

**ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ARCH ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ**

Δημήτριος Ι. Καραμάνης

Διπλωματική Εργασία

ΠΜΣ.ΔΕ

2005

ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ARCH ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Μια σφαιρική ανάλυση του προβλήματος της Υπό Συνθήκη
Ετεροσκεδαστικότητας αλλά και της Θεωρίας των Υποδειγμάτων
ARCH που αποτελεί πρωταρχική μεθοδολογία αντιμετώπισής του.

Δημήτριος Ι. Καραμάνης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχ/κός και
Μηχ/κός Τεχνολογίας Υπολογιστών Πανεπιστημίου Πατρών

Υποβληθείσα για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα
Διοίκησης Επιχειρήσεων (MBA)

Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Πειραιά

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους καθηγητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Διοίκησης Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Οι γνώσεις τις οποίες μου μετέδωσαν αποτελούν ένα σημαντικό εφόδιο στη συνέχιση της επαγγελματικής μου καριέρας. Ιδιαίτερα όμως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Αγιακλόγλου, ο οποίος – ως επιβλέπον καθηγητής – συνέβαλε με τις χρήσιμες παρατηρήσεις του στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίδα
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	I
ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ	II
ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ	III
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ	
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Οικονομικό και οικονομετρικό υπόδειγμα	3
1.3 Υποθέσεις που οφείλουν να πληρούνται από το οικονομετρικό υπόδειγμα	5
1.4 Περιπτώσεις παραβιάσεων των υποθέσεων του τυχαίου σφάλματος	6
1.4.1 Παραβίαση της κανονικότητας	7
1.4.2 Πολυσυγγραμμικότητα	8
1.4.3 Ετεροσκεδαστικότητα	9
1.4.4 Αυτοσυσχέτιση	10
1.5 Ειδικές μορφές παραβιάσεων των υποθέσεων του τυχαίου σφάλματος	12
1.5.1 Υποδείγματα ARCH	12
1.5.2 Στοχαστική αβεβαιότητα	14
1.6 Ανακεφαλαίωση	18

Επιλεγμένη βιβλιογραφία	19
-------------------------	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.1	Εισαγωγή	23
2.2	Ιστορική αναδρομή	24
2.3	Το απλό υπόδειγμα ARCH	26
2.4	Το γενικευμένο υπόδειγμα ARCH	32
2.5	Έλεγχος ύπαρξης ARCH υποδειγμάτων	37
2.6	Προσδιορισμός του υποδείγματος GARCH που περιγράφει τον πληθωρισμών των Η.Π.Α.	45
2.7	Εκτίμηση ARCH υποδειγμάτων με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας	49
2.8	Διενέργεια προβλέψεων σε διαδικασίες που περιγράφονται από ARCH υποδείγματα	52
2.8.1	Προβλέψεις κάτω από ειδικές συνθήκες	56
2.8.2	Διενέργεια προβλέψεων σε υπόδειγμα ARCH(4)	59
2.9	Ανακεφαλαίωση	62
	Επιλεγμένη βιβλιογραφία	64

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΙΔΗ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

3.1	Εισαγωγή	66
3.2	Το υπόδειγμα ARCH-M	68
3.3	Μη συμμετρικά υποδείγματα GARCH	73

3.3.1	Παρουσίαση του μη συμμετρικού υποδείγματος GARCH	74
3.3.1.1	Πραγματική τιμή και θετικότητα της υπό συνθήκη διακύμανσης	79
3.3.1.2	Ευστάθεια της υπό συνθήκη διακύμανσης	80
3.3.2	Είδη μη συμμετρικών υποδειγμάτων GARCH	81
3.3.2.1	Το απολύτου τιμής υπόδειγμα GARCH	82
3.3.2.2	Το εκθετικό υπόδειγμα GARCH	83
3.3.2.3	Το υπόδειγμα GARCH κατωφλίου	85
3.3.2.4	Το σταθερό υπόδειγμα GARCH	86
3.3.2.5	Το μη γραμμικό ασύμμετρο υπόδειγμα GARCH	88
3.3.2.6	Το Glosten Jagannathan Runkle υπόδειγμα GARCH	88
3.3.2.7	Το μη γραμμικό υπόδειγμα ARCH	89
3.3.2.8	Το ασυμμέτρου δυνάμεως υπόδειγμα ARCH	91
3.4	Ειδικές μορφές υποδειγμάτων ARCH	91
3.4.1	Το ολοκληρωμένο υπόδειγμα GARCH	92
3.4.2	Το ανηγμένο υπόδειγμα ARCH	93
3.4.3	Το υπόδειγμα ARCH κατωφλίου ποιότητας	95
3.4.4	Το μερικώς μη παραμετρικό υπόδειγμα ARCH	96
3.4.5	Το ημιπαραμετρικό υπόδειγμα GARCH	97
3.4.6	Το αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη πυκνότητας υπόδειγμα	102
3.4.7	Επιλογή του αντιπροσωπευτικότερου, ως προς τη φύση του υπό μελέτη φαινομένου, υποδείγματος ARCH	103
3.5	Πολυμεταβλητά υποδείγματα GARCH	104
3.5.1	Το πολυμεταβλητό υπόδειγμα VECM	105
3.5.2	Το διαγώνιο υπόδειγμα VECM	109
3.5.3	Το υπόδειγμα BEKK	110

3.5.4	Εκτίμηση πολυμεταβλητών GARCH υποδειγμάτων	111
3.5.5	Ανάπτυξη του τριμεταβλητού GARCH υποδείγματος που περιγράφει τις αποδόσεις τριών χρωματικών τοποθετήσεων	112
3.6	Ανακεφαλαίωση	114
	Επιλεγμένη βιβλιογραφία	116

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΤΟΝ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

4.1	Εισαγωγή	119
4.2	Γενικά περί πληθωρισμού	120
4.3	Προσδιορισμός του υποδείγματος στο οποίο υπακούει ο πληθωρισμός της Ελλάδος	122
4.4	Μετεπεξεργασία αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων με χρήση περιπτωσιολογικής μελέτης	128
4.5	Ανακεφαλαίωση	132
	Επιλεγμένη βιβλιογραφία	133
	 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	 136
	 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	 144

ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ARCH ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Σημαντικοί όροι

Τυχαίο σφάλμα, χρονοσειρά, κανονικότητα τυχαίου σφάλματος, αυτοσυσχέτιση, ετεροσκεδαστικότητα, αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υπόδειγμα, γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υπόδειγμα, στοχαστική αβεβαιότητα, υπό συνθήκη διακύμανση τυχαίου σφάλματος, υπό συνθήκη τυπική απόκλιση τυχαίου σφάλματος, εξίσωση μέσου όρου, εξίσωση διακύμανσης, μέγεθος μείζονος πιθανοφάνειας, συνάρτηση μείζονος πιθανοφάνειας, ευστάθεια, στασιμότητα, πληθωρισμός, δείκτης τιμών καταναλωτή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικειμενικός σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εμβάθυνση στο πρόβλημα της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας, το οποίο πολύ συχνά ανακύπτει κατά τη μελέτη οικονομικών φαινομένων. Κατά την εργασία αυτή ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη μελέτη και εξέταση του υποδείγματος ARCH, καθώς και των διαφόρων παραλλαγών του. Όπως είναι γνωστό, η οικογένεια υποδειγμάτων ARCH αποτελεί, μαζί με τα υποδείγματα στοχαστικής αβεβαιότητας (SV), τη θεμελιωδέστερη και ουσιοδέστερη προσπάθεια αντιμετώπισης της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας. Ως πρακτική εφαρμογή των προλεχθέντων, περιγράφηκε η διαδικασία εξαγωγής του υποδείγματος ARCH, στο οποίο υπακούει ο πληθωρισμός της Ελλάδας.

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

	Σελίδα
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1 Τιμές του τυχαίου σφάλματος λαμβανόμενες με εξομοίωση	60
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.2 Τιμές του σφάλματος πρόβλεψης $I_{t,s}$, καθώς και των διαστημάτων πρόβλεψης, $\pm 2\sigma_e$, του ARCH (4) υποδείγματος που παρατίθεται στην Παράγραφο 2.8.2. Οι τιμές έχουν ληφθεί με εξομοίωση	61
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.1 Η συνάρτηση $f^v(\cdot)$ και οι επιμέρους μορφές που μπορεί να προσλάβει	77
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.2 Η συνάρτηση $f^v(\cdot)$ για το υπόδειγμα AGARCH (1,1) και οι επιμέρους μορφές που μπορεί να προσλάβει	82
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.3 Εκτιμηθείσα μορφή της κατανομής g με χρήση της μεθόδου DMPL	101
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1 Ιστορικές τιμές της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης της χρονοσειράς $dlwpii_t$	128

III

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

	Σελίδα
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Είδη μη συμμετρικών υποδειγμάτων GARCH	90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι **προβλέψεις** αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της σύγχρονης Οικονομικής Επιστήμης αφού το πεδίο εφαρμογής τους επί των ζητημάτων που η τελευταία πραγματεύεται είναι αρκετά ευρύ. Σε ό,τι αφορά τον τομέα της Μακροοικονομίας, πιο συγκεκριμένα, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι προβλέψεις που σχετίζονται τόσο με τον **πληθωρισμό** όσο και με τις **συναλλαγματικές ισοτιμίες** μεταξύ των νομισμάτων διαφόρων χωρών. Αναφορικά με τον πληθωρισμό, η ακριβής πρόβλεψή του καθίσταται επιτακτική από το γεγονός ότι μέσω αυτής οι διάφορες εταιρείες που δραστηριοποιούνται σε μια χώρα ρυθμίζουν τις μισθοδοτικές υποχρεώσεις τους απέναντι στους εργαζομένους σε τρόπο ώστε ούτε οι ίδιες να ζημιώνονται αλλά ούτε και οι εργαζόμενοι σε αυτές. Οι προβλέψεις, επίσης, για τη συναλλαγματική ισοτιμία μεταξύ των νομισμάτων δύο οποιονδήποτε χωρών διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην τελική απόφαση του τυχαίου επενδυτή της μιας χώρας για επένδυση ή μη σε επιχείρηση της άλλης. Εκτός από τις προαναφερθείσες προβλέψεις, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι προβλέψεις που αφορούν την **υπό συνθήκη τυπική απόκλιση** ή,

διαφορετικά, την **αβεβαιότητα** (volatility) των ανωτέρω μεγεθών. Η διενέργεια των εν λόγω προβλέψεων επιτυγχάνεται με χρήση των **υποδειγμάτων ARCH** για τα οποία εκτενής αναφορά πρόκειται να γίνει σε όλη την υπόλοιπη εργασία.

Άμεσα συνυφασμένος με την έννοια των προβλέψεων είναι ο παράγοντας του **τυχαίου σφάλματος** ο οποίος διαφοροποιεί την **οικονομετρία** από τα γνωστικά αντικείμενα των θετικών επιστημών. Η οικονομετρία είναι ο κλάδος της οικονομικής επιστήμης που σχετίζεται με την εξαγωγή ποσοτικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών που συνθέτουν ένα οικονομικό φαινόμενο. Για να γίνει, όμως, κατανοητός ο ρόλος της, θα πρέπει προηγουμένως να γίνει η απαραίτητη εισαγωγή στις θεμελιώδεις έννοιες που αυτή μετέρχεται. Μια από τις πιο θεμελιωδέστερες έννοιες της οικονομετρίας είναι εκείνη του **οικονομικού υποδείγματος** – άμεσα συνυφασμένη με την έννοια του τυχαίου σφάλματος – που εκτενής ανάλυση του περιεχομένου της επιχειρείται κατά την επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού.

Για να καταστεί δυνατή η **ανάλυση παλινδρόμησης** ενός υποδείγματος, οφείλουν να πληρούνται ορισμένες **υποθέσεις** για τις οποίες εκτενής αναφορά πρόκειται να γίνει στην τρίτη παράγραφο. Μη εκπλήρωση κάποιων ή κάποιων εκ των υποθέσεων αυτών οδηγεί σε πλειάδα ανεπιθυμητών φαινομένων με σημαντικότερα εκείνα της **αυτοσυσχέτισης**, της **ετεροσκεδαστικότητας**, της **πολυσυγγραμμικότητας** και της **παραβίασης της κανονικότητας**, που παρατίθενται αναλυτικά στην τέταρτη παράγραφο

του κεφαλαίου αυτού. Τέλος, στην αμέσως επόμενη παράγραφο εισάγονται τα **υποδείγματα ARCH** καθώς και τα **υποδείγματα SV**, τα οποία στρατολογούνται αμφότερα στην αντιμετώπιση του προβλήματος της **υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας**. Για τα υποδείγματα ARCH, ειδικότερα, ιδιαίτερη αναφορά πρόκειται να γίνει σε όλη την έκταση της παρούσας εργασίας.

1.2 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι μια μεταβλητή, η c_t , εκφράζει τη ζήτηση (σε τεμάχια) ενός προϊόντος A από τους κατοίκους μιας πόλης B και έστω, επίσης, ότι μια άλλη μεταβλητή, η y_t , παριστάνει την τιμή (σε ευρώ) του συγκεκριμένου προϊόντος στην πόλη B. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$y_t = a + bc_t \quad (1.1)$$

με $a \in \mathcal{R}_+^*$ και $b \in \mathcal{R}_-^*$. Η σχέση (1.1) αποτελεί την απλοποιημένη μαθηματική διατύπωση ενός οικονομικού φαινομένου (της σχέσης που συνδέει τη ζήτηση και την τιμή ενός προϊόντος) και, για το λόγο αυτό, καλείται **οικονομικό υπόδειγμα**. Προκειμένου, όμως, να αποκτηθεί μεγαλύτερη αληθοφάνεια, το εν λόγω μαθηματικό μοντέλο οφείλει να εμπλουτιστεί με έναν νέο όρο, τον e_t , που καλείται **τυχαίο σφάλμα** και αποτελεί τυχαία μεταβλητή. Το υπόδειγμα που προκύπτει κατά τον τρόπο αυτό καλείται **οικονομετρικό υπόδειγμα** και έχει ως εξής:

$$y_t = a + bc_t + e_t \quad (1.2)$$

Όπως γίνεται φανερό από τη σχέση (1.2), ένα **οικονομετρικό υπόδειγμα** αποτελείται από τα παρακάτω δύο μέρη:

- το **συστηματικό μέρος**, το οποίο περιλαμβάνει τις οικονομικές μεταβλητές και
- το **τυχαίο μέρος**, το οποίο περιλαμβάνει το τυχαίο σφάλμα.

Κατά το κυρίως στάδιο της οικονομικής ανάλυσης, εκείνο, δηλαδή, της **ανάλυσης παλινδρόμησης**, πραγματοποιείται η **εκτίμηση** ενός οικονομετρικού υποδείγματος, δηλαδή προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων του, ενώ, επιπροσθέτως, διενεργούνται διάφοροι **στατιστικοί έλεγχοι** με σκοπό να διερευνηθεί η ορθότητα της ως άνω εκτίμησης.

Ένα οικονομετρικό υπόδειγμα καλείται **γραμμικό** όταν παρουσιάζει γραμμικότητα **ως προς τις παραμέτρους του**. Ως απλό παράδειγμα ενός τέτοιου υποδείγματος, παρατίθεται το κάτωθι:

$$y_t = b_0 + b_1 c_{1t} + b_2 c_{2t} + \dots + b_k c_{kt} + e_t \quad (1.3)$$

Στη σχέση (1.3) οι εκφράσεις y_t και $c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{kt}$ είναι **μεταβλητές**, ενώ οι παράμετροι b_0, b_1, \dots, b_k είναι πραγματικές σταθερές. Η **στοχαστική μεταβλητή** y_t καλείται **εξαρτημένη μεταβλητή** ενώ οι **μη στοχαστικές μεταβλητές** $c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{kt}$ καλούνται **ανεξάρτητες μεταβλητές** του υποδείγματος.

Μια ειδική περίπτωση γραμμικού υποδείγματος αποτελεί το **αυτοπαλινδρόμο υπόδειγμα** (autoregressive model), το οποίο στο δεξιό του

σκέλος περιλαμβάνει χρονοκαθυστερημένους όρους της εξαρτημένης μεταβλητής. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος είναι το εξής:

$$y_t = b'_0 + b'_1 y_{t-1} + b'_2 y_{t-2} + \dots + b'_k y_{t-k} + e_t \quad (1.4)$$

το οποίο, μάλιστα, συμβολίζεται ως $AR(k)$. Μια άλλη ειδική περίπτωση γραμμικού υποδείγματος αποτελεί το **αυτοπαλίνδρομο κινούμενου μέσου όρου** υπόδειγμα (autoregressive moving average model). Σε αυτό, τόσο το συστηματικό όσο και το τυχαίο μέρος χαρακτηρίζονται αμφότερα από την ιδιότητα της αυτοπαλινδρομικότητας. Ένα τέτοιο υπόδειγμα είναι το εξής:

$$y_t = b'_0 + b'_1 y_{t-1} + b'_2 y_{t-2} + \dots + b'_k y_{t-k} + e_t + c'_1 e_{t-1} + c'_2 e_{t-2} + \dots + c'_m e_{t-m} \quad (1.5)$$

Το υπόδειγμα αυτό, αντίστοιχα, συμβολίζεται ως $ARMA(k, m)$.

1.3 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΦΕΙΛΟΥΝ ΝΑ ΠΛΗΡΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Σε ένα οικονομετρικό υπόδειγμα θα πρέπει να πληρούνται ορισμένες υποθέσεις. Κατά πρώτον, η αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος οφείλει να είναι *μηδέν* για κάθε χρονική στιγμή παρατήρησης. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$E(e_t) = 0 \quad (1.6)$$

Επίσης, η διακύμανση των τιμών του τυχαίου σφάλματος οφείλει να είναι *σταθερή* για κάθε χρονική στιγμή παρατήρησης. Δηλαδή, να ισχύει η σχέση:

$$Var(e_t) = s^2 \quad (1.7)$$

Οι τιμές του τυχαίου σφάλματος, επιπλέον, οφείλουν να είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$E(e_{t_1} e_{t_2}) = 0 \quad (1.8)$$

$\forall t_1, t_2 \in T_c$ (με το t_1 να είναι διάφορο του t_2), όπου T_c είναι το σύνολο των χρονικών στιγμών επί των οποίων λαμβάνονται παρατηρήσεις για το υπόδειγμα. Επιπροσθέτως, οι τιμές του τυχαίου σφάλματος οφείλουν να είναι *ανεξάρτητες* από τις τιμές των ανεξαρτήτων μεταβλητών. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$E(e_t c_{t-k'}) = 0 \quad (1.9)$$

για τις επιμέρους τιμές του k' . Οι τιμές του τυχαίου σφάλματος, τέλος, οφείλουν να ακολουθούν την **κανονική κατανομή**. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει ότι:

$$e_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2) \quad (1.10)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία μία ή περισσότερες εκ των ανωτέρω υποθέσεων δεν ισχύουν, τότε ανακύπτουν διάφορα προβλήματα κατά την ανάλυση παλινδρόμησης. Ορισμένα από τα προβλήματα αυτά αναπτύσσονται συνοπτικά παρακάτω.

1.4 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΙΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Κατά γενική παραδοχή, οι περιπτώσεις κατά τις οποίες παραβιάζονται οι υποθέσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι

σπάνιες. Στη μελέτη, ειδικότερα, οικονομικών ζητημάτων, τα φαινόμενα παραβιάσεων των εν λόγω υποθέσεων που συνήθως ανακύπτουν, είναι τα εξής:

α) Το φαινόμενο της **παραβίασης της κανονικότητας**, το οποίο προκύπτει μετά από παραβίαση της σχέσης (1.10).

β) Το φαινόμενο της **ετεροσκεδαστικότητας** (heteroscedasticity), το οποίο προκύπτει μετά από παραβίαση της σχέσης (1.7).

γ) Το φαινόμενο της **αυτοσυσχέτισης** (autocorrelation), το οποίο προκύπτει μετά από παραβίαση της σχέσης (1.8).

δ) Το φαινόμενο της **πολυσυγγραμικότητας** (multilinearity), το οποίο προκύπτει μετά από παραβίαση της σχέσεως (1.9).

Ακολούθως, συνοπτική αναφορά γίνεται σε όλα τα φαινόμενα αυτά.

1.4.1 ΠΑΡΑΒΙΑΣΗ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η εκπλήρωση της υπόθεσης της **κανονικότητας** (normality) των τιμών του τυχαίου σφάλματος, μολονότι δε διαδραματίζει κανέναν ιδιαίτερο ρόλο στην εκτίμηση του υποδείγματος, αποτελεί παράγοντα πρωταρχικής σημασίας για την υλοποίηση στατιστικών αναφορών επί των παραμέτρων του. Χωρίς την ισχύ αυτής της υπόθεσης κανένας στατιστικός έλεγχος δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί και τούτο εξ' αιτίας του ότι η στατιστική αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του θα είναι αίολη.

Η κανονικότητα των τιμών του τυχαίου σφάλματος ισχύει όταν οι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσής του λαμβάνουν τις τιμές *μηδέν* και *τρία* αντίστοιχα. Η πλήρωση ή μη των δύο προαναφερθεισών συνθηκών, μάλιστα, ελέγχεται με βάση τη στατιστική συνάρτηση LM. Θα πρέπει να τονισθεί, πάντως, ότι το πρόβλημα της μη κανονικότητας των τιμών του τυχαίου σφάλματος – αντίθετα με ό,τι συνέβη με τα παρατιθέμενα στις προηγούμενες υποπαραγράφους προβλήματα – δεν είναι δυνατό να αντιμετωπισθεί. Ο μοναδικός τρόπος ενδεχόμενης αντιμετώπισής του είναι η μείωση του πλάτους των τιμών των παρατηρήσεων όλων των μεταβλητών που συναπαρτίζουν το υπόδειγμα (κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί με χρήση *λογαριθμικών μετασχηματισμών*). Αν, πάραυτα, η προαναφερθείσα μέθοδος δε θεραπεύσει το πρόβλημα της μη κανονικότητας, το μόνο που μπορεί να πράξει ο ερευνητής είναι να αρκεστεί στην εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος, χωρίς να είναι σε θέση να πραγματοποιήσει οποιαδήποτε μορφή στατιστικής αναφοράς ως προς τις παραμέτρους του τελευταίου.

1.4.2 ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Ο όρος “πολυσυγγραμμικότητα” εισήχθη για πρώτη φορά από τον Ragnar Frisch (1934) και εκφράζει την ύπαρξη μίας ή περισσότερων, ταυτοχρόνως, γραμμικών σχέσεων μεταξύ των ανεξαρτήτων μεταβλητών που συναπαρτίζουν ένα οικονομετρικό υπόδειγμα. Η ταυτόχρονη χρησιμοποίηση, σε ένα πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα, πολλών ανεξαρτήτων μεταβλητών που συσχετίζονται γραμμικά μεταξύ τους δεν οδηγεί σε βελτίωση της

πληροφορίας που εμπειρικλείεται στο υπόδειγμα. Ως άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι το να μην επιτυγχάνεται ο βέλτιστος προσδιορισμός των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής.

Το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας επηρεάζει το εύρος των τιμών του διαστήματος εμπιστοσύνης των παραμέτρων ενός υποδείγματος καθώς και την αξιοπιστία των στατιστικών ελέγχων που διενεργούνται επί των εν λόγω παραμέτρων. Επηρεάζει, επίσης, την ακρίβεια και τη σταθερότητα των λοιπών εκτιμήσεων που λαμβάνουν χώρα επί του θεωρουμένου υποδείγματος. Επιπροσθέτως, δημιουργεί προβλήματα στην ερμηνεία των προκυπτόντων αποτελεσμάτων καθώς επίσης και στον καθορισμό του υποδείγματος.

1.4.3 ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας εμφανίζεται στην ανάλυση της παλινδρόμησης όταν κατά την εκτίμηση ενός γραμμικού υποδείγματος παραβιάζεται η υπόθεση της σταθερής και ίσης διακύμανσης των τιμών του τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος. Το γεγονός αυτό έχει ως άμεση συνέπεια την αμφισβήτηση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων που προέρχονται από την εκτίμηση του υποδείγματος με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Η εμφάνιση της ετεροσκεδαστικότητας έχει ως αποτέλεσμα το να μη λαμβάνονται ως εκτιμητές των συντελεστών ενός υποδείγματος εκείνοι με τη

μικρότερη διακύμανση. Υπό τις συνθήκες αυτές, οποιασδήποτε μορφής στατιστική αναφορά για τους συντελεστές ενός υποδείγματος είτε με τη μορφή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης είτε με τη μορφή ενός στατιστικού ελέγχου, θα είναι προβληματική. Αφ'ενός το εύρος των διαστημάτων εμπιστοσύνης των εν λόγω συντελεστών θα προκύπτει υπέρμετρα μεγάλο και, αφ'εταίρου, η μηδενική υπόθεση για τον έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητάς τους θα απορρίπτεται πολύ συχνότερα, με αποτέλεσμα να συνάγονται ενίοτε λανθασμένα συμπεράσματα.

Οι αιτίες της εμφάνισης του προβλήματος της ετεροσκεδαστικότητας ποικίλουν και επικεντρώνονται άλλοτε στο είδος των παρατηρήσεων από τις οποίες αντλούν τιμές οι επιμέρους μεταβλητές και άλλοτε σε διάφορους άλλους παράγοντες. Ο σημαντικότερος από τους παράγοντες αυτούς είναι εκείνος της χρήσης ανεξαρτήτων μεταβλητών των οποίων οι τιμές εμπειρικλείουν μεγάλη αβεβαιότητα. Το γεγονός αυτό έχει ως άμεσο επακόλουθο το να διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους οι τιμές των διακυμάνσεων του τυχαίου σφάλματος και να παραβιάζεται, κατά τον τρόπο αυτό, η συνθήκη (1.7).

1.4.4 ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης εμφανίζεται στην ανάλυση της παλινδρόμησης κάθε φορά που παραβιάζεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας των τιμών του τυχαίου σφάλματος ενός υποδείγματος. Η εμφάνιση του

φαινομένου αυτού οφείλεται, κατά πρώτον, στη μη χρησιμοποίηση σημαντικών ανεξαρτήτων μεταβλητών σε ένα υπόδειγμα, στη λανθασμένη αλγεβρική μορφή του υποδείγματος, κατά δεύτερον και, κατά τρίτον, στην ύπαρξη χρονικών υστερήσεων. Χάριν του τελευταίου, το φαινόμενο της αυτοσυσχέτισης λαμβάνει χώρα σε περιπτώσεις που οι παρατηρήσεις των οικονομικών μεταβλητών του υποδείγματος προέρχονται από *χρονοσειρές*. Οι τιμές των τυπικών σφαλμάτων των εκτιμητών των συντελεστών ενός υποδείγματος επηρεάζονται σημαντικά από το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης με συνέπεια όλοι οι στατιστικοί έλεγχοι που διενεργούνται επ' αυτού να είναι αμφιβόλου αξίας.

Οι μορφές με τις οποίες εμφανίζεται η αυτοσυσχέτιση είναι πολυποίκιλες με συνηθέστερη εκείνη της *αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού*: της συσχέτισης, δηλαδή, των τιμών του τυχαίου σφάλματος οι οποίες απέχουν μεταξύ τους μία χρονική περίοδο. Το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης – όπως επίσης και εκείνο της ετεροσκεδαστικότητας – θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπ' όψιν στην ανάλυση της παλινδρόμησης ενός υποδείγματος, ώστε, τελικά, να μην αμφισβητείται η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της εκτίμησης των παραμέτρων του και να καθίσταται, παράλληλα, δυνατό να διενεργούνται με ακρίβεια οι απαραίτητοι στατιστικοί έλεγχοι.

1.5 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΠΑΡΑΒΙΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Η μελέτη μιας σωρείας ζητημάτων (όπως, π.χ., των συναλλαγματικών ισοτιμιών μεταξύ διαφόρων νομισμάτων, των αποδόσεων των μετοχών, του πληθωρισμού, κ.ά.) που άπτονται των επιστημονικών πεδίων της Χρηματοοικονομίας και της Μακροοικονομίας καταδεικνύει ότι μικρές και μεγάλες τιμές των καταλοίπων τείνουν ενίοτε να εμφανίζονται *κατά ομάδες*. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί εξέχουσα μαρτυρία για την εμφάνιση του προβλήματος της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας επί των οικονομετρικών υποδειγμάτων. Το εν λόγω πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη χρήση των **αυτοπαλίνδρομων υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδειγμάτων** (autoregressive conditional heteroscedasticity models) ή **υποδειγμάτων ARCH** καθώς και, εναλλακτικά, με την εισαγωγή των **υποδειγμάτων στοχαστικής αβεβαιότητας** (stochastic volatility models) ή **υποδειγμάτων SV**. Τα υποδείγματα αυτά θα αναπτυχθούν αναλυτικότερα στις παραγράφους που ακολουθούν.

1.5.1 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ARCH

Για την περιγραφή του φαινομένου ARCH, χρήσιμο είναι να αναφερθεί το παράδειγμα του πληθωρισμού μιας χώρας. Θα υποθεθεί, επίσης, ότι κατά τη μελέτη του υποδείγματος που περιγράφει το εν λόγω μέγεθος παρατηρείται το

φαινόμενο άλλοτε μικρές και άλλοτε μεγάλες τιμές καταλοίπων να εμφανίζονται κατά ομάδες. Θα πρέπει επιπλέον να θεωρηθεί ότι ο πληθωρισμός, y_t , της συγκεκριμένης χώρας περιγράφεται από το AR(k) υπόδειγμα της σχέσης (1.4). Για το τυχαίο σφάλμα, τότε, του εν λόγω υποδείγματος, μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$e_t = u_t \sqrt{h_t} \quad (1.11)$$

Στην παραπάνω σχέση, η u_t είναι μια τυχαία μεταβλητή που παριστάνει **λευκό θόρυβο** και, κατά συνέπεια, ισχύει γι αυτήν ότι:

$$u_t \sim N(0, 1) \quad (1.12)$$

Για την **ντετερμινιστική** μεταβλητή h_t , επίσης, ισχύει η εξής σχέση:

$$h_t = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + \mathbf{K} + a_p e_{t-p}^2 \quad (1.13)$$

Όπως είναι φανερό, τα στοιχεία a_0, a_1, \dots, a_p αποτελούν παραμέτρους της θεωρουμένης εξίσωσης, (1.13).

Ο ερευνητής, εύκολα μπορεί να ξεγελαστεί από την *κατ' επίφαση αυτοσυσχετιστικότητα* που παρουσιάζει η παραπάνω εξίσωση. Στην πραγματικότητα, το θεωρούμενο υπόδειγμα **δεν** είναι αυτοσυσχετιστικό αλλά *υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό*. Εύκολα μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί ότι η h_t ισούται με την υπό συνθήκη διακύμανση, $Var(y_t | \Psi_{t-1})^1$, της εξαρτημένης μεταβλητής. Δηλαδή, ότι:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = h_t = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + \mathbf{K} + a_p e_{t-p}^2 \quad (1.14)$$

¹ Στο εξής, η συνθήκη Ψ_{t-1} θα τελεί υπό ισχύ σε κάθε μαθηματική έκφραση ακόμη και αν παραλείπεται η αναφορά της.

όπου $q \in \mathbb{N}$. Το χαρακτηριστικό αυτό, που διέπει το σύστημα των εξισώσεων (1.11), (1.12) και (1.13), είναι ιδιαίτερα ελκυστικό, αφού, όπως θα φανεί στη συνέχεια, αποκτάται – εκτός των άλλων – η δυνατότητα συνεκτίμησης του ενεχομένου, σε μια πρόβλεψη της y_t , κινδύνου. Με Ψ_{t-1} συμβολίζεται το **πληροφοριακό σύνολο** της περιόδου $t-1$. Το σύνολο αυτό περιλαμβάνει τις τιμές όλων των μεταβλητών του υποδείγματος για όλες τις χρονικές περιόδους έως την $t-1$.

Η εξίσωση (1.4) καλείται **εξίσωση μέσου όρου** ενώ η εξίσωση (1.13) καλείται **εξίσωση διακύμανσης** του θεωρουμένου υποδείγματος του οποίου η πλήρης ονομασία είναι **υπόδειγμα ARMA(κ) με σφάλματα τύπου ARCH(q)**. Χάριν απλουστεύσεως, όμως, το εν λόγω υπόδειγμα στο εξής θα καλείται **υπόδειγμα ARCH(q)** ως να χαρακτηριζόταν μόνον από τη μορφή που λαμβάνει η εξίσωση διακύμανσής του. Επειδή, μάλιστα, η συγκεκριμένη εξίσωση μπορεί να λάβει ποικίλες διαφοροποιήσεις, το αποκαλούμε και ως **φαινόμενο ARCH** περιγράφεται όχι μόνον από ένα υπόδειγμα αλλά από μία ολόκληρη **οικογένεια υποδειγμάτων**, γεγονός που θα καταστεί περισσότερο σαφές στη συνέχεια.

