Σ. ΚΑΜΠΕΛΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΑ ΤΟ Β΄. ΕΤΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1978

Σ. ΚΑΜΠΕΛΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΑ ΤΟ Β΄. ΕΤΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1978

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ἐξισώσεις χωριζομένων Μεταβλητῶν

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κατηγορίας αὐτῆς μποροῦν νά γραφοῦν:
Ἡ γενική λύση δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\alpha(x)dx+\beta(y)dy = 0}$$

ὅπου $\alpha(x)$ συνάρτηση ὡς πρός x , $\beta(y)$ συνάρτηση ὡς πρός y καί dx, dy τά ἀντίστοιχα διαφορικά τῶν x καί y.

$$\boxed{\int\beta(y)dy = -\int\alpha(x)dx+c}$$

<u>Παράδειγμα 1.1.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$x^2y^2y'+1 = y$$

Αὐτή γράφεται:

$$x^2y^2.\frac{dy}{dx} = y-1$$

$$x^2y^2.dy = (y-1)dx$$

Διαιροῦμε μέ $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}.dy = \frac{dx}{x^2}, \quad x^2(y-1)\neq 0$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό πρῶτο μέλος εἶναι μόνον ὡς πρός y ἐνῶ τό δεύτερο μόνον ὡς πρός x· ἄρα εἶναι χωριζομένων μεταβλητῶν:

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int\frac{1}{x^2}dx + c$$

$$\begin{array}{r|l} y^2 & y-1 \\ \hline -y^2+y & y+1 \\ \hline 0 + y & \\ -y+1 & \\ \hline 0+1 & \end{array} \Longrightarrow \quad y^2 = (y-1)(y+1)+1 \Longrightarrow \frac{y^2}{y-1} = y+1+\frac{1}{y-1}$$

Ἄρα τό πρῶτο μέλος γράφεται:

$$\int ydy+\int 1.dy+\int\frac{1}{y-1}dy = \frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|$$

Τό δεύτερο μέλος δίνει:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx+c = \int x^{-2}dx+c = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c = -\frac{1}{x}+c$$

Ὁπότε ἡ λύση δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$y^2+2y+2\ln|y.1| = -\frac{2}{x}+2c$$

<u>Παράδειγμα 1.2.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση: $x^5+(y+1)^2.y' = 0$

Αὐτή γράφεται: $x^5+(y+1)^2.\frac{dy}{dx} = 0$

$$x^5dx+(y+1)^2dy = 0$$

$$(y+1)^2dy = -x^5dx$$

Ὁλοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int(y+1)^2dy = -\int x^5dx+c$$

$$\int(y+1)^2d(y+1) = -\int x^5dx+c$$

$$\frac{(y+1)^3}{3} = -\frac{x^6}{6}+c$$

Ἄρα ἡ λύση θά δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$2(y+1)^3 = -x^6+6.c$$

<u>Παράδειγμα 1.3.</u> Νά λυθεῖ διαφορική ἐξίσωση:

$$(1+2y)dx+(4-x)dy = 0$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες $x=1$, $y=2$.

Ἡ ἐξίσωση γράφεται (διαιρώντας μέ τό γινόμενο $(1+2y)(4-x)\neq 0$):

$$\frac{1}{4-x}\,dx+\frac{1}{1+2y}\,dy = 0$$

$$\int\frac{1}{1+2y}\,dy = -\int\frac{1}{4-x}\,dx+c\ .$$

$$\ln|1+2y| = -\ln|4-x|+c$$

$$\ln|(4-x)(1+2y)| = \ln c$$

$$|4-x||1+2y| = c$$

Ὁπότε θέτοντας $x=1$ καί $y=2$ παίρνουμε $c=15$ καί ἑπομένως ἡ λύση εἶναι:

$$|4-x|\ |1+2y| = 15$$

Παράδειγμα 1.4. Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$xy'-y = 0$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες $x=1$, $y=3$.

'Η ἐξίσωση γράφεται:

$$x.\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy = \int\frac{1}{x}\,dx+c$$

$$\ln|y| = \ln|x|+c$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c^{*}, \quad \ln c^{*} = c$$

$$|y| = c^{*}.|x|$$

θέτοντας $x=1$, $y=3$ παίρνουμε $c^{*}=3$· ἄρα ἡ λύση εἶναι:

$$y = \pm 3x$$

Παράδειγμα 1.5. Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$2x = \frac{y}{y'}$$

ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο (1,1), (δηλαδή $x=1$, $y=1$).

'Η ἐξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{dx}.2x = y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2x}\,.\,dx$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int x^{-1}dx+c$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x|+c$$

$$\ln|y| = \ln|x|^{1/2} + \ln c^{*}, \quad c=\ln c^{*}$$

$$|y| = c^{*}.|x|^{1/2}$$

θέτοντας $x=1$, $y=1$ παίρνουμε $c^{*}=1$· ἄρα ἡ λύση εἶναι:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

2. Ἐξισώσεις Ὁμογενεῖς.

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κατηγορίας αὐτῆς μποροῦν νά γραφοῦν:

$$\boxed{\alpha(x,y)dx+\beta(x,y)dy = 0}$$

ὅπου $\alpha(x,y)$ συνάρτηση ὡς πρός x καί y καί $\beta(x,y)$ συνάρτηση τῶν x καί y . Ἡ γενική λύση της παίρνεται ἀπό τόν μετασχηματισμό:

$$\boxed{x = x \quad \text{καί} \quad y = u.x}$$

ὁπότε μετασχηματίζεται σέ μιά διαφορική ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν.

Παράδειγμα 2.1. Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$xy' = y+\sqrt{x^2-y^2}$$

θέτουμε x=x καί y=u.x ὁπότε λαμβάνουμε:

$$dx = dx \quad \text{καί} \quad dy = udx+xdu$$

Ἐπομένως ἡ διαφορική ἐξίσωση γίνεται*:

$$x.\ \frac{dy}{dx} = y+\sqrt{x^2-y^2}$$

$$x.\ \frac{udx+xdu}{dx} = ux+\sqrt{x^2-u^2x^2}$$

$$x.\ \frac{udx+xdu}{dx} = ux+x\sqrt{1-u^2}$$

$$xudx+x^2du = uxdx+x\sqrt{1-u^2}.dx$$

$$xdu = \sqrt{1-u^2}\ .dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ .du = \frac{1}{x}\ .dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du = \int \frac{1}{x}\ dx + c$$

$$\arcsin u = \ln|x|+c$$

---

*) Εἶναι φανερό ὅτι ἡ διαφορική ἐξίσωση εἶναι ὁμογενής, διότι ὁ σταθερός ὅρος της εἶναι μηδέν καί γράφεται:

$$y+\sqrt{x^2-y^2}\ dx + -x\ \ dy = 0$$

'Οπότε ἡ λύση δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln|x|+c$$

<u>Παράδειγμα 2.2.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$(x-y)y' = y$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες x=y=1.

'Η ἐξίσωση γράφεται:

$$(x-y)\,\frac{dy}{dx} = y$$

$$-ydx+(x-y)dy = 0$$

$$ydx+(y-x)dy = 0$$

"Αρα εἶναι ὁμογενής διαφορική ἐξίσωση καί πρέπει νά θέσουμε:

$$x=x,\ y=u.x \implies dx=dx,\ dy=udx+xdu.$$

'Οπότε λαμβάνουμε:

$$uxdx+(ux-x)(udx+xdu) = 0$$

$$uxdx+u^2xdx+ux^2du-uxdx-x^2du = 0$$

$$udx+u^2dx+uxdu-udx-xdu = 0$$

$$u^2dx+uxdu-xdu = 0$$

$$x(u-1)du = -u^2dx$$

$$-\frac{1}{u^2}(u-1)du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\int\frac{1}{u}\,du+\int\frac{1}{u^2}\,du = \int\frac{1}{x}\,dx+c$$

$$-\ln|u|+\frac{1}{u} = \ln|x|+c$$

θέτοντας $u=y/x$ παίρνουμε:

$$-\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{x}{y} = \ln|x|+c$$

θέτοντας x=y=1 παίρνουμε c=1, ὁπότε ἡ λύση δίνεται ἀπό τή σχέση

$$-\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{x}{y} = \ln|x|+c$$

<u>Παράδειγμα 2.3</u>. Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$xy+y'x^2= y^2$$

ἀρχικές συνθῆκες $\quad x=y=-1.$

Ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$xy + \frac{dy}{dx} . x^2= y^2$$
$$xydy+x^2dy = y^2dx$$
$$xydy-y^2dx+x^2dy =0$$
$$y(x-y)dx+x^2dy = 0$$

Ἐπομένως εἶναι ὁμογενής διαφορική ἐξίσωση καί πρέπει νά θέσουμε:

$$x=x \text{ καί } y=ux \Longrightarrow du=dx \text{ καί } dy=udx+xdu.$$

Ὁπότε παίρνουμε:

$$ux(x-ux)dx+u^2(udx+xdu) = 0$$
$$ux^2dx-u^2x^2dx+x^2udx+x^3du =0$$
$$udx-u^2dx+udx+xdu =0$$
$$2udx-u^2dx+xdu = 0$$
$$xdu = (u^2-2u)dx$$
$$\frac{1}{u(u-2)} . du = \frac{1}{x} dx$$
$$\int \frac{1}{u(u-2)} . du =\int\frac{1}{x} dx + C$$

Τό πρῶτο μέρος ἀναλύεται:

$$\frac{1}{u(u-2)} \equiv \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} \Longrightarrow 1 \equiv u(A+B)-2A$$

Ἄρα πρέπει νά ἰσχύει $A+B=0$ καί $-2A=1$, ὁπότε $A=-1/2$ καί $B=1/2$.
Ἐπομένως παίρνουμε:

$$\int \frac{-1/2}{u} du +\int \frac{1/2}{u-2} du = \ln|x|+c$$
$$-\frac{1}{2} \ln|u|+ \frac{1}{2} \ln|u-2| = \ln|x|+ \ln c^*, \quad c=\ln c^*$$
$$\frac{1}{2} \ln \left|\frac{u-2}{u}\right| = \ln|x.c^*|$$
$$\left|\frac{u-2}{u}\right| = x .(c^*) \Longrightarrow \left|\frac{y/x-2}{y/x}\right|= x.(c^*)^2$$

$$\left|\frac{y-2x}{y}\right| = x\,.(c^*)^2$$

θέτοντας $x=y=1$ παίρνουμε $c^*=1$, ὁπότε ἡ λύση θά εἶναι:

$$\left|\frac{y-2x}{y}\right| = x^2$$

<u>Παράδειγμα 2.4.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$x^3+y^3 = 3y'xy^2$$

Ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$x^3+y^3=3xy^2\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$(x^3+y^3)dx = 3xy^2dy$$

$$(x^3+y^3)dx-3xy^2dy = 0$$

Ἄρα εἶναι ὁμογενής καί πρέπει νά κάνουμε τήν ἀντικατάσταση:

$x=x$ καί $y=ux \Longrightarrow dx=dx$ καί $dy=udx+xdu$

Ὁπότε ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$(x^3+u^3x^3)\ dx-3xu^2x^2(udx+xdu)$$

$$x^3dx+u^3x^3dx-3x^3u^3dx-3x^4u^2du = 0$$

$$dx-2u^3dx-3xu^2du = 0$$

$$-3xu^2du=(2u^3-1)dx$$

$$\frac{u^2}{2u^3-1}\,.du = -\frac{1}{3x}\,dx$$

$$\int\frac{u^2}{2u^3-1}\,du = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}\,dx+c$$

$$2\int\frac{u^2}{u^3-1/2}\,du =-\frac{1}{3}\ln|x|+c$$

$$\frac{2}{3}\int\frac{1}{u^3-1/2}\,.d(u^3-1/2) =-\frac{1}{3}\ln|x|+c$$

$$\frac{2}{3}\ln|u^3-1/2| = -\frac{1}{3}\ln|x|+c$$

Ὁπότε θέτοντας $u=y/x$ παίρνουμε τήν λύση:

$$\ln|y^3/x^3-1/2\,| = \ln|x|^{-1}+3c$$

$$|y^3/x^3-\frac{1}{2}\,|=|x|^{-1}.c^*\ ,\quad \ln c^*= 3c$$

3. Γραμμικές ὁμογενεῖς ἐξισώσεις (α΄βαθμοῦ)

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κατηγορίας αὐτῆς μποροῦν νά γραφοῦν:

$$\boxed{y' + \Phi(x)y = 0}$$

ὅπου $\Phi(x)$ συνάρτηση ὡς πρός x. Ἡ γενική της λύση δίδεται ἀπό τόν τύπο.

$$\boxed{y = c.e^{-\int \varphi(x)dx}}$$

Παράδειγμα 3.1. Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$dy = -\frac{2}{x}\, y\, dx$$

Ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}.y = 0$$

$$y' + \frac{2}{x}.y = 0$$

Ἄρα εἶναι μία γραμμική ὁμογενής καί ἑπομένως ἡ λύση της θά εἶναι:

$$y = c.e^{-\int 2/x.dx}$$

$$y = c.e^{-2\ln|x|}$$

Παράδειγμα 3.2. Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$y'\sin x + \cos x.4y = 0$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες y=1 καί x= 2π

Ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$y' + 4\,\frac{\cos x}{\sin x}.y = 0$$

Ἄρα εἶναι μία γραμμική ὁμογενής καί ἑπομένως ἡ λύση της θά εἶναι:

$$y = c.e^{-\int 4.\frac{\cos x}{\sin x}.dx}$$

'Εξ ἄλλου ἰσχύει:

$$-\int 4\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -4\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -4|\sin x|$$

Ἄρα παίρνουμε:

$$y = c.e^{\ln|\sin x|^{-4}}$$

θέτοντας $x=2\pi$ καί $y=1$ λαμβάνουμε $c=1$ καί ἐπομένως ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$y = e^{\ln|\sin x|^{-4}}$$

<u>Παράδειγμα 3.3.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$y' - e^{x}y = 0$$

Εἶναι μία γραμμική ὁμογενής καί ἐπομένως ἡ λύση της θά δίνεται ἀπό τήν σχέση:

$$y = c.e^{-\int .e^{x}dx}$$

$$y = c.e^{\int e^{x}dx}$$

$$y = c.e^{e^{x}}$$

4. Γραμμικές διαφορικές ἐξισώσεις (α΄ βαθμοῦ)

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κατηγορίας αὐτῆς μποροῦν νά γραφοῦν:

$$\boxed{y' + \Phi(x)y = S(x)}$$

ὅπου $\Phi(x)$, $S(x)$ συναρτήσεις τοῦ x. Ἡ γενική λύση ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{y = c.e^{-\int \varphi(x)dx} + \Psi(x)}$$

ὅπου $\Psi(x)$ μιά μερική λύση τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως.

Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν μερική λύση $\Psi(x)$ ἀκολουθοῦμε τά ἑξῆς:

1) Θέτουμε στήν ἀρχική ἐξίσωση $y=c$ καί λύνουμε ὡς πρός c. Ἄν προκύψει τό c κάποιος ἀριθμός (ἀνεξάρτητος τοῦ x), τότε θέτουμε γιά $\Psi(x)$ τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ c. Ἄν ὅμως τό c ἐξαρτᾶται ἀπό τό x, τότε ἀκολουθοῦμε τόν ἑξῆς τρόπο:

2) Μέθοδος Lagrange. Λύνουμε τήν ἀντίστοιχη ὁμογενή πού εἶναι:

$$y'+\Phi(x)y = 0$$

καί βρίσκουμε:

$$y = c.R(x) \quad , \; R(x)=e^{-\int\Phi(x)\,dx}$$

θέτουμε $c=g(x)$, ὁπότε ἰσχύει:

$$\Psi = g(x).\;R(x) \qquad (\alpha)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τό y στήν ἀρχική γραμμική ἐξίσωση καί λύνουμε ὡς πρός $g(x)$. Αὐτό πού θά βροῦμε τό ἀντικαθιστοῦμε στή σχέση (α) ὁπότε λαμβάνουμε τήν μερική λύση $\Psi(x)$.

<u>Παράδειγμα 4.1.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$dy+3xydx = -2xdx$$

Ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} + 3xy = -2x$$

$$y' +3xy = -2x$$

Ἄρα εἶναι μιά γραμμική ἐξίσωση. Θέτουμε $y=c$ ὁπότε ἰσχύει:

$$c'+3x\,c = -2x$$

$$0 +3x\,c = -2x$$

$$c = -2/3 \;,\; \text{ἀνεξάρτητο τοῦ } x.$$

Ἄρα ἡ γενική λύση θά εἶναι:

$$y = c.e^{-\int 3xdx} +(-2/3)$$

$$y = c.e^{-3/2x^2} - \frac{2}{3}$$

<u>Παράδειγμα 4.2.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$y - e^x y = 2e^x \quad , \quad (x=0,\ y=1).$$

Εἶναι μιά γραμμική ἐξίσωση. Θέτουμε y=c ὁπότε ἰσχύει:

$$c' - e^x . c = 2.e^x$$

$$c = -2, \text{ ἀνεξάρτητο τοῦ } x.$$

Ἄρα ἡ γενική λύση θά εἶναι:

$$y = c.e^{-\int -e^x dx} + (-2)$$

$$y = c.e^{e^x} - 2$$

Θέτοντας τίς ἀρχικές συνθῆκες x=0 καί y=1, παίρνουμε:

$$1 = c.e - 2 \implies c = 3.e^{-1}$$

Ἄρα ἡ γενική λύση γίνεται:

$$y = 3.e^{e^x - 1} - 2$$

<u>Παράδειγμα 4.3.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$y' - \frac{2}{x} y = 5x^2$$

Εἶναι μία γραμμική ἐξίσωση. Θέτουμε y=c ὁπότε ἰσχύει:

$$c' - \frac{2}{x} .c = 5x^2$$

$$c = -\frac{5x^3}{2} \text{ , ὄχι ἀνεξάρτητο τοῦ } x.$$

Ἄρα γιά νά βροῦμε τήν μερική λύση τῆς Ψ(x) πρέπει ν'ἀκολουθήσουμε τήν μέθοδο τοῦ Lagrange:

Ἡ ἀντίστοιχη ὁμογενής εἶναι:

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

Ἡ λύση αὐτῆς εἶναι:

$$y = c.e^{-\int -\frac{2}{x} dx}$$

$$y = c.e^{2\int \frac{1}{x} dx}$$

$$y = c.e^{2\ln|x|}$$

θέτουμε c=g(x) και άντικαθιστοῦμε στήν άρχική*:

$$\left[g(x).e^{2\ln|x|}\right]' - \frac{2}{x}.g(x).e^{2\ln|x|} = 5x^2$$

$$\left[g.x^2\right]' - \frac{2}{x}.g.x^2 = 5x^2$$

$$g'.x^2+2x.g-2.g.x = 5x^2 \implies g'=5$$

Ἄρα $g=5x$. Καί $\Psi(x)=5x.e^{2\ln|x|}=5x.x^2=5x^3$

Ἐπομένως ή γενική λύση θά εἶναι:

$$y = c.x^2+5x^3$$

Παράδειγμα 4.4. Νά λυθεῖ ή διαφορική έξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^3$$

Ὅταν ή y(x) περνᾶ άπό τό σημεῖο (0,0) καί $\int e^{x^3}dx=K(x)$, $K(0) = 1$.

Ἡ έξίσωση γράφεται:

$$y'+3x^2.y = x^3$$

Εἶναι μία γραμμική διαφορική έξίσωση. Ἔστω y=c , όπότε παίρνουμε:

$$c'+3.x^2.c = x^3$$

$$c = x/3\ ,\quad \text{όχι άνεξάρτητο τοῦ } x\ .$$

Ἄρα γιά νά βροῦμε τήν μερική λύση Ψ(x) πρέπει ν'άκολουθήσουμε τήν μέθοδο τοῦ Lagrange:

$$y'+3.x^2.y = 0 \quad (\text{άντίστοιχη όμογενής})$$

$$y = c.e^{-3\int x^2dx} = c.e^{-x^3}$$

θέτουμε c=g(x) καί τό y στήν άρχική έξίσωση:

$$\left[g.e^{-x^3}\right]'+3.x^2.g.e^{-x^3} = x^3$$

$$g'.e^{-x^3}-3x^2.g.e^{-x^3}+3x^2.g.e^{-x^3} = x^3$$

---

*) Ἰσχύει $e^{\ln a} = a$

$$g' = x^3.e^{x^3} \Longrightarrow g = \int x^3.e^{x^3}dx$$

$$g = \frac{1}{3}\int x\, de^{x^3} = \frac{1}{3}x.e^{x^3} - \frac{1}{3}\int e^{x^3}dx =$$

$$\frac{1}{3}.x.e^{x^3} - \frac{1}{3}K(x) = \frac{1}{3}(xe^{x^3} - K(x))$$

Ἄρα ἡ μερική λύση εἶναι:

$$\Psi(x) = g.e^{-x^3} = \frac{1}{3}(x - e^{-x^3}.K(x))$$

Ἐπομένως ἡ γενική λύση τῆς ἀρχικῆς γραμμικῆς θά εἶναι:

$$y = c.e^{-x^3} + \frac{1}{3}\left[x - e^{-x^3}.K(x)\right]$$

Θέτοντας x=0 καί y=0 ἔχουμε:

$$0 = c.e^0 + \frac{1}{3}\left[0 - e^0.K(0)\right]$$

$$0 = c - \frac{1}{3}.1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

Ἄρα ἡ γενική λύση εἶναι:

$$y = \frac{1}{3}\left[e^{-x^3} + x - e^{-x^3}.K(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{-x^3}(1-K(x)) + x\right].$$

<u>Παράδειγμα 4.5.</u> Νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση:

$$y' + e^x.y = -e^x$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες x=0 καί y=2.

Εἶναι μία γραμμική διαφορική ἐξίσωση. Ἔστω y=c , ὁπότε ἔχουμε:

$$c' + e^x.c = -e^x$$

$$c = -1, \text{ ἀνεξάρτητο τοῦ } x.$$

Ἄρα ἡ μερική λύση εἶναι $\Psi(x) = -1$. Ἐπομένως ἡ γενική λύση εἶναι:

$$y = c.e^{-\int e^x dx} + (-1)$$

$$y = c.e^{-e^x} - 1$$

Θέτοντας x=0 καί y=2 παίρνουμε ὅτι:

$$2 = c.e^{-1} - 1 \Longrightarrow c = 3e$$

Ἄρα ἡ γενική λύση τῆς ἀρχικῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως γίνεται:

$$y = 3.e.e^{-e^{x}}-1$$

$$y = 3.e^{-e^{x}+1}-1$$

B. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

1. Ὁμογενεῖς Ἐξισώσεις Διαφορῶν

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κατηγορίας αὐτῆς μποροῦν νά γραφοῦν:

$$\boxed{\alpha_o \cdot y_{x+n} + \alpha_1 \cdot y_{x+n-1} + \ldots + \alpha_n \cdot y_x = 0}$$

π.χ. : $$\boxed{y_{x+2} + 2 \cdot y_{x+1} - 3y_x = 0}$$

ὅπου τά $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ εἶναι οἱ σταθεροί συντελεστές τῆς ἐξισώσεως. Τό n χαρακτηρίζει τόν βαθμό τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι, στό παραπάνω παράδειγμα ἔχουμε μιά ἐξίσωση διαφορῶν δευτέρου βαθμοῦ, διότι n=2.

Ἐδῶ μᾶς ἐνδιαφέρουν μόνον τοῦ πρώτου καί δευτέρου βαθμοῦ.

(α) Ὁμογενεῖς Ἐξισώσεις διαφορῶν α΄βαθμοῦ.

Ὁ γενικός τους τύπος εἶναι:

$$\alpha_{n-1} \cdot y_{x+1} + a_n \cdot y_x = 0$$

π.χ. : $$2y_{x+1} + y_x = 0$$

Ἄν βάλουμε ὅπου $y_{x+1} = \lambda$ τότε ἔχουμε μιά ἐξίσωση ὡς πρός λ πρώτου βαθμοῦ (ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ):

π.χ.: $$2.\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1/2$$

Διότι ἄν $y_{x+1} = \lambda^1$ τότε $y_x = y_{x+o} = \lambda^o = 1$. Τότε ἡ λύση δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{y_x^o = c.\lambda^x \text{ , } \lambda \text{ ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς, } c \text{ σταθερά.}}$$

π.χ.: $$y_x^o = c.\lambda^x = c.(-1/2)^x$$

(β) Ὁμογενεῖς Ἐξισώσεις διαφορῶν β΄βαθμοῦ.

Ὁ γενικός τους τύπος εἶναι:

$$\boxed{\alpha_{n-2}\cdot y_{x+2}+\alpha_{n-1}\cdot y_{x+1}+\alpha_n\cdot y_x = 0}$$

Π.χ.: $$y_{x+2}+3y_{x+1}-y_x = 0$$

θέτουμε $y_{x+2} = \lambda^2$ καί ἑπομένως $y_{x+1} = \lambda$ καί $y_x = \lambda^o = 1$, ὁπότε παίρνουμε τήν ἀντίστοιχη χαρακτηριστική ἐξίσωση β΄βαθμοῦ ὡς πρός ἄγνωστο τό λ:

Π.χ. $\lambda^2+3\lambda-1 = 0$, ρίζες λ_1,λ_2 μέ:

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ καί } \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Τότε ἡ λύση δίνεται ἀπό τόν τύπο (ἄν $\lambda_1 \neq \lambda_2$) :

$$y_x^0 = c_1.\lambda_1^x + c_2.\lambda_2^x$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ρίζες τῆς χαρακτηριστικῆς

c_1, c_2 σταθερές

Π.χ. $$y_x^0 = c_1.\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + c_2.\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)^x$$

Ἄν ὅμως ἡ χαρακτηριστική ἔχει δύο ρίζες ἴσες $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, τότε ἡ λύση δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$y_x^0 = c_1.\lambda^x+c_2.x.\lambda^x$$

$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ οἱ δύο ἴσες ρίζες τῆς χαρακτηριστικῆς καί c_1, c_2 σταθερές.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωση:

$$y_{x+2}+2y_{x+1}+y_x = 0$$

Χαρακτηρ. ἐξίσωση: $\lambda^2+2\lambda+1 = 0$

Ρίζες " " : $\lambda_1=\lambda_2=\lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1.$

Ὁπότε ἡ λύση θά εἶναι:

$$y_x^0 = c_1.(-1)^x+c_2.x.(-1)^x$$

Τέλος πρέπει νά ἔχουμε ὑπ'ὄψιν μας ὅτι στήν περίπτωση μιγαδικῶν ριζῶν τῆς χαρακτηριστικῆς τότε χρησιμοποιοῦμε τόν τύπο:

$$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha+\beta i)^x = (\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^x.\ (\cos\rho + i\sin\rho)^x \\ \text{ὅπου}\quad \rho = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}.\end{array}}$$

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωση:

$$y_{x+2}+3y_{x+1}+y_x = 0$$

Χαρακτηριστική: $\lambda^2+3\lambda+5 = 0$

Ρίζες χαρακτηρ.: $\lambda_1 = \dfrac{-3+\sqrt{9-20}}{2} = \dfrac{-3+\sqrt{-11}}{2} = \dfrac{-3+i\sqrt{11}}{2}$

$$\lambda_2 = \frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$$

Ὁπότε ἡ λύση θά εἶναι:

$$y_x^0 = c_1.(\frac{-3+i\sqrt{11}}{2})^x + c_2.(\frac{-3-i\sqrt{11}}{2})^x$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει:

$$(\frac{-3+i\sqrt{11}}{2})^x = (-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2})^x = (\frac{9}{4} + \frac{11}{4})^x.(\cos.\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{-3}{2}} +$$

$$+ i.\sin\operatorname{arctg}\ \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{-3}{2}}) = 5^x.(\cos.\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{11}}{-3} + i.\sin.\operatorname{artg}\frac{\sqrt{11}}{-3})^x$$

$$\Longrightarrow (\frac{-3-i\sqrt{11}}{2})^x = 5^x\ (\cos.\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{11}}{3} + i.\sin.\operatorname{artg}\frac{\sqrt{11}}{3})^x.$$

Ὁπότε ἡ λύση θά εἶναι:

$$y_x^0 = c_1.5^x.(\cos.\mathrm{arctg}\ \frac{\sqrt{11}}{-3} + i.\sin.\mathrm{artg}\ \frac{\sqrt{11}}{-3})^x +$$

$$+ c_2.5^x.(\cos.\mathrm{arctg}\ \frac{\sqrt{11}}{3} + i.\sin.\mathrm{artg}\ \frac{\sqrt{11}}{3})^x$$

2. Γραμμικές μή ὁμογενεῖς ἐξισώσεις διαφορῶν.

