# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

## I. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
## II. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΟΣ
## III. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ

**Σημειώσεις τῶν παραδόσεων**
**τοῦ καθηγητοῦ κ. Στυλ. Α. Σαραντίδη Ph.D.**

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ**
**ΣΥΛΛΟΓΟΥ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**
**"Ο ΠΛΑΤΩΝ"**
**1971**

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

## I. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
## II. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΟΣ
## III. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ

**Σημειώσεις τῶν παραδόσεων**
**τοῦ καθηγητοῦ κ. Στυλ. Α. Σαραντίδη Ph.D.**

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ**
ΣΥΛΛΟΓΟΥ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
**"Ο ΠΛΑΤΩΝ"**
**1971**

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν σφραγίδα τοῦ Συλλόγου.

"Ἡ ὑποβοήθησις τῶν σπουδαστῶν τῆς Σχολῆς διά τήν ἀρτιωτέραν ἐπιστημονικήν των κατάρτισιν .......
........................" Ἄρθρον 2ον 3 ἐδ. 1

(Ἐκ τοῦ καταστατικοῦ τοῦ Συλλόγου τῶν Σπουδαστῶν)

Μάρτιος 1971

Τό παρόν διανέμεται δωρεάν εἰς τά μέλη τοῦ Συλλόγου.

# Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

## Εἰσαγωγή

Ἡ οἰκονομική ἀρχή ἀποτελεῖ τόν θεμέλιον λῖθον τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης. Συνεπῶς τό πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀριστοποιήσεως εἶναι τό κεντρικόν πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Ἡ ἀντιμετώπισις προβλημάτων μεγιστοποιήσεως καί ἐλαχιστοποιήσεως ἐγένετο, πρίν ἤ ἐμφανισθῇ ἡ τεχνική τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, διά τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως ἤ ἄλλως τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Ἡ τεχνική τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἦτο δάνειον τό ὁποῖον συνῆψεν ἡ Οἰκονομική Ἀνάλυσις μετά τῆς Μαθηματικῆς καί προϋποθέτει ὅτι αἱ πρός μεγιστοποίησιν ἤ ἐλαχιστοποίησιν συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς ἀφ' ἑνός, καί ὅτι αἱ τυχόν ὑπάρχουσαι παράπλευροι συνθῆκαι δέν εἶναι ἀνισότητες, ἀφ' ἑτέρου.

Ὑφίστανται ὅμως προβλήματα τά ὁποῖα δέν εἶναι δυνατόν νά ἀντιμετωπισθοῦν διά τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἀλλά ἀπαιτοῦν ἰδιαιτέραν τεχνικήν. Ἡ τεχνική αὕτη εἶναι ἡ τοῦ προγραμματισμοῦ (PROGRAMMING). Τό διατί δέν εἶναι δυνατή ἡ ἀντιμετώπισις ὡρισμένων προβλημάτων διά τῆς κλασικῆς τεχνικῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως δύναται νά γίνῃ ἀντιληπτόν δι' ἑνός παραδείγματος. Ἡ μεγιστοποίησις τοῦ κέρδους λαμβάνει χώραν εἰς ἐπίπεδον παραγωγῆς, ὅπου τό ὁριακόν κόστος ἰσοῦται πρός τό ὁριακόν ἔσοδον. Ἡ ὁριακή ἰσότης εἶναι ἡ ἀπαραίτητος συνθήκη διά τήν μεγιστοποίησιν.

---

Ὅρα Σ. Σαραντίδη, Εἰσαγωγή εἰς τήν Οἰκονομικήν Ἀνάλυσιν (Α' Ὁριακή Ἀνάλυσις) Πειραιεύς, 1971.

Εἶναι, ὅμως, δυνατόν ἡ παραγωγή νά περιορίζεται, ἤτοι νά μή δύναται νά ὑπερβῇ ἤ καί νά φθάσῃ τό ἐπίπεδον τῆς ὑπό τῆς ὁριακῆς ἰσότητος ὑποδεικνυομένης παραγωγῆς. Οὕτω ἐάν τό ἐπιτρεπτόν ἐπίπεδον παραγωγῆς εἶναι μικρότερον, τότε ἡ ὁριακή ἀνάλυσις δέν δύναται νά δώσῃ λύσιν.

Ὁ Προγραμματισμός δέν εἶναι οἰκονομική θεωρία, ἀλλά μαθηματική τεχνική δυναμένη νά χρησιμοποιηθῇ διά τήν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων ὀρθολογικῆς συμπεριφορᾶς. Προβλήματα ἀρίστης κατανομῆς τῶν πόρων, ἀρίστης παραγωγῆς προϊόντος καί παραγωγικῆς διαδικασίας, ἀρίστων προδιαγραφῶν προϊόντος, ἀρίστης ἐπιλογῆς μεταφορικῶν ἀγωγῶν, κ.λ.π. δύνανται νά ἐπιλυθοῦν διά τῆς τεχνικῆς τοῦ Προγραμματισμοῦ. Τόσον ἡ ὁριακή ὅσον καί ἡ γραμμική ἀνάλυσις ἀναζητοῦν "ἀρίστας" τιμάς τῶν μεταβλητῶν. Τό διαφοροποιῶν στοιχεῖον τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ὅτι, ἐπιπροσθέτως τό ἀποτέλεσμα τούτου δέον ὅπως πληροῖ ὡρισμένας συνθήκας, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται ὡς ἀνισότητες εἰς τό ὅλον πρόβλημα. Οὕτω ἐπιζητοῦμεν τήν μεγαλυτέραν παραγωγήν χωρίς νά ὑπερβαίνωμεν τούς διαθεσίμους συντελεστάς, ἤ ἐπιζητοῦμεν τήν καλλιτέραν δίαιταν χωρίς νά ὑπερβαίνωμεν ὡρισμένας ποσότητας τροφίμων. Ἕτερα χαρακτηριστικά τοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἀναλογικότης καί ἡ ἀπαίτησις μή ἀρνητικῶν τιμῶν(NONNEGATIVITY). Ἡ ἀναλογικότης συνίσταται εἰς τήν γραμμικότητα τῶν μεταβλητῶν. Ἤτοι, αἱ μεταβολαί εἰς τάς μεταβλητάς χωροῦν κατά ἀναλογικά μέρη, ἐν ἀντιθέσει πρός ὅ,τι συμβαίνει προκειμένου περί τοῦ νόμου τῆς φθινούσης ἀποδόσεως. Ὡς πρός τό ἕτερον χαρακτηριστικόν, ἤτοι τό μή ἀρνητικόν τῶν τιμῶν, ἡ μαθηματική ἀνάλυσις ἡ στηριζομένη εἰς τάς ὁριακάς ἰσότητας (ὁριακόν κόστος = ὁριακόν ἔσοδον) εἶναι δυνατόν νά μᾶς δώσῃ ἀρνητικόν ἐπίπεδον παραγωγῆς, ἐνῷ ὁ Προγραμματισμός θέτων περιορισμούς ὡς πρός τήν δυνατότητα ταύτην, ἐπιτρέπει ὑπολογισμούς ἄνευ ἀπαραδέκτων ἀποτελεσμάτων.

Κατ'ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, ὡς Προγραμματισμό δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τήν μαθηματικήν μέθοδον ἀναλύσεως καί ὑπολογισμοῦ τῶν ἀρίστων λύσεων, αἱ ὁποῖαι συμφωνοῦν πρός τούς περιορισμούς τοῦ τιθεμένους ὑπό τῶν παραπλεύρων ἀνισοτήτων. Ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ εἶναι ἡ τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων (ITERATIVE PROCEDURE), ἥτις συνίσταται εἰς μίαν σειράν λαθῶν καί δοκιμῶν βάσει ὡρισμένου προγράμματος. Κατά τήν μέθοδον ταύτην συνεχῶς προσεγγίζομεν τήν ἀρίστην λύσιν, ἥτις εἶναι ὁ ἀντικειμενικός μας σκοπός. Κατά τήν πρόοδον δέ τῶν ὑπολογισμῶν εἶναι δυνατόν νά προκύψουν δυσχέρειαι καί ἀδιέξοδα (DEGENERACY), ἅτινα ἀντιμετωπίζομεν διά διαφόρων τρόπων. Ἡ συστηματικότης τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων, δέον νά σημειωθῇ, ὅτι ἐπιτρέπει τήν διενέργειαν τῶν ὑπολογισμῶν ἐκ μέρους τῶν συγχρόνων ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, οἱ ὁποῖοι, διά καταλλήλων προγραμμάτων καί τροφοδοτήσεώς των διά τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος εἰς τήν ἰδικήν των γλῶσσαν, δύνανται νά ἐκτελέσουν ὑπολογισμούς ἐντός ὀλίγων δευτερολέπτων οἱ ὁποῖοι ἄλλως θά ἀπήτουν ἀπώλειαν χρόνου πολλῶν ἡμερῶν.

Διατύπωσις προβλήματος Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καί Γραφική Λύσις τούτου.

Ἄς λάβωμεν ἕν ἁπλοῦν παράδειγμα προβλήματος γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς τήν ἐπιχείρησιν : Παράγονται δύο τύποι προϊόντος I καί II διά τριῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς Α, Β καί Γ. Τό κατά μονάδα προϊόντος κέρδος εἶναι 6 διά τό Ι καί 9 διά τό ΙΙ. Διά τήν παραγωγήν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ Ι ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες συντελεστοῦ Α, 1 μονάς συντελεστοῦ Β καί 6 μονάδες συντελεστοῦ Γ. Διά τήν παραγωγήν, ἐξ ἄλλου, μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ προϊόντος ΙΙ ἀπαιτοῦνται 2 μ. ἐκ τοῦ Α, 5 μ. ἐκ τοῦ Β καί 2 μ. ἐκ τοῦ Γ. Οἱ διαθέσιμοι ὑπό τῆς ἐπιχειρήσεως συντελεσταί εἶναι Α = 24 μ., Β = 44 μ. καί Γ = 60 μ. Ἐρωτᾶται : πόσαι μονάδες ἐξ ἑκάστου τύπου προϊόντος δέον νά παραχθοῦν, ἵνα ἡ ἐπιχείρησις μεγιστοποιήση τό κέρδος της ;

Ἔστω ὅτι παράγονται $X_1$ μονάδες ἐκ τοῦ Ι καί $X_2$ μονάδες ἐκ τοῦ ΙΙ. Ἐπιδίωξίς μας εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τοῦ κέρδους καί συνεπῶς συμφώνως πρός τά δεδομένα τοῦ προβλήματος θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν τοῦ συνολικοῦ κέρδους, ἥν ἀποκαλοῦμεν <u>ἀντικειμενικήν συνάρτησιν</u> (OBJECTIVE FUNCTION)* :

(1) $6X_1 + 9X_2 = Z = MAX.$

Εἶναι προφανές ὅτι δέν δύνανται νά χρησιμοποιηθοῦν ποσότητες συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς πλέον τῶν ὅσων διαθέτει ἡ ἐπιχείρησις. Συνεπῶς ἡ μεγιστοποίησις τῆς (1) ὑπόκειται εἰς περιορισμούς διατυπουμένους εἰς τάς κατωτέρω ἀνισότητας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται καί παράπλευροι συνθῆκαι (SIDE-CONDITIONS) :

(2) $$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \leqq 24 \\ X_1 + 5X_2 \leqq 44 \\ 6X_1 + 2X_2 \leqq 60 \end{cases}$$

---

* Ἡ συνάρτησιν-στόχον.

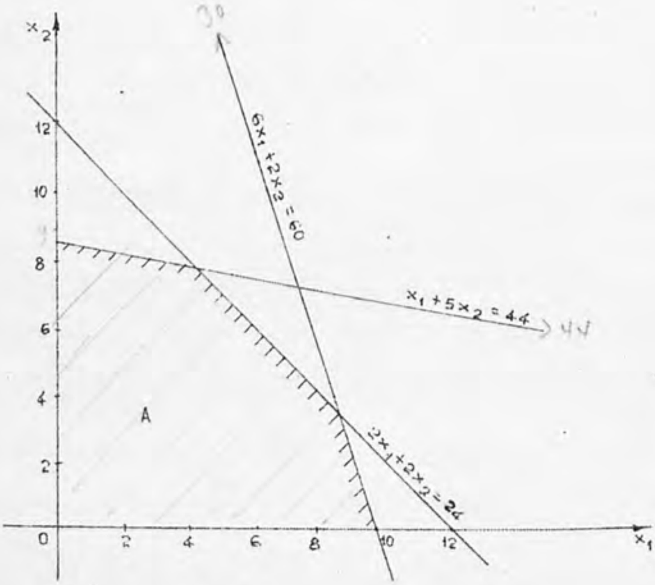
Ἐπίσης, ἡ μεγιστοποίησις τῆς (1) ὑπόκειται εἰς τήν συνθήκην ὅτι τά ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν I καί II εἶναι μή ἀρνητικά, ἤτοι

(3) $X_1 \geq 0$ , $X_2 \geq 0$

Αὕτη εἶναι ἡ τυπική μορφή ἁπλοῦ προβλήματος Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Δηλονότι μία ἀντικειμενική συνάρτησις, ἥτις ὑπόκειται εἰς ὡρισμένους περιορισμούς τιθεμένους ὑπό τῶν διαθεσίμων πόρων καί τῆς ἀνάγκης μή ἀρνητικῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς, ὡς καί ἡ ἀνεύρεσις τῆς ἀρίστης μεταξύ πολλῶν δυνατῶν λύσεων, ἤτοι τῆς μεγιστοποιήσεως τῶν κερδῶν. Τό πρόβλημα οὕτω διατυπούμενον παρουσιάζει τά ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀναφερθέντα χαρακτηριστικά τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (ἀναλογικότης, μή ἀρνητικότης).

