ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΖΕΥΞΗΣ

ΣΚΟΡΔΑ ΧΡΙΣΤΙΝΑ
ΜΑΕ 09031

Πειραιάς, Απρίλιος 2013

Αφιερωμένη στον πολυαγαπημένο μου πατέρα Γιώργο, που με βοήθησε και με στήριξε, που μας αγάπησε πολύ και έκανε όνειρα για μας πριν φύγει από τη ζωή και που η απουσία του στιγμάτισε τις ζωές μας.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετούνται μέθοδοι μέτρησης της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών με χρήση συναρτήσεων σύζευξης. Παρουσιάζονται και περιγράφονται αναλυτικά οι συναρτήσεις σύζευξης και ο τρόπος σύνδεσής τους με τους υπολογισμούς των απαιτούμενων κεφαλαίων και των δεικτών φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών. Ιδιαίτερα βαρύνουσας σημασίας δείκτες κινδύνων στη μοντελοποίηση και αποτίμηση των κινδύνων, γνωστοί και ως μέτρα κινδύνου είναι η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk - VaR), η Tail-Value at Risk – TVaR και η Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional Tail Expectation – CTE). Ειδικότερα, η παρούσα εργασία εστιάζει στον υπολογισμό του TVaR και του Οικονομικού Κεφαλαίου TVaR για δύο κινδύνους που συνδέονται μέσω μιας συνάρτησης σύζευξης FGM (Farlie–Gumbel–Morgenstern). Για να καταστεί ξεκάθαρη η δυνατότητα πρακτικής εφαρμογής των συναρτήσεων σύζευξης στο πλαίσιο υλοποίησης της Οδηγίας Solvency II, έχει σχεδιαστεί και υλοποιηθεί πιλοτική αριθμητική εφαρμογή η οποία, μέσω της υλοποίησης σχετικού μαθηματικού μοντέλου, καταδεικνύει τον τρόπο εφαρμογής και χρήσης των συζεύξεων και των μέτρων κινδύνου για των υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων και των δεικτών φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών. Το μοντέλο που έχει προταθεί και υλοποιηθεί είναι απλό, εύκολα υλοποιήσιμο και ταυτόχρονα ελκυστικό από πλευράς ρεαλιστικότητας αποτελεσμάτων δεδομένου ότι αξιοποιεί τις δυνατότητες χρήσης έτοιμων συναρτήσεων και γραφικής απεικόνισης που προσφέρει το πακέτο Mathematica και στηρίζεται στην FGM ως συνάρτησης σύζευξης, επιτυγχάνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο υπολογισμούς «κλειστού τύπου» και στη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων οι οποίες καθιστούν συνθετότερη και περισσότερο πολύπλοκη την εφαρμογή.

Λέξεις κλειδιά

Φερεγγυότητα II, Μέτρα κινδύνου, Συναρτήσεις σύζευξης, TVaR.

Abstract

In this study, methods of solvency measurement for insurance companies using copula functions, are presented and analyzed. Particularly, the coupling functions and the way they are connected to the calculations of the required capital and solvency ratios of insurance organizations are studied in detail. A number of very important risk indicators in the process of risk modelling and assessment, also known as risk measures are Value at Risk (VaR), Tail-Value at Risk (T-VaR) and Conditional Tail Expectation (CTE). Specifically, this study focuses on the calculation of TVaR and TVaR-based Economic Capital TVaR using two exponentially distributed risks linked with the well known FGM copula function. To make more clear the feasibility and effectiveness of such models in the framework of Solvency II directive, a pilot application has been developed which shows how copulas and risk measures for the calculation of solvency capital requirements can be implemented. The proposed model is simple, easily implementable and attractive in terms of implementation feasibility and obtained results. The reason is that it uses the capabilities offered by the Mathematica package and is based on the FGM copula, which can be calculated analytically and by approximation methods, which lead to a more complex implementation.

Keywords

Solvency II, Risk measures, Copulas, TVaR

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέλαβαν στη διεκπεραίωση της.

Κατά κύριο λόγο, οφείλω να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα Λέκτορα κ. Βρόντο Σπυρίδωνα, ο οποίος προσέφερε το ενδιαφέρον θέμα και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε δίνοντάς μου τη δυνατότητα να εκπονήσω την διπλωματική μου εργασία στο συγκεκριμένο επιστημονικό τομέα. Τον ευχαριστώ επίσης για τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τα όσα έχει κάνει για μένα και τους καρδιακούς μου φίλους για τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους.

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 3.1: Δύο κανονικές κατανομές περιθωρίου με σύζευξη Gumbel. **18**

Σχήμα 5.1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας FGM **64**

Σχήμα 5.2: Συνάρτηση Συσσωρευτικής Κατανομής FGM **66**

Σχήμα 5.3: Συνάρτηση Επιβίωσης FGM **68**

Σχήμα 5.4: Ιστογράμματα της S για θ= -1 **73**

Σχήμα 5.5: Ιστογράμματα της S για θ= -0.5 **75**

Σχήμα 5.6: Ιστογράμματα της S για θ= 0.5 **77**

Σχήμα 5.7: Ιστογράμματα της S για θ= 1 **79**

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1: Βασικά χαρακτηριστικά οδηγιών Solvency I και Solvency II **12**

Πίνακας 3.1: Χαρακτηριστικά Αρχιμήδειων Συζεύξεων **21**

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου **33**

Πίνακας 5.1: Ενότητες Εφαρμογής Mathematica **62**

Πίνακας 5.2: Υπολογισμοί VaR και TVaR για θ =-1 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995 **71**

Πίνακας 5.3: Υπολογισμοί VaR και TVaR για θ =-0.5 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995 **71**

Πίνακας 5.4: Υπολογισμοί VaR και TVaR για θ = 0.5 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995 **72**

Πίνακας 5.5: Υπολογισμοί VaR και TVaR για θ = 1 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995 **72**

Πίνακας 5.6: Υπολογισμοί TVaR για θ = 0 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995 **81**

Συντομογραφίες

CDF	Cumulative Distribution Function
CEA	Comité Européen des Assurances
CR	Capital Requirement
CTE	Conditional Tail Expectation
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern
MCR	Minimum Capital Requirement
PDF	Probability Density Function
SCR	Solvency Capital Requirement
TVaR	Tail Value at Risk
VaR	Value at Risk

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ II

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ IV

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ V

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ VI

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ VII

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

1.1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

1.2. ΔΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

2. SOLVENCY II 3

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ SOLVENCY II 3

2.2. MINIMUM ΚΑΙ STANDARD CAPITAL REQUIREMENT (MCR - SCR) 7

2.3. ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΚΕΦΑΛΑΙΑΚΗ ΕΠΑΡΚΕΙΑ 10

2.4. ΑΠΟ ΤΟ SOLVENCY I ΣΤΟ SOLVENCY II 11

3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ (COPULAS) 15

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 15

3.2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ SKLAR 16

3.3. ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΖΕΥΞΗΣ 17

3.3.1. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ 18

3.3.2. ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ 20

3.3.3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ (PRODUCT COPULAS) 22

3.4. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ – ΔΕΙΚΤΕΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ 22

3.4.1. ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΟΥ PEARSON 24

3.4.2. ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΟΥ KENDALL 25

3.4.3. ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΟΥ SPEARMAN 26

3.4.4. ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ 27

3.5. ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ 28

4. ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 32

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 32

4.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΩΝ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 34

4.3. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ECONOMIC CAPITAL) ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΕΣ ΛΟΓΩ ΚΙΝΔΥΝΩΝ 38

4.4. VALUE AT RISK (VAR) 40

4.4.1. ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 40

4.4.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ VAR 41

4.4.3. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΚΑΙ VAR 43

4.5. TAIL VALUE AT RISK (TVAR) 45

4.5.1. ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ 45

4.5.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ TVAR 46

4.5.3. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΚΑΙ TVAR 48

4.5.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ TVAR ΣΤΟ SOLVENCY II 48

4.5.4.1. ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΥΟ ΚΙΝΔΥΝΩΝ (BIVARIATE CASE) 49

4.5.4.2. ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ (MULTIVARIATE CASE) 56

4.6. CONDITIONAL TAIL EXPECTATION (CTE) 58

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ SOLVENCY II 60

5.1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 60

5.2. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ 61

5.2.1. ΕΦΑΡΜΟΓΗ 61

5.2.2. ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 81

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 82

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 87

1. Εισαγωγή

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται μέθοδοι μέτρησης της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιρειών με χρήση συναρτήσεων σύζευξης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται αναλυτικότερα το αντικείμενο και οι βασικοί στόχοι της μελέτης και η διάρθρωση του περιεχομένου της.

1.1. Αντικείμενο και Στόχοι Εργασίας

Βασικό αντικείμενο και στόχο της παρούσας διατριβής αποτελεί η μελέτη των μεθόδων μέτρησης της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών με χρήση συναρτήσεων σύζευξης.

Το πρώτο τμήμα της εργασίας δίνει έμφαση στην αναλυτική περιγραφή των συναρτήσεων σύζευξης, όπως αυτές έχουν προταθεί στην αναλογιστική βιβλιογραφία, καθώς επίσης και στη σύνδεσή των συζεύξεων με τους υπολογισμούς απαιτούμενων κεφαλαίων και των δεικτών φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών. Αρχικά παρουσιάζονται οι δύο βασικοί δείκτες κεφαλαιακών απαιτήσεων των ασφαλιστικών εταιριών, οι οποίοι είναι το Ελάχιστο Απαιτούμενο Κεφάλαιο (Minimum Capital Requirement) και το Απαιτούμενο Κεφάλαιο Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement), ενώ στη συνέχεια μελετώνται οι συναρτήσεις σύζευξης, οι βασικές κατηγορίες των εν λόγω συναρτήσεων και ο τρόπος που αυτές χρησιμοποιούνται στους μαθηματικούς υπολογισμούς των συντελεστών κινδύνου.

Πέραν των προαναφερθέντων, βασικό στόχο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ποιοτική και ποσοτική περιγραφή, και η λεπτομερής οριοθέτηση και ανάλυση των κινδύνων στους οποίους εκτίθενται οι ασφαλιστικές εταιρείες και τους οποίους καλείται να αποτρέψει το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας. Η εν λόγω ανάλυση περιλαμβάνει το μαθηματικό ορισμό των σημαντικότερων μέτρων κινδύνου, αλλά και ενός πλέγματος ιδιοτήτων που τα μέτρα αυτά έχουν και οι οποίες καθιστούν ελκυστική τη χρήση τους κατά την ανάπτυξη σχετικών μαθηματικών μοντέλων αναλογιστικών υπολογισμών. Επιπλέον, η συσχέτιση των μέτρων αυτών με το λεγόμενο Οικονομικό

Κεφάλαιο (Economic Capital) μιας ασφαλιστικής εταιρίας αποτελεί σημαντικό σημείο αναφοράς στο οποίο δίνει έμφαση η παρούσα εργασία.

Εκτός της παρουσίασης των συναρτήσεων σύζευξης και της συσχέτισης αυτών με μέτρα κινδύνου και υπολογισμούς αναλογισμού που απαιτούνται από σχετικά μαθηματικά μοντέλα, στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής, έχει σχεδιαστεί και υλοποιηθεί αριθμητική εφαρμογή η οποία, μέσω της υλοποίησης σχετικού μαθηματικού μοντέλου, καταδεικνύει τον τρόπο εφαρμογής των ανωτέρω. Η εν λόγω υλοποίηση στοιχειοθετεί και αποδεικνύει τη χρήση των συζεύξεων και των μέτρων κινδύνου για των υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων και των δεικτών φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών και έχει πραγματοποιηθεί με χρήση της πλατφόρμας λογισμικού Mathematica.

1.2. Δομή Εργασίας

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας παρατίθεται το βασικό αντικείμενο που πραγματεύεται, οι στόχοι που καλείται να επιτύχει και η διάρθρωση του περιεχομένου της. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι βασικές αρχές και στόχοι της οδηγίας Solvency II καθώς επίσης και η υποκείμενη λογική στην οποία βασίστηκε η Οδηγία, ενώ πραγματοποιείται και σχετική σύγκριση με την προϊσχύουσα οδηγία Solvency I. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και μελετώνται οι βασικές οικογένειες συναρτήσεων σύζευξης (Copulas) και οι βασικοί δείκτες συσχέτισης που χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη μοντέλων εξάρτησης με χρήση συναρτήσεων σύζευξης. Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται αναλυτική παρουσίαση τριών από τα βασικότερα μέτρα κινδύνου (Value at Risk, Conditional Tail Expectation, Tail Value at Risk), των ιδιοτήτων τους και του τρόπου συσχέτισής τους με τους αναλογιστικούς υπολογισμούς των ασφαλιστικών οργανισμών στο πλαίσιο υλοποίησης της Οδηγίας Solvency II. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη εφαρμογής μαθηματικού μοντέλου για σκοπούς Solvency II, με χρήση του λογισμικού Mathematica. Τέλος στο Κεφάλαιο 6 παρατίθεται ανακεφαλαίωση της εργασίας σε συνδυασμό με τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν.

2. Solvency II

Η πρόσφατη οδηγία της Ευρωπαϊκής Ένωσης σχετικά με την παρακολούθηση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών, η οποία είναι γνωστή και ως Solvency II, έρχεται ως φυσική συνέχεια της προγενέστερης και εν ισχύ σήμερα οδηγίας Solvency I. Πρόκειται για ένα σύνολο μέτρων που σα βασικό τους στόχο έχουν την προστασία των καταναλωτών αλλά και των ίδιων των ασφαλιστικών εταιριών από το ενδεχόμενο να μη μπορούν να ανταπεξέλθουν στις υποχρεώσεις που έχουν αναλάβει έναντι των ασφαλισμένων. Στις ενότητες που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι βασικές αρχές του Solvency II, οι στόχοι που καλείται να επιτύχει και τα πλεονεκτήματά του, ενώ γίνεται ειδική αναφορά στη μέτρηση του Ελάχιστου Απαιτούμενου Κεφαλαίου (Minimum Capital Requirement - MCR) και του Απαιτούμενο Κεφαλαίου Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement - SCR), καθώς οι δείκτες αυτοί παίζουν κεντρικό ρόλο στο πλαίσιο της εν λόγω οδηγίας. Ακόμη, γίνεται μία αρχική παρουσίαση και συσχέτιση των μέτρων κινδύνου με την Κεφαλαιακή Επάρκεια (Capital Requirement - CR) ενός ασφαλιστικού οργανισμού και διεξάγεται σύγκριση και αντιπαραβολή της εν ισχύ οδηγίας Solvency I με το επερχόμενο Solvency II.

2.1. Εισαγωγή στο Solvency II

Το Solvency II αποτελεί, όπως προαναφέρθηκε, μια νέα οδηγία που δημιουργήθηκε από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή και στοχεύει στη διασφάλιση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών και η οποία θα αντικαταστήσει τις υφιστάμενες, εν ισχύ, οδηγίες για τις ασφαλίσεις ζωής και ζημιών, καθώς και την Οδηγία Solvency I. Παράλληλα με τη δημιουργία της Οδηγίας, η Ευρωπαϊκή Επιτροπή εργάζεται εντατικά για την κωδικοποίηση των δεκαεπτά (17) οδηγιών που σχετίζονται με τις ασφαλιστικές εργασίες, με στόχο την απλοποίησή τους, έτσι ώστε όλες οι οδηγίες να εμφανίζονται με ενιαίο τρόπο, υπό την «ομπρέλα» μιας κεντρικής οδηγίας με κοινή ορολογία και κοινό περιεχόμενο, διατηρώντας όμως τις απαιτήσεις των επιμέρους οδηγιών αναλλοίωτες (CEIOPS, 2006; CEIOPS, 2007).

Οι θεαματικές αλλαγές αλλά και οι πρακτικές επιπτώσεις που σηματοδοτεί η Οδηγία Solvency II για την ασφαλιστική αγορά της Ευρώπης και κατά συνέπεια της Ελλάδος, συναρτώνται προφανώς άμεσα από το βαθμό ετοιμότητας των ασφαλιστικών εταιρειών να εφαρμόσουν αποτελεσματικές τεχνικές διαχείρισης κινδύνων, εταιρικής διακυβέρνησης και διαφάνειας όπως προβλέπεται από τη σχετική Οδηγία. Το Solvency II, παρά τις δυσκολίες που συνεπιφέρει για τους ασφαλιστικούς οργανισμούς στην παρούσα δυσμενή οικονομική συγκυρία, είναι βέβαιο ότι θα εξορθολογήσει τη λειτουργία της ασφαλιστικής αγοράς και θα ενισχύσει ουσιαστικά την προστασία των ασφαλισμένων (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Κλειδί των προωθούμενων αλλαγών αποτελεί η στρατηγική ενσωμάτωσης των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνων στη λήψη διοικητικών αποφάσεων από τις ασφαλιστικές εταιρείες σε συνδυασμό με την αλλαγή της εταιρικής κουλτούρας σε θέματα ανάληψης κινδύνων. Ακόμη, οι διαδικασίες αναγνώρισης, αξιολόγησης και επιμέτρησης κινδύνων, οι πολιτικές ελέγχου και παρακολούθησής τους και τα ακριβέστερα εσωτερικά μοντέλα διαχείρισης κινδύνων αποτελούν τμήμα του επερχόμενου πλαισίου. Για να είναι σε θέση οι ασφαλιστικοί οργανισμοί να ανταπεξέλθουν στις προαναφερθείσες ανάγκες, είναι προφανές ότι θα χρειαστούν μεταξύ άλλων και το κατάλληλα εξειδικευμένο προσωπικό, εξελιγμένα πληροφοριακά συστήματα διοικητικής ενημέρωσης (Management Information Systems - MIS), και εν γένει μηχανογραφικά συστήματα και εφαρμογές που να διασφαλίζουν την ολοκληρωμένη και ενιαία διαχείριση και παρακολούθηση των δεδομένων σε όλο το εύρος εργασιών των ασφαλιστικών οργανισμών. Μία τέτοια ολοκληρωμένη αντιμετώπιση των κινδύνων είναι βέβαιο ότι θα οδηγήσει σε πληρέστερες και αποτελεσματικότερες τεχνικές μείωσης των κινδύνων για παράδειγμα μέσω της δρομολόγησης καλύτερων τεχνικών αντασφάλισης, της διασποράς των κινδύνων σε διαφορετικά προϊόντα και αγορές, κλπ (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Θα πρέπει ωστόσο να τονιστεί ότι ο βασικός σκοπός του Solvency II δεν είναι η καθιέρωση ενός συστήματος που θα οδηγεί σε μηδενισμό των κινδύνων αφερεγγυότητας (zero risk system), αλλά ενός συστήματος που θα μειώνει δραστικά τις πιθανότητες κατάρρευσης ενός ασφαλιστικού οργανισμού, αξιολογώντας ορθά και ολοκληρωμένα

την πραγματική κατάστασή του, και προσφέροντας παράλληλα υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης (levels of confidence) σχετικά με τη βιωσιμότητα της ασφαλιστικής εταιρίας, δηλαδή σχετικά με το αν η ασφαλιστική εταιρία θα είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις κάτω από μη φυσιολογικές, δυσμενείς συνθήκες της τοπικής ή παγκόσμιας οικονομίας (Nguyen, Molinari, 2011).

Σε αντιδιαστολή με την επί του παρόντος ισχύουσα Οδηγία Solvency I, η οποία βασίζεται κυρίως σε ποσοτικούς δείκτες κεφαλαιακών απαιτήσεων, η νέα προσέγγιση των εποπτικών αρχών, υπό το πρίσμα του Solvency II, θα βασίζεται σε τρεις πυλώνες (pillars), οι οποίοι συσχετίζονται συνδέονται και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Ο πρώτος πυλώνας (Pillar I) καθορίζει τους χρηματοοικονομικούς πόρους τους οποίους χρειάζεται ο ασφαλιστικός οργανισμός προκειμένου να λειτουργεί σε επιθυμητά επίπεδα φερεγγυότητας. Ο δεύτερος πυλώνας (Pillar II), καθορίζει τις ποιοτικές απαιτήσεις φερεγγυότητας και ταυτόχρονα παρέχει μεγαλύτερα προνόμια παρέμβασης στις εποπτικές αρχές σε σύγκριση με το υφιστάμενο καθεστώς. Τέλος, ο τρίτος πυλώνας (Pillar III) καθορίζει τις απαιτήσεις δημοσιοποίησης οικονομικών και άλλων δεδομένων της εταιρίας ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή διαφάνεια και να παρέχεται η δυνατότητα αποτελεσματικότερου ελέγχου τόσο από τις εποπτικές αρχές όσο και από τους ίδιους τους ασφαλισμένους με απώτερο στόχο την προστασία των ασφαλισμένων (Sandstrom, 2011).

Ένας σημαντικότατος μηχανισμός πρόληψης της αφερεγγυότητας που προβλέπεται από την εν λόγω οδηγία, είναι η λεγόμενη «κλιμακωτή παρέμβαση» (ladder of intervention). Ο μηχανισμός αυτός, προβλέπει τη δυνατότητα μεγαλύτερης παρέμβασης των εποπτικών αρχών μεταξύ των δύο επιπέδων των κεφαλαιακών απαιτήσεων, δηλαδή του SCR (Solvency Capital requirement) και του MCR (Minimum Capital Requirement), η οποία μπορεί να λάβει τη μορφή καθοδήγησης αλλά και προτεινόμενων κινήσεων, ώστε να αποφευχθούν οι δυσάρεστες συνέπειες να περιέλθει η ασφαλιστική εταιρία σε καθεστώς αφερεγγυότητας. Εν κατακλείδι, ο εν λόγω μηχανισμός έχει το πλεονέκτημα ότι επιτρέπει την έγκαιρη και εξατομικευμένη παρέμβαση των εποπτικών αρχών, ώστε να διασφαλιστεί η λήψη διορθωτικών μέτρων, εφόσον απαιτείται, στην κατάλληλη χρονική στιγμή (Sandstrom, 2011; Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι απαιτήσεις του Δεύτερου Πυλώνα, αναφορικά με τον κίνδυνο που πιθανό να προκύπτει από την ίδια την εταιρία (internal risk), αποτελούν από μόνες τους ένα προληπτικό μηχανισμό μείωσης του κινδύνου ενδεχόμενης αφερεγγυότητας. Ο αποτελεσματικός εσωτερικός έλεγχος σε συνδυασμό με την τακτική και ολοκληρωμένη διαχείριση των κινδύνων, αλλά και η ενσωμάτωση του εν λόγω ελέγχου στην ευρύτερη πολιτική λειτουργίας της εταιρίας, αποτελούν αναμφισβήτητα ένα αποτελεσματικό προληπτικό μηχανισμό έναντι ενδεχόμενης αφερεγγυότητας της εταιρίας (Sandstrom, 2011; Nguyen, Molinari, 2011).

Πέραν του προσδοκώμενου ουσιαστικού περιορισμού του ενδεχόμενου να περιέλθει ένας ασφαλιστικός οργανισμός σε καθεστώς αφερεγγυότητας, τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα του Solvency II θα μπορούσαν να συνοψιστούν στα ακόλουθα:

1. Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις ταυτίζονται με τους πραγματικούς κινδύνους που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικοί οργανισμοί επιτυγχάνοντας κατά τον τρόπο αυτό τη βέλτιστη κατανομή των κεφαλαίων της εταιρίας (optimum capital allocation).
2. Οι επιβαλλόμενοι νομικοί περιορισμοί μειώνονται δραστικά ή και εξαλείφονται πλήρως σε ορισμένες περιπτώσεις.
3. Η εν λόγω Οδηγία θα εφαρμοστεί με ενιαίο τρόπο σε όλα τα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

Εν κατακλείδι, το Solvency II αναμένεται, πέραν της βελτίωσης της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών, να αναβαθμίσει και το μεταξύ τους ανταγωνισμό. Ο αυξημένος ανταγωνισμός στις Ευρωπαϊκές ασφαλιστικές αγορές θα επιφέρει μεγαλύτερη ποικιλία προϊόντων σε περισσότερο προσιτές τιμές για τον καταναλωτή/ ασφαλισμένο, δεδομένου ότι με το Solvency II τα ασφαλιστικά προϊόντα θα κοστολογούνται ακριβέστερα σε σύνδεση με τους πιθανούς κινδύνους που επιφέρουν για τον ασφαλιστικό οργανισμό. Αναμφισβήτητα, ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα για τους καταναλωτές (κατόχους και δικαιούχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων) είναι το επαρκές επίπεδο προστασίας έναντι πιθανής αφερεγγυότητας της εταιρίας με την οποία

συνεργάζονται, δεδομένου ότι η εταιρία διασφαλίζει ότι το κεφάλαιο που διατηρεί είναι ανάλογο των κινδύνων που αναλαμβάνει (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Σύμφωνα με σχετική μελέτη αξιολόγησης επιπτώσεων (Impact Assessment) που διενεργήθηκε από τη CEA (Comité Européen des Assurances), οι διαφαινόμενες τάσεις έπειτα από την εφαρμογή του Solvency II, είναι προς την κατεύθυνση δημιουργίας νέων προϊόντων και υπηρεσιών από τις ασφαλιστικές εταιρίες αλλά και τις αυξημένες ευκαιρίες διάθεσης προϊόντων στην ευρύτερη Ευρωπαϊκή αγορά. Παράλληλα, σύμφωνα πάντα με την ίδια μελέτη, δε φαίνεται πιθανή η απόσυρση προϊόντων από την ασφαλιστική αγορά λόγω αυξημένων κεφαλαιακών απαιτήσεων για τη διατήρηση τους, ενώ είναι πιθανό οι ασφαλιστικοί οργανισμοί να αναπροσαρμόσουν την τιμολογιακή πολιτική τους, αλλά και το σχεδιασμό και τα χαρακτηριστικά των προϊόντων τους (http://www.cea.assur.org).

Θα πρέπει τέλος να τονιστεί ότι αν και αρχικά προβλέπονταν η εφαρμογή του Solvency II για το Οικονομικό Έτος 2012, η μη έγκαιρη προετοιμασία των ασφαλιστικών εταιριών, οι εκκρεμότητες που ακόμη υπάρχουν και χρίζουν αποσαφήνισης σε επίπεδο οδηγίας αλλά και η τρέχουσα οικονομική συγκυρία, οδήγησαν πρόσφατα την EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) να εισηγηθεί προς το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο την παράταση εφαρμογής της Οδηγίας κατά ένα έτος.

2.2. Minimum και Standard Capital Requirement (MCR - SCR)

Ο Πρώτος Πυλώνας του Solvency II εισαγάγει δύο (2) διακριτά είδη μέτρησης των κεφαλαιακών απαιτήσεων ενός ασφαλιστικού οργανισμού, τα οποία θα εξυπηρετούν διαφορετικούς σκοπούς. Πρόκειται για (1) το Ελάχιστο Απαιτούμενο Κεφάλαιο (Minimum Capital Requirement - MCR) και (2) το Απαιτούμενο Κεφάλαιο Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement - SCR).

