Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

ΤΜΗΜΑ Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΤΟΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟ

Αικατερίνη Δ. Λάμα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Διοικητική Κινδύνου και Αναλογιστική Επιστήμη

Πειραιάς, Αύγουστος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. ……..συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
- Καθηγητής Μ. Κούτρας (Επιβλέπων)
- Αναληρωτής Καθηγητής Κ. Πολίτης
- Επίκουρος Καθηγητής Γ. Ψαράκος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

U N I V E R S I T Y O F P I R A E U S

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MASTER PROGRAM IN RISK MANAGEMENT AND ACTUARIAL SCIENCE

APPLICATIONS OF GAME THEORY IN ACTUARIAL SCIENCE

By

Aikaterini D. Lama

Master Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Risk Management and Actuarial Science

Piraeus, Greece, August 2015

Στην οικογένειά μου
και στον Κωνσταντίνο

Ευχαριστίες

Σε αυτή την ενότητα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που ήταν κοντά μου και με βοήθησαν είτε με τις γνώσεις τους είτε με την συμπαράστασή τους. Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον κύριο Μάρκο Κούτρα, καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του στη συγγραφή της εργασίας, καθώς και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κ. Πολίτη και τον Επίκουρο Καθηγητή Γ. Ψαράκο που απαρτίζουν την τριμελή εξεταστική επιτροπή. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τον Κωνσταντίνο για την αμέριστη κατανόηση, την ηθική και ψυχολογική στήριξη που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την παρουσίαση βασικών εννοιών της Θεωρίας Παιγνίων και την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων που προκύπτουν στον τομέα του αναλογισμού και κυρίως της ασφάλισης. Κάθε πρόβλημα παρουσιάζεται ως παιχνίδι στο οποίο είτε οι παίκτες έχουν αντικρουόμενα συμφέροντα (παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος), είτε εμφανίζονται συμμαχίες όπου οι παίκτες συνεργάζονται (συμμαχικά παιχνίδια). Οι παίκτες επιλέγουν από τις διαθέσιμες στρατηγικές τους αυτή που θεωρούν ότι θα τους εξασφαλίσει τη μεγαλύτερη τιμή στη συνάρτηση απόδοσης όταν πρόκειται για κέρδος ή αντίστοιχα τη μικρότερη τιμή στην περίπτωση της ζημίας.

Γενικά ο σκοπός της θεωρίας παιχνίων είναι η εύρεση λύσης με την οποία επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση της ζημίας ή η μεγιστοποίηση του κέρδους. Στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος το κέρδος του ενός παίκτη αποτελεί την απώλεια για τον άλλο παίκτη. Το άθροισμα των δύο αποδόσεων ισούται με μηδέν και στο γεγονός αυτό οφείλεται και το όνομά τους. Στα παιχνίδια αυτά μία εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα, είναι ότι αν μία λύση οδηγεί τον ένα παίκτη στην καλύτερη δυνατή απόδοσή του, δεδομένης της επιλογής του αντιπάλου, χαρακτηρίζεται ως σημείο Nash. Αναφέρονται οι σχετικές μέθοδοι επίλυσης και δίνονται διευκρινιστικά παραδείγματα.

Σχετικά με τα συμμαχικά παιχνίδια όπου οι παίκτες συμμετέχουν για να επιτύχουν καλύτερες αποδόσεις απ΄ότι αν έμεναν μόνοι τους εξετάζονται οι μέθοδοι κατανομής της απόδοσης που θα επιτευχθεί. Σ’ αυτή την κατηγορία παιχνιδιών, ο στόχος είναι να κατανεμηθεί η συνολική απόδοση που θα υπάρξει, με τέτοιο τρόπο ώστε η επιμέρους απόδοση που θα λάβει κάθε παίκτης θα είναι ανάλογη της συμμετοχής του (διότι κάποιος παίκτης μπορεί να πληρώσει μεγαλύτερο κόστος για να συμμετάσχει στη συμμαχία και κάποιος άλλος λιγότερο).

Abstract

The present MSc thesis deals with the presentation of basic concepts and techniques of Game Theory and especially with their application in problem solving related to Actuarial Science and more specifically to Insurance. Every problem is represented by a game where the players either have a conflict of interest (zero-sum games) or by a cooperation where players share common interest (cooperative games). The players choose from the available strategies, the one that will maximize the payoff function when negotiating profit or respectively minimizing the loss in the case of dealing with losses.

As far as zero sum games are concerned, the profit of the one player is considered equal to the loss for the other. Therefore, the sum of these two payoffs equals zero. The name of this family of games is due to the aforementioned fact. In zero-sum games an extremely important property, is that if a solution yields for a player its best payoff given his opponent's choice, it is characterized as Nash equilibrium. In the present thesis, several methods are presented and clarifying examples are given.

The study of cooperative games shows that players participate in a cooperation with the motive of gaining better payoffs than the ones gained when they stand alone. In this category of games what really matters is the allocation of the total payoff so that the individual payoff gained by each player is proportional to the participation cost he paid (since in these games, someone can invest more or less money than somebody else).

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Το αντικείμενο της «Θεωρίας Παιγνίων»

Τα πρώτα ουσιαστικά ίχνη της σύγχρονης Θεωρίας Παιγνίων εμφανίζονται στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα. Ως θεμελιωτές θεωρούνται οι John Von Neumann και Oscar Morgenstern οι οποίοι την χρησιμοποίησαν και την ανέφεραν ως κλάδο των οικονομικών. Η ανάγκη γέννησής της προέκυψε από την αντιμετώπιση και ανάλυση προβλημάτων που απαιτούν τη λήψη αποφάσεων για τις οποίες είναι απαραίτητες συγκεκριμένες ενέργειες, άμεσα εξαρτώμενες από τον τρόπο δράσης (στρατηγική) των συμβαλλόμενων μερών (παίκτες).

Η Θεωρία Παιγνίων στηρίζεται στην παραδοχή ότι υπάρχουν ομάδες ή μονοσύνολα παιχτών οι οποίοι σκέφτονται ορθολογικά και λαμβάνουν τις κατάλληλες αποφάσεις ώστε να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους ή να ελαχιστοποιήσουν μια ενδεχόμενη ζημιά. Το κέρδος ή η ζημιά μετριούνται σε μία κλίμακα ωφέλειας (utility scale).

Στόχος της Θεωρίας Παιγνίων είναι η δημιουργία μοντέλων που θα μπορούν να ερμηνεύσουν και να επιλύσουν καταστάσεις όπου υπάρχουν συνθήκες αλληλεπίδρασης, με την έννοια ότι εμφανίζονται προβλήματα που αφορούν τη σύγκρουση των ενεχόμενων προσώπων ή τη συνεργασία τους.

Τα φαινόμενα σύγκρουσης και συνεργασίας εκτός από την οικονομική επιστήμη, απαντώνται σε πολλές επιστήμες όπως οι Θετικές, οι Κοινωνικές και οι Πολιτικές Επιστήμες, η Βιολογία κτλ. Η Θεωρία Παιγνίων θεωρείται λοιπόν ως ένας μανδύας που σκεπάζει και ενοποιεί τις θεωρίες των προαναφερόμενων επιστημών καθώς προσπαθεί να εξηγήσει διάφορα φαινόμενα που αφορούν εταιρείες, οργανισμούς, κοινωνίες και χώρες, κοινωνικούς θεσμούς, πολιτικά και ιστορικά γεγονότα.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το έναυσμα για την εξέλιξη της Θεωρίας Παιγνίων δόθηκε από τον John Von Neumann, ο οποίος το 1928 εκπόνησε σχετικό άρθρο στο οποίο κανείς δεν έδωσε σημασία για τα επόμενα 20 χρόνια. Η απόδειξη που συμπεριλαμβάνεται στο άρθρο αυτό θεωρείται κόσμημα για το πεδίο της Θεωρίας Παιγνίων. Λίγο μετά το τέλος του Δεύτερου Παγκόσμιου Πολέμου η Θεωρία Παιγνίων ξεκίνησε να αναπτύσσεται ραγδαία κυρίως μετά το 1950 και να εμπλουτίζεταισυνεχώς. Ένα ιδιαίτερο σημείο αναφοράς αποτελεί η εξαιρετική συμβολή του John Nash .

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στις αρχές της δεκαετίας του ΄90, ο Roger Myerson είχε δηλώσει ότι η ανακάλυψη της «ισορροπίας Nash», για την οποία θα γίνει αναφορά παρακάτω, είναι αντάξια της ανακάλυψης της διπλής έλικας DNA αφού η ανακάλυψη αυτή άλλαξε τη δομή της οικονομικής επιστήμης τόσο ώστε να μετουσιωθεί στη βασικότερη επιστήμη του κοινωνικού γίγνεσθαι.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η Θεωρία Παιγνίων δεν είναι μια πρόσφατη θεωρία διότι έχει τις ρίζες της στην περίοδο 1-500 μ.Χ. καθώς υπάρχουν αναφορές στο Ταλμούδ, την εβραική συλλογή κειμένων, τα οποία δίδασκαν Παλαιστίνιοι ραββίνοι.

Το 1713 ο Pierre Remond de Montmort συνεργάστηκε με τον Charles Waldegrave σε προβλήματα πιθανοτήτων. Ο Waldegrave έκανε μια πρώτη αναφορά σε λύση μεικτής στρατηγικής στη Θεωρία Παιγνίων. Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το πρόβλημα πιθανοτήτων Waldegrave.

Το 1838 ο Γάλλος οικονομολόγος August Cournot ανέπτυξε το ομώνυμο μοντέλο σύμφωνα με το οποίο αναλύονται ολιγοπωλιακές καταστάσεις με τρόπο ανάλογο με αυτό της Θεωρίας Παιγνίων.

Το 1871 ο Δαρβίνος έδωσε μια παιγνιοθεωρητική άποψη για τη διαμόρφωση της αναλογίας των δύο ανθρώπινων φύλων.

Το 1881 ο Άγγλος οικονομολόγος Edgeworth ασχολήθηκε με την εφαρμογή των μαθηματικών στις κοινωνικές επιστήμες και ειδικά με το πώς διαμορφώνονται οι εμπορικές σχέσεις μεταξύ ατόμων.

Το 1928 ο John Von Neumann εισήγαγε μια σημαντική κατηγορία παιχνιδιών, τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος, τα οποία αφ΄ ενός έχουν πάντα λύση και αφ΄ετέρου η απώλεια του ενός παίχτη αποτελεί κέρδος για τον αντίπαλό του.

Η μεγάλη εξέλιξη όμως στη Θεωρία Παιγνίων προήλθε από τη συνεργασία του John Von Neumann και του Oskar Morgenstern που επεδίωξαν να λύσουν οικονομικά προβλήματα. Το 1944 εξέδωσαν το βιβλίο "Theory of games and economic behavior" σύμφωνα με το οποίο κάποια οικονομικά προβλήματα προσομοιάζουν με παιχνίδια στρατηγικής. Στο βιβλίο αυτό:

- όρισαν αξιωματικά τη θεωρία χρησιμότητας (utility theory)
- ανέλυσαν τις βέλτιστες λύσεις στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος
- ασχολήθηκαν με μια νέα κατηγορία παιχνιδιών τα συνεργατικά παιχνίδια (cooperative games).

Ακολούθως άρχισε να λαμβάνει σάρκα και οστά η σύγχρονη Θεωρία Παιγνίων και να εφαρμόζεται στην καθημερινότητα. Το 1943 χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς για τη λύση ενός στρατιωτικού προβλήματος που αφορούσε τον τρόπο εγκατάστασης σκαφών αναγνώρισης ώστε να ανιχνευτεί ιαπωνικό κομβόι όταν η πορεία του δεν είναι γνωστή. Η ανάλυση του αυτού του ιστορικού γεγονότος θα πραγματοποιηθεί στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας.

Το 1950-1953 ο John Nash ασχολήθηκε με τα παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος εισάγοντας τη θεωρία ισορροπίας. Η θεωρία αυτή αναφέρεται στα αποτελέσματα που προκύπτουν από διαπραγμάτευση που συνδέει συμμαχικά και μη συμμαχικά παιχνίδια δεδομένου ότι η ισορροπία Nash αναφέρεται στην περίπτωση όπου για κάθε παίκτη δεν είναι συμφέρον να ξεφεύγει μεμονωμένα. Η μελέτη του Nash θεωρείται ότι αποτελεί επέκταση του μοντέλου Cournot.

Το 1952-1953 ο Shapley έδωσε μία γενική λύση σε προβλήματα τοποθέτησης πληρωμών από συμμαχίες, την οποία ονόμασε «πυρήνα» και θα γίνει εκτενής αναφορά στο τέταρτο κεφάλαιο.

Το 1962 πρώτος ο Borch έδειξε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Θεωρία Παιγνίων στην ασφάλιση .

Το 1965 έως 1975 ο Reinhard Selten γενίκευσε τις ιδέες του Nash στα δυναμικά παιχνίδια, δηλαδή σε παιχνίδια που εξελίσσονται στην πορεία του χρόνου.

Το 1967-1968 ο John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του Nash σε παιχνίδια μη-πλήρους πληροφόρησης σχετικά με τις προτιμήσεις και τις αποφάσεις των άλλων παιχτών. Οι R. Selten, L. Nash και J. Harsanyi τιμήθηκαν με βραβείο Νόμπελ το 1994 για την πολύτιμη συνεισφορά τους.

Η δεκαετία του 1970 αποτέλεσε εφαλτήριο για την εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στον τομέα της βιολογίας καθώς ο John Maynard Smith ασχολήθηκε με την έννοια της “εξελικτικά σταθερής στρατηγικής’’. Η στρατηγική αυτή, αν υιοθετηθεί από τα περισσότερα άτομα ενός πληθυσμού, δεν μπορεί να υπερνικηθεί από άλλη στρατηγική.

Από το 1990 και μετά η Θεωρία Παιγνίων εφαρμόστηκε στον μηχανισμό που διενεργούνται οι δημοπρασίες.

Το 2005 ο Αμερικανός Tomas Schelling και ο Γερμανός Robert Aumann κέρδισαν το βραβείο Νόμπελ για τις Οικονομικές επιστήμες “επειδή εμπλούτισαν την αντίληψή μας σχετικά με τις έννοιες του ανταγωνισμού και της συνεργασίας μέσω της παιγνιοθεωρητικής ανάλυσης ”.

Το 2007 οι Roger Myerson, Leonid Hurwicz και Eric Maskin κέρδισαν το ίδιο βραβείο “για τη θεμελίωση της θεωρίας σχεδιασμού μηχανισμών”. Η θεωρία αυτή αναζητά σε μια αγορά τον μηχανισμό που πληροί τα εξής κριτήρια:

- βέλτιστη κατανομή των αγαθών και
- αποκάλυψη της ιδιωτικής πληροφορίας των παιχτών.

1.3 Παραδείγματα της Θεωρίας Παιγνίων ως μέρος της καθημερινής ζωής

Η Θεωρία Παιγνίων βρίσκει ευρεία εφαρμογή στον τομέα των τηλεπικοινωνιών που πραγματεύεται τη μεταφορά κωδικοποιημένων σημάτων κατά μήκος φυσικών διόδων (καναλιών) από κόμβο σε κόμβο και από σταθμό σε σταθμό που υπάρχουν στα άκρα των καναλιών αυτών. Οι σταθμοί αυτοί είναι οι τηλεπικοινωνιακές συσκευές (τηλέφωνα, ηλεκτρονικοί υπολογιστές κτλ.), και οι φυσικές δίοδοι είναι τα τηλεπικοινωνιακά κανάλια (δίκτυα τηλεφωνίας, ραδιοτηλεοπτικά δίκτυα, δίκτυα υπολογιστών). Στα δίκτυα αυτά κάθε κόμβος λαμβάνει τις δικές του αποφάσεις ως προς την αναμετάδοση ή προώθηση σημάτων καθώς μπορεί να αναπαράγει πληροφόρηση προς το κοινό συμφέρον όλου του δικτύου ή μεμονωμένα προς το συμφέρον του χρήστη στον οποίο ανήκει ο κόμβος.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής αφορά τη διαχείριση παραγωγής πετρελαίου η οποία ελέγχεται από τον Οργανισμό Πετρελαιοπαραγωγών Χωρών γνωστό ως O.P.E.C. (Organization of the Petroleum Exporting Countries). Ο οργανισμός αυτός είναι ένα πολύ ισχυρό καρτέλ πετρελαίου διότι μπορεί να ελέγχει τις διεθνείς τιμές του πετρελαίου επηρεάζοντας όλα τα στρώματα της παγκόσμιας οικονομίας. Τα κράτη-μέλη του O.P.E.C θεωρούνται παίκτες που συνεργάζονται σε ένα παιχνίδι απόφασης παραγωγής ποσότητας πετρελαίου τέτοιας ώστε να διαμορφωθεί υψηλότερη τιμή και υψηλότερο ποσοστό κέρδους από ότι αν δεν συμμαχούσαν.

Η διοίκηση επιχειρήσεων είναι επίσης ένας τομέας που διαχειρίζεται αποφάσεις σύμφωνα με τις αρχές της Θεωρίας Παιγνίων. Στα πλαίσια που διαμορφώνονται ώστε να επιβιώσουν επιχειρήσεις με ίδιο αντικείμενο εργασιών είναι κοινό φαινόμενο να προβαίνουν σε διαδικασίες σύμπραξης δημιουργώντας συμμαχία που αποφασίζει για το συνολικό συμφέρον. Με τον τρόπο αυτό ακολουθούν κοινή πολιτική προώθησης προιόντων, συλλογικές συμβάσεις εργασίας και κοινή διαμόρφωση τιμών.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα λήψης αποφάσεων βάσει της Θεωρίας Παιγνίων είναι η χάραξη στρατηγικής σε συνθήκες πολέμου όπως στην περίπτωση του Δεύτερου Παγκόσμιου Πολέμου όπου οι σύμμαχοι κατέστρωναν σχέδια απόβασης στη Νορμανδία ή στο Καλαί και αποφάσιζαν συνακόλουθα για τον τρόπο που θα αποπροσανατολίσουν τους Γερμανούς σχετικά με τον πραγματικό τόπο της απόβασης.

Οι δημοπρασίες αποτελούν ένα επιπλέον κομμάτι της οικονομίας που έχει παιγνιοθεωρητικό υπόβαθρο. Στόχος μιας δημοπρασίας είναι η επίτευξη της υψηλότερης τιμής πώλησης γεγονός που μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο αν υπάρχει ανταγωνισμός μεταξύ των συμμετεχόντων. Μία περίπτωση όπου δεν κατέστη εφικτός ο ανταγωνισμός αλλά υπήρξε συμμαχικό κλίμα είναι ένας πλειστηριασμός συχνοτήτων τηλεφωνίας που έλαβε χώρα στις Η.Π.Α. το 1997. Ενώ όλοι οι πλειστηριασμοί αυτού του είδους που διενεργούνταν ομαλά από το 1994 πρόσφεραν κέρδη στο αμερικάνικο κράτος, το 1997 τα κέρδη μειώθηκαν κατακόρυφα κερδίζοντας μόνο το 1% του ποσού που αρχικά είχε προβλεφθεί. Οι εταιρείες που εκδήλωναν ενδιαφέρον για να καταφέρουν να δώσουν στην τελική προσφορά ποσό που είχε μικρή απόκλιση από την τιμή έναρξης, σε κάθε προσφορά προχωρούσαν σε πολύ μικρή αύξηση της τιμής από την προηγούμενη κατατεθειμένη προσφορά δηλαδή αν η μία προσφορά ήταν της τάξης των 2.400.000 δολαρίων τότε η επόμενη προσφορά ανέρχονταν στο ποσό των 2.400.385 δολαρίων. Τόσο μικρές αυξήσεις στην τιμή συνέφεραν τις εταιρείες που συμμετείχαν καθώς δήλωναν άτυπα το ποσό που άντεχε να διαθέσει η κάθε μια και έτσι ουσιαστικά συνεργάστηκαν χωρίς αυτό να μπορεί να γίνει εμφανές εξ΄ αρχής.

Σε αντίστοιχη δημοπρασία που πραγματοποιήθηκε στην Αγγλία αρκετά χρόνια μετά, διοργανώθηκε από γνώστες της Θεωρίας Παιγνίων οι οποίοι έθεσαν κανόνες που απέτρεψαν τέτοια φαινόμενα. Οι εταιρείες που συμμετείχαν έπρεπε να δείχνουν ενδιαφέρον με στρογγυλοποιημένα σε χιλιάδες, ποσά προσφοράς δηλαδή αν η μία εταιρεία προσέφερε 2.400.000 δολάρια η επόμενη προσφορά έπρεπε είναι τουλάχιστον 2.401.000 δολάρια. Έτσι λοιπόν όσο αυξάνονταν οι προσφορές ανέβαινε πραγματικά και η αξία δημοπράτησης στερώντας τη συνεργασία μεταξύ των παιχτών-εταιρειών και αποφέροντας κέρδη στο δημοπράτη.

Ένας αθλητικός αγώνας μεταξύ δύο ομάδων ή δύο μόνο παικτών πάλι περιλαμβάνει τη λήψη αποφάσεων και χρήση στρατηγικών που θα εξασφαλίσουν τη νίκη.

Ένας μείζων τομέας για τον οποίο ακρογωνιαίο λίθο αποτελεί η Θεωρία Παιγνίων, είναι ο ασφαλιστικός τομέας. Κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο είναι ένα παιχνίδι με δύο παίκτες, την ασφαλιστική εταιρεία και τον ασφαλισμένο όπου ο καθένας πρέπει να λάβει τις αποφάσεις του. Οι αποφάσεις αυτές αφορούν στο αν η ασφαλιστική εταιρείαείναι ορθολογικό να αναλάβει τον επερχόμενο κίνδυνο ασφάλισης από σεισμό, φωτιά, τροχαίο ατύχημα, θάνατο κτλ. Αντίστοιχα ο ασφαλισμένος ενδιαφέρεται να εξασφαλίσει ότι θα του προσφερθεί η απαιτούμενη αποζημίωση στην περίπτωση πραγματοποίησης κάποιου από τους ασφαλισμένους κινδύνους.

1.4 Ο σκοπός της εργασίας

Όπως προαναφέρθηκε η Θεωρία Παιγνίων έχει ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών μεταξύ αυτών και ο τομέας της ασφάλισης. Οι θεματικές ενότητες που ακολουθούν θα ασχοληθούν με το πώς ένας ασφαλισμένος ή ένα σύνολο ασφαλισμένων, μια ασφαλιστική εταιρεία και τα προγράμματα ασφάλισης ερμηνεύονται μέσα από τους κανόνες της Θεωρίας Παιγνίων και πως επιλύονται με τις μεθόδους της τα προβλήματα που προκύπτουν ως προς τη λήψη αποφάσεων και την εύρεση λύσεων.

Συγκεκριμένα στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε βασικές πρωταρχικές έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων και μέσω παραδειγμάτων θα δώσουμε το πρώτο στάδιο της σύνδεσής της με τον ασφαλιστικό κλάδο.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στην έννοια των παιχνιδιών μηδενικού αθροίσματος, την απεικόνιση τους στον πίνακα κέρδους και τις τεχνικές λύσης τους. Το τμήμα αυτό της εργασίας ουσιαστικά παρουσιάζει την εφαρμογή της θεωρίας κάτω από ανταγωνιστικές συνθήκες όπου ο κάθε παίκτης ενδιαφέρεται αποκλειστικά και μόνο για το δικό του συμφέρον.

Στον αντίποδα, το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στα συμμαχικά παιχνίδια όπου εκεί εξετάζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι παίκτες θα επιδιώξουν τη συνεργασία μεταξύ τους, έτσι ώστε μέσα από το συλλογικό κέρδος να κερδίσει και ο καθένας ατομικά. Επιπλέον, στα παιχνίδια αυτά που απαιτείται από κοινού αλλά όχι ισόποση συμμετοχή από τον κάθε παίκτη με συνεπακόλουθο την αναλογική κατανομή κερδών, μελετάμε την έννοια της τιμής Shapley και άλλων μεθόδων ως προς την κατανομή κεφαλαίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές εισαγωγικές έννοιες

2.1 Τι είναι παίγνιο

Το βασικό κύτταρο από το οποίο αποτελείται το σώμα της Θεωρίας Παιγνίων όπως μαρτυρά και το όνομά της είναι το **παίγνιο** ή **παιχνίδι,** (game). Η Θεωρία Παιγνίων αναπτύσσει μεθόδους ανάλυσης προβλημάτωνστα οποία μια ομάδα παιχτών συνεργάζονται ή ανταγωνίζονται ώστε να ληφθεί η βέλτιστη απόφαση.

Το παίγνιο αποτελείται ουσιαστικά από :

α) ένα σύνολο *ν* παικτών

β) τις στρατηγικές των παικτών

γ) τις αποδόσεις που αντιστοιχούν στις στρατηγικές κάθε παίχτη.

Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία αυτά, στόχος είναι να εντοπισθεί η καλύτερη λύση που μπορούν να επιτύχουν οι παίκτες.

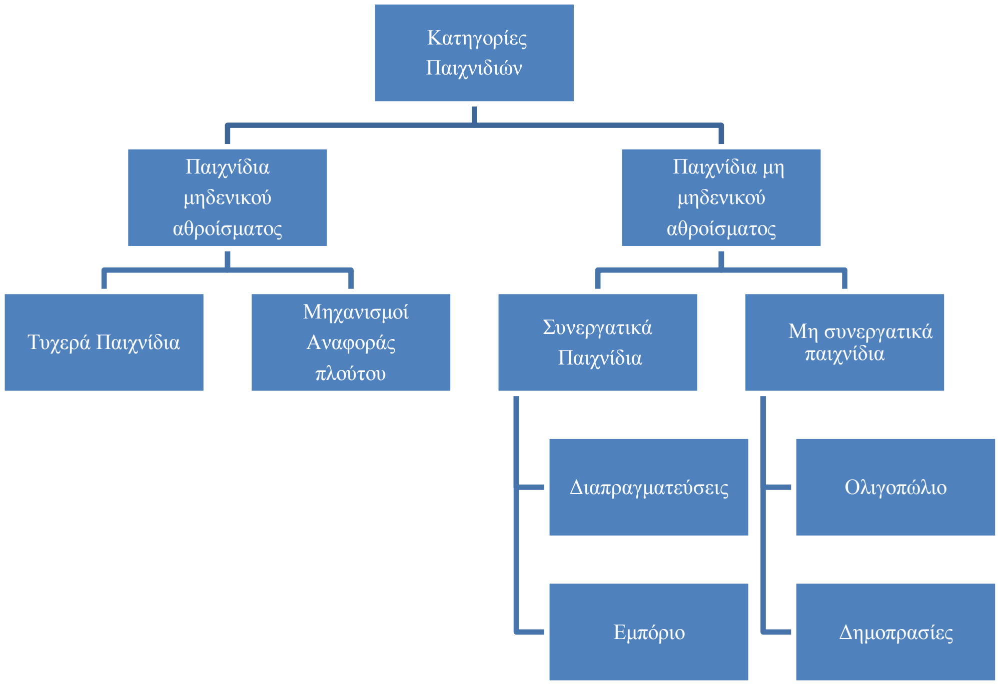
2.2 Κατηγορίες παιγνίων

Τα παιχνίδια σύμφωνα χωρίζονται σεδιάφορεςκατηγορίες ανάλογα με διάφορα κριτήρια ταξινόμησης, Osborne (2003).

Ο πρώτος διαχωρισμός γίνεται βάσει του πλήθους των παικτών που λαμβάνουν μέρος, οπότε αν συμμετέχουν δύο παίκτες έχουμε **παιχνίδι 2 παικτών,** (2-players game) και αντίστοιχα τα **παιχνίδια *ν* παικτών**, (n-players game).

Οι παίκτες πριν την έναρξη του παιχνιδιού έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν αν συμφέρει να συνεργαστούν και να έχουν κοινή στρατηγική για τη λήψη αποφάσεων ή αν θα δράσει ο καθένας αυτόνομα. Έτσι λοιπόν τα παιχνίδια διακρίνονται σε **συνεργατικά παιχνίδια**, (cooperative games) και σε **μη συνεργατικά παιχνίδια**, (non cooperative games).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνεργατικών παιχνιδιών είναι οι διαπραγματεύσεις και το εμπόριο. Στην αντίθετη πλευρά των μη συνεργατικών παιχνιδιών κατατάσσονται τα ολιγοπώλια και οι δημοπρασίες καθώς εξ ορισμού αφορούν πλήρως ανταγωνιστικές συνθήκες όπου ο κάθε παίκτης λειτουργεί αποκλειστικά και μόνο ως μονάδα.



Σχήμα 2.2.1 Κατηγοριοποίηση παιχνιδιών

Μια άλλη διαφοροποίηση στις κατηγορίες των παιχνιδιών προκύπτει από τη σειρά με την οποία θα ληφθούν οι αποφάσεις. Αν οι παίκτες κινηθούν ταυτόχρονα από την αρχή του παιχνιδιού χωρίς να γνωρίζει ο ένας τι θα επιλέξει ο άλλος αναφερόμαστε σε **στατικά παιχνίδια**, (static games) ή **στρατηγικά παιχνίδια**, (strategic games) ή **παιχνίδια σε κανονική μορφή**, (normal form games).

Αντίθετα αν οι παίκτες έχουν δυνατότητα να γνωρίζουν πως κινήθηκαν κάποιοι πριν κινηθούν και αποφασίσουν οι ίδιοι τότε έχουμε **δυναμικά παιχνίδια**, (dynamic games) ή **παιχνίδια σε εκτεταμένη μορφή**,(extensive form games).

Επίσης τα παιχνίδια μπορούν να χαρακτηριστούν ανάλογα με τον αριθμό των στρατηγικών που περιλαμβάνουν. Αν είναι διαθέσιμο για κάθε παίκτη ένα πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών τότε έχουμε **πεπερασμένο παιχνίδι**, (finite game). Αν το παιχνίδι δεν τελειώνει σε πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών τότε χαρακτηρίζεται ως **μη πεπερασμένο παιχνίδι**, (infinite game).

Επιπλέον υπάρχουν παιχνίδια στα οποία οι παίκτες έχουν δυνατότητα να είναι πλήρως ενημερωμένοι για τις αποφάσεις των αντιπάλων τους. Τα παιχνίδια αυτά καλούνται **παίγνια πλήρους πληροφόρησης**, (complete information games) και σε αντίθετη περίπτωση καλούνται **παίγνια ατελούς πληροφόρησης**, (incomplete information games). Σύμφωνα με τα ανωτέρω μόνο τα δυναμικά παιχνίδια μπορούν να έχουν την ιδιότητα της πλήρους πληροφόρησης. Ένα παιχνίδι τέλειας πληροφόρησης είναι το σκάκι, ενώ το πόκερ ανήκει στην αντίθετη κατηγορία.

Τα παιχνίδια που διαθέτουν πεπερασμένο πλήθος ενεργειών με δύο παίκτες και η απώλεια του ενός αποτελεί δεν κέρδος για τον άλλο. Τα παιχνίδια αυτά καλούνται **πεπερασμένα παιχνίδια 2 παικτών μη μηδενικού αθροίσματος**, (non zero-sum games with two players). Περιγράφονται από δύο πίνακες, ένα για κάθε παίκτη και γι΄αυτό καλούνται και **διπινακικά παιχνίδια**, (bimatrix games).

Τα **παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος**, (zero-sum games), αναφέρονται σε καταστάσεις που η απώλεια του ενός παίκτη μεταφέρεται ως κέρδος στον αντίπαλό του όπως συμβαίνει στα τυχερά παιχνίδια και στους μηχανισμούς αναφοράς πλούτου. Συγκεκριμένα η κατηγορία που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο αφορά τον τρόπο επίλυσης των **πεπερασμένων παιγνίων μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες**, (zero-sum games with two players). Τα παίγνια αυτά, όπως μαρτυρά το όνομά τους, παίζονται από δύο παίκτες έχοντας ο καθένας πεπερασμένο πλήθος ενεργειών και ό,τι αποτελεί κέρδος για τον ένα παίκτη είναι ζημία για τον άλλο. Επομένως το άθροισμα των αποδόσεων των 2 παικτών είναι ίσο με 0. Οι αποδόσεις αυτές, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω τι εκφράζουν, περιγράφονται από ένα πίνακα και για τον λόγο αυτό καλούνται **πινακικά παιχνίδια**, (matrix games). Όπως είναι φανερό, στα παιχνίδια αυτά τα συμφέροντα των δύο παικτών βρίσκονται συνεχώς σε σύγκρουση και έτσι δεν υπάρχει κανένα ενδεχόμενο συνεργασίας. Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος θα τα μελετήσουμε στις επόμενες παραγράφους αυτού και του επόμενου κεφαλαίου.