Κάθε ζεῦγος τιμῶν τῶν $X_1$ καί $X_2$ τό ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τάς ἀνισότητας (2) καί (3) καλεῖται δυνατή λύσις (FEASIBLE SOLUTION). Ἀρίστη λύσις (OPTIMAL SOLUTION) εἶναι ἡ ἱκανοποιοῦσα τήν (1).

Δεδομένου ὅτι τό πρόβλημα ἀποτελεῖται ἐκ δύο μεταβλητῶν εἶναι δυνατόν νά τύχῃ γραφικῆς λύσεως εἰς τόν διδιάστατον χῶρον. Οὕτω κατασκευάζομεν σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων ἐχουσῶν εἰς τόν κάθετον ἄξονα τό προϊόν $X_2$ καί εἰς τόν ὁριζόντιον ἄξονα τό προϊόν $X_1$ . Εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (ἰσότης) καθορίζει μίαν γραμμήν εἰς τό ἐπίπεδον, ἐνῶ ἡ ἀνισότης ὁρίζει περιοχήν, ἥτις δεσπόζεται ὑπό τῆς γραμμῆς. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $2X_1 + 2X_2 = 24$ ἀντιπροσωπεύεται ὑπό εὐθείας γραμμῆς* εἰς τό Σχ. 1. Πᾶν σημεῖον ἐπί τῆς γραμμῆς καί ἀριστερά ταύτης ἐπαληθεύει τήν ἀνισότητα $2X_1 + 2X_2 \leq 24$. Ἀντιθέτως, πᾶν σημεῖον ἐπί καί δεξιά τῆς γραμμῆς ἐπαληθεύει τήν ἀνισότητα $2X_1+2X_2 \geq 24$. Συνεπῶς διά τῆς κατασκευῆς τῶν εὐθειῶν δυνάμεθα νά λάβωμεν τήν περιοχήν, ἥτις περιγράφεται ὑπό τῶν ἀνισοτήτων (2) καί ἱκανοποιεῖ τόσον ταύτας ὅσον καί τάς ἀνισότητας τῆς (3).




Σχ. 1

---

* Διά τήν κατασκευήν τῆς εὐθείας γραμμῆς ἐκφράζομεν τήν μίαν μεταβλητήν (ἔστω $X_2$) ὡς συνάρτησιν τῆς ἑτέρας, ἤτοι $X_2 = 12-X_1$. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα γραμμή θά ἐκκινῇ ἐκ τῆς τιμῆς 12 εἰς τόν ἄξονα $X_2$ καί θά ἔχῃ κλίσιν ἴσην πρός τήν μονάδα.

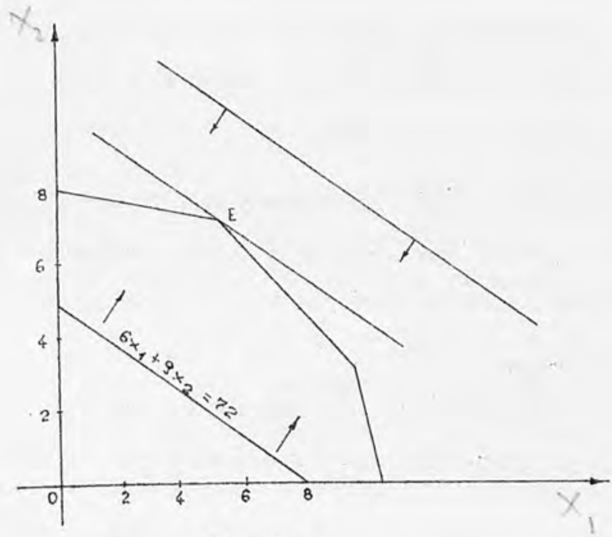
$2X_1 + 2X_2 = 2 \times 12$
$X_1 + X_2 = 12$
$X_2 = 12 - X_1$
$X_1 = 12 - X_2$

$X_1 + 5X_2 = 44$
$5X_2 = 44 - X_1$
$X_2 = \frac{44 - X_1}{5} \approx 9 - \frac{X_1}{5}$
$X_1 = 44 - 5X_2$

$6X_1 + 2X_2 = 60$
$3X_1 + X_2 = 30$
$X_2 = 30 - 3X_1$
$3X_1 = 30 - X_2$
$X_1 = 10 - \frac{X_2}{3}$

Ἡ περιοχή Α, ἥτις δεσπόζεται ὑπό τῶν εὐθειῶν γραμμῶν τῶν ἀντιπροσωπευουσῶν τάς παραπλεύρους συνθήκας τοῦ προβλήματος, καλεῖται <u>περιοχή δυνατῶν λύσεων</u> (FEASIBLE REGION), καί ἐπισκιάζεται πρός διάκρισιν. Ἡ λοιπή περιοχή πέραν ταύτης καί ἐντός τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου τοῦ Καρτεσιανοῦ συστήματος εἶναι ἡ περιοχή τῶν μή ἐφικτῶν λύσεων.

Ὡς εἰκός, ἡ ἀρίστη λύσις θά ἀναζητηθῇ εἰς τήν περιοχήν τῶν ἐφικτῶν λύσεων. Θά ἀναζητηθοῦν τοιαῦται τιμαί τῶν $X_1$ καί $X_2$, ὥστε ἡ ἀντικειμενική συνάρτησις 6X + 9X καταστῇ μεγίστη. Ἡ συνάρτησις δύναται νά λάβῃ πολλάς τιμάς, μία τῶν ὁποίων εἶναι ἡ $6X_1 + 9X_2 = 72$. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ὡς τό Σχ. 2 δεικνύει, κάθε σημεῖον τῆς ὁποίας ἀποτελεῖ ἐφικτήν λύσιν, ἤτοι λύσιν ἥτις εἶναι ἐντός τῆς περιοχῆς τῶν δυνατῶν λύσεων.




Σχ. 2

Ἡ εὐθεῖα αὕτη ὅσον πλησιέστερον εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται, τόσον μικρότερον κέρδος ὑποδηλοῖ. Ἀντιθέτως ἀπομακρυνομένη συνεχῶς πρός τά δεξιά ἀντιπροσωπεύει ὁλοέν καί μεγαλύτερον κέρδος. Ὡς ἐκ τοῦ Σχ. 2. ἐμφαίνεται, τό ἀκρότατον σημεῖον τῆς περιοχῆς τῶν ἐφικτῶν λύσεων, ὅπερ εἶναι καί σημεῖον τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρός τήν εὐθεῖαν τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, εἶναι τό σημεῖον Ε. Τό σημεῖον τοῦτο ἀποτελεῖ τήν ἀρίστην λύσιν, ὡς δίδον τό μέγιστον κέρδος, καί ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμάς 8 καί 4 τῶν $X_2$ καί $X_1$ , ἀντιστοίχως. Κατά συνέπειαν τό συνολικόν κέρδος θά εἶναι $6.(4)+9.(8)=96$ ν.μ.

Ἡ λύσις $X_1=4$ καί $X_2=8$ ἱκανοποιεῖ τούς περιορισμούς τῆς (2) καί (3). Δέον, ὅμως, νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ὡς ἄνω ἀρίστη λύσις ἱκανοποιεῖ τούς περιορισμούς τῆς (2) ὡς ἰσότητας, πλήν τῆς τρίτης, ἤτοι

$$2(4)+2(8) = 24$$
$$4+5(8) = 44$$
$$6(4)+2(8) < 60$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταί Α καί Β χρησιμοποιοῦνται πλήρως, ἐνῶ ὁ συντελεστής Γ χρησιμοποιεῖται μερικῶς καταλειπομένης ποσότητος ἐκ τούτου μή χρησιμοποιουμένης. Τό γεγονός ὅτι οἱ συντελεσταί Α καί Β χρησιμοποιοῦνται πλήρως δύναται νά ἐξαχθῇ ἀμέσως ἐκ τοῦ διαγράμματος, ὅπου τό σημεῖον Ε εἶναι κοινόν σημεῖον τῶν εὐθειῶν τῶν δύο συντελεστῶν Α καί Β.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτει ὅτι, ὅταν τό πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ συνίσταται ἐκ δύο μεταβλητῶν, τότε ἡ περιοχή τῶν ἐφικτῶν λύσεων δίδεται ὑπό ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου. Ὅταν αἱ μεταβληταί εἶναι τρεῖς, τότε οἱ περιορισμοί ἀπεικονίζονται δι' ἐπιφανειῶν, ἡ δέ περιοχή ἐφικτῶν λύσεων εἶναι κατά συνέπειαν κυρτόν πολύεδρον. Εἰς τήν περίπτωσιν τῶν περισσοτέρων τῶν τριῶν μεταβλητῶν, ἡ γραφική μέθοδος ἀπόλλυσι τήν ἀξίαν αὐτῆς, ὡς εἰκός, καί ἐφαρμογῆς τυγχάνει ἡ Μέθοδος SIMPLEX.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω γραφικῆς λύσεως διεπιστώθη ὅτι τό ἄριστον σημεῖον τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος κεῖται ἐπί τῆς γραμμῆς, ἥτις δεσπόζει τῆς περιοχῆς Α, καί ἡ ὁποία καλεῖται μέτωπον σημείων ἐπιλογῆς. Τό γεγονός ὅτι σημεῖον τι ἐπί τοῦ μετώπου εἶναι τό ἄριστον προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι συμφέρει, ἐφ' ὅσον ἡ παραγωγή εἶναι ἐπικερδής καί γραμμικῆς μορφῆς ἡ συνάρτησις ταύτης, νά αὐξήσωμεν τήν παραγωγήν μέχρις σημείου ἐξαντλήσεως τῆς δυναμικότητος, ἤ τῆς διαθεσίμου ποσότητος συντελεστῶν. Εἰς τό σημεῖον Ε ἐξαντλοῦνται αἱ ποσότητες τῶν συντελεστῶν Α καί Β, οὐχί ὅμως καί τοῦ Γ. Τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς ἕν θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ κατά τό ὁποῖον, ἐάν τό πρόγραμμα ἀναφέρεται εἰς δύο μεταβλητάς (δύο προϊόντα), τότε ἀκριβῶς δύο συντελεσταί χρησιμοποιοῦνται πλήρως. Οὕτω ἐάν ἐπιχείρησίς τις διαθέτη 5 συντελεστάς καί παράγη 50 προϊόντα, θά πρέπει νά περιστείλη τόν ἀριθμόν τῶν προϊόντων εἰς 5 διά νά μεγιστοποιήση τά κέρδη της. Τοῦτο φαίνεται ὀλίγον περίεργον, ἀλλά πρέπει νά τό δεχθῶμεν ὡς συνέπειαν τῆς ὑποθέσεως τῆς γραμμικότητος.

Ἐρωτᾶται, ὅμως, ποία ἡ λογική τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ; Διατί ὁ ἀριθμός τῶν προϊόντων νά καθορίζη καί τόν ἀριθμόν τῶν πλήρως χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν. Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὅτι, ἐάν ὑπάρχη εἷς περιωρισμένος συντελεστής, τότε συμφέρει ἡ παραγωγή τοῦ προϊόντος ἐκείνου, ὅπερ ἀποφέρει τό μεγαλύτερον κέρδος κατά μονάδα χρησιμοποιουμένου συντελεστοῦ. Ἡ ὕπαρξις καί δευτέρου προϊόντος θά ὁδηγήση εἰς τήν πλήρη χρησιμοποίησιν ἑτέρου ἐκ τῶν τριῶν συντελεστῶν, ὥστε νά ληφθῇ τό μεγαλύτερον κατά μονάδα συντελεστοῦ κέρδος. Θά ἠδυνάμεθα κατά συνέπειαν νά εἰσαγάγωμεν καί τρίτον προϊόν πρός πλήρη χρησιμοποίησιν τοῦ τρίτου συντελεστοῦ.

## Γενική Διατύπωσις τοῦ Προβλήματος τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν τό γενικόν πρόβλημα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ μέ ν μεταβλητάς ὡς κατωτέρω:

$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_\nu x_\nu = z = \max.$ (ἀντικειμενική συνάρτησις) ὑποκειμένη εἰς

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu} x_\nu &\leqq \beta_1 \\
\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2} \; x_\nu &\leqq \beta_2 \\
\ldots\ldots \;\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \; &\ldots \\
\ldots\ldots \;\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \; &\ldots \\
\ldots\ldots \;\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \; &\ldots \\
\alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu} x_\nu &\leqq \beta_\mu
\end{aligned}$$

καί $x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots\ldots,\ x_\nu \geqq 0$

ὅπου $\gamma_i$ ($i=1,2,\ldots\nu$) = τό κατά μονάδα κέρδος τοῦ προϊόντος i

$\alpha_{ij}$ ($i = 1,2,\ldots\nu$, $j = 1,2,\ldots\mu$) = ποσότης συντελεστοῦ j ἀπαιτουμένη πρός παραγωγήν μιᾶς μονάδος προϊόντος i.

$x_i$ ($i = 1,2,\ldots\nu$) = μονάδες προϊόντος i

$\beta_j$ ($j = 1,2,\ldots\mu$) = διαθέσιμοι μονάδες συντελεστοῦ j.

