ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ανέλιξη του πλεονάσματος στην περίπτωση ύπαρξης ενός πάνω φράγματος

Ευθυμία Κ. Μάη

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων του για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τριμελής Επιτροπή

Γ. Ψαρράκος ***Κ. Πολίτης*** ***Γ. Πιτσέλης***

Επιβλέπων
κ. Πολίτης Κωνσταντίνος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Πειραιάς, 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν…… συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν

-Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)

-Πιτσέλης Γεώργιος

-Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The surplus process in the presence of an upper barrier

Euthymia K. Mai

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, 2015

Ευχαριστίες

Το παρόν πόνημα κλείνει τον κύκλο των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Πολίτη Κωνσταντίνο για τον χρόνο, την ενθάρρυνση και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε.

Ευχαριστώ επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Πιτσέλη Γεώργιο και τον κ. Ψαρράκο Γεώργιο.

Περίληψη

Όταν μια ασφαλιστική εταιρεία αγνοεί το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας, η γνώση του χρόνου που απαιτείται ώστε το πλεόνασμά της να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή b αποτελεί ένα σημαντικό πλεονέκτημα, καθιστώντας εφικτή τη διαμόρφωση μιας κατάλληλης μερισματικής στρατηγικής που θα την οδηγήσει σε κερδοφορία. Στην παρούσα εργασία επικεντρωνόμαστε στη μελέτη των μέτρων ασυμμετρίας και κυρτότητας των κατανομών του χρόνου πρώτης διέλευσης από το b, του αριθμού των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b και του χρόνου μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b. Σε κάθε περίπτωση, δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις με τη βοήθεια των γεννητριών ημιαναλλοιώτων παραμέτρων. Επίσης, εφαρμόζουμε παραδείγματα που αφορούν απαιτήσεις προς την ασφαλιστική εταιρεία και ακολουθούν εκθετική κατανομή και κατανομή Γάμμα.

Abstract

Whenever an insurance company defies the risk of a ruin event, the study of the time required for its surplus to reach a given target value b, can be a real asset, thereby assuring the implementation of the appropriate divident strategy which can guarantee its future profits. The aim of this project is to assess the skewness and kurtosis measures of time distribution for the first passage of b, the number of claims before the first passage and the time elapsed between the first and the last reaching of this level. What we actually offer is, in effect, analytical expressions, with the use of cumulants. We also move on to apply specific examples, dealing with claims to insurance companies, following exponential and Gamma distribution.

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί ..... **i**

1. Εισαγωγή **1**

2. Το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων **3**

2.1 Βασικές έννοιες από τις στοχαστικές ανελίξεις 3

2.2 Το κλασικό μοντέλο 8

2.2.1 Υποθέσεις του κλασικού μοντέλου 8

2.2.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας 10

2.2.3 Ο συντελεστής προσαρμογής 13

2.2.4 Η ανισότητα του Lundeberg 17

2.2.5 Η κατανομή του $inf\{U_t: t \geq 0\}$ 19

2.2.6 Ο μετασχηματισμός Laplace της ψ 21

3. Η ανέλιξη του πλεονάσματος στην περίπτωση ύπαρξης ενός πάνω φράγματος **28**

3.1 Η ανέλιξη του πλεονάσματος με ένα φράγμα 28

3.2 Η ανέλιξη του πλεονάσματος με δύο φράγματα 29

3.3 Στρατηγική φράγματος 34

4. Μελέτη της ασυμμετρίας και της κυρτότητας του χρόνου πρώτης διέλευσης από το κατώφλι b **41**

4.1 Ροπές και ημιαναλλοίωτες γεννήτριες συναρτήσεις 41

4.2 Μελέτη κάποιων παραμέτρων της κατανομής T_b 46

4.3 Ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής T_b 49

4.4 Ο συντελεστής κυρτότητας της κατανομής T_b 56

5. Η πρώτη και η τελευταία διέλευση από το κατώφλι b **63**

5.1 Ο αριθμός των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b 63

5.2 Χρόνος τελευταίας διέλευσης από το b 72

5.3 Διάρκεια μεταξύ των επιτυχών διελεύσεων από το b 77

Παράρτημα **79**

Βιβλιογραφία **83**

Συμβολισμοί

u	το αρχικό αποθεματικό
c	η ένταση του ασφαλίστρου που πληρώνεται στη μονάδα του χρόνου
X_i	το μέγεθος της i-οστης απαίτησης
$N(t)$	ο αριθμός των απαιτήσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$
λ	η ένταση της ανέλιξης Poisson
U_t	η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος
θ	το περιθώριο ασφαλείας
μ	η μέση τιμή των απαιτήσεων
T	ο χρόνος χρεοκοπίας
$\psi(u)$	η πιθανότητα χρεοκοπίας
$\delta(u)$	η πιθανότητα μη χρεοκοπίας
R	ο συντελεστής προσαρμογής
L_i	το i κλιμακωτό ύψος
L	η μέγιστη σωρευτική απώλεια
$H(x)$	η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών
$h(x)$	η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών
$\hat{\delta}(s)$	ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας
b	το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας
T_b	ο χρόνος πρώτης διέλευσης από το b
M_{T_b}	η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής T_b
$\xi(u, b)$	η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία πριν το πλεόνασμα υπερβεί το b
$\chi(u, b)$	η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία μετά τη διέλευση από το b
$p(b)$	η πιθανότητα δεύτερης ροής μερισμάτων
Δ_i	το μέγεθος της i-οστης μερισματικής ροής

$D(u,b)$	η παρούσα αξία των μερισμάτων
γ_1	ο συντελεστής ασυμμετρίας ή λοξότητα της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής
γ_2	ο συντελεστής κυρτότητας ή κυρτότητα της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής
κ_r	η r τάξης ημιαναλλοίωτη παράμετρος μιας τυχαίας μεταβλητής
K_{T_b}	η γεννήτρια ημιαναλλοιώτων παραμέτρων της T_b
K	ο αριθμός των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b
D	ο χρόνος μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Έστω μια ασφαλιστική εταιρεία η οποία αγνοεί το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για τους οποίους μπορεί να συμβαίνει αυτό το σενάριο, όπως:

- Το αρχικό αποθεματικό της εταιρείας της εξασφαλίζει τέτοια κεφαλαιακή επάρκεια ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι πρακτικά αμελητέα.
- Το χαρτοφυλάκιο που αποτελεί το αντικείμενο της μελέτης μας είναι ένα από τα πολλά που διαθέτει η εταιρεία. Έτσι αν παρουσιαστεί έλλειμμα η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να το καλύψει.
- Η εταιρεία επιθυμεί να γνωρίζει αν και πότε το πλεόνασμα θα υπερβεί μία προκαθορισμένη τιμή ώστε να διανείμει μερίσματα στους μετόχους της.

Εμείς θα μελετήσουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων και μάλιστα με αρχικό αποθεματικό $u = 0$. Αυτό είναι ρεαλιστικό εφόσον θεωρούμε μια θετική πορεία της ανέλιξης του πλεονάσματος και το πλεόνασμα αργά ή γρήγορα θα κατευθύνεται στο άπειρο (Gerber, 1990). Στο πλαίσιο της μελέτης μας θα ασχοληθούμε διεξοδικά με τους συντελεστές ασυμμετρίας και κυρτότητας του χρόνου που απαιτείται έως ότου το πλεόνασμα πάρει μια συγκεκριμένη τιμή b. Επίσης, στην ειδική περίπτωση όπου $c = 1$, θα ασχοληθούμε με τη συμπεριφορά δύο νέων τυχαίων μεταβλητών, του αριθμού των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b και του χρόνου μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b, παρουσιάζοντας και την απαραίτητη μαθηματική θεμελίωση (Gerber, 1988).

Η δομή της εργασίας μας είναι η εξής:

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται εν συντομία κάποιες βασικές έννοιες των στοχαστικών ανελίξεων, οι οποίες είναι απαραίτητες για να δοθούν στη συνέχεια οι υποθέσεις του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων. Ορίζονται επίσης η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο συντελεστής προσαρμογής, ενώ δίνεται και μία απόδειξη της ανισότητας του Lundberg η οποία στηρίζεται στη χρήση martingales, οι βασικές έννοιες των οποίων δίνονται στο Παράρτημα. Στη συνέχεια ορίζουμε τη μέγιστη σωρευτική απώλεια L, η ουρά της οποίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, και καταλήγουμε σε έναν πολύ χρήσιμο τύπο για θεωρητικές μελέτες. Τέλος ασχολούμαστε με τη σχέση, η οποία συνδέει τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας με τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε αρχικά την ανέλιξη του πλεονάσματος στην περίπτωση ύπαρξης μόνο ενός πάνω φράγματος και στη συνέχεια την ανέλιξη του πλεονάσματος με δύο φράγματα. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία πριν το πλεόνασμα υπερβεί

το κατώφλι b και με αρχικό αποθεματικό μηδέν, όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν κατανομή Γάμμα(2,2). Τέλος διατυπώνουμε τη στρατηγική φράγματος, αποδεικνύουμε ότι η κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων $D(u,b)$ είναι μείξη μιας εκφυλισμένης κατανομής στο 0 και μιας εκθετικής κατανομής και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε αναλυτικά τους συντελεστές ασυμμετρίας , κυρτότητας και τις ημιαναλλοίωτες γεννήτριες συναρτήσεις. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές ασυμμετρίας και κυρτότητας της κατανομής T_b, δηλαδή του χρόνου πρώτης διέλευσης από το κατώφλι b. Τα αποτελέσματα τα χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή αριθμητικών παραδειγμάτων όπου οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και την κατανομή Γάμμα.

Στο Κεφάλαιο 5 εισάγουμε δύο νέες τυχαίες μεταβλητές την K που είναι ο αριθμός των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b και την D που είναι ο χρόνος μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b. Υπολογίζουμε το συντελεστή ασυμμετρίας τους όταν $c = 1$ και εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα στην περίπτωση που οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Κεφάλαιο 2

Το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στο παρόν κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε μία συνοπτική παρουσίαση βασικών εννοιών από τη θεωρία στοχαστικών ανελίξεων, καθώς κεντρικό ρόλο στη μελέτη του προβλήματος της χρεοκοπίας διαδραματίζει η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι υποθέσεις, οι βασικές έννοιες και κάποια αποτελέσματα για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, τα οποία θα είναι χρήσιμα για την ανάπτυξη του θέματος της εργασίας.

2.1 Βασικές έννοιες από τις στοχαστικές ανελίξεις

Η θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων μελετά την εξέλιξη και τη ροή φαινομένων, με τυχαίο και χρονικά μεταβαλλόμενο χαρακτήρα, τα οποία διέπουν οι νόμοι των πιθανοτήτων. Αν επιχειρούσαμε να προσδιορίσουμε συνοπτικά τη θεωρία χρεοκοπίας, θα λέγαμε ότι αποτελεί μία γενίκευση του συλλογικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων. Έχοντας ως αντικείμενο μελέτης τις μεταβολές στα έξοδα και στα έσοδα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου και τη μεταξύ τους σχέση καθώς αυτά εξελίσσονται στο χρόνο, η θεωρία χρεοκοπίας αποτελεί ουσιαστικά ένα γόνιμο πεδίο πρακτικής εφαρμογής των στοχαστικών ανελίξεων.

Οι ορισμοί και οι προτάσεις που θα παραθέσουμε στη συνέχεια, ακολουθούν το βιβλίο του Πολίτη «Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου» (2012).

Ορισμός 2.1 *Στοχαστική ανέλιξη (stochastic process)* καλείται μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t): t \in T\}$.

- Αν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο , δηλαδή ο χρόνος παίρνει διακριτές τιμές, τότε έχουμε ανέλιξη σε διακριτό χρόνο ενώ αν το T είναι μη αριθμήσιμο σύνολο έχουμε ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.
- Αν το πλήθος των τιμών των τ.μ $X(t)$ είναι αριθμήσιμο έχουμε ανέλιξη με διακριτές τιμές ενώ αν είναι μη αριθμήσιμο έχουμε ανέλιξη με συνεχείς τιμές.

Ορισμός 2.2 *Απαριθμήτρια ανέλιξη* (*counting process*) καλείται μία στοχαστική ανέλιξη στο χρόνο $\{N(t): t \geq 0\}$, όταν απαριθμεί το πλήθος των εμφανίσεων ενός γεγονότος στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι ότι:

(α) η $N(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

(β) η $N(t)$ παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές.

Σημειώνουμε ότι αν η $\{N(t)\}$ είναι απαριθμήτρια ανέλιξη, τότε η ποσότητα $N(t) - N(s)$ ονομάζεται *προσαύξηση* και εκφράζει τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $(s, t]$.

Ορισμός 2.3 Μία στοχαστική ανέλιξη $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει

(α) *ανεξάρτητες προσαυξήσεις* (*independent increments*) αν για κάθε $n = 1,2,\ldots$ και $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, $\ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες.

π.χ για $0 < t_1 < t_2 \leq s_1 < s_2$ με $(t_1, t_2] \cap (s_1, s_2] = \emptyset$ οι προσαυξήσεις $N(t_2) - N(t_1), N(s_2) - N(s_1)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(β) *στάσιμες προσαυξήσεις (stationary increments)* αν για κάθε $n = 1,2, \ldots$, για $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots t_n$ και $h > 0$, η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $N(t_1 + h) - N(t_0 + h), N(t_2 + h) - N(t_1 + h), \ldots, N(t_n + h) - N(t_{n-1} + h)$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο h.

π.χ οι προσαυξήσεις $N(t + h) - N(t), N(s + h) - N(s)$ έχουν την ίδια κατανομή αφού τα διαστήματα έχουν το ίδιο μήκος.

Μια σημαντική για τη θεωρία κινδύνων στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο με διακριτές τιμές, η οποία αποτελεί ειδική περίπτωση μιας απαριθμήτριας ανέλιξης, είναι η ανέλιξη Poisson.

Ορισμός 2.4 *Ανέλιξη Poisson* $\{N(t): t \geq 0\}$ καλείται μια στοχαστική ανέλιξη, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(α) Η $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη με $N(0) = 0$.

(β) Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα πλάτους h, μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το πλάτος του διαστήματος.

(γ) Ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα φραγμένο διάστημα μετά τη χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των γεγονότων που συνέβησαν έως τη χρονική αυτή στιγμή.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της $N(t)$ με τη βοήθεια του βιβλίου του Χαραλαμπίδη (1991).

Παρατήρηση 2.1 Χωρίζουμε το διάστημα $(0, t]$ σε ένα μεγάλο πλήθος ν υποδιαστημάτων (ανεξάρτητες δοκιμές) μήκους $\Delta t = t/\nu$, υποθέτοντας ότι η πραγματοποίηση του γεγονότος (ανανέωση – επιτυχία) γίνεται με πιθανότητα $p_\nu \cong \lambda \Delta t = \lambda t/\nu, \lambda > 0$ ενώ η μη πραγματοποίηση (αποτυχία) γίνεται με πιθανότητα $q_\nu = 1 - p_\nu$.

Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού $N(t)$ των γεγονότων στα ν υποδιαστήματα δίνεται από τη διωνυμική κατανομή.

$$P(N(t)=n) \cong \binom{\nu}{n} p_\nu^n q_\nu^{\nu-n} \ , p_\nu \cong \frac{\lambda t}{\nu}.$$

Αφού

$$\Delta t \to 0 \, , \nu \to \infty \ \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{\nu\to\infty} \nu p_\nu = \lambda t$$

χρησιμοποιώντας οριακές σχέσεις παίρνουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} \binom{\nu}{n} p_\nu^n q_\nu^{\nu-n} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Κατά συνέπεια,

$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \ , \qquad n = 0,1,2,\dots, \lambda > 0, \qquad t > 0.$$

Πρόταση 2.1 Αν $\{N(t): t \geq 0\}$ μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη για την οποία ισχύει ότι:

(α) έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις

(β) $N(0) = 0$

(γ) $0 < P(N(t) = 0) < 1$ για κάθε $t > 0$

τότε υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος ώστε $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ για κάθε $t \geq 0$.

Ορισμός 2.5 Αν $Y_1, Y_2, \dots$ *οι διαδοχικοί χρόνοι εμφάνισης* των γεγονότων σε μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, ορίζουμε μία ακολουθία τ.μ $T_1, T_2, \dots$οι οποίες ονομάζονται *ενδιάμεσοι χρόνοι* ή *χρόνοι αναμονής* της ανέλιξης $\{N(t)\}$ με $T_1 = Y_1$ και $T_i = Y_i - Y_{i-1}$, $i = 2,3, \dots$.

Ακολουθούν δύο χρήσιμες ιδιότητες της ανέλιξης Poisson.

Πρόταση 2.2 0ι ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \dots$ σε μία ανέλιξη Poisson είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

Απόδειξη Πράγματι, ακολουθώντας τη μέθοδο της επαγωγής προκύπτει ότι:

$$P(T_1 > t) = P(N(t) - N(0) = 0) = P(N(t) = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

$$P(T_2 > t | T_1 = t_1) = P(N(t_1 + t) - N(t_1) = 0) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Στην παραπάνω απόδειξη οι χρόνοι αναμονής T_1, T_2, μέχρι την εμφάνιση του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ γεγονότος αντίστοιχα, ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Υποθέτουμε ότι οι $T_1, T_2, \dots, T_n$ ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Αποδεικνύουμε ότι:

$$P(T_{n+1} > t | T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n)$$

$$= P(N(t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t) - N(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0)$$

$$= e^{-\lambda t}.$$

Η απόδειξη της πρότασης που θα παραθέσουμε στη συνέχεια στηρίζεται στο βιβλίο του Dickson (Insurance Risk and Ruin, 2005).

Πρόταση 2.3 Για κάθε σταθερό t, η τ.μ $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt.

Απόδειξη Η $\{T_i : i = 1,2, \dots\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ, οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$, οπότε ο χρόνος εμφάνισης του $(n+1)$-γεγονότος γράφεται $Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} T_i$ και ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους $n+1$ και λ.

Για την εύρεση της συνάρτησης πυκνότητας της τ.μ Y_n χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$N(t) < n \text{ αν και μόνο αν } Y_n > t.$$

Ακολούθως, θεωρούμε ότι εφόσον τα ενδεχόμενα είναι ισοδύναμα, είναι και ισοπίθανα, οπότε:

$$P(Y_n > t) = P(N(t) < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

με τη συνάρτηση κατανομής της Y_n να δίνεται από τη σχέση

$$F_{Y_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας της Y_n

$$\frac{d}{dt} F_{Y_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right)$$

$$= \lambda^n t^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \quad \textit{για κάθε } t \geq 0.$$

Επειδή όμως

$$P(Y_n \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx$$

προκύπτει η σχέση

$$P(Y_n > t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Επίσης για κάθε $n = 0,1,2, \ldots$ ισχύει

$$N(t) \geq n+1 \textit{ αν και μόνο αν } Y_{n+1} \leq t$$

$$P(N(t) \geq n+1) = P(Y_{n+1} \leq t) = 1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

οπότε ισοδύναμα

$$P(N(t) \leq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Άρα

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2, \ldots.$$

Ορισμός 2.6 Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ, $X_1, X_2, \ldots$, μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ με την ίδια κατανομή και ανεξάρτητη από την $N(t)$ για όλα τα $t > 0$.Τότε η ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$ καλείται *σύνθετη ανέλιξη Poisson* και ορίζεται για κάθε t από τη σχέση

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0 \,. \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της $S(t)$ υπολογίζεται με βάση το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

Συγκεκριμένα, έχουμε

$$P(S(t) \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x \middle| N(t) = n\right) P(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

όπου F^{*n} είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των τ.μ $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (δυναμοσυνέλιξη n-τάξης της F εφόσον οι τ.μ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες).

2.2 Το κλασικό μοντέλο

Ο Σουηδός αναλογιστής Filip Lundberg με την διδακτορική του διατριβή το 1903 θεμελίωσε ένα μοντέλο κινδύνου σε συνεχή χρόνο, όπου οι συνολικές απαιτήσεις σε κάθε διάστημα ακολουθούν σύνθετη κατανομή Poisson. Ο Harald Cramer ανέπτυξε τις πρωτοποριακές ιδέες του Lundberg και τις συνέδεσε με την αναδυόμενη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων από τη δεκαετία του 1930.

2.2.1 Υποθέσεις του κλασικού μοντέλου

Στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας το πλεόνασμα U_t τη χρονική στιγμή t με $t \in [0, \infty)$ ορίζεται από τη σχέση

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{2.1}$$

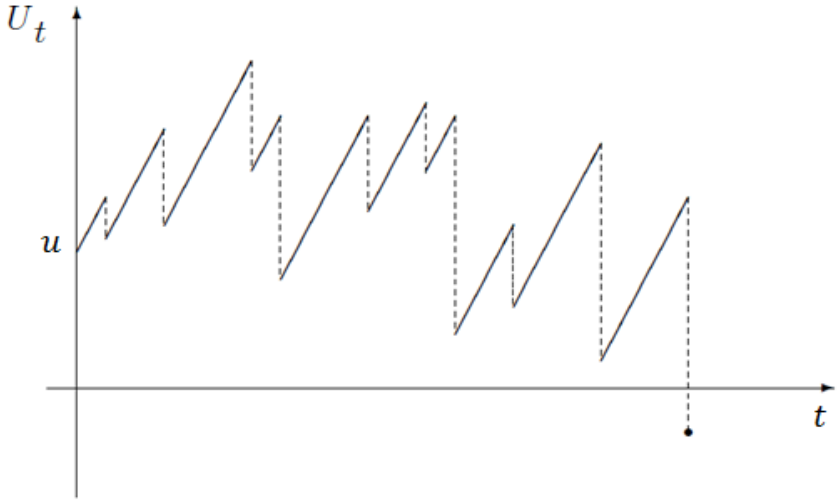
όπου

- $u = U_0$ το αποθεματικό του ασφαλιστή.
- $N(t)$ ο αριθμός των απαιτήσεων που προκύπτουν μέχρι τη χρονική στιγμή t.
- X_i το μέγεθος της i-οστής απαίτησης, με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ και μέση τιμή μ_1.
- $\{N(t) : t \geq 0\}$ μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ.
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ η ακολουθία των διαδοχικών απαιτήσεων, η οποία είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και επίσης ανεξάρτητων από την $\{N(t) : t \geq 0\}$ σε οποιοδήποτε διάστημα $[0, t]$.
- c η *ένταση του ασφαλίστρου (premium rate)* που πληρώνεται στη μονάδα του χρόνου με $c = \lambda\mu(1 + \theta)$, όπου θ το *περιθώριο ασφαλείας* (*premium loading factor)* ή το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή και μ η μέση απαίτηση.

Στη συνέχεια θεωρούμε πάντα ότι $\theta > 0$, εφόσον ισχύει η λεγόμενη *"συνθήκη του καθαρού κέρδους"* *(net profit condition)*

$$c > \lambda\mu. \tag{2.2}$$

Το μεγάλο ενδιαφέρον που παρουσιάζει το κλασικό μοντέλο με άπειρο χρόνο λειτουργίας οφείλεται στα αναλυτικά αποτελέσματα και τις ακριβείς σχέσεις που δίνει.



Σχήμα 2.1: Πολίτης (2012) Η ανέλιξη του πλεονάσματος.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε κάποιες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες συνδέονται με τη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο.

Σύμφωνα με το βιβλίο του Πολίτη (2012):

(α) ο *χρόνος χρεοκοπίας* T ορίζεται από τη σχέση

$$T_u = T = inf\{t : U_t < 0 | U(0) = u\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας T αποτελεί μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, αφού με θετική πιθανότητα μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο, καθώς ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους.

