ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Παναγιώτης Α. Σταθόπουλος

Διπλωματική Εργασία

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιανουάριος 2015

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Παναγιώτης Α. Σταθόπουλος

Διπλωματική Εργασία

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιανουάριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ψαρράκος Γεώργιος (Επιβλέπων)
- Πολίτης Κωνσταντίνος
- Βρόντος Σπυρίδων

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή της γνώμης του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

ON THE DEFICIT AT THE TIME OF RUIN IN THE RENEWAL RISK MODEL

Panagiotis A. Stathopoulos

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus
January 2015

Στην οικογένεια μου
Δάφνη και τον μικρό μας Αντρέα

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την σύζυγο μου Δάφνη και τον γιο μας Αντρέα, που όχι μόνο ανέχτηκαν τον ελάχιστο προσωπικό μου χρόνο για αυτούς να τον αφιερώσω στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, αλλά με ενθάρρυναν και με την ευγενή τους στάση.

Τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου θα ήθελα να δώσω στην τριμελή επιτροπή για το χρόνο τους και κυρίως στον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας, Γιώργο Ψαρράκο, αρχικά για την συμβολή του στην εργασία καθεαυτή με τα χρήσιμα και έγκυρα σχόλια του, αλλά και για την υπομονή και προσαρμοστικότητα του αντιλαμβανόμενος το δύσκολο εργασιακό μου ωράριο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους του καθηγητές του Μεταπτυχιακού τμήματος για την προσπάθεια τους να μας μεταδώσουνε με όσο τον δυνατόν πληρέστερο τρόπο τις γνώσεις τους. Η επιτυχία τους, αλλά και η εν γένει χρησιμότητα του μεταπτυχιακού τμήματος φαίνεται από την καθολική αναγνωρισημότητά του από την ίδια την αγορά εργασίας.

Περίληψη

Βασικός στόχος της παρούσης εργασίας αποτελεί η μελέτης της κατανομής του ελλείμματος στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων.

Στο πλαίσιο αυτό, μελετήθηκαν ένα πλήθος φραγμάτων και σχετικών ποσοτήτων που συνδέονται με την υπό μελέτη κατανομή, τόσο στο ανανεωτικό όσο και στο κλασικό μοντέλο. Σκοπός της μελέτης είναι η όσο το δυνατόν πληρέστερη και ακριβέστερη προσέγγιση των ποσοτήτων της εν λόγω κατανομής. Αναφέρουμε ενδεικτικά το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από δεδομένο αποθεματικό, το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, τις αντίστοιχες πιθανότητες και άλλες σχετικές ποσότητες.

Για την ανάπτυξη και διαμόρφωση της εργασίας χρησιμοποιήθηκαν ένα πλήθος από επιστημονικά άρθρα. Προεξέχοντα και δομικό ρόλο είχαν τα άρθρα των Chadjiconstantinidis S., Politis K. (2007), Willmot G.E. (2002) και Woo J.K. (2011).

Abstract

The main objective of this paper is the study of the deficit at the time of ruin in the renewal model of risk theory.

In this context, a number of results and approximations associated with the distribution of the deficit, were studied and compared, both in the renewal and in the classical model. The purpose of the study is to have, an as far as possible completed and accurate approach to the quantities we are interested in. For example, the probability of ruin, the severity of the deficit at the time of ruin and other related quantities.

For the development and configuration of our study have been used a number of scientific articles. We remark that key role, had the articles of Chadjiconstantinidis S., Politis K. (2007), Willmot GE (2002) and Woo J.K. (2011).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες της Θεωρίας Χρεοκοπίας

1.1 Πρόλογος

Η μελέτη του ελλείμματος δεδομένης της χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο μας δημιουργεί την ανάγκη της περαιτέρω μελέτης και εύρεσης νέων ιδιοτήτων των σύνθετων γεωμετρικών κατανομών. Αυτό συμβαίνει διότι η κατανομή της μέγιστης συσσωρευτικής απώλειας κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεδομένου ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, ακολουθεί τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή.

Η κανονική κατανομή του χρέους, δεδομένης της χρεοκοπίας, είναι μια μίξη των κατανομών των κλιμακωτών υψών (ladder heights) απο την οποία προκύπτουν ποικίλες σχέσεις και όρια. Ακόμα σημαντικότερη βελτίωση στον καθορισμό των ορίων, προκύπτει, αν θεωρήσουμε κάποιες επιπλέον υποθέσεις που αφορούν την κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου αναμονής των αποζημιώσεων (αξιώσεων ή ζημιών) καθώς και την κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων αυτών.

1.2 Βασικές έννοιες

Στη συνέχεια θα ορίσουμε κάποιες θεμελιώδεις εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας χρεοκοπίας ξεκινώντας από τον ορισμό της στοχαστικής ανέλιξης (βλέπε Κουτσόπουλος Κ. 1999 και Πολίτης Κ. 2012).

Ορισμός Μία στοχαστική ανέλιξη είναι μια οικογένεια τ.μ. $\{X_t : t \in T\}$ όπου T είναι ένα σύνολο (συνήθως χρόνος). Μια στοχαστική ανέλιξη διακρίνεται σε συνεχής ή διακριτής παραμέτρου και σε συνεχών ή διακριτών τιμών αναλόγως το αν είναι συνεχείς ή διακριτές οι τιμές των T και X αντίστοιχα.

Μια βασική κατηγορία στοχαστικών ανελίξεων είναι οι Μαρκοβιανές ανελίξεις.

Ορισμός Μια στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο λέμε ότι είναι ανέλιξη (ή αλυσίδα) Markov όταν ικανοποιεί τη σχέση
$P(X_n = x|X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, ..., X_0 = x_0) = P(X_n = x|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x, \forall n = 1, 2, ...$
Το απλούστερο μοντέλο μιας μαρκοβιανής ανέλιξης είναι η ανέλιξη Poisson. Η ανέλιξη αυτή είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη, δηλαδή μη φθίνουσα και παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές. Συνεπώς, αποτελεί το βασικό εργαλείο για την μελέτη των απαιτήσεων προς μια ασφαλιστική στο χρόνο.

Ορισμός Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ λέγεται ανέλιξη Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $N(0) = 0$

2. Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί είναι ανάλογη του διαστήματος. Δηλαδή

$$P(N(t+h) = n+k|N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & k = 1, \\ 1 - \lambda h + o(h), & k = 0, \\ o(h), & k \geq 2. \end{cases}$$

3. Για κάθε $t < s$ η τ.μ. $N(s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$.

Δυο βασικές ιδιότητες της στοχαστικής ανέλιξης Poisson είναι:

- Για κάθε σταθερό t η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt και μπορεί να αναπαρασταθεί ως $N(t) \sim Poi(\lambda t)$.

- Για κάθε $i \neq j$ οι μεταβλητές T_i, T_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και καθεμία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, όπου T_i ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ της επέλευσης του γεγονότος $i - 1$ και του γεγονότος i.

Συνεπώς, έστω Y_k ο χρόνος μέχρι να συμβεί το k γεγονός, τότε

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι το άθροισμα ανεξάρτητων εκθετικών με την ίδια παράμετρο ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, την οποία συμβολίζουμε ως $Ga(k, l)$, συμπεραίνουμε ότι στην ανέλιξη Poisson, $\forall k = 1, 2, ...$ ισχύει $Y_k \sim Ga(k, l)$. Αν η πρώτη παράμετρος στην κατανομή Γάμμα είναι ακέραιος, τότε αναφέρεται και ως κατανομή Erlang, την οποία συμβολίζουμε ως $Erl(k, l)$.

Μια γενίκευση της ανέλιξης Poisson με ιδίαιτερο ενδιαφέρον στην Θεωρία χρεοκοπίας είναι η ανανεωτική ανέλιξη.

Ορισμός Μια απαριθμήτρια ανέλιξη $(N(t) : t \geq 0)$ της οποίας οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή ονομάζεται ανανεωτική ανέλιξη.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας χρεοκοπίας υπό το πρίσμα των ανανεωτικών ανελίξεων θα χρειαστεί ο ορισμός της συνέλιξης δύο ή περισσότερων αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής.

Ορισμός Αν F, G είναι δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, τότε η συνάρτηση κατανομής $F * G$ που ορίζεται για $x \geq 0$ από τη σχέση

$$(F * G)(x) = (G * F)(x) = \int_0^x F(x - t) dG(t)$$

ονομάζεται **συνέλιξη** των F, G.
Ομοίως αν F, G είναι δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, με πυκνότητες f, g τότε η πυκνότητα $F * G$ ορίζεται ως

$$(F * G)(x) = \int_0^x f(x - t) g(t) dt.$$

Πρόταση 1.2.1. *Έστω μια ανανεωτική ανέλιξη $(N(t) : t \geq 0)$ στην οποία η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων είναι F και έστω $m(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση. Τότε η $m(t)$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t),$$

όπου F^{*k} είναι η k-τάξης συνέλιξη της F με τον εαυτό της, δηλαδή $F^{*2}(x) = (F * F)(x)$ κ.ο.κ.

Πρόταση 1.2.2. *Η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ικανοποιεί την* ***ανανεωτική εξίσωση***

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x).$$

Γενικότερα μια εξίσωση της μορφής

$$\mu(t) = Z(t) + \phi \int_0^t Z(t-x)dF(x),$$

λέγεται εξίσωση ανανεωτικού τύπου ή αλλιώς ανανεωτική εξίσωση.

Οι εξισώσεις ανανεωτικού τύπου διακρίνονται σε:
(α) ελλειμματικές όταν $0 < \phi < 1$ και
(β) κανονικές ή μη ελλειμματική όταν $\phi = 1$.

Θεώρημα 1.2.1. ***Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα***

Έστω η μη ελλειματική ανανεωτική εξίσωση

$$Z(t) = g(t) + \int_0^t Z(t-x)dF(x),$$

όπου Z είναι η άγνωστη συνάρτηση, g μία φραγμένη συνάρτηση και F μία συνεχής συνάρτηση κατανομής.
Αν η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(0, \infty)$ και ισχύει

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

τότε ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{\int_0^\infty g(y)dy}{\mu_1},$$

όπου μ_1 είναι η πρώτη ροπή της κατανομής F.

Ορισμός (Σύνθετη κατανομή)

Αν X_1,X_2,..., είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. και N μία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη από τις X_i και παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, τότε η μεταβλητή

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

λέμε ότι ακολουθεί μία σύνθετη κατανομή και η μεταβλητή S ονομάζεται σύνθετη τυχαία μεταβλητή. Η κατανομή της N δίνει το όνομα στη σύνθετη κατανομή.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια της S. Έστω X_1,X_2,... ανεξάρτητες τ.μ. με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Τότε

(α)$E(S) = E(E(S|N)) = E(N)E(X_i) = \mu E(N)$.

(β)$Var(S) = Var(E(S|N)) + E(Var(S|N)) = Var(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$.

(γ)$M_S(t) = E(e^{tS}) = E_N(E(e^{tS}|N = n)) = M_N(lnM_{X_1}(t))$.

Έχοντας ορίσει τα παραπάνω μπορούμε να περάσουμε στον ορισμό του **κλασικού μοντέλου** της Θεωρίας κινδύνων.

Ορισμός Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από τη σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό, $P(t)$ το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$ και $S(t)$ είναι η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο ίδιο διάστημα. Το $U(t)$ καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t ενώ το $U(0) = u$ λέγεται αρχικό αποθεματικό. Ισχύει ότι

- $P(t) = ct$ για κάποιο $c \geq 0$, δηλαδή η $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση.

- Οι μεταβλητές X_i, που δηλώνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες καθώς και ανεξάρτητες του πλήθους των αποζημιώσεων ($N(t)$) σε ένα διάστημα. Οι μεταβλητές X_i ακολουθούν την κατανομή F με μέση τιμή $\mu_1 = \int_0^\infty xf(x)dx < \infty$ και με κ-οστή ροπή αποζημιώσεων που ορίζεται ως $\mu_\kappa = \int_0^\infty x^\kappa f(x)dx$.

- Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson έτσι ώστε η ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$ να είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Μια βασική υπόθεση που γίνεται πάντα στο κλασικό μοντέλο και αναφέρεται ως συνθήκη του καθαρού κέρδους είναι ότι

$$c > \lambda\mu_1.$$

Ορισμός Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = P[U(t) < 0, \quad \exists \quad t \geq 0 | U(0) = u].$$

Το **περιθώριο ασφάλειας** ή συντελεστής ασφάλειας ϑ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται από τη σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1.$$

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να ορίσουμε την **πιθανότητα μη χρεοκοπίας**

$$\delta(u) = 1 - \psi(u),$$

ως η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία για αρχικό αποθεματικό u. Η $\delta(u)$ είναι μια μεικτή κατανομή, δηλαδή για αρχικό αποθεματικό $u = 0$ υπάρχει μάζα πυκνότητας πιθανότητας μεγαλύτερη του μηδενός, οπότε $\delta(0) > 0$.

Στο κλασικό μοντέλο η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx.$$

Για το κλασικό μοντέλο η προηγούμενη εξίσωση μετατρέπεται στην

$$\delta'(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx,$$

όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων.

Έστω μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής $H(x)$ την οποία ορίζουμε ως

$$H(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy,$$

όπου $\mu_1 = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$ και επειδή στο κλασικό μοντέλο ισχύει και ότι $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c}$ τότε για $u \geq 0$ θα ισχύει ότι

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x).$$

Χρησιμοποιώντας ότι $1 - \delta(u) = \psi(u)$ και συνεχίζοντας τις πράξεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
1 - \delta(u) &= \frac{\lambda\mu_1}{c} - \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x) \\
&= \frac{\lambda\mu_1}{c} - \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u [1 - \psi(u-x)]dH(x) \\
&= \left(\frac{\lambda\mu_1}{c} - \frac{\lambda\mu_1}{c}H(u)\right) + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x) \\
&= \frac{\lambda\mu_1}{c}\bar{H}(u) + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x), \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

όπου $\bar{H}(u) = 1 - H(u)$.

Η τελευταία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση στην οποία καταλήξαμε μπορεί κάτω από κάποια συνθήκη να μετατραπεί σε μία **μη** ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Για να το πετύχουμε, θεωρούμε $R > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda \mu_1} = 1 + \theta. \tag{1.2}$$

Την ισότητα αυτήν την ονομάζουμε **συνθήκη Lundberg**.

Αν ικανοποιείται η συνθήκη αυτή τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1.1) με e^{ru} παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi(u)e^{ru} &= \frac{\lambda\mu_1}{c}\bar{H}(u)e^{ru} + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)e^{ru}dH(x) \\ &= \frac{\lambda\mu_1}{c}\bar{H}(u)e^{ru} + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u e^{r(u-x)}\psi(u-x)e^{rx}dH(x). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην ισοδύναμη σχέση με την (1.2) η οποία είναι

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r}M_{X_i}(r) = \frac{c}{\lambda}. \tag{1.3}$$

Η θετική λύση R ως προς r στην παραπάνω εξίσωση λέγεται **συντελεστής προσαρμογής**. Ο συντελεστής προσαρμογής είναι ιδιαίτερα σημαντικός διότι μπορεί να δώσει κάποιες σημαντικές πληροφορίες:

- Αρχικά από την ανισότητα του Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{Ru}, \qquad \forall u \geq 0.$$

- Και από τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer - Lundberg για $C > 0$

$$\psi(u) \sim Ce^{Ru}, \qquad u \to \infty.$$

Σε αρκετές περιπτώσεις του κλασικού μοντέλου, παρόλο που ο συντελεστής προσαρμογής υπάρχει, είναι εξαιρετικά δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια.

Έτσι, βρέθηκε ένα **άνω φράγμα για τον συντελεστή προσαρμογής** R το οποίο υπολογίστηκε ως εξής (χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor)

$$\begin{aligned}
\lambda + cR &= \lambda M_X(R) \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{Rx} f(x)dx \\
&> \lambda \int_0^\infty (1 + Rx + \frac{1}{2}R^2x^2) f(x)dx \\
&> \lambda \left[\int_0^\infty f(x)dx + \int_0^\infty Rxf(x)dx + \int_0^\infty \frac{1}{2}R^2x^2 f(x)dx \right] \\
&> \lambda \left(1 + R\mu_1 + \frac{1}{2}R^2\mu_2 \right),
\end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$R < \frac{2(c - \lambda\mu_1)}{\lambda\mu_2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη έχουμε ότι

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}$$

όπου για πολύ μικρά R παιρνουμε εξαιρετικά ικανοποιητικές προσεγγίσεις του.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την **πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση**. Η πιθανότητα αυτή αφορά σπάνια αλλά καταστροφικά γεγονότα όπως ένας σεισμός ή ένας τυφώνας, συνεπώς η μελέτη τους εμπίπτει στο ερευνητικό και επιχειρηματικό ενδιαφέρον.

