ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ 1976

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ

Καθηγητοῦ Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς

Χ. Μερεζίνης -
Β' Α.Β.Σ.Π

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ 1976

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περιεχόμενον καὶ ἀντικειμενικοὶ σκοποὶ τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων

Ἡ θεωρία τῶν Πιθανοτήτων - ἄλλως Πιθανοθεωρία - ὁρίζεται σήμερον ὡς ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία μελετᾶ τήν νομοτέλειαν ἤ ἀκριβέστερον τούς μαθηματικούς νόμους οἱ ὁποῖοι διέπουν τάς μαζικάς ἐκδηλώσεις τῶν καλουμένων τυχαίων φαινομένων.

Εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ ἐπιστημονική ἔρευνα ἑνός οἱουδήποτε φαινομένου - φυσικοῦ, βιολογικοῦ, κοινωνικοῦ κλπ. - σκοπεῖ κατά βάσιν εἰς τήν διατύπωσιν νόμων οἱ ὁποῖοι "ἐν τῷ πλαισίῳ ὡρισμένων ἑκάστοτε συνθηκῶν προλέγουν τήν πραγματοποίησιν ἤ μή συγκεκριμένων γεγονότων".

Εἰς τήν πρᾶξιν, πρός ἐπίτευξιν τοῦ ἐν λόγῳ σκοποῦ, χρησιμοποιεῖται συνήθως τό πείραμα καί ἡ παρατήρησις. Συγκεκριμένως, προκειμένου νά μελετηθῆ ὡρισμένον φαινόμενον καί νά διατυπωθοῦν οἱ νόμοι οἱ ὁποῖοι διέπουν τάς ἐκδηλώσεις ἤ ἄλλως τήν ἑκάστοτε ἔκβασιν αὐτοῦ, ὁ ἐρευνητής προβαίνει - ἐν τῷ πλαισίῳ ὡρισμένων κατά περίπτωσιν συνθηκῶν - εἰς ἀλλεπαλλήλους σχετικάς παρατηρήσεις ἤ ἀντίστοιχα πειράματα, ἐν συνεχείᾳ δέ ἀναλύει καί ἀξιοποιεῖ καταλλήλως τά συλλεγέντα ἐμπειρικά δεδομένα (ἀποτελέσματα τῶν γενομένων παρατηρήσεων ἤ πειραμάτων).

Εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις τά ἀποτελέσματα τῶν διαδοχικῶν τούτων δοκιμῶν - παρατηρήσεων ἤ πειραμάτων γενομένων ὑπό τάς αὐτάς πάντοτε συνθήκας - ταυτίζονται μεταξύ των, ἀποτελοῦν δηλαδή ἕ ν κ α ί τ ό α ὐ τ ό γεγ ο ν ό ς. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς δημιουργεῖται εὐλόγως ἡ πεποίθησις ὅτι διά τό ὑπό μελέτην φαινόμενον ἰσχύει ἕνας νόμος "αἰτίου - ἀποτελέσματος", ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὁδηγούμεθα ἐκ τῶν πραγμάτων εἰς συμπεράσματα - νόμους - τῆς κατωτέρω μορφῆς

"Ἱκανοποιουμένων τῶν συνθηκῶν Σ,

πραγματοποιεῖται ἀναποφεύκτως τό γεγονός Α"

Τοιούτου εἴδους φαινόμενα εἶναι γνωστά εὐρέως ὡς α ἰ τ ι ο κ ρ α τ ι κ ά. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἔκβασις ἑνός αἰτιοκρατικοῦ φαινομένου ἤ ἄλλως ἕνα γεγονός τό ὁποῖον ἐν τῷ πλαισίῳ ὡρισμένων συνθηκῶν πραγματοποιεῖται ἀ ν α π ο φ ε ύ κ τ ω ς, καλεῖται συνήθως β έβ α ι ο ν.

Παραδείγματα α ἰ τ ι ο κ ρ α τ ι κ ῶ ν φαινομένων τῶν ὁποίων ἡ ἔκβασις - ὡς β έ β α ι ο ν γεγονός - εἶναι γ ν ω σ τ ή ἐ κ τ ῶ ν π ρ ο τ έ ρ ω ν ἤ ἄλλως δύναται νά π ρ ο β λ ε φ θ ῆ - ἐν τῷ πλαισίῳ πάντοτε συγκεκριμένων συνθηκῶν - μ ε τ ά β ε β α ι ό τ η τ ο ς, εἶναι γνωστά εἰς ὅλους ἐκ τῆς Φυσικῆς, τῆς Χημείας, τῆς Ἀστρονομίας καί γενικώτερον τῶν καλουμένων θετικῶν Ἐπιστημῶν. Οὕτω, ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - ἀποτελεσμάτων - ἐπανειλημμένων ἀστρονομικῶν π α ρ α τ η ρ ή σ ε ω ν, δυνάμεθα δι' οἱονδήποτε τόπον καί συγκεκριμένην ἡμερομηνίαν (συνθῆκαι Σ) νά γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων ἤ ἄλλως νά προείπωμεν μετά βεβαιότητος τήν χρονικήν στιγμήν ἀνατολῆς ἤ δύσεως τοῦ ἡλίου, τήν διάρκεια τῆς ἡμέρας κ.ο.κ. (γεγονός Α).

Ὁμοίως, γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς - κατόπιν ἐπανειλημμένων π ε ι ρ α μ ά τ ω ν τά ὁποῖα κατέληξαν εἰς τό αὐτό ἀκριβῶς ἀποτέλεσμα - ὅτι ἐάν μία ποσότης ὕδατος θερμανθῆ - ὑπό πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας - εἰς $100^{o}C$ (συνθῆκαι Σ), τό ὕδωρ θά ἀρχίση ἀναποφεύκτως νά βράζη καί νά μεταβάλλεται βαθμιαίως εἰς ὑδρατμούς (γεγονός Α).

'Η πρακτική χρησιμότης τοιούτου εἴδους συμπερασμάτων, νόμων δηλαδή τῆς μορφῆς "αἰτίου - ἀποτελέσματος" ἤ ἄλλως *αἰτιοκρατικῶν* - διά τῶν ὁποίων ἐν τῷ πλαισίῳ ὡρισμένων ἑκάστοτε συνθηκῶν *προλέγεται* ἡ ἔκβασις τῆς παρατηρήσεως ἑνός φαινομένου ἤ τό ἀποτέλεσμα ἑνός πειράματος μετ' ἀπολύτου *βεβαιότητος* - εἶναι προφανής. Δυστυχῶς ὅμως διά μία μεγάλη κατηγορία φαινομένων, ἡ διατύπωσις τοιούτων νόμων εἶναι - ἐκ τῶν πραγμάτων - ἀδύνατος.

Πράγματι, ἐν ἀντιθέσει πρός τά ἀνωτέρω, εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις τά ἀποτελέσματα τῶν *ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας* γενομένων παρατηρήσεων ἤ πειραμάτων, *διαφέρουν* μεταξύ των - χωρίς αἱ παρατηρούμεναι διαφοραί νά δύνανται νά ἀποδοθοῦν εἰς συγκεκριμένην αἰτίαν - διαδέχονται δέ ἄλληλα ἄνευ *οἱασδήποτε νομοτελείας* ἤ κανονικότητος. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς, ἡ γνῶσις τῶν ἀποτελεσμάτων οἱωνδήποτε ἐκ τῶν διαδοχικῶν δοκιμῶν εἰς οὐδέν βοηθεῖ τήν *πρόβλεψιν* τῶν ἑπομένων, ὡς ἐκ τούτου δέ ἡ *ἑκάστοτε* ἔκβασις τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου - ἄγνωστος ἐκ τῶν προτέρων - *δέν δύναται νά προβλεφθῇ μετά βεβαιότητος*.

Τήν ἔλλειψιν οἱασδήποτε νομοτελείας εἰς τήν διαδοχήν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας ἐκτελουμένων *δοκιμῶν* - παρατηρήσεων ἤ πειραμάτων - καί τήν ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαν ἀδυναμίαν μας *νά προείπωμεν μετά βεβαιότητος* τήν ἔκβασιν τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου, ἐκφράζομεν ἐν προκειμένῳ λέγοντας ὅτι τό πραγματοποιούμενον ἑκάστοτε γεγονός "*ἦτο προϊόν τύχης*", "*ὀφείλετο εἰς τήν τύχην*" κ.ο.κ. ἤ συνοπτικώτερον χαρακτηρίζοντες ἕν τοιοῦτον φαινόμενον ὡς *τυχαῖον*, τάς διαφόρους δέ - *δυνατάς ἀλλ' ὄχι βεβαίας* - ἐκβάσεις αὐτοῦ ὡς "*τυχαῖα γεγονότα*" ἤ ἁπλῶς "*ἐνδεχόμενα*".

Οὕτω, π.χ. μή δυνάμενοι νά προείπωμεν μετά βεβαιότητος τό φῦλον τοῦ νεογνοῦ τό ὁποῖον θά προέλθη ἐξ ἑνός τοκετοῦ, τόν ἀριθμόν τῶν τέκνων τά ὁποῖα θά ἀποκτήσῃ μιά γυναῖκα, τόν ἀριθμόν τῶν τροχαίων ἀτυχημάτων τά ὁποῖα θά συμβοῦν τό ἑπόμενον ἔτος εἰς τάς 'Αθήνας ἤ τέλος τήν ἡλικίαν θανάτου ἑνός ἀτόμου, χαρακτηρίζομεν τά ἐν λόγω φαινόμενα - πρός ὑποδήλωσιν τῆς ὑφισταμένης περί αὐτά ἀγνοίας - ὡς "τ υ χ α ῖ α", τό δέ ἀποτέλεσμα οἱασδήποτε ἐκ μιᾶς σειρᾶς διαδοχικῶν παρατηρήσεων ἑνός τοιούτου φαινομένου ὡς "τ υ χ α ῖ ο ν γ ε γ ο ν ό ς".

'Υποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ρίπτωμεν ἕνα νόμισμα ἤ ἕνα κῦβον (ζάρι) ἤ ὅτι παίζομεν ρουλέττα. Τό ἀποτέλεσμα - κορώνα ἤ γράμματα κλπ. - ἑνός τοιούτου "πειράματος" - ἐξαρτῶμεν ἐν γένει τόσον ἐκ γνωστῶν ἀλλά μή δυναμένων νά ἐλεγχθοῦν ἤ νά προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν προτέρων παραγόντων, ὅσον καί ἐκ πολλῶν ἄλλων αἰτίων τῶν ὁποίων ὁ βαθμός καί ὁ τρόπος ἐπιδράσεως εἶναι ἄγνωστος εἰς ἡμᾶς - δ έ ν δ ύ ν α τ α ι ν ά π ρ ο β λ ε φ θ ῆ μ ε τ ά β ε β α ι ό τ η τ ο ς. 'Εκ τῆς ἐμπειρίας ἄλλωστε εἶναι γνωστόν ὅτι ἐάν ἕν τοιοῦτον "πείραμα" ἐπαναληφθῆ - ὑπό τάς αὐτάς ἤ περίπου τάς αὐτάς συνθήκας - τά ἀποτελέσματα τῶν διαδοχικῶν δοκιμῶν διαφέρουν ἐν γένει μεταξύ των, διαδέχονται δέ ἄλληλα κατά τρόπον ἐντελῶς ἀκανόνιστον. Διά τόν λόγον αὐτόν, τοιούτου εἴδους "πειράματα" καλοῦνται συνήθως "πειράματα τύχης", τά δέ ἀποτελέσματα αὐτῶν "τ υ χ α ῖ α γ ε γ ο ν ό τ α" ἤ ἁπλῶς "ἐ ν δ ε χ ό μ ε ν α".

'Απλᾶ παραδείγματα "πειραμάτων τύχης" - δοθέντος ὅτι τό ἀποτέλεσμα αὐτῶν ποικίλλει ἐν γένει ἀπό τῆς μιᾶς δοκιμῆς εἰς τήν ἄλλων καί ἡ μετά βεβαιότητος πρόβλεψις αὐτοῦ εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατος - ἀποτελοῦν ἐπίσης ὁ ποιοτικός ἔλεγχος μιᾶς συσκευῆς τηλεοράσεως καί ὁ χαρακτηρισμός αὐτῆς ὡς ἐλαττωματικῆς ἤ ὄχι, ἡ καταμέτρησις τῶν "σκάρτων" σιγαρέττων ἑνός πακέττου, ἡ καταγραφή τῶν κλήσεων τάς ὁποίας δέχεται ἕνα τηλεφωνικόν κέντρον ἐντός ὡρισμένης χρονικῆς περιόδου, ἡ μέτρησις τῆς διαρκείας ζωῆς ἑνός λαμπτῆρος κ.ο.κ.

'Εν ἀντιθέσει πρός τά β έ β α ι α γεγονότα, ἡ πληροφορία ὅτι ἡ ἔκβασις ἑνός φαινομένου ἀποτελεῖ τυ-χ α ῖ ο ν γεγονός ἤ ἄλλως ἡ πληροφορία ὅτι ἡ πραγματοποίησις ἑνός γεγονότος Α - ἐν τῷ πλαισίῳ ὡρισμένων πάντοτε συνθηκῶν Σ - εἶναι μέν δ υ ν α τ ή ἀ λ λ' ὄ χ ι κ α ί β ε β α ί α, εἶναι προφανῶς ἄνευ οὐσιαστικῆς πρακτικῆς σημασίας.

Παρά ταῦτα καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν τ υ χ α ί ω ν φαινομένων, ὅπου δέν ἰσχύει ὁ νόμος "αἰτίου - ἀποτελέσματος" τῶν βεβαίων γεγονότων καί κατά συνέπειαν οὐδέν τό συγκεκριμένον δύναται νά λεχθῆ περί τῆς ἑ κ ά σ τ ο τ ε ἐκβάσεως αὐτῶν, εἶναι δυνατόν νά προκύψουν ὡρισμένα χρήσιμα καί πρακτικῶς ἐφαρμόσιμα συμπεράσματα - νόμοι χαρακτηρίζοντες τήν λεγομένην σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ν τ ά ξ ι ν - ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά μή περιορισθῶμεν εἰς τήν μελέτην τῶν ἀποτελεσμάτων ἑκάστης τῶν διαδοχικῶν δοκιμῶν κ ε χ ω ρ ι σ μ έ ν ω ς, ἀλλά νά ἐξετάσωμεν τήν σ υ λ λ ο γ ι κ ή ν συμπεριφοράν τῶν ἐν λόγῳ ἀποτελεσμάτων εἰς μίαν μ α κ ρ ά ν ἀ κ ο λ ο υ θ ί α ν τοιούτων δ ο κ ι μ ῶ ν ἤ ὡς συνήθως λέγομεν νά ἐξετάσωμεν μ α ζ ι κ ά ς ἐκδηλώσεις τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου.

Πράγματι, διά μίαν μεγάλην κατηγορίαν τ υ χ α ί ω ν φαινομένων, παρά τήν ἀκανόνιστον συμπεριφοράν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐπί μέρους δοκιμῶν, παρατηροῦμεν ὅτι "καθώς ὁ σ υ ν ο λ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς τῶν διαδοχικῶν δοκιμῶν α ὐ ξ ά ν ε ι, ἡ σ χ ε τ ι κ ή σ υ χ ν ό τ η ς ἤ ἄλλως τό π ο σ ο σ τ ό ν τῶν δοκιμῶν κατά τάς ὁποίας πραγματοποιεῖται ὡρισμένον γεγονός Α παρουσιάζει ἐν γένει μ ι κ ρ ά ς μ ε τ α β ο λ ά ς, κυμαινόμενον δέ περί μίαν μέσην τιμήν, - ἀριθμόν θετικόν καί μικρότερον τῆς μονάδος - προσεγγίζει - κατά κανόνα - πρός αὐτήν ὁλονέν καί περισσότερον".

Οὕτω, εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς δημιουργεῖται εὐλόγως ἡ πεποίθησις, ὅτι ὑπάρχει κάποιος ἰ δ ε α τ ό ς ἀριθμός p - θετικός καί μικρότερος τῆς μονάδος - τοιοῦτος ὥστε τό ποσοστόν ἤ ἄλλως ἡ σχετική συχνότης ἐμφανίσεως τοῦ ἐνδεχομένου Α εἰς μίαν μακράν ἀκολουθίαν δοκιμῶν - παρατηρήσεων ἤ πειραμάτων σχετικῶν πρός τό ὑπό μελέτην φαινόμενον - σ π α ν ί ω ς θά διαφέρη αὐτοῦ σημαντικά, ὅσον δέ ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δοκιμῶν αὐξάνει, τόσον ἡ ἐν λόγῳ διαφορά θά γίνεται - κατά κανόνα - μικροτέρα.

Ὁ ἐν λόγῳ ἰδεατός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τήν κατά μέσον ὅρον συμπεριφοράν τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου εἰς μίαν μακράν - ἀπεριόριστον - ἀκολουθίαν δοκιμῶν ἤ ὡς συνήθως λέγομεν ἀντανακλᾶ συνοπτικά τήν νομοτέλειαν ἡ ὁποία διέπει τάς μαζικάς ἐκδηλώσεις τοῦ φαινομένου ἀναφορικῶς πρός ὡρισμένον ἐνδεχόμενον Α, καλεῖται πιθανότης - πραγματοποιήσεως - τοῦ ἐνδεχομένου αὐτοῦ καί συμβολίζεται συνήθως διά τοῦ Ρ(Α) ἤ ἁπλῶς διά τοῦ p.

Οὕτω, θεωροῦντες τήν σχετικήν συχνότητα ἐμφανίσεως ἑνός ἐνδεχομένου Α εἰς μίαν μικράν ἀκολουθίαν δοκιμῶν ὡς ἐμπειρικήν ἔκφρασιν τῆς πιθανότητος αὐτοῦ Ρ(Α) καί ἀντιστρόφως τήν πιθανότητα Ρ(Α) ὡς τήν ἐξιδανίκευσιν τῆς ὡς ἄνω σχετικῆς συχνότητος ἤ ἀκριβέστερον ὡς ὁριακήν τιμήν τῆς σχετικῆς συχνότητος τοῦ ἐνδεχομένου Α εἰς μίαν ἄπειρον ἀκολουθίαν δοκιμῶν, καθίσταται δυνατόν διά μίαν μεγάλην κατηγορίαν τυχαίων φαινομένων νά διατυπωθοῦν νόμοι τῆς μορφῆς

"Ἱκανοποιουμένων τῶν συνθηκῶν Σ,
ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως τοῦ γεγονότος Α
ἤ ἄλλως ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως τοῦ ἐνδεχομένου Α,
ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμόν p, ὅπου $0 < p < 1$"

Ἡ πρακτική σημασία ἑνός τοιούτου νόμου εἶναι προφανής. Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ρίπτοντες κατ᾿ ἐπανάληψιν καί ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας ἕνα κῦβον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχετική συχνότης ἐμφανίσεως τοῦ ἐνδεχομένου ""Ασσος" κυμαίνεται περί τόν ἀριθμόν 0,25 πρός τούτοις δέ ὅτι καθώς ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν ρίψεων-δοκιμῶν αὐξάνει ἡ ἐν λόγῳ σχετική συχνότης προσεγγίζει - κατά κανόνα - τόν ἀριθμόν 0,25 ὁλονέν καί περισσότερον.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν συνάγεται εὐκόλως τό συμπέρασμα ὅτι "ἡ π ι θ α ν ό τ η ς ἐμφανίσεως τοῦ ἐνδεχομένου '"Ασσος' εἶναι ἴση πρός 0,25" ἡ ἔννοια δέ τοῦ "νόμου" αὐτοῦ καί ἡ πρακτική χρησιμότης του συνίσταται εἰς τό ὅτι "ἐνῶ δέν δυνάμεθα νά γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων ἤ ἄλλως νά προβλέψωμεν μετά βεβαιότητος τό ἀποτέλεσμα οἱασδήποτε συγκεκριμένης ρίψεως τοῦ ἐν λόγῳ κύβου, εἴμεθα εἰς θέσιν νά προείπωμεν ὅτι εἰς ἕνα μεγάλον ἀριθμόν ρίψεων τοῦ κύβου αὐτοῦ, τό ἐνδεχόμενον ""Ασσος" θά πραγματοποιηθῆ εἰς τό ἕν τέταρτον π ε ρ ί π ο υ τῶν δοκιμῶν ἤ ἄλλως ὅτι ἡ σχετική συχνότης μέ τήν ὁποίαν θά ἐμφανισθῆ ὁ ""Ασσος" δέν θά ἀ π ο κ λ ί ν η σ η μ α ν τ ι κ ά ἀπό τόν ἀριθμόν 0,25".

Μέ τήν διατύπωσιν καί γενικώτερον τήν μελέτην νόμων τοῦ εἴδους αὐτοῦ, νόμων δηλαδή οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς τ υ χ α ῖ α φαινόμενα καί χαρακτηρίζουν τήν συμπεριφοράν ἤ ἀκριβέστερον τήν δ ο μ ή ν τῶν μ α ζ ι κ ῶ ν ἐκδηλώσεων αὐτῶν, ἀσχολεῖται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων. Διά τόν λόγον ἄλλωστε αὐτόν, τοιούτου εἴδους νόμοι καλοῦνται συνήθως Π ι θ α ν ο θ ε ω ρ η τ ι κ ο ί. Ἐν προκειμένῳ πρέπει βεβαίως νά διευκρινισθῆ ὅτι οἱ νόμοι τούς ὁποίους πραγματεύεται ἡ Πιθανοθεωρία ἀναφέρονται ἀποκλειστικῶς καί μόνον εἰς τήν τ υ χ α ι ό τ η τ α τῆς ἐκβάσεως τῶν ὑπό μελέτην φαινομένων καί ὄχι εἰς ἕτερα χαρακτηριστικά αὐτῶν ὡς π.χ. φυσικαί ἤ χημικαί ἰδιότητες, οἰκονομικαί ἤ κοινωνικαί ἐπιπτώσεις κ.ο.κ. Οὕτω, ἡ ἐξέτασις ἑνός νεογνοῦ ἐξ ἀπόψεως φύλου, ὁ ἔλεγχος τῆς ποιότητος καί ἡ κατάταξις ἑνός σιγαρέττου ὡς "σκάρτου" ἤ "καλοῦ", ἡ ἐπιτυχία ἤ ἡ ἀποτυχία ἑνός ὑποψηφίου εἰς τάς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις καί τέλος ἡ ρίψις ἑνός νομίσματος καί ἡ παρατήρησις τοῦ ἀποτελέσματος Κ ἤ Γ, ἀπό πιθανοθεωρητικῆς ἀπόψεως ἀποτελοῦν τυχαῖα φαινόμενα τοῦ αὐτοῦ ἀκριβῶς τύπου - γνωστά ὡς "πειράματα τύχης" τοῦ τύπου "μηδέν-ἕνα" ἤ ΝΑΙ -ΟΧΙ - καί ὡς ἐκ τούτου αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται διά τήν μελέτην τῆς τ υ χ α ι ό τ η τ ο ς τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν εἶναι ἀπολύτως ταυτόσημοι.

Τυχαῖα φαινόμενα καί συναφῆ πρός τήν ἔκβασιν αὐτῶν προβλήματα ἀ β ε β α ι ό τ η τ ο ς ἀντιμετωπίζονται σήμερον είς ὅλους σχεδόν τούς τομεῖς τῆς 'Επιστήμης. Οὕτω, οἱ πιθανοθεωρητικοί νόμοι, ἀναφερόμενοι εἰς τήν λεγομένην σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ν τ ά ξ ι ν ἡ ὁποία διέπει τάς μαζικάς ἐκδηλώσεις τῶν τυχαίων φαινομένων, παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον τόσον ἀπό θεωρητικῆς σκοπιᾶς, ὅσον καί ἐξ ἀπόψεως πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ὅπου ἀποδεικνύονται ἐξ ἴσου - ἄν ὄχι περισσότερον - χρήσιμοι πρός τούς α ἰ τ ι ο κ ρ α τ ι κ ο ύ ς. Οἱ τελευταῖοι ἄλλωστε δύνανται - θεωρητικῶς τουλάχιστον - νά θεωρηθοῦν ὡς μερική περίπτωσις πιθανοθεωρητικῶν νόμων ὅπου ἡ πιθανότης p λαμβάνει τάς τιμάς p=1 ἤ p=0.

Πρός ἐπίτευξιν τῶν ὡς ἄνω σκοπῶν της - δηλαδή τήν ἀποκάλυψιν καί κυρίως τήν διατύπωσιν πιθανοθεωρητικῶν ἤ ἄλλως σ τ ο χ α σ τ ι κ ῶ ν νόμων - ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ποιεῖ εὐρυτάτην χρῆσιν τῶν μαθηματικῶν - ἰδιαιτέρως ἐννοιῶν ἐκ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, τῆς Συνδιαστικῆς καί τῆς 'Αναλύσεως - διά τόν λόγον δέ αὐτόν θεωρεῖται πολλάκις ὡς κλάδος τῶν λεγομένων 'Εφηρμοσμένων Μαθηματικῶν.

'Η ἀνάπτυξις τῶν βασικῶν ἀρχῶν καί αἱ πρῶται ἐφαρμογαί τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων εἶναι συνυφασμέναι μέ τά τυχηρά παίγνια καί ἰδιαιτέρως μέ τά παίγνια τῶν κύβων (ζάρια). Θεμελιώδεις ἔννοιαι ὡς π.χ. π ι θ α ν ό τ η ς, ἀ ν α μ ε ν ο μ έ ν η ἤ μ έ σ η τ ι μ ή κλπ. ὡς ἐπίσης στοιχειώδεις μέθοδοι ἀντιμετωπίσεως προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς τυχηρά παίγνια εὑρίσκονται τό πρῶτον εἰς ἀλληλογραφίαν μεταξύ τῶν Γάλλων Μαθηματικῶν Pascal καί Fermat ἀνταλλαγεῖσαν ἐπ' εὐκαιρία ὡρισμένων - ὀστορικῆς πλέον σημασίας - ἐρωτημάτων συναφῶν πρός παίγνια τῶν κύβων τά ὁποῖα ἔθεσε πρός τόν Pascal ὁ ἱππότης De Mēre περί τά μέσα τοῦ 17ου αἰῶνος.

Τήν ἀλληλογραφίαν αὐτήν ἠκολούθησαν - ἀμέσως μετά - περισσότερον συστηματικαί ἐργασίαι - πραγματεῖαι ἐπί τοῦ λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων - τοῦ 'Ολλανδοῦ Μαθηματικοῦ Huygens καί τοῦ 'Ελβετοῦ James Bernoulli.

'Η ἁλματώδης ἀνάπτυξις τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν (18ος -19ος αἰών) ὡς καί ἡ ἐπιτακτική ἀνάγκη διερευνήσεως ὡρισμένων ζωτικῆς σημασίας πληθυσμιακῶν προβλημάτων (ἀσφάλειαι ζωῆς, πίνακες ἐπιβιώσεως κλπ), κατέστησαν ἀπαραίτητον τήν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, εἰς τήν φάσιν δέ αὐτήν συνέβαλλον τάμέγιστα αἱ ἀναλυτικαί ἐργασίαι τῶν Μαθηματικῶν De Moivre, Laplace, Gauss, Poisson, Lagrange κλπ.

Αἱ νεώτεραι ἐξελίξεις τῆς Πιθανοθεωρίαςχαρακτηρίζονται ἀφ'ἑνός ἀπό τό ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον πρόςτήν ἀνάπτυξιν τῶν καθαρῶς θεωρητικῶν γνώσεων - πρᾶγμα τό ὁποῖον κατέστη δυνατόν ἐκ τῆς παραλλήλου ἀναπτύξεως τῆς Μαθηματικῆς 'Επιστήμης - ἀφ'ἑτέρου δέ, ἐκ τῆςσημαντικῆς διευρύνσεως τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν της. Σημαντικαί θεωροῦνται ἐν προκειμένω αἱ ἐργασίαιτῶν Ρώσσων Μαθηματικῶν Chebychev, Markov καί Liapounov κατά τόν 19ον αἰώνα, τῶν Berunstein καί Khintchin (20ός αἰών), ὡς ἐπίσης τῶν Γάλλων Μαθηματικῶν E. Borel καί P. Lēvy, τέλος δέ, ἡ μετροθεωρητική ἀξιωματική θεμελίωσις τῶν Πιθανοτήτων ὀφειλομένη κατ'ἐξοχήν εἰς τόν Ρῶσσον Μαθηματικόν Kolmogorov.

'Εξ ἄλλου, δι'ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων εὗρον τήν λύσιν των πλεῖστα ὅσα προβλήματα ἀβεβαιότητος ἀναφερόμενα εἰς τάς Φυσικάς 'Επιστήμας καί τήν Τεχνολογίαν, εἰς τάς Κοινωνικοοικονομικάς ἐπιστήμας καί τήν Ψυχολογίαν, ὡς ἐπίσης περισσότερον μοντέρνα προβλήματα σχετικά μέ τάς ἐπιχειρησιακάς ἐρεύνας, τά διαπλανητικά ταξείδια καί τήν βλητικήν, ἀκόμη δέ προβλήματα Κυβερνητικῆς.

Τέλος, μέ τήν ὡς ἄνω σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ν ἤ ἄλλως ἐ μ π ε ι ρ ι κ ή ν ἑρμηνείαν τῆς Πιθανότητος ὡς ὁ ρ ι α κ ῆ ς σ χ ε τ ι κ ῆ ς σ υ χ ν ό τ η τ ο ς - ὀφειλομένην κατά βάσιν εἰς τόν Van Misen - ἡ Πιθανοθεωρία συνδέεται ἀρρήκτως μέ τήν Στατιστικήν, ἀποτελοῦσα δέ τό θεωρητικόν πλαίσιον τῆς τελευταίας - ἀναπτύσσεται μετ'αὐτῆς - ἰδιαιτέρως εἰς τόν τομέα τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν - ἐκ παραλλήλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ

ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1.1 Τυχαῖα γεγονότα

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον πραγματεύομεθα λεπτομερῶς τήν ἔννοιαν τῶν τ υ χ α ί ω ν γ ε γ ο ν ό τ ω ν ἤ ἁπλῶς ἐ ν δ ε χ ο μ έ ν ω ν ὡς ἐπίσης τήν συνήθως ἐφαρμοζομένην ἐπ' αὐτῶν ἄλγεβραν - ἀλβεγρικάς πράξεις κλπ. - ἀντιστοίχως πρός ἐκείνην τῶν σ υ ν ό λ ω ν.

1.1.1 Πειράματα τύχης

"Π ε ί ρ α μ α τ ύ χ η ς" καλεῖται ἐν προκειμένῳ οἱοδήποτε "πείραμα" - περιλαμβανομένης κατ' ἐπέκτασιν καί τῆς "παρατηρήσεως" ἑνός φαινομένου - ἐάν ἡ ἔκβασις αὐτοῦ - ἄγνωστος ἐκ τῶν προτέρων - δέν δ ύ ν α τ α ι ν ά π ρ ο β λ ε φ θ ῆ μ ε τ ά β ε β α ι ό τ η τ ο ς.

Τά ἀποτελέσματα διαδοχικῶν δ ο κ ι μ ῶ ν - ἐπανειλημμένων καί ὑ π ό τ ά ς α ὐ τ ά ς σ υ ν ή θ η κ α ς ἐκτελέσεων - ἑνός τοιούτου πειράματος διαφέρουν συνήθως μεταξύ των, ἐν γένει δέ διαδέχονται ἄλληλα κατά τρόπον ἀκανόνιστον καί ἄνευ οἱασδήποτε νομοτελείας.

Π̲α̲ρ̲α̲δ̲ε̲ί̲γ̲μ̲α̲τ̲α̲

(1) Ἐξέτασις ἑνός προϊόντος καί κατάταξις αὐτοῦ ὡς "σκάρτου" ἤ "καλοῦ"

(2) Ρίψις ἑνός κύβου καί παρατήρησις τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος θά ἐμφανισθῆ εἰς τήν ἄνω ἕδραν αὐτοῦ

(3) Ἐπανειλημμέναι ρίψεις ἑνός νομίσματος καί καταμέτρησις τῶν δοκιμῶν αἱ ὁποῖαι θά ἀπαιτηθοῦν μέ-

χρι νά ἐμφανισθῆ διά πρώτην φοράν τό ἀποτέλεσμα "κορώνα".

(4) Μέτρησις τῆς διαρκείας ζωῆς ἑνός λαμπτῆρος κ.ο.κ.

1.1.2 Στοιχειώδη ἐνδεχόμενα. Δειγματικός χῶρος

Τά δ υ ν α τ ά - ἄλλως τά π ρ α γ μ α τ ο π ο ι ή σ ι μ α - ἀποτελέσματα ἑνός πειράματος τύχης καλοῦνται συνήθως σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ἤ β α σ ι κ ά ἐ ν δ ε χ ό μ ε ν α, τό σύνολον δέ αὐτῶν, συμβολιζόμενον κατά κανόνα μέ Ω, ἀποτελεῖ τόν λεγόμενον δ ε ι γ μ α τ ι κ ό ν χ ῶ ρ ο ν.

Τό σύνολον τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων, δηλαδή ὁ δειγματικός χῶρος Ω ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον τῶν πειραμάτων τύχης τῆς προηγουμένης παραγράφου παρατίθεται κατωτέρω.

(1) $\Omega = \{\Sigma, K\}$

(2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(3) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, ὁ δειγματικός δηλαδή χῶρος περιλαμβάνει ἐν προκειμένῳ ὅλους τούς φυσικούς - θετικούς ἀκεραίους - ἀριθμούς

(4) $\Omega = \{t/t\geqslant 0\}$, ὁ δειγματικός χῶρος ταυτίζεται ἐν προκειμένῳ μέ τόν θετικόν ἡμιάξονα - περιλαμβανομένης καί τῆς ἀρχῆς - τῶν τετμημένων, εἶναι δηλαδή τό σύνολον τῶν μή ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὡς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ἐνδεχόμενα ἑνός πειράματος τύχης θεωροῦνται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ὅλα τά δ υ ν α τ ά ἀποτελέσματα αὐτοῦ τά ὁποῖα ἀφ' ἑνός εἶναι δ ι ά φ ο ρ α μεταξύ των καί ἀφ' ἑτέρου δέν δύνανται νά ἀναλυθοῦν περαιτέρω εἰς ἁ π λ ο ύ σ τ ε ρ α τοιαῦτα. Οὕτω π.χ. τό ἀποτέλεσμα νά ἐμφανισθῆ "ζυγός" ἀριθμός κατά τήν ρίψιν ἑνός κύβου δ έ ν θεωρεῖται ὡς στοιχειῶδες ἐνδεχόμενον, καθ'ὅσον τοῦτο ἀναλύεται εἰς τά ἁπλούστερα αποτελέσματα 2, 4 ἤ 6 ἐκ τῶν ὁποίων καί ἀπαρτίζεται.

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ὡς ἄνω παραδειγμάτων καθίσταται προφανές ὅτι ὁ δειγματικός χῶρος, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα πείραμα τύχης, δύναται νά εἶναι ἕνα πεπερασμένον σύνολον (Παρ. 1 καί 2) ἤ ἕνα ἀπέραστον ἀλλ' ἀριθμήσιμον τοιοῦτον (Παρ. 3) τέλος ἕνα ἄπειρον καί μή ἀριθμήσιμον - ἔχον τήν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς-σύνολον ὡς ἐκεῖνον τοῦ Παρ. 4.

1.1.3 Βέβαιον, ἀδύνατον καί τυχαῖον γεγονὸς

Ἕνα οἱοδήποτε σύνολον στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων - ὑποσύνολον ἐν γένει τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - θά καλεῖται τυχαῖον γεγονός ἤ ἁπλῶς ἐνδεχόμενον. Τά τυχαῖα γεγονότα ἤ ἐνδεχόμενα συμβολίζονται συνήθως μέ τά κεφαλαῖα γράμματα Α, Β, Γ, ... ἤ ἄλλως διά τῶν συμβόλων $A_1, A_2, \ldots, A_3, \ldots$ Τά στοιχεῖα ω τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω τά ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἕν ἐνδεχόμενον Α, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τά ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς αὐτό ἤ ἄλλως ἡ πραγματοποίησις τῶν ὁποίων συνεπάγεται τήν πραγματοποίησιν τοῦ Α, καλοῦνται συνήθως εὐνοϊκά - διά τό Α - ἀποτελέσματα. Κατά τήν ἐκτέλεσιν ἑνός πειράματος τύχης ἡ πραγματοποίησις ἑνός ἐνδεχομένου Α εἶναι ἐν γένει δυνατή ἀλλ' ὄχι καί βεβαία.

Οὕτω π.χ. κατά τήν ρίψιν ἑνός κύβου τό νά ἐμφανισθῆ "ζυγός ἀριθμός" ἤ "ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 4" ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τά σύνολα Α = {2, 4, 6} καί Β = {5, 6} ἀποτελοῦν "τυχαῖα γεγονότα" ἤ ἁπλῶς "ἐνδεχόμενα", προφανῶς δέ, ἡ πραγματοποίησις αὐτῶν - καθ' οἱανδήποτε ρίψιν τοῦ κύβου - εἶναι μέν δυνατή ἀλλ' ὄχι καί βεβαία.

Ἐξυπακούεται ὅτι οἱοδήποτε ἐκ τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων ἑνός πειράματος τύχης ἀποτελεῖ ἐπίσης - ὡς ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου - ἕνα τυχαῖον γεγονός - ἤ ἄλλως ἕνα ἐνδεχόμενον ὑπό τήν εὐρεῖαν ἔννοιαν τῆς λέξεως. Οὕτω π.χ. κατά τήν ρίψιν ἑνός κύβου τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα Α = {3}, Β = {1} κ.ο.κ. ἀποτελοῦν - ὑπό τήν εὐρεῖαν ἔννοιαν τῆς λέξεως - τ υ χ α ῖ α γεγο- ν ό τ α.

Ἐξ ἄλλου, μεταξύ τῶν ὑποσυνόλων τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - τῶν ἐνδεχομένων δηλαδή τά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ὡρισμένον πείραμα τύχης - περιλαμβάνονται ὡς γνωστόν τό κ ε ν ό ν σύνολον ∅, ὡς ἐπίσης καί ὁλόκληρος ὁ δειγματικός χῶρος Ω. Τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν δοθέντος ὅτι ἡ πραγματοποίησίς του εἶναι ἀ ν έ φ ι κ τ ο ς - καθ'ὅσον δέν περιλαμβάνει στοιχεῖα τοῦ χώρου Ω ἤ ἄλλως στοιχειώδη δυνατά ἀποτελέσματα - καλεῖται συνήθως ἀ δ ύ ν α τ ο ν γεγονός, ἐνῶ τό δεύτερον, τό σύνολον δηλαδή τό ὁποῖον ταυτίζεται μέ τόν δειγματικόν χῶρον Ω, ἀποτελεῖ τό καλούμενον β έ β α ι ο ν γεγονός, καθ'ὅσον ἡ πραγματοποίησις αὐτοῦ εἶναι ἀ ν α π ό φ ε υ κ τ ο ς καί ἐκ τῶν προτέρων β ε β α ί α. Οὕτω π.χ. τό νά ἐμφανισθῆ κατά τήν ρίψιν ἑνός κύβου "ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 10" ἤ "ἀριθμός δεκαδικός" κλπ. ἀποτελοῦν γεγονότα ἀ δ ύ ν α τ α, ἐνῶ τό νά ἐμφανισθῆ "ἀριθμός θετικός ἀκέραιος μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ 6" ἀποτελεῖ τό β έ β α ι ο ν γεγονός.

Συνοψίζοντες τά ἀνωτέρω δυνάμεθα ἐν γένει νά εἴπωμεν τά ἑξῆς: Συναφῶς πρός ἕνα πείραμα ἐκτελούμενον ἐ ν τ ῷ π λ α ι σ ί ῳ ὡ ρ ι σ μ έ ν ω ν σ υ ν θ η κ ῶ ν Σ, ἕνα γεγονός θά καλεῖται β έ β α ι ο ν, ἀ δ ύ ν α τ ο ν ἤ τ υ χ α ῖ ο ν ἐάν ἡ πραγματοποίησις αὐτοῦ - καθ'οἱανδήποτε δ ο κ ι μ ή ν - εἶναι ἀντιστοίχως ἀ ν α π ό φ ε υ κ τ ο ς, ἀ ν έ φ ι κ τ ο ς ἤ δ υ ν α τ ή μ έ ν ἀ λ λ' ὄ χ ι κ α ί β ε β α ί α. Προφανῶς, τόσον τό β ε β α ί α ὅσον καί τό ἀ δ ύ ν α τ ο ν γεγονός ἀποτελοῦν μερικάς - ἄλλως ὁριακάς - περιπτώσεις τῶν τ υ χ α ί ω ν γεγονότων, καθ'ὅσον τό μέν β έ β α ι ο ν δύναται νά θεωρηθῆ ὡς τυχαῖον γεγονός περιλαμβάνον - ὡς εὐνοϊκά - ὅ λ α τά στοιχειώδη δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος, ἐνῶ τό ἀ δ ύ ν α τ ο ν τοιοῦτον ὡς τ υ χ α ί ο ν γεγονός μή περιλαμβάνον οἱονδήποτε ἐκ τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων.

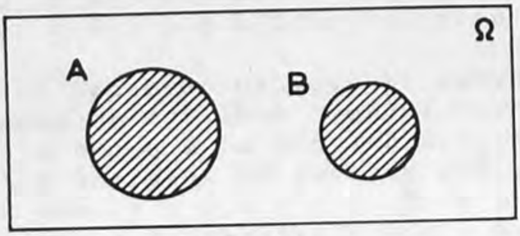
1.1.4 Ἄλγεβρα τῶν ἐνδεχομένων

Ὑποθέσωμεν ὅτι Ω συμβολίζει τόν δειγματικόν χῶρον ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ὡρισμένον πείραμα τύχης καί Α, Β, Γ, ... διάφορα - συναφῆ πρός τό ἐν λόγω πείραμα - ἐ ν δ ε χ ό μ ε ν α ἤ ἄλλως ὑποσύνολα τοῦ Ω.

Κατ' ἀναλογίαν γνωστῶν - ἐκ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων - ἐννοιῶν, πράξεων κλπ. ἀναπτύσσεται κατωτέρω ἡ λεγομένη ἄ λ γ ε β ρ α τ ῶ ν ἐ ν δ ε χ ο μ έ ν ω ν.

'Ενδεχόμενα 'Ασυμβίβαστα

Δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β λέγονται ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α ἤ ἀ μ ο ι β α ί ω ς ἀ π ο κ λ ε ι ό μ ε ν α ἐάν ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἑνός ἀποκλείει - εἰς ὡρισμένην πάντοτε δ ο κ ι μ ή ν - τήν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν οὐδέν στοιχεῖον τοῦ Ω ἀνήκει εἰς ἀμφότερα (Σχ. 1.1). Κατά τήν ρίψιν π.χ. ἑνός κύβου, τά ἐνδεχόμενα Α = {1,6} καί Β = {3, 4, 5} εἶναι ἀσυμβίβαστα.

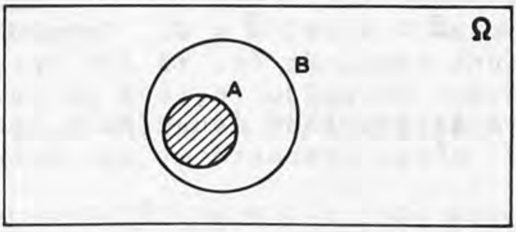


Σχ. 1.1

'Υποενδεχόμενον καί 'Υπερενδεχόμενον

"Ενα ἐνδεχόμενον Α λέγεται ὑ π ο ε ν δ ε χ ό μ ε ν ο ν ἑνός ἄλλου Β ἐάν ἡ πραγματοποίησις τοῦ Α σ υ ν ε π ά γ ε τ α ι ἀ ν α π ο φ ε ύ κ τ ω ς τήν πραγματοποίησιν τοῦ Β, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ὅλα τά ε ὐ ν ο ϊ κ ά ἀποτελέσματα διά τό Α, ἀποτελοῦν ἐπίσης καί ε ὐ ν ο ϊ κ ά ἀποτελέσματα διά τό Β (Σχ. 1.2). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό ἐνδεχόμενον Β καλεῖται ὑ π ε ρ ε ν δ ε χ ό μ ε ν ο ν τοῦ Α.

Προκειμένου νά δείξωμεν ὅτι τό ἐνδεχόμενον Α ἀποτελεῖ ὑποενδεχόμενον τοῦ Β χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τόν γνωστόν συμβολισμόν $A \subset B$ ἤ $B \supset A$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι οἱοδήποτε ἐνδεχόμενον Α εἶναι ταυτοχρόνως ὑποενδεχόμενον καί ὑπερενδεχόμενον τοῦ ἑαυτοῦ του, ἤτοι ἔχομεν $A \subset A$ ἤ $A \supset A$, πρός τούτοις δέ ὅτι οἱοδήποτε ἐνδεχόμενον εἶναι ὑποενδεχόμενον τοῦ βεβαίου γεγονότος, ἤτοι $A \subset \Omega$. Τό ἐνδεχόμενον π.χ. $A = \{1, 2\}$ ἀποτελεῖ ὑποενδεχόμενον τοῦ $B = \{1, 2, 6\}$ καί αὐτό ὑποενδεχόμενον τοῦ $\Gamma = \{1, 2, 5, 6\}$, ἔχομεν δηλαδή $A \subset B \subset \Gamma$ κ.ο.κ.



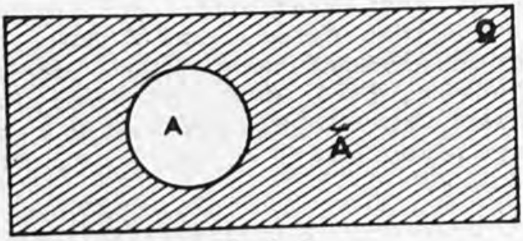
Σχ. 1.2

<u>Ἐνδεχόμενα Ἀντίθετα ἤ Συμπληρωματικά</u>

Ἀ ν τ ί θ ε τ ο ν ἤ Σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ ό ν τοῦ ἐνδεχομένου Α καλεῖται ἕνα ἄλλο ἐνδεχόμενον, συμβολιζόμενον συνήθως μέ $\bar{A}$, τοιοῦτον ὥστε ἡ πραγματοποίησις τοῦ Α νά ἀποκλείῃ τήν ταυτόχρονον - εἰς τήν αὐτήν δηλαδή δοκιμήν - πραγματοποίησιν τοῦ $\bar{A}$, ἐνῶ παραλλήλως ἡ μ ή πραγματοποίησις τοῦ Α καθιστᾶ ἀναπόφευκτον τήν πραγματοποίησιν τοῦ $\bar{A}$.

