ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ιδιότητες της από κοινού κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Αικατερίνη Β. Μετζάκη

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων του για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Μάιος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμόν .... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν

- Ψαρράκος Γεώργιος
- Πιτσέλης Γεώργιος
- Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Some properties of the joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin

Aikaterini V. Metzaki

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
May 2015

Στους γονείς μου,

Βασίλη και Ελένη

Ευχαριστίες

Καθ’ όλη τη διάρκεια μελέτης και συγγραφής της διπλωματικής εργασίας, αγαπημένα πρόσωπα στήριξαν την προσπάθεια αυτή και σε αυτό το σημείο θα ήθελα να τα ευχαριστήσω. Ευχαριστώ, τους γονείς μου, που πάντα με αγάπη, στηρίζουν τις αποφάσεις μου σε όλα τα βήματα της ζωής μου, τον σύντροφο μου, ο οποίος είναι πάντα εκεί για μένα, και τις αγαπημένες φίλες, που με την θετική τους ενέργεια, με βοήθησαν να ξεπεράσω κάθε δυσκολία.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, τον Επίκουρο Καθηγητή, Γεώργιο Ψαρράκο, ο οποίος με τις παρατηρήσεις και τις συμβουλές του, με καθοδήγησε στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, μελετάμε την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Σκοπός μας είναι να δώσουμε ακριβείς εκφράσεις των σ.π.π. των τ.μ. και στα δύο μοντέλα της θεωρίας κινδύνων, το κλασικό και το ανανεωτικό.

Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία για θετικό ανατοκισμό για το κλασικό μοντέλο, καθώς και για το ανανεωτικό σε μία πιο γενική μορφή, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase - type κατανομές. Επίσης θα ασχοληθούμε με τη μελέτη του ανανεωτικού, όταν δεν έχουμε θετική ένταση ανατοκισμού, για ειδικές περιπτώσεις, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν Erlang(2,2) κατανομή, γενικευμένη Erlang αλλά και phase - type (2).

Σε κάθε περίπτωση, εφαρμόζουμε παραδείγματα, για την κατανόηση της μεθοδολογίας υπολογισμού των σ.π.π. που μας ενδιαφέρουν, για να επισημάνουμε παρατηρήσεις ως προς την συνέχεια των συναρτήσεων, καθώς επίσης για τη σύγκριση των μοντέλων της θεωρίας κινδύνων.

Abstract

In the present Dissertation, we study the joint distribution of the time of ruin, the surplus before ruin and the deficit at ruin. The object of view is to give explicit formulas of the density functions of the random variables in both, classical and renewal, models of ruin theory.

In particular, we are going to examine the joint distribution of the surplus before ruin and the deficit at ruin for positive force of interest, for the classical model, moreover for the renewal, in a more general form, while the distribution of interclaim times and claims are phase - type. Also, we are going to be involved in the study of the renewal model, when there is zero forse of interest, in explicitly occasions, while the distribution of interclaim times, is Erlang (2,2), generilised Erlang and also phase- type (2).

In each case, we give examples, to illustrate the derivation of the functions we are interested in, to highlight important comments on the continuation of the functions, as well as to compare the two models of ruin theory.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Συντομογραφίες - Συμβολισμοί

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

τ.μ. τυχαία μεταβλητή
σ.π.π. συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ. συνάρτηση κατανομής

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Πίνακας ελληνικών συμβολισμών

β	το διάνυσμα γραμμή, η αρχική συνάρτηση πιθανότητας της ακολουθίας $\{J_t\}$ (διάνυσμα ρυθμού εισόδου)
δ	η ένταση ανατοκισμού
$\delta(u)$	πιθανότητα μη-χρεοκοπίας
ζ	ο χρόνος απορρόφησης
θ	το περιθώριο ασφαλείας
λ	η ένταση της ανέλιξης Poisson (ο ρυθμός με τον οποίο έρχονται οι αποζημιώσεις)
μ_1	η μέση τιμή αποζημίωσης$E(X_1)$
ρ	η θετική λύση της εξίσωσης Lundberg
$\phi(u)$	η αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής
$\psi(u)$	η πιθανότητα χρεοκοπίας
$\psi_\delta(u)$	η πιθανότητα χρεοκοπίας με θετική ένταση ανατοκισμού

Πίνακας λατινικών συμβολισμών

B	υποπίνακας τάσεων, ή πίνακας ρυθμού μετάβασης
b	το διάνυσμα ρυθμού εξόδου
$F(x, y, t \mid u)$	η από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας
$f(x, y, t \mid u)$	η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας
$f(x \mid u)$	η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία
$g(y \mid 0)$	η ελλειμματική σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με $u = 0$ ή ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών
$H(x)$	η σ.κ. των κλιμακωτών υψών
$h(x)$	η σ.π.π. των κλιμακωτών υψών ή η σ.π.π. του ελλείμματος δεδομένου ότι θα συμβεί χρεοκοπία
$\hat{h}(s)$	μετασχηματισμός Laplace (-Stieljes) της σ.π.π. των κλιμακωτών υψών
$K(t)$	η σ.κ. των ενδιάμεσων χρόνων
$k(t)$	η σ.π.π. των ενδιάμεσων χρόνων
$\hat{k}(s)$	μετασχηματισμός Laplace (-Stieljes) της σ.π.π. των ενδιάμεσων χρόνων
L	μέγιστη σωρευτική απώλεια
L_i	κλιμακωτό ύψος
m_1	μέση τιμή ενδιάμεσου χρόνου $E(T_1)$
$P(x)$	η συνάρτηση κατανομής των αποζημιώσεων
$p(x)$	η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων
$\hat{p}(s)$	μετασχηματισμός Laplace (-Stieljes) της σ.π.π. των αποζημιώσεων
$\overline{P}(x)$	η ουρά της σ.κ. των αποζημιώσεων
R	ο συντελεστής προσαρμογής
T	ο χρόνος χρεοκοπίας
u	το αρχικό αποθεματικό
$U(t)$	η τ.μ. του πλεονάσματος
$U(T-)$	το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία
$\lvert U(T)\rvert$	το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

Πρόλογος

Έστω μία ασφαλιστική εταιρεία, η οποία διαθέτει ένα χαρτοφυλάκιο με ασφαλιστήρια συμβόλαια. Η εταιρεία ενδιαφέρεται, η ποσότητα "έσοδα-έξοδα" να είναι είναι μία θετική ποσότητα. Την ποσότητα αυτή ονομάζουμε πλεόνασμα. Το πλεόνασμα περιγράφεται από την εξής συνάρτηση

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$$

όπου, $u \geq 0$ είναι το αρχικό ποσό που χρειάστηκε για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου το οποίο με το πέρασμα του χρόνου αυξάνεται κάθε χρονική στιγμή κατά c, μειωμένο κατά το άθροισμα των αποζημιώσεων, X_i , τις οποίες πρέπει να πληρώσει. Το c συμβολίζει το ασφάλιστρο που καταθέτει κάθε ασφαλισμένος, και η χρονική στιγμή ορίζεται ο μήνας, το τρίμηνο, το εξάμηνο ή ο χρόνος ανάλογα με την συμφωνία του συμβολαίου.

Στη μελέτη του πλεονάσματος δύο τ.μ. οι οποίες το περιγράφουν, είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία το οποίο συμβολίζεται με $U(T-)$, και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, το οποίο συμβολίζεται με $|U(T)|$. Εμείς, μελετάμε τη κατανομή κάθε μίας ξεχωριστά, αλλά και την από κοινού κατανομή τους, στο κλασικό και ανανεωτικό μοντέλο, της θεωρίας κινδύνου.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα εισάγουμε βασικές έννοιες του κλασικού και του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων. Θα ορίσουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος, τη πιθανότητα χρεοκοπίας όπως επίσης τις τ.μ. που θα μελετήσουμε, το χρόνο χρεοκοπίας, το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Τέλος θα αναφέρουμε και τη συνάρτηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής (Gerber -Shiu) η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στη εργασία αυτή.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται, την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η παραγωγή ακριβής έκφρασης της προεξοφλημένης από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, σύμφωνα με μία έκφραση της παραπάνω συνάρτησης. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης αυτής, υπάρχουν κάποια βήματα. Σημαντικό ρόλο, έχει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, θεωρώντας ως μεταβλητή του μετασχηματισμού την ένταση ανατοκισμού. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, βρίσκουμε ακριβείς εκφράσεις για τις προεξοφλημένες σ.π.π. των τ.μ., που μελετάμε, με μηδενικό αρχικό αποθεματικό. Στη συνέχεια δίνουμε το γενικευμένο τύπου του Beekman (1974) για θετική ένταση ανατοκισμού, από τον οποίο υπολογίζουμε την συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, και σύμφωνα με αυτόν αλλά και την προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία με μηδενικό αποθεματικό, υπολογίζουμε τη γενικευμένη μορφή του τύπου του Dickson (1992). Από τον τύπο αυτό, υπολογίζουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, στον οποίο βασιζόμαστε τελικά για τον υπολογισμό της ακριβής έκφρασης της προεξοφλημένης από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία. Την χρήση των τύπων για την παραγωγή της από κοινού σ.π.π., θα δούμε μέσα από παραδείγματα, που δίνονται στο τέλος του κεφαλαίου.

Για το τρίτο κεφάλαιο, υπολογίζουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, για το ανανεωτικό μοντέλο, αποδεικνύοντας ότι ο τύπος του Dickson (1992) για το κλασικό μοντέλο, ισχύει και στο ανανεωτικό. Στο κεφάλαιο αυτό, για να βρούμε την ακριβή έκφραση της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, υπολογίζουμε τη πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, για την ειδική περίπτωση της Erlang (2). Στο τέλος του κεφαλαίου θα συγκρίνουμε τη σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις, ακολουθούν Erlang (2,2) στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε, την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ή και οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase-type κατανομές. Στην αρχή του κεφαλαίου, κάνουμε μία μικρή εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα, έτσι ώστε να μπορούμε να διαγωνιοποιήσουμε ένα τετραγωνικό πίνακα, και στη συνέχεια, παραθέτουμε βασικές έννοιες, ιδιότητες και θεωρήματα για τις phase-type κατανομές. Στις επόμενες παραγράφους, παράγουμε ακριβείς εκφράσεις της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία για $\delta = 0$, καθώς και των περιθώριων αυτών, για την γενικευμένη Erlang και phase-type (2) κατανομές. Κλείνουμε το κεφάλαιο , και την εργασία αυτή με τη μελέτη της προεξοφλημένης από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία για το ανανεωτικό μοντέλο. Στη παράγραφο αυτή, παράγουμε έναν τύπο της εξίσωσης Lundberg σε μορφή πινάκων, στη συνέχεια υπολογίζουμε ένα τύπο για την προεξοφλημένη σ.π.π. για $u = 0$ αρχικό αποθεματικό, τις ανανεωτικές εξισώσεις των σ.π.π. , και τέλος δίνεται ο τύπος του Dickson για phase-type κατανομές.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι, όλα τα παραδείγματα είναι λυμένα, με τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου Mathematica.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε βασικές έννοιες της θεωρίας χρεοκοπίας. Θα αναφερθούμε σε δύο μοντέλα της θεωρίας χρεοκοπίας, στο κλασικό μοντέλο και στη γενίκευση αυτού, το ανανεωτικό μοντέλο ή αλλιώς Sparre-Andersen. Για το κλασικό μοντέλο, θα παραθέσουμε τον τύπο του Dickson (1992), και θα κλείσουμε το κεφάλαιο με την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και τις ιδιότητες της. Η θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, είναι βασισμένη στους Πολίτη (2014), Χρυσαφίνου (2008) και Dickson (1992).

1.1 Ανελίξεις

Έχουμε στη διάθεση μας ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστήριων συμβολαίων, το οποίο παρακολουθούμε στη διάρκεια του χρόνου. Για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο, η εταιρεία λαμβάνει ένα ασφάλιστρο c, το οποίο είναι σταθερό, στη μονάδα του χρόνου και για κάθε απαίτηση η εταιρεία δίνει μία αποζημίωση μεγέθους X_i, για $i = 1, 2, \ldots$. Για την ομαλή λειτουργία του χαρτοφυλακίου μας ενδιαφέρει τα *έσοδα-έξοδα* να είναι μία θετική ποσότητα. Την ποσότητα αυτή μελετάμε στη διάρκεια του χρόνου. Οι ποσότητες που μεταβάλλονται στο χρόνο και λαμβάνουν τυχαίες τιμές, ονομάζονται στοχαστικές ανελίξεις.

Πρόταση 1.1.1 *Μία στοχαστική ανέλιξη είναι μία οικογένεια τ.μ.* $\{X_t : t \in T\}$ *όπου* T *είναι ένα σύνολο.*

Παρατήρηση 1.1.1 *Αντί για* $\{X_t : t \in T\}$ *πολλές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός* $\{X(t) : t \in T\}$.

Στη παρούσα εργασία, με t συμβολίζουμε το χρόνο. Αν ο χρόνος, παίρνει διακριτές τιμές (το σύνολο T είναι αριθμήσιμο) τότε μιλάμε για μία στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Ενώ αν το T είναι μη αριθμήσιμο σύνολο, τότε έχουμε μία στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

Οι στοχαστικές ανελίξεις, διακρίνονται επίσης ανάλογα με το πλήθος των τιμών για το X_i. Αν το πλήθος αυτών των τιμών είναι αριθμήσιμο ή όχι, μιλάμε για μία ανέλιξη με διακριτές ή συνεχείς τιμές.

Ορισμός 1.1.1 *Μία στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο λέμε ότι είναι ανέλιξη Markov (ή αλυσίδα Markov) όταν ικανοποιεί τη σχέση*

$$Pr[X_n = x \mid X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, ..., X_0 = x_0] = Pr[X_n = x \mid X_{n-1} = x_{n-1}]\,,$$

για κάθε $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x$*, και για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$.
Μία στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο λέμε ότι είναι ανέλιξη Markov όταν ισχύει η σχέση

$$Pr[X(t) = x \mid X(t_n) = x_{t_n}, ..., X(t_0) = x_{t_0}) = P(X(t) = x \mid X(t_n) = x_{t_n}]\,,$$

για κάθε $t_0 < t_1 < ...t_{n-1} < t$ *και για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$.

1.1.1 Ανέλιξη Poisson

Μία στοχαστική ανέλιξη είναι και το πλήθος των απαιτήσεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια του χρόνου. Για σταθερό t η τ.μ. αυτή, συμβολίζεται με $N(t)$ και η ανέλιξη της είναι $\{N(t) : t \geq 0\}$. Μία τέτοια ανέλιξη, η οποία απαριθμεί πλήθος γεγονότων στο χρόνο, είναι η ανέλιξη Poisson. Η ανέλιξη Poisson είναι μία απαριθμήτρια ανέλιξη, δηλαδή μία ανέλιξη που είναι μη φθίνουσα (με πιθανότητα 1) και παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές.

Πρόταση 1.1.2 *Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *λέγεται ανέλιξη Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες*

1. $N(0) = 0$

2. *Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα* h *μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής*

$$Pr[N(t+h) = n+k \mid N(t) = n] = \begin{cases} h + o(h) & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & k = 0 \\ 0(h) & k \geq 2\,. \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

   Εδώ το σύμβολο $o(h)$ *δηλώνει μία ποσότητα που συγκλίνει στο μηδέν πιο γρήγορα από ότι το* $h \to 0$*, λόγου χάριν* h^2, h^3 *κτλ..*

3. *Για κάθε* $t < s$*, η τ.μ.* $N(s) - N(t)$ *είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής* $N(t)$.

Παρατήρηση 1.1.2 *Η ιδιότητα 3. παραπάνω μπορεί να διατυπωθεί γενικότερα λέγοντας ότι για δύο χρονικά διαστήματα ξένα μεταξύ τους, οι τ.μ. που παριστάνουν τον αριθμό των γεγονότων σε κάθε από αυτά είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Ένας ισοδύναμος ορισμός της ανέλιξης Poisson είναι ο εξής

Ορισμός 1.1.2 *Μία απαριθμήτρια ανέλιξη* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *λέγεται ανέλιξη Poisson αν ικανοποιεί την σχέση* (1.1.1) *και έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Θεωρούμε την τ.μ. $Y_i = min\{t : N(t) = i\}$, ως τη χρονική στιγμή που θα συμβεί η απαίτηση $i = 1, 2, ...$ Τότε η τ.μ. $T_i = Y_i - Y_{i-1}$ συμβολίζει τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ της $(i-1)$-στης και i-στης απαίτησης.

Παρατήρηση 1.1.3 *Παρατηρούμε ότι, ενώ η $N(t)$ είναι διακριτή τ.μ., οι μεταβλητές Y_i, T_i είναι για κάθε i συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.*

Δύο βασικές ιδιότητες μιας στοχαστικής ανέλιξης Poisson ακολουθούν στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1.3

1. *Η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , όπου $\lambda > 0$. Συμβολικά, γράφουμε $N(t) \sim Poi(\lambda t)$.*

2. *Για κάθε $i \neq j$, οι μεταβλητές T_i, T_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και καθεμία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.*

Από την ιδιότητα 2, της παραπάνω πρότασης, εφόσον οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή, τότε το άθροισμα αυτών, από τον πρώτο έως τον k-στο ενδιάμεσο χρόνο $T_1 + T_2 + ... + T_k$, ακολουθεί μία κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (k, λ) . Το άθροισμα των τ.μ. T_i , ισούται με

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

Επομένως μπορούμε να πούμε ότι, σε μία ανέλιξη Poisson, ο χρόνος Y_k μέχρι να συμβεί το k-γεγονός, ακολουθεί την κατανομή Γάμμα. Για κάθε $k = 1, 2, ...$ ισχύει

$$Y_k \sim Ga(k, \lambda) .$$

Στην περίπτωση που η πρώτη παράμετρος της κατανομής Γάμμα είναι ακέραιος, η κατανομή αναφέρεται συχνά και ως κατανομή Erlang, οπότε αντί για $Ga(k, \lambda)$ γράφουμε $Erl(k, \lambda)$.

1.1.2 Ανανεωτικές ανελίξεις

Μια γενίκευση της ανέλιξης Poisson, είναι η ανανεωτική ανέλιξη.

Ορισμός 1.1.3 *Μία ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μία απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. , που δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη εκθετική κατανομή.*

Έστω T_i ο χρόνος από τη στιγμή της $(i-1)$ έως την i αποζημίωση. Η σ.κ. των $\{T_i\}$ είναι

$$F(t) = P(T_i \leq t) , \quad i = 1, 2, ... ,$$

με $F(0) = 0$. Έστω $Y_k = T_1 + ... + T_k$ ο χρόνος αναμονής έως των k αποζημίωση. Η τ.μ. $N(t)$ παριστάνει το πλήθος των ανανεώσεων (γεγονότων) στο διάστημα $[0, t]$.

Κύριο ενδιαφέρων των Ανανεωτικών Στοχαστικών Ανελίξεων είναι η Ανανεωτική συνάρτηση $E(N(t)) = m(t)$, η οποία ορίζει ον αναμενόμενο αριθμό απαιτήσεων. Ο προσδιορισμός της $m(t)$ γίνεται με τη σ.κ. της Y_k , η οποία είναι

$$Pr[Y_k \leq t] = F_k^\star(t) \, ,$$

όπου $F_k^\star(t) = (F \star ... \star F)(t)$, συνέλιξη k σ.κ. .

Πρόταση 1.1.4 *Αν F, G είναι δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, τότε η συνάρτηση κατανομής $F \star G$ που ορίζεται για $x \geq 0$ από τη σχέση*

$$(F \star G)(x) = \int_0^x F(x-t) dG(t) \tag{1.1.2}$$

ονομάζεται συνέλιξη των F, G.

Παρατήρηση 1.1.4 *Το σύμβολο $dG(t)$ στο ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης παριστάνει το διαφορικό της συνάρτησης G . Για την περίπτωση όπου η G έχει πυκνότητα g, η παραπάνω σχέση γράφεται*

$$(F \star G)(x) = \int_0^x F(x-t) g(t) \, dt \, . \tag{1.1.3}$$

Ένας γενικότερος ορισμός της συνέλιξης είναι ο εξής

Ορισμός 1.1.4 *Σε μία φραγμένη συνάρτηση $h : [0, \infty) \to \mathcal{R}$ και σε μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής F. Η συνέλιξη $h \star F$ ορίζεται τότε από τη σχέση*

$$(h \star F)(x) = \int_0^x h(x-t) dF(t) \, .$$

Πρόταση 1.1.5 *Έστω μία ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ στην οποία η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι F και έστω $m(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση. Τότε η $m(t)$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{\star k}(t) \qquad \forall t \geq 0 \, ,$$

όπου $F^{\star k}$ είναι η k-τάξης συνέλιξη της F με τον ευατό της, δηλαδή $F^{\star 2}(x) = (F \star F)(x)$, $F^{\star 3}(x) = (F \star F \star F)(x)$, κοκ.

Πρόταση 1.1.6 *Η συνάρτηση $m(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(t) \, .$$

Πρόταση 1.1.7 *Γενικότερα, μία εξίσωση της μορφής*

$$Z(t) = g(t) + \phi \int_0^t Z(t-x) dF(x) \tag{1.1.4}$$

λέγεται εξίσωση ανανεωτικού τύπου ή απλά ανανεωτική εξίσωση, όπου το ϕ είναι μία σταθερά έτσι ώστε $0 < \phi \leq 1$, η g είμαι μία φραγμένη συνάρτηση, F είναι μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η Z είναι μία άγνωστη συνάρτηση .

Οι εξισώσεις ανανεωτικού τύπου διακρίνονται σε

1. ελλειμματικές (defective) όταν $0 < \phi < 1$, και

2. κανονικές (proper) ή μη-ελλειμματικές όταν στην εξίσωση η σταθερά $\phi = 1$.

Παρατήρηση 1.1.5 *Για να βρούμε την λύση μίας ανανεωτικής εξίσωσης, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Laplace. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό στην ανανεωτική εξίσωση, λύνουμε ως προς την άγνωστη συνάρτηση, και στη συνέχεια παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό.*

1.1.3 Σύνθετες κατανομές και σύνθετες στοχαστικές ανελίξεις

Αν $X_1, X_2, ...$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. και N μία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη από τις X_i και παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, τότε η μεταβλητή

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & , \quad \text{αν } \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

λέμε ότι ακολουθεί μία σύνθετη κατανομή, έστω G. Η μεταβλητή S ονομάζεται σύνθετη τυχαία μεταβλητή. Η μεταβλητή S χρησιμοποιείται στο συλλογικό πρότυπο για τις συνολικές απαιτήσεις, όταν

- N είναι το πλήθος των απαιτήσεων σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα
- Οι τ.μ. $X_1, X_2, ...$ δηλώνουν τα μεγέθη των απαιτήσεων.

Η ροπογεννήτρια μιας σύνθετης τ.μ. S ορίζεται

$$M_S(t) = E(e^{tS}) = E_N(E(e^{tS} \mid N = n)) . \tag{1.1.5}$$

Πρόταση 1.1.8 *Η ροπογεννήτρια μιας σύνθετης τ.μ. ισούται με*

$$M_S(t) = M_N(lnM_{X_i}(t)) . \tag{1.1.6}$$

όπου $M_N(t)$ είναι η ροπογεννήτρια της N.

Στη θεωρία χρεοκοπίας η μεταβλητή N αντικαθίσταται από μία στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$, η οποία καταγράφει, (απαριθμεί) τις απαιτήσεις στο χρόνο. Επομένως η σύνθετη τ.μ. αντικαθίσταται από μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$ όπου για $t \geq 0$

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{αν } N \geq 1 \\ 0 & \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

Στην εργασία αυτή, μας ενδιαφέρει η περίπτωση για την οποία θεωρούμε ότι $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μία ανέλιξη Poisson. Τότε η $\{S(t) : t \geq 0\}$ είναι μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη Poisson, όπου η τ.μ. $N(t)$ ~Poisson (λt) .

Πρόταση 1.1.9 *Η ροπογεννήτρια μιας σύνθετης τ.μ. $S(t)$, για $t \geq 0$, είναι*

$$M_{S(t)}(t) = M_{N(t)}(ln\, M_{X_1}(t)) = e^{\lambda t(M_{X_1}-1)}\,, \tag{1.1.7}$$

όπου $M_{N(t)}(t) = e^{\lambda t(e^t-1)}$ είναι η ροπογεννήτρια μιας Poisson (λt).

1.2 Μετασχηματισμός Laplace

Για να βρούμε τη λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης, πρέπει να την αναλύσουμε ως προς το μετασχηματισμό Laplace και μετά να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Παρακάτω δίνονται ο ορισμός και μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού, που θα χρειαστούμε στην εργασία αυτή.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω F μία σ.κ. για την οποία ισχύει $F(0-) = 0$, δηλαδή η F είναι η σ.κ. μιας μεταβλητής που παίρνει μη αρνητικές τιμές. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης F συμβολίζεται με $\mathcal{L}_F(s)$ και ορίζεται για κάθε $s \geq 0$ από τη σχέση*

$$\mathcal{L}_F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)\,. \tag{1.2.1}$$

Στην περίπτωση που η F είναι συνεχής σ.κ. με πυκνότητα f , ή γενικότερα είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f συμβολίζεται με $\hat{f}(s)$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx\,, \quad s \geq 0\,. \tag{1.2.2}$$

Έστω μία τ.μ. με συνεχή σ.κ. F. Τότε από τη σχέση $(1.2.1)$ και τον ορισμό της μέσης τιμής βλέπουμε ότι ισχύει

$$\mathcal{L}_F(s) = E(e^{-sX})\,. \tag{1.2.3}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\mathcal{L}_F(s) = M_X(-s)\,. \tag{1.2.4}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται πάντα και είναι πεπερασμένος για κάθε μη αρνητική τιμή s. Αυτό ισχύει εφόσον για $s \geq 0$, έχουμε ότι $e^{-sx} \leq 1$, συνεπώς

$$\mathcal{L}_F(s) = \int_0^\infty e^{-sX}\, dF(x) \leq \int_0^\infty 1\, dF(x) = 1\,. \tag{1.2.5}$$

Η σχέση αυτή δείχνει επίσης ότι το πεδίο τιμών του μετασχηματισμού Laplace βρίσκεται πάντα στο διάστημα $[0,1]$.

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού, είναι για τη συνέλιξη σ.κ. . Παρακάτω δίνεται η ιδιότητα αυτή, για συνέλιξη δύο αλλά και περισσοτέρων σ.κ.

Πρόταση 1.2.1 *Αν* F , G *είναι δύο σ.κ. και* $F \star G$ *η συνέλιξη τους όπως στην εξίσωση* $(1.1.2)$, *τότε ισχύει η σχέση*

$$\mathcal{L}_{F\star G}(s) = \mathcal{L}_F(s) \cdot \mathcal{L}_G(s) \quad \text{για κάθε } s \geq 0 \,. \tag{1.2.6}$$

Δηλαδή ο μετασχηματισμός της συνέλιξης ισούται με το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών Laplace των δύο κατανομών.

Παρατήρηση 1.2.1 *Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για συνελίξεις* n *σ.κ. . Για παράδειγμα*

$$\mathcal{L}_{F_1\star F_2\star\ldots\star F_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{F_i}(s) \,.$$

Αντίστοιχα, όπως στην Πρόταση $1.2.1$, ισχύει και για δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g .

Πρόταση 1.2.2 *Αν* f, g *είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο θετικό ημιάξονα, τότε η συνέλιξη τους ορίζεται από τη σχέση*

$$h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy \,,$$

η οποία είναι επίσης ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο θετικό ημιάξονα, και ο μετασχηματισμός Laplace της είναι

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s) \,, \quad s \geq 0 \,.$$

1.3 Ανέλιξη πλεονάσματος

Έχουμε στη διάθεση μας ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστήριων συμβολαίων, το οποίο παρακολουθούμε στη διάρκεια του χρόνου. Για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο, η εταιρεία λαμβάνει ένα ασφάλιστρο c , σταθερό στη μονάδα του χρόνου, και για κάθε απαίτηση η εταιρεία δίνει μία αποζημίωση μεγέθους X_i , για $i = 1, 2, \ldots$. Για την ομαλή λειτουργία του χαρτοφυλακίου μας ενδιαφέρει τα αναμενόμενα *έσοδα-εξοδα* να είναι μία θετική ποσότητα.

Τα έσοδα στο διάστημα $[0, t]$ εκφράζονται γραμμικά, ως συνάρτηση του χρόνου

$$Z(t) = c\,t \,, \tag{1.3.1}$$

όπου t συμβολίζει το χρόνο. Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει

$$c = \frac{Z(t)}{t} \tag{1.3.2}$$

από όπου μπορούμε να πούμε πως το c εκφράζει το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου, και ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου (*premium rate*).

Τα έξοδα είναι το άθροισμα των αποζημιώσεων στο διάστημα $[0,t]$, τα οποία περιγράφονται από μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$. Η σύνθετη ανέλιξη αυτή, ορίζεται για κάθε t από τη σχέση

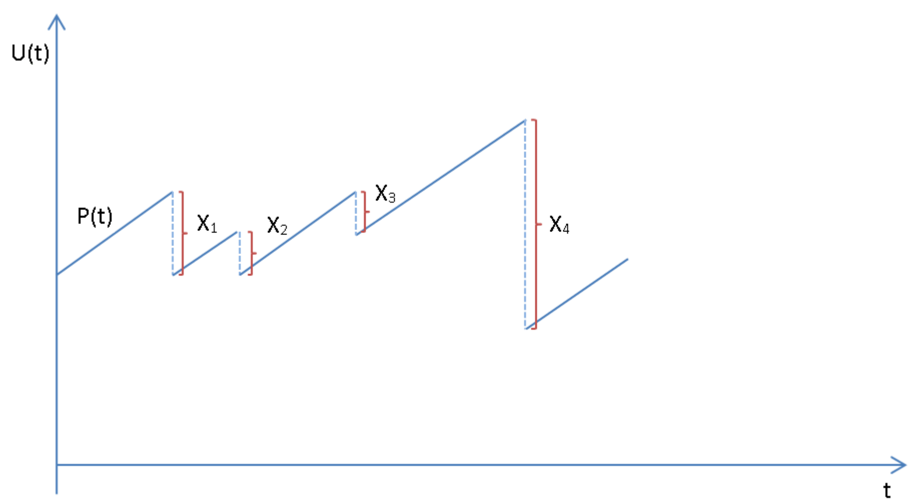
$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{αν } \ N(t) \geq 1 \\ 0 & \text{αν } \ N(t) = 0 \end{cases}$$

όπου $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη Poisson. Η τ.μ. $N(t)$ απαριθμεί τις απαιτήσεις που έρχονται στη διάρκεια του χρόνου. Η σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, για την ομαλή λειτουργία του χαρτοφυλακίου μας ενδιαφέρει η ποσότητα έσοδα-έξοδα να είναι θετική. Την ποσότητα αυτή ονομάζουμε πλεόνασμα. Όταν το πλεόνασμα πάρει για πρώτη φορά αρνητική τιμή, τότε μιλάμε για χρεοκοπία.

Παρατήρηση 1.3.1 *Ο όρος χρεοκοπία, δε θεωρείται η έννοια της ''απόλυτης'' χρεοκοπίας, αλλά είναι ένα μέτρο φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου. Το χαρτοφυλάκιο δηλαδή, δε θα πάψει να υφίσταται, συνεχίζει να λειτουργεί αναπληρώνοντας την απώλεια με διάφορους τρόπους χρηματοδότησης, συνήθως από κάποιο άλλο υγιές χαρτοφυλάκιο ή μέσω αντασφάλισης, δανεισμό κτλ.*

Για την αποφυγή της χρεοκοπίας, η εταιρεία ορίζει ένα αρχικό αποθεματικό u , στην σύνθεση κάθε νέου χαρτοφυλακίου.



Σχήμα 1.1: Γράφημα της ανέλιξης του πλεονάσματος, συναρτήσει του χρόνου.
Στο παραπάνω γράφημα βλέπουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος συναρτήσει του χρόνου. Τα ευθύγραμμα τμήματα, $Z(t)$, σε κάθε χρονικό διάστημα μεταξύ των αποζημιώσεων, παριστάνουν τα έσοδα σε εκείνο το διάστημα, ενώ οι πτώσεις, X_i , παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων.

Ορισμός 1.3.1 *Ορίζουμε τη στοχαστική ανέλιξη $\{U(t) : t \geq 0\}$ ως την ανέλιξη πλεονάσματος η οποία εκφράζεται από την εξίσωση*

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,, \quad t \geq 0 \,. \tag{1.3.3}$$

όπου, $c\,t$ τα έσοδα συναρτήσει του χρόνου, και $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, το σύνολο των εξόδων, άθροισμά του πλήθους των αποζημιώσεων, για $t \geq 0$.

1.4 Κλασικό μοντέλο

Το κλασικό μοντέλο ή αλλιώς Cramer-Lundberg μοντέλο, μελετήθηκε πρώτη φορά από τον Σουηδό αναλογιστή Filip Lundberg το 1903, και αργότερα ο Harold Cramer αναδημοσίευσε την εργασία του, το 1930.

Στο μοντέλο αυτό, θεωρούμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία κατανομή όπου η σ.κ. της, συμβολίζεται με $P(x)$, η πυκνότητα με $p(x)$ και η μέση τιμή με μ_1 . Επίσης η ένταση της ανέλιξης Poisson συμβολίζεται με λ . Κύριο αντικείμενο μελέτης είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

1.4.1 Πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλώνει την πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει κάτω από το μηδέν κάποια στιγμή στο μέλλον. Ο ορισμός της, δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 1.4.1 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u είναι συνεχής συνάρτηση στο χρόνο και συμβολίζεται*

$$\psi(u) = Pr[U(t) < 0 \ \text{για κάποιο} \ t \geq 0 \mid U(0) = u] \,. \tag{1.4.1}$$

Παρατήρηση 1.4.1 *Η ψ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u. Ισχύει μάλιστα ότι* $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.

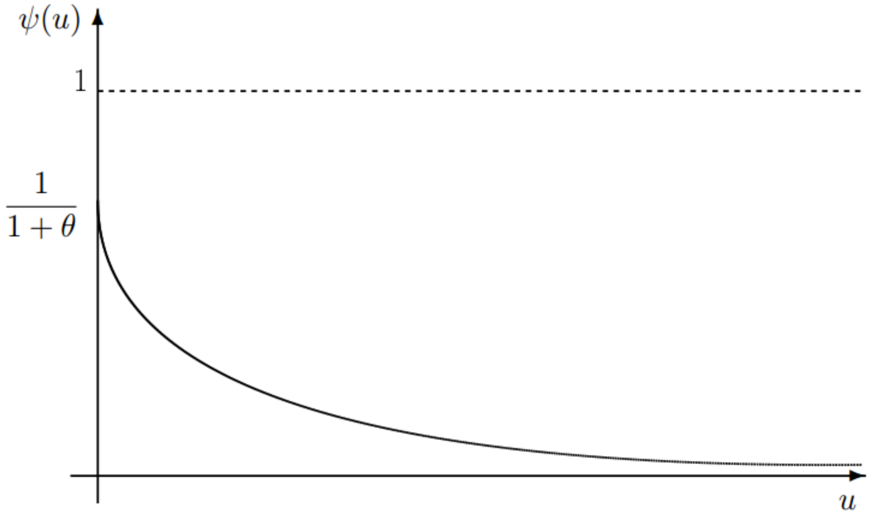
Όταν τα αναμενόμενα έξοδα ενός χαρτοφυλακίου είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έσοδα, τότε έχουμε σίγουρη χρεοκοπία. Η πιθανότητα αυτή συμβολίζεται

$$\psi(u) = 1 \,.$$

Για την αποφυγή μιας σίγουρης χρεοκοπίας, θέτουμε μία βασική συνθήκη, **τη συνθήκη του καθαρού κέρδους**.

$$c > \lambda\mu_1 \,. \tag{1.4.2}$$

Το λ είναι ο μέσος ρυθμός αποζημιώσεων και το μ_1 η μέση αποζημίωση, οπότε το γινόμενο τους δηλώνει τα αναμενόμενα έξοδα (στη μονάδα του χρόνου), ενώ το c είναι το ασφάλιστρο και δηλώνει τα έσοδα (στη μονάδα του χρόνου).



Σχήμα 1.2: Πολίτης (2013) Γράφημα συνάρτησης πιθανότητας χρεοκοπίας.
Η συνάρτηση αυτή είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του u. Όταν $u \to \infty$ τότε $\psi(u)$ τείνει στο 0. Μπορούμε να δούμε επίσης ότι όταν $u = 0$, τότε $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

Ένα μέτρο σύγκρισης των εσόδων και των εξόδων σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι το περιθώριο ασφαλείας. Το μέτρο αυτό εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα της εταιρείας, κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Ορισμός 1.4.2 *Το περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor) ή συντελεστής ασφαλείας θ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται από τη σχέση*

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 \,. \tag{1.4.3}$$

Παρατήρηση 1.4.2

1. *Σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους* $(1.4.2)$ *, το* θ *παίρνει πάντα θετικές τιμές, καθορίζεται από τον ασφαλιστή και εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους.*

2. *Επίσης, όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.*

1.4.2 Πιθανότητα μη-χρεοκοπίας

Μία άλλη πιθανότητα την οποία μελετάμε, είναι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.4.3 *Ορίζουμε τη πιθανότητα μη-χρεοκοπίας,* $\delta(u)$*, από τη σχέση*

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) \quad u \geq 0\,.$$

Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u*.*

Παρατήρηση 1.4.3

1. *Σύμφωνα με την Παρατήρηση* $(1.4.1)$ *, η συνάρτηση* $\delta(u)$
   - *είναι αύξουσα και ισχύει ότι* $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1\,.$
   - *Επίσης, επειδή είναι συνεχής από δεξιά, μπορεί να θεωρηθεί μία αθροιστική σ.κ.*

2. *Η συνάρτηση* $\delta(u)$ *είναι μία μεικτή κατανομή αφού*
   - $\delta(0) > 0$ *δηλαδή η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι θετική, ενώ*
   - *η* $\delta(u)$ *είναι συνεχής (έχει πυκνότητα) στο* $(0, \infty)$*.*

Ακολουθούν δύο προτάσεις, που δίνουν σχέσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση $\delta(u)$.