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές εἶναι ὅπως οἱ ὁμογενεῖς μέ τή μόνη διαφορά ὅτι τό δεύτερο μέλος τους ἀντί νά εἶναι τό μηδέν, εἶναι κάποιος ἀριθμός β.

(α) Γραμμικές μή Ὁμογενεῖς πρώτου βαθμοῦ.

Ἡ γενική τους μορφή εἶναι:

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha_{n-1}.y_{x+1}+\alpha_n.y_x = \beta \\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n,\ \beta\text{: ἀριθμοί} \end{array}}$$

Ἡ γενική λύση δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{y_x = \Psi_x + y_x^0}$$

ὅπου y_x^0 ἡ λύση τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς (δηλ. β=0) καί Ψ_x μιά μερική λύση τῆς γραμμικῆς, ὅπου ἰσχύει:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1) & \text{Ἄν } \alpha_{n-1}+\alpha_n \neq 0 \implies & \Psi_x = \dfrac{\beta}{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \\ (2) & \text{Ἄν } \alpha_{n-1}+\alpha_n = 0 \implies & \Psi_x = \dfrac{\beta.x}{\alpha_{n-1}} \end{array}}$$

Παράδειγμα 2.1. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$y_{x+1}-2y_x = 6$$

Ἡ λύση δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$y_x = \Psi_x+y_x^0$$

Ἡ ἀντίστοιχη ὁμογενής εἶναι:

$$y_{x+1}-2y_x = 0$$

Χαρακτηριστική: $\lambda-2 = 0$

Ρίζα : $\lambda = 2$

Ἄρα ἰσχύει :

$$y_x^o = c.\lambda^x = c.2^x$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει:

$$\alpha_{n-1}+\alpha_n = 1-2 = -1 \neq 0 \Longrightarrow \Psi_x = \frac{\beta}{-1} = \frac{6}{-1} = -6$$

Ἐπομένως ἡ λύση εἶναι:

$$y_x = -6+c.2^x$$

<u>Παράδειγμα 2.2.</u> Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

-
$$y_{x+1} - y_x = 3$$

ὅταν $y_o=1$ (ἀρχικές συνθῆκες πού σημαίνει ἄν x=0,τότε τό $y_o =1$).

Ἡ λύση δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$y_x = \Psi_x+y_x^o$$

Ἡ ἀντίστοιχη ὁμογενής εἶναι:

$$y_{x+1}-y_x = 0$$

Χαρακτηριστική: $\lambda - 1 = 0$

Ρίζα $\lambda = 1$

Ἄρα ἰσχύει:

$$y_x^o = c.\lambda^x = c.(1)^x = c$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει:

$$\alpha_{n-1}+\alpha_n = 1-1 = 0 \Longrightarrow \Psi_x = \frac{\beta.x}{\alpha_{n-1}} = \frac{3x}{1} = 3x$$

Ἐπομένως ἡ λύση θά εἶναι:

$$y_x = 3x+c$$

θέτοντας $x = 0$ καί $y_o=1$ ἔχουμε:

$$1 = 3.0+c \implies c=1$$

Άρα ἡ λύση εἶναι:

$$y_x = 3x+1$$

<u>Παράδειγμα 2.3.</u> Ζητεῖται ἡ τιμή p_x καί ἡ ποσότητα q_x ἑνός προϊόντος στή x 0-στή περίοδο ὅταν:

$$q_x = 100-2p_x \quad , \quad q_x = \frac{1}{2}\cdot p_{x-1}$$

μέ ἀρχική ποσότητα 10 μονάδες (δηλαδή $q_o=10$).

Ἐξισώνοντας τά δύο q_x παίρνουμε:

$$100-2p_x = \frac{1}{2}\cdot p_{x-1}$$

$$-4p_x-p_{x-1} = -200 \implies 4p_x+p_{x-1} = 200$$

(Τό νά ἔχουμε $4p_x+p_{x-1} = 200$ ἤ τό $4p_{x+1}+p_x = 200$ εἶναι τό ἴδιο).
Ἡ ἀντίστοιχη ὁμογενής εἶναι:

$$4p_x+p_{x-1} = 0$$

Χαρακτηριστική: $4\lambda + 1 = 0$
Ρίζα : $\lambda = -1/4$

Ἄρα ἡ λύση τῆς ὁμογενοῦς θά εἶναι:

$$p_x^o = c.\lambda^x = c.(-\frac{1}{4})^x$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει:

$$\alpha_{n-1}+\alpha_n = 4+1 = 5 \neq 0 \implies \text{μερική λύση } p_x = \frac{200}{5} = 40$$

Ἑπομένως ἡ λύση εἶναι:

$$p_x = 40 + c.(\frac{1}{4})^x$$

θέτοντας $x=0$, $q_o=10$ παίρνουμε:

$$p_o = 40+c.(\frac{1}{4})^o = 40+c$$

$$q_o = 100-2p_o \implies 10=100-2p_o \implies p_o=45$$

Ἄρα ἰσχύει:

$$45 = 40+c \implies c=5$$

'Οπότε ἡ λύση θά εἶναι:

$$p_x = 40 + 5(\tfrac{1}{4})^x$$

καί $$q_x = \frac{1}{2} \cdot p_{x-1}$$

Τό p_{x-1} παίρνεται ἀπό τό p_x ἄν ὅπου x θέσουμε τό x - 1 :

$$q_x = \frac{1}{2} \cdot \left[40+5.(\tfrac{1}{4})^{x-1}\right] =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left[8+(\tfrac{1}{4})^{x-1}\right].$$

(β) Γραμμικές μή 'Ομογενεῖς δευτέρου βαθμοῦ.

'Η γενική τους μορφή εἶναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_{n-2}\cdot y_{x+2}+\alpha_{n-1}\cdot y_{x+1}+\alpha_n\cdot y_x = \beta \\ \alpha_{n-2},\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n,\ \beta \text{ ἀριθμοί.} \end{array}}$$

'Η γενική λύση δίνεται πάλι ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{y_x = \Psi_x + y_x^o}$$

ὅπου y_x^o ἡ λύση τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς (δηλ. β=0) καί Ψ_x μιά μερική λύση τῆς γραμμικῆς , ὅπου ἰσχύει:

(ἰ) Ἄν $\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n \neq 0 \Longrightarrow \Psi_x = \dfrac{\beta}{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n}$

(ἰἰ) Ἄν $\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n = 0$, ἀλλά $2\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1} \neq 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \Psi_x = \frac{\beta\, x}{2\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}} .$$

(ἰἰἰ) Ἄν $\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n = 2\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1} = 0$, ἀλλά $\alpha_{n-2} \neq 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \Psi_x = \frac{\beta . x^2}{2\alpha_{n-2}}$$

Παράδειγμα 2.4. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$y_{x+2}-6y_{x+1}+9y_x = 3$$

ὅταν $y_0=1$ καί $y_1 = 3$.

Ἡ λύση θά δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$y_x = \Psi_x + y_x^o$$

Ἡ ἀντίστοιχη ὁμογενής εἶναι:

$$y_{x+2}-6y_{x+1}+9y_x = 0$$

Χαρακτηριστική: $\lambda^2-6\lambda+9 = 0$

Ρίζες : $\lambda_1 = \dfrac{6+\sqrt{36-36}}{2} = 3 = \lambda_2 = \lambda$

Ἄρα ἡ λύση τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς εἶναι:

$$y_x^o = c_1 \,.3^x + c_2.x.3^x$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει:

$$\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n = 1-6+9 = 4 \neq 0 \Longrightarrow \Psi_x = \frac{\beta}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Ἑπομένως ἡ λύση τῆς γραμμικῆς εἶναι:

$$y_x = \frac{3}{4} + c_1.3^x + c_2.x.3^x$$

Θέτοντας τίς ἀρχικές συνθῆκες $y_o=1$ (μέ $x=0$) καί $y_1=3$ (μέ $x=1$) παίρνουμε:

$$1 = y_0 = \frac{3}{4} + c_1.3^0 + c_2.0.3^0 \Rightarrow c_1 = 1/4$$

$$3 = y_1 = \frac{3}{4} + c_1.3^1 + c_2.1.3^1 \Rightarrow 3c_1+3c_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

Ἄρα ἡ λύση τῆς γραμμικῆς εἶναι:

$$y_x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,.3^x + \frac{1}{2}\,.x.3^x$$

Παράδειγμα 2.5. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$y_{x+2}-5y_{x+1}+6y_x = 1$$

ὅταν $y_o = y_1 = 0$

Ἡ λύση θά δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$y_x = \Psi_x + y_x^o$$

• Η αντίστοιχη ομογενής είναι:

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$

Χαρακτηριστική: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Ρίζες : $\lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{25-24}}{2} = 3$ καί $\lambda_2 = 2$.

Άρα ή λύση τῆς αντιστοίχου ομογενοῦς είναι:

$$y_x^o = c_1 . 3^x + c_2 . 2^x$$

Έξ ἄλλου ἰσχύει:

$$\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1 - 5 + 6 \neq 0$$

Επομένως ή μερική λύση θά είναι σύμφωνα μέ τόν τύπο:

$$y_x = \frac{\beta}{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n} \;/, \quad \text{όπου } \beta = 1, \text{ οπότε}$$

$$y_x = \frac{1}{2}$$

Άρα ή λύση τῆς γραμμικῆς μή ομογενοῦς θά είναι:

$$y_x \;\; \frac{1}{2} + c_1 . 3^x + c_2 . 2^x$$

Θέτοντας τίς αρχικές συνθῆκες $y_0 = 0$ (μέ $x = 0$) καί $y_1 = 0$ (μέ $x = 1$) ἔχουμε:

$$0 = y_0 = c_1 . 3^0 + c_2 . 2^0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \qquad (\omega)$$

$$0 = y_1 = c_1 . 3^1 + c_2 . 2^1 \Rightarrow 3c_1 + 2c_2 = 0$$

Λύνοντας τό σύστημα α΄ βαθμοῦ (ω) ἔχουμε $c_1 = 0$ καί $c_2 = 0$

Άρα ή λύση τῆς γραμμικῆς είναι: $y_x = \dfrac{1}{2}$

<u>Παράδειγμα 2.6.</u> Νά λυθεῖ ή ἐξίσωση:

$$y_{x+1} + 2y_x - 3y_{x-1} = 5$$

ὅταν $y_0 = y_1 = 1$.

Ή αρχική ἐξίσωση είναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἑξῆς:

$$y_{x+2} + 2y_{x+1} - 3y_x = 5$$

'Η λύση της δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$y_x = \Psi_x + y_x^o$$

'Η ἀντίστοιχη ὁμογενής εἶναι:

$$y_{x+2} + 2y_{x+1} - 3y_x = 5$$

Χαρακτηριστική: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Ρίζες : $\lambda_1 = \dfrac{-2+\sqrt{4+12}}{2} = 1$, $\lambda_2 = -3$

Ἄρα ἡ λύση τῆς ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς εἶναι:

$$y_x^o = c_1 . 1^x + c_2 . (-3)^x = c_1 + c_2 . (-3)^x$$

'Εξ ἄλλου ἰσχύει:

$$\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1+2-3 = 0$$

$$2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} = 2.1+2 = 4 \neq 0 \Longrightarrow \Psi_x = \frac{5x}{4}$$

'Επομένως ἡ λύση τῆς γραμμικῆς εἶναι:

$$y_x = \frac{5x}{4} + c_1 + c_2 . (-3)^x$$

Θέτοντας τίς ἀρχικές συνθῆκες $y_0=1$ (μέ $x=0$) καί $y_1=1$ (μέ $x=1$), παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} 1 = y_0 = \frac{5.0}{4} + c_1 + c_2 . (-3)^0 &\Longrightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ 1 = y_1 = \frac{5.1}{4} + c_1 + c_2 . (-3)^1 &\Longrightarrow c_1 - 3c_2 = -\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \quad (\varphi)$$

Λύνοντας τό σύστημα (φ) ἔχουμε:

$$c_1 = \frac{11}{16} \quad \text{καί} \quad c_2 = \frac{5}{16}$$

Ἄρα ἡ λύση τῆς γραμμικῆς μή ὁμογενοῦς εἶναι:

$$y_x = \frac{5x}{4} + \frac{11}{16} + (-3)^x . \frac{5}{16}$$

Γ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ KUHN)

Στά προβλήματα ζητεῖται ἡ κατανομή θέσεων σέ n ὑπαλλήλους μέ τή μέγιστη ὁλική ἀπόδοση ἤ ἡ παραγωγή m προϊόν - των ἀπό n μηχανές μέ τό ἐλάχιστο ὁλικό κόστος παραγωγῆς. Τά δεδομένα τῶν προβλημάτων αὐτῶν εἶναι οἱ ἱκανότητες τῶν ἐργαζομένων στίς m θέσεις ἤ τό κόστος παραγωγῆς τῶν προϊόν των στίς n μηχανές. Ἔτσι ξεκινᾶμε πάντοτε ἀπό μιά γνωστή μήτρα, π.χ. :

Ἐργαζόμενοι	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4 :Θέσεις
E_1	8	7	0	1
E_2	3	5	2	3
E_3	4	6	7	$\boxed{4}$
E_4	5	7	2	3

(δηλαδή ὁ ἐργαζόμενος E_3 ἔχει ἀπόδοση στή θέση Θ_4 ἴση μέ 4).

Ἄν ἡ μήτρα τῶν δεδομένων μας δέν εἶναι τετραγωνική (π.χ. (π.χ. 3Χ4), τότε προσθέτουμε πλαστές γραμμές ἤ στῆλες (ἀ - νάλογα) μέ μηδενικά, μέχρις ὅτου γίνη ἡ μήτρα τετραγωνική, π.χ. :

Προϊόντα	M_1	M_2	M_3	M_4 : Μηχανές
Π_1	2	3	4	5
Π_2	6	63	4	6
Π_3	7	7	4	7

$\Longrightarrow$

	M_2	M_2	M_3	M_4
Π_1	$\underline{2}$	3	4	5
Π_2	6	$\underline{3}$	4	6
Π_3	7	7	$\underline{4}$	7
Π_4	0	0	0	$\underline{0}$

(ὅπου τό προϊόν Π_4 εἶναι φανταστικό)

Ἡ τελική λύση πού μᾶς δίνει μέγιστη ἀπόδοση (ἤ ἐλάχιστο κόστος), ὀνομάζεται ΑΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ; Ἔτσι στό παραπάνω πρόβλημα ἡ ἄριστη λύση εἶναι:

$$\Pi_1 \to M_1 \ , \ \Pi_2 \to M_2 \ , \ \Pi_3 \to M_3 \text{ καί } \Pi_4 \to M_4$$

'Ολικό κόστος = 2+3+4+0 = 0

Δηλαδή τό Π_1 προϊόν νά παραχθῆ ἀπό τό M_1 μηχανή, τό Π_2 ἀπό τή M_2, τό Π_3 ἀπό τή M_3 καί τό Π_4 ἀπό τή M_4 , δηλαδή M θά μείνη ἀχρησιμοποίητη, διότι τό Π ἦτανε φανταστικό.

1. Ἡ μέθοδος τοῦ Kuhn γιά ἐλάχιστο.

Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, ἡ περίπτωση τοῦ νά ζητεῖται τό ἐλάχιστο (κόστος), συνδέεται μέ τήν εὕρεση τῆς ἄριστης κατανομῆς μηχανῶν καί προϊόντων. Ἐδῶ θά πρέπει νά τονισθεῖ ὅτι ἄν μιά μηχανή δέν <u>μπορεῖ</u> ἤ δέν <u>γνωρίζουμε</u> τό κόστος της γιά ἕνα συγκεκριμένο προϊόν, τότε θέτουμε στήν ἀντίστοιχη θέση τῆς μήτρας πού μᾶς δίνεται, τό ∞, π.χ.:

	M_1	M_2	M_3	M_4
Π_1	3	4	5	4
Π_2	∞	1	3	4
Π_3	2	4	∞	3
Π_4	4	1	5	6

Δηλαδή τό Π_2 ἀποκλείεται νά παραχθεῖ ἀπό τήν M_1, καί τό Π_3 ἀπό τήν M_3.

Γιά νά βροῦμε τήν ἄριστη λύση, ἀφοῦ κάνουμε τή μήτρα πού ἔχουμε τετραγωνική (προσθέτοντας δηλαδή μηδενικά), ἀκολουθοῦμε τόν ἑξῆς ἀλγόριθμο:

<u>ΒΗΜΑ 1</u>. Βρίσκουμε τίς ἐλάχιστες τιμές κάθε στήλης.

π.χ.

	M_1	M_2	M_3	M_4
Π_1	4	5	6	7
Π_2	3	5	5	7
Π_3	5	5	5	4
Π_4	2	5	4	2
Ἐλάχ:	2	5	4	2

<u>ΒΗΜΑ 2</u>. Ἀφαιροῦμε τά στοιχεῖα κάθε στήλης ἀπό τό ἐλάχιστο της:

2	1	2	5
1	0	1	5
3	0	1	2
0	0	0	0

<u>ΒΗΜΑ 3</u>. Πλαισιώνουμε ὅσα περισσότερα μηδενικά μποροῦμε , ἔτσι ὥστε σέ κάθε γραμμή καί στήλη νά μήν ὑπάρ - χουν πάνω ἀπό ἕνα πλαισιούμενο. Τά ὑπόλοιπα μηδε νικά τά διαγράφουμε καί γ'αὐτό θά τά ὀνομάζουμε διαγραφόμενα. Ἡ πλαισίωση ἀρχίζει ἀπό τίς γραμμές πού ἔχουν τά λιγότερα μηδενικά.

2	1	2	5	
1	$\boxed{0}$	1	5	(δύο πλαισιούμενα)
3	Ø	1	2	
$\boxed{0}$	Ø	Ø	Ø	

Ἄν τά πλαισιούμενα μηδενικά εἶναι τόσα, ὅσα καί τά προϊόντα ἤ οἱ μηχανές (δηλαδή ὅσες οἱ γραμμές, δηλαδή νά ὑπάρχει ἀπό ἕνα σέ κάθε γραμμή), τότε ἡ μέθοδος τελειώνει καί ἡ ΑΡΙΣΤΗ λύση ἀντιστοιχεῖ στίς θέσεις αὐτῶν. Ἄν ὅμως τά πλαισιούμενα εἶναι λιγότερα, προχωρᾶμε στό ἑπόμενο βῆμα.

<u>ΒΗΜΑ 4.</u> Σημειώνουμε τίς γραμμές πού δέν ἔχουν πλαισιούμενο μηδενικό

2	1	2	5 *
1	$\boxed{0}$	1	5
3	Ø	1	2*
$\boxed{0}$	Ø	Ø	Ø

4.1) Σημειώνουμε τίς στῆλες πού ἔχουν διαγραφόμενο μηδενικό σέ κάποια ἀπό τίς γραμμές πού ἔχουμε σημειώσει. Ἄν δέν σημειωθεῖ καμιά νέα στήλη πήγαινε στό ΒΗΜΑ 5, ἀλλιῶς συνέχισε.

$$\begin{array}{ccccc} & * & & & \\ 2 & 1 & 2 & 5 & * \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 5 & \\ 3 & \emptyset & 1 & 2 & * \\ \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \end{array}$$

4.2) Σημειώνουμε τίς γραμμές πού ἔχουν πλαισιούμενο μηδενικό σέ κάποια ἀπό τίς στῆλες πού σημειώσαμε καί μετά πηγαίνουμε στό 4.1.

$$\begin{array}{ccccc} & * & & & \\ 2 & 1 & 2 & 5 & * \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 5 & * \\ 3 & \emptyset & 1 & 2 & * \\ \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \end{array}$$

(στό παράδειγμα, πηγαίνοντας στό 4.1 δέν σημειώνεται καμμιά νέα στήλη καί ἐπομένως πηγαίνουμε στό ΒΗΜΑ 5).

<u>ΒΗΜΑ 5</u>. Διαγράφουμε τίς στῆλες πού σημειώσαμε καί τίς γραμμές πού δέν σημειώσαμε. Βρίσκουμε τό μικρότερο στοιχεῖο τῆς μήτρας πού ἀπομένει μετά τίς διαγραφές

$$\begin{array}{ccccc} & * & & & \\ 2 & 1 & 2 & 5 & * \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 5 & * \\ 3 & \emptyset & 1 & 2 & * \\ \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \end{array}$$

Ἐλαχ.στοιχεῖο: 1

("Αν διαγραφοῦν ὅλες οἱ γραμμές (ἤ στῆλες) αὐτό σημαίνει ὅτι κάπου κάναμε λάθος. Ἐπίσης ἄν τό ἐλάχ. στοιχεῖο εἶναι τό μηδέν τότε κάπου ἔχουμε κάνει λάθος.

<u>ΒΗΜΑ 6</u>. Ἀφαιροῦμε τό ἐλάχ. στοιχεῖο ἀπό τίς στῆλες πού δέν διαγράψαμε

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

Προσθέτουμε τό ἐλάχιστο στοιχεῖο στίς γραμμές πού διαγράψαμε:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Πήγαινε στό βῆμα 3 καί ἐπανέλαβε ὅλη τή μέθοδο ξανά, ἔχοντας ὅμως σάν γνωστή μήτρα τήν τελευταία πού ἔχει βρεθῆ ἀπό τό βῆμα 6.-

Ἔτσι τό παράδειγμά μας συνεχίζεται ὡς ἐξῆς:

<u>Β.3.:</u>

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & 4 \\ 2 & \boxed{0} & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 & \boxed{0} & \emptyset \end{matrix}$$

(τρία πλαισιούμενα)

<u>Β.4.:</u>

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & 4 \\ 2 & \boxed{0} & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 & \boxed{0} & \emptyset \end{matrix}$$

* 4.1) Πήγαινε στό Β.5.

<u>Β.5.:</u>

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 4 & * \\ \cancel{\boxed{0}} & \cancel{\emptyset} & \cancel{\emptyset} & \cancel{4} & \\ \cancel{2} & \cancel{\boxed{0}} & \cancel{\emptyset} & \cancel{1} & \\ \cancel{\emptyset} & \cancel{1} & \cancel{\boxed{0}} & \cancel{\emptyset} & \end{matrix}$$

ἐλάχ. στοιχεῖο : 1

<u>Β.6.:</u>

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \implies \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

<u>Β.3.:</u>

$$\begin{matrix} \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & 3 \\ \emptyset & \emptyset & \boxed{0} & 4 \\ 2 & \boxed{0} & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 & \emptyset & \boxed{0} \end{matrix}$$

(τέσσερα πλασιούμενα, ἄρα ἔχου με βρῆ τήν ἄριστη λύση).

Ἑπομένως ἡ ἄριστη κατανομή μηχανῶν καί προϊόντων εἶναι: $\Pi_1 \rightarrow M_1$, $\Pi_2 \rightarrow M_3$, $\Pi_3 \rightarrow M_2$ καί $\Pi_4 \rightarrow M_4$ μέ ἐλάχιστο κόστος παραγωγῆς:

4+5+5+2 = 16 χρ .μονάδες

Παράδειγμα 1.1. Νά γίνη ή παραγωγή τῶν Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 ἀπό τίς μηχανές M_1, M_2, M_3,M_4, M_5, μέ βάση τόν πίνακα:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Π_1	6	7	8	9	∞
Π_2	3	6	2	8	3
Π_3	∞	6	1	7	4
Π_4	6	4	3	∞	3

'Αφοῦ ἔχουμε πρόβλημα κατανομῆς μεταξύ προϊόντων-μηχανῶν ἕπεται ὅτι ζητεῖται ἐλάχιστο ὁλικό κόστος. ' Εξ'ἄλλου ἡ ἀρχική μήτρα τῶν δεδομένων δέν εἶναι τετραγωνική' γι' αὐτό προσθέτουμε ἕνα ἀκόμη πλα στό προϊόν Π_5:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Π_1	7	7	8	9	∞
Π_2	3	6	3	8	3
Π_3	∞	6	1	7	4
Π_4	6	4	3	∞	3
Π_5	0	0	0	0	0

'Οπότε ἡ μέθοδος τοῦ Kuhn γιά ἐλάχιστο δίνει:

B.1:

	7	7	8	9	∞
	3	6	3	8	3
	∞	6	1	7	4
	6	4	3	∞	3
	0	0	0	0	0
'Ελάχ:	0	0	0	0	0

B.2:

$$\begin{matrix} 7 & 7 & 8 & 9 & \infty \\ 3 & 6 & 3 & 8 & 3 \\ \infty & 6 & 1 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & \infty & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

B.3:

7	7	8	9	∞	
3	6	3	8	3	(ἕνα πλαισιούμενο)
∞	6	1	7	4	
6	4	3	∞	3	
$\boxed{0}$	∅	∅	∅	∅	

B.4:

7	7	8	9	∞	*	
3	6	3	8	3	*	4.1) Πήγαινε στό B.5.
∞	6	1	7	4	*	
6	4	3	∞	3	*	
$\boxed{0}$	∅	∅	∅	∅		

B.5:

7	7	8	9	∞	*	
3	6	3	8	3	*	
∞	6	1	7	4	*	ἐλάχ.στοιχεῖο: 1
6	4	3	∞	3	*	
$\boxed{0}$	∅	∅	∅	∅		

B.6:

6	6	7	8	∞		5	6	7	8	∞
2	5	2	7	2		2	5	2	7	2
∞	5	0	6	3	=>	∞	5	0	6	3
5	3	2	∞	2		5	3	2	∞	2
-1	-1	-1	-1	-1		0	0	0	0	0

("Ας μή ξεχνᾶμε ὅτι $\infty \pm \alpha = \infty$, α ἀριθμός)

B.3:

6	6	7	8	∞	
2	5	2	7	2	
∞	5	$\boxed{0}$	6	3	(δύο πλαισιούμενα).
5	3	2	∞	2	
$\boxed{0}$	∅	∅	∅	∅	

B.4:

6	6	7	8	∞	*	4.1) Πήγαινε στό B.5.
2	5	2	7	2	*	
∞	5	$\boxed{0}$	6	3		
5	3	2	∞	2	*	
$\boxed{0}$	Ø	Ø	Ø	Ø		

B.5:

6	6	7	8	∞	*	
2	5	2	7	2	*	'Ελάχ.στοιχεῖο: 2
~~∞~~	~~5~~	~~$\boxed{0}$~~	~~6~~	~~3~~		
5	3	2	∞	2	*	
$\boxed{0}$	Ø	Ø	Ø	Ø		

B.6:

4	4	5	6	∞		4	4	5	6	∞
0	3	0	5	0		0	3	0	5	0
∞	3	-2	4	1	⇒	∞	5	0	6	3
3	1	0	∞	0		3	1	0	∞	0
-2	-2	-2	-2	-2		0	0	0	0	0

B.3:

4	4	5	6	∞	
$\boxed{0}$	3	Ø	5	Ø	
∞	5	$\boxed{0}$	6	3	(τέσσερα πλαισιούμενα).
3	1	Ø	∞	$\boxed{0}$	
Ø	$\boxed{0}$	Ø	0	Ø	

B.4:

4	4	5	6	∞	*	4.1) Πήγαινε στό-B.5.
$\boxed{0}$	3	Ø	5	Ø		
∞	5	$\boxed{0}$	6	3		
3	1	Ø	∞	$\boxed{0}$		
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	Ø	Ø	Ø		

B.5.:

$$\begin{array}{ccccc}
4 & 4 & 5 & 6 & \infty \;\; * \\
\cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\
\cancel{\infty} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{3} \\
\cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{\infty} & \cancel{0} \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}$$

ἐλάχ.στοιχεῖο: 4

B.6.:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 1 & 2 & \infty \\
-4 & -1 & -4 & 1 & -4 \\
\infty & 1 & -4 & 2 & -1 \\
-1 & -3 & -4 & \infty & -1 \\
-4 & -4 & -4 & -4 & -4
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 1 & 2 & \infty \\
0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\
\infty & 5 & 0 & 6 & 3 \\
3 & 1 & 0 & \infty & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

B.3;

$$\begin{array}{ccccc}
\emptyset & \boxed{0} & 1 & 2 & \infty \\
\boxed{0} & 3 & \emptyset & 5 & \emptyset \\
\infty & 5 & \boxed{0} & 6 & 3 \\
3 & 1 & \emptyset & \infty & \boxed{0} \\
\emptyset & \emptyset & \emptyset & \boxed{0} & \emptyset
\end{array}$$

(πέντε πλαισιούμενα, ἄρα ἔχουμε βρῆ τήν ἄριστη λύση).

Ἑπομένως ἡ ἄριστη κατανομή μηχανῶν-προϊόντων εἶναι:

$\Pi_1 \to M_2$, $\Pi_2 \to M_1$, $\Pi_3 \to M_3$, $\Pi_4 \to M_5$ καί $\Pi_5 \to M_4$

μέ ἐλάχιστο κόστος παραγωγῆς:

$7+3+1+3+0 = 14$ χρ. μονάδες.