Έστω το κλασικό μοντέλο όπου λ η ένταση της ανέλιξης Poisson, η οποία περιγράφει τον χρόνο αφίξεων των απαιτήσεων και c η ένταση του ασφαλίστρου. Η πιθανότητα $\psi_1(u)$ να συμβεί χρεοκοπία με την άφιξη της πρώτης αποζημίωσης είναι ίση με:

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[1 - F(u + ct)]dt,$$

όπου F, θυμίζουμε πως είναι η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους αποζημίωσης.

Καποιες βασικές έννοιες οι οποίες θα αποτελέσουν καθ΄ αυτές αντικείμενο μελέτης ή θεωρούνται ως προαπαιτούμενες για την ανάλυση πιο σύνθετων μαθηματικών σχέσεων ορίζονται στη συνέχεια.

(α) Ο **χρόνος της χρεοκοπίας**. Έιναι η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό, δηλαδή μετατρέπεται σε έλλειμμα.

(β) Το **μέγεθος του ελλείμματος** τη στιγμή της χρεοκοπίας. Δηλαδή το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν. Αποτελεί έναν δείκτη οξύτητας της χρεοκοπίας.

(γ) Το **πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία**. Είναι το μέγεθος του πλεονάσματος την χρονική στιγμή ακριβώς πριν την έλευση του ζημιογόνου γεγονότος.

(δ) Το **μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αποθεματικό u**. Η μεταβλητή συμβολίζεται με L_i. Στην βιβλιογραφία οι μεταβλητές L_i εμφανίζονται με τον όρο **κλιμακωτά ύψη**.

Οι μεταβλητές L_i αποτελούν σημαντικό εργαλείο για την μελέτη του πλεονάσματος στο πέρασμα του χρόνου και κατ΄ επέκταση τόσο στη μελέτη του μεγέθους του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όσο και στη μελέτη του πλεονάσματος όχι μόνο πριν τη χρεοκοπία αλλά και οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Για αυτό τον λόγο στη συνέχεια θα ορίσουμε αναλυτικά την τυχαία μεταβλητή L_i.

Ως L_1 ορίζουμε την πτώση του πλεονασμάτος κάτω από το αρχικό πλεόνασμα u_0, η οποία πτώση παίρνει εξ ορισμού θετική τιμή. Έστω λοιπόν η χρονική στιγμή t_1 όπου η το πλεόνασμα έπεσε κάτω του αρχικού αποθέματος, και το πλεόνασμα γίνεται $U(t_1) = u_1$. Οπότε έχουμε ότι $L_1 = u_0 - u_1$. Στη συνέχεια ορίζουμε κατ΄ αντιστοιχία με την L_1, μια τυχαία μεταβλητή L_2 η οποία μας δίνει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1, έστω u_2. Η πιθανότητα να υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u_1, ισούται με $\psi(0)$, ενώ η τυχαία μεταβλητή L_2 παίρνει την τιμή $L_2 = u_1 - u_2$. Επαγωγικά λοιπόν ορίζουμε τα L_i.

Στο κλασικό μοντέλο, θεωρούμε την σύνθετη τυχαία μεταβλητή

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_K = \sum_{i=1}^{K} L_i \qquad (L = 0 \Leftrightarrow K = 0),$$

τότε η L παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u . Η L ονομάζεται **μέγιστη συσσωρευτική απώλεια** και η κατανομή της συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Είναι προφανές ότι το πλήθος, έστω K, των κλιμακωτών υψών, ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή συνεπώς, να θεωρήσουμε αποτυχία την εμφάνιση ενός L_i, η μεταβλητή K μετράει τον αριθμό αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία, η κατανομή της δίνεται από την σχέση

$$P(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) \quad k = 0, 1, 2...$$

και λόγω του ότι $\psi(0) = 1/(1 + \theta)$, όπου θ είναι το περιθώριο ασφαλείας, τότε γράφεται

$$P(K = k) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}, \quad k = 0, 1, 2... \quad .$$

Επομένως η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή L να πάρει την τιμή μηδέν είναι

$$P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0).$$

Επειδή η L είναι μία σύνθετη τυχαία μεταβλητή, από τον ορισμό της έχουμε ότι

$$M_L(r) = M_K(lnM_{L_i}(r)).$$

Η ροπογεννήτρια της K είναι

$$M_K(r) = E(e^{rK}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(K = k)e^{rK} = \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(0)]^k e^{rk} \delta(0).$$

Γνωρίζουμε ότι η σειρά συγκλίνει για όλα τα r ώστε $\psi(0)e^r < 1$, δηλαδή $r < ln[(c/(\lambda\mu_1)]$. Συνεπώς για όλες τις τιμές του r, το άθροισμα $\sum_{k=0}^{\infty}[\psi(0)e^r]^k$ είναι ίσο με $(1 - \psi(0)e^r)^k$ και συνεπώς προκύπτει ότι

$$M_K(r) = E\left(e^{rK}\right) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)e^r}.$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\psi(0) = 1 - \delta(0) = 1/(1+\theta)$ η ροπογεννήτρια της L παίρνει τελικά την μορφή

$$M_L(r) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta} M_{L_i}(r)} = \frac{\theta}{(1+\theta) - M_{L_i}(r)}.$$

Παρατήρηση Όταν το αρχικό αποθεματικό είναι $u = 0$, τότε η κατανομή που έχει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι η κατανομή H. Οπότε ισχύει

$$P(|U(T)| \leq y | T < \infty, U(0) = 0) = H(y) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^y (1 - F(t))dt.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η $H(u)$ είναι η κατανομή του ελλείμματος όταν $u = 0$ και δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία.

Συνεχίζοντας θα ορίσουμε μία εκ των σημαντικότερων συναρτήσεων κατανομής στη θεωρία χρεοκοπίας, η οποία θα αποτελέσει και τον κύριο άξονα του πεδίου έρευνας της συγκεκριμένης μελέτης.

Η συνάρτηση κατανομής $G(u, y)$ που την εισήγαγαν οι Gerber et al.(1987) εκφράζει την πιθανότητα, ξεκινώντας με αρχικό απόθεμα u και σε περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία, το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας να μην είναι μεγαλύτερο απο y. Έστω λοιπόν T η στιγμή που το αρχικό πλεόνασμα πέφτει πρώτη φορά κάτω από το μηδέν,τότε

$$G(u, y) = P\{|U_T| \leq y, T < \infty | U_0 = u\}$$

Μια άλλη έκφραση της συγκεκριμένης κατανομής είναι $G(u, y) = \bar{G}(u) - \bar{G}(u, y)$ η οποία ικανοποιεί την ελλειματική ανανεωτική εξίσωση

$$G(u, y) = \phi \int_0^u G(u - t, y) dH(t) + \phi\{\bar{H}(u) - \bar{H}(u + y)\}.$$

Έχουμε ότι $\bar{G}(u, y) = Pr(|U_T| > y, T < \infty | U(0) = u)$ αποτελεί γενίκευση της $\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u)$.
Επίσης είναι προφανές ότι ισχύουν οι ισότητες

$$\bar{G}(u) = \psi(u)$$

και

$$G(u) = \delta(u).$$

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι η μελέτη συγκεκριμένων άρθρων και η μελέτη της θεωρίας των ελλειματικών ανανεωτικών εξισώσεων για την εύρεση ακριβέστερων εκφράσεων των συναρτήσεων και αυτό θα συμβεί:

- Χρησιμοποιώντας εκθετικά και μη εκθετικά φράγματα.
- Μελετώντας ασυμπτωτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που είτε υπάρχει είτε όχι ο συντελεστής προσαρμογής
- Αναπτύσσοντας παραδείγματα που να επαληθεύουν τα ως άνω αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 2

Φράγματα της κατανομής του ελλείμματος στο ανανεωτικό μοντέλο

2.1 Εισαγωγή βασικών συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε αναλυτικά εργαλεία, προσεγγίσεις και σχέσεις που δημοσιεύσε ο Willmot (2002). Έστω η σύνθετη γεωμετρική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής L η οποία ακολουθεί την συνάρτηση κατανομής

$$G(u) = Pr(L \leq u) = 1 - \bar{G}(u),$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$\bar{G}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \bar{H}^{*n}(u), \qquad u \geq 0, \tag{2.1}$$

όπου $0 < \phi < 1$ και $H(u) = 1-\bar{H}(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της θετικής μεταβλητής L_i και συνεπώς $\bar{H}^{*n}(u) = Pr(L_1 + L_2 + ... + L_n > u)$.

Στην περίπτωση μας για $u \geq 0$, η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $\bar{G}(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{G}(u) = \phi \int_0^u \bar{G}(u-t)dH(t) + \phi\bar{H}(u). \tag{2.2}$$

Για την ανάλυση του μοντέλου μας, θεωρούμε την γενίκευση της προηγούμενης σχέσης ορίζοντας $\bar{G}(u,y)$ για $u \geq 0$ και $y \geq 0$ ως την λύση της επόμενης εξίσωσης

$$\bar{G}(u,y) = \phi \int_0^u \bar{G}(u-t,y)dH(t) + \phi\bar{H}(u+y). \tag{2.3}$$

Είναι επίσης βολικό να ορίσουμε την κατανομή του ελλείμματος ως

$$G(u,y) = \bar{G}(u) - \bar{G}(u,y) = Pr(|U(T)| \leq u, T < \infty | U(0) = u).$$

Ακολούθως από τις εξισώσεις (2.2) και (2.3) συμπεραίνουμε ότι η $G(u,y)$ θα ικανοποιεί επίσης την ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση

$$G(u,y) = \phi \int_0^u G(u-t,y)dH(t) + \phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)]. \tag{2.4}$$

Συνεπώς, από τις ως άνω εξισώσεις γίνεται φανερό ότι $\bar{G}(u) = \bar{G}(u,0) = \lim\limits_{y \longrightarrow \infty} G(u,y)$.

Έστω $N_t : t \geq 0$ είναι ο αριθμός των ζημιών σε μια ανανεωτική διαδικασία (βλέπε ορισμούς Κεφ.1). Έστω W_1 είναι ο χρόνος εως ότου συμβεί η πρώτη ζημιά και για $i = 1, 2, 3..., n$ το W_i είναι ο χρόνος μεταξύ της ζημιάς i και $i-1$. Θεωρούμε τις θετικές τυχαίες μεταβλητές W_i ανεξάρτητες και ισόνομες και την κοινή τους συνάρτηση κατανομής $K(t) = 1 - \bar{K}(t) = Pr(W \leq t)$ και οι οποίες έχουν μέσο το $E(W) = \int_0^\infty t dK(t)$. Με τον μετασχηματισμό Laplace - Stieltjes προκύπτει η σχέση που μας διευκολύνει στους υπολογισμούς

$$\tilde{k}(s) = E(e^{-sW}) = \int_0^\infty e^{-st} dK(t).$$

Έστω ότι i-οστή ζημιά έχει ύψος Y_i όπου οι μεταβλητές $[Y_1, Y_2, ...]$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες θετικές τυχαίες μεταβλητές καθώς και ανεξάρτητες των μεταβλητών W_i. Έστω ότι οι Y_i ακολουθούν την συνάρτηση κατανομής $F(Y) = 1 - \bar{F}(Y) = Pr(Y \leq y)$, με μέσο τον $E(Y) = \int_0^\infty y dF(y)$ και τον μετασχηματισμό Laplace - Stieltjes

$$\tilde{f}(s) = E(e^{-sF}) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y).$$

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μία σύντομη περιγραφή των ιδιοτήτων αξιοπιστίας και τον τρόπο ταξινόμησης των εν λόγω κλάσεων. Για αναλυτικότερη περιγραφή μπορούμε να ανατρέξουμε στους Barlow - Proschan (1981) ή στους Fagiuoli - Pellerey (1994) καθώς και στις αναφορές που παραθέτουν. Έστω η συνάρτηση κατανομής $F(y) = 1 - \bar{F}(y)$ και η αντίστοιχη συνάρτηση ισορροπίας της $F_1(y) = 1 - \bar{F}_1(y)$ η οποία ορίζεται ως $F_1(y) = \int_0^y \bar{F}(x)dx\{\int_0^\infty \bar{F}(x)dx\}^{-1}$. Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέμε ότι ακολουθεί φθίνουσα (αύξουσα) βαθμίδα αποτυχίας ή αντίστοιχα DFR (IFR) αν ο λόγος $\bar{F}(x+y)/\bar{F}(y)$ παρουσιάζει αύξουσα (φθίνουσα) τάση ως προς y για δεδομένο $x \geq 0$.

Έστω ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος (MRL) τον οποίο συμβολίζουμε με $r(y)$ και δίνεται από την σχέση $r(y) = \int_y^\infty (t-y)dF(t)/F(y)$ ή από τον ισοδύναμο τύπο $r(y) = \int_0^\infty \{\bar{F}(y+t)/\bar{F}(y)\}dt$ για $y \geq 0$. Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέμε ότι ακολουθεί αύξοντα (φθίνοντα) μέσο υπολειπόμενο χρόνο ή αντίστοιχα IMRL (DMRL) αν η $r(y)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) ως προς y. Γνωρίζουμε ότι η DFR (IFR) είναι υποκλάση της IMRL (DMRL). Δηλαδή η κλάση IMRL (DMRL) είναι μεγαλύτερη και περιλαμβάνει την DFR (IFR).

Μια άλλη μεγαλύτερη κλάση που περιλαμβάνει την DFR (IFR) είναι η επονομαζόμενη " η νέα είναι χειρότερη (καλύτερη) από την παλιά " ή αντίστοιχα NWU (NBU) και για την οποία ισχύει $\bar{F}(x+y) \geq (\leq) \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ για $x, y \geq 0$. Ομοίως μια κλάση μεγαλύτερη από την IMRL (DMRL) είναι η 2-NWU (2-NBU) για την οποία πρέπει η $F_1(y)$ να είναι NWU (NBU).

Επιπρόσθετα, η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέμε ότι " η νέα είναι χειρότερη (καλύτερη) από την παλιά σε κυρτότητα " ή αντίστοιχα NWUC (NBUC) εάν $\bar{F}_1(x+y) \geq (\leq) \bar{F}_1(x)\bar{F}_1(y)$ για $x, y \geq 0$. Οπότε οι κλάσεις 2-NWU (2-NBU) και NWU (NBU) είναι υποκλάσεις της κλάσης NWUC (NBUC). Τέλος, για την συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέμε ότι " η νέα είναι χειρότερη (καλύτερη) από την παλιά σε προσδοκία" ή αντίστοιχα NWUE (NBUE) εάν $\bar{F}_1(y) \geq (\leq) \bar{F}(y)$. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η κλάση NWUC (NBUC) είναι υποκλάση της NW-UE (NBUE).