Ακολούθως θα ξεκινήσουμε να βλέπουμε κάποιες από τις πρωτόλειες έννοιες που θα χρειαστούν για την περιγραφή αυτών των παιχνιδιών.

2.3 Η έννοια της στρατηγικής και της απόδοσης

Κάθε παίκτης πρέπει σε κάθε φάση του παιχνιδιού να πραγματοποιεί μία ενέργεια η οποία θα μεγιστοποιεί το όφελός του. Το πλήρες σχέδιο δηλαδή το σύνολο των κανόνων με το οποίο καθορίζεται τι θα κάνει ο παίκτης σε κάθε βήμα του παιχνιδιού είναι η **στρατηγική**, (strategy).

Συγκεκριμένα στα παίγνια δύο παικτών που θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία για τον παίκτη *I* θα έχουμε τις στρατηγικές $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\mu$ και για τον παίκτη *II* θα έχουμε τις στρατηγικές $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_\nu$.

Οι στρατηγικές μπορούν να είναι αριθμητικές ή όχι, π.χ. ο παίκτης *I* μπορεί να αποφασίσει αν θα πάει στο θέατρο ή κινηματογράφο οπότε έχουμε το σύνολο στρατηγικών

$$P = \{ \rho_1, \rho_2 \} = \{\text{θέατρο, κινηματογράφος}\}.$$

Αντίστοιχα σε ένα παιχνίδι πόκερ ο παίκτης μπορεί να αποφασίζει τι ποσό θα ποντάρει οπότε έχουμε το σύνολο στρατηγικών $P = \{\rho_1, \rho_2, ...\}=\{1,2,\ldots\}$.

Κάθε απόφαση που θα ληφθεί έχει ως στόχο την επίτευξη του μέγιστου δυνατού κέρδους ή της ελάχιστης δυνατής ζημιάς. Οι ποσότητες αυτές καθορίζουν την απόδοσης μιας στρατηγικής.

Η αποτίμηση των αποφάσεων κάθε παίκτη ονομάζεται **απόδοση ή συνάρτηση αμοιβής**, (payoff or payoff function) και ουσιαστικά δηλώνει το κέρδος κάθε παίκτη για τους διάφορους συνδυασμούς στρατηγικών όπως θα ορίσουμε στην Παράγραφο 2.7. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης *I* ακολουθήσει τη στρατηγική ρ_i, $i = 1,2,\ldots,\mu$ και ο παίκτης *II* επιλέξει τη στρατηγική σ_j, $j= 1,2,\ldots,\nu$ τότε ο παίκτης *I* λαμβάνει από τον παίκτη *II* ποσό α_{ij} αν $\alpha_{ij}>0$ ή δίνει στον παίκτη *II* ποσό $-\alpha_{ij}$ αν $\alpha_{ij}<0$. Η ποσότητα α_{ij} είναι η απόδοση του παίκτη *I*.

Στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες, έχοντας ο παίκτης *I* απόδοση α_{ij}, δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση απόδοσης του παίκτη *II* αφού αυτή περιγράφεται από τη $-\alpha_{ij}$.

2.4 Ο πίνακας κέρδους

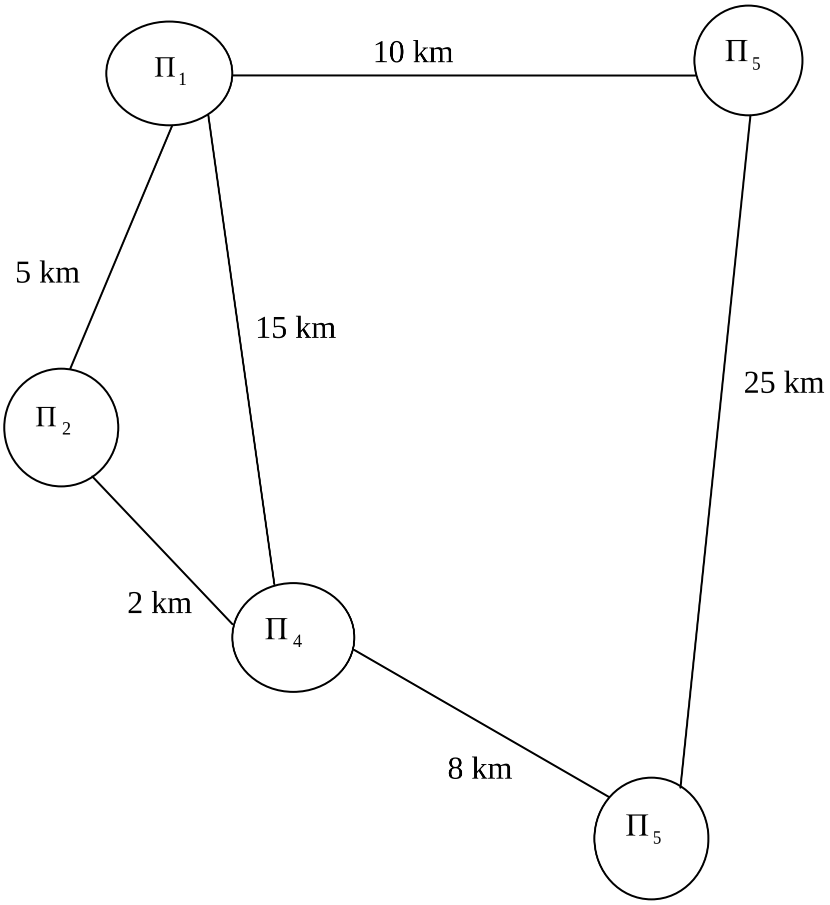
Οι αποδόσεις συχνά αναπαριστώνται με έναν πίνακα τον $A=(\alpha_{ij})$ που περιγράφει το κέρδος του παίκτη *I* και καλείται **πίνακας κέρδους**, (payoff matrix). Ο πίνακας κέρδους έχεις ως γραμμές τις στρατηγικές του παίκτη *I*, ως στήλες τις στρατηγικές του παίκτη *II*, στα κελιά του τις αποδόσεις του παίκτη *I* και έχει την ακόλουθη μορφή:

Παίκτης ΙΙ / Παίκτης Ι	σ_1	σ_2	…………	σ_ν
ρ_1	α_{11}	α_{12}	…………	$\alpha_{1\nu}$
ρ_2	α_{21}	α_{22}	…………	$\alpha_{2\nu}$
……..	………	……..	……………	………
ρ_μ	$\alpha_{\mu 1}$	$\alpha_{\mu 2}$	…………	$\alpha_{\mu\nu}$

Πίνακας 2.4.1 Η μορφή του πίνακα κέρδους σε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών

Για να κατανοήσουμε τα παραπάνω θα δώσουμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.4.1 Δύο ασφαλιστικές εταιρείες η *I* και *II* επιθυμούν να ανοίξουν από ένα ασφαλιστικό γραφείο σε μία από τις πέντε μεγαλύτερες πόλεις Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 και Π_5 ενός νομού. Η κάθε μία από τις πόλεις Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5 κατέχει μερίδιο της ασφαλιστικής αγοράς του νομού σύμφωνα με τα ποσοστά 20%, 30%, 35%, 5%, 10%. Αν ανοίξουν και οι δύο εταιρείες γραφείο στην ίδια πόλη τότε θα πάρει η κάθε μία το 50% της τοπικής αγοράς. Αν πάλι ανοίξουν γραφεία σε διαφορετικές πόλεις τότε το γραφείο που είναι πλησιέστερο προς μία πόλη θα κερδίζει ολόκληρη τη μερίδα της ασφαλιστικής αγοράς της πόλης. Επιπλέον αν οι δύο εταιρείες διατηρούν γραφεία που ισαπέχουν από την πιο κοντινή πόλη τότε θα μοιραστούν το μερίδιο της ασφαλιστικής αγοράς της συγκεκριμένης πόλης. Οι αποστάσεις μεταξύ των πόλεων φαίνονται από το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.4.1 Απεικόνιση των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων

Ας συμβολίσουμε τις στρατηγικές των δύο εταιρειών ως εξής:

ρ_i : Η εταιρεία I ανοίγει γραφείο στην πόλη Π_i με i=1,2,3,4,5

σ_j : Η εταιρεία II ανοίγει γραφείο στην πόλη Π_i με i=1,2,3,4,5

Τότε ο αντίστοιχος πίνακας κέρδους για την εταιρεία I είναι ο εξής :

Εταιρεία *II* / Εταιρεία *I*	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
ρ_1	50	30	60	30	90
ρ_2	70	50	55	60	90
ρ_3	40	40	50	50	70
ρ_4	70	40	50	50	90
ρ_5	10	10	30	10	50

Πίνακας 2.4.2 Ο πίνακας κέρδους του παιχνιδιού

Τα κελιά δείχνουν τις αποδόσεις α_{ij}, i, j =1,2,3,4,5 της εταιρείας *I* και ενδεικτικά θα εξηγήσουμε πως προκύπτουν κάποιες από αυτές

- α_{11} : θεωρώντας ότι ανοίγουν γραφείο και οι δύο ασφαλιστικές εταιρείες στην πόλη Π_1, δηλαδή ότι επιλέγουν τις στρατηγικές ρ_1 και σ_1 σύμφωνα με την εκφώνηση η κάθε μία θα έχει απόδοση 50%

- α_{12} : αν η εταιρεία *I* ανοίξει κατάστημα στην πόλη Π_1 δηλαδή επιλέξει τη στρατηγική ρ_1 και η εταιρεία επιλέξει να ανοίξει γραφείο στην πόλη Π_2 δηλαδή επιλέξει τη στρατηγική σ_2, παρατηρούμε ότι η πόλη Π_5 βρίσκεται πλησιέστερα προς την πόλη Π_1 απ΄ότι στην Π_2 άρα η ασφαλιστική αγορά της θα καλυφθεί από την εταιρεία *I*. Τότε το μερίδιο που θα λάβει η εταιρεία *I* είναι 20% + 10% = 30% και αποτελεί το κέρδος της.

- α_{15} : όμοια αν εταιρεία *I* επιλέξει τη στρατηγική ρ_1 και η εταιρεία *II* επιλέξει τη στρατηγική σ_5, προκύπτει ότι η πόλη Π_1 βρίσκεται πλησιέστερα στις πόλεις Π_2, Π_3, Π_4 απ΄ ότι η πόλη Π_5 προς αυτές. Επομένως οι πόλεις Π_2, Π_3, Π_4 όπως και η Π_1 θα καλυφθούν από την εταιρεία *I*. Άρα η απόδοσή της είναι το άθροισματων μεριδίων αγοράς που κατέχουν οι τέσσερις αυτές πόλεις δηλαδή: 20% + 5% + 30% + 35% =90% .

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι αποδόσεις των υπόλοιπων κελιών εκτός όμως από τις αποδόσεις α_{34} και α_{43} καθώς παρουσιάζεται η ιδιαιτερότητα οι δύο εταιρείες να ανοίγουν μεν γραφεία σε διαφορετικές πόλεις αλλά όμως αυτά να ισαπέχουν από κάποια άλλη πόλη.

- α_{34}: αν η εταιρεία *I* πάει στην πόλη Π_3 και η εταιρεία *II* πάει στην πόλη Π_4 παρατηρούμε ότι οι πόλεις Π_3 και Π_4 ισαπέχουν από τις πόλεις Π_1 και Π_5. Επομένως από μερίδιο αγοράς 10% που έχει η Π_5, 5% θα πάρει η *I* και 5% θα πάρει η *II*. Όμοια από το μερίδιο αγοράς 20% που αντιστοιχεί στην πόλη Π_1, 10% θα πάρει η *I* και 10% θα πάρει η *II*. Άρα η *I* θα πάρει το ποσοστό της Π_3 και τα ποσοστά που της αναλογούν από τις πόλεις Π_1 και Π_5 επομένως το μερίδιό της είναι 35% + 5% + 10% = 50% .

- α_{43}: προκύπτει με αντίστοιχο τρόπο.

Είδαμε μέσω του παραπάνω παραδείγματος πως προκύπτουν οι αποδόσεις για τους παίκτες. Κάθε λογικός παίκτης όμως που συμμετέχει σε ένα παιχνίδι, έχει σκοπό να κερδίσει το μέγιστο δυνατό κέρδος ή να χάσει με τη μικρότερη δυνατή ζημιά δηλαδή οριοθετεί κατά μία έννοια το κέρδος ή την απώλεια του και δεν ικανοποιείται με την οποιαδήποτε απόδοση. Αυτό είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί αν δράσει στοχευμένα με κάποιο συγκεκριμένο σχέδιο. Με άλλα λόγια πρέπει να ορίσει τις ενέργειες του και να επιλέξει τη στρατηγική του. Οι στρατηγικές όπως θα οριστούν αμέσως διακρίνονται σε «γνήσιες» και «τυχαιοποιημένες ή μεικτές».

2.5 Γνήσιες στρατηγικές

Αν υποθέσουμε ότι μία ασφαλιστική εταιρεία εξετάζει αν θα ασφαλίσει άτομο ηλικίας σαράντα ετών, που έχει επιλέξει να αγοράσει από αυτή συμβόλαιο με νοσοκομειακό πρόγραμμα. Ένα βασικό κριτήριο ασφάλισης είναι αν το άτομο αυτό πάσχει από κάποια χρόνια ασθένεια. Αν το άτομο αυτό είναι ασθενής τότε η εταιρεία θα επιλέξει να μην τον ασφαλίσει. Αν όμως είναι απολύτως υγιής θα επιλέξει να συνάψει συμβόλαιο μαζί του. Οι προαναφερόμενες επιλογές που έχει η εταιρεία είναι **γνήσιες στρατηγικές**, (pure strategies), διότι είτε θα επιλέξει τη μία στρατηγική με πιθανότητα ίση με 1 είτε την άλλη με πιθανότητα ίση με 1.

Όπως έχουμε προαναφέρει στη θεωρία παιγνίων στόχος κάθε παίκτη είναι να επιτύχει το μέγιστο δυνατό κέρδος ή την ελάχιστη δυνατή ζημία. Αυτό θα επιτευχθεί επιλέγοντας την κατάλληλη στρατηγική. Συγκεκριμένα στο Παράδειγμα 2.4.1 κάθε εταιρεία είχε να επιλέξει ανάμεσα σε ένα πλήθος πέντε στρατηγικών ανάλογα με την επιλογή της αντίπαλης εταιρείας. Η εταιρεία *I* πρέπει να επιλέξει την καλύτερη στρατηγική ρ_i και η εταιρεία *II* πρέπει να επιλέξει την καλύτερη σ_j. Μία μέθοδος με την οποία θα γίνει αυτό είναι η τεχνική **αρχή minimax-maximin**. Θα εξηγήσουμε στη συνέχεια την τεχνική αυτή μέσω του πίνακα κέρδους του Παραδείγματος 2.4.1.

Αν η εταιρεία *I* επιλέξει τη γνήσια στρατηγική ρ_1 μπορεί να κερδίσει 50%, 30%, 60%, 30% , 90% της ασφαλιστικής αγοράς ανάλογα με την επιλογή που θα αποφασίσει να κάνει η εταιρεία *II*.

Η εταιρεία *I* με τη στρατηγική ρ_1 γνωρίζει ότι θα κερδίσει τουλάχιστον 30% καθώς min{50%,30%,60%,30%, 90%} = 30%. Με την ίδια λογική για τη στρατηγική ρ_2 θα κερδίσει τουλάχιστον min{70%, 50%, 55%, 60% ,90%}=50% και για τη ρ_3 θα κερδίσει τουλάχιστον min{40%, 40%, 50%, 50%, 70%} = 40%, για τη ρ_4 θα κερδίσει τουλάχιστον 40% = {70%, 40%, 50%, 50%, 90%} ενώ τέλος χρησιμοποιώντας τη ρ_5 θα κερδίσει τουλάχιστον 10% = {10%, 10%, 30%, 10%, 50%}. Επομένως για μια λογική επιλογή στρατηγικής θα ήταν να επιδιώξει να μεγιστοποιήσει το ελάχιστο κατά περίπτωση κέρδος δηλαδή να επιλέξει τη στρατηγική ρ_3 στην οποία αντιστοιχεί το 50% = max{30%, 50%, 40%, 40%, 10%} της ασφαλιστικής αγοράς.

Οι παραπάνω αποδόσεις απεικονίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Εταιρεία *II* / Εταιρεία *I*	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	Ελάχιστο γραμμής	
ρ_1	50	30	60	30	90	30	
ρ_2	70	50	55	60	90	50	← τιμή maximin
ρ_3	40	40	50	50	70	40	
ρ_4	70	40	50	50	90	40	
ρ_5	10	10	30	10	50	10	
Μέγιστο στήλης	70	50	60	60	90		

↑

τιμή minimax

Πίνακας 2.5.1 Ο πίνακας κέρδους του παραδείγματος

Αντίστοιχα διαλέγοντας η εταιρεία *II* τη στρατηγική σ_1 έχει μέγιστη ζημία 70% = max{50%, 70%, 40%, 70%, 10%} και όμοια προκύπτουν οι μέγιστες ζημιές για τις υπόλοιπες στρατηγικές της. Επομένως η πιο ορθολογική απόφαση της εταιρείας *II* θα είναι να ελαχιστοποιήσει τη μέγιστη κατά περίπτωση ζημία επιλέγοντας 50% = min{70%, 50%, 60%, 60%, 90%}.

Άρα αν η εταιρεία *I* επιλέξει τη γνήσια στρατηγική ρ_2 μπορεί να κερδίσει τουλάχιστον $\max_i \min_j \alpha_{ij} = 50\%$ και την ίδια στιγμή η εταιρεία *II* μπορεί να την εμποδίσει να κερδίσει περισσότερες από $\min_j \max_i \alpha_{ij} = 50\%$ επιλέγοντας τη γνήσια στρατηγική σ_2.

Παρατηρούμε ότι $\max_i \min_j \alpha_{ij} = 50\% = \alpha_{ij} = \upsilon$ και άρα το παιχνίδι μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά τον βέλτιστο τρόπο όταν η εταιρεία I επιλέξει τη στρατηγική ρ_2 και η εταιρεία II επιλέξει τη στρατηγική σ_2.

Αν υπάρξει περίπτωση η εταιρεία I να επιλέξει οποιαδήποτε άλλη στρατηγική εκτός από τη ρ_2 θα ελαττωθεί η δυνατότητα να κερδίσει τουλάχιστον $\upsilon = 50\%$ και αν η εταιρεία II επιλέξει άλλη στρατηγική εκτός από τη σ_2 μεγαλώνει τη δυνατότητα του I να κερδίσει περισσότερα από $\upsilon = 50\%$.

Οι στρατηγικές στις οποίες καταλήξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν επιδέχονται καμία βελτίωση και όποια άλλη επιλογή και να κάνουν οι παίκτες θα μειωθεί η απόδοση τους. Για τον λόγο αυτό λέγονται **βέλτιστες γνήσιες στρατηγικές**, (best response pure strategies) και επειδή ισχύει η ισότητα

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \upsilon$$

το παιχνίδι λέγεται **αυστηρά ή γνήσια καθορισμένο**, **(**purely or strictly defined game).

Επιπλέον η βέλτιστη στρατηγική της εταιρείας I λέγεται **maximin στρατηγική** ενώ η βέλτιστη στρατηγική της εταιρείας II λέγεται **minimax στρατηγική**. Ο αριθμός υ που δηλώνει τη βέλτιστη ωφέλεια των δύο παικτών καλείται **τιμή του παιχνιδιού**, (game value).

Γενικά όμως σε ένα τυχαίο πινακικό παιχνίδι με πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ ισχύει ότι:

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} \leq \min_j \max_i \alpha_{ij} .$$

Όταν ισχύει γνήσια η ανισότητα, η εύρεση λύσης δεν είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί όπως προηγουμένως με την χρήση της αρχής minimax, δηλαδή όταν δεν μπορεί να επιτευχθεί η ισότητα μεταξύ της minimax και maximin στρατηγικής των δύο παικτών, τότε οι παίκτες αναγκαστικά θα στραφούν προς τη χρήση κάποιου τυχαίου μηχανισμού επιλογής στρατηγικών. Η λειτουργία του μηχανισμού αυτού, έγκειται στην έννοια των «τυχαιοποιημένων στρατηγικών».

2.6 Τυχαιοποιημένες στρατηγικές

Έχοντας λοιπόν γνώση της έννοιας των γνήσιων στρατηγικών, θα δούμε τώρα τον ρόλο των τυχαιοποιημένων στρατηγικών και πως εξυπηρετούν τους παίκτες να επιλέγουν αποφάσεις όταν οι πιθανότητες πραγματοποίησης τους δεν είναι 0 ή 1.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι μία ασφαλιστική εταιρεία εξετάζει αν θα συνάψει συμβόλαιο με νοσοκομειακές παροχές σε ένα άτομο πενήντα ετών. Εικάζει ότι στο χρονικό διάστημα [50,51] υπάρχει αυξημένη πιθανότητα να απαιτηθεί νοσηλεία του ασφαλισμένου όμως δεν είναι εφικτό να το προβλέψει με πιθανότητα ίση με 1 όπως πριν. Ως εκ τούτου θα πρέπει βάσει των δεδομένων που έχει από πίνακες επιβίωσης ή από στατιστικά δεδομένα για ανάγκη νοσηλείας στην ηλικιακή ομάδα 50 έως 51 ετών, να αξιολογήσει το ενδεχόμενο ο ασφαλισμένος να ασθενήσει ή να παραμείνει υγιής.

Επομένως με πιθανότητα p θα θεωρήσει ότι θα αρρωστήσει, που είναι η μία καθαρή στρατηγική, και με πιθανότητα 1-p θα θεωρήσει ότι δεν θα κάνει χρήση των νοσοκομειακών καλύψεών του, που είναι η άλλη καθαρή στρατηγική. Αυτή η συνολική επιλογή που περιλαμβάνει τη στάθμιση δύο άλλων επιλογών λέγεται **μεικτή ή τυχαιοποιημένη στρατηγική**, (mixed strategy).

Στο προηγούμενο Παράδειγμα 2.4.1 ίσχυε η ισότητα

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij}$$

και η επιλογή στρατηγικών ήταν εύκολη υπόθεση. Όμως στην πλειονότητα των παιχνιδιών ισχύει η γνήσια ανισότητα

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} < \min_j \max_i \alpha_{ij}$$

γεγονός που καθιστά την εύρεση γνήσιων βέλτιστων στρατηγικών αδύνατη και έτσι οι παίκτες θα καταφύγουν αναγκαστικά στη χρήση τυχαιοποιημένων στρατηγικών. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα για να γίνουν κατανοητά όσα προαναφέρθηκαν.

Παράδειγμα 2.6.1 Βάσει του παραδείγματος των Konstantinides, Mayo, Priest (2003), ένας ασφαλισμένος είναι κάτοχος ενός προγράμματος που μεταξύ των καλύψεων δύο από αυτές που προβλέπουν τη μεγαλύτερη αποζημίωση. Η πρώτη περίπτωση αφορά αποζημίωση αν συμβεί πρόβλημα υγείας που αποτρέπει την επιστροφή του στην εργασία του. Η δεύτερη αφορά εφάπαξ καταβολή ποσού ίσου με τοτελευταίο ετήσιο εισόδημα του υπολογισμένο για πέντε έτη και δίνεται στον ασφαλισμένο αν του συμβεί ατύχημα που επίσης του απαγορεύει να εργαστεί. Το ετήσιο εισόδημα που αναφέρεται στο εκκαθαριστικό σημείωμα του οικονομικού έτους 2014 ανέρχεται στα 12.000€ και ο ασφαλισμένος δηλώνει αναληθώς ότι λαμβάνει ετήσια 20.000€. Λόγω των χρονικών περιορισμών που έχουν τα ασφαλιστικά συμβόλαια μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων, δεν είναι εφικτό ο ασφαλισμένος να δηλώσει και τα δύο γεγονότα ταυτόχρονα ή με μικρή χρονική διαφορά, γι΄αυτό πρέπει να επιλέξει ένα από τα δύο.

Αν λοιπόν καταφέρει να πείσει την εταιρεία ότι πάσχει από κάποιο πρόβλημα υγείας θα αποζημιωθεί με το ποσό των 150.000€ . Αν στην περίπτωση ατυχήματος, καταφέρει να πείσει την εταιρεία ότι είχε εισόδημα μεγαλύτερο του πραγματικού θα λάβει αποζημίωση ποσού 100.000€. Όμως αν η ασφαλιστική εταιρεία αποδείξει ότι έχει συμβεί απάτη τότε ο ασφαλισμένος δεν θα λάβει κανένα ποσό όπως είναι αναμενόμενο. Στατιστικά ο ασφαλιστής έχει 100% επιτυχία να αποκαλύπτει την απάτη στην περίπτωση δήλωσης αναληθούς εισοδήματος. Αντίθετα στην περίπτωση δήλωσης ψεύτικου προβλήματος υγείας έχει μόνο 50% ποσοστό επιτυχίας όταν ελέγξει αν όντως υφίσταται πρόβλημα υγείας.

Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις αποδόσεις της εταιρείας:

Ασφαλισμένος / Εταιρεία	σ_1	σ_2
ρ_1	0	150.000
ρ_2	100.000	75.000

Πίνακας 2.6.1 Πίνακας αποδόσεων

Η εταιρεία έχει τις εξής στρατηγικές:

ρ_1: ερευνά τη δήλωση αναληθούς εισοδήματος

ρ_2 : ερευνά τη δήλωση αναληθούς προβλήματος υγείας.

Αντίστοιχα ο ασφαλισμένος έχει τις στρατηγικές:

σ_1: δήλωση αναληθούς εισοδήματος

σ_2 : δήλωση αναληθούς προβλήματος υγείας.

Οπτικά από τον πίνακα μπορούμε να δούμε ότι δεν μπορούμε να καταλήξουμε είτε για τον ένα παίκτη είτε για τον άλλο ποια είναι η καλύτερη στρατηγική. Κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί ότι είναι καλύτερα για τον ασφαλισμένο να δηλώσει ότι πάσχει από κάποιο πρόβλημα υγείας καθώς ο μέσος όρος των αποζημιώσεων του είναι 112.500€ έναντι της μέσης αποζημίωσης από τη δήλωση ψεύτικου εισοδήματος που ανέρχεται στο ποσό των 50.000€. Όμως αν πράγματι επιλέξει να δηλώσει ψεύτικο πρόβλημα υγείας και η ασφαλιστική εταιρεία το ελέγξει θα πάρει μόνο 75.000€ που είναι πολύ λιγότερα από τον μέσο όρο.

Η επιλογή στρατηγικής βάσει του μέσου όρου των αποδόσεων δεν είναι σωστή μέθοδος επιλογής καθώς οι αποφάσεις του αντιπάλου εξαρτώνται από τις επιλογές του παίκτη που επέλεξε πρώτος πως θα κινηθεί. Στην προκειμένη περίπτωση αν ο ασφαλισμένος επιλέξει μία συγκεκριμένη στρατηγική τότε σίγουρα η ασφαλιστική θα διερευνήσει αυτή τη συγκεκριμένη στρατηγική. Όμοια αν η ασφαλιστική επιλέξει πρώτη ποια αιτία αποζημίωσης θα ερευνήσει τότε ο ασφαλισμένος θα επιλέξει ως αιτία αποζημίωσης αυτή που δεν τελεί υπό έρευνα. Επομένως όποια στρατηγική και να επιλέξει ο ένας παίκτης με πιθανότητα ίση με τη μονάδα, σίγουρα ο αντίπαλος θα μπορεί να επιλέξει στρατηγική που να του δίνει προβάδισμα.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τι θα γινόταν αν οι παίκτες διάλεγαν στρατηγικές τυχαία δηλαδή με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας. Έστω ότι ο ασφαλισμένος για τις δύο επιλογές του είχε αντίστοιχα δύο λαχνούς και διάλεγε τυχαία έναν από τους δύο. Σε αυτή την περίπτωση η ασφαλιστική εταιρεία, που δεν θα γνώριζε το αποτέλεσμα, θα είχε απόδοση για κάθε μία από τις στρατηγικές της, ίση με το σταθμισμένο μέσο όρο των αποδόσεων που προέκυψαν από κάθε μία από τις επιλογές του ασφαλισμένου.

Αν λοιπόν ο ασφαλισμένος τις μισές φορές που θα διαλέξει το λαχνό 1, επιλέγει τη μία στρατηγική και τις άλλες μισές φορές, δηλαδή όταν διαλέγει τον λαχνό 2, επιλέγει την άλλη στρατηγική τότε οι αποδόσεις της εταιρείας είναι:

- για τη στρατηγική ρ_1 η απόδοση είναι

$$\frac{1}{2} \text{ των φορών} \times 0€ + \frac{1}{2} \text{ των φορών} \times 150.000€ = 75.000€$$

- για τη στρατηγική ρ_2 η απόδοση είναι

$$\frac{1}{2} \text{ των φορών} \times 100.000€ + \frac{1}{2} \text{ των φορών} \times 75.000€ = 87.500€$$

και η εταιρεία καταλήγει να αποφασίζει πάντα να διερευνά την ορθότητα της δήλωσης του εισοδήματος αφού θα καταβάλλει μικρότερη αποζημίωση.

Αντίστοιχα ας υποθέσουμε ότι ο ασφαλισμένος επιλέγει να δηλώσει ψεύτικο εισόδημα στο 20% των φορών -δηλαδή χρησιμοποιεί 10 λαχνούς αριθμημένους με 1,2,…,10 και αν επιλεγούν οι αριθμοί 1 ή 2 δηλώνει ψεύτικο εισόδημα- τότε οι αποδόσεις της εταιρείας περιγράφονται ακολούθως.

- για τη στρατηγική ρ_1 η απόδοση είναι

  20% των φορών $\times$ 0€ + 80% των φορών $\times$ 150.000€ = 120.000€

- γιατηστρατηγική ρ_2 η απόδοση είναι

  20%τωνφορών $\times$ 100.000€ + 80% των φορών $\times$ 75.000€ =80.000€

Στην περίπτωση αυτή η εταιρεία καταλήγει ότι πάντα θα ερευνά την ύπαρξη προβλήματος υγείας καθώς έτσι θα αποδίδει μικρότερη αποζημίωση στον ασφαλισμένο. Έτσι λοιπόν η απόδοση του ασφαλισμένου από μία 20:80 τυχαιοποιημένη στρατηγική είναι 80.000€.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η επιλογή της δεύτερης τυχαιοποιημένης στρατηγικής είναι καλύτερη από την πρώτη. Προκειμένου να εξετάσουμε αν υπάρχει και άλλη στρατηγική καλύτερη από την 20:80 ας δούμε το πρόβλημα θεωρώντας ότι η πιθανότητα ο ασφαλισμένος να απαιτήσει αποζημίωση δηλώνοντας ψεύτικο εισόδημα είναι ίση με p. Τότε η απόδοση της ασφαλιστικής:

- αν αποφασίσει να διερευνήσει την ορθότητα δήλωσης εισοδήματος είναι

$$p \times 0 + (1\text{-}p) \times 150.000 \qquad (1)$$

- αν αποφασίσει να διερευνήσει την ορθότητα δήλωσης προβλήματος υγείας είναι

$$p \times 100.000 + (1\text{-}p) \times 75.000 \qquad (2)$$

Αν η ασφαλιστική εταιρεία θέλει να είναι αντικειμενική θα πρέπει οι δύο παραπάνω αποδόσεις να είναι ίσες επομένως θα έχουμε:

$$p \times 0 + (1\text{-}p) \times 150.000 = p \times 100.000 + (1\text{-}p) \times 75.000$$

Η παραπάνω ισότητα δίνει ως αποτέλεσμα $p = \frac{3}{7}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) ή στη σχέση (2) η μέση απόδοση ίση με 85.714€. Αυτό σημαίνει πως, αν ο ασφαλισμένος δηλώσει ψεύτικο εισόδημα τις 3 από τις 7 φορές που θα αποπειραθεί να διαπράξει απάτη εις βάρος της ασφαλιστικής εταιρείας θα αναμένει μέση απόδοση 85.714€ και θα είναι η καλύτερη απόδοση που μπορεί να επιτύχει. Σε περίπτωση που επιλέξει στρατηγικές με οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό πιθανοτήτων τότε η ασφαλιστική εταιρεία θα βρίσκεται στην πλεονεκτική θέση να επιλέξει στρατηγική που θα δίνει αποζημίωση μικρότερη των 85.714€ και όπως είναι λογικό θα επιλέγει αυτή και μόνο τη στρατηγική.