(Προφανῶς ἡ M_4 θά μείνη ἀχρησιμοποίητη, διότι τό Π_5 ἦτανε φανταστικό προϊόν):

Παράδειγμα 1.2. Νά γίνη ἡ παραγωγή τῶν Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5 μέ τίς M_1, M_2, M_3, M_4 μέ τό ἐλάχιστο κόστος, ὅταν:

	M_1	M_2	M_3	M_4
Π_1	4	8	5	4
Π_2	5	7	6	5
Π_3	4	∞	5	4
Π_4	∞	7	8	9
Π_5	6	4	∞	5

Γιά νά γίνει ή μήτρα τετραγωνική προσθέτουμε μία ἀκόμη φανταστική μηχανή M_5.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Π_1	4	8	5	4	0
Π_2	5	7	6	5	0
Π_3	4	∞	5	4	0
Π_4	∞	7	8	9	0
Π_5	6	4	∞	5	0

'Οπότε ή μέθοδος Kuhn (γιά ἐλάχιστο)δίδει:

B.1:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & 4 & 8 & 5 & 4 & 0 \\
 & 5 & 7 & 6 & 5 & 0 \\
 & 4 & \infty & 5 & 4 & 0 \\
 & \infty & 7 & 8 & 9 & 0 \\
 & 6 & 4 & \infty & 5 & 0 \\
\hline
\text{'Ελαχ.:} & 4 & 4 & 5 & 4 & 0
\end{array}
$$

B.2.:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\
\infty & 3 & 3 & 5 & 0 \\
2 & 0 & \infty & 1 & 0
\end{array}
$$

B.3:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{0} & 4 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
1 & 3 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
\cancel{0} & \infty & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\infty & 3 & 3 & 5 & \cancel{0} \\
2 & \boxed{0} & \infty & 1 & \cancel{0}
\end{array}
\qquad \text{(τέσσερα πλαισιούμενα)}
$$

B.4:

$$
\begin{array}{cccccc}
\boxed{0} & 4 & \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{\cancel{0}} & \\
1 & 3 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
\cancel{0} & \infty & \boxed{0} & \boxed{\cancel{0}} & \cancel{0} & \\
\infty & 3 & 3 & 5 & \cancel{0} & * \\
2 & \boxed{0} & \infty & 1 & \cancel{0} &
\end{array}
\Longrightarrow
\text{4.1):}
\begin{array}{cccccc}
\boxed{0} & 4 & \cancel{0} & \cancel{0} & \overset{*}{\cancel{0}} & \\
1 & 3 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
\cancel{0} & \infty & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} & \\
\infty & 3 & 3 & 5 & \cancel{0} & * \\
2 & \boxed{0} & \infty & 1 & \cancel{0} &
\end{array}
$$

4.2);

$$\begin{array}{ccccc} & & & & * \\ \boxed{0} & 4 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \\ 1 & 3 & 1 & 1 & \boxed{0} & * \\ \emptyset & \infty & \emptyset & \boxed{0} & \emptyset & \\ \infty & 3 & 3 & 5 & \emptyset & * \\ 2 & \boxed{0} & \infty & 1 & \emptyset & \end{array}$$

4.1): Πήγαινε στό Β.5.)

Β.5:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & * & \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & * \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \\ \infty & 3 & 3 & 5 & 0 & * \\ 2 & 0 & \infty & 1 & 0 & \end{array}$$

'Ελάχ. στοιχεῖο: 1

Β.6:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \infty & -1 & -1 & 0 \\ \infty & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & \infty & 0 & 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 1 \\ \infty & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 1 & 1 \end{array}$$

Β.3:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{0} & 4 & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 2 & \boxed{0} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \infty & \emptyset & \boxed{0} & 1 \\ \infty & 2 & 2 & 4 & \boxed{0} \\ 2 & 0 & \infty & 1 & 1 \end{array}$$

(πέντε πλαισιούμενα, ἄρα ἔχουμε βρῆ τήν ἄριστη λύση).

'Επομένως ὁ συνδυασμός πού δίνει ἐλάχιστο κόστος εἶναι;

$\Pi_1 \rightarrow M_1$, $\Pi_2 \rightarrow M_3$, $\Pi_3 \rightarrow M_4$, $\Pi_4 \rightarrow M_5$ καί $\Pi_5 \rightarrow M_2$

μέ κόστος:

4+6+4+0+4 = 18 χρημ. μονάδες.

('Οπωσδήποτε τό προϊόν Π_4 δέν θά παραχθεῖ καθόλου διότι ἡ μηχανή M_5 ἤτανε φανταστική).

'Υπάρχουν περιπτώσεις πού μποροῦμε νά βροῦμε περισσότερες ἀπό μιά ἄριστες λύσεις. Ὅμως ὅλες αὐτές οἱ ἄριστες λύσεις δίνουν πάντοτε τό ἴδιο ἐλάχιστο ὁλικό κόστος. Ἔτσι μιά ἄλλη ἄριστη λύση στό παράδειγμα μας εἶναι:

$\Pi_1 \to M_1$, $\Pi_2 \to M_4$, $\Pi_3 \to M_3$, $\Pi_4 \to M_5$ καί $\Pi_5 \to M_2$

Μέ ἐλάχ.:κόστος: 4+5+5+0+4 = 18 χρημ. μονάδες.

2. Ἡ μέθοδος τοῦ Kuhn γιά μέγιστο.

Στά προβλήματα τοῦ Kuhn ζητεῖται τό μέγιστο (μέγιστη ἀπόδοση), ὅταν ἔχουμε ἐργαζομένους-θέσεις. Ἐδῶ θά πρέπει νά τονισθεῖ,ὅτι ὅταν δέν πρέπει ἤ δέν μπορεῖ ἕνας ἐργαζόμενος νά πάρει κάποια θέση, τότε θέτουμε σάν ἀντίστοιχη ἀπόδοση τό $-\infty$, π.χ.:

	Θ_1	Θ_2	Θ_3
E_1	8	9	7
E_2	$-\infty$	7	7
E_3	6	6	6

(δηλασή ὁ E_2 δέν μποεῖ νά πάρει τή θέση Θ_1).

Τά προβλήματα αὐτά λύνονται ὅπως ἀκριβῶς καί τά προβλήματα τοῦ ἐλαχίστου, ἀφοῦ ὅμως πιό μπροστά ἀφαιρέσουμε ὅλα τά στοιχεῖα τῆς γνωστῆς μήτρας ἀπό τό μέγιστό της στοιχεῖο.

Παράδειγμα 2.1.

Ζητεῖται ἡ ἄριστη κατανομή τοῦ προσωπικοῦ ἄν ἰσχύει:

	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4	Θ_5
E_1	8	5	7	6	5
E_2	9	$-\infty$	8	3	7
E_3	7	3	2	1	5
E_4	1	6	9	4	7

Εἶναι πρόβλημα μεγίστου, διότι ἔχουμε ἐργαζομένους-θέσεις. Κάνουμε τήν τήν μήτρα τῶν ἀποδόσεων πού ἔχει δοθεῖ, τετραγωνική:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
E_1	8	5	7	6	5
E_2	9	$-\infty$	8	3	7
E_3	7	3	2	1	5
E_4	1	6	9	4	7
E_5	0	0	0	0	0

Μέγιστο στοιχεῖο μήτρας: 9

'Αφαιροῦμε ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μήτρας ἀπό τό 9:

1	4	2	3	4
0	∞	1	6	2
2	6	7	8	4
8	3	0	5	2
9	9	9	9	9

'Οπότε ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Kuhn δίνει:

B.1:

	1	4	2	3	4
	0	∞	1	6	2
	2	6	7	8	4
	8	3	0	5	2
	9	9	9	9	9
'Ελάχ.:	0	3	0	3	2

B.2:

1	1	2	0	2
0	∞	1	3	0
2	3	7	5	2
8	0	0	2	0
9	6	9	6	7

B.3.

1	1	2	$\boxed{0}$	2
$\boxed{0}$	∞	1	3	$\emptyset$
2	3	7	5	2
8	$\boxed{0}$	$\emptyset$	2	$\emptyset$
9	6	9	6	7

(τρία πλαισιούμενα)

B.4:

1	1	2	$\boxed{0}$	2	
$\boxed{0}$	∞	1	3	Ø	
2	3	7	5	2	*
8	$\boxed{0}$	Ø	2	Ø	
9	6	9	6	7	*

=> 4.1) Πήγαινε στό Β.5.

B.5:

~~1~~	~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~2~~	
~~0~~	~~∞~~	~~1~~	~~3~~	~~0~~	
2	3	7	5	2	*
~~8~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~	
9	6	9	6	7	*

'Ελάχ. στοιχεῖο: 2

B.6:

-1	-1	0	-2	0		1	1	2	0	2
-2	∞	-1	1	-2		0	-∞	1	3	0
0	1	5	3	0	=>	0	1	5	3	0
6	-2	-2	0	-2		8	0	0	2	0
7	4	7	4	5		7	4	7	4	5

B.3:

1	1	2	$\boxed{0}$	2
$\boxed{0}$	∞	1	3	Ø
Ø	1	5	3	$\boxed{0}$
8	$\boxed{0}$	Ø	2	Ø
7	4	7	4	5

(τέσσερα πλαισιούμενα)

B.4:

1	1	2	$\boxed{0}$	2	
$\boxed{0}$	∞	1	3	Ø	
Ø	1	5	3	$\boxed{0}$	
8	$\boxed{0}$	Ø	2	Ø	
7	4	7	4	5	*

4.1) Πήγαινε στό Β.5.

B.5:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & \infty & 1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 3 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
7 & 4 & 7 & 4 & 5\ *
\end{array}
$$

'Ελάχ. στοιχεῖο : 4

B.6:

$$
\begin{array}{ccccc}
-3 & -3 & -2 & -4 & -2 \\
-4 & \infty & -3 & -1 & -4 \\
-4 & -3 & 1 & -1 & -4 \\
4 & -4 & -4 & -2 & -4 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 1
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & \infty & 1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 3 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 1
\end{array}
$$

B.3:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 2 & \boxed{0} & 2 \\
\boxed{0} & \infty & 1 & 3 & \emptyset \\
\emptyset & 1 & 5 & 3 & \boxed{0} \\
8 & \emptyset & \boxed{0} & 2 & \emptyset \\
3 & \boxed{0} & 3 & \emptyset & 1
\end{array}
$$

(πέντε πλαισιούμενα, ἄρα ἔχουμε βρεῖ τήν ἄριστη λύση).

'Επομένως ὁ ἄριστος συνδυασμός εἶναι:

$$E_1 \to \theta_4,\ E_2 \to \theta_1\ ,\ E_3 \to \theta_5,\ \ E_4 \to \theta_3\ ,\ E_5 \to \theta_2$$

μέ μέγιστη ὁλική ἀπόδοση:

6+9+5+9+0 = 29 μονάδες ἀποδόσεως.

(Προφανῶς ἡ θέση θ_2 θά μείνει κενή, διότι ὁ E_5 εἶναι φανταστικός).

Παράδειγμα 2.2.

Ζητεῖται ἡ κατανομή προσωπικοῦ στίς θέσεις μέ βάση τόν πίνακα:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
E_1	6	2	2	8
E_2	4	1	9	3
E_3	6	$-\infty$	5	9
E_4	3	3	8	9
E_5	7	4	$-\infty$	2
E_6	8	3	8	2

Εἶναι περίπτωση μέγιστου διότι ἔχουμε ἐργαζομένους-θέσεις. Κάνουμε τή μήτρα πού ἔχει δοθεῖ τετραγωνική προσθέτοντας δύο ἀκόμη (πλαστές) θέσεις, τίς θέσεις θ_5 καί θ_6:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
E_1	6	2	2	8	0	0
E_2	4	1	9	3	0	0
E_3	6	$-\infty$	5	9	0	0
E_4	3	3	8	9	0	0
E_5	7	4	$-\infty$	2	0	0
E_6	8	3	9	2	0	0

Μέγιστο στοιχεῖο τῆς μήτρας: 9

'Αφαιροῦμε ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μήτρας ἀπό τό 9 καί ἔχουμε:

3	7	7	1	9	9
5	8	0	6	9	9
3	∞	4	0	9	9
6	6	1	0	9	9
2	5	∞	7	9	9
1	6	1	7	9	9

'Οπότε ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Kuhn δίνει:

B.1:

	3	7	7	1	9	9
	5	8	0	6	9	9
	3	∞	4	0	9	9
	6	6	1	0	9	9
	2	5	∞	7	9	9
	1	6	1	7	9	9
'Ελαχ:	1	5	0	0		9

<u>B.2:</u>

2	2	7	1	0	0
4	3	0	6	0	0
2	∞	4	0	0	0
5	1	1	0	0	0
1	0	∞	7	0	0
0	1	1	7	0	0

B.3.

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 7 & 1 & \emptyset & \boxed{0} \\ 4 & 3 & \boxed{0} & 6 & \emptyset & \emptyset \\ 2 & \infty & 4 & \boxed{0} & \emptyset & \emptyset \\ 5 & 1 & 1 & \emptyset & \boxed{0} & \emptyset \\ 1 & \boxed{0} & \infty & 7 & \emptyset & \emptyset \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 7 & \emptyset & \emptyset \end{matrix}$$

(ἔξι πλαισιούμενα, ἄρα ἔχουμε βρεῖ τήν ἄριστη λύση).

Ἐπομένως ὁ ἄριστος συνδυασμός μεταξύ ἐργαζομένων καί θέσεων εἶναι:

$E_1 \to \theta_6$, $E_2 \to \theta_3$, $E_3 \to \theta_4$, $E_4 \to \theta_5$, $E_5 \to \theta_2$ καί $E_6 \to \theta_1$,

μέ μέγιστη ὁλική ἀπόδοση:

0+9+9+0+4+8 = 30 μονάδες ἀποδόσεως.

(Προφανῶς ὁ E_1 καί ὁ E_4 δέν θά τοποθετηθοῦν σέ καμιά θέση, διότι οἱ θέσεις των θ_6 καί θ_5 εἶναι πλαστές).

Ἄσκηση θεωρητική.

Νά διατυπωθῆ καί νά γραφτεῖ τό ἀντίστοιχο πρόγραμμα, μεγιστοποιήσεως τῆς ὁμαδικῆς ἀποδόσεως n ἐργαζομένων σέ m θέσεις.

Ἔστω $D=(d_{ij})$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$ ἡ μήτρα ἀποδόσεως τῶν n ἐργαζομένων στίς m θέσεις, (δηλαδή ὁ i ἐργαζόμενος ἔχει ἀπόδοση στή j θέση, ἴση μέ d_{ij}).

Ὁρίζουμε τήν ἄγνωστη μήτρα $X=(x_{ij})$, ἔτσι ὥστε:

$x_{ij}=1$, ἄν ὁ i πάρει τή θέση j

$=0$, διαφορετικά.

Ὁπότε ζητᾶμε νά μεγιστοποιήσουμε τήν συνάρτηση, ἀποδόσεως (κέρδους)

$$f = \max \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot x_{ij}$$

Γιά νά διατυπώσουμε τούς περιορισμούς τοῦ προγράμματος, διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

(i) Ἄν $n \geq m$. Τότε κάθε θέση θά ἔχη ἀναγκαστικά κάποιον ἐργαζόμενο θά καταλάβει κάποια θέση ἤ καμιά. Τό ὅτι κάθε θέση θά πρέπει νά γεμίσει, δίνει τούς περιορισμούς:

$$\sum_i x_{ij} = 1, \text{ γιά κάθε } j=1,2,\ldots, m$$

Τό ὅτι κάθε ἐργαζόμενος θά καταλάβει μία θέση ἤ καμία, δίνει τούς περιορισμούς:

$$\sum_j x_{ij} \leqq 1, \text{ γιά κάθε } i = 1,2,\ldots n$$

(ii) Ἄν $n \leqq m$. Τότε κάθε ἐργαζόμενος θά πρέπει ἀναγκαστικά νά καταλάβει κάποια θέση, ἐνῶ μερικές θέσεις θά μείνουν κενές.
Ἔτσι παίρνουμε γιά τίς θέσεις πτούς περιορισμούς:

$$\sum_i x_{ij} \leqq 1 \text{ , γιά κάξε } j=1,2,\ldots,m$$

Ἐνῶ γιά τούς ἐργαζόμενους, τούς περιορισμούς:

$$\sum_j x_{ij} = 1, \text{ γιά κάθε } i=1,2,\ldots,n$$

(Ἡ ἴδια θεωρητική ἄσκηση μπορεῖ νά διατυπωθεῖ γιά μηχανές καί προϊόντα. Στήν περίπτωση αὐτή ζητᾶμε τό ἐλάχιστο τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως).

Δ. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ (ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX)

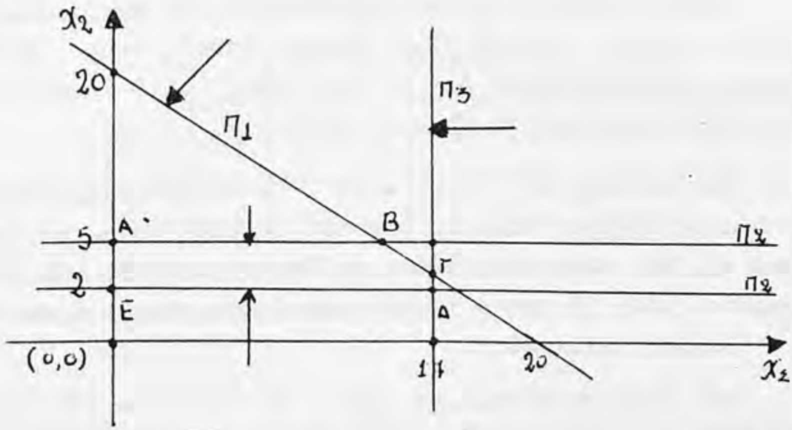
1. Λύση Γραμμικῶν Προγραμμάτων μέ δύο μεταβλητές.

Σέ κάθε γραμμικό πρόγραμμα ἔχουμε νά ἐλαχιστοποιήσουμε ἤ νά μεγιστοποιήσουμε μιά συνάρτηση $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$ $= f(x)$ πού ὀνομάζεται ἀντικειμενική συνάρτηση, ὅταν ἰσχύουν συγχρόνως μερικοί γραμμικοί περιορισμοί, πού δίνονται ὑπό μορφή ἀνισοτήτων ἤ καί ἰσοτήτων, π.χ.:

$$
\begin{array}{rll}
\min f = & 50x_1+300x_2 & \text{(ἀντικειμενική συνάρτηση } f(x)) \\
& x_1+x_2 \leq 20 & \text{(περιορισμός 1)} \\
& 2 \leq x_2 \leq 5 & \text{(περιορισμός 2)} \\
& x_1 \leq 17 & \text{(περιορισμός 3)} \\
& x_1, x_2 \geq 0 & \text{(περιορισμός 4)}
\end{array}
$$

Παρατηροῦμε ὅτι καί ἡ f καί οἱ περιορισμοί εἶναι ἐκφράσεις πρώτου βαθμοῦ. ἄρα ἔχουμε ἕνα γραμμικό πρόγραμμα μέ δύο μεταβλητές, τό ὁποῖο μποροῦμε νά τό λύσουμε ὡς ἑξῆς:

(α) Σχεδιάζουμε τούς δύο ἄξονες συντεταγμένων (ὡς πρός τίς δύο μεταβλητές. Σχεδιάζουμε τούς περιορισμούς:



Περιορισμός 1: $x_1+x_2 \leq 20$. Τόν κάνουμε ἰσότητα:

$x_1+x_2 = 20 \Longrightarrow$ ἄν $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 20$ καί

ἄν $x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 20$. Ἑπομένως ἑνώνουμε τά σημεῖα, (0,20), (20,0). Στή συνέχεια, γνωρίζουμε ὅτι κάθε ἀνισότητα χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ δύο μέρη μέ διαχωριστικά σύνορα τήν ἀντίστοιχη ἰσότητά της. Γιά νά βροῦμε ποιό ἀπό τά δύο μέρη τήν ἐπαληθεύει, ἀρκεῖ νά ἐξετάσουμε ἄν τό σημεῖο (0,0), (δηλαδή $x_1=0$, $x_2=0$), τήν ἐπαληθεύει ἤ ὄχι. Ἄν τήν ἐπαληθεύει, τότε ἡ ἀνισότητα ἀληθεύει στό τμῆμα ἐκεῖνο τοῦ ἐπιπέδου πού περιλαμβάνει τό (0,0), ἀλλιῶς στό ὑπόλοιπο τμῆμα.

Ἔστω λοιπόν $x_1=0$, $x_2=0 \Longrightarrow 0+0=0 \leq 20$ ἀληθές

Ἄρα ὁ περιορισμός 1 ἀληθεύει στό τμῆμα ἐκεῖνο τοῦ ἐπιπέδου πού περιλαμβάνει τό (0,0).

Περιορισμός 2: $x_1 \geq 2$ καί $x_2 \leq 5$.

Στήν οὐσία εἶναι ἕνας διπλός περιορισμός Οἱ ἀντίστοιχες ἰσότητες εἶναι $x_2=2$ καί $x_2=5$ οἱ ὁποῖες εἶναι πολύ εὔκολο νά χαραχθοῦν στό ἐπίπεδο (κάθετες στόν ἄξονα τῶν x_2). Παρατηροῦμε, ὅτι ἄν $x_2=0$ τότε $0 \geq 2$ ψέμα καί $0 \leq 5$ ἀληθές. Ἄρα τό $x_2 \geq 2$ δέν περιλαμβάνει τό (0,0) ἐνῶ τό $x_2 \leq 5$ τό περιλαμβάνει.

Περιορισμός 3: $x_1 \leq 17$. Χαράσσουμε τήν ἀντίστοιχη ἰσότητα $x_1=17$, (πού θά εἶναι βέβαια κάθετη στόν ἄξονα τῶν x_1). Παρατηροῦμε, ὅτι ἄν $x_1=0$ τότε $0 \leq 17$ ἀληθές. Ἄρα τό $x_1 \leq 17$ περιέχει τό σημεῖο (0,0).

Περιορισμός 4: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Ὁ περιορισμός αὐτός, (ὁ ὁποῖος σχεδόν πάντοτε ὑπάρχει σέ κάθε γραμμικό πρόγραμμα), μᾶς πληροφορεῖ, ὅτι ἀπ'ὅλο τό ἐπίπεδο μᾶς ἐνδιαφέρει μόνο τό πρῶτο τεταρτημόριό του, ὅπου μόνον ἐκεῖ ἰσχύει $x_1, x_2 \geq 0$.

(β) Γραμμοσιάζουμε τό τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου πού ἰσχύουν ὅλοι οἱ περιορισμοί. Ἔτσι παίρνουμε ἕνα κυρτό πο -

λύγωνο (κλειστό ἤ ἀνοικτό). Ὑπολογίζουμε τίς συντεταγμένες τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου.

Στό παράδειγμά μας προκύπτει τό κλειστό πολύγωνο:

(ΑΒΓΔΕ)

Οἱ συντεταγμένες τοῦ Α εἶναι $x_1=0$, $x_2=5$ $\Longrightarrow$ Α(0,5)

Οἱ συντεταγμένες τοῦ Β προκύπτουν σάν τομή τῶν εὐθειῶν:

$$x_2=5 \text{ καί } x_1+x_2=20$$

Λύνουμε τό σύστημα καί ἔχουμε $x_1=15$ καί $x_2=5$ => Β(15,5)

Οἱ συντεταγμένες τοῦ Γ προκύπτουν ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν:

$$x_1 = 17 \quad \text{καί} \quad x_1+x_2 = 20$$

Λύνουμε τό σύστημα καί ἔχουμε $x_1=17$ καί $x_2=17$ $\Longrightarrow$ Γ(17,3).

Οἱ συντεταγμένες τοῦ Δ προκύπτουν ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν $x_1 = 17$ καί $x_2 = 2$

Ἄρα $x_1 = 17$ καί $x_2 = 2$ => Δ(17,2)

Οἱ συντεταγμένες τοῦ Ε εἶναι $x_1=0$ καί $x_2=2$ $\Longrightarrow$Ε(0,2).

(γ) Ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές τῶν συντεταγμένων κάθε κορυφῆς τοῦ πολυγώνου στήν ἀντικειμενική συνάρτηση. Ἐκείνη ἡ κορυφή πού ἐλαχιστοποιεῖ (ἤ μεγιστοποιεῖ, ἄν ζητᾶμε maximum) τήν ἀντικειμενική συνάρτηση f(x), δίνει καί τήν ΑΡΙΣΤΗ λύση.

Στό παράδειγμά μας ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
f(A) &= f(0,5) = 50.0+300.5 = 1500\\
f(B) &= f(15,5)= 50.15+300.5= 750+1500=2250\\
f(\Gamma) &= f(17,3)= 50.17+300.3= 850+900=1750\\
f(\Delta) &= f(17,2)= 50.17+300.2= 850+600=1450\\
F(E) &= f(0,2) = 50.0 +300.2 = 600
\end{aligned}$$

Ἄρα min f(x) = f(E) = 600 καί $x_1=0$, $x_2=2$ εἶναι ἡ ἄριστη λύση τοῦ προγράμματος.

<u>Παράδειγμα 1.1.</u> Νά βρεθῆ ἡ ἄριστη λύση τοῦ προγράμματος

$$\min f=4x_1+3x_2$$

μέ τούς περιορισμούς:

$x_1 - x_2 \leq 1$ (περιορισμός 1)

$x_1 + x_2 \geq 3$ (Π.2)

$x_1, x_2 \geq 0$ (Π.3)

(α) Σχεδιάζουμε τούς περιορισμούς στό επίπεδο.

Περιορισμός 1: $x_1 - x_2 \leq 1$

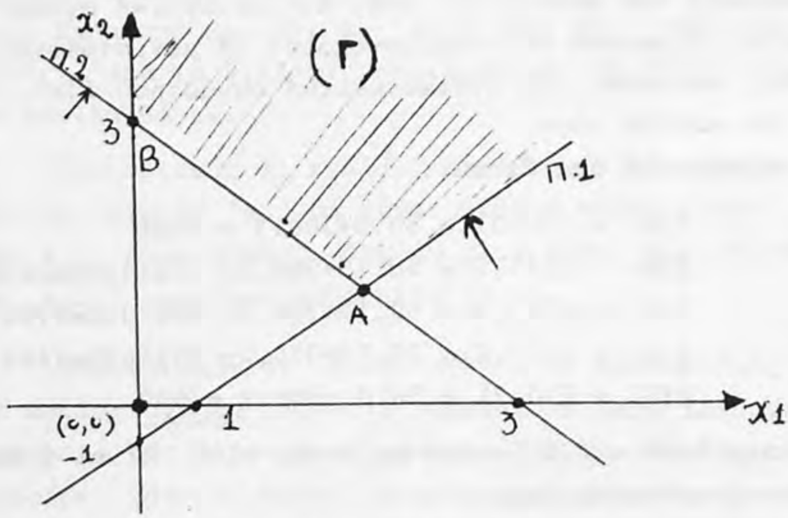
Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα εἶναι $x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow$ (ἄν $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$) καί (ἄν $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$). Ἄρα περνάει ἀπό τά σημεῖα (0,-1), (1,0). Θέτουμε $(x_1, x_2) = (0,0)$ καί ἔχουμε $0-0 \leq 1$ ἀληθές. Ἄρα τό (0,0) ἐπαληθεύει τόν Π.1 .

Περιορισμός 2: $x_1 + x_2 \geq 3$

Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα εἶναι $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow$ (ἄν $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$) καί (ἄν $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$). Ἄρα περνάει ἀπό τά σημεῖα (0,3), (3,0). Θέτουμε στόν Π.2, $(x_1, x_2) = (0,0)$ καί ἔχουμε $0+0 \geq 3$ ψέμα. Ἄρα τό (0,0) δέν ἐπαληθεύει τόν Π.2.

Περιορισμός 3: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Περιοριζόμαστε στό πρῶτο τεταρτημόριο τῶν ἀξόνων.



(β) Ὁπότε προκύπτει ἕνα ἀνοικτό πολύγωνο μέ κορυφές τίς Α καί Β. Οἱ συντεταγμένες τοῦ Α προκύπτουν σάν τομή τῶν ευθειών:

$$x_1-x_2=1 \quad \text{καί} \quad x_1+x_2=3$$

Λύνουμε τό σύστημα καί έχουμε $x_1=2$, $x_2=1$ => $A(2,1)$.
Οί συντεταγμένες τοῦ B εἶναι $x_1=0$, $x_2=3$ => $B(0,3)$.