1.5.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Ο Taylor (1982), εισήγαγε στο – με καλπάζοντες ρυθμούς εξελισσόμενο – επιστημονικό πεδίο της οικονομετρίας τη **στοχαστική αβεβαιότητα** (stochastic volatility ή SV), η οποία αποτέλεσε μια, εναλλακτική εκείνης των

υποδειγμάτων ARCH, πρόταση αντιμετώπισης του προβλήματος της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας. Σύμφωνα με την εκδοχή αυτή του Taylor, τα υποδείγματα SV όφειλαν να συμπεριλάβουν στη μαθηματική έκφραση που είναι ανάλογη της εξίσωσης διακύμανσης των υποδειγμάτων ARCH μια μεταβλητή h_t η οποία – αντίθετα με την αντίστοιχη της των ARCH υποδειγμάτων – να είναι **στοχαστική**. Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα από το χώρο της έρευνας γύρω από θέματα κινδύνου των επενδύσεων δικαιώνουν την ανωτέρω θεώρηση του Taylor αφού τα υποδείγματα SV παρέχουν ακριβέστερες προβλέψεις από τα αντίστοιχα ARCH. Οι προοπτικές, ιδιαίτερα, που σηματοδοτούνται για τη μελλοντική πορεία της SV στα επιστημονικά δρώμενα είναι ιδιαίτερα ευοίωνες.

Το βασικό υπόδειγμα SV, όπως χρησιμοποιήθηκε, αρχικά, από τους Hull και White (1987), είναι εκείνο το οποίο περιγράφεται από τις σχέσεις που ακολουθούν:

$$y_t = b \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) u_t \quad (1.15)$$

$$h_{t+1} = g + d(h_t - g) + Vn_t \quad (1.16)$$

στις οποίες οι ποσότητες b, g, d και V είναι παράμετροι. Στις παραπάνω εξισώσεις η τυχαία μεταβλητή y_t (observed variable), θα μπορούσε να εκφράζει π.χ. την απόδοση μιας επένδυσης κατά τη χρονική στιγμή t . Επίσης, οι u_t και n_t είναι **στοχαστικές**, ανεξάρτητες μεταξύ τους, μεταβλητές λευκού θορύβου για τις οποίες, όπως είναι γνωστό, ισχύει ότι:

$$u_t \sim N(0,1)$$

και:

$$n_t \sim N(0,1)$$

Η μεταβλητή n_t , επιπροσθέτως, αποτελεί τη στοχαστική μεταβλητή της εξίσωσης διακύμανσης του υποδείγματος και η παράμετρος V εκφράζει το βαθμό επιδράσεώς της στο σύστημα. Λογαριθμίζοντας τη σχέση (1.15), προκύπτει ότι:

$$\ln y_t = \ln b + \ln u_t + \frac{1}{2} h_t$$

Στην παραπάνω ισότητα το τυχαίο σφάλμα εμφανίζεται ως «διμετάβλητο» και συντετιθέμενο από δύο **στοχαστικές** μεταβλητές, την u_t και την h_t , οι οποίες είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους και ακολουθούν αμφότερες την κανονική κατανομή. Η h_t καλείται, διαφορετικά, άδηλη μεταβλητή (latent variable) και η ευστάθειά της εξασφαλίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$|d| < 1$$

Αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η παράμετρος b του υποδείγματος, διάφορα έχουν κατά καιρούς προταθεί. Κάποιοι ερευνητές προτιμούν το b ίσο με τη μονάδα, ενώ άλλοι θεωρούν ότι όταν:

$$b = \exp\left(\frac{g}{2}\right)$$

το υπόδειγμα αποκτά καλύτερη ερμηνευτική ικανότητα.

Το λογαριθμικό υπόδειγμα SV, που μόλις περιγράφηκε, χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τους Chesney και Scott (1989). Η βασική οικονομετρική του ανάλυση, όμως, πραγματοποιήθηκε από τον Taylor (1994), τον Shephard (1996), τους Ghysels, Harvey και Renault (1996) και, τέλος, τους Jacquier, Polson και Rossi (1994). Ένα ακόμη υπόδειγμα SV είναι εκείνο το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις που ακολουθούν:

$$y_t = \left[\exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \right] u_t \quad (1.17)$$

$$h_t = g + d h_{t-1} + v n_t \quad (1.18)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι ποσότητες g , d και v αποτελούν τις παραμέτρους του θεωρουμένου υποδείγματος. Η **στοχαστική** μεταβλητή h_t είναι **ευσταθής** όταν, αναφορικά με την παράμετρο d , ισχύει ότι:

$$|d| < 1$$

και, επιπλέον, αναφορικά με την παράμετρο v , ισχύει η εξής σχέση:

$$v < 0$$

Η παράμετρος v εκφράζει την ισχύ των **αιφνιδίων στοχαστικών κραδασμών** (shocks) τις οποίες υφίσταται η h_t .

Η έρευνα των οικονομικών ζητημάτων καταδεικνύει ότι τα οικονομικά συστήματα εμφανίζουν ιδιότητες που δύσκολα ερμηνεύονται ή περιγράφονται από το βασικό υπόδειγμα SV. Για το λόγο αυτό, κρίθηκε ως απαραίτητο το να επιχειρηθεί η ποικιλόμορφη επέκταση του τελευταίου σε τρόπο τέτοιο ώστε να

προκύψουν υποδείγματα ικανά να περιγράψουν ολόκληρο το φάσμα των οικονομικών φαινομένων. Η περαιτέρω αναφορά στο ζήτημα αυτό, όμως, εκφεύγει του σκοπού της συγκεκριμένης εργασίας και, για το λόγο αυτό, κρίνεται αδόκιμη.

1.6 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εισήχθησαν θεμελιώδεις έννοιες των οικονομικών επιστημών με κυρίαρχη εκείνη του τυχαίου σφάλματος. Στη δεύτερη παράγραφο, πιο συγκεκριμένα, θεμελιώθηκε η έννοια του οικονομετρικού υποδείγματος και, ταυτόχρονα, παρατέθηκαν ορισμένα βασικά είδη οικονομετρικών υποδειγμάτων, όπως είναι το γραμμικό υπόδειγμα, το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα και το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητού μέσου όρου.

Κατά την τρίτη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού, εκτενής αναφορά έγινε στις υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε η ανάλυση παλινδρόμησης ενός οικονομετρικού υποδείγματος να επιτυγχάνεται χωρίς να ανακύπτουν ιδιαίτερα προβλήματα. Ακολούθως, αναφέρθηκαν τα φαινόμενα της μη κανονικότητας, της αυτοσυσχέτισης και της ετεροσκεδαστικότητας ως ιδιαίζουσες περιπτώσεις παραβίασης των ανωτέρω υποθέσεων. Ιδιαίτερη μνεία έγινε, επίσης, στο φαινόμενο της υπό συνθήκης ετεροσκεδαστικότητας που κάνει την εμφάνισή του αρκετά συχνή σε μακροοικονομικά και χρηματοοικονομικά ζητήματα. Το φαινόμενο αυτό φιλοδοξούν να

αντιμετωπίσουν τα υποδείγματα SV καθώς επίσης και τα υποδείγματα ARCH, για τα οποία εκτενέστατη αναφορά πραγματοποιείται σε όλη την υπόλοιπη εργασία.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αγιακλόγλου Χρήστος Ν. και Μπένος Θεοφάνης Ε.: «Εισαγωγή Στην Οικονομική Ανάλυση», Τόμος Α', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 2002.
2. Αγιακλόγλου Χρήστος Ν. και Μπένος Θεοφάνης Ε.: «Εισαγωγή Στην Οικονομική Ανάλυση», Τόμος Β', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 2002.
3. Ανδρικόπουλος Α. Α.: «Οικονομική Θεωρία Και Εμπειρικές Εφαρμογές», Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 1998.
4. Γκαμαλέτσος Θ. Γ.: «Θεωρητική Οικονομετρία», Τόμος Α', Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Πειραιάς 1990.
5. Γκαμαλέτσος Θ. Γ.: «Θεωρητική Οικονομετρία», Τόμος Β', Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Πειραιάς 1990.
6. Θαλασσινός Λ. Ι. «Οικονομετρία – Ανάλυση Απλής Παλινδρόμησης», Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Πειραιάς 1992.
7. Κιντής Α. Α.: «Οικονομετρία», Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1999.
8. Χρήστου Γ. Κ.: «Εισαγωγή Στην Οικονομετρία», Τόμος 1, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1980.

9. Χρήστου Γ. Κ.: «Εισαγωγή Στην Οικονομετρία», Τόμος 2, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1980.
10. Chesney M. and Scott L.O., 1989, "Pricing European options: a comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model", Journal of Financial and Qualitative Analysis, 24, pp. 267-284.
11. Engle R. F., 1982, «Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of U.K. Inflation», Econometrica 50, Pp. 987 – 1008.
12. Frisch R.: «Statistical Coinfluence Analysis By Means Of Complete Regression Systems», Institute Of Economics, Oslo University, 1934.
13. Ghysels E., Harvey A. C. and Renault E., 1996, "Stochastic Volatility", in C. R. Rao and G. S. Maddala (eds.), Statistical Methods in Finance (Amsterdam: North-Holland), pp. 119-191.
14. Greene W. H.: «Econometric Analysis», Macmillan Publishing Co., New York 1990.
15. Gujarati D.: «Basic Econometrics», McGraw – Hill Publishing Co., New York 1978.
16. Hull J. and White A., 1987, "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", Journal of Finance, 42, pp. 281-300.
17. Jacquier E., Polson N. G. and Rossi P. E., 1994, "Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion)", Journal of Business and Economic Statistics, 12, pp. 371-417.

18. Johnston J.: «Econometric Methods», McGraw – Hill Publishing Co., New York 1984.
19. Johnston J. and Dinardo J.: «Econometric Methods», The McGraw – Hill Publishing Co., New York 1997.
20. Maddala G. S. «Econometrics», McGraw – Hill Publishing Co., New York 1977.
21. Maddala G. S.: «Introduction To Econometrics», Macmillan Publishing Co., New York 1988.
22. Newbold P.: «Statistics For Business And Econometrics», Prentice – Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1991.
23. Newbold P. and Bos T.: «Introductory Business Forecasting», South-Western Publishing Co., Cincinnati 1995.
24. Shephard N., 1996, «Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility», in D.R. Cox, O. E. Barndorff – Nielson and D. V. Hinkley (eds.), Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields (London : Chapman & Hall), pp. 1-67.
25. Taylor S. J., 1982, «Financial returns modeled by the product of two stochastic processes – a study of daily sugar prices». In : Anderson, O. D. (Ed.), Time Series Analysis: Theory and Practice 1. North-Holland, Amsterdam, pp. 203-226.
26. Taylor S. J., 1994, «Modeling stochastic volatility», Mathematical Finance, 4, pp. 183-204.
27. Theil H.: «Principles Of Econometrics», John Wiley & Sons, Inc., New York 1971.

28.Theil H.: «Introduction To Econometrics», Prentice – Hall Inc., New York 1978.

29.Zellner A.: «An Introduction To Bayesian Inference In Econometrics», John Wiley & Sons Inc., New York 1971.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, έγινε ιδιαίτερη αναφορά στο πρόβλημα της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας. Στη διαπίστωση της ύπαρξης του ιδιάζοντος αυτού φαινομένου προέβη αρχικά ο Engle, ο οποίος παρατήρησε ότι αφ' ενός οι διακυμάνσεις των καταλοίπων σε υποδείγματα χρονοσειρών ήταν λιγότερο σταθερές από όσο αναμενόταν και ότι, αφ' εταίρου, μεγάλες και μικρές τιμές των καταλοίπων έτειναν να εμφανίζονται κατά ομάδες. Ο Engle, επίσης, διαπίστωσε ότι οι διακυμάνσεις των τιμών του τυχαίου σφάλματος των αντιστοίχων υποδειγμάτων, για μια ορισμένη χρονική περίοδο, εξαρτώνταν από τις αντίστοιχες διακυμάνσεις προηγούμενων χρονικών περιόδων. Τα υποδείγματα που, τελικώς, προέκυψαν από την ως άνω περιγραφείσα κατάσταση ονομάστηκαν **αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδείγματα** (Autoregressive Conditionally Heteroscedastic models) ή, διαφορετικά, **υποδείγματα ARCH**.

Η αναφορά που επιχειρείται στο κεφάλαιο αυτό σχετικά με το φαινόμενο ARCH, ξεκινά με την παράθεση των ιστορικών του καταβολών. Στη συνέχεια, περιγράφεται και αναλύεται διεξοδικά το απλό υπόδειγμα ARCH, το οποίο

αρχικώς διατυπώθηκε από το Robert Engle (τον τιμηθέντα το 2003 με το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών χάριν των επιτευγμάτων του στη μελέτη και ανάλυση του εν λόγω φαινομένου). Κατόπιν, αναπτύσσεται η γενίκευση του ως άνω υποδείγματος, δηλαδή το **γενικευμένο ARCH υπόδειγμα** ή **υπόδειγμα GARCH**, ενώ παρατίθεται και μια εφαρμογή που αναφέρεται σε προβλέψεις και εκτιμήσεις που αφορούν τον πληθωρισμό των Η.Π.Α. Στην παράγραφο που ακολουθεί περιγράφεται η διαδικασία **εκτίμησης** των ARCH υποδειγμάτων, η οποία επιτυγχάνεται με χρήση της **μεθόδου μεγίστης πιθανοφανείας**, ενώ, στο τέλος, ιδιαίτερη μνεία γίνεται στις **μεγάλου χρονικού ορίζοντα προβλέψεις** που διενεργούνται επί διαδικασιών περιγραφόμενων από υποδείγματα ARCH.

2.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η ιστορία των υποδειγμάτων ARCH είναι πολύ σύντομη, αφού ο Robert Engle τα εισήγαγε στον επιστημονικό κόσμο μόλις μία εικοσαετία πριν. Μέσα στη βραχεία αυτή περίοδο τόσο η αρθρογραφία όσο και η βιβλιογραφία, η οποία πραγματευόταν το φαινόμενο ARCH, αυξάνονταν με ολοένα και πιο θεαματικούς ρυθμούς. Η πληθώρα, μάλιστα, των εφαρμογών στις οποίες απαντόνταν τα υποδείγματα αυτά έμοιαζε να αψηφούσε τις επιστημονικές τάσεις και ανακαλύψεις των καιρών. Μολονότι η εφαρμογή έπεται, κατά κανόνα, της θεωρητικής τεκμηρίωσης, το πρωτογενές ARCH υπόδειγμα του Engle – καθώς και οι διάφορες γενικεύσεις και διαφοροποιήσεις του – εφαρμόσθηκε «εν ριπή οφθαλμού» σχεδόν σε πλειάδα οικονομικών και

χρηματοοικονομικών συστημάτων διαφόρων χωρών του κόσμου, προτού καν επιτευχθεί η ανάλογη θεωρητική θεμελίωση τόσο του ιδίου όσο και των επιμέρους επεκτάσεών του.

Παρά τη σχετικά πρόσφατη επιστημονική καταγραφή του φαινομένου ARCH, η μελέτη των χρονοσειρών αντλεί τις ρίζες της από το μακρινό παρελθόν. Μόλις το 1900, ο Bachelier ήταν ο πρώτος που διεξήγαγε στατιστικές μελέτες στον τομέα των επενδύσεων. Κατόπιν, επακολούθησε μακρά περίοδος σιγής έως ότου ο Mandelbrot (1963) εκδηλώσει το επιστημονικό ενδιαφέρον του για την περιοχή της τιμολόγησης αξιών, για να καταλήξει, στη συνέχεια, στη θεωρία ότι *«τυχαίες μεταβλητές με μη πεπερασμένη διακύμανση ήταν απαραίτητες για την περιγραφή της μεταβολής των αξιών»*.

Προ της εισαγωγής των υποδειγμάτων ARCH, μόνον ανεπίσημα χρησιμοποιούνταν επιστημονικές μέθοδοι για την αποτίμηση των μεταβολών της διακύμανσης του τυχαίου σφάλματος. Ο Robert Engle (1982) υπήρξε ο πρώτος που ενσωμάτωσε, στο υπόδειγμα που εκείνος εισήγαγε, τις παρατηρήσεις και τα πορίσματα των προγενεστέρων του. Η χρησιμότητα, όμως, του υποδείγματος ARCH δεν εντοπιζόταν σε αυτόν και μόνο τον παράγοντα αλλά κυρίως στο ότι παρουσίαζε ένα ευρύτερο πεδίο εφαρμογών που απηχούσε σε ολόκληρο το φάσμα της οικονομικής επιστήμης. Η βιβλιογραφία και αρθρογραφία που ασχολήθηκε με την οικογένεια των ARCH υποδειγμάτων υπήρξε ιδιαίτερα ογκώδης. Από τα πολύ σημαντικά άρθρα που πραγματεύθηκαν το εν λόγω φαινόμενο ήταν και εκείνο των Engle και Bollerslev (1986), καθώς και το άρθρο των Bollerslev, Chou και Krouer

(1992). Το τελευταίο, μάλιστα, υπήρξε ο προπομπός για εκατοντάδες κατοπινά άρθρα που ανέπτυξαν το φαινόμενο ARCH. Μερικά άλλα πολύ αξιόλογα άρθρα που αξίζουν ιδιαίτερης μνείας ήταν και τα άρθρα των Duffee (1992) καθώς και των Bollerslev και Hodrick (1992).

2.3 ΤΟ ΑΠΛΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH

Το απλό υπόδειγμα ARCH είναι εκείνο το οποίο περιγράφεται αφ' ενός από τις εξισώσεις (1.4), (1.11) και (1.12), και, αφετέρου, από την παρακάτω εξίσωση:

$$h_t = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 \quad (2.1)$$

Για την αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος αυτού, θα ισχύει ότι:

$$E(e_t) = E \left[u_t (a_0 + a_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Βάσει του γεγονότος ότι οι τυχαίες μεταβλητές u_t και e_t^2 είναι μεταξύ τους **ανεξάρτητες**, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E(e_t) = E(u_t) E \left[(a_0 + a_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Εφόσον, μάλιστα:

$$E(u_t) = 0 \quad (2.2)$$

θα ισχύει ότι:

$$E(e_t) = 0 \quad (2.3)$$

Για τη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος του εν λόγω υποδείγματος, θα ισχύει, επίσης, ότι:

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_t) &= \text{E}(e_t^2) \\ &= \text{E}[u_t^2(a + a_1 e_{t-1}^2)] \end{aligned}$$

Όμοια με προηγουμένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\text{Var}(e_t) = \text{E}(u_t^2) \text{E}(a_0 + a_1 e_{t-1}^2)$$

Βάσει του γεγονότος ότι η u_t είναι συνάρτηση λευκού θορύβου, θα ισχύει ότι:

$$\text{E}(u_t^2) = \text{Var}(u_t) = 1 \quad (2.4)$$

Κατά συνέπεια, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_t) &= \text{E}(a_0 + a_1 e_{t-1}^2) \\ &= a_0 + a_1 \text{E}(e_{t-1}^2) \end{aligned}$$

δηλαδή, ότι:

$$\text{Var}(e_t) = a_0 + a_1 \text{Var}(e_{t-1}) \quad (2.5)$$

Για την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος στο υπό μελέτη υπόδειγμα, θα ισχύει ότι:

$$\text{E}(e_t | \Psi_{t-1}) = \text{E}\left[u_t (a_0 + a_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} | \Psi_{t-1} \right]$$

Στην προηγούμενη σχέση, με Ψ_{t-1} συμβολίζεται το **πληροφοριακό σύνολο** της περιόδου $t-1$. Το σύνολο αυτό περιλαμβάνει τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής και του τυχαίου σφάλματος για όλες τις χρονικές περιόδους έως

την $t-1$. Βάσει της ισχύος της υπό συνθήκη στατιστικής ανεξαρτησίας των u_t και e_t , η παραπάνω σχέση και γράφεται ως εξής:

$$E(e_t | \Psi_{t-1}) = E(u_t | \Psi_{t-1})E[(a_0 + a_1 e_{t-1}^2) | \Psi_{t-1}]$$

Επειδή όμως:

$$E(u_t | \Psi_{t-1}) = 0 \quad (2.6)$$

θα ισχύει, τελικά, ότι:

$$E(e_t | \Psi_{t-1}) = 0 \quad (2.7)$$

Για την υπό συνθήκη διακύμανση, επίσης, του τυχαίου σφάλματος, ισχύει ότι:

$$Var(e_t | \Psi_{t-1}) = Var[u_t (a_0 + a_1 e_{t-1}^2) | \Psi_{t-1}]$$

Ομοίως, λόγω της υπό συνθήκη στατιστικής ανεξαρτησίας u_t και e_t , η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$Var(e_t | \Psi_{t-1}) = Var(u_t | \Psi_{t-1})Var\left[(a_0 + a_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} | \Psi_{t-1}\right]$$

Εφόσον, όμως:

$$Var(u_t | \Psi_{t-1}) = 1 \quad (2.8)$$

η παραπάνω σχέση παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} Var(e_t | \Psi_{t-1}) &= Var\left[(a_0 + a_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} | \Psi_{t-1}\right] \\ &= E\left[(a_0 + a_1 e_{t-1}^2) | \Psi_{t-1}\right] \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα:

$$Var(e_t | \Psi_{t-1}) = a_0 + a_1 \{e_{t-1}^2\} = \{h_t\} \quad (2.9)$$

με $\{e_{t-1}^2\}$ και $\{h_t\}$ να συμβολίζουν τις “στιγμιαίες” τιμές των τυχαίων μεταβλητών e_t^2 και h_t κατά τις χρονικές περιόδους $t-1$ και t , αντίστοιχα¹. Η σχέση (2.9) αποκαλύπτει ένα μεγάλο πλεονέκτημα του απλού υποδείγματος ARCH. Σύμφωνα με αυτήν, σε ένα τέτοιο παράδειγμα, η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος της ερχόμενης περιόδου είναι πλήρως ορισμένη από την τιμή των καταλοίπων της τρέχουσας περιόδου.

Έστω ότι η εξαρτημένη μεταβλητή του υποδείγματος εκφράζει την αξία ενός κεφαλαίου κατά μία τυχαία περίοδο. Για τον επενδυτή που σχεδιάζει να αγοράσει το κεφάλαιο αυτό κατά τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, $t-1$ και να το πουλήσει κατά την επομένη περίοδο, t ενδιαφέρον έχουν μόνο δύο ποσότητες: η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή, $E(y_t | \Psi_{t-1})$, κατά την περίοδο t και, ομοίως, η υπό συνθήκη διακύμανση $Var(y_t | \Psi_{t-1})$ η οποία εκφράζει τον κίνδυνο της επένδυσης. Για την πρώτη από τις εν λόγω ποσότητες, ισχύει – βάσει της σχέσεως (1.4) – ότι:

$$\begin{aligned} E(y_t | \Psi_{t-1}) &= E(b_0 + b_1 y_{t-1} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} + e_t | \Psi_{t-1}) \\ &= b_0 + b_1 E(y_{t-1} | \Psi_{t-1}) + \mathbf{K} + E(y_{t-k} | \Psi_{t-1}) \end{aligned}$$

δηλαδή, ότι:

$$E(y_t | \Psi_{t-1}) = b_0 + b_1 y_{t-1} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} + E(e_t | \Psi_{t-1})$$

με $\{y_{t-1}\}, \mathbf{K}, \{\Psi_{t-1}\}$ να είναι οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής y_t κατά τις χρονικές περιόδους $t-1, \mathbf{K}, t-k$, αντίστοιχα.

Λόγω της σχέσεως (2.7), η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

¹ Στο εξής, όταν πρόκειται για ντετερμινιστικές μεταβλητές, τα άγκιστρα ({}) θα παραλείπονται.

$$E(y_t | \Psi_{t-1}) = b_0 + b_1 y_{t-1} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} \quad (2.10)$$

Καθ' όμοιο τρόπο, για την υπό συνθήκη διακύμανση της y_t θα ισχύει ότι:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = E\left[[y_t - E(y_t | \Psi_{t-1})]^2 \right]$$

ή, ισοδύναμα:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = E\left[[(y_t | \Psi_{t-1}) - E(y_t | \Psi_{t-1})]^2 \right]$$

Λόγω της σχέσεως (2.10), επίσης, προκύπτει ότι:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = E\left[(b_0 + b_1 y_{t-1} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} + e_t - b_0 - b_1 y_{t-1} - \mathbf{K} - b_k y_{t-k})^2 | \Psi_{t-1} \right]$$

δηλαδή, ότι:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = h_t \quad (2.11)$$

αφού:

$$E(e_t^2 | \Psi_{t-1}) = Var(e_t | \Psi_{t-1})$$

Οι σχέσεις (2.10) και (2.11) αποκαλύπτουν άλλο ένα μεγάλο πλεονέκτημα του απλού υποδείγματος ARCH. Σύμφωνα με αυτές, στα εν λόγω υποδείγματα, τόσο η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, y_t , για την ερχόμενη περίοδο όσο και η υπό συνθήκη διακύμανσή της είναι τιμές πλήρως ορισμένες από την τρέχουσα, κιάλας, περίοδο. Με άλλα λόγια, τόσο η τιμή που αναμένεται να προσλάβει ένα χρηματικό κεφάλαιο κατά την επομένη της αγοράς του χρονική περίοδο όσο και ο κίνδυνος που εμπερικλείει η πρόβλεψη αυτή είναι τιμές πλήρως ορισμένες από την τρέχουσα, ήδη, περίοδο. Η εξίσωση, δε, από την οποία λαμβάνεται ο εν λόγω κίνδυνος,

ισοδυναμεί, βάσει της σχέσεως (2.6), με την εξίσωση διακύμανσης ενός απλού υποδείγματος ARCH. Επίσης, εφ' όσον για:

$$i \neq 0$$

ισχύει ότι:

$$E[(u_t | \Psi_{t-1})(u_{t-i} | \Psi_{t-i-1})] = 0 \quad (2.12)$$

εύκολα συνάγεται ότι:

$$E[(e_t | \Psi_{t-1})(e_{t-i} | \Psi_{t-i-1})] = 0 \quad (2.13)$$

Η παραπάνω σχέση, δηλώνει ξεκάθαρα την πλήρη απουσία αυτοσυσχετίσης που ίσως ο αναγνώστης λανθασμένα υπέθετε σε μια πρώτη ματιά των σχέσεων (1.11), (1.12) και (2.1). Με άλλα λόγια, το απλό υπόδειγμα ARCH είναι μόνον κατ' επίφαση και όχι κατ' ουσία αυτοσυσχετιστικό. Η υπό συνθήκη διακύμανση, h_t , επίσης, ενός απλού ARCH υποδείγματος, καλείται **ευσταθής** όταν κάθε αιφνίδια δόνηση, με μορφή που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.11) και (1.12), επί του συστήματος που περιγράφεται από το εν λόγω υπόδειγμα, είναι μη εκφυλιστική (nondegenerate) ως προς αυτό καθώς επίσης και αυστηρώς στατικά εργοδική (stationary ergodic). Η συνθήκη της ευστάθειας εκπληρούται όταν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της εξίσωσης (2.1) κείνται εντός του μοναδιαίου κύκλου επί του μιγαδικού επιπέδου. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται όταν, με βάση τη σχέση (2.1), ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

$$a_0 > 0 \quad (2.14)$$

και:

$$0 < a_1 < 1 \quad (2.15)$$

Οι παραπάνω συνθήκες εξασφαλίζουν ταυτοχρόνως τόσο τη **θετικότητα** των τιμών της h_t όσο και το γεγονός ότι οι τιμές αυτές είναι **πραγματικοί αριθμοί**. Τέλος, μια γενικότερη περίπτωση υποδείγματος ARCH είναι το υπόδειγμα εκείνο του οποίου η εξίσωση διακύμανσης περιγράφηκε από τη σχέση (1.13) του προηγούμενου κεφαλαίου και το οποίο ονομάστηκε υπόδειγμα ARCH(q).

2.4 ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH

Μια ακόμη πιο γενική περίπτωση υποδείγματος ARCH αποτελεί το **γενικευμένο υπόδειγμα ARCH** (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model) ή **υπόδειγμα GARCH (p, q)** του οποίου η εξίσωση διακύμανσης έχει ως εξής:

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \quad (2.16)$$

με $p, q \in \mathbb{N}$. Για το υπόδειγμα αυτό ισχύουν, επιπλέον, οι σχέσεις (1.4), (1.11) και (1.12). Για την αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος του εν λόγω υποδείγματος, θα ισχύει ότι:

$$E(e_t) = E \left[u_t \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Δεδομένου ότι από τη στατιστική ανεξαρτησία των μεταβλητών u_t και e_t^2 προκύπτει και η στατιστική ανεξαρτησία των μεταβλητών u_t και h_t , η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$E(e_t) = E(u_t)E\left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

και εφόσον ισχύει η (2.2), θα προκύψει, για το υπόδειγμα GARCH(p, q), η σχέση (2.3) που ίσχυε και για το απλό υπόδειγμα ARCH. Για τη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος του εν λόγω υποδείγματος, θα ισχύει, επίσης, ότι:

$$Var(e_t) = E(e_t^2)$$

δηλαδή, ότι:

$$Var(e_t) = E\left[u_t^2 \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}\right)\right]$$

Όμοια με προηγουμένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Var(e_t) = E(u_t^2)E\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}\right)$$

Βάσει της σχέσεως (2.4), η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Var(e_t) &= E\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}\right) \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^q a_i E(e_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p b_j E(h_{t-j}) \end{aligned}$$

δηλαδή, ως:

$$Var(e_t) = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i Var(e_{t-i}) + \sum_{j=1}^p b_j E(h_{t-j}) \quad (2.17)$$

Για την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος στο υπό μελέτη υπόδειγμα, θα ισχύει ότι:

$$E(e_t | \Psi_{t-1}) = E \left[u_t \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \middle| \Psi_{t-1} \right]$$

Βάσει του γεγονότος ότι η στατιστική ανεξαρτησία μεταξύ της u_t και των h_t και e_t^2 , αντιστοίχως, ισχύει και υπό συνθήκη, η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$E(e_t | \Psi_{t-1}) = E(u_t | \Psi_{t-1}) E \left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \middle| \Psi_{t-1} \right]$$

Λόγω, όμως, της (2.6), θα προκύψει ότι για το υπόδειγμα GARCH(p, q) ισχύει η ίδια σχέση (η (2.7)) που ίσχυε για το απλό υπόδειγμα ARCH.

Για την υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος, ισχύει ότι:

$$Var(e_t | \Psi_{t-1}) = Var \left[u_t \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \middle| \Psi_{t-1} \right]$$

Ομοίως, λόγω της υπό συνθήκη στατιστικής ανεξαρτησίας μεταξύ της u_t και των h_t και e_t^2 , η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Var(e_t | \Psi_{t-1}) = Var(u_t | \Psi_{t-1}) Var \left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \middle| \Psi_{t-1} \right]$$

Επίσης, λόγω της σχέσεως (2.8), η παραπάνω σχέση λαμβάνει την εξής μορφή:

$$Var(e_t | \Psi_{t-1}) = Var \left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \middle| \Psi_{t-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= E \left[\left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)^{\frac{1}{2}} \mid \Psi_{t-1} \right] \\
 &= a_0 + \sum_{i=1}^q a_i E(e_{t-i}^2 \mid \Psi_{t-1}) + \sum_{j=1}^p b_j E(h_{t-j} \mid \Psi_{t-1}) \\
 &= a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}
 \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα, τη μορφή:

$$Var(e_t \mid \Psi_{t-1}) = h_t \quad (2.18)$$

Αποδεικνύεται ότι και στο υπόδειγμα GARCH(p, q) η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος της ερχόμενης περιόδου είναι πλήρως ορισμένη τόσο από τις τιμές των καταλοίπων όσο και από τις τιμές της υπό συνθήκη διακύμανσης της τρέχουσας και των παρελθουσών περιόδων. Ένα άλλο πλεονέκτημα των υποδειγμάτων ARCH είναι το ότι μέσω της εξίσωσης διακύμανσής τους παρέχεται ταυτοχρόνως τόσο η μορφή του τυχαίου σφάλματός του, όσο και η μορφή της υπό συνθήκη διακύμανσής του. Μέσω της σχέσης (2.18), επιπροσθέτως, στοιχειοθετείται η ύπαρξη του φαινομένου της υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας στο υπόδειγμα GARCH(p, q).

Βάσει της σχέσεως (1.4), για την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή, $E(y_t \mid \Psi_{t-1})$, της εξαρτημένης μεταβλητής, y_t του υποδείγματος, θα ισχύει ότι:

$$E(y_t \mid \Psi_{t-1}) = b_0 + b_1 y_{t-1} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} + E(e_t \mid \Psi_{t-1})$$

Λόγω της σχέσης (2.7), η παραπάνω σχέση λαμβάνει μορφή ίδια με εκείνη της σχέσεως (2.10). Συνεπώς, η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή της

εξαρτημένης μεταβλητής ενός υποδείματος GARCH(p,q) είναι πλήρως ορισμένη από τη σχέση (2.10).