$\nu$ = ἀριθμός προϊόντων, $\mu$ = ἀριθμός συντελεστῶν.

Ἡ διατύπωσις τοῦ προβλήματος δύναται νά γίνῃ διά τοῦ συμβολισμοῦ τῶν μητρῶν ὡς κατωτέρω.

$$[\gamma_1 \;\; \gamma_2 \;\; \ldots\ldots \;\; \gamma_\nu] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = z \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$x \geqq 0 \qquad (3)$$

Πλέον συνοπτικῶς ἡ διά μητρῶν παρουσίασις δύναται νά γίνη ὡς ἑξῆς:

Πρός ἀριστοποίησιν $\gamma x$

ὑποκειμένη εἰς : $Ax \leqq \beta$

$x \geqq 0$

ὅπου $\gamma$ = διάνυσμα-γραμμή τῶν $\gamma_i$

$\beta$ = διάνυσμα-στήλη τῶν $\beta_j$

$A$ = μήτρα τεχνολογικῶν συντελεστῶν

$x$ = διάνυσμα-στήλη τῶν προϊόντων.

Τό πρόβλημα δύναται ἐπίσης νά διατυπωθῆ διά τῆς χρήσεως συμβόλων τῶν ἀθροιστῶν ὡς ἑξῆς:

Πρός ἀριστοποίησιν $\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i x_i$

ὑποκειμένη εἰς:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} x_i \leqq \beta_j$$

$$x_i \geqq 0$$

Τό δυαδικόν πρόβλημα (The dual problem).

Έκαστον γραμμικόν πρόγραμμα όπερ αποτελεί τό αρχικόν πρόβλημα σχετίζεται στενώς πρός έτερον πρόβλημα καλούμενον δυαδικόν (dual). Ούτω, τό πρόβλημα τής μεγιστοποιήσεως έχει ώς δυαδικόν αντίστοιχον έν πρόβλημα ελαχιστοποιήσεως. Τό αρχικόν πρόβλημα τής μεγιστοποιήσεως καί τό δυαδικόν πρόβλημα τής ελαχιστοποιήσεως είναι δύο όψεις τού αυτού γραμμικού προβλήματος. Ή λύσις τού ενός προβλήματος παρέχει τήν λύσιν καί εις τό έτερον.

Πρός κατανόησιν τών ανωτέρω άς διατυπώσωμεν έν αρχή τό πρόβλημα καί κατόπιν νά προβώμεν εις τήν οικονομικήν ερμηνείαν τούτου. Άς υποθέσωμεν ότι τό αρχικόν πρόβλημα συνίσταται εις τήν μεγιστοποίησιν τού κέρδους παραγωγικής μονάδος παραγούσης δύο αγαθά $Q_1$ καί $Q_2$, χρησιμοποιούσης δύο συντελεστάς εις διαθέσιμον δυναμικότητα $K_1$ καί $K_2$ κατά συγκεκριμένην αναλογίαν καί μέ κατά μονάδα προϊόντος κέρδος $\Pi_1$ καί $\Pi_2$, αντιστοίχως. Τό αρχικόν πρόβλημα διατυπούται ώς εξής:

Πρός μεγιστοποίησιν: $\Pi = \pi_1 Q_1 + \pi_2 Q_2$

υποκειμένη εις $\alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 \leqq K_1$

$\alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 \leqq K_2$

$Q_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0$

Τό δυαδικόν πρόβλημα διατυπούται ώς εξής:

Πρός ελαχιστοποίησιν: $C = K_1 Y_1 + K_2 Y_2$

υποκειμένη εις $\alpha_{11} Y_1 + \alpha_{21} Y_2 \geqq \pi_1$

$\alpha_{12} Y_1 + \alpha_{22} Y_2 \geqq \pi_2$

$Y_1 \geqq 0, \quad Y_2 \geqq 0$

Έκ τής ανωτέρω διατυπώσεως προκύπτει ότι:

(α) Οί σταθεροί συντελεσταί (σειρά) τής αντικειμενικής συναρτήσεως τού αρχικού προβλήματος αποτελούν τούς περιο-

ρισμούς (στήλη) τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος.
(β) Οἱ περιορισμοί (στήλη παραγωγικῶν συντελεστῶν) τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἀποτελοῦν σταθερούς συντελεστάς (σειρά) τῆς ἀντικειμενικῆς τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος συναρτήσεως.
(γ) Οἱ σταθεροί συντελεσταί τῶν περιορισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἐναλλάσσονται εἰς τούς περιορισμούς τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος. Ἤτοι, ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τῶν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη τῶν συντελεστῶ τῶν περιορισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος.
(δ) Ὁ ἀριθμός τῶν μεταβλητῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν ἀριθμόν τῶν περιορισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ.
(ε) Τά σημεῖα τῶν ἀνισοτήτων τοῦ ἀρχικοῦ εἶναι ἀντίστροφα ἐκείνων τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος.

Ἄς ἔλθωμεν τώρα εἰς τήν ἑρμηνείαν τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος. Οἱ συντελεσταί $\alpha_{11}$ καί $\alpha_{12}$ τοῦ πρώτου περιορι - σμοῦ τοῦ ἀρχικοῦ δεικνύουν τό ποσόν τῆς εἰσροῆς 1, ὅπερ ἀπαιτεῖται κατά μονάδα προϊόντος $Q_1$ καί προϊόντος $Q_2$. Οἱ συντελεσταί $\Omega_{21}$ καί $Q_{22}$ δεικνύουν τό ποσόν τῆς εἰσροῆς 2, ὅπερ ἀπαιτεῖται διά τήν παραγωγήν τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος $Q_1$ καί τοῦ προϊόντος $Q_2$. Οὕτω ὁ πρῶτος περιορισμός δεικνύει ὅτι τό εἰς εἰσροάς τοῦ συντελεστοῦ 1 ἀπαιτούμενον ποσόν διά τήν παραγωγήν τῶν δύο προϊόντων δέν πρέπει νά ὑπερβαίνῃ τήν διαθέσιμον ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ $K_1$. Τό αὐτό γεγονός δεικνύει καί ὁ δεύτερος περιορισμός διά τόν συντελεστήν $K_2$. Ἄς ἔλθωμεν τώρα εἰς τούς συντελεστάς τῶν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος. Οἱ συντελεσταί τοῦ πρώτου περιορισμοῦ $\alpha_{11}$ καί $\alpha_{21}$ δεικνύουν τά ἀπαιτούμενα ποσά ἐκ τῶν δύο εἰσροῶν κατά μονάδα προϊόντος $Q_1$. Οἱ συντελεσταί $\alpha_{12}$ καί $\alpha_{22}$ δεικνύον τά ἀπαιτούμενα ποσά ἐκ τῶν δύο εἰσροῶν κατά μονάδα προϊόντος $Q_2$.

Εἰς τήν ἀντικειμενικήν συνάρτησιν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἐπιδιώκεται ἡ ἀνεύρεσις τῶν τιμῶν τῶν $Q_1$ καί $Q_2$, αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν τό συνολικόν κέρδος μέ σταθερούς συντελεστάς κέρδους $\pi_1$ καί $\pi_2$. Εἰς τήν ἀντικειμενικήν συνάρτησιν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἐπιδιώκεται ἡ ἀνεύρεσις τιμῶν $Y_1$ καί $Y_2$, τάς ὁποίας πρέπει νά λάβουν οἱ συντελεσταί $K_1$ καί $K_2$ ἀντιστοίχως, διά νά ἐλαχιστοποιηθῇ τό κόστος. Αἱ τιμαί αὗται καλοῦνται <u>ὑπολογιστικαί</u> (shadow prices) καί ἀντανακλοῦν τήν ὁριακήν συμβολήν ἑκάστου συντελεστοῦ, ὅστις περιλαμβάνεται εἰς τό πρόβλημα τῆς ἀριστοποιήσεως. Οὕτω ἡ συνάρτησις $C = K_1 Y_1 + K_2 Y_2$ δεικνύει τήν συνολικήν ἀξίαν τῶν εἰσροῶν. Ἡ ἀξία αὕτη πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλαχίστη εἰς τό πρόβλημα τῆς ἀριστοποιήσεως, καί ἀντιστρόφως ἡ ἀξία τοῦ $\Pi = \pi_1 Q_1 + \pi_2 Q_2$ πρέπει νά εἶναι ἡ μεγίστη.

Ἡ πρώτη ἀνισότης τῶν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος μᾶς λέγει ὅτι ἡ συνολική συμβολή τῶν εἰσροῶν διά τήν παραγωγήν μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος $Q_1$, ἤτοι τό ποσόν τῆς εἰσροῆς 1 ἐπί τήν ὑπολογιστικήν τιμήν $Y_1$ σύν τῷ γινομένῳ τοῦ ποσοῦ τῆς εἰσροῆς 2 ἐπί τήν τιμήν $Y_2$, πρέπει νά εἶναι τουλάχιστον ὅσον τό κατά μονάδα κέρδος τοῦ $Q_1$, ἤτοι $\pi_1$. Ἡ ἑρμηνεία τούτου εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἡ ἐπιχείρησις ὀφείλει τό κέρδος της εἰς τήν συμβολήν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν τούς ὁποίους ἀπασχολεῖ, καί συνεπῶς τοῦτο δέον ὅπως κατανεμηθῇ (καταλογισθῇ) μεταξύ τούτων. Τό καταλογιζόμενον, ὅμως, κέρδος εἰς τάς διαφόρους εἰσροάς πρέπει νά εἶναι τουλάχιστον ἴσον πρός τό κέρδος τό ὁποῖον προέρχεται ἀπό τήν μονάδα τοῦ προϊόντος.

Τό αὐτό ἰσχύει καί διά τήν ἀνισότητα τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος.

Δεδομένου ὅτι ἡ καταλογιζομένη εἰς τούς συντελεστάς ἀξία εἶναι τό κόστος τῆς παραγωγῆς, τήν ἀνωτέρω πρότασιν δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν καί ὡς ἑξῆς: Τό κόστος παραγωγῆς μιᾶς μονάδος προϊόντος δέν δύναται νά εἶναι μικρότερον τῆς τιμῆς.

Διά τήν κατανόησιν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος καί τῆς σχέσεώς του πρός τό ἀρχικόν, τά κάτωθι θεωρήματα δυαδικότητος κέκτηνται σημασίας:

(α) Ἐάν ὑφίσταται μέγιστον διά τό Π, τότε ὑφίσταται ἐλάχιστον καί διά τό C, καί ἀντιθέτως. Ἐκ τούτου ἕπεται ἐπίσης ὅτι $\max \Pi = \min C$, ἤτοι εἰς τήν ἀρίστην ἐφικτήν λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος, τό μέγιστον κέρδος Π θά εἶναι ἴσον πρός τήν ἐλαχίστην ἀξίαν τήν κατανεμομένην εἰς τούς συντελεστάς τῆς παραγωγῆς, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος. Αἱ ὑπολογιστικαί τιμαί δέον, συνεπῶς, ὅπως εἶναι τοιαῦται ὥστε νά ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀνωτέρω ἰσότης.

(β) Ἡ ἀρίστη λύσις θά περιλάβη ἐκεῖνα μόνον τά προϊόντα (ἤ τάς παραγωγικάς δραστηριότητας) τῶν ὁποίων ἡ ζημία εἶναι μηδέν. Ἡ ὕπαρξις ζημίας εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ γενομένη κατανομή τῶν πόρων δέν εἶναι ἡ πρέπουσα καί συνεχῶς ἀπαιτεῖται ἀνακατανομή. Ἐπίσης τό θεώρημα τοῦτο μιᾶς ὑποδεικνύει ὅτι αἱ ὑπολογιστικαί τιμαί εἶναι θετικαί μόνον διά τούς συντελεστάς οἱ ὁποῖοι ἀπασχολοῦνται πλήρως.

## II ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΟΣ

Εἰς τό ὑπόδειγμα παραγωγῆς "ἕν ἀγαθόν-δύο παραγωγικοί συντελεσταί" διεπιστώσαμεν τήν ἀπεριόριστον δυνατότητα ὑποκαταστάσεως μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς*. Τό γεγονός τοῦτο ἐκδηλοῦται διά τῆς κανονικοῦ σχήματος καμπυλότητος (κυρτότης πρός τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων) τῶν γνωστῶν καμπύλων ἰσοπαραγωγῆς (isoquant curves), δεικνυουσῶν ἀπείρους συνδιασμούς τῶν δύο συντελεστῶν πρός παραγωγήν τῆς αὐτῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει οἱ παραγωγικοί συντελεσταί εἶναι πλήρως ἀνταγωνιστικοί μεταξύ των. Οὕτω ἔχομεν ἐνώπιόν μας μίαν συνεχῆ συνάρτησιν παραγωγῆς μέ φθίνοντα ὁριακόν λόγον ὑποκαταστάσεως καί ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως μεγαλυτέραν τοῦ μηδενός.

