ΠΕΤΡΟΥ ΑΠΟΣΤ. ΚΙΟΧΟΥ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΤΗΣ ΡΩΜΗΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Εἰς τὸν Καθηγητήν μου
κ. Δημ. Παπαδημητρίου
Κοσμήτορα τῆς Α.Β.Σ.Π.
εἰς ἔνδειξιν
σεβασμοῦ καὶ ἐκτιμήσεως

Ηλιόπος

ΠΕΤΡΟΥ ΑΠΟΣΤ. ΚΙΟΧΟΥ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΤΗΣ ΡΩΜΗΣ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
1970

"ΠΟΛΥΓΡΑΦΙΚΗ ΠΕΙΡΑΙΩΣ,,
Ν. Δ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ
ΑΓ· ΚΩΝ)ΝΟΥ 3 – ΤΗΛ. 478.852

Πρόλογος

῾Ο Λογισμός τῶν πιθανοτήτων δέν εἶναι μόνον μία μαθηματική θεωρία ἐξασκήσεως τοῦ πνεύματος, ἀλλά ἀποτελεῖ σήμερον τό βάθρον ἐπί τοῦ ὁποίου στηρίζονται διάφοροι ἐφηρμοσμέναι ἐπιστῆμαι καί εὑρίσκει ἐφαρμογήν εἰς ὅλα τά πεδία τῆς ἀνθρωπίνης δραστηριότητος.

Τῷ ὄντι οἱ Οἰκονομολόγοι χρησιμοποιοῦν σήμερον εὐρέως τήν πιθανοθεωρίαν διά τήν μελέτην τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων.

Αἱ ἀσφαλιστικαί ἐπιστῆμαι, (ἤτοι ἡ τεχνική τοῦ μαθηματικοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν Κοινωνικῶν ἀσφαλίσεων, ἡ τεχνική τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἀσφαλίσεων ζωῆς, θανάτου καί ζημιῶν), βασίζονται κατά κύριον λόγον εἰς τόν Λογισμόν τῶν πιθανοτήτων.

῾Ομοίως, οἱ Βιολόγοι, οἱ Κοινωνιολόγοι, οἱ ᾿Αστρονόμοι, οἱ ᾿Ανθρωπολόγοι, οἱ Ψυχολόγοι καί πλεῖστοι ἄλλοι ἐπιστήμονες χρησιμοποιοῦν τήν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων, ἥτις διανοίγει πρό αὐτῶν ἐκτεταμένους ὁρίζοντας.

῾Η Στατιστική τέλος ἀποτελεῖ τήν σπουδαιοτέραν ἐφαρμογήν τοῦ Λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων, ὡς κύριον ὄργανον ἐρεύνης.

῾Η μεγίστη σπουδαιότης καί ἡ ποικιλία τῶν ἐφαρμογῶν τῆς πιθανοθεωρίας εἰς τάς ἐπιστήμας καί τάς ἐπιχειρήσεις προσδίδουν εἰς τόν κλάδον τοῦτον ὁλοέν καί μεγαλυτέραν ἀξίαν.

῞Ενεκα τῆς μεγίστης ταύτης χρησιμότητος τήν ὁποίαν ἔχει καί τήν ὁποίαν προβλέπεται ὅτι θά λάβη εἰς τό μέλλον, ὁ Λονά προΐδωμεν μετά βεβαιότητος τόν άριθμόν έπί τοῦ όποίου ή σφαίρα θά σταματήση, λόγῳ τοῦ ὅτι μία μικρή μεταβολή εἰς τόν τρόπον τῆς ρίψεως (δύναμις, διεύθυνσις κλπ.) δύναται νά μεταβάλη ἐκ νέου τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐμπειρίας.

Ἐάν λοιπόν δώσωμεν μίαν βιαίαν κίνησιν εἰς τήν ρουλέτταν εἰς τρόπον ὥστε νά ἐκτελέση πλῆθος στροφῶν καί νά ὑποστῆ κατά τήν περιστροφήν σύγκρουσιν πρίν σταματήση ἐπί ἑνός ἀριθμοῦ, οὐδείς δύναται νά ἐκτιμήση ποῦ καί ἐπί ποίου ἀριθμοῦ ἡ σφαίρα θά εἶχε σταματήσει.

Τοιοῦτον φαινόμενον ἐνισχύει τήν ἔννοιαν ὅτι αἱ περιπτώσεις αἵτινες δύνανται νά παρουσιασθῶσιν εἶναι ὁμοίως δυναταί ἤ ὁμοίως πιθαναί.

Ὁ Λογισμός τῶν πιθανοτήτων ἐγεννήθη ἐκ τῆς θεωρίας τῶν τυχηρῶν παιγνιδίων. Ἐξ αὐτῆς ὀφείλεται ὁ πρῶτος προσδιορισμός τῆς πιθανότητος καί αἱ πρῶται μέθοδοι τοῦ λογισμοῦ, π.χ. στό παιγνίδι "κορῶνα-γράμματα" λέγομεν ὅτι πιθανότης ὅπως ἔλθη "κορώνα" εἶναι 1/2 καί ἀναλόγως 1/2 "γράμματα".

Οὐδεμία λογική θά ἐπέτρεπε νά ὑποστηρίξωμεν ὅτι θά πρέπει νά ἔρχεται μᾶλλον "κορώνα" παρά "γράμματα". Ὁμοίως μία ἄλλη ἁπλῆ περίπτωσις εἶναι ἡ ρίψις ἑνός κύβου. Ἐάν τόν ρίψωμεν μίαν φοράν, ὑπάρχουν ἕξ ἐξ ἴσου δυνατά ἀποτελέσματα. Μία οἱαδήποτε ἀπό τάς ἕξ ἕδρας δύναται νά ἐμφανισθῆ καί συνεπῶς ὁ ἀριθμός τῶν πιθανῶν σημείων θά κυμαίνεται ἀπό 1 ἕως 6. Καί ἐδῶ ἐπίσης θά συμφωνήσωμεν νά ἀποδώσωμεν ἴσας πιθανότητας καί εἰς τάς ἕξ ἕδρας, οὕτως ὥστε ἑκάστη ἕδρα νά ἔχη πιθανότητα ἐμφανίσεως ἴσην μέ 1/6.

Παρατηροῦμεν ὅθεν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ νομίσματος ὑπάρχουν δύο δυναταί περιπτώσεις, "κορῶνα" ἤ "γράμματα". Καί ἐφ'ὅσον τό νόμισμα εἶναι κατασκευασμένον ὁμοιομόρφως καί συμμετρικῶς καί ἡ ρίψις τοῦ νομίσματος κανονική,δέν ὑφίσταται αἰτία, ἡ ὁποία νά εὐνοῇ τήν ἐμφάνισιν τῆς μιᾶς ἤ τῆς ἄλλης ὄψεως. Ἄρα ἀποδεχόμεθα, ὅτι αἱ δύο δυναταί περιπτώσεις "κορώνα" ἤ "γράμματα" εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί καί ἡ πιθανότης ἑκάστης εἶναι ἴση μέ 1/2. Ὁμοίως εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ κύβου ἔχομεν ἕξ πιθανάς περιπτώσεις, νά ἐμφανισθῇ ὁ ἀριθμός 1, 2, 3, 4, 5, 6. Καί ἐφ'ὅσον ὁ κύβος εἶναι κανονικῶς κατασκευασμένος ἑκάστη ὄψις ἔχει πιθανότητα ἐμφανίσεως 1/6.

Οὕτω ἀγόμεθα εἰς τόν κάτωθι κλασσικόν ὁρισμόν τῆς πιθανότητος.

Πιθανότης πραγματοποιήσεως ἑνός γεγονότος εἶναι ὁ λόγος τοῦ πλήθους τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων καθ'ἅς πραγματοποιεῖται τό γεγονός, πρός τό πλῆθος ὅλων τῶν περιπτώσεων εὐνοϊκῶν καί μή ὑπό τόν ὅρον ὅτι ὅλαι αἶναι ἐξ ἴσου δυναταί.-

Στατιστικος ὁρισμός τῆς πιθανότητος

Ὁ κλασσικός ὁρισμός τῆς πιθανότητος ἀποτελεῖ, ἐκ πρώτης ὄψεως, ἕνα φαῦλον κύκλον: τῷ ὄντι αἱ δυναταί περιπτώσεις ὀφείλουν νά εἶναι κατά τό αὐτό δυναταί, ἤτοι νά ἔχωσι τήν αὐτήν πιθανότητα ὅπως πραγματοποιηθῶσι. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον ὁ ὁρισμός τῆς πιθανότητος ἑνός συμβάντος οὐδέν ἄλλο ἐπιδιώκει ἤ τήν μεταφοράν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος εἰς τόν ὁρισμόν τῶν περιπτώσεων (ἤτοι τῶν γεγονότων) ὁμοίως πιθανῶν. Ἐν τούτοις παρατηρεῖται ὅτι αὐτός ὁ φαῦλος κύκλος εἶναι μᾶλλον φαινομενικός παρά πραγματικός.

Τῷ ὄντι ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητος ἑνός συμβάντος εἶναι ἔννοια κυρίως φυσική, ἥτις ἀποσκοπεῖ νά μᾶς διαφωτίσῃ περί τῆς δυνατότητος ἤ μή ὅπως ἴδωμεν πραγματοποιούμενον τό συμβάν, ὅταν καταλλήλως ἀποκτᾶται ἡ ἐμπειρία ἐπί τοῦ ἰδίου συμβάντος.

'Η συγκεκριμένη σημασία τῆς έννοίας τῆς πιθανότητος εἶναι ἡ πρόβλεψις τοῦ ἀποτελέσματος ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ δοκιμῶν.

'Εάν ρίψωμεν πολλάς φοράς ἕν νόμισμα, ὁ ἀριθμός τῶν φορῶν καθ'ἅς θά πραγματοποιηθῇ τό γεγονός "κορώνα" (ἀπόλυτος συχνότης) θά εἶναι περίπου τό ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γενομένων δοκιμῶν, ἤτοι ἡ σχέσις μεταξύ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν φορῶν πού θά πραγματοποιηθῇ "κορώνα" πρός τό σύνολον τῶν γενομένων δοκιμῶν (σχετική συχνότης), θά πρέπει νά πλησιάζῃ πολύ τήν τιμήν 1/2.

Τῷ ὄντι εἰς ὅλα τά πειράματα τύχης παρατηρεῖται ἕν φυσικόν φαινόμενον, ὅσον αὐξάνει τό πλῆθος ν τῶν δοκιμῶν (ὑπό παρομοίας συνθήκας ἐπαναλήψεως τοῦ πειράματος), τόσον ἡ σχετική συχνότης τείνει νά ταυτισθῇ μέ ἀριθμόν τινα P.

Τό ὅριον τοῦτο P πρός τό ὁποῖον τείνει ἡ σχετική συχνότης ὀνομάζομεν πιθανότητα ἐμφανίσεως ἑνός γεγονότος E.

Εἰς μίαν ἀρκετά ἐκτεταμένην ἐπανάληψιν τοῦ παιγνιδίου"κορώνα"-"γράμματα" ἡ σχετική συχνότης τοῦ γεγονότος "κορώνα" πλησιάζει νά φθάσῃ τόν ἀριθμόν 1/2. 'Ιδού ἕν παράδειγμα ἀναφερόμενον εἰς ἕνα παιγνίδι "κορώνα - γράμματα".

Ἔστω ὅτι ἐκτελοῦμεν ἕνα ἀριθμόν ἐκ 1000 ρίψεων. Δυνατόν νά ἔχωμεν μίαν σειράν ἐμφανίσεων τοῦ γεγονότος "κορώνα" ὡς κάτωθι: 490, 515, 505, 510, 470, 525 ... κλπ.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοί "κορώνα" εἶναι περίπου ἴσοι μέ τό 50 ο/ο τοῦ συνόλου τῶν δοκιμῶν, δηλαδή αἱ σχετικαί συχνότητες κατανέμονται γύρω ἀπό τό 1/2.

Οὕτω ἀγόμεθα εἰς τό κάτωθι συμπέρασμα:

Εἰς μίαν σειράν δοκιμῶν ἡ σχετική συχνότης $F = \frac{\nu}{N}$, σταθεροποιεῖται πέριξ μιᾶς θεωρητικῆς τιμῆς P καί καλεῖται πιθανότης ἐμφανίσεως τοῦ γεγονότος E. Τό ἀξίωμα αὐτό εἶναι μία μαθηματική διατύπωσις ἑνός φαινομένου ἀδιαψεύστου ἀπό τήν πεῖραν.-

Ἀξιωματικός ὁρισμός τῆς πιθανότητος

Ὁ Στατιστικός ὁρισμός τῆς πιθανότητος ἔχει τό πλεονέκτημα ὅτι ἀποτελεῖ μίαν ἐξιδανικευμένην εἰκόνα τῆς πραγματικότητος καί ἐπί πλέον εἶναι ἁπλοῦς.

Ἐν τούτοις δέν εἶναι ὁ θεωρητικῶς ἰδεώδης διότι εἶναι ἐν μέρει ἐμπειρικός καί ἀφήνει ἴσως μίαν ὑποψίαν αὐθαιρεσίας. Διά νά καταστῇ δυνατόν νά δοθῇ ἕνας τέλειος ὁρισμός τῆς πιθανότητος προστρέχομεν εἰς τήν θεωρίαν τῶν συνόλων. Ὁ ὁρισμός οὗτος δύναται νά θεμελιωθῇ κατά τρόπον ἀξιωματικόν τῇ βοηθείᾳ ἑνός πλήρους συστήματος προτάσεων, ἐκ τῶν ὁποίων συνάγονται λογικῶς ὅλαι αἱ ἔννοιαι καί προτάσεις τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων.

Τήν μέθοδον ταύτην ἠκολούθησε κατά τρόπον στοιχειώδη ὁ BOIER καί συνεπλήρωσε βραδύτερον ὁ KOLMOGOROV. Ἐπί αὐτῆς ταύτης τῆς νέας θεωρίας θέλομεν ἀσχοληθῇ ὅσον τό δυνατόν ἐκτενέστερον λόγῳ τῆς μεγάλης ἐφαρμογῆς εἰς τήν σύγχρονον Στατιστικήν.

Εἰς τό ἑπόμενον κεφάλαιον θά ἀσχοληθῶμεν μέ τάς ἰδιότητας τῶν πιθανοτήτων, στηριζόμενοι ἐπί τῆς θεωρίας τοῦ KOLMOGOROV ἐπί τῆς ἀξιωματοποιήσεως. Πρίν ὅμως ὁμιλήσωμεν περί τούτων εἶναι ἀνάγκη νά ἀσχοληθῶμεν δι' ὀλίγων περί τῆς Συνδυαστικῆς θεωρίας, διότι ἡ γνῶσις ταύτης θά μᾶς ἐπιτρέψῃ νά ὑπολογίσωμεν εἰς ἁπλᾶ παραδείγματα τήν πιθανότητα, διά τῆς ἀπαριθμήσεως τῶν δυνατῶν καί τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τῶν θεωρουμένων ἐνδεχομένων.-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2ον

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Θεμελιώδη σπουδαιότητα λαμβάνει ἡ Συνδυαστική θεωρία εἰς τάς ἐφαρμογάς τῆς Πιθανοθεωρίας τόσον εἰς τάς θεωρητικάς ὅσον καί εἰς τάς πρακτικάς, περί τῶν ὁποίων θά διαπραγματευθῶμεν μέ τό ἀνά χεῖρας σύγγραμμα.

Εἰς τάς ἐφηρμοσμένας ἐπιστήμας πλειστάκις ἐμφανίζεται τό πρόβλημα ὅπως, δοθέντων στοιχείων τινῶν, διατάξωμεν, μεταθέσωμεν ἤ συνδυάσωμεν ταῦτα κατά διαφόρους ὁμάδας.

Ὁσάκις ὅμως ὁ ἀριθμός τῶν δοθέντων στοιχείων εἶναι ἀρκούντως μέγας ὁ προσδιορισμός τοῦ πλήθους τῶν ὁμάδων καθίσταται δύσκολος. Πρός τοῦτο ἀναζητοῦνται τύποι καί τρόποι, οἵτινες ἐπιλύουν εὐκόλως τά ὡς ἄνω προκύπτοντα προβλήματα.-

Ἁπλαῖ διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ

Διατάξεις ἁπλαῖ τῶν ν διαφορετικῶν στοιχείων ἀνά Κ ($K \leqslant \nu$) καλοῦνται ὅλαι αἱ ὁμάδες ἐκ Κ στοιχείων, αἵτινες δύνανται νά προκύψωσιν ἐκ τῶν ν δοθέντων στοιχείων, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι δύο ὁμάδες νά διαφέρουν μεταξύ των κατά τήν φύσιν ἤ κατά τήν θέσιν τοὐλάχιστον ὡς πρός ἕν τῶν στοιχείων των.

Τό πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν διαφόρων στοιχείων ἀνά Κ παριστάνομεν διά τοῦ συμβόλου $\Delta_{\nu;K}$. Ὑπολογίζομεν ὡς ἀκολούθως τό πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν διαφορετικῶν στοιχείων ἀνά Κ ($\Delta_{\nu,K}$).

῎Εστω, διά μίαν στιγμήν, ὅτι ἔχομεν σχηματίσει ὅλας τάς διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ-1.

῾Υποθέτομεν δηλαδή ὅτι γνωρίζομεν $\Delta_{\nu,K-1}$.

Εἰς οἱανδήποτε ἐκ τῶν ἁπλῶν διατάξεων $\Delta_{\nu,K-1}$ λείπουν $\nu-(K-1) = \nu-K+1$ στοιχεῖα. ᾿Εάν ἐκ τῶν ὑπολοίπων τούτων στοιχείων λάβωμεν ἕν οἱονδήποτε στοιχεῖον καί τό προσθέσωμεν εἰς ὅλας τάς $\Delta_{\nu,K-1}$ ἁπλάς διατάξεις, τάς ὁποίας ἐκ τῶν προτέρων γνωρίζομεν, λαμβάνομεν τάς διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ, ἤτοι ἀκριβῶς $\Delta_{\nu,K}$.

᾿Επομένως θά εἶναι :

$$\left[\Delta_{\nu,K} = (\nu-K+1)\ \Delta_{\nu,K-1}\right] \qquad (1)$$

᾿Επαληθεύομεν τήν σχέσιν (1) μέ ἕνα παράδειγμα.

῎Εστω ὅτι ἔχομεν τά στοιχεῖα α, β, γ, δ καί θέλομεν τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν διατάξεων ἀνά 2, ἤτοι $\nu = 4, K = 2$.

῾Υποθέτομεν ὅτι ἔχομεν σχηματίσει τάς $\Delta_{\nu,K-1} = \Delta_{4,2-1} = \Delta_{4,1}$ ἁπλάς διατάξεις, αἵτινες θά εἶναι

α, β, γ, δ.

Εἰς τήν πρώτην ὁμάδα α διά νά ἔχωμεν μίαν ὁμάδα ἐκ δύο στοιχείων, δυνάμεθα νά προσθέσωμεν ἕν τῶν στοιχείων β, γ, δ, διά νά λάβωμεν αβ, αγ, αδ.

Διά τάς ὑπολοίπους ὁμάδας θά ἔχωμεν:

βα, βγ, βδ,

γα, γβ, γδ,

δα, δβ, δγ,

Αἱ διατάξεις ἑπομένως τῶν 4 στοιχείων ἀνά 2 θά εἶναι

$$\Delta_{4,2} = 12$$

Προκύπτει ἀκριβῶς ἡ σχέσις (1) καθόσον

῎Εχομεν $\Delta_{4,2} = (4-2+1)\ \Delta_{\nu,1} = 12$ (διότι $\Delta_{4,1} = 4$).

'Επανερχόμενοι είς τήν σχέσιν (1), δίδομεν είς τό Κ διαδοχικῶς τάς τιμάς 2, 3, ... Κ-2, Κ-1, Κ.

Θά ἔχωμεν λοιπόν

Διά $K = 2$, $\Delta_{\nu,2} = (\nu-2+1)\,\Delta_{\nu,2-1} = (\nu-1)\,\Delta_{\nu,1}$

" $K = 3$, $\Delta_{\nu,3} = (\nu-3+1)\,\Delta_{\nu,3-1} = (\nu-2)\,\Delta_{\nu,2}$

" $K = 4$, $\Delta_{\nu,4} = (\nu-4+1)\,\Delta_{\nu,4-1} = (\nu-3)\,\Delta_{\nu,3}$

" $K = K-2$, $\Delta_{\nu,K-2} = (\nu-K+2+1)\,\Delta_{\nu,K-2-1} = (\nu-K+3)\,\Delta_{\nu,K-3}$

" $K = K-1$, $\Delta_{\nu,K-1} = (\nu-K+1+1)\,\Delta_{\nu-1-1} = (\nu-K+2)\,\Delta_{\nu,K-2}$

" $K = K$, $\Delta_{\nu,K} = (\nu-K+1)\,\Delta_{\nu,K-1} = (\nu-K+1)\,\Delta_{\nu,K-1}$

Πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη τάς ὡς ἄνω ἰσότητας καί παραλείποντες τούς ἐμφανιζομένους είς τά δύο μέλη κοινούς παράγοντας, εὑρίσκομεν:

$$(2)\quad \left[\Delta_{\nu,K} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\,\cdots\cdots\,(\nu-K+2)(\nu-K+1)\right]$$

Ἤτοι τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν διατάξεων τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ εἶναι τό γινόμενον τῶν Κ διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἐλαττούμενον κατά μονάδα.

Παράδειγμα $\Delta_{8,4} = 8.7.6.5. = 1680$

Διατάξεις μετ' ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ

'Ανωτέρω ὡμιλήσαμεν περί τῶν ἁπλῶν διατάξεων καί ἐτονίσαμεν ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον είς ἑκάστην διάταξιν δέν δύναται νά ἐπαναληφθῇ περισσότερον τῆς μιᾶς φορᾶς είς ἑκάστην ὁμάδα στοιχείων.

'Εν συνεχείᾳ θά ἐξετάσωμεν διατάξεις είς τάς ὁποίας τό ἴδιον στοιχεῖον νά ἐμφανίζηται είς τήν αὐτήν ὁμάδα περισσότερον τῆς μιᾶς φορᾶς. Δίδονται π.χ.

τά στοιχεῖα α, β, γ, δ καί Κ = 3. Μία ὁμάς δύναται νά εἶναι (α β γ). Δυνάμεθα ἐπίσης νά σχηματίσωμεν καί μίαν ἄλλην ὁμάδα (γ, γ, δ).

Ἐάν ἐπομένως θέλωμεν νά ἐξετάσωμεν τάς διατάξεις εἰςτρόπον, ὥστε νά ἐπαναλαμβάνωνται τά στοιχεῖα τά ἀνήκοντα εἰς τήν ἰδίαν ὁμάδα, λαμβάνομεν τάς διατάξεις μέ ἐπαναλήψεις.

Δοθέντων λοιπόν ν στοιχείων τοποθετημένων μέ ἐπαναλήψεις εἰς ὁμάδα ἐκ Κ στοιχείων, ἄς ἐπιδιώξωμεν νά ὑπολογίσωμεν τό πλῆθος τῶν διατάξεων μετ'ἐπαναλήψεων, τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίζωμεν.

Παριστάνομεν τάς διατάξεις μέ ἐπαναλήψεις μέ τό σύμβολον

$$\Delta^{(\tau)}_{\nu,K}$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ πλήθους τῶν Διατάξεων $\Delta^{(\tau)}_{\nu,K}$, ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν σχηματίσει πάσας τάς διατάξεις μετ'ἐπαναλήψεων τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ-1. Διά νά σχηματίσωμεν λοιπόν τό πλῆθος τῶν διατάξεων μέ ἐπαναλήψεις ἐκ Κ στοιχείων, ἀρκεῖ εἰς τό πλῆθος τῶν Κ-1 στοιχείων νά θέσωμεν τά ν στοιχεῖα, ἑκάστην φοράν ἀνά ἕν.

Θά ἔχωμεν $\left| \Delta^{(\tau)}_{\nu,K} = \nu . \Delta_{\nu,K-1} \right|$ (3)

Ἐάν εἰς τήν σχέσιν (3) θέσωμεν Κ = Κ-1, λαμβάνομεν

$$\Delta^{(\tau)}_{\nu,K-1} = \nu . \Delta^{(\tau)}_{\nu,K-2}$$

Ἀντικαθιστῶντες $\Delta^{(\tau)}_{\nu,K-1}$ εἰς τήν (3), θά ἔχωμεν

$$\Delta^{(\tau)}_{\nu,K} = \nu^2 \, \Delta^{(\tau)}_{\nu,K-2}$$

Θέτοντες διαδοχικῶς εἰς τήν (3) Κ = Κ-2, Κ-3, Κ-4,...
θά ἔχωμεν:

$$\Delta^{(\tau)}_{\nu,K} = \nu^{K-1} . \Delta^{(\tau)}_{\nu,1} = \nu^{K-1} . \nu = \nu^{K}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \left| \; \Delta^{(\tau)}_{\nu,K} = \nu^{K} \; \right| \qquad (4)$$

εἰς τάς ἁπλάς διατάξεις ἔχομεν πάντοτε $K \leqslant \nu$, ἐνῶ εἰς τήν περίπτωσιν τῶν διατάξεων μετ'ἐπαναλήψεων δυνατόν νά ἔχωμεν καί $K > \nu$.

Παράδειγμα: Τό πλῆθος τῶν ὅρων μετ'ἐπαναλήψεως τῶν ἕξ στοιχείων ἀνά 2 εἶναι

$$\Delta^{(\tau)}_{6,2} = 6^2 = 36$$

Ἁπλαῖ μεταθέσεις τῶν ν στοιχείων

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ν στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των. Τά ν ταῦτα στοιχεῖα δυνάμεθα νά τά τοποθετήσωμεν τό ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους ὥστε ἑκάστη ὁμάς νά διαφέρῃ τῶν ἄλλων κατά τήν θέσιν τοὐλάχιστον ἑνός στοιχείου. Τάς ὁμάδας τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν διά τοῦ ὡς ἄνω τρόπου καλοῦμεν ἁπλάς μεταθέσεις.

Αἱ ἁπλαῖ μεταθέσεις εἶναι μία εἰδική περίπτωσις τῶν ἁπλῶν διατάξεων, ὁσάκις ἔχομεν $K = \nu$.

Τάς ἁπλάς μεταθέσεις τάς παριστάνομεν μέ τό σύμβολον M_ν. Ἐάν ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον, ὅστις δίδει τάς ἁπλάς διατάξεις διά $K = \nu$, θά ἔχωμεν

$$M_\nu = \nu\,(\nu-1)\,(\nu-2) \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Ἤτοι τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν μεταθέσεων τῶν ν στοιχείων δίδεται ἀπό τό γινόμενον τῶν πρώτων ν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τό ὡς ἄνω γινόμενον παρίσταται διά τοῦ συμβόλου $\nu!$

(διαβάζεται ν παραγοντικόν).

Παράδειγμα α) $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Παράδειγμα β) $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

" γ) Κατά πόσους τρόπους δυνάμεθα νά παρατάξωμεν ἐπί εὐθείας γραμμῆς 5 μαθητάς.

Λ ύ σ ι ς

Ὑπάρχουν τόσοι τρόποι ὅσαι εἶναι αἱ μεταθέσεις τῶν 5 στοιχείων, ἤτοι $M_5 = 1.2.3.4.5 = 120$ τρόποι.-

Μεταθέσεις μετ᾽ ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ν στοιχεῖα. Ἐκ τῶν ν τούτων στοιχείων τά α_1 εἶναι τά ἴδια μεταξύ των καί διάφορα τῶν ἄλλων, τά α_2 εἶναι τά ἴδια μεταξύ των καί διάφορα τῶν ἄλλων, ἐπίσης..., τά α_K εἶναι τά ἴδια μεταξύ των καί διάφορα τῶν ἄλλων, εἰς τρόπον ὥστε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_K = \nu$$

Ἑκάστη τοποθέτησις τῶν ν στοιχείων εἰς μίαν σειράν καλεῖται <u>μετάθεσις μετ᾽ἐπαναλήψεως.</u>

Παριστάνομεν τάς μεταθέσεις μετ᾽ἐπαναλήψεως μέ τό σύμβολον

$$M_\nu^{(\alpha)}.$$

Τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων ἰσοῦται $M_\nu^{(\alpha)} = \dfrac{\nu!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_K!}$

Διότι, ἐάν εἰς κάθε μετάθεσιν τῶν $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_K = \nu$ στοιχείων μεταθέσωμεν τά α_1 μεταξύ των ὡς ἐάν ἦσαν διαφορετικά μεταξύ των, τά α_2 ὁμοίως, ..., τά α_K ὁμοίως, σχηματίζομεν $\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_K!$ μεταθέσεις τῶν ν διαφόρων πραγμάτων. Ἐάν παραστήσωμεν μέ Υ τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων θά ἔχωμεν:

$$Y\cdot(\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots\ldots\ \alpha_K!\ ) = \nu!$$

Καί $$Y = \frac{\nu!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ldots\alpha_K!}$$

Παράδειγμα: Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων μετ'ἐπανα - λήψεων τῶν κάτωθι ψηφίων 3, 3, 5, 7, 8 , 9

$$M_\nu^{(\alpha)} = \frac{6!}{2!\ 1!\ 1.\ 1!\ 1!} = 360$$

ΑΠΛΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΤΩΝ ν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΝΑ Κ

Ἁπλοῖ συνδυασμοί τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ (Κ $\leqslant$ ν) εἶναι ὅλαι αἱ ὁμάδες τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν ἐκ τῶν δοθέντων ν στοιχείων διά Κ στοιχείων ἑκάστην, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι:

α) Δύο ὁμάδες θεωροῦνται ὡς διαφορετικαί, ἐάν διαφέρουν τοὐλάχιστον κατά ἕν στοιχεῖον π.χ. οἱ ἀριθμοί 8754 καί 8654 εἶναι διαφορετικοί, καθόσον διαφέρουν εἰς ἕν στοιχεῖον (τό 7 καί τό 6).

β) Δύο ὁμάδες, περιέχουσαι τά ἴδια στοιχεῖα εἶναι ἴδιαι ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τῶν στοιχείων π.χ. αἱ ὁμάδες α α ββα καί β β α α α λαμβάνονται ὡς ἴδιαι.

Ἑπομένως ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι εἰς ἁπλοῦς συνδυασμούς δέν λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν τήν θέσιν καί σειράν αὐτῶν,ἀρκεῖ μόνον νά διαφέρουν κατά τήν φύσιν ἑνός τοὐλάχιστον στοιχείου.

Ἄς ἐπιδιώξωμεν νά ὑπολογίσωμεν τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων διαφόρων μεταξύ των ἀνά Κ. Παριστάνομεν τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν μέ τό σύμβολον $\Sigma_{\nu,K}$.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν σχηματίσει τόν πίνακα ὅλων τῶν $\Sigma_{\nu,K}$ ἁπλῶν συνδυασμῶν.

Ἐάν ἐξετάσωμεν ἕνα τῶν ὡς ἄνω συνδυασμῶν, γνωρίζωμεν ὅτι οὗτος σχηματίζεται ἐκ K στοιχείων τοποθετημένων ἄνευ οὐδεμιᾶς προκαθωρισμένης τάξεως.

Εἶναι φανερόν ὅτι ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τούτου εἶναι δυνατόν νά σχηματίσωμεν ὅλας τάς δυνατάς μεταθέσεις, ἤτοι K! μεταθέσεις.

Ἀλλά κατ'αὐτόν τόν τρόπον μεταθέτοντες καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους τούς συνδυασμούς $\Sigma_{\nu,K}$ θά λάβωμεν $K!\,.\Sigma_{\nu,K}$ ὁμάδας, αἵτινες εἶναι ἀκριβῶς αἱ ἁπλαῖ διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνά K. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\Delta_{\nu,K} = \Sigma_{\nu,K}\,.\,K! \qquad (8)$$

Ἀπό τήν σχέσιν (8) εὑρίσκομεν $\Sigma_{\nu,K} = \dfrac{\Delta_{\nu,K}}{K!} =$

$$= \frac{\nu(\nu-1)\,(\nu-2)\,\ldots\ldots\,(\nu-K+1)}{K!} \qquad (8')$$

Πολλαπλασιάζομεν καί διαιροῦμεν τήν (8΄) μέ $(\nu-K)!$

Εἰς τόν ἀριθμητήν θά ἔχωμεν:

$\nu(\nu-1)\ldots(\nu-K+1).(\nu-K)! = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-K+1).$
$(\nu-K)\,(\nu-K-1)\ldots\ldots\ldots\,2.1$, ἤτοι ὁ ἀριθμητής γίνεται $\nu!$ Ὁ παρανομαστής παραμένει $K!\,(\nu-K)!$

Κατά συνέπειαν ἡ σχέσις (8΄) λαμβάνει μορφήν

$$(9) \qquad \Sigma_{\nu,K} = \frac{\nu!}{K!\,(\nu-K)!}$$

Συμβολίζοντες τούς συνδυασμούς τῶν ν ἀνά K μέ $\binom{\nu}{K}$ ἡ σχέσις (9) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\binom{\nu}{K} = \frac{\nu!}{K!\,(\nu-K)!} \qquad (10)$$

Παράδειγμα: Νά εὑρεθοῦν οἱ συνδυασμοί τῶν 5 στοιχείων ἀνά 3.

$$\Sigma_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Συνδυασμοί μετ' ἐπαναλήψεων τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ

Συνδυασμοί μετ'ἐπαναλήψεων τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ,καλοῦνται αἱ ὁμάδες, τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν,ἐάν λάβωμεν Κ ἐκ τῶν ν στοιχείων, ἕκαστον τῶν ὁποίων νά ἐπαναλαμβάνεται τό πολύ Κ φοράς καί εἰς τρόπον ὥστε δύο ὁμάδες νά θεωροῦνται διάφοροι, ἐάν διαφέρουν κατά τήν φύσιν ἑνός τοὐλάχιστον στοιχείου.

Οἱ συνδυασμοί μετ'ἐπαναλήψεως παρίστανται μέ τό σύμβολον $\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}$.

Οὕτω, διά τῶν στοιχείων α, β, γ, σχηματίζομεν τούς ἑξῆς συνδυασμούς ἀνά δύο μετ'ἐπαναλήψεως:

αα αβ αγ

ββ βγ

γγ ἤτοι $\Sigma^{(\tau)}_{3,2} = 6$

Ὁμοίως οἱ συνδυασμοί μετ'ἐπαναλήψεως τῶν γραμμάτων α,β,γ,δ ἀνά 3 εἶναι

ααα, ααβ, ααγ, ααδ, αββ, αβγ, αβδ, αγγ, αγδ, αβδ.

βββ, ββγ, ββδ, βγγ, βδδ, βγδ, γγγ, γγδ, γδδ, δδδ.

Δηλαδή κάθε συνδυασμός ἀποτελεῖται ἀπό 3 γράμματα ἐκ τῶν δ-

ποίων τά δύο ἤ καί τά τρία δύνανται νά εἶναι τά αὐτά.
Πρός εὕρεσιν τοῦ πλήθους τῶν συνδυασμῶν

$\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}$ σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Μεταξύ τῶν ν στοιχείων ἐξετάζομεν διά μίαν στιγμήν ἕν γενικόν στοιχεῖον, π.χ. τό στοιχεῖον τό φέρον τήν ἔνδειξιν χ, καί ὑποθέτομεν ὅτι γνωρίζομεν τόν πίνακα ὅλων τῶν συνδυασμῶν $\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}$.

Ἐφ'ὅσον ἑκάστη ὁμάς ἔχει Κ στοιχεῖα, ὅλαι αἱ ὁμάδες θά περιέχουν ἐν συνόλῳ $K.\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}$ στοιχεῖα.

Δοθέντος ὅτι ὅλα τά στοιχεῖα εἰς τό σύνολον περιέχονται ἐξ ἴσου, ἕκαστον στοιχεῖον π.χ. τό χ θά περιέχεται

$$K.\frac{\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}}{\nu} \text{ φοράς} \qquad (1)$$

Τό στοιχεῖον φυσικά χ δέν περιέχεται εἰς ὅλους τούς συνδυασμούς μετ'ἐπαναλήψεως, ἀλλά θά περιέχεται εἰς ἕναν ὡρισμένον ἀριθμόν ὁμάδων π.χ. ψ μεταξύ τῶν συνδυασμῶν $\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}$.

Ἐάν ἀπό ὅλας τάς ὁμάδας αἱ ὁποῖαι περιέχουν τό στοιχεῖον χ ἀφαιρέσωμεν ἕν (χ) ἀπό κάθε ὁμάδα, τότε ὁ ἀριθμός τῶν ὁμάδων ἐξ ὧν ἀφηρέθη τό στοιχεῖον χ ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμόν τῶν συνδυασμῶν μετ'ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ-1, ἤτοι $\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K-1}$. Εἰς τό σύνολον τῶν ὁμάδων τό στοιχεῖον χ θά περιέχεται

$$\frac{(K-1)\,\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K-1}}{\nu} \text{ φοράς.}$$

Ἐάν ἐν συνεχείᾳ εἰς τόν ἀριθμόν $\dfrac{(K-1)\,\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K-1}}{\nu}$ προσθέσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν στοιχείων

$\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K-1}$, ἅτινα ἀφηρέθησαν, εὑρίσκομεν πόσας φοράς περιέχεται τό χ. Ἤτοι εὑρίσκομεν τόν ἀριθμόν τῆς σχέσεως (1)

Τελικῶς θά ἔχωμεν:

$$\frac{K.\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K}}{\nu} = \frac{(\nu+K-1)\ \Sigma^{(\tau)}_{\nu,K-1}}{\nu} \qquad \text{ἤ}$$

$$\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K} = \frac{\nu+K-1}{\nu}\ \Sigma^{(\tau)}_{\nu,K-1} \qquad (2)$$

Ἐάν εἰς τήν σχέσιν (2) θέσωμεν διαδοχικῶς $K = 1,2,3,\ldots\ldots$ $\ldots, K-1, K$ καί πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη, θά ἔχωμεν

$$\Sigma^{(\tau)}_{\nu,K} = \frac{(\nu+K-1)\ (\nu+K-2)\ \ldots\ldots\ (\nu+2)\ (\nu+1)\nu}{K(K-1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots .3.2.1} = \Sigma_{\nu+K-1,K}\ .$$

Ὥστε τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν μετ'ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνά K ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν τῶν (ν+K−1) στοιχείων ἀνά K.-

Παράδειγμα:

Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν μετ'ἐπαναλήψεως τῶν 4 στοιχείων ἀνά 3.

Λύσις

$$\Sigma^{(\tau)}_{4,3} = \Sigma_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$$

Διωνυμικός Συντελεστής

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι δυνάμεθα νά παραστήσωμεν συμβολικῶς τούς συνδυασμούς $\Sigma_{\nu,K} = \binom{\nu}{K}$.

Ἡ ὡς ἄνω σχέσις λαμβάνει τό ὄνομα διωνυμικός συντελεστής.

Εἴδομεν ἐξ ἄλλου ὅτι $\binom{\nu}{K} = \dfrac{\nu!}{K!\,(\nu-K)!}$ (12)

Ἀποδεικνύομεν τώρα δύο θεωρήματα.

1) Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ, ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνά ν-Κ, ἤτοι

$$\binom{\nu}{K} = \binom{\nu}{\nu-K} \qquad (11)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι τό πρῶτον μέλος τῆς σχέσεως (11) δίδεται ἀπό τήν σχέσιν (10). Ἐάν λοιπόν ἐφαρμόσωμεν τό ἴδιον ἀνάπτυγμα καί εἰς τό δεύτερον μέλος, θά ἔχωμεν

$$\binom{\nu}{\nu-K} = \frac{\nu!}{(\nu-K)!\,(\nu-\nu+K)!} = \frac{\nu!}{(\nu-K)!\,K!} = \binom{\nu}{K}.$$

Ἐάν εἶναι Κ = ν, θά ἔχωμεν

$\binom{\nu}{\nu} = \dfrac{\nu!}{\nu!\,0!} = 1$ (ὁρίζομεν $0!=1$)

2) Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνά Κ ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν-1 στοιχείων ἀνά Κ, σύν τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν (ν-1) στοιχείων ἀνά (Κ-1).

Συμβολικῶς ἔχομεν

$$\binom{\nu}{K} = \binom{\nu-1}{K} + \binom{\nu-1}{K-1} \qquad (13)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Πραγματι εἶναι $\binom{\nu}{K} = \dfrac{\nu!}{K!\,(\nu-K)!} = \dfrac{\nu(\nu-1)!}{K!(\nu-K)!} =$

$$= \frac{(\nu-K+K)(\nu-1)!}{K(\nu-K)!} = \frac{(\nu-K)(\nu-1)! + K(\nu-1)!}{K!(\nu-K)!}$$

$$\frac{(\nu-K)(\nu-1)!}{K!(\nu-K)(\nu-K-1)!} + \frac{K(\nu-1)!}{K(K-1)!(\nu-K)!} =$$

$$= \frac{(\nu-1)!}{K!(\nu-K-1)!} + \frac{(\nu-1)!}{(K-1)!(\nu-K)!} = \binom{\nu-1}{K} + \binom{\nu-1}{K-1}$$

3) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\binom{\nu}{K+1} = \binom{\nu}{K} \frac{\nu-K}{K+1}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Ἐφαρμόζομεν τήν σχέσιν (12) εἰς τόν διωνυμικόν συντελεστήν $\binom{\nu}{K+1}$, θά ἔχωμεν

$$\binom{\nu}{K+1} = \frac{\nu!}{(K+1)![\nu-(K+1)]!} = \frac{\nu!}{(K+1)!(\nu-K-1)!}$$

Ἐπειδή $(K+1)! = (K+1)K!$ καί $(\nu-K)! = (\nu-K)(\nu-K-1)!$

δηλ. $(\nu-K-1)! = \frac{(\nu-K)!}{(\nu-K)}$

Ἀντικαθιστῶντες $(K+1)!$ καί $(\nu-K-1)!$, θά ἔχωμεν

$$\binom{\nu}{K+1} = \frac{\nu!}{(K+1)K!\,\frac{(\nu-K)!}{(\nu-K)}} = \frac{\nu!}{K!(\nu-K)!}\,\frac{(\nu-K)}{(K+1)} = \binom{\nu}{K}\,\frac{\nu-K}{K+1}$$

4) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\binom{\nu}{K-1} + \binom{\nu}{K} = \binom{\nu+1}{K}$$

Ἐφαρμόζομεν τήν ἰδιότητα (3) εἰς τήν $\binom{\nu}{K}$, θά εἶναι

$$\binom{\nu}{K} = \binom{\nu}{K-1} \cdot \frac{\nu-K+1}{K}$$, ἐπομένως

$$\binom{\nu}{K-1} + \binom{\nu}{K} = \binom{\nu}{K-1} + \binom{\nu}{K-1} \cdot \frac{\nu-K+1}{K} =$$

$$= \binom{\nu}{K-1} + \frac{\nu-K+1}{K} = \binom{\nu}{K-1} \cdot \frac{K+\nu-K+1}{K} =$$

$$= \binom{\nu}{K-1} \cdot \frac{\nu+1}{K} = \binom{\nu+1}{K}$$

Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος

Ὑποθέτομεν ὅτι θέλομεν νά εὕρωμεν τό κάτωθι γινόμενον:

$(\chi+\alpha_1).(\chi+\alpha_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (\chi+\alpha_K)$.

Διά νά εὕρωμεν τό γινόμενον τοῦτο, ὡς γνωστόν, ὀφείλομεν νά πολλαπλασιάσωμεν τούς δύο πρώτους παράγοντας, τό προκῦπτον δέ ἐξαγόμενον τό πολλαπλασιάζομεν μέ τόν τρίτον παράγοντα κ.ο.κ.

Ἑπομένως θά ἔχωμεν

$(\chi+\alpha_1).(\chi+\alpha_2) = \chi^2 +(\alpha_1+\alpha_2)\,\chi+\alpha_1\alpha_2$.

$(\chi+\alpha_1).(\chi+\alpha_2).(\chi+\alpha_3) = \chi^3+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3).\chi^2 + \chi(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)$

$+\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

....

$(\chi+\alpha_1).(\chi+\alpha_2).(\chi+\alpha_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\chi+\alpha_K) =$

$\chi^K +(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ldots\ldots+\alpha_K).\chi^{K-1} +(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots\ldots)\,\chi^{K-2} +$

$+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots\ldots\ldots)\,\chi^{K-3} +\ldots\ldots+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\ldots\alpha_K$

Παρατηροῦμεν ὅτι τό ἐξαγόμενον εἶναι ἕν πολυώνυμον τοῦ χ, βαθμοῦ Κ καί διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμειςτοῦ χ.

Ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι χ^K, ὁ δεύτερος ἔχει συντελεστήν τό ἄθροισμα.

$\Sigma_1 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ldots\ldots\alpha_K)$, ὁ τρίτος.

$\Sigma_2 = (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\ldots\ldots\ldots)$

Δηλαδή ὁ συντελεστής τῆς δυνάμεως $\chi^{K-\mu}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_K$ λαμβανομένων καθ'ὅλους τούς δυνατούς συνδυασμούς.

'Επομένως θά ἔχωμεν

$$(\chi+\alpha_1).(\chi+\alpha_2).(\chi+\alpha_3)\ldots\ldots(\chi+\alpha_K) = \chi^K + \Sigma_1\chi^{K-1} + $$

$$+ \Sigma_2\chi^{K-2} + \ldots + \Sigma_{K-1}\chi + \Sigma_K \qquad (14).$$

'Εάν ὑποθέσωμεν ὅτι

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_K$, τότε θά ἔχωμεν

$$(\chi+\alpha).(\chi+\alpha)\ldots\ldots(\chi+\alpha) = (\chi+\alpha)^K$$

'Ομοίως $\Sigma_1 = \binom{K}{1}\alpha, \quad \Sigma_2 = \binom{K}{2}\alpha^2, \quad \Sigma_3 = \binom{K}{3}\alpha^3\ldots\ldots$

$\Sigma_{K-1} = \binom{K}{K-1}\alpha^{K-1}, \; \Sigma_K = \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu.$

Ἤτοι ἡ σχέσις (14) μετασχηματίζεται

$$(\chi+\alpha)^K = \binom{K}{\alpha}\alpha^o\chi^K + \binom{K}{1}\alpha\chi^{K-1} + \binom{K}{2}\alpha^2\chi^{K-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \binom{K}{K-2}\alpha^{K-2}\chi^2 + \binom{K}{K-1}\alpha^{K-1}\chi + \binom{K}{K}\alpha^K\chi^o.$$

Κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν

$$\left[(\chi+\alpha)^K = \chi^K + \binom{K}{1}\alpha\,\chi^{K-1} + \binom{K}{2}\alpha^2\chi^{K-2} + \ldots\ldots + \alpha^K\right]$$

διότι $\left[\binom{K}{o} = 1,\ \alpha^o = 1, \binom{K}{K} = 1,\ \chi^o = 1\right] \qquad (15)$

Ἡ σχέσις (15) λέγεται τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος καί συμβολικῶς γράφεται:

$$(\chi+\alpha)^K = \sum_{T=o}^{K} \binom{K}{T}\alpha^T\chi^{K-T}$$

Παράδειγμα 1ον. Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\chi+\alpha)^5$

$$(\chi+\alpha)^5 = \chi^5 + \frac{5}{1}\alpha\,\chi^4 + \frac{5.4}{1.2}\alpha^2.\chi^3 + \frac{5.4.3}{1.2.3}\alpha^3\chi^2 +$$

$$+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\alpha^4\chi + \alpha^5 = \chi^2 + 5\alpha\chi^4 + 10\alpha^2\chi^3 + 10\alpha^3\chi^2 +$$

$$+ 5\alpha^4\chi + \alpha^5$$

Παράδειγμα 2ον. Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\alpha+\beta)^\nu$.

$$(\alpha+\beta)^\nu = \beta^\nu + \binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \dots\dots\dots +$$

$$+ \binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu .$$

Γενίκευσις τοῦ Διωνύμου τοῦ Νεύτωνος (Τύπος τοῦ LEIBNIZ).

Ὑποθέτομεν ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν νιοστήν δύναμιν τοῦ πολυωνύμου $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots\dots\dots \alpha_T)$

ἤτοι $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \dots\dots +\alpha_T)^\nu = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots\dots\dots+\alpha_T)$

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots\dots\dots+\alpha_T)\dots\dots\dots(\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots\dots+\alpha_T)$ ἐπί ν φοράς θά λάβωμεν ἕνα ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ τύπου

$$\alpha_1^{T_1}\ \alpha_2^{T_2}\dots\dots\dots\alpha_\nu^{T_\nu}\ ,\ \text{μέ}\ T_1 + T_2 - \dots\dots + T_\nu = T$$

Ἕκαστος ὅρος θά παρουσιάσῃ ἕνα ἀριθμόν ἴσον μέ τάς μεταθέσεις τῶν ν στοιχείων, ἐκ τῶν ὁποίων T_1 ἴσον μέ $\alpha_1, T_2 = \alpha_2$ καί $T_\nu = \alpha_\nu$,

ἤτοι $N_\tau\ (T_1T_2\dots\dots\dots T_\nu) = \dfrac{T!}{T_1!\ T_2!\ \dots T_\nu!}$

Τελικῶς θά εἶναι

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3....+\alpha_T)^{\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{T!}{T_1!\, T_2! \, ...T_{\nu}!} \alpha_1^{T_1} \quad \alpha_2^{T_2}....\alpha_{\nu}^{T_{\nu}}$$

Παράδειγμα: Νά ὑπολογισθῆ τό κάτωθι πολυώνυμον

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3$.

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3 = \frac{3!}{3!} \alpha_3^3 + \frac{3!}{3!} \alpha_2^3 + \frac{3!}{3!} \alpha_1^3 +$$

$$3!/2! \, .\alpha_2 \, \alpha_3^2 + \frac{3!}{2!} \alpha_1^2 \, \alpha_3 + 3! \, \alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 =$$

$$\alpha_3^3 + \alpha_2^3 + \alpha_1^3 + 3\alpha_2 \, \alpha_3^2 + 3\alpha_1\alpha_3^2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^2 \, \alpha_3 + 3\alpha_1^2 \, \alpha_2 +$$

$$+ 3\alpha_1^2 \, \alpha_3 + 6\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \, .-$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3ον

ΑΞΙΩΜΑΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

Θά διαπραγματευθῶμεν εἰς τό παρόν κεφάλαιον ἕν θεμελιῶδες θέμα μεγίστης σημασίας εἰς τόν λογισμόν τῶν πιθανοτήτων.

Πότε ὁμιλοῦμεν περί πιθανότητος; εἰς τί ἀποσκοπεῖ ἡ πιθανότης;

Ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητος εἶναι μία ἀριθμητική ἀξία τήν ὁποίαν θέλομεν νά δώσωμεν εἰς ἕν γεγονός, ἥτις νά ἐκφράζῃ τόν βαθμόν βεβαιότητος τῆς πραγματοποιήσεως ἤ μή ἑνός γεγονότος.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἕνα ἀριθμόν ν γεγονότων E_1, E_2, E_3,..........., E_ν. Θέλομεν νά ἴδωμεν ποία εἶναι ἡ δυνατότης νά παρουσιασθῇ ἕν ἤ περισσότερα ἐκ τῶν ἀνωτέρω γεγονότων. Αὐτή ἡ δυνατότης εἶναι ἀκριβῶς ἡ πιθανότης. Πρός τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον νά δώσωμεν εἰς τά ν γεγονότα E_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ ἕν μέτρον ἤ μίαν ἀναλυτικήν διάστασιν, ἤτοι νά ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα ἀριθμόν P_i εἰς τό γεγονός E_i .

Τό πρόβλημά μας μετασχηματίζεται εἰς τό ἑξῆς πῶς εἶναι δυνατόν νά σημειώσωμεν τήν πιθανότητα P_i, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τό γεγονός E_i .

Πρός τόν σκοπόν τοῦτον εἶναι ἀναγκαῖον νά προβῶμεν εἰς μίαν ἀναλυτικήν ἐξέτασιν τῶν γεγονότων.

Πρός ἐπίτευξιν τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ θά ἀναφερθῶμεν εἰς τήν ἀξιωματοποίησιν, ἥτις ἐπροτάθη ὑπό τοῦ A.W. COLMOGOROV.

Θεωροῦμεν ἕν σύνολον τῶν (ἁπλῶν, στοιχειωδῶν) γεγονότων τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά συμβοῦν κατά τήν πραγματοποίησιν ἑνός φαινομένου ἤ πειράματος καί τό συμβολίζομεν I (π.χ. τό σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων ἅτινα λαμβάνομεν κατά τήν ρῖψιν ἑνός κύβου).

Παριστάνομεν μέ H τό σύνολον τῆς δυνάμεως τοῦ I, δηλαδή τό σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ I (εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνεται ἐπίσης τό I). Τό πλῆθος τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν εἶναι:

$$\sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} = 2^{\nu}$$

ἐάν ν εἶναι τό πλῆθος τῶν γεγονότων (στοιχείων ν) τοῦ I [π.χ. εἰς τό πείραμα τῆς ρίξεως τοῦ κύβου θά ἔχωμεν

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \ldots\ldots + \binom{6}{6} = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}$$]

Κάθε στοιχεῖονA τοῦ H δηλαδή κάθε ὑποσύνολον τοῦ I λέγεται γεγονός ἤ ἐνδεχόμενον καί τό συμβολαίζομεν $A \subseteq I$.

Τό σύνολον τό ὁποῖον δέν περιέχει οὐδέν στοιχεῖον λέγεται κενόν σύνολον καί συμβολίζεται μέ Φ. Τό Φ σημαίνει ὅτι οὐδέν γεγονός πραγματοποιεῖται (ἀδύνατο ἐνδεχόμενον). Δεχόμεθα ὅτι τό Φ εἶναι ὑποσύνολον κάθε συνόλου A, δηλ. $\Phi \subseteq A$.

Δύο ὑποσύνολα A καί B τοῦ I λέγονται ἴσα τότε καί μόνον τότς ἐάν $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A$ (δηλ. $\forall\, \chi \in A \iff \chi \in B$).

"Θέτομεν πέντε ἀξιώματα ἅτινα ἀναφέρονται εἰς τά ὑπό ἐξέτασιν γεγονότα".

ΑΞΙΩΜΑ 1ον

Τά γεγονότα σχηματίζουν μίαν ἄλγεβραβ τοῦ BOOLLE.

Δηλαδή εἰς τό σύνολον H εἶναι ὡρισμέναι αἱ κάτωθι πράξεις:

α) <u>Ἄρνησις</u> ἤ <u>συμπλήρωμα</u> ἤ <u>ἀντίθετο</u> τοῦ A.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ A τήν περίπτωσιν τῆς ἐμφανίσεως ἑνός γεγονότος, τότε ἡ ἄρνησις τοῦ γεγονότος Α, ἥτις παρίστα-ται μέ $\bar{A}$, παριστᾷ τό γεγονός τῆς μή ἐμφανίσεως τοῦ γεγονότος Α.

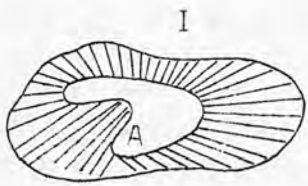
β) <u>Τομή</u> ἤ <u>γινόμενον</u>

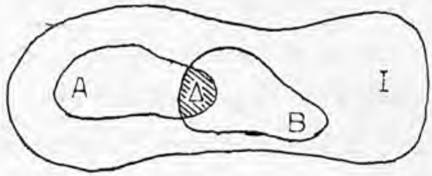
Καλεῖται τομή ἤ γινόμενον δύο συνόλων (ἤ γεγονότων) Α καί Β τό σύνολον τῶν στοιχείων, τά ὁποῖα ἀνήκουν καί εἰς τόΑ καί εἰς τό Β καί παρίσταται ὡς ἑξῆς $A \cap B$, σημαίνει δέ τήν πραγματοποίησιν τῶν Α καί Β συγχρόνως.

Γραφικῶς, αἱ ὡς ἄνω δύο ἐργασίαι παρίστανται ὡς κάτωθι:

Ἔστω Ι τό σύνολον εἰς τό ὁποῖον ἔχουν ὁρισθῆ δύο γεγονότα Α καί Β ἀντιπροσωπευόμενα διά συνόλων

(α)





Εἰς τήν εἰκόνα (α) τό γραμμοσκιασμένον τμῆμα παριστᾶ τό $\bar{A}$ ἡ τομή $A \cap B = \Delta$ παριστᾶ τήν σύγχρονον ἐμφάνισιν τῶν γεγονότων Α καί Β.

Θ ε μ ε λ ι ώ δ ε ι ς ἰ δ ι ό τ η τ ε ς τ ῆ ς τ ο-μ ῆ ς κ α ί τ ῆ ς ἀ ρ ν ή σ ε ω ς.

1) $\bar{\bar{A}} = A$

α) Τρόπος: Ἐάν $\chi \in \bar{\bar{A}}$ τότε $X \notin \bar{A}$ καί κατά συνέπεια $\chi \in A$.

Δηλ. $\forall\ \chi \in \bar{\bar{A}} \Longrightarrow \chi \in A$ (1)

Ἐάν $X \in A$ τότε $X \in \bar{A}$ καί κατά συνέπεια $\chi \in \bar{\bar{A}}$

Δηλ. $\forall\ X \in A \Longrightarrow X \in \bar{\bar{A}}$ (2)

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο συνόλων θά ἔχωμεν $\bar{\bar{A}} = A$.

β) Τρόπος: $\bar{\bar{A}} \equiv I-\bar{A} \equiv I-(I-A) = A$.

2) Ἐάν $A = B$ θά εἶναι καί $\bar{A} = \bar{B}$.

α) Τρόπος: Ἐάν $\chi \in \bar{A}$ τότε $\chi \notin A$ καί δεδομένου ὅτι $A=B$ θά ἔχωμεν $\chi \notin B$ (διότι ἐάν $\chi \in B$ τότε $\chi \in A$ ὅπερ ἄτοπον)δηλ. $\chi \in \bar{B}$, Ἐπομένως $\forall\ \chi \in \bar{A} \implies \chi \in \bar{B}$ (1)
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\forall\ \chi \in \bar{B} \implies \chi \in \bar{A}$ (2).
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) προκύπτει $\bar{A} = \bar{B}$.

β) Τρόπος: $\bar{A} \equiv I-A = I-B \equiv \bar{B}$.

3) $A \cap A = A$ (Ἄμεση συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τομῆς).

4) $A \cap B = B \cap A$ (Ἀντιμεταθετική).
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τομῆς ἔχομεν
Ἐάν $\chi \in (A \cap B) \implies \chi \in A$ καί $\chi \in B \implies \chi \in (B \cap A)$.

5) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ (προσεταιριστική).
Ἐάν $\chi \in [A \cap (B \cap \Gamma)] \implies \chi \in A, \chi \in (B \cap \Gamma) \implies \chi \in A$ $\chi \in B, \chi \in \Gamma \implies \chi \in (A \cap B) \cap \chi \in \Gamma \implies \chi \in [(A \cap B) \cap \Gamma]$, δηλ. $[A \cap (B \cap \Gamma)] \subseteq [(A \cap B) \cap \Gamma]$ (1)
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι

$$[(A \cap B) \cap \Gamma] \subseteq [A \cap (B \cap \Gamma)] \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) λαμβάνομεν

$$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$

6) $A \cap \bar{A} = \Phi$

Ἐάν $\chi \in (A \cap \bar{A}) \implies \chi \in A$ καί $\chi \in \bar{A} \implies \chi \in A$ καί $\chi \notin A \implies \chi \in \Phi$, δηλ. $(A \cap \bar{A}) \subseteq \Phi$ (1)
Ἐπίσης ἔχομεν $\Phi \subseteq (A \cap \bar{A})$ (2)
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) λαμβάνομεν

$$A \cap \bar{A} = \Phi$$

7α) $\bar{\Phi} = I$, δηλαδή τό γεγονός $\bar{\Phi}$ εἶναι τό βέβαιον γεγονός.
Ἔχομεν $\bar{\Phi} \equiv \{\chi \in I$, μέ $\chi \notin \Phi\} = I$.

7) $A \cap \bar{\Phi} = A$.

Βασικαί σχέσεις μεταξύ τῆς ἑνώσεως καί τῆς τομῆς.

α_1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. $\Longrightarrow$ $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$

α_2) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

α_1) Ἐάν $\chi \in (\overline{A \cup B}) \Rightarrow \chi \in I$ καί $\chi \notin (A \cup B) \Rightarrow \chi \in I$ καί $\chi \notin A$ εἴτε $\chi \notin B \Rightarrow \chi \in I$ καί $\chi \notin A$ καί $\chi \in I$, $\chi \notin B \Rightarrow \chi \in \bar{A}$, $\chi \subset \bar{B} \Rightarrow \chi \in (\bar{A} \cap \bar{B})$. Ἐπομένως $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ (1).

Ἐάν $\psi \in (\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow \psi \in \bar{A}$, $\psi \in \bar{B} \Rightarrow \psi \in I$ καί $\psi \in A$, ὁμοίως $\psi \in I$ καί $\psi \in B \Rightarrow \psi \in I$ καί $\psi \in (A \cup B) \Rightarrow \psi \in (\overline{A \cup B}.)$

Ἐπομένως $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ (2).

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἔχομεν: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

α_2) Ἐάν $\chi \in [A \cap (B \cup \Gamma)] \Rightarrow \chi \in A$ καί $\chi \in (B \cup \Gamma) \Rightarrow \chi \in A$, $\chi \in B$, $\chi \in \Gamma \Rightarrow \chi \in (A \cap B)$ εἴτε $\chi \in (A \cap \Gamma) \Rightarrow \chi \in [(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)]$

Ἐπομένως $A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ (1).

Ἐάν $\chi \in [(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)] \Rightarrow \chi \in (A \cap B)$ εἴτε $\chi \in (A \cap \Gamma) \Rightarrow (\chi \in A$ καί $\chi \in B)$ εἴτε $(\chi \in A$ καί $\chi \in \Gamma) \Rightarrow \chi \in A$ καί $\chi \in B$ εἴτε $\chi \in \Gamma \Rightarrow \chi \in A$ καί $\chi \in (B \cup \Gamma) \Rightarrow \psi \in [A \cap (B \cup \Gamma)]$,

Ἐπομένως $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \subseteq A \cap (B \cup \Gamma)$ (2).

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἔχομεν

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Νά ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις

8α) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

8) $A \cap (\overline{B \cap \Gamma}) = \overline{(\overline{A \cap \bar{B}}) \cap (\overline{A \cap \bar{\Gamma}})}$

8α) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}} = \overline{A \cap B}$

β) $A \cap \overline{(A \cap \Gamma)} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{\Gamma}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{\Gamma}) =$

$\overline{\overline{(A \cap \bar{B})} \cap \overline{(A \cap \bar{\Gamma})}}$.

'Αποδεικνύομεν ἐν συνεχείᾳ τάς κάτωθι ἰδιότητας, βάσει τῶν ἀνωτέρω θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων.

1) $A \cup A = A$:

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Πράγματι $A \cup A = \overline{\bar{A} \cap \bar{A}}$, δεδομένου ὅτι εἶναι $\bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}$, προκύπτει ὅτι $A \cup A = \bar{\bar{A}} = A$.

2) $A \cup B = B \cup A$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \overline{\bar{B} \cap \bar{A}} = B \cup A$

3) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cup (B \cup \Gamma) = \overline{\bar{A} \cap \overline{(B \cup \Gamma)}} = \overline{\bar{A} \cap (\overline{\overline{\bar{B} \cap \bar{\Gamma}}})} = \overline{\bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{\Gamma})} =$

$= \overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{\Gamma}} = \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma$.

4) $(A \cup B) = A \cup (\bar{A} \cap B)$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = I \cap (A \cup B) = A \cup B$

5) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

Βάσει τῆς ἰδιότητος 8 θά ἔχωμεν

$A \cup (B \cap \Gamma) = \overline{\bar{A} \cap \overline{(B \cap \Gamma)}} = \overline{\overline{\overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \cap \overline{(\bar{A} \cap \bar{\Gamma})}}} = \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \cap$

$\overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

6) $A \cup \Phi = A$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$\overline{\bar{A} \cap \bar{\Phi}} = \bar{\bar{A}} = A$, δοθέντος ὅτι $\bar{\Phi} = I$ καί $\bar{A} \cap I = \bar{A}$ καί βάσει τῆς ἰδιότητος (7) θά ἔχωμεν:

$$A \cup \Phi = A$$

7) $A \cap \Phi = \Phi$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cap \Phi = A \cap (A \cap \bar{A}) = (A \cap A) \cap \bar{A} = A \cap \bar{A} = \Phi$

8) $A \cup I = I$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$\overline{\bar{A} \cap \bar{I}} = \overline{A \cap \Phi} = \bar{\Phi} = I$

9) $A \cup \bar{A} = (B \cup \bar{B}) = (\Gamma \cup \bar{\Gamma}) = \ldots\ldots = I$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cap \bar{A} = \Phi$, σχηματίζοντες τήν ἄρνησιν θά ἔχωμεν τήν ἀκόλουθον σχέσιν:

$\overline{A \cap \bar{A}} = \bar{\Phi}$

$\overline{\bar{A} \cap A} = I$

$A \cup \bar{A} = I$

10) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A = A \cap I = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

11) $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B) = B \cup (\bar{B} \cap A)$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Βάσει τῶν ἰδιοτήτων (5) καί (8) ἔχομεν

$A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = I \cap (A \cup B) = A \cup B.$

Γεγονότα ἀσυμβίβαστα καί ἀνεξάρτητα

'Εάν $A \cap B = \Phi$, τά γεγονότα A καί B λέγονται ἀσυμβίβαστα ἤτοι ἡ ἐμφάνισις τοῦ ἑνός ἀποκλείει τήν ἐμφάνισιν τοῦ ἄλλου.

