ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Νίκη Χ. Κυριακίδου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2020

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Νίκη Χ. Κυριακίδου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αν. Καθηγητής Μιχαήλ Μπούτσικας (Επιβλέπων)
- Αν. Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης
- Αν. Καθηγητής Γεώργιος Ψαρράκος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

INTEREST RATE DERIVATIVES PRICING MODELS

By

Niki Ch. Kiriakidou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
December 2020

Στους γονείς μου

Χαράλαμπο και Αγγελική

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που στάθηκαν υλικά και ηθικά δίπλα μου σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Καταρχάς θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντά μου κ. Μπούτσικα Μιχαήλ Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Οι υποδείξεις του, οι συμβουλές του και η εμπιστοσύνη του βοήθησαν τα μέγιστα για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Θα ήθελα να αναφέρω ότι από τις πρώτες μέρες της εισαγωγής μου στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική» τον ξεχώρισα ανάμεσα στους καθηγητές μου, χάριν στον τρόπο διδασκαλίας του, στο ζήλο και την επιμέλεια με την οποία αντιμετώπιζε το κάθε μάθημα. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής κ. Πολίτη Κωνσταντίνο Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και τον κ. Ψαρράκο Γεώργιο Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Επίσης, θέλω να πω ένα ειλικρινές ευχαριστώ στον άνθρωπο που με βοήθησε, με καθοδήγησε και με ενέπνευσε από τις προπτυχιακές μου σπουδές στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Παναγιώτη Πιντέλα Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, ο οποίος συνεχίζει μέχρι και σήμερα να μου προσφέρει τις συμβουλές του, την στήριξη και την υποστήριξή του.

Εν συνεχεία, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη συνάδερφο και συμφοιτήτριά μου Ειρήνη Καπετάνου – Βασιλειάδου με την οποία ολοκληρώσαμε βήμα - βήμα μαζί το ταξίδι μας για την απόκτηση του μεταπτυχιακού μας, προσφέροντας η μία στην άλλη πολύτιμη βοήθεια και συμβουλές.

Θέλω να πω το πιο μεγάλο ευχαριστώ στον Δρ. Ιωάννη Λιβιέρη, ο οποίος με στηρίζει σε κάθε μου βήμα, με βοηθά να επιτυγχάνω τους στόχους μου, με παρακινεί να εμπλουτίζω τις γνώσεις μου και να μην επαναπαύομαι ποτέ. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι ο ίδιος αποτελεί παράδειγμα για όλα τα παραπάνω χάριν στον μηδαμινό εφησυχασμό του, στην αδιάκοπη προσπάθειά του και το μεράκι του για έρευνα.

Κλείνοντας, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου απέναντι στους γονείς μου Αγγελική Χατζηδημητρίου και Χαράλαμπο Κυριακίδη, στον παππού μου και στη γιαγιά μου, Σταμάτη και Ειρήνη Χατζηδημητρίου, καθώς χάρη στην πολύτιμη βοήθειά τους, τόσο υλική όσο και ψυχολογική, μπόρεσα να ολοκληρώσω ένα ένα τα βήματά μου στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και να έρχομαι κάθε μέρα ένα βήμα πιο κοντά στο στόχο μου.

Νίκη Κυριακίδου,

Αθήνα 2020

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η ανάλυση και παρουσίαση των υποδειγμάτων αποτίμησης Vasicek, Cox Ingersoll & Ross και Ho-Lee, τα οποία είναι από τα κυριότερα στοχαστικά μοντέλα για τη μελέτη της χρονικής εξέλιξης των επιτοκίων της αγοράς. Τα παραπάνω μοντέλα χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση επιτοκιακών παράγωγων προϊόντων. Επίσης, παρουσιάζονται και περιγράφονται τα δικαιώματα προαίρεσης ανώτατου και κατώτατου επιτοκίου (Cap/Floor), καθώς και οι συμβάσεις ανταλλαγής (Swaps), η τελική αξία των οποίων καθορίζεται από την διάρθρωση των επιτοκίων. Τέλος, μέσω της προσομοίωσης Monte – Carlo πραγματοποιείται η προσεγγιστική αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης ανώτατου επιτοκίου (Cap).

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει την ακόλουθη διάρθρωση. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται οι βασικοί ορισμοί και όλα τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα υποδείγματα αποτίμησης βραχυπρόθεσμου επιτοκίου των Vasicek, Cox Ingersoll & Ross και Ho- Lee. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τα δικαιώματα ανώτατου και κατώτατου επιτοκίου (Cap/Floor) και οι συμβάσεις ανταλλαγής (Swap). Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα από την προσομοίωση Monte-Carlo των υποδειγμάτων αποτίμησης επιτοκίου και οι τιμές του συμβολαίου Cap για κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα αφορούν το επιτόκιο Libor USD, Libor GBP και Libor EU και η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε σε R.

Λέξεις Κλειδιά: Επιτοκιακά παράγωγα προιόντα, μονο-παραγοντικά υποδείγματα, προσομοιώση Monte-Carlo.

Abstract

The purpose of this M.Sc. dissertation is the analysis and presentation of the stochastic models of Vasicek, Cox Ingersoll & Ross and Ho-Lee, which consist some of the most significant models for forecasting the evolution of market interest rates. These models are also used in order to evaluate interest rate derivatives. Furthermore, the interest rate derivatives Cap, Floor and Swap are presented and described, while their price is defined by the evolution of interest rates through time. Finally, the approximate evaluation of Cap derivatives is performed using Monte-Carlo simulation.

This MSc dissertation is organized as follows: Chapter 1 presents the definitions and the mathematical tools, which are needed for pricing interest rate derivatives. Chapter 2 presents the pricing models of Vasicek, Cox Ingersoll & Ross and Ho-Lee. Chapter 3 briefly presents the interest rate derivatives Cap, Floor and Swap. Finally, Chapter 4 presents the numerical results via Monte-Carlo simulation of interest rate pricing models and the prices of Cap contract for each case. The results concern the Libor USD, Libor GBP and Libor EU interest rates. All the simulations are performed using R.

Keywords: Interest rate derivatives, one-factor models, Monte-Carlo simulation

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Εισαγωγή

Οι ραγδαίες εξελίξεις στο χώρο των χρηματοοικονομικών δημιούργησαν την ανάγκη σύστασης νέων, πιο περίπλοκων χρηματοοικονομικών προϊόντων, με τη βοήθεια των οποίων οι δραστηριοποιούμενοι σε αυτόν τον κλάδο, προσπάθησαν να αντισταθμίσουν τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Τα προϊόντα αυτά ονομάζονται παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και αποτελούν τα ταχύτερα αναπτυσσόμενα χρηματοοικονομικά προϊόντα στη διεθνή αγορά. Η δημιουργία, η λειτουργία και η εφαρμογή τους βασίζεται στην ύπαρξη άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων ή υποκείμενων τίτλων όπως είναι τα επιτόκια. Τα προϊόντα αυτά προσφέρονται είτε απευθείας από τον χρηματοοικονομικό οργανισμό στον πελάτη, είτε βρίσκονται ελεύθερα στην αγορά. Η αξία των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων εξαρτάται από την αξία των υποκείμενων τίτλων. Δηλαδή, οι μεταβολές στην αξία των τελευταίων είναι ανάλογες με τις μεταβολές στην αξία των παραγώγων.

Συγκεκριμένα τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, των οποίων η δημιουργία βασίζεται στα επιτόκια και η τιμή τους μεταβάλλεται ανάλογα με τις αντίστοιχες μεταβολές στην τιμή των επιτοκίων, ονομάζονται επιτοκιακά παράγωγα. Τα επιτοκιακά παράγωγα δημιουργήθηκαν αρχικά ως εργαλεία αντιστάθμισης κινδύνου, και πιο συγκεκριμένα για να προστατέψουν τους πελάτες από τις απότομες μεταβολές των επιτοκίων. Ταυτόχρονα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως επενδυτικά εργαλεία. Παρόλα αυτά η δημιουργία των επιτοκιακών παραγώγων ήταν μία πρόκληση για τους επενδυτές, καθώς η τιμή των επιτοκίων δεν είναι σταθερή, ούτε μπορεί να ξέρει κανείς αν τα επιτόκια θα κινηθούν ανοδικά ή καθοδικά. Σκοπός λοιπόν είναι να εκτιμηθεί η κίνηση του επιτοκίου και κατ' επέκτασην να υπολογιστεί η αξία ενός επιτοκιακού παραγώγου.

Η ανάλυση της κίνησης των επιτοκίων είναι μια ιδιαιτέρως περίπλοκη διαδικασία. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν υποδείγματα αποτίμησης επιτοκίων όπως του Vasicek (1977), των Cox, Ingersoll και Ross (1985) και Ho-Lee (1986). Η μία προσπάθεια διαδέχθηκε την άλλη χρονολογικά, με σκοπό των συγγραφέων-ερευνητών της κάθε εργασίας να είναι η βελτιστοποίηση της διαδικασίας για την εκτίμηση των μελλοντικών τιμών των επιτοκίων με μεγαλύτερη ακρίβεια. Επακόλουθο της ακριβέστερης εκτίμησης της πορείας των επιτοκίων αποτελεί η αποτελεσματική τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων.

Κεφάλαιο 1.
Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Για να γίνει η παρουσίαση των υποδειγμάτων αποτίμησης επιτοκιακών παραγώγων, καθώς και η παρουσίαση των συμβολαίων πρέπει προηγουμένως να έχουν εξεταστεί κάποιες εισαγωγικές έννοιες, οι οποίες θα βοηθήσουν στην κατανόηση των υποδειγμάτων και αργότερα στην τιμολόγηση των παραγώγων.

Το υποκείμενο μέσο στα επιτοκιακά παράγωγα είναι το επιτόκιο. Το επιτόκιο χωρίζεται σε πολλές κατηγορίες μεταξύ των οποίων ανήκει και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Ορισμός 1.1.1. Ως *επιτόκιο* ορίζεται ο τόκος μιας νομισματικής μονάδας (π.χ. ένα ευρώ) για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (π.χ. ένα έτος) και το συμβολίζουμε με r.

Έστω ότι ένα άτομο Α δανείζει 1.000 Ευρώ σε ένα άτομο Β με επιτόκιο $r = 15\%$. Επομένως κάθε ένα Ευρώ αποδίδει τόκο 15 λεπτά του Ευρώ σε ένα έτος. Δηλαδή ο Β θα επιστρέψει στον Α ποσό ίσο με $1.000 \cdot (1 + r) = 1.000 \cdot (1 + 0.15) = 1.000 \cdot (1.15) = 1150$ Ευρώ. Συγκεκριμένα, θα επιστρέψει τα 1.000 Ευρώ που είχε δανειστεί αρχικά και τα 150 Ευρώ ως τόκο.

Για τα υποδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν για την αποτίμηση των επιτοκιακών παραγώγων, η μεταβλητή θα είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate), το οποίο ορίζεται ως συνάρτηση του χρόνου. Η εξέλιξη της τιμής των επιτοκίων μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνεχής στοχαστική ανέλιξη, η οποία ακολουθεί κίνηση Brown.

Στη συνέχεια, παρατίθενται βασικοί ορισμοί από τη θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την κατανόηση στη συνέχεια των υποδειγμάτων αποτίμησης επιτοκιακών παραγώγων. Περισσότερες και αναλυτικότερες πληροφορίες μπορεί να βρει ο αναγνώστης στα συγγράμματα των (Ross, et al., 1996), (Durrett, 1996), αλλά και πληθώρα παραδειγμάτων στο βιβλίο του (Χελιώτης, 2015).

Ορισμός 1.1.2. Έστω ένας μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Δηλαδή, το Ω είναι ένα μη κενό σύνολο και η $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο σύνολο αυτό. Έστω επίσης ένα μέτρο πιθανότητας P στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$. *Στοχαστική ανέλιξη* ή *διαδικασία* καλείται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X = \{X_t,\ t \in T\}$, που ορίζονται στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και παίρνουν τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

- Εάν $T = [0, \infty)$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t,\ t \in T\}$, καλείται στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου.

Ανάμεσα στις σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες συμπεριλαμβάνεται και η κίνηση *Brown*. Σε πολλά σημεία της βιβλιογραφίας την συναντάμε και ως διαδικασία Wiener. Η κίνηση οφείλει το όνομά της στον Άγγλο βοτανολόγο Robert Brown, ο οποίος το 1827 παρατήρησε ότι ένα σωματίδιο όταν βυθιστεί σε ένα υγρό ή αέριο κινείται άτακτα. Την συγκεκριμένη κίνηση του μορίου προσπάθησαν να περιγράψουν με ένα μαθηματικό μοντέλο καί αυτό αποτέλεσε το ξεκίνημα της ανάπτυξης ενός πολύ σημαντικού κλάδου της Θεωρίας Πιθανοτήτων και των Στοχαστικών Ανελίξεων, ο οποίος ονομάζεται κίνηση Brown. Το 1905, ο Albert Einstein έδειξε ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί αν εξηγηθεί υποθέτοντας ότι το μόριο βομβαρδίζεται συνεχώς από τα μόρια του νερού ή αερίου προκαλώντας απειροστές μετατοπίσεις σε απειροστά χρονικά διαστήματα. Η μετατόπιση του μορίου σε ένα χρονικό διάστημα $(s, t), 0 \leq s < t < \infty$, ως άθροισμα πολλών μετατοπίσεων μπορεί να θεωρηθεί ότι κατανέμεται Κανονικά σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ). Το 1923 ο Wiener γενικεύοντας τη θεωρία του Einstein κατέληξε σε ένα πλήρες μαθηματικό μοντέλο, το οποίο περιγράφει πλήρως την κίνηση Brown.

Ορισμός 1.1.3. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t,\ t \geq 0\}$, είναι *κίνηση Brown* ή *ανέλιξη του Wiener* με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ (τάση – drift parameter) και $\sigma > 0$ (μεταβλητότητα - volatility), και συμβολίζεται ως $BM(\mu, \sigma^2)$, εάν:

1. Η στοχαστική ανέλιξη έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις,
2. Η στοχαστική ανέλιξη κατανέμεται Κανονικά $\forall t > 0$, δηλαδή κάθε τ.μ. X_t έχει πυκνότητα
$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad \sigma > 0,$$
3. $X(0) = 0$, και η X είναι συνεχής στο μηδέν.

Στην πράξη, οι παράμετροι μ, σ εκτιμώνται από τις εκάστοτε παρατηρήσεις.

Παρά το γεγονός ότι η κίνηση Brown έχει πολύ καλές ιδιότητες, δεν είναι η κατάλληλη ανέλιξη για να περιγράψει την εξέλιξη της τιμής του επιτοκίου. Αυτό συμβαίνει διότι μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, κάτι που μερικές φορές είναι μη αποδεκτό για το υποκείμενο μέσο που μελετούμε και επίσης αποτελεί προσθετικό μοντέλο (έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις) ενώ στην πράξη οι τιμές αξιογράφων και επιτοκίων συνήθως ακολουθούν πολλαπλασιαστικά μοντέλα (με ανεξάρτητες ποσοστιαίες προσαυξήσεις). Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την χρήση μιας στοχαστικής ανέλιξης η οποία λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, ενώ έχει ανεξάρτητες ποσοστιαίες προσαυξήσεις και ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown.

Ορισμός 1.1.4 Έστω μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$. Καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown* με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ (τάση – drift parameter) και $\sigma > 0$ (μεταβλητότητα - volatility), και συμβολίζεται ως $GBM(\mu, \sigma^2)$, εάν ισχύει ότι $y \geq 0, t > 0$,

1. Η τυχαία μεταβλητή

$$\ln\frac{X_{t+y}}{X_y} \sim N(t\mu, t\sigma^2),\ \text{με}\ X_0 = 1$$

2. Η τυχαία μεταβλητή $\frac{X_{t+y}}{X_y}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_s, 0 \le s \le y$.

Λόγω της απλότητάς της, η γεωμετρική κίνηση Brown είναι ένα αποδεκτό μοντέλο για την μελέτη πολλών προβλημάτων που σχετίζονται με την εξέλιξη τιμών στο χρόνο, και στην παρούσα εργασία για την μελέτη της διάρθρωσης των επιτοκίων.

Συγκεκριμένες κατηγορίες στοχαστικών ανελίξεων έχουν πολύ καλές ιδιότητες. Μία από αυτές τις κατηγορίες είναι οι στοχαστικές ανελίξεις που έχουν την ιδιότητα martingale. Η σπουδαιότητα των martingales οφείλεται στο γεγονός ότι η σύγκλισή τους είναι εγγυημένη (martingale convergence theorem) και αυτό επιτρέπει την ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας εξαιρετικά χρήσιμης για πολλές εφαρμογές. Για περισσότερες πληροφορίες και παραδείγματα θα μπορούσε ο ενδιαφερόμενος να ανατρέξει στα συγγράμματα των (Apostol & Ablow, 1958) και (Mörters & Peres, 2010).

Ορισμός 1.1.5 Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \ge 0\}$ και $\mathcal{F}_t \coloneqq \sigma(X_s, s \le t)$, τότε το σύνολο $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ καλείται *διήθηση* (*filtration*). Γενικότερα, διήθηση καλείται μια οικογένεια σ-αλγεβρών $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ με την ιδιότητα $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$, για κάθε $t \le s$.

Η $\mathcal{F}_t$ είναι μία σ-άλγεβρα και μπορεί να θεωρηθεί ως η πληροφορία, η οποία είναι διαθέσιμη έως εκείνη τη χρονική στιγμή t. Αυτή η διήθηση θεωρείται ως μία αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος. Δηλαδή, όσο περνάει ο χρόνος και παρατηρούμε την στοχαστική διαδικασία, τόσο διευρύνεται και η πληροφορία που έχουμε στη διάθεσή μας για την συγκεκριμένη στοχαστική ανέλιξη.

Ορισμός 1.1.6 Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \ge 0\}$ καλείται *προσαρμοσμένη* στην $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ αν η X_t είναι $\mathcal{F}_t-$ μετρήσιμη για κάθε $t \ge 0$.

Έχοντας ορίσει τις δύο παραπάνω έννοιες, μπορεί να οριστεί και η έννοια του martingale. Οι διαδικασίες martingale είναι πολύ σημαντικές στα μαθηματικά υποδείγματα της χρηματοοικονομικής, και στη συγκεκριμένη περίπτωση στα υποδείγματα αποτίμησης επιτοκιακών παραγώγων.

Ορισμός 1.1.7 Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \ge 0\}$ και μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ (διήθηση). Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \ge 0\}$ ονομάζεται *martingale* αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

1. Η τυχαία μεταβλητή X_t είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_t$, για κάθε t.
2. Για την τυχαία μεταβλητή X_t ισχύει ότι $E[|X_t|] < \infty$.
3. $E[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] = X_t,\ s > 0$.

