριφορά του σωματείου ως προς την χρησιμότητα θα είναι η αντίθετη από αυτή της επιχείρησης. Αυτό που έχει σημασία όμως είναι ότι οι προτιμήσεις των δύο μερών δεν είναι εντελώς αντίθετες, άρα σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (όπου οι ζημιές του ενός θα είναι ίσες με τα κέρδη του άλλου) αλλά ένα παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος. Πιο συγκεκριμένα μπορεί να υπάρχουν «ανταλλαγές» που μπορεί να είναι καλύτερες από το status quo και για τις δύο πλευρές. Αυτό που επιζητείται να βρεθεί είναι ένα τέτοιο σημείο όπου θα είναι δίκαιο και για τις δύο πλευρές.

Αρχικά η εργοδοσία θα πρέπει να διατάξει τις εναλλακτικές. Ας γίνει η υπόθεση ότι τα A και C τα έχουν στην ίδια ιεραρχία και ότι θα προτιμήσουν να προσφέρουν παραπάνω συνταξιοδοτικές παροχές από ότι να κάνουν αύξηση στο μισθό. Με βάση αυτές τις παραδοχές προκύπτει αυτή η διάταξη στην χρησιμότητα A=C, SQ, P, R. Η διάταξη όμως αυτή δεν αρκεί και τους ζητείται να ορίσουν και το μέτρο αυτής της διάταξης ορίζοντας την απόλυτη χρησιμότητα (δηλαδή να δώσουν κάποιες τιμές βάση μίας κλίμακας ώστε να οριστεί και το μέτρο της χρησιμότητας). Αυτό μπορεί να γίνει είτε απλώς ζητώντας τους τιμή, είτε με την μορφή ερωτήσεων που μπορεί να δείχνουν περισσότερο πως ιεραρχούν τις προτιμήσεις τους. Για το δοθέν παράδειγμα οι απόλυτες χρησιμότητες της επιχείρησης θα είναι οι εξής:

[40] Philip D. Straffin, Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America 1993 σελ. 112-115.

R	P	SQ	A,C
-3	-2	0	4

Πίνακας 21: Πίνακας Χρησιμοτήτων Επιχείρησης:

Αντίστοιχα οι απόλυτες χρησιμότητες από το σωματείο θα είναι οι εξής:

A	C	SQ	P	R
-2	-1	0	2	3

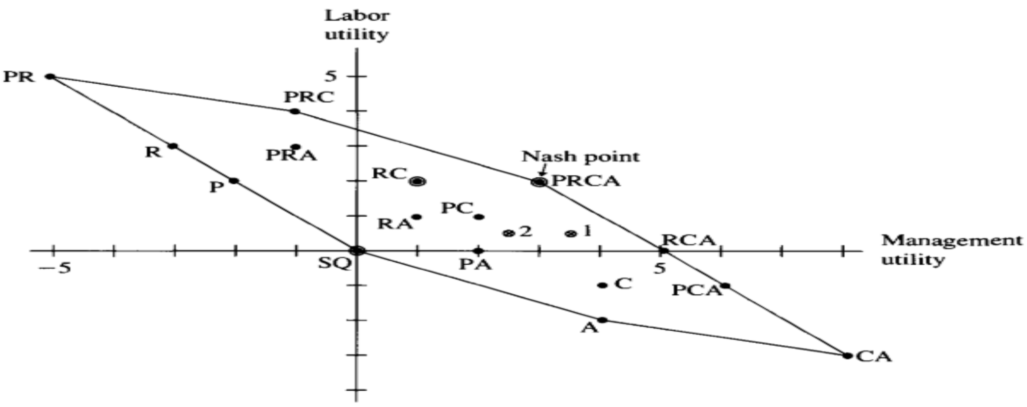
Πίνακας 22: Πίνακας Χρησιμοτήτων Σωματείου

Τώρα χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία μπορεί να συνεχιστεί η ανάλυση για να οριστούν όλες οι διαθέσιμες επιλογές. Η πιο απλή περίπτωση είναι ότι οι χρησιμότητες μπορούν να αθροιστούν, δηλαδή αν για παράδειγμα το σωματείο επιτύχει όλα τα αιτήματα του θα έχει τιμή ίση με P+R=2+3=5. Έστω ότι αυτή η υπόθεση και αυτή η λογική είναι σωστή αν και στην πράξη αυτή η συμπεριφορά ενδέχεται να μην ισχύει . Για παράδειγμα το σωματείο μπορεί να θεωρεί ότι το να χορηγηθούν πρόσθετες συνταξιοδοτικές παροχές μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο αν οι εργαζόμενοι καταφέρουν να πάρουν αύξηση, σε σχέση με το να μην πάρουν καθόλου. Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα αυτό θα απαιτούσε και έναν πιο εξειδικευμένο πίνακα απόλυτων χρησιμοτήτων όπου θα φαίνονταν και αυτές οι σχέσεις. Η μήτρα πληρωμών που προκύπτει από τις απόλυτες χρησιμότητες και στην περίπτωση που κάθε πλευρά κάνει υποχωρήσεις προς την άλλη θα είναι η εξής:

Επιχ. / Σωματείο	*(Δεν Παραχωρεί κάτι)*	*C*	*A*	*CA*
(Δεν Παραχωρεί κάτι)	(0,0)	(4,-1)	(4,-2)	(8,-3)
P	(-2,2)	(2,1)	(2,0)	(6,-1)
R	(-3,3)	(1,2)	(1,1)	(5,0)
PR	(-5,5)	(-1,4)	(-1,3)	(3,2)

Πίνακας 23: Μήτρα Πληρωμών Παιγνίου Διαπραγμάτευσης Επιχείρησης - Σωματείου

Με βάση τον παραπάνω πίνακα προκύπτει το πολύγωνο πληρωμών όπως θα φανεί και στην εικόνα που ακολουθεί. Με βάση αυτό το πολύγωνο μπορεί να οριστεί το σημείο συνεργασίας κατά Nash έχοντας ως σημείο status quo το σημείο (0,0). Σε αυτή την περίπτωση η λύση είναι το σημείο (3,2) όπου απαιτεί και από τις δύο πλευρές να κάνουν υποχωρήσεις ώστε να ικανοποιηθεί η άλλη πλευρά και είναι το σημείο PRCA. Και οι δύο πλευρές θα είναι πιο κερδισμένες σε σχέση με το να επέλεγαν το σημείο (0,0) και με βάση τα αξιώματα που ισχύουν στη λύση κατά Nash αυτή η λύση είναι δίκαιη.



Εικόνα 3: Πολύγωνο Παιγνίου κατά Nash

Αυτή η λύση αν και φαντάζει αρκετά «ελκυστική» έχει και αρκετά προβλήματα. Αρχικά αν η χρησιμότητες ήταν μη γραμμικές τότε η ανάλυση θα ήταν σαφώς πιο πολύπλοκη. Επίσης αν τα θέματα της διαπραγμάτευσης ήταν περισσότερα τότε η πολυπλοκότητα θα ήταν σαφώς μεγαλύτερη. Κάποια προβλήματα που θα μπορούσαν να υπάρξουν θα ήταν τα εξής:

- Αρχικά το σημείο ισορροπίας κατά Nash θα μπορούσε να είναι και με μικτό αποτέλεσμα. Αυτό πρακτικά θα σήμαινε να έκαναν όχι ολόκληρες υποχωρήσεις. Για παράδειγμα αν το σημείο ισορροπίας ήταν το (2, 2(1/2)) σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε κάποιες υποχωρήσεις να γίνουν ως ένα μίγμα αυτών, δηλαδή η εταιρεία δεν θα συμφωνούσε με την αύξηση του ενός ευρώ και θα πρότεινε μικρότερη αύξηση. Αυτό όμως δεν θα μπορούσε να γίνει για παράδειγμα με το διάλειμμα στις 10:00 αν για παράδειγμα το μείωνε καθώς αυτό δεν θα εξυπηρετούσε καμία πλευρά. Σε αυτές τις περιπτώσεις γενικά οι δύο πλευρές θα πρέπει να εντοπίσουν ένα μίγμα που να τις εξυπηρετεί.
- Η λύση θα μπορούσε να μην είναι άριστη κατά Pareto σε σχέση με το σημείο status quo. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο πλευρές απλώς θα κατέληγαν στο status quo. Μία λύση για να μην καταλήξουν στο status quo θα ήταν να προσθέσουν και άλλες προτάσεις προς εξέταση στη διαπραγμάτευση. Αυτό που θα εξυπηρετούσε με βάση τον Allen (1956) θα ήταν ο διαιτητής να οργανώσει νέες συναντήσεις μεταξύ της επιχείρησης και του σωματείου ώστε να προτείνουν και άλλες προτάσεις. Αυτό θα οδηγούσε ώστε να υπάρχουν περισσότερες εναλλακτικές για τις δύο πλευρές ώστε να συμφωνήσουν στο τέλος.
- Δεν είναι σίγουρο ότι η παρούσα κατάσταση θα αποτελεί και το κατάλληλο status quo για την λύση κατά Nash. Για να είναι το σημείο που βρέθηκε το σημείο που τελικά θα καταλήξουν οι διαπραγματεύσεις πρέπει να γίνονται σε φιλικό κλίμα. Όμως στις διαπραγματεύσεις αυτού του είδους οι διαπραγματεύσεις διεξάγονται σε εχθρικό κλίμα και με απειλές εκατέρωθεν ώστε η μία πλευρά να υπερισχύσει της άλλης. Σε αυτή την περίπτωση η διαιτησία ενδεχομένως να μην μπορεί να διαχειριστεί την κατάσταση.
- Οι δύο πλευρές ενδεχομένως να μην είναι ειλικρινείς ως προς τις χρησιμότητές τους. Αυτό μπορεί να συμβεί καθώς πιστεύουν πως θα μπορέσουν να διεκδικήσουν περισσότερα εφαρμόζοντας άλλες χρησιμότητες. Αυτό θα καθιστούσε την ανάλυση άχρηστη.