Το MCR αντικατοπτρίζει ένα επίπεδο κεφαλαίου κάτω του οποίου ενεργοποιείται η δυνατότητα έσχατης παρέμβασης των εποπτικών αρχών. Ο σκοπός του MCR είναι να

θέσει ένα επίπεδο ελέγχου στο οποίο το ενεργητικό της εταιρίας θα υπερβαίνει κατά ένα επαρκές περιθώριο την αξία των υποχρεώσεων της εταιρίας έναντι των κατόχων/ δικαιούχων ασφαλιστηρίων συμβολαίων διασφαλίζοντας έτσι τη βραχυχρόνια επιβίωση της εταιρίας σε περίπτωση αντιμετώπισης αυξημένων κινδύνων. Ο βραχυχρόνιος χρονικός ορίζοντας, πρακτικά σημαίνει το χρονικό εκείνο διάστημα που είναι επαρκές ώστε να μπορέσει η ασφαλιστική εταιρία να μεταφέρει το χαρτοφυλάκιο της σε μια άλλη εταιρία ή να εξασφαλίσει τα αναγκαία κεφάλαια για την επιβίωση της (Sandstrom, 2011; Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Από την άλλη, το SCR αντιπροσωπεύει το επιθυμητό επίπεδο κεφαλαίου που επιτρέπει σε μια εταιρία να απορροφήσει σημαντικές και απρόβλεπτες ζημιές, δίδοντας παράλληλα μια λογική επιβεβαίωση στους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων ότι η εταιρία θα είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις της. Οι ασφαλιστικές εταιρίες που θα είναι σε θέση να καλύψουν το SCR θα βρίσκονται σε θέση ισχύος και θα έχουν την ελευθερία να διοικούν την επιχείρηση και τις εργασίες τους χωρίς περιορισμούς ή παρεμβάσεις από τις εποπτικές αρχές. Οι εταιρίες αυτές θα υπόκεινται μόνο σε τακτικούς ελέγχους (CEIOPS, 2006; CEIOPS, 2007).

Στο πλαίσιο της προσπάθειας που καταβάλλουν για αποτελεσματικότερη διαχείριση των κινδύνων, ένας μεγάλος αριθμός ασφαλιστικών εταιριών έχει ήδη δημιουργήσει εσωτερικά μοντέλα (internal models), προκειμένου να είναι σε θέση να αξιολογούν καλύτερα τους κινδύνους που έχουν αναλάβει ή πρόκειται να αναλάβουν. Τα εν λόγω εσωτερικά μοντέλα είναι ειδικά σχεδιασμένα ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες των ασφαλιστικών οργανισμών και αποτελούν εξατομικευμένα εργαλεία διαχείρισης κινδύνων των συγκεκριμένων εταιριών που τα δημιουργούν. Τα εσωτερικά μοντέλα αποτελούν δυνητική επιλογή των ασφαλιστικών εταιριών στο πλαίσιο υλοποίησης του Solvency II, είναι όμως προφανές ότι προϋποθέτουν μεγαλύτερο χρόνο και κόστος υλοποίησης (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012, Nguyen, Molinari, 2011).

Σε αντιδιαστολή με τα εσωτερικά μοντέλα, η Κοινή Προσέγγιση (Standard Approach) που προσφέρεται ως επιλογή στο πλαίσιο υιοθέτησης της Οδηγίας, αποτελεί μια απλή και οικονομική εναλλακτική λύση, η οποία προσφέρει μεν ορισμένα από τα

πλεονεκτήματα της αντιστάθμισης των κινδύνων που προσφέρουν τα εσωτερικά μοντέλα για εκείνες τις εταιρίες που δεν είναι σε θέση να δημιουργήσουν εσωτερικά μοντέλα ή στρατηγικά έχουν επιλέξει να μην αναπτύξουν τα δικά τους εσωτερικά μοντέλα, χωρίς όμως να μπορεί να λάβει υπόψη της τα ειδικά εκείνα χαρακτηριστικά της ασφαλιστικής εταιρίας για την οποία εφαρμόζεται. Ως εκ τούτου, με σχετικά χαμηλό κόστος συμμόρφωσης, η Κοινή Προσέγγιση στοχεύει να ταυτίσει το προφίλ κινδύνου μιας εταιρίας με το προφίλ μιας μέσης εταιρίας. Το τίμημα που πληρώνει ένας ασφαλιστικός οργανισμός από την υιοθέτηση μιας τέτοιας λύσης, είναι ότι η μη εξατομικευμένη προσαρμογή στα δεδομένα της εκάστοτε εταιρίας (ειδικότερα σε περιπτώσεις εταιριών που αναλαμβάνουν υψηλούς ή πολύπλοκους κινδύνους) είναι πιθανό να επιφέρει μια πιο συντηρητική προσέγγιση στη διαχείριση των κινδύνων, οδηγώντας έτσι σε αυξημένες κεφαλαιακές απαιτήσεις (CEIOPS, 2006; CEIOPS, 2007; Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Η Κοινή Προσέγγιση και τα Εσωτερικά Μοντέλα έχουν αρκετές κοινές βασικές αρχές όσον αφορά το σχεδιασμό τους. Η πιο σημαντική αρχή όλων είναι η ισότιμη βαθμονόμηση του υπολογισμού των κεφαλαιακών αναγκών, η οποία θα διασφαλίσει το γεγονός ότι και οι δύο προσεγγίσεις θα επιφέρουν το ίδιο επίπεδο προστασίας στους κατόχους/ δικαιούχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Επιπλέον, θα πρέπει να καταστεί σαφές ότι η Κοινή Προσέγγιση έχει υλοποιηθεί με αρχές παρόμοιες αυτών που χρησιμοποιούνται και στην κατασκευή των εσωτερικών μοντέλων. Για παράδειγμα και οι δύο προσεγγίσεις λαμβάνουν υπόψη τις επιπτώσεις της διασποράς των εργασιών ως παράγοντα μείωσης των αναλαμβανόμενων κινδύνων (Nguyen, Molinari, 2011).

Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με σχετική μελέτη αξιολόγησης επιπτώσεων (Impact Assessment) που διενεργήθηκε από τη CEA (http://www.cea.assur.org), το 21% των εταιριών που έλαβαν μέρος στην έρευνα ήδη χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα (13% αυτών είναι μικρομεσαίες εταιρίες, ενώ το 38% αυτών είναι μεγάλες εταιρίες), ενώ το 14% των εταιριών που έλαβαν μέρος στην έρευνα βρίσκονται στη διαδικασία υλοποίησης εσωτερικών μοντέλων ή στη διαδικασία βελτίωσης των υφισταμένων μοντέλων.

2.3. Μέτρα Κινδύνου και Κεφαλαιακή Επάρκεια

Ο ακριβής υπολογισμός του προφίλ κινδύνου κάθε ασφαλιστικής εταιρίας μπορεί να γίνει, όπως προαναφέρθηκε, μόνο με τη χρήση εσωτερικών μοντέλων. Η χρήση εσωτερικών μοντέλων, ενδέχεται να είναι υπερβολικά πολύπλοκη και μη ρεαλιστική σε εταιρείες με χαμηλό προφίλ κινδύνου. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητο για όσες εταιρίες δεν επιθυμούν να δημιουργήσουν τα δικά τους εσωτερικά μοντέλα, να υπάρχει μια ολοκληρωμένη Κοινή Προσέγγιση, η οποία να λαμβάνει υπόψη όλα τα είδη των κινδύνων και να βασίζεται σε κοινά αποδεκτές αρχές αξιολόγησης των κινδύνων αυτών. Από την άλλη, για κάποιους ασφαλιστικούς οργανισμούς ενδέχεται να είναι κατάλληλα τα «εν μέρει» εσωτερικά μοντέλα (partial internal models), τα οποία συνδυάζουν στοιχεία των εσωτερικών μοντέλων για ένα υποσύνολο κινδύνων που συνάδουν περισσότερο με το εταιρικό προφίλ κινδύνου του ασφαλιστικού οργανισμού, με κάποια στοιχεία της Κοινής Προσέγγισης η οποία χρησιμοποιεί γενικές παραμέτρους όπως προαναφέρθηκε (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012; Nguyen, Molinari, 2011).

Πέραν της χρήσης ή μη εσωτερικών μοντέλων, οι ασφαλιστικές εταιρίες έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν μια σειρά μεθόδων αποτίμησης των κινδύνων, βασιζόμενες σε μια σειρά δεικτών ή μέτρων κινδύνου τα οποία είναι άμεσα ή έμμεσα συνδεδεμένα με τον υπολογισμό των απαιτούμενων κεφαλαίων ώστε να μπορεί η εταιρία να αποφύγει να περιέλθει σε καθεστώς αφερεγγυότητας. Τρία από τα σημαντικότερα μέτρα που συνήθως χρησιμοποιούνται σε αναλογιστικούς υπολογισμούς είναι η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk - VaR), Tail-Value at Risk – T-VaR και Conditional Tail Expectation – CTE. (Nguyen, Molinari, 2011; Benninga and Wiener, 1998).

Ειδικότερα, η έννοια της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR), απαντά στο ερώτημα ποια είναι η αναμενόμενη απώλεια (εκφρασμένη στην εκάστοτε νομισματική μονάδα) εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος με κάποια προκαθορισμένη πιθανότητα. Το εν λόγω μέτρο κινδύνου αποτελεί συχνά σημείο αναφοράς και σύγκρισης στη διαδικασία μέτρησης του κινδύνου. Η δε σημαντικότητα του VaR καταδεικνύεται και από το γεγονός ότι τα μοντέλα υπολογισμού κινδύνων που στηρίζονται σε αυτό, γίνονται αποδεκτά και από τις εποπτικές αρχές των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ως βάση για

των υπολογισμό της απαιτούμενης κεφαλαιακής επάρκειας έναντι της έκθεσης σε κινδύνους της αγοράς.

Το μέτρο VaR δεν ενσωματώνει καμία πληροφορία σχετικά με το πόσο βαριά είναι η δεξιά ή η αριστερή ουρά της κατανομής. Αυτό αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα, αφού πρακτικά τις εποπτικές αρχές, τους μετόχους και τους πελάτες κάθε ασφαλιστικού οργανισμού, δεν τους ενδιαφέρει μόνο η συχνότητα μιας πιθανής αθέτησης, αλλά και το μέγεθος της ενδεχόμενης αθέτησης. Το κενό αυτό έρχεται να καλύψει ένα άλλο μέτρο κινδύνου που είναι παρόμοιο του VaR, το Tail Value at Risk – TVaR που λειτουργεί ως ένας αριθμητικός μέσος όρος των VaRs για διάφορες τιμές του X.

Η Conditional Tail Expectation – CTE είναι ένα ακόμη μέτρο κινδύνου, του οποίου ο ορισμός στηρίζεται στο μέτρο VaR. Ειδικότερα το CTE αναπαριστά τις υπό συνθήκη αναμενόμενες απώλειες όταν οι απώλειες αυτές υπερβαίνουν σε αξία το VaR. Αυτό που στην πράξη αντικατοπτρίζει το CTE είναι η μέση απώλεια για ποσοστό των χειρότερων $100\times(1-p)\%$ περιπτώσεων. Επιπλέον, είναι αξιοσημείωτο, ότι το CTE στην περίπτωση συνεχούς συνάρτησης, απλοποιείται και δίνει το αντίστοιχο TVaR (Barges, et al., 2009).

2.4. Από το Solvency I στο Solvency II

Το Solvency I έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ως απλοποιημένη ή ακόμα υπεραπλουστευμένη μέθοδος υπολογισμού της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών. Τα μειονεκτήματα του Solvency I είναι εν πολλοίς γνωστά και τεκμηριωμένα. Για παράδειγμα, ενώ οι τιμές ασφαλίστρων αυξομειώνονται, μια ασφαλιστική εταιρία μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο της αφερεγγυότητας κατά Solvency I με τη μείωση του επίπεδου των ασφάλιστρων ζημιών, χωρίς να χρειάζεται να προχωρήσει σε αλλαγές στο προφίλ κινδύνου και τις προβλέψεις που πραγματοποιεί. Το Solvency I δεν μπορεί να αποτυπώσει την επίπτωση μιας τέτοιας κίνησης. Σε αρκετές περιπτώσεις οι κανόνες του Solvency I είναι αντιφατικοί σε σχέση κοινώς αποδεκτές βασικές αρχές της αποτελεσματικής διαχείρισης κινδύνων. Επιπλέον, το τρέχον νομικό πλαίσιο δεν καλύπτει όλες τις ομάδες κινδύνων που είναι πιθανό να αντιμετωπίζει μια ασφαλιστική εταιρία, αλλά επικεντρώνεται κυρίως στον κίνδυνο του underwriting, αγνοώντας για

παράδειγμα σημαντικότατους κινδύνους όπως είναι ο κίνδυνος της αγοράς (market risk). Αποτέλεσμα των προαναφερθεισών αδυναμιών, είναι ότι πολλές εταιρίες έχουν αναγκαστεί να υιοθετήσουν αυστηρότερους κανόνες διαχείρισης κινδύνων. Η σχετική έκθεση Ανάλυσης Επιπτώσεων (Impact Assessment) της CEA (http://www.cea.assur.org), επιβεβαίωσε ότι η πλειοψηφία των ασφαλιστικών οργανισμών έχει ήδη θέσει σε εφαρμογή εσωτερικές διαδικασίες και μεθόδους διαχείρισης κινδύνων, ή βρίσκονται στη διαδικασία βελτιώσεων των υφιστάμενων εργαλείων και διαδικασιών για τη διαχείριση κινδύνων (Sandstrom, 2011; Nguyen, Molinari, 2011).

Πίνακας 2.1: Βασικά χαρακτηριστικά οδηγιών Solvency I και Solvency II

Solvency I	**Solvency II**
Η αποτίμηση των στοιχείων του παθητικού (liabilities) αντανακλά τις εφαρμοζόμενες εταιρικές λογιστικές πρακτικές	Στηρίζεται στην ανάλυση κινδύνων (risk based approach)
Πραγματοποιεί απλουστευμένους υπολογισμούς κεφαλαιακής επάρκειας	Αναπτύσσεται πάνω σε 3 πυλώνες (3 pillar approach)
Οι κίνδυνοι του ενεργητικού διαχειρίζονται μέσω ποσοτικών και όχι μέσω κεφαλαιακών περιορισμών	Λαμβάνει υπόψη το σύνολο των κινδύνων
Δεν παρέχεται σύνοψη των κινδύνων	Παρέχει ελεγκτικές δομές παρακολούθησης σε πανευρωπαϊκό επίπεδο
	Καλύπτει το σύνολο της ασφαλιστικής αγοράς

Στον Πίνακα 2.1 που παρατέθηκε, συνοψίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά και εντοπίζονται οι σημαντικότερες διαφοροποιήσεις των οδηγιών Solvency I και Solvency II.

Πέραν των ανωτέρω, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις κατά Solvency I, υπολογίζονται με υπεραπλουστευμένες μεθόδους, γεγονός που ενδεχομένως οδηγεί στην παραποίηση των κεφαλαιακών αναγκών των ασφαλιστικών εταιριών. Αυτή η απλοποιημένη μορφή υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων, δηλαδή μια μορφή υπολογισμού που υλοποιείται με ενιαίο τρόπο ανεξαρτήτως του μεγέθους και του είδους κάθε ασφαλιστικής εταιρίας και η οποία βασίζεται αποκλειστικά σε συγκεκριμένους κανόνες, είναι αυτονόητο ότι δε μπορεί να ανταποκριθεί σε όλο το εύρος των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρίες και πολύ περισσότερο να λάβουν υπόψη τις εξελίξεις που προέκυψαν στον τομέα της διαχείρισης κινδύνων γενικότερα τα τελευταία χρόνια.

Τόσο το Solvency I όσο και το Solvency II, για την αξιολόγηση της φερεγγυότητας χρησιμοποιούν ως βάση τους εταιρικούς ισολογισμούς. Ωστόσο, μία σημαντική διαφοροποίησή τους είναι ότι ενώ το Solvency I βασίζεται στις αξίες που παρουσιάζονται στις Οικονομικές Καταστάσεις (όπως προβλέπονται από το υφιστάμενο νομικό πλαίσιο και με κύρια έμφαση στο Παθητικό), το Solvency II στοχεύει στον εντοπισμό και την παρουσίαση της πραγματικής οικονομικής αξίας των στοιχείων του Ισολογισμού. Αυτή η προσέγγιση είναι ανεξάρτητη από το χρησιμοποιούμενο λογιστικό σχέδιο και λαμβάνει υπόψη, εκτός από τα στοιχεία του παθητικού και τα στοιχεία του ενεργητικού της ασφαλιστικής εταιρίας. Βέβαια, για να επιτευχθεί αυτό, χρησιμοποιείται η μέθοδος της «ολοκληρωμένης προσέγγισης των στοιχείων του Ισολογισμού» με τις εξής σημαντικές συνέπειες (CEIOPS, 2006; CEIOPS, 2007):

- το διαθέσιμο κεφάλαιο φερεγγυότητας παρουσιάζεται ως η διαφορά μεταξύ της αγοραίας αξίας του ενεργητικού και του παθητικού.
- οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας υπολογίζονται βάσει εκτενούς ανάλυσης των κινδύνων, λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση του ενεργητικού και του παθητικού, τις μεθόδους περιορισμού των κινδύνων και τις επιπτώσεις της διασποράς των κινδύνων.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συναρτήσεις σύζευξης, οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις αποτελούν τη βάση των μοντέλων υπολογισμού των απαιτούμενων

κεφαλαίων μέσα από τον υπολογισμό ορισμένων από τα σημαντικότερα μέτρα αποτίμησης κινδύνων.

3. Συναρτήσεις Σύζευξης (Copulas)

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συναρτήσεις σύζευξης (copulas), βασικό χαρακτηριστικό των οποίων είναι ότι συνδέουν τις μονοδιάστατες κατανομές περιθωρίου (marginal distributions) με τις αντίστοιχες δισδιάστατες συναρτήσεις κατανομής. Σημαντικό ρόλο στην κατανόηση και την εφαρμογή των συναρτήσεων σύζευξης παίζει το Θεώρημα του Sklar (Sklar, 1959), το οποίο, ως εκ τούτου, παρουσιάζεται και σχολιάζεται στο κεφάλαιο αυτό. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι βασικές οικογένειες των συναρτήσεων σύζευξης, οι οποίες και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στους υπολογισμούς που χρησιμοποιούν μοντέλα αποτίμησης κινδύνων στους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς. Τέλος, παρατίθενται και σχολιάζονται ορισμένοι από τους σημαντικότερους δείκτες, οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης της εξάρτησης (dependence) ή συσχέτισης (association) με χρήση συναρτήσεων σύζευξης.(Nelsen,2006)

3.1. Εισαγωγή

Οι συναρτήσεις σύζευξης μπορούν να περιγραφούν ως συναρτήσεις που διασυνδέουν ή «ζευγαρώνουν» πολυπαραγοντικές (ή πολυδιάστατες) συναρτήσεις κατανομής, παράγοντας μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομής περιθωρίου (Nelsen, 2006; Cherubini, et al., 2004). Οι εν λόγω συναρτήσεις, βρίσκουν εφαρμογή σε περιπτώσεις που απαιτείται η μοντελοποίηση διαφόρων ειδών εξάρτησης των κατανομών περιθωρίου και αξιοποιούν το γεγονός ότι κάθε κατανομή περιθωρίου μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε μια ομοιόμορφη κατανομή χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι όταν $X \sim F(x)$ τότε $F(x) \sim U(x)$. Επίσης, ένα ιδιαίτερα χρήσιμο χαρακτηριστικό των συζεύξεων είναι ότι παραμένουν αμετάβλητες όταν λαμβάνουν χώρα γνησίως (ή αυστηρώς) αύξοντες (strictly increasing) μετασχηματισμοί. Αυτό στοιχειοθετείται από την παρακάτω πρόταση:

<u>Πρόταση 3.1:</u> Έστω ότι το διάνυσμα $(X_1,\ldots X_d)$ έχει συνεχείς κατανομές περιθωρίου και συνάρτηση σύζευξης *C*. Τότε, το τυχαίο διάνυσμα $(T_1(X_1),\ldots T_d(X_d))$ έχει επίσης σύζευξη *C* για μια συνάρτηση T_k η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Η παραπάνω πρόταση πρακτικά σημαίνει ότι αν για παράδειγμα σχεδιάσουμε ένα δείγμα της κανονικής κατανομής περιθωρίου με συνάρτηση σύζευξης Gauss, τότε το μετασχηματισμένο δείγμα της λογαριθμικής κανονικής κατανομής περιθωρίου θα έχει την ίδια συνάρτηση σύζευξης (Nelsen, 2006), δηλαδή θα ισχύει ότι $X = e^{\mu+\sigma N}$, $N \approx N(0,1)$.

Κάθε σύζευξη είναι συνεχής και αύξουσα για κάθε μεταβλητή. Ακόμη, κάθε $u, v \in [0,1]$ ικανοποιούν την ανισότητα $\max(u+v-1,0) \le C(u,v) \le \min(u,v)$. Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα $\max(u+v-1,0)$ και $\min(u,v)$ είναι επίσης συζεύξεις και ονομάζονται όρια Frechet, αντίστοιχα κάτω όριο Frechet το πρώτο και άνω το δεύτερο. (Fosberg,2010)

3.2. Θεώρημα του Sklar

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε το Θεώρημα του Sklar (Sklar, 1959), το οποίο είναι θεμελιώδους σημασίας για την κατανόηση και την πρακτική εφαρμογή των συναρτήσεων σύζευξης. Μέσω του εν λόγω θεωρήματος, διευκρινίζεται ο ρόλος των συζεύξεων στη σχέση των πολυδιάστατων συναρτήσεων κατανομών με τις μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομών περιθωρίου τους. Στην περίπτωση της δισδιάστατης συνάρτησης κατανομής το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

<u>Θεώρημα 3.1:</u> Έστω *F* μια από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις κατανομής F_1 και F_2. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση *C* που ονομάζεται σύζευξη, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \Re$ ισχύει ότι $F(x_1,x_2) = C(F_1(x_1),F_2(x_2))$. Η *C* είναι μοναδική, αν οι F_1 και F_2 είναι συνεχείς.

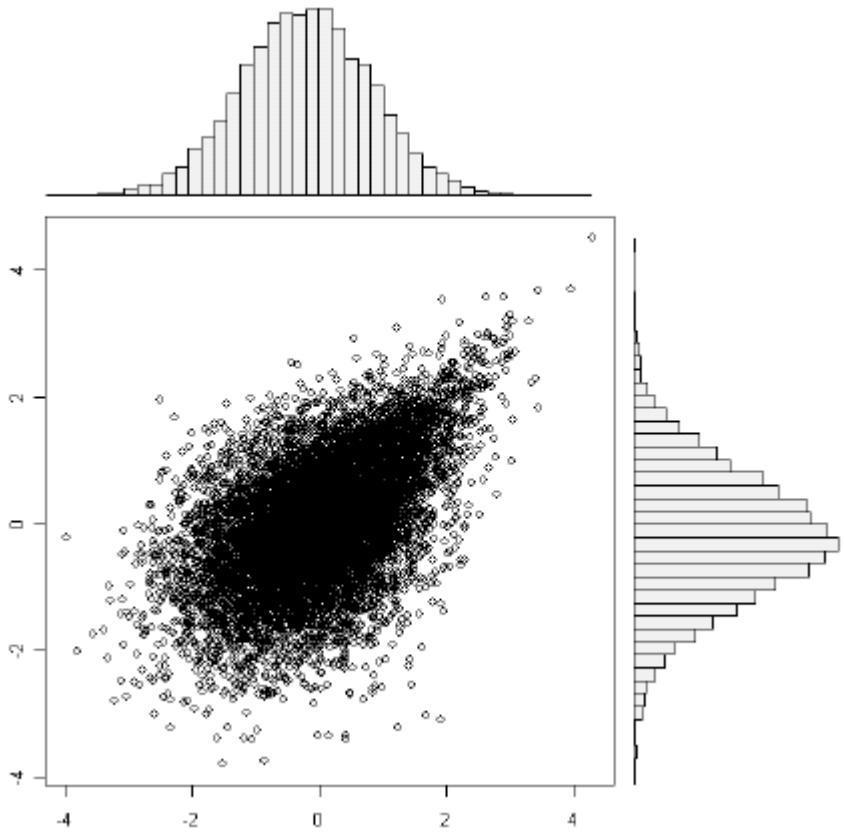
Η διατύπωση και απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παρουσιάστηκε αρχικά από τον Sklar (Sklar, 1959). Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι αν και το εν λόγω θεώρημα διατυπώθηκε και παρουσιάστηκε από τον Sklar το 1959, η ουσιαστική ανάπτυξη της θεωρίας των copulas έχει συντελεστεί πολύ αργότερα και συγκεκριμένα μετά το 2000. Περαιτέρω ανάλυση και σχολιασμός του εν λόγω θεωρήματος, είναι πέραν των στόχων της παρούσας μελέτης και μπορεί να βρεθεί στη σχετική βιβλιογραφία (Cherubini, et al., 2004; Nielsen 2006).

3.3. Οικογένειες Συναρτήσεων Σύζευξης

Για την καλύτερη κατανόηση των συναρτήσεων σύζευξης, παρουσιάζουμε στην παρούσα ενότητα ορισμένες από τις βασικότερες οικογένειες των εν λόγω συναρτήσεων μαζί με τα βασικά τους χαρακτηριστικά και συνοδεύουμε την παρουσίαση αυτή με κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ώστε να γίνει πιο κατανοητή.

Πριν από αυτή την αναλυτική παρουσίαση, παρατίθεται στο Σχήμα 3.1 που ακολουθεί, ένα παράδειγμα δύο κανονικών κατανομών περιθωρίου με σύζευξη Gumbel (Forsberg, 2010). Αν η εξάρτηση μεταξύ των δύο συναρτήσεων περιθωρίου ήταν συνάρτηση σύζευξης Gauss, τότε στο παραπάνω παράδειγμα θα προέκυπτε μια διμεταβλητή (bivariate) κανονική κατανομή. Αυτό που είναι σημαντικό να αναγνωριστεί μέσα από το παρόν παράδειγμα, είναι ότι η σύζευξη και οι κατανομές περιθωρίου είναι δύο διαφορετικά πράγματα, γεγονός που τελικά καθιστά την έννοια της σύζευξης ιδιαίτερα σημαντική.

Σχήμα 3.1: Δύο κανονικές κατανομές περιθωρίου με σύζευξη Gumbel.



