



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ
«ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ», ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ
«ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ MYERSON

ΤΟΥ

ΘΕΟΔΩΡΟΠΟΥΛΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ
ΜΧΡΗ2306

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτριος Βολιώτης,
Αναπληρωτής Καθηγητής στη Μαθηματική Οικονομική

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Δημήτριος Βολιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών Οικονομικών
Νικόλαος Έγγλεζος, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών Χρηματοοικονομικών
Χριστόδουλος Στεφανάδης, Καθηγητής Οικονομικών

Πειραιάς, Ιούνιος 2025

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κο Δημήτριο Βολιώτη για τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη διάρκεια αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υπέροχους γονείς μου για τη συνεχή στήριξή τους εδώ και τόσα χρόνια και για το θάρρος που μου έδιναν στον αγώνα για να χτίσω την καριέρα μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι μια βιβλιογραφική εργασία η οποία μελετά το λήμμα του Myerson τον ακρογωνιαίο λίθο στον σχεδιασμό μηχανισμών, με επίκεντρο τις εφαρμογές του στη θεωρία δημοπρασιών δίνοντας και ένα αριθμητικό παράδειγμα. Το ζήτημα θεωρείται σημαντικό διότι παρέχει τις απαραίτητες συνθήκες ώστε να κατασκευαστεί ένας άμεσος μηχανισμός εφικτός και συμβατός με τα κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής (DSIC). Η μεθοδολογία περιλαμβάνει αρκετές βασικές έννοιες από τη θεωρία παιγνίων και το σχεδιασμό μηχανισμών και ταυτόχρονα εκείνες που αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι για τη διατύπωση, την αυστηρή απόδειξη και την εφαρμογή του λήμματος σε δημοπρασίες. Το πρώτο αξιοσημείο εύρημα του Myerson είναι ότι για κάθε μονοτονικό κανόνα κατανομής υπάρχει ένας και μόνο κανόνας πληρωμής που κάνει το μηχανισμό συμβατό με τα κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής. Το δεύτερο εύρημα εξασφαλίζει λογική, διαφανή και δίκαιη κατανομή πόρων σε δημοπρασίες (π.χ. στη δημοπρασία δεύτερης τιμής) και το λήμμα περιορίζεται σε μονοπαραμετρικά περιβάλλοντα. Η εργασία καταλήγει στο ότι το λήμμα δίνει έναν σαφή τρόπο σχεδιασμού βέλτιστων δημοπρασιών όπου κάθε συμμετέχοντας έχει κίνητρο να είναι ειλικρινής με εφαρμογή στις ψηφιακές δημοπρασίες (π.χ. δημοπρασίες eBay).

Λέξεις-κλειδιά: πράκτορας, τύπος, κυρίαρχη στρατηγική, αποτίμηση, δημοπρασία, συμβατότητα κινήτρων, μηχανισμός, αρχή της αποκάλυψης

Abstract

This master's thesis is an bibliographic work which studies Myerson's lemma, the cornerstone of mechanism design, focusing on its applications in auction theory providing a numerical example as well. The issue is considered important because it provides the necessary conditions to construct a direct mechanism that is feasible and compatible with dominant strategy incentive compatibility (DSIC). The methodology includes several fundamental concepts from game theory and mechanism design, which are also an integral part of the formulation, rigorous proof, and application of the lemma in auctions.

Myerson's first notable finding is that for every monotone allocation rule there exists one and only one payment rule that makes the mechanism compatible with dominant strategy incentives. The second finding ensures a rational, transparent, and fair allocation of resources in auctions (e.g., in second-price auctions), and the lemma is restricted to single-parameter environments. The thesis concludes that the lemma provides a clear way to design optimal auctions where each participant has an incentive to be truthful, with applications to digital auctions (e.g., auctions for online advertising).

Keywords: agent, type, dominant strategy, valuation, auction, incentive compatibility, mechanism, revelation principle

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Επισκόπηση	3
1.2	Υπόβαθρο	4
1.3	Σκοπός της Έρευνας	5
2	Εισαγωγή Στη Θεωρία Παιγνίων	6
2.1	τι είναι η θεωρία παιγνίων	6
2.2	Παίγνια σε κανονική μορφή	7
2.2.1	Παίγνια Κοινής Απόδοσης	7
2.2.2	Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος	8
2.3	Μπεϋζιανά Παίγνια	8
2.4	Στρατηγικές σε παίγνια κανονικής μορφής	13
3	Βελτιστότητα και Ισορροπία	14
3.1	Λίγα Λόγια για τη βέλτιστη στρατηγική	14
3.2	Βελτιστότητα κατά Pareto και Βέλτιστη Αντίδραση	14
3.3	Κυρίαρχη Στρατηγική και Ισορροπία Κυρίαρχης Στρατηγικής	16
3.4	Ισορροπία Nash	16
3.5	Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash	18
4	Σχεδιασμός Μηχανισμών	23
4.1	Μια μικρή εισαγωγή στο σχεδιασμό μηχανισμών με ένα παράδειγμα	23
4.2	Κανόνες Ψηφοφορίας	24
4.3	Περιβάλλον Σχεδιασμού Μηχανισμών	26
4.3.1	Συναρτήσεις Κοινωνικής Επιλογής	27
4.4	Συναρτήσεις Χρησιμότητας	29
4.5	Θεωρία Σχεδιασμού Μηχανισμού	31
4.6	Σχεδιασμός Σχεδόν-Γραμμικών Μηχανισμών	33
5	Το Λήμμα του Myerson	34
5.1	Περιβάλλοντα Μιας Παραμέτρου	34
5.2	Βασικοί Ορισμοί και Υποθέσεις	35
5.3	Εφικτοί Μηχανισμοί Δημοπρασίας	37
5.4	Το Λήμμα του Myerson	41

6	Θεωρία Δημοπρασιών	50
6.1	Το μοντέλο της ανεξάρτητης ιδιωτικής αποτίμησης	50
6.2	Δημοπρασίες Μοναδικού Αντικειμένου	51
6.3	Δημοπρασίες Σφραγισμένων Προσφορών Πρώτης Τιμής	51
6.4	Δημοπρασίες Δεύτερης Τιμής και Κυρίαρχες Στρατηγικές	52
6.5	Ιδανικές Δημοπρασίες	53
7	Συμπεράσματα	55
7.1	Ανακεφαλαίωση των Βασικών Εννοιών του Λήμματος του Myerson	55
7.2	Κριτική Αξιολόγηση των Βασικών Ευρημάτων	55
7.3	Κοινωνικοοικονομικές Προεκτάσεις του Λήμματος	56
7.4	Μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας	56

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Επισκόπηση

Ένα από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα στο πεδίο της θεωρίας παιγνίων είναι το λήμμα του Myerson, το οποίο διατυπώθηκε από τον Roger B. Myerson και έκτοτε αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στη θεωρία σχεδιασμού μηχανισμών.(Myerson, 1981). Στην πιο βασική της μορφή, η θεωρία σχεδιασμού μηχανισμών προσπαθεί να αναλύσει συστήματα που αναπαριστούν τις συνθήκες της αγοράς με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη όχι μόνο για τον πωλητή αλλά και για τον αγοραστή. Καθώς οι αγοραστές και οι πωλητές μέσα σε μια αγορά σπάνια γνωρίζουν τις προτιμήσεις και τις φιλοδοξίες ο ένας του άλλου, οι πόροι μπορεί να κατανεμηθούν λανθασμένα εξαιτίας της ασυμμετρίας των πληροφοριών. Ο Myerson αντιμετώπισε αυτό το πρόβλημα προτείνοντας την αρχή της αποκάλυψης, όπου προσφέρεται στους αγοραστές ένα κίνητρο για να αναφέρουν τήν αλήθεια για το ποσό που θα πλήρωναν για αγαθά ή υπηρεσίες.

Ο αμερικανός οικονομολόγος Roger Bruce Myerson συνέβαλλε σημαντικά στον τομέα της οικονομίας. Στη θεωρία παιγνίων, η οποία μελετά πώς παίρνουν αποφάσεις οι άνθρωποι ή οργανισμοί όταν έχουν διαφορετικά συμφέροντα και στόχους, ο Myerson βελτίωσε την έννοια της ισορροπίας Nash και το πώς προβλέπουμε τις αποφάσεις τους όταν όλοι σκέφτονται και δρούν λογικά.

Επίσης, ανέπτυξε μεθόδους για να αντιληφθούμε πώς η επικοινωνία μεταξύ ανθρώπων που έχουν διαφορετικές πληροφορίες επηρεάζει τις αποφάσεις τους. Μελέτησε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε κανόνες (μηχανισμούς) ώστε οι όλοι άνθρωποι να έχουν κίνητρο να φανερώνουν τις αληθινές τους πληροφορίες και να παίρνουν αποφάσεις που είναι δίκαιες και ωφέλημες.

Η συμβολή του Myerson έχει επηρεάσει βαθιά τόσο τη θεωρητική έρευνα όσο και την πρακτική εφαρμογή σε διάφορους τομείς όπως οι ψηφιακές δημοπρασίες. Η εργασία αυτή εξετάζει το λήμμα του Myerson με στόχο την κατανόηση των βασικών αρχών που διέπουν το σχεδιασμό βέλτιστων μηχανισμών σε περιβάλλοντα με ιδιωτική πληροφόρηση.

1.2 Υπόβαθρο

Η μελέτη του λήμματος του Myerson εντάσσεται σε ένα μεγάλο πλαίσιο θεωρητικών εργαλείων που έχουν αναπτυχθεί στη θεωρία παιγνίων και στο σχεδιασμό μηχανισμών. Η θεωρία παιγνίων αποτελεί το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο για την ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς μεταξύ ορθολογικών παραγόντων με ενδεχομένως αντικρουόμενα συμφέροντα (Nash, 1950). Σύμφωνα με τον Nash (1950), τα παίγνια σε κανονική μορφή περιγράφουν τις στρατηγικές και τις αποδόσεις κάθε παίκτη σε μορφή πίνακα, όπου κάθε παίκτης επιδιώκει τη μεγιστοποίηση της ατομικής του ωφέλειας γνωρίζοντας τη δομή του παιγνίου.

Στην κατηγορία των παιγνίων κανονικής μορφής, διακρίνονται τα παίγνια κοινής απόδοσης και τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος (Nash, 1950). Η θεωρία χρησιμότητας, όπως αναπτύχθηκε από τον von Neumann και Morgenstern (1944), παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο για την έκφραση των προτιμήσεων των παικτών υπό αβεβαιότητα.

Ένα σημαντικό βήμα στην εξέλιξη της θεωρίας παιγνίων ήταν η εισαγωγή των μπεϋζιανών παιγνίων, όπου λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι κάθε παίκτης δεν είναι πλήρως πληροφορημένος για τις προτιμήσεις των υπολοίπων παικτών (Harsanyi, 1967). Σε αυτά τα παίγνια, κάθε παίκτης διαθέτει μια ιδιωτική πληροφορία, η οποία επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο επιλέγει τη στρατηγική του καθώς και τις πεποιθήσεις του για τους άλλους παίκτες (Myerson, 2004). Η ανάλυση των μπεϋζιανών παιγνίων απαιτεί τη διαμόρφωση πεποιθήσεων πρώτης και δεύτερης τάξης τις οποίες θα δούμε στο κεφάλαιο 2 της έρευνας αυτής.

Η έννοια της ισορροπίας Nash και η εμπλοκή της στη μπεϋζιανά παίγνια αποτελούν τις πιο ουσιώδεις για την κατανόηση της στρατηγικής συμπεριφοράς σε περιβάλλοντα αβεβαιότητας και ιδιωτικής πληροφόρησης (Harsanyi, 1967). Επιπλέον, η έννοια της βέλτιστης αντίδρασης και της κυρίαρχης στρατηγικής περιγράφονται στο κεφάλαιο 3 και είναι σημασίες που χρησιμοποιούνται εκτενώς για την κατανόηση του θεωρήματος του Myerson.

Ο σχεδιασμός μηχανισμών αναπτύχθηκε ως το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας παιγνίων. Αυτή η θεωρία εξετάζει το πώς μπορεί ένας σχεδιαστής να θέσει κανόνες ώστε να προκύψει ένα δίκαιο αποτέλεσμα που ικανοποιεί μέγιστα όλους τους πράκτορες (L.Hurwicz, 1973). Οι συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής οι συναρτήσεις χρησιμότητας καθώς και η έννοια της συμβατότητας κινήτρων αποτελούν βασικά εργαλεία για τον ορισμό αυτών των επιθυμητών αποτελεσμάτων (Arrow, 1950).

Ο Myerson συνέβαλε καθοριστικά στον σχεδιασμό μηχανισμών, εισάγοντας το γνωστό λήμμα του Myerson, το οποίο μας παρέχει τις προϋποθέσεις για να κατασκευάσουμε ένα μηχανισμό άμεσης αποκάλυψης εφικτό όπου καθένας από τους συμμετέχοντες έχει πάντα μια στρατηγική που τον ωφελεί μέγιστα.

1.3 Σκοπός της Έρευνας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και ανάλυση του λήμματος του Myerson στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων και του σχεδιασμού μηχανισμών, με ιδιαίτερη έμφαση στις εφαρμογές του στη θεωρία δημοπρασιών (Myerson, 1981). Το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα στο οποίο προσπαθεί να απαντήσει η εργασία αυτή είναι κάτω από ποιές συνθήκες ένας μηχανισμός είναι εφικτός και συμβατός με κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής, και πώς εφαρμόζεται το λήμμα σε περιβάλλοντα δημοπρασιών;

Η εργασία επιδιώκει να καλύψει το θεωρητικό υπόβαθρο που συνδέει τη θεωρία παιγνίων με τον σχεδιασμό μηχανισμών. Αρχικά στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων, τόσο για παίγνια πλήρους όσο και για ατελούς πληροφόρησης. Στο κεφάλαιο 3 αναλύουμε τις έννοιες της κυρίαρχης στρατηγικής της ισορροπίας Nash και της μπεϋζιανής ισορροπίας (Nash, 1950, Harsanyi, 1967-1968). Στο κεφάλαιο 4 αναλύεται το θεωρητικό πλαίσιο του σχεδιασμού μηχανισμών, αναδεικνύοντας τον ρόλο των συναρτήσεων κοινωνικής επιλογής, των συναρτήσεων χρησιμότητας και των οιονεί γραμμικών μηχανισμών στη διαμόρφωση των κοινωνικών και επιθυμητών αποτελεσμάτων. Στο κεφάλαιο 5 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το λήμμα του Myerson παρουσιάζοντας τις κατάλληλες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του στη θεωρία των δημοπρασιών του κεφαλαίου 6 (Myerson, 1981). Στο κεφάλαιο 7 αποτυπώνουμε τα κύρια συμπεράσματα και τις μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή Στη Θεωρία Παιγνίων

2.1 τι είναι η θεωρία παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων ασχολείται με το τι γίνεται όταν αλληλεπιδρούν ιδιοτελείς παράγοντες. τι υποδηλώνει ότι οι παράγοντες είναι ιδιοτελείς ; Δεν ισχύει πάντα οτι ο ένας θέλει να θέλει να βλάψει τον άλλον και οτι το μόνο που τους ενδιαφέρει είναι ο εαυτός τους. Αντίθετα ο όρος "ιδιοτελείς" υποδηλώνει ότι ο κάθε παράγοντας έχει τη δική του αντίληψη για το ποιές καταστάσεις προτιμά στο κόσμο. Αυτές οι προτιμήσεις μπορεί να περιέχουν θετικά γεγονότα που αφορούν άλλους παράγοντες ενεργώντας στη προσπάθειά του να φέρει στην επιφάνεια αυτές τις καταστάσεις τού κόσμου.

Η πιο γνωστή μέθοδος για την περιγραφή των συμφερόντων ενός παράγοντα (παίκτη) είναι η θεωρία χρησιμότητας. Αυτή η θεωρία αποδίδει ένα μέτρο της προτίμησης ενός παίκτη σε ένα σύνολο διαθεσίμων εναλλακτικών εξηγώντας πως μεταβάλλονται οι προτιμήσεις όταν υπάρχει αβεβαιότητα για το ποιά εναλλακτική επιλογή θα πραγματοποιήσει. Ειδικά μια συνάρτηση χρησιμότητας είναι μια απεικόνιση απο τις καταστάσεις του κόσμου σε πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι μετρούν το επίπεδο ευτυχίας του παίκτη σε κάθε κατάσταση. Όταν ο παίκτης είναι αβέβαιος για το ποιά κατάσταση θα αντιμετωπίσει η συνολική του ωφέλεια είναι η μέση τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας (ωφέλειας) λαμβάνοντας υπόψιν τις πιθανότητες των καταστάσεων. Η βέλτιστη (καλύτερη) δράση μπορεί να γίνει πιο δύσκολη όταν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι παίκτες που στοχεύουν να μεγιστοποιήσουν την ωφέλεια τους και οι αποφάσεις τους επηρεάζουν τις χρησιμότητες των άλλων. Αυτή η περίπτωση μελετάται στη μη συνεργατική θεωρία παιγνίων. Με την έννοια "μη συνεργατική" δεν σημαίνει απαραίτητα οτι εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου οι στόχοι των παικτών συγκρούονται μεταξύ τους αλλά μπορεί να υπάρχουν καταστάσεις όπου τα συμφέροντα τους δεν ταιριάζουν πλήρως. Θα παρατηρήσουμε στη συνέχεια οτι και η θεωρία των συνεργατικών παιγνίων δεν ασχολείται αποκλειστικά με καταστάσεις στις οποίες τα συμφέροντα των παικτών ταιριάζουν μεταξύ τους.

2.2 Παίγνια σε κανονική μορφή

Σύμφωνα με το άρθρο με τίτλο «Non-Cooperative Games» (J.Nash,1950), αυτά τα παίγνια είναι μια περιγραφή των στρατηγικών και των αποδόσεων κάθε παίκτη σε μορφή πίνακα. Πρόκειται για ένα περιβάλλον όπου όλοι οι παίκτες έχοντας το δικό τους σύνολο στρατηγικών πραγματοποιούν τις ενέργειες τους ταυτόχρονα χωρίς να παρατηρεί ο ένας την κίνηση του άλλου πριν εκτελέσει τη δική του κίνηση. Η επιλογή των στρατηγικών οδηγεί σε απόδοση ή χρησιμότητα για κάθε εμπλεκόμενο παίκτη. Κάθε παίκτης ενεργεί με στόχο να κάνει μέγιστη την χρησιμότητα του γνωρίζοντας τη δομή του παιγνίου δηλαδή τα σύνολα στρατηγικών και των αποδόσεων των άλλων παικτών. Το παίγνιο κανονικής μορφής μπορεί να οριστεί επίσης.

Ορισμός 2.2.0.1. (Normal Form Game). Ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\mathbf{A}$ (πεπερασμένο n -παίκτες) είναι μια πλειάδα $(N, \mathbf{A}, u)$ όπου

- N είναι το πεπερασμένο σύνολο των n παικτών με δείκτες i
- $\mathbf{A} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, A_i είναι το σύνολο των διαθέσιμων ενεργειών του παίκτη i και κάθε διάνυσμα $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{A}$ λέγεται προφίλ ενέργειας
- $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i : \mathbf{A} \mapsto \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση απόδοσης ή χρησιμότητας

2.2.1 Παίγνια Κοινής Απόδοσης

Μια ορισμένη κατηγορία παιγνίων κανονικής μορφής είναι τα παίγνια κοινής απόδοσης. Είναι παίγνια όπου για κάθε προφίλ ενέργειας όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια απόδοση. Ακολουθεί ο ορισμός

Ορισμός 2.2.1.1. (Common-payoff Game). Ένα παίγνιο κοινής απόδοσης είναι ένα παίγνιο όπου $\forall \mathbf{a} \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ και για κάθε ζεύγος i, j

$$u_i(\mathbf{a}) = u_j(\mathbf{a})$$

Στα παίγνια κοινής απόδοσης οι στόχοι των παικτών δεν συγκρούονται μεταξύ τους αλλά επιλέγουν μια ενέργεια που θα ωφελήσει μέγιστα όλους. Ακολουθεί το παρακάτω παράδειγμα

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε δυο οδηγούς που κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις σε μια χώρα που δεν υπάρχουν κανόνες κυκλοφορίας. Ο καθένας απο τους δύο έχει δύο διαθέσιμες ενέργειες ή να κινηθεί προς αριστερά ή δεξιά. Στη πρώτη περίπτωση που και οι δύο κινηθούν αριστερά θα λάβουν μια υψηλή απόδοση. Όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα θα έχουν απόδοση 1. Την ίδια θα έχουν αν επιλέξουν τη δεξιά πλευρά. Στη δεύτερη περίπτωση όπου επιλέγουν διαφορετικές κινήσεις το αποτέλεσμα και για τους δύο θα είναι μια χαμηλή χρησιμότητα ίση με 0.

Πίνακας 2.1: Πίνακας Παιγνίου Κοινής Απόδοσης, Βιβλίο "Essentials of Game Theory" Kevin Leyton-Brown and Yoav Shoham

	Αριστερά	Δεξιά
Αριστερά	(1, 1)	(0, 0)
Δεξιά	(0, 0)	(1, 1)

2.2.2 Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

Απο την άλλη πλευρά απο τα ομαδικά παίγνια υπάρχουν τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος τα οποία είναι μια ειδική περίπτωση των παιγνίων σταθερού αθροίσματος. Αυτά τα παίγνια είναι κάθε αλληλεπίδραση στην οποία το κέρδος του ενός παίκτη ισοδυναμεί με απώλεια για τον άλλο παίκτη. Όταν αναφερόμαστε σε παίγνια σταθερού αθροίσματος μελετάμε παίγνια δύο παικτών χωρίς να ισχύει πάντα ότι ο κάθε παίκτης έχει δύο διαθέσιμες επιλογές(στρατηγικές).

Ορισμός 2.2.2.1. . (Constant-sum Game). Ένα παίγνιο κανονικής μορφής δύο παικτών είναι σταθερού αθροίσματος εάν υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε προφίλ ενέργειας να ισχύει ότι $u_1(\mathbf{a}) + u_2(\mathbf{a}) = c$.

Είναι παίγνια καθαρού ανταγωνισμού διότι αποκλείεται το αποτέλεσμα να έχουν και οι δύο κέρδος ή απώλεια. Αυτά τα παίγνια είναι 2 παικτών.

Παράδειγμα (Κορώνα Γράμμα).

Ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος είναι αυτό των κορώνα γράμμα. Κάθε ένας απο τους δύο παίκτες έχει μια δεκάρα και πρέπει να τη μετατρέψει κρυφά σε κορώνα ή γράμμα. Έπειτα οι παίκτες εμφανίζουν τις επιλογές τους ταυτόχρονα. Αν τα αποτελέσματα είναι ίδια δηλαδή (Κ,Κ) ή (Γ,Γ) τότε ο παίκτης 1 κερδίζει με απόδοση 1 τοποθετώντας και τις δύο δεκάρες στο πορτοφόλι του και ο παίκτης 2 χάνει με απόδοση -1 . Εάν οι δεκάρες δεν ταιριάζουν τότε κερδίζει ο παίκτης 2 παίρνοντας τις δύο δεκάρες λαμβάνοντας απόδοση 1 και ο παίκτης 1, -1 . Παρακάτω δίνεται ο αντίστοιχος πίνακας των αποδόσεων

Πίνακας 2.2: Παίγνιο Κορώνα Γράμμα, Βιβλίο "Essentials of Game Theory" Kevin Leyton-Brown and Yoav Shoham

	Κορώνα	Γράμμα
Κορώνα	(1, -1)	(-1 , 1)
Γράμμα	(-1 , 1)	(1, -1)

2.3 Μπεϋζιανά Παίγνια

Πέρα από τα παίγνια στρατηγικής μορφής με πλήρη πληροφόρηση, όπου το σύνολο του παιγνίου αποτελεί κοινή γνώση για τους παίκτες θα εστιάσουμε σε παίγνια με ατελή πληροφόρηση, όπου τουλάχιστον ένας παίκτης έχει πρόσβαση σε

πληροφορία σχετικά με το παίγνιο, την οποία οι άλλοι παίκτες μπορεί να μην γνωρίζουν. Τα παιχνίδια ατελούς πληροφόρησης είναι σημαντικά στη θεωρία του σχεδιασμού μηχανισμών. Θα ασχοληθούμε με μια συγκεκριμένη μορφή αυτών των παιγνίων που ονομάζεται μπεϋζιανά παίγνια.