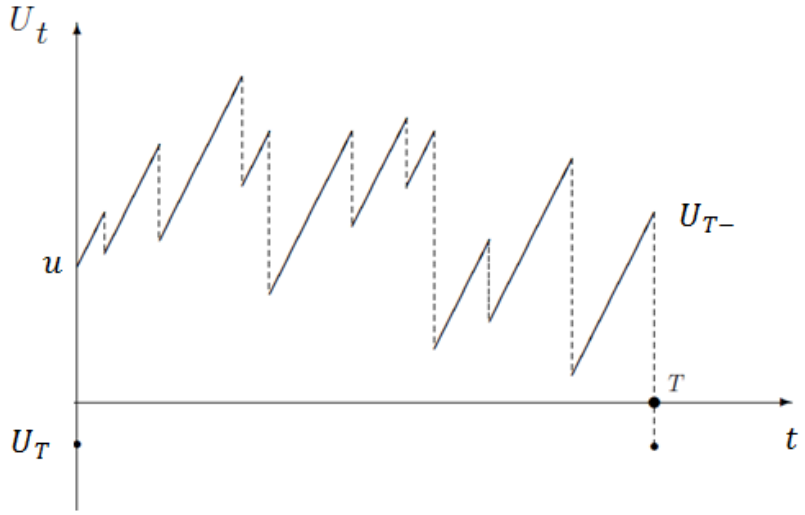
(β) Το *πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία* προσδιορίζεται ως

$$U_{T-} = \lim_{t \to T^-} U_t.$$

(γ) Τέλος, το *έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας*

$$|U_T| = -U_T.$$

Το εν λόγω έλλειμμα αναφέρεται στη *σφοδρότητα της χρεοκοπίας (severity of ruin)*, δηλαδή το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν.



Σχήμα 2.2: Πολίτης (2012) Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

2.2.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Κεντρικό θέμα της θεωρίας κινδύνων αποτελεί ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας. Πρόκειται για ένα κατάλληλο μέτρο για τον προσδιορισμό της συνολικής επάρκειας μιας ασφαλιστικής εταιρείας.

Ορισμός 2.7 Η *πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο* $\psi(u)$ με αρχικό αποθεματικό u, ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = P(U_t < 0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o \; t \geq 0 | U_0 = u). \tag{2.3}$$

Διαπιστώνουμε ότι:

- Η $\psi(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u.
- $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.

Στην περίπτωση που δεν ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους, τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη, δηλαδή

$$\psi(u) = 1, \quad \forall u \geq 0.$$

Ορισμός 2.8 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο $\psi(u,t)$, ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u,t) = P(U_\tau < 0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o \; 0 < \tau \leq t).$$

Ισχύουν τα εξής:

- Η $\psi(u,t)$ είναι αύξουσα ως συνάρτηση του t, ενώ είναι φθίνουσα ως συνάρτηση του u.
- $\lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = \psi(u)$ για κάθε $u \geq 0$.

Ορισμός 2.9 Η *πιθανότητα μη χρεοκοπίας* $\delta(u)$ *(survival probability)* είναι η πιθανότητα μη ύπαρξης χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u και ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u), \quad u \geq 0.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

- Η $\delta(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u.
- $\lim_{u\to\infty} \delta\,(u) = 1$.
- Η $\delta(u)$ είναι δεξιά συνεχής συνάρτηση.

Συνεπώς η $\delta(u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής.

Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η $\delta(u)$ είναι μία μεικτή κατανομή, αφού

- $\delta(0) > 0$ δηλαδή έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο $u = 0$.
- $\delta(u)$ συνεχής δηλαδή έχει πυκνότητα στο $(0,\infty)$.

Πρόταση 2.4 Στο κλασικό μοντέλο, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $\delta(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx, \tag{2.4}$$

όπου f είναι η πυκνότητα των αποζημιώσεων.

Επίσης η $\delta(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση (κάθε φορά που πληρώνεται η απαίτηση ανανεώνεται το σύστημα με καινούργιο αποθεματικό)

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx, \quad u \geq 0 \tag{2.5}$$

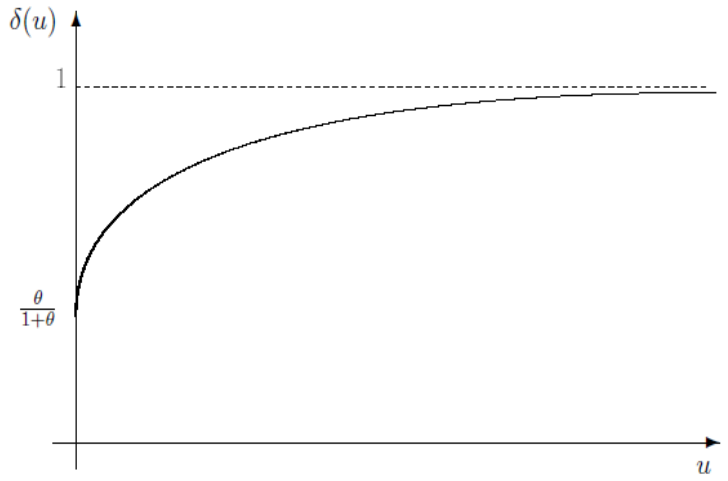
όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων, είτε η κατανομή αυτή είναι διακριτή είτε συνεχής.

Παρατήρηση 2.2 Από την (2.4) και τη συνθήκη του καθαρού κέρδους προκύπτει ότι

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} > 0$$

ενώ, συναρτήσει του περιθωρίου ασφαλείας θ, ο παραπάνω τύπος αποδίδεται ως

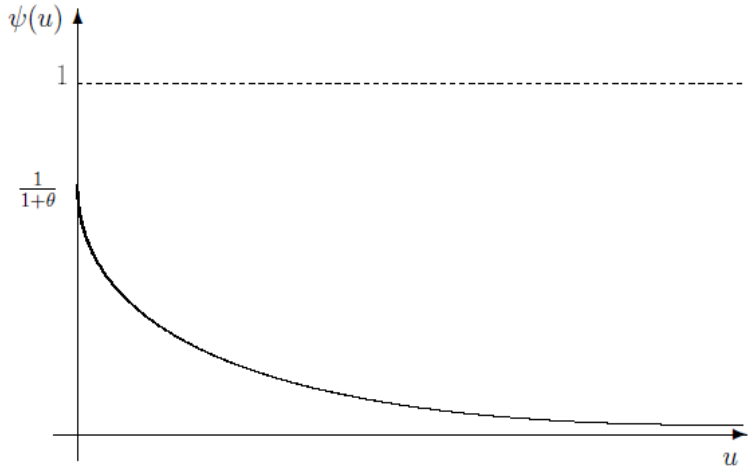
$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{2.6}$$



Σχήμα 2.3: Πολίτης (2012) Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν είναι

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}. \tag{2.7}$$



Σχήμα 2.4: Πολίτης (2012) Η πιθανότητα χρεοκοπίας.

2.2.3 Ο συντελεστής προσαρμογής

Ο *συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient)* R είναι ένα μέτρο κινδύνου σε μία ανέλιξη πλεονάσματος και ορίζεται ως η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης ως προς r

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0, \tag{2.8}$$

όπου

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rx} f(x)dx$$

είναι η ροπογεννήτρια της κατανομής των αποζημιώσεων. Η εξίσωση αυτή όπως και κάθε άλλη ισοδύναμή της ονομάζεται εξίσωση του Lundberg.

Ισοδύναμες εξισώσεις οι οποίες μπορεί να είναι χρήσιμες στον υπολογισμό του R είναι οι ακόλουθες:

$$\int_0^\infty e^{rx}\bar{F}(x)dx = \frac{c}{\lambda}$$

και

$$\int_0^\infty e^{rx}\, dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu}, \tag{2.9}$$

όπου

$$H(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{\mu} dy$$

μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής, και

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu r. \tag{2.10}$$

Οπότε το R είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου λ.

Παρατήρηση 2.3 Η εξίσωση (2.8) έχει αυστηρά θετικές λύσεις αφού

για $r = 0$

$$\int_0^\infty dH(x) = 1 \text{ ενώ } \frac{c}{\lambda\mu} > 1,$$

και για $r < 0$

$$\int_0^\infty e^{rx}\, dH(x) < 1,$$

διότι $e^{rx} < 1$, H αθροιστική συνάρτηση κατανομής ενώ $\frac{c}{\lambda\mu} > 1$.

Συνεπώς, η εξίσωση δεν μπορεί να έχει ρίζες $r \leq 0$.

Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (2.8) έχει το πολύ μία θετική λύση ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr,$$

με

$$g(0) = 0$$

και παραγωγίζοντάς την

$$\frac{d}{dr} g(r) = \lambda \frac{d}{dr} M_X(r) - c$$

προκύπτει ότι

$$\left[\frac{d}{dr} g(r)\right]_{r=0} = \lambda\mu - c < 0.$$

Άρα η g είναι φθίνουσα συνάρτηση στο 0.

Αντίστοιχα, η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) = \lambda \frac{d^2}{dr^2} M_X(r) = \lambda \int_0^\infty x^2\, e^{rx} f(x) dx > 0$$

είναι θετική σε κάθε εσωτερικό σημείο x.

Συνεπώς, η g είναι κυρτή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι αν έχει ένα σημείο καμπής θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο αυτό.

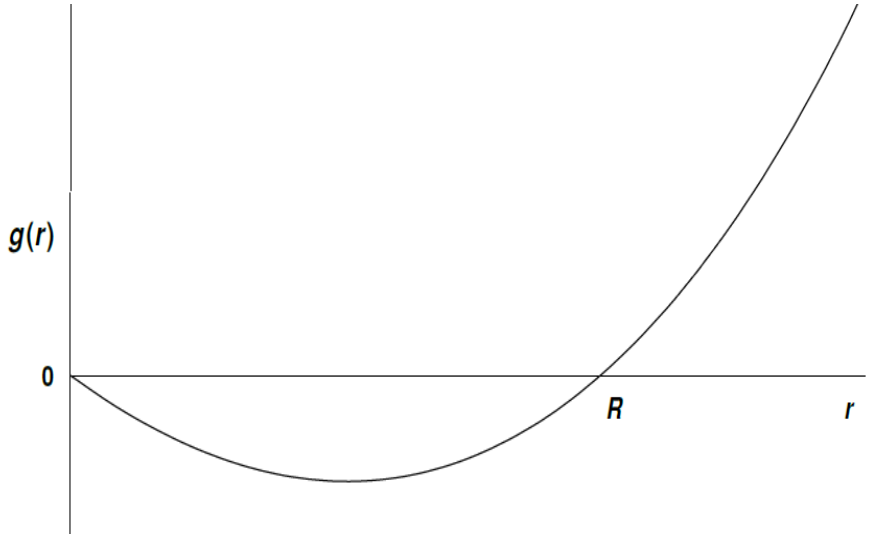
Επίσης από Dickson (2005) η ροπογεννήτρια είναι πεπερασμένη για όλα τα $r < \beta$, $0 < \beta \leq \infty$ με

$$\lim_{r \to \beta^-} M_X(r) = \infty$$

οπότε

$$\lim_{r \to \beta^-} g(r) = \infty$$

και αφού η g είναι φθίνουσα συνάρτηση στο 0, το σημείο καμπής της θα είναι μοναδικό.



Σχήμα 2.5: Dickson (2005) Η συνάρτηση g και ο συντελεστής προσαρμογής R.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε δύο παραδείγματα που αφορούν την ύπαρξη και τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής στο κλασικό μοντέλο.

Παράδειγμα 2.1 - Εκθετικές αποζημιώσεις

Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $Exp(\beta)$, με πυκνότητα

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \qquad \beta > 0, x \geq 0,$$

η μέση της τιμή θα είναι

$$\mu = \frac{1}{\beta}$$

και η ροπογεννήτριά της

$$M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}, \quad r < \beta.$$

Προσαρμόζοντας τα παραπάνω στην εξίσωση του Lundberg (2.8) έχουμε

$$\lambda \frac{\beta}{\beta - r} - \lambda - cr = 0$$

$$r(cr + \lambda - c\beta) = 0.$$

Με δεδομένο ότι η μηδενική λύση απορρίπτεται, προκύπτει ότι

$$cr = c\beta - \lambda,$$

οπότε η τιμή του συντελεστή προσαρμογής θα είναι

$$R = \beta - \frac{\lambda}{c} = \frac{\beta\theta}{1 + \theta} > 0, \tag{2.11}$$

αφού από τη συνθήκη του καθαρού κέρδους γνωρίζουμε ότι

$$\beta > \frac{\lambda}{c}.$$

Παράδειγμα 2.2 Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $Ga(2, \beta)$ με πυκνότητα

$$f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}, \qquad \beta > 0, x \geq 0.$$

Η μέση τιμή της είναι

$$\mu = \frac{2}{\beta}$$

και η ροπογεννήτριά της

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^2, \ \ r < \beta.$$

Οπότε η εξίσωση του Lundberg γράφεται

$$\lambda\beta^2 = \lambda(\beta - r)^2 + cr(\beta - r)^2$$

και είναι μία εξίσωση τρίτου βαθμού χωρίς σταθερό όρο

$$cr^3 + (-2\beta c + \lambda)r^2 + (\beta^2 c - 2\beta\lambda)r = 0$$

$$r[cr^2 + (\lambda - 2\beta c)r + \beta^2 c - 2\beta\lambda] = 0$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η μηδενική ρίζα απορρίπτεται, ενώ η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$cr^2 + (\lambda - 2\beta c)r + \beta^2 c - 2\beta\lambda = 0$$

έχει θετική διακρίνουσα

$$\Delta = (\lambda - 2\beta c)^2 - 4c(\beta^2 c - 2\beta\lambda)$$

$$= \lambda^2 + 4\beta\lambda c > 0,$$

με ρίζες θετικές

$$r_1 = \frac{2\beta c - \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\beta\lambda c}}{2c} > 0 \quad \kappa\alpha\iota\, r_2 = \frac{2\beta c - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\beta\lambda c}}{2c} > 0$$

όπως προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τη μέση τιμή στη συνθήκη του καθαρού κέρδους (2.2).

Οι ρίζες είναι άνισες, με $r_1 < r_2$ και με την r_2 να ανήκει στο (β, ∞) αφού γράφεται

$$r_2 = \beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\Delta} - \lambda}{c}\right).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η r_1 ανήκει στο $(0, \beta)$ που είναι και ο συντελεστής προσαρμογής, εφόσον για να ορίζεται η ροπογεννήτρια πρέπει $r < \beta$.

Στη συνέχεια, αξίζει να αναφέρουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, τα οποία είναι:

- Η ανισότητα του Lundberg,

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ u \geq 0$$

η οποία δίνει ένα άνω φράγμα για την $\psi(u)$.

- και ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg,

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad u \to \infty \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ C = \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty xe^{Rx}\bar{F}(x)dx} > 0$$

ο οποίος μας δίνει μια προσέγγιση για την $\psi(u)$ για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού u.

2.2.4 Η ανισότητα του Lundberg

Ο συντελεστής προσαρμογής R έχει ιδιαίτερη σημασία στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων αλλά και γενικότερα στη θεωρία χρεοκοπίας (π.χ σε μοντέλα όπου οι αποζημιώσεις δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων δεν ακολουθούν εκθετική κατανομή), όταν δεν υπάρχει κάποιος αναλυτικός τύπος για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ένα βασικό αποτέλεσμα που δείχνει τη σημασία του συντελεστή προσαρμογής, στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει κάποιος αναλυτικός τύπος για τη συνάρτηση $\psi(u)$, είναι η *ανισότητα του Lundberg (Lundberg's inequality)*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ u \geq 0,$$

η οποία μας δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Είναι φανερό ότι όσο αυξάνει ο συντελεστής προσαρμογής R, η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται για το ίδιο αρχικό κεφάλαιο u. Αντίστοιχα, όσο αυξάνει το αρχικό κεφάλαιο η πιθανότητα χρεοκοπίας για τον ίδιο συντελεστή προσαρμογής επίσης μειώνεται.

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει να παρουσιάσει διάφορες αποδείξεις για την ανισότητα του Lundberg. Εμείς, ωστόσο, θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική κατηγορία στοχαστικών ανελίξεων, που ονομάζονται martingales. Οι βασικές έννοιες στη θεωρία των martingales δίνονται στο Παράρτημα. Εδώ θα αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα που καταδεικνύει τη χρησιμότητα των martingales στη θεωρία κινδύνων. Επίσης στο Παράρτημα δίνονται κάποιες βασικές έννοιες από τη Θεωρία Μέτρου, όπως η σ-άλγεβρα αλλά και η θεωρία των χρόνων στάσης, οι οποίες θα μας χρειαστούν στα επόμενα λήμματα.

Τα λήμματα και η απόδειξη της ανισότητας Lundberg στηρίζονται στις σημειώσεις του Schmidli (2015).

Αρχικά θα αναφέρουμε ένα λήμμα το οποίο μας δίνει ότι η ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U_t: t \geq 0\}$ είναι μία ισχυρή Μαρκοβιανή ανέλιξη.

Λήμμα 2.1 Έστω $\{U_t\}$ η ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο και T ένας χρόνος στάσης, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{U_{T+t} - U_T : t \geq 0\}$ είναι ανέλιξη πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο με αρχικό αποθεματικό 0 και επίσης είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας Σ_T.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα ακόλουθα:

Λήμμα 2.2 Έστω $r \in \boldsymbol{R}$ τέτοιο ώστε

$$M_X(r) < \infty \; \kappa\alpha\iota \; g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr.$$

Τότε η στοχαστική ανέλιξη

$$\left\{e^{-rC_t - g(r)t}\right\}$$

είναι ένα martingale.

Απόδειξη Από την Μαρκοβιανή ιδιότητα (έλλειψη μνήμης για μια στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή αν γνωρίζουμε την τιμή της ανέλιξης στο παρόν οποιαδήποτε πληροφορία για προγενέστερες τιμές είναι άχρηστη για τη πρόβλεψη μελλοντικών τιμών της ανέλιξης) για $s < t$ έχουμε

$$E\left(e^{-rU_t - g(r)t}\middle|\Sigma_s\right) = E\left(e^{-rU_t + rU_s - rU_s - [\lambda(M_X(r)-1) - cr]t}\middle|\Sigma_s\right)$$

$$= E\left(e^{-r[U_t - U_s]}\right) e^{-rU_s - [\lambda(M_X(r)-1) - cr]t}$$

(αν η τ.μ Y είναι ήδη συνάρτηση των $X_1, X_2, \dots, X_n$ τότε $E(Y|\Sigma_n) = Y$)

(αν $\Sigma = \sigma(X)$, η σ-άλγεβρα η οποία παράγεται από την τ.μ X τότε $E(X|\Sigma) = X$)

$$= E(e^{r\sum_{N_{s+1}}^{N_t} X_i})\, e^{-rU_s-[\lambda(M_X(r)-1)]t+crs}$$

$$= e^{-rU_s-[\lambda(M_X(r)-1)]s+crs}$$

$$= e^{-rU_s-g(r)s}.$$

Πρόταση 2.5 Στο κλασικό μοντέλο, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \;\; \gamma\iota\alpha\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; u \geq 0.$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας το martingale $\{e^{-rU_t-g(r)t}\}$, τη θεωρία στάσης, το γεγονός ότι ο χρόνος χρεοκοπίας είναι ο χρόνος στάσης και ότι $r = R$, αφού το προηγούμενο λήμμα ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του r, προκύπτει ότι

$$E(e^{-RU_{t\Lambda T}}) = e^{-RU_0} = e^{-Ru}$$

$$\geq E(e^{-RU_{T\Lambda t}}; T \leq t)$$

$$= E(e^{-RU_T}; T \leq t\,).$$

Για $t \to \infty$ από το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης, έχουμε

$$\psi(u) = \lim_{t\to\infty} \psi(u,t) \leq \lim_{t\to\infty} e^{-Ru} = e^{-Ru}$$

και

$$e^{-Ru} \geq E(e^{-RU_T}; T < \infty) > P(T < \infty) = \psi(u),$$

αφού $U_T < 0$.

Έτσι έχουμε ένα πάνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

2.2.5 Η κατανομή του inf $\{\, U_t : t \geq 0 \,\}$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη του προβλήματος της εμφάνισης ή μη της χρεοκοπίας παρουσιάζουν οι ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές.

(α) Οι *κλιμακωτοί χρόνοι (ladder times)*

$$Z_i = inf\{t > T_{i-1} : \; U_t < U_{T_{i-1}}\} \quad \mu\varepsilon \;\; Z_0 = 0.$$

(β) Τα *κλιμακωτά ύψη (ladder heights)*

$$L_i = \; U_{Z_{i-1}} - U_{Z_i} \;\; \mu\varepsilon \;\; Z_i < \infty.$$

Οι μεταβλητές αυτές είναι γνησίως θετικές και παρουσιάζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την αρχική τιμή u έως τη στιγμή της χρεοκοπίας, ή αν δε συμβεί χρεοκοπία, έως την ελάχιστη τιμή που παίρνει η ανέλιξη $\{U_t\}$.

Λόγω της συνθήκης του καθαρού κέρδους, με βάση το νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι το πλήθος των L_i θα είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1.

Από το Λήμμα 2.1 διαπιστώνουμε ότι

$$P(Z_i < \infty | T_{i-1} < \infty) = \frac{\lambda\mu}{c} = \psi(0).$$

(γ) Το *πλήθος των κλιμακωτών υψών*

$$K = \sup\{i \in N : Z_i < \infty\} \quad \mu\varepsilon \ K \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right).$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $(L_i : i \leq K)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν μία συνεχή κατανομή με πυκνότητα

$$f_{L_1}(x) = h(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu},$$

οπότε η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής γράφεται

$$H(x) = P(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1 - F(y)}{\mu} dy,$$

με τις μεταβλητές $L_1, L_2, \ldots$ να είναι ανεξάρτητες του K.

(δ) Η *μέγιστη σωρευτική απώλεια* L είναι μία σύνθετη τυχαία μεταβλητή

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \cdots L_K, & K \geq 1 \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

ορίζεται είτε έχουμε χρεοκοπία είτε όχι και εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Εφόσον η μεταβλητή K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, η κατανομή της L θα είναι σύνθετη γεωμετρική.

Η κατανομή της L συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού

$$P(L > u) = \psi(u). \tag{2.12}$$

Έτσι, ακολουθώντας τον Schmidli (2015) έχουμε ότι

$$inf\{U_t : t \geq 0\} = u - \sum_{i=1}^{K} L_i$$

και

$$P(T < \infty) = P(\inf\{U_t : t \geq 0\} < 0) = P\left(\sum_{i=1}^{K} L_i > u\right).$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο του Panjer για να προσεγγίσουμε την $\psi(u)$ κάνοντας κατάλληλη διακριτοποίηση

$$\psi(u) = P\left(\sum_{i=1}^{K} L_i > u\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} L_i > u\right) P(K = n)$$

και να οδηγηθούμε στον τύπο Pollaczek-Khintchine

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(1 - H^{*n}(u)\right).$$

Πρόκειται για τον πλέον διάσημο τύπο στη Θεωρία Ουρών. Όπως αναφέρει ο Schmidli, δημοσιεύθηκε από τον Felix Pollaczek το 1930, επαναδιατυπώθηκε με πιθανοθεωρητικούς όρους από τον Aleksandr Khintchine το 1932 και είναι χρήσιμος για θεωρητικές μελέτες στη θεωρία κινδύνων.

2.2.6 Ο μετασχηματισμός Laplace της ψ

Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace απλοποιεί τη διαδικασία επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Στο παρόν πλαίσιο, οι μετασχηματισμοί Laplace έχουν ευρεία εφαρμογή στη θεωρία χρεοκοπίας, αφού για αρκετές ποσότητες – όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ – για τις οποίες δεν υπάρχει γενικά αναλυτικός τύπος, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται σχετικά εύκολα. Για την ανάπτυξη της ενότητας χρησιμοποιήσαμε τις σημειώσεις Πολίτη (2013) και το βιβλίο του Dickson (2005).

Ορισμός 2.10 Έστω f μία συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$, τότε ο *μετασχηματισμός Laplace της f (Laplace transform of f)* ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \qquad s \geq 0.$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η f δεν είναι απαραίτητο να είναι συνάρτηση πυκνότητας, αρκεί να είναι ολοκληρώσιμη σε φραγμένα διαστήματα.

Παρατήρηση 2.4

i) Αν X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f, τότε

$$\hat{f}(s) = E(e^{-sX}) = M_X(-s).$$

ii) Μια σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace είναι ότι προσδιορίζει μοναδικά μία συνάρτηση σε αντιστοιχία με τη ροπογεννήτρια που προσδιορίζει μοναδικά μία κατανομή.

iii) Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται πάντα και είναι πεπερασμένος για κάθε s≥ 0 σε αντίθεση με τη ροπογεννήτρια $M_X(t)$ η οποία μπορεί και να απειρίζεται σε κάποιες κατανομές για κάθε $t > 0$.

iv) Αν f_1, f_2 δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο θετικό ημιάξονα, τότε η συνέλιξή τους, έστω f, ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y) f_2(y) dy$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης ισούται με το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών Laplace, σύμφωνα με τη σχέση

$$\hat{f}(s) = \widehat{f_1}(s)\widehat{f_2}(s)\,, \qquad s \geq 0.$$

v) Αν f_1, f_2 είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο θετικό ημιάξονα και α_1, α_2 σταθερές, τότε

$$\int_0^\infty e^{-sx}\big(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\big)\, dx = a_1\widehat{f_1}(s) + a_2\widehat{f_2}(s).$$

vi) Αν f διαφορίσιμη συνάρτηση, της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει, τότε

$$\widehat{f'}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = s\hat{f}(s) - f(0).$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα για την εύρεση του μετασχηματισμού Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας $\delta(u)$, θεωρώντας ότι $\delta(s) < \infty$ για $s \in (a, \infty)$.