Έστω ότι η διοίκηση της επιχείρησης αποφασίζει να δηλώσει μη ειλικρινείς χρησιμότητες. Αυτό θα μπορούσε να το κάνει αυξάνοντας όλες τις αρνητικές τιμές και να αναφέρει ψευδείς χρησιμότητες. Αυτό ενδεχομένως να το κάνει ώστε να δείξει ψευδώς την πλήρη αντίθεσή της στις διεκδικήσεις του σωματείου παρότι μπορεί να δεχτεί κάποια από τα αιτήματά του. Η ψευδείς χρησιμότητες θα έχουν ως εξής:

R	**P**	**SQ**	**A,C**
-6	-4	0	4

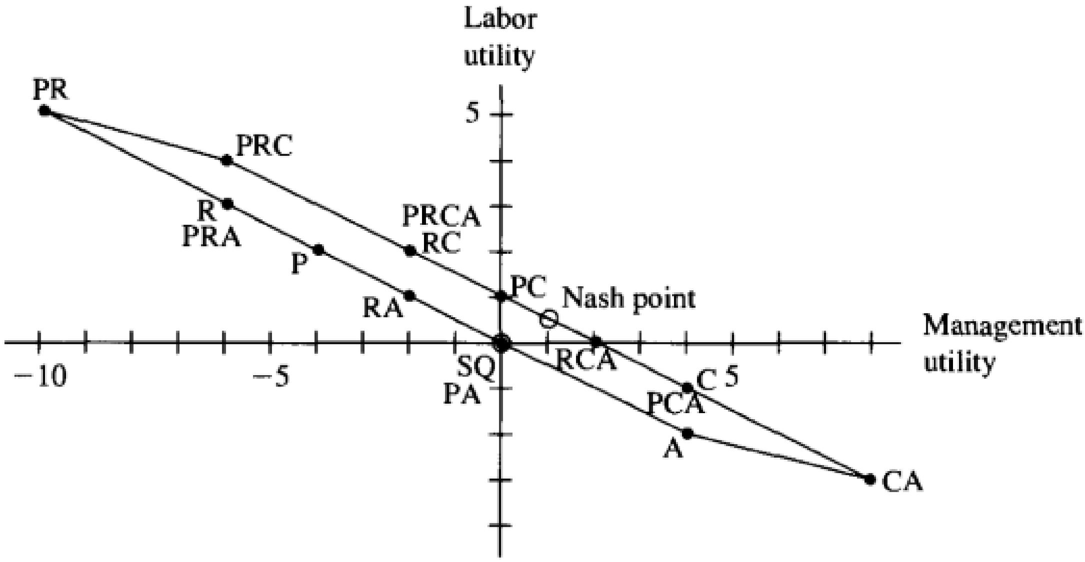
Πίνακας 24: Μη ειλικρινής Πίνακας Χρησιμοτήτων Επιχείρησης

Αυτές οι λανθασμένες χρησιμότητες από πλευράς της διοίκησης θα οδηγήσουν και σε μία άλλη μήτρα πληρωμών. Η νέα μήτρα πληρωμών θα είναι η εξής:

Επιχ. / Σωματείο	*(Δεν Παραχωρεί κάτι)*	*C*	*A*	*CA*
(Δεν Παραχωρεί κάτι)	(0,0)	(4,-1)	(4,-2)	(8,-3)
P	(-4,2)	(0,1)	(0,0)	(4,-1)
R	(-6,3)	(-2,2)	(-2,1)	(2,0)
PR	(-10,5)	(-6,4)	(-6,3)	(-2,2)

Πίνακας 25: Νέα μήτρα πληρωμών παιγνίου Επιχείρησης - Σωματείου

Με βάση τον παραπάνω πίνακα προκύπτει το πολύγωνο πληρωμών όπως θα φανεί και στην εικόνα που ακολουθεί. Σε αντίθεση με πριν κάποια σημεία έχουν μετατοπιστεί προς τα αριστερά, ουσιαστικά καθιστώντας την περιοχή αμοιβαίως επωφελούμενων λύσεων μικρότερη από πριν. Το νέο σημείο ισορροπίας κατά Nash είναι στο σημείο (1, ½) όπου θα μπορούσε να υλοποιηθεί με διαφορετικούς συνδυασμούς. Για παράδειγμα μία λύση θα ήταν 1/2PC+1/2 RCA. Σε σχέση με πριν, αυτό που προκύπτει είναι ότι μέσω της μη ειλικρινούς δήλωσης των χρησιμοτήτων από την επιχείρηση οδήγησε σε δυσμενέστερη θέση το σωματείο και σε πιο πλεονεκτική θέση την επιχείρηση.



Εικόνα 4: Νέο πολύγωνο παιγνίου κατά Nash

Από την άλλη το σημείο θα μπορούσε να υλοποιηθεί και με τον συνδυασμό 3/4PC+1/4C. Σε αυτή την περίπτωση αυτό το σενάριο θα ήταν δυσμενέστερο σε σχέση με την αρχική λύση για την επιχείρηση.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι αν η μία από τις δύο πλευρές δεν είναι ειλικρινής δεν είναι σίγουρο ότι θα είναι κερδισμένη ή όχι. Γενικά αν και οι δύο πλευρές δεν είναι ειλικρινής θα είναι και οι δύο χαμένες. Μπορεί να κερδίσουν με αυτόν τον τρόπο αλλά ούτε ο τρόπος είναι εύκολος, ούτε το κέρδος σίγουρο.[41]

[41] Philip D. Straffin, Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America 1993, σελ. 116.

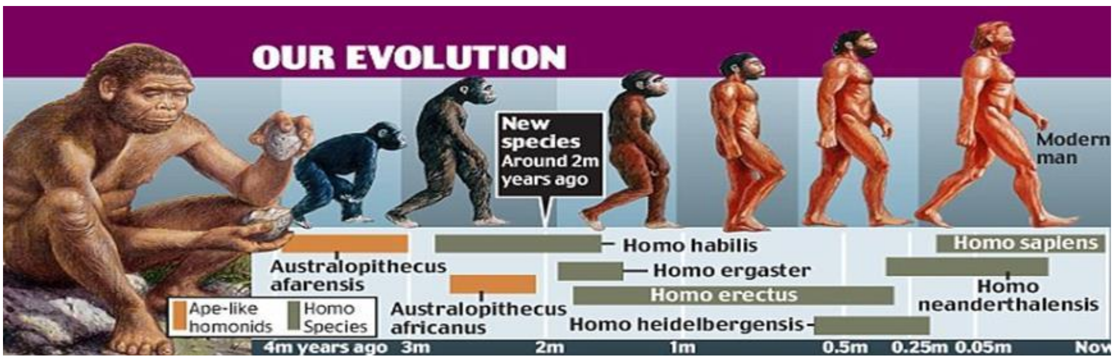
Κεφάλαιο 4

4.1 Βασικές Έννοιες Γενετικών Αλγορίθμων

Αρχικά κρίνεται σκόπιμη η παρουσίαση του όρου Evolutionary Computing. Η ανάπτυξη της ΕΥ είναι απόρροια της προσπάθειας μοντελοποίησης των διαδικασιών προσαρμογής των οργανισμών μέσα σε ένα δυναμικό και ανταγωνιστικό περιβάλλον, με βάση την θεωρία της εξέλιξης των ειδών.

Η Θεωρία της εξέλιξης των ειδών (Evolution of Species) που αναπτύχθηκε από τον Δαρβίνο στα μέσα του 19ου αιώνα, προκάλεσε μεγάλη αναστάτωση, αφού ερχόταν σε σύγκρουση με τις επικρατούσες θρησκευτικές αντιλήψεις περί προέλευσης της ζωής. Με την πάροδο περίπου ενός και μισού αιώνα, ο θόρυβος αυτός δεν έχει κοπάσει πλήρως, όμως η θεωρία έχει γίνει αποδεκτή από το σύνολο των επιστημόνων, γιατί κατόρθωσε να πείσει και να δώσει ικανοποιητικές απαντήσεις σε θεμελιώδη ερωτήματα. Σκοπός της θεωρίας αυτής είναι να δώσει μία εξήγηση για το φαινόμενο της ζωής, την προέλευσή της και τις βασικές λειτουργίες της. Τα κυριότερα σημεία της που σχετίζονται και ερμηνεύουν και τον τρόπο λειτουργίας των Γενετικών αλγορίθμων είναι τα εξής:[42]

- Δεν υπάρχει αντικειμενική βάση διαχωρισμού των ζωντανών οργανισμών σε ανώτερους και κατώτερους (εννοείται στο ίδιο βιολογικό είδος). Σε κάθε βιολογικό είδος, μερικά άτομα αφήνουν περισσότερους απογόνους σε σύγκριση με τα υπόλοιπα και έτσι τα κληροδοτούμενα χαρακτηριστικά των αναπαραγωγικά επιτυχημένων ατόμων γίνονται περισσότερα στην επόμενη γενιά. Οι δυσκολίες, τα εμπόδια και οι αντιξοότητες που παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της ζωής των οργανισμών είναι οι παράγοντες, που καθορίζουν ποιοι από αυτούς θα κατορθώσουν να ζήσουν και ποιοι να πολλαπλασιαστούν.
- Αυτή η αλλαγή, όμως, που συμβαίνει στα χαρακτηριστικά των ατόμων είναι αλλαγή στα χρωμοσώματά τους (chromosomes), που είναι πολύπλοκα οργανικά μόρια τα οποία κωδικοποιούν τη δομή και τα χαρακτηριστικά τους
- Κυρίαρχες λειτουργίες του φαινομένου της εξέλιξης είναι η αναπαραγωγή (reproduction) και η μετάλλαξη (mutation).
- Προϊόν της αναπαραγωγής είναι ένας νέος οργανισμός, τα χρωμοσώματα του οποίου αποτελούνται από γονίδια που προέρχονται τα μισά από τον πατέρα και τα μισά από τη μητέρα.



