ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση

Ιωάννα Σκινιώτη

(ΜΑΕ 13004)

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν ….. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)
- Αναπλ. Καθηγητής Ν. Μαχαιράς
- Επίκ. Καθηγητής Β. Σεβρόγλου

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUADE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The classical model with of risk theory delayed claims

By
Ioanna Skinioti

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus Greece
2016

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, για την υπομονή του, την πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε, μέχρι την περάτωση της εργασίας.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Νικόλαο Μαχαιρά και κ. Βασίλειο Σεβρόγλου για τη συμμετοχή τους στην παρουσίαση και την αξιολόγηση της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς μου την οικογένειά μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με δύο είδη εξαρτημένων μεταξύ τους μεγεθών ατομικών ζημιών-απαιτήσεων: οι κύριες απαιτήσεις (main claims) και οι απαιτήσεις που απορρέουν από αυτές (by-claims), θεωρώντας ότι κάθε απαίτηση προκαλεί και την εμφάνιση μιας άλλης απαίτησης η οποία μπορεί να εμφανίζεται με κάποια χρονική υστέρηση.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος στο οποίο δίνονται οι βασικές έννοιες της εργασίας. Αρχικά δίνεται μια σύντομη περιγραφή του κλασικού μοντέλου τη θεωρίας κινδύνων. Στη συνέχεια δίνεται η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu και κάποιες σημαντικές περιπτώσεις με την ύπαρξη ή όχι μερισμάτων.

Το δεύτερο κεφάλαιο μελετά διάφορα μέτρα χρεοκοπίας γι’ αυτή τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η ίδια διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη μιας στοχαστικής ανέλιξης Brown και δίνονται αναλυτικά αποτελέσματα για διάφορα μέτρα κινδύνου.

Το τέταρτο κεφάλαιο εξετάζει την παραπάνω στοχαστική διαδικασία κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων (multi-layer dividend strategy) και μελετάται μέσω ενός συστήματος ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους η αντίστοιχη συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Τέλος, στο παράρτημα παρατίθενται ο μετασχηματισμός Laplace και σχετικές ιδιότητές του για συναρτήσεις και κατανομές πιθανοτήτων, οι ιδιότητες του τελεστή Dickson-Hipp καθώς και κάποια άλλα εργαλεία, όπως το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

ABSTRACT

This thesis deals with the study of an extention to the classical compound Poisson risk model, in which two kinds of dependend claims are incorporated. Namely, main claims and by-claims are defined, where every by-claim is induced by the main claim and may be delayed for one time period with certain probability.

The first chapter is an introductory section. A general description of the classical risk model and its surplus process is given. Also, the expected discounted penalty function of Gerber-Shiu, with and without dividend strategies, and several of its cases are also provided.

In chapert two an integro-differential equation system for the Gerber-Shiu expected discounted penalty functions is derived and solved, using Laplace transforms, by proving that the Gerner-Shiu function satisfies some defective renewal equation. An exact representation for the solution of this equation is derived through an associated compound geometric distribution, and an analytic expression for this quantity is given when both the main claim and the by-claim amounts are exponentially distributed. Results for various ruin measures are provided, and a numerical example is given to clarify the proposed methodology.

In chapter three, we consider an extention to the risk process studied in chapter two, perturbed by diffusion. An analytic expression for the solution of the involved integro-differential equation system for the Gerber-Shiu functions is given, when both the main claim and the by-claim amounts belong to the rational family of distributions. Numerical results are also provided.

In chapter four, the same risk model of the previous chapter is considered in the presence of a multi-layer dividend strategy. A system of integro-differential equations for the expected discounted penalty function depending on the current surplus level, with certain initial and boundary conditions is obtained. To solve this, we derive a general solution to a certain second order integro-differential equation system. This solution is obtained by transforming this system to a Voltera-type system of integral equation of second kind, which is solved by using Laplace transforms provided an explicit expression for the Gerber-Shiu functions depending on the current surplus level. A numerical example is given to illustrate the applicability of the results.

Finally, the appendix provides the definition and relevant properties of Laplace transform for a given function and a probability distribution function. In addition, lists several properties of Dickson-Hipp operator used in this study.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα της κλασικής θεωρίας κινδύνου είναι η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας μη επάρκειας των αποθεματικών για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων έναντι των ασφαλισμένων. Τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας των κινδύνων ετέθησαν μετά τη δημοσίευση της διδακτορικής διατριβής του Σουηδού μαθηματικού Filip Lundberg το 1903 με τίτλο "Approximerad fremställning au sannolikheets funktionen". Αργότερα ο Harald Cramér (1930) βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg δημοσίευσε μία σειρά από εργασίες που αναφέρονταν στη θεωρία κινδύνου και στις οποίες ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών ή στοχαστικών ανελίξεων. Έτσι, με βάση αυτές τις εργασίες το μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο ονομάσθηκε κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér –Lundberg. Αυτό το μοντέλο αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της κλασικής θεωρίας κινδύνου. Μία βασική παραδοχή αυτού του μοντέλου είναι ότι το πλήθος των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται σύμφωνα με τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Δηλαδή, το κύριο χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου για το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ή και ολόκληρης της ασφαλιστικής επιχείρησης έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίαζε στο 15^{ο} Αναλογιστικό Συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την εργασία με τίτλο "On the collective theory of risk in case of contagion between the claims". Σε αυτήν την εργασία ο Sparre Andersen υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Δηλαδή, το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου Sparre Andersen είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (που δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη την εκθετική κατανομή). Έτσι, είναι προφανές ότι αυτό το μοντέλο αποτελεί μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου και ονομάσθηκε μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Το πιο σημαντικό βήμα για τη μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής επιχείρησης αποτελεί ο προσδιορισμός του πλήθους των κινδύνων που εμφανίζονται. Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστάνει τον αριθμό των κινδύνων που εμφανίστηκαν στο χρονικό διάστημα [0, t]. Η $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.1

Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν

i. $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$,

ii. $N(t)$ *είναι διακριτή,*

iii. *αν* $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$.

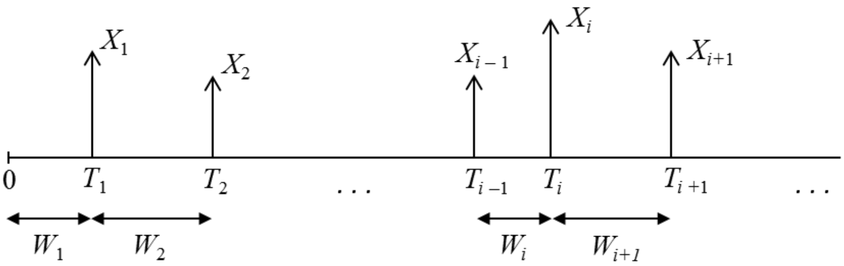
Μία από τις πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενες απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες, τόσο στη θεωρία κνδύνου όσο και σε άλλα ερευνητικά πεδία της θεωρίας πιθανοτήτων (π.χ. θεωρία ουρών), είναι οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες. Ένας τρόπος ορισμού τους, βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους των ενδεχομένων (κινδύνων) που απαριθμεί η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$.

Έστω $\{T_i, i = 0,1,2...\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0 = 0$, όπου T_i, $i \geq 1$, συμβολίζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης του i-οστού ενδεχομένου (κινδύνου). Έστω, τώρα οι τυχαίες μεταβλητές $W_i = T_i - T_{i-1},\ i \geq 1$. Τότε η W_1 εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση του πρώτου ενδεχομένου και η W_i, $i \geq 2$, εκφράζει το χρόνο από την εμφάνιση του $i-1$ ενδεχομένου μέχρι και την εμφάνιση του i ενδεχομένου, δηλαδή, $\{W_i,\ i = 1,2,...\}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που παριστά τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων. Αν $W_0 = 0$, τότε $T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$, $n \geq 0$ και η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{T_n, n = 0,1,...\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Έστω, $\{X_i,\ i = 1,2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών όπου η X_i παριστά το μέγεθος της ζημιάς από την εμφάνιση του i-οστού κινδύνου. Τότε, η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.2

Έστω $\{W_i,\ i = 1,2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και $\{T_i, i = 1,2...\}$ μία ακολουθία ανανεώσεων με $T_i = W_1 + W_2 + ... + W_i$, $i \geq 1$ και $T_0 = W_0 = 0$. Τότε, *η απαριθμήτρια διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *με* $N(0)=0$, *που ορίζεται από τη σχέση* $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}(T_n \leq t)$ *ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο* $[0,t]$.

Σχηματικά έχουμε,



Σχήμα 1.1 Χρόνοι άφιξης απαιτήσεων, μεγέθη απαιτήσεων, ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

Από τον Ορισμό 1.2 είναι προφανές ότι για κάθε ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ισχύει ότι:

$$\{N(t)=n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Επίσης, είναι φανερό ότι $N(t)=\max\{n : T_n \leq t\}$ και $P[N(t) \geq n] = P(T_n \leq t)$. Μία σημαντική ιδιότητα των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών αποτελεί και η παρακάτω πολύ γνωστή πρόταση.

Πρόταση 1.1

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ *μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε:*

i. *με πιθανότητα* 1 *ισχύει ότι:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

ii. $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

Το αποτέλεσμα (ii) στο παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα (elementary renewal theorem) και για την απόδειξη του ενδεικτικά αναφέρουμε τους Rolski et al. (1996, σελ. 211).

Από τον Ορισμό 1.2 έπεται ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson αποτελεί μία ειδική περίπτωση μίας ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας, αν θεωρήσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων (κινδύνων) $\{W_i,\ i=1,2,...\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Αφού έχουμε μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, στη συνέχεια για τον καθορισμό του πλεονάσματος, θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε τις συνολικές απαιτήσεις (ζημιές, αποζημιώσεις) του χαρτοφυλακίου. Έστω $S(t)$, $t \geq 0$, παριστά τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[0,t]$.

Ορισμός 1.3

Έστω $N(t),\ t \geq 0,$ *ο αριθμός των κινδύνων στο* $[0,t]$, *και* X_i, $i \geq 1$ *το μέγεθος της* i *-οστής ζημιάς. Τότε, οι συνολικές απαιτήσεις στο* $[0,t]$ *παριστάνονται από τη σύνθετη στοχαστική διαδικασία* $\{S(t), t \geq 0\}$, *όπου*

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}.$$

Στην κλασική θεωρία κινδύνου οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες, καθώς επίσης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές θεωρούνται οι X_i και η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $N(t)$, $t \geq 0$, που παριστά τον αριθμό των κινδύνων μέχρι τη χρονική στιγμή *t*.

Έστω $P(t)$ μία συνάρτηση που εκφράζει τα συνολικά έσοδα της ασφαλιστικής επιχείρησης από την είσπραξη των ασφαλίστρων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Η $P(t)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση του χρόνου *t*. Στην κλασική θεωρία κινδύνου θεωρούμε σταθερό ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων, οπότε η $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση της μορφής $P(t) = ct$, όπου $c > 0$ είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης αφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου (ένταση ασφαλίστρου).

Έστω τώρα $U(t)$, $t \geq 0$, παριστά το πλεόνασμα της ασφαλιστικής επιχείρησης μέχρι τη χρονική στιγμή *t* που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.4

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ *ορίζεται ως*

$$U(t) = u + P(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ ,$$

όπου $U(0) = u \geq 0$ *είναι το αρχικό απόθεμα,* $c \geq 0$ *ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου,* $S(t)$ *οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0,t]$ *όπως δίνονται στον Ορισμό* 1.3.

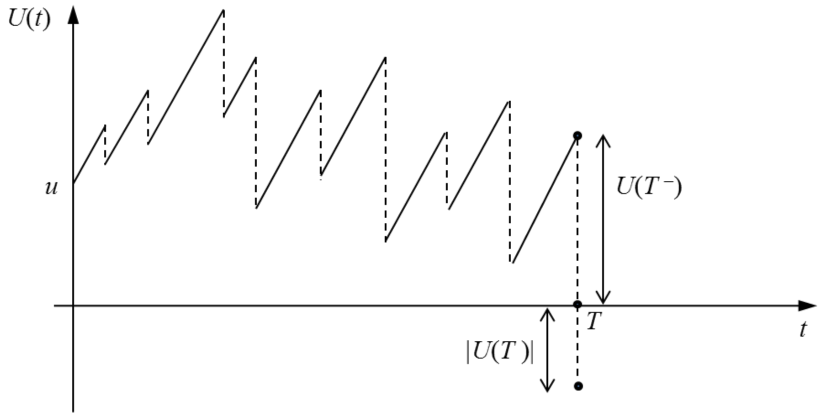
Από τον Ορισμό 1.4 είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές κατά τις χρονικές στιγμές T_i εμφάνισης των κινδύνων. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική, τότε έχουμε χρεοκοπία και προκειμένου να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, θα δώσουμε αρχικά τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.5

Η χρονική στιγμή T κατά την οποία για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : \ U(t) < 0\} \\ \infty, \qquad \text{αν } U(t) \geq 0, \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να παρασταθεί και με το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.2 Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

όπου T είναι χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας, η τυχαία μεταβλητή $U(T^-)$ δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν πληρωθεί από την ασφαλιστική εταιρεία η αποζημίωση η οποία προκαλεί χρεοκοπία, $U(T)$ είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν. Η ποσότητα $U(T^-)$ παίρνει θετικές τιμές, ενώ η ποσότητα $U(T)$ αρνητικές τιμές, οπότε ορίζεται η τυχαία μεταβλητή $|U(T)|$ που δηλώνει τη σφροδρότητα ή δριμύτητα της χρεοκοπίας δηλαδή το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.6

Για αρχικό απόθεμα $u \geq 0$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση*

$$\psi(u) = P(T < \infty \,|\, U(0) = u).$$

Η πιθανότητα να μην εμφανίζεται χρεοκοπία, ονομάζεται πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ή πιθανότητα επιβίωσης, συμβολίζεται με $\phi(u)$ *και δίνεται από τη σχέση*

$$\phi(u) = 1 - \psi(u).$$

1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Ο χρόνος χρεοκοπίας *T*, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία $U(T^-)$ και η σφοδρότητα της χρεοκοπίας $|U(T)|$ δίνουν πλήρη εικόνα των οικονομικών συνθηκών κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Οι Gerber and Shiu, (1998), μοντελοποίησαν τις τρεις αυτές τυχαίες μεταβλητές σε μία συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) ή συνάρτηση των Gerber – Shiu, η οποία ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.7

Για $u \geq 0,\ \delta \geq 0,$ *ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής*

$$\phi_\delta(u) := E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)],$$

όπου δ είναι ένταση ανατοκισμού ή η παράμετρος s του μετασχηματισμού Laplace, $w(x_1, x_2)$ *είναι μια μή-αρνητική συνάρτηση, που καλείται συνάρτηση ποινής (penalty function), με* $0 \leq w(x_1, x_2) < \infty$, $0 \leq x_1, x_2 < \infty,$ *T είναι ο χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u,* $U(T^-)$ *είναι το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,* $|U(T)|$ *είναι η σφροφρότητα (δριμύτητα) χρεοκοπίας που ισούται με το έλλειμμα στο ταμείο κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και* $\mathrm{I}(\cdot)$ *είναι δείκτρια συνάρτηση η οποία τονίζει ότι η ποινή ασκείται εάν και εφόσον τελικά συμβεί χρεοκοπία όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μεγέθους u. Η ποσότητα* $e^{-\delta T}$ *μπορεί να ερμηνευθεί ως παράγοντας προεξόφλησης (discount factor).*

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Η συνάρτηση Gerber-Shiu βρίσκει εφαρμογές πέρα από το Αναλογιστικό πεδίο, όπως για παράδειγμα στη θεωρία των Χρηματοοικονομικών μαθηματικών

(Gerber and Shiu, (1998)). Από τον ορισμό της $\phi_\delta(u)$ και για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης ποινής $w(x_1,x_2)$ προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω:

i. Για $w(x_1,x_2)=1$ και $\delta>0$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν εμφανίζεται χρεοκοπία,

$$\phi_\delta(u)=E[e^{-\delta T}\,\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)].$$

ii. Για $w(x_1,x_2)=1$ και $\delta=0$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u)=E[\,\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=P(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u).$$

iii. Για $w(x_1,x_2)=\mathrm{I}(x_1\le y_1)\mathrm{I}(x_2\le y_2)$ και $\delta>0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u)=E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-)\le y_1)\mathrm{I}(|U(T)|\le y_2)\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=F_\delta(y_1,y_2\,|\,u).$$

iv. Για $w(x_1,x_2)=\mathrm{I}(x_1\le y_1)\mathrm{I}(x_2\le y_2)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u)=E[\mathrm{I}(U(T^-)\le y_1)\mathrm{I}(|U(T)|\le y_2)\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]$$
$$=P(U(T^-)\le y_1,|U(T)|\le y_2,T<\infty\,|\,U(0)=u)=F_0(y_1,y_2\,|\,u).$$

Η $F_0(y_1,y_2\,|\,u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1, ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2.

v. Για $w(x_1,x_2)=\mathrm{I}(x_1=y_1)\mathrm{I}(x_2=y_2)$ και $\delta>0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u)=E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-)=y_1)\mathrm{I}(|U(T)|=y_2)\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=f_\delta(y_1,y_2\,|\,u).$$

vi. Για $w(x_1,x_2)=\mathrm{I}(x_1=y_1)\mathrm{I}(x_2=y_2)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u)=E[\mathrm{I}(U(T^-)=y_1)\mathrm{I}(|U(T)|=y_2)\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=f_0(y_1,y_2\,|\,u).$$

vii. Για $w(x_1,x_2)=\mathrm{I}(x_1\le y_1)$ και $\delta>0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(x)=E[e^{-\delta T}\mathrm{I}(U(T^-)\le y_1)\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=F_\delta(y_1\,|\,u).$$

viii. Για $w(x_1,x_2)=\mathrm{I}(x_1\le y_1)$ και $\delta=0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u)=E[\mathrm{I}(U(T^-)\le y_1)\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]$$

$$= P(U(T^-) \le y_1, T < \infty \,|\, U(0) = u) = F_0(y_1 \,|\, u).$$

Η $F_0(y_1 \,|\, u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1.

ix. Για $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 = y_1)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \mathrm{I}(U(T^-) = y_1) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)] = f_\delta(y_1 \,|\, u).$$

x. Για $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 = y_1)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u) = E[\mathrm{I}(U(T^-) = y_1) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)] = f_0(y_1 \,|\, u).$$

xi. Για $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 \le y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \mathrm{I}(|U(T)| \le y_2) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)] = F_\delta(y_2 \,|\, u).$$

xii. Για $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 \le y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u) = E[\mathrm{I}(|U(T)| \le y_2) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)]$$

$$= P(|U(T)| \le y_2, T < \infty \,|\, U(0) = u) = F_0(y_2 \,|\, u).$$

Η $F_0(y_2 \,|\, u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το ύψος ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2.

xiii. Για $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 = y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \mathrm{I}(|U(T)| = y_2) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)] = f_\delta(y_2 \,|\, u).$$

xiv. Για $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_2 = y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u) = E[\mathrm{I}(|U(T)| = y_2) \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)] = f_0(y_2 \,|\, u).$$

xv. Για $w(x_1, x_2) = x_1^k$ ή $w(x_1, x_2) = x_2^k$ και $\delta = 0$, προκύπτει η ροπή k-τάξης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία αντίστοιχα, δηλαδή

$$\phi_0(u) = E[U(T^-)^k \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)]$$

ή

$$\phi_0(u) = E[|U(T)|^k \ \mathrm{I}(T < \infty \,|\, U(0) = u)]$$

αντίστοιχα.

1.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος με στρατηγικές

Μια πιο ρεαλιστική επέκταση του μοντέλου κινδύνου είναι η υπόθεση της ύπαρξης στρατηγικών μερίσματος (dividend strategies). Οι στρατηγικές μερίσματος για τα μοντέλα ασφαλιστικού κινδύνου εισήχθησαν από τον De Finetti (1957) ώστε να αντικατοπτριστεί πιο ρεαλιστικά το πλεόνασμα των εισροών στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Από τότε, μοντέλα κινδύνου με την παρουσία στρατηγικής σταθερού μερίσματος ή μοντέλα με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου έχουν γίνει πολύ δημοφιλή αντικείμενα μελέτης στη θεωρία κινδύνου. Πρόσφατα, η στρατηγική μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων, σαν μια επέκταση της στρατηγικής κατωφλίου, έχει αναπτυχθεί με σκοπό να επιτρέπει στον ασφαλιστή τη διατήρηση ενός σταθερού ποσοστού επί των κερδών και την πληρωμή κάποιων μπόνους ως κίνητρο στους δικαιούχους της ασφάλισης.

α) Η συνάρτηση των Gerber-Shiu με στρατηγική σταθερού μερίσματος

Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα επίπεδο $\beta > u$ τέτοιο ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο κατώφλι β τα ασφάλιστρα c επιστρέφονται στους δικαιούχους με τη μορφή μερίσματος μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς. Έστω $\{U_\beta(t), t \geq 0\}$ με $U_\beta(0) = u$, η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική, η οποία ορίζεται ως

$$dU_\beta(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_\beta(t) < \beta, \\ -dS(t), & U_\beta(t) = \beta. \end{cases}$$

Σε αντιστοιχία με τη διαδικασία πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη μερίσματος, ορίζουμε

$$T_\beta = \inf\{t \geq 0 : U_\beta(t) < 0\}$$

το χρόνο χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Έστω επίσης $U_\beta(T_\beta^-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $|U_\beta(T_\beta)|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi_\beta(u) = P(T_\beta < \infty), \ u \leq \beta .$$

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για αυτή τη διαδικασία, ορίζεται ως εξής

Ορισμός 1.8

Για $u \leq \beta$ και $\delta \geq 0$, ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

$$\phi_\delta(u,\beta) = E[e^{-\delta T} w(U_\beta(T_\beta^-), |U_\beta(T_\beta)|) \mathrm{I}(T_\beta < \infty \,|\, U_\beta(0) = u)]$$

όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού και $w(x_1, x_2)$ *είναι μια δισδιάστατη συνάρτηση ποινής, με* $0 \le w(x_1, x_2) < \infty$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Από τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος χωρίς μερίσματα $\{U(t), t \ge 0\}$, είναι μια ειδική περίπτωση της $\{U_\beta(t), t \ge 0\}$, καθώς το β τείνει στο άπειρο. Έτσι, $\lim_{\beta\to\infty} U_\beta(t) = U(t)$ και κατά συνέπεια $\lim_{\beta\to\infty} \phi_\delta(u,\beta) = \phi_\delta(u)$.

β) Η συνάρτηση των Gerber-Shiu με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου

Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα κατώφλι $\beta > u$ τέτοιο ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος είναι κάτω από το β, τότε δεν δίνονται μερίσματα στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρείας, όταν όμως ξεπεράσει το κατώφλι β, τα μερίσματα που δίνονται στους δικαιούχους είναι a, με $0 < \alpha < c$, όπου c ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου. Σε αυτή την περίπτωση, το ασφάλιστρο μειώνεται κατά α, δηλαδή, το νέο ασφάλιστρο γίνεται

$$c' = c - \alpha \ge 0.$$

Έστω $\{U_\beta(t), t \ge 0\}$ με $U_\beta(0) = u$, η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική, η οποία ορίζεται ως

$$dU_\beta(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_\beta(t) \le \beta, \\ c'dS(t) - dS(t), & U_\beta(t) > \beta. \end{cases}$$

Ορίζουμε ώς

$$T_\beta = \inf\{t \ge 0 : U_\beta(t) < 0\}$$

το χρόνο χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου. Έστω επίσης $U_\beta(T_\beta^-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $|U_\beta(T_\beta)|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi_\beta(u) = P(T_\beta < \infty), \; u \le \beta.$$

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη μερίσματος κατωφλίου εισήχθη από τους Lin and Pavlova (2006), οι οποίοι μελέτησαν τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασικό μοντέλο κινδύνου κάτω από τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου και, ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.9

Για $u \le \beta$ *και* $\delta \ge 0$, *ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής*

$$\phi_\delta(u,\beta) = E[e^{-\delta T} w(U_\beta(T_\beta^-), |U_\beta(T_\beta)|) \mathrm{I}(T_\beta < \infty \,|\, U_\beta(0) = u)]$$

όπου δ *είναι η ένταση ανατοκισμού και* $w(x_1, x_2)$ *είναι μια δισδιάστατη συνάρτηση ποινής, με* $0 \le w(x_1, x_2) < \infty$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Το μοντέλο κινδύνου με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου απλοποιείται

α) στο κλασικό μοντέλο κινδύνου στην περίπτωση όπου $\beta = \infty$,

β) στο κλασικό μοντέλο κινδύνου κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος, στην περίπτωση όπου $\alpha = c$.

Οι Gerber και Shiu (2006) έδειξαν ότι η συγκεκριμένη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου είναι βέλτιστη όταν ο ρυθμός μερίσματος οριοθετείται εκ των άνω και οι ατομικές απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.

γ) Η συνάρτηση των Gerber-Shiu με στρατηγική μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων

Η στρατηγική μερίσματος πολλαπλών επιπέδων (multi-layer dividend strategy), αποτελεί γενίκευση τόσο της στρατηγικής σταθερού μερίσματος όσο και της στρατηγικής μερίσματος κατωφλίου, έχει μελετηθεί μέσω της συνάρτησης Gerber-Shiu τόσο για το κλασικό μοντέλο κινδύνου όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου από αρκετούς ερευνητές. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους Zhou, (2007), Albrecher and Hartinger (2007), Lin and Sendova, (2008), Yang and Zhang (2008).

Σύμφωνα με την εν λόγω στρατηγική, θεωρούμε ότι υπάρχουν n διαφορετικά επίπεδα, $0 = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \beta_{n+1} = \infty$ τέτοια ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος είναι μεταξύ δύο διαδοχικών κατωφλίων β_{i-1} και β_i καταβάλλεται μέρισμα στους δικαιούχους της ασφάλισης με ρυθμό d_i και το αντίστοιχο καθαρό ασφάλιστρο είναι $c_i = c - d_i$, $i = 1,\ldots,n+1$, όπου $c = c_1 > \ldots > c_n > c_{n+1} \ge 0$. Έστω $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}\}$ και $\{U_{\boldsymbol{\beta}}(t), t \ge 0\}$ με $U_{\boldsymbol{\beta}}(0) = u$, η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική. Τότε, αυτή για $i = 1,\ldots,n+1$, ορίζεται ως

$$dU_{\boldsymbol{\beta}}(t) = c_i dt - dS(t), \quad \beta_{i-1} \le U_{\boldsymbol{\beta}}(t) \le \beta_i .$$

Σε αντιστοιχία με τη διαδικασία πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη μερίσματος, ορίζουμε ως

$$T_{\boldsymbol{\beta}} = \inf\{t \ge 0 : U_{\boldsymbol{\beta}}(t) < 0\}$$

το χρόνο χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Έστω επίσης $U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}^-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $|U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}})|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για αυτή τη διαδικασία, ορίζεται ως εξής

Ορισμός 1.10

Για $\beta_{i-1} \le u \le \beta_i$, $i = 1,...,n+1$, *και* $\delta \ge 0$*, ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής*

$$\phi_\delta(u,\boldsymbol{\beta}) = E[e^{-\delta T_{\boldsymbol{\beta}}} w(U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}^-),|U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}})|)\mathrm{I}(T_{\boldsymbol{\beta}} < \infty | U_{\boldsymbol{\beta}}(0) = u)]$$

όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού και $w(x_1, x_2)$ *είναι μια δισδιάστατη συνάρτηση ποινής, με* $0 \le w(x_1, x_2) < \infty$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΥΝ ΧΡΟΝΙΚΗ ΥΣΤΕΡΗΣΗ

Το μοντέλο που μελετάται σε αυτό το κεφάλαιο είναι μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, στο οποίο εμφανίζονται δύο είδη, εξαρτημένων μεταξύ τους, μεγεθών ατομικών ζημιών-απαιτήσεων: οι κύριες απαιτήσεις (main claims) και οι απαιτήσεις που απορρέουν από αυτές (by-claims), θεωρώντας ότι κάθε απαίτηση προκαλεί και την εμφάνιση μιας άλλης απαίτησης η οποία μπορεί να εμφανίζεται με κάποια χρονική υστέρηση. Το μοντέλο αυτού του είδους μπορεί να βρει ενδεικτικά εφαρμογή στον ασφαλιστικό κλάδο, για παράδειγμα σε σοβαρά αυτοκινητιστικά ατυχήματα, κατά τα οποία μπορεί να εμφανιστούν διάφορα είδη απαιτήσεων, όπως ζημιά αυτοκινήτου, τραυματισμός, θάνατος. Κάποιες από τις απαιτήσεις μπορούν να διεκπαιρεωθούν άμεσα, ενώ άλλες απαιτούν κάποιο χρόνο για την διευθέτησή τους.

Είναι εμφανές ότι η ενσωμάτωση στο κλασικό μοντέλο κινδύνων, καθυστερημένων απαιτήσεων, από τη μιά κάνει το πρόβλημα πιο ρεαλιστικό και ενδιαφέρον, από την άλλη αυξάνει την πολυπλοκότητα της ανάλυσης και της ανάπτυξης των ζητούμενων αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής. Επίσης, εφ’ όσον το υπό μελέτη μοντέλο αποτελεί γενίκευση του κλασικού μοντέλου, τα αποτελέσματα που προκύπτουν, περικλείουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα του κλασικού μοντέλου όπως παρουσιάστηκαν στους Gerber and Shiu, (1998). Τέλος, το εξεταζόμενο μοντέλο, μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπληρώνει την εργασία των Yuen and Guo, (2001) και των Xiao and Guo, (2007).

Στη συνέχεια μελετάται η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος του μοντέλου και αναπτύσσονται διάφορα μέτρα χρεοκοπίας μέσα από τη σχετική αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

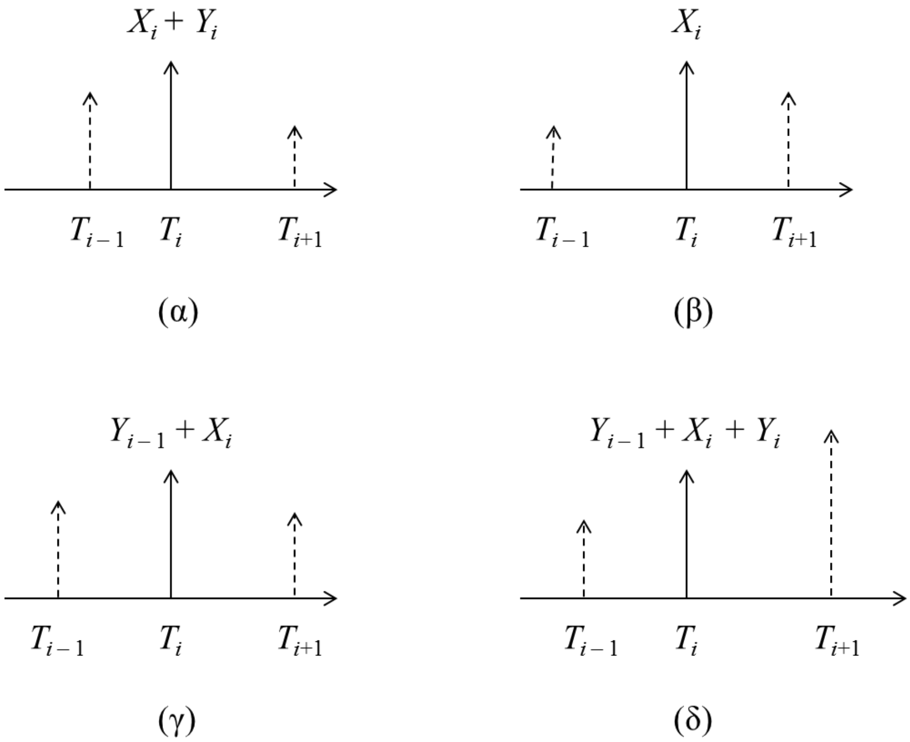
2.1 Το μοντέλο

Θεωρούμε ένα μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου, στο οποίο εμπλέκονται δύο ειδών απαιτήσεις. Συγκεκριμένα, οι κύριες απαιτήσεις και οι απαιτήσεις που απορρέουν από αυτές. Έστω το συνολικό μέγεθος των κύριων απαιτήσεων είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson και $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι η αντίστοιχη διαδικασία Poisson του αριθμού των κινδύνων με ένταση αφίξεων λ. Έστω $\{T_i, i = 0,1,2...\}$ η ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0 = 0$, όπου T_i, $i \geq 1$, συμβολίζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης της i-οστής κύριας απαίτησης. Έστω, $\{X_i, i = 1,2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, όπου η X_i παριστά το μέγεθος της ζημιάς από την εμφάνιση της i-οστής κύριας απαίτησης. Θεωρούμε ότι οι X_i έχουν συνάρτηση κατανομής $F_1(x) = P(X \leq x)$, συνάρτηση πυκνότητας $f_1(x)$, πεπερασμένη μέση τιμή $\mu_1 = E(X)$ και πεπερασμένο μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_1(x)dx$. Έστω επίσης

$\{Y_i, i=1,2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, όπου η Y_i παριστά το μέγεθος της by-claim ζημιάς από την εμφάνιση της i-οστής by-claim απαίτησης. Θεωρούμε ότι οι Y_i έχουν συνάρτηση κατανομής $Q(x)=P(Y\le x)$, συνάρτηση πυκνότητας $q(x)$, πεπερασμένη μέση τιμή $\mu_q = E(Y)$ και πεπερασμένο μετασχηματισμό Laplace $\hat{q}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}q(x)dx$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i και Y_i θεωρούνται ανεξάρτητες.

Στο μοντέλο κινδύνου που μελετάμε, θεωρούμε ότι η διαδικασία των απαιτήσεων έχει την ακόλουθη μορφή. Σε κάθε χρονική στιγμή T_i της διαδικασίας Poisson, εμφανίζεται μια κύρια απαίτηση X_i η οποία προκαλεί και την εμφάνιση μιας by-claim απαίτησης Y_i. Η κύρια απαίτηση X_i και η by-claim απαίτηση Y_i μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα με πιθανότητα θ, ή η by-claim απαίτηση Y_i μπορεί να καθυστερήσει και να εμφανιστεί την επόμενη χρονική στιγμή, T_{i+1}, με πιθανότητα $1-\theta$. Στην περίπτωση που η εμφάνιση της by-claim απαίτησης Y_i καθυστερήσει στη χρονική στιγμή T_{i+1}, υποθέτουμε ότι αυτή είναι ανεξάρτητη από την εμφάνιση της κύριας απαίτησης X_{i+1} που συμβαίνει τη στιγμή T_{i+1}. Παρατηρούμε ότι όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα η κύρια απαίτηση X_i με την σχετιζόμενή της by-claim απαίτηση Y_i, το συνολικό μέγεθος απαίτησης είναι X_i+Y_i και συμβολίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της, που είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων κατανομής F_1 και Q, με $F_2(x)=(F_1 * Q)(x)$, τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{X_i+Y_i}(x)\equiv f_2(x)$ και το μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_2(s)=\hat{f}_1(s)\hat{q}(s)$. Επίσης στην περίπτωση που συμβούν ταυτόχρονα μία κύρια απαίτηση X_i και δύο by-claim απαιτήσεις, οι Y_{i-1} και Y_i, το συνολικό μέγεθος απαίτησης είναι $Y_{i-1}+X_i+Y_i$ με συνάρτηση κατανομής τη συνέλιξη των συναρτήσεων κατανομής F_1, Q και Q, συμβολικά $F_3(x)=(F_1 * Q * Q)(x)$, με συνάρτηση πυκνότητας $f_{X_i+Y_{i-1}+Y_i}(x)\equiv f_3(x)$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_3(s)=\hat{f}_1(s)\,\hat{q}(s)\hat{q}(s)=\hat{f}_1(s)\,(\hat{q}(s))^2$.

Σχηματικά, θεωρώντας τη χρονική στιγμή T_i, οι τέσσερις πιθανές περιπτώσεις εμφάνισης της κύριας και των by-claim απαιτήσεων απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1. Πιθανές περιπτώσεις εμφάνισης των απαιτήσεων σε μία χρονική στιγμή T_i

Η ειδική περίπτωση στην οποία η πιθανότητα $\theta = 1$, που σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή η κύρια απαίτηση συμβαίνει ταυτόχρονα με την αντίστοιχη σχετιζόμενή της by-claim απαίτηση, είναι η περίπτωση του κλασικού μοντέλου κινδύνου, με τη μόνη διαφορά ότι στο θεωρούμενο μοντέλο το μέγεθος της απαίτησης είναι $X + Y$ και όχι X που είναι στο κλασικό.

Με βάση τα παραπάνω, η διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων $S(t)$, στο μοντέλο που εξετάζουμε, δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + R(t), \quad t \geq 0, \tag{2.1.1}$$

όπου $R(t)$ είναι το άθροισμα όλων των by-claim απαιτήσεων Y_i που συμβαίνουν πριν τη χρονική στιγμή t. Επίσης, η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ είναι

$$U(t) = u + P(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - R(t) \tag{2.1.2}$$

όπου $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό απόθεμα και $c \geq 0$ ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου.

Στη συνέχεια θεωρούμε τον αριθμό των απαιτήσεων που συμβαίνουν πριν τη χρονική στιγμή t. Από τη διαδικασία συνολικού μεγέθους των κύριων απαιτήσεων, έχουμε ότι $N(t)$ είναι ο αριθμός των κύριων απαιτήσεων πριν το χρόνο t. Η τελευταία κύρια απαίτηση που συνέβει πριν το χρόνο t

είναι η $X_{N(t)}$. Αυτή η κύρια απαίτηση, προκαλεί μια by-claim απαίτηση $Y_{N(t)}$. Εάν η $X_{N(t)}$ και η $Y_{N(t)}$ συμβούν ταυτόχρονα, ο αριθμός των by-claim απαιτήσεων που συμβαίνουν πριν τη χρονική στιγμή *t* είναι επίσης $N(t)$. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι *θ*. Εάν η εμφάνιση της by-claim απαίτησης $Y_{N(t)}$ καθυστερήσει, ο αριθμός των by-claim απαιτήσεων που συμβαίνουν πριν το χρόνο *t*, είναι $N(t)-1$. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι (1 – *θ*). Έτσι, για το αναμενόμενο συνολικό μέγεθος των απαιτήσεων, από την (2.1.1) έχουμε,

$$
\begin{aligned}
E[S(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + R(t)\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] + E[R(t)] \\
&= E[N(t)]E(X) + \theta E[N(t)]E(Y) + (1-\theta)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P[N(t)=n]E(Y) \\
&= \lambda t\mu_1 + \theta\lambda t\mu_q + (1-\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}(n-1)\mu_q \\
&= \lambda t\mu_1 + \theta\lambda t\mu_q + (1-\theta)e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right)\mu_q \\
&= \lambda t\mu_1 + \theta\lambda t\mu_q + (1-\theta)e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\lambda t - (e^{\lambda t}-1)\right)\mu_q \\
&= \lambda t\mu_1 + \theta\lambda t\mu_q + (1-\theta)(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t})\mu_q \\
&= \lambda t\mu_1 + \lambda t\mu_q - (1-\theta)\mu_q(1-e^{-\lambda t}).
\end{aligned}
$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι

$$c > \lambda(\mu_1 + \mu_q). \tag{2.1.3}$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης αυτής αναφέρεται στα αναμενόμενα έσοδα στη μονάδα του χρόνου για την εταιρεία. Το δεξί μέλος δηλώνει τη μέση τιμή των εξόδων της εταιρείας στη μονάδα του χρόνου, αφού αναφέρεται στο μέσο ρυθμό απαιτήσεων (αποζημιώσεων) στη μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο επί τη μέση αποζημίωση. Συνεπώς, η συνθήκη (2.1.3) απαιτεί τα έσοδα να υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα σε κάθε χρονική στιγμή. Η συνθήκη (2.1.3) αναφέρεται ως *συνθήκη καθαρού κέρδους* με την έννοια ότι το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας είναι θετικό, δηλαδή, $c - \lambda(\mu_1 + \mu_q) > 0$.

