

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΚΤΥΟΚΕΝΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Μελέτη δύο ανταγωνιστικών ιών σε έναν πληθυσμό με βάση το επιδημιολογικό μοντέλο SIS.»

ΦΟΙΤΗΤΗΣ

Κριτσίνης Βασίλειος - ME13043

ΕΠΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ

«Αναπληρώτρια Καθηγήτρια - Φλώρα Μαλαματένιου»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περιεχόμενα	2
Λίστα Εικόνων.....	4
Περίληψη	5
1 Βασική θεωρία Επιδημιολογίας.....	9
1.1 Εισαγωγή.....	9
1.2 Βασικές έννοιες	10
1.3 Μοντελοποίηση Επιδημιολογίας.....	14
1.4 Μοντελοποίηση Ασθενειών	15
2 Βασικά επιδημιολογικά Μοντέλα.....	17
2.1 Εισαγωγή.....	17
2.1 Μοντέλο SI.....	18
2.2 Μοντέλο SIR.....	18
2.3 Μοντέλα SIS	22
3 Μαθηματικά εργαλεία.....	25
3.1 Εισαγωγή.....	25
3.2 Δυναμικά Συστήματα.....	25
3.3 Στοιχεία από Γραμμική Άλγεβρα και Δυναμικά Συστήματα	29
3.4 Ευστάθεια και γραμμικότητα.....	33
4 Μαθηματική Μοντελοποίηση Εξάπλωσης δύο ιών σε έναν πληθυσμό.....	36
4.1 Εισαγωγή.....	36
4.2 Η μοντελοποίηση	37
4.3 Η μαθηματική μοντελοποίηση	37
4.3.1 Περίπτωση πρώτη.....	38
4.3.2 Δεύτερη Περίπτωση	40

4.3.3	Τρίτη περίπτωση	42
5	Μελέτη περίπτωσης	46
5.1	Εισαγωγή.....	46
5.2	Παραδοχές της περίπτωσης.....	47
5.3	Τεχνολογίες που εφαρμόστηκαν	52
5.4	Πειράματα	54
5.4.1	Πείραμα Πρώτο	55
5.4.2	Πείραμα Δεύτερο	62
5.4.2.2	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2	75
5.4.2.3	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3	87
6	Συμπεράσματα	100
7	Βιβλιογραφία	102

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Figure 1: Δυνάμεις σε ένα σύστημα	33
Figure 2: Πιθανές Καταστάσεις [3]	49
Figure 3: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή A1.....	63
Figure 4: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή A2.....	70
Figure 5: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή B1.....	75
Figure 6: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή B2.....	82
Figure 7: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή C1.....	87
Figure 8: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή C2.....	94

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η επιδημιολογία σαν κλάδος των Μαθηματικών αναπτύχθηκε τον εικοστό αιώνα με την παράλληλη ανάπτυξη της τεχνολογίας και των Μαθηματικών εννοιών. Η αφαιρετική προσέγγιση και μοντελοποίηση σε ένα αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο (framework) οδήγησε τον τομέα της επιδημιολογίας σε πολλά και σημαντικά αποτελέσματα.

Τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται είναι πολλά, από την μελέτη δυναμικών συστημάτων, την επίλυση συστήματος διαφορικών εξισώσεων, την μελέτη συνεχών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και τους μετασχηματισμούς τους μέχρι τα γραφήματα και την θεωρητική πληροφορική.

Η συνεχής μελέτη των δυνατών μοντέλων επίθεσης ενός ιού (ή και περισσότερων) σε ένα πληθυσμό με διαφορετικές ιδιότητες οδήγησε στην εμπειριστατωμένη μελέτη των επιδημιών. Όμως η εισαγωγή της θεωρητικής πληροφορικής από τα μέσα του 20ου αιώνα έδωσε μια άλλη κατεύθυνση, αυτής προς το διαδίκτυο. Η φήμη μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ιός και το διαδίκτυο σαν ο πληθυσμός και να μελετήσουμε εκεί τις συνθήκες πανδημίας. Όμως όλα αυτά καλύπτουν ένα μικρό φάσμα από το συγκεκριμένο ερευνητικό τομέα, ο οποίος λόγω της χρήσης των κοινωνικών μέσων δικτύωσης αναπτύσσεται ραγδαία.

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη της εξάπλωσης δύο ανταγωνιστικών ιών σε έναν ομοιογενή πληθυσμό. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να αποσαφηνιστούν οι πιθανές εκβάσεις σε έναν ανταγωνισμό δύο ιών για την κατάληψη ενός πληθυσμού. Για την επίτευξη αυτού του στόχου μελετώνται οι βασικές έννοιες της Επιδημιολογίας, τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται και τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που είναι απαραίτητα για να μοντελοποιηθούν οι βασικές σχέσεις.

Έτσι, αρχικά, παρουσιάζονται οι βασικές θεωρίες της Επιδημιολογίας, μερικά από τα πιο σημαντικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται στον τομέα της επιδημιολογίας, καθώς και, το συγκεκριμένο μοντέλο που επιλέξαμε να μελετήσουμε.

Στην συνέχεια, παρατίθενται οι βασικές μαθηματικές έννοιες και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση του προβλήματος. Επειδή, οι μηχανισμοί των πληθυσμών και της εξάπλωσης ενός ιού βασίζονται σε πολλές μεταβλητές απαιτείται η χρήση των δυναμικών συστημάτων. Για την μοντελοποίηση του προβλήματος (υπολογισμός

της έκβασης μιας εξάπλωσης δύο ανταγωνιστικών ιών σε έναν πληθυσμό) χρησιμοποιούνται τα βασικά μαθηματικά και το επιδημιολογικό μοντέλο SIS. Με βάση αυτά δημιουργούμε τις παραδοχές του αλγορίθμου που υπολογίζει την έκβαση των δύο ανταγωνιστικών ιών.

Τέλος, πραγματοποιείται η υλοποίηση του αλγορίθμου με βάση τις παραπάνω παραδοχές. Εκτελούνται διάφορα σενάρια και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως ο ισχυρότερος ιός θα εξαπλωθεί με μεγαλύτερη επιτυχία στον πληθυσμό και σε βάθος χρόνου θα καταλάβει αν όχι όλο, το μεγαλύτερο ποσοστό του πληθυσμού.

ABSTRACT

The epidemiology was developed as a branch of mathematics in the twentieth century with the parallel development of technology and mathematics concepts. The abstract approach and modeling in a rigorous mathematical framework led epidemiology in many important results.

The mathematical tools used are many, from the study of dynamical systems, solving differential equations, the study of continuous functions of several variables and their transformations to the graphs and theoretical computer science.

Continuous study of possible models of a virus attack in a population with different properties led to further study of epidemics. But the introduction of the theoretical information from the mid-20th century gave another direction in epidemiology for the internet. A trend can be treated like a virus and the Internet as the population to study with pandemic conditions. This also applies and vice versa, studying viruses spread phenomena in homogeneous populations using modeling resulting from an advertising model on the internet and the spread of a trend or a product. But all the existing tools cover a small range of this specific research sector, which due to the increasing use of social media is now growing rapidly.

The object of this project is the theoretical and practical study of the spread two competing viruses in a homogeneous population. The aim of this thesis is to clarify the possible outcomes in a competition two viruses for the capture of a population. To achieve this objective a study of the concepts of Epidemiology will be conducted and we will investigate the models used and the basic mathematical tools that are necessary to model the key relationships.

Based on the above we will initially present the basic theories of Epidemiology, some of the most important models used in epidemiology and the particular model we have chosen to study. There will be an explanation on how this model was chosen to cover the questions that arise in case study of 2 viruses spreading in a population. Moreover through the study of epidemiological models we can understand the variables that must be defined when we model our problem.

After this we will proceed to the exposition of the mathematical tools and basic mathematical concepts used to model the problem. Generally we will need dynamic systems because the spread of a virus is identified within a dynamic environment. The mechanisms of the populations and the spread of a virus are based on many variables. To study these variables and rules we need dynamic systems. Additionally we will refer to graphs as a population in computing can be modeled as a graph. Finally we indicate the points of stability because they are used to finding the limits for the outbreak of an epidemic.

For the modeling of the problem the basic mathematics and epidemiological SIS model will be used in order to build the frame which will to be used for calculating the results of the outcome for the competing two viruses in a population. Based on these, we are led to assumptions that must be in place to implement the algorithm which will calculate the outcome of these two competing viruses.

Finally place the implementation of the algorithm is based on the above assumptions. Various scenarios will be run to lead to conclusions. Ultimately we want to show how a powerful virus (or rumor), will spread more successfully in the population and over time will occupy if not all, the majority of the population.

1 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΑΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αρχικά, σε ένα σημαντικό κομμάτι της βιολογίας, έχουν εξελιχθεί μαθηματικά μοντέλα και αποτελούν εργαλεία που εφαρμόζεται σε πολλά επιστημονικά πεδία για τον υπολογισμό διάφορων περιπτώσεων. Η μοντελοποίηση των ασθενειών και των επιδημιών υπήρχαν εδώ και πολλά χρόνια, αλλά η εφαρμογή τους σε ιούς στο διαδίκτυο, σε φήμες και σε επίπεδο marketing, εξόρυξης πληροφορίας και δεδομένων σε καταναμημένα συστήματα είναι αρκετά καινοτόμο. Αυτό οφείλεται εν μέρει στο γεγονός ότι το ίδιο το Internet ολοένα εξελίσσεται και εν μέρει επειδή οι μηχανισμοί εξάπλωσης και η φύση του μέσου είναι διαφορετικά. Επομένως, η μοντελοποίηση επιδημιών σε δίκτυα υπολογιστών μπορεί να εκμεταλλευτεί πολλά από την ήδη υπάρχουσα θεωρία στα βιολογικά μοντέλα.

Η μοντελοποίηση μιας επιδημίας έχει τρεις βασικούς στόχους. Ο πρώτος είναι να κατανοηθούν οι μηχανισμοί διάδοσης και πώς διαφορετικές παράμετροι επηρεάζουν την πορεία της επιδημίας. Ο δεύτερος στόχος είναι να επιτευχθεί η δυνατότητα πρόβλεψης της πορείας της επιδημίας στο μέλλον, η οποία περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, το τελικό μέγεθος της επιδημίας και σύγκλιση χρόνο στην σταθερή κατάσταση. Τέλος, ο τρίτος στόχος είναι να οριστούν οι μηχανισμοί για την αντιμετώπιση της επιδημίας και να αποτραπεί η περαιτέρω εξάπλωσή της. Για να δημιουργηθεί επομένως ένα μοντέλο επιδημίας είναι σημαντικό να πραγματοποιηθεί ένα σύνολο παραδοχές σχετικά με τη φύση του πληθυσμού και τους μηχανισμούς εξάπλωσης της.

Οι μηχανισμοί διάδοσης ορίζουν το πώς ακριβώς ένας ιός εξαπλώνεται. Για παράδειγμα, σε κάποιες ασθένειες, η μόλυνση μπορεί να μεταδίδεται με τον αέρα, σε κάποιες άλλες μπορεί να μεταδοθεί μέσω του αίματος και σε άλλες μέσω του σάλιου.

Με βάση της μετάβασης μεταξύ καταστάσεων σε μία νόσο, τα πιο μελετημένα μοντέλα είναι SI (Ευπαθής - Μολυσμένος), SIS (Ευπαθής - Μολυσμένος - Ευπαθής) και SIR (Ευπαθής - Μολυσμένα - Αναρρωμένος). Στο SI μοντέλο, τα άτομα που είναι ευαίσθητα σε λοιμώξεις, όταν μολυνθούν παραμένουν σε αυτή την κατάσταση για πάντα. Στο SIS μοντέλο, τα άτομα διέρχονται από τρεις καταστάσεις, από ευπαθή τα οποία μετατρέπονται σε μολυσμένα και μετά πάλι ευπαθή. Η εξάπλωση του κοινού κρυολογήματος μπορεί να μοντελοποιηθεί με

αυτό το μοντέλο. Στην περίπτωση ενός SIR μοντέλου, αφού περάσει κάποιο χρονικό διάστημα σε μολυσμένη κατάσταση, ένα άτομο πεθαίνει ή γίνεται ανάκτηση του ανοσοποιητικού και δεν μπορεί να εξαπλωθεί περαιτέρω μόλυνση. Με λίγα λόγια έχουμε τρεις καταστάσεις για το άτομο: Ευπαθές – Μολυσμένος – Αναρρωμένος με ανοσία.

Όταν μοντελοποιείται μια ασθένεια οφείλεται να υπάρχει μια στενή περιγραφή του συνόλου των χαρακτηριστικών της διαδικασίας εξάπλωσης και του πληθυσμού, το δεύτερο βήμα είναι να επιλεγθεί συγκεκριμένη προσέγγιση με μαθηματικά μοντέλα. Παρά το γεγονός ότι η εξάπλωση μιας ασθένειας είναι στατιστική διαδικασία από τη φύση της, υπάρχουν ντετερμινιστικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται συχνά για τον προσδιορισμό της έκβασής της.

1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η επιδημιολογία έχει συντελέσει στην παραγωγή σημαντικού αριθμού ντετερμινιστικών και στοχαστικών μοντέλων, καθώς και σχετικά θεωρήματα με την πρόληψη και την πρόβλεψη των επιδημιών. Ένα από τα πρώτα μοντέλα επιδημίας είναι αυτό του Daniel Bernoulli το 1760, ο οποίος αποσαφήνισε με έναν απλό ντετερμινιστικό τρόπο λειτουργίας την εξάπλωση της ευλογιάς. Στη συνέχεια, αναπτύχθηκαν πιο πολύπλοκα ντετερμινιστικά μοντέλα. Τα στοχαστικά μοντέλα εμφανίστηκαν αργότερα κατά τον 19ο και 20ο αιώνα.

Η επιδημιολογική μοντελοποίηση ασθενειών ενός πληθυσμού βασίζεται στο νόμο δράσης της μάζας, η οποία αναφέρει ότι σε έναν μικτό πληθυσμό ο ρυθμός επαφών είναι ανάλογος με το γινόμενο του μολυσμένου και ευπαθής. Δηλαδή ο ρυθμός των επαφών, που παίζει ρόλο στον ρυθμό μόλυνσης, έχει άμεση σχέση με το γινόμενο των μολυσμένων ατόμων με τα ευπαθή στον ιό. Ο νόμος της μάζας δράσης είναι μια υπέρθεση όλων των πιθανών καταστάσεων και των επιμέρους χαρακτηριστικών για τον υπολογισμό των επαφών (μολυσμένα με υγιή άτομα), και σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από μία διεργασίες που εμπλέκονται αποτελέσματα υπολογισμού των επαφών αυτών τότε προστίθενται στις μεταβλητές του συστήματος. Συνεπώς είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τις παρακάτω έννοιες για την επιδημιολογία.

Αρχικά ένα μοντέλο μπορεί να είναι στοχαστικό ή ντετερμινιστικό. Στοχαστικό είναι εκείνο που υπολογίζονται τα πιθανά ενδεχόμενα βάσει πιθανοτήτων. Σε μικρούς πληθυσμούς με λιγότερους παράγοντες να παίζουν ρόλο για το περιβάλλον και όπου έχουμε μικρότερες πιθανότητες να υπάρχουν αλλαγές από εξωτερικούς παράγοντες να υπολογίσουμε επιλέγουμε συνήθως τέτοιου είδους μοντέλα. Το μοντέλο που θα ασχοληθούμε εμείς είναι στοχαστικό. Ντετερμινιστικό μοντέλο είναι εκείνο που χρησιμοποιεί ανώτερα μαθηματικά χωρίζοντας του πληθυσμούς σε μικρότερα μέρη για ακριβέστερα αποτελέσματα και υπολογίζει διάφορα στάδια μιας νόσου [1].

Παρακάτω παραθέτονται και μερικοί από τους συνήθεις συμβολισμούς που ισχύουν στα επιδημιολογικά μοντέλα καθώς και η σημασία τους:

- R_0 : Βασικός ρυθμός αναπαραγωγής.
- S : Ευάλωτοι
- E : Εκτεθειμένοι στην περίοδο επώασης
- I : Μολυσμένοι
- R : Υγιείς από ανάρρωση με ανοσία
- β : Πιθανότητα επαφής
- μ : Μέσος όρος θνησιμότητας
- M : Νεογνά με παθητική ανοσία
- B : Μέσος όρος γεννήσεων
- $1/\varepsilon$: Μέση περίοδος επώασης
- $1/\gamma$: Μέση περίοδος με κίνδυνο μετάδοσης
- N : Ολικός πληθυσμός
- f : Μέσος όρος εξάλειψης της ανοσίας για άτομα που έχουν αναρρώσει
- δ : Μέση περίοδος προσωρινής ανοσίας

Εκτός των βασικών μοντέλων SIR και SIS στη διεθνή βιβλιογραφία καταγράφονται και επεκτάσεις αυτών. Ενδεικτικά μερικά από αυτά είναι:

- *SIRS*
- *SEIS*
- *SEIR*
- *MSIR*
- *MSEIR*
- *MSEIRS*

Αυτά τα μοντέλα λαμβάνουν περισσότερους παράγοντες υπόψη με τους οποίους στην μελέτη περίπτωσης δεν θα ασχοληθούμε καθώς δεν κατασκευάζουμε έναν αλγόριθμο στοχευόμενο σε συγκεκριμένο πληθυσμό (π.χ. Αθήνα) και δεν έχουμε την δυνατότητα μέτρησης τέτοιων παραγόντων [2].

Βασικός ρυθμός αναπαραγωγής

Ο βασικός ρυθμός αναπαραγωγής χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει εάν μια ασθένεια είναι δυνατόν να ξεσπάσει σε επιδημία. Είναι ένας μαθηματικός όρος που βοηθάει να κατανοήσουμε πόσο μεταδοτική είναι μια ασθένεια και συμβολίζεται με R_0 .

Για το R_0 τρεις είναι οι πιθανές καταστάσεις [3]:

1. $R_0 < 1$. Σε αυτή την περίπτωση ο ιός δεν αποτελεί κίνδυνο για επιδημία.
2. $R_0 = 1$. Θεωρητικά μόνο 1 άτομο μολύνεται από ένα μολυσμένο άτομο.
3. $R_0 > 1$. Υπάρχει κίνδυνος επιδημίας γιατί κάθε ένα μολυσμένο άτομο μπορεί να μολύνει παραπάνω από ένα άτομα.

Φυσικά σε μια τέτοια περίπτωση είναι προφανής ο κίνδυνος καθώς αυξάνονται εκθετικά οι πιθανότητες εξάπλωσης του ιού.

Γενικότερα αυτοί είναι οι πιο σημαντικοί παράγοντες που πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη όταν υπολογίζουμε τον αριθμό αυτό:

Η μολυσματική περίοδος

Ο παράγοντας αυτό ορίζεται κυρίως στην δύναμη του ιού να εξαπλώνεται. Μερικές ασθένειες είναι πιο μεταδοτικές από άλλες και για διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Επίσης σημαντικό ρόλο παίζει και ο πληθυσμός που επωάζει ο ιός. Για παράδειγμα η γρίπη μπορεί να κρατήσει μέχρι 8 μέρες περίπου στους ενήλικες ενώ στα παιδιά φτάνει μέχρι και 2 εβδομάδες. Επομένως όταν ο ιός της γρίπης εγκατασταθεί σε ένα παιδί είναι πιο πιθανό να μολύνει και περισσότερα άτομα.

Πιθανότητα Επαφής

Ουσιαστικά είναι η μέση πιθανότητα που υπάρχει να έρθει σε επαφή ένας μολυσμένος με ένα υγιές άτομο. Για τον λόγο αυτό προκειμένου να αποφευχθούν οι επιδημίες πρέπει να μένουν οι ασθενείς σε περιορισμένους χώρους.