Επομένως, για μία στοχαστική ανέλιξη martingale δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται στην $\mathcal{F}_t$, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορεί να γίνει για την τιμή της X_{t+s} είναι η X_t.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί, ότι:

- Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ ορίζεται ως *supermartingale* αν:

$$E[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] \leq X_t.$$

- Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ ορίζεται ως *submartingale* αν:

$$E[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] \geq X_t.$$

Πιο αναλυτικά, για μία στοχαστική ανέλιξη supermartingale δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται στην $\mathcal{F}_t$, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορεί να γίνει για την τιμή της X_{t+1} θα είναι μικρότερη από ή ίση με την τιμή X_t. Όμοια, για μία στοχαστική ανέλιξη submartingale δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται στην $\mathcal{F}_t$, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορεί να γίνει για την τιμή της X_{t+1} θα είναι μεγαλύτερη από ή ίση με την τιμή X_t.

Για κάποια δεδομένη διήθηση μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ μπορεί να είναι martingale ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας P και να μην είναι martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας Q. Συνεπώς, μία στοχαστική διαδικασία μπορεί να μετατραπεί σε martingale εάν υπάρχει κατάλληλο μέτρο πιθανότητας. Συγκεκριμένα διατηρούνται οι διαδρομές της στοχαστικής διαδικασίας, αλλά αποδίδεται σε αυτές διαφορετική πιθανότητα.

Επειδή ο υπολογισμός της τιμής του επιτοκίου είναι μια αρκετά περίπλοκη διαδικασία, με κατάλληλους μετασχηματισμούς στις πιθανότητες, επιτυγχάνεται η αλλαγή μέτρου πιθανότητας από τον «πραγματικό κόσμο» στον «κόσμο του ουδέτερου ρίσκου». Το μέτρο πιθανότητας P αναφέρεται και ως μέτρο πιθανότητας στον «*πραγματικό κόσμο*», ενώ το μέτρο πιθανότητας Q αναφέρεται και ως μέτρο πιθανότητας στον «*κόσμο του ουδέτερου ρίσκου*».

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η κίνηση της τιμής των επιτοκίων, δηλαδή οι διαδρομές της στοχαστικής ανέλιξης περιγράφονται από μία γεωμετρική κίνηση Brown. Γενικά όμως, η κίνηση Brown είναι μια συνάρτηση της οποίας η παράγωγος δεν ορίζεται σχεδόν πάντοτε. Παρουσιάζεται λοιπόν η ανάγκη ορισμού ενός ολοκληρώματος επάνω στην κίνηση Brown και τον τρόπο αυτό υπέδειξε το 1940 ο Ιάπωνας μαθηματικός $Kyoshi\ It\hat{o}$.

Ορισμός 1.1.8 Έστω μία διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ του διαστήματος $[a, b]$ (με λεπτότητα που συγκλίνει στο 0 όταν $n \to \infty$) και προσέγγιση μιας συνάρτησης $f(t, \omega)$ ως

$$f(t, \omega) \cong \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

Το *ολοκλήρωμα* $It\hat{o}$ ορίζεται ως εξής

$$\int_a^b f(t, \omega) \mathrm{dW_t}(\omega) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) \left[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right](\omega)$$

όπου $\{W_t, t \geq 0\}$ μία μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το μηδέν, και $f: (0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ και $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας.

Χρησιμοποιώντας το στοχαστικό ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ μπορεί να οριστεί μία στοχαστική διαδικασία $It\hat{o}$ ως προς την τυπική κίνηση Brown $W_t, t \geq 0$.

Ορισμός 1.1.9 Μία διαδικασία $It\hat{o}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)dW_s$$

όπου οι συναρτήσεις (ή γενικότερα στοχαστικές ανελίξεις προσαρμοσμένες στην διήθηση του χώρου) u και v ικανοποιούν τις συνθήκες

$$E\left(\int_0^t v^2(s)ds\right) < \infty \text{, και } \int_0^t |u(s)|ds < \infty$$

Η διαδικασία αυτή γράφεται σε διαφορική μορφή ως ακολούθως

$$dX_t = u(t)dt + v(t)dW_t$$

Ορισμός 1.1.10 (Το Λήμμα του $It\hat{o}$) Έστω η $\{X_t, t \geq 0\}$, η οποία είναι διαδικασία $It\hat{o}$ και μπορεί αν εκφραστεί ως ακολούθως:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)dW_s$$

,τότε οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση της $\{X_t, t \geq 0\}$ της μορφής $h(x,t) \in C^{1,2}$ μπορεί αν γραφεί και ως στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$h(t, X_t) = h(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial s} + u\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)ds + \int_0^t v\frac{\partial h}{\partial x}dW_s$$

Στον παραπάνω ορισμό με $C^{1,2}$ συμβολίζεται ο χώρος των συναρτήσεων της μορφής $h(t,x)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς την μεταβλητή t και συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς την τη μεταβλητή x.

Παράδειγμα: Μοντέλο για επιτόκια με τη μορφή μιας διαδικασίας $It\hat{o}$

Η διαδικασία που ακολουθεί αποτελεί μοντέλο για την εξέλιξη των τιμών των επιτοκίων στο χρόνο.

Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$:

$$X_t = X_0 + a\mu \int_0^t e^{as} ds + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s$$

είναι μια διαδικασία $It\hat{o}$ η οποία σε διαφορική μορφή γράφεται

$$dX_t = a\mu e^{at} dt + \sigma e^{at} dW_t$$

Έστω $X_t = e^{at} r_t$, τότε η r_t είναι και αυτή μία διαδικασία $It\hat{o}$ η οποία ονομάζεται διαδικασία *Ornstein- Uhlenbeck* που έχει την τάση να επιστρέφει προς τη μέση τιμή. Η μέση τιμή εξαρτάται από τον χρόνο t και καθώς $t \to \infty$ τείνει στην τιμή μ.

Με βάση τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $It\hat{o}$ υπολογίζεται η μέση τιμή της r_t.

$$E[r_t] = e^{-at} X_0 + \mu(1 - e^{-at}) \to \mu \text{, ενώ } t \to \infty.$$

Επιπλέον, βάσει των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος $It\hat{o}$ υπολογίζεται και η διακύμανση του επιτοκίου r_t,

$$Var\,(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\,(1 - e^{-2at}).$$

Το βασικότερο μαθηματικό εργαλείο για την κατασκευή μοντέλων συστημάτων και φαινομένων που περιέχουν κάποιο είδος τυχαιότητας, όπως είναι τα μοντέλα αποτίμησης επιτοκιακών παραγώγων που θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο, είναι οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

Ορισμός 1.1.10 Μία στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Η αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή είναι η ακόλουθη,

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

όπου, $X_t \in \mathbb{R}^n$, $\{W_t, t \geq 0\}$ είναι γενικά μια $\mu o \nu o \delta \iota \acute{\alpha} \sigma \tau \alpha \tau \eta$ κίνηση Brown, $\sigma: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ και $b: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις.

Στην περίπτωση όπου $n = 1$ έχουμε μία βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση για την στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$. Επιπλέον, $m = 1$ είναι το πλήθος των κινήσεων Brown που συνεισφέρουν στην εξίσωση. Έτσι οδηγούμαστε στον παρακάτω τύπο για την στοχαστική διαδικασία η οποία οδηγείται από μία κίνηση Brown:

$$dX_t = b(t, X_t)d_t + \sigma(t, X_t)B_t$$

όπου b, σ είναι πραγματικές συναρτήσεις και B_t η παρούσα αξία.

Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση όταν υπάρχει μία διαδικασία $It\hat{o}$ X_t που να την ικανοποιεί.

Παράδειγμα: Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και τα επιτόκια.

Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση $dX_t = -aX_t dt + dW_t$ με $X_0 = x$. Η λύση της προηγούμενης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι η διαδικασία *Ornstein-Uhlenbeck*.

Δίνεται η συνάρτηση $f(t, x) = e^{\sigma t}x$ και $\sigma \in \mathbb{R}$ στοχαστική ανέλιξη. Με εφαρμογή του λήμματος του $It\hat{o}$ προκύπτει το ακόλουθο:

$$df(t, X_t) = (\sigma - \alpha)e^{\sigma t}X_t dt + e^{\sigma t}dW_t$$

Εάν $\sigma = \alpha$ προκύπτει ότι:

$$df(t, X_t) = e^{\sigma t}dW_t$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t e^{as}dW_s \Rightarrow e^{\sigma t}X_t - x = \int_0^t e^{as}dW_s \Rightarrow X_t$$
$$= e^{-\sigma t}x + e^{-\sigma t}\int_0^t e^{as}dW_s$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση χρησιμοποιείται ως μοντέλο για τα επιτόκια.

Κεφάλαιο 2.
Μοντέλα αποτίμησης

Η μελέτη των επιτοκίων είναι ένα σημαντικό ζήτημα και η μοντελοποίησή τους δεν είναι απλή και τετριμμένη υπόθεση, καθώς η συμπεριφορά του επιτοκίου εξαρτάται από ποικίλους, οικονομικούς κυρίως παράγοντες. Η κίνηση των επιτοκίων έχει ιδιαίτερο αντίκτυπο στην οικονομία και η μακροπρόθεσμη διάρθρωσή του είναι ένα φλέγον ζήτημα για τους οικονομολόγους. Μία έκφανση αυτού αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο επηρεάζεται η τιμή κάποιων επιτοκιακών παραγώγων, ορισμένα από τα οποία θα εξετασθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία αξιοσημείωτη απόρροια που παρατηρείται όταν το επιτόκιο παραμένει σε υψηλά επίπεδα για εκτεταμένο χρονικό διάστημα είναι ο περιορισμός των κερδών των επιχειρήσεων, που έχει ως επακόλουθο και την επιρροή του Χρηματιστηρίου. Ωστόσο, μία μείωση των επιτοκίων για μεγάλη χρονική περίοδο ενθαρρύνει την κατανάλωση σε τοπικό επίπεδό και κατ' επέκταση την οικονομία.

Τα προαναφερθέντα σημεία αποτελούν την αιτία παρακίνησης των ερευνητών για την αναζήτηση μαθηματικών μοντέλων πρόβλεψης της δυναμικής του επιτοκίου. Ανάμεσα στα μοντέλα που προτάθηκαν για το σκοπό αυτό και τα οποία παρουσιάζονται σε αυτό το Κεφάλαιο αποτελούν το μοντέλο αποτίμησης Vasicek, το μοντέλο Cox-Ingersoll-Ross, το οποίο είναι επέκταση του Vasicek και τέλος το μοντέλο Ho-Lee.

2.1 Μοντέλο Vasicek

Η ανάγκη εύρεσης κατάλληλων υποδειγμάτων για την εκτίμηση της κίνησης των επιτοκίων και έπειτα την αποτίμηση των επιτοκιακών παραγώγων οδήγησε πολλούς ερευνητές να ασχοληθούν με αυτό το πεδίο έρευνας. Παρόλα αυτά μέχρι το 1976 λίγα από αυτά τα αποτελέσματα μπορούσαν να βρουν κατάλληλη εφαρμογή για την περιγραφή της κίνησης του επιτοκίου. Το 1977 ο Oldrich Vasicek στην εργασία του (Vasicek, 1977) ανέπτυξε ένα καταλληλότερο μοντέλο, σε συνεχή χρόνο, το οποίο βασίστηκε στο μοντέλο Black & Scholes για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου ο Vasicek στηρίχτηκε στις ακόλουθες τρεις παραδοχές:

1. Το στιγμιαίο επιτόκιο είναι Μαρκοβιανή στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο. Με βάση τη Μαρκοβιανή ιδιότητα η στοχαστική ανέλιξη $\{r(t), t \geq 0\}$, δηλαδή η τιμή του επιτοκίου καθορίζεται μόνο από την τιμή που παίρνει το επιτόκιο στο παρόν, ενώ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν. Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας $\{r(t), t \geq s\}$ καθορίζεται μόνον από τις τιμές $r(s)$ του σημερινού επιτοκίου.
   Επομένως, οι μελλοντικές τιμές του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου καθορίζονται μόνο από την παροντική τιμή του επιτοκίου και όχι από τις παρελθοντικές του τιμές.

2. Η τιμή $P(t,s)$ του εκάστοτε προϊόντος καθορίζεται από την αποτίμηση του επιτοκίου, σε χρόνο t από την στοχαστική ανέλιξη $\{r(\tau),\ t \leq \tau \leq s\}$.

3. Η αγορά είναι αποτελεσματική.

Με την παραπάνω παραδοχή εννοείται ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής στην αγορά, το σύνολο των πληροφοριών και η τεχνογνωσία είναι άμεσα διαθέσιμη σε όλους τους επενδυτές και κάθε επενδυτής λειτουργεί ορθολογικά, με την έννοια ότι επιδιώκει να αποκτήσει περισσότερο πλούτο και αξιοποιεί όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες.

Το μοντέλο Vasicek προσδιορίζει το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μέσω μιας διαδικασίας Ornstein Uhlenbeck (Uhlenbeck & Ornstein, 1930):

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,\ t \geq 0 \quad (1)$$

Στην ανωτέρω σχέση ισχύουν τα ακόλουθα,

- a ονομάζεται η ταχύτητα επαναφοράς και ρυθμίζει την ταχύτητα προσαρμογής του επιτοκίου. Πρέπει $a > 0$ ώστε να διασφαλιστεί σταθερότητα γύρω από την μακροπρόθεσμη τιμή του επιτοκίου.

- b ονομάζεται η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας στην οποία επανέρχεται το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο. Η ιδιότητα αυτή καλείται *mean reversion*. Αν δεν υπήρχαν τυχαίοι παράγοντες το επιτόκιο θα παρέμενε σταθερό όταν $r_t = b$.

- σ ονομάζεται η μεταβλητότητα του επιτοκίου.

- W_t είναι μια στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί την κίνηση Brown στον κόσμο του ουδέτερου ρίσκου και μοντελοποιεί την τυχαιότητα.

Ο παράγοντας $a(b - r_t)$ αναπαριστά την αναμενόμενη στιγμιαία μεταβολή του επιτοκίου κατά το χρόνο t και ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του επιτοκίου (*drift rate*). Αντιστοίχως, ο παράγοντας σdW_t είναι ο ρυθμός μεταβλητότητας (*variance rate*).

Στο υπόδειγμα Vasicek χρησιμοποιείται η μέση αναστροφή. Συγκεκριμένα, σε αντίθεση με τις τιμές των μετοχών, οι τιμές των επιτοκίων δεν αυξάνονται επ' αόριστον και θέλουμε να αποφύγουμε τις αρνητικές τιμές. Συνεπάγεται επομένως ότι οι τιμές κινούνται σε περιορισμένο εύρος, δηλαδή υπάρχει μία ανώτερη και μία κατώτερη τιμή την οποία μπορούν να πάρουν (με πιθανότητα σχεδόν 1) και δείχνουν την τάση να επανέρχονται σε μια μακροπρόθεσμη αξία.

Ένα μειονέκτημα του υποδείγματος Vasicek αποτελεί το γεγονός ότι επιτρέπει και αρνητικές τιμές για το επιτόκιο κάτι που σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι επιθυμητό. Για το λόγο αυτό προτάθηκαν και άλλα μοντέλα τα οποία αντιμετωπίζουν το φαινόμενο αυτό και θα εξετετασθούν παρακάτω. Επιπροσθέτως, το υπόδειγμα Vasicek είναι μονοπαραγοντικό, δηλαδή ένας μόνο παράγοντας, και συγκεκριμένα το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, είναι αυτό που επηρεάζει την διάρθρωση των επιτοκίων.

2.2 Μοντέλο Cox-Ingersoll-Ross.

Προκειμένου να βελτιωθεί το μαθηματικό μοντέλο το οποίο κατασκεύασε ο Vasicek, το οποίο επέτρεπε τις αρνητικές τιμές του επιτοκίου το 1985 οι Cox-Ingersoll-Ross (Cox , Ingersoll , & Ross, 2005) πρότειναν ένα παρόμοιο μονοπαραγοντικό μοντέλο για την περιγραφή της κίνησης του επιτοκίου. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται επομένως για την αποτίμηση επιτοκιακών παραγώγων τα οποία θα παρουσιαστούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου, οι Cox-Ingersoll-Ross στηρίχτηκαν στις ακόλουθες παραδοχές:

1. Η αλλαγή στις ευκαιρίες παραγωγής περιγράφεται από μία μεμονωμένη μεταβλητή r.

2. Ο μέσος όρος και η διακύμανση των ρυθμών απόδοσης στις διαδικασίες παραγωγής είναι ανάλογα του r. Επομένως, ούτε ο μέσος όρος ούτε η διακύμανση παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση ενός χαρτοφυλακίου για πολύ μεγάλες τιμές του r. Η μεταβλητή r θεωρείται ως ο ρυθμός εξέλιξης του κεφαλαίου.

Η δυναμική του επιτοκίου είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία δίνεται μέσω της διαφορικής εξίσωσης στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,\ t \geq 0 \qquad (2)$$

Στην ανωτέρω σχέση ισχύουν τα ακόλουθα,

- a ονομάζεται η ταχύτητα προσαρμογής του επιτοκίου στο μέσο b και ισχύει ότι $\alpha > 0$.

- b ονομάζεται το μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο επιτοκίου και ισχύει $b > 0$.

- σ ονομάζεται η μεταβλητότητα του επιτοκίου.

- W_t είναι μια στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί την κίνηση Brown στον κόσμο του ουδέτερου ρίσκου και μοντελοποιεί την τυχαιότητα.

Ο παράγοντας $a(b - r_t)$ εκφράζει την τάση και εξασφαλίζει τη μέση αναστροφή του επιτοκίου προς την μακροπρόθεσμη τιμή του, δεδομένου ότι $\alpha > 0$.

Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί οι διαφορικές εξισώσεις του Vasicek αρχικά και των Cox-Ingersoll-Ross μετέπειτα, δηλαδή από τις εξισώσεις *(1)* και *(2)* αντίστοιχα, για την διάρθρωση του επιτοκίου είναι αρκετά όμοιες, με μόνη τους διαφορά στο στοχαστικό μέρος των εξισώσεων. Συγκεκριμένα, οι Cox-Ingersoll-Ross πρόσθεσαν στον όρο αυτό την ρίζα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου ($\sqrt{r_t}$). Η συγκεκριμένη διαφορά είναι αυτή που εξασφαλίζει ότι το μοντέλο δεν επιτρέπει τις αρνητικές τιμές του επιτοκίου, καθώς η ποσότητα αυτή είναι μη αρνητική. Στην περίπτωση όπου το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο τείνει να πάρει μηδενική τιμή, τότε ο όρος $\sigma\sqrt{r_t}$ θα τείνει αντίστοιχα και αυτός στο μηδέν, όμως και πάλι η διαφορική εξίσωση *(2)* λαμβάνει θετικές τιμές.

2.3 Μοντέλο Ho-Lee.

Το 1986 οι Thomas Ho και Sang Bin Lee (Ho & Lee, 1986) πρότειναν ένα μοντέλο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου (*short rate model*) για την τιμολόγηση ομολόγων (*bonds*), συμβάσεων ανταλλαγής (*swaption*) και άλλων επιτοκιακών παραγώγων, αλλά και για την μοντελοποίηση μελλοντικών επιτοκίων, έχοντας ως στόχο τη δυνατότητα αποτίμησης των επιτοκιακών παραγώγων. Το μοντέλο των Ho-Lee είναι ένα μοντέλο μη βέβαιου κέρδους.