Πρόταση 1.4.1 *Στο κλασικό μοντέλο, η συνάρτηση* $\delta(u)$ *ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση*

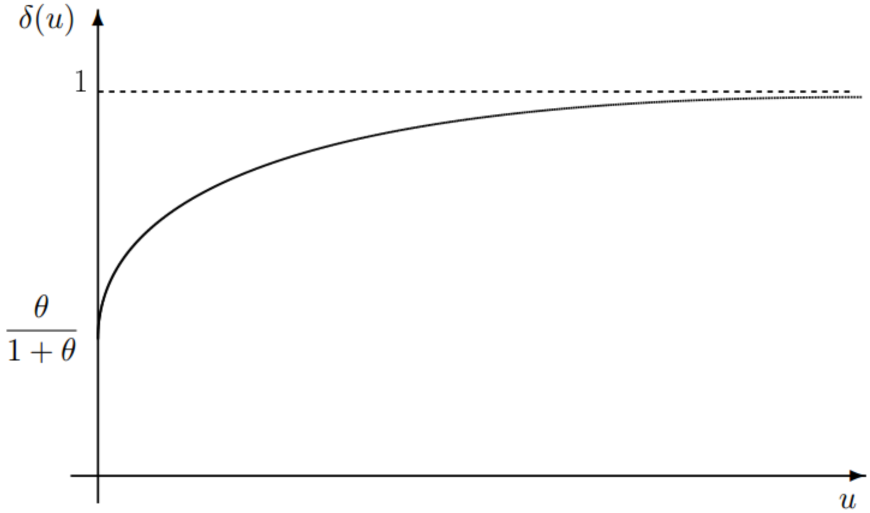
$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)p(x)\,dx\,. \tag{1.4.4}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, μπορεί να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.4.2 *Στο κλασικό μοντέλο, η* $\delta(u)$ *ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{P}(x)\,dx \quad (u \geq 0) \tag{1.4.5}$$

όπου $\overline{P}(x) = 1 - P(x)$ *είναι ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων.*



Σχήμα 1.3: Πολίτης (2013) Το γράφημα της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας.
Η συνάρτηση αυτή είναι μία αύξουσα συνάρτηση του u . Όταν $u \to \infty$ τότε η $\delta(u)$ τείνει στο 1 . Μπορούμε να δούμε επίσης ότι όταν $u = 0$, τότε $\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Με βάση την παραπάνω πρόταση μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, δηλαδή το $\delta(0)$.

Πρόταση 1.4.3 *Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν είναι*

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}\,. \tag{1.4.6}$$

Παρατήρηση 1.4.4 *Άρα σύμφωνα με την Πρόταση* $1.4.3$, *η πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι*

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}\,.$$

Η τελευταία, σύμφωνα με την $(1.4.3)$ *μπορεί να γίνει επίσης*

$$\psi(0) = \frac{\lambda\,\mu_1}{c}\,.$$

Σημαντικές τυχαίες μεταβλητές που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια της εργασίας, είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, τα κλιμακωτά ύψη και η μέγιστη σωρευτική απώλεια.

1.4.3 Χρόνος χρεοκοπίας

Ορισμός 1.4.4 *Χρόνο χρεοκοπίας, θεωρούμε τη χρονική στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το μηδέν, και ορίζεται ως εξής*

$$T = \begin{cases} inf\{t : U(t) < 0\} & \\ \infty & \text{αν } U(t) > 0 \ \forall t\,. \end{cases}$$

Παρατήρηση 1.4.5

1. *Παρατηρούμε από τον ορισμό, ότι ο χρόνος χρεοκοπίας, μπορεί να είναι άπειρος, δηλαδή, να μην συμβεί ποτέ χρεοκοπία. Η πιθανότητα αυτή ισοδυναμεί με*

$$Pr[T = \infty] = Pr[U(t) > 0 \ \forall t] = 1 - \psi(u) = \delta(u)\,,$$

και είναι θετική. Δηλαδή, $Pr[T = \infty] > 0$. *Επίσης ισχύει ότι* $Pr[T < \infty] < 1$. *Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μία ελλειμματική τυχαία μεταβλητή.*

2. *Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι, η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας* T, *εξαρτάται από την τιμή του αρχικού αποθεματικού* u.

Συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή, το *πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία*, ως $U(T-)$ και την τυχαία μεταβλητή του *ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας*, ως $|U(T)|$. Για την τ.μ. του ελλείμματος, χρησιμοποιούμε το συγκεκριμένο συμβολισμό διότι, τη χρονική στιγμή t που συμβαίνει χρεοκοπία, το έλλειμμα θα ισούται με την αρνητική τιμή που λαμβάνει το πλεόνασμα $U(t)$. Εμάς μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την απόλυτη τιμή που δηλώνει τη σφοδρότητα (*severity*) της χρεοκοπίας.

1.4.4 Πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία

Στη παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε τη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, και θα δώσουμε το τύπο του Dickson για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, όπως το απέδειξε ο Dickson (1992).

Συμβολίζουμε με $U(T-)$ το επίπεδο της ανέλιξης πλεονάσματος ακριβώς πριν γίνει η αποζημίωση που προκαλεί τη χρεοκοπία. Τότε η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία από το το αρχικό αποθεματικό u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι μικρότερο του x, είναι

$$F[x \mid u] = Pr[T < \infty \text{ και } U(T-) \leq x]\,.$$

Η σ.κ. F είναι μία ελλειμματική συνάρτηση λόγω του ότι $Pr[T < \infty]$. Στον υπολογισμό μιας ακριβής έκφρασης για την F, σημαντικό ρόλο παίζει το πότε θα συμβεί χρεοκοπία. Χρεοκοπία, μπορεί να συμβεί σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Όταν $0 \leq u < x$, εάν η ανέλιξη του πλεονάσματος δεν φτάσει ποτέ το επίπεδο x , τότε πρέπει να συμβεί χρεοκοπία με πλεόνασμα μικρότερο του x .

Περίπτωση 2: Όταν $u > x$, , εάν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από x τότε πρέπει να υπάρξει μία αποζημίωση όπου το πλεόνασμα να πέφτει κάτω από το x , και το μέγεθος της πτώσης κάτω από το x να μην είναι μεγαλύτερο από x . Η πιθανότητα ότι το πλεόνασμα πέφτει από το u σε ένα επίπεδο ανάμεσα στο x και 0 είναι το ίδιο όπως η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία από ένα αρχικό αποθεματικό $u - x$ με έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας το πολύ x .

Σύμφωνα με αυτές τις δύο περιπτώσεις ο Dickson (1992) απέδειξε ότι

1. όταν $u < x$
$$f(x \mid u) = f(x \mid 0) \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(0)} , \tag{1.4.7}$$

2. όταν $u > x$
$$f(x \mid u) = f(x \mid 0) \frac{\psi(u - x) - \psi(u)}{1 - \psi(0)} , \tag{1.4.8}$$

όπου
$$f(x \mid 0) = \frac{\lambda}{c}(1 - P(x)) .$$

1.4.5 Κλιμακωτά ύψη

Σε αυτή τη παράγραφο, θα αναφερθούμε στα κλιμακωτά ύψη. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η σ.κ. των κλιμακωτών υψών είναι ισοδύναμη με αυτή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, και είναι σημαντική στη παραγωγή μιας έκφρασης για τη σ.κ. του ελλείμματος.

Ορισμός 1.4.5 *Η τ.μ. που παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια, είναι σύνθετη τυχαία μεταβλητή και συμβολίζεται με*
$$L = L_1 + L_2 + ... + L_W = \sum_{i=1}^{W} L_i .$$
Όταν $W = 0$ τότε $L = 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές $L_1, L_2, ..., L_w$ ονομάζονται κλιμακωτά ύψη (ladder heights).

Η μεταβλητή L_1 συμβολίζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Έστω τώρα ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα τη στιγμή αυτή είναι $u_1 = U(t_1)$. Τότε
$$L_1 = u - u_1 .$$

ενώ όταν το πλεόνασμα για πρώτη φορά πέσει κάτω από το u_1 πάρει τιμή u_2, τότε η τ.μ. L_2 παίρνει τιμή

$$L_2 = u_1 - u_2 \,.$$

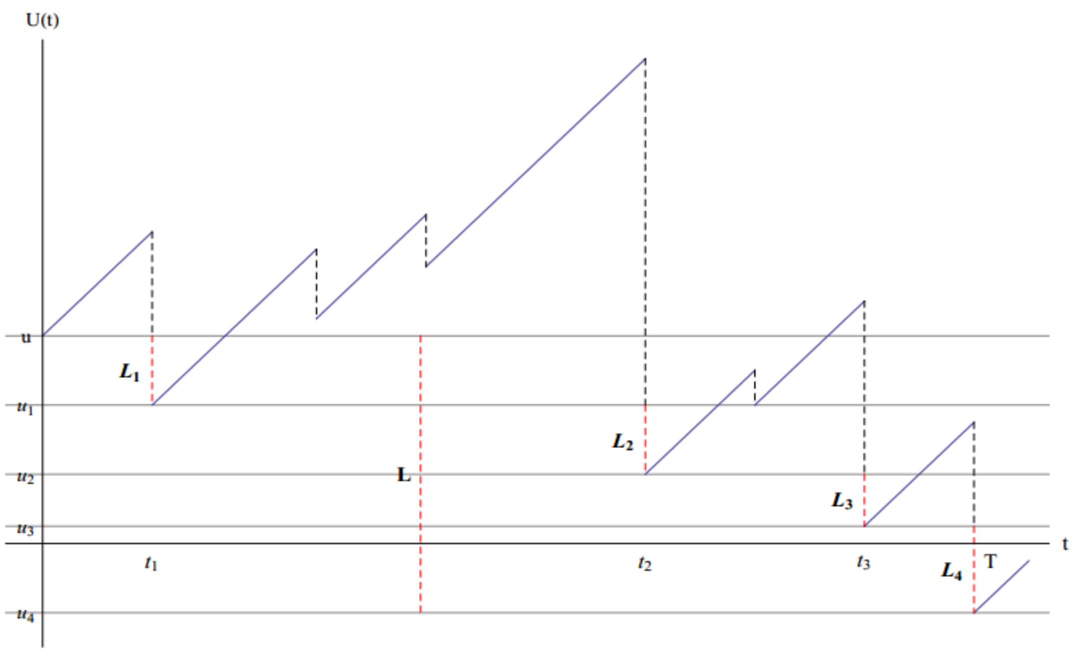
Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε επαγωγικά μία ακολουθία $L_1, L_2, L_3, \ldots$.

Παρατήρηση 1.4.6

1. *Η ακολουθία αυτή θεωρούμε ότι είναι πεπερασμένη όταν οι τιμές της είναι μηδενικές από κάποιο σημείο και μετά, δηλαδή όταν ισχύει $L_j = 0$ για $j = i, i+1, \ldots$*

2. *Η πιθανότητα να συμβεί μία πτώση από το πλεόνασμα u_i στο u_{i+1} ισούται με $\psi(0)$ και δεν εξαρτάται από το u_i.*

3. *Δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα το πλήθος L_j καθώς, σύμφωνα με τη συνθήκη του καθαρού κέρδους, το πλεόνασμα από κάποιο χρονικό σημείο και ύστερα θα αυξάνεται ($U(t) \to \infty$ καθώς $t \to \infty$), άρα δεν μπορεί η ανέλιξη πλεονάσματος να παρουσιάζει άπειρο αριθμό ελαχίστων.*



Σχήμα 1.4: Πολίτης (2013) Κλιμακωτά ύψη.
Στο γράφημα αυτό, βλέπουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος συναρτήσει του χρόνου. Με L_i συμβολίζουμε τα κλιμακωτά ύψη, δηλαδή την πτώση που έχουμε σε κάθε στιγμή i κάτω από το αποθεματικό u_{i-1}. (Π.χ. $L_1 = u - u_1$ όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό και $u_1 = U(t_1)$.) Επίσης με L συμβολίζουμε τη μέγιστη σωρευτική απώλεια. Δηλαδή $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_W$

Εφόσον το πλήθος των κλιμακωτών υψών είναι πεπερασμένο με πιθανότητα ένα, ορίζουμε μία τ.μ. η οποία συμβολίζεται με W και δηλώνει το πλήθος των κλιμακωτών υψών.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση $(1.4.6)(2)$ είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned} Pr[W=0] &= \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}\,, \\ Pr[W=1] &= \psi(0)\delta(0) = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta}{1+\theta}\,, \\ Pr[W=2] &= (\psi(0))^2\delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2\frac{\theta}{1+\theta}\,, \end{aligned}$$

και γενικά

$$Pr[W=w] = [\psi(0)]^w\delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^w\frac{\theta}{1+\theta}\,, \tag{1.4.9}$$

δηλαδή η W ακολουθεί γεωμετρική κατανομή.

Παρατήρηση 1.4.7

1. *Για την μέγιστη σωρευτική απώλεια L παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να πάρει την τιμή μηδέν ισοδυναμεί*
$$Pr[L=0] = Pr[W=0] = \delta(0)\,.$$
Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή της L είναι μεικτή εφόσον είναι συνεχής στο $(0,\infty)$ και $Pr[L=0]>0$.

2. *Εφόσον η μεταβλητή W ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, η κατανομή της L θα είναι σύνθετη γεωμετρική.*

3. *Έστω ένα αρχικό αποθεματικό $u>0$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $Pr[L>u]$ εκφράζει την πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβαίνει μία σταθερή τιμή u. Αυτή η πιθανότητα ισοδυναμεί με την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u, δηλαδή ισχύει*
$$Pr[L>u] = \psi(u)\,.$$
Σύμφωνα με τη τελευταία σχέση ισχύει επίσης ότι
$$Pr[L\le u] = \delta(u)\,.$$

Μία σημαντική πρόταση για την κατανομή του κλιμακωτού ύψους είναι η παρακάτω.

Πρόταση 1.4.4 *Στο κλασικό μοντέλο, όταν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος, η τ.μ. L_1 ακολουθεί μία συνεχή κατανομή, H, με πυκνότητα $\frac{1}{\mu_1}[1-P(t)]$, δηλαδή*

$$H(x) = Pr[L_1 \le x_1] = \int_0^x \frac{1}{\mu_1}[1-P(t)]\,dt\,.$$

Παρατήρηση 1.4.8

1. *Η κατανομή του κλιμακωτού ύψους L_1 δεν εξαρτάται από το αρχικό αποθεματικό u.*

2. *Τα κλιμακωτά ύψη $L_1, L_2, ..., L_w, ...$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.*

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει από την Πρόταση $1.4.4$, δίνεται στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1.4.1 *Όταν το αρχικό αποθεματικό είναι $u = 0$, τότε η κατανομή των κλιμακωτών υψών είναι ίδια με την κατανομή που έχει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Δηλαδή ισχύει ότι*

$$Pr[|U(T)| \leq x \mid T < \infty,\, U(0) = 0] = H(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x (1 - P(y))\, dy\,. \tag{1.4.10}$$

1.4.6 Έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία

Στη συνέχεια ορίζουμε τη σφοδρότητα χρεοκοπίας.Στη παράγραφο αυτή, θα δώσουμε μία μορφή της σ.κ. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (αλλιώς της σφοδρότητας της χρεοκοπίας) και θα κλείσουμε, με μία ανανεωτική μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.4.6 *Η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και το έλλειμμα της εταιρείας, ή η σφοδρότητα της χρεοκοπίας, να είναι το πολύ y . συμβολίζεται με*

$$G(y \mid u) = Pr[T < \infty \text{ και } |U(T)| \leq y]\,.$$

Ισχύει ότι για δεδομένο αρχικό αποθεματικό η $G(\cdot \mid u)$ είναι μία ελλειμματική σ.κ, με ελλειμματική σ.π.π.

$$g(y \mid u) = \frac{\vartheta}{\vartheta\, y} G(y \mid u)\,.$$

Ισχύει επίσης ότι

$$\lim_{y \to \infty} G(y \mid u) = \psi(u)\,.$$

Στο Πόρισμα $1.4.10$ είπαμε ότι, η κατανομή των κλιμακωτών υψών, ισοδυναμεί με την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$, δεδομένου ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$h(x) = \frac{g(y \mid 0)}{\psi(0)}\,, \tag{1.4.11}$$

Εφόσον ισχύει ότι

$$h(x) = \frac{1}{\mu_1}(1 - P(x)) \tag{1.4.12}$$

και

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda\, \mu_1}{c}$$

τότε μπορούμε να πούμε ότι η ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών είναι

$$g(y \mid 0) = \frac{\lambda}{c}(1 - P(y))\,. \tag{1.4.13}$$

Γνωρίζοντας το τύπο για την ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών, μπορούμε να υπολογίσουμε μία μορφή της $G(y \mid u)$ σημειώνοντας ότι, εάν συμβεί η χρεοκοπία με ένα έλλειμμα το πολύ y, τότε όταν το πλεόνασμα πέσει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό u είτε

1. το πλεόνασμα πέφτει στο $u - x\,(\leq 0)$, έτσι ώστε η χρεοκοπία να συμβεί από αυτό το επίπεδο με ένα έλλειμμα το πολύ y, ή

2. η χρεοκοπία συμβαίνει με αυτή τη πτώση, με έλλειμμα το πολύ y.

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} G(y \mid u) &= \int_0^u g(y \mid 0) G(y \mid u - x)\, dx + \int_u^{u+y} g(x \mid u)\, dx\,, && (1.4.14)\\ &= \psi(0) \int_0^u h(x) G(y \mid u - x)\, dx + \psi(0) \int_u^{u+y} h(x)\, dx\,. && (1.4.15) \end{aligned}$$

Κλείνουμε τη παράγραφο αυτή, με μία ανανεωτική μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας. Η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί με δύο διαφορετικούς τρόπους.

1. Όταν το πλεόνασμα πέσει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u για πρώτη φορά σε ένα επίπεδο $u - y$, και η χρεοκοπία συμβεί αργότερα από αυτό το επίπεδο.

2. Όταν το πλεόνασμα πέσει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u για πρώτη φορά, και αυτή η πτώση φέρει χρεοκοπία.

Η πιθανότητα αυτή εκφράζεται από την ανανεωτική εξίσωση

$$\psi(u) = \int_0^u g(y \mid 0)\, \psi(u - z)\, dz + \int_u^{\infty} g(z \mid 0)\, dz\,. \tag{1.4.16}$$

1.5 Ανανεωτικό μοντέλο

Το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, γνωστό και ως Sparre-Andersen μοντέλο, μελετήθηκε για πρώτη φορά από το Σουηδό μαθηματικό E. Sparre-Andersen to 1958. Στο μοντέλο αυτό υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι στο διάστημα $[0, \infty)$. Κατά συνέπεια, η ανέλιξη των χρόνων αναμονής δεν αποτελεί πλέον μία ανέλιξη Poisson, αλλά μία ανανεωτική ανέλιξη.

Θεωρούμε $T_1, T_2, ..$ τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων, οι οποίο είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., και $X_1, X_2, ...$ είναι τα μεγέθη των αποζημιώσεων, τα οποία είναι και αυτά ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. ., επίσης. Οι X_i είναι ανεξάρτητες από τις T_i για $i = 1, 2, ...$. Όπως και στο κλασικό μοντέλο, η σ.κ. των αποζημιώσεων συμβολίζεται με $P(x)$, ενώ των ενδιάμεσων χρόνων με $K(t)$. Τέλος με $\psi_1(u)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση.

Πρόταση 1.5.1 *Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι συνεχής με πυκνότητα $k(t)$, τότε ισχύει ότι η πιθανότητα $\psi_1(u)$ να συμβεί χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση δίνεται από τη σχέση*

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty k(t)(1 - P(u + ct))\, dt\,. \tag{1.5.1}$$

Είναι σαφές ότι στην περίπτωση που η πυκνότητα $k(t)$ είναι $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ για κάποιο $\lambda > 0$, τότε προκύπτει για το κλασικό πρότυπο η σχέση

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty k(t) e^{-\lambda(u+ct)}\, dt\,.$$

Πρόταση 1.5.2 *Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση στο ανανεωτικό πρότυπο , ικανοποιεί τη σχέση*

$$\delta_1(u) = \int_0^\infty k(t) P(u + ct)\, dt = \frac{1}{c} \int_u^\infty k\left(\frac{x - u}{c}\right) P(x)\, dx\,.$$

Στο ανανεωτικό μοντέλο, η μεταβλητή L που δηλώνει τη μέγιστη σωρευτική απώλεια ακολουθεί, όπως και στο κλασικό πρότυπο μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή, δηλαδή ισχύει ότι

$$L = L_1 + L_2 + .. + L_K\,, \quad (L = 0 \text{ αν } K = 0)$$

όπου η συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής K(θα πρέπει να βρω άλλο συμβολισμό, γιατί αυτό το χρησιμοποιώ για την σ.κ. των ενδιάμεσων χρόνων)

$$Pr[K = k] = [\psi(0)]^k \delta(0)\,, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Η σ.κ. της L είναι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, δηλαδή ισχύει και πάλι η σχέση

$$\delta(u) = Pr[L \leq u] \quad u \geq 0\,.$$

Παρατήρηση 1.5.1 *Θα πρέπει να πούμε όμως, πως η κατανομή των κλιμακωτών υψών δεν είναι ίδια όπως και στο κλασικό μοντέλο. Συγκεκριμένα, δεν την γνωρίζουμε και γενικά είναι δύσκολο να την υπολογίσουμε.*

Το περιθώριο ασφαλείας θ στο ανανεωτικό μοντέλο, έχει την ίδια έννοια όπως και στο κλασικό, αλλά δεν υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο. Σε μία ανανεωτική ανέλιξη, η αναμενόμενη χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων είναι η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων, $E(T_i)$. Συνεπώς, το αναμενόμενο πλήθος των γεγονότων (εδώ, των αποζημιώσεων) στη μονάδα του χρόνου ισούται με

$$\frac{1}{E(T_1)}\,.$$

Ορισμός 1.5.1 *Σε ένα ανανεωτικό μοντέλο, το περιθώριο ασφαλείας θ ορίζεται από τη σχέση*

$$\theta = \frac{cE(T_1)}{\mu_1} - 1\,. \tag{1.5.2}$$

Βασική υπόθεση που κάνουμε για να μην έχουμε σίγουρη χρεοκοπία είναι

$$cE(T_1) > \mu_1\,.$$

Η συνθήκη αυτή αναφέρεται και πάλι ως *συνθήκη καθαρού κέρδους*, εφόσον εξασφαλίζει ότι τα έσοδα της εταιρείας υπερβαίνουν τα αναμενόμενα έξοδα.

Παρατήρηση 1.5.2 *Πρέπει να τονίσουμε ότι στο ανανεωτικό μοντέλο δεν ισχύει πλέον η σχέση*

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}\,.$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μία ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, και αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης σχέσης για το κλασικό υπόδειγμα.

Πρόταση 1.5.3 *Έστω $H(x) = P[L_1 \le x]$ η σ.κ. των κλιμακωτών υψών. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\psi(u) = \phi\,\overline{H}(u) + \phi\int_0^u \psi(u-y)\,dH(y)\,, \tag{1.5.3}$$

όπου $\phi = \psi(0)$. Η παραπάνω είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αφού $\phi < 1$ και η H είναι μία αθροιστική σ.κ.

1.6 Ο συντελεστής προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής, είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο στη θεωρία κινδύνων. Σύμφωνα μ' αυτό το μέτρο, έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε δύο θεμελιώδη αποτέλεσμα της θεωρίας κινδύνων για την πιθανότητα χρεοκοπίας, αυτή της ανισότητας του Lundberg και τον ασυμπτωτικό τύπο του Cramer - Lundberg.

1.6.1 Ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασικό μοντέλο

Ο συντελεστής προσαρμογής για το κλασικό μοντέλο, ικανοποιεί την εξίσωση

$$\lambda M_X(r) = cr + \lambda\,, \tag{1.6.1}$$

ή ισοδύναμα, την

$$M_X(r) = (1+\theta)\mu_1 r + 1\,, \tag{1.6.2}$$

όπου $M_X(r)$ είναι η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων. Ο συντελεστής προσαρμογής, R, είναι η θετική λύση της εξίσωσης. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως *η εξίσωση Lundberg*.

Παρατήρηση 1.6.1 *Εάν αντί τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace της σ.π.π. των αποζημιώσεων, τότε η εξίσωση* $(1.6.1)$ *γίνεται*

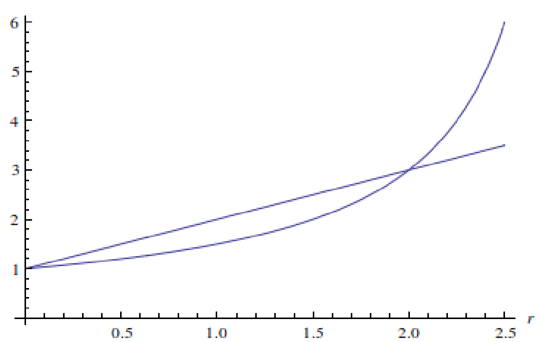
$$\lambda\hat{p}(r) = cr + \lambda\,. \tag{1.6.3}$$

Ο συντελεστής προσαρμογής, βρίσκεται από την εξίσωση $(1.6.3)$, *και είναι η μικρότερη κατ ' απόλυτη τιμή, αρνητική λύση.*

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων, ισχύουν,

- $\lim_{r\to 0} M_X(r) = 1$,
- $\lim_{r\to\infty} M_X(r) = \infty$.

Από το τύπο $(1.6.2)$, για $r = 0$ ισχύει ότι $M_X(0) = 1$. Επίσης, η δεύτερη παράγωγος του αριστερού μέλους της σχέσης $(1.6.2)$, είναι θετική, οπότε, η συνάρτηση είναι κυρτή, ενώ το δεξί μέλος της σχέσης είναι μία γραμμική συνάρτηση. Επομένως οι δύο αυτές συναρτήσεις, δεν μπορούν να έχουν πάνω από μία θετική λύση.



Σχήμα 1.5: Συντελεστής προσαρμογής

Στο παραπάνω γράφημα βλέπουμε τις δύο συναρτήσεις $M_X(r)$ και $(1+\theta)\mu_1 r$, οι οποίες τέμνονται για $r = 0$ και $r = R$.

Όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, ο συντελεστής προσαρμογής εφαρμόζεται στην ανισότητα Lundberg και στον ασυμπτωτικό τύπο Cramer - Lundberg. Τα δύο αυτά αποτελέσματα δίνονται στη συνέχεια.

Ανισότητα Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad \text{για κάθε } u \geq 0\,. \tag{1.6.4}$$

Ασυμπτωτικός τύπος Cramer - Lundberg
Βασική προϋπόθεση για να ισχύει ο τύπος, πρέπει να ισχύει

$$\int_0^\infty x e^{Ru} \overline{P}(x)\, dx < \infty\,.$$

Τότε για το κλασικό μοντέλο ισχύει

$$\psi(u) \sim C e^{Ru}\,, \quad \text{καθώς } u \to \infty\,, \tag{1.6.5}$$

δηλαδή ισχύει,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C\,,$$

όπου

$$C = \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty x e^{Rx}\overline{P}(x)}\, dx\,.$$

Παρατήρηση 1.6.2 *Μπορεί να αποδειχθεί ότι για εκθετικές αποζημιώσεις, η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει ακριβή τύπο*

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}\,.$$

1.6.2 Ο συντελεστής προσαρμογής στο ανανεωτικό μοντέλο

Η εξίσωση Lundberg στο ανανεωτικό μοντέλο, της οποίας η θετική λύση είναι ο συντελεστής προσαρμογής R, είναι

$$M_T(-cr)M_X(r) = 1\,. \tag{1.6.6}$$

Παρατήρηση 1.6.3 *Η εξίσωση του Lundberg για το ανανεωτικό μοντέλο, σε μορφή μετασχηματισμού Laplace γράφεται*

$$\hat{k}(-cr)\hat{p}(r) = 1 \tag{1.6.7}$$

όπου ο συντελεστής προσαρμογής, είναι η μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή, αρνητική λύση.

Ανισότητα Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad \text{καθώς } u \to \infty\,.$$

ενώ ο ασυμπτωτικός τύπος για το ανανεωτικό πρότυπο είναι ,

Ασυμπτωτικός τύπος Cramer - Lundberg

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$$

όπου ,

$$C = \frac{1-\psi(0)}{R\psi(0)^{-1}\int_0^\infty xe^{Rx}\,dH(x)}\,,$$

για το οποίο πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_0^\infty xe^{Rx}\,dH(x) < \infty\,.$$

Όπου $H(x)$ είναι η σ.κ. των κλιμακωτών υψών.

1.7 Συνάρτηση Gerber-Shiu

Το 1998, οι Gerber & Shiu μελέτησαν την αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής. Η συνάρτηση αυτή έχει βρει εφαρμογές στη θεωρία κινδύνων αλλά και στα χρηματοοικονομικά. Ο ορισμός της δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 1.7.1 *Έστω $w(x_1, x_2)$ είναι μία φραγμένη μη-αρνητική συνάρτηση ποινής στο $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+$ του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και $\delta \geq 0$. Θεωρούμε την ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ σε ένα κλασικό μοντέλο, και συμβολίζουμε με $U(T-)$ το πλεόνασμα αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και με $|U(T)|$ το έλλειμμα, κατ' απόλυτη τιμή, τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η μεταβλητή T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, η οποία είναι μία ελλειμματική τ.μ., αφού ισχύει $Pr[T < \infty] < 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\phi(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-)\,, |U(T)|)\, I(T<\infty) \mid U(0)=u\right]\,, \tag{1.7.1}$$

*Εδώ η συνάρτηση $I(.)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου, δηλαδή για κάθε ενδεχόμενο A είναι $I(A) = 1$ αν το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί και $I(A) = 0$ διαφορετικά. Η συνάρτηση $\phi(u)$ ονομάζεται **αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής** (expected discounted penalty function) ή εναλλακτικά συνάρτηση Gerber-Shiu.*

paragraph* Σύμφωνα με τη συνάρτηση αυτή, εάν συμβεί χρεοκοπία η εταιρία θα πληρώσει ένα χρηματικό ποσό (*ποινή*), το οποίο εξαρτάται από το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, $U(T-)$, και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$. Η συνάρτηση w είναι η συνάρτηση ποινής, και η τ.μ. $w(U(T-),\ |U(T)|)$ δηλώνει το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει η εταιρία σε περίπτωση χρεοκοπίας, όταν αυτή γίνει σε μια χρονική στιγμή T . Όταν η ένταση ανατοκισμού δ είναι θετική, η τ.μ. $w(U(T-),\ |U(T)|)\, e^{-\delta T}\, I(T<\infty)$, δηλώνει την παρούσα αξία της ποινής που θα πληρώσει η εταιρία. Έτσι η συνάρτηση Gerber- Shiu είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία της ποινής αυτής.

Θεωρούμε την ελλειμματική σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας, δεδομένου αρχικού αποθεματικού u, η οποία συμβολίζεται ως $f(x, y, t \mid u)$. Για την συνάρτηση $\phi(u)$ θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Εάν θεωρήσουμε την $w(x_1, x_2)$ ως συνάρτηση, των x και y, τότε η $\phi(u)$ γίνεται *η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* u,
$$f(x, y \mid u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x, y, t \mid u)\, dt\,. \tag{1.7.2}$$

2. Εάν θεωρήσουμε $w(x_1, x_2) = w(x_1)$ συνάρτηση του x, τότε η $\phi(u)$ γίνεται *η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό* u,
$$f(x \mid u) = \int_0^\infty f(x, y \mid u)\, dy\,. \tag{1.7.3}$$

3. Εάν θεωρήσουμε $w(x_1, x_2) = w(x_2)$ συνάρτηση του y, τότε η $\phi(u)$ γίνεται *η προεξοφλημένη σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* u,
$$g(y \mid u) = \int_0^\infty f(x, y \mid u)\, dx\,. \tag{1.7.4}$$
η προεξοφλημένη σ.π.π. του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, για $u = 0$, ορίζεται ως
$$g(y \mid 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} f\,(x, y, t \mid 0)\, dt\, dx = \int_0^\infty f\,(x, y \mid 0)\, dx\,. \tag{1.7.5}$$
Ισοδύναμα, η $(1.7.5)$ είναι η ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών.

4. Εάν $w(x_1, x_2) = 1$ τότε η $\phi(u)$ γίνεται *η προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* u,
$$\psi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = 0\right]\,. \tag{1.7.6}$$

Παρατήρηση 1.7.1 *Μπορούμε να λάβουμε επίσης, άλλες μορφές εξισώσεων από τη συνάρτηση Gerber- Shiu όταν η ένταση ανατοκισμού* $\delta = 0$.

1. *Στην περίπτωση όπου* $\delta = 0$ *και* $w(x, y) = 1$*, παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας.*
$$E[I(T < \infty) \mid U(0) = 0] = Pr[T < \infty \mid U(0) = 0] = \psi(u)\,.$$

2. *Επίσης για* $\delta = 0$ *και* $w(x, y) = y$ *η συνάρτηση Gerber-Shiu μας δίνει τη μέση τιμή του ελλείμματος της χρεοκοπίας. Αντίστοιχα, για* $\delta = 0$ *και* $w(x, y) = x$ *η συνάρτηση Gerber-Shiu μας δίνει τη μέση τιμή του πλεονάσματος αμέσως πριν την χρεοκοπία.*

3. *Έστω* $x, y \geq 0$, *και* $\delta = 0$. *Αν θέσουμε*
$$w(U(T-)\,, |U(T)|) \;=\; I(U(T-) \leq x)\, I(|U(T)| \leq y)\,, \tag{1.7.7}$$
παίρνουμε την από κοινού σ.κ. των $(U(T-)\,, |U(T)|)$.
$$\phi(u) = Pr[U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty \mid U(0) = u]\,. \tag{1.7.8}$$

Κεφάλαιο 2

Η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία

Το 1997 οι Gerber & Shiu εισήγαγαν την έννοια της έντασης ανατοκισμού στη θεωρία χρεοκοπίας και μελέτησαν την από κοινού σ.π.π. των χρόνο χρεοκοπίας, πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, με ένταση ανατοκισμού $\delta \geq 0$.

Σκοπός στο κεφάλαιο αυτό είναι να υπολογίσουμε ακριβείς εκφράσεις για την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, καθώς και για τις προεξοφλημένες περιθώριες σ.π.π. των τ.μ. αυτών, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα θεωρήσουμε την ένταση ανατοκισμού, ως την μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace και θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό του χρόνου χρεοκοπίας. Όπως θα δούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου, υπολογίζονται ακριβείς εκφράσεις για τις σ.π.π. που μας ενδιαφέρουν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, για μηδενικό αρχικό αποθεματικό. Στη συνέχεια μελετάμε ανανεωτικές μορφές των σ.π.π. αυτών, και καταλήγουμε στις γενικεύσεις των τύπων του τύπου του Beekman και στην γενίκευση του τύπου του Dickson, για $\delta \geq 0$ (Βλέπε Beekman (1974), Dickson (1992)).

2.1 Βασικές έννοιες & Θεωρήματα της θεωρίας των martingales

Σημαντικό ρόλο στην παραγωγή ακριβών εκφράσεων των συναρτήσεων πυκνότητας όπως θα δούμε στην Παράγραφο 2.3 κατέχει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Για τη μελέτη του μετασχηματισμού αυτού, οι Gerber & Shiu (1997) χρησιμοποίησαν την θεωρία των *martingales*. Στην παράγραφο αυτή, θα παραθέσουμε κάποιες βασικές έννοιες και θεωρήματα, από το Γιαννακόπουλος (2003), που θα χρησιμοποιήσουμε σε μετέπειτα απόδειξη.

Οι διαδικασίες *martingales*, είναι μία ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών όπως αναφέρει ο Γιαννακόπουλος (2003). Μερικοί κλάδοι στους οποίους βρήκαν εφαρμογή είναι ο Αναλογισμός, τα Χρηματοοικονομικά και η Βιοστατιστική. Πρωτοεμφανίστηκαν το 1934 από τον Paul Levy και πήραν το όνομα τους από τον Ville 1939. Πρέπει να αναφέρουμε πως μεγάλο μέρος της θεωρίας των *martingales* αναπτύχθηκε από τον πιθανοθεωρητικό Αμερικανό Joseph Leo Doob.

Ορισμός 2.1.1 *Έστω Ω κάποιο σύνολο. Μία σ-άλγεβρα F επάνω στο σύνολο Ω είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω, με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $F \in \mathcal{F} \rightarrow F^c \equiv \Omega \setminus \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Ορισμός 2.1.2 *Μία **διήθηση**(filtration) είναι μία οικογένεια από σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_t$ τέτοια ώστε*

$$\text{αν } s \leq t \text{ τότε } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Όπως εξηγεί ο Γιαννακόπουλος (2003), η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή t, και μία *διήθηση* μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν μία αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος.

Ορισμός 2.1.3 *Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t ονομάζεται **προσαρμοσμένη** (adapted) στην διήθηση $\mathcal{F}_t$ αν X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη για κάθε t.*

Δηλαδή, όλη η πληροφορία η οποία αφορά την στοχαστική μεταβλητή X_t μέχρι τη χρονική στιγμή t περιέχεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$.