Καθ' όμοιο τρόπο, για την υπό συνθήκη διακύμανση της y_t , θα ισχύει ότι:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = E\left[[y_t - E(y_t | \Psi_{t-1})]^2 \right]$$

δηλαδή, ότι:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = E\left[[(y_t | \Psi_{t-1}) - E(y_t | \Psi_{t-1})]^2 \right]$$

Λόγω της σχέσης (2.10) προκύπτει ότι η υπό συνθήκη διακύμανση της εξαρτημένης μεταβλητής του υποδείματος GARCH(p, q) ισούται, όπως ακριβώς και στο απλό ARCH υπόδειγμα, με την τιμή της μεταβλητής h_t κατά τη χρονική στιγμή t (σχέση (2.11)). Η τελευταία, όμως, μεταβλητή είναι πλήρως ορισμένη από τιμές προηγούμενων περιόδων, τόσο της ίδιας όσο και των τετραγώνων των καταλοίπων του υποδείματος. Συνεπώς, αν, σε ένα υπόδειγμα GARCH(p, q), με τη μεταβλητή y_t συμβολιστεί η αξία ενός κεφαλαίου, τότε ο επενδυτής είναι σε θέση να γνωρίζει τόσο την απόδοση της επένδυσής του (υπολογίζοντας την $E(y_t | \Psi_{t-1})$) όσο και τον κίνδυνο από τον οποίο αυτή χαρακτηρίζεται, αφού αυτός είναι πλήρως ορισμένος, για κάθε χρονική περίοδο, από τις τιμές των καταλοίπων αλλά και των διακυμάνσεων του τυχαίου σφάλματος των προηγούμενων περιόδων. Η σχέση (2.13), επίσης, που ισχύει και για το GARCH(p, q) υπόδειγμα, δηλώνει ξεκάθαρα την πλήρη απουσία αυτοσυσχέτισης στο εν λόγω υπόδειγμα.

Η **ευστάθεια** του υποδείγματος επιτυγχάνεται όταν ισχύει η συνθήκη (2.14) αλλά και οι κάτωθι προτάσεις:

$$0 < a_i < 1 \quad (2.19)$$

για κάθε $i \in [1, \mathbf{K}, q]$ και:

$$0 < b_j < 1 \quad (2.20)$$

για κάθε $j \in [1, \mathbf{K}, p]$. Μέσω, επίσης, των παραπάνω συνθηκών, εξασφαλίζεται τόσο η **θετικότητα** των τιμών της h_t , όσο και το γεγονός ότι οι τιμές αυτές ανήκουν στο σύνολο των **πραγματικών αριθμών**. Από τις σχέσεις (2.1) και (2.16), τέλος, προκύπτει ότι το απλό υπόδειγμα ARCH αποτελεί ειδική περίπτωση υποδείγματος GARCH(p, q) και, ως εκ τούτου, μπορεί κάλλιστα να συμβολίζεται ως GARCH(0, 1).

2.5 ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ARCH ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Στην παράγραφο αυτή αναπτύσσεται η μεθοδολογία με την οποία διαπιστώνεται η ύπαρξη ARCH και GARCH σφαλμάτων. Στο εξής, με τον όρο σφάλματα ARCH θα εννοούνται όροι της μορφής $a_{q'} e_{t-q'}$ στην εξίσωση διακύμανσης ενός υποδείγματος, ενώ προσθετέοι της μορφής $b_{p'} h_{t-p'}$ στην εν λόγω εξίσωση θα καλούνται σφάλματα GARCH. Θα πρέπει να τονιστεί ότι, μολονότι ο σκοπός της παραγράφου αυτής είναι το να αναφερθεί κύρια στον έλεγχο ενός υποδείγματος, δεν είναι δυνατό να παραληφθεί η τακτική αναφορά στην εκτίμηση του υποδείγματος παρόλο που το ζήτημα αυτό καλύπτεται εκτενέστατα στη μεθεπόμενη παράγραφο.

Η διαδικασία ελέγχου των δεδομένων (παρατηρήσεων) μιας χρονοσειράς για πιθανή παρουσία του φαινομένου ARCH, χαρακτηρίζεται από τα εξής στάδια:

1^ο Στάδιο:

Προσδιορισμός του AR-τμήματος της εξίσωσης μέσου όρου του υποδείγματος

1^ο Βήμα:

Λαμβάνονται οι παρατηρήσεις, y_t , της εξαρτημένης μεταβλητής του υποδείγματος.

2^ο Βήμα:

Υπολογίζεται ο εκτιμηθείς δειγματικός μέσος όρος, \hat{m}_y , της ποσότητας y_t με βάση τη σχέση:

$$\hat{m}_y = \sum_{t=1}^n \frac{y_t}{n}$$

όπου n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

3^ο Βήμα:

Υπολογίζεται η εκτιμηθείσα δειγματική διακύμανση, \hat{s}_y^2 , της ποσότητας y_t με βάση τη σχέση:

$$\hat{s}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{m}_y)^2$$

4^ο Βήμα:

Υπολογίζονται οι δειγματικές αυτοσυσχετίσεις των τιμών y_t με βάση τη σχέση:

$$r_y(i) = \frac{\sum_{t=i+1}^n (y_t - \bar{m}_y)(y_{t-i} - \bar{m}_y)}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{m}_y)^2}$$

5^ο Βήμα:

Για δεδομένες τιμές του i κατασκευάζεται η γραφική παράσταση των $r_y(i)$ που ονομάζεται και κορελόγραμμα (correlogram). Τιμές της $r_y(i)$ που υπερβαίνουν την τιμή $n^{-\frac{1}{2}}$ δηλώνουν ύπαρξη προσθετών της μορφής $b_i y_{t-i}$ στην εξίσωση μέσου όρου του υποδείγματος.

6^ο Βήμα:

Αφού προσδιορισθεί η πιθανή μορφή του AR-τμήματος της εξίσωσης μέσου όρου του υποδείγματος, το υπόδειγμα εκτιμάται σαν υπόδειγμα AR και φυλάττονται οι τιμές των καταλοίπων του, $\hat{\epsilon}_t$, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι στο επόμενο στάδιο της διαδικασίας.

2^ο Στάδιο:

Προσδιορισμός του MA-τμήματος της εξίσωσης μέσου όρου του υποδείγματος

1^ο Βήμα:

Από τις τιμές των καταλοίπων, \hat{e}_t' , που συλλέχθηκαν κατά το προηγούμενο στάδιο, υπολογίζεται ο εκτιμηθείς δειγματικός όρος τους, $\hat{m}_{e'}$, με βάση τη σχέση:

$$\hat{m}_{e'} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{e}_t'$$

Στις περιπτώσεις των υποδειγμάτων που μελετώνται, όμως, θα ισχύει ότι:

$$\hat{m}_{e'} = 0$$

2^ο Βήμα:

Υπολογίζεται η εκτιμηθείσα δειγματική διακύμανση, $\hat{s}_{e'}^2$, των τιμών των καταλοίπων, με βάση τη σχέση:

$$\hat{s}_{e'}^2 = \sum_{t=1}^n \frac{(\hat{e}_t')^2}{n}$$

3^ο Βήμα:

Υπολογίζονται οι δειγματικές αυτοσυσχετίσεις, $r_e(i)$, των τιμών \hat{e}_t' .

4^ο Βήμα:

Για δεδομένες τιμές του i κατασκευάζεται το κορελόγραμμα $r_e(i)$. Τιμές της $r_e(i)$ που υπερβαίνουν την τιμή $\frac{-1}{n^2}$ δηλώνουν ύπαρξη προσθετών της μορφής $C_i e_{t-i}$ στην εξίσωση μέσου όρου του υποδείγματος.

5^ο Βήμα:

Αφού προσδιορισθεί η πιθανή μορφή της εξίσωσης μέσου όρου του υποδείγματος, το υπόδειγμα εκτιμάται σαν υπόδειγμα ARMA και φυλάττονται οι νέες τιμές των καταλοίπων του, $\hat{\epsilon}_t''$.

6^ο Βήμα:

Προκειμένου να διαπιστωθούν MA – όροι που δε συμπεριλήφθηκαν στην εξίσωση μέσου όρου του υποδείγματος, η διαδικασία μεταφέρεται εκ νέου στο 3^ο βήμα του 2^{ου} σταδίου. Για το κάθε νέο υπόδειγμα ARMA που προκύπτει, υπολογίζονται τα πληροφοριακές συναρτήσεις AIC και SBC, προκειμένου να ευρεθεί το επικρατέστερο υπόδειγμα.

7^ο Βήμα:

Από το ARMA υπόδειγμα που, τελικά, επικρατεί, φυλάσσονται οι τιμές των καταλοίπων του, $\hat{\epsilon}_t$, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι για το επόμενο στάδιο.

3^ο Στάδιο:

Προσδιορισμός των ARCH σφαλμάτων του υποδείγματος

1^ο Βήμα:

Λαμβάνονται τα τετράγωνα $\hat{\epsilon}_t^2$ των καταλοίπων.

2^ο Βήμα:

Υπολογίζεται η εκτιμηθείσα δειγματική διακύμανση, \hat{s}^2 , των καταλοίπων με βάση τη σχέση:

$$\hat{s}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n}$$

εφόσον:

$$E(e_i) = 0$$

3^ο Βήμα:

Υπολογίζονται οι δειγματικές αυτοσυσχετίσεις, $r_{e^2}(i)$, των τετραγώνων, e_i^2 .

4^ο Βήμα:

Για δεδομένη τιμή του i κατασκευάζεται το κορελόγραμμα, $r_{e^2}(i)$. Τιμές της $r_{e^2}(i)$ που υπερβαίνουν την τιμή $n^{-\frac{1}{2}}$ δηλώνουν ύπαρξη προσθετών της μορφής $a_i e_{i-i}^2$ στην εξίσωση διακύμανσης του υποδείγματος. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η στατιστική συνάρτηση Q των Ljung – Box. Αυτή, ορίζεται ως εξής:

$$Q = n(n+2) \sum_{i=1}^w \left[r(i) \frac{1}{n-i} \right]$$

με:

$$w \leq \frac{n}{4}$$

Εάν τα επιμέρους $\hat{\epsilon}_t^2$ είναι μεταξύ τους ασυσχέιστα, τότε η Q ακολουθεί την κατανομή X^2 με m βαθμούς ελευθερίας. Απορριπτομένης της μηδενικής υπόθεσης ότι τα $\hat{\epsilon}_t^2$ είναι μεταξύ τους ασυσχέιστα, γίνεται αυτομάτως δεκτή η ύπαρξη ARCH σφαλμάτων στην εξίσωση διακύμανσης του υποδείγματος.

5^ο Βήμα:

Για τις τιμές των i για τις οποίες εμφανίζονται σφάλματα ARCH, γίνεται, ακολούθως, έλεγχος υποθέσεων με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης LM . Η μηδενική υπόθεση:

$$H_0 : a_1 = \mathbf{L} = a_q = 0$$

ότι, δηλαδή, δεν έχουμε σφάλματα ARCH, γίνεται δεκτή όταν ισχύει η σχέση:

$$LM \leq X_{q,a}^2$$

στην οποία $X_{q,a}^2$ είναι η κρίσιμη τιμή της κατανομής X^2 για επίπεδο σημαντικότητας a . Διαφορετικά, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, γεγονός που επιβεβαιώνει την ύπαρξη των ARCH σφαλμάτων στο υπόδειγμα.

4^ο Στάδιο:

Προσδιορισμός των GARCH σφαλμάτων του υποδείγματος

1ο Βήμα:

Προσδιορίζεται η εκτιμηθείσα τιμή, \hat{h}_t , της υπό συνθήκη διακύμανσης των τιμών του τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος μέσω του υποδείγματος ARCH που θεωρήθηκε, κατά το προηγούμενο στάδιο, ότι αποτελεί την

εξίσωση διακύμανσης του προς μελέτη φαινομένου. Η σχέση που, τελικώς, προκύπτει, είναι η εξής:

$$\hat{h}_t = a_0 + a_1 \hat{e}_{t-q}^2 + \mathbf{K} + a_q \hat{e}_{t-q}^2$$

2^ο Βήμα:

Υπολογίζεται η εκτιμηθείσα τιμή του μέσου όρου, \hat{m}_h , της \hat{h}_t , με βάση τη σχέση:

$$\hat{m}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{h}_t$$

3^ο Βήμα:

Υπολογίζεται η εκτιμηθείσα δειγματική διακύμανση, \hat{s}_h^2 , της \hat{h}_t , με βάση τη σχέση:

$$\hat{s}_h^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{h}_t - \hat{m}_h)^2$$

4^ο Βήμα:

Υπολογίζονται οι δειγματικές αυτοσυσχετίσεις, $r_h(i)$, της \hat{h}_t .

5^ο Βήμα:

Για δεδομένη τιμή του i κατασκευάζεται το κορελόγραμμα, $r_h(i)$. Τιμές της $r_h(i)$ που υπερβαίνουν την ποσότητα $n^{-\frac{1}{2}}$ δηλώνουν ύπαρξη GARCH σφαλμάτων στην εξίσωση διακύμανσης του υποδείγματος.

6^ο Βήμα:

Το υπόδειγμα που προέκυψε, εκτιμάται με τη μέθοδο ML και συλλέγεται η τιμή της L . Κατόπιν, η διαδικασία μεταβαίνει εκ νέου στο 2^ο στάδιο.

7^ο Βήμα:

Από όσα υποδείγματα εκτιμήθηκαν προτιμάται, τελικά, εκείνο, του οποίου η τιμή της L είναι η μέγιστη.

2.6 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ GARCH ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΤΟΝ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΩΝ Η.Π.Α.

Όπως είναι γνωστό, οι ανά τον κόσμο εταιρείες ενδιαφέρονται να προβλέπουν τον πληθωρισμό που θα επικρατεί στις χώρες όπου δραστηριοποιούνται σε τρόπο ώστε να καταρτίζουν τις ανάλογες συμβάσεις εργασίας με τους εργαζομένους τους. Η Οικονομική Επιστήμη θεωρεί πως οι όροι μισθοδοσίας είναι ισχυρά εξαρτώμενοι τόσο από την πρόβλεψη του πληθωρισμού όσο και από την αβεβαιότητα που τη συνοδεύει. Η απόπειρα προσδιορισμού, από τον

Bollerslev το 1986, του καταλλήλου υποδείγματος GARCH που θα περιέγραφε τον πληθωρισμό των Η.Π.Α. αποτέλεσε ένα πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα σύγκρισης μεταξύ:

- i) ενός «σταθερού» αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος, δηλαδή ενός υποδείγματος που υποθέτει σταθερή διακύμανση,
- ii) ενός υποδείγματος ARCH και
- iii) ενός υποδείγματος GARCH.

Ο Engle, αρχικά (το 1983), χρησιμοποίησε για τη μαθηματική διατύπωση του ως άνω προβλήματος, την ακόλουθη σχέση:

$$y_t = 100 \ln \left(\frac{GD_t}{GD_{t-1}} \right)$$

στην οποία το GD_t παριστά τον αποπληθωριστή τιμών (implicit price deflator) του ΑΕΠ (Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν) των Η.Π.Α. Λαμβάνοντας δεδομένα τριμήνων από το δεύτερο τρίμηνο του 1948 (1948 II) έως το τέταρτο τρίμηνο του 1983 (1983 IV) συγκέντρωσε 143 παρατηρήσεις και μετερχόμενος τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιόρισε το παρακάτω υπόδειγμα:

$$y_t = 0,240 + 0,552y_{t-1} + 0,177y_{t-2} + 0,232y_{t-3} - 0,209y_{t-4} + e_t$$

(0,080) (0,083) (0,089) (0,090) (0,080)

$$h_t = 0,282$$

(0,034)

Οι παρενθέσεις κάτω από τους συντελεστές του υποδείγματος δηλώνουν το **τυπικό σφάλμα** (standard error) το οποίο χαρακτηρίζει τις αντίστοιχες εκτιμήσεις τους. Το υπόδειγμα αυτό αποδεικνύεται **στάσιμο** ενώ κανένας από τους δέκα πρώτους όρους των συναρτήσεων πλήρους αυτοσυσχέτισης (ACF)

ή και μερικής αυτοσυσχέτισης (PCF) για το e_t δεν είναι στατιστικά σημαντικός σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Αντιθέτως, ο 1^{ος}, ο 3^{ος}, ο 7^{ος}, ο 9^{ος} και ο 10^{ος} όρος των ACF και PCF για το e_t^2 είναι στατιστικά σημαντικοί για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας. Επιπροσθέτως, οι LM έλεγχοι για πιθανή ύπαρξη υποδειγμάτων ARCH(1), ARCH(4) και ARCH(8) παρουσιάζουν υψηλή σημαντικότητα. Τα παραπάνω αποτελέσματα οδήγησαν τον Engle – μαζί με τον Kraft – να εισάγει το παρακάτω υπόδειγμα ARCH του οποίου οι εξισώσεις μέσου όρου και διακύμανσης είχαν ως εξής:

$$y_t = 0,138 + 0,423y_{t-1} + 0,222y_{t-2} + 0,377y_{t-3} - 0,175y_{t-4} + e_t$$

(0,059) (0,081) (0,108) (0,078) (0,104)

$$h_t = 0,058 + 0,802 \sum_{i=1}^8 \frac{9-i}{36} e_{t-i}^2$$

(0,033) (0,265)

Ανασκοπούμενων των δύο προηγούμενων υποδειγμάτων, διαπιστώνεται ότι οι εξισώσεις μέσου όρου τους παρουσιάζουν μεταξύ τους αρκετές ομοιότητες. Ενώ, όμως, στο πρώτο υπόδειγμα το τυχαίο σφάλμα παρουσιάζει υπό συνθήκη διακύμανση σταθερή, στο δεύτερο υπόδειγμα η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος έχει μορφή φθίνουσας γεωμετρικής σειράς. Άμεση συνέπεια του προαναφερθέντος γεγονότος είναι το να λαμβάνονται και από τα δύο υποδείγματα παραπλήσιες προβλέψεις για τις τιμές του πληθωρισμού. Όμως, τα διαστήματα εμπιστοσύνης που αντιστοίχως εξάγονται, διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους. Για το μεν πρώτο υπόδειγμα το διάστημα εμπιστοσύνης είναι σταθερό, ενώ το δεύτερο υπόδειγμα εξάγει ένα διάστημα εμπιστοσύνης που είναι αρκετά ευρύ σε περιόδους έντονης

μεταβλητότητας του πληθωρισμού και αρκετά περιορισμένο σε περιόδους σχετικής σταθερότητάς του.

Ο Bollerslev, στη συνέχεια (το 1986), θέλωντας να ερευνήσει την πιθανή ύπαρξη σφαλμάτων GARCH στην όλη διαδικασία κατέληξε σε υπόδειγμα του οποίου η υπό συνθήκη διακύμανση δινόταν από την ακόλουθη σχέση:

$$h_t = a_0 + a_1 \sum_{i=1}^8 \frac{9-i}{36} e_{t-i}^2 + b_1 h_{t-1}$$

δηλαδή, από ένα υπόδειγμα GARCH(1,8). Κατόπιν, εφάρμοσε τον έλεγχο LM, με τη στατιστική συνάρτηση LM να υπακούει στην κατανομή X^2 ενός βαθμού ελευθερίας (εφόσον έθεσε ως $n=1$) και υπολόγισε την τιμή της στατιστικής συνάρτησης nR^2 την οποία βρήκε ίση προς 4,57. Από τη στιγμή, μάλιστα, όπου:

$$4,57 > X_{1,95}^2$$

συνήγαγε το συμπέρασμα της στατιστικής σημαντικότητας της μεταβλητής h_{t-1} σε επίπεδο 5% και τεκμηρίωσε κατ' αυτό τον τρόπο την ύπαρξη υποδείματος GARCH πρώτου βαθμού. Στη συνέχεια, εκτίμησε το ως άνω υπόδειγμα και προσδιόρισε, για τις εξισώσεις μέσου όρου και διακύμανσής του, τις εξής σχέσεις:

$$y_t = 0,141 + 0,433y_{t-1} + 0,229y_{t-2} + 0,349y_{t-3} - 0,162y_{t-4} + \varepsilon_t \quad (2.21)$$

(0,060) (0,081) (0,110) (0,077) (0,104)

$$h_t = 0,007 + 0,135.e_{t-1}^2 + 0,829h_{t-1} \quad (2.22)$$

(0,006) (0,070) (0,068)

Διενεργώντας, τέλος, νέο έλεγχο LM για πιθανή ύπαρξη του όρου h_{t-2} , ο Bollerslev κατέληξε σε μη στατιστική σημαντικότητα του όρου αυτού σε επίπεδο 5% και το γεγονός αυτό τον ώθησε στο συμπέρασμα ότι το ανωτέρω υπόδειγμα (των σχέσεων (2.21) και (2.22)) ήταν και το πλέον ενδεδειγμένο για την περιγραφή του πληθωρισμού των Η.Π.Α.

Στα παραδείγματα που μελετήθηκαν κατά την παράγραφο αυτή, δεν κατέστη δυνατόν να αποφευχθεί η αναφορά στην εκτίμηση των προς εξέταση υποδειγμάτων την οποία οι προαναφερόμενοι ερευνητές διενήργησαν με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Η πιο δημοφιλής, όμως, μέθοδος για την εκτίμηση ARCH και GARCH υποδειγμάτων είναι εκείνη της **μεγίστης πιθανοφάνειας**, η οποία αναπτύσσεται διεξοδικά στην παράγραφο που ακολουθεί.

2.7 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ARCH ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Με τον όρο «εκτίμηση υποδείγματος» εννοεί κανείς τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων ενός υποδείγματος, ενέργεια καθοριστικής σημασίας για τη μελέτη οποιουδήποτε οικονομικού φαινομένου. Ειδικότερα, για το υπόδειγμα GARCH(p, q), που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2.4, θα χρησιμοποιηθεί, ως μέθοδος εκτίμησής του, η **μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας** (maximum likelihood estimation ή **MLE**) υπό την παραδοχή πως οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, y_t , κατανομονται κανονικά με μέσο

όρο m και διακύμανση s^2 . Από το γεγονός αυτό συνάγεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων της y_t , για $t=1, 2, \mathbf{K}, n$, επαληθεύει την ακόλουθη σχέση:

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2s^2}(y_t-m)^2}$$

Επομένως, δεδομένου ότι οι επιμέρους κατανομές y_t είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων όλων των κατανομών αυτών προσδιορίζεται ως εξής:

$$f(y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n) = f(y_1)f(y_2)\mathbf{K}f(y_n) = \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2ps^2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2s^2}(y_t-m)^2}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων, $f(y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n)$, της παραπάνω σχέσης, καλείται **συνάρτηση πιθανοφανείας** (likelihood function) και συμβολίζεται με το λατινικό κεφαλαίο γράμμα L . Η δε λογαριθμική μορφή της ανωτέρω συνάρτησης έχει ως εξής:

$$\ln L = \sum_{t=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln(2ps^2) - \frac{1}{2s^2} (y_t - m)^2 \right] = -\frac{1}{2} n \ln(2ps^2) - \frac{1}{2s^2} \sum_{t=1}^n (y_t - m)^2$$

δηλαδή, ως ακολούθως:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2p) - \frac{n}{2} \ln s^2 - \frac{1}{2s^2} \sum_{t=1}^n (y_t - m)^2$$

Όπως είναι ήδη γνωστό, ισχύει ότι:

$$m = b_0 + b_1 y_{t-1} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} = b_0 + \sum_{w=1}^k b_w y_{t-w}$$

καθώς επίσης και ότι:

$$s_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}$$

με $k, p, q \in \mathbb{N}$. Με βάση τα παραπάνω, λαμβάνεται ότι:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2p) - \frac{n}{2} \ln \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right) - \frac{1}{2 \left(a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j} \right)} \sum_{t=1}^n \left(y_t - b_0 - \sum_{w=1}^k b_w y_{t-w} \right)$$

Αντικαθιστώντας, στη συνέχεια, την κάθε παράμετρο με τον εκτιμητή που της αντιστοιχεί, προκύπτει, ως τελική σχέση, η εξής:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2p) - \frac{n}{2} \ln \left(\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{a}_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{b}_j h_{t-j} \right) - \frac{1}{2 \left(\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{a}_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{b}_j h_{t-j} \right)} \sum_{t=1}^n \left(y_t - \hat{b}_0 - \sum_{w=1}^k \hat{b}_w y_{t-w} \right)$$

όπου $i \in (0, \mathbf{K}, q)$, $j \in (0, \mathbf{K}, p)$ και $w \in (0, \mathbf{K}, k)$. Η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφανείας προστάζει ότι οι αριθμητικές τιμές των ζητούμενων εκτιμητών προσδιορίζονται δια της μεγιστοποίησης της τελευταίας σχέσης ως προς \hat{a}_i, \hat{b}_j και \hat{b}_w , δηλαδή μέσω της πλήρωσης της συνθήκης:

$$\max_{\hat{a}_i, \hat{b}_j, \hat{b}_w} \ln L$$

η οποία επιτυγχάνεται με συναλήθευση των αντιστοίχων συνθηκών πρώτης και δεύτερας τάξεως. Θα πρέπει να τονιστεί, πάντως, πως, λόγω της πολυπλοκότητάς της, η εφαρμογή της ως άνω μεθοδολογίας καθιστά επιτακτική τη χρήση κατάλληλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

2.8 ΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΣΕ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ARCH ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οι έως τώρα αναλύσεις, εστιάστηκαν σε προβλέψεις που αφορούσαν μόνον την επομένη της τρέχουσας περιόδου. Στην παράγραφο αυτή, όμως, πρόκειται να διευρυνθεί ο χρονικός ορίζοντας των επιχειρουμένων προβλέψεων αφού μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα των υποδειγμάτων ARCH είναι εκείνη της αποτίμησης της ακρίβειας μιας πρόβλεψης η οποία επέχει έναν χρονικό ορίζοντα s , όπου $s \in \mathbb{N}$. Όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, κατά τη μελέτη των χρονοσειρών που χαρακτηρίζονται από διαδικασίες ARMA υπό συνθήκη ομοσκεδαστικότητας, η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης **δεν** εξαρτάται από το **τρέχον πληροφοριακό σύνολο**, Ψ_t . Αντίθετα, στις υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας διαδικασίες, το Ψ_t είναι ικανό να προσδιορίσει μονοσήμαντα την ακρίβεια με την οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί μία πρόβλεψη.

Στην παράγραφο αυτή, αφ' ενός περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία υπό την οποία η εκτενούς χρονικού ορίζοντα πρόβλεψη διενεργείται και, αφ' ετέρου, επιτυγχάνεται η μέτρηση της αβεβαιότητας μιας τέτοιας πρόβλεψης. Για το σκοπό αυτό, κρίνεται σκόπιμο να θεωρηθεί μια εξαρτημένη μεταβλητή, y_t , η οποία να περιγράφεται από μια εξίσωση όπως αυτή που ακολουθεί:

$$y_t = b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} + e_t + q_1 e_{t-1} + \mathbf{K} + q_l e_{t-l}$$

ή ισοδύναμα, από μια εξίσωση της μορφής:

$$y_t + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \mathbf{K} + b_k y_{t-k} = e_t + q_1 e_{t-1} + q_2 e_{t-2} + \mathbf{K} + q_l e_{t-l} \quad (2.23)$$

Κατόπιν, με B_m , όπου $m \in \mathbf{N}$, θα συμβολίζεται ο τελεστής χρονοκαθυστέρησης, ο οποίος ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$B^m c_t = c_{t-m} \quad (2.24)$$

στην οποία η c_t θα είναι μία τυχαία μεταβλητή που περιγράφει παρατηρήσεις προερχόμενες από χρονοσειρές. Με βάση την τελευταία σχέση, η (2.23) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_t + b_1 B y_t + b_2 B^2 y_t + \mathbf{K} + b_k B^k y_t &= e_t + q_1 B e_t + q_2 B^2 e_t + \mathbf{K} + q_l B^l e_t \\ &= (1 + q_1 B + q_2 B^2 + \mathbf{K} + q_l B^l) e_t \end{aligned}$$

δηλαδή, ως:

$$\underline{b}(B) y_t = \underline{q}(B) e_t \quad (2.25)$$

όπου:

$$\underline{b}(B) = 1 + b_1 B + b_2 B^2 + \mathbf{K} + b_k B^k \quad (2.26)$$

και:

$$\underline{q}(B) = 1 + q_1 B + q_2 B^2 + \mathbf{K} + q_l B^l \quad (2.27)$$

Αν με την τιμή y_t συμβολιστεί η τρέχουσα κατάσταση του συστήματος, τότε η y_{t+s} θα αντιστοιχεί στην κατάσταση στην οποία θα περιέλθει το σύστημα με την παρέλευση s χρονικών περιόδων (ή στιγμών). Με βάση τη σχέση (2.25), η y_{t+s} θα δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί:

$$y_{t+s} = \sum_{i=1}^k b_i y_{t+s-i} + \sum_{i=1}^l q_i e_{t+s-i} + e_{t+s} \quad (2.28)$$

Η **βέλτιστη πρόβλεψη** που μπορεί να επιτευχθεί για την y_{t+s} δεν είναι άλλη από την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $E(y_{t+s} | \Psi_t)$, για την οποία, με βάση τη (2.28), θα ισχύει ότι:

$$E(y_{t+s} | \Psi_t) = \sum_{i=1}^k b_i E(y_{t+s-i} | \Psi) + \sum_{i=1}^l q_i E(e_{t+s-i} | \Psi_t) \quad (2.29)$$

Ας θεωρηθεί ότι στο σύστημα που μελετάται η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος περιγράφεται από ένα GARCH(p, q) υπόδειγμα. Για το τυχαίο σφάλμα τότε καθώς και για την υπό συνθήκη διακύμανσή του, θα ισχύουν οι σχέσεις (1.4) και (2.16), αντίστοιχα. Οπότε:

$$E(e_{t+s-i} | \Psi_t) = E(u_{t+s} | \Psi_t) E(h_{t+s} | \Psi_t) = 0$$

αφού:

$$E(u_{t+s} | \Psi_t) = 0$$

Εάν ως t' συμβολιστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία μελετάται το σύστημα, θα ισχύει, τότε, ότι:

$$t' = t + s - i$$

με το t να αντιστοιχεί στην παρούσα χρονική στιγμή. Οι **παρελθούσες** χρονικές στιγμές μελέτης του συστήματος θα προσδιορίζονται, συνεπώς, από την εξής σχέση:

$$t' \leq t \Leftrightarrow t + s - i \leq t$$

$$\Leftrightarrow i \geq s$$

Για $i \geq s$ είναι προφανές ότι:

$$E(y_{t+s-i} | \Psi_t) = y_{t+s-i}$$

καθώς, επίσης και ότι:

$$E(e_{t+s-i} | \Psi_t) = e_{t+s-i}$$

διότι τα γεγονότα τα οποία περιγράφονται έχουν ήδη καταγραφεί και δεν μπορούν πλέον να αλλάξουν. Αντίθετα, για τις **μελλοντικές** στιγμές μελέτης του συστήματος, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} t' > t &\Leftrightarrow t + s - i > t \\ &\Leftrightarrow i < s \end{aligned}$$

θα ισχύει ότι:

$$E(e_{t+s-i} | \Psi_t) = 0 \quad (2.30)$$

Κατόπιν, από τις σχέσεις (2.29) και (2.30) εξάγεται η παρακάτω πρόταση:

$$E(y_{t+s} | \Psi_t) = \sum_{i=1}^K b_i E(y_{t+s-i} | \Psi_t)$$

Θεωρουμένου, όμως, του ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\underline{b}(B)$ του συστήματος κείνται εκτός του μοναδιαίου μιγαδικού κύκλου, από τις σχέσεις (2.28), (2.26) και (2.27), μπορεί κάλλιστα να προκύψει πως:

$$y_{t+s} = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i e_{t+s-i} \quad (2.31)$$

όπου:

$$g_i = [b(B)^{-1}] q(B)$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς, λαμβάνεται, επίσης, ότι:

$$E(y_{t+s} | \Psi_t) = \sum_{i=s-1}^{+\infty} g_i e_{t+s-i} \quad (2.32)$$

Ακολουθως, ορίζεται ως **σφάλμα** μιας πρόβλεψης χρονικού ορίζοντα s , η ποσότητα $l_{t,s}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$l_{t,s} = y_{t+s} - \mathbb{E}(y_{t+s} | \Psi_t) \quad (2.33)$$

Λόγω των σχέσεων (2.31) και (2.33), η (2.33) παίρνει την εξής μορφή:

$$l_{t,s} = \sum_{i=0}^{s-1} g_i e_{t+s-i}$$

και, λόγω της (2.27), θα ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}(l_{t,s} | \Psi_t) = 0$$

Επίσης, για τη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης, θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\text{Var}(l_{t,s} | \Psi_t) = \sum_{i=0}^{s-1} g_i^2 \mathbb{E}(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t) \quad (2.34)$$

Η μελέτη που θα διενεργηθεί, πρόκειται να εστιαστεί στον προσδιορισμό της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης, $\text{Var}(l_{t,s} | \Psi_t)$. Για το σκοπό αυτό, όμως, απαραίτητο είναι να προηγηθεί η εύρεση της υπό συνθήκη διακύμανσης, $\mathbb{E}(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t)$, του τυχαίου σφάλματος του θεωρουμένου υποδείγματος.