(γ) Ἰσχύουν τά ἑξῆς:

$f(A) = f(2,1) = 4.2+3.1 = 11$

$f(B) = f(0,3) = 4.0+3.3 = 9$

$\min f = f(B) = 9$ μέ $x_1=0$ καί $x_2=3$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ἄν στό παραπάνω $\max f$ ἀντί τό $\min f$, τότε ἐπειδή τό πολύγωνο πού προκύπτει εἶναι ἀνοικτό προκύπτει, ὅτι θά ὑπάρχει κάποια κορυφή τοῦ Γ στό ἄπειρο μέ συντεταγμένες $x_1= x_2=+\infty$. Καί ἐπομένως θά ἰσχύει: $\max f=f(\Gamma)=+\infty$

<u>Παράδειγμα 1.2.</u> Νά βρεθεῖ ἡ ἄριστη λύση τοῦ προγράμματος:

$$\max f = x_1+x_2$$

μέ τούς περιορισμούς:

$$x_1 \le 3 \qquad (\Pi.1)$$
$$-2x_1+x_2 \le 1 \qquad (\Pi.2)$$
$$x_1+x_2 \le 3 \qquad (\Pi.3)$$

α) Σχεδιάζουμε τούς περιορισμούς στό ἐπίπεδο.

Περιορισμός 1: $x_1 \le 3$

Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα $x_1=3$ δίνει εὐθεία κάθετη στόν ἄξονα τῶν x_1. Ἄν $(x_1,x_2) = (0,0)$, τότε ἔχουμε $0\le 3$ ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.1 περιλαμβάνει τό σημεῖο (0,0).

Περιορισμός 2: $-2x_1+x_2 \le 1$.

Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα $-2x_1+x_2=1$ δίνει:

ἄν $x_1= 0$ => $x_2=1$ καί ἄν $x_2=0$ => $x_1=-1/2$.

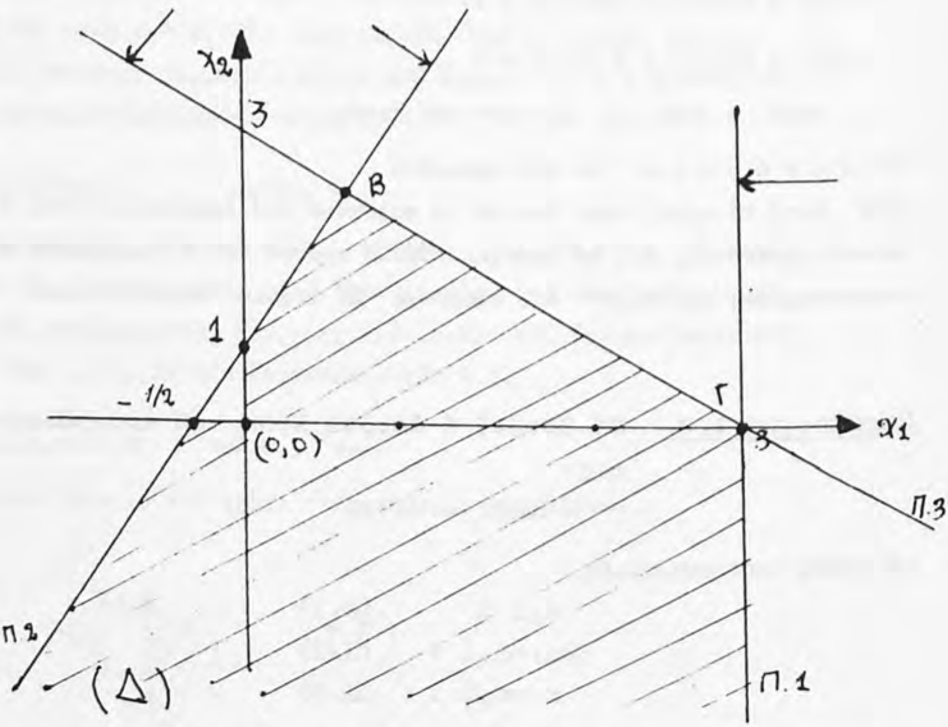
Ἄρα περνάει ἀπό τά σημεῖα (0,1) καί $(-\frac{1}{2}, 0)$. Ἄν $(x_1,x_2)=(0,0)$, τότε ἔχουμε $-0+0\le 1$ ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.2 περιλαμβάνει τό σημεῖο (0,0).

Περιορισμός 3: $x_1+x_2\leq 3$

Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα $x_1+x_2=3$ δίνει:

ἄν $x_1=0 \Rightarrow x_2=3$, καί ἄν $x_2=0 \Rightarrow x_1=3$.

Ἄρα περνάει ἀπ' τά σημεῖα (0,3) καί (3,0). Ἄν $(x_1,x_2)=(0,0)$, τότε ἔχουμε $0+0\leq 3$ ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.3 περιλαμβάνει τό σημεῖο (0,0).



(β) Ὁπότε προκύπτει τό ἀνοικτό πολύγωνο μέ κορυφές τίς Β καί Γ. Οἱ συντεταγμένες τοῦ Β προκύπτουν σάν τομή τῶν εὐθειῶν:

$$-2x_1+x_2=1 \quad \text{καί} \quad x_1+x_2=3$$

Λύνουμε τό σύστημα καί ἔχουμε $x_1=2/3$, $x_2=7/3$ $\Rightarrow$ $B(\frac{2}{3} , \frac{7}{3})$.

Οἱ συντεταγμένες τοῦ Γ εἶναι $x_1=3$, $x_2=0$ $\Rightarrow$ $\Gamma(3,0)$.

(γ) Ἰσχύουν τά ἑξῆς:

$$f(B) = f(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{2}{3}.1 + \frac{7}{3}.1 = \frac{9}{3} = 3$$

$$f(\Gamma) = f(3,0) = 3.1 + 0.1 = 3$$

Ἄρα ἰσχύει $\max f = f(\Gamma) = f(B) = 3$. Ἑπομένως καί κάθε-σημεῖο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος (ΒΓ) θά ΔΙΝΕΙ ΜΑΧΙΜUΜ. Αὐτή ἡ περίπτωση ὀνομάζεται ΑΠΕΙΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ, διότι τό (ΒΓ) ἔχει ὡς γνωστόν ἄπειρο πλῆθος, σημείων

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. "Αν στό παραπάνω παράδειγμα ζητούσαμε τό minf τότε στό ἀνοικτό πολύγωνο ὑπάρχει κάποια κορυφή Δ μέ $x_1 = x_2 = -\infty$. Ὁπότε $\min f = -\infty$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ἄν ἔχουμε τρεῖς μεταβλητές x_1, x_2, x_3 τότε μποροῦμε ν'ἀκολουθήσουμε τήν ἴδια μέθοδο στούς τρεῖς ἄξονες. Ὅμως παρουσιάζονται δυσκολίες στό σχῆμα καί γι'αὐτό συνιστοῦμε στήν περίπτωση αὐτή νά βρίσκουμε τήν ἄριστη λύση μέ τήν μέθοδο SIMPLEX πού ἀναφέρεται στή συνέχεια.

2. Λύση Γραμμικῶν Προγραμμάτων μέ SIMPLEX.

Τήν μέθοδο SIMPLEX τήν ἀκολουθοῦμε ὅταν ἔχουμε νά βροῦμε ἄριστη λύση γραμμικοῦ προγράμματος μέ πάνω ἀπό δύο μεταβλητές, Π.χ.

$$\max f = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \qquad (\Pi.1)$$

$$x_1 \geq x_2 \qquad (\Pi.2)$$

$$x_3 \leq 1 \qquad (\Pi.3)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (\Pi.4)$$

Ἡ μέθοδος SIMPLEX ἀπαιτεῖ τά ἑξῆς κατά σειρά βήματα:

α) Ἄν ζητᾶμε maxf τότε ἀλλάζουμε ὅλα τά πρόσημα τῆς f καί ἐπομένως προκύπτει μιά νέα συνάρτηση g, τῆς ὁποίας σητᾶμε πλέον τό ming.

$$\min g = x_1 + x_2 + x_3$$

(β) Μετατρέπουμε όλους τούς περιορισμούς (έκτός άπό τόν Π.4) σέ ίσότητες βάζοντας νέες μεταβλητές πού όνομάζονται ΧΑΛΑΡΕΣ. Έτσι, άν κάποιος περιορισμός είναι $\leq$ τότε τοῦ προσθέτουμε μιά χαλαρή μεταβλητή γιά νά γίνη =, ένῶ άν είναι $\geq$ τοῦ άφαιροῦμε. Τίς χαλαρές μεταβλητές πού θά βάλουμε στούς περιορισμούς, τούς προσθέτουμε στήν άντικειμενική συνάρτηση μέ συντελεστή τό μηδέν.

$$\min g = x_1+x_2+x_3+0.x_4+0.x_5+0.x_6$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2 \qquad (\Pi.1)$$

$$x_1-x_2-x_5= 0 \qquad (\Pi.2)$$

$$x_3+x_6= 1 \qquad (\Pi.3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (\Pi.4)$$

(γ) Όρίζουμε τά γνωστά διανύσματα καί μῆτρες :
$C= (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, όπου c_i οί συντελεστές τῶν μεταβλητῶν στήν άντικειμενική συνάρτηση.

$A = (a_{ij})$ μέ γραμμές όσοι οί περιορισμοί (έκτός τοῦ Π.4) καί στῆλες όσες οί μεταβλητές, όπου τό a_{ij} θά έχει τιμή τόν συντελεστή τῆς μεταβλητῆς x_j στόν i περιορισμό. (Προφανῶς , άν κάποια μεταβλητή δέν ύπάρχει σέ κάποιο περιορισμό, τότε τό a_{ij} =0).

$A_1, A_2, \ldots, A_j$ είναι οί στῆλες τῆς μήτρας A.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\lambda \end{bmatrix}$$

όπου τό b_i είναι ό σταθερός όρος τοῦ ι περιορισμοῦ. Τά $b_1, \ldots, b_\lambda$ πρέπει άναγκαστικά νά είναι ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΑ ή ΙΣΑ τοῦ μηδενός.

Έτσι στό παράδειγμά μας έχουμε:

$$C = (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{matrix} \end{array} \quad \text{καί} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(δ) Παρατηροῦμε στή μήτρα A ἄν ὑπάρχουν στῆλες πού μποροῦν ν'ἀποτελέσουν μοναδιαία μήτρα, δηλαδή μιά στήλη τῆς μορφῆς $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{bmatrix}$, μιά ἄλλη $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{bmatrix}$, κ.λ.π., καί τέλος μιά τῆς μορφῆς $\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$. Οἱ στῆλες πού μᾶς λείπουν ἐπισυνάπτονται στά δεξιά τῆς A. Κάθε ὅμως στήλη πού ἐπισυνάπτεται, προυποθέτει τήν πρόσθεση μιᾶς νέας μεταβλητῆς στόν ἀντίστοιχο περιορισμό. Ἔτσι ἄν ἐπισυνάψουμε τήν $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, τότε πρέπει νά βάλουμε μιά νέα μεταβλητή στόν δεύτερο περιορισμό, δηλαδή ἐκεῖ πού εἶναι ἡ μονάδα στή στήλη. Τέλος, αὐτές οἱ νέες δηλαδή ἐκεῖ πού εἶναι ἡ μονάδα στή στήλη. Τέλος, αὐτές οἱ νέες μεταβλητές ὀνομάζονται ΤΕΧΝΙΚΕΣ μεταβλητές πού ἔχουν συντελεστή στήν ἀντικειμενική συνάρτηση τό W, ὅπου $W \to +\infty$.

Ἔτσι στό παράδειγμά μας, παρατηροῦμε ὅτι ἡ μήτρα A γιά νά περιέχει μοναδιαία μήτρα θά πρέπει νά ὑπάρχουν οἱ στῆλες:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ A_4 καί A_6 δίνουν τήν πρώτη καί τήν τρίτη στήλη. Ἑπομένως λείπει ἡ στήλη $\begin{bmatrix}0\\-\\0\end{bmatrix}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι πρέπει νά βάλουμε στό δεύτερο περιορισμό μιά νέα μεταβλητή:

$$\begin{aligned}\min g &= x_1+x_2+x_3+0.x_4+0.x_5+0.x_6+W.x_7\\ &x_1+x_2+x_3+x_4 = 2\\ &x_1-x_2-x_5+x_7 = 0\\ &x_3+x_6 = 1\\ &x_j \geq 0,\ j=1,2,\dots,7\end{aligned}$$

καί ἐπομένως:

$$C = (1,1,1,0,0,0,W)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \end{matrix} \end{array} \quad \text{καί } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ε) Κατασκευάζουμε τόν πρῶτο πίνακα τῆς μεθόδου SIMPLEX, ὅπου οἱ "στῆλες βασικῆς" (Σ.Β.), εἶναι κατά ΑΥΣΤΗΡΗ ΣΕΙΡΑ οἱ στῆλες τῆς μοναδιαίας μήτρας μέσα στή μήτρα Α, ἐνῶ οἱ τιμές τοῦ κ εἶναι τά ἀντίστοιχα c_j πού ἀντιστοιχοῦν στίς μεταβλητές πού ἀποτελοῦν τίς στῆλες τῆς βασικῆς λύσεως.

		C	1	1	1	0	0	0	W	
u	Σ.Β	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Συντελεστές
0	A_4	2	1	1	1	1	0	0	0	1
W	A_7	0	1	-1	0	0	-1	0	1	1
0	A_6	1	0	0	1	0	0	1	0	0
		δ_j	1-W	+	+	0	+	0	0	

Τά δ_j προκύπτουν ἀπό τόν κάτωθι:

$$\delta_j = c_j - \kappa . A_j$$

Ἔτσι στό παράδειγμά μας ἰσχύει:

$\delta_1 = c_1 - u.A_1 = 1-(0.1+W.1+0.0) = 1-W$

$\delta_2 = c_2 - u.A_2 = 1-(0.1+W.(-1)+0.0) = 1+W > 0 \Rightarrow$ βάζουμε ἁπλῶς τήν ἔνδειξη +, διότι οἱ τιμές τῶν θετικῶν δ_j δέν μᾶς ἐνδιαφέρουν

....

$\delta_7 = c_7 - \kappa.A_7 = W-(0.0+W.1+0.0) = W-W = 0$

Ἄν κάποιο δ_j δέν βγεῖ μηδέν, ἐνῶ ἡ στήλη A_j ἀνήκει στίς στῆλες τῆς βισικῆς (Σ.Β.), τότε κάπου ἔχουμε κάνει λάθος.

῞Αν δέν ὑπάρχει κανένα ἀρνητικό δ_j, τότε ἔχομε βρεῖ τήν ΑΡΙΣΤΗ λύση, πού δίνεται ἀπό τόν συνδυασμό τῆς δεύτερης καί τρίτης στήλης τοῦ πίνακα. ῞Ετσι, στό παράδειγμά μας ὑπάρχει ἕνα ἀρνητικό δ_j, τό δ_1 καί ἐπομένως δέν ἔχουμε ἀκόμη βρεῖ τήν ἄριστη λύση· πάντως μιά λύση πού ἔχουμε μέχρι τήν ὥρα βρεῖ εἶναι:
$A_4 \to 2,\ A_7 \to 0,\ A_6 \to 1 \Rightarrow x_4=2,\ x_7=0,\ x_6=1$ καί ὅλα τά ΑΛΛΑ x_j ἴσα μέ τό ΜΗΔΕΝ.

Στή συνέχεια, (ἄν δηλαδή δέν ἔχουμε βρεῖ τήν ἄριστη λύση), σημειώνουμε τήν στήλη πού ἔχει τόν πιό ΜΙΚΡΟ ΑΡΝΗΤΙΚΟ συντελεστή δ_j. ῾Η στήλη αὐτή ὀνομάζεται ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗ στίς Σ.Β. ῞Ετσι στό παράδειγμά μας $\delta_1 < 0$ καί ἐπομένως ἡ εἰσερχόμενη στήλη στίς Σ.Β. εἶναι ἡ A_1. ᾿Εξ ἄλλου κάποια γραμμή τοῦ πίνακα θά πρέπει νά φύγει, πού στή θέση της, στόν νέο πίνακα, θά γραφτεῖ ἡ εἰσερχόμενη στήλη. ῾Η γραμμή πού ΦΕΥΓΕΙ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

> Σχηματίζουμε τά κλάσματα, μέ ἀριθμητή τή τιμή πού ὑπάρχει στή στήλη Β καί παρονομαστή τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς εἰσερχόμενης στήλης. ᾿Από τά κλάσματα αὐτά ἀπορρίπτονται ἐκεῖνα, πού ἔχουν ἀρνητικό παρανομαστή ἤ μηδέν παρανομαστή. ᾿Από τά κλάσματα πού μένουν διαλέγουμε ἐκεῖνο πού δίνει τήν μικρότερη τιμή. Τό κλάσμα αὐτό θά ἀντιστοιχεῖ σέ κάποια γραμμή, ἡ γραμμή αὐτή θά ΦΥΓΕΙ. ῞Ετσι στό παράδειγμά μας ἔχουμε:
>
> $\frac{2}{1}, \frac{0}{1}$

᾿Οπότε τό δεύτερο κλάσμα δίνει τήν μικρότερη τιμή, ἐνῶ τό τρίτο κλάσμα ἀπορρίπτεται.

῎Αρα ἡ δεύτερη γραμμή θά φύγει καί στή θέση της (στόν νέο πίνακα) θά μπῆ ἡ εἰσερχόμενη, ἡ A_1.

Δεξιά ἀπό κάθε πίνακα SIMPLEX ὑπολογίζουμε τούς ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ τῶν γραμμῶν τοῦ πίνακα. Αὐτοί οἱ συντελεστές ὑπολογίζονται ὡς ἑξῆς:

Ὁ συντελεστής τῆς <u>γραμμῆς πού φεύγει</u> εἶναι τό στοιχεῖο τοῦ πίνακα πού βρίσκεται στή διασταύρωση τῆς στήλης πού εἰσέρχεται καί τῆς γραμμῆς πού φεύγει. Στό παράδειγμά μας ὁ συντελεστής τῆς δεύτερης γραμμῆς εἶναι τό 1.
Οἱ συντελεστές τῶν <u>ὑπολοίπων γραμμῶν</u> ὑπολογίζονται μέ ἕνα κλάσμα, πού ἀριθμητής εἶναι ὁ ἀριθμός τῆς γραμμῆς στήν εἰσερχόμενη στήλη καί παρανομαστής ὁ συντελεστής τῆς γραμμῆς πού φεύγει. Στό παράδειγμά μας ὁ συντελεστής τῆς πρώτης καί τρίτης γραμμῆς εἶναι:

$\frac{1}{1} = 1$ καί $\frac{0}{1} = 0$

ζ) Στή μέθοδο SIMPLEX, ὅταν ἀλλάζουμε πίνακα, δροῦμε ὡς ἑξῆς:
Οἱ στῆλες βασικῆς (Σ.Β.) παραμένουν οἱ ἴδιες ἐκτός ἀπό τήν γραμμή πού ἔφυγε στό προηγούμενο βῆμα, πού στή θέση της μπαίνει ἡ στήλη πού ἦταν εἰσερχόμενη. Τό νέο διάνυσμα u ἀλλάζει μόνο στό σημεῖο τῆς ἀλλαγῆς πού ἀναφέραμε πού τίθεται τό ἀντίστοιχο c_j, (ἄν μπαίνει ἡ A_j). Τά στοιχεῖα τῆς γραμμῆς πού μπῆκε ὑπολογίζονται ὡς ἑξῆς:

$$a_{ij} = (\text{τό παληό } a_{ij})/\text{συντελεστής}$$

Ἐνῶ τά στοιχεῖα τῶν ὑπολοίπων γραμμῶν ἀπό τόν τύπο:

$$a_{ij} = (\text{τό παληό } a_{ij}) - (\text{τό παληό } a_{i_0 j})\ (\text{συντελεστής})$$

ὅπου τό i_0 ἦταν ἡ γραμμή πού ἔφυγε τοῦ προηγουμένου πίνακα.
Στή συνέχεια συνεχίζουμε ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει στό ε).

Στό παράδειγμά μας ἡ νέα δεύτερη γραμμή θά πρέπει νά διαιρεθεῖ μέ τό 1:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1},, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

Ὁπότε ἡ νέα δεύτερη γραμμή μας θά εἶναι:

0, 1, -1, 0, 0, -1, 0, 1

Ἡ νέα πρώτη γραμμή θά εἶναι ἡ ἑξῆς:

2-0.1, 1-(-1).1, 1-0.1, 1-0.1, 0-(-1).1, 0-0.1, 0-1.1

Ἄρα ἡ νέα πρώτη γραμμή θά εἶναι:

2,0,2,1,1,1,0,-1

Ἡ νέα τρίτη γραμμή θά εἶναι ἡ ἑξῆς:

1-0.0, 0-1.0, 0-(-1).0, 1-0.0, 0-0.0, 0-(-1).0, 1-0.0, 0-1.0

Ἄρα ἡ νέα τρίτη γραμμή θά εἶναι:

1,0,0,1,0,0,1,0

Ἑπομένως ὁ πρῶτος πίνακας μαζί μέ τόν δεύτερο, θά εἶναι ὡς ἑξῆς:

u	Σ.Β.	C	1	1	1	0	0	0	W	
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Συντελεστές
0	A	2	1	1	1	1	0	0	0	1
W	A	0	1	-1	0	0	-1	0	1	1
0	A	1	0	0	1	0	0	1	0	0
		δ_j	1-W	+	+	0	+	0	0	
0	A	2	0	2	1	1	1	0	-1	
1	A	0	1	-1	0	0	-1	0	1	
0	A	1	0	0	1	0	0	1	0	
		δ_j	0	+	+	0	+	0	+	

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα τά $\delta_j \geqq 0$. Ἄρα ἔχουμε βρεῖ τήν ΑΡΙΣΤΗ λύση:

$A_4 \to 2,\ A_1 \to 0,\ A_6 \to 1 \Rightarrow\ x_4=2,\ x_1=0,\ x_6=1$

καί $x_2=x_3=x_5=x_7=0$. Ἑπομένως ἰσχύει:

$$\max f = -0-0-0 = 0$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ἄν στήν SIMPLEX στήν εἰσερχόμενη στήλη ὅλα τά στοιχεῖα της εἶναι ἀρνητικά ἤ μηδέν, (δηλαδή δέν ὑπάρχει κανένα θετικό), τότε τό $\min g=-\infty$ (καί ἑπομένως $\max g=+\infty$).

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ἄν στή πρώτη Β.Σ. ἔχουμε κ μεταβλητές τεχνικές, τότε ἡ SIMPLEX θά τελειώσει σέ περισσότερες ἀπό κ πίνακες.

<u>Παράδειγμα 2.1.</u> Νά λυθεῖ τό πρόγραμμα

$$\max C.X$$

$$\text{μέ} \quad A.X \leqq B \quad \text{ὅπου}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix} \quad x \geqq 0, \; C = \begin{bmatrix} 4,12,3 \end{bmatrix}$$

Κάνουμε ἀντικατάσταση στά A,B καί C καί ἔχουμε:

$$\max(4x_1+12x_2+3x_3)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 150 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 150 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqq 150 \qquad (\Pi.1)$$

$$x_1 \leqq 1000 \qquad (\Pi.2)$$

$$x_2 \leqq 500 \qquad (\Pi.3)$$

$$x_3 \leqq 1500 \qquad (\Pi.4)$$

Ζητεῖται τό maximum τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως. Θά πρέπει ν ἀναζητήσουμε:

$$\min f = (-4x_1 - 12x_2 - 3x_3)$$

Βάζοντας χαλαρές μεταβλητές στούς περιορισμούς (Π.1), (Π.2), (Π.3), (Π.4), παίρνουμε τίς ἰσότητες:

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 150$$
$$x_1 + x_5 = 1000$$
$$x_2 + x_6 = 500$$
$$x_3 + x_7 = 1500$$

Καί ἐπομένως ἡ ἀντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$\min f = (-4x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7)$$

'Οπότε λαμβάνουμε:

$$C\ (-4, -12, -3, 0, 0, 0, 0)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \end{matrix} \end{array}, \quad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμε ὅτι στή μήτρα A ὑπάρχουν ὅλες οἱ στῆλες τῆς μοναδιαίας ὁρίζουσας.

"Αρα μποροῦμε ν'ἀρχίσουμε τή μέθοδο SIMPLEX:

		C	-4	-12	-3	0	0	0	0	
u	Σ.Β.	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Συντελεστές
0	A_4	150	3	6	2	1	0	0	0	6
0	A_5	1000	1	0	0	0	1	0	0	0
0	A_6	500	0	1	0	0	0	1	0	1/6
0	A_7	1500	0	0	1	0	0	0	1	0
		δ_j	-4	-12	-3	0	0	0	0	
-12	A_2	25	1/2	1	1/3	1/6	0	0	0	
0	A_5	1000	1	0	0	0	1	0	0	
0	A_6	475	-1/2	0	-1/3	-1/6	0	1	0	
0	A_7	1500	0	0	1	0	0	0	1	
		δ_j	+	0	+	+	0	0	0	

Δέν ὑπάρχει δ_j ἀρνητικό, ἄρα ἡ ΑΡΙΣΤΗ λύση εἶναι:

$A_2 \to 25$, $A_5 \to 1000$, $A_6 \to 475$, $A_7 \to 1500$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \; x_2\ 25,\ x_5=1000,\ x_6=475,\ x_7=1500$ καί $x_1=x_3=x_4=0$

Μέ:

$$\max(4.0+12.25+3.0)=300$$

Παράδειγμα 2.2. Νά λυθεῖ τό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \min g &= x_3 - 5x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 - x_1 - 4x_3 &\geqq -8 \qquad (\Pi.1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\leqq 5 \qquad (\Pi.2) \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ περιορισμός Π.1 ἔχει ἀρνητικό σταθερό ὅρο (τό -8).

Ἑπομένως, γιά νά ἐφαρμόσουμε τήν μέθοδο SIMPLEX, θά πρέπει ν'ἀλλάξουμε τά πρόσημα τοῦ (Π.1). Ἀκόμη θά πρέπει νά βάλουμε χαλαρές μεταβλητές στίς ἀνισότητες γιά νά γίνουν ἰσότητες:

$$\min g = -5x_1\ .2x_2 + x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leqq 8 \;\Rightarrow\; x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leqq 5 \;\Rightarrow\; 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_5$$

Τά δεδομένα τοῦ προγράμματος εἶναι τά κάτωθι:

$$C = (-5,\ -2,\ 1,\ 0,\ 0)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ . \\ 5 \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμε: ὅτι ἡ μήτρα A ἔχει μοναδιαία μήτρα (A_4 καί A_5 στῆλες). Ἑπομένως μποροῦμε ν'ἀρχίσουμε τήν SIMPLEX:

κ	Σ.Β.	C	-5	-2	1	0	0	
κ	Σ.Β.	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Συντελεστές
0	A_4	8	1	-3	4	1	0	1/3
0	A_5	5	3	2	6	0	1	3
		δ_j	-5	-2	+	0	0	
0	A_4	19/3	0	-11/3	2	1	-1/3	
-5	A_1	5/3	1	2/3	2	0	1/3	
		δ_j	0	+	9	0	+	

Ἄρα ἡ ἄριστη λύση εἶναι:

$$A_4 \to 19/3,\ A_1 \to 5/3 \implies x_4=19/3,\ x_1=5/3,\ x_2=x_3=x_5=0, \text{ μέ:}$$

$$\min g = 0-5.\frac{5}{3}-2.0 = -\frac{25}{3}$$

<u>Παράδειγμα 2.3.</u> Νά λυθεῖ τό πρόγραμμα:

$$\max f = 2x_1$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \qquad (\Pi.1)$$
$$x_1 - 2x_2 \leqq 2 \qquad (\Pi.2)$$
$$x_1 + x_2 \leqq 5 \qquad (\Pi.3)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

Πρέπει νά μετατρέψουμε τό πρόγραμμα σέ minimum, νά πολλαπλασιάσουμε μέ τό -1 τόν (Π.1) διότι ὁ σταθερός ὅρος (τό -2) εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός, καί νά θέσουμε χαλαρές μεταβλητές στίς ἀνισότητες (Π.2),(Π.3) γιά νά γίνουν ἰσότητες.

$$\min g = 2x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \qquad (\Pi.1)$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \qquad (\Pi.2)$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5 \qquad (\Pi.3)$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0$$

Ὑπενθυμίζουμε ἐδῶ, ὅτι ἄν κάποιος σταθερός ὅρος σέ ἕναν περιορισμό εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός (ὅπως ἐδῶ στόν Π.1), θά πρέπει

ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ νά παρουσιάσουμε τόν περιορισμό αὐτόν μέ θετικό τό δεύτερο μέλλος διότι ἡ SIMPLEX δέν ἐργάζεται μέ ἀρνητικά b_i.
Ἐπομένως, τά δεδομένα τοῦ προγράμματος εἶναι τά ἑξῆς:

$$C=(-2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{matrix}\end{array} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμε, ὅτι ἡ μήτρα Α ἔχει μοναδιαία μήτρα, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό τίς στῆλες A_3, A_4 καί A_5. Ἄρα δέν εἶναι ἀνάγκη νά προσθέσουμε τεχνικές μεταβλητές καί ἐπομένως μποροῦμε ν' ἀρχίσουμε τήν μέθοδο SIMPLEX.