Μέσον Μετάδοσης

Το μέσον είναι ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδεται ο ιός από ένα άτομο σε ένα άλλο. Οι ασθένειες που μεταδίδονται γρηγορότερα είναι αυτές που ταξιδεύουν στον αέρα, όπως ο ιός της γρίπης. Η φυσική επαφή δεν είναι απαραίτητη και έτσι αυξάνονται εκθετικά οι πιθανότητες μετάδοσης στον πληθυσμό. Ασθένειες που απαιτούν φυσική επαφή όπως ο ιός HIV είναι σχεδόν απίθανο να οδηγήσουν σε επιδημία.

1.3 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΑΣ

Στα δίκτυα υπολογιστών, η μοντελοποίηση μιας επιδημίας εφαρμόζεται σε τρεις τομείς. Πρώτα απ' όλα, για τον υπολογισμό εξάπλωσης ενός ιού υπολογιστών [4]. Δεύτερον, χρησιμοποιείται σε αλγόριθμους υπολογισμών για την εξόρυξη πληροφοριών σε κατακεμημένα δίκτυα [5], [6]. Τέλος, η διάδοση διάφορων φημών μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας θεωρία από επιδημιολογικά μοντέλα. Ένα τέτοιο παραδείγματα είναι το έργο του Coffman et al. [7], ο οποίος μελέτησε τα μοντέλα υπερχείλισης αποτυχίας της BGP σε μια πλήρως συνδεδεμένη τοπολογία προσθέτοντας τις παραμέτρους για την διαδικασία γέννησης και θανάτου.

Οι αλγόριθμοι Επιδημίας για τη διάδοση πληροφοριών συσχετίζονται άμεσα επίσης με την διάδοση μιας φήμης. Τέτοιοι αλγόριθμοι επιδημίας είναι απλοί στην παραμετροποίηση και τα μαθηματικά εργαλεία που προσφέρουν είναι σε θέση να προβλέψουν τη συμπεριφορά του συστήματος για φήμες. Συνήθως, είτε η πληροφορία μεταδίδεται σε μεγάλο μέρος του πληθυσμού, όπως ορίζει το SI μοντέλο ή κάθε κόμβος διαδίδει τις πληροφορίες για κάποιο διάστημα και μετά σταματά, ακολουθώντας το μοντέλο SIR [5]. Τα δίκτυα που χρησιμοποιούν αλγόριθμους φημών μπορούν να μοντελοποιηθούν με το SIS μοντέλο.

Οι ιοί υπολογιστών ορίζεται ως μικρά προγράμματα που μπορούν να αναπαραχθούν και να αντιγράψουν τον εαυτό τους σε άλλα συστήματα ή αρχεία. Το «σκουλήκι», που είναι παρόμοιο με ιό δικτύου, δεν χρειάζεται παρέμβαση του χρήστη για να εξαπλωθεί, αλλά αντ' αυτού χρησιμοποιεί το πρωτόκολλο και το λογισμικό ασφαλείας. Αρχικά, πριν τα δίκτυα υπολογιστών εξαπλωθούν, οι ιοί πολλαπλασιαζόντουσαν μέσω των αφαιρούμενων μέσων, όπως οι δισκέτες. Ο πρώτος ιός υπολογιστή ονομαζόταν «εγκέφαλος» και αναπτύχθηκε από δύο αδέρφια στο Πακιστάν το 1986 [8]. Το πρόγραμμα είχε αρχικά σχεδιαστεί για την προστασία των πνευματικών δικαιωμάτων ενός λογισμικού. Στη δεκαετία του '90, οι ιοί που εκμεταλλεύονται μακροεντολές έγιναν κοινοί [9].

Οι ιοί μακροεντολών είναι προγράμματα γραμμένα σε γλώσσες τύπου javascript συνήθως. Οι ιοί αυτοί εξαπλώνονται μολύνοντας ένα αρχείο το οποίο κάθε φορά που το ανοίγει ένας χρήστης, εκτελείτε το σενάριο του ιού. Ένα από τα πρώτα μέσα για την εξάπλωση ιών που χρησιμοποιήθηκαν στο Internet ήταν το e-mail. Ένας ιός διαδιδόταν στο δίκτυο ως συνημμένο σε e-mail, ή εκμεταλλευόμενος άλλο λογισμικό για να τους εκτελέσει σε έναν

υπολογιστή. Ο ιός καλυπτόταν μέσα σε άλλο φαινομενικά πιο αθώο λογισμικό το οποίο όταν εκτελούνταν ενεργοποιούσε τον ιό. Αυτή η τακτική ονομάζεται Δούρειος Ίππος (Trojan). Ένα από τα πιο γνωστά ανακαλύφθηκε για πρώτη φορά το 2000. Αυτός ο ιός έγειρε ανησυχίες σε παγκόσμιο επίπεδο σχετικά με τα πρόβλημα ασφαλείας που υπάρχουν σε τέτοιες γλώσσες μακροεντολών. Τα νεότερα είδη χρησιμοποιούν cross-site scripting - ένα κομμάτι κώδικα εγχέεται στην ιστοσελίδα που εκτελείτε στην πλευρά του πελάτη και ένα άλλο λαμβάνει και επεξεργάζεται ο εξυπηρετητής, όπως και σε σενάρια Java (Web εφαρμογών).

1.4 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΘΕΝΕΙΩΝ

Η μαθηματική μοντελοποίηση που χρησιμοποιείται για μια ασθένεια μπορεί να συμβάλλει στην πρόβλεψη της προόδου μιας νόσου και να δείξει την πιθανή έκβαση της εξάπλωσης της. Επίσης βοηθούν για να ληφθούν οι αποφάσεις στις διάφορες παρεμβάσεις που μπορεί να χρειαστούν για την δημόσια υγεία. Τα μοντέλα αυτά εκμεταλλεύονται ορισμένες βασικές παραδοχές για να οριστούν οι διάφορες παράμετροι των ασθενειών που μελετώνται. Αυτές οι παράμετροι είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό των επιπτώσεων των διαφόρων πιθανών εκβάσεων και αποφάσεων για μια επικίνδυνη ασθένεια, όπως για παράδειγμα ένα πρόγραμμα μαζικού εμβολιασμού.

Ένα τέτοιο μοντέλο απαιτεί παραδοχές για να υλοποιηθεί. Όσο πιο στενές και προσεκτικά ορισμένες είναι οι παραδοχές αυτές, τόσο πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα θα είναι και η πρόβλεψη. Αν οι παραδοχές δεν βασίζονται σε πραγματικές πειραματικές μετρήσεις τότε η πρόβλεψη θα απέχει από το πραγματικό αποτέλεσμα.

Γενικότερα, ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που πρέπει να υπολογιστεί σε μία ασθένεια είναι το R_0 , δηλαδή ο βασικός ρυθμός αναπαραγωγής. Μία ασθένεια με R_0 ίσο με ένα σημαίνει πως βρίσκεται σε ενδημικό στάδιο, δηλαδή ούτε πεθαίνει τελείως αλλά ούτε είναι αρκετά ισχυρή για να εξαπλωθεί. Αν είναι μικρότερο από ένα συνήθως εξαλείφεται, και αν είναι μεγαλύτερο από ένα τότε υπάρχει κίνδυνος εξάπλωσης. Όσο πιο μεγάλο είναι το R_0 από το ένα τόσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος αυτός. Για παράδειγμα μία από τις πιο μολυσματικές ασθένειες είναι η Ιλαρά με R_0 μεταξύ 12-18.

Για να γίνει επομένως σωστή μοντελοποίηση μιας ασθένειας απαιτείται να γίνει πρώτα σωστή έρευνα για τους παράγοντες που θα συντελούν στην εξάπλωση της. Αυτό πρέπει να επιβεβαιωθεί με πειραματικά αποτελέσματα. Οι παράγοντες αυτοί είναι:

- Ο ρυθμός μετάδοσης της ασθένειας.
- Ο ρυθμός ίασης της ασθένειας.
- Το δίκτυο του πληθυσμού που αναφερόμαστε.
- Το μέσο μετάδοσης του ιού.
- Η επιμονή του ιού σε έναν οργανισμό.
- Ποια όργανα του οργανισμού είναι πιο εύκολο να καταλάβει ο ιός.
- Πως, πότε και αν είναι εφικτή η ανοσία.
- Την εξέλιξη και την επέκταση της ανοσίας στον πληθυσμό. Με αυτό εννοούμε πως αν οι γειτονικοί κόμβοι που έχει ένα μολυσμένο άτομο, έχουν ανοσία τότε ο ιός δεν μπορεί να βρει έδαφος για εξάπλωση, δηλαδή δεν μπορεί να έρθει σε επαφή με ευπαθές άτομο και να εξαπλωθεί. Προφανώς αλλιώς θα εξαπλωθεί ένας ιός σε μια φτωχή ανεμβολίαστη κοινωνία και αλλιώς σε μια εύπορη που εμβολιάζεται.
- Τα γενετικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Αυτό χρησιμεύει για την πρόβλεψη των αντιστάσεων ή των ευπαθειών που μπορεί να έχει ο πληθυσμός καθώς και το πρόσφορο έδαφος που έχει ο ιός για να εξαπλωθεί.
- Τη μελέτη του συγκεκριμένου είδους του ιού (strain of a virus) της ασθένειας.
- Την πιθανότητα αντιγονικής μετατόπισης (antigenic shift). Δηλαδή δύο είδη ενός ιού συνδυάζονται για να σχηματίσουν ένα νέο τύπο που έχει ένα μίγμα των επιφανειακών αντιγόνων των αρχικών ιών.

Όσο περισσότεροι παράγοντες ληφθούν υπόψη κατά την μοντελοποίηση τόσο πιο ακριβής θα είναι και η πρόβλεψη που προσφέρει το μοντέλο. Για να γίνει αυτό λοιπόν όλοι αυτοί οι παράγοντες λαμβάνονται υπόψη και όσο περισσότερα στατιστικά και δεδομένα συγκεντρωθούν τόσο πιο ακριβής θα είναι και ο αλγόριθμος εξάπλωσης. Τα εργαλεία αυτά στην σημερινή εποχή πρέπει να λαμβάνουν υπόψη μεγάλα δεδομένα ώστε να διαχειριστούν όλον αυτόν τον όγκο της πληροφορίας.

2 ΒΑΣΙΚΑ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργία και η εξάπλωση μολυσματικών ασθενειών είναι ένα σύνθετο φαινόμενο με διάφορους παράγοντες όπως το περιβάλλον στο οποίο το παθογόνο και πιθανοί δέκτες βρίσκονται, ο πληθυσμός που εκτίθεται σε αυτό, καθώς και οι δυναμικές του πληθυσμού που μελετάται. Ο ρόλος των μαθηματικών στην επιδημιολογία είναι να μοντελοποιήσει την δημιουργία και την εξάπλωση ενός ιού. Μια κυρίαρχη μέθοδος για να γίνει αυτό, είναι να χωριστεί ο πληθυσμός σε μικρότερες ομάδες υπό ορισμένες παραδοχές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν την ευπάθειά τους έναντι στον ιό που βρίσκεται στο σύστημα. Τέτοιου είδους μοντέλα καλούνται διαχωριστικά μοντέλα στον τομέα της επιδημιολογίας και χρησιμεύουν για την κατανόηση των συστημάτων και των δυναμικών που δρα ο ιός [10].

Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με το επιδημιολογικό μοντέλο SIS. Το μοντέλο αυτό επιλέχθηκε καθώς θέλουμε να μελετήσουμε τις πιθανές εκβάσεις δύο ανταγωνιστικών ιών προσομοιώνοντάς τους ώστε να μην έχουν τον παράγοντα ανοσίας ή θνησιμότητας. Για να γίνει αυτό δεν ήταν χρήσιμο να μελετήσουμε τα μοντέλα τύπου SIR που εμπλέκουν τον παράγοντα θνησιμότητας ή ανάκτησης με ανοσία. Αυτό διότι ένα άτομο όταν σταματά να είναι υπέρ ενός προϊόντος ούτε αναπτύσσει ανοσία σε αυτό, ούτε υπάρχει κίνδυνος θνησιμότητας. Επομένως ήταν απαραίτητο ένα μοντέλο όπου μετά την μόλυνση το άτομο (κόμβος) θα επανερχόταν στην αρχική του κατάσταση.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα επιδημιολογικά μοντέλα SIR και SIS ώστε να γίνει κατανοητή η διαφορά τους. Στην μελέτη περίπτωσης ασχολούμαστε με έναν πληθυσμό με δύο χαρακτηριστικά. Τους μολυσμένους με τον ιό 1 και με τον ιό 2. Για τον ανταγωνισμό δύο διαφορετικών ιών πρέπει να υπάρχει ανοσία του ενός ιού στον άλλο. Επιπλέον πρέπει να τηρείται η συνθήκη πώς ένα υποκείμενο που έχει προσβληθεί από τον έναν δεν μπορεί να προσβληθεί από τον άλλο ιό. Μόνο έτσι μπορούμε να κατατάξουμε έναν ανταγωνισμό δύο ιών σε έναν πληθυσμό [11].

2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ SI

Το μοντέλο SI είναι ένα από τα βασικά μοντέλα επιδημιολογίας. Στο μοντέλο αυτό οι κόμβοι μπορούν να μεταφερθούν από την κατάσταση του επιρρεπή στην κατάσταση του μολυσμένου. Ουσιαστικά είναι το πιο απλοποιημένο επιδημιολογικό μοντέλο και η βάση για τα μοντέλα που θα αναφερθούν στις επόμενες ενότητες.

Το μοντέλο αυτό περιγράφεται από τις εξής σχέσεις:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{a}{N}SI$$

Επειδή στο μοντέλο αυτό οι πιθανές καταστάσεις είναι δύο, (Ευπαθής – Μολυσμένος) έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν στην κάθε χρονική στιγμή ποιος είναι ο αριθμός των ατόμων που είναι μολυσμένα και ποια υγιή. Η ιδιαιτερότητα του μοντέλου αυτού είναι πως εάν μολυνθεί ένας κόμβος, παραμένει για πάντα μολυσμένος.

Στα μοντέλα αυτά ένας πληθυσμός ξεκινά με ένα ποσοστό μολυσμένων κόμβων και στην συνέχεια μελετώνται πόσα βήματα χρειάζονται έως ότου να μολυνθεί όλος ο πληθυσμός. Αφού δεν υπάρχει πιθανότητα ίασης τέτοια μοντέλα χρησιμοποιούνται σε ασθένειες όπως ο HIV ή στην πληροφοριακή για περιπτώσεις όπου η πληροφορία αφού μεταδοθεί δεν χάνεται ποτέ (λ.χ. ένας ιός εξαπλώνεται σε ένα δίκτυο και καταστρέφει τον δίσκο του μηχανήματος που καταλαμβάνει).

2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ SIR

Στην επιδημιολογία το μοντέλο SIR χρησιμοποιείται πιο συχνά ως το πιο ρεαλιστικό μοντέλο για την μετάδοσης μιας νόσου. Το SIR μοντέλο παρουσιάζει μια συμπεριφορά ανάλογα με όρια. Με άλλα λόγια, εάν οι παράμετροι επιδημίας έχουν κάποια κρίσιμη τιμή, ο ιός στο δίκτυο με N κόμβους πεθαίνει πριν το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού προλάβει να μολυνθεί. Εάν οι παράμετροι αυτοί είναι πάνω από το όριο, η επιδημία θα φτάσει στο μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού. Στο [12], οι Kermack και McKendrick (KM) ορίζουν το ντετερμινιστικό μοντέλο επιδημίας με σταθερό πληθυσμό N ατόμων και τρεις καταστάσεις

(SIR). Θεωρείται βασικό μοντέλο καθώς τα αποτελέσματα του είναι ένα σημείο αναφοράς για την επιδημιολογία. Η επέκταση του και η εισαγωγή νέων παραμέτρων οδήγησε στην δημιουργία διαφόρων, πιο σύγχρονων μοντέλων επιδημίας. Κύριο αποτέλεσμα τους είναι η αντιμετώπιση μιας επιδημίας. Ορίζονται τα κρίσιμα σημεία που διαχωρίζουν την επιδημία από μια απλή μόλυνση.

Το μοντέλο αυτό έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- 1) Ο πληθυσμός θεωρείται σταθερός και διαμερίζεται σε τρία υποσύνολα.
- 2) Το σύνολο των ανθρώπων που είναι επιρρεπείς με την ασθένεια και συμβολίζεται με S ή $S(t)$ αν θέλουμε να δείξουμε ότι εξαρτάται η πληθωρικότητα του συνόλου από τον χρόνο.
- 3) Το σύνολο των ασθενών I ή $I(t)$ και
- 4) Και το σύνολο των υγιών ανθρώπων, που συμβολίζουμε με R ή $R(t)$.

Το θεώρημα ορίζει ότι:

Θεώρημα 1. Για το ντετερμινιστικό μοντέλο SIR με S η συνάρτηση ευπαθών ατόμων στον χρόνο, I η συνάρτηση των μολυσμένων και R η συνάρτηση των απομακρύνσεων μπορούμε να ορίσουμε τις εξισώσεις:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = I\left(\frac{a}{N}S - \gamma\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Όπου $S(0) + I(0) + R(0) = N$, ή αλλιώς η αρχική κατάσταση των ευπαθών, μολυσμένων και αναρρωμένων είναι ίση με τον πληθυσμό. Επίσης, a είναι ο ρυθμός μόλυνσης, και γ είναι ο μέσος ρυθμός ίασεων/θανάτων. Εδώ είναι σημαντικό να κάνουμε την παρατήρηση ότι στην πραγματικότητα σε ένα πληθυσμό δεν έχουν όλοι την ίδια πιθανότητα να κολλήσουν μια

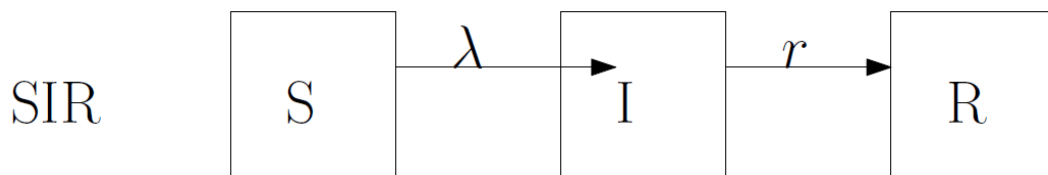
ασθένεια και αυτό το καταλαβαίνουμε γιατί παίζουν ρόλο παράγοντες όπως το περιβάλλον, ο εμβολιασμός κ.α. Αν ένα άτομο έχει μολυνθεί τότε μπορεί να μεταδώσει την ασθένεια σε β το πλήθος από άτομα την ίδια χρονική στιγμή αναλόγως τις επαφές που έχει με υγιή αλλά επιρρεπή άτομα. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ασθενής είναι ικανός να προκαλέσει

$$\frac{a}{N}NC = aC$$

το πλήθος από μολύνσεις, επίσης κάθε χρονική στιγμή, με C την πιθανότητα επαφής.

Το εάν θα ξεσπάσει επιδημία εξαρτάται από την αρχική κατάσταση, δηλαδή το ποσοστό του πληθυσμού που είναι ευπαθές (susceptibles) κατά την έναρξη της επιδημίας. Αυτή η εξάρτηση της εξάπλωσης στην αρχική κατάσταση είναι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του μοντέλου SIR.

Επίσης για την δεύτερη και τρίτη σχέση, που δεν είναι τίποτα άλλο από μια παράγωγος ως προς το χρόνο, η υπόθεση εργασίας είναι ότι το πλήθος των ατόμων που φεύγουν από το σύνολο S πάνε στο σύνολο I , όπως μπορούμε και να αναπαραστήσουμε με το παρακάτω σχήμα :



Το παραπάνω σχήμα είναι το διάγραμμα καταστάσεων για το επιδημιολογικό μοντέλο SIR, όπου η παράμετρος λ εκφράζει την συχνότητα των κρουσμάτων και η παράμετρος τ συμβολίζει το ποσοστό των ασθενών που θεραπεύονται ανα χρονική στιγμή.