Ένα παιχνίδι με ατελή πληροφόρηση είναι εκείνο στο οποίο, όταν οι παίκτες είναι σε θέση να πραγματοποιήσουν μια κίνηση, τουλάχιστον ένας παίκτης έχει ιδιωτικές πληροφορίες σχετικά με το παιχνίδι δηλαδή πληροφορίες που οι άλλοι παίκτες μπορεί να μην γνωρίζουν. Οι αρχικές ιδιωτικές πληροφορίες που έχει ένας παίκτης, πριν κάνει μια κίνηση στο παίγνιο, ονομάζονται τύπος του παίκτη. Για παράδειγμα, σε μια δημοπρασία σχετικά με ένα μοναδικό αδιαίρετο αντικείμενο που δεν γίνεται να διαχωριστεί χωρίς να χαθεί η αξία του κάθε παίκτης έχει τη δική του εκτίμηση για την αξία του αντικειμένου, και συνήθως αυτός ο παίκτης με την αρχική ιδιωτική πληροφόρηση θα γνωρίζει την εκτιμώμενη αξία του αντικειμένου με βεβαιότητα, ενώ οι άλλοι παίκτες εκτιμούν με βάση πιθανότητες και με λιγότερη σιγουριά την αποτίμηση δηλαδή το πόσο έχει εκτιμήσει το αντικείμενο ο συγκεκριμένος παίκτης.

Σύμφωνα με το άρθρο με τίτλο "Harsanyi's Games with Incomplete Information" (2004) του R. Myerson η ατελής πληροφόρηση σε ένα παίγνιο μας ωθεί να μελετήσουμε μια άπειρη κατάταξη πεποιθήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια παράμετρος στο παίγνιο που δεν είναι γνωστή στον παίκτη i . Τότε, ο παίκτης i θα διαμορφώσει πεποιθήσεις για αυτή τη παράμετρο, οι οποίες, μοντελοποιούνται μέσω μιας κατανομής πιθανοτήτων για τις πιθανές τιμές της παραμέτρου. Αυτή η κατανομή πιθανοτήτων, που λέγεται πρώτης τάξης πεποίθηση του i είναι θεμελιώδης για την εκτίμηση της συμπεριφοράς του και χρειάζεται να ενσωματωθεί στο παίγνιο μας. Αν δεν γνωρίζουν όλοι τις πρώτης τάξης πεποιθήσεις του i τότε οποιοσδήποτε άλλος παίκτης j μπορεί να έχει πεποιθήσεις για τις πρώτης τάξης πεποιθήσεις του i , που μπορούν και αυτές να εκφραστούν με μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στο σύνολο των κατανομών πιθανοτήτων για τις τιμές αρχικής παραμέτρου.

Αυτή η δεύτερης τάξης πεποίθηση είναι ενδιαφέρουσα για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς του j και πρέπει να ενταχθεί στο μοντέλο του παιγνίου. Καθώς το μοντέλο μας περιέχει παραμέτρους που δεν είναι γνωστές σε κάποιους παίκτες, θα βρίσκουμε πάντα όλο και περισσότερες παραμέτρους, δηλαδή υποκειμενικές κατανομές πιθανοτήτων των παικτών που και αυτές χρειάζεται να τοποθετηθούν στο μοντέλο μας. Για να γλιτώσουμε από αυτή τη περίπτωση θα υποθέσουμε ότι όλες οι παράμετροι είναι γνωστές σε όλους τους παίκτες. Αυτή η αρχή μοντελοποίησης σημαίνει ότι εάν κάποιος παίκτης δεν γνωρίζει με ακρίβεια μια πληροφορία που γνωρίζουν οι άλλοι τότε αυτή η πληροφορία εκπροσωπείται όχι από μία παράμετρο αλλά από μια τυχαία μεταβλητή εντός του μοντέλου. Το μοντέλο μπορεί να περιέχει κατανομές πιθανότητας που αναπαριστούν τις πεποιθήσεις των διαφόρων παικτών για τις τιμές που θα μπορούσαν να πάρουν αυτές οι τυχαίες μεταβλητές. Σε καμία περίπτωση το μοντέλο δεν παρέχει τις πραγματικές τιμές των τυχαίων μεταβλητών.

Στη συνέχεια ανέφερε ότι η αβεβαιότητα για το αν μια στρατηγική μπορεί να

επιλεγεί και να εφαρμοστεί αποτελεσματικά από ένα παίκτη μπορεί να εξηγηθεί από την αβεβαιότητα που αντιμετωπίζει ο ίδιος σχετικά με τις αποδόσεις του, ορίζοντας μια πολύ αρνητική απόδοση για τον παίκτη αν επιλέξει αυτή τη στρατηγική η οποία θεωρείται ότι είναι ανέφικτη.

Το ερώτημα ήταν πώς σκεφτόμαστε σωστά σε αυτά παιχνίδια με ατελή πληροφόρηση. Για αυτό το ερώτημα ο Harsanyi όρισε μια μεταβλητή α_{ki} για να ερμηνεύσει την πληροφορία που κατέχει ο παίκτης k η οποία σχετίζεται με τις αποδόσεις του παίκτη i στο παιχνίδι. Στη συνέχεια, ανέλυσε πώς θα πρέπει να απλουστεύσουμε αυτό το συμβολισμό επιτρέποντας στη μεταβλητή α_k να αντικατοπτρίζει ολόκληρο το διάνυσμα $(\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn})$ με α_k να αποτυπώνει όλες εκείνες τις πληροφορίες που γνωρίζει ο παίκτης k που επηρεάζουν τις αποδόσεις οποιουδήποτε από τους n παίκτες. Επιπλέον ο Harsanyi όρισε, για κάθε παίκτη k , μία άλλη μεταβλητή b_k που δηλώνει όλες τις άλλες πληροφορίες που κατέχει ο παίκτης k που μπορούν να επηρεάσουν τις αντιλήψεις του για το τι γνωρίζουν οι άλλοι παίκτες. Αργότερα τοποθέτησε το σύμβολο $c_k = (\alpha_k, b_k)$ για να εξηγήσει όλες τις ιδιωτικές πληροφορίες του παίκτη k στο παιχνίδι και το ονόμασε "διάνυσμα πληροφορίας ή "τύπο" του παίκτη.

Αυτός ο συμβολισμός δεν χρησιμοποιείται διότι ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης θα πρέπει να αρχίζει με μια περιγραφή των δυνατών τύπων για κάθε παίκτη. Αυτό γίνεται πιο απλό με την ιδέα ότι ο τύπος κάθε παίκτη θα πρέπει να ορίζεται ώστε να περιγράφει συνοπτικά όλα τις ιδιωτικές πληροφορίες στην αρχή του παιχνιδιού που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τις πεποιθήσεις του όσον αφορά τις αποδόσεις στο παίγνιο και σχετικά με τους τύπους όλων των άλλων παικτών.

Προχωράμε στον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 2.3.0.1. (Strategic Form Game with Incomplete Information). Ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής με ατελή πληροφόρηση ορίζεται ως μια πλειάδα $\Gamma = (\mathcal{N}, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i))$ όπου

- $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ είναι το σύνολο των παικτών.
- Θ_i : το σύνολο των πιθανών τύπων του παίκτη i όπου $i = 1, 2, \dots, n$.
- S_i : το σύνολο των καθαρών στρατηγικών ή ενεργειών του παίκτη i .
- p_i : είναι η συνάρτηση πεποίθησης και συγκεκριμένα μια απεικόνιση από το Θ_i στο $P(\Theta_{-i})$, το σύνολο των κατανομών πιθανότητας πάνω στο σύνολο που περιέχει τα προφίλ των τύπων των άλλων παικτών εκτός του παίκτη i το λεγόμενο Θ_{-i} . Για οποιοδήποτε δυνατό τύπο $\theta_i \in \Theta_i$ το p_i προσδιορίζει μια κατανομή πιθανότητας $p_i(\cdot | \theta_i)$ πάνω στο σύνολο Θ_{-i} αντιπροσωπεύοντας έτσι τις πεποιθήσεις του παίκτη i για τους τύπους των άλλων παικτών αν ο δικός του τύπος ήταν θ_i .
- $u_i : \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_n \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση απόδοσης η οποία παρέχει σε κάθε προφίλ τύπων και σε κάθε προφίλ ενεργειών μια απόδοση που θα λάβει ο παίκτης i .

Όταν μελετάμε ένα τέτοιο παίγνιο λαμβάνουμε υπόψιν ότι

1. Κάθε παίκτης i γνωρίζει πλήρως το πώς είναι διαμορφωμένο το παίγνιο κάτι που αποτυπώνεται παραπάνω.
2. Κάθε παίκτης i γνωρίζει τον δικό του τύπο θ_i και του αποκαλύπτεται μέσω κάποιων πηγών πληροφοριών των λεγόμενων σημάτων και κάθε στοιχείο που ανήκει στο σύνολο τύπων του είναι μια σύντομη περιγραφή των πληροφοριών που έλαβε από τα σήματα.
3. Οι παραπάνω υποθέσεις είναι γνωστές σε όλους τους παίκτες.
4. Ο ακριβής τύπος ενός παίκτη δεν είναι γνωστός με σιγουριά στους άλλους παίκτες. Οι άλλοι παίκτες διαμορφώνουν μια εκτίμηση με βάση κάποιες πιθανότητες για το ποιος είναι αυτός ο τύπος. Οι συναρτήσεις πεποίθησης μαρτυρούν αυτές τις πιθανότητες και αυτή η κατανομή πιθανότητας είναι γνωστή σε όλους τους παίκτες.

Για να ερμηνεύσουμε παίγνια με ατελή πληροφόρηση θα ορίσουμε την έννοια της συνέπειας των πεποιθήσεων που αποτελεί λογική υπόθεση σε αυτά τα παίγνια.

Ορισμός 2.3.0.2. (Consistency of Beliefs). Λέμε ότι οι πεποιθήσεις (p_i) είναι συνεπείς αν υπάρχει μια αρχική κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των προφίλ τύπων των παικτών Θ την οποία γνωρίζουν όλοι οι παίκτες γνωστή και ως κοινή *prior* κατανομή πιθανότητας τέτοια ώστε οι πεποιθήσεις του κάθε παίκτη δεδομένου του τύπου του να είναι οι κατανομές δεσμευμένης πιθανότητας που μπορούν να προσδιοριστούν από την *prior* κατανομή.

Εάν το παίγνιο είναι πεπερασμένο οι πεποιθήσεις είναι συνεπείς αν υπάρχει κάποια κατανομή πιθανότητας $\mathcal{P} \in \Pi(\Theta)$ τέτοια ώστε

$$p_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) = \frac{\mathcal{P}(\theta_i, \theta_{-i})}{\sum_{t_{-i} \in \Theta_{-i}} \mathcal{P}(\theta_i, t_{-i})} \forall \theta_i \in \Theta_i; \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}; \forall i \in \mathcal{N} \quad (2.1)$$

Σε ένα μοντέλο που οι πεποιθήσεις είναι συνεπείς οι διαφορές στις πεποιθήσεις των παικτών μπορεί να προέρχονται από το γεγονός ότι οι παίκτες έχουν πρόσβαση σε διαφορετικές πληροφορίες. Εάν οι πεποιθήσεις δεν είναι συνεπείς τότε οι διαφορές των πεποιθήσεων δεν προκύπτουν από διαφορές στη πληροφόρηση των παικτών αλλά μόνο από διαφορές στη γνώμη που σχηματίζουν. Όταν οι πεποιθήσεις είναι πράγματι συνεπείς μιλάμε για τα μπεϋζιανά παίγνια.

Στα μπεϋζιανά παίγνια η στρατηγική για ένα παίκτη i είναι μια απεικόνιση από το Θ_i στο S_i . Έτσι η στρατηγική s_i ορίζει μία συγκεκριμένη ενέργεια για κάθε πιθανό τύπο του παίκτη i η οποία γράφεται ως $s_i(\theta_i)$ δεδομένου ενός τύπου θ_i εκφράζοντας έτσι τη συγκεκριμένη ενέργεια που θα επιλέξει ο παίκτης αν ο τύπος του ήταν θ_i . Όταν μας βολεύει χρησιμοποιούμε $\alpha_i \in S_i$ για να ερμηνεύσουμε μια τυπική ενέργεια του παίκτη i . Συνεχίζουμε δίνοντας το παρακάτω παράδειγμα

Παράδειγμα (Ένα παίγνιο Διαπραγμάτευσης Δύο Παικτών). Έχουμε δύο παίκτες, ο παίκτης 1 (πωλητής) και ο παίκτης 2 (αγοραστής). Ο παίκτης 1 θέλει να πουλήσει ένα αδιαίρετο αντικείμενο και ο παίκτης 2 ενδιαφέρεται να αγοράσει το αντικείμενο αυτό. Κάθε ένας από τους δύο γνωρίζει την αξία του αντικειμένου για τον εαυτό του και έχει την πεποίθηση ότι η αξία του αντικειμένου για τον άλλο παίκτη μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός από το 1 μέχρι το 100 με πιθανότητα $\frac{1}{100}$. Ο τύπος του πωλητή ερμηνεύει την μικρότερη τιμή στην οποία είναι πρόθυμος να πουλήσει το αντικείμενο, και ο τύπος του αγοραστή ερμηνεύει τη μεγαλύτερη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να αγοράσει το αντικείμενο. Κάθε παίκτης θα αποκαλύψει ταυτόχρονα μια προσφορά μεταξύ 0 και 100. Αν η προσφορά του αγοραστή υπερβεί τη προσφορά του πωλητή, θα ανταλλάξουν το αντικείμενο σε αξία ίση με τη μέση τιμή των προσφορών τους. Ομοίως και στη περίπτωση που η προσφορά του αγοραστή ισούται με αυτήν του πωλητή. Διαφορετικά, δεν θα γίνει καμία αγοραπωλησία.

Σέ αυτό το παίγνιο έχουμε ότι:

$$\mathcal{N} = \{1, 2\}$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \{1, 2, \dots, 100\}$$

$$S_1 = S_2 = \{0, 1, \dots, 100\}$$

$$p_1(\theta_2|\theta_1) = p_2(\theta_1|\theta_2) = \frac{1}{100} \forall \theta_1 \in \Theta_1; \forall \theta_2 \in \Theta_2$$

$$u_1(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{s_1+s_2}{2} - \theta_1 & \text{αν } s_2 \geq s_1 \\ 0 & \text{αν } s_2 < s_1 \end{cases}$$

$$u_2(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2) = \begin{cases} \theta_2 - \frac{s_1+s_2}{2} & \text{αν } s_2 \geq s_1 \\ 0 & \text{αν } s_2 < s_1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε παρακάτω ότι οι πεπιοθήσεις p_1 και p_2 είναι συνεπείς. Αν η prior κατανομή είναι:

$$\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{10000} \forall \theta_1 \in \Theta_1 \forall \theta_2 \in \Theta_2$$

Τότε η (1.1) ικανοποιείται αφού

$$\frac{\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)}{\sum_{\theta_2=1}^{100} \mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)} = \frac{\frac{1}{10000}}{\sum_{\theta_2=1}^{100} \frac{1}{10000}} = \frac{\frac{1}{10000}}{\frac{100}{10000}} = \frac{1}{100} = p_1(\theta_2|\theta_1)$$

και για τον παίκτη 2

$$\frac{\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)}{\sum_{\theta_1=1}^{100} \mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)} = \frac{\frac{1}{10000}}{\sum_{\theta_1=1}^{100} \frac{1}{10000}} = \frac{\frac{1}{10000}}{\frac{100}{10000}} = \frac{1}{100} = p_2(\theta_1|\theta_2).$$

2.4 Στρατηγικές σε παίγνια κανονικής μορφής

Ένα είδος στρατηγικής όπου θα βοηθήσει στη κατανόηση των παιγνίων κανονικής μορφής και των πινάκων αποδόσεων είναι η καθαρή στρατηγική. Είναι μια στρατηγική όπου ο παίκτης πραγματοποιεί μια μόνο ενέργεια και επιλέγει πάντα αυτή σε οποιαδήποτε στάδιο του παιγνίου και δεν αλλάζει την επιλογή του.

Η επιλογή της καθαρής στρατηγικής απο τον παίκτη λέγεται προφίλ καθαρής στρατηγικής. Ωστόσο υπάρχει και ένα άλλο είδος στρατηγικής η μεικτή που παρέχει μια πιθανότητα σε κάθε μια απο τις διαθέσιμες ενέργειες του παίκτη. Συνεχίζουμε δίνοντας τους παρακάτω ορισμούς

Ορισμός 2.4.0.1. (Mixed Strategy). Εστω (N, A, u) ένα παίγνιο κανονικής μορφής και για κάθε σύνολο X έστω $\Pi(X)$ το σύνολο των κατανομών πιθανότητας πάνω στο X . Τότε το σύνολο των μεικτών στρατηγικών για τον παίκτη i είναι $S_i = \Pi(A_i)$

Ορισμός 2.4.0.2. (Mixed-strategy Profile). Το σύνολο των προφίλ μεικτής στρατηγικής είναι το καρτεσιανό γινόμενο των επιμέρους συνόλων μεικτών στρατηγικών των παικτών, $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$

Για να ορίσουμε την υποστήριξη του συνόλου S_i θα χρειαστούμε την έκφραση $s_i(a_i)$ όπου είναι η πιθανότητα μια ενέργεια a_i να παιχτεί υπό μεικτή στρατηγική s_i . Το σύνολο εκείνων των ενεργειών στις οποίες παρέχεται θετική πιθανότητα απο τη στρατηγική s_i λέγεται υποστήριξη της s_i .

Ορισμός 2.4.0.3. (Support). Η υποστήριξη μιας μεικτής στρατηγικής s_i για έναν παίκτη i είναι το σύνολο των καθαρών στρατηγικών $\{a_i \mid s_i(a_i) > 0\}$.

Απο τη άλλη μεριά έχουμε τις πλήρως μεικτές στρατηγικές. Μία στρατηγική λέγεται πλήρως μεικτή αν έχει πλήρη υποστήριξη, δηλαδή αν αποδίδει σε κάθε ενέργεια μη μηδενική πιθανότητα.

Καθώς δεν έχουμε ορίσει τις αποδόσεις των παικτών δεδομένου ενός συγκεκριμένου προφίλ στρατηγικής θα μεταβούμε στη θεωρία της αναμενόμενης χρησιμότητας ώστε να ορίσουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα με το συμβολισμό u_i μιας μεικτής στρατηγικής. Σε πρώτη φάση υπολογίζουμε τη πιθανότητα του κάθε αποτελέσματος a ως το γινόμενο των πιθανοτήτων να παιχτούν οι ενέργειες a_j υπο μεικτές στρατηγικές s_j και σε δεύτερη φάση παίρνουμε το μέσο όρο των αποδόσεων των αποτελεσμάτων για τον παίκτη i σταθμισμένων με τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων. Επισήμως

Ορισμός 2.4.0.4. (Expected utility of A Mixed Strategy). Δεδομένου ενός παιγνίου κανονικής μορφής (N, A, u) η αναμενόμενη χρησιμότητα για τον παίκτη i του προφίλ μεικτής στρατηγικής $(s_1, s_2, \dots, s_n) = s$ είναι

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j) \quad (2.2)$$

Κεφάλαιο 3

Βελτιστότητα και Ισορροπία

3.1 Λίγα Λόγια για τη βέλτιστη στρατηγική

Στη θεωρία απόφασης ενός πράκτορα η έννοια κλειδί είναι αυτή της βέλτιστης στρατηγικής εκείνης της στρατηγικής που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για ένα περιβάλλον στο οποίο δρά. Η περίπτωση του ενός πράκτορα είναι μια περίπτωση αβεβαιότητας καθώς το περιβάλλον μπορεί να είναι σε μεγάλο βαθμό μη προβλέψιμο και ο πράκτορας λαμβάνει αποφάσεις με βάση περιορισμένες πληροφορίες χωρίς να γνωρίζει με ακρίβεια τη κατάσταση του περιβάλλοντος κάθε φορά. Η κατάσταση είναι πιο σύνθετη στα περιβάλλοντα πολλών πρακτόρων όπου όλοι επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Σε αυτή τη περίπτωση η βέλτιστη στρατηγική είναι ανάλογη των επιλογών που πραγματοποιούν οι άλλοι παίκτες(πράκτορες). Το πρόβλημα επιλύεται με την εύρεση συγκεκριμένων υποσυνόλων αποτελεσμάτων που ονομάζονται λύσεις. Παρακάτω θα δώσουμε τη βέλτιστη λύση κατα Pareto και την ισορροπία Nash.

3.2 Βελτιστότητα κατα Pareto και Βέλτιστη Αντίδραση

Πρώτα ας μελετήσουμε σε τι βαθμό η βελτιστότητα έχει σημασία στα παίγνια. Το ερώτημα που τίθεται είναι "μπορούμε να πούμε ότι ορισμένα αποτελέσματα του παιγνίου ότι είναι καλύτερα απο άλλα;" Μια ιδέα θα ήταν να προτιμήσουμε εκείνα τα αποτελέσματα που το άθροισμα των χρησιμοτήτων είναι υψηλότερο. Εάν αλλάζαμε τη συνάρτηση χρησιμότητας του ενός χρησιμοποιώντας ένα θετικό μετασχηματισμό (πολλαπλασιάζοντας τις αποδόσεις του ενός παίκτη με έναν θετικό αριθμό) αυτό πιθανόν θα άλλαζε το αποτέλεσμα που παρέχει το μέγιστο άθροισμα ωφελειών. Χρειάζεται να βρούμε ένα τρόπο να εξηγήσουμε πως κάποια αποτελέσματα είναι καλύτερα απο άλλα. Θεωρήστε ότι η χρησιμότητα των πρακτόρων είναι μια πληρωμή σε ένα νόμισμα που θα λάβετε όπου οι πληρωμές γίνονται σε διαφορετικό νόμισμα χωρίς να υπάρχει πληροφορία για τις συναλλαγματικές ισοτιμίες. Ποια απο τα αποτελέσματα προτιμώνται περισσότερο;

Ενώ δεν είναι πιθανόν να βρεθεί το καλύτερο αποτέλεσμα υπάρχουν καταστάσεις όπου μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι το ένα αποτέλεσμα προτιμάται περισσότερο από ένα άλλο. Εάν έχουμε για παράδειγμα δύο αποτελέσματα όπου το πρώτο αποτέλεσμα είναι 10 μονάδες από το Α νόμισμα και 3 μονάδες από το Β και το δεύτερο αποτέλεσμα αποτελείται από 9 μονάδες του Α και 3 του Β. Τότε είναι καλύτερο το πρώτο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από το ποιά είναι η συναλλαγματική ισοτιμία. Θα αποτυπώσουμε αυτήν την ουσία με τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 3.2.0.1. (Pareto Domination). Ένα προφίλ στρατηγικής s κυριαρχεί κατα παρέτο του s' εάν για όλα τα $i \in N$ $u_i(s) \geq u_i(s')$ και υπάρχει κάποιο $j \in N$ τέτοιο ώστε $u_j(s) > u_j(s')$.

Με την κυριαρχία Pareto δεν μπορούμε να κατατάξουμε όλα τα προφίλ στρατηγικής από το χειρότερο στο καλύτερο και έτσι δεν γίνεται να βρούμε ένα μόνο καλύτερο αποτέλεσμα για όλους τους παίκτες. Υπάρχουν αποτελέσματα τα οποία δεν συγκρίνονται μεταξύ τους με την έννοια της κυριαρχίας ότι το ένα είναι καλύτερο ή χειρότερο από το άλλο. Με αφορμή αυτό παραθέτουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 3.2.0.2. (Pareto Optimality). Ένα προφίλ στρατηγικής s λέγεται βέλτιστο κατα Pareto ή αυστηρά αποτελεσματικό κατα Pareto εάν δεν υπάρχει άλλο προφίλ s' που να κυριαρχεί κατα Pareto του s .

Όσον αφορά για τα βέλτιστα κατα Pareto προφίλ στρατηγικής κάθε παίγνιο περιέχει το λιγότερο ένα δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια κατάσταση που οι παίκτες μπορούν να πετύχουν τις καλύτερες δυνατές αποδόσεις χρησιμοποιώντας καθαρές στρατηγικές. Ένα παράδειγμα παιγνίων όπου όλα τα προφίλ στρατηγικής είναι βέλτιστα κατα Pareto είναι τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Στα παίγνια κοινής απόδοσης όλα τα βέλτιστα προφίλ στρατηγικής έχουν την ίδια απόδοση.