Εφόσον ορίσαμε τις έννοιες της *διήθησης* και των *προσαρμοσμένων μεταβλητών*, μπορούμε τώρα να δώσουμε και τον ορισμό των *martingales*.

Ορισμός 2.1.4 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων, $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση στην $\mathcal{F}(\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F})$ και X_t μία οικογένεια πραγματικών ολοκληρώσιμων ($E[|X_t|] < \infty$) τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t$. Η οικογένεια X_t είναι μία **martingale** αν*

$$E\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s \text{ σ.β. } s \leq t \text{ είτε για κάθε } t \in R \text{, είτε } t \text{ είναι διακριτό.}$$

Μία επεξήγηση του ορισμού είναι η εξής, για μια *martingale* έχοντας υπόψην μας την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t είναι η τιμή της X_s.

Παράδειγμα 2.1.1 *Έστω η martingale X_t το κέρδος από ένα τυχερό παιχνίδι, η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας τη χρονική στιγμή t έχοντας παρακολουθήσει την έκβαση του παιχνιδιού μέχρι τη χρονική στιγμή s, θα είναι το κέρδος που είχαμε τη χρονική στιγμή s, δηλαδή το X_s.*

Το παρακάτω θεώρημα αποτυπώνει τη σημαντική ιδιότητα των *martingales* ως προς τη μέση τιμή της.

Θεώρημα 2.1.1 *Αν X_t είναι μία martingale τότε*

1. $E[X_t] = E[X_0]$

2. $E[X_t - X_s] = 0.$

Άλλες έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στο παρόν κεφάλαιο είναι ο χρόνος στάσης (ή χρόνος διακοπής) και το Θεώρημα επιλεκτικής στάσης.

Ορισμός 2.1.5 *Έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ μία διήθηση σε ένα σύνολο Ω όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών (όχι απαραίτητα διακριτό). Ένας **χρόνος στάσης** (Stopping Time) σχετικά με τη διήθηση αυτή είναι μία απεικόνιση*

$$T : \Omega \to I \text{ τέτοια ώστε } \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ για κάθε } t \in I.$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι η T είναι μία τ.μ. Αν ο *χρόνος στάσης* $\tau < \infty$ σ.β. λέμε ότι τ είναι πεπερασμένος σ.β. Αν ισχύει ότι $\tau \leq T < \infty$ τότε λέμε ότι ο *χρόνος στάσης* τ είναι φραγμένος.

Ορισμός 2.1.6 *Αν T είναι ένας χρόνος στάσης τότε μπορούμε να ορίσουμε την σταματημένη ανέλιξη $X_t^T := X_{t\wedge T}$*

$$X_t^T = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{αν} \quad t < T(\omega) \\ X_T(\omega), & \text{αν} \quad t \geq T(\omega)\,. \end{cases}$$

Τέλος θα δώσουμε το **Θεώρημα επιλεκτικής στάσης** *(Optional Sampling Theorem)*.

Θεώρημα 2.1.2 *Αν X_t είναι μία martingale ως προς μία διήθηση ($\mathcal{F}_t$) και T ένας χρόνος στάσης ως προς την ίδια διήθηση τότε η σταματημένη ανέλιξη (stopped process) $X_t^T = X_{t\wedge T}$ είναι και αυτή μία martingale ως προς την ίδια διήθηση. Ισχύει συνεπώς*

$$E[X_{t\wedge T}] = E[X_0]\,.$$

2.2 Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π.του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Το 1997 οι Gerber & Shiu εισήγαγαν την ένταση ανατοκισμού στη θεωρία χρεοκοπίας και μελέτησαν την από κοινού σ.π.π. των τυχαίων μεταβλητών πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας με $\delta \geq 0$. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την συνάρτηση αυτή καθώς και τις περιθώριες της, για το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας.

Θεωρούμε το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U(T-) = x$, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)| = y$ και το χρόνο χρεοκοπίας $T = t$.

Ορισμός 2.2.1 *Ορίζουμε την $f\left(x, y, t \mid u\right)$ την ελλειμματική σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας, με αρχικό απόθεμα $u \geq 0$, για την οποία ισχύουν*

1.
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(x, y, t \mid u\right) dx\, dy\, dt = Pr\left[T < \infty \mid U(0) = u\right] = \psi(u) \tag{2.2.1}$$

2. όταν $x > u + ct$ ισχύουν

- $f\left(x, y, t \mid u\right) = 0$ *και*
- $f(u + ct, y, t|u)dxdydt = e^{-\lambda t}\lambda p(u + ct + y)dy\, dt.$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $(2.2.1)$ είναι η ειδική περίπτωση της εξίσωσης Gerber-Shiu $(1.7.1)$ που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1, για $w(x, y) = 1$ και $\delta = 0$.

Η παρακάτω πρόταση, δίνει μία έκφραση για την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, και του χρόνου χρεοκοπίας, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τον τύπο της προεξοφλημένης από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Πρόταση 2.2.1 *Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας, για θετική ένταση ανατοκισμού είναι*
$$f\left(x, y, t \mid u\right) = \left[\int_0^\infty f\left(x, z, t \mid u\right) dz\right] \frac{p(x + y)}{1 - P(x)}\,. \tag{2.2.2}$$

Απόδειξη: Δίνεται στο παράρτημα.

Πρόταση 2.2.2 *Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας υπολογίζεται από την*

$$f\left(x, y \mid u\right) = f\left(x \mid u\right) \frac{p(x + y)}{1 - P(x)}\,. \tag{2.2.3}$$

Απόδειξη
Η σχέση $(1.7.2)$ σύμφωνα με την $(2.2.2)$ γίνεται

$$\begin{aligned} f\left(x, y \mid u\right) &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f\left(x, z, t \mid u\right) dz\right] e^{-\delta t} \frac{p(x + y)}{1 - P(x)}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} f\left(x, t \mid u\right) dt\, \frac{p(x + y)}{1 - P(x)}\,. \end{aligned}$$

Από την (1.7.3) προκύπτει η ζητούμενη

$$f\,(x, y \mid u) = f\,(x \mid u)\,\frac{p(x+y)}{1-P(x)}\,.$$

$\square$

Παρατήρηση 2.2.1 *Η εξίσωση* $(2.2.3)$ *έχει επισημανθεί πρώτα από τους Dufrence & Gerber(1988) για* $\delta = 0$*, καθώς αργότερα και από τους Dickson και Egidio dos Reis (1994).*

Για να υπολογίσουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. $(2.2.3)$ πρέπει να γνωρίζουμε τη σ.π.π. που ακολουθούν οι αποζημιώσεις, αλλά και την προεξοφλημένη σ.π.π. της $U(T-)$. Η σ.π.π. αυτή, υπολογίζεται από τη γενίκευση του τύπου του Dickson για θετικό ανατοκισμό, ο οποίος μελετήθηκε από τους Gerber & Shiu (1997). Τον τύπο αυτό, θα δούμε στο τέλος του κεφαλαίου, αφότου υπολογίσουμε άλλες συναρτήσεις απαραίτητες στον υπολογισμό του.

Στην επόμενη παράγραφο, θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, θεωρώντας ως μεταβλητή του μετασχηματισμού, την ένταση ανατοκισμού δ. Όπως θα δούμε και στη Παράγραφο 2.4, ο μετασχηματισμός Laplace, είναι η σχέση κλειδί για τον υπολογισμό κλειστών εκφράσεων των σ.π.π. που εξετάζουμε, για αρχικό αποθεματικό $u = 0$.

2.3 Μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό u=0

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω της ανέλιξης $\{e^{-\delta t+\xi U(t)}\}_{t\geq 0}$. Αρχικά, σύμφωνα με την ιδιότητα μίας martingale, όπου $E[X_n] = [X_0]$, αποδεικνύουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της ανέλιξης στο χρόνο t είναι ίση με την αρχική της τιμή. Με βάση αυτή την ιδιότητα, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της τ.μ. T_x, ο οποίος ισοδυναμεί με το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u = 0$.

Πρόταση 2.3.1 *Θεωρούμε ότι η στοχαστική ανέλιξη*

$$\{e^{-\delta t+\xi U(t)}\}_{t\geq 0}\,, \tag{2.3.1}$$

είναι martingale. Τότε για κάθε $t > 0$, *η αναμενόμενη τιμή στο χρόνο* t *είναι ίση με την αρχική ποσότητα*

$$E[e^{-\delta t+\xi U(t)} \mid U(0) = u] = e^{\xi u}\,. \tag{2.3.2}$$

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι $\{e^{-\delta t+\xi U(t)}\}_{t\geq 0}$ είναι martingale.
Για κάθε $t\geq 0$, η αναμενόμενη τιμή της ανέλιξη $\{e^{-\delta t+\xi U(t)}\}_{t\geq 0}$ είναι

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\delta t+\xi U(t)} \mid U(0)=u\right] &= E\left[e^{-\delta t}e^{\xi\left(u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right)} \mid U(0)=u\right] \\ &= e^{-\delta t}e^{\xi u+\xi ct}E\left[e^{-\xi\sum_{i=1}^{N(t)}X_i} \mid U(0)=u\right]. \end{aligned}$$

Για την μέση τιμή $E\left[e^{-\xi\sum_{i=1}^{N(t)}X_i} \mid U(0)=u\right]$, ισχύει ότι

$$E\left[e^{-\xi\sum_{i=1}^{N(t)}X_i} \mid U(0)=u\right] = M_{S(t)}(-\xi)\,,$$

όπου $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$, η σύνθετη στοχαστική ανέλιξη Poisson, όπως έχουμε αναφέρει στη Παράγραφο 1.2.3. Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.1.9,

$$M_{S(t)}(\xi)=e^{\lambda t(M_X(\xi)-1)}\,.$$

Εδώ

$$M_{S(t)}(-\xi)=e^{\lambda t(M_X(-\xi)-1)}=e^{\lambda t(\hat{p}(\xi)-1}\,,$$

διότι ισχύει $M_X(-r)=\hat{p}(r)$.
Έτσι,

$$E\left[e^{-\delta t+\xi U(t)}|U(0)=u\right]=e^{-\delta t+\xi u+\xi ct}e^{\lambda t(\hat{p}(\xi)-1)}\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1, ισχύει

$$e^{-\delta t+\xi u+\xi ct}e^{\lambda t(\hat{p}(\xi)-1)}=e^{\xi u}\,.$$

$\square$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1, η υπόθεση που κάναμε για να αποδείξουμε την (2.3.2) είναι

$$[-\delta+\xi c-\lambda(\hat{p}(\xi)(t)-1)]t=0$$

ή ισοδύναμα

$$-\delta+c\xi+\lambda[\hat{p}(\xi)-1]=0\,. \tag{2.3.3}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση (2.3.3), δίνεται παρακάτω η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg.

Πρόταση 2.3.2 *Θεωρούμε ότι $\hat{p}(s)$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής των αποζημιώσεων, η εξίσωση*

$$\lambda\hat{p}(\xi)=\lambda+\delta-c\xi\,,$$

*είναι η **γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg**, η οποία έχει μία μοναδική θετική ρίζα ρ.*

Έστω η τ.μ.

$$T_x = inf\{t \mid U(t) = x\}\,,$$

είναι ο μικρότερος δυνατός χρόνος που χρειάζεται το πλεόνασμα να πάρει την τιμή x, για πρώτη φορά. Δηλαδή ισχύει ότι

$$U(t) \leq x\,,\ \text{για}\ 0 \leq t \leq T_x\,.$$

Ορίζουμε με $\pi(t; u, x)$, για $t > 0$, τη σ.π.π. της τ.μ. T_x. Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. αυτής, δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.3 *Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. T_x είναι*

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\pi(t; u, x)\,dt = e^{-\rho(x-u)}\,. \tag{2.3.4}$$

όπου ρ είναι η θετική λύση της εξίσωσης Lundberg (2.3.3).

Απόδειξη
Η εξίσωση (2.3.2) για την τ.μ. T_x γράφεται,

$$E\left[e^{-\delta T_x + \rho U(T_x)} \mid U(0) = u\right] = e^{\rho u}\,. \tag{2.3.5}$$

Δεδομένου ότι $\{e^{-\delta t + \xi U(t)}\}_{t \geq 0}$ είναι martingale, ισχύει το Θεώρημα επιλεκτικής στάσης $2.1.2$. Έτσι η εξίσωση (2.3.5) γίνεται

$$E[e^{-\delta T_x}|U(0) = u]e^{\rho x} = e^{\rho u}\,.$$

Δηλαδή ο μετασχηματισμός της T_x είναι

$$E[e^{-\delta T_x}|U(0) = u] = e^{-\rho(x-u)}\,. \tag{2.3.6}$$

□

Θεωρώντας το δ ως την ένταση ανατοκισμού, μπορούμε να πούμε ότι η $e^{-\rho(x-u)}$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη τιμή μιας πληρωμής μιας μονάδας (προκαταβλητέα) τη στιγμή που το πλεόνασμα παίρνει την τιμή x για πρώτη φορά.

Παρατήρηση 2.3.1 *Πρέπει να αναφέρουμε ότι, το πλεόνασμα μπορεί να φτάσει το επίπεδο x πριν γίνει η πρώτη αποζημίωση , δηλαδή*

$$u + ct = x$$

αλλά δεν μπορεί να φτάσει το επίπεδο x πριν τον χρόνο

$$t = \frac{x-u}{c}\,.$$

Επομένως, $\pi(t; u, x) = 0$ για $t < \frac{x-u}{c}$, και η κατανομή της T_x έχει μάζα στο σημείο $t = \frac{x-u}{c}$. έτσι ώστε

$$\pi\left(\frac{x-u}{c}; u, x\right)dt = e^{-\frac{\lambda(x-u)}{c}}$$

Ορισμός 2.3.1 *Ορίζουμε,*

1. *το διαφορικό $\pi(t;x,u)dt$ είναι η πιθανότητα η ανέλιξη πλεονάσματος να ξεπεράσει το επίπεδο x μεταξύ t και $t+dt$ και αυτό να γίνει για πρώτη φορά.*

2. *το διαφορικό $\tilde{\pi}(t;u,x)dt$, $t>0$, ως την πιθανότητα η χρεοκοπία να μην συμβεί στο χρόνο t και η ανέλιξη του πλεονάσματος ξεπερνάει το επίπεδο x μεταξύ t και $t+dt$, για $U(0)=u\geq 0$, $x>0$,*

Όταν το αρχικό αποθεματικό $u=0$, ισχύει

$$\pi(t;0,x)=\tilde{\pi}(t;0,x) \quad x>0, \quad t>0\,. \tag{2.3.7}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό αλλά και την Πρόταση 2.3.4, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u=0$ είναι

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\tilde{\pi}(t;0,x)\,dx=e^{-\rho x}\,. \tag{2.3.8}$$

Έχοντας υπολογίσει το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεκοπίας για $u=0$, μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα, κλειστούς τύπους για την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας καθώς και τις περιθώριες σ.π.π. αυτών, για θετικό ανατοκισμό ($\delta>0$).

2.4 Ακριβείς τύποι υπολογισμού των πυκνοτήτων με αρχικό αποθεματικό u=0

Το διαφορικό $f(x,y,t|u)dtdxdy$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η πιθανότητα να μην συμβεί χρεοκοπία (μέχρι) τη χρονική στιγμή t, η ανέλιξη πλεονάσματος ξεπερνάει το επίπεδο x μεταξύ t και $t+dt$, αλλά δεν φτάνει το επίπεδο $x+dx$, υπάρχει αποζημίωση μέσα σε $c^{-1}dx$ χρονικές μονάδες μετά από το χρόνο T_x, και ότι το μέγεθος της αποζημίωσης είναι μεταξύ $x+y$ και $x+y+dy$. Η πιθανότητα αυτή συμβολίζεται ως

$$f\,(x,y,t\mid u)\;dt\,dx\,dy=[\tilde{\pi}(t;u,x)\,dt][\lambda c^{-1}\,dx][p(x+y)\,dy]\,, \tag{2.4.1}$$

Από τον Ορισμό 2.3.1 προκύπτει ότι, ο τύπος της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$f\,(x,y,t\mid u)=\frac{\lambda}{c}p(x+y)\tilde{\pi}(t;u,x)\,. \tag{2.4.2}$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας $\tilde{\pi}(t;u,x)$ δεν γνωρίζουμε κάποια μορφή τύπου παρά μόνο ότι για $u=0$

$$\tilde{\pi}(t;0,x) = \pi(t;0,x) \quad x>0\ , t>0\,.$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε ακριβείς τύπους για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας μόνο για $u=0$. Η σχέση $(2.4.2)$ για $u=0$ είναι

$$f\,(x,y,t\mid 0) = \frac{\lambda}{c}p(x+y)\pi(t;0,x)\,. \tag{2.4.3}$$

Η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u=0$ βρίσκεται, εάν πάρουμε το τύπο $(2.4.3)$ τον πολλαπλασιάσουμε με $e^{-\delta t}$ και τον ολοκληρώσουμε ως προς t από το 0 έως το ∞. Δηλαδή,

$$\int_0^\infty f\,(x,y,t\mid 0)\,e^{-\delta t}dt = \int_0^\infty \lambda c^{-1}p(x+y)\pi(t;0,x)e^{-\delta t}\,dt\,,$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις $(1.7.2)$ και $(2.3.4)$ για $u=0$ έχουμε ότι

$$f\,(x,y\mid 0) = \frac{\lambda}{c}p(x+y)e^{-\rho x}, \quad x>0, \quad y>0\,. \tag{2.4.4}$$

Για να λάβουμε τον τύπο της σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $(2.2.3)$ για $u=0$

$$f\,(x,y\mid 0) = f\,(x\mid 0)\,\frac{p(x+y)}{1-P(x)}\,,$$

στη συνέχεια αντικαθιστούμε την $(2.4.4)$

$$\frac{\lambda}{c}p(x+y)e^{-\rho x} = f\,(x\mid 0)\,\frac{p(x+y)}{1-P(x)}\,,$$

και καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση

$$f\,(x\mid 0) = (1-P(x))\frac{\lambda}{c}e^{-\rho x}, \quad x>0\,. \tag{2.4.5}$$

Η σ.π.π. για το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας παράγεται από τις σχέσεις $(1.7.5)$ και $(2.4.4)$

$$g(y\mid 0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty p(x+y)e^{-\rho x}\,dx\,. \tag{2.4.6}$$

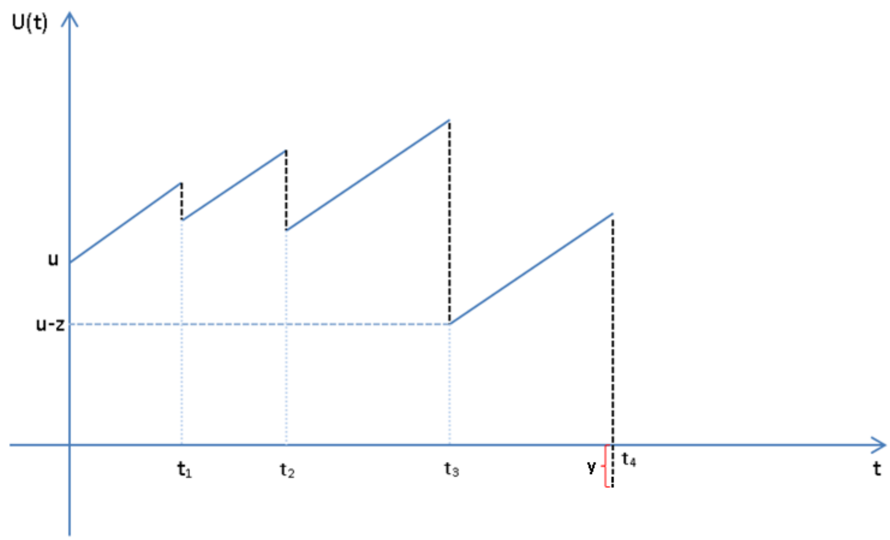
Παρατήρηση 2.4.1 *Η σ.π.π.* $(2.4.6)$ *είναι η ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών.*

2.5 Ανανεωτικές εξισώσεις

Η σ.π.π του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία μπορεί να αναλυθεί σε δύο διαφορετικές ανανεωτικές εξισώσεις, σύμφωνα με το πότε συμβαίνει χρεοκοπία για πρώτη φορά.

Περίπτωση 1: Στην περίπτωση $0 \leq x < u$, δηλαδή, η αποζημίωση η οποία επιφέρει τη χρεοκοπία είναι μικρότερη του αρχικού αποθεματικού, το πλεόνασμα πάντα πέφτει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, πριν συμβεί η χρεοκοπία

$$f\left(x, y \mid u\right) = \int_0^u f\left(x, y \mid u - z\right) g(z)\, dz \quad 0 < x \leq u\,. \tag{2.5.1}$$

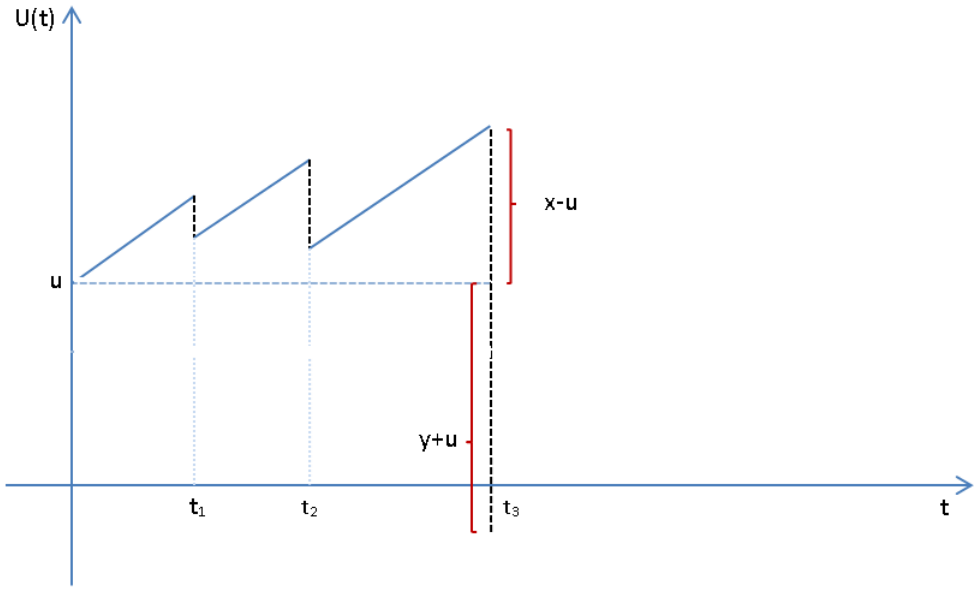


Σχήμα 2.1: Χρεοκοπία όταν η αποζημίωση είναι μικρότερη του αρχικού αποθεματικού u .
Στο διάγραμμα βλέπουμε το πλεόνασμα συναρτήσει του χρόνου. Τη στιγμή t_3 το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, και τη στιγμή t_4 έχουμε για πρώτη φορά αρνητικό πλεόνασμα.

Περίπτωση 2: Στην περίπτωση που $0 \leq u < x$, δηλαδή στην περίπτωση που η αποζημίωση η οποία επιφέρει χρεοκοπία είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, μπορεί να συμβεί η πρώτη περίπτωση της σχέσης (2.5.1), όμως μπορεί επίσης να συμβεί χρεοκοπία τη στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό u

$$f\left(x, y \mid u\right) = \int_0^u f\left(x, y \mid u - z\right) g(z)\, dz + f\left(x - u, y + u \mid 0\right) \quad 0 \leq u < x\,. \tag{2.5.2}$$

Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε την περίπτωση αυτή, όπου η χρεοκοπία συμβαίνει τη στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Θεωρώντας το αρχικό αποθεματικό $u = 0$ το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία είναι $x - u$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας $u + y$.



Σχήμα 2.2: Χρεοκοπία, με αποζημίωση μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό u.
Στο διάγραμμα, βλέπουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος. Παρατηρούμε ότι τη στιγμή t_3 έχουμε για πρώτη φορά χρεοκοπία. Τη χρονική στιγμή αυτή, το πλεόνασμα έχει μεγαλύτερη τιμή από το αρχικό αποθεματικό u.

Οι παραπάνω σχέσεις, $(2.5.1)$ και $(2.5.2)$, μπορούν να εκφραστούν σε μία μορφή ανανεωτικής εξίσωσης. Χρησιμοποιώντας τη δείκτρια συνάρτηση

$$I(u < x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν} \quad u < x \\ 0, & \text{εάν} \quad u > x \,, \end{cases}$$

καθώς και τη σχέση $(2.4.4)$ την οποία μετατρέπουμε ως

$$\begin{aligned} f\left(x-u, y+u \mid 0\right) &= \frac{\lambda}{c} p(x-u+y+u) e^{-\rho(x-u)} \\ &= \frac{\lambda}{c} p(x+y) e^{-\rho x} e^{\rho u} \\ &= f\left(x, y \mid 0\right) e^{\rho u} \,, \end{aligned}$$

- η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$f\left(x,y \mid u\right)=\int_0^u f\left(x,y \mid u-z\right)g(z)\,dz+f\left(x,y \mid 0\right)e^{\rho u}I(u<x)\,. \tag{2.5.3}$$

- η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$f\left(x \mid u\right)=\int_0^u f\left(x \mid u-z\right)g(z)\,dz+f\left(x \mid 0\right)e^{\rho u}I(u<x)\,. \tag{2.5.4}$$

  την οποία βρίσκουμε, εάν ολοκληρώσουμε την (2.5.3) ως προς y από 0 έως ∞, βασιζόμενοι στη (1.7.3).

Παρατήρηση 2.5.1 *Η $f\left(x \mid u\right)$ σαν συνάρτηση του x, έχει ασυνέχεια λόγω της*

$$f\left(x \mid 0\right)e^{\rho u}=\frac{\lambda}{c}[1-P(u)] \tag{2.5.5}$$

στο $x=u$ και δεν εξαρτάται από το δ.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, αναφερόμαστε στη μοναδικότητα λύσης των ανανεωτικών εξισώσεων. Έστω συνάρτηση $\gamma(u)$ η οποία ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης

$$\gamma(u)=\int_0^u \gamma(u-z)g(z)\,dz+e^{\rho u}I(u<x)\,. \tag{2.5.6}$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την $(2.5.6)$ με $f\left(x \mid 0\right)$ λαμβάνουμε,

$$f\left(x \mid 0\right)\gamma(u)=f\left(x \mid 0\right)\int_0^u \gamma(u-z)g(z)\,dz+f\left(x \mid 0\right)e^{\rho u}I(u<x)\,. \tag{2.5.7}$$

Από μοναδικότητα λύσης των ανανεωτικών εξισώσεων $(2.5.7)$ και $(2.5.4)$ ισχύει

$$f\left(x \mid u\right)=f\left(x \mid 0\right)\gamma(u)\,. \tag{2.5.8}$$

Από την $(2.5.8)$ και την $(2.2.3)$ ισχύει επίσης η

$$f\left(x,y \mid u\right)=f\left(x,y \mid 0\right)\gamma(u)\,. \tag{2.5.9}$$

2.6 Ο τύπος του Dickson για θετική ένταση ανατοκισμού, στο κλασικό μοντέλο.

Στην παράγραφο αυτή, παραθέτουμε τη γενίκευση του τύπου του Dickson (1992) για θετικό ανατοκισμό. Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο, μπορούμε να υπολογίσουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η σ.π.π. του πλεονάσματος , ως συνάρτηση του x έχει ασυνέχεια στο σημείο $x=u$. Για τον λόγο αυτό ,η $f(x \mid u)$ μελετάται για $0<x\leq u$ και $0<u\leq x$. Την ασυνέχεια αυτή, θα δούμε αργότερα στις γραφικές παραστάσεις των παραδειγμάτων.

Ορίζουμε την ανανεωτική συνάρτηση πιθανότητας χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο με θετική ένταση ανατοκισμού, όπως η σχέση $(1.4.16)$.

$$\psi_\delta(u) = \int_0^u g(z)\psi_\delta(u-z)\,dz + \int_u^\infty g(z)e^{-\rho(u-z)}\,. \tag{2.6.1}$$

Στην παρακάτω πρόταση οι Gerber & Shiu (1997), γενίκευσαν τον τύπο του Beekman (1974), από τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για θετικό ανατοκισμό.

Πρόταση 2.6.1 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας για θετική ένταση ανατοκισμού ($\delta \geq 0$) μπορεί να βρεθεί από τη γενικευμένη έκφραση του τύπου του Beekman (1974)*

$$e^{\rho u} - \psi_\delta(u) = [1-\psi_\delta(0)]\left[e^{\rho u} + \int_0^u e^{\rho z}\sum_{k=1}^{\infty} g^{*k}(u-z)\,dz\right]. \tag{2.6.2}$$

Απόδειξη: Δίνεται στο παράρτημα.

Αφού δώσαμε ένα τύπο για τον υπολογισμό της πιθανότητα χρεοκοπίας, μπορούμε τώρα να δώσουμε τον τύπο του Dickson για θετικό ανατοκισμό.

Πρόταση 2.6.2 *Η γενικευμένη έκφραση του τύπου του Dickson για θετική ένταση ανατοκισμού είναι*

$$f(x \mid u) = \begin{cases} f(x \mid 0)\,\frac{e^{\rho u}-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)} & x > u \geq 0 \\ \\ f(x \mid 0)\,\frac{e^{\rho x}\psi_\delta(u-x)-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)} & 0 < x \leq u\,. \end{cases} \tag{2.6.3}$$

Απόδειξη: Δίνεται στο παράρτημα.

Κλείνουμε το κεφάλαιο με παραδείγματα, μέσα από τα οποία μπορούμε να κάνουμε μία μικρή ανακεφαλαίωση, πως χρησιμοποιούμε τους τύπους που δόθηκαν στο κεφάλαιο αυτό για να υπολογίσουμε τελικά την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Επίσης, από τα γραφήματα θα δούμε ξεκάθαρα την ασυνέχεια που έχει η σ.π.π. του πλεονάσματος στο σημείο $x = u$.

2.7 Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.7.1 *Θεωρούμε ότι οι αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου ακολουθούν κατανομή με σ.π.π.*

$$p(x) = \frac{1}{3}(3e^{-3x} + 2e^{-2x} + e^{-x})\,.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο γίνονται οι αποζημιώσεις είναι $\lambda = 2$ και η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta = 0.5$. Το ασφάλιστρο ορίζεται $c = 3.5$, έτσι ώστε το περιθώριο ασφάλειας να είναι $\theta = 1.86364$.

Για να υπολογίσουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Dickson για θετικό ανατοκισμό (2.6.3).

Έχουμε ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη εκθετικών κατανομών με μέση τιμή $\mu_1 = 11/18$. *Το πρώτο βήμα για να λύσουμε το πρόβλημα είναι να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής σύμφωνα με την εξίσωση Lundberg για θετικό ανατοκισμό* (2.3.3) .

Ο μετασχηματισμός Laplace της $p(x)$ *είναι*

$$\hat{p}(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+s} + \frac{2}{2+s} + \frac{3}{3+s}\right).$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.3.3) *οι ρίζες είναι*

$$\rho_1 = -2.86131 \ , \rho_2 = -1.83338 \ , \rho_3 = -0.796228 \ , \rho_{4^{\text{c}}} = 0.205209 \, .$$

Στον υπολογισμό των εξισώσεων του κλασικού μοντέλου με θετικό ανατοκισμό, χρησιμοποιούμε την θετική λύση της εξίσωσης (2.3.3) *την οποία συμβολίζουμε με* ρ . *Εδώ* $\rho = 0.205209$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την σ.π.π. του πλεονάσματος καθώς και του ελλείμματος για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, *από τις εξισώσεις* (2.4.5) *και* (2.4.6) *αντίστοιχα. Έτσι,*

$$f(x \mid 0) = 0.190476e^{-0.205209x}(e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x}) \, ,$$

και

$$g(y \mid 0) = 0.571429e^{-3y}(0.311992 + 0.302314e^{y} + 0.276577e^{2y}) \, .$$

Επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την συνάρτηση πιθανότητας χρεοκοπίας σύμφωνα με την γενίκευση του Beekman, (2.6.2) . *Πρώτα λοιπόν υπολογίζουμε το μετασχηματισμό της σ.π.π. του ελλείμματος ή αλλιώς την ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών, η οποία είναι*

$$\hat{g}(s) = 0.571429\left(\frac{0.276577}{1+s} + \frac{0.302314}{2+s} + \frac{0.311992}{3+s}\right),$$

και την πιθανότητα χρεοκοπίας για $u = 0$, $\psi(0) = 0.349206$. *Έτσι λοιπόν η συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας σύμφωνα με την* (2.6.2) *είναι*

$$\psi(u) = 0.0146385e^{-2.86131u} + 0.031943e^{-1.83338u} + 0.108012e^{-0.796228u} + 0.416835e^{0.205209u} \, .$$

Παρατηρούμε ότι, το όριο $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = \infty$, *λόγω του* $e^{0.205209u}$. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας, από τον ορισμό, είναι μία φθίνουσα συνάρτηση που τείνει στο 0 καθώς το* $u \to \infty$. *Για το λόγο αυτό, διώχνουμε το εκθετικό από τη συνάρτηση. Η πιθανότητα χρεοκοπίας, λοιπόν, έχει την μορφή*

$$\psi(u) = 0.0146385e^{-2.86131u} + 0.031943e^{-1.83338u} + 0.108012e^{-0.796228u}\,.$$

Από το τύπο του Dickson για $\delta > 0$, (2.6.3) , *υπολογίζουμε την σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία για τις δύο περιπτώσεις* $0 \leq u < x$ *και* $0 < x \leq u$ *και στη συνέχεια από τη σχέση* (2.2.3) *υπολογίζουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.*

1. $0 \leq u < x$

   - *Η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 0.292683(-0.0146385e^{-2.86131u} - 0.031943e^{-1.83338u} - \\ &\quad 0.108012e^{-0.796228u} + e^{0.205209u})e^{-0.205209x}(e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x})\,, \end{aligned}$$

   - *η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x, y \mid u) &= 0.292683(-0.0146385e^{-2.86131u} - 0.031943e^{-1.83338u} - \\ &\quad 0.108012e^{-0.796228u} + e^{0.205209u})e^{-0.205209x} \\ &\quad (e^{-x-y} + 3e^{-3(x+y)} + 2e^{-2(x+y)})\,. \end{aligned}$$

2. $0 < x \leq u$

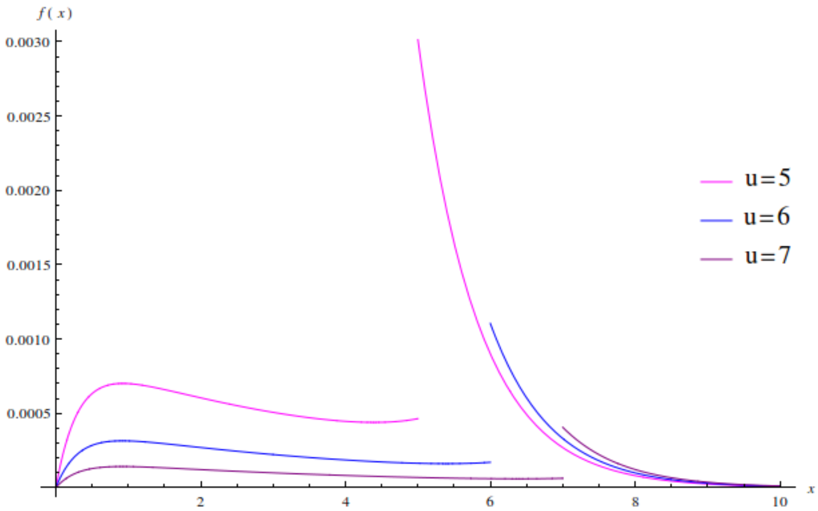
   - *Η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 0.292683e^{-0.205209x}(e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x})(e^{0.205209x} \\ &\quad (0.0146385e^{-2.86131(u-x)} + 0.031943e^{-1.83338(u-x)} + \\ &\quad 0.108012e^{-0.796228(u-x)}) - 0.0146385e^{-2.86131u} - 0.031943e^{-1.83338u} - \\ &\quad 0.108012e^{-0.796228u})\,, \end{aligned}$$

   - *η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x, y \mid u) &= 0.292683e^{-0.205209x}(e^{0.205209x}(0.0146385e^{-2.86131(u-x)} + \\ &\quad 0.031943e^{-1.83338(u-x)} + 0.108012e^{-0.796228(u-x)}) - \\ &\quad 0.0146385e^{-2.86131u} - 0.031943e^{-1.83338u} - 0.108012e^{-0.796228u}) \\ &\quad (e^{-x-y} + 3e^{-3(x+y)} + 2e^{-2(x+y)})\,. \end{aligned}$$

Στο παρακάτω γράφημα μπορούμε να δούμε το γράφημα της σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία για διάφορες τιμές του αρχικού αποθεματικού.



Σχήμα 2.3: Γράφημα μείξης εκθετικών για διαφορετικές τιμές αρχικού αποθεματικού. Στο παραπάνω γράφημα παρατηρούμε τη σ.π.π. του πλεονάσματος για διαφορετικές τιμές του αρχικού αποθεματικού, όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών με $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, ο ρυθμός που γίνονται οι αποζημιώσεις είναι $\lambda = 2$, ο ανατοκισμός $\delta = 0.5$ και το ασφάλιστρο $c = 3.5$.

□

Παράδειγμα 2.7.2 *Θεωρούμε ότι οι αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου, ακολουθούν Erlang(2,2) κατανομή, με σ.π.π.*

$$p(x) = 4xe^{-2x} .$$

Ο ρυθμός με τον οποίο γίνονται οι αποζημιώσεις είναι $\lambda = 2$, με μέση τιμή μ_1 , και η ένταση ανατοκισμού $\delta = 0.8$. Ορίζουμε το ασφάλιστρο $c = 3.5$ έτσι ώστε το περιθώριο ασφαλείας να είναι $\theta = 0.75$.