Ορίζουμε το χρόνο χρεοκοπίας, ως $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$. Για τη διαδικασία πλεονάσματος που δίνεται στην (2.1.2), συμβολίζουμε με $U(T^-)$ την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρεοκοπία, με $U(T)$ την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Τότε, για μια συνάρτηση ποινής $0 \leq w(x_1, x_2) < \infty, 0 \leq x_1, x_2 < \infty$, και $\mathrm{I}(\cdot)$ μια δείκτρια συνάρτηση, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\phi(u)$, δηλαδή η συνάρτηση Gerber-Shiu, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.7, εκφράζεται ως

$$\phi(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) \mathrm{I}(T < \infty \mid U(0) = u)], \tag{2.1.4}$$
$$= E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) \mathrm{I}(T < \infty, U(T) < 0 | U(0) = u)]$$
$$+ E[e^{-\delta T} \mathrm{I}(T < \infty, U(T) = 0 | U(0) = u)], \qquad u \geq 0.$$

2.2 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Στη ενοτήτα αυτή, θα αναπτύξουμε ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu που εμπλέκονται στο υπό εξέταση μοντέλο κινδύνου. Για να το πετύχουμε αυτό, θεωρούμε ένα βοηθητικό μοντέλο κινδύνου, σύμφωνα με το οποίο, την πρώτη χρονική στιγμή T_1, αντί να έχουμε μια κύρια απαίτηση και τη σχετιζόμενή της by-claim απαίτηση να συμβαίνουν ταυτόχρονα με πιθανότητα θ, μια άλλη by-claim απαίτηση προστίθεται στη χρονική στιγμή T_1. Έστω $\phi_1(u)$ η αντίστοιχη συνάρτηση Gerber-Shiu γι’ αυτό το βοηθητικό μοντέλο. Η συνάρτηση αυτή θα φανεί πολύ χρήσιμη στην ανάπτυξη της $\phi(u)$. Η επόμενη πρόταση αναφέρει το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που περιγράφει τις συναρτήσεις $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$.

Πρόταση 2.1

Για $u \geq 0$, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$ ικανοποιούν το επόμενο σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c\phi'(u) = (\lambda+\delta)\phi(u) &- \lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x) f_2(x)dx + w_2(u)\right) \\ &- \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x) f_1(x)dx + w_1(u)\right), \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned} c\phi_1'(u) = (\lambda+\delta)\phi_1(u) &- \lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x) f_3(x)dx + w_3(u)\right) \\ &- \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x) f_2(x)dx + w_2(u)\right), \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

όπου

$$w_i(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) f_i(y)dy = \int_0^\infty w(u,y) f_i(u+y)dy, \; i = 1,2,3. \tag{2.2.3}$$

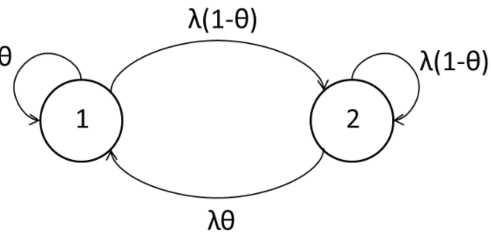
Απόδειξη

Το ενδιαφέρον μας είναι στη συνάρτηση $\phi(u)$. Θεωρούμε τη χρονική στιγμή T_1. Τότε θα εμφανιστεί η κύρια απαίτηση X_1 η οποία θα προκαλέσει μια by-claim απαίτηση Y_1. Εάν η Y_1 εμφανιστεί τη στιγμή T_1, η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ ανανεώνεται και ξεκινά με ένα καινούριο αποθεματικό. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι θ. Εάν η Y_1 καθυστερήσει και εμφανιστεί τη χρονική στιγμή T_2, τότε η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ δεν ανανεώνεται αλλά θα μεταφερθεί στο βοηθητικό μοντέλο. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό το ενδεχόμενο είναι $1 - \theta$.

Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να ιδωθεί ότι ρυθμίζεται από μια εξωτερική κατά τμήματα ντετερμινιστική αλυσίδα Markov (Piecewise Deterministic Markov Chain – PDMC) με δύο καταστάσεις, έστω 1 και 2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι όποτε βρισκόμαστε στην κατάσταση 1, συμβαίνει ταυτόχρονα μια κύρια απαίτηση και η συσχετιζόμενή της by-claim απαίτηση, ενώ όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση 2, συμβαίνει μόνο η κύρια απαίτηση. Οι μεταβάσεις από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 συμβαίνουν με μία εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda(1 - \theta)$, ενώ οι μεταβάσεις από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 1 συμβαίνουν με μία εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda\theta$. Ο σχετικός πίνακας μετάβασης είναι

$$\begin{pmatrix} \lambda\theta & \lambda(1-\theta) \\ \lambda\theta & \lambda(1-\theta) \end{pmatrix}.$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα καταστάσεων-ρυθμών μετάβασης φαίνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2. Διάγραμμα καταστάσεων – ρυθμών μετάβασης

Χρησιμοποιώντας το ανανεωτικό επιχείρημα, δεσμεύουμε ως προς το χρόνο της πρώτης ανανέωσης T_1 και το μέγεθος αυτής της απαίτησης $X_1 + Y_1$ και έχουμε για τη συνάρτηση $\phi(u)$,

$$\phi(u) = \theta \int_0^\infty e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x) f_2(x) dx + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct) f_2(x) dx \right) dt$$

$$+ (1-\theta) \int_0^\infty e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{u+ct} \phi_1(u+ct-x) f_1(x) dx + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct) f_1(x) dx \right) dt \qquad (2.2.4)$$

και όμοια για τη συνάρτηση του βοηθητικού μοντέλου,

$$\phi_1(u)=\theta\int_0^\infty e^{-\delta t}\lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct}\phi(u+ct-x)\,f_3(x)dx+\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\,f_3(x)dx\right)dt$$

$$+(1-\theta)\int_0^\infty e^{-\delta t}\lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct}\phi_1(u+ct-x)\,f_2(x)dx+\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\,f_2(x)dx\right)dt\,. \qquad (2.2.5)$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s=u+ct\Rightarrow t=\dfrac{s-u}{c}$ οπότε και $dt=\dfrac{1}{c}ds$ καθώς και $u\le s<\infty$.

Τότε οι εξισώσεις (2.2.4) και (2.2.5) γίνονται αντίστοιχα

$$\phi(s-ct)=\theta\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s\phi(s-x)\,f_2(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}ds$$

$$+(1-\theta)\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s\phi_1(s-x)\,f_1(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_1(x)dx\right)\frac{1}{c}ds \qquad (2.2.6)$$

και

$$\phi_1(s-ct)=\theta\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s\phi(s-x)\,f_3(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_3(x)dx\right)\frac{1}{c}ds$$

$$+(1-\theta)\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s\phi_1(s-x)\,f_2(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}ds\,. \qquad (2.2.7)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς *u* τις (2.2.6) και (2.2.7) εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibniz

$$\frac{d}{du}\int_{a(u)}^{b(u)}f(u,s)ds=f(u,b(u))\frac{db(u)}{du}-f(u,a(u))\frac{da(u)}{du}+\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial}{\partial u}f(u,s)ds\,.$$

Αρχικά για την (2.2.6) βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi(s-ct)=0-\theta\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{u-u}{c}}\left(\int_0^u\phi(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}$$

$$+\theta\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\frac{\lambda+\delta}{c}\left(\int_0^s\phi(s-x)\,f_2(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}ds$$

$$+0-(1-\theta)\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{u-u}{c}}\left(\int_0^u\phi_1(u-x)\,f_1(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_1(x)dy\right)\frac{1}{c}$$

$$+(1-\theta)\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\frac{\lambda+\delta}{c}\left(\int_0^s\phi_1(s-x)\,f_1(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_1(x)dx\right)\frac{1}{c}ds$$

και ισοδύναμα γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi(s-ct)=-\theta\lambda\left(\int_0^u\phi(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$-(1-\theta)\lambda\left(\int_0^u\phi_1(u-x)\,f_1(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_1(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$+\frac{\lambda+\delta}{c}\left[\theta\int_u^\infty\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s\phi(s-x)\,f_2(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}ds\right.$$
$$\left.+(1-\theta)\int_u^\infty\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s\phi_1(s-x)\,f_1(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_1(x)dx\right)\frac{1}{c}ds\right].$$

Λαμβάνοντας υπ’ όψιν την (2.2.6) γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi(s-ct)=-\theta\lambda\left(\int_0^u\phi(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$-(1-\theta)\lambda\left(\int_0^u\phi_1(u-x)\,f_1(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_1(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$+\frac{\lambda+\delta}{c}\phi(s-ct)$$

και αντικαθιστώντας $u=s-ct$ προκύπτει

$$c\phi'(u)=(\lambda+\delta)\,\phi(u)-\theta\lambda\left(\int_0^u\phi(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right)$$
$$-(1-\theta)\lambda\left(\int_0^u\phi_1(u-x)\,f_1(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_1(x)dx\right). \tag{2.2.8}$$

Όμοια παραγωγίζοντας ως προς u την (2.2.7) έχουμε διαδοχικά βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi_1(s-ct)=0-\theta\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{u-u}{c}}\left(\int_0^u\phi(u-x)\,f_3(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_3(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$+\theta\int_u^\infty\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\frac{\lambda+\delta}{c}\left(\int_0^s\phi(s-x)\,f_3(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_3(x)dy\right)\frac{1}{c}ds$$
$$+0-(1-\theta)\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{u-u}{c}}\left(\int_0^u\phi_1(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$+(1-\theta)\int_u^\infty\lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\frac{\lambda+\delta}{c}\left(\int_0^s\phi_1(s-x)\,f_2(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_2(x)dy\right)\frac{1}{c}ds$$

και ισοδύναμα γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi_1(s-ct)=-\theta\lambda\left(\int_0^u\phi(u-x)\,f_3(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_3(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$-(1-\theta)\lambda\left(\int_0^u\phi_1(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}$$

$$+\frac{\lambda+\delta}{c}\left[\theta\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s \phi(s-x)\,f_3(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_3(x)dy\right)\frac{1}{c}ds\right.$$
$$\left.+(1-\theta)\int_u^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}}\left(\int_0^s \phi_1(s-x)\,f_2(x)dx+\int_s^\infty w(s,x-s)\,f_2(x)dx\right)\frac{1}{c}ds\right].$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (2.2.6)

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi_1(s-ct)=-\theta\lambda\left(\int_0^u \phi(u-y)\,f_3(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_3(x)dx\right)\frac{1}{c}$$
$$-(1-\theta)\lambda\left(\int_0^u \phi_1(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dy\right)\frac{1}{c}$$
$$+\frac{\lambda+\delta}{c}\phi_1(s-ct)$$

και αντικαθιστώντας $u = s - ct$ προκύπτει

$$c\phi_1'(u)=(\lambda+\delta)\,\phi_1(u)-\theta\lambda\left(\int_0^u \phi(u-x)\,f_3(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_3(x)dx\right)$$
$$-(1-\theta)\lambda\left(\int_0^u \phi_1(u-x)\,f_2(x)dx+\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_2(x)dx\right). \tag{2.2.9}$$

Θέτοντας

$$w_i(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)\,f_i(x)dx\,,\ i=1,2,3,$$

οι (2.2.8) και (2.2.9) οδηγούν άμεσα στις (2.2.1) και (2.2.2).

□

2.3 Μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Για την επίλυση του συστήματος της Πρότασης 2.1 θα χρησιμοποιηθούν μετασχηματισμοί Laplace καθώς αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο ιδιαίτερα χρήσιμο στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων αλλά και στη θεωρία συλλογικού κινδύνου.

Αρχικά ορίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των ποσοτήτων που εμπλέκονται στο σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων:

Για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$,

$$\hat{\phi}(s)=L\{\phi(u)\}:=\int_0^\infty e^{-su}\phi(u)du\,,$$

$$\hat{\phi}_1(s)=L\{\phi_1(u)\}:=\int_0^\infty e^{-su}\phi_1(u)du\,,$$

$$\hat{f}_i(s) = L\{f_i(x)\} := \int_0^\infty e^{-sx} f_i(x)dx, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\hat{w}_i(s) = L\{w_i(u)\} := \int_0^\infty e^{-su} w_i(u)du, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Στην επόμενη πρόταση δίνονται οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$.

Πρόταση 2.2

Οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$ είναι αντίστοιχα

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{-[(cs-\lambda-\delta)^2 + (cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)]} \tag{2.3.1}$$

και

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\hat{B}_1(s)}{-[(cs-\lambda-\delta)^2 + (cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)]}, \tag{2.3.2}$$

όπου

$$\hat{B}(s) = [cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)][\hat{w}(s)-c\phi(0)] - \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)[\hat{w}^*(s)-c\phi_1(0)],$$

$$\hat{B}_1(s) = [cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)][\hat{w}^*(s)-c\phi_1(0)] - \lambda\theta\,\hat{f}_3(s)[\hat{w}(s)-c\phi(0)].$$

Απόδειξη

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη των (2.2.1) και (2.2.2) έχουμε αντίστοιχα

$$L\{c\phi'(u)\} = L\left\{(\lambda+\delta)\phi(u) - \lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x)f_2(x)dx + w_2(u)\right) - \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x)f_1(x)dx + w_1(u)\right)\right\},$$

$$L\{c\phi_1'(u)\} = L\left\{(\lambda+\delta)\phi_1(u) - \lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x)f_3(x)dx + w_3(u)\right) - \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x)f_2(x)dx + w_2(u)\right)\right\}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace στο αριστερό μέλος των δύο εξισώσεων αφορά σε παράγωγο, και από την ιδιότητα της γραμμικότητας στο δεύτερα μέλη προκύπτει αντίστοιχα

$$c[s\hat{\phi}(s)-\phi(0)] = (\lambda+\delta)L\{\phi(u)\} - \lambda\theta\left(L\left\{\int_0^u \phi(u-x)f_2(x)dx\right\} + L\{w_2(u)\}\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(L\left\{\int_0^u \phi_1(u-x)f_1(x)dx\right\} + L\{w_1(u)\}\right),$$

και

$$c[s\hat{\phi}_1(s)-\phi_1(0)]=(\lambda+\delta)L\{\phi_1(u)\}-\lambda\theta\left(L\left\{\int_0^u \phi(u-x)f_3(x)dx\right\}+L\{w_3(u)\}\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(L\left\{\int_0^u \phi_1(u-x)f_2(x)dx\right\}+L\{w_2(u)\}\right).$$

Ο πρώτος μετασχηματισμός Laplace στις παρενθέσεις στο δεύτερο μέλος και των δύο εξισώσεων αφορά σε συνέλιξη. Έτσι, οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται αντίστοιχα

$$c[s\hat{\phi}(s)-\phi(0)]=(\lambda+\delta)\hat{\phi}(s)-\lambda\theta[\hat{\phi}(s)\hat{f}_2(s)+\hat{w}_2(s)]-\lambda(1-\theta)[\hat{\phi}_1(s)\hat{f}_1(s)+\hat{w}_1(s)],$$

και

$$c[s\hat{\phi}_1(s)-\phi_1(0)]=(\lambda+\delta)\hat{\phi}_1(s)-\lambda\theta[\hat{\phi}(s)\hat{f}_3(s)+\hat{w}_3(s)]-\lambda(1-\theta)[\hat{\phi}_1(s)\hat{f}_2(s)+\hat{w}_2(s)].$$

Ισοδύναμα με αναδιάταξη των όρων, έχουμε

$$[cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]\hat{\phi}(s)+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\hat{\phi}_1(s)=c\phi(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_2(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_1(s),$$

$$\lambda\theta\,\hat{f}_3(s)\hat{\phi}(s)+[cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)]\hat{\phi}_1(s)=c\phi_1(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_3(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_2(s).$$

Για την επίλυση του τελευταίου συστήματος ως προς $\hat{\phi}(s)$ και $\hat{\phi}_1(s)$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο οριζουσών και προκύπτει

$$\hat{\phi}(s)=\frac{\begin{vmatrix} c\phi(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_2(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_1(s) & \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s) \\ c\phi_1(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_3(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_2(s) & cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s) & \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s) \\ \lambda\theta\,\hat{f}_3(s) & cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\end{vmatrix}}, \tag{2.3.3}$$

και

$$\hat{\phi}_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s) & c\phi(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_2(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_1(s) \\ \lambda\theta\,\hat{f}_3(s) & c\phi_1(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_3(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_2(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s) & \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s) \\ \lambda\theta\,\hat{f}_3(s) & cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\end{vmatrix}}. \tag{2.3.4}$$

Αρχικά, πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των οριζουσών, σημειώνουμε ότι

$$\hat{f}_2(s)=\hat{f}_1(s)\hat{q}(s),$$

$$\hat{f}_3(s)=\hat{f}_1(s)\hat{q}(s)\hat{q}(s)=\hat{f}_2(s)\hat{q}(s),$$

$$\hat{f}_3(s)\hat{f}_1(s)=\hat{f}_2(s)\hat{q}(s)\hat{f}_1(s)=(\hat{f}_2(s))^2.$$

Ο κοινός παρονομαστής των (2.3.3) και (2.3.4), αναπτύσσοντας την ορίζουσα είναι

$$[cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)][cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)]-\lambda^2\theta(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\,\hat{f}_3(s)$$
$$=(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)-(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\theta\,\hat{f}_2(s)$$
$$+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\theta\,\hat{f}_2(s)+\lambda^2\theta(1-\theta)(\hat{f}_2(s))^2-\lambda^2\theta(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\,\hat{f}_3(s)$$
$$=(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)+\lambda^2\theta(1-\theta)(\hat{f}_2(s))^2-\lambda^2\theta(1-\theta)(\hat{f}_2(s))^2$$
$$=(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)\,.$$

Τότε, με ανάπτυξη της ορίζουσας του αριθμητή, η (2.3.3) γίνεται

$$\hat{\phi}(s)=\frac{[cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)]\{c\phi(0)-\lambda[\theta\,\hat{w}_2(s)+(1-\theta)\hat{w}_1(s)]\}}{(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)}$$
$$\frac{-\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\{c\phi_1(0)-\lambda[\theta\,\hat{w}_3(s)+(1-\theta)\hat{w}_2(s)]\}}{(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)},$$

και αντίστοιχα η (2.3.4)

$$\hat{\phi}_1(s)=\frac{[cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]\{c\phi_1(0)-\lambda[\theta\,\hat{w}_3(s)+(1-\theta)\hat{w}_2(s)]\}}{(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)}$$
$$\frac{-\lambda\theta\,\hat{f}_3(s)\{c\phi(0)-\lambda[\theta\,\hat{w}_2(s)+(1-\theta)\hat{w}_1(s)]\}}{(cs-\lambda-\delta)^2+(cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s)}.$$

Θέτοντας

$$\hat{w}(s)=\lambda[\theta\,\hat{w}_2(s)+(1-\theta)\hat{w}_1(s)]$$

και

$$\hat{w}^*(s)=\lambda[\theta\,\hat{w}_3(s)+(1-\theta)\hat{w}_2(s)]$$

προκύπτουν άμεσα οι (2.3.1) και (2.3.2).

□

Ενδιαφερόμαστε τώρα για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων $\phi(0)$ και $\phi_1(0)$ που εμφανίζονται στις (2.3.1) και (2.3.2) έτσι ώστε, παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των $\hat{\phi}(s)$ και $\hat{\phi}_1(s)$ της Πρότασης 2.2 να προκύψουν οι πλήρεις λύσεις των συναρτήσεων $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$. Αρχικά έχουμε το επόμενο σχετικό λήμμα που αφορά τις ρίζες του κοινού παρονομαστή των (2.3.1) και (2.3.2).

Λήμμα 2.1

Για $\delta\geq 0$, έστω η επόμενη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\ell(s)=0 \qquad (2.3.5)$$

όπου

$$\ell(s) = (cs - \lambda - \delta)^2 + (cs - \lambda - \delta)\lambda \hat{f}_2(s).$$

(i) *Για* $\delta > 0$*, η* $\ell(s) = 0$ *έχει ακριβώς δύο διακεκριμένες θετικές πραγματικές ρίζες, έστω* $r_1(\delta)$ *και* $r_2(\delta) = \dfrac{\lambda + \delta}{c}$*. Επιπλέον, οι* $r_1(\delta)$ *και* $r_2(\delta)$ *είναι οι μοναδικές ρίζες στο δεξίο μιγαδικό ημιεπίπεδο.*

(ii) *Για* $\delta = 0$*, η* $\ell(s) = 0$ *έχει ακριβώς μία θετική ρίζα, δηλαδή* $r_2(0)$*, όπου είναι η μοναδική ρίζα στο δεξίο μιγαδικό ημιεπίπεδο με θετικό πραγματικό μέρος και επίσης* $r_1(0) = 0$.

Απόδειξη

Η εξίσωση $\ell(s) = 0$ γράφεται διαδοχικά

$$(cs - \lambda - \delta)^2 + (cs - \lambda - \delta)\lambda \hat{f}_2(s) = 0,$$

$$(cs - \lambda - \delta)[cs - \lambda - \delta + \lambda \hat{f}_2(s)] = 0,$$

$$\ell_1(s)\ell_2(s) = 0,$$

με $\ell_1(s) = cs - \lambda - \delta$ και $\ell_2(s) = cs - \lambda - \delta + \lambda \hat{f}_2(s)$.

Επομένως οι ρίζες της $\ell(s) = 0$ είναι οι ρίζες των εξισώσεων $\ell_1(s) = 0$ και $\ell_2(s) = 0$.

Η εξίσωση $\ell_1(s) = 0$, και άρα η $\ell(s) = 0$, έχει μία ρίζα, έστω $r_2(\delta)$, η οποία είναι $r_2(\delta) = \dfrac{\lambda + \delta}{c}$.

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση $\ell_2(s) = 0$, η οποία γράφεται ως

$$-(\lambda + \delta - cs) = \lambda \hat{f}_2(s) \text{ ή } -\ell_1(s) = \lambda \hat{f}_2(s).$$

Για την $\ell_2(s)$ ισχύει, $\ell_2(0) = -\lambda - \delta + \lambda \hat{f}_2(0) = -\lambda - \delta + \lambda = -\delta < 0$ και $\lim_{s \to +\infty} \ell_2(s) = +\infty$.

Η $-\ell_1(s) = \lambda + \delta - cs$ είναι γραμμική φθίνουσα συνάρτηση ως προς s, διότι

$$-\frac{\partial}{\partial s}\ell_1(s) = -c < 0.$$

Επίσης είναι $\ell_1(0) = -\lambda - \delta$.

Για την $\lambda \hat{f}_2(s)$, ισχύει $\lambda \hat{f}_2(0) = \lambda \cdot 1 = \lambda$, συνεπώς, $\lambda \hat{f}_2(0) = \lambda < \lambda + \delta = -\ell_1(s)$. Επίσης για μεγέθη ζημιών που έχουν πεπερασμένο μετασχηματισμό Laplace, είναι

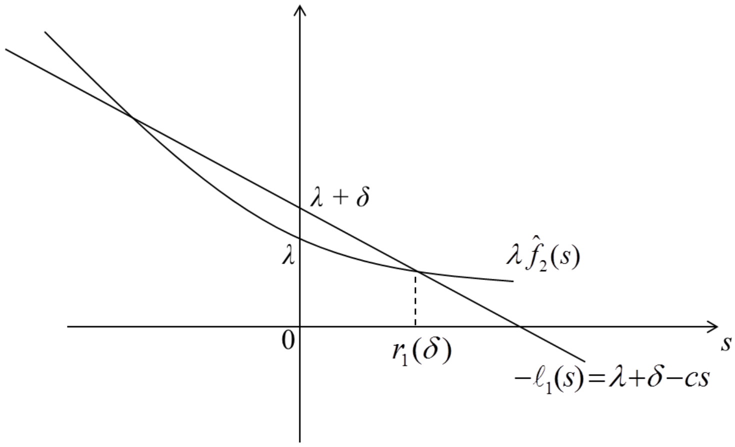
$$\frac{\partial}{\partial s}(\lambda \hat{f}_2(s)) = \lambda \frac{\partial}{\partial s} E(e^{-s(X+Y)}) = \lambda E[-(X+Y)e^{-s(X+Y)}] < 0,$$

δηλαδή η $\lambda \hat{f}_2(s)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς s. Επίσης,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\lambda \hat{f}_2(s)) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial s^2} E(e^{-s(X+Y)}) = \lambda E[(X+Y)^2 e^{-s(X+Y)}] > 0,$$

δηλαδή η $\lambda \hat{f}_2(s)$ είναι κυρτή συνάρτηση ως προς s.

Έτσι η $\ell_2(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς s. Επομένως, η $\ell_2(s) = 0$ έχει μια ακριβώς θετική πραγματική ρίζα, έστω $r_1(\delta) \neq r_2(\delta)$. Γραφικά, για τη λύση της εξίσωσης $\ell_2(s) = 0$, έχουμε το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 2.3. Γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης $\ell_2(s) = 0$

Συμπερασματικά, η $\ell(s) = 0$ έχει δύο θετικές, πραγματικές ρίζες, τις $r_i(\delta)$, $i = 1, 2$.

Η απόδειξη ότι η $r_1(\delta)$ είναι η μοναδική θετική πραγματική ρίζα της εξίσωσης $\ell(s) = 0$ στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2 των Li and Carrido, (2005), στην ειδική περίπτωση που $n = 1$. Επίσης η $r_2(\delta)$ είναι η μοναδική θετική πραγματική ρίζα της εξίσωσης $\ell_1(s) = 0$ στο δεξίο μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(ii) Είναι συνέπεια του (i) για $\delta = 0$ (δες επίσης Gerber and Landry, (1998) ότι στο δεξίο μιγαδικό ημιεπίπεδο ισχύει ότι $r_1(\delta) \to 0^+$ καθώς $\delta \to 0^+$).

□

Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας των συμβολισμών, θα γράφουμε τις ρίζες $r_i(\delta)$, $\delta > 0$, ως r_i, $i = 1, 2$. Για τις τιμές $\phi(0)$ *και* $\phi_1(0)$ έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.3

Οι $\phi(0)$ *και* $\phi_1(0)$ *δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις*

$$\phi(0)=\frac{1}{c[\hat{f}_1(r_2)y(r_1)-\hat{f}_1(r_1)y(r_2)]}\Big\{\hat{f}_1(r_1)[-\hat{w}(r_2)y(r_2)+\lambda(-1+\theta)\hat{f}_1(r_2)\hat{w}^*(r_2)]$$
$$-\hat{f}_1(r_2)[-\hat{w}(r_1)y(r_1)+\lambda(-1+\theta)\hat{f}_1(r_1)\hat{w}^*(r_1)]\Big\}, \tag{2.3.6}$$

και

$$\phi_1(0)=\frac{\hat{w}^*(r_2)}{c}+\frac{y(r_2)[\hat{w}(r_2)-c\phi(0])}{\lambda c(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)}, \tag{2.3.7}$$

όπου

$$y(s)=\lambda+\delta-\lambda\,\hat{f}_2(s)+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)-cs\,.$$

Απόδειξη

Αφού η $\hat{\phi}(s)=\dfrac{\hat{B}(s)}{-\ell(s)}$ είναι πεπερασμένη για Re(s) ≥ 0, και ο παρονομαστής της μηδενίζεται για $s=r_i$, i = 1, 2, θα πρέπει και ο αριθμητής $\hat{B}(s)$ να μηδενίζεται στις ίδιες τιμές. Διαφορετικά αν $\hat{B}(r_i)\neq 0$ θα έπρεπε να ισχύει ότι $\hat{\phi}(s)=\infty$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι έχουμε,

$$\hat{B}(r_1)=0 \quad \text{ή} \quad [cr_1-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_1)][\hat{w}(r_1)-c\phi(0)]-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)[\hat{w}^*(r_1)-c\phi_1(0)]=0,$$

και

$$\hat{B}(r_2)=0 \quad \text{ή} \quad [cr_2-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_2)][\hat{w}(r_2)-c\phi(0)]-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)[\hat{w}^*(r_2)-c\phi_1(0)]=0.$$

Με αναδιάταξη των όρων σε κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε αντίστοιχα

$$c[cr_1-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_1)]\phi(0)-c\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\phi_1(0)=$$
$$[cr_1-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_1)]\,\hat{w}(r_1)-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\,\hat{w}^*(r_1),$$

και

$$c[cr_2-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_2)]\phi(0)-c\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\phi_1(0)=$$
$$[cr_1-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_2)]\,\hat{w}(r_2)-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\,\hat{w}^*(r_2).$$

Θέτοντας

$$y(s)=\lambda+\delta-\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s)-cs\,,$$

το ανωτέρω σύστημα γίνεται

$$cy(r_1)\phi(0)-c\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\phi_1(0)=y(r_1)\,\hat{w}(r_1)-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\,\hat{w}^*(r_1)\,,$$

$$cy(r_2)\phi(0)-c\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\phi_1(0)=y(r_2)\,\hat{w}(r_2)-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\,\hat{w}^*(r_2)\,.$$

Η λύση του γραμμικού αυτού συστήματος ως προς $\phi(0)$ και $\phi_1(0)$ με τη μέθοδο των οριζουσών οδηγεί στις (2.3.6) και (2.3.7).

□

2.4 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u)$

Στην ενότητα αυτή, στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Γενικά αναφέρουμε ότι μια εξίσωση της μορφής (δες Χατζηκωνσταντινίδης)

$$Z(t) = \varphi \int_0^t Z(t-x)dF(x) + g(t)$$

λέγεται *ανανεωτική εξίσωση*. Στην εν λόγω εξίσωση, η Z είναι η άγνωστη συνάρτηση, η F είναι μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής, g είναι μια φραγμένη συνάρτηση και φ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $0 < \varphi \le 1$. Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε *ελλειμματικές* (defective) όταν $0 < \varphi < 1$, και σε *κανονικές* (proper) ή *μη-ελλειμματικές* (non-defective) όταν $\varphi = 1$.

Για την ανάλυση που ακολουθεί εδώ και στα επόμενα κεφάλαια, θα χρησιμοποιηθεί ο Τελεστής Dickson-Hipp T_r τον οποίο ορίζουμε στη συνέχεια, ενώ για τις ιδιότητές του δες Παράρτημα Π3. Για μια πραγματική ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ο τελεστής Dickson-Hipp ορίζεται ως

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy = e^{rx}\int_x^\infty e^{-ry} f(y)dy, \qquad x \ge 0,\ \mathrm{Re}(r) > 0.$$

Αρχικά αναλύουμε το μετασχηματισμό Laplace της $\phi(u)$ της (2.3.1) σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4

Για $\mathrm{Re}(s) > 0$*, ο μετασχηματισμός Laplace* $\hat{\phi}(s)$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\hat{\phi}(s) = \frac{T_{r_1}T_{r_2}T_s p_2(0)}{c^2}\hat{\phi}(s) - \frac{T_s T_{r_1}T_{r_2}h_2(0)}{c^2}. \tag{2.4.1}$$

Απόδειξη

Αρχικά δίνουμε μία εναλλακτική έκφραση για την $\hat{\phi}(s) = \dfrac{\hat{B}(s)}{-\ell(s)}$.

Από την (2.3.5), ο παρονομαστής γράφεται στη μορφή

$$-\ell(s) = -(cs-\lambda-\delta)^2 - (cs-\lambda-\delta)\lambda\,\hat{f}_2(s) = -[\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s)]$$

όπου θέσαμε

$$\hat{p}_1(s) = (cs-\lambda-\delta)^2, \tag{2.4.1α}$$

$$\hat{p}_2(s) = -(cs - \lambda - \delta)\lambda\, \hat{f}_2(s)\,. \tag{2.4.1β}$$

Επίσης, ο αριθμητής $\hat{B}(s)$ γράφεται διαδοχικά ως εξής

$$\begin{aligned}
\hat{B}(s) &= [cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)][\hat{w}(s) - c\phi(0)] - \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)[\hat{w}^*(s) - c\phi_1(0)] \\
&= (cs - \lambda - \delta)\,\hat{w}(s) - (cs - \lambda - \delta)c\phi(0) + \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\hat{w}(s) - \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)c\phi(0) \\
&\quad - \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\,\hat{w}^*(s) + \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)c\phi_1(0) \\
&= -(cs - \lambda - \delta)c\phi(0) + (cs - \lambda - \delta)\hat{w}(s) + \lambda(1-\theta)\left(\hat{f}_2(s)\hat{w}(s) - \hat{f}_1(s)\,\hat{w}^*(s)\right) \\
&\quad + \lambda c(1-\theta)\left(\hat{f}_1(s)\phi_1(0) - \hat{f}_2(s)\phi(0)\right) \\
&= -(cs - \lambda - \delta)c\phi(0) + (cs - \lambda - \delta)\hat{w}(s) + \lambda(1-\theta)\left(\hat{A}_2(s) - \hat{A}_1(s)\right) \\
&\quad + \lambda c(1-\theta)\left(\hat{f}_1(s)\phi_1(0) - \hat{f}_2(s)\phi(0)\right)
\end{aligned}$$

όπου

$$\hat{A}_1(s) = \hat{f}_1(s)\,\hat{w}^*(s)\,,$$

$$\hat{A}_2(s) = \hat{f}_2(s)\,\hat{w}(s)\,.$$

Επίσης θέτοντας

$$\hat{h}_1(s) = -(cs - \lambda - \delta)c\phi(0)\,,$$

$$\hat{h}_2(s) = (cs - \lambda - \delta)\hat{w}(s) + \lambda(1-\theta)\left(\hat{A}_2(s) - \hat{A}_1(s)\right) + \lambda c(1-\theta)\left(\hat{f}_1(s)\phi_1(0) - \hat{f}_2(s)\phi(0)\right),$$

η $\hat{B}(s)$ τελικά γράφεται

$$\hat{B}(s) = \hat{h}_1(s) + \hat{h}_2(s)\,.$$

Έτσι, συγκεντρωτικά για τη $\hat{\phi}(s)$, έχουμε τη σχέση

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{-\ell(s)} = \frac{\hat{h}_1(s) + \hat{h}_2(s)}{-[\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s)]}\,. \tag{2.4.2}$$

Στη συνέχεια, για την απόδειξη της Εξίσωσης (2.4.1), θα βρούμε μία έκφραση του αριθμητή και μία του παρονομαστή της (2.4.2). Ξεκινάμε με τον αριθμητή.