Επιπλέον είναι αξιοσημείωτο ότι το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που παρουσιάσαμε πιο πάνω για το μοντέλο SIR δεν είναι γραμμικό και άρα δεν έχει σίγουρα μια αναλυτική λύση – τα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων λύνονται αρκετά εύκολα και αναλυτικά αλλά και αριθμητικά – και ως εκ τούτου πρέπει να αναζητήσουμε λύσεις με άλλους τρόπους.

Η υπόθεση εργασίας που κάναμε πριν θα μας οδηγήσει στην λύση, δηλαδή ότι ο συνολικός πληθυσμός παραμένει σταθερός.

Έτσι έχουμε:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \Rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

Διαιρώντας με την Τρίτη κατά μέλη έχουμε :

$$S(t) = S(0)e^{\frac{\beta}{\gamma}(R(t)-R(0))}$$

Από αυτή την εξίσωση προκύπτει και η σχέση:

$$R_{\infty} = 1 - S(0)e^{-\frac{\beta}{\gamma}(R_{\infty}-R(0))}$$

Όπου η σχέση αυτή μας λέει ότι γενικά στο τέλος μια επιδημίας – αυτό δηλώνει το άπειρο – ότι δεν θα έχουν αναρρώσει όλοι οι ασθενείς. [13] Αυτό συνεπάγεται ότι στο τέλος μιας επιδημίας υπάρχει πτώση των μολυσμένων (ασθενών) αλλά όχι η καθολική έλλειψη ευπαθών ατόμων.

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε ότι η σχέση για τα μολυσμένα άτομα γράφεται:

$$\frac{dI}{dt} = I(\beta S - \gamma)$$

$$\text{Δηλαδή, } \ln(I(t)) = \beta \int_0^t S(\chi) d\chi - \gamma t$$

και άρα

$$I(t) = e^{-\gamma t + \beta \int_0^t S(x) dx}$$

Άρα αν:

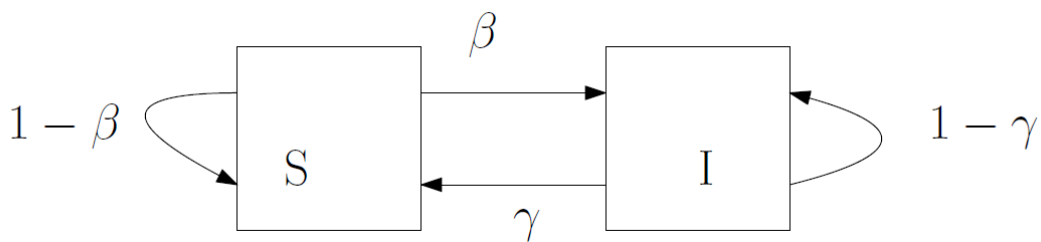
$$\frac{a}{\gamma} C > \frac{1}{S^*(0)}$$

τότε $I'(0) > 0$ δηλαδή ότι θα υπάρξει ένα επιδημιολογικό ξέσπασμα με μια αύξηση του πλήθους των ασθενών και ως συνέπεια όλων αυτών αντιλαμβανόμαστε την σημαντικότητα του λόγου $\frac{a}{\gamma} C$.

2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ SIS

Το μοντέλο SIS εκφράζει κατά κάποιο λόγο την εμπειρία μας ότι σε μερικές ασθένειες τα άτομα δεν αποκτούν μεγάλο χρόνο ανοσίας μετά την ασθένεια και άρα γίνονται αμέσως ευπαθή μετά την ίαση. [14]

Σε αυτή την περίπτωση το διάγραμμα ροής είναι το παρακάτω:



Σε αυτό το μοντέλο λοιπόν ο συνολικός πληθυσμός N διαμερίζεται σε δύο μόνο υποσύνολα τα S και I, το σύνολο των ευπαθών και το σύνολο των ασθενών. [15, 16, 17]

Και σε αυτό το μοντέλο ισχύει η υπόθεση εργασίας για το SIR μοντέλο, δηλαδή ότι ο πληθυσμός είναι σταθερός και όλα τα άτομα έχουν την ίδια πιθανότητα β να προσβληθούν από την ασθένεια. [9] Επίσης ένα άτομο μπορεί να μεταδώσει την ασθένεια σε β το πλήθος

άτομα και η αναλογία ασθενών – υγιών ατόμων είναι $\frac{S}{N}$ άρα κάθε άτομο είναι δυνατόν να

προκαλέσει $\beta N \left(\frac{S}{N} \right) = \beta S$ μολύνσεις και αυτό συνεπάγεται ότι τα άτομα που είναι ασθενείς

I το πλήθος μπορούν να προκαλέσουν άλλες $I\beta S$ το πλήθος από μολύνσεις. [18]

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει αυτό το μοντέλο είναι το παρακάτω:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$$

$$S(t) + I(t) = N \rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{dS}{dt} = 0$$

$$\text{Και άρα } \frac{dI}{dt} = (\beta N - \gamma)I - \beta I^2$$

Το συγκεκριμένο σύστημα εξισώσεων έχει επίλυση με αναλυτικό τρόπο αρκεί να κάνουμε

τον μετασχηματισμό $I = \frac{1}{y}$ τότε προκύπτει: [19, 20]

$$-\frac{y'(t)}{y^2(t)} = (\beta N - \gamma) \frac{1}{y} - \beta \frac{1}{y^2} \text{ άρα}$$

$$-y'(t) = (\beta N - \gamma)y(t) - \beta \Rightarrow y'(t) = (\gamma - N\beta)y(t) - \beta$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή έχει σαν λύση

$$y(t) = Ce^{(\gamma - N\beta)t} + \beta$$

$$\text{Αρα } I(t) = \frac{1}{Ce^{(\gamma - N\beta)t} + \beta}$$

3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν για να επιτευχθεί η εύρεση των σχέσεων που πρέπει να ισχύουν για την εξάπλωση ενός ιού. Με την μελέτη των μαθηματικών μοντέλων αυτών μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση των σχέσεων για τις διαφορετικές περιπτώσεις εξάπλωσης μιας επιδημίας. Μέσω αυτών μπορούμε να ορίσουμε τις παραδοχές που χρειαζόμαστε προκειμένου να υλοποιήσουμε την μελέτη περίπτωσης. Εν τέλη είναι τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε προκειμένου να καταλήξουμε στις βασικές παραδοχές του μοντέλου μας. Με βάση τις παραδοχές αυτές μπορούμε να ορίσουμε τις διακριτές περιπτώσεις και να προχωρήσουμε στην μοντελοποίηση της μελέτης περίπτωσης σε αλγόριθμο.

Τα δυναμικά συστήματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το περιβάλλον που δρα ένας ιός. Βοηθούν στην κατανόηση των σχέσεων που πρέπει να ισχύουν για την εξάπλωσή του.

Η γραμμική άλγεβρα είναι απαραίτητη καθώς ο πληθυσμός παρομοιάζεται με ένα γράφημα. Οι σχέσεις που έχουν μεταξύ τους τα άτομα του πληθυσμού συμβάλλουν και στον ρυθμό με τον οποίο εξαπλώνεται ο ιός. Ουσιαστικά οι κόμβοι ενός γραφήματος ταυτίζονται με τα άτομα του πληθυσμού. Ένας κόμβος μπορεί να μολύνει τους γειτονικούς του κόμβους και έτσι αυτό έχει σημασία για την εξάπλωση μιας νόσου.

Τα σημεία ευστάθειας έχουν αξία γιατί όταν ένας ιός είναι αρκετά ισχυρός σημαίνει πως δεν εξαλείφεται εύκολα. Επομένως εάν ο πληθυσμός δεν έχει εμβολιαστεί και η περίοδος ανοσίας μετά την ανάρρωση είναι μικρή τότε είναι πολύ πιθανό μία νόσος να εξαπλωθεί με καταστροφικές συνέπειες. Επομένως τα σημεία αυτά βοηθούν στην κατανόηση του ρυθμού εξάπλωσης του ιού.

3.2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για την παρουσίαση και την κατανόηση της διπλωματικής είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε αρκετά λεπτομερώς την έννοια των δυναμικών συστημάτων. Αν και είναι αρκετά τεχνικό αυτό το οποίο θα παρουσιάσουμε είναι πολύ σημαντικό για την ορθότητα αυτών των οποίων θα κάνουμε παρακάτω.

Η μοντελοποίηση διάφορων φυσικών και μαθηματικών συστημάτων μας οδηγεί πολλές φορές στην κατασκευή ενός συστήματος [21] διαφορικών εξισώσεων, για παράδειγμα το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y$$

Μπορεί να θεωρηθεί ένα δυναμικό σύστημα, ο αυστηρός ορισμός του είναι ο παρακάτω:

Κάθε σύστημα της μορφής

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k),$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k)$$

Λέγεται δυναμικό σύστημα, όπου οι x_1, \dots, x_n καλούνται δυναμικές μεταβλητές ενώ οι παράμετροι m_1, \dots, m_k καλούνται παράμετροι του συστήματος.

Τα δυναμικά συστήματα εν γένει μπορούν να περιγράψουν εξελισσόμενες διαδικασίες με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Γενικά μας ενδιαφέρει η σίγουρη αποφασιστικότητα ή αλλιώς ντετερμινιστική δηλαδή κατά πόσο το «παρελθόν» αλλά και το «μέλλον» του συστήματος προσδιορίζονται από την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα τον παρόντα χρόνο (είναι πολύ σύνθηες να αναφερόμαστε στην ανεξάρτητη μεταβλητή t σαν χρόνος.)

Επίσης είναι πολύ σημαντικό για την επίλυση μας οι δυναμικές μεταβλητές να είναι πεπερασμένες, εμείς μόνο με αυτή την περίπτωση θα ασχοληθούμε αλλά και η διαφορισιμότητα των συναρτήσεων, δηλαδή οι συναρτήσεις που περιγράφουν να είναι διαφορίσιμες.

Συνεχίζουμε με κάποιους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός – Στατικό Σημείο

Στατικό σημείο ενός δυναμικού συστήματος είναι ένα σημείο (διάνυσμα) (x_1, \dots, x_n) τέτοιο ώστε $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Αυτό σημαίνει για την εξίσωση μας ότι η λύση μας δεν μεταβάλλεται κατά την πάροδο του χρόνου. Τα στατικά σημεία ονομάζονται επίσης και σημεία ευστάθειας ή στατικές καταστάσεις του συστήματος.

Τι σημαίνει όμως ευστάθεια:

Ορισμός – Ευστάθεια (κατά Lyapunov)

Η λύση $x(t)$ καλείται ευσταθής αν για κάθε $\zeta > 0$ υπάρχει δ τέτοιο ώστε για κάθε άλλη λύση $y(t)$ με $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$ συνεπάγεται ότι $|x(t) - y(t)| < \zeta$ για κάθε $t > t_0$.

Αυτό περιγράφει ότι αν μια λύση είναι ευσταθής τότε οι άλλες λύσεις που βρίσκονται αρκετά κοντά στο $x(t)$ για ένα συγκεκριμένο χρόνο θα συνεχίσουν να βρίσκονται κοντά και για τον υπόλοιπο χρόνο.

Θα συνεχίσουμε τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία παρουσιάζοντας την έννοια της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Για αυτό όμως το σκοπό πρώτα θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες και ένα παράδειγμα.

Από την θεωρία της Μαθηματικής Ανάλυσης γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της τότε μπορεί να γραφτεί σαν σειρά Taylor γύρω από ένα σημείο x_0 ,

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

Χωρίς να επεκταθούμε ιδιαίτερα κάτι παρόμοιο μπορεί να συμβεί και με τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών αρκεί να είναι άπειρα παραγωγίσιμες και για τις δύο μεταβλητές. Αν συμβαίνει αυτό τότε

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} \frac{(y-b)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} \frac{2(x-a)(y-b)}{2!} + \dots$$

Αυτό όμως γιατί το χρειαζόμαστε; Αν δούμε το αρχικό μας πρόβλημα

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k) \end{aligned}$$

Το οποίο μπορούμε να το γράψουμε στην πιο συμπαγή μορφή $x' = f(x)$ το οποίο έχει ένα στατικό σημείο \bar{x} , δηλαδή $f(\bar{x}) = 0$ τότε για να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια σε εκείνο το σημείο αναλύουμε την f σαν Taylor. Φυσικά η συνάρτηση μας μπορεί να μην είναι δύο μεταβλητών αλλά περισσότερων.

Για αυτό το λόγο θα εισάγουμε τον πίνακα,

$$D_x f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Και θα γράψουμε:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} [x - \bar{x}] + \dots$$

Και σε πιο συμπαγή μορφή:

$$f(x) = f(\bar{x}) + D_x f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots$$

Αυτό το κάνουμε για να πετύχουμε και να καταλήξουμε στο εξής γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$x' = D_x f(\bar{x})x$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευστάθεια του στατικού σημείου καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $Df(\bar{x})$, ο πίνακας αυτό στην ελληνική βιβλιογραφία καλείται Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος και αρκετές φορές μπορούμε να δούμε την προηγούμενη σχέση γραμμένη σαν:

$$x' = J(\bar{x})x.$$

3.3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΆΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πριν συνεχίσουμε θα αναφέρουμε κάποια βασικά πράγματα από Γραμμική Άλγεβρα που θα μας χρησιμεύσουν στην συνέχεια. Ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n &= b_1 \\ \vdots \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n &= b_n \end{aligned}$$

το γράφουμε στην μορφή πινάκων $Ax = b$, μάλιστα αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος τότε η λύση είναι της μορφής $x = A^{-1}b$. Ήδη μπορούμε να καταλάβουμε την αναλογία του γραμμικού συστήματος με ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα της μορφής $x' = Ax$.

Ορισμός – Ιδιοτιμές Πίνακα

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A τότε ορίζουμε σαν ιδιοτιμές του πίνακα τους αριθμούς λ για τους οποίους υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x για το οποίο ισχύει

$$Ax = \lambda x$$

Για κάθε ιδιοτιμή λ τα διανύσματα που ικανοποιούν το ζητούμενο καλούνται ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής. Η γεωμετρική ερμηνεία των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων είναι η εξής: Μας λένε ποιες «ευθείες» παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από την δράση του πίνακα A .

Για την εύρεση των ιδιοτιμών η πιο κάτω πρόταση είναι η πιο σημαντική

Πρόταση

Έστω ένας πίνακας A τότε οι ιδιοτιμές του είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $\det(A - \lambda I)$ ως προς λ .

Ίσως το πιο σημαντικό Θεώρημα είναι το παρακάτω.

Θεώρημα – Κανονική Μορφή Πίνακα

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με έναν πίνακα J της μορφής

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

Όπου J_0 είναι ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ και

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}$$

Όπου οι λ_j είναι ιδιοτιμές του πίνακα A όχι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που ο πίνακας $A_{n \times n}$ έχει n το πλήθος διακριτές ιδιοτιμές τότε γράφεται σαν $A = PDP^{-1}$ όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της διαγωνίου να είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα. (τότε ο πίνακας λέγεται διαγωνοποιήσιμος.)

Γιατί όμως τα χρειαζόμαστε όλα αυτά, θα προσπαθήσουμε να το καταλάβουμε μέσα από ένα γενικό παράδειγμα.

Έστω το γραμμικό δυναμικό σύστημα :

$$x'_1 = ax_1 + bx_2$$

$$x'_2 = cx_1 + dx_2$$

Τότε από το θεώρημα κανονικής μορφής υπάρχει πίνακας διάστασης 2 ο οποίος είναι όμοιος με τον πίνακα A σε κανονική μορφή.

- (1) Αν η κανονική μορφή του πίνακα είναι (δηλαδή δυο πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές) τότε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Με $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ τότε αποδεικνύεται ότι αν είναι και οι δύο θετικοί η αρχή των αξόνων που είναι στατικό σημείο είναι ασταθής κόμβος ενώ αν είναι αρνητικοί ευσταθής κόμβος.

- (2) Αν ο πίνακας έχει μια πραγματική ιδιοτιμή (διπλή) τότε η κανονική του μορφή είναι

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

και αποδεικνύεται ότι αν η ιδιοτιμή είναι αρνητική τότε η λύση μας είναι ευσταθής ακανόνιστος κόμβος ενώ στην άλλη περίπτωση καλείται ασταθής ακανόνιστος κόμβος.

- (3) Στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές είναι δυο πραγματικές με ετερόσημο πρόσημο τότε η λύση μας καλείται σαγματικό σημείο.

3.4 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Πλέον είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τα γραμμικά δυναμικά συστήματα χρησιμοποιώντας όλα τα προηγούμενα με την βοήθεια ενός παραδείγματος, αλλά πριν από αυτό πρέπει να δώσουμε δυο κομβικούς ορισμούς για την συνέχεια της εργασίας μας.

Ορισμός – Υπερβολικά στατικά σημεία

Ένα στατικό σημείο \bar{x} καλείται υπερβολικό αν καμία από τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα $D_x f(\bar{x})$ δεν είναι μηδέν ή φανταστικός αριθμός
--

Παράδειγμα

Αν θεωρήσουμε το παρακάτω φυσικό σύστημα

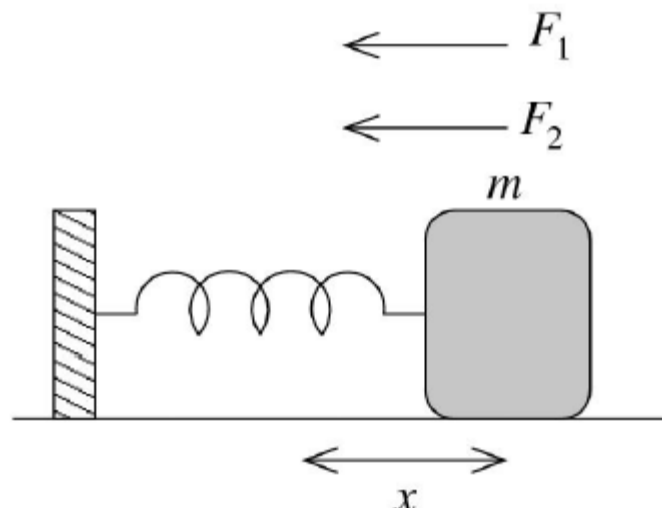


Figure 1: Δυνάμεις σε ένα σύστημα

Το οποίο μας δηλώνει μια μάζα η οποία κινείται υπό την δράση μιας δύναμης $F_1 = k(x^3 - x)$ και της τριβής F_2 ανάλογης της ταχύτητας, τότε το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= x - x^3 - ay\end{aligned}$$

Και αυτό διότι,

$$\sum F = F_1 + F_2 = m\gamma$$

Όπου γ είναι η επιτάχυνση, άρα κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει :

$$m\gamma + cu + k(x^3 - x) = 0$$

Και θέτοντας $\gamma = x''$, $u = x'$, $a = \frac{c}{m}$ και $n = \frac{k}{m}$ προκύπτει:

$$x'' + ax' + n(x^3 - x) = 0$$

Για χάρη ευκολίας υποθέτουμε ότι $n=1$ και θέτοντας $y = x'$ προκύπτει η ζητούμενη

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x - x^3 - ay \end{aligned}$$

Τα στατικά της σημεία είναι τρία το πλήθος

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0, 0) \\ (x_2, y_2) &= (1, 0) \\ (x_3, y_3) &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Που είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x - x^3 - ay &= 0 \end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα:

$$D_x f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -a \end{pmatrix}$$

Άρα το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το $\chi_A(\lambda) = \lambda(a + \lambda) + 3x^2 - 1$ το οποίο έχει

διακρίνουσα $\Delta = \sqrt{a^2 + 4(1 - 3x^2)}$ και άρα οι ιδιοτιμές του είναι οι :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4(1-3x^2)}$$

Και άρα:

Για το σημείο (0,0) οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4}$ και είναι πάντα πραγματικοί

αριθμοί και μάλιστα ισχύει ότι

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4} > 0$$

&

$$\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4} < 0$$

άρα ο κόμβος μας είναι ασταθής.