Ἀντιθέτως, ὅταν οἱ συντελεσταί συνδυάζωνται κατά αὐστηρῶς καθοριζομένην ἀναλογίαν, μή ἐπιτρεπομένης τῆς ὑποκαταστάσεως (περίπτωσις συμπληρωματικότητος), ἡ συνάρτησις παραγωγῆς δέν εἶναι συνεχής καί ἡ καμπύλη ἰσοπαραγωγῆς εἶναι ὀρθή γωνία. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην, τόσον ὁ ὁριακός λόγος ὑποκαταστάσως, ὅσον καί ἡ ἐλαστικότης ταύτης εἶναι μηδέν. Ἔστω ὅτι διά τήν παραγωγήν μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος ἀπαιτεῖται ποσότης $\alpha_1$ ἐκ τοῦ συντελεστοῦ "ἐργασία" (L) καί ποσότης $\alpha_2$ ἐκ τοῦ συντελεστοῦ "κεφάλαιον" (K), τότε βάσει τῆς ὁμογενοῦς γραμμικῆς συναρτήσεως παραγωγῆς $X = f(L,K)$, θά ἔχωμεν:

$$L \geqq \alpha_1 X \qquad \text{καί} \qquad K \geqq \alpha_2 X.$$

Δεδομένου ὅτι οἱ συντελεσταί εἰσέρχονται εἰς τήν παραγω-

*Ὅρα Σ. Σαραντίδη, Εἰσαγωγή εἰς τήν Οἰκονομικήν Ἀνάλυσιν (Α΄ Ὁριακή Ἀνάλυσις), Κεφ. IV.

γήν κατά σταθεράν άναλογίαν θά έχωμεν : $\frac{L}{K}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Ό λόγος L/K ή $\alpha_1/\alpha_2$ είναι σταθερός καί δεικνύει τήν κλίσιν διανύσματος διερχομένου διά τῆς άρχῆς τῶν άξόνων. Τό διάνυσμα τοῦτο δεικνύει τήν συγκεκριμένην παραγωγικήν διαδικασίαν (PRODUCTION PROCESS), ἤτοι τόν τρόπον καθ'ὅν λαμβάνομεν διάφορα ἐπίπεδα παραγωγῆς διά τοῦ συγκεκριμένου σταθεροῦ συνδυασμοῦ L καί K. Τό διάνυσμα τοῦτο, τό ὁποῖον καλεῖται καί παραγωγική δραστηριότης (ACTIVITY) δύναται νά γραφῆ ὡς μία στήλη ἔχουσα ὡς στοιχεῖα τάς ποσότητας ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διά νά παραχθῆ μία μονάς τοῦ προϊόντος. Ἤτοι

$$C\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

ὅπου τό C δεικνύει τήν παραγωγικήν δραστηριότητα, δηλονότι τόν σταθερόν συνδυασμόν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρός παραγωγήν τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος, τά δέ $\alpha_1$ καί $\alpha_2$ τούς τεχνολογικούς συντελεστάς. Συνεπῶς διά τήν παραγωγήν ποσότητος λ, πολλαπλασιάζομεν τό βαθμωτόν τοῦτο ἐπί τό διάνυσμα-στήλη, ἤτοι

$$\lambda\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\end{bmatrix}$$

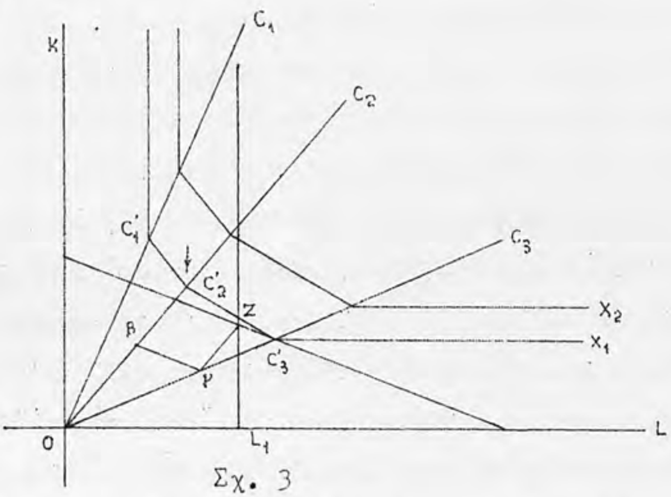
Ἡ παραγωγή τοῦ προϊόντος εἶναι δυνατόν νά γίνη διά περισσοτέρων τοῦ ἑνός συνδυασμῶν, ἤτοι ἡ παραγωγική μονάς δυνατόν νά ἔχη εἰς τήν διάθεσίν της περισσοτέρας τῆς μιᾶς παραγωγικάς δραστηριότητας. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην θά ἔχωμεν περισσοτέρας στήλας. Οὕτω ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ παραγωγικοί συντελεσταί εἶναι δύο καί αἱ παραγωγικαί δραστηριότητες εἶναι τρεῖς ὡς κατωτέρω :

$$C_1=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{bmatrix} \quad C_2=\begin{bmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\end{bmatrix} \quad C_3=\begin{bmatrix}\alpha_{13}\\ \alpha_{23}\end{bmatrix}$$

Οἱ ἀνωτέρω συνδυασμοί δύνανται νά παρουσιασθοῦν ὑπό τήν μορφήν μήτρας, ἡ ὁποία καλεῖται τεχνολογική μήτρα (TECHNOLOGY MATRIX), ἤ μήτρα τεχνολογικῶν δυνατοτήτων, ὡς ἑξῆς :

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{bmatrix}$$

Δεδομένου ὅτι οἱ παραγωγικοί συντελεσταί εἶναι δύο, δυνάμεθα νά παρουσιάσωμεν τάς παραγωγικάς δραστηριότητας είς τόν διδιάστατον χῶρον δι'ἀναλόγων διανυσμάτων, ὡς είς τό κατωτέρω Σχ. 3.




Σχ. 3

Είς τό ἀνωτέρω διάγραμμα τό διάνυσμα $C_1$ δεικνύει τήν σταθεράν ἀναλογίαν ($\alpha_{11}$ : $\alpha_{21}$ ) κατά τήν ὁποίαν οἱ συντελεσταί K καί L εἰσέρχονται είς τήν παραγωγήν τοῦ προϊόντος είς διάφορα ἐπίπεδα $X_1, X_2$ , κ.ο.κ. Ἡ μεγαλυτέρα χρησιμοποίησις ποσοτήτων καί ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς είς τήν αὐτήν ἀναλογίαν, μᾶς παρέχει ὑψηλότερον ἐπίπεδον παραγωγῆς.

'Αντιστοίχως τά διανύσματα $C_2$ καί $C_3$ δεικνύουν σταθεράς ἀναλογίας ($\alpha_{12}$ : $\alpha_{22}$) καί ($\alpha_{13}$ : $\alpha_{23}$) χρησιμοποιήσεως τῶν δύο συντελεστῶν εἰς διάφορα ἐπίπεδα παραγωγῆς X. Τά σημεῖα $C_1'$ $C_2'$ καί $C_3'$ δεικνύουν τήν αὐτήν παραγωγήν, ἀλλά μέ διαφορετικούς συνδυασμούς εἰσροῶν.

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως ὅτι τό σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς τῶν καμπύλων ἰσοπαραγωγῆς καί τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους δεικνύει τήν ἀρίστην λύσιν γραφικῶς, εἰς τό πρόβλημα τοῦ συνδυασμοῦ ἐλαχίστου κόστους (LEAST-COST COMBINATION). Εἰς τό πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καί τῆς ἀναλύσεως δραστηριότητος ὑφίστανται περιορισμοί ἀναφερόμενοι τόσον εἰς τήν διαθέσιμον ποσότητα τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ὅσον καί τό ἐπιδιωκόμενον ἐπίπεδον παραγωγῆς. Οὕτω ἐάν ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ συντελεστοῦ L εἶναι $L_1$ καί ἡ παραγωγή-στόχος $X_1$ , τότε ἡ λύσις $C_3'$ δέν εἶναι ἐφικτή* , διότι κεῖται ἐκτός τῆς περιοχῆς τῶν ἐφικτῶν λύσεων. 'Αλλ' ἐπίσης ἡ παραγωγική δραστηριότης $C_3$ δέν δύναται νά τύχῃ ἐφαρμογῆς μόνη. Τοῦτο διότι ἡ ποσότης τῆς ἐργασίας L εἶναι ἀνεπαρκής διά τήν παραγωγήν $X_1$ μονάδων τοῦ προϊόντος κατά τήν παραγωγικήν ταύτην διαδικασίαν, ἥτις, λόγῳ τῆς κλίσεως τοῦ διανύσματος $C_3$, χαρακτηρίζεται ὡς ἐντάσεως ἐργασίας. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τούς δύο περιορισμούς (τήν περιωρισμένην ποσότητα τοῦ L καί τήν

---

* 'Η λύσις $C_3$ καλεῖται γωνιακή (CORNER SOLUTI N) καί ἔχει εὐρέα περιθώρια ἀντοχῆς, Ἤτοι, μικραί μεταβολαί τῶν τιμῶν τῶν δύο συντελεστῶν, καί συνεπῶς μεταβολή τῆς κλίσεως τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους, δέν μεταβάλλουν ταύτην.

καθωρισμένην παραγωγήν), ἡ ἀρίστη λύσις ἀπαιτεῖ τήν χρησιμοποίησιν συνδυασμοῦ τῶν δύο παραγωγικῶν διαδικασιῶν $C_3$ καί $C_2$ . Ὁ συνδυασμός οὗτος δεικνύεται ὑπό τοῦ σημείου Z, ὅστις εἶναι ὁ ἀνώτατος συνδυασμός εἰς τήν περιοχήν τῶν ἐφικτῶν λύσεων. Ὁ συνδυασμός τῶν δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ὁ ἐμφαινόμενος ὑπό τοῦ σημείου Z ἀντιπροσωπεύει Zγ (ἤ αβ) ἐκ τῆς δραστηριότητος $C_2$ καί Oγ ἐκ τῆς δραστηριότητος $C_3$ .

Δέον νά σημειωθῇ ὅτι διά τήν ἀρίστην λύσιν ἐπιτρέπεται συνδυασμός τῶν γειτονικῶν διανυσμάτων, ἤτοι $C_3$ καί $C_2$ ἤ $C_2$ καί $C_1$ . Τοῦτο στηρίζεται εἰς τό βασικόν θεώρημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ κατά τό ὁποῖον ἡ ἀρίστη λύσις ἀπαιτεῖ συνδυασμόν δραστηριοτήτων ὄχι περισσοτέρων τῶν περιορισμῶν. Ἡ λύσις αὕτη καλεῖται βασική λύσις. Οὕτω ἐάν οἱ περιορισμοί ἦσαν αἱ ποσότητες τῶν δύο συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἡ ἀρίστη λύσις θά προέκυπτε πάλιν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, μέ τήν διαφοράν ὅτι αὕτη θά ἀπεσκόπει εἰς τήν μεγιστοποίησιν τοῦ προϊόντος καί οὐχί εἰς τήν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ κόστους, ὡς εἰς τήν ἀνωτέρω περίπτωσιν, ὅπου ὁ εἷς τῶν περιορισμῶν ἦτο τό ἐπιθυμητόν ἐπίπεδον παραγωγῆς.

Ἀναλυτικῶς ὁ συνδυασμός τῶν δύο δραστηριοτήτων δύναται νά δοθῇ ὡς ἀκολούθως :

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{ἤ} \quad \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \{ \alpha_{ij} \} \quad \text{γενικώτερον,}$$

ὅπου ν ὁ ἀριθμός τῶν ἐπί μέρους δραστηριοτήτων (στῆλαι τῆς τεχνολογικῆς μήτρας), καί $\lambda \geq 0$, διότι δέν εἶναι νοητόν ἀρνητικόν ἐπίπεδον παραγωγῆς.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτει ὅτι ἡ ἔννοια τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος εἰς τόν γραμμικόν προγραμματισμόν ἐνέχει τάς ἑξῆς ὑποθέσεις :

(α) Ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἐκδηλουμένης εἰς τήν σταθεράν κλίσιν τοῦ διανύσματος, ἤτοι $\alpha_{ij} : \alpha_{kj}$

(β) Σταθεράς ἀπόδοσις κατά κλίμακα (COSTANT RETURNS TO SCALE), ἤτοι ὁμογένεια πρώτου βαθμοῦ.

(γ) Διαιρετότης, ἥτις σημαίνει τήν δυνατότητα αὐξήσεως ἤ μειώσεως τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς κατά τήν ἔννοιαν τῆς ὑποθέσεως (β) καί ὑπό συνθήκας τῆς ὑποθέσεως (α). Ὁ πολλαπλασιασμός ἐπί τό βαθμωτόν λ ὑποδηλοῖ τήν ὑπόθεσιν ταύτην, δηλονότι $\{ \lambda\alpha_{ij} \}$

(δ) Προσθετικότης, ἥτις σημαίνει ὅτι αἱ παραγωγικαί δραστηριότητες δύνανται νά συνδυασθοῦν ἄνευ μετατροπῆς τῶν διαρθρωτικῶν συντελεστῶν ἐξ ὧν ορίζονται.