Η πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι εάν ένας παίκτης γνώριζε τις κινήσεις που θα πραγματοποιούσαν οι άλλοι το πρόβλημα στρατηγικής θα ήταν πιο απλό, καθώς θα εστίαζε στην επιλογή εκείνης της κίνησης που μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του. Ορίζουμε $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ να είναι το προφίλ στρατηγικής που δεν περιέχει τη στρατηγική s_i του i πράκτορα. Ορίζουμε $s = (s_i, s_{-i})$. Εάν οι άλλοι παίκτες παραδέχονταν να παίξουν s_{-i} τότε ο πράκτορας που επιδιώκει τη μέγιστη ωφέλεια θα αντιμετωπίσει το ζήτημα της εύρεσης της βέλτιστης αντίδρασης του. Προχωράμε στη παρακάτω έννοια

Ορισμός 3.2.0.3. (Best Response). Η βέλτιστη αντίδραση του παίκτη i στο γνωστό προφίλ στρατηγικής s_{-i} είναι μια μεικτή στρατηγική $s_i^* \in S_i$ τέτοια ώστε $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ για κάθε στρατηγική $s_i \in S_i$.

Η βέλτιστη αντίδραση δεν είναι πάντα μοναδική. Πέρα από την ειδική περίπτωση στην οποία έχουμε μια μοναδική βέλτιστη αντίδραση που είναι καθαρή στρατηγική οι βέλτιστες αντιδράσεις είναι άπειρες στο πλήθος. Αν η υποστήριξη της βέλτιστης αντίδρασης s^* περιέχει πολλές καλές ενέργειες ο παίκτης πρέπει

να μην έχει ιδιαίτερη προτίμηση για μια συγκεκριμένη επιθυμώντας την περισσότερο από τις άλλες. Επομένως όλες οι ενέργειες είναι βέλτιστες αντιδράσεις και οποιοσδήποτε συνδυασμός τους είναι επίσης βέλτιστη αντίδραση. Έτσι οι βέλτιστες αντιδράσεις είναι άπειρες στο πλήθος. Γενικότερα οι στρατηγικές που θα επιλέξουν οι άλλοι παίκτες δεν είναι γνωστές και δεν μπορούμε να βρούμε με την έννοια της βέλτιστης αντίδρασης μια λύση για το παίγνιο.

3.3 Κυρίαρχη Στρατηγική και Ισορροπία Κυρίαρχης Στρατηγικής

Πρώτα θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας την έννοια της κυριαρχίας.

Λέμε ότι μία στρατηγική s_i κυριαρχεί αυστηρά της στρατηγικής s'_i αν ο παίκτης i πάντα τα πηγαίνει καλύτερα με την s_i από την s'_i , δηλαδή,

$$\forall s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n,$$

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Η στρατηγική s_i κυριαρχεί ασθενώς της s'_i αν ο παίκτης i ποτέ δεν τα πηγαίνει χειρότερα με την s_i από ότι με την s'_i , και υπάρχει τουλάχιστον μια περίπτωση όπου ο παίκτης i τα πηγαίνει καλύτερα με την s_i από την s'_i :

$$\forall s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n, \quad u_i(\dots, s_i, \dots) \geq u_i(\dots, s'_i, \dots)$$

και

$$\exists s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n, \quad u_i(\dots, s_i, \dots) > u_i(\dots, s'_i, \dots)$$

Η στρατηγική s_i είναι μια αυστηρά (ασθενώς) κυρίαρχη στρατηγική αν κυριαρχεί αυστηρά (ασθενώς) κάθε $s'_i \in S_i$.

Σε μια ισορροπία κυρίαρχης στρατηγικής ένας παίκτης i θα τα πάει καλύτερα χρησιμοποιώντας την s_i παρά μια διαφορετική στρατηγική s'_i , ανεξάρτητα από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι άλλοι παίκτες. Μεταβαίνουμε στον επίσημο ορισμό

Ορισμός 3.3.0.1. (Dominant Strategy Equilibrium). Μια ισορροπία κυρίαρχης στρατηγικής είναι ένα προφίλ $(s_1, \dots, s_n)$ τέτοιο ώστε η s_i να είναι κυρίαρχη για κάθε παίκτη i .

3.4 Ισορροπία Nash

Χρησιμοποιώντας τη βέλτιστη αντίδραση θα καθορίσουμε τη πιο κεντρική έννοια την ισορροπία Nash.

Ορισμός 3.4.0.1. (Nash Equilibrium). Ένα προφίλ στρατηγικής $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ είναι μια ισορροπία Nash εάν για όλους τους πράκτορες i , το s_i είναι

μια βέλτιστη αντίδραση στο s_{-i} .

Μια ισορροπία Nash μπορεί να θεωρηθεί ως ένα προφίλ στρατηγικών όπου κανένας παίκτης δεν θα επιθυμούσε να τροποποιήσει τη στρατηγική του αν γνώριζε τις στρατηγικές που υιοθετούν οι υπόλοιποι παίκτες. Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις ισορροπίες Nash σε δύο τύπους, αυστηρές και ασθενείς, ανάλογα με το αν η στρατηγική κάθε παίκτη είναι μοναδική βέλτιστη αντίδραση στις στρατηγικές των άλλων παικτών ή όχι.

Ορισμός 3.4.0.2. (Strict Nash). Ένα προφίλ στρατηγικής $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ είναι μια αυστηρή ισορροπία Nash εάν για όλους τους πράκτορες i και για όλες τις στρατηγικές $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

Η Αυστηρή ισορροπία Nash αναφέρεται σε μια κατάσταση σε ένα παιχνίδι όπου κάθε παίκτης έχει μια μοναδική βέλτιστη αντίδραση στο προφίλ στρατηγικής s_{-i} των άλλων παικτών. Αυτό σημαίνει ότι αν οποιοσδήποτε παίκτης αποφασίσει να αλλάξει τη στρατηγική του, θα λάβει μικρότερη απόδοση σε σχέση με την απόδοση που είχε με τη τρέχουσα στρατηγική s_i με αποτέλεσμα να προκύψει απώλεια για αυτόν.

Ο άλλος τύπος είναι η ασθενής ισορροπία Nash. Σε αντίθεση με την αυστηρή ισορροπία Nash, όπου κάθε παίκτης έχει μια μοναδική βέλτιστη αντίδραση στην ασθενή ισορροπία μπορεί να υπάρχουν πολλές στρατηγικές διαφορετικές από την προηγούμενη που προσφέρουν την ίδια απόδοση. Στη περίπτωση όπου κάποιος παίκτης αποφασίσει να αλλάξει τη στρατηγική του, μπορεί να μην υποστεί απώλεια, καθώς η νέα στρατηγική μπορεί να προσφέρει την ίδια απόδοση με την προηγούμενη. Ακολουθεί ο ορισμός

Ορισμός 3.4.0.3. (Weak Nash). Είναι ένα προφίλ στρατηγικής $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ εάν για όλους τους πράκτορες i και $\forall s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ και το s δεν είναι μια αυστηρή ισορροπία Nash.

Στις ασθενείς ισορροπίες Nash αφού υπάρχουν εναλλακτικές στρατηγικές για τον παίκτη που μπορεί να παρέχουν είτε απόδοση ίση με αυτήν της στρατηγικής ισορροπίας s_i είτε μικρότερη από αυτήν τότε τουλάχιστον ένας παίκτης έχει μια βέλτιστη αντίδραση στο προφίλ στρατηγικής των άλλων παικτών που δεν είναι η στρατηγική ισορροπίας του αλλά είναι μία εναλλακτική στρατηγική. Για αυτόν τον λόγο οι ασθενείς ισορροπίες είναι λιγότερο σταθερές από τις αυστηρές ισορροπίες Nash.

Στήν ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών όπου οι παίκτες επιλέγουν τις στρατηγικές με βάση κάποιες πιθανότητες κανένας παίκτης δεν μπορεί να πετύχει αυστηρά μεγαλύτερη απόδοση με την επιλογή μιας νέας διαφορετικής στρατηγικής ενώ οι υπόλοιποι παίκτες διατηρούν τις στρατηγικές τους σταθερές. Σε μια ισορροπία μικτής στρατηγικής, οι παίκτες μπορεί να επιλέγουν ανάμεσα σε πολλές διάφορες στρατηγικές που προσφέρουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη στρατηγική που να κυριαρχεί στις άλλες, γεγονός που καθιστά τις ισορροπίες αυτές ασθενείς.

3.5 Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash

Πρωτού μιλήσουμε για τη μπεϋζιανή ισορροπία Nash θα ανατρέξουμε στην αναπαράσταση του πράκτορα τύπου καί στο παίγνιο Selten. Πρόκειται περί μίας αναπαράστασης των μπεϋζιανών παιχνιδιών που παρέχει τη δυνατότητα σε ένα μπεϋζιανό παίγνιο να μετασχηματιστεί σε παίγνιο στρατηγικής μορφής (πλήρη πληροφόρηση). Έστω το μπεϋζιανό παίγνιο

$$\Gamma = \langle \mathcal{N}, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) \rangle$$

το παίγνιο Selten είναι ένα ισοδύναμο παίγνιο πλήρους πληροφόρησης

$$\Gamma^s = \langle \mathcal{N}^s, (S_{\theta_i})_{\substack{\theta_i \in \Theta_i \\ i \in N}}, (U_{\theta_i})_{\substack{\theta_i \in \Theta_i \\ i \in N}} \rangle$$

Η ιδέα που εμπλέκεται για το σχηματισμό ενός παιγνίου Selten είναι να έχουμε πράκτορες τύπου. Κάθε ένας απο τους παίκτες στο αρχικό μπεϋζιανό παιχνίδι υποκαθίσταται από έναν αριθμό πρακτόρων τύπου. Συγκεκριμένα, ένας παίκτης αντικαθίσταται από έναν αριθμό πρακτόρων τύπου ίδιον με τον αριθμό των δυνατών τύπων αυτού του παίκτη.

Θεωρούμε ότι τα σύνολα των τύπων των παικτών δεν τέμνονται δηλαδή δεν μπορούμε να βρούμε ούτε ένα σύνολο τύπων που να περιέχει τύπους που ανήκουν και σε άλλο σύνολο τύπων κάποιου άλλου παίκτη. Το σύνολο των παικτών στο παιχνίδι Selten είναι

$$\mathcal{N}^s = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} \Theta_i$$

Κάθε πράκτορας τύπου ενός συγκεκριμένου παίκτη i έχει ως σύνολο στρατηγικών το σύνολο στρατηγικών του παίκτη i δηλαδή για κάθε $\theta_i \in \Theta_i$,

$$S_{\theta_i} = S_i.$$

Η απόδοση U_{θ_i} για οποιοδήποτε $\theta_i \in \Theta_i$ είναι η δεσμευμένη ωφέλεια που αναμένει να λάβει ο παίκτης i στο αρχικό μπεϋζιανό παίγνιο αν ο πραγματικός του τύπος είναι θ_i . Το πεδίο ορισμού της U_{θ_i} περιλαμβάνει όλα τα προφίλ στρατηγικών όλων των πρακτόρων τύπου των παικτών. Θα αναλύσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει το U_{θ_i} στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα (Το Παίγνιο Selten για ένα Μπεϋζιανό παίγνιο τιμολόγησης).

Έστω δύο εταιρείες η εταιρεία 1 και 2. Η πρώτη παράγει προϊόν x_1 και η δεύτερη παράγει ή προϊόν x_2 ή προϊόν y_2 . Το προϊόν x_2 μοιάζει με το προϊόν x_1 και το προϊόν y_2 είναι ένα διαφορετικό προϊόν. Το προϊόν της εταιρείας 2 το γνωρίζει η εταιρεία 2 και μόνο αυτή και όχι η εταιρεία 1. Σε αυτό το παίγνιο το σύνολο των παικτών είναι $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, $\Theta_1 = \{x_1\}$ και $\Theta_2 = \{x_2, y_2\}$. Οποιαδήποτε απο τις δύο εταιρείες καλείται να τιμολογήσει το προϊόν που παράγει. Η επιλογή της τιμής είναι η στρατηγική που ακολουθεί η κάθε μία απο τις δύο εταιρείες. Η εταιρεία 1 έχει δύο διαθέσιμες επιλογές ή να αποδώσει μια χαμηλή τιμή a_1 ή μια υψηλή τιμή b_1 στο προϊόν της και η εταιρεία 2 μπορεί είτε να δώσει μια χαμηλή τιμή a_2

είτε μια υψηλή τιμή b_2 . Έτσι το σύνολο των στρατηγικών της εταιρείας 1 είναι $S_1 = \{a_1, b_1\}$ και της εταιρείας 2 είναι $S_2 = \{a_2, b_2\}$. Οι τύποι των δύο εταιρειών είναι τα προϊόντα τους. Ο τύπος της εταιρείας 1 αφού έχει μόνο έναν τύπο είναι γνωστός και στις δύο εταιρείες. Οι συναρτήσεις πεποίθησης της εταιρείας 2 για τον τύπο της εταιρείας 1 είναι συγκεκριμένα $p_2(x_1 | x_2) = 1$ και $p_2(x_1 | y_2) = 1$. Η εταιρεία 1 αποδίδει πιθανότητα $p_1(x_2 | x_1) = 0.6$ ο τύπος της εταιρείας 2 να είναι x_2 δεδομένου του τύπου της x_1 και $p_1(y_2 | x_1) = 0.4$. Οι ωφέλειες για τις δύο περιπτώσεις προφίλ τύπων βρίσκονται στους παρακάτω πίνακες

Πίνακας 3.1: οι ωφέλειες u_1 και u_2 όταν $\theta_1 = x_1; \theta_2 = x_2$, Βιβλίο "Game Theory and Mechanism Design Y.Narahari"

	2	
1	a_2	b_2
a_1	(1, 2)	(0, 1)
b_1	(0, 4)	(1, 3)

Πίνακας 3.2: οι ωφέλειες u_1 και u_2 όταν $\theta_1 = x_1; \theta_2 = y_2$, Βιβλίο "Game Theory and Mechanism Design Y.Narahari"

	2	
1	a_2	b_2
a_1	(1, 3)	(0, 4)
b_1	(0, 1)	(1, 2)

Το ισοδύναμο παίγνιο Selten αποτελείται από:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^s &= \Theta_1 \cup \Theta_2 = \{x_1, x_2, y_2\} \\ S_{x_1} &= \{a_1, b_1\} = S_1 \\ S_{x_2} &= S_{y_2} = \{a_2, b_2\} = S_2\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}U_{\theta_i} : S_1 \times S_2 \times S_2 &\rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \forall i \in \mathcal{N} \\ S_1 \times S_2 \times S_2 &= \{(a_1, a_2, a_2), (a_1, a_2, b_2), (a_1, b_2, a_2), (a_1, b_2, b_2), (b_1, a_2, a_2), (b_1, a_2, b_2), \\ &\quad (b_1, b_2, a_2), (b_1, b_2, b_2)\}.\end{aligned}$$

Το προφίλ στρατηγικών θα μπορούσε να γραφεί ως $(s_{x_1}, s_{x_2}, s_{y_2})$ ή $(s_1(\cdot), s_2(\cdot))$ με s_1 να είναι μια απεικόνιση απο το σύνολο των τύπων Θ_1 στο S_1 και s_2 μια απεικόνιση απο το σύνολο των τύπων Θ_2 στο S_2 . Όταν έχουμε ένα μπεϋζιανό παίγνιο n παικτών ένα προφίλ καθαρής στρατηγικής μπορεί να περιγραφεί

$$((s_{\theta_1})_{\theta_1 \in \Theta_1}, (s_{\theta_2})_{\theta_2 \in \Theta_2}, \dots, (s_{\theta_n})_{\theta_n \in \Theta_n}).$$

Οι αποδόσεις για τους πράκτορες τύπου είναι οι ωφέλειες που αναμένουν να λάβουν δεδομένου του τύπου τους πάνω στους δυνατούς τύπους των άλλων πρακτόρων. Συγκεκριμένα η $U_{x_1}(a_1, a_2, b_2)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του πράκτορα τύπου x_1 της εταιρείας 1 όταν αυτός επιλέγει τη χαμηλή τιμή a_1 και οι πράκτορες

τύπου x_2 και y_2 επιλέγουν τις ενέργειες a_2 και b_2 . Ο τύπος της εταιρείας 2 μπορεί να είναι είτε x_2 είτε y_2 με πιθανότητες που λαμβάνονται απο τη συνάρτηση πεπτοίθησης $p_1(\cdot|x_1)$. Παρατηρούμε ότι

$$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) = p_1(x_2 | x_1)u_1(x_1, x_2, a_1, a_2) +$$

$$p_1(y_2 | x_1)u_1(x_1, y_2, a_1, b_2) = (0.6)(1) + (0.4)(0) = 0.6.$$

Όταν ο πράκτορας τύπου x_1 επιλέγει την ενέργεια b_1 τότε

$$U_{x_1}(b_1, a_2, b_2) = p_1(x_2 | x_1)u_1(x_1, x_2, b_1, a_2) +$$

$$p_1(y_2 | x_1)u_1(x_1, y_2, b_1, b_2) = (0.6)(0) + (0.4)(1) = 0.4.$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι

$$U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) = 2$$

$$U_{x_2}(a_1, b_2, b_2) = 1$$

$$U_{y_2}(a_1, a_2, b_2) = 4$$

$$U_{y_2}(a_1, a_2, a_2) = 3.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι

$$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) > U_{x_1}(b_1, a_2, b_2),$$

$$U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) > U_{x_2}(a_1, b_2, b_2),$$

$$U_{y_2}(a_1, a_2, b_2) > U_{y_2}(a_1, a_2, a_2).$$

Μπορούμε άμεσα να αντιληφθούμε ότι η βέλτιστη αντίδραση του πράκτορα τύπου x_1 στο προφίλ στρατηγικών (a_2, b_2) των πρακτόρων τύπου x_2 και y_2 είναι η a_1 διότι με αυτήν αναμένει να λάβει μεγαλύτερη απόδοση 0.6 απο ότι το 0.4 που πετυχαίνει με την b_1 . Η βέλτιστη αντίδραση του πράκτορα τύπου x_2 στο προφίλ στρατηγικών (a_1, b_2) των πρακτόρων τύπου x_1 και y_2 είναι η a_2 και η βέλτιστη αντίδραση για τον πράκτορα y_2 στο προφίλ (a_1, a_2) των άλλων πρακτόρων είναι η b_2 . Επομένως μια ισορροπία Nash του παιγνίου *selten* είναι το προφίλ (a_1, a_2, b_2) . Διαφορετικά θα μπορούσε να γραφεί (s_1^*, s_2^*) όπου $s_1^*(x_1) = a_1$ και όταν η εταιρεία 2 έχει τύπο x_2 τότε $s_2^*(x_2) = a_2$ ενώ αν έχει τύπο y_2 το $s_2^*(y_2) = b_2$.

Τώρα θα παρακάμψουμε το συμβολισμό U και θα χρησιμοποιήσουμε u . Έστω ένα μπεϋζιανό παίγνιο $\Gamma = \langle \mathcal{N}, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) \rangle$ και $(s_1, \dots, s_n)$ είναι ένα προφίλ στρατηγικών όπου κάθε στρατηγική s_i που περιέχεται μέσα σε αυτό είναι μια απεικόνιση απο το σύνολο των τύπων του παίκτη i στο σύνολο των στρατηγικών

του. Θεωρούμε ότι ο τύπος του παίκτη i είναι θ_i . Η μέση ωφέλεια του παίκτη i δεδομένου του θ_i είναι

$$u_i((s_i, s_{-i})|\theta_i) = \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(\theta_i, \theta_{-i}, s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}))]$$

Όταν έχουμε ένα πεπερασμένο μπεϋζιανό παίγνιο τότε

$$u_i((s_i, s_{-i})|\theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i} | \theta_i) u_i(\theta_i, \theta_{-i}, s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})) \quad (3.1)$$

Έχοντας αναφέρει το παίγνιο Selten μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό της μπεϋζιανής ισορροπίας Nash.

Ορισμός 3.5.0.1. (Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash Καθαρής Στρατηγικής). Μία μπεϋζιανή ισορροπία Nash σε ένα μπεϋζιανό παίγνιο $\Gamma = \langle \mathcal{N}, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) \rangle$ ορίζεται ως μία ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής του αντίστοιχου παιγνίου Selten. Ένα προφίλ στρατηγικών $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ είναι μια μπεϋζιανή ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής αν για κάθε παίκτη i , $\forall s_i : \Theta_i \rightarrow S_i$, $\forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$u_i((s_i^*, s_{-i}^*) | \theta_i) \geq u_i((s_i, s_{-i}^*) | \theta_i)$$

Παράδειγμα (Μπεϋζιανό Παίγνιο Τιμολόγησης). Έστω το μπεϋζιανό παίγνιο που αναφέρθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα. Υπογραμμίζουμε ότι

- Εάν ο τύπος της εταιρείας 2 είναι x_2 τότε η εταιρεία 2 θα επιλέξει τη στρατηγική a_2 διότι με αυτήν είτε στη περίπτωση που η εταιρεία 1 επιλέξει a_1 είτε b_1 πετυχαίνει μεγαλύτερη απόδοση από την απόδοση που παρέχει η άλλη στρατηγική b_2 κάτι που αποτυπώνεται στον πίνακα 2.1.
- Εάν η εταιρεία 2 παράγει προϊόν y_2 παρατηρούμε από το πίνακα 2.2 ότι με τη στρατηγική b_2 λαμβάνει σαφώς καλύτερη απόδοση από εκείνη που παρέχει η a_2 . Συγκεκριμένα αν η εταιρεία 1 επιλέξει a_1 με την b_2 εξασφαλίζει απόδοση 4 ενώ με την a_2 απόδοση 3. Αν η εταιρεία 1 επιλέξει b_1 με την b_2 λαμβάνει απόδοση 2 ενώ με την a_2 1. Άρα θα επιλέξει τη b_2 .
- Στα προφίλ ενέργειας $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ και στη περίπτωση που ο τύπος της εταιρείας 2 είναι x_2 αλλά και στη περίπτωση που είναι y_2 η εταιρεία 1 έχει απόδοση 1 ενώ σε όλα τα άλλα η απόδοση της είναι 0.
- Ο παίκτης 1 αποδίδει μεγαλύτερη πιθανότητα ο τύπος της εταιρείας 2 να είναι x_2 κάτι που μαρτυρούν και οι συναρτήσεις πιθανότητας $p_1(x_2 | x_1) = 0.6$ και $p_1(y_2 | x_1) = 0.4$.

Έτσι με βάση αυτούς τους λόγους καταλήγουμε σε μια μόνο μπεϋζιανή ισορροπία Nash η οποία περιγράφεται ως:

$$(s_{x_1}^* = a_1, s_{x_2}^* = a_2, s_{y_2}^* = b_2)$$

κάτι που επιβεβαιώνει αυτό που αποδείξαμε στο παραπάνω παράδειγμα. Στη παραπάνω ισορροπία η εταιρεία 1 δίνει την χαμηλή τιμή a_1 στο προϊόν της x_1 . Η εταιρεία 2 εάν το προϊόν που παράγει είναι το x_2 θα δώσει την χαμηλή τιμή a_2 σε αυτό διαφορετικά αν παράγει το προϊόν y_2 θα αποδώσει σε αυτό την υψηλή τιμή b_2 .

Κεφάλαιο 4

Σχεδιασμός Μηχανισμών

4.1 Μια μικρή εισαγωγή στο σχεδιασμό μηχανισμών με ένα παράδειγμα

Ο σχεδιασμός μηχανισμών είναι μια θεωρία που εξετάζει πώς να δημιουργηθούν διαδικασίες που βοηθούν στη λήψη αποφάσεων σε οικονομικά περιβάλλοντα, όταν οι συμμετέχοντες οι οποίοι έχουν ως κίνητρο να μεγιστοποιήσουν την ωφέλεια τους έχουν διαφορετικές πληροφορίες και στόχους. Οι σχεδιαστές μηχανισμών προσπαθούν να βρουν κανόνες ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα, σε μια δημοπρασία, ένας δημοπράτης επιδιώκει να σχεδιάσει ένα μηχανισμό που μεγιστοποιεί την ικανοποίηση όλων των συμμετεχόντων και επιτρέπει στους πλειοδότες να ανακοινώνουν τις πραγματικές εκτιμώμενες αξίες τους και όχι υπερβολικά υψηλές ή χαμηλές προσφορές ώστε το αποτέλεσμα να είναι ωφέλιμο για όλους χωρίς να προκύψει κάποια αδικία.

Ο σχεδιασμός μηχανισμών σχετίζεται με τη θεωρία κοινωνικής επιλογής που είναι ένας κλάδος των οικονομικών που αναλύει τους τρόπους με τους οποίους συνδυάζονται οι ατομικές προτιμήσεις προκειμένου να παρθούν συλλογικές αποφάσεις και να επιτευχθεί κοινωνική ευημερία (Kenneth J. Arrow, 1950). Συγκεκριμένα για να γίνει αυτό λαμβάνονται οι ατομικές προτιμήσεις και συνδυάζονται μέσα σε μια συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας. Αυτό σημαίνει ότι οι προτιμήσεις του κάθε ατόμου εκφράζονται μέσω μιας συνάρτησης χρησιμότητας που δίνει ένα μέτρο ικανοποίησης τους σε ένα σύνολο διαφόρων επιλογών. Θα ασχοληθούμε με χρησιμότητες που μπορούν να μετρηθούν και να συγκριθούν μεταξύ τους.