Δύο γεγονότα λέγονται ἀνεξάρτητα ὅταν ἡ ἐμφάνισις ἤ μή τοῦ ἑνός δέν ἀσκῇ καμμίαν ἐπίδρασιν ἐπί τῆς ἐμφανίσεως ἤ μή τοῦ ἑτέρου, δηλαδή ὅταν ἡ ἐμφάνισις τοῦ ἑνός δέν τροποποιῇ τήν πιθανότητα ἐμφανίσεως τοῦ ἑτέρου.

Παράδειγμα: Ρίπτομεν δύο κέρματα τό γεγονός ὅτι τό ἕν παρουσιάζει "κορῶνα" ἤ "γράμματα" δέν ἀσκεῖ καμμίαν ἐπίδρασιν ἐπί τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ ἑτέρου κέρματος.

ΑΞΙΩΜΑ 2ον

'Εάν A εἶναι ἕν ἐνδεχόμενον, τότε $P(A) \geqslant 0$.

ΑΞΙΩΜΑ 3ον

$P(I) = 1$, ἤτοι τό βέβαιον γεγονός I ἔχει πιθανότητα ἴση μέ 1.

ΑΞΙΩΜΑ 4ον

'Εάν δύο γεγονότα A καί B εἶναι ἀσυμβίβαστα ἤ ξένα μεταξύ των, δηλ. ἐάν $A \cap B = \Phi$, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ἤτοι ἡ πιθανότης, ἵνα συμβῇ τοὐλάχιστον ἕν τῶν ἀσυμβιβάστων γεγονότων, εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐν λόγῳ γεγονότων.

ΑΞΙΩΜΑ 5ον

* 'Εάν Α καί Β εἶναι δύο γεγονότα ἀνεξάρτητα μεταξύ των, τότε ἡ πιθανότης $P\ (A \cap B)$ θά εἶναι μία συνάρτησις συνεχής τῶν πιθανοτήτων $P\ (A)$ καί $P\ (B)$.

Βασικαί ἰδιότητες τῶν ὡς ἄνω ἀξιωμάτων.

1) $P\ (A) \leqslant 1$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$$P\ (I) = P\ (A \cup \bar{A}) = P\ (A) + P\ (\bar{A})$$

ἀπό τό ἀξίωμα Νο 3 ἔχομεν $P_{\tau}\ (I) = 1$

'Επομένως

$$1 = P\ (A) + P\ (\bar{A}) \text{ ἤ } P\ (A) = 1 - P\ (\bar{A})$$

'Εξ ἄλλου ἀπό τό ἀξίωμα Νο 2 ἔχομεν

$P\ (A) \geqslant 0$, κατά συνέπειαν $P\ (A) \leqslant 1$, καθόσον $P\ (\bar{A}) \geqslant 0$.

2) $P\ (\Phi) = 0$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι $\Phi \cap \Phi = \Phi$, ἐξ ἄλλου $\Phi \cup \Phi = \overline{\bar{\Phi} \cap \bar{\Phi}} = \bar{\bar{\Phi}} = \Phi$ ἐπομένως Φ καί Φ εἶναι γεγονότα ἀσυμβίβαστα καί βάσει τοῦ ἀξιώματος (4) ἔχομεν

$$P\ (\Phi \cup \Phi) = P\ (\Phi) + P\ (\Phi) \text{ ἤ}$$

$$2P\ (\Phi) = P\ (\Phi)$$

διά νά ἰσχύῃ ἡ ὡς ἄνω σχέσις πρέπει νά εἶναι

$$P\ (\Phi) = 0$$

---

* Βλέπε T.C. FRY, PROBABILITY AND ITS ENGINEERING. USES, D. VAN NOSTRAND COMPANY, NEW YORK, (πρώτη ἔκδοσις 1928).

3) 'Εάν A, B, Γ εἶναι γεγονότα ἀσυμβίβαστα, ἤτοι ἐάν

$$A \cap B = A \cap \Gamma = B \cap \Gamma = \Phi \quad \text{θά ἔχωμεν}$$

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P((A \cup B) \cup \Gamma)$. Τά δύο γεγονότα $(A \cup B)$ και Γ εἶναι ἀσυμβίβαστα μεταξύ των καθόσον εἶναι

$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) = \Phi \cup \Phi = \Phi$.

'Επομένως θά εἶναι,

$P(A \cup B) \cup \Gamma = P(A \cup B) + P(\Gamma)$ δεδομένου ὅτι ἐξ ὑποθέσεως A καί B εἶναι γεγονότα ἀσυμβίβαστα θά ἔχωμεν

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

Τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα ἐπιτρέπει τήν γενίκευσιν τοῦ ἀξιώματος 4 εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ν γεγονότων ἀσυμβιβάστων ἀνά δύο μεταξύ των.

4) Εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τά γεγονότα A καί B δέν εἶναι ἀσυμβίβαστα μεταξύ των θά ἔχωμεν

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

'Από τήν 11ην ἰδιότητα ἔχομεν

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

Τά δύο γεγονότα A καί $(\bar{A} \cap B)$ εἶναι ἀσυμβίβαστα ὅταν

$$A (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \Phi \cap B = \Phi$$

'Επομένως ἐάν ἐφαρμόσωμεν τό ἀξίωμα (4) θά ἔχωμεν

$$(\alpha)\ P(A \cup B) = P\left(A \cup (\bar{A} \cap B)\right) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

'Αναφερόμενοι εἰς τό γεγονός B καί βάσει τῆς ἰδιότητος (10) θά ἔχωμεν

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) \quad \text{καί}$$

$P(B) = P(B \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ καί

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad (\beta)$

Ἀντικαθιστῶντες τήν σχέσιν (β) εἰς τήν (α) θά ἔχωμεν

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ο.ε.δ.

5) Γενικεύοντες τό ὡς ἄνω ἀποτέλεσμα εἰς τήν περίπτωσιν τῶν τριῶν γεγονότων μή ἀσυμβιβάστων ἀνά δύο Α, Β, Γ, θά ἔχωμεν:

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) -$

$P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P((A \cup B) \cup \Gamma) = P(A \cup B) +$

$P(\Gamma) - P(A \cup B) \cap \Gamma = P(A) + P(B) -$

$-P(A \cap B) + P(\Gamma) - P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) =$

$P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) -$

$-P(B \cap \Gamma) + P((A \cap \Gamma) \cap (B \cap \Gamma)) = P(A) + P(B) +$

$P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) +$

$P(A \cap B \cap \Gamma)$ ο.ε.δ.

6) Ἀναλόγως γενικεύοντες τήν ὡς ἄνω περίπτωσιν, εἰς τήν περίπτωσιν ἔνθα ἔχομεν ν γεγονότα μή ἀσυμβίβαστα ἀνά δύο, θά ἔχωμεν:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots + P(A_\nu) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$P(A_2 \cap A_3) \ldots\ldots - P(A_{\nu-1} \cap A_\nu) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) +$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots\ldots \ldots + P(A_{\nu-2} \cap A_{\nu-1} \cap A_\nu) -$
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \ldots\ldots - P(A_{\nu-3} \cap A_{\nu-2} \cap A_{\nu-1} \cap$
$A_\nu) + (-1)^{\nu+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_4)$.

Θεώρημα τῶν συνθέτων πιθανοτήτων

Ἐάν τά γεγονότα A καί B εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ των, θά ἔχωμεν

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Θέτομεν $P(A) = P_1$ καί $P(B) = P_2$

Βάσει τοῦ ἀξιώματος (5) θά ἔχωμεν

$$P(A \cap B) = F(P_1, P_2)$$

Ὅπου $F(P_1, P_2)$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις, μέ

$$0 \leqslant P_1 \leqslant 1 \quad \text{καί} \quad 0 \leqslant P_2 \leqslant 1$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $A = I$ καί $B = I$, θά εἶναι
$P_1 = 1$, $P_2 = 1$, κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν

$$P(A \cap B) = F(1,1) = P(I) = 1$$

Ὑποθέτομεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι A εἶναι τό ἄθροισμα δύο γεγονότων A_1 καί A_2 ἀσυμβιβάστων μεταξύ των, μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους P_1', P_1'', ὥστε νά εἶναι

$$P_1 = P_1' + P_1''$$

Βάσει τοῦ ἀξιώματος (5) ἔχομεν

$P(A_1 \cap B) = F(P_1', P_2)$

$P(A_2 \cap B) = F(P_1, P_2'')$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τό ἀξίωμα (4), θά ἔχωμεν

$F(P_1, P_2) = F(P_1' + P_1'', P_2) = P(A \cap B) =$

$P((A_1 \cup A_2) \cap B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) =$

$P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = F(P_1', P_2) + F(P_1'', P_2)$

Ὅθεν προκύπτει ὅτι ἡ συνεχής συνάρτησις $F(P_1, P_2)$ ἱκανοποιεῖ τήν κάτωθι σχέσιν $F(P_1' + P_1'', P_2) =$

$F(P_1', P_2) + F(P_1'', P_2)$ (α)

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι

$F(P_1, P_2' + P_2'') = F(P_1, P_2') + F(P_1, P_2'')$ (β)

Λαμβάνοντες τάς θετικάς ποσότητας M καί η ὥστε νά εἶναι

$\frac{M}{\eta} P_1 \leqslant 1$ ἀπό τήν σχέσιν (α), θά ἔχωμεν

$F(\frac{M}{\eta} P_1, P_2) = \frac{M}{\eta} F(P_1, P_2)$.

Δεδομένου ὅτι $F(P_1, P_2)$ εἶναι μία συνάρτησις συνεχής βάσει τοῦ ἀξιώματος (5) διά $\alpha P_1 \leqslant 1$ καί $\beta P_2 \leqslant 1$, ὅπου α καί β εἶναι ἀριθμοί πραγματικοί, ἀνήκοντες εἰς τό διάστημα

$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{P_1}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{P_2}$ $(P_1, P_2 \geqslant 0)$

Θά εἶναι

$F(\alpha P_1, \beta P_2) = \alpha\beta F(P_1, P_2)$ (γ)

Ἀπό τήν σχέσιν (γ) προκύπτει ὅτι

$F(P_1, P_2) = F(P_1 \cdot 1, P_2 \cdot 1) = P_1 P_2 \cdot F(1, 1) =$
$= P_1 P_2 \cdot 1 = P_1 P_2$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ἀναπτυχθεῖσα κατά τό δυνατόν ἡ θεωρία τῆς ἀξιωματοποιήσεως ἄς πλησιάσωμεν περισσότερον εἰς τήν ἔννοιαν τῆς πιθανότητος.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν K γεγονότα $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_K$.

Τά ὡς ἄνω γεγονότα λέγονται ἀναγκαῖα ἐφ'ὅσον τό ἄθροισμά των εἶναι βέβαιον γεγονός I. Δηλαδή ἐφ'ὅσον εἶναι

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots \cup A_K = I$$

Ὑποθέτομεν ὅτι τά K γεγονότα εἶναι ἀσυμβίβαστα μεταξύ των ἀνά δύο $A_i \cap A_j = \Phi$. (διά $i \neq j$)

Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἡ πιθανότης ἑκάστου γεγονότος εἶναι ἡ αὐτή:
$P_\tau(A_1) = P_\tau(A_2) = \ldots\ldots = P_\tau(A_K)$.

Ἐπομένως βάσει τῆς ἰδιότητος (3) θά ἔχωμεν

$$P_\tau(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_K) = P_\tau(A_1) + P_\tau(A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P_\tau(A_K) = K\,P(A_i).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_K = I$

λαμβάνομεν

$$P_\tau(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_K) = P_\tau(I) = 1$$

καί ἐπομένως K: $P_\tau(A_i) = 1$, ἤ $P_\tau(A_i) = 1/K$

Πρός γενίκευσιν τοῦ ὡς ἄνω τύπου, θέτομεν

(α) $B = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots\ldots \cup A_{jn}$) ἤτοι

B εἶναι ἕνα γεγονός ἄθροισμα τῶν n γεγονότων ληφθέντων ἐκ τῶν K γεγονότων $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_K$.

Λόγῳ τῆς (α) θά ἔχωμεν

$P_\tau(B) = P_\tau(A_{j1} \cup A_{j2} \cup \ldots\ldots \cup A_{jn}) =$

$= P_\tau(A_{j1}) + P_\tau(A_{j2}) + \ldots\ldots + P_\tau (A_{jn})$

'Επειδή ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι $P_\tau(A_i) = P_\tau(A_j)$

(διά $i \neq j$), προκύπτει

$P_\tau(A_{j1}) = \ldots\ldots = P_\tau(A_{jn}) = P_\tau(A_i)$ καί ἐπομένως

$P_\tau(B) = nP_\tau(A_i)$. Δοθέντος ὅτι $P_\tau(A_i) = \frac{1}{K}$,

λαμβάνομεν $P_\tau(B) = \frac{n}{K}$.

'Επομένως ἔχομεν φθάσει εἰς ἕνα ἀξιοσημείωτον συμπέρασμα "ἡ πιθανότης τῆς ἐμφανίσεως ἑνός γεγονότος δίδεται ἀπό τό πηλῖκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων (n) διά τοῦ ἀριθμοῦ πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων (K) ὅταν πᾶσαι εἶναι ἐξ ἴσου δυνατaί".

'Ελέγχομεν ἐν συνεχείᾳ τήν δυνατότητα ἱκανοποιήσεως τῶν ἀξιωμάτων, διά νά διαπιστωθῇ ἡ ὀρθή ἐφαρμογή των.

Ἔστω

$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, $\Gamma = A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

'Επομένως θά ἔχωμεν

$\bar{B} = A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \ldots\ldots \cup A_K$, $\bar{\Gamma} = A_1 \cup A_2 \cup A_6 \cup A_7 \cup \ldots\ldots$

$\ldots\ldots \cup A_K$.

$B \cap \Gamma = A_3 \cup A_4$

$B \cup \Gamma = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

Τό ἀξίωμα 1 (τά γεγονότα σχηματίζουν μίαν ἄλγεβρα τοῦ BOOLE) ἱκανοποιεῖται διά τόν ἁπλούστατον λόγον ὅτι τά γεγονότα B καί Γ ἐσχηματίσθησαν ἀπό τό ἄθροισμα τῶν θεμελιωδῶν γεγονότων A_i. Τό ἀξίωμα (2) ἱκανοποιεῖται διότι ὁ ἀριθμός τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων δέν εἶναι ἀρνητικός (πράγματι εἰς τό γεγονός B αἱ εὐνοϊκαί περιπτώσεις εἶναι 4, ἐνῷ τοῦ γεγονότος Γ εἶναι 3 καί ὁ ἀριθμός τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι θετικός Κ.

Τό ἀξίωμα (3) ἱκανοποιεῖται ἐφ'ὅσον εἶναι

$P_\tau(I) = P_\tau(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_K) = P_\tau(A_1) + P_\tau(A_2) + \ldots$

$\ldots\ldots P(A_K) = \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \ldots + \frac{1}{K} = K\left(\frac{1}{K}\right) = 1$

'Επίσης τό ἀξίωμα (4) ἱκανοποιεῖται ἐφόσον ἱκανοποιεῖται ἡ ἰδιότης (4) ἤτοι:

$P\ (B \cup \Gamma) = P_\tau\ (B) + P_\tau(\Gamma) - P_\tau(B \cap \Gamma).$

$P_\tau\ (B \cup \Gamma) = P_\tau(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \frac{5}{K}$

$P\ (B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{4}{K}$

$P_\tau(\Gamma) = P_\tau(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = 3/4$

$P_\tau(B \cap \Gamma) = P_\tau(A_3 \cup A_4) = 2/K.$

Τό θεώρημα (7) γενικεύει τό ἀξίωμα (5)

$P_\tau(B/\Gamma) = P\frac{(B \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{2}{K} : 3/K = 2/3$

Δεσμευμένη Πιθανότης

Ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως γεγονότος τινός Β καλεῖται δεσμευμένη πιθανότης, ὅταν τῆς πραγματοποιήσεως τοῦ Β προηγεῖται ἡ πραγματοποίησις ἑτέρου γεγονότος Α. Ἡ δεσμευμένη πιθανότης παρίσταται διά τοῦ $P(B/A)$ καί δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Παράδειγμα: Ρίπτομεν ἕνα νόμισμα τρεῖς φοράς.
Ποία ἡ πιθανότης τοῦ γεγονότος "Τοὐλάχιστον δύο κορῶνες",δοθέντος ὅτι εἰς τήν πρώτην ρῖψιν ἐνεφανίσθη κορώνα;

Ἄν καλέσωμεν Β τό γεγονός "Τοὐλάχιστον δύο κορῶνες" καί Α τό γεγονός ὅτι κατά τήν πρώτην ρῖψιν ἐνεφανίσθη ἤδη κορώνα.

Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δοθέντος προβλήματος ὑπάρχουν ἐν ὅλῳ 8 δυνατοί συνδυασμοί, οἵτινες ὁρίζουν τόν δειγματικόν χῶρον τόν περιέχοντα τά ὀκτώ ἀποτελέσματα, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΓ, ΓΚΓ, ΚΓΓ.

Εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀκτώ γεγονότων ἀντιστοιχεῖ πιθανότης ἴση μέ 1/8.
Κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν:

α) Τήν πιθανότητα "ἐμφάνισις κορώνα τοὐλάχιστον δύο φοράς"

$$P(B) = P\left[(ΚΚΓ) \cup (ΚΚΚ) \cup (ΚΓΚ) \cup (ΓΚΚ)\right] =$$

$$= \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

β) Τήν πιθανότητα "ἐμφάνισις κορώνα κατά τήν πρώτην ρίψιν".

$$P\ (A) = P\left[(KK\Gamma) \cup (KKK) \cup (K\Gamma K) \cup (K\Gamma\Gamma)\right] = \frac{4}{6}$$

γ) Τήν πιθανότητα $P\ (A\cap B)$ τοῦ γεγονότος $A\cap B$.

$$P\left(A\cap B\right) = P\left[(KK\Gamma) \cup (KKK) \cup (K\Gamma K)\right] = \frac{3}{8}$$

Ἐπομένως ἡ πιθανότης τοῦ B ὑπό συνθήκην θά εἶναι

$$P\ (B/A) = P\,\frac{(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4}$$

<u>Τό θεώρημα τῶν συνθέντων πιθανοτήτων εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν καθ'ἥν τά γεγονότα δέν εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.</u>

Ἐάν $P(A) > 0$ τότε $P(B/A) = P\,\frac{(A\cap B)}{P(A)}$ ἐπομένως

$$P\ (A\cap B) = P(A).P(B/A)$$

Ἤτοι ἡ πιθανότης νά πραγματοποιηθῇ καί τό γεγονός A καί τό γεγονός B ἰσοῦται μέ τήν πιθανότητα $P(A)$ τοῦ γεγονότος A ἐπί τήν πιθανότητα $P(B/A)$ τοῦ γεγονότος B, δοθέντος τοῦ γεγονότος A.

Ὁμοίως ἐάν $P(B) > 0$ τότε $P(A\cap B) = P(B).P(A/B)$.

Παράδειγμα:

Ἔχομεν δύο ὁμοίας κληρωτίδας.

Ἡ πρώτη κληρωτίς περιέχει 5 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια.

Ἡ δευτέρα περιέχει 2 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια. Ἐξάγομεν ἕν σφαιρίδιον ἐκ τῆς πρώτης κληρωτίδος καί τό θέτομεν εἰς τήν δευτέραν, ἀκολούθως ἐξάγομεν ἕν σφαιρίδιον ἐκ τῆς δευτέρας. Ζητεῖται ἡ πιθανότης ἵνα τά ἐξαγόμενα δύο σφαιρίδια εἶναι λευκά.

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BAYES

'Υποθέτομεν ὅτι ἕν βέβαιον γεγονός Ε ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐμφάνισιν ἤ τήν ἐπενέργειαν τῶν ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων(τρόπων ὑποθέσεων αἰτιῶν) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$.

Θά ἔχωμεν:

$E = E \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_\nu) = (E\cap A_1)\cup(E\cap A_2) \ldots \cup(E\cap A_\nu)$.

Δεδομένου ὅτι τά γεγονότα $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$, εἶναι ἀσυμβίβαστα μεταξύ των, ἤτοι $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, θά ἔχωμεν $P(E)=$
$P(E\cap A_1)+P(E\cap A_2) + \ldots + P(E\cap A_\nu)$ (1)

'Εκ τῆς δεσμευμένης πιθανότητος γνωρίζομεν ὅτι $P(E/A_i) = \dfrac{P(E\cap A_i)}{P(A_i)}$ ἤ $P(E\cap A_i) = P(A_i)\, P(E/A_i)$ (2)

'Αντικαθιστῶντες τήν σχέσιν (2) εἰς τήν σχέσιν (1), θά ἔχωμεν

$P(E) = P(A_1).P(E/A_1)+P(A_2).P(E/A_2)+ \ldots + P(A_\nu).P(E/A_\nu)$.

Λαμβάνοντες ἐκ νέου τόν τύπον τῆς ὑπό συνθήκης πιθανότητος

$P(A_i/E) = \dfrac{P(A_i\cap E)}{P(E)}$ καί θέτοντες

$P(A_i\cap E) = P(A_i)\, P(E/A_i)$ καί

$P(E) = P(A_1).P(E/A_1)+P(A_2).P(E/A_2)+\ldots\ldots+P(A_\nu).P(E/A_\nu)$, θά ἔχωμεν

$$P(A_1/E) = \frac{P(A_i).P(E/A_i)}{P(A_1).P(E/A_1)+\ldots+P(A_\nu).P(E/A_\nu)} = \frac{P(A_i).P(E/A_i)}{\sum_{i=1}^{\nu} P(A_i).P(E/A_i)}$$

Σημείωσις: 'Η πιθανότης $P(A_i)$ λέγεται APRIORI (ἐκ τῶν προτέρων). 'Η πιθανότης $P(A_i/E)$ λέγεται APOSTERIORI (ἐκ τῶν ὑστέρων), καθ'ὅσον προϋποτίθεται ὅτι παρετηρήθη ἤδη τό γεγονός Ε.

Ἕτερος τρόπος Ἀποδείξεως τοῦ τύπου τοῦ BAYES καί σχετικά παραδείγματα *ἀναφέρονται εἰς τήν σελ.* 233

Ἀσκήσεις ἐπί τῆς συνδυαστικῆς θεωρίας

Α΄ Ἐπί τῶν διατάξεων

1) Νά προσδιορισθῇ πόσους ἀριθμούς τῶν 2 ψηφίων, ἄνευ ἐπαναλήψεως δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν μέ τά ψηφία 1, 2, 3.

Λ ύ σ ι ς

Τό πλῆθος τῶν διψηφίων ἀριθμῶν θά ἰσοῦται πρός τό πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν 3 στοιχείων ἀνά 2, ἤτοι

$$\Delta_{3,2} = 3.2 = 6$$

2) Πόσους ἀριθμούς τῶν 3 ψηφίων, ἄνευ ἐπαναλήψεως, δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν, ἔχοντες είς τήν διάθεσίν μας τά κάτωθι ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Λ ύ σ ι ς

$$\Delta_{6,3} = 6.5.4 = 120$$

3) Μέ 21 γράμματα τῆς ἀλφαβήτου πόσας λέξεις διαφορετικάς, χωρίς ἐπαναλήψεις, δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν ἐκ τριῶν γραμμάτων ἑκάστην, πόσας τῶν 5 καί πόσας τῶν 6 γραμμάτων;

Λ ύ σ ι ς

Διά τάς λέξεις τῶν τριῶν γραμμάτων, χωρίς ἐπαναλήψεις, θά ἔχωμεν

$$\Delta_{21,3} = 21.20.19 = 7.980$$

Ὁμοίως διά τάς λέξεις τῶν 5 γραμμάτων, ἔχομεν

$$\Delta_{21,5} = 21.20.19.18.17 = 2.441.880$$

Καί διά τάς λέξεις τῶν 6 γραμμάτων

$$\Delta_{21,6} = 21.20.19.18.17.16 = 39.070.080$$

4) Μέ τά ψηφία 1, 5, 6, 7 πόσους διαφορετικούς άριθμούς τοῦ ένός, τῶν δύο, τῶν τριῶν καί τῶν τεσσάρων ψηφίων δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν;

Λ ύ σ ι ς

Τό πλῆθος τῶν άριθμῶν

$K = 1$ ψηφίων καί $\nu = 4$, θά εἶναι $\Delta^{(\tau)}_{4,1} = 4^1 = 4$

$K = 2$ " " $\nu = 4$ " " $\Delta^{(\tau)}_{4,2} = 4^2 = 16$

$K = 3$ " " $\nu = 4$ " " $\Delta^{(\tau)}_{4,3} = 4^3 = 64$

$K = 4$ " " $\nu = 4$ " " $\Delta^{(\tau)}_{4,4} = 4^4 = 256$

π.χ. διά $K = 2$ καί $\nu = 4$, οἱ λαμβανόμενοι άριθμοί εἶναι οἱ κάτωθι:

15, 16, 17, 56, 57, 67, 61, 71, 65, 75, 76, 11, 55, 66, 77, 51.

5) Εἰς ἕναν διαγωνισμόν διά πρόσληψιν 7 ὑπαλλήλων συμμετέσχον 25 ὑποψήφιοι, πόσαι εἶναι ὅλαι αἱ δυναταί βαθμολογίαι τῶν 7 ἐπιτυχόντων;

Λ ύ σ ι ς

Εἶναι ὅπως ἀκριβῶς ἐάν ἔχωμεν $\nu = 25$ στοιχεῖα καί θέλομεν νά ἴδωμεν πόσας ὁμάδας διαφορετικάς τῶν $K = 7$ στοιχείων εἶναι δυνατόν νά σχηματίσωμεν.

Ἑπομένως ἀρκεῖ νά ὑπολογίσωμεν τάς διατάξεις

$$\Delta_{25,7} = 25.24.23.22.21.20.19 = 2.422.728.000$$

6) Μέ τά ψηφία τοῦ προ-πο 1, X, 2, πόσας στήλας πρέπει νά σχηματίσωμεν, ἵνα ἐπιτύχωμεν μετά βεβαιότητος ἕνα 13 Πόσα 12 δυνάμεθα νά ἔχωμεν ἐκτός τοῦ 13;

Λ ύ σ ι ς

α) 'Ο συνολικός ἀριθμός τῶν στηλῶν τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν διά νά ἐπιτύχωμεν 13, δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως :

$$\Delta_{3,13}^{(\tau)} = 3^{13} = 1.594.324$$

β) 'Επιτυγχάνοντες ἕνα 13, πόσα δωδεκάρια θά ἐπιτύχωμεν;'Υποθέτομεν ὅτι ἔχομεν σφάλλει εἰς τόν πρῶτον ἀγῶνα τοῦ δελτίου. Ἄς ἴδωμεν πόσαι στῆλαι μεταξύ τῶν $\Delta_{3,13}^{(\tau)}$ στηλῶν ἔχουν ὅμοιον τό 2ον, 3ον,...., 13ον ἀποτέλεσμα.

Σαφῶς αἱ στῆλαι τοῦ πρώτου ἀγῶνος τοῦ δελτίου εἶναι 3(ἡ πρώτη μέ τό ὀρθόν ἀποτέλεσμα, ἡ δευτέρα καί ἡ τρίτη μέ τό ἐσφαλμένον).'Επομένως ἐάν ἔχωμεν σφάλλει εἰς τόν πρῶτον ἀγῶνα, ἔχομεν 2 στήλας αἱ ὁποῖαι ἔχουν 12 ὀρθάς ἐπιτυχίας.

'Εάν ἔχωμεν ἀποτύχει μόνον εἰς τόν δεύτερον ἀγῶνα τοῦ δελτίου, θά ἔχωμεν ἄλλας 2 στήλας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν 12 ὀρθάς ἐπιτυχίας, κ.ο.κ.

Δεδομένου ὅτι τά ἀποτελέσματα εἶναι 13, καί διά κάθε ἀγῶνα ἔχομεν δύο στήλας αἱ ὁποῖαι ἔχουν 12 ὀρθάς ἐπιτυχίας, κατά συνέπειαν τό σύνολον τῶν στηλῶν πού περιέχουν 12 ὀρθάς ἐπιτυχίας θά εἶναι 13.2 = 26.-

Β΄ Μεταθέσεις

1) Πόσας λέξεις διαφορετικάς δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν μεταθέτοντες τά γράμματα τῆς λέξεως <u>'Ε κ δ ό τ η ς</u> ;

Λ ύ σ ι ς

$$M_7 = 7! = 1.2.3.4.4.5.6.7 = 5040$$

2) Πόσας λέξεις διαφορετικάς δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν μετα-

θέτοντες τά γράμματα τῆς λέξεως "ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ";

Λ ύ σ ι ς

$$M_{10}^{(2,2,3)} = \frac{10!}{2!\ 2!\ 3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.1.2.3} = 151.200$$

3) Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους δυνάμεθα νά τοποθετήσωμεν εἰς μίαν σειράν 10 μαθητάς, ὅταν δύο ἐξ αὐτῶν κατέχουν πάντοτε τήν πρώτην καί τήν τελευταίαν θέσιν.

Λ ύ σ ι ς

Ὁ ἀριθμός τῶν μαθητῶν τούς ὁποίους δυνάμεθα νά μεταθέσωμεν μειοῦται εἰς 8. Ἑπομένως θά ἔχωμεν

$$M_8 = 8! = 40.320$$

4) Πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοί οἱ συμπεριλαμβανόμενοι μεταξύ 3.000 καί 4.000 καί περιέχουν τά ψηφία 3, 4, 5.

Λ ύ σ ι ς

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοί οἱ συμπεριλαμβανόμενοι μεταξύ τῶν 3.000 καί 4.000 ἔχουν ὡς πρῶτον ψηφίον τό 3, θά ἔχωμεν

$$M_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Γ' Συνδυασμοί

1) Εἰς μίαν κάλπην περιέχονται 90 ἀριθμοί (ἀπό 1 μέχρι 90). Πόσας δυάδας, τριάδας, τετράδας, εἶναι δυνατόν νά σχηματίσωμεν;

Λ ύ σ ι ς

α) Δυάδες $\Sigma_{90,2} = \frac{\Delta_{90,2}}{2!} = \frac{90 \times 89}{1.2} = 4.005$

β) Τριάδες $\Sigma_{90,3} = \frac{\Delta_{90,3}}{3!} = \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117.480$

γ) Τετράδες $\Sigma_{90,4} = \frac{\Delta_{90,4}}{4!} = \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2.555.190$

2) Κατά πόσους τρόπους διαφορετικούς δυνάμεθα νά κατανείμωμεν 12 κάρτες (χαρτιά) μεταξύ 4 παικτῶν, ὅταν δίδωνται 3 κάρτες εἰς ἕκαστον παίκτην;

Λ ύ σ ι ς

$$\Sigma_{12,3} \times \Sigma_{9,3} \times \Sigma_{6,3} \times \Sigma_{3,3} = \frac{12.11.10}{3!} \times \frac{9.8.7}{3!}$$

$$\times \frac{6.5.4}{3!} \times \frac{3.2.1}{3!} = 369.600$$

3) Ἐξ 20 ἀντικειμένων σημειουμένων μέ τούς ἀριθμούς ἀπό 1 μέχρι 20, ἐξάγομεν μίαν ὁμάδα τῶν 5 ἀντικειμένων διαφορετικῶν μεταξύ των καί τοποθετοῦμεν κατά τάξιν αὔξουσαν. Πόσοι εἶναι οἱ δυνατοί τρόποι, ὥστε ἤ τό 6ον ἤ τό 7ον ἀντικείμενον νά καταλαμβάνῃ τήν 2α θέσιν μεταξύ τῶν 5 διαθεσίμων;

Λ ύ σ ι ς

Ἔστω α_1, α_2, α_3, ..., α_{20} τά δοθέντα ἀντικείμενα. Ἐξετάζομεν πρῶτον ὅτι ἡ δευτέρα θέσις εἶναι κατειλημμένη ἀπό τό α_6. Ἡ πρώτη θέσις δεδομένου ὅτι τά στοιχεῖα ἔχουν τοποθετηθῆ κατ'αὔξοντα ἀριθμόν δύναται νά εἶναι κατειλημμένη ἀπό τό α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, ἤτοι κατά 5 διαφορετικούς τρόπους. Αἱ τρεῖς τελευταῖαι θέσεις δύνανται νά εἶναι ἀπό 3 ἐκ τῶν ὑπολοίπων 15 στοιχείων, ἤτοι $\Sigma_{14,3}$ τρόπους διαφορετικούς.

Ἐν κατακλεῖδι οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι ἔχουν α_6 εἰς τήν 2αν θέσιν εἶναι $5.\Sigma_{14,3} = 1820$.

'Εάν ή δευτέρα θέσις εἶναι κατειλημμένη ἀπό α_7, ή πρώτη θέσις δύναται νά εἶναι κατειλημμένη κατά 6 διαφορετικούς τρόπους καί αἱ τελευταῖαι 3 κατά $\Sigma_{13,3}$ τρόπους διαφορετικούς ἤτοι $6.\Sigma_{13,3} = 1716$.

'Επομένως ἐν συνόλῳ θά ἔχωμεν 1820 + 1716 = 3536.

4) Δίδονται 10 ζεύγη γαντιῶν. 'Εξετάζομεν τάς ὁμάδας τῶν 4 γαντιῶν. Πόσαι εἶναι αἱ ὁμάδες αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν

α) κανένα ζεῦγος πλῆρες

β) Ἕνα ζεῦγος πλῆρες

γ) δύο ζεύγη πλήρη

Λ ύ σ ι ς

α) 'Η πρώτη θέσις δύναται νά εἶναι κατειλημμένη ἀπό οἱονδήποτε ἐκ τῶν 20 γαντιῶν.

'Η δευτέρα θέσις δύναται νά εἶναι κατειλημμένη ἀπό ἕν οἱονδήποτε τῶν ὑπολοίπων 19 ἐκτός ἐκεῖνο τό ὁποῖον δημιουργεῖ ζεῦγος μέ τό πρῶτον, ἤ ἐξ ἑνός τῶν ὑπολοίπων 18.

'Η τρίτη θέσις δύναται νά εἶναι κατειλημμένη ἀπό ἕν οἱονδήποτε τῶν ὑπολοίπων 17, ἐκτός ἐκείνου, τό ὁποῖον σχηματίζει ζεῦγος μέ ἐκεῖνο τό ὁποῖον ἔχομεν εἰς τήν δευτέραν θέσιν, ἤτοι 16 γάντια.

'Η τετάρτη θέσις δύναται νά εἶναι κατειλημμένη ἀπό οἱονδήποτε τῶν ὑπολοίπων 15 ἐκτός ἐκείνου τό ὁποῖον σχηματίζει ζεῦγος μέ τό τέταρτον, καί τό ὁποῖον καταλαμβάνει τήν τρίτην θέσιν, ἤτοι 14 γάντια.

Τελικῶς αἱ δυναταί ὁμάδες θά εἶναι

$$\frac{20.18.\ 16.\ 14}{4!} = 3360$$

β) Αἱ δύο πρῶται θέσεις εἶναι κατειλημμέναι ἀπό ἕν ζεῦγος πλῆρες, ἤτοι κατά 10 διαφορετικούς τρόπους. 'Η τρίτη θέσις δύναται νά εἶναι ἕν τῶν ὑπολοίπων 18 γαντιῶν.

'Η τετάρτη θέσις δύναται νά εἶναι ἕν τῶν 18 γαντιῶν ἐκτός ἐκείνου, τό ὁποῖον ἔχομεν θέσει εἰς τήν τρίτην θέσιν καί σχηματίζει ζεῦγος μέ ἐκεῖνο, τό ὁποῖον κατέχει τήν τρίτην θέσιν, ἤτοι κατά 16 διαφορετικούς τρόπους.

'Επομένως αἱ δύο τελευταῖαι θέσεις δύναται νά εἶναι κατειλημμέναι κατά $\frac{18 \cdot 16}{2!}$ διαφορετικούς τρόπους.

'Επομένως οἱ Συνδυασμοί οἱ ὁποῖοι παρουσιάζουν ἕν ζεῦγος πλῆρες εἶναι

$$10 \cdot \frac{18 \cdot 16}{2} = 1440$$

γ) Αἱ πρῶται δύο θέσεις δύνανται νά εἶναι κατειλημμέναι ἀπό ἕν πλῆρες ζεῦγος, ἤτοι κατά 10 διαφορετικούς τρόπους.

Αἱ τελευταῖαι δύο θέσεις δύναται νά καταληφθοῦν ἐξ ἑνός τῶν ὑπολοίπων 9 ζευγῶν.

Θά ἔχωμεν ὅθεν $\frac{10.9}{2!} = \Sigma_{10,2} = 45$

5) Δίδονται τά στοιχεῖα α_1 , α_2,......., α_{10} καί β_1, β_2,β_3. ......,β_{10}. 'Εξετάζομεν τούς ἁπλούς Συνδυασμούς τῶν ὡς ἄνω στοιχείων ἀνά 5.

Νά προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμός τῶν συνδυασμῶν ὅπου δέν ἐμφανίζονται στοιχεῖα τῶν αὐτῶν ἐνδείξεων.

Λ ύ σ ι ς

'Η πρώτη ἐκ τῶν πέντε θέσεων, δύναται νά καταληφθῇ ὑφ'ἑνός οἱουδήποτε ἐκ τῶν 20 στοιχείων.

'Η δευτέρα θέσις δύναται νά καταληφθῇ ἐκ τῶν ὑπολοίπων 19 στοιχείων ἐκτός ἐκείνου τό ὁποῖον ἔχει τήν αὐτήν ἔνδειξιν πρός τό καταλαμβάνον τήν πρώτην θέσιν στοιχεῖον, ἤτοι κατά 18 διαφόρους τρόπους. 'Η τρίτη θέσις εἰς 16 διαφορετικούς τρόπους. Ἡ τετάρτη εἰς 14, ἡ πέμπτη εἰς 12 διαφορετικούς τρόπους.

Τελικῶς οἱ συνδυασμοί θά εἶναι:

$$\frac{20.18.16.14.12}{5!} = 8.064$$

8) Ἔχομεν 28 κάρτες τοῦ POKER καί τέσσαρες παίκτας, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει 5 κάρτες. Πόσαι εἶναι αἱ δυναταί κατανομαί τῶν παιγνιοχάρτων;

Λύσις

Εἶναι φανερόν ὅτι πρόκειται περί συνδυασμῶν καθ'ὅσον δέν ἐνδιαφέρει ἡ τάξις καθ'ἥν κατανέμονται αἱ κάρται.

Ὁ πρῶτος παίκτης δύναται νά λάβῃ 5 κάρτας κατά $\Sigma_{28,5}$ τρόπους διαφορετικούς.

Ὁ δεύτερος δύναται νά λάβῃ 5 κάρτας κατά $\Sigma_{23,5}$ τρόπους.

Ὁ τρίτος δύναται νά λάβῃ 5 κάρτας κατά $\Sigma_{18,5}$ διαφόρους τρόπους.

Ὁ τέταρτος δύναται νά λάβῃ 5 κάρτας κατά $\Sigma_{13,5}$ διαφόρους τρόπους.

Αἱ δυναταί κατανομαί θά εἶναι ἑπομένως

$\Sigma_{28,5} + \Sigma_{23,5} + \Sigma_{18,5} + \Sigma_{13,5} = 98.280 + 33.649 + 8.568 + 1.287 = 141.784.$

9) Εἰς ἕνα βαγόνι μιᾶς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ὑπάρχουν 10 θέσεις, κατά τήν διεύθυνσιν κινήσεως τοῦ τραίνου καί 10 θέσεις κατά τήν ἀντίθετον διεύθυνσιν. Νά προσδιορισθῇ πῶς εἶναι δυνατόν νά τοποθετήσωμεν 8 ἄτομα γνωρίζοντες ὅτι 3 ἐξ αὐτῶν ἐπιθυμοῦν νά καθήσουν κατά τήν διεύθυνσιν κινήσεως τοῦ τραίνου καί 2 κατά τήν ἀντίθεσιν διεύθυνσιν.

('Απάντησις 1.121.047.200 διαφορετικούς τρόπους).

Ἀσκήσεις ἐπί τοῦ Διωνύμου τοῦ Νεύτωνος

Παράδειγμα 1ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\alpha+\beta)^5$

Ἐφαρμόζοντες τόν σχετικόν τύπον, θά ἔχωμεν

$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\,\alpha^3\beta^2 + 10\,\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5.$

Παράδειγμα 2ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\alpha - \beta)^7$

$(\alpha - \beta)^7 = \alpha^7 - 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 - 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 - 21\alpha^2\beta^5 +$
$+ 7\alpha\beta^6 - \beta^7.$

Παράδειγμα 3ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\alpha - 1)^4$

$(\alpha - 1)^4 = \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha + 1.$

Παράδειγμα 4ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\chi + 1)^9$

$(\chi + 1)^9 = \chi^9 + 9\chi^8 + 36\chi^7 + 84\chi^6 + 126\chi^5 + 126\chi^4 + 84\chi^3 +$
$+ 36\chi^2 + 9\chi + 1.$

Παράδειγμα 5ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(2\alpha + 4\beta)^3$

$(2\alpha + 4\beta)^3 = 8\alpha^3 + 48\alpha^2\beta + 96\alpha\beta^2 + 64\beta^3 = 8\,(\alpha^3 + 6\alpha^2\beta +$
$+ 12\alpha\beta^2 + 8\beta^3).$

Παράδειγμα 6ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα $(\alpha - 2\chi)^7.$

$$(\alpha - 2\chi)^7 = \alpha^7 - 14\alpha^6\chi + 84\alpha^5\chi^2 - 280\alpha^4\chi^3 + 560\alpha^3\chi^4 + $$
$$-672\alpha^2\chi^5 + 448\alpha\chi^6 - 128\chi^7.$$

Παράδειγμα 7ον

$$\left(\frac{\chi}{2} + 2 \right)^6 = \frac{\chi^6}{64} + \frac{3\chi^5}{8} + \frac{15\chi^4}{4} + 20\chi^3 + 60\chi^2 + 96\chi + 64.$$

Παράδειγμα 8 ον

Νά εὑρεθῇ τό ἀνάπτυγμα

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3$$

Λ ύ σ ι ς

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3 = \frac{3!}{3!}\alpha_3^3 + \frac{3!}{3!}\alpha_2^3 + \frac{3!}{3!}\alpha_1^3 + \frac{3!}{2!}\alpha_2\alpha_3^2 +$$
$$+ \frac{3!}{2!}\alpha_1\alpha_3^2 + \frac{3!}{2!}\alpha_1\alpha_2^2 + \frac{3!}{2!}\alpha_2^2\alpha_3 + \frac{3!}{2!}\alpha_1^2\alpha_2 +$$
$$+ \frac{3!}{2!}\alpha_1^2\alpha_3 + 3!\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3^3 + \alpha_2^3 + \alpha_1^3 + 3\alpha_2\alpha_3^2 + 3\alpha_1\alpha_3^2 +$$
$$+ 3\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_2^2\alpha_3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1^2\alpha_3 + 6\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 .$$

Γενικαί ἀσκήσεις ἐπί τῆς Συνδυαστικῆς θεωρίας

1) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$1+2\binom{\nu}{1}+3\binom{\nu}{2}+\ldots\ldots+(\nu+1)\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}+\nu.2^{\nu-1}$$

Λ ύ σ ι ς

$$\Sigma=\left[1+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots\ldots\ldots+\binom{\nu}{\nu}\right]+\left[\binom{\nu}{1}+2\binom{\nu}{2}+\ldots\ldots+\binom{\nu}{\nu}\right] \quad (1)$$

Γνωρίζοντες ὅτι ἐάν εἰς τό ἀνάπτυγμα τοῦ Διωνύμου τοῦ Νεύτωνος $(\alpha+\beta)^{\nu}$ θέσωμεν α=1, καί β=1 λαμβάνομεν

$$\binom{\nu}{o}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots\ldots\ldots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}.$$

Κατά συνέπειαν τό ἐντός τῆς πρώτης ἀγκύλης ἄθροισμα τῆς σχέσεως (1) ἰσοῦται μέ 2^{ν}.

'Επομένως $\Sigma=2^{\nu}+\left[\nu+2\dfrac{\nu(\nu-1)}{1.2}+3\dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}+\ldots+\nu.1\right]=$

$$=2^{\nu}+\nu\left[1+\frac{\nu-1}{1}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots+1\right]=$$

$$2^{\nu}+\nu\left[\binom{\nu-1}{o}+\binom{\nu-1}{1}+\binom{\nu-1}{2}+\ldots\ldots+\binom{\nu-1}{\nu-1}\right]=2^{\nu}+\nu.2^{\nu-1}$$

2) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι

$$\binom{\nu}{\mu}=\frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

Λ ύ σ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι $\binom{\nu}{\mu}=\dfrac{A^{\mu}_{\nu}}{M\mu}=\dfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots.(\nu-\mu+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\mu}$ (α).

'Εάν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τῆς σχέσεως (α) ἐπί τόν ἀριθμόν (ν-μ)!, ἤτοι 1.2.3 ......(ν-μ-2) (ν-μ-1) (ν-μ), τότε ὁ ἀριθμητής καθίσταται 1.2.3.....(ν-μ)

$(\nu-\mu+1)\ldots(\nu-2)(\nu-1)\nu = \nu!$, ὁ δέ παρανομαστής καθίσταται $\mu!.(\nu-\mu)!$

Ὅθεν

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

3) Δείξατε ὅτι $\dfrac{(\nu-1)!}{\nu!} = \dfrac{1}{\nu}$

Λύσις

$$\frac{(\nu-1)!}{\nu!} = \frac{1.2.3\ldots(\nu-2)(\nu-1)}{1.2.3\ldots(\nu-2)(\nu-1).\nu} = \frac{1}{\nu}$$

4) Νά ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{(\nu+2)!}{(\nu-2)!}$$

Λύσις

$$\frac{(\nu+2)!}{(\nu-2)!} = \frac{1.2.3\ldots(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3\ldots(\nu-2)} = (\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

5) Πόσους ἀριθμούς δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν λαμβάνοντες τρία ἐκ τῶν ψηφίων 1,2,3,4,5 καί δύο ἐκ τῶν ψηφίων 6,7,8.

Ἐκ τῶν 5 πρώτων ψηφίων δυνάμεθα νά λάβωμεν τά 3 κατά $\binom{5}{3}$ τρόπους καί ἐκ τῶν ψηφίων 6,7,8 τά 2 κατά $\binom{3}{2}$ τρόπους.

Τό σύνολον τῶν ὁμάδων θά δίδεται $\binom{5}{3}.\binom{3}{2}$.

Ἑκάστη ὅμως ὁμάς ἀποτελουμένη ἀπό 5 διάφορα ψηφία, δύναται νά καταταχθῇ εἰς σειράν κατά 5! τρόπους. Ἄρα τό πλῆθος τῶν ἀριθμῶν θά εἶναι $\binom{5}{3}\binom{3}{2}.5!$

6) Ὁ περιστρεφόμενος δίσκος τῶν τηλεφωνικῶν συσκευῶν περιέχει τά ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Πόσους πενταψηφίους ἀρι-

θμούς δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν (χωρίς έπαναλήψεις).

7) 'Από 12 μαθητάς καί 5 μαθητρίας θέλομεν νά σχηματίσωμεν ὁμάδας 6 προσώπων, ὥστε εἰς κάθε ὁμάδα νά ὑπάρχη τοὐλάχιστον μία μαθήτρια. Πόσας ὁμάδας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν;

8) 'Οκτώ αὐτοκίνητα συνδέουν τάς πόλεις Χ καί Ψ. Κατά πόσους τρόπους δύναται εἷς ταξειδιώτης νά μεταβῆ, ἐκ τῆς πόλεως Χ εἰς τήν Ψ καί νά ἐπιστρέψη διά διαφορετικοῦ αὐτοκινήτου;

9) 'Υπολογίσατε πόσους ἀριθμούς συμπεριλαμβανομένους μεταξύ 55 καί 7100 δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν ἐκ τῶν κάτωθι ἀριθμῶν 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9 λαμβανομένους καθ'ὅλους τούς δυνατοῦς τρόπους ἄνευ ἐπαναλήψεως;

10) Δίδονται 9 ἀριθμοί 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Σχηματίσατε τάς διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων α) αἱ ὁποῖαι ἔχουν εἰς τήν πρώτην θέσιν ἕνα ψηφίον ἄρτιον καί εἰς τήν δευτέραν καί τρίτην θέσιν ἀδιαφόρως ἕνα ψηφίον ἄρτιον ἤ περιττόν.
β) αἱ ὁποῖαι ἔχουν εἰς τήν πρώτην καί δευτέραν θέσιν δύο ψηφία ἄρτια.

11) Πόσους πενταψηφίους ἀριθμούς ἔχοντες διαφορετικά ψηφία δύνανται νά σχηματισθοῦν ἐκ τῶν ψηφίων 1,2,........9.

12) Δίδονται τά στοιχεῖα α_1, α_2, ... α_{10} καί β_1, β_2..... ....β_{10}, Σχηματίσατε τούς ἁπλούς συνδυασμούς τῶν ὡς ἄνω στοιχείων ἀνά 5.

13) Κατά πόσους τρόπους τρεῖς ταξιδιῶτες δύνανται νά καταλύσουν εἰς 4 ξενοδοχεῖα, ὄχι κατ'ἀνάγκην εἰς διάφορον ἕκα -

στος.

14) 'Εξ 25 προσώπων πρόκειται νά έκλεγῆ μία έπιτροπή έκ 4 προσώπων. Πόσαι διαφορετικαί έπιτροπαί δύνανται νά σχηματισθοῦν;

15) Κατά πόσους τρόπους πέντε πρόσωπα δύνανται νά διαλέξουν θέσεις εἰς 10 ἠριθμημένα καθίσματα;

16) Νά εὑρεθῆ τό ἀνάπτυγμα $(2\chi-3\psi)^5$.-

Ἐφαρμογαί ἐπί τῆς Ἀξιωματοποιήσεως

Α' Ἄλγεβρα τῶν γεγονότων

1) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$(A \cap B) \cup A = A$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι $A \cap I = A$. 'Εφαρμόζοντες λοιπόν εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης σχέσεως τήν ὡς ἄνω ἰδιότητα θά ἔχωμεν.

$(A \cap B) \cup (A \cap I) = (A \cap B) \cup A \cap (B \cup \bar{B}) =$ (ὅπου $B \cup \bar{B} = I$) $= (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

Ὅμως $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

(Βάσει τῆς ἰδιότητος (10).)

'Επομένως ἔχομεν $(A \cap B) \cup A = A$

2) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ σχέσις $A \cap B = A$ εἶναι συνθήκη ἀναγκαία καί ἱκανή, ἵνα ἔχωμεν

$A \cap \bar{B} = \Phi$

α) Συνθήκη ἱκανή

'Εάν $A \cap B = A$ θά εἶναι $A \cap \bar{B} = \Phi$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cap \bar{B} = (A \cap B) \cap \bar{B} = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \Phi = \Phi$

β) Συνθήκη ἀναγκαία

'Εάν εἶναι $A \cap \bar{B} = \Phi$, θά εἶναι $A = A \cap B$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι βάσει τῆς ἰδιότητος (10)

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup \Phi = A \cap B$

3) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $A \cap (A \cup B) = A$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cap (A \cup B) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap I = A$

4) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$A = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cup (B \cap \bar{B}) = A \cup \Phi = A$

5) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι

α) $(A \cap B) = A \cap (\bar{A} \cup B)$

β) $(A \cup B) = A \cup (\bar{A} \cap B)$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

α) $A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \Phi \cup (A \cap B) =$

$= A \cap B$

β) $A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = I \cap (A \cup B) =$

$(A \cup B)$

6) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \Phi$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = [A \cap (\bar{A} \cap \bar{B})] \cup [B \cap (\bar{A} \cap \bar{B})] =$

$= [(A \cap \bar{A}) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap \bar{B}) \cap \bar{A}] = [(\Phi \cap \bar{B}) \cup (\Phi \cap \bar{A})] =$

$= \Phi \cup \Phi = \Phi$

7) Δίδονται $A \cup B = A \cup \Gamma = I$

$A \cap B = A \cap \Gamma = \Phi$

Νά ἀποδειχθῆ ὅτι $B = \Gamma$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

$B = B \cap I$	$\Gamma = \Gamma \cap \Gamma$
$B = B \cap (A \cup \Gamma)$	$\Gamma = \Gamma \cap (A \cup B)$
$B = (A \cap B) \cup (B \cap \Gamma)$	$\Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$
$B = \Phi \cup (B \cap \Gamma)$	$\Gamma = \Phi \cup (B \cap \Gamma)$
$B = B \cap \Gamma$	$\Gamma = B \cap \Gamma$

Ὅθεν θά εἶναι $B = \Gamma$

8) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι

$(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (\Gamma \cap \bar{A}) = (A \cap B) \cup (\Gamma \cap \bar{A})$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

$(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cap (A \cup \bar{A}) \cup (\Gamma \cap \bar{A}) =$

$= [(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cap A] \cup [(B \cap \Gamma) \cap \bar{A} \cup (\Gamma \cap \bar{A})] =$

$= (A \cap B) \cup (\Gamma \cap \bar{A})$

[Βάσει τῆς ἰδιότητος $A \cup (A \cap B) = A$]

9) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$A \cap (B \cup \Gamma \cup \Delta) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \cup (A \cap \Delta)$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cap (B \cup \Gamma \cup \Delta) = A \cap [(B \cup \Gamma) \cup \Delta] = [A \cap (B \cup \Gamma)] \cup [(A \cap \Delta)]$

$= (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \cup (A \cap \Delta)$

10) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$(\overline{A \cup B \cup \Gamma}) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$(\overline{A \cup B \cup \Gamma}) = [\overline{(A \cup B) \cup \Gamma}] = (\overline{A \cup B}) \cap \bar{\Gamma} =$

$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{\Gamma} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}$

11) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A}$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap B) = \bar{A} \cup \Phi = \bar{A}$

12) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ σχέσις
$A \cup B = A$ εἶναι συνθήκη ἀναγκαία καί ἱκανή, ἵνα ἔχωμεν
$A \cup \bar{B} = I$

α) 'Εάν εἶναι $A \cup B = A \Longrightarrow A \cup \bar{B} = I$ (ἱκανή)

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$A \cup \bar{B} = (A \cup B) \cup \bar{B} = A \cup (B \cup \bar{B}) = A \cup I = A$

β) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (A \cup B) \cap I = A \cup B$

13) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A}$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap B) = \bar{A} \cup \Phi = \bar{A}$

14) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$\left[\overline{(\bar{A} \cap B)} \cap \overline{(A \cap \bar{B})}\right] = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

15) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$B - A = B \Longleftrightarrow A \cap B = \Phi$

16) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἐάν $A = \Phi$ καί $B = \Phi$ θά εἶναι $A \cup B = \Phi$ καί ἀντιθέτως.

17) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap (A \cup B \cup \Gamma) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}$

18) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$A \cup (B \cap \Gamma \cap \Delta) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \cap (A \cup \Delta)$

19) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$(A \cup B) \cap (B \cup \Gamma) \cap (\Gamma \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap (\Gamma \cup \bar{A})$

Β΄ Πιθανότης Γεγονότων

20) 'Εάν ρίψωμεν δύο κέρματα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, ποία εἶναι ἡ πιθανότης τῶν γεγονότων Κ Κ, Κ Γ, Γ Κ, Γ Γ (ὅπου π.χ. Κ Γ, δεικνύει "κορῶνα" εἰς τήν 1ην ρῖψιν καί "γράμματα" εἰς τήν 2αν ρῖψιν.

Λ ύ σ ι ς

'Η πιθανότης $P\tau(K) = P\tau(\Gamma) = \frac{1}{2}$

Δεδομένου ὅτι τά γεγονότα εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ των θά ἔχωμεν

$$Pτ\ (K_1 \cap K_2) = Pτ\ (K_1).Pτ\ (K_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

'Ομοίως $Pτ(K \cap Γ) = Pτ(K).Pτ(Γ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

" $Pτ(Γ \cap K) = Pτ(Γ).Pτ(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

" $Pτ(Γ \cap Γ) = Pτ(Γ).Pτ(Γ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

"Ο θ ε ν

$P\ [K \cap K] = 1/2\ .\ 1/2 = 1/4$

$P\ [K \cap Γ] = 1/2\ .\ 1/2 = 1/4$

$P\ [Γ \cap K] = 1/2.\ 1/2 = 1/4$

$P\ [Γ \cap Γ] = 1/2\ .\ 1/2 = \underline{1/4}$

1

21) Ρίπτομεν δύο κέρματα συγχρόνως. Ποία ἡ πιθανότης νά ἔχωμεν τοὐλάχιστον μία "κορῶνα".

Λ ύ σ ι ς

'Η ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι

$$Pτ(\ K_1 \cap K_2) + Pτ\ (K_1 \cap Γ_2) + Pτ(\ Γ_1 \cap K_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

22) Εἰς τήν ρῖψιν ἑνός κύβου ὅπου κάθε ὄψις ἔχει πιθανότητα ἐμφανίσεως 1/6. Νά ὑπολογισθῆ ἡ πιθανότης.

1) E_1 = ὅτι θά ἔλθη ἄρτιος ἀριθμός

2) E_2 = ἀριθμός $\geqslant 4$

3) E_3 = ἀριθμόν διαιρετός διά 3

Λ ύ σ ι ς

Συμβολίζομεν διά A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 τό δυνατόν ἀποτέλεσμα τῆς ρίψεως τοῦ κύβου θά ἔχωμεν.

1) $Pτ(E_1) = Pτ(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = Pτ(A_2) + Pτ(A_4) +$

$+ Pτ(A_6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) $Pτ(E_2) = Pτ(A_4 \cup A_5 \cup A_6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = \frac{1}{2}$

3) $Pτ(E_3) = Pτ(A_3 \cup A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

23) Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5 ἐξάγομεν, τυχαίως ἕνα καί ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῶν ὑπολοίπων ἐξάγομεν ἕν. ἕτερον. Συμβολίζομεν διά P_1 (ἤ $Δ_1$) τό γεγονός "πρῶτος ἀριθμός ἄρτιος", (ἤ περιττός) καί ἀναλόγως P_2 (ἤ $Δ_2$) διά τό ἀποτέλεσμα τῆς δευτέρας ἐξαγωγῆς.

Νά ὑπολογισθῆ $Pτ(P_1)$, $Pτ(Δ_1)$, $Pτ(P_2)$ $Pτ(P_1 \cup P_2)$

Λ ύ σ ι ς

$Pτ(P_1) = Pτ(P_2) = \frac{2}{3}$

$Pτ(Δ_1) = \frac{3}{4}$

$Pτ(P_1 \cup P_2) = \frac{13}{20}$

24) Μία κάλπη περιέχει 3 σφαίρας λευκάς καί 5 μαύρας. Ἐξάγομεν ἀπό τήν κάλπην 3 σφαίρας καί ἐκ τῶν ὑπολοίπων τῆς κάλπης σφαιρῶν ἐξάγομεν μίαν ἄλλην, ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὥστε νά εἶναι αὕτη λευκή;

Λ ύ σ ι ς

Ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ἐξαγομένων σφαιρῶν θά εἶναι L ($L = 0,1,2,3$) λευκαί σφαῖραι καί ἑπομένως ἡ μειωμένη κάλπη θά περιέχῃ

$3 - L$ λευκάς σφαίρας καί

$5 - (3-L) = 2 + L$ σφαίρας μαύρας

Τά γεγονότα $L = 0$, $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$ έχουν πιθανότητα P

$$P(L) = \frac{\binom{3}{4}\binom{5}{3-L}}{\binom{8}{3}}$$

'Επομένως ή ζητουμένη πιθανότης θά είναι

$$\sum_{0}^{3} L \,\frac{3-L}{5}\, \frac{\binom{3}{L}\binom{5}{3-L}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{8}$$

25) Ρίπτομεν 6 κύβους. Ποία ή πιθανότης νά έμφανισθῆ τό 1, 2, 3, 4, 5, 6

Λ ύ σ ι ς

'Η πιθανότης τῆς έμφανίσεως τοῦ 1, 2, 3, 4, 5, 6, εἶναι

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6^6}$$

'Αλλά τοῦτο δύναται νά πραγματοποιηθῆ κατά ἕξ διαφορετικούς τρόπους. 'Επομένως ή ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι

$$\frac{6!}{6^6}$$

26) Μία κάλπη περιέχει 5 σφαίρας λευκάς 4 έρυθράς καί 3 μαύρας. Μία ἄλλη περιέχει 5 λευκάς 6 έρυθράς 7 μαύρας. 'Εξάγομεν μίαν σφαῖραν ἀπό ἑκάστην κάλπην. Ποία εἶναι ή πιθανότης ὥστε νά εἶναι τοῦ ἰδίου χρώματος;

Λ ύ σ ι ς

Παριστάνω μέ Α τήν πιθανότητα νά ἔλθη λευκή σφαῖρα μέ Κ νά ἔλθη έρυθρά καί μέ Μ νά ἔλθη μαύρη.

'Επομένως ή πιθανότης Α, Κ, Μ τῆς πρώτης κάλπης θά εἶναι:

$$A = \frac{5}{12}\ ,\ K = \frac{4}{12}\ ,\ M = \frac{3}{12}$$

'Ενῶ τῆς δευτέρας $A' = \frac{5}{18}$, $K' = \frac{6}{18}$, $M' = \frac{7}{18}$

κατά συνέπειαν.

'Η ζητουμένη πιθανότης εἶναι

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4.6}{12.18} + \frac{3.7}{12.18} = \frac{70}{216} = \frac{35}{108}$$

27) Τοποθετοῦμεν τυχαίως 10 σφαίρας εἰς 10 κάλπας. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι ὅλαι αἱ κάλπαι περιέχουν μία σφαῖραν; Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι μένει κενή μόνο μία κάλπη;

Λ ύ σ ι ς

'Η πιθανότης ὅτι εἰς κάθε κάλπην περιέχεται μία σφαῖρα εἶναι

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdots\cdots\cdots \frac{1}{10} = \frac{1}{10^{10}}$$

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ὅμως κατά 10 διαφορετικούς τρόπους. Ὥστε ἡ ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι $10! \frac{1}{10^{10}}$.

'Η πιθανότης ὅτι μένει κενή μία κάλπη θά εἶναι

$$\frac{\binom{10}{2} 10!}{10^{10}}$$

28) Ρίπτομεν ἕνα κύβον τρεῖς φοράς. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νά παρουσιασθῇ τό 2 μόνον μία φοράν;

Λ ύ σ ι ς

'Η ἐμφάνισις τοῦ 2 ἔχει πιθανότητα $\frac{1}{6}$ καί τοῦ "ὄχι 2" πιθανότητα $\frac{5}{6}$. Δεδομένου ὅμως ὅτι τό 2 δύναται νά παρουσιασθῇ κατά 3 διαφορετικούς τρόπους, ἡ ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι.

$$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$$

29) 'Από μία τράπουλα λαμβάνομεν δύο χαρτιά ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως. Ποία ἡ πιθανότης νά λάβωμεν 2 "κοῦπες";

Λ ύ σ ι ς

Ἡ ἐμφάνισις τῆς πρώτης κούπας ἔχει πιθανότητα 4/52 ἐνῶ τῆς δευτέρας 3/51

Ἄρα ἡ ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι:

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

30) Ἔχομεν τρεῖς κάλπας. Ἡ πρώτη ἔχει ἕνα λευκόν καί 2 μαῦρα σφαιρίδια. Ἡ δευτέρα 2 λευκά καί 3 μαῦρα καί ἡ τρίτη 1 λευκόν καί 2 μαῦρα. Λαμβάνομεν ἕν σφαιρίδιον ἀπό τήν πρώτην κάλπην καί τό θέτομεν εἰς τήν δευτέραν. Λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ ἕν ἀπό τήν δευτέραν καί τό θέτομεν εἰς τήν τρίτην. Τέλος λαμβάνομεν ἕν σφαιρίδιον ἀπό τήν τρίτην. Ποία ἡ πιθανότης νά λάβωμεν καί τάς τρεῖς φοράς λευκόν σφαιρίδιον;

Λ ύ σ ι ς

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς λευκοῦ σφαιριδίου ἐκ τῆς πρώτης κάλπης εἶναι 1/3.

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς λευκοῦ ἐκ τῆς δευτέρας κάλπης θά εἶναι 3/6 = 1/2.

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς λευκοῦ ἐκ τῆς τρίτης θά εἶναι 2/4=1/2.

Ἐπομένως ἡ ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

31) Δύο ἄτομα Α καί Β ἔχουν ραντεβοῦ εἰς τόν σταθμόν. Ὁ Β δέν γνωρίζει ἐάν ὁ Α θά ἔλθῃ. Ρίπτει ἕνα νόμισμα. Ἐάν ἔλθῃ "κορῶνα" τότε ὁ Α ἀναχωρεῖ, ἐάν ἔλθῃ "γράμματα", δέν θά ἔλθῃ. Ὑπάρχουν 6 τραῖνα. Ὁ Β πηγαίνει στόν σταθμόν καί μέχρι τῆς ἀφίξεως τοῦ 5ου τραίνου, ὁ Α δέν ἔχει ἔλθει ἀκόμη. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι θά ἔλθῃ μέ τό 6ον τραῖνο;

Λ ύ σ ι ς

Ἔστω Ρ τό γεγονός ὅτι ὁ Α ἀναχωρεῖ

Έστω $\bar{P}$ τό γεγονός ότι ὁ A δέν ἀναχωρεῖ

$Pτ\ (P) = Pτ\ (\bar{P}) = 1/2$

$P = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6$ (ὅπου $T_i \cap T_j = \Phi$ διά $i \neq j$)

$Pτ\ (P) = Pτ\ (T_1) + Pτ\ (T_2) + Pτ\ (T_3) \ldots\ldots Pτ\ (T_6) =$

$= 6\ Pτ\ (T_i) = 1/2$. Ὅθεν $Pτ\ (T_i) = \frac{1}{2.6} = \frac{1}{12}$

Ἐξετάζομεν τό γεγονός $Z = \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap \bar{T}_4 \cap \bar{T}_5$

Ἡ πιθανότης $Pτ(T_6 / Z)$ ἤτοι ἡ πιθανότης νά ἔλθῃ μέ τό ἕκτο τραῖνο θά εἶναι

$$Pτ\ (T_6 / Z) = \frac{Pτ\ (T_6 \cap Z)}{Pτ\ (Z)}$$

$$Z = \bigcap_{i=1}^{5} \bar{T}_i = (Z \cap P) \cup (Z \cap \bar{P})$$

$P\ (Z \cap P) = Pτ\ (P).Pτ\ (Z/P) = 1/2\ .\ 1/6 = \frac{1}{12}$

(ὅπου $P_τ(Z/P)$ δεικνύει τήν πιθανότητα ἀναχωρήσεως μέ τό ἕκτον τραῖνον)

$Pτ\ (Z \cap \bar{P}) = P\ (\bar{P})\ .\ P\ (Z/P) = 1/2\ .\ 1 = 1/2$

$Pτ\ (Z) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$

$Pτ\ (T_6 \cap Z) = Pτ\ (T_6)\ .\ P\ (Z/T_6) = 1/2\ .\ 1 = 1/12$

καί ἑπομένως

$$Pτ\ ({}^{T}6/Z) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}$$ εἶναι ἡ ζητουμένη πιθανότης.

