ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΒΑΙΟΣ Ν. ΔΕΡΜΙΤΖΑΚΗΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2005

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄ αριθμ. ..... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική. Τα μέλη της επιτροπής ήταν :

-Πολίτης Κ. (Επιβλέπων)
-Κούτρας Μ.
-Μπούτσικας Μ.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

BOUNDS FOR THE RENEWAL FUNCTION

By

Vaios N. Dermitzakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

December 2005

Στους γονείς μου

Νίκο και Αναστασία

και στις αδελφές μου

Ειρήνη και Μάρτζυ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου η οποία αποτέλεσε σημαντικό συμπαραστάτη καθ΄ όλη τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κ. Πολίτη για την άριστη συνεργασία που είχαμε και για την υπομονή που επέδειξε. Οι πολύτιμες παρατηρήσεις, διορθώσεις και συμβουλές του καθώς και η μεθοδικότητα που τον διακρίνει στην εργασία του, συνέβαλαν ουσιαστικά στην εξέλιξη και ολοκλήρωση αυτής της Διπλωματικής εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Μ. Κούτρα και κ. Μ. Μπούτσικα για την επίβλεψη της εργασίας.

Περίληψη

Σε μια ανανεωτική ανέλιξη η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η ανανεωτική συνάρτηση, $U(t)$, η οποία εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικά γεγονότα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται σε διάφορους κλάδους της εφαρμοσμένης έρευνας όπως η θεωρία αξιοπιστίας, η θεωρία κινδύνων, η θεωρία ουρών αναμονής και η δημογραφία. Κύριος στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής είναι η παρουσίαση των σημαντικότερων φραγμάτων που έχουν προταθεί για την ανανεωτική συνάρτηση αλλά και η συγκριτική αξιολόγηση αυτών των φραγμάτων τόσο θεωρητικά όσο και με βάση κάποια αριθμητικά παραδείγματα, ιδιαίτερα στην περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων F μεταξύ των συμβάντων ανήκει σε κάποια κλάση αξιοπιστίας (π.χ. IFR-DFR, NBU-NWU, IMRL-DMRL).

Abstract

In a renewal process the quantity with the major interest is the renewal function, $U(t)$, which expresses the expected number of the renewals in the interval [0,t] when the intermediate times between successive events are independent random variables. This function has applications in various branches of applied research such as reliability theory, risk theory, queuing theory and demography. The main purpose of this thesis is the presentation of the most important bounds, which have been suggested for the renewal function and also the comparative study of these bounds both theoretically and numerically, especially in the case where the distribution of the intermediate times F belongs to an aging class of distributions (e.g. IFR-DFR, NBU-NWU, IMRL-DMRL).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι ανανεωτικές διαδικασίες έχουν ως στόχο τους τη μελέτη διαδοχικών πραγματοποιήσεων ενός γεγονότος όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Οι ανανεωτικές διαδικασίες είναι μια γενίκευση της διαδικασίας Poisson, αφού οι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων μπορούν να έχουν οποιαδήποτε κατανομή σε αντίθεση με την ανέλιξη Poisson στην οποία απαιτείται να είναι η Εκθετική κατανομή. Η θεωρία που αναπτύχθηκε για τη μελέτη των ανανεωτικών διαδικασιών ονομάζεται ανανεωτική θεωρία. Οι πρώτες εφαρμογές των ανανεωτικών ανελίξεων προέρχονταν από το χώρο της θεωρίας της Αξιοπιστίας. Η ανανεωτική θεωρία αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη της αξιοπιστίας ενός συστήματος για παράδειγμα μηχανημάτων, στο οποίο μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του συστήματος και μετά από την αντικατάσταση μιας μονάδας που έχει αποτύχει. Αργότερα η ανανεωτική θεωρία συνδέθηκε με γενικότερα προβλήματα της θεωρίας πιθανοτήτων που σχετίζονταν με αθροίσματα ανεξάρτητων και μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Σήμερα οι ανανεωτικές διαδικασίες βρίσκουν εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους εκτός των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων, όπως για παράδειγμα στην οικονομία (μελέτη χαρτοφυλακίων επενδύσεων), στη βιολογία (μελέτη ανανεώσεων - αντικαταστάσεως ενός κυττάρου) και τη δημογραφία.

Μια ποσότητα η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στη μελέτη κάθε ανανεωτικής διαδικασίας είναι η ανανεωτική συνάρτηση. Η ανανεωτική συνάρτηση εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων της ανέλιξης σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Ο υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης εξαρτάται από την κατανομή που έχει ο χρόνος μεταξύ των ανανεώσεων και για τις περισσότερες κατανομές είναι δύσκολο ή αδύνατον να υπολογιστεί. Επομένως, η έρευνα έχει στραφεί στην εύρεση προσεγγιστικών τιμών και φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση των κυριότερων φραγμάτων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με τα στοιχεία που είναι διαθέσιμα για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων.

Δομή της εργασίας

Η δομή που θα ακολουθήσουμε στην παρούσα εργασία είναι η εξής :

Στο κεφάλαιο 2 δίνουμε κάποιες βασικές έννοιες των στοχαστικών ανελίξεων και εισάγουμε την έννοια της ανανεωτικής ανέλιξης. Στη συνέχεια αναφέρουμε βασικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες της ανέλιξης αυτής και δίνουμε τα βασικά θεωρήματα που περιγράφουν την οριακή της συμπεριφορά. Στο τέλος του κεφαλαίου περιγράφουμε μια μεθοδολογία για τον ακριβή υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης για τις κατανομές που αυτός είναι εφικτός.

Στο κεφάλαιο 3 δίνουμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας χρεοκοπίας, η οποία συνδέεται στενά και χρησιμοποιείται ως μεθοδολογικό εργαλείο στις ανανεωτικές διαδικασίες. Συγκεκριμένα εισάγουμε την έννοια της πιθανότητας χρεοκοπίας και περιγράφουμε τις ιδιότητες της. Αποδεικνύουμε πως η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να γραφτεί σαν ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και τέλος υπολογίζουμε την ακριβή τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας σε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα ακολουθώντας τη μεθοδολογία των Gerber, Goovaerts και Kaas (1987).

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τα κυριότερα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση και γίνεται αναφορά στη μεθοδολογία που χρησιμοποίησαν πρόσφατα οι Politis και Koutras (2005) για την κατασκευή βελτιωμένων φραγμάτων. Η μέθοδος αυτή δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε νέα φράγματα αν εισάγουμε γνωστά φράγματα της ανανεωτικής συνάρτησης στην αντίστοιχη ανανεωτική εξίσωση. Φυσικά η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και επαναληπτικά εισάγοντας κάθε φορά το καινούργιο φράγμα που προκύπτει στην ανανεωτική εξίσωση. Τέλος δίνονται δύο εφαρμογές στις οποίες συγκρίνουμε τα σημαντικότερα φράγματα στις περιπτώσεις που έχουμε αύξουσα και φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας αντίστοιχα.

Στο κεφάλαιο 5 μελετάμε μια σχέση που συνδέει τα άνω φράγματα της ουράς της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση. Στη συνέχεια ξεκινώντας από τα άνω φράγματα που παρουσίασε ο Brown (1990), δίνουμε μια σειρά από κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση.

Στο κεφάλαιο 6 υπολογίζουμε ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση που γνωρίζουμε τον ακριβή τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας (για συγκεκριμένη κατανομή του χρόνου μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων). Επίσης εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία των Politis και Koutras (2005) για τη βελτίωση των άνω φραγμάτων του Brown (1990) και κατασκευάζουμε νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση από τα βελτιωμένα φράγματα.

Τέλος στο κεφάλαιο 7 δίνονται τα γενικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την μελέτη των φραγμάτων της ανανεωτικής συνάρτησης.

Κεφάλαιο 2

Ανανεωτικές ανελίξεις

2.1 Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις

Ορισμός 1. *Έστω (Ω, $\mathcal{F}$, P) ένας χώρος πιθανότητας, τότε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

καλείται τυχαία μεταβλητή.

Συγκεκριμένα, τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις εξής δύο ιδιότητες :

1. Σε κάθε σημείο του δειγματικού χώρου Ω, αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό $X(\omega) = x \in \mathbb{R}$.

2. Ικανοποιεί τη σχέση:

$$X^{-1}\left((-\infty, x]\right) = \{\omega \in \Omega : -\infty < X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 2. *Έστω (Ω, $\mathcal{F}$, P) ένας χώρος πιθανότητας, τότε κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$ ορισμένων στον ίδιο αυτό χώρο πιθανότητας, καλείται στοχαστική ανέλιξη ή στοχαστική διαδικασία .*

Για την περιγραφή των στοχαστικών ανελίξεων χρησιμοποιείται επίσης και ο συμβολισμός $\{X_t, \ t \in T\}$, τον οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Το σύνολο T, συνήθως αντιστοιχεί σε κάποιο χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια του οποίου θέλουμε να μελετήσουμε τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής X_t. Ανάλογα με το είδος του συνόλου T, οι στοχαστικές ανελίξεις μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Αν T είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε έχουμε στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου, ενώ αν είναι υπεραριθμήσιμο η αντίστοιχη διαδικασία καλείται συνεχούς χρόνου.

Ένας, επιπλέον διαχωρισμός των στοχαστικών ανελίξεων μπορεί να προκύψει με βάση το χώρο καταστάσεων τους, δηλαδή τις δυνατές τιμές των X_t. Αν το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, τότε λέμε ότι έχουμε στοχαστική διαδικασία με διακριτό χώρο καταστάσεων ενώ αν το σύνολο αυτό είναι υπεραριθμήσιμο, η στοχαστική ανέλιξη έχει συνεχή χώρο καταστάσεων. Προφανώς, συνδυάζοντας τους δύο προηγούμενους τρόπους διαχωρισμού των στοχαστικών διαδικασιών, προκύπτουν τέσσερις νέες κατηγορίες.

Παρατήρηση

Η στοχαστική συμπεριφορά της διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$ είναι πλήρως καθορισμένη, αν ξέρουμε :

1. Το παραμετρικό χώρο T.
2. Το χώρο καταστάσεων S.
3. Τη στοχαστική εξάρτηση των μελών της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t, t \in T\}$, η οποία καθορίζεται από την από κοινού συνάρτηση κατανομής κάθε δυνατής πεπερασμένης υποοικογένειας της

$$F_{t_1,t_2,...,t_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = Pr\left[X_{t_1} \le x_1,\ X_{t_2} \le x_2,\ ..., X_{t_n} \le x_n\right]$$

Ορισμός 3. *Δύο στοχαστικές ανελίξεις $\{X_t, t \in T\}$, $\{X_s, s \in T\}$, καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητες, αν κάθε δυνατό ζεύγος πεπερασμένων υποοικογενειών τους,* $\underline{X} = (X_{t_1}, X_{t_2}, ..., , X_{t_n})$ *και* $\underline{Y} = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$, *είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.*

Οι στοχαστικές ανελίξεις μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες με βάση τη στοχαστική εξάρτηση των μελών τους, όπως φαίνεται και από τα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα στοχαστικών ανελίξεων

1. **Μαρκοβιανές στοχαστικές ανελίξεις.**

   Αν η γνώση οποιασδήποτε πληροφορίας για το παρελθόν, όταν είναι καθορισμένη η παρούσα κατάσταση δεν επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί οποιοδήποτε δυνατό ενδεχόμενο στο μέλλον τότε έχουμε Μαρκοβιανές στοχαστικές ανελίξεις. Δηλαδή, η $\{X_t,\ \ t \in T\}$ είναι Μαρκοβιανή, αν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_s,\ \ s > t\}$, δεδομένης της X_t είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τυχαίες μεταβλητές $\{X_k,\ \ k < t\}$.

2. **Στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες**

   Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t,\ \ t \in T\}$, καλείται στάσιμη, αν: $\forall r > 0$, οι στοχαστικές ανελίξεις $\{X_t,\ \ t \in T\}$ και $\{X_{t+r},\ \ t \in T\}$, είναι στοχαστικά ισοδύναμες δηλαδή, αν οι τυχαίες μεταβλητές :

   $[X(t_1), X(t_2), X(t_3), ..., X(t_n)]$ και $[X(t_1 + r), X(t_2 + r), ..., X(t_n + r)]$ έχουν την ίδια από κοινού κατανομή, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, ..., t_n \in T$.

3. **Στοχαστικές ανελίξεις με Ομογενείς Προσαυξήσεις.**

   Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t,\ \ t \in T\}$, έχει ομογενείς προσαυξήσεις, αν: για $s < t$ η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_{t-s}, εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t - s$ και όχι από τις τιμές t, s.

4. **Στοχαστικές Ανελίξεις με Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις.**

   Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t,\ \ t \in T\}$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, αν: οι τυχαίες μεταβλητές $X_{t_2} - X_{t_1}, ...X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$, είναι ανεξάρτητες, $n \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ με $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

5. **Ανανεωτικές διαδικασίες.**

   Οι ανανεωτικές διαδικασίες έχουν σαν στόχο τους τη μελέτη διαδοχικών πραγματοποιήσεων ενός γεγονότος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Οι διαδικασίες αυτές θα εξεταστούν αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Ορισμός 4. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t,\ \ t \geq 0\}$, καλείται απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, αν η N_t ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :*

1. $N_t \geq 0$.

2. $N_t \in \mathbb{Z}$.

3. *N_t είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t, δηλαδή : για $s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$.*

4. *Για $s < t$, η τυχαία μεταβλητή $N_t - N_s$, παριστάνει των αριθμό των συμβάντων που πραγματοποιήθηκαν στο χρονικό διάστημα $(s, t]$.*

Ορισμός 5. *Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t,\ \ t \geq 0\}$, καλείται διαδικασία Poisson, με παράμετρο λ αν και μόνο αν για κάθε απειροστό χρονικό διάστημα $(t, t+h]$, ισχύει:*

$$Pr\left(N(t,t+h) = k \,|N(s), 0 \leq s \leq t\right) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & \text{αν } k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & \text{αν } k = 0 \\ o(h), & \text{αν } k \geq 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

όπου $N(t,u) = N(u) - N(t),\quad 0 \leq t \leq u$ είναι ο αριθμός των συμβάντων στο χρονικό διάστημα $(t, u]$ και $o(h)$, ο παράγοντας διόρθωσης για τον οποίο ισχύει:

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Η σχέση 2.1 μπορεί διαισθητικά να μεταφραστεί ως εξής :

1. Σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα υπάρχουν ακριβώς δύο ενδεχόμενα, είτε να συμβεί ένα γεγονός, είτε κανένα.

2. Η πιθανότητα πραγματοποίησης γεγονότων δεν εξαρτάται από την αρχή t, του χρονικού διαστήματος $(t, t+h]$, ειδικότερα η πιθανότητα εμφάνισης ενός ακριβώς συμβάντος, είναι ανάλογη μόνο του μήκους h του διαστήματος και της παραμέτρου λ.

3. Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια του χρόνου και δεν εξαρτάται από το παρελθόν.

Ορισμός 6. *Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $N_t,\ t \geq 0$ μια στοχαστική ανέλιξη Poisson, τέτοια ώστε η N_t να είναι ανεξάρτητη των $X_i,\ \forall i$. Τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή :*

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

που καλείται σύνθετη Poisson τυχαία μεταβλητή. Αντίστοιχα ορίζεται η ανέλιξη :

$$\{Z_t,\ \ t \geq 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} X_i \ \ , t \geq 0 \right\}$$

η οποία καλείται σύνθετη Poisson στοχαστική ανέλιξη.

Μια γενίκευση του παραπάνω ορισμού μπορεί να προκύψει αν δεχτούμε πως η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $N(t), t \geq 0$ δεν είναι διαδικασία Poisson αλλά μια οποιαδήποτε άλλη απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής και της σύνθετης στοχαστικής ανέλιξης.

Ορισμός 7. *Έστω $X_1, X_2, X_3, ...$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $\{N_t, t \geq 0\}$ μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, τέτοια ώστε η τυχαία μεταβλητή N_t να είναι ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, X_3, ...$ Τότε, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή :*

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

η οποία καλείται σύνθετη N_t (όνομα κατανομής που ακολουθεί η N_t) τυχαία μεταβλητή[1] *και αντίστοιχα, τη:*

$$\{Z_t, \ \ t \geq 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} X_i \ \ , t \geq 0 \right\}$$

που καλείται σύνθετη N_t-στοχαστική ανέλιξη.

Μια ειδική περίπτωση απαριθμήτριας διαδικασίας είναι η ανανεωτική διαδικασία, ο ορισμός της οποίας δίνεται παρακάτω:

Ορισμός 8. *Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t, \ t \geq 0\}$ καλείται ανανεωτική διαδικασία, αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμονής μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές .*

Η ξενόγλωσση βιβλιογραφία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια εισαγωγή στην ανανεωτική θεωρία αποτελείται αρχικά από τα συγγράμματα των Cox (1962), Ross (1996) και Grimmett & Strizaker (2001), ενώ μια πιο αυστηρή προσέγγιση του θέματος γίνεται από τους Feller (1971) και Asmussen (1987). Στην ελληνική βιβλιογραφία οι κυριότεροι συγγραφείς που έχουν ασχοληθεί με τις ανανεωτικές ανελίξεις είναι οι Δαμιανού (1996), Φακίνος (1992) και Χρυσαφίνου (2004). Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα βασικά στοιχεία των ανανεωτικών ανελίξεων με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε από τον Feller (1971) και την υπόθεση ότι τη χρονική στιγμή μηδέν, που ξεκινάει η μελέτη του ανανεωτικής διαδικασίας, έχουμε μια ανανέωση.

[1] Συγκεκριμένα η κατανομή που ακολουθεί η N_t δίνει την ονομασία στην κατανομή που ακολουθεί η σύνθετη τυχαία μεταβλητή π.χ αν $N_t \sim Geometric$, τότε λέμε ότι η Z_t ακολουθεί τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή.

2.2 Βασικά στοιχεία Ανανεωτικών Διαδικασιών

Έστω, $T_1, T_2, T_3, ...$, μια ακολουθία από μη αρνητικές συνεχείς, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{T_i}(t) = Pr(T_i \leq t), \ \ i = 1, 2, 3, ...$ Αν θεωρήσουμε πως η τυχαία μεταβλητή T_i αντιστοιχεί στον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων i, $i+1$, $i = 0, 1, 2, ...$ και υποθέσουμε πως τη χρονική στιγμή μηδέν έχουμε μια ανανέωση τότε ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές:

1. Χρόνος μέχρι την n-οστή ανανέωση :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i \tag{2.2}$$

2. Πλήθος ανανεώσεων στο χρόνο $[0, t]$:

$$N(t) = N_t = 1 + max\left\{n : S_n \leq t\right\}, \quad (t \geq 0) \tag{2.3}$$

Με βάση των παραπάνω συμβολισμό, ισχύουν τα εξής:

1. Η στοχαστική ανέλιξη $\{S_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ καλείται συνήθης ή απλή ανανεωτική διαδικασία διακριτού χρόνου με συνεχή χώρο καταστάσεων.

2. Η στοχαστική ανέλιξη $\{N_t, \ t \geq 0\}$ καλείται απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων.

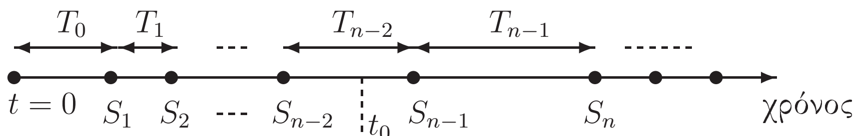
3. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής N_t, $U(t) = E(N_t) \ t \geq 0$, καλείται ανανεωτική συνάρτηση και αντιστοιχεί στον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων στο $[0, t]$.

4. Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες ισότητες:

   (α′) $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$

   (β′) $\{N_t \leq n\} = \{S_{n+1} > t\}$

   (γ′) $\{N_t = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$



Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε πως εκτός της συνήθους (ordinal) ανανεωτικής διαδικασίας που αναφέραμε μέχρι τώρα, υπάρχει και η καθυστερημένη ανανεωτική διαδικασία (delayed renewal process), στην οποία ο χρόνος που συμβαίνει η πρώτη ανανέωση μπορεί να έχει διαφορετική κατανομή από εκείνη που έχουν οι $T_2, T_3, ...$, οι οποίες παραμένουν ισόνομες. Εμείς στη συνέχεια του κεφαλαίου μας θα ασχοληθούμε με τις συνήθεις ανανεωτικές διαδικασίες.

Πρόταση 1. *Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S_n, δίνεται από:*

$$Pr[S_n \leq t] = F^{*n}(t) \tag{2.4}$$

όπου F^{*n} είναι η n-τάξης συνέλιξη της F με τον εαυτό της (βλέπε Παράρτημα Β).

Πρόταση 2. *Η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής N_t, δίνεται από:*

$$Pr[N_t = t] = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) \tag{2.5}$$

όπου: $n = 0, 1, 2, ...$ και $F^{*0}(t) = 1, \forall t \geq 0$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Pr[N_t = n] &= Pr[N_t \geq n] - Pr[N_t \geq n+1] \\ &= Pr[S_n \leq t] - Pr[S_{n+1} \leq t] \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) \end{aligned}$$

Πρόταση 3. *Για την ανανεωτική συνάρτηση, ισχύουν:*

1. *$\forall t \geq 0$, έχουμε:*

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \tag{2.6}$$

2. *$\forall t \geq 0 : F(t) < 1$, έχουμε:*

$$U(t) \leq \frac{1}{1 - F(t)} \tag{2.7}$$

Απόδειξη

1. Όπως είναι γνωστό για τη μέση τιμή μιας μη αρνητικής ακέραιης τυχαίας μεταβλητής Χ, ισχύει :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} Pr(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr(X > k)$$

επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} U(t) &= E(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr[N_t \geq t \mid T_0 = 0] = \sum_{n=1}^{\infty} Pr[S_n \leq t \mid T_0 = 0] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr[S_{n-1} \leq t] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n-1)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

2. Χρησιμοποιώντας τη βασική ιδιότητα των συνελίξεων :

$$f * g \leq fg \Rightarrow f^{*n} \leq f^n$$

όπου f, g αύξουσες συναρτήσεις και αφού $F(t) < 1$, έχουμε :

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} F^n(t) = \frac{1}{1 - F(t)}$$

Πρόταση 4. *Σε μια ανανεωτική διαδικασία, αν $F(0) = Pr[T_i = 0] < 1$,τότε η ανανεωτική συνάρτηση $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \tau]$, $\forall \tau \geq 0$. Άρα, συγκλίνει και για κάθε $\forall t \geq 0$.*

Πρόταση 5. *Αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής F με τις εξής ιδιότητες:*

1. $F_{T_i}(0) = 0, \ \ i = 1, 2, ...$

2. *Έχει φραγμένη πρώτη παράγωγο, $F^{'} = f$*

τότε, ισχύει:

$$U^{'}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f * F^{*(i-1)}(t) = f(t) + (f * U)(t) \ \ , \forall t \geq 0 \quad (2.9)$$

όπου: $n = 0, 1, 2, ...$ και $F^{*0}(t) = 1, \forall t \geq 0$.

Από την παραπάνω πρόταση, προκύπτει ο εξής ορισμός:

Ορισμός 9. *Η παράγωγος της ανανεωτικής συνάρτησης σε μια ανανεωτική διαδικασία όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ζωής έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής F, με συνεχή πρώτη παράγωγο και $F_{T_i}(0) = 0, \quad i = 1, 2, ...$, καλείται πυκνότητα ανανεώσεων ή ανανεωτική πυκνότητα (renewal density), συμβολίζεται με $u(t)$ και ισούται με:*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f * F^{*(n-1)}(t) = f(t) + (f * U)(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.10}$$

Ορισμός 10. *Αν $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, είναι μια ανανεωτική διαδικασία και $\{N_t : t \geq 0\}$ η αντίστοιχη απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία, τότε ορίζουμε τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές:*

1. *Χρονική στιγμή της τελευταίας ανανέωσης στο $[0, t]$:*

$$S_{N_t} = T_0 + T_1 + T_2 + ... + T_{N_t - 1} \tag{2.11}$$

2. *Χρονική στιγμή της πρώτης ανανέωσης , στο $[t, \infty]$:*

$$S_{N_t + 1} = T_0 + T_1 + T_2 + ... + T_{N_t} \tag{2.12}$$

3. *Υπολειπόμενος χρόνος ζωής μονάδας που ήδη λειτουργεί χρόνο t :*

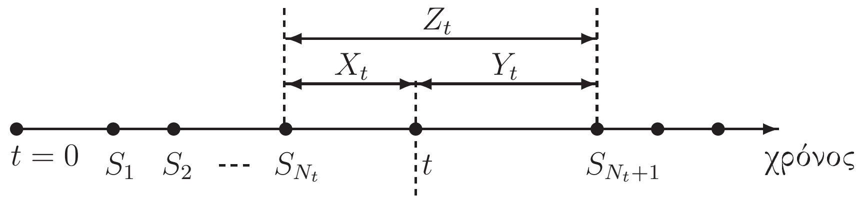
$$Y_t = S_{N_t} - t \tag{2.13}$$

4. *Ηλικία της μονάδας που βρίσκεται σε λειτουργία κατά η χρονική στιγμή t (όπου t, συνολικός χρόνος λειτουργίας του συστήματος) :*

$$X_t = t - S_{N_t - 1} \tag{2.14}$$

5. *Συνολική ζωή της μονάδος που βρίσκεται σε λειτουργία τη χρονική στιγμή t :*

$$Z_t = X_t + Y_t \tag{2.15}$$



2.3 Ανανεωτική Εξίσωση

Στις ανανεωτικές διαδικασίες το γεγονός ότι μετά από κάθε ανανέωση γεννιέται μια νέα ανανεωτική διαδικασία με τα ίδια χαρακτηριστικά που είχε η προηγούμενη, βοήθησε στην διατύπωση του λεγόμενου ανανεωτικού επιχειρήματος. Σύμφωνα με αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα χαρακτηριστικά της διαδικασίας, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο της πρώτης ανανέωσης. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία αυτή διατυπώθηκαν πολλά αποτελέσματα στην Ανανεωτική Θεωρία. Τα σημαντικότερα από αυτά αναφέρονται σε αυτή και την επόμενη παράγραφο.

Πρόταση 6. *Η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ ικανοποιεί τη σχέση :*

$$\begin{aligned} U(t) &= 1 + (F * U)(t) \\ &= 1 + \int_0^t U(t-x)dF(x), \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$.

Απόδειξη

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το ανανεωτικό επιχείρημα. Έτσι, αν δεσμεύσουμε τη μέση τιμή του αριθμού των ανανεώσεων ως προς το χρόνο που συμβαίνει η πρώτη ανανέωση (μετά τη χρονική στιγμή μηδέν) έχουμε :

$$E(N_t \mid T_1 = x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x > t \\ U(t-x), & \text{αν } 0 < x \leq t \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας στη 2.16, μας δίνει :

$$\begin{aligned} U(t) &= E(N_t) = \int_0^t E(N_t \mid T_1 = x)dF(x) \\ &= 1 + \int_0^t (U(t-x))dF(x) \\ &= 1 + (F * U)(t) \end{aligned}$$

Ορισμός 11. *Αν Q, είναι μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[0,t]$ και F, μια συνάρτηση κατανομής, τέτοιες ώστε να ορίζονται οι συνελίξεις $H * F$ και $Q * F$, τότε για κάθε* *άγνωστη συνάρτηση H στο [0,t], ορίζουμε την εξίσωση:*

$$H = Q + H * F \tag{2.17}$$

ή ισοδύναμα

$$H(t) = Q(t) + \int_{0^-}^{t} H(t-x)dF(x) \quad (t \geq 0) \tag{2.18}$$

η οποία καλείται ανανεωτική εξίσωση.

Θεώρημα 1. *Η ανανεωτική εξίσωση (2.17), έχει μια και μοναδική λύση η οποία είναι φραγμένη σε πεπερασμένα διαστήματα και δίνεται από τον τύπο :*

$$H = Q * U \tag{2.19}$$

ή ισοδύναμα

$$H(t) = \int_{0}^{t} Q(t-x)dU(x) \tag{2.20}$$

όπου $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$ *η ανανεωτική συνάρτηση*

Πρόταση 7. *Σε μια ανανεωτική διαδικασία, όπου οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής,* $F_{T_i(t)}Pr[T_i \leq t]$, *με συνεχή πρώτη παράγωγο* $(F' = f)$, *τότε για τη πυκνότητα των ανανεώσεων,* $u(t)$ *ισχύει ότι:*

$$u(t) = \lim_{\delta t \to 0^+} \frac{1}{\delta t} Pr[\text{ανανέωσης στο}(t, t+\delta t)] \tag{2.21}$$

2.4 Μελέτη της Ανανεωτικής Διαδικασίας σε Άπειρο Χρόνο

Στις προηγούμενες παραγράφους, μελετήσαμε την έννοια της ανανεωτικής διαδικασίας σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Στην πράξη όμως μας ενδιαφέρει και η μελέτη της διαδικασίας στη περίπτωση όπου ο χρόνος είναι αρκετά μεγάλος, θεωρητικά άπειρος, λόγω του ότι μόνο έτσι μπορούμε να προσομειώσουμε τη συμπεριφορά συστημάτων, που έχουν ήδη λειτουργήσει ή πρόκειται να λειτουργήσουν για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Θεώρημα 2. *Σε μια ανανεωτική διαδικασία, όπου οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων έχουν μέση τιμή* $\mu = E(T_i) < \infty$ *και διασπορά* $\sigma^2 = Var(T_i) < \infty$, *για τη μεταβατική κατανομή* $N(t)$ *που αντιστοιχεί στην απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη* $\{N(t),\ t \geq 0\}$, *ισχύει:*

$$\lim_{t\to\infty} Pr\left[\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{1}{\mu^3}t\sigma^2}} \leq x\right] = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

όπου $\Phi(x)$ *η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1).*

Θεώρημα 3 (Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα). *Σε μια ανανεωτική διαδικασία, όπου οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων έχουν μέση τιμή* $\mu = E(T_i) < \infty$, *για την απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *και την ανανεωτική συνάρτηση , ισχύουν τα εξής :*

1. $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{N(t)}{t}\right] = \frac{1}{\mu}$, *(με πιθανότητα 1)*
2. $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{U(t)}{t}\right] = \frac{1}{\mu}$

Ορισμός 12. *Μια τυχαία μεταβλητή X, (αντίστοιχα και η κατανομή της, F) καλείται αριθμητική (lattice), αν υπάρχει* $d > 0$: *οι τιμές της να ανήκουν στο σύνολο* $\{0, \pm 1d, \pm 2d, ...\}$ *με πιθανότητα 1 δηλαδή, να ισχύει :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Pr[X = nd] = 1 \tag{2.23}$$

Ο μεγαλύτερος θετικός d, για τον οποίο ισχύει η (2.23), καλείται άνοιγμα (span) της F και τότε η F καλείται d-αριθμητική. Στη περίπτωση που δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός d, τότε η F, καλείται μη αριθμητική.

Παρατήρηση

Κάθε συνεχής τυχαία μεταβλητή είναι μη αριθμητική, ενώ διακριτές τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών είναι 1-αριθμητικές.

Θεώρημα 4 (Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα). *Αν* $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *είναι μια ανανεωτική διαδικασία με απαριθμήτρια ανέλιξη* $\{N_t, t \geq 0\}$, *ανανεωτική συνάρτηση* $U(t) = E(N_t$ *και κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων* F *μη αριθμητική τότε για μια συνάρτηση* Q, *άμεσα ολοκληρώσιμη κατά Riemann*[2] *, ισχύει:*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dU(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty Q(x)dx \tag{2.24}$$

[2]Μια συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\infty]$, καλείται άμεσα ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν, ισχύει:

$$sup\{L(f,P), P \text{ μια διαμέριση του}[0,\infty]\} = inf\{U(f,D), D \text{ μια διαμέριση του}[0,\infty]\} < \infty$$

Θεώρημα 5 (Blackwell). *Αν* $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *είναι μια ανανεωτική διαδικασία με απαριθμήτρια ανέλιξη* $\{N_t, t \geq 0\}$ *και ανανεωτική συνάρτηση* $U(t) = E(N_t)$,*τότε, ισχύουν:*

1. *Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων* T_i *είναι μη αριθμητική, τότε :*
$$\lim_{t\to\infty} [U(t+h) - U(t)] = \frac{h}{\mu}, \ \ \forall h > 0 \tag{2.25}$$

2. *Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων* T_i *είναι* d*-αριθμητική, τότε :*
$$\lim_{t\to\infty} [U(t+nd) - U(t)] = \frac{nd}{\mu}, \ \ \forall n > 0 \tag{2.26}$$

2.5 Εφαρμογές

Στην παρούσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών συμβάντων ακολουθούν: (α) την εκθετική κατανομή και (β) τη Γάμμα κατανομή. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes (L-S)[3] μιας συνάρτησης F:

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$$

Η πορεία που θα ακολουθήσουμε προκειμένου να καταλήξουμε στην ανανεωτική συνάρτηση είναι η εξής: αρχικά θα βρούμε το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes της συνάρτησης κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων $\widehat{F}$, στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό L-S για την ανανεωτική συνάρτηση και τέλος θα βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό προκειμένου να πάρουμε την $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$. Παριστάνοντας τη παραπάνω διαδικασία σχηματικά, έχουμε:

$$F \to \widehat{F} \to \widehat{U} = \frac{\widehat{F}}{1-\widehat{F}}$$
$$\Big\downarrow \text{Αντίστροφος Μετασχηματισμός } L-S$$
$$\text{Υπολογισμός της Ανανεωτικής Συνάρτησης}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1. Εκθετική κατανομή

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή: $f(x) = ae^{-ax}, \forall x \geq 0$. Τότε, έχουμε :

$$\widehat{F}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} a e^{-ax} dx = \frac{a}{a+t} = M_X(-t)$$

[3]βλέπε Παράρτημα Γ

Επομένως,

$$\begin{aligned}\widehat{m}(\lambda) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}\right]^{\widehat{}}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[F^{(k)}\right]^{\widehat{}}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{F}(\lambda)\right]^{k} \\ &= \frac{\widehat{F}(\lambda)}{1-\widehat{F}(\lambda)} = \frac{a}{\lambda} \end{aligned} \tag{2.27}$$

και

$$\widehat{m}(\lambda) = \frac{a}{\lambda} = \int_0^{\infty} a e^{-\lambda x} dx \tag{2.28}$$

Όμως, γνωρίζουμε πως

$$\widehat{m}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dm(x) \tag{2.29}$$

Από τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού L-S και με βάση της (2.28), (2.29), έχουμε :

$$dm(x) = adx \Rightarrow m(s) = \int_0^{s} dm(x) = \int_0^{s} adx = as$$

Άρα, αφού $U(x) = 1 + m(x)$, έχουμε :

$$U(x) = 1 + ax$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2. Γάμμα κατανομή

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν την Γάμμα(2, λ) κατανομή (σύνθεση δύο εκθετικών) με $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$. Τότε, ο μετασχηματισμός L-S της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F, είναι :

$$\widehat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \int_0^{\infty} x e^{-(s+\lambda)x} dx \tag{2.30}$$

Όπως, γνωρίζουμε από τις ιδιότητες της κατανομής Γάμμα(α, ϑ), έχουμε:

- $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$
- $\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} dx = 1$

Άρα, από τις προηγούμενες δύο σχέσεις, έχουμε :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{\theta^{\alpha}} \tag{2.31}$$

Επομένως, θέτοντας στην (2.31), $\alpha = 2$ και $\theta = s + \lambda$ η (2.30), μας δίνει :

$$\widehat{F}(s) = \frac{\lambda^2}{(\lambda + s)^2} \tag{2.32}$$

Ο μετασχηματισμός L-S για την ανανεωτική συνάρτηση, είναι :

$$\begin{aligned}
\widehat{m}(s) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}\right]^{\widehat{}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[F^{(k)}\right]^{\widehat{}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{F}(s)\right]^k \\
&= \frac{\widehat{F}(s)}{1 - \widehat{F}(s)} && (2.33) \\
&= \frac{\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}{1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}} && (2.34)
\end{aligned}$$

και χωρίζοντας σε δύο κλάσματα, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\widehat{m}(s) &= \frac{\lambda}{2s} - \frac{\lambda}{2(s + 2\lambda)} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-sx} dx - \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-(s+2\lambda)x} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-sx}[1 - e^{-2\lambda x}] dx && (2.35)
\end{aligned}$$

Όμως, γνωρίζουμε πως

$$\widehat{m}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dm(x) \tag{2.36}$$

Από τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού L-S και με βάση της (2.35), (2.36), έχουμε:

$$\begin{aligned}
dm(x) &= \frac{\lambda}{2}[1 - e^{-2\lambda x}] dx \Rightarrow \\
m(s) &= \int_0^s dm(x) = \int_0^s \frac{\lambda}{2}[1 - e^{-2\lambda x}] dx \\
&= \frac{\lambda s}{2} + \frac{\lambda}{2 \cdot 2 \cdot \lambda} \int_0^s (e^{-2\lambda x})' dx \\
&= \frac{\lambda s}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda s}) && (2.37)
\end{aligned}$$

Άρα, αφού $U(x) = 1 + m(x)$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
U(x) &= 1 + \frac{\lambda x}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda x}) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{\lambda x}{2} - \frac{e^{-2\lambda x}}{4}
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης μπορεί να γίνει και με τη χρήση κάποιου υπολογιστικού προγράμματος για τις κατανομές των ενδιάμεσων χρόνων που αυτό είναι εφικτό. Στο Παράρτημα Δ δίνουμε δύο αλγόριθμους σε περιβάλλον Mathematica που μας παρέχουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε άμεσα την ανανεωτική συνάρτηση.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία χρεοκοπίας

3.1 Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος

Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης στη Θεωρία της Χρεοκοπίας. Συνήθως χρησιμοποιείται για τη μελέτη εκείνων των χαρτοφυλακίων που εκτός από τα προκαθορισμένα στοιχεία (έσοδα - έξοδα), περιέχουν και ποσότητες οι οποίες έχουν τυχαίο μέγεθος και τυχαίο ρυθμό εμφάνισης. Τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια, συναντώνται σε ασφαλιστικές εταιρείες, χρηματοοικονομικές εταιρείες, αλλά και γενικότερα σε κάθε οικονομική επιχείρηση που το χαρτοφυλάκιο της δεν είναι προβλέψιμο αλλά επηρεάζεται από τυχαία για παράδειγμα έξοδα.

Για τη καλύτερη κατανόηση της ανέλιξης του πλεονάσματος θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Όπως γνωρίζουμε, οι ασφαλιστικές εταιρείες αναλαμβάνουν τη κάλυψη κινδύνων έναντι προκαθορισμένων ασφαλίστρων που λαμβάνουν. Οι κίνδυνοι που καλείται να καλύψει η εταιρεία αναγράφονται στο συμβόλαιο που υπογράφει με τον πελάτη της. Αν πραγματοποιηθεί ένας ή και περισσότεροι κίνδυνοι τότε η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει να καλύψει τα έξοδα που προκλήθηκαν στον κάτοχο της ασφάλειας. Ας υποθέσουμε πως μια ασφαλιστική εταιρεία τη στιγμή που υπογράφει κάποιο συμβόλαιο διαθέτει αποθεματικό u. Θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο της στο συνεχές χρονικό διάστημα $[0, t]$, $\forall t > 0$, όπου θεωρούμε τη χρονική στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο σαν σημείο αναφοράς από το οποίο αρχίζει να μετράει ο χρόνος. Τέλος, αν υποθέσουμε πως τα έσοδα από ασφάλιστρα που πληρώνει ο ασφαλισμένος έρχονται με συνεχή τρόπο και είναι συνολικά $P(t)$ για το χρονικό διάστημα $[0, t]$ ενώ τα έξοδα που προκύπτουν είναι $S(t)$ για το ίδιο χρονικό διάστημα τότε κατά τη χρονική στιγμή t, η αξία του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας είναι:

$$R(t) = u + P(t) - S(t) \tag{3.1}$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε πως η ποσότητα $S(t)$ και επομένως και η $R(t)$ είναι τυχαίες μεταβλητές, για συγκεκριμένες τιμές του t, ενώ αν τις θεωρήσουμε κατά τη διάρκεια του χρόνου, η πρώτη μας δίνει τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος και η δεύτερη τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων που προκύπτουν.

Χρησιμοποιώντας μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές, $X_1, X_2, X_3, X_4, ...$ που αντιστοιχούν στα ύψη των εξόδων που προκύπτουν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ που εκφράζει το πλήθος των ζημιογόνων συμβάντων μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_i, \forall i$, μπορούμε να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων σαν μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1 \end{cases}$$

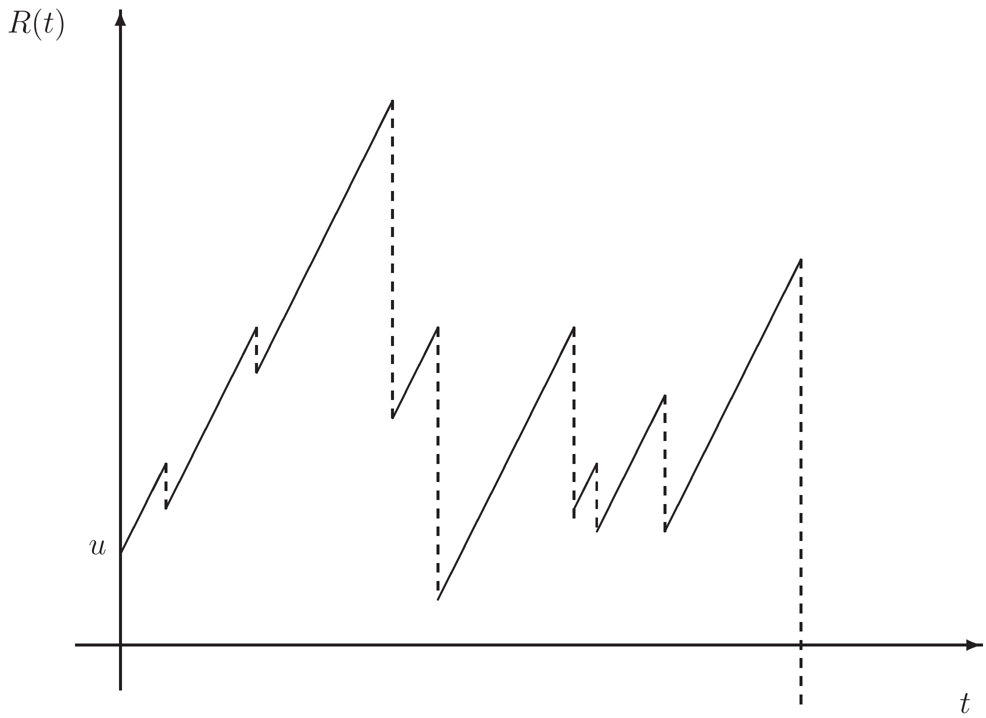
Τέλος, συνοψίζοντας έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 13. *Η στοχαστική ανέλιξη, $\{R(t),\ t \geq 0\}$, καλείται στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος, αν για κάθε $t \geq 0$, η τιμή του πλεονάσματος ορίζεται από τη τυχαία μεταβλητή:*

$$R(t) = u + P(t) - S(t)$$

όπου:

- u = Αρχικό αποθεματικό.
- $P(t)$ = Συνολικά ασφάλιστρα που λαμβάνει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα [0,t] (έσοδα).
- $S(t)$ = Συνολικές αποζημιώσεις που καλείται να καλύψει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα [0,t] (έξοδα).