Το μοντέλο που ανέπτυξαν περιγράφεται σε συνεχή χρόνο από την ακόλουθη εξίσωση και ακολουθεί μία κανονική διαδικασία:

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t, \ t \geq 0 \qquad (3)$$

Στην ανωτέρω σχέση ισχύουν τα ακόλουθα:

- θ_t είναι μια παράμετρος του χρόνου που δίνει στο μοντέλο τη δυνατότητα να αποδώσει ίδια καμπύλη απόδοσης επιτοκίων όμοια με την καμπύλη απόδοσης που παρατηρείται στην αγορά.

- σ συμβολίζεται η στιγμιαία τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου.

- W_t είναι μια στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί την κίνηση Brown στον κόσμο του ουδέτερου ρίσκου και μοντελοποιεί την τυχαιότητα.

Το Ho-Lee μοντέλο μπορεί να βαθμονομηθεί σε δεδομένα της αγοράς υποδηλώνοντας μέσω της μορφής της παραμέτρου θ_t από τις τιμές της αγοράς. Αυτό συνεπάγεται ότι επιστρέφεται ακριβώς η τιμή των ομολόγων που συνιστούν την καμπύλη απόδοσης. Αυτή η βαθμονόμηση και στην συνέχεια η αποτίμηση των ομολόγων, των συμβάσεων ανταλλαγής και των επιτοκιακών παραγώγων πραγματοποιείται μέσω ενός μοντέλου που βασίζεται σε διωνυμικό πλέγμα.

Το μοντέλο Ho-Lee δημιουργεί μια συμμετρική κατανομή για τα μελλοντικά επιτόκια. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η σχέση *(3)* είναι μια κανονική διαδικασία, για αυτό και παράγεται μία κατανομή, η οποία όπως λέγεται στην στατιστική έχει σχήμα καμπάνας (***bell shaped***).

Εφόσον λοιπόν η κατανομή για τις μελλοντικές τιμές του επιτοκίου είναι συμμετρική, συνεπάγεται ότι το επιτόκιο μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Το παραπάνω αποτελεί ένα μειονέκτημα για το μοντέλο αυτό, όπως άλλωστε είχε τονιστεί και για το μοντέλο Vasicek στην αρχή του κεφαλαίου. Ένα επιπλέον μειονέκτημα του μοντέλου που εξετάστηκε αποτελεί το γεγονός ότι δεν ενσωματώνει τη μέση αναστροφή, όπως συνέβαινε με το μοντέλο Vasicek.

Κεφάλαιο 3.
Επιτοκιακά παράγωγα

3.1 CAP (Δικαίωμα Ανώτατου/Μέγιστου Επιτοκίου)

Το Cap είναι ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν, το οποίο διασφαλίζει τον αγοραστή του (**holder**) από την άνοδο των επιτοκίων πάνω από κάποιο συγκεκριμένο ύψος (**cap rate**), έστω $\alpha\%$. Ένα τέτοιο προϊόν ενδιαφέρει τους δανειζόμενους και τους επενδυτές, οι οποίοι προσβλέπουν σε άνοδο των επιτοκίων. Οι όροι του Cap διαμορφώνονται εκτός οργανωμένων αγορών (**out of-the-market**), και κατοχυρώνονται με συμβόλαιο με βάση τις ανάγκες των αντισυμβαλλομένων (Baxter, Rennie, & Rennie, 1996).

Έστω ότι δανείζεται κάποιος με κυμαινόμενο επιτόκιο (**floating rate**) όπως είναι το επιτόκιο Libor και θέλει να εξασφαλισθεί από την άνοδο του επιτοκίου αυτού πέραν μιας μέγιστης ανοδικής διακύμανσης. Για να διασφαλισθεί από τον κίνδυνο ο δανειολήπτης, ταυτόχρονα με την έγκριση του δανείου προχωρά και στην αγορά ενός συμβολαίου Cap, οπότε και καθορίζεται το όριο του επιτοκίου και το ποσό επί του οποίου θα εφαρμόζεται το επιτόκιο.

Έστω ότι πραγματοποιούνται οι πληρωμές στις χρονικές στιγμές (χ.σ.)

$$T_i = T_0 + i\delta, \quad \text{με } \ i = 1, \dots, n$$

τότε ο αγοραστής του συμβολαίου πληρώνει τη χ.σ. T_i με βάση το δ-περιόδων Libor επιτόκιο της χ.σ. T_{i-1},

$$L(T_{i-1}) = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1\right),$$

όπου $L(t)$ είναι το επιτόκιο Libor στο χρόνο t (χωρίς ανατοκισμό), για τη χρονική περίοδο $(t, t+\delta)$ και $P(t,T)$ είναι η παρούσα αξία (στο χρόνο t) μιας χρηματικής μονάδας στο χρόνο T (π.χ. η αξία ενός ομολόγου στο χρόνο t που αποδίδει 1 χρηματική μονάδα στο χρόνο T). Συγκεκριμένα, ο παραπάνω τύπος προκύπτει από την ακόλουθη παρατήρηση: ένας επενδυτής (π.χ. μια τράπεζα) έχει δύο επιλογές επένδυσης $P(T_{i-1}, T_i)$ χ.μ. στο χρονικό διάστημα (T_i, T_{i+1}): (i) σε ομόλογα Zero coupon (ii) να δανείσει το ποσό αυτό με το επιτόκιο Libor (π.χ. σε άλλη τράπεζα). Στην πρώτη περίπτωση θα λάβει 1 χ.μ. ενώ στην δεύτερη θα λάβει $P(T_{i-1}, T_i)\big(1 + \delta L(T_{i-1})\big)$ χ.μ. Για να μην υπάρχει arbitrage θα πρέπει οι δύο αυτές αποδόσεις να είναι ίσες, δηλαδή θα πρέπει

$$P(T_{i-1},T_i)\big(1+\delta L(T_{i-1})\big)=1$$

από όπου προκύπτει άμεσα η παραπάνω σχέση. Εάν το επιτόκιο Libor γίνει υψηλότερο του επιτοκίου αναφοράς, τότε ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στον αγοραστή του Cap τη διαφορά των τόκων. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν το επιτόκιο Libor διαμορφωθεί σε μικρότερο ή και ίσο του επιτοκίου αναφοράς, τότε οι τόκοι καταβάλλονται από τον αγοραστή, ενώ ο πωλητής του συμβολαίου Cap δεν διαδραματίζει κάποιο ρόλο. Συνεπάγεται επομένως ότι το συμβόλαιο Cap πληρώνει στον αγοραστή του τη διαφορά ανάμεσα στο Libor και στο επιτόκιο αναφοράς, όπου k το επιτόκιο αναφοράς. Δηλαδή:

$$\delta(L(T_{i-1})-k)^+=\begin{cases}\delta(L(T_{i-1})-k), & L(T_{i-1})\geq k\\ 0, & L(T_{i-1})<k,\end{cases} \quad (1)$$

σε κάθε χ.σ T_i.

Μία μεμονωμένη πληρωμή σε συγκεκριμένη χ.σ. T_i, δηλαδή για μία εκτοκιστική περίοδο, καλείται Caplet και εάν αποτιμηθεί η τιμή ενός Caplet, τότε μπορεί να τιμολογηθεί το Cap. Συνεπώς, η απαίτηση του Caplet είναι:

$$X=\delta(L(T_{i-1})-k)^+=\delta\left(\frac{1}{\delta}\cdot\left(\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}-1\right)-k\right)^+=\left(\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}-(1+k\delta)\right)^+$$
$$=(1+k\delta)\cdot P_i^{-1}\cdot(K-P_i)^+$$

όπου $P_i=P(T_{i-1},T_i)$ και $K=(1+k\delta)^{-1}$.

Χρησιμοποιούμε το γνωστό γενικό τύπο αποτίμησης παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων για να βρούμε την αξία ενός Caplet. Συγκεκριμένα, αν η απόδοση στο χρόνο T λήξης ενός παραγώγου είναι D_T τότε η δίκαιη (no-arbitrage) αξία του στο χρόνο $t<T$ είναι

$$D_t^*=B_t\mathcal{E}_Q(B_T^{-1}D_T|\mathcal{F}_t)$$

όπου B_t είναι η αξία 1 χ.μ. στο χρόνο t, (οπότε $B_tB_T^{-1}$ είναι η αξία 1 χ.μ. από το χρόνο T στο χρόνο $t<T$) και Q είναι το μέτρο ουδέτερου κινδύνου της αγοράς. Σύμφωνα με αυτόν το τύπο το ποσό διακανονισμού του Caplet στον κόσμο του ουδέτερου ρίσκου τη χ.σ. t είναι:

$$B_t\mathcal{E}_Q\big(B_{T_i}^{-1}X|\mathcal{F}_t\big)=(1+k\delta)B_t\,\mathcal{E}_Q\big(B_{T_{i-1}}^{-1}(K-P_i)^+|\mathcal{F}_t\big).$$

διότι $B_{T_i}\cdot P_i=B_{T_i}P(T_{i-1},T_i)=B_{T_{i-1}}$.

Ουσιαστικά, μια σύμβαση Cap που καλύπτει πάνω από μία εκτοκιστικές περιόδους, διαμορφώνει μια σειρά από δικαιώματα προαίρεσης και συγκεκριμένα από δικαιώματα αγοράς (**call options**) επί επιτοκίου Ευρωπαϊκού τύπου.

Το συμβόλαιο αυτό δημιουργήθηκε περί το 1970-1980, οπότε και αναδύθηκαν τα δάνεια κυμαινόμενου επιτοκίου. Η ανάγκη για την ύπαρξη ενός τέτοιου ΠΧΠ προέκυψε από τις ιδιαίτερα μεγάλες διακυμάνσεις στα επιτόκια, που υπήρχαν σε ορισμένες περιόδους. Δηλαδή, δημιουργήθηκε η ανάγκη εξασφάλισης του δανειολήπτη από την αύξηση του επιτοκίου του δανείου του. Η τακτική που ακολουθήθηκε ήταν η εξής: Οι ίδιες οι τράπεζες ταυτόχρονα με τη χορήγηση δανείου κυμαινόμενου επιτοκίου προσέφεραν και μια σύμβαση Cap. Με την ίδια λογική οι τράπεζες διαμόρφωσαν τεχνικές αντιστάθμισης, για να αποφύγουν τον κίνδυνο αύξησης των επιτοκίων πέραν του αναμενόμενου, χρησιμοποιώντας διαφορετικά ΠΧΠ. Επιπλέον, πέραν της χρήσης του ως εργαλείου αντιστάθμισης, ένα συμβόλαιο Cap χρησιμοποιείται και ως επενδυτικό εργαλείο με holder συνήθως έναν επενδυτή και writer μια επενδυτική τράπεζα/εταιρεία.

3.1.1 Εφαρμογή CAP για αντιστάθμιση κινδύνου.

Έστω ότι η **τράπεζα Α** χορηγεί στην **εταιρεία Β** δάνειο διαρκείας δύο ετών ύψους 10.000.000 ευρώ με εξαμηνιαίας διάρκειας κυμαινόμενο επιτόκιο και η ίδια πουλά στην επιχείρηση ένα συμβόλαιο Cap με Cap Rate 8% με αρχική προμήθεια 80.000 ευρώ. Εάν το επιτόκιο Libor διαμορφωθεί σε μικρότερο ή ίσο του 8%, τότε η τράπεζα (*writer*) δεν έχει καμία ανάμειξη στην πληρωμή. Αντίθετα, εάν το επιτόκιο Libor διαμορφωθεί σε μεγαλύτερο του 8%, τότε η τράπεζα (*writer*) καλείται να πληρώσει στην επιχείρηση (*holder*) το ποσό που προκύπτει από τη διαφορά των επιτοκίων με βάση τον τύπο (1).

Εκτοκιστική περίοδος	Επιτόκιο LIBOR	Χρεολύσιο	Τόκος	Υπόλοιπο Κεφαλαίου	CAP
0				10.000.000	(80.000)
1	10%	2.500.000	500.000	7.500.000	100.000
2	9%	2.500.000	337.500	5.000.000	50.000
3	8.5%	2.500.000	212.500	2.500.000	25.000
4	8%	2.500.000	100.000	0	0

3.1.2 Εφαρμογή CAP για επένδυση.

Ένας επενδυτής αγοράζει από την Επενδυτική Τράπεζα της Ελλάδος ένα συμβόλαιο Cap ποσού 500.000 ευρώ με cap rate 6%. Ο επενδυτής δίνει προμήθεια 500 ευρώ στην τράπεζα στο τέλος κάθε εξαμήνου με επιτόκιο αναφοράς το Libor. Το ποσό που καλείται να καταβάλει κάθε φορά ο πωλητής (writer) στον αγοραστή (holder) του Cap υπολογίζεται με βάση τον τύπο (1).

Περίοδος	Επιτόκιο LIBOR	Ποσό CAP	Καταβολές Αγοραστή CAP	Καταβολές Πωλητή CAP	Ροές Αγοραστή	Ροές Πωλητή
1	4%	500.000	500	0	-500	500
2	5%	500.000	500	0	-500	500
3	6%	500.000	500	0	-500	500
4	7%	500.000	500	2.500	2000	-2000
5	8%	500.000	500	5.000	4500	-4500

3.2 FLOOR (Δικαίωμα Κατώτατου/Ελάχιστου Επιτοκίου)

Το συμβόλαιο Floor λειτουργεί με την ίδια λογική με την οποία λειτουργεί και το συμβόλαιο Cap, αλλά αντίστροφα. Στην περίπτωση αυτή οι πελάτες οι οποίοι ενδιαφέρονται για μια τέτοια σύμβαση είναι οι ίδιοι οι οποίοι θεωρούν ότι θα υπάρξει κάθοδος των επιτοκίων. Δηλαδή, το Floor διασφαλίζει τον αγοραστή του (*holder*) από την πτώση του επιτοκίου Libor κάτω από ένα προκαθορισμένο κατώτατο όριο. (Baxter, Rennie, & Rennie, 1996)

Έστω ένας επενδυτής ο οποίος δανείζει σε κάποιον με κυμαινόμενο επιτόκιο (**floating rate**) όπως είναι το επιτόκιο Libor και θέλει να εξασφαλισθεί από την πτώση του επιτοκίου αυτού πέραν μιας μέγιστης καθοδικής διακύμανσης. Για να διασφαλισθεί από τον κίνδυνο ο επενδυτής/δανειοδότης, ταυτόχρονα με την χορήγηση του δανείου προχωρά στην αγορά ενός συμβολαίου Floor, οπότε και καθορίζεται το όριο του επιτοκίου και το ποσό επί του οποίου θα εφαρμόζεται το επιτόκιο.

Έστω ότι πραγματοποιούνται οι πληρωμές στις χρονικές στιγμές $T_i = T_0 + i\delta$, με $i = 1, \dots, n$, τότε, όπως και παραπάνω, οι όροι του συμβολαίου εκτελούνται τη χ.σ. T_i με βάση το δ-περιόδων Libor επιτόκιο της χ.σ T_{i-1} Floor

$$L(T_{i-1}) = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1\right).$$

Εάν το επιτόκιο Libor γίνει χαμηλότερο του επιτοκίου αναφοράς τότε ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στον αγοραστή του Floor τη διαφορά των τόκων. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν το επιτόκιο Libor διαμορφωθεί σε υψηλότερο ή και ίσο του επιτοκίου αναφοράς, τότε οι τόκοι καταβάλλονται από τον αγοραστή, ενώ ο πωλητής του συμβολαίου Floor δεν διαδραματίζει κάποιο ρόλο. Συνεπάγεται επομένως ότι το συμβόλαιο Floor καταβάλλει στον αγοραστή του τη διαφορά ανάμεσα στο επιτόκιο αναφοράς, όπου k το επιτόκιο αναφοράς και στο Libor. Δηλαδή:

$$\delta\big(k - L(T_{i-1})\big)^{+} = \begin{cases} \delta\big(k - L(T_{i-1})\big), & L(T_{i-1}) < k; \\ 0, & L(T_{i-1}) \geq k, \end{cases} \qquad (2)$$

σε κάθε χ.σ T_i.

Μία μεμονωμένη πληρωμή σε συγκεκριμένη χ.σ T_i, δηλαδή για μία εκτοκιστική περίοδο, καλείται Floorlet και εάν αποτιμηθεί η τιμή ενός Floorlet τότε μπορεί να τιμολογηθεί το Floor. Συνεπώς, η απαίτηση του Floorlet (ανάλογα με του Caplet που εξετάσαμε παραπάνω) είναι:

$$X = (1 + k\delta) \cdot P_i^{-1} \cdot (P_i - K)^{+},$$

όπου $P_i = P(T_{i-1}, T_i)$ και $K = (1 + k\delta)^{-1}$.

Το ποσό διακανονισμού του Floorlet στον κόσμο του ουδέτερου ρίσκου τη χ.σ t αντίστοιχα εδώ είναι:

$$B_t \mathcal{E}_Q\big(B_{T_i}^{-1} X | \mathcal{F}_t\big) = (1 + k\delta) B_t \mathcal{E}_Q\big(B_{T_{i-1}}^{-1} (P_i - K)^{+} | \mathcal{F}_t\big).$$

Ουσιαστικά, μια σύμβαση Floor που καλύπτει πάνω από μία εκτοκιστικές περιόδους, διαμορφώνει μια σειρά από δικαιώματα προαίρεσης και συγκεκριμένα από δικαιώματα πώλησης (**put options**) επί επιτοκίου Ευρωπαϊκού τύπου.

3.2.1 Εφαρμογή FLOOR

Έστω ότι η Επενδυτική Τράπεζα της Ελλάδος έχει τοποθετήσει 1.000.000 ευρώ σε ομόλογα διάρκειας 4 ετών με κυμαινόμενο εξαμηνιαίο επιτόκιο. Ταυτοχρόνως, αγοράζει και ένα συμβόλαιο Floor με floor rate 9%, και το κόστος σύναψης του συμβολαίου ανέρχεται στα 10.000 ευρώ. Το ποσό που καλείται να καταβάλει κάθε φορά ο πωλητής (writer) στον αγοραστή (holder) του Cap υπολογίζεται με βάση τον τύπο (2).

Περίοδος	Επιτόκιο LIBOR	Έσοδα άνευ FLOOR	Ροές FLOOR	Συνολικές Ροές
0			10.000	
1	7%	35.000	10.000	45.000
2	8%	40.000	5.000	45.000
3	9%	45.000	0	45.000
4	9.5%	47.500	0	47.500
5	10%	50.000	0	50.000
6	11%	55.000	0	55.000
7	8.5%	42.500	2.500	45.000
8	7.5%	37.500	7.500	45.000

3.3 SWAP (Συμβάσεις Ανταλλαγής)

Οι ανταλλαγές είναι πολύ γνωστά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία δημιουργούνται από έναν αγοραστή (*holder*) και έναν πωλητή (*writer*), δηλαδή από δύο αντισυμβαλλομένους, βάσει των αναγκών τους. Οι αντισυμβαλλόμενοι διαπραγματεύονται τους όρους του συμβολαίου Swap εκτός οργανωμένων αγορών (*out of-the-market*). Στα συμβόλαια αυτά, δηλαδή στις ανταλλαγές επιτοκίων, ανταλλάσσεται μια ροή πληρωμών μη σταθερού ποσού για μια ροή πληρωμών πάγιου ποσού. Οι πληρωμές αυτές προέρχονται από τόκους. Επομένως, ανταλλάσσεται ένα κυμαινόμενο επιτόκιο για ένα σταθερό (Baxter, Rennie, & Rennie, 1996).