Εικόνα 5: Η ανθρώπινη εξέλιξη

---

[42] Σπυρίδων Λυκοθανάσης, “Γενετικοί Αλγόριθμοι και Εφαρμογές” , Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο 2001, σελ. 17-19

Ο λόγος όπου αναπτύχθηκε η ΕΥ είναι η ανάγκη από πλευράς των επιστημόνων να αντιμετωπίσουν τα μειονεκτήματα των κλασικών μεθόδων αναζήτησης και βελτιστοποίησης (π.χ. με τη βοήθεια ευριστικών αλγορίθμων) που συναντώνται συχνά σε βιομηχανικές εφαρμογές.

Ο τομέας της ΕΥ σύμφωνα με πολλούς ερευνητές περιέχει τέσσερα πεδία:

- Γενετικοί Αλγόριθμοι
- Εξελικτικός Προγραμματισμός
- Εξελικτικές στρατηγικές
- Γενετικός Προγραμματισμός

Βέβαια υπάρχουν και άλλες οπτικές καθώς ο γενετικός προγραμματισμός θεωρείται ως ένας κλάδος των γενετικών αλγορίθμων. Το σύνολο των πεδίων της ΕΥ διαφέρουν από τα παραδοσιακά ευριστικά υποδείγματα καθώς και από τα υποδείγματα βελτιστοποίησης για τους εξής λόγους:

1. Χρησιμοποιούν ένα πληθυσμό από σημεία (πιθανές λύσεις) στην αναζήτησή τους. Τα στοιχεία αυτά συνήθως καλούνται χρωμοσώματα.
2. Χρησιμοποιούν απευθείας πληροφορίες «καταλληλότητας» με βάση την ιδέα της φυσικής επιλογής, αντί για παράγωγες λειτουργίες ή άλλη σχετική πληροφόρηση.
3. Χρησιμοποιούν πιθανολογικούς, παρά ντετερμινιστικούς, κανόνες μετάβασης. Εδώ αξίζει να σημειωθεί η έννοια των τελεστών όπου συναντάται και στους γενετικούς αλγόριθμους.

Επιπρόσθετα, οι υλοποιήσεις όπου βασίζονται στην ΕΥ κάποιες φορές κωδικοποιούν τις παραμέτρους με τη βοήθεια δυαδικών ή άλλων συμβολοσειρών, παρά με την απευθείας χρήση των παραμέτρων. Από τους προαναφερθέντες τομείς αυτός που έχει εμφανίσει την μεγαλύτερη εξέλιξη είναι ο τομέας των Γενετικών Αλγορίθμων.

Οι ΓΑ, όντας ένα από τα είδη των αλγορίθμων ΕΥ, είναι εμπνευσμένοι από τη Θεωρία της εξέλιξης των ειδών. Οι γενετικοί αλγόριθμοι εκτελούν μία αναζήτηση από το χώρο των υποψήφιων λύσεων, με στόχο την εύρεση αποδεκτών, σύμφωνα με κάποιο κριτήριο, λύσεων. Έχουν εφαρμοστεί επιτυχώς σε προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως δρομολόγηση καλωδίων (wire routing), χρονοπρογραμματισμό (scheduling), παίγνια (game playing), προβλήματα εφοδιαστικής (logistics) κ.τ.λ.

Η εισαγωγή των ΓΑ έγινε το 1958 από τον Friedberg, ο οποίος επιχείρησε την αυτόματη παραγωγή σύνθετων προγραμμάτων FORTRAN με το συνδυασμό μικρότερων προγραμμάτων. Ωστόσο τα προγράμματα που προέκυπταν, τις περισσότερες φορές δεν ήταν εκτελέσιμα. Η διαδικασία αυτή είναι μία ειδική περίπτωση των ΓΑ και αναφέρεται ως Γενετικός Προγραμματισμός (Genetic Programming). Ο Holland το 1975 έδωσε νέα ώθηση στο χώρο, χρησιμοποιώντας σειρές δυαδικών ψηφίων (bits) για να αναπαραστήσει λειτουργίες με τρόπο τέτοιο ώστε, κάθε συνδυασμός bit να είναι μία έγκυρη λειτουργία.[43]

Η φιλοσοφία των γενετικών αλγορίθμων είναι η εξής:

Αρχικά δημιουργείται με τυχαίο τρόπο ένα σύνολο Π από υποψήφιες λύσεις του προβλήματος, οι οποίες ως επί το πλείστον είναι μη αποδεκτές. Έστω Ν το πλήθος του συνόλου Π. Οι λύσεις αυτές βαθμολογούνται από μία συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function). Η βαθμολόγησή τους συνίσταται στην αντιστοίχιση κάθε υποψήφιας λύσης σε έναν αριθμό, ο οποίος δηλώνει την εγγύτητα της υποψήφιας μη αποδεκτής λύσης ως προς κάποια αποδεκτή. Στη συνέχεια από τον αρχικό πληθυσμό σχηματίζονται Ν/2 ζευγάρια όχι απαραίτητα μοναδικών γονέων, δίνοντας μεγαλύτερη προτεραιότητα στις πλέον κατάλληλες λύσεις. Κάθε ζευγάρι ζευγαρώνει (mates), δίνοντας δύο νέες λύσεις, τους απόγονους. Ο νέος πληθυσμός Π΄ αποτελείται από το σύνολο των απογόνων και συνήθως αποτελεί βελτίωση του προηγούμενου πληθυσμού. Σε παραλλαγές του αλγορίθμου, η ανανέωση του πληθυσμού μπορεί

[43] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, "Τεχνητή Νοημοσύνη", Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 101-102

να μην είναι πλήρης αλλά ο νέος πληθυσμός Π’ να αποτελείται από απογόνους και στοιχεία του αρχικού πληθυσμού Π. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για το νέο πληθυσμό Π’, ενώ οι πιο συνηθισμένες συνθήκες τερματισμού είναι η εύρεση μίας τέλειας λύσης με βάση τη συνάρτηση καταλληλότητας ή η σύγκλιση όλων των λύσεων σε μία.

Η γενική μορφή ενός γενετικού αλγορίθμου είναι η εξής:[44]

1. Δημιούργησε έναν αρχικό πληθυσμό Π, με Ν υποψήφιες λύσεις.
2. Υπολόγισε την καταλληλότητα κάθε λύσης.
3. Όσο δεν ισχύει κάποια συνθήκη τερματισμού:
   A. Επανέλαβε Ν/2 φορές τα ακόλουθα βήματα:
      i. Επέλεξε δύο λύσεις από τον πληθυσμό Π.
      ii. Συνδύασε τις δύο λύσεις για να βγάλεις δύο απογόνους.
      iii. Υπολόγισε την καταλληλότητα των δύο απογόνων.
   B. Δημιούργησε το νέο πληθυσμό Π’ έχοντας υπόψη όλους τους νέους απογόνους που προέκυψαν από το βήμα 3.Α και θέσε Π=Π’.

Ο γενετικός αλγόριθμος εκτελεί μία αναζήτηση στο χώρο των υποψήφιων λύσεων με στόχο την εύρεση κάποιας λύσης που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση καταλληλότητας. Η αναζήτηση αυτή είναι παράλληλη, καθώς σε κάθε υποψήφια λύση μπορεί να εκτελεστεί ξεχωριστή αναζήτηση. Η μέθοδος της αναζήτησης μπορεί να θεωρηθεί σαν αναρρίχηση λόφου (hill climbing), καθώς δεν γίνεται εξερεύνηση όλου του χώρου αναζήτησης αλλά γίνονται μικρές αλλαγές στις υποψήφιες λύσεις του πληθυσμού και επιλέγονται πάντα οι καλύτερες, βάσει της συνάρτησης καταλληλότητας.[45] Η αναρρίχηση λόφου δεν κοιτάζει πιο πέρα από τους άμεσους γείτονες της τρέχουσας κατάστασης. Η αναζήτηση επικεντρώνεται στις περισσότερο κατάλληλες λύσεις, χωρίς όμως να αγνοούνται οι υπόλοιπες, καθώς υπάρχει πάντα ο κίνδυνος να παγιδευτεί η διαδικασία σε τοπικό μέγιστο(local maximum).

Ένας ΓΑ για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα περιλαμβάνει πέντε συστατικά:

- Ένα μηχανισμό για τη δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού πιθανών λύσεων (συνήθως δημιουργείται τυχαία).
- Έναν τρόπο αναπαράστασης των υποψήφιων λύσεων.
- Μία συνάρτηση καταλληλότητας για την αξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων.
- Ένα μηχανισμό επιλογής γονέων.
- Ένα σύνολο γενετικών τελεστών για τη διαδικασία της αναπαραγωγής.