Σχήμα 3.1: Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

3.2 Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στη προηγούμενη παράγραφο έγινε εισαγωγή στην έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος μέσω της οποίας θα δοθεί ο ορισμός του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνων. Στο μοντέλο αυτό βασίζεται μεγάλο πλήθος της έρευνας που γίνεται στο χώρο του αναλογισμού και θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ορισμός 14. *Αν σε μια στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος* $\{R(t),\ t \geq 0\}$ *ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις :*

1. *Η P(t) είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή:*

$$P(t) = ct, \forall t \tag{3.2}$$

όπου c είναι μια θετική σταθερά.

2. *Οι τυχαίες μεταβλητές* X_i*, που αντιστοιχούν στις αποζημιώσεις που πρέπει να καταβληθούν κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [0,t] είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες.*

3. *Η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Poisson.*

τότε, έχουμε το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ή Μοντέλο Cramér-Lundberg

Παρατηρήση

Από την υπόθεση ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Poisson, προκύπτουν τα εξής:

1. Η στοχαστική ανέλιξη $\{S(t),\ t \geq 0\}$ που μας δίνει το συνολικό ύψος των αποζημιώσεων στο [0,t], είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.

2. Αποδεικνύεται ότι αφού η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη Poisson οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων που απαιτούν αποζημίωση ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Μια εισαγωγή στην Θεωρία Κινδύνων, μπορεί να γίνει μέσα από τα συγγράμματα των Bowers et al (1986) και Kaas et al (2001), ενώ μια πιο λεπτομερής προσέγγιση του θέματος γίνεται από τους Rolski et al (1999) και Asmussen (2000).

Ορισμός 15. *Στο κλασικό μοντέλο η σταθερά:*

$$c = \frac{P(t)}{t} \tag{3.3}$$

που απεικονίζει το ασφάλιστρο που λαμβάνεται στη μονάδα του χρόνου, ονομάζεται ένταση του ασφαλίστρου.

Ορισμός 16. *Η σταθερά :*

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 \tag{3.4}$$

όπου :

$$p_1 = E(X_i) = \int_0^\infty x dF(x) \tag{3.5}$$

καλείται συντελεστής ασφαλείας ή περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor) και εκφράζει τα αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή.

Παρατήρηση

1. Ο συντελεστής ασφαλείας είναι πάντα θετικός, αφού :

$$E(ct) > E(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i)$$
$$ct > \lambda p_1 t$$
$$\frac{c}{\lambda p_1} - 1 > 0$$

2. Ο συντελεστής ασφαλείας, όπως έχει αναφερθεί μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή επομένως στη πράξη οι τιμές που παίρνει είναι μεταξύ 0 και 1 ή αν θέλουμε να εκφραστούμε με ποσοστά μεταξύ 0 και 100%.

3.3 Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Χρεοκοπία ονομάζεται η κατάσταση στην οποία υπεισέρχεται η επιχείρηση τη στιγμή που έχει χάσει την ικανότητα να εξοφλήσει τις υποχρεώσεις της προς τρίτους. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που το συνολικό αποθεματικό που διαθέτει δεν επαρκεί για την εξόφληση οφειλών που προκύπτουν από τα ζημιογόνα συμβάντα. Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα δώσουμε τον ορισμό της πιθανότητας να συμβεί ένα τέτοιο γεγονός για το κλασικό μοντέλο, ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα που μελετάμε αυτό το ενδεχόμενο.

Αν θεωρήσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων:

$$R(t) = u + P(t) - S(t), \forall t \geq 0$$

τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για χρονικό ορίζοντα :

$$\mathcal{A} = \{\ t \text{ για τα οποία θέλουμε να μελετήσουμε το πλεόνασμα } R(t)\} \subseteq \mathbb{R}^+,$$

ορίζεται, ως εξής:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= Pr(\ R(t) < 0, \text{για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u) \\ &= Pr(\ u + P(t) - S(t) < 0, \text{για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ανάλογα με το είδος του συνόλου $\mathcal{A}$, που εκφράζει το χρονικό διάστημα που θέλουμε να μελετήσουμε την ανέλιξη, η πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίζεται στις εξής τέσσερις κατηγορίες:

1. Αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών δηλαδή, $\mathcal{A} = \{t : t \in [0, \infty)\}$τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο:

$$\psi(u) = Pr(\ R(t) < 0, \text{για κάποιο}\ t \in \mathcal{A} \mid u)$$

2. Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα συνεχές υποσύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών με πεπερασμένα άκρα,δηλαδή $\mathcal{A} = \{t : t \in [a, b],\ \ 0 < a < b\infty\}$ τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και πεπερασμένο χρόνο :

$$\psi(u, t) = Pr(\ R(\tau) < 0, \text{για κάποιο}\ \tau : 0 < \tau \leq t \mid u)$$

3. Αν $\mathcal{A} = \{t : t \in [0, h_1, h_2, h_3, ...],\ h_i \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό και άπειρο χρόνο:

$$\psi_h(u) = Pr(\ R(t) < 0, \text{για κάποιο}\ t \in \mathcal{A})$$

4. Αν $\mathcal{A} = \{t : t \in [0, h_1, h_2, h_3..., h_n],\ h_i \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών, τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό και πεπερασμένο χρόνο:

$$\psi_h(u, t) = Pr(\ R(\tau) < 0, \text{για κάποιο}\ \tau \in \mathcal{A})$$

Παρατήρηση

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του κλασικού μοντέλου σε χρόνο συνεχή και άπειρο.

Ορισμός 17. *Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο, ορίζεται ως εξής:*

$$\begin{aligned} \delta(u) &= Pr(\ R(t) \geq 0, \textit{για κάθε}\ t \mid u) \qquad (3.7) \\ &= Pr(\ u + P(t) - S(t) \geq 0, \textit{για κάθε}\ t \mid u) \\ &= 1 - \psi(u) \end{aligned}$$

3.3.1 Βασική υπόθεση

Στο κλασικό μοντέλο προκειμένου να αποφύγουμε τη σίγουρη χρεοκοπία ενός χαρτοφυλακίου, θεωρούμε ότι πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανίσωση:

$$c > \lambda p_1 \tag{3.8}$$

όπου λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson. Έτσι, εξασφαλίζουμε ότι μέση τιμή των εσόδων του ασφαλιστή στη μονάδα του χρόνου θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέση τιμή των εξόδων του.

Παρατήρησεις

1. Αν δεν ισχύει η συνθήκη $c > \lambda p_1$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι σίγουρη αφού σε κάθε χρονική στιγμή τα αναμενόμενα έξοδα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα έξοδα, δηλαδή:

$$\psi(u) = 1, \quad \forall u$$

2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του u αφού όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει η πιθανότητα για χρεοκοπία. Αντίθετα, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι αύξουσα συνάρτηση του u. Επομένως, ισχύουν:

   (α′)

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$$

   (β′)

$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$$

3. Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u) μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση κατανομής, αφού:

   (α′) είναι αύξουσα ως προς u

   (β′) είναι συνεχής από δεξιά

   (γ′)

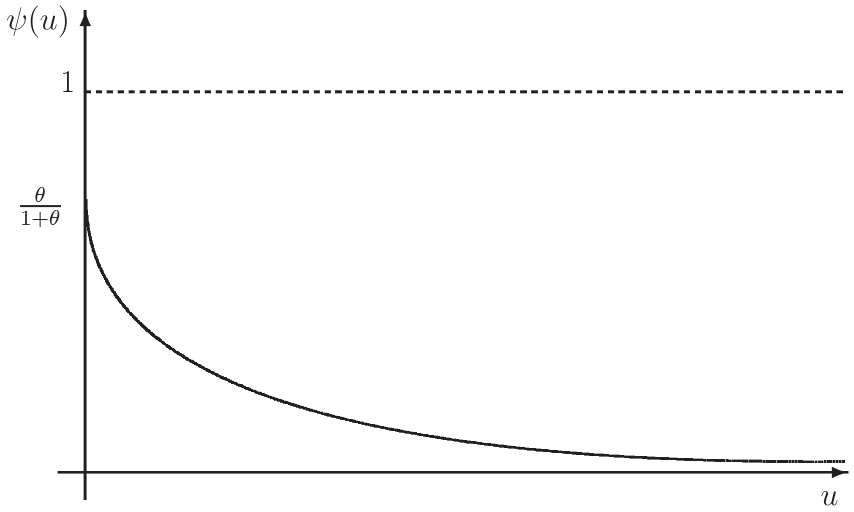
$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$$

4. Η δ(u) αντιστοιχεί σε μικτή κατανομή, αφού:

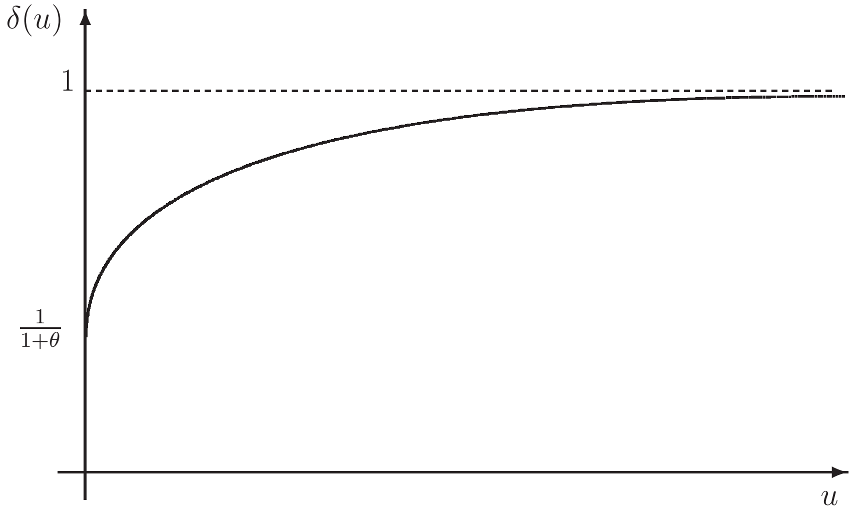
   (α′) δ(0) > 0

   (β′) δ(u) έχει πυκνότητα στο(0,∞), άρα είναι συνεχής στο (0,∞).

Στα Σχήματα 3.2 και 3.3 φαίνεται η γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας και της πιθανότητας μη χρεοκοπίας συναρτήσει του αποθεματικού u, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας

Πρόταση 8. *Στο κλασικό μοντέλο σε συνεχή και άπειρο χρόνο,με u≥ 0, ισχύουν τα εξής:*

1.
$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx \tag{3.9}$$

2.
$$\delta(u) = \delta(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx \tag{3.10}$$

όπου, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$*, η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων* X_i*.*

3.
$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda_1 p}{c} = \frac{\theta}{1+\theta} \tag{3.11}$$

και

$$\psi(0) = \frac{\lambda_1 p}{c} = \frac{1}{1+\theta} \tag{3.12}$$

3.4 Πιθανότητα Χρεοκοπίας και Ανανεωτική Εξίσωση

Όπως γνωρίζουμε η γενική μορφή της ανανεωτικής εξίσωσης είναι :

$$\mu(u) = g(u) + \int_0^\infty \mu(u-y)f(y)dy$$

ενώ στην περίπτωση που η εξίσωση έχει τη μορφή :

$$\mu(u) = g(u) + \phi\int_0^\infty \mu(u-y)f(y)dy$$

(όπου φ μια σταθερά τέτοια ώστε : $0 < \phi < 1$) έχουμε την ελαττωματική ή ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση[1] (defective renewal equation)

Αντικαθιστώντας, τη τιμή δ(0) στην εξίσωση (3.10), έχουμε:

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda p_1}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx \tag{3.13}$$

Παρατηρώντας, τη παραπάνω εξίσωση, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση

[1]Έστω ότι έχουμε την ανανεωτική εξίσωση : $\mu(u) = g(u) + \int_0^\infty \mu(u-y)dF(y)$ τότε :

1. Αν $\|F\| < 1 \to$ ελαττωματική ή ελλειμματική (defective) ανανεωτική εξίσωση.
2. Αν $\|F\| = 1 \to$ κανονική (proper) ανανεωτική εξίσωση.
3. Αν $\|F\| > 1 \to$ υπερβολική (excessive) ανανεωτική εξίσωση.

όπου : $\|F\| = \lim_{x\to\infty} F(x)$

Ορισμός 18. *Αν ολοκληρώσουμε την ουρά των αποζημιώσεων, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$,τότε ορίζουμε τη συνάρτηση :*

$$H(x) = \frac{1}{p_1} \int_0^x \overline{F}(y)dy \tag{3.14}$$

Άρα, με βάση τον προηγούμενο ορισμό, η εξίσωση (3.13), γίνεται:

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda p_1}{c} + \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u \delta(u-x)dH(x) \tag{3.15}$$

και αντίστοιχα η πιθανότητα χρεοκοπίας, είναι:

$$1 - \delta(u) = \frac{\lambda p_1}{c} - \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u \delta(u-x)dH(x) \tag{3.16}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda p_1}{c} - \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u [1-\psi(u-x)]dH(x) \\ &= \left(\frac{\lambda p_1}{c} - \frac{\lambda p_1}{c} H(x)\right) + \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u \psi(u-x)dH(x) \\ &= \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u) + + \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u \psi(u-x)dH(x) \end{aligned} \tag{3.17}$$

όπου $\overline{H}(x) = 1 - H(x)$ Παρατηρούμε, πως η εξίσωση (3.17) είναι μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, αφού έχουμε υποθέσει ότι ισχύει η συνθήκη:

$$\lambda p_1 < c \Rightarrow \frac{\lambda p_1}{c} < 1$$

και επιπλέον έχουμε :

$$\|H\| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p_1} \int_0^x \overline{F}(x)dx = \frac{p_1}{p_1} = 1$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πως η εξίσωση (3.17) μπορεί να μετατραπεί σε μια κανονική ανανεωτική εξίσωση, κάτω από την προϋπόθεση, ότι υπάρχει θετικός R πραγματικός αριθμός,ώστε να ισχύει:

$$\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda p_1} = \frac{1}{1+\theta} \tag{3.18}$$

Έτσι, αν πολλαπλασιάσουμε την (3.17) με e^{Ru}, έχουμε:

$$\begin{aligned} \psi(u)e^{Ru} &= \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u)e^{Ru} + \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u \psi(u-x)e^{Ru}dH(x) \\ &= \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u)e^{Ru} + \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u e^{R(u-x)}\psi(u-x)e^{Rx}dH(x) \end{aligned}$$

Προκειμένου να καταλήξω στην ανανεωτική εξίσωση, θα ορίσω την εξής αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

Ορισμός 19. *Αν η ουρά του ύψους των αποζημιώσεων είναι* $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ *τότε ορίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής :*

$$H_R(x) = \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^x e^{Rt} \overline{F}(t) dt \tag{3.19}$$

Παρατήρηση

Το διαφορικό της $H_R(x)$, είναι:

$$dH_R(x) = \frac{\lambda}{p_1 c} e^{Rx} dH(x) \tag{3.20}$$

Άρα, με βάση τον Ορισμό 19 έχουμε:

$$\psi(u)e^{Ru} = \frac{\lambda p_1}{c} \overline{H}(u) e^{Ru} + \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^u e^{R(u-x)} \psi(u-x) e^{Rx} dH_R(x) \tag{3.21}$$

όπου:

$$\|H_R\| = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda p_1}{c} \int_0^x e^{Rt} \overline{F}(t) dt = \frac{\lambda p_1}{c} \frac{c}{\lambda p_1} = 1 \tag{3.22}$$

Παρατηρούμε πως η εξίσωση (3.21), αποτελεί την κανονική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας ,υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η (3.18)

3.5 Συντελεστής Προσαρμογής

Στη προηγούμενη παράγραφο αναφερθήκαμε στην ύπαρξη μιας θετικής σταθεράς R προκειμένου να υπολογίσουμε την ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η σταθερά αυτή καλείται συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient) και ο υπολογισμός της γίνεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{Rx} dH(x) &= \frac{c}{\lambda p_1} \\ \Rightarrow \frac{1}{p_1} \int_0^\infty e^{Rx} \overline{F}(x) dx &= \frac{c}{\lambda p_1} \\ \Rightarrow \int_0^\infty e^{Rx} \overline{F}(x) dx &= \frac{c}{\lambda} \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (\frac{1}{R}e^{Rx})'\overline{F}(x)dx &= \frac{c}{\lambda} \\
\Rightarrow \left[\frac{1}{R}e^{Rx}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{R}e^{Rx}f(x)dx &= \frac{c}{\lambda} \\
\Rightarrow -\frac{1}{R} + \int_0^\infty \frac{1}{R}e^{Rx}f(x)dx &= \frac{c}{\lambda} \\
\Rightarrow -\frac{1}{R} + M_X(R) &= \frac{c}{\lambda} \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

όπου $M_X(R)$, η ροπογεννήτρια της κατανομής των X_i.

Από την εξίσωση (3.23), παρατηρούμε πως ο συντελεστής προσδιορισμού R υπολογίζεται σαν λύση της παρακάτω εξίσωσης ως προς r:

$$-\frac{1}{r} + M_X(r) = \frac{c}{\lambda} \qquad (3.24)$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1$, από την ισοδύναμη εξίσωση:

$$M_X(R) = (1+\theta)p_1R + 1 \qquad (3.25)$$

Θεώρημα 6. *Έστω το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg με :*

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , t \geq 0$$

αν υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη $\vartheta >$ 0 και επιπλέον ότι υπάρχει $R >$0,τέτοιο ώστε:

$$\int_0^\infty e^{Rx}dH(x) = \frac{c}{\lambda p_1} = 1 + \theta$$

Τότε, ισχύουν τα εξής:

1.

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \forall u \qquad (3.26)$$

2. Υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια ώστε να ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος:

$$\psi(u) \approx Ce^{-Ru} \qquad (3.27)$$

δηλαδή,

$$\exists C > 0 : \lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1 \qquad (3.28)$$

3. *Στην ειδική περίπτωση όπου τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-x/p_1}$,τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, δίνεται από τον τύπο :*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta u}{p_1(\theta+1)}} \tag{3.29}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι σαφές ότι ότι για τον υπολογισμό του συντελεστή προσδιορισμού αναγκαία συνθήκη είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια της κατανομής του ύψους των αποζημιώσεων. Σε πολλές κατανομές δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια, όπως για παράδειγμα στη Pareto και τη Weibull(τ,γ), με γ<1, ή δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικός τύπος για αυτήν όπως στην Weibull(τ,γ), με γ>1. Στις περιπτώσεις αυτές είναι απαραίτητο να βρεθούν κάποια φράγματα για τον συντελεστή προσδιορισμού, λόγω της σημαντικότητας που παρουσιάζει αυτός στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ένα πάνω φράγμα για τον συντελεστή προσδιορισμού μπορεί να προκύψει αν πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor της ροπογεννήτριας γύρω από το μηδέν. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} M_X(R) = E(e^{Rx}) = E(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Rx)^i}{i!}) &= \sum_{i=0}^{\infty} E(\frac{(Rx)^i}{i!}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(R)^i E(x^i)}{i!}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(R)^i p_i}{i!} \qquad (3.30) \\ &= 1 + Rp_1 + \frac{R^2 p_2}{2} + \frac{R^3 p_3}{6} + \ldots \qquad (3.31) \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας την (3.31) στην (3.25) και χρησιμοποιώντας τους τρείς πρώτους όρους της σειράς, έχουμε:

$$1 + Rp_1 + \tfrac{R^2 p_2}{2} + \tfrac{R^3 p_3}{6} + \ldots = (1+\theta)p_1 R + 1$$

$$(1+\theta)p_1 R + 1 > 1 + Rp_1 + \tfrac{R^2 p_2}{2}$$

Επομένως, το φράγμα, είναι το:

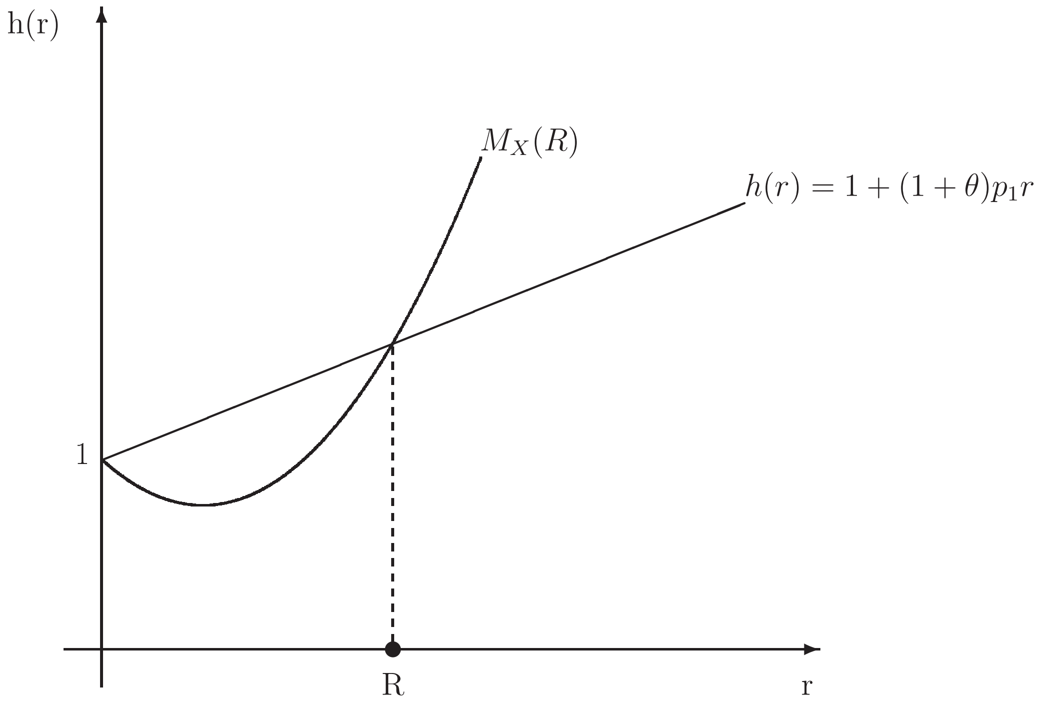
$$R < \frac{2\theta p_1}{p_2} \tag{3.32}$$

Ενώ, αν πάρουμε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor, έχουμε:

$$R < \frac{12\theta p_1}{\sqrt{9p_2^2 + 24\theta p_1 p_3} + 3p_2} \tag{3.33}$$

Είναι σαφές πως όσο περισσότερους όρους χρησιμοποιούμε από το ανάπτυγμα της ροπογεννήτριας, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνουμε.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται γραφικά η ύπαρξη του συντελεστή προσδιορισμού.



Σχήμα 3.4: Συντελεστής προσδιορισμού

3.6 Κάποιες τυχαίες μεταβλητές που συνδέονται με τη πιθανότητα χρεοκοπίας

Στη παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές τυχαίες μεταβλητές που μας βοηθούν στη μελέτη της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ορισμός 20. *Η τυχαία μεταβλητή:*

$$T = \begin{cases} inf\,\{t : R(t) < 0\} \\ \infty, \quad \text{αν } R(t) \geq 0 \;\; \forall t \end{cases}$$

καλείται χρόνος χρεοκοπίας.

Παρατηρήσεις

1. Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελαττωματική τυχαία μεταβλητή,αφού:

   (α′) $Pr(\text{να συμβεί χρεοκοπία }) = Pr(T < \infty) < 1$

   (β′) $Pr(\text{να μην συμβεί χρεοκοπία }) = Pr(T = \infty) > 0$

2. Ισχύει, ότι : $Pr(T = \infty) = Pr(R(t) > 0, \forall t) = 1 - \psi(u) = \delta(u)$

Ορισμός 21. *Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν την χρονική στιγμή t=T καλείται έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με U(T) ή αν θέλουμε να το εκφράσουμε σε θετική κλίμακα με -U(T).*

Ορισμός 22. *Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρονική στιγμή t=T καλείται πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία συμβολίζεται με U(T-) και δίνεται από τον τύπο:* $U(T-) = \lim_{t \to T-} R(t)$

Ορισμός 23. *Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, συμβολίζεται με* L_1.

Αν η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u έγινε τη χρονική στιγμή t_1 με το πλεόνασμα τότε να είναι ίσο με $U(t_1) = u_1$, τότε με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να ορίσουμε μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή την L_2 που να μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό u_1. Επομένως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία δημιουργούμε μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές, $L_3, L_4, ..., L_i$, που μας δίνουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος, όταν για πρώτη φορά πέσει κάτω από, $u_2, u_3, ..., u_{i-1}$, αντίστοιχα.

Πόρισμα 1. *Αν ισχύει η συνθήκη* $c > \lambda p_1$ *στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, τότε το πλήθος των* L_i *που εμφανίζονται (έστω K), είναι πεπερασμένο και μάλιστα ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας* $\delta(0)$*, δηλαδή:*

$$K \sim Geo(\delta(0)) \Rightarrow \tag{3.34}$$

$$Pr(K = x) = [\psi(0)]^x \delta(0) \Rightarrow \tag{3.35}$$

$$Pr(K = x) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^x \frac{\theta}{1+\theta} \tag{3.36}$$

Ορισμός 24. *Στο κλασικό μοντέλο, ορίζουμε σαν μέγιστη σωρευτική απώλεια τη τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το σύνολο της πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Τη συμβολίζουμε με L και ισούται με:*

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_K = \sum_{i=1}^{K} L_i \tag{3.37}$$

Παρατηρήσεις

1. Η L είναι σύνθετη γεωμετρική τυχαία μεταβλητή.

2. Η L είναι μικτή τυχαία μεταβλητή.

3. $Pr(L = 0) = Pr(K = 0) = \delta(0)$

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο η τυχαία μεταβλητή L, να πέσει κάτω από το αρχικό αποθεματικό είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία, δηλαδή:

$$Pr(L > u) = \psi(u) \tag{3.38}$$

ή ισοδύναμα

$$Pr(L \leq u) = \delta(u) \tag{3.39}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται γραφικά οι τυχαίες μεταβλητές: $L_1, L,$ και $U(T)$.

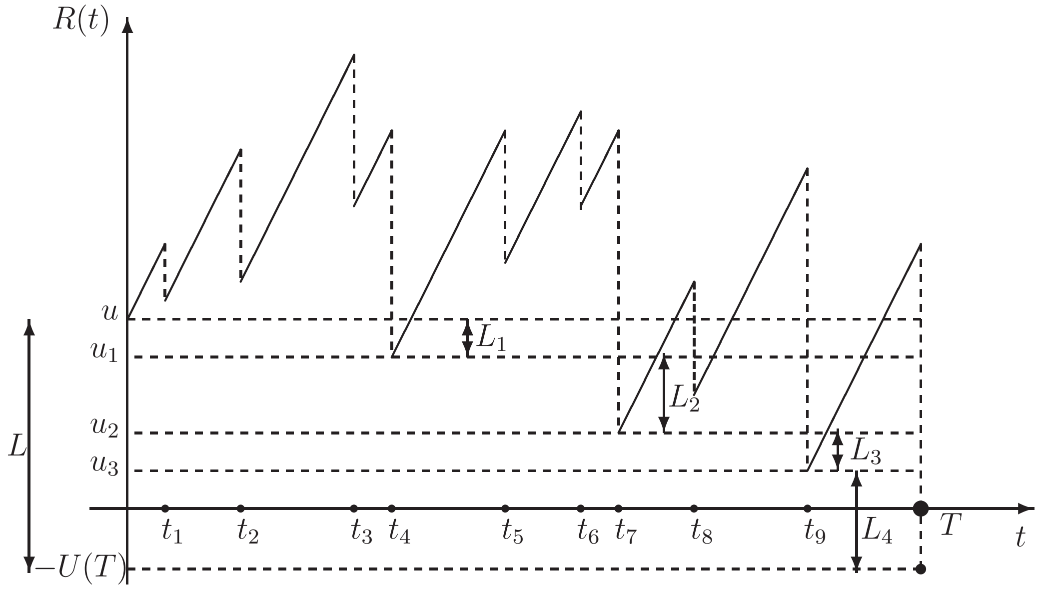
Πρόταση 9. *Για τη τυχαία μεταβλητή L_1, η οποία ορίζεται στο κλασικό μοντέλο στην περίπτωση που συμβεί πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ισχύουν τα εξής:*

1. *Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της ισούται με:*

$$F_{L_1}(x) = Pr(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{p_1}[1 - F_X(t)]dt = H(x) \tag{3.40}$$

2. *Η ροπογεννήτρια της είναι η :*

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{p_1}(M_X(r) - 1) \tag{3.41}$$



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και απεικόνιση των βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών L_1 και L.

3. *Ειδικότερα, για την περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές X_i, ακολουθούν εκθετική κατανομή, με παράμετρο β τότε και η τυχαία μεταβλητή L_1, ακολουθεί εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.*

4. *Η r τάξης ροπή της (γύρω από το μηδέν) είναι:*

$$E(L_i^r) = \frac{p_{r+1}}{p_1(r+1)} \tag{3.42}$$

Όπως έχουμε αναφέρει η μέγιστη σωρευτική απώλεια, είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, επομένως η ροπογεννήτρια της δίνεται από την σχέση:

$$M_L(r) = M_K(ln(M_{L_i}(r)) \tag{3.43}$$

όπου :

$$M_K(r) = E(e^{rK}) = \frac{\delta(0)}{1-\psi(0)e^r} \tag{3.44}$$

αφού :

$$K \sim Geometric(\delta(0))$$

Αντικαθιστώντας τις (3.41) και (3.44) στην (3.43), έχουμε :

$$M_L(r) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1-\frac{1}{1+\theta}M_{L_i}(r)} = \frac{\theta}{(1+\theta)-M_{L_i}(r)} \tag{3.45}$$

Πρόταση 10. *Στο κλασικό μοντέλο για τη μέγιστη σωρευτική απώλεια ισχύουν τα εξής:*

1. *έχει μέση τιμή :*

$$E(L) = \frac{1}{\theta}\frac{p_2}{p_1} \tag{3.46}$$

και

2. *διασπορά :*

$$Var(L) = \frac{p_3}{3\theta p_1} + (\frac{p_2}{2\theta p_1})^2 \tag{3.47}$$

Θεώρημα 7. *Στο κλασικό μοντέλο, αν $L = L_1 + L_1 + ... + L_K$, είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια, όπου L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και $K \sim Geo(\delta(0))$, τότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u, δίνεται από τον τύπο :*

$$\delta(u) = \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{k=0}^{\infty} H^{*k}(u)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \tag{3.48}$$

όπου : $H^{*k}(u) = Pr(L_1 + L_2 + ... + L_K = u)$, είναι η κ-τάξης συνέλιξη της H, με τον εαυτό της (Βλέπε Παράρτημα Β).

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \delta(u) &= Pr(L \leq u) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr(L \leq u|K = k)Pr(K = k) \\ &= Pr(K = k) + \sum_{k=0}^{\infty} Pr(L_1 + L_2 + ... + L_K \leq u)Pr(K = k) \\ &= \delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(u)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta} \end{aligned} \tag{3.49}$$

όμως, αν ορίσουμε :

$$H^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

τότε, η (3.49), γίνεται :

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= \frac{\theta}{1+\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(u)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{k} \frac{\theta}{1+\theta} \\
&= \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{0} H^{*0}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(u)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{k} \frac{\theta}{1+\theta} \\
&= \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{k=0}^{\infty} H^{*k}(u)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{k} \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Θα πρέπει να τονίσουμε πως το προηγούμενο θεώρημα μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι έννοιες ταυτόσημες. Έτσι κάθε ιδιότητα που αποδεικνύεται για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής μεταφέρεται και στην πιθανότητα χρεοκοπίας και αντίστροφα.

3.7 Πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και πεπερασμένο χρόνο

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου σε συνεχή και πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0,\ \tau]$, εξαρτάται εκτός από το αρχικό αποθεματικό u και από το μήκος του διαστήματος τ. Αυτή η επιπλέον παράμετρος, εμποδίζει ακόμα και σε απλές περιπτώσεις(όπως η εκθετική κατανομή) τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για το λόγω αυτό περιοριζόμαστε στη δημιουργία προσεγγίσεων και φραγμάτων της πιθανότητας $\psi(u,t)$.

Πρόταση 11. *Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων και για αρχικό αποθεματικό u=0, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u,t) = 1 - \psi(u,t)$ στο $[0,t]$, έχει το εξής άνω φράγμα :*

$$\delta(u,t) \leq \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{p_2}{\theta p_1}\frac{1}{ct} \ \ ,\forall t \geq 0. \qquad (3.51)$$

Πρέπει να αναφέρουμε πως η πιθανότητα μη χρεοκοπίας για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο, χρόνο συνδέονται με τη σχέση:

$$\psi(u,t) = \psi(u)Pr[T \leq t \mid T < \infty], \qquad (3.52)$$

όμως για μεγάλες τιμές του u, ισχύει το εξής :

$$Pr[T \leq t \mid T < \infty] \cong \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right),$$

όπου : $\Phi(\cdot)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής και

$$m = E[T \leq t \mid T < \infty]$$

$$\sigma^2 = Var[T \leq t \mid T < \infty]$$

Πρόταση 12. *Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων και για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού u, μια προσέγγιση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας $\delta(u,t) = 1 - \psi(u,t)$ στο $[0,t]$,είναι η εξής:*

$$\delta(u,t) \cong \psi(u)\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \tag{3.53}$$

3.8 Το ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνου υποθέσαμε ότι οι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Επιπλέον θεωρήσαμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, που αντιστοιχεί στο πλήθος των ανανεώσεων που συμβαίνουν στο $[0,t]$, $\forall t > 0$ είναι μια διαδικασία Poisson. Μια από τις πολλές γενικεύσεις του κλασικού μοντέλου που έχουν μελετηθεί, αποτελεί και το Ανανεωτικό Μοντέλο. Σύμφωνα με αυτό, οι χρόνοι μεταξύ των ζημιογόνων συμβάντων παραμένουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ενώ αυτό που αλλάζει είναι ότι εκτός απο την εκθετική μπορούν να ακολουθούν οποιαδήποτε κατανομή και επιπλέον ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ \ t \geq 0\}$ μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε ανανεωτική διαδικασία.

Πρόταση 13. *Στο ανανεωτικό μοντέλο η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία τη στιγμή που έρχεται η πρώτη αποζημίωση είναι:*

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \phi(t)[1 - F(u+ct)]dt \tag{3.54}$$

όπου, $\phi(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών συμβάντων.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο ανανεωτικό επιχείρημα, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο που συμβαίνει η πρώτη αποζημίωση. Αν υποθέσουμε ότι το πρώτο αυτό ζημιογόνο γεγονός συμβαίνει τη χρονική στιγμή $T_1 = t$ τότε χρησιμοποιώντας το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= \int_0^{\infty} Pr(R(t) < 0|T_1 = t)\phi(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} Pr(u + ct - X_1 < 0)\phi(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} Pr(X_1 > u + ct)\phi(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} \phi(t)\left[1 - F_{X_1}(u + ct)\right]dt\end{aligned}$$

Στο ανανεωτικό μοντέλο οι ορισμοί για την τυχαίες μεταβλητές L_1, L, παραμένουν ίδιοι με το κλασικό μοντέλο, έτσι :

- $L = L_1 + L_2 + ... + L_K$
- $K \sim Geo(\delta(0))$
- $\delta(u) = Pr(L \leq u)$

ενώ, δεν ισχύει η ισότητα: $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$

Πρόταση 14. *Στο ανανεωτικό μοντέλο η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο και συνεχή χρόνο, ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση :*

$$\psi(u) = \phi\,\overline{H}(u) + \phi \int_0^u \psi(u - y)dH(y) \tag{3.55}$$

όπου : $\phi = \psi(0)$ και $H(x)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής L_1.

Απόδειξη

Έστω K το ενδεχόμενο να υπάρχει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό. Τότε, έχουμε :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= Pr(R(t) < 0|\, u) \\ &= \int_0^{\infty} Pr(R(t) < 0|u, K, L_1 = x)Pr(K)Pr(L_1 \approx x)dx + \\ &+ \int_0^{\infty} \underbrace{Pr(R(t) < 0|\, u, K', L_1 = x)}_{=0} Pr(K')Pr(L_1 \approx x)dx \\ &= \phi \int_0^{\infty} Pr(R(t) < 0|u, K, L_1 = x)\,)Pr(L_1 \approx x)dx\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας, υπόψιν μας ότι:

- Αν $L_1 = x$, τότε:
$$Pr(R(t) < 0|u, K, L_1 = x) = 1$$

- Αν $L_1 = x \leq u$, τότε :
$$Pr(R(t) < 0|u, K, L_1 = x) = \psi(u - x)$$

και
$$Pr(L_1 = x) = \frac{dH(x)}{dx} \Rightarrow dH(x) = Pr(L_1 = x)dx$$

τότε, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \phi \int_0^u Pr(R(t) < 0|u, K, L_1 = x)dH(x) + \\
&+ \phi \int_u^\infty \underbrace{Pr(R(t) < 0|u, K, L_1 = x)}_{=1} dH(x) \\
&= \phi \int_0^\infty \psi(u - x)dH(x) + \phi[1 - H(u)] \\
&= \phi\, \overline{H}(u) + \phi \int_0^u \psi(u - y)dH(y)
\end{aligned}$$

3.9 Εφαρμογές

Στη παρούσα παράγραφο, θα ασχοληθούμε με τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για πολλές κατανομές, ο υπολογισμός ενός αναλυτικού τύπου για τη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι δύσκολος έως και ακατόρθωτος. Για το λόγο αυτό θα περιοριστούμε στην παρουσίαση δύο μεθόδων υπολογισμού, στις περιπτώσεις που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν μια από τις παρακάτω κατανομές :

1. Εκθετική κατανομή
2. Γάμμα κατανομή
3. Συνδυασμό Εκθετικών κατανομών
4. Μείξη Γάμμα κατανομών

Μέθοδος 1 (Bowers et al (1986))

Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται άμεσα από τη συνάρτηση κατανομής της Μέγιστης Σωρευτικής Απώλειας L.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω, $X_i \sim$ Εκθετική(b). Αρχικά, θα υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής L :

$$\begin{aligned} M_L(r) &= \frac{\theta}{1+\theta-M_{X_i}(r)} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta-\frac{b}{b-r}}, \qquad r<b \end{aligned} \tag{3.56}$$

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι η τυχαία μεταβλητή L, είναι μικτή[2] θα γράψουμε τη ροπογεννήτρια σαν άθροισμα δύο μελών, με το ένα από αυτά να αντιστοιχεί στο διακριτό και το άλλο στο συνεχές κομμάτι της.

$$\begin{aligned} M_L(r) &= \frac{\theta}{1+\theta}+\frac{\theta}{1+\theta-\frac{b}{b-r}}-\frac{\theta}{1+\theta} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}+\frac{\theta(b-r)}{(1+\theta)(b-r)-b}-\frac{\theta}{1+\theta} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\left[\frac{(1+\theta)\theta(b-r)-\theta[b+\theta b-r-r\theta-b]}{b+b\theta-r-r\theta-b}\right] \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\left[\frac{(1+\theta)(\theta b-\theta r)-\theta^2 b+r\theta+r\theta^2}{\theta b-r(1+\theta)}\right] \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\frac{\theta b}{\theta b-r(1+\theta)} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\frac{\frac{\theta b}{1+\theta}}{\frac{\theta b}{1+\theta}-r} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Στην εξίσωση (3.57), παρατηρούμε πως ο όρος :

$$\frac{\theta}{1+\theta}$$

αντιστοιχεί στο διακριτό κομμάτι της κατανομής ενώ το :

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\frac{\theta b}{1+\theta}}{\frac{\theta b}{1+\theta}-r}$$

[2]Έχει μάζα στο μηδέν (δ(0)=ϑ/1+ϑ) και είναι συνεχής στο $(0,\infty)$

στο συνεχές κομμάτι της και αποτελεί τη ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής πολλαπλασιασμένη με $\frac{1}{1+\theta}$. Με βάση τα παραπάνω, η τυχαία μεταβλητή L έχει:

1. Μάζα στο μηδέν που ισούται με $\delta(0) = Pr(L \leq 0) = \frac{1}{1+\theta}$

2. Είναι συνεχής στο (0,∞), με πυκνότητα:

$$Pr(L = x) = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta b}{1+\theta}e^{-\frac{\theta b}{1+\theta}x} \quad , x \in (0, \infty)$$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της L, είναι:

$$Pr(L \leq u) = 1 - \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta b}{1+\theta}u}$$

και άρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον παρακάτω, τύπο :

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta b}{1+\theta}u}$$

όμως, όπως έχουμε αποδείξει ο όρος $\frac{\theta b}{1+\theta}$, ισούται με το συντελεστή προσαρμογής R στην περίπτωση που τα ύψη αποζημίωσης ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Άρα, έχουμε:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru} \tag{3.58}$$

και αφού $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, ισχύει :

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru} \tag{3.59}$$

Παρατήρηση

Γενικά γνωρίζουμε πως για το συντελεστή προσαρμογής R ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\psi(u) \leq Ce^{-Ru}\ , \forall u \geq 0$

2. $\exists\ C > 0 : \psi(u) \cong Ce^{-Ru} \quad , u \to \infty$

Στη περίπτωση που τα ύψη αποζημίωσης ακολουθούν την εκθετική, τότε οι προηγούμενες ιδιότητες αντικαθίστανται από την ισότητα:

$$\psi(u) = Ce^{-Ru},\ \forall u \geq 0 \ \text{ και } \ C = \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Μέθοδος 2

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε στη δεύτερη μέθοδο περιγράφηκε από τους Gerber, Goovaerts and Kaas (1987)και εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που τα ύψος της κάθε αποζημίωσης ακολουθεί μείξη εκθετικών ή και γάμμα κατανομών.