2.8.1 ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία το τυχαίο σφάλμα τελεί υπό συνθήκη **ομοσκεδαστικότητας**. Σε μια τέτοια περίπτωση θα ισχύει ότι:

$$E(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t) = s_e^2 \quad (2.35)$$

με s_e^2 να είναι η διακύμανση του τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος. Με βάση τη (2.78), η σχέση (2.77) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Var(l_{t,s} | \Psi_t) = s_e^2 \sum_{i=0}^{s-1} g_i^2$$

Η ως άνω σχέση εκφράζει ότι στα υπό συνθήκη ομοσκεδαστικότητας υποδείγματα, η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης εξαρτάται μόνον από το χρονικό ορίζοντα, s , της πρόβλεψης και όχι από το πληροφοριακό σύνολο Ψ_t . Το αντίθετο ακριβώς ισχύει για τα ARCH υποδείγματα. Πράγματι, θεωρώντας το GARCH(p, q) υπόδειγμα των σχέσεων (1.4), (2.16) και (1.11) και θέτοντας, κατόπιν, ως:

$$V_t = e_t^2 - h_t$$

προκύπτει ότι:

$$e_{t+s}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) e_{t+s-i}^2 - \sum_{i=1}^p b_i V_t + V_{t+s} \quad (2.36)$$

όπου:

$$m = \max(p, q)$$

Ισχύει, επίσης, η παρακάτω σχέση:

$$E(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t) = e_{t+s-i}^2$$

καθώς και η σχέση:

$$E(V_{t+s-i}^2 | \Psi_t) = V_{t+s-i}^2 \quad (2.37)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$E(V_{t+s-i}^2 | \Psi_t) = 0$$

για $i \geq s$. Με βάση τις σχέσεις αυτές, προκύπτει (για $i < s$) η παρακάτω ισότητα:

$$E(e_{t+s}^2 | \Psi_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) E(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t) - \sum_{i=1}^p b_i E(V_{t+s-i} | \Psi_t) \quad (2.38)$$

Από τη (2.38), γίνεται, για όλες τις μελλοντικές χρονικές στιγμές, φανερή η εξάρτηση της ποσότητας $E(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t)$ από το τρέχον πληροφοριακό σύνολο, Ψ_t , το οποίο εμπειρικλείει πληροφορία για τις παρελθούσες καταστάσεις του υπό μελέτη συστήματος. Η δε εξάρτηση αυτή υπεισέρχεται και στη ζητούμενη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης, $Var(l_{t,s} | \Psi_t)$.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει η περιγραφή της συμπεριφοράς της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης για μεγάλες τιμές του χρονικού ορίζοντα πρόβλεψης, s . Για s μεγαλύτερο του p , η σχέση (2.38) δίδει ότι:

$$E(e_{t+s}^2 | \Psi_t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) E(e_{t+s-i}^2 | \Psi_t)$$

Ακολούθως, θεωρουμένου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, $\Pi(z)$, της ανωτέρω εξίσωσης, θα ισχύει ότι:

$$\Pi(z) = 1 - (a_1 + b_1)z - \mathbf{K} - (a_m + b_m)z^m \Rightarrow \Pi(z) = 1 - a(z) - b(z)$$

Εάν οι ρίζες του ως άνω πολυωνύμου κείνται εκτός του μοναδιαίου μιγαδικού κύκλου, τότε θα ισχύει ότι:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E(e_{t+s}^2 | \Psi_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - \mathbf{K} - a_q - b_1 - \mathbf{K} - b_p} \quad (2.39)$$

Από την παραπάνω σχέση, (2.39), γίνεται φανερό πως για μεγάλους χρονικούς ορίζοντες προβλέψεων οι πληροφορίες που είναι ικανό να παράσχει το τρέχον πληροφοριακό σύνολο, Ψ_t , δε βοηθούν καθόλου στον προσδιορισμό της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης, $Var(l_{t,s} | \Psi_t)$.

2.8.2 ΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΣΕ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH(4)

Για την εφαρμογή των όσων θεμελιώθηκαν προηγουμένως θεωρείται το υπόδειγμα ARCH(4), το οποίο περιγράφηκε από τις σχέσεις (1.4) και (1.11). Για την υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος του εν λόγω υποδείγματος, ισχύει ότι:

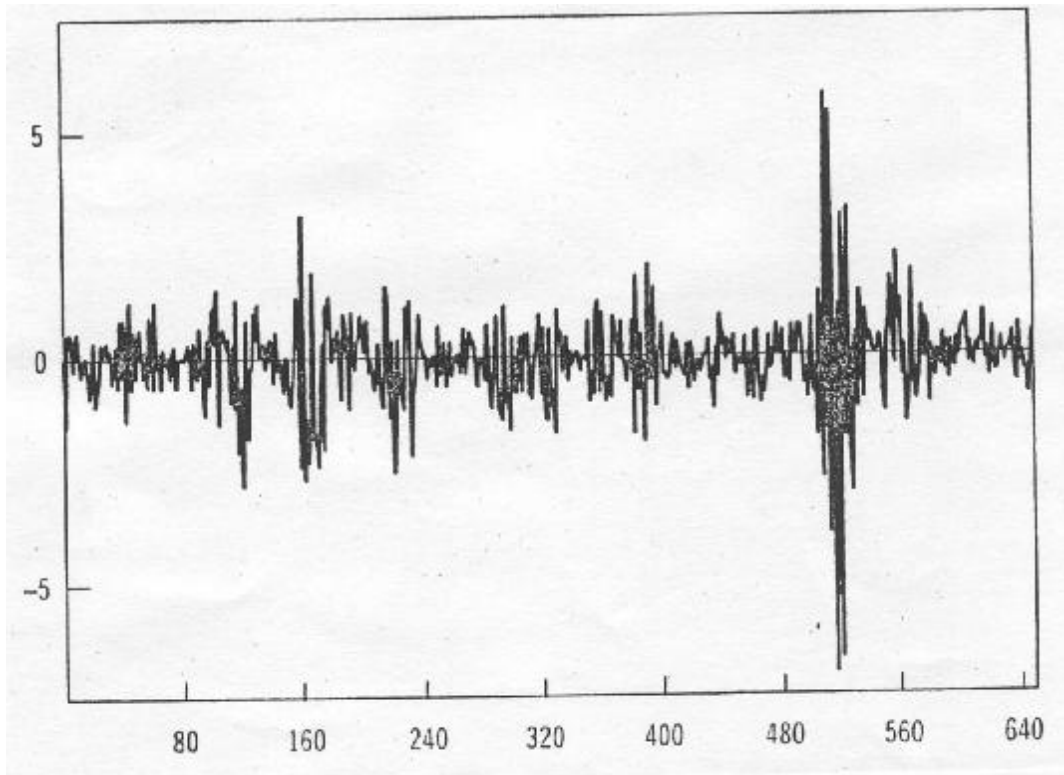
$$h_t = 0,10 + 0,36e_{t-1}^2 + 0,27e_{t-2}^2 + 0,18e_{t-3}^2 + 0,09e_{t-4}^2$$

Στο Διάγραμμα 2.1 που ακολουθεί, απεικονίζονται οι τιμές του τυχαίου σφάλματος, e_t , του μελετώμενου υποδείγματος, ενώ στο Διάγραμμα 2.2, αφ' ενός οι τιμές του σφάλματος πρόβλεψης $l_{t,s}$ και, αφ' ετέρου, οι τιμές του εύρους των διαστημάτων πρόβλεψης $\pm 2s_{e,s}$, με την ποσότητα $s_{e,s}$ να εκφράζει την τυπική απόκλιση του προβλεπομένου μετά s χρονικές περιόδους, τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος. Στην περίπτωση που εξετάζεται, ισχύει, όπως προκύπτει από το Διάγραμμα 2.1, η παρακάτω σχέση:

$$E(e_{t+s-i} | \Psi_t) = 0, \forall i$$

Συνεπώς, για το εύρος των εν λόγω διαστημάτων πρόβλεψης, θα ισχύει η εξής σχέση:

$$\pm 2s_{e,s} = \pm 2\sqrt{E(e_{t+s}^2 | \Psi_t)}$$



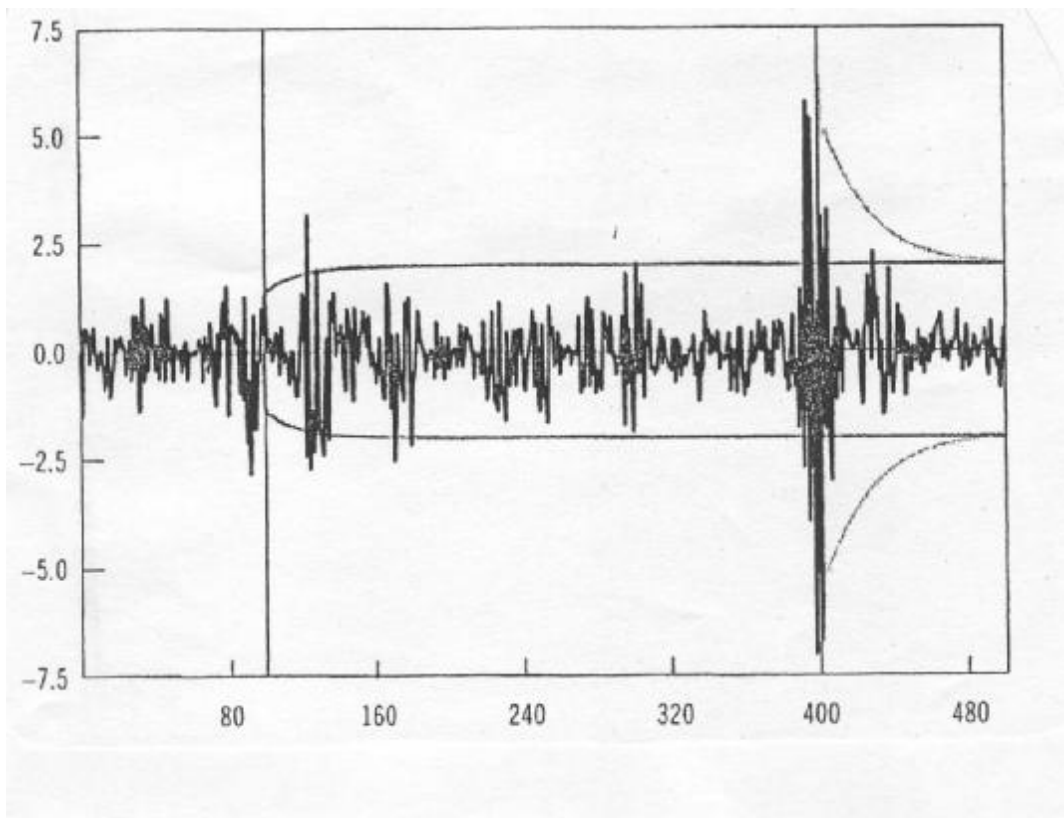
Πηγή: Anil K. Bera and Matthew L. Higgins, 1993, "Arch Models: Properties, Estimation and Testing", *Journal of Econometric Surveys* 7, pp. 331.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1

Τιμές του τυχαίου σφάλματος λαμβανόμενες με εξομοίωση

Με εκλογή, ως τρέχουσας, της χρονικής περιόδου 100 που, όπως προκύπτει από το Διάγραμμα 2.1, είναι μία περίοδος σχετικής σταθερότητας αφού δεν

υπάρχουν μεταβολές στις τιμές του e_t κατά τη διάρκειά της, παρατηρείται, στο αμέσως επόμενο διάγραμμα (το 2.2), ότι το εύρος των διαστημάτων των επιχειρουμένων προβλέψεων παραμένει σταθερό. Αντίθετα, εκλέγοντας ως τρέχουσα χρονική περίοδο την περίοδο 400, που χαρακτηρίζεται από έντονη μεταβλητότητα, το εύρος των διαστημάτων πρόβλεψης αποβαίνει φθίνον.



Πηγή: Anil K. Bera and Matthew L. Higgins, 1993, "Arch Models: Properties, Estimation and Testing", *Journal of Econometric Surveys* 7, pp. 340.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.2

Τιμές του σφάλματος πρόβλεψης, $I_{t,s}$ καθώς και των διαστημάτων πρόβλεψης, $\pm 2\sigma_e$, του ARCH(4) υποδείγματος που παρατέθηκε στην Παράγραφο 2.8.2. Οι τιμές έχουν ληφθεί με εξομοίωση.

Τα προαναφερθέντα αποτελούν τρανή απόδειξη του γεγονότος ότι τα αποτελέσματα των προβλέψεων που αναφέρονται σε ARCH διαδικασίες, βρίσκονται σε άμεση σχέση με την πληροφορία που εμπεριέχεται στο εκάστοτε πληροφοριακό σύνολο, Ψ_t .

2.9 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, έγινε ιδιαίτερη αναφορά στο απλό υπόδειγμα ARCH για το οποίο, αφού πρώτα παρατέθηκε μία σύντομη ιστορική αναδρομή, πραγματοποιήθηκε μια λεπτομερής και αναλυτική παρουσίαση. Στα πλαίσια αυτά, τονίστηκε η σπουδαιότητα του προβλήματος εύρεσης της υπό συνθήκη διακύμανσης μιας χρονοσειράς η οποία εκφράζει τον κίνδυνο της περιγραφόμενης από τη χρονοσειρά επένδυσης. Όπως αποδείχθηκε κατόπιν, η εν λόγω διακύμανση ταυτίζεται με την υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος. Η ταύτιση αυτή, που ισχύει μόνο σε περιπτώσεις ύπαρξης ARCH υποδειγμάτων, αναδεικνύει το γεγονός ότι, τελικά, ο κίνδυνος της περιγραφόμενης από τη χρονοσειρά επένδυσης ισούται με την υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος του υποδείγματος. Μία συνθετότερη μορφή υποδείγματος ARCH αλλά και, ταυτόχρονα, μία γενίκευσή του αποτελεί το υπόδειγμα GARCH. Παρόμοια συμπεράσματα εξήχθησαν και για το υπόδειγμα αυτό ενώ, ταυτόχρονα, εκτενής αναφορά έγινε σε μεθοδολογίες ελέγχου για την ύπαρξη του φαινομένου ARCH.

Τα υποδείγματα ARCH απαντούν σε πληθώρα εφαρμογών και μια από αυτές αποτελεί η πρόβλεψη της τιμής του πληθωρισμού μιας χώρας. Η εν λόγω πρόβλεψη αποτελεί παράμετρο μείζονος σημασίας αφού με βάση την επερχόμενη τιμή του πληθωρισμού καταρτίζονται και οι συμβάσεις μεταξύ των εταιρειών και των εργαζομένων σε αυτές. Στο παράδειγμα που παρατέθηκε αναδείχθηκε η σημαντικότητα της υιοθέτησης του καταλληλότερου ARCH υποδείγματος για τη διενέργεια της ως άνω διαδικασίας. Για το βέλτιστο τρόπο εκτίμησης ενός υποδείγματος ARCH, επίσης, συνίσταται η χρήση της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας, η οποία αναπτύχθηκε διεξοδικά στην Παράγραφο 2.7. Η όλη αυτή διαδικασία είναι αρκετά πολύπλοκη και για το σκοπό αυτό κρίνεται επιτακτική η χρήση κατάλληλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Οι απαιτήσεις της οικονομικής επιστήμης, όμως, δεν εξαντλούνται σε εκτιμήσεις μεγεθών που αναφέρονται στην ερχόμενη μόνον περίοδο. Ιδιαίτερα σημαντικές από επιστημονική άποψη είναι και οι μακρόπνοες προβλέψεις της συμπεριφοράς ενός συστήματος. Μία σημαντική ιδιότητα των υποδειγμάτων ARCH, μάλιστα, είναι εκείνη της αποτίμησης της ακρίβειας μιας τέτοιας πρόβλεψης. Στην Παράγραφο 2.8. δόθηκε μια πλήρης περιγραφή του μηχανισμού διενέργειας μακρόπνων προβλέψεων καθώς και ένα ιδιαίτερα κατατοπιστικό παράδειγμα πρόβλεψης που αναφερόταν σε υπόδειγμα ARCH(4). Στο κεφάλαιο που ακολουθεί πρόκειται να γίνει μια αναλυτική περιγραφή όλων των υποδειγμάτων που συμπεριλαμβάνονται στην οικογένεια ARCH.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αγιακλόγλου Χρήστος Ν. και Μπένος Θεοφάνης Ε.: «Εισαγωγή Στην Οικονομετρική Ανάλυση», Τόμος Β', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 2002.
2. Alexander Carol: «The Handbook Of Risk Management And Analysis», John Wiley And Sons Ltd, 1996.
3. Bachelier L., 1900, « Theorie de la speculation », Annales de l' Ecole Normale Superieure 17, pp.21 – 86.
4. Bera Anil K. And Higgins Matthew L., 1993, «Arch Models: Properties, Estimation And Testing», Journal Of Econometric Surveys 7, Pp 305 – 362.
5. Bollerslev Tim, 1986, «Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity», Journal Of Econometrics 31, Pp 307 – 27.
6. Bollerslev T., Chou R. Y. and Kroner K. F., 1992, «Arch Modeling In Finance: A Review Of A Theory And Empirical Evidence», Journal Of Econometrics 52, Pp 5 – 20.
7. Bollerslev T. and Hodrick R.J., 1992, «Financial market efficiency tests», Kellogg Graduate School of Management Working Paper, No 132.
8. Brooks Chris: «Introductory Econometrics For Finance», Cambridge Univeristy Press, 2002.
9. Duffee G.R., 1992, «Reexamining the relationship between stock returns and stock return volatility», Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series, No 191.

10. Engle R. F., 1982, «Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of U.K. Inflation», *Econometrica* 50, Pp. 987 – 1008.
11. Engle R. F., 1983, «Estimates of the variance of US inflation based upon the Arch model», *Journal of Money, Credit, and Banking* 15, pp. 286 – 301.
12. Engle R.F. and Bollerslev T., 1986, «Modeling The Persistence Of Conditional Variances», *Econometric Reviews* 5, Pp 1 – 50.
13. Engle R.F., and Kraft D., 1983, «Multiperiod forecast error variances of inflation estimated from Arch models», in A. Zellner (ed.), *Applied Time Series Analysis of Economic Data*, Bureau of the Census, Washington D.C.
14. Johnston J. And Dinardo J.: «Econometric Methods», The Mc Graw Hill Companies, Inc., New York, 1997.
15. Mandelbrot B., 1963a, « The variation of certain speculative prices», *Journal of Business* 36, pp.394 – 419.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΙΔΗ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των υποδειγμάτων ARCH είναι εκείνο της ευελιξίας με την οποία τροποποιούν τη συμβατική μαθηματική τους διατύπωση, σε τρόπο ώστε να καθίστανται ικανά να περιγράφουν πληθώρα οικονομικών φαινομένων και προβλημάτων. Στα ανακύπτοντα, από τις διάφορες αυτές τροποποιήσεις, είδη των υποδειγμάτων ARCH – καθώς και στα επιμέρους οικονομικά φαινόμενα στη μελέτη των οποίων τα εν λόγω υποδείγματα επικεντρώνονται – επεκτείνεται η ανάλυση που πραγματοποιείται στο κεφάλαιο αυτό.

Αρχικά, η παρουσίαση θα εστιαστεί στη μελέτη του υποδείγματος ARCH–M, το οποίο ενδείκνυται για περιπτώσεις χρηματικών τοποθετήσεων κατά τις οποίες ανταμείβεται με μεγαλύτερο επιτόκιο η, από πλευράς του επενδυτή, ανάληψη επιπρόσθετου κινδύνου (risk). Στην αμέσως επόμενη παράγραφο, επίσης, γίνεται εκτενής αναφορά στην οικογένεια των μη συμμετρικών υποδειγμάτων ARCH. Τα υποδείγματα αυτά θεραπεύουν περιπτώσεις κατά τις οποίες οι θετικά προσημασμένες αιφνίδιες διαταραχές (shocks) της συμπεριφοράς του επενδυτικού κοινού δεν προκαλούν στον εκτιμητή ίδια αβεβαιότητα με τις

αντίστοιχες αρνητικά προσημασμένες. Την ασυμμετρία αυτή καλούνται να πραγματευτούν τα υποδείγματα AGARCH, EGARCH, Standard GARCH, TGARCH, NAGARCH, GJR GARCH, NARCH και APARCH που το καθένα τους προκύπτει αβίαστα από το πρωταρχικό, θεμελιώδες, μη συμμετρικό GARCH υπόδειγμα με απλή και μόνο τιμοδότηση ορισμένων από τις παραμέτρους του.

Η τέταρτη παράγραφος του παρόντος κεφαλαίου αφιερώνεται εξ' ολοκλήρου στην επισκόπηση όλων εκείνων των εναπομεινάντων ειδών υποδειγμάτων GARCH τα οποία δεν κατέστη πρωτύτερα δυνατό να κατηγοριοποιηθούν. Στα πλαίσια αυτά, εισάγεται το, απλούστατο στη διατύπωσή του, υπόδειγμα IGARCH ενώ ακολούθως θεμελιώνεται το υπόδειγμα AARCH το οποίο χαρακτηρίζεται από μία ειδικής μορφής εξίσωση μέσου όρου. Κατόπιν, αναπτύσσεται το υπόδειγμα QTARCH μέσω του οποίου προσεγγίζονται υψηλού βαθμού μη γραμμικότητας συναρτήσεις διακύμανσης. Για τον ίδιο σκοπό, επίσης, έχει αναπτυχθεί και το PNP ARCH το οποίο παρατίθεται στη συνέχεια. Τέλος, ειδική αναφορά γίνεται και στα υποδείγματα Semiparametric GARCH και ARCD τα οποία αντιπαρέρχονται την περίπτωση κατά την οποία το υπό συνθήκη τυχαίο σφάλμα ακολουθεί κατανομές άγνωστες ή διαφορετικές της κανονικής.

Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου αυτού φωτίζονται και οι πιο δυσπρόσιτες πτυχές των ARCH υποδειγμάτων, καθώς έρχεται στο προσκήνιο η ιδιαίτερη εκείνη περίπτωση κατά την οποία οι διάφορες οικονομικές μεταβλητές που συναπαρτίζουν ένα υπόδειγμα εμφανίζουν μεταξύ τους συσχετίσεις. Το

φαινόμενο αυτό εκφεύγει των ορίων των κλασικών υποδειγμάτων, γεγονός που καθιστά επιτακτική για την ανάλυσή του την εισαγωγή των πολυμεταβλητών υποδειγμάτων GARCH. Τα εν λόγω υποδείγματα είναι τα μόνα που μπορούν να πραγματευτούν ικανοποιητικά τα διάφορα ζητήματα που ανακύπτουν από τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών. Ανάμεσα στην πληθώρα υποδειγμάτων που συναπαρτίζουν την οικογένεια των πολυμεταβλητών GARCH ιδιαίτερη μνεία γίνεται στα VECH, στα διαγώνια VECH καθώς και στα BEKK υποδείγματα. Πιο συγκεκριμένα, τα διαγώνια VECH υποδείγματα αναλαμβάνουν το ρόλο της επίλυσης του προβλήματος της πολυπλοκότητας των VECH υποδειγμάτων ενώ τα BEKK υποδείγματα απαλλάσσουν τον ερευνητή από τυχούσες αρνητικές τιμές της υπό συνθήκη διακύμανσης, διευκολύνοντας, με τον τρόπο αυτό, το έργο του. Θα πρέπει να σημειωθεί, πάντως, πως η μελέτη, ανάλυση και εκτίμηση τέτοιων υποδειγμάτων ενέχει, εύλογα, τεράστιο βαθμό πολυπλοκότητας.

3.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH-M

Συχνά θεωρείται ότι ο επενδυτής οφείλει να ανταμείβεται για τον επιπλέον κίνδυνο που αναλαμβάνει κάνοντας μία **μεγάλης διακύμανσης απόδοσης τραπεζική κατάθεση**. Τέτοιες καταθέσεις είναι οι μακροπρόθεσμες τραπεζικές καταθέσεις στις οποίες η "ανταμοιβή" του επενδυτή δε θα μπορούσε να είναι άλλη από μία επιπλέον απόδοση επί της εν λόγω κατάθεσης. Εφ' όσον, όμως, ο κίνδυνος μιας κατάθεσης είναι ανάλογος της υπό συνθήκη διακύμανσης του τυχαίου σφάλματος στο υπόδειγμα που περιγράφει την απόδοσή της, είναι

αναγκαίο – στο εν λόγω υπόδειγμα – να υπεισέρχεται κατά τέτοιο τρόπο η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος ώστε η απόδοση της κατάθεσης να φαίνεται σα γνησίως αύξουσα συνάρτηση της υπό συνθήκη διακύμανσής της. Οι Engle, Lilien και Robins (1987) υλοποίησαν την παραπάνω ιδέα εισάγοντας το **υπόδειγμα ARCH – M** (ARCH – in – mean) το οποίο αποτελεί επέκταση του κλασικού ARCH υποδείγματος. Το υπόδειγμα αυτό περιγράφεται από την εξής σχέση:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

όπου:

$$m_t = d h_t \quad (3.2)$$

$$d > 0$$

$$e_t = u_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = a_0 + a_1 e_{t-1}^2 \quad (3.3)$$

και:

$$a_0 > 0$$

$$0 < a_1 < 1$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις, η τυχαία μεταβλητή m_t εκφράζει τη διαφορά στην απόδοση (risk premium) που οφείλει να έχει μία τυχαία κατάθεση από την απόδοση της κατάθεσης εκείνης που παρουσιάζει το χαμηλότερο κίνδυνο, δηλαδή της κατάθεσης σε κρατικά ομόλογα (treasury bill) βραχείας διάρκειας. Η σταθερά d είναι μία θετική σταθερά που η τιμή της είναι υψηλή όταν πρόκειται για επιφυλακτικούς (risk averse) καταθέτες και χαμηλή όταν πρόκειται για

ριφοκίνδυνους (risk lovers). Η μεταβλητή y_t , ακολούθως, παριστάνει την τελική διαφορά ανάμεσα στην απόδοση της πραγματοποιηθείσας κατάθεσης και την τρέχουσα απόδοση του βραχείας διάρκειας κρατικού ομολόγου ενώ η e_t συμβολίζει το τυχαίο σφάλμα. Το τελευταίο συναρτάται της διακυμάνσεως στην απόδοση ενός βραχείας διάρκειας κρατικού ομολόγου, της διακυμάνσεως του πληθωρισμού και, επιπροσθέτως, της ελκυστικότητας που χαρακτηρίζει την υπό εξέταση μακρόχρονη τραπεζική κατάθεση. Αναφορικά, επίσης, με την ετυμολογία «ARCH – in – mean» αυτή δικαιολογείται από την παρακάτω σχέση:

$$E(y_t | \Psi_{t-1}) = m = \mu_t$$

Από τις σχέσεις (3.1), (3.2) και (3.3), συνάγεται ότι:

$$y_t = da_0 + da_0 + e_{t-1}^2 + e_t \quad (3.4)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.39), θα ισχύει πως:

$$E(e_{t-1}^2) = \frac{a_0}{1 - a_1} \quad (3.5)$$

Με βάση τις σχέσεις (3.4) και (3.5), επίσης, λαμβάνεται ότι:

$$E(y_t) = d \frac{a_0}{1 - a_1} \quad (3.6)$$

Ομοίως, προκύπτει πως:

$$Var(y_t) = \frac{a_0}{1 - a_1} + \frac{(da_1)^2 2a_0^2}{(1 - a_1)^2 (1 - 3a_1^2)} \quad (3.7)$$

Από τη σχέση (3.7), τέλος, προκύπτει ότι η απουσία του risk premium, μ_t , οδηγεί σε διακύμανση της μορφής:

$$\text{Var}(y_t) \Big|_{\delta=0} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad (3.8)$$

Κατά συνέπεια, η ποσότητα $\frac{(\delta\alpha_1)^2 2\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2(1 - 3\alpha_1^2)}$ εκφράζει την επιπλέον διακύμανση

της y_t εξ' αιτίας της ύπαρξης του risk premium. Επίσης, ισχύει ότι:

$$\frac{(\delta\alpha_1)^2 2\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2(1 - 3\alpha_1^2)} < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 > 0,111 \quad (3.9)$$

Για την υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος, επιπροσθέτως, ισχύει πως:

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = h_t \quad (3.10)$$

Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) συνάγεται ότι όσο ισχυρότερη είναι η εξάρτηση της υπό συνθήκη διακύμανσης του τυχαίου σφάλματος από το τετράγωνο του τυχαίου σφάλματος της τελευταίας περιόδου, τόσο επιτακτικότερη γίνεται η υιοθέτηση ενός ARCH – M υποδείγματος. Ιδιαίτερα, στην περίπτωση κατά την οποία $\alpha \in (0,111, 1)$, μικραίνει – όπως προκύπτει από τις σχέσεις (3.7) και (3.9) – σημαντικά η αβεβαιότητα υπολογισμού της απόδοσης μιας κατάθεσης με χρήση υποδείγματος ARCH–M.

Φαινόμενο συμφυές με τα ARCH – M υποδείγματα είναι και εκείνο της άρσης του ασυσχέτιστου μεταξύ των επιμέρους τιμών της τυχαίας μεταβλητής y_t . Ο υπολογισμός, πιο συγκεκριμένα, των αντίστοιχων συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης κατατείνει στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις αυτές λαμβάνουν τιμές διάφορες του μηδενός. Πράγματι:

$$\rho_1 = \text{Corr}(y_t, y_{t-1}) = \frac{2\alpha_1^3 \delta^2 \alpha_0}{2\alpha_1^2 \delta^2 \alpha_0 + (1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}$$

και:

$$\rho_\kappa = \text{Corr}(y_t, y_{t-\kappa}) = \alpha_1^{\kappa-1} e_1$$

όπου $\kappa = 2, 3, \dots$

Η επιλογή του ARCH – M υποδείγματος με το καταλληλότερο risk premium, μ_t , αποτελεί ένα διαρκές πρόβλημα στο χώρο της οικονομετρίας. Οι Domowitz και Hakko (1985) καθώς και οι Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988), εισήγαγαν ως:

$$\mu_t = d \sqrt{h_t}$$

ενώ οι Engle, Lilien και Robins (1987) επέτυχαν ικανοποιητικά αποτελέσματα με την εισαγωγή, ως risk premium, της μεταβλητής:

$$\mu_t = d \log(h_t)$$

Αντίθετα, οι Pagan και Hong (1991) διέβλεψαν αρκετά ελαττώματα στην ως άνω μορφή του risk premium αφού:

$$h_t < 1 \Rightarrow m_t < 0$$

ενώ, επίσης ισχύει ότι:

$$\lim_{h_t \rightarrow 0} m_t = -\infty$$

Μια γενικευμένη μορφή του ARCH – M υποδείγματος είναι το GARCH – M υπόδειγμα. Ένα τέτοιο υπόδειγμα παρέχεται από τις σχέσεις που ακολουθούν:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \delta h_t$$

$$\delta > 0$$

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

Ο έλεγχος που διενεργείται για ενδεχόμενη ύπαρξη GARCH – M υποδείγματος μετέρχεται της στατιστικής συνάρτησης LM και είναι ο ίδιος με εκείνον που περιγράφηκε για το GARCH υπόδειγμα. Η εκτίμηση ενός GARCH – M υποδείγματος είναι παρόμοια με εκείνη του υποδείγματος GARCH και γίνεται με χρήση της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας. Θα πρέπει να τονιστεί, πάντως, πως τόσο η εκτίμηση όσο και η ανάλυση παλινδρόμησης ενός GARCH – M υποδείγματος παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες για τον ερευνητή.

3.3 ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ GARCH

Το φαινόμενο της **μη συμμετρικότητας των αποδόσεων των μερισμάτων** (equities), σύμφωνα με το οποίο οι αρνητικές αποδόσεις συνοδεύονται από αυξημένη αβεβαιότητα σε σύγκριση με τις θετικές, οδήγησε τους επιστήμονες στην εισαγωγή μιας ξεχωριστής κατηγορίας GARCH υποδειγμάτων· αυτής των **μη συμμετρικών υποδειγμάτων GARCH**. Στην κατηγορία αυτή υπάγονται τα υποδείγματα AGARCH, EGARCH, TGARCH, Standard GARCH, Nonlinear

Asymetric GARCH, GJR GARCH, Nonlinear ARCH και APARCH, για τα οποία εκτενής αναφορά θα γίνει στη συνέχεια.