Όπως αναφέρθηκε και στην Πρόταση (2.3), αφού $\hat{\phi}(s) < \infty$ (αναλυτική για $\mathrm{Re}(s) > 0$), και γνωρίζοντας από το Λήμμα 2.1 ότι ο παρονομαστής μηδενίζεται για $s = r_1$ και $s = r_2$ θα πρέπει και ο αριθμητής της να μηδενίζεται εκεί. Επομένως, είναι

$$\hat{h}_1(r_i) + \hat{h}_2(r_i) = 0 \text{ ή } \hat{h}_1(r_i) = -\hat{h}_2(r_i) \text{ για } i = 1, 2.$$

Για τη συνάρτηση $\hat{h}_1(s)$, από τον τύπο παρεμβολής Lagrange στα σημεία, (r_1, $\hat{h}_1(r_1)$), (r_2, $\hat{h}_1(r_2)$), βρίσκουμε

$$\hat{h}_1(s)=\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\hat{h}_1(r_1)+\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\hat{h}_1(r_2)$$

$$=\frac{(s-r_2)\hat{h}_1(r_1)-(s-r_1)\hat{h}_1(r_2)}{r_1-r_2}=-\frac{(s-r_2)\hat{h}_2(r_1)-(s-r_1)\hat{h}_2(r_2)}{r_1-r_2}.$$

Για το άθροισμα $\hat{h}_1(s)+\hat{h}_2(s)$ έχουμε διαδοχικά

$$\hat{h}_1(s)+\hat{h}_2(s)=-\frac{(s-r_2)\hat{h}_2(r_1)-(s-r_1)\hat{h}_2(r_2)}{r_1-r_2}+\hat{h}_2(s)$$

$$=\frac{-(s-r_2)\hat{h}_2(r_1)+(s-r_1)\hat{h}_2(r_2)+r_1\hat{h}_2(s)-r_2\hat{h}_2(s)}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{-(s-r_2)\hat{h}_2(r_1)+(s-r_1)\hat{h}_2(r_2)+r_1\hat{h}_2(s)-r_2\hat{h}_2(s)+s\hat{h}_2(s)-s\hat{h}_2(s)}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{-(s-r_2)\hat{h}_2(r_1)+(s-r_1)\hat{h}_2(r_2)-(s-r_1)\hat{h}_2(s)+(s-r_2)\hat{h}_2(s)}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{(s-r_2)[\hat{h}_2(s)-\hat{h}_2(r_1)]-(s-r_1)[\hat{h}_2(s)-\hat{h}_2(r_2)]}{r_1-r_2}$$

$$=(s-r_1)(s-r_2)\frac{\dfrac{\hat{h}_2(s)-\hat{h}_2(r_1)}{s-r_1}-\dfrac{\hat{h}_2(s)-\hat{h}_2(r_2)}{s-r_2}}{r_1-r_2}$$

$$=(s-r_1)(s-r_2)\frac{-\dfrac{\hat{h}_2(s)-\hat{h}_2(r_1)}{r_1-s}+\dfrac{\hat{h}_2(s)-\hat{h}_2(r_2)}{r_2-s}}{r_1-r_2}$$

$$=(s-r_1)(s-r_2)\frac{-T_sT_{r_1}h_2(0)+T_sT_{r_2}h_2(0)}{r_1-r_2}$$

$$=(s-r_1)(s-r_2)T_sT_{r_2}T_{r_1}h_2(0). \qquad (2.4.3)$$

Όμοια προχωράμε για τον παρονομαστή. Από το Λήμμα 2.1, είναι $\ell(r_i)=0$, i = 1, 2, οπότε και $-[\hat{p}_1(r_i)-\hat{p}_2(r_i)]=0$ ή $\hat{p}_1(r_i)=\hat{p}_2(r_i)$, i = 1, 2. Για τη συνάρτηση $\hat{p}_1(s)$ από τον τύπο παρεμβολής Lagrange στα σημεία (0, $\hat{p}_1(0)$), (r_1, $\hat{p}_1(r_1)$), (r_2, $\hat{p}_1(r_2)$) έχουμε

$$\hat{p}_1(s)=\frac{(s-r_1)(s-r_2)}{(0-r_1)(0-r_2)}\hat{p}_1(0)+\frac{(s-0)(s-r_2)}{(r_1-0)(r_1-r_2)}\hat{p}_1(r_1)+\frac{(s-0)(s-r_1)}{(r_2-0)(r_2-r_1)}\hat{p}_1(r_2)$$

$$=\frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1r_2}\hat{p}_1(0)+\frac{s(s-r_2)}{r_1(r_1-r_2)}\hat{p}_1(r_1)+\frac{s(s-r_1)}{r_2(r_2-r_1)}\hat{p}_1(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\,\hat{p}_1(0) + s\,\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} + s\,\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2}$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\,\hat{p}_1(0) + s\,\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} - r_1\,\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} + \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\hat{p}_2(r_1)$$
$$+ s\,\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2} - r_2\,\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2} + \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\hat{p}_2(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\,\hat{p}_1(0) + (s-r_1)\,\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} + \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\hat{p}_2(r_1)$$
$$+ (s-r_2)\,\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2} + \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\hat{p}_2(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\,\hat{p}_1(0) + (s-r_1)(s-r_2)\left(\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2(r_2-r_1)}\right)$$
$$+ \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\hat{p}_2(r_1) + \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\hat{p}_2(r_2).$$

Για τη διαφορά $\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s)$ έχουμε διαδοχικά

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\,\hat{p}_1(0) + (s-r_1)(s-r_2)\left(\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2(r_2-r_1)}\right)$$
$$-\left(\hat{p}_2(s) - \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\,\hat{p}_2(r_1) - \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\,\hat{p}_2(r_2)\right)$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\left[\left(\frac{\hat{p}_1(0)}{r_1 r_2} + \frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2(r_2-r_1)}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\hat{p}_2(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} - \frac{\hat{p}_2(r_1)}{(s-r_1)(r_1-r_2)} - \frac{\hat{p}_2(r_2)}{(s-r_2)(r_2-r_1)}\right)\right]$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\left[\left(\frac{\hat{p}_1(0)}{(0-r_1)(0-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_1)}{(r_1-0)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_2)}{(r_2-0)(r_2-r_1)}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\hat{p}_2(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_1)}{(r_1-s)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{(r_2-s)(r_2-r_1)}\right)\right].$$

Αλλά, από την Ιδιότητα 10 του Παραρτήματος Π3, η πρώτη παρένθεση είναι ίση με $T_0 T_{r_2} T_{r_1} p_1(0)$ και η δεύτερη παρένθεση είναι ίση με $T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)$, οπότε

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = (s-r_1)(s-r_2)[T_0 T_{r_2} T_{r_1} p_1(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)]. \qquad (2.4.4)$$

Επίσης ισχύει $T_0 T_{r_2} T_{r_1} p_1(0) = T_0 T_{r_1} T_{r_2} p_1(0) = c^2$. Πράγματι, είναι

$$T_0 T_{r_1} T_{r_2} p_1(0) = \frac{\hat{p}_1(0)}{(0-r_1)(0-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_1)}{(r_1-0)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_2)}{(r_2-0)(r_2-r_1)}.$$

Από τη συνάρτηση $\hat{p}_1(s) = (cs-\lambda-\delta)^2$ για $s=0$, $s=r_1$ και $s=r_2 = \dfrac{\lambda+\delta}{c}$ βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\hat{p}_1(0) = (-\lambda-\delta)^2 = (\lambda+\delta)^2 = (cr_2)^2,$$

$$\hat{p}_1(r_1) = (cr_1-\lambda-\delta)^2 = (cr_1-cr_2)^2 = c^2(r_1-r_2)^2,$$

$$\hat{p}_1(r_2) = (cr_2-\lambda-\delta)^2 = (cr_2-cr_2)^2 = 0.$$

Οπότε αντικαθιστώντας στο $T_0 T_{r_1} T_{r_2} p_1(0)$ βρίσκουμε,

$$T_0 T_{r_1} T_{r_2} p_1(0) = \frac{(cr_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{c^2(r_1-r_2)^2}{r_1(r_1-r_2)} = \frac{c^2 r_2^2}{r_1 r_2} + \frac{c^2(r_1-r_2)}{r_1} = \frac{c^2 r_2}{r_1} + \frac{c^2 r_1 - c^2 r_2}{r_1} = c^2.$$

Άρα η (2.4.4) γίνεται

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = (s-r_1)(s-r_2)[c^2 - T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)]. \tag{2.4.5}$$

Η (2.4.2) από τις (2.4.3) και (2.4.5) γίνεται

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\hat{h}_1(s)+\hat{h}_2(s)}{-[\hat{p}_1(s)-\hat{p}_2(s)]} = \frac{(s-r_1)(s-r_2)T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0)}{-(s-r_1)(s-r_2)(c^2 - T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0))} = \frac{-T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0)}{c^2 - T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)}$$

ή

$$c^2\hat{\phi}(s) - \hat{\phi}(s) T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0) = -T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0)$$

ή

$$c^2\hat{\phi}(s) = T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)\hat{\phi}(s) - T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0)$$

ή

$$\hat{\phi}(s) = \frac{T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)}{c^2}\hat{\phi}(s) - \frac{T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0)}{c^2},$$

που είναι η ζητούμενη Εξίσωση (2.4.1).

□

Στη συνέχεια με χρήση της Πρότασης 2.4 προχωρούμε να δείξουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $\phi(u)$.

Πρόταση 2.5

Η Gerber-Shiu συνάρτηση $\phi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi(u) = \kappa_\delta \int_0^u \phi(u-y)\zeta(y)dy + \vartheta(u) \tag{2.4.6}$$

όπου

$$\kappa_\delta = \frac{\lambda}{c} T_0 T_{r_1} f_2(0), \qquad \zeta(y) = \frac{T_{r_1} f_2(y)}{T_0 T_{r_1} f_2(0)},$$

$$\begin{aligned}\vartheta(u) = -\frac{1}{c^2}\Big\{&\lambda(1-\theta)[T_{r_2}T_{r_1}A_2(u) - T_{r_2}T_{r_1}A_1(u)] \\ &+ \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0)T_{r_2}T_{r_1} f_1(u) - \phi(0)T_{r_2}T_{r_1} f_2(u)] - cT_{r_1}w(u)\Big\}\end{aligned}$$

με

$$A_1(u) = (f_1 * w^*)(u), \qquad A_2(u) = (f_1 * w)(u),$$

*όπου * είναι ο τελεστής συνέλιξης.*

Απόδειξη

Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες $T_sT_{r_2}T_{r_1}p_2(0)$ και $T_sT_{r_2}T_{r_1}h_2(0)$ που εμφανίζονται στην (2.4.1).

Ξεκινώντας με το $T_sT_{r_2}T_{r_1}p_2(0)$, θα βρούμε το $p_2(0)$. Είναι

$$\hat{p}_2(s) = -(cs - \lambda - \delta)\lambda\, \hat{f}_2(s) = -c\lambda s\, \hat{f}_2(s) + (\lambda+\delta)\lambda\, \hat{f}_2(s).$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη έχουμε

$$L^{-1}\{\hat{p}_2(s)\} = L^{-1}\{-c\lambda s\, \hat{f}_2(s) + (\lambda+\delta)\lambda\, \hat{f}_2(s)\}$$

και από την ιδιότητα της γραμμικότητας έπεται ότι

$$L^{-1}\{\hat{p}_2(s)\} = -c\lambda\, L^{-1}\{s\, \hat{f}_2(s)\} + \lambda(\lambda+\delta)L^{-1}\{\hat{f}_2(s)\}. \tag{2.4.7}$$

Έστω $t(u) = L^{-1}\{s\, \hat{f}_2(s)\}$ με $\hat{t}(s) = L\{t(u)\} = s\, \hat{f}_2(s)$, οπότε η (2.4.7) γίνεται

$$p_2(u) = -c\lambda\, t(u) + \lambda(\lambda+\delta)\, f_2(u)$$

από την οποία για $u = 0$, έχουμε

$$p_2(0) = -c\lambda\, t(0) + \lambda(\lambda+\delta)\, f_2(0).$$

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας τον τελεστή-$T_sT_{r_2}T_{r_1}$ και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}T_sT_{r_2}T_{r_1}p_2(0) &= T_sT_{r_2}T_{r_1}\{\lambda(\lambda+\delta)\, f_2(0) - c\lambda\, t(0)\} \\ &= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r_2}T_{r_1} f_2(0) - \lambda c T_s T_{r_2}T_{r_1}t(0) \\ &= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r_2}T_{r_1} f_2(0) - \lambda c \frac{\dfrac{T_st(0) - T_{r_2}t(0)}{r_2 - s} - \dfrac{T_st(0) - T_{r_1}t(0)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}.\end{aligned}$$

Αλλά

$$T_rt(0) = \hat{t}(r) = r\, \hat{f}_2(r),$$

οπότε

$$T_s T_{r_2} T_{r_1} p_2(0) = \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) - \lambda c \frac{\dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_2 \hat{f}_2(r_2)}{r_2 - s} - \dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_1 \hat{f}_2(r_1)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c \frac{\dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_2 \hat{f}_2(r_2)}{s - r_2} - \dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_1 \hat{f}_2(r_1)}{s - r_1}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) +$$

$$\lambda c \frac{\dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_2 \hat{f}_2(r_2) + r_2 \hat{f}_2(s) - r_2 \hat{f}_2(s)}{s - r_2} - \dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_1 \hat{f}_2(r_1) + r_1 \hat{f}_2(s) - r_1 \hat{f}_2(s)}{s - r_1}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) +$$

$$\lambda c \frac{\dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_2 \hat{f}_2(s)}{s - r_2} + \dfrac{r_2 \hat{f}_2(s) - r_2 \hat{f}_2(r_2)}{s - r_2} - \left(\dfrac{s\,\hat{f}_2(s) - r_1 \hat{f}_2(s)}{s - r_1} + \dfrac{r_1 \hat{f}_2(s) - r_1 \hat{f}_2(r_1)}{s - r_1} \right)}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c \frac{\hat{f}_2(s) + r_2 \dfrac{\hat{f}_2(s) - \hat{f}_2(r_2)}{s - r_2} - \hat{f}_2(s) + r_1 \dfrac{\hat{f}_2(r_1) - \hat{f}_2(s)}{s - r_1}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c \frac{- r_2 T_s T_{r_2} f_2(0) + r_1 T_s T_{r_1} f_2(0)}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c \frac{- r_2 T_s T_{r_2} f_2(0) + r_1 T_s T_{r_1} f_2(0) + r_2 T_s T_{r_1} f_2(0) - r_2 T_s T_{r_1} f_2(0)}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c \left(\frac{r_1 T_s T_{r_1} f_2(0) - r_2 T_s T_{r_1} f_2(0)}{r_1 - r_2} + \frac{r_2 T_s T_{r_1} f_2(0) - r_2 T_s T_{r_2} f_2(0)}{r_1 - r_2} \right)$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c \left(T_s T_{r_1} f_2(0) - r_2 \frac{T_s T_{r_1} f_2(0) - T_s T_{r_2} f_2(0)}{r_2 - r_1} \right)$$

$$= \lambda(\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c [T_s T_{r_1} f_2(0) - r_2 T_s T_{r_1} T_{r_2} f_2(0)]$$

αλλά $r_2 = \dfrac{\lambda+\delta}{c}$

$$= \lambda c r_2 T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0) + \lambda c T_s T_{r_1} f_2(0) - \lambda c r_2 T_s T_{r_1} T_{r_2} f_2(0)$$

$$= \lambda c T_s T_{r_1} f_2(0). \tag{2.4.8}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε με το $T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0)$. Πρώτα βρίσκουμε το $h_2(0)$. Από την

$$\hat h_2(s) = (cs-\lambda-\delta)\hat w(s) + \lambda(1-\theta)\left(\hat A_2(s) - \hat A_1(s)\right) + \lambda c(1-\theta)\left(\hat f_1(s)\phi_1(0) - \hat f_2(s)\phi(0)\right)$$

$$= cs\hat w(s) - (\lambda+\delta)\,\hat w(s) + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)\,\hat f_1(s)$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)\,\hat f_2(s) + \lambda(1-\theta)\hat A_2(s) - \lambda(1-\theta)\hat A_1(s).$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην τελευταία ισότητα είναι

$$L^{-1}\{\hat h_2(s)\} = L^{-1}\{cs\hat w(s) - (\lambda+\delta)\,\hat w(s) + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)\,\hat f_1(s)$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)\,\hat f_2(s) + \lambda(1-\theta)\hat A_2(s) - \lambda(1-\theta)\hat A_1(s)\}$$

$$= cL^{-1}\{s\hat w(s)\} - (\lambda+\delta)L^{-1}\{\hat w(s)\} + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)L^{-1}\{\hat f_1(s)\}$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)L^{-1}\{\hat f_2(s)\} + \lambda(1-\theta)L^{-1}\{\hat A_2(s)\} - \lambda(1-\theta)L^{-1}\{\hat A_1(s)\}\,. \tag{2.4.9}$$

Έστω

$t_1(u) = L^{-1}\{s\hat w(s)\}$ με $\hat t_1(s) = L\{t_1(u)\} = s\hat w(s)$,

οπότε η (2.4.9) γίνεται

$$h_2(u) = ct_1(u) - (\lambda+\delta)\,w(u) + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)\,f_1(u)$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)\,f_2(u) + \lambda(1-\theta)A_2(u) - \lambda(1-\theta)A_1(u)\,,$$

από την οποία για $u = 0$, έχουμε

$$h_2(0) = ct_1(0) - (\lambda+\delta)\,w(0) + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)\,f_1(0)$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)\,f_2(0) + \lambda(1-\theta)A_2(0) - \lambda(1-\theta)A_1(0)\,.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον τελεστή $T_s\,T_{r_2}T_{r_1}$ και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης παίρνουμε διαδοχικά

$$T_s\,T_{r_2}T_{r_1}h_2(0) = T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\{ct_1(0) - (\lambda+\delta)w(0) + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)\,f_1(0)$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)\,f_2(0) + \lambda(1-\theta)A_2(0) - \lambda(1-\theta)A_1(0)\}$$

$$= cT_s\,T_{r_2}T_{r_1}t_1(0) - (\lambda+\delta)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,w(0) + \lambda c(1-\theta)\phi_1(0)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,f_1(0)$$

$$-\lambda c(1-\theta)\phi(0)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,f_2(0) + \lambda(1-\theta)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}A_2(0) - \lambda(1-\theta)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}A_1(0)$$

$$= \lambda(1-\theta)[T_s\,T_{r_2}T_{r_1}A_2(0) - T_s\,T_{r_2}T_{r_1}A_1(0)]$$

$$+\lambda c(1-\theta)[\phi_1(0)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,f_1(0) - \phi(0)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,f_2(0)]$$

$$-(\lambda+\delta)T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,w(0) + cT_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,t_1(0)\,. \tag{2.4.10}$$

Είναι

$$T_s\,T_{r_2}T_{r_1}\,t_1(0) = \frac{\dfrac{T_s\,t_1(0) - T_{r_2}t_1(0)}{r_2 - s} - \dfrac{T_s\,t_2(0) - T_{r_1}t_1(0)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

Και $T_r t_1(0) = \hat t_1(r) \;=\; r\,\hat w(r)$, οπότε

$$T_s T_{r_2} T_{r_1} t_1(0) = \frac{\dfrac{s\hat{w}(s) - r_2 \hat{w}(\rho_2)}{r_2 - s} - \dfrac{s\hat{w}(s) - r_1 \hat{w}(\rho_1)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{\dfrac{s\hat{w}(s) - r_2\hat{w}(r_2) + r_2\hat{w}(s) - r_2\hat{w}(s)}{r_2 - s} - \dfrac{s\hat{w}(s) - r_1\hat{w}(r_1) + r_1\hat{w}(s) - r_1\hat{w}(s)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{\dfrac{r_2[\hat{w}(s) - \hat{w}(r_2)] - \hat{w}(s)(r_2 - s)}{r_2 - s} - \dfrac{r_1[\hat{w}(s) - \hat{w}(r_1)] - \hat{w}(s)(r_1 - s)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{r_2 \dfrac{\hat{w}(s) - \hat{w}(r_2)}{r_2 - s} - \hat{w}(s) - r_1 \dfrac{\hat{w}(s) - \hat{w}(r_1)}{r_1 - s} + \hat{w}(s)}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{r_2 T_s T_{r_2} w(0) - r_1 T_s T_{r_1} w(0)}{r_1 - r_2}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4.10) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0) &= \lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_1(0) - \phi(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0)] \\ &\quad - (\lambda+\delta) T_s T_{r_2} T_{r_1} w(0) + c\frac{r_2 T_s T_{r_2} w(0) - r_1 T_s T_{r_1} w(0)}{r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

Είναι $r_2 = \dfrac{\lambda+\delta}{c} \Rightarrow \lambda + \delta = c r_2$, οπότε

$$\begin{aligned} T_s T_{r_2} T_{r_1} h_2(0) &= \lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_1(0) - \phi(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0)] \\ &\quad - c r_2 T_s T_{r_2} T_{r_1} w(0) + c\frac{r_2 T_s T_{r_2} w(0) - r_1 T_s T_{r_1} w(0)}{r_1 - r_2} \\ &= \lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_1(0) - \phi(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0)] \\ &\quad - c r_2 \frac{T_s T_{r_2} w(0) - T_s T_{r_1} w(0)}{r_1 - r_2} + c\frac{r_2 T_s T_{r_2} w(0) - r_1 T_s T_{r_1} w(0)}{r_1 - r_2} \\ &= \lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_1(0) - \phi(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0)] \\ &\quad - c\frac{(r_1 - r_2) T_s T_{r_1} w(0)}{r_1 - r_2} \\ &= \lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_1(0) - \phi(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0)] - c T_s T_{r_1} w(0). \end{aligned}$$

Έστω

$$\vartheta(u) = -\frac{\lambda(1-\theta)[T_{r_2}T_{r_1}A_2(u) - T_{r_2}T_{r_1}A_1(u)] + \lambda c(1-\theta)[\phi_1(0)T_{r_2}T_{r_1}f(u) - \phi(0)T_{r_2}T_{r_1}f_2(u)] - cT_{r_1}w(u)}{c^2}$$

από το οποίο έχουμε

$$\lambda(1-\theta)[T_sT_{r_2}T_{r_1}A_2(u) - T_sT_{r_2}T_{r_1}A_1(u)]$$
$$+\lambda c(1-\theta)[\phi_1(0)T_sT_{r_2}T_{r_1}f(u) - \phi(0)T_sT_{r_2}T_{r_1}f_2(u)] - cT_sT_{r_1}w(u) = -c^2T_s\vartheta(u)$$

και για $u = 0$,

$$\lambda(1-\theta)[T_sT_{r_2}T_{r_1}A_2(0) - T_sT_{r_2}T_{r_1}A_1(0)]$$
$$+\lambda c(1-\theta)[\phi_1(0)T_sT_{r_2}T_{r_1}f(0) - \phi(0)T_sT_{r_2}T_{r_1}f_2(0)] - cT_sT_{r_1}w(0) = -c^2T_s\vartheta(0).$$

Τότε

$$T_sT_{r_2}T_{r_1}h_2(0) = -c^2T_s\vartheta(0)\,. \tag{2.4.11}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.4.8) και (2.4.11) στην (2.4.1) προκύπτει

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\lambda}{c}\hat{\phi}(s)T_sT_{r_1}f_2(0) + T_s\vartheta(0)\,. \tag{2.4.12}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (2.4.12) βρίσκουμε

$$L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\lambda}{c}\hat{\phi}(s)T_sT_{r_1}f_2(0) + T_s\vartheta(0)\right\},$$

$$L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\} = \frac{\lambda}{c}L^{-1}\{\hat{\phi}(s)T_sT_{r_1}f_2(0)\} + L^{-1}\{T_s\vartheta(0)\}\,.$$

Επειδή

$$L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\} = \phi(u)\,,$$

$$L^{-1}\{\hat{\phi}(s)T_sT_{r_1}f_2(0)\} = L^{-1}\left\{\hat{\phi}(s)\frac{T_sf_2(0) - T_{r_1}f_2(0)}{r_1 - s}\right\} = L^{-1}\{\hat{\phi}(s)T_{r_1}\hat{f}_2(s)\} = \int_0^u \phi(u-y)T_{r_1}f_2(y)dy\,,$$

και

$$L^{-1}\{T_s\vartheta(0)\} = L^{-1}\{\hat{\vartheta}(s)\} = \hat{\vartheta}(u)\,,$$

Έπεται ότι

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-y)T_{\rho_1}f_2(y)dy + \vartheta(u)$$

$$= \frac{\lambda}{c}T_0T_{r_1}f_2(0)\int_0^u \phi(u-y)\frac{T_{r_1}f_2(y)}{T_0T_{r_1}f_2(0)}dy + \vartheta(u)$$

η οποία είναι η (2.4.6).

Για να είναι η (2.4.6) ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, πρέπει να δείξουμε ότι $\kappa_\delta < 1$.

Έστω $\delta > 0$. Από την (2.4.8) για $s = 0$ είναι $T_0 T_{r_2} T_{r_1} p_2(0) = \lambda c T_0 T_{r_1} f_2(0)$

οπότε

$$\kappa_\delta = \frac{\lambda}{c} T_0 T_{r_1} f_2(0) = \frac{T_0 T_{r_2} T_{r_1} p_2(0)}{c^2}.$$

Από την (2.4.5) για $s = 0$ έχουμε διαδοχικά

$$\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0) = (0 - r_1)(0 - r_2)[c^2 - T_{r_1} T_{r_2} T_0 p_2(0)],$$

$$\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0) = r_1 r_2 c^2 - r_1 r_2 T_{r_1} T_{r_2} T_0 p_2(0),$$

$$r_1 r_2 T_{r_1} T_{r_2} T_0 p_2(0) = r_1 r_2 c^2 - [\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0)],$$

$$T_{r_1} T_{r_2} T_0 p_2(0) = c^2 - \frac{\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0)}{r_1 r_2},$$

$$\frac{T_{r_1} T_{r_2} T_0 p_2(0)}{c^2} = 1 - \frac{\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0)}{c^2 r_1 r_2}.$$

Άρα

$$\kappa_\delta = 1 - \frac{\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0)}{c^2 r_1 r_2}.$$

Από τις (2.4.1α) και (2.4.1β) έχουμε

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = (cs - \lambda - \delta)^2 + (cs - \lambda - \delta)\lambda \hat{f}_2(s).$$

Για $s = 0$, είναι

$$\hat{p}_1(0) - \hat{p}_2(0) = (-\lambda - \delta)^2 + (-\lambda - \delta)\lambda \hat{f}_2(0) = (\lambda + \delta)^2 - (\lambda + \delta)\lambda \cdot 1 = (\lambda + \delta)(\lambda + \delta - \lambda) = (\lambda + \delta)\delta.$$

Οπότε

$\kappa_\delta = 1 - \dfrac{\delta(\lambda + \delta)}{c^2 r_1 r_2} < 1$, εφ' όσον $r_1(\delta) > 0$ και $r_2(\delta) > 0$, που ισχύει από Λήμμα 2.1.

Στην περίπτωση που $\delta = 0$,

$$\kappa_0 = \frac{\lambda}{c} T_0 T_{r_1(0)} f_2(0) = \frac{\lambda}{c} T_0 T_0 f_2(0) \qquad \text{(Λήμμα 2.1, περίπτωση } (ii))$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty z\, f_2(z) dz \qquad \text{(Παράρτημα Π3, Ιδιότητα 8)}$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty z\, f_{X_1 + Y_1}(z) dz$$

$$= \frac{\lambda}{c}[E(X_1) + E(Y_1)]$$

$$= \frac{\lambda}{c}(\mu_1 + \mu_q) < \frac{c}{c} = 1 \qquad \text{(από (2.1.3) είναι } \lambda(\mu_1 + \mu_q) < c\text{).}$$

□

Σημείωση 2.1

Για $\theta = 1$, έχουμε την περίπτωση όπου σε κάθε χρονική στιγμή άφιξης της κύριας απαίτησης, εμφανίζεται ταυτόχρονα και η αντίστοιχη by-claim απαίτηση. Τότε το μοντέλο κινδύνου που μελετάμε, έχει σαν περίπτωση το κλασικό μοντέλο κινδύνου, με μέγεθος απαιτήσεων $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_2(x)$. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση (2.4.6) απλοποιείται στη μορφή

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\int_x^{\infty} e^{-r_1(y-x)} f_2(y)dx + \frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty} e^{-r_1(x-u)}\int_x^{\infty} w(x, y-x)\, f_2(y)dx\,,$$

η οποία είναι η αντίστοιχη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που δίνεται στην Εξίσωση (2.34) στους Gerber and Shiu, (1998), με τη μόνη διαφορά ότι εκεί το μέγεθος της απαίτησης σε κάθε χρονική στιγμή είναι *X*.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση κατανομής

$$K(u) = 1 - \overline{K}(u)$$

όπου

$$\overline{K}(u) = \frac{\xi}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \overline{Z}^{*n}(u)\,,\ u \geq 0$$

με

$\xi = \dfrac{1-\kappa_\delta}{\kappa_\delta}$, και $\overline{Z}^{*n}(u)$ η δεξιά ουρά της *n*-οστής συνέλιξης της $Z(u) = 1 - \overline{Z}(u) = \int_0^u \zeta(y)dy$.

Αναλυτικές λύσεις της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (2.4.6) μπορούν να βρεθούν με απευθείας εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 των Lin & Willmot, (1999), όπως δείχνεται στη επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.6

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\phi(u)$ *που ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση* (2.4.6) *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$\phi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u [1-\overline{K}(u-y)]dB(y) + \frac{B(0)}{\xi}[1-\overline{K}(u)] \tag{2.4.13}$$

ή

$$\phi(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u B(u-y)dK(y) + \frac{1}{1+\xi}B(u) \tag{2.4.14}$$

όπου

$$B(u) = \frac{\vartheta(u)}{\kappa_\delta}.$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 στους Lin and Willmot, (1999).

□

2.5 Αναλυτικά αποτελέσματα για εκθετικά κατανεμημένα μεγέθη απαιτήσεων

Στην παράγραφο αυτή εξειδικεύονται τα προηγούμενα αποτελέσματα, θεωρώντας ότι τα μεγέθη των κύριων και των by-claim απαιτήσεων ακολουθούν εκθετικές κατανομές. Συγκεκριμένα, έστω ότι οι κύριες απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσο $1/\alpha_1$, δηλαδή,

$$X_i \sim f_1(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 x}, \text{ με } F_1(x) = P(X_i \le x) = 1 - e^{-\alpha_1 x} \text{ και μέσο } \mu_1 = E(X_i) = \frac{1}{\alpha_1},$$

με αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace των f_1 και F_1

$$\hat{f}_1(s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + s}, \ \hat{F}_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha_1 + s}.$$

Έστω επίσης ότι οι by-claim απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσο $1/\alpha_2$, δηλαδή,

$$Y_i \sim q(x) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 x}, \text{ με } Q(x) = P(Y_i \le x) = 1 - e^{-\alpha_2 x} \text{ και μέσο } \mu_q = E(Y_i) = \frac{1}{\alpha_2},$$

με αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace των q και Q

$$\hat{q}(s) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + s}, \ \hat{Q}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha_2 + s}.$$

Στην περίπτωση που $\alpha_1 \ne \alpha_2$, τότε τα αθροίσματα $X_i + Y_i$ και $X_i + Y_i + Y_{i-1}$ ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή (δες Παράρτημα Π5). Συγκεκριμένα, η τυχαία μεταβλητή $X_i + Y_i$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$X+Y \sim f_{X+Y}(x) = f_2(x) = (f_1 * q)(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}),\ x>0,$$

συνάρτηση κατανομής

$$F_2(x) = (F_1 * Q)(x) = 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}e^{-\alpha_1 x} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}e^{-\alpha_2 x},\ x>0,$$

και μετασχηματισμούς Laplace των f_2 και F_2 αντίστοιχα ίσους με

$$\hat{f}_2(s) = \hat{f}_1(s)\,\hat{q}(s) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+s)(\alpha_2+s)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_1+s} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_2+s}, \text{ και}$$

$$\hat{F}_2(s) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{s(\alpha_1+s)(\alpha_2+s)}.$$

Επίσης, η τυχαία μεταβλητή $X_i + Y_i + Y_{i-1}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_3(x) = (f_1 * q * q)(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\left[e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}(1-(\alpha_1-\alpha_2)x\right],\ x>0,$$

συνάρτηση κατανομής

$$F_3(x) = (F_1 * Q * Q)(x) = 1 - \frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_1 x} + \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}[\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_2(2 + x\alpha_2)]}{(\alpha_2-\alpha_1)^2},\ x>0,$$

και αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace

$$\hat{f}_3(s) = \hat{f}_1(s)\,\hat{q}(s)\,\hat{q}(s) = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{(\alpha_1+s)(\alpha_2+s)^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\left(\frac{1}{\alpha_1+s} + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_2+s)^2} - \frac{1}{\alpha_2+s}\right),$$

$$\hat{F}_3(s) = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{s(\alpha_1+s)(\alpha_2+s)^2}.$$

Για τις συναρτήσεις $w_i(x)$, i = 1, 2, 3 οι μετασχηματισμοί Laplace είναι αντίστοιχα

$$\hat{w}_1(s) = \frac{1}{s+\alpha_1}, \qquad \hat{w}_2(s) = \frac{\alpha_1+\alpha_2+s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}, \qquad \hat{w}_3(s) = \frac{2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 s + (s+\alpha_2)^2}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)^2}.$$

Στην περίπτωση που $\alpha_1 = \alpha_2$, τα παραπάνω αποτελέσματα αναφέρονται στην Erlang κατανομή. Συγκεκριμένα, η $X_i + Y_i \sim Erlang\,(2, \alpha_1)$ με

$$f_2(x) = \alpha_1^2 x^{\alpha_1 - 1} e^{-\alpha_1 x},\ x>0,\ F_2(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x} - x e^{-\alpha_1 x},\ x>0,\ \hat{f}_2(s) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+s}\right)^2,\ \hat{F}_2(s) = \frac{\hat{f}_2(s)}{s}.$$

Επίσης, η $X_i + Y_i + Y_{i-1} \sim Erlang\,(3, \alpha_1)$ με

$$f_3(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1 x e^{-\alpha_1 x},\ x>0,\ F_3(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x} - x\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} - \frac{1}{2}\alpha_1^2 x^2 e^{-\alpha_1 x},\ x>0,$$

$$\hat{f}_3(s) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + s}\right)^3, \; \hat{F}_3(s) = \frac{\hat{f}_3(s)}{s}.$$

Από τις (2.4.2), (2.4.3) και (2.3.5) είναι

$$\hat{\phi}(s) = \frac{(s - r_1)(s - r_2)T_s T_{r_1} T_{r_2} h_2(0)}{-(cs - \lambda - \delta)^2 - (cs - \lambda - \delta)\lambda \, \hat{f}_2(s)}. \tag{2.5.1}$$

Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και παρονομαστή της (2.5.1) με $(s + \alpha_1)$ $(s + \alpha_2)$ και βρίσκουμε

$$\hat{\phi}(s) = \frac{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s - r_1)(s - r_2)T_s T_{r_1} T_{r_2} h_2(0)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)[-(cs - \lambda - \delta)^2 - (cs - \lambda - \delta)\lambda \, \hat{f}_2(s)]}. \tag{2.5.2}$$

Σχετικά με τον αριθμητή της (2.5.2), με χρήση της (2.4.10), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)T_s T_{r_1} T_{r_2} h_2(0) \\
&\quad = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2)\{\lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] - cT_s T_{r_1} w(0)\} \\
&\quad\quad + (s + \alpha_1)(s + \alpha_2)\lambda c(1-\theta)[\phi_1(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_1(0) - \phi(0) T_s T_{r_2} T_{r_1} f_2(0)].
\end{aligned}$$

και με εφαρμογή του τελεστή Dickson-Hipp στην τελευταία παρένθεση, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)T_s T_{r_1} T_{r_2} h_2(0) \\
&= (s + \alpha_1)(s + \alpha_2)\{\lambda(1-\theta)[T_s T_{r_2} T_{r_1} A_2(0) - T_s T_{r_2} T_{r_1} A_1(0)] - cT_s T_{r_1} w(0)\} \\
&\quad + \lambda c(1-\theta)\left\{(s + \alpha_2)\left[\frac{\alpha_1 \phi_1(0)}{(r_1 + \alpha_1)(r_2 + \alpha_1)} - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi(0)}{(r_2 + \alpha_1)(r_1 + \alpha_2)(r_2 + \alpha_2)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi(0)}{(r_1 + \alpha_1)(r_2 + \alpha_2)(r_1 + \alpha_2)}\right] + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi(0)}{(r_1 + \alpha_2)(r_2 + \alpha_2)}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Ο παρονομαστής της (2.5.2) γίνεται

$$\begin{aligned}
&(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)[-(cs - \lambda - \delta)^2 - (cs - \lambda - \delta)\lambda \, \hat{f}_2(s)] \\
&\quad = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2)\left[-(cs - \lambda - \delta)^2 - (cs - \lambda - \delta)\lambda \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + s)(\alpha_2 + s)}\right] \\
&\quad = -(cs - \lambda - \delta)^2 (\alpha_1 + s)(\alpha_2 + s) - \lambda \alpha_1 \alpha_2 (cs - \lambda - \delta),
\end{aligned}$$

και μετά από πράξεις παίρνουμε το πολυώνυμο τετάρτου βαθμού

$$\begin{aligned}
D_4(s) = &-c^2 s^4 + (-\alpha_1 c^2 - \alpha_2 c^2 + 2c\delta + 2c\lambda)s^3 \\
&+ (-\alpha_1 \alpha_2 c^2 + 2\alpha_1 c\delta + 2\alpha_2 c\delta - \delta^2 + 2\alpha_1 c\lambda + 2\alpha_2 c\lambda - 2\delta\lambda - \lambda^2)s^2 \\
&+ (2\alpha_1 \alpha_2 c\delta - \alpha_1 \delta^2 - \alpha_2 \delta^2 + \alpha_1 \alpha_2 c\lambda - 2\alpha_1 \delta\lambda - 2\alpha_2 \delta\lambda - \alpha_1 \lambda^2 - \alpha_2 \lambda^2)s - \alpha_1 \alpha_2 \delta^2 - \alpha_1 \alpha_2 \delta\lambda,
\end{aligned}$$

το οποίο έχει τέσσερις ρίζες, r_1, r_2, $-R_1$, $-R_2$, και παραγοντοποιείται ως

$$D_4(s) = -c^2(s-r_1)(s-r_2)(s+R_1)(s+R_2)\,. \tag{2.5.4}$$

Οι ρίζες R_1, R_2 έχουν θετικά πραγματικά μέρη, $\mathrm{Re}(R_i) > 0,\ i = 1,2$, αλλιώς θα ήταν επίσης ρίζες της (2.4.3) κάτι που θα ήταν σε αντίθεση με το Λήμμα 2.1.

Αντικαθιστώντας τις (2.5.3) και (2.5.4) στην (2.5.2) προκύπτει

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(s) \; &= \frac{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}{-c^2(s+R_1)(s+R_2)}\{\lambda(1-\theta)[T_sT_{r_2}T_{r_1}A_2(0) - T_sT_{r_2}T_{r_1}A_1(0)] - cT_sT_{r_1}w(0)\} \\ &+ \lambda c(1-\theta)\left\{\frac{(s+\alpha_2)}{-c^2(s+R_1)(s+R_2)}\left[\frac{\alpha_1\phi_1(0)}{(r_1+\alpha_1)(r_2+\alpha_1)} - \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_2+\alpha_1)(r_1+\alpha_2)(r_2+\alpha_2)}\right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_1+\alpha_1)(r_2+\alpha_2)(r_1+\alpha_2)}\right] + \frac{1}{-c^2(s+R_1)(s+R_2)}\frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_1+\alpha_2)(r_2+\alpha_2)}\right\}.\end{aligned}$$

Εάν οι R_1, R_2 είναι διακεκριμένες, με ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα

$$\frac{1}{(s+R_1)(s+R_2)} = \frac{a_1}{s+R_1} + \frac{a_2}{s+R_2},\ \text{με}\ a_1 = \frac{1}{R_2-R_1},\ a_2 = \frac{1}{R_1-R_2},$$

$$\frac{s+\alpha_2}{(s+R_1)(s+R_2)} = \frac{b_1}{s+R_1} + \frac{b_2}{s+R_2},\ \text{με}\ b_1 = \frac{\alpha_2-R_1}{R_2-R_1} = (\alpha_2-R_1)a_1,\ b_2 = \frac{\alpha_2-R_2}{R_1-R_2} = (\alpha_2-R_2)a_2,$$

και

$$\frac{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}{(s+R_1)(s+R_2)} = 1 + \frac{c_1}{s+R_1} + \frac{c_2}{s+R_2},\ \text{με}\ c_1 = \frac{(\alpha_1-R_1)(\alpha_2-R_1)}{R_2-R_1} = (\alpha_1-R_1)(\alpha_2-R_1)a_1,$$

$$c_2 = \frac{(\alpha_1-R_2)(\alpha_2-R_2)}{R_1-R_2} = (\alpha_1-R_2)(\alpha_2-R_2)a_2\,.$$

Οπότε η $\hat{\phi}(s)$ γίνεται

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(s) \; &= \frac{1}{-c^2}\left(1 + \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{s+R_i}\right)\{\lambda(1-\theta)[T_sT_{r_2}T_{r_1}A_2(0) - T_sT_{r_2}T_{r_1}A_1(0)] - cT_sT_{r_1}w(0)\} \\ &+ \frac{\lambda c(1-\theta)}{-c^2}\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{b_i}{s+R_i}\left[\frac{\alpha_1\phi_1(0)}{(r_1+\alpha_1)(r_2+\alpha_1)} - \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_2+\alpha_1)(r_1+\alpha_2)(r_2+\alpha_2)}\right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_1+\alpha_1)(r_2+\alpha_2)(r_1+\alpha_2)}\right] + \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_1+\alpha_2)(r_2+\alpha_2)}\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i}{s+R_i}\right\}\end{aligned}$$

όπου τα $\phi(0)$ και $\phi_1(0)$ μπορούν να προκύψουν από τις (2.3.6) και (2.3.7).