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας $p_i(x)$ που αντιστοιχούν σε κατανομές του ίδιου τύπου αλλά με διαφορετικές παραμέτρους, τότε ορίζουμε σαν συνδυασμό (combination) των κατανομών αυτών, τη κατανομή εκείνη που έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j p_i(x) \tag{3.60}$$

όπου οι σταθερές A_j, έχουν την ιδιότητα :

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = 1$$

Στην περίπτωση που οι σταθερές A_j είναι επιπλέον και θετικές, τότε ορίζεται η μείξη (mixture) των κατανομών.

Α. Συνδυασμός Εκθετικών κατανομών

Έστω οι εκθετικές κατανομές :

$$p_j(x) = b_j e^{-b_j x},\ x > 0 \tag{3.61}$$

και ο συνδυασμός τους είναι:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j b_j e^{-b_j x},\ x > 0 \tag{3.62}$$

με

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = 1$$

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνδυασμό των εκθετικών κατανομών, δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^{n} C_k e^{-r_k u} \tag{3.63}$$

όπου για κ=1,2,3,...,n οι σταθερές C_k υπολογίζονται από τη σχέση :

$$C_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{jk}}{b_j} \tag{3.64}$$

με

$$C_{jm} = \frac{\frac{A_j}{(b_j - r_m)}}{\frac{\sum_i^n A_i}{(b_j - r_m)^2}} \tag{3.65}$$

και $r_1, r_2, ..., r_n$ οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης :

$$\frac{\lambda}{c} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{(b_j - r)^2} = 1 \tag{3.66}$$

ως προς r.

Παρατήρηση

Η εξίσωση (3.66) είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του συντελεστή προσδιορισμού R, συνεπώς η μικρότερη από αυτές τις ρίζες συμπίπτει με τον R.

B. Συνδυασμός Γάμμα κατανομών

Έστω οι κατανομές Γάμμα :

$$p_i(x) = b_j^2 x e^{-b_j x}, \ x > 0 \tag{3.67}$$

και ο συνδυασμός τους:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j b_j^2 x e^{-b_j x}, \ x > 0 \tag{3.68}$$

με

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = 1$$

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνδυασμό των Γάμμα(2,b_j), j=1,2,...n δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{2n} C'_k e^{-r_k u} \tag{3.69}$$

όπου :

$$\begin{aligned} C'_k &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} C'_{jk}(y) e^{-b_j x} dy && (3.70) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\frac{3-2r_k}{b_j}}{(b_j - r_k)^2}}{\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{3b_j - r_k}{(b_j - r_k)^2}} && (3.71) \end{aligned}$$

και $r_1, r_2, ..., r_n$ οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης :

$$1 - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{2b_j - r}{(b_j - r)^2} = 0 \tag{3.72}$$

Παρατήρηση

Όμοια με την εκθετική περίπτωση, η μικρότερη από τις ρίζες αντιστοιχεί στον συντελεστή προσαρμογής.

Παραδείγματα (Gerber, Goovaerts and Kaas (1987))

1. Συνδυασμός εκθετικών κατανομών

Αν θεωρήσουμε τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών :

$$p(x) = A_1 p_1(x) + A_2 p_2(x) \tag{3.73}$$

με :

1. $p_1(x) = 3e^{-3x}$
2. $p_2(x) = 4e^{-4x}$

και αν επιπλέον υποθέσουμε ότι λ=1 c = 1, $A_1 = 4$ και $A_2 = -3$, τότε έχουμε:

$$p(x) = 12e^{-3x} - 12e^{-4x} \tag{3.74}$$

Επομένως η λύση της (3.57) ως προς r, μας δίνει :

$$r_1 = R = 1 \text{ και } r_2 = 5$$

Από την (3.65), ·έχουμε

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\frac{A_1}{(b_1-r_1)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_1-r_1)^2}} = 3 \\ C_{12} &= \frac{\frac{A_1}{(b_1-r_2)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_1-r_2)^2}} = 1 \\ C_{21} &= \frac{\frac{A_2}{(b_2-r_1)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_2-r_1)^2}} = -\frac{3}{2} \\ C_{22} &= \frac{\frac{A_2}{(b_j-r_2)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_2-r_2)^2}} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \tag{3.75}$$

Επομένως, η (3.64) μας δίνει :

$$C_1 = \sum_{j=1}^{2} \frac{C_{j1}}{b_j} = \frac{5}{8} \tag{3.76}$$

$$C_2 = \sum_{j=1}^{2} \frac{C_{j2}}{b_j} = -\frac{1}{24} \tag{3.77}$$

Άρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας, βάση της (3.63), δίνεται από τον τύπο :

$$\psi(u) = \frac{5}{8}e^{-u} - \frac{1}{24}e^{-5u} \tag{3.78}$$

2. Μείξη γάμμα κατανομών

Αν θεωρήσουμε τη μείξη δύο Γάμμα(2, b_j) κατανομών :

$$p(x) = A_1 p_1(x) + A_2 p_2(x) \tag{3.79}$$

με :

1. $p_1(x) = b_1^2 e^{-b_1 x} x$, $b_1 = 3 - \sqrt{3}$
2. $p_2(x) = b_2^2 e^{-b_2 x} x$, $b_2 = 3 + \sqrt{3}$

και αν επιπλέον υποθέσουμε ότι λ=1 c = 2, $A_1 = \frac{1}{2}$ και $A_2 = \frac{1}{2}$, τότε έχουμε:

$$p(x) = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})^2 e^{-(3-\sqrt{3})x} + \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})^2 e^{-(3+\sqrt{3})x} \tag{3.80}$$

Επομένως η λύση της (3.72) ως προς r, μας δίνει :

$$r_1 = R = 0.506, \quad r_2 = 1.756, \quad r_3 = 3.544 \text{ και } r_4 = 5.685$$

Από την (3.71), έχουμε :

$$C_1' = \frac{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\frac{3-2r_1}{b_j}}{(b_j-r_1)^2}}{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{3b_j-r_1}{(b_j-r_1)^2}} = 0.517$$

$$C_2' = \frac{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\frac{3-2r_2}{b_j}}{(b_j-r_2)^2}}{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{3b_j-r_2}{(b_j-r_2)^2}} = -0.070$$

$$C_3' = \frac{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\frac{3-2r_3}{b_j}}{(b_j-r_3)^2}}{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{3b_j-r_3}{(b_j-r_3)^2}} = 0.089$$

$$C_4' = \frac{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\frac{3-2r_4}{b_j}}{(b_j-r_4)^2}}{\sum_{j=1}^{2} A_j \frac{3b_j-r_4}{(b_j-r_4)^2}} = -0.036$$

Άρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας τη (3.69), δίνεται από τον τύπο :

$$\psi(u) = 0.517e^{-0.506u} - 0.070e^{-1.765u} + 0.089e^{-3.544u} - 0.036e^{-5.685u} \tag{3.81}$$

Κεφάλαιο 4

Φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

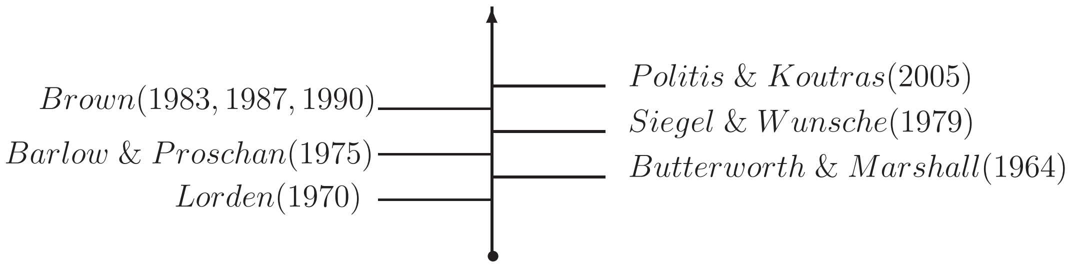
4.1 Εισαγωγή

Στις ανανεωτικές διαδικασίες η γνώση της ανανεωτικής συνάρτησης:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x)$$

παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον γιατί μας παρέχει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Ο υπολογισμός αυτός φυσικά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων. Επομένως για πολλές κατανομές η ανανεωτική συνάρτηση είναι δύσκολο να υπολογιστεί λόγου των πράξεων που απαιτούνται (κυρίως αντιστροφή μετασχηματισμού Laplace), ενώ για άλλες, όπως για παράδειγμα στη Weibull είναι αδύνατο να βρεθεί αναλυτικός τύπος. Στις περιπτώσεις αυτές είναι πολύ χρήσιμο να υπολογίσουμε προσεγγίσεις και φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση. Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αναφέρουμε τα σημαντικότερα άνω και κάτω φράγματα που κατασκευάστηκαν μέχρι σήμερα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι κυριότεροι συγγραφείς, που έχουν ασχοληθεί με τη δημιουργία τέτοιων φραγμάτων.

Φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση



Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της κατανομής που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των φραγμάτων, θα τα χωρίσουμε στις εξής τρεις κατηγορίες:

(I) Φράγματα που ο υπολογισμός τους απαιτεί μόνο τη γνώση της πρώτης και της δεύτερης ροπής γύρω από το μηδέν της κατανομής που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι (μ_1 και μ_2, αντίστοιχα).

(II) Φράγματα που ισχύουν στην περίπτωση που γνωρίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων.

(III) Φράγματα που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση που εκτός από τη γνώση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής είναι απαραίτητη και η μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας, $u(x)$ ως προς x.

Για κάθε μια από τις τρεις παραπάνω κατηγορίες θα χρησιμοποιήσουμε έναν επιπλέον διαχωρισμό :

1. Γενικά άνω και κάτω φράγματα που για την εφαρμογή τους είναι απαραίτητες μόνο οι αρχικές προϋποθέσεις της κατηγορίας στην οποία ανήκουν.

2. Φράγματα τα οποία εκτός από τις αρχικές προϋποθέσεις της κατηγορίας στην οποία ανήκουν απαιτούν επιπλέον η κατανομή των χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων να ανήκει σε κάποια μη παραμετρική οικογένεια κατανομών[1] π.χ. IFR, NBUE, NWUE, DFR, IMRL

[1]βλέπε Παράρτημα Ε

ώστε να είναι εφικτή η άμεση σύγκριση τους.

Από τους ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 2 για την εισαγωγή της έννοιας της ανανεωτικής διαδικασίας προκύπτουν τα εξής φράγματα :

Πρόταση 15. *Αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων έχουν κατανομή F τότε για την ανανεωτική συνάρτηση $U(x)$ ισχύει:*

$$F(x) + 1 \leq U(x) \leq \frac{1}{1 - F(x)}, \tag{4.1}$$

όπου για το άνω φράγμα $\frac{1}{1-F(x)}$ απαιτείται να ισχύει $F(x) < 1$.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια συνήθη ανανεωτική διαδικασία, δηλαδή διαδικασία στην οποία η κατανομή του χρόνου μέχρι την πρώτη ανανέωση είναι ίδια με την κατανομή των υπολοίπων ενδιάμεσων χρόνων, τότε έχουμε :

$$max\ T_i \leq \sum_{j=0}^{r} T_j = S_r \ \ , T_0 = 0,\ S_0 = 0$$

Άρα

$$F^{*r}(x) = Pr(S_r \leq x) \leq Pr(maxT_i \leq x) \leq Pr(T_i \leq x)^r = (F(x))^r$$

και

$$F^{*1}(x) = F(x)$$

$$F^{*0}(x) = 1_{[0,\infty)}(x)$$

όπου

$$1_{[0,\infty)} = \begin{cases} 1 & , \textit{αν } x \in [0,\infty) \\ 0 & , \textit{αν } x \notin [0,\infty) \end{cases}$$

Επομένως

$$F(x) + 1 = F^{(1)}(x) + 1 \leq \sum_{r=0}^{\infty} F^{*r}(x) \leq \sum_{r=0}^{\infty} (F(x))^r = \frac{1}{1 - F(x)}$$

Άρα

$$F(x) \leq U(x) \leq \frac{1}{1 - F(x)}$$

Τα φράγματα αυτά δεν δίνουν αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας σε σχέση με αυτά που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια για το λόγο αυτό δεν θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης μας.

4.2 Φράγματα συναρτήσει των ροπών μ_1 και μ_2.

Θα αναφέρουμε φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση που χρησιμοποιούνται, όταν γνωρίζουμε μόνο τις δυο πρώτες κεντρικές ροπές των χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων.

4.2.1 Γενικά άνω και κάτω φράγματα

O Lorden (1970), παρουσίασε το εξής γενικό άνω φράγμα :

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} := U_1(x) \tag{4.2}$$

ενώ οι Barlow και Proschan (1981) έδωσαν ένα γενικό κάτω φράγμα :

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} := L_1(x) \tag{4.3}$$

Συνδυάζοντας της (4.2) και (4.3), παρατηρούμε πως στη γενική περίπτωση που γνωρίζουμε μόνο τις δυο πρώτες ροπές (γύρω από το μηδέν), η ανανεωτική συνάρτηση είναι άνω και κάτω φραγμένη, από τις ποσότητες :

$$L_1(x) = \frac{x}{\mu} \leq U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} = U_1(x) \tag{4.4}$$

4.2.2 Φράγματα για διάφορους τύπους γήρανσης

Στην περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων ανήκει σε μία από τις επόμενες μη παραμετρικές κατηγορίες κατανομών[2]:

1. NBUE - NWUE

2. IMRL

3. IFR

έχουμε ακριβέστερα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση σε σχέση με τα γενικά φράγματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Επιπλέον είναι σαφές ότι όσο πιο μικρή είναι η κλάση που ανήκει η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, τόσο πιο ακριβές είναι το φράγμα.

[2]βλέπε Παράρτημα Ε

Το 1981 οι Barlow και Proschan υποθέτοντας, ότι η κατανομή των χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων ανήκει στην κλάση NBUE, κατασκεύασαν το εξής άνω φράγμα :

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + 1 := U_2(x) \tag{4.5}$$

ενώ αν ανήκει στην NWUE :

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} + 1 := L_2(x) \tag{4.6}$$

Για την περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των συμβάντων, ανήκουν στην οικογένεια κατανομών IMRL ο Brown, το 1980, παρουσίασε το εξής άνω φράγμα :

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} := U_3(x) \tag{4.7}$$

ενώ το 1987, ο ίδιος συγγραφέας έδωσε και ένα κάτω φράγμα της ανανεωτικής συνάρτησης όταν η κατανομή έχει την ιδιότητα IFR

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^2} := L_3(x) \tag{4.8}$$

4.3 Φράγματα υπό τη γνώση της F

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα φράγματα της ανανεωτικής συνάρτησης που για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιείται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F των τυχαίων μεταβλητών που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των ανανεώσεων.

4.3.1 Γενικά άνω και κάτω φράγματα.

Το 1964, οι Butterworth και Marshall, υποθέτοντας ότι η μέση τιμή μ της κατανομής F, είναι ένας πεπερασμένος πραγματικός αριθμός, δημοσίευσαν το εξής κάτω φράγμα για την $U(x)$:

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} - F_e(x) + 1 := L_4(x) \tag{4.9}$$

όπου

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1 - F(u))du$$

Για μικρές τιμές του x και ιδιαίτερα για μια περιοχή γύρω από το μηδέν οι Politis και Koutras (2005), παρουσίασαν βελτιωμένα φράγματα (κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα χαρακτηριστικά της κατανομής του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων) σε σχέση με αυτά που ήδη υπήρχαν για την ανανεωτική συνάρτηση. Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν, είναι η εξής : Αρχικά υπολογίζουμε ένα άνω ή κάτω φράγμα για τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης. Το φράγμα αυτό το εισάγουμε στην ανανεωτική εξίσωση με αποτέλεσμα να προκύπτει ένα νέο φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση που συνήθως είναι καλύτερης ακρίβειας από το φράγμα από το οποίο προήρθε τουλάχιστον για μια περιοχή γύρω από το μηδέν. Σχηματικά έχουμε :

$$
\begin{array}{c}
\text{Ανανεωτική εξίσωση} \\
\big\downarrow \\
\text{Λύση της ανανεωτικής Εξίσωσης} \\
\big\downarrow \\
\text{Φράγμα για τη λύση της Ανανεωτικής Εξίσωσης} \\
\big\downarrow \scriptstyle{\text{Εισαγωγή στην ανανεωτική εξίσωση}} \\
\text{Νέο φράγμα για την λύση της ανανεωτική εξίσωσης} \\
\big\downarrow \\
\text{Νέο φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση}
\end{array}
$$

Λήμμα 1. *Αν $F(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής τότε για $x > 0$ ισχύει:*

$$\int_0^x \frac{x-t}{\mu} dF(t) = \frac{x}{\mu} - F_e(x) \tag{4.10}$$

Απόδειξη

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{x-t}{\mu} dF(t) &= \frac{x}{\mu}\int_0^x 1 dF(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^x t dF(t) \\
&= \frac{xF(x)}{\mu} - \frac{1}{\mu}\left([tF(t)]_0^x - \int_0^x dF(t) \right) \\
&= \frac{xF(x)}{\mu} - \frac{xF(x)}{\mu} + \frac{1}{\mu}\int_0^x dF(t) \\
&= \frac{x}{\mu} - F_e(x)
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα που μας εισάγει στη μεθοδολογία που χρησιμοποίησαν οι Politis και Koutras (2005). Σύμφωνα με τον Feller (1971) η ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η ανανεωτική συνάρτηση $U(x)$ είναι :

$$U(x) = 1 + \int_0^x U(x-t)dF(t) \tag{4.11}$$

Χρησιμοποιώντας το φράγμα (4.3) στην (4.11) έχουμε :

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \int_0^x U(x-t)dF(t) \\ &\geq 1 + \int_0^x \frac{x-t}{\mu}dF(t) \\ &\overset{\text{Λήμμα1}}{=} \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(t) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} + \overline{F_e}(x) \ \ (= L_4(x)) \tag{4.12}$$

Επιπλέον ένας δεύτερος τρόπος για να καταλήξουμε στο ίδιο φράγμα φαίνεται παρακάτω: Αν θεωρήσουμε την ανανεωτική εξίσωση :

$$H(x) = \bar{F}_e(x) + \int_0^x H(x-t)dF(t)$$

τότε, γνωρίζουμε πως η μοναδική της λύση είναι η:

$$H(x) = U(x) - \frac{x}{\mu} = \int_0^\infty \bar{F}_e(x-t)dU(x) \tag{4.13}$$

όμως ισχύει ότι :

$$\int_0^x H(x-t)dF(t) \geq 0$$

Άρα,

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x) \tag{4.14}$$

που αποτελεί ένα νέο κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση και μάλιστα είναι καλύτερο από το $L_1(x) = \frac{x}{\mu}$.

Με τη μέθοδο που περιγράφηκε παραπάνω οι Politis και Koutras (2005) δημιούργησαν, το εξής γενικό άνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση.

Θεώρημα 8. *Για την ανανεωτική συνάρτηση, ισχύει η παρακάτω ανίσωση :*

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F(x)}{\mu^2} + \bar{F}_e(x) := U_4(x) \ \ , \forall x \geq 0 \tag{4.15}$$

Το παραπάνω άνω φράγμα είναι μικρότερο από αυτό του Lorden, στην περίπτωση που ισχύει :

$$\mu \int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq \mu_2 \bar{F}(x) \tag{4.16}$$

κάτι το οποίο εξασφαλίζεται για τουλάχιστον ένα διάστημα $[0, a]$, με $a \in (0, \infty]$.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που η κατανομή των χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων, ανήκει στην κλάση NBUE τότε ισχύει η συνθήκη (4.16).

Αν θεωρήσουμε την ανανεωτική εξίσωση (4.11) που ικανοποιεί η ανανεωτική συνάρτηση:

$$U(x) = 1 + \int_0^x U(x-t)dF(t) \tag{4.17}$$

τότε, εισάγοντας την (4.14) στην (4.17), έχουμε :

$$\begin{aligned} U(x) &\geq 1 + \int_0^x \bar{F}_e(x-t)dF(t) + \int_0^x \frac{x-t}{\mu}dF(t) + \int_0^x dF(t) \\ &= 1 + \int_0^x \bar{F}_e(x-t)dF(t) + \frac{xF(x)}{\mu} + F(x) - \frac{1}{\mu}\int_0^x ydF(y) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας, ότι:

$$\int_0^x ydF(y) = \mu - x\bar{F}(x) - \int_x^\infty \bar{F}(x)$$

έχουμε :

$$\begin{aligned} U(x) &\geq 1 + \int_0^x \bar{F}_e(x-t)dF(t) + \frac{xF(x)}{\mu} + F(x) - \\ &- \frac{1}{\mu}\left(\mu - x\bar{F}(x) - \int_x^\infty \bar{F}(x)\right) \\ &= \int_0^x \bar{F}_e(x-t)dF(t) + \frac{x}{\mu} + \overline{F_e}(x) := L_5(x) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ένα επίσης γενικό άνω φράγμα μπορεί να προκύψει, από τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (4.13) παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $\bar{F}_e(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} U(x) - \frac{x}{\mu} &\geq \bar{F}_e(x)U(x) \Rightarrow \\ U(x) &\geq \frac{x}{\mu F_e(x)} := L_6(x) \end{aligned} \tag{4.19}$$

για όλα τα x για τα οποία ισχύει : $F_e(x) > 0$

Αν εκτός από από τη γνώση της αθροιστικής συνάρτησης υποθέσουμε ότι η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (mean residual life)

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(y)dy}{\bar{F}(t)}$$

είναι φραγμένη, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα παρακάτω φράγματα :

Πρόταση 16. *Αν θεωρήσουμε μια ανανεωτική διαδικασία για την οποία γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $m(t)$ της κατανομής F είναι άνω ή κάτω φραγμένη τότε :*

1. *Αν $m(x)$ είναι άνω φραγμένη, δηλαδή $\exists$ σταθερά r : $m(x) \leq r, \ \forall x \in [0, a]$ και $a \in (0, \infty]$ τότε :*
$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{rF(x)}{\mu} + \overline{F_e}(x) := U_5(x), \tag{4.20}$$
για $x \in [0, a]$

2. *Αν $m(x)$ είναι κάτω φραγμένη, δηλαδή $\exists$ σταθερά r : $m(x) \geq r, \ \forall x \in [0, a]$ και $a \in (0, \infty]$ τότε :*
$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} + \frac{rF(x)}{\mu} + \overline{F_e}(x) := L_7(x), \tag{4.21}$$
για $x \in [0, a]$

Όπως γνωρίζουμε αν μια κατανομή ανήκει στην οικογένεια NBUE ή στην NWUE τότε η συνάρτηση $m(x)$ είναι άνω ή κάτω φραγμένη, αντίστοιχα από τη μέση τιμή μ, δηλαδή ισχύει :

$$F \in NBUE(NWUE) \quad \Rightarrow \quad m(x) \leq (\geq)\mu \ , \forall x \in [0, \infty]$$

Η παρατήρηση αυτή μαζί με την προηγούμενη πρόταση, οδηγούν στη διατύπωση του παρακάτω πορίσματος :

Πόρισμα 2. *Αν η κατανομή των χρόνων αποζημίωσης ανήκει στη κλάση NBUE ή NWUE, τότε για την ανανεωτική συνάρτηση ισχύει αντίστοιχα :*

$$U(x) \quad \leq \quad \frac{x}{\mu} + F(x) + \overline{F_e}(x) := U_6(x) \tag{4.22}$$
$$U(x) \quad \geq \quad \frac{x}{\mu} + F(x) + \overline{F_e}(x) := L_8(x) \tag{4.23}$$

4.3.2 Φράγματα υπό διαφόρους τύπους γήρανσης

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα φράγματα εκείνα που απαιτούν τη γνώση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και επιπλέον ανήκουν σε μια από τις παρακάτω οικογένειες κατανομών :

1. NBUE - NWUE

2. IFR

3. IMRL

Οι Siegel και Wunsche (1979), υπολόγισαν το παρακάτω άνω φράγμα για την περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων F έχει την ιδιότητα NBUE:

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} - F_e(t) + F(t) + 1 \ (= U_6(x)) \tag{4.24}$$

Επιπλέον, απέδειξαν ότι το ίδιο φράγμα αποτελεί και κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση στην περίπτωση που η υποκείμενη κατανομή F ανήκει στη κλάση NWUE, δηλαδή:

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} - F_e(t) + F(t) + 1 (= L_8(x)) \tag{4.25}$$

Το 2005 οι Politis και Koutras περιέγραψαν φράγματα για τις περιπτώσεις όπου η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων έχουν τις ιδιότητες IFR ή IMRL. Τα φράγματα αυτά περιγράφονται στις επόμενες δυο προτάσεις αντίστοιχα.

Πρόταση 17. *Αν υποθέσουμε πως η κατανομή των χρόνων μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων σε μια ανανεωτική διαδικασία ανήκει στην κλάση κατανομών IFR και επιπλέον έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 τότε ισχύει η ανίσωση:*

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu} + \frac{\sigma^2 F(x)}{\mu^2} + \overline{F_e}(x) := L_9(x) \tag{4.26}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε πως το φράγμα $L_9(x)$ είναι καλύτερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα $L_3(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\sigma^2}{\mu^2}$, στην περίπτωση που ισχύει:

$$\frac{\overline{F_e}(x)}{\bar{F}(x)} \geq \frac{\sigma^2}{\mu^2} \tag{4.27}$$

Παράδειγμα

Αν θεωρήσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθεί την κατανομή Gamma(2,1), τότε ισχύουν :

1. $f(x) = xe^{-x}$

2. $E(X) = 2$

3. $Var(X) = 2$

4. $F(x) = 1 - e^{-x}(1+x)$

5. $F_e(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}(1+2x)$

Επομένως, η συνθήκη (4.27) ισχύει για κάθε x θετικό, αφού :

$$\frac{\overline{F_e}(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{1+2x}{(1+x)} \geq \frac{1}{2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Πρόταση 18. *Αν η κατανομή F, ανήκει στην οικογένεια IMRL, τότε έχουμε για την ανανεωτική συνάρτηση τα εξής φράγματα :*

1.

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\overline{F_e}(x)}{\bar{F}(x)} := U_7(x) \tag{4.28}$$

2.

$$L_{10}(x) := \frac{\mu_2}{2\mu^2}F_e^{(2)}(x) + \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x) \leq U(x) \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2}F(x) + \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x) := U_8(x) \tag{4.29}$$

όπου :

$$F_e^{(2)}(x) := \frac{1}{\mu_e}\int_0^x \bar{F}_e(t)dt$$

και μ_e η μέση τιμή της κατανομής $F_e(t)$.

Η δεξιά ανίσωση της (4.29) μας παρέχει πάντα ένα καλύτερο άνω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση από το αντίστοιχο φράγμα του Brown για την IMRL κατανομή στην περίπτωση που ισχύει :

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq \frac{\mu_2}{2\mu}\bar{F}(x)$$

4.4 Φράγματα υπό μονότονη ανανεωτική πυκνότητα

Στο κεφάλαιο 2 αναφέραμε πως για την ανανεωτική συνάρτηση

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x)$$

μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη ανανεωτική πυκνότητα από τον εξής τύπο:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f * F^{*(i-1)}(t) = (f + (f * U))(t) \tag{4.30}$$

όπου f είναι η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων. Η σχέση που συνδέει τις παραπάνω δύο ποσότητες είναι :

$$U(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \tag{4.31}$$

Οι Politis και Koutras (2005) δημιούργησαν φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση με βασική προϋπόθεση η ανανεωτική πυκνότητα να είναι μονότονη. Τέτοιου είδους φράγματα περιέχονται στις επόμενες δυο υποενότητες.

4.4.1 Γενικά άνω και κάτω φράγματα

Θεώρημα 9. *Σε μια ανανεωτική διαδικασία αν υποθέσουμε ότι η ανανεωτική πυκνότητα $u(x)$ είναι μονότονη συνάρτηση του x, τότε υπάρχουν τα εξής φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση.*

1. *(α΄) Αν $u(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x, ισχύει :*

$$U(x) \leq 1 + \frac{xF(x)}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} := U_9(x) \tag{4.32}$$

   (β΄) Αν $u(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x, ισχύει :

$$U(x) \geq 1 + \frac{xF(x)}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} := L_{11}(x) \tag{4.33}$$

2. *Αν γνωρίζουμε ότι η κατανομή F, έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ, τότε οι προηγούμενες ανισώσεις γίνονται :*

   (α΄)

$$U(x) \leq 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[F(x) - F_e(x)]}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} := U_{10}(x) \tag{4.34}$$

   (β΄)

$$U(x) \geq 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[F(x) - F_e(x)]}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} := L_{12}(x) \tag{4.35}$$

   και

3. *Αν η μέση τιμή της κατανομής F έχει πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύουν τα παρακάτω συμπληρωματικά φράγματα για εκείνα που προτάθηκαν στο 2. :*

   (α΄) Στην αύξουσα περίπτωση

$$U(x) \geq 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[\mu^{-1}\int_0^x \bar{F}_e(x)dt - F_e(x)]}{\int_0^x F_e(t)dt} := L_{13}(x) \tag{4.36}$$

(β′) *Στη φθίνουσα περίπτωση*

$$U(x) \leq 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[\mu^{-1}\int_0^x \bar{F}_e(x)dt - F_e(x)]}{\int_0^x F_e(t)dt} := U_{11}(x) \tag{4.37}$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως τα φράγματα που προκύπτουν από τις (4.32) και (4.33), δεν απαιτούν την ύπαρξη κάποιας τάξης ροπής, μ_k κ=1,2,... και επομένως μπορούν να εφαρμοστούν και σε περιπτώσεις που θεωρητικά έχουμε άπειρη μέση τιμή.

4.4.2 Φράγματα υπό διαφόρους τύπους γήρανσης

Στην παρούσα υποενότητα θα ασχοληθούμε με τη συμπεριφορά των φραγμάτων ανανεωτικής συνάρτησης υπό τις εξής δύο προϋποθέσεις :

(*i*) Η ανανεωτική πυκνότητα $u(x)$ να είναι μονότονη.

(*ii*) Η κατανομή των χρόνων μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων να ανήκει σε μια από τις παρακάτω μη παραμετρικές κλάσεις κατανομών :

- DFR
- IMRL

Οι Shaked και Zhu (1992) απέδειξαν ότι κάθε κατανομή η οποία ανήκει στην οικογένεια κατανομών DFR, έχει φθίνουσα ανανεωτική πυκνότητα. Βάση αυτής της παρατήρησης οι Politis και Koutras (2005) διατύπωσαν την εξής πρόταση :

Πρόταση 19. *Αν υποθέσουμε πως $F \in DFR$, τότε το φράγμα (4.33), είναι πιο ακριβές από το αντίστοιχο κάτω φράγμα $L_2(x)$ (4.6) των Barlow και Proschan (1981), δηλαδή ισχύει για NWUE*

$$1 + \frac{xF(x)}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} \geq \frac{x}{\mu}$$

Στην περίπτωση που $F \in IMRL$, οι Politis και Koutras (2005) απέδειξαν ότι ισχύει :

$$U(x) \geq \sum_{k=0}^{m} F^{*k} - \frac{1}{\mu}\int_0^x F^{*m}(t)dt \tag{4.38}$$

Το συγκεκριμένο φράγμα χρησιμοποιείται ως κάτω φράγμα του σφάλματος που προκύπτει από την προσέγγιση της ανανεωτικής συνάρτησης με περικεκκομένη (truncating) σειρά συνελίξεων, δηλαδή υπάρχει m, τέτοιο ώστε :

$$U(x) \approx \sum_{k=0}^{m} F^{*k(x)}$$

Επιπλέον η ιδιότητα ότι κάθε κατανομή που ανήκει στην DFR οικογένεια κατνομών είναι κοίλη, μας βοηθάει στον υπολογισμό του παρακάτω φράγματος :

$$U(x) \geq 1 + \frac{x}{\mu F(x)} - \frac{xf(x)}{F(x)} := L_{14}(x) \tag{4.39}$$

Παρατήρηση

Όπως έχουμε αναφέρει οι Shaked και Zhu (1992), απέδειξαν πως κάθε DFR κατανομή, έχει φθίνουσα ανανεωτική πυκνότητα, επομένως στις περιπτώσεις που γνωρίζουμε ότι η κατανομή των χρόνων που μελετάμε έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα φράγματα που ορίσαμε στην παράγραφο αυτή.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε όλα τα φράγματα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο αυτό συνοπτικά σε έξι πίνακες.Υπενθυμίζουμε ότι με I συμβολίζουμε την κατηγορία των φραγμάτων που για τον υπολογισμό τους απαιτούν τη γνώση της πρώτης και δεύτερης ροπής γύρω από το μηδέν, με II τα φράγματα εκείνα που ισχύουν στην περίπτωση που γνωρίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομών F που ακολουθεί ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων. και τέλος με III συμβολίζουμε τα φράγματα εκείνα που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση που έχουμε εξασφαλίσει τη μονοτονία της ανανεωτικής πυκνότητας.

Άνω γενικά φράγματα		
I	II	III
$U_1(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2}$	$U_4(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F(x)}{\mu^2} + \bar{F}_e(x)$	$U_9(x) = 1 + \frac{xF(x)}{\int_0^x \bar{F}(x)}$
	$U_5(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{rF(x)}{\mu} + \bar{F}_e(x)$	$U_{10}(x) = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[F(x) - F_e(x)]}{\int_0^x \bar{F}(t)dt}$
		$U_{11}(x) = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[\mu^{-1}\int_0^x \bar{F}_e(x)dt - F_e(x)]}{\int_0^x F_e(t)dt}$

Πίνακας 4.1:

Κάτω γενικά φράγματα		
I	II	III
$L_1(x) = \frac{x}{\mu}$	$L_4(x) = \frac{x}{\mu} - F_e(x) + 1$	$L_{11}(x) = 1 + \frac{xF(x)}{\int_0^x \bar{F}(x)}$
	$L_5(x) = \int_0^x \bar{F}_e(x-t)dF(t) + \frac{x}{\mu} + \overline{F_e}(x)$	$L_{12}(x) = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[F(x) - F_e(x)]}{\int_0^x \bar{F}(t)dt}$
	$L_6(x) = \frac{x}{\mu F_e(t)}$	$L_{13}(x) = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x[\mu^{-1}\int_0^x \bar{F}_e(x)dt - F_e(x)]}{\int_0^x F_e(t)dt}$
	$L_7(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{rF(x)}{\mu} + \bar{F}_e(x)$	

Πίνακας 4.2:

Άνω φράγματα για αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας		
I	II	III
$U_2(x) = \frac{x}{\mu} + 1$ $(NBUE)$	$U_6(x) = \frac{x}{\mu} - F_e(x) + F(x) + 1$ $(NBUE)$	

Πίνακας 4.3:

Κάτω φράγματα για αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας		
I	II	III
$L_3(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^2}$ (IFR)	$L_9(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\sigma^2 F(x)}{\mu^2} + \bar{F}_e(x)$ (IFR)	

Πίνακας 4.4:

Άνω φράγματα για φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας		
I	II	III
$U_3(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2}$ $(IMRL)$	$U_8(x) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} F(x) + \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x)$ $(IMRL)$	
	$U_7(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\overline{F_e}(x)}{\bar{F}(x)}$ $(IMRL)$	

Πίνακας 4.5:

Κάτω φράγματα για φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας		
I	II	III
$L_2(x) = \frac{x}{\mu} + 1$ $(NWUE)$	$L_8(x) = \frac{x}{\mu} - F_e(x) + F(x) + 1$ $(NWUE)$	$L_{14}(x) = 1 + \frac{x}{\mu F(x)} - \frac{xf(x)}{F(x)}$ (DFR)
	$L_{10}(x) = \frac{\mu_2}{2\mu^2} F_e^{(2)}(x) + \frac{x}{\mu} + \bar{F}_e(x)$ $(IMRL)$	

Πίνακας 4.6:

4.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα κυριότερα φράγματα της ανανεωτικής συνάρτησης όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθεί μια από τις παρακάτω κατανομές :

1. Gamma(3,2) (IFR)

2. Pareto(4,3) (DFR)

Εφαρμογή 1

Έστω ότι η υφιστάμενη κατανομή του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθεί την IFR κατανομή Gamma(3,2). Τότε ισχύουν τα εξής :

1. $f(x) = 9xe^{-3x}$

2. $F(x) = 1 - (1 + 3x)e^{-3x}$

3. $E(X) = \mu = \frac{2}{3}$

4. $Var(X) = \frac{2}{9}$

5. Η ανανεωτική συνάρτηση $U(x)$ που αντιστοιχεί στην F δίνεται από την παρακάτω σχέση : $U(x) = \frac{1}{4}(3 + e^{-6x} + 6x)$ (βλέπε Παράρτημα Δ)

Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα παρακάτω φράγματα των οποίων ο γενικός ορισμός έχει δοθεί στις προηγούμενες ενότητες.

1. Γενικά κάτω φράγματα.

   (α′) $L_1(x) = \frac{x}{\mu} = \frac{3x}{2}$

   (β′) $L_4(x) = \frac{x}{\mu} + 1 - F_e(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}(2 + 3x(1 + e^{3x}))$

   (γ′) $L_6(x) = \frac{x}{\mu F_e(x)} = \frac{3xe^{3x}}{2e^{3x} - 3x - 2}$

2. Γενικά άνω φράγματα.

   (α′) $U_1(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} = \frac{3(1+x)}{2}$, όπου $\mu_2 = E(X^2)$

   (β′) $U_4(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F(x)}{\mu^2} + \overline{F_e}(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}(3e^{3x}(1 + x) - 6x - 1)$

3. Αφού $F \in NBUE$, έχουμε τα εξής άνω φράγματα.

   (α′) $U_2(x) = \frac{x}{\mu} + 1 = 1 + \frac{3x}{2}$

   (β′) $U_6(x) = \frac{x}{\mu} + F(x) + \overline{F_e}(x) = 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3e^{-3x}}{2}\right) x$

4. Το γεγονός ότι $F \in IFR$, μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

   (α′) $L_3(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{Var(X)}{\mu^2} = \frac{1}{2}(1 + 3x)$

   (β′) $L_9(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{Var(X)F(x)}{\mu^2} + \overline{F_e(x)} = \frac{1}{2}(1 + 3x + e^{-3x})$

5. Για τη συγκεκριμένη κατανομή χρόνων αν λάβουμε υπόψιν μας τη μονοτονία (αύξουσα) της ανανεωτικής πυκνότητας ($u(t) = \frac{1}{4}(6 - 6e^{-6t})$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τα εξής φράγματα:

   (α′) $U_{10}(x) = 1 + \frac{x(F(x) - F_e(x))}{\int_0^x \overline{F_e}(x)dx} = \frac{e^{3x}(2+3x)-9x^2-6x-2}{2e^{3x}-3x-2}$

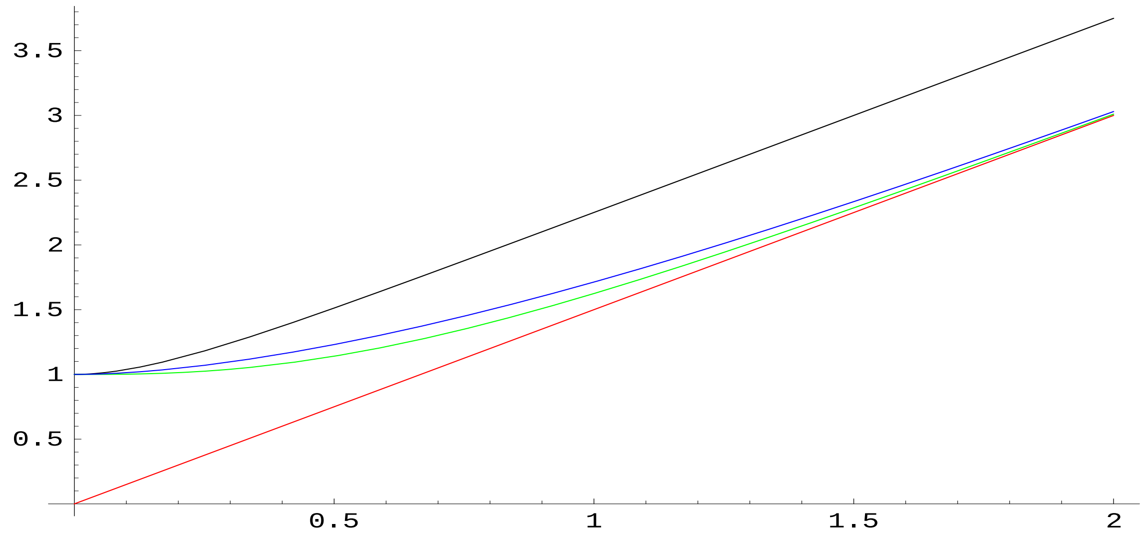
   (β′) $L_{13}(x) = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x\left(\mu^{-1}\int_0^x \overline{F_e}(t)dt - F_e\right)}{\int_0^x F_e(t)dt} = \frac{1+3x+3x^2+e^{3x}(3x^2-1)}{1+x+e^{3x}(2x-1)}$

Το σχήμα 4.1 και ο Πίνακας 4.7 μας παρουσιάζουν την συμπεριφορά των γενικών κάτω φραγμάτων L_1, L_4 και L_6. Είναι φανερό πως το L_6 έχει την καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα άλλα δύο. Το L_4 παραμένει καλύτερο από το L_1 για τιμές του x μικρότερες του 4.4 ενώ για μεγαλύτερες τα δύο φράγματα ταυτίζονται (με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων). Το ίδιο συμβαίνει και για το L_6, όπου όταν ο χρόνος ξεπεράσει το χρονικό σημείο 5.5 οι τιμές που μας δίνει είναι ίδιες με αυτές των L_1 και L_4.