Ο Black (1976) ήταν εκείνος που ερεύνησε πρώτος το φαινόμενο της μη συμμετρικότητας. Το εν λόγω φαινόμενο μνημονεύεται σήμερα και ως «φαινόμενο του μοχλού» (leverage effect). Σύμφωνα με τον Black, μεγάλη μείωση στις αξίες των μερισμάτων δε συνοδεύει πάντοτε ανάλογη μείωση στα επιτόκια (debts) των προηγούμενων περιόδων με συνέπεια, στις περιπτώσεις αυτές, να παρατηρείται αύξηση στο δείκτη debt – to – equity. Εξ' αιτίας του προαναφερομένου γεγονότος αυξάνεται ο κίνδυνος που σχετίζεται με την junior claim of equity. Ο ίδιος ο Black, επίσης, ήταν εκείνος που είχε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η ανωτέρω αναφερόμενη ασυμμετρία και οι επιπτώσεις της δεν ήταν δυνατό, με τα μέχρι τότε (1976) διαθέσιμα οικονομετρικά εργαλεία, να αποτιμηθούν και να προσμετρηθούν. Την απουσία του κατάλληλου θεωρητικού υποδείγματος που θα αντιμετώπιζε το ζήτημα αυτό ανέλαβε τελικά να καλύψει η οικογένεια των υποδειγμάτων GARCH, η οποία, διενεργώντας τις κατάλληλες τροποποιήσεις στο πρωταρχικό της υπόδειγμα, εξήγαγε υποδείγματα ικανά να πραγματευτούν τη μη συμμετρικότητα.

3.3.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ GARCH

Μία μορφή ενός GARCH υποδείγματος ισοδύναμη με εκείνη που παρατέθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι η εξής:

$$y_t = E[y_t | \Psi_{t-1}] + e_t \quad (3.11)$$

όπου:

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$$
$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \beta_j h_{t-j} \quad (3.12)$$

και:

$$u_t \sim N(0,1)$$

Από τη σχέση (3.12), που στο εξής θα καλείται εξίσωση διακύμανσης του υποδείγματος, γίνεται φανερό ότι το κλασικό GARCH υπόδειγμα δεν είναι ικανό να περιγράψει καταστάσεις μη συμμετρικής απόκρισης της **αβεβαιότητας** (volatility) ή αλλιώς της **υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης**, διότι περιλαμβάνει τον παράγοντα u_t^2 ο οποίος προσδίδει μία συμμετρικότητα στη συμπεριφορά του όρου $\sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 u_{t-i}^2$. Προκειμένου, ωσαύτως, να επεκταθεί η ισχύς του υποδείγματος GARCH σε τρόπο ώστε να καθίσταται ικανή η περιγραφή φαινομένων ασυμμετρίας, η εξίσωση (3.12) οφείλει να διαμορφωθεί ως εξής:

$$\frac{h_t^{\frac{1}{2}} - 1}{1} = \omega + \alpha h_{t-1}^{\frac{1}{2}} f^v(u_t) + \beta \frac{h_{t-1}^{\frac{n}{2}} - 1}{1} \quad (3.13)$$

όπου:

$$f(u_t) = |u_t - b| - c(u_t - b) \quad (3.14)$$

Ταυτόχρονα, θεωρώντας ότι:

$$p = q = 1$$

λαμβάνεται, τελικά, η μη συμμετρική επέκταση όχι ενός οποιουδήποτε GARCH(p, q) υποδείγματος, αλλά του GARCH(1, 1), καθόσον, με τον τρόπο αυτό, οι υπολογισμοί απλοποιούνται σημαντικά.

Η σχέση (3.13) καλείται αλλιώς Box – Cox μετασχηματισμός της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης ($h_t^{1/2}$) και στο εξής θα συμβολίζεται ως $[Box - Cox](h_t^{1/2})$. Η δε παράμετρος λ είναι εκείνη που καθορίζει το σχήμα του ως άνω μετασχηματισμού με τον εξής τρόπο:

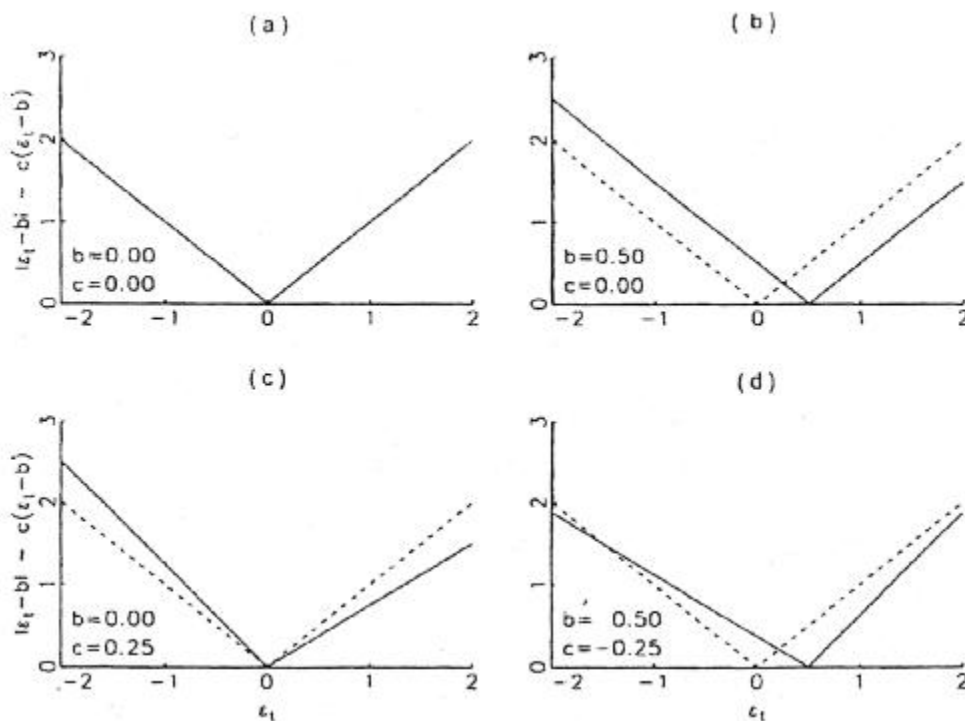
$$\lambda > 1 \Rightarrow \{o [Box - Cox](.) \text{ είναι κοίλος}\}$$

$$\lambda > 1 \Rightarrow \{o [Box - Cox](.) \text{ είναι κυρτός}\}$$

Παρεμπιπτόντως, η γραφική παράσταση της $f^v(u_t)$ καλείται news impact curve και αποτελεί έκφραση του βαθμού ασυμμετρίας της αβεβαιότητας (volatility) ή, αλλιώς, υπό συνθήκη διακύμανσης, h_t . Η ασυμμετρία της h_t οφείλεται στην ανομοιόμορφη απόκρισή της σε θετικές και αρνητικές αιφνίδιες "δονήσεις" (ή, αλλιώς, απότομες μεταβολές) της u_t . Η καμπύλη $f^v(u_t)$ δίδει την υπό συνθήκη διακύμανση, h_{t+1} , της ερχόμενης περιόδου, $t+1$, η οποία οφείλεται στην τιμή (θετική ή αρνητική) της τυχαίας μεταβλητής u_t κατά την περίοδο t .

Στο Διάγραμμα 3.1(α) απεικονίζεται η news impact curve ενός συμμετρικού υποδείγματος GARCH, ενώ στο Διάγραμμα 3.1(b) απεικονίζεται η αντίστοιχη καμπύλη ενός μη συμμετρικού υποδείγματος GARCH. Παράλληλα, στα ως άνω διαγράμματα θεμελιώνονται όλα όσα προαναφέρθηκαν γύρω από την έννοια της μη συμμετρικότητας. Πράγματι, μία αρνητικής τιμής αιφνίδια διαταραχή της u_t έχει, όπως δείχνει το Διάγραμμα 3.1(b), μεγαλύτερη επίδραση στην υπό συνθήκη διακύμανση της ερχόμενης περιόδου, $t+1$, απ' όση θα είχε μία ισόποση, θετικής τιμής, διαταραχή της ίδιας μεταβλητής. Αναφορικά, επίσης, με την επίδραση των τιμών των παραμέτρων b , c , ν στη μορφή της news impact

curve, από το Διάγραμμα 3.1¹ γίνεται φανερό ότι η τιμή του b ισούται με την τιμή εκείνη της u_t υπό την οποία το τυχαίο σφάλμα, e_t , της τρέχουσας περιόδου, t , δεν προκαλεί μεταβολές στην h_{t+1} . Θετικές τιμές του c , επιπροσθέτως, οδηγούν σε ασυμμετρία που ευνοεί τις θετικά προσημασμένες τιμές της u_t . Μ' άλλα λόγια, οι θετικές τιμές της u_t , έχουν, όπως απεικονίζεται



Πηγή: Ludger Hentschel, 1995, "All in the family. Nesting symmetric and asymmetric GARCH models", Journal of Financial Economics 39, page 78.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.1

Η συνάρτηση $f^v(\cdot)$ και οι επιμέρους μορφές που μπορεί να προσλάβει.

¹ Χάρην διευκόλυνσης του αναγνώστη, με e_t στο Διάγραμμα 3.1 συμβολίζεται η u_t .

στο Διάγραμμα 3.1, μεγαλύτερη επίδραση στην h_{t+1} από τις αρνητικές τιμές της.

Η παράμετρος ν , επίσης, είναι εκείνη που τροποποιεί κατάλληλα τη μορφή της

$f^\nu(u_t)$. Πράγματι, για:

$$\nu \geq 1$$

η $f^\nu(u_t)$ είναι κοίλη και από τις δύο πλευρές (δεξιά και αριστερά) της ρίζας της,

δηλαδή του σημείου εκείνου όπου:

$$u_t = b$$

Αντίθετα, για:

$$0 < \nu < 1$$

η $f^\nu(u_t)$ είναι κυρτή και από τις δύο πλευρές του εν λόγω σημείου.

Μεταβάλλοντας, κατόπιν, κατάλληλα τις τιμές των παραμέτρων b , c , λ και ν , από τη σχέση (3.13), η οποία αποτελεί τη γεννήτρια συνάρτηση των **μη συμμετρικών GARCH υποδειγμάτων**, προκύπτουν όλα τα υποδείγματα – μέλη της εν λόγω οικογένειας. Πρωτίστως, όμως, θα πρέπει να τονιστεί ότι οι τιμές των παραμέτρων β , a , b , c , λ , ν οφείλουν να είναι τέτοιες ώστε η μεν τιμή της υπό συνθήκη διακύμανσης, h_t , που θα προκύπτει να είναι πραγματικός και θετικός αριθμός, η δε h_t ως συνάρτηση να είναι **ευσταθής** (stationary). Οι συνθήκες που οφείλουν να πληρούνται ώστε να ισχύουν τα προλεχθέντα, εξετάζονται αναλυτικά παρακάτω.

3.3.1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Για την περίπτωση όπου:

$$\lambda \neq 0$$

οι συνθήκες οι οποίες οδηγούν σε πραγματική και θετική τιμή τόσο της h_t όσο και, κατ' επέκταση, της h_t^l , είναι οι εξής:

$$\omega > 0$$

$$\alpha \geq 0$$

$$\beta \geq 0$$

$$|c| \leq 1$$

Μια πέμπτη συνθήκη η οποία οφείλει, επίσης, να εκπληρούται, είναι η εξής:

$$v \notin \{2, 4, 6, \dots\}$$

Από τις ανωτέρω συνθήκες οι πλέον σημαντικές είναι οι δύο τελευταίες αφού εξασφαλίζουν τη θετικότητα της $f^v(u_t)$, υπόθεση ικανή και αναγκαία για τη διασφάλιση θετικής τιμής για τη μεταβλητή h_t . Επίσης, για:

$$\lambda = 0$$

ή, ακόμη και για:

$$\frac{2}{l} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{l = 1 \vee l = 2\}$$

τόσο η πραγματική όσο και η θετική τιμή της h_t , είναι εξίσου εξασφαλισμένες.

3.3.1.2 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Η σχέση (3.13) μετασχηματίζεται, αρχικά, ως εξής:

$$h_t^2 = \omega \left\{ 1 + \sum_{k=0}^a \prod_{i=0}^k [\alpha I f^v(u_{t-i}) + \beta] \right\}$$

Με τον όρο «ευστάθεια» της h_t εννοείται πως η επίδραση της τυχαίας μεταβλητής:

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$$

στο σύστημα (3.11) θα πρέπει να αποβαίνει μη εκφυλιστική (nondegenerate) ως προς αυτό καθώς επίσης και αυστηρώς στατικά εργοδική (stationary ergodic) υπό οποιαδήποτε απότομη μεταβολή της h_t . Οι συνθήκες, μάλιστα, εκείνες που ικανοποιούν τις ανωτέρω προτάσεις, είναι οι εξής:

$$\omega > 0 \tag{3.15}$$

και:

$$E\{1n[\alpha I f^v(u_t) + \beta]\} < 0$$

Αλλά, εφ' όσον:

$$\omega > 0$$

$$E\{[\alpha I f^v(u_t) + \beta]^p\} < 1$$

και:

$$p > 0$$

θα ισχύει ότι:

$$0 < E\left(h_t^{\frac{1-p}{2}}\right) < \infty$$

Συνεπώς, οι συνθήκες που είναι ικανές να εξασφαλίσουν την ευστάθεια της h_t αναπροσαρμόζονται ως εξής:

$$\text{Var}(u_t) < \infty \quad (3.16)$$

$$\omega > 0 \quad (3.17)$$

και:

$$E\left[\left(\alpha I f^v(u_t) + \beta^2\right)^l\right] < 1 \quad (3.18)$$

Ισχύουσας, όμως, της υπόθεσης ότι:

$$u_t \sim N(0,1)$$

εξασφαλίζεται αβίαστα και η ισχύς της συνθήκης (3.16). Κατά συνέπεια, μόνες οι συνθήκες (3.15) και (3.18) είναι ικανές να εξασφαλίσουν την ευστάθεια της h_t .

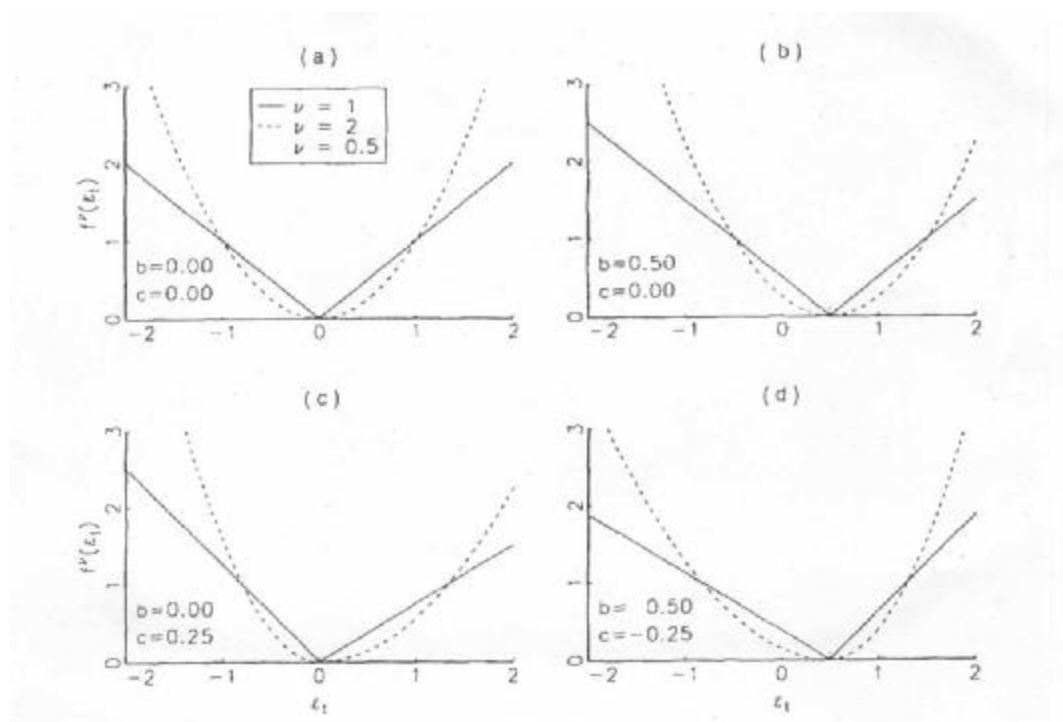
3.3.2 ΕΙΔΗ ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ GARCH

Είναι γνωστό ότι όπως τα συνήθη έτσι και τα μη συμμετρικά υποδείγματα GARCH περιγράφονται κατά βάση από δύο εξισώσεις. Η πρώτη από αυτές – η εξίσωση (3.11) – καλείται εξίσωση μέσου όρου ενώ η δεύτερη – η εξίσωση (3.13) – καλείται εξίσωση διακύμανσης. Στη διάκριση που θα επιχειρηθεί μεταξύ των διαφόρων ειδών μη συμμετρικών υποδειγμάτων GARCH η διαφοροποίησή τους θα έγκειται ως προς την εξίσωση διακύμανσής τους και μόνο. Για το λόγο

αυτό η συνεχής αναφορά στην εξίσωση μέσου όρου θα θεωρείται από εδώ και πέρα πλεονάζουσα.

3.3.2.1 ΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟΥ ΤΙΜΗΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Το απολύτου τιμής υπόδειγμα GARCH συμβολίζεται ως AGARCH (absolute value GARCH). Η όλη αναφορά που πρόκειται να πραγματοποιηθεί για τα υποδείγματα AGARCH θα εστιαστεί, χάριν απλούστευσης, στο AGARCH(1, 1)



Πηγή: Ludger Hentschel, 1995, "All in the family. Nesting symmetric and asymmetric GARCH models", Journal of Financial Economics 39, page 76.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.2

Η συνάρτηση $f^\nu(\cdot)$ για το υπόδειγμα AGARCH(1,1) και οι επιμέρους μορφές που μπορεί να προσλάβει

υπόδειγμα¹. Η εξίσωση διακύμανσης του εν λόγω υποδείγματος έχει ως εξής:

$$\sqrt{h_t} = \omega \alpha \sqrt{h_{t-1}} f(u_t) + \beta \sqrt{h_{t-1}}$$

όπου:

$$f(u_t) = |u_t - b| - c(u_t - b) \quad (3.19)$$

Στο Διάγραμμα 3.2² απεικονίζονται οι επιμέρους μορφές της news impact curve του AGARCH (1,1) για διάφορες τιμές των παραμέτρων b και c .

Αναφορικά με την ευστάθεια της h_t , η ισοδύναμη της (3.18) σχέση που πρέπει να εκπληρούται είναι η εξής:

$$\alpha^2(1 + \beta^2)(1 + c^2) + \beta^2 + 2\alpha\beta bc + 4\alpha(\beta + abc)\varphi(b) + 2\alpha[\beta b + \alpha(1 + b^2)c][2\Phi(b) - 1] < 1$$

Στην παραπάνω σχέση, $\varphi(\cdot)$ και $\Phi(\cdot)$ είναι, αντίστοιχα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής. Επιπροσθέτως, η παράμετρος ω οφείλει να λαμβάνει μόνο θετικές τιμές.

3.3.2.2 ΤΟ ΕΚΘΕΤΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Το εκθετικό υπόδειγμα GARCH συμβολίζεται ως EGARCH (exponential GARCH). Στο υπόδειγμα αυτό ισχύει ότι:

¹ Στη βιβλιογραφία, συχνά απαντάται και ως QGARCH.

² Προς διευκόλυνση του αναγνώστη, με e_t στο Διάγραμμα 3.2 συμβολίζουμε την u_t .

$$I > 0$$

$$n = 1$$

$$b = 0$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De l' Hospital εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι ο Box – Cox μετασχηματισμός της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης καταλήγει σε λογαριθμική ποσότητα. Με άλλα λόγια, ισχύει ότι:

$$\lim_{I \rightarrow 0} \left(\frac{h_t^{\frac{1}{2}} - 1}{I} \right) = \ln \left(h_t^{\frac{1}{2}} \right)$$

Κάνοντας παρόμοιους συλλογισμούς, εύκολα προκύπτει το κάτωθι υπόδειγμα:

$$\ln h_t = 2\omega'' + 2\alpha[|u_t| - E(|u_t|) - cu_t] + \beta \ln(h_{t-1}) \quad (3.20)$$

το οποίο αποτελεί ένα χαρακτηριστικό EGARCH(1, 1) υπόδειγμα. Είναι, επίσης, σημαντικό, ότι αν η ποσότητα:

$$f'(u_t) = |u_t| - E(|u_t|) - cu_t$$

η οποία αποτελεί τη news impact curve του υποδείγματος, υψωθεί στη δύναμη λ τότε θα προκύψει το υπόδειγμα Nonlinear ARCH ή NARCH(1, 1) το οποίο πρόκειται να εξετασθεί αργότερα.

Βασικό χαρακτηριστικό του EGARCH υποδείγματος αποτελεί, επιπροσθέτως, το γεγονός ότι οι παράμετροί του, ω'' , α , β και c , δε χρειάζονται περιορισμούς στο πρόσημό τους. Αυτό συμβαίνει διότι από τη στιγμή που η ποσότητα h_t στο αριστερό μέλος της (3.20) λογαριθμίζεται, η αντιλογαρίθμισή της δεν πρόκειται ποτέ να εξάγει αρνητικό αποτέλεσμα έστω κι αν το δεξιό μέλος της σχέσης

αυτής λάβει κάποτε αρνητική τιμή. Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό του EGARCH είναι η κατά τμήματα γραμμικότητα της news impact curve η οποία παρουσιάζει κλίση $2\alpha(1-c)$ για θετικές τιμές της u_t και $2\alpha(-1-c)$ για αρνητικές. Το γεγονός αυτό είναι εκείνο στο οποίο οφείλεται η συμμετρικότητα της h_t .

Κυρίαρχη διαφορά των EGARCH υποδειγμάτων από τα AGARCH που εξετάστηκαν στο προηγούμενο τμήμα είναι ότι ενώ τα πρώτα ανταποκρίνονται καλύτερα απ' ότι τα δεύτερα στο leverage effect, τα AGARCH υποδείγματα είναι εκείνα τα οποία συγκλίνουν, τελικά, ευκολότερα – ιδιαίτερα όταν το υπό μελέτη φαινόμενο χαρακτηρίζεται από μεγάλες μεταβολές. Μία άλλη διαφορά τους, επίσης, είναι ότι οι προβλέψεις για τα EGARCH υποδείγματα απαιτούν πολυπλοκότερους υπολογισμούς. Επίσης, η ευστάθεια του EGARCH(1, 1), εξασφαλίζεται όταν η παράμετρος β λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας.

3.3.2.3 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

Το υπόδειγμα GARCH κατωφλίου συμβολίζεται ως TGARCH (threshold GARCH). Το υπόδειγμα αυτό διατυπώθηκε, αρχικά, από τον Zakoian (1991) και προκύπτει αν στις σχέσεις (3.13) και (3.14) οι σχετικές παράμετροι λάβουν τις ακόλουθες τιμές:

$$\lambda = \nu = 1$$

και:

$$b = 0$$

Με τις αντικαταστάσεις αυτές προκύπτει, τελικώς, ότι:

$$h_t^{\frac{1}{2}} = \omega + \alpha h_{t-1}^{\frac{1}{2}} (|u_t| - cu_t) + \beta h_{t-1}^{\frac{1}{2}}$$

ή, ισοδύναμα:

$$h_t^{\frac{1}{2}} = \omega + \alpha(1-c)h_{t-1}^{\frac{1}{2}}u_t^+ - \alpha(1+c)h_{t-1}^{\frac{1}{2}}u_t^- + \beta h_{t-1}^{\frac{1}{2}}$$

όπου:

$$u_t^+ = \max\{u_t, 0\}$$

$$u_t^- = \min\{u_t, 0\}$$

ενώ, η news impact curve του υποδείγματος έχει ως εξής:

$$f(u_t) = a(1-c)u_t^+ - a(1+c)u_t^-$$

Είναι σημαντικό να τονιστεί πως η news impact curve του TGARCH(1, 1), που μόλις τώρα περιγράφηκε μαθηματικά, είναι κατά τμήματα γραμμική ως προς την τυχαία μεταβλητή, u_t , η οποία παριστά αιφνίδιους κραδασμούς (shock) της συμπεριφοράς του επενδυτικού κοινού. Βασικό, επίσης, χαρακτηριστικό του TGARCH είναι ότι το εν λόγω υπόδειγμα επιτρέπει την περιστροφή (με αντιστοίχιση κατάλληλων τιμών στην παράμετρο c) της $f(u_t)$ αλλά όχι και τη μετατόπισή της κατά μήκος του οριζόντιου άξονα. Η επαλήθευση των σχέσεων:

$$u_t^+ = \max\{u_t - d, 0\}$$

και:

$$u_t^- = \min\{u_t - b, 0\}$$

θα ήταν η μόνη ικανή να εξασφαλίσει την ιδιότητα της μετατόπισης για την $f(u_t)$.

3.3.2.4 ΤΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Το σταθερό υπόδειγμα GARCH συμβολίζεται ως Standard GARCH υπόδειγμα.

Το υπόδειγμα αυτό προκύπτει αν στις εξισώσεις (3.13) και (3.14) οι σχετικές παράμετροι λάβουν τις ακόλουθες τιμές:

$$I = \nu = 2$$

και:

$$b = c = 0$$

Αναφορικά με το Standard GARCH(1, 1) – την απλούστερη μορφή του ως άνω υποδείγματος, δηλαδή – θα ισχύει, τελικά, ότι:

$$h_t = 2\omega'' + 2\alpha u_t^2 h_{t-1} + \beta h_{t-1}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το παραπάνω υπόδειγμα δεν επιτρέπει την εμφάνιση ασυμμετρίας στην απόκριση της υπό συνθήκη διακύμανσης και κάτι τέτοιο αποτελεί πρόβλημα το οποίο θεραπεύεται, όπως θα φανεί στη συνέχεια, με την εισαγωγή των υποδειγμάτων NAGARCH και GJR GARCH, τα οποία είναι κατ' ουσία Standard GARCH υποδείγματα.

Αναφορικά, επίσης, με την ευστάθεια του Standard GARCH(1, 1), η συνθήκη (3.19) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\beta + 2\alpha \{ (1 + b^2) (1 + c^2) + 2c \{ 2\phi(b) + (1 + b^2) [2\Phi(b) - 1] \} \} < 1$$

ενώ, αντιθέτως, η συνθήκη (3.15) παραμένει ως έχει.

3.3.2.5 ΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Το μη γραμμικό ασύμμετρο υπόδειγμα GARCH συμβολίζεται ως NAGARCH (nonlinear asymmetric GARCH). Για το υπόδειγμα αυτό, ισχύει ότι:

$$I = \nu = 2$$

και:

$$c = 0$$

Κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, λαμβάνεται για το Nonlinear Asymmetric GARCH(1, 1) ότι:

$$h_t = 2\omega'' + 2\alpha h_{t-1} (u_t - b)^2 + \beta h_{t-1}$$

Το ανωτέρω υπόδειγμα δεν είναι παρά ένα Standard GARCH(1, 1) υπόδειγμα του οποίου, όμως, η news impact curve μπορεί να περιστρέφεται.

3.3.2.6 ΤΟ GLOSTEN JAGANNATTAN RUNKLE ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Για το υπόδειγμα Glosten Jagannattan Runkle (GJR) GARCH, ισχύει ότι:

$$I = \nu = 2$$

και:

$$b = 0$$

Κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, λαμβάνεται, για το GJR GARCH(1, 1), η ακόλουθη σχέση:

$$h_t = \omega'' + 2\alpha h_{t-1} [(1 + c^2)u_t^2 - 2c|u_t|u_t] + \beta h_{t-1}$$

Το ανωτέρω υπόδειγμα αποτελεί μορφή Standard GARCH(1, 1) υποδείγματος του οποίου η news impact curve μπορεί να μετατοπίζεται ακόμη και κατά μήκος του οριζόντιου άξονα. Επιπλέον, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα της προαναφερομένης news impact curve δεν παρουσιάζουν την ίδια κλίση, όπως άλλωστε, γίνεται φανερό και από την παρακάτω σχέση:

$$h_t = \begin{cases} \omega'' + 2\alpha(1+c)^2 h_{t-1} u_t^2 + \beta h_{t-1}, & \text{αν } u_t < 0 \\ \omega'' + 2\alpha(1-c)^2 h_{t-1} u_t^2 + \beta h_{t-1}, & \text{αν } u_t \geq 0 \end{cases}$$

Εν κατακλείδει, ένα Standard GARCH υπόδειγμα που θα είχε την ιδιότητα όχι μόνο να μετατοπίζεται αλλά και να περιστρέφεται θα μπορούσε να προέκυπτε μόνο αν τα b και c λάμβαναν τιμές διάφορες του μηδενός.

3.3.2.7 ΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH

Το μη γραμμικό υπόδειγμα ARCH συμβολίζεται ως NARCH (nonlinear ARCH).

Για το υπόδειγμα αυτό, ισχύει ότι:

$$I = v$$

και:

$$b = c = 0$$

Η εξίσωση διακύμανσης για το NARCH (1,1) είναι η εξής:

$$h_t^{\frac{1}{2}} \omega'' + \alpha \lambda \left| h_{t-1}^{\frac{1}{2}} u_t \right|^I + \beta h_{t-1}^{\frac{1}{2}}$$

και προκύπτει με τη πραγματοποίηση των κατάλληλων αντικαταστάσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1

Είδη μη συμμετρικών υποδειγμάτων GARCH

l	ν	b	c	Υπόδειγμα
0	1	0	αδιάφορο	EGARCH (Nelson)
1	1	0	$ c \leq 1$	TGARCH (Zakoian)
1	1	αδιάφορο	$ c \leq 1$	AGARCH (Taylor, Schwert)
2	2	0	0	Standard GARCH (Bollerslev)
2	2	αδιάφορο	0	NAGARCH (Engle – Ng)
2	2	0	αδιάφορο	GJR GARCH (Glosten, Jagannathan. Runkle)
αδιάφορο	l	0	0	NARCH (Higgins, Bera)
αδιάφορο	l	0	$ c \leq 1$	APARCH (Ding, Grauger, Engle)

3.3.2.8 ΤΟ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH

Το ασυμμέτρου δυνάμεως υπόδειγμα ARCH συμβολίζεται ως συμβολίζεται ως APARCH (asymmetric power ARCH). Για το εν λόγω υπόδειγμα, ισχύει ότι:

$$I = \nu$$

και:

$$b = 0$$

Κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, προκύπτει η εξίσωση διακύμανσής του APARCH(1, 1), η οποία έχει ως εξής:

$$h_t^{\frac{\lambda}{2}} \omega'' + \alpha \lambda \left(\left| h_{t-1}^{\frac{1}{2}} u_t \right| - c h_{t-1}^{\frac{1}{2}} u_t \right)^{\lambda} + \beta h_{t-1}^{\frac{\lambda}{2}} h_t^{\frac{\lambda}{2}}$$

Αντί σύνοψης, τέλος, κρίθηκε σκόπιμο να παρατεθούν στον Πίνακα 3.1 όλα τα είδη μη συμμετρικών υποδειγμάτων GARCH καθώς επίσης και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων I , ν , b και c με αντικατάσταση των οποίων στις εξισώσεις (3.13) και (3.14) τα υποδείγματα αυτά προκύπτουν. Μνεία γίνεται, μάλιστα και στα ονόματα των ερευνητών εκείνων που εισήγαγαν πρώτοι στο επιστημονικό πεδίο της οικονομετρίας τα εν λόγω υποδείγματα.

3.4 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ARCH

Η πληθώρα των υποδειγμάτων – μελών της οικογένειας ARCH υπαγορεύεται όχι μόνον από το φαινόμενο της ασυμμετρίας αλλά και από μία σειρά άλλων φαινομένων που καλούνται να περιγραφούν από τα οικονομετρικά

υποδείγματα. Δυστυχώς, όμως, οι αναλογίες μεταξύ των ARCH υποδειγμάτων δεν είναι πάντοτε εμφανείς και, κατά συνέπεια, η κατάταξή τους σε επιμέρους κατηγορίες δεν είναι πάντοτε εύκολη. Στη συνέχεια της παραγράφου παρατίθενται τα εναπομείναντα μέλη της οικογένειας ARCH των οποίων η εμφάνιση τόσο στη διεθνή βιβλιογραφία όσο και στην επιστημονική αρθρογραφία είναι, κατά το μάλλον ή το ήτον, συχνή.

3.4.1 ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Οι Engle και Bollerslev (1986), εισήγαγαν το ολοκληρωμένο υπόδειγμα GARCH ή IGARCH (integrated GARCH), για την εξίσωση διακύμανσης του οποίου ισχύει ότι:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

όπου:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1$$

Αποδεικνύεται ότι για την πρόβλεψη της υπό συνθήκη διακύμανσης του τυχαίου σφάλματος του ως άνω υποδείγματος σε χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης s ισχύει ότι:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 | \Psi_{t-1}) = s\alpha_0 + E(\varepsilon_t^2 | \Psi_{t-1})$$

Με άλλα λόγια, η $E(\varepsilon_{t+s}^2 | \Psi_{t-1})$ αυξάνει γραμμικώς ως προς το πλάτος, s , του χρονικού ορίζοντα μιας πρόβλεψης. Επιπροσθέτως, η τιμή της $E(\varepsilon_{t+s}^2 | \Psi_{t-1})$ συναρτάται του πληροφοριακού συνόλου Ψ_{t-1} .