Όμοια αν p' είναι η πιθανότητα η ασφαλιστική εταιρεία να διερευνήσει το εισόδημα τότεη απόδοση του ασφαλισμένου:

- αν δηλώσει ψεύτικο εισόδημα είναι:

$$p' \times 0 + (1-p') \times 100.000 \quad (3)$$

- αν δηλώσει ψεύτικο πρόβλημα υγείας είναι:

$$p' \times 150.000 + (1-p') \times 75.000 \quad (4)$$

Αντίστοιχα με πριν αν η ασφαλιστική εταιρεία θέλει να είναι αντικειμενική πρέπει οι δύο παραπάνω ποσότητες να είναι ίσες επομένως θα έχουμε:

$$p' \times 0 + (1-p') \times 100.000 = p' \times 150.000 + (1-p') \times 75.000$$

Η παραπάνω ισότητα δίνει ως αποτέλεσμα $p' = \frac{1}{7}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (3) ή στη σχέση (4) η μέση απόδοση είναι ίση με 85.714€.

Όπως πριν στην περίπτωση του ασφαλισμένου έτσι και στην περίπτωση της ασφαλιστικής εταιρείας, αν στις 7 φορές που υποβληθεί αίτημα καταβολής αποζημίωσης επιλέξει τη μία φορά από αυτές να ελέγξει το ποσό του εισοδήματος θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι πρέπει να δώσει ως αποζημίωση ποσό 85.714€. Αν όμως επιλέξει άλλο συνδυασμό πιθανοτήτων τότε ο ασφαλισμένος θα βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση καθώς θα μπορεί να διεκδικήσει αποζημίωση μεγαλύτερη των 85.714€. Αν η ασφαλιστική εταιρεία αντί για την πιθανότητα $p' = \frac{1}{7}$ χρησιμοποιήσει πιθανότητα $p' = \frac{1}{2}$, ο ασφαλισμένος δηλώνοντας πρόβλημα υγείας θα αυξήσει την αποζημίωσή του στο ποσό των 112.500€.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από το προηγούμενο παράδειγμα, πως αν ο παίκτης *I* σε ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος, επιλέξει να χρησιμοποιήσει τυχαιοποιημένες στρατηγικές σε συνάρτηση με τις αποδόσεις του αντιπάλου, εξασφαλίζει ότι ο μέσος όρος των αποδόσεων του δεν θα πέσει κάτω από ένα ελάχιστο ποσό. Αν ο παίκτης *II* δεν επιλέξει επίσης τη βέλτιστη στρατηγική του τότε ο παίκτης *I* θα έχει το πλεονέκτημα να επιτυγχάνει απόδοση μεγαλύτερου ποσού από αυτό που θα προέκυπτε από τη χρήση τυχαιοποιημένων στρατηγικών.

Γενικά στην ασφάλιση οι τυχαιοποιημένες στρατηγικές χρησιμοποιούνται:

α) κατά τη διαδικασία underwriting

β) για να ληφθεί απόφαση σχετικά με το αν μια υπόθεση πρέπει να ακολουθήσει τη δικαστική οδό

γ) για τη διενέργεια εσωτερικού ελέγχου αναφορικά με τη διαδικασία του underwriting και την ορθότητα των απαιτήσεων αποζημίωσης που εμφανίζονται.

Μετά λοιπόν την επεξήγηση που δόθηκε για τη σημασία της χρήσης τυχαιοποιημένων στρατηγικών θα δώσουμε τον τυπικό ορισμό τους. Στη συνέχεια θα συμβολίσουμε με $T_{\mu\nu}$ το σύνολο των πινάκων με διαστάσεις $\mu \times \nu$.

Ορισμός 2.6.1 Σε ένα πινακικό παιχνίδι με πίνακα κέρδους $A = (\alpha_{ij}) \in T_{\mu\nu}$, κάθε διάνυσμα στήλη $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_\mu)'$ με μη αρνητικές συντεταγμένες που ικανοποιούν τη σχέση $x_1 + \ldots + x_\mu = 1$ ονομάζεται **μικτή ή τυχαιοποιημένη στρατηγική του παίκτη *I***. Αντίστοιχα κάθε διάνυσμα στήλη $\tilde{y} = (y_1,\ldots,y_\nu)'$ με μη αρνητικές συντεταγμένες και $y_1 + \ldots + y_\nu = 1$ καλείται **μικτή ή τυχαιοποιημένη στρατηγική του παίκτη *II***.

Οι αριθμοί x_i, y_j εκφράζουν τις πιθανότητες (ή ισοδύναμα τις σχετικές συχνότητες σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων) με τις οποίες ο παίκτης *I* επιλέγει τη στρατηγική ρ_i και ο παίκτης *II* διαλέγει τη στρατηγική σ_j.

Παρατηρούμε ότι οι γνήσιες στρατηγικές του παίκτη *I* αντιστοιχούν στα μοναδιαία διανύσματα $\tilde{\xi}_\iota = (0,\ldots,1,\ldots,0)' \in T_\mu$ που έχουν 1 στην *i*- οστή συντεταγμένη και 0 σε όλες τις υπόλοιπες. Οι γνήσιες στρατηγικές του παίκτη *II* αντιστοιχούν στα μοναδιαία διανύσματα $\tilde{n}_j = (0,\ldots,1,\ldots,0)' \in T_\nu$.

Μία ακόμα έννοια που είδαμε στο παράδειγμα είναι αυτή της «συνάρτησης αμοιβής» που εκφράζει την πληρωμή ενός παίκτη και εξαρτάται και από τη δική του επιλογή αλλά και από την επιλογή του αντιπάλου του. Η έννοια αυτή αποσαφηνίζεται με τον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 2.6.2 Σε κάθε ζευγάρι τυχαιοποιημένων στρατηγικών των δύο παικτών αντιστοιχεί η **συνάρτηση αμοιβής**, (payoff function), του παίκτη *I* η οποία εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος του όταν ο *I* ακολουθεί τη στρατηγική $\tilde{x}$ και ο *II* τη στρατηγική $\tilde{y}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}\,' \mathrm{A}\, \tilde{y} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} x_i y_j$$

Η συνάρτηση αμοιβής για τις γνήσιες συντεταγμένες είναι της μορφής:

$$E(\tilde{\xi}_i, \tilde{n}_j) = \alpha_{ij}$$

Προσπαθώντας να λύσουμε ένα παιχνίδι χρησιμοποιώντας τυχαιοποιημένες στρατηγικές είδαμε από το Παράδειγμα 2.6.1 ότι μπορούμε να έχουμε παραπάνω από μία επιλογές οπότε είναι λογικό τότε να επιλέξουμε την καλύτερη στρατηγική από αυτές που είναι διαθέσιμες. Η επιλογή αυτή στηρίζεται στη χρήση των κριτηρίων βελτιστότητας όπως θα δούμε αμέσως.

2.7 Κριτήρια βελτιστότητας τυχαιοποιημένων στρατηγικών

Το προηγούμενο παράδειγμα έδειξε πως μπορεί σε ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος να προκύψει πλήθος από τυχαιοποιημένες στρατηγικές. Επειδή ο σκοπός της Θεωρίας Παιγνίων είναι να μεγιστοποιεί το κέρδος ή να ελαχιστοποιεί τη ζημία, δεν αρκεί να βρούμε μία οποιαδήποτε τυχαιοποιημένη στρατηγική αλλά την καλύτερη όλων.

Ας θεωρήσουμε ένα πινακικό παιχνίδι με πίνακα κέρδους για τον παίκτη I τον πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in T_{\mu\nu}$. Ο παίκτης I επιλέγει τη μικτή στρατηγική $\tilde{x} \in T_{\mu}$ και συμβολίζουμε το χειρότερο κέρδος που μπορεί να επιτύχει με $\varphi(\tilde{x}) = \min_{\tilde{y}} E(\tilde{x}, \tilde{y})$. Η συνάρτηση $\varphi(\tilde{x})$ λαμβάνεται για όλες τις τυχαιοποιημένες στρατηγικές $\tilde{y} \in T_{\nu}$ που αφορούν τον παίκτη *II*. Η καλύτερη λύση για τον παίκτη I θα προέλθει από την εκλογή της στρατηγικής $\tilde{x}_0$ που μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος δηλαδή :

$$\varphi(\tilde{x}_0) = \max_{\tilde{x}} \varphi(\tilde{x})$$

ή ισοδύναμα

$$\min_{\tilde{y}} E(\tilde{x}_0, \tilde{y}) = \max_{\tilde{x}} \min_{\tilde{y}} E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{\upsilon}.$$

Όμοια σκεπτόμενος ο παίκτης II θα διαλέξει τη στρατηγική $\tilde{y}_0 \in T_\nu$ η οποία ελαχιστοποιεί τη μέγιστη ζημία δηλαδή:

$$\max_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y}_0) = \min_{\tilde{y}} \max_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y}) = \underline{\upsilon}.$$

Ορισμός 2.7.1 Η ποσότητα

$$\overline{\upsilon} = \min_{\tilde{y}} E(\tilde{x}_0, \tilde{y}) = \max_{\tilde{x}} \min_{\tilde{y}} E(\tilde{x}, \tilde{y})$$

καλείται **άνω τιμή του παιχνιδιού**, (game upper value).

Ορισμός 2.7.2 Η ποσότητα

$$\underline{\upsilon} = \max_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y}_0) = \min_{\tilde{y}} \max_{\tilde{x}} E(\tilde{x}, \tilde{y})$$

καλείται **κάτω τιμή του παιχνιδιού**, (game lower value).

Γενικά αποδεικνύεται ότι η κάτω τιμή $\underline{\upsilon}$ ενός πινακικού παιχνιδιού είναι μικρότερη ή ίση από την άνω τιμή $\overline{\upsilon}$ δηλαδή $\underline{\upsilon} \leq \overline{\upsilon}$.

Ορισμός 2.7.3 Αν ισχύει η ισότητα $\overline{\upsilon} = \underline{\upsilon} = \upsilon$ η κοινή τιμή υ θα λέγεται **τιμή του παιχνιδιού**, (value of the game) και οι στρατηγικές βάσει των οποίων επιτυγχάνεται αυτή η τιμή θα λέγονται **βέλτιστες maximin και minimax στρατηγικές** (optimal maximin and minimax strategies) των παικτών I και II αντίστοιχα.

Η άνω και κάτω τιμή του παιχνιδιού μας βοηθούν τα φράξουμε μονομερώς τις αναμενόμενες αποδόσεις τους ώστε σε συνδυασμό τις βέλτιστες maximin και minimax στρατηγικές τους να καταλήξουμε στον εντοπισμό της τιμής του παιχνιδιού, αν βέβαια αυτή υπάρχει. Στον εντοπισμό της τιμής ενός παιχνιδιού θα μας βοηθήσουν δύο θεώρηματα και το πόρισμα που ακολουθούν και είναι γνωστά από τη Θεωρία Παιγνίων.

Θα ξεκινήσουμε με την αναφορά στο περίφημο Θεώρημα Minimax το οποίο έχοντας σαν προυπόθεση την ύπαρξη μεικτών στρατηγικών εξασφαλίζει την τιμή του παιχνιδιού.

Θεώρημα 2.7.1 «Θεώρημα Minimax» Μηλολιδάκης, (2002) Σε κάθε πινακικό παιχνίδι με πεπερασμένες μεικτές στρατηγικές η κάτω και άνω τιμή $\underline{\upsilon}$ και $\overline{\upsilon}$ συμπίπτουν δηλαδή η τιμή του πινακικού παιχνιδιού υπάρχει πάντα και ισχύει

$$\upsilon = \underline{\upsilon} = \overline{\upsilon}.$$

Θεώρημα 2.7.2 Σε κάθε πινακικό παιχνίδι $A = (\alpha_{ij}) \in T_{\mu\nu}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) υπάρχουν $\tilde{x}_0 \in T_\mu$, $\tilde{y}_0 \in T_\nu$ και $\upsilon \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_j) \geq \upsilon \text{ για κάθε γνήσια στρατηγική } \tilde{n}_j \in T_\nu \text{ του παίκτη } II$$

και

$$E(\tilde{\xi}_\iota, \tilde{y}_0) \leq \upsilon \text{ για κάθε γνήσια στρατηγική } \tilde{\xi}_\iota \in T_\mu \text{ τουπαίκτη } I$$

β) το παιχνίδι έχει τιμή υ και οι $\tilde{x}_0 \in T_\mu, \tilde{y}_0 \in T_\nu$ είναι οι βέλτιστες maximin και minimax στρατηγικές, δηλαδή

$$\upsilon = \min_{\tilde{n}_j} \max_{\tilde{\xi}_\iota} E(\tilde{\xi}_\iota, \tilde{n}_j) = \max_{\tilde{\xi}_\iota} \min_{\tilde{n}_j} E(\tilde{\xi}_\iota, \tilde{n}_j).$$

Πόρισμα 2.7.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ένα πινακικό παιχνίδι τιμή $\overline{\upsilon} = \underline{\upsilon} = \upsilon$ είναι να υπάρχουν στρατηγικές $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$E(\tilde{\xi}_\iota, \tilde{y}_0) \leq E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \leq E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_j)$$

όπου $\tilde{\xi}_\iota$, $i = 1,2,\ldots,\mu$ και $\tilde{n}_j$, $j = 1,2,\ldots,\nu$ είναι οι γνήσιες στρατηγικές για τους παίκτες I και II αντίστοιχα και $E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \upsilon$.

Αναπτύσσοντας το ακόλουθο παράδειγμα θα δούμε την εφαρμογή του θεωρήματος και του πορίσματος χρησιμοποιώντας γνήσιες στρατηγικές ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει η τιμή του παιχνιδιού και ποια είναι αυτή.

Παράδειγμα 2.7.1 Ένας πελάτης X σκοπεύοντας να ασφαλίσει την κατοικία του ζητά από μία ασφαλιστική εταιρεία να δώσει προσφορές. Συζητώντας για τις καλύψεις που θέλει, καταλήγουν σε δύο προτάσεις ασφάλισης που αφορούν πρόκληση ζημιών από σεισμό, φωτιά και κλοπή περιεχομένου δεδομένου ότι στη συγκεκριμένη κατοικία υπάρχουν τιμαλφή όπως πίνακες και κοσμήματα συνολικής αξίας 600.600€.

Η πρώτη πρόταση έχει ετήσια ασφάλιστρα 400€. Προβλέπει ότι αν συμβούν ζημιές από σεισμό αποζημιώνεται ο πελάτης μέχρι το ποσό των 300.400€, αν προκληθούν καταστροφές από φωτιά αποζημιώνεται μέχρι το ποσό των 600.400€. Τέλος αν συμβεί κλοπή ο ασφαλισμένος έχει απαλλαγή μέχρι του ποσού των 99.600€ και η ασφαλιστική εταιρεία θα τον αποζημιώσει με την υπόλοιπη αξία του περιεχομένου δηλαδή με το ποσό των 500.000€.

Η δεύτερη πρόταση ασφάλισης στοιχίζει ετησίως 600€ και παρέχει αποζημίωση 400.600€ για καταστροφές από σεισμό, 300.600€ για καταστροφές από φωτιά και αποζημιώνει εξ ολοκλήρου τη συνολική αξία του ασφαλισμένου περιεχομένου σε περίπτωση κλοπής. Επιπλέον, όποιο συμβόλαιο και να επιλέξει ο ασφαλισμένος, αποζημιώνεται μόνο για ένα κίνδυνο εντός του έτους.

Ο πελάτης X πρέπει να αποφασίσει ποιο ασφαλιστήριο είναι πιο συμφέρον να αγοράσει δεδομένου ότι η κατοικία του προστατεύεται σε εικοσιτετράωρη βάση από ιδιωτική εταιρεία παροχής προστασίας και άρα υπάρχει θεωρητικά μικρό ενδεχόμενο κλοπής.

Βάσει των παραπάνω δεδομένων ο πίνακας κέρδους για τον υποψήφιο ασφαλισμένο είναι ο ακόλουθος (οι τιμές εκφράζονται σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ):

Εταιρεία / Ασφαλισμένος	Σεισμός	Φωτιά	Κλοπή Περιεχομένου	Ασφάλιστρα
1η πρόταση ασφάλισης	3	6	-1	400
2η πρόταση ασφάλισης	4	3	6	600

Πίνακας 2.7.1 Πίνακας κέρδους του παραδείγματος

Αν ο πελάτης επιλέξει την πρώτη πρόταση ασφάλισης πληρώνει το κόστος του συμβολαίου δηλαδή 400€, αν συμβεί σεισμός θα αποζημιωθεί με το ποσό των 300.400€ άρα το κέρδος του είναι 300.400€-400€ = 300.000€ = 3 εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ.

Όμοια αν συμβεί φωτιά θα λάβει 600.400€ και πάλι θα έχει πληρώσει 400€ οπότε η απόδοσή του θα είναι 600.400€-400€ = 600.000€ = 6 εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ.

Αναφορικά με την κλοπή περιεχομένου έχει απαλλαγή μέχρι το ποσό των 99.600€ δηλαδή αν συμβεί κλοπή ο ασφαλισμένος θα πρέπει να καλύψει ο ίδιος το ποσό των 99.600€ και η ασφαλιστική εταιρεία θα καλύψει τη διαφορά. Επομένως ο ασφαλισμένος σε αυτή την περίπτωση πρέπει να πληρώσει 99.600€ πλέον των 400€ δηλαδή 100.000€ = μία εκατοντάδα χιλιάδες ευρώ. Δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε ζημία, το ποσό αυτό θα πρέπει να έχει αρνητικό πρόσημο στον πίνακα κέρδους.

Αντίστοιχα προκύπτουν τα ποσά για τη δεύτερη στρατηγική του υποψήφιου ασφαλισμένου που είναι η επιλογή της δεύτερης πρότασης ασφάλισης. Αξίζει να αναφερθεί ότι με αυτό το ασφαλιστήριο, αν συμβεί κλοπή ο ασφαλισμένος καλύπτεται πλήρως οπότε η απόδοσή του είναι 600.600€-600€ =600.000€ = 6 εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ.

Οπτικά μπορούμε να δούμε ότι δεν υπερισχύει η μία στρατηγική του ασφαλισμένου έναντι της άλλης όπως αντίστοιχα συμβαίνει και για την κάλυψη ανά κίνδυνο.

Συνεπώς οδηγούμαστε στη χρήση τυχαιοποιημένων στρατηγικών. Αν επιλέξουμε

$$\tilde{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)' \quad \text{και} \quad \tilde{y} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

τότε χρησιμοποιώντας τις γνήσιες στρατηγικές $\tilde{\xi}_i$ και $\tilde{n}_j$ θα έχουμε:

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_1) = \tilde{x}_0{}' A \tilde{n}_1 = \frac{15}{4}$$

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_2) = \tilde{x}_0{}' A \tilde{n}_2 = \frac{15}{4}$$

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_3) = \tilde{x}_0{}' A \tilde{n}_3 = \frac{17}{4}$$

και αντίστοιχα:

$$E(\tilde{\xi}_1, \tilde{y}_0) = \tilde{\xi}_1{}' A \tilde{y}_0 = \frac{15}{4}$$

$$E(\tilde{\xi}_2, \tilde{y}_0) = \tilde{\xi}_2{}' A \tilde{y}_0 = \frac{15}{4}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\mathrm{E}(\tilde{\xi}_\iota, \tilde{y}_0) \leq \frac{15}{4} \leq \mathrm{E}(\tilde{x}_0, \tilde{n}_j),\ i=1,2,3 \text{ και } j=1,2$$

και άρα οι $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$ είναι οι βέλτιστες στρατηγικές των δύο παικτών και η τιμή του παιχνιδιού είναι $\frac{15}{4}$.

Είδαμε λοιπόν πως οι γνήσιες στρατηγικές σε συνδυασμό με τη χρήση του παραπάνω θεωρήματος και του σχετικού πορίσματος, μας βοήθησαν φράξουμε μονομερώς την αναμενόμενη απόδοση του κάθε παίκτη ώστε να εντοπίσουμε την άνω και κάτω τιμή του παιχνιδιού και τελικά να βρεθούν οι βέλτιστες στρατηγικές των παικτών αλλά και η τιμή του παιχνιδιού διότι πληρούνται οι προυποθέσεις του Θεωρήματος 2.7.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επίλυση παιγνίων μηδενικού αθροίσματος

3.1 Η δομή του παιχνιδιού μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών

Η ενότητα αυτή αφορά την περιγραφή των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος και τους πιθανούς τρόπους επίλυσής τους.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος το κέρδος για τον ένα παίκτη αντιστοιχεί σε ταυτόχρονη και ισόποση απώλεια για τον άλλο. Είναι προφανές λοιπόν ότι είναι αυστηρά ανταγωνιστικά και αποκλείεται το ενδεχόμενο της οποιαδήποτε συνεργασίας μεταξύ των παικτών.

Ο John Von Neumann το 1928 δημοσίευσε μια μελέτη γύρω από τα παιχνίδια αυτά θεμελιώνοντας ένα βασικό τομέα της Θεωρίας Παιγνίων. Η συνεργασία του με τον οικονομολόγο Oscar Morgenstern συνετέλεσε στη συγγραφή του βιβλίου «Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά» και στην έκδοση του το 1944, αποτελώντας σημείο αναφοράς στη διεθνή βιβλιογραφία.

Ο John Von Neumann εφάρμοσε τη θεωρία του στον τομέα της οικονομίας, της πολιτικής και της πολεμικής στρατηγικής. Συγκεκριμένα προσπάθησε να μοντελοποιήσει τις σχέσεις Αμερικής και Ε.Σ.Σ.Δ κατά τη διάρκεια του Ψυχρού Πολέμου βλέποντας αυτό το γεγονός ως ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες. Προέβλεψε ότι, όταν η Σοβιετική Ένωση θα κατασκεύαζε ατομική βόμβα, θα ξεκινούσε φρενήρης ανταγωνισμός πυρηνικού εξοπλισμού και για την αποφυγή του ενδεχομένου αυτού πρότεινε στην Αμερική να βομβαρδίσει με πυρηνικά την Ε.Σ.Σ.Δ. για προληπτικούς λόγους κάτι που δεν έγινε αποδεκτό.

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια, ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά παραδείγματα παιχνιδιού μηδενικού αθροίσματος, Rasmussen, (2001), βγαλμένο από γεγονότα που σημάδεψαν την παγκόσμια ιστορία, ώστε να δείξουμε τον τρόπο σκέψης και λήψης αποφάσεων αλλά και το πώς απεικονίζεται ο πίνακας κέρδους που του αντιστοιχεί.

Το παιχνίδι τοποθετείται χρονικά στον Μάρτιο του 1943, κατά τη διάρκεια του Β Παγκόσμιου Πολέμου, στον νότιο Ειρηνικό ωκεανό στο αρχιπέλαγος Μπίσμαρκ. Οι Αμερικάνοι έχουν ανακαταλάβει την περιοχή και ο Ιάπωνας στρατηγός Imamura έχει λάβει εντολή να στείλει εκεί στρατεύματα. Ήταν η μόνη επιλογή να φτάσουν δυνάμεις από τη θάλασσα, καθώς δεν υπήρχαν χερσαίοι δρόμοι και οι δυνάμεις ενίσχυσης των Ιαπώνων θα έπρεπε να προσγειωθούν σε πολύ μεγάλη απόσταση από το σημείο που θα συναντούσαν τους ομοεθνείς τους. Επιπλέον θα έπρεπε να διασχίσουν αποστάσεις στα βουνά και στη ζούγκλα. Οι Αμερικάνοι κατάφεραν και αποκρυπτογράφησαν τα κωδικοποιημένα μηνύματα που αφορούσαν τις συνομιλίες των Ιαπώνων και καταστρώνοντας την στρατηγική αντιμετώπισής τους είδαν ότι ο ανεφοδιασμός ήταν εφικτός να γίνει μόνο μέσω δύο θαλάσσιων δρόμων, ο ένας από τον Βορρά και ο άλλος από τον Νότο. Το ταξίδι και στις δύο περιπτώσεις είχε διάρκεια τριών ημερών και τα δύο εχθρικά μέρη είχαν εκτιμήσει ότι οι βομβαρδισμοί θα διαρκέσουν δύο ημέρες.

Ο επικεφαλής των Αμερικανών George Kenney, για να διατηρήσει την υπεροχή του στην περιοχή ήθελε να βομβαρδίσει τις δυνάμεις που θα έστελνε ο εχθρός. Ο Imamura έπρεπε να επιλέξει μεταξύ της συντομότερης βόρειας διαδρομής ή της μακρύτερης νότιας διαδρομής και ο Kenney έπρεπε να επιλέξει που θα στείλει τα αεροπλάνα να ψάξουν για τους Ιάπωνες. Ο χρόνος πλεύσης είναι 3 ημέρες.

Το παιχνίδι λοιπόν σκιαγραφείται ως εξής: έχει δύο παίκτες, τους Kenney και Imamura ή Αμερικάνους και Ιάπωνες, οι οποίοι έχουν ίδιο σύνολο ενεργειών (Βορράς, Νότος) και η απώλεια του ενός μέρους είναι κέρδος για το άλλο.

Μιλώντας τώρα για τις στρατηγικές τους έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις όπως τις αναφέρει η ιστορία:

- αν οι Αμερικάνοι επιλέξουν βόρεια κατεύθυνση και εντοπίσουν τους Ιάπωνες μπορούν να στείλουν κατ΄ευθείαν δυνάμεις να τους βομβαρδίσουν αλλά μία μέρα εκ των τριών δεν θα είναι εφικτό λόγω κακοκαιρίας, άρα έχουν 2 ημέρες διαθέσιμες για βομβαρδισμό.
- αν οι Αμερικάνοι επιλέξουν βόρεια κατεύθυνση και οι Ιάπωνες κινούνται νότια τότε χάνουν μία μέρα άρα πάλι έχουν 2 διαθέσιμες μέρες βομβαρδισμού
- αν οι Αμερικάνοι θα επιλέξουν νότια κατεύθυνση και οι Ιάπωνες κινηθούν νότια τότε έχουν και τις 3 μέρες διαθέσιμες για βομβαρδισμό

- αν οι Αμερικάνοι έψαχναν νότια και οι Ιάπωνες βρίσκονταν βόρεια τότε είχαν μόνο 1 μέρα διαθέσιμη.

Προκύπτει λοιπόν ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος με τον ακόλουθο πίνακα αποδόσεων ο οποίος εξαρτάται από τις καιρικές συνθήκες και από το πλήθος των ημερών που θα διαρκέσει η μάχη λόγω της καλής ή κακής ορατότητας.

ΙΑΠΩΝΕΣ / ΑΜΕΡΙΚΑΝΟΙ	*B*	*N*
B	2	2
N	1	3

Πίνακας 3.1.1 Πίνακας απόδοσης της μάχης

Είδαμε λοιπόν πως οι αποδόσεις των παικτών ενός παιχνιδιού μας βοηθούν να καταλάβουμε αν είναι μηδενικού αθροίσματος και κατόπιν να αποτυπώσουμε τον πίνακα κέρδους του βάσει των κανόνων που το διέπουν.

Στο επόμενο βήμα θα δώσουμε τον ορισμό της στρατηγικής μορφής του παιχνιδιού μηδενικού αθροίσματος που σε συνδυασμό με τα παραπάνω περιγράφει τη λογική που αυτό λειτουργεί. Στη συνέχεια, μέσω ενός παραδείγματος από τον ασφαλιστικό κλάδο θα περάσουμε στο επόμενο σημαντικό στάδιο που είναι η επίλυσή του.

Ορισμός 3.1.1 Η **στρατηγική ή κανονική μορφή**, (strategic or normal form), ενός παιχνιδιού μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών συμβολίζεται με (X, Y, A) όπου

α) $X \neq \emptyset$ είναι το σύνολο με τις επιλογές του παίκτη I

β) $Y \neq \emptyset$ είναι το σύνολο με τις επιλογές του παίκτη II

γ) A είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $X \times Y$.

Ουσιαστικά ο παραπάνω ορισμός εκφράζει τις ταυτόχρονες επιλογές των παικτών I και II καθώς αν ο παίκτης I επιλέξει $x \in X$ τότε ο παίκτης II επιλέγει $y \in Y$ αγνοώντας ο καθένας την επιλογή του αντιπάλου του. Μόλις γνωστοποιηθούν οι επιλογές τους τότε ο παίκτης I κερδίζει από τον II το ποσό $A(x, y)$ αν αυτό είναι θετικό. Αν έχει αρνητική τιμή τότε πληρώνει το ποσό αυτό κατά απόλυτη τιμή στον παίκτη II.

Στο επόμενο στάδιο της ενότητας, μέσω ενός παραδείγματος από τον ασφαλιστικό κλάδο σχετικά με την ασφάλιση αυτοκινήτων, θα παρουσιάσουμε μια απλή τεχνική επίλυσης των παιχνιδιών μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες, χρησιμοποιώντας την έννοια της κυριαρχίας μιας στρατηγικής και θα δώσουμε και τον σαφή ορισμό της.

Παράδειγμα 3.1.1 Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα των Konstantinides, Mayo and Priest (2007), έχουμε ότι δύο ασφαλιστικές εταιρείες A και B επιθυμούν να συνάψουν συμβόλαια ασφάλισης με τους πελάτες X και Y. Ο πελάτης X είναι μία μεταφορική εταιρεία που διαθέτει 100 οχήματα και ο πελάτης Y είναι ένα εργοστάσιο παραγωγής γαλακτοκομικών προιόντων που διαθέτει 70 οχήματα. Κάθε ασφαλιστική εταιρεία αναθέτει σε ένα σύμβουλό της να επιλέξει ποιον από τους δύο πελάτες θα προσελκύσει. Αρχικά τα υφιστάμενα συμβόλαιά τους και οι δύο πελάτες τα έχουν αγοράσει από την ασφαλιστική εταιρεία A και πλησιάζοντας στη λήξη της χρονικής περιόδου της ασφάλισης, η εταιρεία B θα προσπαθήσει να μην ανανεωθούν τα συμβόλαια από την A.

Αν κανείς από τους συμβούλους δεν προσπαθήσει να προσελκύσει κάποιο πελάτη, τότε τα ασφαλιστήρια θα ανανεωθούν από την εταιρεία A ως έχουν .

Αν κάποιος ασφαλιστικός σύμβουλος στοχεύσει στη συνεργασία με κάποιο πελάτη τότε αυτός ο πελάτης θα ασφαλιστεί από την εταιρεία που ενδιαφέρθηκε να στείλει το σύμβουλό της για να δώσει προσφορές με το κόστος των ασφαλίστρων και τις παρεχόμενες καλύψεις.

Αν και οι δύο ασφαλιστικοί σύμβουλοι θέλουν να συνεργαστούν με την εταιρεία X τότε η X πρέπει να παραχωρήσει το 70% των 100 συμβολαίων της στη B. Αν πάλι και οι δύο σύμβουλοι προσεγγίσουν τον πελάτη Y τότε πρέπει το 50% των οχημάτων του να τα ασφαλίσει στην A και το άλλο 50% να τα ασφαλίσει στη B.