Ο μηχανισμός για τη δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού εξαρτάται από το δοσμένο πρόβλημα και είναι διαφορετικός.

Η αναπαράσταση των υποψήφιων λύσεων γίνεται με μία συμβολοσειρά (string) ενός πεπερασμένου αλφάβητου. Συνήθως χρησιμοποιείται το δυαδικό αλφάβητο, οπότε οι συμβολοσειρές ονομάζονται και δυαδικές συμβολοσειρές. Στην βιολογία η συμβολοσειρά αναφέρεται και ως χρωμόσωμα, ενώ τα επιμέρους τμήματα της που κωδικοποιούν κάποιο χαρακτηριστικό ονομάζονται γονίδια.

Η συνάρτηση καταλληλότητας αποτελεί το κριτήριο για ην αξιολόγηση των χρωμοσωμάτων, δηλαδή των υποψήφιων λύσεων. Η αξιολόγηση αυτή χρησιμοποιείται από τη συνθήκη τερματισμού ή από τη διαδικασία της πιθανοκρατικής επιλογής τους για να συμπεριληφθούν (ή όχι) στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως είσοδο ένα χρωμόσωμα και επιστρέφει έναν αριθμό που υποδηλώνει το βαθμό καταλληλότητάς του.

---

[44] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 103-106

[45] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 103-106

Συνήθως το πεδίο τιμών αυτής της συνάρτησης είναι συνήθως το διάστημα των πραγματικών αριθμών από το 0 μέχρι το 1. Συνήθως η τιμή 1 δηλώνει ότι το χρωμόσωμα είναι τέλειο ενώ οι τιμές κάτω από το 1 δείχνουν το πόσο κοντά σε μία αποδεκτή λύση βρίσκεται.[46]

Η διαδικασία επιλογής χρωμοσωμάτων-γονέων έχει να κάνει με την επιλογή ορισμένων χρωμοσωμάτων προς αναπαραγωγή με βάση την υψηλή τιμή που θα έχουν αυτά στη συνάρτηση καταλληλότητας, ενώ ενδέχεται να επιλεγούν προς αναπαραγωγή περισσότερες από μία φορές, ενώ αυτά που έχουν χαμηλή τιμή ενδέχεται να μην επιλεγούν καθόλου.

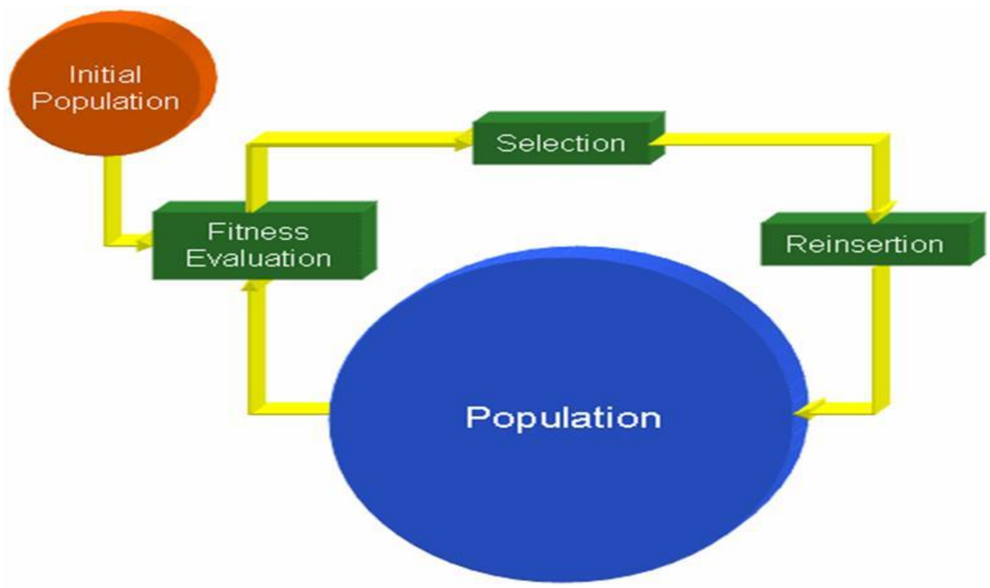
Η αναπαραγωγή είναι η διαδικασία δημιουργίας απογόνων. Σε αυτή εμπλέκονται ένα σύνολο από τελεστές με τους πιο χαρακτηριστικούς από αυτούς να είναι η μετάλλαξη (mutation) και η διασταύρωση (crossover). Ο τελεστής διασταύρωσης παράγει 2 απογόνους από 2 γονείς, αντιγράφοντας επιλεγμένα bit από κάθε γονέα με τέτοιο τρόπο ώστε το i-οστό bit του απογόνου να είναι το i-οστό bit ενός εκ των γονέων του. Το ποιος γονέας θα συνεισφέρει το κάθε bit αποφασίζεται βάση ενός μηχανισμού που ονομάζεται μάσκα διασταύρωσης. Ο συντελεστής μετάλλαξης αλλοιώνει ένα χρωμόσωμα του νέου πληθυσμού, μεταβάλλοντας τη τιμή κάποιου bit.

Παραδείγματα εφαρμογής των παραπάνω τελεστών είναι τα εξής:

- Διασταύρωση ενός σημείου. Στη διασταύρωση σημείου, η μάσκα διασταύρωσης ξεκινά με έναν αριθμό συνεχόμενων άσων που ακολουθούνται από τόσα μηδενικά, όσα χρειάζονται για να συμπληρωθεί η ακολουθία. Ο ένας απόγονος παίρνει τα bit (γενετικό υλικό) που δεν χρησιμοποιήθηκε στη δημιουργία του άλλου. Αν για παράδειγμα η μάσκα διασταύρωσης είναι 11111000000 δείχνει ότι ο ένας απόγονος θα πάρει τα πρώτα πέντε bit από τον πρώτο γονέα και τα επόμενα έξι από τον άλλο, ενώ ο δεύτερος απόγονος το αντίστροφο.
- Διασταύρωση δύο σημείων. Εδώ οι απόγονοι δημιουργούνται αντικαθιστώντας ενδιάμεσα bit του ενός γονέα στη μέση της ακολουθίας, με εκείνα του άλλου γονέα. Η μάσκα διασταύρωσης ξεκινά με έναν αριθμό μηδενικών, ακολουθεί ένας αριθμός άσων και ολοκληρώνεται η ακολουθία με τον απαιτούμενο αριθμό μηδενικών. Οι αριθμοί των μηδενικών και των άσων επιλέγονται κάθε φορά με τυχαίο τρόπο.
- Ομοιόμορφη διασταύρωση. Εδώ τα bit των γονέων συνδυάζονται ομοιόμορφα.
- Μετάλλαξη σημείου. Εδώ επιλέγεται τυχαία ένα bit και αλλάζει τιμή. Συνήθως ο τελεστής μετάλλαξης εφαρμόζεται μετά τον τελεστή διασταύρωσης.

[46] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 106-109

Συνοψίζοντας, ένας γενικός γενετικός αλγόριθμος ακολουθεί τη παρακάτω διαδικασία:



Εικόνα 6: Διαδικασία Γενετικού Αλγορίθμου

Μερικές αντιπροσωπευτικές εφαρμογές των γενετικών αλγορίθμων είναι οι εξής:

- Εύρεση μέγιστης τιμής αριθμητικών συναρτήσεων. Αυτή αποτελεί και την πιο καλά μελετημένη εφαρμογή των γενετικών αλγορίθμων. Γενικά η εύρεση του μέγιστου μίας συνάρτησης δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ιδίως όταν έχουμε ασυνεχείς συναρτήσεις. Το πλεονέκτημα των ΓΑ σε αυτή την περίπτωση είναι ότι η συνάρτηση καταλληλότητας είναι δεδομένη.
- Επεξεργασία εικόνων. Οι ΓΑ χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση προτύπων σε ψηφιοποιημένες εικόνες, αποτελώντας ουσιαστικά τη βάση για τη μηχανική όραση.
- Συνδυαστική βελτιστοποίηση. Εδώ το πρόβλημα είναι η κατανομή πόρων σε δραστηριότητες με σκοπό τη μεγιστοποίηση του οφέλους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους. Έχει ιδιαίτερη σημασία στη βιομηχανία και στα logistics.
- Σχεδίαση. Οι ΓΑ μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην σχεδίαση κατασκευών και εξαρτημάτων (π.χ. γέφυρες), όπου ζητούμενο μπορεί να είναι τόσο η εύρεση μίας λύσης, όσο και η βελτιστοποίησή της καθώς με τη βοήθεια των ΓΑ δοκιμάζονται συνδυασμοί και ιδέες που θα ήταν απλησίαστες για τον ανθρώπινο νου.
- Μηχανική μάθηση. Οι ΓΑ στα συστήματα μηχανικής μάθησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση συναρτήσεων με σωρεία εφαρμογών σε πολιτικές και οικονομικές αναλύσεις.