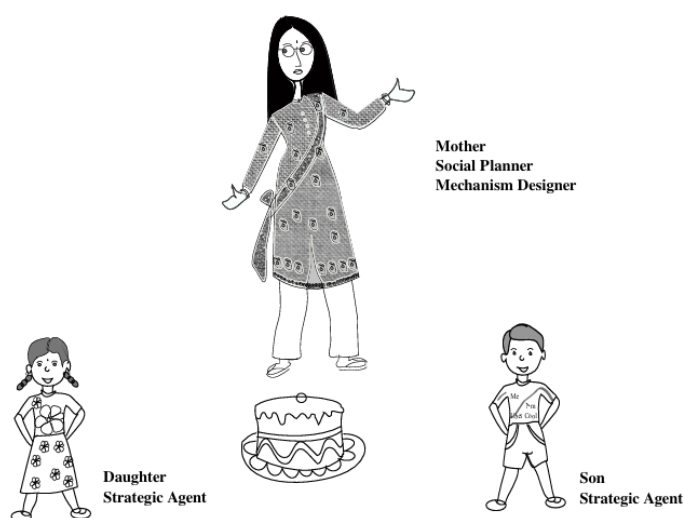
Με τις πληθικές (cardinal) προτιμήσεις οι πράκτορες εκφράζουν την ένταση (βαθμό) με την οποία προτιμούν μια επιλογή έναντι μιας άλλης ενώ αν εκφραστούν μόνο διατακτικές προτιμήσεις η πληροφορία σχετικά με την ένταση χάνεται.

Σε αυτό το κεφάλαιο, συζητάμε πρώτα κάποια προβλήματα στη κατάταξη διατακτικών (ordinal) προτιμήσεων στο πλαίσιο της θεωρίας κοινωνικής επιλογής όταν έχουμε ιδιοτελείς πράκτορες. Στην αρχή παραβλέπεται αυτό που ωθεί τους πράκτορες να αλλοιώνουν τις προτιμήσεις τους αποκρύπτοντας την επιλογή που επιθυμούν πραγματικά καθιστώντας τους μη ειλικρινείς. Στη περίπτωση που έχουμε και ειλικρινείς πράκτορες η συλλογή των ordinal προτιμήσεων και η κατά-

ταξη των επιλογών τους είναι δύσκολη. Αυτές οι προτιμήσεις αναπαρίστανται με μια πραγματική συνάρτηση χρησιμότητας. Στη συνέχεια εισάγεται η θεωρία σχεδιασμού μηχανισμών για γενικές προτιμήσεις. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα σχεδιασμού μηχανισμών (Y. Narahari, Dinesh Garg, Ramasuri Narayanam, Hastagiri Prakash 2009).

Το πρόβλημα κοπής τούρτας

Το πρόβλημα της κοπής τούρτας περιγράφει την ιδέα για το πώς δημιουργούνται μηχανισμοί που οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα δηλαδή στην εξίσου μοιρασιά της τούρτας. Σε αυτή τη περίπτωση, μια μητέρα προσπαθεί να σχεδιάσει ένα μηχανισμό ώστε τα δύο παιδιά της να μοιραστούν τη τούρτα εξίσου. Αν η μητέρα κόψει τη τούρτα σε δύο ίσα κομμάτια και τα παραχωρήσει στα παιδιά αυτό δεν είναι πάντα λύση που ικανοποιεί και τα δύο παιδιά διότι μπορεί να πιστεύουν και τα δύο ότι ο ένας έλαβε μικρότερο κομμάτι από τον άλλον. Ας θεωρήσουμε τον μηχανισμό ότι πρώτον ένα άπο τα παιδιά κόβει τη τούρτα σε δύο μέρη και δεύτερον το άλλο παιδί μπορεί να επιλέξει ότι θέλει και το άλλο κομμάτι που έμεινε το παίρνει το παιδί που έκοψε τη τούρτα. Το παιδί που διαιρεί τη τούρτα θα προσπαθήσει να τη κόψει ακριβώς σε δύο ίσα μέρη διότι αν έμενε ένα μεγαλύτερο κομμάτι και ένα μικρότερο το άλλο παιδί που επιλέγει πρώτο θα λάβει το μεγαλύτερο κομμάτι ενώ το παιδί αυτό θα πάρει το μικρότερο. Έτσι το δεύτερο παιδί είναι ευχαριστημένο επειδή έχει τη δυνατότητα να επιλέξει αυτό που θεωρεί μεγαλύτερο από τα δύο κομμάτια. Αυτός ο κανόνας διασφαλίζει την εξίσου κατανομή της τούρτας στα παιδιά αφήνωντας τα ωφελημένα. Παρακάτω δίνεται και ένα σχήμα



Σχήμα 4.1: Σχεδιασμός Μηχανισμού για κοπή τούρτας, Βιβλίο "Game Theory and Mechanism Design Y.Narahari".

4.2 Κανόνες Ψηφοφορίας

Η διαδικασία της ψηφοφορίας είναι παρούσα σε πολλούς τομείς όπως για παράδειγμα στη πολιτική όπου διενεργείται για την εκλογή πολιτικών εκπροσώπων.

Ένας κανόνας ψηφοφορίας λαμβάνει ένα διάνυσμα ψήφων που υποβάλλονται από τους ψηφοφόρους και εξάγει είτε την εναλλακτική επιλογή που συγκέντρωσε τους περισσότερους ψήφους ή μια κατάταξη όλων των εναλλακτικών. Κάθε ψηφοφόρος διαμορφώνει μια κατάταξη όλων των εναλλακτικών.

Δεδομένου ενός συνόλου εναλλακτικών $O = \{a, b, c, d\}$ μια πιθανή κατάταξη είναι $b \succ a \succ d \succ c$. Μια τέτοια κατάταξη λέγεται ψήφος. Υποθέτουμε ότι οι επιλογές των ψηφοφόρων είναι συνεπείς δηλαδή αν προτιμούν το a από το d όπως φαίνεται παραπάνω έχοντας ένα σύνολο τεσσάρων εναλλακτικών αυτή η κατάταξη παραμένει ίδια και σε νέα περίπτωση που καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε αυτές τις δύο μόνο εναλλακτικές την a και d . Εάν αργότερα έχουν μόνο τις εναλλακτικές a και d και διαμορφώσουν την κατάταξη $d \succ a$ προτιμώντας το d από το a αυτό θα ήταν ασυνεπές δεδομένης της προηγούμενης ψήφου.

Επισημώς, έστω $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ να είναι το σύνολο των ψηφοφόρων και O το σύνολο των m εναλλακτικών επιλογών. Με το συμβολισμό $o_1 \succeq o_2$ δηλώνεται ότι η o_1 προτιμάται ασθενώς από την o_2 δηλαδή ότι ο ψηφοφόρος i προτιμά την εναλλακτική o_1 το ίδιο ή και περισσότερο από την o_2 όπου $o_1, o_2 \in O$.

Η δήλωση $o_1 \succ o_2$ σημαίνει ότι προτιμάται περισσότερο η o_1 από ότι η o_2 μαρτυρώντας μια αυστηρή προτίμηση. Η αδιαφορία μεταξύ των εναλλακτικών επιλογών δηλαδή όταν ο ψηφοφόρος δεν έχει κάποια αυστηρή προτίμηση και θεωρεί ότι οι εναλλακτικές επιλογές του παρέχουν την ίδια χρησιμότητα εκφράζεται $o_1 \sim o_2$. Υποθέτουμε ότι πραγματοποιείται μια κατάταξη όλων των εναλλακτικών και ότι προτιμήσεις ικανοποιούν την μεταβατική ιδιότητα. Αν $o_1 \succeq o_2$ και $o_2 \succeq o_3$ τότε $o_1 \succeq o_3$.

Με το σύμβολο $\succeq \in L$ αναφερόμαστε σε μια διάταξη προτίμησης ή σε μια κατάταξη των εναλλακτικών $o \in O$ που διαμορφώνεται από τον πράκτορα i όπου L το σύνολο που περιέχει όλες τις πιθανές διατάξεις προτίμησης.

Ένα προφίλ προτίμησης $[\succeq] \in L^n$ είναι ένας συνδυασμός στοιχείων όπου ο όρος στοιχείο είναι μια διάταξη προτίμησης για κάθε πράκτορα. Στη συνέχεια θα ξεχωρίσουμε τη συνάρτηση κοινωνικής επιλογής από τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας. Μιά συνάρτηση κοινωνικής επιλογής είναι μια συνάρτηση $C : L^n \rightarrow O$ που λαμβάνει τους ψήφους των ψηφοφόρων και επιλέγει μια εναλλακτική ως αποτέλεσμα.

Η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας είναι μια συνάρτηση $W : L^n \rightarrow L$ η οποία δέχεται τους ψήφους και ως αποτέλεσμα παρέχει μία κατάταξη των εναλλακτικών είτε με την έννοια ότι μία εναλλακτική είναι είτε λιγότερο επιθυμητή από την άλλη είτε περισσότερο είτε ότι ο πράκτορας είναι αδιάφορος μεταξύ τους για οποιοδήποτε πιθανό ζεύγος εναλλακτικών.

Υπήρξαν πολλές συναρτήσεις κοινωνικής επιλογής που προτάθηκαν στο παρελθόν. Για παράδειγμα η ψηφοφορία πλειοψηφίας (ο γνωστός κανόνας πλειοψηφίας με δύο εναλλακτικές) την οποία περιέγραψε ο May, Kenneth O. στο άρθρο με τίτλο "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision" (1952) είναι ένας κανόνας όπου κάθε ψηφοφόρος υποβάλλει μία και μόνο ψήφο εκφράζοντας την προτίμησή του για μια μόνο εναλλακτική από τις διαθέσιμες χωρίς να εκφράζει τις προτιμήσεις του για περισσότερες από μια

εναλλακτικές και επιλέγεται η εναλλακτική που συγκέντρωσε τους περισσότερους ψήφους.

Στη λεγόμενη ψηφοφορία έγκρισης και συγκεκριμένα στο άρθρο "Approval Voting" (1978) οι Steven J. Brams και Peter C. Fishburn ανέφεραν ότι «κάθε ψηφοφόρος μπορεί να ρίξει μια μόνο ψήφο για όσες εναλλακτικές επιθυμεί». Αυτή η ψηφοφορία παρέχει τη δυνατότητα στους ψηφοφόρους να εκφράσουν καλύτερα τις πραγματικές επιθυμίες τους για πολλές εναλλακτικές επιλέγοντας ένα συνδυασμό εναλλακτικών χωρίς να περιορίζονται πάντα σε μια και μόνο εναλλακτική. Στο τέλος και σε αυτή τη περίπτωση επιλέγεται εκείνη η εναλλακτική με τους περισσότερους ψήφους.

Μία ακόμα διαφορετική περίπτωση είναι η ψηφοφορία Borda στην οποία οι ψηφοφόροι διαμορφώνουν μια κατάταξη όλων των εναλλακτικών. Γίνεται μια ταξινόμηση από τη πιο προτιμώμενη εναλλακτική έως τη λιγότερο προτιμώμενη. Αυτή η κατάταξη παρέχει πόντους σε κάθε εναλλακτική. Έαν έχουμε m στο πλήθος εναλλακτικές η πρώτη πιο προτιμητέα λαμβάνει $m-1$ πόντους η δεύτερη πιο προτιμητέα λαμβάνει $m-2$ κ.λ.π. Οι εναλλακτικές που συγκέντρωσαν το μεγαλύτερο άθροισμα πόντων από όλους τους ψηφοφόρους είναι οι νικήτριες.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε διάφορα κριτήρια για να συγκρίνουμε αυτές τις ψηφοφορίες. Για παράδειγμα μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής ικανοποιεί τη συνθήκη Condorcet εάν επιλέγει πάντα μια νικήτρια Condorcet όταν αυτή υπάρχει. Περνάμε στον ορισμό της νικήτριας Condorcet

Ορισμός 4.2.0.1. (Condorcet Winner). Μία νικήτρια Condorcet είναι ένα αποτέλεσμα $o \in O$ τέτοιο ώστε $\zeta(o \succ o') \geq \zeta(o' \succ o) \forall o' \in O$.

Το $\zeta(o \succ o')$ είναι ο αριθμός των πρακτόρων που προτιμούν την εναλλακτική o από ότι οποιαδήποτε άλλη εναλλακτική o' . Με απλά λόγια μια εναλλακτική είναι νικήτρια condorcet αν κερδίζει σε όλες τις συγκρίσεις με τις άλλες εναλλακτικές.

Παρατηρούμε στον πίνακα 4.1 ότι η νικήτρια Condorcet δεν υπάρχει πάντα. Έχοντας τρεις εναλλακτικές την a, b, c και τρεις ψηφοφόρους με τις αντίστοιχες κατατάξεις τους η εναλλακτική $a \succ b$ από τη πλειοψηφία και συγκεκριμένα από τους ψηφοφόρους Μάρτιν και Όλιβερ η εναλλακτική b προτιμάται σε σχέση με τη c από τον Μάρτιν και Μαριάννα και η c προτιμάται από την a από τους Μαριάννα και Όλιβερ (Lieberman 1971). Συμπεραίνουμε ότι και οι τρεις εναλλακτικές προτιμώνται από τη πλειοψηφία και δεν υπάρχει καμία εναλλακτική που να προτιμάται από τη πλειοψηφία περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη. Προκύπτει ότι οι προτιμήσεις της κοινωνίας των ψηφοφόρων εμφανίζουν κυκλική συμπεριφορά δηλαδή $a \succ b \succ c \succ a$ και δεν ισχύει η μεταβατική ιδιότητα καθώς το $c \succ a$. Αυτό είναι το λεγόμενο παράδοξο Condorcet.

4.3 Περιβάλλον Σχεδιασμού Μηχανισμών

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε ένα γενικό πλαίσιο που θα μας βοηθήσει στην ανάλυση και επίλυση προβλημάτων σχεδιασμού μηχανισμών.

Πίνακας 4.1: Παραδειγμα ψήφου χωρίς νικητή Condorcet, Βιβλίο "Market Design A Linear Programming Approach to Auctions and Matching" Martin Bichler

Ψηφοφόρος	Προτιμήσεις
Μάρτιν	$a \succ b \succ c$
Μαριάννα	$b \succ c \succ a$
Όλιβερ	$c \succ a \succ b$

Έστω ότι έχουμε n στο πλήθος πράκτορες και $N = \{1, 2, \dots, n\}$ το σύνολο των πρακτόρων. Οι πράκτορες είναι έξυπνοι, αποφασίζουν με βάση τη λογική και αλληλεπιδρούν στρατηγικά με σκοπό να παρθεί μια συλλογική απόφαση. Οι πράκτορες υποχρεούνται να κάνουν μια συλλογική επιλογή που προέρχεται απο το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών O . Πρίν γίνει η συλλογική επιλογή κάθε πράκτορας i έχει τις δικές του προτιμήσεις σχετικά με τις εναλλακτικές του συνόλου O και αυτές οι πληροφορίες σχετικά με τις προτιμήσεις του δεν είναι διαθέσιμες και γνωστές στους άλλους πράκτορες. Συγκεκριμένα ο ίδιος ο πράκτορας i παρατηρεί μια παράμετρο ή σήμα θ_i που περιγράφει τις προτιμήσεις του. Η παράμετρος θ_i είναι γνωστή απο το πράκτορα i αλλά μπορεί να μην είναι παρατηρήσιμη απο τους άλλους πράκτορες. Αυτή η παράμετρος λέγεται ιδιωτική τιμή ή τύπος του πράκτορα i . Με Θ_i εννοούμε το σύνολο των τύπων του πράκτορα i με $i = 1, 2, \dots, n$. Το σύνολο που περιέχει όλα τα προφίλ τύπων $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ είναι $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_n$. Θεωρούμε ότι υπάρχει μια prior κατανομή πιθανότητας $\mathcal{P} \in \Pi(\Theta)$ απο την οποία προκύπτουν οι συναρτήσεις πεπτοίθησης $p_i : \Theta_i \rightarrow P(\Theta_{-i})$. Επιπλέον οι πράκτορες έχουν προτιμήσεις πάνω στις εναλλακτικές επιλογές οι οποίες εκφράζονται μαθηματικά με μια συνάρτηση χρησιμότητας $u_i : O \times \Theta_i \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω o μια εναλλακτική επιλογή και θ_i ένας απο τους δυνατούς τύπους του παίκτη i . Η τιμή $u_i(o, \theta_i)$ είναι η απόδοση που αποκτά απο την εναλλακτική o ενώ έχει τύπο θ_i . Γενικότερα η u_i δεν εξαρτάται αποκλειστικά απο το αποτέλεσμα o και το τύπο του παίκτη i αλλά εξαρτάται και απο τους τύπους των άλλων παικτών με αποτέλεσμα να ορίζεται στο $O \times \Theta$. Εμείς θα ασχοληθούμε με περιπτώσεις όπου η απόδοση του παίκτη εξαρτάται απο την εναλλακτική επιλογή και το τύπο του.

Όσον αφορά για τα σύνολα των τύπων των παικτών, τις αποδόσεις, την prior κατανομή πιθανότητας, το σύνολο των παικτών και το σύνολο των αποτελεσμάτων O όλοι οι παίκτες τα γνωρίζουν.

4.3.1 Συναρτήσεις Κοινωνικής Επιλογής

Καθώς οι προτιμήσεις των πρακτόρων εξαρτώνται απο το ποιοί είναι οι τύποι τους δηλαδή απο το $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ μπορούμε να πούμε ότι η συλλογική απόφαση είναι ανάλογη του προφίλ των τύπων των πρακτόρων. Αυτό μας κατευθύνει στον ορισμό της συνάρτησης κοινωνικής επιλογής.

Ορισμός 4.3.1.1. (Social Choice Function). Έστω $N = \{1, 2, \dots, n\}$ είναι ένα σύνολο πρακτόρων με σύνολα τύπων $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$. Αν O είναι ένα σύνολο αποτελεσμάτων μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής είναι μια απεικόνιση $f :$

$\Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \rightarrow O$ η οποία παρέχει σε κάθε πιθανό προφίλ τύπων $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ένα αποτέλεσμα απο το σύνολο O . Το αποτέλεσμα που απευθύνεται σε ένα προφίλ τύπων ονομάζεται κοινωνική επιλογή ή συλλογική επιλογή για το συγκεκριμένο προφίλ.

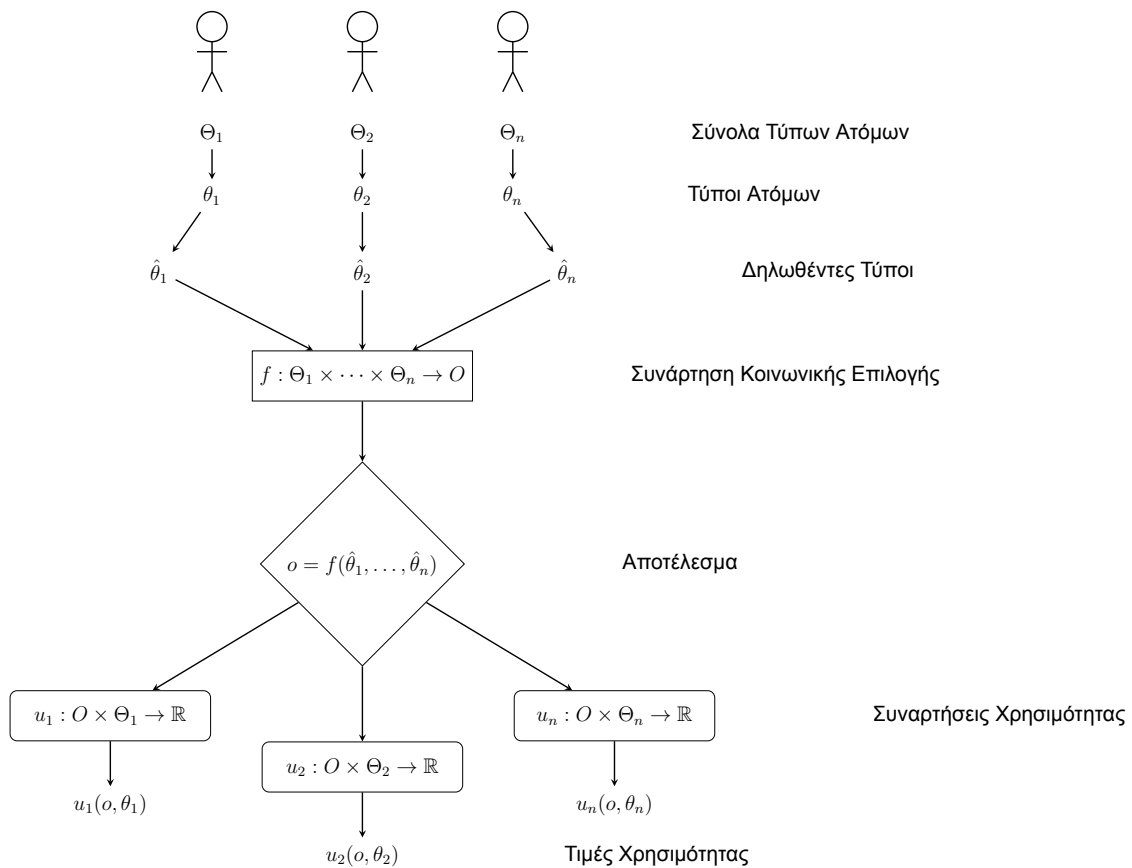
Παράδειγμα (Πρόβλημα της Βέλτιστης Διαδρομής με Ατελή Πληροφόρηση).

Υποθέστε έναν κατευθυνόμενο γράφο με μια κορυφή πηγή και μια κορυφή προορισμό. Έστω ότι αυτός ο γράφος έχει n ακμές που η κάθε μία απο αυτές ανήκει σε έναν ορθολογικό παίκτη. Αν $N = \{1, 2, \dots, n\}$ το σύνολο των παικτών, θ_i είναι το σήμα του παίκτη i το οποίο σε αυτή τη περίπτωση είναι το κόστος της ακμής του. Έστω ότι ένας κοινωνικός σχεδιαστής προσπαθεί να ανακαλύψει τη βέλτιστη διαδρομή απο τη κορυφή πηγή μέχρι τη κορυφή προορισμού. Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής αναθέτει σε κάθε προφίλ κοστών των ακμών ένα αποτέλεσμα δηλαδή μια συντομότερη διαδρομή για αυτά τα κόστη ακμών. Το μόνο που δεν γνωρίζει ο κοινωνικός σχεδιαστής είναι τα κόστη των ακμών των παικτών. Για αυτό θα πρέπει να αντλήσει το κόστος της ακμής απο κάθε έναν πράκτορα προκειμένου να εξάγει μια γρηγορότερη διαδρομή. Όμως προκύπτουν δύο αναχώματα για αυτόν το πρόβλημα της αποκάλυψης του κόστους καθώς και το πρόβλημα της συγκέντρωσης των προτιμήσεων.

Όσον αφορά για το πρόβλημα αποκάλυψης του κόστους αν έχουμε μια συνάρτηση $f : \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \rightarrow O$ και $\theta_1, \dots, \theta_n$ είναι οι ιδιωτικές πληροφορίες των πρακτόρων τότε για να επιλέγεται η βέλτιστη διαδρομή $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ πρέπει όλοι οι παίκτες να γνωστοποιήσουν την πραγματική τους ιδιωτική πληροφορία στον κοινωνικό σχεδιαστή. Το πρόβλημα εμφανίζεται όταν ένας συγκεκριμένος πράκτορας δεν ανακοινώνει το πραγματικό κόστος της ακμής του επειδή θεωρεί ότι δεν τον συμφέρει.

Όταν οι παίκτες αναφέρουν τους τύπους τους το προφίλ των δηλωθέντων τύπων $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$ μετασχηματίζεται σε μια συλλογική επιλογή δηλαδή σε μια συντομότερη διαδρομή $f(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$ όπου $\hat{\theta}_i$ είναι ο δηλωθείς τύπος του παίκτη i . Η εύρεση του γρηγορότερου μονοπατιού λέγεται πρόβλημα της συγκέντρωσης των προτιμήσεων.

Το σχήμα 4.2 περιγράφει όλα τα απαραίτητα στοιχεία σε ένα περιβάλλον σχεδιασμού μηχανισμού.