2.2 Σύνθετη γεωμετρική και άλλες σχετικές κατανομές

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα αναπτυχθούν και θα αναλυθούν κάποιες ιδιότητες των σύνθετων γεωμετρικών κατανομών με την μορφή θεωρημάτων,

προτάσεων και πορισμάτων, με τις αντίστοιχες αποδείξεις τους.
Η παρακάτω πρόταση θα εκφράσει την $\bar{G}(u,y)$ με την σύνθετη γεωμετρική κατανομή $G(u)$:

Πρόταση 2.2.1. *Η $\bar{G}(u,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\bar{G}(u,y) = \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^u \bar{H}(u+y-t)dG(t). \tag{2.5}$$

Απόδειξη Έχουμε ότι

$$E(e^{-sL}) = \int_0^\infty e^{-su}dG(u) = \frac{1-\phi}{1-\phi\tilde{h}(s)}, \tag{2.6}$$

όπου

$$\tilde{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sy}dH(y), \tag{2.7}$$

και χρησιμοποιώντας την έκφραση της $\bar{G}(u,y)$ όπως ορίστηκε προηγουμένως έχουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-su}\bar{G}(u,y)du = \frac{\phi\int_0^\infty e^{-su}\bar{H}(u+y)du}{1-\phi\tilde{h}(s)}$$

$$= \frac{\phi}{1-\phi}\left\{\int_0^\infty e^{-su}dG(u)\right\}\int_0^\infty e^{-su}\bar{H}(u+y)du,$$

από όπου προκύπτει η αρχική μας πρόταση με αντιστροφή του μετασχηματισμού. □

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να εκφραστεί και μέσω της γενικής λύσης της ανανεωτικής εξίσωσης ορίζοντας

$$\bar{G}_u(y) = 1 - G_u(y) = \frac{\bar{G}(u,y)}{\bar{G}(u)} = \frac{Pr(|U(T)| > y, T < \infty | U(0) = u)}{Pr(T < \infty | U(0) = u)}. \tag{2.8}$$

Έτσι προκύπτει και το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.1. *Η συνάρτηση $\bar{G}_u(y)$ όπως ορίστηκε πιο πάνω ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση*

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\int_0^u \bar{H}_{u-t}(y)\bar{H}(u-t)dG(t)}{\int_0^u \bar{H}(u-t)dG(t)}, \quad y \geq 0, \tag{2.9}$$

όπου για $u \geq 0$ έχουμε ότι ισχύει

$$\bar{H}_u(y) = 1 - H_u(y) = \frac{\bar{H}(u+y)}{\bar{H}(u)}, \quad y \geq 0. \tag{2.10}$$

Απόδειξη Αν θέσουμε στην προηγούμενη πρόταση $y = 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$\bar{G}(u) = \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^u \bar{H}(u-t)dG(t). \tag{2.11}$$

Τότε έχουμε

$$\bar{H}(u+y-t) = \bar{H}(u-t)\bar{H}_{u-t}(y)$$

και χρησιμοποιώντας την αρχική πρόταση και αντικαθιστώντας, αποδεικνύεται το θεώρημα. □

Έστω η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\psi_u(y) = \frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)}, \quad y \geq 0. \tag{2.12}$$

Τότε για το $\psi_u(y)$ θα ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.2.2. *Η δεξιά ουρά $\psi_u(y)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\psi_u(y) = \phi\int_0^y \psi_u(y-t)dH(t) + \phi\bar{H}(y) + (1-\phi)\bar{G}_u(y). \tag{2.13}$$

Απόδειξη Έστω Z_y με συνάρτηση κατανομής $H_y(z)$ η οποία είναι ανεξάρτητη του L. Τότε

$$
\begin{aligned}
\bar{G}(u,y) &= \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(y)\int_0^u \bar{H}_y(u-t)dG(t) \\
&= \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(y)\{Pr(L+Z_y>u)-\bar{G}(u)\} \\
&= \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(y)\left\{\bar{H}_y(u)+\int_0^u \bar{G}(u-t)dH_y(t)-\bar{G}(u)\right\} \\
&= \frac{\phi}{1-\phi}\left\{\bar{H}(y+u)+\int_0^u \bar{G}(u-t)dH(y+t)-\bar{G}(u)\bar{H}(y)\right\} \\
&= \frac{\phi}{1-\phi}\left\{\bar{H}(y+u)+\int_y^{y+u} \bar{G}(u+y-t)dH(t)-\bar{G}(u)\bar{H}(y)\right\}.
\end{aligned}
$$

Επίσης ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\bar{H}(y+u)+\int_y^{y+u}\bar{G}(u+y-t)dH(t) &= \\
&= \left\{\bar{H}(u+y)+\int_0^{y+u}\bar{G}(u+y-t)dH(t)\right\} \\
&\quad -\int_0^y \bar{G}(u+y-t)dH(t) \\
&= \left\{\frac{\bar{G}(u+y)}{\phi}\right\}-\int_0^y \bar{G}(u+y-t)dH(t),
\end{aligned}
$$

οπότε από την τελευταία σχέση αντικαθιστώντας το u με $u+y$ παίρνουμε ότι

$$
\bar{G}(u,y) = \left\{\frac{\bar{G}(u+y)}{\phi}-\int_0^y \bar{G}(u+y-t)dH(t)-\bar{G}(u)\bar{H}(y)\right\}, \tag{2.14}
$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται λύνοντας ως προς $\frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)}=\psi_u(y)$. □

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω V_u με συνάρτηση κατανομής $G_u(y)=Pr(V_u\le y)$ και ανεξάρτητη από το L. Τότε η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής του L ικανοποιεί την εξίσωση*

$$
\frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)} = Pr(L+V_u>y), \quad y\ge 0 \tag{2.15}
$$

η οποία είναι ισοδύναμη με

$$\frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)} = \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{G}_u(y-t)dG(t). \tag{2.16}$$

Απόδειξη Έστω $\tilde{\psi}_u(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\psi_u(y)dy$. Τότε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε ότι

$$\tilde{\psi}_u(s) = \phi\tilde{\psi}_u(s)\tilde{h}(s) + \left\{\frac{1-\tilde{h}(s)}{s}\right\} + (1-\phi)\left\{\frac{1-E(e^{-sV_u})}{s}\right\},$$

Λύνοντας ως προς $\tilde{\psi}_u(s)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_u(s) &= \frac{\phi\{1-\tilde{h}(s)\} + (1-\phi)\{1-E(e^{-sV_u})\}}{s\{1-\phi\tilde{h}(s)\}} \\ &= \frac{1-\phi\tilde{h}(s)-(1-\phi)E(e^{-sV_u})}{s\{1-\phi\tilde{h}(s)\}} \\ &= \frac{1-E(e^{-sL})E(e^{-sV_u})}{s},\end{aligned}$$

το οποίο με αναστροφή του μετασχηματισμού μας δίνει την ζητούμενη εξίσωση.

Η απόδειξη της ισοδύναμης σχέσης που αναφέρεται στο προηγούμενο θεώρημα γίνεται με τον ανάστροφο μετασχηματισμό της σχέσης

$$\tilde{\psi}_u(s) = \frac{1-E(e^{-sL})}{s} + \frac{1-E(^{-sV_u})}{s}E(e^{-sL}).$$

□

Αντιστρέφοντας τους ρόλους των L και V_u στις προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε ως αποτέλεσμα ότι

$$\frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} = \frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)} = \bar{G}_u(y) + \int_0^y \bar{G}(y-t)dG_u(t). \tag{2.17}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί πολύ σημαντικό εύρυμα εφόσον επί της ουσίας ποσοτικοποιεί την διαφορά μεταξυ των $\bar{G}(u+y)/\bar{G}(u)$ και $\bar{G}(y)$. Επίσης η προηγούμενη εξίσωση συνετέλεσε στην εύρεση εξισώσεων των ροπών του ελλείμματος.

Για την συνέχιση της μελέτης των σύνθετων γεωμετρικών κατανομών θα ορίσουμε τους όρους "το νέο είναι χειρότερο (καλύτερο) από το εως τώρα χρησιμοποιούμενο" ή "new worse (better) than used-NWU(NBU)". Συγκεκριμένα, μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής H ορισμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ είναι NWU(NBU) όταν ισχύει η σχέση $\bar{H}(u+y) \geq (\leq) \bar{H}(u)\bar{H}(y)$ για κάθε $u, y \geq 0$.

Λήμμα Η σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση κατανομής $G(u)$ είναι NWU.

Πόρισμα 2.2.1. *Αν η $F(y)$ είναι NWU (NBU) τότε για την σύνθετη γεωμετρική δεξιά ουρά $\bar{G}(u)$ για κάθε $u, y \geq 0$ ισχύει*

$$\frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)} \geq (\leq) \frac{\bar{G}(y)}{\phi} \tag{2.18}$$

Απόδειξη Αν η $H(y)$ είναι NWU (NBU), τότε $\bar{H}_{u-t}(y) \geq (\leq) \bar{H}(y)$ για $u \geq t$, και συνεπώς $\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{H}(y)$ τότε με βάση τα πρηγούμενα έχουμε ότι

$$\frac{\bar{G}(u+y)}{\bar{G}(u)} \geq (\leq) \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{H}(y-t) dG(t) = \bar{G}(y) + \frac{1-\phi}{\phi}\bar{G}(y) = \frac{\bar{G}(y)}{\phi}.$$

□

Έστω η $S(u) = 1 - \bar{S}(u)$ όπου η δεξιά ουρά είναι

$$\bar{S}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N=n)\bar{H}^{*n}(u), \quad u \geq 0. \tag{2.19}$$

Τότε αν $\alpha_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} Pr(N=n)$, για να είναι η $H(u)$ NWU πρέπει να ισχύει ότι $\alpha_{m+k+1} \geq \alpha_m \alpha_k$ για τους μη αρνητικούς ακέραιους m,k. Το ακόλουθο πόρισμα έχει σχετικό περιεχόμενο.

Πρόταση 2.2.3. *Έστω η συνάρτηση κατανομής $S(u) = 1 - \bar{S}(u)$ και ισχύει ότι*

$$\bar{S}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p_0)(1-\phi)\phi^{n-1}\bar{H}^{*n}(u), \quad u \geq 0. \tag{2.20}$$

όπου $0 \leq p_0 < 1$. Τότε ισχύουν και τα ακόλουθα:

(α) Η $S(u)$ είναι NWU αν $p_0 \geq 1 - \phi$.

(β) Η $S(u)$ είναι NWU αν $H(y)$ είναι NWU.

(γ) Η $S(u)$ είναι NBU αν $p_0 = 0$ και $H(y)$ είναι NBU.

2.3 Ακριβείς εκφράσεις της κατανομής του ελλείμματος

Στην προηγούμενη παράγραφο παρατηρήσαμε ότι οι συναρτήσεις $G(u, y)$ και η κανονικοποιημένη $G_u(y)$ χρησιμοποιήθηκαν ως αναλυτικά εργαλεία για την εύρεση ιδιοτήτων της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $G(y)$.

Παρόλα αυτά, οι συναρτήσεις αυτές αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης καθώς συνδέονται άμεσα με την κατανομή του ελλείμματος στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Υπενθυμίζουμε ότι $G_u(y) = Pr(|U_T| \leq y | T < \infty)$ είναι η μη ελλειμματική συνάρτηση κατανομής και ταυτόχρονα ισχύουν $\bar{G}(u) = \psi(u), G(u) = \delta(u)$ και $\phi = \psi(0)$. Ακολουθούν δύο κλασικά παραδείγματα που αφορούν την κατανομή του ύψους των ζημιών και πως επηρεάζεται και διαμορφώνεται η κατανομή του ελλείμματος.

Παράδειγμα 1 *Όταν η κατανομή ζημιών ακολουθεί την εκθετική κατανομή.*
Έστω ότι το ύψος ζημιών ακολουθεί την συνάρτηση κατανομής $F(y) = 1 - e^{-y/E(Y)}$, τότε η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών είναι $H(y) = F(y)$. Συνεπώς έχουμε ότι $H_u(y) = F(y)$ για όλα τα u, άρα $G_u(y) = 1 - e^{-y/E(Y)}$.

Παράδειγμα 2 *Όταν η κατανομή ζημιών ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.*

Έστω ότι η κατανομή ζημιών είναι μια μείξη εκθετικών με ουρά

$$\bar{F}(y) = qe^{-\alpha y} + (1-q)e^{-\beta y}, \quad y \geq 0, \tag{2.21}$$

όπου $0 < q < 1$, και χωρίς να χάσουμε την γενίκευση υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$. Από την εξίσωση του Lundberg έχουμε ότι $\tilde{k}(cr)\tilde{f}(-r) = 1$ το οποίο μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως $y_1(r) = y_2(r)$ όπου

$$y_1(r) = \alpha + \beta - r$$

και

$$y_2(r) = \{q\alpha + (1-q)\beta\}\tilde{k}(cr) + \frac{\alpha\beta\{1-\tilde{k}(cr)\}}{r}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\{1-\tilde{k}(s)\}/s = \int_0^\infty e^{-st}\bar{K}(t)dt$. Τότε έχουμε ότι $E(Y) = (q/\alpha) + (1-q)/\beta < cE(W)$, από όπου προκύπτει ότι $y_2(0) > y_1(0)$ και επίσης $y_2'(r) < 0$ καθώς και $y_2''(r) > 0$. Έτσι είναι εύκολο να ισχυριστούμε ότι $y_2(\alpha) < y_1(\alpha)$ και $y_2(\beta) > y_1(\beta)$ και συνεπώς υπάρχουν δύο διαφορετικές θετικές ρίζες r_1 και r_2 για τις οποίες ισχύει ότι $\tilde{k}(cr)\tilde{f}(-r) = 1$, και για το οποίο ισχύει ότι $0 < r_1 < \alpha < r_2 < \beta$. Έτσι καταλήγουμε ότι το $(\alpha-\beta)^2 > 0$ είναι ισοδύναμο με το

$$q\alpha+(1-q)\beta = y_2\left\{\frac{\alpha\beta}{q\alpha+(1-q)\beta}\right\} < y_1\left\{\frac{\alpha\beta}{q\alpha+(1-q)\beta}\right\} = \alpha+\beta-\frac{\alpha\beta}{q\alpha+(1-q)\beta}.$$

Είναι εμφανές λοιπόν ότι $\alpha < \alpha\beta/[q\alpha+(1-q)\beta] < \beta$ το οποίο οδηγεί σε μια ισχυρότερη ανίσωση, ότι δηλαδή $\alpha\beta/[q\alpha+(1-q)\beta] < r_2 < \beta$.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι

$$E(e^{-sL}) = \frac{r_1 r_2 (s+\alpha)(s+\beta)}{\alpha\beta(s+r_1)(s+r_2)}. \tag{2.22}$$

Τότε η σχέση $\tilde{\psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du = \{1-E(e^{-sL})\}/s$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{C_1}{s+r_1} + \frac{C_2}{s+r_2},$$

όπου

$$C_1 = \frac{r_2(\alpha-r_1)(\beta-r_1)}{\alpha\beta(r_2-r_1)}$$

και
$$C_2 = \frac{r_1(\alpha - r_2)(\beta - r_2)}{\alpha\beta(r_2 - r_1)},$$
από το οποίο με αναστροφή του μετασχηματισμού προκύπτει ότι
$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u}, \quad u \geq 0. \tag{2.23}$$
Ακολούθως έχουμε ότι
$$\psi(0) = 1 - \frac{r_1 r_2}{\alpha\beta}.$$
Τότε από προηγούμενες σχέσεις, χρησιμοποιώντας και ότι $\phi = \psi(0)$, παίρνουμε ότι
$$\tilde{h}(s) = \frac{q_1\alpha}{\alpha + s} + \frac{(1 - q_1)\beta}{\beta + s},$$
όπου
$$q_1 = \frac{\beta(\alpha - r_1)(r_2 - \alpha)}{(\beta - \alpha)(\alpha\beta - r_1 r_2)}.$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $0 < q_1 < 1$. Έτσι από αναστροφή του μετασηματισμού της προηγούμενης εξίσωσης, παίρνουμε ότι η δεξιά ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών έχει τη μορφή
$$\bar{H}(y) = q_1 e^{-\alpha y} + (1 - q_1)e^{-\beta y}, \quad y \geq 0 \tag{2.24}$$

και συνεπώς,
$$\bar{H}_u(y) = q_1(u)e^{-\alpha y} + (1 - q_1(u))e^{-\beta y}, \quad y \geq 0, \tag{2.25}$$

όπου
$$q_1(u) = \frac{q_1 e^{-\alpha u}}{q_1 e^{-\alpha u} + (1 - q_1)e^{-\beta u}}.$$

Η παραγοντοποίηση σύμφωνα με την προσέγγιση του Willmot έχει εφαρμογή εδώ. Ισχύει ότι
$$\begin{aligned}\bar{G}_u(y) &= \frac{\int_0^u \bar{H}_{u-t}(y)\bar{H}(u-t)d\delta(t)}{\int_0^u \bar{H}(u-t)d\delta(t)} \\ &= \frac{\int_0^u \{q_1(u-t)e^{-\alpha y} + \{1 - q_1(u-t)\}e^{-\beta y}\}\bar{H}(u-t)d\delta(t)}{\int_0^u \bar{H}(u-t)d\delta(t)},\end{aligned}$$

όπου με ανταλλαγή την σειρά ολοκλήρωσης και αθροίζοντας καταλήγουμε ότι

$$\bar{G}_u(y) = q_1(u)e^{-\alpha y} + (1 - q_1(u))e^{-\beta y}, \quad y \geq 0, \tag{2.26}$$

όπου

$$q(u) = \frac{\int_0^u q_1(u-t)\bar{H}(u-t)d\delta(t)}{\int_0^u \bar{H}(u-t)d\delta(t)}.$$

Για τον σαφέστερο προσδιορισμό του $q(u)$ από προηγούμενη σχέση παίρνουμε ότι

$$q(u) = \frac{\psi(0)}{\delta(0)\psi(u)} \left\{ \delta(0)\bar{H}(x)q_1(u) + \int_0^u \delta'(t)\bar{H}(u-t)q_1(u-t)dt \right\}$$

και εφόσον $\bar{H}(u)q_1(u) = q_1 e^{-\alpha u}$ τότε καταλήγουμε ότι

$$q(u) = \frac{q_1(\alpha\beta - r_1 r_2)}{C_1 e^{-r_1 u} C_2 e^{-r_2 u}} \left\{ \frac{e^{-\alpha u}}{\alpha\beta} + \frac{C_1(e^{-r_1 u} - e^{-\alpha u})}{r_2(\alpha - r_1)} + \frac{C_2(e^{-\alpha u} - e^{-r_2 u})}{r_1(r_2 - \alpha)} \right\}. \tag{2.27}$$

2.4 Φράγματα και ασυμπτωτικά αποτελέσματα

Υπενθυμίζουμε ότι μια υποκλάση της κλάσης NWU (NBU), είναι η DFR (IFR) δηλαδή "decreasing (increasing) failure rate" ή "μειούμενη (αυξανόμενη) βαθμίδα αποτυχίας ", όπου η συνάρτηση κατανομής $H(y) = 1 - \bar{H}(y)$ λέγεται ότι ανήκει στην κλάση DFR (IFR) όταν ο λόγος $\bar{H}(u+y)/\bar{H}(u)$ είναι αύξων (φθίνων) ως προς u με δεδομένο $y \geq 0$.