(1) Για το σημείο (1,0) οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 8}$ άρα για a μικρότερο από

$\sqrt{8}$ ιδιοτιμές είναι μιγαδικοί αριθμοί ενώ για $a > \sqrt{8}$ έχουμε ότι:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 8} < 0$$

&

$$\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 8} < 0$$

άρα ο κόμβος είναι ευσταθής. Ομοίως και για το τρίτο σημείο.

4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΑΠΛΩΣΗΣ ΔΥΟ ΙΩΝ ΣΕ ΕΝΑΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στον παρόν κεφάλαιο θα μελετηθούν οι σχέσεις που ισχύουν σε ένα σύστημα με δύο ανταγωνιστικούς ιούς. Σκοπός είναι να μοντελοποιηθούν οι συντελεστές από διάφορους παράγοντες προκειμένου να βρεθούν οι γενικότερες πιθανές εκβάσεις για την κατάκτηση του πληθυσμού από τους δύο αυτούς ιούς. Αυτό λοιπόν το οποίο θα κάνουμε είναι υποθέσουμε ότι στον πληθυσμό μας υπάρχουν δύο ιοί με διαφορετικές ιδιότητες και να μοντελοποιήσουμε το φυσικό πρόβλημα αυτό ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε διάφορες υποθέσεις στην μελέτη περίπτωσης αργότερα και να καταλήξουμε στις δυνατές περιπτώσεις αυτές μέσω του πρακτικού αλγορίθμου και να διαπιστώσουμε πως ισχύουν.

Το μοντέλο που θα βασιστούμε για να εκφράσουμε τα αποτελέσματα θα είναι το SIS. Οι διάφορες μεταβλητές του προβλήματος μας είναι, οι ρυθμοί μεταβολής της ίασης αλλά και οι ρυθμοί μεταβολής της μόλυνσης (μεταφοράς της ασθένειας, αντίστοιχα α_1 και α_2).

Ο ρυθμός μεταβολής της ίασης στις δύο κατηγορίες θα τον συμβολίζουμε με β_1 και β_2 αντίστοιχα. Τι σημαίνει όμως αυτό; Αυτό το οποίο συνεπάγεται είναι όταν ένας άνθρωπος μολύνεται, ο απαιτούμενος χρόνος ίασης ακολουθεί εκθετική κατανομή ανάλογα σε ποια κατηγορία ανήκει. Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του β_i τόσο πιο γρήγορα θεραπεύεται ο ασθενής. Αυτό εποπτικά αντανακλά θα λέγαμε και τις διαφορές στους μη ομοιογενείς πληθυσμούς ανάλογα με το κοινωνικό και οικονομικό τους γίνεσθαι. Δηλαδή είναι πολύ πιο λογικό ένας Έλληνας πολίτης με μέσο οικονομικό εισόδημα να έχει μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής ίασης λόγω καλύτερης ιατροφαρμακευτικής φροντίδας σε σχέση με έναν οικονομικά ασθενέστερο Έλληνα οποίος δεν μπορεί να αντέξει το βάρος μιας πλήρους αντιμετώπισης της ασθένειας.

Μετά είναι ο ρυθμός μεταβολής της μόλυνσης ανά κατηγορία α_1 και α_2 αντίστοιχα. Εδώ οι ρυθμοί μεταβολής της μόλυνσης εκφράζουν τις πιθανές αντοχές των πληθυσμών στην ασθένεια. Και αυτό το μέρος εποπτικά μεταφράζεται στο γεγονός ότι ανάλογα με το κοινωνικό περιβάλλον οι πληθυσμοί έχουν διαφορετικές αντοχές στην ασθένεια. Εδώ είναι και ένα παράδοξο ενώ θα περιμέναμε ότι οι οικογένειες που έχουν ένα καλό βιοτικό επίπεδο

να έχουν μεγαλύτερη αντοχή στις διάφορες ασθένειες η δημιουργία ενός κινήματος κατά των εμβολίων ρίχνει σημαντικά αυτές τις αντοχές.

4.2 Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Καταρχάς πρέπει να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό σύστημα.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n; m_1, \dots, m_k)\end{aligned}$$

Το οποίο θα περιγράφει το πρόβλημα μας .

Το δεύτερο στάδιο της μοντελοποίησης είναι να βρούμε τα σημεία ισορροπίας (σταθερά σημεία - fixed points) στα οποία το δυναμικό σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία και δεν αλλάζει, άρα τα ευσταθή σημεία ισορροπίας. [22]

Και το τρίτο είναι να μελετήσουμε της συνθήκες ευστάθειας που πρέπει να ισχύουν ώστε τα σημεία ισορροπίας να είναι ευσταθή. [23] Αυτό συνεπάγεται ότι μια οποιαδήποτε μικρή παρέκκλιση από το σημείο ισορροπίας θα επαναφέρει το σύστημα. [24, 25]

Οι περιπτώσεις που θα διακρίνουμε είναι τρεις.

- (1) Η πρώτη περίπτωση είναι να έχει ο πληθυσμός μας αντοχή και στις δύο ασθένειες [17].
- (2) Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν ο πληθυσμός είναι ευάλωτος σε έναν από τους δύο και στον άλλο όχι. Εδώ θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις ανάλογα με το ποιά ασθένεια είναι πιο ισχυρή. [17]
- (3) Και η τρίτη περίπτωση είναι όταν και οι δύο ασθένειες είναι ισχυρές έναντι του πληθυσμού. [17]

4.3 Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Έχουμε λοιπόν δύο ιούς στον πληθυσμό μας, τον πρώτο και τον δεύτερο. Το ζήτημα είναι να κάνουμε κάποιες υποθέσεις εργασίας για τους ρυθμούς μεταβολής.

Αν συμβολίσουμε με I_1 και I_2 το πλήθος των ασθενών τότε [26] ο ρυθμός μεταβολής των ατόμων που ασθενούν είναι ίσος με το πλήθος των νέων ατόμων που ασθενούν και από τις δύο κατηγορίες αφαιρώντας τους ανθρώπους που έχουν ασθενήσει και οι οποίοι γιατρεύονται με πιθανότητα β_i . Άρα το δυναμικό σύστημα που περιγράφει όλα τα προηγούμενα είναι το παρακάτω: [27]

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1(N - I_1)(I_1 + I_2) - \beta_1 I_1 = \alpha_1(NI_1 - I_1^2 - I_2 I_1 + NI_2) - \beta_1 I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha_2(N - I_2)(I_1 + I_2) - \beta_2 I_2 = \alpha_2(NI_2 - I_2 I_1 + I_2^2 + NI_1) - \beta_2 I_2$$

Το πιο πάνω δυναμικό σύστημα έχει σαν Ιακωβιανό πίνακα τον παρακάτω

$$J = \begin{bmatrix} \alpha_1(N - 2I_1 - I_2) - \beta_1 & \alpha_1(N - I_1) \\ \alpha_2(N - I_2) & \alpha_2(N - 2I_2 - I_1) - \beta_2 \end{bmatrix}$$

Εμείς θέλουμε να βρούμε μόνο τα σημεία ισορροπίας τα οποία είναι υπερβολικά, οι βασικές περιπτώσεις που θα θέλαμε να μελετήσουμε είναι οι παρακάτω: [28,29]

- (1) $I_1 = I_2 = 0$ δηλαδή οι ασθένειες (ιός 1 & 2) απαλείφονται με την πάροδο του χρόνου και από όλον τον πληθυσμό.
- (2) $I_1 = 0$ και $I_2 = N$ ή $I_1 = N$ και $I_2 = 0$ δηλαδή μόνο η μια κατηγορία προσβάλλεται πλήρως και η άλλη καθόλου.
- (3) $I_1 = fN$ και $I_2 = (1-f)N$ δηλαδή το σύστημα βρίσκεται σε κάποιου είδους ισορροπία όπου ο ισχυρότερος ιός επικρατεί και ο ασθενέστερος ιός επιζεί σε μικρό ποσοστό.

4.3.1 Περίπτωση πρώτη

Για την περίπτωση όπου $I_1 = I_2 = 0$ τότε ο πίνακας γίνεται $J = \begin{bmatrix} \alpha_1(N) - \beta_1 & \alpha_1(N) \\ \alpha_2(N) & \alpha_2(N) - \beta_2 \end{bmatrix}$

Με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο να είναι το [30]:

$$\chi_J(\lambda) = \det J = \begin{bmatrix} \alpha_1(N) - \beta_1 - \lambda & \alpha_1(N) \\ \alpha_2(N) & \alpha_2(N) - \beta_2 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2 - N(\alpha_1 + \alpha_2))\lambda + \beta_1\beta_2 - N(\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2)$$

Πριν συνεχίσουμε και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\beta_2 > \beta_1$.

Η διακρίνουσα του πολυωνύμου αυτού είναι η [31]

$$\begin{aligned}\Delta &= (\beta_1 + \beta_2 - N(\alpha_1 + \alpha_2))^2 - 4(\beta_1\beta_2 - N(\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2)) = \\ &= (\beta_2 - \beta_1) - N(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4N\alpha_1(\beta_2 - \beta_1)\end{aligned}$$

Και λόγω της υπόθεσης η διακρίνουσα μας είναι πάντα θετική και οι ρίζες του πολυωνύμου, δηλαδή οι ιδιοτιμές μας είναι οι [32]

$$\lambda_1 = \frac{N(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_1) + \sqrt{(\beta_2 - \beta_1) - N(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4N\alpha_1(\beta_2 - \beta_1)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{N(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_1) - \sqrt{(\beta_2 - \beta_1) - N(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4N\alpha_1(\beta_2 - \beta_1)}}{2}$$

Επειδή μας ενδιαφέρει το σημείο ισορροπίας να είναι υπερβολικό αυτό συνεπάγεται ότι δεν πρέπει οι ιδιοτιμές μας να είναι μηδέν, αφού είναι πραγματικές. Επίσης λόγω ευστάθειας απαιτούμε και οι δύο ιδιοτιμές να είναι αρνητικές. [33]

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ άρα αρκεί να ελέγξουμε την ανισότητα $\lambda_1 < 0$ δηλαδή

$$\frac{N(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_1) + \sqrt{(\beta_2 - \beta_1) - (N(\alpha_1 + \alpha_2))^2 + 4N\alpha_1(\beta_2 - \beta_1)}}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$N(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_1) < -\sqrt{(\beta_2 - \beta_1) - (N(\alpha_1 + \alpha_2))^2 + 4N\alpha_1(\beta_2 - \beta_1)} \Leftrightarrow$$

$$(N(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_1))^2 > (\beta_2 - \beta_1) - N(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4N\alpha_1(\beta_2 - \beta_1) \Leftrightarrow$$

$$N\beta_2\alpha_1 + N\alpha_2\beta_1 < \beta_2\beta_1$$

Δηλαδή θα πρέπει [34]

$$N < \frac{\beta_2\beta_1}{\beta_2\alpha_1 + \beta_1\alpha_2}$$

4.3.2 Δεύτερη Περίπτωση

Επειδή σε αυτή την περίπτωση θέλουμε να δούμε τις συνθήκες ισορροπία για την περίπτωση που έχουμε ισότητα, θα το γενικεύσουμε και θα θέσουμε $I_1 \rightarrow cN$ και $I_2 \rightarrow cN$. Οπότε στην περίπτωση μας απαιτούμε

$$\frac{dI_1}{dt} = 0$$
$$\frac{dI_2}{dt} = 0$$

Άρα [35]

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1(N - I_1)(I_1 + I_2) - \beta_1 I_1 = 0$$
$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha_2(N - I_2)(I_1 + I_2) - \beta_2 I_2 = 0$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2N(1-c)} \text{ και } \alpha_2 = \frac{\beta_2}{2N(1-c)}$$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μας οδηγούν στον παρακάτω Ιακωβιανό πίνακα [36]

$$J = \begin{bmatrix} (1-3c)\alpha_1 N - \beta_1 & (1-c)\alpha_1 N \\ (1-c)\alpha_1 N & (1-3c)\alpha_2 N - \beta_2 \end{bmatrix}$$

Οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα αυτού είναι

$$\chi_J(\lambda) = \begin{bmatrix} (1-3c)\alpha_1 N - \beta_1 - \lambda & (1-c)\alpha_1 N \\ (1-c)\alpha_1 N & (1-3c)\alpha_2 N - \beta_2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Δηλαδή κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στο

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2 + (3c-1)N(\alpha_1 + \alpha_2))\lambda +$$
$$+ [\beta_2\beta_1 + 4c(2c-1)\alpha_1\alpha_2 N^2 + (3c-1)N(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)]$$

Το οποίο για να βρούμε τις ρίζες του, δηλαδή τις ιδιοτιμές του πίνακα εργαζόμαστε όπως και πριν και βρίσκουμε την διακρίνουσα η οποία είναι η παρακάτω:

$$\Delta = (\beta_1 + \beta_2 + (3c-1)N(\alpha_1 + \alpha_2))^2 - 4\beta_1\beta_2 - 12cN\beta_2\alpha_1 + 4N\alpha_1\beta_2 + 4\alpha_2\beta_1 - 32c^2\beta_1\beta_2N^2 + 16c\beta_1\beta_2N^2$$

Και αφού

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2N(1-c)}$$

Και

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2N(1-c)}$$

Έχουμε ότι [37]

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\beta_1 + \beta_2 + (3c-1) \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2(1-c)} \right) \right)^2 - 4\beta_1\beta_2 - 12c \frac{\beta_1\beta_2}{1-c} + 4 \frac{\beta_1\beta_2}{1-c} - 8c^2 \frac{\beta_1\beta_2}{(1-c)^2} + 4c \frac{\beta_1\beta_2}{(1-c)^2} = \\ &= \frac{1}{4(1-c)^2} \left[\beta_1^2 + \beta_1^2c^2 + \beta_2^2 + c^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2c^2 + 2\beta_1\beta_2c^2 - 4c\beta_1\beta_2 \right] = \\ &= \frac{1}{4(1-c)^2} \left[(\beta_1 + \beta_2)^2(1+c)^2 - 4c\beta_1\beta_2 \right] \end{aligned}$$

Και οι ιδιοτιμές είναι οι παρακάτω [38]:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c+1)(\beta_1 + \beta_2) \pm \sqrt{(\beta_1 + \beta_2)^2(1+c)^2 - 4c\beta_1\beta_2}}{4(1-c)}$$

Για να μελετήσουμε την διακρίνουσα θα πρέπει να ανακαλέσουμε γνώσεις από απειροστικό λογισμό πολλών μεταβλητών. [39]

Έτσι θέτουμε $f(x, y) = (x+y)^2(1+c)^2 - 4cxy$ αυτό συνεπάγεται ότι οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι οι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x(1+c)^2 + 2y(1+c)^2 - 4cy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x(1+c)^2 + 2y(1+c)^2 - 4cx \end{aligned}$$

Και οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι οι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(c+1)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(c+1)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(c+1)^2 - 4c$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1+c)^2 + 2y(1+c)^2 - 4cy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x(1+c)^2 + 2y(1+c)^2 - 4cx = 0$$

Προκύπτει ότι $x=y$ και κάνοντας αντικατάσταση στη μια από τις δύο έχουμε ότι $x(4c^2 + 4c + 4) = 0$ και επειδή το πολυώνυμο $c^2 + c + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα συνεπάγεται ότι είναι πάντα θετικό άρα $x=0 \Rightarrow y=0$. [40]

Άρα έχουμε μόνο ένα σημείο τοπικού ακρότατου το $(0,0)$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4(c+1)^2(c+1)^2 - \left(2(c+1)^2 - 4c \right)^2 > 0 \quad 2(c+1)^2 - 4c \text{ άρα το σημείο είναι}$$

τοπικό ελάχιστο. Μάλιστα είναι και ολικό ελάχιστο. [41]

Επίσης προκύπτει ότι $\frac{1}{2} < c < 1$ επειδή $\alpha_1, \alpha_2 < 1$ έπεται ότι $c < \frac{2N - \beta_1}{2N}$.

4.3.3 Τρίτη περίπτωση

Στην επόμενη περίπτωση έχουμε ότι $I_1 \rightarrow (1-c)N, I_2 \rightarrow cN$ άρα ξανακάνοντας την προηγούμενη διαδικασία και αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1(1-c)}{Nc}$$

και

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2 c}{N(1-c)}$$

Αυτό είναι ένα σημείο ισορροπίας

Το επόμενο βήμα είναι εξετάσουμε όλες τις συνθήκες ώστε το σημείο ισορροπίας να είναι σταθερό. [16]

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι

$$J = \begin{bmatrix} (c-1)\alpha_1 N - \beta_1 & c\alpha_1 N \\ (1-c)\alpha_2 N & -(\alpha_2 N + \beta_2) \end{bmatrix}$$

Με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το [42]

$$\chi_J(\lambda) = -((c-1)\alpha_1 N - \beta_1 - \lambda)(\alpha_2 N + \beta_2 - \lambda) - c\alpha_1 N(1-c)\alpha_2 N$$

$$\text{Δηλαδή } \chi_J(\lambda) = \lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2 + c\alpha_2 N + (1-c)\alpha_1 N)\lambda + \beta_1\beta_2 + (1-c)\alpha_1\beta_2 N + c\beta_1\alpha_2 N$$

Όπως και πριν πρέπει να εξετάσουμε το πολυώνυμο μιας και το σημείο ισορροπίας απαιτούμε να είναι υπερβολικό και άρα καμιά από τις ιδιοτιμές του πίνακα μας δεν πρέπει να έχει μηδενικό ή θετικό πραγματικό μέρος [25]. Ανάλογα εργαζόμενοι και εδώ έχουμε ότι:

$$\Delta = (\beta_1 + \beta_2 + c\alpha_2 N + (1-c)\alpha_1 N)^2 - 4(\beta_1\beta_2 + (1-c)\alpha_1\beta_2 N + c\beta_1\alpha_2 N)$$

Κάνοντας αντικατάσταση των $\alpha_1 = \frac{\beta_1(1-c)}{Nc}$ και $\alpha_2 = \frac{\beta_2 c}{N(1-c)}$ προκύπτει ότι

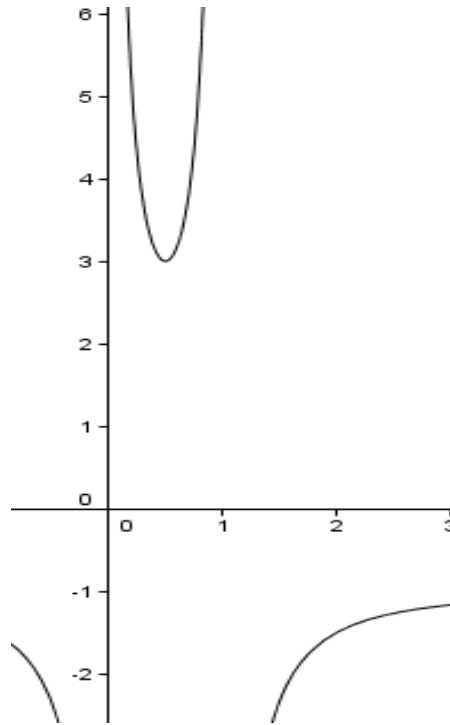
$$\Delta = \frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1) - 4\frac{2c^2 - 2c + 1}{c(1-c)}\beta_1\beta_2$$

Με ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1)\right)^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1) - 4\frac{2c^2 - 2c + 1}{c(1-c)}\beta_1\beta_2}}{2}$$

Για να γλιτώσουμε τις πράξεις κάνουμε την γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x(1-x)}$ με τη

χρήση του λογισμικού Geogebra. [43]



Και βλέπουμε ότι στο διάστημα $[0,1]$ είναι πάντα θετική άρα $\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1) > 0$

και άρα αν η διακρίνουσα είναι αρνητική τότε το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών

$-\left(\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1)\right)^{\frac{1}{2}}$ είναι πάντα αρνητικό, στην περίπτωση που η διακρίνουσα

είναι θετική τότε έχουμε ότι [44]

$$-\left(\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1)\right)^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1) - 4\frac{2c^2 - 2c + 1}{c(1-c)}\beta_1\beta_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1)\right) > \frac{c^2 - c + 1}{c(1-c)}(c\beta_2 + (1-c)\beta_1) - 4\frac{2c^2 - 2c + 1}{c(1-c)}\beta_1\beta_2 \Leftrightarrow$$

$$-4\frac{2c^2 - 2c + 1}{c(1-c)}\beta_1\beta_2 < 0$$

το οποίο ισχύει πάντα.