Για τον υπολογισμό των σ.π.π. των μεταβλητών, ακολουθούμε τη διαδικασία όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. είναι

$$\hat{p}(s) = \frac{4}{(2+s)^2} .$$

Έτσι οι λύσεις της εξίσωσης Lundberg είναι

$$\rho_1 = -2.79714 \, , \rho_2 = -0.8076 \; \textit{και} \; , \rho_3 = 0.404736 \, ,$$

και θέτουμε $\rho = \rho_3 = 0.404736$. Οι προεξοφλημένες σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, αλλά και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία είναι

$$f(x \mid 0) = 0.571429e^{-0.404736x} \left(1 - e^{-2x} \left(-2x + e^{2x} - 1\right)\right) \, ,$$

και
$$g(y \mid 0) = 0.571429 e^{-2y}(1.66338y + 0.691712)\,.$$
Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της $g(y \mid 0)$, *ο οποίο ισούται με*
$$\hat{g}(s) = 0.571429\left(\frac{1.66338}{(s+2)^2} + \frac{0.691712}{s+2}\right)$$
Η πιθανότητα χρεοκοπίας για $u = 0$ *είναι* $\psi(0) = 0.571429$, *έτσι η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται ως*
$$\psi(u) = -0.0427496 e^{-2.79714u} + 0.252634 e^{-0.8076u} + 0.361544 e^{0.404736u}\,.$$
Παρατηρούμε ότι, το όριο $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = \infty$, *λόγω του* $e^{0.404736u}$. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας, από τον ορισμό, είναι μία φθίνουσα συνάρτηση που τείνει στο 0 καθώς το* $u \to \infty$. *Για το λόγο αυτό, διώχνουμε το εκθετικό από τη συνάρτηση. Η πιθανότητα χρεοκοπίας, λοιπόν, έχει την μορφή*
$$\psi(u) = -0.0427496 e^{-2.79714u} + 0.252634 e^{-0.8076u}\,.$$

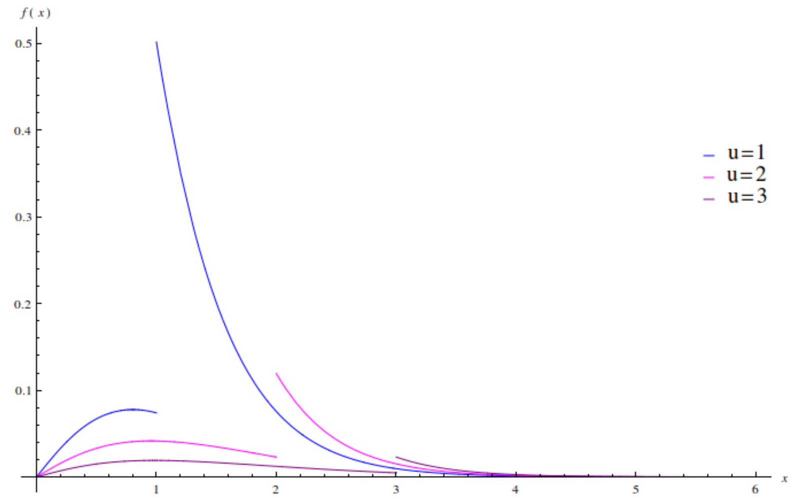
Από το τύπο του Dickson για $\delta > 0$, (2.6.3) , *υπολογίζουμε την σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία για τις δύο περιπτώσεις* $0 \le u < x$ *και* $0 < x \le u$ *και στη συνέχεια από τη σχέση* (2.2.3) *υπολογίζουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.*

1. $0 \le u < x$

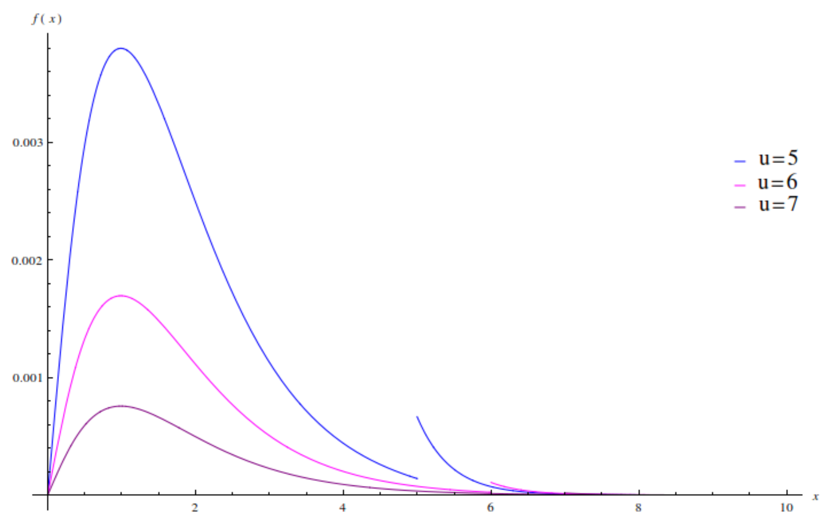
   - *Η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι*
   $$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 1.33333(0.0427496e^{-2.79714u} - 0.252634e^{-0.8076u} \\ &\quad + e^{0.404736u})e^{-0.404736x}(1 - e^{-2x}(-2x + e^{2x} - 1))\,, \end{aligned}$$
   - *η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία είναι*
   $$\begin{aligned} f(x, y \mid u) &= 5.33333(0.0427496e^{-2.79714u} - 0.252634e^{-0.8076u} + \\ &\quad e^{0.404736u})e^{-2(x+y)-0.404736x}(x + y)\,. \end{aligned}$$

2. $0 < x \le u$

   - *Η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι*
   $$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 1.33333e^{-0.404736x}(1 - e^{-2x}(-2x + e^{2x} - 1))(e^{0.404736x} \\ &\quad (0.252634e^{-0.8076(u-x)} - 0.0427496e^{-2.79714(u-x)}) + \\ &\quad 0.0427496e^{-2.79714u} - 0.252634e^{-0.8076u})\,, \end{aligned}$$
   - *η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία είναι*
   $$\begin{aligned} f(x, y \mid u) &= 5.33333(e^{0.404736x}(0.252634e^{-0.8076(u-x)} - \\ &\quad 0.0427496e^{-2.79714(u-x)}) + 0.0427496e^{-2.79714u} - \\ &\quad 0.252634e^{-0.8076u})e^{-2(x+y)-0.404736x}(x + y)\,. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.4: Γράφημα Erlang[2,2] κατανομή, με $\delta > 0$ για διαφορετικές τιμές αρχικού αποθεματικού.



Σχήμα 2.5: Γράφημα Erlang[2,2] κατανομή , με $\delta > 0$ για διαφορετικές τιμές αρχικού αποθεματικού.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Ακριβείς εκφράσεις και ιδιότητες μονοτονίας για την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία στο ανανεωτικό μοντέλο

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε συναρτήσεις που ισχύουν στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Συγκεκριμένα, θα δώσουμε την ανανεωτική έκφραση της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, θα αποδείξουμε ότι ο τύπος του Dickson είναι ίδιος με το κλασικό μοντέλο, και θα βρούμε μέσα από παραδείγματα τον τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας και των κλιμακωτών υψών. Για το κεφάλαιο αυτό βασιστήκαμε στις εργασίες των Dickson & Drekic (2003) και Dickson (1998) .

3.1 Ανανεωτικές εξισώσεις

Όπως και στο κλασικό μοντέλο, θεωρούμε δύο περιπτώσεις σύμφωνα με το πότε συμβαίνει χρεοκοπία για πρώτη φορά.

1. Στην περίπτωση $0 < x \leq u$, δηλαδή, η αποζημίωση η οποία επιφέρει τη χρεοκοπία είναι μικρότερη του αρχικού αποθεματικού, το πλεόνασμα πάντα πέφτει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u (όχι όμως κάτω από το μηδέν), πριν συμβεί η χρεοκοπία.

2. Στην περίπτωση που $0 \leq u < x$, δηλαδή στην περίπτωση που η αποζημίωση η οποία επιφέρει χρεοκοπία είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, μπορεί να συμβεί η περίπτωση 1, όμως μπορεί επίσης να συμβεί χρεοκοπία τη στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό u.

Περίπτωση 1: $0 < x \leq u$

- η από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$F\left(x,y\mid u\right)=\int_{0}^{u}g\left(z\mid 0\right)F\left(x,y\mid u-z\right)\,dz\,. \tag{3.1.1}$$

Θυμίζουμε ότι

$$h(x)=\frac{g\left(y\mid 0\right)}{\psi(0)},$$

είναι η μη-ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών. (Βλέπε Παράγραφο 1.4.6 εξ. $(1.4.11)$), Έτσι η εξίσωση γίνεται

$$F\left(x,y\mid u\right)=\psi(0)\int_{0}^{u}h(z)F\left(x,y\mid u-z\right)dz. \tag{3.1.2}$$

- η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία είναι

$$f\left(x,y\mid u\right)=\psi(0)\int_{0}^{u}h(z)f\left(x,y\mid u-z\right)dz.$$

η οποία βρίσκεται εάν παραγωγίσουμε την $(3.1.2)$ ως προς x και y .

Περίπτωση 2: $0 \leq u < x$

Όταν η χρεοκοπία συμβαίνει τη στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό, τότε το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία είναι μικρότερο ή ίσο του x, και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι μικρότερο ή ίσο του y. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι

$$J\left(x,y\mid u\right)=\int_{0}^{x-u}\int_{0}^{u+y}f\left(r,s\mid 0\right)\,dr\,ds.$$

- Η από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$F\left(x,y\mid u\right)=\psi(0)\int_{0}^{u}h(z)F\left(x,y\mid u-z\right)dz+J\left(x,y\mid u\right). \tag{3.1.3}$$

Η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$f\left(x,y\mid u\right)=\psi(0)\int_{0}^{u}h(z)f\left(x,y\mid u-z\right)dz+f\left(x-u,u+y\mid 0\right).$$

η οποία υπολογίζεται εάν παραγωγίσουμε την $(3.1.3)$ ως προς x και y .

Η γενική μορφή αυτών των δύο περιπτώσεων όταν $u \geq 0$, είναι

- η από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$F(x, y \mid u) = \psi(0) \int_0^u h(z) F(x, y \mid u - z)\, dz + I(u < x) J(x, y \mid u)\ , \qquad (3.1.4)$$

- η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$f(x, y \mid u) = \psi(0) \int_0^u h(z) f(x, y \mid u - z)\, dz + I(u < x) f(x - u, u + y \mid 0)\,. \quad (3.1.5)$$

3.2 Πιθανότητα μη-χρεοκοπίας

Ο Dickson (1998) θεώρησε δύο περιπτώσεις όπου, στην πρώτη οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομή Erlang $(2, \sigma)$ με σ.π.π. $k(t) = \sigma^2 e^{-\sigma t}\,,\ t > 0\,$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο χρόνος μέχρι την πρώτη αποζημίωση ακολουθεί κατανομή με σ.π.π. $k_1 = \frac{1-K(t)}{\mu} = \frac{\sigma}{2} e^{-\sigma t}(1 + \sigma t)$ για κάθε $t > 0$ και η σ.π.π. των ενδιάμεσων χρόνων, από την $(i-1)$-οστή έως i-οστή αποζημίωση, ακολουθούν την κατανομή με σ.π.π. όπως στην πρώτη περίπτωση. Η δεύτερη περίπτωση ονομάζεται ισορροπημένη (*equilibrium*) ανανεωτική ανέλιξη .

Ο Dickson γι' αυτές τις δύο περιπτώσεις, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, υπολόγισε την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας για $\sigma = 2$. Θεωρούμε την ανανεωτική εξίσωση της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας

$$\delta(u) = \int_0^\infty k(t) \int_0^{u+ct} p(x) \delta(u + ct - x)\, dx\, dt\,,$$

εάν αντικαταστήσουμε με $s = u + ct$ τότε,

$$c\delta(u) = \int_0^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) \int_0^s p(x)\delta(s - x)\, dx\, ds\,. \qquad (3.2.1)$$

Παραγωγίζουμε την (3.2.1) δύο φορές ως προς u, έχοντας υπόψιν ότι $k'(t) = \sigma^2 e^{-\sigma t} - \sigma k(t)$ και $k(0) = 0$. Η πρώτη παράγωγος μας δίνει

$$c\frac{d}{du}\delta(u) - \sigma\delta(u) = -\frac{1}{c} \int_u^\infty \sigma^2 e^{-\sigma((s-u)/c)} \int_0^s p(x)\delta(s - x)\, dx\, ds\,,$$

και η δεύτερη

$$c^2 \frac{d^2}{du^2}\delta(u) - 2\sigma c\frac{d}{du}\delta(u) + \sigma^2\delta(u) = \sigma^2 \int_0^u p(x)\delta(u - x)\, dx\,. \qquad (3.2.2)$$

Μέσω του μετασχηματισμού Laplace της σχέσης (3.2.2) θα καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Η (3.2.2) σύμφωνα με τις ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace γίνεται

$$c^2[s^2\hat{\delta}(s) - s\delta(0) - \delta'(0)] - 2\sigma c[s\hat{\delta}(s) - \delta(0)] + \sigma^2\hat{\delta}(s) = \sigma^2\hat{p}(s)\hat{\delta}(s)\,,$$

και αν απλοποιήσουμε

$$\hat{\delta}(s) = \frac{c^2 s\delta(0) + c^2\delta'(0) - 2\sigma c\delta(0)}{c^2s^2 - 2\sigma cs + \sigma^2[1-\hat{p}(s)]}\,. \tag{3.2.3}$$

Θυμίζουμε ότι $\delta(u) = P(L \leq u)$. Σύμφωνα με τον Rolski (1999, παράγραφος 6.5) ο μετασχηματισμός Laplace της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι

$$E[e^{-sL}] = \int_0^\infty e^{-su}\,d\delta(u) = \delta(0) + \int_0^\infty e^{-su}\left[\frac{d}{du}\delta(u)\right]du = s\hat{\delta}(u)\,. \tag{3.2.4}$$

Η σχέση (3.2.4) από την (3.2.3) γίνεται

$$E[e^{-sL}] = \frac{c^2s^2\delta(0) + c^2s\delta'(0) - 2\sigma cs\delta(0)}{c^2s^2 - 2\sigma cs + \sigma^2[1-\hat{p}(s)]}\,. \tag{3.2.5}$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (3.2.4), ότι όταν $s = 0$ τότε $E[e^{-sL}] = 1$. Έτσι εάν πάρουμε το όριο της σχέσης (3.2.5) για $s \to 0$,ισχύει ότι

$$\lim_{s\to 0}\frac{c^2s^2\delta(0) + c^2s\delta'(0) - 2\sigma cs\delta(0)}{c^2s^2 - 2\sigma cs + \sigma^2[1-\hat{p}(s)]}\,.$$

Εφαρμόζουμε το κανόνα L'Hospital στο δεξί μέλος, και παίρνουμε

$$\lim_{s\to 0}\frac{2c^2s\delta(0) + c^2\delta'(0) - 2\sigma c\delta(0)}{2c^2s - 2\sigma c + \sigma^2\left[-\int_0^\infty -e^{-sx}xp(x)\,dx\right]} = 1\,.$$

Δηλαδή,

$$\frac{c^2\delta'(0) - 2\sigma c\delta(0)}{-2\sigma c + \sigma^2\mu_1} = 1\,,$$

ισοδύναμα, ισχύει

$$c^2\delta'(0) - 2\sigma\, c\, s\, \delta(0) = -2\sigma c + \sigma^2\mu_1\,. \tag{3.2.6}$$

Αντικαθιστάμε την τελευταία στην (3.2.3) , όπου απλοποιείται ο αριθμητής και έτσι παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας επιβίωσης.

$$\hat{\delta}(s) = \frac{c^2s\delta(0) + \sigma^2\mu_1 - 2\sigma c}{c^2s^2 - 2\sigma cs + \sigma^2[1-\hat{p}(s)]}\,. \tag{3.2.7}$$

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας υπολογίζεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της (3.2.7). Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα όπου ο Dickson (1998) υπολόγισε την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο.

Παράδειγμα 3.2.1 ***(Βλέπε Dickson (1998))*** *Θεωρούμε την περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Erlang (2,2) (δηλαδή $\sigma = 2$) με σ.π.π. $k(t) = 4te^{-2t}$ και $p(x) = 4xe^{-2x}$ αντίστοιχα. Το ασφάλιστρο έχει την τιμή $c = 1.1$.*

Για να υπολογίσουμε τη πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα Mathematica, όπου αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace του τύπου (3.2.7)*. Για την πράξη αυτή, όπως βλέπουμε και από τον τύπο, χρειαζόμαστε τον μετασχηματισμό Laplace της σ.π.π. των αποζημιώσεων, καθώς και τη μέση τιμή αυτών, Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι* $\mu_1 = 1$*, ενώ ο μετασχηματισμός Laplace των αποζημιώσεων είναι*

$$\hat{p}(s) = \frac{4}{(2+s)^2}\,.$$

Έτσι η (3.2.7) *γίνεται*

$$\hat{\delta}(s) = \frac{-0.4 + 1.21\delta(0)s}{-4.4s + 1.21s^2 + 4(1 - \frac{4}{(2+s)^2})}\,, \tag{3.2.8}$$

και με αντιστροφή μετασχηματισμού Laplace,

$$\begin{aligned} \delta(u) &= 1 - (0.8264 + 0.4545\delta(0))e^{-0.181818u} + (0.0052 + 0.0443\delta(0))e^{-2.7892u} - \\ & (0.1788 - 1.4103\delta(0))e^{2.6074u}\,, \end{aligned}$$

Όταν πάρουμε το όριο της εξίσωσης αυτής, $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 0$ *. Σύμφωνα με τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, η* $\delta(u)$ *είναι μία αύξουσα συνάρτηση η οποία τείνει στο* 1 *καθώς το* $u \to \infty$ *. Για να ισχύει ο ορισμός, πρέπει να αφαιρέσουμε το εκθετικό* $e^{-2.7892u}$ *. Θέλουμε δηλαδή*

$$(0.1788 - 1.4103\delta(0)) = 0\,.$$

Από την τελευταία εξίσωση, βρίσκουμε ότι $\delta(0) = 0.1268$ *, και έτσι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας έχει τύπο*

$$\delta(u) = 1 - 0.8842e^{-0.181818u} + 0.0109e^{-2.7892u}\,. \tag{3.2.9}$$

□

Στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν ισορροπημένη ανανεωτική ανέλιξη, η πιθανότητα επιβίωσης συμβολίζεται $\delta_e(u)$.

$$\begin{aligned} \delta_e(u) &= \int_0^\infty k_1(t) \int_0^{u+ct} p(x)\delta(u+ct-x)dx\,dt & (3.2.10) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sigma e^{-\sigma t} \int_0^{u+ct} p(x)\delta(u+ct-x)dx\,dt + \frac{1}{2}\delta(u) & (3.2.11) \end{aligned}$$

$$\delta_e(u) = -\frac{1}{2\sigma}\left[c\frac{d}{du}\delta(u) - \sigma\delta(u)\right] + \frac{1}{2}\delta(u)\,. \tag{3.2.12}$$

Παράδειγμα 3.2.2 ***(Βλέπε Dickson (1998))*** *Συνεχίζουμε το Παράδειγμα* 3.2.1*, όπου τώρα ο χρόνος μέχρι την πρώτη αποζημίωση ακολουθεί κατανομή με σ.π.π.* $k_1(t) = e^{-2t}(1+2t)$ *και οι ενδιάμεσοι χρόνοι από την* $i-1$ *έως την* i *αποζημίωση ακολουθούν Erlang (2,2).*

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας για την ισορροπημένη ανανεωτική ανέλιξη υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο (3.2.9) *και* (3.2.12) ,

$$\delta_e(u) = 1 - 0.9283e^{-0.181818u} + 0.0192e^{-2.7892u} .$$

□

3.3 Πιθανότητα και σφοδρότητα χρεοκοπίας

Στο συλλογικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, εκτός από την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία, ενδιαφερόμαστε και για την σφοδρότητα αυτής. Ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση

$$G(y \mid u) = Pr(T < \infty \text{ και } |U(T)| \leq y) .$$

όπου με $G(y \mid u)$, συμβολίζουμε την πιθανότητα να συμβαίνει χρεοκοπία, και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μικρότερο του y. Ορίζουμε επίσης την αντίστοιχη πυκνότητα της $G(y \mid u)$ ως

$$g(y \mid u) = \frac{d}{dy} G(y \mid u) , \tag{3.3.1}$$

όπου $g(y \mid u)\, dy$ είναι η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και το έλλειμμα να είναι μεταξύ $-y$ και $-y + dy$.

Ο Dickson (1998), βασίστηκε στην ανανεωτική εξίσωση (βλέπε εξ. 5, Gerber & Goovaerts & Kaas (1987))

$$G(y \mid u) = \int_0^u g(x \mid 0) G(y \mid u - x)\, dx + \int_u^{u+y} g(x \mid 0)\, dx , \tag{3.3.2}$$

για να υπολογίσει την πιθανότητα αυτή. Ὃπως έχουμε αναφέρει ξανά, η λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης βρίσκεται με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Έτσι, για να βρούμε τη λύση της (3.3.2), παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{G}(y \mid u) = \hat{g}(s) \hat{G}(y \mid s) + \hat{v}(y \mid s) ,$$

και καταλήγουμε στην

$$\hat{G}(y \mid u) = \frac{\hat{v}(y \mid s)}{1 - \hat{g}(s)} . \tag{3.3.3}$$

Η συνάρτηση $\hat{v}(y \mid s)$, συμβολίζει το μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{v}(y \mid s) = \int_0^\infty e^{-su} \int_u^{u+y} g(x \mid 0)\, dx\, du . \tag{3.3.4}$$

Επίσης, με $\hat{g}(s)$ συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $g(0, y)$, τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε από την ανανεωτική εξίσωση

$$\delta(u) = \delta(0) + \int_0^u g(y \mid 0) \delta(u - y)\, dy , \tag{3.3.5}$$

η οποία ισχύει και στο κλασικό μοντέλο. Ο μετασχηματισμός Laplace της $(3.3.5)$ είναι

$$\hat{\delta}(s) = \frac{1}{s}\delta(0) + \hat{g}(s)\hat{\delta}(s)\,, \tag{3.3.6}$$

και τελικά έχουμε ότι

$$\hat{g}(s) = 1 - \frac{\delta(0)}{s\hat{\delta}(s)}\,. \tag{3.3.7}$$

Παράδειγμα 3.3.1 ***(Βλέπε Dickson (1998))*** *Έχοντας τα ίδια δεδομένα με το Παράδειγμα* $3.2.1$ *, θα υπολογίσουμε τη σ.σ.π. των κλιμακωτών υψών αλλά και τη* $G(y \mid u)$.

Αντικαθιστάμε στο τύπο $(3.3.7)$ *το μετασχηματισμό Laplace* $(3.2.8)$*, και με και αντιστροφή του μετασχηματισμού, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, λαμβανουμε ότι*

$$\begin{aligned} g(y \mid 0) &= 1.02904e^{-2y} + 0.000238339e^{2.60709y} + 1.43509e^{-2y}1.0289e^{-2y} \\ &\quad +1.4350ye^{-2y}y + 1.11022 \times 10^{-16}\,. \end{aligned}$$

ο αριθμός 1.11022×10^{-16} *είναι κάτι πολύ μικρό, επίσης είπαμε στο πρώτο παράδειγμα ότι διώχνουμε το* $e^{2.60709y}$ *. Έτσι*

$$g(y \mid 0) = 1.0289e^{-2y} + 1.4350ye^{-2y}\,. \tag{3.3.8}$$

Ενώ η σ.π.π. των κλιμακωτών υψών γίνεται

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{g(y \mid 0)}{\psi(0)} \\ &= 0.5892(2e^{-2y}) + 0.4108(4ye^{-2y})\,. \end{aligned}$$

Για τη σ.π.π. των κλιμακωτών υψών, παρατηρούμε ότι είναι ο σταθμισμένος μέσος των Erlang (1,2) και Erlang (2,2) κατανομών.

Εάν αντικαταστήσουμε την $(3.3.8)$ *στην* $(3.3.4)$ *βρίσκουμε ότι η τελευταία γίνεται*

$$\hat{v}(y \mid s) = a\frac{1-e^{-2y}}{2+s} + b\left[\frac{4+s}{(2+s)^2}(1-e^{-2y}) - \frac{2ye^{-2y}}{2+s}\right], \tag{3.3.9}$$

όπου $a = 0.5144$ *και* $b = 0.3587$. *Αντικαθιστάμε το τελευταίο αποτέλεσμα στην* $(3.3.3)$ *και λαμβάνουμε*

$$\hat{G}(y \mid s) = \frac{a(2+s)(1-e^{-2y}) + b(4+s)(1-e^{-2y}) - b(2+s)2ye^{-2y}}{(2+s)^2 - 4b - 2a(2+s)}\,. \tag{3.3.10}$$

Με αντιστροφή μετασχηματισμού Laplace με τη βοήθεια του Mathematica, τελικά

$$\begin{aligned} G(y \mid u) &= 0.8841e^{-0.181818u}(1-e^{-2y}) - 0.0109e^{-2.7892u}(1-e^{-2y}) - 0.5003e^{-0.181818u-2y} - \\ &\quad 0.2172e^{-2.7892u-2y}y\,. \end{aligned}$$

3.4 Ο τύπος του Dickson στο ανανεωτικό μοντέλο.

Οι Dickson & Drekic (2003) έδειξαν ότι οι τύποι (3.1) και (3.2) του Dickson (1992) για την από κοινού σ.π.π.του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, ισχύουν και για το ανανεωτικό μοντέλο.

Στην παρακάτω πρόταση βλέπουμε τον τύπο του Dickson (1992) για το ανανεωτικό μοντέλο.

Πρόταση 3.4.1 *Ο τύπος του Dickson, ο οποίος αποδείχθηκε από τους Dickson & Drekic ισχύει και για το ανανεωτικό μοντέλο, είναι*

$$f(x,y \mid u) = \begin{cases} f(x,y \mid 0)\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}\,, \textit{για} \quad 0 \le u < x\,, \\ f(x,y \mid 0)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}\,, \textit{για} \quad u > x\,. \end{cases}$$

Σύμφωνα με τη παραπάνω πρόταση, μπορούμε να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας .

Στη συνέχεια, θα δούμε τη σύγκριση του κλασικού και του ανανεωτικού μοντέλου, όταν οι αποζημιώσεις αλλά και οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν Erlang (2,2) κατανομή.

3.5 Παράδειγμα σύγκρισης, κλασικού και ανανεωτικού μοντέλου

Παράδειγμα 3.5.1 *Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις, ακολουθούν Erlang (2,2) κατανομή. Στο παράδειγμα αυτό, θα συγκρίνουμε τη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο. Θεωρούμε ότι οι αποζημιώσεις γίνονται με ρυθμό* $\lambda = 2$ *και ορίζουμε το ασφάλιστρο* $c = 3.5$ *έτσι ώστε* $\theta = 0.75$.

Κλασικό μοντέλο

Στον υπολογισμό της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, για $\delta = 0$ *μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του δεύτερου κεφαλαίου, και να θέσουμε όπου* $\rho = 0$.

Υπολογίζουμε λοιπόν, ότι η σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία για $u = 0$ *είναι*

$$f(x \mid 0) = 0.571429\left(1 - e^{-2x}\left(-2x + e^{2x} - 1\right)\right)\,,$$

και η ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών (σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας) είναι

$$g(y \mid 0) = 0.571429e^{-2y}(2y+1)\,.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = 0.617684e^{-0.607719u} - 0.0462557e^{-2.82085u},$$

με $\psi(0) = 0.571429$

Από τον τύπο του Dickson για το κλασικό μοντέλο

1. *όταν* $u < x$

   - *από την εξίσωση* (1.4.7)*, η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 1.33333(0.0462557e^{-2.82085u} - 0.617684e^{-0.607719u} + 1) \\ &\quad (1 - e^{-2x}(-2x + e^{2x} - 1)), \end{aligned}$$

   - *και η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, σύμφωνα με τον τύπο* (2.2.3) *είναι*

$$\begin{aligned} f(x, y \mid u) &= 5.33333(0.0462557e^{-2.82085u} - 0.617684e^{-0.607719u} + 1) \\ &\quad e^{-2(x+y)}(x + y). \end{aligned}$$

2. *Όταν* $u > x$

   - *από την εξίσωση* (1.4.8) *, η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 1.33333(1 - e^{-2x}(-2x + e^{2x} - 1))(-0.0462557e^{-2.82085(u-x)} + \\ &\quad 0.617684e^{-0.607719(u-x)} + 0.0462557e^{-2.82085u} - 0.617684e^{-0.607719u}), \end{aligned}$$

   - *και η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας,*

$$\begin{aligned} f(x, y \mid u) &= 5.33333(-0.0462557e^{-2.82085(u-x)} + 0.617684e^{-0.607719(u-x)} + \\ &\quad 0.0462557e^{-2.82085u} - 0.617684e^{-0.607719u})e^{-2(x+y)}(x + y). \end{aligned}$$

Ανανεωτικό μοντέλο

Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης επιβίωσης από την εξίσωση (3.2.7) *και βρίσκουμε ότι*

$$\hat{\delta}(s) = \frac{-10. + 12.25\delta(0)s}{-14.s + 12.25s^2 + 4(1 - \frac{4}{(2+s)^2})}.$$

Με τη βοήθεια του Mathematica υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης επιβίωσης

$$\begin{aligned} \delta(u) &= 1.09625e^{-3.81496u}(0.0425167\delta(0)e^{1.42857u} - 0.130315\delta(0)e^{2.38639u} + \\ &\quad 1\delta(0)e^{4.77277u} + 0.014544e^{1.42857u} - 0.0744655e^{2.38639u} - 0.852281e^{4.77277u}) + 1, \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, το όριο $\lim_{u\to\infty}\delta(u)=0$ *, λόγω του* $e^{4.77277u}$ *. Η πιθανότητα μη- χρεοκοπίας, από τον ορισμό, είναι μία αύξουσα συνάρτηση που τείνει στο 1 καθώς το* $u\to\infty$ *. Για το λόγο αυτό, πρέπει*

$$1\delta(0)e^{4.77277u}-0.852281e^{4.77277u}=0$$

δηλαδή

$$\delta(0)=0.147719\,.$$

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, λοιπόν, έχει την μορφή

$$\delta(u)=1.09625e^{-3.81496u}\left(0.0208245e^{1.42857u}-0.0937154e^{2.38639u}\right)+1\,.$$

Συνεπώς η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u)=-1.09625e^{-3.81496u}\left(0.0208245e^{1.42857u}-0.0937154e^{2.38639u}\right)\,,$$

με $\psi(0)=0.852281$.

Η σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία με $u=0$ *υπολογίζεται*

$$f(x\mid 0)=2.28571e^{-2(x+y)}(x+y)\,,$$

και η ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών (του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας) είναι

$$g(y\mid 0)=0.054915e^{-2.y}+0.0867716e^{-2.y}y\,.$$

Σύμφωνα με το τύπο του Dickson (3.4.1) ,

1. *όταν* $0\le u<x$

   - *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

     $$\begin{aligned} f(x,y\mid u) &= 15.4734(1.09625e^{-3.81496u}(0.0208245e^{1.42857u}- \\ &\quad 0.0937154e^{2.38639u})+1)e^{-2(x+y)}(x+y)\,, \end{aligned}$$

   - *και η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

     $$f(x\mid u)=3.86835e^{-2x}(2x+1)\left(1.+0.0228288e^{-2.38639u}-0.102735e^{-1.42857u}\right)\,.$$

2. *'Οταν* $0\le x<u$

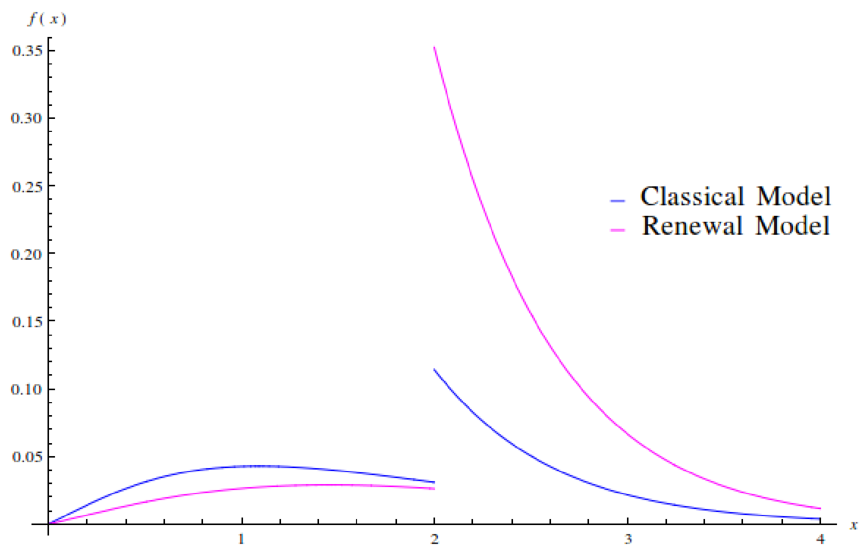
   - *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

     $$\begin{aligned} f(x,y\mid u) &= 15.4734(-1.09625e^{-3.81496(u-x)}(0.0208245e^{1.42857(u-x)}- \\ &\quad 0.0937154e^{2.38639(u-x)})+1.09625e^{-3.81496u}(0.0208245e^{1.42857u}- \\ &\quad 0.0937154e^{2.38639u})+0.)e^{-2(x+y)}(x+y)\,, \end{aligned}$$

- *και η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

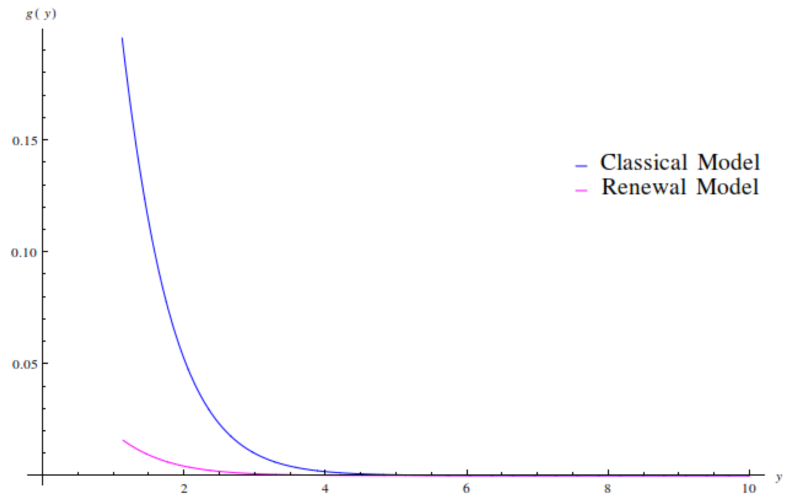
$$\begin{aligned} f(x \mid u) \;=\;& 0.0883098(2x+1)e^{-3.81496u-5.81496x}(1.e^{1.42857u+3.81496x} - \\ & 4.50025e^{2.38639u+3.81496x} + 4.50025e^{2.38639u+5.24353x} - \\ & 1.e^{1.42857u+6.20134x}) \,. \end{aligned}$$

Ακολουθούν τα συγκριτικά γραφήματα, των σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία , των σ.π.π. των κλιμακωτών υψών, και των συναρτήσεων πιθανότητας χρεοκοπίας για το κλασικό και το ανανεωτικό μοντέλο.

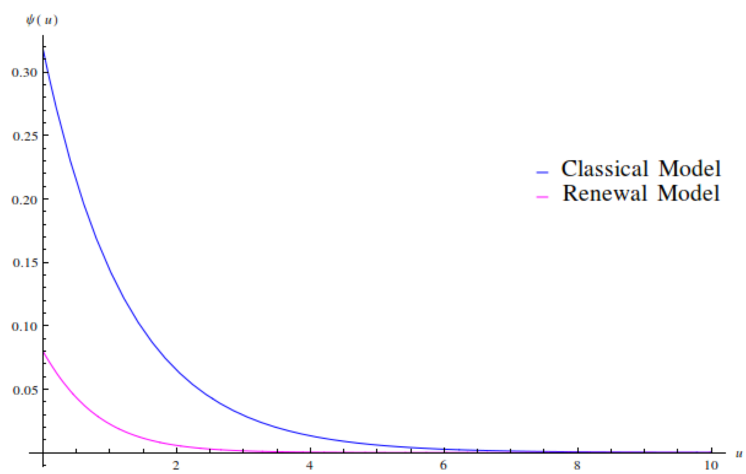


Σχήμα 3.1: Συγκριτικό γράφημα σ.π.π. για Erlang (2,2), στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο

Στο παραπάνω γράφημα βλέπουμε τη σύγκριση της σ.π.π. του πλεονάσματος όταν το αρχικό αποθεματικό $u = 2$ για το κλασικό και το ανανεωτικό μοντέλο. Στο γράφημα παρατηρείται ξεκάθαρα η ασυνέχεια της σ.π.π. στο σημείο $x = u$.



Σχήμα 3.2: Συγκριτικό διάγραμμα ελλειμματικής σ.π.π. των κλιμακωτών υψών για Erlang (2,2), στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο.



Σχήμα 3.3: Συγκριτικό διάγραμμα πιθανότητας χρεοκοπίας για Erlang (2,2), στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο.