Οι κατανομές των προηγούμενων παραδειγμάτων (εκθετική και μείξη εκθετικών) είναι της υποκλάσης DFR καθώς και οι αντίστοιχες κατανομές των κλιμακωτών υψών τους $H(y)$ όπως και οι κατανομές των ελλειμμάτων τους $G_u(y)$. Αυτό αποδεικνύεται και από το αποτέλεσμα του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.4.1. *Αν η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ του ύψους των ζημιών είναι DFR τότε η κατανομή του ελλείμματος $G_u(y)$ είναι επίσης DFR για δεδομένο $u \geq 0$.*

Απόδειξη Έχει αποδειχθεί ότι αν $H(y)$ είναι DFR τότε και η $F(y)$ είναι DFR. Συνεπώς και $H_u(y)$ είναι DFR για $u \geq 0$ και καθώς η ιδιότητα αυτή διατηρείται στην μείξη, τότε συνεπάγεται ότι και η $G_u(y)$ είναι επίσης DFR, το οποίο είναι και το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 2.4.2. *Η δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείμματος ικανοποιεί την ανίσωση*

$$\bar{G}_u(y) \leq \frac{1}{1-\psi(0)} \left\{ \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - \psi(y) \right\}, \quad y \geq 0 \tag{2.28}$$

Επιπλέον αν η $H(y)$ είναι NWU τότε η προηγούμενη ανίσωση μπορεί να βελτιωθεί και να πάρει την μορφή

$$\bar{H}(y) \leq \bar{G}_u(y) \leq \bar{H}(y) + \frac{1}{1-\psi(0)} \left\{ \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - \frac{\psi(y)}{\psi(0)} \right\}, \quad y \geq 0, \tag{2.29}$$

όπου αν $H(y)$ είναι NBU, τότε

$$\bar{H}(y) - \frac{1}{1-\psi(0)} \left\{ \frac{\psi(y)}{\psi(0)} - \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} \right\} \leq \bar{G}_u(y) \leq \bar{H}(y), \quad y \geq 0. \tag{2.30}$$

Απόδειξη Όπως είδαμε και στην απόδειξη προηγούμενου πορίσματος, αν $H(y)$ είναι NWU (NBU) τότε $\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{H}(y)$ αποδεικνύοντας το πρώτο (τελευταίο) μέλος της σχέσης.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι $\psi(u+y) \geq (\leq) \psi(u)\psi(y)/k$ για όλα τα $u \geq 0$ και $y \geq 0$ όπου $k \geq 1$. Τότε για $\bar{G} = \psi$ και $\psi_u(y-t) \geq (\leq) \psi(y-t)/k$ με την προϋπόθεση ότι $0 \leq t \leq y$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\{1-\psi(0)\}\bar{G}_u(y) \leq (\geq) \psi_u(y) - \psi(0)\bar{H}(y) - \psi(0)\int_0^y \frac{\psi(y-t)dH(t)}{k}, \quad (2.31)$$

ταυτόχρονα έχουμε και ότι για $\bar{G} = \psi$ και $\phi = \psi(0)$ ισχύει

$$\{1-\psi(0)\}\bar{G}_u(y) \leq (\geq) \psi_u(y) - \psi(0)\bar{H}(y) - \frac{\{\psi(y) - \psi(0)\bar{H}(y)\}}{k},$$

το οποίο γράφεται και ως

$$\bar{G}_u(y) \leq (\geq) \frac{(1-k)\psi(0)}{\{1-\psi(0)\}k}\bar{H}(y) + \frac{1}{1-\psi(0)}\left\{\frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - \frac{\psi(y)}{k}\right\}. \quad (2.32)$$

Η τελευταία σχέση για $k = 1$ σε συνδυασμό με προηγούμενο πόρισμα αποδεικνύει το πρώτο μέρος του θεωρήματος. □

Πόρισμα 2.4.1. *Στο κλασικό μοντέλο κινδύνου με το μεσοδιάστημα χρόνου να ακολουθεί τη συνάρτηση κατανομής $K(t) = 1 - e^{-t/E(W)}$, και έστω ότι η κατανομή του ύψους των ζημιών $F(y)$ είναι 2-NWU τότε ισχύει ότι*

$$\bar{F}_1(y) \leq \bar{G}_u(y) \leq \bar{F}_1(y) + \frac{1+\theta}{\theta}\left\{\frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - (1+\theta)\psi(y)\right\}, \quad (2.33)$$

όπου αν $F(y)$ είναι 2-NBU τότε

$$\bar{F}_1(y) + \frac{1+\theta}{\theta}\left\{\frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - (1+\theta)\psi(y)\right\} \leq \bar{G}_u(y) \leq \bar{F}_1(y). \quad (2.34)$$

Απόδειξη Στην κλασική περίπτωση όπου έχουμε $\psi(0) = 1/(1+\theta)$ και $H(y) = F_1(y)$, τότε η απόδειξη προέρχεται άμεσα από προηγούμενο θεώρημα. □

Πόρισμα 2.4.2. *Έστω ότι το ύψος των ζημιών με συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι DFR τότε*

$$\bar{H}(y) \leq \bar{G}_u(y) \leq \frac{\bar{H}(u+y)}{\bar{H}(u)}. \tag{2.35}$$

Απόδειξη Αν $F(y)$ είναι DFR τότε $H(y)$ είναι επίσης DFR, το οποίο συνεπάγεται ότι $\bar{H}_t(y)$ είναι αύξουσα ως προς t για δεδομένο y. Συνεπώς θα ισχύει ότι $\bar{H}_0(y) \leq \bar{H}_{u-t}(y) \leq \bar{H}_u(y)$ για $0 \leq t \leq u$ από το οποίο εξάγεται το ζητούμενο. $\square$

Είναι φανερό από την απόδειξη του τελευταίου πορίσματος ότι αν η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών $H(y)$ είναι IFR τότε το πόρισμα ισχύει με ανεστραμμένη την φορά της ανισότητας.

Όρια για τις συναρτήσεις κατανομής $G(u,y)$ και $\bar{G}(u,y)$ μπορούν να προκύψουν από το γεγονός ότι ικανοποιούν τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις που αναφέραμε στην εισαγωγή του παρόντος. Κεντρικό ρόλο στην ευκολία εύρεσης αυτών των ορίων κατέχει ο συντελεστής προσαρμογής $R > 0$ (ή r ή κ αναλόγως την βιβλιογραφία) ο οποίος ορίζεται ως η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg

$$\tilde{h}(-R) = \frac{1}{\psi(0)}. \tag{2.36}$$

Ισοδύναμα το R ικανοποιεί την εξίσωση

$$\tilde{k}(cR)\tilde{f}(-R) = 1. \tag{2.37}$$

Ορίζουμε

$$\alpha_y(z) = \frac{e^{Rz}\{\bar{H}(z) - \bar{H}(z+y)\}}{\int_z^\infty e^{Rt} dH(t)}, \quad z \geq 0 \tag{2.38}$$

και από τον Willmot (2002) παίρνουμε ότι

$$\left\{ \inf_{0 \leq z \leq u, \bar{H}(z) > 0} \alpha_y(z) \right\} e^{-Ru} \leq G(u,y) \leq \left\{ \sup_{0 \leq z \leq u, \bar{H}(z) > 0} \alpha_y(z) \right\} e^{-Ru}. \tag{2.39}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για τα επόμενα έχουμε ότι

$$G(0,y) = \psi(0)H(y), \quad y \geq 0, \tag{2.40}$$

καθώς προκύπτει απευθείας από (2.4) του εισαγωγικού κεφαλαίου.

Από το επόμενο θεώρημα προκύπτουν όρια για την συνάρτηση κατανομής $G(u,y)$ και υπενθυμίζουμε ότι ομοίως ισχύουν και για την συνάρτηση κατανομής $\bar{G}(u,y)$.

Θεώρημα 2.4.3. *Αν το ύψος ζημιών ακολουθεί συνάρτηση κατανομής $F(y)$ και είναι DFR τότε*

$$G(u,y) \leq G(0,y)\{\bar{H}(u)\}^{1-\psi(0)} \tag{2.41}$$

και αν $R > 0$ ικανοποιεί την εξίσωση του Lundberg τότε

$$\frac{\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)}{\int_u^\infty e^{Rt} dH(t)} \leq G(u,y) \leq G(0,y)e^{-Ru}. \tag{2.42}$$

Απόδειξη Έφόσον $F(y)$ είναι DFR συνακόλουθα και η $H(y)$ είναι DFR. Ταυτόχρονα, εφόσον $H(0) = 0$ τότε η $H(y)$ είναι απολύτως συνεχής. Έτσι παίρνουμε ότι

$$G(u,y) \leq \psi(0)\{\bar{H}(u)\}^{1-\psi(0)} \left\{1 - \inf_{0 \leq z \leq u, \bar{H}(z)>0} \frac{\bar{H}(z+y)}{\bar{H}(z)}\}\right\},$$

όμως

$$\psi(0)\{\bar{H}(u)\}^{1-\psi(0)} \left\{1 - \inf_{0 \leq z \leq u, \bar{H}(z)>0} \frac{\bar{H}(z+y)}{\bar{H}(z)}\}\right\} = \psi(0)\{\bar{H}(u)\}^{1-\psi(0)}\{1-\bar{H}(y)\},$$

συνεπώς

$$G(u,y) \leq \psi(0)\{\bar{H}(u)\}^{1-\psi(0)}\{1 - \bar{H}(y)\}.$$

Τότε η (2.41) προκύπτει από την (2.40). Για να αποδείξουμε την (2.42) αρκεί να αναδιατυπώσουμε την (2.38) στην μορφή

$$\alpha_y(z) = \left\{1 - \frac{\bar{H}(z+y)}{\bar{H}(z)}\right\} \frac{e^{Rz}\bar{H}(z)}{\int_z^\infty e^{Rt} dH(t)}.$$

Από την στιγμή που $H(y)$ είναι DFR, τότε η $1-\bar{H}(z+y)/\bar{H}(z)$ είναι φθίνουσα στο z για δεδομένο y. Έπειτα, βλέπουμε πως $e^{Rz}\bar{H}(z)/\int_z^\infty e^{Rt}dH(t) = 1/E(e^{RS_z})$ όπου $Pr(S_z \leq y) = 1-\bar{H}(z+y)/\bar{H}(z)$. Επειδή $\alpha_y(z)$ είναι φθίνουσα στο z για δεδομένο y , οπότε $\alpha_y(0) \geq \alpha_y(z) \geq \alpha_y(u)$ για $0 \leq z \leq u$. Οπότε η (2.39) μπορεί να γραφεί και $\alpha_y(u)e^{-Ru} \leq G(u,y) \leq \alpha_y(0)e^{-Ru}$, το οποίο με την (2.40) και (2.36) μας δίνει την (2.42). □

Επισημαίνουμε ότι η (2.41) ισχύει ακόμα και αν δεν υπάρχει $R>0$ που να ικανοποιεί την (2.36). Επιπλέον οι ανισώσεις των (2.41), (2.42) ικανοποιούν τις ισότητες όταν $u=0$ και όταν $F(y)=1-e^{-y/E(Y)}$.
Επίσης για $y \to \infty$ στις (2.41), (2.42) για $P(y)$ που είναι DFR ισχύει

$$\psi(u) \leq \psi(0)\{\bar{H}(u)\}^{1-\psi(0)}, \quad u \geq 0, \tag{2.43}$$

και

$$\frac{\bar{H}(u)}{\int_u^\infty e^{Rt}dH(t)} \leq \psi(u) \leq \psi(0)e^{-Ru}, \quad u \geq 0. \tag{2.44}$$

Στο επόμενο θεώρημα παρατηρούμε πως για $u \to \infty$ παίρνουμε μια απλούστερη εξίσωση από την (2.9) η οποία δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.4. *Αν $R>0$ ικανοποιεί την (2.36) ή ισοδύναμα την (2.37) καθώς και $\int_0^\infty e^{(R+\epsilon)u}dH(u) < \infty$ για κάποιο $\epsilon > 0$ με την H να είναι μη αριθμίσιμη, τότε έχουμε ότι $\lim_{u\to\infty} \bar{G}_u(y) = \bar{G}_\infty(y)$ όπου*

$$\bar{G}_\infty(y) = \frac{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t)\bar{H}_t(y)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t)dt}, \quad y > 0. \tag{2.45}$$

Απόδειξη Εφόσον $e^{Rt}\bar{H}(t+y) \leq e^{Rt}\bar{H}(t)$ όπου είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemman εφόσον $\int_0^\infty e^{(R+\epsilon)t}dH(t) < \infty$. Έτσι από το ανανεώτικο θεώρημα και την (2.3) έχουμε ότι

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\bar{G}(u,y) = \frac{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t+y)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t)dt}. \tag{2.46}$$

Οπότε, από τη στιγμή που $\psi(u) = \bar{G}(u,0)$, η (2.46) γίνεται

$$\bar{G}_\infty(y) = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{Ru}\bar{G}(u,y)}{e^{Ru}\bar{G}(u,0)} = \frac{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t+y)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t)dt}, \tag{2.47}$$

εκ του οποίου η (2.45) προκύπτει εύκολα. □

Πόρισμα 2.4.3. *Υπό την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι υποθέσεις που κάναμε στο προηγούμενο θεώρημα λέμε ότι:*

(α) Αν $H(y)$ είναι IMRL (DMRL) τότε $G_\infty(y)$ είναι DFR (IFR),

(β) Αν $H(y)$ είναι 2-NWU (2-NBU) τότε

$$\bar{G}_\infty(y) \geq (\leq) \bar{H}^e(y), \qquad y \geq 0, \tag{2.48}$$

όπου

$$H^e(y) = 1 - \bar{H}^e(y) = \frac{\int_0^y \bar{H}(t)dt}{\int_0^\infty \bar{H}(t)dt}, \tag{2.49}$$

η οποία ονομάζεται και ***συνάρτηση ισορροπίας*** *(equilibrium d.f.) της $H(y)$.*

Απόδειξη Οι εξισώσεις (2.45) και (2.47) μπορούν να εκφραστούν ως

$$\bar{G}_\infty(y) = \frac{e^{-Ry}\int_y^\infty e^{Rt}\bar{H}(t)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t)dt}, \tag{2.50}$$

από το οποίο προκύπτει ότι η " βαθμίδα αποτυχίας " (failure rate) που σχετίζεται με το $G_\infty(y)$ είναι

$$\mu_\infty(y) = -\frac{d}{dy}\ln \bar{G}_\infty(y) = R + \frac{1}{\sigma_1(y)}, \tag{2.51}$$

όπου

$$\sigma_1(y) = \int_0^\infty e^{Rt}\frac{\bar{H}(t+y)}{\bar{H}(y)}dt. \tag{2.52}$$

Από το αποτέλεσμα είναι εμφανές ότι όταν $\bar{G}_\infty(y)$ είναι DFR (IFR) τότε και η H είναι DFR (IFR). Πρέπει να βεβαιωθούμε ότι ισχύει και για την ευρύτερη κλάση IMRL (DMRL). Έτσι από τις (2.47) και (2.49) έχουμε ότι

$$\int_y^\infty \bar{G}_\infty(\upsilon)d\upsilon = \frac{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}^e(y+t)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}d\bar{H}^e(t)}, \tag{2.53}$$

και για $y=0$

$$\int_0^\infty \bar{G}_\infty(\upsilon)d\upsilon = \frac{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}^e(t)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}d\bar{H}^e(t)}. \tag{2.54}$$

Έστω $\bar{G}_{1,\infty}(y) = 1 - G_{1,\infty}(y) = (\int_y^\infty \bar{G}_\infty(\upsilon)d\upsilon)/(\int_0^\infty \bar{G}_\infty(\upsilon)d\upsilon)$ ότι είναι η δεξιά ουρά της συνάρτησης ισορροπίας (equilibrium d.f.) της $G_\infty(y)$ και από τις (2.53) και (2.54) τότε προκύπτει ότι

$$\bar{G}_{1,\infty}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}^e(y+t)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}^e(t)dt}, \tag{2.55}$$

Όπως είναι φανερό, η (2.55) είναι ίδια με την (2.47) με απλή αντικατάσταση του $\bar{H}$ από το $\bar{H}^e$. Συνεπώς, αν $s_\infty(y) = \int_0^\infty \{\bar{G}_\infty(t+y)/\bar{G}_\infty(y)\}dt$ είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος του $G_\infty(y)$ τότε από αναλογία με την (2.51) έχουμε ότι

$$\frac{1}{s_\infty(y)} = -\frac{d}{dy}\ln \bar{G}_{1,\infty}(y) = R + \frac{1}{\sigma_2(y)}, \tag{2.56}$$

όπου

$$\sigma_2(y) = \int_0^\infty e^{Rt}\frac{\bar{H}_e(t+y)}{\bar{H}_e(y)}dt. \tag{2.57}$$

Τώρα για την απόδειξη της (α), θεωρούμε ότι η $H(y)$ έχει μέσο υπολειπόμενο χρόνο $s(y) = \int_0^\infty \{\bar{H}(t+y)/\bar{H}(y)\}dt$ τέτοιο ώστε $s(y) = s(0)\bar{H}^e(y)/\bar{H}(y)$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}(t+y)dt = s(0)\left\{\bar{H}^e(y) + R\int_0^\infty eRt\bar{H}^e(t+y)dt\right\}, \qquad (2.58)$$

και έτσι από την (2.52) και την (2.57) έχουμε ότι

$$\sigma_1(y) = s(y)\{1 + R\sigma_2(y)\}. \qquad (2.59)$$

Η σχέση ότι, όταν η $H(y)$ είναι IMRL (DMRL) τότε ισοδύναμα το $H^e(y)$ είναι DFR (IFR), μεταφράζεται στο ότι $\bar{H}^e(t+y)/\bar{H}^e(y)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο y για δεδομένο t και επίσης η $s(y)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο y. Έτσι $\sigma_1(y)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο y λόγω της (2.59), το οποίο συνεπάγεται από την (2.51) δηλαδή ότι η $\mu_\infty(y)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο y, οπότε $G_\infty(y)$ είναι DFR (IFR).