Όπως είναι προφανές κάθε ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να εξετάσει όλες τις επιλογές που έχει ώστε να δει ποια στρατηγική της προσφέρει το μεγαλύτερο κέρδος. Θα προσπαθήσουμε αρχικά να κατασκευάσουμε τον πίνακα κέρδους ώστε να έχουμε εικόνα των ενδεχόμενων αποδόσεων.

Αν και οι δύο ασφαλιστικές εταιρείες στοχεύσουν σε συνεργασία με τον πελάτη X τότε η A θα διατηρήσει τα 70 συμβόλαια του πελάτη Y και μόνο 30 συμβόλαια από τον X καθώς τα υπόλοιπα 70 πλέον θα τα λάβει η B. Επομένως η συνολική απόδοση της A από 170 συμβόλαια μειώνεται στα 100. Έτσι συμπληρώνεται το στοιχείο (1,1) του πίνακα κέρδους όπως φαίνεται παρακάτω.

B / A	X	Y
X	100	
Y		

Πίνακας 3.1.2 Πίνακας κέρδους-Συμπλήρωση στοιχείου (1,1)

Αν τώρα και οι δύο σύμβουλοι προσεγγίσουν τον πελάτη Y τότε η A εταιρεία θα διατηρήσει και τα 100 συμβόλαια του X και από τον Y θα διατηρήσει τα μισά από ότι είχε δηλαδή τα 35 και τα υπόλοιπα 35 θα τα πάρει η B. Επομένως ο πίνακας κέρδους της A διαμορφώνεται ως εξής:

B / A	X	Y
X	100	
Y		135

Πίνακας 3.1.3 Πίνακας κέρδους-Συμπλήρωση στοιχείου (2,2)

Αν υποθέσουμε ότι η εταιρεία A πλησιάζει τον πελάτη X και η εταιρεία B τον Y τότε η A θα ανανεώσει τα 100 συμβόλαια του X όμως θα χάσει τα 70 συμβόλαια του Y που πλέον θα μεταφερθούν στην εταιρεία B και ο πίνακας γίνεται:

B / A	X	Y
X	100	100
Y		135

Πίνακας 3.1.4 Πίνακας κέρδους-Συμπλήρωση στοιχείου (1,2)

Η επόμενη επιλογή είναι η εταιρεία *A* να προσεγγίσει τον πελάτη *Y* και η *B* τον πελάτη *X*. Τότε η *A* θα χάσει τα 100 συμβόλαια του *X* και θα διατηρήσει μόνο τα 70 συμβόλαια του *Y* με αποτέλεσμα η απόδοση της να είναι 70.

A \ B	*X*	*Y*
X	100	100
Y	70	135

Πίνακας 3.1.5 Πίνακας κέρδους-Συμπλήρωση στοιχείου (2,1)

Παρατηρώντας τον Πίνακα 3.2.4 δεν είναι σαφές ποια στρατηγική θα ήταν καλύτερο να επιλέξει η εταιρεία *A*. Τα κελιά του πίνακα δείχνουν πως η καλύτερη απόδοση για την *A* θα προκύψει αν επιλέξει να προσεγγίσει τον πελάτη *Y* με ταυτόχρονη προσέγγισή του και από τη *B*. Όμως η *A* δεν έχει τρόπο να προβλέψει ότι όντως η *B* θα πράξει αυτή την απόφαση. Αν λοιπόν η *A* επιλέξει να επικοινωνήσει με τον *Y* πελάτη ελπίζοντας να επιτύχει έτσι τη μέγιστη δυνατή απόδοσή της τότε η *B* θα αποφάσιζε να επιλέξει τον πελάτη *X* και έτσι η *A* θα πετύχαινε τη χειρότερη απόδοσή της δηλαδή από τα 170 συμβόλαια που είχε αρχικά θα ήταν πλέον κάτοχος μόνο των 70 εξ αυτών.

A \ B	*X*	*Y*
X	70	70
Y	100	35

Πίνακας 3.1.6 Ο πίνακας των αποδόσεων του παιχνιδιού

Όπως φαίνεται το καλύτερο αποτέλεσμα για την εταιρεία *B* είναι αν επιλέξει να ασφαλίσει τον πελάτη *X* και η *A* επιλέξει να ασφαλίσει τον *Y*. Όμως αντίστοιχα με πριν η *B* δεν μπορεί να θεωρήσει δεδομένο ότι η *A* θα πράξει με αυτό τον τρόπο. Η χειρότερη απόδοσή του παρουσιάζεται όταν και οι δύο εταιρείες επιλέξουν να ασφαλίσουν τον *Y* όπου από το πλήθος των 70 ασφαλιστήριων που αρχικά είχε θα μειωθεί στο μισό δηλαδή σε 35 ασφαλιστήρια μόνο. Το σημαντικό είναι πως η *B* επιλέγοντας τον πελάτη *X* ανεξαρτήτως της επιλογής της επιλογής της *A* πετυχαίνει απόδοση μεγαλύτερη ή ίση από ότι αν επιλέξει τον πελάτη *Y* και πάλι ανεξαρτήτως της επιλογής της *A*. Η επιλογή λοιπόν να επιλέξει η *B* τον *X* είναι επιλογή καλύτερη από κάθε άλλη και στη γλώσσα της Θεωρίας Παιγνίων λέμε ότι «κυριαρχεί» έναντι της στρατηγικής να επιλέξει τον *Y*.

Τώρα που γνωρίζουμε ποια είναι η καλύτερη στρατηγική για τη *B* είναι πιο εύκολο να αποφασίσουμε ποια είναι η καλύτερη στρατηγική για την *A*. Επιστρέφοντας στον πίνακα κέρδους της *A* βλέπουμε πως δεδομένης της επιλογή της *B* να διαλέξει *X*, το καλύτερο για την *A* είναι να επιλέξει επίσης *X* καθώς θα κερδίσει 100 συμβόλαια. Επομένως καταλήγουμε πως η επιλογή που θα εξασφαλίσει το μεγαλύτερο κέρδος και για τις δύο εταιρείες είναι να προσεγγίσουν τον πελάτη *X*.

Αν βλέπαμε το παιχνίδι από την οπτική γωνία του *A* παίκτη θα καταλήγαμε σε άλλο αποτέλεσμα. Αναλύοντας τα δεδομένα αυτού του προβλήματος προκύπτουν δύο παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος όπου η απώλεια τους ενός παίκτη θα αποτελεί κέρδος για τον άλλο παίκτη. Η κατάληξη κάθε παιχνιδιού εξαρτάται με ποιου παίκτη τις στρατηγικές θα γίνει η προσπάθεια εύρεσης λύσης.

Κατά τη διάρκεια του παραδείγματος αναφέραμε την έννοια της κυριαρχίας μιας στρατηγικής έναντι μιας άλλης, στη συνέχεια θα εξηγήσουμε τι εκφράζει αυτή η έννοια και θα δώσουμε τον ορισμό της. Το σημαντικότερο που θα δούμε όμως, είναι πως η χρήση τους βοηθάει στην απλοποίηση του πίνακα του παιχνιδιού για να φτάσουμε γρηγορότερα στη λύση του.

3.2 Κυρίαρχες και υποδεέστερες στρατηγικές

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε πως η εταιρεία *B* είχε δύο γνήσιες στρατηγικές, την επιλογή του πελάτη *X* ή την επιλογή του πελάτη *Y*. Παρατηρήσαμε πως η επιλογή του πελάτη *X* δίνει συνεχώς καλύτερα αποτελέσματα και για τον λόγο αυτό αναφέραμε ότι είναι μια στρατηγική που κυριαρχεί, ενώ η επιλογή του *Y* είναι μια στρατηγική που κυριαρχείται. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε «κυρίαρχες στρατηγικές» και «υποδεέστερες στρατηγικές». Η διάκριση αυτή αποτελεί μία από τις μεθόδους που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε για να φτάσουμε σχετικά εύκολα στη βέλτιστη λύση κάποιων παιχνιδιών μηδενικού αθροίσματος.

Ορισμός 3.2.1 Λέμε ότι η στρατηγική $\tilde{x}_1 \in T_\mu$ του παίκτη I υπερέχει της στρατηγικής $\tilde{x}_2 \in T_\mu$ (δηλαδή η $\tilde{x}_1$ είναι **κυρίαρχη στρατηγική**, (dominant strategy) ή ότι η $\tilde{x}_2$ κυριαρχείται από τη $\tilde{x}_1$ (δηλαδή η $\tilde{x}_2$ είναι **υποδεέστερη στρατηγική**, (dominated strategy) αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$E(\tilde{x}_1, \tilde{y}) \geq E(\tilde{x}_2, \tilde{y}), \text{ για κάθε } \tilde{y} \in T_\nu \qquad (3)$$

Αντίστοιχα για τον παίκτη II θα έχει τη στρατηγική $\tilde{y}_1 \in T_\nu$ ως κυρίαρχη και την $\tilde{y}_2 \in T_\nu$ ως υποδεέστερη στρατηγική αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$E(\tilde{x}, \tilde{y}_1) \leq E(\tilde{x}, \tilde{y}_2), \text{ για κάθε } \tilde{x} \in T_\mu \qquad (4)$$

Αν περιοριστούμε στις γνήσιες στρατηγικές $\tilde{x}_1 = \tilde{\xi}_i$ και $\tilde{x}_2 = \tilde{\xi}_k$ τότε η σχέση (3) γίνεται:

$$\alpha_{ij} \geq \alpha_{kj}, \text{ για κάθε } j = 1,2,\ldots,\nu$$

και αντίστοιχα για τις γνήσιες στρατηγικές $\tilde{y}_1 = \tilde{n}_j$, $\tilde{y}_2 = \tilde{n}_l$ η σχέση (4) γίνεται:

$$\alpha_{ij} \leq \alpha_{ik}, \text{ για κάθε } i = 1,2,\ldots,\mu.$$

3.3 Διαγραφή υποδεέστερων στρατηγικών

Όταν σε ένα πίνακα παιχνιδιού μηδενικού αθροίσματος συμβεί να υπάρχει υποδεέστερη στρατηγική,τότε μπορεί να διαγραφεί η αντίστοιχη στήλη ή γραμμή ώστε να παραμείνουν μόνο οι στρατηγικές που έχουν πιθανότητα να επιλεγούν από τον παίχτη.

Θα εξετάσουμε τη διαδικασία της διαγραφής υποδεέστερων στρατηγικών μέσω του ακόλουθου παραδείγματος.

Έστω ότι ένας υποψήφιος ασφαλισμένος λαμβάνει από μία ασφαλιστική εταιρεία τρεις προτάσεις ασφάλισης για το αυτοκίνητό του που αγοράστηκε πριν από έξι έτη με τιμή πώλησης 16.000€, ο κυβισμός του είναι 1.400 κ.εκ. και η ασφαλιστέα αξία του σήμερα ανέρχεται στο ποσό των 9.000€. Το αυτοκίνητο δεν βαρύνεται από ευθύνες συμμετοχής σε ατύχημα. Για τον λόγο αυτό από την ιδιότητα bonus-malus κερδίζει έκπτωση 10% επί των ασφαλίστρων. Όλα τα συμβόλαια εκτός από κάλυψη για αστική ευθύνη και νομική κάλυψη, προσφέρουν κάλυψη ζημίας από ατύχημα, κάλυψη για κλοπή και από κακόβουλες ενέργειες (εμπρησμός, βανδαλισμός).

Η πρώτη πρόταση ασφάλισης κοστίζει 300€ ετησίως και προσφέρει απαλλαγή μέχρι το ποσό των 1.730€ για ζημιά από ατύχημα, αποζημιώνει με το ποσό των 6.270€ σε περίπτωση κλοπής και έχει απαλλαγή 2.730€ αν προέλθει ζημιά από εμπρησμό ή βανδαλισμό.

Η δεύτερη πρόταση ασφάλισης κοστίζει 500€ ετησίως και αποζημιώνει με το ποσό των 3.450€ από ατύχημα, με το ποσό των 8.450€ για κλοπή και με το ποσό των 2.450€ από κακόβουλες ενέργειες.

Η τρίτη πρόταση ασφάλισης κοστίζει 400€ και παρέχει αποζημίωση ποσού 2.360€ για πρόκληση ζημιών από ατύχημα, αποζημίωση ποσού 4.360€ για κλοπή και 1.360€ για ζημιές από κακόβουλες ενέργειες.

Επομένως αν συμβολίσουμε τις προτάσεις ασφάλισης με σ_i, i=1,2,3 και με ρ_i ,i=1,2,3 τις καλύψεις των συμβολαίων τότε ο πίνακας του παιχνιδιού είναι ο ακόλουθος:

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_1			
σ_2			
σ_3			

Πίνακας 3.3.1 Πίνακας παιχνιδιού προς συμπλήρωση

Θα αναλύσουμε στη συνέχεια πως θα συμπληρωθεί με τα αριθμητικά δεδομένα του παραδείγματος.

Η πρώτη πρόταση ασφάλισης στοιχίζει 300€ ετησίως και λόγω της έκπτωσης που δικαιούται να λάβει ο υποψήφιος ασφαλισμένος λόγω της ιδιότητας bonus-malus ασφαλιστήριο θα έχει κόστος:

$$300\text{-}10\% \times 300\text{=}270€$$

Συνάπτοντας αυτό το συμβόλαιο γνωρίζει από τους όρους ότι:

- αν συμβεί ζημιά από ατύχημα έχει απαλλαγή έως το ποσό των 1.730€ που θα πρέπει να καλύψει ο ίδιος επομένως σε αυτή την περίπτωση το κόστος που θα επωμιστεί ο ίδιος είναι το κόστος του ασφαλιστηρίου και το ποσό της απαλλαγής δηλαδή:

  270+1.730=2.000€

  Επομένως το στοιχείο (σ_1,ρ_1) αντιστοιχεί στην τιμή -2.000€ . Η αρνητική τιμή συμβολίζει την επιβάρυνση του ασφαλισμένου.

- αν συμβεί κλοπή θα αποζημιωθεί με το ποσό των 6.270€ επομένως το καθαρό κέρδος που εξασφαλίζει λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την πληρωμή του ασφαλιστηρίου είναι:

  6.270-270=6.000€

  Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο στοιχείο (σ_1, ρ_2)του πίνακα.

- αν συμβεί ζημιά από εμπρησμό ή βανδαλισμό απαλλάσσεται μέχρι του ποσού των 2.730€ οπότε αναλαμβάνει να πληρώσει ο ασφαλισμένος το ποσό αυτό και τα ασφάλιστρα δηλαδή:

  2.730+270=3.000€

  Η τιμή αυτή με αρνητικό πρόσημο, γιατί θα καλυφθεί με ιδία κεφάλαια του ασφαλισμένου αντιστοιχεί στο στοιχείο (σ_1, ρ_3).

Εξετάζοντας τώρα τη δεύτερη πρόταση ασφάλισης, δεδομένου ότι θα λάβει έκπτωση, το κόστος της είναι :

$$500\text{-}10\% \times 500 = 450€.$$

Επομένως:

- αν συμβεί ζημιά από ατύχημα ο ασφαλισμένος λαμβάνει αποζημίωση 3.450€ άρα το κέρδος του είναι:

  3.450-450=3.000€

  Η τιμή αυτή συμπληρώνει το στοιχείο (σ_2,ρ_1) του πίνακα.

- αν συμβεί κλοπή το ασφαλιστήριο αποδίδει αποζημίωση ποσού 8.450€ άρα το κέρδος είναι:

  8.450-450=8.000€

  Η τιμή αυτή συμπληρώνει το στοιχείο (σ_2,ρ_2) του πίνακα.

- αν συμβεί ζημιά από εμπρησμό θα αποζημιωθεί με το ποσό των 2.450€ και το κέρδος του είναι:

  2.450-450=2.000€

Η τιμή αυτή συμπληρώνει το στοιχείο (σ_2, ρ_3) του πίνακα.

Η τρίτη και τελευταία πρόταση κοστίζει :

$$400\text{-}10\% \times 400 = 360€ .$$

Υπολογίζοντας πάλι ποιο είναι το κέρδος ή η επιβάρυνση που θα έχει ο υποψήφιος πελάτης έχουμε ότι:

- αν συμβεί ζημιά από ατύχημα αποζημιώνεται με ποσό 2.360€ οπότε το κέρδος του είναι:

  $$2.360\text{-}360=2.000€$$

  Η τιμή αυτή συμπληρώνει το στοιχείο (σ_3, ρ_1) του πίνακα.

- αν συμβεί κλοπή αποζημιώνεται με 4.360€ επομένως έχει όφελος αγοράζοντας το συμβόλαιο:

  $$4.360\text{-}360=4.000€$$

  Η τιμή αυτή είναι το στοιχείο (σ_3, ρ_2) του πίνακα.

- αν συμβεί ζημιά από κακόβουλες ενέργειες η αποζημίωση είναι 1.360€ και το κέρδος του είναι:

  $$1.360\text{-}360=1.000€$$

  Η τιμή αυτή είναι το στοιχείο (σ_3, ρ_3) του πίνακα.

Για λόγους ευκολίας, όλα τα ποσά που είναι στοιχεία του πίνακα κέρδους εκφράζονται σε χιλιάδες ευρώ.

Έχοντας λοιπόν όλα τα στοιχεία για τον πίνακα κέρδους του παιχνιδιού η συμπληρωμένη μορφή του είναι

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_1	-2	6	-3
σ_2	3	8	2
σ_3	2	4	1

Πίνακας 3.3.2 Πίνακας κέρδους του παιχνιδιού

Ο υποψήφιος ασφαλισμένος έχει σαν κίνητρό του για την επιλογή ασφαλιστηρίου, την απολαβή της μεγαλύτερης αποζημίωσης που θα μπορεί να διεκδικήσει ανεξάρτητα από το κόστος που έχουν. Επομένως μεταξύ των τριών προτάσεων ασφάλισης δεν θα επιλέξει την πρώτη που προφανώς είναι υποδεέστερη των άλλων δύο. Έτσι από τον πίνακα διαγράφεται η πρώτη πρόταση και ο αρχικός πίνακας απλοποιείται στον ακόλουθο

Καλύψεις / Προτάσεις Ασφάλισης	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	3	8	2
σ_3	2	4	1

Πίνακας 3.3.3 Ο πίνακας κέρδους μετά την πρώτη απαλοιφή

Ανάμεσα στις τρεις στρατηγικές της ασφαλιστικής εταιρείας εντοπίζουμε τη ρ_2 ως υποδεέστερη των άλλων δύο και γι΄αυτό τη διαγράφουμε και ο πίνακας απλοποιείται περισσότερο και παίρνει την ακόλουθη μορφή

Καλύψεις / Προτάσεις Ασφάλισης	ρ_1	ρ_3
σ_2	3	2
σ_3	2	1

Πίνακας 3.3.4 Ο πίνακας κέρδους μετά τη δεύτερη απαλοιφή

Ακολουθώντας την ίδια λογική η πρώτη στρατηγική της ασφαλιστικής εταιρείας είναι υποδεέστερη της τρίτης αφού σε κάθε περίπτωση πρέπει να καταβάλλει μεγαλύτερη αποζημίωση, επομένως η πρώτη στήλη διαγράφεται και ο πίνακας γίνεται

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_3
σ_2	2
σ_3	1

Πίνακας 3.3.5 Ο πίνακας κέρδους μετά την τρίτη απαλοιφή

Ο υποψήφιος ασφαλισμένος τώρα μεταξύ των δύο προτάσεων είναι προφανές ότι θα επιλέξει τη στρατηγική σ_2 δηλαδή τη δεύτερη πρόταση ασφάλισης αφού θα λάβει μεγαλύτερη αποζημίωση, δεδομένου ότι έχει ήδη επιλεγεί η ρ_3 και έτσι καταλήγουμε στον επόμενο πίνακα

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_3
σ_2	2

Πίνακας 3.3.6 Ο πίνακας κέρδους μετά την τελευταία απαλοιφή

Επομένως η βέλτιστη επιλογή για τον ασφαλισμένο είναι να επιλέξει τη δεύτερη πρόταση ασφάλισης δεδομένης της κάλυψης κινδύνου από ζημιά λόγω κακόβουλων ενεργειών καθώς αυτή η κάλυψη καθορίζει την επιλογή του ασφαλιστηρίου. Αντίστοιχα η βέλτιστη στρατηγική της ασφαλιστικής εταιρείας είναι η ρ_3.

Να παρατηρήσουμε ότι αν στο προτελευταίο βήμα κρίνουμε με βάση την υπεροχή των γραμμών και όχι των στηλών όπως κάναμε, τότε η σ_3 είναι υποδεέστερη της σ_2.Άρα διαγράφουμε τη δεύτερη γραμμή του Πίνακα 3.4.3 και ο πίνακας γίνεται

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_1	ρ_3
σ_2	3	2

Πίνακας 3.3.7 Ο πίνακας κέρδους κατόπιν απλοποίησης λόγω υπεροχής γραμμών

Τότε η ασφαλιστική εταιρεία μεταξύ των δύο επιλογών της θα προσανατολιστεί στη στρατηγική ρ_3 που δίνει τη μικρότερη αποζημίωση. Οπότε έχουμε ότι:

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_3
σ_2	2

Πίνακας 3.3.8 Η τελική μορφή του πίνακα κέρδους- Λύση του παιχνιδιού

Επομένως είτε κινηθούμε βάσει της υπεροχής των στηλών είτε βάσει της υπεροχής των γραμμών καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Η διαδικασία διαγραφής κυριαρχούμενων στρατηγικών ονομάζεται **διαδοχική απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών** (iterated elimination of dominated strategies, I.E.D.S).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι χρησιμοποιώντας την υπεροχή των στρατηγικών που έχουν διαθέσιμες οι παίκτες μπορούμε από τον αρχικό πίνακα του παιχνιδιού που είναι σύνθετος να καταλήξουμε σε πίνακα μικρότερων διαστάσεων και σε κάποιες περιπτώσεις να φτάσουμε εύκολα στην επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής.

Η τεχνική όμως που περιγράψαμε βάσει της οποίας διακρίνουμε τις στρατηγικές σε κυρίαρχες και υποδεέστερες δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε παιχνίδι, οπότε σε τέτοια περίπτωση αναζητούμε λύση μέσω άλλης μεθόδου. Για τον λόγο αυτό, θα δούμε πως και υπό ποιες προυποθέσεις χρησιμοποιείται η μέθοδος των «εξισωτικών στρατηγικών».

Ορισμός 3.3.1 Σε ένα πεπερασμένο πινακικό παιχνίδι, μια μεικτή στρατηγική καλείται **εξισωτική στρατηγική**, (equalizing strategy), αν η χρήση της κάνει σταθερή την πληρωμή των παικτών πάνω στο σύνολο των γνήσιων στρατηγικών δηλαδή αν ισχύουν οι σχέσεις

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_j) = \kappa_1,\ j = 1,\ldots,\mu$$

(εξισωτική στρατηγική για τον παίκτη A) ή

$$E(\tilde{\xi}_i, \tilde{y}_0) = \kappa_2,\ i = 1,\ldots,\nu$$

(εξισωτική στρατηγική για τον παίκτη B). Αν επιπλέον ισχύει

$$E(\tilde{x}_0,\ \tilde{n}_j) = E(\tilde{\xi}_i,\ \tilde{y}_0)$$

λέμε ότι η $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ είναι **απλή λύση**, (simple solution).

Ουσιαστικά οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν ότι σε μία εξισωτική στρατηγική ενός παίκτη, ότι και να επιλέξει προκύπτει το ίδιο κέρδος γι΄αυτόν, ανεξάρτητα από την επιλογή στρατηγικής του άλλου παίκτη.

Αν από τις παραπάνω σχέσεις προκύψουν ως λύση τα διανύσματα στήλες

$$\tilde{x}_0 = (x_1,...,x_\mu) \text{ και } \tilde{y}_0 = (y_1,\dots,y_\nu)$$

με συντεταγμένες που ανήκουν στο διάστημα (0,1) και $x_1+\ldots+x_\mu=1$, $y_1+\ldots+y_\nu=1$ τότε λέμε ότι τα διανύσματα (πιθανοτήτων) $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$ καθορίζουν τις εξισωτικές στρατηγικές. Διαφορετικά, δεν υπάρχουν εξισωτικές στρατηγικές.

Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι για να δώσουν λύση οι εξισωτικές στρατηγικές ο πίνακας του παιχνιδιού πρέπει να έχει κάποια ειδική μορφή όπως να είναι τριγωνικός, αντισυμμετρικός ή διαγώνιος.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο «θεώρημα ισορροπίας» που ουσιαστικά σκιαγραφεί και τα βήματα της μεθόδου.

Θεώρημα 3.3.1 «Θεώρημα Ισορροπίας, The Equilibrium Theorem», Ferguson (2014) Έστω ένα παιχνίδι με πίνακα κέρδους διαστάσεων $\mu\times\nu$ και τιμή υ με $\tilde{x}_0 = (x_1,...,x_\mu)$ τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη I και $\tilde{y}_0 = (y_1,\dots,y_\nu)$ τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη *II*. Τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} y_j = \upsilon \text{ για κάθε } i \text{ με } x_i > 0$$

και

$$\sum_{i=1}^{\mu} x_i a_{ij} = \upsilon \text{ για κάθε } j \text{ με } y_j > 0.$$

Περιφραστικά το παραπάνω θεώρημα αναφέρει ότι εάν σε ένα πινακικό παιχνίδι και οι δύο παίκτες διαθέτουν εξισωτικές στρατηγικές τότε αυτές είναι βέλτιστες και οι εξισωτικές σταθερές κ_1, κ_2 είναι ίσες και συμπίπτουν με την τιμή του παιχνιδιού.

Ας δούμε σε αυτό το σημείο τα βήματα της μεθόδου. Το πρώτο στάδιο πριν την εφαρμογή της είναι να ελέγξουμε αν ο πίνακας του παιχνιδιού έχει σαγματικό σημείο γι΄αυτό και θα δώσουμε αμέσως τον ορισμό του.

Ορισμός 3.3.2 Ως **σαγματικό σημείο**, (saddle point) στη Θεωρία Παιγνίων, καλείται η απόδοση του παίκτη που έχει την ιδιότητα στον πίνακα αποδόσεων να είναι ταυτόγχρονα η ελάχιστη τιμή μιας γραμμής και η μέγιστη τιμή της στήλης δηλαδή για την απόδοση $a_{i_0 j_0}$ ισχύει $a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}$ για κάθε i, j.

Ουσιαστικά δηλαδή προκύπτει, ότι το σαγματικό σημείο υπάρχει αν η κάτω τιμή του πίνακα αποδόσεων, ισούται με την άνω τιμή του. Αν συμβαίνει αυτό τότε δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε κάποια μέθοδο εύρεσης λύσης αφού η λύση του παιχνιδιού θα έχει ήδη βρεθεί και θα είναι η τιμή του $\upsilon = \underline{\upsilon} = \overline{\upsilon}$. Αν αποκλείσουμε το ενδεχόμενο αυτής της ισότητας, ελέγχουμε τις στήλες και τις γραμμές του ώστε βάσει της υπεροχής στρατηγικών να διαγραφούν οι υποδεέστερες στρατηγικές.

Αν υποθέσουμε ότι από τα αριθμητικά δεδομένα της Παραγράφου 3.4 προέκυπτε ότι ο πίνακας του παιχνιδιού είχε τις ακόλουθες τιμές

Καλύψεις / Προτάσεις Ασφάλισης	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_1	1	-2	3
σ_2	0	1	-2
σ_3	0	0	1

Πίνακας 3.3.9 Ο πίνακας στον οποίο θα εφαρμοστούν εξισωτικές στρατηγικές

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός και η μορφή αυτή εξυπηρετεί την επίλυση παιχνιδιών με εξισωτικές στρατηγικές. Επίσης δεν υπάρχει υπεροχή γραμμών ή στηλών ώστε να γίνει διαγραφή για να απλοποιηθεί ο πίνακας. Επιπλέον δεν υπάρχει σαγματικό σημείο αφού $\overline{\upsilon} = 1$ και $\underline{\upsilon} = 0$. Σε αυτό το σημείο θα πάμε να ελέγξουμε αν υπάρχουν εξισωτικές στρατηγικές και γι΄αυτό θεωρούμε τα διανύσματα στήλες $\tilde{x}_0 = (x_1, x_2, x_3)$ και $\tilde{y}_0 = (y_1, y_2, y_3)$ και τον πίνακα κέρδους

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων με τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

έχουμε τα παρακάτω συστήματα:

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = k$$

$$-2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = k$$

$$3x_1 - 2x_2 + 1x_3 = k$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

και

$$1y_1 - 2y_2 + 3y_3 = k$$

$$0y_1 + 1y_2 - 2y_3 = k$$

$$0y_1 + 0y_2 + 1y_3 = k$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$\tilde{x}_0 = (x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8})$$

και

$$\tilde{y}_0 = (y_1, y_2, y_3) = (\frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}).$$

Εφ΄όσον λοιπόν οι τιμές $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ είναι θετικές συμπεραίνουμε ότι οι εξισωτικές στρατηγικές υπάρχουν. Επομένως η τιμή του παιχνιδιού είναι $k = \frac{1}{8}$ και οι στρατηγικές $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$ είναι οι βέλτιστες για τους παίκτες.

Σχετικά με την υπεροχή των στρατηγικών που όπως είδαμε, μέσω του παραδείγματος, επιτρέπει τη διαγραφή των υποδεέστερων, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν τα αριθμητικά δεδομένα του αρχικού πίνακα που χρησιμοποιήσαμε ήταν ως εξής:

Καλύψεις / Προτάσεις ασφάλισης	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_1	1	3	2
σ_2	1	1	4
σ_3	2	0	1

Πίνακας 3.3.10 Ο πίνακας αντίστοιχου παιχνιδιού με διαφορετικά αριθμητικά δεδομένα

Βλέπουμε ότι καμία γραμμή ή στήλη δεν κυριαρχείται από κάποια άλλη σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1 των κυρίαρχων και υποδεέστερων στρατηγικών. Όμως αν η ασφαλιστική εταιρεία αναμείξει τις στήλες 1 και 2 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ δηλαδή αν χρησιμοποιήσει την τυχαιοποιημένη στρατηγική της $\tilde{y}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ο πίνακας λαμβάνει διαστάσεις 3×2 και γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου εδώ ξεκάθαρα φαίνεται ότι η τρίτη στήλη κυριαρχείται από τη μίξη των δύο πρώτων στηλών. Μπορούμε λοιπόν να την διαγράψουμε από τον αρχικό 3×3 πίνακα και να λύσουμε το παιχνίδι με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου είναι εμφανές ότι η δεύτερη γραμμή θα διαγραφεί καθώς κυριαρχείται από την πρώτη γραμμή και ο πίνακας γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

και είναι πλέον εύκολο να λυθεί.

Για να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική αν στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

εφαρμόσουμε τις τυχαιοποιημένες στρατηγικές (x, 1-x) και (y, 1-y) σε συνδυασμό με τις εξισωτικές στρατηγικές θα έχουμε:

$$1 \cdot x + 2 \cdot (1-x) = 3 \cdot x + 0 \cdot (1-x)$$

και

$$1 \cdot y + 3 \cdot (1-y) = 2 \cdot y + 0 \cdot (1-y)$$

από τα παραπάνω προκύπτει ότι : $x = \frac{1}{2}$ άρα

$$\tilde{x}_0 = (x, 1-x) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

και $y = \frac{3}{4}$ άρα

$$\tilde{y}_0 = (y, 1-y) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) .$$

Η τιμή του παιχνιδιού είναι

$$\upsilon = 3 \cdot x + 0 \cdot (1-x) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} .$$

Εναλλακτικά, επειδή αναφέραμε στον ορισμό 3.4.1 ότι χρησιμοποιώντας τις εξισωτικές στρατηγικές η πληρωμή των παικτών γίνεται σταθερή πάνω στο σύνολο των γνήσιων στρατηγικών, η τιμή του παιχνιδιού δίνεται και ως εξής:

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_1) = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2},$$

$$E(\tilde{x}_0\,,\ \tilde{n}_2) = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\,,$$

$$E(\tilde{\xi}_1, \tilde{y}_0) = [1\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\,,$$

$$E(\tilde{\xi}_2, \tilde{y}_0) = [0\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\,.$$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 2.8.1 έχουμε ότι

$$E(\tilde{\xi}_i, \tilde{y}_0) = \frac{3}{2} \leq E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \leq \frac{3}{2} = E(\tilde{x}_0, \tilde{n}_j)$$

επομένως η τιμή του παιχνιδιού είναι $\upsilon = \frac{3}{2}$.