Τοῦτο συμβαίνει βεβαίως ἐάν τό $\bar{A}$ περιλαμβάνει ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Ω τά ὁποῖα δέν ἀνήκουν εἰς τό Α καί μόνον αὐτά (Σχ. 1.3). Ἀντίθετον π.χ. τοῦ ἐνδεχομένου $A = \{1, 3, 5\}$ κατά τήν ρίψιν ἑνός κύβου εἶναι τό ἐνδεχόμενον $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$, ἀντίθετον τοῦ $B = \{1, 2\}$ τό $\bar{B} = \{3, 4, 5, 6\}$ κ.ο.κ.

Προφανῶς τό ἀντίθετον τοῦ ἐνδεχομένου $\bar{A}$ εἶναι τό ἐνδεχόμενον Α, ἤτοι $\bar{\bar{A}} = A$. Ὁμοίως, τό ἀντίθετον τοῦ βεβαίου γεγονότος εἶναι τό ἀδύνατον τοιοῦτον καί ἀν-



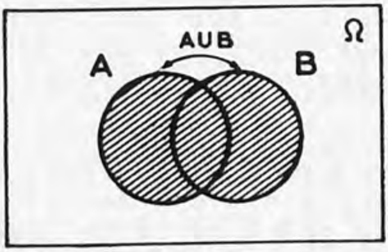
Σχ. 1.3

τιστρόφως ἤτοι $\bar{\Omega} = \emptyset$ καί $\bar{\emptyset} = \Omega$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται ἐπίσης προφανές ὅτι τά ἀντίθετα ἐνδεχόμενα εἶναι ὁπωσδήποτε ἀσυμβίβαστα, ἐνῶ τό ἀντίστροφον δέν εἶναι πάντοτε ἀληθές (δύο ἀσυμβίβαστα δηλαδή ἐνδεχόμενα δ έ ν εἶναι ἀπαραιτήτως καί ἀντίθετα).

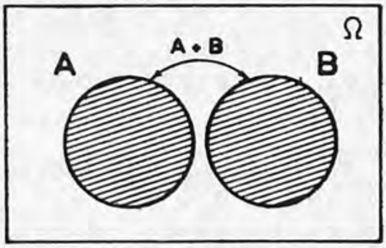
Ἕνωσις ἤ Ἄθροισμα Ἐνδεχομένων

Ἕ ν ω σ ι ς ἤ Ἄ θ ρ ο ι σ μ α δύο ἐνδεχομένων Α καί Β καλεῖται ἕνα τρίτον ἐνδεχόμενον Γ τό ὁποῖον λέγομεν ὅτι πραγματοποιεῖται ἐάν πραγματοποιηθῆ ἕ ν α τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο ν ἐξ αὐτῶν, ἐάν δηλαδή πραγματοποιηθῆ εἴτε τό Α, εἴτε τό Β, εἴτε - εἰς τήν περίπτωσιν μή ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων - ἀμφότερα. Ἡ λέξις ἕ ν ω σ ι ς χρησιμοποιεῖται συνήθως προκειμένου περί μ ή ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων, ἐνῶ τό ἄ θ ρ ο ι σ μ α ἀναφέρεται κατά κανόνα εἰς ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα.

Οὕτω, ἡ ἕ ν ω σ ι ς δύο μή ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων Α καί Β, συμβολιζομένη ἐν γένει $A \cup B$, περιλαμβάνει τά στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - τά ὁποῖα ἀνήκουν εἴτε εἰς τό Α, εἴτε εἰς τό Β, εἴτε εἰς ἀμφότερα (Σχ. 1.4.α), ἐνῶ τό ἄ θ ρ ο ι σ μ α δύο ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων Α καί Β, συμβολιζόμενον κατά κανόνα μέ Α+Β, περιλαμβάνει - δοθέντος ὅτι δέν ὑπάρχουν κοινά στοιχεῖα εἰς τό Α καί Β - τά εὐνοϊκά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τοῦ Α καί ἐκεῖνα τοῦ Β (Σχ. 1.4.β). Οὕτω π.χ. ἐάν $A = \{1, 3, 5\}$ καί $B = \{1, 2, 3\}$, ἔχομεν $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, ἐνῶ διά τά



Σχ.1.4α



Σχ.1.4β

Γ = {1, 2} καί Δ = {5, 6} γράφομεν συνήθως Γ+Δ = {1, 2, 5, 6}.

Γενικώτερον ἡ ἕ ν ω σ ι ς τῶν ἐνδεχομένων A_1, A_2, ..., A_n, ... συμβολιζομένη ἐν γένει $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ ἤ συνοπτικώτερον

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

ὁρίζεται ὡς τό ἐνδεχόμενον τό ὁποῖον λέγομεν ὅτι πραγματοποιεῖται ἐάν πραγματοποιηθῆ ἕ ν α τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο ν τῶν ἐνδεχομένων A_i, i=1,2,... ἤ ἄλλως τό ἐνδεχόμενον τό ὁποῖον περιλαμβάνει τά στοιχεῖα τοῦ Ω τά ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἕ ν α τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο ν τῶν A_i, i=1,2, ...

Ἐάν τά ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ ἀ ν ά δ ύ ο λαμβανόμενα εἶναι ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α μεταξύ των ἡ ἕνωσις αὐτῶν ἀναφέρεται συνήθως ὡς ἄ θ ρ ο ι σ μ α καί συμβολίζεται κατά κανόνα $A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$ ἤ συνοπτικώτερον

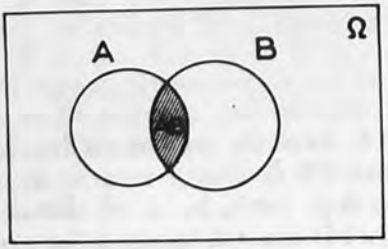
$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

Γινόμενον ή Τομή 'Ενδεχομένων

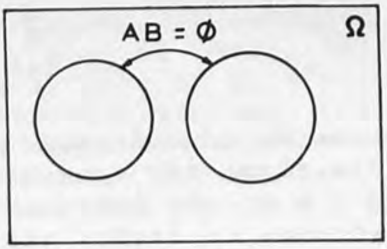
Γ ι ν ό μ ε ν ο ν ή τ ο μ ή δύο ένδεχομένων A καί B καλεῖται ἕνα τρίτον ένδεχόμενον, συμβολιζόμενον έν γένει AB ἥ $A \cap B$, τό όποῖον λέγομεν ὅτι πραγματοποιεῖται εάν - εἰς μίαν οἱανδήποτε δοκιμήν τοῦπειράματος - πραγματοποιοῦνται ἀμφότερα τά ένδεχόμενα A καί B.

Τό γινόμενον τῶν ένδεχομένων A καί B, καλούμενον πολλάκις καί σ ύ ν θ ε τ ο ν γ ε γ ο ν ό ς AB, περιλαμβάνει προφανῶς τά στοιχεῖα τοῦ Ω τά όποῖα ἀνήκουν εἰς ἀμφότερα τά ένδεχόμενα A καί B (τά κοινά δηλαδή στοιχεῖα των) ἥ ἄλλως τά στοιχειώδη ένδεχόμενα τά όποῖα εἶναι ε ὐ ν ο ϊ κ ά δι'ἀμφότερα τά A καί B(Σχ. 1.5α).

Προφανῶς, τό γινόμενον δύο ἀ σ υ μ β ι β ά σ τ ω ν ένδεχομένων μή περιλαμβάνον οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ Ω εἶναι σύνολον κ ε ν ό ν ἥ ἄλλως γεγονός ἀδύνατον (Σχ. 1.5β).



Σχ.1.5α



Σχ.1.5β

Οὕτω π.χ. εάν A = {1, 2, 3} καί B = {1, 3, 5} ἔχομεν AB = {1, 3}, ένῶ διά τά ένδεχόμενα Γ = {1, 3, 5} καί Δ = {2, 4, 6} εἶναι ΓΔ = Ø γεγονός δηλαδή ἀδύνατον.

Γενικώτερον, τό γινόμενον τῶν ένδεχομένων A_1, A_2, ..., A_n, ... συμβολιζόμενον έν γένει $A_1A_2...A_n$... ἥ συνοπτικώτερον

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

ορίζεται ώς τό ένδεχόμενον τό όποῖον λέγομεν ὅτι πραγματοποιεῖται έάν πραγματοποιηθοῦν ταυτοχρόνως - είς μίαν δηλαδή δοκιμήν - ἅπαντα τά ένδεχόμενα A_i, i=1, 2,... ἤ ἄλλως τό ένδεχόμενον τό όποῖον περιλαμβάνει τά στοιχειώδη ένδεχόμενα τά όποῖα εἶναι ε ύ ν ο ϊ κ ά - άνήκουν - είς ἅπαντα τά A_i, i= 1,2,... Προφανῶς, έάν δ ύ ο ο ί α δ ή π ο τ ε έκ τῶν ένδεχομένων A_1, A_2,...A_n,... εἶναι μεταξύ των ά σ υ μ β ί β α σ τ α, τό γινόμενον αύτῶν $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ εἶναι σύνολον κενόν ἤ ἄλλως γεγονός ά δ ύ ν α τ ο ν.

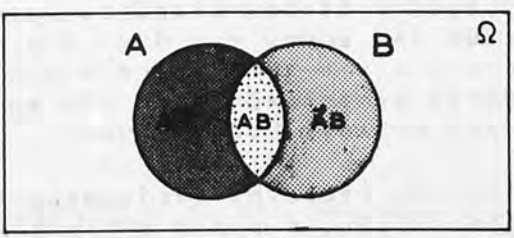
Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ώς ἄνω έννοιῶν, πράξεων κλπ. παραθέτομεν ένδεικτικῶς μερικάς χρησίμους έφαρμογάς των.

1. Έάν A καί B εἶναι άσυμβίβαστα ένδεχόμενα, εἶναι $AB = \emptyset$ τό γινόμενον δηλαδή αύτῶν εἶναι γεγονός άδύνατον καί άντιστρόφως.

2. Έάν A εἶναι ὑποενδεχόμενον τοῦ B, ἤτοι $A \subset B$, τότε $A \cup B = B$ καί $AB = A$.

3. Δι'οίονδήποτε ένδεχόμενον A, εἶναι $A+\bar{A} = \Omega$ καί $A\bar{A} = \emptyset$.

4. Διά δύο οίαδήποτε ένδεχόμενα A καί B ἡ ἕνωσις αύτῶν $A \cup B$ δύναται νά έκφρασθῆ ώς ἄθροισμα τριῶν άσυμβιβάστων άνά δύο ένδεχομένων, ὑπό τῆς σχέσεως $A \cup B = A\bar{B}+AB+\bar{A}B$ (βλ. Σχ. 1.6).



Σχ. 1.6

1.2 Διάφοροι τρόποι ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον παραθέτομεν τούς βασικούς ὁρισμούς οἱ ὁποῖοι ἐχρησιμοποιήθησαν κατά καιρούς διά τήν ἔννοιαν τῆς πιθανότητος ὡς ἐπίσης τά πλεονεκτήματα καί κυρίως τά μειονεκτήματα ἑκάστου τά ὁποῖα τελικῶς ὁδήγησαν εἰς τήν χρησιμοποιουμένην σήμερον, καθαρῶς μαθηματικήν - καλουμένην συνήθως ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή ν - θεμελίωσιν τῆς ἐν λόγῳ ἐννοίας, ἡ ὁποία θά μᾶς ἀπασχολήσῃ χωριστά - λόγῳ τῆς ἰδιαζούσης σημασίας της - εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

Συγκεκριμένως εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ θά μᾶς ἀπασχολήσῃ:

(1) Ὁ καλούμενος κ λ α σ σ ι κ ό ς ἤ a priori ὁρισμός τῆς πιθανότητος διά τοῦ ὁποίου "ὡς πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου Α θεωρεῖται τό π η λ ί κ ο ν τῶν ε ὐ ν ο ϊ κ ῶ ν - διά τό Α - ἀποτελεσμάτων πρός τόν ἀριθμόν ὅλων τῶν δ υ ν α τ ῶ ν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος".

(2) Ὁ σ τ α τ ι σ τ ι κ ό ς ἤ a posteriori ὁρισμός διά τοῦ ὁποίου "ἡ πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου Α ὁρίζεται ὡς ἡ ὁ ρ ι α κ ή σ χ ε τ ι κ ή σ υ χ ν ό τ η ς μέ τήν ὁποίαν πραγματοποιεῖται - ἐμφανίζεται - τό ἐνδεχόμενον Α εἰς μίαν μακράν - ἀπεριόριστον - ἀκολουθίαν δοκιμῶν ἤ ἄλλως ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος" καί

(3) Ἡ καλουμένη ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ή ἔννοια τῆς πιθανότητος διά τῆς ὁποίας "ὡς πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου Α θεωρεῖται ἕνας - αὐθαίρετος ἐν πολλοῖς - ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἐκφράζει κατά βάσιν - ἀποκλειστικῶς καί μόνον - τ ό ν β α θ μ ό ν τ ῆ ς ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ῆ ς π ε π ο ι θ ή σ ε ω ς τοῦ ἐρευνητοῦ ἀναφορικῶς πρός τήν πραγματοποίησιν ἤ μή τοῦ ἐν λόγῳ ἐνδεχομένου".

Τέλος, εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον θά μᾶς ἀπασχολήσῃ, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὁ μ α θ η μ α τ ι κ ό ς ἤ ἄλλως ὁ ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ό ς ὁρισμός τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, διά τοῦ ὁποίου "ἡ πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου A ὁρίζεται ὡς μ έ τ ρ ο ν ἑ ν ό ς σ υ ν ό λ ο υ καί συγκεκριμένως ὡς μέτρον τοῦ ὑποσυνόλου τῶν στοιχείων τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω τά ὁποῖα ἀπαρτίζουν - εἶναι εὐνοϊκά διά - τό ἐνδεχόμενον A".

1.2.1 Κλασσικὸς ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος

Ὁ λεγόμενος "κλασσικός" ἤ "a priori" ὁρισμός τῆς πιθανότητος - ὀφειλόμενος κατά βάσιν εἰς τόν Laplace - ἀπετέλεσε τήν κεντρικήν ἰδέα καί τόν πόλον ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ παρόντος αἰῶνος. Δι'αὐτοῦ ἡ πιθανότης - πραγματοποιήσεως - ἑνός ἐνδεχομένου A καθ'οἱανδήποτε δοκιμήν - ἐκτέλεσιν ὑπό ὡρισμένας συνθήκας - ἑνός πειράματος τύχης, ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

"Πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A εἶναι τό πηλῖκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ε ὐ ν ο ϊ κ ῶ ν ἀποτελεσμάτων - τῶν στοιχειωδῶν δηλαδή ἐνδεχομένων τά ὁποῖα σ υ ν ε π ά γ ο ν τ α ι τήν πραγματοποίησιν τοῦ A - διά τοῦ ἀριθμοῦ ὅλων τῶν δ υ ν α τ ῶ ν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος"

Οὕτω, ἐάν $|A|$ καί $|\Omega|$ συμβολίζουν ἀντιστοίχως τόν ἀριθμόν τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων τά ὁποῖα π ε ρ ι λ α μ β ά ν ο ν τ α ι εἰς τό ἐνδεχόμενον A καί τόν ἀριθμόν ὅλων τῶν δ υ ν α τ ῶ ν ἀποτελεσμάτων τοῦ γενομένου πειράματος, δηλαδή τόν ἀριθμόν τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ὁλόκληρον τόν δειγματικόν χῶρον Ω, ἡ πιθανότης - πραγματοποιήσεως - τοῦ ἐνδεχομένου A, ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad (1.1)$$

Δι'ἐφαρμογῆς π.χ. τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτουν εὐκόλως τά ἀκόλουθα:

(1) Ἐάν ρίψωμεν ἕνα κῦβον, ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως "ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 3" εἶναι $\frac{2}{6}$, ἀριθμοῦ "ζυγοῦ" $\frac{3}{6}$, τοῦ "ἄσσου" $\frac{1}{6}$ κ.ο.κ.

(2) Ἐάν τραβήξωμεν ἕνα χαρτί ἀπό μία πλήρη τράπουλα, ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς μιᾶς "ντάμας" εἶναι $\frac{4}{52}$, μιᾶς "κούπας" $\frac{13}{52}$ κ.ο.κ.

(3) Ἐάν ρίψωμεν δύο κύβους, ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν δύο ἀριθμοί μέ ἄθροισμα 5 εἶναι $\frac{4}{36}$, δύο ἀριθμοί μικρότεροι - ἀμφότεροι - τοῦ 3 εἶναι $\frac{3}{36}$ κ.ο.κ.

Ἡ ἐφαρμογή τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ, παρ'ὅτι φαινομενικῶς ἁπλῆ, παρουσιάζει ὡρισμένα μειονεκτήματα, πολλάκις δέ - ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων - καθίσταται ἀδύνατος. Πράγματι, ἐκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω, εἶναι φανερόν ὅτι διά τόν ὑπολογισμόν τῆς πιθανότητος ἑνός ἐνδεχομένου Α τῇ βοηθεία τῆς σχέσεως (1.1), θά πρέπει νά πληροῦνται αἱ κάτωθι προϋποθέσεις:

(i) Τό πλῆθος τῶν δ υ ν α τ ῶ ν ἀποτελεσμάτων - στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων - τοῦ ἐκτελουμένου "πειράματος τύχης" νά εἶναι π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὁ δειγματικός χῶρος Ω νά περιλαμβάνῃ n στοιχεῖα ἤτοι νά ἔχωμεν $\Omega = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$.

(ii) Ἡ δυνατότης πραγματοποιήσεως ἑνός ἑκάστου ἐκ τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ νά ε ἶ ν α ι ἡ α ὐ τ ή δ ι' ὅ λ α, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις νά εἶναι λογικῶς καί a priori παραδεκτόν ὅτι τά διάφορα στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τοῦ πειράματος εἶναι ἐξ ἴσου πιθανά (ἰ σ ο π ί θ α ν α), καθ'ὅσον δι'ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (1.1) δι'ἕκαστον ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ Ω προκύπτει ὅτι θά πρέπει νά ἔχωμεν

$$P(\varepsilon_1) = P(\varepsilon_2) = \ldots. = P(\varepsilon_n) = \frac{1}{n} \qquad (1.2)$$

(iii) Τόσον ὁ σ υ ν ο λ ι κ ό ς ἀριθμός τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων $|\Omega|$, ὅσον καί τό πλῆθος τῶν ε ὐ ν ο ϊ κ ῶ ν - διά τό A - ἀποτελεσμάτων |A|, νά καθορίζωνται μ ο ν ο σ η μ ά ν τ ω ς καί νά εἶναι ἐκ τῶν προτέρων - a priori - γ ν ω σ τ ο ί .

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ὡς ἄνω περιορισμῶν, παραθέτομεν ἐνδεικτικῶς ὡρισμένα ἁπλᾶ παραδείγματα πειραμάτων τύχης ὅπου ἡ ἐφαρμογή τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος εἴτε εἶναι ἀδύνατος εἴτε θά ὁδήγη εἰς ἐσφαλμένα ἐν γένει συμπεράσματα.

Παράδειγμα 1

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τό πείραμα τύχης (3) τῆς §(1.1.1) ζητεῖται ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A = {νά ἐμφανισθῆ ἡ κορώνα εἰς μία ἐκ τῶν 3 πρώτων ρίψεων}. Ἐν προκειμένῳ εἶναι |A| = 3, δοθέντος ὅμως ὅτι τό συνολικόν πλῆθος τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων |Ω| εἶναι, ὡς εἴδομεν, ἄ π ε ι ρ ο ν, ἐφαρμογή τῆς σχέσεως (1.1) θά ἦτο προφανῶς ἄνευ νοήματος. Ἡ ἴδια δυσχέρεια - ἀδυναμία ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (1.1) - θά παρουσιάζετο ἐάν ἐζητεῖτο ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου B = {νά ἐμφανισθῆ ἡ κορῶνα μετά τήν 5 ρίψιν}, ὅπου πέραν τοῦ ἀριθμοῦ |Ω| καί τό πλῆθος |B| τῶν ε ὐ ν ο ϊ κ ῶ ν ἀποτελεσμάτων εἶναι ἄ π ε ι ρ ο ν καί τυχόν ἐφαρμογή τῆς (1.1) θά ὁδήγη εἰς ἀοριστίαν.

Παράδειγμα 2

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τό πείραμα (2) τῆς §(1.1.1) ζητεῖται ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A = {νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός "ζυγός"}, ἐνῷ οὐδέν γνωρίζομεν διά τήν "κανονικότητα" ἤ μή - συμμετρίαν, ὁμοιογένειαν κλπ.- τοῦ ἐν λόγῳ κύβου. Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν - πολύ δέ περισσότερον ἐάν τυχόν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ κύβος δ έ ν εἶναι "κανονικός" - δέν εἶναι ἐπιτρεπτόν - δέν ὑφίσταται λογική καί ἀντικειμενική βάσις - νά δεχθῶμεν ὅτι ἡ δυνατότης πραγματοποιήσεως ἑκάστου ἐκ τῶν 6 δυνατῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι ἡ αὐτή δι'ὅλα, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις δέν εἶναι παραδεκτόν - a priori - τό ἰ σ ο π ί θ α ν ο ν τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων καί ὡς ἐκ τούτου τυχόν ἐφαρμογή τῆς σχέσεως (1.1) θά ὁδήγη εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα.

'Η δυνατότης νά όδηγηθῶμεν ἐν προκειμένῳ εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα καθίσταται σαφεστέρα εἰς τό πείραμα (1) τῆς §(1.1.1). Τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ἐν λόγῳ πειράματος εἶναι, ὡς εἴδομεν, δύο - Σ ἤ Κ - προφανῶς ὅμως θά ἦτο ἐν γένει παράλογον νά δεχθῶμεν ὅτι ἡ πιθανότης κατατάξεως τοῦ ἐν λόγῳ προϊόντος ὡς "σκάρτον" εἶναι $\frac{1}{2}$, ὅπως ἀκριβῶς θά ἦτο σφάλμα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ πιθανότης ἔκ τινος τοκετοῦ νά προέλθη "θῆλυ" εἶναι $\frac{1}{2}$. 'Εκ τῆς ἐμπειρίας ἄλλωστε - κατόπιν πολυαρίθμων παρατηρήσεων - εἶναι γνωστόν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ἀρρένων νεογνῶν ὑπερβαίνει ἐν γένει ἐκεῖνον τῶν θηλέων (51 περίπου ἄρρενα ἔναντι 49 θηλέων).

Παράδειγμα 3

'Υποθέσωμεν ὅτι εἰς μίαν κληρωτίδα περιλαμβάνονται 10 ἐν συνόλῳ σφαιρίδια μερικά τῶν ὁποίων εἶναι μαῦρα καί τά ὑπόλοιπα λευκά. 'Υποθέσωμεν ἀκόμα ὅτι ἐκ τῆς ἐν λόγῳ κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον καί ζητεῖται ἡ πιθανότης νά εἶναι μαῦρο. Τά δυνατά ἀποτελέσματα - στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - τοῦ ἐν λόγῳ πειράματος εἶναι π ε π ε ρ α σ μ έ ν α τῷ πλήθος - προφανῶς $|\Omega| = 10$ - ὡς ἐκ τῆς φύσεως δέ τοῦ πειράματος δυνάμεθα ἐπίσης νά δεχθῶμεν ὅτι ὅλα εἶναι ἰ σ ο π ί θ α ν α. Παρά ταῦτα, εἶναι ἀδύνατον νά ἐφαρμόσωμεν ἐν προκειμένῳ τήν σχέσιν (1.1) καί νά ἀπαντήσωμεν εἰς τό τεθέν ἐρώτημα καθ'ὅσον μᾶς εἶναι ἄγνωστος ὁ ἀριθμός τῶν μαύρων σφαιριδίων, ὁ ἀριθμός δηλαδή $|A|$ τῶν ε ὐ ν ο ϊ κ ῶ ν - διά τό ὡς ἄνω ἐνδεχόμενον - ἀποτελεσμάτων.

Εἰς τήν ἰδίαν δυσχέρειαν - ἀδυναμίαν ἐφαρμογῆς τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ - θά εὑρισκόμεθα ἐάν ἦτο μέν γνωστός ὁ ἀριθμός τῶν μαύρων σφαριδίων ἀλλ' ἄγνωστος ἐκεῖνος τῶν λευκῶν - καί κατά συνέπειαν - ὁ ἀριθμός $|\Omega|$ - εἰς δυσχερεστέραν δέ θέσιν ἐάν ἦσαν ἄγνωστοι ἀμφότεροι οἱ ὡς ἄνω ἀριθμοί, ἐάν δηλαδή ἐγνωρίζαμεν μόνον ὅτι ἡ κληρωτίς περιεῖχε μαῦρα καί λευκά σφαιρίδια ἀλλ'εἰς ἄγνωστον ἀριθμόν.

Τό ὡς ἄνω μειονέκτημα τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος, ἰδιαιτέρως δέ ἡ ὑφισταμένη ἐν γένει ἀδυναμία νά γνωρίζωμεν έκ τῶν προτέρων - a priori - τό ἰ σ ο π ί θ α ν ο ν ἤ μή τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων - στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων - ἑνός πειράματος τύχης ὡδήγησαν εἰς τόν λεγόμενον σ τ α τ ι σ τ ι κ ό ν ἤ a porteriori ὁρισμόν τῆς πιθανότητος, ὁ ὁποῖος θά μᾶς ἀπασχολήση εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

Παρά ταῦτα, δοθέντος ὅτι διά μία μεγάλην κατηγορίαν πειραμάτων τύχης - τυχηρά παίγνια κλπ. - αἱ ἀνωτέρω προϋποθέσεις πληροῦνται ἤ τουλάχιστον δέν ὑφίσταται ἀντικειμενική βάσις διά τήν παραδοχήν τοῦ ἀντιθέτου, πλεῖσται ὅσαι ἐφαρμογαί βασίζονται είς τόν κλασσικόν ὁρισμόν καί ὁ ὑπολογισμός τῆς πιθανότητος διαφόρων ἐνδεχομένων γίνεται τῇ βοηθεία τῆς σχέσεως (1.1).

Ἐξυπακούεται βεβαίως, ὅτι ἡ ἀπαρίθμησις τόσον τῶν ε ὐ ν ο ϊ κ ῶ ν ἀποτελεσμάτων - ὁ ὑπολογισμός δηλαδή τοῦ ἀριθμητοῦ $|A|$ τῆς σχέσεως (1.1) - ὅσον καί ἡ ἀπαρίθμησις τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων ἑνός πειράματος - ὁ ὑπολογισμός δηλαδή τοῦ παρονομαστοῦ $|\Omega|$ τῆς σχέσεως (1.1) - δέν εἶναι πάντοτε ἁπλός. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς, ἡ Σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή θεωρία ἀποδεικνύεται πολλάκις - ἴδε § (1.10) - ἐξαιρετικά χρήσιμος.

Περατοῦντες τήν ἀνάλυσιν τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος παραθέτομεν κατωτέρω μερικάς βασικάς ἰ δ ι ό τ η τ α ς αὐτῆς - ἀπορρεούσας ἀπ᾽εὐθείας ἐκ τοῦ ἐν λόγω ὁρισμοῦ - μέ ἀποκλειστικόν σκοπόν ἀφ᾽ἑνός τήν διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων πρός τούς λοιπούς ὁρισμούς τῆς ἐν λόγω ἐννοίας καί ἀφ᾽ἑτέρου τήν πληρεστέραν κατανόησιν τῆς λογικῆς βάσεως ἐπί τῆς ὁποίας θεμελιοῦται - ἴδε §(1.3)- ὁ ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ό ς ὁρισμός αὐτῆς.

Ἰδιότητες τῆς κλασσικῆς πιθανότητος

Συμφώνως πρός τόν ὡς ἄνω - τόν κλασσικόν - ὁρισμόν αὐτῆς, ἡ πιθανότης $P(A)$ ἀποτελεῖ μίαν π ρ α γ μ α τ ι κ ή ν - λαμβάνουσα πραγματικάς τιμάς - συνάρτησιν ὡρισμένη ἐν γένει δι'οἱονδήποτε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, ἤ ὡς συνήθως λέγομεν μία σ υ ν ο λ ο σ υ ν ά ρ τ η σ ι ν μέ π ε δ ί ο ν ὁ ρ ι σ μ ο ῦ τό σύνολον ἤ ἄλλως τήν ο ἰ κ ο γ έ ν ε ι α ν ὅ λ ω ν τ ῶ ν τ υ χ α ί ω ν γ ε γ ο ν ό τ ω ν F - περιλαμβανομένων τοῦ βεβαίου γεγονότος Ω ὡς καί τοῦ ἀδυνάτου τοιούτου $\emptyset$ - ἡ ὁποία ἔχει τάς ἀκολούθους βασικάς ἰδιότητας:

(1) Δι'οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον A - ὑποσύνολον τοῦ Ω - εἶναι

$$P(A) \geq 0 \tag{1.3}$$

(2) Διά τό β έ β α ι ο ν γεγονός - ὁλόκληρον δηλαδή τόν δειγματικόν χῶρον - εἶναι

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.4}$$

(3) Ἐάν A καί B εἶναι δύο ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α ἐνδεχόμενα - ὑποσύνολα τοῦ Ω μέ τομή $AB = \emptyset$ - τότε ἡ πιθανότης τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων των, ἤτοι

$$P(A+B) = P(A)+P(B) \tag{1.5}$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἰδιότης εἶναι γνωστή καί ὡς - μερικόν - ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ό ν θ ε ώ ρ η μ α.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀπορρέουν ἀπ'εὐθείας ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (1.1). Πράγματι, δοθέντος ὅτι οἱ ἀριθμοί $|A|$ καί $|\Omega|$ εἶναι πάντοτε θετικοί - ἐκτός τῆς περιπτώσεως κατά τήν ὁποίαν τό A ἀποτελεῖ τό ἀ δ ύ ν α τ ο ν γεγονός ὅτε $|A| = 0$ - συμπεραίνομεν ὅτι καί ὁ λόγος αὐτῶν, ἤτοι ἡ P(A) εἶναι πάντοτε ἀριθμός θετικός ἤ ἀκριβέστερον μ ή ἀ ρ ν η τ ι κ ό ς.

Ἐξ ἄλλου, ἡ δευτέρα ἰδιότης προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως (1.1) ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων $|A|$ ἀντικατασταθῆ μέ τόν ἀριθμόν $|\Omega|$ καί τοῦτο διότι ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματα εἶναι ἐν προκειμένω καί εὐνοϊκά.

Τέλος, δοθέντος ὅτι τά ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι ἀσυμβίβαστα, ὁ ἀριθμός τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων διά τό ἄθροισμα αὐτῶν Α+Β ἰσοῦται, ὡς εἴδομεν, πρός τό ἄθροισμα τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Α καί ἐκείνων τοῦ Β, ἤτοι εἶναι $|A+B| = |A|+|B|$. Διά διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ἰσότητος μέ τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων $|\Omega|$ προκύπτει ἡ σχέσις (1.5), ἡ τρίτη δηλαδή ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἰδιοτήτων.

Πέραν τῶν ἀνωτέρω, ἡ πιθανότης P(A) - ὡς αὕτη ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.1) - ἔχει καί πλείστας ἄλλας συναφεῖς ἰδιότητας. Τάς σημαντικωτέρας ἐξ αὐτῶν - ἐξ ἀπόψεως πρακτικῶν ἐφαρμογῶν - παραθέτομεν κατωτέρω.

(4) Ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου $\bar{A}$, ἀντιθέτου τοῦ Α δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1.6}$$

(5) Ἡ πιθανότης τοῦ ἀδυνάτου γεγονότος εἶναι μηδέν, ἤτοι

$$P(\emptyset) = 0 \tag{1.7}$$

(6) Ἐάν τό ἐνδεχόμενον Α εἶναι ὑποενδεχόμενον τοῦ Β, ἤτοι ἐάν $A \subset B$, τότε ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέσις

$$P(A) < P(B) \tag{1.8}$$

(7) Ἡ πιθανότης P(A) ἔχει πεδίον τιμῶν τό κλειστόν διάστημα (0,1), ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ πιθανότης οἱουδήποτε ἐνδεχομένου Α πληροῖ πάντοτε τήν σχέσιν

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{1.9}$$

(8) Ἐάν τά ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εἶναι ἀνά δύο ἀσυμβίβαστα, τότε

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \tag{1.10}$$

(9) Διά δύο οιαδήποτε ενδεχόμενα A καί B - δύο οιαδήποτε υποσύνολα τοῦ Ω - ἡ πιθανότης τῆς ἑ ν ώ σ ε ω ς αὐτῶν ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἠλαττωμένων κατά τήν πιθανότητα τοῦ γινομένου - τῆς τομῆς - των, ἤτοι

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) \quad (1.11)$$

Ἡ ἐν λόγῳ ἰδιότης εἶναι γνωστή καί ὡς γ ε ν ι κ ό ν ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ό ν θεώρημα.

(10) Ἐάν A, B καί Γ εἶναι τρία οιαδήποτε ἐνδεχόμενα - ὑποσύνολα τοῦ Ω - τότε ἡ πιθανότης τῆς ἑ ν ώ σ ε ω ς αὐτῶν δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(B\Gamma)- \\ - P(\Gamma A)+P(AB\Gamma) \quad (1.12)$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς (1.11), γενικεύεται δέ εὐκόλως καί διά n οιαδήποτε ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Αἱ ὡς ἄνω ἰδιότητες - (4) ἕως (12) - δύνανται νά ἀποδειχθοῦν εἴτε δι'ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (1.1) - ὡς ἄμεσος δηλαδή συνέπεια τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος ὅπως ἀκριβῶς καί αἱ πρῶται τρεῖς - εἴτε ὡς π ο ρ ί σ μ α τ α τῶν τριῶν πρώτων ἰδιοτήτων - (1) ἕως (3) - διαδικασία ἡ ὁποία ἀκολουθεῖται, ὡς θά εἴδομεν, εἰς τήν ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή ν θεμελίωσιν τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος ὅπου αἱ τρεῖς πρῶται ἰδιότητες γίνονται δεκταί ὡς βασικά ἀ ξ ι ώ μ α τ α.

Τήν ἀπόδειξιν τῶν ἐν λόγῳ ἰδιοτήτων δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος ἀφήνομεν - ὡς ἀρκούντως ἁπλῆν - εἰς τόν ἀναγνώστην. Ἀποδείξεις ἄλλωστε αὐτῶν, ὡς πορισμάτων τῶν τριῶν πρώτων - λαμβανομένων ὡς ἀ ξ ι ω μ ά τ ω ν - παρατίθενται εἰς τήν §(1.3).

1.2.2 Στατιστικός ὁρισμός τῆς πιθανότητος

Ὁ σ τ α τ ι σ τ ι κ ό ς ἤ a posteriori - ἐκ τῶν ὑστέρων - ὁρισμός τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος - ὀφειλόμενος κατά βάσιν εἰς τόν Von Mises - εἶναι ἀπόρροια τῶν κατωτέρω ἐ μ π ε ι ρ ι κ ῶ ν διαπιστώσεων.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὡρισμένον πείραμα τύχης ἐπαναλαμβάνεται - ὑ π ό τ ά ς α ὐ τ ά ς σ υ ν θ ή κ α ς ἐκτελέσεως - n φοράς καί ὅτι ἕνα συγκεκριμένον ἐνδεχόμενον A - δηλαδή ἕνα γεγονός ἤ πραγματοποίησις τοῦ ὁποίου καθ'οἱανδήποτε ἐκτέλεσιν τοῦ πειράματος (δοκιμήν) εἶναι ἐν γένει δ υ ν α τ ή ἀ λ λ' ὄ χ ι κ α ί β ε β α ί α - πραγματοποιεῖται μ_1 φοράς.

Ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ἡ ἀνωτέρω διαδικασία - ἡ ἐκτέλεσις δηλαδή n δοκιμῶν τοῦ πειράματος - ἐπαναλαμβάνεται k ἐν συνόλω φοράς - ὑπό διαφόρων ἐν γένει πειραματιστῶν - καί ὅτι τό ἐνδεχόμενον A πραγματοποιεῖται εἰς τήν δευτέραν ἀκολουθίαν δοκιμῶν μ_2 φοράς, εἰς τήν τρίτην μ_3 φοράς κ.ο.κ. εἰς δέ τήν k ἀκολουθίαν - ἐκ n πάντοτε τῶ πλῆθος - δοκιμῶν μ_k φοράς.

Ἐάν ἐν συνεχεία τῶν ἀνωτέρω ὑπολογίσωμεν τούς λόγους $\frac{\mu_1}{n}, \frac{\mu_2}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}$, τάς σ χ ε τ ι κ ά ς δηλαδή σ υ χ ν ό τ η τ α ς μέ τάς ὁποίας τό ἐνδεχόμενον A πραγματοποιεῖται εἰς τάς ἀντιστοίχους ἀ κ ο λ ο υ θ ί α ς δ ο κ ι μ ῶ ν, διά μία μεγάλην κατηγορίαν πειραμάτων τύχης παρατηρῶνται ἐν γένει τά ἑξῆς:

(α) Ἐάν ὁ ἀριθμός n τῶν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος - τῶν δοκιμῶν - εἰς ἑκάστην τῶν ὡς ἄνω k ἀκολουθιῶν εἶναι "ἀ ρ κ ο ύ ν τ ω ς μ ε γ ά λ ο ς", ἡ σ χ ε τ ι κ ή σ υ χ ν ό τ η ς ἐμφανίσεως τοῦ ἐνδεχομένου A εἰς τάς διαφόρους ἀκολουθίας δοκιμῶν εἶναι σ χ ε δ ό ν ἡ α ὐ τ ή, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις αἱ παρατηρηθεῖσαι σχετικαί συχνότητες κυμαινόμεναι περί μίαν μέσην τιμήν διαφέρουν μεταξύ των "ἐλάχιστα".

(β) Ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός n τῶν δοκιμῶν εἰς ἑκάστην τῶν k ἀκολουθιῶν τόσον αἱ διαφοραί μεταξύ τῶν σχετικῶν συχνοτήτων $\frac{\mu_1}{n}, \frac{\mu_2}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}$, εἶναι - ἐν γένει - μικρότεραι, τυχόν δέ "μεγάλαι" - κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον - ἀποκλίσεις ἐμφανίζονται - τοῦ ἀριθμοῦ n αὐξανομένου - ὁλονέν καί σπανιώτερον.

(γ) Ἐάν τέλος ὁ ἀριθμός n αὐξάνεται ἀπεριορίστως ($n \to \infty$), αἱ σχετικαί συχνότητες $\frac{\mu_1}{n}, \frac{\mu_2}{n}, \ldots, \frac{\mu_k}{n}$, τείνουν ἐν γένει νά ταυτισθοῦν μεταξύ των, ἤ ὡς συνήθως λέγομεν σ υ γ κ λ ί ν ο υ ν πρός τήν αὐτήν τιμήν, ἕναν ἀριθμόν κατά κανόνα θετικόν καί μικρότερον τῆς μονάδος.

Αἱ ὡς ἄνω διαπιστώσεις δημιουργοῦν εὐλόγως τήν πεποίθησιν ὅτι εἰς τό ἐνδεχόμενον A τοῦ ὑπό μελέτην πειράματος καί ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ς τ ο ῦ π ε ι ρ α μ α τ ι ζ ο μ έ ν ο υ ἐ ρ ε υ ν η τ ο ῦ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἰ δ ε α τ ό ς - ἄγνωστος ἐν γένει - θετικός καί μικρότερος τῆς μονάδος ἀριθμός p, τοιοῦτος ὥστε

(α) Ἡ σχετική συχνότης $\frac{\mu}{n}$ μέ τήν ὁποίαν τό ἐνδεχόμενον A πραγματοποιεῖται εἰς μίαν "μ α κ ρ ά ν" ἀκολουθίαν δοκιμῶν - ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος - σ π α ν ί ω ς θά διαφέρῃ αὐτοῦ - τοῦ p - "σημαντικά", καί

(β) Ὅσον ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δοκιμῶν n αὐξάνει ἡ ἐν λόγῳ διαφορά θά γίνεται - κατά κανόνα - ὁλονέν καί μικροτέρα, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις, τοῦ n τείνοντος εἰς τό ἄπειρον, ἡ διαφορά $\frac{\mu}{n} - p$ θά τείνῃ ἐν γένει εἰς τό μηδέν.

Τόν ἐν λόγῳ ἰ δ ε α τ ό ν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ προφανῶς "τ ό ὅ ρ ι ο ν πρός τό ὁποῖον τείνει ἡ σχετική συχνότης $\frac{\mu}{n}$ ὅταν ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δοκιμῶν n τείνει εἰς τό ἄπειρον", ἤτοι τόν ἀριθμόν p ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$p = \text{ορ}\ \frac{\mu}{n} \qquad \text{ὅπου} \qquad n \to \infty \tag{1.13}$$

καλοῦμεν συνήθως σ τ α τ ι σ τ ι κ ή - δοθέντος ὅτι ὑπολογίζεται ἐκ σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ν δεδομένων - ἤ a porteriori καθ'ὅσον προϋποθέτει τήν κατ' ἐπανάληψιν ἐκτέλεσιν τοῦ πειράματος καί ἕ π ε τ α ι τῆς παρατηρήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων, πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α.

Οὕτω ὁριζομένη ἡ στατιστική ἤ ἄλλως a posteriori πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου Α ἀποτελεῖ προφανῶς ἕνα δείκτην ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει κατά τρόπον ἀντικειμενικόν - ἀνεξάρτητον δηλαδή τοῦ πειραματιζομένου ἐρευνητοῦ - τήν συμπεριφοράν τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου εἰς μίαν ἀπέραντον ἀκολουθίαν δοκιμῶν ἤ ὡς συνήθως λέγομεν περιγράφει συνοπτικά τήν νομοτέλεια ἡ ὁποία διέπει τάς μαζικάς ἐκδηλώσεις τοῦ φαινομένου ἀναφορικῶς πρός τήν πραγματοποίησιν ἤ μή τοῦ ἐνδεχομένου Α.

Εἰς τήν πρᾶξιν, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις ἀπείρων τῷ πλῆθος δοκιμῶν εἶναι ἐξ ἀντικειμένου ἀδύνατος, ὡς στατιστική πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου Α λαμβάνεται - κατά προσέγγισιν - ἡ σχετική συχνότης μέ τήν ὁποίαν τό ἐν λόγῳ ἐνδεχόμενον πραγματοποιεῖται εἰς μίαν "ἀρκούντως μακράν" ἀκολουθίαν δοκιμῶν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ a porteriori πιθανότης τοῦ Α ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A) = \frac{\mu}{n} \tag{1.14}$$

ὅπου μ συμβολίζει τόν ἀριθμόν τῶν δοκιμῶν κατά τάς ὁποίας πραγματοποιεῖται τό γεγονός Α

καί n τόν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον "μεγάλον" ἀριθμόν τῶν γενομένων συνολικῶς δοκιμῶν.

Ἡ πεποίθησις περί τῆς ὑπάρξεως ὡς καί τῆς ἀντικειμενικότητος τοῦ ὡς ἄνω ἀριθμοῦ - τῆς καλουμένης δηλαδή ἀνωτέρω στατιστιστικῆς ἤ a posteriori πιθανότητος ἑνός ἐνδεχομένου - ἐνισχύεται περαιτέρω καί ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι εἰς περιπτώσεις πειραμάτων τύχης ὅπου ὁ κλασσικός ὁρισμός τῆς πιθανότητος εἶναι ἐφαρμόσιμος - ὅπως π.χ. ἡ ρίψις ἑνός "κανονικοῦ" νομίσματος ἤ κύβου, τό παιγνίδι τῆς ρουλέτας ἤ ἄλλα τυχηρά παίγνια κλπ. - ἡ σχετική συχνότης μέ τήν ὁποίαν ὡρισμένον ἐνδεχόμενον Α ἐμφανίζεται εἰς "μακράν" ἀκολουθίαν δοκιμῶν σπανίως ἀποκλίνει σημαντικά τῆς ἐκ τῶν προτέρων γνωστῆς κλασσικῆς πιθανότητος αὐτοῦ, ἐνῶ παραλλήλως, ὅσον ὁ ἀριθμός τῶν ἐπαναλήψεων ἑνός τοιούτου πειράματος αὐξάνει ($n \to \infty$), τόσον ἡ διαφορά μεταξύ τῆς σχετικῆς συχνότητος $\frac{\mu}{n}$ καί τῆς a priori πιθανότητος P(A) γίνεται - ἐν γένει - μικροτέρα ($\frac{\mu}{n} - P(A) \to 0$). Τό γεγονός ἄλλωστε αὐτό, ἐπιτρέπον τήν ἑρμηνείαν τῆς σχετικῆς συχνότητος ἑνός ἐνδεχομένου Α ὡς *ἐμπειρικῆς* ἐκφράσεως τῆς πιθανότητος P(A) καί ἀντιστρόφως τήν θεώρησιν τῆς πιθανότητος P(A) ὡς *ἐξιδανικεύσεως* ἤ ἀκριβέστερον ὡς ὁρίου τῆς σχετικῆς συχνότητος - *ὁριακῆς σχετικῆς συχνότητος* - εἰς μίαν ἀπέραντον ἀκολουθίαν δοκιμῶν, ἀποτελεῖ τόν *συνδετικόν* κρῖκον μεταξύ τοῦ *κλασσικοῦ* καί τοῦ *στατιστικοῦ* ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος καί διευρύνει, ὡς εἶναι εὐνόητον, τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ἀμφοτέρων. Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν ἐνδεικτικῶς ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα:

Τρεῖς ἐρευνηταί χρησιμοποιοῦντες τρεῖς - διαφόρους μεταξύ των - *πίνακας τυχαίων ἀριθμῶν* προέβησαν εἰς καταμέτρησιν τῶν "μηδενικῶν" τά ὁποῖα ὑπῆρχον μεταξύ τῶν 1.000 πρώτων μονοψηφίων ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοίχων πινάκων, ἐν συνεχεία τῶν μηδενικῶν τά ὁποῖα ὑπῆρχον εἰς τήν δευτέραν χιλιάδα κ.ο.κ. μέχρι καί τῆς δεκάτης χιλιάδος. Ὁ ἀριθμός τῶν μηδενικῶν τά ὁποῖα εὑρέθησαν εἰς ἑκάστην χιλιάδαν τυχαίων ἀριθμῶν ὡς ἐπίσης αἱ ἀντίστοιχοι ἀθροιστικαί σειραί - δηλαδή τά 0 τά ὁποῖα εὑρέθησαν συσσωρευτικῶς μεταξύ τῶν πρώτων 1.000, 2.000,..., 10.000 τυχαίων ἀριθμῶν - παρατίθενται - στῆλαι (1) καί (2) - εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (1.1).