Στις συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων, οι όροι του συμβολαίου διαμορφώνονται έτσι ώστε να εκπληρώνεται ένα από τα δύο παρακάτω σενάρια:

- Το επιτόκιο να είναι σταθερό για τον έναν αντισυμβαλλόμενο και κυμαινόμενο για τον άλλον αντισυμβαλλόμενο. Τότε, ο ένας πληρώνει ένα σταθερό ποσό σε κάθε εκτοκιστική περίοδο, ενώ ο άλλος καταβάλλει ένα ποσό το οποίο διαμορφώνεται βάσει του επιτοκίου Libor.
- Το επιτόκιο να έχει οριστεί να είναι κυμαινόμενο και για τους δύο αντισυμβαλλομένους, βέβαια να διαμορφώνεται το ποσό από διαφορετικό επιτόκιο αναφοράς. Τότε και οι δύο αντισυμβαλλόμενοι θα καταβάλλουν ποσό το οποίο θα είναι διαφορετικό για κάθε εκτοκιστική περίοδο.

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις μόνο η καθαρή διαφορά, των ποσών όπως διαμορφώνονται σε κάθε εκτοκιστική περίοδο, ανταλλάσσεται.

Εφόσον οι πληρωμές δεν είναι σταθερές, τότε η πληρωμή είναι μια μεταβλητή ποσότητα. Ένας τυπικός ορισμός της μεταβλητής της πληρωμής είναι εκείνος των τόκων, που καταβάλλονται από ένα ομόλογο κατά την προηγούμενη χρονική περίοδο. Εάν οι πληρωμές καταβάλλονται κατά τις χ.σ $T_i = T_0 + i\delta$, με $i = 1, \dots, n$, τότε η $i - οστη$ πληρωμή θα καθοριστεί από το δ-περιόδου επιτόκιο Libor το οποίο διαμορφώθηκε στην χ.σ T_{i-1}. Η πληρωμή που γίνεται είναι :

$$\delta \cdot L(T_{i-1}) = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

Έστω ότι ανταλλάσσονται πληρωμές με ένα σταθερό επιτόκιο αναφοράς k σε κάθε περίοδο. Όπως σε όλα τα ΠΧΠ, έτσι και στις ανταλλαγές επιτοκίων ο κάτοχος του προϊόντος μπορεί να έχει είτε θετική θέση είτε αρνητική θέση.

3.3.1 Εφαρμογή Swap για αντιστάθμιση κινδύνου

Έστω μία επιχείρηση η οποία έχει δανειστεί από μία τράπεζα 1.200.000 ευρώ με κυμαινόμενο επιτόκιο. Η διάρκεια του δανείου είναι 3 έτη και οι δόσεις αποπληρώνονται κάθε εξάμηνο. Το επιτόκιο έχει οριστεί να είναι Libor + 5%. Τα στελέχη της εταιρείας προβλέπουν άνοδο των επιτοκίων για τα επόμενα τρία έτη και επομένως συνάπτουν μία σύμβαση ανταλλαγής του κυμαινόμενου επιτοκίου Libor + 5% με ένα σταθερό επιτόκιο 7%. Ουσιαστικά η εταιρεία θα καταβάλει σε κάθε εκτοκιστική περίοδο σταθερό επιτόκιο 7% και θα λαμβάνει τόκο με κυμαινόμενο επιτόκιο με βάση το LIBOR. Συνεπώς το πάγιο ποσό που θα καταβάλει η επιχείρηση είναι $1.200.000 \cdot 0.07 \cdot \left(\frac{180}{360}\right) = 42.000$ ευρώ. Ταυτόχρονα, το ποσό που θα καταβάλει ο άλλος αντισυμβαλλόμενος σε κάθε εκτοκιστική περίοδο εξαρτάται από το πως διαμορφώνεται το επιτόκιο Libor. Συνεπώς, εάν στην αρχή του πρώτου εξαμήνου το επιτόκιο Libor είναι 5%, τότε θα καταβάλει στην επιχείρηση ποσό

$$1.200.000 \cdot (Libor + 5\%) \cdot \left(\frac{180}{360}\right) = 1.200.000 \cdot (10\%) \cdot \left(\frac{180}{360}\right) = 60.000 \text{ ευρώ.}$$

Για διάφορες τιμές του επιτοκίου Libor ισχύουν:

Περίοδος	**Επιτόκιο LIBOR**	**Χρεολύσιο**	**Κεφάλαιο**	**Καταβολές Επιχείρη-σης**	**Καταβολές $2^{ου}$ αντισυμβαλ-λομένου**	**Καθαρές Ροές**
1	5%	200.000	1.200.000	42.000	60.000	18.000
2	4,8%	200.000	1.000.000	35.000	49.000	14.000
3	4%	200.000	800.000	28.000	36.000	8.000
4	5,2%	200.000	600.000	21.000	30.600	9.600
5	5,5%	200.000	400.000	14.000	21.000	7.000
6	3%	200.000	200.000	7.000	3.000	-4.000

Ένα δικαίωμα προαίρεσης επί ανταλλαγής (**swaption**) είναι η δυνατότητα για την πραγματοποίηση μιας ανταλλαγής σε μια μελλοντική ημερομηνία με δεδομένο επιτόκιο. Έστω ότι κάποιος έχει το δικαίωμα επί ανταλλαγής με σταθερό επιτόκιο η οποία ξεκινά τη χ.σ T_0. Επιπλέον, έστω ότι οι ημερομηνίες πληρωμών είναι $T_i = T_0 + i\delta,\ i = 1, \dots, n$ και το σταθερό επιτόκιο βάσει του οποίου συνάπτεται το συμβόλαιο είναι k. Τότε, η αξία του swaption τη χ.σ T_0 θα είναι ακριβώς ίδια με την αξία ενός δικαιώματος αγοράς (call option) την ίδια χ.σ:

$$\left(P(T_0, T_n) + k\delta \sum_{i=1}^{n} P(T_0, T_i) - 1\right)^{+}$$

Η δικαιολόγηση του παραπάνω τύπου είναι η εξής: Η χρηματική ροή κυμαινόμενου επιτοκίου έχει παρούσα αξία (στο χρόνο T_0)

$$B_{T_0} E_Q\left(\sum_{i=1}^{n} B_{T_i}^{-1}\delta L(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) = B_{T_0} E_Q\left(\sum_{i=1}^{n} B_{T_i}^{-1}\left(P(T_{i-1},T_i)^{-1}-1\right) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right)$$

$$= B_{T_0} E_Q\left(\sum_{i=1}^{n}\left(P(T_{i-1},T_i)^{-1}B_{T_i}^{-1} - B_{T_i}^{-1}\right) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) = B_{T_0} E_Q\left(\sum_{i=1}^{n}\left(B_{T_{i-1}}^{-1} - B_{T_i}^{-1}\right) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(P(T_0,T_{i-1}) - P(T_0,T_i)\right) = 1 - P(T_0,T_n)$$

ενώ αντίστοιχα η χρηματική ροή του σταθερού επιτοκίου k έχει παρούσα αξία

$$\sum_{i=1}^{n} k\delta P(T_0,T_i)$$

Επομένως ο κάτοχος του δικαιώματος ανταλλαγής αποφασίζει στο χρόνο T_0 αν θα εξασκήσει το δικαίωμα ανάλογα με αν η 2η χρηματική ροή είναι μεγαλύτερη της 1ης και τότε η αξία του δικαιώματος θα είναι

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} k\delta P(T_0,T_i) - \left(1 - P(T_0,T_n)\right), 0\right\} = \left(P(T_0,T_n) + k\delta\sum_{i=1}^{n} P(T_0,T_i) - 1\right)^{+}$$

Κεφάλαιο 4.
Αριθμητικά Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε τα μοντέλα βραχυπρόθεσμου επιτοκίου των Vasicek, CIR και Ho-Lee, τα οποία παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 και αφορούν την τιμολόγηση των επιτοκιακών παραγώγων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση του συμβολαίου Cap, το πρώτο από τα επιτοκιακά παράγωγα που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3 και θα παραθέσουμε διαγράμματα από την προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, αλλά και διαγράμματα για τις τιμές των caplets από τα οποία αποτελείται το συμβόλαιο Cap.

Μελετήσαμε την περίπτωση της σύναψης του συμβολαίου Cap για ένα έτος ($T = 1$) με βάση το τριμηνιαίο επιτόκιο Libor. Δεδομένου ότι το ένα έτος αποτελείται από τέσσερα τρίμηνα και οι πληρωμές του συμβολαίου ξεκινούν στο τέλος της πρώτης εκτοκιστικής περιόδου, συμπεραίνουμε ότι θα πραγματοποιηθούν τρεις πληρωμές και επομένως το συμβόλαιο αποτελείται από τρία caplets. Για την προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου και την εκτίμηση αργότερα της τιμής του συμβολαίου Cap, χρησιμοποιήσαμε τα επιτόκια Libor USD, Libor GBP και Libor EU.

Σύμφωνα με τον Glasserman (Paul, 2013) η μέθοδος *Monte – Carlo* εφαρμόζεται κατά το πλείστον σε προβλήματα τιμολόγησης παράγωγων προϊόντων. Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται, διότι είναι κατάλληλη για μη ντετερμινιστικά προβλήματα, δηλαδή προβλήματα στα οποία υπάρχει αβεβαιότητα. Η προσομοίωση *Monte – Carlo* είναι στην ουσία ένα σύνολο από υπολογιστικούς αλγορίθμους και στηρίζεται στην τυχαία και επαναλαμβανόμενη δειγματοληψία για την εκτίμηση ζητούμενων ποσοτήτων.

Σκοπός μας είναι η προσομοίωση της στοχαστικής διαδικασίας που διέπει την κίνηση του επιτοκίου. Η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

- Παράγονται N το πλήθος ψευδοτυχαίοι αριθμοί από την Κανονική κατανομή $N(0,1)$.
- Επιλέγουμε το πλήθος M των σεναρίων (μονοπάτια) που περιγράφουν την εξέλιξη του επιτοκίου.
- Παίρνουμε το μέσο όρο των μονοπατιών που παράχθηκαν, ώστε να εξάγουμε συμπεράσματα για την διάρθρωση του επιτοκίου.

Επομένως, έχοντας παράξει την στοχαστική διαδικασία για την εξέλιξη των τιμών του επιτοκίου μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην αποτίμηση του επιτοκιακού παραγώγου μέσω των υποδειγμάτων αποτίμησης Vasicek, CIR και Ho-Lee.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι χρησιμοποιήθηκαν ιστορικά δεδομένα πέντε ετών (02/01/2015 – 03/09/2020) για το επιτόκιο LIBOR USD, LIBOR GBP και το LIBOR EU από την πηγή www.iborate.com.

4.1 Υπολογισμός παραμέτρων

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε το τρόπο με τον οποίο εκτιμούμε τις παραμέτρους α, b και σ που χρησιμοποιούνται από τα μοντέλα Vasicek, CIR και Ho-Lee.

4.1.1 Προσομοίωση υποδείγματος Vasicek

Υπενθυμίζουμε ότι το μοντέλο Vasicek προσδιορίζει το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Για να προσαρμόσουμε το παραπάνω μοντέλο, το γράφουμε στη παρακάτω μορφή

$$y_t = c_1 + c_2 r_t + \epsilon_t$$

όπου

$$y_t = dr_t, \qquad c_1 = abdt \quad \text{και} \quad c_2 = -adt$$

Οι συντελεστές c_1 και c_2 μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας γραμμική παλινδρόμηση και κατ᾽επέκταση οι παράμετροι α και b υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$a = -\frac{c_2}{dt} \quad \text{και} \quad b = -\frac{c_1}{c_2}$$

Επίσης, η μεταβλητότητα του μοντέλου είναι ανάλογη με την τυπική απόκλιση των σφαλμάτων, και μπορεί να εκτιμηθεί από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var(\epsilon_t)}{dt}}$$

όπου η διασπορά των σφαλμάτων ϵ_t εκτιμάται από την παλινδρόμηση.

Στην ουσία, ο υπολογισμός των παραμέτρων c_1 και c_2 που παρουσιάσαμε παραπάνω προκύπτει από την γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ του y_t, δηλαδή των πρώτων διαφορών των τιμών του επιτοκίου και των πραγματικών τιμών του επιτοκίου r_t.

Η διάρθρωση των επιτοκίων μπορεί να καθοριστεί από τα a, b, τα οποία υπολογίζονται βάσει των παραμέτρων c_1 και c_2 της γραμμικής παλινδρόμησης, από την μεταβλητότητα των σφαλμάτων και από την αρχική τιμή r_0 του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου.

Η υλοποίηση της γραμμικής παλινδρόμησης και ο υπολογισμός των παραμέτρων γίνεται ως ακολούθως

$$Y_t = dr_t = r_{t+1} - r_t, X_t = r_t,$$

για $t = 1,2, \dots, n$.

```
#Regression
fit = lm(Y~X)
summary(fit)



#estimation of Parameters
dt = 1/250;  #trading days
c1 = coefficients(fit)[[1]];
c2 = coefficients(fit)[[2]];
a  = -c2/dt;a
b  = -c1/c2;b
s  = sigma(fit)/dt^0.5;s
```

Για την προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου χρησιμοποιούμε την κάτωθι εξίσωση διαφορών που αντιστοιχεί στην παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση όταν διακριτοποιήσουμε το χρόνο (Euler discretization),

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t)dt + \sigma\varepsilon_{t+1}\sqrt{dt}$$

με a, b, σ να είναι σταθερά και ανεξάρτητα από το χρόνο t, ενώ ε_{t+1} είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

Παράγουμε σε κάθε περίπτωση 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου Libor και τις συγκρίνουμε την πραγματική κίνηση του επιτοκίου, ως ακολούθως:

```
plot(X,type="l", col="red",lwd = 2);


# Generation of 20 Libor random paths via Monte-Carlo
Simulation
for(j in 1:20)
{
         z <- rnorm(n);
         r <- rep(0,n);
         r[1]=X[1];

        for(i in 1:(n-1))
        {
             r[i+1] = r[i]+a*(b-r[i])*dt+s*z[i]*dt^0.5
        }
        lines(r,col="blue")
}
```

4.1.2 Προσομοίωση υποδείγματος CIR

Υπενθυμίζουμε ότι το μοντέλο CIR προσδιορίζει το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Για την προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου χρησιμοποιούμε την κάτωθι εξίσωση, η οποία προκύπτει διακριτοποιώντας το χρόνο (Euler discretization),

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_{t+1}\sqrt{dt}$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διαιρέσουμε με τον όρο $\sqrt{r_t}$, έτσι ώστε να καταστήσουμε τον τελευταίο όρο της εξίσωσης διαφορών στάσιμο. Επομένως προκύπτει ότι:

$$\frac{r_{t+1} - r_t}{\sqrt{r_t}} = ab\frac{dt}{\sqrt{r_t}} - \frac{a}{\sqrt{r_t}}dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon_{t+1}$$

με από a, b, σ σταθερά και ανεξάρτητα από το χρόνο t, ενώ ε_{t+1} είναι μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

Συνεπώς, όμοια με προηγουμένως, για την εκτίμηση των παραμέτρων με στόχο μετέπειτα την αποτίμηση ενός συμβολαίου Cap, εφαρμόζουμε απλή γραμμική παλινδρόμηση με εξαρτημένη μεταβλητή την Y την οποία ορίζουμε να είναι $\frac{r_{t+1}-r_t}{\sqrt{r_t}}$ και ανεξάρτητη μεταβλητή την $\frac{1}{r_t}$.

Ορίζουμε τις μεταβλητές όπως αναφέραμε προηγουμένως και τις παραμέτρους κατά τον ίδιο τρόπο τον οποίο ακολουθήσαμε και στο υποκεφάλαιο 4.1.1.

4.1.3 Προσομοίωση υποδείγματος Ho-Lee

Υπενθυμίζουμε ότι το μοντέλο Ho-Lee προσδιορίζει το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

Στην περίπτωση αυτή, για λόγους υπολογιστικής απλότητας, για την προσομοίωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου θα θεωρήσουμε την παράμετρο θ_t σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου. Δηλαδή, ισχύει $\theta_t = \theta$. Η εξίσωση που προκύπτει επομένως είναι η ακόλουθη:

$$r_{t+1} - r_t = \theta dt + \sigma dW_t$$

Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η διαφορά $r_{t+1} - r_t$ ακολουθεί κίνηση Brown. Να θυμηθούμε, όπως είχαμε παρουσιάσει και στο Κεφάλαιο 1 ότι η παράμετρος θ είναι η τάση και η παράμετρος σ η μεταβλητότητα. Για τις παραμέτρους θ και σ ισχύει ότι:

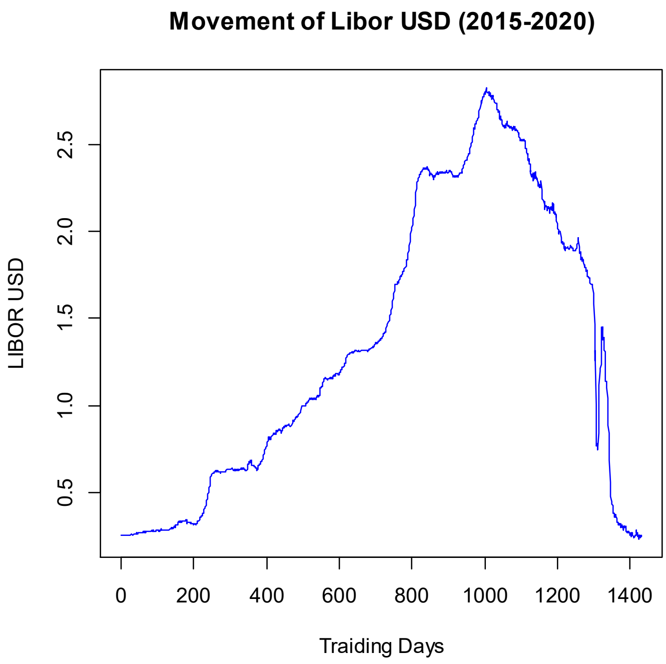
$$\theta = \frac{E(r_{t+1}-r_t)}{dt} \quad \text{και} \quad \sigma = \sqrt{\frac{Var(r_{t+1}-r_t)}{dt}}$$

Ορίζουμε λοιπόν τη μεταβλητή $Y = r_{t+1} - r_t$ όπως αναφέραμε προηγουμένως και τις παραμέτρους θ και σ ώστε να γίνει η προσομοίωση της κίνησης Brown και αργότερα η εκτίμηση της τιμής του συμβολαίου Cap.