32) Ἐκ δέσμης 32 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τυχαίως δύο συγχρόνως.

Ζητεῖται ἡ πιθανότης νά εἶναι

α) τό πρῶτον "Βαλές"

β) τό δεύτερον "Βαλές"

γ) ἀμφότεροι "Βαλέδες"

δ) ἕν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν "Βαλές"

Λ ύ σ ι ς

α) Ἡ πιθανότης νά εἶναι ἕν παιγνιόχαρτον "Βαλές" εἶναι $\frac{4}{32}$ διότι αἱ δυναταί περιπτώσεις εἶναι 32 καί αἱ εὐνοϊκαί περιπτώσεις 4.

β) Ἡ πιθανότης νά εἶναι καί τό δεύτερον παιγνιόχαρτον "Βαλές" διά τόν ἴδιον λόγον ὡς καί ἀνωτέρω, θά ἔχωμεν $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

γ) Ἡ πιθανότης νά εἶναι ἀμφότερα τά λαμβανόμενα παιγνιόχαρτα "Βαλέδες" θά εἶναι:

$$\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$$

δ) Ἡ πιθανότης νά εἶναι τοὐλάχιστον ἕν ἐξ αὐτῶν "Βαλές" θά εἶναι

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$$

33) Ἐάν ρίψωμεν δύο κύβους ποία ἡ πιθανότης νά παρουσιάσῃ ἕκαστος τόν ἀριθμόν 2;

Λ ύ σ ι ς

Ἡ πιθανότης νά παρουσιάσῃ ὁ εἷς κῦβος τόν ἀριθμόν 2 εἶναι 1/6 καί ὁ δεύτερος ὁμοίως 1/6. Δεδομένου ὅτι τά δύο γεγονότα εἶναι ἀσυμβίβαστα μεταξύ των θά ἔχωμεν βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1/36$$

34) Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ἵνα δύο κύβοι ριπτόμενοι δείξωσι

ἀριθμούς ἔχοντας ἄθροισμα περιττόν;

Λ ύ σ ι ς

Τά περιττά ἀθροίσματα θά εἶναι 3, 5, 7, 9, 11.

Αἱ ἀντίστοιχοι πιθανότητες θά εἶναι

$$P_5 = P_9 = \frac{1}{9}\ , \ P_7 = \frac{1}{6}\ , \ P_{11} = P_3 = \frac{1}{18}$$

Ἡ ὁλική λοιπόν πιθανότης P νά ἐμφανισθῇ ἕν τῶν ἀνωτέρω γεγονότων, θά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐπί μέρους πιθανοτήτων, ἤτοι:

$$P = P_3 + P_5 + P_9 + P_{11} = \frac{2}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = 1/2$$

35) Μία κάλπη περιέχει K σφαίρας ἐπί τῶν ὁποίων ἔχουσι σημειωθῆ οἱ ἀριθμοί 1, 2,.....,K. Ἐξάγομεν τυχαίως δύο. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ὡρισμένος ἀριθμός i εἶναι σημειωμένος ἐπί τῆς μιᾶς ἤ τῆς ἑτέρας σφαίρας;

Λ ύ σ ι ς

Ἐπειδή ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ οἱοσδήποτε ἀριθμός εἶναι $\frac{1}{K}$, βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλικῶν πιθανοτήτων, ἡ ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι:

$$P = \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K}$$

36) Μία κάλπη περιέχει 2 σφαῖρας λευκάς 1 μαύρην καί 7 ἐρυθράς. Ζητεῖται:

α) Ποία ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς εἰς δύο ἐπαναλήψεις μιᾶς λευκῆς σφαίρας καί μετά μιᾶς μαύρης, ἐάν ἐπαναθέσωμεν τήν ἐξαχθεῖσαν σφαίραν ἤ ἐάν δέν ἐπαναθέσωμεν ταύτην;

β) Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ μία σφαῖρα λευκή καί μία μαύρη ἀνεξαρτήτως τῆς σειρᾶς ἐξαγωγῆς τῶν σφαιρῶν, ὑπό τόν ὅρον ὅτι ἡ ἐξαγωγή λαμβάνει χώραν δι'ἐπαναλήψεως.

Λ ύ σ ι ς

α) Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν τά γεγονότα εἶναι ἀνεξάρτητα. Ἐπομένως ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ κατά τήν πρώτην ἐξαγωγήν σφαῖρα λευκή καί ἐν συνεχείᾳ κατά τήν δευτέραν ἐξαγωγήν σφαῖρα μαύρη, θά εἶναι:

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}02$$

Ἐάν ἀντιθέτως κατά τήν δευτέραν ἐξαγωγήν δέν ἐπαναθέσωμεν τήν ἐξαχθεῖσαν πρώτην σφαῖραν εἰς τήν κάλπην, τά γεγονότα εἶναι ἐξηρτημένα μεταξύ των, ὅθεν

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

β) Ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ μία σφαῖρα λευκή καί μία μαύρη ἀνεξαρτήτως τῆς σειρᾶς ἐξαγωγῆς θά εἶναι:

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

37) Ἀπό μίαν κάλπην περιέχουσαν ν σφαῖρας λαμβάνομεν τυχαίως ἕν πλῆθος σφαιρῶν. Ποία ἡ πιθανότης νά λάβωμεν ἄρτιον πλῆθος σφαιρῶν;

Λ ύ σ ι ς

Μία σφαῖρα δυνάμεθα νά λάβωμεν κατά $\binom{\nu}{1}$ τρόπους, δύο σφαῖρας κατά $\binom{\nu}{2}$ τρόπους, τρεῖς σφαῖρας κατά $\binom{\nu}{3}$ κ.ο.κ.

Ἐπομένως αἱ δυναταί περιπτώσεις θά εἶναι

$$\binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \ldots\ldots\ldots + \binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu}-1$$

Οἱ τρόποι κατά τούς ὁποίους λαμβάνομεν 2 σφαῖρας εἶναι

$$\binom{\nu}{2}, \ 4 \text{ σφαῖρας } \binom{\nu}{4} \ \ldots\ldots$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη πιθανότης θά εἶναι: $P = \dfrac{2^{\nu-1}-1}{2^{\nu}-1}$

38) Τρεῖς ὅμοιαι κάλπαι περιέχουν, ἡ πρώτη δύο χαρτονομίσματα τῶν 100 δρχ. καί ἕνα τῶν 50 δρχ., ἡ τρίτη δύο τῶν 50 δρχ. 'Εξάγομεν τυχαίως μία κάλπη καί ἐξ αὐτῆς ἕνα νόμισμα καί προκύπτει τῶν 50 δρχ. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι καί τό ἄλλο χαρτονόμισμα εἶναι τῶν 50 δρχ.;

('Απάντησις $P = \frac{2}{3}$)

39) Ἕν ἑρμάριον περιέχει 10 ζεύγη γαντιῶν. 'Εξάγομεν τυχαίως τέσσαρα γάντια. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νά ἔχωμεν τοὐλάχιστον ἕν ζεῦγος πλῆρες;

('Απάντησις $P = 99/323$)

40) Ρίπτομεν 5 κύβους. Ποία ἡ πιθανότης ὥστε τοὐλάχιστον τρεῖς ἐξ αὐτῶν νά δίδωσι τό ἴδιον ἀποτέλεσμα;

('Απάντησις 23/108)

41) Ρίπτομεν δύο κύβους ἀνεξαρτήτως τόν ἕνα ἐκ τοῦ ἄλλου. Νά ὑπολογισθῇ ἡ πιθανότης κατά τήν ὁποίαν τό ἄθροισμα νά εἶναι 9, καί ὁ πρῶτος, ἤ ὁ δεύτερος νά δίδουν ἕνα ἀριθμόν ἄρτιον;

('Απάντησις 1/9, 11/36, 3/4)

42) Εἰς μία κάλπην ὑπάρχουν 90 ἀριθμοί καί ἐξ αὐτῶν κερδίζουν οἱ 5 πρῶτοι διαδοχικῶς ἐξαγόμενοι ἀριθμοί. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νά ἐξαγάγωμεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν X, ὅστις νά κερδίζῃ;

('Απάντησις $- \frac{1}{18}$)

Ἀσκήσεις πρός λῦσιν

1. Εἰς μίαν οἰκογένειαν μέ τρία τέκνα ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα ἀγόρι. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἀμφότερα τά τέκνα εἶναι ἀγόρια;

2. Μία κάλπη περιέχει 15 σφαιρίδια ἐξ ὧν 5 λευκά καί 10 μαῦρα. Ἐξάγομεν δύο σφαιρίδια ἄνευ τοποθετήσεως τοῦ πρώτου σφαιριδίου ἐντός τῆς κάλπης. Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι ἀμφότερα τά ἐξαχθέντα λευκά σφαιρίδια;

3. Μία κάλπη περιέχει 3 σφαιρίδια λευκά καί 4 μαῦρα. Ἐξάγομεν συγχρόνως ἐκ τῆς κάλπης δύο σφαιρίδια. Ποία ἡ πιθανότης ἀμφότερα τά ἐξαχθέντα σφαιρίδια νά εἶναι τοῦ αὐτοῦ χρώματος;

4. Τέσσαρα ζεύγη γαντιῶν εὑρίσκονται εἰς μίαν ντουλάπα. Ἐξάγομεν τυχαίως τέσσαρα γάντια. Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι τοὐλάχιστον ἕν ζεῦγος;

5. Μία κάλπη περιέχει 50 σφαιρίδια ἠριθμημένα ἀπό 1 ἕως 50. Ἐξάγομεν δύο σφαιρίδια. Ποία ἡ πιθανότης, ἵνα δύο ἠριθμημένα σφαιρίδια ἔχουν ἄθροισμα 6 ἤ 8;

6. Ρίπτομεν δύο κύβους, ποία εἶναι ἡ πιθανότης ἵνα αἱ ἄνω ἕδραι δώσουν ἄθροισμα ≥ 9;

7. Ρίπτομεν συγχρόνως τρεῖς κύβους, ποία ἡ πιθανότης ἵνα αἱ ἄνω ἕδραι δώσουν ἄθροισμα 10, 12, 15;

8. Τέσσαρα πρόσωπα Α, Β, Γ, Δ ἀνασύρουν κατά σειράν ἀνα ἕνα κλῆρον ἀπό κάλπη ἡ ὁποία περιέχει ἀπό 1 ἕως 20 κλήρους καί κερδίζει ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος φέρει μικρότερον ἀριθμόν. Ἀνασύρει ὁ πρῶτος καί παρατηρεῖ ὅτι ὁ κλῆρος ἔχει τόν ἀριθμόν 7. Ποία κατόπιν τούτου ἡ πιθανότης νά κερδίσῃ ὁ Α;

9. Ἐκ δύο παικτῶν Α καί Β, ὁ Α ρίπτει 3 νομίσματα εἰς τόν ἀέρα καί ὁ Β δύο. Ὁ Α κερδίζει ἐάν φέρῃ περισσοτέρας φοράς "κορῶνα" ἀπό τόν Β. Ποία ἡ πιθανότης νά κερδίσῃ ὁ Α;

10. Δύο παῖκται Α καί Β παίζουν μέ τήν ἑξῆς συμφωνίαν. Ρίπτουν 2 κύβους, ἐάν τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι μικρότερον τοῦ 10 ὁ Α δίδει εἰς τόν Β ποσόν δρχ. ἴσον πρός τό ἐπιτευχθέν ἄθροισμα. Ἐάν τό ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον ἤ ἴσον τοῦ 10 ὁ Β δίδει εἰς τόν Α ὡρισμένον ποσόν Χ. Νά προσδιορισθῇ τό Χ εἰς τρόπον ὥστε τό παιχνίδι νά εἶναι δίκαιον.

11. Δίδονται A_1, A_2, A_3,...., A_5 κάλπαι ὅμοιαι μεταξύ των, περιέχουσαι ἡ μέν A_1 8 λευκάς σφαίρας καί δύο μαύρας αἱ δέ ὑπόλοιπαι ἀνά 4 λευκάς καί 8 μαύρας. Ἐξάγομεν ἐκ μιᾶς τυχούσης ἐκ τῶν 5 καλπῶν μία σφαῖρα.
Ζ η τ ε ῖ τ α ι
1) ἡ πιθανότης ἵνα ἡ ἐξαχθεῖσα σφαῖρα εἶναι λευκή, 2) ἐάν ἡ ἐξαχθεῖσα σφαῖρα εἶναι λευκή ποία ἡ πιθανότης νά ἔχῃ αὕτη ἐξαχθῆ ἐκ τῆς A_1;

12. Ἐκ μιᾶς δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τέσσαρα. Ποία ἡ πιθανότης νά λάβωμεν μίαν τοὐλάχιστον ντάμα;

13. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ ἔκ τινος κάλπης, περιεχούσης πλῆθος σφαιρῶν οὐχί μεγαλύτερον τοῦ Κ, ἄρτιον πλῆθος σφαιρῶν, καί ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ περιττόν πλῆθος σφαιρῶν;

14. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ἵνα δύο κῦβοι ριπτόμενοι δείξωσιν ἀριθμούς ἔχοντας ἄθροισμα ἄρτιον;

15. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τυχαίως 5. Ποία ἡ πιθανότης δύο ἐξ αὐτῶν νά εἶναι κόκκινα καί τρία μαῦρα;

16. Ἀπό μίαν κάλπην περιέχουσαν λ λευκά καί μ μαῦρα σφαι - ρίδια ἐξάγομεν ἀνά ἕν σφαιρίδιον ἕως ὅτου τά ἐξαγάγομεν ὅλα. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθοῦν τελευταῖα τά μαῦρα σφαιρίδια;

17. Δέκα σφαιρίδια κατανέμονται τυχαίως εἰς 4 κυτία. Ποία ἡ πιθανότης τό πρῶτον κυτίον νά περιέχῃ τρία σφαιρίδια;

18. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τυχαίως καί συγχρόνως 8. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ὑπάρχουν δύο τοὐλάχιστον βαλέδες;

19. Σέ ἕνα συρτάρι εὑρίσκονται τέσσαρες μαῦρες, ἕξ καφέ καί δύο κόκκινες κάλτσες. Ἀπό τό συρτάρι ἀνασύρονται κατά τύχην δύο κάλτσες. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὥστε νά εἶναι τοῦ ἰδίου χρώματος;

20. Ἔστω P ἡ πιθανότης ὅτι ἕν ἄτομον ἡλικίας X θά ἀποθάνῃ ἐντός ἑνός ἔτους. Ὑπάρχουν 4 ἄτομα (Α, Β, Γ, Δ) ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἡλικίας X ἐτῶν. Νά εὑρεθῇ ἡ πιθανότης, ὅτι:

α) ὁ Α, θά ἀποθάνῃ ἐντός τοῦ ἔτους.

β) τά ἄτομα Α καί Β θά ἀποθάνουν ἐντός τοῦ ἔτους, ἐνῷ τά ἄτομα Γ καί Δ δέν θά ἀποθάνουν.

21. Ρίπτομεν 10 φοράς ἕν νόμισμα. Ποία ἡ πιθανότης νά φέρωμεν 4 κορῶνες ἀκριβῶς;

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4ον

ΤΥΧΑΙΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ

Ἔννοια τῆς τυχαίας μεταβλητῆς

Ἡ συμβολή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς εἶναι θεμελιώδης εἰς τόν λογισμόν τῶν πιθανοτήτων, ἔχει δέ ἀκριβῶς τήν σημασίαν τήν ὁποίαν ἔχει ἡ μεταβλητότης εἰς τήν ἀνάλυσιν.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν ν γεγονότα τά $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ἐμφανιζόμενα εἰς μίαν ἀκολουθίαν $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_N$ $(N \geqslant \nu)$ μέ πιθανότητας ἀντιστοίχως $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\nu$.

Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς κάθε γεγονός A_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ ἀντιστοιχεῖ καί ἕνας ἀριθμός x_i. Κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν πρός τά γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ τούς ἀντιστοίχους ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Ἄν φαντασθῶμεν μίαν ποσότητα μεταβλητήν X ἥτις λαμβάνει τήν τιμήν x_1 ὅταν ἐμφανίζηται τό γεγονός A_1, τήν τιμήν x_2 ὅταν ἐμφανίζηται τό A_2, ..., τήν τιμήν x_ν ὅταν ἐμφανίζηται τό A_ν, τότε ἡ ποσότης X, ἥτις εἶναι συνάρτησις τῶν γεγονότων τῆς ἀκολουθίας, καλεῖται "τυχαία μεταβλητή".

<u>Ὅθεν:</u> Καλοῦμεν τυχαίαν μεταβλητήν μίαν μεταβλητήν ποσότητα X, ἥτις δύναται νά λάβῃ μίαν οἱανδήποτε τῶν πραγματικῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ ἐφ'ὅσον πραγματοποιηθῆ ἀντιστοίχως ἕν τῶν ἀσυμβιβάστων γεγονότων $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\nu$.-

Μή συνεχής τυχαία μεταβλητή

Ὑπάρχουν πολλοί τύποι τῆς τυχαίας μεταβλητῆς.

Θά περιορισθῶμεν ἐν πρώτοις εἰς τήν πλέον ἁπλῆν περίπτωσιν, ἤτοι τῆς (ἁπλῆς) μή συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς. Ὀνομάζομεν (ἁπλῆν) μή συνεχῆ τυχαίαν μεταβλητήν μίαν μεταβλητήν ποσότητα X, ἥτις εἰς ἕνα ὡρισμένον τύπον δοκιμῶν λαμβάνει τιμάς $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\nu$, ὥστε $\sum_{i=1}^{\nu} P_i = 1$.

Ἤτοι ἡ μή συνεχής τυχαία μεταβλητή λαμβάνει πεπερασμένον ἤ τό πολύ ἀριθμήσιμον πλῆθος τιμῶν.

Ἰδού μερικά παραδείγματα τῆς μή συνεχοῦς (ἁπλῆς) τυχαίας μεταβλητῆς.

1) Εἰς τό παιχνίδι τῆς ρουλέττας ἡ σφαῖρα δύναται νά σταματήσῃ εἰς τάς τιμάς 0, 1, 2, ..., 36. Ἡ πιθανότης νάσταματήσῃ ἡ σφαῖρα εἰς ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν i ἐκ τῶν 37 θά εἶναι $P_i = 1/37$. Ἐπομένως ἡ ἁπλῆ τυχαία μή συνεχής μεταβλητή εἶναι μία μεταβλητή X ἥτις λαμβάνει 37 τιμάς μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_0, P_1, \ldots, P_{36}$.

2) Ἐάν ρίψωμεν ἕναν κῦβον ἡ ἐμφανιζομένη ὄψις δύναται νά παρουσιάσῃ ἕν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, 1, 2, 3, 4, 5, 6 μέ πιθανότητα ἀντιστοίχως 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6 1/6. Ἤτοι ἡ τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμάς 1, 2, 3, 4, 5, 6, μέ πιθανότητα 1/6.

3) Ρίπτομεν διαδοχικῶς δύο κύβους. Ἔστω X_1 ὁ ἐμφανιζόμενος ἀριθμός ὑπό τοῦ πρώτου κύβου καί X_2 ὁ ἐμφανιζόμενος ἀριθμός ὑπό τοῦ δευτέρου. Αἱ X_1 καί X_2 εἶναι δύο τυχαῖαι με-

ταβληταί, ἑκάστη τῶν ὁποίων δύναται νά λάβῃ τάς τιμάς $i = 1, 2, \ldots\ldots, 6$ μέ πιθανότητα 1/6. Αἱ δύο αὗται μεταβληταί εἶναι προφανῶς ἀνεξάρτητοι. Ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως ἑνός οἱουδήποτε ζεύγους τιμῶν x_{2_i}, x_{1_i} εἶναι βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν συνθέντων πιθανοτήτων $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

Τό ἄθροισμα τῶν ἐμφανιζομένων ἀριθμῶν ὑπό τῶν δύο κύβων, εἶναι μία νέα τυχαία μεταβλητή, ἤτοι $X = X_1 + X_2$ δυναμένη νά λάβῃ τάς τιμάς 2, 3, 4, ..., 12, μέ πιθανότητας ἀντιστοίχως $1/_{36}$, $2/_{36}$, $3/_{36}$, $4/_{36}$, $5/_{36}$, $4/_{36}$, $3/_{36}$, $2/_{36}$. $1/_{36}$.-

Μέση τιμή μιᾶς μή συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς

Ἔστω μία ἁπλῆ μή συνεχής τυχαία μεταβλητή X ἡ ὁποία λαμβάνει τάς τιμάς $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\nu$, ὅπου $\sum_{i=1}^{\nu} P_i = 1$, ἡ παράστασις $M(X) = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots\ldots + P_\nu x_\nu$ καλεῖται μέση τιμή τῆς X ἤ Μαθηματική ἐλπίς. Ὥστε ἡ μέση τιμή μιᾶς ἁπλῆς μή συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς X ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν τιμῶν της ἐπί τάς ἀντιστοίχους πιθανότητας.

Παράδειγμα 1ον

Ἐάν ρίψωμεν δύο φοράς ἕνα νόμισμα καί τηρηθῇ ἡ συνθήκη ὅτι ὁ ρίπτων αὐτό λαμβάνει μίαν δραχμήν εἰς περίπτωσιν καθ'ἥν ἐμφανίζεται "κορώνα". Νά εὑρεθῇ ἡ μέση τιμή ἤ τό πιθανόν κέρδος.

Λύσις

Ἡ τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τάς τιμάς 0, 1, 2 μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

$$M(X) = 0.\ 1/4 + 1\ 1/2 + 2\ 1/4 = 1,$$

ἤτοι τό πιθανόν κέρδος θά εἶναι 1 δραχμή. Ἡ πιθανή ζημία θά εἶναι ἡ αὐτή, διότι αἱ δύο καταστάσεις εἶναι ἰσοπίθανοι.

Μέσον σφάλμα
Μέσον σφάλμα τετραγώνου

Ὑποθέτομεν ὅτι χ_1, χ_2, ..., χ_n εἶναι αἱ τιμαί τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Χ καί Μ ἡ μέση τιμή τῆς μεταβλητῆς Χ.

Ὀνομάζομεν τυχαία μεταβλητή τοῦ σφάλματος τήν νέαν μεταβλητήν $Y = X-M$, ἥτις δύναται νά λάβῃ τάς τιμάς $\psi_1 = \chi_1-M$, $\psi_2 = \chi_2 - M$, $\psi_3 = \chi_3 - M$, ..., $\psi_n = \chi_n - M$, μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους P_1, P_2, ..., P_n. Ἡ μέση τιμή τοῦ σφάλματος δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $M(Y) = M(X-M) = (\chi_1 - M)\, P_1 + (\chi_2 - M)\, P_2 + \ldots + (\chi_n - M)\, P_n$. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μέση τιμή τοῦ σφάλματος εἶναι ἴση μέ μηδέν.

Πράγματι: $M(Y) = M(X-M)\ (\chi_1 - M)\, P_1 + (\chi_2 - M)\, P_2 + \ldots\ldots + (\chi_n - M)\, P_n = \chi_1 P_1 + \chi_2 P_2 + \ldots\ldots\ \chi_n P_n - M\,(P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n)$.

Δοθέντος ὅτι $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$, θά ἔχωμεν $M(Y) = M - M = 0$.

Ὀνομάζομεν μέσον σφάλμα τετραγώνου τήν τετραγωνικήν ρίζαν τῆς μέσης τιμῆς τοῦ τετραγώνου τοῦ σφάλματος, ἤτοι:

$$\sigma = \sqrt{M(\chi-M)^2} = \sqrt{P_1(\chi_1-M)^2 + P_2(\chi_2-M)^2 + \ldots\ldots + P_n(\chi_n-M)^2}$$

Τό μέσον σφάλμα τετραγώνου ὀνομάζεται καί μέση ἀπόκλισις τετραγώνου.

'Η μέση απόκλισις τετραγώνου καθίσταται ελαχίστη όσον μικροτέρα καθίσταται ή διαφορά τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ἐν σχέσει πρός τήν μέσην τιμήν.
Εἶναι δέ μηδέν ἐάν ἡ τυχαία μεταβλητή εἶναι μία σταθερά.-

Συνεχής τυχαία μεταβλητή

Μία τυχαία μεταβλητή καλεῖται συνεχής ἐάν δύναται νά λάβη πάσας τάς τιμάς ἑνός διαστήματος (α,β) πεπερασμένου ἤ ἀπεί - ρου πλάτους.-

Συνάρτησις κατανομῆς μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς

'Εάν Χ εἶναι μία τυχαία μεταβλητή, ἥτις λαμβάνει τιμάς εἰς τό διάστημα Ι καί $[\alpha,\beta]\subset I$, τότε ἡ $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ θά παριστᾶ τήν πιθανότητα, ἵνα ἡ τυχαία μεταβλητή Χ λάβη μία ὁποιαδήποτε τιμή εἰς τό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

'Εάν χ παριστᾶ δεδομένον ἀριθμόν καί ληφθῆ ἡ πιθανότης $P(X \leqslant \chi)$, ὅτι δηλ. ἡ τυχαία μεταβλητή Χ λαμβάνει τιμήν μικροτέραν ἤ ἴση τοῦ χ, τότε ἡ πιθανότης αὕτη εἶναι συνάρτησις τοῦ χ καί συμβολίζεται $\Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi)$ (2).

'Η συνάρτησις $\Phi(\chi)$ λέγεται, ἀθροιστική συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς ἤ ἁπλῶς <u>συνάρτησις κατανομῆς</u>.

'Εάν ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι ὡρισμένη διά κάθε $\chi \in R$, τότε καί ἡ κατανομή τῆς μεταβλητῆς Χ εἶναι ὡρισμένη.

Διά κάθε τυχαία μεταβλητή Χ ὁρίζεται μία (ἀθροιστική) συνάρτησις κατανομῆς, ἡ $\Phi(\chi)$, ἥτις δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $\Phi(X) = P(X \leqslant \chi)$.

'Ιδιότητες τῆς $\Phi(\chi)$.

1) 'Η $\Phi(\chi)$ δέν εἶναι φθίνουσα, δηλαδή ἐάν $\chi_1 < \chi_2$, θά ἔχωμεν καί $\Phi(\chi_1) \leqslant \Phi(\chi_2)$.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Ἔστω $\chi_1 < \chi_2$ τότε θά ἔχωμεν

$P(X \leqslant \chi_2) = P[(X \leqslant \chi_1) \cup (\chi_1 < X \leqslant \chi_2)] =$

$P(X \leqslant \chi_1) + P(\chi_1 < X \leqslant \chi_2)$ καί

$P(\chi_1 \leqslant X \leqslant \chi_2) = P(X \leqslant \chi_2) - P(X \leqslant \chi_1) =$

$\Phi(\chi_2) - \Phi(\chi_1)$

Συμφώνως μέ τό ἀξίωμα $P(A) \geqslant 0$, θά ἔχωμεν:

$\Phi(\chi_2) - \Phi(\chi_1) = P(\chi_1 < X \leqslant \chi_2) \geqslant 0$, δηλ.

$\Phi(\chi_1) \leqslant \Phi(\chi_2)$ καί ἑπομένως ἡ $\Phi(\ )$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις.

2) 'Η $\Phi(\chi)$ εἶναι συνεχής πάντοτε δεξιά.

α) 'Εάν ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι συνάρτησις κατανομῆς μιᾶς συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς X, τότε θά ἔχωμεν

$$\lim_{\chi \to \xi^-} \Phi(\chi) = \Phi(\xi)$$

καί

$$\lim_{\chi \to \xi^+} \Phi(\chi) = \Phi(\xi)$$

Δηλαδή ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι συνεχής διά κάθε $\xi \in R$.

β) Ἔστω ὅτι ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι συνάρτησις κατανομῆς μιᾶς ἀσυνεχοῦς (ἀπαριθμητῆς) τυχαίας μεταβλητῆς X, τότε διά κάθε τιμή χ_κ τῆς X θά ἔχωμεν:

$$\lim_{\chi \to \chi_\kappa^-} \Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi_{\kappa-1})$$

$$\lim_{\chi \to \chi_\kappa^+} \Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi_\kappa)$$

καί $\Phi(\chi_\kappa) = P(X \leqslant \chi_\kappa)$. Δηλαδή ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι συνεχής πάντοτε δεξιά.

3) $$\lim_{\chi \to -\infty} \Phi(\chi) = 0 \quad \text{καί} \quad \lim_{\chi \to +\infty} \Phi(\chi) = 1$$

α) $$\lim_{\chi \to -\infty} \Phi(\chi) = 0$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι $\Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi)$.

$$\lim_{\chi \to -\infty} \Phi(\chi) = \lim_{\chi \to -\infty} P(X \leqslant \chi) = P(X \leqslant -\infty) = P(\varnothing) = 0$$

β) $$\lim_{\chi \to \infty} \Phi(\chi) = 1$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

$$\lim_{\chi \to \infty} \Phi(\chi) = \lim_{\chi \to \infty} P(X \leqslant \chi) = P(X \leqslant \infty) = P\ (I) = 1$$

Συμπέρασμα: "Συνθήκη ἀναγκαία καί ἱκανή, ἵνα ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι μία συνάρτησις κατανομῆς, εἶναι ἡ ἱκανοποίησις τῶν ὡς ἄνω τριῶν ἰδιοτήτων".

Ὅταν ἡ τυχαία μεταβλητή εἶναι ἀσυνεχής τότε θά ἔχωμεν: $\Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi) = \sum_{x_i \leqslant x} P(\chi_i)$, ὅπου $P(\chi_i)$ εἶναι ἡ πιθανότης, ἵνα ἡ τυχαία μεταβλητή X λάβῃ τήν τιμήν χ_i.

'Επειδή ἔχομεν $P(\chi_\kappa) = P(X=\chi_\kappa) = P(X \leqslant \chi_\kappa) - P(X \leqslant \chi_{\kappa-1}) = \Phi(\chi_\kappa) - \Phi(\chi_{\kappa-1})$, ἕπεται ὅτι ἡ κατανομή τῆς X εἶναι ὡρισμένη.-

Πυκνότης πιθανότητος

"Εστω ὅτι ἡ $\Phi(\chi)$ εἶναι συνάρτησις κατανομῆς μιᾶς συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἥτις δύναται νά λάβη πάσας τάς τιμάς ἐντός ἑνός διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην δέν εἶναι δυνατόν νά ἀντιστοιχίσωμεν εἰς κάθε τιμή τῆς X μία πιθανότητα, ὅπως τοῦτο συμβαίνη εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἀσυνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς.

Εἰς τήν περίπτωσιν τῆς συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς ἡ πιθανότης, ἵνα ἡ X λάβῃ μίαν ὡρισμένην τιμήν εἶναι μηδέν, δηλ. $P(X = \chi) = 0, \quad \forall \chi \in [\alpha,\beta]$ καί κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν:

$$P(\gamma \leqslant X \leqslant \delta) = P(\gamma \leqslant X \leqslant \delta) = P(\gamma \leqslant X < \delta) = P(\gamma < X < \delta),$$

$\forall\ [\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῆς $\Phi(\chi)$ θά ἔχωμεν ὅτι

$P(X \leqslant \chi+\Delta\chi) = P(X \leqslant \chi) + P(\chi < X \leqslant \chi+\Delta\chi)$, δηλ.

$$\Phi(\chi+\Delta\chi) = \Phi(\chi) + P(\chi < X \leqslant \chi + \Delta\chi) \quad (1).$$

'Εκ τῆς σχέσεως (1) φαίνεται ὅτι ἡ πιθανότης ἵνα ἡ X λάβῃ μίαν τιμήν εἰς τό ἀπειροστόν διάστημα $(\chi+\Delta\chi)$ εἶναι:

$$P(\chi < X \leqslant \chi+\Delta\chi) = P(\chi \leqslant X \leqslant \chi+\Delta\chi) = \Phi(\chi+\Delta\chi) - \Phi(\chi) =$$

$= \varphi(X)\Delta\chi$, ἐκ τῆς ὁποίας θά ἔχωμεν:

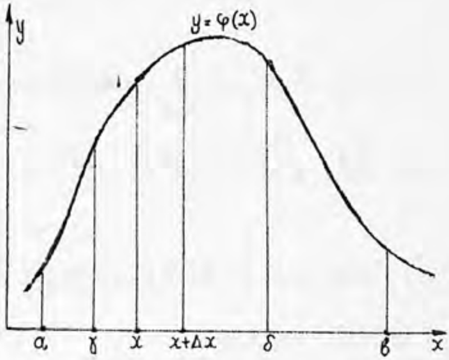
$$\varphi(\chi) = \lim_{\Delta\chi \to 0} \frac{P(\chi < X \leqslant \chi+\Delta\chi)}{\Delta\chi} = \lim_{\Delta\chi \to 0} \frac{\Phi(\chi+\Delta\chi) - \Phi(\chi)}{\Delta\chi}$$

δηλ. ἡ $\varphi(\chi)$ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς $\Phi(\chi)$ καί λέγεται "πυκνότης πιθανότητος".

Κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν $P(\chi < X \leqslant \chi + d\chi) = \varphi(\chi)\,d\chi$ καί ἐφόσον ἡ X λαμβάνει τιμάς ἐντός τοῦ διαστήματος $[\gamma, \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$, θά ἔχωμεν

$$P\,(\gamma \leqslant X \leqslant \delta) = \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(\chi)\,dX \quad \text{καί}$$

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\chi)\,d\chi = 1$$



'Η $\varphi(\chi)$ ἔχει τάς κάτωθι ἰδιότητας:

1) $\varphi(\chi) \geqslant 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi)\,d\chi = 1$

Αἱ σχέσεις (1) καί (2) εἶναι ἀναγκαῖαι καί ἱκαναί συνθῆκαι, ἵνα ἡ $\varphi(\chi)$ εἶναι πυκνότης πιθανότητος.

'Η συνάρτησις κατανομῆς τῆς X εἶναι

$$\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \varphi(\chi)\,d\chi.$$

'Εάν ἡ X εἶναι συνεχής τυχαία μεταβλητή καί ἔχῃ πυκνότητα πιθανότητος $\varphi(\chi) = K$ (σταθερά) διά κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ καί $\varphi(\chi) = 0$ διά κάθε $\chi \notin [\alpha, \beta]$, θά λέγωμεν ὅτι ἔχομεν "ὁμοιόμορφον κατα - νομήν". τῆς μεταβλητῆς.

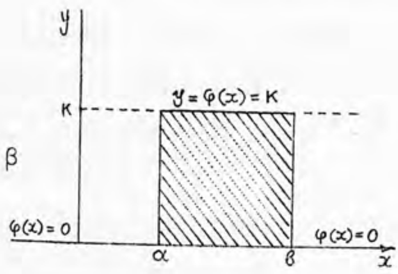
Δηλαδή

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} K & \text{ἐάν } \chi \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{ἐάν } \chi \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\chi)\,d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} K\,d\chi = K\,(\beta-\alpha) = 1$, κατά συνέπειαν θά

έχωμεν $K = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$.

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad \chi < \alpha \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{ἐάν} \quad \alpha \leqslant \chi \leqslant \beta \\ 0 & \text{ἐάν} \quad \chi > \beta \end{cases}$$



Διά τήν $\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \varphi(\chi)\,d\chi$, ἔχομεν:

α) Ἐάν $\chi < 0$ θά εἶναι $\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} 0\,d\chi = 0$

β) Ἐάν $\chi > \beta$ θά εἶναι $\Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi) \geqslant P(X \leqslant \beta) = \Phi(\beta)=1$,

δηλαδή $\Phi(\chi) \geqslant 1$ (1)

Ὁμοίως $\Phi(\chi) = P(X \leqslant \chi) \leqslant 1$ (2)

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) θά ἔχωμεν

$$\Phi(\chi) = 1 \qquad \text{Ἐάν} \quad \chi > \beta$$

γ) Ἐάν $\alpha \leqslant \chi \leqslant \beta$ τότε θά ἔχωμεν

$$\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\alpha} \varphi(t)\,dt + \int_{\alpha}^{\chi} \varphi(t)\,dt =$$

$$= 0 + \int_{\alpha}^{\chi} \frac{1}{\beta-\alpha}\,dt = \left[\frac{t}{\beta-\alpha}\right]_{\alpha}^{\chi} = \frac{\chi-\alpha}{\beta-\alpha} \quad . \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ $P(X \leqslant \chi)$, ἐάν $\chi \in [\alpha,\beta]$, εἶναι ἀνάλογος τοῦ πλάτους χ-α τοῦ διαστήματος

$[\alpha,\chi] \subseteq [\alpha,\beta]$. Ήτοι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad \chi < \alpha \\ \dfrac{\chi-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{ἐάν} \quad \alpha \leq \chi \leq \beta \\ 1 & \text{ἐάν} \quad \chi > \beta \end{cases}$$

Πρόβλημα 1ον

Ἔστω X ἡ τυχαία μεταβλητή εἰς τήν ρίψιν ἑνός κύβου. Νά εὑρεθῇ ἡ $\Phi(\chi)$.

χ_i	1	2	3	4	5	6
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$\Phi(\chi)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

Π.χ. $\Phi(3) = P(X \leq 3) = \sum_{\chi_i \leq 3} P(\chi_i) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/6$

Ἀναλυτικῶς θά ἔχωμεν

$\Phi(\chi) = 0$ ἐάν $\chi < 1$

$\Phi(\chi) = 1/6$ ἐάν $\chi = 1$

$\Phi(\chi) = 1/6$ " $1 \leq \chi < 2$

$\Phi(\chi) = 2/6$ " $\chi = 2$

$\Phi(\chi) = 2/6$ " $2 \leq \chi < 3$

$\Phi(\chi) = 3/6$ " $\chi = 3$

$\Phi(\chi) = 3/6$ " $3 \leq \chi < 4$

$\Phi(\chi) = 4/6$ " $\chi = 4$

$\Phi(\chi) = 4/6$ " $4 \leq \chi < 5$

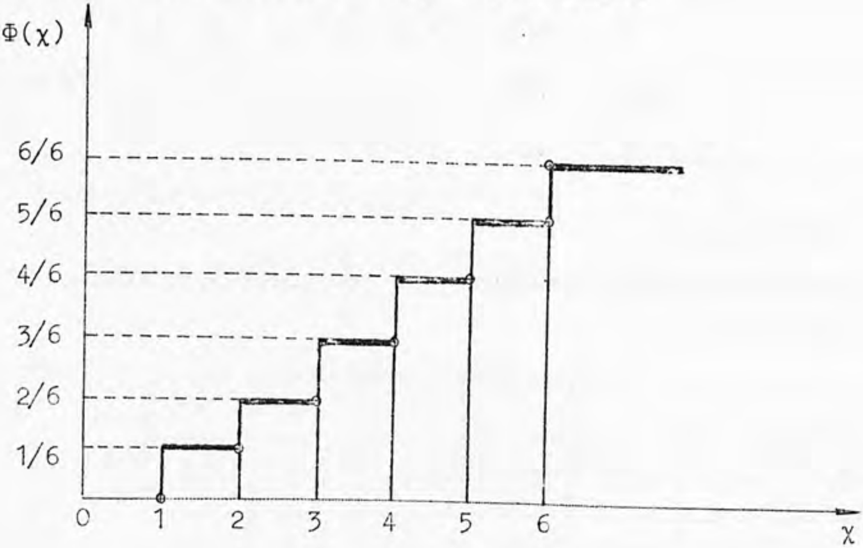
$\Phi(\chi) = 5/6$ " $\chi = 5$

$\Phi(\chi) = 5/6$ ἐάν $5 \leq \chi < 6$

$\Phi(\chi) = 6/6$ " $\chi = 6$

$\Phi(\chi) = 6/6$ " $6 \leq \chi < +\infty$

Τό διάγραμμα τῆς $\Phi(\chi)$ τῆς μεταβλητῆς Χ εἶναι:



Πρόβλημα 2ον

Ἔστω Χ μία συνεχής τυχαία μεταβλητή μέ πυκνότητα πιθανότητος τήν κάτωθι:

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & \text{ἐάν} \quad \chi \in (0,8) \\ 0 & \text{"} \quad \chi \notin (0,8) \end{cases}$$

1) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι πιθανότητες:

$P(2 \leq X \leq 5)$, $P(3 \leq X \leq 7)$, $P(X \geq 6)$.

2) Νά εὑρεθῇ ἡ $\Phi(\chi)$ καί νά γίνῃ ἡ γραφική παράστασις.

Λύσις

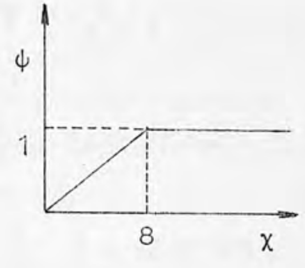
1) Ἔχομεν "ὁμοιόμορφον κατανομήν" διότι $\varphi(\chi) = \dfrac{1}{8-0} =$

$= \dfrac{1}{8}$, $\forall \chi \in (0,8)$.

$$P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \int_2^5 \frac{1}{8}\, d\chi = \frac{1}{8}\,[5-2] = 3/8$$

$P(3 \leqslant X \leqslant 7) = 1/2$ καί $P(X \geqslant 6) = 1/4$.

$$2)\quad \Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad \chi < 0 \\ \frac{1}{8}\chi & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 8 \\ 1 & \text{"} \quad \chi > 8 \end{cases}$$



Πρόβλημα 3ον

Ἔστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή μέ κατανομήν

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} K.\chi & \text{ἐάν} \quad \chi \in [0,5] \\ 0 & \text{"} \quad \chi \notin [0,5] \end{cases}$$

α) Νά ὑπολογισθῇ ἡ σταθερά K

β) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ πιθανότητες $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$, $P(X \leqslant 3)$

γ) Νά ὑπολογισθῇ ἡ $\Phi(\chi)$ καί νά γίνῃ ἡ γραφική παράστασις.

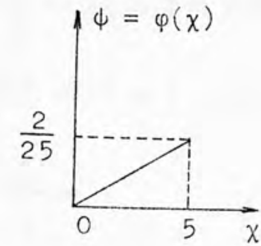
Λ ύ σ ι ς

1) $$\int_0^5 K\chi d\chi = 1 = K\int_0^5 \chi\, d\chi = 1 = K\,\frac{25}{2} = 1. \quad K = \frac{2}{25}$$

Ἑπομένως διά νά εἶναι ἡ δοθεῖσα συνάρτησις $\varphi(\chi)$, πυκνότης πιθανότητος θά πρέπει νά εἶναι $K = \frac{2}{25}$.

Κατά συνέπειαν θά ἔχωμεν:

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \frac{2}{25}\chi & \text{ἐάν} \quad \chi \in [0,5] \\ 0 & \text{"} \quad \chi \notin [0,5] \end{cases}$$



β) $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \int_1^3 \frac{2}{25}\chi\, d\chi = \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{2}\left[\chi^2\right]^3 = \frac{8}{25}$

$P(2 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{12}{25}$

$$P(X \leqslant 3) = \int_{-\infty}^{3} \frac{2\chi}{25} d\chi = \int_{-\infty}^{0} 0\, d\chi\chi + \int_0^3 \frac{2\chi}{25}\, d\chi = 0 + \frac{9}{25} = 9/25$$

γ) 1ον) 'Εάν $\chi < 0$ θά εἶναι $\Phi(\chi) = 0$

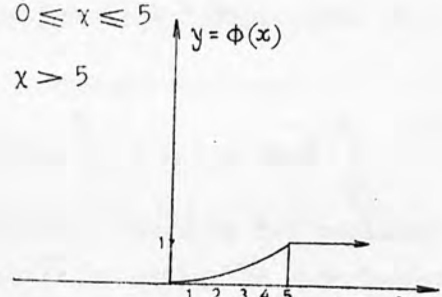
2ον) 'Εάν $\chi > 5$ θά εἶναι $\Phi(\chi) = 1$

3ον) 'Εάν $0 \leqslant \chi \leqslant 5$ θά εἶναι

$$\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \varphi(t)\, dt = \int_0^{\chi} \varphi(t)\, dt = \int_0^{\chi} \frac{2}{25}\, td \;\; = \frac{1}{25}\;{}^2$$

"Ητοι:

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{'Εάν} \quad \chi < 0 \\ \frac{1}{25}\chi^2 & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 5 \\ 1 & \text{"} \quad \chi > 5 \end{cases}$$



Μέση τιμή (ἤ Μαθηματική ἐλπίς) μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς

Ἔστω ὅτι ἡ συνεχής τυχαία μεταβλητή X, ἥτις ἔχει πυκνότητα πιθανότητος $\varphi(\chi)$, λαμβάνει τιμάς εἰς τό διάστημα (α,β). Διαιροῦμεν τό διάστημα (α,β) εἰς ἕνα πλῆθος ὑποδιαστημάτων ἴσων μέ $\Delta\chi$ ἕκαστον. Δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμήν χ, ὁσάκις λαμβάνει τιμήν μεταξύ χ καί $\Delta\chi$, τοιουτοτρόπως ἐξομοιοῦμεν τήν χ μέ ἀπαριθμητήν μεταβλητήν λαμβάνουσαν τόσας τιμάς ὅσα $\Delta\chi$ ὑπάρχουν μέσα εἰς τό (α,β) καί μέ πιθανότητα διά τήν τιμήν χ κατά προσέγγισιν ἴσην μέ $\varphi(\chi)\Delta\chi$.

Ἡ μέση τιμή τῆς ἀπαριθμητῆς αὐτῆς μεταβλητῆς θά εἶναι $\Sigma.\chi.\varphi(\chi).\Delta\chi$ καί διά $\Delta\chi \to 0$ θά τείνῃ πρός τό ὅριον

$$\int_\alpha^\beta \chi\,\varphi(\chi)\,d\chi$$

Γενικῶς ἡ μέση τιμή μιᾶς συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἥτις παρίσταται μέ M (X) ὁρίζεται διά τῆς σχέσεως

$$M\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi\,\varphi(\chi)\,d\chi,$$ ὑπό τόν ὅρον ὅτι τό ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει.

Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω, ὁρίζομεν ὡς μέσην τιμήν μιᾶς συναρτήσεως τήν σχέσιν

$$M\left[F\,(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F\,(\chi)\,d\,\Phi\,(\chi).-$$

<u>Διακύμανσις</u> μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς

Ὡς διακύμανσις μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς X λαμβάνεται ἡ ποσότης

$$\sigma_\chi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[X - M(X)\right]^2 \varphi(\chi)\, d\chi$$

Περίπτωσις δύο τυχαίων Μεταβλητῶν

Φυσικά δέν ὑφίστανται μόνον τυχαῖαι μεταβληταί τῆς μιᾶς διαστάσεως ἀλλά ὑφίστανται καί μεταβληταί δύο ἤ καί περισσοτέρων τοιούτων.

Εἰς τήν περίπτωσιν δύο ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν ἡ τυχαία μεταβλητή (X,Ψ) λαμβάνει τάς τιμάς (χ_i,ψ_j) μέ πιθανότητας P_{ij}, ὅπου i καί j εἶναι δεῖκται μεταβλητοί ἐντός καταλλήλων διαστημάτων.

Ἤτοι θά σημειώνωμεν μέ P_{ij} τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου, ἵνα ἡ τυχαία μεταβλητή X λάβῃ τήν τιμήν χ_i καί ἡ Ψ τήν τιμήν ψ_j.

Συμβολικῶς παρίσταται ὡς κάτωθι:

$$P_{ij} = P(X = \chi_i\ ,\ \Psi = \psi_j)$$

Ἐάν ἡ τυχαία μεταβλητή X λάβῃ τάς τιμάς

$X = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots\ldots\ldots, \chi_\nu\}$ καί ἡ Ψ τάς τιμάς

$\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots\ldots\ldots, \psi_\kappa\}$, τό γινόμενον $X\chi\Psi =$

$\left[(\chi_1,\psi_1), (\chi_1,\psi_2)\ (\chi_1,\psi_3), \ldots\ldots\ldots, (\chi_\nu, \psi_\kappa)\right\}$ εἶναι τό σύνολον τῶν τιμῶν τῆς τυχαίας ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς (X,Ψ), μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας P_{ij}.

Ἡ κατανομή τῆς (X,Ψ) δίδεται εἰς τόν κάτωθι πίνακα:

$\chi_1\psi_1$	χ_1,ψ_2	χ_1,ψ_3	.....	χ_i,ψ_j	....	χ_ν,ψ_κ
P_{11}	P_{12}	P_{13}	.....	P_{ij}	....	$P_{\nu\kappa}$

Ὁμοίως ἡ κατανομή τῆς (X,Ψ) δύναται νά δοθῇ καί εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

Κατανομή τῆς (X,Ψ)

Ψ \ X	χ_1	χ_2	....	χ_ν	Κατανομή τῆς Ψ
ψ_1	P_{11}	P_{21}		$P_{\nu 1}$	P_1 (Ψ)
ψ_2	P_{12}	P_{22}		$P_{\nu 2}$	P_2 (Ψ)
⋮	⋮				
ψ_κ	$P_{1\kappa}$	$P_{2\kappa}$		$P_{\nu\kappa}$	P_κ (Ψ)
Κατανομή τῆς X	$P_1(X)$	$P_2(X)$		$P_\nu(X)$	1

Δυνάμεθα νά ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν δύο τυχαίων μεταβλητῶν εἰς τό ἀποτέλεσμα τῆς ρίψεως ἑνός κύβου. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή X εἶναι ἐκείνη, ἥτις λαμβάνει τιμάς 0 καί 1, ἐφόσον ὁ πρῶτος κῦβος ἐμφανίζεται μέ ἀριθμόν ἄρτιον ἤ περιττόν, ἐνῷ ἡ τυχαία μεταβλητή Ψ λαμβάνει τήν τιμήν, ἡ ὁποία πράγματι ἐμφανίζεται εἰς τόν δεύτερον κῦβον.

Αἱ δυναταί τιμαί τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (X,Ψ) εἶναι τό σύνολον $\{0,1\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$, δηλ. τά διατεταγμένα ζεύγη

$\{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

Κατανομή τῆς (Χ,Ψ)

(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Πράγματι $P_{0,J} = P\left(X = 0,\ \ \Psi = J\right) = 3/6 \,.\, 1/6 = 1/12$

$P_{1,J} = P\left(X = 1,\ \ \Psi = J\right) = 3/6 \,.\, 1/6 = 1/12$

Κατανομή τῆς (Χ,Ψ) εἰς πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

Ψ \ Χ	0	1	Κατανομή τῆς Ψ
1	1/12	1/12	1/6
2	1/12	1/12	1/6
3	1/12	1/12	1/6
4	1/12	1/12	1/6
5	1/12	1/12	1/6
6	1/12	1/12	1/6
Κατανομή τῆς Χ	1/2	1/2	1

Παράδειγμα 2ον

Εἰς τό παίγνιον "Κορώνα-Γράμματα" ὁρίζομεν ὅτι, ἐάν τό νόμισμα παρουσιάζη "Κορώνα", ὁ ρίπτων αὐτό θά λαμβάνη 1 δρ. καί ἐάν "Γράμματα" 0 δραχμάς.

'Εάν τό νόμισμα ριφθῆ διά δευτέραν φοράν καί τηρηθῆ ἡ ἰδία συνθήκη, τότε κάθε φορά πού τό νόμισμα θά παρουσιάζη "Κορώνα" θά δίδεται 1 δρχ. εἰς τόν ρίπτοντα. Δυνάμεθα ἑπομένως, νά ὁρίζωμεν μίαν μεταβλητήν Χ, ἥτις λαμβάνει τιμάς 0,1 μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας 1/2, 1/2, καί τήν μεταβλητήν Ψ, τῆς ὁποίας αἱ τιμαί θά εἶναι 0, 1, 2 μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας 1/4, 2/4, 1/4.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δίδει τόν Νόμον πιθανότητος τῶν μεταβλητῶν τούτων.

Ψ \ Χ	0	1	Νόμος τῆς Ψ
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/4	2/4
2	0	1/4	1/4
Νόμος τῆς Χ	1/2	1/2	1

Ἤτοι:

$$P_{o,o} = P(X=o, \Psi=o) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{o,1} = P(X=o, \Psi=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{o,2} = P(X=o, \Psi=2) = \frac{1}{2} \cdot o = o$$

$$P_{1,o} = P(X=1, \Psi=o) = \frac{1}{2} \cdot o = o$$

$$P_{1,1} = P(X=1, \Psi=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{1,2} = P(X=1, \Psi=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Μέση τιμή δύο ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν

Ἐάν θεωρήσωμεν τήν τυχαίαν μεταβλητήν Χ δυναμένην νά λάβη τάς τιμάς $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_i, \ldots \chi_\nu$, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_i, \ldots, P_\nu$ καί τήν τυχαίαν μεταβλητήν Ψ δυναμένην νά λάβη τιμάς $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_j \ldots, \psi_\kappa$ μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\kappa$, ὅπου $\Sigma P_i = 1$, $\Sigma P_j = 1$ καί $P_i \neq P_j$, τότε ἡ μέση τιμή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (Χ,Ψ) θά εἶναι

$$M(X,\Psi) = \Sigma\, \chi_i \psi_j P_{ij}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΝΕΧΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Τό ἄθροισμα δύο τυχαίων ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν ἔχει ὡς μέση τιμή τό ἄθροισμα τῶν μέσων τιμῶν ἑκάστης τῶν δύο μεταβλητῶν.

Ἔστωσαν δύο ἀσυνεχεῖς τυχαῖαι μεταβληταί Χ καί Ψ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ τυχαία ἀσυνεχής μεταβλητή Χ λαμβάνει τιμάς χ_1, χ_2, χ_3, ..., χ_i, ...,χ_ν, μέ πιθανότητας ἀντιστοίχως P_1,P_2, ..., P_i, ..., P_ν. Ἐπίσης ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μεταβλητή Ψ λαμβάνει τιμάς ψ_1, ψ_2, ψ_j, ..., $\psi_\varkappa$, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας P_1, P_2, P_j, ..., $P_\varkappa$.

Τό ἄθροισμα Ζ = Χ + Ψ θά εἶναι μία νέα τυχαία ἀσυνεχής μεταβλητή δυναμένη νά λάβῃ τιμάς (κ.ν), αἵτινες προκύπτουν διά τῆς προσθέσεως μιᾶς οἱασδήποτε τιμῆς χ_i τῆς Χ καί μιᾶς οἱασδήποτε τιμῆς ψ_j τῆς Ψ, ἤτοι $\chi_i + \psi_j$.

Ἡ μέση τιμή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Ζ = Χ+Ψ θά δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως:

$$M(Z) = M(X+\Psi) = \sum_{i=1}^{\nu} . \sum_{j=1}^{\varkappa} (\chi_i + \psi_j) P_{ij} .$$

<u>Λῆμμα:</u> Ἐάν Χ καί Ψ εἶναι δύο ἀσυνεχεῖς τυχαῖαι μεταβληταί ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ι καί ἐάν $P_i = P_i(X)$, $P_j \equiv P_j(\Psi)$, τότε, νά δειχθῇ ὅτι: $P_i = \sum_j P_{ij}$ καί $P_j = \sum_i P_{ij}$

<u>Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς</u>

Ἔστω Ι ὁ δοθείς δειγματικός χῶρος, διά τοῦ A_i παριστῶμεν τά ἐνδεχόμενα, ἅτινα ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν μεταβλητήν Χ ($\chi_i = X(A_i)$) καί διά B_j τά ἐνδεχόμενα, ἅτινα ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν Ψ ($\psi_j = \Psi(B_j)$).

Τά B_j εἶναι ξένα, ἐάν $S = U_j B_j$ θά ἔχωμεν: $A_i = A_i \cap S = A_i \cap (U_j B_j) = U_j(A_i \cap B_j)$, ὅπου $(A_i \cap B_j)$ εἶναι ξένα.

Θά έχωμεν λοιπόν $P_i \equiv P(X=\chi_i) \equiv P(A_i) = P(U_J(A_i \cap B_J)) =$
$\sum_J P(A_i \cap B_J) = \sum_J P\ (X=\chi_i, \Psi=\psi_J) = \sum_J P_{iJ}$ "Αρα $P_i = \sum P_{iJ}$

'Ομοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι: $P_J = \sum_i P_{iJ}$

Θεώρημα: 'Εάν X καί Ψ εἶναι δύο ἀσυνεχεῖς τυχαῖαι μεταβληταί, εἰς τόν αὐτόν δειγματικόν χῶρον, τότε $M(Z) \equiv M(X+\Psi) = M(X)+M(\Psi)$.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$$M(X+\Psi) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{J=1}^{\kappa} (\chi_i+\psi_J) P_{iJ} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{1}^{\kappa} \chi_i P_{iJ} + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{J=1}^{\kappa} \psi_J P_{iJ} .$$

Συμφώνως πρός τό ἀνωτέρω λῆμμα ἔχομεν:

$$M(X+\Psi) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_i P_i + \sum_{J=1}^{\kappa} \psi_J P_J = M(X) + M(\Psi).$$

Τό ὡς ἄνω θεώρημα γενικεύεται καί εἰς τήν περίπτωσιν περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητῶν.-

Μέση τιμή τοῦ γινομένου δύο τυχαίων ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν, ἀνεξαρτήτων μεταξύ των.

"Εστω ἡ τυχαία ἀσυνεχής μεταβλητή X, ἥτις λαμβάνει τάς τιμάς $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_i, \ldots, \chi_\nu$, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, καί ἡ μεταβλητή Ψ, ἥτις λαμβάνει τάς τιμάς $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_J, \ldots, \psi_K$, μέ πιθανότητας $P_1, P_2, \ldots, P_J, \ldots, P_K$.

Τό γινόμενον $Z=X.\Psi$ εἶναι ἐπίσης μία τυχαία ἀσυνεχής μεταβλητή, ἥτις λαμβάνει ὡς τιμάς ὅλας τάς προκυπτούσας ἐκ τοῦ πολ/σμοῦ μιᾶς τιμῆς χ_i τῆς X μέ μίαν τιμήν ψ_J τῆς Ψ, ὅπου ($i = 1, 2, \ldots, \nu$ καί $J=1, 2, \ldots, K.$).

Δεδομένου ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Ψ εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἡ πιθανότης P_{iJ}, ὡς σύνθετος πιθανότης, θά εἶναι ἴση πρός τό γινόμενον $P_i \cdot P_J$. Κατά συνέπειαν ἡ μέση τιμή τῆς $Z=X\Psi$ θά εἶναι:

$$M(Z) = M(X.\Psi) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{J=1}^{K} \chi_i \psi_J P_i P_J =$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} (\chi_i P_i \sum_{J=1}^{K} \psi_J P_J) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_i P_i \ M(\Psi) =$$

$=M(\Psi)\ M(X)$, ἤτοι $M(Z) = M(X\ \Psi) = M(\Psi).M(X)$

Τό θεώρημα γενικεύεται εἰς τήν περίπτωσιν περισσοτέρ ω ν τυχαίων μεταβλητῶν.

Μέση τιμή δύο συνεχῶν μεταβλητῶν.

Ἡ μέση τιμή δύο συνεχῶν μεταβλητῶν δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως

$$M(X\ \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} \chi\ \psi\varphi(\chi,\psi)\ d\chi\ \ d\psi \quad \text{ἤ}$$

$$M(X\ \Psi) = \iint_T \chi\ \psi\ \ \varphi(\chi,\psi)\ d\chi\ \ d\psi$$

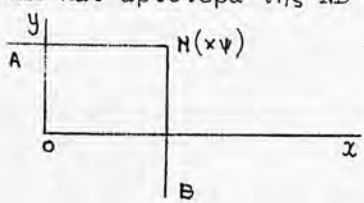
Ὅπου $\varphi(\chi,\psi)$ εἶναι ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς πτώσεως τοῦ σημείου $K(\chi,\psi)$ ἐντός τοῦ τόπου T.-

Συνάρτησις κατανομῆς δύο μεταβλητῶν

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς δύο μεταβλητῶν εἴτε ἀπαριθμητῶν εἴτε συνεχῶν, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\Phi\ (\chi,\psi) = P(X \leqslant \chi,\quad \Psi \leqslant \psi).$$

Ἡ $\Phi(\chi,\psi)$ παριστάνει τήν πιθανότητα νά ἐμφανισθῇ τό σημεῖον (χ,ψ) μέσα εἰς τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου $\chi\ O\ \psi$ πού εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς NA καί ἀριστερά τῆς NB



Ἡ $\Phi(\chi,\psi)$ πρέπει νά πληροῖ τούς κάτωθι ὅρους.

1) Νά εἶναι αὔξουσα σχετικῶς μέ τάς δύο μεταβλητάς X καί Ψ.

2) Νά εἶναι ἡ $\Phi(\chi,\psi)$ συνεχής εἰς τά δεξιά.

"Ητοι $\Phi(\chi^+,\psi^+) = \Phi(\chi, \psi^+) = \Phi(\chi^+,\psi) = \Phi(\chi,\psi)$

3) Νά ἰσχύουν τά κάτωθι ὅρια

α) $\lim_{\chi \to \infty} \Phi(\chi,\psi) = \lim_{\psi \to -\infty} \Phi(\chi,\psi) = 0$

β) $\lim_{\substack{\chi \to \infty \\ \psi \to \infty}} \Phi(\chi,\psi) = 1$

Ἐκ τῆς συναρτήσεως κατανομῆς τῆς $\Phi(\chi,\psi)$ εἶναι δυνατόν νά ἀχθῶμεν εἰς τάς συναρτήσεις,
$\Phi_1(\chi)$ καί $\Phi_2(\psi)$, τάς ὁποίας ὀνομάζομεν <u>ὁριακάς συναρτήσεις.</u>
"Ητοι

$$\Phi_1(\chi) = \lim_{\psi \to \infty} \Phi(\chi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi,\psi)\, d\psi$$

$$\Phi_2(\psi) = \lim_{\chi \to \infty} \Phi(\chi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi,\psi)\, d\chi$$

Διά μίαν δισδιάστατον συνεχῆ κατανομήν ἡ πυκνότης πιθανότητος $\varphi(\chi,\psi)$ δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως

$$\varphi(\chi,\psi) = \frac{\vartheta^2 \Phi(\chi,\psi)}{\vartheta_\chi \cdot \vartheta_\psi}$$

ὅπου $\Phi(\chi,\psi) = \int_{-\infty}^{\chi} \int_{-\infty}^{\psi} \varphi(\chi,\psi)\, d\chi\, d\psi$

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς "ἄθροισμα" $Z = X+\Psi$ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\Phi(Z) = P(Z \leqslant J) = P(X + \Psi \leqslant J)$$

Ἐάν δέ Χ καί Ψ εἶναι ἀπολύτως συνεχεῖς, θά ἔχωμεν

$$\Phi(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{Z-\chi} \varphi(\chi,\psi)\, d\psi \right] d\chi$$

Εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τήν συνάρτησιν κατανομῆς τῆς τυχαί-

ας μεταβλητῆς $\Psi = \alpha X + \beta$, ὅπου α καί β εἶναι δύο παράμετροι.
Ἔστω ὅτι $\alpha > 0$

$\Phi(\Psi) = P(\Psi \leqslant \psi) = P(\alpha X + \beta \leqslant \psi) =$

$P(X \leqslant \frac{\psi-\beta}{\alpha}) = \Phi(\frac{\psi-\beta}{\alpha})$

Ἐάν $\alpha < 0$, θά ἔχωμεν

$\Phi(\Psi) = P(\alpha X + \beta \leqslant \psi) = P(X \geqslant \frac{\psi-\beta}{\alpha}) =$

$= 1 - P(X \leqslant \frac{\psi-\beta}{\alpha}) = 1-\Phi(\frac{\psi-\beta}{\alpha})$

Ροπαί διαφόρων τάξεων μιᾶς κατανομῆς

Ἔστω μία τυχαία μεταβλητή X, ἥτις λαμβάνει τάς τιμάς χ_1, $\chi_2, \ldots\ldots, \chi_\tau$, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_i \ldots\ldots\ldots, P_\tau$. Βάσει τῆς ὡς ἄνω ὑποθέσεως δίδομεν τούς κάτωθι ὁρισμούς.

1) Καλοῦμεν ροπήν γενικῶς K τάξεως τῶν τιμῶν $\chi_1, \chi_2, \ldots\ldots, \chi_i, \ldots\ldots, \chi_\tau$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, ὡς πρός δοθέντα ἀριθμόν α τήν μέσην τιμήν τῆς δυνάμεως K τῆς διαφορᾶς $(\chi_i - \alpha)$ (ὅπου $i = 1,2,\ldots,i,\ldots\ldots,\tau$), ἤτοι τήν μέσην τιμήν τῆς μεταβλητῆς $(\chi-\alpha)^K$.