4.2 Γενετικοί Αλγόριθμοι στην Θεωρία Παιγνίων – Το δίλημμα του Φυλακισμένου

Όπως έγινε αντιληπτό και από τα προηγούμενα κεφάλαια πολλά από τα προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν καλύτερα με δυναμικά παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος τόσο στα Οικονομικά, όσο και στις Διαπραγματεύσεις. Ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα που υπάρχουν για τα συγκεκριμένα παίγνια είναι κατά πόσο η πληροφόρηση που μπορούν να έχουν οι παίκτες μπορούν να μεταβάλλουν τα συγκεκριμένα μοντέλα. Λόγω αυτού του γεγονότος μπορεί να υπάρξουν και διαφορετικές λύσεις σε δυναμικά παίγνια.[47]

Το δίλημμα του φυλακισμένου όπως παρουσιάστηκε και στο κεφάλαιο 3 είναι ένα παίγνιο όπου οι παίκτες πρέπει να πάρουν αποφάσεις με ιδιοτέλεια και χρησιμοποιείται από απλές έως αρκετά σύνθετες περιπτώσεις.

Σχετικά με το δίλημμα του φυλακισμένου όπως αναλύθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο συμμετέχουν δύο παίκτες όπου θα πρέπει να αποφασίσουν αν ο ένας θα προδώσει τον άλλο ή αν θα συνεργαστούν μεταξύ τους. Αν και οι δύο παίκτες συνεργαστούν (C) θα έχουν και την μικρότερη ποινή ίση με R, ενώ αν ο ένας προδώσει τον άλλο (D) τότε θα έχουν μία ποινή ίση με P. Αν ο ένας παίκτης προδώσει τον άλλο και ο άλλος δεν ομολογήσει τότε αυτός που δεν ομολογήσει θα υποστεί τη μεγαλύτερη των ποινών ίση με S ενώ αυτός που θα τον προδώσει θα έχει την καλύτερη αποζημίωση που ουσιαστικά θα είναι η αποφυλάκισή του. Έστω ότι οι τιμές των R, S, T, P θα είναι 3, 0, 5, 1 και η μήτρα που προκύπτει θα είναι η εξής:

Παίκτης 2 / Παίκτης 1	*Συνεργασία (C)*	*Μη συνεργασία (D)*
Συνεργασία (C)	(3,3)	(5,0)
Μη συνεργασία (D)	(0,5)	(1,1)

Πίνακας 26: Μήτρα πληρωμών στο Δίλημμα Φυλακισμένου (Λύση με γενετικό αλγόριθμο)

Με βάση την ισορροπία κατά Nash ο κάθε παίκτης ανεξάρτητα από το τι θα κάνει ο άλλος έχει ως συμφέρον το να ομολογήσει. Πιο συγκεκριμένα αν ο παίκτης 1 συνεργαστεί, ο παίκτης 2 θα πάρει ως κέρδος ίσο με 5 που θα σημαίνει ότι θα αποφυλακιστεί αν προδώσει τον παίκτη 1. Αντίστοιχα θα ισχύει και για τον παίκτη 1 αν προδώσει τον παίκτη 2 και ο 2 συνεργαστεί. Στην περίπτωση που και οι δύο προδώσουν ο ένας τον άλλο τότε θα έχουν κέρδος ίσο με 1. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν και οι δύο παίκτες θα επιζητήσουν το μέγιστο κέρδος και στη χειρότερη θα έχουν ένα κέρδος ίσο με 1 άρα με βάση την ισορροπία κατά Nash ο ένας θα προδώσει τον άλλο.

Αν όμως και οι δύο παίκτες άλλαζαν την στάση τους και συνεργάζονταν μεταξύ τους θα είχαν μεγαλύτερο κέρδος και θα ήταν ίσο με 3 για τον κάθε παίκτη. Αυτή η λύση θα ήταν άριστη λύση κατά Pareto μιας και σε αυτή την περίπτωση ο κάθε παίκτης θα βελτίωνε τη θέση του χωρίς να χειροτερεύει τη θέση του άλλου παίκτη. Αν μάλιστα οι παίκτες ήταν ικανοί να θυμούνται και μερικούς προηγούμενους γύρους του επαναλαμβανόμενου παιγνίου θα ήταν σε θέση να αναπτύξουν μία πιο περίπλοκη στρατηγική.

Αν και οι δύο παίκτες έπαιζαν αρκετές φορές συνεχόμενα για το παίγνιο, όπως είχε αναλυθεί και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δεν θα ήταν σε καμία περίπτωση αποτελεσματική η προσέγγιση της μη συνεργασίας. Μία στρατηγική που είχε αναλυθεί σε ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο ήταν η στρατηγική Tit for Tat όπου με βάση αυτή τη στρατηγική ο παίκτης θα πρέπει να επιλέξει την στρατηγική του αντιπάλου του στον προηγούμενο γύρο. Μία άλλη στρατηγική που θα μπορούσε να φανεί αποτελεσματική είναι η στρατηγική Pavlov στην οποία ο παίκτης κινείται με βάση τι θα τον ανταμείψει περισσότερο. Στο συγκεκριμένο παίγνιο για παράδειγμα οι παίκτες θα συνεργάζονταν αν στον προηγούμενο γύρο υπήρξε αμοιβαία συνεργασία ή προδοσία. Στην περίπτωση της αμοιβαίας συνεργασίας με το κέρδος τους να είναι 3 οι δύο παίκτες θα συνέχιζαν να συνεργάζονται. Στην περίπτωση της αμοιβαίας προδοσίας στον προηγούμενο γύρο τότε και οι δύο παίκτες θα συνεργάζονταν μιας και στον προηγούμενο γύρο είχαν μικρότερο κέρδος το οποίο και ήταν ίσο με 1. Από την άλλη οι δύο παίκτες θα επέλεγαν να μην συνεργαστούν στην περίπτωση όπου δεν υπήρχε αμοιβαία συνεργασία ή προδοσία στον προηγούμενο γύρο καθώς θα έβλεπαν ότι θα έχουν μέγιστο κέρδος ίσο με 5 αν προδώσουν. Αυτή η περίπτωση φαίνεται να είναι αρκετά αποτελεσματική σε

[47] Genetic algorithm for closed-loop equilibrium of high-order linear–quadratic dynam-ic games, Süheyla Özyıldırım, Faculty of Business Administration, Bilkent University, Bilkent 06533, Ankara, Turkey, σελ. 1.

επαναλαμβανόμενα παίγνια όπου οι παίκτες θυμούνται μόνο την προηγούμενη κίνηση του αντιπάλου τους.[48]Η αποτελεσματικότητα αυτών των δύο μεθόδων σε σχέση με μία εντελώς τυχαία συμπεριφορά από τους παίκτες μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια γενετικών αλγορίθμων.

Όπως αναφέρει και σε σχετική μελέτη η Jennifer Goldbeck οι γενετικοί αλγόριθμοι μπορούν να έχουν πολύ καλή εφαρμογή στην επίλυση του διλήμματος του φυλακισμένου. Κάθε παίκτης αποτυπώνεται από την στρατηγική του. Σε ένα παίγνιο λοιπόν όπου οι δύο παίκτες θα θυμούνται τις κινήσεις στους τρεις προηγούμενους γύρους, η στρατηγική του κάθε παίκτη θα αποτελείται από 64 διαφορετικές εκδοχές. Στην εφαρμογή όπως αναπτύχθηκε από τη Goldbeck αποτελείται από ένα string 64 bit που θα αναπαριστά τον κάθε παίκτη. Από εκεί και πέρα θα υπάρχει μία συνάρτηση καταλληλλότητας (ή fitness function) όπου είναι και η συνάρτηση που πρέπει να επιλυθεί. Σχετικά με τον συντελεστή μετάλλαξης αυτός είναι στο 0,001 όπου παράγει μία μετάλλαξη ανά γενιά. Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 20 παίκτες με τις αντίστοιχες στρατηγικές τους. Η προσομοίωση που περιγράφεται «έτρεξε» 64 φορές το παίγνιο ανάμεσα σε ένα ζεύγος παικτών. Στο τέλος κάθε γύρου του παιγνίου οι «παίκτες» αποθήκευαν το συνολικό τους αποτέλεσμα μέχρι και εκείνη τη στιγμή για όλους τους γύρους. Το μέγιστο αποτέλεσμα που μπορούσε να έχει ο κάθε παίκτης ήταν 6080 όπου αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο ένας από τους είκοσι παίκτες κάθε φορά πρόδιδε τον αντίπαλο του (και τους 19 παίκτες ξεχωριστά) και αυτό γινόταν 64 φορές που αφορούσε το κάθε «τρέξιμο» μεταξύ δύο παικτών. Αντίθετα αν ένας παίκτης συνεργάζονταν κάθε φορά θα είχε αποτέλεσμα ίσο με 3648 (3*64*19).