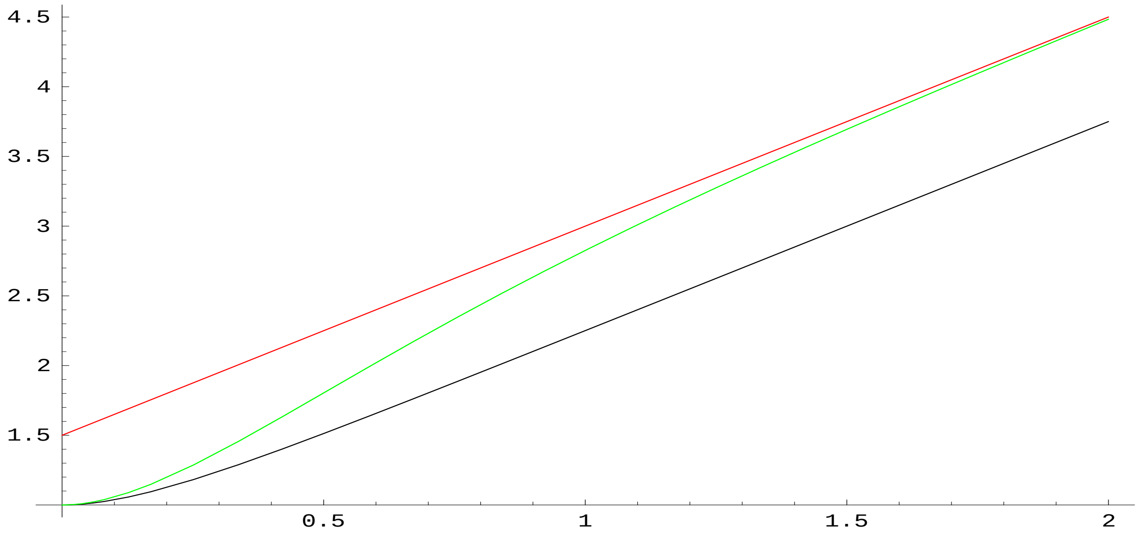
Στο Σχήμα 4.2 και τον Πίνακα 4.8 παρατηρούμε τον τρόπο λειτουργίας των γενικών άνω φραγμάτων U_1 και U_4. Όταν οι τιμές του x είναι μικρότερες του 4.9 πιο κοντά στην ανανεωτική συνάρτηση βρίσκεται το φράγμα U_4, ενώ όταν το x ξεπεράσει το 4.9 τα δύο φράγματα πρακτικά ταυτίζονται.

Στην περίπτωση που κάνουμε χρήση της IFR ιδιότητας της κατανομής που μελετάμε (Gamma(3,2)) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε πιο ακριβή κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση. Στο Σχήμα 4.3 και τον Πίνακα 4.9 παρουσιάζονται τα φράγματα L_3 και L_9. Επιπλέον τα φράγματα αυτά συγκρίνονται με το L_{13}, που χρησιμοποιείται όταν η ανανεωτική πυκνότητα είναι αύξουσα. Μεταξύ των L_3 και L_9 υπερτερεί το δεύτερο για τιμές του x μικρότερες του 3.8, ενώ για μεγαλύτερες τα φράγματα αυτά ταυτίζονται. Το L_{13} έχει μεγαλύτερες τιμές από αυτές των L_3 και L_9 για όλη τη διάρκεια του χρόνου.

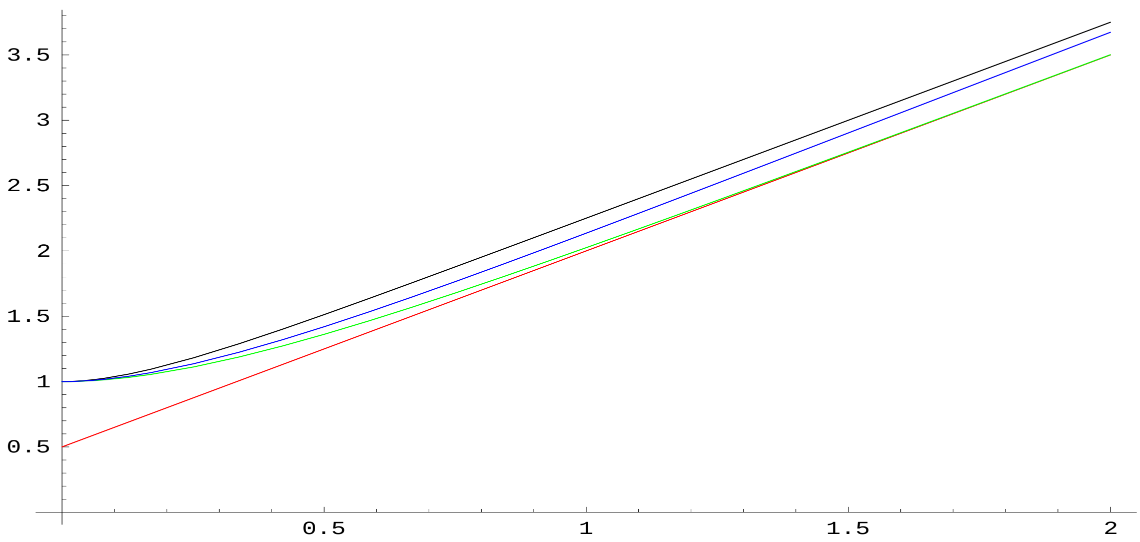
Τέλος το Σχήμα 4.4 και ο Πίνακας 4.10 μας δίνουν τη συμπεριφορά των άνω φραγμάτων U_2, U_6 και U_{10} της ανανεωτικής συνάρτησης όταν θεωρηθεί γνωστό για τα δύο πρώτα ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανήκει στην NBUE οικογένεια κατανομών και η μονοτονία (αύξουσα) της ανανεωτικής πυκνότητας για το τρίτο φράγμα. Παρατηρούμε πως το U_{10} παρουσιάζει για τιμές του x μικρότερες του 5.4 τη καλύτερη συμπεριφορά. Όταν το x ξεπεράσει τη τιμή 5.4 τότε το U_{10} ταυτίζεται με τα U_2 και U_6. Το ίδιο συμβαίνει και στα δύο τελευταία φράγματα όταν οι τιμές του x είναι μεγαλύτερες του 4.7 ενώ όταν είναι μικρότερες το U_6 έχει μικρότερη απόσταση από την ανανεωτική συνάρτηση σε σχέση με το U_2.



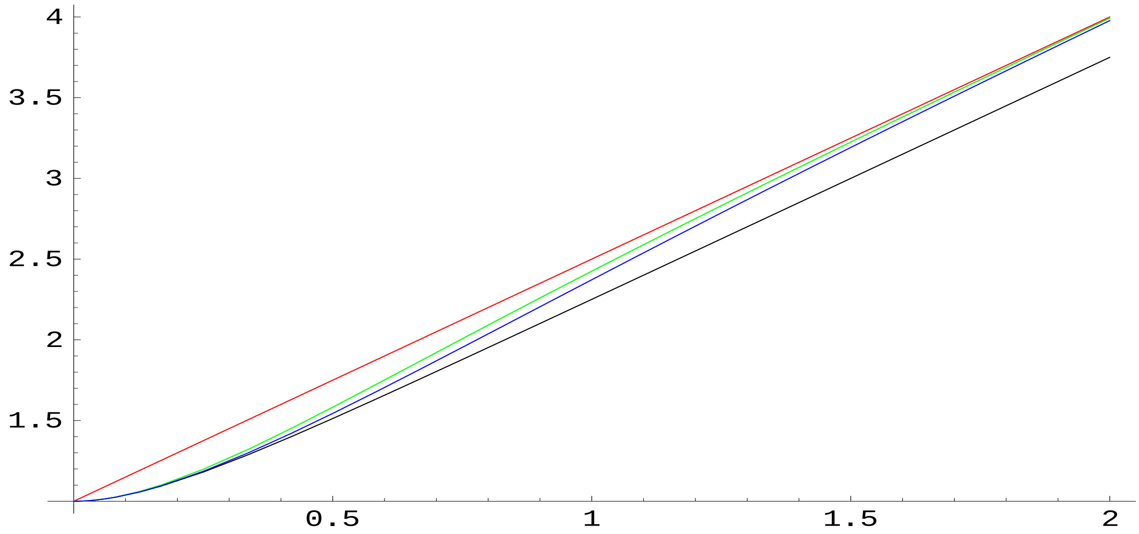
Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (•), $L_1(x)$(•), $L_4(x)$ (•), $L_5(x)$(•) για τη κατανομή Gamma(3,2)



Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $U_1(x)$(●), $U_4(x)$ (●) για τη κατανομή Gamma(3,2)



Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_9(x)$ (●), $L_{13}(x)$(●) για τη κατανομή Gamma(3,2)



Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $U_2(x)$(●),$U_{10}(x)$(●) $U_6(x)$ (●), για τη κατανομή Gamma(3,2)

x	$U(x)$	$L_1(x)$	$L_4(x)$	$L_5(x)$
0	1	0	1	-
0.1	1.0372	0.15	1.00194	1.01311
0.2	1.1253	0.3	1.01346	1.04696
0.3	1.24132	0.45	1.03953	1.09629
0.4	1.37268	0.6	1.08191	1.1581
0.5	1.51245	0.75	1.14048	1.23047
1	2.25062	1.5	1.62447	1.71324
2	3.75	3	3.00992	3.03004
3	5.25	4.5	4.50068	4.50306
4	6.75	6	6.00004	6.00026
4.3	7.2	6.45	6.45002	6.45012
4.4	7.35	6.6	6.60001	6.60009
4.8	7.95	7.2	7.2	7.20003
5	8.25	7.5	7.5	7.50002
5.4	8.85	8.1	8.1	8.10001
5.5	9	8.25	8.25	8.25001
5.6	9.15	8.4	8.4	8.4
6	9.75	9	9	9

Πίνακας 4.7:

x	$U(x)$	$U_1(x)$	$U_4(x)$
0	1	1.5	1
0.1	1.0372	1.65	1.05735
0.2	1.1253	1.8	1.19631
0.3	1.24132	1.95	1.3808
0.4	1.37268	2.1	1.58797
0.5	1.51245	2.25	1.80374
1	2.25062	3	2.82575
2	3.75	4.5	4.48389
3	5.25	6	5.99883
3.7	6.3	7.05	7.04982
4	6.75	7.5	7.49992
4.8	7.95	8.7	8.69999
4.9	8.1	8.85	8.84999
5	8.25	9	9
6	9.75	10.5	10.5
7	11.25	12	12

Πίνακας 4.8:

x	$U(x)$	$L_3(x)$	$L_9(x)$	$L_{13}(x)$
0	1	0.5	1	-
0.1	1.0372	0.65	1.02041	1.02605
0.2	1.1253	0.8	1.07441	1.09188
0.3	1.24132	0.95	1.15328	1.1845
0.4	1.37268	1.1	1.2506	1.29561
0.5	1.51245	1.25	1.36157	1.41972
1	2.25062	2	2.02489	2.13584
2	3.75	3.5	3.50124	3.67326
3	5.25	5	5.00006	5.2004
3.7	6.3	6.05	6.05001	6.26099
3.8	6.45	6.2	6.20001	6.41216
3.9	6.6	6.35	6.35	6.56327
4	6.75	6.5	6.5	6.71431
5	8.25	8	8	8.22222
7	11.25	11	11	11.2308

Πίνακας 4.9:

x	$U(x)$	$U_2(x)$	$U_6(x)$	$U_{10}(x)$
0	1	1	1	-
0.1	1.0372	1.15	1.03888	1.03742
0.2	1.1253	1.3	1.13536	1.12763
0.3	1.24132	1.45	1.26704	1.24943
0.4	1.37268	1.6	1.41928	1.39071
0.5	1.51245	1.75	1.58265	1.54408
1	2.25062	2.5	2.42532	2.37205
2	3.75	4	3.99256	3.97747
3	5.25	5.5	5.49944	5.4975
4	6.75	7	6.99996	6.99978
4.5	7.5	7.75	7.74999	7.74994
4.6	7.65	7.9	7.89999	7.89995
4.7	7.8	8.05	8.04999	8.04996
4.8	7.95	8.2	8.2	8.19997
4.9	8.1	8.35	8.35	8.34998
5	8.25	8.5	8.5	8.49998
5.4	8.85	9.1	9.1	9.09999
5.5	9	9.25	9.25	9.25
7	11.25	11.5	11.5	11.5

Πίνακας 4.10:

Εφαρμογή 2

Αν ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών ανανεώσεων ακολουθεί την DFR κατανομή Pareto(4,3). Τότε ισχύουν τα εξής :

1. $f(x) = \frac{324}{(2+x)^4}$
2. $F(x) = 1 - \frac{81}{(3+x)^5}$
3. $E(X) = \mu = 1$
4. $Var(X) = 2$
5. Η ανανεωτική συνάρτηση δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα παρακάτω φράγματα :

1. Γενικά άνω φράγματα.

   (α′) $L_1(x) = \frac{x}{\mu} = x$

   (β′) $L_4(x) = \frac{x}{\mu} + 1 - F_e(x) = x + \frac{27}{(x+3)^3}$

   (γ′) $L_6(x) = \frac{x}{\mu F_e(x)} = \frac{x}{1-\frac{27}{(x+3)^3}}$

2. Γενικά κάτω φράγματα.

   (α′) $U_1(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} = x + 3$, όπου $\mu_2 = E(X^2)$

   (β′) $U_4(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F(x)}{\mu^2} + \overline{F_e}(x) = 3 + x - \frac{243}{(3+x)^4} + \frac{27}{(3+x)^4}$

3. Η κατανομή F έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εξής κάτω φράγματα.

   (α′) $L_2(x) = \frac{x}{\mu} + 1 = x + 1$

   (β′) $L_8(x) = \frac{x}{\mu} + F(x) + \overline{F_e}(x) = 1 + x - \frac{81}{(3+x)^3} + \frac{27}{(3+x)^3}$

   (γ′) $L_{10}(x) = \frac{x}{\mu} + \bar{F}(x) + \frac{\mu_2 F_e^{(2)}(x)}{2\mu^2} = \frac{3}{2} + x + \frac{27}{(3+x)^3 - \frac{27}{2(3+x)^2}}$

   (δ′) $L_{14}(x) = 1 + \frac{x}{E(X)F(x)} - \frac{xf(x)}{F(x)} = 1 + x - \frac{12}{3+x} + \frac{12}{2(6+x)} + \frac{3(24+x)}{2(18+x(6+x))}$

4. Αφού $F \in IMRL$, έχουμε τα εξής άνω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση.

(α′) $U_3(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2}{\mu^2} = \frac{3}{2} + x$

(β′) $U_7(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\overline{F_e}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{4x}{3}$

(γ′) $U_8(x) = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F(x)}{2\mu^2} + \overline{F_e}(x) = \frac{3}{2} + x - \frac{243}{2(3+x)^4} + \frac{27}{(3+x)^3}$

5. Το γεγονός ότι η κατανομή Pareto(4,3) ανήκει στην μη παραμετρική οικογένεια DFR και η παρατήρηση των Shaked και Zhu, ότι κάθε DFR κατανομή έχει φθίνουσα ανανεωτική πυκνότητα, μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τα εξής φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

(α′) $L_{12}(x) = 1 + \frac{x(F(x) - F_e(x))}{\int_0^x \overline{F_e}(x)dx} = \frac{e^{3x}(2+3x) - 9x^2 - 6x - 2}{2e^{3x} - 3x - 2}$

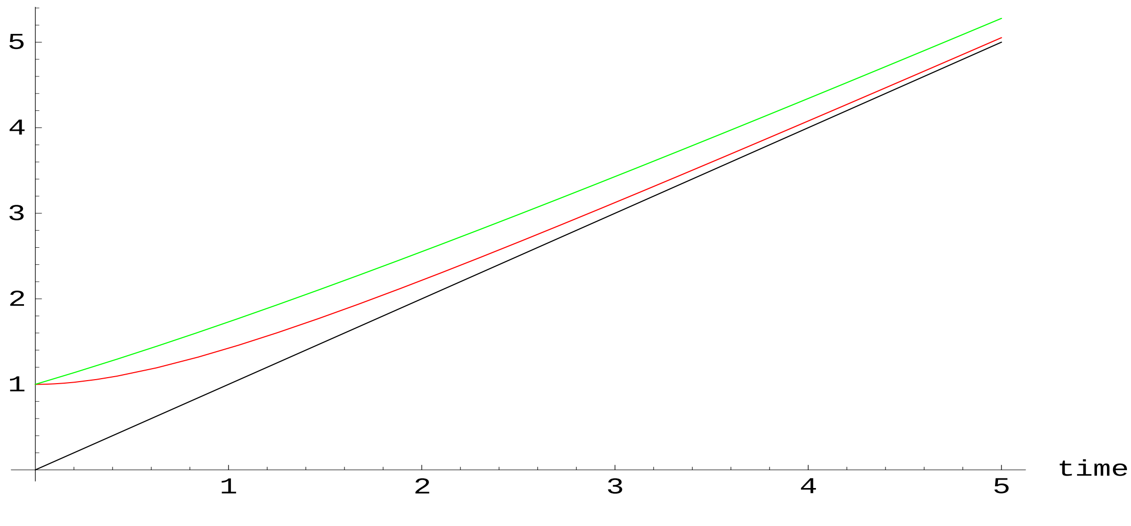
(β′) $U_{11}(x) = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{x\left(\mu^{-1}\int_0^x \overline{F_e}(t)dt - F_e\right)}{\int_0^x F_e(t)dt} = \frac{1 + 3x + 3x^2 + e^{3x}(3x^2 - 1)}{1 + x + e^{3x}(2x - 1)}$

Στο Σχήμα 4.5 και τον Πίνακα 4.11, παρουσιάζονται τα γενικά κάτω φράγματα L_1, L_4 και L_6. Παρατηρούμε πως το L_6 για τιμές του x μικρότερες του 227 είναι μεγαλύτερο από τα άλλα δύο φράγματα ενώ όταν το x ξεπεράσει το 227 ταυτίζεται (με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων) με τα L_1 και L_4. Όμοια το L_4 έχει καλύτερη συμπεριφορά από το L_1 όταν ο χρόνος περιορίζεται σε τιμές μικρότερες του 78 ενώ για μεγαλύτερες ταυτίζεται με το L_1.

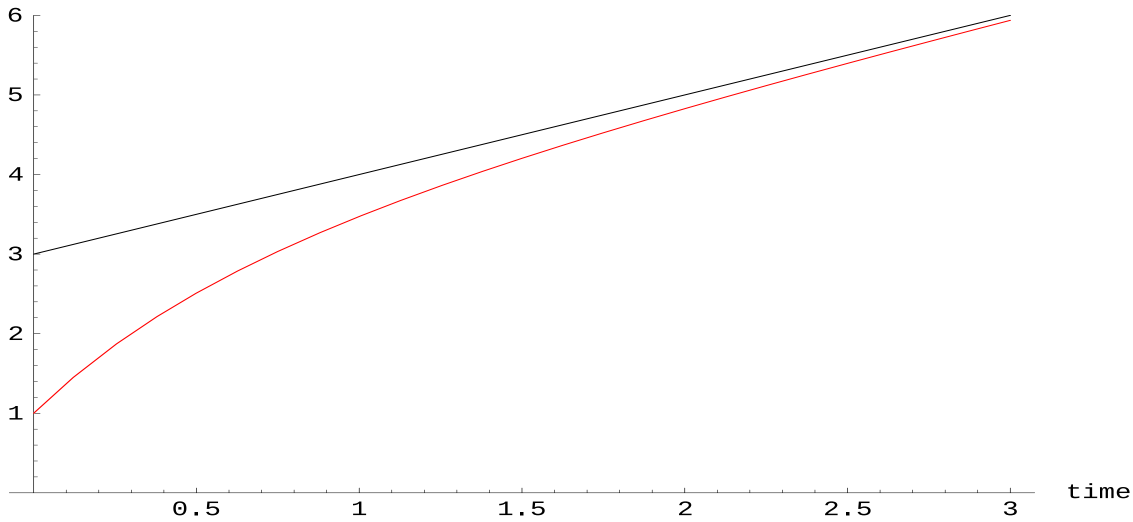
Το σχήμα 4.6 και ο Πίνακας 4.12 μας περιγράφουν τον τρόπο λειτουργίας των γενικών κάτω φραγμάτων U_1 και U_4. Το U_4 υπερτερεί έναντι του U_1 σε ακρίβεια όταν το x είναι μικρότερο του 75, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του x τα δύο φράγματα είναι ίσα.

Όπως αναφέραμε το γεγονός ότι η κατανομή Pareto(4,3) έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε ως κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση τα L_2, L_8 και L_{10}. Στον Πίνακα 4.13 και το Σχήμα 4.7 φαίνεται η συμπεριφορά των φραγμάτων αυτών και επιπλέον τα συγκρίνουμε με το L_{12}, το οποίο έχει σαν βασική συνθήκη για τη χρήση του, η ανανεωτική πυκνότητα να είναι φθίνουσα. Παρατηρούμε πως για τιμές του x μικρότερες του 3 το μεγαλύτερο κάτω φράγμα είναι το L_{12} και το δεύτερο καλύτερο είναι το L_8. Όταν το x ξεπεράσει τη τιμή 3 η κατάσταση αλλάζει και το L_{10} είναι πιο κοντά στην ανανεωτική συνάρτηση σε σχέση με τα υπόλοιπα. Τέλος είναι φανερό πως μετά από κάποιο χρονικό σημείο ($\cong 99$) τα φράγματα L_2, L_8, L_{12} και L_{14} αποκτούν τις ίδιες τιμές με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων.

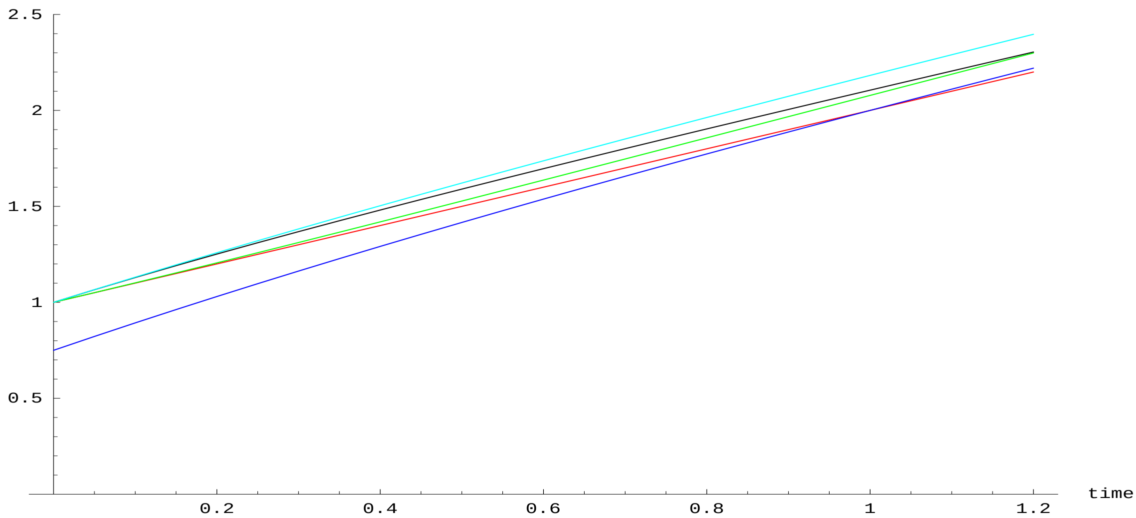
Το Σχήμα 4.8 και ο Πίνακας 4.14 μας παρουσιάζουν τη συμπεριφορά των άνω φραγμάτων U_3, U_7 και U_8. Τα φράγματα αυτά χρησιμοποιούνται όταν γνωρίζουμε ότι η κατανομή μας ανήκει στην IMRL οικογένεια κατανομών . Επιπλέον γίνεται και η σύγκριση τους με το U_{11}, το οποίο απαιτεί η ανανεωτική πυκνότητα να είναι φθίνουσα. Είναι φανερό πως το U_{11} για τιμές του x μικρότερες του 7 βρίσκεται πιο κοντά στην ανανεωτική συνάρτηση σε σχέση με τα άλλα φράγματα . Επιπλέον το U_8 για το χρονικό διάστημα (0,2) είναι πιο ακριβή από τα U_3 και U_7, ενώ όταν το x ξεπεράσει την τιμή 2 η κατάσταση αλλάζει και το U_3 γίνεται πιο μικρό από τα U_7 και U_8. Για τιμές του x μεγαλύτερες του 7, το κάτω φράγμα U_3 έχει την πιο ακριβή συμπεριφορά σε σχέση με τα υπόλοιπα μέχρι ο χρόνος να φτάσει το σημείο $x = 300$, όπου πρακτικά ταυτίζεται με τα U_8 και U_{11}. Το U_7 για μεγάλες τιμές του x παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση από την προς προσέγγιση τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης σε σχέση με τα υπόλοιπα φράγματα.



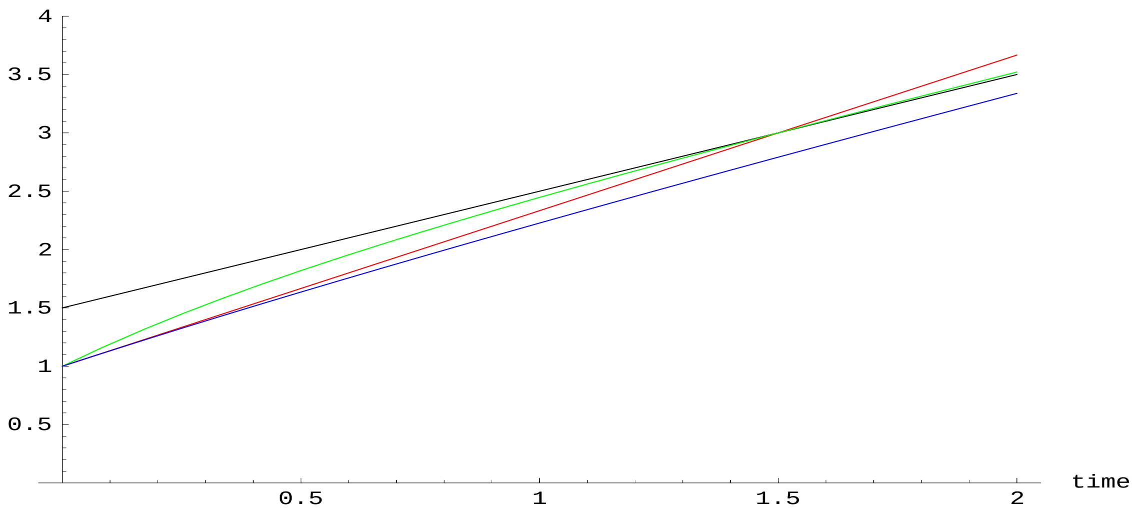
Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση των $L_1(x)$ (•), $L_4(x)$(•), $L_6(x)$(•) για τη κατανομή Pareto(4,3)



Σχήμα 4.6: Γραφική παράσταση των $U_1(x)$ (●), $U_4(x)$ (●) για τη κατανομή Pareto(4,3)



Σχήμα 4.7: Γραφική παράσταση των $L_8(x)$ (●), $L_2(x)$(●), $L_{10}(x)$ (●), $L_{12}(x)$(●), $L_{14}(x)$(●) για τη κατανομή Pareto(4,3)



Σχήμα 4.8: Γραφική παράσταση των $U_3(x)$ (●), $U_7(x)$(●),$U_8(x)$(●), $U_{11}(x)$ (●) για τη κατανομή Pareto(4,3)

x	$L_1(x)$	$L_4(x)$	$L_6(x)$
0	0	1	-
0.1	0.1	1.00631	1.0674
0.2	0.2	1.02397	1.1362
0.3	0.3	1.05131	1.20634
0.4	0.4	1.08695	1.27776
0.5	0.5	1.12974	1.35039
1	1	1.42188	1.72973
2	2	2.216	2.55102
3	3	3.125	3.42857
4	4	4.07872	4.34177
5	5	5.05273	5.27835
7	7	7.027	7.19424
10	10	10.0123	10.1244
20	20	20.0022	20.0445
40	40	40.0003	40.0136
50	50	50.0002	50.0091
78	78	78.0001	78.004
79	79	79	79.0039
80	80	80	80.0038
100	100	100	100.002
200	200	200	200.001
227	227	227	227.001
228	228	228	228

Πίνακας 4.11:

x	$U_1(x)$	$U_4(x)$
0	3	1
0.1	3.1	1.37508
0.2	3.2	1.70655
0.3	3.3	2.00227
0.4	3.4	2.26855
0.5	3.5	2.51041
1	4	3.47266
2.5	5.5	5.39673
3	6	5.9375
4	7	6.97751
5	8	7.99341
7	10	10.0027
10	13	13.0038
20	23	23.0014
30	33	33.0005
40	43	43.0003
50	53	53.0002
60	63	63.0001
75	78	78.0001
76	79	79
77	80	80

Πίνακας 4.12:

x	$L_8(x)$	$L_2(x)$	$L_{10}(x)$	$L_{12}(x)$	$L_{14}(x)$
0	1	1	1	-	-
0.1	1.12924	1.1	1.10153	1.13121	0.892848
0.2	1.2515	1.2	1.20562	1.25851	1.03024
0.3	1.3683	1.3	1.31165	1.38239	1.16288
0.4	1.48082	1.4	1.41913	1.50327	1.29137
0.5	1.58996	1.5	1.5277	1.62148	1.41622
1	2.10547	2	2.07813	2.18243	2
3	4.0625	4	4.25	4.21429	4.06667
4	5.04498	5	5.30321	5.1953	5.05985
5	6.03296	6	6.3418	6.17397	6.05044
7	8.0189	8	8.392	8.13597	8.0343
10	11.0095	11	11.4324	11.0957	110197
20	21.0019	21	21.4767	21.0387	21.0048
50	51.0002	51	51.4954	51.0086	51.0005
70	71.0001	71	71.4975	71.0047	71.0002
76	77.0001	77	77.4979	77.004	77.0002
77	78.0001	78	78.4979	78.0039	78.0001
78	79	79	79.498	79.0038	79.0001
100	101	101	101.499	101.002	101

Πίνακας 4.13:

x	$U_3(x)$	$U_7(x)$	$U_8(x)$	$U_{11}(x)$
0	1.5	1	1	-
0.1	1.6	1.13333	1.1907	1.13191
0.2	1.7	1.26667	1.36526	1.26117
0.3	1.8	1.4	1.52679	1.38807
0.4	1.9	1.53333	1.67778	1.51285
0.5	2	1.66667	1.82007	1.63571
1	2.5	2.33333	2.44727	2.22727
2	3.5	3.66667	3.5216	3.33846
3	4.5	5	4.53125	4.4
4	5.5	6.33333	5.52811	5.43697
5	6.5	7.66667	6.52307	6.46053
7	8.5	10.3333	8.51485	8.48696
10	11.5	14.3333	11.508	11.504
20	21.5	27.6667	21.5018	21.5146
30	31.5	41	31.5006	31.5138
40	41.5	54.3333	41.5003	41.5122
50	51.5	67.6667	51.5002	51.5106
60	61.5	81	61.5001	61.5094
70	71.5	94.3333	71.5001	71.5084
76	77.5	102.333	77.5001	77.5079
77	78.5	103.667	78.5	78.5078
100	101.5	134.333	101.5	101.506
300	301.5	401	301.5	301.502

Πίνακας 4.14:

4.6 Επαναληπτική μέθοδος δημιουργίας φραγμάτων

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, οι Politis και Koutras (2005) δημιούργησαν νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση, τοποθετώντας τα ήδη γνωστά φράγματα στο δεύτερο μέλος της ανανεωτική εξίσωση:

$$U(x) = 1 + \int_0^x U(x-t)dF(t)$$

Φυσικά η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και επαναληπτικά, δηλαδή κάθε φορά που υπολογίζουμε ένα νέο φράγμα το εισάγουμε στην ανανεωτική εξίσωση και υπολογίζουμε ένα φράγμα που τις περισσότερες φορές αποτελεί βελτίωση του αρχικού τουλάχιστον για μια μικρή περιοχή γύρω από το μηδέν.

Πρόταση 20. *Ξεκινώντας από το φράγμα του Lorden (1970) και μετά από κ-διαδοχικές αντικαταστάσεις στο δεύτερο μέλος της ανανεωτικής εξίσωσης*

$$U(x) = 1 + \int_0^x U(x-t)dF(t)$$

των φραγμάτων που προκύπτουν κάθε φορά έχουμε :

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F^{*k}(x)}{\mu^2} + \overline{F}_e(x) + \left[\overline{F}_e * \left(F + F^{*2} + ... + F^{*(k-1)}\right)\right](x) := U_{re,k}(x) \quad (4.40)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Για κ=1 έχει αποδειχτεί (Politis και Koutras (2005». Για κ=2, έχουμε :

$$\begin{aligned} U(x) &\leq 1 + \int_0^x \frac{x-t}{\mu} + \frac{\mu_2 F(x-t)}{\mu^2} + \overline{F}_e(x-t)dF(t) \\ &\leq 1 + \int_0^x \frac{x-t}{\mu}dF(t) + \int_0^x \frac{\mu_2 F(x-t)}{\mu^2}dF(t) + \int_0^x \overline{F}_e(x-t)dF(t) \\ &\overset{\text{Λήμμα1}}{=} 1 + \frac{x}{\mu} - F_e(x) + \frac{\mu_2 F^{*2}(x)}{\mu^2} + (\overline{F}_e * F)(x) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Έστω ότι η σχέση (4.40) ισχύει για κ=l

$$U(x) \leq \frac{x}{\mu} + \frac{\mu_2 F^{*l}(x)}{\mu^2} + \overline{F}_e(x) + \left[\overline{F}_e * \left(F + F^{*2} + ... + F^{*(l-1)}\right)\right](x)$$

θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για l+1 Έχουμε :

$$\begin{aligned}
U(x) &\leq 1+\int_0^x \left(\frac{x-t}{\mu}+\frac{\mu_2 F^{*l}(x-t)}{\mu^2}+\overline{F}_e(x-t)dF(t)\right)+ \\
&+ \int_0^x \left(\left[\overline{F}_e * \left(F+F^{*2}+...+F^{*(l-1)}\right)\right](x-t)\right)dF(t) \\
&= 1+\frac{x}{\mu}-F_e(x)+\frac{\mu_2 F^{*(l+1)}(x)}{\mu^2}+(\overline{F}_e * F)(x)+\left[\overline{F}_e * \left(F^{*2}+F^{*3}+...+F^{*l}\right)\right](x) \\
&= \frac{x}{\mu}-\overline{F_e}(x)+\frac{\mu_2 F^{*(l+1)}(x)}{\mu^2}+\left[\overline{F}_e * \left(F+F^{*2}+...+F^{*l}\right)\right](x)
\end{aligned}$$

Πρόταση 21. *Ξεκινώντας από το φράγμα L_3 που δόθηκε από τον Brown (1987) ($U(x) \geq \frac{x}{\mu}+\frac{\sigma^2}{\mu^2}$) και μετά από κ-διαδοχικές αντικαταστάσεις στο δεύτερο μέλος της ανανεωτικής εξίσωσης*

$$U(x)=1+\int_0^x U(x-t)dF(t)$$

των φραγμάτων που προκύπτουν κάθε φορά έχουμε :

$$U(x) \geq \frac{x}{\mu}+\frac{\sigma^2 F^{*k}(x)}{\mu^2}+\overline{F}_e(x)+\left[\overline{F}_e * \left(F+F^{*2}+...+F^{*(k-1)}\right)\right](x) := L_{re,k}(x) \quad (4.42)$$

Απόδειξη

Όμοια με την προηγούμενη πρόταση.

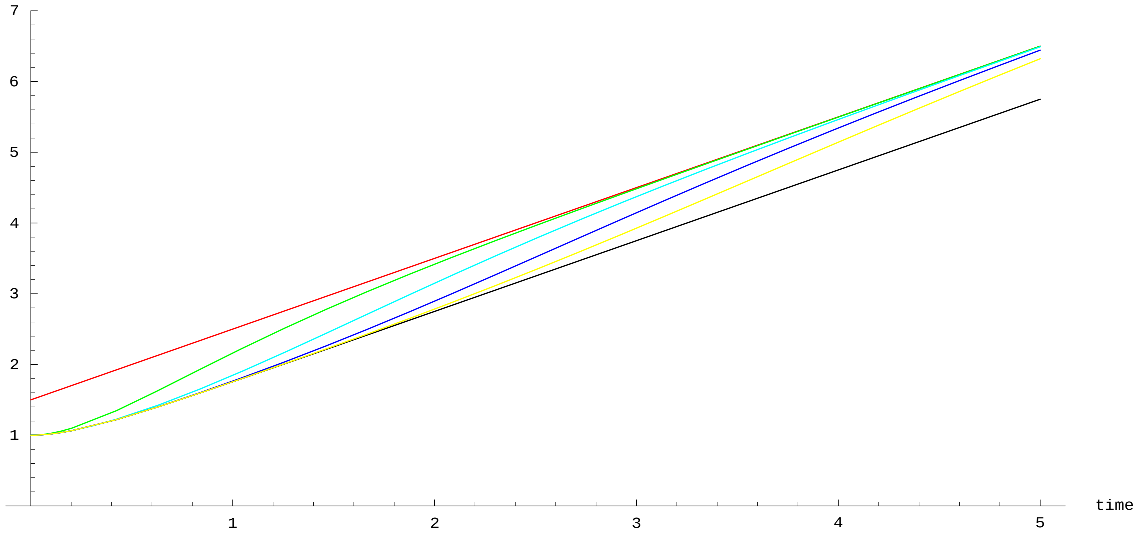
Εφαρμογή

Αν υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν την κατανομή Gamma(2,2),τότε τα άνω και κάτω φράγματα που προκύπτουν από αυτά του Lorden και

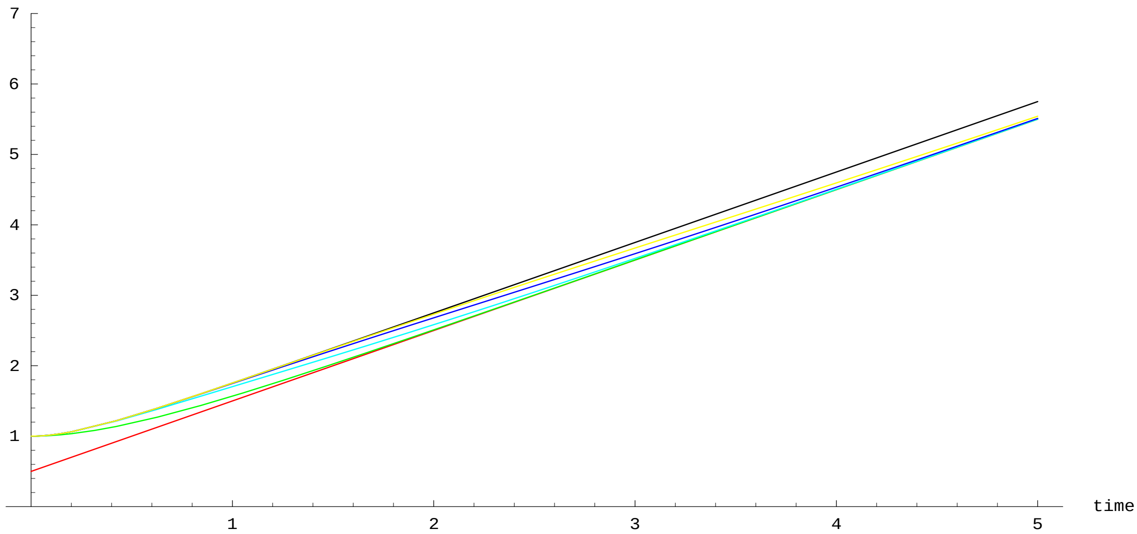
Brown, αντίστοιχα μέχρι και και την τέταρτη επανάληψη είναι:

$$
\begin{aligned}
U_1(x) &= \frac{3}{2} + x \\
U_{re,1}(x) &= \frac{3}{2} + x - \frac{1}{2}e^{-2x}(1+4x) \\
U_{re,2}(x) &= \frac{1}{6}e^{-2x}(3e^{2x}(3+2x) - 8x^3 - 6x^2 - 12x - 3) \\
U_{re,3}(x) &= \frac{1}{30}e^{-2x}(15e^{2x}(3+2x) - 8x^5 - 10x^4 - 40x^3 - 30x^2 - 60x - 15) \\
U_{re,4}(x) &= \frac{1}{630}e^{-2x}(315e^{2x}(3+2x) - 16x^7 - 28x^6 - 168x^5 - 210x^4 - 840x^3 - 1260x - 315) \\
&\text{και} \\
L_3(x) &= x + \frac{1}{2} \\
L_{re,1}(x) &= \frac{1}{2} + x + \frac{e^{-2x}}{2} \\
L_{re,2}(x) &= \frac{1}{2} + x + e^{-2x}\left(\frac{1}{2} + x^2\right) \\
L_{re,3}(x) &= \frac{1}{6}e^{-2x}(3 + 6x^2 + 2x^4 + e^{2x}(3+6x)) \\
L_{re,4}(x) &= \frac{1}{90}e^{-2x}(45 + 90x^2 + 30x^4 + 4x^6 + 45e^{2x}(1+2x))
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Στον πίνακα 4.15, φαίνονται τα φράγματα που προκύπτουν επαναληπτικά ξεκινώντας από το φράγμα του Lorden (1970). Είναι φανερό πως για μικρές τιμές του x τα νέα φράγματα που προκύπτουν κάθε φορά παρουσιάζουν βελτιωμένη συμπεριφορά. Ενώ όσο αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων τόσο αυξάνει και ο χρονικός ορίζοντας που το νέο φράγμα είναι καλύτερο από αυτό από το οποίο κατασκευάστηκε. Για παράδειγμα, αναφέρουμε ότι με την πρώτη επανάληψη το καινούργιο φράγμα είναι πιο ακριβή από αυτό του Lorden (1970) μέχρι και το σημείο $x = 5$, ενώ με την τέταρτη επανάληψη ο χρονικός ορίζοντας που είναι καλύτερο το νέο φράγμα φτάνει μέχρι και το σημείο $x = 10$. Για τιμές του $x < 0.5$, το $L_{re,4}$ (τέταρτη επανάληψη) συμπίπτει με την τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης. Ενώ το ίδιο συμβαίνει και για το $U_{re,4}$, για τιμές του $x < 0.3$.Όμοια κατάσταση επικρατεί και στην περίπτωση που κατασκευάζουμε κάτω φράγματα με την επαναληπτική μέθοδο, ξεκινώντας από το κάτω φράγμα του Brown (1980)(Πίνακας 4.16). Τέλος, αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε και στους δύο πίνακες (4.15,4.16) είναι ότι τα επαναληπτικά φράγματα είναι πιο ακριβή για μικρά χρονικά διαστήματα από τα φράγματα από τα οποία προήλθαν, αλλά ασυμπτωτικά συγκλίνουν σε αυτά.