Διά συγκρίσεως τῶν σχετικῶν συχνοτήτων ἐμφανίσεως τοῦ ἀριθμοῦ 0, ὡς αὗται ὑπολογίζονται - ἴδε στήλη (3) - ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἀθροιστικῶν σειρῶν, ἀφ' ἑνός μεταξύ των καί ἀφ' ἑτέρου πρός τήν a priori γνωστήν πιθανότητα ἐμφανίσεως τοῦ ἀριθμοῦ 0, ἡ ὁποία ὡς ἐκ τοῦ τρόπου καταρτίσεως τῶν ἐν λόγω πινάκων, εἶναι ὡς γνωστόν $\frac{1}{10}$ ἤ 0,1000, ἔχομεν μίαν ἄμεσον ἐμπειρικήν ἐπαλήθευσιν τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω περί τῆς συγκρίσεως τῶν σχετικῶν συχνοτήτων κλπ.

ΠΙΝΑΞ 1.1

Χιλιάς Παρατηρήσεων	Πρῶτος 'Ερευνητής			Δεύτερος 'Ερευνητής			Τρίτος 'Ερευνητής		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
1η	96	96	0,0960	114	114	0,1140	87	87	0,0870
2α	102	198	0,0990	94	208	0,1040	96	183	0,0915
3η	107	305	0,1017	89	297	0,0990	111	294	0,0980
4η	88	393	0,0982	107	404	0,1010	167	401	0,1002
5η	94	487	0,0974	103	507	0,1014	92	493	0,0986
6η	110	597	0,0995	89	596	0,0993	98	591	0,0985
7η	95	692	0,0989	88	684	0,0977	89	680	0,0971
8η	89	781	0,0976	110	790	0,0987	114	794	0,0992
9η	104	885	0,0983	107	897	0,0997	103	897	0,0997
10η	112	997	0,0997	108	1005	0,1005	99	996	0,0996

'Η σ τ α τ ι σ τ ι κ ή πιθανότης ὁριζομένη ἐκ τῆς σχέσεως (1.13) καί ὑπολογιζομένη εἰς τήν πρᾶξιν ἐκ τῆς σχέσεως (1.14) πληροῖ ὅλας τάς βασικάς ἰδιότητας - σχέσεις (1.1) ἕως (1.12) - τῆς κ λ α σ σ ι κ ῆ ς τοιαύτης, ὡς ἐκ τούτου δέ δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι οἱ δύο ὁρισμοί εὑρίσκονται εἰς πλήρη ἀντιστοιχίαν ἤ ἄλλως ὅτι εἶναι ἀπολύτως σ υ μ β ι β α σ τ ο ί.

Πράγματι, λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν εἴτε τῆς σχέσεως (1.13) - ὑπό τήν προϋπόθεσιν πάντοτε ὑπάρξεως τοῦ ὁρίου - εἴτε τῆς σχέσεως (1.14), προκύπτουν ἀμέσως αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες:

(1) 'Η a posteriori πιθανότης οἱουδήποτε ἐνδεχομένου A, δοθέντος ὅτι $\mu \geq 0$, εἶναι πάντοτε μή ἀρνητικός ἀριθμός, ἤτοι $P(A) \geq 0$.

(2) Ἡ a posteriori πιθανότης τοῦ β ε β α ί ο υ γεγονότος συμβολιζομένου καί ἐν προκειμένῳ μέ Ω, δοθέντος ὅτι μ = n, εἶναι ἴση πρός τήν μονάδα, ἤτοι P(Ω) = 1.

(3) Ἐάν Α καί Β εἶναι δύο οἱαδήποτε ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α ἐνδεχόμενα ἡ στατιστική πιθανότης τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν - ἡ πιθανότης δηλαδή νά πραγματοποιηθῇ εἴτε τό ἕνα εἴτε τό ἄλλο - ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐπί μέρους πιθανοτήτων των, ἤτοι P(A+B) = P(A)+P(B).

Ἡ ἰδιότης αὕτη - γνωστή ὡς εἴδομεν καί ὡς ἀθροιστικόν θεώρημα - εἶναι ἄμεσος ἀπόρροια τοῦ γεγονότος ὅτι ἐάν εἰς n δοκιμάς τό γεγονός Α πραγματοποιεῖται μ_A φοράς καί τό Β ἀντιστοίχως μ_B φοράς, τό ἐνδεχόμενον Α+Β πραγματοποιεῖται $\mu_A+\mu_B$ φοράς καί ὡς ἐκ τούτου αἱ σχετικαί συχνότητες τῶν ὡς ἄνω ἐνδεχομένων συνδέονται πάντοτε - δι'οἱανδήποτε τιμήν τοῦ n - διά τῆς σχέσεως

$$\frac{\mu_A+\mu_B}{n} = \frac{\mu_A}{n} + \frac{\mu_B}{n}$$

Τέλος, αἱ ὑπόλοιποι τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων - σχέσεις (1.4) ἕως (1.12) - ἰσχύουν ἐπίσης ἐν προκειμένῳ, ἀποδεικνύονται δέ - ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς κλασσικῆς πιθανότητος - εἴτε ἀμέσως, δι'ἐφαρμογῆς δηλαδή τοῦ ὁρισμοῦ τῆς στατιστικῆς πιθανότητος - ἴδε σχέσεις (1.13) καί (1.14) - εἴτε, ὅπως ἐκτίθεται κατωτέρω εἰς τήν ἀξιωματικήν θεμελίωσιν τῆς πιθανότητος, ὡς πορίσματα τῶν τριῶν πρώτων.

Βασικόν πλεονέκτημα τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος ἔναντι τοῦ κλασσικοῦ τοιούτου εἶναι τό γεγονός ὅτι αἱ τεθεῖσαι διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ τελευταίου π ρ ο ϋ π ο θ έ σ ε ι ς - τό π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, τό ἰ σ ο π ί θ α ν ο ν τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων, ἡ a priori γνῶσις τῶν ἀριθμῶν |A| καί |Ω| κλπ. - εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ δ έ ν ε ἶ ν α ι ἀ π α ρ α ί τ η-τ ο ι. Τοῦτο καθίσταται προφανές ἐάν ἐπανεξετάσωμεν τά παραδείγματα 1, 2 καί 3 τῆς § (1.1.1) - ὅπου, ὡς εἴδομεν, ἡ ἐφαρμογή τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ εἶναι εἴτε ἀδύνατος εἴτε ἀνεπίτρεπτος - καί ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῶν τόν στατιστικόν ὁρισμόν.

Παράδειγμα 1

Ρίπτεται κατ'ἐπανάληψιν ἕνα νόμισμα μέχρις ὅτου ἐμφανισθῆ διά πρώτην φοράν τό ἀποτέλεσμα "κορῶνα" καί ζητεῖται, ὡς εἴδομεν, ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A = {νά ἐμφανισθῆ ἡ κορῶνα εἰς μίαν τῶν τριῶν πρώτων ρίψεων}.

Πρός ὑπολογισμόν τῆς σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς πιθανότητος τοῦ ἐνδεχομένου A ἐφαρμόζεται ἡ ἀκόλουθος διαδικασία:

Τό ὑπό μελέτην νόμισμα ρίπτεται 3 φοράς ἐκτός ἐάν ἡ κορῶνα ἐμφανισθῆ κατά τήν πρώτην ἤ τήν δευτέραν ρίψιν ὅτε αἱ ρίψεις περιορίζονται ἀντιστοίχως εἰς μίαν ἤ δύο. 'Η ἐν λόγω διαδικασία ἐπαναλαμβάνεται n ἐν συνόλω φοράς, ὑποθέσωμεν δέ ὅτι τό ἐνδεχόμενον A - ἡ ἐμφάνισις δηλαδή κορώνας κατά τήν πρώτην ἤ τήν δευτέραν ἤ τήν τρίτην ρίψιν - πραγματοποιεῖται εἰς τάς μ ἐξ αὐτῶν.

'Η σχετική συχνότης ἐμφανίσεως τοῦ A - ὁ λόγος δηλαδή $\frac{\mu}{n}$ - ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ἀριθμός n εἶναι ἀρκετά "μεγάλος" διαφέρει, ὡς εἴδομεν, ἐλάχιστα τῆς - ἀγνώστου ἐν γένει - στατιστικῆς πιθανότητος αὐτοῦ, ἀποτελοῦσα δέ τήν ἐ μ π ε ι ρ ι κ ή ν ἔκφρασιν τῆς τελευταίας λαμβάνεται εἰς τήν πρᾶξιν ὡς ἡ a posteriori πιθανότης τοῦ ἐν λόγω ἐνδεχομένου.

Οὕτω, ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι εἰς n = 2.000 ἐπαναλήψεις τῆς ὡς ἄνω διαδικασίας τό ἐνδεχόμενον A ἐνεφανίσθη μ = 1.710 φοράς ὡς στατιστική πιθανότης αὐτοῦ θεωρεῖται ὁ ἀριθμός P(A) = 0,855. Εὐνόητον φυσικά τυγχάνει ὅτι διάφοροι τιμαί τῶν μ καί n δύνανται νά ὁδηγήσουν ἐν προκειμένω εἰς διάφορον τιμήν τῆς πιθανότητος P(A).

Παράδειγμα 2

Ἐφαρμόζοντες καί ἐν προκειμένῳ τήν ἀνωτέρω διαδικασίαν ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας κύβος (ζάρι) ρίπτεται $n = 1.000$ φοράς οἱ ἀριθμοί δέ 2, 4 καί 6 ἐνεφανίσθησαν ἀντιστοίχως 172, 156 καί 210 φοράς. Ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων - δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος καί ἀνεξαρτήτως τοῦ ἰ σ ο π ι θ ά ν ο υ ἤ μή τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ὡς ἄνω πειράματος - συνάγεται εὐκόλως ὅτι ἡ στατιστική πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου $A = \{$νά ἐμφανισθῆ ζυγός ἀριθμός$\}$ εἶναι $P(A) = \frac{1}{1000}(172+56+210) = 0,538$ σημαντικῶς - ἐν προκειμένῳ - μεγαλυτέρα τῆς κλασσικῆς τοιαύτης 0,5.

Ὁμοίως, ἐάν ἐκ τῆς ἐξετάσεως $n = 5.000$ προϊόντων προκύψει π.χ. ὅτι μεταξύ αὐτῶν ὑπάρχουν $\mu = 410$ "σκάρτα", λέγομεν ὅτι ἡ πιθανότης ἕν οἱονδήποτε ἐκ τῶν ἐν λόγῳ προϊόντων νά εἶναι "σκάρτον" εἶναι $p = 0,082$. Ἀκόμη εἶναι γενικῶς παραδεκτόν ὅτι ἡ πιθανότης γεννήσεως ἄρρενος τέκνου εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης τοῦ θήλεος (πιθανότης ἄρρενος 0,51 περίπου καί θήλεος 0,49) καθ᾽ὅσον πολυάριθμοι σχετικαί παρατηρήσεις ὁδηγοῦν εἰς τάς ἀνωτέρω περίπου σχετικάς συχνότητας.

Παράδειγμα 3

Ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι ἐκ μιᾶς κληρωτίδος ἡ ὁποία περιέχει μαῦρα καί λευκά σφαιρίδια - εἰς ἀ γ ν ώ σ τ ο υ ς ὅμως ἀριθμούς, πρᾶγμα τό ὁποῖον καθιστᾶ, ὡς εἴδομεν, ἀδύνατον τήν ἐφαρμογήν τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ - ἐξάγονται διαδοχικῶς $n = 500$ σφαιρίδια - ἀφοῦ πρό ἑκάστης ἐξαγωγῆς ἐ π α ν α τ ε θ ῆ εἰς τήν κληρωτίδα τό ἐξαχθέν προηγουμένως σφαιρίδιον - καί ὅτι μεταξύ τῶν ἐξαχθέντων σφαιριδίων 358 ἦσαν μαῦρα καί 142 λευκά. Ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων - δι᾽ἐφαρμογῆς καί πάλιν τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ - δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς μαύρου σφαιριδίου εἶναι $p = 0,716$ (περίπου), ἐνῶ τοῦτο - ὁ ὑπολογισμός δηλαδή τῆς ἐν λόγῳ πιθανότητος - δέν ἦτο δυνατόν δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι αἱ βασικαί δυσχέρειαι αἱ ὁποῖαι ἀναφύονται κατά τάς ἐφαρμογάς τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος, εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐν λόγω ἐννοίας ἀποφεύγονται ὁλοσχερῶς ἤ τουλάχιστον παρακάμπτονται. 'Εν προκειμένω ὅμως πρέπει νά λεχθῆ ὅτι τόσον ἡ θεωρητική θεμελίωσις τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ ὅσον καί ἡ χρησιμοποίησις τῆς σχετικῆς συχνότητος ἑνός γεγονότος ὡς a posteriori πιθανότητος αὐτοῦ παρουσιάζουν ὡρισμένας ἄλλας δυσχερείας καί μειονεκτήματα. Συγκεκριμένως, ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καθίσταται φανερόν ὅτι διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ θά πρέπει νά πληροῦνται - πρᾶγμα πού δέν συμβαίνει πάντοτε - αἱ κάτωθι προϋποθέσεις:

(i) Νά εἶναι δυνατόν - ἔστω καί θεωρητικῶς - τό ὑπό μελέτην πείραμα τύχης νά ἐπαναληφθῆ ἀπείρους τῶ πλῆθος φοράς καί ὑπό τάς αὐτάς πάντοτε συνθήκας (Δυνατότης ἀπείρων τῶ πλῆθος δοκιμῶν).

(ii) 'Η σχετική συχνότης τοῦ ὑπό παρατήρησιν ἐνδεχομένου εἰς οἱανδήποτε ἀπέραντον ἀκολουθίαν δοκιμῶν νά συγκλίνη πρός τόν αὐτόν πάντοτε - θετικόν καί μικρότερον τῆς μονάδος - ἀριθμόν p. (Ὕπαρξις ὁρίου).

'Εξ ἄλλου, ἡ χρησιμοποίησις - εἰς τήν πρᾶξιν - τῆς σχετικῆς συχνότητος ἑνός γεγονότος ὡς ἐμπειρικῆς ἐκφράσεως τῆς - ἀγνώστου ἐν γένει - πιθανότητος αὐτοῦ, παρ' ὅτι ἀνταποκρίνεται πλήρως εἰς τήν ὑφισταμένην περί τῆς ἐν λόγω ἐννοίας διαίσθησιν καί τόν νόμον τῆς καλουμένης στατιστικῆς τάξεως, ἀποκλείει - ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων - τόν μονοσήμαντον ὁρισμόν τοῦ ἀριθμοῦ p. Οὕτω π.χ. ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως τοῦ ἀριθμοῦ 0 εἰς τούς χρησιμοποιηθέντας ὑπό τοῦ πρώτου ἐρευνητοῦ πίνακας τυχαίων ἀριθμῶν ἐπί τῆ βάσει τῶν παρατηρήσεων τῆς 1ης χιλιάδος ψηφίων θά ἐλαμβάνετο - ἴδε πίνακα (1.1) - ὡς ἴση πρός 0,0960 , ἐπί τῇ βάσει τῶν δύο πρώτων χιλιάδων ὡς 0,0990, τῶν τριῶν πρώτων χιλιάδων ὡς 0,1017 ...κ.ο.κ.

Πέραν τῶν θεωρητικῶν δυσχερειῶν αἱ ὁποῖαι ἀναφύονται ἐν προκειμένῳ, τά ὡς ἄνω μειονεκτήματα τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος - ὅπως καί ἐκεῖνα τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ - περιορίζουν σημαντικά καί τήν πρακτικήν χρησιμότητα - τό πεδίον ἐφαρμογῶν - τῆς ἐν λόγῳ ἐννοίας. Τό γεγονός ἄλλωστε αὐτό κατέστησεν ἀναγκαίαν τήν καθαρῶς μαθηματικήν - τήν καλουμένην συνήθως ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή ν - θεμελίωσιν τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, ἡ ὁποία θά μᾶς ἀπασχολήσῃ εἰς τήν § (1.3).

1.2.3 Ἡ ὑποκειμενική ἔννοια τῆς πιθανότητος

Τόσον ὁ κλασσικός ὁρισμός τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, ὅσον καί ὁ στατιστικός τοιοῦτος, βασιζόμενοι ἀντιστοίχως εἰς τήν a priori ἤ a posteriori γνῶσιν ὡρισμένων - ἀριθμητικῶν ἐν γένει - δεδομένων καί τήν παραδοχήν συγκεκριμένων κατά περίπτωσιν συνθηκῶν, δέν δίδουν ἀπάντησιν εἰς ἐρωτήματα τοῦ τύπου:

- Ποία ἡ "πιθανότης" ὁ κ. Χ νά νυμφευθῇ τήν δεσποινίδα Υ; ἤ

- Ποία ἡ "πιθανότης" ὁ φοιτητής Χ νά γίνῃ καλός δικηγόρος; ἤ τέλος

- Ποία ἡ "πιθανότης" νά ἐκραγῇ κατά τό προσεχές ἔτος Παγκόσμιος πόλεμος;

Τοιούτου εἴδους ἐρωτήματα ὡς ἐπίσης κρίσεις καί γενικώτερον προτάσεις τῆς μορφῆς:

- Τό ἑπόμενον θέρος θά εἶναι "πιθανώτατα" τό θερμότερον τῆς τελευταίας δεκαετίας, ἤ

- Ἡ "πιθανότης" ἐπιτυχίας τοῦ ὑποψηφίου Χ εἰς τάς προσεχεῖς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις εἶναι 50%, ἤ τέλος

- Ἡ "πιθανότης" ἡ Α ποδοσφαρική ὁμάς νά νικήση τήν Β εἶναι 3 πρός 1 ἤ ἄλλως 75%,

ἀναφερόμεναι κατά βάσιν εἰς ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ά ς ἀπόψεις ἤ πεποιθήσεις καί ὄχι εἰς συγκεκριμένα πειράματα τύχης - δυνάμενα μάλιστα νά ἐπαναληφθοῦν ὑπό τάς αὐτάς πάνοτε συνθήκας - εἶναι προφανῶς - ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων - ἀδύνατον νά μελετηθοῦν κατά τρόπον ἀντικειμενικόν καί μάλιστα ἐν τῷ πλαισίῳ εἴτε τοῦ κλασσικοῦ εἴτε τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος.

Οὕτω, οἱαδήποτε ἀπάντησις εἰς τά ἐν λόγῳ ἐρωτήματα καί ἰδιαιτέρως οἱαδήποτε ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ή ἔ κ φ ρ α σ ι ς τῆς "πιθανότητος" πραγματοποιήσεως ἑνός τοιούτου "ἐνδεχομένου", βασιζομένη ἀποκλειστικῶς καί μόνον εἰς ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ά ς κρίσεις ἤ ἀντιλήψεις καί ὄχι εἰς ἀντικειμενικάς μεθόδους ὑπολογισμοῦ, ἀντανακλᾶ ἁπλῶς τόν β α θ μ ό ν π ε π ο ι θ ή σ ε ω ς ἑνός προσώπου περί τῆς δυνατότητος πραγματοποιήσεως ἤ μή τοῦ ὑπ'ὄψιν ἐνδεχομένου.

Εἰς περιπτώσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω ὁμιλοῦμεν περί ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ῆ ς ἐ ν ν ο ί α ς τ ῆ ς π ι θ α ν ό τ η τ ο ς, οἱαδήποτε δέ π ο σ ο τ ι κ ή ἔ κ φ ρ α σ ι ς αὐτῆς - ἐν πολλοῖς αὐθαίρετος ὡς μή βασιζομένη ἐπί ἀντικειμενικῶν μεθόδων - ἀποτελεῖ ἁπλῶς καί μόνον προσωπικήν - ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ή ν - ἐ κ τ ί μ η σ ι ν τοῦ ἐρευνητοῦ.

Ἡ ὑποκειμενική ἔννοια τῆς πιθανότητος ἰδιαιτέρως δέ αἱ ἐφαρμογαί αὐτῆς εἰς τάς Κοινωνικάς Ἐπιστήμας, τήν Ψυχολογίαν, τήν θεωρίαν τῶν Παιγνίων, τήν Κυβερνητικήν κλπ. ἀποτελοῦν σήμερον ἀντικείμενον μελέτης πολλῶν ἐρευνητῶν. Παρά ταῦτα, δοθέντος ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἔννοια δέν βασίζεται ἐπί ἀντικειμενικῶν μεθόδων καί ὡς ἐκ τούτου ἀποτελεῖ ἀκόμη πεδίον συζητήσεων καί ἀντιτιθεμένων ἀπόψεων, δέν θά μᾶς ἀπασχολήση εὐρύτερον. Πρέπει ὅμως νά λεχθῆ ἐν προκειμένῳ ὅτι ἡ ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ή π ι θ α ν ό τ η ς ἐκφραζομένη ποσοτικῶς - ἔστω καί αὐθαιρέτως - οὐδόλως ἀποκλείει τόν ἐν γένει μαθηματικόν χειρισμόν.

1.3 Ἀξιωματικὴ θεμελίωσις τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος

Ἡ λεγομένη ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή θεμελίωσις τῆς πιθανότητος - γνωστή καί ὡς μ α θ η μ α τ ι κ ό ς ὁρισμός τῆς ἐν λόγῳ ἐννοίας - ὀφειλομένη κατά βάσιν εἰς τόν Ρῶσσον Μαθηματικόν K o l m o g o r o v, ὁρίζει τήν πιθανότητα ἑνός ἐνδεχομένου - κατ᾿ἀναλογίαν τῆς ἐννοίας τοῦ μ έ τ ρ ο υ ἑ ν ό ς σ υ ν ό λ ο υ - ὡς μίαν π ρ α γ μ α τ ι κ ή ν σ υ ν ο λ ο σ υ ν ά ρ τ η σ ι ν - συνάρτησιν μέ ἀνεξάρτητον μεταβλητήν ἕνα σύνολον - ἡ ὁποία πληροῖ ὡρισμένας σ υ ν θ ή κ α ς.

Συγκεκριμένως, ἡ πιθανότης ὁρίζεται ἐν προκειμένῳ ὡς μία π ρ α γ μ α τ ι κ ή σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον ἐν γένει τῶν διαφόρων ἐ ν δ ε χ ο μ έ ν ω ν τοῦ ὑπό μελέτην πειράματος ἤ ἄλλως ὡς μία σ υ ν ο λ ο σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς ὁριζομένη διά κάθε* ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, τοιαύτη ὥστε νά πληροῦνται αἱ κάτωθι συνθῆκαι - ἀ ξ ι ώ μ α τ α:

(1) Εἰς ἕκαστον ἐ ν δ ε χ ό μ ε ν ο ν A ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικός καί μ ή ἀ ρ ν η τ ι κ ό ς ἀριθμός P(A) καλούμενος πιθανότης αὐτοῦ.

Ἤτοι, διά κάθε $A \subseteq \Omega$ ἔχομεν $P(A) \geq 0$ (1.15)

(2) Ἡ πιθανότης τοῦ β ε β α ί ο υ γεγονότος εἶναι ἴση μέ τήν μονάδα.

Ἤτοι, $P(\Omega) = 1$ (1.16)

(3) Ἐάν n ἐνδεχόμενα εἶναι ἀ ν ά δ ύ ο ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α, ἡ πιθανότης τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν - ἡ πιθανότης δηλαδή νά πραγματοποιηθῆ ἕν οἱοδήποτε ἐξ αὐτῶν - εἶναι ἴση πρός τό ἄθροι-

---

*Ἀκριβέστερον διά κάθε μ ε τ ρ ή σ ι μ ο ν ὑποσύνολον.

σμα τῶν πιθανοτήτων των ('Α θ ρ ο ι σ τ ι κ ό ν 'Α ξ ί ω μ α).

"Ητοι, ἐάν $A_iA_j = \emptyset$ διά $i \neq j = 1, 2, \ldots n$ ἔχομεν

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \tag{1.17}$$

ἤ συνοπτικώτερον $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(4) 'Εάν $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ εἶναι μία ἀκολουθία ἀ σ υ μ β ι β ά σ τ ω ν ἀ ν ά δ ύ ο ἐνδεχομένων, ἡ πιθανότης τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν - ἡ πιθανότης δηλαδή ἑνός ἐνδεχομένου A ἰσοδυνάμου πρός τήν πραγματοποίησιν ἑνός οἱουδήποτε ἐκ τῶν A_i, $i = 1, 2, \ldots$ - εἶναι ἴση πρός τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων των.

"Ητοι, ἐάν $A_iA_j = \emptyset$ διά $i \neq j = 1,2,\ldots$ ἔχομεν

$$P(A) = P(A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+\ldots \tag{1.18}$$

ἤ συνοπτικώτερον $P(A) = (\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Τό τελευταῖον τοῦτο ἀξίωμα - γνωστόν ὡς γ ε ν ι κ ε υ μ έ ν ο ν ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ό ν ἀξίωμα - ἀπαιτεῖται μόνον εἰς περιπτώσεις ἀ π ε ί ρ ω ν δειγματικῶν χώρων - ὅπου δηλαδή τό πλῆθος τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων τοῦ ὑπό μελέτην πειράματος εἶναι ἄ π ε ι ρ ο ν - ὑπαγορεύεται δέ ἐκ τῆς ὑφισταμένης πολλάκις ἀνάγκης ὡρισμένον ἐνδεχόμενον νά ἀναλυθῆ περαιτέρω καί νά ἐκφρασθῆ ὡς ἄθροισμα ἀπείρων τῶ πλῆθος ἀσυμβιβάστων - ἀνά δύο - μερικωτέρων ἐνδεχομένων (ὑποενδεχομένων).

Οὕτω ὁριζομένη ἡ μ α θ η μ α τ ι κ ή πιθανότης - θεωρουμένη δηλαδή ὡς μία θ ε τ ι κ ή (ἀξίωμα 1), π ε π ε ρ α σ μ έ ν η (ἀξίωμα 2) καί ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ή (ἀξιώματα 3 καί 4) σ υ ν ο λ ο σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς - ἔχει, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ὅλας τάς ἰδιότητας τόσον τῆς κ λ α σ σ ι κ ῆ ς ὅσον καί τῆς σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς πιθανότητος καί ὡς ἐκ τούτου, ἐξ ἀπόψεως τουλάχιστον ἐφαρμογῶν, εὑρίσκεται εἰς πλήρη ἐναρμόνισιν πρός ἀμφοτέρους. Ἐξ ἄλλου, μή παρουσιάζουσα - ἡ κατά τά ὡς ἄνω ἀξιωματική θεμελίωσις τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος - τά γνωστά - θεωρητικά καί πρακτικά - μειονεκτήματα τοῦ κλασσικοῦ καί στατιστικοῦ ὁρισμοῦ, ἐπιτρέπει ἐν γένει τήν ἐπίλυσιν τῶν ὑφισταμένων προηγουμένως δυσχερειῶν καί κατά συνέπειαν τήν ἀντιμετώπισιν ἑνός εὐρυτέρου φάσματος προβλημάτων καί πρακτικῶν ἐφαρμογῶν.

Ἕνα παράδειγμα τό ὁποῖον δύναται νά ἐνταχθῆ ἀμεσα εἰς τά πλαίσια τῆς ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως τῆς πιθανότητος ἀποτελεῖ ἡ ἔννοια τῆς λεγομένης Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ῆ ς Π ι θ α ν ό τ η τ ο ς.

Σημειωτέον ὅτι ἡ ἐν λόγω ἔννοια - ἀκριβέστερον ἕνας τρόπος ὑπολογισμοῦ τῆς πιθανότητος ὡρισμένων ἐνδεχομένων ἀναφερομένων κατ'ἀρχήν εἰς πιθανοθεωρητικά προβλήματα γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ῆ ς φύσεως - εἰσήχθη* εὐθύς ὡς κατέστη φανερόν ὅτι εἰς τά ἐν λόγω προβλήματα τόσον τά "δυνατά" ὅσον καί τά "εὐνοϊκά" ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος ἦσαν ἄ π ε ι ρ α τῶ πλῆθος καί κατά συνέπειαν ἄμεσος ἐφαρμογή τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ ἦτο ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατος.

Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἐξ ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος AB λαμβάνεται τ υ χ α ί ω ς ἕνα σημεῖον. Ποία ἡ πιθανότης τό ἐπιλεγέν σημεῖον νά ἀνήκη εἰς τό πρῶτον ἥμισυ αὐτοῦ AM;

A M B

Ἐφαρμογή τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ πρός ὑπολογισμόν τῆς ζητουμένης πιθανότητος θά ὁδήγη προφανῶς - λαμ-

---

* πρό τῆς αὐστηρᾶς ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως τῆς πιθανότητος

βανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι τόσον τά δυνατά ὅσον καί τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα τοῦ ὡς ἄνω "πειράματος" εἶναι ἄπειρα τῷ πλῆθος - εἰς ἀπροσδιοριστίαν τῆς μορφῆς $\frac{\infty}{\infty}$. Παρά ταῦτα, λαμβάνοντας ἐν προκειμένῳ ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ πιθανότης τό ἐπιλεγέν σημεῖον νά ἀνήκῃ εἴτε εἰς τό πρῶτον εἴτε εἰς τό δεύτερον ἥμισυ - AM ἤ MB - τοῦ ἐν λόγῳ τμήματος εἶναι ἡ αὐτή, δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ ζητουμένη πιθανότης ἰσοῦται πρός $\frac{1}{2}$ ἤ ἄλλως πρός τό πηλίκον τοῦ μήκους $|AM|$ πρός τό μῆκος τοῦ ὅλου τμήματος $|AB|$. Γενικώτερον, ἐάν ἐπί μιᾶς γραμμῆς μήκους M - π.χ. ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος, ἑνός τόξου κλπ - ἤ ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ E - π.χ. ἑνός πολυγώνου, ἑνός κύκλου κλπ. - ἤ τέλος ἐντός ἑνός στερεοῦ ὄγκου V - π.χ. μιᾶς σφαίρας, ἑνός πολυέδρου κλπ. - ληφθῆ ἀντιστοίχως μία "μικροτέρα" γραμμή μήκους $\mu \leq M$, μία μικροτέρα ἐπιφάνεια ἐμβαδοῦ $\varepsilon \leq E$ καί τέλος ἕνα μικρότερον στερεόν ὄγκου $v \leq V$, ἐν συνεχείᾳ δέ ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ - τοῦ "εὐρυτέρου" - ἐκ τῶν ἐν λόγῳ γεωμετρικῶν σχημάτων ἐπιλεγῆ τ υ χ α ί ω ς ἕνα σημεῖον, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ πιθανότης τό ἐπιλεγέν σημεῖον νά ἀνήκῃ εἰς τό ἀντίστοιχον ἐσωτερικόν - τό "μικρότερον" - γεωμετρικόν σχῆμα δέν εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῆ - διά τούς αὐτούς ὡς ἄνω λόγους - δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ. Προφανῶς ὅμως ἡ ζητουμένη πιθανότης - ἴση πρός τήν μονάδα ἐάν τό "ἐσωτερικόν" καί τό ἀρχικόν γεωμετρικόν σχῆμα ταυτίζονται - εἶναι ἀ ν ά λ ο γ ο ς τοῦ μήκους, τοῦ ἐμβαδοῦ ἤ τοῦ ὄγκου ἀντιστοίχως - κατά περίπτωσιν - τοῦ ἐσωτερικοῦ σχήματος. Οὕτω, ἡ ἐν λόγῳ πιθανότης - γνωστή εὐρέως ὡς γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ή π ι θ α ν ό τ η ς - δύναται νά ὁρισθῆ ὡς τό πηλίκον τοῦ μήκους, τοῦ ἐμβαδοῦ ἤ τέλος τοῦ ὄγκου τοῦ ἐσωτερικοῦ σχήματος πρός τό αὐτό "μέτρον" τοῦ ἀντιστοίχου ἀρχικοῦ τοιούτου - τοῦ εὐρυτέρου δηλαδή σχήματος - νά ὑπολογίζεται δηλαδή ἐκ τῶν σχέσεων

$$p = \frac{\mu}{M}, \quad p = \frac{\varepsilon}{E} \quad \text{καί τέλος} \quad p = \frac{v}{V}.$$

'Η πλήρης ἐναρμόνισις τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ πρός τόν μαθηματικόν ὁρισμόν ἤ ἄλλως τήν γενικωτέραν ἀξιωματικήν θεμελίωσιν τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος εἶναι προφανής. Πράγματι, οὕτω ὁριζομένη ἡ γεωμετρική πιθανότης ἀποτελεῖ προφανῶς μία πραγματική συνολοσυνάρτησιν, ὁρισμένη ἐν γένει διά κάθε τμῆμα τοῦ ἀρχικοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος - ὅπως ἀκριβῶς ἡ μαθηματική πιθανότης διά κάθε ὑποσύνολον τοῦ ἀρχικοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - ἔχει ἀκόμη - ὅπως καί ἡ μαθηματική πιθανότης - πεδίον τιμῶν τό κλειστόν διάστημα [0,1] - εἶναι δηλαδή ἀριθμός μή ἀρνητικός καί μικρότερος ἤ τό πολύ ἴσος πρός τήν μονάδα - τέλος δέ, πληροῖ - ὅπως ἀποδεικνύεται εὐκόλως - τόσον τά βασικά ἀξιώματα - σχέσεις (1.15) ἕως (1.18) - τῆς μαθηματικῆς πιθανότητος, ὅσον καί τάς παρατιθεμένας κατωτέρω - σχέσεις (1.19) ὡς (1.28) - λοιπάς ἰδιότητας αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι ὡς θά ἴδωμεν, ἀπορρέουν εὐθέως ἐκ τῶν ἐν λόγω ἀξιωμάτων.

Ἰδιότητες τῆς μαθηματικῆς πιθανότητος

Αἱ βασικαί ἰδιότητες τόσον τῆς κλασσικῆς ὅσον καί τῆς στατιστικῆς πιθανότητος, ἤτοι αἱ ἰδιότητες:

(α) $P(A) \geq 0$

(β) $P(\Omega) = 1$ καί

(γ) $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ὅπου $AB = \emptyset$

αἱ ὁποῖαι, ὡς εἴδομεν, ἀπορρέουν ἀπ᾽εὐθείας ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ὁρισμῶν, ἰσχύουν καί διά τήν μαθηματικήν πιθανότητα καθ᾽ὅσον αὗται ἀποτελοῦν ἐν προκειμένω τήν βάσιν τῆς ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως (βασικά ἀξιώματα). Ἐξ ἄλλου, αἱ ὑπόλοιποι ἰδιότητες τῆς πιθανότητος ἀποδεικνύονται - τῇ βοηθεία τῶν ἐν λόγω ἀξιωμάτων - ὡς ἑξῆς:

(1) Ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου $\bar{A}$, ἀντιθέτου τοῦ A, εἶναι

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1.19}$$

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τρίτου ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἀξιωμάτων - σχέσις (1.17) - ἐπί τῆς ἰσότητος $A+\bar{A}=\Omega$ λαμβάνομεν τήν σχέσιν $P(A)+P(\bar{A}) = P(\Omega)$, δοθέντος δέ ὅτι $P(\Omega) = 1$, ἴδε σχέσιν (1.16), ἔχομεν τήν σχέσιν $P(A)+P(\bar{A})=1$ καί ἐξ αὐτῆς τήν πρός ἀπόδειξιν (1.19).

(2) Ἡ πιθανότης τοῦ ἀ δ υ ν ά τ ο υ γεγονότος εἶναι μηδέν, ἤτοι

$$P(\emptyset) = 0 \qquad (1.20)$$

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (1.19) λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι $\emptyset = \bar{\Omega}$ καί κατά συνέπειαν $P(\emptyset) = 1-P(\Omega) = 0$.

(3) Ἐάν τό ἐνδεχόμενον A εἶναι ὑ π ο ε ν δ ε χ ό μ ε ν ο ν τοῦ B, ἤτοι ἐάν $A \subset B$, τότε

$$P(A) \leq P(B) \qquad (1.21)$$

Τό ἐνδεχόμενον B, δοθέντος ὅτι $A \subset B$, εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων - ἀσυμβιβάστων - ἐνδεχομένων A καί $\bar{A}B$. Κατά συνέπειαν - ἴδε σχέσιν (1.17) - ἔχομεν $P(A)+P(\bar{A}B) = P(B)$, ἐάν δέ λάβωμεν ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(\bar{A}B) \geq 0$, ἴδε (1.15), συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέσις $P(A) \leq P(B)$.

(4) Ἡ πιθανότης οἱουδήποτε ἐνδεχομένου A πληροῖ πάντοτε τήν σχέσιν

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad (1.22)$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ πιθανότης, θεωρουμένη ὡς συνολοσυνάρτησις μέ π ε δ ί ο ν ὁ ρ ι σ μ ο ῦ τό σύνολον ἐν γένει τῶν δυνατῶν ἐνδεχομένων, ἔχει ὡς π ε δ ί ο ν τ ι μ ῶ ν τό κλειστόν διάστημα $[0, 1]$.

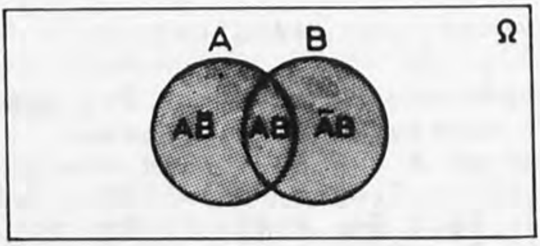
Ἡ πρώτη τῶν ἀνισοτήτων τῆς (1.22), ἤτοι ἡ σχέσις $0 \leq P(A)$, ἀποτελεῖ τό πρῶτον βασικόν ἀξίωμα (ἴδε 1.17). Ἐξ ἄλλου, δοθέντος ὅτι οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον A εἶναι ἐν γένει ὑποσύνολον τοῦ Ω, ἤτοι $A \subset \Omega$, συνάγεται ἀμέσως - δι' ἐφαρμογῆς τῆς (1.21) - καί ἡ ἀνισότης $P(A) \leq 1$.

(5) Τό Γενικόν Ἀθροιστικόν Θεώρημα

Ἐάν A καί B εἶναι δύο οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα, ἡ πιθανότης τῆς ἑνώσεως αὐτῶν - ἤτοι ἡ πιθανότης νά πραγματοποιηθῆ ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο - δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.23}$$

Ἡ ἕνωσις τῶν ἐνδεχομένων A καί B δύναται προφανῶς νά γραφῆ ὡς ἄθροισμα τῶν ἀνά δύο ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων $A\bar{B}$, AB καί $\bar{A}B$, ἤτοι εἶναι $A \cup B = A\bar{B} + AB + \bar{A}B$.



Δι' ἐφαρμογῆς ἐπί τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος τοῦ τρίτου ἀξιώματος - σχέσις (1.17) - λαμβάνομεν $P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$ ἤ ἀκόμη - προσθέτοντας καί ἀφαιρῶντας εἰς τό δεύτερον μέλος αὐτῆς τόν ἀριθμόν $P(AB)$ - ἔχομεν τήν σχέσιν

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) + P(AB) - P(AB)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει εὐκόλως ἡ πρός ἀπόδειξιν (1.23), καθ' ὅσον ἐκ τῶν σχέσεων $A\bar{B} + AB = A$ καί $\bar{A}B + AB = B$ ἔχομεν ἀμέσως - δι' ἐφαρμογῆς καί πάλιν τοῦ τρίτου ἀξιώματος - ὅτι $P(A\bar{B}) + P(AB) = P(A)$ καί $P(\bar{A}B) + P(AB) = P(B)$.

Παρατήρησις: Τό 'Αθροιστικόν Θεώρημα γενικεύεται εὐκόλως εἰς τήν περίπτωσιν n ἐνδεχομένων, ἐκφράζεται δέ ὑπό τῆς σχέσεως

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_i P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} P(A_i A_j A_k) - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \qquad (1.24)$$

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν ἐνδεχομένων Α, Β καί Γ ἔχομεν

$$P(A\cup B\cup \Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+ + P(AB\Gamma) \qquad (1.25)$$

(6) 'Η πιθανότης τῆς ἑνώσεως δύο ἐνδεχομένων εἶναι μικροτέρα ἤ τό πολύ ἴση πρός τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων αὐτῶν, ἤτοι

$$P(A\cup B) \leq P(A)+P(B) \qquad (1.26)$$

'Η σχέσις (1.26) προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς (1.23) ἀρκεῖ νά ληφθῆ ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(AB)\geq 0$. Τό σημεῖον τῆς ἰσότητος ἰσχύει προφανῶς ἐάν - καί μόνον ἐάν - $P(AB)=0$ ἤτοι ἐάν τά ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι ἀσυμβίβαστα (περίπτωσις τοῦ τρίτου ἀξιώματος).

Παρατήρησις: Διά τῆς μεθόδου τῆς ἐπαγωγῆς ἡ σχέσις (1.26) γενικεύεται εὐκόλως καί εἰς τήν περίπτωσιν n ἐνδεχομένων, ἔχομεν δηλαδή

$$P(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \qquad (1.27)$$

Πράγματι, ἐάν δεχθῶμεν ὅτι ἡ σχέσις (1.27) ἰσχύει διά n=k εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει καί διά n=k+1, καθ'ὅσον θά ἔχωμεν

$$P\left[A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}\right] \leq P\left[A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_k\right] + P(A_{k+1}) \leq P(A_1)+\ldots+$$

$$+P(A_k)+P(A_{k+1})$$

καί κατά συνέπειαν ἀποδεχθεῖσα διά n=2 ἰσχύει δι' ὅλας τάς - ἀκεραίας καί θετικάς - τιμάς τοῦ n.

'Η κατά τά ὡς ἄνω ἀξιωματική - μαθηματική - θεμελίωσις τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, τό σύστημα δηλαδή τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων καί τῶν ἐξ αὐτῶν ἀπορρεουσῶν ἰδιοτήτων τῆς συνολοσυναρτήσεως P(A), χαρακτηρίζεται ἀπό σ υ ν έ π ε ι α ν - ἀνταποκρίνεται δηλαδή ὡς θά ἴδωμεν, εἰς τήν περιγραφήν πραγματικῶν καταστάσεων - ἐνῶ παραλλήλως, μ ή π ρ ο ϋ π ο θ έ τ ο ν ἐ ν γ έ ν ε ι μ ο ν ο σ ή μ α ν τ ο ν καθορισμόν τῶν πιθανοτήτων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά διάφορα ἐνδεχόμενα τοῦ ὑπό μελέτην πειράματος ἤ γενικώτερον εἰς τά στοιχεῖα - ἐνδεχόμενα - ἑνός οἱουδήποτε συνόλου, καθιστᾶ δυνατήν τήν περιγραφήν καί μελέτην τ ῶ ν ἰ δ ί ω ν τ υ χ α ί ω ν γ ε γ ο ν ό τ ω ν μέ δ ι ά φ ο ρ ο υ ς ἑκάστοτε πιθανότητας. 'Η εὐελιξία αὕτη ἐπιτρέπει, ὡς εἶναι εὐνόητον, τήν καλλιτέραν προσαρμογήν τοῦ θεωρητικοῦ τούτου πλαισίου πρός τήν ἑκάστοτε πραγματικότητα - πρός τήν ἐξ ἀντικειμένου φύσιν τῶν πραγμάτων - καί ὡς ἐκ τούτου διευρύνει σημαντικά τήν πρακτικήν του χρησιμότητα.

'Υποθέσωμεν π.χ. ὅτι $\Omega=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n\}$ συμβολίζει τόν δειγματικόν χῶρον - τό σύνολον δηλαδή τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων ἤ ἄλλως τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων - ἑνός πειράματος τύχης ἤ γενικώτερον ἕνα οἱοδήποτε σύνολον π ε π ε ρ α σ μ έ ν ω ν τῷ πλῆθος στοιχείων.

Τό πλῆθος τῶν διαφόρων ἐνδεχομένων τοῦ ἐν λόγῳ πειράματος, περιλαμβανομένου τοῦ ἀδυνάτου γεγονότος $\emptyset$ καί τοῦ βεβαίου τοιούτου Ω, εἶναι 2^n. Πράγματι, πέραν τοῦ ἀδυνάτου καί τοῦ βεβαίου γεγονότος, μεταξύ τῶν διαφόρων ἐνδεχομένων περιλαμβάνονται ἐν προκειμένῳ τά ὑποσύνολα τοῦ Ω τά ὁποῖα ἔχουν ἀνά ἕν στοιχεῖον τοῦ Ω - $\binom{n}{1}$ τῷ πλῆθος - τά ὑποσύνολα τά ὁποῖα περιλαμβάνουν ἀνά δύο στοιχεῖα τοῦ Ω - ἤτοι $\binom{n}{2}$ τῷ πλῆθος κ.ο.κ., τέλος δέ τά ὑποσύνολα τά ὁποῖα περιλαμβάνουν ἀνά (n-1) στοιχεῖα τοῦ Ω καί τῶν ὁποίων τό πλῆθος εἶναι ὅσοι οἱ συνδυασμοί τῶν n ἀνά (n-1), ἤτοι $\binom{n}{n-1}$. Οὕτω, τό πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν ἐνδεχομένων ἑνός τοιούτου πειράματος εἶναι συνολικῶς

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n \qquad (1.28)$$

Ἐάν θέσωμεν

$$P(\varepsilon_i)=p_i \quad \delta\iota\acute{\alpha}\ i=1,2,\ldots n \qquad (1.29)$$

ἐάν δηλαδή θεωρήσωμεν ὡς πιθανότητας τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ τάς ποσότητας $p_1,p_2,\ldots,p_n$, ὅπου $p_i=1,2,\ldots,n$ οἱοιδήποτε θετικοί - ἀκριβέστερον μή ἀρνητικοί - ἀριθμοί πληροῦντες τήν συνθήκην

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1 \qquad (1.30)$$

καί ἀκόμη εἰς οἱονδήποτε ἄλλο ἐνδεχόμενον τοῦ ἐν λόγω πειράματος, ἤτοι εἰς οἱονδήποτε ὑποσύνολον

$$A=\{\varepsilon_{r_1},\varepsilon_{r_2},\ldots,\varepsilon_{r_k}\}, \text{ ὅπου } 1\le r_1<r_2<\ldots<r_k\le n \text{ καί } 0\le k\le n$$

ἀντιστοιχίσωμεν - ὡς πιθανότητα - τόν ἀριθμόν

$$P(A)=p_{r_1}+p_{r_2}+\ldots+p_{r_k} \qquad (1.31)$$

ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τό σύστημα τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων - ἴδε σχέσεις (1.15) ἕως (1.17) - ὡς καί αἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσαι ἰδιότητες - (1.19) ἕως (1.27) - ἱκανοποιοῦνται πλήρως.