Πηγή: Forsberg (2010)

3.3.1. Ελλειπτικές Συναρτήσεις Σύζευξης

Μία σημαντική κατηγορία συναρτήσεων σύζευξης είναι οι ελλειπτικές συζεύξεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι οι συζεύξεις Gauss, οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά κατά τη μοντελοποίηση εξαρτήσεων, σε εφαρμογές προερχόμενες από την οικονομία και οι οποίες κατασκευάζονται από την πολυπαραγοντική (multivariate) κανονική κατανομή με χρήση του θεωρήματος του Sklar

(Cherubini, et al., 2004; Nelsen, 2006; Nguyen, Molinari, 2011). Έστω Φ_R η βασική *d*-διάστατη πολυπαραγοντική κανονική συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής με πίνακα συσχέτισης *R*. Τότε η σύζευξη Gauss ορίζεται ως εξής:

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^d\left(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_d)\right) \tag{3.1}$$

Το διαφορικό της συνάρτησης σύζευξης, το οποίο είναι κατ' ουσίαν η συνάρτηση πυκνότητας της σύζευξης, δίνεται από τη σχέση:

$$c_R^{Ga}(u) = \frac{\varphi_R^d\left(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_d)\right)}{\prod_{i=1}^d \varphi\left(\Phi^{-1}(u_i)\right)} \tag{3.2}$$

όπου φ είναι η κανονική συνάρτηση πυκνότητας.

Η σύζευξη Gauss είναι μια από τις δημοφιλέστερες συναρτήσεις σύζευξης κυρίως λόγω της απλότητας και ευκολίας χρήσης της. Παρ' όλα αυτά, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να γίνει κατανοητός ο ενδεδειγμένος τρόπος χρήσης της. Για παράδειγμα, στο πλαίσιο της εκτίμησης κινδύνων, οι συζεύξεις Gauss υποεκτιμούν σημαντικά τις δυνητικές απώλειες, λόγω ελλιπούς εξάρτησης στην «ουρά» της κατανομής (Donnely and Embrechts, 2010). Αυτό πρακτικά, για περιπτώσεις εξαρτήσεων που προέρχονται από το χώρο της ασφάλισης, συνεπάγεται υποτίμηση των κινδύνων, δεδομένου ότι η παρουσία αυξημένης εξάρτησης στην «ουρά» της κατανομής αποτελεί ένα φυσικό χαρακτηριστικό σε ασφαλιστικούς κινδύνους. Για τέτοιου τύπου προβλήματα, συνήθως άλλου είδους συναρτήσεις σύζευξης, όπως είναι οι συζεύξεις του Αρχιμήδη που θα δούμε στη συνέχεια, αποτελούν καταλληλότερες επιλογές.

Όπως προαναφέρθηκε, η ευκολία χρήσης των συζεύξεων Gauss είναι ένα ιδιαίτερα ελκυστικό χαρακτηριστικό τους. Από την άλλη όμως, θα πρέπει να τονιστεί ότι σε περιπτώσεις που έγινε κατάχρηση στη χρήση των εν λόγω συζεύξεων για αποτίμηση κινδύνων, προέκυψαν πολλές φορές λανθασμένα και επικίνδυνα συμπεράσματα, κάποια από τα οποία συνέβαλλαν στην παγκόσμια οικονομική κρίση του 2008 (Salmon, 2009). Επομένως, είναι απολύτως σημαντικό να αναγνωρίζονται και να λαμβάνονται υπόψη οι

αδυναμίες των συζεύξεων αυτού του τύπου, ακόμα και όταν επιλέγεται η χρήση τους (Donnely and Embrechts, 2010).

Μία ακόμη σημαντική οικογένεια ελλειπτικών συναρτήσεων σύζευξης είναι γνωστή ως οικογένεια *t*-συζεύξεων. Οι συζεύξεις αυτού του τύπου, ορίζονται με τρόπο αντίστοιχο των Gauss συζεύξεων, με τη διαφορά ότι δε στηρίζονται στην κανονική κατανομή αλλά στην *t*-κατανομή του Student (Demarta and McNeil, 2004). Λεπτομερέστερα, οι *t*-συζεύξεις ορίζονται ως εξής:

$$C_{\nu,R}^{t}(u) = t_{\nu,R}^{d}\left(t_{\nu}^{-1}(u_1),\ldots,t_{\nu}^{-1}(u_d)\right) \tag{3.3}$$

Το διαφορικό της παραπάνω συνάρτησης σύζευξης, το οποίο είναι κατ' ουσίαν η συνάρτηση πυκνότητας της σύζευξης, μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά με τον ακόλουθο τρόπο:

$$c_{\nu,R}^{t}(u) = \frac{f_{\nu,R}^{d}\left(t_{\nu}^{-1}(u_1),\ldots,t_{\nu}^{-1}(u_d)\right)}{\prod_{i=1}^{d} f_{\nu}\left(t_{\nu}^{-1}(u_i)\right)} \tag{3.4}$$

όπου *f* είναι η συνάρτηση πυκνότητας της *t*-κατανομής.

Στην πράξη, μία σημαντική διαφορά της *t*-σύζευξης σε σύγκριση με τη σύζευξη Gauss, είναι ότι η *t*-σύζευξη δεν παρουσιάζει το πρόβλημα της ελλιπούς εξάρτησης στην «ουρά». Αυτό σημαίνει ότι όταν οι παράμετροι συσχέτισης και οι κατανομές περιθωρίου δε μεταβάλλονται, η *t*-σύζευξη θα οδηγεί σε υψηλότερη εκτίμηση μέτρων κινδύνου όπως το Expected Shortfall (ES) ή το Value at Risk (VaR). Θα πρέπει βέβαια να τονιστεί ότι, όσο αυξάνονται οι βαθμοί ελευθερίας, η *t*-κατανομή προσεγγίζει την κανονική κατανομή και οι συζεύξεις καθίστανται αντίστοιχες (Nguyen, Molinari, 2011).

3.3.2. Αρχιμήδειες Συναρτήσεις Σύζευξης

Οι Αρχιμήδειες συζεύξεις έχουν γενικά απλή μορφή και χαρακτηρίζονται από μια σειρά επιθυμητών ιδιοτήτων όπως είναι η προσεταιριστικότητα, καθώς επίσης και από ποικιλία δομών εξάρτησης. Σε αντίθεση με τις ελλειπτικές συζεύξεις, όπως είναι η

σύζευξη Gauss, η πλειοψηφία των Αρχιμήδειων συζεύξεων έχουν κλειστού τύπου λύσεις και δεν παράγονται από πολυπαραγοντικές (πολυδιάστατες) συναρτήσεις κατανομής με χρήση του Θεωρήματος του Sklar. Οι συζεύξεις αυτής της κατηγορίας, χρησιμοποιούν μόνο μία παράμετρο, που συνήθως αναπαρίσταται ως θ. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ακόμη και σε μεγαλύτερες διαστάσεις, όλες οι κατανομές περιθωρίου συσχετίζονται με τον ίδιο τρόπο. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, η d-διάστατη Αρχιμήδεια σύζευξη ορίζεται ως εξής (Nguyen, Molinari, 2011; Nelsen, 2006):

$$C(u) = \varphi^{-1}\left(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \ldots \varphi(u_d)\right) \tag{3.5}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της Αρχιμήδειας σύζευξης, δίνεται από τη σχέση (Savu and Trede, 2004):

$$c(u_1, \ldots, u_d) = \varphi^{-1(d)}\left(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \ldots \varphi(u_d)\right)\prod_{i=1}^{d} \varphi'(u_i) \tag{3.6}$$

όπου $\varphi^{-1(d)}$ είναι η d παράγωγος της αντίστροφης γεννήτριας συνάρτησης φ_θ. Υπάρχουν πολλές σημαντικές και δημοφιλείς Αρχιμήδειες συζεύξεις, όπως είναι η Gumbel-Hougaard, η Cook-Johnson και η Frank, τα επιμέρους χαρακτηριστικά των οποίων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1 (Forsberg, 2010).

Πίνακας 3.1: Χαρακτηριστικά Αρχιμήδειων Συζεύξεων

	Gumbel-Hougaard	**Cook-Johnson**	**Frank**
$\phi_\theta(t)$	$(-\ln(t))^\theta$	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta} - 1\right)$	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$
Εύρος Τιμών	$\theta \geq 1$	$\theta > 0$	$\Re \setminus \{0\}$
$C_\theta(u_1, \ldots, u_d)$	$e^{-\left[\sum_{i=1}^{d}(-\ln(u_i))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}}$	$\left[\left(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta}\right) - n + 1\right]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\frac{\prod_{i=1}^{d} u_i}{1 - \theta\prod_{i=1}^{d}(1 - u_i)}$

3.3.3. Συναρτήσεις Σύζευξης Γινομένου (Product Copulas)

Μία από τις απλούστερες και ταυτόχρονα σημαντικότερες οικογένειες συναρτήσεων σύζευξης είναι οι συναρτήσεις γινομένου (product copulas), οι οποίες συχνά καλούνται και ανεξάρτητες συζεύξεις. Ο μαθηματικός τύπος που περιγράφει αυτού του τύπου τις συναρτήσεις είναι (Cherubini, et al., 2004; Nguyen, Molinari, 2011):

$$\prod(u,v) = uv\,. \tag{3.7}$$

Προκύπτει άμεσα ότι, αν μία σύζευξη δύο στοχαστικών μεταβλητών είναι σύζευξη γινομένου, τότε αυτές είναι ανεξάρτητες δεδομένου ότι σύμφωνα με το θεώρημα Sklar, ισχύει ότι:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \prod(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1)F_2(x_2)\,. \tag{3.8}$$

3.4. Ανάπτυξη Μοντέλων Εξάρτησης με Συναρτήσεις Σύζευξης – Δείκτες Συσχέτισης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μια σειρά δεικτών συσχέτισης, που επίσης κάποιες φορές καλούνται μέτρα ή συντελεστές συσχέτισης, και οι οποίοι χρησιμοποιούνται συχνά κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης της εξάρτησης (dependence) ή συσχέτισης (association) με χρήση συναρτήσεων σύζευξης. Ειδικότερα, εξετάζονται οι τρόποι με τους οποίους οι συζεύξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη της εξάρτησης ή συσχέτισης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών. Οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών έχουν μελετηθεί ευρέως στο πλαίσιο της επιστήμης των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Η μελέτη αυτή παρουσιάζει εν γένει δυσκολίες, οι οποίες οφείλονται στο γεγονός ότι η εξάρτηση αυτή μπορεί να λάβει πολλές και διαφορετικές μορφές. Ως εκ τούτου, για να καταστεί εφικτή η παραγωγή έγκυρων και χρήσιμων στατιστικών μοντέλων θα πρέπει να γίνουν συγκεκριμένες παραδοχές και υποθέσεις.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να προσεγγίσει κανείς και να μετρήσει το βαθμό εξάρτησης. Σε πολλές περιπτώσεις, η εν λόγω εξάρτηση είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος, δηλαδή, παραμένει αμετάβλητη όταν λαμβάνουν χώρα γνησίως (αυστηρώς) αύξοντες μετασχηματισμοί των τυχαίων μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις σύζευξης περιγράφουν και τυποποιούν τις ιδιότητες των ενιαίων κατανομών που είναι ανεξάρτητες από τέτοιου τύπου μετασχηματισμούς (Schweizer and Wolff, 1981). Οι ιδιότητες εξάρτησης και τα μέτρα συσχέτισης είναι αλληλένδετα και αλληλοσυσχετιζόμενα, συνεπώς η μελέτη και αναζήτηση των επιμέρους χαρακτηριστικών των εξαρτήσεων θα μπορούσε να ξεκινήσει και να στηριχθεί, είτε στα καλά θεμελιωμένα αποτελέσματα της επιστήμης των πιθανοτήτων και της στατιστικής, είτε αναλύοντας άμεσα τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των εμπλεκόμενων συναρτήσεων σύζευξης.

Θα μπορούσε κανείς, προσπαθώντας να περιγράψει διαισθητικά τις εξαρτήσεις σε επίπεδο τυχαίων μεταβλητών, να ισχυριστεί ότι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι συσχετίσιμες όταν μεγάλες τιμές της μίας συνδέονται με μεγάλες τιμές της άλλης και μικρές τιμές της μίας αντίστοιχα συνδέονται με μικρές τιμές της άλλης. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικό φορμαλισμό ως εξής:

<u>Πρόταση 3.2:</u> Έστω (x_i, y_i) και (x_j, y_j) δύο στιγμιότυπα ενός διανύσματος συνεχών τυχαίων μεταβλητών (X, Y). Τότε τα (x_i, y_i) και (x_j, y_j) είναι συσχετίσιμα αν ισχύει ταυτόχρονα ότι $x_i < x_j$ και $y_i < y_j$, ή ότι $x_i > x_j$ και $y_i > y_j$. Κατά τον ίδιο τρόπο, τα (x_i, y_i) και (x_j, y_j) είναι μη συσχετίσιμα αν ισχύει ταυτόχρονα ότι $x_i < x_j$ και $y_i > y_j$, ή ότι $x_i < x_j$ και $y_i > y_j$.

Στη συνέχεια της ενότητας περιγράφονται, με χρήση μαθηματικών τύπων, οι σημαντικότεροι δείκτες συσχέτισης, ξεκινώντας όπως είπαμε από τη γενική περιγραφή με τη βοήθεια των πιθανοτήτων και της στατιστικής, δίνοντας όμως στη συνέχεια τον ορισμό και από την οπτική γωνία των συναρτήσεων σύζευξης.

3.4.1. Δείκτης Συσχέτισης του Pearson

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 με τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής $F_1(x_1)$ και $F_2(x_2)$. Έστω επίσης η ενιαία συνάρτηση κατανομής $H(x_1, x_2)$. Ο δείκτης συσχέτισης του Pearson για τις δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2, συμβολίζεται με ρ και δίνεται από την εξής σχέση (Nelsen, 2006):

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \tag{3.9}$$

όπου $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$ είναι η συνδιασπορά των τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2, ενώ με $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$ συμβολίζονται οι τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 αντίστοιχα.

Οι βασικές ιδιότητες του δείκτη συσχέτισης ρ θα μπορούσαν να συνοψιστούν στις ακόλουθες σχέσεις (3.10-3.12) (Nelsen, 2006):

$$\rho(a_1X_1 + a_2, b_1X_2 + b_2) = \rho(X_1, X_2) \tag{3.10}$$

$$-1 \le \rho(X_1, X_2) \le 1 \text{ και } \rho(X_1, X_2) = \pm 1 \tag{3.11}$$

αν και μόνο αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες, ενώ

$$\rho(X_1, X_2) = 0 \tag{3.12}$$

αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εναλλακτικά, ο δείκτης ρ μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια της ενιαίας συνάρτησης κατανομής και των συναρτήσεων περιθωρίου των επιμέρους κατανομών, ως εξής (Schweizer and Wolff, 1981):

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{1}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [H(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)]dx_1dx_2 \tag{3.13}$$

Ο παραπάνω μαθηματικός τύπος, στην περίπτωση που η H είναι συνάρτηση σύζευξης των F_1 και F_2, μπορεί να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη απλούστερη διατύπωση:

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \int_0^1 \int_0^1 [C(u,v) - uv] dF_1^{-1}(u) dF_2^{-1}(v) \qquad (3.14)$$

3.4.2. Δείκτης Συσχέτισης του Kendall

Έστω ότι (X_1, X_2) και (Y_1, Y_2) είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις μιας δισδιάστατης συνεχούς κατανομής, με ενιαία συνάρτηση κατανομής $H(x,y)$. Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall τ, ορίζεται ως η πιθανότητα της συμφωνίας μείον την πιθανότητα ασυμφωνίας των διανυσμάτων (X_1, X_2) και (Y_1 , Y_2). Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall μπορεί να περιγραφεί ως εξής (Nelsen, 2006):

$$\tau = P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0] \qquad (3.15)$$

Είναι προφανές ότι ο Δείκτης Kendall τ, λαμβάνει πάντα τιμές μεταξύ των ακεραίων -1 και 1, δηλαδή:

$$-1 \le \tau \le 1. \qquad (3.16)$$

Εναλλακτικά, ο δείκτης τ μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια της ενιαίας συνάρτησης κατανομής και των συναρτήσεων περιθωρίου των επιμέρους κατανομών, ως εξής (Schweizer and Wolff , 1981):

$$\tau = 4E(H(x,y)) - 1 = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y) dH(x,y) - 1 \qquad (3.17)$$

Ο παραπάνω μαθηματικός τύπος, στην περίπτωση που η H είναι συνάρτηση σύζευξης, μπορεί να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη απλούστερη μαθηματική διατύπωση:

$$\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1. \qquad (3.18)$$

3.4.3. Δείκτης Συσχέτισης του Spearman

Ο ορισμός του δείκτη συσχέτισης του Spearman είναι παρόμοιος με το δείκτη συσχέτισης του Pearson, με τη διαφορά ότι δεν εφαρμόζεται στις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 αλλά στις μεταβλητές $U = F(X_1)$ και $V = F(X_2)$. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, ο εν λόγω δείκτης συσχέτισης, ο οποίος συμβολίζεται ως r, περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση (Nelsen, 2006):

$$r = \frac{E((U - E(U))(V - E(V)))}{\sqrt{\mathrm{var}(U)\mathrm{var}(V)}}. \qquad (3.19)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για το δείκτη συσχέτισης του Spearman, ισχύει όπως και για τον αντίστοιχο δείκτη του Pearson, ότι λαμβάνει τιμές μεταξύ των ακεραίων αριθμών -1 και 1, δηλαδή:

$$-1 \le r \le 1. \qquad (3.20)$$

Εναλλακτικά, ο δείκτης r μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια της ενιαίας συνάρτησης κατανομής και των συναρτήσεων περιθωρίου των επιμέρους κατανομών, ως εξής (Schweizer and Wolff, 1981):

$$r = 12\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[H(x_1,x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)]dF_1(x_1)dF_2(x_2) \qquad (3.21)$$

Ο παραπάνω μαθηματικός τύπος, στην περίπτωση που η H είναι συνάρτηση σύζευξης των F_1 και F_2, μπορεί να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη απλούστερη διατύπωση:

$$r = 12\int_0^1\int_0^1 (C(u,v) - uv)dudv. \qquad (3.22)$$

3.4.4. Δείκτης Συσχέτισης της Διαμέσου

Πρόκειται για λιγότερο δημοφιλή δείκτη συσχέτισης. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, ο δείκτης συσχέτισης διαμέσου *m*, μεταξύ των μεταβλητών X_1 και X_2 ορίζεται ως εξής (Nelsen, 2006):

$$m = P\left(\left(X_1 - x_1^M\right)\left(X_2 - x_2^M\right) > 0\right) - P\left(\left(X_1 - x_1^M\right)\left(X_2 - x_2^M\right) < 0\right) \qquad (3.23)$$

όπου x_1^M και x_2^M είναι οι πληθυσμιακοί διάμεσοι των τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2 αντίστοιχα.

Ο δείκτης συσχέτισης διαμέσου μοιάζει με το δείκτη συσχέτισης του Kendall ως προς το γεγονός ότι και στις δύο περιπτώσεις λαμβάνεται υπόψη η διαφορά μεταξύ των πιθανοτήτων συσχετισμού και μη συσχετισμού. Αυτό που ουσιαστικά διαφοροποιεί το συσχέτισης διαμέσου είναι ότι μετρά την εξάρτηση στο κέντρο της εκάστοτε συνάρτησης κατανομής.

Εναλλακτικά, ο δείκτης *m* μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια της ενιαίας συνάρτησης κατανομής και των συναρτήσεων περιθωρίου των επιμέρους κατανομών, ως εξής (Schweizer and Wolff, 1981):

$$m = 4H\left(x_1^M, x_2^M\right) - 1. \qquad (3.23)$$

Ο παραπάνω μαθηματικός τύπος, στην περίπτωση που η *H* είναι συνάρτηση σύζευξης, μπορεί να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη απλούστερη μαθηματική διατύπωση:

$$m = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1. \qquad (3.24)$$

3.5. Εμπειρικές Συναρτήσεις Σύζευξης και Μοντελοποίηση Εξάρτησης

Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε τον τρόπο εφαρμογής των μέτρων κινδύνου σε μοντέλα εκτίμησης κινδύνου και τις πρακτικές που ακολουθούνται για την εκτίμηση της καταλληλότητας και τον έλεγχο μοντέλων που εστιάζουν σε ασφαλιστικούς κινδύνους. Όπως έχουμε περιγράψει στην προηγούμενη ενότητα, για κάποιες οικογένειες συναρτήσεων σύζευξης, δείκτες όπως του Spearman, ή του Kendall, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των παραμέτρων των εν λόγω συναρτήσεων σύζευξης. Το γεγονός αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί για να εκτιμηθούν κατά προσέγγιση οι τιμές των παραμέτρων των συναρτήσεων σύζευξης με τη χρήση εμπειρικών δεδομένων. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή και ως προσέγγιση καμπύλης (curve fitting) και περιγραφή της συναντάμε στη σχετική βιβλιογραφία (McNeil et al., 2005; Genest and Favre, 2007).

Το πεδίο τιμών της εμπειρικής συνάρτησης σύζευξης (empirical copula), συνήθως προκύπτει από αλλαγή κλίμακας του άξονα του βαθμού (rank axis). Για παράδειγμα σύμφωνα με τους Genest and Favre (2007) η νέα κλίμακα μπορεί να προκύπτει από τη διαίρεση 1/ (n + 1), οδηγώντας κατά αυτό τον τρόπο στο μοναδιαίο πεδίο τομών [0, 1] × [0, 1]. Κατόπιν της εν λόγω αλλαγής κλίμακας, η εμπειρική συνάρτηση σύζευξης δίνεται από τη σχέση:

$$C(u,v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(\frac{R_{X(i)}}{n+1} \le u, \frac{R_{Y(i)}}{n+1} \le \upsilon\right), \qquad (3.25)$$

όπου με $I(.)$, συμβολίζουμε την ενδεικτική συνάρτηση (indicator function).

Πρακτικά, η εμπειρική συνάρτηση σύζευξης είναι μία προσέγγιση της πραγματικής συνάρτησης σύζευξης η οποία στηρίζεται στο βαθμό R. Εάν η προσέγγιση αυτή στηρίζεται σε μεγάλο δείγμα, τότε προφανώς πρόκειται για συνάρτηση με κανονική κατανομή.

Πέραν της συνάρτησης εμπειρικής σύζευξης αυτής καθεαυτής, ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο υπολογισμός της εξάρτησης. Αν χρησιμοποιήσουμε το συντελεστή

συσχέτισης του Pearson πάνω στις συναρτήσεις βαθμού R, καταλήγουμε στο συντελεστή συσχέτισης του Spearman, όπως φαίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_{X(i)}\overline{R}_X\right)\left(R_{Y(i)}\overline{R}_Y\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(R_{X(i)}\overline{R}_X\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(R_{Y(i)}\overline{R}_Y\right)^2}} \in [0,1] \qquad (3.26)$$

όπου

$$\overline{R}_X = \overline{R}_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}. \qquad (3.27)$$

Ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε το συντελεστή του Spearman είναι ο ακόλουθος:

$$r_S = \frac{12}{n(n+1)(n-1)}\sum_{i=1}^{n} R_{X(i)}R_{Y(i)} - 3\frac{n+1}{n-1}. \qquad (3.28)$$

Με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις στην παραπάνω σχέση (3.28) προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$12\int_0^1\int_0^1 u\upsilon dC_n(u,\upsilon) - 3 = \frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{R_{X(i)}}{n+1}\frac{R_{Y(i)}}{n+1} - 3 = \frac{n-1}{n+1}r_S. \qquad (3.29)$$

Κάτω από την υπόθεση null H_0, τέτοιο ώστε η συνάρτηση C να ισούται με το C_i της ανεξαρτησίας μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών X και Y, ισχύει ότι η κατανομή του r_S είναι κατά προσέγγιση κανονική $N(0,\ 1\ /\ n\ +\ 1)$. Ως εκ τούτου, το H_0 μπορεί να απορριφθεί από ένα επίπεδο α και μετά για το οποίο ισχύει ότι:

$$\sqrt{n-1}\left|r_S\right| > k_{1-a/2}, \qquad (3.30)$$

$k_{1-a/2}$ είναι το $1-a/2$ κλάσμα (quantile) της τυπικής συνάρτησης κανονικής κατανομής. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για $\alpha = 0.05$, προκύπτει ότι $\sqrt{n-1}\left|r_S\right| > 1.96$.

Θα πρέπει βέβαια να τονιστεί ότι ο υπολογισμός του συντελεστή Spearman είναι ευκολότερος αν χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη σχέση:

$$r_S 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n^3 - n}\,. \qquad (3.31)$$

Το σημαντικό πλεονέκτημα του εν λόγω συντελεστή σε σχέση με άλλα αντίστοιχα μέτρα είναι ότι είναι πάντα καλά ορισμένος ακόμη και σε περιπτώσεις κατανομών με πολύ «βαριές» ουρές, οι οποίες συναντώνται στα μοντέλα υπολογισμού των ασφαλιστικών κινδύνων.

Κατ' αντιστοιχία με τα ανωτέρω αποτελέσματα που αφορούν το συντελεστή του Spearman, ακολούθως καταγράφουμε τις μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν την εξάρτηση για το συντελεστή του Kendall. Έστω ότι με PC_n και PD_n συμβολίζουμε αντίστοιχα των αριθμό των συσχετίσιμων (concordant) και μη συσχετίσιμων (disconcordant) ζευγών. Τότε, η εμπειρική συνάρτηση του Kendall μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$r_\tau = \frac{PC_n - PD_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} PC_n - 1\,. \qquad (3.32)$$

Έστω τώρα ότι

$$W_i = \frac{1}{n} cardinality\left(j : X_j \le X_i, Y_j \le Y_i\right) \qquad (3.33)$$

και ότι

$$\overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i\,. \qquad (3.34)$$

Τότε ισχύει ότι

$$PC_n = -n + n^2 \overline{W} \qquad (3.35)$$

το οποίο οδηγεί τελικά στη σχέση:

$$r_\tau = 4\frac{n}{n-1}\overline{W} - \frac{n+3}{n-1}. \qquad (3.36)$$

Κάτω από την υπόθεση null H_0, τέτοιο ώστε η συνάρτηση C να ισούται με το C_i της ανεξαρτησίας μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών X και Y, ισχύει ότι η κατανομή του r_τ είναι κατά προσέγγιση κανονική $N(0, 2(2n + 5) / 9n(n - 1))$. Ως εκ τούτου, το H_0 μπορεί να απορριφθεί από ένα επίπεδο α και μετά για το οποίο ισχύει ότι:

$$\sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}}|r_\tau| > k_{1-a/2}\ . \qquad (3.37)$$

Αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την εξάρτηση για άλλα μέτρα κινδύνου και εξετάζονται ευρύτατα στη σχετική βιβλιογραφία (Genest and Favre, 2007). Θα πρέπει τέλος να σημειώσουμε ότι υφίσταται πληθώρα άλλων μεθόδων για την ανίχνευση εξαρτήσεων. Οι χαρακτηριστικότερες από αυτές χρησιμοποιούν τις δυνατότητες γραφικής αναπαράστασης των σχετικών συναρτήσεων (Genest and Favre, 2007).