4.2 Μελέτη περίπτωσης: LIBOR USD

Το επιτόκιο LIBOR του δολαρίου ΗΠΑ (Libor USD) είναι το μέσο διατραπεζικό επιτόκιο με το οποίο ένας μεγάλος αριθμός τραπεζών στη χρηματαγορά του Λονδίνου είναι διατεθειμένοι να δανείζουν μεταξύ τους μη εξασφαλισμένα κεφάλαια σε δολάρια

ΗΠΑ. Παρακάτω, παρατίθεται η κίνηση του τριμηνιαίου επιτοκίου Libor USD (3-months) για το χρονικό διάστημα 2015 – 2020.



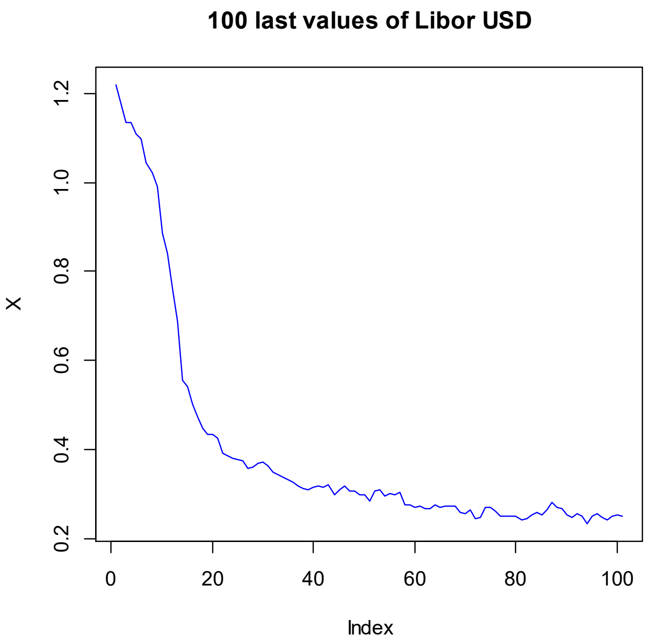
Εικόνα 1: Κίνηση Libor USD (2015-2020)

Όπως είναι φανερό το επιτόκιο κινείται ανοδικά κατά τις πρώτες 1000 τιμές, ενώ αρχίζει να μειώνεται, όπως φαίνεται, στις τιμές 1000 – 1300, κάνοντας μία απότομη αύξηση κατά τις τιμές 1250 – 1300 περίπου. Τέλος, μειώνεται στις 100 τελευταίες τιμές, δηλαδή από τα τέλη του 2019 έως το 2020.

Θα ήταν πολύ σημαντικό να αναφερθούμε στην ασθένεια του COVID-19, η οποία έκανε ηχηρή την παρουσία της στη Δύση τον Φεβρουάριο του 2020 και έπληξε τις οικονομίες της. Όπως αναμένεται, άμεσο επακόλουθο ήταν και η πτώση του επιτοκίου Libor USD. Συνολικά, η παγκόσμια οικονομία λειτούργησε κάτω από ιστορικά πρωτοφανείς καταστάσεις. Για την παρούσα διπλωματική εργασία δεν συμπεριλαμβάνουμε στη μελέτη μας την περίοδο της απρόσμενης εμφάνισης του COVID-19, αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις όπως θα δούμε και παρακάτω, λαμβάνουμε υπόψη τις 100 περίπου τελευταίες τιμές του Libor, σε ορισμένες περιπτώσεις και λιγότερες, οι οποίες αφορούν την περίοδο κατά την οποία η αγορά είχε ομαλοποιηθεί.

4.2.1 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος Vasicek

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου Vasicek (και στη συνέχεια να προσομοιώσουμε 20 πιθανές διαδρομές για τη διάρθρωση του επιτοκίου), θα επιλέξουμε τις 100 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor USD, όπου παρατηρούμε την σταθερή του καθοδική πορεία. Για να έχει ο αναγνώστης μια καλύτερη αντίληψη για την κίνηση των 100 τελευταίων τιμών του διατραπεζικού επιτοκίου Libor USD παραθέτουμε ένα γράφημα αυτών:



Εικόνα 2: Κίνηση 100 τελευταίων τιμών Libor USD

Γενικότερα, όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή του επιτοκίου μέσω του υποδείγματος Vasicek, επιλέγουμε περιοχές όπου το επιτόκιο διαγράφει μία σταθερά ανοδική ή σταθερά καθοδική πορεία, χωρίς έντονα «ups and downs». Αυτό συμβαίνει διότι, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2, στο υπόδειγμα Vasicek το επιτόκιο κινείται γύρω από ένα περιορισμένο εύρος και έχει μια μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας στην οποία επανέρχεται το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο.

Για την αποτίμηση του συμβολαίου Cap μέσω του υποδείγματος Vasicek θα χρειαστεί προηγουμένως να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4.1.1. Με βάση το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης μεταξύ των πρώτων διαφορών και των τιμών του επιτοκίου προκύπτουν τα παρακάτω:

```
lm(formula = Y ~ X)
Residuals:
      Min         1Q     Median         3Q         Max
-0.104487 -0.004985   0.001417     0.009209    0.051839


Coefficients:
             Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
(Intercept)  0.012927   0.003419     3.782    0.000268 ***
X           -0.056715   0.007258    -7.815    6.29e-12 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’
1


Residual standard error: 0.01819 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3839,    Adjusted R-squared:  0.3776
F-statistic: 61.07 on 1 and 98 DF,   p-value: 6.293e-12
```

Με βάση τα αποτελέσματα της γραμμικής παλινδρόμησης του μοντέλου $y_t = c_1 + c_2 r_t + \epsilon_t$, προκύπτει ότι $c_1 = 0.012927$ με $p - value < 0{,}01$ και $c_2 = -0.056715$ με $p - value \cong 0$. Βάσει των τιμών των $p - value$ συνεπάγεται ότι και οι δύο συντελεστές είναι σταστιστικά σημαντικοί. Επομένως, βάσει των σχέσεων που ισχύουν για τις παραμέτρους a, b:

$$a = -\frac{c_2}{dt} \quad \text{και} \quad b = -\frac{c_1}{c_2}$$

ισχύει ότι $a = 14.1788$ και $b = 0.2279348$, ενώ για τη μεταβλητότητα του μοντέλου:

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var(\epsilon_t)}{dt}}$$

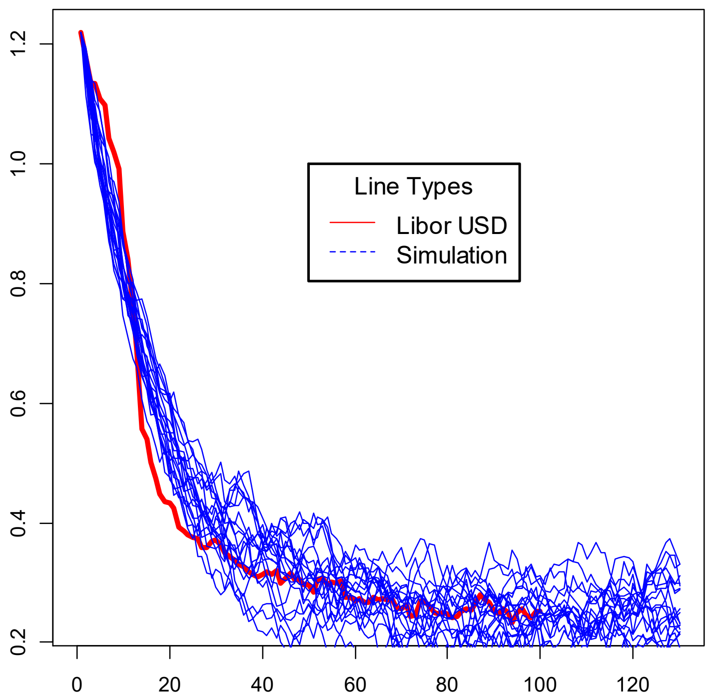
ισχύει ότι $\sigma = 0.2875315$.

Συγκεντρωτικά έχουμε:

Παράμετροι	
c_1	0.012927
c_2	−0.056715
a	14.1788
b	0.2279348
σ	0.2875315

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας στην οποία επανέρχεται το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι σχεδόν 0.22, ενώ η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι περίπου 0.29.

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του Vasicek, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor USD. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου:



Εικόνα 3: Προσομοίωση Libor USD μέσω Vasicek

Στο γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, ενώ επιλέγουμε να συνεχίσουμε τις προσομοιώσεις για 30 επιπλέον τιμές του επιτοκίου. Πράγματι, παρατηρούμε ότι μακροπρόθεσμα η τιμή ισορροπίας του επιτοκίου κινείται γύρω από το 0.22.

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης, προχωράμε στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου. Για να προχωρήσουμε την εκτίμηση της τιμής αυτής, πρέπει προηγουμένως να ορίσουμε κάποιες προϋποθέσεις για το συμβόλαιο.

- Το επιτόκιο αναφοράς του Cap ορίζεται να είναι $k = 0.2\%$, δηλαδή εάν το επιτόκιο Libor USD πάρει τιμή μεγαλύτερη του 0.002, τότε ο πωλητής του Cap είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στον αγοραστή του Cap τη χρηματική διαφορά.
- Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας των διαφόρων πληρωμών θεωρούμε ότι έχουμε σταθερό επιτόκιο $r_0 = 0.02$. (π.χ. με βάση όρους του συμβολαίου αλλά και για λόγους υπολογιστικής απλότητας)
- Οι πληρωμές θεωρούμε ότι καταβάλλονται ανά τρίμηνο, άρα $d = \frac{1}{4}$.
- Επιλέγουμε 10000 επαναλήψεις για την Monte Carlo εκτίμηση του Cap.
- Το ποσό που λαμβάνει ο αγοραστής του συμβολαίου ως δάνειο ορίζουμε να είναι $A = 10^6\$$.
- Η διάρκεια του συμβολαίου είναι το $T = 1$ έτος.

Παρακάτω ορίζουμε τα χαρακτηριστικά του συμβολαίου και υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή που εκτιμάται να οριστεί για το Cap, βάσει του υποδείγματος Vasicek.

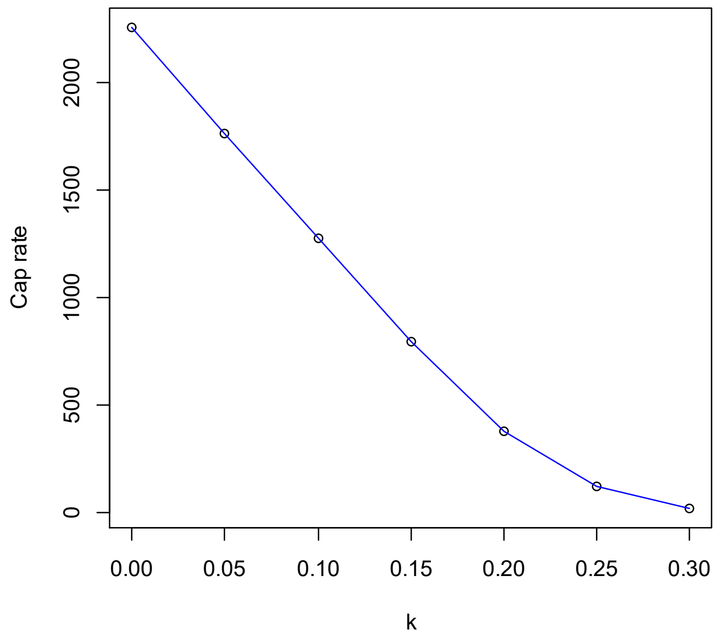
```
# Calculation of value of cap contract
iterations = 10^4;


delta = 1/4;    # 3 months rate
n1    = 21*12; # 12 months
A     = 10^6;   # Capital borrowed
r0    = 0.02;   # constant risk neutral interest rate
m1    = 21*3;   # three months
k_values = seq(0.0, 0.3, 0.05)
CapRate  = rep(0, length(k_values))
```

```
idx = 1
for (k in k_values)
{
    D = 0;

    for (j in 1:iterations)
    {
       z <- rnorm(n1);
       r <- rep(0,n1);

       r[1] = 0.3;
       cap  = 0.0;
       for(i in 1:(n1-1))
       {
          r[i+1] = r[i]+a*(b-r[i])*dt+s*z[i]*dt^0.5

          if((i+1)%%m1 == 0)  #every three months
          {
            #caplet return
            caplet = (max(r[i+1]-k, 0))*delta/100;
            cap    = cap + caplet*exp(-r0*i*dt)
          }
       }
    D = D + cap
    }
    print( A*D/iterations )
    CapRate[idx] = A*D/iterations
    # Increase index
    idx = idx + 1
}
```

Αν στο παραπάνω υπόδειγμα του Vasicek δώσουμε διάφορες τιμές στο επιτόκιο αναφοράς του Cap τότε λαμβάνεται ο ακόλουθος πίνακας στον οποίο έχουμε συμπεριλάβει τις διάφορες τιμές του συμβολαίου που καλείται να καταβάλει ο ενδιαφερόμενος αγοραστής.

k	Cap price (estimate)
$\mathbf{0.00}\%$	2252$
$\mathbf{0.05}\%$	1762$
$\mathbf{0.10}\%$	1274$
$\mathbf{0.15}\%$	793$
$\mathbf{0.20}\%$	381$
$\mathbf{0.25}\%$	124$
$\mathbf{0.30}\%$	24$

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του συμβολαίου Cap μετά από τους παραπάνω υπολογισμούς, αναμένεται να είναι περίπου 381$ δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει επιτόκιο αναφοράς 0.2%. Συγκεκριμένα, αυτό είναι το ποσό που θα πρέπει να καταβάλει ο ενδιαφερόμενος αγοραστής την χρονική στιγμή $t = 0$, στον πωλητή προστασίας, εάν φοβάται άνοδο των επιτοκίων (εντός όμως του μοντέλου του Vasicek) και θέλει να προστατευτεί από τα επιπλέον χρήματα που θα αναγκαστεί να καταβάλει λόγω αυτής της ενδεχόμενης αύξησης. Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του cap rate.



Εικόνα 4: Τιμές του Cap βάσει του k

4.2.2 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος CIR

Το υπόδειγμα CIR, όπως έχουμε αναλύσει και στο Κεφάλαιο 2.2 αποτέλεσε συνέχεια του υποδείγματος Vasicek και προτάθηκε ώστε να αντισταθμίσει ένα μειονέκτημα του πραναφερθέντος μοντέλου. Έχουν επομένως αρκετές ομοιότητες με κύρια διαφορά τους ότι το υπόδειγμα CIR δεν επιτρέπει τις αρνητικές τιμές του επιτοκίου λόγω του όρου $\sqrt{r_t}$ που πολλαπλασιάζεται με τον τυχαίο παράγοντα (αν το r_t πλησιάζει στο 0 τότε ο τυχαίος παράγοντας $\varepsilon_t\sqrt{r_t}$ σχεδόν μηδενίζεται και έτσι δεν μπορεί η διαδικασία να περάσει κάτω από το 0). Συνεπώς, κατά αντιστοιχία με το υπόδειγμα Vasicek, το επιτόκιο έχει μία μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας στην οποία επανέρχεται.

Έχοντας ως στόχο να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου CIR (και στη συνέχεια να προσομοιώσουμε 20 πιθανές διαδρομές για τη διάρθρωση του επιτοκίου), θα επιλέξουμε τις 100 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor USD, όπου παρατηρήσαμε και από την ανάλυση του προηγούμενου υποδείγματος ότι παρουσιάζει μία σταθερή καθοδική πορεία.

Για την αποτίμηση του συμβολαίου Cap μέσω του υποδείγματος CIR θα χρειαστεί προηγουμένως να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4.2.1. Με βάση το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής προκύπτουν τα παρακάτω:

```
lm(formula = Y ~ X)

Residuals:
      Min         1Q    Median        3Q       Max
-0.117708  -0.009383   0.002138   0.013324  0.050145

Coefficients:
             Estimate   Std. Error  t value   Pr(>|t|)
(Intercept) -0.065065   0.007628    -8.53     1.85e-13 ***
X            0.017358   0.002368     7.329    6.64e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
```

Με βάση τα αποτελέσματα της γραμμικής παλινδρόμησης, προκύπτει ότι $c_1 = -0.065065$ και $c_2 = 0.017358$ με $p - value \cong 0$ και για τις δύο παραμέντρους. Δεδομένων των τιμών των $p - value$ συνεπάγεται ότι και οι δύο γραμμικοί συντελεστές είναι σταστιστικά σημαντικοί για την εξαρτημένη μεταβλητή. Επομένως, βάσει των σχέσεων που ισχύουν για τις παραμέτρους a, b:

$$a = -\frac{c_1}{dt} \quad \text{και} \quad b = -\frac{c_2}{c_1}$$

ισχύει ότι $a = 16.26619$ και $b = 0.2667807$, ενώ για τη μεταβλητότητα του μοντέλου:

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var(\epsilon_t)}{dt}}$$

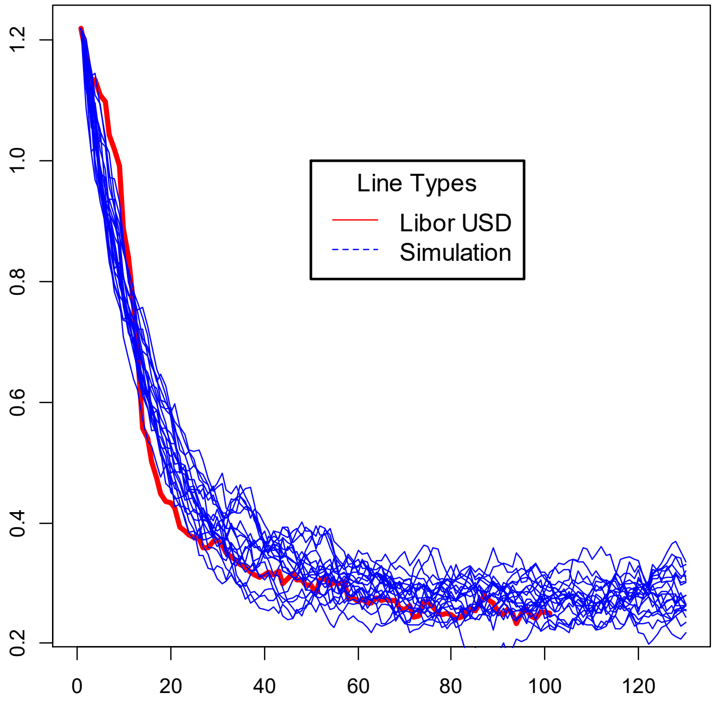
ισχύει ότι $\sigma = 0.3636891$.

Συγκεντρωτικά έχουμε:

Παράμετροι	
$\boldsymbol{c_1}$	-0.065065
$\boldsymbol{c_2}$	0.017358
$\boldsymbol{a}$	16.26619
$\boldsymbol{b}$	0.2667807
$\boldsymbol{\sigma}$	0.3636891

Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας γύρω από την οποία κινείται το επιτόκιο είναι περίπου 0,26, ενώ η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι 0,36.

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του CIR, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor USD. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου:



Εικόνα 5: Προσομοίωση Libor USD μέσω CIR

Στο γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, όπου όπως είναι φανερό οι προσομοιώσεις αναπαριστούν πολύ καλά την πραγματική κίνηση. Επίσης φαίνεται και η προσομοίωση για 30 επιπλέον τιμές επιτοκίου.