Σχήμα 4.2: Περιβάλλον Σχεδιασμού Μηχανισμού, Βιβλίο "Game Theory and Mechanism Design Y.Narahari"

4.4 Συναρτήσεις Χρησιμότητας

Όπως έχουμε αναφέρει μια συνάρτηση χρησιμότητας εκφράζει τις προτιμήσεις ενός πράκτορα και τις μεταμορφώνει σε πραγματικούς αριθμούς. Όμως δεν μπορούμε να πούμε με ασφάλεια ότι οι αριθμοί αυτοί συγκρίνονται μεταξύ τους. Αναζητάμε να βρούμε αν υπάρχουν προϋποθέσεις με τις οποίες οι διατακτικές προτιμήσεις ερμηνεύονται μαθηματικά με μια συνάρτηση χρησιμότητας. Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα την έδωσαν οι Von Neumann και Morgenstern (1947) και ισχύει όχι μόνο σε περιβάλλοντα βεβαιότητας αλλά και αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα περιγράφεται με λοταρίες. Προχωράμε στον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 4.4.0.1. (Lottery). Έστω $O = (o_1, o_2, \dots, o_m)$ ένα σύνολο αποτελεσμάτων και $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ μια λοταρία πάνω στο σύνολο O , όπου $p \in \mathcal{P}(O)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα o_j . Το $p_j \geq 0$ για κάθε $o_j \in O$ και $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Το $\mathcal{P}(O)$ είναι το σύνολο των λοταριών πάνω στο O .

Παράδειγμα

Θεωρείστε τη ρίψη ενός νομίσματος όπου κερδίζουμε \$100 αν έρθει κεφαλή και δεν κερδίζουμε τίποτα αν προκύψει γράμμα. Το σύνολο των αποτελεσμάτων είναι $O = (100, 0)$. Η λοταρία που εκφράζεται από ένα δίκαιο νόμισμα είναι $p =$

$(0.5, 0.5)$ ενώ ένα μη δίκαιο νόμισμα θα μπορούσε να μας παρέχει για παράδειγμα τη λοταρία $(0.4, 0.6)$ πάνω στο O .

Με το παράδοξο St.Petersburg το οποίο πρότεινε στην αρχή ο Nicolas Bernoulli το 1713 γίνεται φανερό ότι η αναμενόμενη αξία ενός στοιχήματος δεν είναι ο μοναδικός παράγοντας που πρέπει να εξεταστεί από τους παίκτες προκειμένου να παίξουν το στοίχημα. Σε αυτό το παράδοξο ένα άτομο προσφέρεται να ρίξει ένα δίκαιο νόμισμα μέχρι να προκύψει η πρώτη κεφαλή. Το άτομο παρέχει \$1 αν έρθει κεφαλή στη πρώτη ρίψη. Αν δεν έρθει κεφαλή τότε η απόδοση διπλασιάζεται και αυτό γίνεται κάθε φορά που εμφανίζεται γράμμα. Όταν εμφανιστεί η πρώτη κεφαλή η διαδικασία αυτή σταματά και ο παίκτης λαμβάνει την τρέχουσα απόδοση.

Το στοίχημα St.Petersburg έχει μια άπειρη αναμενόμενη αξία και ο παίκτης ανακοινώνει μια μικρή προσφορά του ενός δολλαρίου για να παίξει. Προτιμούν να κάνουν μικρότερες προσφορές από ότι μεγαλύτερες διότι η πιθανότητα να λάβουν μεγαλύτερη αποδόση μειώνεται. Συγκεκριμένα στη πρώτη ρίψη με πιθανότητα $1/2$ κερδίζει ένα δολλάριο. Η πιθανότητα να λάβει \$2 στη δεύτερη ρίψη είναι ίση με την πιθανότητα στην πρώτη ρίψη να προκύψει γράμμα και στη δεύτερη κεφαλή δηλαδή $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Η πιθανότητα να κερδίσει \$4 στη τρίτη ρίψη είναι ίση με τη πιθανότητα όταν έχουν έρθει γράμματα στις 2 πρώτες ρίψεις και πρώτη κεφαλή στην τρίτη δηλαδή $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ και ούτω καθεξής.

Ο Daniel Bernoulli πρότεινε ότι η ορθολογική συμπεριφορά των ατόμων πρέπει να ερμηνευθεί ως εκείνη που μεγιστοποιεί την μέση τιμή μιας συνάρτησης $U : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ λαμβάνοντας υπόψιν την αποφυγή του κινδύνου. Αυτή η πρόταση είναι γνωστή ως η υπόθεση της αναμενόμενης χρησιμότητας. Η συνάρτηση U παρέχει σε κάθε αναμενόμενη αξία μια αναμενόμενη χρησιμότητα. Σε αυτήν τη περίπτωση οι παίκτες δεν θέλουν να ρισκάρουν πολλά χρήματα για μικρή πιθανότητα μεγαλύτερου κέρδους επειδή στόχος τους είναι να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη χρησιμότητά τους και όχι να λάβουν τη μεγαλύτερη αξία από το στοίχημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε επιπλέον δολλάριο που κερδίζει ο παίκτης του παρέχει μικρότερη πρόσθετη(οριακή) χρησιμότητα από εκείνη που του παρέχει το προηγούμενο δολλάριο που κέρδισε. Για αυτό τοποθετεί λιγότερα χρήματα με στόχο μια μικρότερη απόδοση που θα του προσδίδει τη μεγαλύτερη οριακή χρησιμότητα.

Θα προχωρήσουμε σε ένα παράδειγμα που βασίζεται στην υπόθεση της αναμενόμενης χρησιμότητας όταν ο παίκτης έχει προτιμήσεις πάνω σε λοταρίες.

Παράδειγμα (Αναμενόμενη Χρησιμότητα).

Θεωρήστε ότι ένας πράκτορας έχει τη συνάρτηση χρησιμότητας $U(o) = \ln(o)$ και έχει να διαλέξει ανάμεσα σε δύο λοταρίες: να κερδίσει \$100 ή \$1 με την ίδια πιθανότητα του 0.5, $p = ([0.5, 100], [0.5, 1])$ ή να κερδίσει \$50 με πιθανότητα 1, $q = ([1, 50])$. Η μέση τιμή της συνάρτησης αυτής από τη λοταρία p είναι $u(p) = E_p[U(o_i)] = 0.5 \ln(100) + 0.5 \ln(1) = 2.3$ και $u(q) = E_q[U(o_i)] = \ln(50) = 3.9$. Αφού το $3.9 > 2.3$ θα επιλέξει τη λοταρία q .

Το θεώρημα αναμενόμενης χρησιμότητας που δημοσιεύτηκε αρχικά το 1944 από τους Von Neumann και Morgenstern αναφέρει κάποιες προϋποθέσεις για να

ισχύει η υπόθεση της αναμενόμενης χρησιμότητας. Συγκεκριμένα

- $H \succeq$ είναι πλήρης δηλαδή $p \succ q$ ή $q \succ p$ ή $q \sim p \forall p, q \in \mathcal{P}(O)$;
- $H \succeq$ είναι μεταβατική δηλαδή αν $p \succeq q$ και $q \succeq r$ τότε $p \succeq r \forall p, q, r \in \mathcal{P}(O)$;
- $H \succeq$ είναι συνεχής δηλαδή αν $p \succeq q \succeq r$ με $p, q, r \in \mathcal{P}(O)$ τότε υπάρχει μια πιθανότητα $\rho \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $\rho p + (1 - \rho)r \sim q$;
- $H \succeq$ ικανοποιεί την ανεξαρτησία δηλαδή αν $p \succ q$ και $p, q, r \in \mathcal{P}(O) \forall \rho \in (0, 1]$ τότε $\rho p + (1 - \rho)r \succ \rho q + (1 - \rho)r$.

Αν ένας πράκτορας έχει προτιμήσεις πάνω σε λοταρίες που πληρούν αυτές τις τέσσερις προϋποθέσεις τότε έχει μια συνάρτηση χρησιμότητας και πραγματοποιεί πάντα επιλογές που μεγιστοποιούν την μέση τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας του. Επίσημως

Θεώρημα 4.4.0.1. (Von Neumann and Morgenstern, 1947). Υποθέστε ότι η ορθολογική σχέση προτίμησης $\succeq$ του πράκτορα i πληρεί τις προϋποθέσεις της συνέχειας, πληρότητας, μεταβατικότητας και της ανεξαρτησίας. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $u : \mathcal{P}(O) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ η οποία παρέχει έναν αριθμό u_j σε κάθε αποτέλεσμα o_j με $j \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιον ώστε για δύο οποιεσδήποτε λοταρίες p, q να ισχύει η ισοδυναμία

$$p \succeq q \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m p_j U(o_j) \geq \sum_{j=1}^m q_j U(o_j) \quad (4.1)$$

Με πιο απλά λόγια οι τέσσερις προϋποθέσεις των Von Neumann and Morgenstern ισχύουν αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση χρησιμότητας U τέτοια ώστε $\forall p, q$ λοταρίες $p \succeq q \equiv u(p) = E_p[U(o_i)] = \sum_{j=1}^m p_j U(o_j) \geq \sum_{j=1}^m q_j U(o_j) = E_q[U(o_i)] = u(q)$

Συνοψίζοντας μια σχέση προτίμησης $\succeq$ μπορεί να ερμηνευθεί με μια συνάρτηση χρησιμότητας U αν και μόνο αν ικανοποιεί τα τέσσερα αυτά αξιώματα. Επιπλέον η U και $\bar{U}$ εκφράζουν την ίδια σχέση προτίμησης αν και μόνο αν $\bar{U} = aU + b$ για κάποιο $a > 0$ και $b \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα αν πραγματοποιήσουμε έναν αφινικό μετασχηματισμό στη συνάρτηση χρησιμότητας των Von Neumann και Morgenstern και τη πολλαπλασιάσουμε με έναν θετικό αριθμό ή τη προσθέσουμε σε μια σταθερά τότε εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε ότι και η νέα συνάρτηση χρησιμότητας $\bar{U}$ ικανοποιεί την (4.1).

4.5 Θεωρία Σχεδιασμού Μηχανισμού

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε αναφέρει τη περίπτωση οι πράκτορες να αλλοιώνουν τις προτιμήσεις τους δηλαδή να μην αποκαλύπτουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις. Ο σχεδιασμός μηχανισμού υποθέτει ότι οι πράκτορες επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν τις προσωπικές τους προτιμήσεις για αυτό και μπορούν να παρουσιάσουν ψευδείς πληροφορίες για τις προτιμήσεις τους με σκοπό το προσωπικό τους όφελος.

Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι αν μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα μηχανισμό που να εφαρμόζει μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής δηλαδή να οδηγεί σε κοινωνικά καλύτερο αποτέλεσμα για όλους όταν οι πράκτορες είναι ιδιοτελείς θέλουν να μεγιστοποιήσουν τις αποδόσεις τους και οι προτιμήσεις τους πάνω στις εναλλακτικές επιλογές ή αποτελέσματα είναι ιδιωτική πληροφορία.

Τα προβλήματα σχεδιασμού μηχανισμού είναι μπεϋζιανά παίγνια και υποθέτουμε ότι οι ενέργειες των παικτών καθορίζουν άμεσα τα αποτελέσματα O του μηχανισμού. Μιλάμε για ένα μπεϋζιανό παίγνιο $\langle \mathcal{N}, (\Theta_i), O, (p_i), (u_i) \rangle$ βασισμένο στα αποτελέσματα του μηχανισμού όπου οι χρησιμότητες που απολαμβάνουν οι πράκτορες εξαρτώνται από τα πιθανά αποτελέσματα που παρέχει ο μηχανισμός για το σύνολο τους. Ο κάθε πράκτορας παρατηρεί μόνο τις δικές του προτιμήσεις και αυτές οι προτιμήσεις δεν είναι γνωστές ούτε στους άλλους πράκτορες ούτε στο μηχανισμό. Η μόνη πληροφορία που γνωρίζουν όλοι οι πράκτορες είναι η κοινή prior κατανομή πιθανότητας $\mathcal{P}$. Συνεχίζουμε δίνοντας τον ορισμό του μηχανισμού σε ένα μπεϋζιανό παιχνίδι $\langle \mathcal{N}, (\Theta_i), O, (p_i), (u_i) \rangle$ (Matthew O.Jackson,2003).

Ορισμός 4.5.0.1. (Mechanism). Ένας μηχανισμός $(A, \mathcal{M})$ σε ένα μπεϋζιανό παιχνίδι $\langle \mathcal{N}, (\Theta_i), O, (p_i), (u_i) \rangle$ *απαρτίζεται από:*

- $A = A_1 \times \dots \times A_n$, όπου A_i είναι το σύνολο των ενεργειών του πράκτορα $i \in \mathcal{N}$
- Μια συνάρτηση $\mathcal{M} : A \mapsto \mathcal{P}(O)$ από το σύνολο των προφίλ ενεργειών των παικτών σε μια κατανομή πιθανότητας πάνω στα αποτελέσματα.

Αυτός ο ορισμός περιγράφει και τον ντετερμινιστικό και τον τυχαιοποιημένο μηχανισμό. Ο ντετερμινιστικός μηχανισμός είναι εκείνος που παρέχει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα o με βεβαιότητα σε κάθε προφίλ ενεργειών των πρακτόρων. Σε αυτή τη περίπτωση όλοι οι πράκτορες γνωρίζουν το αποτέλεσμα και δεν διακατέχονται από αβεβαιότητα. Αντίθετα ο τυχαιοποιημένος μηχανισμός δεν προσδιορίζει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα οπότε μιλάμε για ένα αβέβαιο αποτέλεσμα και δίνει μια κατανομή πιθανότητας πάνω στα αποτελέσματα σε κάθε προφίλ ενεργειών των πρακτόρων. Δεδομένου ενός μπεϋζιανού παιχνιδιού θα δούμε τι σημαίνει να εφαρμόσουμε μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής f σε κυρίαρχες στρατηγικές.

Ορισμός 4.5.0.2. (Εφαρμογή σε Κυρίαρχες Στρατηγικές). Ένας μηχανισμός $(A, \mathcal{M})$ είναι μια εφαρμογή μιας συνάρτησης κοινωνικής επιλογής f σε κυρίαρχες στρατηγικές εαν, για οποιοδήποτε διάνυσμα συναρτήσεων χρησιμότητας των πρακτόρων u , το μπεϋζιανό παιχνίδι $\langle \mathcal{N}, (\Theta_i), O, (p_i), (u_i) \rangle$ έχει μια ισορροπία σε κυρίαρχες στρατηγικές. Σε μια τέτοια ισορροπία $\mathcal{M}(a) = f(u)$.

Αυτοί οι μηχανισμοί με κυρίαρχες στρατηγικές για τους πράκτορες διαφορετικά ονομάζονται strategy-proof ή συμβατοί με κίνητρα κυρίαρχής στρατηγικής. Η έννοια της συμβατότητας κινήτρων μας απασχολεί στο πρόβλημα της αποκάλυψης των ιδιωτικών πληροφοριών δηλαδή των προτιμήσεων των πρακτόρων που αναφέραμε στην ενότητα 4.3.

Η συμβατότητα κινήτρων αναφέρεται στη παροχή κατάλληλου ποσού κινήτρων ώστε οι πράκτορες να αποκαλύψουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις. Σύμφωνα με τον Leonid Hurwicz η αποκάλυψη των πραγματικών προτιμήσεων είναι μια βέλτιστη αντίδραση για κάθε πράκτορα ανεξάρτητα απο τι προτιμήσεις αναφέρουν οι άλλοι πράκτορες. Αυτό λέγεται συμβατότητα κινήτρου κυρίαρχης στρατηγικής (DSIC).

4.6 Σχεδιασμός Σχεδόν-Γραμμικών Μηχανισμών

Απο εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι οι προτιμήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν με οιονεί γραμμικές συναρτήσεις χρησιμότητας. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει έναν μηχανισμό όπου η έκβαση του δεν καθορίζεται απο τις προτιμήσεις ενός και μόνο πράκτορα ο οποίος είναι και ταυτόχρονα συμβατός με κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής.

Σε ένα οιονεί γραμμικό περιβάλλον, ένα αποτέλεσμα $o \in O$ είναι ένα διάνυσμα της μορφής $o = (x, p_1, \dots, p_n)$, όπου x είναι ένα στοιχείο ενός συνόλου K (π.χ. ένα αντικείμενο σε μια δημοπρασία), το οποίο ονομάζεται το σύνολο των κατανομών. Το σύνολο K θεωρείται πεπερασμένο. Ο όρος $p_i \in \mathbb{R}$ εκφράζει τη χρηματική μεταφορά στον πράκτορα i . Εάν $p_i > 0$, τότε ο πράκτορας i δέχεται ένα ποσό χρημάτων ίσο με p_i και εάν $p_i < 0$, ο πράκτορας i πληρώνει ένα χρηματικό ποσό ίσο με p_i . Αξίζει να υπογραμμιστεί ότι ένα αποτέλεσμα αποτελείται απο ένα τμήμα κατανομής και ένα τμήμα πληρωμής. Το σύνολο των αποτελεσμάτων είναι

$$O = \{(x, p_1, \dots, p_n) : x \in K; p_i \in \mathbb{R}; \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Τώρα μπορούμε να καταγράψουμε την αποτίμηση ενός πράκτορα για μια κατανομή x ως $v_i(x, \theta)$ όπου θ είναι ένα προφίλ τύπων των πρακτόρων σε ένα μπεϋζιανό παιχνίδι που συζητούσαμε στην ενότητα 2.3. Σε αυτήν τη περίπτωση περιγράφουμε την αποτίμηση ενός πράκτορα ως μια τυχαία μεταβλητή με ένα εύρος πιθανών τιμών. Η ιδέα είναι οτι κανείς απο τους υπόλοιπους πράκτορες δεν γνωρίζει με ακρίβεια την αποτίμηση δηλαδή την αξία που έχει αποδώσει πραγματικά ο πράκτορας i στην κατανομή x . Αυτό που αποτελεί κοινή γνώση σε όλους είναι η common prior κατανομή αποτίμησης του μπεϋζιανού παιγνίου. Καθένας απο τους πράκτορες γνωρίζει την κατανομή πιθανοτήτων πάνω στις δυνατές αποτιμήσεις των υπολοίπων πρακτόρων.

Ορισμός 4.6.0.1. (Quasi-linear Utility Function). Μια οιονεί γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας ενός πράκτορα i έχει τον τύπο $u_i(o, \theta) = v_i(x, \theta) - p_i$ όπου $o = (x, p_1, \dots, p_n)$ ένα αποτέλεσμα, θ είναι ένα προφίλ των τύπων των πρακτόρων και $v_i : K \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε οτι η $u_i(o, \theta)$ αποτελείται απο δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι η μη γραμμική αποτίμηση $v_i(x, \theta)$ και το δεύτερο είναι το γραμμικό τμήμα δηλαδή η χρηματική μεταφορά p_i .

Κεφάλαιο 5

Το Λήμμα του Myerson

5.1 Περιβάλλοντα Μιας Παραμέτρου

Μια καλή εισαγωγή προκειμένου να διατυπωθεί το λήμμα του Myerson είναι τα περιβάλλοντα μιας παραμέτρου. Κάθε ένα από αυτά τα περιβάλλοντα αποτελείται από κάποιον αριθμό n πρακτόρων. Κάθε ένας πράκτορας από αυτούς έχει μια πληροφορία την οποία παρατηρεί μόνο ο ίδιος και κανένας άλλος και αυτή πρέπει να αποκαλυφθεί προκειμένου να λειτουργήσει ο μηχανισμός. Πρόκειται για την αξία που αποδίδει πραγματικά ο ίδιος ο πράκτορας i σε κάθε μονάδα αγαθού (για παράδειγμα ένας πίνακας ζωγραφικής που αποκτά από μια δημοπρασία). Επομένως υπάρχει ένα σύνολο που περιέχει όλα τα διανύσματα των ποσοτήτων αγαθού που λαμβάνουν οι n πράκτορες. Συγκεκριμένα το σύνολο αυτό αποτελείται από όλα τα διανύσματα της μορφής $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $x_i \geq 0$ και $i = 1, 2, \dots, n$. Το x_i είναι μια από τις πιθανές ποσότητες αγαθού που θα μπορούσε να δοθεί στον πράκτορα i .

Για να το αντιληφθούμε καλύτερα ας θεωρήσουμε το πρόβλημα που αντιμετωπίζει κάποιος που έχει ένα αντικείμενο προς πώληση και δεν γνωρίζει το μέγιστο ποσό που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο κάθε πιθανός αγοραστής για το αντικείμενο. Ο πωλητής αυτός θα ήθελε να βρει μια δημοπρασία που να του παρέχει την υψηλότερη αναμενόμενη χρησιμότητα ανεξαρτήτως του είδους της δημοπρασίας που σχεδιάζει. Θα κατασκευάσουμε βέλτιστες δημοπρασίες για μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων σχεδιασμού δημοπρασιών από την πλευρά του πωλητή. Παρόλο που αυτές οι δημοπρασίες γενικά πωλούν το αντικείμενο σε τιμή χαμηλότερη από αυτήν που είναι πρόθυμος να πληρώσει εκείνος που υπέβαλλε τη μεγαλύτερη προσφορά και κάποιες φορές δεν πωλούν καν το αντικείμενο σε αυτόν που υπέβαλλε τη μεγαλύτερη προσφορά, θα αποδείξουμε ότι κανένας άλλος μηχανισμός δημοπρασίας δεν μπορεί να δώσει υψηλότερη αναμενόμενη χρησιμότητα στον πωλητή.

Για να αναλύσουμε αυτές τις δημοπρασίες ακολουθούμε το άρθρο Vickrey (1961) και μελετάμε τις δημοπρασίες ως παιχνίδια με ατελή πληροφόρηση σύμφωνα με το άρθρο του Harsanyi, J. C. (1967-1968). Ανεξάρτητη εργασία για βέλτιστες δημοπρασίες έχει γίνει από τους Riley και Samuelson και Maskin και Riley (1980).

5.2 Βασικοί Ορισμοί και Υποθέσεις

Για να ξεκινήσουμε, πρέπει να αναπτύξουμε τους βασικούς μας ορισμούς και παραδοχές, ώστε να περιγράψουμε την κλάση των προβλημάτων σχεδιασμού δημοπρασιών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πωλητής που έχει ένα μοναδικό αντικείμενο προς πώληση. Αντιμετωπίζει n πλειοδότες, ή πιθανούς αγοραστές, αριθμημένους $1, 2, \dots, n$. Έστω N το σύνολο των πλειοδοτών, έτσι ώστε

$$N = \{1, \dots, n\}. \quad (5.1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα i και j για να ερμηνεύσουμε τους τυπικούς πλειοδότες στο N .

Το πρόβλημα του πωλητή προκύπτει από το γεγονός ότι δεν γνωρίζει πόσα είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν οι διάφοροι πλειοδότες για το αντικείμενο. Συγκεκριμένα, για κάθε πλειοδότη i , υπάρχει κάποια ποσότητα t_i η οποία είναι η εκτίμηση της αξίας του αντικειμένου από τον i , και η οποία αντιπροσωπεύει το μέγιστο ποσό που ο i θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει για το αντικείμενο βασισζόμενος στις τρέχουσες πληροφορίες του για αυτό.

Θα υποθέσουμε ότι η αβεβαιότητα του πωλητή σχετικά με την εκτιμώμενη αξία του πλειοδότη i μπορεί να περιγραφεί από μια συνεχή κατανομή πιθανότητας πάνω σε ένα κλειστό διάστημα. Συγκεκριμένα, έστω a_i να είναι χαμηλότερη δυνατή τιμή που ο i θα μπορούσε να αποδώσει στο αντικείμενο, και έστω b_i να αντιπροσωπεύει την υψηλότερη δυνατή τιμή που ο i θα μπορούσε να αποδώσει στο αντικείμενο. Έστω $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}_+$ να είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την εκτιμώμενη αξία t_i του i . Υποθέτουμε ότι: $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $f_i(t_i) > 0$, $\forall t_i \in [a_i, b_i]$ και η $f_i(\cdot)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a_i, b_i]$. Η $F_i : [a_i, b_i] \rightarrow [0, 1]$ θα δηλώνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί στην πυκνότητα $f_i(\cdot)$, έτσι ώστε

$$F_i(t_i) = \int_{a_i}^{t_i} f_i(s_i) ds_i. \quad (5.2)$$

Η $F_i(t_i)$ είναι η εκτίμηση που έχει διαμορφώσει ο πωλητής για την πιθανότητα ο πλειοδότης i να έχει εκτιμήσει το αντικείμενο σε αξία μικρότερη ή ίση της ποσότητας t_i .