Δηλονότι $\Sigma\alpha_{ij}$ ἤ $C_j + C_k = \{ (\alpha_{ij} + \alpha_{ik}) \}$

# III. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣΡΟΩΝ-ΕΚΡΟΩΝ (INPUT-OUTPUT ANALYSIS)

## Εἰσαγωγή

Ἡ δημοσίευσις τῆς μελέτης "QUANTITATIVE INPUT-OUTPUT RELATIONS IN THE ECONOMIC SYSTEM OF THE UNITED STATES", τόν Αὔγουστον τοῦ 1936 ὑπό τοῦ WASSILY LEONTIEF, ἤνοιξεν ἕν νέον κεφάλαιον εἰς τόν κλάδον τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως καί τῆς οἰκονομικῆς στατιστικῆς. Κατά τό αὐτό ἀκριβῶς ἔτος ἐδημοσιεύθη καί ἡ Γενική Θεωρία "τοῦ JOHN MAYNARD KEYNES, ἡ ὁποία ἐπρόκειτο νά ἀποτελέση ἐπανάστασιν εἰς τήν μέχρις τῆς ἐποχῆς ἐκείνης οἰκονομικήν σκέψιν. Ἀλλ' ἐνῶ τό ἐνδιαφέρον τοῦ KEYNES συνεκεντρώθη ἐπί τοῦ προβλήματος τῆς χρονίας ἀνεργίας τῶν κεφαλαιοκρατικῶν οἰκονομιῶν, ἤτοι ἐπί τῆς ἀναλύσεως τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου εἰσοδήματος καί ἀπασχολήσεως, τό ἐνδιαφέρον τοῦ Ἀμερικανοῦ καθηγητοῦ LEONTIEF συνεκεντρώθη ἐπί τοῦ προβλήματος τῆς διαρθρώσεως τῶν οἰκονομιῶν καί τῶν μεταξύ τῶν κλάδων καί τομέων τῆς οἰκονομίας σχέσεων, ἤτοι τῶν καλουμένων διακλαδικῶν σχέσεων ἤ τῆς καλουμένης ἀναλύσεως εἰσροῶν-ἐκροῶν. Ὁ LEONTIEF, λοιπόν, κατεσκεύασε πίνακα (μήτραν) δεικνύοντα τάς μεταξύ τῶν διαφόρων κλάδων συναλλαγάς διά τήν Ἀμερικανικήν οἰκονομίαν. Ὡς εἰκός, ἡ κατασκευή καί ἀνάλυσις ἑνός τοιούτου πίνακος, ὅστις δεικνύει, δίκην φωτογραφίας, τήν ὅλην διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας, ἀνήκει εἰς τό εἶδος ἐκεῖνο τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως, ὅπερ ἐκαλέσαμεν ἀνάλυσιν γενικῆς ἰσορροπίας, ἐν ἀντιθέσει πρός τήν ἀνάλυσιν μερικῆς ἰσορροπίας, ὡς εἶναι ἡ Μαρσαλλιανή ἀνάλυσις κατά κύριον λόγον.

Ἡ προσπάθεια ἀπεικονίσεως τῶν σχέσεων μεταξύ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας καί ὁ προσδιορισμός τῆς ἰσορροπίας τοῦ συστήματος τῆς οἰκονομίας ὡς συνόλου (γενική ἰσορροπία) δέν εἶναι νέα. Ἤδη ἀπό τοῦ 18ου αἰῶνος ἔχομεν τόν Οἰκονομικόν Πίνακα (TABLEAU ECONOMIQUE) (1758) τοῦ FR. QUESNAY, εἰς τόν ὁποῖον περιγράφονται αἱ σχέσεις μεταξύ τῶν τριῶν τάξεων τῆς κοινωνίας, αἱ ὁποῖαι κατά τόν Γάλλον φυσιοκράτην εἶναι : ἡ παραγωγική τάξις (ἀγρόται), ἡ τάξις τῶν ἰδιοκτητῶν καί ἡ στεῖρα τάξις (λοιπά ἐπαγγέλματα). Τό πλέον γνωστόν, λόγῳ τῆς εὐρύτητός του, θεωρητικῆς σημασίας, σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας εἶναι τό ἐμφανισθέν εἰς τό ἔργον τοῦ ἀρχηγοῦ τῆς Σχολῆς τῆς Λωζάννης L. WALRAS, ELEMENTS D'ECONOMIE POLITIQUE PURE, τό 1874. Εἰς τό ὑπόδειγμάτου ὁ WALRAS ἔδειξε πῶς ὑπό συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ καί στατικῆς ἰσορροπίας δύνανται νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί καί ποσότητες τῶν ἀγαθῶν καί τῶν παραγωγικῶν ὑπηρεσιῶν, ὅταν εἶναι δεδομέναι αἱ ἀτομικαί συναρτήσεις ὠφελημότητος, οἱ τεχνολογικοί συντελεσταί τῆς παραγωγῆς καί αἱ συναρτήσεις (ἀτομικαί καί συνολικαί) προσφορᾶς καί ζητήσεως. Ἕτερα συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας ἦσαν ἐκεῖνα τοῦ PARETO, τοῦ BARONE καί τοῦ CASSEL.

Ἡ ἀδυναμία πρακτικῆς ἐφαρμογῆς καί τό πολύπλοκον τῶν σχέσεων (πολλαί ἐξισώσεις, κ.λ.π.) εἰς τά συστήματα ταῦτα, καί ἰδίᾳ εἰς τό Βαλρασιανόν, ὡδήγησεν εἰς τήν ἐγκατάλειψιν τούτων καί εἰς ἐπαναφοράν εἰς τά συστήματα τῆς μερικῆς ἰσορροπίας, μέ τήν κυριαρχίαν τῆς Μαρσαλλιανῆς οἰκονομικῆς.

Μετά τήν συμβολήν τοῦ, πρακτικοῦ χαρακτῆρος, συστήματος LEONTIEF καί τήν δυνατότητα χρησιμοποιήσεως ταχυτήτων ὑπολογιστικῶν μηχανῶν, τά συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας, καί ἰδία έκεΐνα ύπό μορφήν πινάκων άτινα δυνάμεθα μαθηματικώς εύκόλως νά χειρισθώμεν διά τής άλγέβρας τών μητρών, έπανήλθον είς τήν ήμερησίαν διάταξιν τής οίκονομικής άναλύσεως.

Τό ύπόδειγμα είσροών-έκροών.

Τό ύπόδειγμα είσροών-έκροών κατά LEONTIEF έχει σημασίαν άπό τρεϊς κυρίως άπόψεις : α) Έχει θεωρητικήν σημασίαν, διότι άποδίδει είς άπλήν μορφήν τήν όλην άλληλεξάρτησιν έντός τής οίκονομίας. β) Παρουσιάζει ένδιαφέρον διά τήν κοινωνικήν λογιστικήν (στατιστική μακρομεγεθών), διότι δεικνύει τήν κατάταξιν καί διαίρεσιν τής οίκονομίας είς έπί μέρους κλάδους, καί τήν συμβολήν έκάστου είς τό σύνολον τής παραγωγής. γ) Παρουσιάζει ένδιαφέρον διά τόν γραμμικόν προγραμματισμόν.

Κατά τό ύπόδειγμα Ε-Ε, ή οίκονομία διαιρεϊται είς ένα άριθμόν κλάδων, έκαστος τών όποίων άντιπροσωπεύει έν άθροισμα όμοειδών βιομηχανιών ή δραστηριοτήτων μάλλον παρά μίαν μόνην βιομηχανίαν. Οί κλάδοι ούτοι παράγουν διά τούς λοιπούς κλάδους, πωλούντες τά προϊόντα των πρός αύτούς, καί καταναλίσκουν προϊόντα τών λοιπών κλάδων, άγοράζοντες έξ αύτών. Πλήν τών παραγωγικών κλάδων καί δραστηριοτήτων, ύφίσταται είς τόν πίνακα Ε-Ε στήλη, ήτις άντιπροσωπεύει τήν τελικήν ζήτησιν, ή τήν όμάδα τών έτοίμων άγαθών (BILL OF GOODS). Έάν ή στήλη αύτη καθορίζεται έξωγενώς, τότε τό ύπόδειγμα καλεϊται άνοικτόν (OPEN MODEL). Έάν, άντιθέτως, όλοι οί κλάδοι τού πίνακος είναι παραγωγοί καί καταναλωταί, τότε τό ύπόδειγμα καλεϊται κλειστόν (CLOSED MODEL). Έφ'όσον δέν λαμβάνονται ύπ'όψιν ή χρονική διαδρομή, ό σχηματισμός κεφαλαίου καί αί αύξομειώσεις τών άποθεμάτων, τό ύπόδειγμα είναι στατικόν. Ένταύθα θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ τό ἀνοικτόν στατικόν ὑπόδειγμα.

Ἔστω ὅτι ἡ οἰκονομία ἀποτελεῖται ἐκ ν παραγωγικῶν κλάδων καί ἐκ τοῦ τομέως τῆς τελικῆς ζητήσεως, ἤτοι τελικῶς ἐκ +1 κλάδων. Ὁ τομεύς τῆς τελικῆς ζητήσεως θεωρεῖται αὐτόνομος, ἐνῶ οἱ λοιποί ν κλάδοι ὡς μή αὐτόνομοι καί συνεπῶς δυνάμεθα νά περιγράψωμεν τάς μεταξύ τῶν κλάδων τούτων διαρθρωτικάς σχέσεις, εἰς ἕνα πίνακα διακλαδικῶν σχέσεων, ἤ συναλλαγῶν ἤ εἰσροῶν-ἐκροῶν. Ὁ πίναξ ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένην χρονικήν περίοδον, συνήθως ἕν ἔτος.

Ἡ παραγωγή ἑκάστου κλάδου $Q_i$ ( $i=1,2,3,\ldots$ ν. χρησιμοποιεῖται (ἐκρέει) διά τάς ἀνάγκας ἑτέρων κλάδων καί / ἤ διά τάς ἀνάγκας τῆς τελικῆς ζητήσεως. Τάς ποσότητας ἤ τήν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς τήν ὁποίαν ἕκαστος κλάδος πωλεῖ εἰς τούς ἑτέρους ἀποτελεῖ τό σύνολον τῆς ἐκροῆς ἤ τήν ἀξίαν τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν. Ἐάν εἰς τοῦτο προστεθῇ καί ἡ ποσότης ἤ ἀξία ἡ ὁποία δίδεται εἰς τήν τελικήν ζήτησιν, τό ἄθροισμα δίδει τήν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου $i(Q_i)$. Διά τήν παραγωγήν, ὅμως, τοῦ προϊόντος ἑνός κλάδου ἀπαιτοῦνται εἰσροαί ἐξ ἄλλων κλάδων καί χρησιμοποίησις ἐργασίας πάσης φύσεως. Οὕτω δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν πίνακα εἰς τόν ὁποῖον, αἱ μέν σειραί (ROW-VECTORS) νά δεικνύουν τί δίδει ἕκαστος κλάδος εἰς τούς λοιπούς κλάδους τῆς οἰκονομίας, αἱ δέ στῆλαι (COLUMN-VECTORS) νά δεικνύουν τό τί ἕκαστος κλάδος λαμβάνει ἐκ τῶν λοιπῶν κλάδων ὡς κατωτέρω :

Πίναξ διακλαδικῶν συναλλαγῶν ἑνός στατικοῦ, ἀνοικτοῦ Ὑποδείγματος Εἰσροῶν Ἐκροῶν.

| Ἀγοράζοντες κλάδοι (εἰσροαί) → / Πωλοῦντες κλάδοι (ἐκροαί) ↓ | 1 | 2 | 3 | . | . | . | ν | Τελική Ζήτησις $f_i$ | Συνολικ. προϊόν $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $q_{11}$ | $q_{12}$ | $q_{13}$ | . | . | . | $q_{1\nu}$ | $f_1$ | $Q_1$ |
| 2 | $q_{21}$ | $q_{22}$ | $q_{23}$ | . | . | . | $q_{2\nu}$ | $f_2$ | $Q_2$ |
| 3 | $q_{31}$ | $q_{32}$ | $q_{33}$ | . | . | . | $q_{3\nu}$ | $f_3$ | $Q_3$ |
| . | . | . | . | | | | . | . | . |
| . | . | . | . | | | | . | . | . |
| . | . | . | . | | | | . | . | . |
| . | . | . | . | | | | . | . | . |
| . | . | . | . | | | | . | . | . |
| ν | $q_{\nu 1}$ | $q_{\nu 2}$ | $q_{\nu 3}$ | . | . | . | $q_{\nu\nu}$ | $f_\nu$ | $Q_\nu$ |
| Ἄθροισμα Διακλαδικῶν Συν/γῶν | $\sum_i \sum_j q_{ij}$ | | | | | | | | |
| Προστιθεμένη Ἀξία ($Y_j$) | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | . | . | . | $Y_\nu$ | | |
| Συνολική Δαπάνη $Q_j$ | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | . | . | . | $Q_\nu$ | | |

Αἱ σειραί τοῦ πίνακος ἱκανοποιοῦν τήν λογιστικήν ἰσότητα

(1) $$Q_i = \sum_j q_{ij} + f_i \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

Ήτοι, τό ἄθροισμα τῶν πρός τούς λοιπούς κλάδους πωλήσεων σύν τῇ πρός τήν τελικήν ζήτησιν πωλήσει εἶναι ἴσον πρός τό συνολικόν ροϊόν τοῦ κλάσου i.

Ἡ ζήτησις ἑνός μέρους τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου i ἐκ μέρους τοῦ j εἶναι γραμμική συνάρτησις τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ κλάδου. Ήτοι

(2) $q_{ij} = \alpha_{ij} Q_j$

(3) καί $\alpha_{ij} = q_{ij} : Q_j$

Ὅπου τό $\alpha_{ij}$ καλεῖται τεχνολογικός συντελεστής εἰσροῆς καί δηλοῖ τό ποσόν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου i, ὅπερ ἀπαιτεῖται διά τήν παραγωγήν μιᾶς μονάδος προϊόντος τοῦ κλάδου j.