Ἐξ ἄλλου, ἡ κατά τά ὡς ἄνω δυνατότης καθορισμοῦ τῶν πιθανοτήτων p_i, $i=1,2,\ldots,n$ κατά διάφορον ἑκάστοτε τρόπον ἀποτελεῖ, ὡς ἤδη ἐλέχθη, σημαντικόν πλεονέκτημα καθ'ὅσον ἐπιτρέπει τήν μελέτην τοῦ ἰδίου συνόλου τυχαίων γεγονότων μέ διαφόρους κατά περίπτωσιν πιθανότητας, πρᾶγμα τό ὁποῖον καθίσταται πολλάκις, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων, ἀναγκαῖον. Οὕτω π.χ. κατά τήν ρίψιν ἑνός κύβου εἶναι δυνατόν νά ὑποθέσωμεν ὅτι

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{6}$$

ἕνα σύστημα δηλαδή πιθανοτήτων ἀνταποκρινόμενον εἰς ἕνα "κανονικό" κύβο, ἀλλ'ἐπίσης καί διάφορα ἐναλλακτικά συστήματα πιθανοτήτων ὡς π.χ.

P(1)=0,25 P(2)=0,10 P(3)=0,10 P(4)=0,20 P(5)=0,25 P(6)=0,10

ἤ

P(1)=0,05 P(2)=0,05 P(3)=0,05 P(4)=0,25 P(5)=0,30 P(6)=0,30

κ.ο.κ. ἀνταποκρινόμενα εἰς περιπτώσεις "μή κανονικῶν" ἤ ἄλλως μεροληπτικῶν κύβων, διευκολυνομένης κατ'αὐτόν τόν τρόπον τῆς διερευνήσεως τοῦ ἀντιστοίχου πειράματος καί κατ'ἀκολουθίαν τῆς ἐξαγωγῆς ἀντικειμενικῶν ἑκάστοτε συμπερασμάτων.

1.4 Δεσμευμένη ἢ ὑπὸ συνθήκην πιθανότης

Κατά τήν μελέτην διαφόρων πειραμάτων τύχης καί τῶν συναφῶν πρός αὐτά τυχαίων γεγονότων ἐνδιαφερόμεθα πολλάκις νά προσδιορίσωμεν τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως ἑνός ἐνδεχομένου B ὑπό τήν προϋπόθεσιν - γνωστοῦ δηλαδή ὄντος - ὅτι ἕνα ἄλλο ἐνδεχόμενον A ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ, καλούμεθα ἐν ἄλλοις λόγοις νά ἀπαντήσωμεν εἰς ἐρωτήματα τῆς μορφῆς

"Ποία ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως τοῦ ἐνδεχομένου B δοθέντος - γνωστοῦ ὄντος - ὅτι ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ τό ἐνδεχόμενον A";

Ρίπτομεν π.χ. ἕνα ζάρι. Ποία ἡ πιθανότης τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐν λόγω ρίψεως νά εἶναι ἀριθμός μικρότερος τοῦ 4 (ἐνδεχόμενον B) δοθέντος, ἐάν δηλαδή γνωρίζομεν ἤδη, ὅτι τοῦτο εἶναι ἀριθμός ζυγός (ἐνδεχόμενον A); Ὁμοίως, ἐπιλέγοντες τυχαίως ἕνα χαρτί ἀπό μιά πλήρη τράπουλα, ποιά ἡ πιθανότης νά εἶναι τοῦτο "σπαθί" (B) δοθέντος ὅτι τό ἐν λόγω χαρτί εἶναι "φιγούρα" (A);

Ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως ὡρισμένου ἐνδεχομένου B δοθέντος - ὑπό τήν σ υ ν θ ή κ η ν δηλαδή - ὅτι ἕνα ἄλλο ἐνδεχόμενον A ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ καλεῖται συνήθως δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ἤ ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η ν π ι θ α ν ό τ η ς, συμβολίζεται δέ, δι' εὐνοήτους λόγους, διά τοῦ συμβόλου P(B/A).

Ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῆς δεσμευμένης πιθανότητος P(B/A) εἰς τό πλαίσιον τοῦ κ λ α σ ι κ ο ῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος ὡς καί ἡ σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ἑρμηνεία τοῦ ἐν λόγω μέτρου παρατίθενται ἀμέσως κατωτέρω.

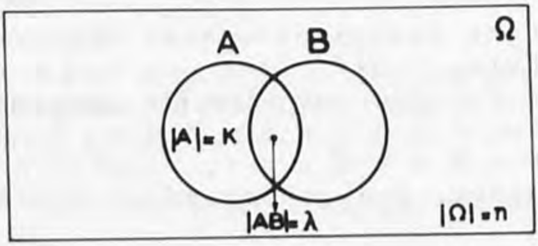
Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή θ ε μ ε λ ί ω σ ι ς τῆς ἐννοίας τῆς δεσμευμένης πιθανότητος - ὁ καλούμενος μ α θ η μ α τ ι κ ό ς ὁρισμός - θά μᾶς ἀπασχολήση ἰδιαιτέρως εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

1.4.1 Ὑπολογισμὸς τῆς δεσμευμένης πιθανότητος εἰς τὸ πλαίσιον τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δειγματικός χῶρος Ω ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ὡρισμένον πείραμα τύχης περιλαμβάνει n ἐξ ἴσου δυνατά - ἰσοπίθανα - στοιχειώδη ἐνδεχόμενα, ἀκόμη ὅτι k ἐξ αὐτῶν (ὅπου $0<k\leq n$) εἶναι εὐνοϊκά διά τό ἐνδεχόμενον A - περιλαμβάνονται δηλαδή εἰς τό ὑποσύνολον A - τέλος δέ, ὅτι λ ἐκ τῶν ἐν λόγω k στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων (ὅπου $0\leq\lambda\leq k$) εἶναι ἐπίσης εὐνοϊκά διά τό ἐνδεχόμενον B, περιλαμβάνονται* δηλαδή καί

*Ὡς εἶναι εὐνόητον, τό ὑποσύνολον B δυνατόν νά περιλαμβάνη καί ἄλλα - πλήν τῶν ὡς ἄνω λ - στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τά ὁποῖα βεβαίως δέν ἀνήκουν εἰς τό A.

εἰς τό ὑποσύνολον B καί κατά συνέπειαν ἀποτελοῦν τήν τομήν AB (Σχ. 1.7).



Σχ. 1,7

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τό ἐνδεχόμενον A ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ καί ὅτι ὁ ἐρευνητής εἶναι γνώστης αὐτῆς τῆς καταστάσεως (σ υ ν θ ή κ η ς). Τοῦτο ἐπιτρέπει προφανῶς νά συμπεράνωμεν ὅτι ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ ἕν ἐκ τῶν k στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων τά ὁποῖα εἶναι εὐνοϊκά διά τό A - συνεπάγονται τό A - ἤ ἄλλως νά θεωρῶμεν πλέον ὡς δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος μ ό ν ο ν τά k στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τό ὑποσύνολον A καί ὡς ἐκ τούτου ὡς νέος - δ ε σ μ ε υ μ έ ν ο ς ἤ ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η ν - δειγματικός χῶρος νά λαμβάνεται τό ἐν λόγῳ ὑποσύνολον.

Μετά τόν κατά τά ὡς ἄνω π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ό ν τοῦ ἀρχικοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω εἰς τό ὑποσύνολον αὐτοῦ A, ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἐνδεχομένου B εἶναι προφανῶς δυνατή ἐάν καί μόνον ἐάν τό ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος εἶναι ἕνα ἐκ τῶν λ στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τήν τομήν AB καί ὡς ἐκ τούτου ἀφ' ἑνός εἶναι δυνατά - καί ὑπό τήν σ υ ν θ ή κ η ν A - ἀφ' ἑτέρου δέ εἶναι εὐνοϊκά διά τό ἐνδεχόμενον B, συνεπάγονται δηλαδή τήν πραγματοποίησιν τοῦ B ὡς περιλαμβανόμενα εἰς αὐτό.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν εὐκόλως τά ἑξῆς: "Δοθέντος - ἐάν δηλαδή γνωρίζομεν - ὅτι τό ἐνδεχόμενον A ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ, τά μέν δ υ ν α τ ά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος εἶναι $|A|=k$, τά δέ εὐνοϊκά τοιαῦτα διά τήν πραγματοποίησιν τοῦ B - ὑπό τήν ἐν λόγῳ σ υ ν θ ή κ η ν - εἶναι μόνον $|AB|=\lambda$.

Οὕτω, ἐφαρμοζομένου ἐν προκειμένῳ τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος (τύπος 1.1), ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) - ἡ πιθανότης δηλαδή νά πραγματοποιηθῆ τό B δοθέντος ὅτι ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ τό A - δίδεται ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B/A) = \frac{\lambda}{k} = \frac{|AB|}{|A|} \qquad (1.32)$$

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς δεσμευμένης πιθανότητος ὡς καί τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.32) ἐπανερχόμεθα εἰς τά ἀνωτέρω παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ρίπτομεν ἕνα ζάρι. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός μικρότερος τοῦ 4 (ἐνδεχόμενον B), ἐάν γνωρίζομεν ἤδη ὅτι ὁ ἐμφανισθείς ἀριθμός εἶναι ζυγός (ἐνδεχόμενον A);

Ὁ δειγματικός χῶρος ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἐν λόγῳ πείραμα εἶναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Δοθέντος ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς ρίψεως εἶναι ζυγός ἀριθμός δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ὁ δειγματικός χῶρος ἔχει περιορισθῆ εἰς τό ὑποσύνολον $A = \{2,4,6\}$ καί κατά συνέπειαν ὅτι τά δυνατά ἀποτελέσματα εἶναι $|A|=3$. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἐμφάνισις ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 4 - δοθέντος ὅτι ἔχει ἤδη ἐμφανισθῆ ζυγός ἀριθμός - εἶναι δυνατή ἐάν καί μόνον ἐάν τό ἀποτέλεσμα τῆς ρίψεως εἶναι ὁ ἀριθμός 2, ἡ τομή δηλαδή τῶν ὑποσυνόλων $A=\{2,4,6\}$ καί $B=\{1,2,3\}$. Οὕτω, ὁ ἀριθμός τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι ἐν πορκειμένῳ $|AB|=1$ καί κατά συνέπειαν (τύπος (1.32) ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(B/A)=\frac{1}{3}$.

Παράδειγμα 2

'Επιλέγεται τυχαίως ἕνα χαρτί ἀπό μία πλήρη τράπουλα (τῶν 52 παιγνιοχάρτων). Ποία ἡ πιθανότης τό ἐν λόγῳ χαρτί νά εἶναι "σπαθί" δοθέντος ὅτι εἶναι "φιγούρα";

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν, τό ὑποσύνολον A περιλαμβάνει τάς 12 "φιγούρας" ἤτοι τά 52 δυνατά - ἀρχικῶς - ἀποτελέσματα ἔχουν περιορισθῆ εἰς $|A|=12$. 'Εξ ἄλλου, ἡ πραγματοποίησις τοῦ B - νά ἔχη ἐπιλεγῆ ἕνα "σπαθί" - εἶναι δυνατή ἐάν καί μόνον ἐάν τό ἐπιλεγέν χαρτί εἶναι ἕνα ἀπό τίς τρεῖς "φιγοῦρες-σπαθιά" ἤτοι ἕνα ἀπό τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τά ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τήν τομήν AB τῶν ἐνδεχομένων A={οἱ 12 φιγοῦρες} καί B={τά 13 σπαθιά}. Οὕτω τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι $|AB|=3$ καί κατά συνέπειαν ἡ πιθανότης "νά ἐπιλεγῆ σπαθί δοθέντος ὅτι τό ἐπιλεγέν χαρτί εἶναι "φιγούρα" εἶναι $P(B/A)=\frac{3}{12}$.

'Εάν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{|AB|}{|A|}$ εἰς τήν σχέσιν (1.32) διαιρεθοῦν διά τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀ ρ χ ι κ ῶ ν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος, ἤτοι διά τοῦ ἀριθμοῦ $|\Omega|=n$, πρός τούτοις δέ ληφθῆ ὑπ'ὄψιν ὅτι $\frac{|A|}{|\Omega|}=P(A)$ καί $\frac{|AB|}{|\Omega|}=P(AB)$ - τῦπος (1.1) - προκύπτει εὐκόλως ἡ σχέσις

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1.33)$$

'Η ἐν λόγῳ σχέσις - τύπος (1.33) - διά τῆς ὁποίας ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) ἐκφράζεται ὡς συνάρτησις τῶν P(A) καί P(AB) τῶν ἀρχικῶν δηλαδή ἤ ἄλλως ἀ δ ε σ μ ε ύ τ ω ν πιθανοτήτων τοῦ ἐνδεχομένου A (συνθήκης) καί τοῦ γινομένου τῶν A,B τοῦ σ υ ν θ έ τ ο υ δηλαδή γεγονότος AB, ἀποτελεῖ, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, τήν βάσιν τοῦ νόμου τῶν σ υ ν θ έ τ ω ν πιθανοτήτων, γνωστοῦ εὐρύτερον καί ὡς π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ο ῦ ν ό μ ο υ ἤ θ ε ω ρ ή μ α τ ο ς.

Τόσον ὁ τύπος (1.32) ὅσον καί ὁ ἰσοδύναμος πρός αὐτόν (1.33) προέκυψαν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι τό ἐνδεχόμενον Α δ έ ν ἀ π ο τ ε λ ε ῖ τ ό ἀ δ ύ ν α τ ο ν γ ε γ ο ν ό ς, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐδέχθημεν ὅτι τό ὑποσύνολον Α δ έ ν ε ἶ ν α ι κ ε ν ό ν (ὑπετέθη ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν περιλαμβανομένων εἰς αὐτό στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων εἶναι $k>0$). Εἰς τήν ἀντίθετον περίπτωσιν, ἐάν δηλαδή τό ἐνδεχόμενον Α εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν καί κατά συνέπειαν τό ὑποσύνολον Α κ ε ν ό ν, ἤτοι ἐάν $|A|=k=0$, καθίσταται προφανές ὅτι ἀμφότεροι οἱ ὡς ἄνω τύποι δέν δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν - ε ἶ ν α ι ἄ ν ε υ π ε ρ ι ε χ ο μ έ ν ο υ - καθ'ὅσον θά ὁδήγουν εἰς τήν ἀπροσδιόριστον ἔκφρασιν $P(B/A)=\frac{0}{0}$. Ἐν προκειμένῳ ὅμως πρέπει νά λεχθῆ ὅτι τοιοῦτον πρόβλημα οὐδέποτε ἀναφύεται εἰς τήν πρᾶξιν καθ'ὅσον ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς φύσεως τοῦ τεθέντος ἐν ἀρχῇ ἐρωτήματος "ποία ἡ πιθανότης τοῦ Β δοθέντος ὅτι ἔ χ ε ι ἤ δ η π ρ α γ μ α τ ο π ο ι η θ ῆ τό Α" ἐξυπακούεται ὅτι τό ἐνδεχόμενον Α δ έ ν ε ἶ ν α ι ἀ δ ύ ν α τ ο ν - ἀφοῦ ἔ χ ε ι ἤ δ η π ρ α γ μ α τ ο π ο ι η θ ῆ - καί κατά συνέπειαν προϋποτίθεται πάντοτε ὅτι $|A|>0$, ὡς ἐκ τούτου δέ καί $P(A)>0$.

Ἰδιότητες τῆς Δεσμευμένης Πιθανότητος

Ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(B/A)$, ὁριζομένη κατά τά ἀνωτέρω - εἰς τό πλαίσιον τοῦ κ λ α σ σ ι κ ο ῦ ὁρισμοῦ - ἐκ τῆς σχέσεως (1.32) ἤ τοῦ ἰσοδυνάμου πρός αὐτήν τύπου (1.33), ἔχει τάς αὐτάς κατά βάσιν ἰδιότητας - § (1.2.1) - μέ ἐκείνας τῆς ἀδεσμεύτου πιθανότητος $P(A)$. Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἐν λόγῳ ἰδιοτήτων εἶναι ἁπλουστάτη - ἀπορρέουν ἀμέσως ἐκ τῶν τύπων (1.32) ἤ (1.33) ὑπό τήν προϋπόθεσιν πάντοτε ὅτι $A \neq \emptyset$ ἤ ἄλλως $|A|>0$ - διά τόν λόγο δέ αὐτόν περιοριζόμεθα κατωτέρω εἰς τήν ἁπλῆν παράθεσίν των.

(1) Δι'οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον Β ἔχομεν πάντοτε

$$P(B/A) \geq 0$$

(2) Ἐάν B ταυτίζεται μέ τό A, ἤτοι $A \equiv B$ εἶναι

$$P(B/A) = P(A/A) = 1$$

(3) Ἐάν B_1 καί B_2 εἶναι δύο ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α ἐνδεχόμενα, ἤτοι ἐάν $B_1B_2=\emptyset$, ἔχομεν πάντοτε

$$P(B_1+B_2/A)=P(B_1/A)+P(B_2/A)$$

Γενικώτερον, ἐάν τά ἐνδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ εἶναι ἀνά δύο ἀσυμβίβαστα, ἤτοι ἐάν $B_iB_j=\emptyset$ διά $i \neq j=1,2,\ldots,n$, εἶναι

$$P(B_1+B_2+\ldots+B_n/A) = P(B_1/A)+P(B_2/A)+\ldots+P(B_n/A)$$

ἤ συνοπτικώτερον

$$P(\sum_{i=1}^{n} B_i/A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i/A)$$

(Ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ό ν θ ε ώ ρ η μ α)

(4) Ἡ δεσμευμένη πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου $\bar{B}$, ἀντιθέτου τοῦ B, δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$P(\bar{B}/A)=1-P(B/A)$$

(5) Ἡ δεσμευμένη πιθανότης τοῦ ἀδυνάτου γεγονότος εἶναι μηδέν, ἤτοι

$$P(\emptyset/A) = 0$$

(6) Ἐάν τό B εἶναι ὑ π ο ε ν δ ε χ ό μ ε ν ο ν τοῦ Γ, ἤτοι ἐάν $B \subset \Gamma$, ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέσις

$$P(B/A) \leq P(\Gamma/A)$$

(7) Ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(B/A)$ ἔχει π ε δ ί ο ν τ ι μ ῶ ν τό κλειστόν διάστημα $[0,1]$, ἤτοι πληροῖ πάντοτε τήν σχέσιν

$$0 \leq P(B/A) \leq 1$$

(8) Ἐάν B καί Γ εἶναι δύο οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα, ἡ δεσμευμένη πιθανότης τῆς ἑνώσεως αὐτῶν δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$P(B \cup \Gamma/A) = P(B/A) + P(\Gamma/A) - P(B\Gamma/A)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐνδεχομένων ἡ ἀνωτέρω σχέσις γενικεύεται εὐκόλως ἀκριβῶς ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀδεσμεύτων πιθανοτήτων. Οὕτω π.χ. διά τρία ἐνδεχόμενα B_1, B_2, B_3 ἔχομεν

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) + P(B_3/A) - P(B_1B_2/A) - P(B_1B_3/A) - P(B_2B_3/A) + P(B_1B_2B_3/A)$$

κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι αἱ ἔννοιαι τῆς δεσμευμένης καί τῆς ἀδεσμεύτου πιθανότητος εἰς οὐδέν κατά βάσιν διαφέρουν. Ἁπλῶς καί μόνον αἱ δεσμευμέναι πιθανότητες ἀναφέρονται ἐν γένει εἰς δειγματικούς χώρους μ ι κ ρ ο τ έ ρ ο υ ς -ὑποσύνολα- ἐκείνων εἰς τούς ὁποίους ἀναφέρονται αἱ ἀντίστοιχοι ἀδέσμευτοι τοιαῦται ($A \subset \Omega$). Τύποις ἄλλωστε ἡ ἀδέσμευτος πιθανότης οἱουδήποτε ἐνδεχομένου B δύναται νά ἐκφρασθῆ καί ὡς δεσμευμένη τοιαύτη, ἀρκεῖ πρός τοῦτο ὡς δεσμευμένον δειγματικόν χῶρον - συνθήκην A - νά θεωρῶμεν αὐτόν τοῦτον τόν ἀρχικόν δειγματικόν χῶρον Ω. Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (1.33), λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $P(\Omega)=1$, καί $P(B\Omega)=P(B)$ καθ' ὅσον ἡ τομή $B\Omega=B$, προκύπτει ἀμέσως ὅτι $P(B/\Omega)=P(B)$.

1.4.2 Στατιστική ἑρμηνεία τῆς δεσμευμένης πιθανότητος

Εἰς τήν παράγραφον (1.2.2) εἴδομεν ὅτι ἡ πιθανότης P(A) ἑνός ἐνδεχομένου A ὁρίζεται σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ὡς τό ὅριον πρός τό ὁποῖον τείνει ἡ σχετική συχνότης αὐτοῦ $\frac{\mu_A}{n}$ ὅταν ὁ συνολικός ἀριθμός n τῶν πραγματοποιουμένων δοκιμῶν τοῦ πειράματος αὐξάνει ἀπεριορίστως, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ πιθανότης P(A) εἶναι ἕνας - θετικός καί μικρότερος τῆς μονάδος - ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A) = \text{ορ}\frac{\mu_A}{n} \quad \text{ὅπου } n\to\infty$$

Εἴδομεν ἐπίσης ὅτι εἰς τήν πρᾶξιν, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις ἀπείρων τῶ πλῆθος δοκιμῶν εἶναι ἐξ ἀντικειμένου ἀδύνατος, ὡς σ τ α τ ι σ τ ι κ ή πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου λαμβάνεται - κατά προσέγγισιν - ἡ σχετική συχνότης αὐτοῦ εἰς μίαν "ἀρκούντως μακράν" ἀκολουθίαν δοκιμῶν, ὁ ἀριθμός δηλαδή P(A) ὑπολογίζεται ἐμπειρικῶς - ἐκτιμᾶται - ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A) = \frac{\mu_A}{n}$$

Εἰς τά ἀνωτέρω γίνεται βεβαίως ἡ ὑπόθεσις - συνθήκη ἡ ὁποία πληροῦται κατά κανόνα εἰς τήν πρᾶξιν καί ἐπαληθεύεται, ὡς εἴδομεν, ἐν γένει ἐκ τῶν σχετικῶν ἐμπειρικῶν παρατηρήσεων - ὅτι "ὁ ἀριθμός μ_A τῶν δοκιμῶν κατά τάς ὁποίας πραγματοποιεῖται τό ἐνδεχόμενον A ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἐκ τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ n τῶν γενομένων δοκιμῶν - ἀκριβέστερον εἶναι μία αὔξουσα ὑπό εὑρεῖαν ἔννοιαν συνάρτησιν αὐτοῦ $\mu_A=\mu_A(n)$- τοῦ n τείνοντος εἰς τό ἄπειρον, ὁ ἀριθμός $\mu_A(n)$ αὐξάνει ἀπεριορίστως καί μάλιστα κατά τρόπον ὥστε τό πηλίκον $\frac{\mu_A(n)}{n}$ - ἡ σχετική δηλαδή συχνότης τοῦ A - νά τείνη πρός ὡρισμένον ἀριθμόν".

Κατ'ἀναλογίαν πρός τά ἀνωτέρω, ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) ὁρίζεται σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ὡς ἑξῆς:

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὡρισμένον πείραμα τύχης ἐπανελήφθη - ὑπό τάς αὐτάς πάντοτε συνθήκας - n φοράς, πρός τούτοις ὅτι τό ἐνδεχόμενον A ἐπραγματοποιήθη $\mu_A(n)$ φοράς (ὅπου $0<\mu_A(n)\leq n$), τέλος δέ ὅτι τό σ ύ ν θ ε τ ο ν γεγονός AB - ἡ ταυτόχρονος ἐμφάνισις τῶν ἐνδεχομένων A καί B - ἐπραγματοποιήθη $\mu_{AB}(n)$ φοράς, ὅπου φυσικά $0\leq\mu_{AB}(n)\leq\mu_A(n)$.

'Εάν τώρα ύποθέσωμεν ὅτι ὁ συνολικός ἀριθμός n τῶν δοκιμῶν τοῦ ἐν λόγῳ πειράματος αὐξάνει ἀπεριορίστως ($n\to\infty$), παρατηροῦμεν ἐν γένει - τοῦτο συμβαίνει εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν καί ἐπαληθεύεται, ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἀδεσμεύτου πιθανότητος P(A) ἐκ σχετικῶν ἐμπειρικῶν παρατηρήσεων - ὅτι οἱ ἀριθμοί $\mu_A(n)$ καί $\mu_{AB}(n)$ αὐξάνουν ἀπεριορίστως, τό δέ πηλίκον αὐτῶν

$$\frac{\mu_{AB}(n)}{\mu_A(n)}$$

τείνει πρός ὡρισμένον - θετικόν καί μικρότερον τῆς μονάδος - ἀριθμόν.

Τόν ἐν λόγῳ - ἰδεατόν - ἀριθμόν ὁ ὁποῖον ἀποτελεῖ ἐν προκειμένῳ τό ὅριον τῆς σχετικῆς συχνότητος τοῦ ἐνδεχομένου B εἰς τήν ὑ π ο α κ ο λ ο υ θ ί α ν τῶν δοκιμῶν κατά τάς ὁποίας ἐπραγματοποιήθη ἤδη τό ἐνδεχόμενον A, καλοῦμεν σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ν δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ν π ι θ α ν ό τ η τ α αὐτοῦ, πρός ὑποδήλωσιν δέ τῆς συνθήκηκης A - τῆς προγενεστέρας δηλαδή πραγματοποιήσεως τοῦ ἐνδεχομένου A - συμβολίζομεν τήν ἐν λόγῳ πιθανότητα διά τοῦ συμβόλου P(B/A).

Εἰς τήν πρᾶξιν ἐξ ἄλλου - ὅπως εἰς τήν τήν περίπτωσιν τῆς ἀδεσμεύτου πιθανότητος P(A) - λόγῳ ἀντικειμενικῆς ἀδυναμίας ἐκτελέσεως ἀπείρων τῶ πλῆθος δοκιμῶν, ὡς δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) λαμβάνεται - κατά προσέγγισιν - τό πηλῖκον $\frac{\mu_{AB}(n)}{\mu_A(n)}$, ἡ σχετική δηλαδή συχνότης τοῦ B εἰς τήν ὑποακολουθίαν τῶν δοκιμῶν κατά τάς ὁποίας ἐπραγματοποιήθη τό A, προϋποτιθεμένου βεβαίως ὅτι ὁ συνολικός ἀριθμός n τῶν δοκιμῶν τοῦ πειράματος εἶναι "ἀρκούντως μέγας".

Οὕτω, ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) ὁρίζεται σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B/A)=\text{ορ}\frac{\mu_{AB}(n)}{\mu_A(n)} \quad \text{ὅπου } n\to\infty \qquad (1.34)$$

ὑπολογίζεται δέ ἐμπειρικῶς - ἐκτιμᾶται - ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B/A) = \frac{\mu_{AB}(n)}{\mu_A(n)} \qquad (1.35)$$

Ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) ὁριζομένη - στατιστικῶς - ἐκ τῆς σχέσεως (1.34) καί ὑπολογιζομένη εἰς τήν πρᾶξιν ἐκ τῆς σχέσεως (1.35) πληροῖ, ὅπως εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅλας τάς ἰδιότητας τῆς κλασσικῆς τοιαύτης - τῆς δεσμευμένης δηλαδή πιθανότητος ὁριζομένης εἰς τό πλαίσιον τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ - καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι οἱ δύο ὁρισμοί εἶναι ἀπολύτως σ υ μ β ι β α σ τ ο ί. Τό συμβιβαστόν ἄλλωστε τῶν δύο ὁρισμῶν φαίνεται εὐκόλως - ἀποδεικνύεται εὐθέως - καί ἐκ τοῦ ὅτι τόσον ὁ τύπος ὁρισμοῦ (1.34) ὅσον καί ὁ τύπος ὑπολογισμοῦ (1.35) δύνανται νά λάβουν τήν μορφήν

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1.36)$$

νά ἐκφρασθῇ δηλαδή καί ἡ στατιστική δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) ὡς πηλῖκον τῆς πιθανότητος τοῦ συνθέτου γεγονότος AB πρός τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου - συνθήκης - A, ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει - τύπος (1.33) - καί μέ τήν κλασσικήν δεσμευμένη πιθανότητα.

Πράγματι, ὁ τύπος ὁρισμοῦ (1.34) γράφεται διαδοχικῶς

$$P(B/A) = \text{ορ}\frac{\mu_{AB}(n)}{\mu_A(n)} = \text{ορ}\frac{\dfrac{\mu_{AB}(n)}{n}}{\dfrac{\mu_A(n)}{n}} = \frac{\text{ορ}\dfrac{\mu_{AB}(n)}{n}}{\text{ορ}\dfrac{\mu_A(n)}{n}}$$

λαμβανομένου δέ ὑπ' ὄψιν - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῆς ἀδεσμεύτου στατιστικῆς πιθανότητος - ὅτι

$$\text{ορ}\frac{\mu_A(n)}{n} = P(A) \quad \text{καί} \quad \text{ορ}\frac{\mu_{AB}(n)}{n} = P(AB)$$

- τοῦ n φυσικά τείνοντος εἰς τό ἄπειρον - ἔχομεν τελικῶς τήν σχέσιν (1.36). Ὁμοίως, γράφοντες τόν τύπον ὑπολογισμοῦ (1.35) ὑπό τήν μορφήν

$$P(B/A)=\frac{\mu_{AB}(n)}{\mu_A(n)}=\frac{\dfrac{\mu_{AB}(n)}{n}}{\dfrac{\mu_A(n)}{n}}$$

καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι τά κλάσματα $\frac{\mu_A(n)}{n}$ καί $\frac{\mu_{AB}(n)}{n}$ ἀποτελοῦν ἀντιστοίχως τάς ἐμπειρικάς τιμάς τῶν ἀδεσμεύτων πιθανοτήτων P(A) καί P(AB), ἔχομεν καί πάλιν τήν σχέσιν (1.36).

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς στατιστικῆς ἑρμηνείας τῆς δεσμευμένης πιθανότητος P(B/A) ὡς καί τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ - ἐμπειρικῆς ἐκτιμήσεως - αὐτῆς, ἐπανερχόμεθα καί πάλιν είς τό πρῶτο παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου ὅπου ἐζητεῖτο ἡ πιθανότης κατά τήν ρίψιν ἑνός ζαριοῦ νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός μικρότερος τοῦ 4 - ἐνδεχόμενον B - δοθέντος - γνωστοῦ δηλαδή ὄντος - ὅτι ὁ ἐμφανισθείς ἀριθμός εἶναι ζυγός (ἐνδεχόμενον A).

Ἡ διαδικασία στατιστικοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἐν λόγω πιθανότητος συνίσταται είς τά ἑξῆς: Ρίπτομεν τό ὑπ'ὄψιν ζάρι κατ'ἐπανάληψιν καί καταγράφομεν τά ἀποτελέσματα ἑνός κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μεγάλου ἀριθμοῦ δοκιμῶν (π.χ. n=400).

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τό ἀποτέλεσμα 182 ἐκ τῶν ὡς ἄνω δοκιμῶν ἦτο "ζυγός" ἀριθμός - ἤτοι $\mu_A(n)=182$ - πρός τούτοις δέ, ὅτι είς τήν ὑποακολουθίαν αὐτήν τῶν ζυγῶν ἀποτελεσμάτων ὁ ἀριθμός 2 - ἡ τομή δηλαδή τῶν ἐνδεχομένων A={ζυγός}={2,4,6} καί B={ἀριθμός<4}={1,2,3} - ἐνεφανίσθη 64 φοράς, ἤτοι $\mu_{AB}(n)=64$.

Δι'ἐφαρμογῆς ἐν προκειμένῳ τοῦ τύπου (1.35) ἔχομεν ὡς ἐμπειρικήν ἔκφρασιν τῆς ζητουμένης πιθανότητος τόν ἀριθμόν

$$P(B/A)=\frac{64}{182}=0{,}352 \text{ (περίπου)}$$

Εἰς τό αὐτό φυσικά ἀποτέλεσμα καταλήγομεν καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.36), καθ' ὅσον ἐκ τῶν ὡς ἄνω παρατηρήσεων ἔχομεν ὅτι $P(A)=\frac{\mu_A(n)}{n}=\frac{182}{400}$ καί $P(AB)=\frac{64}{400}$, κατά συνέπειαν δέ

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{64:400}{182:400} = \frac{64}{182} = 0,352$$

Ἐν προκειμένῳ βεβαίως πρέπει νά λεχθῆ ὅτι ἡ εὕρεσις τῆς ἰ δ ε α τ ῆ ς τιμῆς τῆς πιθανότητος P(B/A), π.χ. τῆς τιμῆς 1/3 ἡ ὁποία ὑπελογίσθη εἰς τό πλαίσιον τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ, εἶναι ἐξ ἀντικειμένου ἀδύνατος. Φυσικά ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός n τῶν πραγματοποιουμένων δοκιμῶν τόσον μεγαλυτέρα εἶναι - κατά κανόνα - ἡ προσέγγισις μέ τήν ὁποίαν ἐκτιμᾶται ἡ ἐν λόγῳ πιθανότης. Πρός τούτοις, δέν πρέπει ἐν προκειμένῳ νά μᾶς διαφεύγη τό γεγονός ὅτι τυχόν ἐπανάληψις τῆς ὡς ἄνω διαδικασίας - ρίψις δηλαδή τοῦ ἐν λόγῳ ζαριοῦ 400 ἀκόμη φορές - καί ἐφαρμογή τῶν ἀνωτέρω τύπων κλπ. θά ὁδήγη ἐν γένει εἰς διάφορον ἐμπειρικήν τιμήν τῆς ζητουμένης πιθανότητος P(B/A). Τό γεγονός ἄλλωστε αὐτό ἀποτελεῖ, ὡς ἤδη ἐλέχθη εἰς τήν παράγραφον (1.2.2), ἕν ἐκ τῶν βασικῶν μειονεκτημάτων τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ καί μία πρόσθετον αἰτίαν διά τήν ἀξιωματικήν θεμελίωσιν τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, τόσον τῆς ἀδεσμεύτου - τήν ὁποίαν εἴδομεν εἰς τήν §(1.3) - ὅσον καί τῆς δεσμευμένης τοιαύτης, ἡ ὁποία θά μᾶς ἀπασχολήση ἀμέσως κατωτέρω.

1.5 Ἀξιωματική θεμελίωσις τῆς δεσμευμένης πιθανότητος

Εἰς τάς δύο προηγουμένας παραγράφους ἀπεδείχθη ὅτι ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A), ὁριζομένη εἴτε εἰς τό πλαίσιον τοῦ κ λ α σ σ ι κ ο ῦ ὁρισμοῦ "ὡς πηλίκον εὐνοϊκῶν πρός δυνατά ἀποτελέσματα" εἴτε σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς "ὡς ὅριον σχετικῆς συχνότητος", δύναται νά ἐκφρασθῆ - ὑπό τήν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι τό ἐνδεχόμενον A δ έ ν ε ἶ ν α ι ἀ δ ύ ν α τ ο ν ($A \neq \emptyset$) - ὡς πηλίκον τῆς πιθανότητος τοῦ συνθέτου ἐνδεχομένου AB πρός τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου - συνθήκης - A.

Ἡ ἐν λόγῳ σχέσις - τύπος (1.33) ἤ (1.36) - ἡ ὁποία ἀπορρέει εὐθέως - ὡς συμπέρασμα - ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ὡς ἄνω ὁρισμῶν, λαμβάνεται ἐν προκειμένῳ - εἰς τήν ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή ν θεμελίωσιν - ὡς ὁ ρ ι σ μ ό ς τῆς ἐννοίας τῆς δεσμευμένης πιθανότητος.

Οὕτω, εἰς τήν συνήθη περίπτωσιν ὅπου $P(A)>0$, ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(B/A)$ ὁ ρ ί ζ ε τ α ι - ἀξιωματικῶς - ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1.37)$$

ὡς πηλίκον δηλαδή τῶν πιθανοτήτων τοῦ συνθέτου ἐνδεχομένου AB καί τοῦ ἐνδεχομένου - συνθήκης - A.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό A εἶναι γεγονός ἀ δ ύ ν α τ ο ν καί κατά συνέπειαν $P(A)=0$, ἡ ἔννοια τῆς δεσμευμένης πιθανότητος $P(B/A)$ εἶναι ἄνευ περιεχομένου ἤ καλλίτερον δέν ὑφίσταται. Εἴδομεν ἄλλωστε - § (1.4.1) - ὅτι ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐν λόγῳ ἐννοίας, εἰς τάς συνήθεις πρακτικάς ἐφαρμογάς τοιοῦτον πρόβλημα δέν ἀναφύεται.

Ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(B/A)$, ὁριζομένη ὡς ἀνωτέρω ἐκ τῆς σχέσεως (1.37), ἀποτελεῖ - ὡς ἐξ ὁρισμοῦ συμβαίνει καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἀδεσμεύτου πιθανότητος - μία π ρ α γ μ α τ ι κ ή ν σ υ ν ο λ ο σ υ ν ά ρ τ η σ ι ν μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον τῶν διαφόρων ἐνδεχομένων τοῦ πειράματος - ὡρισμένη ἐν γένει διά κάθε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - καί πεδίον τιμῶν τό κλειστόν διάστημα $\boxed{0,1}$.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (1.37) προκύπτει εὐκόλως ὅτι εἰς οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον B ἀντιστοιχεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός $P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ ὁ ὁποῖος πληροῖ τήν διπλῆν ἀνισοϊσότητα $0\leq P(B/A)\leq 1$ καθ'ὅσον τό πηλίκον $\frac{P(AB)}{P(A)}$ - λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς σχέσεως $AB\subset A$ καί κατά συνέπειαν τῆς ἀνισότητος $P(AB)<P(A)$ εἶναι ἀριθμός θετικός καί μικρότερος τῆς μονάδος, γίνεται δέ ἴσος πρός τήν μονάδα ἤ τό μηδέν ἐάν ἀντιστοίχως $B\supseteq A$ ἤ $AB=\emptyset$.

Ἡ ὡς ἄνω συνολοσυνάρτησις πληροῦσα -ἐπαληθεύουσα - γενικώτερον, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ὅλα τά β α σ ι κ ά   ἀ ξ ι ώ μ α τ α - κατά συνέπειαν καί ὅλες τίς λοιπές ἰδιότητες - τῶν πιθανοτήτων, δέν ἀποτελεῖ κατά βάσιν νέαν - διαφορετικήν - ἔννοιαν, προβλήματα δέ ἀναφερόμενα εἰς αὐτήν - ὑπολογισμός δεσμευμένων πιθανοτήτων κλπ. - ἀντιμετωπίζονται, ὡς εἶναι εὐνόητον, μέ τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον καί τάς ἰδίας μεθόδους ὅπως ἐκεῖνα τῶν ἀδεσμεύτων πιθανοτήτων.

Προκειμένου νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(B/A)$ - τύπος (1.37) - πληροῖ - ἤ ἄλλως ἐπαληθεύει - τά βασικά ἀξιώματα τῶν πιθανοτήτων - σχέσεις (1.15) ἕως (1.18) τῆς § (1.3) - ἐργαζόμεθα - ὑπό τήν προϋπόθεσιν πάντοτε ὅτι τό ὑποσύνολον A δ έ ν ε ἶ ν α ι   κ ε ν ό ν ἤ ἄλλως ὑποθέτοντες $P(A)>0$ - ὡς ἑξῆς:

Ἀξίωμα πρῶτον

Διά κάθε $B\subset\Omega$ ἔχομεν $P(B/A)\geq 0$.

Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως (1.37) ἐν συνδυασμῷ πρός τό πρῶτον ἀξίωμα τῶν πιθανοτήτων - σχέσις (1.15) - συμφώνως πρός τό ὁποῖον $P(AB)\geq 0$.

Ἀξίωμα δεύτερον

$P(\Omega/A)=1$, γενικώτερον δέ ἐάν $B\supseteq A$ ἔχομεν $P(B/A)=1$.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (1.37) ἔχομεν ὅτι

$$P(\Omega/A) = \frac{P(A\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

καθ'ὅσον $A\Omega=A$ καί κατά συνέπειαν $P(A\Omega)=P(A)$. Ὁμοίως, ἐάν $B\supseteq A$ ἔχομεν $AB=A$ καί $P(AB)=P(A)$ κατά συνέπειαν δέ ἐκ τῆς σχέσεως (1.37) προκύπτει ἡ ἰσότης $P(B/A)=1$. Καθίσταται ὅθεν προφανές ὅτι καί τό δεύτερον ἀξίωμα τῆς πιθανότητος ἰσχύει καί διά τήν δεσμευμένην τοιαύτην.

'Αξίωμα τρίτον

'Εάν τά ένδεχόμενον $B_1, B_2, \ldots, B_n$ εἶναι ἀ ν ά δ ύ ο ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α, ἤτοι ἐάν $B_iB_j=\emptyset$ διά $i \neq j = 1,2, \ldots, n$, ἔχομεν

$$P(B_1+B_2+\ldots+B_n/A)=P(B_1/A)+P(B_2/A)+\ldots+P(B_n/A)$$

ἤ συνοπτικώτερον $P(\sum_{i=1}^{n} B_i/A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i/A)$

Πράγματι, θέτοντες $B=B_1+B_2+\ldots+B_n$ ἔχομεν ὅτι $AB=AB_1+AB_2+\ldots+AB_n$ καί ἀκόμη - συμφώνως πρός τό τρίτον ἀξίωμα τῶν πιθανοτήτων, τήν σχέσιν δηλαδή (1.17) - ὅτι $P(AB)=P(AB_1)+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n)$. 'Εφαρμόζοντες τώρα τήν σχέσιν (1.37) λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$P(B_1+B_2+\ldots+B_n/A)=P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB_1)+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(AB_1)}{P(A)}+\frac{P(AB_2)}{P(A)}+\ldots+\frac{P(AB_n)}{P(A)}=P(B_1/A)+P(B_2/A)+\ldots+P(B_n/A),$$

ἤ συνοπτικώτερον τήν πρός ἀπόδειξιν σχέσιν

$$P(\sum_{i=1}^{n} B_i/A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i/A)$$

'Αξίωμα τέταρτον

'Εάν $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ εἶναι μία ἀκολουθία ἀ σ υ μ β ι β ά σ τ ω ν ἀ ν ά δ ύ ο ἐνδεχομένων, ἤτοι ἐάν $B_iB_j=\emptyset$ διά $i\neq j=1,2,\ldots$ ἔχομεν

$$P(B_1+B_2+\ldots/A) = P(B_1/A)+P(B_2/A)+\ldots$$

ἢ συνοπτικώτερον $P(\sum_{i=1}^{\infty} B_i/A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i/A)$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω σχέσεως εἰς οὐδέν διαφέρει τῆς προηγουμένης τοιαύτης, ἀρκεῖ μόνον νά θέσωμεν $B=B_1+B_2+\ldots$ ἐν συνεχεία δέ, νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τό τέταρτον - ἀντί τοῦ τρίτου - ἀξίωμα τῶν πιθανοτήτων, τήν σχέσιν δηλαδή (1.18).

Τῇ βοηθεία - δι'ἐφαρμογῆς - τῶν ὡς ἄνω προτάσεων - ἀξιωμάτων - αἱ ὑπόλοιποι ἰδιότητες τῶν πιθανοτήτων - σχέσεις (1.19) ἕως (1.27) τῆς § (1.3) - ἀποδεικνύονται καί ἐν προκειμένῳ - δηλαδή διά τήν δεσμευμένην πιθανότητα $P(B/A)$ - κατά τρόπον ἁπλοῦν καί ὅπως ἀκριβῶς - βλέπε § (1.3)-εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀδεσμεύτων τοιούτων.

Διά τόν λόγον αὐτόν περιοριζόμεθα ἁπλῶς εἰς τήν ἀπαρίθμησίν των:

1. $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A)$

2. $P(\emptyset/A) = 0$

3. Ἐάν $B \subset \Gamma$ εἶναι $P(B/A) \leq P(\Gamma/A)$

4. Δι'οἱοδήποτε B εἶναι πάντοτε $0 \leq P(B/A) \leq 1$

5. $P(B \cup \Gamma/A) = P(B/A) + P(\Gamma/A) - P(B\Gamma/A)$

6. $P(B \cup \Gamma/A) \leq P(B/A) + P(\Gamma/A)$

κ.ο.κ.

1.6 Νόμος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων. Τὸ πολλαπλασιαστικὸν θεώρημα

Κατ'ἀναλογίαν τῆς σχέσεως $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

δυνάμεθα προφανῶς - ὑπό τήν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι $P(B)>0$ - νά γράφωμεν τήν συμμετρικήν σχέσιν

$$P(A/B) = \frac{P(BA)}{P(B)}$$

ἡ ὁποία - εἴτε ὡς ἀπόρροια τοῦ κλασσικοῦ ἤ τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ, εἴτε ὡς αὐτούσιος ὁρισμός (συμπληρωματικόν ἀξίωμα) εἰς τήν ἀξιωματικήν θεμελίωσιν τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος - δίδει τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἐνδεχομένου A ὑπό τήν προϋπόθεσιν - συνθήκην - ὅτι ἔχει ἤδη συμβῆ τό ἐνδεχόμενον B, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τήν δεσμευμένην πιθανότητα $P(A/B)$.