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $\hat{\phi}(s)$, είναι

$$\phi(u) = \frac{1}{-c^2}\Big(\lambda(1-\theta)[T_{r_2}T_{r_1}A_2(u) - T_{r_2}T_{r_1}A_1(u)] - cT_{r_1}w(u)$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i\, e^{-R_i} \underline{*}\{\lambda(1-\theta)[T_{r_2}T_{r_1}A_2(u) - T_{r_2}T_{r_1}A_1(u)] - cT_{r_1}w(u)\}\Big)$$

$$+\frac{\lambda c(1-\theta)}{-c^2}\left\{\sum_{i=1}^{2} b_i e^{-b_i R_i}\left[\frac{\alpha_1\phi_1(0)}{(r_1+\alpha_1)(r_2+\alpha_1)} - \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_2+\alpha_1)(r_1+\alpha_2)(r_2+\alpha_2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_1+\alpha_1)(r_2+\alpha_2)(r_1+\alpha_2)}\right] + \frac{\alpha_1\alpha_2\phi(0)}{(r_1+\alpha_2)(r_2+\alpha_2)}\sum_{i=1}^{2} a_i\, e^{-a_i R_i}\right\}, \tag{2.5.5}$$

όπου $\underline{*}$ δηλώνει συνέλιξη μεταξύ συναρτήσεων και είναι διαφορετική από τη συνέλιξη μεταξύ συναρτήσεων πυκνοτήτων.

Θα εξετάσουμε τώρα στην περίπτωση όπου $\delta = 0$. Το πολυώνυμο $D_4(s)$ γίνεται

$$D_4(s) = -(cs-\lambda)[(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(cs-\lambda) + \lambda\alpha_1\alpha_2]$$

$$= -(cs-\lambda)s[cs^2 + (c\alpha_1 + c\alpha_2 - \lambda)s + (c\alpha_1\alpha_2 - \lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2)]$$

το οποίο έχει τέσσερις ρίζες, συγκεκριμένα,

$$s_1 = r_1 = 0, \quad s_2 = r_2 = \frac{\lambda}{c}, \quad s_3 = -R_1 = \frac{\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \varLambda}{2c}, \quad s_4 = -R_2 = \frac{\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \varLambda}{2c},$$

όπου

$$\varLambda = \sqrt{(c\alpha_1 + c\alpha_2 - \lambda)^2 - 4c(c\alpha_1\alpha_2 - \lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2)}\,.$$

Από τη συνθήκη (2.1.3) έχουμε ότι

$$c > \lambda\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) \text{ ή } c > \lambda\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \text{ ή } c\alpha_1\alpha_2 - \lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2 > 0$$

και μόνο η ρίζα s_2 είναι θετική. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει επίσης το συμπέρασμα του Λήμματος 2.1.

Παράδειγμα 2.1

Έστω $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$. Τότε η (2.5.5) εκφράζει την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$. Στην περίπτωση αυτή είναι

$$w_i(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)\, f_i(y)dy = \int_u^\infty 1\cdot f_i(y)dy = \overline{F}_i(u), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Από την (2.5.5), αντικαθιστώντας τις ρίζες s_i, i = 1, 2, 3, 4, που δόθηκαν παραπάνω για $\delta = 0$, βρίσκουμε ότι

$$\psi(u)=e^{\frac{(\lambda-c\alpha_1-c\alpha_2-\Lambda)u}{2c}}\lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2)-c\alpha_1\alpha_2]\times \frac{\lambda^2+c\alpha_2[c(\alpha_2+2\theta\alpha_1-\alpha_1)-\Lambda]+\lambda[c(\alpha_1+2\alpha_2)-\Lambda]}{c\alpha_1\alpha_2\Lambda(\lambda\theta+c\alpha_2)[c(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda+\Lambda]}$$
$$+e^{\frac{(\lambda-c\alpha_1-c\alpha_2+\Lambda)u}{2c}}\lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2)-c\alpha_1\alpha_2]\times \frac{\lambda^2+c\alpha_2[c(\alpha_2+2\theta\alpha_1-\alpha_1)+\Lambda]+\lambda[c(\alpha_1+2\alpha_2)+\Lambda]}{c\alpha_1\alpha_2\Lambda(\lambda\theta+c\alpha_2)[\lambda-c(\alpha_1+\alpha_2)+\Lambda]},\quad u\geq 0 \tag{2.5.6}$$

Δύο ακραίες περιπτώσεις προκύπτουν όταν η πιθανότητα θ παίρνει τις τιμές 0 και 1. Συγκεκριμένα, για $\theta = 0$, είναι

$$\psi(u)=e^{\frac{(\lambda-c\alpha_1-c\alpha_2-\Lambda)u}{2c}}\lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2)-c\alpha_1\alpha_2]\times \frac{\lambda^2+c\alpha_2[c(\alpha_2-\alpha_1)-\Lambda]+\lambda[c(\alpha_1+2\alpha_2)-\Lambda]}{c^2\alpha_1\alpha_2^2\Lambda[c(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda+\Lambda]}$$
$$+e^{\frac{(\lambda-c\alpha_1-c\alpha_2+\Lambda)u}{2c}}\lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2)-c\alpha_1\alpha_2]\times \frac{\lambda^2+c\alpha_2[c(\alpha_2-\alpha_1)+\Lambda]+\lambda[c(\alpha_1+2\alpha_2)+\Lambda]}{c^2\alpha_1\alpha_2^2\Lambda[\lambda-c(\alpha_1+\alpha_2)+\Lambda]},\qquad u\geq 0,$$

και για $\theta = 1$, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u)=e^{\frac{(\lambda-c\alpha_1-c\alpha_2-\Lambda)u}{2c}}\frac{\lambda[(\alpha_1+\alpha_2)(\Lambda-\lambda)-c(\alpha_1^2+\alpha_2^2)]}{2c\alpha_1\alpha_1\Lambda}$$
$$+e^{\frac{(\lambda-c\alpha_1-c\alpha_2+\Lambda)u}{2c}}\frac{\lambda[(\alpha_1+\alpha_2)(\Lambda+\lambda)+c(\alpha_1^2+\alpha_2^2)]}{2c\alpha_1\alpha_1\Lambda},\qquad u\geq 0.$$

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την επίδραση της πιθανότητας καθυστέρησης, $1-\theta$, των by-claim απαιτήσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Έτσι έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.7

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ *που δίνεται στη Σχέση* (2.5.6) *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς θ.*

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι η παράγωγος της $\psi(u)$ ως προς θ είναι θετική, δηλαδή $\frac{d}{d\theta}\psi(u)>0$.

Από την (2.5.6) η παράγωγος της $\psi(u)$ είναι

$$\frac{d}{d\theta}\psi(u) = e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \Lambda)u}{2c}} \lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - c\alpha_1\alpha_2](\lambda + c\alpha_2) \times \frac{2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda(\Lambda - \lambda)}{c\alpha_1\alpha_2[c(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda + \Lambda](\lambda\theta + c\alpha_2)^2}$$
$$+ e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \Lambda)u}{2c}} \lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - c\alpha_1\alpha_2](\lambda + c\alpha_2) \times \frac{2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda(\Lambda + \lambda)}{c\alpha_1\alpha_2[\lambda - c(\alpha_1+\alpha_2) + \Lambda](\lambda\theta + c\alpha_2)^2}.$$

Έστω

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - c\alpha_1\alpha_2](\lambda + c\alpha_2)[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda(\Lambda - \lambda)]}{c\alpha_1\alpha_2[c(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda + \Lambda](\lambda\theta + c\alpha_2)^2}$$

και

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - c\alpha_1\alpha_2](\lambda + c\alpha_2)[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda(\Lambda + \lambda)]}{c\alpha_1\alpha_2[\lambda - c(\alpha_1+\alpha_2) + \Lambda](\lambda\theta + c\alpha_2)^2}.$$

Τότε η παραπάνω παράγωγος γράφεται

$$\frac{d}{d\theta}\psi(u) = e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \Lambda)u}{2c}}\Lambda_1 + e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \Lambda)u}{2c}}\Lambda_2.$$

Από την συνθήκη (2.1.2) ισχύει

$$c > \lambda\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) \Rightarrow c > \lambda\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} \Rightarrow \lambda(\alpha_1+\alpha_2) - c\alpha_1\alpha_2 < 0$$

και επειδή $-R_i < 0$, $i = 0, 1$, έχουμε αντίστοιχα

$$c(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda + \Lambda > 0 \text{ και } \lambda - c(\alpha_1+\alpha_2) + \Lambda < 0.$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned} 2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda(\Lambda - \lambda) &= 2c^2\alpha_1\alpha_2 - 2c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda(\Lambda - \lambda) \\ &= 2c[c\alpha_1\alpha_2 - \lambda(\alpha_1+\alpha_2)] + \lambda[c(\alpha_1+\alpha_2) + \Lambda - \lambda] > 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda(\Lambda + \lambda) &= 2c^2\alpha_1\alpha_2 - 2c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda(\Lambda + \lambda) \\ &= 2c[c\alpha_1\alpha_2 - \lambda(\alpha_1+\alpha_2)] + \lambda[c(\alpha_1+\alpha_2) - \Lambda - \lambda] > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\Lambda_1 < 0$ και $\Lambda_2 > 0$.

Θεωρώντας τον λόγο των απολύτων τιμών των Λ_1 και Λ_2 έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|\Lambda_1|}{|\Lambda_2|} &= \frac{[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda(\Lambda - \lambda)]|\lambda - c(\alpha_1+\alpha_2) + \Lambda|}{[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda(\Lambda + \lambda)][c(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda + \Lambda]} \\ &= \frac{[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda(\Lambda - \lambda)][c(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda - \Lambda]}{[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda(\Lambda + \lambda)][c(\alpha_1+\alpha_2) - \lambda + \Lambda]} < 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Lambda_1| < |\Lambda_2|$$

αφού

$$[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2)+\lambda(\Lambda-\lambda)][c(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda-\Lambda]$$

$$-[2c^2\alpha_1\alpha_2 - c\lambda(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda(\Lambda+\lambda)][c(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda+\Lambda] = 4c\Lambda[\lambda(\alpha_1+\alpha_2)-c\alpha_1\alpha_1)] < 0.$$

Επίσης είναι

$$\lambda - c(\alpha_1+\alpha_2)-\Lambda < \lambda - c(\alpha_1+\alpha_2)+\Lambda < 0$$

οπότε

$$0 < e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \Lambda)u}{2c}} < e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \Lambda)u}{2c}}$$

και

$$0 < e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \Lambda)u}{2c}} |\Lambda_1| < e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \Lambda)u}{2c}} |\Lambda_2|$$

ή

$$-e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \Lambda)u}{2c}} \Lambda_1 < e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \Lambda)u}{2c}} \Lambda_2 .$$

Τότε,

$$\frac{d}{d\theta}\psi(u) = e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 - \Lambda)u}{2c}} \Lambda_1 + e^{\frac{(\lambda - c\alpha_1 - c\alpha_2 + \Lambda)u}{2c}} \Lambda_2 > 0 .$$

Δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς θ. Η πιθανότητα καθυστέρησης της by-claim απαίτησης είναι $1 - \theta$, συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ μειώνεται καθώς η πιθανότητα $1 - \theta$ αυξάνει.

Παράδειγμα 2.2

Έστω ότι $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = \mathrm{I}(x_1 \le x)$. Τότε (2.5.5) εκφράζει τη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $U(T^-)$, δηλαδή την

$$F(x\,|\,u) = P[U(T^-) \le x, T < \infty \,|\, U(0) = u].$$

Για τις συναρτήσεις $w_i(u)$, i = 1, 2, 3, έχουμε

$$w_i(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) f_i(y)dy = \int_u^\infty \mathrm{I}(u \le x) f_i(y)dy = \mathrm{I}(u \le x)\int_u^\infty f_i(y)dy = \mathrm{I}(u \le x)\overline{F_i}(u) .$$

Θεωρούμε ότι $\alpha_1 = \alpha_2$, Τότε από τις (2.3.6) και (2.3.7), για μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, u = 0, έχουμε

$$F(x\,|\,0) = \frac{1}{2c\alpha_1(\lambda\theta + c\alpha_1)}\Big\{e^{-\alpha_1 x}\lambda(\lambda + c\alpha_1)[x^2(\theta-1)\theta\alpha_1^2 - 2x\alpha_1 - 4]$$

$$+ e^{-\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)x}\lambda c\alpha_1(1-\theta)(2+2x\alpha_1 + x^2\theta\alpha_1^2) + 2\lambda[2\lambda + c(1+\theta)\alpha_1]\Big\}$$

και

$$F_1(x\,|\,0)=\frac{e^{-\alpha_1 x}\lambda[x^2(\theta-1)\theta\alpha_1^2-2x\alpha_1-4]-e^{-\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)x}\lambda\theta(2+2x\alpha_1+x^2\theta\alpha_1^2)+2\lambda(2+\theta)}{2(\lambda\theta+c\alpha_1)}.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (2.5.5) προκύπτει ότι

$$F(x\,|\,u)=\begin{cases}
\dfrac{c\lambda}{2R_1R_2\alpha_1(\lambda+c\alpha_1)^2}\Big\{2\lambda(\theta-1)(\lambda-c\theta\alpha_1)(\alpha_1^2-R_1R_2) \\
\quad +e^{-\frac{\lambda}{c}(x-u)-\alpha_1 x}c^2\alpha_1^2R_1R_2(\theta-1)(2+2x\alpha_1+\theta x^2\alpha_1^2)+2e^{-\alpha_1 u}\chi_1\Big\} \\
+\dfrac{c\lambda\left\{e^{-uR_1-\alpha_1 x}R_2(R_1-\alpha_1)^2-e^{-uR_2-\alpha_1 x}R_1(R_2-\alpha_1)^2-e^{-\alpha_1 x}(R_1-R_2)(R_1R_2-\alpha_1^2)\right\}\chi_2}{2R_1R_2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
+\dfrac{\lambda^2c(\theta-1)[\xi_1(R_1)-\xi_1(R_2)]}{2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2(\lambda\theta+c\alpha_1)}+\dfrac{c\lambda\left(e^{-uR_2}R_1\xi_2(R_2)-e^{-uR_1}R_2\xi_2(R_1)\right)}{R_1R_2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
-\dfrac{e^{-a_1 u}c\lambda(1+\theta+u\theta\alpha_1)}{\alpha_1}+\dfrac{e^{-\alpha_1 x}c\lambda[4+2x\alpha_1+x^2(1-\theta)\theta\alpha_1^2]}{2\alpha_1} \\
\hfill \text{για}\quad 0\le u<x, \\
\dfrac{c\lambda^2(1-\theta)(\lambda-c\theta\alpha_1)(R_1R_2-\alpha_1^2)}{R_1R_2\alpha_1(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
+\dfrac{c\lambda[e^{-uR_1-\alpha_1 x}R_2(R_1-\alpha_1)^2-e^{-uR_2-\alpha_1 x}R_1(R_2-\alpha_1)^2]\chi_2}{2R_1R_2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
+\dfrac{c\lambda^2(\theta-1)(c\theta\alpha_1-\lambda)[e^{-(u-x)R_1}R_2(R_1-\alpha_1)^2-e^{-(u-x)R_2}R_1(R_2-\alpha_1)^2]}{R_1R_2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
+\dfrac{e^{-u\alpha_1}cx\lambda^2\alpha_1(\theta-1)\chi_3}{2(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
+\dfrac{c\lambda[2e^{-(u-x)R_1}\gamma_1(R_1)-e^{-uR_1-x\alpha_1}\gamma_2(R_1)+e^{-uR_1-x\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)}\gamma_3(R_1)-2e^{-uR_1}\gamma_4(R_1)]}{2R_1\alpha_1(R_2-R_1)(\lambda+c\alpha_1)^2(\lambda\theta+c\alpha_1)} \\
+\dfrac{c\lambda[2e^{-(u-x)R_2}\gamma_1(R_2)-e^{-uR_2-x\alpha_1}\gamma_2(R_2)+e^{-uR_2-x\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)}\gamma_3(R_2)-2e^{-uR_1}\gamma_4(R_2)]}{2R_2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2(\lambda\theta+c\alpha_1)} \\
+\dfrac{c\lambda\{2\alpha_1(\lambda+c\alpha_1)^2[e^{-uR_1-x(\alpha_1-R_1)}R_2\gamma_5(R_1)-e^{-uR_2-x(\alpha_1-R_2)}R_1\gamma_5(R_2)]-e^{-x\alpha_1}\chi_4\}}{2R_1R_2\alpha_1(R_1-R_2)(\lambda+c\alpha_1)^2} \\
\hfill \text{για}\quad u\ge x.
\end{cases}$$

όπου,

$$\xi_1(s)=2e^{-us}[c\alpha_1^2(\lambda\theta+c\alpha_1)+s(2\lambda^2+3c\alpha_1+c^2\theta\alpha_1^2)]-e^{-us-x\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)}c\alpha_1(2+2x\alpha_1+x^2\theta\alpha_1^2)\times$$
$$\{\alpha_1(\lambda\theta+c\alpha_1)-s[\lambda+c(2-\theta)\alpha_1]\}-e^{-us-x\alpha_1}(\lambda+c\alpha_1)^2[4+2x\alpha_1+x^2(1-\theta)\theta\alpha_1^2]s,$$

$$\xi_2(s)=\lambda\alpha_1^2(\theta-1)(c\theta\alpha_1-\lambda)+s^2[2\lambda^2+c\lambda\alpha_1(2+\theta+\theta^2)+c^2\alpha_1^2(1+\theta)]$$
$$-s\alpha_1(3\lambda^2+2c\lambda\alpha_1(2+\lambda\theta+\theta^2)+c^2\alpha_1^2(1+2\theta)],$$

$$\chi_1=R_1R_2\{\theta[(2\lambda^2+c^2\alpha_1^2)(1+u\alpha_1)+c\lambda\alpha_1(4+3u\alpha_1)]-\alpha_1[u\lambda(\lambda+c\alpha_1)-c^2\alpha_1^2]\},$$

$$\chi_2=2c^2\alpha_1^2(1+\theta+\theta x\alpha_1)+\lambda^2[4+2x\alpha_1+x^2(1-\theta)\theta\alpha_1^2]$$
$$+c\lambda\alpha_1(4+2x\alpha_1+\theta^2(2+2x\alpha_1-x^2\alpha_1^2)+\theta(2+x^2\alpha_1^2)],$$

$$\gamma_1(s)=\lambda(\theta-1)(\alpha_1-s)^2(c\theta\alpha_1-\lambda)(\lambda\theta+c\alpha_1),$$

$$\gamma_2(s)=\lambda(1-\theta)s^2(\lambda+c\alpha_1)^2[4+2x\alpha_1+\theta(1-\theta)x^2\alpha_1^2],$$

$$\gamma_3(s)=s\{\alpha_1(\lambda\theta+c\alpha_1)-s[\lambda+c(2-\theta)\alpha_1]\}c\lambda\alpha_1(\theta-1)(2+2x\alpha_1+x^2\theta\alpha_1^2)$$

$$\gamma_4(s)=\lambda(1-\theta)\alpha_1^2(c\theta\alpha_1-\lambda)(\lambda\theta+c\alpha_1)$$
$$-s^2\{2\lambda^3+c[5-\theta(1-\theta-\theta^2)]\lambda^2\alpha_1+c^2(2+3\theta+\theta^2)\lambda\alpha_1^2+c^3\alpha_1^3(1+\theta)\}$$
$$+s\alpha_1[2c\theta^3\lambda^2\alpha_1+c\lambda\alpha_1\theta^2(3\lambda+4c\alpha_1)+c\alpha_1(3\lambda^2+c\lambda\alpha_1+c^2\alpha_1^2)$$
$$+\theta(3\lambda^3+c\lambda^2\alpha_1+4c^2\lambda\alpha_1^2+2c^3\alpha_1^2],$$

$$\gamma_5(s)=s(1+x\theta\alpha_1)-\alpha_1(1+\theta+x\theta\alpha_1),$$

$$\chi_3=c[x^2\theta\alpha_1^2+2x(1-\theta)\alpha_1-2-u\alpha_1(2+x\theta\alpha_1)]-\lambda[x(\theta-2-x\theta\alpha_1)+u(2+x\theta\alpha_1)],$$

$$\chi_4=\lambda(1-\theta)(R_1-R_2)(R_1R_2-\alpha_1^2)\{\lambda(2+2x\alpha_1+x^2\theta\alpha_1^2)+c\alpha_1[2x\alpha_1-\theta(2+x\alpha_1-x^2\alpha_1^2)]\}.$$

Στην περίπτωση που $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε από τις (2.3.6) και (2.3.7) προκύπτει

$$F(x\,|\,0)=\frac{1}{c\alpha_1(\lambda+c\alpha_1)(\lambda\theta+c\alpha_2)}\left\{e^{-\alpha_1 x}\,\frac{\lambda(\lambda+c\alpha_1)(\lambda+c\alpha_2)[\alpha_1^2\theta(\theta-1)+\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)]}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\right.$$
$$+e^{-\alpha_1 x}\,\frac{\lambda\alpha_1^2(\lambda+c\alpha_1)(\lambda+c\alpha_2)\{\alpha_2-\alpha_1+\alpha_2\theta(1-\theta)(1+x(\alpha_2-\alpha_1)]\}}{(\alpha_1-\alpha_2)^2\alpha_2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda+c\alpha_1)[\lambda(\alpha_1+\alpha_2)+c\alpha_2(\theta\alpha_1+\alpha_2)]}{\alpha_2}$$
$$+e^{-\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)x}\,\frac{c\lambda\alpha_1\alpha_2(1-\theta)(\lambda+c\alpha_1)[\alpha_2-(1-\theta)\alpha_1]}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}$$
$$\left.-e^{-\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_2\right)x}\,\frac{\lambda c(\theta-1)\alpha_1^2(\lambda+c\alpha_1)(\alpha_1+x\theta\alpha_1\alpha_2-\alpha_2(1+\theta+x\theta\alpha_2)]\}}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\right\}$$

και

$$F_1(x\,|\,0)=\frac{\lambda}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)^2(\lambda\theta+c\alpha_2)}\times$$
$$\left\{(\alpha_1-\alpha_2)^2[\alpha_1(1+\theta)+\alpha_2]+e^{-x\alpha_1}\alpha_2[\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)+\theta\alpha_1^2(\theta-1)]\right\}$$
$$+e^{-\alpha_2 x}\alpha_1^2\left\{\alpha_1[x\alpha_2\theta(\theta-1)-1]+\alpha_2[1+\theta+x\theta\alpha_2-\theta^2(1+x\alpha_2)]\right\}$$
$$-e^{-\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_1\right)x}\theta\alpha_1\alpha_2[\alpha_2-\alpha_1(1-\theta)]-e^{-\left(\frac{\lambda}{c}+\alpha_2\right)x}\theta\alpha_1^2[\alpha_1+x\theta\alpha_1\alpha_2-\alpha_2(1+\theta+x\theta\alpha_2)].$$

Επίσης η σχετική έκφραση της $F(x|u)$ μπορεί να προκύψει από την (2.5.5).

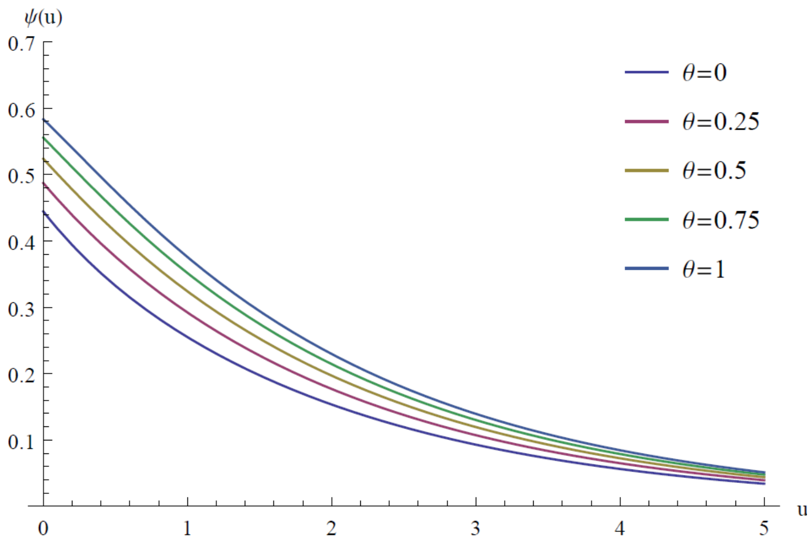
2.6 Αριθμητική εφαρμογή

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια αριθμητική εφαρμογή σχετικά με τα Παραδείγματα 2.1 και 2.2 που αναπτύχθηκαν προηγουμένως. Οι υπολογισμοί και τα σχήματα έχουν γίνει με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica.

Θεωρούμε τις τιμές $\lambda = 1$, $c = 2$ $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1.5$, για τις οποίες, βλέπουμε ότι η συνθήκη καθαρού κέρδους (2.1.3) ισχύει, αφού $2 > 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1.5}\right) = 1.167$. Στη συνέχεια βρίσκουμε την τιμή $\Lambda = \sqrt{(2 \cdot 2 + 2 \cdot 1.5 - 1)^2 - 4 \cdot 2(2 \cdot 2 \cdot 1.5 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1.5)} = 4$ και από αυτή τις τέσσερις ρίζες του $D_4(s)$, που είναι

$$s_1 = r_1 = 0, \quad s_2 = r_2 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = -R_1 = -2.5, \quad s_4 = -R_2 = -0.5.$$

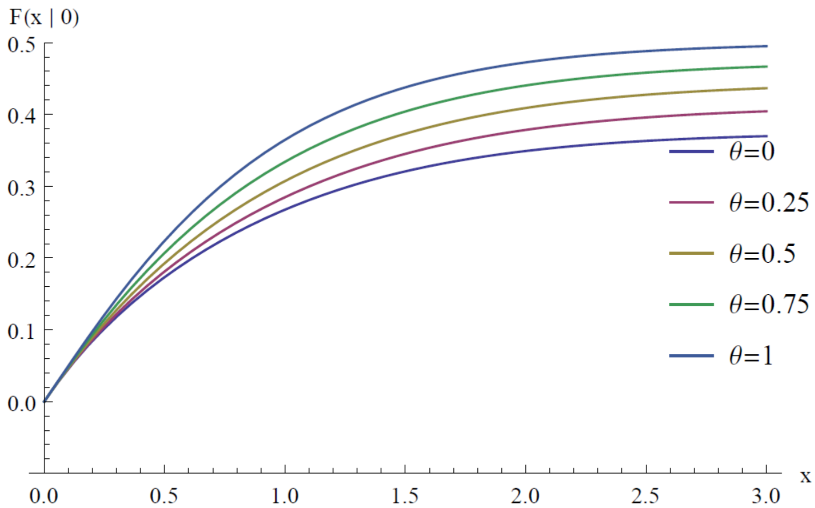
Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας του Παραδείγματος 2.1 για διάφορες τιμές του αποθεματικού *u* και της πιθανότητας *θ*.



Σχήμα 2.4. Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο Παράδειγμα 2.1

Από το παραπάνω γράφημα βλέπουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται καθώς το αρχικό κεφάλαιο *u* αυξάνει. Επίσης, για συγκεκριμένη τιμή *u*, η πιθανότητα χρεοκοπίας αυξάνει καθώς η πιθανότητα *θ* αυξάνει. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνουν την Πρόταση 2.7.

Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζεται η συνάρτηση κατανομής $F(x\,|\,0)$, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο $u = 0$, που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 2.2 για διάφορες τιμές του x και της πιθανότητας θ.



Σχήμα 2.5. Η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, $F(x\,|\,0)$, στο Παράδειγμα 2.2

Από το παραπάνω γράφημα βλέπουμε ότι για συγκεκριμένο x, η συνάρτηση κατανομής $F(x\,|\,0)$ αυξάνει καθώς η πιθανότητα θ αυξάνει.

Για την τιμή $\theta = 0.75$, η συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$F(x\,|\,u)=\begin{cases} -0.4\,e^{-2.5(u+x)}-0.16667\,e^{-2.5u}-2.05556\,e^{-0.5u}+0.8\,e^{-0.5u-2.5x} \\ -2\,e^{0.5u-2.5x}+e^{-1.5x}(5.6+3.6x)-e^{-0.5u-1.5x}(3.57778+2.3x) \\ +e^{0.5u-2x}(1.66667-1.5x)+e^{-2.5u-2x}(0.33333-0.3x) \\ +e^{-2.5u-1.5x}(0.46667+0.3x)+e^{-0.5u-2x}(-0.66667+0.6x), & 0\le x<u \\ \\ -0.3e^{-2.5(u+x)}-0.1e^{-0.5u-2.5x}+0.2\,e^{-2.5u+2.5x}+e^{-2.5u-2x}(0.275-0.225x) \\ -e^{-0.5u-2x}(0.291667+0.075x)+e^{-0.5u-1.5x}(1.42222-0.05x) \\ +e^{-2.5u-1.5x}(0.23333+0.15x)+e^{-0.5u-x}(-1+0.675x)-0.075e^{-2.5u+x}x \\ +0.18e^{-2.5(u-x)}(0.346668+0.80000x-x^2)+e^{-0.5(u-x)}(49.5-27x+6.75x^2) \\ +e^{-0.5u}(-49.5306+2.25x-1.125x^3)+e^{-2.5u}(-0.339533-0.15x+0.075x^3), & u\ge x. \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΜΕ ΔΙΑΧΥΣΗ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΥΝ ΧΡΟΝΙΚΗ ΥΣΤΕΡΗΣΗ

Το κεφάλαιο αυτό μελετάει την ίδια διαδικασία πλεονάσματος που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο αλλά γενικεύοντάς το, θεωρώντας επιπλέον την ύπαρξη μιας στοχαστικής ανέλιξης Brown. Μοντέλα κινδύνου διαταραγμένα με διάχυση, μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τους Dufresne and Gerber, (1991), και έχουν τύχει μεγάλης προσοχής στη βιβλιογραφία του αναλογισμού. Σε αυτά τα μοντέλα, η ενσωμάτωση του όρου διάχυσης γίνεται για να αντικατοπτρίσει τις διακυμάνσεις του πλεονάσματος των ασφαλιστικών εταιρειών. Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής έχει μελετηθεί σε διάφορα μοντέλα κινδύνου διαταραγμένα με διάχυση, ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Gerber and Landry (1998), Tsai and Willmot (2002), Tsai (2001), Tsai (2003), Li and Garrido (2005), Lu and Tsai (2007), Cai and Xu (2006), Zhou and Cai (2009), Zhang and Yang (2011).

Η *διαδικασία κίνησης Brown* (Medhi (1994), Ross (2000)) είναι μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες στη θεωρία εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Η ονομασία της οφείλεται στον Σκοτζέζο βοτανολόγο Robert Brown (1773-1858) ο οποίος πρώτος παρατήρησε το 1827, την αδιάκοπη και άτακτη κίνηση λεπτότατων, αλλά ορατών στο μικροσκόπιο, σωματιδίων που αιωρούνταν σε κάποιο υγρό. Ο Einstein ήταν ο πρώτος που το 1905 έδωσε ένα ικανοποιητικό μαθηματικό μοντέλο για το φυσικό φαινόμενο, ενώ ο Wiener, το 1923, έδωσε μια αυστηρή μαθηματική μορφή. Η διαδικασία Brown είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να περιγράψει την κίνηση αυτή, ενώ παράλληλα παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, στις διακυμάνσεις στη χρηματιστηριακή αγορά και αλλού.
Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της *διαδικασίας Wiener* ή *διαδικασίας κίνησης Brown* (Medhi, 1994).

Ορισμός 3.1

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \ge 0\}$ *λέγεται διαδικασία Wiener ή διαδικασία Wiener-Einstein ή διαδικασία κίνησης Brown, με μετατόπιση (drift) μ και παράμετρο μεταβλητότητας* σ^2, *εάν*

i. $X(0) = x_0$,

ii. η $\{X(t), t \ge 0\}$ *έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις (independent and stationary increments), δηλαδή,*

για κάθε επιλογή μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών

$$t_0 = 0 \le t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \le \ldots \le t_{n-1} < t_n < \infty,$$

οι τυχαίες μεταβλητές προσαύξησης

$X(t_2)-X(t_1)$, $X(t_4)-X(t_3)$,..., $X(t_n)-X(t_{n-1})$

είναι από κοινού ανεξάρτητες, και

για κάθε $0<s,t<\infty$, *η κατανομή της προσαύξησης* $X(t+s)-X(s)$ *είναι ίδια με την κατανομή της προσαύξησης* $X(t)-X(0)$, *δηλαδή ανεξάρτηση του* s,

iii. *η προσαύξηση* $X(t+s)-X(s)$ *είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο* $\mu[(t+s)-s]=\mu t$ *και διακύμανση* $\sigma^2 t$, *δηλαδή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης της διαδικασίας Wiener δίνεται από τη σχέση*

$$p(x_0,x;t)dx = P(x \le X(t) < x+dx \mid X(0)=x_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\}dx.$$

Η διαδικασία Wiener $\{X(t), t \ge 0\}$ με $X(0)=0$, $\mu=0$, $\sigma=1$ καλείται *τυπική διαδικασία Wiener* ή *τυπική κίνηση Brown*. Έστω $\{B(t), t\ge 0\}$ μια τυπική διαδικασία Wiener. Τότε η διαδικασία $\{X(t), t\ge 0\}$, με $X(0)=0$, μετατόπιση μ και παράμετρο μεταβλητότητας σ^2, ορίζεται και ως

$$X(t)=\sigma B(t)+\mu t.$$

3.1 Το μοντέλο

Θεωρούμε μια διαδικασία πλεονάσματος για μία ασφαλιστική εταιρεία τη χρονική στιγμή t που δίνεται από τη σχέση

$$U(t)=u+ct-S(t)+\sigma B(t),\ u\ge 0 \tag{3.1.1}$$

όπου $U(0)=u$ είναι το αρχικό κεφάλαιο, c είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου, $\{B(t);t\ge 0\}$ είναι μια τυπική διαδικασία Wiener, σ είναι παράμετρος μεταβλητότητας, $\{S(t);t\ge 0\}$ είναι η διαδικασία συνολικών απαιτήσεων και είναι ανεξάρτητη από την $\{B(t);t\ge 0\}$. Όπως και στο Κεφάλαιο 2, είναι

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + R(t),\ u\ge 0. \tag{3.1.2}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους

$$c>\lambda(\mu_1+\mu_q). \tag{3.1.3}$$

Έστω, $T=\inf\{t\ge 0: U(t)<0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας, και $\delta>0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu ορίζεται ως

$$\phi(u)=E[e^{-\delta T}w(U(T^-),|U(T)|)\mathrm{I}(T<\infty \mid U(0)=u)] \tag{3.1.4}$$

$$= E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) \mathrm{I}(T < \infty, U(T) < 0) \,|\, U(0) = u]$$
$$+ E[e^{-\delta T} \mathrm{I}(T < \infty, U(T) = 0) \,|\, U(0) = u], \qquad u \geq 0,$$

με $\phi(0) = 1$ λόγω των τροχιών ταλάντωσης (oscillating sample paths) της διαδικασίας $U(t)$.

3.2 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων για τη συνάρτηση $\phi(u)$ που ορίστηκε στην (3.1.4) και την αντίστοιχη συνάρτηση $\phi_1(u)$ της βοηθητικής διαδικασίας κινδύνου που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2. Θεωρούμε τη χρονική στιγμή T_1 και τι συμβαίνει εκεί. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: (α) θα εμφανιστεί η κύρια απαίτηση X_1 η οποία θα προκαλέσει μια by-claim απαίτηση Y_1 που θα συμβεί την ίδια χρονική στιγμή με πιθανότητα θ. Στην περίπτωση αυτή, η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ ανανεώνεται. (β) θα εμφανιστεί η κύρια απαίτηση X_1, ενώ η αντίστοιχη by-claim απαίτηση, Y_1 θα καθυστερήσει και εμφανιστεί τη χρονική στιγμή T_2, με πιθανότητα $1 - \theta$. Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ δεν ανανεώνεται. Τότε θεωρούμε μια βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος στην οποία τη στιγμή T_1 αντί να έχουμε μια κύρια απαίτηση και την by-claim απαίτηση, μία άλλη by-claim απαίτηση προστίθεται στη στιγμή T_1. Έτσι, στην περίπτωση (β) μεταφερόμαστε στο βοηθητικό μοντέλο το οποίο ανανεώνεται. Η αντίστοιχη συνάρτηση Gerber-Shiu για τη βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος συμβολίζεται με $\phi_1(u)$ για $u \geq 0$, με $\phi_1(0) = 1$. Μπορεί να αποδειχθεί (Chadjiconstantinidis and Papaioannou, (2013)) ότι οι $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες για $u \in (0, \infty)$.

Πρόταση 3.1

Για $u \geq 0$, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\sigma^2}{2}\phi''(u) + c\phi'(u) - (\lambda+\delta)\phi(u) = -\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x) f_2(x)dx + w_2(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x) f_1(x)dx + w_1(u)\right), \qquad (3.2.1)$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\phi_1''(u) + c\phi_1'(u) - (\lambda+\delta)\phi_1(u) = -\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x) f_3(x)dx + w_3(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x) f_2(x)dx + w_2(u)\right) \qquad (3.2.2)$$

όπου

$$w_i(u) = \int_u^{\infty} w(u, y-u)\, f_i(y)dy = \int_0^{\infty} w(u,y)\, f_i(u+y)dy\,,\ i = 1,2,3. \tag{3.2.3}$$

Απόδειξη

Όπως και στην Πρόταση 2.1, η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να ιδωθεί ότι ρυθμίζεται από μια εξωτερική κατά τμήματα ντετερμινιστική αλυσίδα δύο καταστάσεων, και ισχύει το σχετικό Σχήμα 2.2. Θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα $(0, dt)$ και $V(t) = u + ct + \sigma B(t)$, $t \geq 0$. Στη συνέχεια, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και ως προς τα μεγέθη των απαιτήσεων (κύριων και by-claim) στο εν λόγω διάστημα παίρνουμε για την $\phi(u)$,

$$\begin{aligned} e^{\delta dt}\phi(u) &= (1-\lambda\theta\, dt)[1-\lambda(1-\theta)dt]E\big[\phi(V(dt))\big] \\ &+ \lambda\theta\, dt[1-\lambda(1-\theta)dt]E\left[\int_0^{V(dt)} \phi[V(dt)-x]\, f_2(x)dx + w_2(V(dt))\right] \\ &+ \lambda(1-\theta)dt(1-\lambda\theta\, dt)E\left[\int_0^{V(dt)} \phi_1[V(dt)-x]\, f_1(x)dx + w_1(V(dt))\right] + o(dt). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-\delta dt}$ και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(u) &= (1-\lambda\theta\, dt)[1-\lambda(1-\theta)dt]e^{-\delta dt}E\big[\phi(V(dt))\big] \\ &+ \lambda\theta\, dt[1-\lambda(1-\theta)dt]e^{-\delta dt}E\left[\int_0^{V(dt)} \phi[V(dt)-x]\, f_2(x)dx + w_2(V(dt))\right] \\ &+ \lambda(1-\theta)dt(1-\lambda\theta\, dt)e^{-\delta dt}E\left[\int_0^{V(dt)} \phi_1[V(dt)-x]\, f_1(x)dx + w_1(V(dt))\right] + o(dt). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $o(t)$ έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{o(t)}{t} = 0$, δηλαδή, ο αριθμητής τείνει στο μηδέν πιο γρήγορα από ότι ο παρονομαστής.