Για την απόδειξη του (β), αντικαθιστώντας την (2.58) από την (2.47) προκύπτει ότι

$$\bar{G}_\infty(y) = \frac{\bar{H}^e(y) + R\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}^e(t+y)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}dH^e(t)}. \qquad (2.60)$$

Όταν $y = 0$ η (2.58) απλοποιείται στην $\int_0^\infty e^{Rt}dH^e(t) = 1 + R\int_0^\infty \bar{H}^e(t)dt$.

Οπότε αν $H(y)$ είναι 2-NWU (2-NBU), δηλαδή $\bar{H}^e(t+y) \geq (\leq)\bar{H}^e(y)\bar{H}^e(t)$, συνεπάγεται ότι

$$\bar{G}_\infty(y) \geq (\leq)\bar{H}^e(y)\left\{\frac{1 + R\int_0^\infty e^{Rt}\bar{H}^e(t)dt}{\int_0^\infty e^{Rt}dH^e(t)}\right\} = \bar{H}^e(y), \qquad (2.61)$$

που είναι η (2.48). $\square$

Επισημαίνουμε ότι αν $H(y)$ είναι 2-NWU (2-NBU) τότε και $\bar{H}^e(y) \geq (\leq)\bar{H}(y)$. Οπότε, στην περίπτωση όπου η $H(y)$ είναι DFR (IFR), η (2.48) αποτελεί καλύτερη ανίσωση από την (2.28) του αντίστοιχου θεωρήματος. Ομοίως η σχέση (α) του προηγούμενου πορίσματος αποτελεί βελτίωση του πρώτου θεωρήματος της παραγράφου 3.2 για $u = \infty$.

Η χρήση του προηγούμενου πορίσματος βασίζεται στον κατά πόσο είναι δυνατόν ο χαρακτηρισμός της $H(y)$ ως IMRL (DMRL). Αυτό είναι σχετικά εύκολο όσο αφορά το κλασικό μοντέλο. Ομοίως αν ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των ζημιών με συνάρτηση κατανομής $K(t)$ είναι Coxian-2 και $F(y)$ είναι IMRL τότε η $H(y)$ είναι επίσης IMRL.

Αξίζει να επισημανθεί ότι κάποια εκ των προηγούμενων θεωρημάτων και πορισμάτων ισχύουν υπό την ασθενέστερη υπόθεση, ότι δηλαδή τα κλιμακωτά ύψη $H(y)$ είναι DFR και όχι με την ισχυρότερη υπόθεση ότι το ύψος των ζημιών $F(y)$ είναι DFR. Στο κλασικό μοντέλο με $H(y) = F_1(y)$, είναι προφανές ότι η $H(y)$ είναι DFR αν η $F(y)$ είναι IMRL.

2.5 Η κατανομή του ελλείμματος όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των ζημιών ακολουθούν **Erlang-2** κατανομή

Για την συνέχεια, θα θεωρήσουμε ότι ο χρόνος μεταξύ των ζημιών με συνάρτηση κατανομής W_i είναι το άθροισμα δύο εκθετικών κατανομών με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{k}(s) = \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + s)(\beta_2 + s)}. \tag{2.62}$$

Για την περίπτωση όπου $\beta_1 = \beta_2$ ασχολήθηκαν οι Dickson-Hipp (1998). Επίσης, θα μας βοηθήσει να ορίσουμε τον equilibrium μετασχηματισμό Laplace $\tilde{f}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF_1(y) = \{1 - \tilde{f}(s)\}/\{sE(Y)\}$. Η εξίσωση του Lundberg $\tilde{k}(-cf)\tilde{f}(s) = 1$ μπορεί να εκφραστεί ως $\beta_1\beta_2 E(Y)\tilde{f}_1(s) = c(\beta_1 + \beta_2 + cs)$. Η εξίσωση αυτή έχει μόνο μία θετική ρίζα, την s_1, που ικανοποιεί την ανίσωση

$$\frac{\beta_1\beta_2\{cE(W)-E(Y)\}}{c^2} < s_1 < \frac{(\beta_1+\beta_2)}{c}. \tag{2.63}$$

Αντίστοιχα στους Willmot-Lin (2001) αποδεικνύεται ότι

$$\psi(0) = 1 - \frac{\beta_1\beta_2 cE(W) - E(Y)}{c^2 s_1}, \tag{2.64}$$

και

$$\bar{H}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(y+t)dt}{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(t)dt}. \tag{2.65}$$

Η κατανομή που ορίζεται από την (2.65) έχει μελετηθεί λεπτομερειακώς από τους Willmot-Lin αλλά με την F στην θέση της F_1. Εφόσον λοιπόν οι ιδιότητες της F_1 προέρχονται απευθείας από την F θα επικεντρωθούμε σε αυτές που αφορούν την ανάλυση του ελλείμματος.

Η (2.65) μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\bar{H}(y) = \frac{e^{-s_1 y}\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(t)dt}{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(t)dt}. \tag{2.66}$$

εκ της οποίας είναι εμφανές ότι η $H(y)$ είναι απολύτως συνεχής. Επίσης ακολουθώντας τις (2.65) και (2.10) έχουμε ότι

$$\bar{H}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(y+u+t)dt}{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(u+t)dt}. \tag{2.67}$$

Ορίζοντας την συνάρτηση κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ζωής χρησιμοποιώντας την $F_1(y)$ με $F_{1,u}(y) = 1 - \bar{F}_{1,u}(y)$ όπου

$$\bar{F}_{1,u}(y) = \frac{\bar{F}_1(u+y)}{\bar{F}_1(u)}. \tag{2.68}$$

και η (2.67) μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας την (2.68) ως

$$\bar{H}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(u+t)\bar{F}_{1,u+t}(y)dt}{\int_0^\infty e^{-s_1 t}\bar{F}_1(u+t)dt}. \tag{2.69}$$

Είναι εμφανές ότι η (2.69) εκφράζει την $H_u(y)$ ως μείξη των συναρτήσεων κατανομής της μορφής της $F_{1,u}(y)$ το οποίο λόγω της σχέσης (2.9) του αντίστοιχου θεωρήματος, μας δίνει ότι η $G_u(y)$ είναι επίσης μείξη των συναρτήσεων κατανομής της μορφής της $F_{1,u}(y)$. Αυτό το αποτέλεσμα έχει την ίδια δομή που είχε και στο κλασικό μοντέλο. Συνεπώς πολλές από τις ιδιότητες που έφερε η $G_u(y)$ στο κλασικό μοντέλο, θα ισχύουν και στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπως και το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1. *Έστω οι ακολουθίες* $\{\alpha_k(u), k = 1, 2, 3, ..., r\}$ *και* $\{\beta_k(u), k = 1, 2, 3, ..., r\}$ *έτσι ώστε για* $u \geq 0$ *να ισχύει*

$$F_{1,u}(y) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k(u)\beta_k(y), \qquad y \geq 0. \tag{2.70}$$

Τότε αν για την $K(t)$ *υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace (2.62) έχουμε ότι*

$$G_u(y) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k(x)\beta_k(y), \qquad y \geq 0. \tag{2.71}$$

όπου

$$\tilde{\alpha}_k(u) = \frac{\int_0^\infty \tilde{\alpha}_k(u-t)\bar{H}(u-t)d\delta(t)}{\int_0^\infty \bar{H}(u-t)d\delta(t)} \tag{2.72}$$

με

$$\tilde{\alpha}_k(u) = \frac{\int_0^\infty e^{-s_1 \upsilon}\bar{F}_1(u+\upsilon)\alpha_k(u+\upsilon)d\upsilon}{\int_0^\infty e^{-s_1 \upsilon}\bar{F}_1(u+\upsilon)d\upsilon}. \tag{2.73}$$

Απόδειξη Από την (2.69) και την (2.70) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
H_u(y) &= \frac{\int_0^\infty e^{-s_1 v}\bar{F}_1(u+v)\bar{F}_{1,u+v}(y)dv}{\int_0^\infty e^{-s_1 v}\bar{F}_1(u+v)dv} \\
&= \frac{\int_0^\infty e^{-s_1 v}\bar{F}_1(u+v)\left\{\sum_{k=1}^r \alpha_k(u+v)\beta_k(y)\right\}dv}{\int_0^\infty e^{-s_1 v}\bar{F}_1(u+v)dv} \\
&= \sum_{k=1}^r \tilde{\alpha}_k(u)\beta_k(y) \quad ,
\end{aligned}
$$

το οποίο προκύπτει αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης χρησιμοποιώντας την (2.73). Τότε από τις (2.9) και (2.72) έχουμε ότι

$$
G_u(y) = \frac{\int_0^u \left\{\int_{k=1}^r \tilde{\alpha}_k(u-t)\beta_k(y)\right\}\bar{H}(u-t)d\delta(t)}{\int_0^u \bar{H}(u-t)d\delta(t)} = \sum_{k=1}^r \tilde{\alpha}_k(u)\beta_k(y),
$$

και αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης προκύπτει η (2.71). □

Εφόσον από την ισότητα (2.68) προκύπτει ότι

$$
dF_{1,u}(y)/dy = \bar{F}(u+y)/\{E(Y)\bar{F}_1(u)\}
$$

γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η ισότητα της (2.70) ισχύει όταν

$$
\bar{F}(u+y) = \sum_{k=1}^r \alpha_k^*(u)\beta_k^*(y).
$$

Είναι φανερό ότι το προηγούμενο θεώρημα καταλήγει σε μία ισότητα που συνδέει την κατανομή του ελλείμματος με την κατανομή του ύψους των ζημιών και της οποίας η ιδιότητα παραμένει αμετάβλητη ανεξαρτήτως του μοντέλου που εξετάζουμε. Βασικά, παρατηρούμε την ίδια ιδιότητα να ισχύει και στο κλασικό μοντέλο του πρώτου θεωρήματος του Willmot (2000). Η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί ότι αν η κατανομή του ύψους των ζημιών είναι ένας συνδυασμός εκθετικών κατανομών ή μείξη κατανομών Erlang, τότε το ίδιο ισχύει και για την κατανομή του ελλείμματος.

Βέβαια με την χρήση περισότερων παραδοχών μπορούμε να καταλήξουμε σε ακριβέστερα αποτελέσματα και πορίσματα. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση κατανομής του ύψους των ζημιών $F(y)$ είναι IMRL(DMRL), τότε η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών $H(y)$ που ικανοποιεί την (2.65) είναι DFR(IFR), μια ιδιότητα που ισχύει και στο κλασικό μοντέλο (βλέπε Willmot and Lin 2001). Συγκεκριμένα συνεπάγεται ότι η $G_u(y)$ είναι DFR για σταθερό $u \geq 0$ αν η $H(y)$ είναι IMRL.

Επίσης καλύτερα αποτελέσματα ισχύουν και για τα φράγματα μεγαλύτερων κλάσεων. Θυμίζουμε ότι οι κλάσεις 2-NWU(2-NBU) εμπεριέχονται στις αντίστοιχες κλάσεις που αφορούν την κυρτότητα (convexity), δηλαδή NWUC(NBUC). Για τις οποίες κλάσεις ισχύει ότι, η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι 2-NWUC(2-NBUC) αν ισχύει $\bar{F}_1(u+y) \geq (\leq) \bar{F}_1(u)\bar{F}(y)$ για κάθε $u \geq 0$ και $y \geq 0$. Ομοίως, τα προηγούμενα μπορούν να αναχθούν σε μεγαλύτερες κλάσεις NWUE(NBUE) (βλέπε Fagiuoli and Pellerey[1994]). Το θεώρημα που ακολουθεί έχει αρκετές ομοιότητες με το αντίστοιχο για το κλασικό μοντέλο.

Θεώρημα 2.5.2. *Αν η $K(t)$ έχει τον μετασχηματισμό Laplace της (2.62) και η $\bar{A}(y)$ ικανοποιεί την σχέση $\bar{F}_1(u+y) \geq (\leq) \bar{A}(y)\bar{F}_1(u)$ για $u \geq 0$ και $y \geq 0$, τότε $\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{A}(y)$. Συγκεκριμένα*

(a) Αν $F(y)$ είναι 2-NWU(2-NBU) τότε $\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{F}_1(y)$,

(β) Αν $F(y)$ είναι NWUC(NBUC) τότε $\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{F}(y)$,

(γ) Αν $F(y)$ είναι NWUE(NBUE) τότε $\bar{G}_u(y) \geq (\leq) e^{-y/E(Y)}$.

Σε περιπτώσεις που η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι IMRL και DMRL τα φράγματα που ορίζονται στην (2.35) είναι στενότερα από τα όρια του προηγούμενου θεωρήματος, όπως προκύπτει εύκολα από τους Willmot and Lin (2001, σελίδες 225-226). Τα φράγματα τύπου-Lundberg που προκύπτουν από τις σχέσεις (2.41) και (2.42) επίσης ισχύουν υπό την ασθενέστερη υπόθεση ότι η $F(y)$ είναι IMRL, και με αναστροφή των ανισοτήτων αν η $F(y)$ είναι DMRL.

Κεφάλαιο 3

Βελτιώσεις των φραγμάτων της κατανομής του ελλείμματος

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα υπενθυμίσουμε συγκεντρωτικά κάποιες θεμελιώδεις σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν επανειλημμένως στο συγκεκριμένο κεφάλαιο και θα διευκολύνουν από χρονοβόρες αναδρομές σε πληθώρα περασμένων παραγράφων.
Αρχικά να θυμίσουμε ότι η $G(u, y)$ ικανοποιεί την ελλειματική ανανεωτική εξίσωση

$$G(u, y) = \phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u + y)] + \phi \int_0^u G(u - t, y) dH(t), \qquad (3.1)$$

όπου $0 < \phi = \psi(0) < 1$ και H η γνωστή μας συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών που εξαρτάται από το απόθεμα u.

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν μελέτες που αφορούν τόσο κάτω όσο και άνω φράγματα της συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος $G(u, y)$ στο ανανεωτικό μοντέλο που μελέτησαν και ανέπτυξαν οι Chadjiconstantinidis - Politis (2007) και τα οποία αφορούν και διαχωρίζονται στους δύο ακόλουθους τύπους:
(α) Φράγματα με γενικές εφαρμογές.

(β) Φράγματα εκθετικής μορφής που έχουν εφαρμογή μόνο υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R και ορίζονται ως η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης

$$\phi \int_0^\infty e^{Ru} dH(u) = 1. \tag{3.2}$$

Επίσης υπενθυμίζουμε διάφορες εκφράσεις της $\psi(u)$ ότι

$$\psi(u) = P\left\{\inf_{t>0} U_t < 0 \quad |U_0 = u\right\}, \tag{3.3}$$

και

$$\psi(u) = \phi\bar{H}(u) + \phi \int_0^u \psi(u-t) dH(t), \tag{3.4}$$

καθώς και

$$\psi(u) = (1-\phi) \sum_{k=1}^\infty \phi^k \bar{H}^{*k}(u). \tag{3.5}$$

Συνεπώς, λόγω της τελευταίας υπενθυμίζουμε ότι

$$G(u) = (1-\phi) \sum_{k=0}^\infty \phi^k H^{*k}(u). \tag{3.6}$$

3.2 Φράγματα της G(u,y) με γενικές εφαρμογές

3.2.1 Μελέτη κάτω φραγμάτων

Ο Willmot(2002), με την σχέση (2.28) βρήκε ένα κάτω φράγμα του μεγέθους της χρεοκοπίας, το οποίο συνδέει την συνάρτηση κατανομής $G(u, y)$ με την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$. Θυμίζουμε

$$G(u, y) \geq \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)]. \tag{3.7}$$

Όπως παρατήρησε ο Willmot το συγκεκριμένο όριο είναι αρκετά καλό όταν η πιθανότητα $\phi = \psi(0)$ είναι μικρή. Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί μια βελτιστοποίηση του προανεφερθέντος ορίου, καθώς δίνει ένα νέο μεγαλύτερο κάτω φράγμα, προσθέτοντας έναν μη αρνητικό όρο στο δεξί μέλος της (3.7).