Σχήμα 4.9: Γραφική παράσταση των $U(x)(\bullet)$, $U_1(x)(\bullet)$, $U_{re,1}(x)(\bullet)$, $U_{re,2}(x)(\bullet)$, $U_{re,3}(x)(\bullet)$, $U_{re,4}(x)(\bullet)$ για τη Γάμμα(2,2)



Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση των $U(x)(\bullet)$, $L_1(x)(\bullet)$, $L_{re,1}(x)(\bullet)$, $L_{re,2}(x)$ $(\bullet)$, $L_{re,3}(x)(\bullet)$, $L_{re,4}(x)(\bullet)$ για τη Γάμμα(2,2)

x	$U(x)$	$L_3(x)$	$L_{re,1}(x)$	$L_{re,2}(x)$	$L_{re,3}(x)$	$L_{re,4}(x)$
0	1	0.5	1	1	1	1
0.1	1.01758	0.6	1.00937	1.01755	1.01758	1.01758
0.2	1.06233	0.7	1.03516	1.06197	1.06233	1.06233
0.3	1.1253	0.8	1.07441	1.1238	1.12528	1.1253
0.4	1.20047	0.9	1.12466	1.19656	1.20039	1.20047
0.5	1.28383	1	1.18394	1.27591	1.28357	1.28383
1	1.75458	1.5	1.56767	1.703	1.74811	1.75413
2	2.75008	2.5	2.50916	2.58242	2.6801	2.7322
3	3.75	3.5	3.50124	3.52355	3.59047	3.67079
4	4.75	4.5	4.50017	4.50554	4.53416	4.59523
5	5.75	5	5.50002	5.50116	5.51062	5.54214
7	7.75	7.5	7.5	7.50004	7.50071	7.50505
8	8.75	8.5	8.5	8.50001	8.50016	8.50147
9	9.75	9.5	9.5	9.5	9.50003	9.50039
10	10.75	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5001
11	11.75	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5
20	20.75	20.5	20.5	20.5	20.5	20.5

Πίνακας 4.15:

x	$U(x)$	$U_1(x)$	$U_{re,1}(x)$	$U_{re,2}(x)$	$U_{re,3}(x)$	$U_{re,4}(x)$
0	1	1.5	1	1	1	1
0.1	1.01758	1.6	1.02689	1.01761	1.01758	1.01758
0.2	1.06233	1.7	1.09671	1.06275	1.06233	1.06233
0.3	1.1253	1.8	1.19631	1.12716	1.12532	1.12533
0.4	1.20047	1.9	1.31587	1.20564	1.20058	1.20048
0.5	1.28383	2	1.44818	1.2949	1.28417	1.28384
1	1.75458	2.5	2.16166	1.84588	1.76468	1.75523
2	2.75008	3.5	3.41758	3.14895	2.89497	2.78334
3	3.75	4.5	4.48389	4.37234	4.14479	3.92681
4	4.75	5.5	5.49715	5.46316	5.34293	5.14227
5	5.75	6.5	6.49952	6.49082	6.44353	6.32192
7	7.75	8.5	8.49999	8.49957	8.49517	8.47343
8	8.75	9.5	9.5	9.4991	9.49878	9.49147
9	9.75	10.5	10.5	10.5	10.4999	10.4975
10	10.75	11.5	11.5	11.5	11.4999	11.4993
11	11.75	12.5	12.5	12.5	12.5	12.4998
12	12.75	13.5	13.5	13.5	13.5	13.5
20	20.75	21.5	21.5	21.5	21.5	21.5

Πίνακας 4.16:

Κεφάλαιο 5

Μια νέα μέθοδος κατασκευής κάτω φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε μια βασική σχέση που συνδέει τα άνω φράγματα της ουράς της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και επομένως και της πιθανότητας χρεοκοπίας με τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση. Στη συνέχεια εκμεταλλευόμενοι τη σχέση αυτή θα δώσουμε μια σειρά από νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση και θα τα συγκρίνουμε με τα ήδη γνωστά φράγματα.

5.1 Ανανεωτική συνάρτηση και ουρά σύνθετης γεωμετρικής

Έστω $X_1, X_2, ...$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F. Αν N είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $Pr(N = n) = pq^n,\ n = 0, 1, 2...$ $(0 < p < 1,\ q = 1 - p)$ και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις $X_i,\ \forall i$ τότε η κατανομή της ουράς της σύνθετης γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

είναι

$$\psi(x) = Pr(Y_0 > x) = p \sum_{k=1}^{\infty} q^k \overline{F^{*k}}(x) \tag{5.1}$$

Αν αντικαταστήσουμε την τυχαία μεταβλητή N με μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(x),\ x \geq 0\}$ στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής F, τότε σύμφωνα με τον Lin (1996) υπάρχει σχέση που να συνδέει την σύνθετη γεωμετρική με την ανανεωτική διαδικασία αυτή και η οποία είναι :

$$\psi(x) = E[q^{N(x)}], \quad \forall x \geq 0 \tag{5.2}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen στην (5.2), έχουμε :

$$\psi(x) = E[q^{N(x)}] \geq q^{E(N(x))} = q^{U(x)} \tag{5.3}$$

από όπου προκύπτει ισοδύναμα το εξής κάτω φράγμα για την ανανεωτική συνάρτηση

$$U(x) \geq \frac{ln[\psi(x)]}{lnq} \tag{5.4}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση αν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή ή κάποια άνω φράγματα για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής, $\psi(x)$ δηλαδή αν

$$\psi(x) \leq f(x), \ \forall x \geq 0 \ \ \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} ln[\psi(x)] &\leq ln[f(x)], \ \forall x \geq 0 \ \ \Rightarrow \\ \frac{ln[\psi(x)]}{lnq} &\geq \frac{ln[f(x)]}{lnq}, \ \forall x \geq 0 \ \ \Rightarrow \\ U(x) &\geq \frac{ln[f(x)]}{lnq} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Από την άλλη μεριά η (5.3) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό άνω φραγμάτων την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής αν γνωρίζουμε κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση.

5.1.1 Άνω φράγματα για την ουρά σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

Στη παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα άνω φράγματα που κατασκεύασε ο Brown (1990), για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Τα αποτελέσματα και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσουμε ακολουθούν τον Brown (1990). Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{N_0} X_i$$

όπου :

- $N_0 \sim$ Γεωμετρική(p)

- N_0 ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_i, \ \forall i$

- $X_i \geq 0, \ \forall i$ με $\mu_2 = E(X_i^2) < \infty$

ισχύει, για $p \to 0$:

$$\frac{Y_0}{E(Y_0)} \xrightarrow{d} \text{Εκθετική}(1)$$

O Brown (1990) απέδειξε ότι

$$Y_0 \in NWU$$

καθώς επίσης και ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή X με την ιδιότητα NBUE ή NWUE ισχύει:

$$D^*(X^*, \mu_\epsilon) \leq \rho_X$$

όπου :

1. X^* τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής :

   $$F_e(x) = G(x) = \mu^{-1} \int_0^x \bar{F}(t)dt$$

   που ονομάζεται κατανομή ισορροπίας (equilibrium) ή ολοκληρωμένη ουρά (integrated tail)

2. $\rho_X = \left| \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1 \right| = |\gamma - 1|, \ \mu = E(X_i)$

3. Με μ_ϵ συμβολίζουμε την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ.

4. $D^*(F_1, F_2) = sup_{B \in \beta} |F_1(B) - F_2(B)|$, όπου β το σύνολο όλων των συνόλων Borel στο $\mathbb{R}$

Άρα, κατασκευάζοντας φράγματα για την διαφορά εκθετικής κατανομής από τη σύνθετη γεωμετρική με την με τον ίδιο μέσο, προκύπτουν φράγματα για την Y_0. Επομένως χρησιμοποιώντας τον παρακάτω συμβολισμό:

- $\bar{F}_{Y_0} = Pr(Y_0 > t)$

- $E(X_i) = \mu$ και $E(X_i^2) = \mu_2$

- $\gamma = \frac{\mu_2}{2\mu^2}$

- $E(Y_0) = E(N_0)E(X_i) = \frac{q\mu}{p}$
- Αν ορίσουμε $Y = \sum_{i=1}^{N+1} X_i$ και $Y^* = \sum_{i=0}^{N} X_i$, τότε:

$$\bar{F}_Y(t) = q^{-1}\bar{F}_{Y_0}(t) \tag{5.6}$$

και

$$E(Y) = E(N_0+1)E(X_i) = E(X_i)/p = \frac{\mu}{p}$$

έχουμε τα εξής άνω φράγματα για τις σύνθετες γεωμετρικές κατανομές:

Πρόταση 22. *Αν $X_i \geq 0$ με $F(0) < 1$ και $\mu_2 < \infty$, τότε για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής Y_0 ισχύει η ανισότητα :*

$$\bar{F}_{Y_0}(x) \leq e^{-\frac{x}{E(Y_0)}} + \frac{\gamma p}{q} = e^{-\frac{px}{q\mu}} + \frac{\gamma p}{q} := \Psi U_{B,1}(x) \tag{5.7}$$

Το φράγμα που παρουσιάστηκε παραπάνω προέρχεται από το Θεώρημα 2.1 του Brown (1990) και επιδέχεται βελτιώσεις στην περίπτωση που γνωρίζουμε επιπλέον την ιδιότητα γήρανσης που ικανοποιεί η κατανομή των X_i. Τέτοια φράγματα φαίνονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 23. *Έστω οι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές X_i με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F ($F(0) < 1$) και πεπερασμένη δεύτερη ροπή $\mu_2 < \infty$, τότε για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής Y_0 ισχύουν οι εξής ανισότητες :*

1. *Αν $F \in NBUE$, τότε από τη σχέση (3.1.10) του Brown (1990) και την 5.6 έχουμε :*

$$\bar{F}_{Y_0}(x) \leq e^{-\frac{x}{E(Y)}} := \Psi U_{B,2}(x) \tag{5.8}$$

2. *Αν $F \in NWUE$, τότε από τη σχέση (3.3.2) του Brown (1990) και την 5.6 έχουμε :*

$$\bar{F}_{Y_0}(x) \leq q\left(p\rho_X + e^{-\frac{x}{E(Y)}}\right) := \Psi U_{B,3}(x) \tag{5.9}$$

3. *Αν $F \in NBU$, τότε από τη σχέση (3.2.3) του Brown (1990) και την 5.6 έχουμε :*

$$\bar{F}_{Y_0}(x) \leq qe^{p}e^{\frac{-x}{E(Y)}} := \Psi U_{B,4}(x) \tag{5.10}$$

4. *Αν $F \in IFR$, τότε από τη σχέση (3.7.2) του Brown (1990) και την 5.6 έχουμε :*

$$\bar{F}_{Y_0}(x) \leq qe^{-\frac{x}{E(Y)}}e^{2p\rho_X} := \Psi U_{B,5}(x) \tag{5.11}$$

Παρατηρούμε πως όλα τα φράγματα που αναφέρθηκαν περιέχουν τη πιθανότητα p. Ο Brown τονίζει πως τα φράγματα που έδωσε λειτουργούν αποτελεσματικά για μικρές τιμές του p ($0 \leq p \leq 0.5$) και δίνουν ιδιαίτερα ακριβή αποτελέσματα ασυμπτωτικά για $p \to 0$ και μεγάλα χρονικά διαστήματα.

5.1.2 Κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση προερχόμενα από άνω φράγματα της ουράς της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση προερχόμενα από άνω φράγματα της αντίστοιχης ουράς της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με τα X_i που αποτελούν το τυχαίο γεωμετρικό άθροισμα να έχουν την ίδια κατανομή με αυτή του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων. Τέτοιου είδους μεταφορά φραγμάτων βρίσκει εφαρμογή στη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας σε χαρτοφυλάκια ασφαλιστικών εταιρειών όπου οι τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό L_i και ο χρόνος μεταξύ των αποζημιώσεων έχουν την ίδια κατανομή. Έτσι αν θεωρήσουμε ότι τη στιγμή που μια απαίτηση αναγκάζει το πλεόνασμα να πέσει κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό έχουμε ανανέωση, τότε αν γνωρίζουμε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για το αναμενόμενο πλήθος L_i στη διάρκεια του χρόνου σε μια πεπερασμένη (terminating) ανανεωτική διαδικασία (βλέπε Feller (1971), XI6). Αν αντικαταστήσουμε τις (5.7), (5.8), (5.10), (5.11), (5.9) στην (5.5), τότε έχουμε αντίστοιχα:

Γενικά κάτω φράγματα

$$U(x) \geq \frac{ln\left(e^{-\frac{x}{E(Y_0)}} + \frac{\gamma p}{1-p}\right)}{ln(1-p)} = \frac{ln\left(e^{-\frac{px}{(1-p)\mu}} + \frac{\gamma p}{1-p}\right)}{ln(1-p)} := L_{Geom,1}(x) \tag{5.12}$$

Φράγματα υπό αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας

- Αν $F \in NBUE$

$$U(x) \geq \frac{ln\left(e^{-\frac{x}{E(Y)}}\right)}{ln(1-p)} = \frac{-xp}{\mu ln(1-p)} := L_{Geom,2}(x) \tag{5.13}$$

- Αν $F \in NBU$

$$U(x) \geq \frac{ln\left(q\left(e^{p}e^{-\frac{x}{E(Y)}}\right)\right)}{ln(1-p)} = \frac{p-\frac{x}{E(Y)}}{ln(1-p)}+1 = \frac{p-\frac{xp}{\mu}}{ln(1-p)}+1 := L_{Geom,3}(x) \quad (5.14)$$

- Αν $F \in IFR$

$$U(x) \geq \frac{ln\left(qe^{-\frac{x}{E(Y)}}e^{2p\rho_X}\right)}{ln(1-p)} = \frac{-\frac{x}{E(Y)}+2p\rho_X}{ln(1-p)}+1 = \frac{-\frac{xp}{\mu}+2p\rho_X}{ln(1-p)}+1 := L_{Geom,4}(x) \quad (5.15)$$

Φράγμα υπό φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας

- Αν $F \in NWUE$

$$U(x) \geq \frac{ln\left(q\left(e^{\frac{-x}{E(Y)}}+p\rho_X\right)\right)}{ln\left(1-p\right)} = $$
$$= \frac{ln\left(e^{\frac{-x}{E(Y)}}+p\rho_X\right)}{ln(1-p)}+1 = \frac{ln\left(e^{\frac{-xp}{\mu}}+p\rho_X\right)}{ln(1-p)}+1 := L_{Geom,5}(x) \quad (5.16)$$

Παρατήρηση

Η συνάρτηση

$$K(p) = \frac{ln(f(x,p))}{ln(1-p)},\ \forall p \in (0,1) \text{ και } 0 < f(x,p) < 1$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του p.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x,p)$ συμβολίζει κάποιο άνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας ή ακόμα και την ακριβή τιμή της. Επομένως η συνάρτηση $f(x,p)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του p, δηλαδή για $p_1 < p_2 \Rightarrow f(x,p_1) < f(x,p_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $K(p_1) > K(p_2)$. Αφού $p_1 < p_2 \Rightarrow 1-p_1 > 1-p_2 \Rightarrow ln(1-p_1) > ln(1-p_2) \Rightarrow \frac{1}{ln(1-p_1)} < \frac{1}{ln(1-p_2)}$. Άρα, $\frac{ln(f(x,p_1))}{ln(1-p_1)} > \frac{ln(f(x,p_1))}{ln(1-p_2)} > \frac{ln(f(x,p_2))}{ln(1-p_2)}$. Επομένως $K(p_1) > K(p_2)$.

Επομένως όσο μικρότερο είναι το άνω φράγμα για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής τόσο μεγαλύτερο είναι το κάτω φράγμα της ανανεωτικής συνάρτησης.

Πρόταση 24. *Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων ανήκει στην οικογένεια κατανομών IFR τότε ισχύει:*

$$L_3(x) \leq L_{Geom,4}(x) \text{ αν και μόνο αν } x \leq \frac{1+\frac{2p\rho_X}{ln(1-p)}-\frac{Var(X)}{\mu^2}}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{p}{ln(1-p)}\right)} \quad (5.17)$$

Απόδειξη

Από τις σχέσεις (4.8) και (5.15) που ορίζουν τα φράγματα L_3 και $L_{Geom,4}$, έχουμε :

$$\frac{x}{\mu} + \frac{Var(X)}{\mu^2} \leq 1 + \frac{2p\rho_X - \frac{x}{E(Y)}}{ln(1-p)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{\mu} + \frac{x}{E(Y)ln(1-p)} \leq 1 + \frac{2p\rho_X}{ln(1-p)} - \frac{Var(X)}{\mu^2} \Leftrightarrow$$
$$x\left(\frac{1}{\mu} + \frac{p}{\mu ln(1-p)}\right) \leq 1 + \frac{2p\rho_X}{ln(1-p)} - \frac{Var(X)}{\mu^2} \Leftrightarrow$$
$$x \leq \frac{1 + \frac{2p\rho_X}{ln(1-p)} - \frac{Var(X)}{\mu^2}}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{p}{ln(1-p)}\right)}$$

όπου

$$1 + \frac{p}{ln(1-p)} = \frac{ln(1-p)+p}{ln(1-p)} \geq 0$$

αφού ισχύουν :

- Αν $0 \leq p \leq 1$ τότε $ln(1-p) < 0$
- Η συνάρτηση $f(p) = ln(1-p) + p$, είναι φθίνουσα ως προς p $(0 < p < 1)$. Αρα για $p \geq 0 \Rightarrow f(p) < 0$

Πόρισμα 3. *Αν ο χρόνος μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων ακολουθεί την κατανομή Gamma(a,b) $(a > 1)$, τότε το σημείο τομής x_0 των $L_3(x)$ και $L_{Geom,4}(x)$, δίνεται από τον τύπο :*

$$x_0 = \mu - \frac{\mu}{a}$$

Απόδειξη

Από την (5.17), έχουμε :

$$x_0 = \frac{1 + \frac{2p\rho_X}{ln(1-p)} - \frac{Var(X)}{\mu^2}}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{p}{ln(1-p)}\right)} \tag{5.18}$$

Όμως ισχύουν τα εξής :

- $\frac{Var(X)}{\mu^2} = \frac{a/b^2}{a^2/b^2} = \frac{1}{a}$
- $\rho_x = |\gamma - 1| = \left|\frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1\right| = \left|\frac{Var(X)+\mu^2}{2\mu^2} - 1\right| = \left|\frac{Var(X)}{2\mu^2} + -\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2a} - \frac{1}{2}\right|$. Άρα έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις :

1. Αν $a > 1$ (IFR), τότε : $\rho_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}$

2. Αν $a < 1$ (DFR), τότε : $\rho_x = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2}$

Επομένως, η (5.17) γίνεται :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1 + \frac{p}{ln(1-p)} - \frac{p}{aln(1-p)} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{p}{ln(1-p)}\right)} \\ &= \mu - \frac{\mu}{a} \end{aligned}$$

Από το πόρισμα προκύπτει ότι το σημείο τομής των $L_2(x)$ και $L_{Geom,4}(x)$, είναι :

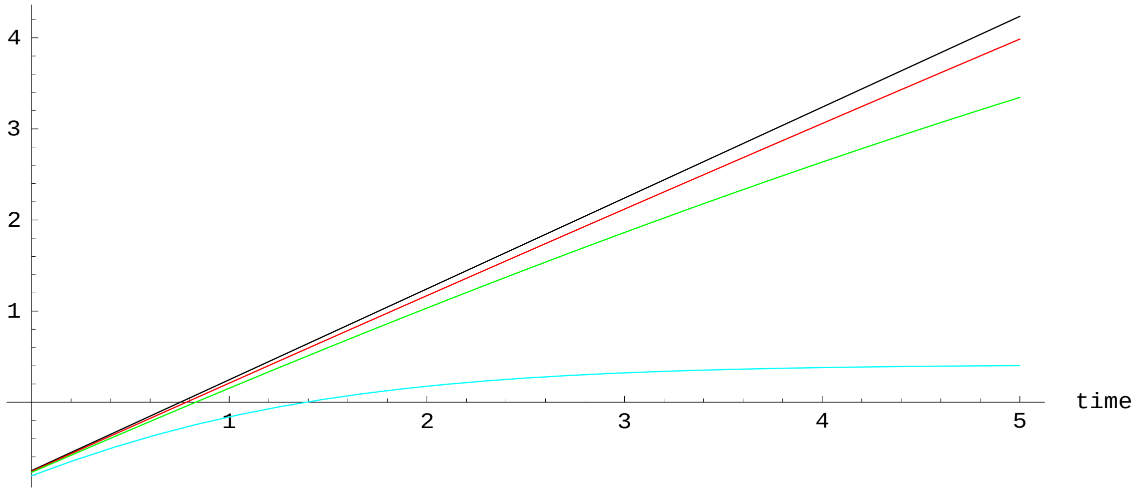
1. $x_0 = 0.5$ για τη Gamma(2,2)

2. $x_0 = 1$ για τη Gamma(3,2)

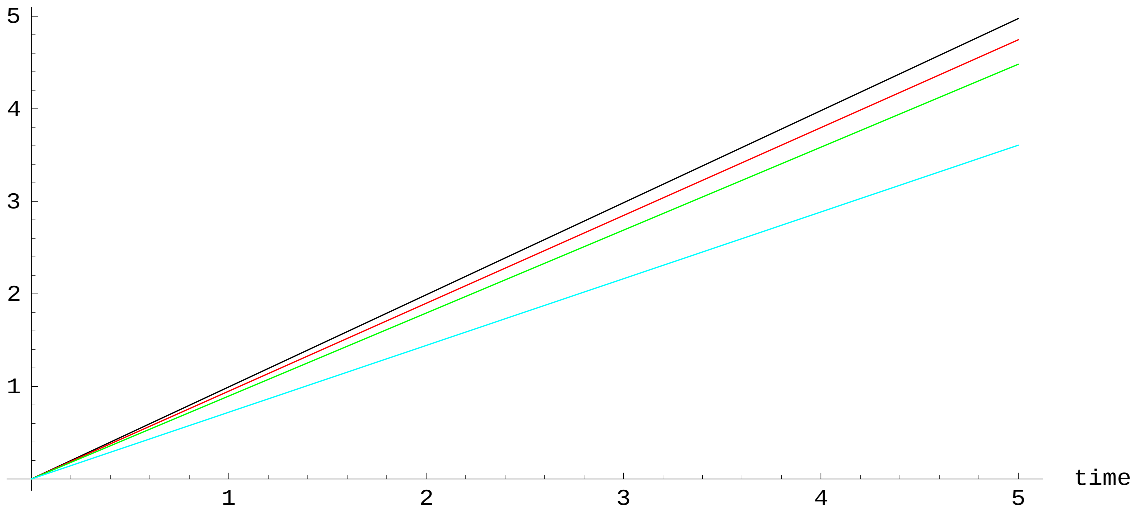
3. $x_0 = 2.5$ για τη Gamma(6,2)

4. $x_0 = 4.5$ για τη Gamma(10,2)

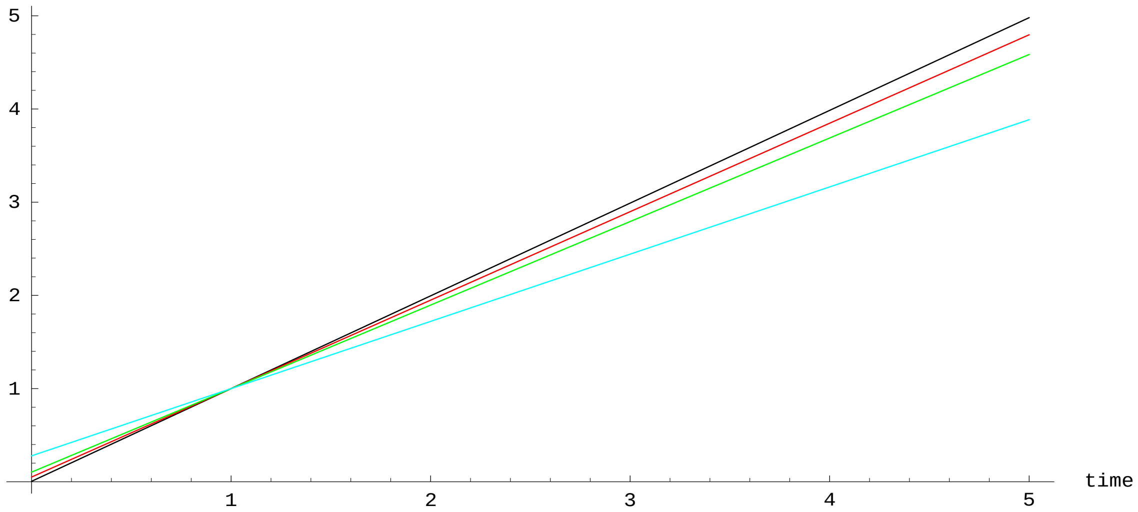
Στα σχήματα 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 βλέπουμε τα φράγματα $L_{Geom,1}$, $L_{Geom,2}$, $L_{Geom,3}$ $L_{Geom,4}$, $L_{Geom,5}$ που προήρθαν από τα αντίστοιχα άνω του Brown. Παρατηρούμε πως όσο πιο μικρή είναι η τιμή της πιθανότητας p, τόσο πιο ακριβή είναι τα φράγματα της ανανεωτικής συνάρτησης.



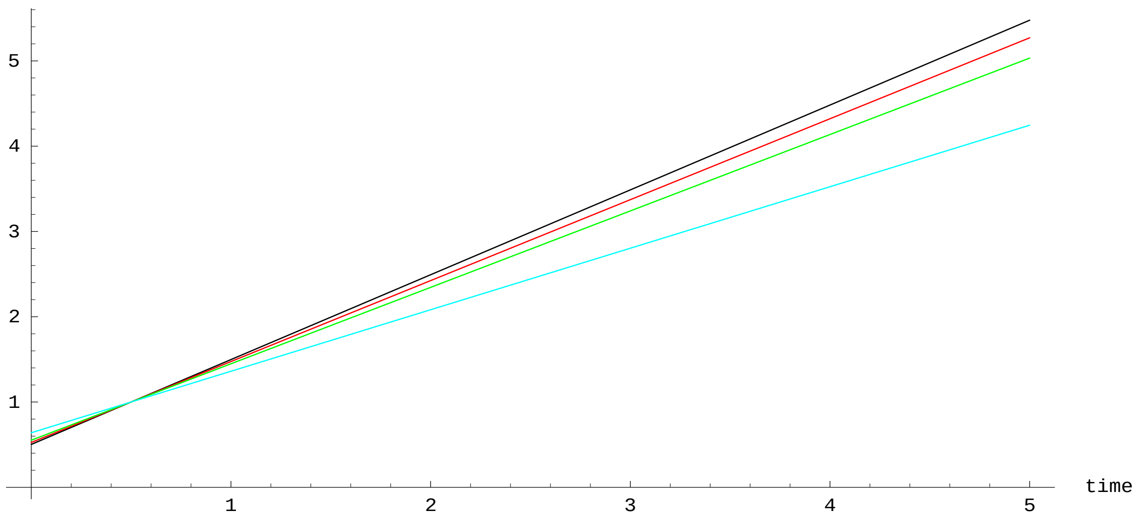
Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση του άνω φράγματος $L_{Geom,1}$ του Brown με $L_i \sim Gamma(2,2)$ για $p = 0.01(\bullet)$, $p = 0.1(\bullet)$, $p = 0.2(\bullet)$, $p = 0.5(\bullet)$



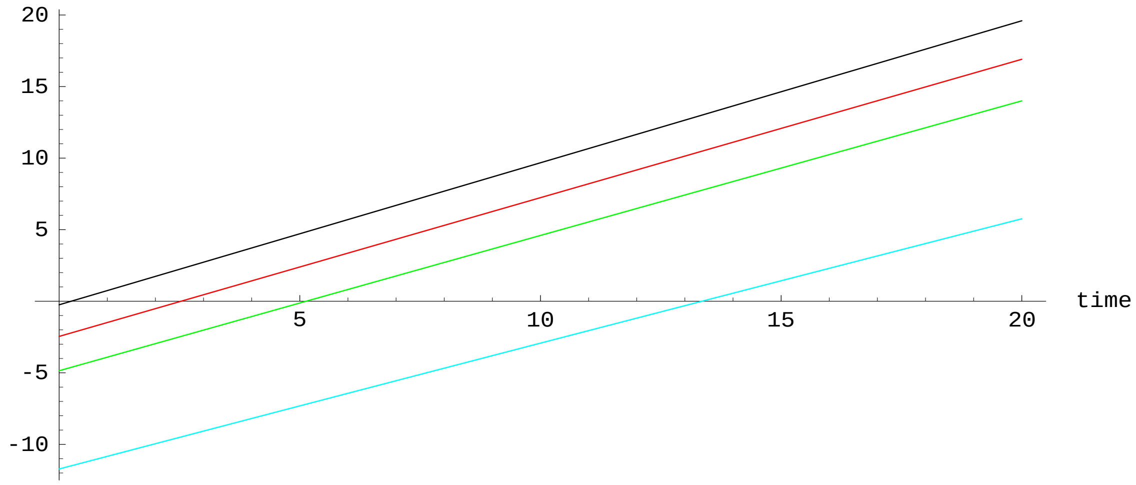
Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση του άνω φράγματος $L_{Geom,2}$ του Brown με $L_i \sim Gamma(2,2)$ για $p = 0.01(\bullet)$, $p = 0.1(\bullet)$, $p = 0.2(\bullet)$, $p = 0.5(\bullet)$



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση του άνω φράγματος $L_{Geom,3}$ του Brown με $L_i \sim Gamma(2,2)$ για $p = 0.01(\bullet)$, $p = 0.1(\bullet)$, $p = 0.2(\bullet)$, $p = 0.5(\bullet)$



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση του άνω φράγματος $L_{Geom,4}$ του Brown με $L_i \sim Gamma(2,2)$ για $p = 0.01(\bullet)$, $p = 0.1(\bullet)$, $p = 0.2(\bullet)$, $p = 0.5(\bullet)$



Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση του άνω φράγματος $L_{Geom,5}$ του Brown με $L_i \sim Gamma(0.5, 2)$ για $p = 0.01(\bullet)$, $p = 0.2(\bullet)$, $p = 0.4(\bullet)$, $p = 0.5(\bullet)$

5.2 Εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή βασιζόμενοι στην ανισότητα (5.4) θα υπολογίσουμε τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση στις περιπτώσεις που η κατανομή του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθεί μια από τις παρακάτω μορφές:

- Gamma (IFR)
- Μείξη 2 Εκθετικών Κατανομών (DFR)
- Weibull(3,$\frac{1}{2}$)
- Pareto(3,2)

Εφαρμογή 1

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι X_i μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν τη κατανομή Gamma(2,2), τότε ισχύουν τα εξής:

1. $f(x) = 4e^{-2x}x$
2. $F(x) = 1 - e^{-2x}(1 + 2x)$
3. $E(X) = 1$
4. $Var(X) = \frac{1}{2}$
5. $F_e(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{F}(u)du = 1 - e^{-2x}(1 + x)$
6. $U(t) = \frac{3}{4} + \frac{e^{-4t}}{4} + t$ (βλέπε Παράρτημα Δ)

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά υπολογίζουμε τα εξής κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

1. Γενικά κάτω φράγματα

    (α′) $L_1(x) = \frac{x}{E(X)} = x$

    (β′) $L_{Geom,1}(x) = \frac{ln\left[e^{-\frac{px}{(1-p)\mu}} + \frac{\gamma p}{1-p}\right]}{ln[1-p]} = \frac{ln\left[e^{\frac{-px}{1-p}} + \frac{3p}{4(1-p)}\right]}{ln[1-p]}$

2. Αφού η κατανομή Gamma(2,2) ανήκει στην IFR οικογένεια κατανομών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω φράγματα:

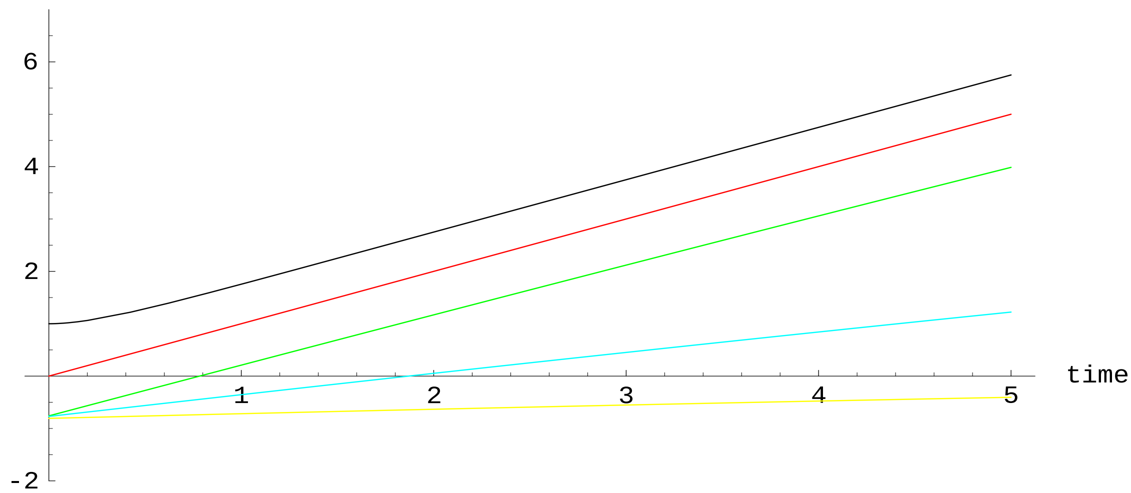
   (α′) $L_3(x) = \frac{x}{E(X)} + \frac{Var(X)}{(E(X))^2} = x + \frac{1}{2}$

   (β′) $L_9(x) = \frac{x}{E(X)} + \frac{Var(X)F(x)}{(E(X))^2} + \bar{F}_{eq}(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$

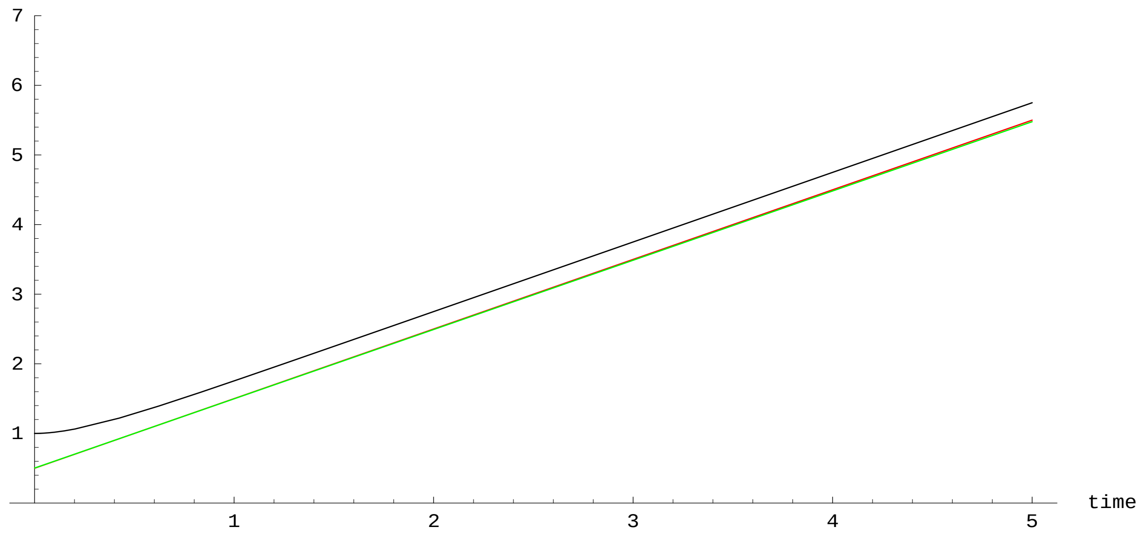
   (γ′) $L_{Geom,4}(x) = \frac{ln\left((1-p)\left(\frac{-x}{E(Y)}+2pp_X\right)\right)}{ln(1-p)} = 1 + \frac{ln\left(\frac{-x}{E(Y)}+2pp_X\right)}{ln(q)} = 1 + \frac{\frac{p}{2}-px}{ln[1-p]}$

Το Σχήμα 5.6 και ο Πίνακας 5.1 μας παρουσιάζουν τη συμπεριφορά των φραγμάτων L_1 και $L_{Geom,1}$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου (πιθανότητας) p όταν η κατανομή του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθεί τη κατανομή Gamma(2,2). Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του p τόσο χειροτερεύει η συμπεριφορά του $L_{Geom,1}$. Επιπλέον για ένα μικρό χρονικό διάστημα γύρω από το μηδέν και συγκεκριμένα για το (0,0.8) το $L_{Geom,1}$ έχει αρνητικές τιμές. Το διάστημα αυτό μικραίνει όσο η τιμή του p πλησιάζει το μηδέν. Το χαρακτηριστικό αυτό κάνει το συγκεκριμένο φράγμα γενικά ακατάλληλο για την προσέγγιση της (θετικής) ανανεωτικής συνάρτησης. Τέλος είναι φανερό πως το L_1 είναι μεγαλύτερο από το $L_{Geom,1}$ για όλες τις χρονικές στιγμές. Επομένως μεταξύ των δύο φραγμάτων τη καλύτερη συμπεριφορά έχει το L_1.

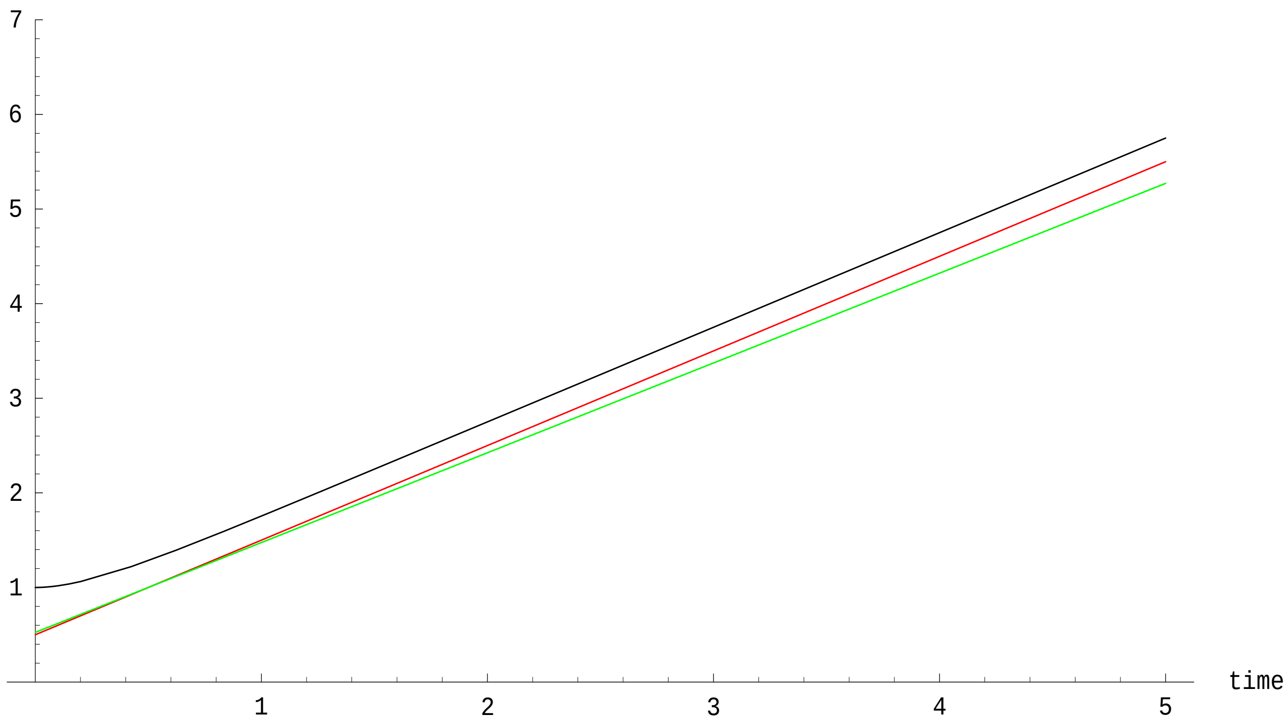
Τα σχήματα 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 και ο Πίνακας 5.2 παρουσιάζουν τον τρόπο λειτουργίας των φραγμάτων L_3, L_9 και $L_{Geom,4}$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p. Συγκεκριμένα παρατηρούμε πως όσο πιο μικρό είναι είναι το p τόσο καλύτερη είναι η συμπεριφορά του φράγματος $L_{Geom,4}$ (και βελτιώνεται όσο περνάει ο χρόνος). Στον Πίνακα 5.2 και τα Σχήματα 5.7, 5.8 παρατηρούμε πως το $L_{Geom,4}$ συμπίπτει (με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων) με το κάτω φράγμα L_3, για μικρές τιμές του p, ακόμα και αν το x είναι σχετικά μικρό. Για πιο μεγάλες τιμές της παραμέτρου p τα φράγματα L_3 και $L_{Geom,4}$ τέμνονται στο σημείο $x_0 = 0.5$. Το τμήμα του $L_{Geom,4}$ που βρίσκεται δεξιά από το σημείο τομής είναι πιο ακριβή από το αντίστοιχο του L_3, ενώ για το κομμάτι που βρίσκεται αριστερά ισχύει το αντίστροφο. Επίσης είναι εμφανές πως όσο αυξάνεται η τιμή του p, τόσο πιο ακριβή γίνεται το αριστερό τμήμα αλλά από την άλλη μεριά το δεξιό κομμάτι αποκτάει δύσχρηστη συμπεριφορά. Επομένως το $L_{Geom,4}$ για μεγάλες τιμές της πιθανότητας p μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για βραχυχρόνιες προβλέψεις. Το L_9 είναι το κάτω φράγμα που παρουσιάζει συνολικά τη καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα L_3 και $L_{Geom,4}$ τουλάχιστον για μικρές τιμές του x. Έτσι για τη συγκεκριμένη κατανομή που εξετάζουμε αν $x < 5.7$ τότε το L_9, έχει τη καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα άλλα δύο φράγματα, ενώ για τιμές του x μεγαλύτερες του 5.7 και για $p = 10^{-6}$ συμπίπτει με αυτά (με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων). Τα σχήματα 5.14, 5.15, και ο Πίνακας 5.3 μας φανερώνουν ότι οριακά για τιμές του p που τείνουν στο μηδέν (10^{-12} και 10^{-14}) το φράγμα $L_{Geom,4}$ γίνεται πιο μεγάλο από τα L_3 και L_9 (με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων) ακόμα και για σχετικά μικρές τιμές του x (5.3 και 2.9 αντίστοιχα). Η επιλογή του χρονικού διαστήματος που χρησιμοποιείται στα διαγράμματα έγινε με σκοπό την καλύτερη παρουσίαση τους. Τέλος στα Σχήματα 5.11, 5.12, 5.13, παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου a, όταν η κατανομή του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθεί την κατανομή Gamma(a,b), τόσο πιο δεξιά μετατοπίζεται στον άξονα του χρόνου το σημείο τομής των L_3 και $L_{Geom,4}$. Επομένως το $L_{Geom,4}$ παραμένει μεγαλύτερο από το L_3 για περισσότερο χρόνο.