Πολλαπλασιάζοντας την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (2.4)

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x) dx$$

με e^{-su} και ολοκληρώνοντας ως προς u παίρνουμε

$$c\int_0^\infty \delta'(u)e^{-su}du = \lambda\int_0^\infty \delta(u)\, e^{-su}du - \lambda\int_0^\infty\int_0^u \delta(u-x)f(x)dxe^{-su}du.$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση (vi) ο μετασχηματισμός Laplace στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι $s\hat{\delta}(s) - \delta(0)$ άρα έχουμε

$$c\left(s\hat{\delta}(s) - \delta(0)\right) = \lambda\hat{\delta}(s) - \lambda\int_0^\infty\int_0^u \delta(u-x)f(x)dxe^{-su}du.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης στο διπλό ολοκλήρωμα, αυτό γράφεται

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^u \delta(u-x)f(x)dxe^{-su}du &= \int_0^\infty\int_x^\infty \delta(u-x)e^{-su}duf(x)dx\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \delta(u)e^{-s(u+x)}duf(x)dx\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \delta(u)e^{-su}due^{-sx}f(x)dx\\ &= \hat{\delta}(s)\hat{f}(s),\end{aligned}$$

οπότε

$$c\left(s\hat{\delta}(s) - \delta(0)\right) = \lambda\hat{\delta}(s)\left(1-\hat{f}(s)\right).$$

Λύνοντας ως προς $\hat{\delta}(s)$ προκύπτει ότι

$$\hat{\delta}(s) = \frac{c\delta(0)}{cs - \lambda\left(1-\hat{f}(s)\right)}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\hat{\delta}(s) = \frac{c-\lambda\mu}{cs - \lambda\left(1-\hat{f}(s)\right)}. \tag{2.13}$$

Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Laplace της ψ δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\psi}(s) = \int_0^\infty \big(1 - \delta(u)\big)\, e^{-su} du = \int_0^\infty e^{-su} du - \int_0^\infty e^{-su} \delta(u) du$$

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \hat{\delta}(s).$$

Με τη βοήθεια του Mathematica, και κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, είναι δυνατή η εύρεση της $\delta(u)$ για ρητές συναρτήσεις, όπως παρουσιάζεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.4 Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή $Ga(2,2)$ και έστω ότι $c = 2\lambda$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι

$$f(x) = 4xe^{-2x}, \qquad x > 0$$

με μέση τιμή $\mu = 1$.

Αρχικά βρίσκουμε το μετασχηματισμό Laplace της f

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty xe^{-(2+s)x} dx = \frac{4}{(2+s)^2}.$$

Κατά συνέπεια, από την (2.13) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(s) &= \frac{1}{2s - [1 - 4(2+s)^{-2}]} \\
&= \frac{(2+s)^2}{2s(2+s)^2 - (2+s)^2 + 4} \\
&= \frac{(2+s)^2}{2s^3 + 7s^2 + 4s} \\
&= \frac{(2+s)^2}{s(2s^2 + 7s + 4)} \\
&= \frac{(2+s)^2}{2s(s+R_1)(s+R_2)}.
\end{aligned}$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ρίζες -2.78078 και -0.719224 οπότε $R_1 = 2.78078$ και $R_2 = 0.719224$. Η αλλαγή του προσήμου σε σχέση με τα όσα γνωρίζουμε για το συντελεστή προσαρμογής δικαιολογείται γιατί στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό Laplace και όχι ροπογεννήτριες.

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία μερικών κλασμάτων, μπορούμε να γράψουμε την $\hat{\delta}(s)$ στη μορφή

$$\frac{s^2+4s+4}{s(s+R_1)(s+R_2)}=\frac{A}{2s}+\frac{B}{s+R_1}+\frac{\Gamma}{s+R_2},$$

όπου A, B, Γ σταθερές.

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στην εξίσωση

$$s^2+4s+4=(A+2B+2\Gamma)s^2+[A(R_1+R_2)+2BR_2+2\Gamma R_1]s+AR_1R_2.$$

Εξισώνοντας ακολούθως τους συντελεστές των δυνάμεων του s^2, έχουμε

$$A+2B+2\Gamma=1.$$

Η εξίσωση των συντελεστών των δυνάμεων του s μας δίνει

$$A(R_1+R_2)+2BR_2+2\Gamma R_1=4$$

και των σταθερών όρων

$$AR_1R_2=4.$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων ως προς A, B *και* Γ, παίρνουμε

$$A=2, \qquad B=0.0531695, \qquad \Gamma=-0.55317,$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας μπορεί να αποδοθεί ως

$$\hat{\delta}(s)=\frac{1}{s}+\frac{0.0531695}{s+2.78078}-\frac{0.55317}{s+0.719224}.$$

Ακολούθως, χρησιμοποιώντας το Mathematica παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, οπότε τελικά

$$\delta(u)=1+0.0531695e^{-2.78078u}-0.55317e^{-0.719224u}.$$

Ας συνεχίσουμε τώρα με την απόδειξη της σχέσης, η οποία συνδέει το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας με το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών (Πολίτης 2013).

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L είναι σύνθετη γεωμετρική και συνδέεται με τη πιθανότητα μη χρεοκοπίας με τη σχέση

$$P(L\leq u)=\delta(u),$$

ενώ η πιθανότητα η L να πάρει τη τιμή μηδέν είναι

$$P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0).$$

Επίσης, η κατανομή της K, η οποία δηλώνει το πλήθος των κλιμακωτών υψών, δίνεται από τη σχέση

$$P(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) = \varphi^k (1 - \varphi)\ , k = 0,1,2, \ldots,$$

αν θεωρήσουμε "αποτυχία" την εμφάνιση ενός L_i, δηλαδή μιας πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό (Πολίτης, 2012).

Η κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L, δηλαδή της πιθανότητας μη χρεοκοπίας, συναρτήσει της κατανομής $H(u)$ των κλιμακωτών υψών L_i, θα εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} P(L \leq u) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(L \leq u | K = k) P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(L_k \leq u) P(K = k) \\ &= 1P(K = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(L_k \leq u) P(K = k) \\ &= (1 - \varphi) H^{*0}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k (1 - \varphi) H^{*k}(u). \end{aligned}$$

Για $k = 0$, η συνέλιξη μηδενικής τάξης ορίζεται ως εξής

$$H^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Με βάση την παρατήρηση (iv), η οποία ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε συνελίξεις περισσότερων από δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(s) &= (1 - \varphi) 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k (1 - \varphi) \left[\hat{h}(s)\right]^k \\ &= (1 - \varphi) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k \left[\hat{h}(s)\right]^k \right\} \\ &= (1 - \varphi) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi \left(\hat{h}(s) \right) \right]^k \right\} \\ &= \frac{1 - \varphi}{1 - \varphi \hat{h}(s)}. \end{aligned}$$

Άρα οι μετασχηματισμοί Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας και της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\hat{\delta}(s) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)\hat{h}(s)} \quad , \qquad s \geq 0, \tag{2.14}$$

οπότε η συνάρτηση δ προκύπτει με χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 2.5 Υποθέτουμε ότι η κατανομή των απαιτήσεων είναι η $Exp(\beta)$, τότε η μεταβλητή L_1 ακολουθεί επίσης την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο (Πολίτης, 2012). Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Laplace της h είναι

$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty \beta\, e^{-(s+\beta)x} dx = \frac{\beta}{\beta + s}.$$

Συνδυάζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα με τις γνωστές σχέσεις

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta} \quad , \qquad \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.14) προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της δ ισούται με

$$\hat{\delta}(s) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}\frac{\beta}{\beta+s}} = \frac{\theta(\beta+s)}{\theta(\beta+s)+s}.$$

Έστω οι τιμές $\theta = 0.3$ και $\beta = 2$, τότε με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στο Mathematica προκύπτει

$$\delta'(u) = 0.3(1.18343e^{-0.461538u} + 0.769231DiracDelta(u)),$$

όπου για τη συνάρτηση $DiracDelta(u)$ ισχύει

$$DiracDelta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Η ποσότητα 0.2307693 αντιπροσωπεύει το διακριτό κομμάτι της κατανομής της L στο μηδέν, όπως αναμενόταν και από την αντικατάσταση στον τύπο της $\delta(0)$ για $\theta = 0.3$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$ οπότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι

$$\delta(u) = P(L \leq u) = \int_0^u 0.355029e^{-0.461538y}\, dy + 0.2307693, \qquad u \geq 0.$$

Κεφάλαιο 3

Η ανέλιξη του πλεονάσματος στην περίπτωση ύπαρξης ενός πάνω φράγματος

Συνεχίζοντας την εργασία μας στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, θα εστιάσουμε στη μελέτη της ανοδικής πορείας του πλεονάσματος στην περίπτωση ύπαρξης ενός πάνω φράγματος. Πρόκειται για μια σημαντική πτυχή της οικονομικής δραστηριότητας μιας εταιρίας, καθώς ουσιαστικά διασφαλίζει τη σταθερή ανάπτυξή της σε παρατεταμένους χρονικούς ορίζοντες. Η μελέτη του χρόνου που απαιτείται έως ότου το πλεόνασμα της εταιρείας πάρει μια συγκεκριμένη τιμή b παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για μία εταιρεία, κυρίως όταν στοχεύει σε συγκεκριμένο κέρδος ώστε να δώσει μερίσματα στους μετόχους της.

3.1 Η ανέλιξη του πλεονάσματος με ένα φράγμα

Ας εξετάσουμε την περίπτωση, κατά την οποία μία εταιρεία αγνοεί το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας. Πρόκειται για ένα ρεαλιστικό σενάριο, ιδιαίτερα όταν η εταιρεία διαθέτει μεγάλο αρχικό αποθεματικό ή πολλά παρόμοια χαρτοφυλάκια, ώστε να μπορεί να καλύψει το έλλειμμα αν τυχόν παρουσιαστεί.

Ως αφετηρία στη συγκεκριμένη μελέτη, θα χρησιμοποιήσουμε την επιστημονική εργασία του Gerber, η οποία δημοσιεύθηκε το 1990.

Εφόσον ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους $(\theta > 0)$, από το νόμο των μεγάλων αριθμών εξασφαλίζεται ότι

$$U_t \to \infty \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ t \to \infty \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \psi(u) < 1 \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ u \geq 0.$$

Δεδομένου ότι υπάρχει η πιθανότητα το πλεόνασμα να μην πέσει ποτέ κάτω από τη τιμή 0, τότε μπορούμε με ασφάλεια να εικάσουμε ότι σε κάποια χρονική στιγμή αυτό θα υπερβεί μία προκαθορισμένη τιμή, το λεγόμενο *κατώφλι (target surplus)*, $b > u$. Η τιμή b αναφέρεται στο επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας.

Ακολουθώντας τις σημειώσεις του Πολίτη στη "Θεωρία Κινδύνου ΙΙ", για $b > u$ ορίζουμε την τ.μ T_b, ώστε να είναι ο χρόνος πρώτης διέλευσης από το σημείο b σύμφωνα με τη σχέση

$$T_b = inf\{t : U_t \geq b\}.$$

Πρόταση 3.1 Αν θεωρήσουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο με αρχικό αποθεματικό $u = 0$, τότε η ροπογεννήτρια της τ.μ T_b είναι ίση με

$$M_{T_b}(r) = E(e^{rT_b}) = e^{sb}, r \geq 0, \tag{3.1}$$

όπου τα r, s συνδέονται με τη σχέση

$$r(s) = sc - \lambda(M_X(s) - 1). \tag{3.2}$$

3.2 Η ανέλιξη του πλεονάσματος με δύο φράγματα

Θεωρώντας ένα κάτω φράγμα στο μηδέν (χρεοκοπία) και ένα πάνω φράγμα στο σημείο b (κατώφλι), το επόμενο βήμα που θα πρέπει να μας απασχολήσει είναι ποιο από τα δύο φράγματα θα συναντήσει πρώτο το πλεόνασμα.

Για $b > u$ ορίζουμε την τ.μ $T_{b,u}$ να είναι ο χρόνος έως ότου το πλεόνασμα βγει εκτός του διαστήματος $[0, b]$ σύμφωνα με τη σχέση

$$T_{b,u} = inf\{t : U_t < 0 \text{ ή } U_t \geq b\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$T_{b,u} = min\{T, T_b\},$$

όπου ο χρόνος χρεοκοπίας T είναι ελλειμματική τ.μ, καθώς ενδέχεται, με θετική πιθανότητα να πάρει την τιμή άπειρο, ενώ η τ.μ T_b χαρακτηρίζεται ως μη-ελλειμματική $(P(T_b < \infty) = 1)$ καθιστώντας επομένως και την τ.μ $T_{b,u}$ ως μη ελλειμματική.

Μένοντας πιστοί στο κλασικό μοντέλο, οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i με $i = 1,2, \ldots$ είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι και ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσο $1/\lambda$. Επομένως, η συμπεριφορά της ανέλιξης του πλεονάσματος κάθε φορά που λαμβάνει τη τιμή b είναι ανεξάρτητη από τη συμπεριφορά πριν τη διέλευση από το b.

Στη συγκεκριμένη μελέτη, χρησιμοποιούμε την έκφραση $\xi(u, b)$ για να δηλώσουμε την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία πριν το πλεόνασμα υπερβεί το κατώφλι. Προκύπτει επομένως ότι

$$\xi(u, b) = P(sup_{0 \leq t \leq T}\, U_t < b\,, T < \infty | U_0 = u),$$

ή διαφορετικά

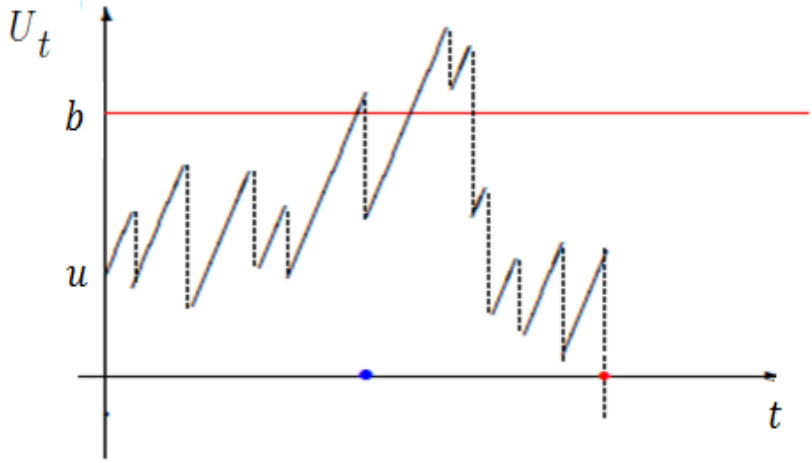
$$\xi(u, b) = P\left(U_{T_{b,u}} < 0\right).$$

Γίνεται λοιπόν προφανές ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν δεν υπάρχει πάνω φράγμα, είναι

$$\psi(u) = \xi(u, \infty).$$

Έχει αποδειχθεί από τους Dickson and Gray (1984) ότι αν $\chi(u, b)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία μετά τη διέλευση από το b, τότε

$$\chi(u, b) = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)}. \tag{3.3}$$



Σχήμα 3.1: Πολίτης (2013) Η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία μετά τη διέλευση από το b.

Αν συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u, τότε είτε θα συμβεί πριν τη διέλευση από το b είτε μετά. Οπότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned} &P\ (\chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}\ \alpha\pi o\theta\varepsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\ u) \\ &= P(\chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha\ \pi\rho\iota\nu\ \tau\eta\ \delta\iota\acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\upsilon\sigma\eta\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau o\ b) \\ &+ P(\chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\ \tau\eta\ \delta\iota\acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\upsilon\sigma\eta\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau o\ b). \end{aligned}$$

Επειδή η ανέλιξη Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

$$\psi(u) = \xi(u,b) + \chi(u,b)\psi(b)$$

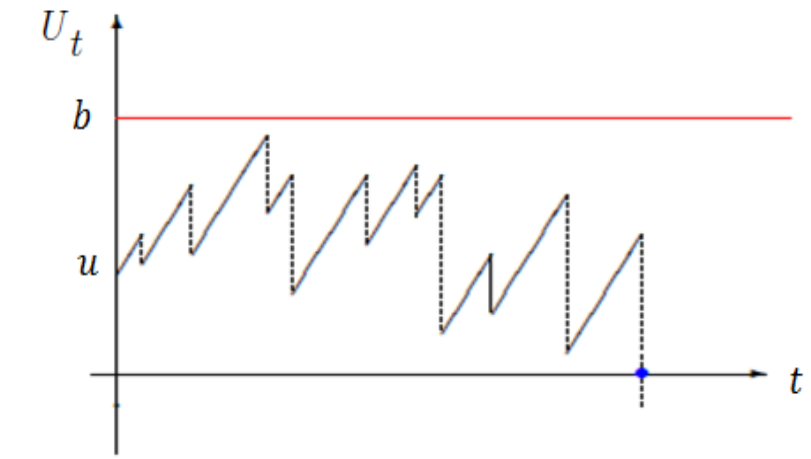
με δεδομένο ότι

$$\xi(u,b) + \chi(u,b) = 1$$

προκύπτει άμεσα από την (3.3) η σχέση

$$\xi(u,b) = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)} \qquad \mu\varepsilon\ \ b > u \geq 0. \tag{3.4}$$

Η τελευταία εξίσωση μας δείχνει ότι θα υπάρχουν ακριβείς λύσεις για την $\xi(u,b)$, όποτε υπάρχουν και για την $\psi(u)$.



Σχήμα 3.2: Πολίτης (2013) Η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία πριν τη διέλευση από το b.

Θα συνεχίσουμε με την παράθεση δύο παραδειγμάτων που αφορούν την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία πριν το πλεόνασμα υπερβεί το κατώφλι.

Παράδειγμα 3.1 Έστω ότι η κατανομή των απαιτήσεων είναι η $Exp(\beta)$ τότε, σύμφωνα με το βιβλίο του Πολίτη (2012), η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}, u \geq 0.$$

Από την (2.11) γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής για εκθετικές απαιτήσεις είναι

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta},$$

οπότε με αντικατάσταση στην (3.4) προκύπτει ότι

$$\xi(u,b) = \frac{e^{-Ru} - e^{-Rb}}{1+\theta-e^{-Rb}}, \qquad b > u \geq 0.$$

Παράδειγμα 3.2 Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι $Ga(2,2)$. Σύμφωνα με τον Χαραλαμπίδη (1991), η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = 1 - \frac{I(2,2x)}{\Gamma(2)}, \qquad x > 0$$

όπου με τον τύπο

$$I(2,2x) = \int_{2x}^{\infty} ye^{-y}dy = (1+2x)e^{-2x}$$

προσδιορίζουμε το ολοκλήρωμα της μη πλήρους Γάμμα συνάρτησης.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$F(x) = 1 - (1+2x)\, e^{-2x}\,, \quad x > 0\,.$$

Οι Dickson and Gray (1984) απέδειξαν ότι η $\xi(u,b)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$-c\xi' + \xi = -\int_0^u \xi(z,b)dF(u-z) + 1 - F(u),$$

όπου η ξ' δηλώνει την παράγωγο της $\xi = \xi(u,b)$ ως προς u.

Γράφοντας ακολούθως την ποσότητα

$$dF(u-z) = -f(u-z)dz = -\left[4(u-z)e^{-2(u-z)}\right]dz$$

και αντικαθιστώντας το c με $1+\lambda$ έχουμε ότι

$$-(1+\lambda)\xi' + \xi = 4\int_0^u \xi(z,b)(u-z)e^{-2(u-z)}dz + (1+2u)e^{-2u}. \tag{3.5}$$

Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια την (3.5) με e^{2u}, παίρνουμε

$$-(1+\lambda)\xi' e^{2u} + \xi e^{2u} = 4u\int_0^u \xi(z,b)e^{2z}dz - 4\int_0^u z\xi(z,b)e^{2z}dz + (1+2u).$$

Το επόμενο βήμα είναι να παραγωγίσουμε πρώτη φορά

$$\begin{aligned} -(1+\lambda)[\xi'' e^{2u} + 2\xi' e^{2u}] + \xi' e^{2u} + 2\xi e^{2u} \\ = 4\int_0^u \xi(z,b)e^{2z}dz + 4u\xi(u,b)e^{2u} - 4u\xi(u,b)e^{2u} + 2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

και δεύτερη φορά,

$$\begin{aligned} -(1+\lambda)[\xi''' e^{2u} + 2\xi'' e^{2u} + 2\xi'' e^{2u} + 4\xi' e^{2u}] + \xi'' e^{2u} + 2\xi' e^{2u} + 2\xi' e^{2u} + 4\xi e^{2u} \\ = 4\xi(u,b)e^{2u}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (-\xi''' - \lambda\xi''' - 2\xi'' - 2\lambda\xi'' - 2\xi'' - 2\lambda\xi'' - 4\xi' - 4\lambda\xi' + \xi'' + 2\xi' + 2\xi' + 4\xi)e^{2u} \\ = 4\xi e^{2u}, \end{aligned}$$

άρα

$$(1+\lambda)\xi''' + (3+4\lambda)\xi'' + 4\lambda\xi' = 0.$$

Η εξίσωση ακολούθως των συντελεστών του e^{2u} μας δίνει τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$(1+\lambda)r^3 + (3+4\lambda)r^2 + 4\lambda r = 0, \tag{3.7}$$

η οποία έχει μία μηδενική και δύο μη μηδενικές ρίζες, έστω R_1, R_2. Οι ρίζες αυτές είναι συναρτήσεις του λ. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι η γενική μορφή της συνάρτησης $\xi(u,b)$ είναι

$$\xi(u,b) = b_0 + b_1 e^{-R_1 u} + b_2 e^{-R_2 u},$$

όπου τα b_i εξαρτώνται από το b. (Αλικάκος - Καλογερόπουλος 2003)

Χρησιμοποιώντας επίσης τη συνοριακή συνθήκη $\xi(b,b) = 0$ έχουμε

$$b_0 = -b_1 e^{-R_1 b} - b_2 e^{-R_2 b},$$

οπότε η λύση εκφράζεται με τη μορφή

$$\xi(u,b) = b_1(e^{-R_1 u} - e^{-R_1 b}) + b_2(e^{-R_2 u} - e^{-R_2 b}). \tag{3.8}$$

Αν αντικαταστήσουμε στη συνέχεια την (3.8) στην (3.5) και εξισώσουμε τις δυνάμεις του u μπορούμε να καθορίσουμε την τιμή των b_i.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να γενικευτεί για να καλύψει κάθε κατανομή αποζημίωσης $F(x)$, η οποία είναι $Ga(n,n)$ με n θετικό ακέραιο.

Με τη χρήση του Mathematica μπορούμε ακολούθως να προσδιορίσουμε αριθμητικά αποτελέσματα, όταν $\lambda = 2$.