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης, προχωράμε στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου. Πραγματοποιούμε τον υπολογισμό της τιμής του συμβολαίου Cap για διάφορες τιμές του επιτοκίου αναφοράς όπως φαίνεται παρακάτω:

```
# Calculation of value of cap contract
 iterations = 10^4;


 delta = 1/4;
 n1     = 21*12; # 12 months
 A      = 10^6;  # Capital borrowed
 r0     = 0.02   # constant risk neutral interest rate
 m1     = 21*3;  # three months
```

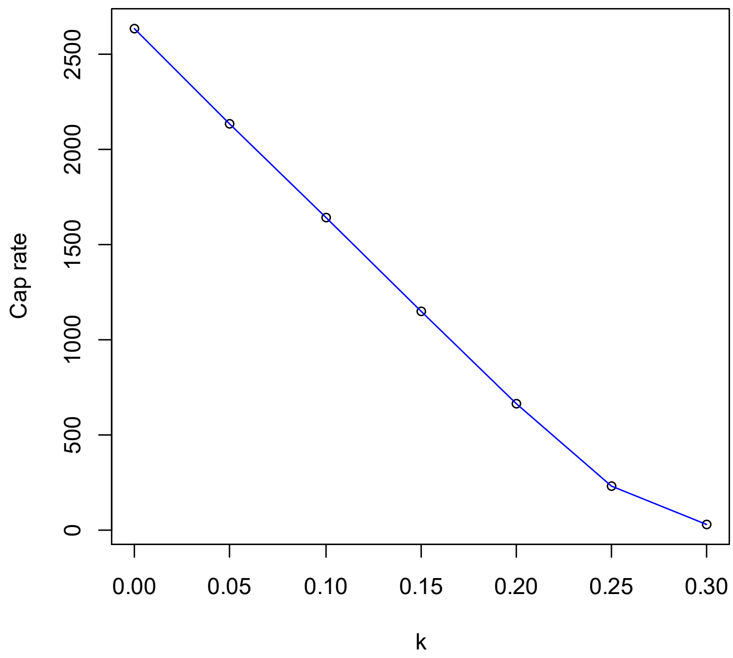
```
k_values = seq(0.0, 0.3, 0.05)
CapRate  = rep(0, length(k_values))


idx = 1
for (k in k_values)
{
    D = 0;


    for (j in 1:iterations)
    {
       z <- rnorm(n1);
       r <- rep(0,n1);


       r[1] = 0.3;
       cap  = 0.0;
       for(i in 1:(n1-1))
       {
          r[i+1] = r[i]+a*(b-r[i])*dt+s*z[i]*sqrt(r[i])*dt^0.5


          if((i+1)%%m1 == 0)  #every three months
          {
              #caplet return
              Caplet = (max(r[i+1]-k, 0))*delta/100;
              cap    = cap + caplet*exp(-r0*i*dt)
          }
       }
    D = D + cap
    }
    #Estimate the price of cap contract
    print( A*D/iterations )
    CapRate[idx] = A*D/iterations
```

```
    # Increase index
    idx = idx + 1
}
```

Για τις διάφορες τιμές που δίνουμε στο επιτόκιο αναφοράς του Cap παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές από το υπόδειγμα CIR.

k	Cap price (estimate)
0.00%	2633\$
0.05%	2142\$
0.10%	1650\$
0.15%	1154\$
0.20%	660\$
0.25%	229\$
0.30%	31\$

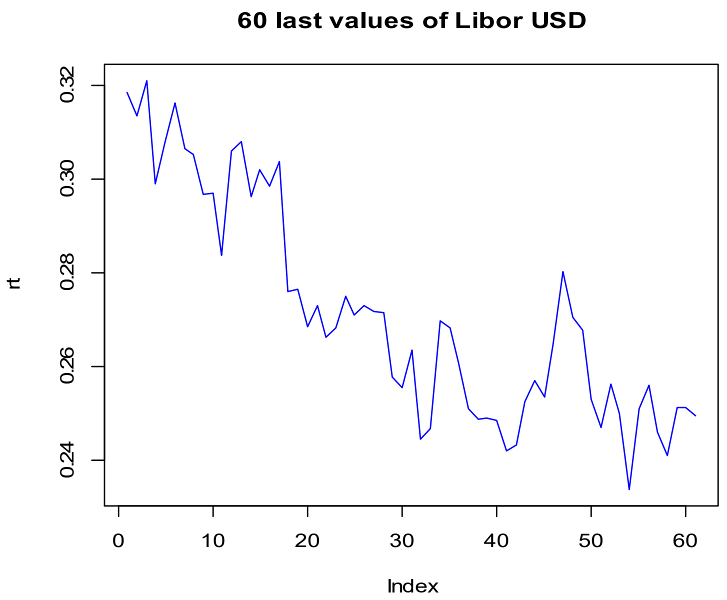
Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι εάν το επιτόκιο αναφοράς του συμβολαίου οριστεί να είναι 0,2%, τότε ο αγοραστής θα καταβάλει στον πωλητή του συμβολαίου 660\$. Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 6: Τιμές του Cap βάσει του k

4.2.3 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος Ho-Lee

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους θ και σ, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα εύρος τιμών στο οποίο παρατηρούμε σταθερή τάση καθώς το υπόδειγμα Ho-Lee παρουσιάζει ευαισθησία ως προς τις ανοδικές και καθοδικές κινήσεις του επιτοκίου. Δηλαδή επιλέγουμε ένα διάστημα κατά το οποίο οι τιμές του επιτοκίου κινούνται γύρω από μία νοητή ευθεία. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε τις 60 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor USD. Ας δούμε μία πιο λεπτομερή εικόνα τις κίνησης αυτών των τιμών παρακάτω:

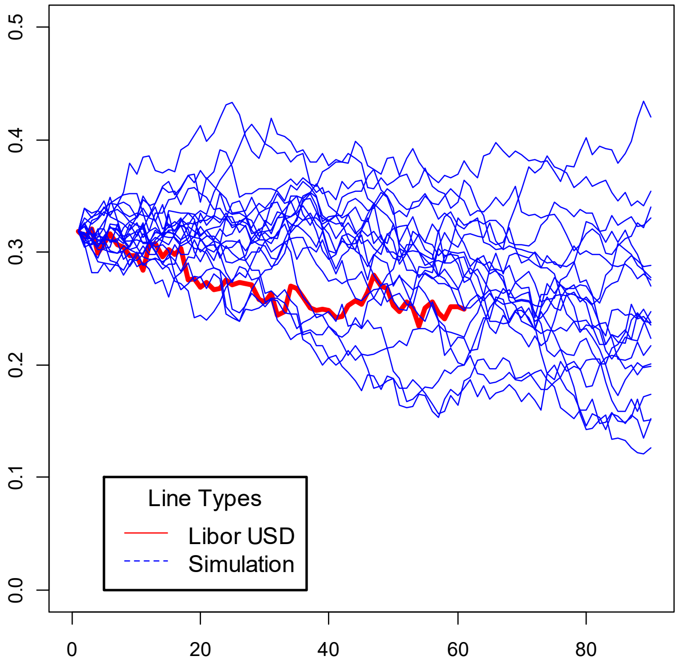


Εικόνα 7: Κίνηση των 60 τελευταίων τιμών Libor USD

Για την αποτίμηση του συμβολαίου Cap μέσω του υποδείγματος Ho-Lee θα χρειαστεί προηγουμένως να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων με βάση τις σχέσεις τις οποίες αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4.3.1. Συνεπώς προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

Παράμετροι	
$\boldsymbol{\theta}$	-0.2870833
$\boldsymbol{\sigma}$	0.156494

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του Ho-Lee, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor USD. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου:



Εικόνα 8: Προσομοίωση του Libor USD μέσω Ho-Lee.

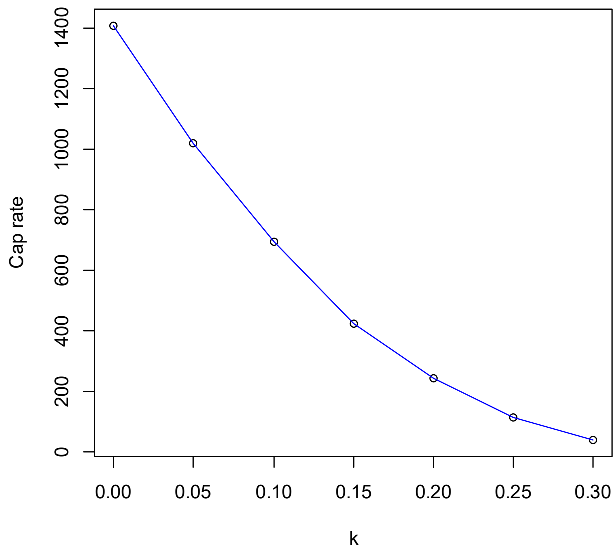
Όπως φαίνεται και από το γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, ενώ συνεχίζουμε την προσομοίωση για 30 επιπλέον τιμές του επιτοκίου.

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης, προχωράμε στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου.

Αν στο παραπάνω υπόδειγμα Ho-Lee δώσουμε διάφορες τιμές στο επιτόκιο αναφοράς του Cap τότε λαμβάνεται ο ακόλουθος πίνακας.

k	Cap price (estimate)
0.00%	1389$
0.05%	1031$
0.10%	711$
0.15%	434$
0.20%	239$
0.25%	112$
0.30%	43$

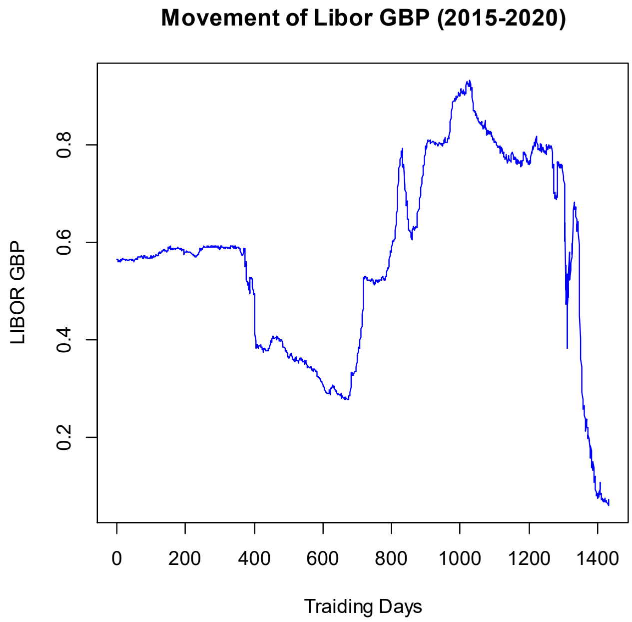
Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι εάν το επιτόκιο αναφοράς του συμβολαίου οριστεί να είναι 0,1% τότε ο αγοραστής θα καταβάλει στον πωλητή του συμβολαίου 711\$. Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 9: Τιμές του Cap βάσει του k

4.3 Μελέτη περίπτωσης: LIBOR GBP

Το επιτόκιο LIBOR της βρετανικής λίρας είναι το μέσο διατραπεζικό επιτόκιο με το οποίο ένας μεγάλος αριθμός τραπεζών στην αγορά χρήματος του Λονδίνου είναι διατεθειμένοι να δανείζουν μεταξύ τους μη εξασφαλισμένα κεφάλαια. Παρακάτω, παρατίθεται η κίνηση του τριμηνιαίου επιτοκίου Libor GBP για τα έτη 2015 – 2020:

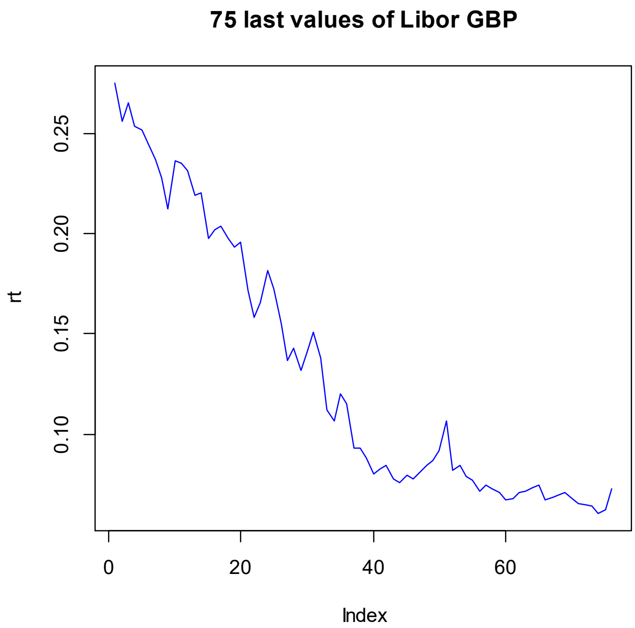


Εικόνα 10: Κίνηση του Libor GBP (2015-2020)

Από τα διαγράμματα για την κίνηση του τριμηνιαίου επιτοκίου φαίνεται να διαγράφει μία σταθερή πορεία κατά τις πρώτες 350 τιμές, ενώ για τις επόμενες 400 περίπου παρατηρήσεις φαίνεται ότι αρχίζει να μειώνεται απότομα. Στη συνέχεια, παρατηρούμε συνεχείς αυξομειώσεις, ενώ κατά τις τελευταίες τιμές παρατηρούμε το επιτόκιο να μειώνεται, παρόλα αυτά φαίνεται να υπάρχουν κάποιες μικρές αυξομειώσεις.

4.3.1 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος Vasicek

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως το επιτόκιο Libor GBP από τις τελευταίες παρατηρήσεις φαίνεται να μειώνεται συνεχώς. Παρόλα αυτά θα ήταν βοηθητικό να έχουμε μία πιο λεπτομερή εικόνα της κίνησης των τελευαίων παρατηρήσεων. Ας δούμε σε ένα γράφημα τις τελευταίες 75 τιμές του Libor GBP:



Εικόνα 11: Κίνηση των 75 τελευταίων τιμών του Libor GBP

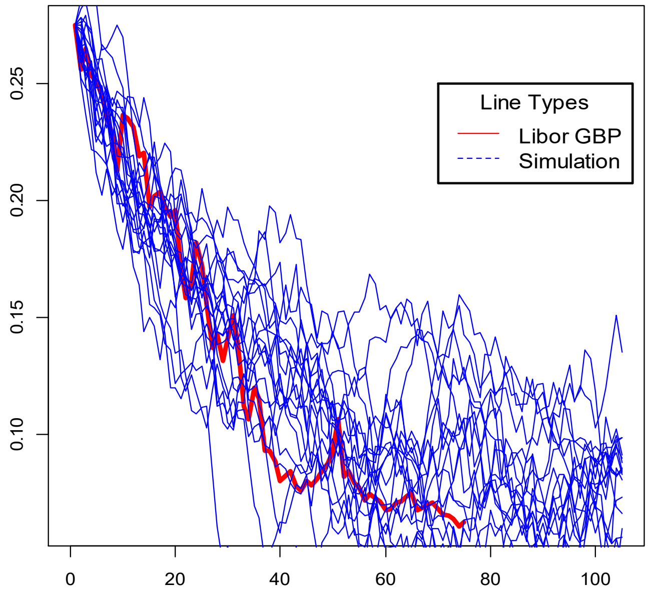
Έχοντας πλέον μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για τις 75 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor GBP, παρατηρούμε όντως μικρές, αλλά όχι πολύ απότομες αυξομειώσεις στην κίνηση του επιτοκίου. Σημαντικό είναι επίσης να επισημάνουμε ότι η τιμή του επιτοκίου δεν ξεπερνά το 0,25%. Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου Vasicek (και στη συνέχεια να προσομοιώσουμε 20 πιθανές διαδρομές για τη διάρθρωση του επιτοκίου), θα επιλέγουμε αυτές τις 75 τελευταίες τιμές του Libor GBP.

Όμοια με την περίπτωση του υποκεφαλαίου 4.2.1 το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή της πρώτες διαφορές των τιμών του επιτοκίου και ανεξάρτητη μεταβλητή την τιμή του επιτοκίου επιστρέφει τα παρακάτω αποτελέσματα:

Παράμετροι	
c_1	0.002226
c_2	-0.037495
a	9.373866
b	0.05936109
σ	0.148198

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας στην οποία επανέρχεται το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι σχεδόν 0.06, ενώ η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι περίπου 0.15.

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του Vasicek, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor GBP. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου.



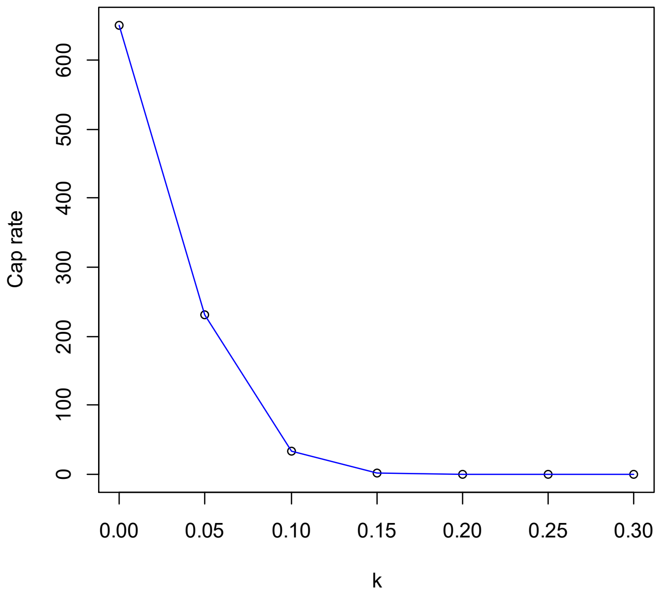
Εικόνα 12: Προσομοίωση Libor GBP μέσω Vasicek

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης είναι φανερό ότι η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας του επιτοκίου είναι περίπου 0.05 όπως φαίνεται και από την κόκκινη γραμμή του παραπάνω γραφήματος. Προχωράμε τώρα στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου. Για τις διάφορες τιμές του επιτοκίου αναφοράς προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές του συμβολαίου Cap:

k	Cap price (estimate)
0.00%	650£
0.05%	230£
0.10%	32£
0.15%	1£
0.20%	0£
0.25%	0£
0.30%	0£

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι εάν το επιτόκιο αναφοράς του συμβολαίου οριστεί να είναι 0,05% τότε ο αγοραστής θα καταβάλει στον πωλητή του συμβολαίου 230£.