Από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor έχουμε $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + \dfrac{(\delta dt)^2}{2!} - \dfrac{(\delta dt)^3}{3!} + \ldots = 1 - \delta dt + o(dt)$,

οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (1-\lambda\theta dt)[1-\lambda(1-\theta)dt]\, e^{-\delta dt} &= [1-\lambda(1-\theta)dt - \lambda\theta dt + \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^2][1-\delta dt + o(dt)] \\ &= 1 - \delta dt - \lambda(1-\theta)dt + \lambda(\lambda-\theta)\delta(dt)^2 - \lambda\theta dt + \lambda\theta\delta(dt)^2 + \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^2 - \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^3 + o(dt) \\ &= 1 - \delta dt - \lambda(1-\theta)dt - \lambda\theta dt + o(dt) \qquad (\text{αφού } (dt)^n = 0,\ \forall\ n \geq 2) \\ &= 1 - (\lambda + \delta)dt + o(dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda\theta dt[1-\lambda(1-\theta)dt]\, e^{-\delta dt} &= [\lambda\theta dt - \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^2][1-\delta dt + o(dt)] \\ &= \lambda\theta dt - \lambda\theta\delta(dt)^2 - \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^2 + \lambda^2\theta(1-\theta)\delta(dt)^3 + o(dt) \\ &= \lambda\theta dt + o(dt) \end{aligned}$$

$$\lambda(1-\theta)dt(1-\lambda\theta dt)\, e^{-\delta dt} = [\lambda(1-\theta)dt - \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^2][1-\delta dt + o(dt)]$$
$$= \lambda(1-\theta)dt - \lambda(1-\theta)\delta(dt)^2 - \lambda^2\theta(1-\theta)(dt)^2 + \lambda^2\theta(1-\theta)\delta(dt)^3 + o(dt)$$
$$= \lambda(1-\theta)dt + o(dt).$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (3.2.4), προκύπτει

$$\phi(u) = [1-(\lambda+\delta)dt]E[\phi(V(dt))] + \lambda\theta\, dtE\left[\int_0^{V(dt)} \phi[V(dt)-x]\, f_2(x)dx + w_2(V(dt))\right]$$
$$+ \lambda(1-\theta)dtE\left[\int_0^{V(dt)} \phi_1[V(dt)-x]\, f_1(x)dx + w_1(V(dt))\right] + o(dt).$$

Επίσης είναι

$$E[\phi(V(dt))] = \phi(u) + \left[c\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(u)\right]dt + o(dt)\,.$$

Άρα, η $\phi(u)$ γίνεται

$$\phi(u) = [1-(\lambda+\delta)dt]\left(\phi(u) + \left[c\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(u)\right]dt\right)$$
$$+ \lambda\theta\, dt\, E\left[\int_0^{V(dt)} \phi[V(dt)-x]\, f_2(x)dx + w_2(V(dt))\right]$$
$$+ \lambda(1-\theta)dt\, E\left[\int_0^{V(dt)} \phi_1[V(dt)-x]\, f_1(x)dx + w_1(V(dt))\right] + o(dt)$$

και ισοδύναμα

$$(\lambda+\delta)dt\phi(u) = \left[c\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(u)\right]dt + \lambda\theta\, dt\, E\left[\int_0^{V(dt)} \phi[V(dt)-x]\, f_2(x)dx + w_2(V(dt))\right]$$
$$+ \lambda(1-\theta)dt\, E\left[\int_0^{V(dt)} \phi_1[V(dt)-x]\, f_1(x)dx + w_1(V(dt))\right] + o(dt).$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με dt έχουμε

$$(\lambda+\delta)\phi(u) = c\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(u) + \lambda\theta\, E\left[\int_0^{V(dt)} \phi[V(dt)-x]\, f_2(x)dx + w_2(V(dt))\right]$$
$$+ \lambda(1-\theta)E\left[\int_0^{V(dt)} \phi_1[V(dt)-x]\, f_1(x)dx + w_1(V(dt))\right] + \frac{o(dt)}{dt},$$

οπότε παίρνοντας και στα δύο μέλη της ισότητας το όριο καθώς $dt \to 0$, επειδή $\lim_{dt\to 0}\frac{o(dt)}{dt} = 0$ και $\lim_{dt\to 0} V(dt) = \lim_{dt\to 0}[u + cdt + \sigma B(dt)] = u$, προκύπτει

$$(\lambda+\delta)\phi(u)=c\phi'(u)+\frac{\sigma^2}{2}\phi''(u)+\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x)\,f_2(x)dx+w_2(u)\right)$$
$$+\lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x)\,f_1(x)dx+w_1(u)\right)$$

από την οποία με αναδιάταξη των όρων της προκύπτει η (3.2.1).

Με παρόμοιο συλλογισμό, για την $\phi_1(u)$ προκύπτει

$$\phi_1(u)=[1-(\lambda+\delta)dt]\,E[\phi_1(V(dt))]+\lambda\theta\,dt\,E\left[\int_0^{V(dt)}\phi_1[V(dt)-x]\,f_3(x)dx+w_3(V(dt))\right]$$
$$+\lambda(1-\theta)dt\,E\left[\int_0^{V(dt)}\phi_1[V(dt)-x]\,f_2(x)dx+w_2(V(dt))\right]+o(dt),$$

από την οποία με όμοια ανάλυση όπως στην $\phi(u)$, παίρνουμε τη σχέση (3.2.2).

□

3.3 Μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.2.1) και (3.2.2) θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace καθώς αυτός αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο ιδιαίτερα χρήσιμο στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων.

Αρχικά ορίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των ποσοτήτων που εμπλέκονται στις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$ για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$:

$$\hat{\phi}(s)=L\{\phi(u)\}:=\int_0^\infty e^{-su}\phi(u)du\,,$$

$$\hat{\phi}_1(s)=L\{\phi_1(u)\}:=\int_0^\infty e^{-su}\phi_1(u)du\,,$$

$$\hat{f}_i(s)=L\{f_i(x)\}:=\int_0^\infty e^{-sx}f_i(x)dx\,,\qquad i=1,2,3,$$

$$\hat{w}_i(s)=L\{w_i(u)\}:=\int_0^\infty e^{-su}w_i(u)du\,,\qquad i=1,2,3.$$

Η επόμενη πρόταση, δίνει τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων Gerber – Shiu $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$.

Πρόταση 3.2

Οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $\phi(u)$ *και* $\phi_1(u)$ *είναι αντίστοιχα*

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda\,\hat{f}_2(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)} \tag{3.3.1}$$

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\hat{B}_1(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda\,\hat{f}_2(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)} \tag{3.3.2}$$

όπου

$$\hat{B}(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}[s + \phi'(0)] + c - \hat{w}(s)\right)$$

$$- \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}[s + \phi'(0)] + c - \hat{w}^*(s)\right) \tag{3.3.3}$$

$$\hat{B}_1(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\,\hat{f}_2(s)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}[s + \phi_1'(0)] + c - \hat{w}^*(s)\right)$$

$$- \lambda\theta\,\hat{f}_3(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}[s + \phi'(0)] + c - \hat{w}(s)\right) \tag{3.3.4}$$

με

$$\hat{w}(s) = \lambda[\theta\,\hat{w}_2(s) + (1-\theta)\,\hat{w}_1(s)] \qquad \text{και} \qquad \hat{w}^*(s) = \lambda[\theta\,\hat{w}_3(s) + (1-\theta)\,\hat{w}_2(s)]\,. \tag{3.3.5}$$

Απόδειξη

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη των (3.2.1) και (3.2.2), αντίστοιχα έχουμε

$$L\left\{\frac{\sigma^2}{2}\phi''(u) + c\phi'(u) - (\lambda+\delta)\,\phi(u)\right\} = L\left\{-\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-y)\,f_2(y)dy + w_2(u)\right)\right.$$
$$\left. - \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-y)\,f_1(y)dy + w_1(u)\right)\right\},$$

$$L\left\{\frac{\sigma^2}{2}\phi_1''(u) + c\phi_1'(u) - (\lambda+\delta)\,\phi_1(u)\right\} = L\left\{-\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-y)\,f_3(y)dy + w_3(u)\right)\right.$$
$$\left. - \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-y)\,f_2(y)dy + w_3(u)\right)\right\}.$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει

$$\frac{\sigma^2}{2}L\{\phi''(u)\}+cL\{\phi'(u)\}-(\lambda+\delta)L\{\phi(u)\}$$
$$=-\lambda\theta\, L\left\{\int_0^u \phi(u-y)\,f_2(y)dy\right\}-\lambda\theta\, L\{w_2(u)\}-\lambda(1-\theta)L\left\{\int_0^u \phi_1(u-y)\,f_1(y)dy\right\}-\lambda(1-\theta)L\{w_1(u)\}$$

και

$$\frac{\sigma^2}{2}L\{\phi_1''(u)\}+cL\{\phi_1'(u)\}-(\lambda+\delta)\{\phi_1(u)\}$$
$$=-\lambda\theta\, L\left\{\int_0^u \phi(u-y)\,f_3(y)dy\right\}-\lambda\theta\, L\{w_3(u)\}-\lambda(1-\theta)L\left\{\int_0^u \phi_1(u-y)\,f_2(y)dy\right\}-\lambda(1-\theta)L\{w_3(u)\}.$$

Στο αριστερό μέλος των παραπάνω εξισώσεων, ο πρώτος και ο δεύτερος μετασχηματισμός Laplace αφορούν σε παράγωγο ενώ στα δεύτερα μέλη, οι μετασχηματισμοί Laplace αφορούν σε συνέλιξη, οπότε αντίστοιχα προκύπτει

$$\frac{\sigma^2}{2}[s^2\hat{\phi}(s)-cs\phi(0)-\phi'(0)]+c[s\hat{\phi}(s)-\phi(0)]-(\lambda+\delta)\hat{\phi}(s)$$
$$=-\lambda\theta\,\hat{\phi}(s)\,\hat{f}_2(s)-\lambda\theta\,\hat{w}_2(s)-\lambda(1-\theta)\hat{\phi}_1(s)\,\hat{f}_1(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_1(s)$$

και

$$\frac{\sigma^2}{2}[s^2\hat{\phi}_1(s)-s\phi_1(0)-\phi_1'(0)]+c[s\hat{\phi}_1(s)-\phi_1(0)]-(\lambda+\delta)\hat{\phi}_1(s)$$
$$=-\lambda\theta\,\hat{\phi}(s)\,\hat{f}_3(s)-\lambda\theta\,\hat{w}_3(s)-\lambda(1-\theta)\hat{\phi}_1(s)\,\hat{f}_2(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_2(s).$$

Από τις ανωτέρω δύο εξισώσεις μετά από αναδιάταξη των όρων ισοδύναμα έχουμε

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-(\lambda+\delta)+\lambda\theta\;\hat{f}_2(s)\right)\hat{\phi}(s)+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\hat{\phi}_1(s)$$
$$=\frac{\sigma^2}{2}s\phi(0)+\frac{\sigma^2}{2}\phi'(0)+c\phi(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_2(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_1(s),$$

και

$$\lambda\theta\;\hat{f}_3(s)\hat{\phi}(s)+\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-(\lambda+\delta)+\lambda(1-\theta)\;\hat{f}_2(s)\right)\hat{\phi}_1(s)$$
$$=\frac{\sigma^2}{2}s\phi_1(0)+\frac{\sigma^2}{2}\phi_1'(0)+c\phi_1(0)-\lambda\theta\,\hat{w}_3(s)-\lambda(1-\theta)\hat{w}_2(s).$$

Αλλά $\phi(0)=1$ και $\phi_1(0)=1$.

Επίσης, θέτοντας $\hat{w}(s)=\lambda[\theta\,\hat{w}_2(s)+(1-\theta)\,\hat{w}_1(s)]$ και $\hat{w}^*(s)=\lambda[\theta\,\hat{w}_3(s)+(1-\theta)\,\hat{w}_2(s)]$,

το παραπάνω σύστημα γίνεται αντίστοιχα

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda+\delta) + \lambda\theta\,\hat{f}_2(s)\right)\hat{\phi}(s) + \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\hat{\phi}_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}[s+\phi'(0)] + c - \hat{w}(s)\,, \qquad (3.3.6)$$

και

$$\lambda\theta\,\hat{f}_3(s)\hat{\phi}(s) + \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda+\delta) + \lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)\right)\hat{\phi}_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}[s+\phi_1'(0)] + c - \hat{w}^*(s)\,. \qquad (3.3.7)$$

Η επίλυση του συστήματος των (3.2.6) και (3.2.7) με τη μέθοδο οριζουσών δίνει τις (3.3.1) και (3.3.2).

□

Για την επίλυση του συστήματος (3.3.1) και (3.3.2) και την εύρεση των $\phi(u)$ και $\phi_1(u)$ θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε τις αρχικές τιμές $\phi'(0)$ και $\phi_1'(0)$. Αυτό θα γίνει μέσω του Λήμματος 3.1 το οποίο αναφέρεται στις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, δηλαδή, του κοινού παρονομαστή των $\hat{\phi}(s)$ και $\hat{\phi}_1(s)$, της Πρότασης 3.2.

Λήμμα 3.1

Για $\delta \geq 0$, *έστω η επόμενη χαρακτηριστική εξίσωση*

$$\ell(s) = 0, \qquad (3.3.8)$$

όπου

$$\ell(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda\,\hat{f}_2(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right).$$

(i) *Για* $\delta > 0$, *η εξίσωση* (3.3.8) *έχει ακριβώς δύο διακεκριμένες θετικές ρίζες, έστω* $r_1(\delta) = \dfrac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\lambda+\delta)}}{\sigma^2}$ *και* $r_2(\delta)$, *με* $r_2(\delta) < r_1(\delta)$. *Επιπλέον, οι* $r_1(\delta)$ *και* $r_2(\delta)$ *είναι οι μόνες ρίζες στο δεξίο μιγαδικό ημιεπίπεδο με θετικά πραγματικά μέρη.*

(ii) *Για* $\delta = 0$, *η εξίσωση* (3.2.8) *έχει ακριβώς μία θετική ρίζα, δηλαδή* $r_1(0)$, *όπου είναι η μοναδική ρίζα στο δεξίο μιγαδικό ημιεπίπεδο με θετικό πραγματικό μέρος και* $r_2(0) = 0$.

Απόδειξη

(i) Η ποσότητα $\ell(s)$ γράφεται ως

$$\ell(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\,\hat{f}_2(s)\right),$$

επομένως η εξίσωση (3.3.8) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\ell(s) = \ell_1(s)\ell_2(s) = 0,$$

όπου

$$\ell_1(s) = \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta, \tag{3.3.9}$$

και

$$\ell_2(s) = \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda \hat{f}_2(s). \tag{3.3.10}$$

Έτσι, οι ρίζες της $\ell(s) = 0$ είναι οι ρίζες των εξισώσεων $\ell_1(s) = 0$ και $\ell_2(s) = 0$.

Η εξίσωση $\ell_1(s) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες. Συγκεκριμένα, λύνοντας την εξίσωση τριωνύμου δευτέρου βαθμού, προκύπτει μία αρνητική πραγματική ρίζα, η $\frac{-c - \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\lambda + \delta)}}{\sigma^2} < 0$ και μία θετική πραγματική ρίζα, την οποία καλούμε έστω $r_1(\delta)$, και είναι

$$r_1(\delta) = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\lambda + \delta)}}{\sigma^2} > 0.$$

Η εξίσωση $\ell_2(s) = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\ell_1(s) + \lambda \hat{f}_2(s) = 0$ ή $\ell_1(s) = -\lambda \hat{f}_2(s)$.

Επειδή $\frac{\partial^2 \ell_1(s)}{\partial s^2} = \sigma^2 > 0$, η $\ell_1(s)$ είναι κυρτή συνάρτηση του *s*. Επίσης είναι $\ell_1(0) = -\lambda - \delta$ και $-\lambda \hat{f}_2(0) = -\lambda \cdot 1 = -\lambda$. Κατά συνέπεια, ισχύει $\ell_1(0) < -\lambda \hat{f}_2(0)$. Ακόμη, $\lim_{s \to \infty} \ell_1(s) = \infty$. Είναι $\frac{\partial}{\partial s}(-\lambda \hat{f}_2(s)) = \frac{\partial \ell_1(s)}{\partial s} = \sigma^2 s$, δηλαδή η $-\lambda \hat{f}_2(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του *s* για *s* > 0. Για $s = r_1(\delta)$ είναι $-\lambda \hat{f}_2(r_1(\delta)) \neq 0$. Συνεπώς, η $\ell_1(s) = -\lambda \hat{f}_2(s)$ έχει μια μοναδική θετική πραγματική ρίζα (Gerber and Landry, (1998)) έστω $r_2(\delta)$, με $r_2(\delta) < r_1(\delta)$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (3.3.8) έχει ακριβώς δύο διακεκριμένες θετικές πραγματικές ρίζες, συμβολικά $r_i(\delta)$, *i* = 1, 2.

Η απόδειξη ότι η $r_2(\delta)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\ell_2(s) = 0$ στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο με θετικό πραγματικό μέρος, είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2 των Li and Carrido, (2005), στην ειδική περίπτωση που *n* = 1. Επίσης η $r_1(\delta)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\ell_1(s) = 0$ με θετικό πραγματικό μέρος στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(ii) Είναι συνέπεια του (i) για $\delta = 0$ (δες επίσης Gerber and Landry, (1998) ότι στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο ισχύει ότι $r_2(0) = 0$).

□

Στη συνέχεια, για λόγους απλοποίησης των συμβόλων, οι ρίζες $r_1(\delta)$ και $r_2(\delta)$ θα συμβολίζονται αντίστοιχα με r_1 και r_2. Επίσης θέτουμε

$$b_i = r_i + \frac{2c}{\sigma^2},\ i = 1, 2. \tag{3.3.11}$$

Έτσι, η αρνητική ρίζα της εξίσωσης $\ell_1(s) = 0$ είναι η $-b_1$, αφού

$$-b_1 = -r_1 - \frac{2c}{\sigma^2} = \frac{c - \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\lambda+\delta)}}{\sigma^2} - \frac{2c}{\sigma^2} = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\lambda+\delta)}}{\sigma^2}.$$

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στις τιμές $\phi'(0)$ και $\phi_1'(0)$.

Πρόταση 3.3

Οι απαιτούμενες αρχικές τιμές $\phi'(0)$ *και* $\phi_1'(0)$ *για τη λύση του συστήματος των* (3.3.1) *και* (3.3.2) *δίνονται από τις σχέσεις:*

$$\hat{\phi}'(0) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \hat{f}_1(r_{i-(-1)^i}) \frac{y(r_i)\left(b_i - \frac{2}{\sigma^2}\hat{w}(r_i)\right) - \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_i)\left(b_i - \frac{2}{\sigma^2}\hat{w}(r_i)\right)}{y(r_2)\hat{f}_1(r_1) - y(r_1)\hat{f}_1(r_2)} \tag{3.3.12}$$

$$\hat{\phi}_1'(0) = y(r_2)\frac{b_2 - \frac{2}{\sigma^2}\hat{w}(r_2) + \phi'(0)}{\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)} - \left(b_2 - \frac{2}{\sigma^2}\hat{w}^*(r_2)\right) \tag{3.3.13}$$

όπου

$$y(s) = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s).$$

Απόδειξη

Η σχέση (3.3.1) γράφεται ως $\hat{\phi}(s) = \dfrac{\hat{B}(s)}{\ell(s)}$. Επειδή $\hat{\phi}(s) < \infty$, δηλαδή είναι πεπερασμένη για $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, και $\ell(s) = 0$ για $s = r_i$, i = 1, 2, έπεται ότι και ο αριθμητής $\hat{B}(s)$ πρέπει να μηδενίζεται για $s = r_i$, i = 1, 2, δηλαδή $\hat{B}(r_i) = 0$, i = 1, 2, γιατί διαφορετικά αν $\hat{B}(r_i) \neq 0$ θα έπρεπε να ισχύει ότι $\hat{\phi}(s) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι έχουμε

$$\hat{B}(r_1) = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\sigma^2}{2}r_1^2 + cr_1 - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_1)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}[r_1 + \phi'(0)] + c - \hat{w}(r_1)\right)$$
$$- \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\left(\frac{\sigma^2}{2}[r_1 + \phi_1'(0)] + c - \hat{w}^*(r_1)\right) = 0,$$

και

$$\hat{B}(r_2)=0 \quad ή \quad \left(\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_2)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}[r_2+\phi'(0)]+c-\hat{w}(r_2)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\left(\frac{\sigma^2}{2}[r_2+\phi_1'(0)]+c-\hat{w}^*(r_2)\right)=0.$$

Με αναδιάταξη των όρων στις παραπάνω δύο εξισώσεις, προκύπτει

$$\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2}r_1^2+cr_1-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_1)\right)\phi'(0)-\frac{\sigma^2}{2}\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\phi_1'(0)=$$
$$-\left(\frac{\sigma^2}{2}r_1^2+cr_1-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_1)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}r_1+c-\hat{w}(r_1)\right)+\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_1)\left(\frac{\sigma^2}{2}r_1+c-\hat{w}^*(r_1)\right),$$

και

$$\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_2)\right)\phi'(0)-\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\frac{\sigma^2}{2}\phi_1'(0)=$$
$$-\left(\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\hat{f}_2(r_2)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}r_2+c-\hat{w}(r_2)\right)+\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(r_2)\left(\frac{\sigma^2}{2}r_2+c-\hat{w}^*(r_2)\right).$$

Η επίλυση του παραπάνω γραμμικού συστήματος ως προς $\phi'(0)$ και $\phi_1'(0)$ δίνει τις (3.3.12) και (3.3.13) αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί, ότι θα παίρναμε την ίδια λύση εάν είχαμε μηδενίσει για $s=r_i$, i = 1, 2, τον αριθμητή $\hat{B}_1(s)$ της $\phi_1'(s)$ από την (3.3.2).

□

3.4 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u)$

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η $\phi(u)$ καθώς και η λύση της. Αρχικά μέσω της Πρότασης 3.4 δίνεται μια σχέση που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Laplace της $\phi(u)$.

Πρόταση 3.4

Για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$*, ο μετασχηματισμός Laplace* $\hat{\phi}(s)$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\hat{\phi}(s)=\hat{\phi}(s)\hat{g}(s)+\hat{h}(s) \tag{3.4.1}$$

όπου

$$\hat{g}(s)=\frac{\lambda T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)},$$

$$\hat{h}(s)=\frac{T_{r_2}\hat{w}(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)}+\frac{1}{s+b_2}+\frac{\lambda(1-\theta)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{r_k}\hat{\eta}(s)}{(s+b_k)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}(r_k-r_j)(r_k-b_j)}$$

με

$$T_{r_k}\hat{\eta}(s)=\frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s)-T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right)-\frac{\sigma^2}{2}\left(\hat{f}_1(s)-\hat{f}_2(s)\right)+\left(T_{r_k}\hat{A}_2(s)-T_{r_k}\hat{A}_1(s)\right)$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\left(\phi_1'(0)T_{r_k}\hat{f}_1(s)-\phi'(0)T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right), \qquad (3.4.2)$$

όπου

$\hat{A}_1(s)=\hat{f}_1(s)\hat{w}^*(s)$ και $\hat{A}_2(s)=\hat{f}_2(s)\hat{w}(s)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε την εξίσωση (3.3.1), $\hat{\phi}(s)=\frac{\hat{B}(s)}{\ell(s)}$. Θα βρούμε μια έκφραση για τον αριθμητή της, $\hat{B}(s)$, και μία για τον παρονομαστή της, $\ell(s)$.

Ξεκινώντας με τον παρονομαστή, με βάση τα αποτελέσματα του Λήμματος 3.1, ότι $\ell_1(r_1)=0$ και $\ell_2(r_2)=0$, η $\ell(s)$ γράφεται

$$\begin{aligned}
\ell(s)&=\ell_1(s)\ell_2(s)\\
&=[\ell_1(s)-\ell_1(r_1)][\ell_2(s)-\ell_2(r_2)]\\
&=\left[\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta\right)-\left(\frac{\sigma^2}{2}r_1^2+cr_1-\lambda-\delta\right)\right]\times\\
&\quad\left[\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta+\lambda\,\hat{f}_2(s)\right)-\left(\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\lambda-\delta+\lambda\,\hat{f}_2(r_2)\right)\right]\\
&=\left[\frac{\sigma^2}{2}(s^2-r_1^2)+c(s-r_1)\right]\left[\frac{\sigma^2}{2}(s^2-r_2^2)+c(s-r_2)+\lambda[\hat{f}_2(s)-\hat{f}_2(r_2)]\right]\\
&=(s-r_1)\left[\frac{\sigma^2}{2}(s+r_1)+c\right](s-r_2)\left[\frac{\sigma^2}{2}(s+r_2)+c+\lambda\frac{\hat{f}_2(s)-\hat{f}_2(r_2)}{s-r_2}\right]\\
&=(s-r_1)\frac{\sigma^2}{2}\left(s+r_1+\frac{2c}{\sigma^2}\right)(s-r_2)\frac{\sigma^2}{2}\left(s+r_2+\frac{2c}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}}\frac{\hat{f}_2(s)-\hat{f}_2(r_2)}{r_2-s}\right).
\end{aligned}$$

και με χρήση της (3.3.11), γίνεται

$$\ell(s) = (s-r_1)\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (s+b_1)(s-r_2)\left(s+b_2-\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}}T_{r_2}\hat{f}_2(s)\right)$$

$$= (s-r_1)\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (s+b_1)(s-r_2)(s+b_2)\left(1-\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}}\frac{T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{s+b_2}\right),$$

οπότε τελικά παίρνουμε ότι

$$\ell(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\left(1-\frac{\lambda T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)}\right). \tag{3.4.3}$$

Θέτοντας

$$\hat{g}(s) = \frac{\lambda T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)},$$

η $\ell(s)$ γράφεται

$$\ell(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)[1-\hat{g}(s)]. \tag{3.4.3α}$$

Ο αριθμητής της $\hat{\phi}(s)$ εκφράζεται ως

$$\hat{B}(s) = \hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s),$$

όπου

$$\hat{h}_1(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)\frac{\sigma^2}{2}\phi'(0) = \frac{\sigma^2}{2}\phi'(0)\ell_1(s),$$

$$\hat{h}_2(s) = \ell_1(s)\left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2}s + c\right) + \lambda(1-\theta)\hat{h}_3(s), \tag{3.4.4}$$

με

$$\hat{h}_3(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)\left(\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right) + \hat{A}_2(s) - \hat{A}_1(s) + \frac{\sigma^2}{2}\left[\phi_1'(0)\hat{f}_1(s) - \phi'(0)\hat{f}_2(s)\right].$$

Όπως αναφέρθηκε και στην Πρόταση (3.3), αφού η $\hat{\phi}(s)$ είναι πεπερασμένη για $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, θα πρέπει και $\hat{B}(r_i) = 0$, i = 1, 2, που συνεπάγεται ότι $\hat{h}_1(r_i) = \hat{h}_2(r_i)$, i = 1, 2.

Με την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs$ η $\hat{h}_1(s)$ γίνεται

$$\hat{h}_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}\phi'(0)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right) = \frac{\sigma^2}{2}\phi'(0)(x - \lambda - \delta)\,,$$

που είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς x. Θέτοντας την τελευταία ποσότητα με $d(x)$ είναι

$$d(x) = \hat{h}_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}\phi'(0)(x - \lambda - \delta)\,.$$

Έστω $x_k = \frac{\sigma^2}{2}r_k^2 + cr_k$, k = 1, 2.

Με παρεμβολή Lagrange στα σημεία (x_1, $d(x_1)$) και (x_2, $d(x_2)$) προκύπτει ότι

$$d(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}d(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}d(x_2) = \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{x - x_j}{x_k - x_j}d(x_k)$$

και αφού $d(x_k) = \hat{h}_1(r_k) = \hat{h}_2(r_k)$, k = 1, 2, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$d(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\hat{h}_2(r_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\hat{h}_2(r_2) = \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{x - x_j}{x_k - x_j}\hat{h}_2(r_k)\,.$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές x και x_k, k = 1, 2, προκύπτει ότι

$$\hat{h}_1(s) = \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}r_j^2 + cr_j\right)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}r_k^2 + cr_k\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}r_j^2 + cr_j\right)}\hat{h}_2(r_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{\frac{\sigma^2}{2}(s^2 - r_j^2) + c(s - r_j)}{\frac{\sigma^2}{2}(r_k^2 - r_j^2) + c(r_k - r_j)}\hat{h}_2(r_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{\frac{\sigma^2}{2}(s + r_j)(s - r_j) + c(s - r_j)}{\frac{\sigma^2}{2}(r_k + r_j)(r_k - r_j) + c(r_k - r_j)}\hat{h}_2(r_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{(s - r_j)\left[\frac{\sigma^2}{2}(s + r_j) + c\right]}{(r_k - r_j)\left[\frac{\sigma^2}{2}(r_k + r_j) + c\right]}\hat{h}_2(r_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{(s - r_j)\frac{\sigma^2}{2}\left(s + r_j + \frac{2c}{\sigma^2}\right)}{(r_k - r_j)\frac{\sigma^2}{2}\left(r_k + r_j + \frac{2c}{\sigma^2}\right)}\hat{h}_2(r_k)\,,$$

και λόγω της (3.3.11)

$$\hat{h}_1(s) = \sum_{k=1}^{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(s-r_j)(s+b_j)}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} \hat{h}_2(r_k) \,.$$

Επίσης είναι

$$\sum_{k=1}^{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(s-r_j)(s+b_j)}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} = \frac{(s-r_2)(s+b_2)}{(r_1-r_2)(r_1+b_2)} + \frac{(s-r_1)(s+b_1)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{(s-r_2)(s+b_2)}{r_1+r_2+\frac{2c}{\sigma^2}} - \frac{(s-r_1)(s+b_1)}{r_2+r_1+\frac{2c}{\sigma^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2} \frac{(s^2+sb_2-r_2s-r_2b_2)-(s^2+sb_1-r_1s-r_1b_1)}{r_1+r_2+\frac{2c}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2} \frac{s(b_2-b_1)-s(r_2-r_1)-r_2\left(r_2+\frac{2c}{\sigma^2}\right)+r_1\left(r_1+\frac{2c}{\sigma^2}\right)}{r_1+r_2+\frac{2c}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2} \frac{s(r_2-r_1)-s(r_2-r_1)-r_2^2-r_2\frac{2c}{\sigma^2}+r_1^2+r_1\frac{2c}{\sigma^2}}{r_1+r_2+\frac{2c}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2} \frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2)+\frac{2c}{\sigma^2}(r_1-r_2)}{r_1+r_2+\frac{2c}{\sigma^2}}$$

$$= 1.$$

τότε,

$$\hat{B}(s) = \hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(s-r_j)(s+b_j)}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} \hat{h}_2(r_k) - \sum_{k=1}^{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(s-r_j)(s+b_j)}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} \hat{h}_2(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(s-r_j)(s+b_j)}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} \left(\hat{h}_2(r_k) - \hat{h}_2(s)\right)$$

$$= \frac{(s-r_2)(s+b_2)(s-r_1)}{(r_1-r_2)(r_1+b_2)} \left(\frac{\hat{h}_2(r_1)-\hat{h}_2(s)}{s-r_1} \right) + \frac{(s-r_1)(s+b_1)(s-r_2)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)} \left(\frac{\hat{h}_2(r_2)-\hat{h}_2(s)}{s-r_2} \right)$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\left(\frac{s+b_2}{(r_1-r_2)(r_1+b_2)} T_{r_1}\hat{h}_2(s) + \frac{s+b_1}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)} T_{r_2}\hat{h}_2(s) \right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{2} (s-r_i) \right) \sum_{k=1}^{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{2} \frac{s+b_j}{(r_k - r_j)(r_k + b_j)} T_{r_k} \hat{h}_2(s) . \tag{3.4.5}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον τελεστή $T_{r_k} \hat{h}_2(s)$. Έστω

$$\hat{v}(s) = \ell_1(s) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right).$$

Από την (3.4.4) είναι

$$\hat{h}_2(s) = \hat{v}(s) + \lambda(1+\theta)\hat{h}_3(s) . \tag{3.4.6}$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας του τελεστή Dickson-Hipp έχουμε

$$T_{r_k} \hat{h}_2(s) = T_{r_k} [\hat{v}(s) + \lambda(1+\theta)\hat{h}_3(s)] = T_{r_k} \hat{v}(s) + \lambda(1+\theta) T_{r_k} \hat{h}_3(s) .$$

Για k = 1, 2, έχουμε

$$T_{r_k} \hat{v}(s) = \frac{\hat{v}(s) - \hat{v}(r_k)}{r_k - s} = \frac{1}{r_k - s} \left[\ell_1(s) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right) - \ell_1(r_k) \left(\hat{w}(r_k) - \frac{\sigma^2}{2} r_k - c \right) \right].$$

Επειδή

$$\ell_1(s) = \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta \text{ και } \ell_1(r_k) = \frac{\sigma^2}{2} r_k^2 + cr_k - \lambda - \delta$$

με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\ell_1(s) - \ell_1(r_k) = \frac{\sigma^2}{2} (s^2 - r_k^2) + c(s - r_k)$$

και λύνοντας ως προς $\ell_1(s)$, βρίσκουμε ότι

$$\ell_1(s) = \ell_1(r_k) + \frac{\sigma^2}{2} (s^2 - r_k^2) + c(s - r_k) .$$

Έτσι,

$$T_{r_k} \hat{v}(s) = \frac{1}{r_k - s} \left[\left(\ell_1(r_k) + \frac{\sigma^2}{2} (s^2 - r_k^2) + c(s - r_k) \right) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right) - \ell_1(r_k) \left(\hat{w}(r_k) - \frac{\sigma^2}{2} r_k - c \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r_k - s} \left[\ell_1(r_k) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right) + \left(\frac{\sigma^2}{2} (s^2 - r_k^2) + c(s - r_k) \right) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right) \right.$$
$$\left. - \ell_1(r_k) \left(\hat{w}(r_k) - \frac{\sigma^2}{2} r_k - c \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r_k - s} \left[\ell_1(r_k) \left(\hat{w}(s) - \hat{w}(r_k) - \frac{\sigma^2}{2} (s - r_k) \right) + (s - r_k) \left(\frac{\sigma^2}{2} (s + r_k) + c \right) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right) \right]$$

$$= \ell_1(r_k) \left(\frac{\hat{w}(s) - \hat{w}(r_k)}{r_k - s} + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \left(\frac{\sigma^2}{2} (s + r_k) + c \right) \left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c \right)$$

$$= \ell_1(r_k)\left(T_{r_k}\hat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(s + r_k + \frac{2c}{\sigma^2}\right)\left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2}s - c\right)$$

$$= \ell_1(r_k)\left(T_{r_k}\hat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(s + b_k)\left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2}s - c\right). \tag{3.4.7}$$

Επίσης, από την ιδιότητα της γραμμικότητας του T_r-τελεστή, είναι

$$T_{r_k}\hat{h}_3(s) = T_{r_k}\left\{\left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)\left(\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right) + \hat{A}_2(s) - \hat{A}_1(s) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\phi_1'(0)\hat{f}_1(s) - \phi'(0)\hat{f}_2(s)\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) + \left(T_{r_k}\hat{A}_2(s) - T_{r_k}\hat{A}_1(s)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\phi_1'(0)T_{r_k}\hat{f}_1(s) - \phi'(0)T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right).$$

και

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) = \frac{\sigma^2}{2}\left(s + \frac{2c}{\sigma^2}\right)\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}(s + b_k - r_k)\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) + \frac{\sigma^2}{2}(s - r_k)\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) + \frac{\sigma^2}{2}(s - r_k)\left(\frac{\hat{f}_1(s) - \hat{f}_1(r_k)}{r_k - s} - \frac{\hat{f}_2(s) - \hat{f}_2(r_k)}{r_k - s}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\hat{f}_1(s) - \hat{f}_1(r_k) - \hat{f}_2(s) + \hat{f}_2(r_k)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right).$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι $T_{r_k}\hat{h}_3(s) = T_{r_k}\hat{\eta}(s)$, k = 1, 2, όπου $T_{r_k}\hat{\eta}(s)$ δίνεται από τη σχέση (3.4.2). Με βάση τις (3.4.6), (3.4.7) και (3.4.2), η (3.4.5) γίνεται,

$$\hat{B}(s) = \prod_{i=1}^{2}(s - r_i)\sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2}\frac{s + b_j}{(r_k - r_j)(r_k + b_j)}\left\{\ell_1(r_k)\left(T_{r_k}\hat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(s + b_k)\left(\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2}s - c\right) + \right.$$
$$\lambda(1-\theta)\left[\frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}\hat{f}_1(s) - T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\hat{f}_1(s) - \hat{f}_2(s)\right) + \left(T_{r_k}\hat{A}_2(s) - T_{r_k}\hat{A}_1(s)\right)\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\sigma^2}{2}\left(\phi_1'(0)T_{r_k}\hat{f}_1(s) - \phi'(0)T_{r_k}\hat{f}_2(s)\right)\right]\right\}$$

ή

$$\hat{B}(s)=\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\left[\sum_{k=1}^{2}\ell_1(r_k)\frac{T_{r_k}\hat{w}(s)+\dfrac{\sigma^2}{2}}{s+b_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma^2}{2}\left(\hat{w}(s)+\frac{\sigma^2}{2}s+c\right)\sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)}+\lambda(1-\theta)\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{r_k}\hat{\eta}(s)}{s+b_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)}\right]$$

Αλλά $\ell_1(r_1)=0$ και

$$\sum_{k=1}^{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)}=\frac{1}{(r_1-r_2)(r_1+b_2)}+\frac{1}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{1}{r_1+r_2+\dfrac{2c}{\sigma^2}}-\frac{1}{r_2+r_1+\dfrac{2c}{\sigma^2}}\right)=0\,,$$

οπότε

$$\hat{B}(s)=\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\left(\frac{\ell_1(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}\cdot\frac{T_{r_2}\hat{w}(s)+\dfrac{\sigma^2}{2}}{s+b_2}+\lambda(1-\theta)\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{r_k}\hat{\eta}(s)}{s+b_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)}\right).$$

Επίσης, δεδομένου ότι $\ell_1(r_1)=0$, βρίσκουμε

$$\frac{\ell_1(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}=\frac{\ell_1(r_2)-\ell_1(r_1)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\lambda-\delta\right)-\left(\dfrac{\sigma^2}{2}r_1^2+cr_1-\lambda-\delta\right)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}$$

$$=\frac{\dfrac{\sigma^2}{2}(r_2^2-r_1^2)+c(r_2-r_1)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}$$

$$=\frac{\dfrac{\sigma^2}{2}(r_2-r_1)(r_2+r_1)+c(r_2-r_1)}{(r_2-r_1)(r_2+b_1)}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{r_2+r_1+\dfrac{2c}{\sigma^2}}{r_2+b_1}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{r_2+b_1}{r_2+b_1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\,.$$

Τότε το $\hat{B}(s)$ γίνεται

$$\hat{B}(s) = \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\left(\frac{\sigma^2}{2}\cdot \frac{T_{r_2}\hat{w}(s)+\dfrac{\sigma^2}{2}}{s+b_2} + \lambda(1-\theta)\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{r_k}\hat{\eta}(s)}{s+b_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} \right)$$

$$= \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\left(\frac{T_{r_2}\hat{w}(s)+\dfrac{\sigma^2}{2}}{\dfrac{\sigma^2}{2}(s+b_2)} + \frac{\lambda(1-\theta)}{\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2}\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{r_k}\hat{\eta}(s)}{s+b_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)} \right). \tag{3.4.8}$$

Θέτοντας

$$\hat{h}(s) = \frac{T_{r_2}\hat{w}(s)+\dfrac{\sigma^2}{2}}{\dfrac{\sigma^2}{2}(s+b_2)} + \frac{\lambda(1-\theta)}{\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2}\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{r_k}\hat{\eta}(s)}{s+b_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}\frac{1}{(r_k-r_j)(r_k+b_j)}\,,$$

η $\hat{B}(s)$ γράφεται

$$\hat{B}(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\,\hat{h}(s)\,. \tag{3.4.8α}$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3.4.3α) και (3.4.8α) στην εξίσωση (3.3.1) και βρίσκουμε

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)\,\hat{h}(s)}{\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)[1-\hat{g}(s)]} = \frac{\hat{h}(s)}{1-\hat{g}(s)}\,,$$

από την οποία έχουμε άμεσα την (3.4.1).