Αἱ ὡς ἄνω σχέσεις γραφόμεναι ἀντιστοίχως ὑπό τήν μορφήν

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

$$\text{ἤ} \quad P(BA) = P(B)P(A/B)$$

ἤ συνοπτικώτερον - λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $P(AB)= =P(BA)$ - ὑπό τήν μορφήν

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \qquad (1.38)$$

ἀποτελοῦν τόν καλούμενον Νόμον τῶν Συνθέτων Πιθανοτήτων - γνωστόν εὑρέως καί ὡς Πολλαπλασιαστικόν Θεώρημα - καθ' ὅσον ἐκφράζουν τήν πιθανότητα τοῦ γινομένου τῶν ἐνδεχομένων A καί B - ἤ ἄλλως τοῦ συνθέτου γεγονότος AB - ὡς γινόμενον τῆς πιθανότητος τοῦ ἑνός τῶν ἐνδεχομένων ἐπί τήν δεσμευμένη πιθανότητα τοῦ ἄλλου δοθέντος ὅτι ἔχει συμβῆ ἤδη τό προηγούμενον, ἤτοι ὡς γινόμενον τῆς πιθανότητος $P(A)$ ἐπί τήν δεσμευμένη πιθανότητα $P(B/A)$ ἤ ἄλλως ὡς γινόμενον τῆς πιθανότητος $P(B)$ ἐπί τήν δεσμευμένην πιθανότητα $P(A/B)$.

Τό πολλαπλασιαστικόν θεώρημα - τύπος (1.38) - εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐνδεχομένων - συνθέτων δηλαδή γεγονότων τῆς μορφῆς

ΑΒΓ ή $A_1A_2\ldots A_n$ - λαμβάνει εὐκόλως τήν μορφήν

$$P(AB\Gamma) = P(A)P(B/A)P(\Gamma/AB) \qquad (1.39)$$

καί γενικώτερον τήν μορφήν

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_i/A_1A_2\ldots A_{i-1})\ldots$$

$$P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}) \qquad (1.40)$$

ὅπου, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ σειρά τῶν ἐνδεχομένων εἶναι ἀδιάφορος (δυνατόν νά εἶναι οἱαδήποτε).

Ἡ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως (1.39) εἶναι ἁπλῆ καί ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς: Κατ'ἀναλογίαν τῆς σχέσεως (1.37), ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(\Gamma/AB)$, ἡ πιθανότης δηλαδή τοῦ ἐνδεχομένου Γ ὑπό τήν προϋπόθεσιν - συνθήκην - ὅτι ἔχει ἤδη συμβῆ τό σύνθετον γεγονός ΑΒ (ὅτι ἐπραγματοποιήθησαν δηλαδή ἀμφότερα τά ἐνδεχόμενα Α καί Β), δίδεται προφανῶς ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\Gamma/AB) = \frac{P(AB\Gamma)}{P(AB)} \qquad (1.41)$$

Ἐκ τῆς ὡς ἄνω σχέσεως ἔχομεν τήν ἰσότητα

$$P(AB\Gamma) = P(AB)P(\Gamma/AB)$$

ἀντικαθιστῶντες δέ εἰς αὐτήν τήν πιθανότητα $P(AB)$ διά τοῦ γινομένου $P(A)P(B/A)$ - τύπος (1.38) - λαμβάνομεν εὐκόλως τήν πρός ἀπόδειξιν σχέσιν (1.39).

Πρός ἀπόδειξιν ἐξ ἄλλου τῆς γενικῆς μορφῆς τοῦ θεωρήματος - σχέσις (1.40) - ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Δεχόμενοι ὅτι ἡ σχέσις (1.40) ἰσχύει διά k ἐνδεχόμενα, ἤτοι ὅτι

$$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_k/A_1A_2\ldots A_{k-1})$$

καί λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν σχέσιν

$$P(A_{k+1}/A_1A_2...A_k) = \frac{P(A_1A_2...A_kA_{k+1})}{P(A_1A_2...A_k)} \qquad (1.42)$$

ἡ ὁποία, κατ'ἀναλογίαν τῆς (1.37), ὁρίζει τήν δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_{k+1}/A_1A_2...A_k)$, ἤτοι τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου A_{k+1} δοθέντος ὅτι ἐπραγματοποιήθη τό σύνθετον γεγονός $(A_1A_2...A_k)$ - ἔχομεν εὐκόλως τήν ἰσότητα

$$P(A_1A_2...A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_{k+1}/A_1A_2...A_k)$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι ἡ σχέσις (1.41) ἰσχύει καί διά k+1.

Οὕτω, ἔχοντες ἤδη ἀποδείξει ὅτι ἡ σχέσις (1.40) ἰσχύει διά n=2, συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύει καί διά n==3,4,5... καί ἐν γένει δι'οἱονδήποτε ἀκέραιον θετικόν ἀριθμόν.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς σημασίας ὡς καί τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ θεωρήματος - τύπος (1.38) - παραθέτομεν ἕν ἁπλοῦν παράδειγμα:

'Από μία κληρωτίδα περιέχουσα 3 λευκά καί 7 μαῦρα σφαιρίδια, ἐξάγονται διαδοχικῶς καί ἄνευ ἐπαναθέσεως δύο σφαιρίδια.

(α) Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι ἀμφότερα λευκά, νά πραγματοποιηθῆ δηλαδή τό σύνθετον ἐνδεχόμενον (ΛΛ);

(β) Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι ἀμφότερα μαῦρα (ΜΜ);

(γ) Ποία ἡ πιθανότης τό πρῶτον νά εἶναι λευκό καί τό δεύτερο μαῦρο (ΛΜ);

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.38) προκύπτουν εὐκόλως τά ἑξῆς:

(α) $P(ΛΛ) = P(Λ)P(Λ/Λ) = \frac{3}{10}\times\frac{2}{9} = \frac{6}{90}$

(β) $P(MM) = P(M)P(M/M) = \frac{7}{10}\times\frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

(γ) $P(ΛM) = P(Λ)P(M/Λ) = \frac{3}{10}\times\frac{7}{9} = \frac{21}{90}$

1.7 Ὀλικὴ ἢ μέση πιθανότης. Θεώρημα τῆς ὀλικῆς πιθανότητος

Εἰσάγομεν τήν ἔννοιαν ὡς καί τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς ὁ λ ι κ ῆ ς ἤ μ έ σ η ς πιθανότητος παραθέτοντες κατ'ἀρχήν ἕν ἁπλοῦν παράδειγμα.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν 20 κληρωτίδας ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει λευκά καί μαῦρα σφαιρίδια μέ τίς κατωτέρω ἀναλογίες:

(Α)	δύο	κληρωτίδες	περιέχουν	ἀνά	8 λευκά	καί	2 μαῦρα
(Β)	τρεῖς	"	"	"	10 "	"	5 "
(Γ)	δεκαπέντε	"	"	"	3 "	"	9 "

Μία ἐκ τῶν ὡς ἄνω κληρωτίδων ἐπιλέγεται "τ υ χ α ί ω ς" - ὑποτίθεται ὅτι ὅλες ἔχουν τήν αὐτήν πιθανότητα ἐπιλογῆς - ἐν συνεχεία δέ ἐπιλέγεται ἐξ αὐτῆς - καί πάλιν τυχαίως - ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης τό ἐπιλεγέν τελικῶς σφαιρίδιον νά εἶναι λευκόν;

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων καθίσταται προφανές ὅτι ἐάν ἡ ἐπιλεγεῖσα κληρωτίς ἀνήκει εἰς τήν πρώτην ὁμάδα, ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς λευκοῦ σφαιριδίου, ἡ δεσμευμένη δηλαδή πιθανότης P(A/B) δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(Λ/A) = \frac{8}{10}$$

Ὁμοίως, ἐάν ἡ κληρωτίς ἀνήκει εἰς τήν δευτέρα ὁμάδα, ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι

$$P(Λ/B) = \frac{10}{15}$$

Τέλος δέ, ἐάν ἡ ἐπιλεγεῖσα κληρωτίς εἶναι μία ἐξ ἐκείνων τῆς τρίτης ὁμάδος, ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς λευκῶν σφαιρίδων εἶναι

$$P(\Lambda/\Gamma) = \frac{3}{12}$$

Ἡ ὁμάς ὅμως εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει ἡ κληρωτίς, ἐκ τῆς ὁποίας τελικῶς θά ἐπιλεγῆ τό σφαιρίδιον, εἶναι ἄγνωστος - ἐκ τῶν προτέρων - εἰς ἡμᾶς. Εὔλογον κατά συνέπειαν εἶναι - ἀφοῦ λευκόν σφαιρίδιον εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγῆ ἐκ κληρωτίδος ἀνηκούσης εἰςοἱανδήποτε τῶν τριῶν ὁμάδων - ὡς πιθανότητα ἐπιλογῆς λευκοῦ σφαιριδίου $P(\Lambda)$ νά θεωρήσωμεν τόν μ έ σ ο ν ὅ ρ ο ν τῶν ὡς ἄνω - δεσμευμένων - πιθανοτήτων. Εὔλογον ὅμως εἶναι ἐπίσης - δοθέντος ὅτι ἡ πιθανότης $P(\Lambda/A)=\frac{8}{10}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς δύο μόνον ἐκ τῶν 20 κληρωτίδων, ἐνῶ π.χ. ἡ πιθανότης $P(\Lambda/\Gamma)=\frac{3}{12}$ εἰς 15 ἐξ αὐτῶν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις, δοθέντος ὅτι ἡ τελική ἐπιλογή τῶν σφαιριδίων εἶναι πολύ πιθανότερον νά γίνη ἀπό κληρωτίδα τῆς τρίτης ὁμάδος ἀφοῦ αἱ πιθανότητες ἐπιλογῆς (κατά τήν πρώτην φάσιν) μιᾶς κληρωτίδος τῆς πρώτης, δευτέρας ἤ τρίτης ὁμάδος εἶναι ἀντιστοίχως

$$P(A) = \frac{2}{20}, \qquad P(B) = \frac{3}{20} \text{ καί } \qquad P(\Gamma) = \frac{15}{20}$$

κατά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μέσου ὅρου τῶν πιθανοτήτων

$$P(\Lambda/A) \qquad P(\Lambda/B) \qquad P(\Lambda/\Gamma)$$

οἱ τιμές αὐτῶν $\frac{8}{10}$, $\frac{10}{15}$ καί $\frac{3}{12}$ νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν μέ διάφορον βάρος, προφανῶς δέ νά σ τ α θ μ ι σ θ ο ῦ ν μέ τούς ἀριθμούς τῶν κληρωτίδων - 2, 3 καί 15 - εἰς τάς ἀντιστοίχους ὁμάδας ἤ ἄλλως μέ τάς πιθανότητας ἐπιλογῆς μιᾶς κληρωτίδος ἐκ τῆς πρώτης, δευτέρας καί τρίτης ὁμάδος. Οὕτω, ἡ ὁλική (overall) ἤ ἀκριβέστερον μ έ σ η πιθανότης διά τήν ἐπιλογήν τελικῶς λευκῶν σφαιριδίων εἶναι

$$P(A) = \frac{2\frac{8}{10}+3\frac{10}{15}+15\frac{3}{12}}{2+3+15} = \frac{2}{20}\times\frac{8}{10}+\frac{3}{20}\times\frac{10}{15}+\frac{15}{20}\times\frac{3}{12} = \frac{147}{400}$$

ὑπολογίζεται δηλαδή ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\Lambda)=P(A)P(\Lambda/A)+P(B)P(\Lambda/B)+P(\Gamma)P(\Lambda/\Gamma)$$

Σημειωτέον ἐν προκειμένω ὅτι ἡ ὑπολογισθεῖσα τελικῶς μέση πιθανότης P(Λ) - διάφορος ἐν γένει ἑκάστης τῶν ἐπί μέρους δεσμευμένων πιθανοτήτων - εἶναι πλησιέστερον πρός τήν τρίτην ἐξ αὐτῶν - τήν πιθανότητα $P(\Lambda/\Gamma)=\frac{3}{12}$ - καθ'ὅσον ἡ τρίτη ὁμάς ἀντιπροσωπεύεται εἰς τό σύνολον μέ τόν μεγαλύτερον ἀριθμόν κληρωτίδων.

Ἡ γενική διατύπωσις τοῦ προβλήματος καί ἡ ἐπίλυσις αὐτοῦ - θεώρημα τῆς Ὁλικῆς Πιθανότητος - ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός: Λέγομεν ὅτι τά ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ἀποτελοῦν μιά πλήρη δ ι α μ έ ρ ι σ ι ν τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - Σχ. 1.7 - ἐάν

(α) εἶναι ἀνά δύο ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α, ἤτοι

$$A_iA_j=\emptyset \qquad \text{διά } i\neq j=1,2,\ldots,n$$

(β) τό ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρός τόν δειγματικόν χῶρον, ἤτοι

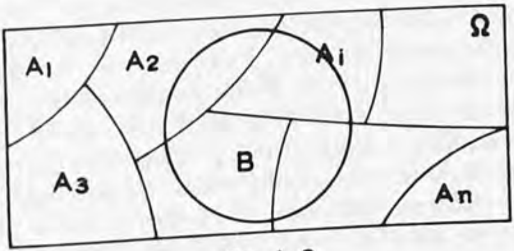
$$\sum_{i=1}^{n} A_i=\Omega$$

(γ) οὐδέν ἐξ αὐτῶν εἶναι γεγονός ἀδύνατον, ἤτοι

$$P(A_i)>0 \qquad \text{διά } i=1,2,\ldots,n$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις, ἐάν ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πειράματος ὁδηγεῖ ὁπωσδήποτε εἰς πραγματοποίησιν ἑνός - καί μόνον ἑνός - ἐκ τῶν ἐνδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ὑποθέτοντες τώρα ὅτι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εἶναι μία πλήρης διαμέρισις τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω καί B ἕνα οἱοδήποτε ἄλλο ἐνδεχόμενον τοῦ ἀντιστοίχου πειράματος δυνάμεθα προφανῶς νά γράψωμεν τήν σχέσιν



Σχ. 1.8

$$B = A_1B + A_2B + \ldots + A_nB$$

νά ἐκφράσωμεν - νά ἀναλύσωμεν - δηλαδή τό Β ὡς ἄθροισμα τῶν τομῶν αὐτοῦ μέ τά ἐπί μέρους ἐνδεχόμενα $A_1A_2,\ldots,A_n$.

Ἐκ τῆς ἐν λόγω σχέσεως - ὅπου, ὡς εἶναι εὐνόητον, μερικά τῶν ὑποσυνόλων (τομῶν) A_iB $i=1,2,\ldots n$ δυνατόν νά εἶναι κενά - καθίσταται προφανές ὅτι ἡ πραγματοποίησις τοῦ Β προϋποθέτει ἀπαραιτήτως τήν πραγματοποίησιν ἑνός - καί μόνον ἑνός - τῶν ἐνδεχομένων $A_1,A_2,\ldots,A_n$, ὅπως ἀκριβῶς εἰς τό παρατεθέν παράδειγμα ἡ ἐπιλογή λευκῶν σφαιριδίων - ἐνδεχομένων Β - ἀκολουθεῖ τήν ἐπιλογήν μιᾶς κληρωτίδος ἀνηκούσης εἴτε εἰς τήν ὁμάδα Α εἴτε εἰς τήν Β εἴτε εἰς τήν Γ (ἐνδεχόμενα ἀντίστοιχα τῶν A_1,A_2,A_3).

Ἐκφρασθέντος τοῦ ἐνδεχομένου Β ὡς ἀθροίσματος n ἀσυμβιβάστων ἀνά δύο ἐνδεχομένων, συμπεραίνομεν εὐκόλως - δι'ἐφαρμογῆς τοῦ ἀθροιστικοῦ θεωρήματος - ὅτι ἡ πιθανότης αὐτοῦ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + \ldots + P(A_nB)$$

ἤ τελικῶς - λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(A_iB)=P(A_i)P(B/A_i)$ - ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n) \qquad (1.43)$$

Ὁ τύπος (1.43), γνωστός ὡς θ ε ώ ρ η μ α ἤ τ ύ π ο ς τ ῆ ς ὁ λ ι κ ῆ ς π ι θ α ν ό τ η τ ο ς, ἐκφράζων τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου B ὡς σταθμικόν μέσον ὅρον τῶν δεσμευμένων πιθανοτήτων του $P(B/A_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ μέ συντελεστάς σταθμίσεως - βάρη - τάς πιθανότητας τῶν ἐπί μέρους ἐνδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - ἀφοῦ $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$ - εἶναι ἐξαιρετικά χρήσιμος καί εὐρυτάτης ἐφαρμογῆς. Πράγματι, εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις ἐνῶ ὁ ὑπολογισμός τῶν δεσμευμένων πιθανοτήτων $P(B/A_i)$ εἶναι μᾶλλον ἁπλοῦς - κατά συνέπειαν καί ἡ εὕρεσις τῆς πιθανότητος $P(B)$ ἐκ τοῦ τύπου (1.43) - ὁ ἀπ'εὐθείας ὑπολογισμός τῆς ἐν λόγω πιθανότητος εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον δυσχερής.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, παραθέτομεν ἕν ἀκόμη παράδειγμα. Ὑποθέσωμεν ὅτι τέσσαρες βιομηχανίαι A_1, A_2, A_3 καί A_4 παράγουν ὡρισμένον προϊόν τό ὁποῖον διαθέτουν εἰς τήν ἀγοράν μιᾶς πόλεως διά 4, 7, 13 καί 6 ὑποκαταστημάτων ἀντιστοίχως. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τό ποσοστόν τῶν "σκάρων" προϊόντων τά ὁποῖα παράγονται ὑφ'ἑκάστης τῶν ἐν λόγω βιομηχανιῶν εἶναι ἀντιστοίχως 8%, 5%, 2% καί 4%, ποία ἡ πιθανότης ἐάν ἀγοράσωμεν ἕνα τεμάχιον ἐκ τῶν ὡς ἄνω προϊόντων, εἰσερχόμενοι τυχαίως εἰς οἱονδήποτε ἐκ τῶν ὑφισταμένων - 30 ἐν συνόλω - καταστημάτων διαθέσεώς των, τό ἀγορασθέν τεμάχιον νά εἶναι σκάρτον;

Συμβολίζοντες μέ B={τό ἐνδεχόμενον τό ἀγορασθέν προϊόν νά εἶναι "σκάρτον"} καί μέ $P(A_i)$ τήν πιθανότητα τό ἐν λόγω τεμάχιον νά ἀγορασθῆ ἐκ τῶν ὑποκαταστημάτων τῆς βιομηχανίας A_i, $i=1,2,3,4$ εὑρίσκωμεν εὐκόλως - δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.43) - ὅτι ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B/A_i)= \frac{4}{30}(0,08) + \frac{7}{30}(0,05) + \frac{13}{30}(0,02) +$$

$$+ \frac{6}{30}(0,04) = \frac{0,32+0,35+0,26+0,24}{30} = \frac{1,17}{30} = 0,039$$

ἤτοι ὅτι ἡ ὁλική πιθανότης νά ἀγορασθῆ ἕνα "σκάρτον" προϊόν ἐφαρμοζομένης τῆς ὡς ἄνω διαδικασίας εἶναι 0,039 (3,9%).

1.8 Πιθανότης a priori καὶ a posteriori. Τύπος τοῦ Bayes

Εἰς τό πρῶτον παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου - ὅπου εἴχομεν 20 κληρωτίδας ἐκ τῶν ὁποίων 2 περιεῖχον ἀνά 8 Λ καί 2 Μ σφαιρίδια, 3 περιεῖχον ἀνά 10 Λ καί 5 Μ σφαιρίδια καί τέλος 15 κληρωτίδες περιεῖχον ἀνά 3 Λ καί 9 Μ σφαιρίδια - ἡ πιθανότης νά καταλήξωμεν πρός ἐπιλογήν τοῦ σφαιριδίου εἰς μία ἐκ τῶν κληρωτίδων τῆς πρώτης ὁμάδος, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ πιθανότης κατά τήν πρώτην φάσιν τοῦ ὅλου πειράματος νά ἐπιλεγῆ μία κληρωτίς τῆς ὁμάδος Α - εἶναι προφανῶς $P(A) = \frac{2}{20}$. Ὁμοίως, ἡ πιθανότης ὅπως ἡ τελική ἐπιλογή σφαιριδίου γίνη ἐκ κληρωτίδος τῆς δευτέρας ὁμάδος εἶναι $P(B) = \frac{3}{20}$ ἐκ δέ τῆς τρίτης $P(\Gamma) = \frac{15}{20}$.

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τό ἐπιλεγέν τελικῶς σφαιρίδιον - μετά τήν τυχαίαν ἐπιλογήν μιᾶς ἐκ τῶν 20 κληρωτίδων καί τήν ἐπίσης τυχαίαν ἐπιλογήν ἑνός ἐκ τῶν εἰς αὐτήν περιεχομένων σφαιριδίων - εἶναι λευκόν (Λ). Ποία ἡ πιθανότης τό ἐπιλεγέν σφαιρίδιον νά ἔχη προέλθη ἐκ μιᾶς τῶν κληρωτίδων τῆς πρώτης ὁμάδος, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ποία ἡ πιθανότης ἡ ἐπιλεγεῖσα κατά την πρώτην φάσιν κληρωτίς νά ἀνήκει εἰς τήν πρώτην ὁμάδα, δοθέντος ὅτι τό ἐπιλεγέν τελικῶς σφαιρίδιον εἶναι λευκόν;

Προφανῶς, ἐκεῖνο τό ὁποῖον ζητεῖται ἐν προκειμένω - χρησιμοποιουμένων τῶν συμβόλων τῆς προηγουμένης παραγράφου - εἶναι ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(A/\Lambda)$, διά τήν εὕρεσιν τῆς ὁποίας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δεσμευμένης πιθανότητος ἔχομεν ὅτι

$$P(A/\Lambda) = \frac{P(A\Lambda)}{P(\Lambda)}$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ θεωρήματος καί τοῦ θεωρήματος τῆς ὁλικῆς πιθανότητος ἔχομεν ἀντιστοίχως ὅτι

$$P(A\Lambda)=P(A)P(\Lambda/A)$$

καί $P(\Lambda)=P(A)P(\Lambda/A)+P(B)P(\Lambda/B)+P(\Gamma)P(\Lambda/\Gamma)$

Κατά συνέπειαν, ή ζητουμένη πιθανότης δίδεται έκ τῆς σχέσεως

$$P(A/\Lambda) = \frac{P(A)P(\Lambda/A)}{P(A)P(\Lambda/A)+P(B)P(\Lambda/B)+P(\Gamma)P(\Lambda/\Gamma)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{20}\times\frac{8}{10}}{\frac{2}{20}\times\frac{8}{10}+\frac{3}{20}\times\frac{10}{15}+\frac{15}{20}\times\frac{3}{12}} = \frac{32}{147}$$

Κατά τόν αύτόν άκριβῶς τρόπον εύρίσκομεν ὅτι ή πιθανότης τό έπιλεγέν τελικῶς λευκόν σφαιρίδιον νά ἔχη προέλθη έκ κληρωτίδος τῆς δευτέρας καί τῆς τρίτης ὁμάδος εἶναι άντιστοίχως

$$P(B/\Lambda) = \frac{P(B)P(\Lambda/B)}{P(A)P(\Lambda/A)+P(B)P(\Lambda/B)+P(\Gamma)P(\Lambda/\Gamma)} = \frac{40}{147}$$

$$\text{καί } P(\Gamma/\Lambda) = \frac{P(\Gamma)P(\Lambda/\Gamma)}{P(A)P(\Lambda/A)+P(B)P(\Lambda/B)+P(\Gamma)P(\Lambda/\Gamma)} = \frac{75}{147}.$$

Ἐκ τῶν άνωτέρω άποτελεσμάτων καθίσταται προφανές ὅτι αί άρχικαί πιθανότητες $\frac{2}{20}$, $\frac{3}{20}$ καί $\frac{15}{20}$ αί όποῖαι άντιστοιχοῦν είς τάς "ὑ π ο θ έ σ ε ι ς" ὅτι ή έπιλογή τῶν σφαιριδίων θά έγένετο τελικῶς έκ τῶν κληρωτίδων τῆς πρώτης (A), τῆς δευτέρας (B) ἤ τῆς τρίτης ὁμάδος (Γ), ὑ π ό τ ό φ ῶ ς τ ῆ ς π λ η ρ ο φ ο ρ ί α ς ὅτι "τό έπιλεγέν τελικῶς σφαιρίδιον εἶναι λευκόν" θά πρέπει νά τροποποιηθοῦν - νά άναμορφωθοῦν - καί νά δεχθῶμεν τελικῶς ὅτι "ή πιθανότης τό έπιλεγέν σφαιρίδιον νά ἔχη προέλθη έκ κληρωτίδος τῆς πρώτης, τῆς δευτέρας ἤ τῆς τρίτης ὁμάδος εἶναι άντιστοίχως $\frac{32}{147}$, $\frac{40}{147}$ καί $\frac{75}{147}$".

Αἱ πιθανότητες $\frac{32}{147}$, $\frac{40}{147}$ καί $\frac{75}{147}$ τῶν ἐνδεχομένων - "ὑποθέσεων" - Α, Β καί Γ αἱ ὁποῖαι ὑπελογίσθησαν ἀνωτέρω ὑπό τό φῶς τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος - λαμβανομένης δηλαδή ὑπ'ὄψιν τῆς π λ η ρ ο φ ο ρ ί α ς ὅτι τό ἐπιλεγέν τελικῶς σφαιρίδιον ἦτο λευκόν - καλοῦνται συνήθως a posteriori ἤ posterior πιθανότητες. Ἐν ἀντιθέσει πρός αὐτάς αἱ ἀρχικαί πιθανότητες $\frac{2}{20}$, $\frac{3}{20}$ καί $\frac{15}{20}$ - αἱ ὁποῖαι ὑπελογίσθησαν ἐν ἀγνοίᾳ τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος - καλοῦνται, δι'εὐνοήτους λόγους, a priori πιθανότητες ἤ priors.

Γενικώτερον, προβλήματα ὡς τό ἀνωτέρω διατυποῦνται καί ἐπιλύονται - μέ τό Θ ε ώ ρ η μ α τ ο ῦ B a y e s - ὡς ἑξῆς: Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πραγματοποίησις ἑνός ἐνδεχομένου Β προϋποθέτει τήν πραγματοποίησιν ἑνός καί μόνον ἑνός ἐκ τῶν ἐνδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ τά ὁποῖα ἀποτελοῦν μιά πλήρη διαμέρισιν τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω καί τῶν ὁποίων οἱ πιθανότητες (priors) εἶναι ἀντιστοίχως $P(A_1)$, $P(A_2)$...καί $P(A_n)$.

Εἰς πολλάς περιπτώσεις ἕκαστον τῶν ἐνδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ δύναται νά θεωρηθῆ ὡς μία "αἰτία" διά τήν πραγματοποίησιν τοῦ Β - γενικώτερον ὡς μία "ὑπόθεσις" διά τόν τρόπον πραγματοποιήσεως τοῦ Β - ζητεῖται δέ, δοθέντος ὅτι ἐπραγματοποιήθη τό Β, ἡ πιθανότης ἡ πραγματοποίησις αὐτοῦ νά ὀφείλεται εἰς τήν συγκεκριμένην "αἰτίαν" A_j, $j=1,2,\ldots,n$ ἐνδιαφερόμεθα δηλαδή διά τήν δεσμευμένην πιθανότητα $P(A_j/B)$ τήν καλουμένη, ὡς ἤδη ἐλέχθη, a posteriori πιθανότητα τοῦ A_j. Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς ἐν λόγῳ πιθανότητος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(A_j/B)$ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ θεωρήματος (1.38) καί τοῦ τύπου τῆς ὁλικῆς πιθανότητος (1.43) ἔχομεν ἀντιστοίχως ὅτι

$$P(A_jB) = P(A_j)P(B/A_j)$$

$$\text{καί } P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Κατά συνέπειαν, ή ζητουμένη πιθανότης δίδεται έκ τῆς σχέσεως

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)} \quad \text{ὅπου } j=1,2,\ldots,n \qquad (1.44)$$

γνωστῆς εὐρέως ὡς τ ύ π ο υ τ ο ῦ B a y e s.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν άνωτέρω, ὡς έπίσης τῶν άναφυομένων κατά τήν έφαρμογήν τοῦ έν λόγω τύπου πρακτικῶν δυσχερειῶν - κατά κανόνα έξ άγνοίας τῶν a priori πιθανοτήτων $P(A_i)$ $i=1,2,\ldots,n$ - παραθέτομεν τό κατωτέρω παράδειγμα.

Ὑποθέσωμεν ὅτι άσθενεῖς πάσχοντες έκ τῆς άσθενείας A_1 παρουσιάζουν ὡρισμένο σύμπτωμα (Σ) είς τά $\frac{8}{10}$ τῶν περιπτώσεων - δηλαδή μέ πιθανότητα 0,8 - ένῶ άσθενεῖς πάσχοντες έκ τῆς άσθενείας A_2 παρουσιάζουν τό αὐτό σύμπτωμα (Σ) μέ πιθανότητα 0,5 (είς τά $\frac{5}{10}$ τῶν περιπτώσεων).

Δοθέντος ὅτι ἕν ἄτομον παρουσίασε τό έν λόγω σύμπτωμα (Σ) ποία ή πιθανότης νά πάσχη άπό τήν άσθένεια A_1; Δι'έφαρμογῆς έν προκειμένω τοῦ τύπου τοῦ Bayes (1.44) ἔχομεν ὅτι ή ζητουμένη δεσμευμένη πιθανότης $P(A/\Sigma)$ δίδεται έκ τῆς σχέσεως

$$P(A_1/\Sigma) = \frac{P(A_1)P(\Sigma/A_1)}{P(A_1)P(\Sigma/A_1)+P(A_2)P(\Sigma/A_2)}$$

Ἐάν ὅμως θελήσωμεν νά ὑπολογίσωμεν τήν έν λόγω πιθανότητα - νά ἔχωμεν δηλαδή μίαν άριθμητικήν ἔκφρασιν αὐτῆς - διαπιστώνομεν ἀμέσως ὅτι τοῦτο παρουσιάζει ὡρισμένας δυσχερείας πολλάκις δέ εἶναι καί ἀδύνατον. Πράγματι, διά τόν ὡς ἄνω ὑπολογισμόν, πέραν τῶν δεσμευμένων πιθανοτήτων $P(\Sigma/A_1) = 0{,}8$ καί $P(\Sigma/A_2) = 0{,}5$ τάς ὁποίας γνωρίζομεν, ἀπαιτοῦνται καί αἱ πιθανότητες $P(A_1)$ καί $P(A_2)$ - priors - αἱ πιθανότητες δηλαδή ὡρισμένον ἄτομον νά προσβληθῆ ἐκ τῶν ἀσθενειῶν A_1 καί A_2.

Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ ἀπάντησις εἰς τοιούτου εἴδους ἐρωτήματα εἶναι συνήθως ἐξαιρετικά δυσχερής πολλάκις δέ καί ἀδύνατος. Διά τόν λόγον αὐτόν, εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις κατά τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου τοῦ Bayes, χρησιμοποιοῦνται ὡς a priori πιθανότητες ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ α ί τοιαῦται.

Ἐπ'αὐτοῦ ὅμως ἔχουν ἐκφρασθῆ πλεῖσται ὅσαι ἀντιρρήσεις τό ὅλον δέ πρόβλημα ἀποτελεῖ - καί σήμερον ἀκόμη - πεδίον ἀντιτιθεμένων ἀποκλίσεων. (Κλασσική καί Bayesian Σχολή).

1.9 Ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα. Συνθῆκαι ἀνεξαρτησίας

Εἰσάγομεν τήν ἔννοιαν τῆς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς ἤ ἀκριβέστερον τῆς σ τ ο χ α σ τ ι κ ῆ ς ἤ ἄλλως σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς, παραθέτοντες κατ'ἀρχήν δύο ἁπλᾶ παραδείγματα:

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ 200 ὑπάλληλοι μιᾶς ἐπιχειρήσεως - 80 ἄνδρες (Α) καί 120 γυναῖκες (Γ) - εἶναι καπνισταί (Κ) καί μή καπνισταί ($\bar{K}$) κατά τάς κατωτέρω ἀναλογίας:

	Κ	$\bar{K}$	Σύνολον
Α	48	32	80
Γ	24	96	120
Σύνολον	72	128	200

'Υποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι οἱ ἐν λόγῳ ὑπάλληλοι κατατάσσονται ὡς πρός τήν οἰκογενειακήν των κατάστασιν - ἔγγαμοι (Ε) καί μή ἔγγαμοι ($\bar{Ε}$) - ὡς ἑξῆς:

	Ε	$\bar{Ε}$	Σύνολον
Α	36	44	80
Γ	54	66	120
Σύνολον	90	110	200

'Εκ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων προκύπτει εὐκόλως ὅτι ἡ ἀναλογία - ἤ ἄλλως τό ποσοστόν - τῶν καπνιστῶν μεταξύ τῶν ἀνδρῶν δ ι α φ έ ρ ε ι ἐκείνου τῶν γυναικῶν ($\frac{48}{80}$ ἤ 60% ἔναντι $\frac{24}{120}$ ἤ 20%), ἐνῶ ἀντιθέτως, ἡ ἀναλογία τῶν ἐγγάμων τόσον μεταξύ τῶν ἀνδρῶν, ὅσον καί μεταξύ τῶν γυναικῶν εἶναι ἡ αὐτή ($\frac{36}{80} = \frac{54}{120}$ ἤ 45%).

Κατά συνέπειαν, ἐάν μεταξύ τῶν ὡς ἄνω ἀτόμων ἐπιλέξωμεν τ υ χ α ί ω ς ἕνα, τό ἐνδεχόμενον νά εἶναι - ἤ ὄχι - "καπνιστής" ἔχει δ ι ά φ ο ρ ο ν πιθανότητα ἀναλόγως τοῦ φύλου του. Πράγματι, ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι τό ἐπιλεγέν ἄτομον εἶναι ἄνδρας, ἡ πιθανότης νά εἶναι καπνιστής - δεσμευμένη πιθανότης - εἶναι $P(K/A) = \frac{48}{80} = 0{,}60$, ἐνῶ εἰς τήν ἀντίθετον περίπτωσιν ἔχομεν $P(K/\Gamma) = \frac{24}{120} = 0{,}20$.

Διά τόν λόγον αὐτόν - ἐπειδή δηλαδή ἡ πληροφορία περί τοῦ φύλου τοῦ ἐπιλεγέντος ἀτόμου δ ι α φ ο ρ ο π ο ι ε ῖ ἐν προκειμένῳ τήν πιθανότητα νά εἶναι (ἤ ὄχι) τοῦτο καπνιστής - λέγομεν ὅτι τό ἐνδεχόμενον "καπνιστής" ἐ ξ α ρ τ ᾶ τ α ι ἐκ τῶν ἐνδεχομένων "ἄνδρας" ἤ "γυναῖκα".

'Αντιθέτως, τό ἐνδεχόμενον τό ἐπιλεγέν ἄτομον νά εἶναι - ἤ ὄχι - ἔγγαμον, εἴτε τοῦτο εἶναι ἄνδρας εἴτε γυναῖκα, ἔχει τήν αὐτήν πιθανότητα. Πράγματι, ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ δευτέρου πίνακος ἔχομεν ἀμέσως ὅτι τόσον αἱ δεσμευμέναι πιθανότητες $P(E/A)=\frac{36}{80}$ καί $P(E/\Gamma)=\frac{54}{120}$ ὅσον καί ἡ ἀδέσμευτος τοιαύτη $P(E)=\frac{90}{200}$ ἔχουν τήν αὐτήν τιμήν 0,45. Εἰς τήν προκειμένην λοιπόν περίπτωσιν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γνῶσις ἤ μή τοῦ "φύλου" τοῦ ἐπιλεγέντος ἀτόμου οὐδόλως ἐπηρεάζει - δέν διαφοροποιεῖ - τήν πιθανότητα νά εἶναι - ἤ ὄχι - τοῦτο ἔγγαμον καί κατά συνέπειαν ἡ ἐν λόγω πληροφορία - περί τοῦ φύλου - οὐδέν προσθέτει εἰς τήν ἐξαγωγήν συμπερασμάτων ἀναφορικῶς πρός τήν "οἰκογενειακήν κατάστασιν". Διά τόν λόγον αὐτόν τά ἐνδεχόμενα "ἔγγαμος" - ἤ ὄχι - καί "ἄνδρας" ἤ "γυναῖκα" λέγονται ἐν προκειμένω ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α.

Παράδειγμα 2

Ρίπτομεν ἕνα "κανονικό" ζάρι καί συμβολίζομεν μέ Α, Β, Γ καί Δ τά κάτωθι ἐνδεχόμενα:

Α={νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός ζυγός}

Β={νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 3}

Γ={νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός μονός}

Δ={νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός μικρότερος τοῦ 3}.

Ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως τοῦ ἐνδεχομένου Β εἶναι $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Ἐάν ὅμως γνωρίζομεν ὅτι ἔχει ἤδη πραγματοποιηθῆ τό ἐνδεχόμενον Α ἡ ἐν λόγω πιθανότης - περί τῆς πραγματοποιήσεως τοῦ Β - γίνεται προφανῶς $P(B/A)=\frac{2}{3}$. Ὁμοίως, ἐάν μᾶς ἐδίδετο ἡ πληροφορία ὅτι τό Α δ έ ν ἔ χ ε ι πραγματοποιηθῆ - ἤ ἄλλως ὅτι ἔχει πραγματοποιηθῆ τό ἀντίθετον αὐτοῦ $\bar{A}$ - ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως τοῦ Β γίνεται $P(B/\bar{A})=\frac{1}{3}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν καθίσταται προφανές ὅτι ἡ πληροφορία περί τῆς πραγματοποιήσεως ἤ μή τοῦ ἐνδεχομένου Α δ ι α φ ο ρ ο π ο ι ε ῖ τήν ἀρχικήν - τήν ἀδέσμευτον - πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ Β καί ὡς ἐκ τούτου τό ἐνδεχόμενον Β δέν δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἀνεξάρτητον τοῦ Α.

Σημειωτέον ἐν προκειμένω ὅτι καί τό ἐνδεχόμενον Α δέν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ Β. Πράγματι, ἐνῶ ἡ πιθανότης $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(A/B)=\frac{2}{3}$, ἡ δέ $P(A/\bar{B})=\frac{1}{3}$.

Ἐν ἀντιθέσει πρός τά ἐνδεχόμενα Α καί Β, τά ἐνδεχόμενα Γ καί Δ εἶναι μεταξύ των ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α, καθ'ὅσον τόσον ἡ πραγματοποίησις - ἤ μή - τοῦ Δ ὅσον καί ἡ πραγματοποίησις - ἤ μή - τοῦ Γ δ έ ν ἐ ξ α ρ τ ῶ ν τ α ι ἐκ τῆς πραγματοποιήσεως - ἤ μή - τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν.

Πράγματι, δι'ἐφαρμογῆς τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος ἔχομεν ἀμέσως ὅτι:

$$P(\Delta/\Gamma) = P(\Delta/\bar{\Gamma}) = P(\Delta) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{\Delta}/\Gamma) = P(\bar{\Delta}/\bar{\Gamma}) = P(\bar{\Delta}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\Gamma/\Delta) = P(\Gamma/\bar{\Delta}) = P(\Gamma) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{\Gamma}/\Delta) = P(\bar{\Gamma}/\bar{\Delta}) = P(\bar{\Gamma}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

σχέσεις δηλαδή πού ὑποδηλοῦν τήν ἀνωτέρω ἀνεξαρτησίαν.

Σημειωτέον ἐν προκειμένῳ - εἰς τήν περίπτωσιν δηλαδή τῶν ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν ἐνδεχομένων Γ καί Δ - ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ γινομένου αὐτῶν, τοῦ συνθέτου δηλαδή ἐνδεχομένου ΓΔ, δύναται νά ἐκφρασθῆ ὡς γινόμενον τῶν ἐπί μέρους πιθανοτήτων των. Πράγματι, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι τό ὑποσύνολον ΓΔ περιλαμβάνει μόνον τόν "ἄσσο" ἔχομεν ἀμέσως ὅτι

$$P(\Gamma\Delta) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{6} = P(\Gamma)P(\Delta)$$

Γενικώτερον, ἡ ἔννοια τῆς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

<u>Ὁρισμός</u>

Ἐάν Α καί Β εἶναι δύο οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα ἑνός πειράματος τύχης Π - ἤτοι ἐάν Α καί Β εἶναι ὑποσύνολα ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω - τό ἐνδεχόμενον Β λέγεται ά ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ν (στοχαστικῶς ἤ στατιστικῶς) τοῦ ἐνδεχομένου A ἐάν ἡ δεσμευμένη πιθανότης αὐτοῦ P(B/A) ἰσοῦται πρός τήν ἀδέσμευτον τοιαύτην P(B), ἤτοι ἐάν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$P(B/A) = P(B) \tag{1.45}$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις, ἐάν ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως τοῦ B οὐδόλως ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς πραγματοποιήσεως - ἤ μή - τοῦ A.

Ἐάν τό ἐνδεχόμενον B εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ A, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι καί τό ἐνδεχόμενον A εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ B.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

- τύπος (1.38) - ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $P(B/A)=P(B)$ προκύπτει ἀμέσως ὅτι καί $P(A/B) = P(A)$, ἤτοι ὅτι καί τό ἐνδεχόμενον A εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ B.

Συμπεραίνομεν οὕτω ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς ἀνεξαρτησίας εἶναι σχέσις σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή καί ὡς ἐκ τούτου εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὁμιλοῦμεν πλέον περί ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν μ ε τ α ξ ύ τ ω ν ἐνδεχομένων.

Πέραν τῶν ἀνωτέρω, εὐκόλως ἀποδεικνύονται καί τά ἑξῆς:

"Ἐάν τά ἐνδεχόμενα A καί B εἶναι μεταξύ των ἀνεξάρτητα, τότε καί τά ἐνδεχόμενα $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ καί $(\bar{A}, \bar{B})$ - ὅπου $\bar{A}$ καί $\bar{B}$ συμβολίζουν ὡς γνωστόν τά ἀντίθετα ἤ ἄλλως συμπληρωματικά τῶν ἐνδεχομένων A καί B - εἶναι ἐπίσης ἀνεξάρτητα".

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως $P(\bar{B}/A)+P(B/A)=1$, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $P(B/A) = P(B)$, ἔχομεν ἀμέσως τήν σχέσιν $P(\bar{B}/A)+P(B) = 1$ ἤ $P(\bar{B}/A) = 1-P(B) = P(\bar{B})$ ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἡ ἀνεξαρτησία τῶν A καί $\bar{B}$. Κατά παρόμοιον ἐξ ἄλλου τρόπου συνάγεται καί ἡ ἀνεξαρτησία τῶν ἐνδεχομένων ($\bar{A}$, B) καί ($\bar{A}$, $\bar{B}$).

Εἰς τήν περίπτωσιν ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν μεταξύ των ἐνδεχομένων - κ α ί μ ό ν ο ν τ ό τ ε - τό πολλαπλασιαστικόν θεώρημα - τύπος (1.38) - λαμβάνει προφανῶς - ἀφοῦ ἡ δεσμευμένη πιθανότης P(B/A) δύναται νά ἀντικατασταθῆ διά τῆς ἀδεσμεύτου τοιαύτης P(B) - τήν ἁπλουστέραν (ε ἰ δ ι κ ή ν) μορφήν

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (1.46)$$

εἰς τήν περίπτωσιν δηλαδή αὐτήν συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι

"ἡ πιθανότης τοῦ γινομένου δύο ἀνεξαρτήτων ἐνδεχομένων A καί B - ἤτοι ἡ πιθανότης τοῦ συνθέτου γεγονότος AB - ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῶν πιθανοτήτων αὐτῶν".

Ἡ σχέσις (1.46), λαμβανομένη πολλάκις καί ὡς ὁ ρ ι σ μ ό ς τ ῆ ς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς τῶν ἐνδεχομένων A καί B - εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ σχέσις (1.45) ἀ π ο δ ε ι κ ν ύ ε τ α ι εὐκόλως ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν τύπων (1.38) καί (1.46) - ἀποτελεῖ τήν καλουμένην συνήθως σ υ ν θ ή κ η ν ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς τῶν A καί B καί τοῦτο διότι εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις ἡ ἀνεξαρτησία ἤ μή δύο ἐνδεχομένων συνάγεται ἐκ τοῦ κατά πόσον αἱ πιθανότητες P(A), P(B) καί P(AB) - ἤ κατά προσέγγισιν αἱ ἀντίστοιχοι πρός αὐτάς σχετικαί συχνότητες - ἐπαληθεύουν ἤ ὄχι τήν ὡς ἄνω ἰσότητα (1.46).

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἐνδεχομένων E={ἔγγαμος} καί A={ἄνδρας} ἡ σχέσις (1.46) ἐπαληθεύεται - ὡς ἄλλωστε ἀνεμένετο - καθ'ὅσον

$$P(AE) = \frac{36}{200} = \frac{80}{200}\times\frac{90}{200} = P(A)P(E)$$

τοῦτο ὅμως δέν συμβαίνει καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἐνδεχομένων K={καπνιστής} καί A = {ἄνδρας} ὅπου

$$P(AK) = \frac{48}{200} \neq \frac{80}{200} \times \frac{72}{200} = P(A)P(K)$$

τά ὁποῖα, ὡς ἤδη ἐλέχθη, δέν δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς ἀνεξάρτητα.

Ἐν προκειμένῳ πρέπει βεβαίως νά λεχθῆ ὅτι ἡ ἐφαρμογή τῆς σχέσεως (1.46) πρός ἐπαλήθευσιν ἤ μή τῆς ἀνεξαρτησίας δύο ἐνδεχομένων δέν εἶναι πάντοτε - ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων - ἐφικτή.

Πράγματι, εἰς πολλάς περιπτώσεις, ἐκεῖνο τό ὁποῖον ἔχομεν εἰς τήν διάθεσίν μας δέν εἶναι οἱ πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ καί $P(AB)$ ἀλλά αἱ ἀντίστοιχοι σχετικαί συχνότητες $\frac{\mu A}{n}$, $\frac{\mu B}{n}$ καί $\frac{\mu AB}{n}$ αἱ ὁποῖαι - δοθέντος ὅτι ἀποτελοῦν ἁπλῶς καί μόνον κατά προσέγγισιν ἐμπειρικάς ἐκφράσεις τῶν ὑπ'ὄψιν πιθανοτήτων - δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά ἐπαληθεύουν ἐπακριβῶς - καί πάντοτε - τήν σχέσιν (1.46). Διά τόν λόγον αὐτόν, εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν, ἡ ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ἤ μ ή δύο ἐνδεχομένων συνάγεται κατά κανόνα ἐκ τῆς κ ο ι ν ῆ ς λ ο γ ι κ ῆ ς καί τῆς ἐ μ π ε ι ρ ί α ς. Οὕτω π.χ. εἶναι κοινῶς παραδεκτόν ὅτι τό ἐνδεχόμενον "ἕνα ἄτομον νά εἶναι πλούσιον" εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ γεγονότος ὅτι "τό ἐν λόγω ἄτομον εἶναι κοντό" ἐνῶ ἀντιθέτως, ἐμπειρικά δεδομένα μᾶς πείθουν ὅτι τό ἐνδεχόμενον "ἕνα ἄτομον νά εἶναι μεγάλου σχετικῶς βάρους" δέν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ γεγονότος ὅτι "εἶναι μεγάλου σχετικῶς αναστήματος".