Τό ἄθροισμα τῶν $\alpha_{ij}$ διά δεδομένον παραγωγικόν κλάδον j (διάνυσμα στήλης) πρέπει νά εἶναι ἴσον πρός $\sum_i \alpha_{ij} = 1$

Οὕτω ἡ (1) δύναται νά γραφῇ:

(4) $Q_i = \sum_j \alpha_{ij} Q_j + f_i$

Αἱ στῆλαι τοῦ πίνακος ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:

$$Q_j = \sum_i q_{ij} + Y_j$$

Ήτοι, τό ἄθροισμα τῶν εἰς τόν κλάδον j εἰσροῶν ἐκ τῶν λοιπῶν κλάδων, σύν τῇ προστιθεμένῃ ἀξίᾳ (ἀμοιβαί ὑπηρεσιῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς = εἰσόδημα), εἶναι ἴσον πρός τήν ἀκαθάριστον δαπάνην τοῦ κλάδου τούτου. Καί $Q_i = Q_j$, ἤτοι ἡ συνολική ἀκαθάριστος παραγωγή εἶναι ἴση πρός τήν συνολικήν ἀκαθάριστον δαπάνην.

## Αἱ ἐξισώσεις τοῦ ὑποδείγματος

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ Ε-Ε δύναται νά δοθῇ ὡς ἕν σύνολον ἐξισώσεων ταυτοχρόνου λύσεως. Οὕτω στηριζόμενοι εἰς τήν ἐξίσωσιν ροῆς (flow equation) (4), ἔχομεν:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&\alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \alpha_{13} Q_3 + \dots\dots + \alpha_{1\nu} Q_\nu + f_1 = Q_1\\
&\alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \alpha_{23} Q_3 + \dots\dots + \alpha_{2\nu} Q_\nu + f_2 = Q_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{\nu 1} Q_1 + \alpha_{\nu 2} Q_2 + \alpha_{\nu 3} Q_3 + \dots\dots + \alpha_{\nu\nu} Q_\nu + f_\nu = Q_\nu
\end{aligned}
$$

Τό ἀνωτέρω σύστημα ἐξισώσεων δύναται νά γραφῇ ὑπό μορφήν μητρῶν καί διανυσμάτων ὡς ἑξῆς:

$$
(6)\quad
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1\nu}\\
\alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{2\nu}\\
\cdot \quad \cdot \cdot \quad \cdot\\
\cdot \quad \cdot \cdot \quad \cdot\\
\cdot \quad \cdot \cdot \quad \cdot\\
\alpha_{\nu 1} + \alpha_{\nu 2} + \dots + \alpha_{\nu\nu}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Q_1\\ Q_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ Q_\nu \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} f_1\\ f_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_\nu \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} Q_1\\ Q_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ Q_\nu \end{bmatrix}
$$

Χρησιμοποιοῦντες δέ τόν συμβολισμόν (notation) τῶν μητρῶν δυνάμεθα νά γράφωμεν:

$$(7)\qquad AQ + f = Q$$

ὅπου $A$ = ἡ μήτρα τῶν σταθερῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν
$Q$ = ἡ στήλη τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς ἑκάστου κλάδου
$f$ = ἡ στήλη τῶν ἐπιπέδων τελικῆς ζητήσεως (κατανάλωσις + ἐπένδυσις + ἐξαγωγαί).

Δεδομένου ὅτι ἡ στήλη f καθορίζεται ἐξωγενῶς (αὐτόνομος παράγων) δυνάμεθα νά γράφωμεν τήν (7) ὡς ἑξῆς:

$$Q - AQ = f$$
$$Q(I-A) = f$$

ὅπου $I$ = μοναδιαία μήτρα.

Εἰς τό σύστημα ἐξισώσεων τοῦτο σημαίνει:

$$
\begin{array}{llcll}
(1-\alpha_{11}) & Q_1 & -\ \alpha_{12}Q_2 - \ldots\ldots\ldots & -\alpha_{1\nu}Q_\nu & = f_1 \\
-\alpha_{21} & Q_1 & +(1-\alpha_{22})Q_2 - \ldots\ldots\ldots & -\alpha_{2\nu}Q_\nu & = f_2 \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \\
-\alpha_{\nu1} & Q_1 & -\ \alpha_{\nu2}Q_2 - \ldots\ldots\ldots & +(1-\alpha_{\nu\nu})Q_\nu & = f_\nu
\end{array}
$$

Δεδομένου ὅτι ἡ (I-A) εἶναι γνωστή καί τά f δεδομένα, δυνάμεθα νά λύσωμεν τό σύστημα ὡς πρός τά Q . Κατά τόν συμβολισμόν τῶν μητρῶν θά ἔχωμεν:

(8) $$Q = (I-A)^{-1} f$$

ὅπου $(I-A)^{-1}$ εἶναι ἡ ἀντίστροφος μήτρα Leontiet.

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς μήτρας ταύτης, καί ἐφ'ὅσον οἱ κλάδοι τῆς οἰκονομίας εἶναι ἀρκετοί, ἀπαιτεῖται ἡ χρῆσις ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Ἡ μήτρα $(I-A)^{-1}$ δεικνύει κατά πόσον τά ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων πρέπει νά αὐξηθοῦν διά νά αὐξηθῆ ἡ τελική ζήτησις κατά μίαν μονάδα. Οὕτω ἡ λύσις ὡς πρός Q μᾶς ὑποδεικνύει τά ἀπαιτούμενα ἐπίπεδα παραγωγῆς ἑκάστου κλάδου διά νά στηρίξουν τήν τελικήν ζήτησιν, ἥτις ἀποτελεῖ τόν προγραμματιζόμενον στόχον.

Κατωτέρω δίδομεν ἕν ἁπλοῦν παράδειγμα πίνακος εἰσροῶν-ἐκροῶν μέ τρεῖς τομεῖς:

| | Γεωργία | Βιομηχανία | Τελική ζήτησις | |
|---|---|---|---|---|
| Γεωργία | 400 | 500 | 700 | = 2.000 |
| Βιομηχανία | 600 | 1500 | 900 | = 3.000 |
| Προστιθ. Ἀξία (Συντελ. Παραγωγῆς) | 1000 | 600 | | |
| | 2000 | 3000 | | |

Ὁ πίναξ τεχνολογικῶν συντελεστῶν εἶναι:

| | Γεωργία | Βιομηχανία |
|---|---|---|
| Γεωργία | 0.2 | 0.3 |
| Βιομηχανία | 0.3 | 0.5 |
| Συντελ. παραγωγῆς | 0.5 | 0.2 |
| Ἄθροισμα | 1.0 | 1.0 |

συμφώνως πρός: συντελεστής εἰσροῆς $\alpha_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}$

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων μέ ἀγνώστους τά $Q_1$ καί $Q_2$ θά εἶναι:

$$(1-0,2)Q_1 - 0,3Q_2 = 700$$

$$-0,3Q_1 + (1-0,5)Q_2 = 900$$

Ὑπό μορφήν μητρῶν θά ἔχωμεν:

$$\begin{bmatrix} (1-0,2) & -0,3 \\ -0,3 & +(1-0,5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)Q = f$$

καί $$Q = (I-A)^{-1}f$$

ἐάν θέσωμεν αὐτονόμως τιμάς εἰς τό f ζητοῦντες τά ἐπίπεδα Q, ἅτινα ἀπαιτοῦνται πρός ὑποστήριξιν τούτου.

## Ἡ ἀντιστροφή τῆς μήτρας Leontief.

Διά νά ὑπολογισθῇ ἡ μήτρα $(I-A)^{-1}$ πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῆς (I-A) νά μή μηδενίζεται (non-singular). Ὁ ὑπολογισμός, ὡς καί προηγουμένως ἐλέχθη δύναται σήμερον νά γίνῃ εὐκόλως διά τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Ἡ ἀντιστροφή δύναται νά γίνη καί διά μιᾶς ἐμμέσου μεθόδου, ἡ ὁποία μᾶς δίδει ἀποτέλεσμα προσεγγίζον πρός τήν $(I-A)^{-1}$. Ἡ μέθοδος αὕτη συνίστατ... εἰς τήν ἀνάπτυξιν τῆς μήτρας εἰς ὅρους φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.

$$I + A + A^2 + A^3 + \ldots\ldots + A^{\nu}$$

Ὡς γνωστόν $A > A^2$, διότι οἱ συντελεσταί τῆς μήτρας A εἶναι ἅπαντες μικρότεροι τῆς μονάδος.

Κατά τό ἀνωτέρω ἀνάπτυγμα ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς προστίθεται εἰς τήν μοναδιαίαν μήτραν καί εἰς τό ἀποτέλεσμα προστίθεται τό τετράγωνον τῆς A, καί εἰς τοῦτο προστίθεται ἡ τρίτη δύναμις τῆς A, κ.ο.κ. Τελικῶς $(I-A)^{-1} = \mathrm{Op} \sum_{0}^{\nu} A^{\rho}$, $\rho = 0,1,2,\ldots,\nu$ $(I = A^{0})$.

## Αἱ ὑποθέσεις τοῦ ὑποδείγματος

Ἡ κατασκευή ἑνός πίνακος Ε-Ε προϋποθέτει τήν συλλογήν καί τήν κατάταξιν στατιστικῶν στοιχείων κατά ἕνα ὡρισμένον τρόπον πληροῦντα τούς ὅρους τῆς συνεπείας. Διά νά καταστῆ, ὅμως, ὁ στατιστικός οὗτος πίναξ σημαντικόν ὄργανον ἀναλύσεως θά πρέπει νά λάβη καί τόν χαρακτῆρα τῆς θεωρητικῆς κατασκευῆς, ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς ὡρισμένας ὑποθέσεις (assumptions) καί συνθήκας (conditions).

Αἱ ὑποθέσεις εἰς ἅς στηρίζεται καί ὑφ'ἅς εἶναι δυνατή ἡ χρησιμοποίησις τοῦ πίνακος Ε.Ε εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

(α) Ἡ οἰκονομία διαιρεῖται εἰς κλάδους, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν ἐνδεχομένως ἐπιχειρήσεων παραγουσῶν, ὅμως προϊόντα ὁμοειδῆ ἤ πλήρως ὑποκατάστατα.

(β) Ἕκαστος κλάδος χρησιμοποιεῖ μίαν καί μόνον παραγωγικήν διαδικασίαν, καί συνεπῶς δύναται ἑκάστη στήλη τοῦ πίνακος νά θεωρηθῆ ὡς μία παραγωγική δραστηριότης. Τό σύνολον δέ τῶν στηλῶν τοῦ παραγωγικοῦ τομέως ἀποτελεῖ τό σύνολον τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς οἰκονομίας ἤ τήν τεχνολογικήν μήτρα αὐτῆς.

(γ) Ἡ παραγωγή ἑκάστου κλαδου συντελεῖται μέ τήν αὐτήν πάντοτε ἀναλογίαν εἰσροῶν. Ἤτοι, ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμογενής πρώτου βαθμοῦ, μέ σταθερούς τεχνολογικούς συντελεστάς. Ἑκάστη στήλη τοῦ πίνακος δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἡ συνάρτησις παραγωγῆς τοῦ κλάδου, ἤτοι

$$Q_i = F_i\,(q_{1i}\,,\ q_{2i}\,, \dots,\ q_{\nu i}\,,\ q_{oi}\,)$$

ὅπου $q_{oi}$ εἶναι ὁ συντελεστής ἐργασίας, ἤτοι τό $Y_i$ τοῦ πίνακος.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως μή πραγματιστική. Βραχυχρονίως, ὅμως, ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι ἀρκετά καλή προσέγγισις τῆς πραγματικότητος. Συνεπῶς καλόν θά εἶναι, ὅταν προβαίνωμεν εἰς ἐκτίμησιν τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων, νά χρησιμοποιοῦμεν συντελεστάς εἰσροῆς, οἱ ὁποῖοι προέκυψαν ἐκ προσφάτως συνταχθέντος πίνακος καί ἡ προβολή τῶν ἐπιπέδων νά μή εἶναι πέραν τῶν πέντε ἐτῶν.

(δ) Κατά τήν οἰκονομικήν θεωρίαν ἡ μεταβολή τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν εἰσροῶν τῆς παραγωγῆς ὁδηγεῖ εἰς μεταβολήν τοῦ ἀρίστου συνδυασμοῦ τῶν εἰσροῶν. Ἐνταῦθα, ἐν τούτοις, λόγῳ τοῦ ὅτι δεχόμεθα σταθερούς συντελεστάς εἰσροῆς, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως μεταξύ τῶν εἰσροῶν εἶναι μηδέν εἰς τήν συνάρτησιν παραγωγῆς Leontief, ἡ μεταβολή τῶν σχετικῶν τιμῶν δέν δύναται νά ἐπηρεάση τάς σταθεράς ἀναλογίας τῶν εἰσροῶν.

(ε) Ὑπό συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ, τό μέσον κόστος ἑκάστου κλάδου (=προϊόντος), ὅπερ εἶναι τό αὐτό μέ τό ὁριακόν κόστος, ἰσοῦται πρός τήν τιμήν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου.