Από εκεί και πέρα αφού ο κάθε παίκτης είχε παίξει με τους άλλους 19 που συνιστούσαν τον αρχικό πληθυσμό τότε προέκυπτε ένας πίνακας με την απόδοση-αποτέλεσμα του κάθε παίκτη και αυτοί οι παίκτες επιλεγόντουσαν για αναπαραγωγή. Έτσι τα παιδιά έπαιρναν τη θέση των γονέων και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνονταν. Ένα ακόμα αποτέλεσμα που κρατούνταν ήταν αυτό που προέκυπτε συνολικά για τον πληθυσμό σε μία γενιά. Αυτό το αποτέλεσμα για τον πληθυσμό σε μία γενιά η μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να πάρει θα είναι ίση με 72960 καθώς αυτό θα προέκυπτε όταν και οι δύο παίκτες θα συνεργάζονταν και άρα το άθροισμα των κερδών τους ανά παιγνίδι θα ήταν 6 που είναι το μέγιστο. Αυτό συμβαίνει καθώς δεν θα μπορούσαν όλοι οι παίκτες να έχουν ο κάθε ένας ξεχωριστά απόδοση 6080 και επειδή στις υπόλοιπες περιπτώσεις το άθροισμα των παικτών ανά παίγνιο μπορεί να είναι είτε 5 (τότε ο ένας παίκτης θα πρόδιδε τον άλλο και ο άλλος δεν θα πρόδιδε), είτε 2 (όπου και οι δύο παίκτες θα πρόδιδαν ένας τον άλλο). Αυτό όμως που είναι αρκετά ενδιαφέρον είναι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την συγκεκριμένη προσομοίωση. Αυτό που φάνηκε είναι ότι οι παίκτες σταδιακά κατάφεραν ανά γενιά να αποκτήσουν την ικανότητα να αμυνθούν ενάντια στους παίκτες που θα τους πρόδιδαν καθώς και την ικανότητα του να κερδίσουν από την αμοιβαία συνεργασία. Αυτό φάνηκε μετά από κάποιες γενιές όπου οι «εξελιγμένοι» απόγονοι των πρώτων γενεών φάνηκε να είναι πιο κοντά στο μέγιστο της τιμής ανά γενιά που είναι ίσο με 72960.

---

[48] J. Goldbeck, Evolving Strategies for the Prisoner's Dilemma, Computer Science Department University of Maryland, College Park MD, USA, σελ. 2

String Position	Represented History	Move	String Position	Represented History	Move
0	CCCCCC	C	32	DCCCCC	D
1	CCCCCD	D	33	DCCCCD	C
2	CCCCDC	D	34	DCCCDC	D
3	CCCCDD	D	35	DCCCDD	D
4	CCCDCC	C	36	DCCDCC	C
5	CCCDCD	C	37	DCCDCD	C
6	CCCDDC	C	38	DCCDDC	D
7	CCCDDD	D	39	DCCDDD	D
8	CCDCCC	C	40	DCDCCC	D
9	CCDCCD	D	41	DCDCCD	C
10	CCDCDC	D	42	DCDCDC	C
11	CCDCDD	D	43	DCDCDD	C
12	CCDDCC	D	44	DCDDCC	C
13	CCDDCD	D	45	DCDDCD	D
14	CCDDDC	C	46	DCDDDC	D
15	CCDDDD	C	47	DCDDDD	C
16	CDCCCC	C	48	DDCCCC	C
17	CDCCCD	C	49	DDCCCD	D
18	CDCCDC	D	50	DDCCDC	C
19	CDCCDD	C	51	DDCCDD	C
20	CDCDCC	C	52	DDCDCC	C
21	CDCDCD	D	53	DDCDCD	C
22	CDCDDC	D	54	DDCDDC	D
23	CDCDDD	C	55	DDCDDD	D
24	CDDCCC	C	56	DDDCCC	C
25	CDDCCD	C	57	DDDCCD	C
26	CDDCDC	D	58	DDDCDC	D
27	CDDCDD	C	59	DDDCDD	D
28	CDDDCC	D	60	DDDDCC	C
29	CDDDCD	C	61	DDDDCD	C
30	CDDDDC	C	62	DDDDDC	D
31	CDDDDD	D	63	DDDDDD	C

Πίνακας 27: Πίνακας στρατηγικών ενός παίκτη για το δίλημμα του φυλακισμένου μεταξύ δύο παικτών για 64 φορές[49]

[49] J. Goldbeck, Evolving Strategies for the Prisoner's Dilemma, Computer Science Department University of Maryland, College Park MD, USA, σελ. 4

Συμπεράσματα

Από το σύνολο της εργασίας είναι σαφέστατη η συμβολή των παιγνίων στην ορθή λειτουργία των επιχειρήσεων καθώς πολλές στρατηγικές αποφάσεις μπορούν να ληφθούν ορθολογικά χωρίς να στηρίζονται στη τύχη ή απλώς στην ικανότητα αυτού που τις λαμβάνει.

Αρχικά παρουσιάστηκαν βασικές έννοιες της θεωρίας ώστε ο αναγνώστης να έχει μία εικόνα τόσο της θεωρίας όσο και των εργαλείων που του χρειάζονται ώστε να τα επιλύσει. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν εφαρμογές των παιγνίων στην Οικονομία και στη λήψη αποφάσεων που αφορούν μία επιχείρηση όπως η διαφημιστική στρατηγική που θα πρέπει να ακολουθήσει και τι αποφάσεις θα πρέπει να πάρει σχετικά με την παραγωγή ανάλογα με τις αποφάσεις των ανταγωνιστών της. Σημαντικό κομμάτι αποτελεί και αυτό που αφορά τις δημοπρασίες καθώς μία επιχείρηση μπορεί να κληθεί αρκετές φορές να συμμετάσχει σε μία τέτοια διαδικασία. Αυτό που σε κάθε περίπτωση φάνηκε είναι ότι ακόμα και στις δημοπρασίες υπάρχει συγκεκριμένη στρατηγική που θα πρέπει να ακολουθηθεί χωρίς να στηριζόμαστε στη διαίσθηση.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων στις διαπραγματεύσεις. Και εδώ έγινε σημαντική προσπάθεια να φανεί ο καθοριστικός ρόλος της ανάλυσης των στρατηγικών που είναι διαθέσιμες για έναν παίκτη ώστε να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του. Αυτή η ωφέλεια μπορεί να προκύψει είτε συνεργαζόμενος με τον άλλο παίκτη (όπως φάνηκε στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο του διλήμματος του φυλακισμένου), είτε υποχωρώντας (όπως στο παίγνιο του δειλού) ή ακόμα και δείχνοντας πυγμή αν και εφόσον μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο. Οι διαπραγματεύσεις όμως ενδεχομένως να διαρκέσουν αρκετό καιρό και τα δύο μέρη να μην μπορούν να συμφωνήσουν. Εκεί λοιπόν εισάγεται η έννοια των επαναλαμβανόμενων παιγνίων και η λύση του Rubinstein που απλοποιεί σε ένα πολύ μεγάλο βαθμό την επίλυση τέτοιων παιγνίων. Στις διαπραγματεύσεις όμως παρουσιάστηκε και μία εφαρμογή που είναι πολύ χρήσιμη για όλες τις επιχειρήσεις όπως είναι η διαπραγμάτευση με ένα σωματείο όπου φάνηκε ξεκάθαρα ότι και οι δύο πλευρές θα πρέπει να είναι ειλικρινείς και να επιδιώκουν την συνεργασία ώστε να είναι αμοιβαία κερδισμένες και οι δύο πλευρές.

Στο τελευταίο κεφάλαιο έγινε μία προσπάθεια εισαγωγής στους γενετικούς αλγορίθμους. Αυτό δεν έγινε τυχαία καθώς οι γενετικοί αλγόριθμοι μπορούν να επιλύσουν αρκετά επαναλαμβανόμενα παίγνια όπως μπορεί να υπάρχουν στις διαπραγματεύσεις. Για το λόγο αυτό παρουσιάστηκε σύντομα και μία σχετική εφαρμογή πάνω στην επίλυση του διλήμματος του φυλακισμένου.

Στόχος είναι μελλοντικά η παρούσα διατριβή να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη μίας εφαρμογής επίλυσης επαναλαμβανόμενων παιγνίων με τη βοήθεια των γενετικών αλγορίθμων.

Παράρτημα

Αλγόριθμοι Αναζήτησης σε Παίγνια Δύο Αντιπάλων

Παρακάτω παρατίθενται μερικοί βασικοί αλγόριθμοι αναζήτησης σε παίγνια δύο αντιπάλων. Αυτοί οι αλγόριθμοι είναι χρήσιμοι στις περιπτώσεις επαναληπτικών παιγνίων και εδώ θα μελετηθεί η περίπτωση όπου είναι δύο οι παίκτες σε τέτοια παίγνια. Ουσιαστικά με αυτόν τον τρόπο γίνεται προσπάθεια να βρεθούν όλες οι στρατηγικές που έπονται μετά την επιλογή ενός παίκτη ώστε να επιλέξει τι θα πρέπει να κάνει. Σε ένα παιχνίδι δύο παικτών το πρόβλημα μπορεί να οριστεί ως εξής:

- Αρχικά υπάρχει μία κατάσταση. Αυτή η κατάσταση για παράδειγμα μπορεί να παριστάνει τη διάταξη μερικών πιονιών σε κάποια χρονική στιγμή.
- Υπάρχει ο χώρος των καταστάσεων που ουσιαστικά εμπεριέχει όλες τις επιτρεπτές καταστάσεις.
- Οι τελεστές μετάβασης είναι οι κινήσεις που μπορούν να γίνουν με βάση τους κανόνες του παιχνιδιού.
- Οι τελικές καταστάσεις θα πρέπει να έχουν γνωστά χαρακτηριστικά.