Στην περίπτωση αυτή, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (3.7) είναι

$$R_1 = -\frac{8}{3} \; \kappa\alpha\iota \; R_2 = -1.$$

Αν, στη συνέχεια, αντικαταστήσουμε τις τιμές των R_1, R_2 στην (3.8) παίρνουμε τη σχέση

$$\xi(u,b) = b_1\left(e^{8u/3} - e^{8b/3}\right) + b_2(e^u - e^b),$$

την οποία παραγωγίζουμε ως προς u δύο φορές λαμβάνοντας τις σχέσεις

$$\xi'(u,b) = \frac{8}{3} b_1 e^{8u/3} + b_2 e^u \tag{3.9}$$

$$\xi''(u,b) = \frac{64}{9} b_1 e^{8u/3} + b_2 e^u. \tag{3.10}$$

Αφού οι $(3.5), (3.6)$ ισχύουν $\forall u$, τότε θα ισχύουν και για $u = 0$, οπότε

$$(1+\lambda)\xi'(0,b) - \xi(0,b) + 1 = 0$$

$$-(1+\lambda)[\xi''(0,b) + 2\xi'(0,b)] + \xi'(0,b) - 2 + 2\xi(0,b) = 0$$

οπότε, με αντικατάσταση των $(3.9), (3.10)$, γράφονται

$$1 + 3\left(\frac{8b_1}{3} + b_2\right) - b_2(1 - e^b) - b_1\left(1 - e^{8b/3}\right) = 0$$

$$-2 + \frac{8b_1}{3} + b_2 - 3\left[\frac{64b_1}{9} + b_2 + 2\left(\frac{8b_1}{3} + b_2\right)\right] + 2\left[b_2(1 - e^b) + b_1\left(1 - e^{8b/3}\right)\right]$$

και με επίλυση του συστήματος ως προς b_1, b_2 παίρνουμε

$$b_1 = -\frac{3}{-35 - 28e^b + 3e^{8b/3}},$$

$$b_2 = \frac{28}{-35 - 28e^b + 3e^{8b/3}}.$$

Συνεπώς, η πιθανότητα $\xi(0,b)$, να επέλθει χρεοκοπία πριν το πλεόνασμα υπερβεί το κατώφλι b και με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$\xi(0,b) = \frac{28(1 - e^b)}{-35 - 28e^b + 3e^{8b/3}} - \frac{3\left(1 - e^{8b/3}\right)}{-35 - 28e^b + 3e^{8b/3}}.$$

3.3 Στρατηγική φράγματος

Η *στρατηγική του φράγματος (barrier strategy)*, όπως διατυπώθηκε αρχικά από τον ιταλό μαθηματικό De Finetti (1957) για ένα διωνυμικό μοντέλο προσέλκυσε, όπως ήταν φυσικό, μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Ο De Finetti ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι αν η διαδικασία του πλεονάσματος εξελιχθεί όπως ένας τυχαίος περίπατος, με βήματα δηλαδή μεγέθους ± 1 τότε ο βέλτιστος τρόπος πληρωμής των μερισμάτων, σύμφωνα με τη στρατηγική του φράγματος είναι η ύπαρξη μιας σταθεράς, έτσι ώστε κάθε χρονική στιγμή το πλεόνασμα πάνω από τη σταθερά αυτή να πληρώνεται.

Η $\chi(u,b)$ παίζει σημαντικό ρόλο στο μοντέλο με σταθερό μερισματικό φράγμα. Με άλλα λόγια, κάθε φορά που το πλεόνασμα παίρνει τη τιμή b, πληρώνονται μερίσματα στους μετόχους κατά τρόπο τέτοιο, ώστε το πλεόνασμα να διατηρείται στη τιμή b μέχρι την επόμενη απαίτηση.

Προχωρώντας στη μελέτη μας, στηριζόμαστε στην ερευνητική εργασία των Dickson and Waters (2003) και ορίζουμε ως $D(u,b)$ την παρούσα αξία των μερισμάτων, η οποία είναι τυχαία μεταβλητή και έχει μη μηδενική πιθανότητα στο 0

$$P(D(u,b)=0)=1-\chi(u,b).$$

Εμείς θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση, κατά την οποία η ένταση ανατοκισμού είναι σ=0.

Οι Gerber και Shiu (2004) μελέτησαν αυτήν την περίπτωση για το μοντέλο χρεοκοπίας με κίνηση Brown, και έδειξαν ότι η κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων $D(u,b)$ είναι μείξη μιας εκφυλισμένης κατανομής στο 0 και μιας εκθετικής κατανομής.

Στη συνέχεια της μελέτης μας, θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας.

- Αν $0 \leq u < b$

τότε η πιθανότητα να υπάρχει μία πρώτη ροή μερισμάτων είναι ίση με τη πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία μετά τη διέλευση από το b, η οποία, με τη σειρά της, ισούται με

$$\chi(u,b)=\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(b)}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα να υπάρχει μία δεύτερη ροή μερισμάτων είναι η *p(b)*, με

$$p(b)=\int_0^b f(x)\chi(b-x,b)dx=1-q(b),$$

καθώς η δεύτερη ροή μπορεί να συμβεί μόνο αν το μέγεθος της αποζημίωσης που απομακρύνει το πλεόνασμα από το μερισματικό φράγμα δεν είναι μεγαλύτερο από b.

Αν N ο αριθμός των ροών των μερισμάτων, τότε η N έχει μια μηδενο-τροποποιημένη *(zero-modified)* γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N=0)=1-\chi(u,b)$$

$$P(N=r)=\chi(u,b)[p(b)]^{r-1}q(b)\ \ ,r=1,2,\ldots.$$

Με τη βοήθεια του Mathematica και του βιβλίου του Πολίτη (2012) μπορούμε να εξάγουμε κάποια πολύ χρήσιμα συμπεράσματα.

Η N έχει μέση τιμή

$$E(N)=\frac{\chi(u,b)q(b)}{[p(b)-1]^2},$$

ροπή 2ης τάξης

$$E(N^2) = -\frac{\chi(u,b)q(b)[p(b)+1]}{[p(b)-1]^3},$$

ροπή 3ης τάξης

$$E(N^3) = \frac{\chi(u,b)q(b)\left[1+4p(b)+\left(p(b)\right)^2\right]}{[p(b)-1]^4},$$

διασπορά

$$Var(N) = -\frac{\chi(u,b)q(b)\left[-1+\chi(u,b)q(b)+\left(p(b)\right)^2\right]}{[p(b)-1]^4}$$

και ροπογεννήτρια

$$M_N(t) = E(e^{tN}) = 1-\chi(u,b)+\sum_{r=1}^{\infty} e^{tr}\chi(u,b)[p(b)]^{r-1}q(b)$$

$$= 1-\chi(u,b)+\frac{\chi(u,b)q(b)}{p(b)}\sum_{r=1}^{\infty}[e^t p(b)]^r.$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν

$$e^t p(b) < 1 \;\Leftrightarrow\; t < -ln\big(p(b)\big),$$

διαφορετικά, η ροπογεννήτρια απειρίζεται.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{m=1}^{\infty} z^m = \frac{z}{1-z}$$

παίρνουμε ότι

$$M_N(t) = 1-\chi(u,b)+\frac{\chi(u,b)q(b)e^t}{1-p(b)e^t}\;,\;\; t < -ln\big(p(b)\big).$$

Συνεχίζουμε, δηλώνοντας με Δ_i το μέγεθος της i-οστής μερισματικής ροής. Σε αυτή την περίπτωση,

$$D(u,b) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i,$$

όπου $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Όπως σημειώνουν οι Dickson and Waters (2003), ο χρόνος από τη στιγμή που το πλεόνασμα λαμβάνει τη τιμή b ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο $1/\lambda$, λόγω της αμνήμονος ιδιότητας της εκθετικής. Οπότε και η μερισματική ροή είναι εκθετική με μέσο c/λ. Άρα η κατανομή της $D(u,b)$ είναι σύνθετη γεωμετρική.

Συνεπώς, η κατανομή του Δ_1 είναι εκθετική με μέση τιμή

$$E(\Delta_1) = \frac{c}{\lambda},$$

ροπή 2ης τάξης

$$E(\Delta_1^2) = \frac{2c^2}{\lambda^2},$$

ροπή 3ης τάξης

$$E(\Delta_1^3) = \frac{6c^3}{\lambda^3},$$

διασπορά

$$Var(\Delta_1) = \frac{c^2}{\lambda^2}$$

και ροπογεννήτρια

$$M_{\Delta_1}(t) = E(e^{t\Delta_1}) = \frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{\lambda}{c} - t} = \frac{\lambda}{\lambda - ct} \quad , \qquad t < \frac{\lambda}{c}.$$

Οι ροπογεννήτριες της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής D και της μερισματικής ροής Δ_1 συνδέονται με τη σχέση

$$M_D(t) = M_N\left(lnM_{\Delta_1}(t)\right),$$

άρα

$$M_D(t) = 1 - \chi(u,b) + \frac{\chi(u,b)q(b)M_{\Delta_1}(t)}{1 - p(b)M_{\Delta_1}(t)}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$M_D(t) = 1 - \chi(u,b) + \chi(u,b)\frac{\lambda q(b)}{\lambda q(b) - ct}. \tag{3.11}$$

Στη συνέχεια αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με c , παίρνουμε

$$M_D(t) = 1 - \chi(u,b) + \chi(u,b)\frac{\frac{\lambda q(b)}{c}}{\frac{\lambda q(b)}{c} - t}.$$

Στο κλάσμα της τελευταίας σχέσης αναγνωρίζουμε τη ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\lambda q(b)/c$, πολλαπλασιασμένη με τον όρο $\chi(u,b)$, ώστε η συνολική πιθανότητα που αντιστοιχεί στη κατανομή να έχει άθροισμα τη μονάδα.

Συνεπώς, η κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων D έχει μάζα στο μηδέν, ίση με $1-\chi(u,b)$, ενώ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,\infty)$ με πυκνότητα

$$f_D(u;b) = \chi(u,b)\frac{\lambda q(b)}{c}e^{\frac{-\lambda q(b)}{c}u}.$$

Χρησιμοποιώντας ακολούθως ιδιότητες των σύνθετων κατανομών, η μέση τιμή της D προκύπτει από τον τύπο

$$E(D) = E(N)E(\Delta_i),$$

οπότε,

$$E(D) = \frac{\chi(u,b)q(b)c}{\lambda[p(b)-1]^2} = \frac{\chi(u,b)c}{\lambda q(b)} \tag{3.12}$$

και η διασπορά εκφράζεται σύμφωνα με τον τύπο

$$Var(D) = E(N)Var(\Delta_i) + [E(\Delta_i)]^2 Var(N).$$

Συνεπώς,

$$Var(D) = -\frac{\chi(u,b)q(b)c^2[-2+\chi(u,b)q(b)+2p(b)]}{\lambda^2[p(b)-1]^4}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής είναι μη αρνητική. Στην ειδική περίπτωση που αυτή ισούται με μηδέν, αυτό σημαίνει ότι η τυχαία μεταβλητή εκφυλίζεται σε μία σταθερή τιμή, τη μέση τιμή, με πιθανότητα ίση με τη μονάδα.

Κάνοντας χρήση της σχέσης

$$Var(D) = E(D^2) - [E(D)]^2$$

βρίσκουμε ότι

$$E(D^2) = -\frac{2\chi(u,b)q(b)c^2}{\lambda^2[p(b)-1]^3}. \tag{3.13}$$

Αν παραγωγίσουμε την (3.11) πρώτη φορά

$$M_D^{(1)}(t) = \frac{\chi(u,b)q(b)c\lambda}{[\lambda q(b)-ct]^2},$$

δεύτερη φορά

$$M_D^{(2)}(t) = \frac{2\chi(u,b)q(b)c^2\lambda}{[\lambda q(b) - ct]^3},$$

τρίτη φορά

$$M_D^{(3)}(t) = \frac{6\chi(u,b)q(b)c^3\lambda}{[\lambda q(b) - ct]^4}$$

και θέσουμε στην τρίτη παράγωγο $t = 0$, τότε η ροπή 3ης τάξης δίνεται από τη σχέση

$$E(D^3) = M_D^{(3)}(0) = \frac{6\chi(u,b)c^3}{\lambda^3[q(b)]^3}. \tag{3.14}$$

Επομένως, για την κεντρική ροπή 3ης τάξης της D αν χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα κύβου

$$E\left[\left(D - E(D)\right)^3\right] = E\left[D^3 - 3D^2E(D) + 3D\left(E(D)\right)^2 - \left(E(D)\right)^3\right]$$

$$= E(D^3) - 3E(D)E(D^2) + 2\left(E(D)\right)^3$$

και αντικαταστήσουμε τις $(3.12), (3.13)$ *και* (3.14) παίρνουμε

$$E\left[\left(D - E(D)\right)^3\right] =$$

$$\frac{2\chi(u,b)c^3\left[\left(\chi(u,b)\right)^2\left(q(b)\right)^6 + 3\chi(u,b)\left(q(b)\right)^5(p(b)-1) + 3(p(b)-1)^6\right]}{\lambda^3\left(q(b)\right)^3(p(b)-1)^6}.$$

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εστιάζουμε κυρίως στη μελέτη της ασυμμετρίας κάποιων κατανομών. Παρουσιάζει λοιπόν ενδιαφέρον να υπολογίσουμε το συντελεστή ασυμμετρίας της μεταβλητής D, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\gamma_1 = \frac{E\left[\left(D - E(D)\right)^3\right]}{\left(Var(D)\right)^{3/2}}$$

για τον οποίο εκτενέστερη αναφορά γίνεται στο Κεφάλαιο 4, όπου παρουσιάζονται διεξοδικά και οι έννοιες των ροπών.

$$\gamma_1 = \frac{2\chi(u,b)c^3\left[\left(\chi(u,b)\right)^2\left(q(b)\right)^6 + 3\chi(u,b)\left(q(b)\right)^5(p(b)-1) + 3(p(b)-1)^6\right]}{\lambda^3\left(q(b)\right)^3(p(b)-1)^6\left[-\frac{\chi(u,b)q(b)c^2[-2+\chi(u,b)q(b)+2p(b)]}{\lambda^2[p(b)-1]^4}\right]^{3/2}}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση

$$q(b) = 1 - p(b)$$

μπορούμε να εκφράσουμε το συντελεστή ασυμμετρίας σε απλούστερη μορφή

$$\gamma_1 = \frac{2\chi(u,b)c^3\left[\left(\chi(u,b)\right)^2\left(q(b)\right)^6 + 3\chi(u,b)\left(q(b)\right)^5\left(-q(b)\right) + 3\left(q(b)\right)^6\right]}{\lambda^3\left(q(b)\right)^3\left(q(b)\right)^6\left[-\frac{\chi(u,b)q(b)c^2\left[-2+\chi(u,b)q(b)+2\left(1-q(b)\right)\right]}{\lambda^2\left(q(b)\right)^4}\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{2\chi(u,b)c^3\left(q(b)\right)^6\left[\left(\chi(u,b)\right)^2 - 3\chi(u,b) + 3\right]}{\lambda^3\left(q(b)\right)^9\left[-\frac{\chi(u,b)q(b)c^2\left[q(b)\left(-2+\chi(u,b)\right)\right]}{\lambda^2\left(q(b)\right)^4}\right]^{3/2}}.$$

Στον αριθμητή η ποσότητα

$$\left(\chi(u,b)\right)^2 - 3\chi(u,b) + 3$$

είναι πάντα θετική, διότι είναι μία δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα.

Στον παρονομαστή το κλάσμα είναι επίσης, θετικό εφόσον $\chi(u,b) < 2$, οπότε τελικά

$$\gamma_1 > 0.$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι η κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων $D(u,b)$ παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

- Αν $u = b$,

τότε η κατανομή της $D(b,b)$ είναι εκθετική με μέσο $c/\left(\lambda q(b)\right)$ αφού

$$\chi(b,b) = \frac{1-\psi(b)}{1-\psi(b)} = 1.$$

Κεφάλαιο 4

Μελέτη της ασυμμετρίας και της κυρτότητας του χρόνου πρώτης διέλευσης από το κατώφλι b

Βασικό αντικείμενο μελέτης στο κεφάλαιο που ακολουθεί αποτελούν οι συντελεστές ασυμμετρίας και κυρτότητας της κατανομής T_b στο κλασικό μοντέλο με αρχικό αποθεματικό $u = 0$. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τις ημιαναλλοίωτες γεννήτριες συναρτήσεις και, αφού δείξουμε αναλυτικά τις σχέσεις με τις οποίες συνδέονται οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν, χρησιμοποιούμε τους τύπους σε δύο παραδείγματα κατανομών, συγκεκριμένα στην εκθετική και στη Γάμμα.

4.1 Ροπές και ημιαναλλοίωτες γεννήτριες συναρτήσεις

Οι *ροπές (moments)* μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχουν επιπρόσθετες χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά της. Γενικά ορίζονται οι r *τάξης* ροπές $\mu'_r = E(X^r)$ της τ.μ X (με κέντρο το 0), αλλά οι *κεντρικές ροπές (central moments)* είναι εκείνες οι οποίες περιγράφουν καθαρότερα το σχήμα της κατανομής. Η πρώτη ροπή γύρω από το μηδέν μ'_1, συμβολίζεται στη συνέχεια για ευκολία απλώς με μ.

Οι ορισμοί που δίνονται ακολουθούν το βιβλίο του Χαραλαμπίδη «Θεωρία πιθανοτήτων και εφαρμογές» (1991).

Ορισμός 4.1 Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Η ποσότητα

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r], \quad \mu = E(X), \qquad r = 1,2,\ldots$$

καλείται r *τάξης κεντρική ροπή* της τ.μ X.

Από τις σημαντικότερες κεντρικές ροπές είναι οι μ_3 και μ_4 οι οποίες χρησιμοποιούνται ως μέτρα ασυμμετρίας και κυρτότητας της κατανομής. Τα μέτρα αυτά αφορούν το βαθμό συγκέντρωσης των δεδομένων γύρω από το μέσο και την αιχμηρότητα της κατανομής.

Ορισμός 4.2 Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με $\mu = E(X)$ και $\sigma^2 = V(X)$. Η μέση τιμή της συνάρτησης $g(X) = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$ καλείται *συντελεστής ασυμμετρίας ή λοξότητα (skewness)* της κατανομής της τ.μ X και ορίζεται ως

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{4.1}$$

Η ποσότητα γ_1 δείχνει αν η κατανομή είναι συμμετρική ($\gamma_1 = 0$) ή το βαθμό ασυμμετρίας της κατανομής ($\gamma_1 \neq 0$). Μία ασύμμετρη κατανομή, με μία μακριά ουρά στα δεξιά (μεγαλύτερες τιμές) έχει θετική ασυμμετρία, ενώ με μία μακριά ουρά στα αριστερά (μικρότερες τιμές) έχει αρνητική ασυμμετρία. Γνωστές συμμετρικές κατανομές είναι η κανονική και η ομοιόμορφη.

Ορισμός 4.3 Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με $\mu = E(X)$ και $\sigma^2 = V(X)$. Η μέση τιμή της συνάρτησης $h(X) = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4$ καλείται *συντελεστής κυρτότητας ή κυρτότητα (kurtosis)* της κατανομής της τ.μ X

$$\gamma_2 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \tag{4.2}$$

Οι κατανομές που προσεγγίζονται από την κανονική, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας έχει τη γνωστή κωδωνοειδή καμπύλη, λέγονται *μεσόκυρτες* ($\gamma_2 = 3$). Συνηθίζεται να μετράμε την κυρτότητα με τη διαφορά $\gamma_2 - 3$ η οποία για *λεπτόκυρτες* κατανομές παίρνει θετικές τιμές ενώ για *πλατύκυρτες* κατανομές γίνεται αρνητική.

Το 1889 ο Thiele ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τις *σωρεύτριες (cumulants)* με την ονομασία *ημιαναλλοίωτες*, 30 χρόνια προτού αυτές ουσιαστικά «ανακαλυφθούν» εκ νέου από τον σπουδαίο γενετιστή Fisher και τον στατιστικό Wishart. Η επαναθεμελίωσή τους προέκυψε ως συνέπεια της ανάγκης να επιλυθεί το πρόβλημα του ορισμού αναλλοιώτων παραμέτρων, ως προς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 4.4 Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια $M_X(t)$. Η r *τάξης ημιαναλλοίωτη παράμετρος* της X συμβολίζεται με κ_r και ορίζεται ως ο συντελεστής του $\frac{t^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα

$$K(t) = \log M_X(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{t^r}{r!},$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει. Η συνάρτηση $K(t)$ καλείται *γεννήτρια ημιαναλλοιώτων παραμέτρων*.

Μια ικανή συνθήκη για να υπάρχει το ανάπτυγμα είναι η ύπαρξη της ροπογεννήτριας $M_X(t)$ για $|t| \leq \rho, \rho > 0$. Τότε υπάρχουν οι ροπές μ'_r και ισχύει

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}, \quad |t| \leq \rho. \tag{4.3}$$

Επομένως, η $K(t)$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$K(t) = \log M_X(t)$$

$$= \log\left[1 + \left(\mu_1 t + \mu_2' \frac{t^2}{2} + \mu_3' \frac{t^3}{3!} + \mu_4' \frac{t^4}{4!} + \cdots\right)\right].$$

Αν τώρα θέσουμε

$$y = \mu t + \mu_2' \frac{t^2}{2} + \mu_3' \frac{t^3}{3!} + \mu_4' \frac{t^4}{4!} + \cdots,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots$$

κάνοντας πράξεις μπορούμε να πάρουμε κάποιες δυνάμεις του y

$$y^2 = \mu^2 t^2 + \mu\mu_2' \frac{t^3}{2} + \mu\mu_3' \frac{t^4}{3!} + \cdots + \mu\mu_2' \frac{t^3}{2} + (\mu_2')^2 \frac{t^4}{4} + \cdots + \mu\mu_3' \frac{t^4}{3!} + \cdots$$

$$= \mu^2 t^2 + \mu\mu_2' t^3 + \left[\frac{2\mu\mu_3'}{3!} + \frac{(\mu_2')^2}{4} + \frac{\mu\mu_3'}{3!}\right] t^4 + \cdots$$

$$y^3 = \mu^3 t^3 + \frac{\mu^2\mu_2'}{2} t^4 + \cdots + \mu^2\mu_2' t^4 + \cdots$$

$$y^4 = \mu^4 t^4 + \cdots.$$

Άρα η εξίσωση (4.3) γράφεται

$$\kappa_1 t + \kappa_2 \frac{t^2}{2} + \kappa_3 \frac{t^3}{3!} + \kappa_4 \frac{t^4}{4!} + \cdots = \mu t + \left(\frac{\mu_2'}{2} - \frac{\mu^2}{2}\right) t^2 + \left(\frac{\mu_3'}{3!} - \frac{\mu\mu_2'}{2} + \frac{\mu^3}{3}\right) t^3$$

$$+ \left[\frac{\mu_4'}{4!} - \frac{\mu\mu_3'}{3!} - \frac{(\mu_2')^2}{8} + \frac{3\mu^2\mu_2'}{6} - \frac{\mu^4}{4}\right] t^4 + \cdots.$$

Εξισώνοντας στη συνέχεια τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του t προκύπτουν οι ημιαναλλοίωτες συναρτήσεις των ροπών

$$\kappa_1 = \mu \tag{4.4}$$

$$\kappa_2 = \mu_2' - \mu^2 = \sigma^2 \tag{4.5}$$

$$\kappa_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3 = \mu_3 = E[(X - \mu)^3] \tag{4.6}$$

$$\kappa_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' - 3(\mu_2')^2 + 12\mu^2\mu_2' - 6\mu^4. \tag{4.7}$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή κυρτότητας χρειαζόμαστε την κεντρική ροπή τέταρτης τάξης της X, την οποία υπολογίζουμε ως εξής:

$$\mu_4 = E[(X-\mu)^4] = E[(X^2 - 2X\mu + \mu^2)^2]$$

$$= E(X^4) + 4E(X^2)\mu^2 + \mu^4 - 4E(X^3)\mu + 2E(X^2)\mu^2 - 4E(X)\mu^3$$

$$= \mu_4' - 4\mu_3'\mu + 6\mu_2'\mu^2 - 3\mu^4.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, η (4.7) μπορεί να γραφεί

$$\kappa_4 = (\mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4) - 3(\mu_2')^2 + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$$

$$= \mu_4 - 3(\mu_2' - \mu^2)^2,$$

η οποία, λόγω της (4.5), μας δίνει

$$\kappa_4 = \mu_4 - 3\sigma^2. \tag{4.8}$$

Γενικά, επειδή η $K(t)$ είναι παραστάσιμη σε σειρά MacLaurin, η r τάξης ημιαναλλοίωτη μπορεί να προκύψει από την $r - o\sigma\tau\acute{\eta}$ παράγωγο στο σημείο $t = 0$

$$\kappa_r = K_X^{(r)}(0),$$

οπότε για την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο παίρνουμε

$$K_X^{(1)}(0) = \left[\frac{d}{dt}\ln M_X(t)\right]_{t=o} = E(X) = \mu = \kappa_1,$$

$$K_X^{(2)}(0) = \left[\frac{d^2}{dt^2}\ln M_X(t)\right]_{t=o} = Var(X) = \sigma^2 = \kappa_2.$$

Να σημειώσουμε ότι η $r - o\sigma\tau\acute{\eta}$ παράγωγος της ροπογεννήτριας της X δίνεται από τον τύπο

$$M_X^{(r)}(t) = E(X^r e^{tX}),$$

με την υπόθεση ότι η εναλλαγή θέσεων των $\frac{d}{dt}$ και E είναι επιτρεπτή.