		C	-2	0	0	0	0	
u	Σ.Β.	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Συντελεστές
0	A_3	2	-2	1	1	0	0	-2
0	A_4	2	1	-2	0	1	0	1
0	A_5	5	1	1	0	0	1	1
		δ_j	-2	0	0	0	0	
0	A_3	6	0	-3	1	2	0	-1
-2	A_1	2	1	-2	0	1	0	-2/3
0	A_5	3	0	3	0	-1	1	3
		δ_j	0	-4	0	+	0	
0	A_3	9	0	0	1	1	1	
-2	A_1	4	1	0	0	1/3	2/3	
0	A_2	1	0	1	0	-1/3	1/3	
		δ_j	0	0	0	+	+	

Ἐπομένως ἡ ἄριστη λύση εἶναι:

$A_3 \to 9$, $A_1 \to 4$, $A_2 \to 1$ $\Rightarrow$ $x_3=9$, $x_1=4$, $x_2=1$, $x_4=x_5=0$

μέ $\max f = 2.4 = 8$

Παράδειγμα 2.4. Νά λυθεῖ τό πρόγραμμα:

$$\min C.X$$
$$A.X = B, \quad X > 0$$

μέ $C = (1,2,0)$ καί:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Τό πρόγραμμα γράφεται:

$$\min f = \begin{bmatrix} 1,2,0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

Κάνοντας πράξεις, ἔχουμε τό πρόγραμμα:

$$\min f = x_1 + 2x_2 + 0.x_3$$
$$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \qquad (\Pi.1)$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \qquad (\Pi.2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ μέτρα A στερεῖται μοναδιαίας μήτρας, δηλαδή λείπουν οἱ στῆλες $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι πρέπει νά προσθέσουμε μιά τεχνική μεταβλητή στόν περιορισμό Π.1 καί μιά ἄλλη στόν περιορισμό Π.2:

$$\min f = x_1 + 2x_2 + 0.x_3 + W.x_4 + W.x_5 \quad \text{μέ } W \to +\infty$$
$$6x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \qquad (\Pi.1)$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3 \qquad (\Pi.2)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0$$

ὁπότε τά νέα τελικά δεδομένα μας εἶναι:

$$C = (1,2,0,W,W)$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$$

Παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν μέθοδο SIMPLEX,διότι τηροῦνται οἱ προϋποθέσεις τῆς μεθόδου, πού τίς ὑπενθυμίζουμε:

(i) Οἱ σταθερόί ὅροι εἶναι μή ἀρνητικοί, δηλαδή οἱ συντεταγμένες τοῦ B δέν εἶναι ἀρνητικές.

(ii) Ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τῶν περιορισμῶν περιέχει μιά ἀντίστοιχη μοναδιαία μήτρα· ἔτσι ἡ μήτρα A μέ τίς στῆλες A_4, A_5 δίδει μοναδιαία μήτρα.

(iii) Στό πρόγραμμα ζητεῖται τό minimum τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, δηλαδή τό min f .

Ἡ μέθοδος SIMPLEX δίδει τά κάτωθι:

		C	1	2	0	W	W	
u	Σ.Β.	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Συντελεστές
W	A_4	4	6	-2	1	1	0	6
W	A_5	3	2	1	-1	0	1	$2/6 = 1/3$
		δ_j	1-8W	+	0	0	0	
1	A_1	2/3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{5}$
W	A_5	5/3	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$
			0	$\frac{7}{3}-\frac{5W}{3}$	+	+	0	
1	A_1	1	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	
2	A_2	1	0	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	
		δ_j	0	0	+	+	+	

Ἄρα ἡ ἄριστη λύση τοῦ προγράμματος εἶναι:

$A_1 \to 1,\ A_2 \to 1 \implies x_1=1,\ x_2=1$ καί $x_3=x_4=x_5=0$

μέ $\min f = 1+2.1 = 3$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Τελειώνοντας τήν μέθοδο SIMPLEX, θά πρέπει νά τονισθῆ ὅτι οἱ στῆλες πού ὑπάρχουν στίς Σ.Β., στόν πίνακα τῆς μεθόδου, θά πρέπει κάθε φορά (σέ ΚΑΘΕ ΠΙΝΑΚΑ), νά δίνουν μοναδιαία μήτρα κατά τήν σειρά πού ἔχουν γραφτεῖ.

3. Δυϊκά Γραμμικά Προγράμματα

Ἄν ἔχουμε τά προγράμματα:

$$\begin{array}{lcl} \min C.X & & \max u.B \\ A.X \geqq B & (1) & u.A \leqq C \quad (2) \\ X \geqq 0 & & u \geqq 0 \end{array}$$

τότε αὐτά ὀνομάζονται δυϊκά γραμμικά προγράμματα καί μποροῦμε ἀπό τό (1) νά πάρουμε τό (2) (καί ἀντιστρόφως), ἄν ἀκολουθήσουμε τόν μετασχηματισμό:

$$\Delta : (X, C, B) \longleftrightarrow (u, B, C)$$

Δηλαδή, ἄν θέσουμε ὅπου X τό u, ὅπου C τό B καί ὅπου B τό C (ἤ ἀντιστρόφως).

Εἶναι γνωστό, ὅτι ἄν ὑπάρχει μιά ΑΡΙΣΤΗ λύση γιά τό (1), τότε ὑπάρχει καί μιά ΑΡΙΣΤΗ λύση γιά τό δυϊκό του, τό (2) (καί ἀντιστρόφως).

Στά δυϊκά γραμμικά προγράμματα ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἀντιστοιχία:

> "Ἄν τό (1) ἔχει α περιορισμούς καί β ἀγνώστους, τότε τό (2) ἔχει α ἀγνώστους καί β περιορισμούς (καί ἀντιστρόφως)".

Ὁπότε βάσει αὐτοῦ τοῦ κανόνος καί τοῦ μετασχηματισμοῦ Δ μποροῦμε εὔκολα νά πηγαίνουμε ἀπό τό (1) στό (2) καί ἀντιστρόφως.

Παράδειγμα 3.1. Νά λυθεῖ τό δυϊκό τοῦ προγράμματος:

$$\begin{aligned} &\max f = 3x_1+5x_2+19x_3+16x_4 \\ &x_1+x_3+2x_4 \leqq 90 \\ &x_2+2x_3+x_4 \leqq 35 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό πρόγραμμα μέ μῆτρες, γράφεται:

$$\max f = X.B$$
$$X.A \leqq C$$
$$X \geqq 0$$

ὅπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ C = (90, 35) \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 19 \\ 16 \end{bmatrix}$$

'Εξ 'ἄλλου τό πρόγραμμα δέν μεταβάλλεται ἄν θέσουμε ὅπου x_i τό u_i :

$$\max f = u.B$$
$$u.A \leqq C$$
$$u \geqq 0$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἔχει 4 ἀγνώστους καί 2 περιορισμούς. Ἄρα τό δυϊκό του θά πρέπει νά ἔχει 4 περιορισμούς καί 2 ἀγνώστους. 'Ακολουθώντας τόν μετασχηματισμό Δ, παίρνουμε:

$$\min g = C.y$$
$$A.y \geqq B$$
$$y \geqq 0$$

Κάνοντας ἀντικατάσταση, ἔχουμε:

$$\min g = (90, 35). \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} , (y_1, y_2) \geqq \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 19 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad y_1, y_2 \geqq 0$$

Κάνοντας τίς πράξεις, ἔχουμε:

$$\min g = 90y_1 + 35y_2$$
$$y_1 > 3 \qquad (\Pi.1)$$
$$y_2 > 5 \qquad (\Pi.2)$$

$$y_1+2y_2 \geq 19 \qquad (\Pi.3)$$
$$2y_1+y_2 \geq 16 \qquad (\Pi.4)$$
$$y_1,y_2 \geq 0$$

(Βάζουμε ἐδῶ τά yi ἀντί γιά xi, διότι στό ἀρχικό πρόβλημα ὑπῆρχε ἤδη ὁ συμβολισμός τῶν xi, ὁπότε κινδυνεύουμε νά μπερδέψουμε τόν συμβολισμό τῶν μεταβλητῶν).
Παρατηροῦμε ὅτι τό δυϊκό ἔχει μόνο δύο μεταβλητές, ὁπότε μπορεῖ νά λυθεῖ στό ἐπίπεδο, χωρίς τή μέθοδο SIMPLEX:

Περιορισμός Π.1: $y_1 \geq 3$

Ἄρα ἡ ἀντίστοιχη εὐθεία εἶναι $y_1=3$, κάθετη στόν ἄξονα τῶν y_1 στό 3. Θέτουμε $(y_1,y_2)=(0,0)$, ὁπότε $0 \geq 3$, μή ἀληθές. Ἄρα δέν περιλαμβάνει ὁ Π.1 τό σημεῖο (0,0).

Περιορισμός Π.2: $y_2 > 5$

Ἄρα ἡ ἀντίστοιχη εὐθεία εἶναι $y_2=5$, κάθετη στόν ἄξονα τῶν y_2 στό 5. Θέτουμε $(y_1,y_2)=(0,0)$, ὁπότε $0 \geq 5$, μή ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.2. δέν περιλαμβάνει τό σημεῖο (0,0).

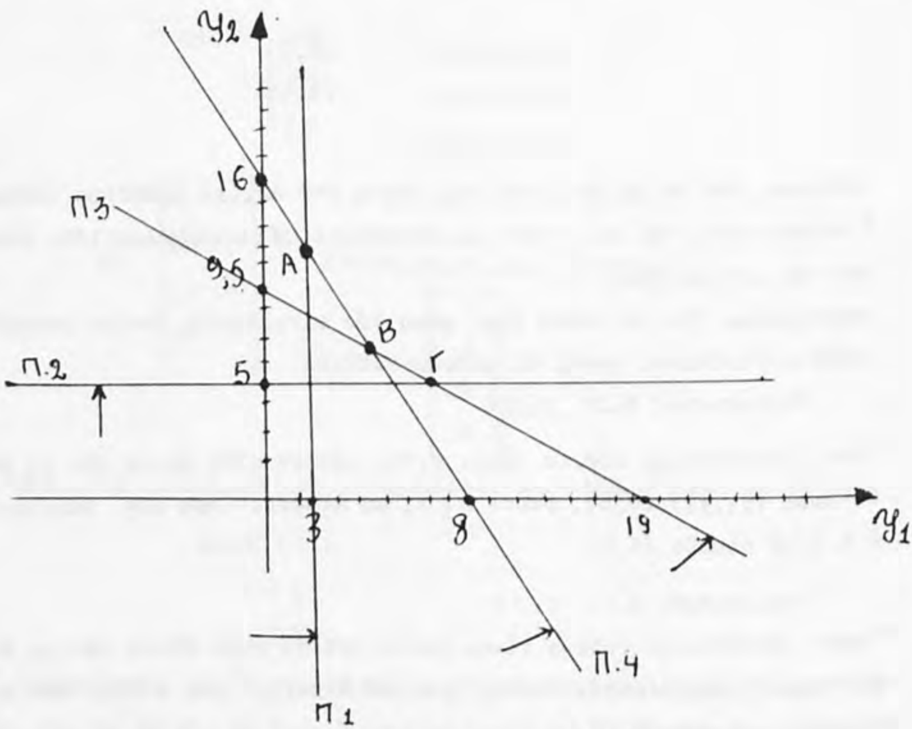
Περιορισμός Π.3: $y_1+2y_2 \geq 19$

ὁπότε ἡ ἀντίστοιχη εὐθεία εἶναι $y_1+2y_2=19$. Ἄν $y_1=0 \Rightarrow y_2=9,5$.
Ἄν $y_2=0 \Rightarrow y_1=19$. Ἄρα ἡ εὐθεία περνᾶ ἀπό τά σημεῖα (0,9.5), (19,0)

Θέτουμε $(y_1,y_2)=(0,0)$, ὁπότε $0+2.0 \geq 19$, μή ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.3 δέν περιλαμβάνει τό σημεῖο (0,0).

Περιορισμός Π.4: $2y_1+y_2 \geq 16$

Ὁπότε ἡ ἀντίστοιχη εὐθεία εἶναι $2y_1+y_2=16$. Ἄν $y_1=0 \Rightarrow y_2=16$.
Ἄν $y_2=0 \Rightarrow y_1=8$. Ἄρα ἡ εὐθεία περνᾶ ἀπό τά σημεῖα (0,16),(8,0).
Θέτουμε $(y_1,y_2)=(0,0)$, ὁπότε $2.0+0 \geq 16$, μή ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.4 δέν περιλαμβάνει τό σημεῖο (0,0).



Τό A εἶναι ἡ τομή τῶν Π.1,Π.3. Ἄρα λύνουμε τό σύστημα:

$y_1=3,\ y_1+2y_2=19 \Rightarrow y_1=3,\ y_2=8 \Rightarrow A(3,9.5).$

Τό B εἶναι ἡ τομή τῶν Π.3,Π.4. Ἄρα λύνουμε τό σύστημα:

$y_1+2y_2=19,\quad 2y_1+y_2=16 \Rightarrow y_1=\frac{19}{3},\ y_2=\frac{10}{3} \Rightarrow B(\frac{19}{3},\frac{10}{3}).$

Τό Γ εἶναι ἡ τομή τῶν Π.2,Π.3. Ἄρα λύνουμε τό σύστημα:

$y_2=5,\ y_1+2y_2=19 \Rightarrow y_1=9,\ y_2=5 \Rightarrow \Gamma(9,5)$

Ὁπότε, ἰσχύουν τά κάτωθι:

$g(A)=90.3+35.9,5=270+332,5=602,5$

$g(B)=90.\frac{19}{3}+35.\frac{10}{3}=\frac{1710+350}{3}\simeq 687$

$g(\Gamma)=90.9+35.5=810+175=985$

Ἄρα $\min g=g(A)=602,5$ μέ $y_1=3$ καί $y_2=9,5$

<u>Παράδειγμα 3.2.</u> Νά λυθῆ τό δυϊκό τοῦ προγράμματος:

$\min f=C.X$

$A.X=B,\ X\geq 0$ μέ:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{καί} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2,2,5 \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἔχουμε τρεῖς ἀγνώστους (αὐτό τό καταλαβαίνουμε ἀπό τό πλῆθος τῶν συντεταγμένων τοῦ C ἤ ἀπό τίς στῆλες τοῦ A) καί πέντε περιορισμούς (αὐτό τό καταλαβαίνουμε ἀπό τό πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ B ἤ τοῦ A). Ἄρα τό δυϊκό θά ἔχει πέντε ἀγνώστους καί τρεῖς περιορισμούς.

Ἐφαρμόζουμε τόν μετασχηματισμό Δ καί ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \max g &= B.u \\ u.A &= C, \quad u \geqq 0 \end{aligned}$$

Κάνουμε ἀντικατάσταση καί παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \max g &= u_1-u_2+0.u_3+0.u_4+0.u_5 \\ -2u_1+u_2+u_3 &= 2 \\ u_1-2u_2+u_4 &= 2 \\ u_1+u_2+u_5 &= 5 \\ u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό πρόγραμμα εἶναι γιά maximum, καί ὅτι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων περιέχει μοναδιαία μήτρα (στῆλες A_3,A_4,A_5)

Ὁπότε ζητᾶμε τό : $\min g^* = -u_1+u_2+0.u_3+0.u_4+0.u_5$

Ὁπότε ἐφαρμόζοντας τήν μέθοδο SIMPLEX, ἔχουμε*

---

* Ἐδῶ θά πρέπει νά προσέξουμε νά μήν μπερδέψουμε τόν συμβολισμό τῆς πινακοποίησης τῆς SIMPLEX μέ τά σύμβολα πού ὑπάρχουν στό πρόγραμμα πού λύνουμε. Ἔτσι, π.χ. τό u τοῦ πίνακα SIMPLEX δέν ἔχει καμιά σχέση μέ τό u τοῦ προγράμματος.

u	Σ.Β.	C / B	A_1 (-1)	A_2 (1)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (0)	Συντελεστές
0	A_3	2	-2	1	1	0	0	-2
0	A_4	2	1	-2	0	1	0	1
0	A_5	5	1	1	0	0	1	1
		δ_j	-2	+	0	0	0	
0	A_3	6	0	-3	1	2	0	-1
-1	A_1	2	1	-2	0	1	0	$-2/3$
0	A_5	3	0	3	0	-1	1	3
		δ_j	0	-1	0	+	0	
0	A_3	9	0	0	1	1	1	
-1	A_1	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
1	A_2	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
		δ_j	0	0	0	0	+	

Ἄρα ἡ ἄριστη λύση εἶναι:

$$A_3 \to 9,\ A_1 \to 4,\ A_2 \to 1 \implies u_1=4,\ u_2=1,\ u_3=9,\ u_4=u_5=0,$$

μέ $\max g = 4-1 = 3$

Ε. ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Τά πιό συνηθισμένα παίγνια, εἶναι αὐτά πού ἔχουν δύο παῖκτες, πού ὅ,τι κερδίζει (τελικά) ὁ ἕνας παίκτης εἶναι ἀκριβῶς αὐτό πού χάνει ὁ ἄλλος.
Δηλαδή ἄν ὁ Α παίκτης κερδίσει α καί ὁ Β χάσει β (ἤ ἀντιστρόφως), τότε ἰσχύει $\alpha+(-\beta)=0$. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος πού τά παίγνια αὐτά ὀνομάζονται "παίγνια μέ ἄθροισμα κερδῶν μηδέν".
Οἱ ἑλιγμοί (κινήσεις) τῶν παικτῶν, ὀνομάζονται ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ.

1. Παίγνια καθαρῆς στρατηγικῆς

Ἐδῶ ὑπάρχει μιά στρατηγική κοινή καί γιά τούς δύο παῖκτες, ὅπου ὁ ἐπικρατέστερος κερδίζει ἐκ τοῦ ἀσφαλοῦς τό λιγότερο πού θά τοῦ ἀφήσει ο ἄλλος παίκτης. Ἔτσι ἄν $A=(a_{ij})$ εἶναι ἡ μήτρα κερδῶν τοῦ Α, δηλαδή ἄν ὁ Α παίξει τήν i στρατηγική του καί ὁ Β τήν j στρατηγική του, τότε ὁ Α κερδίζει a_{ij}, τότε σ'αὐτά τά παίγνια ἰσχύει:

$$\max \min a_{ij} = V = \min \max a_{ij}$$

Ἡ κοινή τιμή V καλεῖται "τιμή τοῦ παιχνιδιοῦ".

Γιά παράδειγμα, ἔστω ἡ μήτρα κερδῶν τοῦ Α:

	σ_1	σ_2	σ_3	max min
S_1	4	8	$\boxed{3}$	3
S_2	5	8	$\boxed{3}$	3
S_3	6	2	-3	-3
min max	6	8	3	3 \ 3

Δηλαδή ἄν ὁ Α ἀκολουθήσει τήν S_1 στρατηγική του καί ὁ Β τήν σ_3, τότε τό κέρδος τοῦ Α εἶναι $a_{13}=3$, κ.τ.λ.

Παρατηροῦμε, ὅτι ἀπ'ὅλες τίς γραμμές παίρνουμε τό ἐλάχιστο καί ἀπ'ὅλα τά ἐλάχιστα τό μέγιστο. Τό ἀντίθετο κάνουμε στίς στῆλες. Ἄν οἱ δύο ἀριθμοί πού θά προκύψουν εἶναι ἴσοι, τότε ἔχουμε παίγνιο καθαρῆς στρατηγικῆς.

Στό παράδειγμά μας ὁ ἀριθμός πού προκύπτει εἶναι τό 3, ἄρα $V = 3$ καί θά πρέπει ἄν οἱ παῖκτες εἶναι σοβαροί νά συμφωνήσουν, ὁ μέν A νά παίξει τήν s_1, ὁ δέ B τήν σ_3 ἤ ὁ A τήν s_2 καί ὁ B τήν σ_3.

2. Παίγνια μικτῆς στρατηγικῆς

Στά παίγνια αὐτά δέν ὑπάρχει "σημεῖο ἰσορροπίας" δηλαδή κοινή τιμή τοῦ V πού μποροῦν νά συνενοηθοῦν οἱ παῖκτες A καί B. Γιά παράδειγμα, ἔστω ἡ μήτρα κερδῶν τοῦ A:

	y_1 σ_1	y_2 σ_2	y_3 σ_3	max min
x_1, s_1	-2	6	-4	-4
x_2, s_2	10	-6	18	-6
min max	10	6	18	6 -4

Ἐδῶ θεωροῦμε πιθανότητες ἐπιτυχίας $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τοῦ παίκτη A, ἄν ἀκολουθήσει τίς στρατηγικές του $s_1, s_2, \ldots s_n$ καί $y_1, y_2, \ldots, y_m$ τοῦ B, ἄν ἀκολουθήσει τίς $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Ἔτσι στό παράδειγμα ἔχουμε:

x_1: ἡ πιθανότητα ἐπιτυχίας τοῦ A γιά τήν στρατηγική του s_1
x_2: " " " " s_2
y_1: ἡ πιθανότητα ἐπιτυχίας τοῦ B γιά τήν στραγητική του σ_1
y_2: " " " " σ_2
y_3: " " " " σ_3

Τότε στόν A ἀντιστοιχεῖ ἕνα γραμμικό πρόγραμμα, πού οἱ περίορισμοί του παράγονται ἀπό τίς στῆλες τῆς μήτρας τοῦ παιγνίου:

$$\max V$$
$$-2x_1+10x_2 \geqq V$$
$$6x_1-6x_2 \geqq V \qquad (\text{γιά τόν A})$$
$$-4x_1+18x_2 \geqq V$$
(1) $$x_1+x_2 = 1$$
$$x_1,x_2 > 0$$

Ἐνῶ γιά τόν B, ἀντιστοιχεῖ ἕνα γραμμικό πρόγραμμα, πού οἱ περιορισμοί του παράγονται ἀπό τίς <u>γραμμές</u> τῆς μήτρας τοῦ παιγνίου:

$$\min V$$
$$-2y_1+6y_2-4y_3 \leqq V$$
$$10y_1-6y_2+18y_3 \leqq V \qquad (\text{γιά τόν B})$$
(2) $$y_1+y_2+y_3 = 1$$
$$y_1,y_2,y_3 \geqq 0$$

Οἱ περιορισμοί (1),(2) ἰσχύουν σέ κάθε τέτοιο παίγνιο καί παράγονται ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι τά x_i,y_j εἶναι πιθανότητες. Ἐπίσης παρατηροῦμε, ὅτι τό V εἶναι κοινός ἄγνωστος καί στά δύο γραμμικά προγράμματα. Ἀκόμη, ὅτι πρίν λύσουμε τά προγράμματα αὐτά, θά πρέπει ν'ἀντικαταστήσουμε ἕνα x_i (καί ἕνα y_j) συναρτήσει τῶν ἄλλων x_i (ἤ y_j) ἀπό τίς ἰσότητες (1) καί (2).

Τό πρόγραμμα γιά τόν παίκτη A γράφεται:

$$\max f = V+0.x_1+0.x_2$$

$$-2(1-x_2)+10x_2 \geqq V \Rightarrow 12x_2-V \geqq 2 \qquad (\Pi.1)$$
$$6(1-x_2)-6x_2 \geqq V \Rightarrow 12x_2+V \leqq 6 \qquad (\Pi.2)$$
$$-4(1-x_2)+18x_2 \geqq V \Rightarrow 22x -V_2 \geqq 4 \qquad (\Pi.3)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἔχουμε τίς μεταβλητές x_2 καί V, ἄρα μποροῦμε νά τό λύσουμε στό ἐπίπεδο,χωρίς SIMPLEX:

περιορισμός Π.1: $12x_2-V \geqq 2$

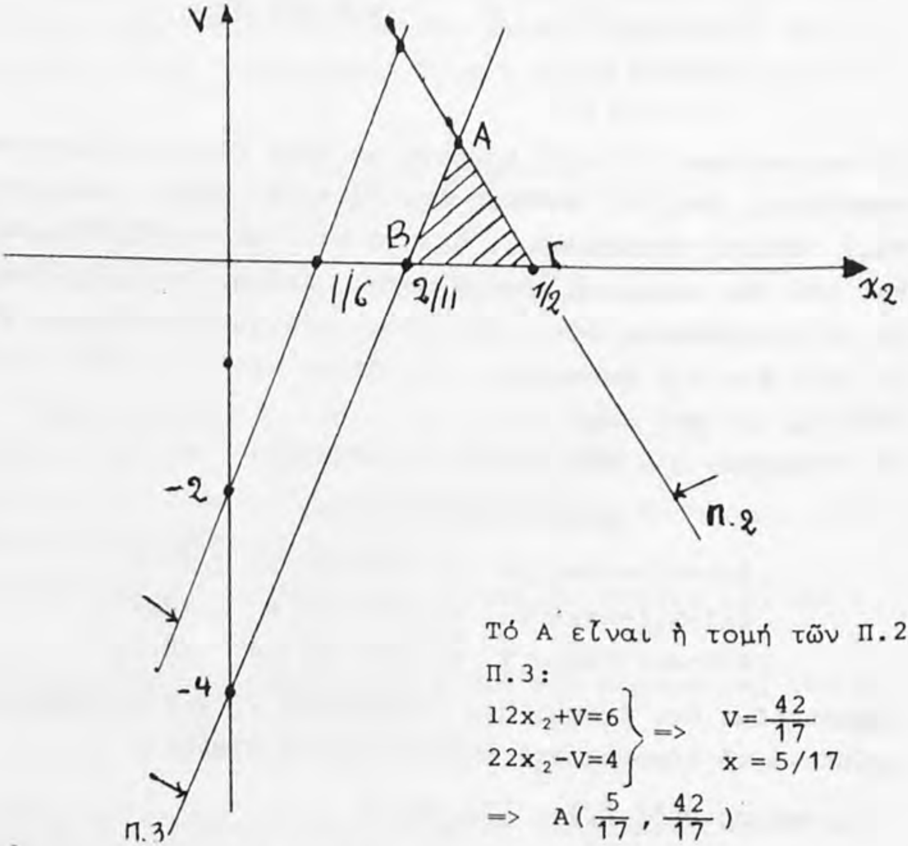
Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα $12x_2-V = 2$, δίνει, ἄν $x_2=0 \Rightarrow V = -2$ καί ἄν $V=0 \Rightarrow x_2=1/6$. Ἄρα περνάει ἀπό τά σημεῖα (0,-2) (1/6,0). Ἔστω $(x_2,V) \geqq (0,0)$, τότε $12.0-0 \geqq 2$, μή ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.1 δέν περιέχει τό σημεῖο (0,0).

περιορισμός Π.2: $12x + V \leqq 6$

Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα $12x_2+V=6$ δίνει, ἄν $x_2=0 \Rightarrow V=6$ καί ἄν $V=0 \Rightarrow x_2=1/2$. Ἄρα περνάει ἀπό τά σημεῖα $(0,6)$, $(1/2,0)$. Ἔστω $(x_2,V)=(0,0)$, τότε $12.0+0 \leqq 6$, ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.2 περιέχει τό σημεῖο $(0,0)$.

περιορισμός Π.3: $22x_2 - V \geqq 4$

Ἡ ἀντίστοιχη ἰσότητα $22x_2-V=4$ δίνει, ἄν $x_2=0 \Rightarrow V\ -4$ καί ἄν $V=0 \Rightarrow x=2/11$. Ἄρα περνάει ἀπό τά σημεῖα $(0,-4)$, $(2/11,0)$. Ἔστω $(x_2,V)=(0,0)$, τότε $22.0-0 \geqq 4$, μή ἀληθές. Ἄρα ὁ Π.3 δέν περιέχει τό σημεῖο $(0,0)$.



Τό Α εἶναι ἡ τομή τῶν Π.2, Π.3:

$$\left.\begin{array}{l} 12x_2+V=6 \\ 22x_2-V=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V=\frac{42}{17} \\ x=5/17 \end{array}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{5}{17}, \frac{42}{17}\right)$$

Τό Β ἔχει συντεταγμένες $B(\frac{2}{11},0)$ καί τό Γ ἔχει συντεταγμένες $\Gamma(\frac{1}{2},0)$.

Ἄρα ἰσχύει:

$$f(A)=\frac{42}{17},\ f(B)=f(\Gamma)=0 \quad \Rightarrow \max f = f(A)=\frac{42}{17} \quad \text{μέ}$$

$$x_2=\frac{5}{17},\ x_1=1-\frac{5}{17}=\frac{12}{17} \quad \text{καί } V=\frac{42}{17}.$$

Κάνοντας ἀντικατάσταση στό πρόγραμμα πού ἀφορᾶ τόν B παίκτη, τήν τιμή τοῦ V, βρίσκουμε ὁμοίως τίς τιμές τῶν y_1, y_2 καί y_3.