4. Μέτρα Κινδύνου

Το σύγχρονο οικονομικό γίγνεσθαι προσφέρει πλέον οικονομικά εργαλεία μέσω των οποίων είναι εφικτή η αγορά και η πώληση κινδύνων. Οι ασφαλιστικοί και τραπεζικοί οργανισμοί συμμετέχουν στη διαδικασία αυτή, αγοράζοντας ή πωλώντας κινδύνους, ανάλογα με τη στρατηγική που ακολουθούν, σε τιμές τέτοιες που αντανακλούν το μέγεθος των εν λόγω κινδύνων. Στο Κεφάλαιο αυτό εξετάζονται μια σειρά από μέτρα αποτίμησης των κινδύνων. Ειδικότερα, παρουσιάζονται δείκτες κινδύνων όπως είναι (1) η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk - VaR), (2) η Tail-Value at Risk – T-VaR και (3) η Conditional Tail Expectation – CTE. Πέραν των προαναφερθέντων δεικτών, υπάρχουν πολλοί περισσότεροι, η παρουσίαση και ανάλυση των οποίων δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Τέλος, στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται και εξετάζονται τρόποι μαθηματικής διατύπωσης αλλά και πρακτικού υπολογισμού των συντελεστών κινδύνου.

4.1. Εισαγωγή

Αναπόσπαστο τμήμα της σύγχρονης παγκοσμιοποιημένης οικονομικής δραστηριότητας, αποτελεί η προσπάθεια τον χρηματοοικονομικών, τραπεζικών και ασφαλιστικών οργανισμών να κατανείμουν και να διαχειριστούν αποτελεσματικά τους κινδύνους οι οποίοι προέρχονται από πολλές και διαφορετικές πηγές. Πολύ περισσότερο μάλιστα, σε περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η αντιστάθμιση των αναλαμβανόμενων κινδύνων μέσω σχετικών χρηματοοικονομικών προϊόντων και εργαλείων, πράγμα που μπορεί να συμβεί σε κάποιες περιπτώσεις μη ομαλής και πλήρους λειτουργίας των αγορών. Σε τέτοιες περιπτώσεις, θα πρέπει αφενός η αποτίμηση των κινδύνων να είναι όσο το δυνατόν ακριβέστερη και αφετέρου να δημιουργούνται και να διατηρούνται τα απαιτούμενα αποθέματα κεφαλαίων ώστε να μπορούν να ελεγχθούν αποτελεσματικά οι υφιστάμενοι κίνδυνοι.

Ολοένα και σε μεγαλύτερο βαθμό οι τραπεζοασφαλιστικοί οργανισμοί σήμερα, εργάζονται στην ανάπτυξη τεχνικών για την ακριβή μέτρηση και αξιολόγηση των κινδύνων, καθώς αφενός ο αντίκτυπος στην κερδοφορία και την επιχειρηματική

δραστηριότητα είναι μεγάλος και αφετέρου οι εποπτικές αρχές γίνονται όλο και πιο αυστηρές, επιβάλλοντας ακριβέστερη παρακολούθηση, καλύτερο έλεγχο και αυξημένη διαφάνεια. Στο πλαίσιο των εν λόγω τεχνικών, έχουν προταθεί πολλά μέτρα κινδύνου τα οποία είναι από πολύ απλά μέχρι πολύ σύνθετα και πολύπλοκα. Διαφορετικές κατηγορίες μέτρων κινδύνου, εκπροσωπούνται από διαφορετικές σχολές ερευνητών και επαγγελματιών του χώρου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι τεχνικές και μέθοδοι μέτρησης και ποσοτικοποίησης κινδύνων έχουν αποτελέσει και εξακολουθούν να αποτελούν αντικείμενο ευρείας συζήτησης και αντιπαραθέσεων. Ωστόσο, τις τελευταίες δύο δεκαετίες, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε τεχνικές που στοχεύουν στον όσο το δυνατόν ακριβέστερο προσδιορισμό της κεφαλαιακής επάρκειας των χρηματοοικονομικών οργανισμών, προσδοκώντας κατ' αυτό τον τρόπο να προσεγγίσουν το ζήτημα πληρέστερα (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου

Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου	
Μη αρνητικής φόρτισης (non-negative loading)	Μη υπερβάλλουσας φόρτωσης (non-excessive loading ή no ripoff)
Translativity	Σταθερότητας (constancy, ή unjustified loading)
Προσθαφαιρετικότητας (subadditivity)	Συμονοτονικής προσθετικότητας (comonotonic additivity)
Θετικής ομοιογένειας (positive homogeneity)	Μονοτονικότητας (monotonicity)
Συνέχειας (continuity) ως προς τη σύγκλιση της κατανομής	Αντικειμενικότητας (objectivity)

Για να είναι χρήσιμα και πρακτικά εφαρμόσιμα σε πρακτικές εφαρμογές, όπως η αποτίμηση ασφαλιστικών κινδύνων, τα μέτρα κινδύνου εξετάζονται και αναλύονται σε συνδυασμό με τις ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν. Οι ιδιότητες αυτές, καθορίζουν εν πολλοίς την καταλληλότητα και την αξιοπιστία των μέτρων κινδύνου ανάλογα με την

περίπτωση και το περιβάλλον στο οποίο χρησιμοποιούνται. Οι εν λόγω ιδιότητες παρατίθενται συνοπτικά στον Πίνακα 4.1 και παρουσιάζονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

4.2. Ορισμός και Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου

Η παρούσα ενότητα, επικεντρώνεται στην παρουσίαση μέτρων κινδύνου (και των βασικών ιδιοτήτων τους) που βρίσκουν εφαρμογή στον υπολογισμό προβλέψεων των κεφαλαιακών απαιτήσεων προκειμένου να λειτουργεί απρόσκοπτα ένα χρηματοοικονομικό ίδρυμα. Στην ανάλυση που ακολουθεί, για λόγους απλότητας, σε κάποιες περιπτώσεις μοντέλων, έχει παραληφθεί η ενσωμάτωση παραμέτρων που σχετίζονται με επιτόκια χωρίς αυτό να μειώνει την αξία των αποτελεσμάτων που παράγονται από τα προτεινόμενα μοντέλα.

Ως γνωστόν οι κίνδυνοι μπορούν να αναπαρασταθούν με τη βοήθεια μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Κατά συνέπεια, από μαθηματικής άποψης, η μέτρηση και αποτίμηση των κινδύνων μπορεί να πραγματοποιηθεί εάν στηριχθεί σε μια αντιστοίχηση μεταξύ του χώρου των τυχαίων μεταβλητών και των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Με βάση το ανωτέρω σκεπτικό, θα συμβολίζουμε στο εξής με $\rho(X)$ τον πραγματικό αριθμό που αποτελεί ένα γενικό μέτρο του κινδύνου X (Szego, 2004). Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι κανένα μέτρο κινδύνου δε μπορεί να κωδικοποιήσει το σύνολο των κινδύνων, αλλά μόνο τμήμα αυτού.

Παραφράζοντας για λόγους καλύτερης κατανόησης τα ανωτέρω, ένα μέτρο κινδύνου θα μπορούσε να οριστεί ως μία απεικόνιση ρ ενός κινδύνου X σε ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $\rho(X)$ που αντανακλά την επιπλέον αξία που πρέπει να προστεθεί στο X ώστε να τον καταστήσει αποδεκτό. Ως εκ τούτου, υψηλές τιμές του $\rho(X)$ μεταφράζονται σε υψηλό κίνδυνο, ενώ χαμηλές τιμές του $\rho(X)$ μεταφράζονται σε χαμηλό κίνδυνο.

Για να είναι καλά ορισμένα, λειτουργικά και πρακτικά εφαρμόσιμα τα μέτρα κινδύνου θα πρέπει να πληρούν μια σειρά θεμελιωδών αξιωμάτων (Fishburn, 1982).

Αυτό πρακτικά, έχει μεταφραστεί από ερευνητές της αναλογιστικής επιστήμης (Goovaerts et al., 1984) σε ένα αριθμό επιθυμητών ιδιοτήτων που πρέπει να πληρούνται και οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

1. Non excessive loading/ No ripoff: Είναι σημαντικό για μια ασφαλιστική εταιρία να μη δεσμεύει περισσότερα κεφάλαια από τη μέγιστη πιθανή απώλεια. Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(X) \leq \max(X) = F_X^{-1}(1) \tag{4.1}$$

   για κάθε τυχαία μεταβλητή X.

2. Non negative loading: Το ελάχιστο δεσμευόμενο κεφάλαιο θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τις πιθανές αναμενόμενες απώλειες (expected loss). Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(X) \geq E(X) \tag{4.2}$$

   για κάθε τυχαία μεταβλητή X.

3. Translativity: Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε αύξηση των υποχρεώσεων κατά ένα ποσό αξίας c, θα πρέπει να οδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση των διαθέσιμων κεφαλαίων. Αποδίδοντας τον ίδιο ισχυρισμό από μία άλλη οπτική γωνία, θα μπορούσε κανείς να πει ότι η μεταφρασιμότητα εκφράζεται από τη σχέση:

$$\rho(X - \rho(X)) = 0. \tag{4.3}$$

   Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c \tag{4.4}$$

   για κάθε τυχαία μεταβλητή X και σταθερό c.

4. <u>Σταθερότητα (Constancy ή Unjustified loading):</u> Προκειμένου να μπορεί ένας ασφαλιστικός οργανισμός να ανταποκριθεί σε πιθανές απώλειες αξίας *c* είναι προφανές ότι απαιτείται η διαθεσιμότητα κεφαλαίων τουλάχιστον ίσου ύψους. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$\rho(0) = 0, \tag{4.5}$$

ενώ η ποσότητα $\rho(X)$ ισοδυναμεί με την απαίτηση του περιθωρίου (margin), δηλαδή το ελάχιστο ποσό του κεφαλαίου, το οποίο όταν προστίθεται στο X, καθιστά το X αποδεκτό. Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(c) = c \tag{4.6}$$

για σταθερό c.

5. <u>Επιπροσθετική ιδιότητα(Subadditivity):</u> Η λογική πίσω από την ιδιότητα αυτή μπορεί να συνοψιστεί στο γεγονός ότι μία ενδεχόμενη συγχώνευση δεν δημιουργεί επιπρόσθετους κινδύνους, το αντίθετο μάλιστα. Εν κατακλείδι, η προσθαφαιρετικότητα αντανακλά την ιδέα ότι οι κίνδυνοι μπορούν να μειωθούν μέσω της διαφοροποίησης. Και αποτελεί μία πολύ διευκολυντική μαθηματική ιδιότητα. Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \tag{4.7}$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή $X_1,\ X_2$.

6. <u>Συμονοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity):</u> Η εν λόγω ιδιότητα στοιχειοθετείται από το γεγονός ότι όταν συνυπολογίζουμε συμονοτονικούς κινδύνους, ο συνολικός κίνδυνος μειώνεται. Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2) \tag{4.8}$$

για κάθε συμονοτονική τυχαία μεταβλητή X_1, X_2.

7. <u>Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity):</u> Πρόκειται για ιδιότητα που συνήθως συνδέεται με το βαθμό ανεξαρτησίας των υπολογισμών, σε σχέση με τη χρησιμοποιούμενη νομισματική μονάδα. Η ιδιότητα αυτή στενά συνδεδεμένη με την ιδιότητα της συμονοτονικής προσθετικότητας. Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(cX) = c\rho(X) \tag{4.9}$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή *X*, και σταθερά *c*.

8. <u>Μονοτονικότητα (Monotonicity):</u> Η ιδιότητα της μονοτονικότητας χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει το γεγονός ότι οι κεφαλαιακές απαιτήσεις που απαιτούνται ως «μαξιλάρι» διασφάλισης των ασφαλισμένων έναντι δυνητικών απωλειών, αυξάνονται ανάλογα με το ύψος των αναμενόμενων απωλειών. Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\rho(X_1 \le X_2) = 1 \Rightarrow \rho(X_1) \le \rho(X_2) \tag{4.10}$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X_1, X_2.

9. <u>Συνέχεια ως προς τη σύγκλιση της κατανομής (Continuity with respect to convergence in distribution):</u> Με βάση το συμβολισμό που έχουμε υιοθετήσει, αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έστω $\{X_n\}, n = 1,2,\ldots$ μία ακολουθία κινδύνων τέτοια ώστε $X_n \to X$ όταν $n \to \infty$. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \rho(X_n) = \rho(X). \tag{4.11}$$

10. Αντικειμενικότητα (Objectivity): Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, το $\rho(X)$ εξαρτάται από το διαφορικό (df) F_X του X. Αυτό πρακτικά διασφαλίζει ότι για λόγους αποτίμησης κινδύνων του X, όλη η απαιτούμενη πληροφορία βρίσκεται στην F_X. Η σημαντικότητα της ιδιότητας αυτής είναι μεγάλη, αφού συχνά οι υπολογισμοί των κινδύνων πραγματοποιούνται πάνω σε εμπειρικά δεδομένα, τα οποία αν δεν είναι «αντικειμενικά», καθιστούν τον υπολογισμό μη χρήσιμο και αναποτελεσματικό.

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να τονιστεί ότι οι παραπάνω ιδιότητες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους δεδομένου ότι παρουσιάζουν συσχετίσεις σε αρκετές περιπτώσεις. Επίσης κάποιες από τις ιδιότητες αυτές (π.χ. προσθαφαιρετικότητα, θετική ομοιογένεια) αποτελούν αντικείμενα αμφισβήτησης και η αξία και χρησιμότητά τους συζητούνται ευρέως από επιστήμονές αλλά και επαγγελματίες του αναλογισμού (Follmer and Schied, 2002; Rootzen and Kluppelberg, 1999).

4.3. Οικονομικό Κεφάλαιο (Economic Capital) και Προσαρμογές λόγω Κινδύνων

Οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί και κατά συνέπεια οι ασφαλιστικές εταιρίες, όπως ήδη προαναφέρθηκε, υποχρεούνται να τηρούν ένα «μαξιλάρι» κεφαλαίων ασφαλείας για να είναι σε θέση να διασφαλίσουν τη λειτουργία τους σε περίπτωση απρόβλεπτων απωλειών. Συχνά, αυτό το κεφάλαιο αποκαλείται Οικονομικό Κεφάλαιο (Economic Capital). Χρησιμοποιώντας μαθηματικό φορμαλισμό αντίστοιχο αυτού της προηγούμενης ενότητας, θα μπορούσαμε να ορίσουμε το Οικονομικό Κεφάλαιο ως εξής (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012):

$$EC(S) = \rho(S) - E(S), \tag{4.12}$$

όπου με S συμβολίζεται το ύψος των συνολικών απωλειών ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού.

Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι αν και οι αναμενόμενες απώλειες δεν εξαρτώνται από τη δομή του χαρτοφυλακίου, το Οικονομικό Κεφάλαιο εξαρτάται και επηρεάζεται σημαντικά από την τρέχουσα δομή και σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Ειδικότερα, ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο καλά διαφοροποιημένο και ομοιογενές, απαιτεί τη δέσμευση μικρότερου Οικονομικού Κεφαλαίου σε σχέση με ένα χαρτοφυλάκιο που παρουσιάζει υψηλή συσχέτιση μεταξύ των ασφαλιστικών συμβολαίων που περιλαμβάνει. Το γεγονός αυτό καθιστά τον υπολογισμό του Οικονομικού Κεφαλαίου σχετικά περίπλοκο και σύνθετο (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Για να είναι ο υπολογισμός των απαιτούμενων κεφαλαίων περισσότερο ρεαλιστικός, αυτό που στην πράξη συχνά συμβαίνει είναι να διενεργούνται υπολογισμοί που λαμβάνουν υπόψη εκτός των άλλων και την υφιστάμενη έκθεση σε κίνδυνο (risk exposure). Αυτό οδηγεί στο μέτρο του Αναμενόμενου Κεφαλαίου Προσαρμοσμένου βάσει Κινδύνου (Expected Risk Adjusted Capital). Ευρέως γνωστή και δημοφιλής μέθοδος υπολογισμού της επίδοσης ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού, η οποία βασίζεται στο εν λόγω μέτρο, είναι η μέθοδος υπολογισμού της Απόδοσης επί του Προσαρμοσμένου βάσει Κινδύνου Κεφαλαίου (Return on Risk Adjusted Capital - RORAC). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αν με R συμβολίσουμε το κέρδος (δηλαδή τη διαφορά μεταξύ του premium p που εισπράττει μια εταιρία και των απαιτήσεων S που καλείται να καλύψει), τότε υπό την προϋπόθεση ότι $\rho(S) \neq 0$, η Αναμενόμενη Προσαρμοσμένη βάσει Κινδύνου Απόδοση (Expected Risk Adjusted Return - ERAR) περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$ERAR(R, \rho) = \frac{E(R)}{\rho(S)} \tag{4.13}$$

Αυτό που στην πράξη συμβαίνει, είναι ότι κάθε εταιρεία στοχεύει στη μεγιστοποίηση του *ERAR*.

4.4. Value at Risk (VaR)

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται αναλυτικά και επεξηγείται ένα από τα σημαντικότερα μέτρα κινδύνου, το οποίο είναι γνωστό ως Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk – VaR). Παρουσιάζονται επίσης οι βασικές ιδιότητες χαρακτηρίζουν το εν λόγω μέτρο καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του οικονομικού κεφαλαίου.

4.4.1. Γενική Περιγραφή

Η έννοια της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk – VaR) εισήχθη για να απαντήσει στο ερώτημα ποια είναι η αναμενόμενη απώλεια εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος (π.χ. εβδομάδα, ή μήνας) με κάποια προκαθορισμένη πιθανότητα. Στη σύγχρονη οικονομική πραγματικότητα, το εν λόγω μέτρο κινδύνου αποτελεί πλέον σημείο αναφοράς και σύγκρισης στη διαδικασία μέτρησης του κινδύνου. Η δε σημαντικότητα του VaR καταδεικνύεται και από το γεγονός ότι τα μοντέλα υπολογισμού κινδύνων που στηρίζονται σε αυτό, γίνονται αποδεκτά και από τις εποπτικές αρχές των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ως βάση για τον υπολογισμό της απαιτούμενης κεφαλαιακής επάρκειας, έναντι της έκθεσής τους σε κινδύνους της αγοράς. Εάν επιχειρούσαμε να ορίσουμε το μέτρο αυτό χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεδομένου ενός κινδύνου X και μιας πιθανότητας $p \in (0,1)$, η $VaR(X;p)$, δίνεται από τη μαθηματική σχέση:

$$VaR(X;p) = F_X^{-1}(p) \tag{4.14}$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η VaR είναι μια ποσότητα που υπάρχει πάντα και εκφράζει ένα ποσό απώλειας χρημάτων στην εκάστοτε χρησιμοποιούμενη νομισματική μονάδα. Μία σημαντική ιδιότητα που ισχύει για τη VaR είναι ότι:

$$VaR(X;p) \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x). \tag{4.15}$$

4.4.2. Ιδιότητες VaR

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται αν και κατά πόσο οι δέκα (10) ιδιότητες των μέτρων κινδύνου που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα, ισχύουν για τη VaR και γιατί. Συγκεκριμένα για κάθε μία από τις προαναφερθείσες ιδιότητες ισχύουν τα ακόλουθα (Denuit, et al., 2005):

1. <u>Μη υπερβάλλουσα φόρτιση (Non excessive loading/ No ripoff)</u>: Αφού ισχύει πάντα ότι $X \leq \max(X)$, τότε

$$VaR(X; p) \leq \max(X) \tag{4.16}$$

   για κάθε τυχαία μεταβλητή X ανεξαρτήτως της τιμής του p.

   Επομένως όντως η VaR έχει την ιδιότητα της μη υπερβάλλουσας φόρτισης.

2. <u>Μη αρνητική φόρτιση (Non negative loading):</u> Αν ορίσουμε την ποσότητα

$$p' = F_X(E(X)) \tag{4.17}$$

   τότε είναι προφανές ότι για επίπεδα πιθανότητας p' η VaR δεν υπερβαίνει τις αναμενόμενες απώλειες $E(X)$.

   Ως εκ τούτου η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει πάντα για τη VaR.

3. <u>Μεταφρασιμότητα (Translativity):</u> Είναι προφανές ότι η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR.

4. <u>Σταθερότητα (Constancy ή Unjustified loading):</u> Είναι εύκολο κανείς να πει ότι η εν λόγω ιδιότητα δεν ισχύει για τη VaR αφού για κάθε πιθανότητα $p > 0$ και σταθερό c ισχύει ότι

$$VaR(c; p) = c\,. \tag{4.18}$$

5. <u>Προσθαφαιρετικότητα (Subadditivity):</u> Η VaR κατά κανόνα δεν είναι προσθαφαιρετική. Αυτό σε επίπεδο υπολογισμού κινδύνων μεταφράζεται στο ότι η διαφοροποίηση του μείγματος των κινδύνων οδηγεί σε αύξηση του τελικού κινδύνου και εν γένει δημιουργεί πρόβλημα στην χρήση του εν λόγω μέτρου όταν χρησιμοποιούνται επιμέρους συστήματα υπολογισμού για διαφορετικά χαρτοφυλάκια προϊόντων με απώτερο στόχο τον υπολογισμό του κινδύνου του συνολικού χαρτοφυλακίου.

6. <u>Συμονοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity):</u> Η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR αφού αν θεωρήσουμε τους επιμέρους συμονοτονικούς κινδύνους $X_1^c, X_2^c, \ldots X_n^c$, τότε για τη VaR του αθροίσματός τους S^c, ισχύει ότι

$$VaR\left(S^c; p\right) = \sum_{i=1}^{n} VaR\left(X_i; p\right), p \in \left(0,1\right) \qquad (4.19)$$

7. <u>Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity):</u> Πρόκειται για ιδιότητα που προφανώς ισχύει για τη VaR.

8. <u>Μονοτονικότητα (Monotonicity):</u> Η ιδιότητα της μονοτονικότητας ισχύει για τη VaR. Αυτό μπορεί να στοιχειοθετηθεί εύκολα αφού

$$P\left(X_1 \le X_2\right) = 1 \Rightarrow F_{X_1}\left(x_1\right) \le F_{X_2}\left(x_2\right) \qquad (4.20)$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X_1, X_2. Επομένως

$$VaR\left(X_1; p\right) \le VaR\left(X_2; p\right) \qquad (4.21)$$

για κάθε πιθανότητα *p*.

9. <u>Συνέχεια ως προς τη σύγκλιση της κατανομής (Continuity with respect to convergence in distribution):</u> Η ιδιότητα ισχύει για τη VaR, λόγω της ιδιότητας της ασθενούς σύγκλισης (weak convergence) του διαφορικού *df*.

10. Αντικειμενικότητα (Objectivity): Η ιδιότητα αυτή ισχύει για τη VaR ως φυσικό επακόλουθο του τρόπου ορισμού του μέτρου, αφού αυτό εξαρτάται μόνο από το διαφορικό *df*.

4.4.3. Οικονομικό Κεφάλαιο και VaR

Σε κάθε ασφαλιστικό οργανισμό, σύμφωνα με τον κύκλο της εν λόγω επιχειρηματικής δραστηριότητας, τα ασφάλιστρα καταβάλλονται από τους ασφαλισμένους πριν από την καταβολή τυχόν αποζημιώσεων από της ασφαλιστική εταιρία. Κατά συνέπεια, αν συμβολίσουμε τις πιθανές απώλειες με X, ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστηρίων συμβολαίων μπορεί να αποδώσει κέρδη ($X < 0$) ή απώλειες ($X > 0$), ανάλογα με τις αποζημιώσεις που θα καταβληθούν σε σχέση με τα ασφάλιστρα που έχουν εισπραχθεί. Η φερεγγυότητα της ασφαλιστικής εταιρίας, ουσιαστικά αντικατοπτρίζει την δυνατότητα να μπορεί η εταιρία αυτή για να εκπληρώσει τις συμβατικές υποχρεώσεις της έναντι των ασφαλισμένων ακόμη και κάτω από μη αναμενόμενες δυσμενείς συνθήκες. Για την προστασία των ασφαλισμένων, οι εποπτικές αρχές έχουν επιβάλλει ελάχιστη απαίτηση κεφαλαίου φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement) την οποία στο παρόν συμβολίζουμε με $\rho(X)$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι εποπτικές αρχές απαιτούν τα διαθέσιμα κεφάλαια της εταιρείας, δηλαδή το πλεόνασμα των στοιχείων του ενεργητικού έναντι των στοιχείων του παθητικού, να είναι τουλάχιστον ίσα με $\rho(X)$. Τα κεφάλαια αυτά χρησιμοποιούνται ως πλεόνασμα για να διασφαλίσουν τον ασφαλιστικό οργανισμό έναντι των κινδύνων που έχει αναλάβει. Κατά κανόνα το $\rho(X)$ πρέπει να επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλίζει ότι ο ασφαλιστικός οργανισμός δε θα οδηγηθεί σε εκδήλωση αφερεγγυότητας.