Θεώρημα 3.2.1. *Στο ανανεωτικό μοντέλο, για κάθε $u, y \geq 0$ ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} G(u,y) &\geq \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)] \\ &+ \frac{\phi}{(1-\phi)^2}[\phi - \psi(y)][1-\psi(u)]\bar{H}(u+y). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Απόδειξη Η απόδειξη βασίζεται στην ισχύ της ακόλουθης πρότασης

$$\begin{aligned} G(u,y) &\geq \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)] \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}[\phi - \psi(y)]\bar{H}(u+y)\sum_{k=0}^{n}\phi^k H^{*k}(u), \end{aligned} \tag{3.9}$$

για όλα τα $n = 0, 1, 2, ...,$. Αυτό το αποδεικνύουμε μέσω επαγωγής. Αρχικά, εισάγουμε το "κάτω φράγμα" που έχουμε από την (3.7) στο δεξί μέλος της (3.1) και χρησιμοποιώντας την (3.4) την φέρνουμε στην μορφή

$$\begin{aligned} G(u,y) &\geq \psi(u) - \phi\bar{H}(u+y) + \frac{1}{1-\phi}\psi(u)\psi(y) - \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(u)\psi(y) \\ &- \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^u \psi(u+y-t)dH(t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Για το ολοκλήρωμα της προηγούμενης ανίσωσης, χρησιμοποιώντας την (3.4) έχουμε ότι

$$\int_0^u \psi(u+y-t)dH(t) = \phi^{-1}\psi(u+y) - \bar{H}(u+y) - \int_u^{u+y} \psi(u+y-t)dH(t).$$

Εφόσον όμως η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ είναι φθίνουσα (αρνητικά μονότονη) έχουμε ότι

$$\int_u^{u+y} \psi(u+y-t)dH(t) \geq \psi(y)[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)],$$

και αντικαθιστώντας τις τελευταίες δύο σχέσεις στην (3.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned} G(u,y) &\geq \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)] \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}[\phi - \psi(y)][1-\psi(u)]\bar{H}(u+y), \end{aligned} \tag{3.11}$$

το οποίο αποδεικνύει την ανίσωση (3.9) για $n = 0$.
Υποθέτουμε ότι η ανίσωση ισχύει για n και μένει να αποδείξουμε ότι ισχύει για $n+1$. Παίρνουμε λοιπόν την (3.9) και αντικαθιστούμε στην (3.1) και έχουμε

$$\begin{aligned} G(u,y) &\geq \phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)] \\ &+ \phi\int_0^u \left\{\psi(u-t) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y-t) - \psi(u-t)\psi(y)]\right\} dH(t) \\ &+ \frac{\phi^2}{1-\phi}[\phi-\psi(y)]\int_0^u \bar{H}(u+y-t)\sum_{k=0}^{n}\phi^k H^{*k}(u-t)dH(t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της ανίσωσης ισούνται με το δεξί μέλος της ανίσωσης (3.11), δηλαδή το κάτω φράγμα που ορίζει. Για τον τρίτο όρο της (3.12) εφόσον η H είναι αρνητικά μονότονη (φθίνουσα) συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^u \bar{H}(u+y-t)\sum_{k=0}^{n}\phi^k H^{*k}(u-t)dH(t) &\geq \bar{H}(u+y)\sum_{k=0}^{n}\int_0^u \phi^k H^{*k}(u-t)dH(t) \\ &= \bar{H}(u+y)\sum_{k=0}^{n}\phi^k H^{*(k+1)}(u) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα ως άνω, από την (3.12) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} G(u,y) \geq \psi(u) &- \phi\bar{H}(u+y) + \frac{1}{1-\phi}\psi(u)\psi(y) - \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(u)\psi(y) \\ &- \frac{1}{1-\phi}\psi(u+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(u+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\psi(y)[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)] \\ &+ \frac{\phi^2}{1-\phi}[\phi-\psi(y)]\bar{H}(u+y)\sum_{k=0}^{n}\phi^k H^{*(k+1)}(u), \end{aligned} \tag{3.13}$$

το οποίο κάνοντας λίγες πράξεις αποδεικνύει την (3.9). Συνεχίζοντας και θέτοντας το $n \to \infty$ και στα δύο μέλη της (3.9) προκύπτει το αποτέλεσμα της (3.6). $\square$

Πρακτικά, παρατηρούμε ότι για κάποιο υποθετικό πρόβλημα στο οποίο δεν γνωρίζουμε την $G(u, y)$ αντιλαμβανόμαστε ότι και η πιθανότητα ψ είναι τυπικά άγνωστη. Παρόλα αυτά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ψ στην (3.8) από ένα όριο εκφρασμένο σε όρους H και ϕ, όπως για παράδειγμα με το φράγμα των De Vylder - Goovaerts (1984)

$$\psi(u) = \frac{\phi \bar{H}(u)}{1 - \phi H(u)}. \tag{3.14}$$

Για το συγκεκριμένο κάτω φράγμα, οι Chadjiconstantinidis - Politis (2005) έχουν δημοσιεύσει μία βελτιστοποιημένη έκφραση.

3.2.2 Μελέτη άνω φραγμάτων

Αρχικά θα παραθέσουμε ένα άνω φράγμα της $G(u, y)$ σε σχέση με την συνάρτηση κατανομής H των κλιμακωτών υψών, την γενική περίπτωση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ καθώς και για την πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό απόθεμα $\psi(0) = \phi$.

Πρόταση 3.2.1. *Ένα γενικό άνω φράγμα για την $G(u, y)$ δίνεται από την ανίσωση*

$$G(u, y) \leq \psi(u) - \frac{\phi}{1 - \phi}[1 - \psi(u)]\bar{H}(u + y). \tag{3.15}$$

Απόδειξη Από τον Willmot (2002) έχουμε ότι

$$G(u, y) = \psi(u) - \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^u \bar{H}(u + y - t) dG(t). \tag{3.16}$$

Από αυτήν προκύπτει άμεσα η απόδειξη καθώς η $\bar{H}$ είναι φθίνουσα και η $G(u) = 1 - \psi(u)$ για $u \geq 0$. $\square$

Για $u = 0$, είναι γνωστό ότι (Willmot, 2002)

$$G(0, y) = \phi H(y), \quad y \geq 0. \tag{3.17}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η (3.15) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

$$G(u,y) \leq \frac{1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)}{1-\phi}\psi(u) - \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(u+y). \qquad (3.18)$$

Από αυτό παίρνουμε το ακόλουθο κάτω όριο για $\psi(u)$ εκφρασμένο σε όρους $G(u,y)$

$$\psi(u) \geq \frac{(1-\phi)G(u,y)+\phi\bar{H}(u+y)}{1-\phi +_{\phi} \bar{H}(u+y)}. \qquad (3.19)$$

Μία εξαιρετική ιδιότητα της ανίσωσης (3.18) είναι ότι μας δίνει την δυνατότητα, χρησιμοποιώντας τα ήδη υπάρχοντα όρια της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$, να βρίσκουμε νέα βελτιωμένα όρια για το μέγεθος του ελλείματος κατά την χρεοκοπία, $G(u,y)$.

Στην συνέχεια, θα υπενθυμίσουμε τον ορισμό του Willmot (2002), για την $\bar{G}(u,y)$ ως $\bar{G}(u,y) = \psi(u) - G(u,y)$. Το επόμενο αποτέλεσμα μας δίνει μια έκφραση του $G(u,y)$.

Λήμμα Για $u, y \geq 0$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} G(u,y) &= \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y)-\psi(u)\psi(y)] \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^y \int_0^{y-t} \bar{G}(u,y-t-z)dG(z)dH(t). \qquad (3.20) \end{aligned}$$

Απόδειξη Από την εξίσωση (2.10) του Willmot (2002) (ή 2.14 του παρόντος) μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\begin{aligned} G(u,y) &= H(y)\psi(u) + \frac{1}{1-\phi}[\bar{H}(y)\psi(u)-\psi(u+y)] \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^y \psi(u+y-t)dH(t). \qquad (3.21) \end{aligned}$$

Αλλά από το θεώρημα 2.2 του Willmot (2002) έχουμε ότι

$$\psi(u+y) = \psi(u)\psi(y) + \int_0^y \bar{G}(u,y-t-z)dG(z), \qquad (3.22)$$

όπου το διάστημα ολοκλήρωσης το θεωρούμε κλειστό. Αντικαθιστώντας το y με $y-t$ στην παραπάνω σχέση, από την (3.21) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} G(u,y) &= H(y)\psi(u) + \frac{1}{1-\phi}[\bar{H}(y)\psi(u) - \psi(u+y)] \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}\psi(u)\int_0^y \psi(y-t)dH(t) \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^y\int_0^{y-t}\bar{G}(u,y-t-z)dG(z)dH(t). \end{aligned}$$

Η ζητούμενη απόδειξη μπορεί εύκολα να εξαχθεί από την (3.4). $\square$

Θεώρημα 3.2.2. *Ένα άνω φράγμα για την $G(u,y)$ είναι*

$$G(u,y) \le \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)] + \frac{1}{1-\phi}[1-\psi(u)][\psi(y) - \phi\bar{H}(y)].$$

Απόδειξη Από την σχέση (3.16) παίρνουμε ότι

$$\bar{G}(u,y) \le \frac{\phi}{1-\phi}[1-\psi(u)]\bar{H}(y).$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} G(u,y) &\le \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)] \\ &+ \frac{\phi^2}{(1-\phi)^2}[1-\psi(u)]\int_0^y\int_0^{y-t}\bar{H}(y-t-z)dG(z)dH(t) \\ &= \psi(u) - \frac{1}{1-\phi}[\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)] \\ &+ \frac{\phi}{1-\phi}[1-\psi(u)]\int_0^y \psi(y-t)dH(t), \end{aligned} \tag{3.23}$$

χρησιμοποιώντας την (3.16) στο δεύτερο βήμα. Όμως από την (3.4) παίρνουμε ότι

$$\frac{\phi}{1-\phi}[1-\psi(u)]\int_0^y \psi(y-t)dH(t) = \frac{1-\psi(u)}{1-\phi}[\psi(y)-\phi\bar{H}(y)],$$

και προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Παρατήρηση. Έχει ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τα άνω φράγματα που προκύπτουν από το Θεώρημα 4.2 και την Πρόταση 4.1. Έστω $V(u,y)$ το φράγμα της Πρότασης 4.1 και $V_0(u,y)$ το άνω φράγμα του Θεωρήματος 4.2. Τότε, παρατηρούμε από την (3.17) ότι τα φράγματα είναι ίσα για $u=0$. Επίσης τα φράγματα παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά όταν το $y\to\infty$, καθώς και τα δύο συγκλίνουν στο $\psi(u)$. Για γενικές τιμές των u,y είναι δύσκολο να συγκριθούν τα φράγματα καθώς εμπεριέχουν άλλες εκφράσεις της δεξιάς ουράς της συνάρτησης κατανομής $\bar{H}$. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε ότι για $u\to\infty$ έχουμε ότι $\lim_{u\to\infty} V(u,y)=0$ ενώ $\lim_{u\to\infty} V_0(u,y)=(1-\phi)^{-1}[\psi(y)-\phi\bar{H}(y)]\geq 0$, από το οποίο παρατηρούμε ότι το φράγμα την Πρότασης 4.1 παράγει μικρότερο και συνεπώς καλύτερο άνω φράγμα για μεγάλες τιμές του u. □

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα άνω φράγμα της $G(u,y)$ τα οποία δεν εκφράζονται με όρους της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$. Για να το κάνουμε, προχωρούμε στον ακόλουθο ορισμό. Έστω η ολοκληρώσιμη συνάρτηση h, τότε ως Λh ορίζεται

$$\Lambda h(u) = \int_u^\infty h(t)dt$$

και ομοίως ορίζεται η $\Lambda^2 h = \Lambda(\Lambda h)$. Αν υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει η πρώτη ροπή της $E(S)$ της S η οποία ισούτε με $\int u dH(u) < \infty$ ή με την πεπερασμένη διακύμανση του ύψους των ζημιών, και h είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών του μοντέλου, συνεπώς η Λh είναι ολοκληρώσιμη και η $\Lambda^2 h$ είναι καλώς ορισμένη. Υπό αυτές τις συνθήκες, το ακόλουθο όριο του $\psi(u)$ γίνεται

$$\psi(u) \leq \frac{\phi\bar{H}(u)+\phi u^{-1}H(u)[E(S)-\phi(1-\phi)^{-1}\Lambda^2 h(u)]}{1+\phi u^{-1}H(u)[E(S)-\phi(1-\phi)^{-1}\Lambda^2 h(u)]}.$$

Το συγκεκριμένο όριο παρουσιάστηκε από τους Chadjiconstantinidis - Politis (2005) και βελτιώνει ένα όμοιο φράγμα του κλασικού μοντέλου των Cai - Carrido (1998).

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση του προηγούμενου άνω φράγματος και αφορά το μέγεθος του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Για την δημιουργία του, χρειαζόμαστε μια επιπρόσθετη υπόθεση που αφορά την κατανομή των κλιμακωτών υψών H του μοντέλου. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η H έχει φθίνουσα πυκνότητα, $h(u) = H'(u)$, το οποίο ισχύει πάντα στο κλασικό μοντέλο εφόσον $H(u) = \int_0^u (1 - F(t))dt/m$ όπου F η κατανομή του ύψους των ζημιών. Στο ανανεωτικό μοντέλο, μια επαρκής προϋπόθεση ώστε η H να έχει πυκνότητα πιθανότητας είναι να έχει πυκνότητα η F.

Θεώρημα 3.2.3. *Ας υποθέσουμε ότι $h(u) = H'(u)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση και έστω δύο συναρτήσεις $\alpha(u)$ και $b(u, y)$ ορίζονται ως*

$$\alpha(u) = \phi(1 - \phi)u^{-1}H(u)[E(S) - \phi(1 - \phi)^{-1}\Lambda^2 h(u)]$$

και

$$b(u, y) = \phi u^{-1}H(u)[\Lambda^2 h(y) - \Lambda^2 h(u + y)].$$

Τότε ένα άνω φράγμα για το έλλειμμα κατα την χρεοκοπία $G(u, y)$ στο ανανεωτικό μοντέλο, δίνεται για κάθε $u, y \geq 0$ από

$$G(u, y) \leq \frac{\phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u + y) - b(u, y)][1 - \phi + \phi\bar{H}(u + y)] + \alpha(u)}{1 - \phi + \phi\bar{H}(u + y) + \alpha(u)}. \quad (3.24)$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3 των Cai - Carrido (1998), εφόσον $H'(t)$ είναι φθίνουσα, λόγω τις (3.1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(u, y) &\leq \phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u + y)] + \frac{\phi}{u}\left(\int_0^u H'(t)dt\right)\left(\int_0^u G(u - t, y)dt\right) \\ &= \phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u + y)] + \frac{\phi H(u)}{u}\left(\int_0^u G(u - t, y)dt\right). \quad (3.25) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη της (3.15) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^u G(u-t,y)dt &\leq \int_0^u \psi(u-t)dt - \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^u [1-\psi(u-t)]\bar{H}(u-t+y)dy \\
&= \int_0^u \psi(t)dt - \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^u [1-\psi(t)]\bar{H}(t+y)dt \\
&\leq \int_0^u \psi(t)dt - \phi\int_0^u \bar{H}(t+y)dt \\
&= \int_0^u \psi(t)dt - \phi\int_y^{u+y} \bar{H}(t)dt \\
&= \int_0^u \psi(t)dt - \phi[\Lambda^2 h(y) - \Lambda^2 h(u+y)], \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\psi(t) \leq \phi$ κατά το τρίτο βήμα των πράξεων.

Με την βοήθεια ενός χαμηλότερου φράγματος των Chadjiconstantinidis - Politis (2005), παίρνουμε το επόμενο φράγμα για $u \geq 0$

$$\int_0^u \psi(t)dt \leq \left[E(S) - \frac{\phi}{1-\phi}\Lambda^2 h(u)\right][1-\psi(u)], \qquad (3.27)$$

το οποίο βελτιώνει το αντίστοιχο των Cai - Carrido (1998, Λήμμα 1.β). Από την (3.19) έχουμε ότι

$$1-\psi(u) \leq \frac{(1-\phi)[1-G(u,y)]}{1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)},$$

το οποίο μαζί με τις (3.26) και (3.27) μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^u G(u-t,y)dt &\leq \left[E(S) - \frac{\phi}{1-\phi}\Lambda^2 h(u)\right]\frac{(1-\phi)[1-G(u,y)]}{1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)} \\
&- \phi[\Lambda^2 h(y) - \Lambda^2 h(u+y)] \quad , \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
G(u,y) &\leq \phi[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)] - \frac{\phi^2 H(u)}{u}[\Lambda^2 h(y) - \Lambda^2 h(u+y)] \\
&+ \frac{\phi H(u)}{u}\left[E(S) - \frac{\phi}{1-\phi}\Lambda^2 h(u)\right]\frac{(1-\phi)[1-G(u,y)]}{1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)} \quad ,
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η ζητουμενη εξίσωση λύνοντας ως προς $G(u, y)$. $\square$

Παρατήρηση Έστω $V_1(u, y) = V_{11}(u, y)/V_{12}(u, y)$ ότι είναι το άνω φράγμα της (3.24). Τότε συμπεραίνουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} V_1(u, y) &= \frac{\lim\limits_{u\to 0} dV_{11}(u, y)/du}{\lim\limits_{u\to 0} dV_{12}(u, y)/du} \\ &= \frac{\phi[1-\phi+\phi\bar{H}(y)][1-\bar{H}(y)]}{1-\phi+\phi\bar{H}(y)} \\ &= \phi H(y) \quad ,\end{aligned}$$

και παρατηρώντας την (3.17) , βλέπουμε ότι η $V_1(u, y)$ έχει την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά όταν $u \to 0$.