Στό παράδειγμα πού δώσαμε ἐδῶ, παρατηροῦμε ὅτι, μπορούσαμε νά τό λύσουμε στό ἐπίπεδο. Ἐντούτοις, ὅπως στή συνέχεια θά φανεῖ αὐτό δέν εἶναι πάντοτε κατορθωτό καί ἐπομένως θά πρέπει νά χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο SIMPLEX.

Παράεειγμα 2.1. Νά λυθεῖ τό παίγνιο γιά τόν παίκτη B ὅταν ἡ μήτρα κερδῶν τοῦ A εἶναι:

	σ_1	σ_2	σ_3
s_1	-2	4	-1
s_2	3	5	-3

Ἐξετάζουμε πρῶτα ἄν εἶναι παίγνιο καθαρῆς στρατηγικῆς ἤ μικτῆς:

	y_1 σ_1	y_2 σ_2	y_3 σ_3	max min
s_1	-2	4	-1	-2
s_2	3	5	-3	-3
min max	3	5	-1	-1 / -2

Ἄρα εἶναι παίγνιο μικτῆς στρατηγικῆς. Τό γραμμικό πρόγραμμα πού ἀντιστοιχεῖ στόν παίκτη B, εἶναι τό ἑξῆς:

$$\min f \quad V+0.y_1+0.y_2+0.y_3$$

$$-2y_1+4y_2-y_3 \leqq V \qquad (\Pi.1)$$

$$3y_1+5y_2-3y_3 \leqq V \qquad (\Pi.2)$$

$$y_1+y_2+y_3 = 1 \qquad (\Pi.3)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$$

'Από τόν (Π.3) προκύπτει ότι $y_1=1-y_2-y_3$. Άρα έχουμε:

$-2(1-y_2-y_3)+4y_2-y_3 \leq V \Rightarrow 6y_2+y_3-V \leq 2$ (Π.1)

$3(1-y_2-y_3)+5y_2-3y_3 \leq V \Rightarrow -2y_2+6y_3+V \geq 3$ (Π.2)

Μετατρέπουμε τούς Π.1,Π.2 σέ ισότητες βάζοντας χαλαρές μεταβλητές:

$6y_2+y_3-V+y_4 = 2$ (Π.1)

$-2y_2+6y_3+V-y_5 = 3$ (Π.2)

Βάζουμε μιά ἀκόμη τεχνική μεταβλητή στόν (Π.2) γιά νά ἔχουμε μοναδιαία μήτρα:

$$\min f \quad V+0.(y_2+y_3+y_4+y_5)+W.y_6, \quad W \to +\infty$$
$$6y_2+y_3-V+y_4 = 2$$
$$-2y_2+6y_3+V-y_5+y_6 = 3$$
$$y_2,y_3,y_4,y_5,y_6 \geq 0$$

'Οπότε τά δεδομένα μας εἶναι:

$$C = (1,0,0,0,0,W)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ V & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{matrix} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα οἱ στῆλες A_4 καί A_6 ἀποτελοῦν μοναδιαῖες μήτρες καί ἐπομένως ἡ μέθοδος SIMPLEX, δίνει:

		C	1	0	0	0	0	W	
κ	Σ.Β.	Β	A	A	A	A	A	A	Συντελεστές
0	A_4	2	-1	6	1	1	0	0	1/6
W	A_6	3	1	-2	6	0	-1	1	6
		δ_j	1-W	+	-6W	0	+	0	
0	A_4	3/2	-7/6	19/3	0	1	1/6	-1/6	
0	A_3	1/2	1/6	-1/3	1	0	-1/6	1/6	
		δ_j	+	0	0	0	0	0	

Ἄρα $A_4 \to 3/2$, $A_3 \to 1/2 \implies y_4 = \frac{3}{2}$, $y_3 = \frac{1}{2}$ καί $V = y_2 = y_5 = y_6 = 0$,

μέ $\min f = 0$. Ἑπομένως:

$$y_1 = 1 - y_2 - y_3 = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 0 \quad \text{καί} \quad y_3 = \frac{1}{2}$$

θά πρέπει λοιπόν ὁ παίκτης Β νά ἀκολουθήσει τήν σ_1 ἤ τήν σ_3 στρατηγική του μέ πιθανότητα ἐπιτυχίας 1/2 καί γιά τίς δύο.

ΣΤ. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

Στά προβλήματα τῶν μεταφορῶν ἔχουμε νά κάνουμε τήν μεταφορά ἀπό τίς ἀποθῆκες I,II,III,...κ.τ.λ., προϊόντος, στίς πόλεις A,B,Γ...κ.τ.λ., μέ τό ἐλάχιστο ὁλικό κόστος. Τά δεδομένα τοῦ προβλήματος δίνονται πάντοτε ὑπό μορφή μήτρας, π.χ.:

	A	B	Γ	
I	11	20	10	500
II	7	7	12	800
III	9	10	6	500
IV	10	5	8	400
				2200
	800	1000	400	2200

Ἔτσι οἱ ἀποθῆκες I,II,III,IV, διαθέτουν 500,800,500,400 μονάδες προϊόντος ἀντιστοίχως. Οἱ πόλεις A,B,Γ παραγγέλλουν 800,1000,400 μονάδες ἀντιστοίχως.

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν προϊόντων τῶν ἀποθηκῶν εἶναι 2200, ὅσο ἀκριβῶς μᾶς ἔχουν παραγγείλει καί οἱ τρεῖς πόλεις μαζί. Ἄν ἔβγαινε ὅτι οἱ ἀποθῆκες διαθέτουν περισσότερα ἀπό τήν ὁλική παραγγελία, τότε θά βάζαμε τήν διαφορά σάν μιά πλαστή πόλη. Ἄν πάλι οἱ πόλεις ζητοῦσαν περισσότερα ἀπό αὐτά πού ἔχουν οἱ ἀποθῆκες, τότε θά δημιουργούσαμε μιά πλαστή ἀποθήκη μέ προϊόντα ἴσα μέ τήν διαφορά. Τέλος οἱ ἀριθμοί μέσα στή μήτρα δείχνουν τό ἀνά μονάδα κόστος μεταφορᾶς, π.χ. τό κόστος ἀνά μονάδα ἀπό τήν III στήν B εἶναι 10 χρ. μονάδες.

Γιά νά βροῦμε τό ἐλάχιστο κόστος διατρέχουμε τά ἑξῆς βήματα:

ΒΗΜΑ 1. Βρίσκουμε μιά πρώτη λύση άρχίζοντας μέ τήν Ι άποθήκη καί Α πόλη:

	Α	Β	Γ	
Ι	500	-	-	500
ΙΙ	300	500	-	800
ΙΙΙ	-	500	-	500
ΙV	-	-	400	400
	800	1000	400	

Δηλαδή στό κελλί (Ι,Α) βάζουμε τήν διαφορά 800-500=500, όπότε ή Ι άποθήκη θά μεταφέρει καί τά 500 προϊόντα της στήν Α πόλη. Άρα θέτουμε στά κελλιά (Ι,Β),(Ι,Γ) τήν (-), (παῦλα) δηλαδή 0 προϊόντα.

Στή συνέχεια σκεπτόμαστε άνάλογα γιά τήν ΙΙ άποθήκη μέχρις ὅτου συμπληρωθοῦν οἱ πόλεις κατά σειρά Α,Β,Γ ή σωθοῦν τά προϊόντα της, κ.τ.λ.

ΒΗΜΑ 2. Σημειώνουμε τήν μήτρα άνά μονάδα κόστους πού άντιστοιχεῖ στή λύση πού ἔχουμε βρεῖ μέχρι τώρα, θέτοντας ὅπου ὑπάρχει άριθμός στή λύση τό άντίστοιχο κόστος καί ὅπου δέν ὑπάρχει τήν (-).

11	-	-
7	7	-
-	10	-
-	-	8

Συμπληρώνουμε τίς παῦλες βάζοντας πλαστούς άριθμούς πάνω άπό κάθε στήλη καί δίπλα άπό κάθε γραμμή, ἔτσι ὥστε ή διασταύρωσή τους (ἄθροισμα) νά μᾶς δίνει τόν άριθμό πού ὑπάρχει στό άντίστοιχο κελλί τῆς μήτρας.

	0	0	0
11	11	11	11
7	7	7	7
10	10	10	10
8	8	8	8

ΒΗΜΑ 3. Άφαιροῦμε τήν άρχική μήτρα κόστους άπό αὐτή πού ἔχουμε μέχρι τώρα βρεῖ.

$$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 7 & 7 & 7 \\ 10 & 10 & 10 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 20 & 10 \\ 7 & 7 & 12 \\ 9 & 10 & 6 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἄν δέν ὑπάρχει θετικός ἀριθμός στήν διαφορά, τότε ἡ λύση πού ἔχουμε μέχρι τώρα βρεῖ εἶναι ἡ ΑΡΙΣΤΗ. Ἀλλιῶς προχώρησε στό ἑπόμενο βῆμα.

ΒΗΜΑ 4. Διαλέγουμε τόν μεγαλύτερο θετικό ἀριθμό τῆς διαφορᾶς τῶν δύο μητρῶν κόστους καί στήν ἀντίστοιχη θέση στή μήτρα τῆς λύσεως μεταφέρουμε κυκλικά θ μονάδες προϊόντος, βρίσκοντας ἔτσι τήν νέα λύση. Ἔπειτα πήγαινε στό βῆμα 2.

Στό παράδειγμά μας ἔχουμε:

	A	B	Γ	
I	500	-	-	500
II	300	500	-	800
III	-	$500-\theta$	$\to +\theta$	500
IV	-	$+\theta$	$\leftarrow 400-\theta$	400
	800	1000	400	

(προσέχουμε στά κενά τῆς κυκλικῆς μετακίνησεως νά ὑπάρχει τό +θ)

Ἔχουμε:

$500-\theta \geq 0$, $400-\theta \geq 0$

Ἄρα μπορεῖ νά εἶναι

$\theta=400$

Ἐπομένως ἡ νέα λύση θά εἶναι:

	A	B	Γ	
I	500	-	-	500
II	300	500	-	800
III	-	100	400	500
IV	-	400	-	400
	800	1000		

ΒΗΜΑ 2:

$$\begin{bmatrix} 11 & - & - \\ 7 & 7 & - \\ - & 10 & 6 \\ - & 5 & - \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 10 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 3:

$$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 6 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 20 & 10 \\ 7 & 7 & 12 \\ 9 & 10 & 6 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 4:

	A	B	Γ	
I	500			500
II	$300-\theta$	$500+\theta$	400	800
III	$+\theta$	$100-\theta$		500
IV		400		400
	800	1000	400	

Θά πρέπει:

$300-\theta \geq 0$, $100-\theta \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta=100$

Ἐπομένως ἡ νέα λύση θά εἶναι:

	A	B	Γ	
I	500	-	-	500
II	200	600	-	800
III	100	-	400	500
IV	-	400	-	400
	800	1000	400	

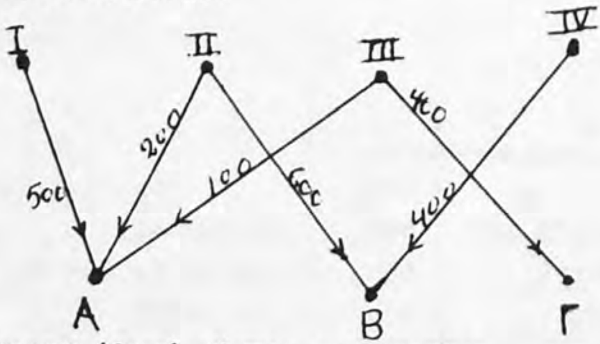
<u>ΒΗΜΑ 2:</u>

$$\begin{bmatrix} 11 & - & - \\ 7 & 7 & - \\ 9 & - & 6 \\ - & 5 & - \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & -3 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 2 \end{array}$$

<u>ΒΗΜΑ 3:</u>

$$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 8 \\ 7 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 20 & 10 \\ 7 & 7 & 12 \\ 9 & 10 & 6 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει κανένα θετικό στοιχεῖο. Ἄρα ἡ ἄριστη λύση εἶναι:



Μέ ἐλάχιστο ὁλικό κόστος μεταφορᾶς:

$$500.11 + 200.7 + 600.7 + 100.9 + 400.6 + 400.5 = 16400$$

χρηματικές μονάδες.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Νά λυθεῖ τό πρόβλημα τῶν μεταφορῶν μέ πίνακα κόστους:

	A	B	Γ	Δ	
I	1	5	2	3	500
II	6	4	4	2	600
III	4	5	8	1	700
					~~1800~~
	800	200	400	300	1700

(1800-1700=100)

'Αμέσως παρατηροῦμε ὅτι αὐτά πού ἔχουμε στίς ἀποθῆκες εἶναι 100 περισσότερα ἀπό αὐτά πού μᾶς ζητοῦν οἱ πόλεις. 'Επομένως δημιουργοῦμε μιά πλαστή πόλη πού νά χρειάζεται 100 προϊόντα:

	A	B	Γ	Δ	E	
I	1	5	2	3	0	500
II	6	4	4	2	0	600
III	4	5	8	1	0	700
						1800
	800	200	400	300	100	1800

'Οπότε ὁ ἀλγόριθμος τοῦ προβλήματος τῶν μεταφορῶν μᾶς δίνει:

ΒΗΜΑ 1:

	A	B	Γ	Δ	E	
I	500	-	-	-	-	500
II	300	200	100	-	-	600
III	-	-	300	300	100	700
	800	200	400	300	100	

ΒΗΜΑ 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - \\ 6 & 4 & 4 & - & - \\ - & - & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & 0 & -2 & -2 & -9 & -10 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 & -8 & -9 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & -3 & -4 \\ 10 & 10 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -8 & -9 \\ 6 & 4 & 4 & -3 & -4 \\ 10 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 4:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	
I	500	-	-	-	-	500
	-θ		+θ			
II	300	200	100	-	-	600
III	+θ	-	300-θ	300	100	700
	800	200	400	300	100	

$300-\theta \geq 0$, $300-\theta \geq 0$

$\Rightarrow \theta=300$

'Επομένως ή νέα λύση θά είναι:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	
I	500	-	-	-	-	500
II	-	200	400	-	-	600
III	300	-	-	300	100	700
	800	200	400	300	100	

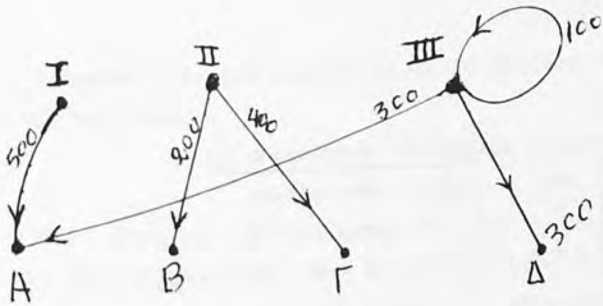
ΒΗΜΑ 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - \\ - & 4 & 4 & - & - \\ 4 & - & - & 8 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & -5 & -3 \\ -6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δέν υπάρχει κανένα θετικό στοιχείο, άρα έχουμε βρεῖ τήν ἄριστη λύση:



(Δηλαδή θά μείνουν αποθηκευμένα στήν III αποθήκη, 100 προϊόντα).

μέ ελάχιστο κόστος:

1.500 + 4.200 + 4.400 + 4.300 + 1.300 = 4400 χρ. μονάδες.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Νά λυθεῖ τό πρόβλημα τῶν μεταφορῶν μέ πίνακα κόστους:

	Α	Β	Γ	Δ	
I	7	8	9	10	40
II	5	6	7	8	60
III	4	5	6	7	80
					180
	30	40	50	60	180

(180-180=0)

Μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τόν ἀλγόριθμο τοῦ προβλήματος τῶν μεταφορῶν διότι, ὅσα ἔχουν οἱ ἀποθῆκες τόσα ἀκριβῶς ζητοῦν καί οἱ πόλεις.

<u>ΒΗΜΑ 1:</u>

	Α	Β	Γ	Δ	
I	30	10	-	-	40
II	-	30	30	-	60
III	-	-	20	60	80
	30	40	50	60	

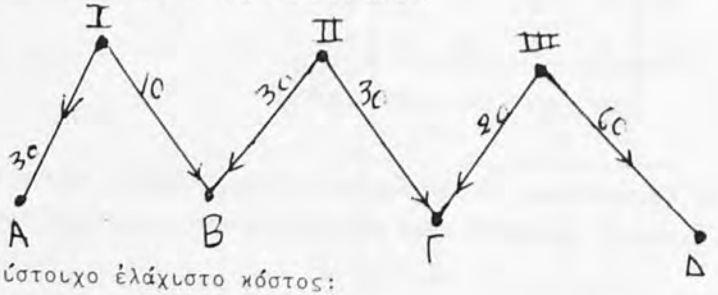
BHMA 2:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & - & - \\ - & 6 & 7 & - \\ - & - & 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

BHMA 3:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἑπομένως ἡ ἄριστη λύση εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μεθόδου, διότι εἶναι ὅλα μηδέν. Δηλαδή ὁποιαδήποτε λύση τοῦ προβλήματος εἶναι καί ἄριστη λύση. Ἔχουμε δηλαδή μιά ἀοριστία ἀρίστων λύσεων. Πάντως μιά ἀπό αὐτές θά εἶναι ἡ ἀρχική μας λύση:



Μέ ἀντίστοιχο ἐλάχιστο κόστος:

$30.7 + 10.8 + 30.6 + 30.7 + 20.6 + 60.7 = 210 + 80 + 180 + 210 + 120 +$
$+ 420 = 1220$ χρ. μονάδες.

Θεωρητική ἄσκηση

Νά γραφῆ τό ἀντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα τοῦ προβλήματος τῶν μεταφορῶν μέ πίνακα κόστους:

	A	B	Γ	Δ	
I	1	2	4	4	60
II	4	5	1	2	80
III	1	3	5	6	100
					240
	30	40	50	60	180

(240−180 = 60)

'Επομένως ὑπάρχουν στίς ἀποθῆκες 60 προϊόντα περισσότερα. 'Ορίζουμε τίς μεταβλητές:

x_{ij} : προϊόντα πού πρέπει νά μεταφερθοῦν ἀπό τήν i ἀποθήκη στήν j πόλη.

'Οπότε ὑπάρχουν οἱ μεταβλητές:

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$ ἀπό τήν I στίς A,B,Γ,Δ καί ἡ x_{15} τά προϊόντα πού πρέπει νά παραμείνουν στήν I.

'Ομοίως ὁρίζουμε καί τίς μεταβλητές γιά τήν II ἀποθήκη:

$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}$.

Καί τίς μεταβλητές γιά τήν III ἀποθήκη:

$x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}$.

Ζητεῖται τό ἐλάχιστο ὁλικό κόστος μεταφορᾶς· ἄρα:

$$\begin{aligned} \min f \quad & 1.x_{11}+2.x_{12}+4.x_{13}+4.x_{14}+0.x_{15} \\ & +4.x_{21}+5.x_{22}+1.x_{23}+2.x_{24}+0.x_{25} \\ & +1.x_{31}+3.x_{32}+5.x_{33}+6.x_{34}+0.x_{35} \end{aligned}$$

'Εξ ἄλλου οἱ πόλεις πρέπει νά πάρουν 30.40.50 καί 60 ἀντιστοίχως προϊόντα. Ἄρα ἔχουμε τούς περιορισμούς:

A: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$

B: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$

Γ: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$

Δ: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60$

'Ακόμη πρέπει νά φύγουν τά προϊόντα ἀπό τίς ἀποθῆκες:

I : $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 60$

II : $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 80$

III: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 100$

Τέλος θά πρέπει κάθε $x_{ij} \geq 0$, διότι τό πλῆθος τῶν προϊόντων εἶναι μή ἀρνητική ποσότητα.

Π α ρ ά τ ή ρ η σ η:

Δίνεται ἡ συμβουλή νά γίνει τό ἀντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα τῶν μεταφορῶν μέ n πόλεις καί m ἀποθῆκες, ὅταν δίνεται ἡ μήτρα τοῦ κόστους $C=(c_{ij})$ καί τά διανύσματα τῶν πόλεων καί ἀποθηκῶν $B=(b_j)$, $A=(a_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ καί $j=1,2,\ldots,m$.

Ζ. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Στόν μή γραμμικό προγραμματισμό έχουμε κάποια συνάρτηση μή γραμμική (δηλαδή 2ου καί πάνω βαθμοῦ, κ.τ.λ.) καί ζητᾶμε τά τοπικά άκρότατά της κάτω άπό περιορισμούς:

$$\mathrm{Max}(\text{ή } \mathrm{Min})\ f(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \text{μέ}$$

$$g_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = b$$

$$g_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = b$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_m(x_1,x_2,\dots,x_n) = b_m$$

ὅπου $n > m$ καί ὅλες οἱ συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς καί έχουν μερικές παραγώγους γιά κάθε x_i, $i=1,2,\dots,n$. Π.χ.:

$$\mathrm{Max}\ f(x_1,x_2) = -2x_1^2+6x_1+2x_1x_2,\ \text{μέ:}$$

$$x_1+x_2 = 2$$

Ἐδῶ έχουμε άγνώστους $n=2$ καί περιορισμούς $m=1$. Σχηματίζουμε τήν συνάρτηση:

$$F = f + \lambda_1.(g_1-b_1)+\lambda_2.(g_2-b_2)+\dots+\lambda_m.(g_m-b_m)$$

Προφανῶς ἰσχύει Max(ή Min)F = Max(ή Min)f, διότι έξ ὑποθέσεως ἰσχύει $(g_j-b_j)=0$, $\forall_j=1,2,\dots,m$. Τά λ_j ὀνομάζονται πολλαπλασιαστές τοῦ Lagrange. Ἔτσι στό παράδειγμά μας έχουμε:

$$\mathrm{Max}F = -2x_1^2 + 6x_1 + 2x_1x_2 + \lambda(x_1+x_2-2)$$

Ὁρίζουμε στή συνέχεια τή <u>μήτρα τοῦ Hesse:</u>

$$
H = \begin{bmatrix}
\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_1^2} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_1 \vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_1 \vartheta x_n} & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta g_2}{\vartheta x_1} & \cdots & \frac{\vartheta g_m}{\vartheta x_1} \\
\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_2 \vartheta x_1} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_2^2} & \cdots & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_2 \vartheta x_n} & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_2} & \frac{\vartheta g_2}{\vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta g_m}{\vartheta x_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_n \vartheta x_1} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_n \vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_n^2} & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_n} & \frac{\vartheta g_2}{\vartheta x_n} & \cdots & \frac{\vartheta g_m}{\vartheta x_n} \\
\frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta g_1}{\vartheta x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\vartheta g_m}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta g_m}{\vartheta x_2} & \cdots & \frac{\vartheta g_m}{\vartheta x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

Έτσι στό παράδειγμά μας ἡ μήτρα τοῦ Hesse θά εἶναι:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\vartheta F^2}{\vartheta x_1^2} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_1 \vartheta x_2} & \frac{\vartheta g}{\vartheta x_1} \\
\frac{\vartheta F^2}{\vartheta x_2 \vartheta x_1} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_2^2} & \frac{\vartheta g}{\vartheta x_2} \\
\frac{\vartheta g}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta g}{\vartheta x_2} & 0
\end{bmatrix} = H
$$

Στή συνέχεια, γιά νά βροῦμε τά τοπικά άκρότατα (Min ἤ Max) άκολουθοῦμε κατά βῆμα τόν ἑξῆς άλγόριθμο:

<u>ΒΗΜΑ 1</u>: Λύνουμε τό σύστημα:

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i} = 0, \; i=1,2,\ldots,n$$

$$g_j - b_j = 0 \; j=1,2,\ldots,m$$

Κάθε λύση τοῦ συστήματος εἶναι <u>πιθανόν</u> νά εἶναι άκρότατο.

Ἀν δέν βροῦμε καμμιά λύση, τότε δέν ἔχουμε κανένα ἀκρότατο, ΤΕΛΟΣ.
Ἔστω μιά λύση τοῦ συστήματος $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0) = x^*$

<u>ΒΗΜΑ 2</u>: Ἀν n ἄρτιος (n: τό πλῆθος τῶν ἀγνώστων x_j) καί ἰσχύει: $(-1)^{\varphi}.\Delta_{\varphi}(x^*) < 0, \quad \forall \quad \varphi = 1,2,\ldots,n-m$

τότε τό x^* εἶναι τοπικό μέγιστο, καί πήγαινε στό βῆμα 1 γιά νά ἐξετάσεις τί συμβαίνει γιά τίς ὑπόλοιπες λύσεις τοῦ συστήματος. (τό Δ_1 εἶναι ἡ ἴδια ἡ H, τό Δ_2 εἶναι ἡ μήτρα ἐκείνη πού μένει ἀπό τήν Δ_3 ἄν βγάλουμε τήν πρώτη γραμμή καί τήν πρώτη στήλη, τό Δ_4 εἶναι ἡ μήτρα ἐκείνη πού μένει ἀπό τήν Δ_2 ἄν βγάλουμε τήν πρώτη γραμμή καί τήν πρώτη στήλη, κ.τ.λ.).

<u>ΒΗΜΑ 3</u>: Ἀν n περιττός καί ἰσχύει:

$$(-1)^{\varphi}.\Delta_{\varphi}(x^*) > 0, \quad \forall \quad \varphi=1,2,\ldots,n-m$$

τότε τό x^* εἶναι τοπικό μέγιστο καί πήγαινε στό βῆμα 1 γιά νά ἐξετάσης τί συμβαίνει γιά τίς ὑπόλοιπες λύσεις τοῦ συστήματος.

<u>ΒΗΜΑ 4</u>: Ἀν m ἄρτιος (m: τό πλῆθος τῶν περιορισμῶν) καί ἰσχύει:

$$\Delta_{\varphi}(x^*) > 0, \quad \forall \quad \varphi=1,2,\ldots,n-m$$

τότε τό x^* εἶναι τοπικό ἐλάχιστο, καί πήγαινε στό βῆμα 1 γιά νά ἐξετάσεις τί συμβαίνει γιά τίς ὑπόλοιπες λύσεις τοῦ συστήματος.

<u>ΒΗΜΑ 5</u>: Ἀν m περιττός καί ἰσχύει:

$$\Delta_{\varphi}(x^*) < 0, \quad \forall \quad \varphi=1,2,\ldots,n-m$$

τότε τό x^* εἶναι τοπικό ἐλάχιστο καί πήγαινε στό βῆμα 1 γιά νά ἐξετάσης τί συμβαίνει μέ τίς ὑπόλοιπες λύσεις τοῦ συστήματος.

<u>ΒΗΜΑ 6</u>: Πήγαινε στό βῆμα 1.

Έτσι στό παράδειγμά μας έχουμε:

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x_1} = -4x_1+6+2x_2+\lambda \ , \quad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_1^2} = -4+2 = -2$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x_2} = 2x_1+\lambda \ , \quad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_2^2} = 2$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x_1 \vartheta x_2} = \frac{\vartheta F}{\vartheta x_2 \vartheta x_1} = 2 \ , \quad \frac{\vartheta g}{\vartheta x_1} = 1 \quad \frac{\vartheta g}{\vartheta x_2} = 1$$

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad n=2, \ m=1$$

Εφαρμόζουμε τόν άλγόριθμο:

<u>ΒΗΜΑ 1:</u> Λύνουμε τό σύστημα:

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x_1} = -4x_1+6+2x_2+\lambda = 0$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x_2} = 2x_1+\lambda = 0$$

$$g - b = x_1+x_2-2 = 0$$

Μιά λύση τοῦ συστήματος εἶναι:

$$x^* = (x_1^0, x_2^0, \lambda^0) = \left(\frac{9}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{7}{2}\right)$$

<u>ΒΗΜΑ 2:</u> Ὁ n=2 εἶναι ἄρτιος. Ὑπολογίζουμε τήν μήτρα Δ_φ, $\varphi=1$ (διότι $n-m = 2-1 = 1$):

$$\Delta_1 = H = -2(2.0-1.1)-2(2.0-1.1)+1.(2.1-1.2) =$$
$$= 2.(-1)-2.(-1)+1.0 = 4$$

Ἄρα ἰσχύει $(-1)^1.D_1 = D_1 = -4 < 0$

Ἐπομένως τό x* εἶναι τοπικό μέγιστο καί πηγαίνουμε στό βῆμα 1.

ΒΗΜΑ 1: ΤΕΛΟΣ, διότι δέν ὑπάρχει ἄλλη λύση τοῦ συστήματος γιά ἐξέταση.