Για τον αρχικό πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι διαγράψαμε την τρίτη στήλη, η τρίτη συνιστώσα της βέλτιστης στρατηγικής για τον παίκτη II θα λάβει την τιμή 0 και έχουμε $\tilde{y}_0^* = (\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ 0)$. Ομοίως επειδή διαγράψαμε τη δεύτερη γραμμή από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

θα αντικαταστήσουμε τη δεύτερη συνιστώσα της βέλτιστης στρατηγικής του παίκτη I με 0 και έτσι έχουμε $\tilde{x}_0^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Δείξαμε λοιπόν έτσι πως μπορούμε να απλοποιήσουμε ένα πίνακα ακόμα και αν η υπεροχή στρατηγικών δεν είναι προφανής και χρειάζεται να τις αναμείξουμε για να το πετύχουμε. Επιπλέον ο παραπάνω τρόπος επίλυσης για τον απλοποιημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

διαστάσεων 2×2 είναι γενικά η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση παιχνιδιών με 2×2 πίνακα που δεν εμφανίζει σαγματικό σημείο.

Η χρήση των τυχαιοποιημένων στρατηγικών που εφαρμόσαμε προηγουμένως για να αναμείξουμε τις στήλες, θα μπορούσε να γίνει αντίστοιχα και με τις γραμμές. Η τεχνική η οποία μας επιτρέπει να καταφύγουμε σε διαγραφή υποδεέστερων στρατηγικών για να απλοποιηθεί ο πίνακας του παιχνιδιού διατυπώνεται σε γενική μορφή στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.3.3 Μηλολιδάκης,(2009) Σε ένα πινακικό παιχνίδι μία γραμμή k κυριαρχείται εάν υπάρχουν δύο γραμμές i και i_0 και $p\in (0,1)$ έτσι ώστε:

$$pa_{i_0 j} + (1\text{-}p)\, a_{ij} \geq a_{kj} \text{ , για κάθε } j,\ j = 1,2,\ldots,v$$

Αντίστοιχα θα λέμε ότι μία στήλη k κυριαρχείται αν υπάρχουν δύο στήλες j_0 και j και $p\in (0,1)$ έτσι ώστε:

$$pa_{ij_0} + (1\text{-}p)\, a_{ij} \leq a_{ik} \text{ , για κάθε } i\ ,\ i=1,2,\ldots,\mu\ .$$

Ως τώρα, έχουμε πολλές φορές αναφέρει ότι ψάχνουμε τις βέλτιστες στρατηγικές για τους παίκτες, είτε για να μεγιστοποιήσουμε την απόδοση του ενός παίκτη δεδομένης της επιλογής του άλλου, είτε για να ελαχιστοποιήσουμε τη ζημιά του πάλι δεδομένης της απόφασης του αντιπάλου. Η επόμενη παράγραφος αναφέρεται στην εξασφάλιση αυτών των στρατηγικών και στους κανόνες που τη διέπουν.

3.4 Ισορροπία κατά Nash

Δεδομένου ότι εργαζόμαστε πάνω σε ανταγωνιστικά παιχνίδια, συνεχώς αναζητούμε τη στρατηγική του παίκτη *I* που θα είναι η καλύτερη απάντηση στην στρατηγική του παίκτη *II* και ταυτόχρονα θέλουμε τη στρατηγική του παίκτη *II* που θα είναι η καλύτερη απάντηση στην στρατηγική του παίκτη *I*. Επομένως ο ένας παίκτης, γνωρίζοντας την τακτική του αντιπάλου, προσπαθεί να μαντέψει τη συμπεριφορά του ώστε να λάβει την πιο συμφέρουσα απόφαση. Το ζεύγος αυτών των στρατηγικών που εκφράζει ότι η μία στρατηγική είναι η καλύτερη απάντηση στην άλλη καλείται «ισορροπία κατά Nash». Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.4.1 Έστω ένα παιχνίδι με δύο παίκτες στο οποίο επιλέγει ταυτόχρονα και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο τις στρατηγικές, $\tilde{x} \in T_\mu$ και $\tilde{y} \in T_\nu$ με αποδόσεις $E_1(\tilde{x}, \tilde{y})$ και $E_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ αντίστοιχα. **Ισορροπία κατά Nash ή σημείο στρατηγικής ισορροπίας (Σ.Σ.Ι) ή σημείο Nash**, (Nash equilibrium), ονομάζεται το ζεύγος στρατηγικών $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in T_\mu \text{ x } T_\nu$ για το οποίο ισχύουν:

α) $E_1(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \geq E_1(\tilde{x}, \tilde{y}_0)$ για κάθε $\tilde{x} \in T_\mu$ και

β) $E_2(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \geq E_2(\tilde{x}_0, \tilde{y})$ για κάθε $\tilde{y} \in T_\nu$.

Όταν στον παραπάνω ορισμό ισχύουν γνήσια οι ανισότητες τότε έχουμε **ισχυρή ισορροπία κατά Nash**, (strict Nash equilibrium), ενώ όταν ισχύουν και οι ισότητες τότε έχουμε **ασθενή ισορροπία κατά Nash**, (weak Nash equilibrium).

Θα δούμε όμως τι ακριβώς εννοούμε χρησιμοποιώντας τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

του προηγούμενου παραδείγματος. Όπως αναφέραμε στην αρχή της εργασίας ο πίνακας των παιχνιδιών μηδενικού αθροίσματος αντιπροσωπεύει και τους δύο παίκτες καθώς η απώλεια του ενός είναι κέρδος για τον άλλο. Επομένως ο παραπάνω πίνακας γράφεται στη μορφή

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y_1 & \quad y_2 & \quad y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,-1) & (3,-3) & (2,-2) \\ (1,-1) & (1,-1) & (4,-4) \\ (2,-2) & (0,0) & (1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

όπου κάθε ζευγάρι αριθμών είναι το ζευγάρι στρατηγικών (x_i, y_j) με $i, j = 1,2,3$ των παικτών I και II αντίστοιχα.

Ξεκινάμε με τον παίκτη I :

- ο οποίος, θεωρώντας ότι ο αντίπαλος θα επιλέξει τη στρατηγική y_1, εκείνος θα επιλέξει τη x_3 που θα του δώσει το μεγαλύτερο όφελος ίσο με 2 μονάδες.
- αν πιστέψει ότι αντίπαλος θα επιλέξει τη στρατηγική y_2 τότε εκείνος θα επιλέξει τη στρατηγική x_1 που θα του δώσει το μεγαλύτερο κέρδος ίσο με 3 μονάδες.
- αν θεωρήσει ότι ο παίκτης *II* θα επιλέξει τη στρατηγική y_3, τότε εκείνος θα επιλέξει τη στρατηγική x_2 που του εξασφαλίζει κέρδος ίσο με 4 μονάδες.

Αντίστοιχα για τον παίκτη *II* έχουμε τα επόμενα:

- αν θεωρήσει ότι ο αντίπαλος θα επιλέξει τη στρατηγική x_1 τότε εκείνος θα επιλέξει τη στρατηγική y_2 που του δίνει κέρδος 3 μονάδες.
- αν υποθέσει ότι ο παίκτης *I* επιλέξει τη στρατηγική x_2 τότε εκείνος θα επιλέξει τη στρατηγική y_3.
- αν πιστέψει ότι ο παίκτης *I* διαλέξει τη x_3 τότε εκείνος θα επιλέξει τη στρατηγική y_1.

Παρατηρούμε ότι τα ζευγάρια (x_1, y_2) = (3,-3), (x_2, y_3) = (4,-4) και (x_3, y_1) = (2,-2) είναι αυτά που σε κάθε παίκτη εξασφαλίζουν την καλύτερη απόδοση δεδομένης της επιλογής του αντιπάλου. Επομένως είναι σημεία Nash.

Γενικά για πεπερασμένα παιχνίδια όπως αυτό που μελετήσαμε ισχύει ότι μπορούν να έχουν είτε ένα είτε περισσότερα σημεία Nash και ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.1 «Θεώρημα Nash» Κάθε πεπερασμένο παιχνίδι έχει ένα τουλάχιστον σημείο Nash σε μεικτές στρατηγικές.

Το θεώρημα αυτό εκφράζει ότι σε ένα παιχίδι με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών θα βρέθει εκείνο το ιδανικό σημείο όπου όλοι οι παίκτες θα εξασφαλίσουν τις καλύτερες δυνατές αποδόσεις για τους ίδιους. Οι παίκτες γνωρίζοντας τις διαθέσιμες επιλογές των αντιπάλων τους, προσπαθούν να καταλάβουν τι θα επιλέξουν οι αντίπαλοι και βάσει των επιλογών των ανταγωνιστών τους θα αποφασίσουν και αυτοί. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το θεώρημα Nash στηρίζεται σε δύο συνιστώσες. Πρώτα κάθε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική του σκεπτόμενος τι θα πράξει ο αντίπαλος και μετά κάθε υπόθεση του παίκτη για την επιλογή του αντιπάλου να είναι σωστή, διότι αν αυτό συμβεί και η δική του απόφαση θα είναι σωστή.

Για το τέλος αυτής της ενότητας αφήσαμε την επίλυση των παιχνιδιών διαστάσεων $2 \times \nu$ και $\mu \times 2$. Η μεθοδολογία για την εύρεση λύσης βασίζεται στην γραφική αναπαράσταση των δεδομένων τους ώστε να εντοπιστεί η τιμή τους.

3.5 Επίλυση παιχνιδιών $2 \times \nu$

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της Παραγράφου 2.8 στον Πίνακα 2.8.1 όπου υπενθυμίζουμε ότι υπάρχουν 2 προτάσεις ασφάλισης και 3 κατηγορίες καλύψεων και προφανώς ο πίνακας εμπίπτει στην κατηγορία που μελετάμε. Τα παιχνίδια με πίνακα διαστάσεων $2 \times \nu$ επιλύονται γραφικά.

Θεωρούμε ότι ο πίνακας κέρδους είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Αν επιλέξουμε τη στρατηγική (x, 1-x) θα έχουμε

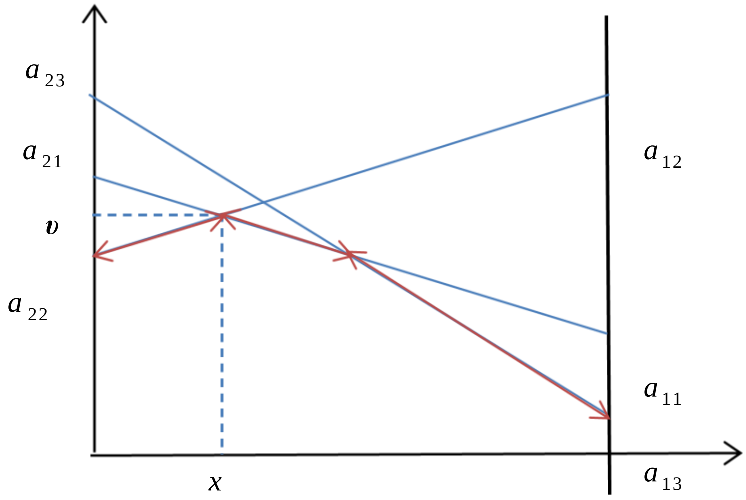
$$\upsilon_A = \max_{\tilde{x}} \min_{\tilde{y}} \mathrm{E}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max_{\tilde{x}} \min_{\tilde{y}} \mathrm{E}(\tilde{x}, \tilde{n}_j) = \max_{\tilde{x}} \min_{\tilde{y}} \tilde{x}' A \tilde{n}_j =$$

$$= \max_{0 \le x \le 1} \min_{1 \le j \le 3} (x a_{1j} + (1-x)\, a_{2j}) .$$

Είναι τώρα εύκολο να παραστήσουμε γραφικά τη συνάρτηση

$$f\,(x) = \min_{1 \le j \le 3} (x a_{1j} + (1-x)\, a_{2j})$$

στο διάστημα $[0,1]$. Η συνάρτηση $f\,(x)$ είναι η συνάρτηση «ελάχιστο» τριών ευθύγραμμων τμημάτων, επομένως θα είναι κοίλη και κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση. Σχηματικά έχουμε ότι



Σχήμα3.5.1 Γραφικήπαράσταση της συνάρτησης $f(x)$ ενός παιχνιδιού 2×3

Επομένως το x^* στο οποίο η $f(x)$ αποκτά μέγιστο μπορεί να βρεθεί εντοπίζοντας τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Στο σχήμα αντιστοιχούν σε $j = 1$ και $j = 2$. Άρα το x^* βρίσκεται αν λύσουμε την εξίσωση:

$$\alpha_{11}x^* + \alpha_{21}(1\text{-}x^*) = a_{12}x^* + a_{22}(1\text{-}x^*)$$

Τότε η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη θα είναι η $\tilde{x}' = (x^*, 1\text{-}x^*)$.

Το επόμενο βήμα είναι να βρεθεί η βέλτιστη λύση $\tilde{y}'$ για το άλλο παίκτη την ασφαλιστική εταιρεία. Έστω η ασφαλιστική εταιρεία απαλείφει όλες τις καθαρές στρατηγικές του κρατώντας μονάχα δύο από εκείνες που ορίζουν το x^* δηλαδή τις $j_1 = 1$ και $j_2 = 2$ όπως προκύπτει από το σχήμα.

Ο 2×2 υποπίνακας A' που θα παραμείνει είναι ο

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

θα έχει τιμή υ_A επίσης αφού $\upsilon'_A = \max_{0\le x\le1} \min_{1\le j\le2} (xa_{1j} + (1\text{-}x)\, a_{2j}) = \upsilon_A$.

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω στον Πίνακα 2.8.1 θα έχουμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

όπου $\underline{\upsilon} = -1 < 4 = \overline{\upsilon}$ άρα θα βρούμε τη λύση $\upsilon_A \in [-1, 4]$ χρησιμοποιώντας μεικτές στρατηγικές.

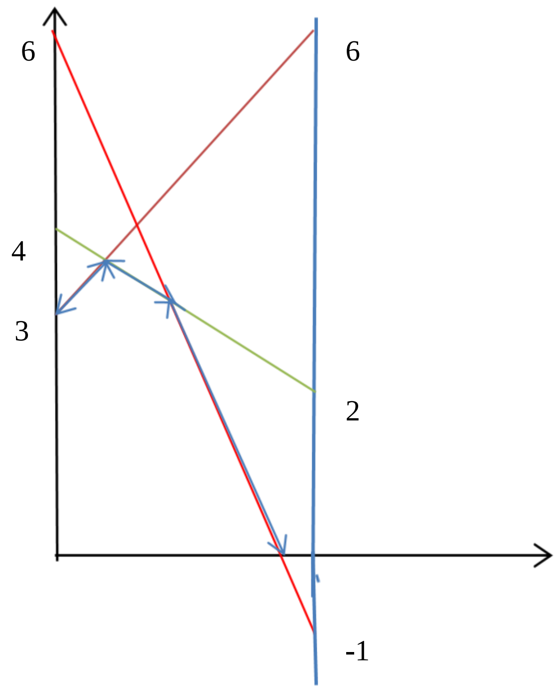
Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

οπότε ψάχνουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \min_{1 \le j \le 3} (x a_{1j} + (1\text{-}x)\, a_{2j}) = \min (3x + 4(1\text{-}x), 6x + 3(1\text{-}x), \text{-}x + 6(1\text{-}x)).$$

Εύκολα προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 3.5.2 Γραφική παράσταση των ευθειών για τις τιμές x=0 και x=1

Η ευθεία πράσινου χρώματος προκύπτει για j=1, η ευθεία μωβ χρώματος προκύπτει για j=2 και η ευθεία κόκκινου χρώματος προκύπτει για j=3.

Η τεθλασμένη γραμμή, που κάθε ευθύγραμμο τμήμα της στα άκρα του έχει βέλη, είναι η γραφική παράσταση της $f(x)$ και η τιμή max $f(x)$ επιτυγχάνεται στην τομή j=1 και j=3. Επομένως χρειάζεται να λυθεί η εξίσωση :

$$3x + 4(1-x) = -x + 6(1-x)$$

και προκύπτει $x^* = \frac{1}{3}$. Επομένως η μεικτή στρατηγική για τον ασφαλισμένο είναι η $(x, 1\text{-}x) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Αντικαθιστώντας την τιμή $x^* = \frac{1}{3}$ στην πρώτη ευθεία έχουμε ότι

$$\upsilon_A = 3\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}.$$

Έχοντας βρει λοιπόν την τιμή υ_A και τις βέλτιστες στρατηγικές των δύο παικτών η επίλυση του παιχνιδιού έχει ολοκληρωθεί.

Η διαδικασία επίλυσης ενός παιχνιδιού διαστάσεων 2×3 που εξηγήθηκε παραπάνω γενικεύεται εύκολα για πίνακα διαστάσεων $2\times\nu$. Έτσι αν έχουμε τον πίνακα A με τη στρατηγική για τον παίκτη A την $(x, 1\text{-}x)$:

$$\text{A=}\begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

όμοια με πριν προκύπτει ότι η τιμή υ_A που ψάχνουμε δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon_A = \max_x \min_{j=1,\dots,n} (xa_{1j} + (1\text{-}x)\, a_{2j}).$$

Αντίστοιχα με πριν θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \min_{1\le j\le n} (\, xa_{1j} + (1\text{-}x)\, a_{2j}\,),$$

και αναπαριστούμε γραφικά τις ν ευθείες με $x\in[0,1]$. Ακολούθως θα εντοπίσουμε τις ευθείες που η τομή τους δίνει τη μέγιστη τιμή στη μεταβλητή x και θα λύσουμε την εξίσωση των δύο ευθειών. Η λύση τους είναι η ζητούμενη τιμή xαπό την οποία προκύπτει η βέλτιστη στρατηγική $(x, 1\text{-}x)$ του ενός παίκτη. Όμοιες ενέργειες πραγματοποιούνται για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής $(y, 1\text{-}y)$ του άλλου παίκτη.

Η διαδικασία επίλυσης των παιχνιδιών $\mu\times2$ είναι ακριβώς αντίστοιχη.

Συνοψίζοντας λοιπόν τη δομή του τρίτου κεφαλαίου, παρουσιάσαμε την έννοια των παιχνιδιών μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες και τις σχετικές έννοιες που το πλαισιώνουν. Συνδέθηκε η χρήση τους με παραδείγματα από την καθημερινότητα ώστε να καταστεί πιο εφικτή η κατανόηση τους και τέλος έγινε η παρουσίαση κάποιων μεθόδων επίλυσής τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η σχέση της Θεωρίας Παιγνίων με την ασφάλιση

4.1 Συμμαχικά Παιχνίδια

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε περιπτώσεις του ασφαλιστικού τομέα όπου η Θεωρία Παιγνίων δίνει λύσεις κάτω από συνθήκες ανταγωνισμού και αντικρουόμενων συμφερόντων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την αντίθετη όψη, δηλαδή την εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων σε παιχνίδια όπου το συμφέρον είναι κοινό.

Στον τομέα της ασφάλισης υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με τη μεταβίβαση και τον επιμερισμό του κινδύνου που ενδέχεται να συμβεί. Η μεταβίβασή του συνιστά μεταφορά του από τους ασφαλισμένους προς την ασφαλιστική εταιρεία και επιμερισμό του σχετικού κόστους μεταξύ των ασφαλισμένων. Η περιγραφή αυτή ταιριάζει σε ένα παιχνίδι όπου οι παίκτες πρέπει να συνεργαστούν για να έχουν κέρδος την κάλυψη του κινδύνου που μπορεί να τους συμβεί έναντι κάποιου ποσού πληρωμής και από την άλλη μεριά η ασφαλιστική εταιρεία θα αναλάβει τον κίνδυνο έναντι αμοιβής που αυτή θα είναι και η απολαβή της.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα παιχνίδι που κινείται και πάλι μέσα σε ορθολογικό πλαίσιο, διέπεται από κανόνες και οι παίκτες αποφασίζουν βάσει των στρατηγικών που διαθέτουν με γνώμονα την ελαχιστοποίηση ζημιάς ή τη μεγιστοποίηση κέρδους μέσα από συμμαχίες που προκύπτουν από το σύνολό τους ή τμηματικά ανά ομάδες. Εμφανίζεται έτσι η έννοια της συμμαχίας και οδηγούμαστε στην έννοια των λεγόμενων «Συμμαχικών Παιχνιδιών» τα οποία θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

Είδαμε προγενέστερα, ότι η απόδοση ή επίπεδο ασφάλειας είναι το ποσό που μπορεί να εξασφαλίσει κάθε παίκτης σε ατομικό επίπεδο. Αντίστοιχα στην περίπτωση της συμμαχίας καθίσταται επιτακτική η ανάγκη ορισμού μιας έννοιας που να εκφράζει το ποσό που εξασφαλίζει συνολικά ένα υποσύνολο παικτών.

4.2 Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Σε παιχνίδια με περισσότερους από δύο παίκτες το επίπεδο ασφάλειας γενικεύεται μέσω της έννοιας της «χαρακτηριστικής συνάρτησης» η οποία οφείλει την εισαγωγή της στον J. Von Neumann.

Έστω $N=\{1,2,\ldots,n\}$ ένα σύνολο παικτών και 2^N το δυναμοσύνολό του (το σύνολο όλων των υποσυνόλων του).

Ορισμός 4.2.1 Ονομάζουμε **χαρακτηριστική συνάρτηση,** (characteristic function) κάθε συνάρτηση $f : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

α) $f(\emptyset) = 0$

β) αν $S \cap T = \emptyset$, τότε $f(S \cup T) \geq f(S) + f(T)$

Η συνθήκη (α) δηλώνει ότι η αξία της κενής συμμαχίας είναι μηδενική.

Η συνθήκη (β) εκφράζει την έννοια της υπερπροσθετικότητας η οποία είναι σημαντική διότι δηλώνει πως αν δύο ξένες ομάδες συνεργαστούν τότε θα επιτύχουν τουλάχιστον ότι θα κατάφερναν αθροιστικά αν η κάθε μία έπαιζε μόνη της.

Ορισμός 4.2.2 Εάν $N = \{ 1, 2, \ldots, \nu \}$ είναι ένα σύνολο παικτών και f είναι η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση ορισμένη στο 2^N, η δομή (N, f) θα ονομάζεται **συμμαχικό παιχνίδι ή παιχνίδι σε συμμαχική μορφή**, (coalitional game).

Ουσιαστικά, η χαρακτηριστική συνάρτηση σε ένα συμμαχικό παιχνίδι είναι η ακριβής εικόνα της αξίας της συμμαχίας καθώς περιγράφει το συνολικό αναμενόμενο άθροισμα των αποδόσεων των παικτών της συμμαχίας.

Έχοντας αναφέρει τις πρωταρχικές έννοιες των συμμαχικών παιχνιδιών και της χαρακτηριστικής συνάρτησης, ας δούμε πως αλληλεπιδρούν και πως εμπλέκονται μεταξύ τους.

4.3 Συμμαχικά Παιχνίδια Μεταφερόμενης ωφέλειας

Η συμμαχία έχοντας το πλεονέκτημα της συνεργασίας, βοηθάει τους παίκτες που πέφτουν κάτω από το επίπεδο ασφάλειας τους να καλύπτουν τη ζημία τους από τις αποδόσεις των άλλων παικτών που είναι πάνω από το δικό τους επίπεδο ασφάλειας. Ως επίπεδο ασφάλειας θεωρούμε το λιγότερο επιθυμητό αποτέλεσμα από αυτά που ενδέχεται να συμβούν κατά τη διεξαγωγή ενός παιχνιδίου. Επομένως αν ένας παίχτης έρθει αντιμέτωπος με κάποιο αποτέλεσμα που είναι χειρότερο από αυτό που μπορεί να διαχειριστεί και συνεπώς θα κινδυνεύσει, καλούνται οι σύμμαχοι του που είχαν απόδοση πάνω από το δικό τους επίπεδο ασφάλειας να καλύψουν τη δική του ζημιά. Γίνεται επομένως **μεταφορά ωφέλειας**, (transferable utility) από τους παίκτες που είχαν καλή απόδοση προς αυτούς που δεν είχαν. Σε διαφορετική περίπτωση, δεν θα υπήρχε κίνητρο συμμαχίας διότι ο παίκτης θα έχανε περισσότερο ή θα κέρδιζε λιγότερο απ΄ότι αν ήταν μόνος του.

Τα συμμαχικά παιχνίδια μεταφερόμενης ωφέλειας έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- οι παίκτες μοιράζονται κέρδη και απώλειες.
- η δυνατότητα να μοιραστούν τα κέρδη και οι απώλειες προκύπτει είτε από συνεργασία όλων των παικτών, είτε από συνεργασία ενός υποσυνόλου παικτών.
- δεν υπάρχει δέσμευση ως προς το ποιοι θα αποτελέσουν τη συμμαχία ή τι είδους διαπραγματεύσεις θα γίνουν μεταξύ τους.
- υπάρχουν αντικρουόμενα συμφέροντα καθώς ο κάθε παίκτης είτε θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, είτε θέλει να ελαχιστοποιήσει τη ζημία του.

Αν εξειδικεύσουμε τη χρήση της συμμαχίας στο πεδίο της ασφάλισης παρατηρούμε ότι ο πλέον σημαντικός στόχος της συμμαχίας, είναι να εξασφαλίσει για τη συμμαχική ομάδα των ασφαλισμένων, τέτοιο ασφάλιστρο που υπολογισμένο σαν ενιαίο σύνολο να είναι λιγότερο από το ασφάλιστρο που θα πλήρωνε κάθε ασφαλισμένος ενεργώντας ατομικά.

Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, οι παίκτες επιθυμούν να απαλλαγούν από επερχόμενο κίνδυνο καταβάλλοντας το χαμηλότερο δυνατό ασφάλιστρο. Κάθε παίκτης επιζητεί ένα βέλτιστο τρόπο τοποθέτησης των χρημάτων του επιτελώντας τον προαναφερόμενο σκοπό.

Το παράδειγμα που ακολουθεί θα εξηγήσει πως μπορεί να υλοποιηθεί αυτή η τοποθέτηση χρημάτων.

Παράδειγμα 4.3.1 Μία ασφαλιστική εταιρεία, την οποία στη συνέχεια θα αποκαλούμε παίκτη A, επιθυμεί να επεκτείνει τις πωλήσεις της σε μία περιοχή της επαρχίας όπου όμως η τοπική κοινωνία είναι κλειστή και οι συναλλαγές αγοραπωλησίας γίνονται μεταξύ γνωστών. Η εταιρεία εκτιμά ότι μπορεί να κερδίσει το επόμενο τρίμηνο περίπου 1.000 νομισματικές μονάδες από νέα συμβόλαια όμως φοβάται πως αν ανοίξει η ίδια γραφείο στην πόλη αυτή με δικούς της υπαλλήλους που δεν γνωρίζουν τους ντόπιους κατοίκους δεν θα έχει την ανταπόκριση που αναμένει.

Ένας κάτοικος της περιοχής, τον οποίο θα ονομάζουμε παίκτη B, επιθυμεί να ανοίξει ασφαλιστικό γραφείο στην περιοχή όμως δεν έχει την οικονομική δύναμη να καλύψει τρέχοντα έξοδα μιας νεοσύστατης επιχείρησης (λογαριασμοί ΔΕΚΟ, εφορία, ενοίκιο) μέχρι να εδραιώσει το πελατολόγιό του. Πιστεύει ότι κατά τη διάρκεια του επόμενου τριμήνου θα συνάψει συμβόλαια από τα οποία θα λάβει συνολικά 2.000 νομισματικές μονάδες.

Επίσης, στην πόλη αυτή υπάρχει μόνο ένα ασφαλιστικό γραφείο με πολύχρονη παρουσία στην τοπική αγορά και ιδιοκτήτη με κραταιό όνομα στην περιοχή, ο οποίος όμως άμεσα θα συνταξιοδοτηθεί. Ας ονομάσουμε το ασφαλιστικό γραφείο παίκτη E. Σκοπεύει να μεταβιβάσει την επιχείρηση στο γιο του και από το συνολικό κέρδος της επιχείρησης να κρατήσει το 10%. Ο γιος του όμως διαμένει σε άλλη πόλη και έτσι θα χρειαστεί υπάλληλο που θα αναλάβει τη λειτουργία του ασφαλιστικού γραφείου. Ο παίκτης E σύμφωνα με τις πωλήσεις του παρελθόντος, εκτιμά ότι το επόμενο τρίμηνο θα κέρδιζε 3.000 νομισματικές μονάδες από νέα συμβόλαια.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα τι θα γίνει αν αυτοί οι τρεις παίκτες συνεργαστούν; Υπάρχει πιθανότητα,μετατρέποντας τα ανταγωνιστικά συμφέροντά τους, σε κοινό συμφέρον, να μπορούν να επωφεληθούν; Ας υπολογίσουμε αρχικά τις ατομικές τους αποδόσεις, τα επίπεδα ασφαλείας τους δηλαδή αλλά και τη χαρακτηριστική συνάρτηση που θα μας δώσει το κέρδος μιας ενδεχόμενης συμμαχίας τους.

Οι συμμαχίες του συνόλου (A,B,E) είναι οι (A), (B), (E), (AB), (AE), (BE) και (ABE). Θα υπολογίσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση για κάθε μία από αυτές:

- $f(\emptyset) = 0$, αν κανείς από τους 3 παίκτες δεν προβεί σε κάποια ενέργεια τότε δεν υπάρχει κέρδος

- f (A) = 1000, διότι η ασφαλιστική εταιρεία μέσω διαφημιστικών μέσων, αποδοχή αιτήσεων ασφάλισης μέσω internet υποθέτει ότι θα λάβει το αναμενόμενο κέρδος της
- f (B) = 0, διότι ο παίκτης αυτός μένοντας μόνος του χωρίς καμία υποδομή (νέος ασφαλιστικός σύμβουλος χωρίς εργασιακό χώρο) δεν αποκομίσει κανένα κέρδος
- f (E) = 0, αντίστοιχα ο παίκτης E – ασφαλιστικό γραφείο δεν θα έχει κανένα κέρδος καθώς δεν θα υπάρχει φυσικό πρόσωπο να αναλάβει τη λειτουργία του
- f (AB) = 1.000, αν η ασφαλιστική εταιρεία προσλάβει τον παίκτη B ως υπάλληλό της, πληρώνοντας x νομισματικές μονάδες, έχει πρόσβαση στην τοπική κλειστή αγορά και ο παίκτης B έχει στη διάθεσή του εργασιακό χώρο που θα του διαθέσει η εταιρεία και τον απαραίτητο μηχανογραφικό εξοπλισμό, έτσι λοιπόν μαζί έχουν x + (1.000 - x) νομισματικές μονάδες
- f (AE) = 4.000, ο μέλλων συνταξιούχος προκειμένου να έχει ως όφελος το 10% ζητάει από την ασφαλιστική εταιρεία να του στείλει υπάλληλο που έχει την τεχνογνωσία του ασφαλιστικού κλάδου και δεν θα χρειαστεί περίοδο προσαρμογής ή εκπαίδευση και θα πληρώνεται από τη μισθοδοσία της εταιρείας αλλά με ειδική σύμβαση που θα υπογράψει το γραφείο με την εταιρεία θα της επιστρέφει το μισθό του. Έτσι η εταιρεία θα αποκτήσει πρόσβαση στην τοπική αγορά προσφέροντας ένα έμπειρο υπάλληλό της και ο εν δυνάμει συνταξιούχος θα αποκομίζει το επιπλέον εισόδημα που επιθυμεί. Αντίστοιχα με πριν, από τα έξοδα του γραφείου, θα καταβάλλονται x νομισματικές μονάδες στον υπάλληλο που θα προσφέρει η εταιρεία οπότε συνολικά η εταιρεία και το ασφαλιστικό γραφείο θα έχουν κέρδος 1.000 + x + (3.000 - x)
- f (BE) = 5.000, συμμαχώντας παίκτης B με το ασφαλιστικό αντίστοιχα με πριν θα έχουν κέρδος 2.000 + x + (3.000 - x)
- f (ABE) = 6.000, στην περίπτωση που θα συνεργαστούν όλοι μαζί προφανώς δεν θα σταλεί υπάλληλος από την εταιρεία αφού υπάρχει ο παίκτης B ο οποίος θα αναλάβει να εκτελέσει χρέη υπαλλήλου και θα λάβει x νομισματικές μονάδες και στη συνεργασία B και E θα προσχωρήσει και η εταιρεία. Επομένως το κέρδος για όλους θα είναι 5.000+1.000

Είδαμε λοιπόν πως η χαρακτηριστική συνάρτηση μας βοηθάει να μετρήσουμε την απόδοση μιας συμμαχίας για κάθε μέλος που εισχωρεί ή αποχωρεί. Συνεπώς είναι έννοια κλειδί καθώς εξακριβώνει αν αυτή η συμμαχία έχει νοήμα να πραγματοποιηθεί. Αν η χαρακτηριστική συνάρτηση μετράει κέρδος και η τιμή της για τη συμμαχία είναι μικρότερη από την τιμή που λαμβάνει για κάθε παίχτη ξεχωριστά τότε προφανώς κάθε ορθολογικός παίκτης θα προτιμήσει να παραμείνει μόνος του. Αν πάλι, η χαρακτηριστική συνάρτηση μετράει ζημιά και η τιμή της για τη συμμαχία είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με τις τιμές που λαμβάνει για κάθε παίκτη ξεχωριστά τότε ασφαλώς και υπάρχει κίνητρο συνεργασίας.