3.2.3 Μελέτη άνω και κάτω φραγμάτων χρησιμοποιώντας παραλλαγή της συνθήκης Lundberg

Τα φράγματα που μελετήθηκαν στις δύο προηγούμενες υποπαραγράφους είναι έγκυρα χωρίς να χρειάζεται να θεωρήσουμε κάποιες περαιτέρω ιδιότητες για την κατανομή του ύψους των ζημιών F ή την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων K. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα φράγματα μπορούν να βελτιωθούν αν υποθέσουμε την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής R. Δυστυχώς όμως, ο συντελεστής R δεν υπάρχει όταν η κατανομή του ύψους των ζημιών έχει "βαριά" ουρά, όπως συμβαίνει σε πλήθος περιπτώσεων. Μια γνωστή μέθοδος για αυτές τις περιπτώσεις, αποτελεί μια παραλλαγή της συνθήκης του Lundberg, η οποία είναι όμοια με την σχέση (3.2), απλά μετατρέποντας σε πεπερασμένα τα όρια ολοκλήρωσης (βλέπε Dickson 1994, Cai-Carrido 1999, Sakurai 2004).

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε για $u > 0$, $R_u = r(u)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^u e^{R_u y} dH(y) = \phi^{-1}. \tag{3.29}$$

Τότε το r_u υπάρχει και είναι μοναδικό για κάθε u θετικό, και αν υπάρχει το r τότε $\lim_{u\to\infty} r_u = r$ (βλέπε Cai-Carrido 1999).

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί μια γενίκευση του αποτελέσματος των Cai-Carrido (1999), το οποίο αφορά άνω και κάτω φράγμα της σύνθετης γεωμετρικής ουράς για το ανανεωτικό μοντέλο.

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω R_u έχει οριστεί όπως στην (3.29). Τότε ισχύουν τα ακόλουθα άνω και κάτω φράγματα της $G(u,y)$ για $u, y \geq 0$*

$$G(u,y) \leq \frac{1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)} e^{-uR_u} + \phi\frac{\bar{H}(u)-\bar{H}(u+y)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)}, \tag{3.30}$$

και

$$G(u,y) \geq \frac{1-\phi+\phi\bar{H}(y)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)} e^{-2uR_u} + \frac{\phi\bar{H}(u)[1-\phi+\phi\bar{H}(y)]}{(1-\phi)[1-\phi+\phi\bar{H}(u)]}$$
$$-\frac{\phi}{1-\phi}\left[(1-\phi)\bar{H}(u+y)-\phi\bar{H}(y)\right],$$

Απόδειξη Το Πόρισμα 3 των Cai-Carrido (1999) ισχυρίζεται ότι

$$\psi(u) \leq \frac{(1-\phi)e^{uR_u}+\phi\bar{H}(u)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)}.$$

Θέτοντας αυτό το φράγμα στην (3.18) παίρνουμε

$$G(u,y) \leq \frac{1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)} e^{-uR_u} + \phi\frac{\bar{H}(u)\left[1-\phi+\phi\bar{H}(u+y)\right]}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)}$$
$$-\frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(u+y),$$

εκ του οποίου είναι προφανές ότι είναι ίσο με της σχέσης (3.30).
Για το κάτω φράγμα, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.1 του Πολίτη (2005) σύμφωνα με το οποίο

$$G(u,y) \geq \left[1+\frac{\phi\bar{H}(y)}{1-\phi}\right]\psi(u) - \phi\bar{H}(u+y) - \frac{\phi^2\bar{H}(y)}{1-\phi}.$$

Όμως για το κάτω φράγμα του ψ από τους Cai-Carrido (1999) έχουμε ότι

$$\psi(u) \geq \frac{(1-\phi)e^{-2uR_u}+\phi\bar{H}(u)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)}.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
G(u,y) \geq & \left[1+\frac{\phi\bar{H}(y)}{1-\phi}\right]\frac{(1-\phi)e^{-2uR_u}}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)}+\left[1+\frac{\phi\bar{H}(y)}{1-\phi}\right]\frac{\phi\bar{H}(u)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)} \\
& -\phi\bar{H}(u+y)-\frac{\phi^2\bar{H}(y)}{1-\phi} \\
= & \frac{1-\phi+\phi\bar{H}(y)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)}e^{-2uR_u}+\frac{\phi\bar{H}(u)[1-\phi+\phi\bar{H}(y)]}{(1-\phi)[1-\phi+\phi\bar{H}(u)]} \\
& -\phi\bar{H}(u+y)-\frac{\phi^2\bar{H}(y)}{1-\phi}
\end{aligned}
$$

που είναι το ζητούμενο προς απόδειξη. □

Παρατήρηση (α) Στους Chadjiconstantinidis - Politis (2003), χρησιμοποιώντας επαγωγική μέθοδο έχει αποδειχθεί ότι

$$
G(u,y) \leq e^{-uR_u}+\phi\frac{\bar{H}(u)-\bar{H}(u+y)}{1-\phi+\phi\bar{H}(u)},
$$

το οποίο αποτελεί γενίκευση του κεντρικού αποτελέσματος του Dickson (1994). Είναι φανερό ότι η (3.30) αποτελεί βελτίωση αυτού, καθώς ο συντελεστής e^{-ur_u} είναι μικρότερος της μονάδας.

(β) Χρησιμοποιώντας ξανά την (3.18), φαίνεται άμεσα το ότι μπορούμε να βελτιώσουμε και τα υπόλοιπα αποτελέσματα των Cai-Carrido (1999).

3.3 Φράγματα που σχετίζονται με τον συντελεστή προσαρμογής

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα παρουσιαστούν βελτιωμένα φράγματα της $G(u,y)$ υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει η λύση για $r=R$ της (3.2).

Θα θεωρήσουμε ότι η κατανομή των κλιμακωτών υψών έχει φθίνουσα συνάρτηση πυκνότητας, $h(u)=H'(u)$. Θέτοντας $v(u)=\phi[\bar{H}(u)-\bar{H}(u+y)]$, παρατηρούμε ότι η $v(u)$ είναι παραγωγίσιμη με $v'(u)\leq 0$. Έτσι, εφόσον η $G(u,y)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση (3.1), από το Πόρισμα 9.1.1 των Willmot - Lin (2001) έχουμε ότι

$$G(u,y) \le \frac{\phi[1-\alpha_1(\infty)]}{1-\phi}\bar{H}(u+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(y)\left[\alpha_1(\infty)e^{-Ru} - \psi(u)\right]$$
$$+ \frac{\phi R\alpha_1(\infty)}{1-\phi}\int_0^u e^{-Rt}\bar{H}(u+y-t)dt, \quad u \ge 0$$

και

$$G(u,y) \ge \frac{\phi[1-\alpha_2(\infty)]}{1-\phi}\bar{H}(u+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\bar{H}(y)\left[\alpha_2(\infty)e^{-Ru} - \psi(u)\right]$$
$$+ \frac{\phi R\alpha_2(\infty)}{1-\phi}\int_0^u e^{-Rt}\bar{H}(u+y-t)dt, \quad u \ge 0,$$

όπου

$$\alpha_1(u) = \sup_{0\le z\le u}\frac{e^{Rz}\bar{H}(z)}{\int_z^\infty e^{Rt}dH(t)}, \quad \alpha_2(u) = \inf_{0\le z\le u}\frac{e^{Rz}\bar{H}(z)}{\int_z^\infty e^{Rt}dH(t)}.$$

Εκτός της πολυπλοκότητας αυτών των φραγμάτων, δεν είναι εύκολο να προσεγγιστεί το που συγκλίνουν για ακραίες τιμές όπως για παράδειγμα όταν μεταβάλεται η μεταβλητή u και τείνει στο άπειρο.

Γνωρίζουμε, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο ότι για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ υπάρχουν σταθερές C_1, C_2 τέτοιες ώστε

$$C_1 e^{Ru} \le \psi(u) \le C_2 e^{-Ru}, \tag{3.31}$$

και καθώς $G(u,y) \le \psi(u)$ αναμένουμε να υπάρχει ένα άνω φράγμα για την $G(u,y)$ το οποίο τείνει στο μηδέν με εκθετικό ρυθμό. Ακολουθεί ένα τέτοιο φράγμα μαζί με το συμπληρωματικό του κάτω φράγμα.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω R που ικανοποιεί την (3.2) και ας υποθέσουμε την ύπαρξη $\alpha_1(u), \alpha_2(u)$ τα οποία ορίζονται όπως προηγουμένως. Τότε για $u, y \ge 0$,*

$$A_2(u,y)e^{-Ru} \le G(u,y) \le A_1(u,y)e^{-Ru}, \tag{3.32}$$

όπου για ι = 1,2

$$A_i(u,y) = \alpha_i(u)\frac{1-\phi+\phi\bar{H}(y)}{1-\phi} + (-1)^{i+1}B_i(u,y),$$

και

$$B_i(u,y) = \frac{\phi}{1-\phi} e^{Ry} \left\{ \phi^{-1}[\alpha_1(u+y) - \alpha_2(u+y)] \right.$$
$$\left. +(-1)^i \alpha_i(u+y) \int_y^\infty e^{Rt} dH(t) \right\}.$$

Απόδειξη Από το Πόρισμα 7.1.1 των Willmot - Lin (2001) έχουμε ότι

$$\alpha_2(u)e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq \alpha_1(u)e^{-Ru}, \quad u \geq 0. \tag{3.33}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.21) και τα παραπάνω άνω και κάτω φράγματα για την $\psi(u)$, έχουμε ότι

$$G(u,y) \geq \alpha_2(u)H(y)e^{-Ru} + \frac{1}{1-\phi}\left\{\alpha_2(u)\bar{H}(y)e^{-Ru} - \alpha_1(u+y)e^{-R(u+y)}\right\}$$
$$+ \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^y \alpha_2(u+y-t)e^{-R(u+y-t)}dH(t)$$

και

$$G(u,y) \geq \alpha_1(u)H(y)e^{-Ru} + \frac{1}{1-\phi}\left\{\alpha_1(u)\bar{H}(y)e^{-Ru} - \alpha_2(u+y)e^{-R(u+y)}\right\}$$
$$+ \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^y \alpha_1(u+y-t)e^{-R(u+y-t)}dH(t).$$

Παρατηρώντας ότι η $\alpha_1(u)$ είναι άυξουσα συνάρτηση ενώ η $\alpha_2(u)$ είναι φθίνουσα καθώς και ότι $\int_0^y e^{Rt}dH(t) = \phi^{-1} - \int_y^\infty e^{Rt}dH(t)$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Έστω $y > 0$ σταθερό και z τέτοιο ώστε $\bar{H}(z) > 0$. Τότε ορίζουμε

$$\alpha_y(z) = \frac{e^{Rz}\left[\bar{H}(z) - \bar{H}(z+y)\right]}{\int_z^\infty e^{Ry}dH(y)}$$

και

$$\alpha_{1,y}(u) = \sup_{0\leq z\leq u, \bar{H}(z)>0} \{\alpha_y(z)\}, \quad u \geq 0,$$

$$\alpha_{2,y}(u) = \inf_{0\leq z\leq u, \bar{H}(z)>0} \{\alpha_y(z)\}, \quad u \geq 0.$$

Τότε από το Θεώρημα 3.1 των Willmot et al. (2001) έχουμε

$$\alpha_{2,y}(u)e^{-Ru} \leq G(u,y) \leq \alpha_{1,y}(u)e^{-Ru}. \tag{3.34}$$

Αυτά τα φράγματα βελτιώνονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.2. *Για* $u, y \geq 0$ *έχουμε*

$$G(u,y) \leq \alpha_{1,y}(u)e^{-Ru} - \phi\left\{\alpha_{1,y}(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Rt}dH(t) - \left[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)\right]\right\}$$

και

$$G(u,y) \geq \alpha_{2,y}(u)e^{-Ru} + \phi\left\{\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y) - \alpha_{2,y}(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Rt}dH(t)\right\}.$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας την (3.34) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
G(u,y) &= \phi\int_0^u G(u-t,y)dH(t) + \phi\left[\bar{H}(y) - \bar{H}(u+y)\right] \\
&\leq \phi\int_0^u \alpha_{1,y}(u-t)e^{-R(u-t)}dH(t) + \phi\left[\bar{H}(y) - \bar{H}(u+y)\right] \\
&= \phi e^{-Ru}\int_0^u \alpha_{1,y}(u-t)e^{Rt}dH(t) + \phi\left[\bar{H}(y) - \bar{H}(u+y)\right] \\
&= \phi e^{-Ru}\alpha_{1,y}(u)\int_0^u e^{Rt}dH(t) + \phi\left[\bar{H}(y) - \bar{H}(u+y)\right] \\
&= \phi e^{-Ru}\alpha_{1,y}(u)\left\{\phi^{-1} - \int_u^\infty e^{Rt}dH(t)\right\} + \phi\left[\bar{H}(y) - \bar{H}(u+y)\right] \\
&= e^{-Ru}\alpha_{1,y}(u) - \phi\left\{e^{-Ru}\alpha_{1,y}(u)\int_u^\infty e^{Rt}dH(t) - \left[\bar{H}(y) - \bar{H}(u+y)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Το κάτω φράγμα αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. □

Παρατήρηση Εφόσον ισχύει

$$\alpha_{1,y}(u) \geq \alpha_y(u) = \frac{e^{Ru}\left[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)\right]}{\int_u^\infty e^{Ry}dH(y)} = \frac{\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)}{e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Ry}dH(y)},$$

συνεπώς παίρνουμε

$$\alpha_{1,y}(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Ry}dH(y) \geq \bar{H}(u) - \bar{H}(u+y),$$

και ομοίως

$$\alpha_{2,y}(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Ry}dH(y) \leq \bar{H}(u) - \bar{H}(u+y),$$

έτσι ώστε τα φράγματα που δίνονται από το θεώρημα να είναι πράγματι καλύτερα από αυτά που δίνονται στην (3.34). Επίσης, έχουμε ότι για $y \to \infty$, τα φράγματα του θεωρήματος ανάγονται σε αυτά του θεωρήματος 7.1.1 των Willmot-Lin (2001) για την ειδική περίπτωση όπου $1 - p_0 = \phi$. □

Ορίζουμε τις επόμενες συναρτήσεις σύμφωνα με τους Willmot et al. (2001) ως

$$\psi_U(u) = \sup_{0 \leq z \leq u, \bar{H}(z) > 0} \frac{\bar{H}(z) - \bar{H}(z+y)}{\bar{H}(z)},$$

και

$$\sigma_U(u) = \sup_{0 \leq z \leq u, \bar{H}(z) > 0} \frac{e^{Rz}\bar{H}(z)}{\int_z^\infty e^{Ry}dH(y)},$$

καθώς $\psi_L(u), \sigma_L(u)$ ορίζονται αντιστοίχως αν αντικαταστήσουμε το sup με inf.

Τα ακόλουθα άνω και κάτω φράγματα προέρχονται από το Πόρισμα 3.1 των Willmot et al. (2001) και είναι

$$\sigma_L(u)\psi_L(u)e^{Ru} \leq G(u,y) \leq \sigma_U(u)\psi_U(u)e^{Ru}. \tag{3.35}$$

Τοποθετώντας τα φράγματα αυτά στην (3.1) και γνωρίζοντας την ιδιότητα των ψ_U, σ_U (ψ_L, σ_L) ότι είναι αύξουσες (φθίνουσες) συναρτήσεις, μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε στα επόμενα φράγματα για την $G(u,y)$.