᾽Επομένως ἰσχύει:

$$\max f = f\left(\frac{9}{4}, \frac{-1}{4}\right) = -2.\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 6.\left(\frac{9}{4}\right) + 2.\frac{9}{4}.\left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 4,5$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Πρέπει ὁπωσδήποτε νά ἐξετάσουμε ὅλες τίς λύσεις τοῦ συστήματος, διότι εἶναι δυνατόν κάποια λύση νά δίνει <u>καλύτερο</u> ἀκρότατο ἀπό ὅτι ἔδωσε κάποια ἄλλη.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Νά εὑρεθοῦν οἱ ποσότητες q_1, q_2, q_3, μέ τίς ὁποῖες ἡ συνάρτηση ὠφελιμότητος:

$$U = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3$$

γίνεται μέγιστη, ὅταν $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 6$ (τιμές ἀγορᾶς) καί $I = 40$ (διαθέσιμες χρηματικές μονάδες γιά τήν ἀγορά τῶν ποσοτήτων q_1, q_2, q_3).

῎Αρα: $2q_1 + 4q_2 + 6q_3 = 40$

Κατασκευάζουμε τήν συνάρτηση F:

$$F = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3 + \lambda.(2q_1 + 4q_2 + 6q_3 - 40)$$

Βρίσκουμε τίς μερικές παραγώγους τῆς F πού θά χρειασθοῦν:

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta q_1} = q_2 + q_3 + 2\lambda \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_1^2} = 0 = \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_2^2} = \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_3^2}$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta q_2} = q_1 + q_3 + 4\lambda \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_1 \vartheta q_2} = 1 = \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_1 \vartheta q_3}$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta q_3} = q_2 + q_1 + 6\lambda \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_2 \vartheta q_3} = 1 = \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_2 \vartheta q_3}$$

$$\frac{\vartheta\vartheta^2 F}{\vartheta q_3 \vartheta q_1} = 1 = \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_3 \vartheta q_2} \quad ,$$

῾Ο μοναδικός περιορισμός g εἶναι:

$$g = 2q_1 + 4q_2 + 6q_3 - 40$$

῾Οπότε οἱ μερικές του παράγωγοι εἶναι:

$$\frac{\vartheta g}{\vartheta q_1} = 2, \quad \frac{\vartheta g}{\vartheta q_2} = 4, \quad \frac{\vartheta g}{\vartheta q_3} = 6$$

Κατασκευάζουμε τόν πίνακα τοῦ Hesse:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Γιά νά βροῦμε τοπικό μέγιστο τῆς U (ἤ τῆς F), ἀκολουθοῦμε κατά σειρά τά βήματα:

<u>ΒΗΜΑ 1</u>: Λύνουμε τό σύστημα:

$$q_2 + q_3 + 2\lambda = 0 \qquad (1)$$
$$q_1 + q_3 + 4\lambda = 0 \qquad (2)$$
$$q_1 + q_2 + 6\lambda = 0 \qquad (3)$$
$$2q_1 + 4q_2 + 6q_3 = 40 \qquad (4)$$

'Αφαιροῦμε τίς (1)-(2) καί παίρνουμε:

$$q_2 - q_1 - 2\lambda = 0 \qquad (5)$$

'Αφαιροῦμε τίς (5)-(3) καί παίρνουμε:

$$2q_2 + 4\lambda = 0 \implies q_2 = -2\lambda$$

'Οπότε ἀπό τήν (3) παίρνουμε:

$$q_1 = -6\lambda - q_2 = -6\lambda + 2\lambda = -4\lambda$$

'Αντικαθιστοῦμε τό q_2 στήν (1) καί ἔχουμε:

$$q_3 = -2\lambda - q_2 = -2\lambda + 2\lambda = 0$$

'Αντικαθιστοῦμε τά q_1, q_2, q_3 στήν (4) καί ἔχουμε:

$$-8\lambda - 8\lambda + 6.0 = 40 \implies \lambda = -2,5$$

'Επομένως μιά λύση τοῦ συστήματος (καί ἡ μοναδική) εἶναι:

$$x^* = (q_1^0, q_2^0, q_3^0, \lambda^0) = (10,5,0,-2,5)$$

<u>ΒΗΜΑ 2</u>. Ἔχουμε τρεῖς ἄγνωστους, ἄρα n=3 καί ἕναν περιορισμό, ἄρα m=1. 'Ο n εἶναι περιττός, ἐπομένως πηγαίνουμε στό ἑπόμενο βῆμα.

<u>ΒΗΜΑ 3.</u> 'Ο n εἶναι περιττός. 'Εξετάζουμε τίς μῆτρες:

$H = D_1, D_2$, (διότι n-m=2)

$$D_1=\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&0&1&4\\1&1&0&6\\2&4&6&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1&1&4\\1&0&6\\2&6&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&4\\1&1&6\\2&4&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\2&4&6\end{bmatrix}=$$

$$=-\left\{1.\begin{bmatrix}0&6\\6&0\end{bmatrix}-1.\begin{bmatrix}1&6\\2&0\end{bmatrix}+4.\begin{bmatrix}1&0\\2&6\end{bmatrix}\right\}+\begin{bmatrix}1&6\\4&0\end{bmatrix}-0+4.\begin{bmatrix}1&1\\2&4\end{bmatrix}-$$

$$-2\left\{1.\begin{bmatrix}1&0\\4&6\end{bmatrix}-0+1.\begin{bmatrix}1&1\\2&4\end{bmatrix}\right\}=-36-12-24$$

$$=-96+8-16=-104$$

$$D_2=\begin{bmatrix}0&1&4\\1&0&6\\4&6&0\end{bmatrix}=0-1.\begin{bmatrix}1&6\\4&0\end{bmatrix}+4.\begin{bmatrix}1&0\\4&6\end{bmatrix}=24+24=48$$

Ἐξετάζουμε ἄν ἰσχύει:

$$(-1)^1.D_1>0,\quad -1.(-104)=104>0$$
$$(-1)^2.D_2>0,\quad +1.(48)=48>0$$

Ἐπομένως τό σημεῖο x* δίνει μέγιστο:

$$\max U=10.5+5.0+10.0=50$$

καί θά πρέπει νά ἀγοράσουμε, ἀπό τό πρῶτο προϊόν 10 μονάδες, ἀπό τό δεύτερο προϊόν 5 μονάδες καί ἀπό τό τρίτο προϊόν 0 μονάδες.

Ἐξ ἄλλου ἡ λύση x* ἦταν καί ἡ μοναδική λύση τοῦ συστήματος, ἄρα ἡ μέθοδος καί ἡ λύση τελειώνει σ' αὐτό τό σημεῖο.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Νά μεγιστοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση ὠφελιμότητας:

$$U=q_1q_2q_3$$

μέ $\rho_1=1$, $\rho_2=2$, $\rho_3=3$ καί $I=20$.

Ἐπομένως ἔχουμε νά λύσουμε τό κάτωθι μή γραμμικό πρόγραμμα:

$$\max U=q_1q_2q_3\ ,\ \text{μέ:}$$

$$q = q_1+2q_2+3q_3-20$$

Κατασκευάζουμε τήν συνάρτηση F:

$$F = q_1q_2q_3+\lambda.(q_1+2q_2+3q_3-20)$$

Βρίσκουμε τίς μερικές παραγώγους πού θά μᾶς χρειασθοῦν:

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta q_1} = q_2q_3+\lambda \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_1^2} = 0$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta q_2} = q_1q_3+2\lambda \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_2^2} = 0$$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta q_3} = q_1q_2+3\lambda \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_3^2} = 0$$

$$\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_1\vartheta q_2} = q_3 \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_2\vartheta q_1} = q_3$$

$$\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_1\vartheta q_3} = q_2 \quad , \qquad \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_2\vartheta q_3} = q_1$$

$$\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_3\vartheta q_1} = q_2 \quad , \qquad \frac{\vartheta g}{\vartheta q_1} = 1$$

$$\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta q_3\vartheta q_2} = q_1 \quad , \qquad \frac{\vartheta g}{\vartheta q_2} = 2 \ , \ \frac{\vartheta}{\vartheta q_3} = 3$$

Κατασκευάζουμε τήν μήτρα τοῦ Hesse:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & q_2 & 1 \\ q_3 & 0 & q_1 & 2 \\ q_2 & q_1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Γιά νά βροῦμε τό μέγιστο τῆς U (ἤ τῆς F), ἀκολουθοῦμε κατά σειρά τά βήματα:

<u>ΒΗΜΑ 1</u>: Λύνουμε τό σύστημα:

$$q_2q_3+\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$q_1q_3+2\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$q_1q_2+3\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$q_1+2q_2+3q_3-20 = 0 \qquad (4)$$

Λύνουμε τήν (1) ὡς πρός λ:

$$\lambda = -q_2 q_3$$

Ἀντικαθιστοῦμε τό λ στήν (2):

$$q_1 q_3 = 2q_2 q_3 \Rightarrow q_1 = 2q_2 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τό λ καί τό q_1 στήν (3):

$$2q_2^2 + 3.(-q_2.q_3) = 0$$

$$2q_2^2 = 3q_2 q_3 \Rightarrow q_3 = \frac{2}{3}.q_2 \quad (6)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τά q_1, q_3 στήν (4):

$$2q_2 + 2q_2 + 3.\frac{2}{3}.q_2 = 20$$

$$6q_2 = 20 \Rightarrow q_2 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Ἀντικαθιστοῦμε στίς (5),(6) καί παίρνουμε:

$$q_1 = \frac{20}{3}, \quad q_3 = \frac{2}{3}.\frac{10}{3} = \frac{20}{9}$$

Ὁπότε ἀπό τήν (1) παίρνουμε τήν τιμή τοῦ λ:

$$\lambda = -q_2 q_3 = -\frac{10}{3}.\frac{20}{9} = -\frac{200}{27}$$

Ἑπομένως ἕνα πιθανό ἀκρότατο εἶναι τό σημεῖο:

$$x^* = (q_1^0, q_2^0, q_3^0, \lambda^0) = \left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, -\frac{200}{27}\right)$$

<u>ΒΗΜΑ 2</u>. Ἔχουμε τρεῖς ἀγνώστους, ἄρα n=3 (περιττός), καί ἕναν περιορισμό, m=1. Ἑπομένως πηγαίνουμε στό ἑπόμενο βῆμα.

<u>ΒΗΜΑ 3</u>. Ὁ n εἶναι περιττός. Ἐξετάζουμε τίς μῆτρες:

$$H = D_1, D_2, \ (\text{διότι } n-m = 2)$$

Ὁπωσδήποτε πρίν ὑπολογίσουμε τίς D_1, D_2 ἀντικαθιστοῦμε σ' αὐτές τίς ὑπάρχουσες τιμές τῶν q_1, q_2, q_3:

$$D_1(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{20}{9} & \frac{10}{3} & 1 \\ \frac{20}{9} & 0 & \frac{20}{3} & 2 \\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3} & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 0 - \frac{20}{9}\begin{bmatrix} \frac{20}{9} & \frac{20}{3} & 2 \\ \frac{10}{3} & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{10}{3}\begin{bmatrix}\frac{20}{9} & 0 & 2\\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3} & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix} -1.\begin{bmatrix}\frac{20}{9} & 0 & \frac{20}{3}\\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3} & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} = -\frac{20}{9}$$

$$= \frac{20}{9}.\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix} - \frac{20}{3}.\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix} +2.\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{10}{3}.\ \frac{20}{9}.\begin{bmatrix}\frac{20}{3} & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix} -0+2.\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & \frac{20}{3}\\ 1 & 2\end{bmatrix} -1.\ \frac{20}{9}.\begin{bmatrix}\frac{20}{3} & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} -$$

$$-0+\frac{20}{3}.\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & \frac{20}{3}\\ 1 & 2\end{bmatrix} = -\frac{20}{9}.(-20+20+20)+\frac{10}{3}.(-\frac{40}{3}+0)-1.(\frac{400}{9}+0)=$$

$$= -\frac{400}{9} - \frac{400}{9} - \frac{400}{9} = -133\frac{3}{9}.$$

$$D_2(x^*) = \begin{bmatrix}0 & \frac{20}{3} & 2\\ \frac{20}{3} & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix} = 0-\frac{20}{3}.\begin{bmatrix}\frac{20}{3} & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix} + 2.\begin{bmatrix}\frac{20}{3} & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} =$$

$$= 40 + 40 = 80.$$

Ἐξετάζουμε ἄν ἰσχύει:

$$(-1)^1.D_1 > 0, \qquad (-1).(-133\frac{3}{9}) = 133\frac{3}{9} > 0$$

$$(-1)^2.D_2 > 0, \qquad (+1).(80) = 80 > 0$$

Ἄρα τό σημεῖο x* δίνει μέγιστο καί ἔχουμε ἑπομένως:

$$\max U = \frac{20}{3}.\frac{10}{3}.\frac{20}{9} = \frac{4000}{81} = 49\frac{31}{81}$$

Ἑπομένως πρέπει ν' ἀγοράσουμε ἀπό τό πρῶτο προϊόν $\frac{20}{3}$ μονάδες, ἀπό τό δεύτερο $\frac{10}{3}$ μονάδες καί ἀπό τό τρίτο $\frac{20}{9}$ μονάδες, γιά νά ἔχουμε τήν μέγιστη ὠφελιμότητα.

Ὁπωσδήποτε ἡ x* εἶναι ἡ μόνη συμβιβαστή λύση τοῦ συστήματος πού λύσαμε, καί ἑπομένως τό x* εἶναι τό μόνο ἀκρότατο τῆς U.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Πολλές φορές μᾶς δίνεται μιά συνάρτηση $f(x_1,\ldots,x_n)$ καί μᾶς ζητοῦν τά ἀκρότατα αὐτῆς ἀορίστως. Στήν περίπτωση αὐτή πρέπει νά ἐξετάσουμε ὅλες τίς λύσεις πού θά βροῦμε ἀπό τό σύστημα καί γιά τοπικά minimum καί γιά τοπικά maximum καί νά διαλέξουμε στό τέλος τό πιό μικρό τοπικό minimum καί τό πιό μεγάλο τοπικό maximum.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ὅταν μᾶς δίνουν στούς περιορισμούς ἑνός μή γραμμικοῦ προγράμματος $x_i \geq 0$, τότε ἐπιβάλλεται νά θέσουμε χαλαρές μεταβλητές, οἱ ὁποῖες πρέπει νά εἶναι μή ἀρνητικές:

$$x_i - u_i^2 = 0$$

Ὁπωσδήποτε τίς μεταβλητές αὐτές πρέπει νά τίς λάβουμε στή συνέχεια ὑπ'ὄψιν ὅπως ἀκριβῶς καί τίς κανονικές μεταβλητές.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ὅταν μᾶς δίνουν περιρισμό ἀνισότητα, τότε ἐπιβάλλεται νά τήν μετατρέψουμε σέ ἰσότητα, βάζοντας μιά χαλαρή μεταβλητή ὑψωμένη στό τετράγωνο, π.χ.:

$$x_1+x_2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad x_1+x_2+u_1^2 = 2$$

Τελικά, ἄν ἔχουμε νά λύσουμε τό μή γραμμικό πρόγραμμα:

$$\max f = 6x_1^2+2x_1-2x_1x_2, \quad \text{μέ}$$

$$x_1-2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Τότε πρέπει νά μετατρέψουμε αὐτό, στό κάτωθι:

$$\max f = 6x_1^2+2x_1-2x_1x_2$$

$$x_1-2x_2-u_1^2 = 3$$

$$x_1-u_2^2 = 0$$

$$x_2-u_3^2 = 0$$

Η. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Στά προβλήματα ἐπενδύσεων διαθέτουμε W χρηματικές μονάδες καί ὑπάρχουν V οἰκονομικοί τομεῖς πού μποροῦμε νά ἐπενδύσουμε τά W χρήματα.
Ζητεῖται πάντοτε ἡ ἄριστη ἐπένδυση, δηλαδή ἡ ἐπένδυση ἐκείνη πού δίνει τό μέγιστο κέρδος.
Ἔστω ὅτι διαθέτουμε τούς οἰκονομικούς τομεῖς:

I, II, III, IV

καί 4 χρηματικές μονάδες. Ἔστω ὅτι ὁ ἀναλυτικός πίνακας κέρδους, εἶναι ὁ ἑξῆς:

	I	II	III	IV	Οἰκ. τομεῖς
0	0	0	0	0	
1	0,45	0,41	0,25	0,34	
2	0,78	0,65	0,50	0,49	
3	1,02	0,80	0,73	0,57	
χρ.μον. 4	1,23	0,88	0,90	0,61	
	V_1	V_2	V_3	V_4	

Δηλαδή ἄν π.χ. ἐπενδύσουμε 2 χ.μ. στόν III τομέα, τότε ἔχουμε κέρδος 0,50 χ.μ.. Ὀνομάζουμε V_1, V_2, V_3, V_4 τίς στῆλες τῶν κερδῶν τῆς δεδομένης μήτρας. Ἔστω f_1 τό μέγιστο κέρδος πού μποροῦμε νά πάρουμε ἄν ἐπενδύουμε μόνο στόν I τομέα. Τότε προφανῶς ἰσχύει $f_1=V_1$. Ἔστω f_{12} τό μέγιστο κέρδος πού μποροῦμε νά πάρουμε ἄν ἐπενδύουμε στούς τομεῖς I καί II. Ἔστω f_{13} τό μέγιστο κέρδος μας, ἄν ἐπενδύουμε στούς I,II καί III. Καί τέλος, ἔστω f_{14} τό τελικό μέγιστο κέρδος τῆς ἐπένδύσεως καί γιά τούς τέσσερους τομεῖς, I,II,III καί IV. Ἡ μέθοδος πού μᾶς ὁδηγεῖ στήν τελική ἄριστη πολιτική f_{14}, ἔγκειται στόν ἐνδιάμεσο ὑπολογισμό τῶν ἀρίστων ὑποπολιτικῶν f_1, f_{12}, f_{13}.

Βέβαια $f_1=V_1$, ὁπότε ἀρχίζουμε τόν ὑπολογισμό τοῦ f_{12}, κατασκευάζοντας τόν κάτωθι πίνακα:

		$f_1=V_1$	V_2	f_{12}	Συνδυασμοί ἐπενδύσεως
1)	0	0	0	0	(0,0)
2)	1	0,45	0,41	0,45	(1,0),~~(1,0)~~
3)	2	0,78	0,65	0,86	~~(2,0)~~,~~(0,2)~~,(1,1)
4)	3	1,02	0,80	1,19	~~(3,0)~~,~~(0,3)~~,~~(1,2)~~,(2,1)
5)	4	1,23	0,88	1,43	~~(4,0)~~,~~(0,4)~~,~~(2,2)~~,~~(1,3)~~,(3,1)

Πίνακας 1

1) Ἔστω λοιπόν ὅτι διαθέτουμε 0 χ.μ., τότε προφανῶς τό f_{12} θά εἶναι 0 μέ ἄριστο συνδυασμό (0,0), δηλαδή 0 χ.μ. στόν Ι καί 0 χ.μ. στόν ΙΙ. Ὁπότε λαμβάνουμε τήν πρώτη γραμμή τοῦ πίνακα.

2) Ἔστω ὅτι διαθέτουμε 1 χ.μ., τότε ὑπάρχουν δύο δυνατοί συνδυασμοί γιά ἐπένδυση, ὁ (1,0) καί (0,1). Δηλαδή ἤ νά ἐπενδύσουμε 1 χ.μ. στόν Ι καί 0 χ.μ. στό ΙΙ, ἤ νά ἐπενδύσουμε 0 χ.μ. στόν Ι καί 1 χ.μ. στόν ΙΙ. Παρατηρώντας τά ἀντίστοιχα κέρδη τῶν στηλῶν f_1, V_2, βλέπουμε ὅτι ὁ συνδυασμός (1,0) δίνει κέρδος 0,45, ἐνῶ ὁ (0.1) δίνει κέρδος 0,41. Ἐπομένως ὁ καλύτερος συνδυασμός εἶναι ὁ (1, 0) μέ f_{12} τό 0,45.

3) Ἔστω ὅτι διαθέτουμε 2 χ.μ., τότε ὑπάρχουν τρεῖς δυνατοί συνδυασμοί γιά ἐπένδυση, (2,0),(0,2) καί (1,1). Δηλαδή ἤ νά ἐπενδύσουμε 2 χ.μ. στόν Ι καί 0 στόν ΙΙ, ἤ 0 στόν Ι καί 2 στόν ΙΙ, ἤ 1 στόν Ι καί 1 στόν ΙΙ. Τό κέρδος τοῦ (2,0) εἶναι 0,78, τοῦ (0,2) εἶναι 0,65, καί τοῦ (1,1) εἶναι (0,45+0,41)=0,86. Ἄρα ὁ καλύτερος εἶναι ὁ (1,1), ὁπότε μπαίνει γιά f_{12} τό 0,86.

4) Ἔστω ὅτι διαθέτουμε 3 χ.μ., τότε ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί γιά ἐπένδυση:

(3,0),(0,3),(1,2),(2,1)

Τά ἀντίστοιχα κέρδη τους εἶναι ὡς ἑξῆς:

(3,0) ⇝ 1,02 χ.μ. , (1,2) ⇝ (0,45+0,65) = 1,10 χ.μ.

(0,3) ⇝ 0,80 χ.μ. , (2,1) ⇝ (0,78+0,41) = 1,19 χ.μ.

Ὁπότε ὁ καλύτερος εἶναι ὁ (2,1), δηλαδή 2 χ.μ. στόν I καί 1 χ.μ. στόν II μέ f_{12} τό 1,19.

5) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 4 χ.μ., τότε ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί:

(4,0),(0,4),(1,3),(3,1),(2,2)

Μέ ἀντίστοιχα κέρδη τά κάτωθι:

(4,0) ⇝ 1,23

(0,4) ⇝ 0,88

(1,3) ⇝ (0,45+0,80) = 1,25 ,

(3,1) ⇝ (1,02+0,41) = 1,43

(2,2) ⇝ (0,78+0,65) = 1,43

Ὁπότε ὁ ἄριστος συνδυασμός εἶναι ὁ (2,2), δηλαδή 2 χ.μ. στόν I καί 2 χ.μ. στόν II μέ f_{12} τό 1,43. (Παρατηροῦμε ὅτι ἄριστος εἶναι ἐπίσης καί ὁ συνδυασμός (3,1)).

Στή συνέχεια κατασκευάζουμε τόν πίνακα 2, βάζοντας σάν πρώτη στήλη, τήν στήλη τοῦ εὑρεθέντος ἤδη f_{12} καί σάν δεύτερη στήλη τό V_3.

Πίνακας 2

		f_{12}	V_3	f_{13}	Συνδυασμοί ἐπ.
1)	0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0)
2)	1	0,45	0,25	0,45	~~(0,1)~~,(1,0) => (1,0,0)
3)	2	0,86	0,50	0,86	(2,0),~~(0,2)~~,~~(1,1)~~ => (1,1,0)
4)	3	1,19	0,73	1,19	(3,0),~~(0,3)~~,~~(1,2)~~,~~(2,1)~~ => (2,1,0)
5)	4	1,43	0,90	1,44	~~(4,0)~~,~~(0,4)~~,~~(1,3)~~,(3,1),~~(2,2)~~ => (2,1,1

1) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 0 χ.μ., τότε ὑπάρχει ἕνας συνδυασμός ὁ (0,0), ὁποῖος τώρα σημαίνει ὅτι στόν (I καί II) θά ἐπενδύσουμε 0 χ.μ. καί στόν III πάλι 0 χ.μ.. Ἄρα ἀναλυτικά καί στούς τρεῖς τομεῖς ἔχουμε (0,0,0).

2) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 1 χ.μ., τότε ὑπάρχουν οἱ συνδυασμοί (0,1),(1,0). Ὁ (0,1) σημαίνει ὅτι ἐπενδύουμε 0 χ.μ. στόν (I καί II) καί 1 χ.μ. στόν III, ἐνῶ ὁ (1,0) σημαίνει ὅτι ἐπενδύουμε 1 χ.μ. στόν (I καί II) καί 0 χ.μ.

στόν III. Ἐδῶ, θά πρέπει νά ἔχουμε ὑπ'ὄψιν μας, ὅτι ὅπου λέμε ὅτι ἐπενδύουμε κάτι στόν (I καί II), τότε τό ἀντίστοιχο κέρδος ἐκφράζεται ἀπό τήν στήλη f_{12}. Ἔτσι τά ἀντίστοιχα κέρδη εἶναι:

$$(1,0) \rightsquigarrow 0,45 \ , \ (0,1) \rightsquigarrow 0,25$$

Ὁπότε θέτουμε γιά f_{13} τό 0,45 καί ἀναλύουμε τήν δυάδα (1,0) σέ τριάδα, ὡς ἐξῆς:

Τό (1,0) σημαίνει ὅτι ἔχουμε 1 χ.μ. στόν (I καί II) καί 0 χ.μ. στόν III. Κυττάζουμε τόν προηγούμενο πίνακα (Πίνακας 1) καί ψάχνουμε νά βροῦμε τόν καλύτερο συνδυασμό ὅταν διαθέτουμε 1 χ.μ. Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (1,0), δηλαδή 1 χ.μ. στόν I καί 0 στόν II. Ὁπότε τελικά παίρνουμε:

$$(1,0) \Rightarrow ((1,0),0) \Rightarrow (1,0,0)$$

Δηλαδή, 1 χ.μ. στόν I, 0 χ.μ. στόν II, καί 0 χ.μ. στόν III.

3) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 2 χ.μ. στόν (I καί II) καί III. Ὑπάρχουν οἱ ἐξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοιχα κέρδη:

$$(2,0) \rightsquigarrow 0,86 \ , \quad (0,2) \rightsquigarrow 0,50$$
$$\text{καί} \quad (1,1) \rightsquigarrow 0,70$$

Ἑπομένως ὁ καλύτερος συνδυασμός εἶναι ὁ (2,0) καί ἄρα θέτουμε γιά f_{13} τό 0,86. Τό (2,0) σημαίνει ὅτι ἐπενδύουμε 2 χ.μ. στό (I καί II) καί 0 χ.μ. στόν III. Θά πρέπει λοιπόν νά κοιτάξουμε στόν πίνακα 1, ποιός ἦταν ὁ καλύτερος συνδυασμός γιά τούς τομεῖς I,II ὅταν διαθέταμε 2 χ.μ. Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (1,1).
Ὁπότε τελικά παίρνουμε τήν τριάδα:

$$(2,0) \Rightarrow ((1,1),0) \Rightarrow (1,1,0)$$

Δηλαδή, 1 χ.μ. στόν I, 1 χ.μ. στόν II, καί 0 χ.μ. στόν III.

4) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 3 χ.μ. στόν (I καί II) καί
III. Ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοι-
χα κέρδη:

$(3,0) \rightsquigarrow 1,19$, $(1,2) \rightsquigarrow 0,95$

$(0,3) \rightsquigarrow 0,73$, $(2,1) \rightsquigarrow 1,11$

Ἐπομένως ὁ καλύτερος συνδυασμός εἶναι ὁ (3,0) καί
ἄρα θέτουμε γιά f_{13} τό 1,19. Τό (3,0) σημαίνει ὅτι ἐπεν-
δύουμε 3 χ.μ. στόν (I καί II) καί 0 στόν III. Θά πρέπει
λοιπόν νά κοιτάξουμε στόν πίνακα 1, ποιός ἦταν ὁ καλύ-
τερος συνδυασμός γιά τούς τομεῖς I,II ὅταν διαθέταμε 3
χ.μ.. Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (2.1).
Ὁπότε τελικά παίρνουμε τήν τριάδα:

$(3.0) \Rightarrow ((2,1),0) \Rightarrow (2,1,0)$

Δηλαδή, 2 χ.μ. στόν I, 1 χ.μ. στόν II, καί 0 χ.μ. στόν
III.

5) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 4 χ.μ. στόν (I,II) καί III.
Τότε ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοι-
χα κέρδη:

$(4,0) \rightsquigarrow 1,43$, $(1,3) \rightsquigarrow 1,18$

$(0,4) \rightsquigarrow 0,90$, $(3,1) \rightsquigarrow 1,44$

καί $(2,2)$ $1,38$

Ὁπότε ὁ καλύτερος συνδυασμός εἶναι ὁ (3,1), δηλαδή 3
χ.μ. στόν (I καί II) καί 1 χ.μ. στόν III. Θέτουμε f_{13} τό
1,44 καί κοιτάζουμε στόν πίνακα 1 γιά νά βροῦμε τόν κα-
λύτερο συνδυασμό γιά τούς I,II μέ 3 χ.μ..
Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (2,1).
Ἐπομένως ἔχουμε:

$(3,1) \Rightarrow ((2,1),1) \Rightarrow (2,1,1)$

Δηλαδή 2 χ.μ. στόν I, 1 χ.μ. στόν II, καί 1 χ.μ. στόν III.

