ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Πρόταση 1:*Εστω* $h/[0,1]$*συνεχής,κοίλη ή κυρτή πραγματική συνάρτηση,με* $h(o)\succ 0$, $h(1)\prec 1$.*Τότε η* $h(x)$ *έχει μοναδικό σταθερό σημείο* $\xi\in(0,1)$. *Επιπλέον* $h(x)\succ x$ $\forall x\in[0,\xi)$ *και* $h(x)\prec \chi$ $\forall x\in(\xi,1]$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την **ύπαρξη** σταθερού σημείου**:**Θεωρούμε προς τούτο την συνάρτηση σ(x)=h(x)-x, $0\le x\le 1$.Επειδή σ(0)= h(0)$\succ$0, σ(1)= h(1)-1$\prec$0 και η σ(x) συνεχής στο [0,1] ,από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ ώστε σ(ξ)=0,δηλαδή h(ξ)=ξ. Αρα η h(x) έχει σταθερό σημείο στο (0,1).

Θα αποδείξουμε την **μοναδικότητα** του σταθερού σημείου**:**Ας θεωρήσουμε ότι η h έχει περισσότερα από ένα σταθερά σημεία στο διάστημα (0,1).Εστω ξ_1,ξ_2 δύο σταθερά σημεία της h για τα οποία υποθέτουμε χωρίς να χαλάσει η γενικότητα ότι $\xi_1\prec\xi_2$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

i) Πρώτα υποθέτουμε ότι η h είναι κοίλη συνάρτηση.

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία (0,h(0)) και (ξ_2,h(ξ_2)).Τότε έχουμε:

$$h((1-\lambda).\xi_2)\ge\lambda.h(0)+(1-\lambda).h(\xi_2)\ ,0\le\lambda\le 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Αν επιλέξουμε $\lambda'=1-\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$, έχουμε $\lambda'\in(0,1)$ και $(1-\lambda').\xi_2=\xi_1$.Επομένως λόγω της σχέσης (1),έχουμε:

$$h(\xi_1)=h((1-\lambda').\xi_2)\ge\lambda'.h(0)+(1-\lambda)'.h(\xi_2).$$

Επειδή ξ_1,ξ_2 είναι σταθερά σημεία για την h , η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$\xi_1\ge\lambda'.h(0)+(1-\lambda').\xi_2=\lambda'.h(0)+\xi_1$$

από την οποία προκύπτει f(0)$\le$ 0, πράγμα άτοπο.

ii) Υποθέτουμε τώρα, ότι η $h(\chi)$ είναι κυρτή συνάρτηση.

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία (ξ_1, $h(\xi_1)$) και (1, h(1)).Εχουμε ότι:

$$h(\lambda.\xi_1+(1-\lambda).1) \le \lambda.h(\xi_1)+\lambda.h(1), 0 \le \lambda \le 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Αν επιλέξουμε $\lambda'' = \dfrac{1-\xi_2}{1-\xi_1}$ και αφού $\xi_1 \prec \xi_2$, $\lambda'' \in (0,1)$ ισχύει ότι:

$$\lambda''.\xi_1 +(1-\lambda'').1= \xi_2.$$

Επομένως λόγω της (2),

$$h(\xi_2)= h(\lambda''.\xi_1+(1-\lambda'').1) \le \lambda''.h(\xi_1)+(1-\lambda'').h(1).$$

Επειδή ξ_1,ξ_2 είναι σταθερά σημεία για την h,η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$\xi_2 \le \lambda''.\xi_1 +(1-\lambda'').h(1)$$

Από την οποία συνάγεται $h(1) \ge 1$,πράγμα άτοπο. Αρα η h έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in (0,1)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $h(x) \succ x \ \ \forall x \in [0,\xi)$.