Αφού εξετάσαμε αυτές τις περιπτώσεις το επόμενο βήμα μας είναι να μοντελοποιήσουμε το μοντέλο για ένα γράφημα. Θα ακολουθήσουμε την μοντελοποίηση του προβλήματος.

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος και $p_{i,1}$ η πιθανότητα ο κόμβος i να ανήκει στην κατηγορία I_1 και αντίστοιχα $p_{i,2}$ η πιθανότητα ο κόμβος να ανήκει στην κατηγορία I_2 τότε το δυναμικό σύστημα που περιγράφει το μοντέλο μας είναι το παρακάτω. [45]

$$\frac{dp_{i,1}}{dt} = -\beta_1 p_{i,1} + \alpha_1 (1 - p_{i,1} - p_{i,2}) \sum_j (A_{ij} 1_{j,1})$$

$$\frac{dp_{i,2}}{dt} = -\beta_2 p_{i,2} + \alpha_2 (1 - p_{i,1} - p_{i,2}) \sum_j (A_{ij} 1_{j,2})$$

5 ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ρυθμός εξάπλωσης ενός αντικειμένου πάνω σε ένα περασμένο δίκτυο από συγκεκριμένα υποκείμενα είναι ένα ερώτημα που απασχολεί ιδιαίτερα τον επιστημονικό κλάδο της πληροφορικής σήμερα. Για παράδειγμα, η εξάπλωση ενός προϊόντος υπέρ ενός άλλου, ενός “trend”, μιας λέξης, ενός ιού υπολογιστών. Αυτό ισχύει και στον τομέα της Υγείας καθώς ένας ιός εξαπλώνεται και κατακτά μεγάλο μέρος όχι μόνο του οργανισμού που καταλαμβάνει αλλά και του πληθυσμού που προσλαμβάνει. Το αξιοσημείωτο που παρατηρείται σε όλες της παραπάνω περιπτώσεις είναι πως συνήθως το ισχυρότερο αντικείμενο εξάπλωσης όχι μόνο υπερνικά τα υπόλοιπα του είδους του αλλά συνήθως καταλαμβάνει όλον τον πληθυσμό εξάπλωσης, χωρίς να αφήνει στον αντίπαλο περιθώρια. Υπαρκτά παραδείγματα είναι η Coca Cola αντί Pepsi, το iPhone εναντίον Android, Face book έναντι MySpace, ο ιός της γρίπης έναντι του ιού των πτηνών κ.α. Εν ολίγοις το ισχυρότερο αντικείμενο κερδίζει τα πάντα και ο αντίπαλός του εξαλείφεται τελείως (ή κατά έναν εντυπωσιακό ποσοστό τουλάχιστον). Εάν ο αντίπαλος δεν εξαλειφτεί εντελώς, και ένα πολύ μικρό ποσοστό καταφέρει να επιβιώσει, τότε κατά πάσα πιθανότητα θα καταφέρει να υπάρξει σχεδόν για πάντα.

Για την δική μας μελέτη περίπτωσης αναφερόμαστε σε δύο ιούς οι οποίοι εξαπλώνονται σε έναν πληθυσμό και θέλουμε να παρατηρήσουμε πόσο γρήγορα και αν θα εξαπλωθούν υπό τις εκάστοτε προϋποθέσεις. Θα διαχωριστούν οι πιθανές περιπτώσεις και θα διαπιστωθούν τα πρακτικά αποτελέσματα.

Το μοντέλο SIS το επιλέξαμε καθώς στην δική μας περίπτωση θέλαμε να μελετήσουμε πιο συγκεκριμένα τον ανταγωνισμό σε δύο ιούς που δεν μπορούν να εισβάλλουν ταυτόχρονα τον ίδιο οργανισμό. Δηλαδή αν το άτομο προσβληθεί από τον έναν ιό δεν μπορεί να προσβληθεί από τον άλλο. Το άτομο που έχει προσβληθεί με τον έναν ιό μπορεί να τον μεταδώσει σε άλλους θεωρώντας πως είναι επιρρεπής (susceptible) να προσβληθούν είτε από τον έναν ή από τον άλλο ιό. Όταν αναρρώσουν θεωρούμε πως επιστρέφουν στο αρχικό στάδιο και επομένως έτσι επιλέχτηκε το μοντέλο SIS ως το καταλληλότερο για την υλοποίηση του αλγορίθμου.

Για να το επιτύχει αυτό ο αλγόριθμος ουσιαστικά λαμβάνει τους ρυθμούς που παίζουν σημαντικό ρόλο σε μία επιδημία, δηλαδή τον ρυθμό ίασης και τον ρυθμό μόλυνσης. Αυτοί οι

αριθμοί πηγάζουν από μελέτες στην εκάστοτε ασθένεια αλλά φυσικά μπορούν να έχουν εφαρμογή και σε μία υποτιθέμενη φήμη ή την εξάπλωση ενός προϊόντος. Στην συνέχεια με βάση τις παραδοχές που θα έχουν οριστεί σε μεταγενέστερο κεφάλαιο θα λαμβάνονται αυτές οι παράμετροι και ο αλγόριθμος θα υπολογίζει πιθανές εκβάσεις του πληθυσμού, δηλαδή αν κατάφεραν οι ιοί να εξαπλωθούν και ποιος από τους δύο κατάφερε να καταλάβει το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού. Θα γίνεται έλεγχος για τις αποδεκτές τιμές που δίνονται στην εφαρμογή και τα αποτελέσματα των μετρήσεων θα παρουσιάζονται σε γράφημα.

Στην περίπτωση αυτή θα κάνουμε κάποιες υποθέσεις και θα διαπιστώσουμε πειραματικά αν τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε όντως συμβαδίζουν με την αρχική μας προσδοκία. Δηλαδή, ο ισχυρότερος ιός να υπερνικά τον αντίπαλο με μεγάλο ποσοστό σε βάθος χρόνου. Ουσιαστικά όλη αυτή η μελέτη μπορεί να παρομοιαστεί σαν το γενικότερο πρόβλημα της ύπαρξης και συμπεριφοράς δύο ανταγωνιστικών προϊόντων σε ένα δίκτυο. Λέμε γενικότερο πρόβλημα γιατί το ίδιο πρόβλημα μπορεί να έχει διάφορες ερμηνείες, από τα κοινωνικά δίκτυα και τον παγκόσμιο ιστό (www) μέχρι τους ανθρώπινους πληθυσμούς.

5.2 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

5.2.1 Γενικές παραδοχές

Εν συνεχεία παραθέτονται κάποιες παραδοχές και ορίζεται το μοντέλο που θα υλοποιηθεί ο αλγόριθμος. Εν ολίγοις πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι στην περίπτωσή μας υποθέτουμε πως αναφερόμαστε αφενός σε δύο ασθένειες που έχουν ίσες πιθανότητες να προσληφθούν από όλες τις ομάδες πληθυσμού ακριβώς το ίδιο (η κάθε μια για τον εαυτό της) και αφετέρου ότι ο πληθυσμός αυτός έχει την ίδια συμπεριφορά στις ασθένειες.

Ενδεικτικά κάποιες παράμετροι που θα έπρεπε να λαμβάνονται υπόψη σε ένα πιο γενικό μοντέλο είναι:

1. Ο πληθυσμός που έχει παθητική ανοσία.
2. Ποσοστό πληθυσμού που είναι ευάλωτο (με παραμέτρους όπως οι ηλικίες, ο χώρος εργασίας, οι επαφές των ατόμων κ.α.).
3. Ο χρόνος επώασης της ασθένειας και ο χρόνος κινδύνου μετάδοσης.
4. Ο τρόπος μετάδοσης της ασθένειας (αέρας, σάλιο, τσίμπημα από κουνούπι κλπ).
5. Ο χρόνος ανοσίας ενός ασθενή αμέσως μετά την ίαση.

Φυσικά, αυτοί οι παράγοντες μετριούνται αναλόγως του ιού που μελετάται εκάστοτε και δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν σταθερά υπολογισμένοι. Μόνο με στατιστικές μετρήσεις για το κάθε αντικείμενο μελέτης είναι εφικτό να προσδιοριστούν και εν συνεχεία να προχωρήσει η υλοποίηση ενός μοντέλου. Και ακόμη και στην περίπτωση αυτή το μοντέλο θα ισχύσει για τον συγκεκριμένο πληθυσμό που λαμβάνει χώρα το αντικείμενο μελέτης (π.χ. η μοντελοποίηση 2 διαφορετικών ασθενειών AIDS και γρίπη στην Αθήνα). Προσδιορίζοντας την ακριβή τοποθεσία μπορούμε να ξεχωρίσουμε τους παραπάνω παράγοντες και να διαλέξουμε ένα ακριβές μοντέλο για να προβλεφτεί μια πιθανή επιδημία. Αυτό σημαίνει πως το συγκεκριμένο μοντέλο θα μπορούσε να εφαρμοστεί για μία ομοιογενή ομάδα πληθυσμού και απαιτείται επέκταση με καινούργιες παραμέτρους όταν αναφερόμαστε σε μεγαλύτερες ομάδες.

Για τους παραπάνω λόγους για να υπολογίσουμε τα πιθανά ενδεχόμενα εξάπλωσης υποθέτουμε ότι [16]:

A) έχουμε ένα μοντέλο εξάπλωσης SIS (κανένας κόμβος δεν έχει ανοσία, ούτε μετά την ίαση)

B) ένας κόμβος έχει μόνο έναν από τους δύο ιούς

Γ) όλοι οι κόμβοι είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους (δηλαδή ο ιός μπορεί να φτάσει από κάθε κόμβο σε έναν άλλο).

Δ) όλοι οι κόμβοι έχουν ίσες πιθανότητες να μολυνθούν από τον κάθε ιό.

Το μοντέλο διάδοσης που ακολουθούμε για δύο ιούς σε έναν πληθυσμό είναι αυτό τύπου SIS αλλά επεκτείνοντας το με έναν παραπάνω ιό (ή αλλιώς μια παραπάνω διαφορετική κατάσταση). Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο είναι το S-I₁-I₂-S, το οποίο έχει τις καταστάσεις:

- Υγιείς – Susceptible (=Ευπαθείς με βάση τις υποθέσεις νωρίτερα).
- Προσβεβλημένος από τον ιό 1 – Infected by virus 1.
- Προσβεβλημένος από τον ιό 2 – Infected by virus 2.

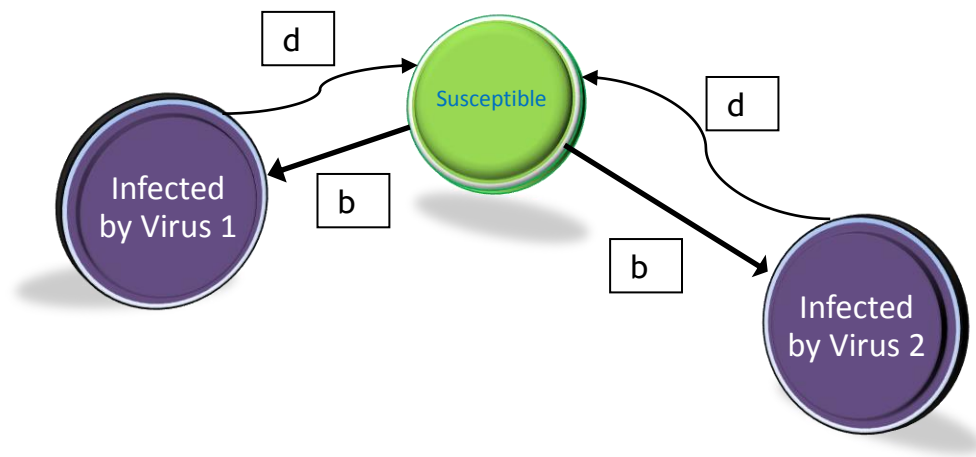


Figure 2: Πιθανές Καταστάσεις [3]

Όπου b ο ρυθμός εξάπλωσης του ιού και d ο ρυθμός ίασης.

Ρυθμός εξάπλωσης του ιού: Ο ρυθμός εξάπλωσης b είναι η ταχύτητα που μεταδίδεται ο ιός στους γειτονικούς του κόμβους. Θεωρούμε b_1 τον ρυθμό εξάπλωσης του ιού 1 και b_2 αντίστοιχα για τον ιό 2. Η ταχύτητα έχει σημασία καθώς ο ιός που μολύνει πιο γρήγορα τους γείτονές του θα έχει και την πιο μεγάλη πιθανότητα να υπερισχύσει έναντι του αντιπάλου. Για τον λόγο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως υποθέτουμε ότι ο κάθε κόμβος μπορεί να μολυνθεί με τον έναν ή με τον άλλο ιό και όχι και με τους 2.

Ρυθμός Ίασης: Θεωρούμε πως κάθε ιός έχει τον δικό του ρυθμό ίασης. Ο ρυθμός ίασης λαμβάνει χώρα όταν ένας κόμβος είναι μολυσμένος με τον ιό 1 ή 2. Αντίστοιχα λοιπόν έχουμε d_1 τον ρυθμό ίασης για τον ιό 1 και d_2 τον ρυθμό ίασης για τον ιό 2. Όσο πιο υψηλή είναι αυτή η παράμετρος τόσο πιο εύκολα ο ιός εξαλείφεται. Όσο πιο χαμηλή είναι, ο ιός επιμένει και ο κόμβος παραμένει μολυσμένος.

Επιπλέον θεωρούμε πως το δίκτυο των κόμβων (ή ο πληθυσμός) έχει ίσες πιθανότητες πρόσληψης (για τον κάθε ιό) σε όλο το φάσμα. Σε πραγματικές συνθήκες ωστόσο, η ιδανική μοντελοποίηση θα λάμβανε υπόψη της διαφορετικές ομάδες πληθυσμού για τις οποίες συγκεκριμένα ένας ιός ή ένα προϊόν θα αναφερόταν.

Σκοπός μέσα από αυτές τις υποθέσεις είναι να αποδειχτεί πως σε ένα υποθετικό μοντέλο 2 ανταγωνιστικών ιών υπάρχουν τρεις πιθανές καταλήξεις:

1. Οι δύο ιοί να μην είναι αρκετά δυνατοί και να πεθάνουν.
2. Ο πιο δυνατός ιός να καταλάβει όλο τον πληθυσμό και ο αδύναμος να εξασθενήσει τελείως.
3. Ο πιο αδύναμος ιός να καταφέρει να επιβιώσει σε ένα πολύ μικρό ποσοστό.

Εν ολίγοις θέλουμε να αποδειχτεί πως ο πιο ισχυρός ιός θα καταλάβει το μεγαλύτερο μέρος του δικτύου των κόμβων, σε βάθος χρόνου, ακόμη και εάν υπάρχει κάποιος αντίπαλος ιός (θεωρητικά πιο αδύναμος του πρώτου).

Για να αποδείξουμε τα παραπάνω βήματα ακολουθούμε την εξής μεθοδολογία:

- Κατασκευή δυναμικού συστήματος που να αντιπροσωπεύει την εξάπλωση του ιού βασισμένο στις παραπάνω υποθέσεις.
- Απόδειξη ύπαρξης μόνο τριών σημείων σταθερότητας. Και στα τρία αυτά σημεία ο ένας ιός πρέπει να εξαλειφτεί επί των πλείστων.
- Εύρεση των συνθηκών που πρέπει να ισχύουν ώστε το σύστημα αυτό να είναι σταθερό.

Αρχικά, ο κίνδυνος για την εξάπλωση μιας επιδημίας αξιολογείται με τον δείκτη R_0 (Reproductive Ratio). Εάν ο δείκτης αυτός είναι μεγαλύτερος του 1 για τα χαρακτηριστικά ενός ιού τότε αυτός ο ιός χαρακτηρίζεται ως επικίνδυνος προς επιδημία. Για κάθε μοντέλο που χρησιμοποιείται, ο δείκτης αυτός υπολογίζεται διαφορετικά. Στην προκειμένη περίπτωση όμως το μοντέλο που ακολουθούμε είναι τύπου SIS.

Όπου b έστω ο ρυθμός εξάπλωσης, d ο ρυθμός ίασης και N ο πληθυσμός.

Για το SI_1I_2S λοιπόν θα θεωρήσουμε R_{01} για τον ιό 1 και R_{02} για τον ιό 2.

Επομένως θα πάρουμε τρία ενδεχόμενα για τις τιμές του δείκτη αυτού.

- Περίπτωση 1: $R_{01} < 1$ & $R_{02} < 1$ (κάτω του ορίου και οι δύο ιοί).
- Περίπτωση 2: $R_{01} > 1$ & $R_{02} < 1$ (άνω του ορίου ο δυνατότερος ιός μόνο).
- Περίπτωση 3: $R_{01} > 1$ & $R_{02} > 1$ (άνω του ορίου και οι δύο ιοί).

Στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε ο βασικός αριθμός αναπαραγωγής, ή αλλιώς το R_0 , υπολογίζεται με τον εξής τρόπο:

Μέσο μετάδοσης θα ορίσουμε στους ιούς που μελετάμε τον αέρα καθώς αυτοί συνήθως είναι και οι πιο επικίνδυνοι ιοί για εξάπλωση μιας επιδημίας.

Περίοδος μετάδοσης είναι ο χρόνος που ένα άτομο μπορεί να μεταδώσει τον ιό:

$$\frac{1}{\text{ρυθμός ίασης}}$$

Πιθανότητα επαφής είναι η πιθανότητα που έχει ένα μολυσμένο άτομο να βρεθεί με ένα υγιές. Υποθέτουμε πως ένα άτομο για τους συγκεκριμένους ιούς θα έρθει σε επαφή το πολύ σε δέκα άλλα άτομα για να μεταδώσει ιό σε μία μέρα (step). Επομένως

Επομένως για την δική μας περίπτωση και με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2 το R_0 υπολογίζεται ως εξής:

$$R_0 = \text{ρυθμός μόλυνσης} * \text{Περίοδος ασθένειας} * C, \quad 0 \leq C \leq 10$$

Όπου C είναι η επαφή με ευπαθές άτομο (Μέσος αριθμός 5).

Και η *περίοδος ασθένειας* είναι ίση με το χρονικό διάστημα ανάρρωσης που απαιτείται.

5.2.2 Παραδοχές πληθυσμού

Οι παραδοχές στην παρούσα εργασία, όσον αφορά τον πληθυσμό, ανήκουν στις ακόλουθες κατηγορίες [25]:

- Γενική δομή του πληθυσμού. Ο πληθυσμός μπορεί να είναι ομοιογενής - ώστε κάθε άτομο να αντιδρά στη μόλυνση το ίδιο ώστε και η εξάπλωση της λοίμωξης να γίνεται με τον παρόμοιο ρυθμό. Σε κανονικές συνθήκες είναι πιθανό να υπάρχουν πολλές διαφορετικές ομοιογενείς ομάδες ή «stratas» [46] που αλληλεπιδρούν ή ακόμη να έχουμε και εντελώς ανομοιογενή πληθυσμό (και να αντιδρά διαφορετικά κάθε άτομο στην ασθένεια).
- Δυναμική πληθυσμών. Το σύνολο των ατόμων που μπορεί να είναι κλειστά ή ανοικτά (να μεταφέρουν και να επηρεάζονται από την ασθένεια). Στο κλειστό σύνολο της μελέτης μας, ο αριθμός των ατόμων δεν αλλάζει την πάροδο του χρόνου, δεν υπάρχουν νέες γεννήσεις, θάνατοι, μεταναστεύσεις ή μεταναστεύσεις.