Θα συνεχίσουμε αναφέροντας τρεις σημαντικές ιδιότητες που ισχύουν για τις ημιαναλλοίωτες:

α) Οι ημιαναλλοίωτες, εκτός από την πρώτη, δε μεταβάλλονται από μετασχηματισμούς θέσης ενώ μεταβάλλονται από μετασχηματισμούς κλίμακας. Στην ιδιότητα αυτή οφείλουν και την ονομασία τους.

Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός μιας τ.μ X, όπου α, β σταθερές

$$Y = \alpha X + \beta.$$

Η ροπογεννήτρια της Y δίνεται από τη σχέση

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = e^{\beta t} E\left[e^{(\alpha t)X}\right] = e^{\beta t} M_X(at),$$

οπότε λογαριθμίζοντας παίρνουμε τη γεννήτρια ημιαναλλοιώτων παραμέτρων της Y

$$K_Y(t) = \beta t + K_X(at).$$

Αναπτύσσοντας τη σχέση αυτή σε δυνάμεις του t

$$\sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(Y) \frac{t^r}{r!} = \beta t + \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(X) \alpha^r \frac{t^r}{r!}$$

$$= [\alpha \kappa_1(X) + \beta] t + \sum_{r=2}^{\infty} \kappa_r(X) \alpha^r \frac{t^r}{r!}$$

προκύπτει

$$\kappa_1(Y) = \alpha \kappa_1(X) + \beta, \qquad \kappa_r(Y) = \alpha^r \kappa_r(X), \qquad r = 2,3, \dots \ .$$

β) Οι ημιαναλλοίωτες ικανοποιούν τη σχέση

$$\kappa_r(S_\nu) = \kappa_r(X_1) + \kappa_r(X_2) + \cdots + \kappa_r(X_\nu), \quad r = 1,2, \dots \ ,$$

όπου S_ν το άθροισμα των ν ανεξάρτητων τ.μ. $X_1, X_2, \dots X_\nu$.

Πράγματι η ροπογεννήτρια του αθροίσματος

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$$

δίνεται από το γινόμενο

$$M_{S_\nu}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_\nu}(t),$$

οπότε η γεννήτρια ημιαναλλοιώτων παραμέτρων γράφεται

$$\sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(S_\nu) \frac{t^r}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(X_1) \frac{t^r}{r!} + \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(X_2) \frac{t^r}{r!} + \cdots \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(X_\nu) \frac{t^r}{r!}$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές του $\frac{t^r}{r!}$ προκύπτει το ζητούμενο.

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι στην ιδιότητα αυτή οφείλουν και την ονομασία τους ως σωρεύτριες αφού η προσθετικότητα δεν ισχύει στις ροπές.

γ) Η r τάξης ημιαναλλοίωτη είναι ομοιογενής βαθμού r

$$\kappa_r(cX) = c^r \kappa_r(X), \text{ όπου } c \text{ σταθερά.}$$

4.2 Μελέτη κάποιων παραμέτρων της κατανομής του χρόνου T_b

Θα θεωρήσουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο με αρχικό αποθεματικό $u = 0$. Στην Ενότητα 3.1 ορίστηκε ο χρόνος πρώτης διέλευσης T_b από το κατώφλι b σε ένα κλασικό πρότυπο. Γενικεύοντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.1, ο Gerber (1990), χρησιμοποιώντας martingales, απέδειξε ότι η ροπογεννήτρια της τ.μ T_b είναι

$$M_{T_b}(r) = E(e^{rT_b}) = e^{sb}, \quad r \geq 0,$$

όπου τα r, s ικανοποιούν τη σχέση

$$r = r(s) = sc - \lambda(M_X(s) - 1)$$

και η γεννήτρια ημιαναλλοιώτων είναι

$$K_{T_b}(r) = \ln M_{T_b}(r) = \ln e^{sb} = sb, \quad r \geq 0\,. \tag{4.9}$$

Παραγωγίζοντας, παίρνουμε ότι

$$K_{T_b}^{(1)}(r) = \frac{d}{dr} K_{T_b}(r) = \frac{d}{ds}(sb)\frac{ds}{dr} = b\frac{ds}{dr} = \frac{b}{c - \lambda M_X^{(1)}(s)}$$

και θέτοντας $r = s = 0$ λαμβάνουμε

$$K_{T_b}^{(1)}(0) = \frac{b}{c - \lambda\mu}.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η πρώτη παράγωγος στο σημείο μηδέν της συνάρτησης (K_{T_b}), η οποία καλείται $1^{ης}$ τάξης ημιαναλλοίωτη, ικανοποιεί τη σχέση

$$K_{T_b}^{(1)}(0) = E(T_b).$$

Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1 Ο αναμενόμενος χρόνος έως ότου το πλεόνασμα λάβει για πρώτη φορά τη τιμή b δίνεται από τη σχέση

$$E(T_b) = \frac{b}{c - \lambda\mu}. \tag{4.10}$$

Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η $E(T_b)$ δεν εξαρτάται από τον ακριβή τύπο της κατανομής των απαιτήσεων, αλλά μόνο από τη μέση απαίτηση.

Αν, στη συνέχεια, παραγωγίσουμε για δεύτερη φορά χρησιμοποιώντας τον τύπο της αλυσίδας, θα πάρουμε

$$K_{T_b}^{(2)}(r) = \frac{d^2}{dr^2} K_{T_b}(r) = \frac{d}{ds}\left(\frac{b}{c - \lambda M_X^{(1)}(s)}\right)\frac{ds}{dr} = \frac{b\lambda M_X^{(2)}(s)}{\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3},$$

όπου για $r = s = 0$ έχουμε ότι

$$K_{T_b}^{(2)}(0) = \frac{b\lambda\mu_2'}{(c - \lambda\mu)^3}$$

και επειδή

$$K_{T_b}^{(2)}(0) = Var(T_b),$$

η διασπορά της τ.μ T_b δίνεται από τη σχέση

$$Var(T_b) = \frac{b\lambda\mu_2'}{(c - \lambda\mu)^3}. \tag{4.11}$$

Η τρίτη παράγωγος της γεννήτριας ημιαναλλοιώτων γράφεται

$$K_{T_b}^{(3)}(r) = \frac{d^3}{dr^3} K_{T_b}(r) = \frac{d}{ds}\left(\frac{b\lambda M_X^{(2)}(s)}{\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3}\right)\frac{ds}{dr}$$

$$= \frac{b\lambda M_X^{(3)}(s)\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3}{\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^7} + \frac{3\left[b\lambda M_X^{(2)}(s)\right]\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^2\left[\lambda M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^7}$$

$$= \frac{b\lambda M_X^{(3)}(s)}{\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4} + \frac{3b\lambda^2\left[M_X^{(2)}(s)\right]^2}{\left[c - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^5}.$$

Θέτουμε $r = s = 0$, για να λάβουμε

$$K_{T_b}^{(3)}(0) = \frac{b\lambda\mu_3'}{(c-\lambda\mu)^4} + \frac{3b\lambda^2(\mu_2')^2}{(c-\lambda\mu)^5}$$

και κάνοντας χρήση της σχέσης

$$K_{T_b}^{(3)}(0) = \kappa_3 = E[(T_b - \mu_b)^3]$$

οδηγούμαστε στην κεντρική ροπή τρίτης τάξης της τ.μ T_b

$$E\left[\left(T_b - E(T_b)\right)^3\right] = \frac{b\lambda\mu_3'}{(c-\lambda\mu)^4} + \frac{3b\lambda^2(\mu_2')^2}{(c-\lambda\mu)^5}. \tag{4.12}$$

Τέλος, η τέταρτη παράγωγος της γεννήτριας ημιαναλλοιώτων γράφεται

$$K_{T_b}^{(4)}(r) = \frac{d^4}{dr^4}K_{T_b}(r) = \frac{d}{ds}\left(\frac{b\lambda M_X^{(3)}(s)}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4} + \frac{3b\lambda^2\left[M_X^{(2)}(s)\right]^2}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^5}\right)\frac{ds}{dr}$$

$$= \left\{\frac{b\lambda M_X^{(4)}(s)\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4 - 4b\lambda M_X^{(3)}(s)\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3\left[-\lambda M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^8}\right.$$

$$\left. + \frac{6b\lambda^2 M_X^{(2)}(s)M_X^{(3)}(s)\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^5 - 15b\lambda^2\left[M_X^{(2)}(s)\right]^2\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4\left[-\lambda M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^{11}}\right\}$$

$$= \frac{b\lambda M_X^{(4)}(s)}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^5} + \frac{10b\lambda^2 M_X^{(2)}(s)M_X^{(3)}(s)}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^6} + \frac{15b\lambda^3\left[M_X^{(2)}(s)\right]^3}{\left[c-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^7},$$

η οποία για $r = s = 0$ μας δίνει

$$K_{T_b}^{(4)}(0) = \kappa_4 = \frac{b\lambda\mu_4'}{(c-\lambda\mu)^5} + \frac{10b\lambda^2\mu_2'\mu_3'}{(c-\lambda\mu)^6} + \frac{15b\lambda^3(\mu_2')^3}{(c-\lambda\mu)^7}. \tag{4.13}$$

Ο υπολογισμός των παραγώγων των ημιαναλλοίωτων αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο, καθώς επιτρέπει την απόδοση των συντελεστών ασυμμετρίας και κυρτότητας σε εύχρηστη μορφή.

4.3 Ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής του χρόνου T_b

Αν αναζητούσαμε μια ακόμα πιο λειτουργική έκφραση για το συντελεστή ασυμμετρίας σε σύγκριση με την (4.1), θα καταλήγαμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\gamma_1 = \frac{E\left[\left(T_b - E(T_b)\right)^3\right]}{Var(T_b)^{3/2}},$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε τις (4.11), (4.12) παίρνουμε

$$\gamma_1 = \frac{\frac{b\lambda\mu_3'}{[c-\lambda\mu]^4} + \frac{3b\lambda^2(\mu_2')^2}{[c-\lambda\mu]^5}}{\left(\frac{b\lambda\mu_2'}{[c-\lambda\mu]^3}\right)^{3/2}}.$$

Εκτελώντας πράξεις στο κλάσμα ο συντελεστής ασυμμετρίας γράφεται

$$\gamma_1 = \frac{b\lambda\mu_3'(c-\lambda\mu)^{1/2}}{(b\lambda\mu_2')^{3/2}} + \frac{3b\lambda^2(\mu_2')^2}{(b\lambda\mu_2')^{3/2}(c-\lambda\mu)^{1/2}}$$

ή, διαφορετικά, στη μορφή

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{\mu_3'\sqrt{c-\lambda\mu}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{(\mu_2')^3}} + \frac{3\sqrt{\lambda\mu_2'}}{\sqrt{c-\lambda\mu}}\right). \tag{4.14}$$

Στη συνέχεια , θα μελετήσουμε με τη βοήθεια του αλγεβρικού προγράμματος Mathematica, δύο παραδείγματα κατανομών, την εκθετική και τη Γάμμα.

Παράδειγμα 4.1 Έστω ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο β, τότε οι ροπές 1ης, 2ης και 3ης τάξης δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu = \frac{1}{\beta}, \qquad \mu_2' = \frac{2}{\beta^2}, \qquad \mu_3' = \frac{6}{\beta^3},$$

τις οποίες αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (4.14) παίρνουμε μετά από πράξεις ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας για εκθετικές απαιτήσεις δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{\beta c-\lambda}}{2\sqrt{\beta\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta c-\lambda}}\right) > 0. \tag{4.15}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η κατανομή των εκθετικών απαιτήσεων παρουσιάζει θετική ασυμμετρία. Λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη του καθαρού κέρδους

$$c > \frac{\lambda}{\beta},$$

θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συντελεστή ασυμμετρίας στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Όταν μεταβάλλεται το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας b.

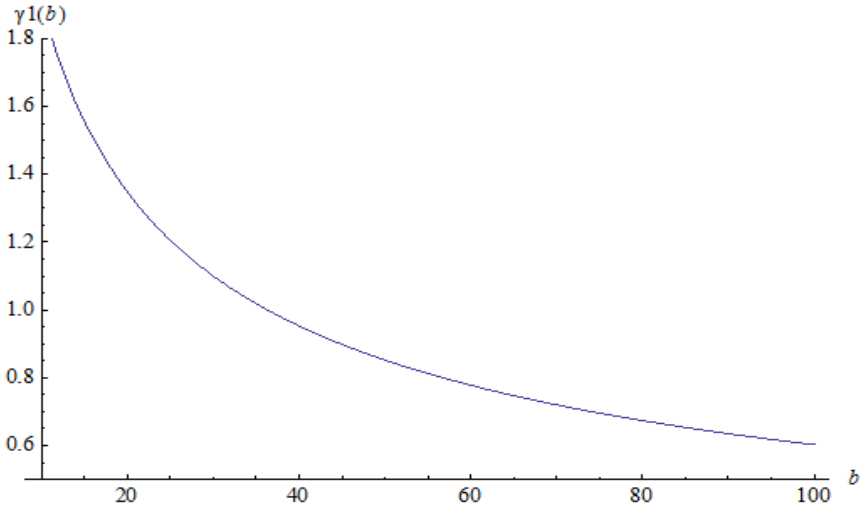
Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε τις τιμές $\lambda = 2$, $c = 0.8$, $\beta = 3$ και λαμβάνουμε ότι

$$\gamma_1(b) = \frac{6.02495}{\sqrt{b}},$$

όπου

$$\lim_{b\to\infty} \gamma_1(b) = 0.$$

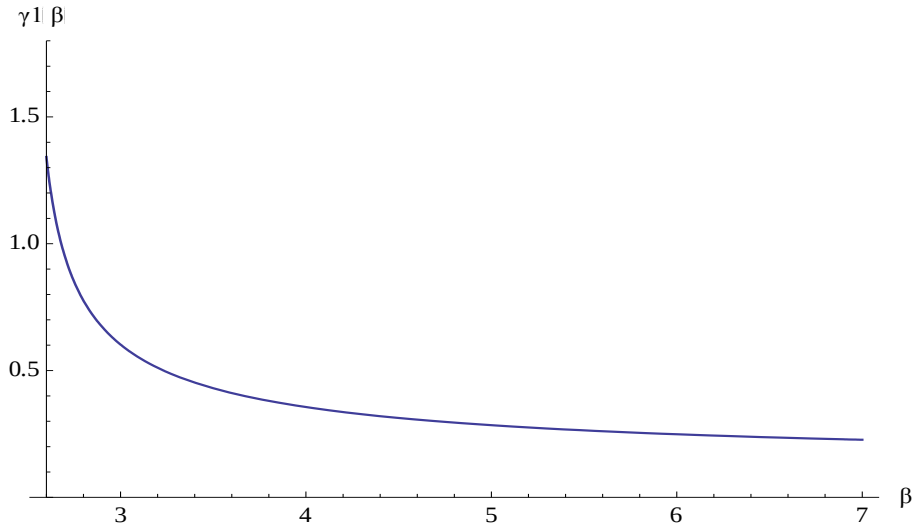
Όπως φαίνεται και στο σχήμα, ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς b.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του b.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της εκθετικής κατανομής β.

Αν επιλέξουμε τις παραμέτρους $\lambda = 2$, $c = 0.8$, $b = 100$ τότε, σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, πρέπει $\beta > 2.5$. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι και πάλι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς β.



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του β.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1 ο συντελεστής ασυμμετρίας τείνει στο μηδέν όταν αυξάνονται ταυτόχρονα οι παράμετροι β , b. Συγκεκριμένα, στις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές του συντελεστή γ_1 όταν $\beta = 2.6$ και $\beta = 20$ αντίστοιχα και για διάφορες τιμές του κατωφλίου b.

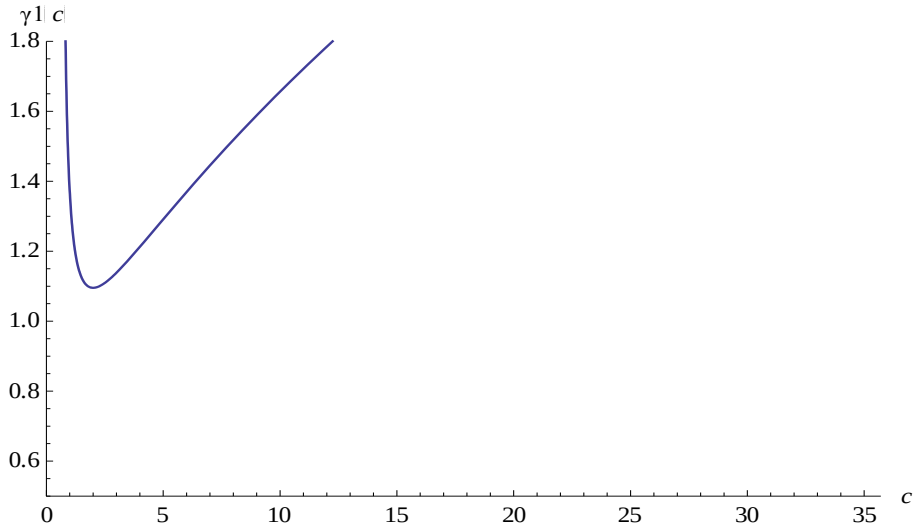
<u>*Πίνακας* 4.1</u>

Μεταβολές του συντελεστή ασυμμετρίας

$\boldsymbol{b}$	20	100	200	300	400	500	600
$\boldsymbol{Skewness(2.6)}$	3.0005	1.3419	0.9488	0.7747	0.6709	0.6001	0.5478
$\boldsymbol{Skewness(20)}$	0.3608	0.1613	0.1140	0.0931	0.0806	0.0721	0.0658

- Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ασφαλίστρου c.

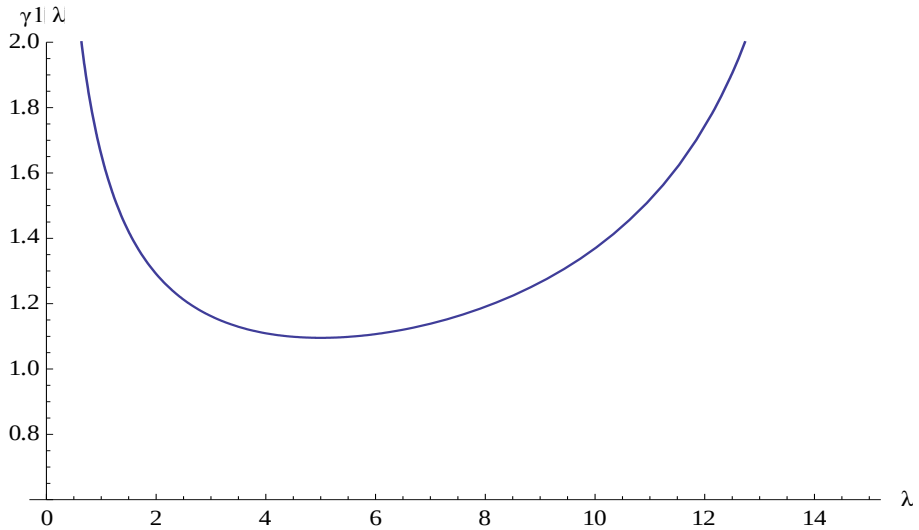
Αν επιλέξουμε $\lambda = 2$, $\beta = 3$, $b = 10$ τότε σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους πρέπει οι τιμές του c να είναι μεγαλύτερες από $2/3$. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2/3, 2)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2, \infty)$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $c = 2$ το $\gamma_1(2) = 1.09545$, ενώ το όριό της όταν $c \to \infty$ είναι $\lim_{c\to\infty} \gamma_1(c) = \infty$. Είναι αναμενόμενο ότι αν αυξήσουμε την τιμή του b, έστω $b = 100$, η τιμή του τοπικού ελαχίστου μειώνεται, συγκεκριμένα προκύπτει ότι $\gamma_1(2) = 0.34641$.



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του c.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της ανέλιξης Poisson λ.

Αν επιλέξουμε $c = 5$, $\beta = 3$, $b = 10$ τότε λόγω της συνθήκης του καθαρού κέρδους το λ πρέπει να παίρνει τιμές μικρότερες του 15. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,5)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(5,15)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\lambda = 5$ το $\gamma_1(5) = 1.09545$.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του λ.

- Όταν μεταβάλλεται το περιθώριο ασφαλείας θ.

Για να εμφανίσουμε το θ στην έκφραση του συντελεστή ασυμμετρίας διαιρούμε στη σχέση (4.15) τον αριθμητή και τον παρονομαστή και των δύο κλασμάτων με $\sqrt{\lambda}$

$$\gamma_1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{b}}\left(\frac{\frac{\sqrt{\beta c-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}{\frac{2\sqrt{\beta\lambda}}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}{\frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta c-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}\right)$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\gamma_1(\theta) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{b}\sqrt{\beta}}\left(\frac{\sqrt{\theta}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι το όριό της όταν $\theta \to \infty$ είναι

$$\lim_{\theta\to\infty} \gamma_1(\theta) = \infty.$$

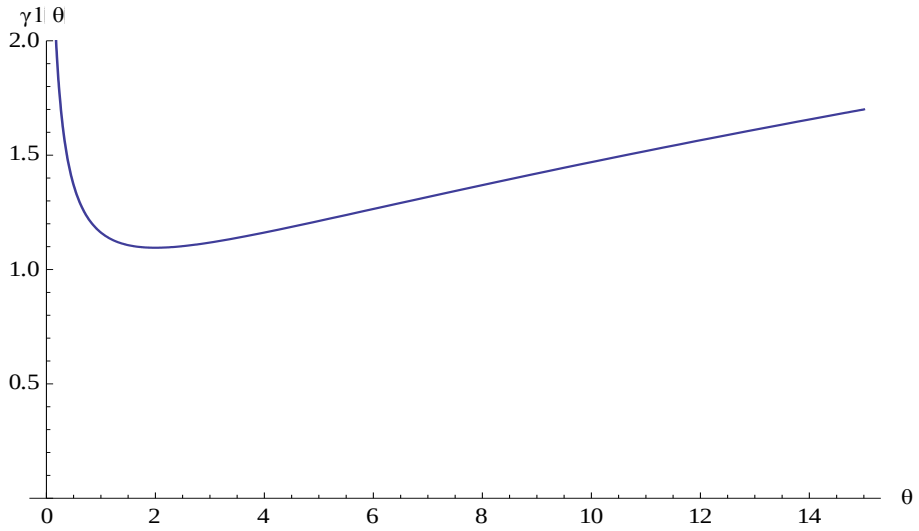
Θέτουμε για ευκολία $x = \sqrt{\theta}$ και μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x},$$

η οποία έχει πρώτη παράγωγο

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}, \qquad x \in (0,\infty).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $\theta \in (0,2)$ και γνησίως αύξουσα για κάθε $\theta \in [2,\infty)$ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα για $\beta = 3$ και $b = 10$. Σημειώνεται πάντως ότι στην πράξη οι τιμές που παίρνει το περιθώριο ασφαλείας είναι συνήθως μικρότερες της μονάδας διαφορετικά το χαρτοφυλάκιο δεν είναι ανταγωνιστικό.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του θ.