Από τα γραφήματα, της ελλειμματικής σ.π.π. των κλιμακωτών υψών και της πιθανότητας χρεοκοπίας, για τα δυο μοντέλα παρατηρούμε ότι, οι καμπύλες του κλασικού μοντέλου είναι πάνω από αυτές του ανανεωτικού. □

Κεφάλαιο 4

Μελέτη της προεξοφλημένης από κοινού κατανομής στο ανανεωτικό μοντέλο με phase-type ενδιάμεσους χρόνους

Στο τελευταίο κεφάλαιο μελετάμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν οι τ.μ. των αποζημιώσεων και των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθούν phase-type κατανομές, για $\delta = 0$, αλλά και $\delta > 0$. Θα εξετάσουμε τις συναρτήσεις αυτές για τις ειδικές περιπτώσεις της Γενικευμένης Erlang, της Phase-Type(2) για $\delta = 0$, όπως μελετήθηκαν από τους Dickson & Drekic (2003), αλλά και για την γενικευμένη περίπτωση Phase-Type(n) κατανομών για $\delta > 0$, όπως μελέτησε ο Ren (2007). Σε κάθε περίπτωση θα υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, από τον οποίο στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. για $u > 0$. Το κεφάλαιο αυτό, θα ξεκινήσουμε με βασικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας και βασικές ιδιότητες των phase-type κατανομών.

Οι phase-type κατανομές, εμπεριέχουν τον εκθετικό πίνακα $exp\{tA\}$. Για να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα, όπως θα δούμε και στην παράγραφο που ακολουθεί, θα πρέπει να διαγωνιοποιήσουμε τον τετραγωνικό πίνακα A. Στην πρώτη παράγραφο λοιπόν του κεφαλαίου αυτού, θα παραθέσουμε βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας που θα χρειαστούμε για τη διαγωνιοποίηση του τετραγωνικού πίνακα, βασισμένες στα βιβλία του Strang (2006) και του Rolski et al. (1999). Στη δεύτερη παράγραφο θα αναφερθούμε σε βασικές έννοιες και ιδιότητες των Phase-Type κατανομών βασισμένοι στους Rolski et al.(1999) και Asmussen (2000).

Να αναφέρουμε ότι, οι πίνακες, συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ τα διανύσματα με μικρά υπογραμμισμένα.

4.1 Σύντομη θεωρία για τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό πίνακα A $(n \times n)$ (n γραμμές και n στήλες). Για να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα $exp\{tA\}$ όπως θα δούμε παρακάτω, θα πρέπει να διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα A. Στην διαδικασία διαγωνιοποίησης ενός τετραγωνικού πίνακα $n \times n$, όπως θα δούμε και στη συνέχεια της παραγράφου, σημαντικό ρόλο παίζει ο πίνακας $S \quad n \times n$ με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A , καθώς και ο αντίστροφος του S . Ξεκινάμε την παράγραφο αυτή, με τον ορισμό και στη συνέχεια την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων του A . Μετέπειτα, θα δούμε τη διαδικασία αντιστροφής ενός τετραγωνικού πίνακα, με τη μέθοδο Gauss-Jordan, για να καταλήξουμε στη διαγωνιοποίηση του A , και αργότερα του εκθετικού πίνακα.

Ορισμός 4.1.1 *Αν ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\underline{x}$ στον $\mathcal{R}^n$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A αν το $A\underline{x}$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του , δηλαδή αν*

$$A\underline{x} = \theta \underline{x}$$

για κάποιο πραγματικό αριθμό θ. Το θ ονομάζεται ιδιοτιμή του A και λέμε ότι το $\underline{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην θ.

Παρατήρηση 4.1.1

1. *Το διάνυσμα $\underline{x}$ περιέχεται στον μηδενόχωρο του $A - \theta I$.*
2. *Ο αριθμός θ είναι τέτοιος ώστε ο $A - \theta I$ να έχει μηδενόχωρο.*

Παρακάτω δίνεται ο ορισμός ενός μηδενόχωρου, και συγκεκριμένα του $A - \theta I$.

Ορισμός 4.1.2 *Ένας μηδενόχωρος ενός πίνακα συμβολίζεται με $\mathcal{N}(A)$ και αποτελείται απ' όλα τα διανύσματα $\underline{x}$ για τα οποία $A\underline{x} = \underline{0}$. Αυτός είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{R}^n$.*

Ορισμός 4.1.3 *Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A - \theta I)$ ονομάζεται ιδιόχωρος του A ως προς την ιδιοτιμή θ και συμβολίζεται $\mathcal{V}_\theta(A)$. Δηλαδή:*

$$\mathcal{N}(A - \theta I) = \mathcal{V}_\theta(A)\,.$$

Παρατήρηση 4.1.2 *Ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}_\theta(A)$ περιέχει το $\underline{0}$ μαζί με όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ.*

Στη πρόταση που ακολουθεί, δίνεται η εξίσωση από την οποία βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A , και στη συνέχεια μέσα από το παράδειγμα, βλέπουμε τα βήματα εύρεσης των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα, σύμφωνα με αυτή την εξίσωση.

Πρόταση 4.1.1 *Ο αριθμός θ είναι ιδιοτιμή του A όταν και μόνο όταν ισχύει*

$$det(A - \theta I) = \underline{0}\,.$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A, και κάθε λύση θ αντιστοιχεί σε ένα ιδιοδιάνυσμα $\underline{x}$ τέτοιο ώστε

$$(A - \theta I)\underline{x} = 0 \quad \acute{\eta} \quad A\underline{x} = \theta \underline{x}\,.$$

Παράδειγμα 4.1.1 *Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} .$$

θα πρέπει, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.1 , *να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα*

$$det[A - \theta I] = 0 \,,$$

η οποία γράφεται

$$det \begin{bmatrix} 1-\theta & 1 \\ 5 & -3-\theta \end{bmatrix} = 0 \,.$$

Εάν κάνουμε τις πράξεις της ορίζουσας, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A *είναι*

$$\theta^2 + 2\theta - 8 = 0 \,.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης μας δίνουν τις ιδιοτιμές του πίνακα, $\theta_1 = -4$ *και* $\theta_2 = 2$.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα μπορούμε να τα βρούμε εάν θέσουμε στο παρακάτω σύστημα τις τιμές των ιδιοτιμών, ξεχωριστά κάθε φορά.

$$\begin{bmatrix} 1-\theta & 1 \\ 5 & -3-\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Για $\theta = -4$ *έχουμε,*

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Εάν λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων,

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

παίρνουμε,

$$x_2 = -5x_1 ,\ x_1 \in \mathcal{R} \,.$$

Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\theta = -4$ *καθορίζεται ως εξής*

$$\mathcal{V}(-4) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} x_1 \,, x_1 \in \mathcal{R} \right\} .$$

Για $\theta = 2$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

λαμβάνουμε το σύστημα,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} .$$

του οποίου η λύση είναι

$$x_2 = x_1, \quad x_1 \in \mathcal{R}\,.$$

Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\theta = 2$ έχει ως ακολούθως,

$$\mathcal{V}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1\,, x_1 \in \mathcal{R} \right\}\,.$$

Τελικά, για τις δύο ιδιοτιμές $\theta_1 = -4$ και $\theta_2 = 2$ του πίνακα A αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \textit{και} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

αντίστοιχα. □

Τα επόμενα δύο θεωρήματα, αναφέρονται σε δύο ιδιότητες για τις ιδιοτιμές των πινάκων. Στο πρώτο, αναφερόμαστε στην ειδική περίπτωση ενός τριγωνικού πίνακα, ενώ στο δεύτερο βλέπουμε πως ένα ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή θ ενός πίνακα A, αλλά και στην ιδιοτιμή θ^k του πίνακα A^k.

Θεώρημα 4.1.1 *Αν ο A είναι ένας τριγωνικός πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του A.*

Παράδειγμα 4.1.2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{2}{3}, \quad \theta_3 = -\frac{1}{4}$.
Τα ιδιοδιανύσματα τα βρίσκουμε με τον ίδιο τρόπο όπως στο Παράδειγμα 4.1.1. □

Θεώρημα 4.1.2 *Αν ο k είναι ένας θετικός ακέραιος, η θ είναι μία ιδιοτιμή του A και το $\underline{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή, τότε η θ^k είναι μία ιδιοτιμή του A^k και το $\underline{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή.*

Εφόσον, ορίσαμε και δείξαμε πως να υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα, μπορούμε να ορίσουμε και να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα S. Θυμίζουμε ότι S, είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Έτσι στη συνέχεια μπορούμε να διαγωνιοποιήσουμε το πίνακα A.

Πρόταση 4.1.2 *Ένας πίνακας V είναι αντιστρέψιμος, εάν η ορίζουσα του δεν είναι μηδέν.*

$$det(V) \neq 0\,.$$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα, χρησιμοποιούμε την μέθοδο Gauss-Jordan. Η μέθοδος αυτή ακολουθείται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.3 *Παίρνουμε τον πίνακα όπως στο Παράδειγμα 4.1.1. Έχουμε ότι* $\theta_1 = -4$, $\theta_2 = 2$ *και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι* $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ *και* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *τα οποία συνθέτουν τον πίνακα* $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$. *Βρείτε τον* S^{-1}.

Για την εύρεση του αντίστροφου πίνακα S , *χρησιμοποιούμε την μέθοδο Gauss-Jordan.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζουμε την Γραμμή 1 επί 5 και την προσθέτουμε στη Γραμμή 2. Η νέα γραμμή 2 γίνεται

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Στη συνέχεια, διαιρούμε την δεύτερη γραμμή με 6,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right],$$

και τέλος, αφαιρούμε τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη για να λάβουμε

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right].$$

Ο αντίστροφος του πίνακα S, *είναι* $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$. □

Άλλη μία ιδιότητα του αντίστροφου πίνακα αναφέρεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.3 *Το γινόμενο του πίνακα* S *με τον αντίστροφο του, μας δίνει τον μοναδιαίο πίνακα*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να εξασφαλίσουμε την διαγωνιοποιησιμότητα ενός πίνακα, είναι σημαντική η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων.Στο θεώρημα που ακολουθεί αναφέρεται η γραμμική ανεξαρτησία των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα.

Θεώρημα 4.1.3 *Αν τα* $v_1, v_2, ..., v_k$ *είναι ιδιοδιανύσματα του* A *τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές* $\theta_1, \theta_2, .., \theta_k$ *του* A, *τότε το* $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παρακάτω δίνονται δύο θεωρήματα για τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος.

Θεώρημα 4.1.4 *Αν ο A είναι ένας n x n πίνακας, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
2. *Ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Θεώρημα 4.1.5 *Αν ένας n x n πίνακας A έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε το A είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Παράδειγμα 4.1.4 *Έστω ο πίνακας του Παραδείγματος 4.1.1,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Βρήκαμε ότι έχει δύο ιδιοτιμές, $\theta_1 = -4$ και $\theta_2 = 2$ στις οποίες αντιστοιχούν δύο διαφορετικά ιδιοδιανύσματα,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \textit{και} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.5, ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άλλη μία ιδιότητα η οποία εξασφαλίζει την διαγωνιοποιησιμότητα του πίνακα A, δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.4 *Ένας τετραγωνικός πίνακας A θα ονομάζεται διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε ο $S^{-1}A\ S$ να είναι διαγώνιος. Θα λέμε ότι ο S διαγωνοποιεί τον A.*

Θυμίζουμε ότι ο S είναι πίνακας $n \times n$ με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, ισχύει ότι

$$S^{-1}\, A\, S = \Theta\,, \tag{4.1.1}$$

όπου Θ είναι ο διαγώνιος πίνακας $\begin{bmatrix} \theta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix}$.

Η διαγωνιοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα ($n \times n$,) δίνεται στη παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.5 *Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, με n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Θεωρούμε τον πίνακα S $n \times n$, με στήλες τα n ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Τότε A είναι διαγωνιοποιήσιμος και ισχύει*

$$A = S\Theta S^{-1}.$$

Απόδειξη
Από τη σχέση 4.1.1 και Πρόταση 4.1.3, μπορούμε να πάρουμε τον A στην μορφή

$$S^{-1}\,A\,S = \Theta\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με S και από δεξιά με S^{-1}

$$SS^{-1}ASS^{-1} = S\Theta S^{-1}\,.$$

Για τον A λοιπόν, ισχύει

$$A = S\Theta S^{-1}\,.$$

□

Πρόταση 4.1.6 *Εάν ο S διαγωνιοποιεί τον A, διαγωνιοποιεί επίσης και τον A^k. Έτσι ισχύει*

$$\Theta^k = (S^{-1}\,A\,S)(S^{-1}\,A\,S)...(S^{-1}\,A\,S) = S^{-1}\,A^k\,S\,.$$

Κάθε S^{-1} αναιρεί έναν S, εκτός του αρχικού S^{-1} και του τελικού S.

Παρακάτω ορίζουμε τον εκθετικό πίνακα, και δείχνουμε πως μπορούμε να τον διαγωνιοποιήσουμε. Σύμφωνα με την εκθετική συνάρτηση, η οποία αναλύεται βάσει της σειράς Taylor ως εξής

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...\,,$$

αντικαθιστάμε το x με At και στη θέση της μονάδας πάρουμε το μοναδιαίο πίνακα I. Με αυτό τον τρόπο ορίζουμε τον εκθετικό πίνακα.

Ορισμός 4.1.4 *Ο εκθετικός e^{At} πίνακας ορίζεται ως*

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + ...\,.$$

Όπως είδαμε παραπάνω, ισχύει, $A = S\Theta S^{-1}$. Έτσι εάν το αντικαταστήσουμε στον παραπάνω ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{S\,\Theta\,S^{-1}} &= I + S\,\Theta\,S^{-1}t + \frac{(S\,\Theta\,S^{-1}t)^2}{2!} + ...\\
&= I + S\,\Theta\,S^{-1}t + \frac{S\,\Theta^2 S^{-1}t^2}{2!} + ...\\
&= S(I + \Theta t + \frac{(\Theta t)^2}{2!} + ...)S^{-1}\\
&= Se^{\Theta t}\,S^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Πρόταση 4.1.7 *Ο εκθετικός πίνακας ορίζεται ως εξής*

$$e^{At} = Se^{\Theta t}S^{-1}\,. \tag{4.1.2}$$

Κλείνουμε τη παράγραφο αυτή,με μερικές ιδιότητες των πινάκων και του εκθετικού πίνακα, που θα χρησιμοποιήσουμε στην παραγωγή των τύπων των σ.π.π. που μας ενδιαφέρουν.

Πόρισμα 4.1.1 *Έστω $\theta_1, ..., \theta_l$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Τότε, για κάθε $s > max_{i \in E}\Re(\theta_i)$,*

$$lim_{t\to\infty} e^{-st} e^{tA} = 0.$$

Παρατήρηση: Με $\Re(\theta_i)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής θ_i.

Λήμμα 4.1.1 *Εάν $A(t)$ και $A'(t)$ είναι δύο διαφορίσιμοι συναρτησιακοί πίνακες, τότε*

$$\frac{d}{dt}(A(t)A'(t)) = \frac{d}{dt}(A(t))A'(t) + A(t)\frac{d}{dt}A'(t)\,.$$

Λήμμα 4.1.2

1. *Εάν $A(t)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε*

$$\int_{\upsilon}^{t} e^{xA} dx = A^{-1}(e^{tA} - e^{\upsilon A})\,.$$

2. *Εάν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε*

$$\int_{0}^{\infty} e^{xA} dx = -A^{-1}\,.$$

Θεώρημα 4.1.6 *(Θεώρημα Sylvester) Για πίνακες A $(m \times n)$ και B $(n \times m)$, διάνυσμα-στήλη $\underline{c}$ $(n \times 1)$ και διάνυσμα-γραμμή $\underline{r}$ $(1 \times n)$ ισχύουν:*

$$det(I_m + AB) = det(I_n + BA)\,.$$

1. $det(I_m + \underline{c}\,\underline{r}) = 1 + \underline{r}\,\underline{c}$

2. *Για κάθε αντιστρέψιμο $(m \times m)$ πίνακα X ισχύει*

$$det(X + AB) = det(X)\,det(I_n + BX^{-1}A)\,.$$

3. $det(X + \underline{c}\,\underline{r}) = det(X)(1 + \underline{r}\,\underline{X}^{-1}\underline{c})\,.$

4.2 Ιδιότητες των phase-type κατανομών

Θεωρούμε διαστήματα καταστάσεων $E = \{1, ..., n\}$ και $E' = \{0, 1, ..., n\}$, όπου το 0 είναι η κατάσταση απορρόφησης και αντίστοιχα τις συναρτήσεις κατανομών των πιθανοτήτων να μεταβούν από μία κατάσταση i σε μία κατάσταση j, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ και $\underline{\alpha'} = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$. Έστω J_t μία συνεχής αλυσίδα Markov στο πεπερασμένο διάστημα καταστάσεων $E' = \{0, 1, .., n\}$, με πίνακα τάσεων

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0} \\ \underline{b^T} & \underline{B} \end{bmatrix}\,.$$

Ορίζουμε με $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ την αρχική συνάρτηση πιθανότητας της ανέλιξης Markov $\{J_t\}$ για κάθε $n = 0, 1, ...$, όπου α_i δίνει την ένταση εισόδου στη κατάσταση i , και με $B = (b_{ij})_{i,j=1,..,n}$ τον πίνακα μετάβασης. Το $\underline{b} = (b_1, ..., b_n)$ $1 \times n$, είναι ένα διάνυσμα ρυθμού εξόδου, όπου το στοιχείο b_i δίνει την ένταση στην κατάσταση i να μεταβεί στην κατάσταση απορρόφησης. Ισχύει

$$\underline{b} = -B\underline{e_n},$$

όπου $\underline{e}_n = [1, 1, ..., 1]$ είναι ένα διάνυσμα στήλη $n \times 1$.

Ορισμός 4.2.1 *Ορίζουμε το χρόνο απορρόφησης*

$$\zeta = inf\{t > 0 : J_t = 0\} .$$

Παρατήρηση 4.2.1

1. *Ο χρόνος απορρόφησης ζ, είναι ο μικρότερος δυνατός χρόνος, έτσι ώστε η ανέλιξη Markov να φτάσει στην κατάσταση απορρόφησης 0.*

2. *Μας ενδιαφέρει το ζ να είναι πεπερασμένο, έτσι ώστε η ανέλιξη Markov να επισκέπτεται την κατάσταση 0, το οποίο συνεπάγεται ότι θέλουμε κάποιο $b_i \neq 0$ (στοιχείο της πρώτης γραμμής). Για το λόγο αυτό, ο πίνακας B δεν μπορεί να είναι πίνακας τάσεων.*

Ο επόμενος ορισμός, δηλώνει ότι ο πίνακας B είναι ένας υποπίνακας τάσεων, όπου τα στοιχεία του έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες.

Ορισμός 4.2.2 *Ένας πίνακας B ονομάζεται υποπίνακας τάσεων εάν ισχύουν:*

1. $b_{ii} < 0$,

2. $b_{ij} \geq 0$ *για κάθε* $i \neq j$,

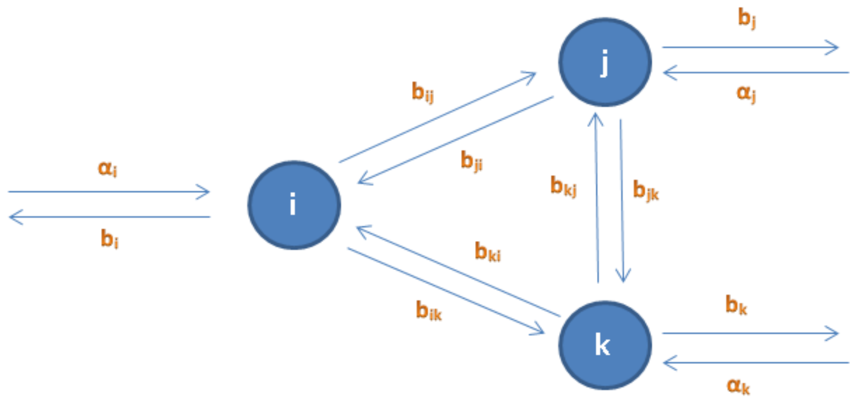
3. $\sum_{j \in E} b_{ij} \leq 0$.

Το θεώρημα και το πόρισμα που ακολουθούν, εκφράζουν δύο ιδιότητες για τον υποπίνακα τάσεων. Σύμφωνα με αυτές,αν ο ένας πίνακας είναι υποπίνακας τότε οι ιδιοτιμές του είναι μηδέν ή το πραγματικό τους μέρος είναι αρνητικό, όπως επίσης καθορίζεται η αντιστρεψιμότητα του πίνακα, αν αυτές είναι αρνητικές.

Θεώρημα 4.2.1 *Εάν B είναι υποπίνακας τάσεων, τότε $\theta_i(B) = 0$ ή $\Re(\theta_i(B)) < 0$, για κάθε i=1,...,n.*

Πόρισμα 4.2.1 *Ένας υποπίνακας τάσεων B είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $\Re(\theta_i(B)) < 0$ για κάθε i=1,...,n.*

Όταν εξασφαλίζεται η αντιστρεψιμότητα του πίνακα, στο επόμενο Λήμμα, δίνονται δύο ιδιότητες για έναν αντιστρέψιμο υποπίνακα.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα phase-type κατανομής τριών φάσεων, $E = \{i, j, k\}$.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω B ένας αντιστρέψιμος υποπίνακας τάσεων. Τότε $sI - B$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $s \geq 0$ και όλες οι είσοδοι $(sI - B)^{-1}$ είναι ρητές συναρτήσεις του $s \geq 0$. Ακόμα, ισχύουν ότι*

$$\int_0^{\infty} exp(t(-sI + B))dt = (sI - B)^{-1} ,$$

και για κάθε $l \in N$

$$\frac{d^l}{ds^l}(sI - B)^{-1} = (-1)^l l!(sI - B^{-l-1}) .$$

Ο χρόνος απορρόφησης είναι μία τ.μ. η οποία ακολουθεί phase-type κατανομή. Στο θεώρημα που ακολουθεί ορίζεται η κατανομής της τ.μ. και η σ.κ. της.

Θεώρημα 4.2.2 *Η κατανομή της ζ ονομάζεται phase-type κατανομή, με αρχική κατανομή $\underline{\alpha'} = (\alpha_0, .., \alpha_n)$ των $\{J_t\}_{t \geq 0}$, με υποπίνακα τάσεων B, και συμβολίζεται $PH(\underline{\alpha}, B)$. Η σ.κ. του χρόνου απορρόφησης για κάθε $t \geq 0$ είναι*

$$P(\zeta \leq t) = 1 - \underline{\alpha} e^{tB} \underline{e}^T .$$

Όπως είπαμε και στην Παρατήρηση 4.2.1 (2.) , μας ενδιαφέρει ο χρόνος απορρόφησης να είναι πεπερασμένος. Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει αυτή την υπόθεση.

Θεώρημα 4.2.3 *Ο χρόνος απορρόφησης ζ είναι σχεδόν σίγουρα πεπερασμένος*

$$P(\zeta < \infty) = 1$$

για κάθε (πιθανόν ελλειμματική) συνάρτηση πιθανότητας $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ εάν και μόνο εάν ο B είναι αντιστρέψιμος.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνονται οι συναρτήσεις που ορίζουν μία phase-type κατανομή.

Θεώρημα 4.2.4 *Υποθέτουμε ότι $\alpha_0 = 0$ και B είναι ένας αντιστρέψιμος υποπίνακας τάσεων. Εάν F είναι phase-type κατανομή με χαρακτηριστικά $(\underline{\alpha}, B)$, τότε η F είναι συνεχής με*

1. *πυκνότητα*
$$f(t) = \underline{\alpha} e^{tB} \underline{b}^T \qquad t \geq 0\,,$$

2. *Laplace-Stieltjes μετασχηματισμός*
$$\hat{l}(s) = \underline{\alpha}(sI - B)^{-1} \underline{b}^T \qquad s \geq 0\,,$$

3. *l-οστή ροπή*
$$\mu^{(l)} = (-1)^l l! \underline{\alpha}\, B^{-l} \underline{e}_n^T \qquad l \geq 1\,.$$

Οι phase-type κατανομές έχουν τρεις πολύ βασικές ιδιότητες για τις οποίες συνιστούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην περιοχή των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Τα παρακάτω θεωρήματα, απαρτίζουν αυτές τις ιδιότητες.

Θεώρημα 4.2.5 *Η συνέλιξη των phase-type κατανομών PH($\underline{\alpha_1}, B_1, E_1$) και PH($\underline{\alpha_2}, B_2, E_2$) είναι phase-type κατανομή με χαρακτηριστικά $(\underline{\alpha}, B, E)$, όπου $E = E_1 \cup E_2$*

$$\alpha_i = \begin{cases} (\underline{\alpha_1})_i & \text{εάν} \quad i \in E_1 \\ (\underline{\alpha_1})_0 (\underline{\alpha_2})_i & \text{εάν} \quad i \in E_2 \end{cases}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \underline{b}_1^T \underline{\alpha}_2 \\ \underline{0} & B_2 \end{pmatrix}$$

με $(\underline{\alpha}_k)_i$ το i-οστό στοιχείο του $\underline{a}_k$ και $\underline{b}_k^T = -B_k \underline{e}_n^T, k = 1, 2$.

Θεώρημα 4.2.6 *Έστω $0 < p < 1$. Η μείξη $pPH(\underline{\alpha}_1, B_1, E_1) + (1-p)PH(\underline{\alpha}_2, B_2, E_2)$ είναι phase-type κατανομή με χαρακτηριστικά $(\underline{\alpha}, B, E)$ όπου $= E_1 \cup E_2$,*

$$\alpha_i = \begin{cases} p(\underline{\alpha}_1)_i & \text{εάν} \quad i \in E_1 \\ (1-p)(\underline{\alpha}_2)_i & \text{εάν} \quad i \in E_2 \end{cases}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & B_2 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα 4.2.7 *Η οικογένεια των phase-type κατανομών είναι πυκνή στο σύνολο όλων των κατανομών στο $\mathcal{R}_+$.*

Από το παραπάνω θεώρημα-ιδιότητα μπορούμε να πούμε ότι για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή F στο $\mathcal{R}_+$, υπάρχει μια ακολουθία F_n από phase-type κατανομές έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)\,,$$

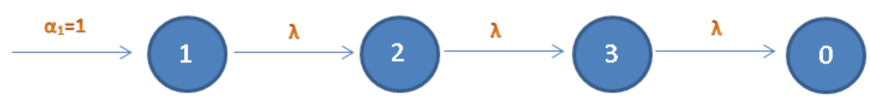
για κάθε x.

Ακολουθούν παραδείγματα κατανομών, ειδικές περιπτώσεις phase-type κατανομών.

Παράδειγμα 4.2.1 *Η κατανομή Erlang(λ, n) με n φάσεις, ορίζεται από την κατανομή Γάμμα(λ, n), όπου n ακέραιος, με πυκνότητα*

$$f(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$$

Η Erlang(λ, n) κατανομή, είναι συνέλιξη n εκθετικών κατανομών με την ίδια ένταση λ. Κατά συνέπεια, το διάγραμμα φάσεων της Erlang(λ, n), για παράδειγμα για $n = 3$, θα είναι



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα φάσεων της $Erlang(\lambda, 3)$

με διάστημα καταστάσεων $E = \{1, 2, ..., n\}$, αρχική συνάρτηση πιθανότητας $\underline{\alpha} = (1, 0, 0, ..., 0)$, και

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad b^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddots \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

□

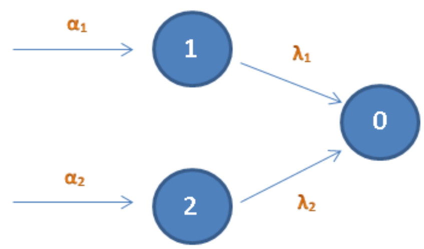
Παράδειγμα 4.2.2 *Η υπερεκθετική (hyperexponetial) κατανομή H_n με n παράλληλα κανάλια, ορίζεται από την μείξη n εκθετικών κατανομών με εντάσεις $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, έτσι ώστε η πυκνότητα είναι*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}.$$

Το διάστημα καταστάσεων $E\{1, 2, .., n\}$,

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}, \quad b^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ddots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

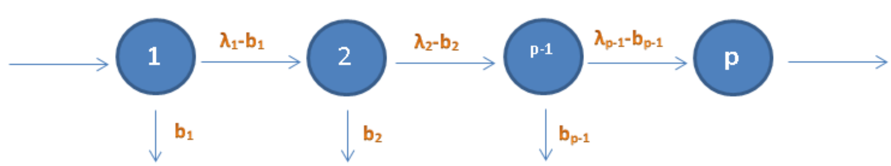
Όταν $n = 2$, το διάγραμμα φάσεων είναι



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα φάσεων για την υποεκθετική με 2 κανάλια.

□

Παράδειγμα 4.2.3 *Η Coxian κατανομή κατασκευάζεται από το άθροισμα εκθετικών ή γενικευμένων Erlang κατανομών, όπου η ανέλιξη Markov ξεκινάει από την κατάσταση 1 και επισκέπτεται κάθε κατάσταση $n = 2, ..., k$ με την εξαίρεση ότι μπορεί να μεταβεί στην κατάσταση απορρόφησης από κάθε μεταβατική κατάσταση της ανέλιξης. Το διάγραμμα φάσεων της είναι το παρακάτω,*



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα φάσεων μιας Coxian κατανομής p φάσεων.

□

Στην παράγραφο που ακολουθεί μελετάται η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, καθώς και των περιθώριων αυτών, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (n) κατανομή και οι αποζημιώσεις phase-type (m) κατανομή. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή και όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την ειδική περίπτωση phase-type (2) κατανομή.

4.3 Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (n) κατανομή

Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type κατανομή, στο ανανεωτικό μοντέλο. Η πρώτη περίπτωση των phase-type που θα μελετήσουμε, είναι η γενικευμένη Erlang κατανομή. Η κατανομή αυτή, ανήκει στην οικογένεια των phase-type (n) κατανομών, και είναι η συνέλιξη n εκθετικών κατανομών με διαφορετικές παραμέτρους, $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$. Μία άλλη ειδική περίπτωση των phase-type, που θα δούμε, είναι η phase-type (2) κατανομή. Τις δύο αυτές περιπτώσεις, μελέτησαν οι Dickson & Drekic (2003) για το ανανεωτικό μοντέλο. Οι αποδείξεις των σ.π.π. βρίσκονται στο παράρτημα.

4.3.1 Γενικευμένη Erlang κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων

Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την γενικευμένη Erlang κατανομή. Η σ.π.π των ενδιάμεσων χρόνων είναι

$$k(t) = \underline{\beta} e^{tB} \underline{b}^T, \quad t > 0 \tag{4.3.1}$$

όπου

$$\underline{\beta} = [1, 0, .., 0]$$

το διάνυσμα πιθανότητας ρυθμού εισόδου, $1 \times n$.

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}$$

είναι $n \times n$ πίνακας ρυθμού μετάβασης, και

$$\underline{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$n \times 1$ διάνυσμα στήλη, το διάνυσμα ρυθμού εξόδου.

Έστω τώρα, X_i το μέγεθος της i-αποζημίωσης το οποίο ακολουθεί γενικευμένη phase-type (m). Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ X_i είναι

$$p(x) = \underline{\alpha} e^{xA} \underline{A}^0 \tag{4.3.2}$$

και η συνάρτηση κατανομής

$$P(x) = 1 - \underline{\alpha} e^{xA} \underline{e}_m \,,$$

όπου

$$\underline{e}_m = [1, .., 1]^T \quad (m \times 1)$$

διάνυσμα στήλη και

$$\underline{A}^0 = -A\underline{e}_m \,.$$

Θέλοντας να βρούμε μία μορφή της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$f(x, y \mid u) = \frac{1}{\delta(0)} \int_{max\{0,u-x\}}^{u} f(x - u + z, u - z + y \mid 0)\, d\delta(z) \,,$$

(Βλέπε Παράρτημα σχέση $(A.2.4)$).

Έχει αποδειχθεί από τους Gerber & Shiu (2003) ότι ισχύει

$$f(x, y \mid 0) = Cp(x + y) \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\rho_j x} \tag{4.3.3}$$

όπου, $C = \prod_{r=1}^{n} \frac{\lambda_r}{c}$ και $a_j = \prod_{r=1\& r\neq j}^{n} (\rho_r - \rho_j)^{-1}$ με $\{\rho_r\}_{r=1}^{n}$ οι n ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος της θεμελιώδης εξίσωση Lundberg,

$$\hat{k}(-c\xi)\hat{p}(\xi) = 1 \,. \tag{4.3.4}$$

Η εξίσωση $(4.3.4)$ ικανοποιείται πάντα για $\xi = 0$, η οποία είναι μία από τις n ρίζες.

Έτσι η $(A.2.4)$ βάσει της (4.3.3), γίνεται

$$f(x, y \mid u) = \frac{p(x + y)}{\delta(0)} C \sum_{j=1}^{n} \left(a_j e^{-\rho_j (x-u)} \int_{max\{0,u-x\}}^{u} e^{-\rho_j z} d\delta(z) \right) . \tag{4.3.5}$$

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, μας ενδιαφέρει να βρούμε τις από κοινού, αλλά και τις περιθώριες, σ.κ και σ.π.π. των $U(T-)$ και $|U(T)|$ στις περιπτώσεις όπου,

1. $0 \leq u < x$, δηλαδή, η αποζημίωση που επιφέρει χρεοκοπία είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, είτε με την πρώτη αποζημίωση το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, είτε η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα είναι ήδη μικρότερο του αρχικού αποθεματικού u.

2. $0 \leq x < u$, δηλαδή, η αποζημίωση που επιφέρει χρεοκοπία είναι μικρότερη του αρχικού αποθεματικού u. Έχει γίνει ήδη κάποια αποζημίωση η οποία έχει ρίξει το πλεόνασμα κάτω από το αρχικό αποθεματικό.

Πριν δώσουμε τις εξισώσεις των σ.π.π. των τ.μ. , θα ορίσουμε κάποιες συναρτήσεις που θα χρειαστούμε για την απόδειξη τους. Θεωρούμε ότι η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, όπως όρισε ο Asmussen (2000) στο Θεώρημα 4.4 (Κεφάλαιο 8) έχει τύπο

$$\delta(u) = 1 - \underline{\eta} e^{u(A + \underline{A}^0 \underline{\eta})} \underline{e}_m \quad u \geq 0\,. \tag{4.3.6}$$

Επίσης, θεωρούμε ένα ελλειμματικό διάνυσμα[1] -γραμμή, το οποίο ορίζεται ως

$$\underline{\eta} = C\underline{\alpha} \sum_{j=1}^{n} a_j (\rho_j I_m - A)^{-1}\,, \tag{4.3.7}$$

τότε, η παράγωγος της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας σύμφωνα με την $(4.3.7)$ και γνωρίζοντας ότι $\underline{A}^0 = -\underline{A}\,\underline{e}_m$ είναι

$$\delta'(u) = \delta(0)\underline{\eta}\, e^{u(A + \underline{A}^0 \underline{\eta})} \underline{A}^0\,, \quad u > 0\,, \tag{4.3.8}$$

όπου $\delta(0) = 1 - \underline{\eta}\,\underline{e}_m$.

<u>Περίπτωση 1:</u> Όταν $0 \leq u < x$,

- η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$f\,(x, y \mid u) = C\underline{\alpha} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\rho_j (x-u)} (1 + \underline{\eta} B_j^{-1} (e^{uB_j} - I_m) \underline{A}^0)\,, \tag{4.3.9}$$

- η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία είναι

$$f\,(x \mid u) = C\underline{\alpha} e^{xA} \underline{e}_m \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\rho_j (x-u)} [1 + \underline{\eta} B_j^{-1} (e^{uB_j} - I_m) \underline{A}^0]. \tag{4.3.10}$$

<u>Περίπτωση 2:</u> Όταν $u > x$,

- η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$f\,(x, y \mid u) = C\underline{a} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{\eta} B^{-1} \left[e^{-\rho_j x} e^{uD} - e^{(u-x)D} \right] \underline{A}^0\,, \tag{4.3.11}$$

- η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι

$$f\,(x \mid u) = C\underline{\alpha} e^{xA} \underline{e}_m \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{\eta} B_j^{-1} [e^{-\rho_j x} e^{uD} - e^{(u-x)D}] \underline{A}^0\,. \tag{4.3.12}$$

[1]Τα στοιχεία ενός ελλειμματικού διανύσματος αθροίζουν σε κάτι μικρότερο του 1

Τέλος, η σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, εάν ολοκληρώσουμε την $(4.3.11)$ από $x = 0$ έως $x = u$ και έπειτα την $(4.3.9)$ από $x = u$ έως $x = \infty$ ή την (3.3) από $x = 0$ έως $x = \infty$, έχει τύπο

$$g\,(y \mid u) = \underline{\eta}\, e^{uD} e^{yA} \underline{A}^0. \tag{4.3.13}$$

Παρατήρηση 4.3.1

1. *Στα προηγούμενα κεφάλαια, είδαμε ότι η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, έχει ασυνέχεια στο σημείο* $x = u$. *Το ίδιο ισχύει και σε αυτή τη παράγραφο. Όταν* $x \to u^-$ *για την* $(4.3.10)$ *και* $x \to u^+$ *για την* $(4.3.12)$, *τότε η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία έχει ασυνέχεια στο* $x = u$, *εκτός και αν ισχύει*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 0\,. \tag{4.3.14}$$

   Εάν ισχύει η $(4.3.14)$, *τότε η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, είναι συνεχής συνάρτηση.*

2. *Όταν η σ.π.π. οι ενδιάμεσοι ακολουθούν εκθετική κατανομή* $k(t) = \lambda e^{-\lambda y}$, *εάν θέσουμε* $n = 1\,, C = \frac{\lambda}{c}\,, \rho_1 = 0\,, a_1 = 1\,, B_1 = D$ *και* $\underline{\eta} = -(\frac{\lambda}{c})\underline{\alpha}A^{-1}$, *τότε οι σχέσεις* $(4.3.10)$ *και* $(4.3.12)$, *γίνονται ο τύπος του Dickson (1992)*.