Η απόδειξη με την εις άτοπον. Εστω για κάποιο $\chi_0 \in [0,\xi)$, με $h(x_0) \prec \chi_0$, τότε επειδή $h(0) \succ 0$, σύμφωνα με το θεώρημα τού Bolzano,υπάρχει $\xi' \in (0,\xi)$ έτσι ώστε $h(\xi')= \xi'$..Αυτό όμως είναι άτοπο,επειδή έρχεται σε αντίθεση με την μοναδικότητα του σταθερού σημείου της h.Επίσης η περίπτωση $h(x_0)= x_0$ αποκλείεται για τον ίδιο ακριβώς λόγο. Επομένως $h(x) \succ x \ \ \forall x \in [0,\xi)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $h(x) \prec x \ \ \forall x \in (\xi,1]$.

Πρόταση 2:*Εστω $h/[0,1]$ συνεχής, γνήσια αύξουσα, κοίλη ή κυρτή πραγματική συνάρτηση, με $h(o) \succ 0, h(1) \prec 1$ και $\xi \in (0,1)$ τό μοναδικό σταθερό σημείο τής h. Τότε*

$$\chi \prec h(\chi) \prec \xi \qquad \forall x \in [0,\xi),$$

$$\xi \prec h(\chi) \prec \chi \qquad \forall x \in (\xi,1].$$

Πρόταση3:*Εστω $h/[0,1]$ συνεχής,γνήσια αύξουσα,κοίλη ή κυρτή πραγματική συνάρτηση, με $h(o) \succ 0$, $h(1) \prec 1$ και $\xi \in (0,1)$ τό (μοναδικό) σταθερό σημείο τής h. Τότε για n=2,3,…* η n-στη σύνθεση της h με τον εαυτό της, h_n */[0,1],είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και έχει σταθερό σημείο το ξ. Για οποιοδήποτε $\chi \in [0,1]$ η ακολουθία $\{h_n(\chi)\}$* συγκλίνει μονότονα στο σημείο ξ όταν $n \to \infty$.Ειδικότερα

i) Αν $x \in [0,\xi)$, τότε η ακολουθία $\{h_n(\chi)\}$ είναι γνήσια αύξουσα,

$$\chi \prec h_n(\chi) \prec \xi \qquad ,n=1,2,3\ldots$$

και $h_n(\chi) \nearrow \xi$, όταν $n \to \infty$.

ii) Αν $x \in [\xi,1)$, τότε η ακολουθία $\{h_n(\chi)\}$ είναι γνήσια φθίνουσα,

$\xi \prec h_n(\chi) \prec \chi$,n=1,2,3…

και $h_n(\chi)$ ξ, όταν $n \to \infty$.

Απόδειξη

Επειδή $h([0,1]\} = [h(0), h(1)] \subset (0,1)$, για n=1,2,3…, η n-στη σύνθεση της h, h_n */[0,1]*,είναι καλά ορισμένη,

$$0 \prec h_n(\chi) \prec 1 \qquad \forall \chi \in [0,1].$$

Προφανώς η h_n */[0,1] είναι* συνεχής, γνήσια αύξουσα και έχει σταθερό σημείο ξ.

i) Έστω $x \in [0,\xi)$. Έχουμε

$$0 \prec h_n(\chi) \prec h_n(\xi) = \xi, \quad ,n=1,2,3\ldots$$

Από την πρόταση 1 έχουμε:

$$h_n(x) = h(h_{n-1}(\chi)) \succ h_{n-1}(\chi), n = 2,3...$$

δηλαδή η ακολουθία $\{h_n(\chi)\}$ είναι γνήσια αύξουσα και επομένως συγκλίνουσα επειδή είναι φραγμένη.Εστω

$$Z = \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

Επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής, έχουμε:

$$Z = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} h(h_{n-1}(\chi)) = h(z).$$

Αρα το όριο Z είναι σταθερό σημείο για την h.Επειδή η συνάρτηση h έχει μοναδικό σταθερό σημείο (πρόταση 1), συνάγεται ότι Z=ξ. Επειδή $\chi \prec \xi$, έχουμε

$$\chi \prec h(\chi) \prec \xi \text{ (πρόταση 2).}$$

Επιπλέον, επειδή

$$h(\chi) \prec h_n(\chi) \prec h_n(\xi) = \xi, n = 2,3,...$$

συνάγεται ότι :

$$\chi \prec h_n(\chi) \prec \xi, n = 2,3,...$$

ii) Αποδεικνύεται ανάλογα. □