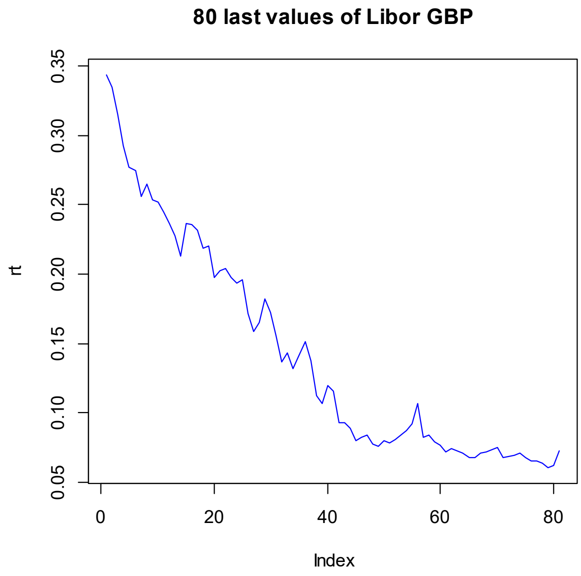
Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 13: Τιμές του Cap βάσει του k

4.3.2 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος CIR

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο υπόδειγμα που εξετάσαμε, θα χρησιμοποιήσουμε τις τελευταίες 80 τιμές του Libor GB.



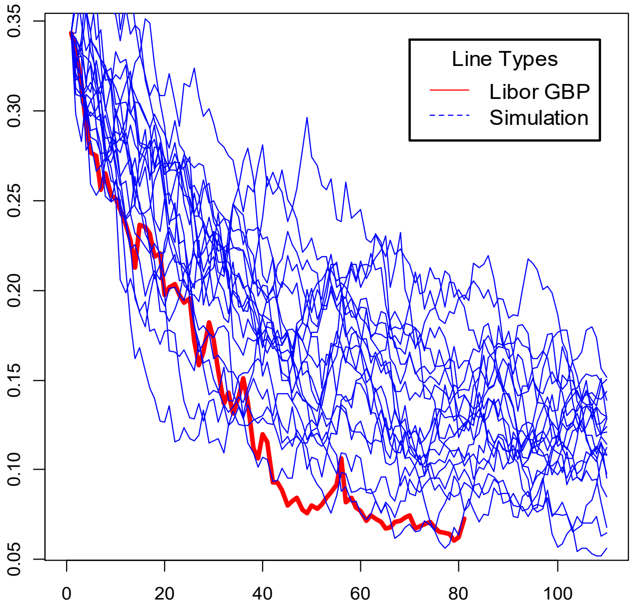
Εικόνα 14: Κίνηση των 80 τελευταίων τιμών του Libor GBP

Προσομοιώνουμε 20 πιθανές διαδρομές για τη διάρθρωση του επιτοκίου, βάσει των 80 τελευταίων τιμών του επιτοκίου Libor GB, όπου παρατηρούμε την καθοδική του πορεία, με μικρές αυξομειώσεις όπως αναφέραμε. Με βάση το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης καταλήγουμε στις παρακάτω παραμέτρους:

Παράμετροι	
c_1	-0.0225761
c_2	0.0016455
a	5.644025
b	0.07288822
σ	0.3834837

Προκύπτει επομένως ότι το μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο επιτοκίου είναι περίπου 0.07 και η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι 0.3.

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του CIR, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor GBP. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου.



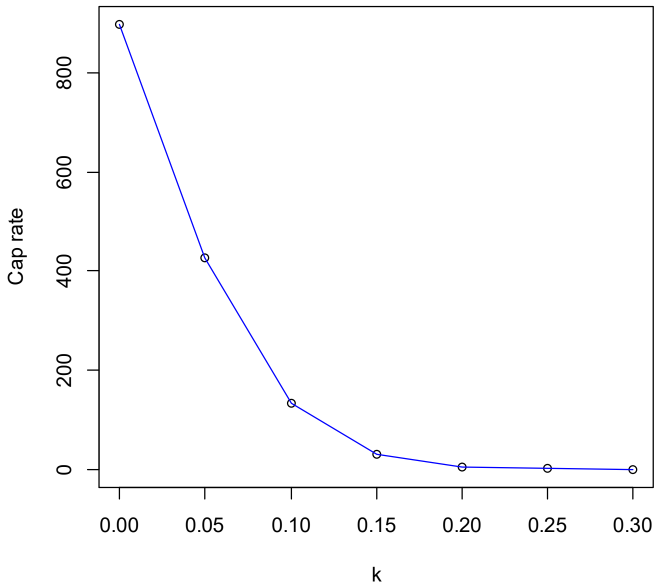
Εικόνα 15: Προσομοίωση του Libor GBP μέσω του CIR

Στο γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, αλλά και την προσομοίωση για 30 επιπλέον τιμές. Για τις διάφορες τιμές που δίνουμε στο επιτόκιο αναφοράς του Cap παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές από το υπόδειγμα CIR.

k	Cap price (estimate)
0.00%	898£
0.05%	428£
0.10%	132£
0.15%	30£
0.20%	5£
0.25%	0£
0.30%	0£

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι εάν το επιτόκιο αναφοράς του συμβολαίου οριστεί να είναι 0.05% τότε ο αγοραστής θα καταβάλει στον πωλητή του συμβολαίου 428£.

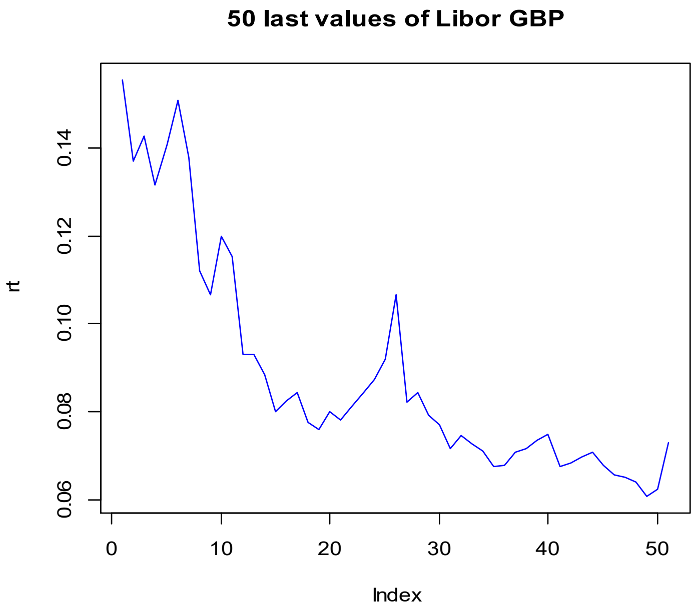
Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 16: Τιμές του Cap βάσει του k

4.3.3 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος Ho-Lee

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους θ και σ, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα εύρος τιμών στο οποίο παρατηρούμε σταθερή τάση. Όμοια με την περίπτωση του Libor USD, επιλέγουμε ένα διάστημα κατά το οποίο οι τιμές του επιτοκίου κινούνται γύρω από μία νοητή ευθεία. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε τις 50 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor GBP. Ας δούμε μία πιο λεπτομερή εικόνα τις κίνησης αυτών των τιμών παρακάτω:

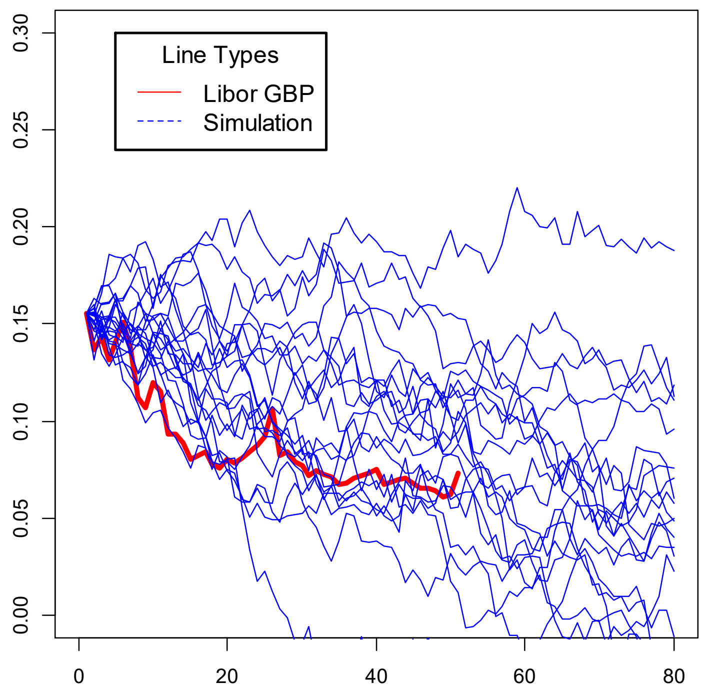


Εικόνα 17: Κίνηση των 50 τελευταίων τιμών του Libor GBP

Για την αποτίμηση του συμβολαίου Cap μέσω του υποδείγματος Ho-Lee θα χρειαστεί προηγουμένως να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων με βάση τις σχέσεις τις οποίες αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4.3.1. Συνεπώς προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

Παράμετροι	
$\boldsymbol{\theta}$	-0.413
$\boldsymbol{\sigma}$	0.1329379

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του Ho-Lee, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor GBP. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου:



Εικόνα 18: Προσομοίωση Libor GBP μέσω Ho-Lee.

Όπως φαίνεται και από το γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, αλλά και την προσομοίωση για 30 επιπλέον τιμές.

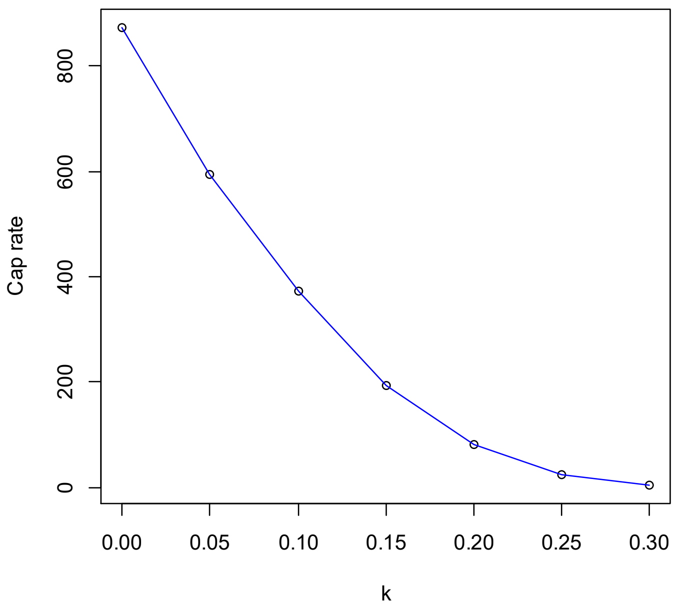
Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης, προχωράμε στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου.

Αν στο παραπάνω υπόδειγμα Ho-Lee δώσουμε διάφορες τιμές στο επιτόκιο αναφοράς του Cap τότε λαμβάνεται ο ακόλουθος πίνακας.

k	Cap price (estimate)
0.00%	871£
0.05%	594£
0.10%	372£
0.15%	194£
0.20%	81£
0.25%	24£
0.30%	5£

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι εάν το επιτόκιο αναφοράς του συμβολαίου οριστεί να είναι 0,1% τότε ο αγοραστής θα καταβάλει στον πωλητή του συμβολαίου 372£.

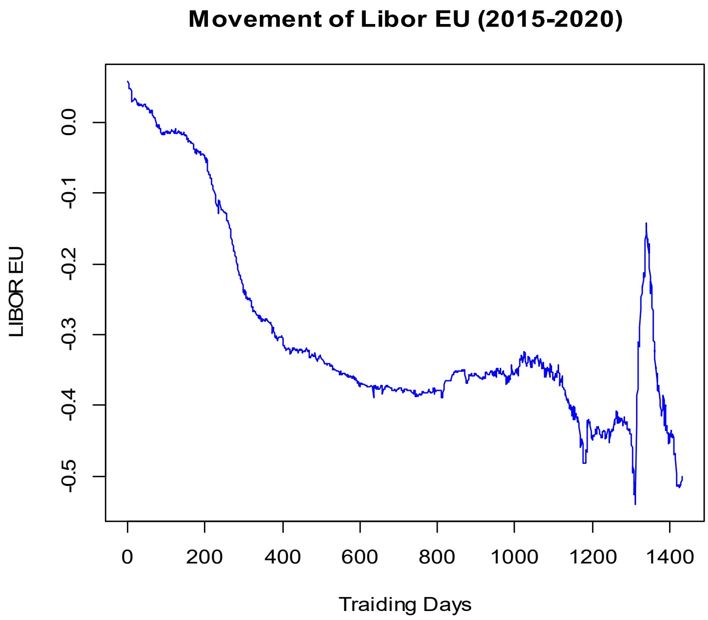
Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 19: Τιμές του Cap βάσει του k

4.4 Μελέτη περίπτωσης: LIBOR EU

Το επιτόκιο LIBOR EU είναι το μέσο διατραπεζικό επιτόκιο με το οποίο ένας μεγάλος αριθμός τραπεζών στην αγορά χρήματος του Λονδίνου είναι διατεθειμένοι να δανείζουν μεταξύ τους μη εξασφαλισμένα κεφάλαια σε ευρώ. Παρακάτω, παρατίθεται η κίνηση του τριμηνιαίου επιτοκίου Libor EU για τα έτη $2015 - 2020$.



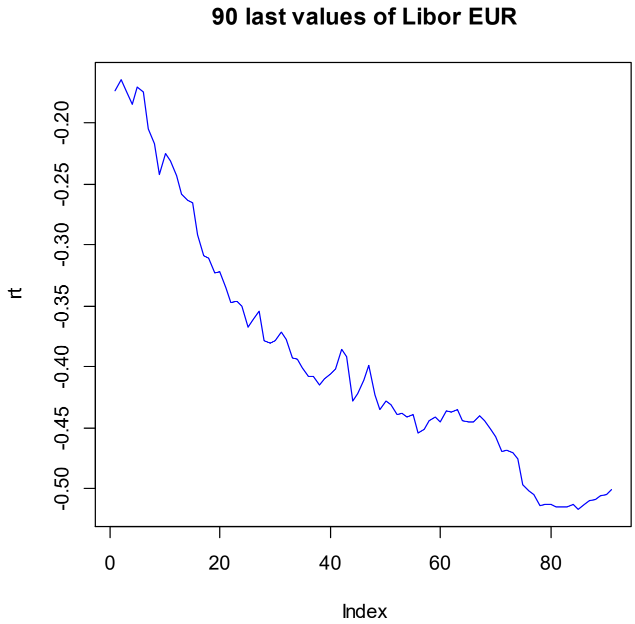
Εικόνα 20: Κίνηση του Libor EU (2015-2020)

Από τα διαγράμματα για την κίνηση του τριμηνιαίου επιτοκίου Libor EU φαίνεται να διατηρεί μια σταθερά καθοδική πορεία κατά τις πρώτες 800 τιμές του επιτοκίου με μικρές αυξομειώσεις, ενώ παρατηρούμε μια αρκετά απότομη μεταβολή στην κίνησή του μεταξύ της $1200\eta\varsigma$ και $1400\eta\varsigma$ του τιμής.

Πολύ σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι όπως φαίνεται και από τον κάθετο άξονα του γραφήματος οι τιμές του επιτοκίου είναι αρνητικές καθόλη τη διάρκεια των ετών 2015-2020. Η πληροφορία αυτή θα είναι καθοριστική στη συνέχεια, σχετικά με το επιτόκιο αναφοράς με το οποίο επιλέγει ο αγοραστής να αγοράσει από τον πωλητή το συμβόλαιο για να προστατευτεί από μια ενδεχόμενη αύξηση του επιτοκίου Libor EU.

4.4.1 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος Vasicek

Όμοια με προηγουμένως παραθέτουμε ένα από τις τελευταίες παρατηρήσεις φαίνεται να μειώνεται συνεχώς. Παρόλα αυτά θα ήταν καλύτερα να έχουμε μία πιο λεπτομερή εικόνα της κίνησης των τελευταίων 90 παρατηρήσεων του επιτοκίου Libor EU, όπως η παρακάτω:



Εικόνα 21: Κίνηση των 90 τελευταίων τιμών του Libor EU

Όπως φαίνεται από το γράφημα για τις 90 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor EU, παρατηρούμε όντως μικρές, αλλά όχι πολύ απότομες αυξομειώσεις στην κίνησή του.

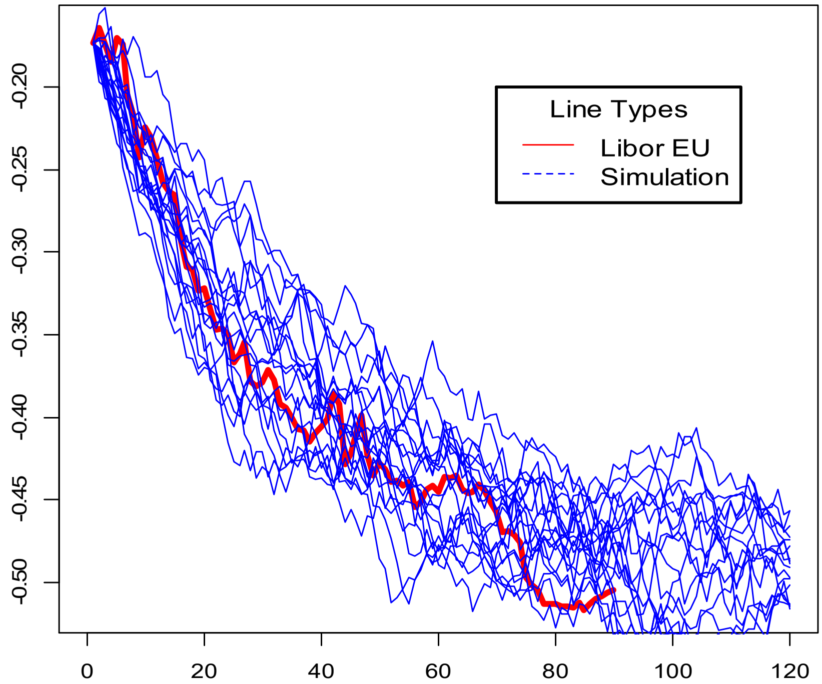
Προκειμένου να εκτιμήσουμε 20 πιθανές διαδρομές για τη διάρθρωση του επιτοκίου, θα επιλέξουμε τις 90 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor EU, όπου παρατηρούμε την καθοδική του πορεία, με μικρές αυξομειώσεις όπως αναφέραμε.

Για την αποτίμηση του συμβολαίου Cap μέσω του υποδείγματος Vasicek θα χρειαστεί προηγουμένως να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4.1.1. Με βάση το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής των πρώτων διαφορών και της ανεξάρτητης μεταβλητής των τιμών του επιτοκίου προκύπτουν τα παρακάτω:

Παράμετροι	
c_1	-0.014299
c_2	-0.02713
a	6.782407
b	-0.5270771
σ	0.1533666

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας στην οποία επανέρχεται το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι σχεδόν -0.5, ενώ η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι περίπου 0.15.

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του Vasicek, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor EU. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου.