Στη συνέχεια, δίνεται ένα παράδειγμα στο οποίο μπορούμε να δούμε πως εφαρμόζονται οι τύποι για τον υπολογισμό της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, αλλά και των περιθώριων, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν γενικευμένη Erlang κατανομή.

Παράδειγμα 4.3.1 *(Βλέπε Dickson & Drekic (2003))*
Έστω ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι, T_i, *ακολουθούν γενικευμένη Erlang κατανομή, με* $n = 3\,, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, *και* $\lambda_3 = 2$. *Η σ.π.π. τους, δίνεται από την*

$$k(t) = \frac{2}{9}e^{-2t} - \frac{2}{9}e^{-0.5t} + \frac{1}{3}te^{-0.5t}\,, \quad t > 0\,.$$

Επίσης, θεωρούμε ότι το μέγεθος των αποζημιώσεων, X_i, *ακολουθεί phase-type κατανομή* $PH(\alpha, A, A^0)$, *όπου* $\underline{\alpha} = (0.1, 0.1, 0.3, 0.5)$,

$$\underline{A}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \ \text{και}\ A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{4.3.15}$$

Η σ.π.π. του μεγέθους των αποζημιώσεων έχει τύπο

$$p(x) = \frac{5}{112}e^{-x/10} - \frac{3}{40}e^{-x/6} + \frac{17}{70}e^{-x/3} - \frac{1}{80}e^{x/2}\,, \quad x > 0\,.$$

Ορίζουμε το περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.2$. Θέλουμε να βρούμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας καθώς και τις περιθώριες σ.π.π. .

Η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων είναι $m_1 = 4.5$ και ο τύπος του μετασχηματισμού Laplace είναι

$$\hat{k}(s) = \frac{1}{3(0.5+s)^2} - \frac{2}{0(0.5+s)} + \frac{2}{9(2+s)}\,,$$

ενώ η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι $\mu_1 = 5.7$ και ο τύπος του μετασχηματισμού Laplace είναι

$$\hat{p}(s) = 0.5\left(\frac{0.0892857}{\frac{1}{10}+s} - \frac{0.05}{\frac{1}{6}+s} + \frac{0.485714}{\frac{1}{3}+s} - \frac{0.025}{\frac{1}{2}+s}\right)\,.$$

Σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού του περιθωρίου ασφαλείας για το ανανεωτικό μοντέλο

$$\theta = \frac{cm_1}{\mu_1} - 1$$

το ασφάλιστρο ορίζεται c=1.52.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις λύσεις της θεμελιώδης εξίσωση Lundberg $\hat{k}(-c\xi)\hat{p}(\xi) = 1$ οι οποίες είναι

$$\rho_1 = 0\;,\rho_2 = 0.564073\;,\rho_3 = 1.2916\,.$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι, $\underline{a} = (1.37258\,,-2.43678\,,1.0642)$ όπου $a_j = \prod_{j=1,r\neq j}^{n}\frac{1}{\rho_r-\rho_j}$. Επίσης $C = \prod_{j=1}^{n}(\frac{\lambda_j}{c}) = 0.142377\,.$

Από την $(4.3.7)$ βρίσκουμε ότι

$$\underline{\eta} = (0.154067\,,0.191017\,,0.196124\,,0.236013)\,,$$

και

$$D = A + \underline{A}^0\underline{\eta} = \left[\begin{array}{cccc} -0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.166667 & 0.166667 & 0 \\ 0 & 0 & -0.333333 & 0.333333 \\ 0.0770334 & 0.0955086 & 0.98062 & -0.381993 \end{array}\right]\,.$$

Υπολογίζουμε τη πιθανότητα μη-χρεοκοπίας και την πρώτη της παράγωγο σύμφωνα με τις εξισώσεις $(4.3.6)$ και $(4.3.8)$, όμως δεν τις αναφέρουμε γιατί είναι πολύ μακροσκελείς και στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, για τις δύο περιπτώσεις όπου $0 \leq u < x$ και $u > x$.

1. $0 \leq u < x$

- *σύμφωνα με τον τύπο* $(A.3.1)$ *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

$$\begin{aligned} f(x,y \mid u) \;=\; & 0.319548(1.0642e^{-1.2916(-u+x)}(0.241735 + 0.0000986517e^{-1.79282u} - \\ & 0.00667672e^{-1.56645u} + 0.00183589e^{-1.47272u} - 0.0142139e^{-1.3164u}) - \\ & 2.43678e^{-0.564073(-u+x)}(0.263226 + 0.000166025e^{-1.06529u} - \\ & 0.0124669e^{-0.838926u} + 0.00362825e^{-0.745196u} - 0.0317746e^{-0.588874u}) + \\ & 1.37258(1 + 0.00035287e^{-0.501216u} - 0.0380522e^{-0.274853u} + \\ & 0.0149277e^{-0.181123u} - 0.75445e^{-0.0248012u})) \\ & (0.5e^{1/2(-x-y)} + 0.1(25/28e^{1/10(-x-y)} - 3/2e^{1/6(-x-y)} + \\ & 6/7e^{1/3(-x-y)} - 1/4e^{1/2(-x-y)}) + \\ & 0.6e^{1/2(-x-y)}(-1 + e^{(x+y)/6)} + 0.1e^{1/2(-x-y)}(-1 + e^{(x+y)/6})^2)\,. \end{aligned}$$

- *Η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία αν ολοκληρώσουμε τον παραπάνω τύπο είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) \;=\; & 0.319548e^{-10.3687u-2.35567x}(-0.05 + 1.45714e^{x/6} - 0.3e^{x/3} + \\ & 0.892857e^{2x/5})(0.000104985e^{9.86746u+0.564073x} - \\ & 0.00710536e^{10.0938u+0.564073x} + 0.00195375e^{10.1875u+0.564073x} - \\ & 0.0151264e^{10.3439u+0.564073x} + 0.257254e^{11.6603u+0.564073x} - \\ & 0.000404565e^{9.86746u+1.2916x} + 0.0303789e^{10.0938u+1.2916x} - \\ & 0.00884123e^{10.1875u+1.2916x} + 0.0774275e^{10.3439u+1.2916x} - \\ & 0.641422e^{10.9327u+1.2916x} + 0.000484342e^{9.86746u+1.85567x} - \\ & 0.0522296e^{10.0938u+1.85567x} + 0.0204895e^{10.1875u+1.85567x} - \\ & 1.03554e^{10.3439u+1.85567x} + 1.37258e^{10.3687u+1.85567x}\,. \end{aligned}$$

2. $u > x$

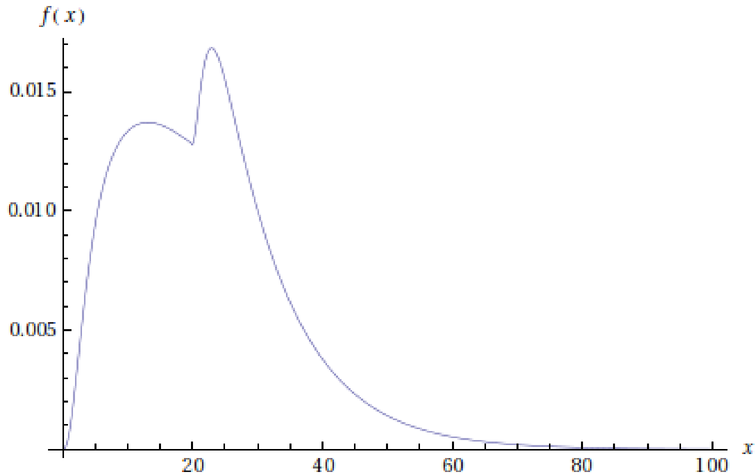
- *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας σύμφωνα με την εξίσωση* $(A.3.4)$ *είναι*

$$\begin{aligned} f(x,y \mid u) &= 0.0711884(0.5e^{-(x/2)-y/2}+0.1(-(1/4)e^{-15(x/30+y/30)}+ \\ &\quad 6/7e^{-10(x/30+y/30)}-3/2e^{-5(x/30+y/30)}+25/28e^{-3(x/30+y/30)})+ \\ &\quad 0.6e^{-(x/2)-y/2}(-1+e^{x/6+y/6)}+0.1e^{-(x/2)-y/2}(-1+e^{x/6+y/6})^2) \\ &\quad (1.37258(e^{-0.0248012u}(-3.38654+3.38654e^{0.0248012x})+ \\ &\quad e^{-0.181123u}(0.0670071-0.0670071e^{0.181123x})+ \\ &\quad e^{-0.274853u}(-0.170807+0.170807e^{0.274853x})+ \\ &\quad e^{-0.501216u}(0.00158395-0.00158395e^{0.501216x}))- \\ &\quad 2.43678e^{0.564073(u-x)}(e^{-0.588874u}(-0.142628+0.142628e^{0.588874x})+ \\ &\quad e^{-0.745196u}(0.0162864-0.0162864e^{0.745196x})+ \\ &\quad e^{-0.838926u}(-0.0559608+0.0559608e^{0.838926x})+ \\ &\quad e^{-1.06529u}(0.000745245-0.000745245e^{1.06529x}))+ \\ &\quad 1.0642e^{1.2916(u-x)}(e^{-1.3164u}(-0.0638029+0.0638029e^{1.3164x})+ \\ &\quad e^{-1.47272u}(0.00824087-0.00824087e^{1.47272x})+ \\ &\quad e^{-1.56645u}(-0.0299702+0.0299702e^{1.56645x})+ \\ &\quad e^{-1.79282u}(0.000442824-0.000442824e^{1.79282x})))\,. \end{aligned}$$

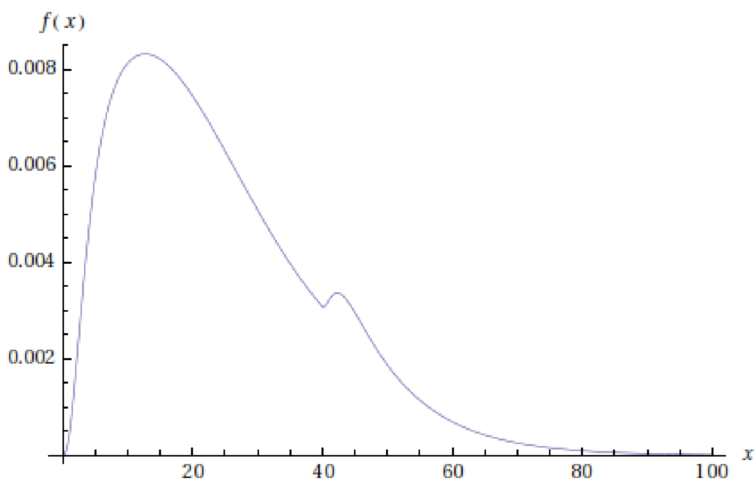
- *Η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) &= 0.0711884e^{-10.3687u-2.35567x}(-0.05+1.45714e^{x/6}-0.3e^{x/3}+ \\ &\quad 0.892857e^{2x/5})0.000471253e^{9.86746u+0.564073x}- \\ &\quad 0.0318943e^{10.0938u+0.564073x}+0.00876993e^{10.1875u+0.564073x}- \\ &\quad 0.067899e^{10.3439u+0.564073x}-0.001816e^{9.86746u+1.2916x}+ \\ &\quad 0.136364e^{10.0938u+1.2916x}-0.0396862e^{10.1875u+1.2916x}+ \\ &\quad 0.347554e^{10.3439u+1.2916x}+0.00217409e^{9.86746u+1.85567x}- \\ &\quad 0.234446e^{10.0938u+1.85567x}+0.0919724e^{10.1875u+1.85567x}- \\ &\quad 4.64829e^{10.3439u+1.85567x}+4.71619e^{10.3439u+1.88047x}- \\ &\quad 0.347554e^{10.3439u+1.88047x}-0.0610561e^{10.1875u+2.0368x}+ \\ &\quad 0.129977e^{10.0938u+2.13053x}-0.000829351e^{9.86746u+2.35689x}\,. \end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε το γράφημα του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, εάν θέσουμε αρχικό αποθεματικό u. *Την περίπτωση όπου το* $u = 20$, *μπορούμε να δούμε στο Σχήμα* (4.5) *και για* $u = 40$ *στο Σχήμα* (4.6). *Παρατηρούμε από τα γραφήματα ότι η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι συνεχής συνάρτηση καθώς ισχύει η* $(4.3.14)$.



Σχήμα 4.5: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν γενικευμένη Erlang και οι αποζημιώσεις phase - type κατανομή, με αρχικό αποθεματικό $u = 20$.



Σχήμα 4.6: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν γενικευμένη Erlang και οι αποζημιώσεις phase - type κατανομή, με αρχικό αποθεματικό $u = 40$.

$\square$

4.3.2 Phase-type (2) κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων

Στην παράγραφο αυτή θα εστιάσουμε στην ειδική περίπτωση των phase-type (2) κατανομών. Οι Dickson & Drekic (2003) υπολόγισαν την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (2) κατανομή. Για τον υπολογισμό, βασίστηκαν σε αποτελέσματα της εργασίας των Dickson & Hipp (2000), καθώς και της εργασίας των Cheng & Tang (2003).

Οι Dickson & Hipp (2000) μελέτησαν προβλήματα χρεοκοπίας των phase-type (2) κατανομών, στηριζόμενοι στο ότι η σ.π.π. των ενδιάμεσων χρόνων, $k(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$k(t) + A_1 k'(t) + A_2 k''(t) = 0 \quad \forall t > 0\,, \tag{4.3.16}$$

όπου A_1,A_2 είναι σταθερές και $A_2 > 0$. Η διαφορική εξίσωση $(4.3.16)$, ικανοποιείται για όλες τις phase-type (2) κατανομές (γραμμικούς συνδιασμούς και συνελίξεις δύο εκθετικών κατανομών). Εάν ολοκληρώσουμε την $(4.3.16)$, παίρνουμε

$$1 - A_1 k(0) - A_2 k'(0) = 0\,. \tag{4.3.17}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω δύο εξισώσεις $(4.3.16)$ και $(4.3.17)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 , A_2 .

Επίσης οι Dickson & Hipp (2000) απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα, από το οποίο βρίσκουμε τη θετική λύση που ικανοποιεί τη ζητούμενη σ.π.π. που θα δούμε στη συνέχεια.

Θεώρημα 4.3.1 *(Dicskon & Hipp (2000)). Η πιθανότητα επιβίωσης με αρχικό αποθεματικό μηδέν είναι*

$$\delta(0) = \frac{\rho}{A_2 c^2 s_0}$$

όπου s_0 είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$\mu_1 \hat{h}(s_0) - A_1 c + A_2 c^2 s_0 + \hat{p}(s_0) A_2 c k(0) = 0\,.$$

Το $\rho = cm_1 - \mu_1 > 0$ είναι η συνθήκη του καθαρού κέρδους. Θυμίζουμε ότι με μ_1 συμβολίζουμε τη μέση τιμή των αποζημιώσεων, με m_1 τη μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων, A_1, A_2 σταθερές, η συνάρτηση

$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) = \frac{1 - \hat{p}(s)}{\mu_1 s}\,. \tag{4.3.18}$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της (1.4.12) των κλιμακωτών υψών, και $\hat{p}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. των αποζημιώσεων.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι $u = 0$, για μία phase-type (2) κατανομή.

Θεώρημα 4.3.2 *Η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, όπως την υπολόγισαν οι Dickson & Drekic (2003), για αρχικό αποθεματικό $u = 0$ είναι*

$$f(x, y \mid 0) = \frac{1}{A_2 c^2 s_0} p(x+y)(1 - e^{-s_0 x}) + \frac{k(0)}{c} e^{-s_0 x} p(x+y) \,. \tag{4.3.19}$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση που ακολουθεί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της προηγούμενης παραγράφου, για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, καθώς και τις περιθώριες αυτής.

Παρατήρηση 4.3.2 *Η σ.π.π.* (4.3.19) *μπορεί να γραφτεί στη μορφή της* (4.3.3)*, εάν ορίσουμε*

$$n = 2\,, C = 1\,, \rho_1 = 0\,, \rho_2 = s_0\,, a_1 = (A_2 c^2 s_0)^{-1} \text{ και } a_2 = \tfrac{k(0)}{c} - (A_2 c^2 s_0)^{-1}\,.$$

Όπου ρ_1, ρ_2 είναι οι οι λύσεις της εξίσωσης Lundberg $\hat{k}(-c\xi)\hat{p}(\xi) = 1$, με θετικό πραγματικό μέρος. Έτσι εάν οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase-type (m) κατανομή και οι αποζημιώσεις phase-type (2), τότε ισχύουν οι εξισώσεις (4.3.5) *έως* (4.3.13).

Στο παρακάτω παράδειγμα των Dickson & Drekic (2003), μπορούμε να δούμε την εφαρμογή των τύπων, για τον υπολογισμό της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (2) κατανομή και οι αποζημιώσεις phase-type (m).

Παράδειγμα 4.3.2 *(Βλέπε Dickson & Drekic (2003))*
Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μείξη δύο εκθετικών κατανομών με ρυθμούς $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ και $\lambda_2 = 1$, με σ.π.π.

$$k(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{3}}\,, \quad t > 0\,,$$

και οι αποζημιώσεις ακολουθούν την Erlang (3, 1.5) κατανομή, με σ.π.π.

$$p(x) = \frac{27}{16} x^2 e^{-1.5x}\,.$$

Οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase-type κατανομη, $PH(\underline{a}, A)$, με $\underline{\alpha} = [1, 0, 0]$, $A^0 = [0, 0, 0, 1.5]^T$ και

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.1$ *έτσι ώστε το ασφάλιστρο να είναι* $c = 1.1$. *Σύμφωνα με την Παρατήρηση* 4.3.2 *θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις από την Παράγραφο της γενικευμένης Erlang των ενδιάμεσων χρόνων, για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας*

Από το σύστημα εξισώσεων (4.3.16) , (4.3.17) *υπολογίζουμε τις σταθερές* $A_1 = 4$ *και* $A_2 = 3$. *Επίσης* $k(0) = \frac{2}{3}$, *η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων είναι* $m_1 = 2$, *και ο μετασχηματισμός Laplace είναι*

$$\hat{k}(s) = \frac{1}{(6(\frac{1}{3}+s))} + \frac{1}{(2(1+s))} \,.$$

Για τις αποζημιώσεις έχουμε ότι η μέση τιμή είναι $\mu_1 = 2$ *και ο μετασχηματισμός Laplace είναι*

$$\hat{p}(s) = \frac{3.375}{(1.5+s)^3} \,.$$

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (2) κατανομή, επομένως $n = 2$, *και θέτουμε* $C = 1$. *Από την εξίσωση Lundberg για το ανανεωτικό μοντέλο,* $\hat{k}(-c\,\xi)\hat{p}(\xi) = 1$, *υπολογίζουμε τις*

$$\rho_1 = 0 \text{ και } \rho_2 = s_0 = 0.791843 \,.$$

Επίσης $a_1 = (A_2 c^2 s_0)^{-1} = 0.3479$ *και* $a_2 = k(0)/c - (A_2 c^2 s_0)^{-1} = 0.258161$. *Έτσι η εξίσωση* (4.3.3) *γίνεται*

$$f(x, y \mid 0) = 1.6875 e^{-1.5(x+y)}(0.3479 + 0.258161 e^{-0.791843x})(x+y)^2 \,.$$

Σύμφωνα με την (4.3.7) *έχουμε ότι* $\eta = (0.34458, 0.30566, 0.28019)$ *και*

$$D = \begin{bmatrix} -1.50000 & 1.50000 & 0 \\ 0 & -1.50000 & 1.50000 \\ 0.51687 & 0.45849 & -1.07872 \end{bmatrix} .$$

1. $0 \le u < x$,

- *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

$$\begin{aligned} f(x, y \mid u) \;=\; & 24.2526 e^{-1.5(x+y)}(x+y)^2(0.258161 e^{-0.791843(-u+x)}(0.118116 - \\ & 0.0571621 e^{-0.842943u} + 0.00862583 e^{-2.80615u} Cos[0.73357u] + \\ & 0.00717596 e^{-2.80615u} Sin[0.73357u]) + 0.3479(1 - \\ & 0.942947 e^{-0.0510997u} + 0.0125267 e^{-2.01431u} Cos[0.73357u] + \\ & 0.00857628 - e^{-2.01431u} Sin[0.73357u])) \,. \end{aligned}$$

- *Η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία είναι*

$$
\begin{aligned}
f(x \mid u) \;=\; & 24.2526e^{-1.5x}(0.592593+(0.888889+0.666667x)x)(0.3479- \\
& 0.328051e^{-0.0510997u}+0.00435804e^{-2.01431u}Cos[0.73357u]+ \\
& 0.00298369e^{-2.01431u}Sin[0.73357u]+0.258161e^{0.791843u-0.791843x} \\
& (0.118116-0.0571621e^{-0.842943u}+0.00862583e^{-2.80615u} \\
& Cos[0.73357u]+0.00717596e^{-2.80615u}Sin[0.73357u]))\,.
\end{aligned}
$$

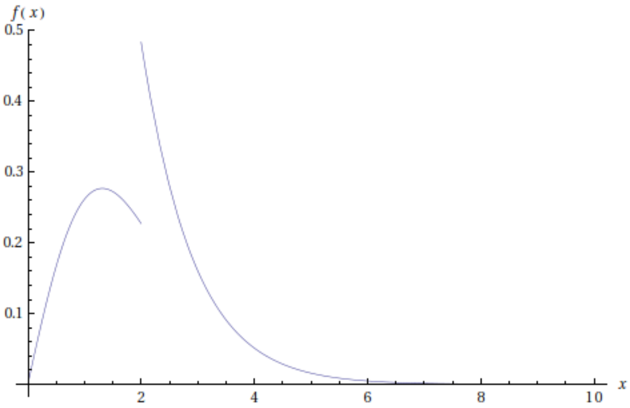
2. $u > x$,

   - *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

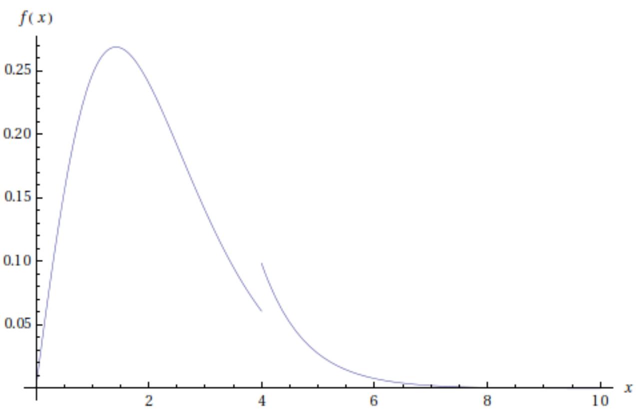
$$
\begin{aligned}
f(x,y \mid u) \;=\; & 1.5e^{-1.5x-1.5y}(1.125x^2+2.25xy+1.125y^2)(0.3479(-13.552 \\
& e^{-0.0510997u}+13.552e^{-0.0510997u+0.0510997x}+ \\
& 0.180033e^{-2.01431u}Cos[0.73357u]- \\
& 0.180033e^{-2.01431u+2.01431x}Cos[0.73357u-0.73357x]+ \\
& 0.123258e^{-2.01431u}Sin[0.73357u]- \\
& 0.123258e^{-2.01431u+2.01431x}Sin[0.73357u-0.73357x])+ \\
& 0.258161e^{0.791843(u-x)}(-0.821529e^{-0.842943u}+ \\
& 0.821529e^{-0.842943u+0.842943x}+0.12397e^{-2.80615u}Cos[0.73357u]- \\
& 0.12397e^{-2.80615u+2.80615x}Cos[0.73357u-0.73357x]+ \\
& 0.103132e^{-2.80615u}Sin[0.73357u]- \\
& 0.103132e^{-2.80615u+2.80615x}Sin[0.73357u-0.73357x]))\,.
\end{aligned}
$$

   - *Η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$
\begin{aligned}
f(x \mid u) \;=\; & 1.5e^{-1.5x}(0.666667+(1.+0.75x)x)(-4.71473e^{-0.0510997u}- \\
& 0.212087e^{-0.0510997u-0.791843x}+4.92682e^{-0.0510997u+0.0510997x}+ \\
& e^{-2.01431u-0.791843x}(0.0320042+0.0626334e^{0.791843x})Cos[0.73357u]- \\
& 0.0946376e^{-2.01431u+2.01431x}Cos[0.73357u-0.73357x]+ \\
& 0.0428814e^{-2.01431u}Sin[0.73357u]+ \\
& 0.0266247e^{-2.01431u-0.791843x}Sin[0.73357u]- \\
& 0.0695061e^{-2.01431u+2.01431x}Sin[0.73357u-0.73357x])\,.
\end{aligned}
$$



Σχήμα 4.7: Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε τη σ.π.π. του πλεονάσματος όταν το αρχικό αποθεματικό $u = 1$.



Σχήμα 4.8: Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε τη σ.π.π. του πλεονάσματος όταν το αρχικό αποθεματικό $u = 4$.

Στα γραφήματα παραπάνω, παρατηρούμε την ασυνέχεια που έχει η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία στο σημείο $x = u$. Αυτό δε συμβαίνει πάντα. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα, όπου η σ.π.π. $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση. □

Παράδειγμα 4.3.3 *Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν Erlang (2,1) κατανομή. Η σ.π.π. είναι*

$$k(t) = e^{-t}t\,, \quad t > 0\,.$$

Οι αποζημιώσεις ακολουθούν και πάλι Erlang (3,1.5), όπως στο Παράδειγμα 4.3.2. Ορίζουμε $\theta = 0.1$ έτσι ώστε $c = 1.1$.

Όπως και στο Παράδειγμα 4.3.2 λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $(4.3.16)\,,(4.3.17)$ βρίσκουμε τις σταθερές $A_1 = 2\,, A_2 = 1\,.$

Η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων είναι $m_1 = 2$. *Επίσης* $k(0) = 0$ *και*

$$a_1 = 0.650167\,, \quad a_2 = -0.650167\,,$$

δηλαδή το άθροισμα των a_j *είναι μηδέν. Επομένως από Παρατήρηση* $4.3.1\,(1)$, *περιμένουμε ότι η σ.π.π. του πλεονάσματος θα είναι συνεχής.*

Οι θετικές λύσεις της εξίσωσης Lundberg είναι

$$\rho_1 = 0 \quad , \rho_2 = s0 = 1.27113\,.$$

Θέτουμε $C = 1$. *Έτσι* $\underline{\eta} = (0.198823, 0.306445, 0.3647)$

1. $0 \leq u < x$

   - *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

$$\begin{aligned} f(x,y \mid u) \;=\;& 12.9776e^{-1.5(x+y)}(x+y)^2(-0.650167e^{-1.27113(-u+x)}(0.190868 - \\ & 0.0705229e^{-1.38092u} + 0.00968719e^{-3.19271u}Cos[0.55222u] + \\ & 0.00846812e^{-3.19271u}Sin[0.55222u]) + \\ & 0.650167 - 0.887061e^{-0.109785u} \\ & +0.0170934e^{-1.92158u}Cos[0.55222u] \\ & +0.0119414e^{-1.92158u}Sin[0.55222u]))\,, \end{aligned}$$

   - *η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$\begin{aligned} f(x \mid u) \;=\;& 12.9776 - e^{-1.5x}(0.592593 + (0.888889 + 0.666667x)x) \\ & (0.650167 - 0.576738e^{-0.109785u} + \\ & 0.0111136e^{-1.92158u}Cos[0.55222u] + \\ & 0.0077639e^{-1.92158u}Sin[0.55222u] - \\ & 0.650167e^{1.27113u-1.27113x}(0.190868 - \\ & 0.0705229e^{-1.38092u} + \\ & 0.00968719e^{-3.19271u}Cos[0.55222u] + \\ & 0.00846812e^{-3.19271u}Sin[0.55222u]))\,. \end{aligned}$$

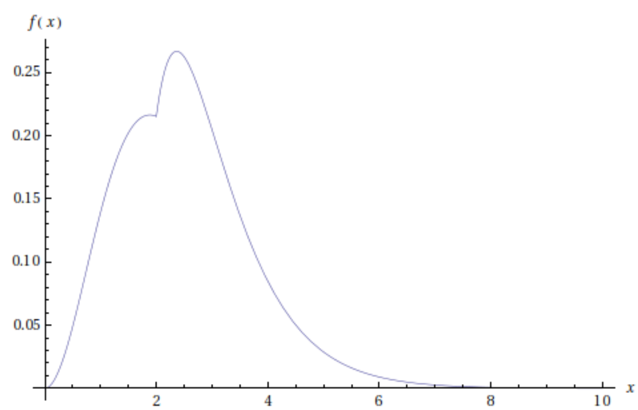
2. $u > x$

- *η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι*

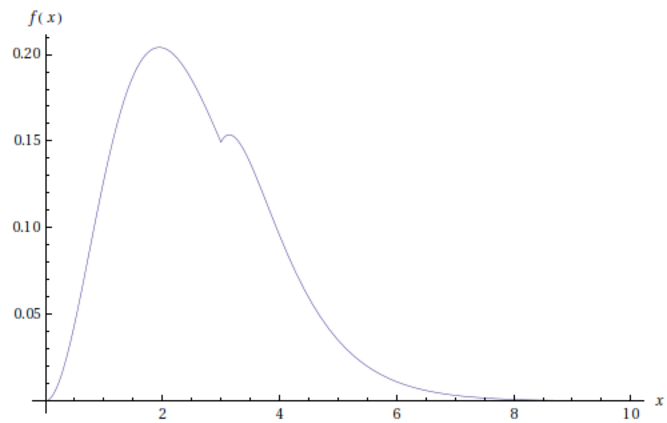
$$
\begin{aligned}
f(x,y\mid u) \quad = \quad & 1.5e^{-1.5x-1.5y}(1.125x^2+2.25xy+1.125y^2) \\
& (0.650167(-6.82187e^{-0.109785u}+6.82187e^{-0.109785u+0.109785x}+ \\
& 0.131456e^{-1.92158u}Cos[0.55222u]-0.131456e^{-1.92158u+1.92158x} \\
& Cos[0.55222u-0.55222x]+0.0918343e^{-1.92158u}Sin[0.55222u]- \\
& 0.0918343e^{-1.92158u+1.92158x}Sin[0.55222u-0.55222x])- \\
& 0.650167e^{1.27113(u-x)}(-0.54235e^{-1.38092u}+0.54235e^{-1.38092u+1.38092x} \\
& +0.0744985e^{-3.19271u}Cos[0.55222u]-0.0744985e^{-3.19271u+3.19271x} \\
& Cos[0.55222u-0.55222x]+0.0651233e^{-3.19271u}Sin[0.55222u]- \\
& 0.0651233e^{-3.19271u+3.19271x}Sin[0.55222u-0.55222x]))\,,
\end{aligned}
$$

- *η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία είναι*

$$
\begin{aligned}
f(x\mid u) \quad = \quad & 1.5e^{-1.5x}(0.666667+(1.+0.75x)x)(-4.43535e^{-0.109785u}+ \\
& 0.352618e^{-0.109785u-1.27113x}+4.08273e^{-0.109785u+0.109785x}+ \\
& e^{-1.92158u-1.27113x}(-0.0484364+0.085468e^{1.27113x}Cos[0.55222u]- \\
& 0.0370316e^{-1.92158u+1.92158x}Cos[0.55222u-0.55222x]+ \\
& 0.0597076e^{-1.92158u}Sin[0.55222u]-0.042341e^{-1.92158u-1.27113x} \\
& Sin[0.55222u]- \\
& 0.0173666e^{-1.92158u+1.92158x}Sin[0.55222u-0.55222x])\,.
\end{aligned}
$$



Σχήμα 4.9: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (2), με αρχικό αποθεματικό $u = 1$. Παρατηρούμε ότι η σ.π.π. έχει ασυνέχεια στο σημείο $x = u$.



Σχήμα 4.10: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type (2), με αρχικό αποθεματικό $u = 1$. Παρατηρούμε ότι η σ.π.π. έχει ασυνέχεια στο σημείο $x = u$.

□

4.4 Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. για θετικό ανατοκισμό

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα μελετήσουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για το ανανεωτικό μοντέλο, όταν έχουμε θετική ένταση ανατοκισμού και η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι phase-type (n). Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας, από τη γενίκευση της εξίσωσης Lundberg, όταν $\delta > 0$. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε μία ακριβή έκφραση της από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, έτσι ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τελικά την γενικευμένη μορφή του τύπου του Dickson για phase-type κατανομές με θετικό ανατοκισμό. (βλέπε Ren (2007)

4.4.1 Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg σε μορφή πινάκων

Έστω ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type κατανομή $PH(\underline{\beta}, B, \underline{b})$ με σ.π.π.

$$k(t) = \underline{\beta} e^{tB} \underline{b}^T ,$$

και μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{k}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} k(x) dx = \underline{\beta}(sI_n - B)^{-1} \underline{b}^T . \tag{4.4.1}$$

Ορίζουμε $\phi_j(u)$ την αναμενόμενη προεξοφλητική ποινή δεδομένου $U(0) = u$ και $J_0^{(1)} = E_j$ για $j = 1, 2, .., n$

$$\phi_j(u) = E\left[e^{-\delta t} w(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u, J_0^{(1)} = E_j\right] .$$

Τότε η αναμενόμενη προεξοφλητική ποινή στη χρεοκοπία , $\phi(u)$, μπορεί να υπολογιστεί από την

$$\phi(u) = \underline{\beta}\, \underline{\phi}(u) ,$$

όπου

$$\underline{\phi}(u) = [\phi_1(u), ..., \phi_n(u)]^T \tag{4.4.2}$$

είναι ένα διάνυσμα- στήλη συναρτήσεων.

Ο Schmidi (2005) έδειξε ότι το διάνυσμα $\underline{\phi}(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\underline{\phi}'(u) = \frac{\delta}{c}\underline{\phi}(u) - \frac{1}{c}B\underline{\phi}(u) - \frac{1}{c}\left(\int_0^u \underline{\beta\phi}(u-x)p(x)dx + \omega(u)\right)\underline{b}^T , \tag{4.4.3}$$

όπου $\omega(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)p(x)dx$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της (4.4.3) είναι

$$-\underline{\phi}(0) + s\hat{\underline{\phi}}(s) = \frac{\delta}{c}\hat{\underline{\phi}}(s) - \frac{1}{c}B\hat{\underline{\phi}}(s) - \frac{1}{c}\underline{\beta\hat{\phi}}(s)\hat{p(s)}\underline{b}^T - \frac{1}{c}\hat{\omega}(s)\underline{b}^T .$$

Εάν απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε

$$\left[(s - \frac{\delta}{c})I + \frac{1}{c}B + \frac{1}{c}\underline{\beta}\hat{p}(s)\underline{b}^T\right]\hat{\underline{\phi}}(s) = \underline{\phi}(0) - \frac{1}{c}\hat{\omega}(s)\underline{b}^T . \tag{4.4.4}$$

Η εξίσωση (4.4.4) γράφεται

$$L_\delta(s)\hat{\underline{\phi}}(s) = \underline{\phi}(0) - \frac{1}{c}\hat{\omega}(s)\underline{b}^T ,$$

όπου

$$L_\delta(s) = \left(s - \frac{\delta}{c}\right)I + \frac{1}{c}B + \frac{1}{c}\underline{b}^T\underline{\beta}\hat{p}(s) . \tag{4.4.5}$$

Σύμφωνα με την ορίζουσα της εξίσωσης (4.4.5) , η πρόταση που ακολουθεί παραθέτει την θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg για phase -type κατανομές, όταν έχουμε θετικό ανατοκισμό ($\delta > 0$.)

Πρόταση 4.4.1 *Θεωρούμε κατάλληλο s, τέτοιο ώστε ο πίνακας*

$$\left(s - \frac{\delta}{c}\right)\underline{I} + \frac{1}{c}B$$

να είναι αντιστρέψιμος. Τότε όταν

$$det(L_\delta(s)) = 0\,, \tag{4.4.6}$$

ισχύει ότι

$$\hat{k}(\delta - cs)\hat{p}(s) = 1\,. \tag{4.4.7}$$

η οποία είναι είναι η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg.

Οι Gerber & Shiu (2005 b) απέδειξαν την παρακάτω πρόταση, εφόσον ισχύει το Πόρισμα 4.2.1 .

Πρόταση 4.4.2 *Η εξίσωση* (4.4.7) *έχει n λύσεις με θετικό πραγματικό μέρος για $s = \frac{\delta-\zeta}{c}$ όπου ζ κυμαίνεται πάνω από τις ιδιοτιμές του B.*

Απόδειξη: Βρίσκεται στο Παράρτημα.

4.4.2 Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π., όταν $u = 0$

Υποθέτουμε ότι οι n θετικές λύσεις Lundberg είναι διακριτές $\rho_1, ..., \rho_n$ και ορίζουμε το διάνυσμα-γραμμή

$$\underline{v}_i = \underline{\beta}((\delta - c\rho_i)I - B)^{-1} \quad i = 1, 2, .., n\,. \tag{4.4.8}$$

Θεώρημα 4.4.1 *Το διάνυσμα - στήλη* (4.4.2) *για $u = 0$, έχει τύπο*

$$\underline{\phi}(0) = \frac{1}{c}\hat{\omega}(-Q)\underline{b}^T\,. \tag{4.4.9}$$

όπου

$$Q = V^{-1}\begin{bmatrix} -\rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_n \end{bmatrix} V \tag{4.4.10}$$

και

$$V = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T & \underline{v}_2^T & \cdots & \underline{v}_n^T \end{bmatrix}^T$$

είναι ένας πίνακας $n \times n$ και $\underline{v}_i$ για $i = 1, .., n$, είναι n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα-γραμμή $(1 \times n)$.