Θα συμβολίσουμε με T το σύνολο όλων των πιθανών προφίλ των εκτιμώμενων αξιών των πλειοδοτών το οποίο είναι,

$$T = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]. \quad (5.3)$$

Για οποιονδήποτε πλειοδότη i , έστω T_{-i} να είναι το σύνολο που απαρτίζεται από εκείνους τους συνδυασμούς των εκτιμώμενων αξιών των πλειοδοτών που δεν περιέχουν την εκτιμώμενη αξία του πλειοδότη i , έτσι ώστε

$$T_{-i} = \times_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} [a_j, b_j]. \quad (5.4)$$

θα υποθέσουμε ότι οι εκτιμώμενες αξίες των n πλειοδοτών είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Με απλά λόγια αν η εκτιμώμενη αξία του i για το αντικείμενο πάρει μια συγκεκριμένη τιμή με κάποια πιθανότητα αυτό δεν σημαίνει ότι και η εκτιμώμενη αξία του πλειοδότη j θα πάρει την ίδια τιμή με την ίδια πιθανότητα. Έτσι, η απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας στο T για το διάνυσμα $t = (t_1, \dots, t_n)$ των εκτιμώμενων αξιών των πλειοδοτών είναι

$$f(t) = \prod_{j \in N} f_j(t_j). \quad (5.5)$$

Βέβαια ο πλειοδότης i θεωρεί τη δική του εκτιμώμενη αξία ως γνωστή ποσότητα και όχι ως τυχαία μεταβλητή. Ωστόσο, υποθέτουμε ότι ο πλειοδότης i αξιολογεί τις κατανομές πιθανότητας για τις εκτιμώμενες αξίες των άλλων πλειοδοτών με τον ίδιο τρόπο που το κάνει ο πωλητής. Δηλαδή, τόσο ο πωλητής όσο και ο πλειοδότης i αξιολογούν την απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας στο T_{-i} για το διάνυσμα $t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$ των τιμών για όλους τους πλειοδότες εκτός από τον i να είναι

$$f_{-i}(t_{-i}) = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} f_j(t_j). \quad (5.6)$$

Η αξία που έχει εκτιμήσει προσωπικά ο πωλητής για το αντικείμενο αν το κρατούσε και δεν το πουλούσε σε κανέναν από τους n πλειοδότες, θα συμβολίζεται με t_0 . Υποθέτουμε ότι ο πωλητής δεν έχει ιδιωτικές πληροφορίες για το αντικείμενο, και έτσι το t_0 είναι γνωστό σε όλους τους πλειοδότες.

Υπάρχουν δύο λόγοι που εξηγούν γιατί η εκτιμώμενη αξία ενός πλειοδότη είναι άγνωστη στον πωλητή και στους άλλους πλειοδότες. Πρώτον, οι προσωπικές προτιμήσεις του πλειοδότη μπορεί να είναι άγνωστες στους άλλους (για παράδειγμα, αν το αντικείμενο είναι ένας πίνακας, οι άλλοι μπορεί να μην γνωρίζουν πόσο πραγματικά του αρέσει). Δεύτερον, ο πλειοδότης μπορεί να έχει εξειδικευμένες πληροφορίες για την ποιότητα του αντικειμένου (μπορεί να γνωρίζει αν ο πίνακας είναι πράγματι αυθεντικός ή αντίγραφο). Ο πρώτος λόγος ονομάζεται αβεβαιότητα προτίμησης και ο δεύτερος αβεβαιότητα ποιότητας. Αυτή η διάκριση είναι ιδιαίτερα σημαντική. Αν υπάρχουν μόνο αβεβαιότητες προτίμησης, τότε η ενημέρωση του πλειοδότη i για την εκτιμώμενη αξία του πλειοδότη j δεν θα πρέπει να αναγκάσει τον i να αναθεωρήσει την δικιά του αποτίμησή. (Αυτό δεν σημαίνει ότι ο i δεν γίνεται να μην αναθεωρήσει τις προσφορές που υποβάλλει σε μια δημοπρασία αν γνώριζε την εκτιμώμενη αξία του j , αλλά αυτό που σημαίνει είναι ότι μόνο το ποσό που πραγματικά είναι πρόθυμος να πληρώσει για το αντικείμενο δεν θα πρέπει να αλλάξει.) Ωστόσο, αν υπάρχουν αβεβαιότητες ποιότητας, τότε ο πλειοδότης i μπορεί να τείνει να αναθεωρήσει την αποτίμηση του αντικειμένου αφού μάθει πρώτα τις εκτιμώμενες αξίες των άλλων πλειοδοτών. Δηλαδή, αν μάθαινε ότι το t_j ήταν πολύ χαμηλό, σηματοδοτώντας ότι ο j είχε λάβει αποθαρρυντικές πληροφορίες για την ποιότητα του αντικειμένου, τότε ο i μπορεί ειλικρινά να αλλάξει προς τα κάτω την εκτίμηση του πόσο θα έπρεπε να είναι διατεθειμένος να πληρώσει για το αντικείμενο.

Στο μεγαλύτερο μέρος του άρθρου του Vickrey, W (1961) για τις δημοπρασίες, εξετάζεται μόνο η ειδική περίπτωση της καθαρής αβεβαιότητας προτίμησης. Στο άρθρο "Optimal Auction Design" του Myerson, R. (1981) εξετάζεται μια πιο γενική κατηγορία προβλημάτων, επιτρέποντας επίσης ορισμένες μορφές αβεβαιότητας στη ποιότητα. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι υπάρχουν n συναρτήσεις επίδρασης αναθεώρησης $e_j : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε, αν ένας άλλος πλειοδότης i μάθει ότι το t_j ήταν η εκτιμώμενη αξία του πλειοδότη j για το αντικείμενο, τότε ο i θα αναθεωρούσε τη δική του αποτίμηση κατά $e_j(t_j)$. Έτσι, αν ο πλειοδότης i μάθαινε ότι το $t = (t_1, \dots, t_n)$ ήταν το διάνυσμα των εκτιμώμενων αξιών που αρχικά κατείχαν οι n πλειοδότες, τότε θα αναθεωρούσε τη δική του αποτίμηση για το αντικείμενο σε

$$v_i(t) = t_i + \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} e_j(t_j). \quad (5.7)$$

Ομοίως, θα υποθέσουμε ότι ο πωλητής θα επαναξιολογούσε την προσωπική του αποτίμηση για το αντικείμενο σε

$$v_0(t) = t_0 + \sum_{j \in N} e_j(t_j) \quad (5.8)$$

αν μάθαινε ότι το t ήταν το διάνυσμα των εκτιμώμενων αξιών που αρχικά κατείχαν οι πλειοδότες. Στην περίπτωση της καθαρής αβεβαιότητας προτίμησης, θα είχαμε απλώς $e_j(t_j) \equiv 0$.

5.3 Εφικτοί Μηχανισμοί Δημοπρασίας

Δεδομένων των συναρτήσεων πυκνότητας f_i και των συναρτήσεων επίδρασης αναθεώρησης e_i και v_i όπως ορίστηκαν παραπάνω, το πρόβλημα του πωλητή είναι να επιλέξει έναν μηχανισμό δημοπρασίας που να μεγιστοποιεί τη δική του αναμενόμενη χρησιμότητα. Πρέπει τώρα να περιγράψουμε τους μηχανισμούς δημοπρασίας που μπορεί να επιλέξει. Αρχικά, θα περιοριστούμε σε μια ειδική κατηγορία μηχανισμών δημοπρασίας τους μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης.

Σε έναν μηχανισμό άμεσης αποκάλυψης, οι πλειοδότες υποβάλλουν ιδιωτικά και ταυτόχρονα τις εκτιμώμενες αξίες τους για το αντικείμενο στον πωλητή. Ο πωλητής στη συνέχεια αποφασίζει ποιος είναι εκείνος που θα πάρει το αντικείμενο και το πόσα πρέπει να πληρώσει ο κάθε πλειοδότης, ως συναρτήσεις του διανύσματος των δηλωθέντων εκτιμώμενων αξιών $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Έτσι, ένας μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος συναρτήσεων αποτελέσματος (p, x) (της μορφής $p : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$) τέτοιες ώστε, αν t είναι το διάνυσμα των εκτιμώμενων αξιών που έχουν ανακοινωθεί, τότε $p_i(t)$ είναι το αναμενόμενο ποσό χρημάτων που ο πλειοδότης i πρέπει να πληρώσει στον πωλητή. Το $x_i(t)$ είναι η κατανομή δηλαδή η πιθανή ποσότητα αγαθού που θα αποκτήσει ο πλειοδότης i .

Αν η εκτιμώμενη αξία του i είναι t_i , τότε η αναμενόμενη χρησιμότητά του από

έναν μηχανισμό δημοπρασίας που περιγράφεται από (p, x) είναι:

$$U_i(p, x, t_i) = \int_{T_{-i}} (v_i(t)x_i(t) - p_i(t))f_{-i}(t_{-i})dt_{-i}, \quad (5.9)$$

όπου $dt_{-i} = dt_1 \cdots dt_{i-1}dt_{i+1} \cdots dt_n$.

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη χρησιμότητα του πωλητή από αυτόν τον μηχανισμό δημοπρασίας είναι:

$$U_0(p, x) = \int_T (v_0(t)(1 - \sum_{j \in N} x_j(t)) + \sum_{j \in N} p_j(t))f(t)dt, \quad (5.10)$$

όπου $dt = dt_1 \cdots dt_n$.

Δεν ισχύει ότι κάθε ζεύγος συναρτήσεων (p, x) είναι ένας εφικτός μηχανισμός δημοπρασίας. Υπάρχουν τρεις περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιεί ο μηχανισμός (p, x) ώστε να είναι εφικτός.

Πρώτον, δεδομένου ότι υπάρχει μόνο ένα αντικείμενο προς διάθεση, η συνάρτηση x πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\sum_{j \in N} x_j(t) \leq 1 \quad \text{και} \quad x_j(t) \geq 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall t \in T. \quad (5.11)$$

Δεύτερον, υποθέτουμε ότι ο πωλητής δεν μπορεί να υποχρεώσει έναν πλειοδότη να συμμετάσχει σε μια δημοπρασία που του προσφέρει μικρότερη αναμενόμενη χρησιμότητα από αυτήν που θα μπορούσε να αποκτήσει μόνος του. Αν ο πλειοδότης δεν συμμετείχε στη δημοπρασία, τότε δεν θα μπορούσε να αποκτήσει το αντικείμενο, αλλά ούτε και θα πλήρωνε χρήματα, επομένως η χρησιμότητά του θα ήταν μηδέν. Για να εξασφαλιστεί, λοιπόν, ότι οι πλειοδότες θα συμμετέχουν στη δημοπρασία, οι παρακάτω συνθήκες ατομικής ορθολογικότητας πρέπει να πληρούνται:

$$U_i(p, x, t_i) \geq 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall t_i \in [a_i, b_i]. \quad (5.12)$$

Τρίτον, θεωρούμε ότι ο πωλητής δεν μπορεί να αποτρέψει κανέναν πλειοδότη από το να ψεύδεται σχετικά με την αξία που έχει εκτιμήσει για το αντικείμενο, εάν ο πλειοδότης περιμένει ότι θα κερδίσει κάτι παραπάνω από το ψέμα. Επομένως, ο μηχανισμός αποκάλυψης μπορεί να υλοποιηθεί μόνο αν κανένας πλειοδότης δεν αναμένει να κερδίσει κάτι από το ψέμα. Με πιο απλά λόγια οι ειλικρινείς απαντήσεις στον πωλητή πρέπει να σχηματίζουν μια ισορροπία Nash στο παιχνίδι της δημοπρασίας. Αν ένας πλειοδότης i δήλωνε ότι s_i ήταν η εκτιμώμενη αξία ενώ t_i ήταν η πραγματική του εκτίμηση, τότε η αναμενόμενη χρησιμότητά του θα ήταν:

$$\int_{T_{-i}} (v_i(t)x_i(t_{-i}, s_i) - p_i(t_{-i}, s_i))f_{-i}(t_{-i})dt_{-i},$$

όπου $(t_{-i}, s_i) = (t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$.

Για να εξασφαλιστεί ότι κανένας πλειοδότης δεν έχει κίνητρο να ψεύδεται σχετικά με την εκτιμώμενη αξία, οι παρακάτω συνθήκες συμβατότητας κινήτρων πρέπει

να ικανοποιούνται:

$$U_i(p, x, t_i) \geq \int_{T_{-i}} (v_i(t)x_i(t_{-i}, s_i) - p_i(t_{-i}, s_i))f_{-i}(t_{-i})dt_{-i}, \quad (5.13)$$

για όλους τους $i \in N$, $\forall t_i \in [a_i, b_i]$, και $\forall s_i \in [a_i, b_i]$.

Θα λέμε ότι το (p, x) είναι εφικτός μηχανισμός (ή ότι το (p, x) αντιπροσωπεύει έναν εφικτό μηχανισμό δημοπρασίας) αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι (5.11), (5.12) και (5.13). Δηλαδή, αν ο πωλητής σχεδιάζει να δώσει το αντικείμενο σύμφωνα με το x και να απαιτήσει χρηματικά ποσά από τους πλειοδότες σύμφωνα με το p , τότε ο μηχανισμός μπορεί να εφαρμοστεί, με την προϋπόθεση ότι όλοι πλειοδότες είναι πρόθυμοι να αποκαλύψουν τις πραγματικές τους αποτιμήσεις αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι (5.11)-(5.13).

Μέχρι στιγμής, έχουμε μελετήσει μόνο μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης, στους οποίους οι πλειοδότες υποτίθεται ότι αποκαλύπτουν ειλικρινά τις αποτιμήσεις τους. Ωστόσο, ο πωλητής θα μπορούσε να σχεδιάσει άλλα είδη παιχνιδιών δημοπρασίας. Σε ένα γενικό παιχνίδι δημοπρασίας, κάθε πλειοδότης έχει ένα σύνολο στρατηγικών Θ_i και υπάρχουν συναρτήσεις αποτελέσματος:

$$\hat{p} : \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

και

$$\hat{x} : \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

οι οποίες περιγράφουν πώς η κατανομή του αντικειμένου και οι πληρωμές των πλειοδοτών εξαρτώνται από τις στρατηγικές των πλειοδοτών. (Δηλαδή, αν το $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ήταν το διάνυσμα των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τους πλειοδότες στο παιχνίδι δημοπρασίας, τότε το $\hat{x}_i(\theta)$ θα ήταν η ποσότητα αγαθού που θα μπορούσε να αποκτήσει ο i και το $\hat{p}_i(\theta)$ θα ήταν το ποσό που αναμένει να πληρώσει ο i προς τον πωλητή.)

Ένας μηχανισμός δημοπρασίας είναι οποιοδήποτε τέτοιο παιχνίδι δημοπρασίας συνοδευόμενο από μια περιγραφή των στρατηγικών πλάνων που αναμένεται να χρησιμοποιήσουν οι πλειοδότες στο παιχνίδι. Επισήμως, ένα στρατηγικό πλάνο μπορεί να ερμηνευθεί από μια συνάρτηση $\hat{\theta}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Theta_i$, έτσι ώστε το $\hat{\theta}_i(t_i)$ να είναι η στρατηγική που αναμένεται να χρησιμοποιήσει ο i στο παιχνίδι δημοπρασίας εάν η αποτίμηση του είναι t_i . Γενικότερα, οι μηχανισμοί άμεσης αποκάλυψης είναι απλώς εκείνοι οι μηχανισμοί δημοπρασίας στους οποίους $\Theta_i = [a_i, b_i]$ και $\hat{\theta}_i(t_i) = t_i$.

Σε αυτό το γενικό πλαίσιο, ένας εφικτός μηχανισμός δημοπρασίας πρέπει να ικανοποιεί περιορισμούς που γενικεύουν τις (5.11)-(5.13). Δεδομένου ότι υπάρχει μόνο ένα αντικείμενο, οι ποσότητες αγαθού $\hat{x}_i(\theta)$ πρέπει να είναι μη αρνητικές και το άθροισμα τους να είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας, για οποιοδήποτε διάνυσμα θ . Ο μηχανισμός δημοπρασίας πρέπει να παρέχει μια μη αρνητική αναμενόμενη χρησιμότητα σε κάθε πλειοδότη, δεδομένης οποιασδήποτε πιθανής αποτίμησης του, διαφορετικά δεν θα μπορούσε να συμμετάσχει στη δημοπρασία. Τα στρατηγικά πλάνα (στρατηγικές) πρέπει να μεγιστοποιούν τις αποδόσεις

των πλειοδοτών ώστε κανένας να μην έχει κίνητρο να αναθεωρήσει τη στρατηγική του να σχηματίζουν δηλαδή μια ισορροπία Nash στο παιχνίδι δημοπρασίας, διαφορετικά κάποιος πλειοδότης θα αναθεωρούσε τα στρατηγικά του πλάνα.

Η βασική ιδέα που μας επιτρέπει να λύσουμε προβλήματα σχεδιασμού δημοπρασίας είναι να επικεντρωθούμε μόνο σε μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης.

Θεώρημα 5.3.0.1. (The Revelation Principle). *Δεδομένου οποιουδήποτε εφικτού μηχανισμού δημοπρασίας, υπάρχει ένας ισοδύναμος εφικτός μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης που παρέχει στον πωλητή και σε όλους τους πλειοδότες τις ίδιες αναμενόμενες χρησιμότητες όπως αυτές που έδωσε ο μηχανισμός δημοπρασίας που θεωρήσαμε στην αρχή.*

Η αρχή της αποκάλυψης έχει αποδειχθεί στο πιο γενικό πλαίσιο προβλημάτων συλλογικής επιλογής (Myerson, R.B. (1979)). Για να δούμε γιατί ισχύει αυτό, υποθέστε ότι μας δίνεται ένας εφικτός μηχανισμός δημοπρασίας με χώρους στρατηγικής Θ_i , με συναρτήσεις αποτελέσματος $\hat{p}$ και $\hat{x}$, και με στρατηγικά πλάνα $\hat{\theta}_i$, όπως παραπάνω. Στη συνέχεια, θεωρούμε τον μηχανισμό άμεσης αποκάλυψης που ερμηνεύεται από τις συναρτήσεις $p : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} p(t_1, \dots, t_n) &= \hat{p}(\hat{\theta}_1(t_1), \dots, \hat{\theta}_n(t_n)), \\ x(t_1, \dots, t_n) &= \hat{x}(\hat{\theta}_1(t_1), \dots, \hat{\theta}_n(t_n)). \end{aligned}$$

Δηλαδή, στον μηχανισμό άμεσης αποκάλυψης (p, x) , ο πωλητής πρώτα απαιτεί από κάθε πλειοδότη να ανακοινώσει τον πραγματικό τύπο του και στη συνέχεια προσδιορίζει τη στρατηγική που ο πλειοδότης θα είχε χρησιμοποιήσει σύμφωνα με τα στρατηγικά πλάνα στον δεδομένο αρχικό μηχανισμό δημοπρασίας, και τελικά υλοποιεί τα αποτελέσματα που προβλέπονται στο δεδομένο παιχνίδι δημοπρασίας για αυτές τις στρατηγικές. Έτσι, ο μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης (p, x) πάντα προσφέρει τα ίδια αποτελέσματα όπως ο δεδομένος μηχανισμός δημοπρασίας, και έτσι όλοι οι πράκτορες λαμβάνουν τις ίδιες αναμενόμενες χρησιμότητες και στους δύο μηχανισμούς.

Βέβαια ο μηχανισμός (p, x) πρέπει να πληρεί τους περιορισμούς συμβατότητας κινήτρων (5.13), επειδή κανένας δεν αναμένει να κερδίσει μεγαλύτερη απόδοση αλλάζοντας την στρατηγική του στον δεδομένο εφικτό μηχανισμό. (Αν οποιοςδήποτε πλειοδότης πίστευε ότι θα κερδίσει δηλώνοντας ψευδή αποτίμηση στον πωλητή στο παιχνίδι αποκάλυψης, τότε αυτό που θα κέρδιζε θα ήταν να κοροϊδεύει τον εαυτό του ή να αναθεωρήσει τη στρατηγική του στον δεδομένο μηχανισμό.) Έτσι, ο (p, x) είναι εφικτός μηχανισμός.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αποκάλυψης, μπορούμε να υποθέσουμε, ότι ο πωλητής εξετάζει μόνο μηχανισμούς δημοπρασίας που είναι εφικτοί μηχανισμοί άμεσης αποκάλυψης. Συγκεκριμένα μπορούμε από εδώ και πέρα να πούμε ότι το σύνολο των εφικτών μηχανισμών δημοπρασίας είναι το ίδιο με το σύνολο όλων των συναρτήσεων αποτελέσματος (p, x) που ικανοποιούν τους περιορισμούς (5.11) έως (5.13). Το πρόβλημα σχεδιασμού δημοπρασίας του πωλητή είναι να

επιλέξει εκείνες τις συναρτήσεις $p : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ που του μεγιστοποιούν την αναμενόμενη χρησιμότητα, $U_0(p, x)$ υπό τους περιορισμούς (5.11)–(5.13).

5.4 Το Λήμμα του Myerson

Το αξιοσημείωτο λήμμα του Myerson χρησιμοποιεί μηχανισμούς άμεσης αποκάλυψης με κανόνες κατανομής και πληρωμής $\mathbf{x}, \mathbf{p}$. Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα όπου κάθε στοιχείο του είναι μια ποσότητα αγαθού που θα μπορούσε να δοθεί σε ένα συγκεκριμένο πράκτορα όπως περιγράφηκε στην ενότητα 5.1. Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{p}$ απαρτίζεται από τις πληρωμές p_i των πρακτόρων. Τόσο το $\mathbf{x}$ όσο και το $\mathbf{p}$ εξαρτώνται από τον συνδυασμό των δηλωθέντων προσφορών $\mathbf{t}$.

Με το μοντέλο της οιονεί γραμμικής χρησιμότητας σε ένα μηχανισμό $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ η χρησιμότητα του πράκτορα i δίνεται από τον τύπο

$$u_i(\mathbf{t}) = v_i \cdot x_i(\mathbf{t}) - p_i(\mathbf{t}) \quad (5.14)$$

όταν το διάνυσμα προσφοράς είναι $\mathbf{t}$.

Επικεντρωνόμαστε σε κανόνες πληρωμής που ικανοποιούν:

$$p_i(\mathbf{t}) \in [0, t_i \cdot x_i(\mathbf{t})] \quad (5.15)$$

για κάθε πράκτορα i και προφίλ προσφορών ή τύπων $\mathbf{t}$. Ο περιορισμός ότι $p_i(\mathbf{t}) \geq 0$ σημαίνει ότι ο σχεδιαστής του μηχανισμού δεν πληρώνει τους πράκτορες αλλά δέχεται χρήματα από αυτούς. Η συνθήκη ότι $p_i(\mathbf{t}) \leq t_i \cdot x_i(\mathbf{t})$ υπόσχεται σε έναν ειλικρινή πράκτορα δηλαδή σε αυτόν που αποκαλύπτει τον πραγματικό του τύπο μη αρνητική χρησιμότητα. Αυτό πράγματι προκύπτει θέτοντας $t_i = v_i$ στην εξίσωση (5.14) σε συνδυασμό με αυτήν τη συνθήκη.

Θα συνεχίσουμε δίνοντας δύο σημαντικούς ορισμούς.

Ορισμός 5.4.0.1. (Implementable Allocation Rule). Ένας κανόνας κατανομής $\mathbf{x}$ για ένα περιβάλλον με μία παράμετρο είναι εφαρμόσιμος εάν υπάρχει ένας κανόνας πληρωμής $\mathbf{p}$ τέτοιος ώστε ο μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ να είναι DSIC.

Οι εφαρμόσιμοι κανόνες κατανομής είναι αυτοί που μπορούν να επεκταθούν σε μηχανισμούς DSIC (Συμβατούς με κίνητρα Κυρίαρχης Στρατηγικής). Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε έναν κανόνα κατανομής, μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν κατάλληλο κανόνα πληρωμής, ώστε η αποκάλυψη του πραγματικού τύπου να είναι πάντα μια κυρίαρχη στρατηγική για κάθε πράκτορα. Οι εφαρμόσιμοι κανόνες κατανομής είναι κανόνες που λειτουργούν σε μηχανισμούς όπου οι συμμετέχοντες αναφέρουν την αλήθεια. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μηχανισμό DSIC, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο τέτοιους εφαρμόσιμους κανόνες κατανομής. Αυτοί αποτελούν τη βάση για το σχεδιασμό τέτοιων μηχανισμών δηλαδή είναι τα εργαλεία που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να δημιουργήσουμε ένα δίκαιο και αποτελεσματικό σύστημα.