Παράδειγμα 4.2 Έστω ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν κατανομή $Gamma(\alpha, \beta)$ με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \qquad x > 0.$$

Τότε οι τρεις πρώτες ροπές δίνονται από τους τύπους

$$\mu = \alpha\beta, \qquad \mu_2' = \alpha(1+\alpha)\beta^2, \qquad \mu_3' = \alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\beta^3.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4.14) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το συντελεστή ασυμμετρίας

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{b}} \left[\frac{c(2+a) + \lambda\alpha\beta(1+2\alpha)}{\sqrt{\lambda\alpha(1+\alpha)(c-\lambda\alpha\beta)}} \right]. \tag{4.16}$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη του καθαρού κέρδους $c > \lambda\alpha\beta$ θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συντελεστή ασυμμετρίας όταν $\alpha = \beta = 2$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

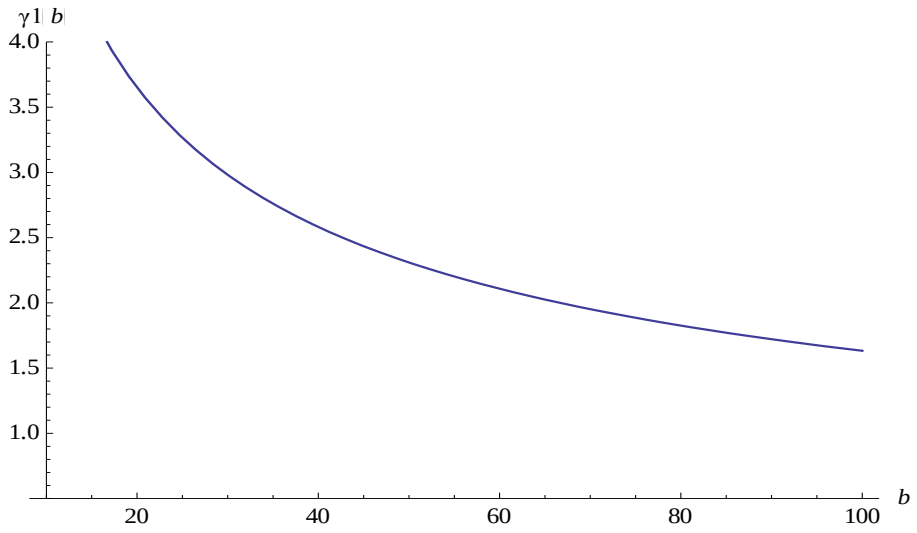
- Όταν μεταβάλλεται το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας b.

Επιλέγουμε $\lambda = 1$, $c = 5$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$\gamma_1(b) = \frac{20\sqrt{2/3}}{\sqrt{b}}.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς b, η οποία συγκλίνει στο μηδέν πολύ αργά

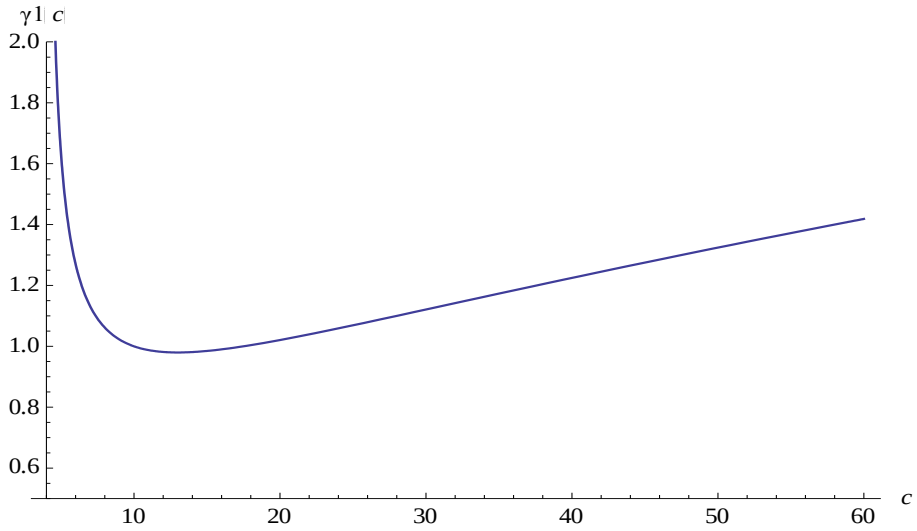
$$\lim_{b\to\infty} \gamma_1(b) = 0.$$



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για απαιτήσεις που ακολουθούν κατανομή Gamma (2,2) συναρτήσει του b.

- Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ασφαλίστρου c.

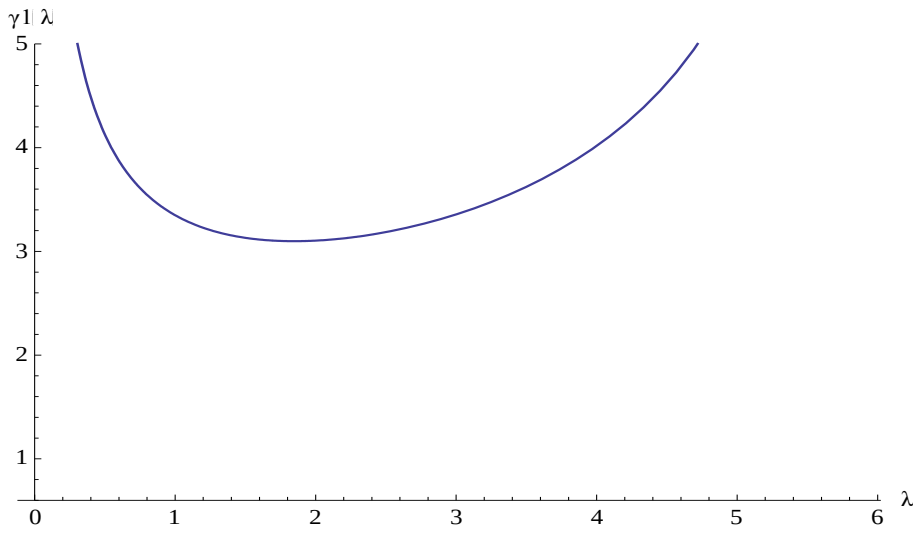
Αν επιλέξουμε $\lambda = 1$ και $b = 100$, τότε σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους πρέπει $c > 4$. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(4,13)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(13,\infty)$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $c = 13$ το $\gamma_1(13) = 0.979796$ ενώ το όριό της όταν $c \to \infty$ είναι $\lim_{c\to\infty} \gamma_1(c) = \infty$.



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για απαιτήσεις που ακολουθούν κατανομή Gamma (2,2) συναρτήσει του c.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της ανέλιξης Poisson λ.

Αν επιλέξουμε $c = 24$ και $b = 10$ τότε σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους οι τιμές του λ πρέπει να είναι μικρότερες του 6. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1.84615)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1.84615,6)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\lambda = 1.84615$ το $\gamma_1(1.84615) = 3.09839$.



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της T_b για απαιτήσεις που ακολουθούν κατανομή Gamma (2,2) συναρτήσει του λ.

4.4 Ο συντελεστής κυρτότητας της κατανομής του χρόνου T_b

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.2)

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

την (4.8) παίρνουμε

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_4 + 3\sigma^2}{\sigma^4}.$$

Ακολούθως χρησιμοποιώντας τις (4.11) και (4.13) ο συντελεστής κυρτότητας για την κατανομή του χρόνου T_b γράφεται

$$\gamma_2 = \frac{\frac{b\lambda\mu_4'}{(c-\lambda\mu)^5} + \frac{10b\lambda^2\mu_2'\mu_3'}{(c-\lambda\mu)^6} + \frac{15b\lambda^3(\mu_2')^3}{(c-\lambda\mu)^7} + \frac{3b\lambda\mu_2'}{(c-\lambda\mu)^3}}{\frac{b^2\lambda^2(\mu_2')^2}{(c-\lambda\mu)^6}}$$

και εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις λαμβάνουμε τη μορφή

$$\gamma_2 = \frac{1}{b}\left[\frac{\mu_4'(c-\lambda\mu)}{\lambda(\mu_2')^2} + \frac{10\mu_3'}{\mu_2'} + \frac{15\lambda\mu_2'}{(c-\lambda\mu)} + \frac{3(c-\lambda\mu)^3}{\lambda\mu_2'}\right]. \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια δίνουμε και πάλι δύο παραδείγματα για συγκεκριμένες κατανομές απαιτήσεων.

Παράδειγμα 4.3 Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για τις τέσσερις πρώτες ροπές των εκθετικών απαιτήσεων έχουμε

$$\mu = \frac{1}{\beta}, \qquad \mu_2' = \frac{2}{\beta^2}, \qquad \mu_3' = \frac{6}{\beta^3}, \qquad \mu_4' = \frac{24}{\beta^4},$$

και η σχέση (4.17) γράφεται

$$\gamma_2 = \frac{\frac{24(\beta c-\lambda)}{\beta^5}}{\frac{4b\lambda}{\beta^4}} + \frac{\frac{60}{\beta^3}}{\frac{2b}{\beta^2}} + \frac{\frac{30\lambda}{\beta^2}}{\frac{b(\beta c-\lambda)}{\beta}} + \frac{\frac{3(\beta c-\lambda)^3}{\beta^3}}{\frac{2b\lambda}{\beta^2}}.$$

Κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις, παίρνουμε

$$\gamma_2 = \frac{6(\beta c-\lambda)}{\beta b\lambda} + \frac{30}{\beta b} + \frac{30\lambda}{\beta b(\beta c-\lambda)} + \frac{3(\beta c-\lambda)^3}{2\beta b\lambda}$$

και τελικά ο συντελεστής κυρτότητας για τις εκθετικές απαιτήσεις μπορεί να δοθεί με τη μορφή

$$\gamma_2 = \frac{3}{b}\left(\frac{4c+3c\lambda^2+c^3\beta^2}{2\lambda} - \frac{3\beta^2c^2+\lambda^2+4}{2\beta} + \frac{10c}{\beta c-\lambda}\right). \tag{4.18}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον περιορισμό $c > \lambda/\beta$ θα μελετήσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

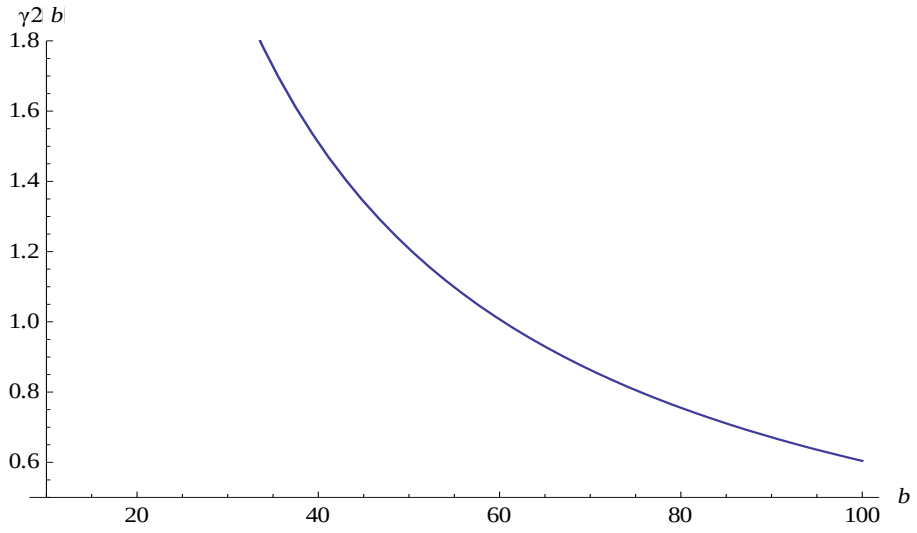
- Όταν μεταβάλλεται το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας b.

Επιλέγουμε τις τιμές $\lambda = 2,\ c = 0.8,\ \beta = 3$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$\gamma_2(b) = \frac{60.416}{b}.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα ο συντελεστής κυρτότητας είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς b με

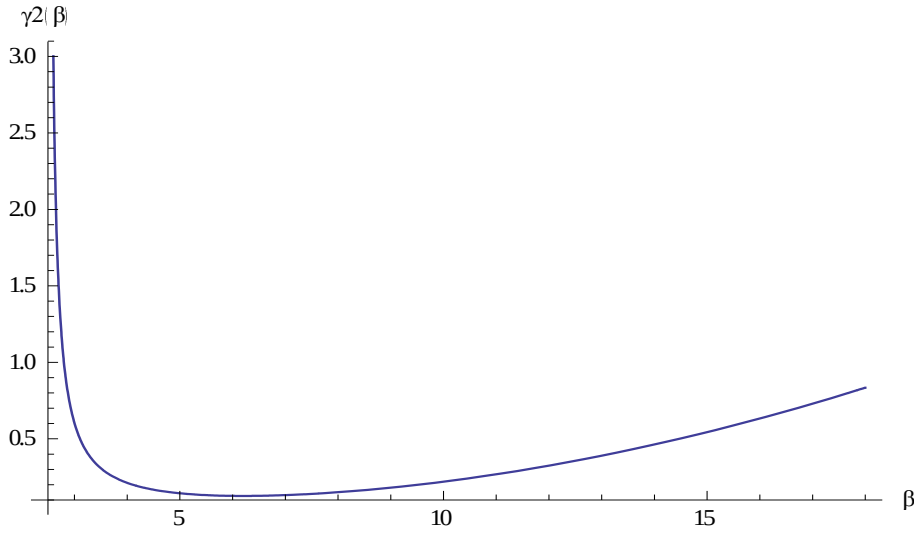
$$\lim_{b\to\infty} \gamma_2(b) = 0.$$



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του b.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της εκθετικής κατανομής β.

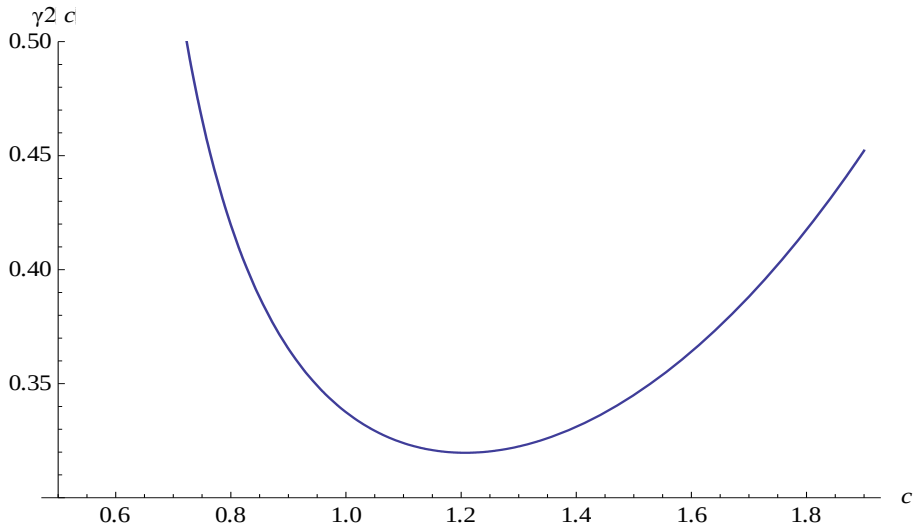
Αν επιλέξουμε $\lambda = 2,\ c = 0.8$ και $b = 100$ τότε, σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, πρέπει $\beta > 2.5$. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2.5, 6.19871)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(6.19871, \infty)$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\beta = 6.19871$ το $\gamma_2(6.19871) = 0.126776$, ενώ το όριό της όταν $\beta \to \infty$ είναι $\lim_{\beta\to\infty} \gamma_2(\beta) = \infty$.



Σχήμα 4.10: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του β.

- Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ασφαλίστρου c.

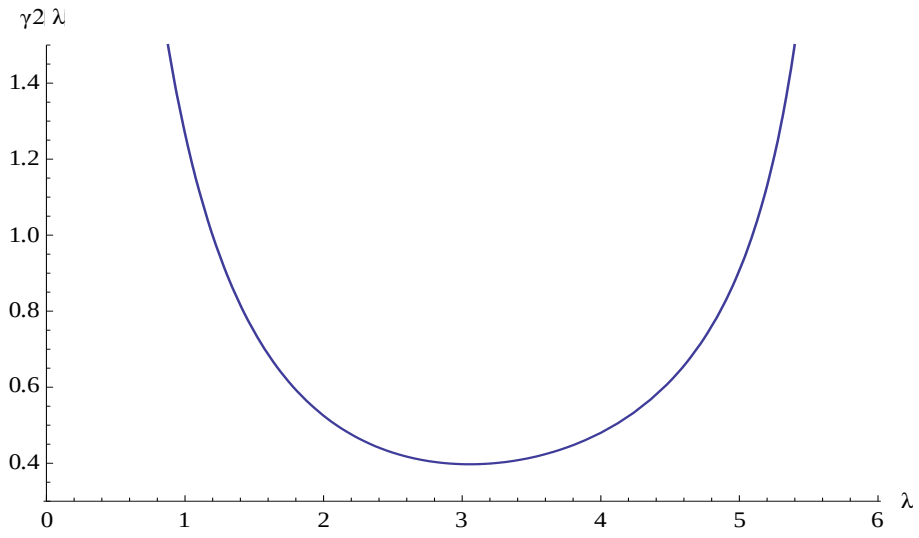
Επιλέγουμε $\lambda = 1$, $\beta = 2$ και $b = 100$ οπότε από τη συνθήκη του καθαρού κέρδους οι τιμές του c πρέπει να είναι μεγαλύτερες του 0.5. Από τη μελέτη της συνάρτησης, προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0.5,1.20711)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1.20711,\infty)$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $c = 1.2711$ το $\gamma_2(1.20711) = 0.319706$, ενώ το όριό της όταν $c \to \infty$ είναι $\lim_{c\to\infty} \gamma_2(c) = \infty$.



Σχήμα 4.11: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του c.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της ανέλιξης Poisson λ.

Αν επιλέξουμε $c = 3, \beta = 2$ και $b = 100$ τότε, σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, οι τιμές του λ πρέπει να είναι μικρότερες του 6. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,3.05455)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(3.05455,6)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\lambda = 3.05455$ το $\gamma_2(3.05455) = 0.397228$.



Σχήμα 4.12: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του λ.

Παράδειγμα 4.4 Όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν κατανομή $Gamma(a, \beta)$ οι τέσσερις πρώτες ροπές δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu = \alpha\beta, \qquad \mu_2' = \alpha(1+\alpha)\beta^2,$$

$$\mu_3' = \alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\beta^3, \qquad \mu_4' = \alpha(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)\beta^4,$$

οπότε, με αντικατάσταση στη σχέση (4.16) παίρνουμε το συντελεστή κυρτότητας

$$\gamma_2 = \frac{(2+\alpha)(3+\alpha)(c-\lambda\alpha\beta)}{b\lambda\alpha(1+\alpha)} + \frac{10(2+\alpha)\beta}{b} + \frac{15\lambda\alpha(1+\alpha)\beta^2}{b(c-\lambda\alpha\beta)} + \frac{3(c-\lambda\alpha\beta)^3}{b\lambda\alpha(1+\alpha)\beta^2}.$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη του καθαρού κέρδους $c > \lambda\alpha\beta$, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συντελεστή ασυμμετρίας, όταν $\alpha = \beta = 2$, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

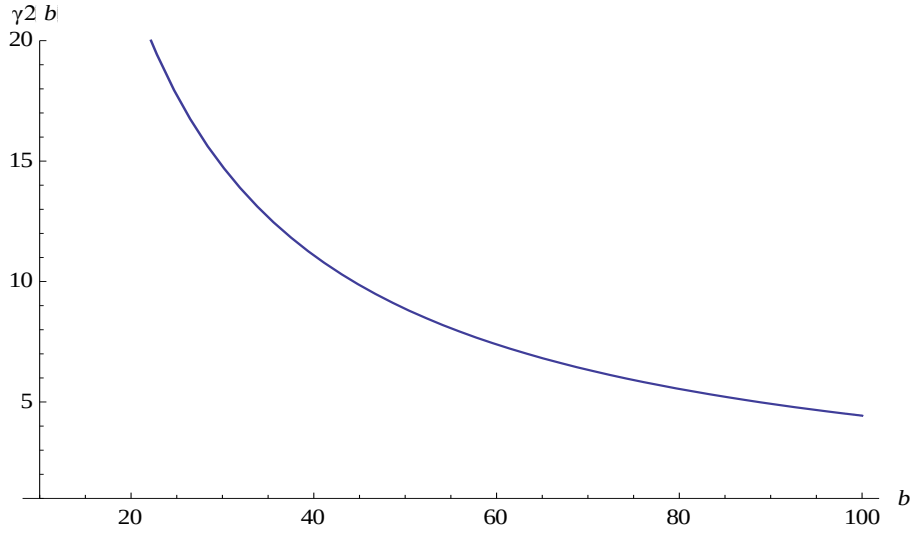
- Όταν μεταβάλλεται το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας b.

Επλέγουμε τις τιμές $c = 5$, $\lambda = 1$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$\gamma_2(b) = \frac{443.458}{b}.$$

Είναι αναμενόμενο ότι ο συντελεστής κυρτότητας είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς b με

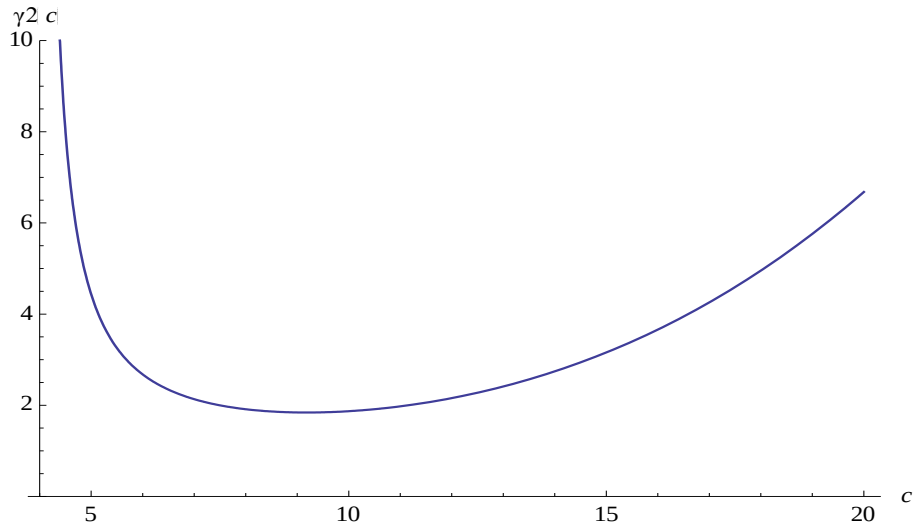
$$\lim_{b\to\infty} \gamma_2(b) = 0.$$



Σχήμα 4.13: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για απαιτήσεις που ακολουθούν κατανομή Gamma (2,2) συναρτήσει του b.

- Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ασφαλίστρου c.

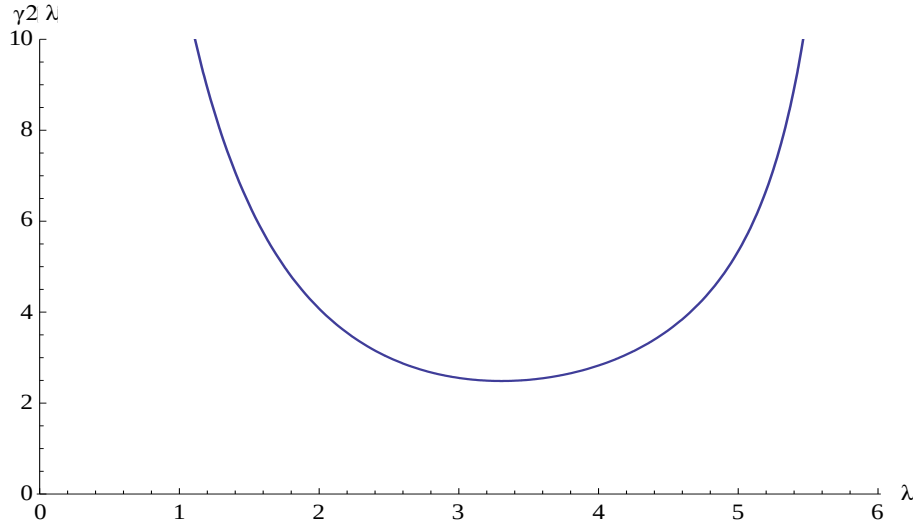
Επιλέγουμε $\lambda = 1$ και $b = 100$ οπότε, σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, πρέπει $c > 4$. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(4,9.18233)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(9.18233,\infty)$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $c = 9.18233$ το $\gamma_2(9.18233) = 1.84139$, ενώ το όριό της όταν $c \to \infty$ είναι $\lim_{c\to\infty} \gamma_2(c) = \infty$.



Σχήμα 4.14: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για απαιτήσεις που ακολουθούν κατανομή Gamma (2,2) συναρτήσει του c.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της ανέλιξης Poisson λ.

Αν επιλέξουμε $c = 24$ και $b = 100$ τότε, σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, οι τιμές του λ πρέπει να είναι μικρότερες του 6. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,3.30538)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(3.30538,6)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\lambda = 3.30538$ το $\gamma_2(3.30538) = 2.48623$.



Σχήμα 4.15: Διάγραμμα του συντελεστή κυρτότητας της T_b για απαιτήσεις που ακολουθούν κατανομή Gamma (2,2) συναρτήσει του λ.