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο με απώλειες αξίας X. Οι εποπτικές αρχές επιθυμούν το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας να είναι αρκετά υψηλό, ώστε να διασφαλιστεί ότι το έλλειμμα είναι επαρκώς χαμηλό (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012). Για την επίτευξη αυτού του στόχου, οι εποπτικές αρχές απαιτούν την ελαχιστοποίηση του κινδύνου ελλείμματος, δηλαδή του

$$\mathrm{E}\left[\left(X-\rho(X)\right)_{+}\right]. \tag{4.22}$$

Επομένως, η διαδικασία καθορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων προϋποθέτει τη χρησιμοποίηση δύο διαφορετικών μέτρων κινδύνου: (1) του μέτρου κινδύνου που προσδιορίζει το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας, και (2) του $\mathrm{E}\left[\left(X-\rho(X)\right)_{+}\right]$ για τη μέτρηση του ελλείμματος. Προφανώς, όσο υψηλότερα είναι τα απαιτούμενα κεφάλαια, τόσο το καλύτερο, από την άποψη της ελαχιστοποίησης των απωλειών. Όμως δε θα πρέπει να αγνοείται ότι η διακράτηση κεφαλαίων συνεπάγεται ένα σχετικό κόστος. Εάν ληφθεί υπόψη το εν λόγω κόστος η κεφαλαιακή απαίτηση ρ, θα μπορούσε να προσδιοριστεί ως η λύση του ακόλουθου προβλήματος ελαχιστοποίησης:

$$\min_{\rho(X)}\left\{\mathrm{E}\left[\left(X-\rho(X)\right)_{+}\right]+\rho(X)\varepsilon\right\},\ \varepsilon\in(0,1). \tag{4.23}$$

Η σχέση (4.23) εξισορροπεί τα δύο αλληλοσυγκρουόμενα κριτήρια, δηλαδή το χαμηλό υπολειπόμενο κίνδυνο έναντι του χαμηλού κόστους κεφαλαίου με βέλτιστο τρόπο. Η παράμετρος ε, μπορεί να ερμηνευθεί ως μέτρο του βαθμού στον οποίο λαμβάνεται υπόψη το κόστος κεφαλαίου. Οι εποπτικές αρχές μπορεί να επιλέξουν το βαθμό διαφοροποίησης του ε ανάλογα με την ασφαλιστική εταιρία και με τον τύπο των εξεταζόμενων κινδύνων. Προφανώς αν $\varepsilon = 0$, τότε το κόστος του κεφαλαίου δε λαμβάνεται καθόλου υπόψη. Από την άλλη, αύξηση του ε σημαίνει ότι αυξάνεται η σχετική βαρύτητα του κόστους κεφαλαίου και ως εκ τούτου μειώνονται οι κεφαλαιακές απαιτήσεις. Σύμφωνα με τους Dhaene et al. (2003), το ελάχιστο απαιτούμενο κεφάλαιο $\rho(X)$ που είναι λύση του προβλήματος που περιγράφεται από τη σχέση (4.23) είναι το VaR, δηλαδή,

$$\rho(X)=VaR(X;1-\varepsilon). \tag{4.24}$$

Η σχέση (4.24), αιτιολογεί, σε θεωρητικό επίπεδο, τη χρήση του μέτρου VaR για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας. Θα πρέπει παρόλα αυτά να τονιστεί ότι στη σχέση αυτή το VaR δε χρησιμοποιείται για να μετρήσει τον κίνδυνο, αλλά μόνο για τον προσδιορισμό της βέλτιστης κεφαλαιακής απαίτησης. Ο κίνδυνος που

πρέπει να μετρηθεί και να ελεγχθεί είναι το έλλειμμα μετριέται από το $\mathrm{E}[(X-\rho(X))_+]$, όπως διατυπώθηκε και στη σχέση (4.22).

Εάν με S συμβολίσουμε το σύνολο των απαιτήσεων (claims) ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου αναφοράς και με P το σύνολο των ασφαλίστρων για το χαρτοφυλάκιο αυτό, τότε η ποσότητα $VaR(S;p)-P$ ισούται με το ελάχιστο επιπρόσθετο που απαιτείται έτσι ώστε η ασφαλιστική εταιρία να καταστεί «τεχνικά» μη φερέγγυα με πιθανότητα ίση το πολύ με 1 - p. Ειδικότερα, για ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης p, VaR Οικονομικό Κεφάλαιο (Var-based Economic Capital) ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$EC(S;p)=VaR(S;p)-\mathrm{E}(S). \qquad (4.25)$$

Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε, ότι αν το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι ίσο με 99.95%, τότε το VaR Οικονομικό Κεφάλαιο $EC(S;p)$ κατά μέσο όρο θα είναι επαρκές για την κάλυψη μη αναμενόμενων απωλειών για 99,95 από 100 έτη.

4.5. Tail Value at Risk (TVaR)

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται αναλυτικά και επεξηγείται ένα ιδιαίτερα δημοφιλές μέτρο ασφαλιστικού κινδύνου, το οποίο είναι γνωστό ως Αξία σε Κίνδυνο με «Ουρά» (Tail Value at Risk – TVaR). Παρουσιάζονται επίσης οι βασικές ιδιότητες χαρακτηρίζουν το εν λόγω μέτρο καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του οικονομικού κεφαλαίου.

4.5.1. Γενική Περιγραφή

Το μέτρο VaR, όπως αυτό περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, για ένα προκαθορισμένο επίπεδο πιθανότητας p, δεν ενσωματώνει καμία πληροφορία σχετικά με το πάχος της «άνω ουράς» της συνάρτησης κατανομής. Αυτό αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα, αφού πρακτικά τις εποπτικές αρχές, τους μετόχους κι τους πελάτες κάθε ασφαλιστικού οργανισμού, δεν τους ενδιαφέρει μόνο η συχνότητα μιας πιθανής

αθέτησης, αλλά και το μέγεθος της ενδεχόμενης αθέτησης. Το κενό αυτό έρχεται να καλύψει ένα άλλο μέτρο κινδύνου που είναι παρόμοιο του VaR, και ονομάζεται Αξία σε Κίνδυνο με «Ουρά» (Tail Value at Risk – TVaR). Το εν λόγω μέτρο θα μπορούσε, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, δεδομένου ενός κινδύνου X και ενός επιπέδου πιθανότητας p, να οριστεί ως εξής:

$$TVaR(X;p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR(X;\xi)d\xi \qquad (4.26)$$

4.5.2. Ιδιότητες TVaR

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται αν και κατά πόσο οι δέκα (10) ιδιότητες των μέτρων κινδύνου που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στην Ενότητα 4.2, ισχύουν για το μέτρο TVaR. Συγκεκριμένα για κάθε μία από τις προαναφερθείσες ιδιότητες ισχύουν τα ακόλουθα (Denuit, et al., 2005):

1. <u>Μη υπερβάλλουσα φόρτιση (Non excessive loading/ No ripoff)</u>: Δεδομένου ότι η VaR έχει την ιδιότητα της μη υπερβάλλουσας φόρτισης, είναι προφανές ότι θα ισχύει:

$$TVaR(X;p) \le \frac{1}{1-p}\int_p^1 \max(X)d\xi = \max(X) \qquad (4.27)$$

   για κάθε τυχαία μεταβλητή X ανεξαρτήτως της τιμής του p.

   Επομένως, όπως η VaR, έτσι και η TVaR φέρει την ιδιότητα της μη υπερβάλλουσας φόρτισης.

2. <u>Μη αρνητική φόρτιση (Non negative loading):</u> Για κάθε συνάρτηση U που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0,1), ισχύει ότι

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(F_X^{-1}(U)\right) = \int_0^1 F_X^{-1}(p)dp = TVaR(X;0). \qquad (4.28)$$

Επομένως, δεδομένου ότι μπορεί να αποδειχθεί ότι η TVaR είναι μη-μειούμενη (non decreasing) ως προς p (Denuit, et al., 2005), προκύπτει ότι:

$$TVaR(X;p) \geq TVaR(X;0) = \mathrm{E}(X). \qquad (4.29)$$

Συνεπώς, η ιδιότητα αυτή ισχύει για τη TVaR ανεξάρτητα από το επίπεδο πιθανότητας p.

3. Μεταφρασιμότητα (Translativity): Είναι προφανές ότι, αφού η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR, τότε θα ισχύει και για την TVaR.
4. Σταθερότητα (Constancy ή Unjustified loading): Είναι εύκολο κανείς να πει ότι η εν λόγω ιδιότητα δεν ισχύει για τη TVaR αφού για κάθε πιθανότητα $p > 0$ και σταθερό c ισχύει ότι

$$TVaR(c;p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 c\,d\xi = c. \qquad (4.30)$$

5. Προσθαφαιρετικότητα (Subadditivity): Σε αντίθεση με την VaR, η TVaR, μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι φέρει την εν λόγω ιδιότητα (Denuit, et al., 2005). Αυτό σε επίπεδο υπολογισμού κινδύνων μεταφράζεται στο ότι η διαφοροποίηση του μείγματος των κινδύνων δεν οδηγεί σε αύξηση αλλά σε μείωση του τελικού κινδύνου. Ως εκ τούτου η χρήση του εν λόγω μέτρου ενδείκνυται όταν χρησιμοποιούνται επιμέρους συστήματα υπολογισμού για διαφορετικά χαρτοφυλάκια προϊόντων με απώτερο στόχο τον υπολογισμό του κινδύνου του συνολικού χαρτοφυλακίου.
6. Συμονοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity): Είναι προφανές ότι, αφού η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR, τότε θα ισχύει και για την TVaR.
7. Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity): Είναι προφανές ότι, αφού η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR, τότε θα ισχύει και για την TVaR.
8. Μονοτονικότητα (Monotonicity): Είναι προφανές ότι, αφού η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR, τότε θα ισχύει και για την TVaR.

9. Συνέχεια ως προς τη σύγκλιση της κατανομής (Continuity with respect to convergence in distribution): Είναι προφανές ότι, αφού η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR, τότε θα ισχύει και για την TVaR.
10. Αντικειμενικότητα (Objectivity): Είναι προφανές ότι, αφού η εν λόγω ιδιότητα ισχύει για τη VaR, τότε θα ισχύει και για την TVaR.

4.5.3. Οικονομικό Κεφάλαιο και TVaR

Έστω, όπως και στην περίπτωση της VaR, με S συμβολίζουμε το σύνολο των απαιτήσεων (claims) ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου αναφοράς και με P το σύνολο των ασφαλίστρων για το χαρτοφυλάκιο αυτό. Τότε, θέτοντας το επιπρόσθετο κεφάλαιο που απαιτείται ως «μαξιλάρι» ασφαλείας ώστε η ασφαλιστική εταιρία να είναι προστατευμένη σε περιόδους δύσκολων οικονομικών συγκυριών, ίσο με $TVaR(S;p)-P$, μπορούμε να εισαγάγουμε ένα επιπλέον βαθμό ελευθερίας που να περιγράφει δυναμικά το «βαθμό δυσκολίας» της εκάστοτε οικονομικής συγκυρίας, δίνοντας τη δυνατότητα στο S, να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[VaR(S;p), TVaR(S;p)]$. Αυτή είναι ουσιαστικά και η βασική διαφοροποίηση έναντι του υπολογισμού του Οικονομικού Κεφαλαίου με χρήση της VaR (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012, Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, για ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης p, το TVaR Οικονομικό Κεφάλαιο (TVar-based Economic Capital) ορίζεται από τη σχέση:

$$EC(S;p) = TVaR(S;p) - \mathrm{E}(S). \qquad (4.31)$$

4.5.4. Εφαρμογή TvaR στο Solvency II

Στο πλαίσιο υλοποίησης του Solvency II, χρησιμοποιείται έχει προταθεί από την EIOPA η χρήση του TVaR ως μέτρο κινδύνου σε συνδυασμό με συναρτήσεις σύζευξης. Σημαντική ερευνητική δραστηριότητα, αναπτύσσεται γύρω από την περιοχή αυτή και

μάλιστα έχουν προταθεί συγκεκριμένες συναρτήσεις σύζευξης, όπως η FGM, οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις δύο ή ακόμη και πολλαπλών μεταβλητών οδηγούν σε κλειστού τύπου λύσεις (Barges, et al., 2009).

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε αποτελέσματα του (Barges, et al., 2009) σχετικά με τον υπολογισμό του TVaR και του Οικονομικού Κεφαλαίου TVaR για δύο εκθετικά κατανεμημένους κινδύνους που συνδέονται μέσω μιας συνάρτησης σύζευξης FGM. Η εκθετικές κατανομές χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν τη συμπεριφορά τυχαίων μεταβλητών κινδύνου, δεδομένου ότι έχουν ελκυστικές μαθηματικές ιδιότητες και διευκολύνουν την ανάπτυξη κλειστού τύπου λύσεων. Είναι βεβαίως γνωστό ότι η σύζευξη FGM μπορεί να μοντελοποιήσει εξαρτήσεις (θετικές ή αρνητικές) περιορισμένου εύρους. Παρ' όλα αυτά, έναντι άλλων συναρτήσεων σύζευξης, παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να υποστηρίξουν σύνθετες εξαρτήσεις κινδύνων με τη χρίση μόνο μίας ή λίγων παραμέτρων (Yeo and Valdez, 2006).

Ακολούθως, αναλύουμε σε βάθος την περίπτωση εξάρτησης δύο κινδύνων (bivariate case) και στη συνέχεια γενικεύουμε και παρουσιάζουμε συνοπτικά την περίπτωση πολλαπλής εξάρτησης (multivariate cases).

4.5.4.1. Εξάρτηση Δύο Κινδύνων (Bivariate Case)

Έστω X_1, X_2, δύο εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που αναπαριστούν τα ποσά των απαιτήσεων (claims) που προκύπτουν από δύο διαφορετικούς ασφαλιστικούς κινδύνους. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό, μπορούμε να περιγράψουμε τη συνάρτηση συσσωρευτικής κατανομής (cumulative distribution function - cdf) ως

$$F_{X_i}\left(x_i\right) = 1 - e^{-\lambda_i x_i}, i = 1,2 \tag{4.32}$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density functions - pdf) ως

$$f_{X_i}\left(x_i\right) = \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}, i = 1,2 \tag{4.33}$$

Για λόγους απλούστευσης, υποθέτουμε ότι ισχύει $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq 2\lambda_2, \lambda_2 \neq 2\lambda_1$. Σύμφωνα με το (Barges, et al., 2009), η εν λόγω υπόθεση δεν περιορίζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης που ακολουθεί και η οποία εν πολλοίς βασίζεται στη σύζευξη FGM.

Καταρχάς, ο ορισμός της συνάρτησης σύζευξης FGM, δίνεται από την παρακάτω μαθηματική σχέση:

$$C_\theta^{FGM}(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1-u_1)(1-u_2) \tag{4.34}$$

για $u_i \in [0,1], i = 1,2$ και παράμετρο εξάρτησης $\theta \in [-1,1]$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της συνάρτησης εξάρτησης FGM δύο μεταβλητών (bivariate) περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$c_\theta^{FGM}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C_\theta^{FGM}(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$
$$= 1 + \theta(1-2u_1)(1-2u_2) = 1 + \theta(2\bar{u}_1 - 1)(2\bar{u}_2 - 1) \tag{4.35}$$

όπου $\bar{u}_i - 1 - u_i, i = 1,2$.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, σύμφωνα με το (Barges, et al., 2009) το μέτρο TVaR για τον αθροιστικό κίνδυνο $S = X_1 + X_2$ υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη Πρόταση 1:

<u>Πρόταση 1:</u> Έστω X_1, X_2 δύο εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση συσσωρευτικής κατανομής (cdf) η οποία προκύπτει από τη σύζευξη FGM δύο μεταβλητών ως εξής:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\theta^{FGM}\left(F_{X_1}(x_1), F_{X2}(x_2)\right) \tag{4.36}$$

με $\theta \in [-1,1]$. Τότε το μέτρο TVaR του αθροιστικού κινδύνου $S = X_1 + X_2$ σε επίπεδο $\kappa \in (0,1)$, δίνεται από τη σχέση:

$$TVaR_{\kappa}(S)=\frac{1}{1-\kappa}\left[(1+\theta)\zeta(VaR_{\kappa}(S),\lambda_1,\lambda_2)-\theta\zeta(VaR_{\kappa}(S),2\lambda_1,\lambda_2)\right.$$

$$\left.-\theta\zeta(VaR_{\kappa}(S),\lambda_1,2\lambda_2)+\theta\zeta(VaR_{\kappa}(S),2\lambda_1,2\lambda_2)\right] \qquad (4.37)$$

όπου

$$\zeta(x,\gamma_1,\gamma_2)=\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}e^{-\gamma_1 x}\left(x+\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}e^{-\gamma_2 x}\left(x+\frac{1}{\gamma_2}\right) \qquad (4.38)$$

<u>Απόδειξη:</u> Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) των X_1, X_2 δίνεται από τη σχέση:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=c_{\theta}^{FGM}\left(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)\right)f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

$$=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)+\theta f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\left(1-2F_{X_1}(x_1)\right)\left(1-2F_{X_2}(x_2)\right)$$

$$=(1+\theta)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}-\theta 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}$$

$$-\theta\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2}+\theta 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1}2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2}\,. \qquad (4.39)$$

Έστω τώρα ότι $h(x,\lambda_1,\lambda_2)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας γενικευμένης Erlang τυχαίας μεταβλητής X:

$$h(x,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 x}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 x}\,. \qquad (4.40)$$

Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της μεταβλητής S μπορεί να εκφραστεί από τη γενικευμένη Erlang συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως εξής:

$$f_S(s)=\int_0^s f_{X_1,S}(x,s)dx=\int_0^s f_{X_1,X_2}(x,s-x)dx$$

$$=(1+\theta)h(s,\lambda_1,\lambda_2)-\theta h(s,2\lambda_1,\lambda_2)-\theta h(s,\lambda_1,2\lambda_2)+\theta h(s,2\lambda_1,2\lambda_2), \qquad (4.41)$$

όπου ο πρώτος όρος της $f_S(s)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\int_0^s (1+\theta)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)}dx = (1+\theta)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\int_0^s e^{x(\lambda_2-\lambda_1)}dx$$

$$= (1+\theta)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 s} + (1+\theta)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 s}$$

$$= (1+\theta)h(s,\lambda_1,\lambda_2). \qquad (4.42)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν και οι άλλοι τρεις όροι της σχέσης.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, προκύπτει ότι:

$$TVaR_\kappa(S) = E(S|S > VaR_\kappa(S)) = \int_{VaR_\kappa}^{\infty} s\frac{f_S(s)}{\Pr(S > VaR_\kappa(S))}ds = \frac{1}{1-F_S(VaR_\kappa(S))}\int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} sf_S(s)ds$$

$$= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} s[(1+\theta)h(s,\lambda_1,\lambda_2) - \theta h(s,2\lambda_1,\lambda_2) - \theta h(s,\lambda_1,2\lambda_2) + \theta h(s,2\lambda_1,2\lambda_2)]ds \quad (4.43)$$

Ορίζουμε τώρα την ποσότητα:

$$\int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} sh(s,\lambda_1,\lambda_2)ds = \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} s\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 s} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 s}\right)ds$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-s\frac{e^{-\lambda_1 s}}{\lambda_1}\Bigg|_{VaR_k(S)}^{\infty} + \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_1 s}}{\lambda_1}ds\right) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(-s\frac{e^{-\lambda_2 s}}{\lambda_2}\Bigg|_{VaR_k(S)}^{\infty} + \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_2 s}}{\lambda_2}ds\right)$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(VaR_\kappa(S)\frac{e^{-\lambda_1 VaR_\kappa(S)}}{\lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_1 VaR_\kappa(S)}}{\lambda_1^2}\right) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(VaR_\kappa(S)\frac{e^{-\lambda_2 VaR_\kappa(S)}}{\lambda_2} + \frac{e^{-\lambda_2 VaR_\kappa(S)}}{\lambda_2^2}\right)$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 VaR_\kappa(S)}\left(VaR_\kappa(S) + \frac{1}{\lambda_1}\right) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 VaR_\kappa(S)}\left(VaR_\kappa(S) + \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$= \zeta\left(VaR_{\kappa}(S), \lambda_1, \lambda_2\right). \tag{4.44}$$

Εισάγοντας τη (σχέση 4.44) στη (σχέση 4.43), λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$TVaR_{\kappa}(S) = \frac{1}{1-\kappa}\left[(1+\theta)\zeta\left(VaR_{\kappa}(S), \lambda_1, \lambda_2\right) - \theta\zeta\left(VaR_{\kappa}(S), 2\lambda_1, \lambda_2\right)\right.$$

$$\left. - \theta\zeta\left(VaR_{\kappa}(S), \lambda_1, 2\lambda_2\right) + \theta\zeta\left(VaR_{\kappa}(S), 2\lambda_1, 2\lambda_2\right)\right] \tag{4.45}$$

Όπου η συνάρτηση $\zeta(x, \gamma_1, \gamma_2)$ περιγράφεται από τη σχέση (4.38), γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Με βάση την Πρόταση 1, στην επόμενη πρόταση παρουσιάζεται μία κλειστού τύπου μαθηματική έκφραση, για το απαιτούμενο κεφάλαιο ανά υποκείμενο κίνδυνο με βάση το μέτρο T-VaR, για την περίπτωση των δύο κινδύνων (bivariate case) (Barges, et al., 2009).

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω X_1, X_2 δύο εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση συσσωρευτικής κατανομής (cdf) η οποία προκύπτει από τη σύζευξη FGM δύο μεταβλητών. Τότε η συνεισφορά κάθε επιμέρους κινδύνου *i* (*i* = 1, 2), με βάση το μέτρο TVaR, στον αθροιστικό κίνδυνο $S = X_1 + X_2$ σε επίπεδο $\kappa \in (0,1)$, δίνεται από τη σχέση:

$$TVaR_{\kappa}(X_i, S) = \frac{1}{1-\kappa}\left[(1+\theta)\xi\left(VaR_{\kappa}(S), \lambda_i, \lambda_j\right) - \theta\xi\left(VaR_{\kappa}(S), 2\lambda_i, \lambda_j\right)\right.$$

$$\left. - \theta\xi\left(VaR_{\kappa}(S), \lambda_i, 2\lambda_j\right) + \theta\xi\left(VaR_{\kappa}(S), 2\lambda_i, 2\lambda_j\right)\right] \tag{4.46}$$

όπου

$$\xi\left(x, \gamma_i, \gamma_j\right) = \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \gamma_i} e^{-\gamma_i x}\left(x + \frac{1}{\gamma_i}\right) + \frac{\gamma_j e^{-\gamma_i x} - \gamma_i e^{-\gamma_j x}}{\left(\gamma_j - \gamma_i\right)^2}, i \neq j. \tag{4.47}$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω i = 1 και j = 2. Σύμφωνα με το (Barges, et al., 2009), για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές το απαιτούμενο κεφάλαιο με βάση το μέτρο TVaR, ισούται με το απαιτούμενο κεφάλαιο βάσει του μέτρου CTE. Ως εκ τούτου ισχύει ότι

$$TVaR_{\kappa}(X_1, S) = E\left(X_1 | S > VaR_{\kappa}(S)\right)$$

$$= \frac{1}{\Pr\left(S > VaR_{\kappa}(S)\right)} \int_{VaR_{\kappa}(S)}^{\infty} \int_0^s x f_{X_1,S}(x,s)\,dx\,ds \qquad (4.48)$$

όπου

$$\int_0^s x f_{X_1,S}(x,s)dx = \int_0^s x f_{X_1,X_2}(x, s-x)dx = \int_0^s x\Big[(1+\theta)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)} - \theta 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)}$$
$$-\theta\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} 2\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)} + \theta 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} 2\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)}\Big]dx$$

$$= (1+\theta)\lambda_1\lambda_2\left(\frac{se^{-\lambda_1 s}}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right) - \theta 2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{se^{-2\lambda_1 s}}{\lambda_2-2\lambda_1} - \frac{e^{-2\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2-2\lambda_1)^2}\right)$$

$$-\theta\lambda_1 2\lambda_2\left(\frac{se^{-\lambda_1 s}}{2\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 s} - e^{-2\lambda_2 s}}{(2\lambda_2-\lambda_1)^2}\right) - \theta 2\lambda_1 2\lambda_2\left(\frac{se^{-2\lambda_1 s}}{2\lambda_2-2\lambda_1} - \frac{e^{-2\lambda_1 s} - e^{-2\lambda_2 s}}{(2\lambda_2-2\lambda_1)^2}\right) \qquad (4.49)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\int_0^s x(1+\theta)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)}dx = (1+\theta)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\int_0^s x e^{x(\lambda_2-\lambda_1)}dx$$

$$= (1+\theta)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\left(-x\frac{e^{x(\lambda_2-\lambda_1)}}{\lambda_2-\lambda_1}\Bigg|_0^s - \int_0^s \frac{e^{x(\lambda_2-\lambda_1)}}{\lambda_2-\lambda_1}dx\right) = (1+\theta)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\left(s\frac{e^{s(\lambda_2-\lambda_1)}}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{x(\lambda_2-\lambda_1)}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\Bigg|_0^s\right)$$
$$= (1+\theta)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\left(s\frac{e^{s\lambda_2}e^{s\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{s\lambda_2}e^{s\lambda_1}-1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right) = (1+\theta)\lambda_1\lambda_2\left(\frac{se^{-\lambda_1 s}}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right). \qquad (4.50)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $V = VaR_\kappa(S)$, έχουμε:

$$TVaR_\kappa(X_1, S) = \frac{1}{1-F_S(V)}\int_V^\infty \Bigg[(1+\theta)\lambda_1\lambda_2\left(\frac{se^{-\lambda_1 s}}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 s}-e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right)$$

$$-\theta 2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{se^{-2\lambda_1 s}}{\lambda_2-2\lambda_1} - \frac{e^{-2\lambda_1 s}-e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2-2\lambda_1)^2}\right) - \theta\lambda_1 2\lambda_2\left(\frac{se^{-\lambda_1 s}}{2\lambda_2-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 s}-e^{-2\lambda_2 s}}{(2\lambda_2-\lambda_1)^2}\right)$$

$$+\theta 2\lambda_1 2\lambda_2\left(\frac{se^{-2\lambda_1 s}}{2\lambda_2-2\lambda_1} - \frac{e^{-2\lambda_1 s}-e^{-2\lambda_2 s}}{(2\lambda_2-2\lambda_1)^2}\right)\Bigg]ds$$

$$= \frac{1}{1-F_S(V)}\Bigg[(1+\theta)\left(\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 V}\left(V+\frac{1}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 V}-\lambda_1 e^{-\lambda_2 V}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right)$$

$$-\theta\left(\frac{\lambda_2 e^{-2\lambda_1 V}\left(V+\frac{1}{2\lambda_1}\right)}{\lambda_2-2\lambda_1} - \frac{\lambda_2 e^{-2\lambda_1 V}-2\lambda_1 e^{-\lambda_2 V}}{(\lambda_2-2\lambda_1)^2}\right)$$

$$-\theta\left(\frac{2\lambda_2 e^{-\lambda_1 V}\left(V+\frac{1}{\lambda_1}\right)}{2\lambda_2-\lambda_1} - \frac{2\lambda_2 e^{-\lambda_1 V}-\lambda_1 e^{-2\lambda_2 V}}{(2\lambda_2-\lambda_1)^2}\right)$$

$$+\theta\left(\frac{2\lambda_2 e^{-2\lambda_1 V}\left(V+\frac{1}{2\lambda_1}\right)}{2\lambda_2-2\lambda_1} - \frac{2\lambda_2 e^{-2\lambda_1 V}-2\lambda_1 e^{-2\lambda_2 V}}{(2\lambda_2-2\lambda_1)^2}\right)\Bigg]. \qquad (4.51)$$

Με βάση τα παραπάνω τελικά λαμβάνουμε την κάτωθι σχέση:

$$TVaR_\kappa(X_1, S) = \frac{1}{1-\kappa}\Big[(1+\theta)\xi(VaR_\kappa(S), \lambda_1, \lambda_2) - \theta\xi(VaR_\kappa(S), 2\lambda_1, \lambda_2)$$

$$-\theta\xi(VaR_\kappa(S), \lambda_1, 2\lambda_2) + \theta\xi(VaR_\kappa(S), 2\lambda_1, 2\lambda_2)\Big] \qquad (4.52)$$

όπου

$$\xi(x,\gamma_1,\gamma_2)=\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}e^{-\gamma_1 x}\left(x+\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{\gamma_2 e^{-\gamma_1 x}-\gamma_1 e^{-\gamma_2 x}}{(\gamma_2-\gamma_1)^2}. \tag{4.53}$$

Αντίστοιχα για το δεύτερο κίνδυνο λαμβάνουμε τη σχέση:

$$TVaR_\kappa(X_2,S)=\frac{1}{1-\kappa}\left[(1+\theta)\xi(VaR_\kappa(S),\lambda_2,\lambda_1)-\theta\xi(VaR_\kappa(S),2\lambda_2,\lambda_1)\right.$$

$$\left.-\theta\xi(VaR_\kappa(S),\lambda_2,2\lambda_1)+\theta\xi(VaR_\kappa(S),2\lambda_2,2\lambda_1)\right] \tag{4.54}$$

όπου

$$\xi(x,\gamma_2,\gamma_1)=\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}e^{-\gamma_2 x}\left(x+\frac{1}{\gamma_2}\right)+\frac{\gamma_1 e^{-\gamma_2 x}-\gamma_2 e^{-\gamma_1 x}}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}. \tag{4.55}$$

□

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, όπως προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω, το TVaR του συνολικού κινδύνου *S* είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους κινδύνων, δηλαδή:

$$TVaR_\kappa(S)=\sum_{i=1}^{2}TVaR_\kappa(X_i,S). \tag{4.56}$$

4.5.4.2. Εξάρτηση Πολλαπλών Κινδύνων (Multivariate Case)

Κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση της εξάρτησης δύο κινδύνων, τα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν σε περισσότερους κινδύνους. Ειδικά για την περίπτωση συζεύξεων FGM, όπως παρουσιάζεται στο (Barges, et al., 2009) ισχύουν οι ακόλουθες Προτάσεις 3 και 4. Για τις αποδείξεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στο (Barges, et al., 2009).