- Καταστάσεις ενός ατόμου στο δίκτυο. Υπάρχουν πολλές πιθανές καταστάσεις στα μοντέλα επιδημίας. Ένα άτομο μπορεί να είναι ευαίσθητο σε μόλυνση, να είναι σε φάση επώασης, να είναι φορέας χωρίς συμπτώματα ή με συμπτώματα, λόγω ανοσοποιητικού ή αντίστασης του ατόμου να έχει ανοσία, ή στην χειρότερη περίπτωση το άτομο να αφαιρεθεί (θάνατος).

5.3 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΟΥ ΕΦΑΡΜΟΣΤΗΚΑΝ

Για την υλοποίηση του προγραμματιστικού τμήματος των αλγορίθμων ε για την διεξαγωγή των πειραμάτων απαιτήθηκαν συγκεκριμένες τεχνολογίες. Οι τεχνολογίες αυτές είναι κυρίως το Eclipse SE και η Java καθώς και το Jfreechart API.

5.3.1 Ο αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε υπολογίζει τα πιθανά ενδεχόμενα δύο ιών σε ένα δίκτυο. Αρχικά απαιτείται η εισαγωγή του πληθυσμού και τα βήματα επανάληψης. Τα βήματα επανάληψης είναι πόσες μέρες έχει ο ιός στην διάθεση του να εξαπλωθεί. Στην συνέχεια απαιτείται η εισαγωγή των στοιχείων για τον ρυθμό μόλυνσης και τον ρυθμό ίασης. Αυτά θεωρητικά είναι υπολογισμένα για τον εκάστοτε ιό μέσα από έρευνες και μελέτες. Μόλις δοθούν τα στοιχεία αυτά ο αλγόριθμος υπολογίζει χρησιμοποιώντας τυχαία ενδεχόμενα, ποια είναι η έκβαση των δύο ιών αυτών. Ουσιαστικά, αν τηρούνται οι συνθήκες, θέλουμε να επαληθεύονται τα θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν οριστεί παραπάνω για τουλάχιστον το 90% των περιπτώσεων. Ο αλγόριθμος παρουσιάζει τα αποτελέσματα γραπτά για το κάθε βήμα αλλά και σε γραφική παράσταση. Επιπλέον με τις ίδιες μεταβλητές είναι δυνατόν να ξανατρέξει το ίδιο σενάριο για μεγαλύτερη ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Συγκεκριμένα, τους αλγορίθμους τους υλοποιήσαμε με την βοήθεια της αντικειμενοστραφής γλώσσας προγραμματισμού Java. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της Java έναντι των περισσότερων άλλων γλωσσών είναι η ανεξαρτησία του λειτουργικού συστήματος και πλατφόρμας. Τα προγράμματα που είναι γραμμένα σε Java τρέχουν ακριβώς το ίδιο σε Windows, Linux, Unix και Macintosh (σύντομα θα τρέχουν και σε Playstation καθώς και σε άλλες κονσόλες παιχνιδιών) χωρίς να χρειαστεί να ξαναγίνει μεταγλώττιση (compiling) ή να αλλάξει ο πηγαίος κώδικας για κάθε διαφορετικό λειτουργικό σύστημα. Για να επιτευχθεί όμως αυτό χρειαζόταν κάποιος τρόπος έτσι ώστε τα προγράμματα γραμμένα σε Java να μπορούν να είναι «κατανοητά» από κάθε υπολογιστή ανεξάρτητα του είδους επεξεργαστή

(Intel x86, IBM, Sun SPARC, Motorola) αλλά και λειτουργικού συστήματος (Windows, Unix, Linux, BSD, MacOS). Ο λόγος είναι ότι κάθε κεντρική μονάδα επεξεργασίας κατανοεί διαφορετικό κώδικα μηχανής. [47]

Παρόλο που η εικονική μηχανή προσφέρει όλα αυτά (και όχι μόνο) τα πλεονεκτήματα, η Java αρχικά ήταν πιο αργή σε σχέση με άλλες προγραμματιστικές γλώσσες υψηλού επιπέδου (high-level) όπως η C και η C++. Εμπειρικές μετρήσεις στο παρελθόν είχαν δείξει ότι η C++ μπορούσε να είναι αρκετές φορές γρηγορότερη από την Java. Ωστόσο γίνονται προσπάθειες από τη Sun για τη βελτιστοποίηση της εικονικής μηχανής, ενώ υπάρχουν και άλλες υλοποιήσεις της από διάφορες εταιρίες (όπως της IBM), οι οποίες μπορεί σε κάποια σημεία να προσφέρουν καλύτερα και σε κάποια άλλα χειρότερα αποτελέσματα. Επιπλέον με την καθιέρωση των μεταγλωττιστών JIT (Just In Time), οι οποίοι μετατρέπουν τον κώδικα byte απευθείας σε γλώσσα μηχανής, η διαφορά ταχύτητας από τη C++ έχει μικρύνει κατά πολύ. [47]

Οι τελευταίες εκδόσεις του javac με τη χρήση της τεχνολογίας Hot Spot έχουν καταφέρει αξιόλογες επιδόσεις που πλησιάζουν ή και ξεπερνούν σε μερικές περιπτώσεις τον εγγενή κώδικα. [47]

Το περιβάλλον στο οποίο γράψαμε τον κώδικα και ουσιαστικά δομήσαμε τον αλγόριθμο μας επιλέξαμε να είναι η πλατφόρμα του Eclipse. Σε προγραμματισμός ηλεκτρονικών υπολογιστών, το Eclipse είναι ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον ανάπτυξης (IDE). Περιέχει μια βάση εργασίας και ένα επεκτάσιμο σύστημα plug-in για την προσαρμογή του περιβάλλοντος. Το Eclipse είναι γραμμένο κυρίως σε Java και η κύρια χρήση του είναι για την ανάπτυξη εφαρμογών Java, αλλά μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη εφαρμογών σε άλλες γλώσσες προγραμματισμού με τη χρήση των προσθέτων, που περιλαμβάνει: Ada, ABAP, C, C ++, COBOL, Fortran, Haskell , JavaScript, Lua, Perl, PHP, Prolog, Python, R, Ruby (συμπεριλαμβανομένων των Ruby on Rails πλαίσιο), Σκάλα, Clojure, Groovy, Σχέδιο και Erlang. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη πακέτων για το λογισμικό Mathematica. Ανάπτυξη περιβάλλοντα περιλαμβάνουν τα εργαλεία ανάπτυξης Eclipse Java (JDT) για Java και τη Σκάλα, το Eclipse CDT για την C / C++ και Eclipse PDT για την PHP, μεταξύ άλλων.

Η αρχική codebase προήλθε από την IBM VisualAge. [48] Η έκλειψη kit ανάπτυξης λογισμικού (SDK), η οποία περιλαμβάνει τα εργαλεία ανάπτυξης της Java, προορίζεται για προγραμματιστές Java. Οι χρήστες μπορούν να επεκτείνουν τις ικανότητές του με την

εγκατάσταση plug-ins που γράφτηκε για την πλατφόρμα Eclipse, όπως είναι η ανάπτυξη εργαλείων για άλλες γλώσσες προγραμματισμού, και μπορεί να γράψει και να συμβάλει με τις δικές τους μονάδες plug-in.

Τέλος το api το οποίο χρησιμοποιήσαμε ήταν το JFreeCharts api. Το Jfreechart είναι ένα πλαίσιο ανοικτού κώδικα για τη γλώσσα προγραμματισμού Java, η οποία επιτρέπει τη δημιουργία μιας ευρείας ποικιλίας τόσο για διαδραστικά και σταθερά γραφήματα.

Το Jfreechart υποστηρίζει μια σειρά από διάφορα γραφήματα, συμπεριλαμβανομένων των συνδυασμένων διαγραμμάτων:

- X-Y διαγράμματα (γραμμές, και διασποράς). Χρονικός άξονας είναι εφικτός.
- Γραφήματα πίτας
- Γραφήματα Gantt
- Ιστογράμματα (οριζόντια και κάθετα). Επίσης, παρέχεται ενσωματωμένο ιστόγραμμα αποτύπωσης.
- Διάφορα ειδικά διαγράμματα (διάγραμμα ανέμου, δημογραφικά, φουσαλίδες διαφόρων μεγεθών, κλπ).

Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν διάφοροι δείκτες και σχόλια στο επίπεδο.

Η Jfreechart συνεργάζεται επίσης με το GNU Classpath, δωρεάν λογισμικό εφαρμογή της πρότυπης βιβλιοθήκης κατηγορίας για τη γλώσσα προγραμματισμού Java.

Το API αντλεί αυτόματα τις κλίμακες στον άξονα και επεξηγήσεις. Τα γραφήματα στο GUI γίνονται αυτόματα και παρέχεται η δυνατότητα για μεγέθυνση. Τα υπάρχοντα γραφήματα μπορεί εύκολα να ενημερωθούν μέσω listeners που παρέχονται στο library.

5.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

Η θεωρία επαληθεύεται στα πειράματα καθώς για τις παρακάτω διάφορες τιμές που δοκιμάζονται είναι φανερό πως ο ισχυρότερος ιός είτε εξολοθρεύει τον αντίπαλό του είτε συνυπάρχουν με τον μεγαλύτερο ποσοστό να ανήκει στον νικητή.

5.4.1 Πείραμα Πρώτο

Αρχικά αυτό που προσπαθήσαμε να υλοποιήσουμε είναι η δημιουργία ενός αλγορίθμου που να προβλέπει την εξάπλωση μιας ασθένειας μετά από N βήματα (ή αλλιώς μέρες). Εν αρχής ζητούνται: ο πληθυσμός, οι ιοί, τα βήματα επαναλήψεων, ένα σύνολο αρχικών μολυσμένων και οι αντίστοιχοι ρυθμοί ίασης και μόλυνσης. Με βάση τις μεταβλητές αυτές υπολογίζονται σε κάθε βήμα πιθανότητες μόλυνσης και ίασης του πληθυσμού. Έχουμε ένα αρχικό πληθυσμό και βάσει πιθανοτήτων προσπαθούμε να δούμε πόσοι θα είναι οι μολυσμένοι μετά από την πιθανότητα μόλυνσης.

5.4.1.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

Και στους δύο ιούς δίνονται μεγάλες τιμές στον ρυθμό ίασης. Παρότι η ισχύουσα περίπτωση θα έπρεπε να επαληθεύει την θεωρία και να εξαλείφονται και οι δύο ιοί, φαίνεται πως αντίθετα καταλαμβάνουν όλον τον πληθυσμό σε ακριβώς ίσα μέρη και μάλιστα μόνο από την δεύτερη μέρα. Αυτό είναι ιδιαίτερα μη ρεαλιστικό καθώς σε καμία περίπτωση δεν γίνεται να έχουν ακριβώς ίσο μέρος του πληθυσμού και οι δύο ιοί και μάλιστα την δεύτερη ημέρα. Επομένως αντιλαμβανόμαστε πως πιθανότατα ο αλγόριθμος να έχει κάποιο λογικό λάθος.

Starting infection of Population...

Enter the number of population:

1560

Enter the start range for the node infection (1-10)

1

Enter the end range for the node infection (0-10)

2

Enter the steps for the simulation

10

Enter healing rate of Virus 1:

0.92

Enter healing rate of Virus 2:

0.93

Enter infection rate for Virus 1:

0.11

Enter infection rate for Virus 2:

0.09

The number of infected nodes this turn is 156

Virus 1: 83

Virus 2: 73

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

The number of infected nodes this turn is 1560

Virus 1: 780

Virus 2: 780

5.4.1.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Προχωράμε στην δεύτερη περίπτωση προκειμένου να είμαστε σίγουροι για τα λανθασμένα αποτελέσματα. Στην δοκιμή αυτή θα δώσουμε το προβάδισμα στον πρώτο ιό μειώνοντας την αντίσταση του πληθυσμού σε αυτόν μόνο. Και σε αυτή την περίπτωση ωστόσο παρατηρείτε η ίδια ακριβώς συμπεριφορά.

Starting infection of Population...

Enter the number of population:

2345

Enter the start range for the node infection (1-10)

1

Enter the end range for the node infection (0-10)

5

Enter the steps for the simulation

10

Enter healing rate of Virus 1:

0.63

Enter healing rate of Virus 2:

0.93

Enter infection rate for Virus 1:

0.11

Enter infection rate for Virus 2:

0.09

The number of infected nodes this turn is 819

Virus 1: 455

Virus 2: 364

The number of infected nodes this turn is 2344

Virus 1: 1172

Virus 2: 1172

The number of infected nodes this turn is 2344

Virus 1: 1172

Virus 2: 1172

The number of infected nodes this turn is 2344

Virus 1: 1172

Virus 2: 1172

The number of infected nodes this turn is 2344

Virus 1: 1172

Virus 2: 1172

The number of infected nodes this turn is 2344

Virus 1: 1172

Virus 2: 1172

The number of infected nodes this turn is 2344

Virus 1: 1172

Virus 2: 1172

5.4.1.3 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

Για την Τρίτη ορίζουμε μικρή αντίσταση και στις 2 ασθένειες. Όπως φαίνεται ωστόσο έχουμε ακριβώς την ίδια συμπεριφορά και επομένως ο αλγόριθμος είναι σίγουρο πως έχει λογικό λάθος. Στην συνέχεια πρέπει να αναδημιουργήσουμε την λογική του αλγορίθμου προκειμένου να ταιριάζει στην θεωρία που αποδεικνύουμε.

Starting infection of Population...

Enter the number of population:

2430

Enter the start range for the node infection (1-10)

1

Enter the end range for the node infection (0-10)

5

Enter the steps for the simulation

10

Enter healing rate of Virus 1:

0.62

Enter healing rate of Virus 2:

0.66

Enter infection rate for Virus 1:

0.12

Enter infection rate for Virus 2:

0.11

The number of infected nodes this turn is 923

Virus 1: 487

Virus 2: 436

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

The number of infected nodes this turn is 2430

Virus 1: 1215

Virus 2: 1215

Αυτό που ουσιαστικά αντιλαμβανόμαστε είναι πως στο μοντέλο αυτό δεν έχει ληφθεί υπόψη η πιθανότητα επαφής μολυσμένου με ευπαθές άτομο. Για να διορθωθεί αυτό το λάθος γράφτηκε νέος αλγόριθμος ο οποίος όμως λαμβάνει υπόψη του αυτή την μεταβλητή. Επίσης σε αυτό το σημείο ανακαλύφθηκε πως είναι απαραίτητη η παραδοχή για το όριο επαφών δόθηκε νωρίτερα.

5.4.2 Πείραμα Δεύτερο

Εφόσον από το πρώτο πείραμα παρατηρήσαμε πως ο ρυθμός μόλυνσης ήταν ιδιαίτερα γρήγορος και δεν προσέγγιζε την πραγματική κατάσταση. Επιπλέον διαπιστώσαμε πως σε κάθε περίπτωση υπήρχε όριο στον πληθυσμό που μπορούσε να επηρεάσουν οι ασθένειες. Ήταν αναγκαίο να δημιουργηθεί εκ νέου ένας νέος αλγόριθμος έτσι ώστε να λειτουργεί με ακρίβεια αναλογικά με το θεώρημα που θέλουμε να ακολουθήσουμε. Για την διεξαγωγή του δεύτερου πειράματος υλοποιήθηκε αλγόριθμος ο οποίος εκμεταλλεύεται τις εξής παραδοχές οι οποίες είναι βασισμένες στο κεφάλαιο 1 για την μοντελοποίηση μιας επιδημίας:

- Ο πληθυσμός που μελετάμε είναι ομοιογενής και αντιδρά παρόμοια στον καθορισμένο ρυθμό ίασης και μόλυνσης της κάθε ασθένειας.
- Δεν υπάρχουν άτομα με ανοσία και ο πληθυσμός είναι κλειστός (δεν υπάρχουν απρόβλεπτοι παράγοντες όπως γεννήσεις, μεταναστεύσεις ή θάνατοι)
- Έχουμε τρεις καταστάσεις, για τους κόμβους: Υγιής (ή αλλιώς μη επηρεασμένος από τον ιό 1/2), Μολυσμένος από τον ιό 1, Μολυσμένος από τον ιό 2.
- Έστω ότι οι επαφές των μολυσμένων (αυτών που μεταδίδουν τους ιούς 1 ή 2) είναι το πολύ δέκα σε ένα βήμα (Σε ένα εικοσιτετράωρο ένα άτομο στο δίκτυο μπορεί να μολύνει για τον έναν ή τον άλλο ιό από μηδέν έως δέκα άτομα).

Έστω πως έχουμε δύο ιούς οι οποίοι ταξιδεύουν στο δίκτυο με τους ρυθμούς ίασης και μόλυνσης που ορίζουμε σε κάθε περίπτωση. Σκοπός είναι οι πειραματικές εξελίξεις να συμφωνούν με την θεωρία που ακολουθήσαμε στο κεφάλαιο 4.

Επομένως εκτελέσαμε τις απαραίτητες δοκιμές με σκοπό να διαπιστώσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων του αλγορίθμου βάση του θεωρήματος που θέλουμε να αποδείξουμε.

Η θεωρία επαληθεύετε στα πειράματα καθώς για διάφορες τις παρακάτω διάφορες τιμές που δοκιμάζονται είναι φανερό πως ο ισχυρότερος ιός είτε εξολοθρεύει τον αντίπαλό του είτε συνυπάρχουν με τον μεγαλύτερο ποσοστό να ανήκει στον νικητή.

5.4.2.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

Ο ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΕΧΕΙ ΜΕΓΑΛΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΣΤΙΣ 2 ΑΣΘΕΝΕΙΕΣ

Ορίζουμε μεγάλο ρυθμό ίασης για να δηλώσουμε πως ο πληθυσμός έχει μεγάλη αντίσταση στις ασθένειες. Αυτό σημαίνει πως οι ασθένειες δεν είναι αρκετά ισχυρές για να δυναμώσουν και να εξαπλωθούν. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι να εξαλειφθούν τελείως και να μην συνιστούν κίνδυνο επιδημίας.

5.4.2.1.1 Δοκιμή 1:

Όπως είναι φανερό, και οι δύο ιοί δεν καταφέρνουν να εξαπλωθούν καθώς ο ισχυρός ιός καταφέρνει να επιβιώσει σε ένα μικρό ποσοστό ενώ ο δεύτερος εξαλείφεται τελείως. Σε περισσότερα βήματα το πιθανότερο είναι να εξαλειφόταν τελείως και ο πρώτος ιός.