Κεφάλαιο 5

Η πρώτη και η τελευταία διέλευση από το κατώφλι b

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τη μελέτη των μέτρων ασυμμετρίας και κυρτότητας της κατανομής της τ.μ T_b. Στο παρόν κεφάλαιο στόχος μας είναι η μελέτη του συντελεστή ασυμμετρίας, όταν $c = 1$ για δύο καινούργιες τ.μ που θα ορίσουμε τις K και D. Πρόκειται για δύο σημαντικά εργαλεία, καθώς μελετούν τη συμπεριφορά της κατανομής του αριθμού των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b και τον χρόνο μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b αντίστοιχα. Με τη βοήθεια και δύο παραδειγμάτων καταλήγουμε σε κάποιες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

5.1 Ο αριθμός των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ θετικές ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ και άθροισμα

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \quad k = 1,2, \ldots,$$

τότε για $b > 0$ και $0 < a < 1/\mu$ μπορούμε να λάβουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα όπως παρουσιάστηκαν από τον Gerber (1988).

Θεώρημα 5.1

$(\boldsymbol{\alpha})$
$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{a^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-a(S_k+b)}\right] = \frac{1}{b}$$

$(\boldsymbol{\beta})$
$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{a^k (S_k + b)^{k}}{k!} e^{-a(S_k+b)}\right] = \frac{1}{1 - a\mu}. \square$$

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η τιμή της σειράς (α) δεν εξαρτάται από την κατανομή των X_i ενώ της σειράς (β) εξαρτάται μόνο από το μέσο τους.

Θεώρημα 5.2

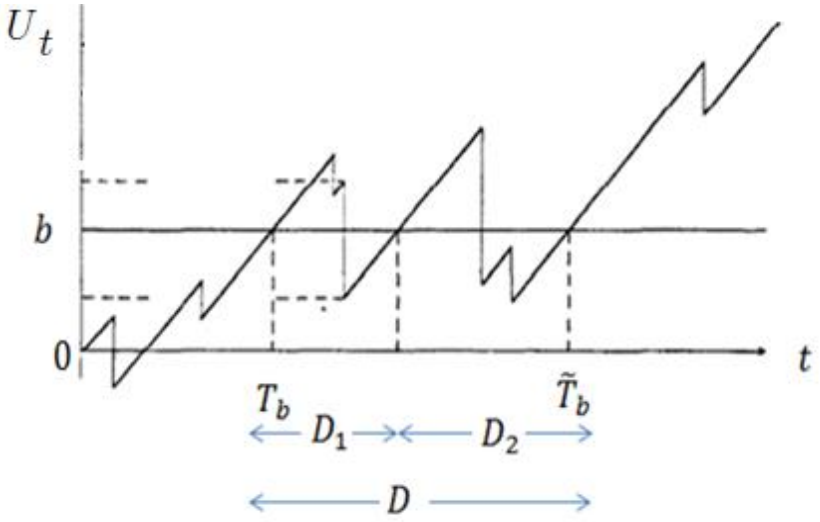
Δοθέντος $U_t = b$ και $N(t) = k$, η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $U_t < b$ για $0 < \tau < t$, δηλαδή η διέλευση από το κατώφλι b πραγματοποιείται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t, είναι b/ct. $\square$

Έστω τώρα ότι $\{U_t\colon t \geq 0\}$ η ανέλιξη του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ και ένταση ασφαλίστρου $c = 1$

$$U_t = t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0,$$

όπου $\{N(t)\colon t \geq 0\}$ μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ. Θεωρούμε ότι οι τ.μ X_i είναι θετικές, η κατανομή τους δηλώνεται με $F(x)$, η μέση τιμή τους είναι μ και ισχύει $\lambda < 1/\mu$ από τη συνθήκη καθαρού κέρδους.

Σύμφωνα με τον Gerber (1990), εφόσον θεωρούμε μία θετική πορεία της ανέλιξης του πλεονάσματος, και η ανέλιξη αυτή δεν παρουσιάζει άλματα προς τα πάνω, οποιαδήποτε επιλογή του b θα ισούται με το πλεόνασμα τουλάχιστον μία φορά και το πλεόνασμα αργά ή γρήγορα θα κατευθύνεται στο άπειρο.



Σχήμα 5.1: Gerber (1990) Η διέλευση του πλεονάσματος από το b.

Η ανέλιξη $\{U_t\colon t \geq 0\}$ διασχίζει το κατώφλι b μεταξύ της k-οστής και της $(k+1)$-οστής απαίτησης αν και μόνο αν ο αριθμός των απαιτήσεων μεταξύ 0 και $t = \frac{S_k+b}{c}$, δηλαδή στο διάστημα $(0,S_k+b]$ είναι ακριβώς k. Έτσι, η δεσμευμένη πιθανότητα, δοθέντος S_k, για μία διέλευση από το b μεταξύ k-οστής και $(k+1)$-οστής απαίτησης είναι η πιθανότητα Poisson

$$P(U(S_k+b) = b|S_k) = \frac{\lambda^k (S_k+b)^k}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}. \tag{5.1}$$

Κατά συνέπεια η πιθανότητα για μία διέλευση από το b μεταξύ k-οστής και $(k+1)$-οστής απαίτησης είναι

$$E\left[\frac{\lambda^k (S_k+b)^k}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right],$$

η οποία δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων στο διάστημα $(0,S_k+b]$, αφού γενικά είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί η ακριβής κατανομή του αριθμού των γεγονότων σε ένα διάστημα $(0,t]$.

Αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (5.1) με την ποσότητα $b/S_k + b$ λαμβάνουμε την αντίστοιχη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η ανέλιξη $\{U_t\colon\ t \geq 0\}$ θα διασχίσει για πρώτη φορά το κατώφλι b μεταξύ της k-οστής και της $(k+1)$-οστής απαίτησης

$$P(T_b = S_k + b | S_k) = b\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}. \tag{5.2}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2, η πιθανότητα η ανέλιξη $\{U_t\colon\ t \geq 0\}$ να διασχίσει για πρώτη φορά το κατώφλι b μεταξύ της k-οστής και της $(k+1)$-οστής απαίτησης είναι

$$bE\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right].$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε μία εναλλακτική έκφραση για τη ροπογεννήτρια της T_b

$$M_{T_b}(r) = E(e^{rT_b}) = b\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-(\lambda-r)(S_k+b)}\right], \qquad r \leq 0. \tag{5.3}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την Πρόταση 3.1 έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-(\lambda-r)(S_k+b)}\right] = \frac{1}{b} e^{sb}, \qquad r \leq 0, s \leq 0 \tag{5.4}$$

και θέτοντας $r = s = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right] = \frac{1}{b}$$

καταλήγουμε στο Θεώρημα 5.1(α).

Παίρνοντας στη συνέχεια την πρώτη παράγωγο της σχέσης (5.4) ως προς r και θέτοντας $r = s = 0$ σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4.2

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k}}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right] = \frac{1}{b} E(T_b) = \frac{1}{1-\lambda\mu}$$

καταλήγουμε στο Θεώρημα 5.1(β).

Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά και θέτοντας $r = s = 0$ βρίσκουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k+1}}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right] = \frac{1}{b} E(T_b^2) = \frac{1}{b}\left[Var(T_b) + \left(E(T_b)\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{b\lambda\mu_2'}{(1-\lambda\mu)^3} + \frac{b^2}{(1-\lambda\mu)^2}\right]$$

$$= \frac{\lambda\mu_2'}{(1-\lambda\mu)^3} + \frac{b}{(1-\lambda\mu)^2}.$$

Αν ορίσουμε τώρα ως K τον αριθμό των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα $P(K = k|S_k)$ είναι ταυτόσημη με την πιθανότητα της σχέσης (5.2).

Κατά συνέπεια, η ροπογεννήτρια της K γράφεται

$$M_K(t) = E(e^{tK}) = b\sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{(\lambda e^t)^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right], \qquad t \leq 0,$$

οπότε αν στη σχέση (5.4) αντικαταστήσουμε το "λ" με "λe^t" και το "$\lambda - r$" με "λ", η γνωστή σχέση (3.2)

$$r(s) = s + \lambda - \lambda M_X(s)$$

μας δίνει

$$e^t = \frac{\lambda + s}{\lambda M_X(s)}.$$

Τελικά έχουμε

$$M_K(t) = E(e^{tK}) = e^{sb}, \qquad t = \ln\left(\frac{\lambda + s}{\lambda M_X(s)}\right).$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η γεννήτρια ημιαναλλοιώτων δίνεται από τη σχέση

$$K_K(t) = \ln E(e^{tK}) = \ln e^{sb} = sb,$$

όπου $E(e^{tK}) = e^{sb}$ όπως έχει χρησιμοποιηθεί στην Πρόταση 3.1, σύμφωνα με το άρθρο του Gerber (1990).

Παραγωγίζοντας πρώτη φορά παίρνουμε

$$K_K^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}K_K(t) = \frac{d}{ds}(sb)\frac{ds}{dt} = b\frac{ds}{dt},$$

όπου

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\ln\frac{\lambda + s}{\lambda M_X(s)}\right) = \frac{M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)}{(s+\lambda)M_X(s)},$$

οπότε βρίσκουμε

$$K_K^{(1)}(t) = b\frac{(s+\lambda)M_X(s)}{M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)}.$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση $t = s = 0$

$$K_K^{(1)}(0) = b\frac{\lambda M_X(0)}{M_X(0) - \lambda M_X^{(1)}(0)}.$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι στο σημείο $t = 0$ η τιμή της ροπογεννήτριας είναι

$$M_X(0) = 1.$$

Κατά συνέπεια, ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b δίνεται από τη σχέση

$$E(K) = \frac{b\lambda}{1 - \lambda\mu}. \tag{5.5}$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε για δεύτερη φορά

$$K_K^{(2)}(t) = \frac{d^2}{dt^2}K_K(t) = \frac{d}{ds}\left(b\frac{(s+\lambda)M_X(s)}{M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)}\right)\frac{ds}{dt},$$

όπου

$$\frac{d}{ds}\left(b\frac{(s+\lambda)M_X(s)}{M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)}\right) =$$

$$\frac{\left[bM_X(s) + b(s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right] - b(s+\lambda)M_X(s)\left[-(s+\lambda)M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^2},$$

οπότε μετά από πράξεις παίρνουμε

$$K_K^{(2)}(t) = \frac{b[M_X(s)]^2 - b(s+\lambda)^2\left[M_X^{(1)}(s)\right]^2 + b(s+\lambda)^2 M_X(s)M_X^{(2)}(s)}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^3}.$$

Θέτοντας και πάλι $t = s = 0$ παίρνουμε

$$K_K^{(2)}(0) = \frac{(b - b\lambda^2\mu^2 + b\lambda^2\mu_2')\lambda}{(1-\lambda\mu)^3} = \frac{b\lambda[1 + \lambda^2(\mu_2' - \mu^2)]}{(1-\lambda\mu)^3}.$$

Συνεπώς, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής K δίνεται από τη σχέση

$$Var(K) = \frac{b\lambda(1 + \lambda^2\sigma^2)}{(1-\lambda\mu)^3}, \tag{5.6}$$

όπου σ^2 η διασπορά των απαιτήσεων.

Τέλος παραγωγίζουμε για τρίτη φορά τη γεννήτρια ημιαναλλοιώτων

$$K_K^{(3)}(t) = \frac{d^3}{dt^3} K_K(t)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{b[M_X(s)]^2 - b(s+\lambda)^2\left[M_X^{(1)}(s)\right]^2 + b(s+\lambda)^2 M_X(s) M_X^{(2)}(s)}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^3}\right)\frac{ds}{dt},$$

όπου η πρώτη από τις παραπάνω παραγώγους ισούται με

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{b[M_X(s)]^2 - b(s+\lambda)^2\left[M_X^{(1)}(s)\right]^2 + b(s+\lambda)^2 M_X(s) M_X^{(2)}(s)}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^3}\right)$$

$$= \frac{3b(s+\lambda)M_X^{(2)}(s)\left[\left(M_X(s)\right)^2 - (s+\lambda)^2\left(M_X^{(1)}(s)\right)^2 + (s+\lambda)^2 M_X(s) M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^4}$$

$$+ \frac{b\left[2M_X(s)M_X^{(1)}(s) - 2(s+\lambda)\left(M_X^{(1)}(s)\right)^2 + 2(s+\lambda)M_X(s)M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^3}$$

$$+ \frac{-b\left[(s+\lambda)^2 M_X^{(1)}(s) M_X^{(2)}(s) - (s+\lambda)^2 M_X(s) M_X^{(3)}(s)\right]}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^3}$$

και

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(s+\lambda)M_X(s)}{M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)}.$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$K_K^{(3)}(t)$$

$$= \frac{3b(s+\lambda)^2 M_X^{(2)}(s) M_X(s)\left[\left(M_X(s)\right)^2 - (s+\lambda)^2\left(M_X^{(1)}(s)\right)^2 + (s+\lambda)^2 M_X(s) M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^5}$$

$$+ \frac{+b(s+\lambda)M_X(s)\left[2M_X(s)M_X^{(1)}(s) - 2(s+\lambda)\left(M_X^{(1)}(s)\right)^2 + 2(s+\lambda)M_X(s)M_X^{(2)}(s)\right]}{\left[M_X(s) - (s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^4}$$

$$+\frac{-b(s+\lambda)M_X(s)\left[(s+\lambda)^2 M_X^{(1)}(s)M_X^{(2)}(s)-(s+\lambda)^2 M_X(s)M_X^{(3)}(s)\right]}{\left[M_X(s)-(s+\lambda)M_X^{(1)}(s)\right]^4}.$$

Για $t=s=0$ η σχέση αυτή γράφεται

$$K_K^{(3)}(0)=\frac{3b\lambda^2\mu_2'(1-\lambda^2\mu^2+\lambda^2\mu_2')}{(1-\lambda\mu)^5}+\frac{b\lambda(2\mu-2\lambda\mu^2+2\lambda\mu_2'-\lambda^2\mu\mu_2'+\lambda^2\mu_3')}{(1-\lambda\mu)^4}.$$

Όπως έχουμε δείξει και στο προηγούμενο κεφάλαιο ισχύει

$$K_K^{(3)}(0)=\kappa_3=E\left[\left(K-E(K)\right)^3\right],$$

άρα

$$E\left[\left(K-E(K)\right)^3\right]=\frac{3b\lambda^2\mu_2'(1-\lambda^2\mu^2+\lambda^2\mu_2')}{(1-\lambda\mu)^5}+\frac{b\lambda(2\mu-2\lambda\mu^2+2\lambda\mu_2'-\lambda^2\mu\mu_2'+\lambda^2\mu_3')}{(1-\lambda\mu)^4}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας της μεταβλητής K λόγω της σχέσης

$$\gamma_1=\frac{E\left[\left(K-E(K)\right)^3\right]}{Var(K)^{3/2}}$$

ισούται με

$$\gamma_1=\frac{\frac{3b\lambda^2\mu_2'(1-\lambda^2\mu^2+\lambda^2\mu_2')}{(1-\lambda\mu)^5}+\frac{b\lambda(2\mu-2\lambda\mu^2+2\lambda\mu_2'-\lambda^2\mu\mu_2'+\lambda^2\mu_3')}{(1-\lambda\mu)^4}}{\left[\frac{b\lambda(1+\lambda^2\sigma^2)}{(1-\lambda\mu)^3}\right]^{3/2}},$$

ενώ μετά από πράξεις, μια απλούστερη μορφή του είναι η ακόλουθη

$$\gamma_1=\frac{3\lambda\mu_2'(1-\lambda^2\mu^2+\lambda^2\mu_2')+(1-\lambda\mu)(2\mu-2\lambda\mu^2+2\lambda\mu_2'-\lambda^2\mu\mu_2'+\lambda^2\mu_3')}{\sqrt{b\lambda(1-\lambda\mu)}\sqrt{(1+\lambda^2\sigma^2)^3}} \qquad (5.7)$$

Παράδειγμα 5.1 Έστω ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο β, τότε οι ροπές 1ης, 2ης, 3ης τάξης και η διασπορά δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\mu=\frac{1}{\beta},\qquad \mu_2'=\frac{2}{\beta^2},\qquad \mu_3'=\frac{6}{\beta^3},\qquad Var(X)=\sigma^2=\frac{1}{\beta^2}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω στη σχέση (5.7) ο συντελεστής ασυμμετρίας του αριθμού των εκθετικών απαιτήσεων πριν την πρώτη διέλευση από το b δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_1 = \frac{2\beta^2\sqrt{\beta}(3\lambda\beta^2 + \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \beta^3)}{\sqrt{b\lambda(\beta-\lambda)}\sqrt{(\beta^4+\lambda^2)^{3/2}}}. \tag{5.8}$$

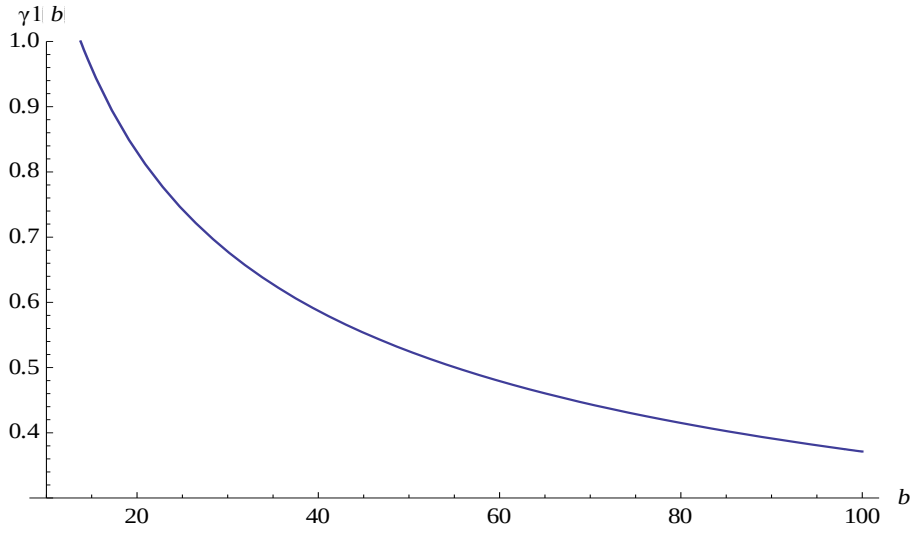
Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη του καθαρού κέρδους για $c = 1$ θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συντελεστή ασυμμετρίας στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Όταν μεταβάλλεται το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας b.

Επιλέγουμε τις τιμές $\lambda = 1, \beta = 2$ και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\gamma_1(b) = \frac{184\sqrt{2}}{17\sqrt{17}\sqrt{b}} \ .$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς b.



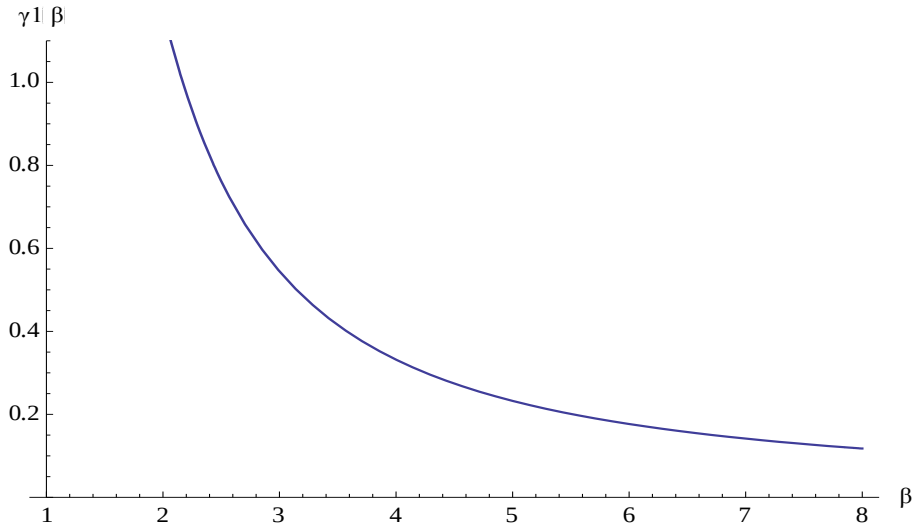
Σχήμα 5.2: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της K για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του b.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της εκθετικής κατανομής β.

Επιλέγουμε τις τιμές $\lambda = 1, b = 10$ και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\gamma_1 = \frac{2\beta^2\sqrt{\beta}(\beta^3 + 3\beta^2 + \beta + 1)}{\sqrt{10(\beta-1)}\sqrt{(\beta^4+1)^3}}.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς β στο $(1, \infty)$. Επίσης το όριό της όταν $\beta \to \infty$ είναι $\lim_{\beta\to\infty} \gamma_1(\beta) = 0$.



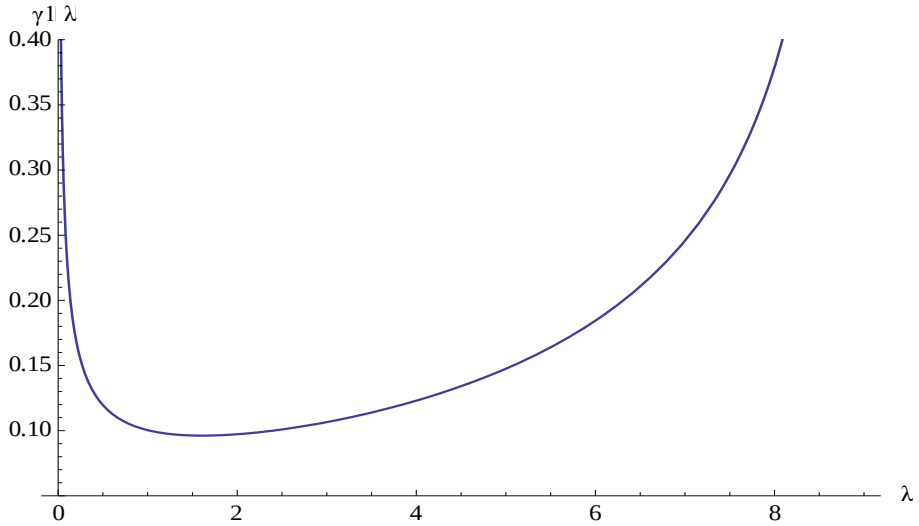
Σχήμα 5.3: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της K για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του β.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της ανέλιξης Poisson λ.

Επιλέγουμε τις τιμές $b = 10, \beta = 9$ και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\gamma_1 = \frac{486(\lambda^3 + 9\lambda^2 + 243\lambda + 729)}{\sqrt{10\lambda(9-\lambda)}\sqrt{(6561+\lambda^2)^3}}.$$

Λόγω της συνθήκης του καθαρού κέρδους, το λ πρέπει να παίρνει τιμές μικρότερες του 9. Από τη μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1.60933)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1.60933,9)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\lambda = 1.60933$ το $\gamma_1(1.60933) = 0.0961677$.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της K για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του λ.