3.4.2 ΤΟ ΑΝΗΓΜΕΝΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH

Το ανηγμένο υπόδειγμα ARCH συμβολίζεται ως AARCH (augmented ARCH).

Το υπόδειγμα αυτό παράγεται από μία εξίσωση μέσου όρου η οποία έχει ως εξής:

$$y_t = \theta_t y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.21)$$

όπου:

$$\theta_t \sim N(\theta_0, \alpha_1)$$

και:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \alpha_0)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, θα ισχύει ότι:

$$E(y_t | \Psi_{t-1}) = \theta_0 y_{t-1}$$

και:

$$Var(y_t | \Psi_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$$

Στο υπόδειγμα αυτό, ιδιαίτερης προσοχής χρίζουν τόσο η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος όσο και η υπό συνθήκη διακύμανσή του. Οι ποσότητες αυτές προσδιορίζονται μόνον αφ' ότου η (3.21) μετασχηματιστεί ως εξής:

$$y_t = [X_t] [\xi] + \varepsilon_t$$

Στην παραπάνω εξίσωση, το $[X_t]$ είναι ένα $k \times 1$ διάνυσμα στο οποίο ενδέχεται να περιλαμβάνονται και ορισμένες παρελθούσες τιμές, y_{t-j} , της εξαρτημένης μεταβλητής ενώ το $[\xi]$ είναι ένα $k \times 1$ διάνυσμα παραμέτρων.

Για το τυχαίο σφάλμα, ε_t , θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sum_{i=1}^q \theta_{it} \varepsilon_{t-i} + n_t \\ &= \sum_{i=1}^q (\theta_{it} + u_{it}) \varepsilon_{t-i} + n_t\end{aligned}$$

όπου:

$$u_{it} \sim N(0, A_i)$$

και:

$$n_t \sim (0, s_n^2)$$

με τα u_{it} και n_t να είναι στατιστικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπώς, εύλογα

προκύπτει ότι:

$$E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = \underline{\theta}' \varepsilon_{t-1}$$

όπου:

$$\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$$

και:

$$\underline{\varepsilon}_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})'$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, επίσης, προκύπτει πως:

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = \underline{\varepsilon}'_{t-1} A \varepsilon_{t-1} + \sigma_n^2 \quad (3.22)$$

Η ανωτέρω σχέση, αποτελεί, όπως είναι φανερό, την εξίσωση διακύμανσης ενός AARCH υποδείγματος.

Κατόπιν, υπό τις παραδοχές ότι:

$$A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$$

και ότι:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0$$

από την (3.22) εύκολα καταλήγει κανείς στη σχέση:

$$\text{Var}(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Η παραπάνω σχέση είναι εκείνη η οποία περιγράφει το ARCH(q) υπόδειγμα. Με άλλα λόγια, το ARCH(q) υπόδειγμα αποτελεί ειδική περίπτωση του AARCH υποδείγματος, γεγονός που ισχύει μόνον κατά την περίπτωση όπου η μήτρα A είναι διαγώνιος. Στην περίπτωση όπου η A είναι μη διαγώνιος, τότε στην εξίσωση διακύμανσης του AARCH υποδείγματος υπεισέρχονται όροι συσχέτισης μεταξύ των τυχαίων σφαλμάτων διαφόρων περιόδων, με αποτέλεσμα να καθίσταται αδύνατη η ανωτέρω αντιστοίχιση.

3.4.3 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

Το υπόδειγμα ARCH κατωφλίου ποιότητας συμβολίζεται ως QTARCH (qualitative threshold ARCH). Το υπόδειγμα αυτό εισήχθη από τους Courioux και Monfort το 1992. Οι δύο αυτοί επιστήμονες ισχυρίστηκαν ότι μία βηματική συνάρτηση, $1_A(\varepsilon_t)$, εφαρμοζόμενη επί του διανύσματος των τυχαίων σφαλμάτων, $(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})'$, είναι ικανή να προσεγγίσει μία υψηλού βαθμού μη γραμμικότητας συνάρτηση διακύμανσης, h_t . Για τη μαθηματική διατύπωση αυτής της ιδέας, οι Gourioux και Monfort χρησιμοποίησαν τα διαστήματα

πραγματικών αριθμών A_i , με $i = 1, \dots, m$ – καθένα από τα οποία περιελάμβανε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών – καταλήγοντας, τελικά, στην παρακάτω σχέση:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} 1_{A_j}(\varepsilon_{t-j}) \quad (3.23)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση διακύμανσης ενός QTARCH υποδείγματος. Για τη βηματική συνάρτηση $1_A(\varepsilon_t)$, επίσης, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$1_A(\varepsilon_t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \varepsilon_t \notin A \\ 1, & \text{αν } \varepsilon_t \in A \end{cases}$$

στην οποία τα a_0 και a_{ij} είναι παράμετροι.

3.4.4 ΤΟ ΜΕΡΙΚΩΣ ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH

Ένα υπόδειγμα παραπλήσιο με το QTARCH είναι το μερικώς μη παραμετρικό ARCH υπόδειγμα, που συμβολίζεται ως PNP ARCH (partially non parametric ARCH). Το υπόδειγμα αυτό εισήχθη από τους Engle και Ng το 1991. Οι δύο αυτοί ερευνητές, αφού αρχικά θεώρησαν τους κάτωθι πραγματικούς αριθμούς:

$$\tau_{m-}, \dots, \tau_{-1}, 0, \tau_1, \dots, \tau_{m+}$$

διατύπωσαν την εξίσωση διακύμανσης του υποδείγματός τους, ως εξής:

$$h_t = a + \sum_{i=0}^{m+} \theta_i P_{it}(\varepsilon_{t-1} - \tau_i) + \sum_{i=0}^{m+} \delta_i N_{it}(\varepsilon_{t-1} - \tau_i) + \beta h_{t-1}$$

όπου:

$$P_{it}(\varepsilon_{t-1} - \tau_i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \varepsilon_{t-1} > \tau_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και:

$$N_{h_t}(\varepsilon_{t-1} - \tau_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \varepsilon_{t-1} < \tau_{-i} \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$$

Οι ποσότητες θ_i , δ_i , επίσης, αποτελούν παραμέτρους του ανωτέρω υποδείγματος.

3.4.5 ΤΟ ΗΜΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ GARCH

Μία επέκταση των GARCH υποδειγμάτων αποτελούν τα ημιπαραμετρικά υποδείγματα GARCH, που συμβολίζονται ως Semiparametric GARCH. Στα υποδείγματα αυτά η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του υπό συνθήκη τυχαίου μέρους, $\varepsilon_t | \Psi_{t-1}$, παραμένει άγνωστη. Όπως ακριβώς ισχύει και για τα συνήθη GARCH, η εξίσωση μέσου όρου των Semiparametric GARCH υποδειγμάτων έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} y_t &= E(y_t | \Psi_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= y_t | \Psi_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.24)$$

Στην παραπάνω σχέση, ισχύει ότι:

$$\varepsilon_t = u_t h_t^{\frac{1}{2}}$$

και:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (3.25)$$

Ξέχωρα με ό,τι συμβαίνει με τα συνθήκη GARCH, στα Semiparametric GARCH υποδείγματα το τυχαίο σφάλμα, $\varepsilon_t | \Psi_{t-1}$, ακολουθεί όχι την κανονική κατανομή αλλά μια άγνωστη κατανομή f . Με άλλα λόγια, για τα υποδείγματα αυτά ισχύει ότι:

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim f(0, h_t) \quad (3.26)$$

Λόγω της σχέσης (3.26) η χρονοσειρά u_t δε θα είναι μία συνάρτηση λευκού θορύβου αλλά θα ακολουθεί κι αυτή μία άγνωστη κατανομή g . Δηλαδή, θα ισχύει ότι:

$$u_t \sim g(0, 1)$$

ή, ισοδύναμα:

$$\frac{\varepsilon_t}{h_t^{\frac{1}{2}}} \sim g(0, 1)$$

Για την εκτίμηση, επίσης, των υποδειγμάτων αυτής της μορφής οφείλει να εφαρμοστεί μια μεθοδολογία διαφορετική απ' όσες έχουν έως τώρα αναπτυχθεί. Η μεθοδολογία αυτή έχει ως εξής:

Βήμα 1^ο

Κατά τη φάση αυτή, επιχειρείται μία πρώτη εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων του προς εκτίμηση υποδείγματος (των εξισώσεων, δηλαδή, (3.24) και (3.25)). Η εν λόγω αρχική εκτίμηση μπορεί να επιτευχθεί με εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων ή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας επί των εξισώσεων (3.24) και (3.25).

Βήμα 2ο

Λαμβάνονται, ακολούθως, οι προκύπτουσες τιμές των καταλοίπων, $\hat{\varepsilon}_t$, καθώς και οι εκτιμηθείσες τιμές των διακυμάνσεων, \hat{h}_t . Βάσει των τιμών αυτών κατασκευάζεται η τυχαία μεταβλητή $\left(\varepsilon_t, h_t^{-\frac{1}{2}} \right)$. Ελέγχεται, κατόπιν, το εάν η ανωτέρω μεταβλητή έχει ως μέσο όρο το μηδέν και ως διακύμανση τη μονάδα. Όταν τούτο δεν ισχύει τότε η μεταβλητή αυτή τυποποιείται.

Βήμα 3ο

Επιχειρείται, στη συνέχεια, μια εκτίμηση της κατανομής g . Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι η discrete maximum penalized likelihood estimation (DMPLE), τεχνική που συνιστάται για τη μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας ενός δείγματος όταν τα μέλη – ορίσματά του είναι τα ύψη p_1, p_2, \dots, p_{m-1} του ιστογράμματος $g \left(\varepsilon_i, h_i^{-\frac{1}{2}} \right)$ στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές n_1, n_2, \dots, n_{m-1} . Η σχεδίαση του εν λόγω ιστογράμματος λαμβάνει χώρα εντός του χρονικού διαστήματος (a, b) το οποίο είναι διαιρεμένο σε m ίσα χρονικά υποδιαστήματα πλάτους r το καθένα. Με βάση τα προλεχθέντα, το πιθανό πρόβλημα της μεγιστοποίησης ανάγεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\max L(p_1, p_2, \dots, p_{m-1}) = \sum_{i=1}^m \log \left[g^* \left(\varepsilon_i, h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \right] - \frac{\lambda}{r} \sum_{k=1}^{m-1} (p_{k+1} - 2p_k + p_{k-1})^2 \quad (3.27)$$

όπου:

$$r \sum_{k=1}^{m-1} p_k = 1$$

$$p_k \geq 0$$

και:

$$k = 1, 2, \dots, m-1$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, η συνάρτηση $g^* \left(e_i h_i^{-\frac{1}{2}} \right)$ είναι μία συνάρτηση διακριτού χρόνου η οποία προκειμένου να λογαριθμιστεί οφείλει να μετατραπεί στην αντίστοιχη της συνάρτηση συνεχούς χρόνου, $g(n)$, με το n να παριστάνει το τυχαίο χρονικό σημείο στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Ισχύει, επομένως, για την εν λόγω συνάρτηση, ότι:

$$g \left(e_i h_i^{-\frac{1}{2}} \right) = g(n) = \begin{cases} p_k + \frac{p_{k+1} - p_k}{r} (n - n_k), & \text{για } n \in [n_k, n_{k+1}] \\ 0, & \text{για } n \notin [n_0, n_m] \end{cases} \quad (3.28)$$

Το λ , επιπροσθέτως, είναι ένας όρος ποινής (penalty term) ο οποίος λαμβάνει τιμές κατά την κρίση του ερευνητή. Σκοπός του όρου αυτού είναι το να μεταφερθεί η g ομαλά από το διάκριτο στο συνεχές πεδίο ορισμού και, παράλληλα, το ιστόγραμμά της, $g(n)$, να παρουσιάζει μία τέτοια ομαλότητα που να δίδει τη δυνατότητα στον ερευνητή να το επεξεργάζεται αλγεβρικά. Τελικά, με λογαρίθμιση της $g(n)$ προκύπτει αβίαστα η τιμή της ποσότητας $\log \left[g^* \left(\varepsilon_i h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$, που είναι η εξής:

$$\log \left[g^* \left(\varepsilon_i h_i^{-\frac{1}{2}} \right) \right] = \log [g(n)]_{n=n_k} \quad (3.29)$$

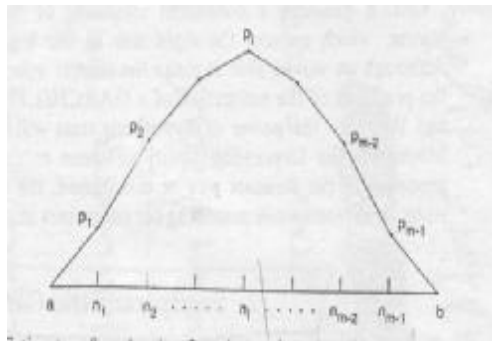
με $k = 1, \dots, m-1$.

Ακολουθως, αφού αντικατασταθεί η (3.29) στην (3.27), λαμβάνει χώρα η μεγιστοποίηση της τελευταίας – όπως άλλωστε προστάζει και το αριστερό σκέλος της – με αποτέλεσμα να προκύψει το σύνολο λύσεων $\left(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_{m-1} \right)$.

Με βάση τις λύσεις αυτές και τη σχέση (3.28) εκτιμάται η συνάρτηση κατανομής, \hat{g} , του u_t η οποία, όπως αποδεικνύεται, λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\hat{g} \varepsilon_t h_t^{-\frac{1}{2}} = g_t = \begin{cases} \hat{p}_k + \frac{\hat{p}_{k+1} - \hat{p}_k}{r} \cdot (n - n_k), & \text{για } t \in [n_k, n_{k+1}] \\ 0, & \text{για } t \notin [n_1, n_{m-1}] \end{cases}$$

Τέλος, στο Διάγραμμα 3.3 που ακολουθεί αναπαρίστανται μία εκ των πιθανών μορφών που μπορεί να λάβει μια τέτοια κατανομή.



Πηγή: Robert F. Engle and Gloria Gonzalez – Rivera, 1991, “Semiparametric Arch Models”, Journal of Business and Economic Statistics 4, pp 354.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.3

Εκτιμηθείσα μορφή της κατανομής g με χρήση της μεθόδου DMPLE

Βήμα 4^ο

Για την εύρεση των τιμών των παραμέτρων του Semiparametric GARCH υποδείγματος χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος ΒΗΗΗ. Ο αλγόριθμος αυτός προαπαιτεί τη γνώση της score function, συνάρτησης που για το υπό εξέταση υπόδειγμα παρουσιάζει την εξής μορφή:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \omega} = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} + \frac{1}{h_t^2} \left(\frac{\partial e}{\partial \omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_t}{\partial \omega} \frac{e_t}{h_t} \right) \hat{g}'_t \quad (3.30)$$

Στην παραπάνω σχέση, ισχύει ότι:

$$\hat{g}'_t = \frac{p_{k+1} - p_k}{r}$$

Με ω , επίσης, συμβολίζεται η τυχαία παράμετρος των εξισώσεων μέσου όρου και διακύμανσης του υπό μελέτη υποδείγματος. Στη συνέχεια, με μηδενισμό της score function προσδιορίζονται όλες οι ζητούμενες παράμετροι.

3.4.6 ΤΟ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΟ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Στην παρούσα παράγραφο, η μελέτη εξακολουθεί να εστιάζεται σε ARCH υποδείγματα στα οποία το υπό συνθήκη τυχαίο σφάλμα ακολουθεί μια άγνωστη και όχι την κανονική κατανομή, με αποτέλεσμα η χρονοσειρά u_t να μην είναι μια συνάρτηση λευκού θορύβου αλλά, ομοίως, να ακολουθεί μια άγνωστη κατανομή f . Αξίζει να τονιστεί, επίσης, ότι ο Bollerslev (1987) είχε μελετήσει τέτοιου είδους υποδείγματα δεχόμενος ότι η f ήταν μία κατανομή Student και ότι ίσχυε η σχέση:

$$u_t \sim f(u, \zeta)$$

στην οποία με ζ συμβολίζονταν οι βαθμοί ελευθερίας της εν λόγω κατανομής, f .

Ο Hansen (1992) επέκτεινε το συλλογισμό του Bollerslev μιλώντας για μια ακόμη πιο ευέλικτη κατανομή, την $f(n, \zeta_t)$, στην οποία το πλήθος των βαθμών ελευθερίας, ζ_t , αποτελούσε, επίσης, χρονοσειρά. Το δε υπόδειγμα που προέκυπτε από την επαλήθευση της σχέσης:

$$u_t | \Psi_{t-1} \sim f(u, \zeta_t)$$

ονομάσθηκε αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη πυκνότητας υπόδειγμα και συμβολίστηκε ως υπόδειγμα ARCD (autoregressive conditional density). Μελέτες του Hansen επάνω στα κρατικά χρεόγραφα των ΗΠΑ δίκαιωσαν την ανωτέρω τοποθέτησή του μια και ο έλεγχος που στη συνέχεια διενεργήθηκε απέρριψε την υπόθεση της κατανομής Student σταθερού αριθμού βαθμών ελευθερίας.

3.4.7 ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟΤΕΡΟΥ, ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ, ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ARCH

Όπως έγινε αντιληπτό στις ενότητες που προηγήθηκαν, το φαινόμενο ARCH μπορεί να συμπεριληφθεί σε μια πληθώρα οικονομετρικών υποδειγμάτων. Στην κρίση του ερευνητή εναπόκειται πάντοτε, το πιο από τα εν λόγω υποδείγματα θα πρέπει την κάθε φορά να ενεργοποιείται προκειμένου να περιγράφεται το αντίστοιχο οικονομικό φαινόμενο. Η επιλογή του ερευνητή συναρτάται από το

είδος των δεδομένων που χαρακτηρίζουν το εκάστοτε πρόβλημα και, ειδικότερα, από το είδος των τιμών των καταλοίπων που αυτό παρουσιάζει. Ο ερευνητής, αρχικά, οφείλει να εστιάσει την προσοχή του σε ένα μικρό αριθμό πιθανών υποδειγμάτων ARCH και, κατόπιν, να εφαρμόσει τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας για το καθένα από τα εν λόγω υποδείγματα ξεχωριστά. Η εμπειρία μαρτυρά πως από τα εκτιμηθέντα υποδείγματα που θα προκύψουν εκείνο που, τελικώς, είναι το αντιπροσωπευτικότερο για την περιγραφή του υπό μελέτη φαινομένου, είναι το υπόδειγμα του οποίου η συνάρτηση πιθανοφάνειας λαμβάνει τη μέγιστη τιμή. Με το να επιλεγεί, δε, το καταλληλότερο υπόδειγμα για τη μελέτη ενός οικονομικού φαινομένου, εξασφαλίζεται το ότι οι επιχειρούμενες προβλέψεις, παράγοντας κεφαλαιώδους σημασίας για τις οικονομικές επιστήμες, θα είναι εν τέλει οι βέλτιστες.

3.5 ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ GARCH

Ένα βασικό μειονέκτημα των μονομεταβλητών ARCH υποδειγμάτων που μέχρι τώρα αναπτύχθηκαν είναι το ότι τα υποδείγματα αυτά δε λαμβάνουν υπ' όψιν τους το γεγονός ότι τυχούσες συσχετίσεις μεταξύ των διαφόρων οικονομικών μεταβλητών που σχετίζονται με ένα φαινόμενο έχουν ως συνέπειά τους η τιμή της μίας μεταβλητής να επηρεάζει τις τιμές των υπολοίπων. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί μόνο με την εισαγωγή των **πολυμεταβλητών GARCH υποδειγμάτων**. Ξέχωρα από τα διάφορα είδη πολυμεταβλητών GARCH υποδειγμάτων που έχουν κατά καιρούς μελετηθεί, στην παράγραφο αυτή θα αναπτυχθούν τα VARCH, τα διαγώνια VARCH και, τέλος, τα BEKK

υποδείγματα. Για περισσότερη ευκολία, επίσης, η μελέτη επικεντρώνεται στην περίπτωση των δύο μόνων μεταβλητών, δηλαδή σε εκείνη του διμεταβλητού GARCH υποδείγματος. Επιπροσθέτως, κατά την παράθεση των ως άνω υποδειγμάτων θα παραλείπεται, χάριν συντομέυσεως, το πρώτο σκέλος τους - η εξίσωση, δηλαδή, που περιέχει τις εξαρτημένες μεταβλητές οι οποίες εκφράζουν π.χ. τις αποδόσεις κάποιων επενδύσεων - και αναφορά θα γίνεται μόνον στο σκέλος εκείνο που θα περιέχει τη μήτρα συσχετίσεών τους (correlation matrix).

3.5.1 ΤΟ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ VECM

Σύμφωνα με τους Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988), μία συνήθης έκφραση του VECM υποδείγματος είναι η εξής:

$$VECM(H_t) = C + AVECM(\Xi_{t-1} \Xi'_{t-1}) + BVECM(H_{t-1}) \quad (3.31)$$

όπου:

$$\Xi_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

Στην παραπάνω σχέση, (3.31), H_t είναι μία 2 X 2 μήτρα γνωστή και ως μήτρα συσχετίσεων για την οποία ισχύει ότι:

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Στη σχέση (3.32), ισχύει ότι:

$$h_{11t} = \text{Var}(y_{1t} | \Psi_{t-1})$$

και:

$$h_{22t} = \text{Var}(y_{2t} | \Psi_{t-1})$$

όπου y_{1t} και y_{2t} είναι το ζεύγος των υπό εξέταση τυχαίων μεταβλητών. Επίσης:

$$h_{11t} = \text{Corr}(y_{1t}, y_{2t} / \Psi_{t-1})$$

και:

$$h_{22t} = \text{Corr}(y_{2t}, y_{1t} / \Psi_{t-1})$$

Αναφορικά με την Ξ_t , ετούτη είναι μία 2 X 2 μήτρα η οποία απεικονίζει τα επιμέρους τυχαία σφάλματα για την οποία μάλιστα, ισχύει ότι:

$$\Xi_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11t} & \varepsilon_{12t} \\ \varepsilon_{21t} & \varepsilon_{22t} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Στην παραπάνω σχέση, ε_{11t} είναι το κατά την περίοδο t τυχαίο σφάλμα που επιδρά στην τιμή της y_{1t} και που οφείλεται στην οικονομική παράμετρο (π.χ. επένδυση) που η μεταβλητή αυτή περιγράφει. Το ε_{22t} είναι το κατά την περίοδο t τυχαίο σφάλμα που επιδρά στην τιμή της y_{2t} και που, ομοίως, οφείλεται στην οικονομική παράμετρο που η μεταβλητή αυτή περιγράφει. Το ε_{21t} , τέλος, είναι το κατά την περίοδο t τυχαίο σφάλμα που επιδρά στην τιμή της y_{1t} και που οφείλεται στην οικονομική παράμετρο που η y_{2t} περιγράφει. Τα αντίστοιχα ισχύουν και για το ε_{12t} . Αναφορικά, επίσης, με τις μήτρες A, B και C αυτές είναι 2 X 2 μήτρες σταθερών συντελεστών και ισχύει γι' αυτές ότι:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Θεωρούμενου ενός τετραγωνικού πίνακα X , για τον οποίο ισχύει π.χ. ότι:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

ο τελεστής VECH είναι εκείνος που, εφαρμοζόμενος επί του X , λαμβάνει τα στοιχεία του άνω τριγωνικού τμήματός του και τα επαναταξινομεί σε διάνυσμα – στήλη ως εξής:

$$VECH(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{22} \\ x_{12} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (3.32) και (3.37) προκύπτει ότι:

$$VECH(H_t) = \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{22t} \\ h_{12t} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ορίζεται, κατόπιν, ως ανάστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα X , όμοιου με εκείνου της σχέσης (3.37), ο πίνακας X'' , για τον οποίο ισχύει ότι:

$$X'' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Συνδυάζοντας, στη συνέχεια, τις σχέσεις (3.33), (3.37), (3.38) και (3.39), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} VECH(\Xi_t, \Xi'_t) &= VECH \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11t} & \varepsilon_{12t} \\ \varepsilon_{21t} & \varepsilon_{22t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11t} & \varepsilon_{21t} \\ \varepsilon_{21t} & \varepsilon_{22t} \end{bmatrix} \right) \\ &= VECH \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11t}^2 + \varepsilon_{12t}^2 & \varepsilon_{11t}\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{12t}\varepsilon_{22t} \\ \varepsilon_{21t}\varepsilon_{11t} + \varepsilon_{22t}\varepsilon_{12t} & \varepsilon_{21t}^2 + \varepsilon_{22t}^2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

δηλαδή ότι:

$$VECH(\Xi, \Xi') = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11t}^2 + \varepsilon_{12t}^2 \\ \varepsilon_{21t}^2 + \varepsilon_{22t}^2 \\ \varepsilon_{11t}\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{12t}\varepsilon_{22t} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Από τις σχέσεις (3.31), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.39) και (3.41), επίσης, προκύπτει μια εναλλακτική έκφραση του διμεταβλητού VECH υποδείγματος, η οποία έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} h_{11t} &= c_{11} + a_{11}(\varepsilon_{11t}^2 + \varepsilon_{12t}^2) + a_{12}(\varepsilon_{21t}^2 + \varepsilon_{22t}^2) + a_{13}(\varepsilon_{11t}\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{12t}\varepsilon_{22t}) \\ &+ b_{11}h_{11t-1} + b_{12}h_{22t-1} + b_{13}h_{12t-1} \\ h_{22t} &= c_{21} + a_{21}(\varepsilon_{11t}^2 + \varepsilon_{12t}^2) + a_{22}(\varepsilon_{21t}^2 + \varepsilon_{22t}^2) + a_{23}(\varepsilon_{11t}\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{12t}\varepsilon_{22t}) \\ &+ b_{21}h_{11t-1} + b_{22}h_{22t-1} + b_{23}h_{12t-1} \\ h_{12t} &= c_{31} + a_{31}(\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{212t}) + a_{32}(\varepsilon_{21t}^2 + \varepsilon_{22t}^2) + a_{33}(\varepsilon_{11t}\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{12t}\varepsilon_{22t}) \\ &+ b_{31}h_{11t-1} + b_{32}h_{22t-1} + b_{33}h_{12t-1} \end{aligned}$$

Βασικό μειονέκτημα των VECH υποδειγμάτων είναι το μεγάλο πλήθος παραμέτρων που χρησιμοποιούν. Για το διμεταβλητό υπόδειγμα που μόλις αναλύθηκε, χρησιμοποιήθηκαν, ήδη, είκοσι ένα παράμετροι. Το πρόβλημα αυτό, όπως θα φανεί στη συνέχεια, αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή του **διαγωνίου υποδείγματος VECH**. Ένα άλλο μειονέκτημα των VECH υποδειγμάτων είναι το ότι δεν παρέχουν στον ερευνητή όλο το απαιτούμενο εύρος πληροφοριών. Στην περίπτωση που εξετάσθηκε, ελήφθη, τελικώς, πληροφόρηση μόνον για την ποσότητα h_{12t} και όχι και για την h_{21t} . Συνεπώς, για να παράσχει πλήρη πληροφόρηση το υπόδειγμα VECH απαιτείται οι

επιμέρους συσχετίσεις h_{ij_t} , με $i \neq j$, να είναι μεταξύ τους συμμετρικές – να ισχύει, δηλαδή, ότι:

$$h_{ij_t} = h_{ji_t}$$

ή, ισοδύναμα, ότι:

$$\text{Corr}(y_{it}, y_{jt} | \Psi_{t-1}) = \text{Corr}(y_{jt}, y_{it} | \Psi_{t-1})$$

για τη δεδομένη χρονική στιγμή t . Όπως θα δειχθεί στη συνέχεια, το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή του **υποδείγματος ΒΕΚΚ**.

3.5.2 ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ VECM

Το υπόδειγμα αυτό εισήχθη από τους Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988). Η καινοτομικότητά του έναντι του προηγούμενου έγκειται στο ότι οι πίνακες παραμέτρων A και B που το εν λόγω υπόδειγμα χρησιμοποιεί είναι διαγώνιοι. Αναφορικά, επίσης, με την τελική μορφή του, το υπόδειγμα αυτό έχει ως εξής:

$$h_{ij_t} = \omega_{ij} + \alpha_{ij} \varepsilon_{it-1} \varepsilon_{jt-1} + \beta_{ij} h_{ij_{t-1}}$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι το πλήθος των παραμέτρων (ή συντελεστών) που το διαγώνιο υπόδειγμα VECM μεταχειρίζεται είναι σημαντικά μικρότερο από εκείνο του αρχικού υποδείγματος VECM. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση όπου υπάρχουν δύο μόνον υπό εξέταση μεταβλητές (ή χρονοσειρές), το διαγώνιο υπόδειγμα VECM χρησιμοποιεί εννέα μόνον συντελεστές έναντι είκοσι ενός του αρχικού VECM υποδείγματος. Ένα πρόβλημα που εξακολουθεί, όμως, να παραμένει άλυτο και που, αναπόφευκτα, χαρακτηρίζει το σύνολο της οικογένειας των VECM υποδειγμάτων είναι εκείνο της μη εξασφάλισης της

«θετικότητας» όλων των στοιχείων της μήτρας συσχετίσεων, H_t . Η ισχύς μιας τέτοιας συνθήκης έχει ιδιαίτερη σημασία εφ' όσον, στην περίπτωση κατά την οποία κάποια από τα στοιχεία της μήτρας H_t είναι αρνητικοί αριθμοί, τα προβλήματα που δημιουργούνται είναι αρκετά σημαντικά. Αναφορικά, ειδικότερα, με την υπό συνθήκη διακύμανση, h_{ijt} , ενδεχόμενη αρνητική τιμή της θα σήμαινε και αρνητικό ρίσκο (ποσότητα, δηλαδή, μη ερμηνεύσιμη απ την οικονομετρία). Αφ' ετέρου, η πρόσδωση αρνητικής τιμής σε μία υπό συνθήκη εταιροσυσχέτιση της μορφής h_{ijt} θα σήμαινε αυτομάτως ότι:

$$h_{ijt} \neq h_{jti}$$

με $i \neq j$. Το γεγονός αυτό θα αποστερούσε σημαντική πληροφόρηση από το μελετητή εφόσον – σε αυτή την περίπτωση – θα παρεχόταν τιμή όχι για την h_{jti} αλλά μόνον για την h_{ijt} . Όπως θα καταστεί σαφές, όμως, στη συνέχεια, τα προβλήματα που προαναφέρθηκαν θα αντιμετωπιστούν με την εισαγωγή του **ΒΕΚΚ υποδείγματος** στο οποίο όλα τα στοιχεία της H_t είναι αριθμοί θετικοί.

3.5.3 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΒΕΚΚ

Το υπόδειγμα αυτό εισήχθη από τους Engle και Kroner (1995) και φέρει την εξής μορφή:

$$H_t = W'W + A'H_{t-1}A + B'\Xi_{t-1}\Xi'_{t-1}B \quad (3.42)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι W, A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες συντελεστών (ή παραμέτρων) ίσων διαστάσεων. Στο υπόδειγμα ΒΕΚΚ, η «θετικότητα» της

μήτρας συσχετίσεων, H_t – περί της οποίας εκτενής αναφορά έγινε προηγουμένως – είναι εκ προημίου εξασφαλισμένη εξ' αιτίας της ειδικής μορφής που προσλαμβάνει το δεξιό μέλος της σχέσης (3.42).

3.5.4 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ GARCH

Υπό την παραδοχή πως οι μελετούμενες χρονοσειρές των πολυμεταβλητών GARCH υποδειγμάτων χαρακτηρίζονται από κανονικές κατανομές, κατά το στάδιο της εκτίμησης που επακολουθεί γίνεται χρήση της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας η οποία προστάζει τη μεγιστοποίηση της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας, $I(\omega)$. Η εν λόγω συνάρτηση φέρει την εξής μορφή:

$$I(\omega) = -\frac{nN}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log H_t + \Xi_t' H_t^{-1} \Xi_t)$$

Στην παραπάνω σχέση, με ω συμβολίζονται όλες οι παράμετροι του υποδείγματος που πρόκειται να εκτιμηθεί, ενώ με N παρίσταται το πλήθος των υπό μελέτη χρονοσειρών που το εν λόγω υπόδειγμα περιλαμβάνει. Επίσης, με n συμβολίζεται το πλήθος των παρατηρήσεων που τελικώς λαμβάνονται από τον ερευνητή. Η διαδικασία που ακολουθείται στο σημείο αυτό είναι παρόμοια με εκείνη που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά περισσότερο πολύπλοκη λόγω του ιδιαίτερα αυξημένου αριθμού συντελεστών που εξετάζονται.