Έστω ότι ένας παίκτης θέλει να κάνει μία κίνηση. Η συλλογιστική που θα έχει θα είναι η εξής:

- Αρχικά θα προσπαθήσει να κάνει την κίνηση που θα του αποφέρει το μεγαλύτερο όφελος ώστε να κερδίσει και παράλληλα αυτή η κίνηση να είναι η χειρότερη δυνατή για τον αντίπαλο.
- Ο παίκτης όμως θα σκεφτεί και τι θα κάνει ο αντίπαλος και πως θα πρέπει να κινηθεί ο ίδιος στη συνέχεια.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να αποτυπωθεί με ένα δένδρο. Για το συγκεκριμένο δένδρο θα ισχύει ότι δύο διαδοχικά επίπεδα θα ανήκουν σε διαφορετικό παίκτη καθώς ο ένας παίκτης κάνει κίνηση και ο άλλος παίκτης ανταποδίδει. Αν ένας από τους δύο παίκτες είναι ένας Η/Υ τότε το πρόγραμμα που θα εκτελέσει αυτός ο Η/Υ θα εξετάσει όλες τις πιθανές κινήσεις που παράγονται από μία αρχική κατάσταση. Το πλεονέκτημα του Η/Υ είναι ότι είναι σε θέση να δει πλήρως μέχρι 10 κινήσεις μπροστά ενώ οι άνθρωποι σαφώς λιγότερες.[50]

<u>Ο αλγόριθμος Minimax</u>

Ένας αλγόριθμος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναζήτηση σε παίγνια δύο παικτών είναι ο αλγόριθμος Minimax όπου μέσω αυτού ο παίκτης θα αποφασίσει ποια θα είναι η επόμενη κίνησή του έναντι του αντιπάλου. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ουσιαστικά αναζητά την καλύτερη από τις επιτρεπτές λύσεις, παράλληλα όμως εξετάζει αν αυτή η κίνηση θα οδηγήσει και σε καλή λύση στους επόμενους γύρους εξετάζοντας τα πιθανά αποτελέσματα. Με δεδομένο ότι θα πρέπει η αναζήτηση θα γίνει σε ένα δέντρο αυτό καθιστά την αναζήτηση αρκετά πολύπλοκη αν πρέπει να εξετάσει πολλές κινήσεις μπροστά. Γι'αυτό το λόγο επειδή αυτή η αναζήτηση θα ήταν εξαιρετικά πολύπλοκη και ενδεχομένως ανέφικτη το δέντρο ουσιαστικά θα δημιουργηθεί μέχρι ενός σημείου. Μέχρι αυτό το σημείο που θα σταματήσει το δέντρο, θα πρέπει να υπάρχει μία κατάσταση που ακόμα και αν ο αντίπαλος παίξει τέλεια δεν θα μπορεί ο πρώτος παίκτης να βρεθεί σε χειρότερη κατάσταση. Αυτή η κατάσταση αξιολογείται από μία συνάρτηση που θα εφαρμοστεί στα φύλλα του δένδρου. Τα βήματα του αλγορίθμου Minimax θα είναι ως εξής:[51]

---

[50] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, "Τεχνητή Νοημοσύνη", Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

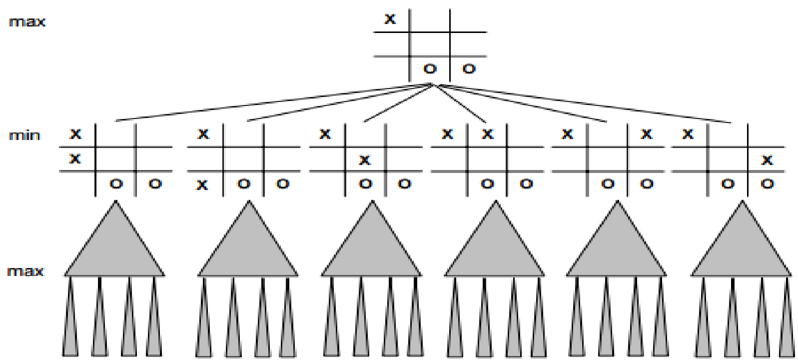
[51] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, "Τεχνητή Νοημοσύνη", Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

0. Ανέπτυξε ένα δένδρο αναζήτησης σε βάθος ανάλογα με τη δυνατότητα που υπάρχει και ονόμασε εναλλάξ τα επίπεδα max και min, ξεκινώντας από τη ρίζα που είναι max (γιατί αυτός που παίζει θέλει να μεγιστοποιήσει το όφελός του.)
1. Εφάρμοσε τη συνάρτηση αξιολόγησης σε όλους τους κόμβους-φύλλα του δένδρου.
2. Έως ότου η ρίζα του δένδρου αποκτήσει τιμή, επανέλαβε:
3. Αρχίζοντας από τα φύλλα του δένδρου και προχωρώντας προς τη ρίζα, μετέφερε τις τιμές προς τους ενδιάμεσους κόμβους του δένδρου ως εξής:
   i. Η τιμή κάθε κόμβου σε επίπεδο max είναι η μέγιστη των τιμών των κόμβων-παιδιών του.
   ii. Η τιμή κάθε κόμβου σε επίπεδο min είναι η ελάχιστη των τιμών των κόμβων-παιδιών του.
4. Καλύτερη κίνηση είναι η κίνηση που οδηγεί στον κόμβο που έδωσε την πιο συμφέρουσα τιμή στη ρίζα.

Ο παραπάνω αλγόριθμος εγγυάται την πιο συμφέρουσα εξέλιξη μετά από κάποιες κινήσεις έστω και αν ο αντίπαλος διαλέγει τις καλύτερες για αυτόν κινήσεις.[52] Για τον παραπάνω αλγόριθμο ισχύουν επίσης τα εξής:[53]

- Κατά σύμβαση ο παίκτης που έχει σειρά να παίξει θα βρίσκεται στη ρίζα και θα είναι ο max
- Τα φύλλα αποτελούν τις τερματικές καταστάσεις χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι είναι και οι τελικές καταστάσεις καθώς το δένδρο έχει αναπτυχθεί μέχρι ενός σημείου.
- Οι τιμές των τερματικών καταστάσεων υπολογίζονται από την συνάρτηση αξιολόγησης και η άλλες προκύπτουν από τη διάδοση αυτών.

Ο παραπάνω αλγόριθμος θα μπορούσε να εφαρμοστεί και για την επίλυση του παιχνιδιού tic-tac-toe. Το παιγνίδι αυτό παίζεται από δύο παίκτες σε έναν πίνακα 3x3 με τους παίκτες να έχουν και από ένα σύμβολο. Ο πρώτος παίκτης έχει το Χ και ο δεύτερος το Ο. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καλυφθούν όλα τα τετράγωνα και σκοπός είναι για τον κάθε παίκτη να έχει 3 δικά του σύμβολα στη σειρά. Η σειρά αυτή μπορεί να είναι είτε οριζόντια, είτε κάθετη, είτε διαγώνια. Η τρίλιζα έχει μικρό χώρο αναζήτησης καθώς οι καταστάσεις είναι ίσες με 9!.



Εικόνα 7: Χώρος Αναζήτησης Τρίλιζας

[52] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, "Τεχνητή Νοημοσύνη", Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

[53] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, "Τεχνητή Νοημοσύνη", Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

Σχετικά με την συνάρτηση αξιολόγησης αυτή θα μπορούσε να είναι η εξής:[54]

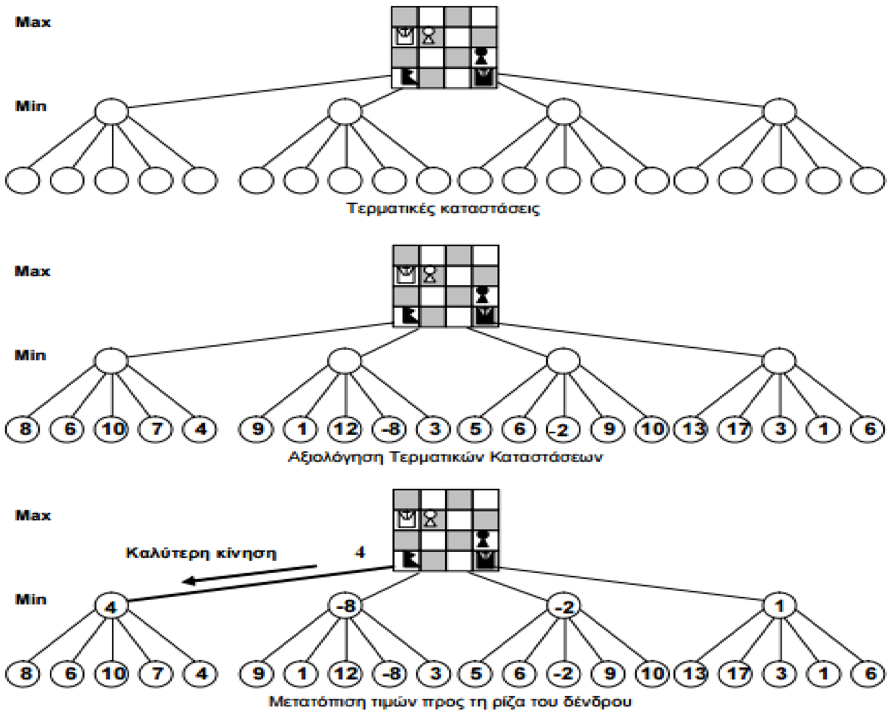
$$3*X_2+X_1-(3*O_2+O_1)$$

- Με X_2 συμβολίζεται ο αριθμός των γραμμών, στηλών η διαγωνίων με δύο X και χωρίς κανένα O.
- Με X_1 συμβολίζεται ο αριθμός των γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με ένα X και χωρίς κανένα O.
- Με O_2 συμβολίζεται ο αριθμός των γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με δύο O και χωρίς κανένα X.
- Με O_1 συμβολίζεται ο αριθμός των γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με ένα O και χωρίς κανένα X.