<u>Πρόταση 3:</u> Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ το άθροισμα n εκθετικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση συσσωρευτικής κατανομής (cdf) η οποία προκύπτει από τη σύζευξη FGM n μεταβλητών ως εξής:

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = C_\theta^{FGM}\left(F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n)\right) \qquad (4.57)$$

με $\theta \in [-1,1]$. Τότε το μέτρο TVaR του αθροιστικού κινδύνου S_n σε επίπεδο $\kappa \in (0,1)$, δίνεται από τη σχέση:

$$TVaR_\kappa(S_n) = \frac{1}{1-\kappa}\Bigg[1 + \sum_{k=2}^{n} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \theta_{j_1 j_2 \cdots j_k}$$

$$\sum_{l=0}^{k} \sum_{(a_1,\cdots,a_k) \in A_{l,k}} (-1)^l \zeta\left(VaR_\kappa(S_n), 2^{i_1}\lambda_1,\cdots,2^{i_k}\lambda_k, \lambda_{i_{k+1}},\cdots\lambda_{i_n}\right)\Bigg], \qquad (4.58)$$

όπου $\zeta(x,\gamma_1,\cdots,\gamma_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \gamma_i}\right) e^{-\gamma_i x}\left(x + \frac{1}{\gamma_i}\right)$, $i_{k+1},\cdots,i_n$ είναι οι δείκτες που λείπουν από το $j_1,\cdots,j_k$ για να συμπληρώσουν το σύνολο δεικτών 1,…, n και $A_{l,k}$ είναι τα σύνολά των k-πλειάδων που συντίθενται από l μηδενικά και k-l μονάδες, για l = 0, 1, …, k και k = 2, …, n.

<u>Πρόταση 4:</u> Έστω $X_1,\cdots,X_n$ n εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση συσσωρευτικής κατανομής (cdf) η οποία προκύπτει από τη σύζευξη FGM n μεταβλητών. Τότε η συνεισφορά κάθε επιμέρους κινδύνου i (i = 1, …, n), με βάση το μέτρο TVaR, στον αθροιστικό κίνδυνο $S = X_1 + \cdots, X_n$ σε επίπεδο $\kappa \in (0,1)$, δίνεται από τη σχέση:

$$TVaR_\kappa(X_i, S_n) = \frac{(-1)^{n-1}\Lambda}{1-\kappa}\Bigg[\overline{H}_i\left(VaR_\kappa(S_n), \lambda_1,\cdots,\lambda_n\right) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n \cap i \in \{j_1,\cdots,j_k\}} \theta_{j_1 \cdots j_k}$$

$$\left(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{(a_1,\cdots,a_k)\in A_{l,k-1}}\left\{(-1)^{l+1}2^{k-1-l}\,\overline{H}_i\left(VaR_\kappa(S_n),2^{a_1}\lambda_{j_1},\cdots,2^{a_k}\lambda_{j_k},\lambda_{i_{k+1}},\cdots\lambda_{i_n}\right)\right.\right.$$

$$\left.(-1)^1 2^{k-1-l}\,\overline{G}_i\left(VaR_\kappa(S_n),2^{a_1}\lambda_{j_1},\cdots,2^{a_k}\lambda_{j_k},\lambda_{i_{k+1}},\cdots\lambda_{i_n}\right)\right\}\Bigg)+\sum_{k=2}^{n}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n\cap i\notin\{j_1,\cdots,j_k\}}\theta_{j_1\cdots j_k}$$

$$\left.\left(\sum_{l=0}^{k}\sum_{(a_1,\cdots,a_k)\in A_{l,k}}(-1)^l 2^{k-l}\,\overline{H}_i\left(VaR_\kappa(S_n),2^{a_1}\lambda_{j_1},\cdots,2^{a_k}\lambda_{j_k},\lambda_{i_{k+1}},\cdots\lambda_{i_n}\right)\right)\right] \qquad (4.59)$$

όπου

$\overline{H}_i(x,\gamma_1,\cdots,\gamma_{i-1},\gamma_{i+1},\cdots\gamma_n)$ και $\overline{G}_i(x,\gamma_1,\cdots,\gamma_{i-1},\gamma_{i+1},\cdots\gamma_n)$ είναι οι (n-2) τάξεως διαιρεμένες διαφορές αντιστοίχως των συναρτήσεων

$$\overline{H}_i(x,\gamma)=\frac{xe^{-\gamma_i x}}{\gamma_i(\gamma_i-\gamma)}+\frac{e^{-\gamma_i x}}{\gamma_i^{\,2}(\gamma_i-\gamma)}+\frac{\gamma e^{-\gamma_i x}-\gamma_i e^{-\gamma x}}{\gamma\gamma_i(\gamma_i-\gamma)^2} \qquad (4.60)$$

και

$$\overline{G}_i(x,\gamma)=2\left(\frac{xe^{-2\gamma_i x}}{2\gamma_i(2\gamma_i-\gamma)}+\frac{e^{-2\gamma_i x}}{(2\gamma_i)^2(2\gamma_i-\gamma)}+\frac{\gamma e^{-2\gamma_i x}-2\gamma_i e^{-\gamma x}}{\gamma 2\gamma_i(2\gamma_i-\gamma)^2}\right), \qquad (4.61)$$

$\Lambda=\lambda_1\times\cdots\times\lambda_n$ είναι το γινόμενο των παραμέτρων των εκθετικών κατανομών και $i_{k+1},\cdots,i_n$ είναι οι δείκτες που λείπουν από το $j_1,\cdots,j_k$ για να συμπληρώσουν το σύνολο δεικτών 1,…, n και $A_{l,k}$ είναι τα σύνολά των k-πλειάδων που συντίθενται από l μηδενικά και k-l μονάδες, για l = 0, 1, …, k και k = 2, …, n.

4.6. Conditional Tail Expectation (CTE)

Η Προσδοκία με «Ουρά» υπό Συνθήκη (Conditional Tail Expectation – CTE) είναι ένα ακόμη μέτρο κινδύνου, του οποίου ο ορισμός στηρίζεται στο μέτρο VaR. Ειδικότερα το CTE αναπαριστά τις υπό συνθήκη αναμενόμενες απώλειες όταν οι απώλειες αυτές

υπερβαίνουν σε αξία το VaR. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μαθηματικό φορμαλισμό το CTE μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$CTE(X;p) = \mathrm{E}\big(X \,|\, X > VaR(X;p)\big). \tag{4.62}$$

Προκύπτει άμεσα βάσει του παραπάνω ορισμού ότι αυτό που στην πράξη σημαίνει το CTE είναι οι μέση απώλεια για ποσοστό των χειρότερων 100×(1-p)% περιπτώσεων.

Επιπλέον, είναι αξιοσημείωτο, ότι το CTE στην περίπτωση που η συνάρτηση F_X είναι συνεχής, «εκφυλίζεται» στο αντίστοιχο TVaR (Denuit, et al., 2005), δηλαδή ισχύει ότι:

$$CTE(X;p) = TVaR(X;p). \tag{4.63}$$

Για το λόγο αυτό δε θα εξετάσουμε αναλυτικά τις ιδιότητες και τα επιμέρους χαρακτηριστικά του CTE.

5. Εφαρμογή Solvency II

Στην παρούσα ενότητα αρχικά παρουσιάζεται το μαθηματικό μοντέλο το οποίο αποτελεί τη βάση της εφαρμογής που αναπτύσσουμε και το οποίο στηρίζεται στο μέτρο κινδύνου TVaR. Εν συνεχεία, παρατίθεται ο τρόπος υλοποίησης και τα αποτελέσματα των υπολογισμών του μοντέλου με χρήση του λογισμικού Mathematica.

5.1. Μαθηματικό Μοντέλο

Η εφαρμογή που έχει υλοποιηθεί, υπολογίζει το μέτρο κινδύνουVaR, TVaR και την επιμέρους συνεισφορά κάθε κινδύνου, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση σύζευξης FGM ,την προσομοίωση Monte Carlo και αξιοποιώντας τις λύσεις «κλειστού τύπου» που έχουν διατυπωθεί και αποδειχτεί από τους Barges, et al. (2009) και οι οποίες έχουν παρουσιαστεί αναλυτικά στην Ενότητα 4.5.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου. Ειδικότερα εξετάζουμε την περίπτωση δύο κινδύνων (bivariate case) και υπολογίζουμε για διάφορες τιμές του επιπέδου πιθανότητας κ και για συντελεστή εξάρτησης θ, τόσο τις τιμές των μέτρων $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$, όσο και την επιμέρους συνεισφορά καθενός από τους δύο κινδύνους, $TVaR_\kappa(X_1, S)$, $TVaR_\kappa(X_2, S)$.

Όπως έχει τονιστεί από τους Barges, et al. (2009), αν και η σύζευξη FGM δε θεωρείται ιδανική για τη μοντελοποίηση «ισχυρών» εξαρτήσεων, παρουσιάζει το σημαντικότατο πλεονέκτημα ότι οδηγεί σε αναλυτικές λύσεις «κλειστού τύπου», ακόμη και στην περίπτωση πολύπλοκων υποκείμενων συναρτήσεων. Αυτός είναι και ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο στην παρούσα εργασία έχει επιλεγεί η υλοποίηση του συγκεκριμένου μοντέλου, η οποία και παρουσιάζεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

5.2. Υλοποίηση Εφαρμογής και Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Η εφαρμογή που έχει υλοποιηθεί περιλαμβάνει 4 notebooks για λ_1=1/2, λ_2=1/3 για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων κ και θ, όπου σε όλα έχουν υπολογιστεί οι τιμές των μέτρων $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$, όσο και η επιμέρους συνεισφορά καθενός από τους δύο κινδύνους, $TVaR_\kappa(X_1, S)$, $TVaR_\kappa(X_2, S)$ καθώς και κάποια άλλα μέτρα, ενώ έχουν γίνει και διάφορα γραφήματα.

5.2.1. Εφαρμογή

Η εφαρμογή αποτελείται από 4 notebooks τα οποία είναι πανομοιότυπα και λειτουργούν για ένα ζεύγος λ_1, λ_2 για τέσσερις διαφορετικές τιμές του θ (-0.5,-1,0.5,1) και για πέντε διαφορετικές τιμές του κ(0.5,0.75,0.95,0.99,0.995). Κάθε ένα από τα αρχεία αυτά, περιλαμβάνει δύο εισαγωγικές ενότητες (sections) στις οποίες αρχικοποιούνται οι απαραίτητες μεταβλητές και παρουσιάζονται μαθηματικά και γραφικά η χρησιμοποιούμενη συνάρτηση σύζευξης και άλλα σημαντικά παράγωγά της, και πέντε ακόμη τριάδες ενοτήτων οι οποίες υλοποιούν τους υπολογισμούς και ειδικότερα υπολογίζουν τα μέτρα κινδύνου VaR,TVar, συνολικά και ανά κίνδυνο για τις προεπιλεγμένες τιμές των κ (κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995). Οι ενότητες που έχουν αναπτυχθεί παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Ενότητες Εφαρμογής Mathematica

Ενότητα	Περιεχόμενο
Παράμετροι Σύζευξης	Υπολογισμός παραμέτρων σύζευξης
FGM Copula – Ορισμός & Γραφικά	Μαθηματική διατύπωση και γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης σύζευξης FGM και σχετικών μεγεθών/ συναρτήσεων
Υπολογισμός VaR (κ = 0.5)	Υπολογισμός της VaR για κ = 0.5 με προσομοίωση Monte Carlo
Υπολογισμός TVaR (κ = 0.5)	Υπολογισμός της TVaR(S) για κ = 0.5
Υπολογισμός Συνεισφοράς TVaR ανά Κίνδυνο (κ = 0.5)	Υπολογισμός της επιμέρους συνεισφοράς TVaR(X_i, S) ανά κίνδυνο για κ = 0.5
Υπολογισμός VaR (κ = 0.75)	Υπολογισμός της VaR για κ = 0.75 με προσομοίωση Monte Carlo
Υπολογισμός TVaR (κ = 0.75)	Υπολογισμός της TVaR(S) για κ = 0.75
Υπολογισμός Συνεισφοράς TVaR ανά Κίνδυνο (κ = 0.75)	Υπολογισμός της επιμέρους συνεισφοράς TVaR(X_i, S) ανά κίνδυνο για κ = 0.75
Υπολογισμός VaR (κ = 0.95)	Υπολογισμός της VaR για κ = 0.95 5 με προσομοίωση Monte Carlo
Υπολογισμός TVaR (κ = 0.95)	Υπολογισμός της TVaR(S) για κ = 0.95
Υπολογισμός Συνεισφοράς TVaR ανά Κίνδυνο (κ = 0.95)	Υπολογισμός της επιμέρους συνεισφοράς TVaR(X_i, S) ανά κίνδυνο για κ = 0.95
Υπολογισμός VaR (κ = 0.99)	Υπολογισμός της VaR για κ = 0.99 με προσομοίωση Monte Carlo
Υπολογισμός TVaR (κ = 0.99)	Υπολογισμός της TVaR(S) για κ = 0.99
Υπολογισμός Συνεισφοράς TVaR ανά Κίνδυνο (κ = 0.99)	Υπολογισμός της επιμέρους συνεισφοράς TVaR(X_i, S) ανά κίνδυνο για κ = 0.99

Υπολογισμός VaR (κ = 0.995)	Υπολογισμός της VaR για κ = 0.995 με προσομοίωση Monte Carlo
Υπολογισμός TVaR (κ = 0.995)	Υπολογισμός της TVaR(S) για κ = 0.995
Υπολογισμός Συνεισφοράς TVaR ανά Κίνδυνο (κ = 0.995)	Υπολογισμός της επιμέρους συνεισφοράς TVaR(X_i, S) ανά κίνδυνο για κ = 0.995

Οι παράμετροι σύζευξης που ορίζονται στην αρχή του κάθε notebook, αναφέρονται σε δύο εκθετικά κατανεμημένους κινδύνους που συνδέονται μέσω μιας συνάρτησης σύζευξης FGM. Πρόκειται για τα lamda1 και lamda2 που είναι οι συντελεστές των εκθετικών κατανομών καθώς επίσης και την παράμετρο εξάρτησης θ.

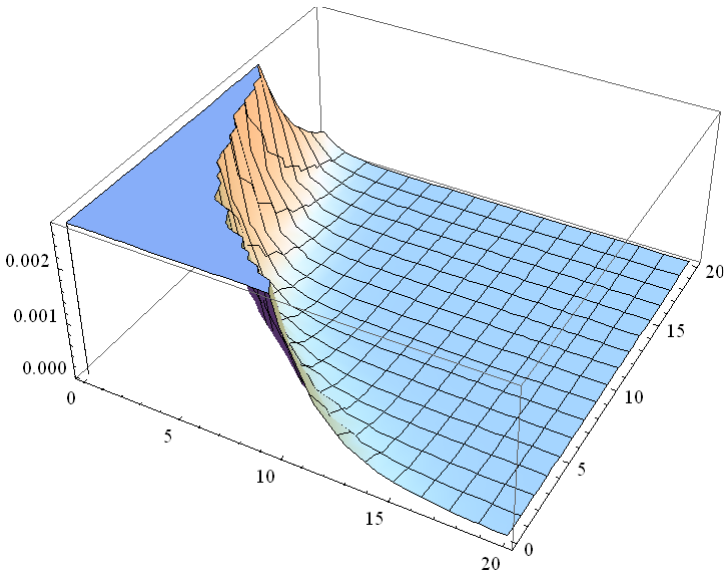
Η επόμενη ενότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού διατυπώνει μαθηματικά τη σύζευξη FMG και παρουσιάζει γραφικά τόσο την FGM όσο και σχετικές προκύπτουσες συναρτήσεις. Ειδικότερα, χρησιμοποιούμε την ενσωματωμένη στο Mathematica δυνατότητα ορισμού της συνάρτησης σύζευξης FGM, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη εντολή:

```
FGMCopula=CopulaDistribution[{"FGM",theta},{ExponentialDistr
ibution[lamda1],ExponentialDistribution[lamda2]}]
```

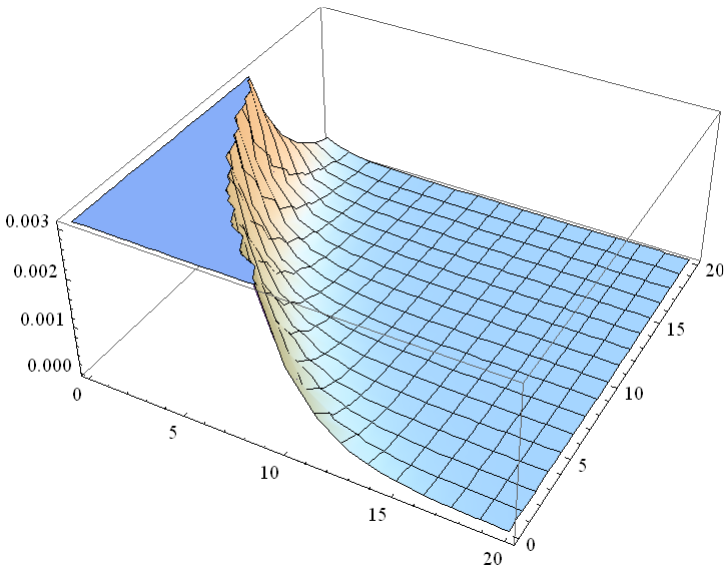
Στη συνέχεια δημιουργούνται και απεικονίζονται γραφικά οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και συσσωρευτικής κατανομής και συνάρτησης «επιβίωσης» (survival function) της εν λόγω συνάρτησης σύζευξης με τις παραμέτρους που έχουν προεπιλεγεί. Οι τρεις προαναφερθείσες συναρτήσεις για λ_1=1/2, λ_2=1/3 απεικονίζονται για τις διάφορες τιμές του θ στα Σχήματα 5.1, 5.2 και 5.3. Επίσης στην ενότητα αυτή υπολογίζεται μια σειρά χρήσιμων παραμέτρων της συνάρτησης σύζευξης, όπως είναι η μέση τιμή, η διασπορά, η ασυμμετρία και η κύρτωση.