Στην περίπτωση που τα δεδομένα ενός παιχνιδιού οδηγήσουν τους παίκτες σε συμμαχία ναι μεν το παιχνίδι θα καθορίζεται από ισότιμους κανόνες για όλους τους παίκτες όμως κάθε παίκτης μπορεί να συμμετάσχει με διαφορετικό μερίδιο συμμετοχής.

Έστω ότι μια ομάδα παικτών συστήνουν μια εταιρεία στην οποία ο καθένας τοποθετεί διαφορετικό ποσοστό κεφαλαίων επί της συνολικής περιουσίας της εταιρείας. Τότε ο μεγαλύτερος μέτοχος εξ αυτών λογικό είναι να λάβει και μεγαλύτερο μερίδιο από τα κέρδη και όχι να μοιραστούν τα κέρδη εξ ίσου για όλους. Σε αυτή την περίπτωση θα αναζητηθεί ο τρόπος με τον οποίο θα μοιραστούν αυτά τα κέρδη και αυτό είναι το θέμα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Η Θεωρία Παιγνίων διαθέτει την έννοια της «τιμής Shapley» η οποία αφορά θέματα κατανομής κεφαλαίων.

4.4 Η απόδοση της συμμαχίας

Ως τώρα παρατηρούμε τη δομή των συμμαχικών παιχνιδιών ως μια ιδέα που εξασφαλίζει στους παίκτες μικρότερες ζημιές ή κέρδη απ΄ ότι αν ήταν μόνοι τους. Οι παίκτες έχουν κοινό συμφέρον να συγκροτήσουν μια μεγάλη συμμαχία, καθώς λόγω της υπερπροσθετικότητας το ποσό που θα λάβουν, $f(N)$, είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο το ποσό που θα λάβουν από την ένωση όλων των συμμαχιών που μπορούν να δημιουργηθούν. Οι ορθολογικοί παίκτες θα συνεργαστούν προς πραγματοποίηση της μεγαλύτερης συμμαχίας για να λάβουν ποσό ίσο με $f(N)$.

Τίθεται όμως το ερώτημα πως θα κατανεμηθούν τα κέρδη αυτά και αν θα έχουν όλοι το ίδιο μερίδιο δεδομένου ότι κάποιοι παίκτες έχουν συμβάλλει περισσότερο ή αντίστοιχα πως θα κατανεμηθούν τα κόστη σε μία συμμαχία ομάδων που πρέπει όλες να πληρώσουν από κοινού αλλά όχι εξ ίσου για την ανάληψη ζημιάς.

Η ενότητα αυτή θα παρουσιάσει ένα γενικό παράδειγμα σχετικά με τον τρόπο κατανομής του κόστους ή του κέρδους μίας συμμαχίας. Η έννοια που σχετίζεται άμεσα με αυτή την κατανομή και θα αναφέρουμε ακολούθως, είναι η έννοια της «απόδοσης».

Ορισμός 4.4.1 Ένα διάνυσμα πληρωμών $\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_\mu)$ με προτεινόμενα ποσά προς απόδοση στους παίκτες μιας συμμαχίας, θεωρώντας ότι ο i παίκτης λαμβάνει απόδοση x_i καλείται **απόδοση**, **(**imputation).

Μία βασική ιδιότητα της απόδοσης είναι ότι το συνολικό ποσό που θα λάβουν οι παίκτες ισούται με:

$$\sum_{i=1}^{\mu} x_i = f(N)$$

και καλείται **συλλογικός ορθολογισμός**, (collective rationality).

Επιπλέον κάθε παίκτης συμμετέχοντας στη συμμαχία θα λάβει τουλάχιστον όσο θα κέρδιζε μόνος του γιατί αλλιώς δεν θα είχε κίνητρο να συμμετάσχει. Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$x_i \geq f(i), \text{ για κάθε παίκτη } i$$

και η ιδιότητα αυτή καλείται **ατομικός ορθολογισμός**, (individual rationality).

Παρουσιάζοντας το ακόλουθο παράδειγμα θα δείξουμε πρακτικά γιατί είναι αναγκαία η ύπαρξη συμμαχίας ως προς την εύρεση ευνοϊκής λύσης για τους συμμετέχοντες , θα δούμε την εφαρμογή και τον υπολογισμό των αποδόσεων και πως κάνουν επιτακτική την ανάγκη επιλογής μεθόδου τοποθέτησης κεφαλαίων.

Παράδειγμα 4.4.1 Μία ασφαλιστική εταιρεία και ένας πελάτης, που είναι κάτοχος αποταμιευτικού προγράμματος καθορισμένης εισφοράς, διαπραγματεύονται τον τρόπο καταβολής του ποσού που συγκεντρώθηκε, στη λήξη του χρονικού διαστήματος καταβολής ασφαλίστρων που ορίζει το σχετικό συμβόλαιο. Η καταβολή της απαίτησης μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) με ένα σύνολο ετήσιων καταβολών συνολικού ποσού 100.000€

β) με εφάπαξ καταβολή ποσού 150.000€.

Αν τα δύο συμβαλλόμενα μέρη δεν συμφωνήσουν στον τρόπο της απόδοσης των χρημάτων και αποφασίσουν να επιλύσουν δικαστικά τη διαφωνία τους τότε η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να καλύψει δικαστικά έξοδα ποσού 50.000€ και το δικαστήριο θα αποδώσει στον πελάτη εφάπαξ καταβολή ποσού 120.000€ από τα οποία θα πρέπει να πληρώσει 30.000€ σε δικαστικά έξοδα. Το ερώτημα που τίθεται είναι ποια στρατηγική θα ακολουθήσει ο καθένας.

Όπως είναι προφανές η κατάσταση αυτή δεν προσομοιάζει σε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος καθώς για κάθε απόφαση που θα ληφθεί ο κάθε παίκτης θα λάβει κέρδος που δενείναι την ίδια στιγμή ισόποση απώλεια για τον αντίπαλο. Το κέρδος και η απώλεια εξαρτώνται καθαρά από το αν τα δύο μέρη επιλέξουν να συνεργαστούν. Σε αυτό το σημείο βλέπουμε και την ειδοποιό διαφορά με τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών. Ο ακόλουθος πίνακας εκφράζει τις αποδόσεις του παιχνιδιού και αμέσως θα δούμε πως αυτές έχουν προκύψει.

Ασφαλισμένος / Εταιρεία	Επιθυμεί να λάβει ετήσιες καταβολές χρημάτων	Επιθυμεί να λάβει εφάπαξ καταβολή χρημάτων
Προτείνει ετήσιες καταβολές χρημάτων	100.000 -100.000	90.000 -170.000
Προτείνει εφάπαξ καταβολή χρημάτων	90.000 -170.000	150.000 -150.000

Πίνακας 4.4.1 Πίνακας αποδόσεων ασφαλιστή και ασφαλισμένου

Κάθε κελί στο κάτω αριστερό μέρος εμφανίζει την απόδοση του ασφαλιστή και στο πάνω δεξιά μέρος εμφανίζει την απόδοση του παίκτη.

Όπως είναι προφανές καμία στρατηγική δεν κυριαρχεί για κάνενα από τους δύο παίκτες. Αναφορικά με τον ασφαλισμένο, αν κυριαρχούσε η στρατηγική της απολαβής ετήσιων καταβολών έναντι των εφάπαξ καταβολών, θα έπρεπε κάθε ποσό ετήσιας καταβολής να είναι μεγαλύτερο από τα αντίστοιχα ποσά εφάπαξ καταβολής. Όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Ομοίως δεν συμβαίνει για την ασφαλιστική εταιρεία.

Αν τα δύο μέρη δεν συμφωνήσουν τότε καταλήγουν με απώλειες διότι αν η ασφαλιστική εταιρεία προτείνει απόδοση των χρημάτων με ετήσιες καταβολές και ο ασφαλισμένος επιθυμεί εφάπαξ καταβολή θα λάβει 120.000€ μείον το ποσό των 30.000€ που αφορά πληρωμή νομικών εξόδων. Συνεπώς το καθαρό κέρδος θα είναι 90.000€, αντί για 100.000€ ή 150.000€ που θα λάμβανε σε περίπτωση συμφωνίας και η ασφαλιστική θα πληρώσει 170.000€ (λόγω της εφάπαξ καταβολής ποσού 120.000€ πλέον των νομικών εξόδων που ανέρχονται στο ποσό των 50.000€) αντί για 100.000€ ή 150.000€ που θα πλήρωνε αν συμφωνούσαν. Αντίστοιχα αν η ασφαλιστική εταιρεία προτείνει απόδοση των χρημάτων με εφάπαξ καταβολή και ο ασφαλισμένος ζητήσει απόδοση των χρημάτων με ετήσιες καταβολές τότε θα λάβει 90.000€ αντί των 100.000€ ή των 150.000€ που θα λάμβανε αν συμφωνούσαν και η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει 170.000€ αντί των 100.000€ ή των 150.000€ που θα πλήρωνε αν συμφωνούσαν.

Είναι ξεκάθαρο και στα δύο μέρη πως συμφέρει να συμβιβαστούν ώστε να αποφύγουν να πληρώσουν επιπλέον νομικά έξοδα. Επομένως η συμφωνία εξυπηρετεί και τους δύο καθώς θα έχουν καλύτερες αποδόσεις απ΄ότι αν διαφωνήσουν. Η απόφαση για συμφωνία εφάπαξ καταβολής και η απόφαση για ετήσιες καταβολές είναι σημεία στρατηγικής ισορροπίας, διότι είτε με την μία απόφαση είτε με την άλλη κανένας παίκτης δεν θα μπορεί να κερδίσει κάτι περισσότερο. Αν εξακολουθήσουν να διαφωνούν και επιμείνουν σε διαφορετικές αποφάσεις ξέρουν ότι αναλαμβάνουν κίνδυνο να χάσουν χρήματα.

Η απάντηση στο δίλημμα να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν δίνεται από τη χρήση τυχαιοποιημένων στρατηγικών. Κάθε παίκτης θα διαλέξει τη στρατηγική του με κάποια συγκεκριμένη πιθανότητα που θα εξαρτάται από τις αποδόσεις του αντιπάλου. Για παράδειγμα, αν η ασφαλιστική εταιρεία επιλέξει την τυχαιοποιημένη στρατηγική $(\frac{6}{7}, \frac{1}{7})$ δηλαδή αν σε σύνολο εφτά φορών συμβιβασμού τις έξι προτείνει ετήσιες καταβολές χρημάτων και μόνο μία φορά την εφάπαξ καταβολή τότε η μέση απόδοση του ασφαλισμένου θα είναι:

$$\frac{6}{7} \times 100.000 + \frac{1}{7} \times 90.000 \cong 98.571 \text{ €} \cong \frac{6}{7} \times 90.000 + \frac{1}{7} \times 150.000$$

Δηλαδή το κέρδος του θα είναι τέτοιο που θα είναι αδιάφορο να διεκδικήσει την εφάπαξ καταβολή. Παρόμοια, αν ο ασφαλισμένος επιλέξει την τυχαιοποιημένη στρατηγική ($\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$), δηλαδή αν από τις εννιά φορές που θα μπει στη διαδικασία του συμβιβασμού τις δύο φορές ζητήσει εφάπαξ καταβολή και τις υπόλοιπες εφτά φορές ζητήσει ετήσιες καταβολές τότε η ασφαλιστική εταιρεία θα έχει απόδοση:

$$\frac{2}{9}\times 100.000+\frac{7}{9}\times 170.000 \cong 154.444\text{ €} \cong \frac{2}{9}\times 170.000+\frac{7}{9}\times 150.000$$

Δηλαδή η ασφαλιστική εταιρεία θα έχει τέτοια απόδοση που θα είναι αδιάφορο αν θα επιλεγεί η λύση των ετήσιων καταβολών.

Διαπιστώσαμε ότι οι πιθανότητες με τις οποίες θα επιλεγούν οι στρατηγικές είναι τέτοιες ώστε οι αποδόσεις του ενός παίκτη να ισορροπήσουν με τις στρατηγικές του άλλου παίκτη, δηλαδή όποια στρατηγική και να επιλέξει ο ένας η απόδοση του άλλου παραμένει σταθερή. Έτσι όποια στρατηγική και να επικρατήσει ο άλλος παίκτης παραμένει αδιάφορος αφού θα κερδίσει ή θα πληρώσει το ίδιο ποσό. Αν επιλεγεί μία στρατηγική που δεν ισορροπεί με την απόδοση του αντιπάλου τότε ο αντίπαλος θα έχει το πλεονέκτημα της απόφασης.

Στην προκειμένη περίπτωση αν καταφέρουν οι παίκτες να συνεργαστούν τότε υπάρχει ακόμα καλύτερη προοπτική από αυτή των τυχαιοποιημένων στρατηγικών. Παρατηρούμε από τον πίνακα των αποδόσεων ότι οι αποδόσεις της ασφαλιστικής εταιρείας κυμαίνονται από -100.000€ εως -170.000€ και οι αποδόσεις του ασφαλισμένου κυμαίνονται από 90.000€ εως 150.000€. Αν συμφωνήσουν στην καταβολή ποσού μεταξύ 100.000€ και 150.000€, είναι προφανές ότι είναι η προτιμότερη επιλογή γιατί έτσι θα εξοικονομήσουν χρήματα από την επιβάρυνση των δικαστικών εξόδων, ο ασφαλισμένος θα πάρει παραπάνω από την ελάχιστη απόδοσή του που είναι 90.000€ και η ασφαλιστική εταιρεία θα πληρώσει λιγότερα από τη μέγιστη αποζημίωση που πρέπει να καταβάλλει. Έχουν λοιπόν όλοι όφελος να επιδιώξουν τον συμβιβασμό.

Το ερώτημα τώρα είναι το εξής: μεταξύ των προτεινόμενων λύσεων σε ποια θα ήταν καλύτερο να συμφωνήσουν; Η Θεωρία Παιγνίων έρχεται να δώσει την απάντηση με την τιμή Shapley η οποία χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η τοποθέτηση κεφαλαίων.

4.5 Μέθοδοι κατανομής κεφαλαίων

Η απόδοση κάποιου συμμαχικού σχήματος όπως την είδαμε παραπάνω μας οδηγεί από μόνη της στη διαδικασία της διανομής της. Η κατανομή κερδών ή εξόδων επαφίεται στη χρήση διαφόρων λογιστικών μεθόδων όπως αυτές που θα αναφέρουμε ενδεικτικά και επικρατέστερη όλων είναι αυτή που κάνει χρήση της τιμή Shapley.

Μέσω του παραδείγματος που ακολουθεί, Lemaire (1983), θα δούμε επιγραμματικά κάποιες λογιστικές μεθόδους και θα επικεντρωθούμε σταδιακά στην εφαρμογή της τιμής Shapley.

Τρείς Έλληνες που διασχίζουν οδικώς την Ιταλία εμπλέκονται σε τρία διαφορετικά αυτοκινητιστικά δυστυχήματα σε διαφορετικές πόλεις, με κόστη ζημίας όπως φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Ασφαλιστική εταιρεία	Τόπος ατυχήματος	Κόστος ζημιάς
1	Φλωρεντία (Φ)	500 €
2	Μιλάνο (Μ)	400 €
3	Τορίνο (Τ)	800 €

Πίνακας 4.5.1 Κόστη ζημίας

Είναι ασφαλισμένοι σε τρεις διαφορετικές ασφαλιστικές εταιρείες στην Ελλάδα που όμως συνεργάζονται με τον ίδιο ανταποκριτή ασφαλιστικό φορέα στην Ιταλία. Ο εν λόγω φορέας έχει την έδρα του στη Ρώμη και για να μειώσει τα έξοδα του εμπειρογνώμονα που θα στείλει να εκτιμήσει τις ζημιές εξετάζει το ενδεχόμενο ο εμπειρογνώμονας να ελέγξει την ίδια μέρα παραπάνω από ένα ατυχήματα.

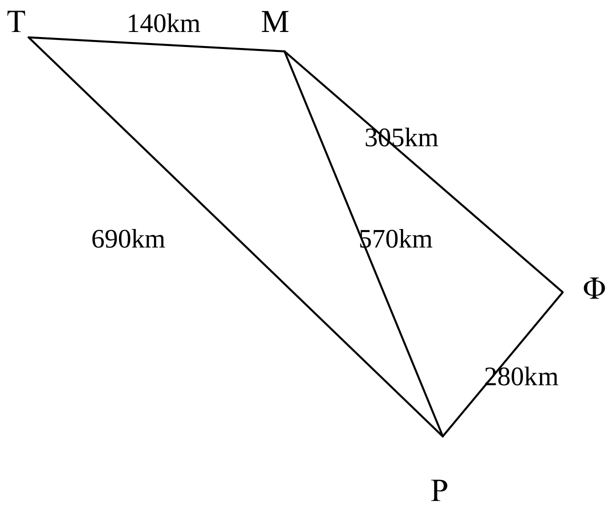
Παρατηρούμε από το Σχήμα 4.5.1 , ότι αν ο εμπειρογνώμονας πραγματοποιήσει μία κυκλική διαδρομή, Ρώμη-Φλωρεντία-Μιλάνο-Τορίνο-Ρώμη θα διανύσει συνολικά:

$$280+305+140+690=1.415 \text{ km.}$$

Αν όμως πηγαίνει σε κάθε πόλη και επιστρέφει ξανά στη Ρώμη θα διανύσει τη διπλή απόσταση δηλαδή:

$$2\times(280+570+690)=3.080\text{km}$$

που είναι γεγονός εξαιρετικά ασύμφορο οικονομικά και χρονοβόρο.



Σχήμα 4.5.1 Απεικόνιση των αποστάσεων

Αν λοιπόν θεωρήσουμε το σύνολο $N = (1,2,3)$, S κάθε υποσύνολό του και $f\,(S)$ τη συνολική απόσταση οδήγησης μέχρι το σημείο που βρίσκονται τα οχήματα που ανήκουν στο υποσύνολο S θα έχουμε:

$f\,(1) = f\,(\Phi) = 280{+}280{=}560$

$f\,(2) = f\,(\text{M}) = 570{+}570{=}1.140$

$f\,(3) = f\,(\text{T}) = 690{+}690{=}1.380$

$f\,(1,2) = f\,(\Phi,\text{M}) = 280{+}305{+}570{=}1.155$

$f\,(1,3) = f\,(\Phi,\text{T}) = 280{+}305{+}140{+}690{=}1.415$

$f\,(1,2,3) = f\,(\Phi,\text{M},\text{T}) = 280{+}305{+}140{+}690{=}1.415$

$f\,(2,3) = f\,(\text{M},\text{T}) = 570{+}140{+}690{=}1.400$

Ο εμπειρογνώμονας τώρα για να μεταβεί σε κάθε πόλη θα επιβαρυνθεί με έξοδα όπως το κόστος των καυσίμων για τη μετακίνησή του, διόδια και δαπάνη διαμονής σε ξενοδοχείο αν απαιτηθεί διανυκτέρευση σε κάποια πόλη. Επομένως το πρόβλημα που αντιμετωμετωπίζει είναι πως να κατανείμει τα έξοδα αυτά καθώς διαφορετικά ποσά θα αναλογούν σε κάθε ασφαλιστική εταιρεία. Θα πρέπει λοιπόν να υπολογίσει το ποσό που θα πρέπει να του καταβάλει η κάθε εταιρεία μαζί το ποσό της αποζημίωσης που μέσω αυτού θα λάβουν οι οδηγοί που ενεπλάκησαν στα ατυχήματα.

Γι΄αυτό το λόγο θα αναφέρουμε στη συνέχεια, κάποιες λογιστικές μεθόδους κατανομής κεφαλαίων (κερδών ή ζημιών) και θα εξηγήσουμε τους λόγους για τους οποίους δεν είναι οι ιδανικές.

- **ΜέθοδοςΑ:«Αναλογική κατανομή του συνολικού κέρδους / κόστους ή Μέθοδος Moriarity, (Proportional Repartition of the Total Gainor Moriarity's method)»**

Η μέθοδος αυτή προτάθηκε το 1975 από τον Moriarity. Πρότεινε τη μέθοδο αυτή ως μέσο τοποθέτησης κεφαλαίων που έχουν προκύψει από κοινό σκοπό και κάθε παίκτης λαμβάνει ένα ποσοστό επί των συνολικών κεφαλαίων.Θεώρησε ότι το μερίδιο που αναλογεί σε κάθε παίκτη που συμμετέχει σε μία ομάδα θα πρέπει να είναι σαν κόστος μικρότερο από αυτό που θα επωμιζόταν αν δεν συμμετείχε.

Ο σχετικός τύπος σε επίπεδο συμμαχίας σε ένα παιχνίδι $< N, f >$ είναι:

$$x_i = \quad f(i) - \frac{f(i)}{\sum_{j\in N} f(j)} [\sum_{k\in N\setminus i} f(k) - f(N)] = \frac{f(i)}{\sum_{j\in N} f(j)} f(N),$$

όπου το $f\,(i)$ ερμηνεύεται ως το κόστος που θα επωμιστεί η ομάδα i αν δεν συμμετάσχει σε μία συμμαχία, ως $f\,(N)$ είναι το κόστος που αφορά τη μεγαλύτερη συμμαχία του παιχνιδιού και προσφέρει εξοικονόμηση κόστους σε όλες τις ομάδες και το x_i εκφράζει το χρηματικό κεφάλαιο που αναλογεί στον παίκτη i αν μειωθεί το $f\,(i)$ κατά το ποσοστό $\dfrac{f(i)}{\sum_{j\in N} f(j)}$ υπολογισμένο επί τη διαφορά της απόδοσης της συμμαχίας N από το άθροισμα των αποδόσεων των ομάδων που δεν συμμετέχουν στη συμμαχία.

Χρησιμοποιώντας τώρα τα αριθμητικά δεδομένα του παραδείγματος θα έχουμε:

$$x_1 = \frac{f(1)}{f(1) + f(2) + f(3)} \times f(1,2,3) = \frac{560}{3080} \times 1415 \cong 257.27$$

Όμοια $x_2 = \frac{f(2)}{3080} \times 1415 \cong 523.73$

$x_3 = \frac{f(3)}{3080} \times 1415 \cong 634$

Άρα $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3) = (257.27 , 523.73 , 634)$ είναι τα ποσά που θα καλύψουν οι ασφαλιστικές εταιρείες επιπλέον των αποζημιώσεων στους οδηγούς, για τα έξοδα ταξιδίων του εμπειρογνώμονα.

- **Μέθοδος Β: «Ισόνομη κατανομή μη περιθώριου κόστους, (Equal Repartition of the Non-Marginal Costs)»**

Ορίζουμε ως **περιθώριο κόστους για την *i* ομάδα**, (marginal cost for *i* group), την ποσότητα:

$$CM(i) = f(N) - f(N \setminus \{i\})$$

η οποία εκφράζει το πόσο που συνεισφέρει ή επιβαρύνει την *i* ομάδα σε μία συμμαχία.

Στο παραπάνω παράδειγμα η ισότητα αυτή, εκφράζει την επιπλέον απόσταση που πρέπει να οδηγήσει ο εμπειρογνώμονας αν *i* είναι η τελευταία πόλη στην οποία συνέβη ατύχημα και έχει δημιουργηθεί απαίτηση.

Ο τύπος από τον οποίο προκύπτει η κατανομή κεφαλαίων είναι:

$$x_i = CM(i) + \frac{1}{3}\left[f(N) - \sum_{k \in N \setminus i} CM(k) \right].$$

Επομένως από τα αριθμητικά δεδομένα του παραδείγματος προκύπτει ότι τα περιθώρια κόστους είναι:

$$CM(1) = f(1,2,3) - f(2,3) = 1415 - 1400 = 15$$

$$CM(2) = f(1,2,3) - f(1,3) = 1415 - 1940 = 0$$

$$CM(3) = f(1,2,3) - f(1,2) = 1415 - 1155 = 260$$

οπότε

$$x_1 = CM(1) + \frac{1}{3}[f(1,2,3) - \sum_{j=1}^{3} CM(j)] =$$

$$= 15 + \frac{1}{3}[\ 1415 – (15 + 0 + 260)\ ] = 15 + 380 = 395$$

$$x_2 = CM(2) + 380 = 0 + 380 = 380$$

$$x_3 = CM(3) + 380 = 260 + 380 = 640$$

και έτσι η κατανομή είναι:

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3) = (395, 380, 640).$$

- **Μέθοδος Γ: «Αναλογική κατανομή του μη περιθώριου κόστους, (Proportional Repartition of the Non Marginal Costs)»**

Η μέθοδος αυτή τοποθετεί κεφάλαια υπολογίζοντας αυτά, ως ποσοστό που προκύπτει από τα περιθώρια κόστους επί την απόδοσης της συμμαχίας.

Ο σχετικός τύπος είναι:

$$x_i = CM(i) + \frac{CM(i)}{\sum_{j \in N} CM(j)}[f(N) - \sum_{k \in N \setminus i} CM(k)] = \frac{CM(i)}{\sum_{j \in N} CM(j)} f(N)$$

και λαμβάνουμε

$$x_1 = \frac{CM(1)}{\sum_{j=1}^{3} CM(j)} \times f(1,2,3) = \frac{15}{275} \times 1415 \cong 70.75$$

$$x_2 = \frac{CM(2)}{275} \times f(1,2,3) = \frac{0}{275} \times 1415 = 0$$

$$x_3 = \frac{CM(3)}{275} \times f(1,2,3) = \frac{260}{275} \times 1415 \cong 1344.25$$

Άρα

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3) = (70.75,\ 0\ ,\ 1344.25).$$

- **Μέθοδος Δ: «Αναλογική κατανομή των απαιτήσεων, (Repartition Proportional to the Claim Amounts)»**

Η μέθοδος αυτή, πάλι υπολογίζει την απόδοση του παίκτη ως ποσοστό επί της απόδοσης της συμμαχίας, όμως αυτή τη φορά το ποσοστό υπολογίζεται από τις απαιτήσεις που υφίστανται.

Ο σχετικός τύπος είναι:

$$x_i = \frac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j} f(N)$$

οπότε έχουμε:

$$x_1 = \frac{s_1}{\sum_{j=1}^{3} s_j} f(1,2,3) = \frac{500}{500+400+800} \times 1415 =$$

$$= \frac{500}{1700} \times 1415 \cong 416.01$$

$$x_2 = \frac{400}{1700} \times 1415 = 332.53$$

$$x_3 = \frac{800}{1700} \times 1415 = 665.05$$

Άρα

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3) = (416.01,\ 332.53,\ 665.05).$$

Είδαμε λοιπόν ότι και οι πέντε λογιστικές μέθοδοι καταλήγουν σε αποτελέσματα που είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους οπότε ένας λογικά σκεπτόμενος παίκτης θα αναρωτηθεί ποια μέθοδος είναι δίκαιη ως προς την κατανομή κεφαλαίων.

Μία μέθοδος για να είναι δίκαιη θα πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα του ατομικού ορθολογισμού που αναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας, όμως επειδή τώρα μιλάμε για κόστη και όχι για κέρδη θα πρέπει να ισχύει:

$$x_i \leq f(i) \text{ , για κάθε } i \text{ παίκτη}$$

διότι θα ήταν αδιανόητο μία ομάδα που συμμετέχει σε μια συμμαχία να πληρώσει περισσότερο απ΄ότι αν ήταν μόνη της.

Είναι πολύ σημαντικό να διευκρινίσουμε πως η φορά της ανισότητας είναι η παραπάνω όταν μιλάμε για κέρδη και εμφανίζει την αντίθετη φορά όταν εφαρμόζεται στην περίπτωση της απολαβής κερδών.

Επίσης θα πρέπει να ισχύει και **η αρχή περιθώριας συνεισφοράς, (**marginality principle**)** για τα κόστη οπότε έχουμε ότι:

$$x_i \geq f(N) - f(N \setminus \{ i\}) = CM(i) \text{, για κάθε } i \text{ παίκτη.}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε, πως όταν καταστεί εφικτό να φράξουμε την απόδοση ενός παίκτη σύμφωνα με τις παραπάνω ανισότητες, υπάρχει η δυνατότητα να γνωρίζουμε αν η λύση στην οποία καταλήξαμε είναι καλύτερη σε σχέση με άλλες. Η έννοια του «πυρήνα» που περιγράφεται από τον επόμενο ορισμό, εξηγεί πως είναι το σύνολο εκείνο που αν περιέχει λύση του παιχνιδιού τότε αυτή η λύση θα είναι η καλύτερη.

Ορισμός 4.5.2 Έστω ένα παιχνίδι $< N, \ f >$ σε συμμαχική μορφή με σύνολο αποδόσεων $X= \{ x_i , i\in N \}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

i) $x_i \geq f(i)$, για κάθε $i \in N$, (ατομικός ορθολογισμός)

ii) $\sum_{i\in N} x_i = f(N)$, (συλλογικός ορθολογισμός)

iii) $\sum_{i\in T} x_i \geq f(T)$, για κάθε $T \subset N$, (συμμαχικός ορθολογισμός)

Κάθε υποσύνολο του *A* που πληροί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **πυρήνας**, (core), του παιχνιδιού και συμβολίζεται με *C*.

Είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι ανισότητες του παραπάνω ορισμού αναφέρονται στις περιπτώσεις παιγνίων όπου η απόδοση ταυτίζεται με το κέρδος. Όταν όμως η απόδοση εκφράζει κόστος ή ζημία τότε οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται.

Οι ιδιότητες του πυρήνα μαρτυρούν σύμφωνα με τους Hart and Mas-Collel (1979), ότι οι αποδόσεις που ανήκουν σε αυτόν είναι οι καλύτερες δυνατές και δεν μπορούν να κυριαρχηθούν από άλλες.

Η έννοια του πυρήνα είναι στενά συνδεδεμένη με την λύση του παιχνιδιού όπως την όρισαν οι Neumann and Morgenstern. Χρησιμοποίησαν την έννοια του ευσταθούς συνόλου - είναι επίσης γνωστό ως **λύση Neumann–Morgenstern**- το οποίο ήταν η πρώτη λύση που προτάθηκε αναφορικά με τα παιχνίδια που είχαν περισσότερους από δύο παίκτες.