(στ) Ἡ ἐπιχειρηματική συμπεριφορά μεγιστοποιήσεως ἀγνοεῖται εἰς τόν πίνακα Ε-Ε, ἡ δέ μεγιστοποίησις τῆς συναρτήσεως ὠφελιμότητος τῶν καταναλωτῶν δύναται νά γίνῃ ἐκτός τοῦ συστήματος κατά τόν καθορισμόν τῶν ἐπί μέρους ἐπιπέδων τελικῆς ζητήσεως. Συνεπῶς ὁ πίναξ Ε-Ε δέν παρέχει λύσεις ἰσορροπίας, ὑπό τήν ἔννοιαν τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας (ἔννοια ἀριστοποιήσεως).

(ζ) Οὐδεμιᾶς στήλης, εἰς τήν μήτραν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, τό ἄθροισμα δύναται νά εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Ταῦτο σημαίνει ὅτι ἕκαστος κλάδος δέν δύναται νά δαπανήσῃ περισσότερα τῶν ὅσων εἰσπράττει ἐκ τῆς πωλήσεως τῆς παραγωγῆς του. (Συνθήκη σταθερότητος τῆς μήτρας τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν).

(η) Δέν δύνανται νά ὑπάρχουν ἀρνητικά στοιχεῖα εἰς τήν μήτραν $(I-A)^{-1}$, διότι τοῦτο θά ἐσήμαινε ὅτι ἑκάστη αὔξησις τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ κλάδου θά ἐπέβαλε μείωσιν τῶν ἀναγκαιουσῶν εἰσροῶν εἰς τόν κλάδον. Ἄλλως, τοῦτο θά ἐσήμαινε ὅτι ὅσον αὐξάνει ἡ παραγωγή ἑνός κλάδου, τόσον μικρότεραι θά εἶναι αἱ ἀγοραί τούτου, ὅπερ λογικῶς μή δεκτόν. (Συνθήκη Hawkins-Simon)

(θ) Εἰς τό στατικόν ὑπόδειγμα, ἡ καθαρά παραγωγή καταναλίσκεται ὑπό τῆς τελικῆς ζητήσεως κατά τήν αὐτήν περίοδον, μή ἐπιτρεπομένης δημιουργίας ἀποθεμάτων. Ἡ δημιουργία ἀποθεμάτων καί ἡ μεταβολή τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ ἐμπίπτουν εἰς τήν ἀνάλυσιν τοῦ δυναμικοῦ ὑποδείγματος.

Κοινωνικολογιστική μήτρα καί Κεϋνσιανόν κλειστόν ὑπόδειγμα

Ἐάν δεχθῶμεν ὅτι τρεῖς εἶναι αἱ βασικαί λειτουργιαι τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος, ἤτοι ἡ παραγωγή, ἡ κατανάλωσις καί ἡ ἀποταμίευσις (ἤ ἐπένδυσις), τότε δυνάμεθα νά παρουσιάσωμεν τό σύστημα τοῦτο ὑπό μορφήν μήτρας, ὡς ἑξῆς:

| | Παραγ. | Καταν. | Ἐπένδ. | |
|---|---|---|---|---|
| Παραγ. | AQ | C | I | Q |
| Καταν. | Y | 0 | 0 | Y |
| Ἀποταμ. | 0 | S | 0 | S |
| | Q | Y | I | |

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω μήτρας προκύπτουν αἱ κάτωθι κοινωνικολογιστικαί ταυτότητες:

$$Q = AQ + I + C$$

$$Q = AQ + Y$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν: $Y = C + S$

$S = I$ (Μακροοικονομική ἰσορροπία)

Εἰς τό ἀνωτέρω ὑπόδειγμα τύπου Keynes, ἐάν τό ἐπίπεδον τῶν ἐπενδύσεων καθορισθῇ ἐξωγενῶς, καί ἡ κατανάλωσις εἶναι μία συνάρτησις συμπεριφορᾶς, τότε ἔχομεν:

$$I = I^*$$

$$C = cY$$

$$Y = cY + I^*$$

$$Y = \frac{1}{1-c} I^*$$

ὅπου $\frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-\text{ὀρ. ροπή πρός κατανάλωσιν}}$ = πολλαπλασιαστής.

'Εφαρμογαί τῆς ἀναλύσεως Ε-Ε

'Η ἀνάλυσις εἰσροῶν-ἐκροῶν εἶναι σημαντικόν ὄργανον ἐξυπηρετήσεως πολλαπλῶν σκοπῶν τῆς οἰκονομικῆς ἐν γένει ἀναλύσεως καί πολιτικῆς. 'Απαραίτητος, ὅμως, προϋπόθεσις τῆς ἀκριβοῦς ἐκτιμήσεως τῶν ἀναλυτικῶν δυνατοτήτων καί τῶν πρακτικῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι νά μή λησμονῆται τό σύνολον τῶν ὑποθέσεων καί ἁπλουστεύσεων ἐπί τῶν ὁποίων στηρίζεται. Μερικοί ἐκ τῶν σκοπῶν τούς ὁποίους ἐξυπηρετεῖ ἡ ἀνάλυσις Ε-Ε εἶναι:

(1) 'Ανάλυσις τῆς διαρθρωτικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῆ οἰκονομίας. 'Η μήτρα τῶν συναλλαγῶν περιγράφει σχέσεις ζητήσεως (εἰσροαί) καί προσφορᾶς (ἐκροαί) ὅλων τῶν τομέων τῆς οἰκονομίας ταυτοχρόνως. 'Η μηχανική ἰσορροπία τήν ὁποίαν παρουσιάζουν αἱ διατομειακαί ἤ διακλαδικαί σχέσεις δέν ἔχει τό νόημα τῆς ἰσορροπίας εἰς τήν οἰκονομικήν θεωρίαν. Τοῦτο διότι εἶναι δυνατόν ὡρισμένοι κλάδοι τῆς οἰκονομίας ἤ καί ὁλόκληρος ἡ οἰκονομία, ἥν ἀπεικονίζει ἡ μήτρα, νά εὑρίσκωνται ἐν ἀνισορροπία . "Αλλωστε ἡ λογιστική ὑφή τῆς μήτρας δέν δύναται νά ἐξασφαλίση οὔτε τήν πλήρη ἀπασχόλησιν, οὔτε τήν ἀποδοτικήν λειτουργίαν τῶν τομέων καί κλάδων τῆς οἰκονομίας. 'Η εἰκών, ἐν τούτοις, ἥτις παρέχεται διά τοῦ πίνακος τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν εἶναι ἐξόχως διαφωτιστική, καθ'ὅσον ἀφορᾶ τήν ἀμοιβαίαν καί διαρθρωτικήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας. 'Η ταυτόχρονος παρουσίασις πινάκων διαφόρων χωρῶν διευκολύνει τήν συγκριτικήν μελέτην καί ἀποκαλύπτει τάς μεταξύ τῶν διαφόρων οἰκονομιῶν διαφοράς. 'Εφ'ὅσον δέ ὑφίσταται ἕν μέτρον ἤ κριτήριον βαθμοῦ ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομίας καί τοῦτο δύναται νά προκύψη ἐκ τῶν στοιχείων τῶν πινάκων (ὡς

ἡ συμβολή τοῦ κλάδου τῶν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν εἰς τό σύνολον τῆς παραγωγῆς), τότε ἡ ἀντιπαραβολή τῶν πινάκων τῶν διαφόρων χωρῶν θά ἀποκαλύψη τά διάφορα στάδια οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἰς τά ὁποῖα εὑρίσκονται αὗται.

(2) Πρόγνωσις τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς. Ὡς γνωστόν, εἰς τόν προγραμματισμόν καί τάς βραχυχρονίους προβλέψεις τῶν συνολικῶν μεγεθῶν τῆς οἰκονομίας χρησιμοποιοῦνται δύο κυρίως γενικαί μέθοδοι: ἡ μέθοδος τῆς στατιστικῆς παλινδρομήσεως καί ἡ μέθοδος τῆς συνεποῦς προβλέψεως, ἥτις στηρίζεται εἰς τήν προβολήν τῆς μήτρας συναλλαγῶν εἰς τό μέλλον ὑφ'ὡρισμένας ὑποθέσεις. Ἡ πρώτη μέθοδος συνίσταται εἰς τήν προβολήν χρονολογικῶν σειρῶν (time-series projections) καί ἀποτελεῖ μερικήν πρόβλεψιν, καθ'ὅτι ἀναφέρεται εἰς ἕν ἕκαστον οἰκονομικόν μέγεθος, ὥστε τελικῶς νά μή εἶναι ἐξησφαλισμένη ἡ συνέπεια τοῦ ὅλου συστήματος. Διά τόν λόγον τοῦτον χρησιμοποιοῦνται πολλάκις συστήματα ἐξισώσεων (simultaneous equations) ταυτοχρόνου λύσεως τῶν ...ιῶν τῶν ἀγνώστων. Ἀλλά καί πάλιν ἡ συνέπεια δέν ἐξασφαλίζεται ὅταν ὑφίστανται πολλαί εξωγενεῖς μεταβληταί, ἔστω καί μία τῶν ὁποίων δύναται νά διαταράξη ὁλόκληρον τό σύστημα.

Διά τῆς χρήσεως τῶν μητρῶν ἐξασφαλίζεται ἡ συνέπεια (consistency), χωρίς ὅμως νά ἐξασφαλίζεται, ὡς εἰκός, καί ἡ ἀκρίβεια τῆς προβλέψεως. Πράγματι, ὅταν καθορισθοῦν τά ἐπιθυμητά ἐπίπεδα καταναλώσεως εἶναι δυνατός ὁ καθορισμός (πρόβλεψις) τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν εἰς τόν πίνακα ὑφισταμένων τομέων καί κλάδων, τό ἄθροισμα τῶν ὁποίων θά μᾶς δώση τήν ἐκτίμησιν τοῦ ΑΕΠ. Οὕτω, ἐάν ἔχη καθορισθῆ τό διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως f, τότε δύναται νά ἐκτιμηθῆ τό διάνυσμα Q, ἤτοι

$$Q = (I - A)^{-1}\ f$$

Ἔστω ὅτι ἡ μήτρα τεχνολογικῶν συντελεστῶν καί ἡ στήλη τελικῆς ζητήσεως εἶναι :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3/10 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 30 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Κατά τά ἀνωτέρω θά ἔχωμεν :

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -3/10 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ καί } (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 20/17 & 6/17 \\ 10/17 & 20/17 \end{bmatrix}$$

Ὁπότε

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/17 & 6/17 \\ 10/17 & 20/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 135 \end{bmatrix}$$

(3) Πρόγνωσις τῶν ἐπιπέδων ἀπασχολήσεως. Δεδομένου ὅτι αἱ ἐργασιακαί εἰσροαί κατά μονάδα παραγωγῆς εἰς τούς διαφόρους κλάδους δύνανται νά προκύψουν, ὡς καί πᾶσα ἑτέρα εἰσροή, ἐκ τοῦ πίνακος εἰσροῶν-ἐκροῶν, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τό ἐπίπεδον τῆς ἐργασιακῆς ἀπασχολήσεως, ἐφ'ὅσον δοθῆ ἡ στήλη τῆς τελικῆς ζητήσεως. Οὕτω δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν ἐκ τῆς ζητήσεως ἐργασίας θά ἔχῃ ἡ προγραμματιζομένη αὔξησις τῆς ζητήσεως. Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν συναλλαγῶν δύναται νά προκύψῃ καί ὁ βαθμός ἐντάσεως ἐργασίας ἑκάστου κλάδου, ἐφ'ὅσον ἡ σειρά ἡ ἀναφερομένη εἰς τόν ἰδιωτικόν καταναλωτικόν τομέα (νοικοκυριά) εἰσέλθη εἰς τό παραγωγικόν τμῆμα τοῦ πίνακος. Οὕτω θά προκύψουν συντελεσταί εἰσροῆς ἐργασίας, οἱ ὁποῖοι εἶναι χρήσιμοι διά τάς προβλέψεις, ὑπό τήν ἐπιφύλαξιν πάντοτε τῆς ὀρθότητος καί γενικότητος τῶν ὑποθέ

σεων ἐπί τῶν ὁποίων στηρίζονται.

4) Πρόγνωσις τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν. Ἑκάστη στήλη τῆς μήτρας εἰσροῶν-ἐκροῶν δύναται νά ληφθῇ ὡς δεικνύουσα τό χρηματικόν κόστος τῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου. Ἐάν δέ προσθέσωμεν καί τήν "προστιθεμένην ἀξίαν" (Y) τοῦ κλάδου, τότε λαμβάνομεν τήν τιμήν παραγωγῆς (P), ἤτοι

$$P = AP + Y$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$P = (I-A)^{-1} \quad Y$$

Ἡ προστιθεμένη ἀξία ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν : Ἐκ τῆς ἀμοιβῆς τῆς ἐργασίας (W) καί ἐκ τῶν κερδῶν (Π). Οὕτω ἔχομεν $P= (I-A)^{-1} \quad (W+\Pi)$.

Κατ'ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν ἐπίδρασιν ἐπί τοῦ διανύσματος τῶν τιμῶν, κατόπιν μιᾶς αὐξήσεως εἴτε τῆς ἀμοιβῆς ἐργασίας εἴτε τῶν κερδῶν.