□

Στη συνέχεια, με χρήση της Σχέσης (3.4.1) για την $\hat{\phi}(s)$, στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ότι η $\phi(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Πρόταση 3.5

Για $u \geq 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελλειματική εξίσωση

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \phi(u-x)dG(x) + h(u)\,, \tag{3.4.9}$$

όπου,

$$G(x)=(1+\xi)\int_0^x g(y)dy$$

είναι μια συνάρτηση κατανομής με $G(0)=0,$ *με*

$$g(y)=\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}}(m_2 * T_{r_2} f_2)(y)\,,\; m_k(y)=e^{b_k y}\;\; k=1,2,$$

$$\xi>0 \text{ τέτοιο ώστε } \frac{1}{1+\xi}=\int_0^\infty g(y)dy=1-\frac{\delta}{\frac{\sigma^2}{2}r_2 b_2}<1,$$

$$h(u)=\frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}}(m_2 * T_{r_2} w)(u)+e^{-b_2 u}+\frac{\lambda(1-\theta)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}\sum_{k=1}^{2}\frac{(m_k * T_{r_k}\eta)(u)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2}(r_k-r_j)(r_k+b_j)}\,, \tag{3.4.10}$$

$$T_{r_k}\eta=\frac{\sigma^2}{2}b_k\left(T_{r_k}f_1(u)-T_{r_k}f_2(u)\right)-\frac{\sigma^2}{2}\left(f_1(u)-f_2(u)\right)+\left(T_{r_k}A_2(u)-T_{r_k}A_1(u)\right)$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\left\{\phi_1'(0)T_{r_k}f_1(u)-\phi'(0)T_{r_k}f_2(u)\right\},$$

και

$$A_1(u)=(f_1 * w^*)(u),\;\; A_2(u)=(f_2 * w)(u)$$

*(όπου * είναι το σύμβολο της συνέλιξης).*

Εάν $\delta\to 0^+$ *τότε* $\xi\to\xi_0$ *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi_0}=\frac{\lambda}{c}(\mu_1+\mu_q)<1$ *με την προϋπόθεση ότι η σχέση* (3.1.3) *ισχύει.*

Απόδειξη

Από την (3.4.1) παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\}=L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\hat{g}(s)+\hat{h}(s)\}$$

$$L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\}=L^{-1}\{\hat{\phi}(s)\hat{g}(s)\}+L^{-1}\{\hat{h}(s)\}\,.$$

Ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος αφορά σε συνέλιξη, οπότε

$$\phi(u)=\int_0^u \phi(u-x)g(x)dx+h(u)\,. \tag{3.4.11}$$

Θεωρούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$G(x)=\frac{\int_0^x g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}=(1+\xi)\int_0^x g(y)dy\,,$$

από την οποία έχουμε ότι

$$G(x)=(1+\xi)\int_0^x g(y)dy \Rightarrow \frac{dG(x)}{dx}=(1+\xi)g(x) \Rightarrow dG(x)=(1+\xi)g(x)dx\,.$$

Άρα η (3.4.11) γίνεται

$$\phi(u)=\frac{1}{1+\xi}\int_0^u \phi(u-x)dG(x)+h(u)$$

που είναι η εξίσωση (3.4.9). Για είναι αυτή ελλειμματική εξίσωση, θα πρέπει $\frac{1}{1+\xi}<1$.

Αρχικά θεωρούμε $\delta > 0$. Από τον ορισμό της $\hat{g}(s)$ που δίνεται στην Πρόταση 3.4, έχουμε

$$\frac{1}{1+\xi}=\int_0^\infty g(y)dy=\hat{g}(0) \qquad \left(\text{αφού } \hat{g}(s)=\int_0^\infty e^{-sy}g(y)dy\right)$$

$$=\left.\frac{\lambda T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)}\right|_{s=0}=\left.\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)}\cdot\frac{\hat{f}_2(s)-\hat{f}_2(r_2)}{r_2-s}\right|_{s=0}=\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}b_2}\cdot\frac{1-\hat{f}_2(r_2)}{r_2}.$$

Από το γεγονός ότι $\ell_2(r_2)=0$ έχουμε

$$\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\lambda-\delta+\lambda\,\hat{f}_2(r_2)=0 \text{ ή } \lambda-\lambda\,\hat{f}_2(r_2)=\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\delta$$

οπότε

$$\frac{1}{1+\xi}=\frac{\frac{\sigma^2}{2}r_2^2+cr_2-\delta}{\frac{\sigma^2}{2}b_2r_2}=\frac{\frac{\sigma^2}{2}r_2\left(r_2+\frac{2c}{\sigma^2}\right)-\delta}{\frac{\sigma^2}{2}b_2r_2}$$

$$=\frac{\frac{\sigma^2}{2}r_2b_2-\delta}{\frac{\sigma^2}{2}b_2r_2} \qquad \left(\text{αφού } b_2=r_2+\frac{2c}{\sigma^2}\right)$$

$$=1-\frac{\delta}{\frac{\sigma^2}{2}b_2r_2}<1, \qquad \text{για } \delta>0.$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου $\delta \to 0^+$. Είναι

$$\frac{1}{1+\xi_0}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{1+\xi}=\lim_{\delta\to 0^+}\left(1-\frac{\delta}{\frac{\sigma^2}{2}r_2(\delta)b_2(r_2(\delta))}\right)=1-\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\delta}{\frac{\sigma^2}{2}r_2(\delta)\left(r_2(\delta)+\frac{2c}{\sigma^2}\right)}$$

$$= 1 - \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\delta}{\frac{\sigma^2}{2} r_2^2(\delta) + c r_2(\delta)} .$$

Το όριο του κλάσματος καθώς *δ* τείνει στο μηδέν είναι $\frac{0}{0}$ αφού $r_2(0) = 0$, οπότε κάνουμε χρήση του κανόνα L' Hospital και βρίσκουμε

$$\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\sigma^2 r_2(\delta) r_2'(\delta) + c r_2'(\delta)} = 1 - \frac{1}{\sigma^2 r_2(0) r_2'(0) + c r_2'(0)} = 1 - \frac{1}{c r_2'(0)} . \tag{3.4.12}$$

Για να βρούμε το $r_2'(0)$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το $r_2(\delta)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\ell_2(s) = 0$. Έτσι, από την (3.3.10) έχουμε ότι

$$\ell_2(r_2(\delta)) = 0 \text{ ή } \frac{\sigma^2}{2} r_2^2(\delta) + c r_2(\delta) - \lambda - \delta + \lambda \hat{f}_2(r_2(\delta)) = 0$$

και με παραγώγιση ως προς *δ*, βρίσκουμε

$$\frac{d}{d\delta}\left[\frac{\sigma^2}{2} r_2^2(\delta) + c r_2(\delta) - \lambda - \delta + \lambda \hat{f}_2(r_2(\delta)) \right] = 0$$

ή

$$\frac{\sigma^2}{2} 2 r_2(\delta) r_2'(\delta) + c r_2'(\delta) - 1 + \lambda \hat{f}_2'(r_2(\delta)) r_2'(\delta) = 0 ,$$

από το οποίο προκύπτει

$$r_2'(\delta)[\sigma^2 r_2(\delta) + c + \lambda \hat{f}_2'(r_2(\delta))] = 1$$

ή

$$r_2'(\delta) = \frac{1}{\sigma^2 r_2(\delta) + c + \lambda \hat{f}_2'(r_2(\delta))} .$$

Παίρνοντας το όριο του $\delta \to 0^+$ και στα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης, βρίσκουμε

$$\lim_{\delta \to 0^+} r_2'(\delta) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\sigma^2 r_2(\delta) + c + \lambda \hat{f}_2'(r_2(\delta))}$$

$$r_2'(0) = \frac{1}{\sigma^2 r_2(0) + c + \lambda \hat{f}_2'(r_2(0))} = \frac{1}{c + \lambda \hat{f}_2'(0)}$$

αφού $r_2(0) = 0$. Αλλά

$$\hat{f}_2'(s) = \frac{d}{ds} E\left(e^{-s(X+Y)}\right) = E\left(-(X+Y)e^{-s(X+Y)}\right) ,$$

οπότε για $s = 0$,

$$\hat{f}_2'(0) = -E(X+Y) = -E(X) - E(Y) = -\mu_1 - \mu_q .$$

Άρα

$$r_2'(0)=\frac{1}{c-\lambda(\mu_1+\mu_q)}>0$$ εφ’ όσον ισχύει η συνθήκη (3.1.3).

Αντικαθιστώντας στην (3.4.12) παίρνουμε

$$\frac{1}{1+\xi_0}=1-\frac{1}{c\cdot\frac{1}{c-\lambda(\mu_1+\mu_q)}}=1-\frac{c-\lambda(\mu_1+\mu_q)}{c}=\frac{\lambda(\mu_1+\mu_q)}{c}<1$$

λόγω της συνθήκης της εξίσωσης (3.1.3).

□

Παρατήρηση 3.1. Θέτοντας $\theta=1$, δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο η κύρια και η by-claim απαίτηση συμβαίνουν ταυτόχρονα, τότε το μοντέλο που δίνεται στις εξισώσεις (3.3.1) και (3.3.2) έχει σαν υποπερίπτωση του το κλασικό Poisson μοντέλο κινδύνου, διαταραγμένο με διάχυση, και με απαιτήσεις $\{X_i+Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_2(x)$. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση (3.4.9) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$\phi(u)=\frac{1}{1+\xi}\int_0^u\phi(u-x)dG(x)+\frac{\lambda}{\frac{\sigma^2}{2}}(m_2*T_{r_2}w)(u)+e^{-b_2u}\,,\qquad u\geq 0,$$

η οποία είναι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασικό μοντέλο κινδύνου διαταραγμένο με διάχυση (δες Εξίσωση 2.10 στους Tsai and Willmot, (2002) και Εξίσωση 17 στους Gerber and Landry (1998)).

Στη συνέχεια ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση κατανομής $K(u)=1-\overline{K}(u)$, ως

$$K(u)=\frac{\xi}{1+\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n G^{*n}(u)\,,\quad u\geq 0,$$

όπου $G^{*n}(u)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής $G(u)$. Τότε προφανώς ισχύει ότι η συνάρτηση επιβίωσης $\overline{K}(u)$ δίνεται από την

$$\overline{K}(u)=\frac{\xi}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \overline{G}^{*n}(u)\,,\quad u\geq 0,$$

όπου $\overline{G}^{*n}(u)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης δεξιάς ουράς $\overline{G}(u)$.

Παρατήρηση 3.2. Παρατηρούμε ότι η $\overline{K}(u)$ είναι η δεξιά ουρά (συνάρτηση επιβίωσης) μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Συγκεκριμένα είναι

$$\overline{K}(u)=P(L_1+L_2+...+L_M>u)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $M \sim Ge(p)$ με $p = \frac{\xi}{1+\xi}$, δηλαδή, είναι

$$P(M = m) = \frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^m,\ m = 1, 2, ...,$$

και οι τυχαίες μεταβλητές L_i, $i = 1, 2, ...$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με τη συνάρτηση κατανομής $G(u)$.

Η λύση οποιασδήποτε συνάρτησης $\phi(u)$ που ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.2.19) της Πρότασης 3.5, μπορεί να δοθεί μέσω της $K(u)$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1 των Lin and Willmot (1999), όπως δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.6

Για $u \geq 0$*, η συνάρτηση Gerber-Shiu* $\phi(u)$ *που ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση* (3.4.9) *δίνεται από τη σχέση*

$$\phi(u) = \frac{1+\xi}{\xi}\int_0^u h(u-x)dK(x) + h(u). \tag{3.4.13}$$

Απόδειξη

Βλέπε Theorem 2.1 των Lin and Willmot (1999).

□

Από την Πρόταση 3.6 έπεται ότι για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu $\phi(u)$, αρκεί να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $K(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Εφ' όσον η $h(u)$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί για διάφορες επιλογές της συνάρτησης ποινής $w(x, y)$, η συνάρτηση $\phi(u)$ μπορεί να δοθεί αναλυτικά οποτεδήποτε η συνάρτηση κατανομής $K(u) = 1 - \overline{K}(u)$ είναι γνωστή. Αυτό συμβαίνει σε κάποιες περιπτώσεις, όπως όταν ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{\overline{K}}(s)$, της συνάρτησης δεξιάς ουράς $\overline{K}(u)$ είναι ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων ως προς s). Η ποσότητα $\hat{\overline{K}}(s)$ είναι μια ρητή συνάρτηση εάν και μόνο εάν ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_2(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, βρίσκοντας τους πόλους της (ρίζες παρονομαστή), και με χρήση τεχνικών ανάλυσης σε απλά κλάσματα, μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά η $\overline{K}(u)$ και κατ' επέκταση η $K(u)$.

Οι Lin and Wilmot (1999), στην εξίσωση (2.14) του Θεωρήματος 2.1 της εργασίας τους, έδειξαν ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής, $\overline{K}(u)$, ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\overline{K}(u)=\frac{1}{1+\xi}\int_0^u \overline{K}(u-x)dG(x)+\frac{1}{1+\xi}\overline{G}(u), \quad u\geq 0. \tag{3.4.14}$$

Είναι

$$G(x)=(1+\xi)\int_0^x g(y)dy \Rightarrow \frac{dG(x)}{dx}=(1+\xi)g(x)\Rightarrow dG(x)=(1+\xi)g(x)dx.$$

Θέτοντας

$$\overline{g}(x)=\int_x^\infty g(y)dy,$$

είναι

$$\overline{G}(x)=1-G(x)=1-\frac{\int_0^x g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}=\frac{\int_0^\infty g(y)dy-\int_0^x g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}=\frac{\int_x^\infty g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}=(1+\xi)\int_x^\infty g(y)dy=(1+\xi)\overline{g}(x).$$

Έτσι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.4.14) για το $\overline{K}(u)$ γίνεται

$$\overline{K}(u)=\int_0^u \overline{K}(u-x)g(x)dx+\overline{g}(x),\ u\geq 0.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης βρίσκουμε διαδοχικά

$$L\{\overline{K}(u)\}=L\left\{\int_0^u \overline{K}(u-x)g(x)dx+\overline{g}(u)\right\},$$

$$L\{\overline{K}(u)\}=L\left\{\int_0^u \overline{K}(u-x)g(x)dx\right\}+L\{\overline{g}(u)\},$$

$$\hat{\overline{K}}(s)=\hat{\overline{K}}(s)\overline{g}(s)+\hat{\overline{g}}(s),$$

και λύνοντας ως προς $\hat{\overline{K}}(s)$, παίρνουμε ότι

$$\hat{\overline{K}}(s)=\frac{\hat{\overline{g}}(s)}{1-\hat{g}(s)}. \tag{3.4.15}$$

Από την (3.4.3α) και τον ορισμό της $\hat{g}(s)$ έχουμε

$$\ell(s)=\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^2(s-r_i)(s-b_i)[1-\hat{g}(s)],$$

ισοδύναμα

$$1-\hat{g}(s)=\frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s-b_i)}.$$

Έτσι η (3.4.15) γίνεται

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\hat{\hat{g}}(s)\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}{\ell(s)}. \tag{3.4.16}$$

Από τις ιδιότητες του τελεστή Dickson-Hipp, έχουμε

$$\hat{\hat{g}}(s)=T_S\overline{g}(0)=T_ST_0g(0)=\frac{T_0g(0)-T_sg(0)}{s}=\frac{\hat{g}(0)-\hat{g}(s)}{s}.$$

Επειδή

$$\frac{1}{1+\xi}=\int_0^\infty g(y)dy=\hat{g}(0),$$

από την (3.4.3α) βρίσκουμε

$$\hat{g}(s)=1-\frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s-b_i)},$$

οπότε

$$\hat{\hat{g}}(s)=\frac{1}{s}\left[\frac{1}{1+\xi}-1+\frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}-\frac{\xi}{1+\xi}\right]=\frac{1}{s}\left[\frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}-\frac{\xi}{1+\xi}\right].$$

Αντικαθιστώντας στην (3.4.16), παίρνουμε

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{\ell(s)-\frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}{s\ell(s)}. \tag{3.4.17}$$

Αφού από την (3.3.8), έχουμε ότι

$$\ell(s)=\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta\right)^2+\lambda\,\hat{f}_2(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta\right),$$

είναι φανερό ότι στην περίπτωση που η $\hat{f}_2(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, τότε και η $\hat{\hat{K}}(s)$ μπορεί να δοθεί σαν πηλίκο πολυωνύμων ως προς *s*. Θεωρούμε την περίπτωση που τα μεγέθη των κύριων και των by-claim απαιτήσεων έχουν μετασχηματισμούς Laplace που είναι ρητές συναρτήσεις. Δηλαδή, οι $\hat{f}_1(s)$ και $\hat{q}(s)$ έχουν τη μορφή

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{1,k_1-1}(s)}{p_{1,k_1}(s)}, \text{ με } p_{1,k_1-1}(0) = p_{1,k_1}(0), \text{ και } \hat{q}(s) = \frac{p_{2,k_2-1}(s)}{p_{2,k_2}(s)}, \text{ με } p_{2,k_2-1}(0) = p_{2,k_2}(0), \qquad (3.4.18)$$

όπου, για i = 1, 2, τα $p_{i,k_i-1}(s)$ είναι πολυώνυμα το πολύ μέχρι βαθμού $k_i - 1$, τα $p_{i,k_i}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού k_i με πρωταρχικό συντελεστή (leading coefficient) 1 και με ρίζες με μόνο αρνητικά πραγματικά μέρη. Από τον ορισμό του $\hat{f}_2(s)$ έχουμε ότι

$$\hat{f}_2(s) = \hat{f}_1(s)\hat{q}(s) = \frac{p_{k-2}(s)}{p_k(s)}, \text{ με } p_{k-2}(0) = p_k(0), \; k = k_1 + k_2,$$

όπου, $p_{k-2}(s) = p_{1,k_1-1}(s)\, p_{2,k_2-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ μέχρι βαθμού $k-2$ και $p_k(s) = p_{1,k_1}(s) \cdot p_{2,k_2}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού k με πρωταρχικό συντελεστή 1.

Οι τυχαίες μεταβλητές των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας τους είναι ρητές συναρτήσεις της παραπάνω μορφής (3.4.18) θα λέμε ότι ανήκουν στην κλασματική ή ρητή οικογένεια κατανομών.

Η *κλασματική* ή *ρητή οικογένεια* κατανομών είναι μια ευρεία κλάση κατανομών που μεταξύ άλλων περιλαμβάνει τις παρακάτω κατανομές, οι οποίες χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην πράξη για τη μοντελοποίηση των μεγεθών ατομικών ζημιών σε χαρτοφυλάκια κινδύνων:

- τις Εκθετικές κατανομές,
- τις κατανομές Erlang,
- τις Coxian κατανομές,
- τις phase-type κατανομές

καθώς επίσης και τις μίξεις μεταξύ όλων των παραπάνω κατανομών.

Η επόμενη πρόταση δίνει μια έκφραση της συνάρτησης κατανομής $K(u)$ στην περίπτωση που τα μεγέθη των κύριων και των by-claim απαιτήσεων έχουν μετασχηματισμούς Laplace που ανήκουν στη ρητή οικογένεια κατανομών.

Πρόταση 3.7

Έστω οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{f}_1(s)$ και $\hat{q}(s)$ των πυκνοτήτων των κύριων και by-claim απαιτήσεων αντίστοιχα, είναι ρητές συναρτήσεις όπως ορίστηκαν στην (3.4.18). *Τότε*

$$\overline{K}(u) = 1 - K(u) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i e^{-R_i u}, \; u \geq 0, \qquad (3.4.19)$$

όπου

$$a_i = \frac{\prod_{i=1}^{k+1} R_i}{R_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{k+1} (R_j - R_i)} \cdot \frac{(b_2 - R_i)\, p_k(-R_i)}{b_2\, p_k(0)}, \qquad i = 1,\ldots,k+1,$$

και $-R_i$ *με* $\mathrm{Re}(R_i) > 0$, $i = 1,\ldots,k+1,$ είναι όλες *οι ρίζες,τις οποίες υποθέτουμεότι είναι διακεκριμένες μεταξύ τους, της εξίσωσης* $J_{k+2}(s) = 0,$ *με*

$$J_{k+2}(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta \right) p_k(s) + \lambda\, p_{k-2}(s),$$

$$p_k(s) = p_{1,k_1}(s) \cdot p_{2,k_2}(s), \quad p_{k-2}(s) = p_{1,k_1-1}(s) \cdot p_{2,k_2-1}(s).$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_2(s) = \hat{f}_1(s)\hat{q}(s)$ γράφεται στη μορφή

$$\hat{f}_2(s) = \frac{p_{k_2-2}(s)}{p_k(s)},$$

με $p_{k_2-2}(s)$, $p_k(s)$ είναι πολυώνυμα όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Τότε από το Λήμμα (3.1) η $\ell(s)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\ell(s) &= \ell_1(s)\left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\, \hat{f}_2(s) \right) \\
&= \ell_1(s)\left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda \frac{p_{k_2-2}(s)}{p_k(s)} \right) \\
&= \ell_1(s) \frac{\left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta \right) p_k(s) + \lambda\, p_{k_2-2}(s)}{p_k(s)} \\
&= \ell_1(s) \frac{J_{k+2}(s)}{p_k(s)},
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

όπου $\ell_1(s) = \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta$, όπως ορίστηκε στην απόδειξη του Λήμματος (3.1) και

$$J_{k+2}(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta \right) p_k(s) + \lambda p_{k-2}(s)$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $k+2$ και με πρωταρχικό συντελεστή $\frac{\sigma^2}{2}$.

Από το Λήμμα 3.1 έχουμε ότι η εξίσωση $\ell_1(s)=0$ έχει μια ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος την r_1 και μία ρίζα με αρνητικό πραγματικό μέρος την $-b_1=-\left(r_1+\frac{2c}{\sigma^2}\right)$. Έτσι η $\ell_1(s)$ παραγοντοποιείται ως

$$\ell_1(s)=\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta=\frac{\sigma^2}{2}(s-r_1)(s+b_1).$$

Επιπλέον, αφού η εξίσωση $\ell(s)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις r_1 και r_2, με θετικά πραγματικά μέρη, από την (3.4.20) είναι

$$\ell(s)=\frac{\sigma^2}{2}(s-r_1)(s+b_1)\frac{J_{k+2}(s)}{p_k(s)}, \tag{3.4.21}$$

και άρα η εξίσωση $J_{k+2}(s)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα, την r_2, με θετικό πραγματικό μέρος και $k+1$ ρίζες, έστω $-R_i$, με $\mathrm{Re}(R_i)>0$, $i=1,\ldots,k+1$. Οπότε, το $J_{k+2}(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$J_{k+2}(s)=\frac{\sigma^2}{2}(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j).$$

Αντικαθιστώντας στην (3.4.21) παίρνουμε

$$\ell(s)=\frac{\sigma^2}{2}(s-r_1)(s+b_1)\frac{\frac{\sigma^2}{2}(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)}{p_k(s)}. \tag{3.4.22}$$

Με βάση την (3.4.22), ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{K}(u)$, από την (3.4.17) γίνεται

$$\hat{\overline{K}}(s)=\frac{\frac{\sigma^2}{2}(s-r_1)(s+b_1)\frac{\frac{\sigma^2}{2}(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)}{p_k(s)}-\frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}{s\frac{\sigma^2}{2}(s-r_1)(s+b_1)\frac{\frac{\sigma^2}{2}(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)}{p_k(s)}}$$

$$=\frac{(s-r_1)(s+b_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)-\frac{\xi}{1+\xi}p_k(s)(s-r_1)(s+b_1)(s-r_2)(s+b_2)}{s(s-r_1)(s+b_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)-\frac{\xi}{1+\xi}p_k(s)(s+b_2)}{s\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)}$$

$$=\frac{Q_{k+1}(s)}{s\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_i)}$$

όπου

$$Q_{k+1}(s)=\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_j)-\frac{\xi}{1+\xi}(s+b_2)p_k(s).$$

Από το γεγονός ότι $\hat{\hat{K}}(s)<\infty$, για $s\geq 0$, καθώς επίσης και από το γεγονός ότι $s=0$ είναι ρίζα του παρονομαστή του $\hat{\hat{K}}(s)$, είναι φανερό ότι πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή, δηλαδή, $Q_{k+1}(0)=0$, από την οποία παίρνουμε

$$\prod_{i=1}^{k+1}R_i-\frac{\xi}{1+\xi}b_2p_k(0)=0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{\xi}{1+\xi}=\frac{\prod_{i=1}^{k+1}R_i}{b_2p_k(0)}.$$

Επιπλέον, η συνάρτηση $D_k(s)=\frac{1}{s}Q_{k+1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού *k*, και επομένως εφαρμόζοντας τεχνικές ανάλυσης σε απλά κλάσματα, υποθέτοντας ότι οι $-R_i$, i = 1,…, k + 1 είναι διακεκριμένες, παίρνουμε

$$\hat{\hat{K}}(s)=\frac{D_k(s)}{\prod_{i=1}^{k+1}(s+R_i)}=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i}{s+R_i}, \tag{3.4.23}$$

όπου

$$a_i=\frac{D_k(-R_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{k+1}(R_j-R_i)}=\frac{\prod_{i=1}^{k+1}R_i}{R_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{k+1}(R_j-R_i)}\cdot\frac{(b_2-R_i)p_k(-R_i)}{b_2p_k(0)}, \quad i = 1,\dots, k+1.$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (3.2.23), έχουμε

$$L^{-1}\left\{\hat{\hat{K}}(s)\right\}=L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i}{s+R_i}\right\},$$

$$\overline{K}(u)=\sum_{i=1}^{k+1}a_ie^{-R_iu},$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (3.1.19).

□

3.5 Αριθμητική εφαρμογή για εκθετικά κατανεμημένα μεγέθη απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή, θα εξειδικεύσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης, για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ στην περίπτωση που τα μεγέθη των κύριων και των by-claim απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Συγκεκριμένα, έστω

$$X_i \sim f_1(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 x},\ x>0,\ \alpha_1>0$$

με συνάρτηση κατανομής

$$F_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x},$$

μέση τιμή

$$\mu_1 = E(X_i) = \frac{1}{\alpha_1},$$

και αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace, $\hat{f}_1(s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + s}$ και $\hat{F}_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha_1 + s}$.

Επίσης, έστω

$$Y_i \sim q(x) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 x},\ x>0,\ \alpha_2>0,$$

με συνάρτηση κατανομής

$$Q(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x},$$

μέση τιμή

$$\mu_q = E(Y_i) = \frac{1}{\alpha_2}$$

και μετασχηματισμούς Laplace $\hat{q}(s) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + s}$ και $\hat{Q}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha_2 + s}$.

Θεωρούμε την περίπτωση $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και ότι η συνθήκη της εξίσωσης (3.1.3) ισχύει, δηλαδή $\alpha_1\alpha_2 c > \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$. Οι συναρτήσεις πυκνότητας f_2 και f_3 δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$f_2(x) = (f_1 * q)(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}(e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}),\ x > 0,$$

$$f_3(x) = (f_1 * q * q)(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left(e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}(1 - (\alpha_1 - \alpha_2)x\right),\ x > 0.$$

Έστω $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu $\varphi(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$E[\,\mathrm{I}(T < \infty \mid U(0) = u)] = P(T < \infty \mid U(0) = u) = \psi(u),$$

ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση Gerber-Shiu $\varphi_1(u)$ απλοποιείται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u)$.

Στην περίπτωση αυτή είναι $w_k = \overline{F}_k(u)$ με $\hat{w}_k(s) = \frac{1 - \hat{f}_k(s)}{s}$ για $k = 1, 2, 3$. Συγκεκριμένα, είναι

$$\hat{w}_1(s) = \frac{1}{s + \alpha_1}, \qquad \hat{w}_2(s) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}, \qquad \hat{w}_3(s) = \frac{2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 s + (s+\alpha_2)^2}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)^2}.$$

Από την Εξίσωση (3.3.5) βρίσκουμε

$$\hat{w}(s) = \lambda\left(\frac{\theta(\alpha_1+\alpha_2+s)}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)} + \frac{1-\theta}{s+\alpha_1}\right),$$

$$\hat{w}^*(s) = \lambda\left(\frac{\theta[2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1 s+(s+\alpha_2)^2]}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)^2} + \frac{(1-\theta)(\alpha_1+\alpha_2+s)]}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}\right).$$

Στη συνέχεια θέτουμε c = 2.5, λ = 1, σ = 1 α_1 = 1, α_2 = 2 και θ = 0.5. Τότε,

$$\hat{f}_2(s) = \hat{f}_1(s)\hat{q}(s) = \frac{1}{(s+1)}\cdot\frac{2}{(s+2)} = \frac{p_{k-2}(s)}{p_k(s)},$$

με $p_k(s) = p_2(s) = (s+1)(s+2)$, $p_{k-2}(s) = p_0(s) = 2$.

Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση $\ell(s) = 0$ της (3.3.8) γίνεται

$$\left(\frac{1}{2}s^2+2.5s-\lambda\right)J_4(s) = \left(\frac{1}{2}s^2+2.5s-1\right)\left[\left(\frac{1}{2}s^2+2.5s-1\right)(s+1)(s+2)+2\right] = 0,$$

η οποία έχει τις παρακάτω έξι ρίζες:

$$r_1 = 0.37228,\ -b_1 = -5.37228,\ r_2 = 0,\ -R_1 = -0.31867,\ -R_2 = -2.3579,\ -R_3 = -5.3234.$$

Είναι $\hat{w}(r_1)$ = 0.882304, $\hat{w}(r_2)$ = 1.25, $\hat{w}^*(r_1)$ = 1.16538, $\hat{w}^*(r_2)$ = 1.75,

και $b_2 = r_2 + \dfrac{2c}{\sigma^2} = 0 + \dfrac{2\cdot 2.5}{1} = 5$. Αντικαθιστώντας τα $\hat{w}(r_i)$ και $\hat{w}^*(r_i)$, i = 1, 2 στις (3.3.12), (3.3.13) βρίσκουμε

$$\phi'(0) = \psi'(0) = -2.17029 \text{ και } \phi_1'(0) = \psi_1'(0) = -1.82971.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε ότι

$$(m_1 * T_{r_1}\eta)(u) = 0.06205\, e^{-5.37228u} - 0.29076\, e^{-u} + 0.228713\, e^{-2u},$$

$$(m_2 * T_{r_2}\eta)(u) = 0.131188\, e^{-5u} - 0.436141\, e^{-u} + 0.304951\, e^{-2u},$$

$$A_1(u) = [3(u-1)e^u + u + 3)\, e^{-2u},$$

$$A_2(u) = [3(u-4)e^u + u + 4)\, e^{-2u},$$

και από την εξίσωση (3.4.10) προκύπτει

$$h(u) = 0.28548\, e^{-5u} - 0.24290\, e^{-2u} + 0.89538\, e^{-u} + 0.06205\, e^{-5.37228u},\ u \ge 0.$$

Η εξίσωση $J_4(s) = 0$ έχει ακριβώς τρεις αρνητικές ρίζες, συγκεκριμένα τις $-R_1$, $-R_2$, $-R_3$ που δόθηκαν παραπάνω. Από την Πρόταση 3.7 βρίσκουμε για τη συνάρτηση κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής $K(u)$,

$$K(u) = 1 - 0.65955\, e^{-0.31867u} + 0.03602\, e^{-2.3579u} + 0.02353\, e^{-5.3234u},\ u \ge 0.$$

Με βάση τις συναρτήσεις $h(u)$ και $K(u)$ από την (3.4.13) της Πρότασης 3.6 βρίσκουμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$,

$$\psi(u) = 0.65310\, e^{-0.31867u} - 0.03141\, e^{-2.3579u} - 0.07912\, e^{-5.3234u} + 0.45743\, e^{-5.37228u},\ u \ge 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΜΕ ΔΙΑΧΥΣΗ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΥΝ ΧΡΟΝΙΚΗ ΥΣΤΕΡΗΣΗ, ΥΠΟ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΑΤΩΦΛΙΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η διαδικασία πλεονάσματος του προηγούμενου κεφαλαίου, κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων. Η ενσωμάτωση ενός όρου διάχυσης σε μοντέλα κινδύνου με στρατηγικές μερίσματος κατωφλίου ή πολλαπλών κατωφλίων έχει μελετηθεί εκτεταμένα μεταξύ άλλων από τους Wan, (2007), Gao and Win (2008), Yang and Zhang (2009), Mitric (2010), Cheung and Landriault (2009).

Στην Παράγραφο 1.3 αναφέρθηκε η περίπτωση του κλασικού μοντέλου θεωρίας κινδύνων υπό την παρουσία στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων. Η διαδικασία πλεονάσματος του Κεφαλαίου 3 κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική, ορίζεται για $i=1,...,n+1$ ως

$$dU_{\boldsymbol{\beta}}(t) = c_i dt - dS(t) + \sigma_i dB(t), \quad \beta_{i-1} \le U_{\boldsymbol{\beta}}(t) \le \beta_i . \tag{4.1}$$

όπου $\{B(t);t\ge 0\}$ και $\{S(t);t\ge 0\}$ έχουν τον ίδιο ορισμό και υποθέσεις όπως στο Κεφάλαιο 3, με τη μόνη διαφορά ότι η παράμετρος μεταβλητότητας της διαδικασίας κίνησης Brown είναι τώρα σ_i, οποτεδήποτε η διαδικασία κινδύνου είναι ανάμεσα σε δύο διαδοχικά επίπεδα β_{i-1} και β_i, $i=1,...,n+1$.

Εάν $T_{\boldsymbol{\beta}} = \inf\{t\ge 0 : U_{\boldsymbol{\beta}}(t) < 0\}$ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων, τότε η συνάρτηση Gerbr-Shiu ορίζεται ως

$$\phi(u,\boldsymbol{\beta}) = E[e^{-\delta T_{\boldsymbol{\beta}}} w(U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}^-),|U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}})|) \mathrm{I}(T_\beta < \infty \,|\, U_{\boldsymbol{\beta}}(0)=u)] \tag{4.2}$$

$$= E[e^{-\delta T_{\boldsymbol{\beta}}} w(U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}^-),|U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}})|) \mathrm{I}(T_{\boldsymbol{\beta}} < \infty, U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}) < 0 | U_{\boldsymbol{\beta}}(0)=u)]$$
$$+ E[e^{-\delta T_{\boldsymbol{\beta}}} \mathrm{I}(T_{\boldsymbol{\beta}} < \infty, U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}) = 0 | U_{\boldsymbol{\beta}}(0)=u)],\ u\ge 0,$$

όπου $\phi(0,\boldsymbol{\beta})=1$ λόγω των τροχιών ταλάντωσης της διαδικασίας $U_{\boldsymbol{\beta}}(t)$. Επίσης το δ και $w(x,y)$ έχουν τον ίδιο ορισμό και ερμηνεία όπως στα προηγούμενα κεφάλαια, $U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}^-)$ το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, $|U_{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}})|$ είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και $T_{\boldsymbol{\beta}}^-$ είναι το αριστερό όριο του $T_{\boldsymbol{\beta}}$ για την τροποποιημένη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U_{\boldsymbol{\beta}}(t);t\ge 0\}$.

Όμοια, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$, $u\ge 0$, με $\phi_1(0,\boldsymbol{\beta})=1$, η οποία αντιστοιχεί στη βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος, τροποποιημένη κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων. Μπορεί να αποδειχθεί (Chadjiconstantinidis and Papaioannou, (2013)) ότι σε κάθε επίπεδο, οι $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες για $u\in(0,\infty)$.

4.1 Το σύστημα των κατά-τμήματα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu

Στην ενότητα αυτή αρχικά αναφέρουμε ότι οι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων το οποίο δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.1

Για $\beta_{i-1} < u < \beta_i$, $i = 1,...,n+1$, *οι συναρτήσεις Gerber-Shiu* $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ *και* $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$ *ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων:*

$$\frac{\sigma_i^2}{2}\phi''(u,\boldsymbol{\beta}) + c_i\phi'(u,\boldsymbol{\beta}) - (\lambda+\delta)\phi(u,\boldsymbol{\beta}) = -\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_2(x)dx + w_2(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_1(x)dx + w_1(u)\right), \qquad (4.1.1)$$

$$\frac{\sigma_i^2}{2}\phi_1''(u,\boldsymbol{\beta}) + c_i\phi_1'(u,\boldsymbol{\beta}) - (\lambda+\delta)\phi_1(u,\boldsymbol{\beta}) = -\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_3(x)dx + w_3(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_2(x)dx + w_2(u)\right), \qquad (4.1.2)$$

όπου

$$w_j(u) = \int_x^\infty w(u, y-u) f_j(y)dy = \int_0^\infty w(u,y) f_j(u+y)dy\,, \;\; j = 1,2,3.$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση από την Πρόταση 3.1, θέτοντας το σ με σ_i, το $\phi(u)$ με $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ και το $\phi_1(u)$ με $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$.