3.5.5 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΤΡΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ GARCH ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΤΙΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΡΙΩΝ ΧΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΩΝ

Οι Borreslev, Engle και Wooldridge (1988) κατασκεύασαν ένα πολυμεταβλητό υπόδειγμα GARCH το οποίο περιέγραφε ταυτοχρόνως τις αποδόσεις των κρατικών ομολόγων εξαμηνιαίας διάρκειας, y_{1t} , τις αντίστοιχες των κρατικών ομολογιών εικοσαετούς διάρκειας, y_{2t} , αφ' εταιρου και, κατά τρίτον, το γενικό δείκτη τιμών μετοχών (NYSE) του Χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης, y_{3t} . Για την κατασκευή του ως άνω υποδείγματος συλλέχθηκαν συνολικά 102 τριμηνιαίες παρατηρήσεις οι οποίες έλαβαν χώρα μεταξύ του πρώτου τριμήνου του 1959 (1959 Q1) και του δευτέρου τριμήνου του 1984 (1984 Q2). Κατόπιν, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας και το υπόδειγμα το οποίο τελικά προέκυψε είχε την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,070 \\ (0,032) \\ -4,342 \\ (1,030) \\ 3,117 \\ (0,710) \end{bmatrix} + \underset{(0,160)}{0,499} \sum_j w_{jt-1} \begin{bmatrix} h_{1jt} \\ h_{2jt} \\ h_{3jt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \\ h_{13t} \\ h_{23t} \\ h_{33t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,011 \\ (0,004) \\ 0,176 \\ (0,062) \\ 13,305 \\ (6,372) \\ 0,018 \\ (0,009) \\ 5,143 \\ (2,820) \\ 2,083 \\ (1,466) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,445 \varepsilon_{1t-1}^2 \\ (0,105) \\ 0,233 \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ (0,092) \\ 0,188 \varepsilon_{2t-1}^2 \\ (0,113) \\ 0,197 \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{3t-1} \\ (0,132) \\ 0,165 \varepsilon_{2t-1} \varepsilon_{3t-1} \\ (0,093) \\ 0,078 \varepsilon_{3t-1}^2 \\ (0,066) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,466 h_{11t-1} \\ (0,056) \\ 0,598 h_{12t-1} \\ (0,052) \\ 0,441 h_{22t-1} \\ (0,215) \\ -0,362 h_{13t-1} \\ (0,161) \\ -0,348 h_{23t-1} \\ (0,333) \\ 0,469 h_{33t-1} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Το ως άνω υπόδειγμα, στο οποίο η ποσότητα (w_{jt-1}) αποτελεί συντελεστή, περιγράφει, αναμφίβολα, ένα GARCH – M πολυμεταβλητό υπόδειγμα τύπου διαγωνίου VECM. Ο μεν συντελεστής 0,499 της εξίσωσης (3.43) αντιστοιχεί στο συντελεστή δ που ορίστηκε κατά τη μελέτη του μονομεταβλητού ARCH – M υποδείγματος ενώ οι μικροί αριθμοί στις παρενθέσεις εκφράζουν τα τυπικά σφάλματα των ποσοτήτων που βρίσκονται ακριβώς από πάνω τους στις σχέσεις (3.43) και (3.44).

Στο παραπάνω υπόδειγμα και ιδιαίτερα στην εξίσωση (3.44), ενδιαφέρον έχει η συμπεριφορά της ποσότητας:

$$\alpha_{11} + \beta_{11} = 0,445 + 0,466 = 0,911$$

η οποία ενσωματώνει το σωρευτικό κίνδυνο της χρηματικής τοποθέτησης y_{1t} (τοποθέτηση σε κρατικά ομόλογα εξαμηνιαίας διάρκειας). Η εν λόγω ποσότητα παρουσιάζει ιδιαίτερα υψηλή τιμή, γεγονός που δεν απαντάται στις αντίστοιχες ποσότητες:

$$\alpha_{22} + \beta_{22} = 0,188 + 0,441 = 0,629$$

και:

$$\alpha_{33} + \beta_{33} = 0,078 + 0,4696 = 0,547$$

οι οποίες προσλαμβάνουν τιμές σχετικά χαμηλές. Η ανάλυση του φαινομένου αυτού, όμως, υπερβαίνει τα όρια του συγκεκριμένου συγγράμματος και για το λόγο αυτό η όποια περαιτέρω επέκταση κρίνεται, κατά το μάλλον ή το ήτον, αδόκιμη.

3.6 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Κατά το τρέχον κεφάλαιο, η εξέταση επικεντρώθηκε στις διάφορες παραλλαγές με τις οποίες τα υποδείγματα ARCH εμφανίζονται τόσο στη διεθνή βιβλιογραφία όσο και στο ευρύτερο φάσμα της επιστημονικής αρθρογραφίας. Τα διάφορα είδη των υποδειγμάτων αυτών ως μοναδικό σκοπό έχουν το να κατορθώσουν να καλύψουν περιοχές της οικονομικής επιστήμης τις οποίες αδυνατεί να κατανοήσει το συμβατικό ARCH υπόδειγμα, όπως αυτό θεμελιώθηκε στο 2^ο κεφάλαιο του παρόντος συγγράμματος.

Μία τέτοια ενδιαφέρουσα παραλλαγή, είναι και το υπόδειγμα ARCH – M το οποίο έχει την ιδιαιτερότητα να ενσωματώνει την υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματός του στην εξίσωση μέσου όρου του. Προσλαμβάνοντας την ειδική αυτή μορφή, το εν λόγω υπόδειγμα αντιμετωπίζει με επάρκεια περιπτώσεις κατά τις οποίες η απόδοση μιας επένδυσης συναρτάται του κινδύνου που αυτή ενέχει.

Ιδιαίτερη μνεία προσήκει και στην οικογένεια των μη συμμετρικών GARCH υποδειγμάτων, η οποία πραγματεύεται με μεγάλη επιτυχία τις αποδόσεις των μερισμάτων, εφ' όσον εκεί παρατηρείται συχνά το φαινόμενο της ανόμοιας απόκρισης της αγοράς σε ισόποσες αλλά διαφορετικά προσημασμένες αιφνίδιες διαταραχές της (shocks). Τα υποδείγματα AGARCH, EGARCH, TGARCH, Standard GARCH, NAGARCH, GJR GARCH, NARGCH και APARCH αποτελούν εξέχοντα μέλη της οικογένειας αυτής και προκύπτουν από τη γενέτειρα εξίσωση διακυμάνσεων της εν λόγω οικογενείας με απλή αντικατάσταση συγκεκριμένων τιμών σε ορισμένες από τις παραμέτρους της.

Εκτός, όμως, της περιγραφής του προαναφερθέντος φαινομένου της ασυμμετρίας, μια καθόλου ευάριθμη σειρά οικονομικών φαινομένων καθιστούν επιτακτική την επέκταση της οικογένειας ARCH σε ποικίλες άλλες μορφές. Στις μορφές αυτές απαντώνται τα απλούστατα στη διατύπωση τους υποδείγματα IGARCH και AARCH, τα συγγενή μεταξύ τους QTARCH και PNP GARCH, ενώ ιδιαίτερη μνεία αξίζει να γίνει στα Semiparametric GARCH αλλά και στα ARCD υποδείγματα τα οποία πραγματεύονται την περίπτωση κατά την οποία το υπό συνθήκη τυχαίο σφάλμα ακολουθεί κατανομές διαφορετικές της κανονικής.

Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση, επίσης, είναι εκείνη στην οποία παρουσιάζονται συσχετίσεις μεταξύ των διαφόρων οικονομικών μεταβλητών που συναπατρίζουν ένα υπόδειγμα. Την περίπτωση αυτή καλείται να θεραπεύσει η οικογένεια των πολυμεταβλητών GARCH υποδειγμάτων που ως

κυρίου εκπροσώπους της έχει το υπόδειγμα VECH, το διαγώνιο υπόδειγμα VECH καθώς και το υπόδειγμα BEKK. Αξίζει να σημειωθεί, πάντως, πως η μελέτη και εκτίμηση των υποδειγμάτων αυτών χαρακτηρίζεται από υψηλό βαθμό πολυπλοκότητας λόγω, κυρίως, του όγκου των παραμέτρων τις οποίες τα υποδείγματα αυτά μετέρχονται.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Alexander Carol: “The Handbook of Risk Management and Analysis”, John Wiley and Sons Ltd, 1996.
2. Bera Anil K. and Higgins Matthew L, 1993, “Arch Models: Properties, Estimation and Testing”, Journal of Economic surveys 4, pp. 305 – 62.
3. Black Fischer, 1976, “Studies of stock price volatility changes”, Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, pp. 177 – 181.
4. Brooks Chris “Introductory Econometrics for Finance”, Cambridge University Press, 2003.
5. Bollerslev Tim, 1987, “A conditionally heteroscedastic time series model of security prices and rates of return data”, Review of Economics and Statistics 59, pp. 542 – 547.
6. Bollerslev Tim, 1990, “Modelling the Coherence in Short – Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model”, Review of Economics and Statistics 72, pp. 498 – 505.

7. Bollerslev Tim, Engle R.F. and Wooldridge J.M, 1988, "A capital asset pricing model with time-varying covariances", Journal of Political Economy 96, pp. 116 – 131.
8. Domowitz I. and Hakkio C.S., 1985, "Conditional variance and the risk premium in the foreign exchange market", Journal of International Economics 19, pp. 47 – 66.
9. Engle Robert F. and Bollerslev Tim, 1986, "Modelling the persistence of conditional variances", Econometric Reviews 5, pp. 1- 50 and 81 – 87.
10. Engle Robert F. and Chowdhury Mustafa, 1992, "Implied ARCH Models from Options Prices", Journal of Econometrics 52, pp. 289 – 311.
11. Engle Robert F. and Gonzalez – Rivera Gloria, 1991, "Semiparametric ARCH Models", Journal of Business and Economic Statistics 4, pp. 345 – 59.
12. Engle Robert F. and Kroner K.F., 1995, "Multivariate simultaneous generalized GARCH", Econometric Theory 11, pp. 122 – 150.
13. Engle Robert F., Lilien David M. and Robins Russell P., 1987, "Estimating Time – Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH – M Model", Econometrica 2, pp. 391 – 407.
14. Engle Robert F. and Ng V.K., 1991, "Measuring and testing the impact of news on volatility", Mimeo, Department of Economics, University of California, San Diego.
15. Gouriéroux C. and Monfort A., 1992, "Qualitative threshold ARCH models", Journal of Econometrics 52, pp. 159 – 199.

16. Hentschel Ludger, 1995, "All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models", Journal of Financial Economics 39, pp. 71 – 104.
17. Nelson Daniel B., 1990, "ARCH Models as Diffusion Approximations", Journal of Econometrics 45, pp. 7 – 38.
18. Pagan A.R. and Hong Y.S., 1991, "Nonparametric and semiparametric methods in econometrics and statistics", Cambridge University Press, 1991.
19. Pagan A.R. and Schwert G.W., 1990, "Alternative models for conditional stock volatility", Journal of Econometrics 45, pp. 267 – 290.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ARCH ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΤΟΝ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, κρίθηκε σκόπιμο να περιλαμβάνεται - στο τελευταίο αυτό κεφάλαιό της - μια εφαρμογή των όσων ειπώθηκαν για την οικογένεια υποδειγμάτων ARCH. Ως τέτοια, καταλληλότερη θεωρήθηκε η εξεύρεση του υποδείγματος ARCH που περιγράφει τον πληθωρισμό της Ελλάδας. Πρωτού, όμως, αναφερθούν περισσότερα για το ζήτημα αυτό, χρήσιμο είναι να παρατεθούν συνοπτικά τα αίτια και οι ερμηνείες που μπορεί να προσλάβει το φαινόμενο του πληθωρισμού στη γενικότητά του. Η αναφορά αυτή πραγματοποιείται στην επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου, στην οποία, επιπροσθέτως, διατυπώνεται και επεξηγείται η μαθηματική σχέση από την οποία εξάγεται ο πληθωρισμός μιας χώρας.

Στην τρίτη παράγραφο, αναπτύσσεται η μέθοδος κατάστρωσης του οικονομετρικού υποδείγματος το οποίο ακολουθεί ο πληθωρισμός της Ελλάδας, ενώ, επιπροσθέτως, εξάγεται το οικονομετρικό υπόδειγμα στο οποίο αυτός υπακούει. Παράλληλα, παρέχονται οι απαραίτητες επεξηγήσεις και εξάγονται τα σχετικά συμπεράσματα. Στην τέταρτη παράγραφο του

παρόντος κεφαλαίου, επιπλέον, παρατίθεται ένα παράδειγμα μέσα από το οποίο αναδεικνύεται η ανάγκη εξεύρεσης, από τη σύγχρονη Οικονομική Επιστήμη, μεθόδων κατάστρωσης οικονομετρικών υποδειγμάτων ικανών να παρέχουν στον ερευνητή τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια προβλέψεων.

4.2 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ

Ο **πληθωρισμός**, pl_t , μιας χώρας, κατά το τρίμηνο t , προσδιορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$pl_t = \frac{wpi_t - wpi_{t-4}}{wpi_{t-4}} \quad (4.1)$$

στην οποία με wpi_t συμβολίζεται ο **δείκτης τιμών καταναλωτή** κατά το αντίστοιχο τρίμηνο. Ο δείκτης αυτός αντιπροσωπεύει το γενικότερο επίπεδο τιμών μιας οικονομίας.

Στην προσπάθεια των ερευνητών να ερμηνεύσουν τον πληθωρισμό, γεννήθηκε ένα ολόκληρο φάσμα θεωριών στη μια άκρη του οποίου κυριαρχεί η **μονεταριστική σχολή** σκέψης, η οποία αποπειράται να ερμηνεύσει το εν λόγω φαινόμενο αποκλειστικά κάτω από το πρίσμα της αύξησης της προσφοράς χρήματος. Με βάση το μονεταρισμό, ο μόνος τρόπος για να τεθεί υπό έλεγχο ο πληθωρισμός είναι το να ενεργήσει αποφασιστικά η κυβέρνηση για να περιορίσει την αύξηση της προσφοράς χρήματος.

Στον αντίποδα του φάσματος βρίσκεται η **σχολή του πληθωρισμού κόστους**, η οποία ισχυρίζεται ότι η διαδικασία του πληθωρισμού δεν είναι δυνατόν να κατανοηθεί ικανοποιητικά αν πρώτα δεν έχει μελετηθεί διεξοδικά το θεσμικό πλαίσιο καθορισμού των **μισθών** και των **τιμών**, στη διαμόρφωση του οποίου κυριαρχικό ρόλο διαδραματίζουν τα εργατικά συνδικάτα. Με βάση τα όσα διακηρύσσει αυτή η σχολή σκέψης, πληθωρισμός παρατηρείται όταν όλες οι μισθολογικές διεκδικήσεις που γίνονται από τις διάφορες κοινωνικές ομάδες δίνουν άθροισμα μεγαλύτερο από εκείνο που είναι ικανή να παράξει η οικονομία. Οι "υπέρογκες" αυτές διεκδικήσεις, σύμφωνα με τη σχολή του πληθωρισμού κόστους, επιφέρουν ως αποτέλεσμα την άνοδο του επιπέδου τιμών.

Ανάμεσα στις δυο προαναφερθείσες ακραίες θέσεις, υπάρχει περιθώριο για πολλές παραλλαγές. Μία από τις παραλλαγές αυτές είναι η **Κεϋνσιανή θεώρηση**, μια εκδοχή της οποίας αναγνωρίζει τη σημασία που κατέχουν οι μεταβολές της προσφοράς χρήματος στη διακύμανση του επιπέδου της συνολικής δαπάνης. Ταυτόχρονα, όμως, η εκδοχή αυτή δέχεται ότι η δύναμη των συνδικάτων είναι ικανή να αποτελέσει σοβαρό εμπόδιο σε μια θεώρηση του φαινομένου του πληθωρισμού στηριγμένη μόνο σε νομισματικούς περιορισμούς.

Ανεξάρτητα από τα αίτια και τις ερμηνείες που μπορεί να προσλάβει, ο πληθωρισμός δεν παύει να είναι ένα κυρίαρχο ζήτημα για την Οικονομία της κάθε χώρας, αφού διαδραματίζει πρωταρχικό ρόλο στον προσδιορισμό, τόσο των **αυξήσεων των μισθών** των εργαζομένων, όσο και των **επιτοκίων δανεισμού**. Για τους λόγους αυτούς, καθοριστικής σημασίας γεγονός είναι το

να διενεργούνται ακριβείς προβλέψεις για τον πληθωρισμό των ερχομένων χρονικών περιόδων. Για να γίνει, όμως, εφικτό κάτι τέτοιο, απαιτείται η εύρεση του κατάλληλου οικονομετρικού υποδείγματος το οποίο θα περιγράψει το εν λόγω μέγεθος. Μια απόπειρα προβλέψεων του πληθωρισμού της Ελλάδας, με όλα τα στάδια από τα οποία μια τέτοια διαδικασία αποτελείται, διενεργείται στην παράγραφο που ακολουθεί.

4.3 Ο ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ως γνωστόν, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x - \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 \\ &= e^0 - 0 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.2}$$

Όπως, επίσης, προκύπτει από τον αντίστοιχο πίνακα της ΕΣΥΕ¹ στο Παράρτημα, η χρονοσειρά pl_t , κατά το χρονικό διάστημα (1960:1, 2004:4), λαμβάνει τιμές πλησίον του μηδενός. Θα ισχύει, συνεπώς, βάσει της (4.2), ότι:

¹ Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

$$\begin{aligned}
 e^{pl_t} - pl_t - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow e^{pl_t} &= pl_t + 1 \\
 \Leftrightarrow pl_t &= \ln(pl_t + 1) \\
 &= \ln\left(\frac{wpi_t - wpi_{t-4}}{wpi_{t-4}} + 1\right) \\
 &= \ln\left(\frac{wpi_t}{wpi_{t-4}} - 1 + 1\right) \\
 &= \ln \frac{wpi_t}{wpi_{t-4}} \\
 &= \ln wpi_t - \ln wpi_{t-4}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$pl_t = dlwpii_t \quad (4.3)$$

Η χρονοσειρά που πρόκειται τελικώς να μελετηθεί είναι η εξής:

$$V_t = dlwpii_t - dlwpii_{t-1} \quad (4.4)$$

Ο λόγος για τον οποίο μελετάται η V_t και όχι η $dlwpii_t$ είναι ότι οι όροι της δεύτερης χρονοσειράς παρουσιάζουν υψηλό βαθμό **αυτοσυσχέτισης** μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει άρση της **στασιμότητας** της χρονοσειράς, καθιστώντας την ακατάλληλη για περαιτέρω εξέταση.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για την εξέταση της χρονοσειράς V_t διαφέρει ριζικά από την προτεινόμενη στην Παράγραφο 2.6, λόγω κυρίως της μη σύγκλισης των αποτελεσμάτων των διαφόρων χρησιμοποιούμενων αριθμητικών μεθόδων. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος εκτίμησης Box-Jenkins αντιμετωπίζει το εξεταζόμενο υπόδειγμα με τρόπο ενίοτε **αποσπασματικό**, θεωρώντας συχνά τα AR και MA τμήματά του ως ανεξάρτητες μεταξύ τους χρονοσειρές. Η ίδια αυτή μέθοδος, στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιείται μόνον για να υποδείξει πιθανές μορφές που μπορεί να προσλάβει η δομή του μελετουμένου υποδείγματος. Για την εκτίμηση του υποδείγματος – τον προσδιορισμό, δηλαδή, των τιμών των συντελεστών του – εγκυρότερη θεωρείται η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (MLE), η οποία αντιμετωπίζει το υπόδειγμα με τρόπο σφαιρικό. Στην αλλαγή αυτή της νοοτροπίας αντιμετώπισης ενός υποδείγματος οφείλεται και η διαφοροποίηση της εδώ ακολουθούμενης μεθοδολογίας από την αντιστοίχως προτεινόμενη στην Παράγραφο 2.6.

Για τον προσδιορισμό του υποδείγματος που περιγράφει τη V_t , πραγματοποιείται εκτίμηση, με χρήση της μεθόδου MLE, **όλων** ανεξαιρέτως των υποδειγμάτων που έχουν εξίσωση μέσου όρου τύπου $ARMA(I, J)$ με ή χωρίς σταθερό όρο και, ομοίως, εξίσωση διακύμανσης τύπου $GARCH(K, L)$, όπου:

$$I, J, K, L \in [0, 3]$$

Από ένα συνολικό πλήθος 900 εξεταζομένων υποδειγμάτων, εκείνο στο οποίο η συνάρτηση πιθανοφάνειας λαμβάνει τη μέγιστη τιμή είναι ένα υπόδειγμα του οποίου οι εξισώσεις μέσου όρου και διακύμανσης έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} V_t = & -0,0027931 - 0,3662V_{t-1} - 0,4957V_{t-2} \\ & - 0,2435V_{t-3} + e_t + 0,8390e_{t-1} + \\ & + 0,2952e_{t-2} + 0,8334e_{t-3} \end{aligned} \quad (4.5)$$

και:

$$h_t = 0,000044045 + 0,2655e_{t-1}^2 + 0,6199e_{t-2}^2 \quad (4.6)$$

Όπως είναι φανερό από τις παραπάνω σχέσεις, το υπόδειγμα στο οποίο υπακούει η V_t είναι τύπου ARCH(2) με σταθερό όρο.

Η σχέση (4.4), λόγω της (4.5), γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} dlwp_{it} - dlwp_{it-1} = & -0,0027931 - 0,3662(dlwp_{it-1} - dlwp_{it-2}) - \\ & - 0,4957(dlwp_{it-2} - dlwp_{it-3}) - \\ & - 0,2435(dlwp_{it-3} - dlwp_{it-4}) + \\ & + e_t + 0,8390e_{t-1} + \\ & + 0,9252e_{t-2} + 0,8334e_{t-3} \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα:

$$dlwp_{it} = -0,0027931 + 0,6338dlwp_{it-1} -$$

$$\begin{aligned}
 & -0,1295dlwp\dot{i}_{t-2} + 0,2522dlwp\dot{i}_{t-3} + \\
 & + 0,2435dlwp\dot{i}_{t-4} + e_t + 0,8390e_{t-1} + \\
 & + 0,9252e_{t-2} + 0,8334e_{t-3}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Λόγω της σχέσης (4.4), επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 & Var_{t-1}(V_t) = Var_{t-1}(dlwp\dot{i}_t) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{Var_{t-1}(V_t)} = \sqrt{Var_{t-1}(dlwp\dot{i}_t)} \\
 & \Leftrightarrow Vol_{t-1}(V_t) = \sqrt{Vol_{t-1}(dlwp\dot{i}_t)} \\
 & \Leftrightarrow h_t^{\frac{1}{2}} = Vol_{t-1}(dlwp\dot{i}_t)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Κατά συνέπεια, η βοηθητική χρονοσειρά $dlwp\dot{i}_t$, που περιγράφει με ικανοποιητική ακρίβεια τον πληθωρισμό, υπακούει σε ένα υπόδειγμα τύπου ARCH(2) σταθερού όρου, του οποίου οι εξισώσεις μέσου όρου και διακύμανσης δίδονται από τις σχέσεις (4.7) και (4.6), αντίστοιχα.

Από τη σχέση (4.4), επιπλέον, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 E_{2004:4}(dlwp\dot{i}_{2005:1}) = & -0,0027931 + 0,6338dlwp\dot{i}_{2004:4} - \\
 & - 0,1295dlwp\dot{i}_{2004:3} + 0,2522dlwp\dot{i}_{2004:2} +
 \end{aligned}$$

$$+ 0,2435dlwp_{ii_{2004:1}} + e_t + 0,8390e_{2004:4} + \\ + 0,9252e_{2004:3} + 0,8334e_{2004:2}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση και τις εξισώσεις:

$$dlwp_{ii_{2004:4}} = 0,031077822893$$

$$dlwp_{ii_{2004:3}} = 0,027878968612$$

$$dlwp_{ii_{2004:2}} = 0,028479648899$$

$$dlwp_{ii_{2004:1}} = 0,026808204993$$

$$e_{2004:4} = 0,004040566211$$

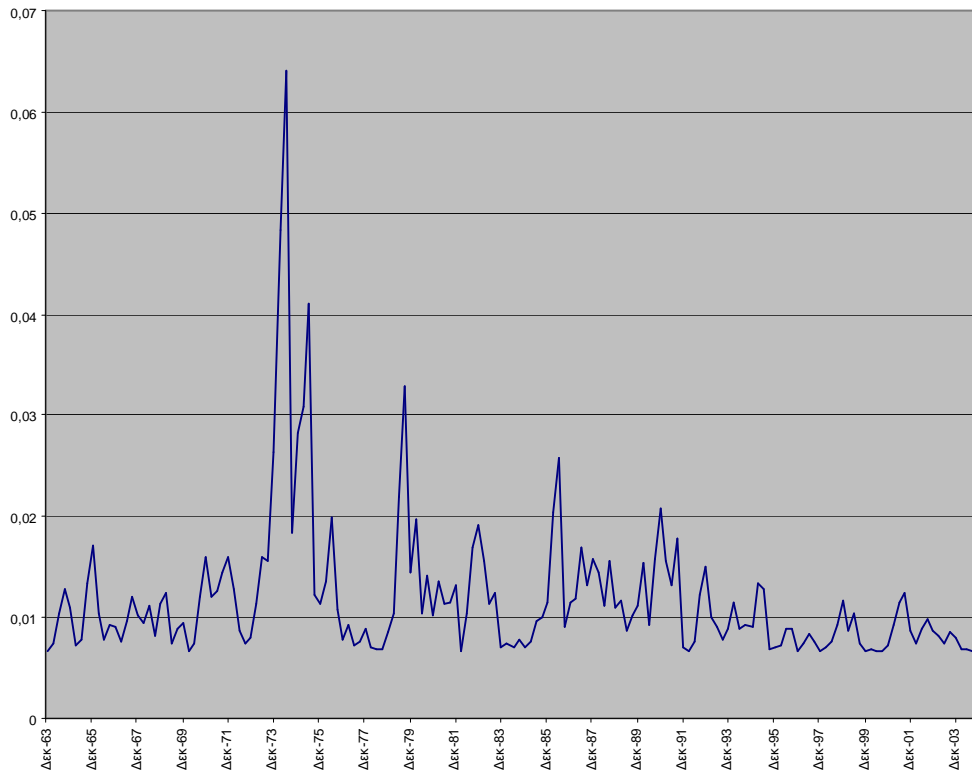
$$e_{2004:3} = 0,000662604012$$

$$e_{2004:2} = 0,001023944135$$

προκύπτει ότι η αναμενόμενη τιμή του πληθωρισμού κατά το πέρας του πρώτου τριμήνου του 2005, είναι:

$$E_{2004:4}(dlwp_{ii_{2005:1}}) = 3,2\%$$

Στο Διάγραμμα 4.1, που ακολουθεί, απεικονίζονται οι ιστορικές τιμές της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης, $Vol_{t-1}(dlwp_{ii_t})$, της χρονοσειράς $dlwp_{ii_t}$. Περίοδοι που παρουσιάζουν υψηλή $Vol_{t-1}(dlwp_{ii_t})$ αντιστοιχούν σε περιόδους οικονομικής αστάθειας της χώρας, ενώ περίοδοι που παρουσιάζουν μικρή $Vol_{t-1}(dlwp_{ii_t})$ αντιστοιχούν σε περιόδους οικονομικής σταθερότητας.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1

Ιστορικές τιμές της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης της χρονοσειράς $dlwpi_t$.

4.4 ΜΕΤΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

Όπως είναι ευρύτατα γνωστό, ο πληθωρισμός διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στη διαμόρφωση των μισθών των εργαζομένων. Αυξήσεις των μισθών οι οποίες υστερούν (σε ποσοστό) του τρέχοντος πληθωρισμού, υποδηλώνουν

ελάττωση του πραγματικού εισοδήματος των εργαζομένων, ενώ – όσο κι αν αυτό φαίνεται παράδοξο – αύξηση του πραγματικού εισοδήματος των εργαζομένων επισυμβαίνει μόνον όταν οι εν λόγω ποσοστιαίες αυξήσεις υπερβούν τον τρέχοντα πληθωρισμό.

Υπό αυτό το πρίσμα, και με δεδομένο το ότι ο τριτογενής τομέας της οικονομίας της χώρας είναι αρκετά διογκωμένος, ο καθορισμός των αυξήσεων των τιμών των μισθωτών αποτελεί όχι μόνο παράγοντα σημαντικής επιβάρυνσης του ετήσιου προϋπολογισμού αλλά και ζήτημα μείζονος πολιτικής σημασίας, αφού χαρακτηρίζει την κοινωνική πολιτική της εκάστοτε κυβέρνησης. Πιο συγκεκριμένα, η αύξηση των μισθών υπεράνω του πληθωρισμού ενώ τονίζει, μεν, το φιλολαϊκό χαρακτήρα της εκάστοτε κυβερνητικής πολιτικής, κατατείνει, δε, σε επιβάρυνση του ετήσιου κρατικού προϋπολογισμού. Ισόποσο πλεόνασμα στον προϋπολογισμό ανακύπτει ως απόρροια της συνολικής εισοδηματικής μείωσης που υφίστανται οι εργαζόμενοι όταν η προβλεφθείσα τιμή του πληθωρισμού υπερβεί την πραγματική. Ως αντιστάθμισμα της μείωσης αυτής προκαλείται **κοινωνική δυσaréσκεια**.

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η μεγιστοποίηση της επιβάρυνσης του προϋπολογισμού (ή, αντίστοιχα, της επερχόμενης κοινωνικής δυσaréσκειας) για το πρώτο τρίμηνο του έτους 2005, επισυμβαίνει όταν μεγιστοποιείται η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ πραγματικού και προβλεφθέντος πληθωρισμού. Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στο διπλάσιο μιας, αντιπροσωπευτικής για το εν λόγω τρίμηνο, τιμής της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης της χρονοσειράς, $dlwpii_t$, που περιγράφει τον πληθωρισμό. Ισχύει, δηλαδή, η εξής σχέση:

$$\left[\begin{array}{l} \text{μέγιστη ποσοστιαία διαφορά} \\ \text{μεταξύ πραγματικού και προ-} \\ \text{βλέφθεντος πληθωρισμού για} \\ \text{το πρώτο τρίμηνο του 2005.} \end{array} \right] = 2Vol_{\text{trimestriou}}(dlwpii) = 2h_{\text{trimestriou}}^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Κατά συνέπεια, ισχύει ότι:

$$\left[\begin{array}{l} \text{μέγιστη επιβάρυνση} \\ \text{προϋπολογισμού για} \\ \text{το πρώτο τρίμηνο} \\ \text{του 2005} \end{array} \right] = 3 \times 2 \times h_{\text{trimestriou}}^{\frac{1}{2}} \times \left[\begin{array}{l} \text{πλήθος} \\ \text{εργαζομένων} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \text{μέσος μηνιαίος} \\ \text{μισθός το 2004} \end{array} \right] \quad (4.10)$$

εφ' όσον:

$$\left[\begin{array}{l} \text{μέσος μηνιαίος} \\ \text{μισθός το 2004} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{μέσος αναμενόμενος μηνιαίος} \\ \text{μισθός το πρώτο τρίμηνο του 2005} \end{array} \right]$$

Από τις σχέσεις:

$$e_{2004:4} = 0,004040566211$$

$$e_{2004:3} = 0,000662604012$$

$$e_{2004:2} = 0,001023944135$$

και τη σχέση (4.6), προκύπτει ότι:

$$h_{2004:4}^{\frac{1}{2}} = h_{2005:1}^{\frac{1}{2}} = 0,007$$

Κατά συνέπεια, η τιμή 0,007 μπορεί αβίαστα να τεθεί ως η αντιπροσωπευτικότερη τιμή της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης για το πρώτο τρίμηνο του έτους 2005. Ισχύει, δηλαδή, ότι:

$$h_{\text{τρίμηνου}}^{\frac{1}{2}} = 0,007 \quad (4.11)$$

Από τις σχέσεις (4.10) και (4.11), προκύπτει, τελικά, ότι:

$$\begin{bmatrix} \text{μέγιστη επιβάρυνση} \\ \text{προϋπολογισμού για} \\ \text{το πρώτο τρίμηνο} \\ \text{του 2005} \end{bmatrix} = 0,042 \times \begin{bmatrix} \text{πλήθος} \\ \text{εργαζομένων} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{μέσος μηνιαίος} \\ \text{μισθός το 2004} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη το γεγονός ότι ο αριθμός των απασχολούμενων στον τριτογενή τομέα, σύμφωνα με την απογραφή του 2001², ανερχόταν σε 2.401.834 άτομα – μέγεθος που δε θα πρέπει να έχει μεταβληθεί σημαντικά έως σήμερα – και ότι ο μέσος μηνιαίος μισθός κυμαίνεται γύρω στα 800 ευρώ, εύκολα καταλήγει κανείς στο ότι η ζητούμενη μέγιστη επιβάρυνση (ή,

² Πηγή: ΕΣΥΕ.