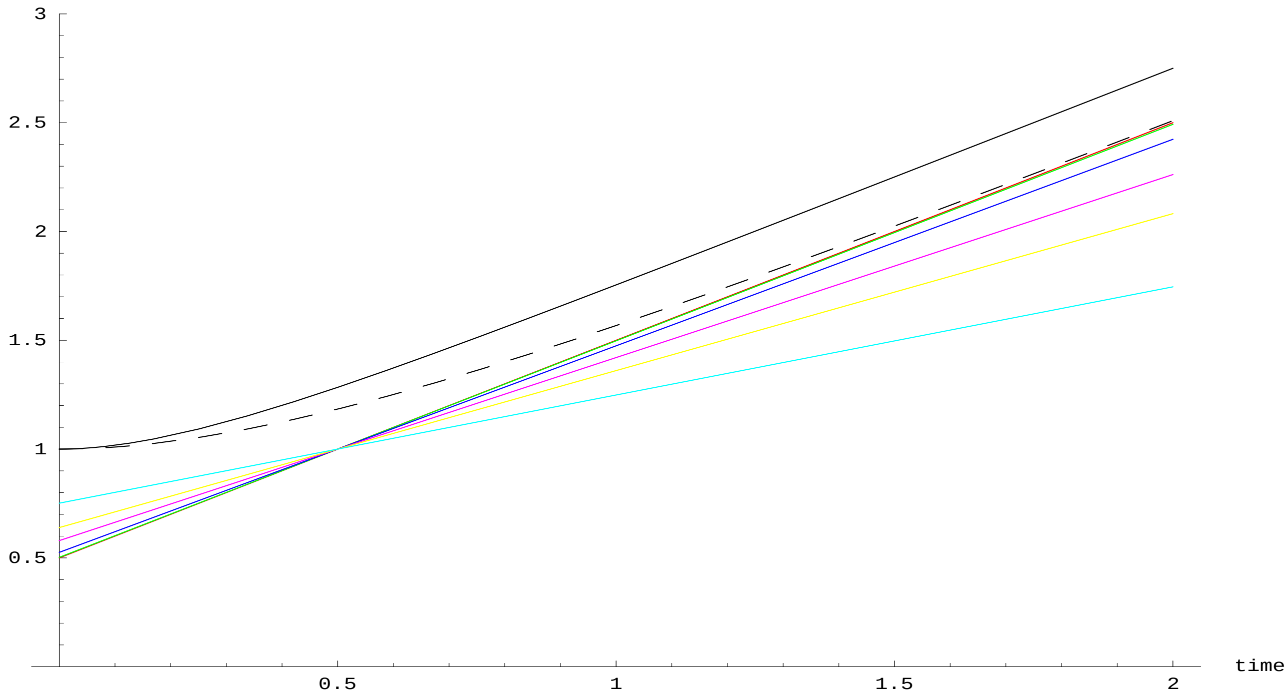
Σχήμα 5.6: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_1(x)$(●), $L_{Geom,1}(x)$ (●)($p = 0.1$), $L_{Geom,1}(x)$ (●)($p = 0.2$), $L_{Geom,1}(x)$ (●)($p = 0.5$) για τη Gamma(2,2)



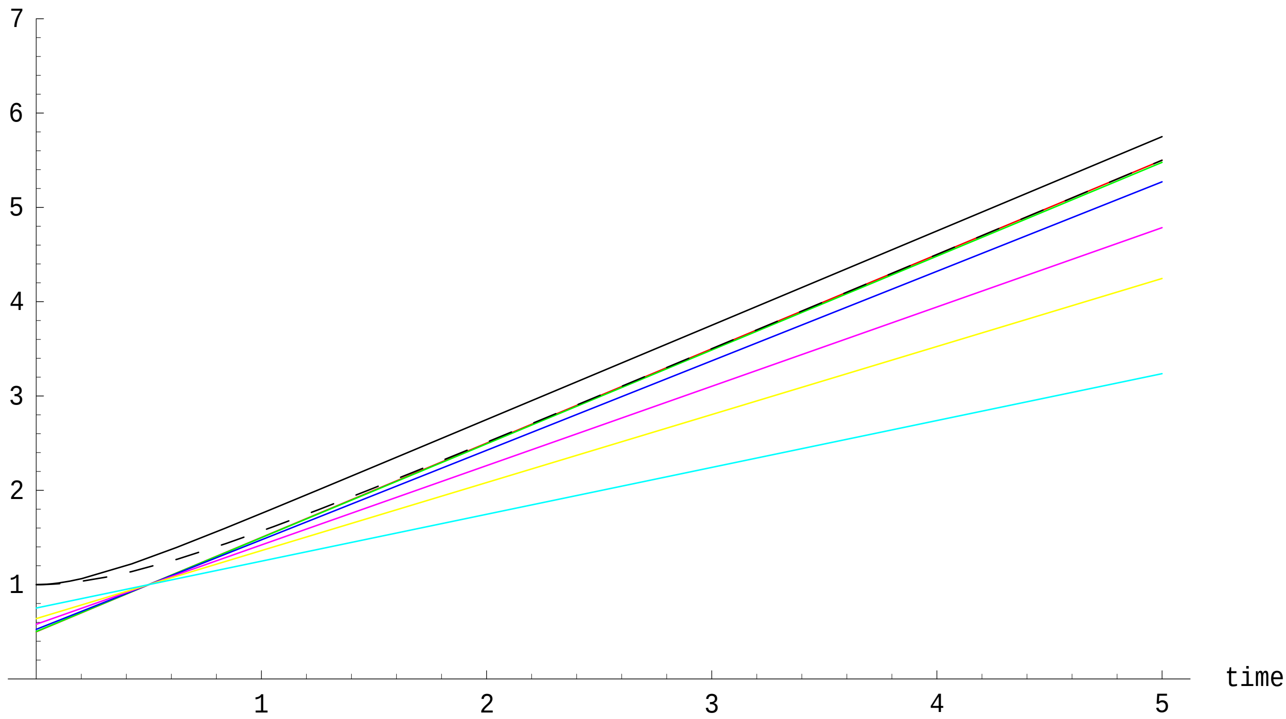
Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)$ (●) για τη Gamma(2,2) με $p = 0.01$. Παρατηρούμε πως τα φράγματα $L_3(x)$ και $L_{Geom,4}(x)$ συμπίπτουν.



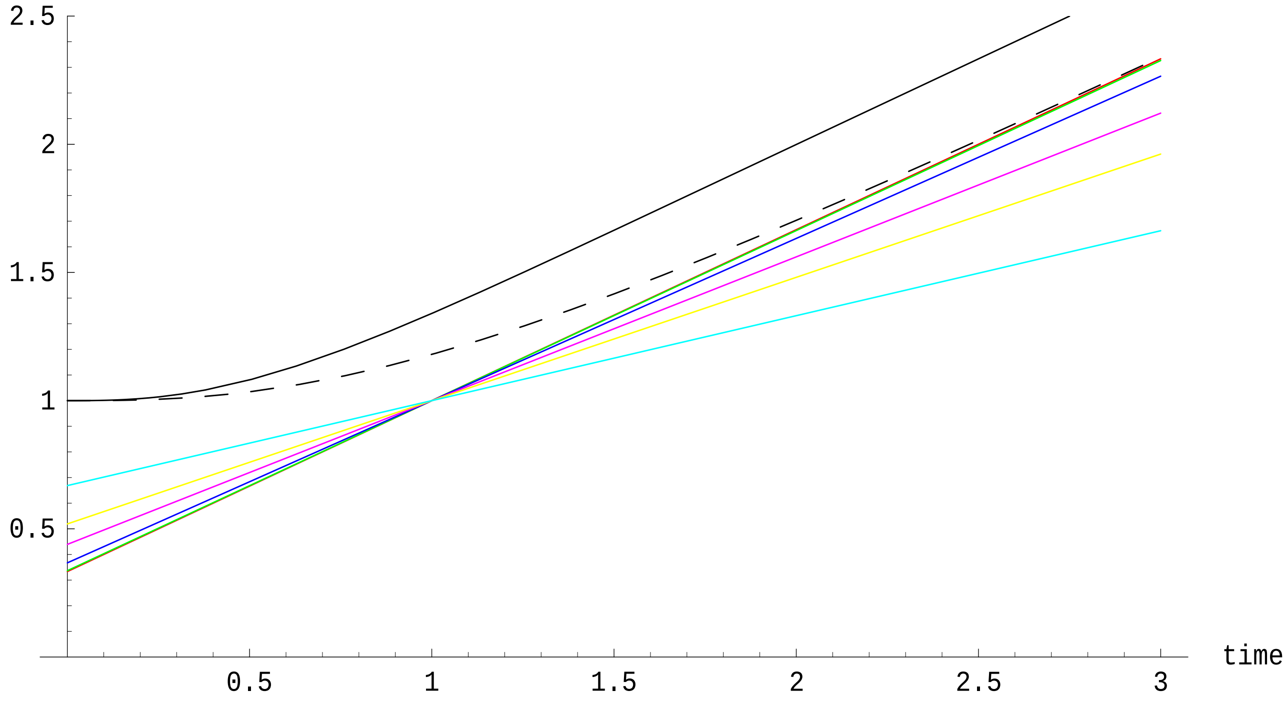
Σχήμα 5.8: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)$ (●) για τη Gamma(2,2) με $p = 0.1$



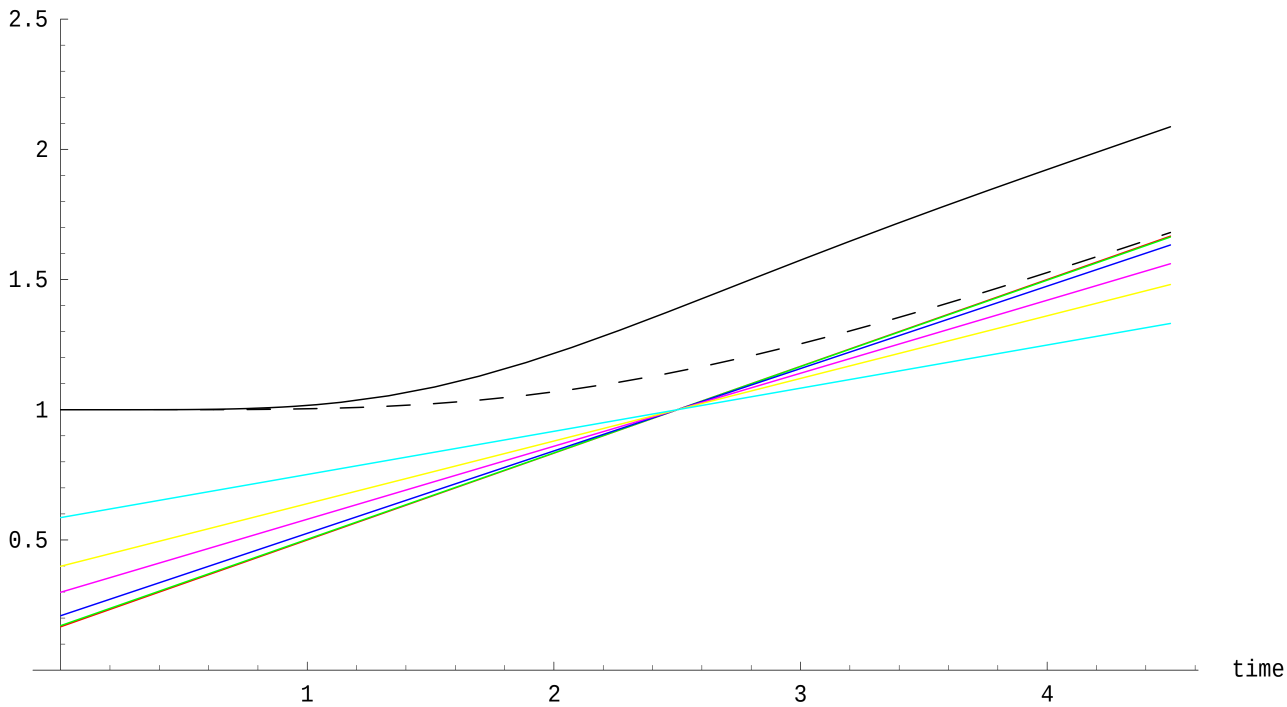
Σχήμα 5.9: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.01)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.1)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.3)$ (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.5)$, (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.8)$ (●), $L_9(x)(--)$ για τη Gamma(2,2)



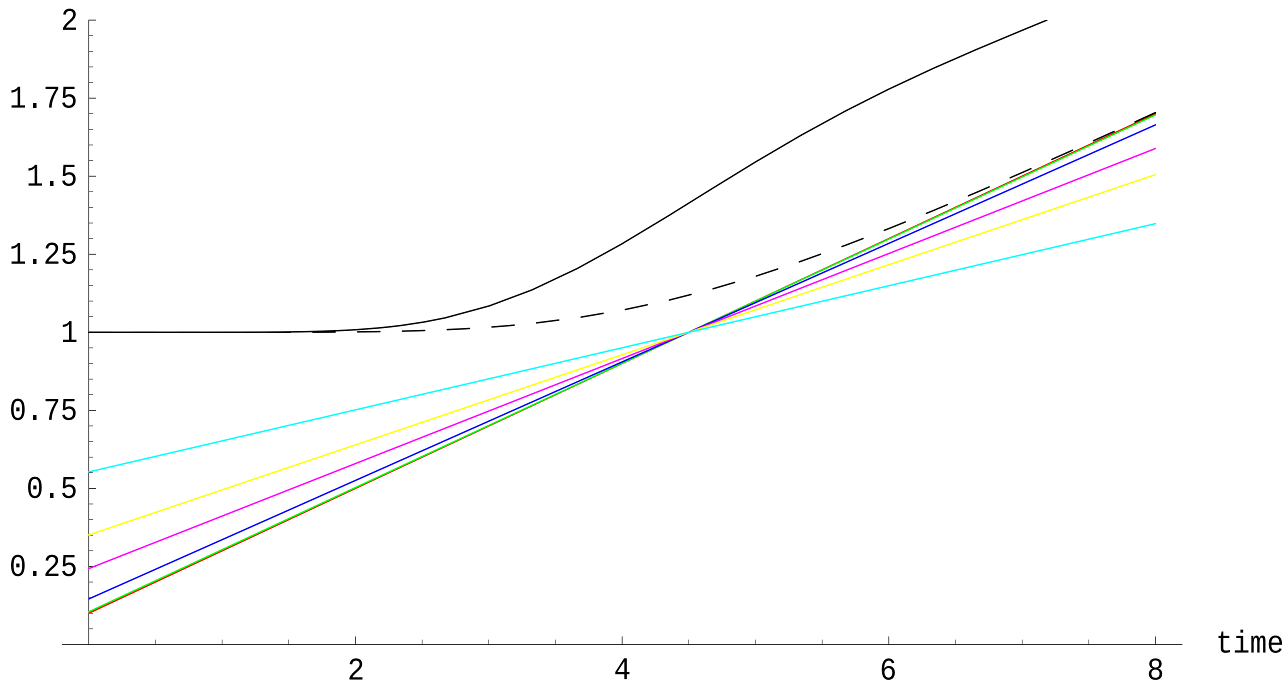
Σχήμα 5.10: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.01)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.1)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.3)$ (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.5)$, (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.8)$ (●), $L_9(x)(--)$ για τη Gamma(2,2)



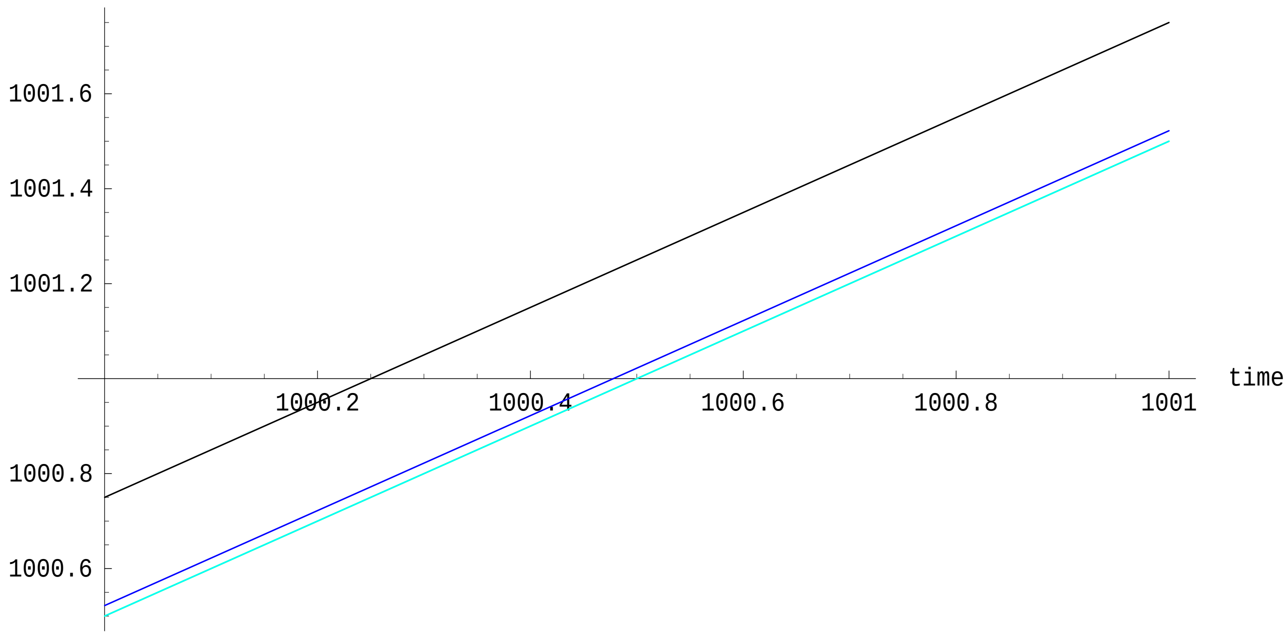
Σχήμα 5.11: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.01)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.1)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.3)$ (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.5)$, (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.8)$ (●), $L_9(x)(--)$ για τη Gamma(3,2)



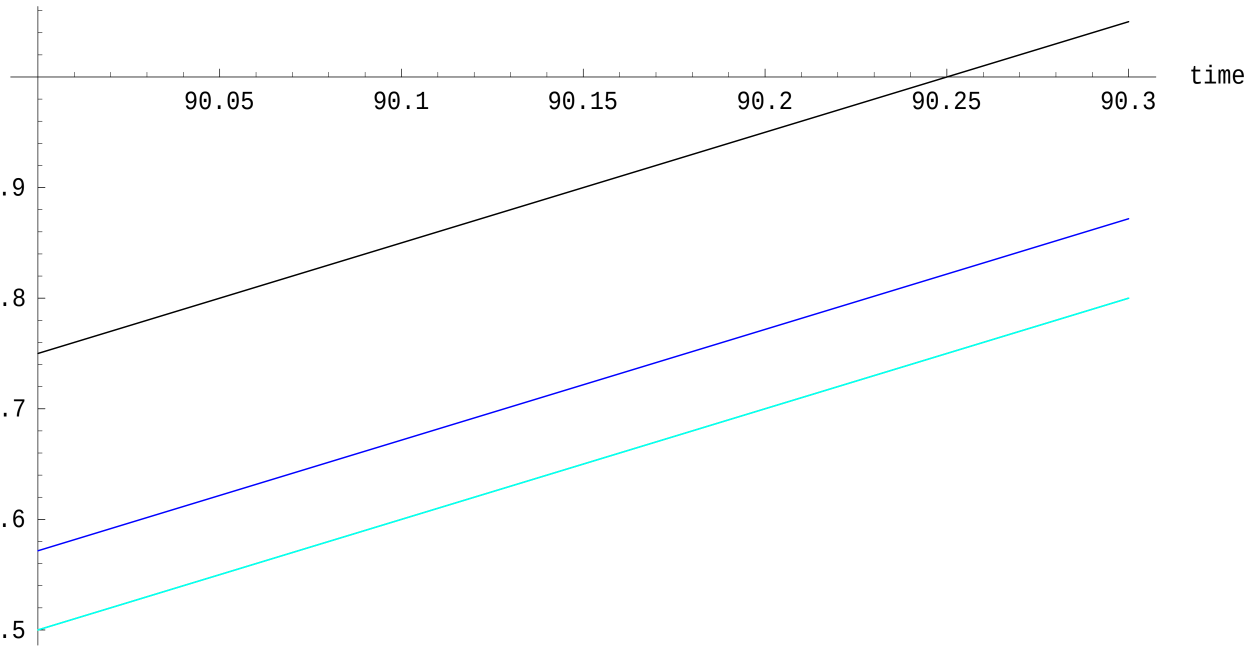
Σχήμα 5.12: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.01)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.1)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.3)$ (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.5)$, (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.8)$ (●), $L_9(x)(--)$ για τη Gamma(6,2)



Σχήμα 5.13: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_3(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.01)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.1)$ (●), $L_{Geom,4}(x)(p = 0.3)$ (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.5)$, (●) $L_{Geom,4}(x)(p = 0.8)$ (●), $L_9(x)(--)$ για τη Gamma(10,2)



Σχήμα 5.14: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_9(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)$(●) για τη Gamma(2,2) με $p = 10^{-12}$



Σχήμα 5.15: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_9(x)$(●), $L_{Geom,4}(x)$(●) για τη Gamma(2,2) με $p = 10^{-14}$

x	$U(x)$	$L_1(x)$	$L_{Geom,1}(x)(p = 10^{-6})$	$L_{Geom,1}(x)(p = 10^{-1})$
0	1	0	-0.75	-0.759703
0.1	1.01758	0.1	-0.65	-0.662399
0.2	1.06233	0.2	-0.55	-0.565179
0.3	1.1253	0.3	-0.45	-0.468043
0.4	1.20047	0.4	-0.35	-0.370994
0.5	1.28383	0.5	-0.25	-0.27403
0.6	1.37268	0.6	-0.15	-0.177154
0.7	1.4652	0.7	-0.0500003	-0.0803658
0.8	1.56019	0.8	0.0499997	0.0163336
0.9	1.65683	0.9	0.15	0.112943
1	1.75458	1	0.9	0.209463
2	2.75008	2	1.25	1.16949
3	3.75	3	2.25	2.11951
4	4.75	4	3.25	3.05859
5	5.75	5	4.25	3.98574
10	10.75	10	9.25	8.40405
20	20.75	20	19.25	15.6778
50	50.75	50	49.25	23.1544

Πίνακας 5.1:

x	$U(x)$	$L_3(x)$	$L_{Geom,4}(x)$ $p=10^{-6}$	$L_9(x)$	$L_{Geom,4}(x)$ $p=10^{-1}$	$L_{Geom,4}(x)$ $p=10^{-5}$
0	1	0.5	0.5	1	0.525439	0.500003
0.1	1.01758	0.6	0.6	1.00937	0.620351	0.600002
0.2	1.06233	0.7	0.7	1.03516	0.715263	0.700002
0.3	1.1253	0.8	0.8	1.07441	0.810176	0.800001
0.4	1.20047	0.9	0.9	1.12466	0.905088	0.900001
0.5	1.28383	1	1	1.18394	1	1
1	1.75458	1.5	1.5	1.56767	1.47456	1.5
2	2.75008	2.5	2.5	2.50916	2.42368	2.49999
3	3.75	3.5	3.5	3.50124	3.37281	3.49999
4	4.75	4.5	4.5	4.50017	4.32193	4.49998
5	5.75	5.5	5.5	5.50002	5.27105	5.49998
5.5	6.25	6	6	6.00001	5.74561	5.999997
5.7	6.45	6.2	6.2	6.20001	5.93544	6.19997
5.8	6.55	6.3	6.3	6.3	6.03035	6.29997
5.9	6.65	6.4	6.4	6.4	6.12526	6.39997
6	6.75	6.5	6.5	6.5	6.22017	6.49997
10	10.75	10.5	10.5	10.5	10.0167	10.5
100	100.75	100.5	100.5	100.5	95.4377	100.5
1000	1000.75	1000.5	1000.5	1000.5	949.648	1000.5
2000	2000.75	2000.5	2000.5	2000.5	1898.77	2000.49
5000	5000.75	5000.5	5000.5	5000.5	4746.14	5000.48
10000	10000.75	10000.5	10000.5	10000.5	9491.75	1000.5

Πίνακας 5.2:

x	$U(x)$	$L_3(x)$	$L_{Geom,4}(x)$ $p = 10^{-14}$	$L_9(x)$	$L_{Geom,4}(x)$ $p = 10^{-12}$
0	1	0.5	0.4996	1	0.499989
0.5	1.28383	1	1	1.18394	0.1
1	1.75458	1.5	1.5004	1.56767	1.50001
2	2.75008	2.5	2.5012	2.50916	2.50003
2.7	3.45001	3.2	3.20176	3.20226	3.20005
2.8	3.55	3.3	3.30184	3.30185	3.30005
2.9	3.65	3.4	3.40192	3.40151	3.40005
3	3.75	3.5	3.502	3.50124	3.50006
4	4.75	4.5	4.5028	4.50017	4.50008
5	5.75	5.5	5.5036	5.50002	5.5001
5.2	5.95	5.7	5.70376	5.70002	5.7001
5.3	6.05	5.8	5.80384	5.80001	5.80011
6	6.75	6.5	6.5044	6.5	6.50012
7	7.75	7.5	7.5052	7.5	7.50014
8	8.75	8.5	8.506	8.5	8.50017
9	9.75	9.5	9.5068	9.5	9.50019
10	10.75	10.5	10.5076	10.5	10.5002
20	20.75	20.5	20.5156	20.5	20.5004
30	30.75	30.5	30.5236	30.5	30.5007
40	40.75	40.5	40.5316	40.5	40.5009
50	50.75	50.5	50.5396	50.5	50.5011
60	60.75	60.5	60.5476	60.5	60.5013
70	70.75	70.5	70.5556	70.5	70.5015
80	80.75	80.5	80.5636	80.5	80.5018
90	90.75	90.5	90.5716	90.5	90.502

Πίνακας 5.3:

Εφαρμογή 2: Μείξη Εκθετικών

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι X_i μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με μέση τιμή $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{7}$, αντίστοιχα. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $f(x) = \frac{1}{2}3e^{-3x} + \frac{1}{2}7e^{-7x}$
2. $F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-7x}\left(1 + e^{4x}\right)$
3. $E(X) = \mu = \frac{5}{21}$
4. $Var(X) = \frac{11}{147}$
5. $F_e(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{F}(u)du = 1 - \frac{1}{10}e^{-7x}(3 + 7e^{4x})$
6. $U(t) = 2 + \frac{1}{25}\left(105t - 4e^{-5t} - 21\right)$ (βλέπε Παράρτημα Δ)

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά της κατανομής και το γεγονός ότι η μείξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην οικογένεια DFR (βλέπε Barlow και Proschan(1981) σελίδα 37) υπολογίζουμε με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica τα εξής κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

1. Γενικά κάτω φράγματα (απαιτούν την ύπαρξη των ροπών μέχρι και δεύτερης τάξης, $\mu_2 = E(X^2)$)

   (α′) $L_1(x) = \frac{x}{E(X)} = \frac{21x}{5}$

   (β′) $L_{Geom,1}(x) = \frac{ln\left(e^{-\frac{x}{E(Y_0)}} + \frac{\gamma p}{q}\right)}{ln(1-p)} = \frac{ln\left(e^{\frac{-21px}{-5+5p}} + \frac{29p}{25-25p}\right)}{ln(1-p)}$, όπου Y_0 ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = pq^n, n = 0, 1, 2, ...$

2. Αφού η μείξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην DFR οικογένεια κατανομών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω φράγματα:

   (α′) $L_2(x) = \frac{x}{E(X)} + 1 = 1 + \frac{21x}{5}$

   (β′) $L_8(x) = \frac{x}{E(X)} + F(x) + \bar{F}_{eq}(x) = \frac{1}{5}\left(5 - e^{-7x} + e^{-3x} + 21x\right)$

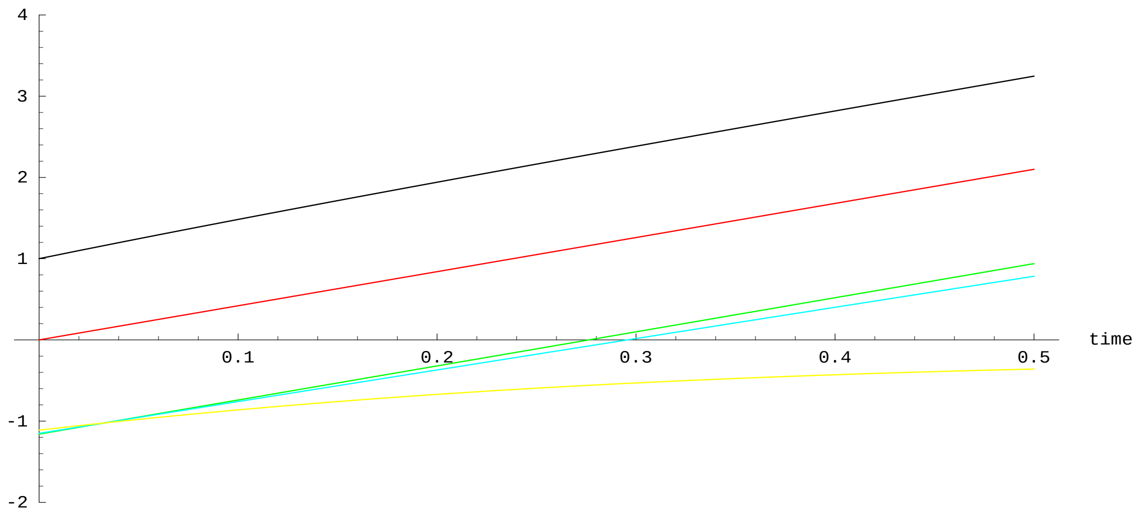
   (γ′) $L_{Geom,5}(x) = \frac{ln\left(q\left(e^{\frac{-x}{E(Y)}+p\rho X}\right)\right)}{ln(1-p)} = 1 + \frac{ln\left(e^{\frac{-x}{E(Y)}+p\rho X}\right)}{ln(1-p)} = 1 + \frac{ln\left(e^{\frac{-21px}{5}+\frac{4p}{25}}\right)}{ln(1-p)}$

3. Οι Shaked και Zhu (1992) απέδειξαν ότι κάθε κατανομή που ανήκει στην οικογένεια DFR έχει φθίνουσα ανανεωτική πυκνότητα (για τη συγκεκριμένη μείξη εκθετικών που μελετάμε ισχύει $u(t)=\frac{21}{5}+\frac{4e^{-5t}}{5}$). Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φράγμα L_{12} που ο τύπος του φαίνεται παρακάτω. Επίσης δίνουμε και το άνω φράγμα U_{11}, που ισχύει κάτω από τις ίδιες συνθήκες με το φράγμα L_{12}.

   (α′) $L_{12}(x)=1+\frac{x}{E(X)}+\frac{x(F(x)-F_e(x))}{\int_0^x \bar{F}(t)dt}=1+\frac{x}{5}\left(21+\frac{42}{3+7e^{4x}-10e^{7x}}+\frac{42e^{4x}}{10e^{7x}-7e^{4x}-3}\right)$

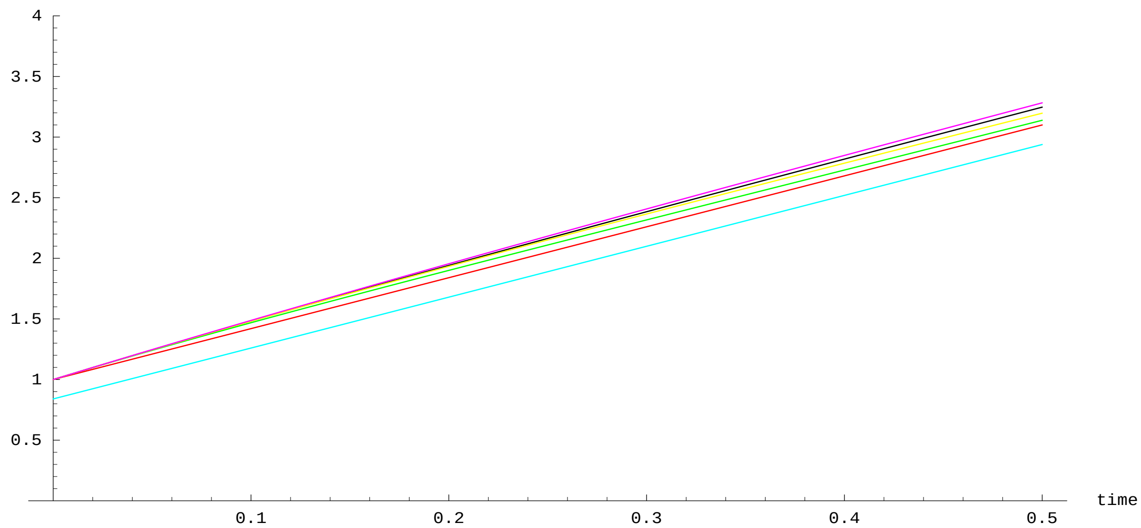
   (β′) $U_{11}(x)=1+\frac{x}{E(X)}+\frac{x\left(\frac{\int_0^x 1-F_e(t)dt}{E(X)}-F_e(x)\right)}{\int_0^x F_e(t)dt}=\frac{9+63x+49e^{4x}(1+3x)+2e^{7x}(441x^2-29)}{e^{7x}(210x-58)+49e^{4x}+9}$

Αρχικά παρατηρούμε (Σχήμα 5.16) πως το γενικό κάτω φράγμα $L_1(x)$ είναι καλύτερο από το αντίστοιχο $L_{Geom,1}(x)$ που προέρχεται από τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή για όλες τις τιμές του χρόνου αλλά και της πιθανότητας p. Το $L_1(x)$ διατηρεί μη αρνητική τιμή σε όλη τη διάρκεια του χρόνου σε αντίθεση με το $L_{Geom,1}(x)$ που εμφανίζει αρνητικές τιμές για περιοχή γύρω από το μηδέν. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη μορφή του γενικού φράγματος του Brown $\Psi U_{B,1}(x)$, που για μικρές τιμές του x, η τιμή του είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

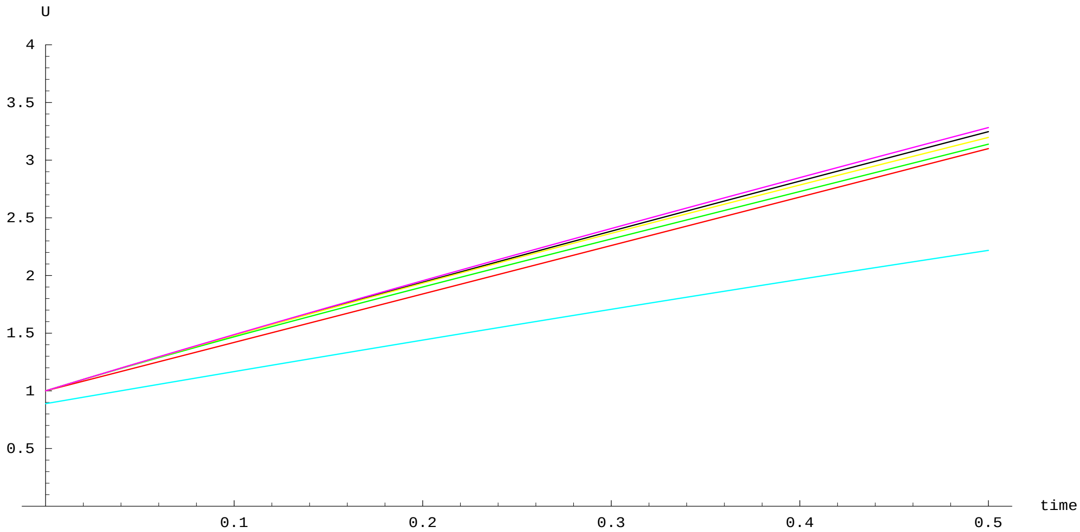


Σχήμα 5.16: Γραφική παράσταση των $U(x)(\bullet)$, $L_1(x)(\bullet)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p=0,001)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p=0,1)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p=0,5)$ για τη Μείξη Εκθετικών

Στα επόμενα δύο διαγράμματα (Σχήμα 5.17 και Σχήμα 5.18) και τους Πίνακες 5.4 και 5.5 παρατηρούμε πως για τιμές του x μικρότερες του 2.8 το φράγμα L_{12} παρουσιάζει τη καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα L_2, L_8 και $L_{Geom,5}$. Δεύτερο σε τάξη ακρίβειας παρουσιάζεται το L_8 και ακολουθεί το L_2. Για τιμές του x μεγαλύτερες του 2.8 τα φράγματα L_2 και L_8 αποκτούν τις ίδιες τιμές (με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων) και επιπλέον όταν το x ξεπεράσει την τιμή 3.6 γίνονται ισότιμα και με το L_{12}. Το φράγμα $L_{Geom,5}$, αυξάνει τη τιμή του καθώς το p μικραίνει και το x μεγαλώνει μέχρι κάποιο χρονικό σημείο στο οποίο αρχίζει να αποκτάει μια σταθερή συμπεριφορά. Η τιμή του σημείου αυτού εξαρτάται από την παράμετρο p, όσο πιο μεγάλη είναι τόσο πιο σύντομα συμβαίνει η σταθεροποίηση. Για τιμές του p της τάξης του 10^{-7} και χρονικές στιγμές μεγαλύτερες του 30000, το $L_{Geom,5}$ προσεγγίζει τη κοινή τιμή των των υπολοίπων φραγμάτων. Τέλος το άνω φράγμα U_{11} αποτελεί ένα πολύ καλό άνω φράγμα αφού παρουσιάζει μικρές αποκλίσεις από την πραγματική τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης και μαζί με το L_{12} αποτελούν ένα αποτελεσματικό διάστημα προσέγγισης για την ανανεωτική συνάρτηση σε κάθε χρονική στιγμή.



Σχήμα 5.17: Γραφική παράσταση των $U(x)$(●), $L_2(x)$(●), $L_8(x)$(●) , $L_{Geom,5}(x)$ (●) ($p = 0.001$), $L_{12}(x)$(●), $U_{11}(x)$(●) για τη Μείξη Εκθετικών



Σχήμα 5.18: Γραφική παράσταση των $U(x)$(●), $L_2(x)$(●), $L_8(x)$(●) , $L_{Geom,5}(x)$ (●) ($p = 0.5$), $L_{12}(x)$(●), $U_{11}(x)$(●) για τη Μείξη Εκθετικών

x	$U(x)$	$L_2(x)$	$L_8(x)$	$L_{12}(x)$	$U_{11}(x)$
0	1	1	1	-	-
0.1	1.48296	1.42	1.46885	1.48171	1.48775
0.2	1.94114	1.84	1.90044	1.9337	1.95508
0.3	2.3843	2.26	2.31682	2.3655	2.40732
0.4	2.81835	2.68	2.72808	2.78477	2.84871
0.5	3.24687	3.1	3.13859	3.19707	3.28247
1	5.35892	5.2	5.20978	5.24255	5.39874
2	9.55999	9.4	9.4005	9.40417	9.58477
2.6	12.08	11.92	11.9201	11.9209	12.0989
2.7	12.5	12.34	12.3401	123407	12.5181
2.8	12.92	12.76	12.76	12.7605	12.9374
2.9	13.34	13.18	13.18	13.1804	13.3568
3	13.76	13.6	13.6	13.6003	13.7762
3.1	14.18	14.02	14.02	14.0202	14.1956
3.2	14.6	14.44	14.44	14.4402	14.6151
3.3	15.02	14.86	14.86	14.8601	15.0346
3.4	15.44	15.28	15.28	15.2801	15.4541
3.5	15.86	15.7	15.7	15.7001	15.8737
3.6	16.28	16.12	16.12	16.1201	16.2933
3.7	16.7	16.54	16.54	16.54	16.7129
3.8	17.12	16.96	16.96	16.96	171325
4	17.96	17.8	17.8	17.8	17.9719
5	22.16	22	22	22	22.1694
6	26.2	26.2	26.2	26.2	26.3677
7	30.4	30.4	30.4	30.4	30.5666
10	43	43	43	43	43.1645
20	85	85	85	85	85.1622
50	211	211	211	211	211.161
1000	4201	4201	4201	4201	4201.16
20000	84001	84001	84001	84001	84001.2
30000	12601	12601	12601	12601	12601.1

Πίνακας 5.4:

x	$L_{Geom,5}(x)(p = 10^{-1})$	$L_{Geom,5}(x)(p = 10^{-2})$	$L_{Geom,5}(x)(p = 10^{-7})$
0	0.849343	0.840929	0.84
0.1	1.24156	1.25816	1.26
0.2	1.63352	1.67538	1.68
0.3	2.02519	2.0926	2.1
0.4	2.41656	2.50982	2.52
0.5	2.80764	2.92704	2.94
1	4.75796	5.01308	5.04
2	8.62723	9.18493	9.24
2.6	10.9223	11.6879	11.76
2.7	11.3024	12.105	12.18
2.8	11.6818	12.5222	12.6
2.9	12.0604	12.9393	13.02
3	12.4381	13.3565	13.44
3.1	12.815	13.7736	13.86
3.2	13.1911	14.1908	14.28
3.3	13.5662	14.6079	14.7
3.4	13.9404	15.025	15.12
3.5	14.3136	15.442	15.54
3.6	14.6858	15.8593	15.96
3.7	15.0569	16.2764	16.38
3.8	15.4269	16.6935	16.8
3.9	15.7958	17.1106	17.22
4	16.1635	17.5277	17.64
5	19.766	21.6986	21.84
6	23.1965	25.8692	26.04
7	26.3947	30.0394	30.24
10	33.9717	42.5476	42.84
20	40.1153	84.2112	84.84
50	40.2478	208.657	210.84
1000	40.2478	641.551	4200.84
20000	40.2478	641.551	8400.8
30000	40.2478	641.551	12601

Πίνακας 5.5:

Εφαρμογή 3 : Weibull$(3, \frac{1}{2})$

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι X_i μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν την DFR κατανομή Weibull$(3, \frac{1}{2})$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $f(x) = \frac{3e^{-3\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
2. $F(x) = 1 - e^{-3\sqrt{x}}$
3. $E(X) = \mu = \frac{2}{9}$
4. $Var(X) = \frac{20}{81}$
5. $F_e(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{F}(x)dx = 1 - e^{-3\sqrt{x}}(1 + 3\sqrt{x})$
6. Δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για την ανανεωτική συνάρτηση.