Ορισμός 5.4.0.2. (Monotone Allocation Rule). Ένας κανόνας κατανομής x για ένα περιβάλλον με μία παράμετρο είναι μονοτονικός εάν για κάθε πράκτορα i και προσφορές t_{-i} από τους υπόλοιπους πράκτορες, η κατανομή $x_i(z, t_{-i})$ προς τον i είναι μη φθίνουσα ως προς την προσφορά z .

Σε έναν μονοτονικό κανόνα κατανομής καθώς ο πράκτορας i αυξάνει τη προσφορά του, z μπορεί μόνο να αυξηθεί η κατανομή του x_i και να λάβει περισσότερα αγαθά. Συγκεκριμένα

$$x_i(z, \mathbf{t}_{-i}) \geq x_i(t_i, \mathbf{t}_{-i}), \quad \forall i \in N, \forall z \geq t_i.$$

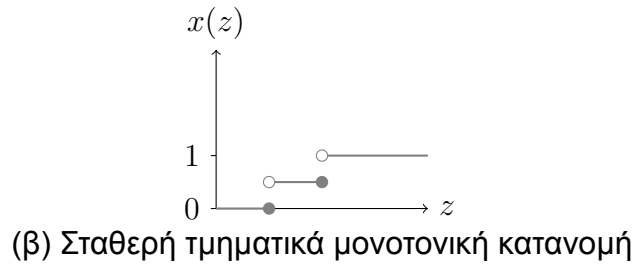
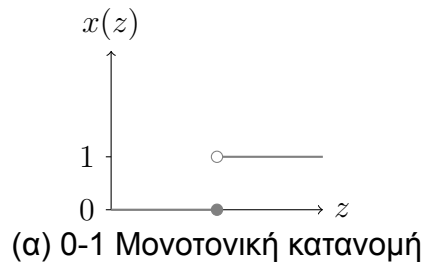
Θεώρημα 5.4.0.1. (Myerson's Lemma, 1981). Έστω ένα περιβάλλον με μία παράμετρο.

- (α) Ένας κανόνας κατανομής $\mathbf{x}$ είναι εφαρμόσιμος αν και μόνο αν είναι μονοτονικός.
- (β) Αν ο $\mathbf{x}$ είναι μονοτονικός, τότε υπάρχει ένας μοναδικός κανόνας πληρωμής $\mathbf{p}$ για τον οποίο ο μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ είναι DSIC και $p_i(t) = 0$ όταν $t_i = 0$.
- (γ) Ο κανόνας πληρωμής στο (β) δίνεται από έναν ξεκάθαρο τύπο.

Το λήμμα του Myerson είναι το θεμέλιο πάνω στο οποίο θα οικοδομήσουμε το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας σχεδιασμού μηχανισμών. Το μέρος (α) δηλώνει ότι οι Ορισμοί 5.4.0.1 και 5.4.0.2 είναι δύο έννοιες που είναι ισοδύναμες. Ο Ορισμός της εφαρμοσιμότητας περιγράφει τον στόχο του σχεδιασμού μας, αλλά είναι δύσκολο να πειστούμε εάν ένας κανόνας κατανομής είναι όντως εφαρμόσιμος ή όχι. Ο ορισμός της μονοτονικότητας είναι πολύ πιο "πρακτικός". Συνήθως, δεν είναι δύσκολο να ελεγχθεί αν ένας κανόνας κατανομής είναι μονοτονικός. Το μέρος (β) δηλώνει ότι όταν ένας κανόνας κατανομής είναι εφαρμόσιμος, τότε δεν υπάρχει ασάφεια στο τρόπο με τον οποίο προσδιορίζουμε τις πληρωμές των πρακτόρων για να είναι ο μηχανισμός DSIC. Ακολουθεί η απόδειξη του λήμματος

Απόδειξη. Έστω ένα περιβάλλον μίας παραμέτρου και θεωρήστε έναν κανόνα κατανομής $\mathbf{x}$, ο οποίος μπορεί να είναι ή να μην είναι μονοτονικός. Υποθέστε ότι υπάρχει ένας κανόνας πληρωμής $\mathbf{p}$ τέτοιος ώστε το $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ να είναι ένας μηχανισμός DSIC. Τώρα ποιά θα μπορούσε να είναι το $\mathbf{p}$; Το πλάνο της απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε τον αυστηρό περιορισμό DSIC.

Θυμηθείτε τη συνθήκη DSIC: για κάθε πράκτορα i , κάθε πιθανή ιδιωτική αποτίμηση v_i , και κάθε διάνυσμα προσφορών t_{-i} από τους άλλους πράκτορες, πρέπει η χρησιμότητα του i να γίνεται μέγιστη όταν αποκαλύπτει τον πραγματικό τύπο. Προς το παρόν, θεωρείστε έναν συγκεκριμένο πράκτορα i και το διάνυσμα t_{-i} . Για συντομία γράψτε $x(z)$ για την κατανομή $x_i(z, t_{-i})$ και $p(z)$ για την πληρωμή $p_i(z, t_{-i})$ του i όταν υποβάλλει προσφορά z . Το σχήμα 5.1 δίνει δύο παραδείγματα μιας πιθανής καμπύλης κατανομής x ως συνάρτηση του z .



Σχήμα 5.1: Γραφήματα κατανομής $x(\cdot)$, Βιβλίο "Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory Tim Roughgarden".

Υποθέστε ότι το $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ είναι DSIC και θεωρήστε ότι $0 \leq y < z$. Επειδή ο πράκτορας i μπορεί να έχει ιδιωτική αποτίμηση z σε συνδυασμό με το ότι είναι ελεύθερος να υποβάλλει ψευδή προσφορά y , η συνθήκη DSIC απαιτεί:

$$\underbrace{z \cdot x(z) - p(z)}_{\text{χρησιμότητα απο την δήλωση της προσφοράς } z} \geq \underbrace{z \cdot x(y) - p(y)}_{\text{χρησιμότητα απο την δήλωση της προσφοράς } y}. \quad (5.16)$$

Ακόμα και στη περίπτωση που ο πράκτορας i έχει ιδιωτική αποτίμηση y σε συνδυασμό με το ότι μπορεί να υποβάλει την ψευδή προσφορά z , το $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ πρέπει να ικανοποιεί:

$$\underbrace{y \cdot x(y) - p(y)}_{\text{χρησιμότητα απο τη δήλωση της προσφοράς } y} \geq \underbrace{y \cdot x(z) - p(z)}_{\text{χρησιμότητα απο την δήλωση της προσφοράς } z}. \quad (5.17)$$

Το λήμμα του Myerson στην ουσία προσπαθεί να βρεί τον κανόνα πληρωμής $\mathbf{p}$ δεδομένου του κανόνα κατανομής $\mathbf{x}$. Επομένως απο τις ανισότητες (5.16) και (5.17) προκύπτει ότι η διαφορά $p(y) - p(z)$ φράσσεται από κάτω και πάνω:

$$z \cdot [x(y) - x(z)] \leq p(y) - p(z) \leq y \cdot [x(y) - x(z)]. \quad (5.18)$$

Βέβαια αυτός ο κανόνας κατανομής $\mathbf{x}$ είναι μονοτονικός. Η απόδειξη της μονοτονικότητας περιγράφεται στο λήμμα 1 που ακολουθεί στη συνέχεια. Μπορούμε να υποθέσουμε για τη συνέχεια της απόδειξης ότι το $\mathbf{x}$ είναι μονοτονικό.

Ας λάβουμε την περίπτωση όπου το x είναι μια σταθερή καταμήματα συνάρτηση, όπως στο Σχήμα 5.1. Το γράφημα της κατανομής x είναι επίπεδο εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό "αλμάτων". Στην εξίσωση (5.18), σταθεροποιούμε ένα z και έστω y να τείνει(πλησιάζει) στο z από πάνω και συγχρόνως $y > z$. Παίρνο-

ντας το όριο $y \rightarrow z$ πάνω στην (5.18), και η αριστερή και η δεξιά πλευρά γίνεται 0 όταν η κατανομή x δεν παρουσιάζει "άλμα" με την έννοια ότι δεν αλλάζει απότομα στο z αλλά παραμένει διαρκώς συνεχής. Εάν υπάρχει άλμα μεγέθους h στο z , η διαφορά $x(y) - x(z) \rightarrow h$ καθώς $y \rightarrow z$ και το όριο της δεξιάς και αριστερής πλευράς είναι $z \cdot h$. Επομένως προκύπτει ο παρακάτω περιορισμός στο κανόνα πληρωμής p για κάθε z :

$$\text{άλμα της } p \text{ στο } z = z \cdot [\text{άλμα της } x \text{ στο } z]. \quad (5.19)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση με δεδομένο ότι $p(0) = 0$, έχουμε δημιουργήσει τον τύπο πληρωμής για κάθε πράκτορα i με προσφορές t_{-i} απο τους άλλους πράκτορες και προσφορά t_i απο τον πράκτορα i ο οποίος δίνεται από:

$$p_i(t_i, t_{-i}) = \sum_{j=1}^l z_j \cdot [\text{άλμα της } x_i(\cdot, t_{-i}) \text{ στο } z_j]. \quad (5.20)$$

όπου $z_1, \dots, z_l$ είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει απότομα η κατανομή $x_i(\cdot, t_{-i})$ τα οποία περιέχονται στο κλειστό διάστημα $[0, t_i]$.

Μια παρόμοια επιχειρηματολογία ισχύει όταν το x είναι μια μονοτονική συνάρτηση που δεν είναι τμηματικά σταθερή. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η κατανομή x είναι παραγωγίσιμη. Επομένως υπάρχει η παράγωγος $x'(z)$ δηλαδή το όριο $\lim_{y \rightarrow z} \frac{x(y) - x(z)}{y - z}$. Αν διαιρέσουμε την (5.18) με τη διαφορά $y - z$ και πάρουμε το όριο καθώς το $y \rightarrow z$, προκύπτει ότι:

$$p'(z) = z \cdot x'(z).$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση στο κλειστό διάστημα $[0, t_i]$ παίρνουμε τον τύπο πληρωμής:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_i} p'(z) dz &= \int_0^{t_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z, t_{-i}) dz \Rightarrow \\ p_i(t_i, t_{-i}) &= \int_0^{t_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z, t_{-i}) dz \end{aligned} \quad (5.21)$$

για κάθε πράκτορα i , προσφορά t_i και διάνυσμα προσφορών απο τους υπόλοιπους πράκτορες t_{-i} .

Συνοψίζουμε ότι αυτοί οι τύποι πληρωμής παρέχουν έναν κανόνα πληρωμής που μόνο αυτός έχει τη δυνατότητα μαζί με τον μονοτονικό κανόνα κατανομής που θεωρήσαμε στην αρχή να σχηματίσουν ένα μηχανισμό συμβατό με τα κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής. Αξίζει να υπογραμμιστεί ότι όταν έχουμε έναν μη μονοτονικό κανόνα κατανομής $\mathbf{x}$ τότε αυτός ο κανόνας πληρωμής $\mathbf{p}$ δεν μπορεί να επεκτείνεται και να τοποθετήσει το $\mathbf{x}$ σε έναν μηχανισμό DSIC.

Θα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας κάποια γραφήματα ότι αν η κατανομή $\mathbf{x}$ είναι μονοτονική, τμηματικά σταθερή, και η πληρωμή $\mathbf{p}$ ορίζεται από τον τύπο (5.20), τότε ο μηχανισμός $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ είναι DSIC.

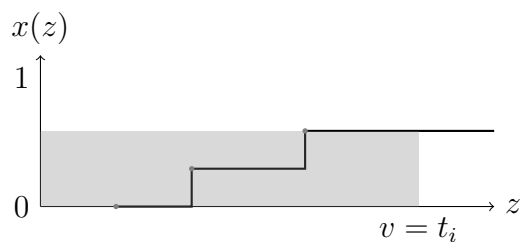
Η ίδια λογική ισχύει γενικότερα και για μονοτονικούς κανόνες κατανομής που δεν είναι σταθεροί κατα τμήματα, με πληρωμές που δίνονται σύμφωνα με τον τύπο (5.21). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη και των τριών τμημάτων του λήμματος του Myerson.

Οι εικόνες (α)-(ι) στο σχήμα 5.2 αναπαριστούν την χρησιμότητα ενός πράκτορα όταν είναι ειλικρινής, αποκαλύπτοντας την ιδιωτική του αποτίμηση, όταν υπερπροσφέρει δηλαδή αναφέροντας μια προσφορά μεγαλύτερη της ιδιωτικής του αποτίμησης καθώς και όταν υποπροσφέρει δηλώνοντας προσφορά μικρότερη της αποτίμησης του. Σε αυτές τις τρεις περιπτώσεις σχεδιάζεται η ίδια καμπύλη κατανομής $x(z)$ και η αποτίμηση του πράκτορα είναι v . Θυμίζουμε ότι η χρησιμότητα του πράκτορα όταν υποβάλλει προσφορά t_i είναι ίση με $v \cdot x(t_i) - p(t_i)$. Η εικόνα του πρώτου όρου δηλαδή του $v \cdot x(t_i)$ είναι το ζωγραφισμένο ορθογώνιο πλάτους v και ύψους $x(t_i)$ (Σχήμα 5.2 (α)-(γ)). Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.20), μπορούμε να προσδιορίσουμε την πληρωμή $p(t_i)$ ως το άθροισμα των εμβαδών των ζωγραφισμένων περιοχών (ορθογώνια) που βρίσκονται αριστερά της καμπύλης κατανομής, οι οποίες έχουν πλάτος τα σημεία στα οποία μεταβάλλεται ξαφνικά και προς τα πάνω η κατανομή $x(z)$ και ύψος τα άλματα που παρουσιάζει η κατανομή σε αυτά τα σημεία στο κλειστό διάστημα $[0, t_i]$ (Εικόνες 5.2(δ)-(ζ)). Η χρησιμότητα που λαμβάνει ο πράκτορας είναι η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο όρων όπως απεικονίζεται στα γραφήματα (η)-(ι). Στη πρώτη περίπτωση που ο πράκτορας αποκαλύπτει τον πραγματικό του τύπο t_i , η χρησιμότητα του είναι η περιοχή κάτω από την καμπύλη κατανομής στο $[0, v]$.

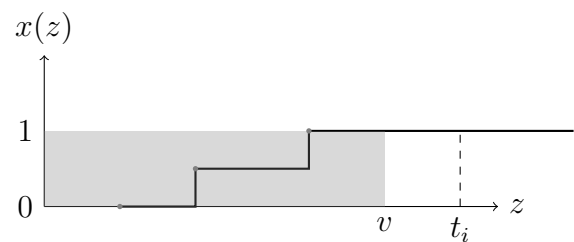
Στη δεύτερη περίπτωση που ο πράκτορας δηλώνει προσφορά t_i μεγαλύτερη της ιδιωτικής αποτίμησης v η χρησιμότητα που αποκομίζει περιγράφεται από την περιοχή στο $[0, v]$ κάτω από την καμπύλη κατανομής που συζητούσαμε στη περίπτωση όπου $t_i = v$ μείον την περιοχή που εντοπίζεται πάνω από την καμπύλη κατανομής στο εύρος $[v, t_i]$. Με άλλα λόγια σε αυτή τη περίπτωση λαμβάνει μικρότερη χρησιμότητα σε σχέση με την πρώτη όπως φαίνεται και στο γράφημα (θ).

Όταν ο πράκτορας δηλώνει προσφορά $t_i < v$ παρατηρούμε στο γράφημα (ι) ότι η χρησιμότητα του δίνεται από την περιοχή που βρίσκεται κάτω από τη καμπύλη κατανομής στο εύρος $[0, v]$.

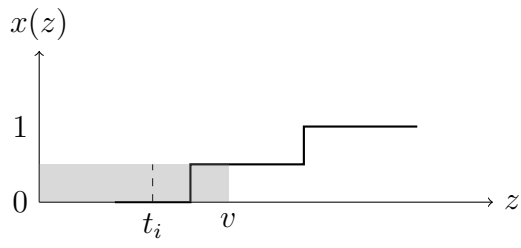
Αντιλαμβανόμαστε ότι ο πράκτορας λαμβάνει τη μεγαλύτερη χρησιμότητα στο γράφημα (η) όταν προσφέρει την πραγματική του αποτίμηση v .



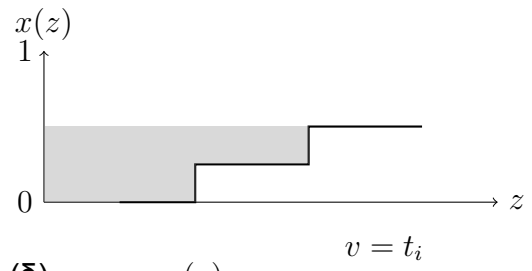
(α) $v \cdot x(v)$



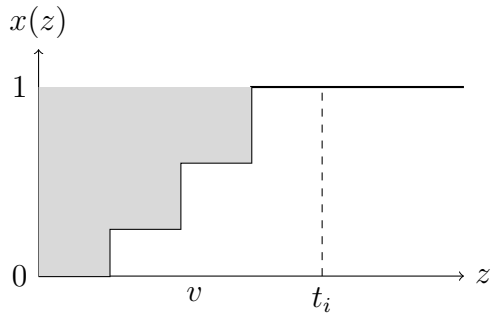
(β) $v \cdot x(t_i)$ με $t_i > v$



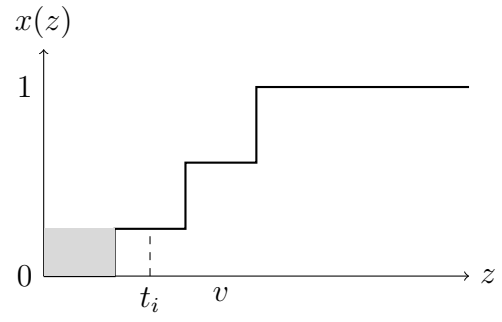
(γ) $v \cdot x(t_i) \mu \varepsilon t_i < v$



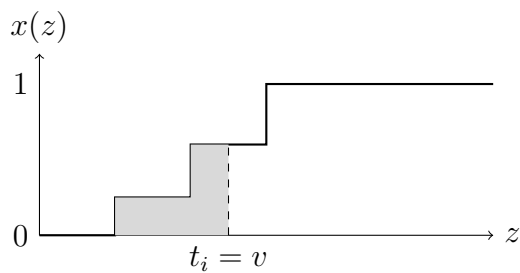
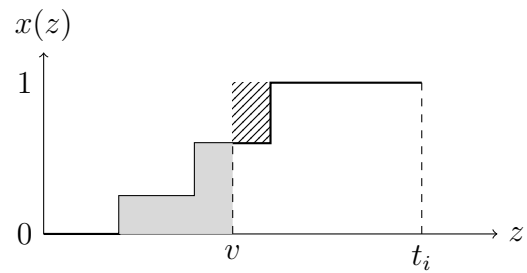
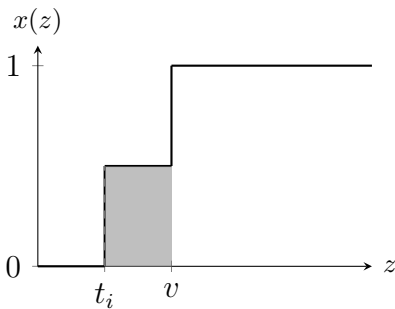
(δ) $p(v)$



(ε) $p(t_i) \mu \varepsilon t_i > v$



(ζ) $p(t_i) \mu \varepsilon t_i < v$

(η) χρησιμότητα με $t_i = v$ (θ) χρησιμότητα με $t_i > v$ (ι) χρησιμότητα με $t_i < v$

Σχήμα 5.2: Απόδειξη μέσω εικόνων ότι ο κανόνας πληρωμής της εξίσωσης (5.20), σε συνδυασμό με τον δοσμένο μονοτονικό και τμηματικά σταθερό κανόνα κατανομής δημιουργεί έναν μηχανισμό DSIC, Βιβλίο "Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory Tim Roughgarden". $\square$

Λήμμα 1. Έστω x ένας κανόνας κατανομής. Ισχύει ότι

$$x \text{ εφαρμόσιμος} \Rightarrow x \text{ μονοτονικός}$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο x είναι εφαρμόσιμος και όχι μονοτονικός. Επομένως υπάρχουν προσφορές y, z με $z > y$ αλλά $x(z) < x(y)$. Αφού $x(z) < x(y)$ τότε $x(y) - x(z) > 0$. Έστω $k = x(y) - x(z)$ οπότε από την (5.18) έχουμε

$$z \cdot k \leq p(y) - p(z) \leq y \cdot k.$$

Άρα

$$z \cdot k \leq y \cdot k \Rightarrow z \leq y.$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει είναι άτοπο εξαιτίας της αρχικής μας υπόθεσης ότι το $z > y$. Άρα αν ένας κανόνας κατανομής είναι μή μονοτονικός τότε δεν μπορεί να είναι εφαρμόσιμος. Με άλλα λόγια καταλήξαμε ότι ο εφαρμόσιμος κανόνας κατανομής x που υποθέσαμε στην αρχή είναι μονοτονικός. $\square$

Παράδειγμα (Λήμμα του Myerson).

Σε μια δημοπρασία δεύτερης τιμής για ένα αντικείμενο, έχουμε δύο πράκτορες i και j όπου ο καθένας έχει μια ιδιωτική αποτίμηση για αυτό το αντικείμενο. Έστω ότι η αποτίμηση του πράκτορα i είναι t_i , η αποτίμηση του πράκτορα j είναι t_j και t το διάνυσμά τους. Ο μηχανισμός δημοπρασίας αποτελείται από έναν μονοτονικό και τμηματικά σταθερό κανόνα κατανομής $x_i(t)$ όπου $x_i(t) \in \{0, 1\}$ και

συγκεκριμένα

$$x_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t_i < t_j \\ 1 & \text{αν } t_i > t_j \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι εάν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα πληρωμής της δημοπρασίας Vickrey ο μηχανισμός (x, p) που παράγεται είναι συμβατός με κίνητρα κυρίως αρχής στρατηγικής.

Σε πρώτη φάση θα υπολογίσουμε τα χρηματικά ποσά που αναμένεται να πληρώσουν αυτοί οι δύο παίκτες.

Έχουμε ότι

$$p_i(t) = \begin{cases} t_j & \text{αν } t_i > t_j \\ 0 & \text{αν } t_i < t_j \\ \frac{1}{2}t_j & \text{αν } t_i = t_j \end{cases}$$

Σε δεύτερη φάση θα υπολογίσουμε τη χρησιμότητα για κάθε πλειοδότη χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.14)

Έχουμε ότι

$$u_i(t) = \begin{cases} t_i - t_j & \text{αν } t_i > t_j \\ 0 & \text{αν } t_i < t_j \\ \frac{1}{2}t_j & \text{αν } t_i = t_j \end{cases}$$

Αν η πραγματική αποτίμηση του i για το αντικείμενο ήταν $t_i = 10$ και του j $t_j = 9$ τότε βρισκόμαστε στη πρώτη περίπτωση όπου κερδίζει τη δημοπρασία λαμβάνοντας μέγιστη ωφέλεια 1. Αν δήλωνε ψέματα για την αποτίμηση του για παράδειγμα 9.5 τότε πάλι θα κέρδιζε τη δημοπρασία αλλά θα είχε μικρότερο όφελος 0.5. Επομένως δεν τον συμφέρει να πεί ψέμα διότι δεν κερδίζει κάτι παραπάνω. Αν η πραγματική αποτίμηση του i ήταν 9 και του j 10 τότε βρισκόμαστε στη δεύτερη περίπτωση όπου χάνει τη δημοπρασία και έχει όφελος 0. Αν για παράδειγμα δήλωνε μια ψεύτικη αποτίμηση και συγκεκριμένα 8 τότε πάλι δεν θα είχε κανένα όφελος. Έτσι και σε αυτήν την περίπτωση ο i δεν αναμένει να κερδίσει κάτι παραπάνω λέγοντας ψέματα. Στη τρίτη περίπτωση όταν ο πράκτορας i δηλώσει μια αποτίμηση ίση με αυτήν του j για παράδειγμα 10 η επιλογή του νικητή γίνεται στη τύχη. Δεδομένου ότι έχουμε δύο πράκτορες ο καθένας τους έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$ να κερδίσει το αντικείμενο και $\frac{1}{2}$ να το χάσει. Επομένως ο πράκτορας i αναμένεται να πληρώσει $\frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}0$ και να λάβει ωφέλεια 5. Αν δήλωνε 9 τότε περνάμε στη δεύτερη περίπτωση όπου χάνει τη δημοπρασία και δεν έχει κανένα όφελος. Επομένως ο i έχει κίνητρο να φανερώσει την πραγματική του αποτίμηση και σε αυτήν την περίπτωση. Άρα το λήμμα του Myerson εφαρμόζεται σε αυτόν τον μηχανισμό δημοπρασίας.