Ορισμός 4.5.3 Έστω το παιχνίδι $<N, f>$ μετις αποδόσεις *x, y*. Η απόδοση *x* κυριαρχεί την απόδοση *y* αν υπάρχει συμμαχία $S \neq \emptyset$ έτσι ώστε:

$$x_i > y_i \text{ και } \sum_{i \in S} x_i \;\; f(S) .$$

Τότε **ευσταθές σύνολο**, (stable set), είναι ένα σύνολο αποδόσεων που ικανοποιεί δύο ιδιότητες:

i) **Εσωτερική σταθερότητα**, (internal stability): Καμία απόδοση του ευσταθούς συνόλου δεν κυριαρχείται από άλλη απόδοση του συνόλου δηλαδή για κάθε *x, y* που ανήκουν σε ευσταθές σύνολο το *x* δεν κυριαρχεί το *y*.

ii) **Εξωτερική σταθερότητα**, (external stability): Όλες οι αποδόσεις εκτός του ευσταθούς συνόλου κυριαρχούνται από κάποια απόδοση του συνόλου. Αυτό σημαίνει ότι αν το *y* δεν ανήκει σε ευσταθές σύνολο και το *x* αντίστοιχα ανήκει σε ευσταθές σύνολο τότε το *x* κυριαρχεί το *y*.

Εφόσον ο πυρήνας αποτελείται από όλες τις κυρίαρχες αποδόσεις τότε όλα τα ευσταθή σύνολα περιέχουν τον πυρήνα του παιχνιδιού $< N, f >$ όπως αναφέρουν οι Neumann-Morgenstern (2010).

Η έννοια του πυρήνα θα ξαναααναφερθεί αργότερα πιο αναλυτικά, τώρα όμως έχει έρθει η σειρά της τιμής Shapley να μελετηθεί που τόσες φορές έχουμε αναφέρει επιγραμματικά ως τώρα.

4.6 Η τιμή Shapley

Η **τιμή Shapley** πήρε το όνομά της από τον Lloyd Shapley το 1953 όταν πρωτοαναφέρθηκε ως έννοια. Η τιμή Shapley θεωρείται ως η μοναδική δίκαιη κατανομή των αποδόσεων και έχει τη βασική ιδιότητα να απονέμει περισσότερο ή λιγότερο ποσό στον παίκτη που πρέπει ανάλογα με τη συνεισφορά του.

Διαισθητικά η τιμή Shapley $\varphi\,(\,f\,)$ του παιχνιδιού $<N,\,f>$ ορίζει μία τοποθέτηση της απόδοσης $f\,(N)$ του παιχνιδιού όπου η i συντεταγμένη της, $\varphi_i(\,f\,)$, εκφράζει το ποσό ωφέλειας του i παίκτη, $i \in N=\{1,2,\ldots,n\}$. Χρησιμοποιώντας το ακόλουθο παράδειγμα, Borch (1962), θα δείξουμε πως συνδέεται η έννοια της συνεργασίας με την τιμή Shapley.

Παράδειγμα 4.6.1 Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ομάδα που αποτελείται από 100 παίκτες όπου ο καθένας έχει πιθανότητα p = 0.1 να υποστεί κάποια απώλεια. Αποφασίζουν από κοινού να συστήσουν μια ασφαλιστική εταιρεία ώστε να αντιμετωπίσουν ενδεχόμενη ζημιά. Επιθυμώντας την επιβίωση αυτής της εταιρείας σχετικά με την επέλευση οποιουδήποτε κινδύνου, ορίζουν το αυστηρό κριτήριο η πιθανότητα ζημιάς για το σύνολο των 100 ατόμων να είναι μικρότερη από τηνπιθανότητα ζημιάς που έχει ο καθένας ατομικά. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με p' τηνπιθανότητα ζημίας που αφορά το σύνολο απαιτείται να ισχύει :

$$p' < 0.1\% \,.$$

Κάθε παίκτης που ανήκει στην ομάδα που σύστησε την εταιρεία, όπως είναι αναμενόμενο, θα αντιμετωπίσει το ενδεχόμενο είτε να συμβεί κίνδυνος είτε να μη συμβεί. Επομένως η ομάδα αυτή περιγράφεται από ένα τυχαίο πείραμα με δύο πιθανά αποτελέσματα για κάθε παίκτη, την πραγματοποίηση ζημιάς και απαίτησης ή τη μη πραγματοποίηση. Το πείραμα θα εκτελεστεί 100 φορές συνεπώς η κατανομή συχνοτήτων της πραγματοποίησης ζημιάς ακολουθεί διωνυμική κατανομή. Άρα η μέση τιμή καταβολής αποζημίωσης είναι:

$$m_1 = n_1 p_1 = 100 \times 0.1 = 10$$

και η τυπική απόκλιση καταβολής αποζημίωσης είναι:

$$\sigma_1 = \sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1)} \;=\; \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.9} \;=\; 3.$$

Αν υποτεθεί ότι οι απαιτήσεις αποζημίωσης ακολουθούν κανονική κατανομή τότε γνωρίζουμε ότι περίπου το 99.7% των παρατηρήσεων βρίσκονται σε απόσταση τριών τυπικών αποκλίσεων από τον αριθμητικό μέσο. Συνεπώς τα κεφάλαια που απαιτούνται για την καταβολή των αποζημιώσεων πρέπει να είναι τουλάχιστον:

$$m_1+3\sigma_1= 10+3\times 3=19.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα θα πρέπει από τα 100 άτομα που την απαρτίζουν να εισπράξει το ποσό των 19 νομισματικών μονάδων άρα κάθε άτομο θα πληρώσει ως ασφάλιστρο το ποσό των 0.19 νομισματικών μονάδων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει ακόμα μία ομάδα που αποτελείται επίσης από 100 άτομα και ο καθένας έχει πιθανότητα $p_2 = 0.2$ να αντιμετωπίσει κάποια απώλεια. Αν αυτά τα άτομα επίσης συστήσουν μια ασφαλιστική εταιρεία θα έχουμε:

$$m_2 = n_2 p_2 = 100\times 0.2 = 20$$

και η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_2 = \sqrt{n_2 p_2(1-p_2)} = \sqrt{100\times 0.2\times 0.8} =4.$$

Επομένως τα κεφάλαια που απαιτούνται για να καλύψει η δεύτερη ομάδα μια ζημιά σε ποσοστό 99.7% είναι τουλάχιστον:

$$m_2 + 3\sigma_2 = 20+3\times 4= 32.$$

Το ποσό λοιπόν που πρέπει να εισπράξει η εταιρεία από τους ασφαλισμένους είναι 32 νομισματικές μονάδες και κάθε ασφαλισμένος θα πληρώσει ως ασφάλιστρο 0.32 νομισματικές μονάδες.

Είδαμε παραπάνω ότι διαφορετικά άτομα ενωμένα σε ομάδες επιμερίζουν το κόστος μια ενδεχόμενης ζημιάς οπότε ανάλογα σκεπτόμενοι θα εξετάσουμε αν το κόστος μειώνεται ακόμα περισσότερο ανά άτομο σε περίπτωση που συμμαχήσουν οι ομάδες.

Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει το πλήθος των απαιτήσεων αποζημίωσης της πρώτης ομάδας και η τυχαία μεταβλητή Y που εκφράζει το πλήθος απαιτήσεων αποζημίωσης της δεύτερης ομάδας είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους .

Γνωρίζουμε ότι για την μέση τιμή και τη διασπορά τους ισχύουν:

$$E\,(X+Y)=E\,(X)+E\,(Y) \text{ και } \sigma^2\,(X+Y)= \sigma^2\,(X)+ \sigma^2\,(Y)$$

οπότε αν συμβολίσουμε με m_3 και σ_3 τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της συμμαχίας των δύο ομάδων θα έχουμε:

$$m_3 = m_1+m_2 \text{ και } \sigma_3 = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Αντίστοιχα με πριν τα κεφάλαια που απαιτούνται για τη συμμαχία ώστε η πιθανότητα ζημιάς να είναι μικρότερη από 0.3% είναι:

$$m_1+m_2 + 3\sqrt{n_1 p_1(1-p_1)+n_2 p_2(1-p_2)} =10+20+15=45$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι συμφέρει και τις δύο ομάδες να συνεργαστούν αφού συνολικά θα πληρώσουν 45 νομισματικές μονάδες ενώ αν δεν συνεργαστούν θα πρέπει να πληρώσουν 19+32=51 νομισματικές μονάδες.

Το επόμενο ερώτημα που τίθεται, σε περίπτωση συνεργασίας τους, είναι πως θα μοιραστούν οι 45 νομισματικές μονάδες στις δύο ομάδες.

Δεδομένου ότι για κάθε ομάδα το ενδεχόμενο πραγματοποίησης ζημιάς έχει διαφορετική πιθανότητα η καταβολή 45:2=22.5 νομισματικών μονάδων από κάθε ομάδα δηλαδή 0.225 νομισματικών μονάδων από κάθε άτομο θα ήταν άδικη. Όπως είδαμε πριν η πρώτη ομάδα πρέπει να πληρώσει 19 νομισματικές μονάδες ενώ αν συμμετάσχει στη συμμαχία θα πρέπει να πληρώσει περισσότερο δηλαδή 22.5 νομισματικές μονάδες άρα δεν έχει κίνητρο συμμετοχής. Αντίθετα η δεύτερη ομάδα πληρώνοντας 22.5 νομισματικές μονάδες έχει κίνητρο να παραμείνει στη συμμαχία αφού θα πληρώνει 32 - 22.5 = 9.5 μονάδες λιγότερο από ότι αν κάλυπτε το κόστος των ζημιών μόνη της.

Αν για την πρώτη ομάδα το ασφάλιστρο είναι P_1 και για τη δεύτερη ομάδα είναι P_2,τότε για να συμμετάσχουν και οι δύο ομάδες σε μία συμμαχία θα πρέπει να ισχύουν ταυτόγχρονα οι ανισότητες:

$$P_1 \leq 19\ ,\ P_2 \leq 32,\ \ P_1 + P_2 = 45 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι αν το P_1 λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή του δηλαδή P_1=19 τότε για να ισχύει η σχέση (1) θα πρέπει P_2 = 45-19=26.

Όμοια αν το P_2 λάβει τη μέγιστη τιμή του δηλαδή P_2 =32 τότε P_1= 45-32=13 και έτσι οι περιορισμοί που προκύπτουν για τα P_1, P_2 είναι οι ακόλουθοι:

$$13 \leq P_1 \leq 19,\ 26 \leq P_2 \leq 32 \qquad (2)$$

Άρα οποιεσδήποτε τιμές των P_1, P_2 ικανοποιούν τις σχέσεις (1) και (2) είναι μια αποδεκτή λύση στον καταμερισμό της πληρωμής των 45 νομισματικών ομάδων.

Βλέποντας ότι η συνεργασία δύο ομάδων μειώνει το μεμονωμένο κόστος τους, θα ελέγξουμε αν η συμμετοχή μίας ακόμα ομάδας εξυπηρετεί ακόμα περισσότερο το μοίρασμα του κόστους.

Έστω μία ομάδα με πληθυσμό n_3=120 και πιθανότητα καταβολής αποζημίωσης p_3=0.3. Αντίστοιχα με τα παραπάνω, αν η ομάδα αυτή συστήσει τη δική της ασφαλιστική εταιρεία το συνολικό ασφάλιστρο που θα πρέπει να πληρώσει είναι :

$$n_3 p_3 + 3\sqrt{n_3 p_3 (1-p_3)} = 36+15=51$$

ώστε όπως και πριν η πιθανότητα καταβολής αποζημίωσης να είναι μικρότερη από 0.1% που ήταν αρχικά για την ομάδα των 100 ατόμων.. Επομένως μία γενική λύση που θα εξυπηρετούσε τον καταμερισμό ασφαλίστρων στις τρεις ομάδες θα έπρεπε να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 87,\ 4 \le P_1 \le 19,\ 17 \le P_2 \le 32,\ 36 \le P_3 \le 51$$

Ας δούμε τώρα τα παραπάνω σε πιο γενική μορφή ώστε να καταλήξουμε σε εύρεση λύσης του προβλήματος. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από μ ομάδες, ότι η ομάδα i όπου i=1,..,μ , αποτελείται από n_i άτομα τα οποία είναι εκτεθιμένα σε κίνδυνο με πιθανότητα καταβολής αποζημίωσης p_i. Θα συμβολίζουμε το σύνολο αυτών των ομάδων με M και με T ένα οποιοσδήποτε υποσύνολό τους. Τα n_i άτομα συγκροτούν μια ασφαλιστική εταιρεία και το ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώσουν έτσι ώστε η πιθανότητα καταβολής αποζημίωσης να είναι μικρότερη από 0.1% που ίσχυε στην αρχή του παραδείγματος για τη συμμαχία των 100 ατόμων:

$$f(T) = \sum_T n_i p_i + 3\Big(\sum_T n_i p_i (1-p_i)\Big)^{1/2}$$

Οι μ ομάδες δημιουργούν εξαιρώντας το κενό σύνολο 2^{μ} -1 μεταθέσεις. Άρα υπάρχουν 2^{μ} -1 διαφορετικές πιθανές συμμαχίες του T μπορούν να δημιουργήσουν τη δική τους ασφαλιστική εταιρεία, οπότε θα πρέπει να υπολογιστεί ποιο ασφάλιστρο απαιτείται να καταβληθεί από κάθε μέλος αυτών των συμμαχιών.

Αν η συμμαχία T αποτελείται από t μέλη και η συμμαχία $\overline{T}$ αποτελείται από τα υπόλοιπα μ-t μέλη που δεν ανήκουν στην T τότε από την ιδιότητα της υπερπροσθετικότητας που έχει η χαρακτηριστική συνάρτηση θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$f(T) + f(\overline{T}) > f(M).$$

Σύμφωνα με τον Ferguson (2014), η υπερπροσθετικότητα είναι μία φυσική παραδοχή που συμπεριλαμβάνουμε στον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης αφού η ανισότητα αυτή εκφράζει την προφανή ιδιότητα ότι το συνολικό ασφάλιστρο είναι χαμηλότερο όταν όλες οι ομάδες συμμαχούν και δημιουργούν μία μόνο ασφαλιστική εταιρεία. Επομένως θα ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{\mu} P_i = f(M), \qquad (3)$$

όπου P_i το ασφάλιστρο που αντιστοιχεί την ομάδα *i*.

Αν η ομάδα *i* αρνηθεί να συνεργαστεί με κάποια άλλη ομάδα τότε θα πρέπει να πληρώσει:

$$f(i) = n_i p_i + 3\sqrt{n_i p_i (1 - p_i)}$$

διότι επιλέγει να μείνει μόνη της και το ασφάλιστρο θα την επιβαρύνει εξ ολοκλήρου.

Αν η ομάδα σκεφτεί ορθολογικά τότε για κάθε ενδεχόμενο συνεργασίας θα ελέγχει πρωτίστως αν από τη συνεργασία προκύπτει ασφάλιστρο υψηλότερο από αυτό που θα την επιβάρυνε αν λειτουργούσε η ίδια μόνη της ως ασφαλιστική εταιρεία. Επομένως πρέπει να ισχύει :

$$P_i \leq f(i), \text{ για κάθε } i \qquad (4)$$

Κάθε ομάδα $P_1, \ldots, P_\mu$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (3) και (4) αποτελεί λύση του παιχνιδιού σύμφωνα με τον ορισμό για τη λύση παιχνιδιού *N* που δίνεται από τους Neymann και Morgenstern.

Η παραπάνω διαδικασία όμως μέχρι τώρα δεν μας έχει προσδιορίσει επακριβώς ποια είναι η λύση παρά μόνο μας έχει βοηθήσει να εντοπίσουμε το εύρος του διαστήματος μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το ύψος του ασφαλίστρου. Όπως είδαμε, με τη συμμετοχή των ομάδων σε μία συμμαχία, εξοικονομείται κάποιο κέρδος αφού οι ομάδες πληρώνουν λιγότερα χρήματα. Έστω λοιπόν ότι το κέρδος αυτό για την *i* ομάδα είναι:

$$t_i = f(i) - P_i$$

όπου t_i είναι μη αρνητικό μέγεθος μέτρησης της διαφοράς του ασφαλίστρου που πληρώνει η ομάδα *M*, από το άθροισμα των ατομικών ασφαλίστρων που αφορούν κάθε παίκτη και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{\mu} t_i = \sum_{i=1}^{\mu} f(i) - f(M).$$

Η ποσότητα $\sum_{i=1}^{\mu} t_i$ εκφράζει το συνολικό κέρδος που εξοικονομούν οι ομάδες αν συνεργαστούν ως μία μόνο ασφαλιστική εταιρεία, από τα λιγότερα ασφάλιστρα που πληρώνουν. Τώρα πάλι καλούμαστε να απαντήσουμε όπως και πριν πως θα πρέπει να κατανεμηθεί το συνολικό ασφάλιστρο στην κάθε ομάδα που απαρτίζει τη συμμαχία.
Μία πρώτη σκέψη είναι ότι πρέπει το συνολικό ασφάλιστρο και η απόδοση της συμμαχίας T να συνδέονται με τη σχέση:

$$\sum_{T} P_i \leq f(T) \qquad (5)$$

βασιζόμενοι στην αρχή της υπερπροσθετικότητας.
Καταλήγουμε στο συμπέρασμα λοιπόν ότι μία συμμαχία ομάδων θα παραμείνει στην ασφαλιστική εταιρεία που δημιούργησαν από κοινού οι ίδιες μόνο αν το άθροισμα των ασφαλίστρων που θα πληρωθεί από τις ομάδες αυτές είναι λιγότερο από το ποσό που θα πλήρωνε η κάθε ομάδα αν παρέμενε μόνη της.

Η παραπάνω περιγραφή των πλεονεκτημάτων μιας συμμαχίας ως προς την εξοικονόμηση κόστους ασφαλίστρων χρησιμοποίησε τρεις πολύ σημαντικές σχέσεις, τις (3), (4) και (5) οι οποίες στην πραγματικότητα περιγράφουν την έννοια του «πυρήνα» ενός παιχνιδιού όπως την ορίσαμε προγενέστερα.

Επανερχόμαστε στο ύψος των ασφαλίστρων που πρέπει να πληρώσει μια συμμαχία και χρησιμοποιώντας την έννοια του πυρήνα θα περιορίσουμε τα όρια μέσα στο εύρος των οποίων βρίσκεται το ασφάλιστρο P_i.
Έστω ότι $M \setminus \{i\}$είναι το σύνολο των όλων των ομάδων εκτός από την i ομάδα. Τότε

$$\sum_{j=1}^{\mu} P_j = f(M) \text{ και } \sum_{j \neq k} P_j \leq f(M \setminus \{k\}).$$

Αφαιρώντας την ανισότητα από την εξίσωση έχουμε ότι:

$$P_k \geq f(M) - f(M \setminus \{k\})$$

οπότε έχουμε καταλήξει ότι:

$$f(M) - f(M \setminus \{i\}) \leq P_i \leq f(i) \qquad (6)$$

Εισάγοντας τα παρακάτω σύμβολα:

$$\pi_j = n_j p_j , \pi = \sum_{j=1}^{\mu} \pi_j$$

$$u_j = n_j p_j (1\text{-}p_j), \; u = \sum_{j=1}^{\mu} u_j$$

όπου π_j συμβολίζει τον μέσο όρο των απωλειών της ομάδας j και αντίστοιχα u_j τη διακύμανση, η σχέση (3) μετασχηματίζεται σε:

$$\sum_{j=1}^{\mu} P_j = \pi + 3\sqrt{u}\,.$$

Θεωρώντας ότι $u_j < u$ η σχέση (6) τροποποιείται σε:

$$f(M) - f(M \setminus \{i\}) \leq P_i \leq \pi_i + 3\sqrt{u_i} \qquad (7)$$

και θα προσδιορίσουμε την τιμή της ποσότητας $f(M) - f(M \setminus \{i\})$ ώστε να περιορίσουμε τις τιμές που μπορεί να λάβει το P_i μέσα σε συγκεκριμένο εύρος.

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$f(M) - f(M \setminus i) = \sum_{j=1}^{\mu} \pi_j - \sum_{j \neq i}^{\mu} \pi_j + 3\sqrt{\sum_{j=1}^{\mu} u_j} - 3\sqrt{\sum_{j \neq i}^{\mu} u_j} =$$

$$= \pi_i + 3\left[\sqrt{\sum_{j=1}^{\mu} u_j} - \sqrt{\sum_{j \neq i}^{\mu} u_j}\,\right] \leq \pi_i + 3\sqrt{\sum_{j=1}^{\mu} u_j - \sum_{j \neq i}^{\mu} u_j} =$$

$$= \pi_i + 3\sqrt{u_i}\,.$$

Καταλήξαμε στο παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας την γνωστή ανισότητα

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a - b}$$

διότι μας οδήγησε να φτάσουμε στην αλγεβρική διαφορά των ποσοτήτων $\sum_{j=1}^{\mu} u_j$ και $\sum_{j \neq i}^{\mu} u_j$ που διαφέρουν ακριβώς κατά την παρατήρηση u_i.

Επιπλέον αφού $u_i < u$ θα έχουμε $\frac{u_i}{\sqrt{u}} \leq \sqrt{u_i}$ οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$3\frac{u_i}{2\sqrt{u}} \leq 3\frac{\sqrt{u_i}}{2} \leq 3\sqrt{u_i} \Rightarrow \pi_i + 3\frac{u_i}{2\sqrt{u}} \leq \pi_i + 3\sqrt{u_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_i + 3\frac{u_i}{2\sqrt{u}} \leq v(M) - v(M\text{-}i)$$

και η ανισότητα (7) γίνεται:

$$\pi_i + 3\frac{u_i}{2\sqrt{u}} \leq P_i \leq \pi_i + 3\sqrt{u_i}\,.$$

Προγενέστερα θεωρήσαμε ότι P_i είναι η καλύτερη τιμή ασφαλίστρου που μπορεί να επιτύχει η ομάδα *i* συμμετέχοντας στη συμμαχία άρα το P_i ανήκει στον πυρήνα του παιχνιδιού και από την παραπάνω ανισότητα βλέπουμε ότι το P_i δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το π_i που είναι η αναμενόμενη καταβολή αποζημίωσης στην ομάδα *i*.

Έχοντας το P_i οριοθετημένο μέσα σε ένα σύνολο τιμών, θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια συγκεκριμένη αποδεκτή τιμή. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε κάποιο πλαίσιο υποθέσεων που να καθορίζει πως θα διαπραγματευτούν οι ομάδες και πως θα συμβιβαστούν μέχρι να καταλήξουν σε συμφωνία ή όχι.

Υποθέτουμε ότι η ομάδα 1 συγκροτεί τη δική της ασφαλιστική εταιρεία με ασφάλιστρο :

$$P_1 = f(1)$$

Η εταιρεία αυτή επιθυμεί την ανάπτυξη. Διαπραγματεύεται έτσι τη συνεργασία με την ομάδα 2 η οποία θα πληρώσει το ελάχιστο δυνατό ασφάλιστρο δηλαδή στον συνεταιρισμό αυτό η ομάδα 1 θα εξακολουθεί να πληρώνει ασφάλιστρο $f(1)$ και αν $f(1,2)$ είναι το ασφάλιστρο αυτής της συμμαχίας τότε η ομάδα 2 θα επιβαρυνθεί με κόστος

$$P_2 = f(1,2) - f(1).$$

Αν στο συνεταιρισμό των δύο εταιρειών συμμετάσχει και τρίτη εταιρεία, τότε θα πληρώνει:

$$P_3 = f(1,2,3) - f(1,2).$$

Αν τώρα γενικεύσουμε και θεωρήσουμε ότι η συμμαχία αυτή διευρυνθεί με μ ομάδες τότε ανάλογα θα πληρώνει:

$$P_\mu = f(1,2,\ldots,\mu) - f(1,2,\ldots,\mu\text{-}1) = f(M) - f(M \setminus (\mu\text{-}1))$$

και τα ασφάλιστρα P_i με i=1,…,μ όπως και προγενέστερα ικανοποιούν τις σχέσεις (3), (4) και (5) που είναι οι ιδιότητες για μία ιδανική λύση. Όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτή είναι η μοναδική λύση διότι η συμμαχία μπορεί να συσταθεί με $\mu!$ διαφορετικούς τρόπους.

Εφόσον μπορούμε να έχουμε $\mu!$ διαφορετικές λύσεις αναλόγως του τρόπου που θα συσταθεί η συμμαχία, η *i* ομάδα θα πληρώσει ως ασφάλιστρο το μέσο όρο αυτών των λύσεων. Οπότε θα έχουμε ότι:

$$P_i = \sum_S \frac{(s-1)!(\mu - s)!}{\mu!}(f(S) - f(S \setminus \{i\}))$$
όπου $S \subset M$ και s είναι ο αριθμός των ομάδων που ανήκουν στο σύνολο S.

Η ποσότητα $f(S) - f(S \setminus \{ i\})$ αναφέρεται και ως **κόστος συμμετοχής**, **(**admission cost). Όπως αναφέρει ο Ferguson (2004), το κόστος συμμετοχής μειώνεται όσο αυξάνονται οι συμμετοχές στη συμμαχία.

Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε τον σαφή ορισμό της τιμής Shapley και τις ιδιότητες της ώστε να επανέλθουμε με νέο παράδειγμα που να επεξηγεί περισσότερο τη σημασία της.

Ορισμός 4.6.1 Ορίζουμε ως **τιμή Shapley**, (Shapley value), κάθε συνάρτηση φ η οποία αντιστοιχείτη χαρακτηριστική συνάρτηση f ενός παιχνιδιού $< N, f >$ στο διάνυσμα $(\varphi_1(f), \varphi_2(f), \ldots, \varphi_n(f))$, όπουτο $\varphi_i(f)$ εκφράζει την αξία του παίκτη i.

Η τιμή Shapley ικανοποιεί τα αξιώματα της συμμετρίας, του ουδέτερου παίκτη και της προσθετικότητας όπως ορίζονται παρακάτω:

- **Αξίωμα Συμμετρίας**

  Δύο παίκτες i και j λέγονται ανταλλάξιμοι μεταξύ τους αν όποιος και να συμμετάσχει στη συμμαχία S δεν επηρεάζει την κατανομή κερδών δηλαδή
  $$f(S \cup \{i\}) = f(S \cup \{j\}).$$
  Το αξίωμα της συμμετρίας απαιτεί, αν δύο παίκτες είναι ανταλλάξιμοι, τότε να ισχύει
  $$\varphi_i(f) = \varphi_j(f).$$

Με άλλα λόγια, το αξίωμα της συμμετρίας σημαίνει ότι οι παίκτες που έχουν την ίδια συνεισφορά έχουν και την ίδια αμοιβή.

- **Αξίωμα ουδέτερου παίκτη (inessential player)**

  Ένας παίκτης i που έχει την ιδιότητα του ουδέτερου σημαίνει ότι δεν έχει καμία συνεισφορά στη συμμαχία δηλαδή $f(S \cup \{i\}) = f(S)$. Εφόσον λοιπόν δεν συμμετέχει στην αύξηση των κερδών της συμμαχίας αλλά ούτε και στη μείωση του κόστους που τη επιβαρύνει, δεν μπορεί να διεκδικήσει κανένα μερίδιο. Η μηδενική συνεισφορά του αντιστοιχεί σε μηδενική αμοιβή και γι΄αυτό ισχύει:
  $$\varphi_i(f) = 0.$$

- **Αξίωμα προσθετικότητας**

  Στη θεωρία παιγνίων ισχύει ότι αν ένας παίκτης i συμμετέχει στα συμμαχικά παιχνίδια $< N, f >$ και $< N', f' >$ τότε το άθροισμα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων f και f' είναι επίσης χαρακτηριστική συνάρτηση. Αντίστοιχα ισχύει ότι η τιμή Shapley παιχνιδιού που έχει χαρακτηριστική συνάρτηση την $f + f'$ είναι ίση με το άθροισμα των τιμών Shapley των παιχνιδιών με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις f και f', δηλαδή:

  $$\varphi_i(f + f') = \varphi_i(f) + \varphi_i(f').$$

- **Αξίωμα αποτελεσματικότητας**

  Το συγκεκριμένο αξίωμα δηλώνει ότι το σύνολο των τιμών Shapley για τους n παίκτες είναι ίση με την απόδοση της μεγαλύτερης συμμαχίας του παιχνιδιού $< N, f >$ δηλαδή της συμμαχίας N. Επομένως ισχύει ότι:

  $$\tilde{x} = f(N).$$

Ένας γενικός τύπος υπολογισμού της τιμής Shapley δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.6.1 Η τιμή Shapley για ένα παιχνίδι $< N, f >$ η οποία δίνεται από τον τύπο που ακολουθεί, καθορίζει το ποσό που θα λάβει ή θα πληρώσει ο i παίκτης:

$$\varphi_i(f) = \sum_S \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(f(S) - f(S \setminus \{i\})),$$

όπουμε n συμβολίζεται το πλήθος των παικτών της συμμαχίας N και με s συμβολίζεται το πλήθος των παικτών της συμμαχίας S.

Ικανοποιεί το αξίωμα της προσθετικότητας, της αποτελεσματικότητας, του άχρηστου παίκτη και της συμμετρίας.

Έχοντας θεωρήσει n το πλήθος των παικτών, το άθροισμα ορίζεται πάνω σε όλες τις συμμαχίες S που είναι υποσύνολα του παιχνιδιού $< N, f >$ και περιέχουν τον παίκτη i.

Ο παραπάνω τύπος δηλώνει ότι, αν στη συμμαχία εισάγονται οι παίκτες ένας ένας, τότε η ποσότητα $(f(S) - f(S\setminus\{i\}))$ είναι η απόδοση του παίκτη i για να ενσωματωθεί στη συμμαχία. Δηλαδή αν συμμετάσχει ένας παίκτης στη συμμαχία S, θα λάβει απόδοση που θα προκύψει αν αφαιρέσουμε την απόδοση της συμμαχίας $S\backslash\{i\}$, που σχηματίστηκε με τη μη συμμετοχή του, από την απόδοση της συμμαχίας S στην οποία συμμετέχει.

Ο συντελεστής $\frac{1}{n!}$ εξηγείται από το γεγονός ότι όλοι παίκτες του συνόλου N από το οποίο σχηματίζονται οι συμμαχίες S με μεταθέσεις των παικτών, θεωρείται ότι συμμετέχουν με την ίδια βαρύτητα στον υπολογισμό της τιμής Shapley. Τελικώς, η τιμή Shapley είναι ο μέσος όρος των αποδόσεων που προκύπτουν από την εισαγωγή κάθε παίκτη στη συμμαχία.

Ένας εναλλακτικός τύπος υπολογισμού της τιμής Shapley είναι ο ακόλουθος:

$$\varphi_i(f) = f(i) - \frac{1}{n!}\sum_{S}(s-1)!(n-s)![f(S\backslash\{i\}) + f(i) - f(S)]$$

Ο όρος $f(S\backslash\{i\}) + f(i) - f(S)$ εκφράζει το κέρδος που προέκυψε ενσωματώνοντας τον παίκτη i στη συμμαχία S.

Θα δείξουμε στη συνέχεια πως εφαρμόζονται τα παραπάνω στο παράδειγμα της παραγράφου 4.5. Όπως έχει αναφερθεί και προγενέστερα, λόγω των διαφορετικών χιλιομετρικών αποστάσεων, το ερώτημα που τίθεται είναι πως θα κατανεμηθεί το κόστος των εξόδων μετακίνησης και διαμονής που πρέπει να λάβει ο εμπειρογνώμονας, αναλογικά για κάθε εταιρεία. Ζητείται λοιπόν η βέλτιστη τοποθέτηση χρημάτων αναλόγως του κόστους της κάθε εταιρείας και ένας τρόπος να υλοποιηθεί η κατανομή των χρημάτων είναι να υπολογιστεί η τιμή Shapley.

Οι πόλεις είναι τρείς οπότε θα έχουμε μία συμμαχία τριών παικτών και μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να συνδυαστούν τα δρομολόγια μεταξύ τους. Μπορούν να πραγματοποιηθούν μετρώντας πόσες μεταθέσεις μπορούν να σχηματίσουν γιατί στον υπολογισμό της τιμής Shapley έχει σημασία η σειρά με την οποία εισέρχεται κάθε παίκτης στη συμμαχία και ποια είναι η συμμετοχή του ή αλλιώς η **«περιθώρια συνεισφορά»** του.