Θεώρημα 3.3.3. *Έχοντας ορίσει τις συναρτήσεις $\psi_U, \sigma_U, \psi_L, \sigma_L$ όπως στην προηγούμενη παρατήρηση, παίρνουμε ότι*

$$\begin{aligned} G(u,y) \leq \psi_U(u)\sigma_U(u)e^{-Ru} - \phi\Big\{&\psi_U(u)\sigma_U(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Rt}dH(t) \\ - \ &\big[\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)\big]\Big\} \end{aligned}$$

και

$$G(u,y) \geq \psi_L(u)\sigma_L(u)e^{-Ru} + \phi\Bigg\{\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)$$
$$- \psi_L(u)\sigma_L(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Rt}dH(t)\Bigg\}.$$

Εφόσον εξ ορισμού τα ψ_U, σ_U *ικανοποιούν*

$$\sigma_U(u)e^{-Ru}\int_u^\infty e^{Rt}dH(t) \geq \bar{H}(u),$$

$$\psi_U(u) \geq \frac{\bar{H}(u) - \bar{H}(u+y)}{\bar{H}(u)},$$

και ομοίως ισχύει για τα ψ_L, σ_L*, το οποίο έχει ως επακόλουθο ότι τα όρια του θεωρήματος που εξετάζουμε αποτελούν βελτιώσεις των φραγμάτων της (3.35).*

3.4 Παραδείγματα και συμπεράσματα

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε δύο διαφορετικά φράγματα σε ένα παράδειγμα στο κλασικό μοντέλο, όπου η κατανομή ζημιών ακολουθεί μίξη εκθετικών κατανομών. Η αναλυτική θεωρητική λύση παρατίθεται στο "Παράδειγμα 2" του Κεφαλαίου 2.3 και σελίδα 31 του παρόντος.

Για την παραγωγή και λύση του παραδείγματος χρησιμοποιήθηκε το μαθηματικό πρόγραμμα Wolfram Mathematica. Στη συνέχεια παρατίθεται ο κώδικας που γράφτηκε για την αναπαράσταση του στο αντίστοιχο γραφικό περιβάλλον και την παραγωγή των αποτελεσμάτων.

Το ακόλουθο παράδειγμα βασίζεται στο αντίστοιχο φράγμα της δεξιάς ουράς που παράγεται από τις σχέσεις (3.7) και (3.8) των Willmot(2002) και Chadjiconstantinidis - Politis(2007) αντίστοιχα.

```
theta = 0.4; q = 1/2;  b1 = 1; b2 = 3;
f[r] = 1 + (1 + theta)*(q/b1 + (1 - q)/b2)*r - (q*b1/(b1 - r))
   - ((1 - q)*b2/(b2 - r))
NSolve[f[r] == 0, r]
```

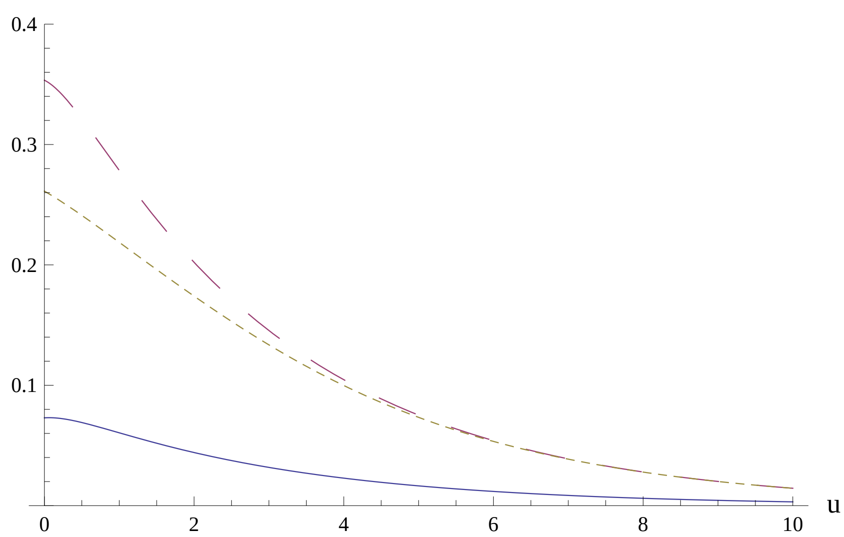
```
q = 1/2; b1 = 1; b2 = 3; theta = 0.4; r1 = 0.32983; r2 = 2.59874;
 \ Clear[y]; Clear[u]; Clear[x];
phi = 1/(1 + theta)
p[x_] := q*b1*Exp[-b1*x] + (1 - q)*b2*Exp[-b2*x];
barP[x_] := q*Exp[-b1*x] + (1 - q)*Exp[-b2*x];
oyraP1[x_] := (q*b2*Exp[-b1*x] + (1 - q)*b1*Exp[-b2*x])/(q*
   b2 + (1 - q)*b1);
pe[x_] := b1*b2 (q*Exp[-b1*x] + (1 - q)*Exp[-b2*x])/(q*b2
   + (1 - q)*b1);
p1 = q/b1 + (1 - q)/b2;
m = Integrate[oyraP1[x], {x, 0, Infinity}]
C1 = (r2*(b2 - r1)*(b1 - r1))/(b1*b2*(r2 - r1));
C2 = (r1*(b2 - r2)*(r2 - b1))/(b1*b2*(r2 - r1));

psi[u_] := C1*Exp[-r1*u] + C2*Exp[-r2*u]
h[u_] := C1*r1*Exp[-r1*u] + C2*r2*Exp[-r2*u]

oyraH[u_, y_] := phi/(1 - phi)*Integrate[oyraP1[u + y -
   t]*h[t], {t, 0, u}] + phi*oyraP1[u + y]

aw[u_, y_] := 1/(1 - phi)*(psi[u + y] - psi[u]*psi[y])
acp[u_, y_] := 1/(1 - phi)*(psi[u + y] - psi[u]*psi[y]) -
 phi/(1 - phi)^2*(phi - psi[y])*(1 - psi[u])*oyraP1[u + y]
Plot[{oyraH[u, 2], aw[u, 2], acp[u, 2]}, {u, 0, 10},
 PlotStyle -> {{}, {Dashing[{0.05, 0.05}]}, {Dashing[{0.01, 0.01}]}},
 PlotRange -> {0, 0.4}, AxesLabel -> {"\!\(\*
StyleBox[\"u\",\nFontSize->12]\)", ""}]

oyraP1[y]
psi[u]
oyraH[u, y]
aw[u, y]
acp[u, y]
```

Από τον παραπάνω κώδικα παράγεται το ακόλουθο αριθμητικό αποτέλεσμα:

```
0.0310853 E^(-2.59874 u) + 0.683201 E^(-0.32983 u)
```

```
2.5 (-0.0714285 E^(-3. u - 3. y) +
   0.0503306 E^(-2.59874 u - 3. y) +
   0.0210979 E^(-0.32983 u - 3. y) -
   0.0378967 E^(-2.59874 u - 1. y) - 0.214286 E^(-1. u - 1. y) +
   0.252182 E^(-0.32983 u - 1. y)) +
   0.357143 ((3 E^(-u - y))/2 + 1/2 E^(-3 (u + y)))
3.5 (0.0310853 E^(-2.59874 (u + y)) +
   0.683201 E^(-0.32983 (u + y)) - (0.0310853 E^(-2.59874 u) +
   0.683201 E^(-0.32983 u)) (0.0310853 E^(-2.59874 y) +
   0.683201 E^(-0.32983 y)))
-4.375 (1 - 0.0310853 E^(-2.59874 u) -
   0.68201 E^(-0.32983 u)) (0.714286 - 0.0310853 E^(-2.59874 y) -
   0.683201 E^(-0.32983 y)) ((3 E^(-u - y))/2 + 1/2 E^(-3 (u + y)))
   + 3.5 (0.0310853 E^(-2.59874 (u + y)) +
   0.683201 E^(-0.32983 (u + y)) - (0.0310853 E^(-2.59874 u) +
   0.683201 E^(-0.32983 u)) (0.0310853 E^(-2.59874 y) +
   0.683201 E^(-0.32983 y)))
```

Και η ακόλουθη γραφική παράσταση:



Σχήμα 3.1: Δύο γενικά άνω φράγματα για την ουρά του ελλείμματος $\overline{G}(u, y)$ για $y = 2$ και $u \in [0, 10]$.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των φραγμάτων είναι εντονότερη για μικρότερες ποσότητες αρχικού πλεονάσματος. Έτσι, για δεδομένο έλλειμμα 2 μονάδων η διαφορά μεταξύ των φραγμάτων Willmot (η διακεκομμένη με τα μεγάλα διαστήματα) και Chadjiconstantinidis - Politis (η διακεκομμένη γραμμή με τα μικρά διαστήματα) είναι εντονότερη εως τις 4 μονάδες αρχικού αποθέματος.

Από το οριακό σημείο των 4 μονάδων και με την αύξηση του αποθέματος, παρατηρούμε ότι τα φράγματα συγκλίνουν μεταξύ τους. Με την συνεχή γραμμή παρουσιάζεται η πραγματική ποσότητα που θέλουμε να προσεγγίσουμε η οποία βρέθηκε με αναλυτικές μεθόδους και αποτελεί το μέτρο σύγκρισης των δύο πραναφερθέντων φραγμάτων.

Στην συνέχεια, εξετάζουμε την επαλήθευση της σχέσης (2.48) του Πορίσματος 2.4.3. Ο πηγαίος κώδικας που αναπτύχθηκε είναι ο ακόλουθος:

```
oyraP2[x_] :=
 Integrate[oyraP1[t], {t, x, Infinity}]/
 Integrate[oyraP1[t], {t, 0, Infinity}]
asymH[y_] := Exp[-r1*y]*
  Integrate[Exp[r1*t]*oyraP1[t], {t, y, Infinity}]/
  Integrate[Exp[r1*t]*oyraP1[t], {t, 0, Infinity}]

Plot[{asymH[y], oyraP2[y]}, {y, 0, 5},
 PlotStyle -> {{}, {Dashing[{0.05, 0.05}]}}, PlotRange -> {0, 1},
 AxesLabel -> {"y", ""}]


oyraP2[y]
asymH[y]

000000000000000000000000000

N[oyraP2[0]]
N[asymH[0]]

111111111111111111111111111

N[oyraP2[1]]
```

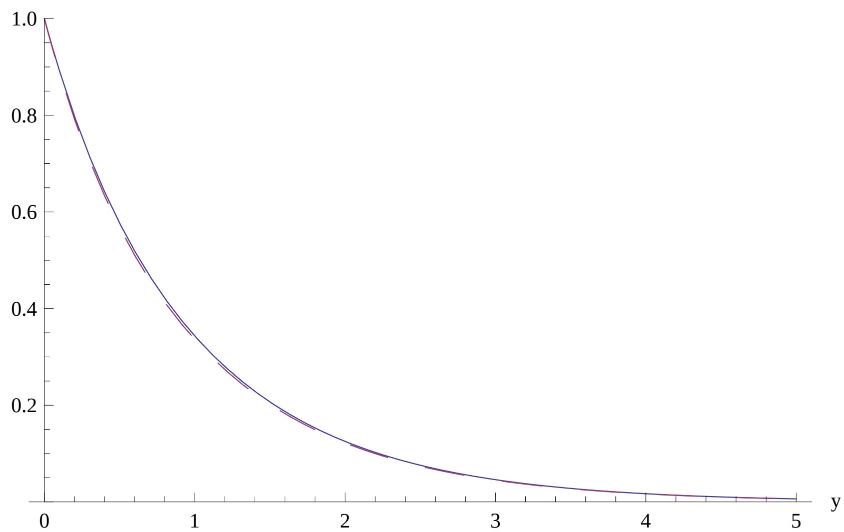
```
N[asymH[1]]

2222222222222222222222222222

N[oyraP2[2]]
N[asymH[2]]

3333333333333333333333333333

N[oyraP2[3]]
N[asymH[3]]

4444444444444444444444444444

N[oyraP2[4]]
N[asymH[4]]

5555555555555555555555555555

N[oyraP2[5]]
N[asymH[5]]
```

Το παραγόμενο αριθμητικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

```
0.824575 E^(-0.32983 y) (0.093627 E^(-2.67017 y) +
   1.11912 E^(-0.67017 y))

1111111111111111111111111111
0.33607
0.343322

2222222222222222222222222222
0.12205
0.125078

3333333333333333333333333333
0.0448207
```

```
0.0459529

4444444444444444444444444
0.0164847
0.0169021

5555555555555555555555555
0.00606418
0.00621778
```

Με αντίστοιχο γράφημα:



Σχήμα 3.2: Κάτω φράγμα για την ασυμπτωτική ουρά του ελλείμματος $\overline{G}_{\infty}(y)$ για $y \in [0, 5]$.

Παρατηρούμε ότι από το γράφημα είναι δύσκολο να εξαχθεί ασφαλές συμπέρασμα για τα υπό μελέτη φράγματα. Συνεπώς δημιουργούμε τον ακόλουθο αριθμητικό πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές για να δούμε αν επαληθεύεται το αποτέλεσμα του πορίσματος.

Πίνακας 3.1: Οι τιμές των $\overline{H}^e(y)$ και $\overline{G}_\infty(y)$ για $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

y	$\overline{H}^e(y)$	$\overline{G}_\infty(y)$
0	1	1
1	0.33607	0.343322
2	0.12205	0.125078
3	0.0448207	0.0459529
4	0.0164847	0.0169021
5	0.00606418	0.00621778

Όπως είναι εμφανές από τον ως άνω πίνακα, το αποτέλεσμα του πορίσματος επιβεβαιώνεται, και παρατηρούμε την ελάχιστη διαφορά μεταξύ των τιμών των δύο φραγμάτων με την αύξηση των αντίστοιχων τιμών του ελλείμματος, ώστε να δικαιολογείται η μη εμφανής διαφορά στο προηγούμενο γράφημα.

Βιβλιογραφία

[1] Κουτσόπουλος Κ., 1999.*Αναλογιστικά μαθηματικά, Μέρος I - Θεωρία Κινδύνων.* Εκδόσεις Συμμετρία.

[2] Πολίτης Κ., 2012.*Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου.* Εκδόσεις Σταμούλη.

[3] Asmussen S., 2000.*Ruin Probabilities.* World Scientific, Singapore.

[4] Barlow R.E., Proschan F., 1981. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing. To Begin With.* Silver Spring, MD.

[5] Cai J., Garrido J., 1998. *Aging properties and bounds for ruin probabilities and stop-loss premiums.* Insurance: Mathematics and Economics 23, 33-43.

[6] Cai J., Garrido J., 1999. *Two-sided bounds for ruin probabilities when the adjustment coefficients does not exist.* Scandinavian Actuarial Journal 99, 80-92.

[7] Chadjiconstantinidis S., Politis K., 2003. *Two-sided bounds for the severity of ruin in the renewal risk model.* In: 7th Conference of Insurance: Mathematics and Economics, Lyon, France, June 2003.

[8] Chadjiconstantinidis S., Politis K., 2005. *Nonexponential bounds for stop-loss premiums and ruin probabilities.* Scandinavian Actuarial Journal 5, 335-357.

[9] Chadjiconstantinidis S., Politis K., 2007. *Two-sided bounds for the distribution of deficit at ruin in the renewal risk model.* Insurance: Mathematics and Economics 41, 41-52.

[10] De Vylder F., Goovaerts M., 1984. *Bounds for classical ruin probabilities.* Insurance: Mathematics and Economics 3, 121-131.

[11] Dickson D.C.M., 1992. *On the distribution of the surplus prior to ruin.* Insurance: Mathematics and Economics 11, 191-207.

[12] Dickson D.C.M., 1994. *An upper bound for the probability of ultimate ruin.* Scandinavian Actuarial Journal, 131-138.

[13] Dickson D.C.M., Hipp C., 1998. *Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes.* Insurance: Mathematics and Economics 22, 251-262.

[14] Fagiuoli E., Pellerey F., 1994. *Preservation of certain classes of life distribution under Poisson shock models.* Journal of Applied Probability 31, 458-465.

[15] Gerber H.U., Goovaerts M.J., Kaas R., 1987. *On the probability and severity of ruin.* ASTIN Bulletin 17, 151-163.

[16] Gerber H.U., Shiu E.S.W., 1997. *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin.* Insurance: Mathematics and Economics 21, 129-137.

[17] Psarrakos G., Politis K., 2008. *Tail bounds for the joint distribution of the surplus prior to and at ruin.* Insurance: Mathematics and Economics 42, 163-176.

[18] Sakurai T., 2004. *Approximating M/G/I waiting time tail probabilities.* Stochastic models 20, 173-191.

[19] Willmot G.E., Lin X., 1998. *Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin.* Insurance: Mathematics and Economics 23, 91-110.

[20] Willmot G.E., 2000. *On evaluation of the conditional distribution of the deficit at the time of ruin.* Scandinavian Actuarial Journal, 63-79.

[21] Willmot G.E., Lin X., 2001. *Lundberg inequalities for renewal equations.* Advances in Applied Probabilitiy 33, 674-689.

[22] Willmot G.E., Lin X., Cai J., 2001. *Lundberg inequalities for renewal equations.* Advances in Applied Probability 30, 421-438.

[23] Willmot G.E., 2002. *Compound geometric residual lifetime distributions and the deficit at ruin.* Insurance: Mathematics and Economics 30, 421-438.

[24] Woo J.K., 2011. *Refinements of two-sided bounds for renewal equations.* Insurance: Mathematics and Economics 48, 189-196.