Εικόνα 22: Προσομοίωση Libor EU μέσω Vasicek

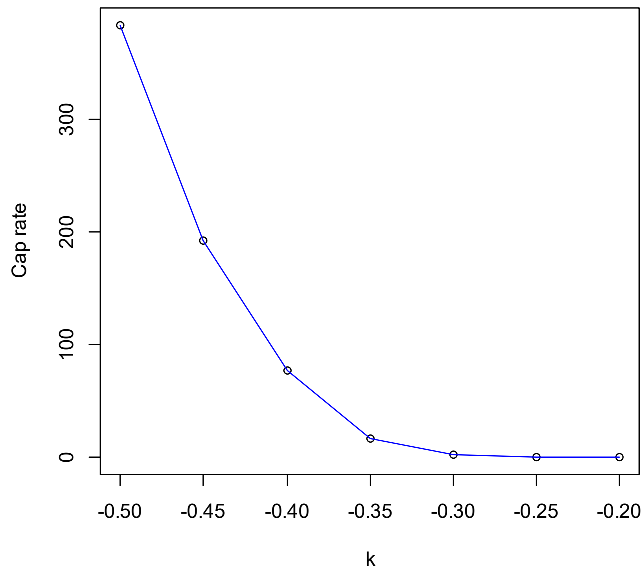
Στο γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, όπου όπως είναι φανερό οι προσομοιώσεις προσεγγίζουν την πραγματική κίνησή του ενώ παράλληλά βλέπουμε ότι η μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας του επιτοκίου είναι περ $-0{,}5$.

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης, προχωράμε στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου.

k	Cap price (estimate)
$\mathbf{-0.050\%}$	386€
$\mathbf{-0.045\%}$	192€
$\mathbf{-0.040\%}$	77€
$\mathbf{-0.035\%}$	16€
$\mathbf{-0.030\%}$	1€
$\mathbf{-0.025\%}$	0€
$\mathbf{-0.020\%}$	0€

Επί παραδείγματι, το ποσό που θα πρέπει να καταβάλει ο ενδιαφερόμενος αγοραστής την χρονική στιγμή $t = 0$, στον πωλητή προστασίας, εάν $k = -0.05\%$ είναι 386€.

Παρακάτω δίνουμε και το γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 23: Τιμές του Cap βάσει του k

4.4.2 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος CIR

Στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις του Libor US και Libor GB όπου εφαρμόσαμε το υπόδειγμα CIR οι τιμές του επιτοκίου ήταν θετικές καθόλη τη διάρκεια της κίνησής του, σε αντίθεση με την παρούσα περίπτωση του Libor EU. Στον κάτωθι πίνακα όπου αναγράφεται η πρώτη και η τελευταία τιμή του επιτοκίου, φαίνεται ότι ξεκινά από θετικές τιμές και κατά τη διάρκεια λαμβάνει και αρνητικές τιμές.

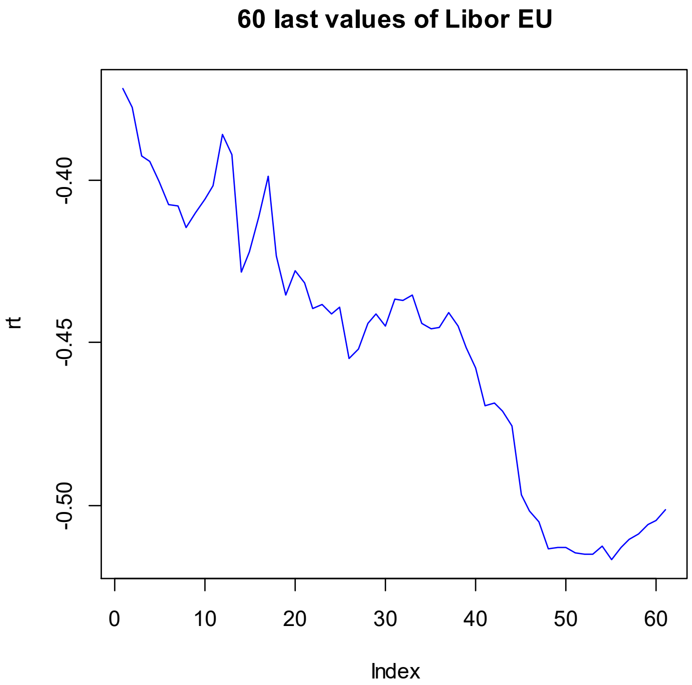
Instance	Date	Value
1	2/1/2015	0.05786
1433	3/9/2020	−0.50114

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 2 όπου και εξετάσαμε το υπόδειγμα των Cox-Ingersoll-Ross σχολιάσαμε ότι πρόσθεσαν τον όρο $\sqrt{r_t}$. Ο όρος αυτός δεν επιτρέπει στο επιτόκιο να λάβει αρνητικές τιμές και κατ' επέκτασην δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του συμβολαίου Cap βάσει του υποδείγματος CIR για το επιτόκιο Libor EU.

Γενικά, στην περίπτωση του υποδείγματος CIR το επιτόκιο δεν μπορεί να κινείται από το ένα ημιεπίπεδο στο άλλο πέρνοντας πότε θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

4.4.3 Αποτίμηση Cap μέσω υποδείγματος Ho-Lee

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους θ και σ, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα εύρος τιμών στο οποίο παρατηρούμε σταθερή τάση. Δηλαδή επιλέγουμε ένα διάστημα κατά το οποίο οι τιμές του επιτοκίου κινούνται γύρω από μία νοητή ευθεία. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε τις 60 τελευταίες τιμές του επιτοκίου Libor EU. Ας δούμε μία πιο λεπτομερή εικόνα τις κίνησης αυτών των τιμών παρακάτω:



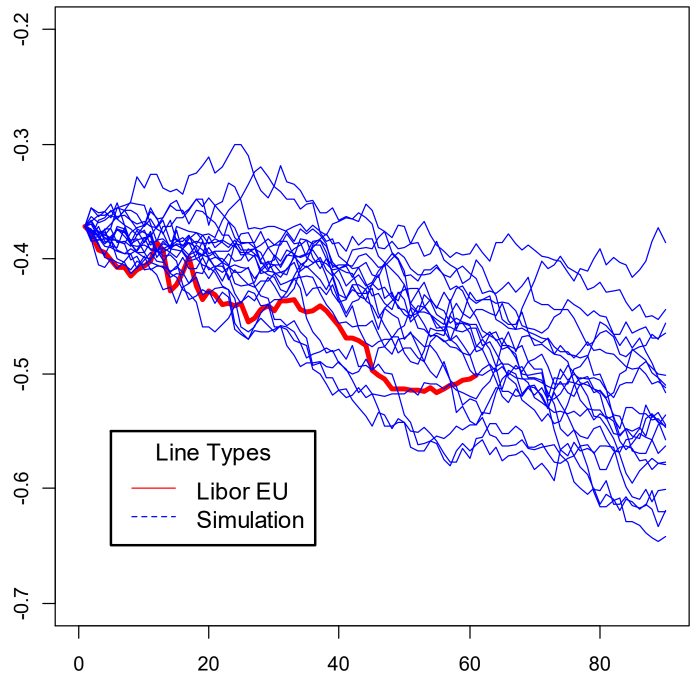
Εικόνα 24: Κίνηση των 60 τελευταίων τιμών του Libor EU

Για την αποτίμηση του συμβολαίου Cap μέσω του υποδείγματος Ho-Lee θα χρειαστεί προηγουμένως να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων με βάση τις σχέσεις τις οποίες αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4.3.1.

Συνεπώς, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

Παράμετροι	
$\boldsymbol{\theta}$	-0.5392917
$\boldsymbol{\sigma}$	0.1361567

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να προχωρήσουμε στην προσομοίωση της διάρθρωσης του επιτοκίου. Επιλέγουμε την προσομοίωση 20 τυχαίων σεναρίων (μονοπατιών) μέσω του μοντέλου του Ho-Lee, δηλαδή την κατασκευή 20 πιθανών διαδρομών του επιτοκίου Libor EU. Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα των προσομοιώσεων, συγκρίνοντάς τες με την πραγματική κίνηση του επιτοκίου:



Εικόνα 25: Προσομοίωση του Libor EU μέσω Ho-Lee.

Όπως φαίνεται και από το γράφημα αναπαριστούμε με μπλε χρώμα τις 20 πιθανές διαδρομές του επιτοκίου, ενώ με κόκκινο χρώμα την κίνηση των πραγματικών τιμών του επιτοκίου, αλλά και την προσομοίωση για 30 επιπλέον τιμές του επιτοκίου.

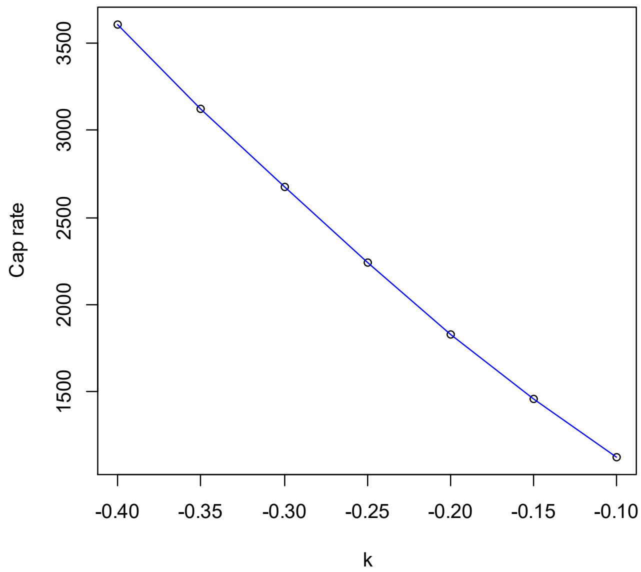
Έχοντας πλέον ολοκληρώσει το κομμάτι της προσομοίωσης, προχωράμε στην εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του συμβολαίου Cap την χρονική στιγμή $t = 0$, ώστε να γίνει η σύναψη του συμβολαίου.

Αν στο παραπάνω υπόδειγμα Ho-Lee δώσουμε διάφορες τιμές στο επιτόκιο αναφοράς του Cap τότε λαμβάνεται ο ακόλουθος πίνακας.

k	Cap price (estimate)
-0.040%	3606€
-0.035%	3123€
-0.030%	2679€
-0.025%	2243€
-0.020%	1828€
-0.015%	1458€
-0.010%	1127€

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι εάν το επιτόκιο αναφοράς του συμβολαίου οριστεί να είναι $-0{,}01\%$ τότε ο αγοραστής θα καταβάλει στον πωλητή του συμβολαίου 1127£.

Ακολούθως παραθέτουμε ένα γράφημα στο οποίο φαίνεται η σχέση της αξίας του συμβολαίου την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου $t = 0$ σε συνάρτηση με την τιμή του επιτοκίου αναφοράς του συμβολαίου.



Εικόνα 26: Τιμές του Cap βάσει του k

4.5 Συμπεράσματα

Θα ήταν ωφέλιμο κλείνοντας να επιχειρήσουμε μία σταχυολόγηση κάποιων αποτελεσμάτων, τα οποία μας βοηθούν να εξάγουμε ωφέλιμα και χρήσιμα συμπεράσματα. Στο σημείο αυτό, να επαναλάβουμε ότι όλες οι εκτιμήσεις των τιμών του συμβολαίου Cap έγιναν για τρία διαφορετικά επιτόκια (Libor USD, Libor GBP, Libor EU), με βάση τρία διαφορετικά υποδείγματα τιμολόγησης (Vasicek, CIR, Ho-Lee).

Αρχικά, ας προχωρήσουμε σε μια σύγκριση των εκτιμήσεων για την αξία του επιτοκιακού παραγώγου Cap βάσει των υποδειγμάτων που μελετήσαμε για κάθε ένα από τα τρία επιτόκια για μία συγκεκριμένη τιμή του επιτοκίου αναφοράς k.

- Για το Libor USD και επιτόκιο αναφοράς $k = 0.2\%$ έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Υπόδειγμα	Τιμή Cap (εκτίμηση)
Vasicek	381$
CIR	660$
Ho-Lee	239$

- Για το Libor GBP και επιτόκιο αναφοράς $k = 0.1\%$ έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Υπόδειγμα	Τιμή Cap (εκτίμηση)
Vasicek	32£
CIR	132£
Ho-Lee	372£

- Για το Libor EU και επιτόκιο αναφοράς $k = -0.4\%$ έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Υπόδειγμα	Τιμή Cap (εκτίμηση)
Vasicek	77€
CIR	—
Ho-Lee	3606€

Τα υποδείγματα Vasicek και CIR παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες μεταξύ τους όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 2. Επομένως, θα προχωρήσουμε σε σύγκριση των τιμών βάσει αυτών των δύο υποδειγμάτων για τα επιτόκια Libor USD και GBP. Όπως φαίνεται λοιπόν, το υπόδειγμα CIR επιστρέφει και στις δύο περιπτώσεις μεγαλύτερες τιμές για το συμβόλαιο Cap. Αυτό συμβαίνει διότι, υπό το υπόδειγμα CIR εκτιμάται (με βάση τα ιστορικά δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε) υψηλότερη μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας για το επιτόκιο σε αντίθεση με το υπόδειγμα Vasicek, δηλαδή το επιτόκιο υπό το υπόδειγμα CIR τείνει να επιστρέφει σε μεγαλύτερη τιμή ισορροπίας, και επομένως απαιτεί και μεγαλύτερη τιμή του Cap. Συγκεκριμένα, για το επιτόκιο Libor USD έχουμε $b_{CIR} = 0.26$ και $b_{Vasicek} = 0.22$, ενώ για το επιτόκιο Libor GBP έχουμε $b_{CIR} = 0.07$ και $b_{Vasicek} = 0.05$. Γενικά, όσο αυξάνεται η τιμή της μακροπρόθεσμης τιμής ισορροπίας, τόσο αυξάνεται και η τιμή του συμβολαίου Cap και αντιστρόφως.

Σε αντίθεση τώρα με τα προαναφερθέντα υποδείγματα, στο υπόδειγμα Ho-Lee η κίνηση του επιτοκίου είναι κίνηση Brown, εφόσον έχουμε θεωρήσει την παράμετρο της τάσης σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι το επιτόκιο δεν σταθεροποιείται γύρω από μία μακροπρόθεσμη τιμή ισορροπίας. Να υπενθυμίσουμε ότι το συγκεκριμένο υπόδειγμα παρουσιάζει μία ιδιαίτερη ευαισθησία ως προς την απότομη ανοδική ή καθοδική πορεία του επιτοκίου. Αναλυτικότερα, εάν η κίνηση του επιτοκίου είναι καθοδική ή ανοδική, τότε το συγκεκριμένο υπόδειγμα θεωρεί ότι θα συνεχίσει να κινείται προς τα κάτω ή προς τα πάνω και θα επιστρέψει μία χαμηλή ή υψηλή τιμή για το συμβόλαιο Cap αντιστοίχως. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι η αυξημένη τιμή του Cap στην περίπτωση του επιτοκίου Libor EU και η απάντηση βρίσκεται στο γράφημα της κίνησης των τελευταίων τιμών του συγκεκριμένου επιτοκίου όπου φαίνεται να έχει ανοδική πορεία. Παρόλα αυτά οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από το υπόδειγμα Ho-Lee δεν φαίνεται να είναι τόσο αξιόπιστες, καθώς δεν είναι λογικό το επιτόκιο να ακολουθεί μονίμως ανοδική ή καθοδική πορεία. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα συνίσταται στην επιλογή μικρότερων διαστημάτων για τις εκτιμήσεις, δηλαδή μικρότερου χρονικού ορίζοντα, ώστε να έχουμε μια πιο αναλυτική εικόνα για την κίνηση του επιτοκίου.

Ευρετήριο Όρων

Holder: Ο αγοραστής ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Writer: Ο πωλητής ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Cap rate: Επιτόκιο αναφοράς ενός συμβολαίου cap

LIBOR (*London interbank offer rate*): Το LIBOR είναι το επιτόκιο προσφοράς στο οποίο οι μεγάλες διεθνείς τράπεζες στο Λονδίνο δανείζονται κεφάλαια μεταξύ τους.

Call option: Δικαίωμα αγοράς, είναι ένα συμβόλαιο που δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον ιδιοκτήτη του να αγοράσει ένα χρηματοοικονομικό προϊόν από έναν πωλητή σε συγκεκριμένη τιμή και σε προκαθορισμένη χ.σ.

Put option: Δικαίωμα πώλησης, είναι ένα συμβόλαιο που δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον ιδιοκτήτη του να πουλήσει ένα χρηματοοικονομικό προϊόν σε έναν αγοραστή σε συγκεκριμένη τιμή και σε προκαθορισμένη χ.σ.

Long position: Ένας επενδυτής έχει ανοιχτή θέση σε ένα χρηματοοικονομικό τίτλο όταν έχει λάβει μια θέση που αποφέρει κέρδος με την αύξηση της τιμής του τίτλου και ζημία με τη μείωσή του.

Short position: Ένας επενδυτής έχει ανοιχτή θέση σε ένα χρηματοοικονομικό τίτλο όταν έχει λάβει μια θέση που αποφέρει ζημία με την αύξηση της τιμής του τίτλου και κέρδος με τη μείωσή του.

Short rate model: Ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την μελλοντική διάρθρωση του επιτοκίου, περιγράφοντας την μελλοντική εξέλιξη του short rate.

Yield curve: Η καμπύλη δείχνει την απόδοση στη λήξη ενός συμβολαίου.

Βιβλιογραφία

Apostol, T., & Ablow, C. (1958). Mathematical analysis. *11*, 32.

Baxter, M., Rennie, A., & Rennie, A. J. (1996). *Financial calculus: an introduction to derivative pricing.* Cambridge University press.

Cox , J. C., Ingersoll , J. E., & Ross, S. A. (2005). A theory of the term structure of interest rates. *Theory of valuation*, 129-164.

Durrett, R. (1996). *Stochastic calculus: a practical introduction.* CRC press.

Ho, T. S., & Lee, S.-B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance, 41*(5), 1011-1029.

Livieris, I. E., Kotsilieris, T., Stavroyiannis, S., & Pintelas, P. (2019). Forecasting stock price index movement using a constrained deep neural network training algorithm. *Intelligent Decision Technologies*, pp. 1-14.

Livieris, I. E., Stavroyiannis, S., Pintelas, E., & Pintelas, P. (2020). A novel validation framework to enhance deep learning models in time-series forecasting. *Neural Computing and Applications, 32*, pp. 17149–17167.

Mörters, P., & Peres, Y. (2010). *Brownian motion* (Vol. 30). Cambridge University Press.

Paul, G. (2013). *Monte Carlo methods in financial engineering.* (Vol. 53). Springer Science & Business Media.

Ross, S. M., Kelly, J. J., Perry, R. J., Sullivan, W. J., Mercer, D., Davis, R., & Bristow, V. (1996). *Stochastic processes* (Vol. 2). New York: Wiley.

Uhlenbeck, G. E., & Ornstein, L. S. (1930). On the theory of the Brownian motion. *Physical review, 36*(5), 830.

Vasicek, O. (1977). N-equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics, 5*(2), 177-188.

Γιαννακόπουλος, Α. Ν. (2003). *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική,* (Τόμ. Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση Διδακτικές Σημειώσεις). Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Γιαννακόπουλος, Α. Ν. (2010). *Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά.* Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μπούτσικας, Μ. (2005). Σημειώσεις μαθήματος «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα». Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Χελιώτης, Δ. (2015). *Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό.* Εκδόσεις Κάλλιπος.

Χρυσαφίνου, Ο. (2008). Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις. Εκδόσεις Σοφία.