Βέβαια το λήμμα του Myerson δεν εφαρμόζεται στις δημοπρασίες πρώτης τιμής σφραγισμένων προσφορών. Σε μια δημοπρασία πρώτης τιμής κάθε πράκτορας έχει μια αποτίμηση για ένα αντικείμενο που δεν είναι φανερή στους υπολοίπους. Ξεκινούν να υποβάλλουν προσφορές μυστικά στον πωλητή και εκείνος ο πράκτορας με τη μεγαλύτερη προσφορά κερδίζει το αντικείμενο και πληρώνει

τη τιμή που πρόσφερε. Έστω δύο πράκτορες με αποτιμήσεις 100 και 60 για ένα αντικείμενο. Αν οι πράκτορες υποβάλλουν ως προσφορά την πραγματική τους αποτίμηση τότε ο πράκτορας 1 αφού έχει υποβάλλει 100 δηλαδή τη μεγαλύτερη προσφορά κερδίζει τη δημοπρασία και αγοράζει το αντικείμενο πληρώνοντας 100. Παρατηρούμε ότι δεν έχει κανένα κίνητρο να αποκαλύψει 100 διότι η ωφέλεια του δεν γίνεται μέγιστη παρα μόνο 0. Εάν υποβάλλει προσφορά μικρότερη από το 100 για παράδειγμα 65 τότε κερδίζει διότι το $65 > 60$ και αποκομίζει θετική ωφέλεια ίση με 35. Επομένως με τον κανόνα πληρωμής της πρώτης μεγαλύτερης προσφοράς δεν προκύπτει ένας μηχανισμός συμβατός με κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής.

Κεφάλαιο 6

Θεωρία Δημοπρασιών

6.1 Το μοντέλο της ανεξάρτητης ιδιωτικής αποτίμησης

Το επόμενο θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι μια απο τις πιο αξιοσημείωτες εφαρμογές του λήμματος του Myerson και είναι οι δημοπρασίες. Θα προσεγγίσουμε τη θεωρία δημοπρασιών απο την οπτική της θεωρίας παιγνίων όπου δημοπρασίες είναι μπεϋζιανά παίγνια ατελούς πληροφόρησης.

Το περιβάλλον της βασικής δημοπρασίας αποτελείται απο:

- Πλειοδότες $i = 1, \dots, n$ δηλαδή απο τα άτομα τα οποία υποβάλλουν προσφορές
- Ένα αντικείμενο προς πώληση
- Ο πλειοδότης i παρατηρεί ένα σήμα θ_i δηλαδή μια πληροφορία που μόνο ο ίδιος έχει πρόσβαση σε αυτήν και κανένας άλλος.
- Τα σήματα των πλειοδοτών $\theta_1, \dots, \theta_n$ είναι ανεξάρτητα.
- Η αποτίμηση του πλειοδότη i είναι $v_i = \theta_i$. και είναι αυτή που συζητήθηκε στην ενότητα 4.6.

Αξίζει να τονιστεί οτι για δυο πλειοδότες i, j η πραγματική πληροφορία του i για την εκτίμηση της αξίας του αντικειμένου δεν εξαρτάται απο το σήμα του j δηλαδή απο το πόσο έχει εκτιμήσει το αντικείμενο ο πλειοδότης j . Με απλά λόγια ο καθένας κάνει την αποτίμηση για το αντικείμενο ξεχωριστά. Επομένως η πληροφορία του j είναι ιδιωτική με την έννοια οτι δεν επηρεάζει την αποτίμηση κανενός άλλου.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε διάφορες μορφές δημοπρασιών ξεκινώντας με τις δημοπρασίες μοναδικού αντικειμένου.

6.2 Δημοπρασίες Μοναδικού Αντικειμένου

Για να αντιληφθούμε την έννοια αυτών των δημοπρασιών θα δώσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Θεωρείστε έναν πωλητή που έχει ένα μόνο αντικείμενο προς πώληση, όπως ένα ελαφρώς μεταχειρισμένο smartphone. Αυτή είναι η περίπτωση σε μια δημοπρασία προκαθορισμένης διάρκειας στο eBay. Υπάρχει ένας αριθμός n πλειοδοτών οι οποίοι θέλουν να αγοράσουν το αντικείμενο. Επιδιώκουμε να καταλάβουμε πώς συμπεριφέρονται οι πλειοδότες σε διάφορες μορφές δημοπρασιών. Για να εκπληρωθεί αυτό, έχουμε ανάγκη ένα μοντέλο για το τι επιθυμεί ένας πλειοδότης. Η πρώτη υπόθεση είναι ότι κάθε πλειοδότης i έχει μια μη αρνητική αποτίμηση v_i στο μυαλό του δηλαδή μια μέγιστη τιμή που είναι πρόθυμος να πληρώσει για το αντικείμενο που πωλείται. Επομένως, ο πλειοδότης i θέλει να αγοράσει το αντικείμενο όσο το δυνατόν φθηνότερα γίνεται, αρκεί η τιμή πώλησης να είναι το πολύ v_i . Μια άλλη σημαντική υπόθεση είναι ότι αυτή η αποτίμηση είναι ιδιωτική, δηλαδή δεν είναι γνωστή ούτε στον πωλητή ούτε στους άλλους πλειοδότες.

Το μοντέλο χρησιμότητας που χρησιμοποιούμε για τους πλειοδότες ονομάζεται μοντέλο της οιονεί γραμμικής χρησιμότητας και είναι το εξής. Αν ο πλειοδότης i χάσει στη δημοπρασία, η χρησιμότητά του είναι 0. Αν κερδίσει την δημοπρασία στην τιμή p , η οιονεί γραμμική χρησιμότητά του είναι $v_i - p$.

6.3 Δημοπρασίες Σφραγισμένων Προσφορών Πρώτης Τιμής

Τώρα θα δώσουμε έμφαση σε μια απλή κατηγορία δημοπρασιών τις λεγόμενες δημοπρασίες σφραγισμένης προσφοράς. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι:

1. Κάθε πλειοδότης i υποβάλλει ιδιωτικά μια προσφορά b_i στον πωλητή με τέτοιο τρόπο ώστε να μη μπορεί να τη παρατηρήσει κανείς μέσω ενός σφραγισμένου φακέλου, αν θέλετε.
2. Ο πωλητής αποφασίζει ποιός αγοράζει το αντικείμενο (αν υπάρχει κάποιος).
3. Ο πωλητής αποφασίζει ποιά θα είναι η τιμή πώλησης του.

Ένας τρόπος να εφαρμοστεί το βήμα 2 και να αποφασίσει τελικά ο πωλητής ποιός θα λάβει το αντικείμενο είναι να το παραχωρήσει σε αυτόν που υπέβαλλε τη μεγαλύτερη προσφορά. Έτσι αυτός με τη μεγαλύτερη προσφορά αγοράζει το αντικείμενο πληρώνοντας τη τιμή που προσέφερε. Αυτός είναι ο μόνος κανόνας που θεωρούμε σε αυτήν τη περίπτωση.

Όσον αφορά για το τρίτο βήμα υφίστανται διάφοροι τρόποι για τον καθορισμό της τιμής πώλησης από τον πωλητή. Ο τρόπος με τον οποίο αποφασίζει την τιμή πώλησης επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό το πώς συμπεριφέρονται οι πλειοδότες. Αν για παράδειγμα ο πωλητής είναι καλός(αλτρουιστής) και δεν χρεώνει τίποτα στον νικητή-πλειοδότη τότε η δημοπρασία θα εξελιχθεί σε ένα παίγνιο του ποιός υπέβαλλε τη μεγαλύτερη υπερβολική προσφορά. Απλούστερα παρατηρώντας κάθε πλειοδότης ότι ο νικητής αγοράζει το αντικείμενο χωρίς να πληρώνει απολύτως τίποτα θα αρχίζει να υποβάλλει όσο το δυνατόν μεγαλύτερες εξωφρενικές προσφορές γίνεται προκειμένου να κατακτήσει το αντικείμενο.

Άρα ο τρόπος να μην χρεώσει τίποτα στον νικητή ωθεί τους πλειοδότες να υιοθετήσουν τέτοιες συμπεριφορές.

6.4 Δημοπρασίες Δεύτερης Τιμής και Κυρίαρχες Στρατηγικές

Τώρα ένας άλλος τύπος δημοπρασιών ενός αντικειμένου είναι οι δημοπρασίες Vickrey ή δεύτερης τιμής.

Για να αντιληφθούμε το νόημα ας εξετάσουμε τι γίνεται όταν είστε νικητής σε μια δημοπρασία στο eBay όπως είδαμε στην ενότητα 5.2. Εάν έχετε υποβάλλει προσφορά \$110 και κερδίσετε αυτό δεν σημαίνει ότι θα πληρώσετε αυτή την τιμή. Το eBay χρησιμοποιεί έναν πλειοδότη που εκπροσωπεί εσάς ο οποίος αυξάνει την προσφορά σας για λογαριασμό σας μέχρι να φτάσει το μέγιστο ποσό που είστε διατεθειμένος να πληρώσετε, ή μέχρι να γίνετε ο πλειοδότης με την υψηλότερη προσφορά. Για παράδειγμα, αν η αμέσως επόμενη υψηλότερη προσφορά είναι \$100, τότε θα πληρώσετε μόνο \$100 αντί για τη μέγιστη προσφορά σας των \$110. Εάν κερδίσετε μια δημοπρασία στο eBay, η τιμή πώλησης είναι δηλαδή η δεύτερη υψηλότερη προσφορά.

Μια δημοπρασία Vickrey είναι μια δημοπρασία σφραγισμένων προσφορών στην οποία ο πλειοδότης που έχει υποβάλλει τη μεγαλύτερη προσφορά κερδίζει και πληρώνει μια τιμή ίση με τη δεύτερη υψηλότερη προσφορά (Vickrey, W.1961). Για να αναφέρουμε την πιο σπουδαία ιδιότητα των δημοπρασιών δεύτερης τιμής, εμείς ορίζουμε μια κυρίαρχη στρατηγική ως μια στρατηγική (δηλαδή, μια προσφορά) που μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα ενός πλειοδότη, ανεξάρτητα από τις προσφορές που υποβάλλουν οι άλλοι πλειοδότες.

Πρόταση 6.4.1. (Κίνητρα στις Δημοπρασίες Δεύτερης Τιμής). Σε μια δημοπρασία δεύτερης τιμής, κάθε πλειοδότης i έχει μια κυρίαρχη στρατηγική: να υποβάλλει ως προσφορά t_i την ιδιωτική του αποτίμηση v_i .

Βέβαια στις δημοπρασίες πρώτης τιμής δεν έχει κανένα απολύτως νόημα ο πλειοδότης να υποβάλλει ως προσφορά την ιδιωτική του αποτίμηση v_i . Γνωρίζει ότι εάν υποβάλλει την ιδιωτική του αποτίμηση v_i και κερδίσει τότε θα πληρώσει αυτό το ποσό και η χρησιμότητα θα είναι μηδενική.

Απόδειξη. Έστω έναν τυχαίο πλειοδότη i με αποτίμηση v_i και τις προσφορές $\mathbf{t}_{-i}$ των υπόλοιπων πλειοδοτών. Εδώ, $\mathbf{t}_{-i}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{t}$ που περιέχει όλες τις προσφορές εκτός από την προσφορά του πλειοδότη i . Θα αποδείξουμε ότι η χρησιμότητα του πλειοδότη i γίνεται μέγιστη όταν η προσφορά του $t_i = v_i$.

Ας ορίσουμε $B = \max_{j \neq i} t_j$, δηλαδή την μεγαλύτερη προσφορά που προέρχεται από έναν άλλο πλειοδότη. Αυτό που είναι σημαντικό στις δημοπρασίες δεύτερης τιμής είναι ότι ενώ υπάρχουν άπειρες δυνατές προσφορές που θα μπορούσε να υποβάλλει ο i , μόνο δύο αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν. Αν $t_i < B$, τότε ο i χάνει και λαμβάνει χρησιμότητα 0. Αν $t_i \geq B$, τότε ο i κερδίζει στη τιμή B και λαμβάνει χρησιμότητα $v_i - B$.

Καταλήγουμε εξετάζοντας δύο περιπτώσεις:

Πρώτον αν $v_i < B$, η μέγιστη χρησιμότητα που μπορεί να λάβει ο πλειοδότης i είναι

$$\max\{0, v_i - B\} = 0$$

και το καταφέρνει αυτό προσφέροντας την ιδιωτική του αποτίμηση (και χάνει). Δεύτερον, αν $v_i \geq B$ κερδίζει και η μέγιστη χρησιμότητα που μπορεί να λάβει ο πλειοδότης i είναι

$$\max\{0, v_i - B\} = v_i - B.$$

□

6.5 Ιδανικές Δημοπρασίες

Οι δημοπρασίες δεύτερης τιμής θεωρούνται "ιδανικές" επειδή συνδυάζουν τρεις σημαντικές ιδιότητες. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό της πρώτης ιδιότητας.

Ορισμός 6.5.0.1. (Συμβατότητα με Κίνητρα Κυρίαρχης Στρατηγικής). Μια δημοπρασία είναι συμβατή με κίνητρα κυρίαρχης στρατηγικής (DSIC) αν η ειλικρινής προσφορά (υποβολή της πραγματικής αποτίμησης) είναι πάντα μια κυρίαρχη στρατηγική για κάθε πλειοδότη και αν οι ειλικρινείς πλειοδότες έχουν πάντα μη αρνητική χρησιμότητα.

Ορίζουμε την κοινωνική ευημερία ενός αποτελέσματος μιας δημοπρασίας ενός αντικειμένου με τον τύπο

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i, \tag{6.1}$$

όπου x_i λαμβάνει την τιμή 1 αν ο i κερδίζει και 0 αν ο i χάνει. Επειδή υπάρχει μόνο ένα αντικείμενο, έχουμε τον περιορισμό ότι

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq 1.$$

Με άλλα λόγια η κοινωνική ευημερία στη περίπτωση που υπάρχει νικητής είναι η αποτίμηση του νικητή διαφορετικά αν δεν υπάρχει νικητής θα είναι 0. Μια

δημοπρασία μεγιστοποιεί την ευημερία με την προϋπόθεση ότι οι προσφορές είναι ειλικρινείς, και το αποτέλεσμα της δημοπρασίας έχει την υψηλότερη δυνατή κοινωνική ευημερία.

Θεώρημα 6.5.0.1. (Οι Δημοπρασίες Δεύτερης τιμής είναι Ιδανικές). Μια δημοπρασία ενός αντικειμένου δεύτερης τιμής πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Είναι μια DSIC δημοπρασία (*Dominant Strategy Incentive Compatible*).
- Μεγιστοποιεί την ευημερία.
- Μπορεί να εκτελεστεί σε πραγματικό χρόνο, γρήγορα χωρίς καθυστερήσεις ώστε να είναι πρακτικά χρήσιμη.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

7.1 Ανακεφαλαίωση των Βασικών Εννοιών του Λήμματος του Myerson

Σε αυτήν την εργασία επιχείρησα να αναπτύξω το λήμμα του Myerson που είναι ένα βασικό εργαλείο για το πώς σχεδιάζουμε δημοπρασίες και γενικότερα μηχανισμούς όπου πολλοί άνθρωποι διεκδικούν κάτι, όπως για παράδειγμα ένα αντικείμενο. Το λήμμα αυτό μας λέει πότε μπορούμε να φτιάξουμε έναν μηχανισμό που να είναι δίκαιος για όλους και να ενθαρρύνει τους συμμετέχοντες να αποκαλύπτουν την αλήθεια για το τι πραγματικά θέλουν ή για το πόσο εκτιμούν το αντικείμενο που διεκδικούν.

Συγκεκριμένα, το λήμμα του Myerson αναφέρει ότι αν έχουμε έναν κανόνα όπου με βάση αυτόν μοιράζουμε το αντικείμενο που είναι μονοτονικός με την έννοια ότι αν κάποιος υποβάλλει μεγαλύτερη προσφορά κερδίζει περισσότερα αντικείμενα, τότε μπορούμε να βρούμε έναν μοναδικό και σαφή τρόπο να προσδιορίσουμε το ποσό που θα πληρώσει ο καθένας από τους συμμετέχοντες, έτσι ώστε όλοι να έχουν κίνητρο να είναι ειλικρινείς. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η δημοπρασία δεύτερης τιμής, όπου ο νικητής της πληρώνει το ποσό της δεύτερης υψηλότερης προσφοράς.

7.2 Κριτική Αξιολόγηση των Βασικών Ευρημάτων

Το λήμμα του Myerson είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι μας παρέχει μια απλή και ξεκάθαρη συνταγή προκειμένου να δημιουργήσουμε δημοπρασίες όπου ο καθένας από τους συμμετέχοντες δεν αναμένει να κερδίσει κάτι παραπάνω λέγοντας ψέματα για το πόσο θέλει το αντικείμενο. Αυτό το λήμμα κάνει τις διαδικασίες πιο διαφανείς και δίκαιες. Επιπλέον, το γεγονός ότι υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος να καθορίσουμε τις πληρωμές για κάθε τέτοιο μονοτονικό κανόνα κατανομής, κάνει τα πράγματα πολύ πιο ξεκάθαρα και προβλέψιμα.

Ωστόσο, το λήμμα έχει και όρια. Λειτουργεί καλά μόνο σε περιπτώσεις όπου κάθε συμμετέχων έχει να δηλώσει μόνο έναν αριθμό (π.χ. πόσο θέλει το αντικεί-

μενο). Σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, όπου οι συμμετέχοντες έχουν να δηλώσουν περισσότερες πληροφορίες απο ότι μία έχοντας για παράδειγμα σε μια δημοπρασία, πολλές αποτιμήσεις για διαφορετικά αντικείμενα δεν είναι ξεκάθαρο ότι ο κα νόνας κατανομής είναι μονοτονικός και έτσι το λήμμα δεν ισχύει. Επίσης, το λήμμα δίνει κυρίως έμφαση στο να είναι όλοι οι πράκτορες ειλικρινείς.

7.3 Κοινωνικοοικονομικές Προεκτάσεις του Λήμματος

Το λήμμα του Myerson έχει επηρεάσει σημαντικά τον τρόπο που σχεδιάζονται δημοπρασίες σε πολλούς τομείς της οικονομίας. Χάρη σε αυτό, έχουν δημιουργηθεί δημοπρασίες που είναι πιο δίκαιες και διαφανείς, όπως οι δημοπρασίες δεύτερης τιμής για αγορές μέσω διαδικτύου. Πρόκειται ουσιαστικά για δημοπρασίες που γίνονται στην ηλεκτρονική πλατφόρμα ebay (π.χ. για αυτοκίνητα, κινητά τηλέφωνα) όπου οι νικητές που συμμετέχουν σε αυτές αγοράζουν το προϊόν που επιθυμούν στο διαδίκτυο καταβάλλοντας ένα χαμηλότερο κόστος δηλαδή ένα κόστος που δεν αντιστοιχεί στο ποσό της υψηλότερης προσφοράς. Σε αυτή τη περίπτωση το ποσό που αναμένεται να πληρώσουν οι νικητές είναι η δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά συν μια μικρή προσαύξηση και είναι ταυτόχρονα το χρηματικό ποσό που υπαγορεύει το λήμμα του Myerson.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο είναι ότι το λήμμα χρησιμοποιείται στη κατανομή δημοσίων πόρων. Όταν ένα κράτος θέλει να κατανείμει έναν πολύτιμο πόρο (π.χ. έργα υποδομής, κτίρια, γέφυρες), διοργανώνει δημοπρασίες. Οι ενδιαφερόμενοι (εργολάβοι) υποβάλλουν προσφορές που στην ουσία είναι το κόστος που εκτιμούν για το συγκεκριμένο έργο προκειμένου να το αναλάβουν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο εργολάβος που έχει υποβάλλει τη χαμηλότερη προσφορά για το έργο κερδίζει και αναλαμβάνει την κατασκευή του. Το λήμμα του Myerson δίνει μια σαφή τεχνική για να σχεδιαστεί αυτή η δημοπρασία έτσι ώστε:

- όλοι οι εργολάβοι να έχουν κίνητρο να αποκαλύψουν το κόστος που έχουν εκτιμήσει πραγματικά για το δημόσιο έργο παρατηρώντας ότι δεν είναι στο συμφέρον τους να πουν ψέματα.
- Η διαδικασία να είναι διαφανής και δίκαιη για όλους

7.4 Μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας

Το λήμμα του Myerson αναπτύχθηκε αρχικά για περιβάλλοντα μιας παραμέτρου όπως στη θεωρία δημοπρασιών όπου κάθε πράκτορας κατέχει μόνο μία ιδιωτική πληροφορία, την αποτίμηση ανα μονάδα αγαθού. Βέβαια το συγκεκριμένο λήμμα δεν ισχύει όταν έχουμε αρχικά ένα σύνολο αντικειμένων διαφορετικής φύσεως προς πώληση δηλαδή σε περιβάλλοντα πολλών παραμέτρων. Σε αυτά κάθε πλειοδότης δεν έχει μόνο μια αποτίμηση για ένα αντικείμενο, αλλά παρουσιάζεται

να έχει αποτιμήσεις και για άλλα διαφορετικά αντικείμενα. Με άλλα λόγια κάθε ένας απο τους πλειοδότες έχει προτιμήσεις ανάμεσα σε σύνολα αντικειμένων που είναι υποσύνολα του αρχικού συνόλου αντικειμένων.

Επομένως ένα σημαντικό ερώτημα που αναδύεται και αξίζει να ερευνηθεί στο μέλλον είναι κάτω υπο ποιές προϋποθέσεις μπορεί να εφαρμοστεί το λήμμα σε αυτά τα περιβάλλοντα ώστε να κατασκευαστούν και σε αυτή τη περίπτωση μηχανισμοί όπου η αποκάλυψη των πραγματικών προτιμήσεων απο τους πράκτορες είναι πάντα συμφέρουσα στρατηγική.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Arrow Kenneth J. (1950). A Difficulty in the Concept of Social Welfare Journal of Political Economy, pp. 328-346.

Bichler Martin (2018). Market Design A Linear Programming Approach to Auctions and Matching Technical University of Munich.

Brams Steven J. and Fishburn Peter C. (1978). Approval Voting American Political Science Review pp:831–847.

Harsanyi, J. C. (1967-1968). Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. Management Sci. 14 159-189, 320-334, 486-502.

Hurwicz Leonid (1973). The Design of Mechanisms for Resource Allocation, The American Economic Review, Vol. 63, No. 2, Papers and Proceedings of the Eighty-fifth Annual Meeting of the American Economic Association. pp. 1-30.

Jackson Matthew O. (2003). Mechanism Theory Humanities and Social Sciences 228-77, California Institute of Technology Pasadena, California 91125, U.S.A.

Levin Jonathan (2006). Teaching and Lecture Notes Choice under Uncertainty Stanford University” (34 pages).

Levin Jonathan (2004). Teaching and Lecture Notes Auctions Stanford University (13 pages).

Leyton-Brown Kevin and Yoav Shoham (2008). Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction

Lieberman Bernhardt (1971). Resolving the Condorcet Paradox American Journal of Sociology, , pp. 540-559 (20 pages).

May, Kenneth O. (1952). A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision”. Econometrica. 20 (4): 680–684

Maskin, E. and Riley, J. G. (1980). Auctioning an Indivisible Object. Discussion Paper No. 87D, Kennedy School of Government, Harvard University.

Myerson, R. (1981). Optimal Auction Design. Mathematics of Operations Research, 6(1):58–73.

Myerson, R. B. (1979). Incentive Compatibility and the Bargaining Problem. Econometrica. 47 61-73.

Myerson, R. B. (1991). Game Theory Analysis of Conflict

Myerson, R. B. (2004). Comments on "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I-III": Harsanyi's Games with Incomplete

Information Management Science, Ten Most Influential Titles of "Management Science's" First Fifty Years(pp. 1818-1824 (7 pages).

Narahari Y. (2014). Game Theory and Mechanism Design Indian Institute of Science, India

Narahari Y.,Dinesh Garg ,Ramasuri Narayanam, Hastagiri Prakash (2009). Game Theoretic Problems in Network Economics and Mechanism Design Solutions Springer.

Neumann John and Morgenstern Oscar (1944). "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton, NJ: Princeton University Press.

Riley, J. G. and Samuelson, W. F. (1981), "Optimal Auctions". American Economic Review pp. 381-392

Roughgarden Tim (2016). Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory Stanford University, California.

Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. Journal of Finance.16 8-37.

Ηλεκτρονική Βιβλιογραφία

<https://home.uchicago.edu/rmyerson/>