Έχουμε 3!=6 μεταθέσεις οι οποίες είναι: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) και για κάθε μετάθεση θα υπολογίσουμε την περιθώρια συνεισφορά του κάθε παίκτη.

- **Μετάθεση (1,2,3)**

  Η περιθώρια συνεισφορά του παίκτη 1 είναι ίση με

$$f(1) - f(\emptyset) = 560\text{-}0 = 560,$$

του παίκτη 2 είναι

$$f(1,2) - f(1) = 1.155\text{-}560 = 595$$

και τέλος του παίκτη 3 είναι

$$f(1,2,3) - f(1,2) = 1.415 - 1.155 = 260.$$

- **Μετάθεση (1,3,2)**

Η περιθώρια συνεισφορά του παίκτη 1 είναι ίση με

$$f(1) - f(\emptyset) = 560 - 0 = 560,$$

του παίκτη 2 είναι

$$f(1,3,2) - f(1,3) = 1.415\text{-}1.415 = 0$$

και τέλος του παίκτη 3 είναι

$$f(1,3) - f(1) = 1.415 - 560 = 855.$$

- **Μετάθεση (2,1,3)**

Η περιθώρια συνεισφορά του παίκτη 2 είναι ίση με

$$f(2) - f(\emptyset) = 1.140 - 0 = 1.140$$

του παίκτη 1 είναι

$$f(2,1) - f(2) = 1.155\text{-}1.140 = 15$$

και του παίκτη 3είναι

$$f(2,1,3) - f(2,1) = 1.415\text{-}1.155 = 260$$

- **Μετάθεση (2,3,1)**

Η περιθώρια συνεισφορά του παίκτη 2 είναι ίση με

$$f(2) - f(\emptyset) = 1.140 - 0 = 1.140$$

του παίκτη 3 είναι

$$f(2,3) - f(2) = 1.400\text{-}1.140 = 260$$

και του παίκτη 1 είναι

$$f(2,3,1) - f(2,3) = 1.415\text{-}1.400 = 15$$

- **Μετάθεση (3,1,2)**

Η περιθώρια συνεισφορά του παίκτη 3 είναι ίση με

$$f(3) - f(\emptyset) = 1.380 - 0 = 1.380$$

του παίκτη 1 είναι

$$f(3,1) - f(3) = 1.415\text{-}1.380 = 35$$

και του παίκτη 2 είναι:

$$f(3,1,2) - f(3,1) = 1.415 - 1.415 = 0$$

- **Μετάθεση (3,2,1)**

Η περιθώρια συνεισφορά του παίκτη 3 είναι ίση με

$$f(3) - f(\emptyset) = 1.380 - 0 = 1.380$$

του παίκτη 2 είναι

$$f(3,2) - f(3) = 1.400\text{-}1.380 = 20$$

και του παίκτη 1 είναι

$$f(3,2,1) - f(3,2) = 1.415\text{-}1.400 = 15$$

Με βάση τις παραπάνω τιμές βρίσκουμε τον ακόλουθο πίνακα περιθώριων συνεισφορών:

ΠΟΛΗ	Φ	Μ	Τ
ΑΣΦ. ΕΤΑΙΡΕΙΑ / ΜΕΤΑΘΕΣΗ	1	2	3
1 2 3	560	595	260
1 3 2	560	0	855
2 1 3	15	1140	260
2 3 1	15	1140	260
3 1 2	35	0	1380
3 2 1	15	20	1380
TOTAL	1.200	2.895	4.395
TOTAL:6	200	482.5	732.5

Πίνακας 4.6.1 Πίνακας περιθώριων συνεισφορών

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η κατανομή κεφαλαίων σύμφωνα με την οποία θα επιβαρυνθεί η κάθε ασφαλιστική εταιρεία κάποιο κόστος για να καλύψει τα έξοδα του εμπειρογνώμονα, προσδιορίζεται από την τιμή Shapley που είναι $\varphi = (200, 482.5, 732.5)$.

Η τελευταία μέθοδος κατανομής κεφαλαίων που θα δούμε είναι αυτή που χρησιμοποιεί την έννοια του πυρηνίσκου και επικεντρώνεται στη συμπεριφορά που έχει μία συμμαχία ως προς την κατανομή που θα της αντιστοιχεί. Όσο περισσότερο πλησιάζει η κατανομή την απόδοση που θα μπορούσε να επιτύχει μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης τόσο πιο ικανοποιημένα είναι τα μέλη της συμμαχίας. Όταν όμως η απόκλιση είναι μεγάλη τότε με τη μέθοδο του πυρηνίσκου γίνεται προσπάθεια βελτίωσης της απόδοσης της συμμαχίας ώστε να μη δυσανασχετήσουν τα μέλη κάτι που θα ήταν επίφοβο για μία ενδεχόμενη αποχώρησή τους. Θα δούμε αναλυτικά τη μέθοδο αυτή στην επόμενη ενότητα.

4.7 Η έννοια του πυρηνίσκου

Μία άλλη μέθοδος τοποθέτησης κεφαλαίων είναι αυτή που χρησιμοποιεί την έννοια του πυρηνίσκου που εισήχθηκε από τον Schmeidler (1969).

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι σε ένα παιχνίδι $< N, f >$ η χαρακτηριστική συνάρτηση για κάθε συμμαχία $S \subseteq N$, εκφράζει τη ζημιά ή το κέρδος που θα αποκόμιζε αυτή η συμμαχία ως ολότητα. Αντίθετα με x_i θα συμβολίσουμε το ποσό που λαμβάνει ή πληρώνει κάθε παίκτης σε ατομικό επίπεδο. Η σχέση μεταξύ της ποσότητας x_i και συγκεκριμένα του αθροίσματος $\sum_{i \in S} x_i$ και της χαρακτηριστικής συνάρτησης θα παρουσιαστεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.7.1 Η κατανομή κεφαλαίων $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$e(\tilde{x}, S) = f(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

που μετράει την απόκλιση του αθροίσματος των κεφαλαίων x_i, που μπορεί να λάβει ή να πληρώσει κάθε παίκτης $i=1,...,n$ σε ατομικό επίπεδο, από την απόδοση $f(S)$ που θα μπορούσε να επιτευχθεί σε επίπεδο συμμαχίας, ονομάζεται **πυρηνίσκος**, (nucleoleus).

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι ο πυρηνίσκος είναι μέτρο σύγκρισης μεταξύ της χαρακτηριστικής συνάρτησης και του αθροίσματος των ποσοτήτων x_i καθώς μετράει τη μεταξύ τους απόκλιση. Επομένως όσο πιο μικρή αυτή η απόκλιση τόσο πιο δίκαιη χαρακτηρίζεται αυτή η κατανομή κεφαλαίων $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_n)$. Ενώ όσο πιο μεγάλη είναι αυτή η διαφορά συγκριτικά με την απόδοση που θα είχαν τα μέλη της συμμαχίας μέσω της χαρακτηριστικής, θα τα οδηγήσει να εκφράσουν δυσαρέσκεια.

Ο πυρηνίσκος επομένως αναζητεί αυτά τα x_i τα οποία θα μειώσουν την ποσότητα $e(\tilde{x}, S)$. Ως μεθοδολογία κατατάσσει αρχικά τις αποκλίσεις $e(\tilde{x}, S)$ σε φθίνουσα σειρά. Ξεκινά με τη μεγαλύτερη ποσότητα $e(\tilde{x}, S)$ για κάθε $S \subseteq N$ και προσπαθεί να τη μειώσει όσο περισσότερο γίνεται. Μετά βρίσκει την αμέσως επόμενη διαφορά ώστε να τη μειώσει και το ίδιο κάνει για όλες τις υπόλοιπες δημιουργώντας έτσι σταδιακά την κατανομή $\tilde{x} =(x_1,\ldots,x_n)$.

Ο Barton (1992), είχε αναφέρει ότι ο πυρηνίσκος είναι μία κατανομή κεφαλαίων που έχει την ιδιότητα να μειώνει την πιθανότητα μια ομάδα παικτών να αποσυρθεί από μία συμμαχία, δημιουργώντας έτσι συνθήκες σταθερότητας.

Ο πυρηνίσκος είναι μια ορθολογική τοποθέτηση που προσπαθεί να βελτιστοποιήσει την επιλογή των x_i επιλέγοντας τις καλύτερες δυνατές τιμές τους. Εφ΄όσον ένας μη κενός πυρήνας διακρίνεται για την ιδιότητα του να συμπεριλαμβάνει τις καλύτερες δυνατές λύσεις, ο πυρηνίσκος αποτελεί στοιχείο του.

Ο Shmeidler είχε αποδείξει ότι αν ο πυρήνας είναι μη κενός τότε ο πυρηνίσκος ανήκει στον πυρήνα. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει τη δημιουργία ισορροπίας αφού προσπαθεί να κατευνάσει το πρόβλημα που δημιουργείται σε μία ομάδα της συμμαχίας που θα θεωρήσει ότι αδικείταιδιότι θα της δώσει την καλύτερη δυνατή απόδοση.

Το παράδειγμα που ακολουθεί θα εξηγήσει τη μέθοδο ελαχιστοποίησης των διαφορών $e(\tilde{x}, S)$ και πως βρίσκουμε μία λύση βασιζόμενη στην έννοια του πυρηνίσκου.

Παράδειγμα 4.7.1 Μία ασφαλιστική εταιρεία οφείλει σε κρατικές εισφορές 10.000€, σε μία εταιρεία αντασφάλισης 20.000€ και σε εξωτερικούς συνεργάτες 30.000€. Το ερώτημα που τίθεται είναι πως πρέπει η εταιρεία να μοιράσει τα χρήματα όταν διαθέτει ως κεφάλαιο για καταβολή οφειλών μόνο 36.000€.

Μια πρόχειρη εκτίμηση θα ήταν να αποδώσει 6.000€ σε κρατικές εισφορές, 12.000€ στην εταιρεία αντασφάλισης και 18.000€ στους εξωτερικούς συνεργάτες. Αυτό προκύπτει προχωρώντας σε αναλογικό επιμερισμό της συνολικής οφειλής,

10.000+20.000+30.000=60.000€

Έτσι τα μερίδια των χρημάτων προς κάλυψη των κρατικών εισφορών, των οφειλών προς την εταιρεία αντασφάλισης και τους εξωτερικούς συνεργάτες θα πρέπει να είναι ανάλογα προς τους λόγους $\frac{10.000}{60.000}=\frac{1}{6}$, $\frac{20.000}{60.000}=\frac{1}{3}$ και $\frac{30.000}{60.000}=\frac{1}{2}$ αντίστοιχα.

Άρα η εταιρείαπρέπει να δώσει για την κάλυψη των κρατικών εισφορών

$$\frac{1}{6}\times 36.000= 6.000€,$$

για την απόδοση των οφειλών στην εταιρεία ανατασφάλισης

$$\frac{1}{3}\times 36.000= 12.000€$$

και για τις οφειλές προς τους εξωτερικούς συνεργάτες

$$\frac{1}{2}\times 36.000= 18.000€.$$

Επομένως η τοποθέτηση κεφαλαίων που πρέπει να πραγματοποιήσει προς τους πιστωτές, εκφρασμένη σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ είναι

$$\tilde{x} =(6, 12, 18).$$

Θεωρώνταστη χαρακτηριστική συνάρτηση v και συμβολίζοντας με A το κράτος που αναμένει να πληρωθεί, με B την εταιρεία αντασφάλισης και Γ τους εξωτερικούς συνεργάτες έχουμε:

- $f(\emptyset) = 0$ και $f(AB\Gamma) = 36$ καθώς υπάρχουν 36.000€ για όλους τους παίκτες
- $f(A) = 0$ αν το διαθέσιμο ποσό πληρώσει το B και το Γ
- $f(B) = 0$ αν το διαθέσιμο ποσό πληρώσει το A και το Γ
- $f(\Gamma) = 6$ αν το διαθέσιμο ποσό πληρώσει το B και το A με το ποσό των

30.000€ από τα 36.000€ που είναι διαθέσιμα

- $f(AB) = f(AB\Gamma) - f(\Gamma) = 36.000 - 30.000 = 6.000$
- $f(A\Gamma) = f(AB\Gamma) - f(B) = 36.000 - 20.000 = 16.000$
- $f(B\Gamma) = f(AB\Gamma) - f(A) = 36.000 - 10.000 = 26.000.$

Για να βρούμε τον πυρηνίσκο θεωρούμε ότι:

$$x_1+x_2+x_3= 36$$

όπου x_1, x_2, x_3 είναι η κατανομή των χρηματικών μονάδων προς τα τρία συμβαλλόμενα μέρη δηλαδή το κράτος, την εταιρεία αντασφάλισης και τους εξωτερικούς συνεργάτες.

Ακολούθως θα υπολογίσουμε τις διαφορές

$$e(\tilde{x}, S) = f(S) - \sum_{j \in S} x_j \qquad (8)$$

αγνοώντας το κενό σύνολο και την πλήρη συμμαχία *N* διότι οι διαφορές τους είναι μηδέν.

Αν $S = A$ τότε $f(S) = f(A) = 0$ και εφαρμόζοντας τον τύπο (8) προκύπτει

$$e(\tilde{x}, S) = e(\tilde{x}, A) = 0 - x_1 = - x_1 = -6.$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν οι τιμές

$$e(\tilde{x}, S) = e(\tilde{x}, B) = 0 - x_2 = -x_2 = -12$$

$$e(\tilde{x}, S) = e(\tilde{x}, \Gamma) = 6 - x_3 = 6 - 18 = -12$$

$$e(\tilde{x}, S) = e(\tilde{x}, AB) = 6 - (6 + 12) = -12$$

$$e(\tilde{x}, S) = e(\tilde{x}, A\Gamma) = 16 - (6 + 18) = -8$$

$$e(\tilde{x}, S) = e(\tilde{x}, B\Gamma) = 26 - (12 + 18) = -4.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η χειρότερη διαφορά είναι η $e = -4$ διότι είναι η μεγαλύτερη από όλες και αφορά τη συμμαχία *ΒΓ*. Επομένως η συμμαχία *ΒΓ* μπορεί να επικαλεστεί ότι οποιαδήποτε άλλη συμμαχία θα εξασφαλίσει καλύτερη απόδοση.

Όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή αυτής της ενότητας σκοπός είναι η διαφορά που εκφράζεται από τη σχέση (8) να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερη και για να βελτιωθεί αυτή η κατάσταση θα πρέπει είτε το x_1 να γίνει μικρότερο ή η ποσότητα $x_2 + x_3 = 36 - x_1$ να γίνει μεγαλύτερη .

Όσο μεγαλώνει η ποσότητα $x_2 + x_3$ τόσο μειώνεται η διαφορά της συμμαχίας *ΒΓ* και ταυτόχρονα όσο μικραίνει x_1 τόσο θα μεγαλώνει η διαφορά της συμμαχίας *Α*. Για να επέλθει ισορροπία απαιτούμε οι διαφορές αυτών των συμμαχιών να γίνουν ίσες οπότε θα έχουμε

$$e(\tilde{x}, A) = e(\tilde{x}, B\Gamma) \Rightarrow -x_1 = 26 - x_2 - x_3 \Rightarrow -x_1 + x_2 + x_3 = 26$$

και αφού ισχύει $x_1 + x_2 + x_3 = 36$ προκύπτει ότι

$$-2x_1 + 36 = 26 \Rightarrow x_1 = 5.$$

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει λοιπόν

$$e(\tilde{x}, A) = e(\tilde{x}, B\Gamma) = -5,$$

δηλαδή καταφέραμε να μικρύνουμε την προηγούμενη διαφορά των -4 μονάδων.

Σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράψαμε το x_1 γίνεται το πρώτο στοιχείο του πυρηνίσκου και θα πρέπει να προχωρήσουμε στην εύρεση των x_2 και x_3. Αφού

$$x_1 + x_2 + x_3 = 36 \text{ και } x_1 = 5$$

θα έχουμε

$$x_2 + x_3 = 31.$$

Λαμβάνοντας προσωρινά τυχαίες τιμές για τα x_2 και x_3 π.χ. $x_2 = 12$, $x_3 = 19$ έχουμε την κατανομή (5, 12, 19) και οι τιμές των διαφορών γίνονται

$$e(\tilde{x}, A) = -5,\ e(\tilde{x}, B) = -12,\ e(\tilde{x}, \Gamma) = -13$$

$$e(\tilde{x}, AB) = -11,\ e(\tilde{x}, A\Gamma) = -8,\ e(\tilde{x}, B\Gamma) = -5.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η αμέσως πλησιέστερη διαφορά προς το -5 είναι η -8 την οποία και θα προσπαθήσουμε να μικρύνουμε με αντίστοιχο τρόπο. Η διαφορά αυτή αφορά τη συμμαχία *ΑΓ*. Για να μικρύνει η διαφορά αυτή θα πρέπει αυξήσουμε την τιμή του x_3 και εφ΄όσον $x_2 + x_3 = 31$ θα πρέπει να μειωθεί ταυτόχρονα η τιμή του x_2. Έτσι οι διαφορές των συμμαχιών *B* και *AB* θα μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό. Η διαφορά της συμμαχίας *AB* που έχει τιμή -11 είναι πλησιέστερα προς την *ΑΓ* που έχει -8. Επομένως θέλουμε ισορροπία θα προσδιορίσουμε τις τιμές των x_2 και x_3 έχουμε ότι:

$$e(\tilde{x}, AB) = e(\tilde{x}, A\Gamma),\ 6 - x_1 - x_2 = 16 - x_1 - x_3$$

$$x_3 - x_2 = 10, x_3 - (31 - x_3) = 10$$

$$x_3 = 20.5\ .$$

Άρα $x_2 = 10.5$ και η κατανομή είναι (5, 10.5, 20.5). Έχοντας λοιπόν προσδιορίσει τις τιμές της κατανομής, θα συμβολίσουμε τον πυρηνίσκο με l και τότε ο πυρηνίσκος του παραδείγματος είναι l = (5, 10.5, 20.5).

Επειδή είδαμε διάφορες μεθόδους τοποθέτησης θα βρούμε για το ίδιο παράδειγμα την τιμή Shapley ώστε να έχουμε μία εικόνα σχετικά με το ποια μέθοδος κάνει καλύτερη τοποθέτηση κεφαλαίων.

Υπολογίζουμε αρχικά τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές συναρτήσεις για τις μεταθέσεις με τις οποίες μπορούν να σχηματιστούν οι συμμαχίες βάσει της σειράς εισαγωγής του παίκτη στη συμμαχία. Έχουμε

- Μετάθεση (*ΑΒΓ*)

  A: $f(A) - f(\emptyset) = 0$

B: $f\,(AB) - f\,(A) = 6$

Γ: $f\ \ (AB\Gamma) - f\,(AB) = 30$

- Μετάθεση ($A\Gamma B$)

  A: $f\,(A) = 0$

  B: $f\,(A\Gamma B) - f\,(A\Gamma) = 20$

  Γ: $f\,(A\Gamma) - f\,(A) = 16$

- Μετάθεση ($BA\Gamma$)

  A: $f\,(BA) - f\,(B) = 6$

  B: $f\,(B) = 0$

  Γ: $f\,(BA\Gamma) - f\,(BA) = 30$

- Μετάθεση ($B\Gamma A$)

  A: $f\,(B\Gamma A) - f\,(B\Gamma) = 0$

  B: $f\,(B) = 0$

  Γ: $f\,(B\Gamma) - f\,(B) = 26$

- Μετάθεση (ΓBA)

  A: $f\,(\Gamma BA) - f\,(\Gamma B) = 10$

  B: $f\,(\Gamma B) - f\,(\Gamma) = 20$

  Γ: $f\,(\Gamma) = 6$

- Μετάθεση (ΓAB)

  A: $f\,(\Gamma A) - f\,(\Gamma) = 10$

  B: $f\,(\Gamma AB) - f\,(\Gamma A) = 20$

  Γ: $f\,(\Gamma) = 6$

Απεικονίζοντας τώρα τις μεταθέσεις στον ακόλουθο πίνακα θα υπολογίσουμε την τιμή Shapley:

ΑΣΦ.ΕΤΑΙΡ. . ΜΕΤΑΘΕΣΗ	*Α*	*Β*	*Γ*
Α Β Γ	0	6	30
Α Γ Β	0	20	16
Β Α Γ	6	0	30
Β Γ Α	10	0	26
Γ Β Α	10	20	6
Γ Α Β	10	20	6
TOTAL	36	66	114
TOTAL :6	6	11	19

Πίνακας 4.7.1 Πίνακας εύρεσης τιμής Shapley

Η τιμή Shapley προκύπτει από την τελευταία γραμμή του πίνακα και είναι το διάνυσμα (6, 11, 19).

4.8 Η σύγκριση της μεθόδου με την τιμή Shapley με τη μέθοδο του πυρηνίσκου

Γενικά η σύγκριση των δύο μεθόδων είναι δύσκολη καθώς είναι δύο παιγνιοθεωρητικά πλαίσια που πρεσβεύουν διαφορετικές έννοιες και καταλήγουν σε δίκαια αποτελέσματα για παιχνίδια *n* παικτών.

Η τιμή Shapley είναι ένας τρόπος μέτρησης των αναμενόμενων αποδόσεων σε ένα συμμαχικό παιχνίδι. Μπορεί να ιδωθεί ως ένας σταθμισμένος μέσος διαφόρων πιθανών αποτελεσμάτων.

Ο πυρηνίσκος δεν ψάχνει να βρει ποιες είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις αλλά αναζητά τον πιο σταθερό τρόπο για να πραγματοποιηθεί η κατανομή των αποδόσεων, είτε αυτές εκφράζουν κόστος ή κέρδος, μεταξύ *n* παικτών ώστε να μην διατυπώνουν παράπονα οι ομάδες που θεωρούν ότι αδικούνται. Επικεντρώνεται σε ορισμένες μόνο συμμαχίες, συγκεκριμένα σε αυτές που είναι δυσαρεστημένες προσπαθώντας να βελτιστοποιήσει την απόδοσή τους. Ενώ η τιμή Shapley χρησιμοποιεί οποιεσδήποτε συμμαχίες σχηματίζονται από το σύνολο N των παικτών.

Αντίθετα με την έννοια του πυρηνίσκου, η τιμή Shapley δεν έχει ως προαπαιτούμενο το σχηματισμό μιας μεγάλης συμμαχίας και γι΄αυτό ο πυρηνίσκος θεωρείται πιο σταθερή λύση. Επίσης ο πυρηνίσκος δεν είναι ο μέσος όρος διαφόρων αποδόσεων που προκύπτουν από την εισαγωγή κάθε παίκτη στη συμμαχία όπως είναι η τιμή Shapley.

Μια διαισθητική διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων, είναι ότι η τιμή Shapley έχει πιο έντονα ως χαρακτηριστικό την ισόνομη ιδιότητα ενώ ο πυρηνίσκος δίνει προτεραιότητα στην πιο δυσαρεστημένη συμμαχία. Αντίθετα η τιμή Shapley η οποία προσπαθεί να διατηρήσει όλες ανεξαιρέτως τις συμμαχίες σε ένα ομοιόμορφο και δίκαιο περιβάλλον.

Όπως είδαμε προγενέστερα, ο πυρηνίσκος συνδέεται άμεσα με την έννοια του πυρήνα διότι αν υπάρχει τότε πάντα θα περιέχει τον πυρηνίσκο όπως αυτό αποδεικνύεται από σχετικά θεωρήματα. Η σχέση που έχει όμως η τιμή Shapley με τον πυρήνα δεν διέπεται από κάποια ικανή και αναγκαία συνθήκη που η ύπαρξη της μίας έννοιας να εξασφαλίζει την ύπαρξη της άλλης. Η τιμή Shapley υπάρχει πάντα ενώ ο πυρήνας όχι. Όμως ακόμα και αν υπάρχει ο πυρήνας δεν σημαίνει ότι απαραίτητα θα περιέχει την τιμή Shapley. Γι΄αυτό και οι δύο μέθοδοι σπάνια θα δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Κοινό χαρακτηριστικό των δύο μεθόδων είναι ότι εξαρτώνται από την χαρακτηριστική συνάρτηση καθώς κάθε φορά που αυτή μεταβάλλεται προκύπτουν διαφορετικές τιμές Shapley και πυρηνίσκοι.

Αξίζει τέλος να αναφερθεί ότι η τιμή Shapley είναι συμμετρική ως προς την απώλεια και το κέρδος ενώ ο πυρηνίσκος δεν χαρακτηρίζεται από τέτοια ιδιότητα.

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι αν έχουμε το παιχνίδι $< f, N >$ και αποχωρήσει από αυτό μία μικρή συμμαχία $S \subseteq N$ η οποία κερδίζει, τότε στο νέο παιχνίδι $< f, N \setminus S >$ που προκύπτει, η αλλαγή στην τιμή Shapley είναι ίδια για όλους τους παίκτες της συμμαχίας S αλλά και για τους παίκτες της συμμαχίας $N \setminus S$.

Λόγω λοιπόν της διαφορετικότηταστων δύο μεθόδων, η απόφαση ποια μέθοδος δίνει την καλύτερη κατανομή κεφαλαίων εξαρτάται από το είδος του παιχνιδιού και από τις συνθήκες υπό τις οποίες διεξάγεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σύνοψη

Έχοντας ολοκληρώσει την παρουσίαση των βασικών εννοιών της Θεωρίας Παιγνίων, είδαμε πως χρησιμοποιούνται από τις δύο πιο σημαντικές κατηγορίες παιγνίων, τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος που εκφράζουν τον ανταγωνισμό και τα συμμαχικά παιχνίδια που εκράζουν την απόλυτη συμμαχία. Δύο εντελώς διαφορετικές κατηγορίες παιχνιδιών που έχουν όμως τον ίδιο σκοπό, που δεν είναι άλλος από τη μεγιστοποίηση κέρδους ή την ελαχιστοποίηση ζημιάς.

Το πρώτο σημαντικό σημείο του δεύτερου κεφαλαίου είναι ότι σε κάθε παιχνίδι, ανεξάρτητα από την κατηγορία στην οποία ανήκει, πρωταρχικό ρόλο παίζουν οι στρατηγικές των παικτών καθώς με αυτές χτίζουν το δρόμο προς την εύρεση καλύτερης λύσης. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική τους, σκεπτόμενοι πως σίγουρα αυτή θα συμβεί δηλαδή έχουν τη δυνατότητα της γνήσιας στρατηγικής. Εναλλακτικά, όταν δεν είναι εφικτό να χρησιμοποιηθεί κάποια γνήσια στρατηγική, μπορούν να επιλέξουν ένα συνδυασμό στρατηγικών θεωρώντας πως κάθε στρατηγική έχει πιθανότητα και όχι βεβαιότητα υλοποίησης, οπότε εδώ μιλάμε για τις τυχαιοποιημένες στρατηγικές. Μία ακόμα σημαντική αναφορά σε αυτό το κεφάλαιο είναι η αρχή Minimax. Αποτελεί μια συντηρητική και όχι ιδιαίτερα ρεαλιστική μέθοδο ως προς την εύρεση λύσης καθώς θεωρεί ότι ο ένας παίκτης θεωρεί πιο πιθανό από κάθε επιλογή του να επιτύχει τη χαμηλότερη απόδοση για τον εαυτό του και από αυτές να επιλέξει τη μεγαλύτερη και αντίστοιχα για τον αντίπαλό του θεωρεί πως από κάθε επιλογή του θα πραγματοποιείται η μεγαλύτερη απόδοση και από αυτές θα επιλέξει την μικρότερη.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάσαμε την πιο συχνή κατηγορία παιγνίων που συναντάμε στην καθημερινότητά μας και κατ' επέκτασιν στον τομέα της ασφάλισης και είναι τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος. Παρατηρήσαμε μέσω παραδειγμάτων τον τρόπο σκέψης των παικτών όπου στον πίνακα κέρδους αποτυπώνονται οι αποδόσεις τους και με διάφορε

ς μεθόδους (διαγραφή υποδεέστερων στρατηγικών, γραφική επίλυση, χρήση εξισωτικών στρατηγικών) στοχεύσαμε στον εντοπισμό της λύσης. Εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα μίας λύσης είναι να αποτελεί την καλύτερη απάντηση στον αντίπαλο και σε αυτή την περίπτωση χαρακτηρίζεται ως σημείο Nash καθώς αποτελεί ανακάλυψη του διάσημου μαθηματικού και οικονομολόγου John F. Nash.

Στην επόμενη ενότητα της εργασίας μελετήσαμε τα συμμαχικά παιχνίδια που έχουν αντίθετο τρόπο σκέψης από τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος. Εδώ τα πάντα στηρίζονται στην υπάρξη κινήτρου για συνεργασία ώστε κάθε παίκτης να έχει μεγαλύτερο όφελος συμμετέχοντας σε μία συμμαχία απ’ ότι μένοντας μόνος του. Σε αυτή την κατηγορία παιχνιδιών ο σκοπός τους δεν έγκειται μόνο στην εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης αλλά έχει ένα ακόμα σκέλος αυτό του δίκαιου καταμερισμού της απόδοσης δεδομένου ότι κάθε παίκτης συμμετέχει με διαφορετικό ποσό συνεισφοράς. Γι’ αυτό λοιπόν αναφέρθηκαν και εφαρμόστηκαν διάφοροι μέθοδοι κατανομής κεφαλαίων με δικαιότερη εξ αυτών την μέθοδο που χρησιμοποιεί την τιμή Shapley. Μία ακόμα μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά είναι αυτή που εμπλέκει την έννοια του πυρηνίσκου και συγκρίθηκε με την τιμή Shapley στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Κούτρας Μ., Κάκουλος Θ. (1988). Εισαγωγή στις Μεθόδους Βελτιστοποίησης.

Μαγείρου Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις, Μια Εισαγωγική προσέγγιση, Εκδόσεις Κριτική.

Μηλολιδάκης Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων, Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας, Εκδόσεις Σοφία.

Ξένη

Borch K. (1962). Application of game theory to some problems in automobile insurance, Astin Bulletin, vol.2, 208-215.

Ferguson T.S. (2014). Game Theory, 2nd Edition, University of California.

Fischer D., Schotter A. (1975). On Shapley Values and Nucleoli for Public Goods Economies, C.V. Starr Center for Applied Economics, Department of Economics, 1-14.

Hans P. (2008). Game Theory, Multileveled Approach, Springer.

Hart S., Mas-Collel A. (1979). Cooperation: Game-Theoretic Approaches, Springer-Verlang.

Howes J. (1993). The Nucleolus and Shapley Value for Cooperative Matching Games on Weighted Graphs, Drew University, 1-9.

Konstantinides B. , Mayo R. , Priest C. (2007). Game Theory and Australia's CTP Markets, Institute of Actuaries, Australia.

Lemaire J. (1983). An Application of Game Theory: Cost Allocation, Universite Libre de Bruxelles, Astin Bulletin, vol.2.

Lemaire J. (1991). Cooperative Game Theory and its Insurance Applications, Wharton School, University of Pennsylvania, Astin Bulletin, vol.21.

Mesterton – Gibbons M. (2001). An Introduction to Game Theoretic Modelling, Student Mathematical Library, American Mathematical Society.

Mirchandani R.S. (2013). Superadditivity and subadditivity in four divisions, vol.5, 80-82.

Montero M. (2004). On the nucleolus as a Power Index, School of Economics, University of Nottingham, 551-564.

Morgenstern O., Neumann J. V. (1947). Theory of games and economic behavior, 2nd Edition, Princeton University Press.

Nunez M., Rafels C. (2009). Von Neumann-Morgenstern Stable-Set Solutions in the Assignment Market, No 412, Universitat de Barcelona, 1-10.

Osborne M.J. (2003). An Introduction to Game Theory, Oxford University Press.

Rasmusen E. (2003). Games and Information, An Introduction to Game theory, 4th Edition, Blackwell Publishing.