5) Τό ἐξωτερικόν ἐμπόριον εἰς τήν μήτραν εἰσροῶν-ἐκροῶν

Τό ἐξωτερικόν ἐμπόριον εἰσέρχεται εἰς τόν πίνακα τῶν συναλλαγῶν ὡς οἱ λοιποί τομεῖς τῆς οἰκονομίας. Αἱ ἐξαγωγαί ἐμφανίζονται συνήθως ὡς ἰδιαιτέρα στήλη εἰς τόν αὐτόνομον τομέα τῆς τελικῆς ζητήσεως καί συνεπῶς δύνανται νά ὑπολογισθοῦν ἐξωγενῶς διά στατιστικῆς προβολῆς. Ἡ πρακτική τῆς εἰσδοχῆς τῶν εἰσαγωγῶν εἰς τόν πίνακα ὑποδεικνύει διαφόρους τρόπους : (α) Αἱ μή ἀνταγωνιστικαί εἰσαγωγαί (NON-COMPETING IMPORTS) δύνανται νά ἐμφανισθοῦν εἰς ἕν διάνυσμα-σειρά καί αἱ ἀνταγωνιστικαί τοιαῦται ὡς διάνυσμα-στήλη μέ ἀρνητικά στοιχεῖα. (β) Τόσον αἱ ἀνταγωνιστικαί ὅσον καί αἱ μή ἀνταγωνιστικαί εἰσαγωγαί ἐμφανίζονται εἰς μίαν σειράν. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην αἱ ἀνταγωνιστικαί εἰσαγωγαί ἐμφανίζονται εἰς τούς κλάδους οἱ ὁποῖοι παράγουν παρόμοια προϊόντα. (γ) Ἑτέρα παρουσίασις τῶν εἰσαγωγῶν ἔχουσα ἀναλυτικάς ἀπαιτήσεις εἶναι ἐκείνη κατά τήν ὁποίαν ἕκαστον φατνίον εἰς τόν πίνακα τῶν διακλαδικῶν σχέσεων χωρίζεται εἰς δύο μέρη : ἕν μέρος διά τήν ἐγχωρίου προελεύσεως εἰσροήν καί τό ἕτερον μέρος διά τήν ἀλλοδαπῆς προελεύσεως εἰσροήν (εἰσαγωγή) εἰς τόν οἰκεῖον κλάδον. Ὁ τελευταῖος οὗτος τρόπος ἐμφανίσεως τῶν εἰσαγωγῶν εἶναι ὁ σπουδαιότερος καί ὁ πλέον ἐνδεδειγμένος εἰς τήν περίπτωσιν οἰκονομίας, ἡ ὁποία εἶναι ἐξηρτημένη ἐκ τῶν εἰσαγωγῶν εἰς μέγαν βαθμόν, καί συνεπῶς εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἐφαρμογῆς προγράμματος καί πολιτικῆς ὑποκαταστάσεως εἰσαγωγῶν. Ὁ τρόπος, ὅμως, οὗτος ἀπαιτεῖ τήν ὕπαρξιν στοιχείων εἰσροῆς πρώτων ὑλῶν καί ἐνδιαμέσων ἀγαθῶν εἰς τούς καθ' ἕκαστα κλάδους, ἅτινα συνήθως δέν ὑπάρχουν εἰς τάς ὑπό ἀνάπτυξιν οἰκονομίας.

Ὁ ἀναλυτικός πίναξ Ε-Ε, ὅστις περιλαμβάνει καί τό ἐξωτερικόν ἐμπόριον τῆς χώρας, εἶναι λίαν χρήσιμος διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ἀναγκῶν εἰς εἰσαγωγάς τῶν διαφόρων κλάδων καί ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας. Ἐξ ἐπόψεως, λοιπόν, ὑπολογισμοῦ τῶν εἰς εἰσαγωγάς ἀναγκῶν θά ἠδυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τάς ἀνταγωνιστικάς εἰσαγωγάς βάσει συναρτήσεως συμπεριφορᾶς καί κατόπιν νά προσδιορίσωμεν τήν ἀπαιτουμένην ἐγχώριον παραγωγήν, ἥτις εἶναι ἀπαραίτητος διά νά καλύψῃ τό ἔλλειμμα τῆς συνολικῆς προσφορᾶς. Παραλλήλως πρός τήν μήτραν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν Α ὑφίσταται, κατ'ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, καί ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν εἰσαγομένων εἰσροῶν Μ.

Ὁπότε αἱ ἄμεσοι καί ἔμμεσοι ἀνάγκαι εἰς εἰσαγωγάς κατά μονάδα προϊόντος τελικῆς ζητήσεως ἑκάστου τομέως δύνανται νά ὑπολογισθοῦν διά τοῦ τύπου

$$MQ = M\ (I-A)^{-1}\ f = M^{*}\ f$$

ὅπου ἡ γνωστή ἀντίστροφος μήτρα LEONTIEF προπολλαπλασιάζομένη ἐπί τήν μήτραν τῶν συντελεστῶν εἰσαγομένων εἰσροῶν δίδει τό M, καί διά πολλαπλασιασμοῦ τούτου ἐπί τήν στήλην τῆς τελικῆς ζητήσεως δίδει τάς ἀμέσους καί ἐμμέσους ἀνάγκας εἰς εἰσαγωγάς εἰς δεδομένον ἐπίπεδον παραγωγῆς Q, ἤτοι MQ. Πρός διάκρισιν τῶν ἀμέσων ἐκ τῶν ἐμμέσων εἰσροῶν ἀφαιρεῖται τό M ἐκ τοῦ $M^{*}$, ἤτοι $M^{*} - M = M\left[(I-A)^{-1} - 1\right]$.

6) <u>Ἡ τριγωνικότης καί τό πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως</u>. Ἡ φύσις τῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξύ τῶν κλάδων καί τομέων εἰς τήν οἰκονομίαν δεικνύεται διά τῆς <u>τριγωνικότητος</u> (TRIANGULARITY) ἤ τῆς <u>κυκλικότητος</u> (CIRCULARITY), ἥτις ὑπάρχει εἰς τήν μήτραν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων. Πλήρης κυκλικότης σημαίνει τήν ὕπαρξιν αὐταρκείας τοῦ συστήματος διά τῆς πλήρους ἀλληλεξαρτήσεως τῶν κλάδων, ἤτοι ὁ κλάδος Α πωλεῖ εἰς τόν κλάδον Β, ὁ κλάδος οὗτος πωλεῖ εἰς τόν κλάδον Γ, καί ὁ τελευταῖος οὗτος πωλεῖ εἰς τόν κλάδον Α. Οἱονεῖ κυκλικότητα ἐμφανίζουν συνήθως τά συστήματα εἰσροῶν-ἐκροῶν τῶν ἀνεπτυγμένων χωρῶν. Ἀντιθέτως ἀσθενῆ ἀλληλεξάρτησιν ἐμφανίζουν αἱ διακλαδικαί σχέσεις εἰς τάς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας.

Ἡ προσπάθεια μεταλλαγῆς τῶν στηλῶν καί γραμμῶν τοῦ πίνακος διακλαδικῶν σχέσεων, οὕτως ὥστε, εἰς ἕν σύστημα ἀσθενοῦς ἀλληλεξαρτήσεως, νά συμπληρωθοῦν τά φατνία ἀπό τῆς κυρίας διαγωνίου καί κάτω καί νά μείνουν κενά τά ἄνω τῆς κυρίας διαγωνί[illegible], καλεῖται <u>τριγωνοποίησις τοῦ πίνακος</u> (TRIANGULARIGATION).

Δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν δύο κριτήρια διά τήν τριγωνοποίησιν : (α) Οἱ κλάδοι κατατάσσονται εἰς γραμμάς ἀναλόγως πρός τόν ἀριθμόν τῶν κενῶν φατνίων πωλήσεως πρός τούς ἄλλους κλάδους. Ἤτοι, ὁ κλάδος ὅστις πωλεῖ κατ' εὐθεῖαν μόνον εἰς τήν τελικήν ζήτησιν κατατάσσεται πρῶτος, κ.ο.κ. (β) Αἱ γραμμαί τοῦ πίνακος κατατάσσονται οὕτως ὥστε ἡ τελική ζήτησις ὡς ποσοστόν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου νά μειοῦται ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω.

Ἔστω ὁ κατωτέρω ὑποθετικός πίναξ Ε-Ε :

| | Α | Β | Γ | Δ | Ε | Ζ | $f_i$ | $Q_i$ | $f/Q_i$% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | 6 | 3 | 0 | 5 | 0 | 4 | 16 | 34 | 47% |
| Β | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 | 24 | 87% |
| Γ | 2 | 7 | 5 | 3 | 6 | 4 | 17 | 44 | 38% |
| Δ | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 7 | 14 | 26 | 54% |
| Ε | 4 | 5 | 0 | 2 | 8 | 3 | 15 | 37 | 40% |
| Ζ | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 5 | 14 | 23 | 61% |
| Υ | 22 | 0 | 39 | 13 | 23 | 0 | 97 | | |
| $Q_i$ | 34 | 24 | 44 | 26 | 37 | 23 | | 188 | |

Ἀκολουθοῦντες τούς ἀνωτέρω κανόνας τριγωνικοποιήσεως τῆς ἀνωτέρω μήτρας, λαμβάνομεν :

| | Β | Ζ | Δ | Α | Ε | Γ | $f_i$ | $Q_i$ | $(f_i/Q_i)\%$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Β | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 | 24 | 87% |
| Ζ | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14 | 23 | 61% |
| Δ | 2 | 7 | 3 | 0 | 0 | 0 | 14 | 26 | 54% |
| Α | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 0 | 16 | 34 | 47% |
| Ε | 5 | 3 | 2 | 4 | 8 | 0 | 15 | 37 | 40% |
| Γ | 7 | 4 | 3 | 2 | 6 | 5 | 17 | 44 | 38% |
| Υ | 0 | 0 | 13 | 22 | 23 | 39 | 97 | | |
| Q | 24 | 23 | 26 | 34 | 37 | 44 | | | |

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ τριγωνοποίησις μήτρας εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι λίαν δυσχερής. Ἡ χρησιμοποίησις, ὅμως, ταύτης εἶναι μεγάλη, διότι, ὑποδεικνύει εἰς τούς προγραμματιστάς τῆς οἰκονομίας τόν ἐπεκτατικόν ἀναπτυξιακόν σύνδεσμον (LINKAGE EFFECT) ἑνός κλάδου ἤ μιᾶς βιομηχανίας μέ πιθανούς προμηθευτάς (BACKWARD EFFECT) ἤ μέ πιθανούς πελάτας πλήν τῆς τελικῆς ζητήσεως (FORWARD EFFECT). Ἀναγιγνώσκοντες τήν τριγωνικήν μήτραν δέον νά σημειωθῆ ὅτι κατά ὡρισμένης σειρᾶς εὑρίσκονται αἱ βιομηχανίαι ἤ κλάδοι - προμηθευταί, ἐνῶ ἄνω ταύτης εὑρίσκονται οἱ πελάται της. Οὕτω ἡ βιομηχανία Β ἔχει πάσας τάς λοιπάς προμηθευτρίας της, καί οὐδένα πελάτην, πλήν τῆς τελικῆς καταναλώσεως (BACKWARD EFFECT). Ἀντιθέτως ἡ βιομηχανία Γ οὐδένα προμηθευτήν ἔχει, ἐνῶ πωλεῖ εἰς πάσας τάς λοιπάς (FORWARD EFFECT). Ἡ βιομηχανία Δ ἔχει τρεῖς προμηθευτάς καί τρεῖς πελάτας, κ.ο.κ.

Τό συνολικόν ἀναπτυξιακόν ἀποτέλεσμα (LINKAGE EFFECT) ἐκ τῆς ἱδρύσεως μιᾶς βιομηχανίας Ζ δύναται νά δοθῆ ὡς $\sum_{1}^{\nu} x_i P_i$ Ὅπου $X_i$ εἶναι ἡ καθαρά παραγωγή τῶν ν βιομηχανιῶν, αἱ ὁποῖ-

αι ἱδρύονται λόγῳ ἱδρύσεως τῆς Ζ, καί Ρ εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι ἑκάστη ἐκ τῶν ν βιομηχανιῶν πράγματι θά ἱδρυθῇ, συνεπείᾳ τῆς ἱδρύσεως τῆς Ζ. Ὡς πιθανότητα Ρ δυνάμεθα νά λάβωμεν τόν λόγον τῆς πιθανῆς ποσότητος, ἥτις θά πωληθῇ πρός τήν βιομηχανίαν Ζ ἐκ μέρους μιᾶς τῶν ν βιομηχανιῶν, πρός τήν παραγωγικήν δυναμικότητα ἤ τό ἄριστον μέγεθος παραγωγῆς αὐτῆς.
Ἔχοντες ὑπ'ὄψιν τούς ἐκ τῶν εἰσροῶν καί ἐκροῶν ἀντικτύπους ἐκ τῆς ἱδρύσεως μιᾶς ὡρισμένης βιομηχανίας, δυνάμεθα νά ἀξιολογήσωμεν καταλλήλως τά προγράμματα ἐπενδύσεως καί τήν πολιτικήν ὑποκαταστάσεως εἰσαγωγῶν.

## ΑΛΛΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

1. Τραπεζική Οἰκονομική (1968)
2. Διεθνεῖς Οἰκονομικαί Σχέσεις (1968)
3. Θεωρία Ἀπασχολήσεως (1970)
4. Μαθήματα Ἐμπορευματολογίας (1970)
5. Κατανομή Β καί Χρονικός Προγραμματισμός (1970)
6. Κατανομή Β καί Χρονικός Προγραμματισμός-
   -Ἐφαρμογαί Στοχαστικῶν Διαδικασιῶν (1971)