Ἐάν παραστήσωμεν διά M_K τήν ροπήν τάξεως K θά ἔχωμεν τήν σχέσιν

$$M_K = M\left[(\chi-\alpha)^K\right], \text{ἤτοι } M_K = \sum_{i=1}^{\tau} (\chi_i - \alpha)^K \; P_i$$

2) Ἐάν ὁ ἀριθμός α ληφθῇ ἴσος πρός τήν μέσην τιμήν $\bar{\chi}$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, αἱ προηγουμένως ὁρισθεῖσαι ροπαί καλοῦνται κεντρικαί ροπαί.

Οὕτω ἡ κεντρική ροπή τάξεως K τῶν τιμῶν

$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_i, \ldots, \chi_\tau$ τῆς μεταβλητῆς Χ θά δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως.

$\bar{M}_K = \sum_{i=1}^{\tau} (\chi_i - \bar{\chi})^K P_i$ καί διά μίαν συνεχῆ κατανομήν.

$$\bar{M}_K = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi - \bar{\chi}) \varphi(\chi)\, d\chi$$

3) Ἐάν ὁ ἀριθμός α ληφθῇ ἴσος πρός τό μηδέν, αἱ ροπαί καλοῦνται ροπαί ὡς πρός τήν ἀρχήν καί ἰσχύει ἡ κάτωθι σχέσις:

$M_K = \sum_{i=1}^{\tau} \chi_i^K \cdot P_i$ καί διά συνεχῆ κατανομήν

$$M_K = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^K \varphi(\chi)\, d\chi.$$

Διά Κ = 0 ἔχομεν

$M_0 = M(\chi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^0 \; d\Phi(\chi)$, δεδομένου ὅτι $\int_{-\infty}^{\infty} d\Phi(\chi) =$

$\left[\Phi(\chi)\right]_{-\infty}^{\infty} = \Phi(\infty) - \Phi(-\infty) = 1 - 0 = 1$, ἤτοι $M_0 = 1$

Διά Κ = 1, ἔχομεν

$M_1 = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi \; d\Phi(\chi)$, ἤτοι ἡ πρώτη ροπή εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικός τῆς κατανομῆς.

Ἡ δευτέρα ροπή ὡς πρός τήν ἀρχήν δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$M_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^2 \; d\Phi(\chi)$ καί διά μίαν ἀσυνεχῆ κατανομήν ἐκ τῆς σχέσεως

$$M_2 = \sum_{i=1}^{\tau} \chi_i^2 P_i$$

Αἱ δύο πρῶται κεντρικαί ροπαί μιᾶς κατανομῆς εἶναι

$\bar{M}_1 = \sum_{i=1}^{\tau} (\chi_i - \bar{\chi}) P_i$ καί $\bar{M}_2 = \sum_{i=1}^{\tau} (\chi_i - \bar{\chi})^2 P_i$

'Η πρώτη εἶναι ἡ μέση τιμή τῆς ἀποκλίσεως τοῦ χ ἀπό τοῦ μέσου ὅρου $\bar{\chi}$ αὐτῆς, ἑπομένως ὡς γνωστόν, θά ἔχωμεν

$$M_1 = M(\chi-\bar{\chi}) = 0$$

'Η δευτέρα ροπή $\bar{M}_2$ εἶναι ἡ μέση τιμή τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποκλίσεως $\chi-\bar{\chi}$ καί ἑπομένως συμπίπτει μέ τήν διασποράν σ_χ^2, ἤτοι

$$\bar{M}_2 = \sigma_\chi^2 = M(\chi-\bar{\chi})^2 = M_2 - M_1^2 .$$

Τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή

'Εάν M_1 εἶναι ἡ μέση ἀριθμητική τιμή μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς Χ καί σ ἡ τυπική ἀπόκλισις ὁρίζομεν ὡς τυποποιημένην μεταβλητήν τήν ποσότητα

$$Z_\chi = \frac{X-M_1}{\sigma_\chi}$$

'Η τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή Z_χ ἔχει δύο σπουδαίας ἰδιότητας.

1) 'Η μέση τιμή εἶναι μηδέν

Πράγματι

$$M(Z_\chi) = M\left[\frac{X-M_1}{\sigma_\chi}\right] = \frac{M_1-M_1}{\sigma_\chi} = \frac{0}{\sigma_\chi} = 0$$

2) 'Η διασπορά ἰσοῦται πρός τήν μονάδα.

$$\sigma_\chi^2 = M\left[\frac{X-M_1}{\sigma_\chi}\right]^2 = M\left[\frac{X^2 - 2X\,M_1 + M_1^2}{\sigma_\chi^2}\right] =$$

$$= \frac{M_2 - M_1^2}{\sigma_\chi^2} = \frac{\sigma_\chi^2}{\sigma_\chi^2} = 1$$

Ροπαί παραγοντικαί

'Ονομάζομεν παραγοντικάς ροπάς τῆς τάξεως τ τήν ποσότητα

$$M_{(\tau)} = M\left[X(X-1)(X-2)\ldots\ldots(X-\tau+1)\right]$$

'Υπολογίζομεν τάς παραγοντικάς ροπάς τῶν τάξεων 1, 2, 3, 4 .

$$M_{(1)} = M(X) = M_1$$

$$M_{(2)} = M\left[X(X-1)\right] = M_2 - M_1$$

$$M_{(3)} = M\left[X(X-1)(X-2)\right] = M\left[(X^3-2X^2-X^2+2X)\right] = M_3 - 3M_2 + 2M_1$$

$$M_{(4)} = M\left[X(X-1)(X-2)(X-3)\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= M_4 - 6M_3 + 11M_2 - 6M_1$$

ἐκφράζομεν τάς ροπάς M_K ὡς πρός τήν ἀρχήν εἰς συνάρτησιν τῶν παραγοντικῶν ροπῶν.

$$M_1 = M_{(1)}$$

$$M_2 = M_{(1)} + M_{(2)}$$

$$M_3 = M_{(3)} + 3M_{(2)} + M_{(1)}$$

$$M_4 = M_{(4)} + 6M_{(3)} + 7M_{(2)} + M_{(1)}$$

'Εκφράζομεν ἐν συνεχείᾳ τάς παραγοντικάς ροπάς εἰς συνάρτησιν τῶν ροπῶν ὡς πρός τόν μέσον, ἤτοι:

$$\bar{M}_{(1)} = M(X-M_1) = 0$$

$$\bar{M}_{(2)} = M\left[(X-M_1)(X-M_1-1)\right] = \bar{M}_2$$

$$\bar{M}_{(3)} = \bar{M}_3 - 3\bar{M}_2$$

$$\bar{M}_{(4)} = \bar{M}_4 - 6\bar{M}_3 + 11\bar{M}_2$$

Χαρακτηριστική συνάρτησις

Ἔστω $\Phi(\chi)$ ἡ συνάρτησις κατανομῆς μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς καί τ πραγματικός ἀριθμός

Ἡ μέση τιμή τῆς συναρτήσεως $e^{i\tau\chi}$ = συν $\tau\chi$ + i ημ.$\tau\chi$,

ἤτοι $H(\tau) = M(e^{i\tau\chi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\chi} d\Phi(\chi)$ θά εἶναι μία συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς τ λαμβάνουσα ἐν γένει μιγαδικάς τιμάς.

Ἡ συνάρτησις $H(\tau)$ ὁριζομένη ὑπό τῆς ἰσότητος

(α) $H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\chi} d\Phi(\chi)$ καλεῖται χαρακτηριστική συνάρτησις.

Ὅπου εἶναι $i = \sqrt{-1}$, καί $\left| e^{i\tau\chi} \right| = 1$ διά $\tau \in R$

Ἐπομένως διά κάθε τιμή τοῦ τ, ἡ $H(\tau)$ ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως (α).

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις $H(\tau)$ ὑπάρχει πάντοτε, διότι τό ὁλοκλήρωμα συγκλίνει ἀπολύτως, ἄρα θά συγκλίνῃ καί καθ'ἑαυτό.

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις ἔχει μερικάς ἰδιότητας

α) Μεταξύ τῆς $H(\tau)$ καί $\Phi(\chi)$ ὑπάρχει μία ἀμοιβαία συσχέτισις, ὑπό τήν ἑξῆς ἔννοιαν. Ἐάν γνωρίζωμεν τήν $H(\tau)$ εἶναι δυνατόν νά ὑπολογίσωμεν τήν ἀντίστοιχον συνάρτησιν κατανομῆς τῆς $\Phi(\chi)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X καί ἀντιθέτως.

β) Ἡ παράγωγος τάξεως τ τῆς $H(\tau)$ ὡς πρός τ ὑπολογισθεῖσα εἰς τό σημεῖον $\tau = 0$, εἶναι ἡ ροπή τάξεως τ ὡς πρός τήν ἀρχήν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἤτοι

$$M_\tau = \frac{1}{i^\tau} \left[\frac{\partial^\tau H(\tau)}{\partial \tau^\tau} \right]_{\tau = 0}$$

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν $H(\tau)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $\Psi = \alpha X + \beta$. Θά εἶναι

$$H_{\psi}(\tau) = M\left[e^{i\tau\psi}\right] = M\left[e^{i\tau(\alpha X+\beta)}\right] = M\left[e^{i\tau\alpha X}\right] e^{i\tau\beta}$$

$$= e^{i\tau\beta}\; H_{\chi}(\alpha\tau), \quad \text{ἤτοι } H_{\psi}(\tau) = e^{i\tau\beta}\, H_{\chi}(\alpha\tau).$$

Ὑποθέτομεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι X καί Ψ εἶναι δύο τυχαῖαι μεταβληταί ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων καί ὅτι $Z = X + \Psi$.
Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς νέας τυχαίας μεταβλητῆς Z θά εἶναι,

$$H_Z(\tau) = M(\, e^{i\tau Z}\,) = M\left[e^{i\tau(X+\Psi)}\right] = H_{\chi}(\tau)\,.\,H_{\psi}(\tau),$$

ἤτοι διά νά εὕρωμεν τήν χαρακτηριστικήν συνάρτησιν ἀθροίσματος δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἀρκεῖ νά σχηματίσωμεν τό γινόμενον τῶν ἐπί μέρους χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τούτων.-

Ροπογεννήτρια συνάρτησις

Ροπογεννήτρια συνάρτησις μιᾶς συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς X ἐχούσης πυκνότητα πιθανότητος $\varphi(\chi)$ καλεῖται ἡ μέση τιμή τῆς μεταβλητῆς $e^{X\alpha}$, ἥτις εἶναι συνάρτησις τοῦ α καί δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως

$$P(\alpha) = M\left[e^{\alpha X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\chi}\; d\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\chi}\;\varphi(\chi)\; d\chi$$

Ἐκ παραλλήλου ἐάν $\chi_1, \chi_2, \ldots\ldots, \chi_\nu$ εἶναι αἱ τιμαί μιᾶς μεταβλητῆς X καί $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_\nu$ αἱ ἀντίστοιχοι πιθανότητες, τότε ἡ συνάρτησις τοῦ α καλεῖται ροπογεννήτρια συνάρτησις τῆς ἀσυνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς X καί δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως:

$$F(\alpha) = e^{\alpha\chi_1} P_1 + e^{\alpha\chi_2} P_2 + e^{\alpha\chi_3} P_3 \ldots\ldots + e^{\alpha\chi_i} P_i + \ldots\ldots + e^{\alpha\chi_\nu} P_\nu =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} e^{\alpha\chi_i} P_i$$ Διά παραγωγήσεως ὡς πρός α λαμβάνομεν

$$F'(\alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} e^{\alpha\chi_i} \chi_i P_i \quad \text{καί} \quad F''(\alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} e^{\alpha\chi_i} \chi_i^2 P_i ,$$

θέτοντες δέ $\alpha = 0$ λαμβάνομεν

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_i P_i = M_1$$

$$F''(0) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_i^2 P_i = M_2$$

Ὥστε ἡ γνῶσις τῆς $F(\alpha)$ μᾶς δίδει διά παραγωγήσεως τάς διαδοχικάς ροπάς ὡς πρός τήν ἀρχήν, ἤτοι ἰσχύει ἡ κατωτέρω σχέσις:

$$M_\tau = \left[\frac{\partial^\tau F(\alpha)}{\partial \alpha^\tau} \right]_{\alpha = 0}$$

Πράγματι: $\dfrac{\partial^\tau F(\alpha)}{\partial \alpha^\tau} = \dfrac{\partial^\tau M(\varepsilon^{\alpha X})}{\partial \alpha^\tau} = M\left[\dfrac{\partial^\tau}{\partial \alpha^\tau} e^{\alpha X}\right] =$

$= M(X^\tau e^{\alpha X}) = (\text{καί διά } \alpha = 0) = M(X^\tau e^{0X}) = M(X^\tau) = M_\tau.$

Ἐξ ἄλλου $F(\alpha) = M(e^{\alpha X})$, ἀναπτύσσοντες τήν $e^{\alpha X}$ εἰς σειράς τοῦ MACLAURIN εὑρίσκομεν διά μιᾶς ὅλας τάς διαδοχικάς ροπάς.

Ἤτοι

$$F(\alpha) = M(e^{\alpha X}) = M\left[1 + \alpha X + \frac{\alpha^2}{2!} X^2 + \ldots + \frac{\alpha^3}{S!} X^S + \ldots\right] = \left[1 + \alpha M_1 + \frac{\alpha^2}{2!} M_2 + \ldots + \frac{\alpha^S}{S!} M_S + \ldots\right]$$

Ἤτοι γνωστῆς οὔσης τῆς $F(\alpha)$ ἡ ροπή M_S ὡς πρός τήν ἀρχήν δέν εἶναι ἄλλο παρά ὁ συντελεστής τοῦ $\frac{\alpha S}{S!}$ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ MACLAURIN.

'Αποδεικνύομεν μερικάς ἰδιότητας τῆς $F(\alpha)$

1) Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις τῆς $\Psi = \acute{\alpha}X + \beta$

$$F_{\psi}(\alpha) = M(e^{\alpha\Psi}) = M\left[e^{\alpha(\acute{\alpha}X+\beta)}\right] = M\left[e^{\alpha\acute{\alpha}X} . e^{\alpha\beta}\right] = e^{\alpha\beta} F_{\chi}(\alpha\acute{\alpha})$$

2) Νά ὑπολογισθῇ ἡ $F(\alpha)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $Z = X+\Psi$ ὅπου X καί Ψ εἶναι ἀνεξάρτηται μεταξύ των.

$$F_Z(\alpha) = M(e^{\alpha Z}) = M(e^{\alpha X} . e^{\alpha\Psi}) = F_{\chi}(\alpha) F_{\psi}(\alpha)$$

Παραγοντική Ροπογεννήτρια Συνάρτησις

Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως

$$N(\beta) = M\left[(1+\beta)^X\right]$$

Ὅπου β εἶναι μία παράμετρος

Ἡ $N(\beta)$ ἱκανοποιεῖ τήν κάτωθι ἰδιότητα.

"Ἡ παράγωγος τῆς τάξεως τ τῆς $N(\beta)$ ὑπολογιζομένη εἰς τό σημεῖον $\beta = 0$, εἶναι ἡ παραγοντική ροπή τῆς τάξεως τ, ἤτοι

$$M_{(\tau)} = \left[\frac{\partial^{\tau} N(\beta)}{\partial \beta^{\tau}}\right]_{\beta = 0}$$

'Αναπτύσσοντες εἰς σειράν τοῦ MACLAURIN τήν σχέσιν

$N(\beta) = M\left[(1+\beta)^X\right]$, ἔχομεν

$$1 + \beta M_{(1)} + \frac{\beta^2}{2!} M_{(2)} + \ldots\ldots + \frac{\beta^S}{S!} M_{(S)}$$

Ἤτοι ὁ συντελεστής τῆς $\frac{\beta^S}{S!}$ δέν εἶναι ἄλλο παρά ἡ παραγοντική ροπή $M_{(S)}$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X.

'Η ροπογεννήτρια F(α) καί ή παραγοντική ροπογεννήτρια N(β) συνδέονται διά τῶν κάτωθι σχέσεων:

(1) $N(\beta) = F\left(\log(1+\beta)\right)$ (2) $F(\alpha) = N\,(e^{\alpha}-1)$

1) Ἔχομεν $N(\beta) = M\left[(1+\beta)^{x}\right]$ καί $F\left[\log(1+\beta)\right] =$

$= M\left[e^{x\log(1+\beta)}\right] = M\left[(1+\beta)^{x}\right]$

ἄρα $N(\beta) = F\left[\log(1+\beta)\right]$

2) $F(\alpha) = M\left[e^{\alpha x}\right]$ καί $N(e^{\alpha}-1) = M\left[(1+e^{\alpha}-1)^{x}\right] =$

$= M\left[e^{\alpha x}\right]$

ἄρα $F(\alpha) = N(e^{\alpha}-1)$

Συνάρτησις τῶν ἡμιμεταβλητῶν

'Η ὡς ἄνω συνάρτησις παρίσταται μέ τό σύμβολον Δ(α) καί δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως

$$\Delta(\alpha) = \log F(\alpha)$$

Αἱ ἡμιμεταβληταί εἶναι κατάλληλοι παράμετροι τοῦ τύπου λ_S, ὅπου γενικῶς λ_S εἶναι ἡ παράγωγος τάξεως S τῆς Δ(α) ὑπολογιζομένη διά α = 0, ἤτοι

$$\lambda_S = \left[\frac{\partial^S \Delta(\alpha)}{\partial\, \alpha^S}\right]_{\alpha = 0}$$

Εἰδικῶς παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λ_1 δέν εἶναι ἄλλο παρά ὁ μέσος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X

Πράγματι ἔχομεν

$$\lambda_1 = \left[\frac{\partial\, \Delta(\alpha)}{\partial\, \alpha}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial\, \log\, P\,(\alpha)}{\partial\, \alpha}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{P'(\alpha)}{P\,(\alpha)}\right]_{\alpha=0}$$

$$= \left[\frac{\frac{d}{d\alpha} M(e^{\alpha X})}{M(e^{\alpha X})}\right]_{\alpha=0} = \left[M\frac{(X e^{\alpha X})}{M(e^{\alpha X})}\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{M_1 M(e^{\alpha X})}{M(e^{\alpha X})} = M_1$$

"Ας ὑπολογίσωμεν τώρα τήν Δ(α) τῆς τυχαίας μεταβλητῆς

$$\Psi = \alpha' X + \beta$$

$$\Delta_{\psi}(\alpha) = \log F_{\psi}(\alpha) = \log M(e^{\alpha\Psi}) = \log M[e^{\alpha(\alpha' X+\beta)}]$$

$$= \log M[e^{\alpha\alpha' X} + e^{\alpha\beta}] = \log M(e^{\alpha\alpha' X}) + \log M(e^{\alpha\beta})$$

$$= \Delta_{\chi}(\alpha\alpha') + \log e^{\alpha\beta} = \Delta_{\chi}(\alpha\alpha') + \alpha\beta$$

"Ητοι $\Delta_{\psi}(\alpha) = \Delta_{\chi}(\alpha\alpha') + \alpha\beta$

'Εάν X καί Ψ εἶναι δύο τυχαῖαι μεταβληταί ἀνεξάρτητοι, ἡ Δ(α) τῆς μεταβλητῆς Z = X + Ψ δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως.

$$\Delta_Z(\alpha) = \log F_Z(\alpha) = \log M(e^{\alpha Z}) = \log M(e^{\alpha X} \cdot e^{\alpha\Psi}) =$$

$$= \Delta_{\chi}(\alpha) + \Delta_{\psi}(\alpha).$$

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι $\lambda_1 = M_1$. 'Υπολογίζομεν ἐν συνεχείᾳ τήν λ_2 καί λ_3.

$$\lambda_2 = \left[\frac{\partial^2\Delta(\alpha)}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial^2 \log F(\alpha)}{\partial\alpha^2}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial\Delta'(\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \left[\frac{\partial \frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)}}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{F(\alpha)F''(\alpha) - F'(\alpha)F'(\alpha)}{F(\alpha)^2}\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{F(0)\,F''(0) - [F'(0)]^2}{[F(0)]^2}$$

'Εξετάζομεν τάς τιμάς $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$

$F(\alpha) = M(e^{\alpha X}) = (\delta\iota\acute{\alpha}\ \alpha=0) = M(e^{0X}) = M(1) = 1 \rightarrow F(0) = 1$

$F'(\alpha) = M(Xe^{\alpha X}) = ('' \quad '') = M(X^1) = M_1 \longrightarrow F'(0) = M_1$

$F''(\alpha) = M(X^2e^{\alpha X}) = ('' \quad '') = M(X^2) = M_2 \longrightarrow F''(0) = M_2$

'Επομένως θά έχωμεν :

$$\lambda_2 = \frac{F(0)\,F''(0) - [F'(0)]^2}{[F(0)]^2} = \frac{1\,M_2 - M_1^2}{1^2} = M_2 - M_1^2 = \sigma_\chi^2$$

διακύμανσιν.

'Ομοίως άποδεικνύεται ότι :

$$\lambda_3 = \frac{1}{1^4}\left\{1^2\left[M_1\,M_2 + 1\,M_3 - 2\,M_1\,M_2\right] - \left[1M_2 - M_1^2\right]\left[2.1.M_1\right]\right\}$$

$= M_3 - 2M_1\,M_2 + M_1^3 = \bar{M}_3$ ($\bar{M}_3$ = τρίτη ροπή ώς πρός τό μέσον).

'Η ώς άνω συνάρτησις καλεῖται ήμιμεταβλητή, διότι μόνον ή πρώτη ροπή M_1 μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς άρχῆς. 'Ενῶ όλαι αί άλλαι ροπαί δέν μεταβάλλονται μεταβαλλομένης τῆς άρχῆς.-

Γεννητική συνάρτησις πιθανότητος

Καλεῖται ή συνάρτησις Γ (τ), ήτις δίδεται έκ τῆς κατωτέρω σχέσεως:

$$\Gamma(\tau) = M\left[\tau^X\right]$$

'Η τοιαύτη όνομασία είναι συνέπεια τοῦ γεγονότος, ότι, έάν ή τυχαία μεταβλητή Χ λαμβάνη τάς τιμάς $\chi_1\ \chi_2, \dots, \chi_i, \dots, \chi_n$, μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$, ἡ Γ (τ), θά εἶναι

$$\Gamma(\tau) = \sum_{1}^{n} \tau^{x_i} P_i$$

Ὁ συντελεστής τῆς τ^{i} εἶναι ἡ πιθανότης P_i ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν τιμήν x_i τῆς μεταβλητῆς X.

Ἡ Γ (τ) τῆς μεταβλητῆς Ψ = αX+β, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\Gamma_{\psi}(\tau) = M(\tau^{\psi}) = M(\tau^{\alpha X+\beta}) = \tau^{\beta}\, \Gamma\chi(\tau^{\alpha})$$

Ἐάν X καί Ψ εἶναι δύο τυχαῖαι μεταβληταί ἀνεξάρτητοι, ἡ Γ(τ) τῆς τυχαίας μεταβλητῆς

Z = X + Ψ θά εἶναι

$$G_Z(\tau) = M(\tau^{X} \cdot \tau^{\Psi}) = \Gamma_{\chi}(\tau)\, \Gamma_{\psi}(\tau).$$

Γενίκευσις

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῶν τυχαίων μεταβλητῶν

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_i, \ldots\ldots, X_n$

δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως.

$$H(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_n) = M\left[\varepsilon^{i(\tau_1 X_1 + \tau_2 X_2 + \ldots + \tau_n X_n)}\right]$$

Εἰδικῶς ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις δύο τυχαίων μεταβλητῶν X καί Ψ θά δίδεται ὡς κάτωθι

$$H(\tau_1, \tau_2) = M\ \varepsilon^{i\left[\tau_1 X + \tau_2 \Psi\right]}$$

Ἐάν δέ ὑποθέσωμεν ὅτι X καί Ψ εἶναι δύο μεταβληταί ἀνεξάρτητοι, θά εἶναι

$$H(\tau_1, \tau_2) = H_{\chi}(\tau_1) \cdot H_{\psi}(\tau_2)$$

Ὁμοίως ἡ ῥοπογεννήτρια συνάρτησις τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots\ldots, X_n$ θά εἶναι

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\eta) = M\left[e^{[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_\eta X_\eta]}\right]$$

Εἰδικῶς ἐπί δύο τυχαίων μεταβλητῶν Χ καί Ψ, θά ἔχωμεν.

$$F(\alpha_1,\alpha_2) = M\left[e^{\alpha_1 X + \alpha_2 \Psi}\right]$$

Καί ἐφ'ὅσον αἱ Χ καί Ψ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των θά εἶναι

$$F(\alpha_1,\alpha_2) = F_\chi(\alpha_1).F_\psi(\alpha_2)$$

Τυχαία μεταβλητή τοῦ POISSON

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβλητή Χ λαμβάνει μίαν ἀπειρίαν τιμῶν

$$0\ ,\ 1\ ,\ 2,\ldots\ldots\ldots\ldots,i\ ,\ldots\ldots\ldots$$

καί εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν τούτων ἀντιστοιχεῖ μία τιμή τῆς ἀκολουθίας

$$P_1\ ,\ P_2\ ,\ldots\ldots\ldots,\ P_i\ ,\ldots\ldots$$

Ἡ πιθανότης P_i δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$P_i = e^{-M_1}\frac{M_1^i}{i\,!}$$, ὅπου M_1 εἶναι ὡρισμένος ἀριθμός.

Τό ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς $P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_i + \ldots\ldots\ldots$

$$\sum_{o}^{\infty}{}_i\, P_i = 1$$

Πράγματι

$$\sum_{o}^{\infty}{}_i P_i = \sum_{o}^{\infty} e^{-M_1}\frac{M_1^i}{i!} = e^{-M_1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{M^i}{i!} = e^{-M_1}e^{M_1} = 1$$

Τῆς ὡς ἄνω τυχαίας μεταβλητῆς ὑπολογίζομεν M_1, σ_χ^2, $F(\alpha)$, $\Gamma(\tau)$, $N(\beta)$, ὡς κάτωθι

$$N(\beta) = M\left[(1+\beta)^X\right] = \sum_{o}^{\infty}{}_i \; (1+\beta)^i \, e^{-M_1} \frac{M_1^i}{i!} = e^{-M_1}.$$

$$\cdot \sum_{o}^{\infty}{}_i \; (1+\beta)^i \frac{M_1^i}{i!} = e^{-M_1} \; e^{\left[M_1(1+\beta)\right]} = e^{-M_1} \, e^{M_1} \, e^{\beta M_1} = e^{\beta M_1}$$

Ὅθεν $N(\beta) = e^{\beta M_1} = 1+\beta M_{(1)} + \frac{\beta^2}{2!} M^2_{(1)} + \frac{\beta^3}{3!} M^3_{(1)} + \ldots\ldots$

Ἀπό τήν ὡς ἄνω σχέσιν λαμβάνομεν

$M_{(1)} = M_1, \quad M_{(2)} = M_2 - M_1 = M^2_{(1)}, \; M_2 = M_1^2 + M_1$

$\sigma_\chi^2 = M_2 - M_1^2 = (M_1^2 + M_1) - M_1^2 = M_1$

Εἴδομεν ὅτι $N(\beta) = e^{\beta M_1}$

Κατά συνέπειαν ,δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν $F(\alpha)$ καί $\Gamma(\tau)$ ὡς ἑξῆς :

$N(\beta) = F(\alpha)$ διά $\beta = e^\alpha - 1$, ἑπομένως

$F(\alpha) = e^{M_1}\,(e^\alpha - 1)$ καί

$N(\beta) = \Gamma(\tau)$ διά $\beta = \tau - 1$, κατά συνέπειαν

$\Gamma(\tau) = e^{M_1(\tau-1)}$.-

ΚΑΤΑΝΟΜΗ Γ(ν)

Ἡ συνάρτησις γάμμα ὁρίζεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} \chi^{\nu-1} e^{-\chi}\, d\chi \qquad (\nu > 0)$$

Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις ἱκανοποιεῖ τάς κάτωθι σχέσεις:

1) $\Gamma(\nu+1) = \nu.\ \Gamma(\nu)$, ἐάν $\nu > 0$

2) $\Gamma(1) = 1$

3) $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$, ἐάν ν φυσικός ἀριθμός.

Πράγματι ἔχομεν

1) $$\Gamma(\nu+1) = \int_0^{+\infty} \chi^{\nu} e^{-\chi}\, d\chi = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \chi^{\nu} e^{-\chi}\, d\chi =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left\{ \left[\chi^{\nu}(-e^{-\chi}) \right]_0^M - \int_0^M (-e^{-\chi})(\nu\,\chi^{\nu-1})\, d\chi \right\} =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (-M^{\nu} e^{-M}) + \lim_{M\to+\infty} \nu\int_0^M e^{-\chi}\chi^{\nu-1}\, d\chi =$$

$$= \nu \int_0^{+\infty} \chi^{\nu-1} e^{-\chi}\, d\chi = \nu.\Gamma(\nu)$$

2) $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\chi}\, d\chi = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-\chi} d\chi = \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-\chi}\right]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (1 - e^{-M}) = 1$$

3) Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) θά ἔχωμεν:

$\Gamma(1)=1$, $\Gamma(2)=1.\Gamma(1)$, $\Gamma(3)=2.\Gamma(2)$, ..., $\Gamma(\nu-1)=(\nu-2)\,\Gamma(\nu-2)$, $\Gamma(\nu) = (\nu-1).\Gamma(\nu-1)$.

Πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη τάς ἰσότητας λαμβάνομεν

$\Gamma(1).\Gamma(2).\Gamma(3)....\Gamma(\nu-1).\Gamma(\nu)=(\nu-1)!\Gamma(1).\Gamma(2)...\Gamma(\nu-2).\Gamma(\nu-1)$

καί ἐκ ταύτης $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$

Ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Γ δίδεται ἀπό τήν κάτωθι σχέσιν

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\chi^{\nu-1} e^{-\chi}}{\Gamma(\nu)} & \text{διά} \quad \chi > 0 \\ 0 & \text{διά} \quad \chi \leq 0 \end{cases}$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μέσου καί τῆς διακυμάνσεως χρησιμοποιοῦμεν τήν F (α)

$$F\,(\alpha) = M\,(e^{\alpha X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\chi}\,\varphi(\chi)\,d\chi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\chi}\,\frac{\chi^{\nu-1}\,e^{-\chi}}{\Gamma\,(\nu)}\,d\chi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\,\chi^{\nu-1}\,e^{(\alpha-1)\chi}\,d\chi$$

διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ ὡς ἄνω ὁλοκληρώματος ἐφαρμόζομεν τό κάτωθι τέχνασμα.

Θέτομεν $(\alpha-1)\chi = -\tau$, $\chi = \dfrac{\tau}{1-\alpha}$ καί $d\chi = \dfrac{d\tau}{1-\alpha}$, ἐπομένως ἔχομεν

$$\Gamma\,(\alpha) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{1-\alpha}\right)^{\nu-1} \frac{e^{-\tau}}{\Gamma(\nu)}\;\frac{d\tau}{(1-\alpha)} = \frac{(1-\alpha)^{1-\nu}}{(1-\alpha)\Gamma(\nu)}\;.$$

$$\int_{0}^{+\infty} \tau^{\nu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau = \frac{(1-\alpha)^{-\nu}}{\Gamma(\nu)}\;\Gamma(\nu) = (1-\alpha)^{-\nu}$$

ἤτοι $F(\alpha) = (1-\alpha)^{-\nu}$

Ἀναπτύσσοντες εἰς σειράν τοῦ MAC-LAURIN διά $|\alpha|<1$

Ἔχομεν

$$F(\alpha) = 1+\alpha\nu+\frac{\alpha^2}{2!}\nu(\nu+1) + \frac{\alpha^3}{3!}\nu(\nu+1)(\nu+2) + \dots$$

Ἤτοι:

$M_1 = \nu$

$M_2 = \nu(\nu+1)$

$M_3 = \nu(\nu+1).(\nu+2)$

$\sigma_\chi^2 = M_2 - M_1^2 = \nu(\nu+1) - \nu^2 = \nu.$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ Β

Ἡ τυχαία μεταβλητή Β δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$B(\tau,S) = \int_0^1 \chi^{\tau-1}.(1-\chi)^{S-1} d\chi, \quad [\tau>0, \quad S>0]$$

Ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $B(\tau,S)$ δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\chi^{\tau-1}.(1-\chi)^{S-1}}{B(\tau,S)} & \text{διά} \quad 0<\chi<1 \\ 0 & \text{διά} \quad \chi\leq 0 \ \text{καί} \ \chi\geq 1 \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τόν μετασχηματισμόν $\chi = 1-\psi$ θά ἔχωμεν $d\chi = -d\psi$ καί τότε

$$B(\tau,S) = \int_0^1 \chi^{\tau-1}.(1-\chi)^{S-1} d\chi = -\int_1^0 (1-\psi)^{\tau-1}\psi^{S-1} d\psi =$$

$$= \int_0^1 \psi^{S-1}(1-\psi)^{\tau-1} d\psi = B(S,\tau).$$

'Αποδεικνύεται ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή B συνδέεται μέ τήν τ.μ Γάμμα διά τῆς κατωτέρω σχέσεως

$$B\ (\tau,S) = \frac{\Gamma(\tau).\Gamma(S)}{\Gamma(\tau+S)}$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Γνωρίζομεν ὅτι $\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} \chi^{\tau-1} e^{-\chi}\, d\chi$,

ἐάν θέσωμεν $\chi=Z^2$ θά ἔχωμεν

$$\Gamma(\tau) = 2\int_0^{\infty} Z^{2\tau-1}.\ e^{-Z^2}\, dZ \qquad (1)$$

'Ομοίως $\Gamma(S) = 2\int_0^{\infty} \psi^{2S-1}.\ e^{-\psi^2}\, d\psi \qquad (2)$

'Εάν πολλαπλασιάσωμεν τάς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη, θά ἔχωμεν

$$\Gamma(\tau).\Gamma(S) = 4.\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Z^{2\tau-1}.\ \psi^{2S-1}\ .\ e^{-(\tau^2+\psi^2)}\, dZ\, d\psi$$

Θέτομεν $\chi = \rho.\sigma\upsilon\nu.\vartheta$, $\psi = \rho\ \dot{\eta}\mu.\vartheta$

Κατά συνέπειαν

$$\Gamma(\tau).\Gamma(S) = 4.\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{\infty} \rho^{2(\tau+S)-1}.e^{-\rho^2}\sigma\upsilon\nu.\vartheta^{2\tau-1}\ \dot{\eta}\mu\vartheta^{2S-1}\, d\vartheta d\rho$$

$$= 4\left(\int_{\rho=0}^{\infty} \rho^{2(\tau+S)-1}.e^{-\rho^2}\, d\rho\right).\left(\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^{2\tau-1}\vartheta\ \eta\mu^{2S-1}\vartheta\, d\vartheta\right)$$

$$= 2\,\Gamma(\tau+S)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{2\tau-1}\vartheta\ \eta\mu^{2S-1}\vartheta\, d\vartheta.$$

Θέτομεν $\eta\mu^{2}\vartheta = \chi$, τότε $d\vartheta = \dfrac{d\chi}{2\eta\mu\vartheta.\sigma\upsilon\nu\vartheta}$.

Θά έχωμεν

$$\Gamma(\tau).\Gamma(S) = 2\,\Gamma(\tau+S)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{2\tau}\vartheta.\eta\mu^{2S}\vartheta\ \frac{d\vartheta}{\eta\mu\vartheta.\sigma\upsilon\nu\vartheta} =$$

$$= 2\,\Gamma(\tau+S)\int_{0}^{1} \chi^{S}(1-\chi)^{\tau}\,\frac{d\chi}{2\chi(1-\chi)} = \Gamma(\tau+S)\int_{0}^{1} \chi^{S-1}(1-\chi)^{\tau-1}\,d\chi =$$

$\Gamma(\tau+S).B(S,\tau) = \Gamma(\tau+S).B(\tau,S)$

Άρα

$$B(\tau,S) = \frac{\Gamma(S).\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau+S)}$$

Ὑπολογίζομεν τήν ροπήν Κ τάξεως τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $B(\tau,S)$

$$M_{K} = M\,(X^{K}) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{K}\ d\Phi\,(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{K}\ \frac{\chi^{\tau-1}}{B(\tau,S)}\,(1-X)^{S-1}\ dX$$

$$= \frac{1}{B(\tau,S)}\int_{0}^{1} \chi^{\tau+K-1}\ (1-S)^{S-1}\,dX = \frac{\Gamma(\tau+S)}{\Gamma(\tau)\Gamma(S)}\cdot\frac{\Gamma(\tau+K)\Gamma(S)}{\Gamma(\tau+K+S)}$$

δοθέντος ὅτι $\Gamma(\tau+K) = (\tau+K-1)(\tau+K-2)\ldots(\tau+1)\tau\Gamma(\tau)$

καί $\Gamma(\tau+K+S) = (\tau+K+S-1)(\tau+K+S-2)\ldots.(\tau+S+1).(\tau+S).\Gamma(\tau+S)$

θά έχωμεν

$$M_{K} = \frac{\Gamma(\tau+S)\ \Gamma\,(\tau+K)}{\Gamma(\tau)\ \Gamma\,(\tau+K+S)} = \frac{\Gamma(\tau+S).(\tau+K-1)(\tau+K-2)\ldots(\tau+1)\tau\,\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau).(\tau+K+S-1)(\tau+K+S-2)\ldots(\tau+S)\,\Gamma(\tau+S)} =$$

$$= \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)\ldots..(\tau+K-1)}{(\tau+S)(\tau+S+1)\ldots..(\tau+S+K-1)}$$

'Από τόν ὡς ἄνω γενικόν τύπον εἶναι εὔκολον νά ὑπολογισθοῦν αἱ ροπαί M_1 καί M_2

Ἤτοι $M_1 = \frac{\tau}{\tau+S}$, $M_2 = \frac{\tau(\tau+1)}{(\tau+S)(\tau+S+1)}$

$$\sigma^2_{\chi} = M_2 - M_1^2 = \frac{\tau S}{(\tau+S)^2(\tau+S+1)}$$

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΤΟΥ BERNOULLI

'Η τυχαία μεταβλητή τοῦ BERNOULLI εἶναι μία ἀσυνεχής μεταβλητή, ἥτις λαμβάνει τιμάς 0,1,2,......,η μέ πιθανότητα $P_i = \binom{\eta}{i} p^i q^{\eta-i}$ ὅπου $p+q = 1$.

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς μέσης τιμῆς καί τῆς διακυμάνσεως, χρησιμοποιοῦμεν τήν ροπογεννήτριαν συνάρτησιν F (α)
Ἔστω μία ἀκολουθία ἐκ τῶν ἀριθμῶν 0,1,3,....,i,.....,η, τῆς ὡς ἄνω ἀκολουθίας δυνάμεθα νά λάβωμεν μίαν τυχαίαν μεταβλητήν X_i, ἥτις λαμβάνει τήν τιμήν 1 μέ πιθανότητα P, 'Εάν ἐξάγεται ὁ ἀριθμός i, Τήν τιμήν $X_i=0$ μέ πιθανότητα $q= 1 - P$, ἐάν δέν ἐξάγεται ὁ ἀριθμός i. 'Η ροπογεννήτρια συνάρτησις θά εἶναι

$$F(\alpha_i) = M\left[e^{\alpha_i X_i}\right] = e^{\alpha_i 1} P + e^{\alpha_i 0} q = e^{\alpha_i} \cdot P + q$$

'Εάν ἐν συνεχείᾳ θεωρήσωμεν ὅτι ἔχομεν τάς μεταβλητάς $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_\eta$ ἀνεξαρτήτους μεταξύ των θά ἔχωμεν διά κάθε i

$$F(\alpha) = F(\alpha_i)^\eta = \left[e^\alpha P + q\right]^\eta$$

'Αναπτύσσοντες εἰς σειράς τοῦ MACIAURIN τήν F(α), Ἔχομεν

$$F(\alpha) = \left[P\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots\right)+q\right]^\eta =$$

$$= \left|1 + \left(\alpha p + \frac{\alpha^2}{2.} p + \ldots\ldots\right)\right|^\eta = 1 + \alpha\eta p + \frac{\alpha^2}{2!} =$$

$$= \left[n\,(n-1)p^2 + np\right] = n\,pq + n^2\,p^2 = F\,(\alpha)$$

'Από τήν F (α) εὑρίσκομεν

$$M_1 = n\,P$$

$$M_2 = n\,P\,q + n^2\,p^2$$

$$\sigma_\chi^2 = M_2 - M_1^2 = n\,Pq$$

Εἴδομεν ὅτι $F\,(\alpha) = \left[P\,e^{\alpha} + q\right]^{n}$, δεδομένου ὅτι

$F\,(\alpha') = \Gamma\,(\tau)$ διά $e^{\alpha} = \tau$, ἔχομεν

$$G\,(\tau) = \left[P\tau + q\right]^{n}$$

'Επίσης δεδομένου ὅτι $F\,(\alpha) = \bar{N}\,(\beta)$ διά $e^{\alpha} = 1+\beta$,

"Εχομεν

$$N\,(\beta) = \left[n\,(1+\beta) + 1-P\right]^{n} = \left[1 + P\beta\right]^{n}$$

Τέλος ἡ Συνάρτησις τῶν ἡμιμεταβλητῶν θά εἶναι

$$\Delta\,(\alpha) = n\,\text{λογ.}\,(q + e^{\alpha}P)$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

'Η Γεωμετρική ἀπεικόνισις τοῦ δυωνυμικοῦ ἀναπτύγματος $(q+P)^n$ προσεγγίζει μίαν ὁμαλήν καμπύλην, ὅσον ὁ ἀριθμός n αὐξάνει.

'Η ὡς ἄνω καμπύλη ἀποβαίνει κωνοειδῆς καί συμμετρική περί τόν κατακόρυφον ἄξονα τόν διερχόμενον ἐκ τῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς.

'Η καμπύλη αὕτη λέγεται κανονική κατανομή ἤ κατανομή τῶν GAUSS- LAPLACE.

'Η τοιαύτη καμπύλη εἶναι μία θεωρητική καμπύλη, ἐν ἀντιθέσει πρός τήν καμπύλην κατανομῆς συχνοτήτων, ἥτις λέγεται ἐμπειρική καμπύλη.

'Η συνάρτησις ταύτης εἶναι:

$$\varphi(\chi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}}$$ ὅπου $\mu \geqslant 0$, $\sigma > 0$ σταθεραί.

Προφανῶς ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν εὐθείαν $\chi=\mu$ καί ἔχει ἀσύμπτωτον τόν ἄξονα τῶν χ.

'Αποδεικνύεται ὅτι: $\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi)\, d\chi = 1$ καί ἐπειδή ἔχομεν

$\varphi(\chi) \geqslant 0$, ἡ $\varphi(\chi)$ εἶναι συνάρτησις πυκνότητος μιᾶς τυχαίας συνεχοῦς μεταβλητῆς $X \in (-\infty, +\infty)$. Λέγομεν ὅτι ἡ X ἔχει κανονικήν κατανομήν, ἐάν ἔχῃ συνάρτησιν πυκνότητος τήν $\varphi(\chi)$.

<u>Θεώρημα</u>: 'Εάν X εἶναι συνεχής τυχαία μεταβλητή καί ἔχῃ κανονικήν κατανομήν

$$\varphi(\chi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

τότε 1) $M(X) \equiv M_1 = \mu$ καί 2) $\sigma_\chi = \sigma$

<u>'Α π ό δ ε ι ξ ι ς</u>

"Εχομεν $M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} d\chi$

Θέτομεν $t = \frac{(\chi-\mu)}{\sigma}$ καί λαμβάνομεν $\chi = \mu + t\sigma$, $d\chi = \sigma\, dt$

τότε $M(X) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t+\mu)\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t+\mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} t\, e^{-t^2/2} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

'Επειδή ἡ $te^{-\frac{t^2}{2}}$ εἶναι περιττή διά τοῦτο θά ἔχωμεν

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (I - I) + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} \frac{d\chi}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} d\chi =$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi)\, d\chi = \mu.1 = \mu.$$

2) $M(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} d\chi$. Θέτομεν $t = \frac{\chi-\mu}{\sigma}$

καί ἔχομεν $M(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t+\mu)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2\mu\sigma.0 + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} \frac{d\chi}{\sigma}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\mu^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi)\, d\chi =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 .$$ Ὁλοκληρώνομεν κατά μέρη καί λαμβάνομεν

$$M(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] + \mu^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t\, d(-e^{-\frac{t^2}{2}}) \right] + \mu^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[t(-e^{-\frac{t^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} + \mu^2 =$$

$$= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\chi-\mu)^2}{\sigma^2}} \frac{d\chi}{\sigma} \right\} + \mu^2 =$$

$$= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\chi)\, d\chi \right\} + \mu^2 =$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{t \to +\infty} (-te^{-\frac{t^2}{2}}) - \lim_{t \to -\infty} (-te^{-\frac{t^2}{2}}) \right] + 1 \right\}$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 \left\{ 0 + 1 \right\} = \mu^2 + \sigma^2$$

Ἄρα $M(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

καί ἐπειδή $\sigma_\chi^2 = M(X^2) - \mu^2$ διά τοῦτο $\sigma_\chi^2 = \sigma^2 \rightsquigarrow \sigma_\chi = \sigma.$

Παρατηρήσεις:

1) 'Η τεταγμένη τῆς καμπύλης ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν μέσην ἀριθμητικήν τιμήν δηλ. εἰς τήν $\chi = M_1$ εἶναι $\Psi_o = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

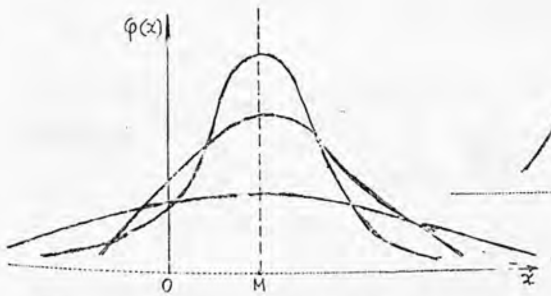
2) 'Η τεταγμένη ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν ἀπόκλισιν $\pm$ C ἐκ τῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς εἶναι

$$\Psi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2} \frac{c^2}{c^2}}$$

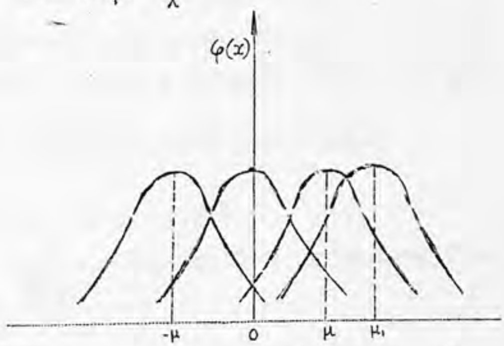
Σημείωσις: 'Η τυχαία μεταβλητή X ἡ ἔχουσα συνάρτησιν πυκνότητος τήν $\varphi(\chi)$ θά γράφεται

$$X = N(\mu,\sigma) \equiv N\,(M_1,\ \sigma_\chi)$$

Διάγραμμα τῆς $\varphi(\chi)$



Κανονικαί κατανομαί μέ μ σταθερόν

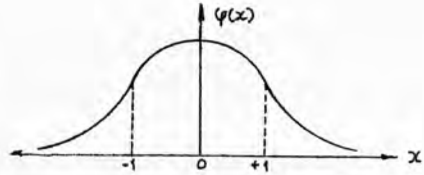


Κανονικαί κατανομαί μέ σ σταθερόν

Τυποποιημένη κανονική κατανομή

'Η κατανομή N(0,1), δηλαδή ἡ κανονική κατανομή μέ $M_1 = \mu = o$ καί $\sigma_\chi = \sigma = 1$, λέγεται τυποποιημένη κανονική κατανομή.
Προφανῶς ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς κανονικῆς τυποποιημένης κατανομῆς εἶναι:

$$\varphi_\tau(\chi) \equiv \bar{\varphi}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$



Καί ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $X = N(0,1)$ θά εἶναι

$$\text{ἡ } \Phi_\tau(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\bar{\varphi}(\chi)$ καί ἡ $\Phi_\tau(\chi)$ δέν περιέχουν παραμέτρους, δυνάμεθα λοιπόν νά κατασκευάσωμεν πίνακες, μέ διάφορα στοιχεῖα τους, οἱ ὁποῖοι μᾶς διευκολύνουν εἰς τούς πρακτικούς ὑπολογισμούς. Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς $\Psi = \frac{X-\mu}{\sigma}$, ὅπου $X = N(\mu,\sigma)$ εἶναι:

$$\Phi(\psi) = P(\Psi < \psi) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \psi\right) =$$

$$= P(X < \sigma\psi+\mu) \equiv \Phi(\sigma\psi+\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\sigma\psi+\mu-\mu)^2}{\sigma^2}} d(\sigma\psi+\mu) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\psi^2} d\psi \equiv \Phi_\tau(\psi)$$

Δηλαδή $\Psi = \frac{X-\mu}{\sigma} = N(0,1)$

Ἡ μελέτη λοιπόν τῆς $N(0,1)$ εἶναι ἀρκετή διά τήν μελέτην τῆς $X=N(\mu,\sigma)$.

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς ἀνωτέρω τυποποιημένης κανονικῆς μεταβλητῆς θά εἶναι

$$H(\tau) = M(e^{i\tau\chi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi\tau} \bar{\varphi}(\chi)\, d\chi =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\chi^2 - 2i\chi\tau)} d\chi \quad (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τῆς (α) σχέσεως ἐπί $e^{Z/2}$. Προκύπτει

$$H(\tau) = \frac{e^{Z/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\chi^2 - 2i\chi\tau)} e^{-Z/2}\, d\chi =$$

$$= \frac{e^{Z/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\chi^2 - 2i\chi\tau + Z)} d\chi$$

Ἐάν ἐν συνεχείᾳ θέσωμεν $Z = i^2 \tau^2 = (-1)\tau^2 = -\tau^2$, ἔχομεν

$$H(\tau) = \frac{e^{-\tau^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\chi - i\tau)^2} d\chi$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος κάνομεν τήν ἑξῆς ἀντικατάστασιν $\chi - i\tau = \psi$

$\chi = \psi + i\tau$, $d\chi = d\psi$, ἤτοι θά ἔχωμεν

$$H(\tau) = \frac{e^{-\tau^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\psi^2} d\psi$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\psi^2} d\psi = \sqrt{2\pi}$

Ἐπομένως ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς τυποποιημένης κανονικῆς μεταβλητῆς θά εἶναι

$$H(\tau) = e^{-\tau^2/2}$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ τυποποιημένη κανονική μεταβλητή εἶναι

$$X = \frac{\Psi - M_1}{\sigma_\psi}$$

Ὅθεν ἡ κανονική μεταβλητή Ψ συνδέεται μέ τήν τυποποιημένην διά τῆς σχέσεως

$$\Psi = \sigma_\psi X + M_1 \qquad (\alpha)$$

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς κανονικῆς μεταβλητῆς εἶναι

$H_\psi(\tau) = M(e^{i\tau\psi}) = M\left[e^{i\tau(\sigma_\psi X + M_1)}\right] = e^{i\tau M_1} M(e^{i\tau\sigma\psi X}) =$

$e^{i\tau M_1} \cdot H_\chi(\tau\, \sigma_\psi)$, ὅπου $H_\chi(\tau\, \sigma_\psi) = H(\tau)$, Ἐπομένως θά ἔχωμεν

$H_\psi(\tau) = e^{i\tau M} \cdot e^{-\tau^2/2\ \sigma_\psi^2} = e^{i\tau M_1 - \frac{\tau^2}{2}\sigma_\psi^2}$ Ἡ $H_\psi(\tau)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς κανονικῆς κατανομῆς.

Ἄς ἴδωμεν ἐν συνεχείᾳ τήν σχέσιν ἥτις συνδέει τήν χαρακτηριστικήν συνάρτησιν μέ τήν ροπογεννήτρια συνάρτησιν. Θά εἶναι

$H(\tau) = F(\alpha)$ ἐάν $e^{i\tau} = e^\alpha$, ἥτοι ἐάν $\tau = \frac{\alpha}{i}$

Ἐπομένως θά εἶναι

$F\psi(\alpha) = H\psi(\tau) = H\psi\left(\frac{\alpha}{i}\right) = e^{i\frac{\alpha}{i}M_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{i}\right)^2\sigma^2_\psi} =$

$e^{\alpha M_1 + \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2_\psi}$, Ἥτοι $F\psi(\alpha) = e^{\alpha M_1 + \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2_\psi}$ εἶναι ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις τῆς κανονικῆς τυχαίας κατανομῆς.

Ἀναπτύσσοντες τήν ἀνωτέρω σχέσιν εἰς σειράν τοῦ MAC-LAURIN ἔχομεν

$$F_{\psi}(\alpha) = e^{\alpha M_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2{}_{\psi}} = 1+\alpha M_1 + \frac{\alpha^2}{2!} \cdot (\sigma^2{}_{\psi} + M_1^2) + \ldots\ldots$$

'Εκ τῆς ὁποίας ὑπολογίζονται αἱ ροπαί τῆς κανονικῆς κατανομῆς φ.

$$M_1 = M$$
$$M_2 = \sigma^2{}_{\psi} + M_1^2$$

'Εν συνεχείᾳ ἄς προσπαθήσωμεν νά προσδιορίσωμεν μία συνθήκην ἀναγκαίαν καί ἱκανή ἵνα μία τυχαία ἁπλῆ μεταβλητή νά εἶναι κανονική.

Πρός τόν σκοπόν τοῦτον ὑπολογίζομεν τήν συνάρτησιν τῶν ἡμιμεταβλητῶν (ἡμιαναλλοιώτων) L(α).

$$L(\alpha) = \log F(\alpha) = \log e^{\alpha M_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2\psi} = \alpha M_1 + \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2\psi$$

θά εἶναι γενικῶς $\lambda\tau = \left[\dfrac{\partial^{\tau} L(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right]_{\alpha=0}$, ἐκ τῆς ὁποίας

$$\lambda_1 = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(L(\alpha)\right]_{\alpha = 0} = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha M_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2\psi)\right]_{\alpha = 0} = M_1$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} L(\alpha)\right]_{\alpha = 0} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(M_1 + \alpha\sigma^2\psi)\right]_{\alpha = 0} = \sigma_{\psi}^2$$

$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_{\tau} = \ldots\ldots\ldots = 0$$

"Οθεν συνθήκη ἀναγκαία καί ἱκανή ἵνα μία τυχαία μεταβλητή ἁπλῆ νά εἶναι κανονική εἶναι ὅτι αἱ ἡμιμεταβληταί $\lambda_1 = M_1$, $\lambda_2 = \sigma^2\psi$ καί ὅλαι αἱ ἄλλαι τάξεις ἀνωτέρας τοῦ 2 νά εἶναι μηδενικαί.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ Student

Λέγομεν ὅτι μία τυχαία μεταβλητή ἀκολουθεῖ τήν κατανομήν τοῦ STUDENT, ἐάν ἡ πυκνότης πιθανότητος δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\varphi(t) = \frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]!}{\sqrt{n\pi}\left[\frac{n-2}{2}\right]!} \cdot \frac{1}{\left[1+\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^{\frac{(n+1)}{2}}}, -\infty < t < \infty$$

Θεώρημα τοῦ BIENAYME - TCHEBISHEFF

Ἔστω μία τυχαία μεταβλητή X, ἥτις ἔχει μέση τιμή M καί τυπικήν ἀπόκλισιν σ.

Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ ἡ πιθανότης ὅπως ἡ ἀπόκλισις $\Psi = X - M$ λάβῃ εἰς μίαν δοκιμήν, τιμήν μικροτέραν κατ'ἀπό - λυτον τιμήν, ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ ε.

Διατάσσομεν τάς τιμάς, ἅτινας ἡ τυχαία μεταβλητή $|\Psi|$ δύναται νά λάβῃ κατ'αὔξουσαν τιμήν. Ἤτοι

$$|\psi_1| \leqslant |\psi_2| \leqslant \cdots\cdots\cdots \leqslant |\psi_n| \leqslant \cdots\cdots$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν μερικαί εἶναι μικρότεραι τοῦ ε, π. χ. αἱ πρῶται S τιμαί καί αἱ ὑπόλοιπαι μεγαλύτεραι ἤ ἴσαι πρός τήν τιμήν ε.

Ἐάν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $\sigma^2 = P_1\,\psi_1^2 + P_2\psi_2^2 + \ldots + P_n\,\psi_n^2$ ἀφαιρεθοῦν οἱ πρῶτοι S ὅροι καί θέσωμεν εἰς τούς ὑπολοί -

πους ὅρους ε^2, εἰς τήν θέσιν τῶν ψ^2_{S+1}, ψ^2_{S+2}...., ψ^2_n

λαμβάνομεν τήν ἀνισότητα

$$6^2 \geqslant (P_{S+1} + ... + P_n)\ \varepsilon^2$$

Ἡ παρένθεσις εἰς τό δεύτερον μέλος ἀντιπροσωπεύει, βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλικῶν πιθανοτήτων, τήν πιθανότητα ἵνα ἡ τυχαία μεταβλητή Ψ λαμβάνει τιμήν μεγαλυτέραν ἤ ἴσην τοῦ ε. Παριστάνοντες δέ μέ P΄ τήν ὡς ἄνω πιθανότητα θά ἔχωμεν

$$P' \leqslant \frac{6^2}{\varepsilon^2} \qquad (\alpha)$$

Παριστάνοντες μέ P τήν ἀντίθετον πιθανότητα, ἤτοι τήν πιθανότητα ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή Ψ λαμβάνει τιμήν μικροτέραν τοῦ ε, θά ἔχωμεν βάσει τῆς σχέσεως (α)

$$P = \mathrm{I} \quad \left(|\psi| < \varepsilon \right) \geqslant 1 - \frac{6^2}{\varepsilon^2}$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις καλεῖται ἀνισότης ἤ θεώρημα τοῦ <u>BIENAYME-TCHEBYCHEFF</u>.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

Ἄν εἶναι γνωστή ἡ συνάρτησις κατανομῆς Φ(χ) τῆς X, τότε θά ἔχωμεν:

$$P\ (|\Psi| < \varepsilon) = P(|X-M| < \varepsilon) =$$

$$= P(M - \varepsilon < \chi < M + \varepsilon) = \Phi\ (M+\varepsilon) - \Phi\ (M-\varepsilon)$$

Κατανομη X^2

Ἡ κατανομή X^2 ἀνεκαλύφθη τό πρῶτον ὑπό τοῦ Γερμανοῦ HELMERT, παρέμεινεν ὅμως ἀπαρατήρητος. Τό 1900 ἀνεκαλύφθη καί πάλιν ὑπό τοῦ Ἄγγλου Στατιστικοῦ KARL PEARSON ἐπιδιώκοντος νά καθορίση κριτήριον ἐλέγχου τῆς ὀρθῆς ἐξομαλύνσεως καμπύλης συχνοτήτων.

Ἔστωσαν $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$, ἀνεξάρτητα τυποποιημέναι κανονικαί μεταβληταί.

Ἡ κατανομή τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots, X_n$, ἤτοι

$$X^2 = X_1^2, +X_2^2, +X_3^2 + \ldots\ldots\ldots X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-m)^2}{i} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 ,$$

καλεῖται X^2 κατανομή μέ n βαθμούς ἐλευθερίας.

Ἡ κατανομή X^2 ἔχει ὡς πυκνότητα πιθανότητος τήν κάτωθι σχέσιν:

$$\varphi(X) = \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} X^{\frac{n}{2}-1} e^{-(\frac{n}{2})X} \qquad (1)$$

Καθίσταται ἀμέσως φανερόν ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή X^2 εἶναι μία εἰδική περίπτωσις τῆς μεταβλητῆς Γάμμα.

Μετασχηματίζομεν καταλλήλως τήν πυκνότητα πιθανότητος $\varphi(\chi)$ τῆς σχέσεως (1). Πρός τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν μίαν νέαν τυχαίαν μεταβλητήν Ψ, τοιαύτη ὥστε

$$\psi = \frac{n}{2} X, \frac{d\psi}{dX} = \frac{n}{2}$$

Δοθέντος ὅτι $X^{\frac{n}{2}} = (\psi^{\frac{n}{2}}) (\frac{n}{2})^{-\frac{n}{2}}$ καί $\frac{1}{X} = \frac{\frac{n}{2}}{\psi}$ θά ἔχομεν:

$$X^{\frac{n}{2}-1} = X^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{X} = (\psi^{\frac{n}{2}})(\tfrac{n}{2})^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\frac{n}{2}}{\psi} = (\psi^{\frac{n}{2}-1})\,(\tfrac{n}{2})^{-\frac{n}{2}}\,(\tfrac{n}{2})$$

Ἐπομένως ἡ σχέσις (1) λαμβάνει τήν μορφήν

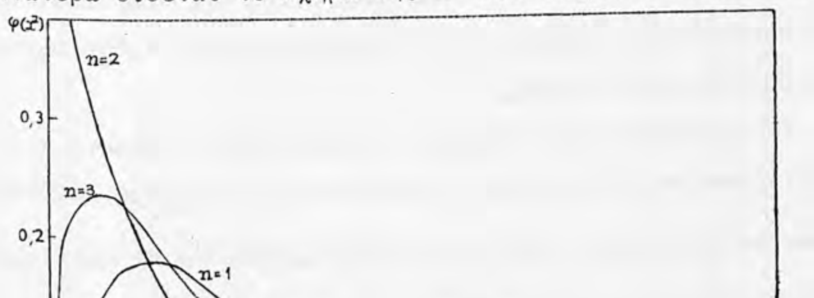
$$\varphi(\psi) = \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma({}_2)}\,(\psi^{\frac{n}{2}-1})\,(\tfrac{n}{2})^{-\frac{n}{2}}\,(\tfrac{n}{2})\quad e^{-\psi}\quad \frac{1}{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,\psi^{\frac{n}{2}-1}\quad e^{-\psi}$$

Μορφή τῆς κατανομῆς χ^2

Ἡ κατανομή X^2 εἶναι ἀσύμμετρος διά μικράς τιμάς τοῦ n ἀλλά προσεγγίζει πρός τήν κανονικήν κατανομήν ὅσον τό n αὐξάνει. Κατά συνέπειαν ὑφίστανται διάφοραι καμπύλαι τῆς X^2 διά τάς διαφόρους τιμάς τοῦ n

Κατωτέρω δίδεται τό σχῆμα τῆς X^2 διά διαφόρους τιμάς τοῦ n



Τό X^2 εἶναι μέσον κρίσεως ἐπί τῆς ἀξιοπιστίας μιᾶς ὑποθέσεως, ἥτις ἀφορᾶ τόν πληθυσμόν ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ τιμαί τοῦ δείγματος ἔχουν ληφθῆ.

Ὑφίστανται πίνακες τῶν τιμῶν τῆς X^2, δίδοντες τήν πιθανότητα νά ὑπερβληθῆ ἡ τιμή X_o^2 , ἡ ὁποία δέν εἶναι, παρά τό ἐμβαδόν τῆς καμπύλης X^2 ἀπό τῆς τετμημένης X_o^2 μέχρι ∞ διά δεδομένον ἀριθμόν βαθμῶν ἐλευθερίας. Οἱ πίνακες παρέχουν τάς τιμάς τῆς X^2 διά n καί $\alpha = 0{,}001$, $0{,}01$, $0{,}05 \ldots 0{,}99$

Συνήθως χρησιμοποιοῦνται δύο τιμαί, αἱ:

$$\alpha = 0{,}05 \quad \text{καί} \quad \alpha = 0{,}01$$

Ἐάν ἡ εἰς τόν πίνακα τιμή τοῦ X^2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς ἥτις προέκυψεν μετά τήν προσαρμογήν σημαίνει ὅτι μέ πιθανότητα ἴσην πρός τό ἐπιλεγέν ἐπίπεδον σημαντικότητος δέν δυνάμεθα νά ἀπορρίψωμεν τήν ὑπόθεσιν ὅτι $X^2 = 0$. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἀποδεχόμεθα τήν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ διάφορος τοῦ μηδενός τιμή τοῦ X^2 ὀφείλεται εἰς τυχαίας διακυμάνσεις. Ἀντιθέτως εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἡ εὑρισκομένη ἐκ τοῦ πίνακος τιμή τοῦ X^2 εἶναι μικροτέρα τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς προσαρμογῆς ἀγόμεθα εἰς τό συμπέρασμα ὅτι τοῦτο ὀφείλεται εἰς συστηματικάς αἰτίας.

Τό κριτήριον χ^2 δύναται νά ἐφαρμοσθῆ οἱαδήποτε καί ἐάν εἶναι ἡ θεωρητική κατανομή (διωνυμική , κατανομή POISSON , κανονική κατανομή) τήν ὁποίαν ἐπιθυμοῦμεν νά προσαρμόσωμεν εἰς τίνα ἐμπειρικήν τοιαύτην.

ΠΙΝΑΞ ΤΟΥ χ^2

ν \ α	0,3	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8	12,1
2	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8	15,2
3	3,67	4,64	6,25	7,81	9 35	11.3	12,8	16,3	17.7
4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5	20,0
5	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5	22,1
6	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5	24,1
7	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3	26,0
8	9.52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1	27,9
9	10 7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9	29,7
10	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6	31,4
11	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3	33,1
12	14 0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9	34,8
13	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5	36,5
14	16,2	18,2	21,1	23 7	26,1	29,1	31,3	36,1	38,1
15	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7	39,7
16	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3	41,3
17	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8	42,9
18	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34 8	37,2	42,3	44,4
19	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8	46,0
20	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3	47.5
21	23 9	26,2	29,6	32,7	35,5	38.9	41,4	46,8	49,0
22	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3	50,5
23	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	47,7	52,0
24	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2	53,5
25	28,2	30,7	34,4	37 7	40,6	44,3	46,9	52,6	54,9
26	29,2	31,8	35,6	38 9	41,9	45,6	48,3	54,1	56,4
27	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5	57,9
28	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9	59,3
29	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3	60,7
30	33,5	36,3	40 3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7	62,2

Ἄ σ κ η σ ι ς

Αἱ ἐπιστροφαί εἰδῶν καθ'ἡμέραν εἰς τι ἐμπορικόν κατάστημα διά χρονικήν περίοδον 60 ἡμερῶν κατανέμονται ὡς κάτωθι:

Ἀριθμός ἐπιστρεφομένων εἰδῶν	0	1	2	3	4	5 καί ἄνω	Σύνολον
Ἡμέραι	30	18	8	3	1	0	60

Νά ἀναπαρασταθῇ ἡ ἀνωτέρω κατανομή διά τῆς κατανομῆς τοῦ POISSON καί νά ἐλεγχθῇ (ἐπίπεδον σημαντικότητος 0,05) διά τοῦ κριτηρίου χ^2 ἐάν ἡ ἀναπαράστασις αὕτη εἶναι ἐνδεδειγμένη.