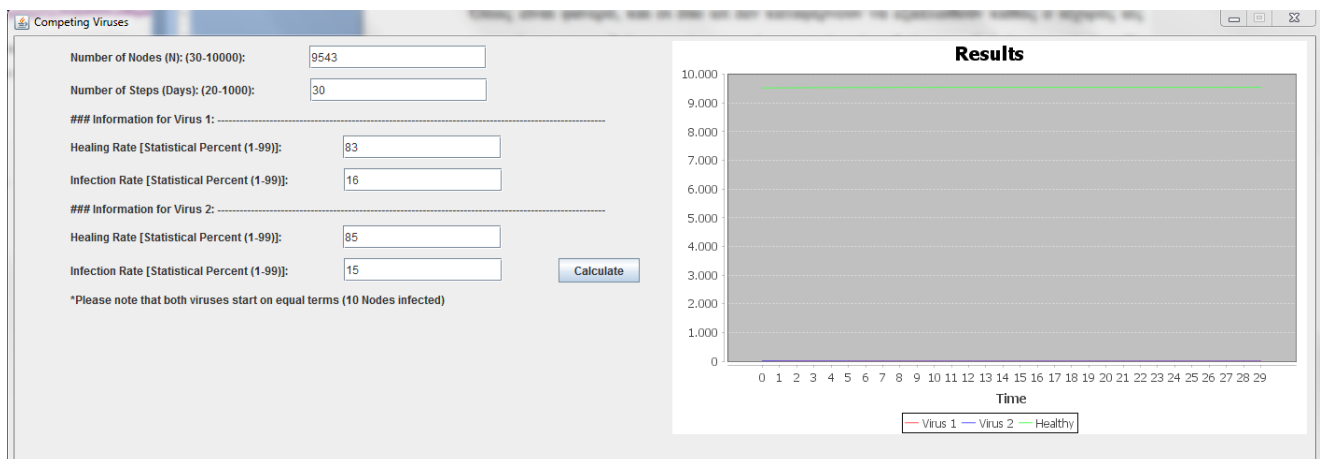


Figure 3: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή A1

Day 1 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 8

Population infected by Virus 2 on this turn: 12

Healthy population on this turn: 9523

Day 2 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 10
Population infected by Virus 2 on this turn: 8
Healthy population on this turn: 9525

Day 3 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 8
Population infected by Virus 2 on this turn: 6
Healthy population on this turn: 9529

Day 4 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 5
Population infected by Virus 2 on this turn: 4
Healthy population on this turn: 9534

Day 5 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 3
Population infected by Virus 2 on this turn: 6
Healthy population on this turn: 9534

Day 6 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 2
Population infected by Virus 2 on this turn: 3
Healthy population on this turn: 9538

Day 7 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 3
Population infected by Virus 2 on this turn: 1

Healthy population on this turn: 9539

Day 8 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 3

Population infected by Virus 2 on this turn: 1

Healthy population on this turn: 9539

Day 9 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 1

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9542

Day 10 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 2

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9541

Day 11 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 1

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9542

Day 12 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 13 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 14 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 15 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 16 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 17 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 18 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 19 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 20 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 21 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 22 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 23 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 24 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 25 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 26 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 27 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 28 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9543

Day 29 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

Day 30 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 9543

5.4.2.1.2 Δοκιμή 2:

Και οι 2 ιοί εξαλείφθηκαν και σε αυτή την περίπτωση.

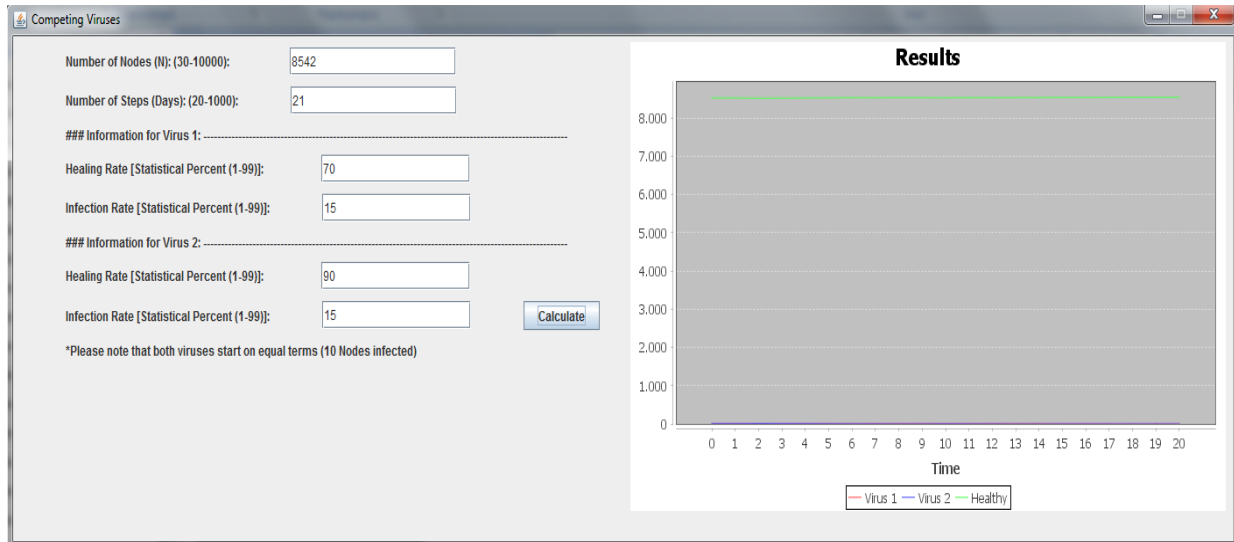


Figure 4: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή A2

Day 1 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 9

Population infected by Virus 2 on this turn: 8

Healthy population on this turn: 8525

Day 2 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 10

Population infected by Virus 2 on this turn: 7

Healthy population on this turn: 8525

Day 3 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 12

Population infected by Virus 2 on this turn: 10
Healthy population on this turn: 8520

Day 4 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 12
Population infected by Virus 2 on this turn: 9
Healthy population on this turn: 8521

Day 5 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 10
Population infected by Virus 2 on this turn: 7
Healthy population on this turn: 8525

Day 6 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 8
Population infected by Virus 2 on this turn: 5
Healthy population on this turn: 8529

Day 7 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 5
Population infected by Virus 2 on this turn: 3
Healthy population on this turn: 8534

Day 8 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 8
Population infected by Virus 2 on this turn: 3
Healthy population on this turn: 8531

Day 9 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 6

Population infected by Virus 2 on this turn: 1

Healthy population on this turn: 8535

Day 10 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 8

Population infected by Virus 2 on this turn: 1

Healthy population on this turn: 8533

Day 11 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 8

Population infected by Virus 2 on this turn: 4

Healthy population on this turn: 8530

Day 12 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 5

Population infected by Virus 2 on this turn: 2

Healthy population on this turn: 8535

Day 13 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 8

Population infected by Virus 2 on this turn: 1

Healthy population on this turn: 8533

Day 14 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 6

Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8536

Day 15 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 6
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8536

Day 16 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 3
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8539

Day 17 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 3
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8539

Day 18 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 1
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8541

Day 19 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 0
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8542

Day 20 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 8542

Day 21 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 0

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 8542

5.4.2.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Ο ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΕΧΕΙ ΜΙΚΡΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΣΘΕΝΕΙΑ 1

5.4.2.2.1 Δοκιμή 1:

Κατεβάζουμε τον ρυθμό ίασης στο 72 από 83 για τον ιό 1. Επομένως έτσι, η αντίσταση του πληθυσμού μειώνεται για την ασθένεια 1. Είναι φανερό πως στο στάδιο των βημάτων ο ιός 1 υπερισχύει έναντι του ιού 2 και αρχίζει να καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού. Έπειτα τις δέκατες μέρας ο ιός δύο δεν αντέχει καθόλου πλέον και εξαλείφεται εντελώς. Ο ιός 1 με το πέρας της δέκατης πέμπτης μέρας αρχίζει και καταλαμβάνει τελείως το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού. Είναι φανερό πως έχει ξεσπάσει επιδημία.



Figure 5: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή B1

Day 1 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 9

Population infected by Virus 2 on this turn: 10

Healthy population on this turn: 9524

Day 2 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 17

Population infected by Virus 2 on this turn: 7
Healthy population on this turn: 9519

Day 3 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 20
Population infected by Virus 2 on this turn: 4
Healthy population on this turn: 9519

Day 4 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 28
Population infected by Virus 2 on this turn: 3
Healthy population on this turn: 9512

Day 5 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 40
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 9502

Day 6 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 48
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 9494

Day 7 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 52
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 9490

Day 8 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 74
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 9468

Day 9 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 75
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 9467

Day 10 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 96
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9447

Day 11 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 127
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9416

Day 12 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 180
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9363

Day 13 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 196

Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9347

Day 14 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 244
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9299

Day 15 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 321
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9222

Day 16 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 382
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9161

Day 17 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 462
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 9081

Day 18 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 567
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 8976

Day 19 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 771

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 8772

Day 20 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 985

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 8558

Day 21 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 1204

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 8339

Day 22 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 1489

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 8054

Day 23 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 1786

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 7757

Day 24 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 2066

Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 7477

Day 25 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 2602
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 6941

Day 26 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 3168
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 6375

Day 27 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 3918
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 5625

Day 28 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 4741
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 4802

Day 29 results:

Complete population: 9543
Population infected by Virus 1 on this turn: 5705
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 3838

Day 30 results:

Complete population: 9543

Population infected by Virus 1 on this turn: 6847

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 2696

5.4.2.2.2 Δοκιμή 2:

Θεωρώντας πως για τον ιό 1 έχουμε ρυθμό ίασης 80% και ρυθμό μόλυνσης 50%, ενώ για τον ιό 2 έχουμε ρυθμό ίασης 50% και ρυθμό μόλυνσης 12% τότε

Για πληθυσμό 8542 σε περίοδο 20 ημερών παρουσιάζονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

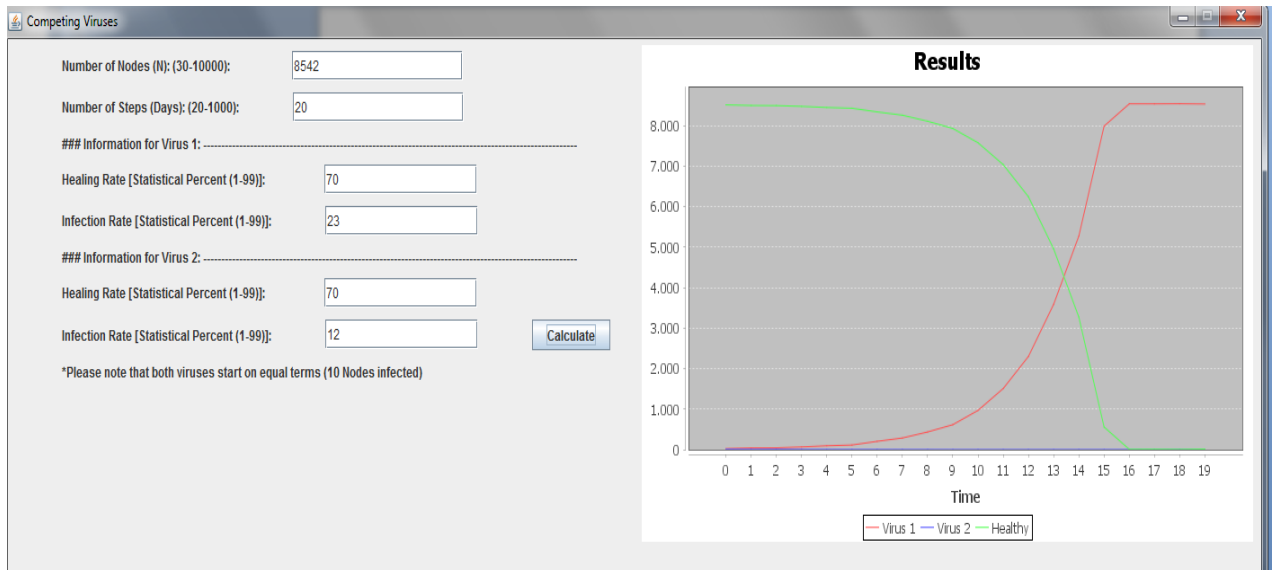


Figure 6: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή B2

Day 1 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 24

Population infected by Virus 2 on this turn: 8

Healthy population on this turn: 8510

Day 2 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 41

Population infected by Virus 2 on this turn: 6

Healthy population on this turn: 8495

Day 3 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 43

Population infected by Virus 2 on this turn: 7
Healthy population on this turn: 8492

Day 4 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 65
Population infected by Virus 2 on this turn: 4
Healthy population on this turn: 8473

Day 5 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 94
Population infected by Virus 2 on this turn: 3
Healthy population on this turn: 8445

Day 6 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 113
Population infected by Virus 2 on this turn: 2
Healthy population on this turn: 8427

Day 7 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 204
Population infected by Virus 2 on this turn: 2
Healthy population on this turn: 8336

Day 8 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 286
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 8255

Day 9 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 435
Population infected by Virus 2 on this turn: 1
Healthy population on this turn: 8106

Day 10 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 615
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 7927

Day 11 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 968
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 7574

Day 12 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 1508
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 7034

Day 13 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 2300
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 6242

Day 14 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 3588

Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 4954

Day 15 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 5274
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 3268

Day 16 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 7985
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 557

Day 17 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 8536
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 6

Day 18 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 8535
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 7

Day 19 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 8538
Population infected by Virus 2 on this turn: 0
Healthy population on this turn: 4

Day 20 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 8531

Population infected by Virus 2 on this turn: 0

Healthy population on this turn: 11

Δηλαδή επειδή ο ιός 1 ήταν πολύ ισχυρότερος του ιού 2 κατάφερε να τον εξολοθρεύσει εντελώς. Έχουμε 11 υγιή άτομα και 8531 μολυσμένα από τον πρώτο ιό και 0 από τον δεύτερο ο οποίος εξαλείφθηκε τελείως αφού άντεξε μέχρι την 9 μέρα.

5.4.2.3 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

Ο ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΕΧΕΙ ΜΙΚΡΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΣΤΙΣ 2 ΑΣΘΕΝΕΙΕΣ

5.4.2.3.1 Δοκιμή 1:

Όπως είναι φανερό σε μια τέτοια περίπτωση είναι πολύ πιθανό να ξεσπάσει επιδημία και για τους δύο ιούς. Δηλαδή και οι δύο ασθένειες καταφέρνουν να επιβιώσουν με το μερίδιο του πληθυσμού που τους αντιστοιχεί. Η πιθανότερη εκδοχή είναι αυτή που παρουσιάζεται, δηλαδή αυτή που ο πρώτος ιός υπερισχύει του δευτέρου, και αυτό διότι έχουμε ορίσει για τον πρώτο περισσότερα ρυθμό μόλυνσης. Εν τέλη, επειδή και ο δεύτερος ιός καταφέρνει να εξαπλωθεί, σημασία για την υπεροχή του πρώτου παίζει η μεγαλύτερη δυνατότητα του να εξαπλωθεί, δηλαδή, ο ρυθμός μόλυνσης. Αυτό φαίνεται καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού. Τέλος το σύστημα φαίνεται να φτάνει σε ένα όριο ισορροπίας, καθώς και οι δύο ιοί έχουν καταλάβει ένα μερίδιο πληθυσμού ο καθένας και δεν συνεχίζουν να εξαπλώνονται χωρίς κιάλας να χάνουν έδαφος.



Figure 7: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή C1

Day 1 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 7

Population infected by Virus 2 on this turn: 17
Healthy population on this turn: 9408

Day 2 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 11
Population infected by Virus 2 on this turn: 16
Healthy population on this turn: 9405

Day 3 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 13
Population infected by Virus 2 on this turn: 20
Healthy population on this turn: 9399

Day 4 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 19
Population infected by Virus 2 on this turn: 21
Healthy population on this turn: 9392

Day 5 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 19
Population infected by Virus 2 on this turn: 27
Healthy population on this turn: 9386

Day 6 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 21
Population infected by Virus 2 on this turn: 34
Healthy population on this turn: 9377

Day 7 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 20

Population infected by Virus 2 on this turn: 57

Healthy population on this turn: 9355

Day 8 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 27

Population infected by Virus 2 on this turn: 65

Healthy population on this turn: 9340

Day 9 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 41

Population infected by Virus 2 on this turn: 77

Healthy population on this turn: 9314

Day 10 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 75

Population infected by Virus 2 on this turn: 133

Healthy population on this turn: 9224

Day 11 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 110

Population infected by Virus 2 on this turn: 154

Healthy population on this turn: 9168

Day 12 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 143

Population infected by Virus 2 on this turn: 203
Healthy population on this turn: 9086

Day 13 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 193
Population infected by Virus 2 on this turn: 242
Healthy population on this turn: 8997

Day 14 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 284
Population infected by Virus 2 on this turn: 294
Healthy population on this turn: 8854

Day 15 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 404
Population infected by Virus 2 on this turn: 365
Healthy population on this turn: 8663

Day 16 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 541
Population infected by Virus 2 on this turn: 459
Healthy population on this turn: 8432

Day 17 results:

Complete population: 9432
Population infected by Virus 1 on this turn: 697
Population infected by Virus 2 on this turn: 611
Healthy population on this turn: 8124

Day 18 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 1025

Population infected by Virus 2 on this turn: 775

Healthy population on this turn: 7632

Day 19 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 1535

Population infected by Virus 2 on this turn: 1015

Healthy population on this turn: 6882

Day 20 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 2140

Population infected by Virus 2 on this turn: 1319

Healthy population on this turn: 5973

Day 21 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 3006

Population infected by Virus 2 on this turn: 1659

Healthy population on this turn: 4767

Day 22 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 4116

Population infected by Virus 2 on this turn: 2170

Healthy population on this turn: 3146

Day 23 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 5681

Population infected by Virus 2 on this turn: 2797

Healthy population on this turn: 954

Day 24 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6631

Population infected by Virus 2 on this turn: 2793

Healthy population on this turn: 8

Day 25 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6630

Population infected by Virus 2 on this turn: 2795

Healthy population on this turn: 7

Day 26 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6631

Population infected by Virus 2 on this turn: 2792

Healthy population on this turn: 9

Day 27 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6631

Population infected by Virus 2 on this turn: 2798

Healthy population on this turn: 3

Day 28 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6626

Population infected by Virus 2 on this turn: 2795

Healthy population on this turn: 11

Day 29 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6632

Population infected by Virus 2 on this turn: 2792

Healthy population on this turn: 8

Day 30 results:

Complete population: 9432

Population infected by Virus 1 on this turn: 6634

Population infected by Virus 2 on this turn: 2792

Healthy population on this turn: 6

5.4.2.3.2 Δοκιμή 2:

Θεωρώντας πως για τον ιό 1 έχουμε ρυθμό ίασης 65% και ρυθμό μόλυνσης 21%, ενώ για τον ιό 2 έχουμε ρυθμό ίασης 65% και ρυθμό μόλυνσης 17% τότε για πληθυσμό 8542 σε περίοδο 25 ημερών παρατηρείται πάλι πως ο ισχυρότερος ιός (ο ιός 1 καθώς έχει τον μεγαλύτερο ρυθμό μόλυνσης) υπερνικά τον αντίπαλό του αφήνοντας μόνο ένα μικρό ποσοστό για την ύπαρξη του.:

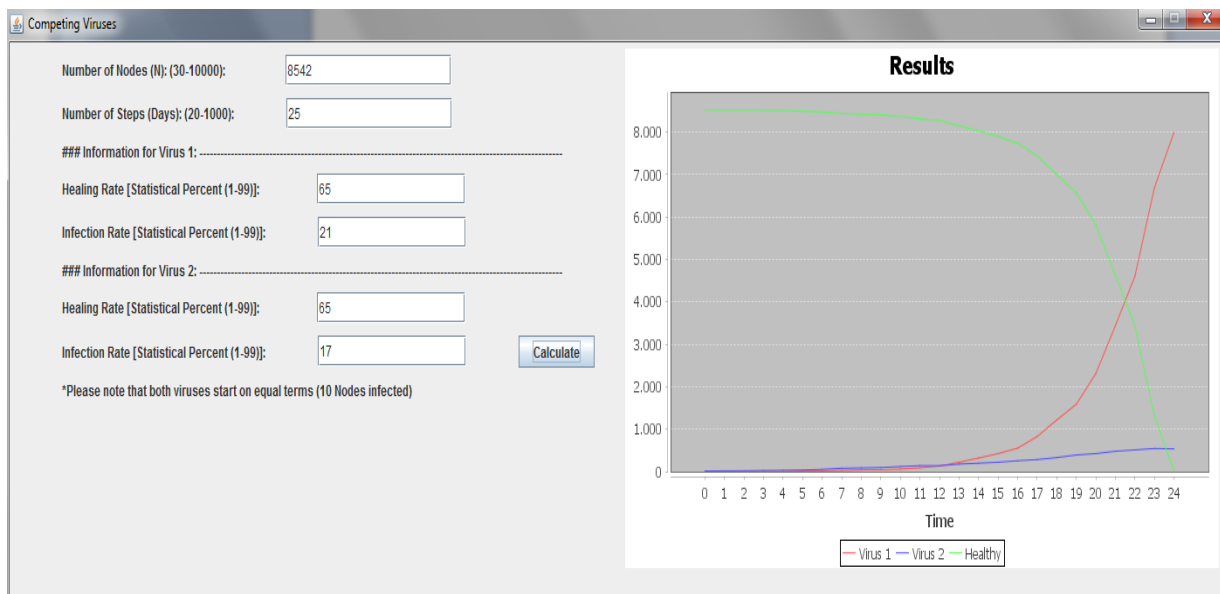


Figure 8: Στιγμιότυπο Εφαρμογής, Δοκιμή C2

Day 1 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 10

Population infected by Virus 2 on this turn: 13

Healthy population on this turn: 8519

Day 2 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 5

Population infected by Virus 2 on this turn: 17

Healthy population on this turn: 8520

Day 3 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 5
Population infected by Virus 2 on this turn: 19
Healthy population on this turn: 8518