Επομένως μπορούμε να υπολογίζουμε τα εξής κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

1. Γενικά κάτω φράγματα

   (α΄) $L_1(x) = \frac{x}{E(X)} = \frac{9x}{2}$

   (β΄) $L_{Geom,1}(x) = \frac{ln\left(e^{-\frac{t}{E(Y_0)}} + \frac{\gamma p}{q}\right)}{ln(1-p)} = \frac{ln\left(e^{\frac{-9px}{2(1-p)}} + \frac{3p}{1-p}\right)}{ln(1-p)}$, όπου Y_0 ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = pq^n, n = 0, 1, 2, ...$

2. Η DFR ιδιότητα της κατανομής Weibull$(3, \frac{1}{2})$ μας εξασφαλίζει τα παρακάτω φράγματα:

   (α΄) $L_2(x) = \frac{x}{E(X)} + 1 = 1 + \frac{9x}{2}$

   (β΄) $L_8(x) = \frac{x}{E(X)} + F(x) + \bar{F}_e(x) = 1 + 3\sqrt{x}e^{-3\sqrt{x}} + \frac{9x}{2}$

   (γ΄) $L_{Geom,5}(x) = \frac{ln\left(q\left(\frac{-x}{E(Y)} + p\rho_X\right)\right)}{ln(1-p)} = 1 + \frac{ln\left(\frac{-x}{E(Y)} + p\rho_X\right)}{ln(1-p)} = 1 + \frac{ln\left(e^{\frac{-9px}{2}} + 2p\right)}{ln(1-p)}$

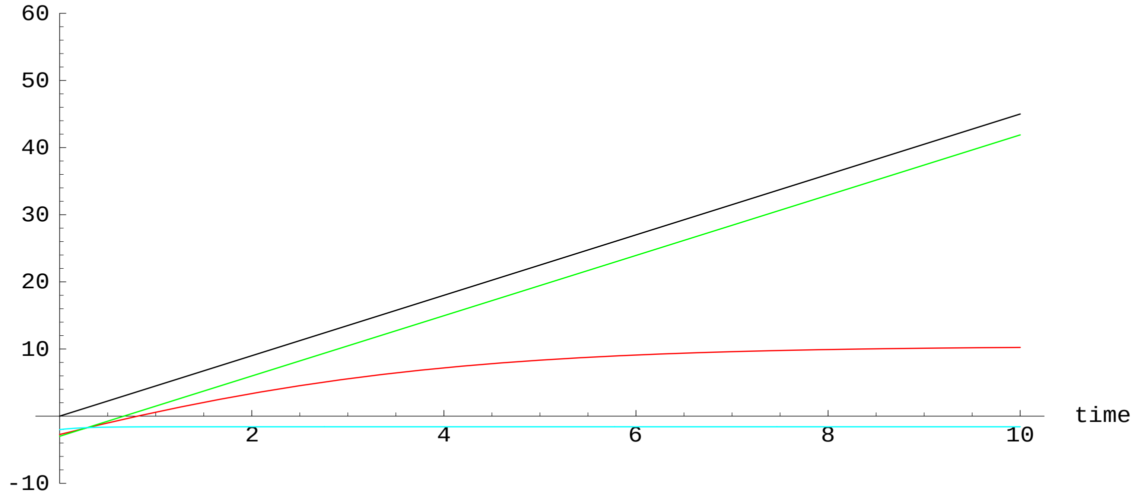
3. Δύο επιπλέον φράγματα (άνω και κάτω αντίστοιχα) προκύπτουν από το γεγονός ότι κάθε DFR κατανομή έχει φθίνουσα ανανεωτική πυκνότητα.

   (α΄) $L_{12}(x) = 1 + \frac{x}{E(X)} + \frac{x(F(x) - F_e(x))}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} = \frac{e^{3\sqrt{x}}(2+9x) - 9x - 6\sqrt{x} - 2}{2(e^{3\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} - 1)}$

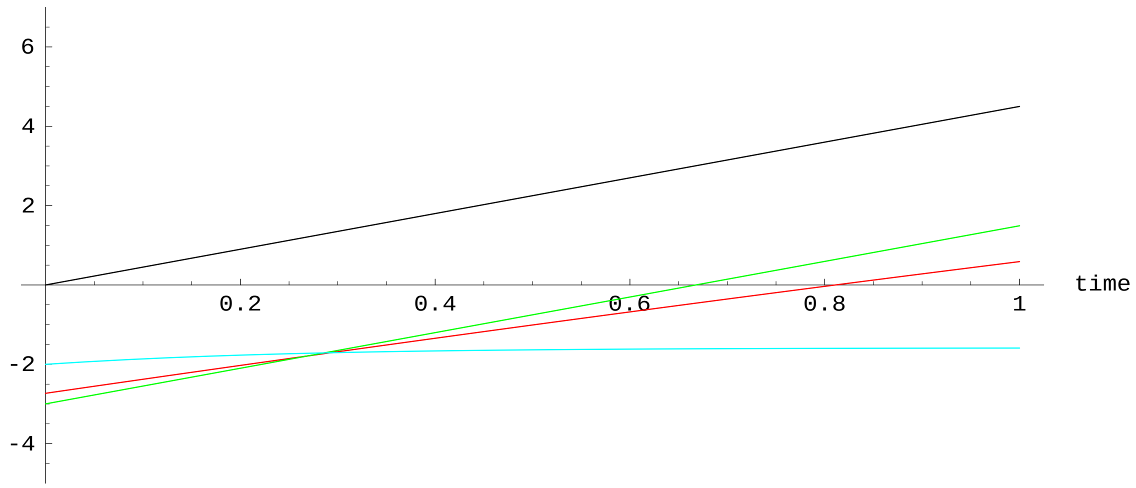
(β′) $U_{11}(x) = 1 + \frac{x}{E(X)} + \frac{x\left(\frac{\int_0^x 1-F_e(t)dt}{E(X)} - F_e(x)\right)}{\int_0^x F_e(t)dt} = \frac{e^{3\sqrt{x}}(27x^2+18x^{3/2}+18x+12\sqrt{x}+4}{2(2+6\sqrt{x}+6x+e^{3\sqrt{x}}(2x-2))}$

Το φράγμα $L_{Geom,1}$ δίνει αρνητικές τιμές για μικρές τιμές του x (Σχήμα 5.20). Έτσι αν το χωρίσουμε σε δύο τμήματα ένα θετικό και ένα αρνητικό, παρατηρούμε πως η τιμή του αυξάνεται όσο μειώνεται το p, για το θετικό του κομμάτι, ενώ για το αρνητικό συμβαίνει το αντίστροφο. Το φράγμα L_1 παραμένει ακριβέστερο από το $L_{Geom,1}$ για όλες τις τιμές του x (Σχήμα 5.19) και αποτελεί την καλύτερη επιλογή παρόλο που για μεγάλες τιμές του x και μικρές τιμές του p, το $L_{Geom,1}$ μειώνει την αρχική διαφορά που είχε αρχικά με το μη αρνητικό φράγμα L_1.

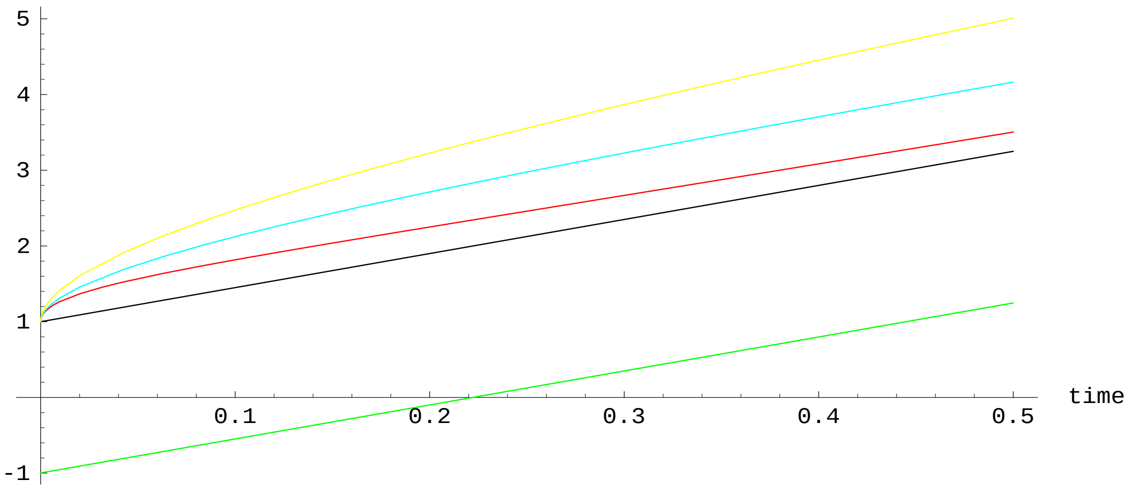
Στον Πίνακα 5.7 παρατηρούμε τις τιμές του NWUE φράγματος, $L_{Geom,5}$. Είναι φανερό (Σχήμα 5.21) πως για τιμές του x μικρότερες του 0.2 το $L_{Geom,5}$ είναι αρνητικό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι γενικά αποδεκτό φράγμα μιας και η ανανεωτική συνάρτηση είναι πάντα θετικός αριθμός (και μάλιστα με βάση τον τρόπο ορισμού που χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερος της μονάδας). Το φράγμα L_{12} είναι το πιο ακριβή για μικρές τιμές του x και ακολουθούν τα L_8 και L_2 με φθίνουσα σειρά ως προς την ακρίβεια τους. Για τιμές του x μεγαλύτερες του 18 τα φράγματα L_2 και L_8 πρακτικά ταυτίζονται (με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων) (Πίνακας 5.6) και για μεγαλύτερες του 26 συμπίπτουν με το L_{12}. Αν και για μεγάλες τιμές του x και μικρές τιμές του p (Πίνακας 5.7) το φράγμα $L_{Geom,5}$ έχει τιμές κοντά σε αυτές των άλλων φραγμάτων, δεν αποτελεί συνολικά την πιο αποτελεσματική επιλογή και αυτό οφείλεται στο χαρακτηριστικό των αρνητικών τιμών που παρουσιάζει αρχικά. Συνοψίζοντας θα λέγαμε πως τη καλύτερη συνολική συμπεριφορά παρουσιάζει το L_{12} και ακολουθεί το L_8.



Σχήμα 5.19: Γραφική παράσταση των $L_1(x)(\bullet)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p=0.1)$, $L_{Geom,1}(x)(p=0.01)(\bullet)(p=0.01)$, $L_{Geom,1}(x)$ $(\bullet)(p=0.5)$, για τη Weibull$(3,\frac{1}{2})$



Σχήμα 5.20: Γραφική παράσταση των $L_1(x)(\bullet)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p=0.1)$, $L_{Geom,1}(x)(p=0.01)(\bullet)(p=0.01)$, $L_{Geom,1}(x)$ $(\bullet)(p=0.5)$, για τη Weibull$(3,\frac{1}{2})$



Σχήμα 5.21: Γραφική παράσταση των $L_2(x)$(●), $L_8(x)$(●), $L_{Geom,5}(x)$(●)$(p = 0.01)$, $L_{12}(x)$ (●), $U_{11}(x)$(●), για τη Weibull$(3, \frac{1}{2})$

x	$L_2(x)$	$L_8(x)$	$L_{12}(x)$	$U_{11}(x)$
0	1	1	-	-
0.1	1.45	1.81738	2.12376	2.47541
0.2	1.9	2.25073	2.71384	3.22693
0.3	2.35	2.6673	3.22736	3.86757
0.4	2.8	3.08453	3.70568	4.45389
0.5	3.25	3.50429	4.16422	5.00734
1	5.5	5.64936	6.33926	7.53938
1.5	7.75	7.84321	8.46382	9.90534
2	10	10.061	10.5934	12.2077
3	14.5	14.5288	14.9023	16.7372
3.5	16.75	16.7705	17.0808	18.9859
4	19	19.0149	19.2724	21.2303
5	23.5	23.5082	23.686	25.7131
7	32.5	32.5028	32.5896	34.6761
10	46	46.0007	46.0324	48.1334
11	50.5	50.5005	50.5235	52.6226
12	55	55.0003	55.0172	57.1132
14	64	64.0001	64.0094	66.0978
17	77.5	77.5001	77.504	79.5808
18	82	82	82.0031	84.07636
19	86.5	86.5	86.5023	88.5723
20	91	91	91.0018	93.0686
25	113.5	113.5	113.501	115.555
26	118	118	118	120.053
27	122.5	122.5	122.5	124.551
30	136	136	136	138.045
50	226	226	226	228.027

Πίνακας 5.6:

x	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-1})$	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-2})$	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-7})$
0	-0.730454	-0.970345	-1
0.1	-0.375882	-0.531397	-0.55
0.2	-0.0240588	-0.0924887	-0.099999
0.3	0.324933	0.346381	0.35
0.4	0.671011	0.785211	0.8
0.5	1.01409	1.224	1.25
1	2.68166	3.41736	3.5
1.5	4.26194	5.60971	5.75
2	5.745	7.80102	8
3	8.3859	12.1805	12.5
3.5	9.53188	14.3685	14.75
4	10.558	16.5555	17
5	12.2579	20.9259	21.5
7	14.433	29.6251	30.5
10	15.7625	42.7017	44
11	15.9452	47.0399	48.5
12	16.0636	51.372	53
14	16.1888	60.0165	62
17	16.256	72.9297	75.5
18	16.2611	77.2187	80
19	16.2664	81.4993	84.5
20	16.2697	85.7713	89
25	16.2749	106.988	111.5
26	16.2751	111.2	116
27	16.2753	115.401	120.5
30	16.2755	127.929	134
50	16.2755	207.585	226

Πίνακας 5.7:

x	p	$L_2(x)$	$L_8(x)$	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-2})$	$L_{12}(x)$	$U_{11}(x)$
0	0.01	1	1	-0.970345	-	-
0.1	0.1	1.45	1.81738	-0.375882	2.12376	2.47541
0.5	0.1	3.25	3.50429	1.01409	4.16422	5.00734
0.9	0.1	5.05	5.21528	2.35481	5.91189	7.05221
1	0.01	5.5	5.64936	3.41736	6.33926	7.53938
1	0.1	5.5	5.64936	2.68166	6.33926	7.53938
1	0.9	5.5	5.64936	0.740544	6.33926	7.53938
2	0.1	10	10.061	5.745	10.5934	12.2077
5	0.1	23.5	23.5082	12.2579	23.686	25.7131
5	0.01	28	28.0047	25.2915	28.1284	30.1942
10	0.01	46	46.0007	42.7017	46.0324	48.1334
20	0.01	91	91	85.7713	91.0018	93.0686
50	0.01	226	226	207.585	226	228.027

Πίνακας 5.8:

Εφαρμογή 4 : Pareto(3,2)

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι X_i μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν τη κατανομή Pareto. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $f(x) = \frac{3 \cdot 2^3}{(2+x)^{3+1}}$
2. $F(x) = 1 - \frac{8}{(2+x)^3}$
3. $E(X) = 1$
4. $Var(X) = 3$
5. $F_e(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{F}(x)dx = 1 - \frac{4}{(2+x)^2}$
6. Η ανανεωτική συνάρτηση δεν μπορεί να υπολογιστεί σε αναλυτική μορφή.

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά της κατανομής και το γεγονός ότι η κατανομή Pareto ανήκει στην οικογένεια DFR υπολογίζουμε τα εξής κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

1. Γενικά κάτω φράγματα

   (α΄) $L_1(x) = \frac{x}{E(X)} = x$

   (β΄) $L_{Geom,1} = \frac{ln\left(e^{-\frac{t}{E(Y_0)}} + \frac{\gamma p}{q}\right)}{ln(1-p)} = \frac{ln\left(e^{\frac{-px}{1-p}} + \frac{2p}{1-p}\right)}{ln(1-p)}$, όπου Y_0 ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = pq^n, n = 0, 1, 2, ...$

2. Η κατανομή Pareto ανήκει στην DFR οικογένεια κατανομών επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω φράγματα:

   (α΄) $L_2(x) = \frac{x}{E(X)} + 1 = 1 + x$

   (β΄) $L_8(x) = \frac{x}{E(X)} + F(x) + \bar{F}_{eq}(x) = \frac{8+24x+18x^2+7x^3+x^4}{(2+x)^3}$

   (γ΄) $L_{Geom,5}(x) = \frac{ln\left(q\left(\frac{-x}{E(Y)}+p\rho_X\right)\right)}{ln(1-p)} = 1 + \frac{ln\left(\frac{-x}{E(Y)}+p\rho_X\right)}{ln(1-p)} = \frac{ln\left(e^{-px}+p\right)}{ln(1-p)} + 1$

3. Δύο επιπλέον φράγματα προκύπτουν από το γεγονός ότι κάθε DFR κατανομή έχει φθίνουσα ανανεωτική πυκνότητα.

   (α΄) $L_{12}(x) = 1 + \frac{x}{E(X)} + \frac{x(F(x)-F_e(x))}{\int_0^x \bar{F}(t)dt} = \frac{8+18x+7x^2+x^3}{8+6x+x^2}$

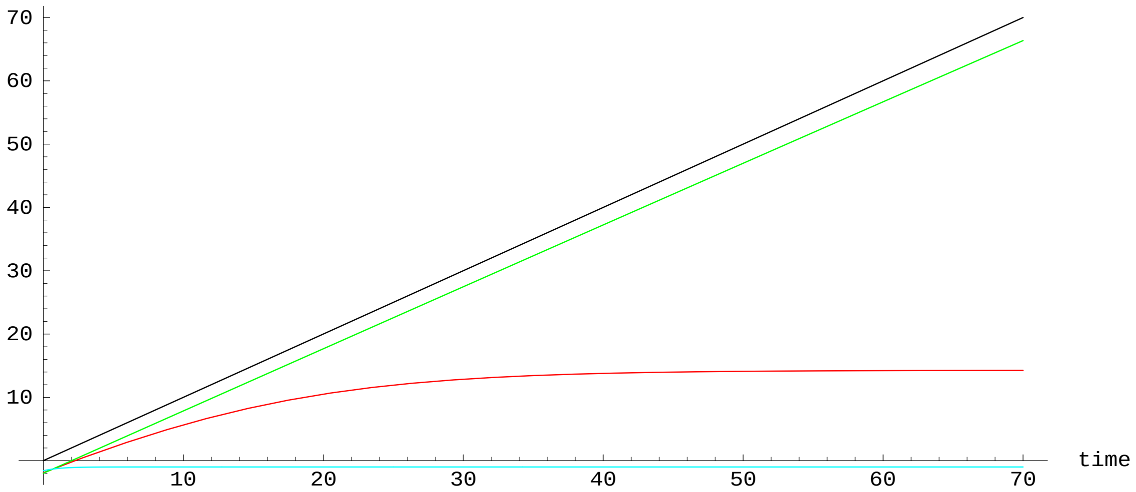
(β′) $U_{11}(x) = 1 + \frac{x}{E(X)} + \frac{x\left(\frac{\int_0^x 1-F_e(t)dt}{E(X)} - F_e(x)\right)}{\int_0^x F_e(t)dt} = \frac{2+4x+x^2}{2+x}$

Όπως και στην περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης ακολουθούσε τη Weibull(3,$\frac{1}{2}$) το γενικό κάτω φράγμα $L_{Geom,1}$ παρουσιάζει αρνητικές τιμές για μια αρκετά μεγάλη περιοχή του μηδενός (Σχήμα 5.23) και επιπλέον παραμένει μικρότερο από το αντίστοιχο μη αρνητικό L_1 (Σχήμα 5.22). Επομένως το L_1 υπερτερεί σε ακρίβεια σε σχέση με το $L_{Geom,1}$.

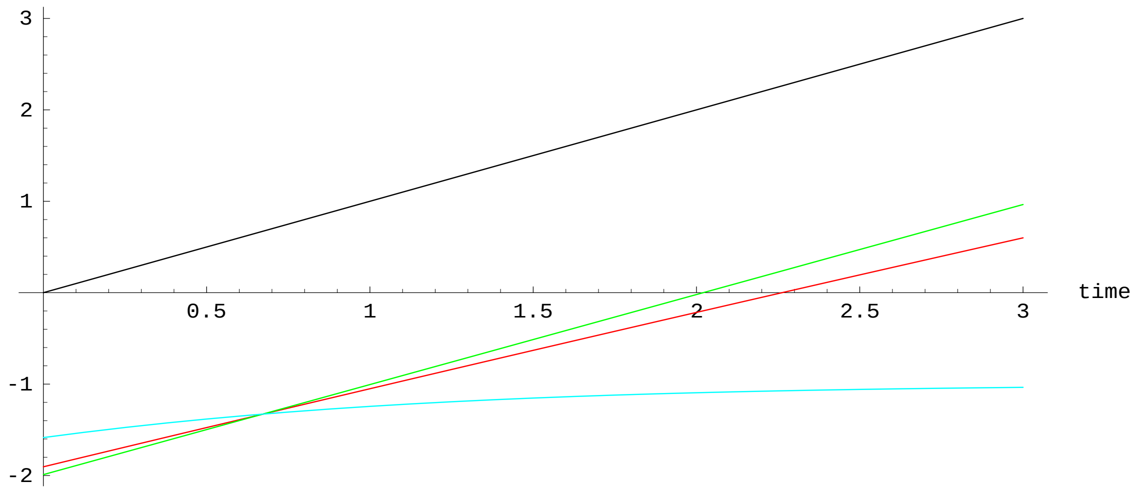
Στον Πίνακα 5.10 και τα Σχήματα 5.22, 5.23 παρατηρούμε πως για τιμές του x μικρότερες του 0.7 το φράγμα $L_{Geom,5}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p, ενώ για x μεγαλύτερο ή ίσο του 0.7 είναι αύξουσα συνάρτηση του p. Επίσης το $L_{Geom,5}$ έχει πολύ μικρές τιμές σε σχέση με τα υπόλοιπα φράγματα για τιμές του x μικρότερες της μονάδας, ενώ όσο ο χρόνος αυξάνεται προσεγγίζει ικανοποιητικά τις τιμές των L_2 και L_8. Στον Πίνακα 5.9 και το σχήμα 5.24, φαίνεται πως το L_{12} έχει την πιο ακριβή συμπεριφορά σε σχέση με τα L_2 και L_8. Σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι η διαφορά των φραγμάτων U_{11} και L_{12} παραμένει μικρότερη της μονάδας για όλη τη χρονική διάρκεια που εξετάζουμε. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να αποδειχθεί αναλυτικά για κάθε τιμή του $x \geq 0$, αφού :

$$U_{11}(x) - L_{12}(x) = \frac{2+4x+x^2}{2+x} - \frac{8+18x+7x^2+x^3}{8+6x+x^2} = \frac{x^2}{8+6x+x^2} < 1$$

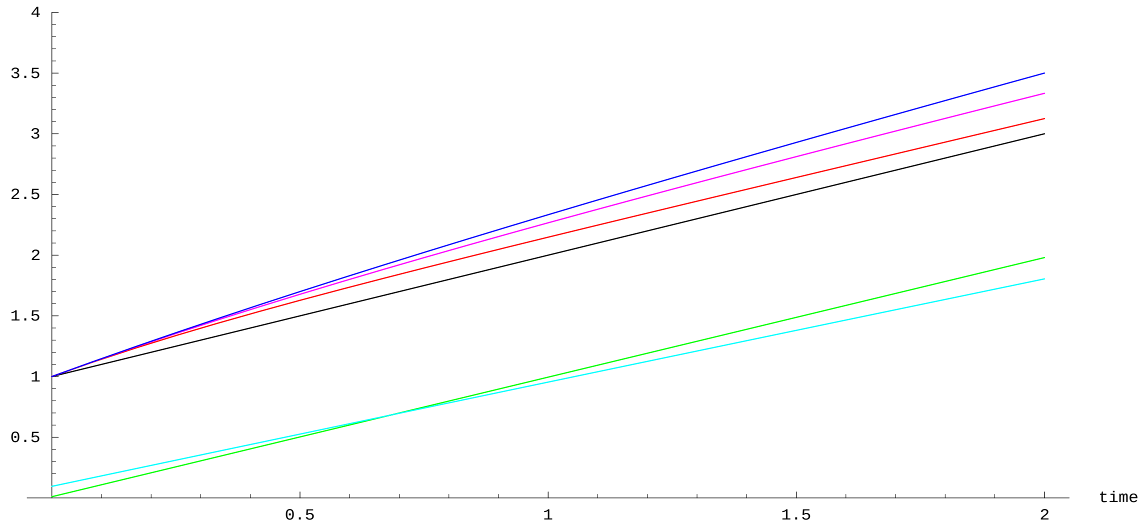
Για τιμές του x μεγαλύτερες του 99 τα φράγματα L_2 και L_8 συμπίπτουν (με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων) και αποκτούν την ίδια τιμή με το L_{12} όταν το x ξεπεράσει τη τιμή 999. Η συμπεριφορά αυτή των φραγμάτων είχε παρατηρηθεί και στις περιπτώσεις που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθούσε την μείξη εκθετικών αλλά και τη Weibull κατανομή, με τη διαφορά ότι η ταύτιση των L_2, L_8 και L_{12} γινόταν σε πιο σύντομο χρονικό διάστημα. Η ¨καθυστέρηση' αυτή οφείλεται στη βαριά ουρά που αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της κατανομής Pareto. Τέλος και σε αυτή την περίπτωση το L_{12} αποτελεί το συνολικά καλύτερο φράγμα σε σχέση με τα L_2, L_8, $L_{Geom,5}$ και το L_8 να αποτελεί το δεύτερο καλύτερο σε σειρά ακρίβειας.



Σχήμα 5.22: Γραφική παράσταση των $L_1(x)(\bullet)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p = 0.1)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p = 0.001)$, $L_{Geom,1}(x)$ $(\bullet)(p = 0.5)$ για τη Pareto$(3, 2)$



Σχήμα 5.23: Γραφική παράσταση των $L_1(x)(\bullet)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p = 0.1)$, $L_{Geom,1}(x)(\bullet)(p = 0.001)$, $L_{Geom,1}(x)$ $(\bullet)(p = 0.5)$ για τη Pareto$(3, 2)$



Σχήμα 5.24: Γραφική παράσταση των $L_2(x)(\bullet)$, $L_8(x)(\bullet)$, $L_{Geom,5}(x)(\bullet)(p = 0.01)$, $L_{Geom,5}(x)(\bullet)(p = 0.1)$ $L_{12}(x)$ $(\bullet)$, $U_{11}(x)(\bullet)$, για τη Pareto$(3, 2)$

x	$L_2(x)$	$L_8(x)$	$L_{12}(x)$	$U_{11}(x)$
0	1	1	-	-
0.1	1.1	1.14319	1.14646	1.14762
0.2	1.2	1.27513	1.28658	1.29091
0.3	1.3	1.39863	1.42133	1.43043
0.4	1.4	1.51574	1.55152	1.56667
0.5	1.5	1.628	1.67778	1.7
1	2	2.14815	2.26667	2.33333
1.5	2.5	2.63994	2.81169	2.92857
2	3	3.125	3.33333	3.5
2.5	3.5	3.60974	3.84188	4.05556
3	4	3.9986	4.34286	4.6
4	5	5.07407	5.33333	5.66667
5	6	6.05831	6.31746	6.71429
6	7	7.04688	7.3	7.75
7	8	8.03841	8.28283	8.77778
10	11	11.0231	11.2381	11.8333
20	21	21.0075	21.1515	21.9091
50	51	51.0014	51.0712	51.9615
98	99	99.0004	99.0384	99.98
99	100	100	100.038	100.98
100	101	101	101.038	101.98
900	901	901	901.004	901.998
998	999	999	999.004	999.998
999	1000	1000	1000	1001
1000	1001	1001	1001	1002

Πίνακας 5.9:

x	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-1})$	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-2})$	$L_{Geom,5}(x)(p=10^{-6})$
0	0.09539	0.00995041	$1.00011 \cdot 10^{-6}$
0.1	0.181634	0.108464	0.100001
0.2	0.2678	0.206977	0.200001
0.3	0.353886	0.305488	0.300001
0.4	0.439891	0.403999	0.4
0.5	0.525815	0.502508	0.5
0.6	0.611658	0.601017	0.6
0.7	0.697418	0.699525	0.7
1	0.954198	0.995042	0.999999
1.5	1.38045	1.48755	1.5
2	1.8045	1.98003	2
2.5	2.22624	2.47249	2.5
3	2.64559	2.96493	3
4	3.47673	3.94972	3.99999
5	4.29714	4.93441	4.99999
6	5.10602	5.919	5.99999
7	5.90253	6.90349	6.99999
10	8.20901	9.85631	9.9999
20	15.7762	19.6919	20
50	22.2355	49.1225	49.9999
98	22.8491	95.8928	97.9999
99	22.8496	96.8618	98.9999
100	29.85	97.8306	99.9999

Πίνακας 5.10:

Κεφάλαιο 6

Φράγματα και εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση που προκύπτουν από τη σχέση 5.4 στην περίπτωση που γνωρίζουμε την ακριβή τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τη μέθοδο των Politis και Koutras (2005) στα άνω φράγματα του Brown (1990) για τη γενική περίπτωση που γνωρίζουμε μόνο τις δύο πρώτες ροπές καθώς επίσης και όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων ανήκει στις οικογένειες NBUE και NWUE, θα προκύψουν βελτιωμένα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας και επομένως και για την ανανεωτική συνάρτηση.

6.1 Πιθανότητα χρεοκοπίας και φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, συγκεκριμένα :

$$\psi(u) = 1 - \delta(u) = Pr(L > u) = ... = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k \overline{H}^{*k}(u) \tag{6.1}$$

με

$$L = \sum_{i=1}^{K} L_i, \quad K \sim Geo(\delta(0))$$

Συνεπώς η (5.4) αποτελεί μια βασική σχέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να γεφυρωθούν τα φράγματα της πιθανότητας χρεοκοπίας με αυτά της ανανεωτικής συνάρτησης. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εφαρμογή στην οποία γνωρίζουμε την ακριβή τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Εφαρμογή (Gerber H, Goovaerts M, Kaas R (1987))

Αν υποθέσουμε ότι τα ύψη X_i αποζημίωσης ακολουθούν το συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών (βλέπε Κεφάλαιο 3) με παραμέτρους 3, 4 αντίστοιχα και συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x) = 4 \cdot 3e^{-3x} - 3 \cdot 4e^{-4x}$$

Θα μελετήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και τα φράγματα που μπορεί να προκύψουν για την ανανεωτική συνάρτηση στις περιπτώσεις που το περιθώριο ασφαλείας είναι :

1. $\theta_1 = \frac{5}{7}$
2. $\theta_2 = \frac{p}{1-p} = \frac{0.0001}{1-0.0001} \cong 0.0001001 \; (p = 0.0001)$

Με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica υπολογίζουμε:

1. $F_{X_i}(x) = 1 - e^{-4x}\left(4e^x - 3\right)$
2. $E(X_i) = \frac{7}{12}$
3. Αν συμβολίσουμε με L_i την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό, τότε όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των L_i (υπενθυμίζουμε ότι είναι ισόνομες), δίνεται από :
4. $F_{L_i}(x) = \frac{1}{E(X_i)} \int_0^x \overline{F}_{X_i}(t)dt = 1 - \frac{1}{7}e^{-4x}\left(16e^x - 9\right) = H(x)$
5. $f_{L_i}(x) = \frac{dF_{L_i(x)}}{dx} = \frac{12}{7}e^{-4x}\left(4e^x - 3\right) = \frac{16}{7}3e^{-3x} - \frac{9}{7}4e^{-4x}$
   Επομένως παρατηρούμε πως και η κατανομή των L_i είναι συνδυασμός δύο εκθετικών κατανομών.
6. Αν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων θεωρηθεί ίδια με αυτή των L_i τότε :
   $$U(x) = \frac{144e^{\frac{-37x}{7}} + 3108x + 1225}{1369}$$

Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας για τη μείξη των δύο εκθετικών κατανομών με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφτηκε στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου 3, δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

1. Όταν το περιθώριο ασφαλείας ισούται με θ_1 :

$$\psi(x) = \frac{5}{8}e^{-x} - \frac{1}{24}e^{-5x}$$

2. Όταν το περιθώριο ασφαλείας ισούται με θ_2 :

$$\psi(x) = 0.999911e^{-0.000227029x} - 0.0000105186e^{-5.28566x}$$

Επομένως γνωρίζοντας τη πιθανότητα χρεοκοπίας μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση με τη βοήθεια της σχέσης (5.4) :

1.

$$L_{R,1}(x) := \frac{ln\left(\frac{5}{8}e^{-x} - \frac{1}{24}e^{-5x}\right)}{ln(7/12)} \tag{6.2}$$

2.

$$L_{R,2}(x) := \frac{ln\left(0.999911e^{-0.000227029x} - 0.0000105186e^{-5.28566x}\right)}{ln(1-0.0001)} \tag{6.3}$$

Υπολογίζοντας τη βαθμίδα αποτυχίας των L_i

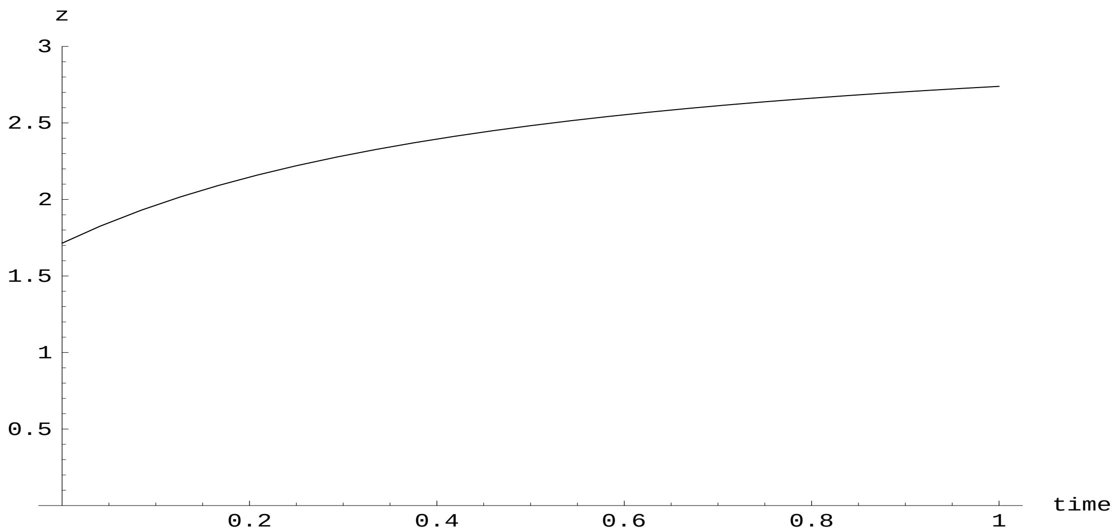
$$\lambda(t) = \frac{f_{L_i}(t)}{1 - F_{L_i}(t)} = 3 + \frac{9}{9 - 16e^t}$$

παρατηρούμε (Σχήμα 6.1) πως είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου και επομένως ο συνδυασμός των εκθετικών κατανομών που μελετάμε ανήκει στην IFR οικογένεια κατανομών. Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε το νέο αυτό φράγμα με τα ήδη γνωστά κάτω φράγματα $L_1(x)$ (γενικό), $L_3(x)$ (IFR) και $L_9(x)$ (IFR). που δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

- $$L_1(x) = \frac{84x}{37}$$

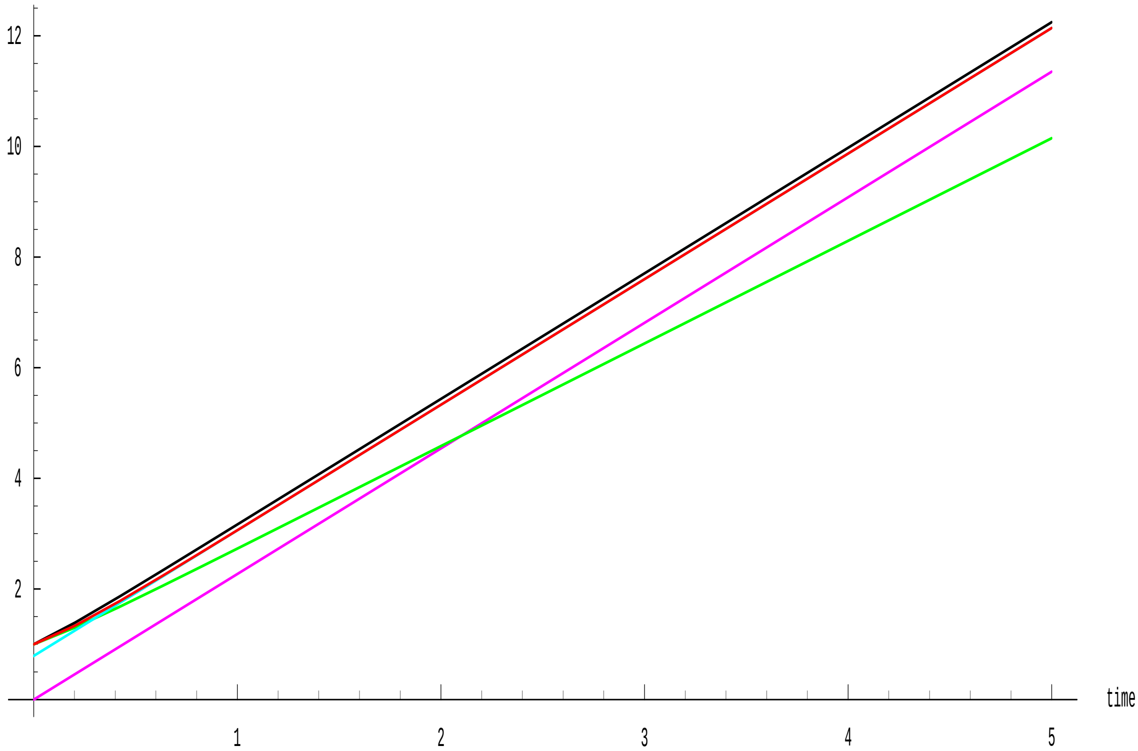
- $$L_3(x) = \frac{84x}{37} + \frac{1081}{1369}$$

- $$L_9(x) = \frac{e^{-4x}\left(2736 - 720e^{x} + 7e^{4x}(1081 + 3108x)\right)}{9583}$$



Σχήμα 6.1: Γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας ($\lambda(t)$) για το Συνδυασμό των εκθετικών κατανομών.

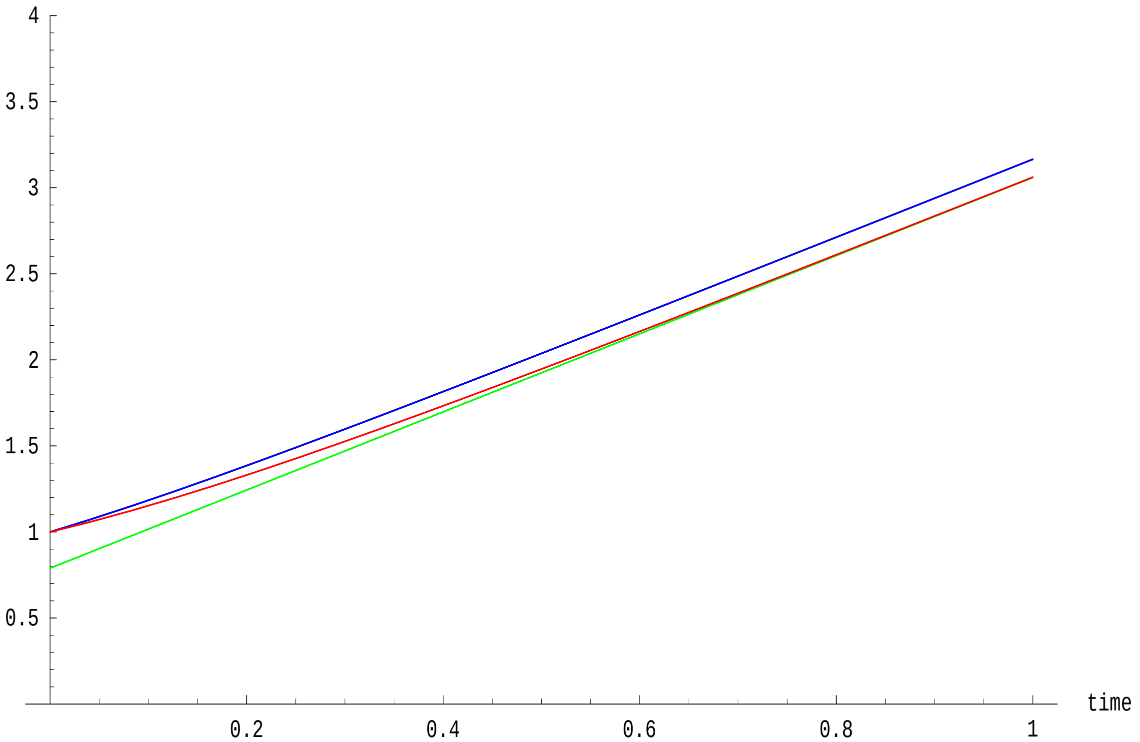
Τα Σχήματα 6.2, 6.3 και ο Πίνακας 6.1 μας φανερώνουν πως το φράγμα $L_{R,2}$ που προκύπτει από τη γνώση της πιθανότητας χρεοκοπίας για $p = 0.0001$ είναι καλύτερο μεταξύ των κάτω φραγμάτων L_9 και L_3 για τιμές του x μικρότερες του 1173. Το $L_{R,2}$ είναι πιθανότατα καλύτερο από τα άλλα δυο φράγματα και μετά το 1173 απλά τα φράγματα συμπίπτουν με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων. Στο Σχήμα 6.3 φαίνεται η συμπεριφορά του $L_{R,2}$ όπου η απόσταση του από την ακριβή τιμή της ανανεωτικής συνάρτησης είναι τόσο μικρή σε σχέση με αυτή των άλλων φραγμάτων που φαίνεται σαν να ταυτίζονται. Από τα υπόλοιπα φράγματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1 τα L_9 και L_3 είναι καλύτερα σε σχέση με τα L_1 και $L_{R,1}$. Το L_9 είναι πιο ακριβές από το L_3 για τιμές του x μικρότερες του 1.335, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 1.335 η κατάσταση αντιστρέφεται μέχρι τη τιμή $x \cong 2.2$, η οποία αποτελεί το χρονικό σημείο που αρχίζει πρακτικά η ταύτιση των δύο φραγμάτων. Από την άλλη μεριά το φράγμα $L_{R,1}$ τέμνει το L_1 στο χρονικό σημείο $x_0 = 2.10141$. Έτσι, για τιμές του x μικρότερες του x_0 το φράγμα $L_{R,1}$ υπερτερεί έναντι του L_1, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του x_0 συμβαίνει το αντίθετο. Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου το $L_{R,2}$ ασυμπτωτικά για τιμές του $p \to 0$, παρουσιάζει την πιο ακριβή συμπεριφορά σε σχέση με τα υπόλοιπα φράγματα με τα οποία έγινε η σύγκριση. Βέβαια το φράγμα αυτό για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί απαιτεί : (α) τη γνώση της πιθανότητας χρεοκοπίας που στις περισσότερες των περιπτώσεων η ακριβής τιμή της δεν είναι γνωστή και (β) η πιθανότητα p να είναι κοντά στο μηδέν . Στην περίπτωση που δεν είναι εφικτή η ικανοποίηση των υποθέσεων αυτών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα φράγματα L_3 και L_9 που εμφανίζουν την αμέσως πιο αποδεκτή συμπεριφορά για τη συγκεκριμένη κατανομή των χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων. Αν θα έπρεπε να διαλέξουμε ένα από αυτά τα δύο τότε αυτό θα ήταν το L_9, αφού στο διάστημα που είναι καλύτερο από το L_3, οι διαφορές τους είναι μεγαλύτερες από αυτές που έχουν στο διάστημα που το L_9 είναι πιο ακριβές.