Μέση τιμή καί διακύμανσις τῆς κατανομῆς χ^2

Πρός ὑπολογισμόν τῆς μέσης τιμῆς καί τῆς διακυμάνσεως χρησιμοποιοῦμεν τήν Γεννητικήν συνάρτησιν τῶν ροπῶν

$$F(\alpha) = M(\epsilon^{\alpha X}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha X}\, \varphi(X)\, dX =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{\alpha X} \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\; X^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-(\frac{n}{2})X}\, dX =$$

$$= \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{X(\alpha-\frac{n}{2})}\; X^{(\frac{n}{2}-1)}\, dX$$

Πρός ὑπολογισμόν τοῦ ὡς ἄνω ὁλοκληρώματος θέτομεν

$$X(\alpha - \tfrac{n}{2}) = -t\,, \text{ ἤτοι}$$

$$t = X(\tfrac{n}{2} - \alpha),\quad dX = \frac{dt}{\frac{n}{2}-\alpha}\,,\quad X^{\frac{n}{2}-1} = \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{n}{2}-\alpha)^{\frac{n}{2}-1}}$$

Κατά συνέπειαν θά έχωμεν

$$F(\alpha) = \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(\frac{n}{2}-\alpha)^{\frac{n}{2}-1}} \frac{1}{\frac{n}{2}-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$$

$$\text{ή} \quad F(\alpha) = \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(\frac{n}{2}-\alpha)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(\frac{n}{2}) =$$

$$\left[\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-\alpha}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{n}{n-2\alpha}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{1}{1-\frac{2\alpha}{n}}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[1-\frac{2}{n}\right]$$

'Επομένως

$$F(\alpha) = \left[1-\frac{2\alpha}{n}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

'Εάν λάβωμεν τήν συνάρτησιν τῶν ἡμιμεταβλητῶν θά ἔχωμεν:

$$L(\alpha) = \log F(\alpha) = -\frac{n}{2} \log \left[1-\frac{2\alpha}{n}\right]$$

'Αναπτύσσοντες ἐν σειρᾷ τοῦ MAC LAURIN προκύπτει:

$$L(\alpha) = -\frac{n}{2} \log \left[1-\frac{2\alpha}{n}\right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{n}{2}\left[-\frac{2\alpha}{n} - \frac{1}{2}\frac{4\alpha^2}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{8\alpha^3}{n^3} - \dots\dots\right]$$

$$\simeq \alpha + \frac{\alpha^2}{2.} \cdot \frac{2}{n} + \frac{\alpha^3}{3.}\frac{n}{n^2} + \frac{\alpha^4}{4.}\frac{4n}{n^3}$$

"Οθεν ἡ μέση τιμή καί ἡ διακύμανσις τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X^2 θά εἶναι

$$M_1 = 1, \quad \sigma_x^2 = \frac{2}{n}$$

Ἀσκήσεις ἐπί τῶν τυχαίων μεταβλητῶν

1) Ρίπτομεν δύο νομίσματα τό ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου. Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, "ὁ ἀριθμός τῶν κορωνῶν".

Λ ύ σ ι ς

Ἡ τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τάς τιμάς

X . 0 , 1 , 2 , μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας

P: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

Ἐπομένως ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς ὡς ἄνω τυχαίας μεταβλητῆς θά εἶναι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 0 \\ 1/4 & \text{"} \quad 0 \leq \chi < 1 \\ 3/4 & \text{"} \quad 1 \leq \chi < 2 \\ 1 & \text{"} \quad \chi \geq 2 \end{cases}$$

2) Νά ὑπολογισθῇ ἡ σταθερά K εἰς τρόπον ὥστε ἡ συνάρτησις

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} K\chi & \text{διά} \quad 0 \leq \chi \leq 1 \\ 0 & \text{διά} \quad \chi \notin \{0,1\} \end{cases}$$

νά εἶναι πυκνότης πιθανότητος.

Νά ὑπολογισθῇ ἐπίσης ἡ συνάρτησις κατανομῆς καί ἡ πιθανότης τῶν γεγονότων

$\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} \leq X \leq 2$, $-1 \leq X \leq 1/2$.

Λ ύ σ ι ς

Πρέπει νά ἱκανοποιοῦνται αἱ κάτωθι συνθῆκαι =

α) $\varphi(\chi) \geq 0$, β) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\chi)\, d\chi = 1$

῞Οθεν εἶναι ἀναγκαῖον νά προσδιορισθῇ ἡ τιμή τοῦ Κ.

$$\int_0^1 K\chi \, d\chi = K \cdot \int_0^1 \chi \, d\chi = K \left[\frac{\chi^2}{2}\right]_0^1 = \frac{K}{2}$$

Ἐπομένως διά νά εἶναι ἡ δοθεῖσα συνάρτησις $\varphi(\chi)$, συνάρτησις πυκνότητος θά πρέπει νά εἶναι $K = 2$.

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς θά εἶναι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi < 0 \\ \chi^2 & 0 \leq \chi \leq 1 \\ 1 & \chi > 1 \end{cases}$$

Διότι $\Phi(\chi) = \int_0^\chi 2\chi \, d\chi = 2\int_0^\chi \chi \, d\chi = \chi^2$

$$Pr\left\langle \frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{3} \right\rangle = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

$$Pr\left(\frac{1}{4}) \leq X \leq 2 \right) = \Phi(2) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$Pr\left(-1 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

3) Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Χ, ἥτις λαμβάνει τήν τιμήν 0 μέ πιθανότητα P καί τήν τιμήν 1 μέ πιθανότητα 1 − P.

Λύσις

Χ:	0	1
Pr:	P	1−P

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς θά εἶναι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά } \chi < 0 \\ P & \text{"} \quad 0 \leq \chi < 1 \\ 1 & \chi \geq 1 \end{cases}$$

4) Δίδεται ή πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} K\chi^2 & \text{διά} \quad -1 \leqslant \chi \leqslant 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ή $\Phi(\chi)$

Λ ύ σ ι ς

$$K \int_{-1}^{1} \chi^2 \, d\chi = 1 = K\left[\frac{\chi^3}{3}\right]_{-1}^{1} = K\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = 1$$

Ὅθεν $K = 3/2$

$$\Phi(\chi) = \int_{-1}^{\chi} \frac{3}{2}\chi^2 \, d\chi = \frac{3}{2}\int_{-1}^{\chi} \chi^2 \, d\chi = \frac{3}{2}\left[\frac{\chi^3}{2}\right]_{-1}^{\chi} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\chi^3}{3} + \frac{1}{3}\right] = {}^1/_2 \; (\chi^3 + 1)$$

Ὅθεν

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi < -1 \\ \frac{1}{2}(\chi^3+1) & -1 \leqslant \chi \leqslant 1 \\ 1 & \chi > 1 \end{cases}$$

5) Δίδεται ή πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi < 0 \\ K\,e^{-\chi} & \chi \geqslant 0 \end{cases}$$

Νά εὑρεθῇ ή συνάρτησις κατανομῆς $\Phi(X)$

Λ ύ σ ι ς

$$K \int_{0}^{+\infty} e^{-\chi} \, d\chi = 1 = K\left[-e^{-\chi}\right]_{0}^{\infty} = 1,$$ ἄρα διά $K = 1$, ή

$\varphi(\chi)$ εἶναι πυκνότης πιθανότητος

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς θά εἶναι

$$\Phi(\chi) = \int_0^{\chi} e^{-\chi}\, d\chi = \left[-e^{-\chi}\right]_0^{\chi} = -e^{-\chi} + 1 = 1-e^{-\chi}$$

Ἑπομένως

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi < 0 \\ 1-e^{-\chi} & \chi \geqslant 0 \end{cases}$$

6) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} 2\chi & \text{διά} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθοῦν αἱ συναρτήσεις κατανομῆς τῶν τυχαίων μεταβλητῶν

$$\Psi = 2X + 1, \qquad Z = -X, \qquad W = X^2$$

Λύσις

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τήν συνάρτησιν κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἤτοι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 0 \\ X^2 & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \\ 1 & \quad \chi > 1 \end{cases}$$

1) Ὑπολογίζομεν τήν $\Psi(\psi) = P\tau(\Psi \leqslant \psi) = P\tau(2X+1 \leqslant \psi) =$ $= P\tau\left(X \leqslant \frac{\psi-1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\psi-1}{2}\right)$. Ὅθεν

$$\Phi\left(\frac{\psi-1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \psi < 1 \\ \left(\frac{\psi-1}{2}\right)^2 & \text{διά} \quad 1 \leqslant \psi \leqslant 3 \\ 1 & \quad \psi > 3 \end{cases}$$

2) $\Psi(Z) = P(Z \leqslant \zeta) = P\tau(-X \leqslant \zeta) = P\tau(X \geqslant -\zeta) =$ $1 - P\tau(X \leqslant -\zeta) = 1 - \Phi(-\zeta)$. Ἑπομένως

$$\Phi(-\zeta) = \begin{cases} 0 \quad \text{διά} \ -\zeta \leqslant 0 & \text{ἤ} \quad \zeta > 0 \\ \zeta^2 \quad \text{"} \quad 0 \leqslant -\zeta \leqslant 1 & \quad 0 \geqslant \zeta \geqslant -1 \\ 1 \quad \text{"} \quad -\zeta > 1 & \quad \zeta < -1 \end{cases}$$

καί

$$1 - \Phi(-\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{διά} \quad \zeta > 0 \\ 1-\zeta^2 & '' \quad -1 \leqslant \zeta \leqslant 0 \\ 0 & \quad \zeta < -1 \end{cases}$$

3) $\Omega = X^2$

$$P(\Omega \leqslant \omega) = P\tau(X^2 \leqslant \omega) = \Phi(\sqrt{\omega}) :$$

$$\Phi(\sqrt{\omega}) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \omega < 0 \\ \omega & '' \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 1 \\ 1 & '' \quad \omega > 1 \end{cases}$$

7) Δίδεται μία τυχαία μεταβλητή Χ ἥτις ἔχει ὡς συνάρτησιν κατανομῆς τήν κάτωθι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi \leqslant -1 \\ \frac{1}{2}(\chi^3+1) & '' \quad -1 < \chi \leqslant 1 \\ 1 & \quad \chi > 1 \end{cases}$$

Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς

$$\Psi = -3\chi + 2$$

Λ ύ σ ι ς

$$P\tau(\Psi \leqslant \psi) = P\tau(-3\chi+2 \leqslant \psi) = P\tau\left(\chi \geqslant \frac{2-\psi}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2-\psi}{3}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{2-\psi}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \frac{2-\psi}{3} < -1, \quad \psi > 5 \\ \frac{1}{2}\left[\left[\frac{2-\psi}{3}\right]^3 + 1\right] & \text{διά} \quad -1 \leqslant \frac{2-\psi}{3} \leqslant -1. \leqslant \psi \leqslant 5 \\ 1 & '' \quad \psi < -1 \end{cases}$$

καί

$$1-\Phi\left(\frac{2-\psi}{3}\right)=\begin{cases}1 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \psi>5\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{54}(2-\psi)^3 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad -1\leqslant\psi\leqslant -5\\ 0 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \psi<-1\end{cases}$$

8) Δίδεται ἡ τυχαία μεταβλητή X, ἥτις ἔχει συνάρτησιν κατανομῆς τήν κάτωθι

$$\Phi(\chi)=\begin{cases}0 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \chi\leqslant 0\\ \frac{1}{4} & \text{"} \quad 0<\chi\leqslant 1\\ \frac{3}{4} & \text{"} \quad 1<\chi\leqslant 1\\ 1 & \text{"} \quad \chi>2\end{cases}$$

Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $\Psi = 2X$

Λ ύ σ ι ς

$$\Phi(\psi)=\Pr(2X\leqslant\psi)=\Pr\left\langle X\leqslant \psi/2\right\rangle=\Phi(\psi/2)$$

$$\Phi\left(\frac{\psi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \frac{\psi}{2}\leqslant 0\\ \frac{1}{4} & \text{"} \quad 0<\psi/2\leqslant 1,\\ \frac{3}{4} & \text{"} \quad 1<\psi/2\leqslant 2,\\ 1 & \text{"} \quad \psi/2>2\end{cases}$$

9) Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις, αἱ δύο πρῶται ροπαί καί ἡ διασπορά τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἥτις λαμβάνει τιμάς 0, 1, 2, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας 1/4, 1/2, 1/4.

$$P(\alpha)=M(e^{\alpha X})=\frac{1}{4}e^{\alpha\cdot 0}+1/2\,\varepsilon^{\alpha 1}+1/4\,\varepsilon^{2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}e^{\alpha}+\frac{1}{4}e^{2\alpha}=\frac{1}{4}(1+2\varepsilon^{\alpha}+e^{2\alpha})$$

$$M_1 = \left[\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} = \left[e^{\alpha}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{4}e^{2\alpha}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$M_2 = \left[\frac{d^2 F(\alpha)}{d\alpha^2}\right]_{\alpha=0} = \left[e^{\alpha}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{4}e^{2\alpha}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$$

$6^2 = M_2 - M_1^2 = 3/2 - 1^2 = 1/2.$

10) Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις, αἱ δύο πρῶται ροπαί καί ἡ διασπορά τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἥτις λαμβάνει τιμάς 0 καί 1, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας P καί q

Λ ύ σ ι ς

$F(\alpha) = P + e^{\alpha} q, \quad M_1 = q, \quad M_2 = q, \quad 6^2 = Pq,$

11) Δίδεται μία τυχαία μεταβλητή X, τῆς ὁποίας ἡ πυκνότης πιθανότητος φ (χ) εἶναι

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} e^{-\chi} & \chi \geqslant 0 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά προσδιορισθῇ

1) ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις

2) ὁ Μέσος (ἤ ἡ μαθηματική ἐλπίς) καί ἡ διακύμανσις

Λ ύ σ ι ς

$$F(\alpha) = M(e^{\alpha\chi}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha\chi}\,\varphi(\chi)\,d\chi =$$

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha\chi}\,e^{-\chi}\,d\chi = \int_0^{\infty} e^{\chi(\alpha-1)}\,d\chi = \left|\frac{e^{\chi(\alpha-1)}}{\alpha-1}\right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\left[e^{\chi(\alpha-1)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}\left[\lim_{\chi\to\infty} e^{\chi(\alpha-1)} - e^{0(\alpha-1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\left[\lim_{\substack{\chi\to\infty\\ \alpha<1}} e^{-\chi(1-\alpha)} - 1\right] = \frac{1}{\alpha-1}(0-1) = \frac{-1}{\alpha-1}$$

Ἀσκήσεις ἐπί τῶν διδιαστάτων μεταβλητῶν

1) Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ τυχαῖαι μεταβληταί Χ καί Ψ λαμβάνουν τιμάς ἀντιστοίχως Χ = 1, 2, 5 καί Ψ = 2, 4. Αἱ ἀντίστοιχοι πιθανότητες δίδονται εἰς τόν κάτωθι πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

Χ \ Ψ	2	4	Σύνολον
1	1/24	3/24	4/24
2	5/24	8/24	13/24
5	5/24	2/24	7/24
Σύνολον	11/24	13/24	1

Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς $\Phi(\chi,\psi)$.

Λ ύ σ ι ς

$X(I) \times \Psi(I) = \{1,2,5\} \times \{2,4\} = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4),$
$(5,2), (5,4)\}$

$$\Phi(\chi,\psi) = \begin{cases} 0 & \text{διά } \chi \in R, \quad \psi < 2 \\ 0 & \text{"} \quad \chi < 1, \quad \psi \in R \\ \dfrac{1}{24} & \text{"} \quad 1 \leq \chi < 2, \quad 4 \leq \psi \\ \dfrac{6}{24} & \text{"} \quad 2 \leq \chi < 5, \quad 2 \leq \psi < 4 \\ \dfrac{17}{24} & \text{"} \quad 2 \leq \chi < 5, \quad 4 \leq \psi \\ \dfrac{11}{24} & \text{"} \quad 5 \leq \chi, \quad 2 \leq \psi < 4 \\ 1 & \text{"} \quad 5 \leq \chi \quad 4 \leq \psi \end{cases}$$

"Αρα $P(\alpha) = \frac{-1}{\alpha-1}$ ἄν $\alpha < 1$

2) $M_1 = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{-1}{\alpha-1}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{0-(-1)}{(\alpha-1)^2}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{1}{\alpha^2-2\alpha+1}\right]_{\alpha=0} = 1$

$$M_2 = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{-2\,(\alpha-1)}{(\alpha-1)^4}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{-2}{(\alpha-1)^3}\right]_{\alpha=0} = 2$$

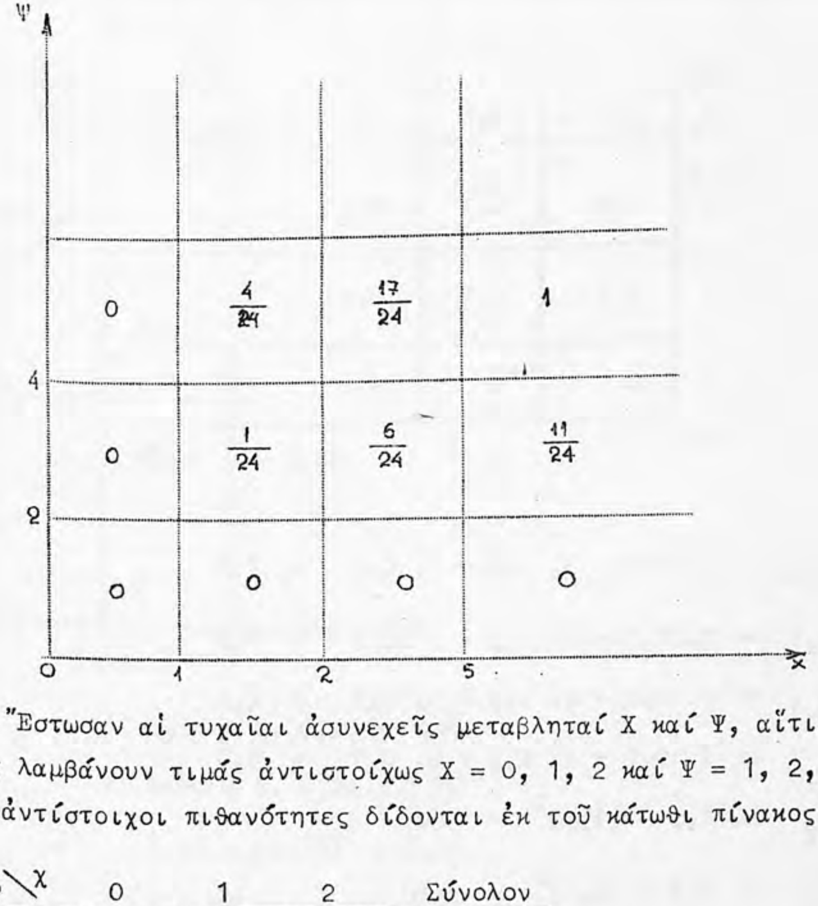
$6^2 = M_2 - M_1^2 = 2-1 = 1$

12) Δίδεται μία τυχαία μεταβλητή Χ, ἥτις λαμβάνει τιμάς 0, 1, 2, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $\Psi = 2X$, $Z = X^2+1$, $W = X + 2$.

Λ ύ σ ι ς

'Αρκεῖ νά παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή Ψ λαμβάνει τιμάς 0, 2, 4 μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καί Ζ λαμβάνει τιμάς 1, 2, 5 μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους 1/4, 1/2 1/4, ὁμοίως W λαμβάνει τιμάς 2, 1, 0, μέ πιθανότητας 1/4, 1/2 1/4.-

Γραφικῶς ἡ Φ(χ,ψ) παρίσταται ὡς κάτωθι



2) Ἔστωσαν αἱ τυχαῖαι ἀσυνεχεῖς μεταβληταί X καί Ψ, αἵτινες λαμβάνουν τιμάς ἀντιστοίχως X = 0, 1, 2 καί Ψ = 1, 2, 3. Αἱ ἀντίστοιχοι πιθανότητες δίδονται ἐκ τοῦ κάτωθι πίνακος.

ψ \ χ	0	1	2	Σύνολον
1	0,1	0	0,1	0,2
2	0,1	0,1	0,1	0,3
3	0,1	0,2	0,2	0,5
Σύνολον	0,3	0,3	0,4	1

Νά εὑρεθῇ 1) ἡ συνάρτησις κατανομῆς, 2) αἱ δύο πρῶται ροπαί καί ἡ διακύμανσις τῶν X καί Ψ.

Λ ύ σ ι ς

'Η συνάρτησις κατανομῆς $\Phi(\chi,\psi)$ παρίσταται γραφικῶς ὡς κάτωθι

ψ				
3	0,3	0,6	1	$\Phi\,(\chi,\psi)$
2	0,2	0,3	0,5	
1	0,1	0,1	0,2	
	0	0	0	
0	1	2		χ

$$M_{1,0} = 0.\ 0{,}3 + 1.\ 0{,}3 + 2.\ 0{,}4 = 1{,}1$$

$$M_{2,0} = 0.\ 0{,}3 + 1.\ 0{,}3 + 2^2.0{,}4 = 1{,}9$$

$$M_{0,1} = 1.\ 0{,}2 + 2.\ 0{,}3 + 3.\ 0{,}5 = 2{,}3$$

$$M_{0,2} = 1.\ 0{,}2 + 4.\ 0{,}3 + 9.\ 0{,}5 = 5{,}9$$

$$\sigma^2_{\chi} = 1{,}9 - (1{,}1)^2 = 0{,}69$$

$$\sigma^2_{\psi} = 5{,}9 - (2{,}3)^2 = 0{,}61$$

3) Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῶν τυχαίων ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν Χ καί Ψ βάσει τοῦ κάτωθι πίνακος.

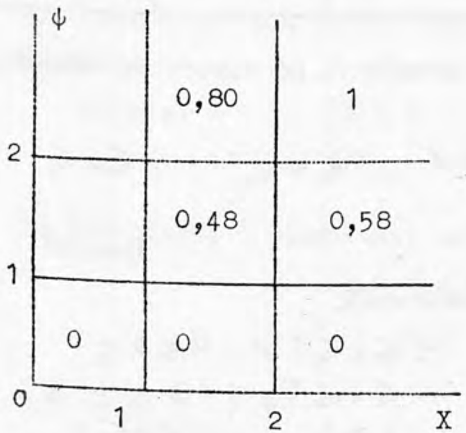
$\psi \diagdown \chi$	1	2	
1	0,48	0,10	0,58
2	0,32	0,10	0,42
Σύνολον	0,80	0,20	1

'Επίσης νά ὑπολογισθοῦν αἱ μέσαι τιμαί καί ἡ διακύμανσις.

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς θά εἶναι

$$\Phi(\chi,\psi) = \left|\begin{array}{lllll} 0 & \delta\iota\acute{\alpha} & \chi < 1 & \kappa\alpha\acute{\iota} & \psi < 1 \\ 0{,}48 & " & 1 \leqslant \chi < 2 & " & 1 \leqslant \psi < 2 \\ 0{,}58 & " & 2 < \chi & " & 1 \leqslant \psi < 2 \\ 0{,}80 & " & 1 \leqslant \chi < 2 & " & 2 \leqslant \psi \\ 1 & " & \chi \geqslant 2 & " & \psi \geqslant 2 \end{array}\right.$$

Γραφικῶς



$$M_{1,0} = 1.\ 0{,}80 + 2.\ 0{,}20 = 1{,}20$$

$$M_{2,0} = 1.\ 0{,}80 + 4.\ 0{,}20 = 1{,}60$$

$$6^2_{\chi} = 1{,}60 - (1{,}20)^2 = 0{,}16$$

$$M_{0\ 1} = 1.0{,}58 + 2.0{,}42 = 1{,}42$$

$$M_{0,2} = 1.0{,}58 + 4.0{,}42 = 2{,}26$$

$$6^2_{\psi} = M_{0,2} - M^2_{0,1} = 2{,}2$$

4) Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς διπλῆς τυχαίας ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς, βάσει τοῦ κατωτέρω πίνακος:

Ψ \ X	ψ = 1	ψ = 2	ψ = 3	ψ = 4	Σύνολον
χ = -1	1/20	2/20	5/20	1/20	9/20
χ = 2	0	2/20	0	1/20	3/20
χ = 4	2/20	3/20	1/20	2/20	8/20
Σύνολον	3/20	7/20	6/20	4/20	1

5) Ἔστω (Χ,Ψ) μία τυχαία μεταβλητή μέ πυκνότητα πιθανότητος

$$\varphi(\chi,\psi) = \begin{cases} 1 & \text{διά} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς

<u>Ἀπάντησις</u>

$$\Phi(\chi,\psi) = \begin{cases} \chi\psi & \text{διά} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ \chi & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1, \quad \psi > 1 \\ \psi & \text{"} \quad \chi > 1 \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ 1 & \quad \chi > 1 \quad \psi > 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Πράγματι

$$\int_0^\chi \int_0^\psi 1.\ d\chi\ d\psi = \chi\,\psi$$

$$\int_0^\chi \int_0^1 1\ d\chi\ d\psi = \chi$$

$$\int_0^1 \int_0^{\psi} d\chi \quad d\psi \quad = \quad \psi$$

$$\int_0^1 \int_0^1 d\chi \quad d\psi \quad = \quad 1$$

6) Ἔστω (Χ,Ψ) μία διπλῆ τυχαία μεταβλητή μέ πυκνότητα πιθανότητος

$$\varphi\ (\chi,\psi) = \begin{cases} 4\ \chi\ \psi & 0 \leqslant \chi \leqslant 1\ , \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς $\Phi\ (\chi,\psi)$

Λ ύ σ ι ς

$$\Phi\ (\chi\ \psi) = \begin{cases} \chi^2\ \psi^2 & \text{διά} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1\ , \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ \psi^2 & \text{"} \quad \chi > 1 \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ \chi^2 & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \quad \psi > 1 \\ 1 & \text{"} \quad \chi > 1 \quad \psi > 1 \end{cases}$$

Πράγματι

$$\int_0^{\chi} \int_0^{\psi} 4\ \chi\ \psi d\psi\ d\chi = \int_0^{\chi} \left[\int_0^{\psi} 4\ \chi\ \psi\ d\psi \right] d\chi =$$

$$= \int_0^{\chi} 2\ \chi\ \psi^2\ d\chi = \chi^2\ \psi^2\ .$$

$$\int_0^1 \int_0^{\psi} 4\ \chi\ \psi\ d\psi\ d\chi = \int_0^1 \left[4\ \chi\ \psi\ d\ \psi \right]_0^y d\chi = \int_0^1 2\ \chi\ \psi^2 d\chi =$$

$$= 2\psi^2 \int_0^1 \chi \; d\chi = 2\psi^2 \left[\left(\frac{\chi^2}{2} \right) \right]_0^1 = 2\psi^2 \; \frac{1}{2} - 2\psi^2 . 0 = \psi^2$$

$$\int_0^\chi \int_0^1 4\chi\psi \; d\psi \; d\chi = \chi^2 \text{ (ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω)}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 4\chi\psi \; d\chi \; d\psi = \int_0^1 \left[4 \; \chi \; \psi \; d\psi \right] d\chi = \int_0^1 2\chi . 1 . \; d\chi =$$

$$= 2 \int_0^1 \chi \; d\chi = 2 \left[\frac{\chi^2}{2} \right]_0^1 = 2 \; \frac{1}{2} + 0 = 1$$

7) Δίδεται ἡ κάτωθι πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi;\psi) = \begin{cases} e^{-(\chi+\psi)} & \text{διά } \chi \geqslant 0 , \quad \psi \geqslant 0 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς $\Phi(\chi,\psi)$

Λ ύ σ ι ς

$$\Phi(\chi,\psi) = \int_0^\chi \int_0^\psi e^{-(\chi+\psi)} \; d\chi \; d\psi =$$

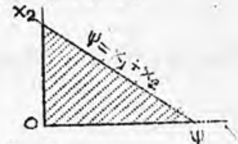
$$= \int_0^\chi \left[\int_0^\psi e^{-(\chi+\psi)} \; d\psi \right] d\chi = \int_0^\chi d\chi \; e^{-\chi} \int_0^\psi e^{-\psi} d\psi =$$

$$= \int_0^\chi e^{-\chi} \left[1 - e^{-\psi} \right] d\chi = \left[1 - e^{-\chi} \right] \left[1 - e^{-\psi} \right] .$$

8) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \chi \leq 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά εὑρεθῆ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς



$$\Psi = X_1 + X_2$$

$$\Phi(\psi) = P\ (\Psi \leqslant \psi) =$$

$$= P\ (X_1 + X_2 \leqslant \psi) =$$

$$= P\ \left[(X_1 \leqslant \psi),\ X_2 \leqslant \psi - x_1\right] = \int_0^{\psi} \int_0^{\psi - x_1} 1\ dx_1 \cdot dx_2$$

9) Δίδεται ἡ τυχαία μεταβλητή X , μέ πυκνότητα πιθανότητος

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} e^{-\chi} & \text{διά} \quad \chi \geqslant 0 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

καί ἡ τυχαία μεταβλητή $\Psi = X_1 + 2X_2$. Ὅπου X_1 καί X_2 εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των.

Νά ὑπολογισθῆ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς Ψ.

Λ ύ σ ι ς

Ὡς γνωστόν ἡ $\Psi = X_1 + 2X_2$ ἀντιπροσωπεύει μίαν εὐθεῖαν, εἶναι ὅθεν ἀνάγκη νά προσδιορισθοῦν τά σημεῖα τομῆς τῶν ἀξόνων τῶν τεταγμένων καί τετμημένων.

$$\psi = \chi_1 + 2\chi_2$$

$$\chi_2 = 0 \quad \rightarrow \psi = \chi_1$$

$$\psi = \chi_1 + 2\chi_2$$

$$\chi_1 = 0$$

$$\psi = 2\chi_2 \quad \rightarrow \chi = \frac{\psi}{2}$$

$$"\text{Οθεν}: \Phi(\psi) = \int_0^{\psi}\int_0^{\frac{\psi-\chi_1}{2}} e^{-\chi_1}\ e^{-2\chi_2}\, d\chi_1\, d\chi_2 =$$

$$= \int_0^{\psi}\int_0^{\frac{\psi-\chi_1}{2}} e^{-(\chi_1+2\chi_2)}\, d\chi_1\, d\chi_2 = \int_0^{\psi} e^{-\chi_1} d\chi_1 \int_0^{\frac{\psi-\chi_1}{2}} e^{-2\chi_2} d\chi_2$$

10) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 \leqslant \chi \leqslant 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $\Psi = X^2$, ὅπου $-1 \leqslant \chi \leqslant 1$.

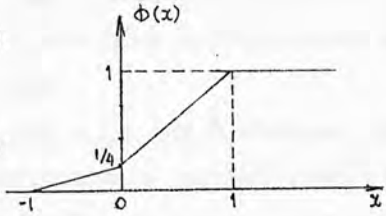
Λ ύ σ ι ς

"Εχομεν $\Phi(\psi) = P(\Psi \leqslant \psi) = P(X^2 \leqslant \psi) =$

$$P(-\sqrt{\psi} \leqslant X \leqslant \sqrt{\psi}) = \Phi(\sqrt{\psi}) - \Phi(-\sqrt{\psi})$$

Εὑρίσκομεν:

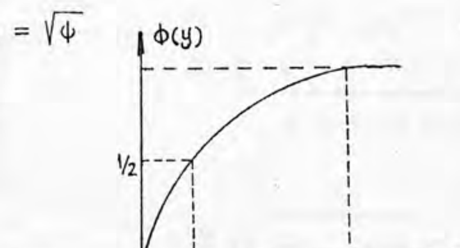
$$\Phi(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi}{4} + \frac{1}{4} & -1 \leqslant \chi \leqslant 0 \\ \frac{3}{4}\chi + \frac{1}{4} & 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \end{cases}$$



"Αρα $\Phi(\psi) = \Phi(\sqrt{\psi}) - \Phi(-\sqrt{\psi}) =$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\psi} + \frac{1}{4} - \left(\frac{-\sqrt{\psi}}{4} + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\psi}$$

διά $0 \leqslant \psi \leqslant 1$



11) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (X,Ψ), ἤτοι

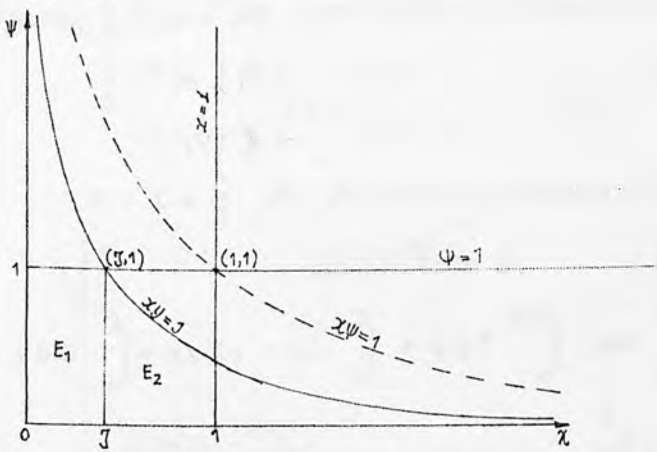
$$\varphi(\chi,\psi) = \begin{cases} 4\chi\psi \text{ διά } & 0 \leqslant \chi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $Z = X.\Psi$ ἡ συνάρτησις κατανομῆς.

Λ ύ σ ι ς

$$\Phi(\zeta) = P(Z \leqslant \zeta) = P(X\Psi \leqslant \zeta) = \iint\limits_{0 \leqslant \chi\psi \leqslant \zeta \leqslant 1} \varphi(\chi,\psi)\,d\chi\,d\psi =$$

$$= \iint\limits_{0 \leqslant \chi\psi \leqslant \zeta \leqslant 1} 4\chi\psi\,d\chi\,d\psi$$



Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος θά ἔχωμεν:

$$\Phi(\zeta) = E_1+E_2 = 4\int_{\chi=0}^{\zeta}\int_{\psi=0}^{1} \chi\psi d\psi d\chi + 4\int_{\chi=\zeta}^{1}\int_{\psi=0}^{\frac{\zeta}{\chi}} \chi\psi d\psi d\chi =$$

$$= 4\int_{\chi=0}^{\zeta}\left(\chi\int_{\psi=0}^{1}\psi d\psi\right)d\chi + 4\int_{\chi=\zeta}^{1}\left(\chi\int_{\psi=0}^{\frac{\zeta}{\chi}}\psi d\psi\right)d\chi =$$

$$= 4 \int_{\chi=o}^{\zeta} \chi \left[\frac{\psi^2}{2}\right]_o^1 d\chi + 4 \int_{\chi=\zeta}^{1} \chi \left[\frac{\psi^2}{2}\right]_o^{\frac{\zeta}{\chi}} d\chi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_o^{\zeta} \chi d\chi +$$

$$+ 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{1} \frac{\zeta^2}{\chi} d\chi = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \zeta^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \zeta^2 (\log 1 - \log \zeta) =$$

$$= \zeta^2 + 2\zeta^2 (- \log\zeta) = \zeta^2 (1-2 \log\zeta) \text{ μέ } 0 < \zeta \leqslant 1$$

Εἶναι λοιπόν:

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν } \zeta \leqslant 0 \\ \zeta^2(1-2\log\zeta) & \text{ἐάν } 0 < \zeta \leqslant 1 \\ 1 & \text{ἐάν } \zeta \geqslant 1 \end{cases}$$

12) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X.

$$\varphi(\chi) = \begin{vmatrix} 1 & \text{διά } 0 \leqslant \chi \leqslant 1 \\ 0 & \text{διά } \chi \notin (0,1) \end{vmatrix}$$

Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $Z = X + \Psi$

Λ ύ σ ι ς

$$\Phi(\zeta) = \int_o^{\zeta} d\chi \int_o^{\zeta-\chi} 1 d\psi = \int_o^{\zeta} (\zeta - \chi) d\chi = \int_o^{\zeta} \zeta d\chi - \int_o^{\zeta} \chi d\chi =$$

$$= \zeta^2 - \frac{\zeta^2}{2} = \frac{\zeta^2}{2}$$

Διά νά εἶναι ἡ $\Phi(\zeta)$ συνάρτησις κατανομῆς, πρέπει $\frac{\zeta^2}{2} \leqslant 1$ δηλ.

$-\sqrt{2} \leqslant \zeta \leqslant \sqrt{2}$ καί ἄρα πρέπει $-\sqrt{2} \leqslant \chi+\psi \leqslant \sqrt{2}$ (1)

Ἔχομεν ὅτι $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ (2) καί ὅτι πρέπει $\chi+\psi = \zeta \geqslant 0$ (3)

Ἐκ τῶν (1) καί (3) πρέπει $0 \leqslant \chi+\psi \leqslant \sqrt{2}$ (4)

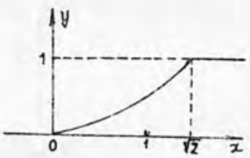
Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $\psi \leqslant \chi+\psi \leqslant 1+\psi$ (5)

Ἐκ τῶν (4) καί (5) εἶναι προφανές ὅτι πρέπει

$0 \leqslant \psi \leqslant \chi+\psi \leqslant 1+\psi \leqslant \sqrt{2}$ δηλ. $0 \leqslant \psi \leqslant \sqrt{2} - 1$

Εἶναι λοιπόν

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\zeta^2}{2} & \text{ἐάν} \quad 0 \leq \zeta \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{"} \quad \zeta > \sqrt{2} \\ 0 & \text{"} \quad \zeta < 0 \end{cases}$$



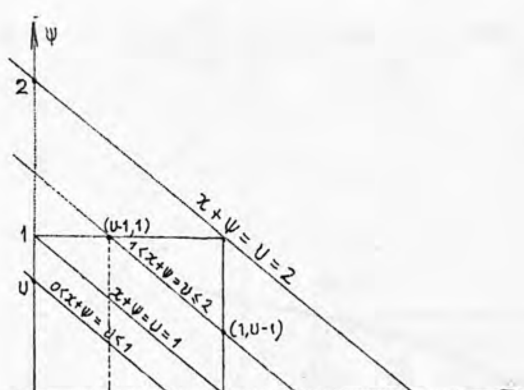
13) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi\ (\chi,\psi) = \begin{cases} 1 & \text{διά} \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq 1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

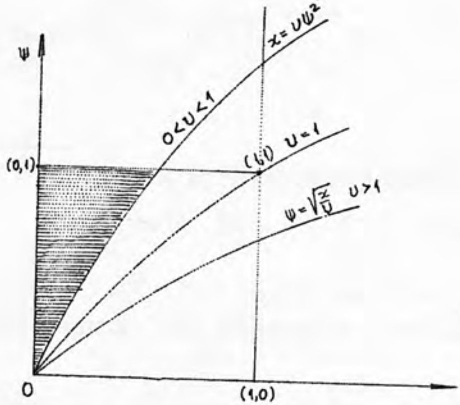
Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς $V = X+\Psi$

<u>'Απάντησις:</u>

$$\Phi\ (\upsilon) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \upsilon \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^{\upsilon} \int_0^{\upsilon-\chi} 1\, d\chi\, d\psi & \text{διά} \quad 0 < \upsilon \leq 1 \\ \displaystyle\int_0^{\upsilon-1} \int_0^{1} d\chi\, d\psi + \int_{\upsilon-1}^{1} \int_0^{\upsilon-\chi} d\chi\, d\psi & \text{διά} \quad 1 \leq \upsilon \leq 2 \\ 1 & \upsilon \geq 2 \end{cases}$$

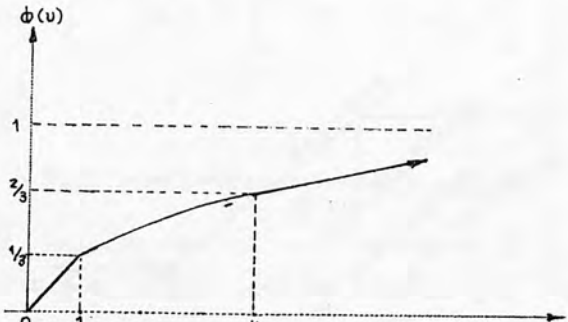


14) Νά εὑρεθῇ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $V = \dfrac{X}{\Psi^2}$



<u>'Απάντησις:</u>

$$\Phi(\upsilon) = \begin{cases} 0 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \upsilon<0 \\ \displaystyle\int_0^1 d\psi \int_0^{\upsilon\psi^2} d\chi = \frac{\upsilon}{3} & \delta\iota\acute{\alpha} \quad 0\leq\upsilon\leq 1 \\ \displaystyle\int_0^1 d\chi \int_{\sqrt{\frac{\chi}{\upsilon}}}^1 d\psi = 1-\frac{2}{3\sqrt{\upsilon}} & \upsilon\geq 1 \end{cases}$$

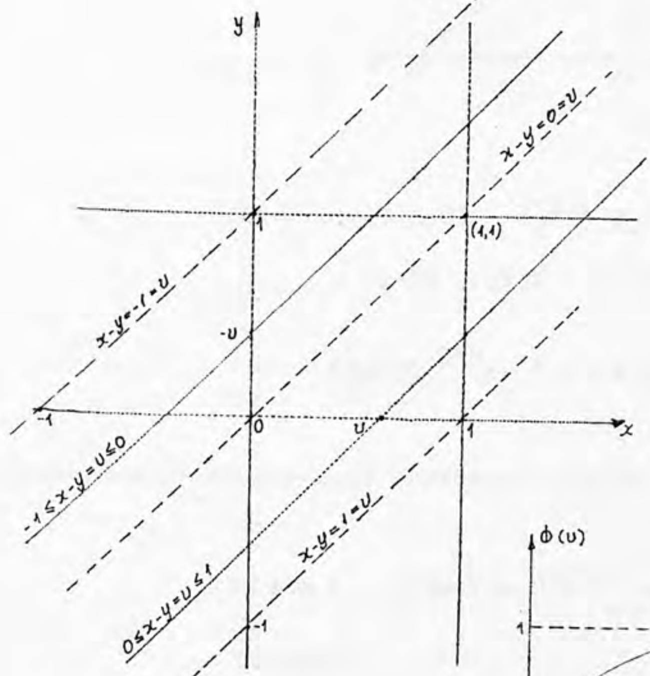


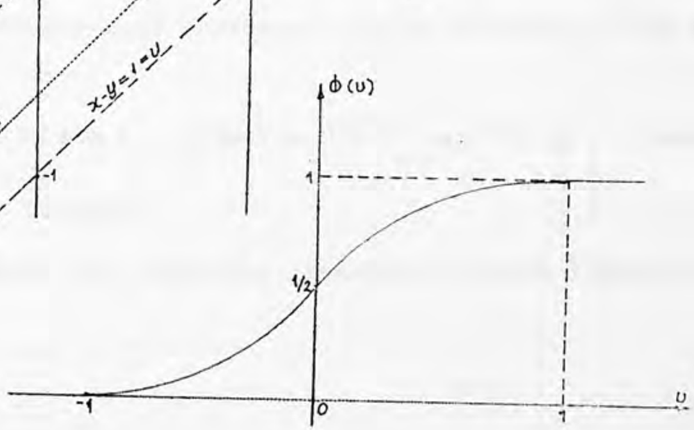
$$\lim_{\upsilon\to+\infty}\Phi(\upsilon) = \lim_{\upsilon\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3\sqrt{\upsilon}}\right) = 1$$

15) 'Εάν δίδεται ή πυκνότης πιθανότητος τῆς ἀσκήσεως 13, νά εὑρεθῆ ή συνάρτησις κατανομῆς τῆς V = X - Ψ.

<u>'Απάντησις:</u>

$$\Phi(\upsilon) = \begin{cases} 0 & \upsilon < -1 \\ \displaystyle\int_{-\upsilon}^{1} d\psi \int_{0}^{\psi+\upsilon} d\chi = \frac{1}{2}+\upsilon+\frac{\upsilon^2}{2}, & -1 \leq \upsilon \leq 0 \\ \displaystyle 1-\int_{\upsilon}^{1} d\chi \int_{0}^{\chi-\upsilon} d\psi = \frac{1}{2}+\upsilon-\frac{\upsilon^2}{2}, & 0 \leq \upsilon \leq 1 \\ 1 & \upsilon > 1 \end{cases}$$





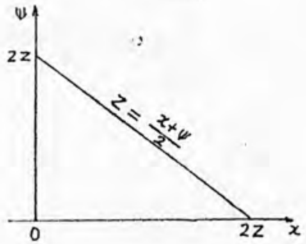
16) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi,\psi) = \begin{cases} e^{-(\chi+\psi)} & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \chi > 0 \,, \quad \psi > 0 \\ 0 & \dot{\alpha}\lambda\lambda\alpha\chi o\tilde{\upsilon} \end{cases}$$

Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς

$$Z = \frac{X + \Psi}{2}$$

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



$$\Phi(\zeta) = P(Z \leq \zeta) = P\left(\frac{\chi+\psi}{2} < \zeta\right) = P(\chi+\psi < 2\zeta)$$

$$= P\left\{\chi < 2\zeta,\ \psi < 2\zeta-\chi\right\} = \Phi(2\zeta,\ 2\zeta-\chi) =$$

$$\int_0^{2\zeta}\int_0^{2\zeta-\chi} e^{-(\chi+\psi)} d\chi\, d\psi = 1 - e^{-2\zeta}(1+2\zeta)$$

17) Μία διδιάστατος τυχαία μεταβλητή ἔχει πυκνότητα πιθανότητος

$$\varphi(\chi,\psi) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-\chi-\psi) \ \delta\iota\acute{\alpha}\ 0 \leq \chi \leq 2, & 2 \leq \psi \leq 4 \\ 0 & \dot{\alpha}\lambda\lambda\alpha\chi o\tilde{\upsilon} \end{cases}$$

Νά εὑρεθῇ ἡ ὁριακή συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς X

Λύσις

$$\Phi_1(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\,(\chi,\psi)\,d\psi = \frac{1}{8}\int_{2}^{4} (6-\chi-\psi)\,d\psi =$$

$$= (6-\chi)\,\frac{1}{8}\int_{2}^{4} d\,\psi - \int_{2}^{4} \psi\, d\,\psi =$$

$$= \frac{1}{48}\left[\,(6-\chi)2 - 63\,\right] = \frac{1}{4}\,(3-\chi)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5ον

ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Γενικά:

Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν ἀκολουθίαν τυχαίων μεταβλητῶν X_1, X_2, ..., X_ν, καί τάς ἀντιστοίχους συναρτήσεις κατανομῆς τούτων, $\Phi_1(\chi)$, $\Phi_2(\chi)$, ..., $\Phi_\nu(\chi)$, ...

Γενικῶς τό πρόβλημά μας εἶναι νά ορίσωμεν τήν συνάρτησιν κατανομῆς $\Phi(\chi)$ εἰς τήν ὁποίαν τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν $\Phi_\nu(\chi)$, ὅταν $\nu \to \infty$, ἤ τοὐλάχιστον νά μελετήσωμεν τάς ἰδιότητας τῆς $\Phi(\chi)$, ἄν ἡ $\Phi(\chi)$ ὑπάρχη.

Δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν διαφόρους τρόπους κατά τούς ὁποίους ἡ ἀκολουθία τῶν X_ν συγκίνει πρός τήν μεταβλητήν X, ἡ ὁποία ἔχει συνάρτησιν κατανομῆς τήν $\Phi(\chi)$· οἱ τρόποι αὐτοί χαρακτηρίζουν τήν σύγκλισιν τῆς ἀκολουθίαν X_ν.

Σύγκλισις κατά κατανομήν

Ἐάν διά κάθε σημεῖον συνεχείας τῆς συναρτήσεως κατανομῆς $\Phi(\chi)$ ἔχομεν

$$\lim_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(\chi) = \Phi(\chi)$$

τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία X_ν συγκλίνει εἰς τήν τυχαίαν μεταβλητήν X κατά κατανομήν καί γράφομεν:

$$\lim_{\nu \to \infty} X_\nu \doteq X.$$

Παρατήρησις:

Δέν δυνάμεθα νά ὑποστηρίξωμεν ὅτι τό $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(\chi)$ ὑπάρχει πάντοτε (δηλ. ὅτι πάντοτε ἡ ἀκολουθία αὐτή συγκλίνει εἰς μίαν συνάρτησιν κατανομῆς).

Πράγματι ἐάν:

$$\Phi_\nu(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν } \chi \leq -\nu \\ \dfrac{\chi+\nu}{2\nu} & \text{"} \quad -\nu < \chi \leq \nu \\ 1 & \text{"} \quad \nu < \chi \end{cases}$$

τότε ἔχομεν:

$$\lim_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(\chi) = \frac{1}{2} \qquad -\infty < \chi < +\infty$$

Δέν εἶναι λοιπόν τό $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(\chi)$ συνάρτησις κατανομῆς.

<u>Τό θεώρημα τῆς συνεχείας τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων</u>

'Εάν διά μίαν ἀκολουθίαν τυχαίων μεταβλητῶν X_ν ἔχωμεν $\lim\limits_{\nu \to \infty} X_\nu \doteq X$, τότε διά τήν ἀκολουθίαν τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων $H_\nu(\tau)$, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τήν ἀκολουθίαν τῶν X_ν θά ἔχωμεν $\lim\limits_{\nu \to \infty} H_\nu(\tau) = H(\tau)$, ὅπου $H(\tau)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς X καί $H(\tau)$ εἶναι συνεχής εἰς τό $\tau=0$.

Καί ἀντιστρόφως

'Εάν $\lim\limits_{\nu \to \infty} H_\nu(\tau) = H(\tau)$ ὅπου $H(\tau)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς X καί $H(\tau)$ εἶναι συνεχής εἰς τό $\tau=0$, τότε $\lim\limits_{\nu \to \infty} X_\nu \doteq X$, ὅπου X_ν εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν χαρακτηριστικάς συναρτήσεις τάς $H_\nu(\tau)$.

<u>'Α π ό δ ε ι ξ ι ς</u>

Ἔχομεν ὅτι $\lim\limits_{\nu \to \infty} X_\nu \doteq X$ δηλ. $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(\chi) = \Phi(\chi)$ πρέπει νά ἀποδείξωμεν ὅτι $\lim\limits_{\nu \to \infty} H_\nu(\tau) = H(\tau)$ διά κάθε τι

῎Εχομεν:

$$H_\nu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\chi}\, d\Phi_\nu(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{συντχ}\, d\,\Phi_\nu(X) + i\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ημτχ}\, d\,\Phi_\nu(\chi)$$

᾿Εφ᾿ὅσον ἡ συντχ καί ημτχ εἶναι φραγμέναι εἰς τό $(-\infty,\ +\infty)$ διά κάθε τ καί ἐφ᾿ὅσον $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Phi_\nu(\chi) = \Phi(\chi)$ διά κάθε χ θά ἔχωμεν:

$$\lim_{\nu\to\infty} H_\nu(\tau) = \lim_{\nu\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{συντχ}\, d\,\Phi_\nu(\chi) + i\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ημτχ}\, d\,\Phi_\nu(\chi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{συντχ}\, d\,\Phi(\chi) + i\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ημτχ}\, d\,\Phi(\chi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{συντχ} + i\ \text{ημτχ})\, d\,\Phi(\chi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\chi}\, d\,\Phi(\chi)$$

῎Ητοι $\lim\limits_{\nu\to\infty} H_\nu(\tau) = H(\tau)$.

Διά τό ἀντίστροφον παρατηροῦμεν ὅτι:

῎Εχομεν $\lim\limits_{\nu\to\infty} H_\nu(\tau) = H(\tau)$ καί ὅτι ἡ $H(\tau)$ εἶναι συνεχής εἰς τό τ=ο. Δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία $\Phi_{\nu_1}(\chi)$, $\Phi_{\nu_2}(\chi)$, ... τῆς $\Phi_\nu(\chi)$, ἥτις συγκλίνει εἰς μίαν συνάρτησιν $\Phi(\chi)$ μή φθίνουσαν καί συνεχῆ εἰς τά δεξιά. ᾿Εν συνεχείᾳ ἀποδεικνύομεν ὅτι $\Phi(-\infty) = 0$ καί $\Phi(+\infty) = 1$.

Θεώρημα τῆς συγκλίσεως τῶν ροπῶν.

Ἔστω ἡ Κ τάξεως ροπή τῆς $|X_\nu|$ εἶναι ἡ $M\left[|X_\nu|^\varkappa\right]$ καί εἶναι ὡρισμένη διά κάθε ν καί κ.
Τότε ἐάν $\lim\limits_{\nu\to\infty} X_\nu \doteq X$ καί ἐάν $M\left[|X_\nu|^\varkappa\right] \leqslant C$, ὅπου C εἶναι σταθερά, θά ἔχωμεν:

$$\lim_{\nu\to\infty} M_\tau^{(\nu)} \equiv \lim_{\nu\to\infty} M\left[X_\nu^\tau\right] = M\left[X^\tau\right] = M_\tau \quad \text{διά } \tau \leqslant \varkappa$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Πρέπει νά ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi_\nu(\chi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi(\chi)\right| = 0 \quad \text{διά } \tau \leqslant \varkappa$$

Διά κάθε $A > 0$ ἔχομεν:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi_\nu(\chi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi(\chi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{A} \chi^\tau d\Phi_\nu(\chi) + \right.$$

$$\left. + \int_{A}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi_\nu(\chi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi(\chi)\right| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{A} \chi^\tau d\Phi_\nu(\chi)\right| +$$

$$+\left|\int_{A}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi_\nu(\chi)\right| + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\tau d\Phi(\chi)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{A} |\chi|^\tau d\Phi_\nu(\chi) +$$

$$+\int_{A}^{+\infty} |\chi|^\tau d\Phi_\nu(\chi) + \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi|^\tau d\Phi(\chi) = \int_{-\infty} \frac{|\chi|^\varkappa}{|\chi|^{\varkappa-\tau}} d\Phi_\nu(\chi) +$$

$$+\int_{A}^{+\infty}\frac{|\chi|^{\varkappa}}{|\chi|^{\varkappa-\tau}}\,d\,\Phi_{\nu}(\chi)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\chi|^{\varkappa}}{|\chi|^{\varkappa-\tau}}\,d\,\Phi(\chi)\leqslant\frac{1}{|A|^{\varkappa-\tau}}\,\cdot$$

$$\left[\int_{-\infty}^{A}|\chi|^{\varkappa}\,d\Phi_{\nu}(\chi)+\int_{A}^{+\infty}|\chi|^{\varkappa}\,d\,\Phi_{\nu}(\chi)+\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi|^{\varkappa}\,d\,\Phi(\chi)\right]=$$

$$=\frac{1}{|A|^{\varkappa-\tau}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi|^{\varkappa}\,d\,\Phi_{\nu}(\chi)+\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi|^{\varkappa}\,d\,\Phi(\chi)\right]\ \text{διά}\ \ \tau\leqslant\varkappa.$$

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι $\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi|^{\varkappa}\,d\,\Phi_{\nu}(\chi)\leqslant C$.

'Επίσης ἔχομεν ὅτι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\Phi_{\nu}(\chi)=\Phi(\chi)$, ἄρα τό $\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi|^{\varkappa}\,d\,\Phi(\chi)=P$ ὑπάρχει.

"Ητοι : $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^{\tau}\,d\,\Phi_{\nu}(\chi)-\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^{\tau}\,d\,\Phi(\chi)\right|\leqslant\frac{1}{A^{\varkappa-\tau}}\,(C+P)$ διά $\tau\leqslant\varkappa$.

Δυνάμεθα νά ἐκλέξωμεν A ἀρκετά μεγάλο, τοιοῦτον ὥστε $\frac{C+P}{A^{\varkappa-\tau}}<\varepsilon$

"Αρα $\lim\limits_{\nu\to\infty}M_{\tau}^{(\nu)}=M_{\tau}$ διά $\tau\leqslant\varkappa$.

•

2. ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΚΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

(Πιθανοθεωρητική σύγκλισις)

Λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X_ν συγκλίνει κατά πιθανότητα (πιθανοθεωρητικῶς) εἰς τήν τυχαίαν μεταβλητήν X καί γράφομεν: $P\lim_{\nu\to\infty} X_\nu = X$, τότε καί μόνον

τότε ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ἔχομεν $\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| < \varepsilon) = 1$.

'Επειδή ἔχομεν $P(|X_\nu - X| < \varepsilon) + P(|X_\nu - X| \geq \varepsilon) = 1$ διά κάθε $\varepsilon > 0$, θά ἔχωμεν καί $\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| < \varepsilon) +$

$+ \lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| \geq \varepsilon) = 1$

καί ἄν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν λαμβάνομεν $\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| \geq \varepsilon) = 0$ διά κάθε $\varepsilon > 0$

Παρατηρήσεις: α) 'Επειδή $\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| < \varepsilon) =$

$= \lim_{\nu\to\infty} P(|(X_\nu - X) - 0| < \varepsilon)$ διά κάθε $\varepsilon > 0$, διά τοῦτο ἐάν

$P\lim_{\nu\to\infty} X_\nu = X$ θά ἔχωμεν καί $P\lim_{\nu\to\infty} (X_\nu - X) = 0$

β) 'Αποδεικνύεται ὅτι ἐάν $P\lim_{\nu\to\infty} X_\nu = X$ τότε θά ἔχωμεν

καί $\lim_{\nu\to\infty} X_\nu \doteq X$. Τό ἀντίστροφον δέν ἰσχύει γενικῶς. 'Ισχύει ὅμως πάντοτε ὅταν ἡ τυχαία μεταβλητή X εἶναι σταθερά.

Δηλαδή ἔχομεν $\underset{\nu\to\infty}{P\lim} X_\nu = X = C \Longleftrightarrow \underset{\nu\to\infty}{\lim} X_\nu \doteq X = C$

γ) 'Εάν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας, τότε ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός διατυποῦται ἀναλυτικώτερον ὡς ἑξῆς:

Λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X_ν συγκλίνει κατά πιθανότητα εἰς τήν τυχαίαν μεταβλητήν X καί γράφομεν $\underset{\nu\to\infty}{P\lim} X_\nu = X$ τότε καί μόνον τότε ἐάν διά κάθε $\varepsilon > o$ καί κάθε $\vartheta > o$, ὑπάρχη $\nu(\varepsilon,\vartheta)$ τοιοῦτον ὥστε: $P(|X_\nu - X| > \varepsilon) < \vartheta$, διά κάθε $\nu > \nu(\varepsilon,\vartheta)$.

Ἤ λέγομεν ὅτι $\underset{\nu\to\infty}{P\lim} X_\nu = X$ τότε καί μόνον τότε ἐάν διά κάθε $\varepsilon > o$ καί κάθε $\vartheta > o$, ὑπάρχη $\nu(\varepsilon,\vartheta)$ τοιοῦτον ὥστε:

$P(|X_\nu - X| < \varepsilon) > 1 - \vartheta$ διά κάθε $\nu > \nu(\varepsilon,\vartheta)$.

(Δυνάμεθα βεβαίως νά θέτωμεν $\vartheta = \varepsilon$).

<u>Θεώρημα:</u> Ἔστω (X_ν, Ψ_ν) μία διδιάστατος ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν διά τάς ὁποίας ἔχομεν $\underset{\nu\to\infty}{P\lim} X_\nu = X$ καί $\underset{\nu\to\infty}{P\lim} \Psi_\nu = \Psi$.

Ἔστω ἐπίσης $Q(X,\Psi)$ μία συνεχής συνάρτησις. Τότε ἡ τυχαία μεταβλητή $Z_\nu = Q(X_\nu, \Psi_\nu)$ τείνει πιθανοθεωρητικῶς εἰς τήν τυχαίαν μεταβλητήν $Z = Q(X,\Psi)$, ἤτοι $\underset{\nu\to\infty}{P\lim} (X_\nu, \Psi_\nu) = Q(X,\Psi)$.

<u>Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς</u>

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $Q(X,\Psi)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς μίαν κλειστήν καί φραγμένην περιοχήν (συμπαγή περιοχήν). Ἐπειδή εἶναι συνεχής εἰς τήν περιοχήν αὐτήν, θά εἶναι καί ὁμοιομόρφως (ὁμαλῶς) συνεχής.

Ἄρα διά κάθε $\varepsilon > o$ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon) > o$ τοιοῦτον ὥστε:

$$|Q(X_\nu, \Psi_\nu) - Q(X, \Psi)| < \varepsilon \qquad (i),$$

ὅταν $|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon)$ καί $|\Psi_\nu - \Psi| < \delta(\varepsilon)$ (ii)

Ἐάν σημειώσωμεν μέ E_1, E_2 τά σύνολα τῶν γεγονότων (i) καί (ii) ἀντιστοίχως θά ἔχωμεν $E_2 \subseteq E_1$ καί $P(E_2) \leq P(E_1)$.

Ἤτοι $P\Big(|Q(X_\nu, \Psi_\nu) - Q(X,\Psi)| < \varepsilon\Big) \geq P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon),$
$|\Psi_\nu - \Psi| < \delta(\varepsilon)\Big) = P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon)\Big) - P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon),$
$|\Psi_\nu - \Psi| \geq \delta(\varepsilon)\Big) \geq P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon)\Big) - P\Big(|\Psi_\nu - \Psi| \geq \delta(\varepsilon)\Big)$

Ἐπειδή ὅμως $\underset{\nu \to \infty}{P\lim} X_\nu = X$ καί $\underset{\nu \to \infty}{P\lim} \Psi_\nu = \Psi$, θά ἔχωμεν ὅτι διά κάθε $\delta(\varepsilon) > 0$ καί κάθε $\vartheta > 0$, ὑπάρχει $\nu_1(\delta,\vartheta)$ τοσοῦτον ὥστε,

$P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon)\Big) > 1 - \frac{\vartheta}{2}$ διά κάθε $\nu > \nu_1(\delta,\vartheta)$ (1)

καί ὅτι ὑπάρχει $\nu_2(\delta,\vartheta)$ τοιοῦτον ὥστε:

$P\Big(|\Psi_\nu - \Psi| \geq \delta(\varepsilon)\Big) < \frac{\vartheta}{2}$ διά κάθε $\nu > \nu_2(\delta,\vartheta)$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν: ὅτι διά κάθε $\delta(\varepsilon) > 0$ καί κάθε $\vartheta > 0$ ὑπάρχει $\nu_0 \equiv \mathrm{MAX}\{\nu_1(\delta,\vartheta), \nu_2(\delta,\vartheta)\}$

τοιοῦτον ὥστε:

$P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon)\Big) - P\Big(|\Psi_\nu - \Psi| \geq \delta(\varepsilon)\Big) > 1 - \vartheta$ διά κάθε $\nu > \nu_0$.

Ἄρα διά κάθε $\varepsilon > 0$ καί κάθε $\vartheta > 0$ ὑπάρχει $\nu_0 \equiv \mathrm{MAX}\{\nu_1(\delta,\vartheta), \nu_2(\delta,\vartheta)\}$ τοιοῦτον ὥστε:

$P\Big(|Q(X_\nu, \Psi_\nu) - Q(X,\Psi)| < \varepsilon\Big) > 1 - \vartheta$ διά κάθε $\nu > \nu_0$

Συμφώνως πρός τήν παρατήρησιν (γ) θά εἶναι

$$\underset{\nu \to \infty}{P\lim}\,(X_\nu, \Psi_\nu) = Q(X, \Psi)$$

β) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $Q(X, \Psi)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς μίαν μή συμπαγῆ περιοχήν. Τότε ἐπειδή εἶναι συνεχής, θά εἶναι καί ὁμοιομόρφως συνεχής είς μίαν συμπαγῆ περιοχήν Τ, ἥτις περιέχε - ται είς τόν τόπον ὁρισμοῦ τῆς $Q(X, \Psi)$. 'Εφ'ὅσον ἡ (X, Ψ) εἶ- ναι τυχαία μεταβλητή, διά κάθε $\varepsilon > o$ δυνάμεθα νά ἐκλέξωμεν συμπαγῆ περιοχήν Κ τοιαύτην ὥστε:

$$P\Big((X, \Psi) \notin K\Big) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ἤ} \quad P\Big((X, \Psi) \in K\Big) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1).$$

Διά τά ἀνωτέρω ε καί Κ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon,K) > o$ τοιοῦτον ὥστε:

$$\text{'εάν} \quad (X, \Psi) \in K \qquad (i)$$

$$\text{καί} \quad |X_\nu - X| < \delta(\varepsilon,K), \quad |\Psi_\nu - \Psi| < \delta(\varepsilon,K) \qquad (ii)$$

τότε θά ἔχωμεν

$$|Q(X_\nu, \Psi_\nu) - Q(X, \Psi)| < \varepsilon \qquad (iii)$$

'επειδή ἡ $Q(X, \Psi)$ εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής ἐν Κ.