Απόδειξη *Βρίσκεται στο Παράρτημα.*

Θεωρούμε την ελλειμματική από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ και $J_0^{(1)} = E_i$, την οποία συμβολίζουμε με $f_i\,(x, y \mid 0)$ για $i = 1, .., n$.

$$\underline{\phi}(0) = \underline{f}\,(x, y \mid 0) = \left[f_1\,(x, y \mid 0)\,, ..., f_n\,(x, y \mid 0)\right]^T \,. \tag{4.4.11}$$

Επίσης, επιλέγουμε την συνάρτηση ποινής $w(x_1, y_1)$ συναρτήσει των $x_1 = x$ και $y_1 = y$, έτσι ώστε

$$\hat{\omega}(s) = e^{-sx} p(x + y)\,.$$

Τότε η $(4.4.11)$ σύμφωνα με την $(4.4.9)$ γίνεται

$$\underline{f}\,(x, y \mid 0) = \frac{1}{c} p(x + y) e^{-Qx} \underline{b}^T \,. \tag{4.4.12}$$

Ισχύει ότι,

$$f\,(x, y \mid 0) = \underline{\beta}\ \underline{f}\,(x, y \mid 0)\ , \tag{4.4.13}$$

έτσι η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, σύμφωνα με τις $(4.4.12)$ και $(4.4.13)$, είναι

$$f\,(x, y \mid 0) = \frac{1}{c} \underline{\beta} e^{Qx} \underline{b}^T p(x + y), \quad x > 0, \quad y > 0\,. \tag{4.4.14}$$

Η εξίσωση $(4.4.14)$ αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του τύπου $(2.4.4)$ του Κεφαλαίου 2.

Ακολουθούν δύο εφαρμογές του τύπου $(4.4.14)$, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή, και όταν ακολουθούν γενικευμένη Erlang κατανομή.

Παράδειγμα 4.4.1 *Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι έχουμε phase-type κατανομή με n=1, με B, $\underline{\beta}$ και $\underline{b}^T$, να είναι βαθμωτά μεγέθη. Δηλαδή, $B = -\lambda$, $\underline{\beta} = 1$, $\underline{b}^T = \lambda$. Από τη γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg* $(4.4.6)$ *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} L_\delta(s) &= 0 \\ \left(s - \frac{\delta}{c}\right) + \frac{1}{c} B + \frac{1}{c} \underline{b}^T \underline{\beta} \hat{p}(s) &= 0 \\ \left(s - \frac{\delta}{c}\right) - \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c} \hat{p}(s) &= 0 \end{aligned}$$

Εάν απλοποιήσουμε

$$L_\delta(s) = cs - \delta + [\hat{p}(s) - 1]\lambda = 0\,.$$

Παρατηρούμε, ότι η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση $(2.3.3)$, *από το Κεφάλαιο 2, η οποία έχει αποδειχθεί από τους Gerber & Shiu(1997) ότι έχει μία ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος. Σε αυτή την περίπτωση $\underline{v}$ είναι βαθμωτό, το ίδιο και το $Q = -\rho$.*
Έτσι η $(4.4.14)$ *γίνεται*

$$f\,(x, y \mid 0) = e^{-\rho x} p(x + y) \frac{\lambda}{c}\,,$$

η οποία είναι ο τύπος $(2.4.4)$ *από το Κεφάλαιο 2.*

Παράδειγμα 4.4.2 *Θεωρούμε την περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν γενικευμένη Erlang κατανομή (συνέλιξη n εκθετικών κατανομών), με παραμέτρους $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Τότε έχουμε*

$$\beta = (1, 0, .., 0)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.4.15}$$

$$\underline{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Από τη γενικευμένη θεμελιώδη εξίσωση Lundberg έχουμε ότι υπάρχουν n ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος, $\rho_1, .., \rho_n$. Για $i = 1, .., n$ το διάνυσμα $\underline{v_i}$ από τον τύπο (4.4.8)*, γίνεται*

$$\underline{v_i} = \underline{\beta}((\delta - c\rho_i)I - B)^{-1}.$$

Μετά από πράξεις αποδεικνύεται, βλέπε Ren (2007), ότι

$$\underline{v_i} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\lambda_1 + \delta - c\rho_i}, \frac{\lambda_1}{\prod_{j=1}^{2}(\lambda_j + \delta - c\rho_i)}, ..., \frac{\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_j}{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j + \delta - c\rho_i)}\right).$$

Η (4.4.14)*, γράφεται*

$$f(x, y \mid 0) = \frac{1}{c}\underline{\beta}V^{-1}\begin{bmatrix} e^{-\rho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\rho_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\rho_n} \end{bmatrix} V\, \underline{b}^T p(x + y)$$

και αν αντικαταστήσουμε τον πίνακα V παίρνουμε την εξίσωση (4.3.3)

$$f(x, y \mid 0) = \frac{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n}{c^n} p(x + y) \sum_{j=1}^{n} e^{-\rho_j x} \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{1}{\rho_k - \rho_j} \tag{4.4.16}$$

η οποία είναι η (4.3.3) *και έχει αποδειχθεί από τους Gerber & Shiu (2005a).*

4.4.3 Ανανεωτικές εξισώσεις

Όταν το αρχικό αποθεματικό είναι θετικό, για τον υπολογισμό της προεξοφλημένης από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας θα γενικεύσουμε της ανανεωτικές εξισώσεις, (2.5.3) και (2.5.4) από το Κεφάλαιο 2, για τις phase-type κατανομές.

Έστω, η προεξοφλημένη ελλειμματική σ.π.π. των κλιμακωτών υψών

$$g(y) = \int_0^\infty f(x, y \mid 0)\, dx\,,$$

τότε,

- η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, σύμφωνα με την εξίσωση $(2.5.2)$ και την $(4.4.14)$ είναι

$$f\,(x, y \mid u) = \int_0^u f\,(x, y \mid u - z)\, g(z)\, dz + \frac{1}{c}\underline{\beta} e^{Q(x-u)} \underline{b}^T p(x + y) I(u < x)\,, \quad (4.4.17)$$

- ενώ η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, βρίσκεται εάν ολοκληρώσουμε την $(4.4.17)$ ως προς y από 0 έως ∞.

$$f\,(x \mid u) = \int_0^\infty f\,(x \mid u - z)\, g(z)\, dz + \frac{1}{c}\underline{\beta}^{Q(x-u)} \underline{b}^T [1 - P(x)] I(u < x)\,, \quad (4.4.18)$$

  η οποία γενικεύει την εξίσωση $(2.5.4)$ του Κεφαλαίου 2.

Παρατήρηση 4.4.1

1. *Όπως και η* $(2.5.4)$*, έτσι και η* $(4.4.18)$ *έχει ασυνέχεια στο* $x = u$ *λόγω του*

$$\frac{1}{c}\underline{\beta}\underline{b}^T (1 - P(x))\,. \quad (4.4.19)$$

   Παρόμοια, με την $(2.5.5)$ *η* $(4.4.19)$ *δεν εξαρτάται από το* δ *όπως στο Κεφάλαιο 2.*

2. *Όταν η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου είναι συνέλιξη από* n *ανεξάρτητες εκθετικές κατανομές (Γενικευμένη Erlang), λόγω της ειδικής μορφής των διανυσμάτων* $\underline{\beta}$ *και* $\underline{b}^T$ *που έχουμε δει* $(4.4.15)$ *το μέγεθος της ασυνέχειας είναι μηδέν για* $n \geq 2$*.*

Στην επόμενη παράγραφο κλείνουμε την εργασία αυτή, με τη γενικευμένη μορφή του Dickson για το ανανεωτικό μοντέλο, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type κατανομή για θετική ένταση ανατοκισμού.

4.4.4 Ο τύπος του Dickson στις phase-type κατανομές για $\delta > 0$

Ο Ren (2007) παρουσίασε έναν τύπο για την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $f\,(x, y \mid u)$, ο οποίος γενικεύει τις σχέσεις $(2.6.3)$ του Κεφαλαίου 2 (των Gerber & Shiu (1997)) και $(1.4.7)$ και $(1.4.8)$ του Dickson (1992), όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν phase-type κατανομή.

Ορίζουμε των πίνακα των προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής,

$$\Psi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T<\infty) e^{-QU(T)} \mid U(0)=u\right] . \tag{4.4.20}$$

Ο πίνακας $(4.4.20)$ αποτελεί γενίκευση της $(1.7.6)$. Επίσης ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση πινάκων

$$\Psi_\delta(u) = \int_0^u g(z)\Psi_\delta(u-z)dz + \int_u^\infty g(z)e^{-Q(u-z)}dz . \tag{4.4.21}$$

Στην παρακάτω πρόταση δίνεται η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για $\delta > 0$.

Πρόταση 4.4.3 *Η γενικευμένη μορφή του τύπου του Dickson για phase-type κατανομές με θετική ένταση ανατοκισμού είναι*

$$f(x,y \mid u) = \begin{cases} \underline{\beta}\, M(x,y \mid 0)\left(e^{-Qu} - \Psi_\delta(u)\right)(I-\Psi_\delta(0))^{-1}\underline{b}^T , & 0 \le u < x , \\ \\ \underline{\beta}\, M(x,y \mid 0)\left(e^{-Qx}\Psi_\delta(u-x) - \Psi_{delta}(u)\right)(I-\Psi_\delta(0))^{-1}\underline{b}^T , & 0 < x \le u . \end{cases} \tag{4.4.22}$$

όπου,

$$M(x,y \mid 0) = \frac{1}{c} p(x+y)e^{Qx} , \tag{4.4.23}$$

για το οποίο ισχύει

$$f(x,y \mid 0) = \underline{\beta}\, M(x,y \mid 0)\, \underline{b}^T .$$

4.5 Παραδείγματα

Στα παραδείγματα που ακολουθούν, θα δούμε διαφορετικές περιπτώσεις κατανομών, και στα δύο μοντέλα της θεωρίας κινδύνων.

Παράδειγμα 4.5.1 *Θεωρούμε την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase-type(3) κατανομές. Συγκεκριμένα, οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν γενικευμένη Erlang(1 ,1/3 ,1/9), με*

$$\underline{\beta} = [1,0,0] , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} , \quad \underline{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} ,$$

και σ.π.π.

$$k(t) = \frac{1}{16} e^{-t}(1 - 4te^{\frac{2t}{3}} + 3e^{\frac{8t}{9}}) ,$$

ενώ οι αποζημιώσεις ακολουθούν γενικευμένη Erlang (0.5 ,0.6 ,1/3) με

$$\underline{\alpha} = [1,0,0] , \quad A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} , \quad \underline{A}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} ,$$

και σ.π.π.

$$p(x) = \frac{1}{3}(11.25e^{-0.6x} - 18e^{-0.5x} + 6.75e^{-0.3333x})\,.$$

Ορίζουμε το ασφάλιστρο $c = 1.5$ *και ένταση ανατοκισμού* $\delta = 0.5$.

Λύση

Το παράδειγμα αυτό, αναφέρεται στο ανανεωτικό μοντέλο με θετική ένταση ανατοκισμού για phase-type κατανομές. Για τον υπολογισμό της σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, χρησιμοποιούμε τη γενικευμένη μορφή του τύπου του Dickson για phase-type (4.4.22) .

Για να υπολογίσουμε το τύπο $(4.4.22)$ *, αρχικά λύνουμε τη θεμελιώδη εξίσωση Lundberg* $(4.4.7)$, *και βρίσκουμε τις θετικές ρίζες* $\rho_1 = 0.390334, \rho_2 = 0.569483, \rho_3 = 0.998688$. *Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα*

$$Q = \begin{bmatrix} -0.995542 & 0.66667 & 0 \\ 0.00624 & -0.55556 & 0.22222 \\ 0.01104 & 0 & -0.407407 \end{bmatrix},$$

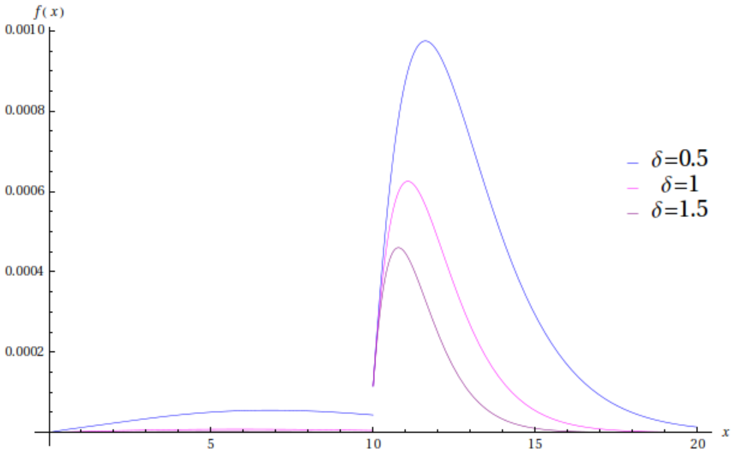
σύμφωνα με τις εξισώσεις $(4.4.8)$ *και* $(4.4.10)$*, με τον οποίο υπολογίζουμε τις σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία , και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, για μηδενικό αρχικό αποθεματικό,*

$$\begin{aligned} f(x, y \mid 0) &= 0.0246914(0.567382e^{-0.998688x} - 1.92671e^{-0.569483x} + 1.35933e^{-0.390334x}) \\ &\quad (11.25e^{-0.6(x+y)} - 18.e^{-0.5(x+y)} + 6.75e^{-0.333333(x+y)})\,, \end{aligned}$$

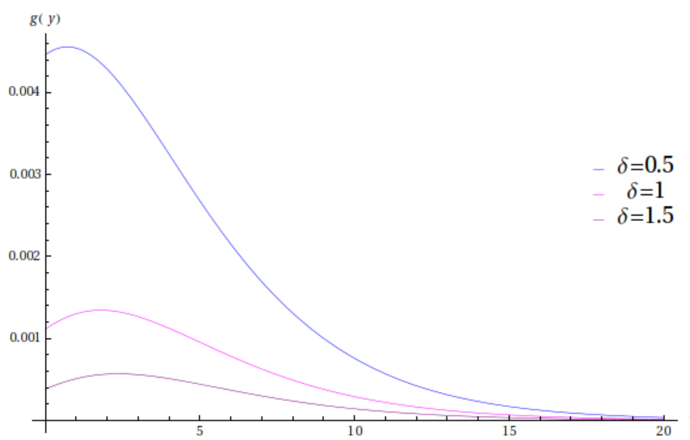
$$g(y \mid 0) = 0.0222257e^{-0.6y} - 0.0461398e^{-0.5y} + 0.0283724e^{-0.333333y}\,.$$

Επίσης σύμφωνα με την ανανεωτική εξίσωση της πιθανότητας χρεοκοπίας $(4.4.21)$*, υπολογίζουμε τη συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, αναλύοντας τη με το μετασχηματισμό Laplace. Τελικά, υπολογίζουμε την εξίσωση* $(4.4.22)$ *, την οποία δεν θα δώσουμε, γιατί είναι μακροσκελής, αλλά μπορούμε να δούμε τη καμπύλη της στο Σχήμα* 4.11*.*

Στα παρακάτω γραφήματα, παρατηρούμε τη συμπεριφορά των σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για $u = 0$ *, για διαφορετικές τιμές της έντασης ανατοκισμού.*



Σχήμα 4.11: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase-type(3) με σταθερό $c = 1.5$, διαφορετικές τιμές έντασης ανατοκισμού, και αρχικό αποθεματικό $u = 10$



Σχήμα 4.12: Γράφημα σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν phase-type(3) με σταθερό $c = 1.5$, διαφορετικές τιμές έντασης ανατοκισμού.

Από τα γραφήματα παρατηρούμε, ότι όσο αυξάνουμε την ένταση ανατοκισμού, τόσο οι τιμές της σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπίας, αλλά και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, μικραίνουν. Παρατηρούμε επίσης, ότι ελάττωση των τιμών, γίνεται πιο έντονα, όταν η αύξηση του δ γίνει από 0.5 σε 1.5. □

Παράδειγμα 4.5.2 *Θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι, αλλά και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang (2,2) κατανομή. Θα εφαρμόσουμε τους τύπους του Dickson για τις phase-type κατανομές για να υπολογίσουμε τις σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.*

Λύση

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν Erlang(2,2) με

$$\underline{\beta} = [1, 0] , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} , \underline{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

και σ.π.π.

$$k(t) = 4te^{-2t} ,$$

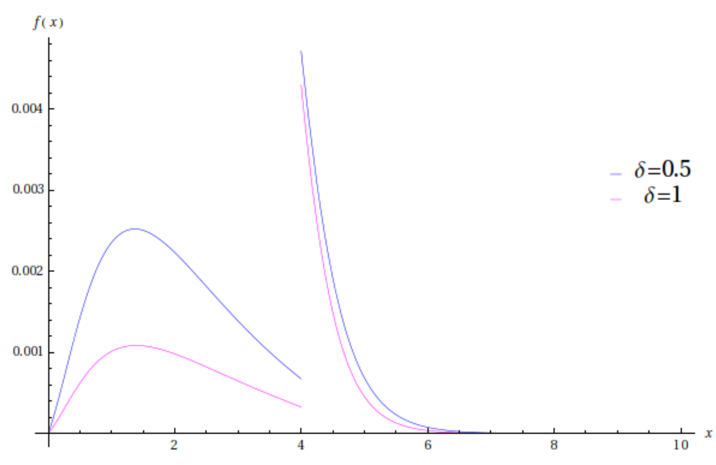
και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang(2,2) με

$$\underline{\alpha} = [1, 0] , \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} , \underline{A}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

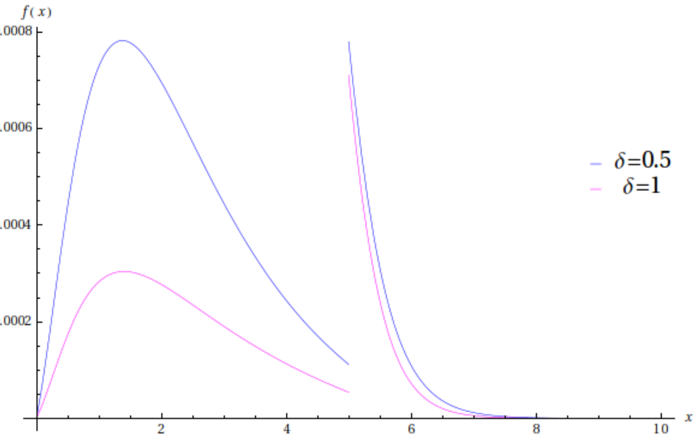
και σ.π.π.

$$p(x) = 4xe^{-2x} .$$

Ορίζουμε το ασφάλιστρο να είναι $c = 2$ σταθερό, και δίνουμε διαφορετικές τιμές για την ένταση ανατοκισμού, $\delta = 0.5$ και $\delta = 1$, για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Για τον υπολογισμό των σ.π.π., ακολουθούμε τα βήματα του προηγούμενο παραδείγματος.

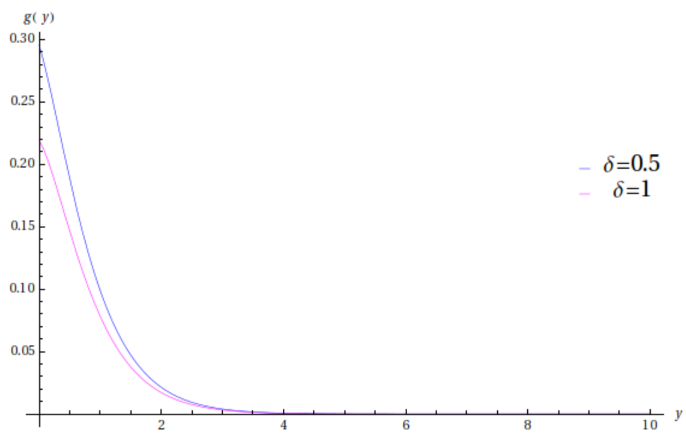


Σχήμα 4.13: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang(2,2) με σταθερό $c = 2$, και αρχικό αποθεματικό $u = 4$.



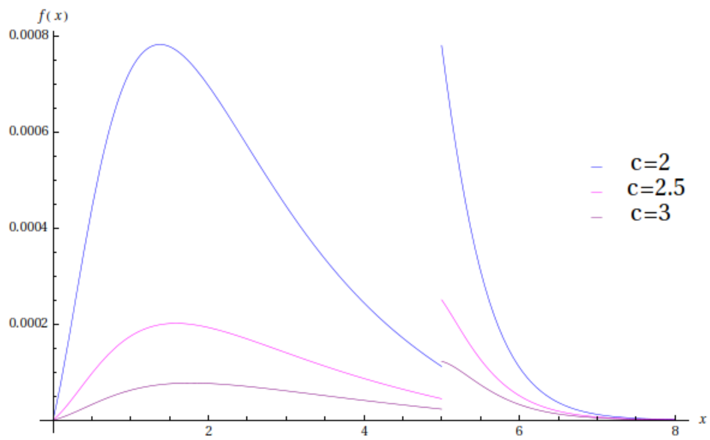
Σχήμα 4.14: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang(2,2) με σταθερό $c = 2$, και αρχικό αποθεματικό $u = 5$.

Εάν συγκρίνουμε τα δύο τελευταία γραφήματα, παρατηρούμε, ότι αν αυξήσουμε το αρχικό αποθεματικό, τότε οι τιμές της $f(x)$ μειώνονται. Επίσης, παρατηρούμε, ότι όσο αυξάνεται η ένταση ανατοκισμού, οι τιμές της σ.π.π. $f(x)$ μειώνονται. Το ίδιο συμβαίνει και για τη σ.π.π. $g(y)$.

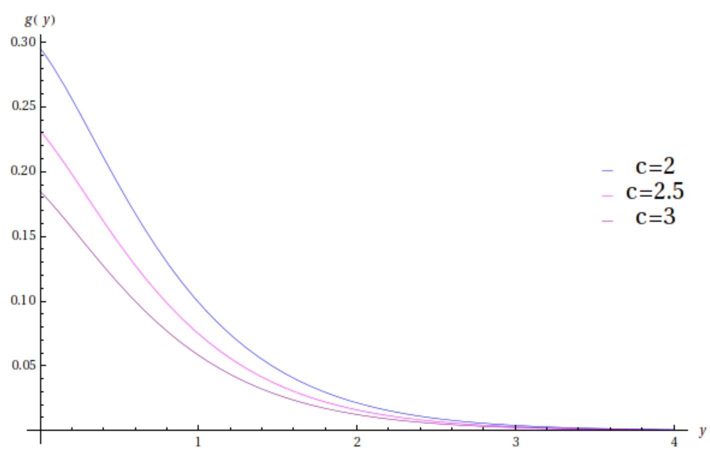


Σχήμα 4.15: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang(2,2) με σταθερό $c = 2$, και αρχικό αποθεματικό $u = 5$.

Θεωρούμε την περίπτωση, όπου $\delta = 1$ σταθερό, και δίνουμε διαφορετικές τιμές για το ασφάλιστρο c.



Σχήμα 4.16: Γράφημα σ.π.π. του πλεονάσματος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang(2,2) με σταθερό $\delta = 1$, και αρχικό αποθεματικό $u = 5$.



Σχήμα 4.17: Γράφημα σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι και οι αποζημιώσεις ακολουθούν Erlang(2,2) με σταθερό $\delta = 1$.

Παρατηρούμε ξανά, πως όσο αυξάνουμε το ασφάλιστρο, οι τιμές της $f(x)$ αλλά και της $g(y)$ μειώνονται. $\square$

Παράδειγμα 4.5.3 *Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο* $\lambda = 2$, *και οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη εκθετικών με σ.π.π.*

$$p(x) = \frac{1}{3}(3e^{-3x} + 2e^{-2x} + e^{-x}) \,,$$

όπως στο Παράδειγμα $2.7.1$.

Σύμφωνα με το Παράδειγμα $4.4.14$ *η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg* $(4.4.7)$ *ανάγεται στην εξίσωση Lundberg* $(2.3.3)$ *για το κλασικό μοντέλο με θετική ένταση ανατοκισμού., για την οποία υπάρχει μία θετική λύση* ρ . *Έτσι* $Q = \rho$ *και η εξίσωση* $(4.4.14)$ *γίνεται*

$$f\left(x, y \mid 0\right) = e^{-\rho x} p(x+y) \frac{\lambda}{c} \,,$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ανανεωτική εξίσωση της πιθανότητας χρεοκοπίας $(4.4.21)$ *είναι η* $(2.6.1)$,

$$\psi_\delta(u) = \int_0^u g(z)\psi_\delta(u-z)\, dz + \int_u^\infty g(z) e^{-\rho(u-z)} \,,$$

και έτσι η γενική μορφή του τύπου του Dicskon για phase-type κατανομές, ανάγεται στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου για θετική ένταση ανατοκισμού, $(2.6.3)$.

$$f\left(x \mid u\right) = \begin{cases} f\left(x \mid 0\right) \frac{e^{\rho u} - \psi(u)}{1 - \psi_\delta(0)} & x > u \geq 0 \\ \\ f\left(x \mid 0\right) \frac{e^{\rho x}\psi(u-x) - \psi_\delta(u)}{1 - \psi_\delta(0)} & 0 < x \leq u \,. \end{cases}$$

□

Επίλογος

Στην εργασία αυτή, μελετήσαμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία σε διαφορετικές περιπτώσεις των δύο μοντέλων της θεωρίας κινδύνων. Μέσω γενικεύσεων τύπου του Dickson, υπολογίσαμε ακριβείς εκφράσεις για την από κοινού σ.π.π. αυτών των τ.μ. , καθώς και για τη σ.π.π. κάθε μίας ξεχωριστά. Η πιο σημαντική γενίκευση του τύπου όμως, αποτελεί η γενικευμένη μορφή για phase - type κατανομές με θετική ένταση ανατοκισμού $(4.4.22)$, από την οποία μπορούμε να εξάγουμε οποιαδήποτε περίπτωση, είτε στο κλασικό είτε στο ανανεωτικό μοντέλο.

Παράρτημα 1

Αποδειξεις

A.1 Αποδείξεις Κεφαλαίου 2

Απόδειξη Πρόταση 2.2.1: Βασιζόμενοι στον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) Pr\left(B \mid A\right) \,, \tag{A.1.1}$$

υποθέτουμε ότι,

$Pr(A \cap B)$ είναι η από κοινού σ.π.π. των $U(T-), |U(T)|$, και T,
$Pr(A)$ είναι η από κοινού σ.π.π. των $U(T-)$ και T και
$Pr\left(B \mid A\right)$ είναι η δεσμευμένη σ.π.π. της $|U(T)|$ στο y δεδομένου ότι $U(T-) = x$ και $T = t$.

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(t)|$ στο y, δεδομένου ότι $U(T-) = x$ και $T = t$, δεν εξαρτάται από το t. Αυτό συμβαίνει διότι, το ενδεχόμενο το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό κάποια χρονική στιγμή, δεν εξαρτάται από το χρόνο. Έτσι έχουμε

$$\frac{p(x+y)}{\int_0^\infty p(x+y)\,dy} = \frac{p(x+y)}{1-P(x)} \quad y \geq 0\,.$$

Η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας στο σημείο (x, t) είναι

$$f(x,t) = \int_0^\infty f\left(x, z, t \mid u\right) dz\,,$$

Επομένως, εάν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις στην $(A.1.1)$, λαμβάνουμε την εξίσωση (2.2.2). □

Απόδειξη Πρότασης 2.6.1 (γενίκευσης του τύπου του Beekman): Θεωρούμε την ανανεωτική συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, η οποία διακρίνεται από το πότε το πλεόνασμα πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό απόθεματικό u,

$$\psi_\delta(u) = \int_0^u \psi_\delta(u-z) g(z)\,dz + \int_u^\infty e^{-\rho(z-u)} g(z)\,dz, \tag{A.1.2}$$

όπου για $u = 0$

$$\psi_\delta(0) = \hat{g}(\rho). \tag{A.1.3}$$

Η λύση μίας ανανεωτικής εξίσωσης μπορεί να βρεθεί εάν την αναλύσουμε σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Laplace. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.1 για το μετασχηματισμό Laplace μιας συνέλιξης, ο μετασχηματισμός της (A.1.2) είναι,

$$\hat{\psi}_\delta(\xi) = \hat{\psi}_\delta(\xi)\hat{g}(\xi) + \int_0^\infty e^{-\xi u}\left[\int_u^\infty e^{-\rho(z-u)}g(z)\,dz\right]du. \tag{A.1.4}$$

Με αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης ως εξής, $\quad 0 < u < \infty \quad \to \quad 0 < u < z \quad$ και $u < z < \infty \quad \to \quad 0 < z < \infty\,,$ η (A.1.4) γίνεται

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_\delta(\xi) &= \hat{\psi}_\delta(\xi)\hat{g}(\xi) + \int_0^\infty e^{-\rho z}g(z)\left[\int_0^z e^{u(\rho-\xi)}\,du\right]dz \\ &= \hat{\psi}_\delta(\xi)\hat{g}(\xi) + [\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\rho)]\frac{1}{\rho-\xi}\,.\end{aligned}$$

Η τελευταία, σύμφωνα με την (A.1.3), γίνεται

$$\hat{\psi}_\delta(\xi) = \hat{\psi}_\delta(\xi)\hat{g}(\xi) + [\hat{g}(\xi) - \psi_\delta(0)]\frac{1}{\rho-\xi},$$

και τελικά ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας με $\delta > 0$ είναι

$$\hat{\psi}_\delta(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi) - \psi_\delta(0)}{(\rho-\xi)[1-\hat{g}(\xi)]}\,. \tag{A.1.5}$$

Η (A.1.5) μπορεί να γραφτεί και ως

$$\hat{\psi}_\delta(\xi) = \frac{1}{\xi-\rho} - \frac{1-\psi_\delta(0)}{(\xi-\rho)[1-\hat{g}(\xi)]}.$$

Από την *θεωρία Σειρών* γνωρίζουμε ότι, όταν $|x| < 1$, ισχύει

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n.$$

Έτσι έχουμε

$$\hat{\psi}_\delta(\xi) = \frac{1}{\xi-\rho} - \frac{1-\psi_\delta(0)}{\xi-\rho}\sum_{k=0}^\infty \hat{g}^k(\xi)\,,$$

η οποία γίνεται

$$\frac{1}{\xi-\rho} - \hat{\psi}_\delta(\xi) = \frac{1-\psi_\delta(0)}{\xi-\rho}\left[\hat{g}^0(\xi) + \sum_{k=1}^\infty \hat{g}^k(\xi)\right]\,.$$

Στο σημείο αυτό, θεωρούμε ότι $1/(\xi-\rho)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $h(u) = e^{\rho u}$, και $\sum_{k=1}^\infty \hat{g}^k(\xi)$ είναι ο μετασχηματισμός της συνάρτησης $q(u) = \sum_{k=1}^\infty g^{*k}(\xi)\,.$

Από Πρόταση (1.2.1), γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνέλιξης, είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων Έτσι ο αντίστροφος του μετασχηματισμού είναι

$$(h * q)(u) = \int_0^u q(u-z)h(z)dz\,.$$

Θεωρούμε λοιπόν το γινόμενο

$$\frac{1}{\xi-\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\hat{g}^k(\xi),$$

ως το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace , οπότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι

$$\int_0^u e^{\rho z}\sum_{k=1}^{\infty} g^{*k}(u-z)dz\,.$$

Με αυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε στη ζητούμενη εξίσωση (2.6.2). □

Απόδειξη Πρόταση 2.6.2 (Τύπος του Dickson για $\delta > 0$): Λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση (2.5.8) σε σχέση με την (2.6.3) θεωρούμε την

$$\gamma(u) = \begin{cases} \frac{e^{\rho u}-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)} & x > u \geq 0 \\ \frac{e^{\rho x}\psi_\delta(u-x)-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)} & 0 < x \leq u\,. \end{cases} \tag{A.1.6}$$

Ορίζουμε

$$\phi(u) = \begin{cases} e^{\rho u} & x > u \geq 0 \\ e^{\rho x}\psi_\delta(u-x) & 0 < x \leq u\,. \end{cases} \tag{A.1.7}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$\gamma(u) = \frac{\phi(u)-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)}\,. \tag{A.1.8}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της (A.1.7) είναι

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_0^x e^{\rho u}e^{-\xi u}du + \int_x^{\infty} e^{\rho x}e^{-\xi u}\psi_\delta(u-x)du\,. \tag{A.1.9}$$

Θέτουμε $y = u - x$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (A.1.9) και κάνουμε αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης $0 < x \leq u \Rightarrow \quad 0 < x - x \leq u - x \Rightarrow \quad 0 \leq u - x < \infty$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \left[\frac{e^{(\rho-\xi)u}}{\rho-\xi}\right]_0^x + e^{\rho x}e^{-\xi x}\int_0^{\infty} e^{-\xi y}\psi_\delta(y)dy \\ &= \frac{e^{(\rho-\xi)x}}{\rho-\xi} - \frac{1}{\rho-\xi} + e^{(\rho-\xi)x}\hat{\psi}_\delta(\xi)\,. \end{aligned}$$

Οπότε ο μετασχηματισμός της (A.1.7) γίνεται

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{e^{(\rho-\xi)x} - 1}{\rho - \xi} + e^{(\rho-\xi)x}\hat{\psi}_\delta(\xi)\,. \tag{A.1.10}$$

Αφαιρούμαι και τα δύο μέλη με $\hat{\psi}_\delta(\xi)$ και κάνουμε πράξεις,

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) - \hat{\psi}_\delta(\xi) &= \frac{e^{(\rho-\xi)x} - 1}{\rho - \xi} + \left[e^{(\rho-\xi)x} - 1\right]\hat{\psi}_\delta(\xi) \\ &= \left[e^{(\rho-\xi)x} - 1\right]\left[\frac{1}{\rho - \xi} + \hat{\psi}_\delta(\xi)\right].\end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση αντικαθιστούμε την (A.1.5) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) - \hat{\psi}_\delta(\xi) &= \left[e^{(\rho-\xi)x} - 1\right]\left[\frac{1}{\rho - \xi} - \frac{\hat{g}(\xi) - \psi_\delta(0)}{(\rho - \xi)(1 - \hat{g}(\xi))}\right] \\ &= \left[e^{(\rho-\xi)x} - 1\right]\left[\frac{1 - \hat{g}(\xi) - \hat{g}(\xi) - \psi_\delta(0)}{(\rho - \xi)(1 - g(\hat{\xi}))}\right].\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\hat{\phi}(\xi) - \hat{\psi}_\delta(\xi) = \frac{e^{(\rho-\xi)x} - 1}{\rho - \xi}\frac{1 - \psi_\delta(0)}{1 - \hat{g}(\xi)}\,. \tag{A.1.11}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της (2.5.6) είναι

$$\hat{\gamma}(\xi) = \hat{\gamma}(\xi)\hat{g}(\xi) + \frac{e^{(\rho-\xi)x} - 1}{\rho - \xi}\,. \tag{A.1.12}$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\hat{\gamma}(\xi)\left[1 - \hat{g}(\xi)\right] = \frac{e^{(\rho-\xi)x} - 1}{\rho - \xi}\,,$$

και τελικά

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{e^{(\rho-\xi)x} - 1}{\rho - \xi}\frac{1}{1 - \hat{g}(\xi)}\,. \tag{A.1.13}$$

Από την (A.1.13)και (A.1.11) έπεται

$$\hat{\gamma}(\xi) = \left[\hat{\phi}(\xi) - \hat{\psi}_\delta(\xi)\right]\frac{1 - \hat{g}(\xi)}{1 - \psi_\delta(0)}\frac{1}{1 - \hat{g}(\xi)}\,,$$

η οποία γίνεται

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{\phi}(\xi) - \hat{\psi}_\delta(\xi)}{1 - \psi_\delta(0)}\,. \tag{A.1.14}$$

Η (A.1.14) αποδεικνύει την (A.1.8). Εφόσον ισχύει η (A.1.62) ισχύει και η ζητούμενη εξίσωση (2.6.3). □

A.2 Αποδείξεις Κεφαλαίου 3

<u>**Απόδειξη του τύπου του Dickson:**</u> Βρίσκουμε το μετασχηματισμό Laplace της από κοινού σ.κ. (3.1.4). Από Πρόταση 1.2.1 και θεωρώντας ότι $Z(x, y \mid u) = I(u < x)\, J(x, y \mid u)$,

$$\hat{F}(x, y \mid s) = \psi(0)\hat{h}(z)\hat{F}(x, y \mid s) + \hat{Z}(x, y \mid s) \ ,$$

η οποία γίνεται

$$\hat{F}(x, y \mid s) = \frac{\hat{Z}(x, y \mid s)}{1 - \psi(0)\hat{h}(s)} \, . \tag{A.2.1}$$

Σύμφωνα με τον Rolski (1999, παραγρ.6.5) ο μετασχηματισμός Laplace της μέγιστης σωρρευτικής απώλειας L είναι

$$E(e^{-sL}) = \int_0^\infty e^{-su} d\delta(u) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)\hat{h}(s)} \, , \tag{A.2.2}$$

και εάν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $(A.2.1)$, έχουμε

$$\hat{F}(x, y \mid s) = \frac{E(e^{-sL})}{\delta(0)}\hat{Z}(x, y \mid s) = \frac{\int_0^\infty e^{-su} Z(x, y \mid u - z)\, d\delta(u)}{\delta(0)} \, .$$

Το γινόμενο δύο μετασχηματισμών Laplace $E(e^{-sL})\hat{Z}(x, y \mid s)$ είναι μετασχηματισμός μιας συνέλιξης. Έτσι εάν πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, έχουμε ότι η από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, είναι

$$F(x, y \mid u) = \frac{1}{\delta(0)} \int_0^\infty Z(x, y \mid u - z)\, d\delta(z) = \frac{1}{\delta(0)} \int_{max\{0, u-x\}}^u J(x, y \mid u - z)\, d\delta(z) \, , \tag{A.2.3}$$

και η από κοινού σ.π.π.

$$f(x, y \mid u) = \frac{1}{\delta(0)} \int_{max\{0, u-x\}}^u f(x - u + z, u - z + y \mid 0)\, d\delta(z) \, . \tag{A.2.4}$$

Στο Κεφάλαιο 2 δείξαμε την εξίσωση (2.2.3) η οποία για $u = 0$ γίνεται

$$f(x, y \mid 0) = f(x \mid 0)\, \frac{p(x + y)}{\overline{P}(x)}. \tag{A.2.5}$$

Επομένως η $(A.2.4)$ αν αντικαταστήσουμε την $(A.2.5)$ γίνεται

$$f(x, y \mid u) = \frac{1}{\delta(0)} \int_{max\{0, u-x\}}^u \frac{p(x + y)}{\overline{P}(x - u + z)} f(x - u + z \mid 0)\, d\delta(z) \, . \tag{A.2.6}$$

Οι Dufrence & Gerber (1988) έδειξαν για το κλασικό μοντέλο ότι ισχύει

$$f(x \mid 0) = \frac{\lambda}{c}\overline{P}(x) \, ,$$

έτσι, μπορούμε να διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις για την εξίσωση $(A.2.6)$.