Ο αλγόριθμος Minimax θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στο σκάκι απλώς εκεί το δένδρο θα πρέπει να είναι όσο γίνεται πιο αναπτυγμένο. Σε μία συνάρτηση αξιολόγησης στο σκάκι θα ίσχυαν τα εξής:[55]

- Θα υπήρχε ξεκάθαρα η υπεροχή κάποιων κομματιών έναντι των άλλων. Για παράδειγμα ο Βασιλιάς θα είχε τιμή ίση με 10, το άλογο τιμή ίση με 5 , το πιόνι τιμή ίση με 1 κλπ.
- Θα υπήρχε υπεροχή κάποιων θέσεων. Για παράδειγμα κάθε κομμάτι που βρίσκεται στα 4 κεντρικά τετράγωνα παίρνει άλλους δύο πόντους.
- Σχετικά με τις απειλές ένας παίκτης θα παίρνει 3 επιπλέον πόντους, εκτός αν απειλεί το βασιλιά του άλλου παίκτη, οπότε θα παίρνει περισσότερους πόντους.

Στο σκάκι λοιπόν ο αλγόριθμος Minimax θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε βάθος 2 ως εξής:



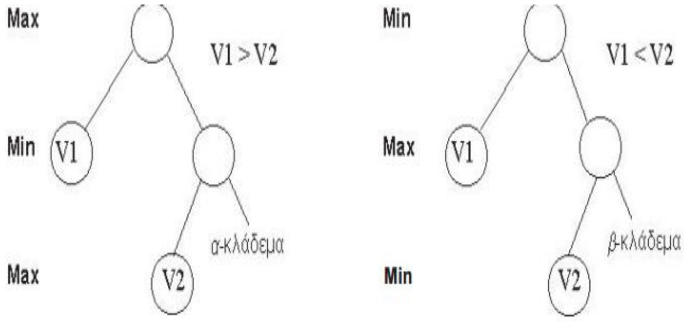
Εικόνα 8: Εφαρμογή του Αλγορίθμου Minimax στο Σκάκι

[54] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

[55] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

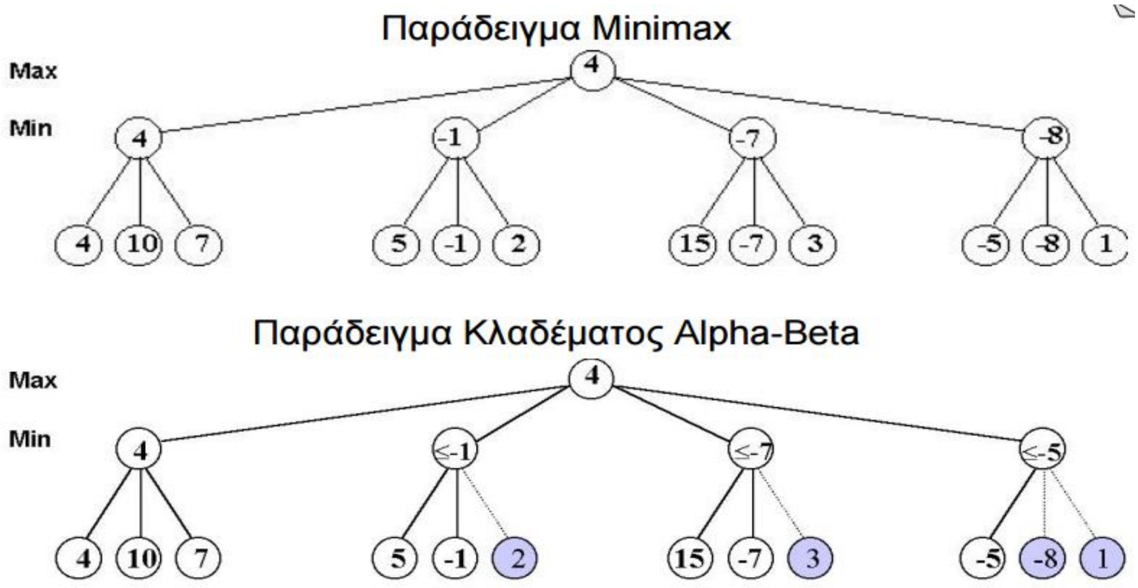
<u>Ο αλγόριθμος Alpha-Beta</u>

Ο αλγόριθμος Alpha-Beta είναι ένας αλγόριθμος αναζήτησης που επιτυγχάνει να μειώσει τον αριθμό που αξιολογούνται από τον αλγόριθμο Minimax στο δέντρο αναζήτησης. Και αυτος ο αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα παραδείγματα που αναπτύχθηκαν στον αλγόριθμο Minimax. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος σταματά να ψάχνει τι θα συμβεί μετά από μία κίνηση αν εντοπίσει έστω και μία περίπτωση όπου αυτή η κίνηση θα οδηγήσει σε χειρότερη κατάσταση από αυτή που ξεκίνησε.Ουσιαστικά το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με τον αλγόριθμο Minimax απλώς είναι μία πιο βελτιωμένη έκδοσή του αποφεύγωντας τη δημιουργία κάποιων υποδένδρων «κλαδεύοντάς» τα, ενώ αυτή η αποφυγή είναι αντικειμενική καθώς δεν θα «κόψει» κάποια πιο συμφέρουσα κατάσταση.[56]



Εικόνα 9: Τρόπος λειτουργίας Αλγορίθμου Alpha-Beta

Για να αποδειχτεί το παραπάνω ακολουθεί ένα σχετικό παράδειγμα. Έστω το παρακάτω δέντρο:[57]



Εικόνα 10: Διαφορά μεταξύ Minimax και Alpha-Beta

---

[56] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

[57] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

Όπως φαίνεται στο παραπάνω δέντρο ουσιαστικά μέσω του αλγορίθμου Alpha-Beta αποκλείονται εκείνα τα φύλλα τα οποία και θα οδηγήσουν σε καλύτερη κατάσταση άρα αυτοί οι κόμβοι θα «κλαδευτούν».

Ο αλγόριθμος Alpha-Beta σε σχέση με τον αλγόριθμο Minimax εξετάζει √N τερματικούς κόμβους , όπου N είναι οι κόμβοι που εξετάζει ο αλγόριθμος Minimax. Επίσης η απόδοση του συγκεκριμένου αλγορίθμου μπορεί να βελτιωθεί με διάφορους τρόπους οι οποίοι είναι οι εξής:[58]

- Ευριστικό κλαάδεμα του δένδρου του παιχνιδιού.
- Η συνάρτηση αξιολόγησης αντί για στατική να είναι δυναμική.
- Οι τιμές των τερματικών καταστάσεων να αποθηκεύονται σε πίνακες (transportation tables).
- Να ορίζονται προκαθορισμένες κινήσεις σε αρχικές και τελικές φάσεις του παιχνιδιού.

[58] Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, “Τεχνητή Νοημοσύνη”, Γκιούρδας Εκδοτική 2006, σελ. 71-82

Βιβλιογραφία

1. Fiona Carmichael, A Guide to Game Theory, Prentice Hall 2005.
2. Ε.Χ. Φούντας - Α.Γ. Βλάχος, Ασκήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού & Θεωρία Παιγνίων 1, Εκδόσεις Βαρβαρήγου.
3. Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου.
4. John Von Neumann – Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press 1953.
5. Ε.Χ. Φούντας – Α.Χ. Παναγιωτόπουλος, Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών, Εκδόσεις Βαρβαρήγου.
6. Philip D. Straffin, Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America 1993.
7. D. Avinash – S. Skeath – D. Reiley. Games of Strategy. 3rd ed., W. W. Norton & Company 2009.
8. L. Friedman, Game Theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures, Operations Research Vol. 6, No. 5 (Sep. - Oct., 1958).
9. L.C. Thomas, Games Theory and Applications, John Wiley Publications.
10. Γ.Μ. Παλαιολόγος, Σύγχρονη Μικροοικονομική θεωρία, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
11. Mung Chiang, Δικτυωμένη Ζωή – 20 Ερωτοαποκρίσεις, NewTech Pub 2014.
12. T. Alfredson – Azeta Cungu, Negotiation Theory and Practice - A Review of the Literature, Food and Agriculture Organization of the United Nations 2008.
13. R. V. Dodge, Schelling's Game Theory – How to Make Decisions, Oxford University Press 2012.
14. R. Axelrod, The Evolution of Cooperation, Basic Books 1984.
15. E. Prisner, Game Theory through Examples, Mathematical Association of America Inc. 2014.
16. Γ. Βαρουφάκης, Θεωρία Παιγνίων, Εκδόσεις Gutenberg 2007.
17. Kennedy, James F., Eberhart, Russell C., Shi, Yuhui., "Swarm intelligence", Morgan Kaufmann Publishers 2001, pp.135 & 142
18. Σπυρίδων Λυκοθανάσης, "Γενετικοί Αλγόριθμοι και Εφαρμογές" , Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο 2001.
19. Ι. Βλαχάβας - Π. Κεφαλάς – Ν. Βασιλειάδης – Φ. Κόκκορας – Η. Σακελλαρίου, "Τεχνητή Νοημοσύνη", Γκιούρδας Εκδοτική 2006.
20. Genetic algorithm for closed-loop equilibrium of high-order linear–quadratic dynamic games, Süheyla Özyıldırım, Faculty of Business Administration, Bilkent University, Bilkent 06533, Ankara, Turkey.
21. J. Goldbeck, Evolving Strategies for the Prisoner's Dilemma, Computer Science Department University of Maryland, College Park MD, USA.