'Εάν Ι εἶναι ὁ δειγματικός χῶρος καί E_1, E_2, E_3 εἶναι τά σύ- νολα τῶν γεγονότων (i), (ii), (iii), θά ἔχωμεν:

$$(E_1 \cup E_2 - E_3) \subseteq I.$$

Δηλαδή $P(E_1)+P(E_2)-P(E_3) \leq 1$ ἤ $P(E_3) \geq -1 + P(E_1)+P(E_2)$ καί

$$P\,|Q(X_\nu,\Psi_\nu) - Q(X,\Psi)| < \varepsilon\Big) \geq -1 + P\Big((X,\Psi) \in K\Big) +$$

$$+ P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon,K),\ |\Psi_\nu - \Psi| < \delta(\varepsilon,K)\Big)$$

'Επειδή ὅμως $\underset{\nu \to \infty}{\mathrm{PLim}}\, X_\nu = X$ καί $\underset{\nu \to \infty}{\mathrm{Plim}}\, \Psi_\nu = \Psi$ θά ἔχωμεν

ὅτι διά κάθε $\delta(\varepsilon,K) > o$ καί κάθε $\varepsilon > o$, ὑπάρχει $\nu_o(\varepsilon,\delta)$ τοιοῦτον ὥστε:

$$P\Big(|X_\nu - X| < \delta(\varepsilon,K),\ |\Psi_\nu - \Psi| < \delta(\varepsilon,K)\Big) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

$$\text{διά κάθε } \nu > \nu_o(\varepsilon,\delta)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) συμπεραίνομεν ὅτι διά κάθε $\varepsilon > o$, ὑπάρ- χει $\nu_o\,(\varepsilon,\delta(\varepsilon,K))$ τοιοῦτον ὥστε

$$P\Big(|Q(X_\nu, \Psi_\nu) - Q(X, \Psi)| < \varepsilon\Big) > 1 - \varepsilon \quad \text{διά κάθε } \nu > \nu_o(\varepsilon,\delta(\varepsilon,K)$$

"Αρα $\underset{\nu \to \infty}{P\,\ell im}\, Q(X\nu,\Psi\nu) = Q(X,\Psi)$.

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έστω ότι έχομεν μία ακολουθίαν των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$, μέ αντιστοίχους μέσας τιμάς τάς κάτωθι:

$$M_1^{(1)}, \quad M_1^{(2)}, \ldots, M_1^{(n)}$$

Δυνάμεθα νά εξετάσωμεν τάς τυχαίας μεταβλητάς, σφάλμα,

$$X_1 - M_1^{(1)}, \quad X_2 - M_1^{(2)}, \ldots, X_n - M_1^{(n)}$$

Παριστάνομεν μέ Z_n τήν μέσην τιμήν τών πρώτων n τυχαίων μεταβλητών σφάλμα, ήτοι

$$(9) \quad Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + \ldots + M_1^{(n)}}{n}$$

Εάν ή Z_n τείνη πιθανοθεωρητικώς πρός τό μηδέν, ήτοι εάν

$$P \lim_{n \to \infty} Z_n = 0 \quad \text{τότε λέγομεν}$$

ότι ή ακολουθία τών τυχαίων μεταβλητών X_n ικανοποιεί τόν νόμον τών μεγάλων αριθμών.

Διά νά διαπιστώσωμεν εάν μία ακολουθία τών τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, ικανοποιῆ τόν νόμον τών μεγάλων αριθμών χρησιμοποιούμεν τό θεώρημα τοῦ TCHEBICHEV: Ήτοι

Εάν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ανεξαρτήτων μεταξύ των, έχουσαι μέσους $M_1^{(n)}$ καί διακύμανσιν σ_n^2 καί εάν $\sigma_n \leq A.n^{\delta}$ μέ $\delta < 1$, τότε ή τυχαία μεταβλητή Z_n τῆς σχέσεως (9) τείνει πιθανοθεωρητικῶς πρός τό μηδέν.

Τήν τυχαίαν μεταβλητήν Z_n δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν διά τῆς κάτωθι σχέσεως

$$Z_n = \psi_1 + \psi_2 + \dots\dots + \psi_n \qquad (10)$$

ὅπου $\psi_i = \dfrac{\chi_i - M_1^{(i)}}{n}$ εἶναι τυχαῖαι μεταβληταί ἀνεξάρτητοι καί ἔχουν μέσον μηδέν καί διακύμανσιν σ_i^2/n^2

Δυνάμει τῆς ἀνισότητος τοῦ TCHEBICHEV εἶναι

$$P\left[\ |Z_n| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\ \sigma^2_{Z_n}$$

ἐκ τῆς σχέσεως (10) λαμβάνομεν

$$\sigma^2_{Z_n} = M\left[\psi_1 + \psi_2 + \dots\dots + \psi_n\right]^2 =$$

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \dots\dots + \sigma_n^2}{n^2} < A\ \frac{1^\delta + 2^\delta + \dots\dots + n^\delta}{n^2} =$$

$$= A\ \frac{n\, n^\delta}{n^2} = A\ \frac{1}{n^{1-\delta}}\text{, ἤτοι } \sigma^2_{Z_n} < A\ \frac{1}{n^{1-\delta}}$$

Δεδομένου ὅτι $\delta < 1$, $n^{1-\delta}$ τείνει εἰς τό ἄπειρον διά $n \to \infty$, ἑπομένως $\sigma^2_{Z_n}$ τείνει πρός τό μηδέν καί κατά συνέπειαν

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Z_n| < \varepsilon\right) = 1$$

Ο ΙΣΧΥΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁσάκις ὑφίσταται ἡ ἰσότης

$$\lim_{\eta\to\infty} P\left\{|Z_\eta|<\varepsilon,\ |Z_{\eta+1}|<\varepsilon,\ |Z_{\eta+t}|<\varepsilon\ldots\right\}=1$$

θά λέγωμεν, ὅτι διά τήν ἀκολουθίαν X_η, ἰσχύει ὁ ἰσχυρός νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν.

Λέγεται ἐπίσης ὅτι Z_η τείνει πρός τό μηδέν <u>μέ πιθανότητα 1</u>

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CARTELLI

Ἐάν αἱ τυχαῖαι μεταβληταί $X_1, X_2, X_i, \ldots\ldots, X_\eta$ εἶναι ἀνεξάρτητοι καί ἔχουν τήν τετάρτην ροπήν ὡς πρός τόν μέσον μικροτέραν ἤ ἴσην μέ μίαν σταθεράν A

ἤτοι: $M_4^{(\eta)} \leqslant A$

Τότε διά τήν ἀκολουθίαν X_η ἰσχύει ὁ ἰσχυρός νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν η στοιχεῖα

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ A_\eta$$

Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων καί τῶν ἰδιοτήτων τῆς Ἄλγεβρας τοῦ BOOLE, θά ἔχωμεν:

$$P\left\langle\prod_{i=1}^{\eta} A_i\right\rangle = P\left\langle\bigcap_{i=1}^{\eta} A_i\right\rangle = 1-P\left\langle\bigcup_{i=1}^{\eta}\bar{A}_i\right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant 1-\sum_{i=1}^{\eta} P\left\langle\bar{A}_i\right\rangle$$

καί διά η τείνοντος είς τό άπειρον, έχομεν

$$P\left\langle \prod_{i=1}^{\infty} A_i \right\rangle \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P\left\langle \bar{A}_i \right\rangle \qquad (11)$$

'Εξ άλλου.

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\, |Z_n|<\varepsilon,\ |Z_{n+1}|<\varepsilon, \ldots\ldots, |Z_{n+\tau}|<\varepsilon, \ldots\ldots \right] = 1$$

Είς τό πρῶτον μέρος τῆς (11) έχομεν τό γινόμενον τῶν ἀπείρων στοιχείων τοῦ Α, ἤτοι τήν πιθανότητα ὅτι τά ἄπειρα ταῦτα στοιχεῖα ἐμφανίζονται συγχρόνως.

'Εάν θεωρήσωμεν τά στοιχεῖα A_i ὡς στοιχεῖα

$|Z_n| < \varepsilon$, $|Z_{n+1}| < \varepsilon$ ...., τότε ἡ (11) γίνεται

$$P\left[|Z_n| < \varepsilon ,\ |Z_{n+1}| < \varepsilon \ \ldots\ldots \right] \geqslant 1 - \sum_{i=n}^{\infty} P\ |Z_i| \geqslant \varepsilon$$

'Αρκεῖ λοιπόν νά ἀποδείξωμεν ὅτι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\left(|Z_i| \geqslant \varepsilon \right) = 0$$

'Εφαρμόζομεν τό θεώρημα τοῦ TCHEBICHEV διά τήν τυχαίαν μεταβλητήν Z, καί έχομεν

$$P\left[|Z_i| \geqslant \varepsilon \right] \leqslant \frac{M\,(Z_1^{\eta})}{\varepsilon^4}$$

Εἴδομεν εἰς τήν σχέσιν (10) ὅτι

$Z_i = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \ldots\ldots + \psi_i$

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν ὡς ἄνω σχέσιν, έχομεν

$$M\,(Z_i^4) = M\left[\left[\psi_1 + \psi_2 + \ldots\ldots + \psi_i\right]^4\right] =$$

$$= \sum_{1=J}^{i} M(\psi_i^4) + 6 \sum_{J<K\leq i} \Sigma = M(\psi_J^2)\ M(\psi_K^2)$$

διότι ὁ μέσος τῶν ἄλλων ὅρων μηδενίζεται.

Ἐφαρμόζοντες τήν ἀνισότητα τοῦ SCWARTZ

$$F(X)\ dX \leq \sqrt{F(\chi)^2\ d\chi},\ \text{ἤ}\ M_2 \leqslant (M_4)^{1/2}$$

θά ἔχωμεν

$$M(Z_i^4) \leqslant \sum_{J=1}^{i} M(\psi_J^4) + 6 \sum_{J<K\leqslant i} \left[M(\psi_J^4)\right]^{1/2} \left[M(\psi_K^4)\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{i^4} \sum_{J=1}^{i} \bar{M}_4^J + \frac{6}{i^4} \sum_{J<K<i} (\bar{M}_4^J\ \bar{M}_4^K)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{i^4}\left(i\,A + 6\,\frac{i\,(i-1)}{2}\ A\right) < \frac{3}{i^2}\cdot A$$

Τελικῶς ἔχομεν

$$\sum_{i=\eta}^{\infty} P\left\langle |Z_i| \geqslant \varepsilon \right\rangle \leqslant \sum_{i=\eta}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^4}\ M(Z_i^4) <$$

$$< \frac{3}{\varepsilon^4}\ A \cdot \sum_{i=\eta}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$. Ἔχομεν ὅτι

$\sum_{i=\eta}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ εἶναι τό ὑπόλοιπον μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς. Ἑπομένως διά $\eta \to \infty$ θά ἔχωμεν $\sum_{i=\eta}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 0$

κατά συνέπειαν $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=\eta}^{\infty} P\left\langle |Z_i| \geqslant \varepsilon \right\rangle = 0$

ΤΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟΝ ΟΡΙΑΚΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δίδεται μία ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν
$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_\eta$

Ἐάν αἱ ὡς ἄνω τυχαῖαι μεταβληταί εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των καί ἔχουν τήν ἰδίαν συνάρτησιν κατανομῆς μέ μέσον μηδέν καί διακύμανσιν σ^2 ὡρισμένην, τότε ἡ τυχαία μεταβλητή

$$Z_\eta = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_\eta}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_\eta^2}} = \frac{X_{(\eta)}}{\sigma_{(\eta)}}$$ συγκλίνει

πρός τήν τυποποιημένην τυχαίαν μεταβλητήν, ἥτις ἔχει μέσον 0 καί διακύμανσιν 1.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Δοθέντος ὅτι ἐξ ὑποθέσεως αἱ τυχαῖαι μεταβληταί εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των καί ἔχουν τήν ἰδίαν συνάρτησιν κατανομῆς,

ἔχωμεν $\sigma^2_{(\eta)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots \sigma_\eta^2} = \sqrt{\eta}\ \sigma$

Ἐπομένως θά εἶναι

$$Z_\eta = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_\eta}{\sqrt{\eta}\cdot\sigma} = \frac{X_1}{\sqrt{\eta}\,\sigma} + \frac{X_2}{\sqrt{\eta}\,\sigma} + \ldots\ldots + \frac{X_\eta}{\sqrt{\eta}\cdot\sigma}$$

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς Z_η θά εἶναι

$$H\,Z_\eta(\tau) = \left[H\,X_i \frac{(\tau)}{\sqrt{\eta}\cdot\sigma} \right]^\eta$$

Δεδομένου ὅτι ἡ X_1 ἔχει τήν δευτέραν ροπήν ὡρισμένην

$$(\sigma^2 = M_2\ ,\quad \text{διότι}\quad M_1 = 0\ )$$

ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις $H\ (\tau)$ τῆς X_1 δύναται νά παρα –

σταθῆ διά τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ TAYIOR καί τό ὑπόλοιπον τοῦ PEANO.

$$H_{X_1}(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{2}\left[\sigma^2 + \varepsilon(\tau)\right]$$

ὅπου $\varepsilon(\tau)$ εἶναι ἕν ἀπειροστόν τοῦ τ.

'Επίσης ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς $\frac{X_1}{\sqrt{n}\sigma}$ θά παρίσταται:

$$H_{\frac{X_1}{\sqrt{n}\sigma}}(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{2n\sigma^2}\left[\sigma^2 + \frac{\varepsilon(\tau)}{\sqrt{n}\,\sigma}\right]$$

"Αρα $H_{Zn}(\tau) = \left[1 - \frac{\tau^2}{2n}\left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{\varepsilon(\tau)}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)\right]^n$

'Εκ ταύτης ἔχομεν:

$$\lim_{n \to \infty} H_{Zn}(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\varepsilon(\tau)}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)}$$

ἤτοι: $\lim\limits_{n \to \infty} H_{Zn}(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}$

'Επειδή $e^{-\frac{\tau^2}{2}}$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς τυχαίας τυποποιημένης κανονικῆς μεταβλητῆς, διά τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ Zn συγκλίνει εἰς τήν τυποποιημένην κανονικήν τυχαίαν μεταβλητήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ LAPLACE

Δίδεται μία ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $X_1\ X_2\ ,\ldots.\ X_\eta$, ἀνεξάρτητοι μεταξύ των, μέ μέσον 0. Ἐάν ὑπάρχουν δύο σταθεραί A καί B, ὅπου $0 < A < B$, $\sigma_\eta^2 \geqslant A^2$ καί ρ_η^3 ἡ τρίτη ροπή τῆς X_η, ὅπου $\rho_\eta^3 \leqslant B$, τότε ἡ τυχαία μεταβλητή

$$Z_\eta = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots. X_\eta}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots.+\sigma_\eta^2}}$$

συγκλίνει κατά κατανομήν εἰς τήν τυποποιημένην τυχαίαν κανονικήν μεταβλητήν, ἥτις ἔχει μέσον 0 καί διακύμανσιν 1

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

Πρός ἀπόδειξιν χρησιμοποιοῦμεν τήν χαρακτηριστικήν συνάρτησιν.

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X δυνάμει τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ TAYLOR

(1) εἶναι $H_\eta\ (\tau) = M\ (e^{i\tau\chi}) = 1 - \frac{1}{2!}\tau^2\ \sigma_i^2 +$

$+ \frac{1}{3!}\tau^3\ \vartheta_\eta\ (\tau)\ \rho_\eta$, ὅπου $(\vartheta_\eta) \leqslant 1$

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς $Z_\eta = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots.+X_\eta}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots.+\sigma_\eta^2}}$

δίδεται ἀπό τό γινόμενον τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_i, \ldots\ldots, X_n$

Ἤτοι

$$\bar{H}_n(\tau) = \prod_{i=1}^{n} H_i\left(\frac{\tau}{\sigma_{(n)}^{n}}\right), \text{ ὅπου } \sigma_{(n)} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2}$$

Λογαριθμίζοντες, ἔχομεν

$$\bar{H}_n(\tau) = \sum_{1}^{n} i \log\left(\frac{\tau}{\sigma(n)}\right)$$

Καί βάσει τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν

$$\log \bar{H}_n(\tau) = \sum_{1}^{n} i \log\left(1-\frac{1}{2}\,\tau^2\,\sigma_i^2 + \frac{1}{3!}\,\tau^3\,\vartheta_i(\tau)\,\rho_i\right)$$

Ἐάν εἰς τήν θέσιν τοῦ τ θέσωμεν $\frac{\tau}{\sigma_{(n)}}$ θά ἔχωμεν

$$(2) \quad \log \bar{H}_n(\tau) = \sum_{1}^{n} i \log\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{\sigma_{(n)}^2}\,\sigma_i^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}\,\frac{\tau^3}{\sigma_{(n)}^3}\,\vartheta_i\left(\frac{\tau}{\sigma_{(n)}}\right)\rho_i\right.$$

Ἀλλά $\sigma_{(n)}$ εἰς τήν αὔξησιν τοῦ n συγκλίνει, διότι

$\sigma_1^2 \geqslant A^2$, $\sigma_2^2 \geqslant A^2, \ldots\ldots, \sigma_{(n)}^2 \geqslant A^2$, ἐπίσης

$\sum_{1}^{n} i\ \sigma_i^2 \geqslant n A^2$. Τό ἴδιον ἰσχύει καί διά τό $\sigma_{(n)}^3$

Ὅθεν ὅταν n αὐξάνῃ, ἡ ποσότης τῆς σχέσεως (2)

$$(3) \quad \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{\sigma^2_{(n)}} \quad \sigma_i^2 + \frac{1}{3!} \frac{\tau^3}{\sigma^3_{(n)}} \quad \theta_i \left(\frac{\tau}{\sigma_{(n)}} \right) \rho_i$$

τείνει πρός τό μηδέν. Δυνάμεθα ὅθεν νά φαντασθῶμεν ὅτι λαμβάνοντες n ἀρκετά μέγα ἡ σχέσις (3) εἶναι κατ'ἀπόλυτον τιμήν μικροτέρα τοῦ 1/2.

'Η ὡς ἄνω ὑπόθεσις ἔχει ἀξίαν διά νά δυνηθῶμεν νά ἐφαρμόσωμεν μίαν ἰδιότητα τῶν λογ/θμων.

'Εάν π.χ. ἐξετάσωμεν $\log(1 + Z)$ καί ἐάν $Z < 1$, θά ἔχωμεν ὡς εἶναι γνωστόν,

$$(1 + Z) = - Z + \frac{Z^2}{2} - \frac{Z^3}{3} \; ..... = - Z + R\,(Z)$$

"Οπου $R(Z)$ εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς συναρτήσεως τοῦ Z. Τώρα θά προσπαθήσωμεν νά εὕρωμεν μίαν προσέγγισιν τοῦ $|R(Z)|$. Δυνάμεθα νά γράψωμεν ὅτι

$|R\,(Z)| \leqslant \left|\frac{Z^2}{2}\right| + \left|\frac{Z^3}{3}\right| + \left|\frac{Z^4}{4}\right| \ldots\ldots$ (θέτοντες εἰς τήν θέσιν τοῦ 3 καί 4 τό 2 ἔχομεν) $< \left|\frac{Z^2}{2}\right| + \left|\frac{Z^2}{2}\right| + \left|\frac{Z^2}{2}\right| \ldots\ldots$

$\ldots = \frac{Z^2}{2}\,(1 + Z + Z^2 \; .....)$. 'Επειδή γνωρίζομεν ὅτι $(|1| + |\alpha| + |\alpha^2| + |\alpha^3| + ..$ εἶναι τό ἀνάπτυγμα τῆς $\frac{1}{1-|\alpha|}$

διά $|\alpha| < 1$

'Επομένως θά ἔχωμεν

$$|R\,(Z)| \leqslant Z^2/2 \quad \left(\frac{1}{1-|Z|}\right) \qquad (4)$$

'Εάν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $|Z| < 1/2$, ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν σχέσιν (4), ἔχομεν

$$|R\ (Z)| < \frac{Z^2}{2} \quad \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = Z^2$$

'Επομένως ἐάν $Z < 1/2$ θά ἔχωμεν $/R\ (Z)/ < Z^2$

'Εφαρμόζομεν τήν ὡς ἄνω ἀνισότητα εἰς τήν περίπτωσίν μας, θά ἔχωμεν

$$Z = -1/2 + \frac{\tau^2}{\sigma^2_{(\eta)}} \sigma_i^2 + \frac{1}{3!}\frac{\tau^3}{\sigma^3_{(\eta)}} \vartheta_i \left(\frac{\tau}{\sigma(\eta)}\right) \rho_i + R(Z)$$

'Επομένως ἡ σχέσις (2) παραμένει, διότι ὑπάρχει τό ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου R (Z).

$$\sum_1^\eta{}_i \left(-1/2 \frac{\tau^2}{\sigma^2_{(\eta)}} \sigma_i^2 + \frac{1}{3!}\frac{\tau^3}{\sigma^3_{(\eta)}} \vartheta_i \left(\frac{\tau}{\sigma_{(\eta)}}\right)\rho_i + R\ (Z)\right.$$

'Επειδή ὅμως $\sum_1^\eta{}_i \sigma_i^2 = \sigma_\eta^2$, μετά τήν ἀντικατάστασιν ἔχομεν:

$$Z = -1/2\ \tau^2 + \frac{1}{3!}\frac{\tau^3}{\sigma^3_{(\eta)}} \Sigma_i\ \vartheta_i \frac{\tau}{\sigma_{(\eta)}} \rho_i + \Sigma\ R_i$$

Καί ἐπομένως διά τήν ἀπόδειξίν μας εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως ἀποδειχθῇ ὅτι τό ὑπόλοιπον $\Sigma\ R_i = 0$.

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν $\sigma^2_{(\eta)} \geqslant A^2$. Δεδομένου ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν τιμήν τῆς $\sigma^3_{(\eta)}$, εὑρίσκομεν πρῶτον τήν μέσην τετραγωνικήν ἀπόκλισιν καί ἐν συνεχείᾳ τήν ὑψώνομεν εἰς τόν κύβον.

'Οφείλομεν νά ὑπολογίσωμεν τό $\Sigma_i\ R_i$,

τοῦτο δίδεται

$$R\ (i) < \left(1/2 \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^2}{\sigma^2_{(\eta)}} \sigma_i^2 + \frac{1}{3!}\frac{\tau^3}{\sigma^3_{(\eta)}} \vartheta_i \frac{\tau}{\sigma_{(\eta)}} \rho_i\right)^2 <$$

$$\frac{1}{\eta^2}\left(1/2 + \frac{B^2}{A^2} + \frac{1}{3!}\ \tau^3 \quad B^3/\eta \quad 1/2\ A^3 \right)^2$$

'Ονομάζομεν τό ἐντός τῆς παρενθέσεως ἄθροισμα C καί ἔχομεν $R\ (i) = C/\eta^2$.

'Αθροίζοντες θά ἔχωμεν

$$\Sigma_i \ R_i = \frac{\eta}{\eta^2}\, C = \frac{1}{\eta}\, C$$

'Επομένως

$$H_\eta(\tau) = \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3\ B^3}{3!\ \eta^{3/2}\quad A^2} + \frac{C}{\eta}$$

καί διά $\eta \longrightarrow \infty$, ἔχομεν

$$\lim_{\eta \to \infty} H_\eta\ (\tau) = - \tau^2/2 + \lim_{\eta \to \infty} \frac{\tau^3\ B^3}{3!\eta^{3/2}\quad A^2} + \text{ὅριον}_{\eta \to \infty} \frac{C}{\eta}$$

καί ἐπομένως $H_\eta(\tau) = e^{-1/2\tau^2}$ ἥτις εἶναι ἡ <u>χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς τυποποιημένης κανονικῆς μεταβλητῆς</u>.

Ἀσκήσεις ἐπί τῆς συγκλίσεως τῶν τυχαίων μεταβλητῶν

1) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν (X_n), ὅπου X_n λαμβάνει τιμάς -1 καί 1, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $\frac{1}{n}$ καί $\frac{n-1}{n}$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑφίσταται σύγκλισις κατά κατανομήν.

Λ ύ σ ι ς

$$X: \quad -1 , \quad 1$$

$$P_\tau: \quad 1/n , \quad \frac{n-1}{n}$$

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $\Phi_n(X)$ θά εἶναι

$$\Phi_n(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < -1 \\ \frac{1}{n} & \text{"} \quad -1 \leq \chi < 1 \\ 1 & \text{"} \quad \chi \geq 1 \end{cases}$$

Διά $n \to \infty$, θά ἔχωμεν

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\chi) = \Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi < -1 \\ 0 & -1 \leq \chi < 1 \\ 1 & \chi \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{καί } \Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 1 \\ 1 & \text{"} \quad \chi \geq 1 \end{cases}$$

Ἡ ὡς ἄνω $\Phi(\chi)$ εἶναι πράγματι μία συνάρτησις κατανομῆς καί μάλιστα συνάρτησις κατανομῆς μιᾶς τυχαίας σταθερᾶς μεταβλητῆς μέ τιμήν 1.

2) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(X_1, X_2, \ldots, X_S)$, ὅπου X_S λαμβάνει τιμάς 0 καί S, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας $\frac{S-1}{2S}$ καί $\frac{S+1}{2S}$, νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ὅριον κατά κατανομήν.

Λ ύ σ ι ς

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς X_S εἶναι

$$\Phi_S(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 0 \\ \dfrac{S-1}{2\,S} & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi < S \\ 1 & \quad \chi > S \end{cases}$$

Διά $S \to \infty$, θά ἔχωμεν

$$\lim_{S \to \infty} \Phi_S(\chi) = \Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 0 \\ 1/2 & \text{"} \quad \chi \geqslant 0 \end{cases}$$

καί ἐπομένως βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῆς συναρτήσεως κατανομῆς, ἡ ὡς ἄνω $\Phi(\chi)$ δέν εἶναι μία συνάρτησις κατανομῆς διότι $\Phi(+\infty) = 1/2 \neq 1$.

Ἐπομένως εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ τυχαία μεταβλητή (X_S) δέν ἔχει ὅριον κατανομῆς.

3) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n, \ldots)$ ὅπου X_n λαμβάνει τιμάς 0 καί n, μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους $\dfrac{n^2-1}{2}$, $\dfrac{1}{n^2}$. Νά ἐξετασθῇ ἐάν ὑφίσταται ὅριον κατά κατανομήν.

Λ ύ σ ι ς

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς X_n, εἶναι

$$\Phi_n(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 0 \\ \dfrac{n^2-1}{n^2} & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi < n \\ 1 & \text{"} \quad \chi \geqslant n \end{cases}$$

Ἔχει ὡς ὅριον διά $n \to \infty$ τήν συνάρτησιν

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\chi) = \Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi < 0 \\ 1 & \text{»} \quad \chi \geqslant 1 \end{cases}$$

ἥτις εἶναι μία συνάρτησις κατανομῆς.

4) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n, \ldots\ldots)$, ὅπου X_n λαμβάνει τάς τιμάς $-n^{\varkappa}$, 0, $n^{\varkappa}$, μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας

$$P: \frac{1}{n^2},\ 1 - \frac{2}{n^2},\ \frac{+1}{n^2},$$

ἐπίσης ἡ τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμήν 0 μέ πιθανότητα 1. Νά ἀποδειχθῇ διά τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως ὅτι ὑπάρχει πιθανοθεωρητική σύγκλισις ἤτοι $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} X_n = X$

Λ ύ σ ι ς

Ἐπειδή $X = 0$, ἤτοι σταθερά, θά ἔχωμεν

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} X_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} X_n \doteq 0$$

Ἐπομένως ἀρκεῖ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑφίσταται ὅριον κατανομῆς. Διά νά ἀποδείξωμεν τοῦτο ἐξετάζομεν τήν χαρακτηριστικήν συνάρτησιν $H_n(\tau)$. Δηλαδή ἐφαρμόζομεν τό θεώρημα τῆς συνεχείας διά τήν χαρακτηριστικήν συνάρτησιν.

Ἤτοι εἶναι ἀνάγκη νά ἀποδειχθῇ ὅτι

$$H_n(\tau) = M\,(e^{i\tau\chi}) = 1$$

$$H_n(\tau) = M\,(e^{i\tau\chi}) = \frac{1}{n^2}\, e^{i\tau(-n^{\varkappa})} + \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) e^{i\tau o} + \frac{1}{n^2}\, e^{i\tau m^{\varkappa}}$$

Λαμβάνοντες τά ὅρια θά ἔχωμεν

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\tau) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} e^{i\tau(-n^{\varkappa})} - 1 - \frac{2}{n^2}\, e^{i\tau o} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2}\, e^{\,i\tau n^{\varkappa}} \right) = 1$$

Ἤτοι $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(\tau) = H(\tau) = 1$

Ἡ $H(\tau)$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς τυχαίας μεταβλητῆς H ἡ ὁποία εἶναι σταθερά.

Ἄρα $\operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} X_n = X = 0$

5) Δίδεται ἡ τυχαία μεταβλητή X_n

ἥτις λαμβάνει τιμάς X_n : $-(2+n^2)$, $\frac{-n+1}{n}$, 5

μέ πιθανότητας P : $\frac{1}{n^2}$, $\frac{n^2-2}{n^2}$, $1/n^2$

Νά εὑρεθῇ

α) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \doteq X$ (ὅριον κατανομῆς)

β) $\operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} X_n = X$ (ἤτοι ὅριον πιθανότητος)

1)

$$\Phi_n(\chi) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{διά} & \chi < -(2+n^2) \\ \frac{1}{n^2} & " & -(2+n^2) \leq \chi \quad \frac{-n+1}{n} \\ 1-\frac{1}{n^2} & " & \frac{-n+1}{n} \leq \chi < 5 \\ 1 & " & \chi \geq 5 \end{array} \right.$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\chi) = \left| \begin{array}{ll} 0 & [\varnothing] \\ 0 & \chi < -1 \\ 1 & -1 \leq \chi < 5 \\ 1 & \chi \geq 5 \end{array} \right.$$

καί

$$\Phi(\chi) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \chi < -1 \\ 1 & \chi \geq -1 \end{array} \right.$$

῎Αρα ἡ τυχαία μεταβλητή $X = -1$ εἶναι μία σταθερά.

β) ῞Οριον πιθανότητος

᾿Επειδή $\lim_{n \to \infty} X_n \doteq -1$ θά ἔχωμεν

καί $\operatorname{plim}_{n \to \infty} X_n = -1$

6) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν

X_n: $-n$, 0 , n , μέ πιθανότητας

P : $\frac{1}{4n^2}$, p , $\frac{1}{4n^2}$ -

Νά ἀποδειχθῇ ἐάν ἰσχύῃ ὁ νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν, ἤ ὁ ἰσχυρός νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>

$\sigma^2 = M_2 - (M_1)^2$, ἐπομένως

$$\sigma^2 = (n^2 \cdot \frac{1}{4n^2} + n^2 \frac{1}{4n^2}) - (-n \cdot \frac{1}{4n^2} + n \frac{1}{4n^2})^2 =$$

$$= (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) - (-\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}) = \frac{1}{2}$$

$$\bar{M}_4^{(n)} = n^4 \cdot \frac{1}{4n^2} + n^4 \cdot \frac{1}{4n^2} = \frac{n^2}{2}$$

᾿Επομένως ἰσχύει ὁ νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν καί οὐχί τῶν ἰσχυρῶν, διότι ἡ διακύμανσις εἶναι περιωρισμένη.

7) Δίδεται μία ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X_n, μέ συνάρτησιν κατανομῆς τῆς X_n τήν κάτωθι

$$\Phi_n(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{διά} \quad \chi \leq 0 \\ \frac{n+1}{n} \cdot \chi - \frac{\chi^{n+1}}{n} & \text{"} \quad 0 < \chi \leq 1 \\ 1 & \text{"} \quad \chi > 1 \end{cases}$$

1) Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς X, ἤτοι τό $\lim_{n \to \infty} X \doteq X$

2) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $\lim_{n \to \infty} M_\tau(X_n) = M_\tau(X)$

Λ ύ σ ι ς

α) $\lim_{n \to \infty} \Phi_n(X) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n+1}{n}\chi - \frac{\chi^{n+1}}{n}\right] =$

$$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\chi - \frac{\chi^{n+1}}{n}\right] = \chi - 0 = \chi$$

Ἑπομένως

$$\Phi(\chi) = \begin{vmatrix} 0 & \text{διά} & \chi \leqslant 0 \\ \chi & " & 0 < \chi \leqslant 1 \\ 1 & " & \chi > 1 \end{vmatrix}$$

β) $M_\tau(X_n) = \int_0^1 \chi^\tau \, d\,\Phi_n(\chi) = \int_0^1 \chi^\tau \left[\frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(\chi^n)}{n}\right. d\chi$

$$= \int_0^1 \chi^\tau \left[\frac{n+1}{n}(1-\chi^n)\right] d\chi = \frac{n+1}{n}\int_0^1 \chi^\tau (1-\chi^n)\, d\chi =$$

$$\frac{n+1}{n}\left[\int_0^1 \chi^\tau - \int_0^1 \chi^\tau \chi^n d\chi\right] = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{\tau+1}\right) - \frac{1}{\tau+n+1}\,)$$

$$\lim_{n \to \infty}\left\{\frac{n+1}{n}\left[\frac{1}{\tau+1} - \frac{1}{\tau+n+1}\right]\right\} = \lim_{n \to \infty}\left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\left[\frac{1}{\tau+1} - \right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{1}{\tau+n+1}\right]\right\} = \frac{1}{\tau+1}$$

'Εκ παραλλήλου ἅς ὑπολογίσωμεν $M_\tau\ (\chi)$

$$M_\tau\ (\chi) = \int_0^1 \chi^\tau\, d\chi = \frac{1}{\tau+1}$$

8) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, ἀνεξάρτητοι μεταξύ των, μέ πυκνότητα πιθανότητος

$$\varphi\ (\chi) = \begin{cases} e^{-(\chi-K)} & \text{διά } \chi > K \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ἐξετασθῇ ἐάν ἰσχύῃ ὁ νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν

9) 'Η ἀπαριθμητή τυχαία μεταβλητή X_ν ἔχει συνάρτηση κατανομῆς

$$\Phi_\nu(\chi) = 1 - \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)}{(\nu+\nu\chi)(\nu+\nu\chi-1)\ldots(\nu+\nu\chi-\lambda+1)} \quad \text{ὅπου } \lambda \leqslant \nu+1$$

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ X_ν συγκλίνει κατά κατανομήν εἰς τήν $\Phi(\chi)$, ὅπου :

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(1+\chi)^\lambda} & \chi > 0 \end{cases}$$

10) "Εστω $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ εἶναι ἀκολουθία ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν μέ τήν αὐτήν συνάρτησιν κατανομῆς $P(X < \chi) = \Phi(\chi)$. "Εστω ἀκόμη $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi\ )$ αἱ τιμαί δείγματος αἱ ὁποῖαι ἔχουν τήν διάταξιν $\chi_1^* \leqslant \chi_2^* \leqslant \ldots \leqslant \chi_n^*$

Νά δειχθῇ ὅτι:

α) 'Η συνάρτησις κατανομῆς τῶν $\Psi_n = \max\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ εἶναι $P(\Psi_n \leqslant \chi) = [\,\Phi(\chi)\,]^n$

β) Ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῶν $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ εἶναι $P(Z_n \leqslant \chi) = 1 - \left[1 - \Phi(\chi)\right]^n$

11) Ἔστωσαν $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_\nu \ldots)$ ἀνεξάρτητες τυχαῖες μεταβλητές, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τήν αὐτήν συνάρτησιν κατανομῆς $\Phi(\chi)$ ὅπου:

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi \leqslant 0 \\ \chi & 0 < \chi \leqslant 1 \\ 1 & \chi > 1 \end{cases}$$

Ἔστω $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots\ldots, \Psi_\nu, \ldots)$ εἶναι ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν μέ $\Psi_\nu = \max(X_1, \ldots, X_\nu)$.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία $(U_1, U_2, \ldots\ldots, U_\nu, \ldots)$ μέ $U_\nu = \nu(1-\Psi_\nu)$, συγκλίνει κατά κατανομήν εἰς τήν $\Phi(\upsilon)$ ὅπου

$$\Phi(\upsilon) = \begin{cases} 0 & \upsilon \leqslant 0 \\ 1-e^{-\upsilon} & \upsilon > 0 \end{cases}$$

12) Ἐάν $((X_1, \Psi_1), (X_2, \Psi_2) \ldots\ldots)$ εἶναι μία διδιάστατος ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν ἡ ὁποία συγκλίνει κατά πιθανότητα εἰς τήν (X, C), ὅπου ἡ X ἔχει συνάρτησιν κατανομῆς $\Phi(\chi)$ καί C εἶναι μία θετική σταθερά ποσότητα, τότε διά κάθε σημεῖον συνεχείας τῆς $\Phi(\chi)$ ἔχομεν ὅτι:

ι) διά $Z_\nu = X_\nu + \Psi_\nu$ $\quad \Phi(\zeta) = \Phi(\zeta - C)$

ιι) διά $Z_\nu = X_\nu \cdot \Psi_\nu$ $\quad \Phi(\zeta) = \Phi\left(\frac{\zeta}{C}\right)$

ιιι) διά $Z_\nu = \frac{X_\nu}{\Psi_\nu}$ $\quad \Phi(\zeta) = \Phi(C\zeta)$

ιν) διά $Z_\nu = \alpha X_\nu + \beta \Psi_\nu$ $\quad \Phi(\zeta) = \Phi\left(\frac{\zeta - \beta C}{\alpha}\right)$

ὅπου α, β σταθεραί καί $\alpha > 0$

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6 ΟΝ

ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Φθάνοντες είς αύτό τό σημεῖον, εἰσερχόμεθα πλέον εἰς τό σπουδαιότερονκεφάλαιοντοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων. Τά διάφορα φαινόμενα περί τῶν όποίων δύναται νά ένδιαφερθῆ ὁ ἐπιστήμων δύναται νά ἀχθοῦν εἰς προσδιωρισμένα μαθηματικά πρότυπα (μοντέλλα), ἅτινα εἰς τήν περίπτωσίν μας εἶναι τά πιθανοθεωρητικά σχήματα.

Ὑφίστανται πολλά μαθηματικά σχήματα.

Ἡμεῖς ἐνδιαφερόμεθα, ἐπί τοῦ παρόντος, νά διατυπώσωμεν τά πλέον θεμελιώδη, ἤτοι ἐκεῖνα τά ὁποῖα συνηθέστερον καί συχνότερον συναντῶμεν ἐπί τοῦ πρακτικοῦ πεδίου. Ἕκαστον πρόβλημα πιθανοθεωρητικοῦ χαρακτῆρος, δεδομένου ὅτι προβλέπει τόν προσδιορισμόν τῆς πιθανότητος, δι'ἧς παρουσιάζεται ἕν ὡρισμένον ἀποτέλεσμα Ε, δύναται "πρακτικῶς" νά ἀχθῆ εἰς τό σύστημα τῶν καλπῶν. Ἄς ἴδωμεν καλύτερον τί ἐννοοῦμεν διά τοῦ συστήματος τῶν καλπῶν.

Ἔστω ὅτι ἐπεσκέφθημεν ἕναν ἀριθμόν Ν ἀνθρακωρύχων, ἵνα ἐλέγξωμεν πόσοι ἐξ αὐτῶν πάσχουν ὑπό τῆς ἀσθενείας (SOLICOSI) καί βάσει τῶν παρατηρήσεων νά προσδιορίσωμεν τήν πιθανότητα καθ'ἥν ὑγιεῖς ἀνθρακωρῦχοι νά προσβληθῶσιν ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἀσθενείας.

Ἐάν ν εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ἀσθενῶν ἀνθρακωρύχων, δυνάμεθα νά προσδιορίζωμεν ὡς πιθανότητα (ἐμπειρική πιθανότητα ἤ στατιστικήν συχνότητα) ἀσθενείας τήν σχέσιν $\frac{\nu}{N}$.

Ὅθεν ἐάν Ε εἶναι τό γεγονός ἀσθένεια, δυνάμεθα νά γράφωμεν $P_\tau (E) = \frac{\nu}{N}$.

Οὐδέν μᾶς ἐμποδίζει ὅμως νά θεωρήσωμεν κάθε ἀνθρακωρῦχον σημειούμενον διά μιᾶς σφαίρας, διαστάσεων καί βάρους σταθεροῦ, π.χ. χρώματος λευκοῦ ἤ μέλανος, ἐάν εἶναι ἀντιστοίχως ἀσθενής ἤ ὑγιής.

Ἐάν τοποθετήσωμεν ὅλας τάς σφαίρας Ν εἰς μίαν κάλπην τό ἀνωτέρω πρόβλημα δύναται νά μετατραπῇ εἰς πρόβλημα λογισμοῦ πιθανοτήτων, ἐξαγωγῆς ἐκ τῆς κάλπης μιᾶς λευκῆς σφαίρας.

Ἡ τοιαύτη πιθανότης ὡς γνωστόν δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως μεταξύ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων ὡς πρός τό γεγονός Ε καί τοῦ ἀριθμοῦ ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἤτοι

$$P_\tau(E) = \frac{\nu}{N}$$

Ὅθεν, συσταθείσης τῆς κάλπης ἤ τῶν καλπῶν, ἡ ἐργασία μετατοπίζεται εἰς τόν προσδιορισμόν τῆς πιθανότητος ἐμφανίσεως τοῦ γεγονότος Ε.

Πρός ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τούτου ὑπάρχουν πολλά μαθηματικά σχήματα, ἐπί τοῦ παρόντος ὅμως θά ἀσχοληθῶμεν μέ τάς ἁπλουστέρας μορφάς τῶν σχημάτων ἐκείνων ἅτινα ἐμφανίζονται περισσότερον εἰς τό πρακτικόν πεδίον.

Ἤτοι

1) Σχῆμα τοῦ BERNOULLI
2) Σχῆμα ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως (IN BLOCCO)
3) Σχῆμα τοῦ POISSON
4) Σχῆμα τοῦ LAPLACE - LEXIS.

Σχῆμα τοῦ BERNOULLI τῶν δύο ἐναλλαγῶν

Ἔστω ἕν γεγονός E, τό ὁποῖον εἰς τάς διαφόρους δοκιμάς, ἐμφανίζεται πάντοτε διά τῆς σταθερᾶς πιθανότητος P. Ἐκτελοῦμεν N δοκιμάς καί ὑποθέτομεν ὅτι τό γεγονός E παρουσιάζεται α φοράς ($\alpha \leqslant N$).

Ἐάν ἐπαναληφθῇ ὁ ἀριθμός τῶν N δοκιμῶν ὁ ἀριθμός α δέν παραμένει σταθερός ἀλλά μεταβάλλεται καί διαγράφει μίαν τυχαίαν μεταβλητήν A, ἥτις καλεῖται τυχαία μεταβλητή τοῦ BERNOULLI ἤ τυχαία μεταβλητή μετ'ἐπαναλήψεως.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν κάλπην U, ἥτις περιέχει H σφαίρας τῶν ἰδίων διαστάσεων καί τοῦ αὐτοῦ βάρους.

Ἐξ αὐτῶν β εἶναι λευκαί καί H-β = n μαῦρες. Ἤτοι ἡ κάλπη περιέχει σφαίρας τῶν δύο διαλογῶν.

Ὑπ'αὐτάς τάς συνθήκας ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς ἐκ τῆς κάλπης U μιᾶς σφαίρας λευκῆς,θά δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $P = \frac{\beta}{H}$ καί ἀντιθέτως ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς σφαίρας μαύρης θά δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $q = \frac{n}{H} = \frac{H-\beta}{H} = 1 - \frac{\beta}{n} = 1 - P$. Εἰς τό σχῆμα τοῦ BERNOULLI ἡ πιθανότης P τοῦ γεγονότος E παραμένει πάντοτε σταθερά εἰς κάθε ἐξαγωγήν διότι ὁσάκις ἐξάγηται ἡ σφαῖρα ἐκ τῆς κάλπης, ἐπανατοποθετεῖται εἰς αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν λοιπόν N ἐξαγωγάς καί ὑποθέτομεν ὅτι λαμβάνομεν α φοράς σφαίραν λευκήν. Ἐπαναλαμβάνομεν ἄλλας N δοκιμάς ὁ ἀριθμός α μεταβάλλεται. Ὅθεν τό σύνολον τῶν δυνατῶν τιμῶν τοῦ α, αἵτινες εἶναι 0, 1, 2, ...,N, διαγράφουν μίαν τυχαίαν μεταβλητήν A ἥτις καλεῖται τυχαία μεταβλητή τοῦ

'Υπολογισμός τῆς $P_{\alpha,N}$

'Αρχίζομεν ἀπό τόν προσδιορισμόν τῆς πιθανότητος $P_{o,N}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς N δοκιμάς ἐνεφανίσθη πάντοτε σφαῖρα μαύρη. 'Η πιθανότης τῆς ἐξαγωγῆς τοιαύτης εἰς τήν πρώτην δοκιμήν εἶναι q. 'Η πιθανότης ἐξαγωγῆς σφαίρας μαύρης εἰς τήν 2αν, 3ην,...Nην δοκιμήν θά εἶναι πάντοτε q. Δεδομένου ὅτι αἱ δοκιμαί εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, καθ'ὅσον ἡ σύνθεσις τῆς κάλπης παραμένει πάντοτε σταθερά, συμφώνως πρός τό θεώρημα τῶν συνθέτων πιθανοτήτων, θά ἔχωμεν

$$P_{ON} = \underbrace{q.\ q.\ q.\ \ldots\ldots q}_{N \text{ φοράς}} = q^N$$

'Υπολογίζομεν τήν πιθανότητα $P_{1,N}$, τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἰς N-1 ἐξαγωγάς ἐξήχθη σφαῖρα μαύρη καί μόνον εἰς μίαν ἐξαγωγήν ἐξήχθη σφαῖρα λευκή. 'Υποθέτομεν ὅτι ἡ λευκή σφαῖρα ἐξήχθη εἰς τήν πρώτην δοκιμήν, ἐνῶ εἰς τήν 2α, 3η,.......Nη δοκιμήν ἐξήχθησαν σφαῖραι μαῦραι. 'Επομένως ἡ πιθανότης θά εἶναι $P\,q^{N-1}$. Εἶναι ὅμως φανερόν ὅτι ἡ λευκή σφαῖρα πιθανόν νά ἐξήχθη εἰς τήν 2αν ἤ τήν 3ην ἤ τήν Nην δοκιμήν. 'Επομένως ὑπάρχουν $\binom{N}{1}$, τρόποι διάφοροι νά ἐξετάσωμεν τό γινόμενον $P\,q^{N-1}$ καί κατά συνέπειαν βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλικῶν πιθανοτήτων θά ἔχωμεν

$$P_{1,N} = \binom{N}{1}\ P^1\, q^{N-1}$$

'Εάν θέλωμεν 2 σφαίρας λευκάς ἡ πιθανότης θά εἶναι

$$P_{2,N} = \binom{N}{2}\ P^2\, q^{N-2}$$

Τέλος ἐξετάζομεν τήν γενικήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἡ τυχαία μεταβλητή Α λαμβάνει τιμήν α. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τάς πρώτας α δοκιμάς ἐνεφανίσθησαν σφαῖραι λευκαί ἐνῶ εἰς τάς ὑπολοίπους (Ν-α) δοκιμάς ἐνεφανίσθησαν μαῦραι. Ἡ πιθανότης τοῦ ὡς ἄνω γεγονότος βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων παρίσταται $p^{\alpha} q^{N-\alpha}$, ἤ ἀναλυτικώτερον ὡς κάτωθι:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \ldots p}_{\alpha \text{ φοράς}} \quad \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q}_{N-\alpha \text{ φοράς}} = p^{\alpha} q^{N-\alpha}$$

Εἶναι ὅμως φανερόν ὅτι αἱ α λευκαί σφαῖραι δύνανται νά προκύψουν κατά $\binom{N}{\alpha}$ διαφορετικούς τρόπους. Βάσει δέ τοῦ θεωρήματος θά ἔχωμεν:

$$P_{\alpha,N} = \binom{N}{\alpha} p^{\alpha} q^{N-\alpha} \quad , \text{ ἤ } P_{\alpha,N} = \frac{N!}{\alpha!(N-\alpha)} p^{\alpha} q^{N-\alpha}$$

Π ί ν α ξ

Πιθανοτήτων τῆς ὡς ἄνω κατανομῆς τοῦ BERNOULLI

α	P_{α}
0	q^{N}
1	$\binom{N}{1} p\, q^{N-1}$
2	$\binom{N}{2} p^{2} q^{N-2}$
3	$\binom{N}{3} p^{3} q^{N-3}$
.	.
.	.
α	$\binom{N}{\alpha} p^{\alpha} q^{N-\alpha}$
.	.
.	.

$N \qquad \binom{N}{N} P^N \longrightarrow$ (οὐδεμία μαύρη)

'Αποδεικνύεται δέ ὅτι $\sum_{0}^{N}{}_{\alpha} P_{\alpha,N} = 1$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς

$$\sum_{0}^{N}{}_{\alpha} P_{\alpha,N} = \sum_{0}^{N}{}_{\alpha} \binom{N}{\alpha} P^{\alpha} q^{N-\alpha} = (P + q)^N$$

δεδομένου ὅτι $q + P = 1$, θά εἶναι $\sum_{0}^{N}{}_{\alpha} P_{\alpha,N} = 1$

'Η συνάρτησις κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Α θά εἶναι

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad \chi < 0 \\ q^N & \text{"} \quad 0 \leqslant \chi < 1 \\ q^N + N P q^{N-1} & \text{"} \quad 1 \leqslant \chi < 2 \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \qquad \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \sum_{0}^{\alpha}{}_{i} \binom{N}{i} P^{i} q^{N-1} & \text{"} \quad \alpha \leqslant \chi < \alpha+1 \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \qquad \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ 1 & \qquad N \leqslant \chi \end{cases}$$

'Ο μέσος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Α θά εἶναι

$$M(A) = \sum_{0}^{N}{}_{\alpha} \alpha P_{\alpha,N} = \sum_{0}^{N}{}_{\alpha} \alpha \binom{N}{\alpha} P^{\alpha} q^{N-\alpha} =$$

$$= 0 \binom{N}{\alpha} P^0 q^{N-0} + \sum_{1}^{N}{}_{\alpha} \alpha \binom{N}{\alpha} P^{\alpha} q^{N-\alpha}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι $\alpha \binom{N}{\alpha} = \alpha \dfrac{N!}{(N-\alpha)!\alpha!} = \dfrac{\alpha N (N-1)!}{(N-\alpha)!\alpha(\alpha-1)!}$

$= N \binom{N-1}{\alpha-1}$, θά εἶναι

$M(A) = N P \sum_{1}^{N} {}_{\alpha} \binom{N-1}{\alpha-1} P^{\alpha-1} \cdot q^{N-\alpha}$, θέτοντες $Z = \alpha-1$

ἤτοι $\alpha = Z+1$, θά ἔχωμεν

$M(A) = N P \sum_{0}^{N-1} {}_{Z} \binom{N-1}{Z} P^{Z} \quad q^{N-Z-1} = N P (P + q)^{N-1} =$

$= N P$

Ὑπολογίζομεν ἐν συνεχείᾳ $M(A^2)$

$M(A^2) = \sum_{0}^{N} \alpha^2 P_{\alpha,N} = \sum_{0}^{N} \alpha^2 \binom{N}{\alpha} P^{\alpha} \cdot q^{N-\alpha} =$

$= N P \sum_{1}^{N} \alpha \binom{N-1}{\alpha-1} P^{\alpha-1} \cdot q^{N-\alpha}$

Θέτοντες $Z = \alpha-1$, ἔχομεν

$M(A^2) = N P \sum_{0}^{N-1} {}_{Z} (1+Z) \binom{N-1}{Z} P^{2} \quad q^{N-1-Z} =$

$= N P \sum_{0}^{N-1} {}_{Z} \binom{N-1}{Z} P^{Z} \quad q^{N-1-Z} + \sum_{0}^{N-1} {}_{Z} Z \binom{N-1}{Z} P^{Z} \quad q^{N-1-Z} =$

$= N P \left[(P + q)^{N-1} + (N-1) P \right] = N P \left[q + N P \right] =$

$= N P q + N^2 P^2$

Ἑπομένως ἡ διασπορά τῆς τυχαίας μεταβλητῆς τοῦ BERNOULLI θά εἶναι

$\sigma_A^2 = M(A^2) - \left[M(A) \right]^2 = Np q + N^2 p^2 - N^2 p^2 = Np q$

Δυνάμεθα ἐκ παραλλήλου νά ἐξετάσωμεν τήν μεταβλητήν A, ὡς ἄθροισμα τῶν N τυχαίων στοιχειωδῶν μεταβλητῶν, ἤτοι

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(i)} + \dots + \dots + A^{(N)}$$

Όπου $A^{(i)}$ εἶναι μία τυχαία μεταβλητή, ἥτις δύναται νά λάβη δύο τιμάς 1 καί 0.

Λαμβάνει τιμήν 1 μέ πιθανότητα P, ἐάν ἐξάγηται λευκή καί τιμή 0 μέ πιθανότητα q ἐάν ἡ ἐξαχθεῖσα σφαῖρα δέν εἶναι λευκή.

Ὅλαι αἱ τυχαῖαι στοιχειώδεις μεταβληταί ἔχουν τήν αὐτήν συνάρτησιν κατανομῆς.

Ἤτοι

$$\Phi_i(\chi) = \begin{vmatrix} 0 & \text{ἐάν} & \chi < 0 \\ q & & 0 \leqslant \chi < 1 \\ 1 & & 1 \leqslant \chi \end{vmatrix}$$

Σχηματίζομεν τώρα τήν ροπογεννήτριαν συνάρτησιν τῶν πιθανοτήτων διά οἱανδήποτε ἐκ τῶν στοιχειωδῶν τυχαίων μεταβλητῶν A_i

$$G_i(\tau) = M(\tau^{\alpha i}) = \sum_{0}^{1}{}_{\alpha_i} \tau^{\alpha_i} P_{\alpha_i} = \tau^0 q + \tau^1 P = q + \tau P$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι αἱ μεταβληταί A_i εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, θά ἔχωμεν

$$G(\tau) = \left[G_i(\tau)\right]^N = (q + \tau P)^N = \sum_{\alpha=0}^{N} \tau^\alpha \binom{N}{\alpha} P^\alpha \; q^{N-\alpha}$$

Ἀλλά, ἤδη γνωρίζομεν ὅτι, ὁ συντελεστής τῆς τ^α εἶναι ἡ πιθανότης, μέ τήν ὁποίαν ἡ τυχαία μεταβλητή A λαμβάνει τήν τιμήν α ἐπομένως ἔχομεν:

$$G_{(\tau)} = \sum_{0}^{N}{}_{\alpha} \; \tau^\alpha P_{\alpha,N} \;.$$

Ὁ τύπος τῆς παραγοντικῆς ροπογεννητρίας συναρτήσεως διά τάς στοιχειώδεις τυχαίας μεταβλητάς $A^{(i)}$, θά εἶναι

$$N_i(\beta) = (1+\beta)^0 q + (1+\beta) P = 1+\beta p$$

Κατά συνέπειαν ἡ παραγοντική ροπογεννήτρια συνάρτησις $N(\beta)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $A = \sum_{1}^{N} i \; \alpha_i$ θά εἶναι

$$N(\beta) = \left[N_i(\beta)\right]^N = (1+\beta P)^N = \sum_{0}^{N} i \frac{\beta^i}{i!} N(N-1) \ldots\ldots (N-i+1) p^i$$

Ἐκ τῆς ὡς ἄνω σχέσεως εὑρίσκομεν

$$M(i) = N(N-1) \ldots\ldots (N-i+1) P^i$$

$$M(A) = M_{(1)} = NP, \quad M_{(2)} = N(N-1) P^2$$

$$M(A^2) = M_{(2)} + M_{(1)} = N(N-1) P^2 + NP = N^2 P^2 - NP^2 + NP =$$

$$= NP (NP-P+1) = NP(NP+q) = N^2 P^2 + NPq$$

Ὅθεν

$$\sigma^2(A) = M(A^2) - \left[M(A)\right]^2 = N^2 P^2 + NPq - N^2 P^2 = NPq$$

Ἡ γεννήτρια συνάρτησις θά δίδεται ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων

$$F_i(\alpha) = e^{\alpha \cdot 0} q + e^{\alpha \cdot 1} P = q + e^{\alpha} P$$

$$F(\alpha) = \left[F_i(\alpha)\right]^N = (q + e^{\alpha} P)^N$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BERNOULLI

Ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν δοκιμῶν N μετ᾽ἐπανατοποθετήσεως αὐξάνῃ συνεχῶς τείνων πρός τό ἄπειρον, τότε τείνει πρός τήν μονάδα τόσον ἡ πιθανότης ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς σφάλμα ($L=A-Np$) λαμβάνει μίαν τιμήν μεγαλυτέραν ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ H, ὅσον καί ἡ πιθανότης ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ σφάλματος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς F (ὅπου $F=\frac{A}{N}$) λαμβάνει τιμήν μικροτέραν ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ ε. Διά συμβόλων τό ὡς ἄνω θεώρημα ἐκφράζεται ἐκ τῶν κάτωθι δύο σχέσεων

α) $$\lim_{N\to\infty} P(|L|>H)=1$$

β) $$\lim_{N\to\infty} P(|F-p|<\varepsilon)=1$$

Ἀπόδειξις τῆς (α) σχέσεως

Διά $H>0$ ἔχομεν $P\{\,|L|>H\,\}=P\{\,L<-H,\ L>H\,\}=$

$=1-P\{\,-H\leq L\leq H\,\}$ καί διά $L=A-Np$

λαμβάνομεν

$P\{\,|L|>H\,\}=1-P\{\,-H\leq A-Np\leq H\,\}=$

$=1-P\{\,-H+Np\leq A\leq H+Np\,\}.$

Ὡς γνωστόν ἡ κατανομή τῆς A εἶναι

$$P_{\alpha,N}\equiv P\,(A=\alpha)=\frac{N!}{\alpha!(N-\alpha)!}\,p^{\alpha}q^{N-\alpha} \quad \text{καί}$$

παριστᾶ μίαν πολυγωνικήν γραμμήν.

Ἡ καμπύλη ἡ ὁποία δύναται νά ἀντικαταστήσῃ κατά προσέγγισιν τήν γραμμήν αὐτήν, ἥτις θά ἐκφράζῃ τήν κατά προσέγγισιν πιθανότητα $P(A=\alpha)$, εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ διά $N\to\infty$.

'Αποδεικνύεται μέ τήν βοήθειαν τοῦ τύπου τοῦ STIRLING

($\nu! = \sqrt{2\pi\nu}.\nu^{\nu}.e^{-\nu}$) ὅτι:

$$P(A=\alpha) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{(\alpha-Np)^2}{2Npq}}$$

Εἶναι φανερόν λοιπόν ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή A τοῦ BERNOULLI ἀκολουθεῖ τόν νόμον τῆς κανονικῆς κατανομῆς ($M(A)=\mu=Np$, $\sigma_A=\sigma=\sqrt{Npq}$)

Καί ἐπί πλέον θά ἔχωμεν:

$$I = P\left[-H+Np \leqslant A \leqslant H+Np\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \int_{-H+Np}^{H+Np} e^{-\frac{(\alpha-N\ )^2}{2Npq}} d\alpha$$

Θέτομεν $Z = \frac{\alpha-Np}{\sqrt{Npq}}$ καί λαμβάνομεν:

$\alpha = Z\sqrt{Npq} + Np$ ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$d\alpha = \sqrt{Npq}\,dZ$ καί διά τά ἄκρα ὁλοκληρώσεως

$$-H+Np = \alpha = Z\sqrt{Npq} + Np \Longrightarrow Z = \frac{-H}{\sqrt{Npq}}$$

$$H+Np = \alpha = Z\sqrt{Npq} + Np \Longrightarrow Z = \frac{H}{\sqrt{Npq}}$$

Ἔχομεν λοιπόν

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-H}{\sqrt{Npq}}}^{\frac{H}{\sqrt{Npq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{-H}{\sqrt{Npq}}}^{0} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ + \int_{0}^{\frac{H}{\sqrt{Npq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \right)$$

Ἄρα:

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{|L| > H\right\} = 1 - \lim_{N \to \infty} P\left\{-H+Np \leq A \leq H + Np\right\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{N \to \infty} \int_{\frac{-H}{\sqrt{Npq}}}^{o} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ + \lim_{N \to \infty} \int_{o}^{\frac{H}{\sqrt{Npq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(o + o) = 1$$

<u>'Απόδειξις τῆς (β) σχέσεως</u>

"Ητοι $\lim_{N \to \infty} P\left\{|F - p| < \varepsilon\right\} = 1$

"Οπου $F = \frac{A}{N}$ καί καλεῖται <u>τυχαία μεταβλητή Συχνότητος</u>

"Αρα $p = M(F) =$ ὁ μέσος τῆς F

καί $\sqrt{\frac{pq}{N}} = \sigma\,(F) =$ τυπική ἀπόκλησις τῆς F.

Διά τήν ἀπόδειξιν τῆς ὡς ἄνω σχέσεως ἐφαρμόζομεν τήν ἀνισότητα τοῦ **TCHEBICHEV**.

$$1 \geq P\{\,|F - p| < \varepsilon\,\} \geq 1 - \frac{pq}{N.\varepsilon^2}$$

'Εάν λάβωμεν τό ὅριον διά N τείνων εἰς τό ἄπειρον, θά ἔχωμεν

$$1 \geq \lim_{N \to \infty} P\{\,|P - p| < \varepsilon\,\} \geq \lim_{N \to \infty}\left(1 - \frac{pq}{N\varepsilon^2}\right)$$

Κατά συνέπειαν

$$1 \geq \lim_{N \to \infty} P\{|F - p| < \varepsilon\} \geq 1$$

'Επομένως $\lim_{N \to \infty} P\{\,|F - p| < \varepsilon\,\} = 1$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ MOIVRE-STIRLING ΚΑΙ ΤΟΥ LAPLACE

Δίδεται ἕν γεγονός Ε,τό ὁποῖον ἔχει πιθανότητα ἐμφανίσεως σταθερά P εἰς κάθε δοκιμήν.

'Η πιθανότης ὅτι εἰς η δοκιμάς τό γεγονός Ε ἐμφανίζεται ν φοράς, βάσει τοῦ σχήματος τοῦ BERNOULLI θά εἶναι

$$P_{\nu,\eta} = \frac{\eta!}{\nu!\,(\eta-\nu)!} P^{\nu} \quad q^{\eta-\nu}$$

Διά μεγάλας ὅμως τιμάς τοῦ η καί ν ὁ ἀριθμητικός προσδιορισμός τῆς ὡς ἄνω πιθανότητος καθίσταται δύσκολος. Χρειάζεται λοιπόν ἕνας προσεγγιστικός τύπος διά τήν πιθανότητα $P_{\nu,\eta}$. Πρός τόν σκοπόν τοῦτον ὑπάρχουν πολλοί προσεγγιστικοί τύποι, οἱ σπουδαιότεροι τῶν ὁποίων εἶναι τοῦ MOIVRE - STRIRLING καί ὁ τύπος τοῦ LAPLACE. 'Ο τύπος τοῦ STRIRLING ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: ἐάν ν φυσικός ἀριθμός ἰσχύει ὅτι

$$\nu! = \nu^{\nu} = \nu^{\nu}\, e^{-\nu} \quad \sqrt{2\pi\nu}$$

Λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν ὅτι

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu!}{\nu^{\nu}\, e^{-\nu}\sqrt{2\pi\nu}} = 1$$

'Ενῶ ὁ τύπος τοῦ LAPLACE ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

'Εάν οἱ ἀριθμοί ν,η πληροῦν τήν ἀνισότητα

$$|P.\nu-\eta| < \nu^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(\nu)$$

"Οπου $0 < P < 1$ καί φ(ν) μία συνάρτησις τοῦ ν μηδενιζομένη διά $\nu \longrightarrow \infty$.

Θά ἰσχύῃ ἡ ἀσυμπτωματική προσέγγισις

$$P_{\nu,\eta} = \binom{\nu}{\eta} P^{\eta}(1-P)^{\nu-\eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi P(1-P)\nu}} \cdot e^{-\frac{(P\nu-\eta)^2}{2P(1-P)\nu}}$$

λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι :

$$\lim_{\eta \to \infty} \frac{P_{\nu,\eta}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi P(1-P)\nu}} \cdot e^{-\frac{(P^{\nu-\eta})^2}{2P(1-P)\nu}}} = 1$$

ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ BERNOULLI ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν κάλπην, ἥτις περιέχει Η σφαιρίδια. Ὑποθέτομεν ὅτι μ_1 ἐκ τῶν Η σφαιριδίων φέρουν τόν ἀριθμόν 1, μ_2 φέρουν τόν ἀριθμόν 2, ... , μ_K φέρουν τόν ἀριθμόν Κ. Θά ἔχωμεν

$$\sum_{1}^{K} \mu_i = H$$

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς ἐκ τῆς κάλπης μίας σφαίρας, ἥτις φέρει τήν ἔνδειξιν i θά εἶναι

$$P_i = \frac{\mu_i}{N} \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, K)$$

Βάσει τῶν ὡς ἄνω ὑποθέσεων, ἐξάγομεν Ν σφαιρίδια, καί καθ'ἑκάστην ἐξαγωγήν τοποθετοῦμεν τήν ἐξαχθεῖσαν σφαῖραν ἐκ νέου εἰς τήν κάλπην, εἰς τρόπον ὥστε καθ'ἑκάστην ἐξαγωγήν ἡ κάλπη νά παρουσιάζῃ τήν αὐτήν σύνθεσιν.

Ἔστω ὅτι ἐκ τῶν Ν ἐξαγωγῶν ἐξήχθησαν α_1 σφαιρίδια φέροντα τόν ἀριθμόν 1, α_2 φέροντα τόν ἀριθμόν 2, ..., α_K φέροντα τόν ἀριθμόν Κ, θά εἶναι

$$\Sigma_{1}^{K} \alpha_i = N$$

Ἂν μεταβληθῇ ὁ ἀριθμός N τῶν δοκιμῶν τό ἀποτέλεσμα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$, μεταβάλλεται καί διαγράφει τήν τυχαίαν μεταβλητήν. $(A_1, A_2, \ldots, A_K)$, ἥτις καλεῖται μεταβλητή τοῦ BERNOULLI τῶν περισσοτέρων διαλογῶν

θά ἔχωμεν $A_1 + A_2 + \ldots + A_K = N$

Τυχαία στοιχειώδη μεταβλητή τοῦ BERNOULLI

Ἡ στοιχειώδης μεταβλητή τοῦ BERNOULLI εἶναι ἱκανή νά λάβῃ τάς κάτωθι K τιμάς

$(1, 0, \ldots, 0)\ (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots (0, 0, \ldots, 1)$.