Στις περιπτώσεις όπου

1. $0 \leq u < x$, η $(A.2.6)$ γίνεται

$$\begin{aligned} f\left(x,y \mid u\right) &= \frac{1}{\delta(0)}\int_0^u \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x-u+z)}\frac{\lambda}{c}\overline{P}(x-u+z)d\delta(z) \\ &= \frac{p(x+y)}{\delta(0)}\left[\delta(0)+\int_0^u d\delta(z)\right]\frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{p(x+y)}{\delta(0)}\frac{\lambda}{c}\delta(u)\,. \end{aligned}$$

   Τελικά, η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας έχει την μορφή

$$f\left(x,y \mid u\right) = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}p(x+y)\,. \tag{A.2.7}$$

2. $u > x$

$$\begin{aligned} f\left(x,y \mid u\right) &= \frac{p(x+y)}{\delta(0)}\int_{u-x}^u \frac{\lambda}{c}d\delta(z) \\ &= \frac{\lambda}{c}p(x+y)\frac{1-\psi(u)-(1-\psi(u-x))}{1-\psi(0)}\,. \end{aligned}$$

   Η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας έχει την μορφή

$$f\left(x,y \mid u\right) = \frac{\lambda}{c}p(x+y)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}\,. \tag{A.2.8}$$

Σύμφωνα με τον τύπο, τον οποίο απέδειξαν οι Dufresne & Gerber (1988),

$$f(x,y \mid 0) = \frac{\lambda}{c}p(x+y)\,,$$

οι εξισώσεις $(A.2.7)$ και $(A.2.8)$, αποτελούν τον τύπο του Dickson της Πρότασης $3.4.1$. □

A.3 Αποδείξεις Κεφαλαίου 4

Απόδειξη του τύπου (4.3.9): Για την απόδειξη της από κοινού σ.π.π. , ο τύπος $(4.3.5)$ στην περίπτωση αυτή γίνεται,

$$f\left(x,y \mid u\right) = \frac{C}{\delta(0)}p(x+y)\sum_{j=1}^n a_j e^{-\rho_j(x-u)}\left(\delta(0)+\int_0^u e^{-\rho_j z}\delta'(z)dz\right) \tag{A.3.1}$$

ο οποίος σύμφωνα με $(4.3.2)$ και $(4.3.8)$ γίνεται ,

$$f(x,y \mid u) = \frac{C}{\delta(0)}\underline{\alpha}e^{(x+y)A}\underline{A}^0\sum_{j=1}^{n}a_je^{-\rho_j(x-u)}\left(\delta(0)+\int_0^u e^{-\rho_jz}\delta(0)\underline{\eta}e^{z(A+\underline{A}^0\underline{\eta})}\underline{A}^0dz\right).$$

Θεωρούμε $D = A + \underline{A}^0\underline{\eta}$ και απλοποιούμε το $\delta(0)$, τότε

$$\begin{aligned} f(x,y \mid u) &= C\underline{\alpha}e^{(x+y)A}\underline{A}^0\sum_{j=1}^{n}\left[a_je^{-\rho_j(x-u)}\left(1+\int_0^u e^{-\rho_jz}\underline{\eta}e^{zD}\underline{A}^0dz\right)\right] \\ &= C\underline{\alpha}e^{(x+y)A}\underline{A}^0\sum_{j=1}^{n}\left[a_je^{-\rho_j(x-u)}\left(1+\underline{\eta}\left(\int_0^u e^{z(D-\rho_jI_m)}dz\right)\underline{A}^0\right)\right]. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον πίνακα $B_j = D - \rho_jI_m$, και ολοκληρώνοντας, αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

<u>Απόδειξη του τύπου (4.3.10):</u> Η σ.π.π. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία παράγεται ολοκληρώνοντας την (4.3.9) ως προς y από 0 έως ∞

$$\int_0^\infty f(x,y \mid u)\,dy = \int_0^\infty C\alpha e^{(x+y)A}\underline{A}^0\sum_{j=1}^{n}a_je^{-\rho_j(x-u)}[1+\underline{\eta}B_j^{-1}(e^{uB_j^{-1}}-I_m)\underline{A}^0]\,dy.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.2 περίπτωση 2 και ότι ο πίνακας A είναι ένας υποπίνακας τάσεων (δηλαδή οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές), ισχύει

$$\int_0^\infty e^{xA}e^{yA}\,dy = e^{xA}\int_0^\infty e^{yA}dy = e^{xA}(-A^{-1}).$$

Έτσι,

$$f(x \mid u) = C\underline{\alpha}e^{xA}(-A^{-1})\underline{A}^0\sum_{j=1}^{n}a_je^{-\rho_j(x-u)}(1+\underline{\eta}B_j^{-1}(e^{uB_j}-I_m)\underline{A}^0). \tag{A.3.2}$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, ισχύει $\underline{A}^0 = -A\underline{e}_m$, το οποίο ισοδυναμεί με

$$-A^{-1}\underline{A}^0 = \underline{e}_m\,. \tag{A.3.3}$$

και εάν το αντικαταστήσουμε στην (A.3.2), παίρνουμε το ζητούμενο. □

<u>Απόδειξη του τύπου (4.3.11):</u> Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $max\{0, u-x\} = u - x$. Επομένως, η εξίσωση (4.3.5) γίνεται

$$f(x,y \mid u) = \frac{C}{\delta(0)}\underline{\alpha}e^{(x+y)A}\underline{A}^0\sum_{j=1}^{n}a_je^{-\rho_j(x-u)}\int_{u-x}^{u}e^{-\rho_jz}\delta(0)\underline{\eta}e^{z(A+\underline{A}^0\underline{\eta})}\underline{A}^0\,dz\,.$$

Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω ισχύει $D = A + \underline{A}^0 \underline{\eta}$,

$$f\left(x, y \mid u\right) = C\underline{\alpha} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\rho_j (x-u)} \int_{u-x}^{u} e^{-\rho_j z} \underline{\eta} e^{zD} \underline{A}^0 \, dz.$$

η οποία γίνεται

$$f\left(x, y \mid u\right) = C\underline{\alpha} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\rho_j (x-u)} \underline{\eta} \int_{u-x}^{u} e^{z(D-\rho_j I_m)} \, dz \underline{A}^0 \, . \tag{A.3.4}$$

Αντικαθιστούμε με $B_j = D - \rho_j I_m$, και η τελευταία γράφεται

$$\begin{aligned} f\left(x, y \mid u\right) &= C\underline{\alpha} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\rho_j (x-u)} \underline{\eta} \int_{u-x}^{u} e^{zB_j} \, dz \underline{A}^0 \\ &= C\underline{\alpha} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{\eta} B_j^{-1} \left[e^{\rho_j (u-x) + uB_j} - e^{\rho_j (u-x) + (u-x)B_j} \right] \underline{A}^0 \, . \end{aligned}$$

Με μερικές απλές πράξεις, τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση (4.3.11) . □

Απόδειξη του τύπου (4.3.12): Η περιθώρια σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, υπολογίζεται ολοκληρώνοντας ως προς y από 0 έως ∞ την (4.3.11)

$$\int_0^\infty f\left(x, y \mid u\right) \, dy = \int_0^\infty C\underline{\alpha} e^{(x+y)A} \underline{A}^0 \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{\eta} B_j^{-1} [e^{-\rho_j x} e^{uD} - e^{(u-x)D}] \underline{A}^0 \, dy \, ,$$

από Λήμμα 4.1.2, λαμβάνουμε τη ζητούμενη εξίσωση. □

Απόδειξη Θεωρήματος 4.3.2: Για τον υπολογισμό της από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας οι Dickson & Drekic χρησιμοποίησαν την εξίσωση των Cheng & Tang (2003), η οποία εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε ανανεωτικό μοντέλο,

$$c\phi(u) = \int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) \int_0^s \phi(s-x) p(x) dx ds + \int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) \int_s^\infty w(s, x-s) p(x) \, dx \, ds \, , \tag{A.3.5}$$

όπου $\phi(u)$ η συνάρτηση Gerber & Shiu.

Εάν θέσουμε

$$\tau(u) = \int_0^u \phi(u-x) p(x) dx \quad \text{και} \quad \omega(u) = \int_u^\infty w\left(x - u \mid u\right) p(x) \, dx \, , \tag{A.3.6}$$

η εξίσωση των Cheng & Tang (2003) ,$(A.3.5)$, γίνεται

$$c\phi(u) = \int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) \left[\tau(s) + \omega(s)\right] ds \, . \tag{A.3.7}$$

Πριν δείξουμε τον υπολογισμό της από κοινού σ.κ. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, πρέπει να αναφέρουμε ακόμα ένα θεώρημα, το οποίο θα εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό των παραγώγων της $\phi(u)$.

Θεώρημα A.3.1 *Νόμος του Leibniz (βλέπε Border (2002))*
Έστω ένα ανοικτό σύνολο $A \subset R^n$, $I = [a, b] \subset R$, θεώρώντας ότι a και b είναι δύο συνεχώς διαφορίσιμες απεικονίσεις του A στο I, και έστω f μία συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση του $A \times I$ στο R. Τότε

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)\,dt\,.$$

Για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, θεωρούμε κατάλληλη $w(x_1, x_2) = I(x_1 \le x)I(x_2 \le y)$ έτσι ώστε $\phi(0) = F(x, y \mid 0)$. Πρώτο βήμα στον υπολογισμό της σ.κ. είναι να βρούμε την πρώτη και δεύτερη μερική παράγωγο της εξίσωσης $(A.3.7)$ και να τις εφαρμόσουμε στην εξίσωση $(4.3.16)$. Παραγωγίζω την $(A.3.7)$ ως προς u, εφαρμόζοντας το νόμο του Leibniz, και έχουμε ότι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $(A.3.7)$ είναι

$$c\phi'(u) = -k(0)[\tau(u) + \omega(u)] - \frac{1}{c}\int_u^\infty k'\left(\frac{s-u}{c}\right)[\tau(s) + \omega(s)]\,ds\,. \tag{A.3.8}$$

$$c\phi''(u) = -k(0)[\tau'(u) + \omega'(u)] + \frac{1}{c}k'(0)[\tau(u) + \omega(u)] + \frac{1}{c^2}\int_u^\infty k''\left(\frac{s-u}{c}\right)[\tau(s) + \omega(s)]\,ds\,. \tag{A.3.9}$$

Ακολουθώντας τους Dickson & Hipp (2000, σελ. 152) αντικαθιστάμε τις $(A.3.7)$, $(A.3.8)$ και $(A.3.9)$ στην παράσταση $A_2c^2\phi''(u) - A_1c\phi'(u) + \phi(u)$ και έχουμε ότι

$$A_2c^2\phi''(u) - A_1c\phi'(u) + \phi(u) = -A_2ck(0)[\tau'(u) + \omega'(u)] + [\tau(u) + \omega(u)][A_2k'(0) + A_1k(0)]\,.$$

Από $(4.3.17)$ ότι ισχύει $A_1k(0) + A_2k'(0) = 1$, έτσι

$$A_2c^2\phi''(u) - A_1c\phi'(u) + \phi(u) = -A_2ck(0)[\tau'(u) + \omega'(u)] + \tau(u) + \omega(u)\,. \tag{A.3.10}$$

Παίρνουμε το μετασχηματισμός Laplace της $(A.3.10)$ και σύμφωνα με την $(4.3.18)$,βρίσκουμε

$$s\hat{\phi}(s) = \frac{A_2c^2[\phi'(0) + s\phi(0)] + \hat{\omega}(s) - A_1c\phi(0) - A_2ck(0)[s\hat{\omega}(s) - \omega(0)]}{A_2c^2s - A_1c + \mu_1\hat{h}(s) + A_2ck(0)\hat{p}(s)}\,. \tag{A.3.11}$$

Από το Θεώρημα $4.3.1$ παίρνουμε κατάλληλο s_0 τ.ω. ο παρανομαστής της $(A.3.11)$ να μηδενίζεται, συνεπώς πρέπει και ο αριθμητής να είναι μηδέν για s_0. Έτσι η εξίσωση (A.3.11) γίνεται

$$s\hat{\phi}(s) = \frac{A_2c^2\phi(0)(s - s_0) + \hat{\omega}(s) - \hat{\omega}(s_0) - A_2ck(0)(s\hat{\omega}(s) - s_0\hat{\omega}(s_0))}{A_2c^2s - A_1c + \mu_1\hat{h}(s) + A_2ck(0)\hat{p}(s)}\,. \tag{A.3.12}$$

Εάν θέσουμε $s=0$, έχουμε ότι $\lim_{s\to 0^+} s\hat{\phi}(s)=0$. Ο παρανομαστής της $(A.3.12)$, γίνεται

$$A_1c+\mu_1\hat{h}(0)+A_2ck(0)\hat{p}(0)\,.$$

όπου $\hat{h}(0)=1$ και $\hat{p}(0)=1$. Σύμφωνα με Dickson & Hipp(2000,εξ.(2.3))

$$-A_1c+\mu_1+A_2ck(0)=\mu_1-(A_1c-A_2k(0)c)=\mu_1-cm_1>0$$

ο παρανομαστής είναι θετικός. Επομένως ο αριθμητής της $(A.3.12)$ πρέπει να είναι μηδέν για $s=0$,

$$-A_2c^2s_0\phi(0)+\hat{\omega}(0)-\hat{\omega}(s_0)+A_2ck(0)s_0\hat{\omega}(s_0)=0\,.$$

Λύνουμε την τελευταία ως προς $\phi(0)$ και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\phi(0)=\frac{1}{A_2c^2s_0}(\hat{\omega}(0)-\hat{\omega}(s_0))+\frac{k(0)}{c}\hat{\omega}(s_0)\,. \tag{A.3.13}$$

Έχουμε υποθέσει κατάλληλη $w(x_1,x_2)=I(x_1\le x)I(x_2\le y)$ έτσι ώστε η $\phi(0)=F\left(x,y\mid 0\right)$. Από $(A.3.6)$

$$\begin{aligned}\omega(u) &= \int_u^\infty I(u\le x)I(r-u\le y)p(r)dr\\ &= I(u\le x)\int_u^\infty I(r\le u+y)p(r)dr\,.\end{aligned}$$

Επειδή θέλω $r\le u+y$, τα όρια ολοκλήρωσης αλλάζουν, έτσι

$$\omega(u)=I(u\le x)\int_u^{u+y}p(r)dr\,,$$

δηλαδή,

$$\omega(u)=I(u\le x)[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,. \tag{A.3.14}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $(A.3.14)$ είναι

$$\hat{\omega}(s)=\int_0^\infty e^{-su}I(u\le x)[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,du\,. \tag{A.3.15}$$

Αντικαθιστάμε στην $(A.3.13)$ την $(A.3.15)$, για $s=0$ και $s=s_0$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}F\left(x,y\mid 0\right) &= \frac{1}{A_2c^2s_0}\left[\int_0^x[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,du-\int_0^x e^{-s_0u}[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,du\right]\\ &\quad+\frac{k(0)}{c}\int_0^x e^{-s_0u}[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,du\,.\end{aligned}$$

ή

$$F\left(x,y\mid 0\right)=\frac{1}{A_2c^2s_0}\int_0^x[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,du-\frac{1-A_2cs_0k(0)}{A_2c^2s_0}\int_0^x e^{-s_0u}[\overline{P}(u)-\overline{P}(u+y)]\,du \tag{A.3.16}$$

Η εξίσωση $(A.3.16)$ είναι η εξίσωση της από κοινού σ. κ. του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος μετά την χρεοκοπίας.
Εάν παραγωγίσουμε ως προς x και στη συνέχεια ως προς y την εξίσωση $(A.3.16)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών x,y.

$$\frac{dF\left(x,y\mid 0\right)}{dx}=\frac{1}{A_2c^2s_0}[\overline{P}(x)-\overline{P}(x+y)]-\frac{1-A_2ck(0)s_0}{A_2c^2s_0}[e^{-s_0x}(\overline{P}(x)-\overline{P}(x+y)]) \,.$$

$$\begin{aligned}\frac{dF\left(x,y\mid 0\right)}{dxdy} &= \frac{1}{A_2c^2s_0}p(x+y)-\frac{1-A_2ck(0)s_0}{A_2c^2s_0}e^{-s_0x}p(x+y)\\ &= \frac{1}{A_2c^2s_0}(1-e^{-s_0x})p(x+y)+\frac{A_2ck(0)s_0e^{-s_0x}}{A_2c^2s_0}p(x+y)\,.\end{aligned}$$

Τελικά, εάν απλοποιήσουμε την τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε την ζητούμενη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για $u=0$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 4.4.1: Θεωρούμε κατάλληλο s τέτοιο ώστε ο πίνακας

$$\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}B$$

να είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή

$$det\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}B)\right]\neq 0.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $L_\delta(s)$ είναι

$$det(L_\delta(s))=det\left[\left(s-\frac{\delta}{c}\right)I+\frac{1}{c}B+\frac{1}{c}\underline{b}^T\underline{\beta}\hat{p}(s)\right]\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα $4.1.6(\beta)$

$$\begin{aligned}det(L_\delta(s)) &= det\left[\frac{1}{c}\left(cs-\delta\right)I+B\right]det\left[\frac{1}{c}\left(I+\left(cs-\delta\right)I+B\right)^{-1}\underline{b}^T\underline{\beta}\hat{p}(s)\right]\\ &= \frac{1}{c}det\left[(cs-\delta)I+B\right]det\left[I+((cs-\delta)I+B)^{-1}\underline{b}^T\underline{\beta}\hat{p}(s)\right]\,.\end{aligned}$$

Από Θεώρημα 4.1.6(α)

$$det(L_\delta(s))=\frac{1}{c}det\left[(cs-\delta)I+B\right](1+\beta(cs-\delta)I+B)^{-1}\underline{b}^T\hat{p}(s))$$

Από $(4.4.1)$

$$det(L_\delta(s))=\frac{1}{c}det[(cs-\delta)I+B](1-\hat{k}(\delta-cs)\hat{p}(s))\,.$$

Εφόσον $det[(cs-\delta)I+B] \neq 0$ από υπόθεση, για

$$det(L_\delta(s)) = 0$$

πρέπει

$$1 - \hat{k}(\delta - cs)\hat{p}(s) = 0\,.$$

Δηλαδή

$$\hat{k}(\delta - cs)\hat{p}(s) = 1\,. \tag{A.3.17}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η γνωστή θεμελιώδης εξίσωση Lundberg, για $\delta \geq 0$. Δηλαδή $(4.4.6)$ και $(4.4.7)$ έχουν κοινές λύσεις. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.4.2: Από την $(4.4.1)$

$$\hat{k}(\delta - cs) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - cs}\,. \tag{A.3.18}$$

Επίσης

$$\hat{p}(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}\,. \tag{A.3.19}$$

Οι Gerber & Shiu (2005b) θεώρησαν την n-οστού βαθμού πολυωνυμική εξίσωση

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\delta}{\lambda_i} - \frac{c}{\lambda_i}s\right] \tag{A.3.20}$$

ως την αντίστροφη συνάρτηση της $\hat{k}(\delta - cs)$. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\gamma(s) - \hat{p}(s) = 0$ έχει ακριβώς n λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rouche εάν αποδείξουμε ότι $|\gamma(s)| > |\hat{p}(s)|$ και $\gamma(s)$ έχει n λύσεις τότε, $\gamma(s) - \hat{p}(s) = 0$ έχει n λύσεις.

Θεωρούμε έναν ημικυκλικός δίσκο κενταρισμένο στο μηδέν στο δεξί μέρος του μιγαδικού επιπέδου, με αρκετά μεγάλη ακτίνα. Για $Re(s) \geq 0$ ο $|\hat{p}(s)| \leq 1$, και από την $(A.3.20)$ είναι προφανές ότι $|\gamma(s)| > 1$ για αρκετά μεγάλο s. Επίσης, για $Re(s) = 0$ τότε $|\hat{p}(s)| = 1$ και $|\gamma(s)| > 1$. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Rouche η εξίσωση $(4.4.7)$ έχει n λύσεις για $s = \frac{\delta - \zeta}{c}$, όπου ζ κυμαίνεται πάνω από τις ιδιοτιμές του B. Επειδή οι ιδιοτιμές του B είναι όλες αρνητικές σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.2, έχουμε ότι s έχει πάντα θετικό πραγματικό μέρος. □

Απόδειξη Θεωρήματος 4.4.1: Από με την $(4.4.7)$ και σύμφωνα με την $(4.4.1)$, ισχύει ότι

$$\underline{v}_i \underline{b}^T \hat{p}(\rho_i) = 1\,. \tag{A.3.21}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
\underline{v}_i L_\delta(\rho_i) &= \underline{v}_i \left[\left(\rho_i - \frac{\delta}{c}\right) I + \frac{1}{c}B + \frac{1}{c}\underline{b}^T \underline{\beta}\hat{p}(\rho_i)\right] \\
&= \underline{v}_i \left[-\frac{1}{c}((\delta - \rho_i c)I - B - \underline{b}^T \underline{\beta}\hat{p}(\rho_i)\right] \\
&= \underline{\beta}\left[(\delta - c\rho_i)I - B\right]^{-1}\left[-\frac{1}{c}((\delta - c\rho_i)I - B - \underline{b}^T \underline{\beta}\hat{p}(\rho_i)\right] \\
&= -\frac{1}{c}\underline{\beta} + \frac{1}{c}\underline{v}_i \underline{b}^T \underline{\beta}\hat{p}(\rho_i)\,.
\end{aligned}$$

Η τελευταία από $(A.3.21)$ γίνεται

$$\underline{v}_i L_\delta(\rho_i) = -\frac{1}{c}\underline{\beta} + \frac{1}{c}\underline{v}_i \underline{b}^T \hat{p}(\rho_i)\underline{\beta} = 0\,, \quad i = 1, 2, .., n\,. \tag{A.3.22}$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την $(4.4.1)$ με $\underline{v}_i$ όταν $s = \rho_i$, σύμφωνα με την $(A.3.22)$ είναι

$$\underline{v}_i L_\delta(\rho_i)\hat{\underline{\phi}}(\rho_i) = v_i \underline{\phi}(0) - \frac{1}{c} v_i \hat{\omega}(s)\underline{b}^T = 0\,. \tag{A.3.23}$$

Η εξίσωση $(A.3.23)$ σε μορφή πίνακα, είναι

$$V\underline{\phi}(0) = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \hat{\omega}(\rho_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \hat{\omega}(\rho_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \hat{\omega}(\rho_n) \end{bmatrix} V\underline{b}^T\,, \tag{A.3.24}$$

όπου

$$V = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T & \underline{v}_2^T & \cdots & \underline{v}_n^T \end{bmatrix}^T$$

είναι ένας πίνακας και $\underline{v}_i$ για $i = 1, .., n$, είναι διανύσματα-γραμμή $(1 \times n)$. Υποθέτουμε ότι $\underline{v}_i$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε ο πίνακας V είναι αντιστρέψιμος. Έτσι η $(A.3.24)$ γίνεται

$$\underline{\phi}(0) = \frac{1}{c}V^{-1}\begin{bmatrix} \hat{\omega}(\rho_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \hat{\omega}(\rho_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \hat{\omega}(\rho_n) \end{bmatrix} V\underline{b}^T\,. \tag{A.3.25}$$

Θεωρούμε ένα πίνακα $Q(n \times n)$, με αρνητικές ιδιοτιμές $\{-\rho_1, .., -\rho_n\}$ και αντίστοιχα αριστερά ιδιοδιανύσματα $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, .., \underline{v}_n\}$. Ο πίνακας αυτός γράφεται

$$Q = V^{-1}\begin{bmatrix} -\rho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\rho_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\rho_n \end{bmatrix} V\,. \tag{A.3.26}$$

Σύμφωνα με τον πίνακα Q η εξίσωση $(A.3.25)$ γράφεται με μια πιο συνοπτική μορφή

$$\underline{\phi}(0) = \frac{1}{c}\hat{\omega}(-Q)\underline{b}^T .$$

□

<u>**Απόδειξη του τύπου του Dickson** 4.4.22 **σε μορφή πινάκων:**</u> Έστω ο πίνακας $M(x, y \mid u)$, για $u > 0$, είναι η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} M(x,y \mid u) &= \int_0^u g(z)M(x,y \mid u-z)\,dz + I(u<x)M(x-u, y+u \mid 0) \\ &= \int_0^u g(z)M(x,y \mid u-z)\,dz + \frac{1}{c}I(u<x)e^{Q(x-u)}p(x+y) \\ &= \int_0^u g(z)M(x,y \mid u-z)\,dz + I(u<x)\frac{1}{c}e^{Qx}e^{-Qu}p(x+y)\,, \end{aligned}$$

$$M(x,y \mid u) = \int_0^u g(z)M(x,y \mid u-z)\,dz + I(u<x)M(x,y \mid 0)\,e^{-Qu} . \tag{A.3.27}$$

Συγκρίνουμε την $(4.4.23)$ με την $(4.4.17)$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$f(x,y \mid u) = \underline{\beta}M(x,y \mid u)\,\underline{b}^T . \tag{A.3.28}$$

Έστω $Y(u)$ ένας πίνακας ο οποίος λύνει την ανανεωτική εξίσωση

$$Y(u) = \int_0^u g(z)Y(u-z)dz + I(u<x)e^{-Qu}\,, \tag{A.3.29}$$

εάν πολλαπλασιάσουμε την $(A.3.29)$ με την $M(x, y \mid 0)$, από μοναδικότητα λύσης των ανανεωτικών εξισώσεων ισχύει

$$M(x,y \mid u) = M(x,y \mid 0)\,Y(u) . \tag{A.3.30}$$

Θέλουμε να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace στην $(A.3.29)$,

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\xi) &= \hat{g}(\xi)\hat{Y}(\xi) + \int_0^x e^{-\xi u}e^{-Qu}du \\ &= \hat{g}(\xi)\hat{Y}(\xi) + \int_0^x e^{-u(\xi I+Q)}du \\ &= \hat{g}(\xi)\hat{Y}(\xi) + \left[-\left(\xi I+Q\right)^{-1}e^{-u(\xi I+Q)}\right]_0^x \\ &= \hat{g}(\xi)\hat{Y}(\xi) + \left[-\left(\xi I+Q\right)^{-1}e^{-x(\xi I+Q)} + \left(\xi I+Q\right)^{-1}\right] \\ &= \hat{g}(\xi)\hat{Y}(\xi) + \left[\left(I-e^{-x(\xi I+Q)}\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1}\right] . \end{aligned}$$

Απλοποιούμε και βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $(A.3.29)$ είναι

$$\hat{Y}(\xi) = \frac{1}{1-\hat{g}(\xi)}\left(I-e^{-x(\xi I+Q)}\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1} . \tag{A.3.31}$$

Για $u = 0$ ισχύει

$$\Psi_\delta(0) = \int_0^\infty g(z)e^{Qz}dz = \hat{g}(-Q)\,. \tag{A.3.32}$$

Βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $(4.4.20)$,

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}_\delta(u) &= \hat{g}(\xi)\hat{\Psi}_\delta(\xi) + \int_0^\infty e^{-\xi u}\int_u^\infty g(z)e^{-Q(u-z)}dzdu \\
&= \hat{g}(\xi)\hat{\Psi}_\delta(\xi) + \int_0^\infty g(z)e^{Qz}\int_0^z e^{(\xi I+Q)u}dudz \\
&= \hat{g}(\xi)\hat{\Psi}_\delta(\xi) + \int_0^\infty g(z)e^{Qz}\left\{\left[-e^{-(\xi I+Q)u}\left(\xi I+Q\right)^{-1}\right]_0^z\right\}dz \\
&= \hat{g}(\xi)\hat{\Psi}_\delta(\xi) + \int_0^\infty g(z)e^{Qz}\left(-e^{-(\xi I+Q)z)}\left(\xi I+Q\right)^{-1} + \left(\xi I+Q\right)^{-1}\right)dz \\
&= \hat{g}(\xi)\hat{\Psi}_\delta(\xi) + \int_0^\infty g(z)e^{Qz}\left(I - e^{-(\xi I+Q)z}\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1}dz\,.
\end{aligned}$$

Βάσει της $(A.3.32)$

$$\hat{\Psi}_\delta(\xi) = \hat{g}(\xi)\hat{\Psi}_\delta(\xi) + \left(\hat{g}(-Q) - \hat{g}(\xi I)\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1}\,,$$

η οποία τελικά γίνεται,

$$\hat{\Psi}_\delta(\xi) = \frac{1}{1-\hat{g}(\xi)}\left(\Psi_\delta(0) - \hat{g}(\xi I)\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1}\,. \tag{A.3.33}$$

Τέλος ορίζουμε

$$\Gamma(u) = \begin{cases} e^{-Qu} & x > u \geq 0 \\ e^{-Qx}\Psi_\delta(u-x) & 0 < x \leq u\,. \end{cases} \tag{A.3.34}$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $(A.3.34)$,

$$\hat{\Gamma}(\xi) = \int_0^x e^{-\xi u}e^{-Qu}du + \int_x^\infty e^{-Qx}e^{-\xi u}\Psi_\delta(u-x)\,du\,.$$

Θέτωντας $y = u - x$ στην παραπάνω εξίσωση

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\xi) &= \left[-\left(\xi I+Q\right)^{-1}e^{-u(\xi I+Q)}\right]_0^x + e^{-Qx}\int_0^\infty e^{-\xi(y+x)}\Psi_\delta(y)dy \\
&= -\left(\xi I+Q\right)^{-1}e^{-x(\xi I+Q)} + \left(\xi I+Q\right)^{-1} + e^{-Qx}e^{-\xi x}\int_0^\infty e^{-\xi y}\Psi_\delta(y)dy \\
&= \left[I - e^{-x(\xi I+Q)}\right]\left(\xi I+Q\right)^{-1} + e^{-(\xi I+Q)x}\hat{\Psi}_\delta(\xi)\,.
\end{aligned}$$

Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη $\Psi(\xi)$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\xi) - \hat{\Psi}_\delta(\xi) &= \left(I - e^{-x(\xi I+Q)}\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1} + e^{-(Q+\xi I)x}\hat{\Psi}_\delta(\xi) - \hat{\Psi}_\delta(\xi) \\
&= \left(I - e^{-x(\xi I+Q)}\right)\left(\xi I+Q\right)^{-1} - \hat{\Psi}_\delta(\xi)\left(I - e^{-(Q+\xi I)x}\right) \\
&= \left(I - e^{-x(\xi I+Q)}\right)\left(\left(\xi I+Q\right)^{-1} - \hat{\Psi}_\delta(\xi)\right)\,.
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση, βάσει της $(A.3.33)$ γίνεται

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\xi) - \hat{\Psi}_\delta(\xi) &= \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\xi I + Q)^{-1} \\
&\quad - \left(I - e^{-(xiI + Q)x}\right)\frac{1}{1-\hat{g}(\xi)}\left(\Psi_\delta(0) - \hat{g}(\xi)\right)(\xi I + Q)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1-\hat{g}(\xi)][\hat{\Gamma}(\xi) - \hat{\Psi}_\delta(\xi)] &= (1-\hat{g}(\xi))\left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\xi I + Q)^{-1} \\
&\quad - \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\Psi_\delta(0) - \hat{g}(\xi))(\xi I + Q)^{-1} \\
&= (1-\hat{g}(\xi))\left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\xi I + Q)^{-1} \\
&\quad - \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)\Psi_\delta(0)(\xi I + Q)^{-1} \\
&\quad + \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)\hat{g}(\xi)(\xi I + Q)^{-1} \\
&= \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\xi I + Q)^{-1}(1 - \hat{g}(\xi) + \hat{g}(\xi)) \\
&\quad - \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)\Psi_\delta(0)(\xi I + Q)^{-1} \\
&= \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\xi I + Q)^{-1} - \left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)\Psi_\delta(0)(\xi I + Q)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Διαιρούμε με $[1-\hat{g}(\xi)]$,

$$\hat{\Gamma}(\xi) - \hat{\Psi}_\delta(\xi) = \frac{1}{1-\hat{g}(\xi)}(I - \Psi_\delta(0))\left(I - e^{-(\xi I + Q)x}\right)(\xi I + Q)^{-1}\,. \qquad \text{(A.3.35)}$$

Η εξίσωση $(A.3.35)$ με βάσει την $(A.3.31)$ γίνεται

$$\hat{\Gamma}(\xi) - \hat{\Psi}_\delta(\xi) = \hat{Y}(\xi)(I - \Psi_\delta(0))\,.$$

Απλοποιούμε

$$\hat{Y}(\xi) = (\hat{\Gamma}(\xi) = \hat{\Psi}_\delta(\xi))(I - \Psi_\delta(0))^{-1}\,,$$

και αν αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Laplace, τότε

$$Y(\xi) = \Phi(\xi) - \Psi_\delta(\xi)(I - \Psi_\delta(0))^{-1}\,. \qquad \text{(A.3.36)}$$

Η $(A.3.30)$ βάσει την $(A.3.36)$ γίνεται

$$M(x, y \mid u) = M(x, y \mid 0)\,(\Phi(u) - \Psi_\delta(u))(I - \Psi_\delta(0))^{-1}\,. \qquad \text{(A.3.37)}$$

Η $(A.3.28)$ σύμφωνα με την $(A.3.37)$ είναι

$$\begin{aligned}
f(x, y \mid u) &= \underline{\beta} M(x, y \mid u)\,\underline{b}^T \\
&= \underline{\beta} M(x, y \mid 0)\,(\Phi(u) - \Psi_\delta(u))(I - \Psi_\delta(u))(I - \Psi_\delta(0))^{-1}\underline{b}^T\,.
\end{aligned}$$

Η τελευταία σύμφωνα με την $(A.3.34)$ μας δίνει το ζητούμενο

$$f = (x, y \mid u) = \begin{cases} \underline{\beta} M(x, y \mid 0)\left(e^{-Qu} - \Psi_\delta(u)\right)(I - \Psi_\delta(0))^{-1}\underline{b}^T & x > u \geq 0 \\ \underline{\beta} M(x, y \mid 0)\left(e^{-Qx}\Psi_\delta(u - x) - \Psi_\delta(u)\right)(I - \Psi_\delta(0))^{-1}\underline{b}^T & 0 < x \leq u\,. \end{cases}$$

$\square$

Βιβλιογραφία

Ελληνική βιβλιογραφία

Γιαννακόπουλος Ν. (2003) - *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι : Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση*, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Πολίτης Κ. (2013) - *Σημειώσεις στο μάθημα : Θεωρία Κινδύνου ΙΙ*, Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών : Αναλογιστική επιστήμη και διοικητική κινδύνου.

Χρυσαφίνου (2008) - *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις*, Εκδόσεις Σοφία.

Strang G. (2006) - *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Μετάφραση: Πάμφιλος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Asmussen S. (2000) - *Ruin Probabilities* -World Scientific Publishing, Singapore.

Border KC (2002) - *Differentiating an Integral: Leibniz' Rule*, California Institute of Technology.

Dickson C.M. (1992) - *On the distribution of the surplus prior to ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 11, 191-207.

Dickson D. C. M. & Egidio dos Reis (1994) - *Ruin problems and dual events*, Insurance: Mathematics and Economics 14, 51-60.

Dickson D. C. M. (1998) - *On a class of renewal risk process*, North American Actuarial Journal, 60-73.

Dickson D.C. M. , Drekic S. (2003) - *The joint distribution of the Surplus Prior to Ruin and the Deficit at Ruin in Some Sparre Andersen Model*, Centre for Actuarial Studies, Department of Economics, The university of Melbourne, Victoria 3010, Australia.

Dickson D.C.M. , Hipp C. (2010) - *Ruin Problems for Phase-Type (2) Risk Processes*, Scandinavian Actuarial Journal, 147-167.

Dufresne F. , Gerber H. (1988) - *The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin*,Insurance: Mathematics and Economics 7, 193-199.

Gerber H. U. , Goovaerts M. J. m Kaas R. (1987) - *On the probability and severity of ruin* , ASTIN Bulletin 17, 151-53.

Gerber H. U., Shiu E. S. W. (1997) - *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin*, Insurance:Mathematics and Economics 21, 129-137.

Gerber H. U., Shiu E. S. W. (2003) - *First discussion of Y. Cheng and Q. Tang's "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process"*, North American Actuarial Journal, 117-119.

Gerber H. U., Shiu E. S. W. (2005) - *The time value of ruin in a Sparre Andersen Model*, North American Actuarial Journal 9(2), 49-69.

Ren J. (2007) - *Joint Distribution od the Surplus prior to Ruin and the Deficit at Ruin in a Sparre Andersen Model*, North American Actuarial Journal, 11 (3), 129-135.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999) - *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester.

Schmidli H. (2005) - *Discussion of Gerber H. U., Shiu E. S. W. "The time value of ruin in a Sparre Andersen Model"*, North American Actuarial Journal 9(2), 69-70.