αντίστοιχα, ελάφρυνση) του προϋπολογισμού κατά το πρώτο τρίμηνο του έτους 2005, με βάση τη σχέση (4.12), ανέρχεται στα 80.000.000 ευρώ, δηλαδή στα 11.500.000 ευρώ ανά 0,1 ποσοστιαίες μονάδες της αντιπροσωπευτικής υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης, $Vol_{\text{τρίμηνο}}(dlwpii)$. Το ανωτέρω συμπέρασμα ισχύει ανεξάρτητα από το ποια από τις τιμές εντός του

διαστήματος $\left[h_{2004:4}^{\frac{1}{2}}, E_{2004:4} \left(h_{2005:1}^{\frac{1}{2}} \right) \right]$ θα θεωρηθεί, τελικά, ως η

αντιπροσωπευτικότερη για τον πληθωρισμό του πρώτου τριμήνου του έτους 2005. Από το γεγονός αυτό, γίνεται εύκολα αντιληπτό το πόσο επιβεβλημένη είναι η εξεύρεση μεθόδων κατασκευής οικονομετρικών υποδειγμάτων που να παρέχουν ακριβείς προβλέψεις.

4.7 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, η μελέτη επικεντρώθηκε στο φαινόμενο του πληθωρισμού. Ο πληθωρισμός αποτελεί ζήτημα πρωταρχικής σημασίας για την Οικονομία της κάθε χώρας, αφού διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στον καθορισμό των αυξήσεων τόσο των μισθών των εργαζομένων όσο και των επιτοκίων δανεισμού. Βάσει των παραπάνω, καθίσταται επιτακτική η ανάγκη της επιστημονικής περιγραφής του πληθωρισμού και, αναφορικά με τον πληθωρισμό της Ελλάδας, ετούτο επιτυγχάνεται με την κατάστρωση του οικονομετρικού υποδείγματος που τον περιγράφει.

Στην τέταρτη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού παρατίθεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτίμησης του κόστους το οποίο ανακύπτει από

την αβεβαιότητα που συνοδεύει προβλέψεις σχετικές με τον πληθωρισμό. Από το παράδειγμα προκύπτει ότι μια ατυχής πρόβλεψη του πληθωρισμού μπορεί είτε να επιβαρύνει σημαντικά τον προϋπολογισμό της χώρας είτε να προκαλέσει κοινωνική δυσαρέσκεια σε βάρος της κυβέρνησης. Για να αποφευχθούν αυτές οι δυσάρεστες επιπτώσεις, απαραίτητο είναι, οι προβλέψεις που διενεργούνται να είναι όσο το δυνατόν ακριβέστερες και να παρουσιάζουν την ελάχιστη εφικτή τυπική απόκλιση.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Auerbach, Kotlikoff: “Μακροοικονομία: Μια Ολοκληρωμένη Προσέγγιση”, Εκδόσεις Γ.Παρίκος & ΣΙΑ ΕΕ, 1997.
2. Branson William, Litvack James: “Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις Γ. Δαρδανός & Κ. Δαρδανός ΟΕ, 2002.
3. Diulio Eugene: “Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική ΕΠΕ., 1974.
4. Dornbusch Rudiger, Fischer Stanley: “Μακροοικονομική”, Εκδόσεις Κριτική ΑΕ, 1993.
5. Felderer Bernhard, Homburg Stefan: “Μακροοικονομική και Νέα Μακροοικονομική”, Εκδόσεις Κριτική ΑΕ, 1991.
6. Heilbroner R., Thurow L.: “Για την Κατανόηση της Μακροοικονομικής”, Εκδόσεις Παπαζήση ΑΕΒΕ, 1972.
7. Mankiw N.Gregory: “Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις Γ. Δαρδανός & Κ. Δαρδανός ΟΕ, 2002.

8. Αγαπητός Ι. Γεώργιος: “Νέα Μακροοικονομική & Ορθολογικές Επιχειρηματικές Αποφάσεις”, Εκδόσεις Σταμούλη, 2004.
9. Βουδούρης Δημήτριος, Κουρούνη-Μαλλιαράκη Μαρία: “Μικρο-Μακροοικονομική Θεωρία & Πρακτική”, Εκδόσεις Σταμούλη, 1996.
10. Κώπτη Πετράκη Αθηνά, Κώπτη Χριστίνα Γεωργίου: “Εισαγωγή στη Σύγχρονη Μακροοικονομική”, Εκδόσεις Σμπίλιας Κων/νος & Πέτρος, 1998.
11. Κώπτη Πετράκη Αθηνά, Κώπτη Χριστίνα Γεωργίου: “Σύγχρονη Μακροοικονομική”, Εκδόσεις Μπένου Σωτ.Ευγενία, 2000.
12. Κώπτη Πετράκη Αθηνά: “Σύγχρονη Μακροοικονομική Θεωρία και Πολιτική”, Εκδόσεις Σμπίλιας Κων/νος & Πέτρος, 1997.
13. Λεβεντάκης Ιωάννης: “Διεθνής Μακροοικονομική & Χρηματοοικονομική”, Εκδόσεις Σταμούλη, 2003.
14. Λεβεντάκης Ιωάννης: “Μακροοικονομική Ανοικτής Οικονομίας”, Εκδόσεις Σταμούλη, 1995.
15. Λιανός Θεόδωρος, Μπένος Θεοφάνης: “Μακροοικονομική Θεωρία & Πολιτική”, Εκδόσεις Μπένου Σωτ.Ευγενία, 1998.
16. Μπένος Θεοφάνης: “Σύγχρονες Τάσεις στη Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις Μπένου Σωτ.Ευγενία, 2001.
17. Μπένος Θεοφάνης: “Σύγχρονες Τάσεις στη Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις Σταμούλη, 1988.
18. Παλαιολόγος Ιωάννης: “Ασκήσεις Μακροοικονομικής Θεωρίας”, Εκδόσεις Σταμούλη, 2004.

19. Πανταζίδης Ν. Στέλιος: “Μακροοικονομικές Εξελίξεις και Οικονομική Πολιτική στην Ελλάδα”, Εκδόσεις Κριτική ΑΕ, 2002.
20. Παπαναγιώτου Ευάγγελος: “Μακροοικονομική Ανάλυση”, Εκδόσεις Τσαχουρίδης Π.Ιωάννης, 2004.
21. Πουρναράκης Ευθ.: “Εξέλιξη Μακροοικονομικής Σκέψης Θεωρία & Πολιτική”, Εκδόσεις Παρατηρητής ΑΕ, 1984.
22. Πουρναράκης Ευθ.: “Μακροοικονομία Θεωρία και Πολιτική”, Εκδόσεις Σμπίλιας Κων/νος & Πέτρος, 1994.
23. <http://www.statistics.gr>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



Γ.Γ.ΕΣΥΕ

Συγκρίσεις 12μηνων περιόδων Γενικού ΔΤΚ, κατά τα έτη 1959-2004(Μάιος)

Πηγή: ΕΣΥΕ

Μήνας	1959		1960		1961		1962	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	1,555		1,580	1,6%	1,635	3,5%	1,614	-1,3%
2	1,555		1,570	1,0%	1,632	3,9%	1,598	-2,1%
3	1,561		1,577	1,0%	1,641	4,1%	1,611	-1,9%
4	1,573		1,592	1,2%	1,648	3,5%	1,623	-1,5%
5	1,570		1,589	1,2%	1,641	3,3%	1,620	-1,3%
6	1,561		1,598	2,4%	1,623	1,5%	1,620	-0,2%
7	1,577		1,598	1,4%	1,614	1,0%	1,614	0,0%
8	1,580		1,598	1,2%	1,607	0,6%	1,614	0,4%
9	1,583		1,607	1,6%	1,623	1,0%	1,623	0,0%
10	1,586		1,614	1,8%	1,623	0,6%	1,641	1,1%
11	1,583		1,620	2,3%	1,617	-0,2%	1,638	1,3%
12	1,583		1,638	3,5%	1,626	-0,8%	1,654	1,7%
Μέσος	1,572		1,598	1,7%	1,628	1,8%	1,622	-0,3%

Μήνας	1964		1965		1966		1967	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	1,675	0,4%	1,700	1,5%	1,790	5,3%	1,870	4,5%
2	1,675	0,7%	1,694	1,1%	1,781	5,1%	1,858	4,3%
3	1,688	0,4%	1,709	1,3%	1,802	5,4%	1,880	4,3%
4	1,691	0,4%	1,725	2,0%	1,827	5,9%	1,892	3,6%
5	1,691	0,9%	1,731	2,4%	1,827	5,5%	1,870	2,4%
6	1,685	1,1%	1,737	3,1%	1,818	4,6%	1,849	1,7%
7	1,682	0,9%	1,737	3,3%	1,815	4,4%	1,846	1,7%
8	1,669	0,7%	1,737	4,1%	1,808	4,1%	1,827	1,0%
9	1,685	1,1%	1,747	3,7%	1,830	4,8%	1,839	0,5%
10	1,697	1,3%	1,768	4,2%	1,852	4,7%	1,839	-0,7%
11	1,685	0,9%	1,765	4,8%	1,849	4,7%	1,827	-1,2%
12	1,700	1,5%	1,784	4,9%	1,867	4,7%	1,842	-1,3%
Μέσος	1,685	0,9%	1,736	3,0%	1,822	4,9%	1,853	1,7%

Μήνας	1968		1969		1970		1971	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	1,846	-1,3%	1,892	2,5%	1,935	2,3%	2,000	3,4%
2	1,833	-1,3%	1,870	2,0%	1,907	2,0%	1,963	2,9%
3	1,858	-1,2%	1,895	2,0%	1,948	2,8%	2,006	3,0%
4	1,864	-1,5%	1,920	3,0%	1,975	2,9%	2,037	3,1%
5	1,864	-0,3%	1,910	2,5%	1,982	3,7%	2,062	4,1%
6	1,858	0,5%	1,910	2,8%	1,982	3,7%	2,046	3,3%
7	1,855	0,5%	1,910	3,0%	1,957	2,4%	2,016	3,0%
8	1,849	1,2%	1,883	1,8%	1,926	2,3%	1,978	2,7%
9	1,861	1,2%	1,907	2,5%	1,969	3,2%	2,025	2,8%
10	1,873	1,8%	1,920	2,5%	1,985	3,4%	2,031	2,3%
11	1,864	2,0%	1,917	2,8%	1,978	3,2%	2,037	3,0%
12	1,892	2,7%	1,932	2,1%	2,003	3,7%	2,062	2,9%
Μέσος	1,860	0,3%	1,906	2,5%	1,962	3,0%	2,022	3,0%

Μήνας	1972		1973		1974		1975	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	2,065	3,2%	2,207	6,9%	2,949	33,6%	3,302	11,9%
2	2,034	3,6%	2,186	7,4%	2,915	33,4%	3,311	13,6%
3	2,090	4,2%	2,254	7,8%	3,008	33,5%	3,431	14,1%
4	2,118	3,9%	2,294	8,3%	3,042	32,6%	3,468	14,0%
5	2,127	3,1%	2,340	10,0%	3,085	31,8%	3,478	12,7%
6	2,118	3,5%	2,399	13,3%	3,122	30,2%	3,484	11,6%
7	2,093	3,8%	2,368	13,1%	3,119	31,7%	3,453	10,7%
8	2,062	4,2%	2,377	15,3%	3,054	28,5%	3,419	11,9%
9	2,108	4,1%	2,516	19,4%	3,141	24,8%	3,564	13,5%
10	2,139	5,3%	2,634	23,1%	3,184	20,9%	3,660	15,0%
11	2,158	5,9%	2,791	29,4%	3,215	15,2%	3,713	15,5%
12	2,198	6,6%	2,872	30,7%	3,258	13,5%	3,768	15,7%
Μέσος	2,109	4,3%	2,436	15,5%	3,091	26,9%	3,504	13,4%

Μήνας	1976		1977		1978		1979	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	3,793	14,9%	4,223	11,3%	4,788	13,4%	5,503	14,9%
2	3,781	14,2%	4,198	11,0%	4,751	13,2%	5,503	15,8%
3	3,892	13,4%	4,312	10,8%	4,890	13,4%	5,676	16,1%
4	3,932	13,4%	4,402	11,9%	4,980	13,1%	5,796	16,4%
5	3,969	14,1%	4,439	11,8%	5,023	13,2%	5,861	16,7%
6	4,000	14,8%	4,467	11,7%	5,073	13,6%	5,920	16,7%
7	3,951	14,4%	4,455	12,8%	5,002	12,3%	5,997	19,9%
8	3,895	13,9%	4,393	12,8%	4,921	12,0%	5,945	20,8%
9	4,013	12,6%	4,516	12,6%	5,060	12,0%	6,118	20,9%
10	4,081	11,5%	4,622	13,3%	5,153	11,5%	6,285	22,0%
11	4,136	11,4%	4,677	13,1%	5,212	11,4%	6,399	22,8%
12	4,210	11,7%	4,748	12,8%	5,295	11,5%	6,606	24,8%
Μέσος	3,971	13,3%	4,454	12,2%	5,013	12,5%	5,967	19,0%

Μήνας	1980		1981		1982		1983	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	6,798	23,5%	8,541	25,6%	10,360	21,3%	12,345	19,2%
2	6,813	23,8%	8,622	26,5%	10,360	20,2%	12,531	21,0%
3	7,027	23,8%	8,826	25,6%	10,670	20,9%	13,058	22,4%
4	7,240	24,9%	9,002	24,3%	10,980	22,0%	13,244	20,6%
5	7,326	25,0%	9,110	24,3%	11,135	22,2%	13,462	20,9%
6	7,518	27,0%	9,271	23,3%	11,476	23,8%	13,555	18,1%
7	7,469	24,5%	9,221	23,5%	11,352	23,1%	13,431	18,3%
8	7,398	24,4%	9,150	23,7%	11,166	22,0%	13,400	20,0%
9	7,608	24,4%	9,543	25,4%	11,445	19,9%	13,834	20,9%
10	7,809	24,2%	9,790	25,4%	11,725	19,8%	14,175	20,9%
11	8,078	26,2%	10,000	23,8%	11,973	19,7%	14,361	19,9%
12	8,337	26,2%	10,214	22,5%	12,159	19,0%	14,609	20,2%
Μέσος	7,452	24,9%	9,274	24,5%	11,233	21,1%	13,500	20,2%

Μήνας	1984		1985		1986		1987	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	14,826	20,1%	17,649	19,0%	22,053	25,0%	25,496	15,6%
2	14,919	19,1%	17,649	18,3%	21,929	24,3%	25,620	16,8%
3	15,354	17,6%	18,145	18,2%	22,612	24,6%	26,427	16,9%
4	15,633	18,0%	18,393	17,7%	22,953	24,8%	26,985	17,6%
5	15,850	17,7%	18,548	17,0%	23,077	24,4%	27,171	17,7%
6	16,160	19,2%	18,952	17,3%	23,573	24,4%	27,823	18,0%
7	16,036	19,4%	18,703	16,6%	23,325	24,7%	27,264	16,9%
8	15,912	18,8%	18,734	17,7%	23,263	24,2%	27,109	16,5%
9	16,315	17,9%	19,603	20,2%	24,069	22,8%	27,605	14,7%
10	16,718	17,9%	20,254	21,2%	24,721	22,1%	28,474	15,2%
11	16,935	17,9%	20,813	22,9%	24,907	19,7%	28,722	15,3%
12	17,246	18,0%	21,526	24,8%	25,186	17,0%	29,156	15,8%
Μέσος	15,992	18,5%	19,081	19,3%	23,472	23,0%	27,321	16,4%

Μήνας	1988		1989		1990		1991	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	29,135	14,3%	33,230	14,1%	38,386	15,5%	46,901	22,2%
2	29,048	13,4%	33,095	13,9%	38,426	16,1%	47,004	22,3%
3	29,908	13,2%	33,938	13,5%	39,677	16,9%	47,900	20,7%
4	30,494	13,0%	34,499	13,1%	40,388	17,1%	49,584	22,8%
5	30,584	12,6%	34,591	13,1%	41,675	20,5%	49,676	19,2%
6	31,091	11,7%	35,165	13,1%	42,747	21,6%	50,826	18,9%
7	30,845	13,1%	34,983	13,4%	42,563	21,7%	50,554	18,8%
8	30,881	13,9%	35,045	13,5%	42,810	22,2%	50,505	18,0%
9	31,696	14,8%	36,335	14,6%	44,444	22,3%	52,555	18,2%
10	32,500	14,1%	36,903	13,5%	45,511	23,3%	53,549	17,7%
11	32,767	14,1%	37,222	13,6%	46,114	23,9%	54,392	18,0%
12	33,229	14,0%	38,162	14,8%	46,895	22,9%	55,344	18,0%
Μέσος	31,015	13,5%	35,264	13,7%	42,470	20,4%	50,733	19,5%

Μήνας	1992		1993		1994		1995	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	55,410	18,1%	63,437	14,5%	70,596	11,3%	78,125	10,7%
2	55,567	18,2%	63,631	14,5%	70,861	11,4%	77,940	10,0%
3	56,680	18,3%	65,984	16,4%	72,612	10,0%	79,785	9,9%
4	57,540	16,0%	66,857	16,2%	73,704	10,2%	80,630	9,4%
5	57,551	15,9%	67,007	16,4%	74,225	10,8%	81,389	9,7%
6	58,508	15,1%	67,755	15,8%	74,743	10,3%	81,830	9,5%
7	57,404	13,5%	66,445	15,7%	74,225	11,7%	80,540	8,5%
8	58,225	15,3%	66,713	14,6%	74,443	11,6%	80,650	8,3%
9	60,622	15,4%	68,408	12,8%	76,420	11,7%	82,556	8,0%
10	62,063	15,9%	69,705	12,3%	77,130	10,7%	83,178	7,8%
11	62,563	15,0%	70,248	12,3%	77,432	10,2%	83,504	7,8%
12	63,315	14,4%	70,922	12,0%	78,487	10,7%	84,704	7,9%
Μέσος	58,787	15,9%	67,259	14,4%	74,573	10,9%	81,236	8,9%

Μήνας	1996		1997		1998		1999	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	84,661	8,4%	90,386	6,8%	94,360	4,4%	97,848	3,7%
2	84,528	8,5%	90,067	6,6%	93,911	4,3%	97,376	3,7%
3	86,839	8,8%	92,049	6,0%	96,260	4,6%	99,532	3,4%
4	87,722	8,8%	92,863	5,9%	97,823	5,3%	100,568	2,8%
5	88,462	8,7%	93,252	5,4%	98,186	5,3%	100,516	2,4%
6	88,692	8,4%	93,602	5,5%	98,465	5,2%	100,519	2,1%
7	87,145	8,2%	91,861	5,4%	96,549	5,1%	98,563	2,1%
8	87,080	8,0%	91,938	5,6%	96,562	5,0%	98,474	2,0%
9	89,119	8,0%	93,503	4,9%	98,388	5,2%	100,379	2,0%
10	89,822	8,0%	94,037	4,7%	98,442	4,7%	100,657	2,2%
11	89,765	7,5%	94,381	5,1%	98,364	4,2%	100,914	2,6%
12	90,879	7,3%	95,164	4,7%	98,846	3,9%	101,559	2,7%
Μέσος	87,893	8,2%	92,759	5,5%	97,180	4,8%	99,742	2,6%

Μήνας	2000		2001		2002		2003	
	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή	Δείκτης	Μεταβολή
1	100,422	2,6%	103,841	3,4%	108,447	4,4%	111,847	3,1%
2	100,209	2,9%	103,738	3,5%	107,299	3,4%	111,955	4,3%
3	102,662	3,1%	105,772	3,0%	110,013	4,0%	114,498	4,1%
4	103,158	2,6%	106,767	3,5%	110,861	3,8%	114,603	3,4%
5	103,458	2,9%	107,218	3,6%	110,848	3,4%	115,080	3,8%
6	103,050	2,5%	107,104	3,9%	110,649	3,3%	114,869	3,8%
7	101,262	2,7%	105,234	3,9%	108,747	3,3%	112,653	3,6%
8	101,420	3,0%	105,260	3,8%	108,990	3,5%	112,607	3,3%
9	103,533	3,1%	107,270	3,6%	111,048	3,5%	114,752	3,3%
10	104,713	4,0%	107,610	2,8%	111,624	3,7%	115,165	3,2%
11	105,197	4,2%	107,724	2,4%	111,648	3,6%	115,382	3,3%
12	105,525	3,9%	108,739	3,0%	112,422	3,4%	115,880	3,1%
Μέσος	102,884	3,2%	106,356	3,4%	110,216	3,6%	114,108	3,5%

Μήνας	2004	
	Δείκτης	Μεταβολή
1	115,122	2,9%
2	114,765	2,5%
3	117,606	2,7%
4	117,941	2,9%
5	118,457	2,9%

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αγαπητός Ι. Γεώργιος: “Νέα Μακροοικονομική & Ορθολογικές Επιχειρηματικές Αποφάσεις”, Εκδόσεις Σταμούλη, 2004.
2. Αγιακλόγλου Χρήστος Ν. και Μπένος Θεοφάνης Ε.: «Εισαγωγή Στην Οικονομετρική Ανάλυση», Τόμος Α', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 2002.
3. Αγιακλόγλου Χρήστος Ν. και Μπένος Θεοφάνης Ε.: «Εισαγωγή Στην Οικονομετρική Ανάλυση», Τόμος Β', Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 2002.
4. Ανδρικόπουλος Α. Α.: «Οικονομετρική Θεωρία Και Εμπειρικές Εφαρμογές», Εκδόσεις Ε. Μπένου, Αθήνα 1998.
5. Βουδούρης Δημήτριος, Κουρούνη-Μαλλιαράκη Μαρία: “Μικρο-Μακροοικονομική Θεωρία & Πρακτική”, Εκδόσεις Σταμούλη, 1996.
6. Γκαμαλέτσος Θ. Γ.: «Θεωρητική Οικονομετρία», Τόμος Α', Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Πειραιάς 1990.
7. Γκαμαλέτσος Θ. Γ.: «Θεωρητική Οικονομετρία», Τόμος Β', Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Πειραιάς 1990.
8. Θαλασσινός Λ. Ι. «Οικονομετρία – Ανάλυση Απλής Παλινδρόμησης», Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Πειραιάς 1992.
9. Κιντής Α. Α.: «Οικονομετρία», Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1999.
10. Κώπτη Πετράκη Αθηνά, Κώπτη Χριστίνα Γεωργίου: “Εισαγωγή στη Σύγχρονη Μακροοικονομική”, Εκδόσεις Σμπίλιας Κων/νος & Πέτρος, 1998.
11. Κώπτη Πετράκη Αθηνά, Κώπτη Χριστίνα Γεωργίου: “Σύγχρονη Μακροοικονομική”, Εκδόσεις Μπένου Σωτ.Ευγενία, 2000.

12. Κώπτη Πετράκη Αθηνά: “Σύγχρονη Μακροοικονομική Θεωρία και Πολιτική”, Εκδόσεις Σμπίλιας Κων/νος & Πέτρος, 1997.
13. Λεβεντάκης Ιωάννης: “Μακροοικονομική Ανοικτής Οικονομίας”, Εκδόσεις Σταμούλη, 1995.
14. Λεβεντάκης Ιωάννης: “Διεθνής Μακροοικονομική & Χρηματοοικονομική”, Εκδόσεις Σταμούλη, 2003.
15. Λιανός Θεόδωρος, Μπένος Θεοφάνης: “Μακροοικονομική Θεωρία & Πολιτική”, Εκδόσεις Μπένου Σωτ.Ευγενία, 1998.
16. Μπένος Θεοφάνης: “Σύγχρονες Τάσεις στη Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις Σταμούλη, 1988.
17. Μπένος Θεοφάνης: “Σύγχρονες Τάσεις στη Μακροοικονομική Θεωρία”, Εκδόσεις Μπένου Σωτ.Ευγενία, 2001.
18. Παλαιολόγος Ιωάννης: “Ασκήσεις Μακροοικονομικής Θεωρίας”, Εκδόσεις Σταμούλη, 2004.
19. Πανταζίδης Ν. Στέλιος: “Μακροοικονομικές Εξελίξεις και Οικονομική Πολιτική στην Ελλάδα”, Εκδόσεις Κριτική ΑΕ, 2002.
20. Παπαναγιώτου Ευάγγελος: “Μακροοικονομική Ανάλυση”, Εκδόσεις Τσαχουρίδης Π.Ιωάννης, 2004.
21. Πουρναράκης Ευθ.: “Εξέλιξη Μακροοικονομικής Σκέψης Θεωρία & Πολιτική”, Εκδόσεις Παρατηρητής ΑΕ, 1984.
22. Πουρναράκης Ευθ.: “Μακροοικονομία Θεωρία και Πολιτική”, Εκδόσεις Σμπίλιας Κων/νος & Πέτρος, 1994.
23. Χρήστου Γ. Κ.: “Εισαγωγή Στην Οικονομετρία», Τόμος 1, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1980.

24. Χρήστου Γ. Κ.: «Εισαγωγή Στην Οικονομετρία», Τόμος 2, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1980.
25. Alexander Carol: «The Handbook Of Risk Management And Analysis», John Wiley And Sons Ltd, 1996.
26. Auerbach, Kotlikoff: «Μακροοικονομία: Μια Ολοκληρωμένη Προσέγγιση», Εκδόσεις Γ. Παρίκος & ΣΙΑ ΕΕ, 1997.
27. Bachelier L., 1900, «Theorie de la speculation», Annales de l' Ecole Normale Superieure 17, pp.21 – 86.
28. Bera Anil K. And Higgins Matthew L., 1993, «Arch Models: Properties, Estimation And Testing», Journal Of Econometric Surveys 7, pp. 305 – 362.
29. Black Fischer, 1976, «Studies of stock price volatility changes», Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, pp 177 – 181.
30. Bollerslev Tim, 1986, «Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity», Journal Of Econometrics 31, pp 307 – 27.
31. Bollerslev Tim, 1987, «A conditionally heteroscedastic time series model of security prices and rates of return data», Review of Economics and Statistics 59, pp 542 – 547.
32. Bollerslev Tim, 1990, «Modelling the Coherence in Short – Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model», Review of Economics and Statistics 72, pp 498 – 505.
33. Bollerslev T., Chou R. Y. and Kroner K. F., 1992, «Arch Modeling In Finance: A Review Of A Theory And Empirical Evidence», Journal Of Econometrics 52, pp 5 – 20.

34. Bollerslev Tim, Engle R.F. and Wooldridge J.M, 1988, "A capital asset pricing model with time-varying covariances", Journal of Political Economy 96, pp. 116 – 131.
35. Bollerslev T. and Hodrick R.J., 1992, "Financial market efficiency tests", Kellogg Graduate School of Management Working Paper, No 132.
36. Branson William, Litvack James: "Μακροοικονομική Θεωρία", Εκδόσεις Γ. Δαρδανός & Κ. Δαρδανός ΟΕ, 2002.
37. Brooks Chris: "Introductory Econometrics For Finance", Cambridge Univeristy Press, 2003.
38. Chesney M. and Scott L.O., 1989, "Pricing European options: a comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model", Journal of Financial and Qualitative Analysis, 24, pp. 267-284.
39. Diulio Eugene: "Μακροοικονομική Θεωρία", Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική ΕΠΕ., 1974.
40. Domowitz I. and Hakkio C.S., 1985, "Conditional variance and the risk premium in the foreign exchange market", Journal of International Economics 19, pp. 47 – 66.
41. Dornbusch Rudiger, Fischer Stanley: "Μακροοικονομική", Εκδόσεις Κριτική ΑΕ, 1993.
42. Duffee G.R., 1992, "Reexamining the relationship between stock returns and stock return volatility", Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series, No 191.
43. Engle R. F., 1982, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of U.K. Inflation", Econometrica 50, Pp. 987 – 1008.

44. Engle R. F., 1983, «Estimates of the variance of US inflation based upon the Arch model», Journal of Money, Credit, and Banking 15, pp. 286 – 301.
45. Engle R.F. and Bollerslev T., 1986, «Modeling The Persistence Of Conditional Variances», Econometric Reviews 5, Pp 1 – 50.
46. Engle Robert F. and Chowdhury Mustafa, 1992, «Implied ARCH Models from Options Prices», Journal of Econometrics 52, pp. 289 – 311.
47. Engle Robert F. and Gonzalez – Rivera Gloria, 1991, «Semiparametric ARCH Models», Journal of Business and Economic Statistics 4, pp. 345 – 59.
48. Engle R.F., and Kraft D., 1983, «Multiperiod forecast error variances of inflation estimated from Arch models», in A. Zellner (ed.), Applied Time Series Analysis of Economic Data, Bureau of the Census, Washington D.C.
49. Engle Robert F. and Kroner K.F., 1995, «Multivariate simultaneous generalized GARCH», Econometric Theory 11, pp. 122 – 150.
50. Engle Robert F., Lilien David M. and Robins Russell P., 1987, «Estimating Time – Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH – M Model», Econometrica 2, pp. 391 – 407.
51. Engle Robert F. and Ng V.K., 1991, «Measuring and testing the impact of news on volatility», Mimeo, Department of Economics, University of California, San Diego.
52. Frisch R.: «Statistical Coinfluence Analysis By Means Of Complete Regression Systems», Institute Of Economics, Oslo University, 1934.

53. Felderer Bernhard, Homburg Stefan: "Μακροοικονομική και Νέα Μακροοικονομική", Εκδόσεις Κριτική ΑΕ, 1991.
54. Ghysels E., Harvey A. C. and Renault E., 1996, "Stochastic Volatility", in C. R. Rao and G. S. Maddala (eds.), Statistical Methods in Finance (Amsterdam: North-Holland), pp. 119-191.
55. Gouriéroux C. and Monfort A., 1992, "Qualitative threshold ARCH models", Journal of Econometrics 52, pp. 159 – 199.
56. Greene W. H.: "Econometric Analysis", Macmillan Publishing Co., New York 1990.
57. Gujarati D.: "Basic Econometrics", McGraw – Hill Publishing Co., New York 1978.
58. Heilbroner R., Thurow L.: "Για την Κατανόηση της Μακροοικονομικής", Εκδόσεις Παπαζήση ΑΕΒΕ, 1972.
59. Hentschel Ludger, 1995, "All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models", Journal of Financial Economics 39, pp. 71 – 104.
60. Hull J. and White A., 1987, "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", Journal of Finance, 42, pp. 281-300.
61. Jacquier E., Polson N. G. and Rossi P. E., 1994, "Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion)", Journal of Business and Economic Statistics, 12, pp. 371-417.
62. Johnston J.: "Econometric Methods", McGraw – Hill Publishing Co., New York 1984.

63. Johnston J. and Dinardo J.: «Econometric Methods», The McGraw – Hill Publishing Co., New York 1997.
64. Maddala G. S. «Econometrics», McGraw – Hill Publishing Co., New York 1977.
65. Maddala G. S.: «Introduction To Econometrics», Macmillan Publishing Co., New York 1988.
66. Mandelbrot B., 1963, « The variation of certain speculative prices», Journal of Business 36, pp.394 – 419.
67. Mankiw N. Gregory: «Μακροοικονομική Θεωρία», Εκδόσεις Γ. Δαρδανός & Κ. Δαρδανός ΟΕ, 2002.
68. Nelson Daniel B., 1990, «ARCH Models as Diffusion Approximations», Journal of Econometrics 45, pp. 7 – 38.
69. Newbold P.: «Statistics For Business And Econometrics», Prentice – Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1991.
70. Newbold P. and Bos T.: «Introductory Business Forecasting», South-Western Publishing Co., Cincinnati 1995.
71. Pagan A.R. and Hong Y.S., 1991, «Nonparametric and semiparametric methods in econometrics and statistics», Cambridge University Press, 1991.
72. Pagan A.R. and Schwert G.W., 1990, «Alternative models for conditional stock volatility», Journal of Econometrics 45, pp. 267 – 290.
73. Shephard N., 1996, «Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility», in D.R. Cox, O. E. Barndorff – Nielson and D. V. Hinkley (eds.), Time

Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields (London : Chapman & Hall), pp. 1-67.

74. Taylor S. J., 1982, "Financial returns modeled by the product of two stochastic processes – a study of daily sugar prices". In : Anderson, O. D. (Ed.), Time Series Analysis: Theory and Practice 1. North-Holland, Amsterdam, pp. 203-226.

75. Taylor S. J., 1994, "Modeling stochastic volatility", Mathematical Finance, 4, pp. 183-204.

76. Theil H.: «Principles Of Econometrics», John Wiley & Sons, Inc., New York 1971.

77. Theil H.: «Introduction To Econometrics», Prentice – Hall Inc., New York 1978.

78. Zellner A.: «An Introduction To Bayesian Inference In Econometrics», John Wiley & Sons Inc., New York 1971.

79. <http://www.statistics.gr>