Κατασκευάζουμε τόν ἑπόμενο (τελικό) πίνακα τῆς ἐ-
πένδυσής μας, βάζοντας τώρα γιά πρώτη στήλη τά γνωστά
f_{13}, γιά δεύτερη στήλη τήν στήλη V_4 καί τρίτη (ζητουμέ-

νη) στήλη τό f_{14}.

		f_{13}	V_4	f_{14}	Τελικός ἄριστος συνδυασμός
1)	0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0,0)
2)	1	0,45	0,34	0,45	(1,0),(0,1) => (1,0,0,0)
3)	2	0,86	0,49	0,86	(2,0),(0,2),(1,1) => (1,1,0,0)
4)	3	1,19	0,57	1,20	(3,0),(0,3),(1,2),(2,1) => (1,1,0,1)
5)	4	1,44	0,61	$\boxed{1,53}$	(4,0),(0,4),(1,3),(3,1),(2,2) => (2,1,

Πίνακας 3

1) Ὁπωσδήποτε ἄν διαθέτουμε 0.χ.μ. γιά τούς τρόπους Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,ΙV, τότε ὁ μόνος συνδυασμός πού ὑπάρχει εἶναι ὁ (0,0,0,0) μέ f_{14} τό 0.

2) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 1 χ.μ. στόν (Ι καί ΙΙ καί ΙΙ) καί ΙV. Τότε ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοιχα κέρδη:

$$(1,0) \rightsquigarrow 0,45 \quad , \quad (0,1) \rightsquigarrow 0,34$$

Ὁπότε ὁ καλύτερος εἶναι ὁ (1,0), δηλαδή 1 χ.μ. στόν (Ι, ΙΙ,ΙΙΙ) καί 0 χ.μ. στόν ΙV. Θέτουμε γιά f_{14} τό 0,45 καί κοιτάζουμε στόν πίνακα 2 γιά νά βροῦμε τόν καλύτερο συνδυασμό, ὅταν ἐπενδύαμε στούς Ι,ΙΙ,ΙΙΙ, 1 χ.μ.
Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (1,0,0). Ὁπότε παίρνουμε τήν τε -
Ὁπότε παίρνουμε τήν τετράδα:

$$(1,0) \Rightarrow ((1,0)0,0) \Rightarrow (1,0,0,0)$$

Δηλαδή 1 χ.μ. στόν Ι, 0 στόν ΙΙ, 0 χ.μ. στόν ΙΙΙ, καί 0 χ.μ. στόν ΙV.

3) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 2 χ.μ. στόν (Ι,ΙΙ καί ΙΙΙ) καί ΙV. Τότε ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοιχα κέρδη:

$$(2,0) \rightsquigarrow 0,86 \quad , \quad (0,2) \rightsquigarrow 0,49$$
$$\text{καί} \quad (1,1) \rightsquigarrow (0,45+0,34)=0,79$$

Ἄρα ὁ καλύτερος εἶναι ὁ (2,0) καί ἑπομένως θέτουμε γιά f_{14} τό 0,86.

Κοιτάζουμε στόν πίνακα 2 γιά νά βροῦμε τόν καλύτερο συνδυασμό ὅταν ἐπενδύουμε 2 χ.μ. στούς Ι,ΙΙ,ΙΙΙ. Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (1,1,0).
Ὁπότε παίρνουμε τήν τετράδα:

(2,0) => ((1,1,0)0) => (1,1,0,0)

δηλ. 1 χ.μ. στόν Ι, 1 χ.μ. στόν ΙΙ, 0 χ.μ. στόν ΙΙΙ,καί 0 χ.μ. στόν IV.

4) Ἔστω ὅτι ἐπενδύουμε 3 χ.μ. στόν (Ι,ΙΙ καί ΙΙΙ) καί IV. Ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοιχα κέρδη:

(3,0) ⇝ 1,19 (0,3) ⇝ 0,57
(2,1) ⇝ (0,86+0,34)=1,20, (1,2) ⇝ (0,45+0,49 =0,94

Ὁπότε ὁ καλύτερος εἶναι ὁ (2,1) καί ἑπομένως θέτουμε γιά f_{14} τό 1,20.

Κοιτάζουμε τόν πίνακα 2 γιά νά βροῦμε τόν καλύτερο συνδυασμό ὅταν ἐπενδύουμε 2 χ.μ. στούς Ι,ΙΙ,ΙΙΙ. Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (1,1,0).
Ὁπότε παίρνουμε τήν τετράδα:

(2,1) => ((1,1,0),1) => (1,1,0,1)

Δηλαδή 1 χ.μ. στόν Ι, 1 χ.μ. στόν ΙΙ, 0 χ.μ. στόν ΙΙΙ, καί 1 χ.μ. στόν IV.

5) Ἔστω ὅτι διαθέτουμε 4 χ.μ. στόν (Ι,ΙΙ καί ΙΙΙ) καί IV. Ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς συνδυασμοί μέ τά κάτωθι ἀντίστοιχα κέρδη:

(4,0) ⟶ 1,44 (0,4) ⇝ 0,61
(3,1) ⇝ (1,19+0,34)=1,53, (1,3) ⇝ (0,45+0,57)=1,02
καί (2,2) ⇝ (0,86+0,49)=1,35

Ἄρα καλύτερος εἶναι ὁ (3,1) καί ἑπομένως θέτουμε γιά f_{14} τό 1,53.

Κοιτάζουμε στόν πίνακα 2 γιά νά βροῦμε τόν καλύτερο συνδυασμό μέ 3 χ.μ. γιά τούς τομεῖς Ι,ΙΙ,ΙΙΙ. Ὁ καλύτερος ἦταν ὁ (2,1,0). Ἐπομένως παίρνουμε τήν τετράδα:

$$(3,1) \Rightarrow ((2,1,0),1) \Rightarrow (2,1,0,1)$$

Δηλαδή 2 χ.μ. στόν I, 1 χ.μ. στόν II, 0 χ.μ. στόν III, καί 1 χ.μ. στόν IV μέ ὁλικό κέρδος 1,53 χ.μ. Αὐτή εἶναι καί ἡ <u>ἄριστη ἐπένδυση</u> πού ἀφήνει τό <u>μέγιστο κέρδος</u>.

<u>Παράδειγμα 1.</u> Νά εὑρεθῆ ἡ ἄριστη ἐπένδυση μέ πίνακα κερδῶν τόν κάτωθι:

	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
1	0,25	0,22	0,20	0,20
2	0,48	0,42	0,44	0,39
3	0,68	0,62	0,60	0,65
4	0,74	0,70	0,68	0,73
	$f_1 = V_1$	V_2	V_3	V_4

Ὀνομάζουμε $f_1 = V_1, V_2, V_3, V_4$ τήν πρώτη, δεύτερη, τρίτη καί τέταρτη στήλη ἀντιστοίχως. Ὁπότε ὁ πρῶτος πίνακας γιά τό f_{12} εἶναι ὁ κάτωθι:

	f_1	V_2	f_{12}	Συνδυασμοί ἐπενδ.
0	0	0	0	(0,0)
1	0,25	0,22	0,25	~~(0,1)~~,(1,0)
2	0,48	0,42	0,48	(2,0),~~(0,2)~~,(1,1)
3	0,68	0,62	0,70	~~(3,0)~~,~~(0,3)~~,(2,1),~~(1,2)~~
4	0,74	0,70	0,90	~~(4,0)~~,~~(0,4)~~,(3,1),~~(1,3)~~,(2,2)

Πίνακας 1

Κατασκευάζουμε τόν ἑπόμενο πίνακα (πίνακα 2), βάζοντας πρώτη στήλη τήν ἤδη εὑρεθεῖσα f_{12}, δεύτερη στήλη τό V_3 καί γιά τρίτη στήλη (ζητουμένη) τό f_{13}. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τό f_{13} περιγράφει τό καλύτερο κέρδος πού μποροῦμε νά ἔχουμε ἐπενδύοντας στούς τομεῖς I,II καί III.

	f_{12}	V_3	f_{13}	Συνδυασμοί έπενδύσεων
0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0)
1	0,25	0,20	0,25	(~~0,1~~),(1,0) => (1,0,0)
2	0,48	0,44	0,48	(2,0),(~~0,2~~),(~~1,1~~) => (2,0,0)
3	0,70	0,60	0,70	(3,0),(~~0,3~~),(~~1,2~~),(~~2,1~~) => (2,1,0)
4	0,90	0,68	0,92	(~~4,0~~),(~~0,4~~),(~~3,1~~),(~~1,3~~),(2,2) => (2,0,2)

[Πίνακας 2]

Κατασκευάζουμε τόν τελικό μας πίνακα:

	f_{13}	V_4	f_{14}	Άριστοι συνδυασμοί
0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0)
1	0,25	0,20	0,25	(~~0,1~~),(1,0) => (1,0,0,0)
2	0,48	0,39	0,48	(2,0),(~~0,2~~),(~~1,1~~) => (2,0,0,0)
3	0,70	0,65	0,70	(3,0),(~~0,3~~),(~~1,2~~),(2,1) => (2,1,0,0)
4	0,92	0,73	0,92	(~~4,0~~),(0,4),(3,1),(1,3),(2,2) => (2,0,2,0)

[Πίνακας 3]

Άρα ή άριστη έπένδυση είναι 2 χ.μ. στόν I, 0 χ.μ. στόν II, 2 χ.μ. στόν III, καί 0 χ.μ. στόν IV, μέ όλικό κέρδος 0,92 χ.μ.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Νά εύρεθῆ ή άριστη έπένδυση μέ πίνακα κερδῶν τόν κάτωθι:

	I	II	III	IV	V	VI
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,21	0,19	0,18	0,24	0,23
2	0,48	0,42	0,44	0,38	0,47	0,45
3	0,68	0,62	0,60	0,64	0,65	0,61
4	0,74	0,70	0,68	0,72	0,75	0,71
5	0,92	0,90	0,88	0,91	0,85	0,89
	$f_1 = V_1$	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6

Όνομάζουμε $f_1=V_1$ τήν πρώτη στήλη τῆς μήτρας τῶν δεδομένων κερδῶν, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 τίς ύπόλοιπες στῆλες κατά σειρά.

Κατασκευάζουμε τόν Πϊνακα 1 μέ σκοπό τόν ὑπολογισμό τῆς f_{12}:

	$f_1=V_1$	V_2	f_{12}	Συνδυασμοί ἐπενδύσεων
0	0	0	0	(0,0) Πίνακας 1
1	0,25	0,21	0,25	~~(0,1)~~,(1,0)
2	0,48	0,42	0,48	(2,0),~~(0,2)~~,~~(1,1)~~
3	0,68	0,62	0,69	~~(3,0)~~,~~(0,3)~~,(2,1),~~(1,2)~~
4	0,74	0,70	0,90	~~(4,0)~~,~~(0,4)~~,~~(3,1)~~,~~(1,3)~~,(2,2)
5	0,92	0,90	1,10	~~(5,0)~~,~~(0,5)~~,~~(4,1)~~,~~(1,4)~~,(3,2),(2,3)

Κατασκευάζουμε τόν πίνακα 2 γιά νά βροῦμε τό f_{13}:

	f_{12}	V_3	f_{13}	Συνδυασμοί ἐπενδύσεων
0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0) Πίνακας 2
1	0,25	0,19	0,25	~~(0,1)~~,~~(1,0)~~ => (1,0,0)
2	0,48	0,44	0,48	(2,0),~~(0,2)~~,~~(1,1)~~ => (2,0,0)
3	0,69	0,60	0,69	(3,0),~~(0,3)~~,(2,1),(1,2) =>(2,1,0) ἤ (1,0,2)
4	0,90	0,68	0,92	~~(4,0)~~,~~(0,4)~~,(3,1),~~(1,3)~~,(2,2) => (2,0,2)
5	1,10	0,88	1,14	~~(5,0)~~,~~(0,5)~~,~~(4,1)~~,~~(1,4)~~,(3,2),~~(2,3)~~ =>(2,1,2)

Κατασκευάζουμε τόν Πίνακα 3 γιά νά βροῦμε τό f_{14}:

	f_{13}	V_4	f_{14}	
0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0,0) Πίνακας 3
1	0,25	0,18	0,25	~~(0,1)~~,(1,0) => (1,0,0,0)
2	0,48	0,38	0,48	(2,0),~~(0,2)~~,~~(1,1)~~ => (2,0,0,0)
3	0,69	0,64	0,70	(3,0),~~(0,3)~~,~~(2,1)~~,~~(1,2)~~ => (2,1,0,0) ἤ (1,0,2,
4	0,92	0,72	0,92	(4,0),~~(0,4)~~,~~(3,1)~~,(1,3),(2,2) => (2,0,2,0)
5	1,14	0,91	1,14	(5,0),~~(0,5)~~,~~(4,1)~~,~~(1,4)~~,(3,2),(2,3) => (2,1,2

Κατασκευάζουμε τόν Πίνακα 4 γιά νά βροῦμε τό f_{15}. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τό f_{15} σημαίνει τά καλύτερα κέρδη πού μποροῦμε νά ἔχουμε ἐπενδύοντας στούς τομεῖς I,II,III,IV καί V.

	f_{14}	V_5	f_{15}	Συνδυασμοί ἐπενδύσεων
0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0,0,0)
1	0,25	0,24	0,25	~~(0,1)~~,(1,0) => (1,0,0,0,0)
2	0,48	0,47	0,49	~~(2,0)~~,~~(0,2)~~,(1,1) => (1,0,0,0,1)
3	0,69	0,65	0,72	~~(3,0)~~,~~(0,3)~~, 2,1),(1,2) =>(2,0,0,0,1) ἤ (1,0,0,0,2)
4	0,92	0,75	0,95	~~(4,0)~~,~~(0,4)~~,~~(3,1)~~,~~(1,3)~~,(2,2) =>(2,0,0,0,2)
5	1,14	0,85	1,16	~~(5,0)~~,~~(0,5)~~,~~(4,1)~~,~~(1,4)~~,(3,2),~~(2,3)~~ =>(2,1,0,0,2) ἤ (1,0,2,0,2)

[Πίνακας 4]

Κατασκευάζουμε τόν τελικό πίνακα 5 γιά τό f_{16}:

	f_{15}	V_6	f_{16}	Ἄριστοι συνδυασμοί
0	0	0	0	(0,0) => (0,0,0,0,0,0)
1	0,25	0,23	0,25	~~(0,1)~~,(1,0) => (1,0,0,0,0,0)
2	0,49	0,45	0,49	(2,0),~~(0,2)~~,~~(1,1)~~ => (1,0,0,0,1,0)
3	0,72	0,61	0,72	(3,0),~~(0,3)~~,(2,1),~~(1,2)~~ => (2,0,0,0,1,0) ἤ (1,0,0,0,2 ἤ (1,0,0,0,1
4	0,95	0,71	0,95	(4,0),~~(0,4)~~,(3,1),~~(1,3)~~,~~(2,2)~~ => (2,0,0,0,2,0) ἤ (2,0,0,0,1,1) ἤ (1,0,0,0,2,1)
5	1,16	0,89	$\boxed{1,18}$	~~(5,0)~~,~~(0,5)~~,(4,1),~~(1,4)~~,~~(3,2)~~,~~(2,3)~~ => (2,0,0,0,2,1)

[Πίνακας 5]

Ἄρα ἡ τελική ἄριστη ἐπένδυση εἶναι 2 χ.μ. στόν I, 0 χ.μ. στόν II, 0 χ.μ. στόν III, 0 χ.μ. στόν IV, 2 χ.μ. στόν V καί 1 χ.μ. στόν VI, μέ ἀντίστοιχο μέγιστο ὁλικό κέρδος 1,18 χ.μ.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ἄν μᾶς ρωτοῦσαν ἐπί πλέον: "Ποιά θά ἦταν ἡ ἄριστη ἐπένδυση ἄν τελικά διαθέταμε 4 χ.μ. ἀντί 5 χ.μ., τότε ἀπό τόν πίνακα 5, γιά 4 χ.μ. ἔχουμε κέρδος 0,95 χ.μ., διαλέγοντας ἕναν ἀπό τούς κάτωθι ἰσοδύναμους συνδυασμούς:

(2,0,0,0,2,0) ἤ (2,0,0,0,1,1) ἤ (1,0,0,0,2,1)

Θ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Στά προβλήματα τῶν ἀποθεμάτων ζητεῖται ὁ προγραμ-ματισμός τῶν ἀποθεμάτων γιά ἕνα ὁλόκληρο ἔτος, ὅταν δί-νεται ἡ περίοδος τοῦ ἀνεφοδιασμοῦ, ἡ ζήτηση κάθε περιό-δου καί ἡ ἀντίσ οιχη τιμή ἀγορᾶς.

Στά προβλήματα τῶν ἀποθεμάτων δίνονται:

n : συμβολίζει τήν ἑκάστοτε περίοδο

p_n: τιμή ἀγορᾶς τῆς n περιόδου

d_n: ἡ ζήτηση τῆς n περιόδου καί

S : τό πόσο χωρᾶ ἡ ἀποθήκη

καί εἶναι ἄγνωστα τά κάτωθι:

x_n: ἀπόθεμα στό τέλος τῆς n περιόδου

a_n: ποσότητα πού ἀγοράσθηκε κατά τήν n περίοδο

V_i: συνάρτησις κόστους κατά τήν περίοδο $i=1,2,\ldots$

f_{ni}: συνάρτησις ἄριστης πολιτικῆς γιά τίς περιόδους $\{n,n-1,\ldots,i\}$, $i=1,2,\ldots,n$ (ἰσχύει $f_{nn} \equiv f_n$).

Στά προβλήματα τῶν ἀποθεμάτων ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς τύποι:

$$\max(0,x_{n-1}-d_n) \leqq x_n \leqq \min(S-d_n, x_{n+1}+d_{n+1})$$

$$a_n = d_n + x_n - x_{n-1}$$

$$V_n = a_n, p_n$$

Στήν οὐσία ζητοῦνται τά a_i μέ τό ἐλάχιστο ὁλικό κόστος:

$$\min \sum_{i=1}^{n} V_i$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά εὑρεθῆ ἡ ἄριστη λύση τῶν ἀποθεμάτων μέ δεδομένα τόν κάτωθι πίνακα:

n	1	2	3	4	5	6
d_n	5	7	12	10	3	2
p_n	8	9	10	9	7	6

$S = 12$

$x_0 = 4$

$x_6 = 0$

'Από τό τύπο:

$$\max(0, x_{n-1}-d_n) \leq x_n \leq \min(S-d_n,\ x_{n+1}+d_{n+1})$$

παίρνουμε μέ $n=1,2,\ldots,5$ τά κάτωθι:

$$\max(0,4-5) \leq x \leq \min(12-5,\ x_2+7)$$
$$\max(0,x_1-7) \leq x \leq \min(12-7,\ x_3+12)$$
$$\max(0,x_2-12) \leq x \leq \min(12-12,\ x_4+10)$$
$$\max(0,x_3-10) \leq x \leq \min(12-10,\ x_5+3)$$
$$\max(0,x_4-3) \leq x \leq \min(12-3,\ x_6+2)$$

καί $x_6 = 0$

'Οπότε παίρνουμε τά κάτωθι:

$$1 \leq x_1 \leq 7$$
$$0 \leq x_2 \leq 5$$
$$x_3 = 0$$
$$0 \leq x_4 \leq 2$$
$$0 \leq x_5 \leq 2$$
$$x_6 = 0$$

'Εξ ἄλλου ἀπό τούς τύπους:

$$\alpha_n = d_n + x_n - x_{n-1}$$
$$V_n = \alpha_n \cdot p_n$$

παίρνουμε τά κάτωθι:

$$V_1 = \alpha_1 \cdot p_1 = (5 + x_1 - 4).8 = (1 + x_1).8$$
$$V_2 = \alpha_2\ p_2 = (7 + x_2 - x_1).9 = (7 + x_2 - x_1).9$$
$$V_3 = \alpha_3\ p_3 = (12 + x_3 - x_2).10 = (12 - x_2).10$$
$$V_4 = \alpha_4\ p_4 = (10 + x_4 - x_3).9 = (10 + x_4).9$$
$$V_5 = \alpha_5\ p_5 = (3 + x_5 - x_4).7 = (3 + x_5 - x_4).7$$
$$V_6 = \alpha_6\ p_6 = (2 + x_6 - x_5).6 = (2 - x_5).6$$

'Οπότε ἀρχίζοντας ἀπό τό τέλος γιά n=6 παίρνουμε κατά σειρά τά ἑξῆς:

1) $f_{6h} = f_6 = \min V_6 = \min(12 - 6x_5)$

2) $f_{65} = \min\{f_6 + V_5\} = \min\{12 - 6x_5 + 21 + 7x_5 - 7x_4\} =$

$= \min\{x_5 - 7x_4 + 33\}$

3) $f_{654} = \min\{f_{65} + V_4\} = \min\{x_5 - 7x_4 + 33 + 90 + 9x_4\} =$

$= \min\{x_5 + 2x_4 + 125\} \Rightarrow x_4 = x_5 = 0$

4) $f_{6543} = \min\{f_{654} + V_3\} = \min\{123 + 120 - 10x_2\} =$

$= \min\{243 - 10x_2\}$

5) $f_{65432} = \min\{f_{6543} + V_2\} = \min\{243 - 10x_2 + 63 + 9x_2 - 9x_1\} =$
$= \min\{-x_2 - 9x_1 + 306\} \Rightarrow x_2 = 5$

6) $f_{654321} = \min\{f_{65432} + V_1\} = \min\{306 - 9x_1 - 5 + 8 + 8x_1\} =$
$= \min\{309 - x_1\} \Rightarrow x_1 = 7$

'Οπότε χρησιμοποιώντας τούς τύπους:

$$\alpha_n = d_n + x_n - x_{n-1}$$

παίρνουμε ὅτι:

$\alpha_1 = 5 + 7 - 4 = 8$, $\alpha_4 = 10 + 0 - 0 = 10$
$\alpha_2 = 7 + 5 - 7 = 5$, $\alpha_5 = 3 + 0 - 0 = 3$
$\alpha_3 = 12 + 0 - 5 = 7$, $\alpha_6 = 2 + 0 - 0 = 2$

'Οπότε τελικῶς παίρνουμε ὅτι:

$V_1 = 8.8 = 64$, $V_4 = 10.9 = 90$
$V_2 = 5.9 = 45$, $V_5 = 3.7 = 21$
$V_3 = 7.10 = 70$, $V_6 = 2.6 = 12$

μέ ἐλάχιστο συνολικό κόστος:

$64 + 45 + 70 + 90 + 21 + 12 = 303$ χρ. μονάδες.

Ἄρα στήν 1 περίοδο ἀγοράζουμε 8 μονάδες (α_1=8) καί στίς ὑπόλοιπες περιόδους 2,3,4,5,6 κατά σειρά:

5, 7, 10, 3 καί 2 μονάδες

I. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Διανυσματικός χῶρος εἶναι ἕνα σύνολο V μέ πράξεις (+), (.), ἔτσι ὥστε:

+) Ἄν $x,y \in V \Rightarrow (x+y) \in V$

(i) $x+y=y+x$

(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(iii) $\exists\, 0 \in V : x+0=x \ , \ \forall x \in V$

(iv) $\forall x \in V$ ὑπάρχει ἕνα $(-x) \in V : x+(-x)=0$

.) Ἄν $\lambda \in K$ (σῶμα) καί $x \in V \Rightarrow (\lambda.x) \in V$

(i) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

(ii) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

(iii) $(\lambda\mu)x=\lambda.(\mu x)$

(iv) $\exists\, 1 \in V : 1.x=x$ γιά κάθε $x \in V$

<u>Γραμμική ἀνεξαρτησία</u>

Τά διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ τοῦ V, καλοῦνται γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἄν καί μόνον ἄν, ἰσχύει:

$$\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2 + \ldots + \lambda_\kappa x_\kappa = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\kappa = 0$$

Ἀλλιῶς λέμε ὅτι τά $x_1, \ldots, x_\kappa$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Π.χ. ἔστω $x_1=(1,3,2)$, $x_2=(4,6,5)$, $x_3=(7,8,10)$

Θεωροῦμε τά $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ἔτσι ὥστε:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

$$\lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(4,6,5) + \lambda_3(7,8,10) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, 3\lambda_1, 2\lambda_1) + (4\lambda_2, 6\lambda_2, 5\lambda_2) + (7\lambda_3, 8\lambda_3, 10\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3, 3\lambda_1+6\lambda_2+8\lambda_3, 2\lambda_1+5\lambda_2+10\lambda_3) = (0,0,0)$$

Ἐξισώνοντας τίς πρῶτες συντεταγμένες τοῦ πρώτου καί δεύτερου μέλους καί κάνοντας τό ἴδιο γιά τίς δεύτερες καί τρίτες συντεταγμένες, παίρνουμε τό ἑξῆς σύστημα:

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0$$
$$3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0$$
$$2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0$$

Τό σύστημα αὐτό εἶναι ὁμογενές. Ἐξετάζω τήν ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων του:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} -4.\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} +7.\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= 60 - 40 - 4(30-16) + 7(15-12) = 60 - 40 - 4.14 + 7.3 =$$
$$= 60 - 40 - 56 + 21 = 81 - 96 = -5 \neq 0$$

Ἡ Δ εἶναι ὄχι μηδέν, ἄρα ἡ μόνη λύση τοῦ συστήματος εἶναι ἡ μηδενική, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ἄρα τά x_1, x_2, x_3 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. (Ἄν $\Delta=0 \Rightarrow$ τά x_1, x_2, x_3 θά ἦταν γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Ἡ Ἀπόσταση

Ἡ ἀπόσταση $d(x,y)$ μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ V εἶναι ἀπόσταση ἄν ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

1) $d(x,y) \geqq 0$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$

π.χ. ἡ συνάρτηση:

$$d(n,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

εἶναι ἀπόσταση, διότι ἰσχύουν τά κάτωθι:

(i) $d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \geqq 0$

(ii) $d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = |y_1-x_1| + |y_2-x_2| = d(x,y)$

(iii) $d(x,y)+d(y,z) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + |y_1-z_1| + |y_2-z_2|$
$\geq |x_1-y_1+y_1-z_1| + |x_2-y_2+y_2-z_2| =$
$= |x_1-z_1| + |x_2-z_2| = d(x,z)$

Κ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ BOOLE

Τό σύνολο $B = \{0,1\}$ μέ τίς πράξεις (+) καί (.):

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

ἀναφέρεται συνήθως στήν ἄλγεβρα Boole.

Πρόβλημα 1.

Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $xy + y'z + x'y = 1$

Κατασκευάζουμε τόν πίνακα τῶν δυνατῶν τιμῶν (ἀληθείας) πού μᾶς ἐνδιαφέρουν:

x	y	z	x′	y′	x.y	y′z	x′y	xy+y′z+x′y	Λύσεις
0	0	0	1	1	0	0	0	0	-
0	0	1	1	1	0	1	0	1	x=0, y=0, z=1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	x=0, y=1, z=0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	-
0	1	1	1	0	0	0	1	1	x=0, y=1, z=1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	x=1, y=0, z=1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	x=1, y=1, z=0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	x=1, y=1, z=1

Πρόβλημα 2.

Τί τιμή πρέπει νά λάβει τό κ γιά νά ἔχει ἡ παρακάτω ἐξίσωση ὅσο τό δυνατόν περισσότερες λύσεις:

$$x + xy + y'\kappa = 1$$

Κατασκευάζουμε τόν πίνακα ἀληθείας θεωρώντας ὅτι τό κ εἶναι μία πα ράμετρος:

x	y	y'	x.y	x+xy+y'κ	κ=0	κ=1
0	1	1	0	1.κ	0	1
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1+1.κ	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Ἄρα ἂν κ=1, τότε ἔχουμε τίς περισσότερες λύσεις πού εἶναι οἱ ἑξῆς:

x=0, y=0 ἤ x=1, y=0 ἤ x=1, y=1

Πρόβλημα 3. Νά λυθῆ τό σύστημα:

Νά λυθεῖ $x + x'y + xy = 0$

$x' + y' + xy = 1$

Λύνουμε τήν κάθε μία ἐξίσωση χωριστά, ἡ πρώτη δίνει:

x	y	x'	x'y	xy	x+x'y+xy	Λύσεις
0	0	1	0	0	0	x=0, y=0
0	1	1	1	0	1	-
1	0	0	0	0	1	-
1	1	0	0	1	1	-

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση δίνει:

x	y	x'	y'	xy	x'+y'+xy	Λύσεις
0	0	1	1	0	1	x=0, y=0
0	1	1	0	0	1	x=0, y=1
1	0	0	1	0	1	x=1, y=0
1	1	0	0	1	1	x=1, y=1

Ἄρα ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι:

x=0 καί y=0