μέ πιθανότητας ἀντιστοίχως $P_1, P_2, \ldots, P_K$.

Γεννητική συνάρτησις τῶν στοιχειωδῶν πιθανοτήτων.

$$G^*(T_1, T_2, \ldots, T_K) = T_1^1 T_2^0 \ldots T_K^0 P_1 + T_1^0 T_2^1 \ldots T_K^0 P_2 + \ldots + T_1^0 T_2^0 \ldots T_K^1 P_K) = T_1 P_1 + T_2 P_2 + \ldots + T_K P_K.$$

Στοιχειώδης γεννητική συνάρτησις τῶν παραγοντικῶν ροπῶν.

$$N^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K) = G(1+\beta_1, 1+\beta_2, \ldots, 1+\beta_K) =$$

$$= (1+\beta_1) P_1 + (1+\beta_2) P_2 + \ldots + (1+\beta_K) P_K =$$

$$1+\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \ldots + \beta_K P_K$$

Στοιχειώδης ροπογεννήτρια συνάρτησις

$$P^*(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots\ldots \alpha_K) = G^* (e^{\alpha_1} , e^{\alpha_2} , \ldots\ldots , e^{\alpha_K}) =$$

$$e^{\alpha_1} P_1 + e^{\alpha_2} P_2 + \ldots\ldots + e^{\alpha_K} P_K = 1 + P_1 (\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{2} + \ldots\ldots) + P_2 (\alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{2} + \ldots\ldots) + \ldots\ldots + P_K(\alpha_K + \frac{\alpha_K^2}{2} + \ldots$$

Συνάρτησις γεννητική τῶν ἡμιαναλλοιώτων (ἡμιμεταβλητῶν)

$$L^* (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots\ldots , \alpha_K) = \log F^* (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_K) =$$

$$= (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots\ldots + \alpha_K P_K) + \frac{1}{2} \Big[\alpha_1^2 P_1 (1-P_1) + \ldots\ldots + \alpha_K^2 P_K (1-P_K) - 2 \alpha_1 \alpha_2 P_1 P_2 - 2 \alpha_1 \alpha_3 P_1 P_3 - \ldots\ldots - 2 \alpha_{K-1} \alpha_K P_{K-1} P_K\Big] + \ldots$$

Τυχαία μεταβλητή τοῦ BERNOULLI

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς πιθανότητος $P_{\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots\ldots , \alpha_K}$ συμφέρει νά ἀνατρέξωμεν εἰς τήν Γεννητικήν συνάρτησιν τῶν πιθανοτήτων.

Μέ βάσιν τήν στοιχειώδη γεννητικήν πιθανότητα, τήν ὁποίαν εἴδομεν ἀνωτέρω καί τήν ἰδιότητα ὅτι ἡ γεννητική συνάρτησις τῶν πιθανοτήτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν περισσοτέρων τυχαίων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν στοιχειωδῶν γεννητικῶν συναρτήσεων, θά ἔχωμεν

$$G (T_1 , T_2 , \ldots\ldots\ldots , T_K) = \left[G^* (T_1 , T_2 \ldots\ldots T_K)\right]^N =$$

$$=\left[T_1 P_1 + T_2 P_2 + \ldots\ldots + T_K P_K\right]^N = \Sigma_{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_K} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots\ldots$$

$$\ldots T_K^{\alpha_K} \frac{N!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\ldots\alpha_K!} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots\ldots P_K^{\alpha_K}$$

'Επομένως ή ζητουμένη πιθανότης θά είναι

$$\mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_K} = \frac{N!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_K!} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots\ldots P_K^{\alpha_K}$$

Είς τήν περίπτωσιν τῶν δοκιμῶν, βάσει τοῦ σχήματος τοῦ BERNOULLI, συμφέρει διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ροπῶν νά ὑπολογισθῇ πρῶτον ἡ γεννητική συνάρτησις τῶν παραγοντικῶν ροπῶν. Ἦτοι:

$$N(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_K) = \left[N^*(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_K)\right]^N =$$

$$= \left[1 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \ldots\ldots + \beta_K P_K\right]^N =$$

$$= \Sigma_{\tau_1 \tau_2 \ldots\ldots \tau_K} \frac{\beta_1 \; \beta_2 \ldots\ldots \beta_K}{\tau_1!\;\tau_2!\ldots\tau_K!} N(N-1)\ldots(N-\tau_1 -$$

$$-\tau_2 - \ldots\ldots - \tau_{K+1}) P_1^{\tau_1} P_2^{\tau_2} \ldots P_K^{\tau_K}$$

'Η ροπή τῆς τάξεως τ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως.

$$M(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_K) = N(N-1)\ldots(N-\tau+1) P_1^{\tau_1} P_2^{\tau_2} \ldots P_K^{\tau_K}, \left(\tau = \Sigma_1^{\varkappa} \tau_i\right)$$

Οἱ τύποι οἱ ὁποῖοι συνδέουν τάς ροπάς μέ τάς παραγοντικάς τοιαύτας εἶναι:

$$M_1 = M_{(1)}$$

$M_2 = M_{(2)} + M_{(1)}$

$M_3 = M_{(3)} + 3M_{(2)} + M_{(1)}$

$M_4 = M_{(4)} + 6\, M_{(3)} + 7\, M_{(2)} + M_{(1)}$

.....

'Ο μέσος καί ή διακύμανσις τῆς A_i , εἶναι

$M\,(A_i) = N\,P_i$

$\sigma^2_{A_i} = N\,P_i\,q_i$

Ὑπεργεωμετρική Κατανομή

Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν κάλπην, ἥτις περιέχει Η σφαίρας ἐκ τῶν ὁποίων $K(K \leqslant H)$ εἶναι λευκαί καί αἱ ὑπόλοιπαι μαῦραι.

Ἐξάγομεν Ν σφαῖρας ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι ἑκάστη ἐξαχθεῖσα σφαῖρα δέν ἐναποτίθεται ἐκ νέου εἰς τήν κάλπην. Ὑπό τήν ὡς ἄνω ἔννοιαν εἰς ἑκάστην ἐξαγωγήν ἡ πιθανότης δέν εἶναι σταθερά, ἀλλά μεταβάλλεται καί ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν προηγουμένων ἀποτελεσμάτων.

Ὑποθέτομεν ἐν συνεχείᾳ, ὅτι ἐκ τῶν Ν ἐξαγωγῶν ἄνευ ἐπανατοποθετήσεων (IN BLOCCO) α σφαῖραι εἶναι λευκαί καί Ν-α μαῦραι.

Ἄς ἴδωμεν τά ὅρια ἐντός τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ τιμή α.

Προφανῶς ἐάν $N \leqslant K$, θά εἶναι $\alpha = N$ εἰς τήν περίπτωσιν, καθ' ἥν ὅλαι αἱ ἐξαχθεῖσαι σφαῖραι (Ν) εἶναι λευκαί. Εἶναι ὅμως δυνατόν νά εἶναι $N > K$.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην, δεδομένου ὅτι εἰς τήν κάλπην ὑπάρχουν, ἐξ ὑποθέσεως, Κ σφαῖραι λευκαί, εἶναι δυνατόν νά ἐξαχθοῦν εἰς τήν πλέον εὐνοϊκήν περίπτωσιν K σφαῖραι λευκαί καί N - K μαῦραι.

Ὅθεν προκύπτει ὅτι ἡ ἀνωτέρα τιμή τοῦ α εἶναι τό μικρότερον μεταξύ τοῦ N καί K,

Ἤτοι

$$\alpha \leqslant \text{MIN} \ \{N, K\}$$

Ἄς ἴδωμεν ἐν συνεχείᾳ ποία δύναται νά εἶναι ἡ κατωτέρα τιμή τοῦ α εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἔχομεν $N < H - K$

Πιθανόν ἐκ τῶν N ἐξαγωγῶν οὐδεμία σφαῖρα νά εἶναι λευκή, κατά συνέπεια θά εἶναι $\alpha = 0$.

Ἀντιθέτως εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν $N > H - K$, βεβαίως ἔχουν ἐξαχθῆ μερικαί σφαῖραι λευκαί. Πράγματι θά εἶναι $H - K$ σφαῖραι μαῦραι καί $N - (H - K)$ σφαῖραι λευκαί.

Εἶναι φανερόν λοιπόν ὅτι ἡ κατωτέρα τιμή τοῦ α θά εἶναι $\text{MAX} \ \{0, N + K - H\}$

Τελικῶς ἡ τιμή τοῦ α θά περιέχεται εἰς τά κάτωθι ὅρια:

$$\text{MAX}\{0, N + K - N\} \leqslant \alpha \leqslant \text{MIN}\{N, K\}.$$

Ἄν μεταβληθῇ ὁ ἀριθμός N τῶν ἐξαγωγῶν ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως, ἡ τιμή α μεταβάλλεται καί διαγράφει μίαν τυχαίαν μεταβλητήν A, ἥτις καλεῖται τυχαία μεταβλητή ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως.

Ἄς ἴδωμεν τώρα ποία διαφορά ὑφίσταται μεταξύ τῶν πιθανοτήτων τοῦ Σχήματος τοῦ BERNOULLI καί τοῦ σχήματος IN BLOCCO.

1 Δοκιμή

Ἡ πιθανότης τῆς ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς εἰς τό σχῆμα τοῦ BERNOULLI δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$P_1 = \frac{K}{H}$$

Ὅπου K εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν λευκῶν σφαιρῶν καί H ὁ συνολι -

κός ἀριθμός τῶν σφαιρῶν.

'Αναλόγως εἰς τό σχῆμα τῆς ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως (IN BLOCCO) θά εἶναι

$$\bar{P}_1 = \frac{K}{H}$$

2 Δοκιμή

Εἰς τό σχῆμα τοῦ BERNOULLI θά εἶναι

$P_2 = \frac{K}{H}$ καθόσον ἡ ἐξαχθεῖσα σφαῖρα ἐπανατοποθετεῖται ἐκ νέου εἰς τήν κάλπην πρίν λάβῃ χώραν ἡ δευτέρα ἐξαγωγή.

'Ενῷ εἰς τό σχῆμα ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως (IN BLOCCO), ἐάν εἰς τήν πρώτην ἐξαγωγήν ἐξήχθη σφαῖρα λευκή, τότε ἡ κάλπη θά περιέχῃ H-1 σφαῖρας ἐκ τῶν ὁποίων (K-1) λευκαί.- 'Επομένως ἡ πιθανότης θά εἶναι

$$\bar{P}_2 = \frac{K-1}{H-1}$$

Φαίνεται λοιπόν καθαρά, ὅτι ἐνῶ εἰς τό σχῆμα τοῦ BERNOULLI ἡ πιθανότης τῆς ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς εἰς τάς διαδοχικάς δοκιμάς παραμένει πάντοτε σταθερά.

$$P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = \frac{K}{H} = P$$

'Αντιθέτως εἰς τό σχῆμα ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως ἡ πιθανότης μεταβάλλεται.

"Ητοι :

$$\bar{P}_1 = \frac{K}{H},\ \bar{P}_2 = \begin{cases} \dfrac{K}{H-1} = \text{ἐάν εἰς τήν πρώτην ἐξαγωγή ἐξήχθη σφαῖρα μαύρη.} \\[2ex] \dfrac{K-1}{H-1} = \text{ἐάν ἐξήχθη σφαῖρα λευκή.} \end{cases}$$

$$\bar{P}_3 = \begin{cases} \dfrac{K}{H-2} & \text{οὐδεμία λευκή} \\[2ex] \dfrac{K-1}{H-2} & \text{μία λευκή καί μία μαύρη} \\[2ex] \dfrac{K-2}{H-2} & \text{δύο λευκαί} \end{cases}$$

Διά τήν καλυτέραν μελέτην τῆς τυχαίας μεταβλητῆς A ὑπολογίζομεν τήν πιθανότητα $\bar{P}_{\alpha,N}$ διά τῆς ὁποίας ἡ τυχαία μεταβλητή A λαμβάνει ἐπί N ἐξαγωγῶν τήν τιμήν α.

Ἡ $\bar{P}_{\alpha,N}$ προκύπτει ἐκ τοῦ λόγου τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρός τό σύνολον τῶν δυνατῶν περιπτώσεων:

1) Αἱ δυναταί περιπτώσεις θά εἶναι $\binom{H}{N}$

2) Αἱ εὐνοϊκαί περιπτώσεις εἶναι

$$\binom{K}{\alpha}\binom{H-K}{N-\alpha}$$

Ἑπομένως θά ἔχωμεν

$$\bar{P}_{\alpha,N} = \frac{\binom{K}{\alpha}\binom{H-K}{N-\alpha}}{\binom{H}{N}} = \frac{K!\,(H-K)!\,N!\,(H-N)!}{\alpha!\,(K-\alpha)!(N-\alpha)!H!(\ -K-H+\alpha)!}$$

$$= \frac{K!\,(H-K)!}{H.} \cdot \frac{N!}{\alpha!\,(N-\alpha)!} \cdot \frac{(H-N)!}{(K-\alpha)!(H-K-N+\alpha)!}$$

$$= \frac{\binom{N}{\alpha}\binom{H-N}{K-\alpha}}{\binom{H}{K}} = \frac{N!}{\alpha!(N-\alpha)!} \cdot \frac{(H-N)!}{H!} \quad \frac{K!}{(K-\alpha)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(H-K)!}{(H-K-N+\alpha)!} = \binom{N}{\alpha} \frac{K(K-1)\ldots(K-\alpha+1)(H-K)(H-K-1)\ldots}{H(H-1)\ldots(H-\alpha+1)(H-\alpha)(H-\alpha-1)\ldots}$$

$$\frac{\ldots\ldots(H-K-N+\alpha+1)}{\ldots\ldots(H-N+1)}$$

Ὑπολογίζομεν τάς παραγοντικάς ροπάς τῆς μεταβλητῆς A. Ἡ παραγοντική ροπογεννήτρια συνάρτησις δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως:

$$N(\beta) = M\left[(1-\beta)^{\alpha}\right] = \sum_{\alpha=0}^{\alpha} \cdot \bar{P}_{\alpha,N}\,(1+\beta)^{\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\alpha} \frac{\binom{K}{\alpha}\binom{H-K}{N-\alpha}}{\binom{H}{N}} \sum_{S=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{S} \beta^S ,$$

'Αποδεικνύεται δέ ὅτι

$$N(\beta) = \sum_{S=0}^{S} \frac{\beta^S}{S!} \frac{\binom{N}{S}}{\binom{H}{S}} K(K-1)\dots.(K-S+1)$$

'Εκ τῆς ὡς ἄνω σχέσεως λαμβάνομεν

$$M_{(S)} = \frac{\frac{N!}{(H-S)!S!}}{(H-S)!S!} K(K-1)\dots.(K-S+1) =$$

$$= N(N-1) \dots\dots..(N-S+1) \frac{K(K-1)\dots(K-S+1)}{H(H-1)\dots(H-S+1)}$$

'Επομένως θά εἶναι

$$M_{(1)} = N\frac{K}{H} = N P$$

$$M_{(2)} = N(N-1)\frac{K(K-1)}{H(H-1)} = N(N-1)P\frac{P-\frac{1}{H}}{1-\frac{1}{H}} =$$

$$= N(N-1)\frac{HP^2 - P}{H-1}$$

$$M_{(A)} = M_{(1)} = NP$$

$$M(A^2) = M_{(1)} + M_{(2)} = N(N-1)\frac{H}{H-1}P^2 + N\frac{H-N}{H-1}P$$

$$\sigma_A^2 = M(A^2) - \left[M(A)\right]^2 = \frac{H-N}{H-1} NPq$$

Σχῆμα ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως περισσοτέρων τῶν δύο ἐναλλαγῶν

Ἔστω μία κάλπη, ἥτις περιέχει Η σφαιρίδια, ἐξ αὐτῶν μ_1 φέρουν τόν ἀριθμόν 1, μ_2 φέρουν τόν ἀριθμόν 2, ..., μ_K φέρουν τόν ἀριθμόν Κ.

Θά εἶναι $\sum_1^K \mu_i = H$

Ἐξάγομεν, ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως, Ν σφαιρίδια ἀπό τήν δοθεῖσαν κάλπην. Ἐξ αὐτῶν α_1 φέρουν τόν ἀριθμόν 1, α_2 φέρουν τόν ἀριθμόν 2, ...,α_K φέρουν τόν ἀριθμόν Κ.

Μεταβαλλομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοκιμῶν Ν, τό ὡς ἄνω ἀποτέλεσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$ μεταβάλλεται καί διαγράφει μία τυχαία μεταβλητή $(A_1, A_2, \ldots, A_K)$, ἥτις καλεῖται μεταβλητή ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως.

Ἡ πιθανότης $P_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_K}$ μέ τήν ὁποίαν ἡ τυχαία μεταβλητή $(A_1, A_2, A_3 \ldots, A_K)$ λαμβάνει τόν προσδιορισμόν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$, δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως.

$$P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K} = \frac{\binom{\mu_1}{\alpha_1}\binom{\mu_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\mu_K}{\alpha_K}}{\binom{H}{N}}$$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ

Ἡ παραγοντική συνάρτησις δίδεται ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως:

$$N(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_K) = \Sigma_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_K} \frac{\beta_1^{\tau_1}\beta_2^{\tau_2}\cdots\beta_K^{\tau_K}}{\tau_1!\,\tau_2!\ldots\tau_K!}.$$

$$\cdot \frac{\binom{N}{\tau}}{\binom{H}{\tau}} \cdot \mu_1 (\mu_1 -1)\ldots.(\mu_2-\tau_1+1)\mu_2 (\mu_2-1)\ldots(\mu_2-\tau_2+1)\ldots$$

$$\ldots\mu_K (\mu_K -1) \ldots\ldots (\mu_K -\tau_K +1)$$

Ἡ παραγοντική ῥοπή τάξεως τ, θά εἶναι

$$M (\tau_1,\tau_2,\ldots\ldots,\tau_K) = \frac{N!(H-\tau)!}{(N-\tau)!H!} \mu_1 (\mu_1-1)\ldots(\mu_1-\tau_1+1)$$

$$\ldots\ldots\ldots \mu_K (\mu_K -1) \ldots. (\mu_K - \tau_K + 1) \text{ ὅπου } \sum_i^{\kappa} \tau_i$$

Ἐάν θέσωμεν $P_i = \frac{\mu_i}{H}$ καί $q_i = 1-P_i$, θά ἔχωμεν

$$M (A_i) = N P_i$$

$$M (A_i A_J) = N (N-1) \frac{H}{H-1} P_i P_J$$

$$M (A_i^2) = N (N-1) \frac{H}{H-1} P_i^2 + N \frac{H-N}{H-1} P_i$$

$$\sigma^2_{A_i} = \frac{H-N}{H-1} N P_i q_i$$

Περίπτωσις θεμελιώδης τῶν ἐξαγωγῶν ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μίαν κάλπην, ἥτις περιέχει H σφαιρίδια μέ H διαφορετικούς τύπους, ἤτοι ἕν σφαιρίδιον διά κάθε τύπον, φέρουν δέ τάς κατωτέρω ἐνδείξεις:

X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , ...,X_H.

Ἐξάγομεν ἄνευ ἐπαναλήψεως N σφαιρίδια.

Εἰς κάθε σφαιρίδιον ἐκ τῶν H ἐξαχθέντων ἀντιστοιχεῖ καί μία τυχαία μεταβλητή,ήτις λαμβάνει τάς τιμάς 0 καί 1, ἀναλόγως ἐάν εἰς τάς N ἐξαγωγάς ἡ ζητουμένη σφαίρα ἐμφανίζεται ἤ ὄχι.

Εἰδικῶς εἰς τήν σφαῖραν τήν φέρουσαν τήν ἔνδειξιν X_i ἀντιστοιχεῖ ἡ τυχαία μεταβλητή A_i καί ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_H = N$$

Αἱ τυχαῖαι μεταβληταί A_i ἔχουν τήν ἰδίαν συνάρτησιν κατανομῆς, δηλαδή λαμβάνουν ὅλαι τιμήν 1 μέ πιθανότητα P καί τιμήν 0 μέ πιθανότητα

$$q = 1 - P$$

Ἡ πιθανότης P δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως

$$P = \frac{1}{H} \cdot N$$

Ἡ μέση τιμή $M(A_1) = 0 \cdot \frac{H-N}{H} + 1\,\frac{N}{H} = \frac{N}{H}$

Ἡ μέση τιμή $M(A_i^{\tau}) = 0^{\tau}\,\frac{H-N}{H} + 1^{\tau}\,\frac{N}{H} = \frac{N}{H}$

ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ POISSON ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΝΑΛΛΑΓΩΝ

Ἔχομεν N κάλπας U_1 , U_2,.......,U_N καί ἔστω P_1 , P_2 , ...,P_N αἱ ἀντίστοιχοι πιθανότητες τῆς ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς ἐκ τῆς κάλπης 1, 2, ...,N.

Ἐξ ἑκάστης κάλπης ἐξάγεται τυχαίως μία σφαῖρα. Ἔστω ὅτι ἐξήχθησαν K σφαῖραι λευκαί καί N – K μαῦραι. Ἄν ἐπαναληφθῇ ὁ ἀριθμός τῶν ἐξαγωγῶν N, τότε ὁ ἀριθμός K μεταβάλλεται καί διαγράφει μίαν τυχαίαν μεταβλητήν X, ἥτις καλεῖται τυχαία μεταβλητή τοῦ POISSON τῶν δύο διαλογῶν.

Ἤτοι :

N K

N K_1

N K_2

N K_3

.

.

.

N K_K

Ἡ ὡς ἄνω τυχαία μεταβλητή X δύναται νά ἐξετασθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν N τυχαίων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, δηλαδή

$$X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_N$$

Ὅπου ἡ μεταβλητή X_i λαμβάνει τήν τιμήν 1 μέ πιθανότητα P_i (πιθανότης ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς) καί τήν τιμήν 0 μέ πιθανότητα q_i (πιθανότης τῆς μή ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς).

Ἡ Γεννητική συνάρτησις πιθανότητος τῆς μεταβλητῆς X δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως:

$$G(\tau) = \prod_{i=1}^{N} G_i(\tau)$$

Ὅπου $G_i(\tau)$ εἶναι ἡ Γεννητική συνάρτησις πιθανότητος σχετική εἰς μίαν γενικήν τυχαίαν μεταβλητήν X_i.

Ἐξ ἄλλου λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ μεταβληταί X_i δύνανται νά ἐξετασθῶσιν ὡς ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων θά ἔχωμεν:

$$G(\tau) = \prod_{i=1}^{N} M(\tau^{X_i}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} (\tau^0 q_i + \tau^1 P_i) = \prod_{i=1}^{N} (\tau P_i + q_i) =$$

$$(P_1 \tau + q_1)(P_2 \tau + q_2) \ldots\ldots (P_N \tau + q_N) =$$

$$= \sum_{o}^{N} \tau^{\varkappa} \sum p_{i1} \cdot p_{i2} \cdots p_{i\varkappa} \cdot q_{i\varkappa+1} \cdot q_{i\varkappa+2} \cdots q_{iN}$$

Όπου P_{iS} εἶναι ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς εἰς τήν δοκιμήν τάξεως i, ἀπό τήν κάλπην S. Τό δέ δεύτερον ἄθροισμα τῆς ὡς ἄνω σχέσεως εἶναι οἱ $\binom{N}{K}$ δυνατοί συνδυασμοί, σχηματισθέντες ἐκ K πιθανοτήτων P_i καί ἐκ N - K πιθανοτήτων q_i. Ἑπομένως ἡ τυχαία μεταβλητή X τοῦ POISSON λαμβάνει τήν τιμήν K μέ πιθανότητα

$$P_{K,N} = \sum_{i} P_{i1} \; P_{i2} \cdots P_{iK} \; q_{i\varkappa-1} \cdots q_{iN}$$

Ἡ παραγοντική ροπογεννήτρια συνάρτησις δίδεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως.

$$N(\beta) = (1+P_1\beta)(1+P_2\beta)\cdots(1+P_N\beta) =$$

$$= \sum_{o}^{N} S \; \beta^{S} \sum_{i} P_{i1} \; P_{i2} \cdots P_{iS}$$

Κατά συνέπειαν αἱ παραγοντικαί ροπαί θά εἶναι

$$M_{(\tau)} = \tau! \sum_{i} P_{i1} \; P_{i2} \cdots P_{iS}$$

$$M_{(1)} = \sum_{1}^{N} i \cdot P_i$$

$$M_{(2)} = 2 \sum_{i<J} P_i \, P_J$$

$$M(X) = M_{(1)} = \sum_{1}^{N} i \; P_i$$

$$M(X^2) = M_{(1)} + M_{(2)} = (2 \sum_{i<J} P_i \; P_J + \sum_{1}^{N} P_i$$

Συμβολίζομεν διά $\bar{P}$ τήν μέσην ἀριθμητικήν τιμήν τῶν πιθανοτήτων P_i, ἤτοι

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} i \; P_i$$

Συμβολίζρμενές ἄλλου μέ σ_ρ^2 τήν διασποράν, ἥτις παρατηρεῖται εἰς τάς κάλπας, ἥτοι

$$\sigma_\rho^2 = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (P_i - \bar{P})^2 .$$

Βάσει τῶν ὡς ἄνω ὑποθέσεων θά ἔχωμεν

$$M(X) = N\bar{P}$$

$$M(X^2) = N^2\bar{P}^2 - N\sigma_\rho^2 + N\bar{P}(1-\bar{P})$$

$$\sigma^2_X = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = N\bar{P}\bar{q} - N\sigma_\rho^2$$

ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ POISSON ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΝΑΛΛΑΓΩΝ

Ἔστω ὅτι N κάλπαι περιέχουν σφαιρίδια σημειούμενα μέ τά ψηφία 1, 2,....,K.

Συμβολαίζομενμέ $P_i^{(\tau)}$ τήν πιθανότητα ἐξαγωγῆς ἀπό τήν κάλπην τήν φέρουσαν τόν ἀριθμόν τ ἑνός σφαιριδίου φέρον τό ψηφίον i

$$(i = 1, 2, ...,K_1, \tau = 1, 2 .....,N)$$

Ἐξ ἑκάστης ἐκ τῶν N καλπῶν ἐξάγομεν ἕν σφαιρίδιον. Λαμβάνομεν μ_1 σφαιρίδια φέροντα τό ψηφίον 1, μ_2 σφαιρίδια φέροντα τό ψηφίον 2, ..., μ_K φέροντα τό ψηφίον K. Μεταβαλλομένων τῶν δοκιμῶν N, τό ἀποτέλεσμα $(\mu_1, \mu_2, ...,\mu_K)$ μεταβάλλεται καί διαγράφεται μία τυχαία μεταβλητή $(X_1, X_2 .....,X_K)$, ἥτις καλεῖται μεταβλητή τοῦ POISSON τῶν K διαλογῶν. Ὑφίσταται δέ ἡ κατωτέρω σχέσις

$$X_1 + X_2 + ... + X_K = N$$

'Η Γεννητική συνάρτησις πιθανότητος τῆς μεταβλητῆς τοῦ POISSON, εἶναι

$$G(\tau_1,\tau_2,\ldots\ldots,\tau_K) = (P_1^{(1)}\tau_1 + P_2^{(1)}\tau_2 + \ldots\ldots P_K^{(1)}\tau_K)\ldots\ldots\ldots$$

$$(P_1^{(N)}\tau_1 + \ldots\ldots + P_K^{(N)}\tau_K) = \Sigma\, \tau_1^{\mu_1}\, \tau_2^{\mu_2} \ldots\ldots \tau_K^{\mu_K}\ \Sigma\, P_1^{(i_1)} \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots P_1^{(i_{\mu_1})}\ P_2^{(i_{\mu_1+1})} \ldots\ldots P_2^{(i_{\mu_1+\mu_2})} \ldots P_K^{(i_{\mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_{K-1}+1})}$$

$$\ldots\ldots\ldots P_K^{(iN)}$$

Κατά συνέπειαν ἡ πιθανότης $P_{\mu_1,\mu_2,\ldots\ldots,\mu_K}$ διά νά προκύψῃ τό ἀποτέλεσμα $(\mu_1, \mu_2, \mu_3,\ldots\ldots,\mu_K)$ θά εἶναι:

$$P_{\mu_1\,\mu_2\,\ldots\ldots\,\mu_K} = \Sigma\, P_1^{(i_1)} \ldots\ldots P_1^{(i_{\mu_1})} \ldots P_2^{(i_{\mu_1+1})} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots P_2^{(i_{\mu_1+\mu_2})} \ldots\ldots P_K^{(i_{\mu_1+\mu_2\ldots\mu_{K-1}+1})} \ldots\ldots P_K^{(iN)}$$

'Ο Μέσος καί ἡ διακύμανσις δίδονται ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$M(X_i) = N\,\bar{P}_i$$

$$\sigma^2_{X_i} = N\,\bar{P}_i\,\bar{q}_i - N\,\sigma_i^2$$

ὅπου $\bar{P}_i = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} P_i^{(\tau)}$

καί $\sigma_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} (P_i^{(\tau)} - \bar{P}_i)^2$

ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ LAPLACE-LEXIS ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΝΑΛΛΑΓΩΝ

Ἔστω ὅτι ἔχομεν H_o κάλπας U_1, U_2, ..., U_{Ho}, αἵτινες περιέχουν σφαῖρας λευκάς καί μελαίνας. Ἔστω P_i ἡ πιθανότης τῆς ἐξαγωγῆς σφαίρας λευκῆς ἐκ τῆς κάλπης U_i.

Συμφώνως πρός τό σχῆμα τοῦ LAPLACE - LEXIS

1) Ἐξάγομεν μίαν ἐκ τῶν H_o καλπῶν
2) Ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἐξαχθείσης κάλπης ἐξάγομεν σφαίρας μετ' ἐπανατοποθετήσεως καί ὑποθέτομεν ὅτι C σφαῖραι εἶναι λευκαί καί N-C μέλαιναι.

Ἔστω ὅτι ἐκτελοῦμεν τάς κάτωθι δοκιμάς

Εἰς N δοκιμάς ἔχομεν C λευκάς σφαῖρας καί N-C μαύρας
Εἰς N " " C_1 " " " $N-C_1$ "
Εἰς N " " C_2 " " " $N-C_2$ "
Εἰς N " " C_μ " " $N-C_\mu$ "

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι ἐπαναλαμβανομένων τῶν δοκιμῶν N, ὁ ἀριθμός C τῶν λευκῶν σφαιρῶν μεταβάλλεται καί διαγράφει μίαν τυχαίαν μεταβλητήν E, ἥτις καλεῖται μεταβλητή τοῦ LAPLACE-LEXIS.

Ὑπολογίζομεν τήν πιθανότητα $P_{C,N}$, δηλαδή τήν πιθανότητα ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή E λαμβάνει τήν τιμήν C. Ἡ ζητουμένη πιθανότης ἐξαρτᾶται ἐκ δύο γεγονότων:

α) Ἐξήχθη ἡ κάλπη, ἥτις φέρει τόν ἀριθμόν τ
β) Ἐξήχθησαν ἐκ τῆς κάλπης τήν φέρουσαν τόν ἀριθμόν τ, C σφαῖραι λευκαί καί N-C μαῦραι.

Κατά συνέπειαν

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς τῆς κάλπης, ἥτις φέρει τόν ἀριθμόν τ, θά εἶναι $\frac{1}{Ho}$.

Ἐνῷ ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς ἐκ τῆς ὡς ἄνω κάλπης C λευκῶν σφαιρῶν, εἶναι

$$\binom{N}{C} (P^{\tau})^{C} (q^{\tau})^{N-C}$$

Δεδομένης ὅμως τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν ὡς ἄνω δύο γεγονότων, θά εἶναι

$$\frac{1}{H_o} \binom{N}{C} (P^{\tau})^{C} (q^{\tau})^{N-C}$$

Βάσει δέ τοῦ ἀθροιστικοῦ θεωρήματος τῶν πιθανοτήτων θά ἔχωμεν

$$P_{C,N} = \binom{N}{C} \frac{1}{H_o} \sum_{1}^{H_o} {}_{l} (P^{\tau})^{C} (1-P^{\tau})^{N-C}$$

Ἀλλά ἡ παράστασις $\frac{1}{H_o} \sum_{1}^{H_o} (P^{\tau})^{C} (1-P^{\tau})^{N-C}$

εἶναι ἡ μέση τιμή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς,

$\rho^{C}(1-\rho)^{N-C}$

(ὅπου ρ εἶναι μία τυχαία μεταβλητή σχετική μέ τήν ἐκλογήν τῆς κάλπης)

Ἑπομένως

$$P_{C,N} = \binom{N}{C} M\Big]\Big[\rho^{C}(1-\rho)^{N-C}\Big]$$

Ὑπολογίζομεν τήν N(β)

$$N(\beta) = \sum_{o}^{N} {}_{l} (1+\beta)^{C} P_{C,N} = \sum_{o}^{N} {}_{l} (1+\beta)^{C} \binom{N}{c} M \left[\rho^{C}(1-\rho)^{N-C}\right]$$

$$= M \left[\sum_{o}^{N} {}_{c} \binom{N}{C} (1+\beta)^{c} \rho^{c} \,.\, (1-\rho)^{N-C}\right] =$$

$$= M \left[\left((1+\beta)\rho + (1-\rho)\right)^{N}\right] = M \left[(1+\beta\rho)^{N}\right] =$$

$$\sum_{o}^{N} {}_{S} \frac{\beta^{S}}{S!} N (N-1) (N-2) \,\ldots\ldots\ldots\, (N-S+1) M(\rho^{S})$$

Συνεπῶς αἱ παραγοντικαί ροπαί θά εἶναι

$$M_{(S)} = N(N-1) \ldots\ldots (N-S+1)\, M(\rho^S)$$

$$M_{(1)} = N\, M(\rho)\,, \qquad M_{(2)} = N\,(N-1)\, M(\rho^2)$$

$$M(E) = M_{(1)} = N\, M(\rho)$$

$$M(E^2) = M_{(1)} + M_{(2)} = N(N-1)\, M(\rho^2) + N\, M(\rho)$$

$$\sigma_E^2 = M(E^2) \quad \left[M(E)\right]^2 =$$

$$= N(N-1) \left\{ M(\rho^2) - \left[M(\rho)\right]^2 \right\} + N\, M(\rho) \left\{ 1 - M(\rho) \right\}$$

'Εάν παραστήσωμεν μέ $\bar{P}$ καί σ_ρ^2 τόν μέσον ὅρον καί τήν διασποράν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ρ, ἤτοι

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \Sigma P_i$$

$$\sigma_\rho^2 = \frac{1}{N} \Sigma (P_i - \bar{P})^2 \text{ , θά ἔχωμεν}$$

$$M(E) = N\, \bar{P}$$

$$\sigma_E^2 = N\, \bar{P}\, \bar{q} + N(N-1)\, \sigma_\rho^2$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ LAPLACE-LEXIS

Ἔστω ὅτι ἔχομεν H_o κάλπας $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_{H_o}$.
Ὑποθέτομεν ἀκόμη ὅτι ἡ κάλπη U_i περιέχει H_i σφαιρίδια, φέροντα τάς ἐνδείξεις $X_{i_1}, X_{i_2} \ldots\ldots X_{i_{H_i}}$
Διά τήν ἐξαγωγήν τῶν σφαιριδίων θά ἀκολουθήσωμεν τήν κατωτέρω διαδικασίαν.
α) Ἐξάγομεν ἄνευ ἐπαναλήψεως N_o κάλπας ἐκ τῶν δοθέντων H_o.
β) Ἐξ ἑκάστης ἐκ τῶν N_o καλπῶν, ἐξάγομεν σφαιρίδια ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως καί ἔστω N_i ὁ ἀριθμός τῶν ἐξαχθέντων σφαιριδίων ἐκ τῆς κάλπης U_i.
Τό σύνολον τῶν περιεχομένων σφαιριδίων εἰς τάς N_o κάλπας θά εἶναι

$$H = \sum_{1}^{H_o}{}_i \; H_i$$

Εἰς κάθε σφαῖραν ἀντιστοιχεῖ μία τυχαία μεταβλητή, ἥτις λαμβάνει τήν τιμήν 1 ὁσάκις ἡ ζητουμένη σφαῖρα ἐμφανίζεται καί τιμήν 0, ὅταν δέν ἐμφανίζεται.
Ἡ τυχαία μεταβλητή σχετική εἰς τήν σφαῖραν $X_{i,j}$ παρίσταται συμβολικῶς μέ $E_{i,j}$ καί ἀναφέρεται εἰς δύο στάδια.
Τό πρῶτον στάδιον ἀναφέρεται εἰς τήν ἐκλογήν τῆς κάλπης. Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἡ τυχαία μεταβλητή, σχετική εἰς τήν ἐκλογήν τῆς κάλπης, παρίσταται μέ Θ_i καί λαμβάνει τήν τιμήν 1, ὅταν ἡ ζητουμένη κάλπη ἐξήχθη καί τιμήν 0 εἰς τήν ἀντίθετον περίπτωσιν. Ὑφίσταται δέ ἡ κάτωθι σχέσις:

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots\ldots + \Theta_i + \ldots\ldots + \Theta_{H_o} = N_o$$

Ἡ ὡς ἄνω τυχαία μεταβλητή καλεῖται μεταβλητή τοῦ πρώτου σταδίου καί εἶναι σχεδόν ἀνάλογος μέ τήν τυχαίαν μεταβλητήν ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως.

Ἐν συνεχείᾳ ἐξ ἑκάστης τῶν N_o καλπῶν ἐξάγομεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν σφαιριδίων χωρίς ἐπαναλήψεις.
Εἰς κάθε σφαῖραν ἀντιστοιχεῖ μία τυχαία μεταβλητή, ἥτις λαμβάνει τιμάς 1 καί 0 ἀναλόγως ἐάν ἐξήχθη ἡ ζητουμένη σφαῖρα ἤ ὄχι. Εἰς τήν σφαῖραν+X_{ij} ἀντιστοιχεῖ ἡ τυχαία μεταβλητή $X_{iζ}$.
Ὅθεν καταλήγομεν εἰς την κατωτέρω σχέσιν:

$$E_{ij} = \Theta_i X_{ij} \qquad \text{ὅπου} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,H_o \\ j = 1,2,\ldots,H_i \end{array}$$

Ὁ μέσος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $E_{iζ}$ εἶναι

$$M\left[E_{ij}\right] = M\left[\Theta_i X_{ij}\right] = M\left[\Theta_i\right] M\left[X_{ij}\right]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7ον

ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΕΚ ΤΩΝ ΥΣΤΕΡΩΝ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΕΚ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ

Εἰς τήν πρακτικήν συμβαίνει συχνά νά γνωρίζωμεν τήν Ἐμπειρικήν πιθανότητα (συχνότητα), ὡρισμένων γεγονότων βάσει τῶν Στατιστικῶν Παρατηρήσεων.-

Τό πρόβλημα μέ τό ὁποῖον θά ἀσχοληθῶμεν εἰς τό παρόν Κεφάλαιον εἶναι: πῶς δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν κατανομήν τῶν θεωρητικῶν πιθανοτήτων ὡρισμένων βεβαίων γεγονότων τῶν ὁποίων γνωρίζομεν, βάσει τῶν παρατηρήσεων, τάς ἐμπειρικάς πιθανότητας ὑπό τόν ὅρον ὅμως ὅτι τά ὑπό μελέτην γεγονότα δέν εἶναι ἐπαναληπτέα, εἰς τρόπον ὥστε νά μή προκύπτῃ ἡ σχετική συχνότης μεγαλυτέρα τῆς μονάδος.

Ἄς πλησιάσωμεν περισσότερον εἰς τήν ἔννοιαν τοῦ ὑπό μελέτην προβλήματος.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ἐκτελέσει N ἐξαγωγάς μετ'ἐπαναλήψεως (σχῆμα τοῦ BERNOULLI) καί ὅτι ἕν βέβαιον γεγονός N ἐνεφανίσθη C φοράς τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν στατιστικήν παρατήρησιν.

Ἐπιθυμοῦμεν τώρα νά προσδιορίσωμεν τήν πιθανότητα εἰς H μελλοντικάς ἐξαγωγάς τό ἴδιον γεγονός E νά ἐμφανισθῇ β φοράς.

Ἔστω ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς ἕν σχῆμα τοῦ LAPLACE - LEXIS τῶν δύο διαλογῶν. Ἤτοι ἔχομεν H_o κάλπας $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_{H_o}$ καί P^i εἶναι ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ ἐκ τῆς κάλπης U_i μία σφαῖρα λευκή πρᾶγμα τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἐμφάνισιν τοῦ γεγονότος Ε.

Ὑποθέτομεν λοιπόν ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ γεγονότος Ε δέν εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως εἶναι σταθερά ἀλλ'ἐνδέχεται νά μεταβάλληται εἰς μίαν τυχαίαν μεταβλητήν ρ ἥτις καλεῖται πιθανότης ἐκ τῶν προτέρων (APRIORI) καί τῆς ὁποίας ἡ συνάρτησις κατανομῆς παρίσταται μέ Ω(P).

Ἐν συνεχείᾳ διά μιᾶς δοκιμῆς δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν ἕνα προσδιορισμόν P_o τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ρ, ὅπου P_o εἶναι ἡ πιθανότης, τήν ὁποίαν δέν γνωρίζομεν καί εἶναι συνδεδεμένη μετά τῆς ἐξαχθείσης κάλπης.

Ἐκλεγείσης τῆς κάλπης ἐξάγομεν Ε σφαῖρας μετ'ἐπαναλήψεως (σχῆμα τοῦ BERNOULLI).

Τό γεγονός Ε (σφαῖρα λευκή) ἐμφανίζεται C φοράς. Θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη τήν πιθανότητα ὅτι εἰς τάς διαδοχικάς Η δοκιμάς τό γεγονός Ε ἐμφανίζεται β φοράς. Προφανῶς ἐάν P_o ἦτο γνωστό ἡ ὡς ἄνω ζητουμένη πιθανότης θά ἦτο

$$\binom{H}{\rho} P_o^{\beta} (1-P_o)^{N-\beta}$$

Ὅμως P_o δέν εἶναι γνωστόν. Ἐπομένως πῶς θά προβῶμεν;

Ἐν πρώτοις, ἀπό τό σχῆμα τοῦ LAPLACE-LEXIS, ἔχομεν ὅτι $\mathcal{P}_{C,N}$ εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι εἰς Ν δοκιμάς τό γεγονός Ε ἐμφανίζεται C φοράς, ἤτοι

$$(1) \quad \mathcal{P}_{C,N} = \binom{N}{C} M \left[\rho^{C}(1-\rho)^{N-C}\right]$$

Ἔστω ${}_{C,N}\Pi(P)$ ἡ πιθανότης ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή ρ λαμβάνει μίαν τιμήν μικροτέραν τῆς P. Ἡ πιθανότης ${}_{C,N}\Pi(P)$ καλεῖται πιθανότης ἐκ τῶν ὑστέρων (APOSTERIORI).

Ἡ πιθανότης ὅτι ἡ τυχαία μεταβλητή ρ λαμβάνουν μίαν τιμήν μικροτέραν τοῦ P καί ὅτι εἰς Ν δοκιμάς λαμβάνεται τό γεγονός Ε, C φοράς, δίδεται έκ τῶν κάτωθι δύο σχέσεων:

α) $\binom{N}{C} \int_0^P P^C (1-P)^{N-C} \, d\Omega(P)$

β) $\binom{N}{C} \quad M \left[\rho^C \; (1-\rho)^{N-C}\right] \; {}_{C,N}\Pi(P)$

'Εξισοῦντες τάς δύο ἀνωτέρω σχέσεις ἔχομεν

$${}_{C,N}\Pi(P) = \frac{\int_0^P P^C (1-P)^{N-C} \, d\Omega(P)}{\int_0^1 P^C (1-P)^{N-C} \, d\Omega(P)}$$

Παραγωγίζοντες ὡς πρός P τήν ὡς ἄνω σχέσιν ἔχομεν

$$(2) \quad d\,{}_{C,N}\Pi(P) = \frac{P^C \, (1-P)^{N-C} \, d\,\Omega(P)}{\int_0^1 P^C \, (1-P)^{N-C} \, d\,\Omega(P)}$$

'Η πιθανότης ὅτι εἰς Η διαδοχικάς δοκιμάς τό γεγονός Ε ἐμφανίζεται β φοράς εἶναι

$${}_{C,N}P_{\beta,H} = \binom{H}{\beta} \int_0^1 P^\beta \, (1-P)^{H-\beta} \; d\,{}_{C,N}\Pi\,(P)$$

'Αντικαθιστῶντες τήν τιμήν ${}_{C,N}\Pi\,(P)$ ἔχομεν

$${}_{C,N}P_{\beta,H} = \binom{H}{\beta} \frac{\int_0^1 P^{\beta+C} \, (1-P)^{H+N-\beta-C} \, d\Omega\,(P)}{\int_0^1 P^C (1-P)^{N-C} \; d\Omega\,(P)} \qquad (5)$$

'Η σχέσις (5) εἶναι ἡ ζητουμένη πιθανότης.

'Αλλ'ἀτυχῶς δέν γνωρίζομεν τίποτε ὅσον ἀφορᾷ τήν τιμήν P καί κατά συνέπειαν τήν συνάρτησιν κατανομῆς Ω (P).

Εἶναι ἐπομένως ἀναγκαῖον νά προβῶμεν εἰς διαφόρους ὑποθέσεις ἐπί τῆς P καί τῆς Ω (P)
Ἄς ἴδωμεν μερικάς.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ ΤΟΥ BAYES-LAPLACE

Ὑποθέτομεν ὅτι P εἶναι σταθερά, δηλαδή ὅτι ὅλαι αἱ τιμαί τῆς P τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ρ εἶναι ὁμοίως δυνατοί. Αὕτη εἶναι μία ὑπόθεσις.
Ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ρ θά εἶναι

$$\omega(P) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad P < 0 \\ 1 & \text{"} \quad 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ 0 & \text{"} \quad P > 1 \end{cases}$$

Ἡ δέ συνάρτησις κατανομῆς Ω (P) εἶναι

$$\Omega(P) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad P < 0 \\ P & \text{"} \quad 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ 1 & \text{"} \quad P > 1 \end{cases}$$

Ἐπομένως ἡ σχέσις (1) εἶναι

$$P_{C,N} = \binom{N}{C} \int_{-\infty}^{\infty} P^{C} (1-P)^{N-C} \, d\Omega(P) =$$

$$= \int_{0}^{1} P^{C} (1-P)^{N-C} \, dP$$

Ἐφαρμόζοντες τήν συνάρτησιν Βῆτα (B) ἥτις εἶναι

$$\int_{0}^{1} x^{\tau-1} (1-x)^{S-1} \, dx = B(\tau, S)$$

καί θέτοντες $\tau-1 = C$ $\quad\quad \tau = C+1$

ήτοι

$S-1 = N-C \quad\quad S = N-C+1$

θά έχωμεν $P_{C,N} = \binom{N}{C}\, B\,(C+1,\ N-C+1)$.

'Επειδή είδομεν ότι $B\,(\tau,S) = \dfrac{\Gamma(\tau)\ \Gamma(S)}{\Gamma\,(\tau+S)}$ κατά συνέπειαν θά είναι καί

$$B\,(C+1,\ N-C+1) = \frac{\Gamma(C+1)\ \Gamma\,(N-C+1)}{\Gamma\,(N+2)} \quad \text{ήτοι}$$

$$(6)\quad P_{C,N} = \frac{N!}{C!\,(N-C)!}\ \frac{\Gamma(C+1)\ \Gamma\,(N-C+1)}{\Gamma\,(N+2)}$$

'Εξ άλλου είδομεν είς τάς ιδιότητας τῆς κατανομῆς Γ, ότι $\Gamma\,(\nu) = (\nu-1)!$ 'Επομένως θά είναι

$\Gamma\,(C+1) = C!\ ,\ \Gamma\,(N-C+1) = (N-C)!\ ,\ \Gamma(N+2) = (N+1)!$

"Οθεν ἡ σχέσις (6) γίνεται

$$(7)\quad P_{C,N} = \frac{N!}{C!(N-C)!}\ \frac{C!(N-C)!}{(N+1)!} = \frac{N!}{(N+1)N!} = \frac{1}{N+1}$$

δηλαδή αἱ (N+1) δυναταί τιμαί τῆς C (0 1 2 ..... N) είναι ὁμοίως δυναταί, πράγματι

είναι $P_{C,N} = \dfrac{1}{N+1}$

'Η ${}_{C,N}\Pi\,(P)$ γίνεται

$${}_{C,N}\Pi\,(P) = \frac{\int_0^\beta P^C(1-P)^{N-C}\,dP}{\int_0^1 P^C(1-P)^{N-C}\,dP}$$

$$ {}_{C,N}\Pi(P)\int_0^1 P^C (1-P)^{N-C}\, dP = \int_0^{\beta} P^C (1-P)^{N-C}\, dP $$

δεδομένου ὅμως ὅτι $\int_0^1 P^C (1-P)^{N-C}\, dP =$

$$ M\left[\rho^C (1-\rho)^{N-C}\right] = \frac{P_{C,N}}{\binom{N}{C}} $$ ἔχομεν

$$ {}_{C,N}\Pi(P) = \frac{\binom{N}{C}}{P_{C,N}} \int_0^P P^C (1-P)^{N-C}\, dP, $$ καί

βάσει τῆς σχέσεως (7) ἔχομεν

$$ (8) \quad {}_{C,N}\Pi(P) = \frac{(N+1)!}{C!(N-C)!} \int_0^P P^C (1-P)^{N-C}\, dP $$

Ὅπου $\tau \geqslant 0$, $S \geqslant 0$

Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι

$$ d_{C,N}\Pi(P) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad P < 0 \\ \dfrac{P^{C+\tau-1}(1-P)^{N-C+S-1}}{B(C+\tau,\ N-C+S)} & \text{"} \quad 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ 0 & \text{"} \quad P > 1 \end{cases} $$

καί ἑπομένως ἡ σχετική συνάρτησις κατανομῆς δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$ (13) \quad {}_{C,N}\Pi(P) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad P < 0 \\ \dfrac{\int_0^P P^{C+\tau-1}(1-P)^{N-C+S-1}}{B(C+\tau,\ N-C+S)}\, dP & \text{ἐάν} \quad 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ 1 & \text{"} \quad P > 1 \end{cases} $$

ή (13) ἰσοῦται μέ τήν (8)

'Εάν $N = N+\tau+S+2$

$C = C+\tau-1$

'Επομένως εἶναι ὑπολογίσιμος ἀπ'εὐθείας ἡ ${}_{C,N}P_{\beta,H}$

ἀρκεῖ νά ἐνεργήσωμεν τάς σχετικάς ἀντικαταστάσεις εἰς τήν σχέσιν (10), θά ἔχωμεν:

$$ {}_{C,N}P_{\beta,H} = \binom{H}{\beta} \frac{B\left[(\beta+C+\tau)\ (H-\beta-C+1+N+\tau+S+2)\right]}{B\left[(C+\tau),\ N+\tau+S+2-C+1\right]} \quad ή $$

'Από τήν (8) ἔχομεν

$$ d_{C,N}\Pi(P) = \frac{(N+1)!}{C!\ (N-C)!}\ P^{C}\ (1-P)^{N-C}\ dP $$

Τέλος ἐκ τῆς σχέσεως (5) ἔχομεν

$$ {}_{C,N}P_{\beta,H} = \binom{H}{\beta} \frac{\int_0^1 P^{\beta+C}\ (1-P)^{H+N-\beta-C}\ dP}{\int_0^1 P^{C}(1-P)^{N-C}\ dP} $$

$$ = \binom{H}{\beta} \frac{B\left[(\beta+C+1),(H+N-\beta-C+1)\right]}{B\left[(C+1),\ (N-C+1)\right]} \qquad (10) $$

Εἰς τήν σχέσιν (10), ὡς εἶναι φανερόν ἐμφανίζονται μόνον αἱ τιμαί N, C, H, β, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅλαι γνωσταί καί ἐπομένως μέ τήν ὑπόθεσιν τοῦ BAYES - LAPLACE ὑπολογίζεται ἡ πιθανό - της ${}_{C,N}P_{\beta,H}$

Ὑπόθεσις GINI

'Η συνάρτησις πυκνότητος ω(P) τῆς τυχαίας μεταβλητῆς APRIC-

RI ρ εἶναι

$$\omega(P) = \begin{cases} 0 & \text{ἐάν} \quad P < 0 \\ \dfrac{P^{\tau-1}(1-P)^{S-1}}{B(\tau,S)} & \text{"} \quad 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ 0 & \text{"} \quad P > 1 \end{cases}$$

$$_{C,N}P_{\beta,H} = \binom{H}{\beta} \frac{B\left[(\beta+C+2),(H+N-\beta-C+\tau+S+3)\right]}{B\left[(C+\tau),\ N+\tau+S-C+3\right]}$$

ἐκ τῆς ὁποίας

$$_{C,N}P_{\beta,H} = \binom{H}{\beta} \frac{(C+\tau)(C+\tau+1)\ldots\ldots(C+\tau+\beta-1)\ (N-C+S)\ldots}{(N+\tau+S)\ (N+\tau+S+1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$\frac{\ldots\ (N-C+S+H-\beta-1)}{\ldots\ (N+\tau+S+H-1)}$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ BAYES

'Υποθέτομεν ὅτι ἕν βέβαιον γεγονός Ε ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐμφάνισιν ἤ τήν ἐπενέργειαν διαφορετικῶν αἰτιῶν Α, Β, Γ....Τό πρόβλημά μας ἀποβλέπει εἰς τόν προσδιορισμόν τῆς αἰτίας ἐκείνης, μεταξύ τῶν Α, Β,Γ,..ἥτις ἔχει προσδιορίσει τό γεγονός Ε.

'Υποθέτομεν ὅτι

1) Μόνον βέβαιαι αἰτίαι Α,Β,Γ,..ἀσυμβίβαστοι μεταξύ των δύνανται νά λάβουν χώραν διά τόν προσδιορισμόν τοῦ γεγονότος Ε.

2) Αἱ αἰτίαι Α, Β,Γ,..ἐνεργοῦν σαφῶς μέ μίαν βεβαίαν πιθανότητα "APRIORI"(ἐκ τῶν προτέρων)P_A , P_B , $P_Γ$,...ὅπου θά εἶναι $P_A + P_B + P_Γ + \ldots\ldots = 1$.

3) 'Εάν καί κατά πόσον ἐνεργεῖ ἡ αἰτία Α ἤ Β ἤ Γ..Τό γεγονός Ε παρουσιάζεται μέ πιθανότητα "PROBATIVE" q_A q_B $q_Γ$.

4) Τό γεγονός Ε ἔχει πραγματοποιηθῆ ἀλλά ἀγνοεῖται ἡ αἰτία, ἥτις προεκάλεσεν τήν ἐμφάνισιν τοῦ γεγονότος Ε. Ζητοῦνται αἱ πιθανότητες "APOSTERIORI" $Π_A$, $Π_B$, $Π_Γ$.Προφανῶς θά εἶναι $Π_A + Π_B + Π_Γ + \ldots = 1$.

Διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος σημειοῦμεν ὅτι

1) $P_A\ q_A$: εἶναι ἡ πιθανότης,ὅτι ἐνεργεῖ ἡ αἰτία Α καί κατά συνέπειαν ἐμφανίζεται τό γεγονός Ε.

2) $P_A\ q_A + P_B\ q_B + \ldots\ldots\ldots$: εἶναι ἡ πιθανότης τῆς ἐμφανίσεως τοῦ γεγονότος Ε ἀνεξαρτήτως τῆς αἰτίας,ἥτις προεκάλεσε τοῦτο.

3) $(P_A\ q_A + P_B\ q_B + P_Γ\ q_Γ + \ldots)Π_A$ εἶναι ἡ πιθανότης τῆς συγχρόνου ἐμφανίσεως δύο γεγονότων.

α) 'Εμφανίζεται τό γεγονός Ε. β). Τό γεγονός Ε προεκλήθη ἀπό τήν αἰτίαν Α.

'Αλλά αἱ δύο πιθανότητες 1) καί 3) ἀναφέρονται εἰς τό ἴδιον γεγονός καί ἐπομένως

$$(14) \quad P_A q_A = (P_A q_A + P_B q_B + \ldots\ldots) \Pi_A ,$$

ὅθεν
$$\Pi_A = \frac{P_A q_A}{P_A q_A + P_B q_B + P_\Gamma q_\Gamma + \ldots\ldots}$$

'Αναλόγως αἱ πιθανότητες "APOSTERIORI" τῶν αἰτιῶν Β καί Γ εἶναι

$$\Pi_B = \frac{P_B q_B}{P_A q_A + P_B q_B + \ldots} , \quad \Pi_\Gamma = \frac{P_\Gamma q_\Gamma}{P_\Gamma q_\Gamma + P_B q_B + \ldots\ldots}$$

'Εφαρμογαί

Παράδειγμα 1ον

Εἰς ἕν βιβλίον τῶν 25 σελίδων, 15 σελίδες περιέχουν τυπογραφικά σφάλματα.

'Εάν ἐκτελέσωμεν μίαν ἀνατύπωσιν, τό ἐν λόγῳ βιβλίον περιέχει 5 σελίδας μέ τυπογραφικά σφάλματα. 'Από μίαν βιβλιοθήκην, ἥτις περιέχει βιβλία τῆς πρώτης ἐκδόσεως καί τῆς ἐπανεκδόσεως μέ ἀναλογία 2 πρός 1, λαμβάνομεν τυχαίως ἕν βιβλίον. 'Εξετάζομεν τρεῖς σελίδας κατά τρόπον τυχαῖον καί χωρίς ἐπαναλήψεις. Εὑρίσκομεν ὅτι δύο ἐξ αὐτῶν δέν παρουσιάζουν σφάλματα. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης, ἵνα τό βιβλίον περιέχηται εἰς τήν πρώτην ἔκδοσιν ἤ εἰς τήν ἀνατύπωσιν;

Λύσις

Δεικνύομεν μέ Α τό γεγονός ὅτι τό βιβλίον συμπεριλαμβάνεται εἰς τήν πρώτην ἔκδοσιν καί Β τό γεγονός ὅτι τό βιβλίον συμπεριλαμβάνεται εἰς τήν ἀνατύπωσιν. Θά ἔχωμεν

$$P_A = 2/3, \quad P_B = 1/3$$

Ἡ πιθανότης τοῦ γεγονότος Ε (δύο σελίδες ἐκ τριῶν περιέχουν τυπογραφικόν σφάλμα) εἶναι, ἀναλόγως, ἐάν ἔχῃ παρουσιασθῆ τό γεγονός Α ἤ Β, ἡ κάτωθι

$$q_A = P\ (E/A) = \frac{\binom{15}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{21}{46}$$

$$q_B = P(E/B) = \frac{\binom{5}{2}\binom{20}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{2}{23}$$

Ἑπομένως αἱ πιθανότητες "APOSTERIORI" τοῦ Α καί Β εἶναι

$$\Pi_A = \frac{P_A\ q_A}{P_A\ q_A + P_B\ q_B} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{21}{46}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{21}{46} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{23}} = \frac{21}{23}$$

$$\Pi_B = \frac{P_B\ q_B}{P_A\ q_A + P_B\ q_B} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{23}}{\frac{2}{3}\ \frac{21}{46} + \frac{1}{3}\ \frac{2}{23}} = \frac{2}{23}$$

Παράδειγμα 2ον

Ἔστω ὅτι ἔχομεν 20 μηχανάς, αἱ ὁποῖαι παράγουν ἕν εἶδος ἀντικειμένου. Αἱ πρῶται 15 παράγουν 5 ἀντικείμενα ἐλαττωματικά ἐπί 100.

Αἱ ὑπόλοιποι 5, παράγουν 10 ἀντικείμενα ἐλαττωματικά ἐπί 100 μέ ἐπαναλήψεις.

Λαμβάνομεν 2 ἀντικείμενα (ἀπό μίαν μηχανή καί εὑρίσκομεν 1 ἄνευ σφάλματος καί 1 ἐλαττωματικό Ποία ἡ πιθανότης ὅτι ἡ ἐξαγωγή τῶν δύο ἀντικειμένων προέρχεται ἀπό 15 πρώτας μηχανάς.

Λ ύ σ ι ς

Μηχανή τοῦ πρώτου τύπου

100 ἀντικείμενα

15

5 ἐλαττωματικά 95 ἄνευ σφάλματος

Μηχανή δευτέρου τύπου

100

5

10 90

$$P_A = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \qquad q_A = \binom{2}{1} P_1 \, q_1 = \binom{2}{1} \frac{5}{100} \, \frac{95}{100}$$

$$P_B = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \qquad q_B = \binom{2}{1} \frac{10}{100} \, \frac{90}{100}$$

$$\Pi_A = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{18}{100}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{95}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{90}{100}}$$

Παράδειγμα 3ον

Ἔστω ὅτι ἔχομεν η δέσμας τῶν 40 παιγνιοχάρτων, ἐξ αὐτῶν ὑπάρχει μία δέσμη ἐλαττωματική, ἥτις περιέχει 14 κάρ - τες ἐλαττωματικές.

Λαμβάνομεν τυχαίως (χωρίς έπαναλήψεις) δύο κάρτας έκ μιᾶς τυχούσης δέσμης, παρατηροῦμεν ὅτι αὗται εἶναι κανονικαί.

1) 'Εάν $n = 3$ ποία εἶναι ἡ πιθανότης ἐκ τῶν ὑστέρων (APOSTERIORI) ὥστε ἡ ἐξετασθεῖσα δέσμη νά εἶναι ἐλαττωματική;

2) Πῶς πρέπει νά εἶναι τό n ἐάν θέλωμεν τήν πιθανότητα APOSTERIORI ὅπως ἡ δέσμη εἶναι ἐλαττωματική νά εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς 0,1;

Λ ύ σ ι ς

Δεικνύομεν μέ Α τό γεγονός ὅτι ἡ ἐξαχθεῖσα δέσμη εἶναι ἐλαττωματική καί μέ Β τό γεγονός ὅτι ἡ ἐξαχθεῖσα τράπουλα εἶναι κανονική.

θά ἔχωμεν $P_A = \frac{1}{n}$, $P_B = \frac{n-1}{n}$

$$q_A = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{5}{12}, \quad q_B = 1, \quad \Pi_A = \frac{5}{12n-7}$$

καί είδικῶς διά $n = 3$, θά εἶναι $\Pi_A = \frac{5}{29}$

Διά νά εἶναι $\Pi_A = \frac{5}{12n-7} < \frac{1}{10}$, θά πρέπει νά εἶναι $n > \frac{19}{4}$

Κατά προσέγγισιν $n = 5$.

Παράδειγμα 4ον

Εὑρίσκεται κάποιος ἐμπρός εἰς τρία ὅμοια κιβώτια, τό καθ' ἕνα ἀπό τά ὁποῖα ἔχει τρία συρτάρια. Τό πρῶτον κιβώτιον ἔχει ἕνα χρυσόν νόμισμα εἰς κάθε συρτάρι. Τό δεύτερον ἔχει ἀπό ἕνα ἀργυρόν νόμισμα εἰς τό κάθε συρτάρι. Τό τρίτον ἔχει εἰς τό ἕνα συρτάρι ἕνα ἀργυροῦννόμισμα καί εἰς τά δύο ἄλλα ἀπό ἕνα χρυσοῦν.Τό ὡς ἄνω ἄτομον ἀνοίγει ἕνα ἀπό αὐτά τά κιβώτια, τραβᾶ ἕνα συρτάρι καί εὑρίσκει ἕνα χρυσοῦν νόμισμα.

Ποία ή πιθανότης νά ἀνήκῃ τό συρτάρι εἰς τό πρῶτον κιβώτιον καί ποία εἰς τό τρίτον κιβώτιον.
('Απάντησις 3/5 διά τό πρῶτον καί 2/5 διά τό τρίτον).

'Α σ κ ή σ ε ι ς
Ε Π Ι Τ Ω Ν Σ Χ Η Μ Α Τ Ω Ν

1) Δίδεται μία κάλπη ἥτις περιέχει 4 σφαιρίδια σημειούμενα διά τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4.
'Εξάγομεν βάσει τοῦ σχήματος τοῦ BERNOULLI 2 σφαιρίδια καί δεικνύομεν μέ Χ τήν τυχαίαν μεταβλητήν τοῦ μεγαλυτέρου δείκτου ἐκ τῶν ἐξαχθέντων καί μέ Ψ τό ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τῶν δύο ἐξαχθέντων σφαιριδίων.
Νά μελετηθῇ ἡ τυχαία μεταβλητή (Χ Ψ) καί νά σχηματισθῇ ὁ πίναξ τῶν πιθανοτήτων.