Σχήμα 6.2: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_1(x)$(●), $L_9(x)$ (●), $L_3(x)$(●) και $L_{R,1}(x)$(●) για το Συνδυασμό των εκθετικών κατανομών με $p = 5/12$

x	$U(x)$	$L_1(x)$	$L_{R,1}(x)$	$L_3(x)$	$L_9(x)$	$L_{R,2}(x)$
0	1	0	0.615666	0.789627	1	1
0.1	1.18384	0.227027	1.14235	1.01665	1.15237	1.18383
0.2	1.38541	0.454054	1.29948	1.24368	1.33073	1.3854
0.3	1.59744	0.681081	1.46622	1.47071	1.52615	1.59741
0.4	1.81562	0.908108	1.63926	1.69774	1.73275	1.81558
0.5	2.037743	1.13514	1.81646	1.92476	1.94664	2.03739
1.3	3.84627	2.95135	3.28457	3.74098	3.74103	3.84615
1.4	4.07326	3.17838	3.46987	3.96801	3.96793	4.07313
1.5	4.30026	3.40541	3.65525	4.19503	4.19491	4.30012
1.6	4.52727	3.63243	3.84068	4.42206	4.42192	4.52712
2	5.43536	4.54054	4.58264	5.33017	5.33008	5.43517
2.1	5.66238	4.76757	4.76815	5.5572	5.55712	5.66219
2.2	5.88941	4.99459	4.95368	5.78422	5.78416	5.88921
3.1	7.93265	7.03784	6.62343	7.82747	7.82746	7.93237
3.2	8.15968	7.26486	6.80896	8.05449	8.05449	8.15939
3.3	8.38671	7.49189	6.99449	8.28152	8.28152	8.38641
5	12.2462	11.3514	10.1485	12.141	12.141	12.2457
20	46.3002	45.4054	23.3818	46.195	46.195	46.2984
50	114.408	113.514	57.6491	114.303	114.303	114.404
1172	2661.65	2660.76	1339.25	2661.55	2661.55	2661.55
1173	2663.92	2663.03	1340.39	2663.82	2663.82	2663.82
1174	2666.19	2665.3	1341.53	2666.09	2666.09	2666.09
1200	2725.22	2724.32	1371.23	2725.11	2725.11	2725.11

Πίνακας 6.1:



Σχήμα 6.3: Γραφική παράσταση των $L_9(x)$ (●), $L_3(x)$(●) και $L_{R,2}(x)$(●) για το Συνδυασμό των εκθετικών κατανομών με $p = 0.0001$

6.2 Νέα φράγματα για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

Η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε από Politis και Koutras (2005) προκειμένου να υπολογίσουν νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση, μπορεί να εφαρμοστεί και για την βελτίωση των φραγμάτων για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Αν θεωρήσουμε την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής:

$$\psi(x) = \phi\overline{F}(x) + \phi\int_0^x \psi(x-t)dF(t) \tag{6.4}$$

και αντικαταστήσουμε στο δεύτερο μέλος της τα είδη γνωστά φράγματα της $\psi(x)$, τότε προκύπτουν νέα φράγματα με καλύτερη συμπεριφορά για τουλάχιστον μικρές τιμές του x. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη βελτίωση των άνω φραγμάτων που δημοσίευσε ο Brown(1990). Αν θεωρήσουμε πως το γενικό άνω φράγμα $\Psi U_{B,1}$ που όρισε ο Brown (1990) αποτελείται από δύο μέρη, ένα σταθερό όρο και ένα εκθετικό, τότε αυτό θα έχει τη μορφή :

$$\Psi U_{B,1}(x) = e^{-Bx} + C \tag{6.5}$$

Θεώρημα 10. *Ένα άνω φράγμα για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (πιθανότητα χρεοκοπίας) είναι το εξής:*

$$\psi(x) = \overline{F}_{Y_0}(x) \le \phi e^{-Bx}\left(1 + B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt\right) := \Psi U_{NB,1}(x), \tag{6.6}$$

$\forall x \ge 0.$

Επιπλέον το φράγμα αυτό είναι καλύτερο από το αντίστοιχο $\Psi U_{B,1}(x)$ του Brown (1990) για κάθε x που ικανοποιεί την παρακάτω ανίσωση :

$$B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt \le \frac{1}{\phi} + \frac{C\overline{F}(x)}{\phi e^{-Bx}} - 1$$

Απόδειξη

Τοποθετώντας την (6.5) στην (6.4) έχουμε :

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \phi\overline{F}(x) + \phi \int_0^x \left(e^{-B(x-t)} + C\right) dF(t) \\
&= \phi\overline{F}(x) + \phi \int_0^x (e^{-B(x-t)} dF(t) + CF(x) \\
&= \phi\overline{F}(x) + \phi e^{-Bx} \int_0^x e^{Bt} dF(t) + CF(x) \\
&= \phi\overline{F}(x) - \phi e^{-Bx} \int_0^x e^{Bt} d\left(1 - F(t)\right) + CF(x) \\
&= \phi\overline{F}(x) - \phi e^{-Bx} \left[e^{Bt}\overline{F}(t)\right]_0^x + \phi e^{-Bx} B \int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt + CF(x) \\
&= \phi\overline{F}(x) - \phi e^{-Bx} e^{Bx}\overline{F}(x) + \phi e^{-Bx} + \phi e^{-Bx} B \int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt + CF(x) \\
&= \phi e^{-Bx} + \phi e^{-Bx} B \int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt + CF(x) \\
&= \phi e^{-Bx} \left[1 + B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt\right] + CF(x)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Psi U_{NB,1}(x) \leq \Psi U_{B,1}(x)$$

$$\phi e^{-Bx} \left[1 + B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt\right] + CF(x) \leq e^{-Bx} + C$$

$$\left[1 + B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt\right] \leq \frac{e^{-Bx} + C\overline{F}(x)}{\phi e^{-Bx}}$$

$$B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt \leq \frac{e^{-Bx} + C\overline{F}(x)}{\phi e^{-Bx}} - 1$$

$$B\int_0^x e^{Bt}\overline{F}(t)dt \leq \frac{1}{\phi} + \frac{C\overline{F}(x)}{\phi e^{-Bx}} - 1$$

Παρατήρηση

1. Στην περίπτωση του γενικού άνω φράγματος, έχουμε : $B = \frac{p}{(1-p)\mu}$ και $C = \frac{\gamma p}{(1-p)}$

2. Το θεώρημα που αναφέραμε ισχύει και για τα άνω φράγματα που όρισε ο Brown (1990) στις περιπτώσεις που η υφιστάμενη κατανομή ανήκει στις οικογένειες κατανομών NBUE ($B = \frac{p}{\mu}$, $C = 0$) και NWUE ($B = \frac{p}{\mu}$, $C = p\rho_X$).

Στη συνέχεια μέσω της παρακάτω εφαρμογής θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των άνω φραγμάτων για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής που προκύπτουν από τα αντίστοιχα άνω φράγματα του Brown με τη μεθοδολογία που περιγράψαμε καθώς και τη μεταφορά τους σε κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση.

Εφαρμογή

Αν υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές L_i που εκφράζουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος σε σχέση με το προηγούμενο αποθεματικό ακολουθούν τη κατανομή Gamma(2,2) τότε, για τη πιθανότητα χρεοκοπίας υπάρχουν τα εξής φράγματα:

- Γενικά φράγματα

  1. Το φράγμα που έχει προτείνει ο Brown(1990), είναι το:

  $$U_{B,1}(x) = 0.0000750075 + e^{-0.00010001x} \quad (p = 0.0001)$$

  2. Το νέο φράγμα που προκύπτει από την (6.4) είναι το :

  $$U_{NB,1}(x) = 0.000075e^{-0.00010001x} + e^{-2x}(-0.000175008 - 0.000250005x) \quad (p = 0.0001)$$

- Άνω φράγματα για IFR κατανομή

  1. Το φράγμα που δημιούργησε ο Brown(1990) είναι το :

  $$U_{B,5}(x) = 0.9999e^{0.00005-0.0001x} \quad (p = 0.0001)$$

  2. Το βελτιωμένο φράγμα για την IFR κατανομή δίνεται από τον τύπο :

  $$U_{NB,2}(x) = 0.99995e^{-0.0001x} + e^{-2x}(-0.0000499937 + 7.49983 \cdot 10^{-9}x \quad (p = 0.0001)$$

Από τα παραπάνω άνω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας (ουρά σύνθετης γεωμετρικής κατανομής) προκύπτουν τα εξής κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση:

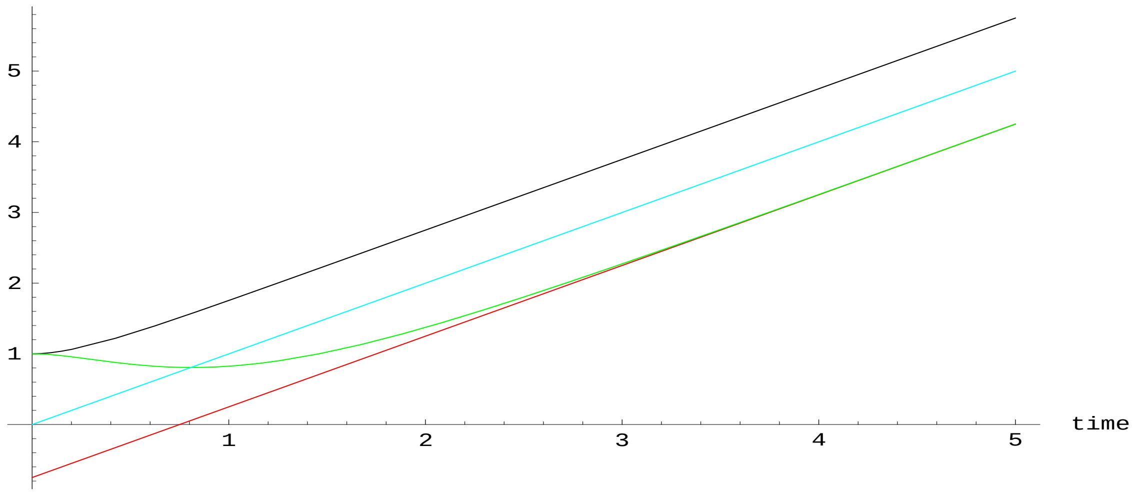
- Γενικά κάτω φράγματα

  1. $L_1(x) = x$
  2. $L_{Geom,1}(x) = -9999.5ln\left(0.0000750075 + e^{-0.00010001x}\right)$

3. $L_{NGeom,1}(x) = 0.000075 + e^{-0.00010001x} + e^{-2x}(-0.000175008 - 0.000250005x)$

- Κάτω φράγματα για IFR κατανομή

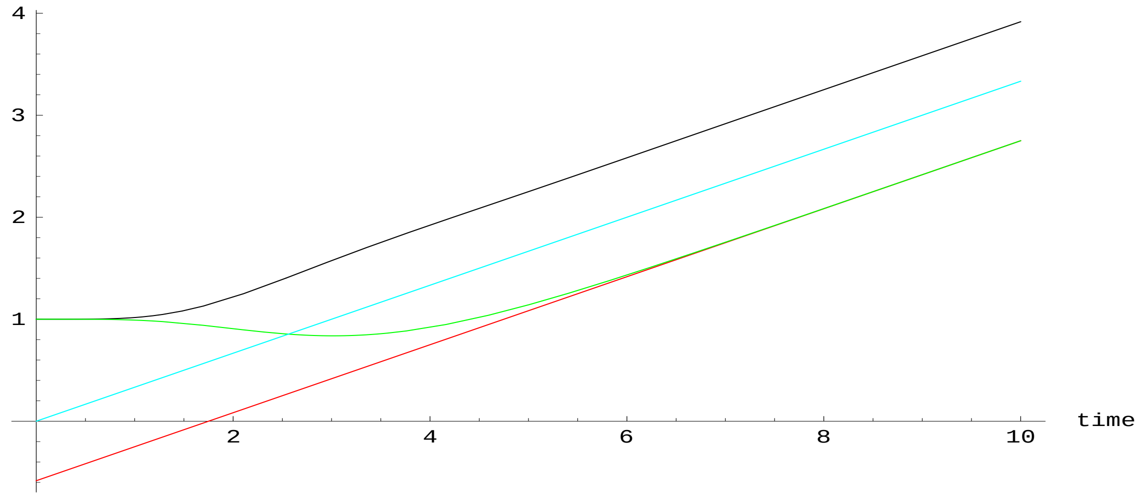
1. $L_3(x) = x + \frac{1}{2}$
2. $L_9(x) = \frac{1}{2} + x + \frac{e^{-2x}}{2}$
3. $L_{Geom,4}(x) = 0.500025 - 9999.5ln\left(e^{-0.0001x}\right)$
4. $L_{NGeom,4}(x) = -9999.5ln\left(0.99995e^{-0.0001x} + e^{-2x}(-0.0000499937 + 7.49983 \cdot 10^{-9}x)\right)$



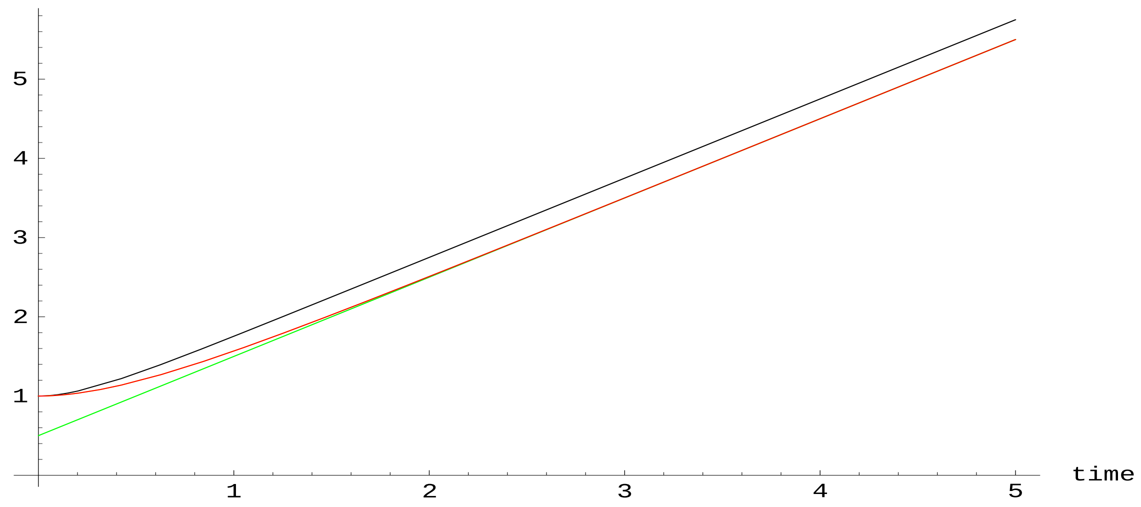
Σχήμα 6.4: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_{Geom,1}(x)$ (●),$L_1(x)$(●) και $L_{NGeom,1}(x)$(●) για τη Gamma(2,2) με $p = 0.0001$

Στον πίνακα 6.2 φαίνονται το γενικό άνω φράγμα ($U_{B,1}$) και το φράγμα για IFR ($U_{B,5}$) κατανομές καθώς επίσης και οι αντίστοιχες βελτιώσεις τους ($U_{NB,1}$,$U_{NB,5}$, αντίστοιχα). Παρατηρούμε ότι για τιμές του x μικρότερες του 3.8 το βελτιωμένο φράγμα $U_{NB,1}$, είναι πιο ακριβές από το $U_{B,1}$, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 3.8 τα δύο αυτά φράγματα πρακτικά ταυτίζονται. Όμοια είναι η κατάσταση και για τα IFR φράγματα, όπου το $U_{NB,5}$ παρουσιάζει μικρότερες τιμές από το $U_{B,5}$ όταν το x είναι μικρότερο του 2.2, ενώ για x μεγαλύτερο του 2.2 και αυτά τα φράγματα ταυτίζονται. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή του p, τόσο τα φράγματα καθυστερούν να πέσουν αισθητά κάτω από την μονάδα. Το φαινόμενο αυτό εξηγείται από το γεγονός πως η πιθανότητα p αντιστοιχεί στην πιθανότητα μη χρεοκοπίας ($\delta(0)$), επομένως ισχύει:

$$p \to 0 \quad \Rightarrow \psi(0) \to 1$$



Σχήμα 6.5: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_{Geom,1}(x)$ (●),$L_1(x)$(●) και $L_{NGeom,1}(x)$(●) για τη Gamma(6,2) με $p = 0.0001$



Σχήμα 6.6: Γραφική παράσταση των $U(x)$ (●), $L_{NGeo,4}(x)$ (●),$L_9(x)$(●) και $L_3(x)$(●) για για τη Gamma(2,2) με $p = 0.0001$

τέλος κάτι που ήταν αναμενόμενο και φαίνεται στον Πίνακα 6.2 είναι ότι τα φράγματα που κατασκευάζουμε γνωρίζοντας ότι η κατανομή είναι IFR, είναι πιο ακριβή από τα αντίστοιχα γενικά, δηλαδή :

$$U_{B,1} > U_{NB,1} > U_{B,5} > U_{NB,5}$$

Ο Πίνακας 6.3 και το Σχήμα 6.4 παρουσιάζουν τα γενικά κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση, L_1, $L_{Geom,1}$ και $L_{NGeom,1}$, όταν ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων ακολουθεί τη Gamma(2,2). Παρατηρούμε πως το φράγμα $L_{Geom,1}$ δίνει αρνητικές τιμές όταν το x είναι μικρότερο του 0.8. Με αποτέλεσμα το χαρακτηριστικό του αυτό να το καθιστά δύσχρηστο. Το $L_{NGeom,1}$, που αποτελεί βελτίωση του $L_{Geom,1}$, έχει καλύτερη συμπεριφορά, αφού έχει εξαλείψει το ελάττωμα του $L_{Geom,1}$, δίνοντας μας θετικές τιμές για x μικρότερο του 0.8. Πρέπει να επισημάνουμε ότι όταν το x ξεπεράσει το 8 τα δύο αυτά φράγματα ταυτίζονται. Το $L_1(x)$ τέμνει το $L_{NGeom,1}$ στο σημείο $x_0 = 0.807058$. Έτσι, για τιμές του x μικρότερες του 0.8 το $L_{NGeom,1}$ είναι μεγαλύτερο από το L_1, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 0.8 η κατάσταση αντιστρέφεται. Η επιλογή ενός από τα L_1 και $L_{NGeom,1}$ εξαρτάται από τον χρονικό ορίζοντα που θέλουμε να κάνουμε πρόβλεψη. Για μακροχρόνιες προβλέψεις συνολικά καλύτερη συμπεριφορά έχει το L_1, ενώ για βραχυχρόνιες έχει το $L_{NGeom,1}$. Το σημείο τομής των $L_{NGeom,1}$ και L_1μπορεί να μετατοπιστεί προς τα δεξιά με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της κατανομής. Στο Σχήμα 6.5 φαίνεται η περίπτωση της κατανομής Gamma(6,2), όπου το σημείο τομής βρίσκεται στο $x_1 = 2.56116$.

Ο Πίνακας 6.4 και το Σχήμα 6.6 περιγράφουν τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε την IFR ιδιότητα της κατανομής Gamma(2,2). Παρατηρούμε πως τα φράγματα L_9 και $L_{NGeom,4}$ ταυτίζονται (με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για τιμές του x μικρότερες του 0.5. Ενώ για τιμές του x μεγαλύτερες του 0.5, το L_9 υπερτερεί σε ακρίβεια έναντι του $L_{NGeom,4}$ με τη διαφορά τους να είναι της τάξης του 10^{-4} (στο σχήμα 6.6 τα δύο φράγματα ταυτίζονται). Το ίδιο συμβαίνει και για τα L_3 και $L_{Geom,4}$, με το L_3 να έχει τιμές μεγαλύτερες όταν το x είναι μεγαλύτερο της μονάδας, ενώ για χρονικές στιγμές μικρότερες της μονάδας η κατάσταση αντιστρέφεται. Όταν το x γίνει μεγαλύτερο της μονάδας τότε τα L_3 και L_9 ταυτίζονται (με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων). Όμοια και τα $L_{Geom,4}$ και $L_{NGeom,4}$ ταυτίζονται για τιμές του x μεγαλύτερες του 10. Τέλος θα λέγαμε πως συνολικά την καλύτερη συμπεριφορά παρουσιάζει το $L_9(x)$ με μικρή διαφορά από το $L_{NGeom,4}$.

x	$U_{B,1}(x)$	$U_{NB,1}(x)$	$U_{B,5}(x)$	$U_{NB,5}(x)$
0	1.00008	0.9999	0.99995	0.9999
1	1.00007	0.999901	0.99994	0.999899
0.2	1.00006	0.999904	0.99993	0.999896
0.3	1.00005	0.999908	0.99992	0.999893
0.4	1.00004	0.999911	0.99991	0.999888
0.5	1.00003	0.999915	0.9999	0.999882
0.9	0.999985	0.999919	0.99986	0.999852
1	0.999975	0.999917	0.99985	0.999843
1.1	0.999965	0.999915	0.99984	0.999834
2.2	0.999855	0.999846	0.99973	0.999729
2.3	0.999845	0.999837	0.99972	0.99972
2.4	0.999835	0.999829	0.99971	0.99971
3.7	0.999705	0.999704	0.99958	0.99958
3.8	0.999695	0.999694	0.99957	0.99957
3.9	0.999685	0.999685	0.99956	0.99956
4	0.999675	0.999675	0.99955	0.99955
5	0.999575	0.999575	0.99945	0.99945
20	0.998077	0.998077	0.997952	0.997952
50	0.995087	0.995087	0.994863	0.994963
100	0.990124	0.990124	0.99	0.99
1000	0.904903	0.904903	0.904792	0.904792
10000	0.367918	0.367918	0.367861	0.367861
20000	0.135383	0.135383	0.135329	0.135329
50000	0.00680959	0.00680958	0.00673761	0.00673761

Πίνακας 6.2:

x	$U(x)$	$L_1(x)$	$L_{Geom,1}(x)$	$L_{NGeom,1}(x)$
0	1	0	-0.750009	1
0.1	1.01758	0.1	-0.650012	0.987461
0.2	1.06233	0.2	-0.550014	0.958218
0.3	1.1253	0.3	-0.450017	0.922025
0.4	1.20047	0.4	-0.350019	0.885649
0.5	1.28383	0.5	-0.250022	0.853631
0.6	1.37268	0.6	-0.150024	0.828873
0.7	1.4652	0.7	-0.0500269	0.813079
0.8	1.56019	0.8	0.0499706	0.8071
0.9	1.65683	0.9	0.149968	0.811182
1	1.75458	1	0.249966	0.82516
1.1	1.85307	1.1	0.349963	0.848597
1.2	1.95206	1.2	0.449961	0.88089
1.3	2.05138	1.3	0.549958	0.921345
1.4	2.15092	1.4	0.649956	0.969227
1.5	2.25062	1.5	0.749953	1.0238
2	2.75008	2	1.24994	1.37358
3	3.75	3	2.24992	2.27285
4	4.75	4	3.24989	3.25383
5	5.75	5	4.24987	4.25051
6	6.75	6	5.24984	5.24994
7	7.75	7	6.24982	6.24983
8	8.75	8	7.24979	7.24979
9	9.75	9	8.24977	8.24977
20	20.75	20	19.2495	19.2495
50	50.75	50	49.2487	49.2487

Πίνακας 6.3:

x	$U(x)$	$L_3(x)$	$L_9(x)$	$L_{Geom,4}(x)$	$L_{NGeom,4}(x)$
0	1	0.5	1	0.500025	1
0.1	1.01758	0.6	1.00937	0.60002	1.00937
0.3	1.1253	0.8	1.07441	0.80001	1.07441
0.4	1.20047	0.9	1.12466	0.900005	1.12466
0.5	1.28383	1	1.18394	1	1.18394
0.6	1.37268	1.1	1.2506	1.09999	1.25059
0.7	1.4652	1.2	1.3233	1.19999	1.32329
0.8	1.56019	1.3	1.40095	1.29998	1.40094
0.9	1.65683	1.4	1.48265	1.39998	1.48264
1	1.75458	1.5	1.56767	1.49997	1.56766
1.1	1.85307	1.6	1.6554	1.59997	1.65539
1.2	1.95206	1.7	1.74536	1.69996	1.74534
1.3	2.05138	1.8	1.83714	1.79996	1.83711
1.4	2.15092	1.9	1.93041	1.89995	1.93038
1.5	2.25062	2	2.02489	1.99995	2.02486
2	2.75008	2.5	2.50916	2.49992	2.50911
2.5	3.25001	3	3.00337	2.9999	3.00329
3	3.75	3.5	3.50124	3.49987	3.50114
4.5	5.25	5	5.00006	4.99989	4.9998
5	5.75	5.5	5.50002	5.49982	5.49977
6	6.75	6.5	6.5	6.49975	6.49972
7	7.75	7.5	7.5	7.4997	7.49967
8	8.75	8.5	8.5	8.49965	8.49962
9	9.75	9.5	9.5	9.4996	9.49957
10	10.75	10.5	10.5	10.4995	10.4995
11	11.75	11.5	11.5	11.4995	11.4995
20	20.75	20.5	20.5	20.499	20.499
50	50.75	50.5	50.5	50.4975	50.4975
100	100.75	100.5	100.5	100.495	100.495
1000	1000.75	1000.5	1000.5	1000.45	1000.45

Πίνακας 6.4:

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάσαμε τα κυριότερα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση. Συνοψίζοντας έχουμε τα εξής συμπεράσματα :

1. Τα φράγματα που παρουσίασαν οι Politis και Koutras (2005) (Κεφάλαιο 4) αποτελούν βελτίωση των φραγμάτων από τα οποία προήλθαν κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τα χαρακτηριστικά της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των ανανεώσεων. Η βελτίωση αυτή ισχύει τουλάχιστον για μια περιοχή γύρω από το μηδέν, ενώ η συμπεριφορά των φραγμάτων είναι ίδια ασυμπτωτικά. Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής επαναληπτικά μπορεί να μας δώσει για ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων καλύτερα φράγματα σε σχέση με αυτά από τα οποία προήλθαν.

2. Η μέθοδος κατασκευής κάτω φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση χρησιμοποιώντας άνω φράγματα της πιθανότητας χρεοκοπίας (ουρά σύνθετης γεωμετρικής κατανομής) (Κεφάλαιο 5) έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

    - Η ακρίβεια των φραγμάτων για την ανανεωτική συνάρτηση εξαρτάται από την αντίστοιχη ακρίβεια των φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας.
    - Τα κάτω φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση που προκύπτουν αποκτούν τη μέγιστη ακρίβεια τους ως προς την παράμετρο p ασυμπτωτικά για $p \to 0$.
    - Τα φράγματα που προέρχονται από αυτά της πιθανότητας χρεοκοπίας στις περισσότερες περιπτώσεις έχουν την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά με τα ήδη γνωστά φράγματα.
    - Η μεθοδολογία αυτή συνδέει άμεσα την ανανεωτική θεωρία με την θεωρία χρεοκοπίας

3. Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν οι Politis και Koutras (2005) για τον υπολογισμό νέων φραγμάτων εισάγοντας τα ήδη γνωστά φράγματα στην αντίστοιχη ανανεωτική εξίσωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την βελτίωση των άνω φραγμάτων της πιθανότητας χρεοκοπίας του Brown (1990) (Κεφάλαιο 6), αντικαθιστώντας τα φράγματα αυτά στην αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η βελτίωση αυτή θα οδηγήσει και σε νέα φράγματα για την ανανεωτική συνάρτηση με τη μέθοδο που περιγράφτηκε στο Κεφάλαιο 5.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

- **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α** : Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes
- **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β** : Συνελίξεις
- **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ** : Μετασχηματισμοί Laplace και Laplace-Stieltjes
- **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ** : Υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης σε περιβάλλον Mathematica
- **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε** : Οι κυριότεροι τύποι γήρανσης

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Ορισμός 1. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με g αύξουσα συνάρτηση. Τότε η f λέγεται RS-ολοκληρώσιμη,ως προς την αύξουσα συνάρτηση g αν ισχύει :*

$$sup\,\{L(f, g, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = inf\,\{U(f, g, Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a, b]\} := I$$

όπου :

$$L(f, g, P) = \sum_{i=0}^{n} inf_{x\in[t_i - t_{i-1}]} f(x)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

και

$$U(f, g, P) = \sum_{i=0}^{n} sup_{x\in[t_i - t_{i-1}]} f(x)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

Θα συμβολίζουμε τον αριθμό I που αντιστοιχεί στο RS- ολοκήρωμα της g ως προς την f με :

$$I = \int_a^b f(x)dg(x)$$

Ορισμός 2. *Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε ως κύμανση της g τον αριθμό :*

$$V_a^b(g) = sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1}| : \quad P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b, \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$$

Ο ορισμός του ολοκληρώματος R-S επεκτείνεται και για συναρτήσεις που έχουν φραγμένη κύμανση.

Πρόταση 1. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ όπου f μονότονη συνάρτηση και g συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, ώστε η f να είναι R-S ως προς την g, τότε και η g είναι R-S ολοκληρώσιμη ως προς την f και ισχύει :*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = -\int_a^b g(x)df(x) + f(b)g(b) * f(a)g(a) \tag{7.1}$$

Η σχέση (7.1) ισχύει και στην περίπτωση που οι f,g είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης και επιπλέον η f είναι συνεχής.

Βασικές Ιδιότητες του ολοκληρώματος R-S

1. $\int_a^b df(x) = V_a^b(f)$

2. Αν η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε ισχύει : $\int_a^b fdg(x) = \int_a^b fg^{'}(x)dx$

3. $\int_a^b (f+g)dk(x) = \int_a^b fdk(x) + \int_a^b gdk(x)$

4. $\int_a^b fd(g+k)(x) = \int_a^b fdg(x) + \int_a^b fdk(x)$

5. $\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Συνελίξεις

Ορισμός 1. *Έστω, οι συναρτήσεις* $f, g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$. *Αν η g είναι αύξουσα και η h(x)=f(t-x) είναι Riemman-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την g, τότε ορίζεται η συνέλιξη των f και g, ως εξής :*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)dg(x) + f(x)g(0) \equiv \int_{0^-}^t f(t-x)dg(x)$$

Ορισμός 2. *Ορίζουμε σαν κ-τάξης συνέλιξη της f με τον ευατό της, τη συνάρτηση :*

$$f^{*k}(t) = \underbrace{f * f * .... * f}_{k} = \int_0^t f^{*(k-1)}(x)df(x)$$

με $f^{(*1)} = f$ *και* $f^{(*0)} = 1$

Ιδιότητες Συνελίξεων

1. Αν η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g^{'}(x)dx$$

2. Αν f, g είναι αύξουσες συναρτήσεις τότε ισχύει : $f * g = g * f$

3. $(f + g) * h = f * h + g * h$

4. $f * (g + h) = f * g + f * h$

5. $f * (ag)(t) = (af) * g = a(f * g)(t), \;\; a \in \mathbb{R}$

6. Αν f, g είναι αύξουσες συναρτήσεις τότε ισχύει : $f * g \leq f \cdot g$

7. Αν f είναι αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει :$f^{*n} \leq f^n$

8. Αν F,G συναρτήσεις κατανομής μη αρνητικών συνεχών τυχαίων μεταβλητών και $F^{'} = f$, τότε :

$$\frac{d(F*G)(t)}{dt} = (f*G)(t)$$

9. Αν F συνάρτηση κατανομής μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής και $F^{'} = f$, τότε:

$$\frac{d(F^{*n})(t)}{dt} = (f*F^{*(n-1)})(t)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Μετασχηματισμοί Laplace και Laplace-Stieltjes

Ορισμός 1. *(Feller 1971, Vol II) Αν F είναι συνήθης (proper, $\|F\| = 1$) ή ελαττωματική (defective, $\|F\| < 1$) κατανομή πιθανότητας ορισμένη στο $[0, \infty)$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes ορίζεται ως εξής:*

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$$

Ορισμός 2. *Αν X είναι μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F, τότε ορίζουμε σαν μετασχηματισμό Laplace της τυχαίας μεταβλητής X (ή F) τη συνάρτηση που ορίζεται στο $\mathbb{R}_+$ από τον τύπο :*

$$\mathcal{L}(F)(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx$$

Είναι φανερό από τους ορισμούς που δόθηκαν πως ο μετασχηματισμός Laplace είναι ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes. Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes (όμοιες ισχύουν και για τον μετασχηματισμό Laplace).

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes

1. Αν X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα, τότε : $(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) = \widehat{F_1}(\lambda)\widehat{F_2}(\lambda)$
2. $\widehat{F^{*n}}(\lambda) = \left(\widehat{F}(\lambda)\right)^n, \forall n \geq 0$
3. $\mathcal{L}(F)(\lambda) = \lambda^{-1}\widehat{F}(\lambda)$
4. $\mathcal{L}(1-F)(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}(1-F(x))dx = \frac{(1-\widehat{F}(\lambda))}{\lambda}$

5. $\frac{d^n \widehat{F}(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^n dF(x)$

6. Αν X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια $M_X(t)$ τότε ισχύει : $\mathcal{L}(F)(t) = M_X(-t)$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης σε περιβάλλον Mathematica

Αν γνωρίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομή του χρόνου μεταξύ των ανανεώσεων τότε η ανανεωτική συνάρτηση ($U[t]$) δίνεται από τον παρακάτω αλγόριθμο :

$$\begin{aligned} F[u\_] &:= 1 - Integrate[f[x], \{x, 0, u\}]; \\ T[a\_] &:= LaplaceTransForm[F[u], u, a]; \\ U[t\_] &:= InverseLaplaceTransform[(2 * a * T[a] - 1)/(a^2 * T[a]), a, t]; \end{aligned}$$

Αν γνωρίζουμε την πυκνότητα της κατανομής που ακολουθεί ο χρόνος μεταξύ των ανανεώσεων τότε η ανανεωτική συνάρτηση ($Usecond[t]$) δίνεται από τον παρακάτω αλγόριθμο:

$$\begin{aligned} c[s\_] &:= LaplaceTransform[f[x], x, s]; \\ M[s\_] &:= c[s]/(1 - c[s]); \\ h[t\_] &:= InverseLaplaceTransform[M[s], s, t]; \\ Usecond[s\_] &:= 1 + Integrate[h[t], t, 0, s]; \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Οι κυριότεροι τύποι γήρανσης

Ορισμός 1. *Έστω, X μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f, τότε ορίζουμε σαν βαθμίδα αποτυχίας (failure rate) τη θετική συνάρτηση $\lambda(t)$, με τύπο :*

$$\lambda(t) = \frac{F^{'}(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)},$$

$\forall t \geq 0.$

Ορισμός 2. *Έστω, X μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, τότε η συνάρτηση κινδύνου ορίζεται από τον τύπο :*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

$\forall t \geq 0.$

Στον Πίνακα7.1 φαίνονται όλες οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες:

$$f(t), F(t), \Lambda(t) \text{ και } \lambda(t).$$

	$\lambda(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$\Lambda(t)$
$\lambda(t)$	-	$\frac{F^{'}(t)}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_{t=0}^{\infty} f(s)ds}$	$\Lambda^{'}(t)$
$F(t)$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$	$-$	$\int_0^t f(s)ds$	$1-e^{-\Lambda(t)}$
$f(t)$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(s)}$	$F^{'}(t)$	$-$	$\Lambda^{'}(t)e^{-\Lambda(t)}$
$\Lambda(t)$	$\int_0^t \lambda(s)ds$	$ln(1-F(t)$	$-ln\int_{t=0}^{\infty} f(s)ds$	$-$

Πίνακας 7.1:

Ορισμός 3. *Η τυχαία μεταβλητή T θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα :*

1. *IFR (Increasig Failure Rate), αν η βαθμίδα αποτυχίας της, $\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t.*

2. *DFR (Decreasig Failure Rate), αν η βαθμίδα αποτυχίας της, $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς t.*

Ορισμός 4. *Μια κατανομή F θα ότι έχει την ιδιότητα :*

1. *IFRA (Increasing Failure Rate in Average), αν η συνάρτηση:*

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(s)ds$$

   είναι αύξουσα συνάρτηση του t.

2. *DFRA (Decreasing Failure Rate in Average), αν η συνάρτηση:*

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(s)ds$$

   είναι φθίνουσα συνάρτηση του t.

Ορισμός 5. *Μια κατανομή F θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών:*

1. *NBU (New Better than Used), αν*

$$R(t\,|x) \leq R(t), \;\; \forall t \geq 0, \;\; x \geq 0$$

2. *NWU (New Worse than Used), αν*

$$R(t\,|x) \geq R(t), \;\; \forall t \geq 0, \;\; x \geq 0$$

όπου $\forall t \geq x$:

$$R(t\,|x) = \frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(x)}$$

Ορισμός 6. *Μια κατανομή F θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών:*

1. *NBUE (New Better than Used in Expectation) αν ισχύει :*

   (α′) *Η F, έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ*

   (β′) *Ισχύει η ανισότητα $\forall x \geq 0$:*

$$MTTF_x \leq \mu$$

2. *NWUE (New Worse than Used in Expectation) αν ισχύει :*

   (α΄) *Η F, έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ*

   (β΄) *Ισχύει η ανισότητα $\forall x \geq 0$:*

$$MTTF_x \geq \mu$$

όπου :

- $$MTTF_x = \int_0^{\infty} R(t\,|x)dt,$$

  είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μονάδας που η ηλικία της είναι x.

  και

- $$R(t\,|x) = \frac{Pr(T > t + x)}{Pr(T > x)},$$

  είναι η δεσμευμένη πιθανότητα επιπλέον επιβίωσης μιας μονάδας για χρονικό διάστημα μήκους t δεδομένου ότι η ηλικία της είναι x.

Ορισμός 7. *Μια κατανομή F θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών:*

1. *IMRL (Increasing Mean Residual Life), αν η συνάρτηση:*

$$\frac{\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}$$

   είναι αύξουσα ως προς t.

2. *DMRL (Decreasing Mean Residual Life), αν η συνάρτηση:*

$$\frac{\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}$$

   είναι φθίνουσα ως προς t.

Για τις οικογένειες κατανομών που αναφέραμε παραπάνω ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $$\begin{tikzcd} IFR \arrow[r] & IFRA \arrow[r] \arrow[dr] & NBU \arrow[r] & NBUE \\ & & DMRL \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- $$\begin{tikzcd} DFR \arrow[r] & DFRA \arrow[r] \arrow[dr] & NWU \arrow[r] & NWUE \\ & & IMRL \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε πως η εκθετική κατανομή είναι η μόνη κατανομή που έχει την ιδιότητα να ανήκει τετριμμένα σε όλες τις μη παραμετρικές οικογένειες κατανομών που ορίσαμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Δαμιανού Χ.(1996) *Στατιστικός έλεγχος ποιότητας και αξιοπιστία.* Εκδόσεις Αθανασόπουλος Σ και Παπαδάμης Σ.

2. Κουτσόπουλος, Κ.Ι. (1999) *Αναλογιστικά Μαθηματικά - Θεωρία Κινδύνων.* Εκδόσεις Συμμετρία.

3. Πολίτης, Κ. (2004) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας.* Παν. Πειραιά.

4. Φακίνος, Δ. (1994) *Στοχαστικές μέθοδοι στην επιχειρησιακή έρευνα.* Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία.

5. Χρυσαφίνου Ο. (2004) *Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις.* Εκδόσεις Σοφία.

Β. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Asmussen, S. (2000) *Ruin Probabilities.* Vol 2, World Scientific, Signapore.

2. Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981) *Statistical Theory of Reliability and life Testing. To begin with.* Silver Spring MD.

3. Bowers, N.L, Gerber, H.U, Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (1986) *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries, Ithaca Illinois.

4. Brown, M. (1990) Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions. *J. Appl. Prob*, **18**, 1388-1402.

5. Cox, D. R. (1962) *Renewal Theory.* Methuen, London.

6. Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol 2, 2nd edition, J. Willey, N.Y.

7. Gerber, H.U, Goovaerts, M.J., Kaas, R. (1987) On the probability and severity of ruin. *Astin Bulletin*, 17, 151-163.

8. Grimmet, G. and Stirzaker, D. (2001) *Probability and random processes.* 3rd edition, Oxford University Press.

9. Hoyland, A., Rausand, M. (1994) *System Reliability theory.* J. Willey, N.Y.

10. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2001) *Modern Actuarial Risk Theory.* Kluwer Academic Publishers.

11. Karlin, S., Taylor, H.D. (1975) *A first course in Stochastic Processes.* Acadenic Press, 2nd edition

12. Politis, K., Koutras, M (2005) Some new bounds for the renewal function. *Prob. Eng. Inf. Sciences*, to appear.

13. Resnick, S. (1992) *Adventures in Stochastic Process.* Birkhauser, Boston, MA

14. Rolski, T., Schmidli, H, Schmidt, V. and Teugels, J. (1999) *Stochastic processes for insurance and finance.* J. Willey, N.Y.

15. Ross, S. (1996) *Stochastic Processes.* 2nd edition. J. Willey, N.Y.

16. Shaked, M. and Zhu, H. (1992) Some results on block replacement policies and renewal theory. *J. Appl. Prob.*, **29**, 932-946

17. Tijms H. (2003) *A first course in stochastic models.* J. Willey, N.Y.