□

Στη στρατηγική αυτή που εξετάζουμε, των πολλαπλών κατωφλίων, η συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ εξαρτάται από το αν το αρχικό πλεόνασμα βρίσκεται ή όχι ανάμεσα στα επίπεδα β_{i-1} και β_i, για $i = 1,...,n+1$ και άρα η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής της Εξίσωσης (4.2), είναι μια τμηματική συνάρτηση όπου στο *i*-οστό επίπεδο συμβολίζεται με $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ για $\beta_{i-1} \le u < \beta_i$, $i = 1,...,n+1$. Επίσης με $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ συμβολίζεται η συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$ στο *i*-οστό επίπεδο

$\beta_{i-1} \le u < \beta_i$, $i = 1,...,n+1$. Σημειώνουμε εδώ, ότι οι συναρτήσεις $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις, αλλά υπάρχουν οι παράγωγοι δεξιά και αριστερά στα β_i.

Στην επόμενη πρόταση αναφέρεται ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$, $i = 1,...,n+1$, για κάποιες συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Πρόταση 4.2

Για $\beta_{i-1} < u < \beta_i$, $i = 1,..., n+1$, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ ικανοποιούν το επόμενο κατά-τμήματα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\sigma_i^2}{2}\phi_i''(u,\boldsymbol{\beta}) + c_i\phi_i'(u,\boldsymbol{\beta}) - (\lambda+\delta)\phi_i(u,\boldsymbol{\beta}) = -\lambda\theta\left(\int_0^{u-\beta_{i-1}}\phi_i(u-x,\boldsymbol{\beta})f_2(x)dx + \xi_{2,i}(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^{u-\beta_{i-1}}\phi_{1,i}(u-x,\boldsymbol{\beta})f_1(x)dx + \zeta_{1,i}(u)\right), \qquad (4.1.3)$$

$$\frac{\sigma_i^2}{2}\phi_{1,i}''(u,\boldsymbol{\beta}) + c_i\phi_{1,i}'(u,\boldsymbol{\beta}) - (\lambda+\delta)\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta}) = -\lambda\theta\left(\int_0^{u-\beta_{i-1}}\phi_i(u-x,\boldsymbol{\beta})f_3(x)dx + \xi_{3,i}(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^{u-\beta_{i-1}}\phi_{1,i}(u-x,\boldsymbol{\beta})f_2(x)dx + \zeta_{2,i}(u)\right), \qquad (4.1.4)$$

όπου

$$\xi_{j,i}(u) = \sum_{k=1}^{i-1}\int_{u-\beta_k}^{u-\beta_{k-1}}\phi_k(u-x,\boldsymbol{\beta})f_j(x)dx + w_j(u), \qquad j = 2,3,$$

$$\zeta_{j,i}(u) = \sum_{k=1}^{i-1}\int_{u-\beta_k}^{u-\upsilon_{k-1}}\phi_{1,k}(u-x,\boldsymbol{\beta})f_j(x)dx + w_j(u), \qquad j = 1,2,$$

$$w_j(u) = \int_x^{\infty} w(u, y-u)f_j(y)dy = \int_0^{\infty} w(u,y)f_j(u+y)dy\,,\ j = 1,2,3,$$

$$\phi(0,\boldsymbol{\beta}) = \phi_1(0,\boldsymbol{\beta}) = 1,\ \ \phi_1(0,\boldsymbol{\beta}) = \phi_{1,1}(0,\boldsymbol{\beta}) = 1,$$

$$\phi_{i-1}(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) = \phi_i(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}),\ \ \phi_{1,i-1}(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) = \phi_{1,i}(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}),\ \ i = 2,..., n+1,$$

$$\frac{\sigma_{i-1}^2}{2}\phi_{i-1}''(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) + c_{i-1}\phi_{i-1}'(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) = \frac{\sigma_i^2}{2}\phi_i''(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}) + c_i\phi_i'(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}),\ \ i = 2,..., n+1,$$

$$\frac{\sigma_{i-1}^2}{2}\phi_{1,i-1}''(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) + c_{i-1}\phi_{1,i-1}'(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) = \frac{\sigma_i^2}{2}\phi_{1,i}''(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}) + c_i\phi_{1,i}'(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}),\ \ i = 2,..., n+1,$$

$$\lim_{u\to\infty}\phi(u,\boldsymbol{\beta}) = \lim_{u\to\infty}\phi_{n+1}(u,\boldsymbol{\beta}) = 0,\ \ \lim_{u\to\infty}\phi_1(u,\boldsymbol{\beta}) = \lim_{u\to\infty}\phi_{1,n+1}(u,\boldsymbol{\beta}) = 0.$$

Απόδειξη

Για $\beta_{i-1} < u < \beta_i$, $i=1,...,n+1$, το σύστημα των εξισώσεων (4.1.1) και (4.1.2) μπορεί να γραφεί στη μορφή των (4.1.3) και (4.1.4) αντίστοιχα, με χρήση της σχέσης

$$\int_0^u \phi(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_j(x)dx = \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_i(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_j(x)dx + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{u-\beta_k}^{u-\beta_{k-1}} \phi_k(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_j(x)dx$$

για $j=2,3$, και της σχέσης

$$\int_0^u \phi_1(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_j(x)dx = \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_{1,i}(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_j(x)dx + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{u-\beta_k}^{u-\upsilon_{k-1}} \phi_{1,k}(u-x,\boldsymbol{\beta}) f_j(x)dx$$

για $j=1,2$.

Για τις συνοριακές συνθήκες, αρχικά έχουμε ότι $\phi_1(0,\boldsymbol{\beta}) = \phi_{1,1}(0,\boldsymbol{\beta}) = 1$ εξαιτίας των τροχιών ταλάντωσης της $U_{\boldsymbol{\beta}}(t)$. Από τη μορφή του συστήματος των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.3) και (4.1.4) βλέπουμε ότι $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ είναι παντού συνεχείς, ακόμη και στα φαινομενικά σημεία ασυνέχειας. Αυτό έχει σαν συνέπεια, να ισχύουν οι αρχικές συνθήκες

$$\lim_{u\to\beta_i^-} \phi(u,\boldsymbol{\beta}) = \lim_{u\to\beta_i^+} \phi(u,\boldsymbol{\beta}),\ \lim_{u\to\beta_i^-} \phi_1(u,\boldsymbol{\beta}) = \lim_{u\to\beta_i^+} \phi_1(u,\boldsymbol{\beta}),\ \text{για } i=1,...,n+1.$$

Από το παραπάνω σετ των αρχικών συνθηκών συνεπάγεται επίσης ότι

$$\phi_{i-1}(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) = \phi_i(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}) \text{ και } \phi_{1,i-1}(\beta_{i-1}^-,\boldsymbol{\beta}) = \phi_{1,i}(\beta_{i-1}^+,\boldsymbol{\beta}),\ \text{για } i=2,...,n+1.$$

Εντούτοις, στο σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.3) και (4.1.4) επιλέγουμε ότι $\beta_{i-1} < u < \beta_i$, $i=1,...,n+1$ και όχι $\beta_{i-1} \le u < \beta_i$, για $i=1,...,n+1$, αφού όπως θα φανεί στις παρακάτω εξισώσεις, οι $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ δεν είναι παραγωγίσιμες στα β_i αλλά υπάρχουν μόνο οι αριστερές και δεξιές παράγωγοι. Πράγματι, παίρνοντας τα όρια για $u \to \beta_{i-1}^-$ για $i=2,...,n+1$ στις εξισώσεις (4.1.3) και (4.1.4) και έχοντας υπ' όψιν τη συνέχεια των συναρτήσεων $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ στα β_i, προκύπτει ότι

$$\frac{\sigma_{i-1}^2}{2}\phi_{i-1}''(\beta_{i-1}^-) + c_{i-1}\phi_{i-1}'(\beta_{i-1}^-) = \frac{\sigma_i^2}{2}\phi_i''(\beta_{i-1}^+) + c_i\phi_i'(\beta_{i-1}^+),$$

$$\frac{\sigma_{i-1}^2}{2}\phi_{1,i-1}''(\beta_{i-1}^-) + c_{i-1}\phi_{1,i-1}'(\beta_{i-1}^-) = \frac{\sigma_i^2}{2}\phi_{1,i}''(\beta_{i-1}^+) + c_i\phi_{1,i}'(\beta_{i-1}^+).$$

Τέλος, από τον ορισμό των συναρτήσεων Gerber-Shiu $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$, και οι δύο συναρτήσεις πρέπει καθώς το $u\to\infty$, να είναι μηδέν, και έτσι εξηγείται το τελευταίο σετ των συνθηκών της πρότασης.

□

Παρατήρηση 4.1. Στην ειδική περίπτωση όπου $\theta = 1$, (δες επίσης Παρατήρηση 3.1), η ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.1.3) απλοποιείται στην τμηματική ολοκληροδιαφορική εξίσωση (2.3) των Yang and Zhang, (2009), για το διαταραγμένο με διάχυση Poisson μοντέλο κινδύνου κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών επίπεδων, με μεγέθη απαιτήσεων $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ που έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής $F_2(x)$.

Παρατήρηση 4.2. Για την επίλυση του συστήματος των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.1) και (4.1.2), ώστε να προκύψουν αναλυτικές λύσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu, η συνήθης προσέγγιση (δες Yang and Zhang, (2009), για το διαταραγμένο με διάχυση Poisson μοντέλο κινδύνου κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών επίπεδων, και τις ανάλογες εργασίες που αναφέρονται εκεί), είναι να βρεθεί μια μερική λύση του συστήματος των μη-ομογενών ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, με το να χαλαρώσουμε τους περιορισμούς από $\beta_{i-1} \le u < \beta_i$ σε $\beta_{i-1} \le u$ και επίσης να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις για το σχετιζόμενο, με τις εξισώσεις (4.1.1) και (4.1.2), ομογενές σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων. Αλλά όπως μπορεί να δειχθεί, το τελευταίο ομογενές σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων, λαμβάνοντας υπ’ όψιν το Λήμμα 3.1, δεν έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Έτσι, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να δώσει αναλυτική λύση στο σύστημα των εξισώσεων (4.1.1) και (4.1.2) ή του ισοδύναμου συστήματος των (4.1.3) και (4.1.4), και θα πρέπει να ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση. Αυτό ισχύει και για το διαταραγμένο με διάχυση Poisson μοντέλο κινδύνου, στο οποίο οι απαιτήσεις δεν εμφανίζουν χρονική υστέρηση, και θεωρείται η στρατηγική σταθερού μερίσματος, αλλά και γενικότερα όταν θεωρείται στρατηγική πολλαπλών κατωφλίων. Στην περίπτωση αυτή, οι Mitric et al. (2010) πρότειναν μια νέα προσέγγιση για να παραχθεί η γενική λύση ενός συγκεκριμένου συστήματος ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ώστε να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu στο διαταραγμένο με διάχυση μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson κάτω από μια στρατηγική πολλαπλών κατωφλίων. Με αφορμή την εργασία των Mitric et al. (2010) μελετάμε μια νέα προσέγγιση η οποία μετασχηματίζει το μη-ομογενές σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.1) και (4.1.2) ή το ισοδύναμό του που δίνεται στις (4.1.3) και (4.1.4), σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Volterra δεύτερου είδους, το οποίο θα λυθεί με χρήση μετασχηματισμών Laplace. Η λύση του συστήματος αυτού παρέχει αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu και είναι συνάρτηση του τρέχοντος επιπέδου πλεονάσματος.

4.2 Σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων και δίνουμε τη λύση του. Αυτό θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να δώσουμε αναλυτικές εκφράσεις της λύσης του συστήματος των εξισώσεων (4.1.3) και (4.1.4) της Πρότασης 4.2.

Για $u \geq \beta$, έστω $\Phi(u)$ και $\Phi_1(u)$ συναρτήσεις που ικανοποιούν το επόμενο μη-ομογενές σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\sigma^2}{2}\Phi''(u) + c\Phi'(u) - (\lambda+\delta)\Phi(u) = -\lambda\theta\left(\int_0^{u-\beta}\Phi(u-y)f_2(y)dy + \xi_2(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^{u-\beta}\Phi_1(u-y)f_1(y)dy + \zeta_1(u)\right), \tag{4.2.1}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\Phi_1''(u) + c\Phi_1'(u) - (\lambda+\delta)\Phi_1(u) = -\lambda\theta\left(\int_0^{u-\beta}\Phi(u-y)f_3(y)dy + \xi_3(u)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^{u-\beta}\Phi_1(u-y)f_2(y)dy + \zeta_2(u)\right), \tag{4.2.2}$$

όπου $\xi_i(u)$, i = 2, 3 και $\zeta_i(u)$, i = 1, 2, είναι κάποιες αυθαίρετες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που αναπαριστούν τους μη-ομογενείς όρους του παραπάνω συστήματος.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε επίπεδο, το σύστημα των εξισώσεων (4.1.1)-(4.1.2) έχει μετασχηματιστεί μέσω του ισοδύναμου συστήματος των (4.1.3)-(4.1.4) σε ένα σύστημα εξισώσεων του τύπου των (4.2.1)-(4.2.2), αφού η μορφή του παραπάνω μη-ομογενούς συστήματος ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, σχετίζεται με το σύστημα της Πρότασης 4.2 με τη διαφορά ότι ο δείκτης i και τα πάνω φράγματα των περιορισμών του συστήματος (4.1.3)-(4.1.4) έχουν αφαιρεθεί. Στη συνέχεια της εργασίας, θα δείξουμε πως αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί με έναν αναδρομικό τρόπο.

Το σύστημα των εξισώσεων (4.2.1)-(4.2.2) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα παρόμοιο στο οποίο έχει εξαλειφθεί η παράμετρος β. Αυτό γίνεται, θεωρώντας την αλλαγή μεταβλητής $u-\beta = x$, επίσης $\Lambda(x) = \Phi(u)$ και $\Lambda_1(x) = \Phi_1(u)$ καθώς και $\xi_{j,\beta}(x) = \xi_j(x+\beta)$, j = 2, 3 και $\zeta_{j,\beta}(x) = \zeta_j(x+\beta)$, j = 1, 2. Τότε, το μη-ομογενές σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.2.1)-(4.2.2), για $x \geq 0$ γίνεται

$$\frac{\sigma^2}{2}\Lambda''(x) + c\Lambda'(x) - (\lambda+\delta)\Lambda(x) = -\lambda\theta\left(\int_0^{x}\Lambda(x-y)f_2(y)dy + \xi_{2,\beta}(x)\right)$$
$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^{x}\Lambda_1(x-y)f_1(y)dy + \zeta_{1,\beta}(x)\right), \tag{4.2.3}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\Lambda_1''(x)+c\Lambda_1'(x)-(\lambda+\delta)\Lambda_1(x)=-\lambda\theta\left(\int_0^x \Lambda(x-y)f_3(y)dy+\xi_{3,\beta}(x)\right)$$

$$-\lambda(1-\theta)\left(\int_0^x \Lambda_1(x-y)f_2(y)dy+\zeta_{2,\beta}(x)\right). \qquad (4.2.4)$$

□

Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε το σύστημα των (4.2.3)-(4.2.4) σε ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους, το οποίο θα λυθεί με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace.

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra πρώτου και δευτέρου είδους.

Ορισμός 4.1

Μια γραμμική *ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους* είναι μια εξίσωση της μορφής

$$u(t)=g(t)+\int_0^t K(t,s)u(s)ds\,,\ t\in \mathrm{I}\,,$$

όπου $g(t)$ και $K(t,s)$ είναι δοσμένες συναρτήσεις, και $u(t)$ η άγνωστη συνάρτηση. Η συνάρτηση $K(t,s)$ καλείται πυρήνας (kernel) της εξίσωσης.

Μια γραμμική *ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους* είναι μια εξίσωση της μορφής

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds=g(t)\,,\ t\in \mathrm{I}\,.$$

Εδώ η άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ εμφανίζεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα.

Το επόμενο λήμμα θα μας φανεί χρήσιμο στην ανάλυση που θα ακολουθήσει και δίνεται χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 4.1

Για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$*, ισχύει ο παρακάτω αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:*

$$L^{-1}\left\{\frac{s^n}{(s-r_1)\prod_{i=1}^{k}(s+b_i)}\right\}=\begin{cases}\dfrac{r_1^n e^{r_1x}}{\pi(r_1)}+\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^{i-n+1}b_i^n e^{-b_ix}}{(r_1-r_2)(r_1-b_i)}, & k=2, n=0,1,\\[2ex] \dfrac{1}{b_1+r_1}(r_1e^{r_1x}+b_1e^{-b_1x}), & n=1, k=1,\end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^n}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}\right\}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(r_1-r_2)\pi(r_i)}\left(r_i^n(-1)^{i+1}e^{r_i x}+(-1)^{i+n-2}b_i^n e^{-b_i x}\right),\qquad n=2,3.$$

με $\pi(s)=\prod_{i=1}^{2}(s+b_k)$.

Επίσης για δύο ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις $m_1(x)$ και $m_2(x)$ *ισχύει ότι*

$$L^{-1}\left\{\frac{\hat{m}_1(s)\hat{m}_2(s)}{s+a}\right\}=\int_0^x e^{-a(x-y)}(m_1*m_2)(y)dy,\quad a\in\mathbf{R}.$$

*όπου * είναι ο τελεστής της συνέλιξης.*

Στη συνέχεια δίνονται αναλυτικές εκφράσεις για τη λύση του συστήματος των μη-ομογενών ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.2.3)-(4.2.4).

Πρόταση 4.3

Για $x\geq 0$, *η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που δίνεται στις* $(4.2.3)-(4.2.4)$ *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$\Lambda(x)=\Lambda(0)+x\,\Lambda'(0)+\int_0^x(x-t)l(t)dt, \tag{4.2.5α}$$

$$\Lambda_1(x)=\Lambda_1(0)+x\,\Lambda_1'(0)+\int_0^x(x-t)l_1(t)dt, \tag{4.2.5β}$$

με

$$l(x)=\frac{1+\xi}{\xi}\int_0^x\upsilon(x-t)dK(t)+\upsilon(x), \tag{4.2.6α}$$

$$l_1(x)=\frac{1+\xi}{\xi}\int_0^x\upsilon_1(x-t)dK(t)+\upsilon_1(x), \tag{4.2.6β}$$

ξ *και* $K(u)=1-\overline{K}(u)$ *δίνονται στην Πρόταση* 3.5 *και την Εξίσωση* (3.4.13) *αντίστοιχα, και*

$$\upsilon(x)=\frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}\left\{\frac{\sigma^2}{2}H_1\big(x,\Lambda(0),\Lambda'(0)\big)-\lambda\int_0^x H_2\big(x,y,\Lambda(0),\Lambda'(0)\big)T_{r_2}f_2(y)dy\right.$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}\lambda\int_0^x[\theta H_3\big(x,y,\Lambda(0),\Lambda'(0)\big)f_2(y)+(1-\theta)H_3\big(x,y,\Lambda_1(0),\Lambda_1'(0)\big)f_1(y)]dy$$

$$+\lambda\int_0^x H_4(x,y)[\theta(f_2*w_A)(y)+(1-\theta)(f_1*w_B)(y)]dy-\frac{\sigma^2}{2}w_A(x)-\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{r_1+b_1}$$

$$\left.\times\int_0^x\left(r_1^2e^{r_1(x-y)}-b_1^2e^{-b_1(x-y)}\right)w_A(y)dy+\lambda\int_0^x H_5(x,y)(T_{r_2}f_2*w_A)(y)dy\right\},\qquad(4.2.7)$$

$$\upsilon_1(x)=\frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}\left\{\frac{\sigma^2}{2}H_1\big(x,\Lambda_1(0),\Lambda_1'(0)\big)-\lambda\int_0^x H_2\big(x,y,\Lambda_1(0),\Lambda_1'(0)\big)T_{r_2}f_2(y)dy\right.$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}\lambda\int_0^x[(1-\theta)H_3\big(x,y,\Lambda_1(0),\Lambda_1'(0)\big)f_2(y)+\theta H_3\big(x,y,\Lambda(0),\Lambda'(0)\big)f_3(y)]dy$$

$$+\lambda\int_0^x H_4(x,y)[(1-\theta)(f_2*w_B)(y)+\theta(f_3*w_A)(y)]dy-\frac{\sigma^2}{2}w_B(x)-\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{r_1+b_1}$$

$$\left.\times\int_0^x\left(r_1^2e^{r_1(x-y)}-b_1^2e^{-b_1(x-y)}\right)w_B(y)dy+\lambda\int_0^x H_5(x,y)(T_{r_2}f_2*w_B)(y)dy\right\},\qquad(4.2.8)$$

όπου

$$H_1(x,z_1,z_2)=(\lambda+\delta)z_2\,\frac{e^{r_1x}-e^{-b_1x}}{b_1+r_1}+\frac{r_1e^{r_1x}+b_1e^{-b_1x}}{b_1+r_1}[(\lambda+\delta)z_1+cz_2],$$

$$H_2(x,y,z_1,z_2)=[r_1(\lambda+\delta)z_1+(\lambda+\delta-cr_1)z_2]\frac{e^{r_1(x-y)}}{\pi(r_1)}+\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i e^{-b_i(x-y)}}{(r_1-r_2)(r_1+b_i)}$$
$$\times[b_i(\lambda+\delta)z_1-(cb_i+\lambda+\delta)z_2],$$

$$H_3(x,y,z_1,z_2)=\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i}{(r_1-r_2)\pi(r_i)}\left(r_i^2e^{r_i(x-y)}(b_iz_1+z_2)+b_i^2e^{-b_i(x-y)}(r_iz_1+z_2)\right),$$

$$H_4(x,y)=\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i}{(r_1-r_2)\pi(r_i)}\left(-r_i^2e^{r_i(x-y)}+b_i^2e^{-b_i(x-y)}\right),$$

$$H_5(x,y)=\frac{r_i^2e^{r_i(x-y)}}{\pi(r_1)}-\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i b_i^2e^{-b_i(x-y)}}{(r_1-r_2)(r_1+b_i)},$$

με

$$\pi(s)=\prod_{i=1}^{2}(s+b_k),$$

$$w_A(x)=\lambda[\theta\,\xi_{2,\beta}(x)+(1-\theta)\,\zeta_{1,\beta}(x)],$$

$$w_B(x)=\lambda[\theta\,\xi_{3,\beta}(x)+(1-\theta)\,\zeta_{2,\beta}(x)].$$

Απόδειξη

Έστω $l(x)=\Lambda''(x)$ και $l_1(x)=\Lambda_1''(x)$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε

$$\Lambda(x)=\Lambda(0)+\int_0^x \Lambda'(t)dt=\Lambda(0)+\Lambda'(0)x+\int_0^x (x-t)l(t)dt,$$

$$\Lambda_1(x)=\Lambda_1(0)+\int_0^x \Lambda_1'(t)dt=\Lambda_1(0)+\Lambda_1'(0)x+\int_0^x (x-t)l_1(t)dt,$$

οπότε η εξίσωση (4.2.5) επαληθεύτηκε.

Είναι $\Lambda'(x)=\Lambda'(0)+\int_0^x l(t)dt$ και $\Lambda_1'(x)=\Lambda_1'(0)+\int_0^x l(t)dt$.

Εισάγοντας όλες τις παραπάνω εξισώσεις στις (4.2.3) και (4.2.4) βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\frac{\sigma^2}{2}l(x)+c\left(\Lambda'(0)+\int_0^x l(s)ds\right)-(\lambda+\delta)\left(\Lambda(0)+x\Lambda'(0)+\int_0^x (x-s)\,l(s)ds\right)$$

$$=-\lambda\theta\left[\int_0^x\left(\Lambda(0)+(x-y)\Lambda'(0)+\int_0^{x-y}(x-y-s)l(s)ds\right)f_2(y)dy+\xi_{2,\beta}(x)\right]$$

$$-\lambda(1-\theta)\left[\int_0^x\left(\Lambda_1(0)+(x-y)\Lambda_1'(0)+\int_0^{x-y}(x-y-s)l_1(s)ds\right)f_1(y)dy+\zeta_{1,\beta}(s)\right],$$

και

$$\frac{\sigma^2}{2}l_1(x)+c\left(\Lambda_1'(0)+\int_0^x l_1(s)ds\right)-(\lambda+\delta)\left(\Lambda_1(0)+x\Lambda_1'(0)+\int_0^x (x-s)l_1(s)ds\right)$$

$$=-\lambda\theta\left[\int_0^x\left(\Lambda(0)(x-y)\Lambda'(0)+\int_0^{x-y}(x-y-s)l(s)ds\right)f_3(y)dy+\xi_{3,\beta}(x)\right]$$

$$-\lambda(1-\theta)\left[\int_0^x\left(\Lambda_1(0)+(x-y)\Lambda_1'(0)+\int_0^{x-y}(x-y-s)l_1(s)ds\right)f_2(y)dy+\zeta_{2,\beta}(s)\right].$$

από τις οποίες με αναδιάταξη των όρων καταλήγουν στις εξισώσεις

$$\frac{\sigma^2}{2}l(x)+[c-(\lambda+\delta)x]\Lambda'(0)-(\lambda+\delta)\Lambda(0)+\int_0^x[c-(\lambda+\delta)(x-s)]l(s)ds$$

$$=-\lambda\theta\int_0^x[(x-y)\Lambda'(0)+\Lambda(0)]\,f_2(y)dy-\lambda\theta\int_0^x\int_0^{x-y}(x-y-s)l(s)ds\,f_2(y)dy$$

$$-\lambda(1-\theta)\int_0^x[(x-y)\Lambda_1'(0)+\Lambda_1(0)]\,f_1(y)dy-\lambda(1-\theta)\int_0^x\int_0^{x-y}(x-y-s)l_1(s)ds\,f_1(y)dy$$

$$-\lambda\theta\,\xi_{2,\beta}(x)-\lambda(1-\theta)\,\zeta_{1,\beta}(s),$$

και

$$\frac{\sigma^2}{2}l_1(x)+[c-(\lambda+\delta)x]\Lambda_1'(0)-(\lambda+\delta)\Lambda_1(0)+\int_0^x[c-(\lambda+\delta)(x-s)]l_1(s)ds$$

$$=-\lambda\theta\int_0^x[(x-y)\Lambda'(0)+\Lambda(0)]\,f_3(y)dy-\lambda\theta\int_0^x\int_0^{x-y}(x-y-s)l(s)ds\,f_3(y)dy$$

$$-\lambda(1-\theta)\int_0^x[(x-y)\Lambda_1'(0)+\Lambda_1(0)]\,f_2(y)dy-\lambda(1-\theta)\int_0^x\int_0^{x-y}(x-y-s)l_1(s)ds\,f_2(y)dy$$

$$-\lambda\theta\,\xi_{3,\beta}(x)-\lambda(1-\theta)\,\zeta_{2,\beta}(s).$$

Με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης έχουμε $\int_0^x\int_0^{x-y}dsdy=\int_0^x\int_0^{x-s}dyds$, οπότε μετά από πράξεις οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ισοδύναμα σαν Volterra τύπου ολοκληρωτικές εξισώσεις δευτέρου είδους, δηλαδή,

$$l(x)-\int_0^x\kappa(x-s)l(s)ds+\int_0^x\varphi(x-s)l_1(s)ds=\gamma(x), \tag{4.2.9}$$

$$l_1(x)-\int_0^x\kappa_1(x-s)l_1(s)ds+\int_0^x\varphi_1(x-s)l(s)ds=\gamma_1(x), \tag{4.2.10}$$

με πυρήνες

$$\kappa(x)=\frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}}\left[(\lambda+\delta)x-c-\lambda\theta\int_0^x(x-s)\,f_2(s)ds\right], \tag{4.2.11}$$

$$\kappa_1(x)=\frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}}\left[(\lambda+\delta)x-c-\lambda(1-\theta)\int_0^x(x-s)\,f_2(s)ds\right], \tag{4.2.12}$$

και

$$\varphi(x)=\frac{\lambda(1-\theta)}{\frac{\sigma^2}{2}}\int_0^x(x-y)\,f_2(y)dy, \tag{4.2.13}$$

$$\varphi_1(x)=\frac{\lambda\theta}{\frac{\sigma^2}{2}}\int_0^x(x-y)\,f_3(y)dy, \tag{4.2.14}$$

$$\gamma(x)=\frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}}\left[[(\lambda+\delta)x-c]\Lambda'(0)+(\lambda+\delta)\Lambda(0)-\lambda\theta\int_0^x[(x-y)\Lambda'(0)+\Lambda(0)]f_2(y)dy\right.$$

$$\left.-\lambda(1-\theta)\int_0^x[(x-y)\Lambda_1'(0)+\Lambda_1(0)]f_1(y)dy-w_A(x)\right], \tag{4.2.15}$$

$$\gamma_1(x)=\frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}}\left[[(\lambda+\delta)x-c]\Lambda_1'(0)+(\lambda+\delta)\Lambda_1(0)-\lambda\theta\int_0^x[(x-y)\Lambda'(0)+\Lambda(0)]f_3(y)dy\right.$$

$$\left.-\lambda(1-\theta)\int_0^x[(x-y)\Lambda_1'(0)+\Lambda_1(0)]f_2(y)dy-w_B(x)\right]. \tag{4.2.16}$$

Στη συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων τύπου Volterra (4.2.9)-(4.2.10) έχει λύση της μορφής των εξισώσεων (4.2.6α)-(4.2.6β). Έστω, για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$, οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{l}(s)$, $\hat{l}_1(s)$, $\hat{\kappa}(s)$, $\hat{\kappa}_1(s)$, $\hat{\gamma}(s)$, $\hat{\gamma}_1(s)$, $\hat{\phi}(s)$, $\hat{\phi}_1(s)$ των $l(x)$, $l_1(x)$, $\kappa(x)$, $\kappa_1(x)$, $\gamma(x)$, $\gamma_1(x)$, $\phi(x)$, $\phi_1(x)$ αντίστοιχα. Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace στις εξισώσεις (4.2.9) και (4.2.10), είναι διαδοχικά

$$L\left\{l(x)-\int_0^x\kappa(x-s)l(s)ds+\int_0^x\varphi(x-s)l_1(s)ds\right\}=L\{\gamma(x)\}$$

$$L\{l(x)\}-L\left\{\int_0^x\kappa(x-s)l(s)ds\right\}+L\left\{\int_0^x\varphi(x-s)l_1(s)ds\right\}=L\{\gamma(x)\}$$

$$\hat{l}(s)-\hat{\kappa}(s)\hat{l}(s)+\hat{\phi}(s)\hat{l}_1(s)=\hat{\gamma}(s)$$

$$[1-\hat{\kappa}(s)]\hat{l}(s)+\hat{\phi}(s)\hat{l}_1(s)=\hat{\gamma}(s) \tag{4.2.17}$$

και

$$L\left\{l_1(x)-\int_0^x\kappa_1(x-s)l_1(s)ds+\int_0^x\varphi_1(x-s)l(s)ds\right\}=L\{\gamma_1(x)\}$$

$$L\{l_1(x)\}-L\left\{\int_0^x\kappa_1(x-s)l_1(s)ds\right\}+L\left\{\int_0^x\varphi_1(x-s)l(s)ds\right\}=L\{\gamma_1(x)\}$$

$$\hat{l}_1(s)-\hat{\kappa}_1(s)\hat{l}_1(s)+\hat{\phi}_1(s)\hat{l}(s)=\hat{\gamma}_1(s)$$

$$\hat{\phi}_1(s)\hat{l}(s)+[1-\hat{\kappa}_1(s)]\hat{l}_1(s)=\hat{\gamma}_1(s). \tag{4.2.18}$$

Λύνοντας με τη μέθοδο οριζουσών το σύστημα των (4.2.17)-(4.2.18) ως προς $\hat{l}(s)$ και $\hat{l}_1(s)$ βρίσκουμε

$$\hat{l}(s) = \frac{[1-\hat{\kappa}_1(s)]\hat{\gamma}(s) - \hat{\phi}(s)\hat{\gamma}_1(s)}{[1-\hat{\kappa}(s)][1-\hat{\kappa}_1(s)] - \hat{\phi}(s)\hat{\phi}_1(s)}, \tag{4.2.19}$$

$$\hat{l}_1(s) = \frac{[1-\hat{\kappa}(s)]\hat{\gamma}_1(s) - \hat{\phi}_1(s)\hat{\gamma}(s)}{[1-\hat{\kappa}(s)][1-\hat{\kappa}_1(s)] - \hat{\phi}(s)\hat{\phi}_1(s)}. \tag{4.2.20}$$

Όμοια, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace των κ, κ_1, ϕ, ϕ_1, γ, γ_1, αντίστοιχα από τις (4.2.11)-(4.2.16) μετά από πράξεις καταλήγουμε

$$1-\hat{\kappa}(s) = \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\ \hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2},$$

$$1-\hat{\kappa}_1(s) = \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\ \hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2}$$

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\lambda(1-\theta)\ \hat{f}_1(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2},$$

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{\lambda\theta\ \hat{f}_3(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2},$$

$$\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}s^2}\Big(s[\lambda + \delta - \lambda\theta\ \hat{f}_2(s)]\Lambda(0) - [cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\ \hat{f}_2(s)]\Lambda'(0) - \lambda(1-\theta)s\ \hat{f}_1(s)\Lambda_1(0)$$
$$- \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(s)\Lambda_1'(0) - s^2\hat{w}_A(s)\Big),$$

$$\hat{\gamma}_1(s) = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}s^2}\Big(s[\lambda + \delta - \lambda(1-\theta)\ \hat{f}_2(s)]\Lambda_1(0) - [cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\ \hat{f}_2(s)]\Lambda'(0) - \lambda\theta\, s\ \hat{f}_3(s)\Lambda(0)$$
$$- \lambda\theta\ \hat{f}_3(s)\Lambda'(0) - s^2\hat{w}_B(s)\Big).$$

Με βάση τις παραπάνω εκφράσεις και λαμβάνοντας υπ' όψιν την έκφραση της $\ell(s) = 0$ από το Λήμμα 3.1, ο κοινός παρονομαστής των (4.2.19)-(4.2.20), γίνεται

$$[1-\hat{\kappa}(s)][1-\hat{\kappa}_1(s)] - \hat{\phi}(s)\hat{\phi}_1(s)$$
$$= \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\ \hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2} \cdot \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\ \hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2} - \frac{\lambda(1-\theta)\ \hat{f}_1(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2} \cdot \frac{\lambda\theta\ \hat{f}_3(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2}$$

$$
=\frac{\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta\right)^2+\lambda\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs-\lambda-\delta\right)\hat{f}_2(s)+\lambda^2(1-\theta)\theta\,\hat{f}_2^2(s)-\lambda^2(1-\theta)\theta\,\hat{f}_1(s)\,\hat{f}_3(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4}
$$

$$
=\frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4}.
$$

αφού $\hat{f}_2(s)=\hat{f}_1(s)\hat{q}(s)$ και $\hat{f}_3(s)=\hat{f}_1(s)(\hat{q}(s))^2$.

Έτσι, οι εξισώσεις (4.2.19) και (4.2.20) γίνονται

$$
\hat{l}(s)=\frac{C(s)}{\ell(s)} \text{ και } \hat{l}_1(s)=\frac{C_1(s)}{\ell(s)} \tag{4.2.21}
$$

όπου

$$
C(s)=\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4\Big([1-\hat{\kappa}_1(s)]\hat{\gamma}(s)-\hat{\phi}(s)\hat{\gamma}_1(s)\Big), \tag{4.2.22}
$$

$$
C_1(s)=\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4\Big([1-\hat{\kappa}(s)]\hat{\gamma}_1(s)-\hat{\phi}_1(s)\hat{\gamma}(s)\Big). \tag{4.2.23}
$$

Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε τους αριθμητές $C(s)$ και $C_1(s)$ των $\hat{l}(s)$ και $\hat{l}_1(s)$ αντίστοιχα. Ξεκινάμε με το $C(s)$. Εισάγοντας τους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{\kappa}_1(s)$, $\hat{\gamma}(s)$, $\hat{\phi}(s)$ και $\hat{\gamma}_1(s)$ στην (4.2.22) και από το Λήμμα 3.1 λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\ell_2(s)=\frac{\sigma^2}{2}+cs-\lambda-\delta+\lambda\,\hat{f}_2(s)$, το $C(s)$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
C(s)=\;&\Lambda(0)\Big\{s[\ell_2(s)-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)][\lambda+\delta-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]+s\lambda^2\theta(1-\theta)\,\hat{f}_3(s)\,\hat{f}_1(s)\Big\}\\
&-\Lambda'(0)\Big\{[\ell_2(s)-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)][cs-\lambda-\delta+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]-\lambda^2\theta(1-\theta)\,\hat{f}_3(s)\,\hat{f}_1(s)\Big\}\\
&-\Lambda_1(0)\Big\{s[\ell_2(s)-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)+s[\lambda+\delta-\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)]\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\Big\}\\
&-\Lambda_1'(0)\Big\{[\ell_2(s)-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)-[cs-\lambda-\delta+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_2(s)]\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\Big\}\\
&-[\ell_2(s)-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)]s^2\hat{w}_A(s)+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)s^2\hat{w}_B(s)\\
=\;&\Lambda(0)s\left\{(\lambda+\delta)\ell_2(s)-\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)s\left(\frac{\sigma^2}{2}s+c\right)\right\}-\Lambda'(0)\left\{(cs-\lambda-\delta)\ell_2(s)+\lambda\theta\,\hat{f}_2(s)\frac{\sigma^2}{2}s\right\}\\
&-\Lambda_1(0)\lambda(1-\theta)s^2\,\hat{f}_1(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}+c\right)-\Lambda_1'(0)\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)\frac{\sigma^2}{2}s^2+\lambda s^2\theta\,\hat{f}_2(s)\hat{w}_A(s)\\
&-s^2\ell_2(s)\hat{w}_A(s)+\lambda(1-\theta)\,\hat{f}_1(s)s^2\hat{w}_B(s).
\end{aligned}
$$

Με παρόμοιο σκεπτικό με την απόδειξη της Σχέσης (3.4.3), η $\ell_2(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\ell_2(s)=\ell_2(s)-\ell_2(r_2)=\frac{\sigma^2}{2}(s-r_2)(s+b_2)\left(1-\frac{\lambda T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)}\right).$$

Με βάση την παραπάνω, το $C(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$C(s)=\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{j=1}^{2}(s-r_j)(s+b_j)\hat{\upsilon}(s), \tag{4.2.24}$$

όπου

$$\hat{\upsilon}(s)=\frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}\left\{\Lambda(0)\left[\frac{\frac{\sigma^2}{2}s(\lambda+\delta)}{(s-r_1)(s+b_1)}-\frac{(\lambda+\delta)\lambda sT_{r_2}\hat{f}_2(s)}{(s-r_1)\prod_{i=1}^{2}(s+b_i)}-\lambda\theta\frac{\hat{f}_2(s)s^2\left(\frac{\sigma^2}{2}s+c\right)}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}\right]\right.$$
$$-\Lambda'(0)\left[\frac{\frac{\sigma^2}{2}(cs-\lambda-\delta)}{(s-r_1)(s+b_1)}-\frac{(cs-\lambda-\delta)\lambda T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{(s-r_1)\prod_{i=1}^{2}(s+b_i)}+\frac{\sigma^2}{2}\lambda\theta\frac{\hat{f}_2(s)s^2}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}\right]$$
$$-\lambda(1-\theta)\left[\Lambda_1(0)\frac{\hat{f}_1(s)s^2\left(\frac{\sigma^2}{2}s+c\right)}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}+\Lambda_1'(0)\frac{\sigma^2}{2}\frac{\hat{f}_1(s)s^2}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}\right]$$
$$\left.+\lambda\theta\frac{s^2\hat{f}_2(s)\hat{w}_A(s)}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}-\frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2\hat{w}_A(s)}{(s-r_1)(s+b_1)}+\frac{\lambda s^2\hat{w}_A(s)T_{r_2}\hat{f}_2(s)}{(s-r_1)\prod_{i=1}^{2}(s+b_i)}+\lambda(1-\theta)\frac{s^2\hat{f}_1(s)\hat{w}_B(s)}{\prod_{i=1}^{2}(s-r_i)(s+b_i)}\right\}. \tag{4.2.25}$$

Με βάση τις (3.4.3α) και (4.2.24) η (4.2.21) γίνεται

$$\hat{l}(s)=\frac{C(s)}{\ell(s)}=\frac{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\prod_{j=1}^{2}(s-r_j)(s+b_j)\hat{\upsilon}(s)}{\ell(s)}=\frac{\frac{\ell(s)}{1-\hat{g}(s)}\hat{\upsilon}(s)}{\ell(s)}=\frac{\hat{\upsilon}(s)}{1-\hat{g}(s)}$$

από την οποία βλέπουμε ότι το $\hat{l}(s)$ ικανοποιεί την

$$\hat{l}(s)=\hat{l}(s)\hat{g}(s)+\hat{\upsilon}(s). \tag{4.2.26}$$

Το επόμενο βήμα είναι να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της (4.2.26). Από την (4.2.25) βλέπουμε ότι η $\hat{\upsilon}(s)$ εκφράζεται ως άθροισμα λόγων πολυωνύμων, όπου σε κάθε έναν, ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίσος ή μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τεχνικές ανάλυσης σε απλά κλάσματα, καθώς και με τη βοήθεια του Λήμματος 4.1, μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για το $\hat{\upsilon}(s)$ και συγκεκριμένα είναι η έκφραση της Σχέσης (4.2.7).