Σχήμα 5.1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας FGM

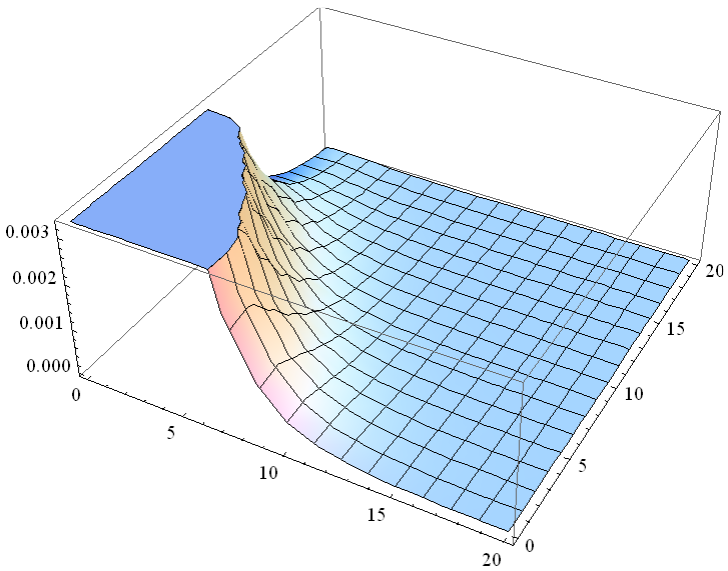
Για θ= -1



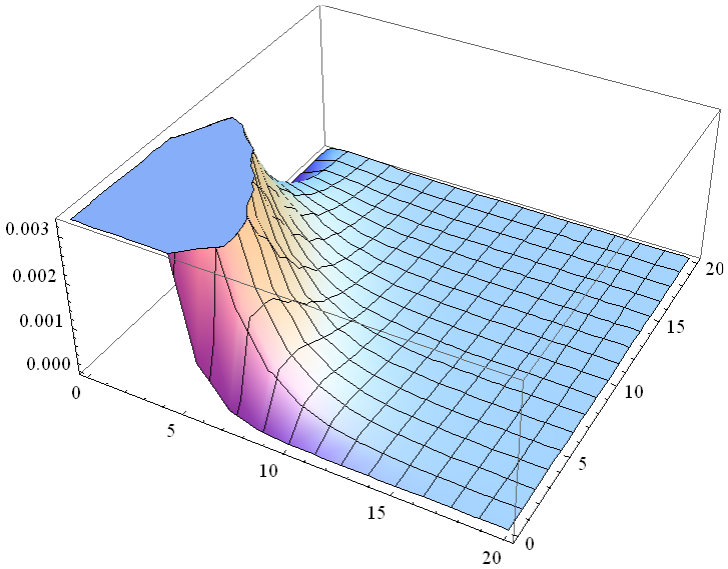
Για θ= -0.5



Για θ= 0.5

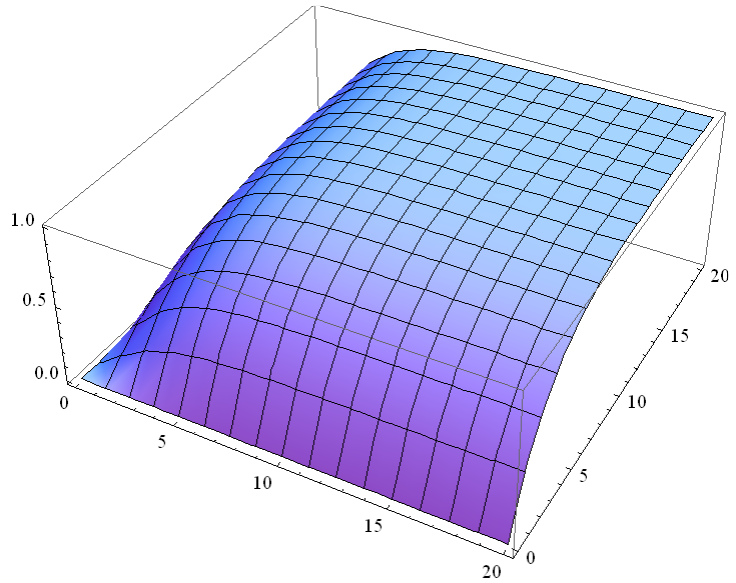


Για θ= 1

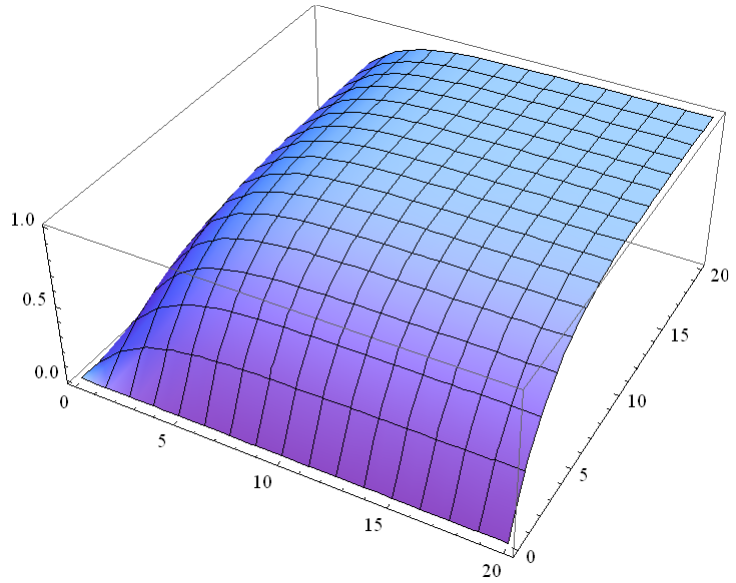


Σχήμα 5.2: Συνάρτηση Συσσωρευτικής Κατανομής FGM

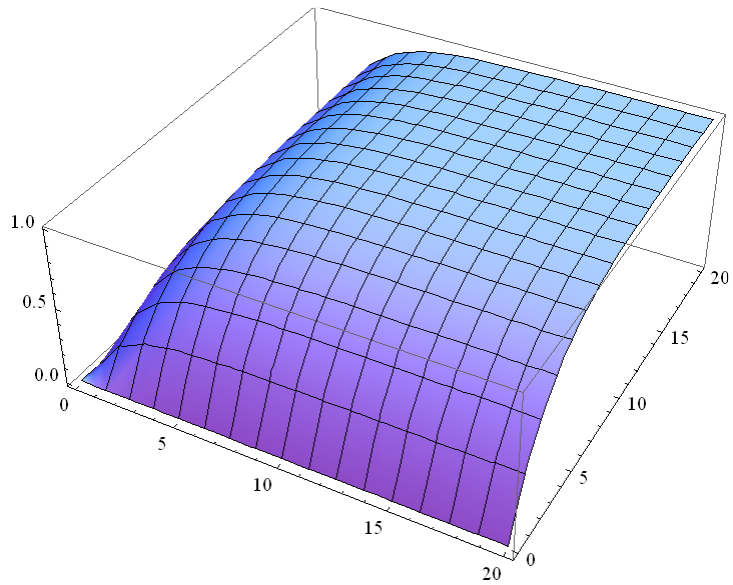
Για θ= -1



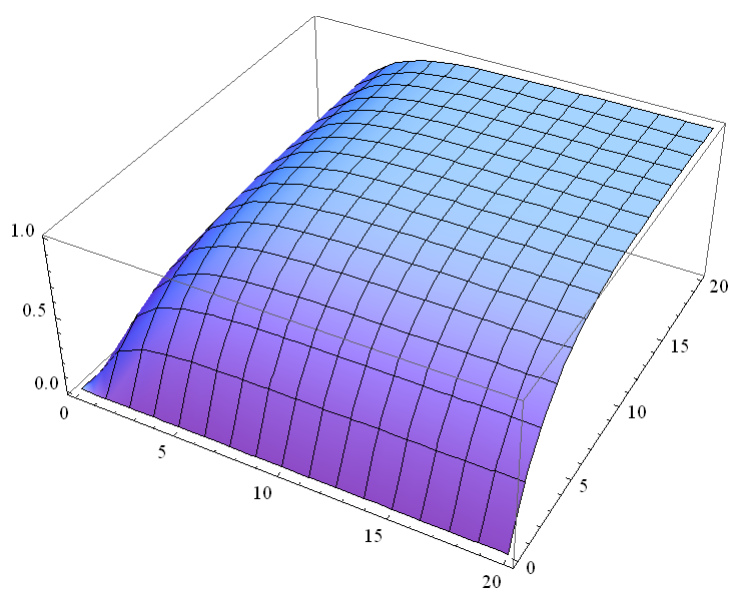
Για θ= -0.5



Για θ= 0.5

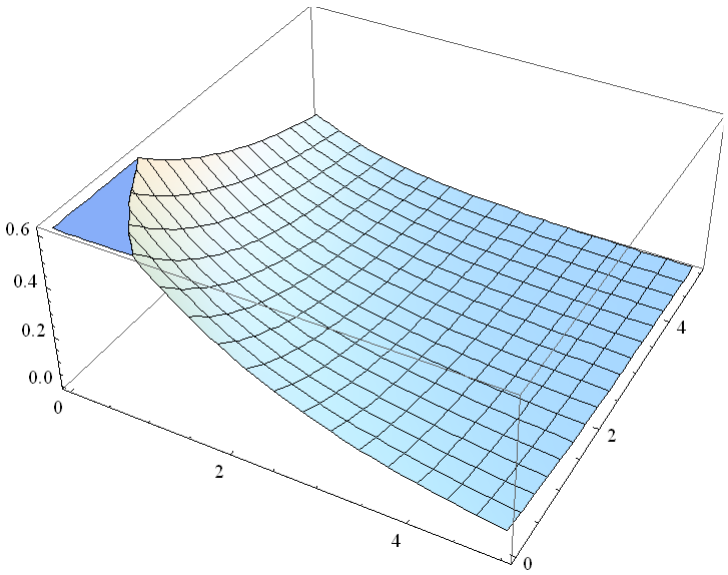


Για θ= 1

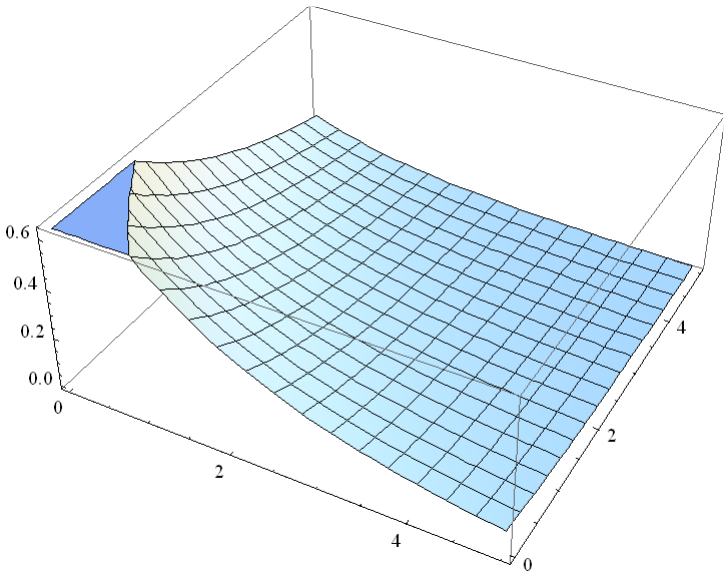


Σχήμα 5.3: Συνάρτηση Επιβίωσης FGM

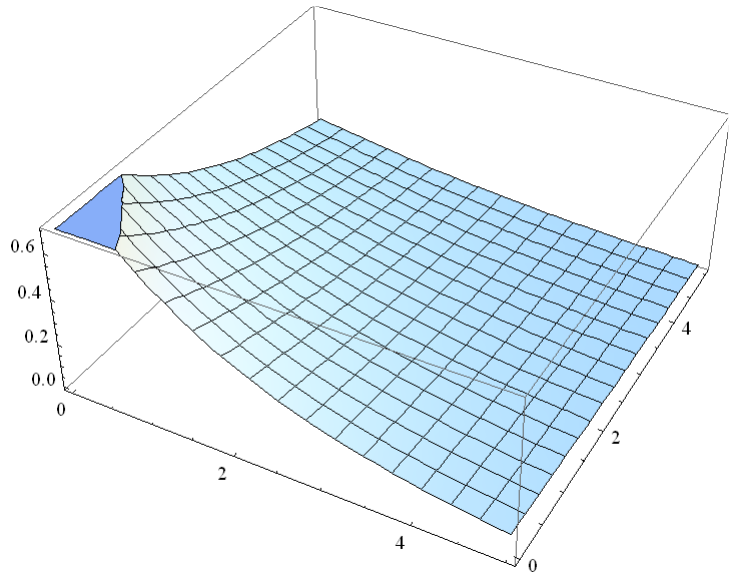
Για θ= -1



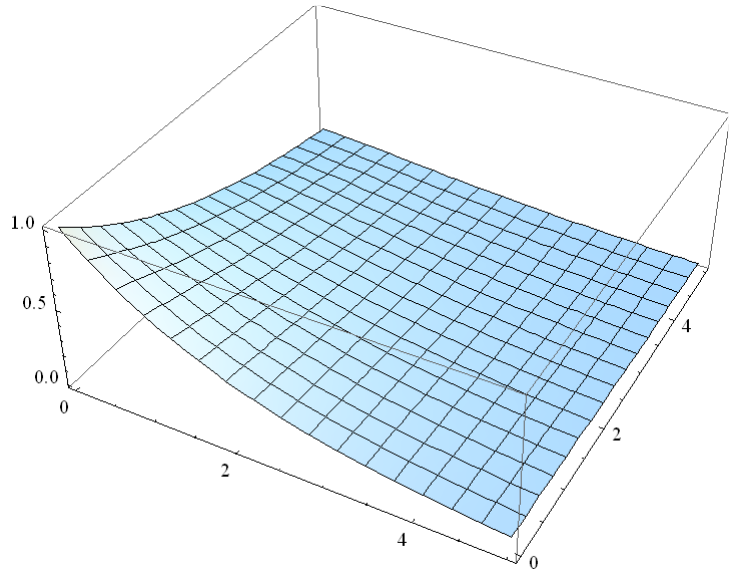
Για θ= -0.5



Για θ= 0.5



Για θ= 1



Στην τρίτη ενότητα του κάθε notebook αρχικοποιείται η τιμή του κ (=0.5) και πραγματοποιούνται ορισμένοι υπολογισμοί, όπως είναι τα Quantiles των δύο επιμέρους συναρτήσεων εκθετικής κατανομής, η συνάρτηση σύζευξης FGM και η survival function αυτής. Υπολογίζεται η $VaR(S)$ με προσομοίωση Monte Carlo και στοιχεία τα οποία είναι απαραίτητα για να εκτελεστούν οι υπολογισμοί της επόμενης ενότητας, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Randomvariate του Mathematica για τη γέννηση 1.000.000 τυχαίων τιμών της FGM, τις οποίες εν συνεχεία ανατροφοδοτούμε στην FGM και υπολογίζουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (pdf) και συσσωρευτικής πυκνότητας πιθανότητας (cdf). Στην τέταρτη ενότητα, υπολογίζεται η TVaR(S), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.37-4.38) του προηγούμενου Κεφαλαίου. Στην πέμπτη ενότητα υπολογίζονται τα TVaR των επιμέρους κινδύνων με βάση τις μαθηματικές σχέσεις (4.46-4.47) που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Στη συνέχεια επαναλαμβάνονται οι υπολογισμοί των Ενοτήτων 3, 4 και 5 για διαφορετικές τιμές του επιπέδου πιθανότητας κ.

Τα αποτελέσματα των διενεργούμενων υπολογισμών παρουσιάζονται στους Πίνακες 5.2, 5.3, 5.4 και 5.5 για θ = -1,-0.5,0.5 και 1 αντίστοιχα. Ορισμένα σημαντικά σημεία στα οποία έχει ενδιαφέρον να σταθούμε είναι τα ακόλουθα:

1. Η συνεισφορά των επιμέρους κινδύνων αθροίζει το συνολικό κίνδυνο, γεγονός που ήταν αναμενόμενο λόγω της ιδιότητας της προσθαφαιρετικότητας που έχει η TVaR.
2. Η τιμή της TVaR είναι υψηλότερη από την αντίστοιχη της VaR, γεγονός που δείχνει ότι η VaR υποεκτιμά το συνολικό κίνδυνο.
3. Η τιμή της TVaR αυξάνεται με την αύξηση του κ. Μάλιστα αυξάνεται ταχύτατα ακόμη και για πολύ μικρές μεταβολές του κ όταν αυτό προσεγγίζει τη μονάδα.

Πίνακας 5.2: Υπολογισμοί TVaR για θ = -1 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995

	κ=0.5	**κ=0.75**	**κ=0.95**	**κ=0.99**	**κ=0.995**
$VaR_{\kappa}(S)$	4.31826	6.50844	11.0376	15.4534	17.5609
$TVaR_{\kappa}(S)$	7.32776	9.33249	13.861	18.772	19.9166
$TVaR_{\kappa}(X_1, S)$	2.72473	3.14606	3.51623	3.35412	2.97375
$TVaR_{\kappa}(X_2, S)$	4.60302	6.18644	10.3448	15.4179	16.9428

Πίνακας 5.3: Υπολογισμοί TVaR για θ = -0.5 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995

	κ=0.5	**κ=0.75**	**κ=0.95**	**κ=0.99**	**κ=0.995**
$VaR_{\kappa}(S)$	4.25187	6.6078	11.5498	16.2674	18.3183
$TVaR_{\kappa}(S)$	7.48618	9.66377	14.4222	19.5775	21.7543
$TVaR_{\kappa}(X_1, S)$	2.81998	3.36044	4.0762	4.48823	4.56753
$TVaR_{\kappa}(X_2, S)$	4.6662	6.30334	10.346	15.0893	17.1868

Πίνακας 5.4: Υπολογισμοί TVaR για θ = 0.5 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995

	κ=0.5	**κ=0.75**	**κ=0.95**	**κ=0.99**	**κ=0.995**
$VaR_{\kappa}(S)$	4.05293	6.85231	12.4551	17.5631	19.6643
$TVaR_{\kappa}(S)$	7.82493	10.3132	15.5949	20.6555	23.056
$TVaR_{\kappa}(X_1, S)$	3.01665	3.78393	9.21034	5.82148	6.136
$TVaR_{\kappa}(X_2, S)$	4.80828	6.52925	13.8155	14.834	16.92

Πίνακας 5.5: Υπολογισμοί TVaR για θ = 1 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995

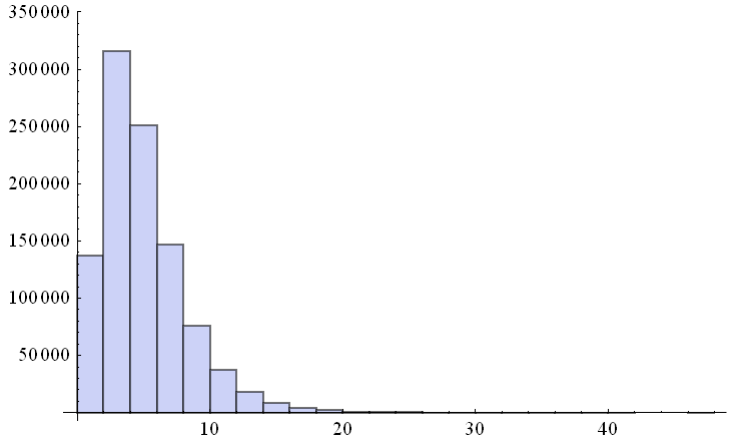
	κ=0.5	**κ=0.75**	**κ=0.95**	**κ=0.99**	**κ=0.995**
$VaR_{\kappa}(S)$	3.94391	6.9913	12.8694	18.0881	20.1965
$TVaR_{\kappa}(S)$	7.97241	10.6475	16.0828	21.0117	23.4595
$TVaR_{\kappa}(X_1, S)$	3.10271	3.999	5.39937	6.22055	6.58158
$TVaR_{\kappa}(X_2, S)$	4.8697	6.6485	10.6834	14.7912	16.878

Συμπερασματικά, σημειώνεται ότι οι υπολογισμοί της εφαρμογής που αναπτύχθηκε είναι σχετικά απλοί, γεγονός που οφείλεται (1) στις δυνατότητες χρήσης έτοιμων συναρτήσεων και γραφικής απεικόνισης που προσφέρει το Mathematica και (2) στην επιλογή της FGM ως συνάρτησης σύζευξης, βέβαια η χρήση προσεγγιστικών μεθόδων, καθιστούν συνθετότερη και περισσότερο πολύπλοκη την εφαρμογή.

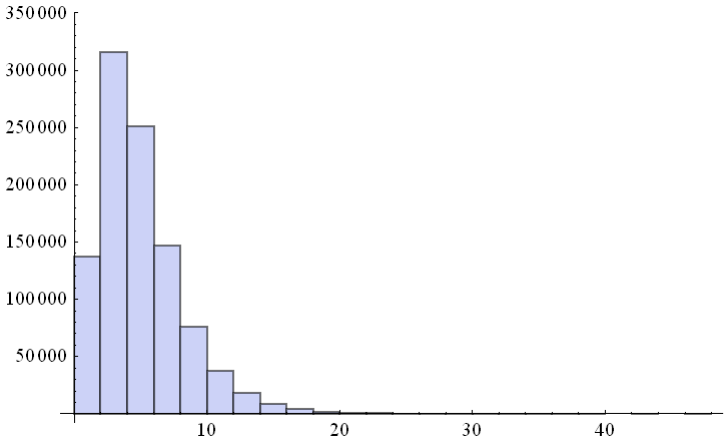
Τα ιστογράμματα των S για τον υπολογισμό της VaR για λ_1=1/2, λ_2=1/3 για τα διάφορα θ καθώς και για τα διάφορα κ απεικονίζονται αντίστοιχα στα Σχήματα 5.4, 5.5 και 5.6.