Ἡ ἔννοια τῆς ἀνεξαρτησίας δύο ἐνδεχομένων - ἐκ τῶν πλέον βασικῶν εἰς τήν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων, καθ'ὅσον τά πλεῖστα τῶν ἐξαγομένων ἐν προκειμένῳ συμπερασμάτων, ἀναφέρονται, ὡς θά ἴδωμεν, εἰς ἀνεξάρτητα μεταξύ των ἐνδεχόμενα - γενικεύεται εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐνδεχομένων ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός

Τά ἐνδεχόμενα $A_1, A_2 \ldots, A_n$ - ὑποσύνολα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - λέγονται ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἤ ἀκριβέστερον π λ ή ρ ω ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α, ἐάν - καί μόνον ἐάν - οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ γινομένου οἱωνδήποτε καί ὁσωνδήποτε ἐκ τῶν ὑπολοίπων, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν διά κάθε $j=1,2,\ldots,n$ καί $1\le r_1<r_2<\ldots<r_k\le n$ ὅπου $k\le n-1$ καί $j\ne r_i$, διά $i=1,2,\ldots,k$,

$$P(A_j/A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k})=P(A_j) \qquad (1.47)$$

Οὕτω, n ἐνδεχόμενον $A_1,A_2,\ldots,A_n$ εἶναι π λ ή ρ ω ς - ἄλλως ὁ λ ι κ ῶ ς, τ ε λ ε ί ω ς ἤ ἀ μ ο ι β α ί ω ς - ἀνεξάρτητα ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἰσχύουν ἅ π α σ α ι αἱ κατωτέρω σχέσεις

$$\begin{aligned} &P(A_j/A_i)=P(A_j) \text{ διά } j\ne i\ 1,2,\ldots,n\\ &P(A_j/A_iA_k)=R(A_j) \text{ διά } j\ne i\ne k=1,2,\ldots,n\\ &P(A_j/A_iA_kA_\lambda)=P(A_j) \text{ διά } j\ne i\ne k\ne \lambda=1,2,\ldots,n \end{aligned} \qquad (1.48)$$

κ.ο.κ. καί τέλος

$$P(A_j/A_1A_2\ldots A_{j-1}A_{j+1}\ldots A_n)=P(A_j) \text{ διά } j=1,2,\ldots,n$$

Ἐν προκειμένω πρέπει βεβαίως νά λεχθῆ ὅτι ἡ π λ ή ρ η ς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α τῶν ἐνδεχομένων $A_1,A_2,\ldots,A_n$ δύναται νά ὁρισθῆ κατ'ἀναλογίαν τῆς σχέσεως (1.46) - καί ὡς ἑξῆς:

Τά ἐνδεχόμενα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ λέγονται π λ ή ρ ω ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἐάν - καί μόνον ἐάν - διά κάθε ὑποσύνολον αὐτῶν $A_{r_1},A_{r_2},\ldots,A_{r_k}$ ὅπου $k\le n$ καί $1\le r_1<r_2<\ldots<r_k\le n$ ἔχομεν

$$P(A_{r_1},A_{r_2}\ldots A_{r_k})=P(A_{r_1})R(A_{r_2})\ldots P(A_{r_k}) \qquad (1.49)$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἰσχύουν ἅ π α σ α ι αἱ κατωτέρω σχέσεις:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \text{ διά } i\ne j=1,2,\ldots,n$$

$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ διά $i\neq j\neq k=1,2,\ldots,n$ (1.50)

κ.ο.κ. μέχρι καί τῆς σχέσεως

$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

Ἡ ἰσοδυναμία τῶν δύο ὁρισμῶν ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ἡ σχέσις (1.42). Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν ἐνδεχομένων Α, Β καί Β, διά τήν πλήρη ἀνεξαρτησίαν αὐτῶν ἀπαιτοῦνται - συμφώνως πρός τόν δ ε ύ τ ε ρ ο ν ὁρισμόν- αἱ σχέσεις

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(B\Gamma)=P(B)P(\Gamma),\quad P(\Gamma A)=P(\Gamma)P(A) \quad \text{καί}$$

$$P(AB\Gamma)=P(A)P(B)P(\Gamma)$$

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω σχέσεων - ἐν συνδυασμῷ πρός τήν (1.42) - συνάγομεν εὐκόλως ὅτι

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

ὁμοίως δέ ὅτι

$$P(\Gamma/B)=P(\Gamma),\quad P(A/\Gamma)=P(A) \text{ κ.ο.κ.}$$

καί ἀκόμη ὅτι

$$P(\Gamma/AB)=\frac{P(AB\Gamma)}{P(AB)}=\frac{P(A)P(B)P(\Gamma)}{P(A)P(B)}=P(\Gamma)$$

ὡς ἐπίσης ὅτι

$$P(B/A\Gamma)=P(B),\quad P(A/B\Gamma)=P(A) \text{ κ.ο.κ.}$$

τάς σχέσεις δηλαδή αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διά τήν πλήρη ἀνεξαρτησίαν τῶν Α, Β καί Γ συμφώνως πρός τόν πρῶτον ὁρισμόν (σχέσεις 1.48).

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καθίσταται προφανές ὅτι ἐάν n ἐνδεχόμενα εἶναι μεταξύ των π λ ή ρ ω ς ἀν ε ξ ά ρ τ η τ α τότε εἶναι ἀνεξάρτητα καί ἀνά δύο καί ἀνά τρία κ.ο.κ. Τ ό ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ν ὅ- μ ω ς δ έ ν ἀ λ η θ ε ύ ε ι ὑ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ῶ ς. Εἶναι δηλαδή δυνατόν η ἐνδεχόμενα νά εἶναι ἀ ν ά δ ύ ο κλπ. ἀνεξάρτητα χωρίς ἀπαραιτήτως νά εἶναι καί πλήρως ἀνεξάρτητα.

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν ἐνδεχομένων Α, Β καί Γ εἶναι δυνατόν νά ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(B\Gamma)=P(B)P(\Gamma) \text{ καί } P(\Gamma A)=P(\Gamma)P(A)$$

- νά εἶναι δηλαδή ἀνά δύο ἀνεξάρτητα - χωρίς ἀπαραιτήτως νά ἰσχύη καί ἡ σχέσις

$$P(AB\Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

ἤ ἀντιθέτως νά ἰσχύη ἡ τελευταία σχέσις χωρίς νά ὁ- σχύουν αἱ προηγούμεναι - χωρίς δηλαδή τά ἐνδεχόμενα Α, Β καί Γ νά εἶναι καί ἀνά δύο ἀνεξάρτητα - καί ὡς ἐκ τούτου - εἰς ἀμφοτέρας τά ἐν λόγω περιπτώσεις - νά μήν ἔχωμεν πλήρη ἀνεξαρτησίαν.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν δύο ἁπλᾶ παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα κανονικόν τετράεδρον ἔχει μία ἕδρα λευκή, μία μαύρη, μία κόκκινη καί μία περιέχουσα ἐν μέρει καί τά τρία ὡς ἄνω χρώματα. Ρίπτομεν τό ἐν λόγω τετράεδρον καί συμβολίζομεν μέ

Λ={τό ἐνδεχόμενον νά ἐμφανισθῆ ἕδρα εἰς τήν ὁποίαν νά ὑπάρχη λευκό}

Μ={ " " " " " " " " " " μαῦρο}

Κ={ " " " " " " " " " "κόκκινο}

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι τά ἐνδεχόμενα Λ, Μ καί Κ εἶναι μέν ἀνά δύο ἀνεξάρτητα, ἀλλ'ὄχι καί πλήρως ἀνεξάρτητα. Πράγματι, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(\Lambda)=\frac{2}{4}$, $P(M)=\frac{2}{4}$, $P(K)=\frac{2}{4}$ καί ἀκόμη ὅτι $P(\Lambda M)=\frac{1}{4}$, $P(\Lambda K)=\frac{1}{4}$, $P(MK)=$

$=\frac{1}{4}$ καί $P(\Lambda M K)=\frac{1}{4}$, ἔχομεν ἀμέσως τήν ἐπαλήθευσιν τῶν σχέσεων

$$P(\Lambda M)=\frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=P(\Lambda)P(M)$$

$$P(\Lambda K)=\frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=P(\Lambda)P(K)$$

$$P(MK)=\frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=P(M)P(K)$$

ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται - συμφώνως πρός τόν τύπον (1.46) - ὅτι τά ἐνδεχόμενα Λ, Μ καί Ε εἶναι ἀνά δύο ἀνεξάρτητα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅμως δεδομένων προκύπτει ἐπίσης ὅτι

$$P(\Lambda M K)=\frac{1}{4}\neq\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=P(\Lambda)P(M)P(K)$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὅτι δέν ἰσχύει ἐν προκειμένω ἡ σχέσις

$$P(\Lambda M K)=P(\Lambda)P(M)P(K)$$

καί κατά συνέπειαν συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι τά ὡς ἄνω ἐνδεχόμενα δέν εἶναι πλήρως ἀνεξάρτητα (παρ' ὅτι συμβαίνει νά εἶναι ἀνά δύο ἀνεξάρτητα).

Παράδειγμα 2

Ρίπτομεν ἕνα ζάρι καί συμβολίζομεν μέ

A={τό ἐνδεχόμενον νά ἐμφανισθῆ ἀριθμός ζυγός}
B={ " " " " μεγαλύτερος τοῦ 3}
Γ={ " " " " μικρότερος τοῦ 5}

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι εἰς τά ὡς ἄνω ἐνδεχόμενα - παρ' ὅτι ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα $P(AB\Gamma)=P(A)P(B)P(\Gamma)$ - δέν εἶναι καί πλήρως ἀνεξάρτητα καθ'ὅσον δέν ἐπαληθεύουν καί ὅλας τάς ἰσότητας $P(AB)=P(A)P(B)$, $P(A\Gamma)=P(A)P(\Gamma)$ καί $P(B\Gamma)=P(B)P(\Gamma)$ ἤτοι δέν εἶναι καί ἀνά δύο ἀνεξάρτητα.

Πράγματι, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(A)=\frac{3}{6}$, $P(B)=\frac{3}{6}$, $P(\Gamma)=\frac{4}{6}$ καί ἀκόμη ὅτι $P(AB)=\frac{2}{6}$, $P(B\Gamma)=\frac{1}{6}$ καί $P(AB\Gamma)=\frac{1}{6}$ ἔχομεν ἀμέσως ὅτι

$$P(AB\Gamma)=\frac{1}{6}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=P(A)P(B)P(\Gamma)$$

$$\text{ἐνῶ}\quad P(AB)=\frac{2}{6}\neq\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=P(A)P(B)$$

$$\text{καί}\quad P(B\Gamma)=\frac{1}{6}\neq\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=P(B)P(\Gamma)$$

1.10 Πειράματα τύχης πεπερασμένου δειγματικοῦ χώρου

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἀποκλειστικῶς καί μόνον - λόγω τοῦ ἰδιαιτέρου πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος αὐτῶν - πειράματα τύχης τά "δυνατά" ἀποτελέσματα - τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - τῶν ὁποίων εἶναι πεπερασμένα τῶ πλῆθος καί κατά συνέπειαν ὁ δειγματικός χῶρος αὐτῶν ἀποτελεῖ ἕνα πεπερασμένον σύνολον - σύνολον μέ πεπερασμένα τῶ πλῆθος στοιχεῖα - τῆς μορφῆς $\Omega=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m\}$.

Τοιούτου εἴδους πειράματα εἶναι π.χ. ἡ ρίψις ἑνός νομίσματος ἤ ἑνός κύβου - ὅπου $\Omega=\{k,\Gamma\}$ ἤ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ἀντιστοίχως - ἡ καταμέτρησις τῶν βροχερῶν ἡμερῶν ἑνός μηνός - ὅπου $\Omega=\{0,1,2,\ldots,30\}$ - ἡ μέτρησις τῶν "σκάρτων" σιγαρέττων ἑνός πακέτου - ὅπου $\Omega=\{0,1,2,\ldots,20\}$ - κ.ο.κ. Ἡ μελέτη πειραμάτων μέ πεπερασμένον τῶ πλῆθος δυνατά ἀποτελέσματα ἤτοι μέ δειγματικόν χῶρον τῆς μορφῆς $\Omega=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m\}$ θά μᾶς ἀπασχολήση ἀμέσως κατωτέρω.

1.10.1 Τὸ πιθανοθεωρητικὸν ὑπόδειγμα

Πρός περιγραφήν ἑνός τοιούτου πειράματος ἤ καλλίτερον τῆς π ι θ α ν ο θ ε ω ρ η τ ι κ ῆ ς δ ο μ ῆ ς τοῦ ἀντιστοίχου πρός αὐτό δειγματικοῦ χώρου, χρησιμοποιεῖται ἐν γένει τό κατωτέρω ὑ π ό δ ε ι γ μ α.

Εἰς τά m στοιχειώδη ἐνδεχόμενα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ ἀντιστοιχοῦνται m θ ε τ ι κ ο ί - γενικώτερον μή ἀρνητικοί - ἀριθμοί $p_1, p_2, \ldots, p_m$ - καλούμενοι π ι θ α ν ό τ η τ ε ς αὐτῶν - τοιοῦτοι ὥστε τό ἄθροισμά των νά ἰσοῦται πρός τήν μονάδα, ἀριθμοί δηλαδή πληροῦντες τάς σχέσεις

$$p_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,m \quad \text{καί} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = p_1+p_2+\ldots+p_m = 1 \qquad (1.51)$$

Ἐξ ἄλλου, ὡς π ι θ α ν ό τ η ς οἱουδήποτε ἄλλου ἐνδεχομένου - ὑποσυνόλου ἐν γένει τοῦ Ω - τῆς μορφῆς $A=\{\varepsilon_{r_1}, \varepsilon_{r_2}, \ldots, \varepsilon_{r_k}\}$, ὅπου $0 \leq k \leq m$ καί $1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leq m$, ἐνδεχομένου* δηλαδή περιλαμβάνοντος k ἐκ τῶν στοιχείων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, ὁρίζεται ὁ ἀριθμός

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} p_{r_i} = p_{r_1} + p_{r_2} + \ldots + p_{r_k} \qquad (1.52)$$

τό ἄθροισμα δηλαδή τῶν πιθανοτήτων τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων ἐκ τῶν ὁποίων ἀπαρτίζεται.

Εἰς τήν πρᾶξιν, αἱ ἀριθμητικαί ἐκφράσεις τῶν ποσοτήτων $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ἀποτελοῦν πολλάκις τάς σ χ ε-

---

* Ἄς σημειωθῆ ἐν προκειμένω ὅτι τοιούτου εἴδους ἐνδεχόμενα ὑπάρχουν τόσα ὅσοι ἀκριβῶς οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν m στοιχείων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ δυνάμεθα νά ἐπιλέξωμεν $k=0,1,2,\ldots,m$ τοιαῦτα ἤτοι συνολικῶς $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{n}=(1+1)^m=2^m$.

τ ι κ ά ς σ υ χ ν ό τ η τ α ς μέ τάς όποίας τά στοιχειώδη ένδεχόμενα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ πραγματοποιοῦνται εἰς μακράν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἀκολουθίαν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος - καλούμεναι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν a p o s t e r i o r i πιθανότητες - κατά κανόνα ὅμως οἱ ἐν λόγῳ πιθανότητες καθορίζονται - a p r i o r i - συμφώνως πρός κάποια ὑ π ό θ ε σ ι ν ἡ ὁποία γίνεται ἀναφορικῶς πρός τήν δυνατότητα πραγματοποιήσεως ἑκάστου τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ (τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων τοῦ πειράματος). Ἐν προκειμένῳ πρέπει βεβαίως νά λεχθῆ ὅτι ἀνεξαρτήτως τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖον καθορίζονται οἱ ἀριθμοί $p_1, p_2, \ldots, p_m$ - ἀκόμη καί ἐάν καθορίζονται α ὐ θ α ι ρ έ τ ω ς - τό ἀνωτέρω ὑπόδειγμα ἐντάσσεται πλήρως εἰς τά πλαίσια τῆς ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως τῆς πιθανότητος, καθ' ὅσον ἡ πιθανότης $P(A)$ - λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (1.51) καί (1.52) - πληροῖ, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ἅπαντά τά ἀξιώματα - σχέσεις (1.15) ἕως (1.17) - ὡς καί τάς λοιπάς ἰδιότητας - σχέσεις (1.19) ἕως (1.27) - τῆς μαθηματικῆς πιθανότητος.

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν ρίψεως ἑνός ζαριοῦ αἱ ἀριθμητικαί ἐκφράσεις τῶν ὡς ἄνω πιθανοτήτων δυνατόν νά εἶναι $P(1)=0{,}20$, $P(2)=0{,}23$, $P(3)=0{,}09$, $P(4)=0{,}21$, $P(5)=0{,}15$ καί $P(6)=0{,}12$ - ἐάν αὐταί ἦσαν αἱ σχετικαί συχνότητες τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων 1,2,3,4, 5,6 εἰς μίαν μακράν ἀκολουθίαν δοκιμῶν - δυνατόν ὅμως, ἐάν π.χ. ὑπάρχουν λόγοι νά πιστεύωμεν - a priori - ὅτι ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως ἑκάστου ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,6 εἶναι ἀνάλογος αὐτοῦ, νά ληφθοῦν ὡς τοιαῦται καί αἱ πιθανότητες $P(1)=\frac{1}{21}$, $P(2)=\frac{2}{21}$, $P(3)=\frac{3}{21}$, $P(4)=\frac{4}{21}$, $P(5)=\frac{5}{21}$ καί $P(6)\frac{6}{21}$, ὅπως δηλαδή εὑρίσκονται αὐταί ἐάν θέσωμεν $P(i)=\lambda i$, ὅπου $i=1,2,3,4,5,6$, καί λάβομεν ὑπ' ὄψιν μας τήν σχέσιν (1.51) ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $1\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda+6\lambda=21$ καί συνεπῶς $\lambda=\frac{1}{21}$.

Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἡ πιθανότης π.χ. τοῦ ἐνδεχομένου νά ἐμφανισθῆ ζυγός ἀριθμός - συμφώνως πρός τήν σχέσιν (1.52) - εἶναι $P(Z)=0{,}23+0{,}21+0{,}12=0{,}56$ ἐνῶ εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ὡς τοιαύτη πιθανότης θά ἐλαμβάνετο - καί πάλιν συμφώνως πρός τήν

(1.52) - ὁ ἀριθμός $P(Z)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21} = \frac{12}{21}$, διάφορος προφανῶς τῆς προηγουμένης.

Ἰδιαίτερον πρακτικόν ἐνδιαφέρον - μεταξύ ὅλων τῶν πειραμάτων πεπερασμένου δειγματικοῦ χώρου - παρουσιάζουν ἐκεῖνα τά "δυνατά" ἀποτελέσματα - τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - τῶν ὁποίων ε ἶ ν α ι ἤ δ ύ ν α ν τ α ι ν ά θ ε ω ρ η θ ο ῦ ν - ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων - ὡς ἐ ξ ἴ σ ο υ π ι θ α ν ά.

Ρίπτοντες π.χ. ἕνα "κανονικό" νόμισμα ἤ ἕνα "κανονικό" ζάρι δέν ἔχομε λόγους νά πιστεύωμεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα "κορῶνα" εἶναι περισσότερον ἤ ὀλιγώτερον πιθανόν τοῦ ἀποτελέσματος "γράμματα" ἤ ὅτι ἡ ἐμφάνισις τοῦ "ἄσσου" εἶναι περισσότερον ἤ ὀλιγώτερον πιθανή τοῦ "πέντε" καί ὡς ἐκ τούτου δεχόμεθα ἀντιστοίχως ὅτι $P(k)=P(\Gamma)$ καί $P(1)=P(2)=...=P(6)$.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως οἱουδήποτε ἐκ τῶν m στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων τοῦ πειράματος - ὅπως προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (1.51) ἐάν θέσωμεν εἰς αὐτήν $p_i=p$ διά $i=1,2,...,m$ - εἶναι ἴση πρός $\frac{1}{m}$, ὁρίζεται δηλαδή ἐκ τῆς σχέσεως

$$p = \frac{1}{m} \tag{1.53}$$

ἡ δέ πιθανότης $P(A)$ οἱουδήποτε ἄλλου ἐνδεχομένου περιλαμβάνοντος k ἐκ τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων - ὅπου $k=1,2,...,m$ - δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A) = \frac{k}{m} \tag{1.54}$$

ἰσοῦται δηλαδή πρός τό πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν "εὐνοϊκῶν" ἤ ἄλλως τῶν συνεπαγομένων τό A στοιχειωδῶν ἀποτελεσμάτων, πρός τόν ἀριθμόν ὅλων τῶν "δυνατῶν" ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος (βλ. καί κλασσικόν ὁρισμόν τῆς πιθανότητος). Ἡ εὕρεσις καί ἡ ἀριθμητική ἔκφρασις πιθανοτήτων τοιούτων ἐνδεχομένων θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατωτέρω.

Ὁ ὑπολογισμός τῆς πιθανότητος διαφόρων ἐνδεχομένων ἀναφερομένων εἰς πειράματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ - πειράματα δηλαδή μέ στοιχειώδη ἐνδεχόμενα ἐξ ἴσου πιθανά - εἶναι κατά κανόνα ἁπλοῦς. Εἰς πολλάς ὅμως περιπτώσεις ἡ ἀ π α ρ ί θ μ η σ ι ς τόσον τῶν εὐνοϊκῶν - δι'ὡρισμένον ἐνδεχόμενον A - ὅσον καί τῶν "δυνατῶν" ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος - ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου (1.54) - εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον δυσχερής. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἡ Σ υ ν δ ι α σ τ ι κ ή Θ ε ω ρ ί α ἀποδεικνύεται πολλάκις ἐξαιρετικά χρήσιμος.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, ὡς καί τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τῆς μέχρι τοῦδε ἐκτεθείσης θεωρίας - τύπων, σχέσεων κλπ. - παραθέτομεν δύο ἁπλᾶ παραδείγματα:

Παράδειγμα 1

Ἀπό μία τράπουλα τῶν 52 παιγνιοχάρτων ἐξάγεται ἕνα χαρτί. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

A: Νά ἐξαχθῆ "ἄσσος"

B: Νά μή ἐξαχθῆ "ντάμα"

Γ: Νά ἐξαχθῆ "φιγούρα"

Δ: Νά ἐξαχθῆ "ντάμα" ἤ "σπαθί"

E: Νά ἐξαχθῆ "ντάμα" δοθέντος ὅτι τό ἐξαχθέν χαρτί εἶναι "σπαθί"

Z: Νά ἐξαχθῆ "φιγούρα-σπαθί"

H: Νά ἐξαχθῆ ἡ "ντάμα-σπαθί" δοθέντος ὅτι ἐξήχθη "ντάμα"

Ἡ ἐξαγωγή ἑνός παιγνιοχάρτου ἐκ μιᾶς τράπουλας τῶν 52 τοιούτων ἀποτελεῖ ἕνα πείραμα τύχης μέ 52 "δυνατά" ἀποτελέσματα, δηλαδή ἕνα πείραμα τύχης μέ πεπερασμένο δειγματικό χῶρο τῆς μορφῆς $\Omega=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{52}\}$.

Ἐπειδή οὐδείς λόγος ὑπάρχει νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς οἱουδήποτε ἐκ τῶν 52 παιγνιοχάρτων εἶναι μικροτέρα ἤ μεγαλυτέρα τῆς πιθανότητος ἐξαγωγῆς οἱουδήποτε ἄλλου δεχόμεθα ἐν προκειμένῳ ὅτι τά 52 στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τοῦ πειράματος εἶναι ἐξ ἴσου πιθανά καί κατά συνέπειαν ὅτι ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς οἱουδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{1}{52}$, ἤτοι ὅτι $P(e_i)=\frac{1}{52}$ διά $i=1,2,...,52$. Ἐν τῷ πλαισίῳ τοῦ ὡς ἄνω πιθανοθεωρητικοῦ ὑποδείγματος αἱ ζητούμεναι πιθανότητες ὑπολογίζονται - δι'ἐφαρμογῆς γνωστῶν ἰδιοτήτων, σχέσεων κλπ. - ὡς ἑξῆς:

Α: Τό ἐνδεχόμενον Α περιλαμβάνει 4 στοιχειώδη ἐνδεχόμενα. Κατά συνέπειαν, δι'ἀμέσου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.54) ἔχομεν $P(A)=\frac{4}{52}$

Β: Τό ἐνδεχόμενον Β εἶναι συμπληρωματικόν τοῦ ἐνδεχομένου $\bar{B}=$ {νά ἐξαχθῆ "ντάμα"} δοθέντος δέ ὅτι $P(\bar{B})=\frac{4}{52}$, δι'ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (1.19), ἔχομεν $P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{4}{52}=\frac{48}{52}$.

Γ: Τό ἐνδεχόμενον Γ εἶναι "ἄθροισμα" τῶν ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων - ἀσυμβιβάστων - ἐνδεχομένων R={νά ἐξαχθῆ "ρήγας"}, D={νά ἐξαχθῆ "ντάμα"} καί V={νά ἐξαχθῆ "βαλές"}. Κατά συνέπειαν, δι'ἐφαρμογῆς τοῦ ἀθροιστικοῦ ἀξιώματος - τύπος (1.17) - καί λαμβάνοντας ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(R)=\frac{4}{52}$, $P(D)=\frac{4}{52}$ καί $P(V)=\frac{4}{52}$, ἔχομεν ὅτι $P(\Gamma)=P(R)+P(D)+P(V)=\frac{12}{52}$.

Δ: Τό ἐνδεχόμενον Δ ἀποτελεῖ τήν ἕνωσιν τῶν ἐνδεχομένων D={νά ἐξαχθῆ "ντάμα"} καί Σ={νά ἐξαχθῆ "σπαθί"}. Τά ἐν λόγῳ ὅμως ἐνδεχόμενα δέν εἶναι ἀσυμβίβαστα καθ'ὅσον ἡ τομή αὐτῶν περιλαμβάνουσα τήν "ντάμα-σπαθί" δέν εἶναι κενή. Κατά συνέπειαν διά τόν ὑπολογισμόν τῆς P(Δ) θά πρέπει νά ἐφαρμοσθῆ τό γενικόν ἀθροιστικόν θεώρημα - τύπος (1.23) - ἐκ τοῦ ὁποίου, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι $P(D)=\frac{4}{52}$, $P(\Sigma)=\frac{13}{52}$ καί $P(D\Sigma)=\frac{1}{52}$, ἔχομεν ἀμέσως

$$P(\Delta)=P(D\cup\Sigma)=P(D)+P(\Sigma)-P(D\Sigma)=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}$$

E: Ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου E ἰσοῦται προφανῶς πρός τήν δεσμευμένην πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου D={νά ἐξαχθῆ "ντάμα"} δοθέντος ὅτι ἔχει πραγματοποιηθῆ τό ἐνδεχόμενον Σ={τό ἐξαχθέν χαρτί νά εἶναι "σπαθί"} ἔχομεν δηλαδή $P(E)=P(D/\Sigma)$.

Γνωστοῦ ὅμως ὅτι τό ἐξαχθέν χαρτί εἶναι "σπαθί" τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος ἔχουν περιορισθῆ εἰς τά 13 μόνον σπαθιά. Ἐξ ἄλλου, διά νά πραγματοποιηθῆ ἐν προκειμένῳ τό ἐνδεχόμενον D={νά ἐξαχθῆ "ντάμα"} ἡ μόνη δυνατή περίπτωσις – τό μόνον εὐνοϊκόν ἀποτέλεσμα – εἶναι νά ἐξαχθῆ ἡ "ντάμα-σπαθί". Κατά συνέπειαν $P(E)=P(D/\Sigma)=\frac{1}{13}$.

Εἰς τό αὐτόν ἀποτέλεσμα ὁδηγούμεθα καί δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.37). Πράγματι, λαμβανομένου ὑπ᾽ὄψιν ὅτι εἰς τήν τράπουλα ὑπάρχει μία μόνον "ντάμα-σπαθί" καί κατά συνέπειαν $P(D\Sigma)=\frac{1}{52}$ ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ τύπου ἔχομεν

$$P(E)=P(D/\Sigma) = \frac{P(D\Sigma)}{P(\Sigma)} = \frac{1:52}{13:52} = \frac{1}{13}$$

Ἕνα πρόσθετον συμπέρασμα τό ὁποῖον ἐξάγεται, ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν εἶναι ὅτιτά ἐνδεχόμενα D={νά ἐξαχθῆ "ντάμα"} καί Σ= {νά ἐξαχθῆ "σπαθί"} εἶναι μεταξύ των στοχαστικῶς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α καθ᾽ὅσον $P(D/\Sigma)=\frac{1}{13}$, $P(D)=\frac{4}{52}$ καί κατά συνέπειαν $P(D/\Sigma)=P(D)$.

Z: Τό ἐνδεχόμενον Z εἶναι σύνθετον γεγονός καί συγκεκριμένως γινόμενον τῶν ἐνδεχομένων ={νά ἐξαχθῆ "φιγούρα"}, ἡ πιθανότης τοῦ ὁποίου – ἴδε Γ – εἶναι $P(F)=\frac{12}{52}$ καί Σ={νά ἐξαχθῆ "σπαθί"}. Κατά συνέπειαν, δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.38) καί λαμβανομένου ὑπ᾽ὄψιν ὅτι $P(\Sigma/F)=\frac{3}{12}$, ἔχομεν ὅτι

$$P(Z)=P(F\Sigma)=P(F)P(\Sigma/F)=\frac{12}{52}\times\frac{3}{12} = \frac{3}{52}$$

Εἰς τό αὐτό φυσικά ἀποτέλεσμα ὁδηγούμεθα καί δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ συμμετρικοῦ τύπου ἤτοι

$$P(Z)=P(F\Sigma)=P(\Sigma)P(F/\Sigma)=\frac{13}{52}\times\frac{3}{13}=\frac{3}{52}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν καθίσταται ἐξ ἄλλου προφανές - ὅπως καί προηγουμένως - ὅτι τά ἐνδεχόμενα F καί Σ εἶναι μεταξύ των ἀνεξάρτητα ἀφοῦ $P(F/\Sigma)=\frac{3}{13}=\frac{12}{52}=P(F)$ - ὡς ἐπίσης καί $P(\Sigma/F)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{13}{52}=P(\Sigma)$ - καί κατά συνέπειαν εἰς τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα θά ἦτο δυνατόν νά φθάσωμε καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ εἰδικοῦ πολλαπλασιαστικοῦ θεωρήματος - τύπος (1.46) - ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὅτι

$$P(Z)=P(F\Sigma)=P(F)P(\Sigma)=\frac{12}{52}\times\frac{13}{52}=\frac{3}{52}$$

H: Ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου H ἰσοῦται προφανῶς πρός τήν δεσμευμένην πιθανότητα $P(D^*/D)$ ὅπου D^* καί D συμβολίζουν ἀντιστοίχως τά ἐνδεχόμενα {νά ἐξαχθῆ "ντάμα-σπαθί"} καί {νά ἐξαχθῆ "ντάμα"}. Γνωστοῦ ὅμως ὅτι ἐξήχθη "ντάμα" τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος περιορίζονται εἰς 4. Ἐξ ἄλλου, διά νά πραγματοποιηθῆ ἐν προκειμένῳ τό ἐνδεχόμενον "ντάμα-σπαθί" τό μόνον εὐνοϊκόν ἀποτέλεσμα εἶναι ἡ ἐξαγωγή τῆς "ντάμας-σπαθί". Κατά συνέπειαν $P(H)=P(D^*/D)=\frac{1}{4}$. Εἰς τό αὐτό, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἀποτέλεσμα ὁδηγούμεθα ἐν προκειμένῳ καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.37), ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$P(H)=P(D^*/D)=\frac{P(DD^*)}{P(D)}=\frac{1:52}{4:52}=\frac{1}{4}$$

Σημειωτέον ἐν προκειμένῳ ὅτι τά ἐνδεχόμενα D^* καί D - ἀντιθέτως πρός τάς προηγουμένας περιπτώσεις - δέν δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς ἀνεξάρτητα καθ' ὅσον $P(D^*/D)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{52}=P(D^*)$ ὡς ἐπίσης $P(D/D^*)=1\neq\frac{4}{52}=P(D)$ ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις αἱ δεσμευμέναι πιθανότητες $P(D^*/D)$ καί $P(D/D^*)$ εἶναι ἀντιστοίχως διάφοροι τῶν ἀδεσμεύτων τοιούτων $P(D^*)$ καί $P(D)$.

Παράδειγμα 2

Ρίπτομεν δύο "κανονικούς" κύβους καί ζητοῦμεν τήν πιθανότητα τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

A: Νά ἐμφανισθοῦν ἀριθμοί μέ ἄθροισμα 4

B: Νά ἐμφανισθοῦν "ζυγοί" ἀριθμοί

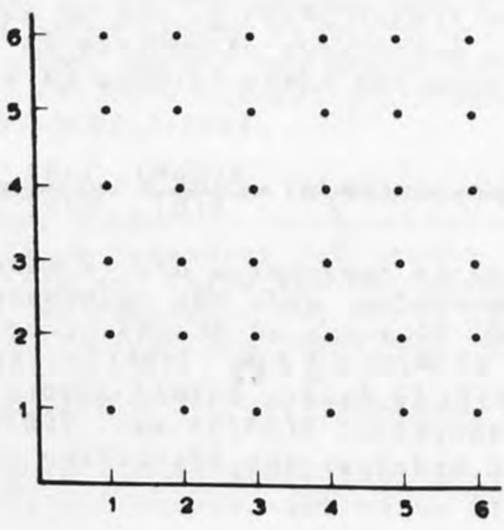
Γ: Νά μή ἐμφανισθῆ ὁ ἀριθμός 2

Δ: Νά ἐμφανισθοῦν ἀριθμοί μέ ἄθροισμα "ζυγό"

E: Νά ἐμφανισθοῦν ἀριθμοί μέ ἄθροισμα "ζυγό" ἤ μικρότερον τοῦ 7

Z: Νά ἐμφανισθῆ ὁ ἀριθμός 2 δοθέντος ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐμφανισθέντων ἀριθμῶν εἶναι "μονό".

Ὁ δειγματικός χῶρος - τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ὡς ἄνω πειράματος - λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἕκαστος κύβος εἶναι δυνατόν νά ἐμφανίσῃ οἱονδήποτε ἐκ τῶν ἀριθμῶν, 1,2,3,4,5,6 - περιλαμβάνει προφανῶς 6×6= =36 στοιχεῖα, ὅλα δηλαδή τά ζεύγη τῆς μορφῆς (i,j), ὅπου i=1,2,3,4,5,6 καί j=1,2,3,4,5,6. Μία γεωμετρική ἐπεικόνισις τοῦ ἐν λόγῳ δειγματικοῦ χώρου δίδεται κατωτέρω.



'Επειδή, ἐξ ἄλλου, οὐδές προφανῶς λόγος ὑφίσταται νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως οἱουδήποτε ἐκ τῶν ὡς ἄνω ζευγῶν εἶναι διάφορος τῆς πιθανότητος οἱουδήποτε ἄλλου ζεύγους, δεχόμεθα - ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα - ὅτι τά 36 δυνατά ἀποτελέσματα - στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - τοῦ ὑπ' ὄψιν πειράματος εἶναι ἐξ ἴσου πιθανά - ἤτοι ὅτι ἡ πιθανότης $P(i,j)=\frac{1}{36}$ διά $i,j=1,2,3,4,5,6$ - καί ἐν τῷ πλαισίῳ αὐτοῦ ὑπολογίζομεν τάς ζητουμένας πιθανότητας.

A: Τά εὐνοϊκά διά τό ἐν λόγῳ ἐνδεχόμενον ἀποτελέσματα εἶναι προφανῶς 3, ἤτοι τά ζεύγη (3.1), (2.2), (1.3). Κατά συνέπειαν $P(A)=\frac{3}{36}$.

B: 'Εν προκειμένῳ τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι $3\times 3=9$ καί συγκεκριμένως τά ζεύγη (i,j) ὅπου $i,j=2,4,6$. Κατά συνέπειαν $P(B)=\frac{9}{36}$.

Γ: Τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα - διά τήν πραγματοποίησιν τοῦ Γ - εἶναι προφανῶς τά ζεύγη (i,j) ὅπου i καί $j=1,3,4,5,6$ (ὄχι ὅμως i ἤ $j=2$) καί κατά συνέπειαν ἔχομεν $P(\Gamma)=\frac{5\times 5}{36}=\frac{25}{36}$.

Εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα ὁδηγούμεθα καί ὡς ἑξῆς: Τό ἐνδεχόμενον Γ εἶναι συμπληρωματικόν τοῦ $\bar{\Gamma}$={νά ἐμφανισθῇ ὁ ἀριθμός 2}. Τοῦτο ὅμως - τό $\bar{\Gamma}$ - εἶναι ἕνωσις τῶν ἐνδεχομένων Γ'={νά ἐμφανισθῇ τό ζεῦγος $(2,j)$ ὅπου $j=1,2,3,4,5,6$} καί Γ''={νά ἐμφανισθῇ τό ζεῦγος $(i,2)$ ὅπου $i=,1,2,3,4,5,6$}. Κατά συνέπειαν ἔχομεν $P(\bar{\Gamma})=P(\Gamma')+P(\Gamma'')-P(\Gamma'\Gamma'')=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$ καί $P(\Gamma)=1-P(\bar{\Gamma})=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$.

Δ: Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι "ζυγό" ἐάν ἀμφότεροι εἶναι ζυγοί ἤ μονοί. Κατά συνέπειαν τά εὐνοϊκά διά τό Δ ἀποτελέσματα εἶναι τά ζεύγη (i,j) ὅπου $i,j=2,4,6$ καί (i,j) ὅπου $i,j=1,3,5$ ἤτοι $3\times 3+3\times 3=9+9=18$ καί $P(\Delta)=\frac{18}{36}$.

Εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα ὁδηγούμεθα καί ὡς ἑξῆς: Τό ἄθροισμα τῶν ἐμφανισθησομένων ἀριθμῶν θά εἶναι ἤ ζυγό (Δ) ἤ μονό ($\bar{\Delta}$), ἐπειδή δέ λόγῳ συμμετρίας εἶναι $P(\Delta)=P(\bar{\Delta})$ ἐκ τῆς σχέσεως $P(\Delta)+P(\bar{\Delta})=1$ εὑρίσκομεν $P(\Delta)=\frac{1}{2}=\frac{18}{36}$.

E: Τό ἐνδεχόμενον E εἶναι ἕνωσις τῶν ἐνδεχομένων Δ={τό ἄθροισμα νά εἶναι "ζυγό"} καί K={τό ἄθροισμα νά εἶναι μικρότερον τοῦ 7} καί ἐπομένως $P(E)=P(\Delta)+P(K)-P(\Delta K)$.

Ἀλλ' ὡς εἴδομεν προηγουμένως $P(\Delta)=\frac{18}{36}$. Ἐξ ἄλλου, ὡς εὐκόλως φαίνεται ἐκ τῆς ὡς ἄνω γεωμετρικῆς ἀπεικονίσεως, τά εὐνοϊκά διά τό k ἀποτελέσματα εἶναι τά ζεύγη (1,1), {(2,1), (1,2)}, {(3,1),(2,2), (1,3)},{(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)} καί τέλος {(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)} ἤτοι 1+ +2+3+4+5=15. Ἀλλ' ὅταν τό ἄθροισμα εἶναι "ζυγό" καί ταυτοχρόνως μικρότερον τοῦ 7 πραγματοποιοῦνται ἀμφότερα τά ἐνδεχόμενα Δ καί K ἤτοι ἡ τομή αὐτῶν ΔK. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει ἐάν τό ἄθροισμα εἶναι 2, 4 ἤ 6 ἤτοι ἐάν ἐμφανισθοῦν τά ζεύγη (1, 1), {(3,1), (2,2), (1,3)} ἤ {(5,1), (4,2), (3, 3), (2,4), (1,5)} ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις εἰς 9 περιπτώσεις. Οὕτω $P(E)=\frac{18}{36}+\frac{15}{36}-\frac{9}{36}=\frac{24}{36}$.

Z: Ἡ πιθανότης τοῦ Z ἀποτελεῖ προφανῶς τήν δεσμευμένη πιθανότητα $P(\delta/M)$ τήν πιθανότητα δηλαδή τοῦ δ={νά ἐμφανισθῆ ὁ ἀριθμός 2} δοθέντος ὅτι ἔχει πραγματοποιηθῆ τό ἐνδεχόμενον M={ἄθροισμα "μονό"}. Δοθέντος ὅμως ὅτι τό σύνθετον γεγονός {δM} πραγματοποιεῖται μόνον ἐάν ἐμφανισθοῦν τά ζεύγη (2, j), ὅπου j=1,3,5 καί (i,2) ὅπου i=1,3,5 ἤτοι εἰς 6 συνολικῶς περιπτώσεις, τό δέ γεγονός M πραγματοποιεῖται - κατ' ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω διά τό Δ - εἰς 18 περιπτώσεις, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.37) ἔχομεν

$$P(Z)=P(\delta/\mu)=\frac{P(\delta M)}{P(M)}=\frac{6:36}{18:36}=\frac{6}{18}.$$

Σημειωτέον ἐν προκειμένω ὅτι τά ἐνδεχόμενα δ καί M δέν εἶναι ἀνεξάρτητα. Πράγματι,

$$P(\delta/M)=\frac{6}{18}\neq\frac{11}{36}=P(\delta).$$

1.10.2 Δείγματα ἐκ πεπερασμένων πληθυσμῶν

Μία εἰδική μορφή πειράματος τύχης μέ πεπερασμένο δειγματικό χῶρο, ἡ ὁποία θά μᾶς ἀπασχολήση ἐνταῦθα λόγω τῶν πολλαπλῶν ἐφαρμογῶν της, εἶναι ἡ δ ε ι γ μ α τ ο λ η ψ ί α - ἄλλως, ἡ ἐ π ι λ ο γ ή ἑ ν ό ς δ ε ί γ μ α τ ο ς - ἐξ ἑνός π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο υ π λ η θ υ σ μ ο ῦ.

Διά τοῦ ὅρου π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ς π λ η θ υ σ μ ό ς νοεῖται ἐν προκειμένῳ ἕν οἱονδήποτε σύνολον $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N\}$ τό ὁποῖον περιλαμβάνει π ε π α ρ α σ μ έ ν ο πλῆθος στοιχείων. Ὁ ἀριθμός ἤ ἄλλως τό πλῆθος N τῶν ἐν λόγῳ στοιχείων, καλουμένων μ ο ν ά δ ω ν τοῦ πληθυσμοῦ, ἀποτελεῖ τό μ έ γ ε θ ο ς αὐτοῦ.

Δ ε ῖ γ μ α, ἐξ ἄλλου, ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ καλεῖται ἐν γένει οἱοδήποτε ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο ν αὐτοῦ $\Sigma=\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},...,\alpha_{j_n}\}$, ὅπου $1\leq j_i\leq N$ διά $i=1,2,...,N$, τό ὁποῖον καθορίζεται - ἐ π ι λ έ γ ε τ α ι - διά σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η ς κατά περίπτωσιν διαδικασίας (τοῦ καλουμένου δ ε ι γ μ α τ ο λ η π τ ι κ ο ῦ σ χ ε δ ί ο υ). Τό πλῆθος τῶν στοιχείων - τῶν μ ο ν ά δ ω ν - ἑνός δείγματος, συμβολιζομένου κατά κανόνα μέ n, καλεῖται μ έ γ ε θ ο ς αὐτοῦ.

Ἐάν τά στοιχεῖα ἑνός δείγματος - συμφώνως πρός τό δειγματοληπτικόν σχέδιον - εἶναι ὑποχρεωτικῶς δ ι ά φ ο ρ α μεταξύ των - ἐάν δηλαδή τό δεῖγμα συνίσταται ἐκ n δ ι α φ ό ρ ω ν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἀ π α γ ο ρ ε υ ο μ έ ν η ς τ ῆ ς ἐ π α ν α λ ή ψ ε ω ς οἱασδήποτε ἐξ αὐτῶν - ἡ δ ε ι γ μ α τ ο λ η ψ ί α καλεῖται "ἄ ν ε υ ἐ π α ν α θ έ σ ε ω ς".

Εἰς τήν ἀντίθετον περίπτωσιν, ἐάν δηλαδή - συμφώνως καί πάλιν πρός τό δειγματοληπτικόν σχέδιον - οἱαδήποτε μονάς τοῦ πληθυσμοῦ ἐπιτρέπεται νά περιληφθῆ - νά ἐ π α ν α λ η φ θ ῆ - εἰς τό δεῖγμα περισσότερες τῆς μιᾶς - μέχρι καί n - φορές καί κατά συνέπειαν τά στοιχεῖα τοῦ δείγματος δ έ ν ε ἶ ν α ι ὑ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ῶ ς δ ι ά φ ο ρ α μεταξύ των-διάφοροι δηλαδή μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ - ἡ δειγματοληψία λέγεται "μ ε τ' ἐ π α ν α θ έ σ ε ω ς".