5.2 Χρόνος τελευταίας διέλευσης από το b

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $\tilde{T}_b$ ως τον χρόνο της τελευταίας διέλευσης της ανέλιξης του πλεονάσματος $\{U_t\colon\ t \geq 0\}$ από το σημείο b σύμφωνα με τη σχέση

$$\tilde{T}_b = sup\{t\colon\ U_t = b\}.$$

Δοθέντος του S_k, η δεσμευμένη πιθανότητα για μια διέλευση από το b μεταξύ της κ-οστής και της (κ+1)-οστής απαίτησης είναι

$$P(U(S_k + b) = b|S_k) = \frac{\lambda^k (S_k + b)^k}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)},\ \ k = 0,1,2, \ldots.$$

Με τη δέσμευση ότι αυτή θα είναι η τελευταία διέλευση από το b, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $1 - \lambda\mu$ ενώ στη συνέχεια το πλεόνασμα τείνει στο άπειρο ως συνέπεια του νόμου των μεγάλων αριθμών (αφού υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους). Έτσι έχουμε

$$P\left(\tilde{T}_b = S_k + b\middle|S_k\right) = \frac{\lambda^k (S_k + b)^k}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}(1 - \lambda\mu),\ \ k = 0,1,2, \ldots.$$

Συνεπώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $\tilde{T}_b$ ισούται με

$$M_{\tilde{T}_b}(r) = E\left(e^{r\tilde{T}_b}\right) = (1 - \lambda\mu) \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^k}{k!} e^{-\lambda(S_k+b)}\right],\ \ r \leq 0.$$

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση (5.3) ως προς r παίρνουμε

$$M_{T_b}^{(1)}(r) = \frac{d}{dr}\left\{b \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^{k-1}}{k!} e^{-(\lambda-r)(S_k+b)}\right]\right\}$$

$$= b \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{\lambda^k (S_k + b)^k}{k!} e^{-(\lambda-r)(S_k+b)}\right].$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με τη ποσότητα $(1 - \lambda\mu)$ καταλήγουμε στη σχέση

$$M_{\tilde{T}_b}(r) = \frac{1 - \lambda\mu}{b} M_{T_b}^{(1)}(r)$$

ή διαφορετικά

$$E\left(e^{r\tilde{T}_b}\right) = \frac{1 - \lambda\mu}{b} \frac{d}{dr} E(e^{rT_b}).$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις της Πρότασης 3.1 για $c = 1$

$$E(e^{rT_b}) = e^{sb},$$

$$r(s) = s - \lambda(M_X(s) - 1),$$

η ροπογεννήτρια της τ.μ $\tilde{T}_b$ γράφεται

$$E\left(e^{r\tilde{T}_b}\right) = \frac{1 - \lambda\mu}{1 - \lambda M_X^{(1)}(s)} e^{sb}. \tag{5.9}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$D = \tilde{T}_b - T_b$$

να είναι ο χρόνος μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b οπότε

$$\tilde{T}_b = T_b + D.$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των τ.μ T_b , D η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ $\tilde{T}_b$ γράφεται

$$M_{\tilde{T}_b}(r) = M_{T_b}(r) M_D(r).$$

Συνεπώς, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ D είναι

$$M_D(r) = \frac{E\left(e^{r\tilde{T}_b}\right)}{E\left(e^{rT_b}\right)},$$

ενώ, λόγω των σχέσεων (3.1) , (5.9), ισούται με

$$M_D(r) = \frac{1 - \lambda\mu}{1 - \lambda M_X^{(1)}(s)}. \tag{5.10}$$

Η γεννήτρια ημιαναλλοίωτων της τ.μ D είναι

$$K_D(r) = \ln M_D(r) = \ln\left(\frac{1 - \lambda\mu}{1 - \lambda M_X^{(1)}(s)}\right) = \ln(1 - \lambda\mu) - \ln\left(1 - \lambda M_X^{(1)}(s)\right).$$

Παραγωγίζοντας πρώτη φορά παίρνουμε

$$K_D^{(1)}(r) = \frac{d}{dr} K_D(r) = \frac{d}{ds}\left[\ln(1 - \lambda\mu) - \ln\left(1 - \lambda M_X^{(1)}(s)\right)\right]\frac{ds}{dr}.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}\left(s - \lambda(M_X(s) - 1)\right),$$

οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$K_D^{(1)}(r) = \frac{\lambda M_X^{(2)}(s)}{\left[1 - \lambda M_X^{(1)}(s)\right]^2}$$

και θέτοντας $r = s = 0$, βρίσκουμε τη μέση τιμή της μεταβλητής D

$$E(D) = \frac{\lambda\mu_2'}{(1-\lambda\mu)^2}. \tag{5.11}$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά τη συνάρτηση $K_D(r)$ προκύπτει ότι

$$K_D^{(2)}(r) = \frac{d^2}{dr^2}K_D(r) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda M_X^{(2)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^2}\right)\frac{ds}{dr}$$

$$= \frac{\lambda M_X^{(3)}(s)\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^2 + 2\lambda^2\left[M_X^{(2)}(s)\right]^2\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4}\frac{1}{1-\lambda M_X^{(1)}(s)}$$

$$= \frac{\lambda M_X^{(3)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3} + \frac{2\lambda^2\left[M_X^{(2)}(s)\right]^2}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4}.$$

Θέτοντας $r = s = 0$ παίρνουμε τη διασπορά της τ.μ D

$$Var(D) = \frac{\lambda\mu_3'}{(1-\lambda\mu)^3} + \frac{2\lambda^2(\mu_2')^2}{(1-\lambda\mu)^4}. \tag{5.12}$$

Τέλος, παραγωγίζοντας για τρίτη φορά έχουμε

$$K_D^{(3)}(r) = \frac{d^3}{dr^3}K_D(r) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda M_X^{(3)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3} + \frac{2\lambda^2\left[M_X^{(2)}(s)\right]^2}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4}\right)\frac{ds}{dr}$$

$$= \left\{\frac{\lambda M_X^{(4)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^3} + \frac{7\lambda^2 M_X^{(2)}(s)M_X^{(3)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4} + \frac{8\lambda^3\left(M_X^{(2)}(s)\right)^3}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^5}\right\}\frac{1}{1-\lambda M_X^{(1)}(s)}$$

$$= \frac{\lambda M_X^{(4)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^4} + \frac{7\lambda^2 M_X^{(2)}(s)M_X^{(3)}(s)}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^5} + \frac{8\lambda^3\left(M_X^{(2)}(s)\right)^3}{\left[1-\lambda M_X^{(1)}(s)\right]^6}$$

και θέτοντας $r = s = 0$, παίρνουμε

$$K_D^{(3)}(0) = \frac{\lambda\mu_4'}{(1-\lambda\mu)^4} + \frac{7\lambda^2\mu_2'\mu_3'}{(1-\lambda\mu)^5} + \frac{8\lambda^3(\mu_2')^3}{(1-\lambda\mu)^6}.$$

Κατά συνέπεια, η κεντρική ροπή τρίτης τάξης ισούται με

$$E\left[\left(D-E(D)\right)^3\right]=\frac{\lambda\mu_4'}{(1-\lambda\mu)^4}+\frac{7\lambda^2\mu_2'\mu_3'}{(1-\lambda\mu)^5}+\frac{8\lambda^3(\mu_2')^3}{(1-\lambda\mu)^6}.$$

Κάνοντας χρήση της τελευταίας σχέσης και της σχέσης (5.12) βρίσκουμε ότι

$$\gamma_1=\frac{\frac{\lambda\mu_4'}{(1-\lambda\mu)^4}+\frac{7\lambda^2\mu_2'\mu_3'}{(1-\lambda\mu)^5}+\frac{8\lambda^3(\mu_2')^3}{(1-\lambda\mu)^6}}{\left[\frac{\lambda\mu_3'}{(1-\lambda\mu)^3}+\frac{2\lambda^2(\mu_2')^2}{(1-\lambda\mu)^4}\right]^{3/2}}.$$

Τελικά, μετά από κατάλληλες πράξεις, ο συντελεστής ασυμμετρίας της D δίνεται από τον τύπο

$$\gamma_1=\frac{\lambda[8\lambda^2(\mu_2')^3+7\lambda\mu_2'\mu_3'(1-\lambda\mu)+\mu_4'(1-\lambda\mu)^2]}{[\lambda\mu_3'(1-\lambda\mu)+2\lambda^2(\mu_2')^2]^{3/2}}. \tag{5.13}$$

Έχει ενδιαφέρον στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας της τ.μ D είναι ανεξάρτητος από το επιδιωκόμενο πλεόνασμα της εταιρείας.

Παράδειγμα 5.2 Έστω ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο β, τότε οι ροπές 1ης, 2ης, 3ης τάξης και η διασπορά δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\mu=\frac{1}{\beta},\qquad \mu_2'=\frac{2}{\beta^2},\qquad \mu_3'=\frac{6}{\beta^3},\qquad \mu_4'=\frac{24}{\beta^4}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (5.13) ο συντελεστής ασυμμετρίας του χρόνου μεταξύ πρώτης και τελευταίας διέλευσης από το b δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{2}\lambda(6\beta^2+9\lambda\beta+\lambda^2)}{\sqrt{[\lambda(\lambda+3\beta)]^3}}. \tag{5.14}$$

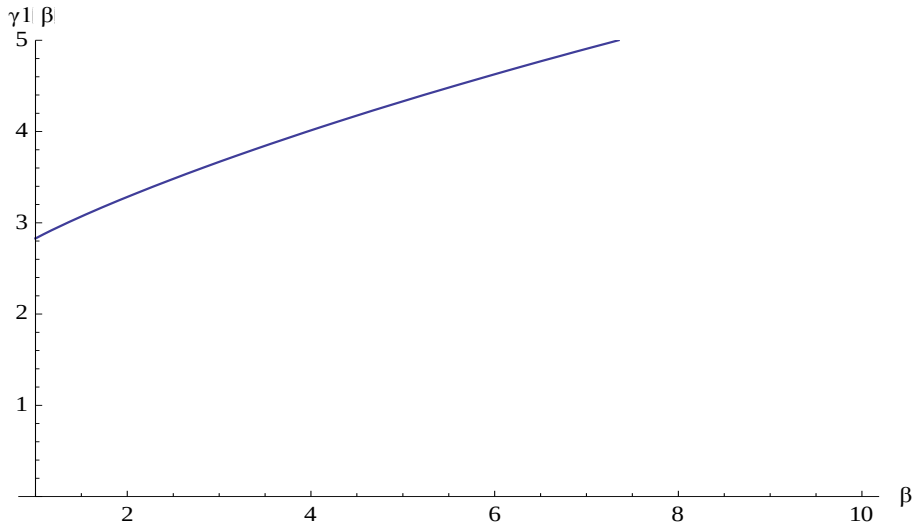
Στη συνέχεια, όπως και στο παράδειγμα 5.1, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συντελεστή ασυμμετρίας για $c=1$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της εκθετικής κατανομής β.

Αν επιλέξουμε $\lambda=1$ ο συντελεστής ασυμμετρίας γράφεται

$$\gamma_1(\beta)=\frac{\sqrt{2}(1+9\beta+6\beta^2)}{\sqrt{(1+3\beta)^3}}$$

και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,\infty)$.



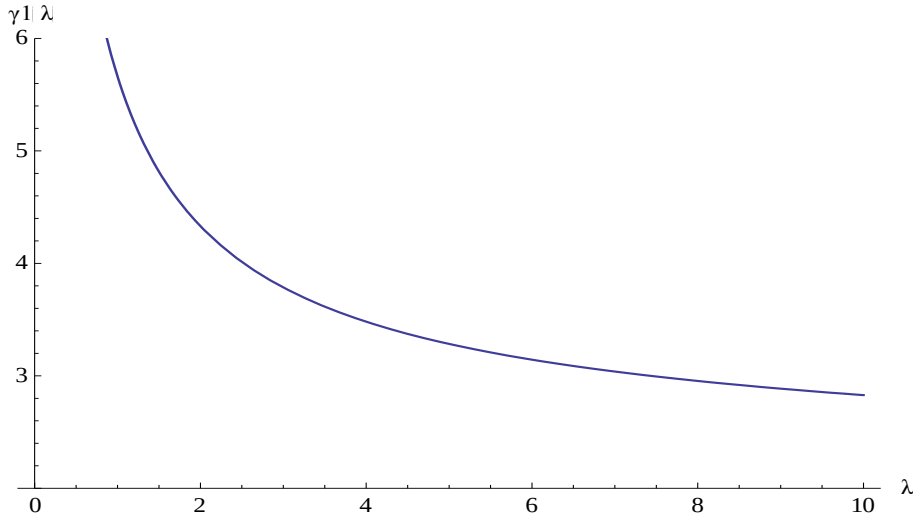
Σχήμα 5.5: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της D για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του β.

- Όταν μεταβάλλεται η παράμετρος της ανέλιξης Poisson λ.

Αν επιλέξουμε $\beta = 10$ ο συντελεστής ασυμμετρίας γράφεται

$$\gamma_1(\lambda) = \frac{\sqrt{2}(\lambda^2 + 90\lambda + 600)}{\sqrt{[\lambda(\lambda + 30)]^3}}.$$

Με δεδομένο ότι $c = 1$ από τη συνθήκη του καθαρού κέρδους το λ μπορεί να παίρνει τιμές μικρότερες του 10. Όπως φαίνεται και στο σχήμα ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς λ στο (0,10).



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα του συντελεστή ασυμμετρίας της D για εκθετικές απαιτήσεις συναρτήσει του λ.

5.3 Διάρκεια μεταξύ των επιτυχών διελεύσεων από το b

Η διάρκεια μεταξύ της πρώτης και της τελευταίας διέλευσης από το b μπορεί να εκφραστεί ως τυχαίο άθροισμα

$$D = \sum_{i=1}^{N} D_i,$$

όπου D_n είναι ο χρόνος μεταξύ της n-οστής και (n+1)-οστής διέλευσης από το b και $N + 1$ ο αριθμός των διελεύσεων από το b, όπως έχει δοθεί από τον Gerber (1990).

Με βάση την παραπάνω έκφραση μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ D_1 κάνοντας χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης της τ.μ D.

Οι $D_1, D_2, \ldots$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και τυχαίων μεταβλητών με την ίδια κατανομή και N μία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη από τις $D_i, i = 1,2, \ldots$, και παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές. Εφόσον η N ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N = n) = (1 - \lambda\mu)(\lambda\mu)^n, \qquad n = 0,1,2, \ldots,$$

η μεταβλητή D ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή.

Αν $M_{D_i}(r)$, $M_N(r)$, $M_D(r)$ οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις των μεταβλητών D_i, N, D αντίστοιχα τότε (Πολίτης 2012)

$$\begin{aligned} M_D(r) = E(e^{rD}) &= E_N\big(E_D(e^{rD}|N = n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)E(e^{rD}|N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)E\big(e^{r(D_1+D_2+\cdots+D_n)}\big), \end{aligned}$$

όπου οι D_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες συνεπώς

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)\left(M_{D_1}(r)\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)\left(e^{\ln M_{D_1}(r)}\right)^n \\ &= E_N\big(e^{\ln M_{D_1}(r)N}\big) \\ &= M_N\big(\ln M_{D_1}(r)\big). \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια μιας γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $(1-\lambda\mu)$ δίνεται από τη σχέση

$$M_N(r) = \frac{1-\lambda\mu}{1-\lambda\mu e^r}, \qquad r < -\ln\lambda\mu$$

οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε ότι

$$M_D(r) = \frac{1-\lambda\mu}{1-\lambda\mu e^{\ln M_{D_1}(r)}} = \frac{1-\lambda\mu}{1-\lambda\mu M_{D_1}(r)}.$$

Σύμφωνα όμως με τη σχέση (5.10)

$$M_D(r) = \frac{1-\lambda\mu}{1-\lambda M_X^{(1)}(r)}$$

η ροπογεννήτρια της D_1 γράφεται

$$M_{D_1}(r) = \frac{M_X^{(1)}(r)}{\mu}.$$

Παράρτημα

Βασικές έννοιες στη θεωρία των martingales

Στο Παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν μία ειδική κλάση στοχαστικών ανελίξεων, τις *ανελίξεις martingales*, οι οποίες είναι πολύ σημαντικές σε πολλούς κλάδους των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων, αλλά και στα μαθηματικά μοντέλα της χρηματοοικονομικής.

Το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής θεωρίας των martingales οφείλεται στον Αμερικανό πιθανοθεωρητικό Doob, αν και η βασική ιδέα φαίνεται ότι ήταν γνωστή από την εποχή του Bachelier, στις αρχές του εικοστού αιώνα.

Σύμφωνα με τις σημειώσεις του Γιαννακόπουλου "Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική" (2003), παραθέτουμε τις ακόλουθες βασικές έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη θεμάτων που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 2.

Ορισμός 1 Έστω Ω κάποιο σύνολο. Μια *σ-άλγεβρα* Σ επάνω στο Ω είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, με τις παρακάτω ιδιότητες

(i) $\emptyset \in \Sigma$,
(ii) $E \in \Sigma$ τότε $E^c \in \Sigma$,
(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ τότε $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Οι σ-άλγεβρες συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν δομές πληροφορίας.

Ορισμός 2 *Μετρήσιμος χώρος* ονομάζεται ένα ζεύγος (Ω, Σ), όπου Ω είναι ένα σύνολο και Σ είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

Ορισμός 3 Ένα *μέτρο πιθανότητας* P επάνω σε έναν μετρήσιμο χώρο(Ω, Σ) είναι μία απεικόνιση $P: \Sigma \to [0,1]$ με τις ιδιότητες

(i) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$,
(ii) αν $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ και τα $\{A_i\}$ είναι ανά δύο ξένα, τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ορισμός 4 Αν θεωρήσουμε ένα σύνολο Ω, μία σ-άλγεβρα Σ και ένα μέτρο πιθανότητας P τότε η τριάδα (Ω, Σ, P) καλείται *χώρος πιθανοτήτων*.

Ορισμός 5 Έστω Ω κάποιο σύνολο. Η συνάρτηση $f : \Omega \to R^d$ καλείται Σ *−μετρήσιμη* αν

$$f^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \,;\, f(\omega) \in U\} \in \Sigma$$

για κάθε ανοικτό σύνολο $U \in R^d$.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση f είναι Σ −μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του R^d, κάτω από τη συνάρτηση αυτή, ανήκει στην σ-άλγεβρα Σ.

Ορισμός 6 Μία οικογένεια σ-αλγεβρών $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ καλείται μία *διύλιση (filtration)* στον (Ω, Σ) αν ισχύει ότι

$$s \leq t \underset{s,t\in I}{\Longrightarrow} \Sigma_s \subset \Sigma_t.$$

Ενώ η σ-άλγεβρα $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή t, μία διύλιση μπορεί να θεωρηθεί ως μία αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος.

Ορισμός 7 Μια *διύλιση* καλείται *δεξιά συνεχής* αν ισχύει ότι

$$\Sigma_t = \Sigma_{t+} := \cap_{s>t} \Sigma_s.$$

Ορισμός 8 Μια στοχαστική ανέλιξη $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ καλείται *προσαρμοσμένη (adapted)* σε μία διύλιση $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ αν για κάθε $t \geq 0$ η Y_t είναι Σ_t− μετρήσιμη.

Συμβολισμός : $\Sigma^Y = \langle \Sigma_t^Y \rangle_{t\geq 0}$

(Η Y είναι Σ_t − μετρήσιμη αν και μόνο αν $\Sigma_t^Y \subset \Sigma_t$ για κάθε $t \geq 0$).

Αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία η οποία αφορά στη στοχαστική ανέλιξη Y_t μέχρι τη χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ-άλγεβρα Σ_t.

Μπορούμε τώρα, θεωρώντας ότι η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας και ότι το διάστημα I είναι υποσύνολο του $[0, \infty)$, να ορίσουμε μία σημαντική κατηγορία στοχαστικών ανελίξεων τις martingales.

Ορισμός 9 Μια στοχαστική ανέλιξη $M = \{M_t : t \geq 0\}$ καλείται *martingale* ως προς την διύλιση $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ ή ένα $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ − *martingale* αν

(i) η M_t είναι προσαρμοσμένη στην $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$,
(ii) $E(|M_t|) < \infty$,
(iii) $E(M_t|\Sigma_s) = M_s, \quad s \leq t \quad \sigma.\beta.$ (αν είναι $\leq$ καλείται *υπέρ-martingale* ενώ αν είναι $\geq$ καλείται *υπό- martingale).*

Συνεπώς, σε μια martingale η πληροφορία που περιέχεται στην Σ_s δεν θα μας βοηθήσει να προβλέψουμε τίποτα σχετικά με το μέλλον της στοχαστικής ανέλιξης M_t.

Ορισμός 10 Ένα $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ − *martingale (υπέρ-martingale) M* καλείται *δεξιά συνεχής,* αν η διύλιση $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in I}$ είναι δεξιά συνεχής.

Μία χρήσιμη ιδιότητα των martingales ως προς τη μέση τιμή είναι η εξής.

Θεώρημα 1 Αν η M_t είναι μια martingale τότε

(α) $E[M_t] = E[M_0]$

(β) $E[M_t - M_s] = 0$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μία πολύ σημαντική κατηγορία τυχαίων χρόνων, τους χρόνους στάσης.

Ορισμός 11 Μια τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to I \cup \{+\infty\}$ καλείται *χρόνος στάσης (stopping time)* ως προς την διύλιση $\langle \Sigma_t \rangle_{t \in I,}$ αν ισχύει

$$\{T \leq t\} \in \Sigma_t, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t \in I.$$

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή T είναι ένας χρόνος στάσης αν η τιμή της μπορεί να καθοριστεί από τη γνώση της στοχαστικής ανέλιξης μόνο κατά το παρελθόν (την οποία "εκφράζει" η σ-άλγεβρα Σ_t) και δεν χρειάζεται πληροφορία από το μέλλον. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ένας χρόνος στάσης είναι η πρώτη φορά που θα συμβεί ένα γεγονός.

Η *επιλεκτική στάση (optional stopping)* μας δίνει πληροφορία σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί αν σταματήσουμε μια (υπέρ/υπό) martingale σε κάποιο χρόνο T.

Ορισμός 12 Αν T είναι ένας χρόνος στάσης τότε μπορούμε να ορίσουμε την *σταματημένη ανέλιξη* $X_t^T := X_{t \wedge T}$.

Είναι προφανές ότι η σταματημένη ανέλιξη X_t^T έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την X_t μέχρι τον χρόνο στάσης T, ενώ μετά η X_t^T είναι "παγωμένη" στην τιμή X_T, δηλαδή

$$X_t^T := X_{t \wedge T} = \begin{Bmatrix} X_t, & t \leq T \\ X_T, & t > T \end{Bmatrix}.$$

Θεώρημα 2 *Μια σταματημένη martingale είναι επίσης martingale.*

(i) Αν M_t είναι μία martingale ως προς μία διύλιση Σ_t και T ένας χρόνος στάσης ως προς την ίδια διύλιση τότε η σταματημένη ανέλιξη $M_t^T = M_{t \wedge T}$ είναι και αυτή μια martingale ως προς την ίδια διύλιση. Συνεπώς ισχύει $E[M_{t \wedge T}] = E[M_0]$.

(ii) Αν M_t είναι μία υπέρ (υπό)-martingale τότε η σταματημένη ανέλιξη είναι επίσης μία υπέρ (υπό)-martingale. Συνεπώς ισχύει $E[M_{t \wedge T}] \leq (\geq) E[M_0]$.

Παρατήρηση 1 Για την απόδειξη του θεωρήματος σε συνεχή χρόνο είναι απαραίτητο η martingale M_t να ικανοποιεί την ιδιότητα της δεξιάς συνέχειας.

Παρατήρηση 2 Είναι επιτρεπτό να πάρουμε το όριο $t \to \infty$, να αντιστρέψουμε την σειρά της μέσης τιμής και του ορίου και να καταλήξουμε ότι $E[M_T] = E[M_0]$ όταν ο T είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1.(σχεδόν βέβαια).

Θεώρημα 3 Έστω M μια (υπέρ/υπό)-martingale και T ένας χρόνος στάσης. Τότε η M_T είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $E[M_T] = E[M_0]$ ($\leq$), αν ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες συνθήκες

1. $T < \infty$ σ.β.
2. M_T ολοκληρώσιμη
3. $E\left[M_n \mathbf{1}_{\{T>n\}}\right] \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Βιβλιογραφία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Αλικάκος Ν., Καλογερόπουλος Γ., *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2003.
2. Γιαννακόπουλος Α., *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2003.
3. Μαχαιράς Ν., *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2006.
4. Πολίτης Κ., *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*, εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα, 2012.
5. Πολίτης Κ., *Σημειώσεις στο μάθημα: Θεωρία Κινδύνου ΙΙ*, ΠΜΣ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2013.
6. Χαραλαμπίδης Χ., *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Τεύχος 1*, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1990.
7. Χαραλαμπίδης Χ., *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Τεύχος 2,* εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1991.
8. Χρυσαφίνου Ο., *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις,* εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη, 2008.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Dickson D.C.M, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, UK, 2005.
2. Dickson D.C.M., Waters H.R., *Some optimal dividends problems*, ASTIN Bulletin, 34, 49-74, 2004.
3. Dickson D.C.M., Gray J.R., *Approximations to Ruin Probability in the Presence of an Upper Absorbing Barrier*, Scandinavian Actuarial Journal,105-115, 1984.
4. Gerber H.U., *When does the surplus reach a given target?*, Insurance: Mathematics and Economics, 9, 115-119, 1990.
5. Gerber H.U., *Mathematical fun with ruin theory*, Insurance: Mathematics and Economics, 7, 15-23, 1988.
6. Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stohastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, 1999.

ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

1. Schmidli H., *Lecture notes on Risk Theory*. www.math.ku.dk/-schmidli/rt, τελευταία επίσκεψη 2015.
2. *Continuous-Time Martingales, Chapter 7.* http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209013347185177.pdf, τελευταία επίσκεψη 2015.
3. *Moments and Generating Functions.* http://math.arizona.edu/~jwatkins/h-moment.pdf, τελευταία επίσκεψη 2015.