Σχήμα 5.4:Ιστογράμματα της S για Θ= -1

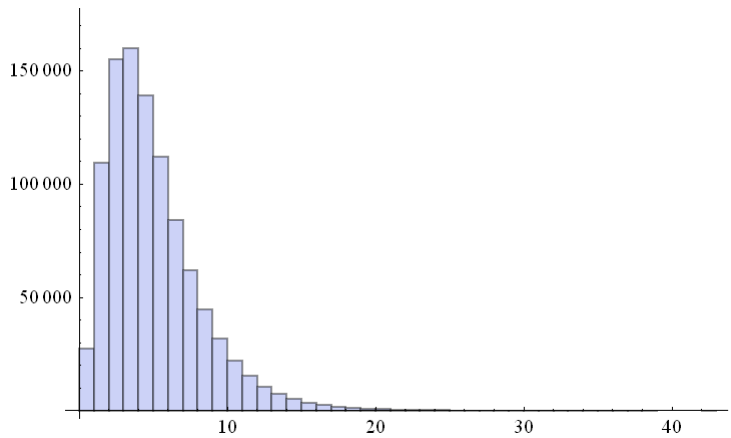
Για κ= 0.5



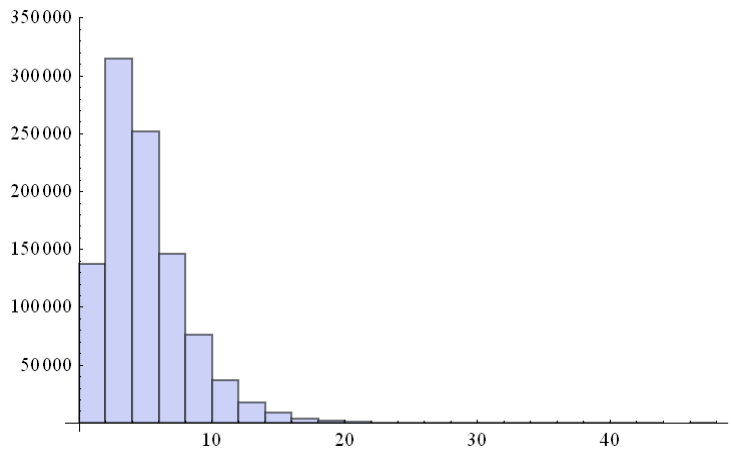
Για κ= 0.75



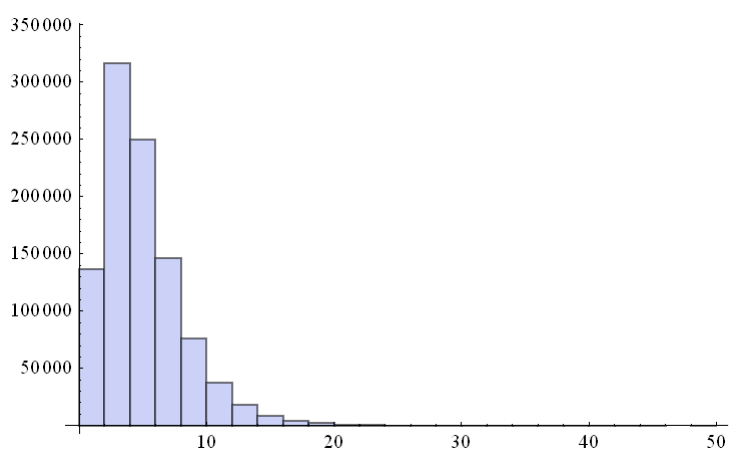
Για κ= 0.95



Για κ= 0.99

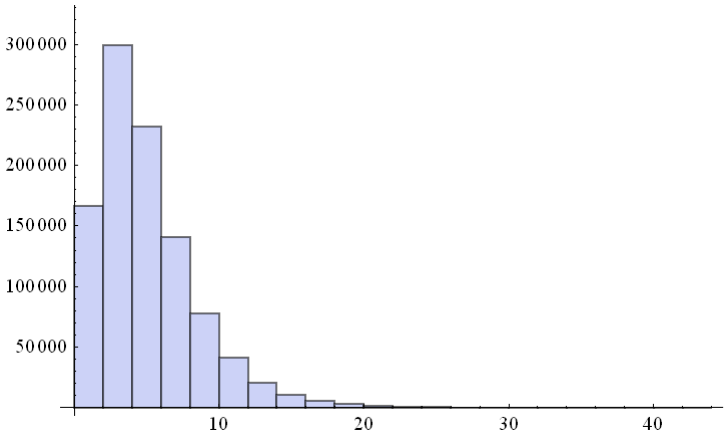


Για κ= 0.995

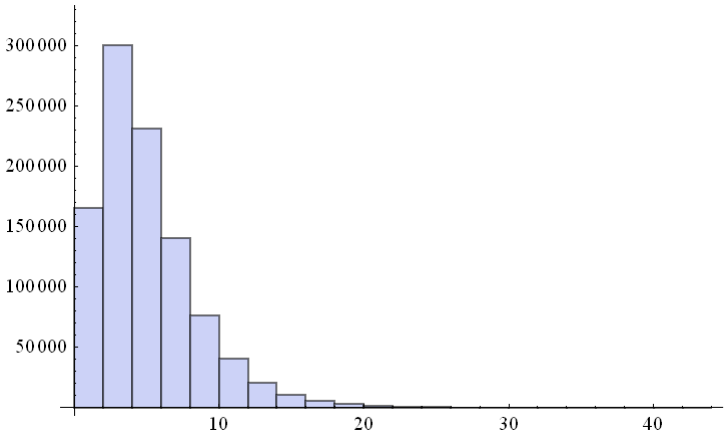


Σχήμα 5.5:Ιστογράμματα της S για Θ= -0.5

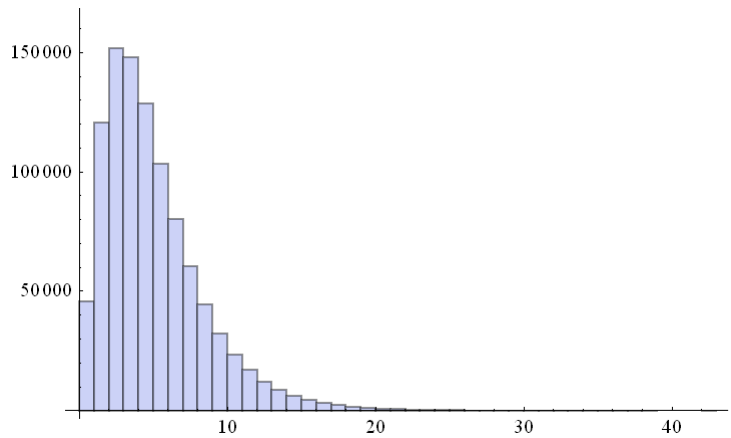
Για κ= 0.5



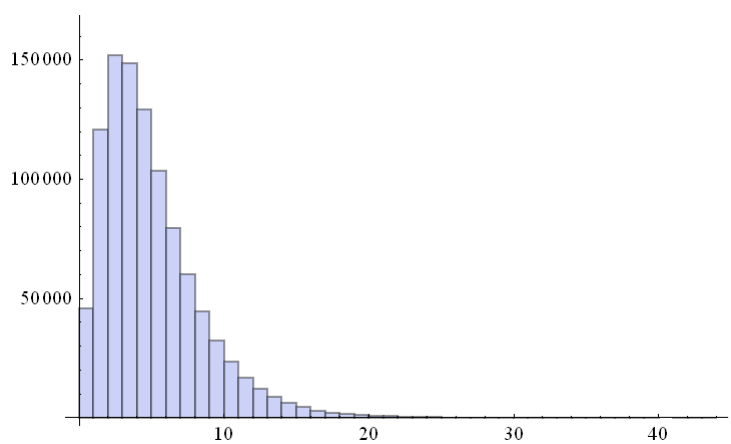
Για κ= 0.75



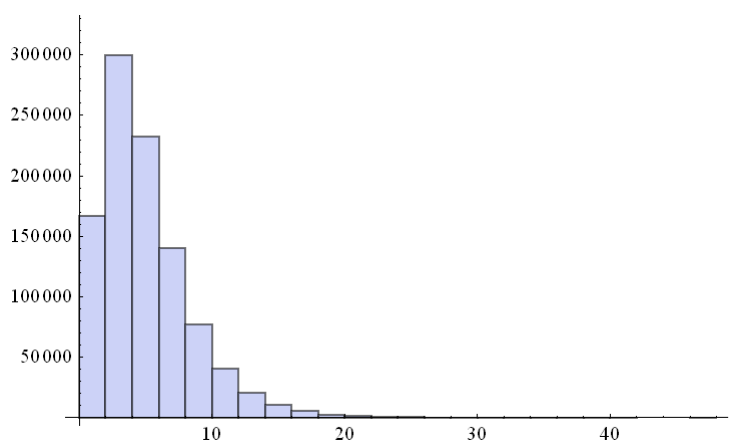
Για κ= 0.95



Για κ= 0.99

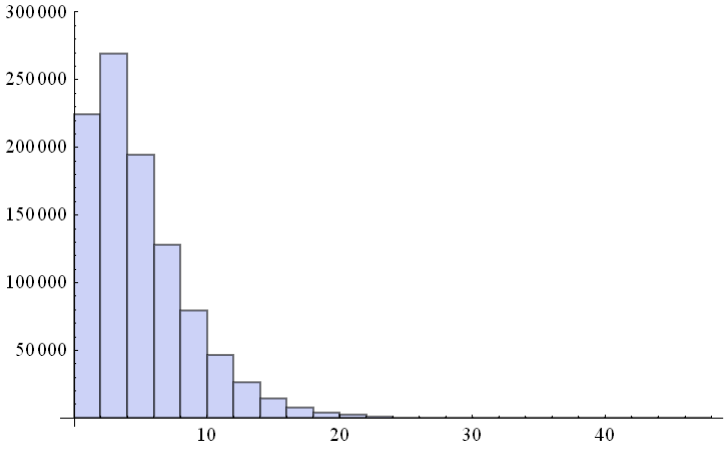


Για κ= 0.995

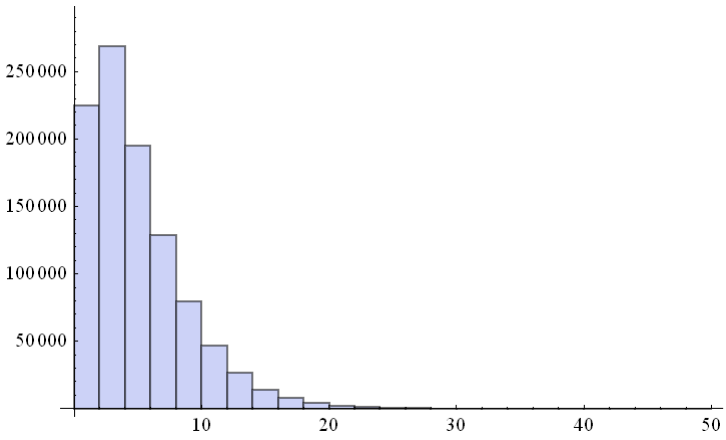


Σχήμα 5.6:Ιστογράμματα της S για Θ= 0.5

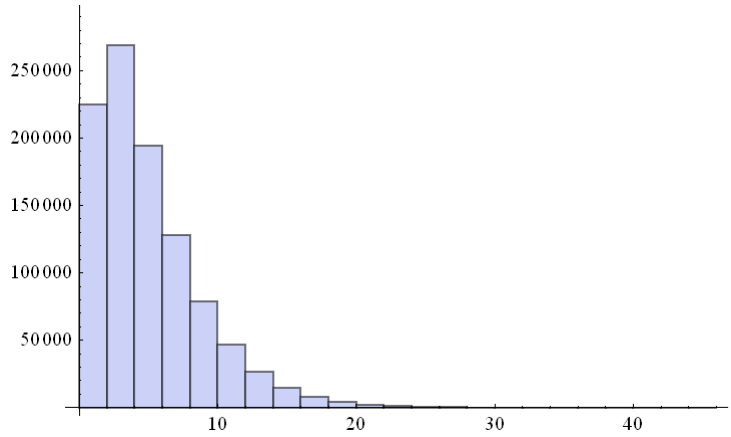
Για κ= 0.5



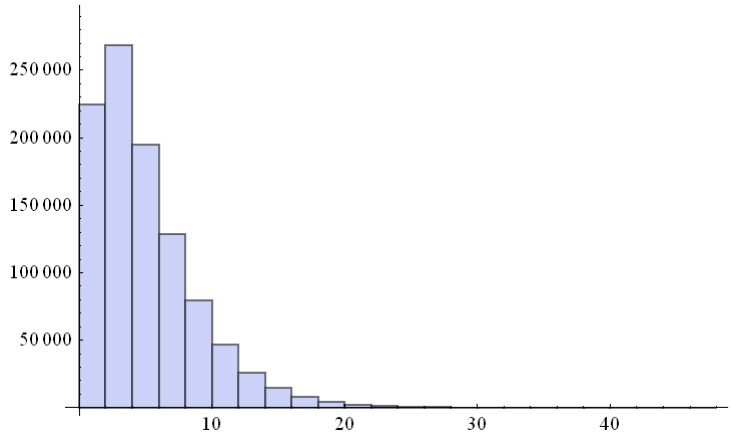
Για κ= 0.75



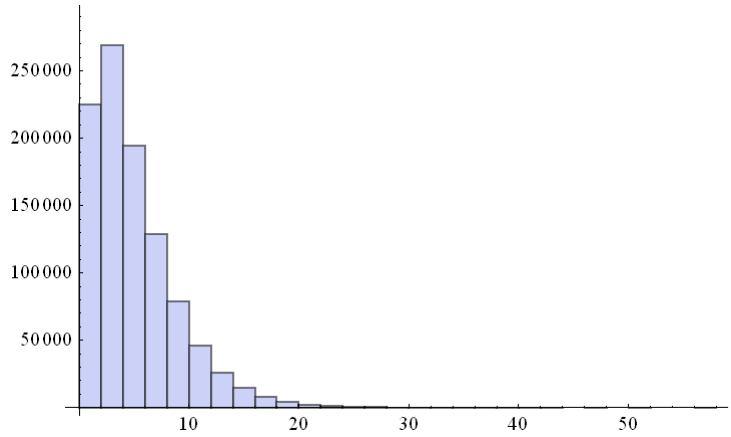
Για κ= 0.95



Για κ= 0.99

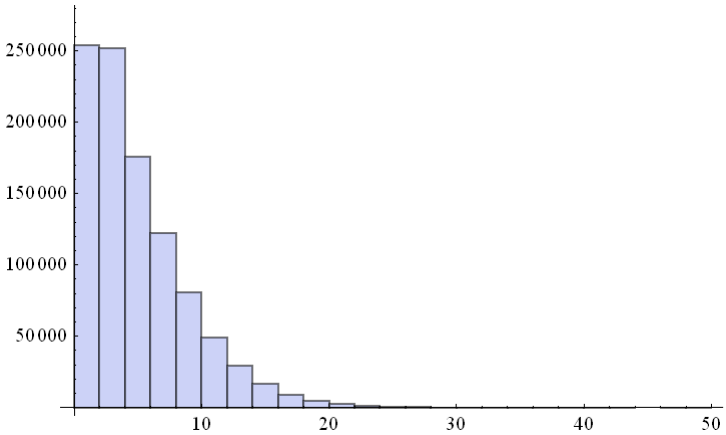


Για κ= 0.995

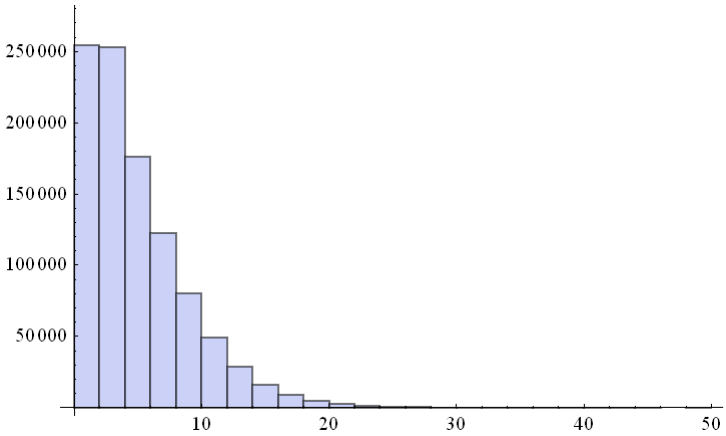


Σχήμα 5.7:Ιστογράμματα της S για Θ= 1

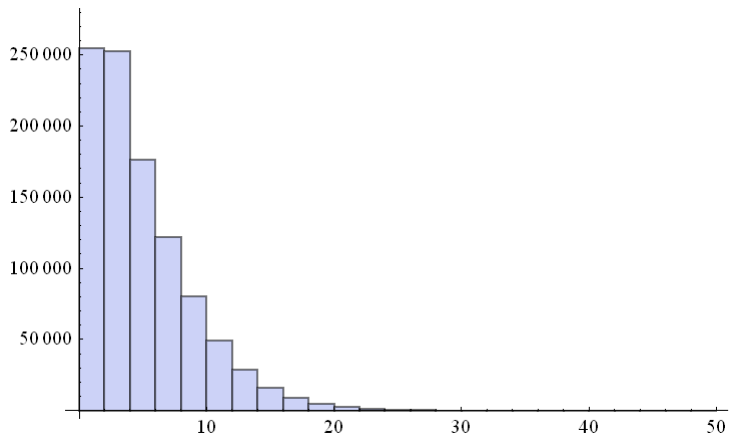
Για κ= 0.5



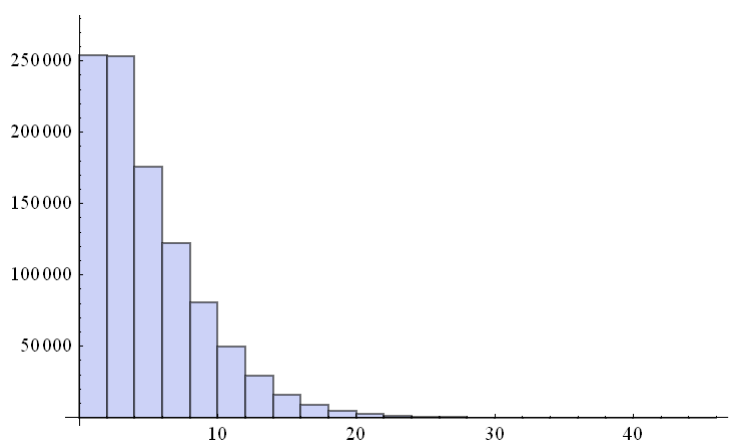
Για κ= 0.75



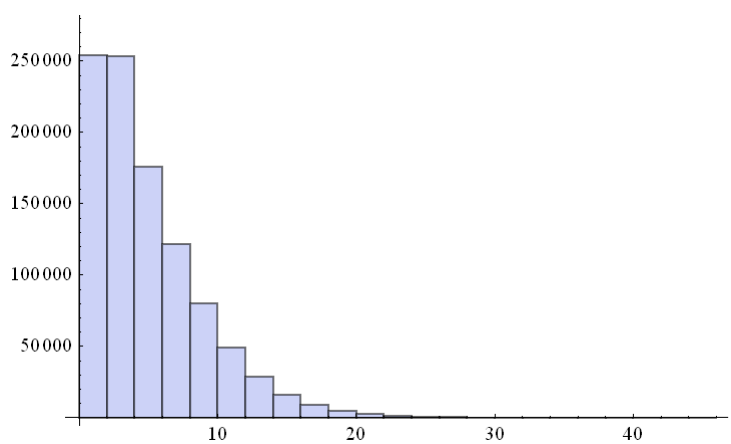
Για κ= 0.95



Για κ= 0.99



Για κ= 0.995



5.2.2. Ειδική Περίπτωση για θ=0

Για θ=0 θα πάρουμε ως δεδομένο το VaR, και θα κάνουμε ακριβώς ότι κάναμε και παραπάνω για τα υπόλοιπα θ.

Πίνακας 5.6: Υπολογισμοί TVaR για θ = 0 και κ = 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.995

	K=0.5	K=0.75	K=0.95	K=0.99	K=0.995
$VaR_{\kappa}(S)$	4.1589	6.7187	11.9994	16.9914	19.1073
$TVaR_{\kappa}(S)$	7.65887	9.99669	15.0983	20.0307	22.1322
$TVaR_{\kappa}(X_1, S)$	2.92055	3.57561	4.61141	5.22338	5.40011
$TVaR_{\kappa}(X_2, S)$	4.73831	6.42108	10.4868	14.8074	16.7321

6. Συμπεράσματα

Αναπόσπαστο τμήμα της σύγχρονης παγκοσμιοποιημένης οικονομικής δραστηριότητας, αποτελεί η προσπάθεια τον χρηματοοικονομικών, τραπεζικών και ασφαλιστικών οργανισμών να κατανείμουν και να διαχειριστούν αποτελεσματικά τους κινδύνους οι οποίοι προέρχονται από πολλές και διαφορετικές πηγές. Πολύ περισσότερο μάλιστα, σε περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η αντιστάθμιση των αναλαμβανόμενων κινδύνων μέσω σχετικών χρηματοοικονομικών προϊόντων και εργαλείων, πράγμα που μπορεί να συμβεί σε κάποιες περιπτώσεις μη ομαλής και πλήρους λειτουργίας των αγορών. Σε τέτοιες περιπτώσεις, θα πρέπει αφενός η αποτίμηση των κινδύνων να είναι όσο το δυνατόν ακριβέστερη και αφετέρου να δημιουργούνται και να διατηρούνται τα απαιτούμενα αποθέματα κεφαλαίων, ώστε να μπορούν να ελεγχθούν αποτελεσματικά οι υφιστάμενοι κίνδυνοι.

Ταυτόχρονα, ολοένα και σε μεγαλύτερο βαθμό οι τραπεζοασφαλιστικοί οργανισμοί σήμερα, εργάζονται στην ανάπτυξη τεχνικών για την ακριβή μέτρηση και αξιολόγηση των κινδύνων, καθώς αφενός ο αντίκτυπος στην κερδοφορία και την επιχειρηματική δραστηριότητα είναι μεγάλος και αφετέρου οι εποπτικές αρχές γίνονται όλο και πιο αυστηρές, επιβάλλοντας ακριβέστερη παρακολούθηση, καλύτερο έλεγχο και αυξημένη διαφάνεια. Στο πλαίσιο των εν λόγω τεχνικών, έχουν προταθεί πολλά μέτρα κινδύνου τα οποία είναι από πολύ απλά μέχρι πολύ σύνθετα και πολύπλοκα. Διαφορετικές κατηγορίες μέτρων κινδύνου, εκπροσωπούνται από διαφορετικές σχολές ερευνητών και επαγγελματιών του χώρου. Οι τεχνικές και μέθοδοι μέτρησης και ποσοτικοποίησης κινδύνων έχουν αποτελέσει και εξακολουθούν να αποτελούν αντικείμενο ευρείας συζήτησης και αντιπαραθέσεων. Ωστόσο, τις τελευταίες δύο δεκαετίες, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε τεχνικές που στοχεύουν στον όσο το δυνατόν ακριβέστερο προσδιορισμό της κεφαλαιακής επάρκειας των χρηματοοικονομικών οργανισμών, προσδοκώντας κατ’ αυτό τον τρόπο να προσεγγίσουν το ζήτημα πληρέστερα (Ferri, Guillen, Bermudez, 2012).

Η πρόσφατη οδηγία της Ευρωπαϊκής Ένωσης σχετικά με την παρακολούθηση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών, η οποία είναι γνωστή και ως Solvency II, έρχεται ως φυσική συνέχεια της προγενέστερης και εν ισχύ σήμερα οδηγίας Solvency I. Πρόκειται για ένα σύνολο μέτρων που σα βασικό τους στόχο έχουν την προστασία των καταναλωτών αλλά και των ίδιων των ασφαλιστικών εταιριών από το ενδεχόμενο να μη μπορούν να ανταπεξέλθουν στις υποχρεώσεις που έχουν αναλάβει έναντι των ασφαλισμένων.

Στην παρούσα εργασία μελετούνται οι μέθοδοι μέτρησης της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών με χρήση συναρτήσεων σύζευξης. Παρουσιάζονται και περιγράφονται αναλυτικά οι συναρτήσεις σύζευξης και ο τρόπος σύνδεσής τους με τους υπολογισμούς των απαιτούμενων κεφαλαίων και των δεικτών φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών. Δύο από τους βασικότερους δείκτες κεφαλαιακών απαιτήσεων των ασφαλιστικών εταιριών σύμφωνα με τη σχετική Οδηγία Solvency II της EIOPA είναι το Ελάχιστο Απαιτούμενο Κεφάλαιο (Minimum Capital Requirement) και το Απαιτούμενο Κεφάλαιο Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement).

Πέραν των προαναφερθέντων, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, διεξάγεται ποιοτική και ποσοτική περιγραφή και ανάλυση των κινδύνων στους οποίους εκτίθενται οι ασφαλιστικές εταιρείες και τους οποίους καλείται να αποτρέψει το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας. Η εν λόγω ανάλυση εμπεριέχει το μαθηματικό ορισμό των σημαντικότερων μέτρων κινδύνου και ενός πλέγματος ιδιοτήτων από τις οποίες χαρακτηρίζονται και οι οποίες καθιστούν ελκυστική τη χρήση των εν λόγω μέτρων κατά την ανάπτυξη σχετικών μαθηματικών μοντέλων αναλογιστικών υπολογισμών. Επιπλέον, δίνεται έμφαση στον τρόπο συσχέτισης των μέτρων αυτών με το Οικονομικό Κεφάλαιο (Economic Capital) μιας ασφαλιστικής εταιρίας.

Ιδιαίτερα βαρύνουσας σημασίας δείκτες κινδύνων στη μοντελοποίηση και αποτίμηση των κινδύνων, γνωστοί και ως μέτρα κινδύνου είναι (1) η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk - VaR), (2) η Tail-Value at Risk – T-VaR και (3) Conditional Tail Expectation – CTE. Για να είναι χρήσιμα και πρακτικά εφαρμόσιμα σε πρακτικές εφαρμογές, όπως η αποτίμηση ασφαλιστικών κινδύνων, τα μέτρα κινδύνου εξετάζονται και αναλύονται σε συνδυασμό με τις ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν. Οι ιδιότητες αυτές,

καθορίζουν εν πολλοίς την καταλληλότητα και την αξιοπιστία των μέτρων κινδύνου ανάλογα με την περίπτωση και το περιβάλλον στο οποίο χρησιμοποιούνται. Οι εν λόγω ιδιότητες παρατίθενται συνοπτικά στον Πίνακα 4.1 και παρουσιάζονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Η έννοια της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk – VaR) αποτελεί σημείο αναφοράς και σύγκρισης στη διαδικασία μέτρησης του κινδύνου. Η δε σημαντικότητα του VaR καταδεικνύεται και από το γεγονός ότι τα μοντέλα υπολογισμού κινδύνων που στηρίζονται σε αυτό, γίνονται αποδεκτά και από τις εποπτικές αρχές των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ως βάση για τον υπολογισμό της απαιτούμενης κεφαλαιακής επάρκειας, έναντι της έκθεσής τους σε κινδύνους της αγοράς. Η φερεγγυότητα της ασφαλιστικής εταιρίας, αντικατοπτρίζει την δυνατότητα να μπορεί η εταιρία αυτή για να εκπληρώσει τις συμβατικές υποχρεώσεις της έναντι των ασφαλισμένων ακόμη και κάτω από μη αναμενόμενες δυσμενείς συνθήκες. Για την προστασία των ασφαλισμένων, οι εποπτικές αρχές έχουν επιβάλλει ελάχιστη απαίτηση κεφαλαίου φερεγγυότητας, γεγονός που πρακτικά σημαίνει ότι οι εποπτικές αρχές απαιτούν τα διαθέσιμα κεφάλαια της εταιρείας, δηλαδή το πλεόνασμα των στοιχείων του ενεργητικού έναντι των στοιχείων του παθητικού, να είναι τουλάχιστον ίσα αυτή την ελάχιστη απαίτηση.

Το μέτρο VaR, δεν ενσωματώνει καμία πληροφορία σχετικά με το πάχος της «άνω ουράς» της συνάρτησης κατανομής. Αυτό αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα, αφού πρακτικά τις εποπτικές αρχές, τους μετόχους κι τους πελάτες κάθε ασφαλιστικού οργανισμού, δεν τους ενδιαφέρει μόνο η συχνότητα μιας πιθανής αθέτησης, αλλά και το μέγεθος της ενδεχόμενης αθέτησης. Το κενό αυτό έρχεται να καλύψει ένα άλλο μέτρο κινδύνου που είναι παρόμοιο του VaR, και ονομάζεται Tail Value at Risk – TVaR.

Στο πλαίσιο υλοποίησης του Solvency II, χρησιμοποιείται έχει προταθεί από την EIOPA η χρήση του TVaR ως μέτρο κινδύνου σε συνδυασμό με συναρτήσεις σύζευξης. Σημαντική ερευνητική δραστηριότητα, αναπτύσσεται γύρω από την περιοχή αυτή και μάλιστα έχουν προταθεί συγκεκριμένες συναρτήσεις σύζευξης, όπως η FGM, οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις δύο ή ακόμη και πολλαπλών μεταβλητών οδηγούν σε κλειστού τύπου λύσεις (Barges, et al., 2009).

Στην παρούσα εργασία αναλύουμε και εφαρμόζουμε αποτελέσματα των Barges, et al. (2009) σχετικά με τον υπολογισμό του TVaR και του Οικονομικού Κεφαλαίου TVaR για δύο εκθετικά κατανεμημένους κινδύνους που συνδέονται μέσω μιας συνάρτησης σύζευξης FGM. Παρότι η σύζευξη FGM είναι κατάλληλη για τη μοντελοποίηση θετικών ή αρνητικών εξαρτήσεων περιορισμένου εύρους, παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι, σε αντίθεση με άλλες συναρτήσεις σύζευξης, μπορούν να υποστηρίξουν σύνθετες εξαρτήσεις κινδύνων με τη χρήση μόνο μίας ή λίγων παραμέτρων (Yeo and Valdez, 2006).

Για να καταστεί ξεκάθαρη η δυνατότητα πρακτικής εφαρμογής των συναρτήσεων σύζευξης στο πλαίσιο υλοποίησης της Οδηγίας Solvency II, σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε αριθμητική εφαρμογή η οποία, μέσω της υλοποίησης σχετικού μαθηματικού μοντέλου, καταδεικνύει τον τρόπο εφαρμογής των ανωτέρω. Η εν λόγω υλοποίηση στοιχειοθετεί και αποδεικνύει τη χρήση των συζεύξεων και των μέτρων κινδύνου για των υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων και των δεικτών φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών και έχει πραγματοποιηθεί με χρήση της πλατφόρμας λογισμικού Mathematica.

Η εφαρμογή που έχει υλοποιηθεί, υπολογίζει τα μέτρα κινδύνου VaR και TVaR και την επιμέρους συνεισφορά κάθε κινδύνου, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση σύζευξης FGM, τη προσομοίωση Monte Carlo και αξιοποιώντας τις λύσεις «κλειστού τύπου» που έχουν διατυπωθεί και αποδειχτεί από τους Barges, et al. (2009). Το μοντέλο εξάρτησης που υλοποιήθηκε κρίνεται σημαντικό και πρακτικά ρεαλιστικό και χρήσιμο γιατί αξιοποιεί την ιδιότητα της προσθαφαιρετικότητας που έχει η TVaR και λόγω της οποίας η συνεισφορά των επιμέρους κινδύνων αθροίζει το συνολικό κίνδυνο. Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να σημειώσουμε ότι το μοντέλο που έχει προταθεί είναι απλό, εύκολα υλοποιήσιμο και ταυτόχρονα ελκυστικό από πλευράς ρεαλιστικότητας αποτελεσμάτων δεδομένου ότι αξιοποιεί τις δυνατότητες χρήσης έτοιμων συναρτήσεων και γραφικής απεικόνισης που προσφέρει το πακέτο Mathematica και στηρίζεται στην FGM ως συνάρτησης σύζευξης, επιτυγχάνοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο υπολογισμούς «κλειστού τύπου» και με ορισμένη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων οι οποίες θα καθιστούν την εφαρμογή λίγο πιο σύνθετη και πολύπλοκη.

Πεδία ενδιαφέροντος για μελλοντική έρευνα και μελέτη μπορούν να αποτελέσουν (1) η γενίκευση του συγκεκριμένου μοντέλου με χρήση περισσότερων των δύο κινδύνων, ώστε η εφαρμογή του να καταστεί ακόμη ρεαλιστικότερη, (2) αξιοποίηση και άλλων ελκυστικών συζεύξεων όπως για παράδειγμα της οικογένειας των Αρχιμήδειων συζεύξεων και (3) αξιοποίηση γρήγορων και αποτελεσματικών προσεγγιστικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων σε περιπτώσεις που η επίλυσή τους δεν είναι εφικτή με άλλο τρόπο. Σε κάθε περίπτωση το ερευνητικό ενδιαφέρον και η σχετική δραστηριότητα γύρω από την αξιοποίηση των συζεύξεων για μοντελοποίηση ασφαλιστικών κινδύνων, αναμένεται να ενταθεί στο άμεσο μέλλον.

Βιβλιογραφία

1. Barges, M., Cossete, H., Marceau, E. (2009). TVaR-based capital allocation with copulas. Insurance: Mathematics & Economics, 45, 348-361.
2. Barges M., Cossette, H., Loisel, S. and Marceu, E. (2009). On the Moments of the Aggregate Discounted Claims with Dependence Introduced by a FGM Copula.
3. Benninga, S., and Wiener,Z (1998). Value-at-Risk (VaR), Mathematica in Education and Research, Vol. 7, No. 4.
4. CEA (2007a). Solvency II: Frequently Asked Questions, CEA Briefing Note. February, http://www.cea.eu
5. CEA (2007b). Solvency II: Understanding the Process, CEA Briefing Note. February, http://www.cea.eu
6. CEIOPS (2006). Choice of risk measure for solvency purposes, http://ec.europa.eu/internalmarket/insurance/docs/2006-markt-docs/2534-06-annexceiopsen.pdf.
7. CEIOPS (2007). Draft advice to the European Commission in the framework of the Solvency II Project on pillar I issues - further advice. Consultation paper N20, http://www.ceiops.eu/media/files/consultations/consultationpapers/CP20/CP20.pdf.
8. Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. (2004). Copula Methods in Finance, The Wiley Finance Series.
9. Demarta, S. and McNeil, A. J (2004). The t copula and related copulas, 2004, Department of Mathematics, ETH.
10. Desmedt, S. and Walhin, J.-F. (2008). On the Subadditivity of Tail Value at Risk: An Investigation with Copulas , Casualty Actuarial Society, Vol. 2, issue 2.
11. Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2005). Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Orders and Models, John Willey & Sons, Ltd.

12. Dhaene, J., Goovaerts, M.J., and Kaas, R. (2003). Economic capital allocation derived from risk measures. North American Actuarial Journal 7, 44–59.

13. Donnely, C. and Embrechts, P. (2010). The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis, RiskLab, ETH.

14. Ferri, A., Guillen, M., Bermudez, L. (2012). Solvency Capital estimation and Risk Measures, Document De Treball, XREAP 2012-02.

15. Fishburn, P.C. (1982). The Foundations of Expected Utility, Reidel, Dordrecht.

16. Follmer, H., and Schied, A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. Finance and Stochastics 6, pp. 429–447.

17. Forsberg, M. O. (2010), Solvency II/ SST and Modeling of Risk Aggregation, http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb10/100628a.pdf, Seminar Report.

18. Genest, C. and Favre, A-C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask, Journal of Hydrologic Engineering, July/August, pp. 347–368.

19. Goovaerts, M. J., De Vijlder, F. E., and Haezendonck, J. (1984). Insurance Premiums: Theory and Applications. North-Holland, Amsterdam.

20. Kim H. (2007). Estimation and allocation of insurance risk capital.

21. McNeil, A., Rudiger F., and Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management. Princeton University Press. Princeton series in Finance, Princeton.

22. Nelsen, R. (2006). An Introduction to Copulas, Springer Series in Statistics, Second Edition.

23. Nguyen, T., Molinari, R. D. (2011). Risk Aggregation by Using Copulas in Internal Models, Journal of Mathematical Finance, 2011-1, 50-57.

24. Journal of Mathematical Finance, 2011-1, 50-57

25. Ohlsson, E. and L. Esbjörn(2009). The one-year non-life insurance risk. Insurance:Mathematics & Economics, 45, 2, 203-208.

26. Rootzen, H., and Kluppelberg, C. (1999). A single number cannot hedge against economic catastrophes. Ambio-Royal Swedish Academy of Science 8, pp. 550–555.

27. Salmon, F. (2009). Recipe for disaster: The formula that killed wall street, http://www.wired.com/techbiz/it/magazine/17-03/wp_quant?currentPage=all, February 2009.

28. Sandstrom, A. (2011). Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers Theory and Practice, Chapman & Hall/ CRC Finance.

29. Savu, C. and Trede, M. (2004). Goodness-of-_t tests for parametric families of Archimedean copulas, Institute for Econometrics, University of Munster.

30. Schweizer, B. and Wolff, E. F., (1981). On nonparametric measures of dependence for random variables, Ann. Statist. 9, pp. 870-885.

31. Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de Paris 8, pp.229–231.

32. Szego, G. (ed.) (2004). Risk Measures for the 21st Century. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.

33. Thomas L. (2005). Swiss Solvency Test in Non-Life Insurance.

34. Wuthrich M., H. Buhlmann H., and H. Furrer. (2008). Market Consistent Actuarial Valuation. Springer.

35. Yeo, K. L. and Valdez, E. A. (2006). Claim dependence with common effects in credibility models, Insurance Math. Econom., 38(3), pp. 609‑629.

Διαδικτυακές Πηγές

36. CEA, http://www.cea.assur.org