Πλῆθος Δειγμάτων

Ο ἀριθμός ἤ ἄλλως τό πλῆθος τῶν δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δ υ ν α τ ό ν νά ἐπιλεγοῦν ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ μεγέθους N, ἐξαρτώμενος, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ἐκ τῆς ἐφαρμοζομένης κατά περίπτωσιν μορφῆς δειγματοληψίας - ἄ ν ε υ ἤ μ ε τ' ἐπαναθέσεως - ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

(α) Δειγματοληψία "ἄνευ ἐπαναθέσεως"

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν - ὅπου τά στοιχεῖα τοῦ δείγματος εἶναι δ ι ά φ ο ρ α μεταξύ των - διακρίνομεν δύο εἰδῶν δείγματα:

(1) Ἐκεῖνα εἰς τά ὁποῖα - πέραν τοῦ μεγέθους αὐτῶν - μᾶς ἐνδιαφέρει καί ἡ δ ι ά τ α ξ ι ς - ἡ σειρά - τῶν στοιχείων τους καί διά τόν λόγον αὐτόν καλοῦνται δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν α δ ε ί γ μ α τ α, καί

(2) Δείγματα εἰς τά ὁποῖα ἡ διάταξις τῶν στοιχείων τους μᾶς εἶναι ἀδιάφορος καί διά τόν λόγον αὐτόν λέγονται μ ή δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν α ἤ ἁπλῶς δείγματα μεγέθους n.

Πλῆθος διατεταγμένων δειγμάτων

Τό πλῆθος τῶν διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ μεγέθους N - ὅπου φυσικά $n \leq N$ - συμβολιζόμενον συνήθως μέ $(N)_n$, ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$(N)_n = N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} \qquad (1.55)$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ π ρ ώ τ η μονάς τοῦ δείγματος δύναται νά εἶναι οἱαδήποτε ἐκ τῶν N μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ. Ἡ δ ε υ τ έ ρ α δειγματική μονάς δύναται νά εἶναι - ἐξαιρουμένης ἐκείνης ἡ ὁποία κατέλαβε τήν πρώτην θέσιν - οἱαδήποτε ἐκ τῶν ὑπολοίπων $N-1$ πληθυσμιακῶν μονάδων. Διά τόν ἴδιο λόγο τήν τ ρ ί τ η ν θέσιν εἰς τό δεῖγμα δύναται νά καταλάβη - μετά τήν ἐξαίρεσιν τῶν δύο προηγουμένων - οἱαδήποτε ἐκ τῶν ὑπολοίπων $N-2$ μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ κ.ο.κ. Τέλος, τήν n-οστήν θέσιν εἰς τό δεῖγμα δύναται νά καταλάβη - μετά τήν ἐξαίρεσιν τῶν $n-1$ προηγουμένων - οἱαδήποτε ἐκ τῶν ὑπολοίπων πληθυσμιακῶν μονάδων ὁ ἀριθμός τῶν ὁποίων εἶναι $N-(n-1)$.

Ἐκ τῆς Σ υ ν δ ι α σ τ ι κ ῆ ς ὅμως θεωρίας εἶναι γνωστόν ὅτι "ἐάν ἐκ ν συνόλων $\{\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1n_1}\}$, $\{\alpha_{21},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2n_2}\},\ldots,\{\alpha_{\nu 1},\alpha_{\nu 2},\ldots,\alpha_{\nu n_\nu}\}$, περιλαμβανόντων ἀντιστοίχως $n_1,n_2,\ldots,n_\nu$ στοιχεῖα ἐπιλέξωμεν κ α θ' ο ἱ ο ν δ ή π ο τ ε τ ρ ό π ο ν ἀνά ἕν στοιχεῖον ἐξ ἑκάστου, τό πλῆθος τῶν δυνατῶν ν-άδων τῆς μορφῆς $\{\alpha_{1j_1},\alpha_{2j_2},\ldots,\alpha_{\nu j_\nu}\}$, ὅπου $j_i=1,2,\ldots,n_i$, διά $i=1,2,\ldots,\nu$ τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν, εἶναι ἴσον πρός τό γινόμενον $n_1,n_2,\ldots,n_\nu$". Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμός - τό πλῆθος δηλαδή τῶν διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους n ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ N - εἶναι ἴσος πρός τό γινόμενον $N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)$ - ὅσαι δηλαδή αἱ δ ι α τ ά ξ ε ι ς τῶν N πραγμάτων ἀνά n καί κατά συνέπειαν ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.55).

Πλῆθος μή διατεταγμένων δειγμάτων

Τό πλῆθος τῶν - μ ή δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν ω ν - δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ μεγέθους N - ὅπου φυσικά $n\leq N$ - συμβολιζόμενον συνήθως μέ $\binom{N}{n}$, ὅπως δηλαδή οἱ σ υ ν δ υ α σ μ ο ί τῶν N πραγμάτων ἀνά n, ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\binom{N}{n} = \frac{(N)n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{1.56}$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Τό πλῆθος τῶν μ ε τ α θ έ σ ε ω ν n διαφόρων μεταξύ τους ἀντικειμένων - οἱ διάφοροι δηλαδή τρόποι μέ τούς ὁποίους τά ἐν λόγῳ ἀντικείμενα δύνανται νά τεθοῦν εἰς ὡ ρ ι σ μ έ ν η ν σ ε ι ρ ά ν ἤ ἄλλως νά δ ι α τ α χ θ ο ῦ ν - ὁρίζεται, ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς σχέσεως

$$n!=1.2.3.\dots.(n-1)n \tag{1.57}$$

Οὕτω, ἐξ οἱουδήποτε - μή διατεταγμένου - δείγματος μεγέθους n, ἐξ οἱωνδήποτε δηλαδή n μονάδων τοῦ ἀρχικοῦ πληθυσμοῦ, δυνάμεθα - διατάσσοντες τάς μονάδας αὐτοῦ διαφοροτρόπως - νά σχηματίσωμεν n! διατεταγμένας n-άδας ἤ ἄλλως n! διατεταγμένα δείγματα.

Κατά συνέπειαν, τό πλῆθος τῶν διαταγμένων δειγμάτων $(N)_n$ εἶναι ἴσον πρός τό γινόμενον τοῦ πλήθους $\binom{N}{n}$ τῶν μή διατεταγμένων τοιούτων ἐπί n!, ἤτοι ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $(N)_n=\binom{N}{n}n!$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἀμέσως καί ἡ (1.56).

Οὕτω π.χ. τά δυνατά διατεταγμένα δείγματα μεγέθους n=2 ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ εἶναι $(4)_2=4\times 3=12$ καί συγκεκριμένως τά διατεταγμένα ζεύγη αβ, βα, αγ, γα, αδ, δα, βγ, γβ, βδ, δβ, γδ, δγ, ἐνῶ τά δυνατά - μή διατεταγμένα - δείγματα μεγέθους n=2 εἶναι μόνον $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4}{1\times 2\times 1\times 2} = 6$ συγκεκριμένως δέ τά ζεύγη αβ, αγ, αδ, βγ, βδ, γδ ὅπου φυσικά ἡ διάταξις τῶν στοιχείων τους μᾶς εἶναι ἀδιάφορος. Ὁμοίως, τά δυνατά - διατεταγμένα καί μή διατεταγμένα - δείγματα μεγέθους n=3 ἐκ τοῦ συνόλου τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι ἀντιστοίχως $(10)_3=10\times 9\times 8=720$ καί $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!}=120$.

Ὑπολογισμός τῶν ἀριθμῶν $(N)_n$ καί $\binom{N}{n}$

Ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀριθμῶν $(N)_n$ καί $\binom{N}{n}$ -τοῦ πλήθους δηλαδή τῶν διατεταγμένων καί μή δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ N ἤ ἄλλως τῶν δ ι α τ ά ξ ε ω ν καί τῶν σ υ ν δ υ α σ μ ῶ ν τῶν N πραγμάτων ἀνά n - καί κατ' οὐσίαν τῶν ἀριθμῶν N!, n! καί (N-n)! - βλ. σχέσεις (1.55) καί (1.56) - παρ'ὅτι κατά βάσιν- θεωρητικά τουλάχιστον - ἁπλοῦς, εἰς πολλάς περιπτώσεις - ἰδιαιτέρως διά μεγάλας τιμάς τῶν N καί n - καθίσταται ἐξαιρετικά δυσχερής. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ὁ κατωτέρω τύπος - γνωστός εὑρέως ὡς τύπος τοῦ Stirling - ὁ ὁποῖος ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμόν τῶν ὡς ἄνω ἀριθμῶν ταχέως καί μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν - μικρόν σχετικόν σφάλμα - ἀποδεικνύεται πολλάκις ἐξαιρετικά χρήσιμος.

Τύπος τοῦ Stirling: $$m! = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \qquad (1.57)$$

Ἐν προκειμένῳ καί συναφῶς πρός τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀριθμοῦ m! δι'ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου - συνήθως ὑπό τήν λογαριθμητικήν μορφήν αὐτοῦ - πρέπει νά λεχθοῦν τά ἑξῆς:

- Ὁ ὑπολογισμός εἶναι κ α τ ά π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν
- Τό διαπραττόμενον ἀ π ό λ υ τ ο ν σ φ ά λ μ α

$$\varepsilon_m = m! - \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$$

αὐξάνει μετά τοῦ m, συγκεκριμένως δέ ἐάν $m \to \infty$ τό $\varepsilon_m \to \infty$

- Ἡ σχετική ὅμως τιμή τοῦ ἐν λόγῳ σφάλματος - ἡ ὁποία καί μᾶς ἐνδιαφέρει κυρίως εἰς τήν πρᾶξιν - τό πηλίκον δηλαδή $\frac{\varepsilon m}{m!}$ διά μεγάλας τιμάς τοῦ m εἶ-

.ναι ἀσήμαντος, ἐάν δέ $m \to \infty$ τό σχετικόν σφάλμα

$$\frac{\varepsilon_m}{m!} \to 0$$

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐπιτυγχανομένης ἐν προκειμένῳ προσεγγίσεως παραθέτομεν τόν κατωτέρω πίνακα.

m	$m!$	$\sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m$	e_m	$e_m : m!$
1	1	0,922	0,078	8%
2	2	1,919	0,081	4%
5	120	118	2	1,7%
10	3.628.800	3.598.600	30.200	0,8%

Χρήσιμοι ἐπίσης εἰς τήν πρᾶξιν - καθ'ὅσον πέραν τῶν ὑπολογισμῶν διευκολύνουν πολλάκις σημαντικά καί τήν γενικωτέραν διερεύνησιν διαφόρων προβλημάτων - εἶναι καί αἱ κατωτέρω ἰδιότητες τοῦ ἀριθμοῦ $\binom{N}{n}$. Ἡ ἀπόδειξις ἤ καλλίτερον ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν - δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.56) - εἶναι ἁπλουστάτη.

$$\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n} \tag{1.58}$$

$$\binom{N}{n} = \binom{N-1}{n-1} + \binom{N-1}{n} \tag{1.59}$$

Οὕτω π.χ. ἀντί νά ὑπολογίσωμεν τόν ἀριθμόν $\binom{20}{19}$ ἀρκεῖ - συμφώνως πρός τήν σχέσιν (1.58) - νά εὕρωμεν τόν ἀριθμόν $\binom{20}{1}$ κ.ο.κ.

(β) <u>Δειγματοληψία "μετ' ἐπαναθέσεως"</u>

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν - ὅπου τά στοιχεῖα τοῦ δείγματος δέν εἶναι ἀπαραιτήτως διάφορα μεταξύ των καί οἱαδήποτε μονάς τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι δυνατόν νά περιληφθῆ εἰς τό δεῖγμα μέχρι καί n φοράς - ἡ προηγουμένη διάκρισις τῶν δειγμάτων εἰς διατεταγμένα καί μή δέν ἔχει νόημα, προφανῶς δέ καί οὐδεμίαν πρακτικήν ἀξίαν.

Τό π λ ῆ θ ο ς, ἐξ ἄλλου, τῶν δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ μεγέθους N - ὅπου ὁ ἀριθμός n δύναται προφανῶς νά εἶναι καί μεγαλύτερος τοῦ N - εἶναι

$$N^n = N.N....N \text{ (n φορές)} \tag{1.60}$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Δοθέντος ὅτι ἡ δειγματοληψία εἶναι "μετ' ἐπαναθέσεως" ἑκάστη ἐκ τῶν n μονάδων τοῦ δείγματος δύναται προφανῶς νά εἶναι οἱαδήποτε ἐκ τῶν N μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ. Κατά συνέπειαν, τό πλῆθος τῶν δυνατῶν δειγμάτων εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι ἴσον πρός τόν ἀριθμόν τῶν n-άδων τάς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν λαμβάνοντες ἀνά ἕν στοιχεῖον ἐξ ἑκάστου ἐκ n συνόλων μεγέθους N - ἀπάντων ταυτιζομένων ἐν προκειμένω μέ τόν ἀρχικόν πληθυσμόν - ἤτοι N.N....N (n φορές) ὡς ὁρίζεται δηλαδή ἐκ τῆς σχέσεως (1.60).

Οὕτω π.χ. τά δυνατά δείγματα μεγέθους n=2 ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ Π={α,β,γ,δ} - ὑπό τήν προϋπόθεσιν φυσικά δειγματοληψίας μετ' ἐπαναθέσεως - εἶναι 4^2=16 συγκεκριμένως δέ τά ἑξῆς: αα, αβ, αγ, αδ, βα, ββ, βγ, βδ, γα, γβ, γγ, γδ, δα, δβ, δγ, δδ. Ὁμοίως, τά δυνατά δείγματα μεγέθους n=3 ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ Π={α,β} εἶναι 2^3=8 ἤτοι ααα, ααβ, αβα, βαα, ββα, βαβ, αββ καί βββ.

"Τυχαία" Δειγματοληψία καί "Τυχαῖα" Δείγματα

Ἡ ἐπιλογή ἑνός δείγματος - δειγματοληψία - ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ εἶναι δυνατόν νά γίνη - καί γίνεται εἰς τήν πρᾶξιν - διά διαφόρων μεθόδων. Ἡ σπουδαιοτέρα ἐξ αὐτῶν καί πλέον συνήθης - ἐξ ἀπόψεως πρακτικῶν ἐφαρμογῶν - εἶναι ἡ μέθοδος τῆς "τ υ χ α ί α ς" δειγματοληψίας, ἡ ἐπιλογή δηλαδή ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ ἑνός "τ υ χ α ί ο υ" δείγματος.

Ὁρισμός: Ἡ ἐπιλογή ἑνός δείγματος μεγέθους n ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ λέγεται "τ υ χ α ί α" - καί τό οὕτω ἐπιλεγόμενον δεῖγμα "τ υ χ α ῖ ο ν" - ἐάν ἡ π ι θ α ν ό τ η ς ἐπιλογῆς οἱουδήποτε ἐκ τῶν δυνατῶν δειγμάτων μεγέθους n εἶναι ἡ α ὐ τ ή καί συγκεκριμένως ἴση πρός $\frac{1}{m}$, ὅπου m τό πλῆθος τῶν δυνατῶν δειγμάτων.

Οὕτω π.χ. ἐπιλέγοντες ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_N\}$ μ ί α μόνον μονάδα, λέγομεν ὅτι ἡ ἐπιλογή ἦτο "τ υ χ α ί α" ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἑκάστη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ εἶχε τήν αὐτήν πιθανότητα ἐπιλογῆς καί συγκεκριμένως ἐάν $P(\alpha_i)=\frac{1}{N}$ διά $i = 1,2,...,N$.

Εἰδικώτερον, εἰς τήν περίπτωσιν δειγματοληψίας "ἄνευ ἐπαναθέσεως", ἡ δειγματοληψία λέγεται "τυχαία" καί τό ἐπιλεγόμενον δεῖγμα "τυχαῖον", ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἡ π ι θ α ν ό τ η ς ἐπιλογῆς οἱουδήποτε ἐκ τῶν $(N)_n$ διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους n εἶναι $1:(N)_n$, κατά συνέπειαν δέ, ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς οἱουδήποτε ἐκ τῶν $\binom{N}{n}$ - μή διατεταγμένων - δειγμάτων μεγέθους n εἶναι ἴση πρός $1:\binom{N}{n}$.

Ἐξ ἄλλου, εἰς τήν περίπτωσιν δειγματοληψίας "μετ' ἐπαναθέσεως" ὁμιλοῦμεν περί "τυχαίας" δειγματοληψίας καί "τυχαίου" δείγματος, ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἡ π ι θ α ν ό τ η ς ἐπιλογῆς οἱουδήποτε ἐκ τῶν N^n δυνατῶν δειγμάτων μεγέθους n εἶναι $1:N^n$ ἤ ἄλλως N^{-n}. Ἡ ἐπιλογή ἑνός "τυχαίου" δείγματος μεγέθους n ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N\}$ ἐπιτυγχάνεται - θ ε ω ρ η τ ι κ ά τουλάχιστον - ὡς ἑξῆς:

(i) Καταρτίζεται κατ'ἀρχήν ἕνα β ο η θ η τ ι κ ό σύνολον στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εἶναι ὅλα τά δυνατά - κατά περίπτωσιν - δείγματα μεγέθους n.

Συγκεκριμένως, ἐάν ἡ δειγματοληψία εἶναι "ἄνευ ἐπαναθέσεως" στοιχεῖα τοῦ βοηθητικοῦ τούτου συνόλου εἶναι - ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ - εἴτε τά $(N)_n$ διατεταγμένα δείγματα εἴτε τά $\binom{N}{n}$ μή διατεταγμένα τοιαῦτα. Εἰς τήν περίπτωσιν ἐξ ἄλλου δειγματοληψίας "μετ'ἐπαναθέσεως" τό βοηθητικόν σύνολον περιλαμβάνει - ὡς στοιχεῖα του - τά N^n δυνατά - ἐν προκειμένῳ - δείγματα.

(ii) Τά στοιχεῖα τοῦ ἐν λόγῳ - βοηθητικοῦ - συνόλου ἀριθμοῦνται, ἐν συνεχείᾳ δέ, χρησιμοποιουμένων καταλλήλως τῶν καλουμένων π ι ν ά κ ω ν τ υ χ α ί ω ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν - βλ. παράρτημα στατιστικῶν πινάκων - ἐπιλέγεται "τυχαίως" ἕνα.

Ἡ "τυχαιότης" - ὡς αὕτη ὁρίζεται ἀνωτέρω - τοῦ οὕτω ἐπιλεγομένου δείγματος εἶναι προφανής.

Εἰς τήν πρᾶξιν - ἰδιαιτέρω δέ εἰς περιπτώσεις ὅπου τό μέγεθος N τοῦ δειγματοληπτουμένου πληθυσμοῦ εἶναι μεγάλο καί κατά συνέπειαν ἡ κατάρτισις τοῦ ὡς ἄνω βοηθητικοῦ συνόλου ἐξαιρετικά δυσχερής - ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐπιλογῆς ἑνός "τυχαίου" δείγματος, ἀντικαθίσταται κατά κανόνα διά τῆς ἀκολούθου.

Δειγματοληψία "ἄνευ ἐπαναθέσεως"

Ἐκ τοῦ δειγματοληπτουμένου πληθυσμοῦ N ἐπιλέγεται "τυχαίως" - μέ πιθανότητα $\frac{1}{N}$ - μία μονάς. Μετά τήν ἐπιλογήν της ἡ ἐν λόγῳ μονάς δ έ ν ἐ π α ν α τ ί θ ε τ α ι εἰς τόν πληθυσμόν καί ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 ἐπιλέγεται "τυχαίως" - μέ πιθανότητα πλέον $\frac{1}{N-1}$ - μία δευτέρα μονάς.

Ἡ αὐτή διαδικασία ἐπαναλαμβάνεται καί μετά τήν ἐπιλογήν τῆς δευτέρας μονάδος - καί αὐτή δηλαδή δέν ἐ π α ν α τ ί θ ε τ α ι εἰς τόν πληθυσμόν καί ἡ τρίτη μονάς ἐπιλέγεται καί πάλιν "τυχαίως" ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-2 πληθυσμιακῶν μονάδων - συνεχίζεται δέ μέχρι καί τῆς n-οστῆς μονάδος, ἡ ὁποία, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἐπιλέγεται "τυχαίως" - μετά τήν ἀπομάκρυνσιν ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ τῶν n-1 προηγουμένων - ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-(n-1).

Δειγματοληψία "μετ'ἐπαναθέσεως"

Ἐκ τοῦ δειγματοληπτουμένου πληθυσμοῦ N ἐπιλέγεται "τυχαίως" - μέ πιθανότητα $\frac{1}{N}$ - μία μονάς. Μετά τήν ἐπιλογήν - καί καταγραφήν τῶν χαρακτηριστικῶν - της ἡ ἐν λόγω μονάς ἐ π α ν α τ ί θ ε τ α ι εἰς τόν πληθυσμόν καί ἐκ τοῦ ἀ ν α λ λ ο ι ώ τ ο υ πληθυσμοῦ ἐπιλέγεται - "τυχαίως" πάντοτε - μία δευτέρα μονάς. Ἡ αὐτή διαδικασία ἐφαρμόζεται - καί μετά τήν ἐπιλογήν τῆς δευτέρας μονάδος - προκειμένου νά ἐπιλεγῆ "τυχαίως" ἡ τρίτη, συνεχίζεται δέ μέχρι καί τῆς n-οστῆς.

Ἐπειδή κατά τήν ὡς ἄνω διαδικασίαν ὁ ἀρχικός πληθυσμός παραμένει ἀναλλοίωτος - λόγω τῆς ἐπαναθέσεως εἰς αὐτόν τῶν ἐξαγομένων μονάδων - τό μέγεθος n τοῦ ἐπιλεγομένου δείγματος δύναται προφανῶς νά εἶναι καί μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ν τοῦ μεγέθους τοῦ πληθυσμοῦ N. Ἐξ ἄλλου, οἱαδήποτε μονάς τοῦ πληθυσμοῦ - καί πάλιν λόγω τοῦ ἀναλλοιώτου αὐτοῦ - δύναται ἐν προκειμένω νά περιληφθῆ εἰς τό δεῖγμα - νά ἐπιλεγῆ - περισσότερον ἀπό μία φορά (θεωρητικά μέχρι καί n φορές).

Τό ὅτι ἡ ὡς ἄνω διαδικασία - ἡ ἐφαρμοζομένη δηλαδή εἰς τήν πρᾶξιν "τυχαία" ἐπιλογή τῶν μονάδων τοῦ δείγματος μία πρός μία (σ τ α δ ι α κ ῶ ς) - ἰσοδυναμεῖ πρός τήν "τυχαίαν" δειγματοληψίαν - "ἄνευ" ἤ "μετ'ἐπαναθέσεως" ἀντιστοίχως - καί τό οὕτω ἐπιλεγόμενον δεῖγμα εἶναι "τυχαῖον" - ὡς τοῦτο ὡρίσθη ἀνωτέρω - ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

(α) Περίπτωσις δειγματοληψίας "ἄνευ ἐπαναθέσεως"

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι "ἡ πιθανότης νά ἐπιλεγῆ διά τῆς σταδιακῆς διαδικασίας ἕν οἱονδήποτε διατεταγμένον δεῖγμα $S=\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}\}$ - ἤτοι εἰς τήν πρώτην θέσιν νά ἐμφανισθῆ μία ὡρισμένη μονάς α_{j_1}, εἰς τήν δευτέραν ἡ α_{j_2}, ὅπου φυσικά $j_2\neq j_1$, εἰς τήν τρίτην ἡ α_{j_3}, ὅπου $j_3\neq j_2\neq j_1$ κ.ο.κ. εἰς δέ τήν n-οστήν ἡ α_{j_n}, ὅπου $j_n\neq j_{n-1}\neq\ldots\neq j_2\neq j_1$ - εἶναι ἴση πρός $1:(N)_n$, οἱονδήποτε δέ, μή διατεταγμένον, δεῖγμα - δεῖγμα δηλαδή τό ὁποῖον ἁπλῶς περιλαμβάνει (εἰς κάποιαν θέσιν) τάς μονάδας $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}$ - εἶναι $1:\binom{N}{n}$".

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς - διά τῆς σταδιακῆς διαδικασίας - ἑνός διατεταγμένου δείγματος $S=\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}\}$ ἤ ἄλλως ἡ πιθανότης $P\{\beta_1=\alpha_{j_1},\ \beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_n=\alpha_{j_n}\}$ - ὅπου μέ β_i, $i=1,2,\ldots,n$ συμβολίζομεν χάριν συντομίας τάς n θέσεις τοῦ δείγματος - δίδεται, ὡς γνωστόν ἐκ τῆς σχέσεως

$$P\{\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta\ =\alpha_{j_n}\}=P(\beta_1=\alpha_{j_1})P(\beta_2=\alpha_{j_2}/\beta_1=\alpha_{j_1})P(\beta_3=\alpha_{j_3}/$$

$$/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2}),\ldots,P(\beta_n=\alpha_{j_n}/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_{n-1}=\alpha_{j_{n-1}})$$

ἤτοι ὡς γινόμενον τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐνδεχομένων

$$\{\beta_1=\alpha_{j_1}\},\ \{\beta_2=\alpha_2/\beta_1=\alpha_{j_1}\},\ldots,\{\beta_n=\alpha_{j_n}/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_{n-1}=$$

$$=\alpha_{j_{n-1}}\}$$

Ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ καί ἐφαρμογῆς τῆς σταδιακῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς ἔχομεν προφανῶς ὅτι

$$P(\beta_1=\alpha_{j_1})=\frac{1}{N},\ P(\beta_2=\alpha_{j_2}/\beta_1=\alpha_{j_1})=\frac{1}{N-1},\ P(\beta_3=\alpha_{j_3}/\beta_1=\alpha_{j_1}/\beta_2=\alpha_{j_2})=$$

$$=\frac{1}{N-2}\ \text{κ.ο.κ.}$$

τέλος δέ

$$P(\beta_n=\alpha_{j_n}/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_{n-1}=\alpha_{j_{n-1}})=\frac{1}{N-n+1}$$

καί κατά συνέπειαν,

$$P(\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_n=\alpha_{j_n})=\frac{1}{N}\times\frac{1}{N-1}\times\frac{1}{N-2},\ldots,\frac{1}{N-n+1}=\frac{1}{(N)_n}$$

τήν ἰσότητα δηλαδή τήν ὁποίαν ἐπρόκειτο νά ἀποδείξωμεν.

Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τήν περίπτωσιν μή διατεταγμένων δειγμάτων. Τό ἐπιλεγόμενον διά τῆς σ τ α δ ι α κ ῆ ς διαδικασίας δεῖγμα θά περιλαμβάνη n συγκεκριμένας πληθυσμιακάς μονάδας $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}$ ἐάν - καί μόνον ἐάν - διά τῆς σταδιακῆς ἐπιλογῆς ἔχει ἐπιλεγῆ οἱονδήποτε διατεταγμένον δεῖγμα περιλαμβάνον τάς ἐν λόγω μονάδας καί μόνον αὐτάς. Ἐπειδή ὅμως τοιαῦτα διατεταγμένα δείγματα - περιλαμβάνοντα εἰς διαφόρους θέσεις τάς μονάδας $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}$ - ὑπάρχουν, ὡς εἴδομεν, τόσα ὅσαι αἱ μ ε τ α θ έ σ ε ι ς n ἀντικειμένων, ἤτοι n!, ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς τοῦ μή διατεταγμένου δείγματος τό ὁποῖον περιλαμβάνει - ἀδιάφορον εἰς ποίαν θέσιν - τάς μονάδας $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}$ εἶναι - συμφώνως πρός τό ἀθροιστικόν θεώρημα - ἴση πρός $n!\frac{1}{(N)_n}$ ἤτοι ἴση πρός $1:\binom{N}{n}$ πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐπρόκειτο καί νά ἀποδείξωμεν.

(β) <u>Περίπτωσις δειγματοληψίας "μετ' ἐπαναθέσεως"</u>

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι "ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς διά τῆς σ τ α δ ι α κ ῆ ς διαδικασίας οἱουδήποτε δείγματος $S=\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_n}\}$, ὅπου $1\le j_i\le N$ διά $i=1,2,\ldots,N$, εἶναι ἴση πρός $1:N^n$". Ὅπως καί προηγουμένως, ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς ἑνός τοιούτου δείγματος, ἤτοι ἡ πιθανότης

$$P\{\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_n=\alpha_{j_n}\}$$

δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P\{\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_n=\alpha_{j_n}\}=P(\beta_1=\alpha_{j_1})P(\beta_2=\alpha_{j_2}/\beta_1=\alpha_{j_1})P(\beta_3=$$

$$=\alpha_{j_3}/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2}),\ldots,P(\beta_n=\alpha j_n/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_{n-1}=$$

$$=\alpha_{j_{n-1}}).$$

'Αλλ'ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ καί ἐφαρμογῆς τῆς σταδιακῆς διαδικασίας εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν, ἔχομεν προφανῶς ὅτι:

$$P(\beta_1=\alpha_{j_1})=\frac{1}{N}$$

$P(\beta_2=\alpha_{j_2}/\beta_1=\alpha_{j_1})=\frac{1}{N}$, ἀφοῦ ὁ πληθυσμός παραμένει ἀναλλοίωτος,

$P(\beta_3=\alpha_{j_3}/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2})=\frac{1}{N}$ κ.ο.κ., τέλος δέ

$$P(\beta_n=\alpha_{j_n}/\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha_{j_2},\ldots,\beta_{n-1}=\alpha_{j_{n-1}})=\frac{1}{N}$$

καί κατά συνέπειαν

$$P(\beta_1=\alpha_{j_1},\beta_2=\alpha j_2,\ldots,\beta_n=\alpha_{j_n})=\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}\times\ldots\times\frac{1}{N}(n \text{ φορές})=\frac{1}{N^n}=N^{-n}$$

πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐπρόκειτο καί νά ἀποδείξωμεν.

Οὕτω, καθίσταται προφανές ὅτι ἡ ὡς ἄνω σταδιακή ἐπιλογή τοῦ δείγματος εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν τυχαίαν δειγματοληψίαν "ἄνευ" ἤ "μετ' ἐπαναθέσεως" ἀντιστοίχως.

'Ιδιότητες τῆς "τυχαίας" δειγματοληψίας

Τά "τυχαῖα" δείγματα τά ὁποῖα ἐπιλέγονται - τόσον διά δειγματοληψίας "ἄνευ ἐπαναθέσεως" ὅσον καί διά τῆς "μετ' ἐπαναθέσεως" τοιαύτης - ἔχουν ὡρισμένας ἰδιότητας. Τάς πλέον χρησίμους ἐξ αὐτῶν παραθέτομεν καί ἀποδεικνύομεν κατωτέρω.

(α) Τυχαία δειγματοληψία "ἄνευ ἐπαναθέσεως"

(1) 'Εάν $S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ εἶναι ἕνα διατεταγμένον δεῖγμα - ἐπιλεγέν "τυχαίως" - ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\}$, ἡ πιθανότης ὡρισμένη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ α_i, ὅπου $i=1,2,\ldots,N$ νά καταλάβη ὡρισμένην θέσιν* β_j, ὅπου $j=1,2,\ldots,n$ εἰς τό δεῖγμα - π.χ. ἡ μονάς α_{10} νά ἐμφανισθῆ εἰς τήν τρίτην θέσιν, ἤτοι νά ἔχωμεν $\beta_3=\alpha_{10}$ - εἶναι πάντοτε $\frac{1}{N}$, ἔχομεν δηλαδή

$$P(\beta_j=\alpha_i)=\frac{1}{N} \tag{1.61}$$

διά $i=1,2,\ldots,N$ καί $j=1,2,\ldots,n$

'Απόδειξις

Τό πλῆθος τῶν διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\}$ εἶναι, ὡς γνωστόν, $(N)_n=N(N-1),\ldots,(N-n+1)$.

'Εξ ἄλλου, ἐκ τῶν ἀνωτέρω δειγμάτων ἐκεῖνα τά ὁποῖα ἐμφανίζουν τήν i μονάδα τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τήν j θέσιν τοῦ δείγματος - εὐνοϊκά ἀποτελέσματα $\{\beta_j=\alpha_i\}$ - εἶναι ὅσα τά διατεταγμένα δείγματα μεγέθους n-1 τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ - ἐξαιρουμένης τῆς μονάδος α_i - ἤτοι

---

* Τοῦτο προφανῶς δέν ἔχει νόημα διά μή διατεταγμένα δείγματα

$$(N-1)_{n-1}=(N-1)(N-2),\ldots,(N-n+1)$$

Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης - ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου $\{\beta_j=\alpha_i\}$ - δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\beta_j=\alpha_i)=\frac{(N-1)_{n-1}}{(N)_n}=\frac{(N-1)(N-2),\ldots,(N-n+1)}{N(N-1)(N-2),\ldots,(N-n+1)}=\frac{1}{N}$$

Εἰς τό αὐτό συμπέρασμα ὁδηγούμεθα καί ὡς ἑξῆς:

Ὑποθέτοντες ὅτι τό ὡς ἄνω δεῖγμα ἐπιλέγεται διά τῆς σ τ α δ ι α κ ῆ ς διαδικασίας - φυσικά ἄνευ ἐπαναθέσεως - συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι διά τήν πραγματοποίησιν τοῦ ἐνδεχομένου $\{\beta_j=\alpha_i\}$ νά ἐμφανισθῆ δηλαδή ἡ i μονάς τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τήν j θέσιν τοῦ δείγματος, θά πρέπει ἡ μονάς α_i νά μήν ἐξαχθῆ κατά τάς $j-1$ προηγουμένας ἐξαγωγάς, ἀπαραιτήτως δέ, νά ἐξαχθῆ κατά τήν j τοιαύτην. Ἡ πιθανότης ὅμως τοῦ συνθέτου τούτου γεγονότος - ἤτοι τοῦ ἐνδεχομένου $\{\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-1}\neq\alpha_i,\beta_j=\alpha_i\}$ δίδεται ὡς γνωστόν ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-1}\neq\alpha_i,\beta_j=\alpha_i)=P(\beta_1\neq\alpha_i)P(\beta_2\neq\alpha_i/\beta_1\neq\alpha_i),\ldots,P(\beta_{j-1}\neq\alpha_i/\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-2}\neq\alpha_i)P(\beta_j=\alpha_i/\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-1}\neq\alpha_i).$$

Ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ καί ἐφαρμογῆς ἐν προκειμένῳ τῆς σταδιακῆς διαδικασίας ἔχομεν προφανῶς ὅτι

$$P(\beta_1\neq\alpha_i)=\frac{N-1}{N}$$

$$P(\beta_2\neq\alpha_i/\beta_1\neq\alpha_i)=\frac{N-2}{N-1}$$

κ.ο.κ. τέλος δέ

$$P(\beta_{j-1}\neq\alpha_i/\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-2}\neq\alpha_i)=\frac{N-j+1}{N-j+2}$$

καί

$$P(\beta_j=\alpha_i/\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-1}\neq\alpha_i)=\frac{1}{N-j+1}$$

καί κατά συνέπειαν

$$P(\beta_1\neq\alpha_i,\beta_2\neq\alpha_i,\ldots,\beta_{j-1}\neq\alpha_i,\beta_j=\alpha_i)=\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N-1},\ldots,$$

$$\frac{N-j+1}{N-j+2}\times\frac{1}{N-j+1}=\frac{1}{N}$$

ἤ συνοπτικώτερον $P(\beta_j=\alpha_i)=\frac{1}{N}$ πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐπρόκειτο καί νά ἀποδείξωμεν.

(2) Ἐάν $S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ εἶναι "τυχαῖον" δεῖγμα - διατεταγμένον ἤ μή - ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\}$, ἡ πιθανότης ὡρισμένη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ α_i, ὅπου $i=1,2,\ldots,N$ νά περιληφθῆ τελικῶς εἰς αὐτό εἶναι $\frac{n}{N}$, ἔχομεν δηλαδή

$$P(\alpha_i\varepsilon S)=\frac{n}{N} \qquad (1.62)$$

Ἀπόδειξις

Ἐάν τό δεῖγμα εἶναι διατεταγμένον, ἡ πιθανότης ἡ μονάς α_i, $i=1,2,\ldots,N$ νά περιληφθῆ - ἀδιαφόρως θέσεως - εἰς αὐτό εἶναι προφανῶς - συμφώνως πρός τό ἀθροιστικόν θεώρημα - ἴση πρός τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐνδεχομένων νά καταλάβη τήν πρώτην, τήν δευτέραν, κ.ο.κ., ἤ τέλος τήν n-οστήν θέσιν τοῦ δείγματος, ἤτοι

$$P(\alpha_i\varepsilon S)=\sum_{j=1}^{n}P(\beta_j=\alpha_i)$$

'Αλλά συμφώνως πρός τήν προηγουμένην ἰδιότητα - σχέσις (1.61) - ἔχομεν $P(\beta_j=\alpha_i)=\frac{1}{N}$ διά j=1,2,...,n καί κατά συνέπειαν

$$P(\alpha_i\varepsilon S)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N}=\frac{n}{N}$$

Εἰς τήν περίπτωσιν, ἐξ ἄλλου, μή διατεταγμένου δείγματος, ἡ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως (1.62) ἔχει ὡς ἑξῆς:

Τό πλῆθος τῶν μή διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους n εἶναι, ὡς εἴδομεν $\binom{N}{n}$. 'Εξ ἄλλου, τά δείγματα τά ὁποῖα περιλαμβάνουν - μεταξύ τῶν στοιχείων τους - τήν μονάδα α_i, i=1,2,...,N - τά εὐνοϊκά δηλαδή ἀποτελέσματα διά τό ἐνδεχόμενον $\{\alpha_i\varepsilon S\}$ - εἶναι προφανῶς ὅσα τά μή διατεταγμένα δείγματα μεγέθους n-1 τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ - ἐξαιρουμένης δηλαδή τῆς μονάδος α_i - ἤτοι $\binom{N-1}{n-1}$. Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\alpha_i\varepsilon S)=\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}=\frac{n}{N}$$

(β) <u>Τυχαία δειγματοληψία "μετ'ἐπαναθέσεως"</u>

(1) 'Εάν $S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ εἶναι "τυχαῖον" δεῖγμα - μετ'ἐπαναθέσεως - ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\}$, ἡ πιθανότης ὡρισμένη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ α_i, i=1,2,...,N νά ἐπιλεγῆ κατά τήν j=1,2,...,n ἐξαγωγήν - νά καταλάβη τήν β_j θέσιν τοῦ δείγματος - εἶναι - ὅπως καί εἰς

τήν περίπτωσιν τῆς δειγματοληψίας "ἄνευ ἐπαναθέσεως" - ἴση πρός $\frac{1}{N}$, ἔχομεν δηλαδή

$$P(\beta_j=\alpha_i)=\frac{1}{N} \text{ διά } j=1,2,\ldots,n \text{ καί } i=1,2,\ldots,N \qquad (1.63)$$

'<u>Απόδειξις</u>

Τά δυνατά ἀποτελέσματα τῆς ἐν λόγω δειγματοληψίας εἶναι, ὡς εἴδομεν, N^n. 'Εξ ἄλλου, τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα διά τήν πραγματοποίησιν τοῦ ἐνδεχομένου $\{\beta_j=\alpha_i\}$ - ἡ i μονάς τοῦ πληθυσμοῦ νά ἐμφανισθῆ εἰς τήν j θέσιν τοῦ δείγματος - εἶναι προφανῶς ὅσα τά δυνατά δείγματα - μετ' ἐπαναθέσεως - μεγέθους n-1 τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ πληθυσμοῦ - ἀφοῦ ἐπιτρέπεται ἡ ἐπανάληψις τῶν μονάδων αὐτοῦ - ἤτοι N^{n-1}. Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\beta_j=\alpha_i)=\frac{N^{n-1}}{N^n}=\frac{1}{N} \text{ διά } j=1,2,\ldots,n \text{ καί } i=1,2,\ldots,N$$

Τοῦτο, ἐξ ἄλλου, εἶναι καί ἄμεσος συνέπεια τῆς σ τ α δ ι α κ ῆ ς διαδικασίας ἐπιλογῆς ἑνός τοιούτου δείγματος. Πράγματι, ἀφοῦ ἡ j μονάς τοῦ δείγματος - ὅπου j=1,2,...,n - ἐπιλέγεται, ὡς εἴδομεν, "τυχαίως" ἐκ τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ - ἀναλλοιώτου - ἡ πιθανότης ἐπιλογῆς - κατά τό στάδιον αὐτό - τῆς α_i, i=1,2,...,N μονάδος τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι πάντοτε $\frac{1}{N}$.

(2) 'Εάν $S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ εἶναι τ υ χ α ῖ ο ν δεῖγμα - μετ' ἐπαναθέσεως - ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\}$, τά ἐνδεχόμενα $\{\beta_1=\alpha_{j_1}\}$, $\{\beta_2=\alpha_{j_2}\},\ldots,\{\beta_n=\alpha_{j_n}\}$ ὅπου $1\leq j_i\leq N$ διά i=1, 2,...,N, τά ἐνδεχόμενα δηλαδή

- ὡς πρώτη μονάς τοῦ δείγματος νά ἐμφανισθῆ ἡ α_{j_1} μονάς τοῦ πληθυσμοῦ

-· ὡς δευτέρα μονάς τοῦ δείγματος νά ἐμφανισθῆ ἡ α_{j_2} μονάς τοῦ πληθυσμοῦ,

κ.ο.κ., τέλος δέ

-· ὡς n-οστή μονάς τοῦ δείγματος νά ἐμφανισθῆ ἡ α_{j_n} μονάς τοῦ πληθυσμοῦ,

εἶναι μεταξύ των τ ε λ ε ί ω ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α.

Ἀπόδειξις

Τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα διά τήν ἐμφάνισιν τοῦ συνθέτου ἐνδεχομένου $\{\beta_{r_1}=\alpha_{j_{r_1}}\}\times\{\beta_{r_2}=\alpha_{j_{r_2}}\}\times\ldots\times\{\beta_{r_k}=\alpha_{j_{r_k}}\}$ ὅπου $1\leq k\leq n$ καί $1\leq r_1\leq r_2\leq\ldots\leq r_k\leq n$ εἶναι τόσα ὅσοι οἱ τρόποι μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν N μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ δυνάμεθα νά ἐπιλέξωμεν τάς n-k διά τάς ὑπολοίπους θέσεις - μονάδας - τοῦ δείγματος, ἤτοι N^{n-k} ἡ δέ πιθανότης αὐτοῦ $\dfrac{N^{n-k}}{N^n}$.

Κατά συνέπειαν, ἡ δεσμευμένη πιθανότης

$$P[(\beta_{r_i}=\alpha_{j_i})/(\beta_{r_1}=\alpha_{j_1})\ldots(\beta_{r_{i-1}}=\alpha_{j_{r_{i-1}}})(\beta_{r_{i+1}}=$$

$$=\alpha_{r_{i+1}})\ldots(\beta_{r_k}=\alpha_{j_k})]=$$

$$=\frac{P[(\beta r_1=\alpha j_1)(\beta r_2=\alpha j_2)\ldots(\beta_{r_k}=\alpha_{j_k})]}{P[(\beta r_1=\alpha j_1)\ldots(\beta r_{i-1}=\alpha j_{i-1})(\beta r_{i+1}=\alpha j r_{i+1})\ldots(\beta_{r_k}=\alpha_{j_k})]}=$$

$$=\frac{\dfrac{N^{n-k}}{N^n}}{\dfrac{N^{n-(k-1)}}{N^n}}=\frac{1}{N}$$

εἶναι δηλαδή ἴση πρός τήν ἀδέσμευτον τοιαύτην $P(\beta_{r_i}=\alpha_{j_i})=\frac{1}{N}$ καί ὡς ἐκ τούτου τά ὡς ἄνω ἐνδεχόμενα τ ε λ ε ί ω ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α.

(3) Ἐάν $S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ εἶναι "τυχαῖον" δεῖγμα - μετ' ἐπαναθέσεως - ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\}$, ἡ πιθανότης ὡρισμένη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ α_i, $i=1,2,\ldots,N$, νά περιληφθῇ - τουλάχιστον μία φορά - εἰς αὐτό, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\alpha_i \epsilon S)=1-(1-\frac{1}{N})^n, \text{ ὅπου } i=1,2,\ldots,N \qquad (1.64)$$

Ἀπόδειξις

Τό πλῆθος τῶν δειγμάτων εἰς τά ὁποῖα δ έ ν περιλαμβάνεται μία συγκεκριμένη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ α_i, $i=1,2,\ldots,N$ ἰσοῦται προφανῶς πρός τό πλῆθος τῶν δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ, ἤτοι πρός τόν ἀριθμόν $(N-1)^n$. Κατά συνέπειαν, ἡ πιθανότης μία οἱαδήποτε μονάς τοῦ πληθυσμοῦ ν ά μ ή π ε ρ ι λ η φ θ ῇ εἰς τό δεῖγμα, ἡ πιθανότης δηλαδή τοῦ ἐνδεχομένου $\{\alpha_i \not\epsilon S\}$, εἶναι

$$P(\alpha_i \not\epsilon S)=\frac{(N-1)^n}{N^n}$$

Τά ἐνδεχόμενα ὅμως $\{\alpha_i \epsilon S\}$ καί $\{\alpha_i \not\epsilon S\}$ - τά ἐνδεχόμενα δηλαδή ἡ μονάς α_i ὅπου $i=1,2,\ldots,N$ νά περιληφθῇ ἤ νά μή περιληφθῇ εἰς τό δεῖγμα - εἶναι συμπληρωματικά. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ζητουμένη πιθανότης δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$. \; P(\alpha_i \epsilon S)=1-\frac{(N-1)^n}{N^n}=1-(1-\frac{1}{N})^n$$

'Αξιοσημείωτον τυγχάνει ἐν προκειμένῳ τό ἑξῆς:

Πολλοί πιστεύουν ἐκ διαισθήσεως - λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν δειγματοληψίας "μετ' ἐπαναθέσεως" οἱαδήποτε μονάς τοῦ πληθυσμοῦ δύναται νά περιληφθῆ εἰς τό δεῖγμα καί *περισσοτέρας* τῆς μιᾶς φοράς - ὅτι ἡ πιθανότης ὡρισμένη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ a_i, $i=1,2,\ldots,N$ νά περιληφθῆ εἰς "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους n ἐπιλεγόμενον "μετ' ἐπαναθέσεως" εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης τοῦ νά περιληφθῆ εἰς "τυχαῖον" δεῖγμα τοῦ αὐτοῦ μεγέθους ἐπιλεγόμενον "ἄνευ ἐπαναθέσεως". Τοῦτο ὅμως, ὡς προκύπτει εὐκόλως ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἀποτελεσμάτων (1.62) καί (1.64), *δέν εἶναι ἀληθές*. Πράγματι, διά $n=1$ ἔχομεν $\frac{n}{N} = 1-(1-\frac{1}{N})^n$ - φυσική ἄλλωστε συνέπεια τοῦ ὅτι εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν οὐδεμία διαφορά ὑπάρχει μεταξύ τῶν δύο μορφῶν δειγματοληψίας - ἐνῶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν - ἐάν δηλαδή $2 \leq n \leq N$ ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τήν πρᾶξιν - ἔχομεν

$$\frac{n}{N} > 1 - (1 - \frac{1}{N})^n$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: 'Αναπτύσσοντες τό διώνυμον $(1 - \frac{1}{N})^n$ ἔχομεν ὅτι

$$(1-\frac{1}{N})^n = 1 - \binom{n}{1}\frac{1}{N} + \binom{n}{2}\frac{1}{N^2} - \binom{n}{3}\frac{1}{N^3} + \ldots \pm \frac{1}{N^n}$$

Κατά συνέπειαν, πρός ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι

$$\binom{n}{2}\frac{1}{N^2} - \binom{n}{3}\frac{1}{N^3} + \ldots \pm \frac{1}{N^n} > 0$$

ἤ ἁπλούστερον ὅτι

$$\binom{n}{k}\frac{1}{N^k} > \binom{n}{k+1}\frac{1}{N^{k+1}} \quad \text{διά } k=2,3,\ldots,n$$

ή τέλος - μετά τάς σχετικάς πράξεις - ότι $(N+1)k+N>n$ πρᾶγμα προφανές ἀφοῦ $N\geq n$.