Day 4 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 3
Population infected by Virus 2 on this turn: 25
Healthy population on this turn: 8514

Day 5 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 3
Population infected by Virus 2 on this turn: 30
Healthy population on this turn: 8509

Day 6 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 15
Population infected by Virus 2 on this turn: 37
Healthy population on this turn: 8490

Day 7 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 16
Population infected by Virus 2 on this turn: 52
Healthy population on this turn: 8474

Day 8 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 26

Population infected by Virus 2 on this turn: 78
Healthy population on this turn: 8438

Day 9 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 40
Population infected by Virus 2 on this turn: 86
Healthy population on this turn: 8416

Day 10 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 43
Population infected by Virus 2 on this turn: 94
Healthy population on this turn: 8405

Day 11 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 59
Population infected by Virus 2 on this turn: 119
Healthy population on this turn: 8364

Day 12 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 89
Population infected by Virus 2 on this turn: 141
Healthy population on this turn: 8312

Day 13 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 131
Population infected by Virus 2 on this turn: 139
Healthy population on this turn: 8272

Day 14 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 219

Population infected by Virus 2 on this turn: 177

Healthy population on this turn: 8146

Day 15 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 319

Population infected by Virus 2 on this turn: 197

Healthy population on this turn: 8026

Day 16 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 423

Population infected by Virus 2 on this turn: 220

Healthy population on this turn: 7899

Day 17 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 552

Population infected by Virus 2 on this turn: 256

Healthy population on this turn: 7734

Day 18 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 826

Population infected by Virus 2 on this turn: 283

Healthy population on this turn: 7433

Day 19 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 1216

Population infected by Virus 2 on this turn: 330
Healthy population on this turn: 6996

Day 20 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 1586
Population infected by Virus 2 on this turn: 392
Healthy population on this turn: 6564

Day 21 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 2308
Population infected by Virus 2 on this turn: 424
Healthy population on this turn: 5810

Day 22 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 3436
Population infected by Virus 2 on this turn: 479
Healthy population on this turn: 4627

Day 23 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 4602
Population infected by Virus 2 on this turn: 511
Healthy population on this turn: 3429

Day 24 results:

Complete population: 8542
Population infected by Virus 1 on this turn: 6691
Population infected by Virus 2 on this turn: 544
Healthy population on this turn: 1307

Day 25 results:

Complete population: 8542

Population infected by Virus 1 on this turn: 7992

Population infected by Virus 2 on this turn: 536

Healthy population on this turn: 14

6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως είναι φανερό, τα επιδημιολογικά μοντέλα έχουν πολλές εφαρμογές για την μελέτη διαφόρων φημών, διαδικτυακών ιών, trend, εξόρυξης πληροφοριών και κυρίως πρόβλεψης της κατεύθυνσης όλων των παραπάνω.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως η επιδημιολογία είναι η επιστημονική μελέτη των παραγόντων που επηρεάζουν την συχνότητα εμφάνισης της υγείας και των ασθενειών σε έναν πληθυσμό, μέσω της εφαρμογής της στατιστικής στην ιατρική. Αποτελεί ουσιαστικά την βάση και την λογική των παρεμβάσεων με ενδιαφέρον για τη Δημόσια Υγεία. Θεωρείται ως μεθοδολογία αιχμής στην έρευνα που είναι σχετική με τη Δημόσια Υγεία.

Ένα άτομο που ασχολείται με την επιδημιολογία ουσιαστικά ασχολείται με πρακτικά θέματα, όπως η διερεύνηση μίας επιδημίας, η ακόμα και με πιο θεωρητικά θέματα όπως η ανάπτυξη στατιστικών, μαθηματικών, φιλοσοφικών, βιολογικών και ψυχοκοινωνικών θεωριών. Έτσι, οι επιδημιολόγοι ασχολούνται σε μία σειρά τύπων επιστημονικής μελέτης –από μελέτες παρατήρησης έως πειραματικές μελέτες. Οι επιδημιολογικές μελέτες κατηγοριοποιούνται γενικά σε περιγραφικές, αναλυτικές (που έχουν ως σκοπό τη διερεύνηση συσχετίσεων, συχνά αιτιατών σχέσεων) και σε πειραματικές (για παράδειγμα κλινικές δοκιμές).

Στη σύγχρονη επιδημιολογία, χρησιμοποιούνται μέθοδοι και τεχνικές από την Πληροφορική της Υγείας τις οποίες προσεγγίσαμε και υλοποιήσαμε μέσα από μελέτη και εφαρμογή πειραμάτων στην παρούσα εργασία. Ουσιαστικά προσπαθήσαμε να δείξουμε μέσα από πρακτική εφαρμογή πως όταν έχουμε δύο αντίπαλους ιούς, ο ισχυρότερος, είναι αυτός που όχι απλά θα επικρατήσει, αλλά σε βάθος χρόνου θα εξαλείψει τον ανταγωνισμό. Αρκεί οι συνθήκες που επικρατούν στο περιβάλλον να υποβοηθήσουν στην εξάπλωσή του.

Το πρώτο πείραμα, όπως φάνηκε απέτυχε, καθώς ο κώδικας είχε κάποιο λογικό λάθος. Για τον λόγο αυτό δημιουργήθηκε ξανά η εφαρμογή από την αρχή. Στο δεύτερο πείραμα, τα αποτελέσματα επαληθεύονται και επομένως είναι αποδεκτό.

Όπως φαίνεται στο δεύτερο πείραμα στην πρώτη περίπτωση, για R_0 κάτω του ορίου και στους δύο ιούς, εάν ένας πληθυσμός έχει μεγάλη αντίσταση και στους δύο ανταγωνιστικούς ιούς τότε σταδιακά και οι δύο θα εξασθενήσουν και θα εξαλειφτούν εντελώς.

Στην δεύτερη περίπτωση του ίδιου πειράματος, για R_0 άνω του ορίου στον $\iota_0 1$ και κάτω στον $\iota_0 2$, διαπιστώνεται πως ο ισχυρότερος θα καταλάβει πάντοτε τον πληθυσμό σε βάθος χρόνου.

Στην τρίτη περίπτωση όπου το R_0 είναι άνω του ορίου και για τους δύο ιούς, τότε πάλι διαφαίνεται πως ο ιός που έχει την λιγότερη αντίσταση θα κερδίσει και την μικρότερη μερίδα πληθυσμού, το οποίο σε βάθος χρόνου θα καταλήξει και στην εξάλειψη του.

Για κάθε περίπτωση δημιουργήσαμε δύο δοκιμές προκειμένου να είναι σίγουρο πως επαληθεύονται τα παραπάνω. Επομένως βάση των πειραμάτων μας μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η θεωρία επαληθεύεται.

Αυτά που παρατηρούνται με τους παραπάνω ιούς μπορούν να επαληθευτούν και με διάφορα πρακτικά παραδείγματα όπως αν αντιστοιχίσουμε τον $\iota_0 1$ με το Facebook και τον $\iota_0 2$ με το Twitter σε αντίστοιχη έρευνα [49], ή στην έρευνα [50] για τον πιο δημοφιλέστερο browser Google Chrome/Internet explorer, ή ακόμα και στην έρευνα [51] για το Android/iPhone. Σχεδόν πάντοτε ο νικητήριος «ιός» καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού σε συντριπτικό ποσοστό.

Σε περαιτέρω επέκτασή του αλγορίθμου θα μπορούσαμε να πούμε πως εάν είχαμε σαφέστερες υποθέσεις για περισσότερους παράγοντες, τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε έναν ακριβέστερο προσομοιωτή για την εξέλιξη τις πορείας δύο ιών.

7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Stochastic and Deterministic Models in Epidemiology, C. Castillo-Chavez, S. Fridman, X. Luo. Ecommons 2001. Διαθέσιμο στο:

<https://ecommons.cornell.edu/bitstream/handle/1813/31773/BU-1192-M.pdf?sequence=1>

2. Dynamic bi-level optimal toll design approach for dynamic traffic networks Dusica Joksimovic, 2007, Delft University of Technology, the Netherlands. Διαθέσιμο στο:

<http://abstracts.aetransport.org/paper/index/id/2010/confid/10>

3. Winner Takes All: Competing Viruses or Ideas on fair-play Networks, B. Aditya Prakash, Alex Beutel, Roni Rosenfeld, and Christos Faloutsos, Computer Science Department, Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA, USA 2012. Διαθέσιμο στο:

<http://www.cs.cmu.edu/~badityap/papers/competing-wta-www12.pdf>

4. Securing the public interest in electricity generation markets, The myths of the invisible hand and the copper plate Laurens de Vries, 2004, Delft University of Technology, the Netherlands. Διαθέσιμο στο: <http://repository.tudelft.nl/assets/uuid:126e09db-29cb-46d8>

5. Transport infrastructure slot allocation Kaspar Koolstra, 2005, Delft University of Technology, the Netherlands. Διαθέσιμο στο:

<http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid:cd8cd3b6>

6. Understanding open source communities: an organizational perspective Ruben van Wendel de Joode, 2005, (p103-105) Delft University of Technology, the Netherlands. Διαθέσιμο στο:

<http://issuu.com/gfbertini/docs/understanding-open-source-communities---an-organiz>

7. Network Resilience: Exploring Cascading Failures within BGP, E.G. Coffman, Zihui Ge, Don Towsley, Vishal Misra, 2007 Dept. of Electrical Engineering, Columbia University. Διαθέσιμο στο:

ftp://gaia.cs.umass.edu/pub/Coffman02_resilienceBGP.pdf

8. Exploratory modeling and analysis: A promising method to deal with deep uncertainty Datu Buyung Agusdinata, 2008, Delft University of Technology, the Netherlands. Διαθέσιμο στο:

<http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid%3A8a371ab4-3582-4506-bbd2-685e127f8bd7/>

9. Characterization of complex networks: application to robustness analysis Almerima Jamaković, 2008, Delft University of Technology, Delft, the Netherlands. Διαθέσιμο στο:

http://www.nextgenerationinfrastructures.eu/catalog/file/444645/Thesis_Jamakovic.pdf

10. Compartmental models in epidemiology, Wikipedia, Διαθέσιμο στο:

https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology

11. Competitive exclusion in sis and sir epidemic models with total cross immunity and density-dependent host mortality, A. Ackleh and L. Allen, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, Number 2 May 2005.

12. Contributions to the mathematical theory of epidemics - Kermack, W, McKendrick, A, Bulletin of Mathematical Biology 1991.

13. The dynamics of viral marketing, J. Leskovec, L. A. Adamic, and B. A. Huberman. In EC, 2006. Διαθέσιμο στο: <https://www.cs.cmu.edu/~jure/pubs/viral-tweb.pdf>

14. An SIS epidemic model with variable population size and delay Herbert W, P van den Driessche 1995, Journal of Mathematical Biology. Διαθέσιμο στο:

<http://homepage.math.uiowa.edu/~hethcote/PDFs/1995JMathBiol.pdf>

15. Measuring and modelling computer virus prevalence, J. O. Kephart and S. R. White, IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy, 1993. Διαθέσιμο στο:

http://wenke.gtisc.gatech.edu/worms-readings/Kephart_VirusPrevalence.pdf

16. Word of mouth: Rumor dissemination in social networks, J. Kosta, Y. A. Oswald, and R. Wattenhofer. 15 Intl. Coll. on Struct. Inform. and Comm. Complexity SIROCO, 2008.

17. On the bursty evolution of blogspace , R. Kumar, J. Novak, P. Raghavan, and A. Tomkins 2003. [Internet] (Τελευταία πρόσβαση 27/12/2015). Διαθέσιμο στο:

<http://www.disco.ethz.ch/lectures/fs12/seminar/paper/Barbara/32.pdf>

18. Quality of service routing in the internet: theory, complexity and algorithms Fernando Kuipers, 2004, Delft University of Technology, the Netherlands. Διαθέσιμο στο:

<https://www.nas.ewi.tudelft.nl/people/Fernando/papers/PhDthesiskuipers.pdf>

19. An SIS epidemiology game with two Subpopulations, Timothy C Reluga, Dept. of Mathematics, 2008 Pennsylvania University, PA. Διαθέσιμο στο:

<https://www.math.psu.edu/treluga/Reluga09JBD.pdf>

20. Network Resilience: Exploring Cascading Failures within BGP, E.G. Coffman, Zihui Ge, Don Towsley, Vishal Misra, 2007 Dept. of Electrical Engineering, Columbia University. Διαθέσιμο στο:

ftp://gaia.cs.umass.edu/pub/Coffman02_resilienceBGP.pdf

21. SIR epidemics in dynamic contact networks, Volz E, Meyers LA, Proceedings of the Royal Society. 2007 Διαθέσιμο στο:

<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2291166/>

22. A theory of fads, fashion, custom, and cultural change in informational cascades, S. Bikhchandani, D. Hirshleifer, and I. Welch. Journal of Political Economy, 100 October 1992 (p995-1012). Διαθέσιμο στο: <http://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSR>

23. Competitive exclusion and coexistence of multiple strains in an SIS model. C. Castillo-Chavez, W. Huang, and J. Li. SIAM J. Appl. Math, 59, 1999.

24. Competitive exclusion in gonorrhoea models and other sexually transmitted diseases, C. Castillo-Chavez, W. Huang, and J. Li.. SIAM J. Appl. Mathematical Science Institute, 1993. Διαθέσιμο στο: <https://ecommons.cornell.edu/bitstream/handle/1813/31801/BU-1217-M.pdf?sequence=1>

25. Threshold models of collective behaviour, M. Granovetter. Am. Journal of Sociology, 83, 1978. Διαθέσιμο στο:

<http://vserver1.cscs.lsa.umich.edu/~spage/ONLINECOURSE/R2Granovetter.pdf>

26. An algorithm for computing the numerical radius, C. He and G. A. Watson. IMA Journal of Numerical Analysis, 1997. Διαθέσιμο στο:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379594000972>

27. Information diffusion through blogspace, D. Gruhl, R. Guha, D. Liben-Nowell, and A. Tomkins. Διαθέσιμο στο: <http://people.csail.mit.edu/dln/papers/blogs/idib.pdf>

28. Threshold conditions for arbitrary cascade models on arbitrary networks, B. A. Prakash, D. Chakrabarti, M. Faloutsos, N. Valler, and C. Faloutsos. ICDM, 2011. Διαθέσιμο στο: <http://www.cs.cmu.edu/~badityap/papers/gen-threshold-icdm11.pdf>
29. Mining knowledge-sharing sites for viral marketing, M. Richardson and P. Domingos. SIGKDD, 2002. Διαθέσιμο στο: <http://homes.cs.washington.edu/~pedrod/papers/kdd02b.pdf>
30. Maximizing the spread of influence through a social network, D. Kempe, J. Kleinberg, and E. Tardos. In KDD, 2003. Διαθέσιμο στο: <http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/kdd03-inf.pdf>
31. Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks, S. Eubank, H. Guclu, V. S. Anil Kumar, M. V. Marathe, A. Srinivasan, Z. Toroczkai, and N. Wang. Letters to Nature, May 2004, (p180 – 184). Διαθέσιμο στο: <http://ndssl.vbi.vt.edu/Publications/modellingDisease.pdf>
32. Talk of the network: A complex systems look at the underlying process of word-of-mouth J. Goldenberg, B. Libai, and E. Muller. Διαθέσιμο στο: <http://www.complexmarkets.com/files/TalkofNetworks.pdf>
33. Applications of mathematics to medical problems, A. G. McKendrick, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, volume 14, 1926 (p130-156). Διαθέσιμο στο: <http://journals.cambridge.org/download.php?file=%2FPEM%2FPEM44%2FS0013091500034428a.pdf&code=adaf52ee7426ee7da8274c4fdfabca59>
34. Epidemic spreading in scale-free networks, R. Pastor-Santorrás and A. Vespignani, Physical Review Letters 86, 14, 2001. Διαθέσιμο στο: <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0010317.pdf>
35. Spread of epidemic disease on networks, Newman M., Physical Review Letters, 2002, Pubmed. Διαθέσιμο στο: <http://www.stat.cmu.edu/~fienberg/Stat36-835/Newman-PhysRev-2002.pdf>
36. A generalized linear threshold model for multiple cascades, N. Pathak, A. Banerjee, and J. Srivastava. ICDM, 2010. Διαθέσιμο στο: <http://www-users.cs.umn.edu/~banerjee/papers/10/gltm.pdf>

37. J. Leskovec, M. McGlohon, C. Faloutsos, N. Glance, and M. Hurst. Cascading behavior in large blog graphs: Patterns and a model. In SDM, 2007.
38. C. R. McCuler. The many proofs and applications of perron's theorem. SIAM Review, 42, 2000.
39. NDSSL. Synthetic Data Products for Societal Infrastructures and Protopopulations: Data Set 2.0.NDSSL-TR-07-003, 2007.
40. Dynamics and Control of Infectious Diseases, A. Glaser Princeton University, 2007. Διαθέσιμο στο: http://www.princeton.edu/~aglaser/lecture2007_diseases.pdf
41. Coevolution of hosts and parasites, R. M. Anderson and R. M. May, Parasitology, 1982. (p412-425).
42. Epidemic Models Their Structure and Relation to Data, D. Mollison, Cambridge University Press 1995, Διαθέσιμο στο: <http://catdir.loc.gov/catdir/samples/cam034/95015185.pdf>
43. Sources for used libraries. International GeoGebra Institute. Retrieved 23 February 2014.
44. Social Networks for Epidemic Spreading: A Case Study, S. Rausanu, C. Crina 2010, Department of Information Technology, Babes-Bolyai University, Romania. Διαθέσιμο στο: https://www.researchgate.net/publication/50366273_Social_Networks_for_Epidemic_Spreading_A_Case_Study
45. Epidemic Spreading and complex Networks, A. Barrat, V. Colizza, A. Vespignami 2003, Encyclopedia of Life Support Systems. Διαθέσιμο στο: <http://www.eolss.net/Sample-Chapters/C15/E6-200-11-00.pdf>
46. Essentials of Epidemiology in Public Health, A. Aschengrau, Boston University School of Public Health. (p303) Google. Διαθέσιμο στο: <https://books.google.gr/books?id=0ewQAAAAQBA>
47. Java, Wikipedia [Internet] (Τελευταία πρόσβαση 17/09/2015). Διαθέσιμο στο: <https://el.wikipedia.org/wiki/Java>
48. Where did Eclipse come from? Eclipse Wiki [Internet] (Τελευταία πρόσβαση 10/12/2015). Διαθέσιμο στο: http://wiki.eclipse.org/FAQ_Where_did_Eclipse_come_from%3F

49. Top 15 Most Popular Social Networking Sites, January 2016, Διαθέσιμο στο: <http://www.ebizmba.com/articles/social-networking-websites>
50. Most popular US web browsers, according to the federal government, March 2015, Διαθέσιμο στο: <http://www.zdnet.com/article/the-most-u-s-popular-web-browsers/>
51. Android/iPhones in active use, December 2013, Διαθέσιμο στο: <http://venturebeat.com/2013/02/06/800-million-android-smartphones-300-million-iphones-in-active-use-by-december-2013-study-says/>