Λ ύ σ ι ς

'Η τυχαία μεταβλητή Χ δύναται νά λάβῃ τάς κάτωθι τιμάς 1, 2, 3, 4.
'Ενῷ ἡ τυχαία μεταβλητή Ψ δύναται νά λάβῃ τάς τιμάς 2, 3,4, 5, 6, 7, 8.

$$P_{\tau} < X=1,\ \Psi=2 > = P < X=1 > P < \Psi=2 \,/\, X=1 > = 1/4 . 1/4 = 1/6$$
$$P < X=1,\ \Psi\neq 2 > = P < X=1 > P < \Psi\neq 2 \,/\, X=1 > = 1/4 . 0 = 0$$
$$P < X=2,\ \Psi=2 > = P < X=2 > P < \Psi=2 \,/\, X=2 > = 0$$
$$P < X=2,\ \Psi=3 > = P < X=2 > P < \Psi=3 \,/\, X=2 > = \binom{2}{1} 1/4 . 1/4 = 2/16$$
$$P < X=2,\ \Psi=4 > = \qquad = 1/16$$
$$P < X=2\ \ \Psi\geqslant 5 > = \qquad = 0$$
$$P < X=3,\ \Psi=4 > = \qquad = 2/16$$
$$P < X=3\ \ \Psi=5 > = \qquad = 2/16$$

$P\langle X=4 \quad \Psi=5 \rangle = \qquad = 2/16$

$P\langle X=4 \quad \Psi=6 \rangle = \qquad = 2/16$

$P\langle X=4 \quad \Psi=7 \rangle = \qquad = 2/16$

$P\langle X=4 \quad \Psi=8 \rangle = \qquad = 1/16$

$\Sigma P_i = 1/16 + 2/16 + 1/16 + 2/16 + 2/16 + 2/16 + 2/16 + 1/16 + 1/16 = 1$

Πίναξ Πιθανοτήτων

X \ Ψ	2	3	4	5	6	7	8	
1	1/16	-	-	-	-	-	-	1/16
2	-	2/16	1/16					3/16
3	-	-	2/16	2/16	1/16	-	-	5/16
4	-	-	-	2/16	2/16	2/16	1/16	7/17
	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	1

2) Ἔστω ὅτι ἔχομεν τρεῖς κάλπας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει σφαιρίδια λευκά καί φαιά (μαῦρα).

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς λευκῆς σφαίρας ἐκ τῆς πρώτης κάλπης εἶναι 1/2 καί φαιᾶς ὁμοίως 1/2.

Ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς λευκῆς σφαίρας ἐκ τῆς δευτέρας κάλπης εἶναι 1/4 καί φαιᾶς $q = 3/4$.

Ἐνῷ ἐκ τῆς τρίτης κάλπης αἱ πιθανότητες εἶναι $P = 1/2$ διά λευκήν καί $q = 1/2$ διά φαιάν.

Νά ὑπολογισθῇ ἡ τυχαία μεταβλητή X "σφαιρίδιον λευκόν" ὁ Μέσος καί ἡ διακύμανσις, βάσει τοῦ σχήματος τοῦ P O I S S O N.

Λ ύ σ ι ς

Ἡ τυχαία μεταβλητή X δύναται νά λάβῃ τάς κάτωθι τιμάς: 0, 1, 2, 3.

'Υπολογίζομεν τάς πιθανότητας

$P_{0,3} = \binom{3}{0} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3/16$ (οὐδεμία λευκή σφαῖρα)

$P_{1,3} = 1/2.3/4.1/2+1/2.1/4.1/2+1/2.3/4.1/2 = 7/16$

$P_{2,3} = 1/2.1/4.1/2+1/2.1/4.1/2+1/2.3/4.1/2 = 5/16$

$P_{3,3} = \binom{3}{3}$ $1/2\ 1/4.1/2 = 1/16$ (ὅλαι λευκαί)

$\Sigma P_i = 3/16+7/16+5/16+1/16 = \frac{16}{16} = 1$

'Υπολογίζομεν τώρα τόν Μέσον $M(X) = N\bar{P}$, ὅπου

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{H} P_i = 1/3\ (1/2 + 1/4 + 1/2) = 5/12$$

'Επομένως $M(X) = 3.\frac{5}{12} = \frac{5}{4} = N\bar{P}$

$$\sigma^2_X = N\bar{P}\bar{q} - N\,c^2\,\rho = 3\ 5/12.7/12-3.1/72 = \frac{627}{72}$$

$$\sigma^2_\rho = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (P_i - \bar{P})^2 = 1/3\left[(1/2 - \frac{5}{12})^2 + \right.$$

$$\left. + (\frac{1}{4} - \frac{5}{12})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{5}{2})^2\right] = 1/72$$

3) Ἔχομεν τρεῖς κάλπας ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 10 σφαιρίδια ἐκ τῶν ὁποίων ἀντιστοίχως 1, 6, 4 λευκάς καί 9, 4, 6, φαιάς.

Νά ὑπολογισθῇ ἡ κατανομή τῶν πιθανοτήτων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λευκῶν σφαιρῶν εἰς μίαν ἐξαγωγήν τριῶν (3) σφαιριδίων, ἀκολούθως ὁ Μέσος καί ἡ διακύμανσις.

α) 'Αναλόγως τοῦ σχήματος τοῦ POISSON

β) 'Αναλόγως τοῦ σχήματος τοῦ LAPLACE-LEXIS

Λ ύ σ ι ς

'Η τυχαία μεταβλητή τοῦ POISSON λαμβάνει τάς κάτωθι τιμάς 0, 1, 2, 3.

'Εφαρμόζοντες τόν τύπον

$$P_{C,N} = \Sigma\, P^{i2}\ P^{i2} \ldots\ldots P^{iC}\quad q^{iC+1} \ldots\ldots q^{iC}$$, ἔχομεν

$$P_{0,3} = \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{216}{1000}$$

$$P_{1,3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{6}{10} + \frac{9}{10} \cdot$$

$$\cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}492$$

$$P_{2,3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} +$$

$$+ \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}28$$

$$P_{3,3} = 1/10.6/10.4/10 = 0{,}024$$

$$M(X) = N\,\bar{P} = 1{,}1 \quad (\text{διότι } \bar{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

$$\sigma_\chi^2 = N\,\bar{P}\,\bar{q} - N\,\sigma_\rho^2 = 0{,}5244$$

β) 'Αναλόγως τοῦ σχήματος τοῦ LAPLACE-LEXIS.

"Εχομεν

$$P_{C,N} = \binom{N}{C} \frac{1}{H_o} \sum_{i=1}^{H_o} P^C\ q^{N-C}$$

$$P_{o,3} = \binom{3}{o} \frac{1}{3} \sum_{1}^{3} P^o\ q^3 = 1/3(1/10)^o\ (\frac{9}{10})^3 +$$

$$+ (\frac{6}{10})^o\ (\frac{4}{10})^3 + (\frac{4}{10})^o\ (\frac{6}{10})^3 = 0{,}336$$

$$P_{1,3} = \binom{3}{1}\ 1/3 \ \sum_{1}^{3} (P)^1\ q^2 = 3.1/3\ (\frac{1}{10})\ (\frac{9}{10})^2 +$$

$$(\frac{6}{10})\ (\frac{4}{10})^2 + (\frac{4}{10})\ (\frac{6}{10})^2 = 0,321$$

$P_{2,3}$ = ὁμοίως 0,249

$P_{3,3}$ = " 0,46

$M(E) = H\ \bar{P} = 0,363 = 1,08$

$(\ \bar{P} = 1/3\ (1/10 + 6/10 + 4/10) = 0,36)$

$\sigma^2(\varepsilon) = N\ \bar{P}\bar{q} + N\ (N-1)\ \sigma^2_\rho = 0,42$

4) Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν κάλπην, ἥτις περιέχει 3 σφαῖρας σημειωμένας διά τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5.

Ἐξάγομεν ἄνευ ἐπανατοποθετήσεως (IN BLOCCO) δύο σφαίρας καί δεικνύομεν μέ X τόν μέσον ὅρον τῶν δύο ἐξαχθέντων ἀριθμῶν (ἐνδείξεων).

Ἐπαναθέτομεν ἐν συνεχείᾳ μίαν τῶν δύο ἐξαχθεισῶν σφαιρῶν εἰς τήν κάλπην καί ἐξάγομεν ἐκ νέου μία σφαῖρα τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμός δεικνύεται μέ Ψ.

Νά προσδιορισθῇ ὁ πίναξ τῶν πιθανοτήτων τῆς διπλῆς τυχαίας μεταβλητῆς (X,Ψ) διαγραφομένη ἀπό τά ἀποτελέσματα τῆς χ καί ψ.

Νά εὑρεθῇ ἐξ ἄλλου ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως κατανομῆς εἰς τό σημεῖον (4,4).

Λύσις

Αἱ δυναταί ἐξαγωγαί θά εἶναι (1,3), (1,5),(3,5)

Ἑπομένως

$$\chi = \frac{1+3}{2} = 2\ ; \qquad \chi = \frac{1+5}{2} = 3, \quad \chi = \frac{3+5}{2} = 4$$

'Επομένως θά έχωμεν

Χ	2,	3,	4
Ψ	1	3	5

$$P(X = 2, \quad \Psi = 1) = \frac{1}{\binom{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/12$$

$$P(X = 2, \quad \Psi = 3) = \frac{1}{3} \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/12$$

$$P(X = 4, \quad \Psi = 1) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$$

$$P(X = 4, \quad \Psi = 5) = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/12$$

$$P(X = 3, \quad \Psi = 5) = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/12$$

ψ \ χ	2	3	4	Σύνολον
1	1/12	1/12	1/6	1/3
3	1/12	2/12	1/12	1/3
5	1/6	1/12	1/12	1/3
Σύνολον	1/3	1/3	1/3	1

$$\Phi(4,4) = P\left(\chi \leqslant 4, \quad \psi \leqslant 4\right) = 8/12.$$

5) Δίδονται τρεῖς κάλπαι α, β, γ, αἵτινες περιέχουν σφαιρίδια λευκά καί φαιά.
'Η πιθανότης ὅπως ἐκ τῆς πρώτης κάλπης ἐξαχθῇ λευκόν σφαιρίδιον εἶναι P = 1/2 καί μαῦρον 1/2, ἐκ τῆς δευτέρας P = 1/4 καί q = 3/4 καί ἐκ τῆς τρίτης P = 1/2, q = 1/2.
'Εάν δέ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ ἡ κάλπη α) εἶναι 1/2, ἡ κάλπη β) ἴση μέ 1/4 καί ἡ κάλπη γ) 1/4. Βά-

σει τοῦ σχήματος τοῦ LAPLACE-LEXIS νά ὑπολογισθῆ ἡ πιθανότης $P_{C,N}$, $M(E)$, G_E^2

Λ ύ σ ι ς

Ὁ τύπος εἶναι $$P_{C,N} = \frac{1}{H_o}\binom{N}{C}\sum_{i=1}^{H_o}(P)^C(1-P)^{N-C}$$

$$P_{o,3} = \frac{1}{2}\binom{3}{o}\left(\frac{1}{2}\right)^o\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\binom{3}{o}\left(\frac{1}{4}\right)^o\left(\frac{3}{4}\right)^3 +$$

$$+\frac{1}{4}\binom{3}{o}\left(\frac{1}{3}\right)^o\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{51}{256}$$

$$P_{1,3} = \frac{1}{2}\binom{3}{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{99}{256}$$

$$P_{2,3} = \frac{1}{2}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{256}$$

$$P_{3,3} = \frac{1}{2}\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{25}{256}$$

$M(E) = N\,\bar{P}$, $\bar{P} = \frac{1}{3}(1/2 + 1/4 + 1/2) = 5/12$

$M(E) = 3\,\frac{5}{12} = \frac{5}{4}$,

$\sigma_E^2 = N\,\bar{P}\,\bar{q} + N(N-1)\quad \sigma_\rho^2 = 3\frac{5}{12}\;\frac{7}{12} + 3.2\,\frac{1}{72} = \frac{13}{16}$

ὅπου $\sigma_\rho^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(P_i - \bar{P})^2 = \frac{1}{72}$

6) Δίδεται μία κάλπη, ἥτις περιέχει 10 σφαιρίδια λευκά καί 10 φαιά, ἐκτελοῦμεν μίαν ἐξαγωγήν ἐκ 3 σφαιριδίων ἄνευ ἐπανα - τοποθετήσεως (IN BLOCCO), καί θέτομεν τά τρία σφαιρίδια εἰς μίαν νέαν κάλπην (ὑπάρχει ἡ τυχαία μεταβλητή Θ). Ἀπό τήν νέαν κάλπην ἐξάγομεν ἐκ νέου 2 σφαιρίδια ἀναλόγως τοῦ σχή - ματος τοῦ BERNOULLI (ἐξαγωγή μετ'ἐπανατοποθετήσεως).
Ἔχομεν ὡς ἐκ τούτου μίαν νέαν τυχαίαν μεταβλητήν α, Νά ὑπολογισθῇ ἡ διπλῆ τυχαία μεταβλητή (Θ,α).

Λ ύ σ ι ς

Ἡ τυχαία μεταβλητή Θ λαμβάνει τάς κάτωθι τιμάς Θ: 0, 1, 2, 3 καί ἀντιστοίχους πιθανότητας τάς κάτωθι

$$P_{0,3} = \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19}$$

$$P_{1,3} = \frac{\binom{10}{1}\binom{20}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{75}{190}$$

$$P_{2,3} = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{75}{190}$$

$$P_{3,3} = \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19}$$

Ἐνῷ ἡ μεταβλητή α λαμβάνει τιμάς 0, 1, 2.

Ἐάν Θ = 0, ἡ 2α κάλπη περιέχει καί τάς 3 σφαίρας φαιάς.

Ἐπομένως

$$P\langle \Theta=0,\ \alpha=0 \rangle = P\langle \Theta=0 \rangle P\langle \alpha=0 \rangle = \frac{2}{19} \cdot 1 = 2/19$$

$P\langle \Theta=0,\ \alpha=1\rangle = P\langle \Theta=0\rangle P\langle \alpha=1\ /\ \alpha=0\rangle = 2/19.0 = 0$

$P\langle \Theta=0,\ \alpha=2\rangle = P\langle \Theta=0\rangle P\langle \alpha=2\ /\ \Theta=0\rangle = 2/19.0 = 0$

'Εάν $\Theta = 1$, τότε εἰς τήν δευτέραν κάλπην εὑρίσκονται μία σφαίρα λευκή μέ πιθανότητα 1/3 καί δύο σφαιρίδια φαιά μέ πιθανότητα 2/3.

Ἤτοι

$P\langle \Theta=1,\ \alpha=0\rangle = P\langle \Theta=1\rangle P\langle \alpha=0\ /\ \Theta=1\rangle = \frac{75}{190}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{50}{285}$

$P\langle \Theta=1,\ \alpha=1\rangle = P\langle \Theta=1\rangle P\langle \alpha=1/\Theta=1\rangle = \frac{75}{190}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{50}{285}$

$P\langle \Theta=1,\ \alpha=2\rangle = P\langle \Theta=1\rangle P\langle \alpha=2/\Theta=1\rangle = \frac{75}{190}\cdot 1/3.1/3 = 25/570$

'Εάν $\Theta = 2$, θά ἔχωμεν

$P\langle \Theta=2,\ \alpha=0\rangle = P\langle \Theta=2\rangle P\langle \alpha=0/\Theta=2\rangle = \frac{75}{190}\cdot 1/3.1/3 = \frac{25}{570}$

$P\langle \Theta=2,\ \alpha=1\rangle = P\langle \Theta=2\rangle P\langle \alpha=1/\alpha=2\rangle = \frac{75}{190}\binom{2}{1}\frac{2}{3}\cdot 1/3 = \frac{50}{285}$

'Εάν $\Theta = 3$, θά ἔχωμεν

$P\langle \Theta=3,\ \alpha=0\rangle = \frac{2}{19}\cdot 0 = 0$

$P\langle \Theta=3,\ \alpha=1\rangle = \frac{2}{19}\cdot 0 = 0$

$P\langle \Theta=3,\ \alpha=2\rangle = 1\cdot\frac{2}{19} = \frac{2}{19}$

'Ο Πίναξ τῆς μεταβλητῆς (Θ,α), θά εἶναι

α \ Θ	0	1	2	3	Σύνολον
0	2/19	50/285	25/570	0	185/570
1	0	50/285	50/285	0	100/285
2	0	25/570	50/285	2/19	185/570
	2/19	225/570	225/570	2/19	1

7) Ρίπτομεν δύο κύβους κανονικούς. Δεικνύομεν μέ Χ τό άποτέλεσμα τοῦ πρώτου κύβου καί μέ Ψ μία τυχαία μεταβλητή ἥτις λαμβάνει τήν τιμήν 0, ἐάν τό ἄθροισμα τῶν δύο κύβων εἶναι μικρότερον τοῦ 9, καί τήν τιμήν 1 ἐάν τό ἄρθροισμα εἶναι $\geqslant 10$.
Νά εὑρεθῇ ἡ κατανομή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (Χ, Ψ)
Ὁ Μέσος καί ἡ διακύμανσις τοῦ Χ καί Ψ.

Λ ύ σ ι ς

Χ \ Ψ	0	1	
1	1/6	0	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	0	1/6
4	5/36	1/36	1/6
5	4/36	2/36	1/6
6	3/36	3/36	1/6
	5/6	1/6	1

$M(X) = \frac{7}{2}$, $M(\Psi) = \frac{1}{6}$, $\sigma_\chi^2 = \frac{35}{12}$, $\sigma_\psi^2 = \frac{5}{36}$

Εἰς μίαν κάλπην ὑπάρχουν 4 σφαῖρες ἀριθμημέναι ἀπό 1 μέχρι 4. Ἐξάγομεν ἀναλόγως τοῦ σχήματος τοῦ BERNOULLI δύο (2) σφαίρας.
Δεικνύομεν διά Χ τόν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο ἐξαχθέντων ἀριθμῶν καί Ψ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν.
α) Νά εὑρεθῇ ὁ πίναξ τῶν πιθανοτήτων τῆς διπλῆς τυχαίας μεταβλητῆς (Χ, Ψ) διαγραφομένη ὑπό τῶν τιμῶν χ, ψ
β) Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως κατανομῆς εἰς τά σημεῖα (3,4) καί (2,7).

'Απάντησις

X \ Ψ	2	3	4	5	6	7	8	Σύνολον
1	1/16							1/16
2	-	2/16	1/16					3/16
3	-	-	2/16	2/16	1/16	-	-	5/16
4	-	-	-	2/16	2/16	2/16	1/16	7/16
Σύνολον	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	1

$\Phi\ (3,4) = \frac{6}{16}$, $\Phi\ (2,7) = -\frac{4}{16}$

8) Ἔχομεν τρεῖς κάλπας, αἵτινες περιέχουν σφαιρίδια λευκά καί φαιά καί εἶναι ἀντιστοίχως 1/2, 1/3, 1/2, ἡ πιθανότης τῆς ἐξαγωγῆς μιᾶς σφαίρας λευκᾶς
'Εξάγομεν τρία σφαιρίδια ἀναλόγως τοῦ σχήματος τοῦ POISSON
Νά προσδιορισθῇ α) ἡ γεννήτρια συνάρτησις τῶν πιθανοτήτων, β) ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις.

Λ ύ σ ι ς

α) $G\ (\tau) = (P^1\ \tau + q^1)\ (P^2\ \tau + q^2)\ (P^3\ \tau + q^3) =$

$= (1/2\ \tau + 1/2) \cdot (1/3\tau + 2/3)\ (1/2\tau + \frac{1}{2}) = 1/12\ \tau^3 + 4/12\tau^2 +$

$+ 5/12\ \tau + 1/6.$

Oἱ συντελεσταί τοῦ τ δίδουν τάς πιθανότητας, ἤτοι

$P_{0,N} = 1/6,\ P_{1,N} = 5/12\ ,\ P_{2,N} = 4/12,\ P_{3,N} = 1/12$

β) $P(\alpha) = \frac{1}{6}\ e^{\alpha,0} + \frac{5}{12}e^{\alpha} + \frac{1}{3}\ e^{2\alpha} + \frac{1}{12}\ e^{3\alpha}$

διότι $X = 0, \; 1, 2, 3$ καί

ειά $P = 1/6 \, , 5/12 \, , 1/3 \, , 1/12$

9) Ἔχομεν δύο κάλπας Α, Β, περιέχει ἡ Α 10 σφαιρίδια ἐκ τῶν ὁποίων 8 ἔχουν σημειωθῆ μέ Νο 1 καί 2 μέ τό Νο 2, ἡ Β, περιέχει 9 σφαιρίδια ἐκ τῶν ὁποίων 5 φέρουν τό Νο 1 καί 4 τό Νο 2.

Ἐξάγομεν τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον ἀπό τήν κάλπην Α καί τό τοποθετοῦμεν εἰς τήν κάλπην Β. Ἐν συνεχείᾳ ἐξάγομεν ἕνα σφαιρίδιον ἀπό τήν κάλπην Β. Δεικνύομεν διά χ τόν ἀριθμόν τῆς ἐξαχθείσης σφαίρας ἐκ τῆς κάλπης Α, καί διά ψ τόν ἀριθμόν τῆς ἐξαχθείσης ἐκ τῆς κάλπης Β.

Νά ὑπολογισθοῦν αἱ πιθανότητες τῶν διαφόρων ζευγῶν (χ,ψ).

Ἀπάντησις:

Τά δυνατά ζεύγη εἶναι (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) μέ ἀντιστοίχους πιθανότητας 0,48, 0,32, 0,10, 0,10.

10) Μία κάλπη περιέχει 7 σφαιρίδια λευκά καί 3 φαιά. Ἀφαιροῦμεν κατά τρόπον ἐντελῶς τυχαῖον 2 σφαιρίδια. Ἀπό τήν μειουμένην κάλπην ἐξάγομεν χωρίς ἐπανατοποθετήσεις 3 σφαιρίδια. Νά μελετηθῇ ἡ τυχαία μεταβλητή Χ, ἤτοι ὁ ἀριθμός τῶν ἐξαχθέντων λευκῶν σφαιριδίων, νά εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες, ὁ Μέσος, καί ἡ διακύμανσις.

Ἀπάντησις:

Ἡ Χ λαμβάνει τιμάς 0, 1, 2, 3 μέ πιθανότητας ἀντιστοίχους

$$\frac{2}{44}, \quad \frac{14}{44}, \quad \frac{21}{44}, \quad \frac{7}{44}$$

$$M(X) = \frac{7}{4}, \quad \sigma_\chi^2 = \frac{105}{176}$$

Γενικαί Ἀσκήσεις

1) Ἔστω X μία τυχαία μεταβλητή, ἥτις προκύπτει ἀπό τήν ρῖψιν ἑνός κύβου.

α) Ρίπτεται ὁ κύβος δύο φοράς. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ καί τάς δύο φοράς ὁ ἀριθμός 3;

β) Ρίπτεται ὁ κύβος 7 φοράς. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ 4 φοράς ὁ ἀριθμός 3;

2) Ἔκ τινος δέσμης ἐκ 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνονται κατά τύχην 4 παιγνιόχαρτα. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἅπαντα τά παιγνιόχαρτα εἶναι χρώματος ἐρυθροῦ;

3) Νόμισμα ρίπτεται 10 φοράς. Ποία ἡ πιθανότης νά λάβωμεν 10 κορῶνες καί οὐδεμίαν γράμματα.

4) Ἐάν 10 κύβοι ριφθοῦν μαζί ποία ἡ πιθανότης τά σημεῖα 1, 2,3,4,5,6 νά ἐμφανισθοῦν ὅλα, τοὐλάχιστον μίαν φοράν τό καθένα.

5) Ἐάν ἀπό μίαν τράπουλαν μέ 52 χαρτιά, τραβήξωμεν τυχαίως ἕνα καί τό τοποθετήσωμεν εἰς τήν θέσιν του, τό αὐτό νά ἐπαναληφθῇ 5 φοράς. Ποία ἡ πιθανότης νά τραβήξωμεν 2 μαῦρα καί 3 κόκκινα;

6) Μία κάλπη περιέχει 10 λευκά σφαιρίδια καί 6 μαῦρα. Μία ἄλλη κάλπη περιέχει 5 λευκά καί 4 μαῦρα σφαιρίδια. Ἐξάγομεν ἕνα σφαιρίδιον ἀπό τήν (α) κάλπη καί τό θέτομεν εἰς τήν δεύτεραν καί ἐν συνεχείᾳ ἐξάγομεν ἕνα σφαιρίδιον ἀπό τήν δεύτεραν κάλπην. Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι μαῦρο;

7) Τρεῖς κάλπαι περιέχουν ἀντιστοίχως 2 λαυκάς καί 3 μαύρας σφαίρας, 5 λευκάς καί 2 μαύρας, 3 λευκάς καί 4 μαύρας. Ἐξάγεται μία σφαίρα ἀπό κάθε κάλπη. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθοῦν 2 λευκαί καί 1 μαύρη;

8) Ἔστω ὅτι ἔχομεν 10 σφαιρίδια, φέροντα τούς ἀριθμούς ἀπό 1 μέχρι 10. Ἐξάγομεν τυχαίως,**χωρίς ἐπανατοποθετήσεις**4σφαιρίδια. Ποία ἡ πιθανότης ὅτι τό δεύτερον ἐξαχθέν σφαιρίδιον φέρει τόν ἀριθμόν 3;

9) Ἐάν ἕξ σφαιρίδια κατανέμωνται εἰς τρεῖς κάλπας εἰς τρόπον ὥστε ἕκαστον σφαιρίδιον νά ἔχῃ τήν ἰδίαν πιθανότητα νά τύχῃ εἰς ἑκάστην κάλπην, ποῖα εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι μία καθωρισμένη κάλπη περιέχει ἀκριβῶς 2 σφαιρίδια.

(Ἀπάντησις $\binom{3}{2}\dfrac{1}{\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$).

10) Μία κάλπη Α περιέχει 2 σφαιρίδια λευκά καί δύο μαῦρα. Μία ἑτέρα κάλπη Β περιέχει 3 σφαιρίδια λευκά καί 2 μαῦρα. Μεταφέρομεν, κατά τρόπον τυχαῖον, ἕν σφαιρίδιον ἀπό τήν κάλπην Α εἰς τήν Β καί ἀκολούθως ἐξάγομεν ἐκ τῆς κάλπης Β ἕν σφαιρίδιον. Ἐάν αὕτη προκύπτῃ λευκή, ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι ἡ μεταφερομένη σφαῖρα ἐκ τῆς Α κάλπης εἰς τήν Β ἦτο λευκή;

11) Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Χ, ἥτις λαμβάνει μίαν σταθεράν τιμήν C.

12) Δίδεται ἡ πυκνότης συναρτήσεως

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} 2\chi & \text{διά} \quad 0<\chi<1 \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $\Psi = 3X + 3$.

13) Δίδεται ἡ τυχαία μεταβλητή Χ, ἥτις λαμβάνει τιμάς −1 μέ πιθανότητα $\frac{1}{3}$ καί 1 μέ πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Νά εὑρεθῇ ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις, αἱ δύο πρῶται ροπαί καί ἡ διακύμανσις.

14) Τῆς ἀσκήσεως 12, νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις καί ἡ διακύμανσις.

15) Ἐάν X_1 καί X_2 εἶναι δύο τυχαῖαι μεταβληταί τοῦ POISSON,

ἀνεξάρτηται, μέ μέσους $M^{(1)}$ καί $M^{(2)}$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι $X=X_1+$ $+X_2$ εἶναι ἀκόμη μία τυχαία μεταβλητή τοῦ POISSON μέ μέση τιμή $M^{(1)} + M^{(2)}$.

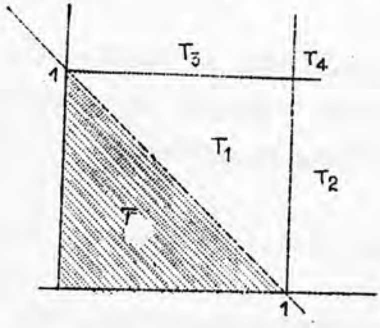
16) Δίδεται ἡ πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi\,(\chi,\psi) = \begin{cases} 2 & \text{διά } (\chi,\psi) \in T \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (X,Ψ).

Ἀπάντησις

$$\Phi\,(\chi,\psi) = \begin{cases} 2\chi\psi \quad \text{διά } (\chi,\psi)\in T, \text{ ἤτοι } 0<\chi\leqslant 1,\ 0<\psi\leqslant 1-\chi \\ \psi(2-\psi)-(1-\chi)^2 \quad \text{διά } (\chi,\psi)\in T_1, \text{ ἤτοι } 0<\chi\leqslant 1, \\ \qquad\qquad 1-\chi<\psi\leqslant 1 \\ \psi(2-\psi) \quad \text{διά } (\chi,\psi)\in T_2, \text{ ἤτοι } \chi>1,\ 0<\psi\leqslant 1 \\ \chi(2-\chi) \quad \text{διά } (\chi,\psi)\in T_3, \text{ ἤτοι } 0<\chi\ \ 1\leqslant\psi \\ 1 \quad \text{διά } \chi,\psi\in T_4 \qquad \chi>1,\ \psi>1 \end{cases}$$



17) Δίδεται ἡ κάτωθι πυκνότης πιθανότητος

$$\varphi(\chi,\psi) = e^{-(\chi+\psi)} \qquad \text{διά } \chi>0 \qquad \text{καί } \psi>0$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς, αἱ ὁριακαί πυκνότητες πιθανότητος καί ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις.

18) Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς, αἱ ὁριακαί συναρ-

τήσεις κατανομῆς καί αἱ μέσαι τιμαί τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ἥτις ἔχει πυκνότητα πιθανότητος τήν κάτωθι

$$\varphi(\chi,\psi) = \begin{cases} 3\chi & \delta\iota\acute{\alpha} \quad 0<\chi<1, \quad 0<\psi<\chi \\ 0 & \acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha\chi o\tilde{\upsilon} \end{cases}$$

'Απάντησις

$$\Phi(U,\nu)= \begin{cases} \int_0^U \int_0^\nu 3\chi \, d\chi \, d\psi = 3\,U^2\,\nu & \delta\iota\acute{\alpha} \quad (U,\nu)\in A \\ \int_0^U \int_0^\chi 3\chi \, d\chi \, d\psi = U^3 & \text{"} \quad (U,\nu)\in B \\ \int_0^U \int_0^\chi 3\chi \, d\chi \, d\psi = U^3 & \text{"} \quad (U,\nu)\in \Gamma \\ \int_0^\nu \int_0^\chi 3\chi \, d\chi \, d\psi + \int_\nu^1 d\chi \int_0^\nu 3\chi \, d\psi = \frac{3}{2}\,\nu - \frac{1}{2}\nu^3 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad (U,\nu)\in \Delta \\ 1 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad (U,\nu)\in E \end{cases}$$

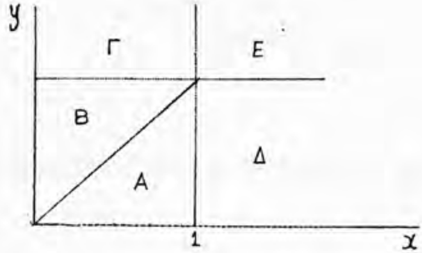
$$\Phi_1\,(U) = \begin{cases} 0 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad U\leqslant 0 \\ U & \delta\iota\acute{\alpha} \quad (U,\nu)\in \Gamma \\ 1 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad U>1 \end{cases}$$

$$\Phi_2\,(\nu) = \begin{cases} 0 & \nu<0 \\ \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}\nu^3 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad 0<\nu\leqslant 1 \\ 1 & \delta\iota\acute{\alpha} \quad \nu>1 \end{cases}$$

$$M\,(X) = 3/4 = \int_0^1 3\chi^3 \, d\chi$$

$$M(\Psi) = 3/8 = \int_0^1 3/2\, \psi\, (1-\psi^2)\, d\psi.$$

Σχῆμα



19) Δίδεται ἡ τυχαία μεταβλητή X, ἥτις ἔχει πυκνότητα πιθανότητος τήν κάτωθι

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} e^{-(\chi+1)} & \text{διά} \quad \chi \geqslant -1 \\ 0 & \text{διά} \quad \chi < -1 \end{cases}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς $Z = X_1+X_2$, δοθέν - τος ὅτι αἱ μεταβληταί X_1 καί X_2 εἶναι ἀνεξάρτηται μεταξύ των καί ἔχουν τήν αὐτήν συνάρτησιν κατανομῆς μέ τήν μεταβλητήν X.

20) Δίδεται μία ἀκολουθία τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X_1, X_2 .. ..,X_n , ἀνεξαρτήτων μεταξύ των, μέ πυκνότητα πιθανότητος τήν κατωτέρω

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} e^{-(\chi-K)} & \text{διά} \quad \chi > K \\ 0 & \text{ἀλλαχοῦ} \end{cases}$$

Νά ἐξετασθῇ ἐάν ἰσχύῃ ὁ νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν.

21) Ρίπτομεν δύο κύβους. Δεικνύομεν μέ X τό ἀποτέλεσμα τοῦ πρώτου κύβου καί μέ Ψ μία τυχαία μεταβλητή,ἥτις λαμβάνει τήν τιμήν 0.
'Εάν τό ἄθροισμα τῶν δύο κύβων εἶναι μικρότερον ἤ ἴσον τοῦ 9, καί τήν τιμήν 1 ἐάν τό ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον ἤ ἴ-

σον τοῦ 10.

Νά εὑρεθῇ ἡ κατανομή τῶν πιθανοτήτων τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (Χ,Ψ).

22) Ρίπτομεν 3 κανονικούς κύβους.

Ἔστω $α_1$ ὁ ἀριθμός τῶν κύβων, οἵτινες παρουσιάζουν τήν ὄψιν 1, $α_2$ ὁ ἀριθμός τῶν κύβων, οἵτινες παρουσιάζουν τήν ὄψιν 6, $α_3$ ὁ ἀριθμός τῶν κύβων, οἵτινες παρουσιάζουν τάς ὄψεις 2 ἤ 3 ἤ 4 ἤ 5. Νά ὑπολογισθῇ ἡ κατανομή τῆς μεταβλητῆς (A_1 A_2 A_3) διαγραφομένη ἀπό τήν ($α_1$, $α_2$, $α_3$) καί αἱ μέσαι τιμαί $M(A_1)$, $M(A_2)$, $M(A_3)$.-

----

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8 ον

ΤΕΣΤ ΤΟΥ KOLMOGOROV

'Η λύσις πολλῶν Στατιστικῶν προβλημάτων βασίζεται σήμερον εἰς τήν χρησιμοποίησιν εἰδικῶν TEST.

'Η χρῆσις αὕτη καθίσταται ἀναγκαία, διότι ὁ ἐρευνητής εὑρίσκεται εἰς τάς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἐνώπιον δειγματοληπτικῶν δεδομένων, ἐξαχθέντων κατά καθωρισμένον τρόπον ἐξ ἑνός ἀρκετά μεγάλου πληθυσμοῦ.

Τά Στατιστικά TEST δύνανται νά χωρισθοῦν εἰς δύο κατηγορίας:

1) <u>Παραμετρικά TEST.</u>

Καλοῦνται παραμετρικά TEST ἐκεῖνα τῶν ὁποίων τά θεωρητικά πρότυπα θέτουν εἰδικούς ὅρους ἐπί τοῦ πληθυσμοῦ καταγωγῆς καί τῶν παραμέτρων των, ἐξ οὗ ὑποτίθεται ὅτι ἔχει ἐξαχθῆ τό δεῖγμα (π.χ. τό TEST τοῦ STUDENT καί τό TEST τοῦ FISHER, καθ'ἅ ὑπάρχει μία ἀκριβής ὑπόθεσις ὅτι τά δεδομένα προέρχονται ἐξ ἑνός κανονικοῦ πληθυσμοῦ τῆς ἰδίας διασπορᾶς.

2) <u>Μή παραμετρικά TEST.</u>

Καλοῦνται μή παραμετρικά TEST ἐκεῖνα τῶν ὁποίων τά θεωρητικά πρότυπα δέν θέτουν εἰδικούς ὅρους ἐπί τοῦ πληθυσμοῦ καταγωγῆς καί τῶν παραμέτρων του.

Τά μή παραμετρικά TEST δύνανται νά διακριθοῦν εἰς δύο κατηγορίας:

α) μή παραμετρικά TEST βασιζόμενα ἐπί τῆς διατάξεως.

β) μή παραμετρικά TEST βασιζόμενα ἐπί τῆς συχνότητος.

Τό TEST τοῦ KOLMOGOROV-SMIRNOV ἀνήκει εἰς τήν δευτέραν κατηγορίαν.

Έστω μία τυχαία Στατιστική μεταβλητή X.
Βάσει μιᾶς ὡρισμένης ὑποθέσεως Ho, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ X λαμβάνει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \chi_\kappa$$

μέ τάς ἀντιστοίχους πιθανότητας (σχετική συχνότης)

$$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots\ldots P_\kappa$$

ὅπου $\chi_i < \chi_i + 1$ καί $\sum_{1}^{\kappa} {}_i \; P_i = 1$

Ἐπίσης δεικνύομεν διά $\Phi(\chi_i) = P\{X \leq \chi_i\}$ (2.1)

τήν συνάρτησιν κατανομῆς τῆς Στατιστικῆς μεταβλητῆς X.
Ἐξάγεται ἕν τυχαῖον δεῖγμα τῶν n μονάδων ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ, τοῦ ὁποίου δέν εἶναι γνωστή ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς X.

Δεικνύομεν τό ἐξαχθέν δεῖγμα διά τοῦ ἀκολούθου τρόπου.

Χαρακτηριστικά $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \chi_\iota$

Ἀπόλυτος συχνότης $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_\kappa$

Σχετική$_\kappa$ συχνότης $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots\ldots\ldots f_\kappa$

Ὅπου $\sum_{1} {}_i \; \alpha_i = n$

$$\sum_{1}^{\kappa} {}_i \; f_i = 1$$

Ἡ συνάρτησις κατανομῆς τοῦ δείγματος θά εἶναι

$$F(\chi_i) = F\{X < \chi_i\} = \sum_{1}^{i} J f_J \qquad (2.2)$$

Τίθεται τό πρόβλημα ὅπως βάσει τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος ἴδωμεν, ἐάν τό ἀνωτέρω δεῖγμα ἱκανοποιῇ τήν ὑπόθεσιν Ho, ὅτι προέρχηται ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ, εἰς ὅν ἡ Στατιστική μεταβλητή

Χ έχει συνάρτησιν κατανομῆς τήν $\Phi(\chi_i) = P\left[X \leq \chi_i\right]$

Πρός τόν σκοπόν τοῦτον χρησιμοποιεῖται τό TEST τοῦ KOLMOGOROV SMIRNOV ὅ λαμβάνει ὑπ'ὄψιν τάς δύο συναρτήσεις κατανομῆς.

Ἤτοι: τήν θεωρητικήν $\Phi(\chi_i) = P\left[X \leq \chi_i\right]$ καί τήν ἐμπειρικήν

$F(\chi_i) = F\left\{X \leq \chi_i\right\}$

Ὁ ὑπολογισμός τοῦ ὡς ἄνω TEST βασίζεται ἐπί τῆς μεγίστης ἀποκλίσεως τῶν δύο συναρτήσεων κατανομῆς (2.1) καί (2.2) ἤτοι

$$Do = MaX\left[\Phi(X)-F(X)\right] \quad (2.3)$$

Μεταβαλλομένου τοῦ δείγματος ἡ τιμή (2.3) μεταβάλλεται καί διαγράφει μίαν τυχαίαν μεταβλητήν τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τήν πυκνότητα πιθανότητος.

Ὁρισθέντος ἑνός ἐπιπέδου σημαντικότητος α, ἐάν ἡ πιθανότης, ἥτις ἀναφέρεται εἰς τήν ὑπολογισθεῖσαν τιμήν Do εἶναι ἴση ἤ μικροτέρα τοῦ α δυνάμεθα νά ἀποδεχθῶμεν τήν ὑπόθεσιν Ho.

Ἐάν ὅμως τοιαύτη πιθανότης εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ α, δυνάμεθα νά μήν ἀποδεχθῶμεν τήν ὑπόθεσιν Ho.

Ὑπάρχουν, φυσικά πίνακες βάσει τῶν ὁποίων γίνεται ἡ σύγκρισις τῶν θεωρητικῶν καί ἐμπειρικῶν τιμῶν ἀναλόγως τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος (n) καί τοῦ ἐπιπέδου σημαντικότητος (α).

Ὅθεν ἀρκεῖ νά συγκρίνωμεν τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν Do μέ τήν θεωρητικήν τιμήν Dn,α τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν εἰς τούς πίνακας καί κατά συνέπειαν ἀποφασίζομεν περί τῆς ἀποδοχῆς ἐάν

$$Do < Dn,\alpha$$

καί περί τῆς μή ἀποδοχῆς ἐάν

$$Do > Dn,\alpha$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Ρίπτομεν συγχρόνως 4 κύβους 81 φοράς: Θεωρεῖται ὡς ἐπιτυχία, ἐάν ἐμφανισθῆ τό 5 ἤ τό 6.

Εἰς τόν ὑπ'ἀριθ. Ι πίνακα μεταφέρονται ὅλα τά ἀναγκαῖα στοιχεῖα διά τήν ἀνάλυσιν.

Εἰς τήν στήλην (3) ἐμφαίνονται αἱ σχετικαί συχνότητες ληφθεῖσαι ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀπρλύτων συχνοτήτων διά τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν δοκιμῶν. Εἰς τήν στήλην (4) ἐμφαίνονται αἱ πιθανότητες, αἵτινες λαμβάνονται ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ διωνύμου. $81\ (\frac{1}{3}+\frac{2}{3})^4$

Διά μέσου τοῦ TEST τοῦ KOLMOGOROV ἐξετάζομεν, ἐάν ἡ δειγματοληπτική κατανομή πλησιάζη πρός τήν θεωρητικήν τοιαύτην (2.4).

Πρός τοῦτο ἀπαιτεῖται ἡ κατασκευή τῶν θεωρητικῶν καί ἐμπειρικῶν συναρτήσεων κατανομῆς· τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἐάν ὑπολογίσωμεν τάς ἀθροιστικάς τιμάς τῶν στηλῶν (3) καί (4). Οὕτω λαμβάνονται αἱ δύο συναρτήσεις κατανομῆς $\Phi(\chi_i)$ καί $F(\chi_i)$, αἵτινες ἐμφαίνονται ἀντιστοίχως εἰς τήν στήλην (5) καί (6), ἐνῷ εἰς τήν στήλην (7) ἐμφαίνονται αἱ ἀποκλίσεις $\Phi(\chi_i)-F(\chi_i)$ Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῆς στήλης (7) προκύπτει ὅτι ἡ μεγίστη διαφορά μεταξύ τῆς θεωρητικῆς καί τῆς ἐμπειρικῆς κατανομῆς εἶναι D_o=0,0617.-

Π Ι Ν Α Ξ No 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
'Επιτυχίαι i	'Απόλυτος Συχνότης α_i	Σχετική Συχνότης $\frac{\alpha_i}{N} f_i$	Πιθανότης P_i	$\Phi(\chi_i) = \sum_1^i P_i$	$\Phi(\chi_i) = \sum_1^i \frac{\alpha_i}{N}$	$\Phi(\chi_i) - F(\chi_i)$
0	11	0,1358	0,1975	0,1975	0,1358	0,0617
1	34	0,4198	0,3951	0,5926	0,5926	0,0370
2	30	0,3704	0,2963	0,8889	0,9260	0,0371
3	6	0,0740	0,0987	0,9876	1,0000	0,0124
4	0	0,000	0,0124	1,0000	1,0000	0,000
	81	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	Do =0,0617

Διά νά ἀποφασίσωμεν λοιπόν περί τῆς ἀποδοχῆς ἤ μή τῆς ὑποθέσεως Ho, ἀπαιτεῖται ἡ σύγκρισις τῆς τιμῆς Dc, μετά τῆς τιμῆς $D_{n,0,01}$ ληφθείσης ἐκ τοῦ πίνακος εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 0,01 καί μεγέθους δείγματος (n).

Εἰς τόν πίνακα ἀντιστοιχεῖ μία τιμή ἴση μέ

$$\frac{1,63}{\sqrt{81}} = 0,181$$

Δοθέντος ὅτι Do = 0,0617 καί $D_{n,0,001}$ = 0,181, ἤτοι $D_o < D_{n,001}$, ἀποδεχόμεθα τήν ὑπόθεσιν Ho, ὅτι ἡ ἐμπειρική κατανομή πλησιάζει ἀρκούντως τήν θεωρητικήν τοιαύτην $81\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^4$.

Σύγκρισις μεταξύ τοῦ TEST τοῦ KOLMOGOROV καί X^2

Εἶναι γνωστόν, ὅτι τό προηγούμενον τεθέν πρόβλημα δύναται νά λυθῆ καί διά τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ TEST X^2, ἀπαιτεῖται ἐν τούτοις ἡ ἑξῆς παρατήρησις.

'Η ἐφαρμογή τοῦ TEST X^2 ἥτις ἔχει σκοπόν τήν σύγκρισιν μιᾶς θεωρητικῆς Στατιστικῆς κατανομῆς πρός μίαν ἐμπειρικήν, ἀπαιτεῖ ὅπως αἱ θεωρητικαί συχνότητες αἱ σχετικαί πρός ἕκαστον χαρακτηριστικόν τῆς θεωρητικῆς κατανομῆς νά εἶναι μεγαλύτεραι ἤ ἴσαι τοῦ 5.

'Ενίοτε πρός πραγματοποίησιν τῆς τοιαύτης συνθήκης δέον ὅπως προβῶμεν εἰς συνένωσιν περισσοτέρων χαρακτηριστικῶν. 'Αλλά πραγματοποιοῦντες τήν ὡς ἄνω συνένωσιν κατά φυσικήν συνέπειαν ἔχομεν ἀπώλειαν πληροφοριῶν.

Τοὐναντίον τό TEST τοῦ KOLMOGOROV-SMIRNOV δέν ἀπαιτεῖ σύζευξιν χαρακτηριστικῶν, διότι τοῦτο ἐξετάζει κεχωρισμένως τάς ἑκάστοτε λαμβανομένας παρατηρήσεις ἐκ τοῦ δείγματος.Πρός τοῦτο τό ἐν λόγῳ TEST χρησιμοποιεῖ πᾶσαν διαθέσιμον πληροφορίαν καί εἶναι εἰδικῶς χρήσιμον, ὁσάκις τό πλῆθος τοῦ δεί-

γματος κυμαίνηται είς χαμηλά στάδια.
Έστω τό ἀκόλουθον θεωρητικόν παράδειγμα.

Ἐξετάζομεν τάς δύο κατανομάς, θεωρητικήν καί ἐμπειρικήν, ἐμφαινομένας είς τάς στήλας (2) καί (3) τοῦ πίνακος (2). Ὑπολογίζομεν ἐπ'αὐτῶν ἐν πρώτοις τό TEST τοῦ KOLMOGOROV καί ἐν συνεχεία τό TEST X^2 τοῦ PIZZETTI-PEARSON.-

ΠΙΝΑΞ No 2

(1) Χαρακτη-ριστικά χ_i	(2) Συχνότης Θεωρητική nP_i	(3) Συχνότης ἐμπειρική α_i	(4) $\Phi(\chi_i)$	(5) $F(\chi)$	(6) $\Phi(\chi_i)-F(\chi_i)$
χ_1	1	0	0,1	0,0	0,1
χ_2	2	1	0,3	0,1	0,2
χ_3	2	0	0,5	0,1	0,4
χ_4	2	1	0,7	0,2	0,5
χ_5	2	5	0,9	0,7	0,2
χ_6	1	3	1,0	1,0	0,0

Ἡ μεγίστη ἀπόκλισις MaX $\Phi(\chi_i)-F(\chi_i)$ λαμβάνεται ἐν ἀντιστοιχεία πρός τό χαρακτηριστικόν X_4 διά τό ὁποῖον εἶναι

$$Do = 0,5$$

Εἰς τούς πίνακας ἐν ἀντιστοιχία πρός τό ἐπίπεδον σημαντικότητος 0,01 καί n=10, ἔχομεν Dn,0,01=0,490.
Ὅθεν μεταξύ τῶν δύο κατανομῶν δέν ὑφίσταται ἀποδοχή καθ'ὅσον Do > Dn,0,01.
Ὑπολογίζομεν ἐν συνεχεία τό TEST X^2 διά τάς ἰδίας κατανομάς τοῦ πίνακος (2).

Πρός ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τούτου ὀφείλομεν νά ὁμαδοποιήσωμεν τά δοθέντα χαρακτηριστικά κατ'αὔξουσαν τιμήν,ὥστε νά λάβωμεν θεωρητικάς συχνότητας οὐχί ἀνωτέρας τοῦ 5.-

ΠΙΝΑΞ Νο 3

(1)	(2)	(3)	(4)
Διαστήματα I	Θεωρητική Συχνότης ηP_J	'Εμπειρική Συχνότης α_J	$\eta P_J - \alpha_J$
I_1: X1, X2, X3	1, 2, 5 } 5	0, 1, 0 } 1	+4
I_2: X4, X5, Xι	2, 2, 1 } 5	1, 5, 3 } 9	-4

$$X_o^2 = \Sigma_J \frac{(\eta P_J - \alpha_J)^2}{\eta P_J} = \frac{16}{5} + \frac{16}{5} = 6,4$$

διά $g = 1$ βαθμούς ἐλευθερίας

'Η θεωρητική τιμή, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν πίνακα διά $g = 1$ καί εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 0,01 εἶναι 6,63. Ὅθεν συνάγεται, ὅτι διά τοῦ TEST τοῦ PIZZETTI-PEARSON αἱ δύο κατανομαί παρουσιάζουν διαφοράς καθ'ὅσον $X_o^2 > X^2$ καί ἑπομένως δέν ἀποδεχόμεθα τήν ὑπόθεσιν Ho.

Δυνάμεθα ὅθεν νά συμπεράνωμεν ὅτι ἡ συνένωσις τῶν χαρακτηριστικῶν κατά τάξεις μετέτρεψεν τάς κατανομάς, εἰς τρόπον ὥστε τά ληφθέντα ἀποτελέσματα διά τοῦ TEST X^2 νά καταστοῦν ἐντελῶς ἀντίθετα τῶν ληφθέντων διά τοῦ TEST τοῦ COL-

MOGOROV-SMIRNOV.

Τελικῶς δύναται νά λεχθῇ ὅτι διά μικρά δείγματα εἶναι προτιμητέον τό TEST τοῦ KOLMOGOROV καθ'ὅσον διά τοῦ ὡς ἄνω TEST λαμβάνονται ὑπ'ὄψιν ὅλαι αἱ διαθέσιμοι πληροφορίαι.-

Σύγκρισις δύο δειγμάτων διά τοῦ TEST τοῦ KOLMOGOROV-SMIRNOV.

Τό TEST τοῦ KOLMOGOROV-SMIRNOV δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ἐπίσης, ἵνα ἀποδειχθῇ ἐάν δύο δειγματοληπτικαί κατανομαί ἀναφερόμεναι εἰς τά αὐτά χαρακτηριστικά προέρχωνται ἐκ τοῦ ἰδίου πληθυσμοῦ.

Ἔστωσαν:

$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots\ldots\ldots \chi_\kappa$ τά χαρακτηριστικά

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots \alpha_\kappa$ αἱ ἀπόλυται συχνότητες τοῦ πρώτου δείγματος,

ὅπου: $\sum_{1}^{\kappa} {}_i\, \alpha_i = N_1$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_\kappa$, αἱ ἀπόλυται συχνότητες τοῦ δευτέρου δείγματος,

ὅπου: $\sum_{1}^{\kappa} {}_i\, \beta_i = N2$

Σχηματίζομεν ἐν συνεχείᾳ τάς δύο ἀθροιστικάς σειράς.

$$S_1\ (\chi_i) = \sum_{1}^{i} {}_J \frac{\alpha_J}{N_1}$$

$$S_2\ (\chi_i) = \sum_{1}^{i} {}_J \frac{\beta_J}{N_2}$$

Ἡ μεγίστη ἀπόκλισις ἥτις παρατηρεῖται ἐάν θέσωμεν κατ'αὔξουσαν τάξιν εἰς σύγκρισιν τάς τιμάς $S_1(\chi_i)$ καί $S_2(\chi_i)$ δίδει τό TEST τοῦ KOLMOGOROV. Ἤτοι MaX $[S_1(\chi_i)-S_2(\chi_i)]$.

Ὑπάρχουν εἰδικοί πίνακες τοῦ ὡς ἄνω TEST, οἵτινες χρησιμοποιοῦνται διά τήν σύγκρισιν δύο δειγμάτων. Κατά κανόνα ὑπάρχουν δύο τύποι πινάκων.

1) Πίνακες διά τήν σύγκρισιν μεταξύ δύο μικρῶν δειγμάτων ἐχόντων τό αὐτό πλῆθος (n).

2) Πίνακες διά τήν σύγκρισιν δύο πολυπληθῶν δειγμάτων μέ πλῆθος (n) ὁποιωνδήποτε ἀκόμη καί διαφορετικοῦ μεταξύ των.

'Ε φ α ρ μ ο γ ή

'Η σύγκρισις μεταξύ δύο δειγμάτων εἶναι ἡ πλέον σπουδαία ἐφαρμογή τοῦ TEST τοῦ KOLMOGOROV.

Πράγματι τοῦτο εἶναι τό μοναδικόν TEST μή παραμετρικόν καταλληλον διά τήν σύγκρισιν δύο δειγμάτων.

Πρός ἐφαρμογήν τοῦ ὡς ἄνω TEST δυνάμεθα νά προβῶμεν εἰς τήν σύγκρισιν μεταξύ μαθητῶν καί μαθητριῶν ἑνός πρακτικοῦ Λυκείου.

Θέλομεν νά ἐξετάσωμεν, ἐάν ἡ κατανομή τῶν βαθμῶν εἰς τά 'Αρχαῖα 'Ελληνικά καί εἰς τά Μαθηματικά παρουσιάζουν διαφοράς εἰς τούς μαθητάς τῶν δύο φύλων.

"Η κατ'ἄλλην διατύπωσιν θέλομεν νά ἐξετάσωμεν, ἐάν αἱ συναρτήσεις κατανομῆς τῶν χαρακτηριστικῶν "βαθμός εἰς τά 'Αρχαῖα 'Ελληνικά" καί "βαθμός εἰς τά Μαθηματικά" εἶναι οἱ αὐτοί, τόσον εἰς τούς μαθητάς ὅσον καί εἰς τάς μαθητρίας.

Πρός τόν σκοπόν τοῦτον δυνάμεθα νά ἐξετάσωμεν τά δεδομένα μας (ἀναφερόμενα εἰς μίαν περίοδον) ὡς ἕν τυχαῖον δεῖγμα προερχόμενον ἐκ τοῦ πλήθους ὅλων τῶν μαθητῶν καί μαθητριῶν, οἱ ὁποῖοι παρουσιάζουν χαρακτηριστικά ὁμογενῆ πρός ἐκεῖνα τῶν νεαρῶν σπουδαστῶν τοῦ ἐξεταζομένου πρακτικοῦ Λυκείου.

Πρός τόν σκοπόν τοῦτον φέρομεν εἰς τούς πίνακας (3) καί (4) τάς κατανομάς τῶν βαθμῶν τῶν 'Αρχαίων 'Ελληνικῶν καί Μαθηματικῶν τῶν ἀρρένων καί θηλέων μετά τῶν σχετικῶν συναρτήσεων κατανομῶν καί τά ἄλλα ἀναγκαῖα δεδομένα ἱκανά διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ TEST τοῦ KOLMOGOROV.-

ΠΙΝΑΞ Νο 4

Βαθμός 'Αρχαίων 'Ελληνικῶν

Βαθμός εἰς τά 'Αρχαῖα 'Ελληνικά	Δεῖγμα 1 ἄρρενες	Δεῖγμα 2 θήλεις	$S_1(X_i)$	$S_2(X_i)$	$S_1(X_i)-S_2(X_i)$
$\leqslant 3$	59	5	0,0255	0,0179	0,0076
4	324	19	0,1667	0,0860	0,0807
5	897	72	0,5550	0,3441	0,0807
6	797	108	0,9000	0,7312	0,2109
7	206	65	0,9890	0,9641	0,1689
$\geqslant 8$	25	10	1,0000	1,000	0,0249
					0,0000
	2310	279			Do=0,2109

Π Ι Ν Α Ξ No 5

Βαθμός τῶν Μαθηματικῶν

Βαθμός εἰς τά Μαθηματικά	Δεῖγμα 1 ἄρρενες	Δεῖγμα 2 θήλεις	$S_1(\chi_i)$	$S_2(\chi_i)$	$S_1(\chi_i)-S_2(\chi_i)$
≤ 3	114	8	0,0493	0,0287	0,0206
4	372	36	0,2108	0,1577	
5	869	88	0,5870	0,4731	0,0531
6	681	98	0,8818	0,8244	0,1139
7	238	38	0,9848	0,9606	0,0574
≥ 8	35	11	1,0000	1,0000	0,0242
					0,0000
	2310	279	N_1	N_2	Do=0,1139

Ἐπί τῶν πινάκων τοῦ TEST τοῦ KOLMOGOROV εἰς τήν περί - πτωσιν συγκρίσεως μεταξύ πολυαρίθμων δειγμάτων (ὡς τό ἰδι - κόν μας καθ'ὅσον $N_1 = 2310$ καί $N_2 = 279$, αἱ κριτικαί τιμαί τοῦ TEST ἔχουν ἐκφρασθῆ συναρτήσει τῆς μεταβλητῆς.

$$P = \sqrt{\frac{N_1+N_2}{N_1 \cdot N_2}}$$

Εἰς τήν περίπτωσίν μας

$$P = \sqrt{\frac{2310+279}{231IX279}} = \sqrt{0,00402} = 0,0643$$

Ἄς συγκρίνωμεν τώρα τάς τιμάς τῶν TEST τάς ληφθείσας ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῶν βαθμῶν τῶν ἀρχαίων καί μαθηματικῶν, μετά τῶν κριτικῶν τιμῶν τῶν ἐξαχθεισῶν ἐκ τῶν πινάκων. Εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 0,01 ἡ τιμή τοῦ TEST εἶναι διά τόν βαθμόν τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν,

$$D_o = 0,2109 > D_{2310,279,0,01} = 0,1236,$$

διά τόν βαθμόν τῶν μαθηματικῶν

$$D_o = 0,1130 > D_{2310,279,0,01} = 0,1097$$

Ὅθεν δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν, ὅτι τόσον διά τά ἀρχαῖα ὅσον καί διά τά μαθηματικά τά ἐξετασθέντα δείγματα δέν ἀποδέχονται τήν ὑπόθεσιν, ὅτι οἱ ἄρρενες καί οἱ θήλεις ἔχουν τήν ἰδίαν κατανομήν βαθμῶν.-

Π Ι Ν Α Κ Ε Σ

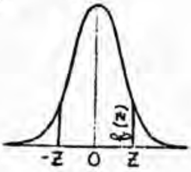
1. Τιμαί τοῦ δείκτου $D_{n,\alpha}$ τοῦ KOLMOGOROV SMIRNOV.
2. Τυποποιημένη κανονική κατανομή.
3. Ὁλοκληρώματα τῆς Τυποποιημένης κανονικῆς κατανομῆς.
4. Παραγοντικά τῶν ἀριθμῶν ἀπό 1 ἕως 20.
5. Δυνάμεις - Ρίζαι - Λογάριθμοι.

ΠΙΝΑΞ Nº 2

Τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\varphi(z) = \varphi(-z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3082	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	4410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2980	2966	2943	2920
.0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0883	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0039	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

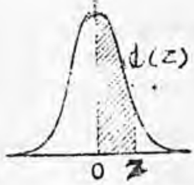
Από

B. V. GNEDENKO, *The theory of probability*, Chelsea, New York, 1962.

ΠΙΝΑΞ Nº 3

Ὁλοκλήρωμα τῆς τυποποιημένης κανονικῆς κατανομῆς

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19487	21094	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	23121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39798	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44345	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47103	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49168
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49738	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3.0	0,49865	3.1	49903	3.2	49931	3.3	49952	3.4	49966
3.5	49977	3.6	49984	3.7	49989	3.8	49993	3.9	49995
4.0	499968								
4.5	499997								
5.0	49999997								

ὑπό
B. V. GNEDENKO, *The theory of probability*, Chelsea, New York, 1962.

Π Ι Ν Α Ξ No 1

Τιμαί τοῦ δείκτου $D_{\eta,\alpha}$ τοῦ KOLMOGOROV-SMIRNOV

η	$D_{\eta,\alpha}$ α=0,05	α=0,01	η	$D_{\eta,\alpha}$ α=0,05	α=0,01
1	0,975	0,955	26	0,259	0,311
2	0,842	0,929	27	0,254	0,305
3	0,708	0,829	28	0,250	0,300
4	0,624	0,734	29	0,246	0,252
5	0,563	0,669	30	0,242	0,290
6	0,519	0,617	31	0,238	0,285
7	0,483	0,576	32	0,234	0,281
8	0,454	0,542	33	0,231	0,277
9	0,430	0,513	34	0,227	0,273
10	0,409	0,489	35	0,224	0,269
11	0,391	0,468	40	0,210	0,252
12	0,375	0,449	45	0,198	0,238
13	0,361	0,432	50	0,188	0,226
14	0,349	0,418	55	0,180	0,216
15	0,338	0,404	60	0,172	0,207
16	0,327	0,392	65	0,166	0,199
17	0,318	0,381	70	0,160	0,192
18	0,309	0,371	75	0,154	0,185
19	0,301	0,361	80	0,150	0,179
20	0,294	0,352	85	0,145	0,174
21	0,287	0,344	90	0,141	0,169
22	0,281	0,337	95	0,137	0,165
23	0,275	0,330	100	0,134	0,161
24	0,269	0,323	>100	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$
25	0,264	0,317			

ΠΙΝΑΞ Νο 4

Παραγοντικά τῶν ἀριθμῶν ἀπό 1 ἕως 20

n	n!
1	
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
14	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
16	20.922.789.888.000
17	355.687.428.096.000
18	6.402.373.705.728.000
19	121.645.100.408.832.000
20	2.432.902.008.176.640.000

ΠΙΝΑΞ Νº 5

2. Δυνάμεις, Ρίζαι, Λογάριθμοι

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	1,70757
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	1,71600
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	1,72428
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	1,73239
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	1,74036
56	31 36	175 616	7,4833	3,8250	1,74819
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	1,75587
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	1,76343
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	1,77085
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	1,77815
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	1,78533
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	1,79239
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	1,79934
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	1,80618
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	1,81291
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	1,81954
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	1,82607
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	1,83251
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	1,83885
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	1,84510
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	1,85126
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	1,85733
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	1,86332
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	1,86923
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	1,87506
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	1,88081
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	1,88649
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	1,89209
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	1,89763
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	1,90309
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	1,90849
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	1,91381
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	1,91908
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	1,92428
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	1,92942
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	1,93450
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	1,93952
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	1,94448
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	1,94939
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	1,95424
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	1,95904
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	1,96379
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	1,96848
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	1,97313
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	1,97772
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	1,98227
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	1,98677
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	1,99123
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	1,99563
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000

ΠΙΝΑΞ № 5

1. Δυνάμεις, Ρίζαι, Λογάριθμοι

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	1,00000
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	1,04139
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	1,07918
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	1,11394
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	1,14613
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	1,17609
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	1,20412
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	1,23045
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	1,25527
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	1,27875
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	1,30103
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	1,32222
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	1,34242
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	1,36173
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	1,38021
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	1,39794
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	1,41497
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	1,43136
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	1,44716
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	1,46240
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	1,47712
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	1,49136
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	1,50515
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	1,51851
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	1,53148
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	1,54407
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	1,55630
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	1,56820
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	1,57978
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	1,59106
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	1,60206
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	1,61278
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	1,62325
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	1,63347
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	1,64345
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	1,65321
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	1,66276
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	1,67210
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	1,68124
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	1,69020
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897

Π Ι Ν Α Ξ Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4ον

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5ον

ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6ον

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7ον

Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΕΚ ΤΩΝ ΥΣΤΕΡΩΝ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΕΚ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8ον

ΤΕΣΤ ΤΟΥ KOLMOGOROV

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

'Αθανασιάδου Κ. Στατιστική. Τόμοι 3. 'Αθῆναι.

'Αθανασιάδου Κ. Στοιχεῖα Μαθηματικῆς Στατιστικῆς, 'Αθῆναι, 1965.

Bass J. Elements de calcul des probabilites theorique et applique, I962.

Boldrini M. Teoria della statistica, I965

Brambilla F. Statistica, I960.

Brunk, H.D. An Indroduction to Mathematical Statistics I960

Castellano V. Statistica, I962.

Castelnuovo G. Calcolo della probabilita, I925

Γκιρτή Γ. Στοιχεῖα Στατιστικῆς 'Αναλύσεως, 1969.

Cramer H. Mathematical Methods of Statistics.

David, F.N. Probability Theory for statistical Methods I949

Feller W. An Introduction to probability Theory and its applications,(vol. I I950,vol II I966)

Θεοδωράκη Γερ. Στοιχεῖα Στατιστικῆς 'Αναλύσεως, 1961.

Galvani L. Introduzione matematica allo studio della statistica, I945.

Gini C. Corso di statistica, I955.

Gini C. Le Medie, I957.

Gnedenko B. The theory of probability, I962.

Golderg S. Probability. 'Ελληνική μετάφρασις ὑπό Κ. Παναγάκη, 1962.

Jordan C. Statistique Mathematique, I927.

Κάκουλου Θ. Μαθήματα Λογισμοῦ Πιθανοτήτων, 1969.

Κανέλλου Σπ. Λογισμός Πιθανοτήτων, 1952.

Κανέλλου Σπ. Θεωρία Λογισμοῦ Πιθανοτήτων, 1959.

Kolmogorov A. Grundbegriffe der Washrschenlichkeitsrechnung, I933.

Kolmogorov A. Sulla Determinazione empirica di una legge di distribuzione, I933.

Lindgren B.W. and G.W. Mc Elrath, Introduction to probability and statistics, I959.

Μαργαρίτη Ε., Στατιστική 2 τόμοι, Ἀθῆναι

Παπαμιχαήλ Α., Μαθήματα Στατιστικῆς, 1968.

Pompili G. Assiomatizzazione, I967.

Pompili G. Theoria dei campioni, I952.

Σαραντοπούλου Σπ., Λογισμός Πιθανοτήτων, 1961.

Στεριώτη Π., Ἀσφαλιστικά Μαθηματικά, 1964.

Wilks S. Mathematical Statistics, I962.