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην (4.2.26) έχουμε

$$L^{-1}\{\hat{l}(s)\} = L^{-1}\{\hat{l}(s)\hat{g}(s) + \hat{\upsilon}(s)\},$$

$$L^{-1}\{\hat{l}(s)\} = L^{-1}\{\hat{l}(s)\hat{g}(s)\} + L^{-1}\{\hat{\upsilon}(s)\},$$

$$l(x) = \int_0^x l(x-t)g(t)dt + \upsilon(x), \tag{4.2.27}$$

ή ισοδύναμα, λόγω της $dG(x) = (1+\xi)g(x)dx$,

$$l(x) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^x l(x-t)dG(t) + \upsilon(x),$$

η οποία, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5, είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1 των Lin and Wilmott (1999) παίρνουμε τη σχέση (4.2.9) για το $l(x)$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την έκφραση για το $l_1(x)$, εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία στον αριθμητή $C_1(s)$ του $\hat{l}_1(s)$ που δίνεται στην Εξίσωση (4.2.23).

□

4.3 Αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$

Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Ενότητας 4.2, δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις λύσεις των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$, της Πρότασης 4.2. Αυτό επιτυγχάνεται, μετασχηματίζοντας το σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.3)-(4.1.4) στη μορφή του συστήματος των εξισώσεων (4.2.1)-(4.2.2) και λύνοντας το τελευταίο σε κάθε επίπεδο με ένα αναδρομικό τρόπο. Σχετική είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.4

(*i*) *Για* $\beta_{i-1} \le u < \beta_i$, $i = 1,\dots, n+1$, *οι εξισώσεις Gerber-Shiu* $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ *και* $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ *μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά ως εξής:*

$$\phi_i(u-x,\boldsymbol{\beta}) = \Phi_i(u) = \Lambda_i(u-\beta_{i-1}) \text{ και } \phi_{1,i}(u-x,\boldsymbol{\beta}) = \Phi_{1,i}(u) = \Lambda_{1,i}(u-\beta_{i-1}), \tag{4.3.1}$$

όπου $\Lambda_i(u)$ *και* $\Lambda_{1,i}(u)$ *ορίζονται όπως στις εξισώσεις της* (4.2.5) *με τη βοήθεια των* (4.2.6) – (4.2.8) *και της* (3.4.13), *με την προσθήκη του δείκτη i, οπουδήποτε χρειάζεται.* Συγκεκριμένα, το β

αντικαθίσταται με β_{i-1} *και τα* $\xi_{j,\beta}(u)$, $j=2,3$ *και* $\zeta_{j,\beta}(u)$, $j=1,2$ *της Πρότασης* 4.3 *αντικαθίσταται*

με $$\sum_{k=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_k}^{u+\beta_{i-1}-\beta_{k-1}}\phi_k(u+\beta_{i-1}-x,\boldsymbol{\beta})f_j(x)dx+w_j(u+\beta_{i-1}),\qquad j=2,3$$ *και*

$$\sum_{k=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_k}^{u+\beta_{i-1}-\beta_{k-1}}\phi_{1,k}(u+\beta_{i-1}-x,\boldsymbol{\beta})f_j(x)dx+w_j(u+\beta_{i-1}),\ j=1,2,$$ *αντίστοιχα.*

(ii) *Οι αρχικές τιμές* $\Lambda_i(0)$, $\Lambda_{1,i}(0)$, $\Lambda_i'(0)$ *και* $\Lambda_{1,i}'(0)$, $i=1,\ldots,n+1$*, είναι μοναδικά προσδιορισμένες από τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες της Πρότασης* 4.2.

Απόδειξη

(i) Για $0=\beta_0\le u<\beta_1$, το σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.3)-(4.1.4) είναι του ιδιου τύπου με το σύστημα των εξισώσεων (4.2.1)-(4.2.2) με $\beta=\beta_0=0$. Σύμφωνα με την Πρόταση (4.3), η γενική λύση των εξισώσεων (4.1.3)-(4.1.4) για $0=\beta_0\le u<\beta_1$ έχει τη μορφή της (4.3.1). για $u\ge 0$. Περικόπτοντας τη λύση στο διάστημα $[0,\beta_1)$ βρίσκουμε τα $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,1}(u,\boldsymbol{\beta})$.

Στη συνέχεια, με την ίδια επιχειρηματολογία, βρίσκουμε τα $\phi_k(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,k}(u,\boldsymbol{\beta})$, $k=1,\ldots,i-1$. Για $\beta_{i-1}\le u<\beta_i$, οι εκφράσεις για τα $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ στις (4.1.3)-(4.14) δείχνουν ότι η λύση των $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ ανάμεσα στα κατώφλια β_{i-1} και β_i εξαρτάται από τις εκφράσεις των $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ που παράγονται για όλα τα επίπεδα ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι διαδοχικών κατωφλίων κάτω από το β_{i-1}. Αφού το σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (4.1.3)-(4.1.4) είναι της ίδιας μορφής με αυτό των (4.2.1)-(4.2.2), όπου $\beta=\beta_{i-1}$, το $\xi_j(u)$ αντικαθίσταται με $$\sum_{k=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_k}^{u+\beta_{i-1}-\beta_{k-1}}\phi_k(u+\beta_{i-1}-x,\boldsymbol{\beta})f_j(x)dx+w_j(u+\beta_{i-1}),\quad j=2,3$$ και το $\zeta_{j,\beta}(u)$ αντικαθίσταται με $$\sum_{k=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_k}^{u+\beta_{i-1}-\beta_{k-1}}\phi_{1,k}(u+\beta_{i-1}-x,\boldsymbol{\beta})f_j(x)dx+w_j(u+\beta_{i-1}),\ j=1,2,$$ όπως ορίζονται στο μέρος (i) αυτής της πρότασης. Περικόπτοντας τη λύση στο $[\beta_{i-1},\beta_i)$, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

(ii) Από την Πρόταση 4.3 και το μέρος (i) της πρότασης που εξετάζουμε, έχουμε σαν επακόλουθο ότοι η λύση των $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ εξαρτάται από τις αρχικές τιμές $\Lambda_i(0)$, $\Lambda_{1,i}(0)$, $\Lambda_i'(0)$ και $\Lambda_{1,i}'(0)$, $i=1,\ldots,n+1$. Οι αρχικές αυτές τιμές, προσδιορίζονται μοναδικά από τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες της Πρότασης 4.2 και τις (4.2.5)-(4.2.5β). Έτσι έχουμε $4n+n$ εξισώσεις από τις οποίες θα προσδιοριστούν μοναδικά τα $\Lambda_i(0)$, $\Lambda_{1,i}(0)$, $\Lambda_i'(0)$ και $\Lambda_{1,i}'(0)$, $i=1,...,n+1$, και συνεπώς οι Gerber-Shiu συναρτήσεις $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ είναι πλήρως προσδιορισμένες.

□

Παρατήρηση 4.3. Όπως βλέπουμε από τις Προτάσεις 4.3 και 4.4, οι λύσεις των $\phi_i(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_{1,i}(u,\boldsymbol{\beta})$ εξαρτώνται από τη συνάρτηση κατανομής της σχετιζόμενης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που αναφέρθηκε στην Ενότητα 3.4 με την προσθήκη κατάλληλου δείκτη *i*. Συγκεκριμένα, από την Πρόταση 3.7, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της σχετιζόμενης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής στο *i*-οστό επίπεδο, στην περίπτωση που οι κύριες και οι by- claim απαιτήσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών και είναι της μορφής (3.4.17), δίνεται από τη σχέση

$$K_i(u)=1-\sum_{j=1}^{k+1}a_{j,i}e^{-R_{j,i}u}\ ,\ u\geq 0\,, \tag{4.3.2}$$

όπου

$$a_{j,i}=\frac{R_{1,i}\ldots R_{k+1,i}(b_{2,i}-R_{j,i})}{R_{j,i}\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{k+1}(R_{k,i}-R_{j,i})}\cdot\frac{p_k(-R_{j,i})}{p_k(0)b_{2,i}},\qquad i=1,...,n+1,$$

όπου $-R_{j,i}$ *με* $\mathrm{Re}(R_{j,i})>0$, για $j=1,...,k+1,$ είναι *οι ρίζες, υποθέτουμε διακεκριμένες, της εξίσωσης*

$$J_{k+2,i}(s)=0,\ \textit{με}\ J_{k+2,i}(s)=\left(\frac{\sigma_i^2}{2}s^2+c_is-\lambda-\delta\right)p_k(s)+\lambda\,p_{k-1}(s)\,,\ i=1,...,n+1\,.$$

4.4 Αριθμητική εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή δίνεται ένα αριθμητικό παράδειγμα που δείχνει πώς οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν παραπάνω χρησιμοποιούνται για να υπολογισθούν οι πιθανότητες χρεοκοπίας σε κάθε επίπεδο. Θεωρούμε την περίπτωση $\delta=0$ και $w(x_1,x_2)=1$. Τότε, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu κάτω από στρατηγική μερίσματος πολλαπλών επιπέδων $\phi(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\phi_1(u,\boldsymbol{\beta})$ απλοποιούνται στις πιθανότητες χρεοκοπίας, έστω $\psi(u,\boldsymbol{\beta})$ και $\psi_1(u,\boldsymbol{\beta})$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης την ύπαρξη τριών επιπέδων $[0,\beta_1]$, $[\beta_1,\beta_2]$ και $[\beta_1,\infty)$, δηλαδή, $\boldsymbol{\beta}=\{0,\beta_1,\beta_2,\infty\}$, και ότι οι κύριες και by-claim απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με παραμέτρους αντίστοιχα α_1 και α_2, δηλαδή οι συναρτήσεις κατανομής τους είναι όπως δόθηκαν στην Παράγραφο 3.5. Στην περίπτωση αυτή, η χαρακτηριστική εξίσωση για το *i*-οστό επίπεδο, δίνεται από τη σχέση

$$\ell_{1,i}(s)J_{4,i}(s)=\left(\frac{\sigma_i^2}{2}s^2+c_is-\lambda\right)^2(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)+\lambda\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\sigma_i^2}{2}s^2+c_is-\lambda\right)=0\,,\ i=1,2,3\,,$$

η οποία από το Λήμμα 3.1, έχει έξι ρίζες, έστω $r_{1,i}$ με $\mathrm{Re}(r_{1,j})>0$, $r_{2,i}=0$, $-b_{1,i}$ με $\mathrm{Re}(b_{1,j})>0$, και $-R_{j,i}$ με $\mathrm{Re}(R_{j,i})>0$, $i,j\in\{1,2,3\}$.

Θωρούμε τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων: c_1 = 3.3, c_2 = 3.1, c_3 = 2.5, σ_1 = 1.5, σ_2 = 1.3, σ_3 = 1, α_1 = 1, α_2 = 2, λ = 1, θ = 0.5, β_1 = 2 και β_2 = 3. Για κάθε επίπεδο, λύνοντας την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση, προκύπτουν οι ρίζες

$r_{1,1}$ = 0.27689, $-R_{1,1}$ = – 0.42181, $-R_{2,1}$ = – 2.66667, $-R_{3,1}$ = – 2.84485, $-b_{1,1}$ = – 3.21023,

$r_{1,2}$ = 0.29832, $-R_{1,2}$ = – 0.40881, $-R_{2,2}$ = – 2.39987, $-R_{3,2}$ = – 3.85996, $-b_{1,2}$ = – 3.96696,

$r_{1,3}$ = 0.37227, $-R_{1,3}$ = – 0.31866, $-R_{2,3}$ = – 2.35793, $-R_{3,3}$ = – 5.32340, $-b_{1,3}$ = – 5.37227.

Στην συνέχεια, αφού η εξίσωση $J_{4,i}(s)=\left(\dfrac{\sigma_i^2}{2}s^2+c_is-\lambda\right)(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)+\lambda\alpha_1\alpha_2=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή τις $-R_{j,i}$ με $\mathrm{Re}(R_{j,i})>0$, $i,j\in\{1,2,3\}$, από την Εξίσωση (4.3.2) υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της σχετικής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για κάθε επίπεδο, οι οποίες είναι

$$K_1(u)=1-0.54482e^{-0.42181u}+0.15151e^{-2.66667u}-0.061242e^{-2.84485u},$$

$$K_2(u)=1-0.56342e^{-0.40881u}+0.05254e^{-2.39987u}+0.027005e^{-3.85996u},$$

$$K_3(u)=1-0.65995e^{-0.31866u}+0.03602e^{-2.35793u}+0.023527e^{-5.32340u},$$

και από την Πρόταση 3.5 βρίσκουμε ότι ξ_1 = 1.1999, ξ_2 = 0.66666.

Στη συνέχεια από τις Προτάσεις 4.3 και 4.4 θα υπολογιστούν οι πιθανότητες χρεοκοπίας σε κάθε επιπεδο. Από την Πρόταση 5, για $i=1,2,3$ είναι

$$w_{A,i}(x)=\lambda\left(\theta\sum_{k=1}^{i-1}\int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}}\phi_k(x+b_{i-1}-y,\boldsymbol{\beta})f_2(y)dy+\overline{F}_2(x+b_{i-1})\right.$$
$$\left.+(1-\theta)\sum_{k=1}^{i-1}\int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}}\phi_{1,k}(x+b_{i-1}-y,\boldsymbol{\beta})f_1(y)dy+\overline{F}_1(x+b_{i-1})\right),$$

$$w_{B,i}(x)=\lambda\left(\theta\sum_{k=1}^{i-1}\int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}}\phi_k(x+b_{i-1}-y,\boldsymbol{\beta})f_3(y)dy+\overline{F}_3(x+b_{i-1})\right.$$
$$\left.+(1-\theta)\sum_{k=1}^{i-1}\int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}}\phi_{1,k}(x+b_{i-1}-y,\boldsymbol{\beta})f_2(y)dy+\overline{F}_2(x+b_{i-1})\right).$$

Από τις Εξισώσεις (4.2.5α)-(4.2.6.β) και με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες της Πρότασης 4.4 βρίσκουμε ότι

$\Lambda_1(0)$ = 0.98497, $\Lambda_1'(0)$ = –0.05199, $\Lambda_2(0)$ = 0.03076, $\Lambda_2'(0)$ = –0.01256, $\Lambda_3(0)$ = 0.02818,

$\Lambda'_3(0) = -0.008865$, $\Lambda_{1,1}(0) = 0.092933$, $\Lambda'_{1,1}(0) = -0.118023$, $\Lambda_{1,2}(0) = -0.009232$, $\Lambda'_{1,2}(0) = 0.001784$, $\Lambda_{1,3}(0) = 0.04546$, $\Lambda'_{1,3}(0) = -0.014076$.

Στη συνέχεια από τις Εξισώσεις (4.2.7)-(4.2.8) υπολογίζονται οι $\upsilon_i(x)$ και $\upsilon_{1,i}(x)$, i = 1, 2, 3, και από τις (4.2.6α)-(4.2.6β) οι $l_i(x)$ και $l_{1,i}(x)$, i = 1, 2, 3, από τις οποίες με χρήση των $K_i(u)$ και ξ_i, $i = 1, 2, 3$, μέσω των (4.2.5α)-(4.2.6.β), υπολογίζονται οι $\Lambda_i(x)$ και $\Lambda_{1,i}(x)$, i = 1, 2, 3. Με την αλλαγή μεταβλητής $x = u - \beta_{i-1}$ στις τελευταίες, από την Πρόταση 4.4 η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκύπτει είναι

$$\psi(u, \mathbf{\beta}) = \begin{cases} 0.90654 + 0.07002\,e^{-0.42181u} + 0.007144e^{-2.66667u} & \\ -0.0001349\,e^{-3.21023u} + 0.001348e^{-2.84485u} & \\ +0.002347 \times 10^{-8} e^{0.27689u}, & 0 \le u < 2, \\ 0.0003486 + 0.068751e^{-0.40881u} + 0.007755e^{-2.39987u} & \\ +0.0001166\,e^{-3.96696u} + 0.001906e^{-3.85996u} & \\ +0.7129 \times 10^{-8} e^{0.29832u}, & 2 \le u < 3, \\ 0.00040 + 0.072235\,e^{-0.31866u} + 0.00797e^{-2.35793u} & \\ +0.000621e^{-5.32340u} + 0.006214e^{-5.37227u}, & 3 \le u < \infty. \end{cases}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Στη διπλωματική αυτή εργασία μελετήθηκε μια επέκταση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, στο οποίο εμφανίζονται δύο είδη, εξαρτημένων μεταξύ τους, μεγεθών ατομικών ζημιών-απαιτήσεων. Συγκεκριμένα, οι κύριες απαιτήσεις (main claims) και οι απαιτήσεις που απορρέουν από αυτές (by-claims), θεωρώντας ότι κάθε κύρια απαίτηση προκαλεί και μια by-claim απαίτηση η οποία μπορεί να εμφανίζεται ταυτόχρονα με την κύρια απαίτηση με πιθανότητα θ, με καθυστέρηση μίας χρονικής περιόδου με πιθανότητα $1-\theta$. Αν και η υπό μελέτη διαδικασία κινδύνου δεν είναι η σύνθετη Poisson ούτε η σύνθετη ανανεωτική διαδικασία Sparre Andersen, εντούτοις η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (Gerber-Shiu) ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Δόθηκε αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Gerber-Shiu στην περίπτωση που τα μεγέθη και για τα δύο είδη των ατομικών απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα. Μελετήθηκαν κάποια μέτρα χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα η πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία με βάση τα παραγόμενα αποτελέσματα, μειώνεται καθώς η πιθανότητα καθυστέρησης των by-claim απαιτήσεων $1-\theta$, αυξάνεται.

Στη συνέχεια εξετάστηκε η ίδια διαδικασία πλεονάσματος διαταραγμένη με διάχυση καθώς μια τέτοια θεώρηση αντικατοπτρίζει καλύτερα τις διακυμάνσεις του πλεονάσματος των ασφαλιστικών εταιρειών. Αναπτύχθηκε ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις Gerber-Shiu, και δόθηκε αναλυτική έκφραση της λύσης στην περίπτωση που τα μεγέθη των κύριων και by-claim απαιτήσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Επίσης δόθηκαν αναλυτικά αποτελέσματα για διάφορα μέτρα κινδύνου.

Τέλος, εξετάστηκε η παραπάνω στοχαστική διαδικασία κινδύνου κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος πολλαπλών κατωφλίων (multi-layer dividend strategy). Για την επίλυση του συστήματος των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι σχετικές συναρτήσεις Gerber-Shiu, αναπτύχθηκε μια γενική λύση για κάποιο συγκεκριμένης μορφής σύστημα δεύτερης τάξης μέσω ενός συστήματος εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους.

Τα μοντέλα που μελετήθηκαν απαιτούν την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης όταν προκύπτουν διακεκριμένες ρίζες. Μια επέκταση της εργασίας θα είναι προς την κατεύθυνση ριζών με πολλαπλότητα διαφορετική της μονάδας. Επίσης μπορούν να εξεταστούν και να αναζητηθούν αναλυτικές εκφράσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τα διάφορα μέτρα κινδύνου για διαφορετικές κατανομές όσον αφορά στα μεγέθη των απαιτήσεων, όπως Erlang, ή άλλες κατανομές της κλασματικής οικογένειας κατανομών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π1. Μετασχηματισμός Laplace

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$, ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως

$$\hat{f}(s) = L\{f(x)\} := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx\,,\ s\in\mathbf{C}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής ο οποίος μετασχηματίζει μια συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, σε μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s.

Ιδιότητες

1. $\hat{f}(0) = \int_0^\infty f(x)dx$

2. Γραμμικότητα

$$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\} \text{ με } c_1, c_2\in\mathbf{R}.$$

3. Μετατόπιση στο πεδίο της μιγαδικής μεταβλητής

$$L\{e^{ax} f(x)\} = \hat{f}(s-a)\,.$$

4. Μετατόπιση στο πεδίο της πραγματικής μεταβλητής

$$L\{f(x-a)\, \mathrm{I}(x\geq a)\} = e^{-as}\hat{f}(s)\,.$$

5. Πολλαπλασιασμός με σταθερά (αλλαγή κλίμακας)

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \text{ με } \alpha > 0.$$

6. Παραγώγιση

$$L\{f'(x)\} = s\,\hat{f}(s) - f(0)$$

$$L\{f''(x)\} = s^2\,\hat{f}(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n\,\hat{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

όταν οι παράγωγοι $f', f'',\ldots, f^{(n)}$ / $[0, +\infty)$ είναι συνεχείς.

7. Ολοκλήρωση

$$L\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{\hat{f}(s)}{s}\,.$$

8. Πολλαπλασιασμός συνάρτησης επί x^n

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n}.$$

9. Διαίρεση συνάρτησης δια x

$$L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty \hat{f}(t)dt.$$

10. Συνέλιξη

$$L\{f(x) * g(x)\} = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$$

όπου

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

11. Θεώρημα αρχικής τιμής

(αναφέρεται στη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{s\to\infty} s\,\hat{f}(s).$$

12. Θεώρημα τελικής τιμής

(αναφέρεται στη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \to \infty$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{f}(s).$$

Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής επιτρέπουν τον προσδιορισμό της αρχικής και τελικής τιμής της συνάρτησης $f(x)$, χωρίς να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $\hat{f}(s)$. Τα θεωρήματα ισχύουν όταν, γράφοντας την $s\,\hat{f}(s)$ σαν λόγο δύο πολυωνύμων $N(s)/D(s)$, όλες οι ρίζες της εξίσωσης $D(s) = 0$ είναι οι ρίζες της $s\,\hat{f}(s)$ και αυτές ικανοποιούν τη συνθήκη $\mathrm{Re}(s) < 0$.

Πίνακας κάποιων μετασχηματισμών Laplace

$f(x)$	$\hat{f}(s)$
c	$\frac{c}{s}$, $s > 0$
x	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
x^n, $(n \geq 1, n \in \mathbf{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$

Π2. Μετασχηματισμός Laplace και πιθανότητες

Έστω μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$. Ο μετασχηματισμός Laplace (Laplace-Stieltjes) ορίζεται ως

$$F^*(s) := \int_0^\infty e^{-sx} dF(x),\ s \geq 0.$$

Έστω ότι η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = F'(x)$. Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

που είναι ο συνήθης μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s) = L\{f(x)\}$ της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ όταν αυτή υπάρχει.

Ιδιότητες

1. $\hat{f}(s) = E(e^{-sX})$.
2. $\hat{f}(0) = \int_0^\infty f(x)dx = 1$ (αφού f είναι σ.π.π.).
3. $0 \leq \hat{f}(s) \leq 1$ όλα τα $s \geq 0$.
4. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης κατανομής

   Αν $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$ η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X

   τότε

   $$L\{F(x)\} = \hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} F(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)dx = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

   (από την ιδιότητα μετασχηματισμού ολοκληρώματος).
5. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δεξιάς ουράς

   Αν $\overline{F}(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f(t)dt = 1 - F(x)$ η δεξιά ουρά της τ.μ. X

   τότε

   $$L\{\overline{F}(x)\} = \hat{\overline{F}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}(x)dx = L\{1 - F(x)\} = L\{1\} - L\{F(x)\} = \frac{1}{s} - \hat{F}(s) = \frac{1-\hat{f}(s)}{s}.$$
6. Σχέση μετασχηματισμού Laplace και ροπογεννήτριας συνάρτησης

   $M_X(t) = E(e^{tX})$,

$M_X(-s) = E(e^{-sX}) = \hat{f}(s)$.

7. Υπολογισμός ροπών με τη βοήθεια μετασχηματισμού Laplace

$$E(X^n) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\hat{f}(s)\bigg|_{s=0}.$$

Π3. Τελεστής Dickson-Hipp

Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ο τελεστής Dickson-Hipp ορίζεται ως

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy = e^{rx}\int_x^\infty e^{-ry} f(y)dy,\ r\in\mathbf{C},\ x \ge 0. \qquad (\Pi 3.1)$$

Ιδιότητες

1. Γραμμικότητα

   $T_r[a\, f_1(x) + b\, f_2(x)] = aT_r\, f_1(x) + bT_r\, f_2(x)$.

2. $T_r f(x) = \int_0^\infty e^{-ry} f(y+x)dy, \qquad x \ge 0$

   απόδειξη

   με αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα (Π3.1)

   $t = y - x \Rightarrow dt = dy$; όρια: $y = x \Rightarrow t = 0$, $y \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

   οπότε $T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy = \int_0^\infty e^{-rt} f(t+x)dt$.

3. Για $x = 0$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της f

   $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ry} f(y)dy = \hat{f}(r)$.

4. Για $r = 0$, αν θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, είναι η δεξιά ουρά της κατανομής

   $T_0 f(x) = \int_x^\infty f(y)dy = \overline{F}(x)$.

5. Μετασχηματισμός Laplace του $T_r f(x)$

   $$L\{T_r f(x)\} = T_r\hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s} = \frac{T_s f(0) - T_r f(0)}{r-s},\ r \ne s$$

   απόδειξη

   $$T_r\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T_r f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy\right)dx$$

με αλλαγή ορίων και σειράς ολοκλήρωσης παίρνουμε $\begin{cases} 0 \le x < \infty \\ x \le y < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y < \infty \\ 0 \le x \le y \end{cases}$

οπότε

$$T_r \hat{f}(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y) dx \right) dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{-sx} e^{-ry} e^{rx} f(y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \left(\int_0^y e^{(r-s)x} dx \right) dy = \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \frac{e^{(r-s)y} - 1}{r-s} dy$$

$$= \frac{1}{r-s} \left(\int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy - \int_0^\infty e^{-ry} f(y) dy \right) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s} = T_s T_r \ f(0).$$

6. $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \dfrac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}$, $\quad x \ge 0$ για όλα τα r_1, $r_2 \in \mathbf{C}$ με $r_1 \ne r_2$

απόδειξη

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \int_x^\infty e^{-r_1(y-x)} T_{r_2} f(y) dy = \int_x^\infty e^{-r_1(y-x)} \left(\int_y^\infty e^{-r_2(z-y)} f(z) dz \right) dy$$

με αλλαγή ορίων και σειράς ολοκλήρωσης παίρνουμε $\begin{cases} x \le y < \infty \\ y \le z < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le z < \infty \\ x \le y \le z \end{cases}$

οπότε

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \int_x^\infty \left(\int_x^z e^{-r_1(y-x)} e^{-r_2(z-y)} f(z) dy \right) dz = \int_x^\infty \left(\int_x^z e^{-r_1 y} e^{r_1 x} e^{-r_2 z} e^{r_2 y} f(z) dy \right) dz$$

$$= \int_x^\infty e^{r_1 x} e^{-r_2 z} f(z) \left(\int_x^z e^{(r_2 - r_1) y} dy \right) dz \tag{Π3.2}$$

$$= \int_x^\infty e^{r_1 x} e^{-r_2 z} f(z) \frac{e^{(r_2 - r_1) z} - e^{(r_2 - r_1) x}}{r_2 - r_1} dz$$

$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\int_x^\infty e^{r_1 x} e^{-r_2 z} e^{(r_2 - r_1) z} f(z) dz - \int_x^\infty e^{r_1 x} e^{-r_2 z} e^{(r_2 - r_1) x} f(z) dz \right)$$

$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\int_x^\infty e^{-r_1(z-x)} f(z) dz - \int_x^\infty e^{-r_2(z-x)} f(z) dz \right)$$

$$= \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}.$$

7. $T_{r_1} T_{r_2} f(0) = \dfrac{T_{r_1} f(0) - T_{r_2} f(0)}{r_2 - r_1} = \dfrac{\hat{f}(r_1) - \hat{f}(r_2)}{r_2 - r_1} = T_{r_2} T_{r_1} f(0)$, $\qquad r_1 \ne r_2$

8. $T_{r_1}T_{r_2} f(x) = \int_x^{\infty} (z-x)e^{-r(z-x)} f(z)dz\,,$ $\qquad x \ge 0$ με $r_1 = r_2 = r$

απόδειξη

από (Π3.2) για $r_1 = r_2 = r$

$$T_rT_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{rx}e^{-rz} f(z)\int_x^{z} dydz = \int_x^{\infty} (z-x)e^{-r(z-x)} f(z)dz\,.$$

9. $T_{r_1}T_{r_2}T_{r_3} f(x) = \dfrac{T_{r_1}T_{r_2} f(x) - T_{r_1}T_{r_3} f(x)}{r_3 - r_2}$

10. $T_{r_1}T_{r_2}T_{r_3} f(0) \;=\; \dfrac{\hat f(r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} + \dfrac{\hat f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} + \dfrac{\hat f(r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$

απόδειξη

$$T_{r_1}T_{r_2}T_{r_3} f(0) = \frac{T_{r_1}T_{r_2} f(0) - T_{r_1}T_{r_3} f(0)}{r_3 - r_2}$$

$$= \frac{\dfrac{T_{r_1} f(0) - T_{r_2} f(0)}{r_2 - r_1} - \dfrac{T_{r_1} f(0) - T_{r_3} f(0)}{r_3 - r_1}}{r_3 - r_2}$$

$$= \frac{\dfrac{\hat f(r_1) - \hat f(r_2)}{r_2 - r_1} - \dfrac{\hat f(r_1) - \hat f(r_3)}{r_3 - r_1}}{r_3 - r_2}$$

$$= \frac{\hat f(r_1) - \hat f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_3-r_2)} - \frac{\hat f(r_1) - \hat f(r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

$$= \frac{\hat f(r_1)}{(r_2-r_1)(r_3-r_2)} - \frac{\hat f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_3-r_2)} - \frac{\hat f(r_1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)} + \frac{\hat f(r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

$$= \frac{\hat f(r_1)}{(r_2-r_1)(r_3-r_1)} - \frac{\hat f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_3-r_2)} + \frac{\hat f(r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

$$= \frac{\hat f(r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} + \frac{\hat f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} + \frac{\hat f(r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\,.$$

11. $s\,\hat f(s) - r\,\hat f(r) = (s-r)[-sT_r\,\hat f(s) - \hat f(r)]$

12. $T_0T_r f(x) = \int_x^{\infty} T_r f(u)du = \dfrac{\overline{F}(x) - T_r f(x)}{r} = T_r\overline{F}(x)$

13. $\int_0^{u} T_r f(x+y)dx = T_r\overline{F}(y) - T_r\overline{F}(y+u)$

Π4. Πολύωνυμο παρεμβολής Lagrange

Το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, $P_n(x)$, το πολύ n βαθμού, στα $n + 1$ διακεκριμένα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$ είναι

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)\text{, όπου } L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \text{ οι συντελεστές Lagrange.}$$

Εφαρμογή:

Για δύο σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

$$P(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Για τρία σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$

$$P(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3).$$

Π5. Η γενικευμένη Erlang *n* βαθμίδων κατανομή

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$) αντίστοιχα, τότε το άθροισμα X των τ.μ. X_i ακολουθεί την γενικευμένη Erlang κατανομή n βαθμίδων. (generalized Erlang)

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim GErl(\text{n}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Ιδιότητες

1. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}\text{, } x > 0 \text{ όπου } a_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

2. Μέση τιμή

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}.$$

3. Διασπορά

$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}$, λόγω ανεξαρτησίας των X_i.

4. Μετασχηματισμός Laplace

$L_X(s) = \hat{x}(s) = L\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} L\{X_i\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$, λόγω ανεξαρτησίας των X_i.

5. Άθροισμα ανεξάρτητων υποεκθετικών κατανομών

Εάν $X_1 \sim Gerl(κ, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, και $X_2 \sim Gerl(r\text{-}k, \lambda_{k+1}, ..., \lambda_r)$ όπου X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$X_1 + X_2 \sim Gerl(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, ..., \lambda_r).$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. H. Albrecher, J. Hartinger (2007), A risk model with multi-layer dividend strategy, *North American Actuarial Journal*, vol. 11, no. 2, pp. 43-64.
2. J. Cai, C. M. Xu (2006), On the decomposition of the ruin probability for a jump-diffusion surplus process compounded by a geometric Brownian motion, *North American Actuarial Journal*, vol. 10, no. 2, 120-129.
3. S. Chadjiconstantinidis, A. D. Papaioannou (2013), On a perturbed by diffusion compound Poisson risk model with delayed claims and multi-layer dividend strategy, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 253, pp. 26-50.
4. E. C. K. Cheung, D. Landriault (2009), Perturbed MAP risk models with dividends barrier strategies, *Journal of Applied Probability*, vol. 46, no. 2, pp. 521-541.
5. F. Dufresne, H. U. Gerber (1991), Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 10, no. 1, pp. 51-59.
6. B. De Finetti (1957), Su un' impostazione alternativa dell teoria collettiva del rischio, *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, vol. 2, pp. 433-443.
7. H. Gao, C. Yin (2008), The perturbed Sparre Andersen model with a threshold dividend strategy, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 220, no. 1-2, pp. 394-408.
8. H. U. Gerber, B. Landry (1998), On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 22, no. 3, pp. 263-276.
9. H. U. Gerber, E. S. W. Shiu (1998), On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, vol. 2, no. 1, 48-78.
10. H. U. Gerber, E. S. W. Shiu (2005), The time value of ruin in a Sparre Andersen model, *North American Actuarial Journal*, vol. 9, no. 2, 49-65.
11. H. U. Gerber, E. S. W. Shiu (2006), On optimal dividend strategies in the compound Poisson model, *North American Actuarial Journal*, vol. 10, no. 2, pp. 76-93.
12. S. Li, J. Garrido (2005), The Gerber-Shiu function in a Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 3, no. 3, pp. 161-168.
13. X. S. Lin, K. P. Pavlova (2006), The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 38, no. 1, pp. 57-80.
14. X. S. Lin, G. E. Willmot (1999), Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 25, no. 1, pp. 63-84.
15. X. S. Lin, K. P. Sendova (2008), The compound Poisson risk model with multiple thresholds, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 42, no. 2, pp. 617-627.

16. Y. Lu, C. C. L. Tsai (2007), The expected discounded penalty at ruin for a Markov-modulated risk process perturbed by diffusion, *North American Actuarial Journal*, vol. 11, no. 2, pp. 136-152.
17. J. Medhi (1994), *Stochastic Processes,* Second Edition, John Wiley & Sons.
18. I. R. Mitric, K. Sendova, C. C. L. Tsai (2010), On a multi-threshold compound Poisson process perturbed by diffusion, *Statistics & Probability Letters*, vol. 80, no. 5-6, pp. 366-375.
19. T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, 1st Edition, Wiley.
20. S. M. Ross (2000), *Introduction to Probability Models,* 7th Ed., Academic Press.
21. M. R. Spiegel (1965), *Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*. New York: Schaum.
22. C. C. L. Tsai, (2001), On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 28, no. 3, pp. 401-419.
23. C. C. L. Tsai, (2003), On the expectations of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 32, no. 3, pp. 413-429.
24. C. C. L. Tsai, G. E. Willmot (2002), A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 30, no. 1, pp. 51-66.
25. N. Wan (2007), Dividend payments with a threshold strategy in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 40, no. 3, pp. 509-523.
26. Y. T. Xiao, J. Y. Guo (2007), The compound binomial risk model with time-correlated claims, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 41, no. 1, pp. 124-133.
27. J. H. Xie, W. Zou (2011), On the expected discounted penalty function for the compound Poisson risk model with delayed claims, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, no. 8, pp. 2392-2404.
28. H. Yang, Z. Zhang (2008), Gerber-Shiu discounted penalty function in a Sparre Andersen model with multi-layer dividend strategy, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 42, no. 3, pp. 984-991.
29. H. Yang, Z. Zhang (2009), The perturbed compound Poisson risk model with multi-layer dividend strategy, *Statistics & Probability Letters*, vol. 79, no. 1, pp. 70-78.
30. H. Yang, Z. Zhang (2009), On a perturbed Sparre Andersen risk model with multi-layer dividend strategy, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 232, no. 2, pp. 612-624.
31. K. C. Yuen, J. Y. Guo (2001), Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial model, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 29, no. 1, pp. 47-57.

32. Z. Zhang, H. Yang (2011), Gerber-Shiu analysis in a perturbed risk model with dependence between claim sizes and interclaim times, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, no. 1, pp. 1189-1204.
33. X. Zhou (2007), Classical risk model with multi-layer premium rate, *Actuarial Research Clearing House*, vol. 41, pp. 1-10.
34. M. Zhou, J. Cai (2009), A perturbed risk model with dependence between premium rates and claim sizes, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 45, no. 3, pp. 382-392.
35. Ε. Χατζηκωνσταντινίδης, *Θεωρία Κινδύνων Ι & ΙΙ*, Σημειώσεις Παραδόσεων, *ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.