1.10.3 Διάφοροι ἐφαρμογαί τῆς «τυχαίας» δειγματοληψίας

(1) <u>Ὑπεργεωμετρική κατανομή</u>

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας πληθυσμός μεγέθους N περιλαμβάνει λ μονάδας ἑνός εἴδους καί N-λ ἑνός δευτέρου εἴδους π.χ. λ λευκά καί N-λ μαῦρα σφαιρίδια.

Ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ πληθυσμοῦ ἐπιλέγεται - ἄνευ ἐπαναθέσεως - "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους n - ὅπου φυσικά $n\leq N$ - καί ζητεῖται ἡ πιθανότης P_x νά περιληφθοῦν εἰς αὐτό - νά ἐπιλεγοῦν - x λευκά σφαιρίδια.

Οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά ἐπιλέξωμεν x λευκά σφαιρίδια ἐκ τῶν ὑφισταμένων λ τοιούτων εἶναι, ὡς γνωστόν, $\binom{\lambda}{x}$. Ὁμοίως, οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-λ μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ δυνάμεθα νά ἔχωμεν τάς ὑπολοίπους n-x μονάδας τοῦ δείγματος εἶναι $\binom{N-\lambda}{n-x}$. Οἱαδήποτε ὅμως ὁμάς x λευκῶν σφαριδίων συνδυαζομένη μέ οἱαδήποτε ὁμάδα n-x μαύρων τοιούτων, ἀποτελεῖ ἕνα δεῖγμα μεγέθους n περιλαμβάνον x λευκά καί n-x μαῦρα σφαιρίδια καί κατά συνέπειαν ἕνα εὐνοϊκόν ἀποτέλεσμα. Οὕτω, τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων - τῶν δειγμάτων δηλαδή τά ὁποῖα περιλαμβάνουν x λευκά καί n-x μαῦρα σφαιρίδια - εἶναι ἴσον πρός τό γινόμενον $\binom{\lambda}{x}\binom{N-\lambda}{n-x}$.

Ἐξ ἄλλου, τό πλῆθος τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐν λόγῳ δειγματοληψίας - τό πλῆθος δηλαδή τῶν δειγμάτων μεγέθους n ἡ διάταξις τῶν ὁποίων μᾶς εἶναι ἀδιάφορος - εἶναι, ὡς εἴδομεν, $\binom{N}{n}$.

Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης P_x, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ δειγματοληψία εἶναι "τυχαία" καί ὡς ἐκ τούτου ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματα - δείγματα μεγέθους n - εἶναι ἐξ ἴσου πιθανά, ὁρίζεται ἐκ τοῦ πηλίκου

$$P_x = \frac{\binom{\lambda}{x}\binom{N-\lambda}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (1.65)$$

ὅπου δυναταί τιμαί τοῦ x εἶναι φυσικά αἱ ἀκόλουθοι:

(i) 'Εάν $n \leq \lambda \leq N-\lambda < N$ ἔχομεν $x=0,1,2,\ldots,n$

(ii) 'Εάν $\lambda \leq n \leq N-\lambda < N$ ἔχομεν $x=0,1,2,\ldots,\lambda$

(iii) 'Εάν $\lambda \leq N-\lambda \leq n \leq N$ ἔχομεν $x=[n-(N-\lambda)],[n-(N-\lambda)+1],\ldots,\lambda$

Οὕτω π.χ. ἐάν $N=20$, $\lambda=5$ καί $N-\lambda=15$ αἱ δυναταί τιμαί τοῦ x ἐξαρτώμεναι ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος n ἔχουν ὡς ἑξῆς:

$n=4$ ἔχομεν $x=0,1,2,4$

$n=7$ ἔχομεν $x=0,1,2,3,4,5$

$n=18$ ἔχομεν $x=3,4,5$

'Η περιγραφεῖσα ἀνωτέρω δειγματοληψία ἀποτελεῖ ἕνα πείραμα τύχης μέ πεπερασμένο δειγματικό χῶρο στοιχεῖα τοῦ ὁποίου - δυνατά ἀποτελέσματα ἤ ἄλλως στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - ἀποτελοῦν τά $\binom{N}{n}$ ἰσοπίθανα δείγματα μεγέθους n. Προφανῶς ὅμως ἡ ἐν λόγῳ δειγματοληψία δύναται νά θεωρηθῆ καί ὡς ἕνα πείραμα τύχης τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ὁποίου εἶναι ὅσα καί αἱ - κατά περίπτωσιν - δυναταί τιμαί τοῦ x, τό πλῆθος δηλαδή τῶν λευκῶν σφαιριδίων τά ὁποῖα περιλαμβάνει τό ἐπιλεγόμενον δεῖγμα. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ πιθανότης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον τῶν $n+1$ ἤ $\lambda+1$ ἤ τέλος $N-n+1$ δυνατῶν ἀποτελεσμάτων - στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων - ἤ ἄλλως τό ὑπόδειγμα τό ὁποῖον περιγράφει τήν π ι θ α ν ο θ ε ω ρ η τ ι κ ή ν δομήν τοῦ ἀντιστοίχου δειγματικοῦ χώρου Ω, ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.65).

Ἡ κατανομή αὐτή - δηλαδή ἡ ὑποδιαίρεσις καί ἀντιστοίχισις - τῆς συνολικῆς πιθανότητος $\sum\limits_x P_x$ - ἄθροισμα τό ὁποῖον πρέπει βεβαίως νά ἰσοῦται μέ τήν μονάδα - εἰς τά διάφορα στοιχεῖα τοῦ ἐν λόγῳ δειγματικοῦ χώρου συμφώνως πρός τήν σχέσιν - τόν νόμον - (1.15), εἶναι γνωστή ἀμέσως ὡς ὑ π ε ρ γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ή κ α τ α ν ο μ ή.

Ἡ ἰσότης $\sum\limits_{x=0}^{n} P_x = 1$ ἀποδεικνύεται ἐν προκειμένῳ ὡς ἑξῆς:

Ἀναπτύσσοντες τά διώνυμα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ταυτότητος

$$(1+t)^{\lambda}(1+t)^{N-\lambda} \equiv (1+t)^{N}$$

ἔχομεν

$$\left[\binom{\lambda}{0}+\binom{\lambda}{1}t+\binom{\lambda}{2}t^2+\ldots+\binom{\lambda}{\lambda}t^{\lambda}\right]\times\left[\binom{N-\lambda}{0}+\binom{N-\lambda}{1}t+\binom{N-\lambda}{2}t^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\binom{N-\lambda}{N-\lambda}t^{N-\lambda}\right] \equiv \left[\binom{N}{0}+\binom{N}{1}t+\binom{N}{2}t^2+\ldots+\binom{N}{N}t^{N}\right]$$

Ἐξισοῦντες τώρα τούς συντελεστάς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ t - καί ἐν προκειμένῳ τῆς δυνάμεως t^n - λαμβάνομεν τήν ἰσότητα

$$\binom{\lambda}{0}\binom{N-\lambda}{n}+\binom{\lambda}{1}\binom{N-\lambda}{n-1}+\ldots+\binom{\lambda}{x}\binom{N-\lambda}{n-x}+\ldots+\binom{\lambda}{n}\binom{N-\lambda}{0}=\binom{N}{n}$$

ἐκ τῆς ὁποίας καθίσταται ἀμέσως φανερόν ὅτι

$$\sum_{x=0}^{n} P_x = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{\lambda}{x}\binom{N-\lambda}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1$$

'Η ἀνωτέρω ἀπόδειξις προϋποθέτει φυσικά - πρᾶγμα τό ὁποῖον συμβαίνει συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν - ὅτι $n \leq \lambda \leq N-\lambda$ καί κατά συνέπειαν $x=0,1,2,\ldots,n$. Κατ' ἀνάλογον ὅμως τρόπον ἐργαζόμεθα καί εἰς τάς περιπτώσεις ὅπου $\lambda \leq n \leq N-\lambda$ ἤ $\lambda \leq N-\lambda \leq n$.

<u>Γενίκευσις</u>: Τό ἀνωτέρω πρόβλημα γενικεύεται ὡς ἑξῆς:

'Υποθέσωμεν ὅτι ἕνας πληθυσμός μεγέθους N ἀποτελεῖται ἀπό k - διαφόρους μεταξύ των - ὁμάδας στοιχείων, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει ἀντιστοίχως $N_1, N_2, \ldots, N_k$ στοιχεῖα, ὅπου φυσικά $N_1+N_2+\ldots+N_k=N$.

'Εκ τοῦ ὡς ἄνω πληθυσμοῦ ἐπιλέγεται - ἄνευ ἐπαναθέσεως - "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους n - συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν ἔχομεν $n \leq \min(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ - καί ζητεῖται ἡ πιθανότης νά περιληφθοῦν εἰς τό δεῖγμα - νά ἐπιλεγοῦν - x_1 στοιχεῖα ἐκ τῆς πρώτης ὁμάδος, x_2 ἐκ τῆς δευτέρας, κ.ο.κ., τέλος δέ x_k στοιχεῖα ἐκ τῆς k ὁμάδος, ὅπου φυσικά $0 \leq x_i \leq n$, διά $i=1,2,\ldots,k$ καί x_1+ $+x_2+\ldots+x_k=n$.

Τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ἐν λόγω πειράματος εἶναι προφανῶς καί πάλιν τά $\binom{N}{n}$ ἰσοπίθανα δείγματα μεγέθους n. 'Εξ ἄλλου, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐκ τῶν N_i μονάδων οἱασδήποτε ὁμάδος $i=1,2,\ldots,k$ δυνάμεθα νά λάβωμεν τάς x_i, $i=1,2,\ldots,k$ κατά $\binom{N_i}{x_i}$ τρόπους, πρός τούτοις δέ ὅτι οἱαδήποτε ὁμάς x_1 στοιχείων τοῦ πρώτου εἴδους συνδυαζομένη μέ οἱαδήποτε ὁμάδα x_2 στοιχείων τοῦ δευτέρου εἴδους κ.ο.κ. τέλος δέ μέ οἱαδήποτε ὁμάδα x_k στοιχείων τοῦ k εἴδους ἀποτελοῦν ἕνα δεῖγμα μεγέθους n περιλαμβάνον x_1 στοιχεῖα τοῦ πρώτου εἴδους, x_2 τοῦ δευτέρου κ.ο.κ. καί τέλος x_k τοῦ k εἴδους, δηλαδή ἕνα εὐνοϊκόν ἀποτέλεσμα, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων ἰσοῦται πρός τό γινόμενον

$$\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\ldots\binom{N_k}{x_k}$$

κατά συνέπειαν δέ, ὅτι ἡ ζητουμένη πιθανότης ὁρίζεται έκ τοῦ πηλίκου

$$P_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}} \tag{1.66}$$

ὅπου φυσικά τά x_i, $i=1,2,\ldots,k$ πληροῦν, ὡς εἴδομεν, τάς σχέσεις $0 \leq x_i \leq n$ διά $i=1,2,\ldots,k$ καί $x_1+x_2+\ldots x_k = n$.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν ὡρισμένα ἁπλᾶ παραδείγματα:

Παράδειγμα 1: 'Από μία τράπουλα τῶν 52 παιγνιοχάρτων ἐξάγονται "τυχαίως" καί ἄνευ ἐπαναθέσεως 5. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

Α: Νά ἐπιλεγοῦν 5 χαρτιά τοῦ ἰδίου χρώματος

Β: Νά ἐπιλεγοῦν 3 ἄσσοι καί 2 ντάμες

Γ: Νά ἐξαχθῆ "καρρέ", δηλαδή τέσσαρα χαρτιά μεταξύ τῶν 5 νά εἶναι ὅμοια

Δ: Νά ἐξαχθοῦν 5 ἀνόμοια χαρτιά

Ε: Νά ἐξαχθοῦν 2 ἄσσοι, 1 ντάμα καί 2 δεκάρια.

Τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ἐν λόγω "πειράματος" εἶναι προφανῶς $\binom{52}{5}$.

Τά εὐνοϊκά, ἐξ ἄλλου, ἀποτελέσματα δι' ἕκαστον τῶν ὡς ἄνω ἐνδεχομένων - καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ πιθανότης αὐτῶν - εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς:

(Α) Πέντε σπαθιά ἐκ τῶν 13 δύνανται νά ἐξαχθοῦν κατά $\binom{13}{5}$ τρόπους. 'Επειδή ὅμως δέν ἐνδιαφερόμεθα διά σπαθιά ἀλλ'οἱονδήποτε ἐκ τῶν 4 χρωμάτων, τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι $4\binom{13}{5}$ καί ἡ ζητουμένη πιθανότης $P(A)=4\binom{13}{5}:\binom{52}{5}$.

(Β) Τρεῖς ἄσσοι ἐκ τῶν 4 ἐπιλέγονται κατά $\binom{4}{3}$ τρόπους καί 2 ντάμες ἐκ τῶν 4 κατά $\binom{4}{2}$. Κατά συνέπειαν, τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι ἐν προκειμένῳ $\binom{4}{3}\binom{4}{2}$ καί $P(B)=\binom{4}{3}\binom{4}{2}:\binom{52}{5}$.

(Γ) Οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους δύνανται νά περιληφθοῦν μεταξύ τῶν 5 χαρτιῶν, 4 ἄσσοι καί 1 οἱονδήποτε ἄλλο χαρτί ἐκ τῶν ὑπολοίπων 48 εἶναι προφανῶς $\binom{4}{4}\binom{48}{1}$. Ἐπειδή ὅμως δέν ἐνδιαφερόμεθα διά "καρρέ" τοῦ ἄσσου ἀλλ' οἱουδήποτε ἐκ τῶν 13 χαρτιῶν, τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι $13\binom{4}{4}\binom{48}{1}$ καί ἡ $P(\Gamma)=13\binom{4}{4}\binom{48}{1}:\binom{52}{5}$.

(Δ) Οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά ἔχωμεν - μεταξύ τῶν πέντε χαρτιῶν - ἕνα ἄσσο, ἕνα δύο, ἕνα τρία, ἕνα τέσσαρα καί ἕνα πέντε εἶναι $\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}=\binom{4}{1}^5$. Ἀλλ' ἐπειδή δέν ἐνδιαφερόμεθα νά ἔχωμεν εἰς τήν 5-άδα τά ὡς ἄνω συγκεκριμένα χαρτιά ἀλλ' οἱαδήποτε 5 ἐκ τῶν 13 τοιούτων, τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν κατά $\binom{13}{5}$ τρόπους, τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι ἐν προκειμένῳ $\binom{13}{5}\binom{4}{1}^5$ καί ἡ $P(\Delta)=\binom{13}{5}\binom{4}{1}^5:\binom{52}{5}$.

(Ε) Τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα εἶναι ἐν προκειμένῳ $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}$ ἡ ζητουμένη δέ πιθανότης $P(\Delta)=\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}:\binom{52}{5}$.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Ἀπό ἕνα πακέττον σιγαρέττων εἰς τό ὁποῖον περιλαμβάνονται 4 ἐλαττωματικά, 6 μερικῶς ἐλαττωματικά καί 10 καλά σιγαρέττα, ἐπιλέγονται τυχαίως καί ἄνευ ἐπαναθέσεως 3. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

Α: Νά ἐπιλεγοῦν 3 "καλά" σιγαρέττα

Β: Νά ἐπιλεγῆ 1 καλό, 1 ἐλαττωματικό καί 1 μερικῶς ἐλαττωματικό

Γ: Νά ἐπιλεγοῦν 2 τουλάχιστον καλά

Δ: Νά ἐπιλεγῆ 1 τό πολύ ἐλαττωματικό.

Τό πλῆθος τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων - τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n=3 - εἶναι, ὡς γνωστόν, $\binom{20}{3}=\frac{20\times19\times18}{1\times2\times3}=$ $=1.140$. Τά εὐνοϊκά, ἐξ ἄλλου, ἀποτελέσματα δι' ἕκαστον τῶν ὡς ἄνω ἐνδεχομένων εἶναι τά ἀκόλουθα:

(Α) $\binom{10}{3}\binom{6}{0}\binom{4}{0}=\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}\times1\times1 = 120$

Κατά συνέπειαν, $P(A)=\frac{120}{1140}\approx 0,105$

(Β) $\binom{10}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{1}=10\times6\times4 =240$

καί $P(B)=\frac{240}{1140}\approx 0,210$

(Γ) Τό ἐνδεχόμενον Γ πραγματοποιεῖται:

(i) Ἐάν ἐπιλεγοῦν 3 "καλά" ἤτοι κατά $\binom{10}{3}\binom{6}{0}\binom{4}{0}=$ $=120$ τρόπους

(ii) Ἐάν ἐπιλεγοῦν 2 καλά καί 1 ἐλαττωματικό ἤτοι κατά $\binom{10}{2}\binom{4}{1}\binom{6}{0}=\frac{10\times9}{1\times2}\times4\times1=180$ τρόπους

(iii) Ἐάν ἐπιλεγοῦν 2 καλά καί 1 μερικῶς ἐλαττωματικό ἤτοι κατά $\binom{10}{2}\binom{4}{0}\binom{6}{1}=\frac{10\times9}{1\times2}\times1\times6=$ $=270$ τρόπους.

Κατά συνέπειαν $P(\Gamma)=\frac{120+180+270}{1140}=\frac{570}{1140}=$ $=0,500$

(Δ) Τό ἐνδεχόμενον Δ πραγματοποιεῖται ἐάν ἐπιλεγοῦν:

(i)	0	ἐλαττωματικά,	0	μερικῶς	ἐλαττωματικά,	3	καλά
(ii)	0	"	1	"	"	2	"
(iii)	0	"	2	"	"	1	"
(iv)	0	"	3	"	"	0	"
(v)	1	"	0	"	"	2	"
(vi)	1	"	1	"	"	1	"
(vii)	1	"	2	"	"	0	"

Κατά συνέπειαν, τά εὐνοϊκά διά τά ἐν λόγῳ ἐνδεχόμενα ἀποτελέσματα εἶναι:

$$\binom{4}{0}\binom{6}{0}\binom{10}{3}+\binom{4}{0}\binom{6}{1}\binom{10}{2}+\binom{4}{0}\binom{6}{2}\binom{10}{1}+\binom{4}{0}\binom{6}{3}\binom{10}{0}+$$

$$+\binom{4}{1}\binom{6}{0}\binom{10}{2}+\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{10}{1}+\binom{4}{1}\binom{6}{2}\binom{10}{0}=120+270+150+$$

$$+20+180+240+60=1.040$$ καί

$$P(\Delta)=\frac{1040}{1140}\approx 0{,}912$$

Παράδειγμα 3: Οἱ 200 κάτοικοι ἑνός χωρίου κατανέμονται ἐξ ἀπόψεως οἰκογενειακῆς καταστάσεως ὡς ἑξῆς: Ἄγαμοι 80, Ἔγγαμοι 90, Χῆροι 20 καί Διαζευγμένοι 10. Ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ πληθυσμοῦ ἐπιλέγεται ἄνευ ἐπαναθέσεως "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους $n=20$. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν εἰς τό δεῖγμα 8 ἄγαμοι, 9 ἔγγαμοι, 2 χῆροι καί 1 διαζευγμένος;

Συμφώνως πρός τόν τύπον (1.68) - γενικευμένη ὑπεργεωμετρική κατανομή - ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι

$$P=\frac{\binom{80}{8}\binom{90}{9}\binom{20}{2}\binom{10}{1}}{\binom{200}{20}}$$

ὑπολογίζεται δέ αὕτη - κατά προσέγγισιν - μέ τόν τύπον τοῦ Stirling.

(2) Διωνυμική καί πολυωνυμική κατανομή

Ὑποθέτομεν καί πάλιν ὅτι ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ N σφαιριδίων, περιλαμβάνοντος λ λευκά καί $\mu=N-\lambda$ μαῦρα - γενικώτερον μ ή λ ε υ κ ά - σφαιρίδια, ἐπιλέγεται "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους n καί ὅτι ζητεῖται ἡ πιθανότης νά περιληφθοῦν εἰς αὐτό - νά ἐπιλεγοῦν - x λευκά σφαιρίδια. Ἐν ἀντιθέσει ὅμως πρός τό προηγούμενον πρόβλημα - τό ὁποῖον μᾶς ὁδήγησε εἰς τήν ὑπεργεωμετρικήν κατανομήν (1.65) - εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπιλογή τοῦ δείγματος γίνεται "μ ε τ' ἐ π α ν α θ έ σ ε ω ς".

Τό πλῆθος τῶν διαφόρων τρόπων μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν μία n-άδα - ἕνα δεῖγμα μεγέθους n - ἡ ὁποία νά ἔχη λευκά σφαιρίδια εἰς x σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α ς θέσεις - π.χ. τάς x πρώτας - καί μαῦρα εἰς τάς ὑπολοίπους n-x, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τό δεῖγμα ἐπιλέγεται "μετ'ἐπαναθέσεως", εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρός τό γινόμενον

$$\underbrace{\lambda\lambda\ldots\lambda}_{x\text{-φοράς}} \times \underbrace{\mu\mu\ldots\mu}_{(n-x)\text{-φοράς}} \quad \text{ἢ ἁπλῶς } \lambda^x \mu^{n-x}$$

Ἐπειδή ὅμως δέν ἐνδιαφερόμεθα τά x λευκά σφαιρίδια νά ἐμφανισθοῦν εἰς x σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α ς θέσεις ἀλλ' ο ἱ α σ δ ή π ο τ ε τοιαύτας - αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, δύνανται νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν θέσεων τοῦ δείγματος n κατά $\binom{n}{x}$ τρόπους - συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος - δείγματα δηλαδή μεγέθους n περιλαμβάνοντα τά x λευκά καί n-x μαῦρα σφαιρίδια ἀδιαφόρως θέσεως - εἶναι

$$\binom{n}{x}\lambda^x \mu^{n-x} = \binom{n}{x}\lambda^x (N-\lambda)^{n-x}$$

Ἐξ ἄλλου, τό πλῆθος τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος - τό πλῆθος δηλαδή ὅλων τῶν "τυχαίων" δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν "μετ'ἐπαναθέσεως" ἐκ τοῦ ὡς ἄνω πεπερασμένου πληθυσμοῦ N - εἶναι, ὡς εἴδομεν, N^n.

Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης ὁρίζεται ἐκ τοῦ πηλίκου

$$P_x = \binom{n}{\lambda} \frac{\lambda^x (N-\lambda)^{n-x}}{N^n}$$

ἤ ἁπλούστερον ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_x = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-\lambda} = \binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad (1.67)$$

ὅπου $p=\frac{\lambda}{N}$ καί $q=1-\frac{\lambda}{N}=1-p$ συμβολίζουν ἀντιστοίχως τήν ἀ ν α λ ο γ ί α ν τῶν λευκῶν καί τῶν μή λευκῶν σφαιριδίων εἰς τόν ἀρχικόν πληθυσμόν.

Ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς, τό ὡς ἄνω πείραμα - δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ὁποίου εἶναι κατά βάσιν τά N^n ἰσοπίθανα δείγματα μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν "μετ' ἐπαναθέσεως" ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ N - δύναται προφανῶς νά θεωρηθῇ καί ὡς ἕνα πείραμα τύχης τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ ὁποίου εἶναι ὅσαι καί αἱ δυναταί τιμαί τοῦ x - τοῦ πλήθους τῶν λευκῶν σφαιριδίων τά ὁποῖα περιλαμβάνει τό ἐπιλεγόμενον κατά περίπτωσιν δεῖγμα - ἤτοι ὡς ἕνα πείραμα τύχης μέ δειγματικό χῶρο Ω={0, 1,2,...,n} ὅπου n δύναται φυσικά νά εἶναι καί μεγαλύτερον τοῦ N.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ πιθανότης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον τῶν στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων x= =0,1,2,...,n δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.67), ἡ τοιαύτη δέ κ α τ α ν ο μ ή τῆς συνολικῆς πιθανότητος $\sum_{x=0}^{n} P_x=1$ - διά λόγους τούς ὁποίους θά ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω - εἶναι εὐρέως γνωστή ὡς δ ι ω ν υ μ ι κ ή κ α τ α ν ο μ ή.

Ἡ ἰσότης $\sum_{x=0}^{n} P_x=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=1$ ἀποδεικνύεται ἐν προκειμένῳ ὡς ἑξῆς:

Τό ἄθροισμα $\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ εἶναι ἴσον πρός

$$\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{1}pq^{n-1}+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+\ldots+\binom{n}{x}p^xq^{n-x}+\ldots+\binom{n}{n}p^n$$

εἶναι δηλαδή ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου $(q+p)^n$ τό ὁποῖου, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι $q+p=\frac{N-\lambda}{N}+\frac{\lambda}{N}=1$, ἰσοῦται πρός τήν μονάδα.

Τό γεγονός ἄλλωστε αὐτό, τό ὅτι δηλαδή αἱ τιμαί τῆς πιθανότητος P_x, ὡς αὗται ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως (1.67), ἀποτελοῦν τούς ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(q+p)^n$, εἶναι καί ὁ λόγος διά τόν ὁποῖον ἡ ὡς ἄνω κατανομή ὀνομάζεται διωνυμική.

<u>Γενίκευσις</u>: Πολυωνυμική Κατανομή

Ὑποθέσωμεν τώρα - ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς γενικευμένης ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς - ὅτι τό "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους n ἐπιλέγεται "μετ'ἐπαναθέσεως" ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ N, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό k - διαφόρους μεταξύ των - ὁμάδας στοιχείων περιλαμβανούσας ἀντιστοίχως $N_1, N_2, \ldots, N_k$ στοιχεῖα - ὅπου φυσικά $N_1+N_2+\ldots+N_k=N$ - καί ὅτι ζητεῖται ἡ πιθανότης νά περιληφθοῦν τελικῶς εἰς τό δεῖγμα - νά ἐπιλεγοῦν - x_1 μονάδες ἐκ τῆς πρώτης ὁμάδος, x_2 ἐκ τῆς δευτέρας κ.ο.κ. τέλος δέ x_k μονάδες ἐκ τῆς k ὁμάδος, ὅπου - ὡς εἶναι εὐνόητον - τά x_i, $i=1,2,\ldots,k$ πληθοῦν τάς σχέσεις $0 \leq x_i \leq n$ καί $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$.

Πρός ἐπίλυσιν τοῦ γενικωτέρου τούτου προβλήματος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Τά δυνατά κατ'ἀρχήν ἀποτελέσματα τοῦ παρόντος πειράματος - τό πλῆθος δηλαδή τῶν τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν "μετ'ἐπαναθέσεως" ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ N - εἶναι, ὅπως καί προηγουμένως, N^n.

Ἐξ ἄλλου, τό πλῆθος τῶν διαφόρων τρόπων μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν μία n-άδα - ἕνα δεῖγμα μεγέθους n - ἡ ὁποία νά ἔχῃ εἰς x_1 συγκεκριμένας θέσεις μονάδας ἐκ τῆς πρώτης ὁμάδος (N_1) εἰς x_2 ἄλλας συγκεκριμένας θέσεις μονάδας ἐκ τῆς δευτέρας ὁμάδος (N_2), κ.ο.κ. τέλος δέ εἰς τάς x_k ὑπολοίπους - σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α ς καί πάλιν - θέσεις μονάδας ἐκ τῆς K ὁμάδος (N_k), ἰσοῦται ὡς γνωστόν πρός ἕνα γινόμενον τό ὁποῖον ἔχει τούς παράγοντας $N_1,N_2,\ldots,N_k$ ἀντιστοίχως $x_1,x_2,\ldots,x_k$ φοράς ἤτοι ἰσοῦται πρός τό γινόμενον

$$N_1^{x_1} N_2^{x_2} \ldots N_k^{x_k}$$

Ἐπειδή ὅμως - ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διωνυμικῆς κατανομῆς - δέν ἐνδιαφερόμεθα οἱ μονάδες ἐξ ἑκάστης τῶν k ὁμάδων νά καταλάβουν σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α ς ἐκ τῶν n θέσεων τοῦ δείγματος ἀλλ' οἱασδήποτε τοιαύτας, οἱ δ ι ά φ ο ρ ο ι δέ τρόποι μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά διατάξωμεν n ἀντικείμενα - ἐν προκειμένω τάς n θέσεις τοῦ δείγματος - τά ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπό k - διαφόρους μεταξύ των - ὁμάδας περιλαμβανούσας ἀντιστοίχως $x_1,x_2,\ldots,x_k$ ὁμοειδῆ στοιχεῖα - καί ἐν προκειμένω τά $x_1,x_2,\ldots,x_k$ ὁμοειδῆ μεταξύ των στοιχεῖα τά ὁποῖα ἔχουν ἐπιλεγεῖ ἐκ τῶν k διαφόρων πληθυσμιακῶν ὁμάδων $N_1,N_2,\ldots,N_k$ - εἶναι ὡς γνωστόν

$$\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}$$

συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν ἐν προκειμένω ἀποτελεσμάτων - δειγμάτων δηλαδή τά ὁποῖα περιλαμβάνουν ἀνεξαρτήτως θέσεως x_1 μονάδας ἐκ τῆς πρώτης ὁμάδος, x_2 ἐκ τῆς δευτέρας κ.ο.κ., τέλος δέ x_k ἐκ τῆς k ὁμάδος τοῦ πληθυσμοῦ - εἶναι

$$\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} N_1^{x_1} N_2^{x_2} \ldots N_k^{x_k}$$

Τά ἀνωτέρω ἀποδεικνύονται ἄλλωστε καί ἐκ τῶν ἀκολούθων.

Οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά ὑποδιαιρέσωμεν τό δεῖγμα n εἰς k ὁμάδας ἀπαρτιζομένας ἀπό $x_1, x_2, \ldots, x_k$ στοιχεῖα, ὅπου φυσικά $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$, εἶναι προφανῶς ὅσοι οἱ τρόποι μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν n στοιχείων δυνάμεθα νά λάβωμεν τά x_1, ἐπί τό πλῆθος τῶν τρόπων μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν ὑπολοίπων $n-x_1$ στοιχείων δυνάμεθα νά λάβωμεν τά x_2 κ.ο.κ. τέλος δέ ἐπί τό πλῆθος τῶν τρόπων μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν τελευταίων $n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-1}$ στοιχείων δυνάμεθα νά λάβωμεν τά x_k - τό ὁποῖον, δοθέντος ὅτι $n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-1}=x_k$, εἶναι βεβαίως ἴσον πρός 1 - ἤτοι τό γινόμενον

$$\binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\binom{n-x_1-x_2}{x_3}\ldots\binom{n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-1}}{x_k} = \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!}\times$$

$$\times\frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!}\times\frac{(n-x_1-x_2)!}{x_3!(n-x_1-x_2-x_3)!}\times\ldots\times\frac{(n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-1})!}{x_k!(n-x_1-x_2-\ldots-x_k)!}=$$

$$=\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} \quad \text{καθ'ὅσον } (n-x_1-x_2-\ldots-x_k)!=0!=1.$$

Οὕτω, ἡ ζητουμένη εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν πιθανότης - νά περιλαμβάνωνται δηλαδή εἰς ἕνα "τυχαῖον" δεῖγμα μεγέθους n, ἐπιλεγόμενον "μετ' ἐπαναθέσεως" ἐκ τοῦ ὡς ἄνω πληθυσμοῦ, x_1 μονάδες ἐκ τῶν N_1 τῆς πρώτης ὁμάδος, x_2 ἐκ τῶν N_2 τῆς δευτέρας κ.ο.κ. τέλος δέ x_k ἐκ τῶν N_k τῆς k πληθυσμιακῆς ὁμάδος - δίδεται ἐκ τοῦ πηλίκου

$$P_{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_n!}\times\frac{N_1^{x_1}N_2^{x_2}\ldots N_k^{x_k}}{N^n}$$

ὅπου φυσικά $0\leq x_i\leq n$ διά $i=1,2,\ldots,n$ καί $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ ἁπλούστερον δέ ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{x_1x_2\ldots x_n}=\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}\,p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k} \qquad (1.68)$$

ὅπου $p_i \frac{N_i}{N}$ $i=1,2,\ldots,k$ συμβολίζει τήν ἀ ν α λ ο γ ί α ν τῶν μονάδων τῆς $i=1,2,\ldots,k$ ὁμάδος εἰς τόν ἀρχικόν πληθυσμόν καί ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν πάντοτε $p_1+ +p_2+\ldots+p_k=1$.

Λαμβάνοντες ἐν προκειμένῳ ὑπ᾽ὄψιν ὅτι τό ἄθροισμα

$$\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}\,p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$$

δι᾽ὅλας τάς δυνατάς τιμάς τῶν x_i, $i=1,2,\ldots,k$ - τιμάς δηλαδή αἱ ὁποῖαι πληροῦν τάς σχέσεις $0\leq x_i\leq n$ διά $i=1,2,\ldots,n$ καί ταυτοχρόνως τήν $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ - δέν εἶναι ἄλλο ἀπό τό ἀνάπτυγμα τῆς n-οστῆς δυνάμεως τοῦ ἀθροίσματος $p_1+p_2+\ldots+p_k$ ἔχομεν ἀμέσως ὅτι

$$\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_k} P_{x_1x_2\ldots x_k}=\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_k}\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}\times$$

$$\times\, p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}=(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n=1$$

Διά τόν λόγον ἄλλωστε αὐτόν - ἐπειδή δηλαδή αἱ πιθανότητες αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως (1.68) ἀποτελοῦν τούς ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ π ο λ υ ω ν ύ μ ο υ $(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n$ - ἡ ὡς ἄνω κατανομή πιθανότητος - σχέσις (1.68) - καλεῖται συνήθως π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ή κατανομή. Μερική περίπτωσις τῆς ἐν λόγῳ κατανομῆς εἶναι ἡ διωνυμική τοιαύτη.

Τό ὅτι ἡ διωνυμική κατανομή ἀποτελεῖ μερικήν περίπτωσιν τῆς πολυωνυμικῆς τοιαύτης εἶναι προφανές. Πράγματι, θέτοντες $k=2$ καί $p_1=p$, $p_2=q$, $x_1=x$ καί $x_2=n-x$ ἐκ τῆς σχέσεως (1.68) προκύπτει ἀμέσως ἡ (1.67).

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν ὡρισμένα ἁπλᾶ παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Ρίπτομεν 5 "κανονικά" νομίσματα. Ποία ἡ πιθανότης ἑκάστου τῶν κατωτέρω ἐνδεχομένων;

Α: Νά ἐμφανισθοῦν 5 κορῶνες

Β: Νά ἐμφανισθοῦν 3 κορῶνες καί 2 γράμματα

Γ: Νά ἐμφανισθῆ 1 τουλάχιστον κορῶνα

Δ: Νά ἐμφανισθοῦν 3 τό πολύ κορῶνες.

Τό ὡς ἄνω πείραμα ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μέ τήν ἐπιλογήν - "μετ'ἐπαναθέσεως" - ἑνός "τυχαίου" δείγματος μεγέθους $n=5$ ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει $N=2$ στοιχεῖα (κορῶνα καί γράμματα).

Κατά συνέπειαν, πρός ὑπολογισμόν τῶν ὡς ἄνω πιθανοτήτων πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τῆς διωνυμικῆς κατανομῆς - σχέσις (1.67) - θέτοντες $p=q=\frac{1}{2}$, $n=5$ καί ὡς x τό πλῆθος τῶν κατά περίπτωσιν κορωνῶν. Οὕτω, εὑρίσκομεν ὅτι

$$P(A)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

$$P(B)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$$

$$P(\Gamma)=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=1-P_0=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$$

$$P(\Delta)=P_0+P_1+P_2+P_3=1-P_4-P_5=1-\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1-\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=$$

$$=1-\frac{5}{32}-\frac{1}{32}=\frac{26}{32}.$$

Παράδειγμα 2

Ρίπτομεν 2 "κανονικά" ζάρια. Ποία ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων;

Α: Νά ἐμφανισθοῦν 2 ἑξάρια

Β: Νά ἐμφανισθοῦν οἱ ἀριθμοί 2 καί 5

Γ: Νά ἐμφανισθοῦν ζυγοί ἀριθμοί

Δ: Νά ἐμφανισθοῦν ἀριθμοί μικρότεροι τοῦ 3

Ε: Νά ἐμφανισθοῦν ἀριθμοί μέ ἄθροισμα 7.

Τό ἀνωτέρω πείραμα ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μέ τήν ἐπιλογήν - "μετ'ἐπαναθέσεως" - ἑνός "τυχαίου" δείγματος μεγέθους $n=2$ ἐκ τοῦ πεπερασμένου πληθυσμοῦ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Κατά συνέπειαν, πρός ὑπολογισμόν τῶν ὡς ἄνω πιθανοτήτων δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τῆς πολυωνυμικῆς κατανομῆς - σχέσις (1.68) - θέτοντες $p_i=\frac{1}{6}$ διά $i=1,2,\ldots,6$, $n=2$ καί ὡς x_i, $i=1,2,\ldots,6$ τό πλῆθος τῶν ἐπαναλήψεων εἰς τό δεῖγμα τῶν ἀριθμῶν $i=1,2,\ldots,6$. Οὕτω, ἔχομεν ὅτι

$$P(A)=P_{000002}=\frac{2!}{0!0!0!0!0!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

$$P(B)=P_{010010}=\frac{2!}{0!1!0!0!1!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0=\frac{2}{36}$$

$$P(\Gamma)=P_{020000}+P_{000200}+P_{000002}+P_{010100}+P_{010001}+P_{000101}$$

'Αλλά συμφώνως πρός τούς προηγουμένους ὑπολογισμούς τῶν P(A) καί P(B) ἔχομεν ὅτι

$$P_{020000}=P_{000200}=P_{000002}=\frac{1}{36} \quad \text{καί}$$

$$P_{010100}=P_{010001}=P_{000101}=\frac{2}{36} \quad \text{καί κατά συνέπειαν}$$

$$P(\Gamma) = \frac{9}{36}$$

$$P(\Delta)=P_{200000}+P_{0200000}+P_{110000}=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{4}{36}$$

$$P(E)=P_{100001}+P_{010010}+P_{001100}=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{2}{36}$$

Παράδειγμα 3

"Ἐκ τινος κληρωτίδος περιεχούσης 2 λευκά, 3 μαῦρα καί 5 κόκκινα σφαιρίδια ἐπιλέγομεν "μετ'ἐπαναθέσεως" τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους n=20. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν εἰς τό δεῖγμα 4 λευκά, 6 μαῦρα καί 10 κόκκινα σφαιρίδια;

Ἡ ζητουμένη πιθανότης εὑρίσκεται προφανῶς δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.68) ὅπου $p_1=\frac{2}{10}$, $p_2=\frac{3}{10}$, $p_3=\frac{5}{10}$, $n=20$, $x_1=4$, $x_2=6$ καί $x_3=10$, εἶναι δηλαδή

$$P_{4,6,10}=\frac{20!}{4!6!10!}\left(\frac{2}{10}\right)^4\left(\frac{3}{10}\right)^6\left(\frac{5}{10}\right)^{10}$$

ὑπολογίζοντες δέ αὐτήν - κατά προσέγγισιν - δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Stirling εὑρίσκομεν

$$P_{4,6,10}=0,045.$$

(3) <u>Προβλήματα "θέσεως" ἤ "ἀντιστοιχίας"</u>

Ὑποθέτομεν ὅτι n σφαιρίδια ρίπτονται - τοποθετοῦνται - "τυχαίως" εἰς N κληρωτίδας - ἀριθμημένας ἀπό 1 ἕως N - καί ζητοῦμεν τήν πιθανότητα τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων.

(A)= {Εἰς τήν π ρ ώ τ η κληρωτίδα νά πέσουν k_1 σφαιρίδια, εἰς τήν δευτέρα k_2 κ.ο.κ. τέλος δέ, εἰς τήν N-οστήν κληρωτίδα νά πέσουν k_N, ὅπου φυσικά $k_1+k_2+...+k_N=n$}.

(B)= {k_1 σφαιρίδια νά πέσουν εἰς μία ο ἱ α δ ή π ο τ ε - ὄχι ἀπαραιτήτως τήν πρώτην - ἐκ τῶν N κληρωτίδων, k_2 σφαιρίδια νά πέσουν εἰς ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε ἄλλη ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 κληρωτίδων - ὄχι ἀπαραιτήτως τήν δευτέραν - κ.ο.κ., τέλος δέ, k_N σφαιρίδια νά πέσουν εἰς τήν ἐναπομένουσαν - ὄχι ἀπαραιτήτως τήν N-οστήν - κληρωτίδα, ὑποτιθεμένου φυσικά καί πάλιν ὅτι $k_1+k_2+...+k_N=n$}.

Ἡ "τυχαία" ρίψις - τοποθέτησις - ἑνός σφαιριδίου εἰς μία ἐκ τῶν N κληρωτίδων ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μέ "τυχαίαν" ἐπιλογήν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ μεγέθους N. Γενικώτερον, ἡ τυχαία ρίψις n σφαιριδίων εἰς N κληρωτίδας ἰσοδυναμεῖ - ἀφοῦ εἰς οἱανδήποτε κληρωτίδα εἶναι δυνατόν νά πέσουν καί περισσότερα τοῦ ἑνός (μέχρι καί n) σφαιρίδια - μέ τυχαίαν "μετ'ἐπαναθέσεως" ἐπιλογήν ἑνός δείγματος μεγέθους n ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ - ἐν προκειμένῳ τῶν N κληρωτίδων - μεγέθους N. Κατά συνέπειαν, τά δ υ ν α τ ά ἀ π ο τ ε λ έ σ μ α τ α τοῦ ὡς ἄνω πειράματος - τῆς τυχαίας ρίψεως n σφαιριδίων εἰς N κληρωτίδας - εἶναι N^n.

Διά τόν ὑπολογισμόν, ἐξ ἄλλου, τῶν "εὐνοϊκῶν" ἀποτελεσμάτων διά τήν πραγματοποίησιν τῶν ἐνδεχομένων (A) καί (B) ἐργαζόμεθα κατά τήν ἀκόλουθον διαδικασίαν:

(A) Τό πλῆθος τῶν δυνατῶν τρόπων μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά ἔχωμεν

k_1 σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α σφαιρίδια εἰς τήν πρώτην κληρωτίδα

k_2 σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α σφαιρίδια εἰς τήν δευτέρα κληρωτίδα κ.ο.κ., τέλος δέ

k_N σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α σφαιρίδια εἰς τήν N-οστήν κληρωτίδα

εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρός τό γινόμενον τό ὁποῖον ἔχει ὡς παράγοντας τάς N μονάδας - ὅσαι καί αἱ κληρωτίδαι - 1, 1,...,1 ἀντιστοίχως k_1, $k_2,\ldots,k_N$ φοράς, ἤτοι ἰσοῦται πρός τό γινόμενον $1^{k_1}\times 1^{k_2}\times\ldots\times 1^{k_N}=1^n=1$.

Ἐπειδή ὅμως δέν ἐνδιαφερόμεθα ἑκάστη τῶν N κληρωτίδων νά περιλάβη σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α σφαιρίδια, ἀλλ' ἁπλῶς εἰς τήν πρώτην νά πέσουν ο ἱ α δ ή π ο τ ε k_1 ἐκ τῶν n σφαιριδίων, εἰς τήν δευτέραν οἱαδήποτε k_2 ἐκ τῶν ὑπολοίπων σφαιριδίων κ.ο.κ., τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος εἶναι προφανῶς ὅσοι καί οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά δ ι α τ ά ξ ω μ ε ν n ἀντικείμενα - ἐν προκειμένῳ τά n σφαιρίδια - τά ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπό N - διαφόρους μεταξύ των - ὁμάδας περιλαμβανούσας ἀντιστοίχως $k_1,k_2,\ldots,k_N$ ὁ μ ο ε ι δ ῆ στοιχεῖα - καί ἐν προκειμένῳ ὡς τοιαῦτα θεωροῦνται ἐκεῖνα τά ὁποῖα θά πέσουν εἰς τήν ἴδια κληρωτίδα - τό πλῆθος τῶν ὁποίων εἶναι ὡς γνωστόν

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_N!}$$

Κατά συνέπειαν, ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A)=\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_N!}\,N^{-n} \qquad (1.69)$$

Σημειωτέον ἐν προκειμένῳ ὅτι τό ἀνωτέρω πρόβλημα δύναται νά θεωρηθῆ καί ὡς μερική περίπτωσις τῆς πολυωνυμικῆς κατανομῆς καί κατά συνέπειαν ὁ τύπος (1.69) νά προκύψη δι'ἀμέσου ἐφαρμογῆς τοῦ (1.68). Πράγματι, ὑποθέτοντες ὅτι ὁ δειγματοληπτούμενος πληθυσμός - ἐν προκειμένῳ αἱ N κληρωτίδες - ἀποτελεῖται ἀπό N ὁμάδας στοιχείων ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει ἕν καί μόνον στοιχεῖον - μία κληρωτίδα - καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ (i) κληρωτίς, ὅπου $i=1,2,\dots,N$ περιλαμβάνεται εἰς τό δεῖγμα k_i, $i=1,2,\dots N_i$ φοράς - ὅσα δηλαδή τά τοποθετούμενα εἰς αὐτήν σφαιρίδια - παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος (1.68) πρέπει ἐν προκειμένῳ νά ἐφαρμοσθῆ διά $N_i=1$ ἤ ἄλλως $p_i=\frac{1}{N}$ καί $x_i=k_i$ ὅπου $i=1,2,\dots,N$, ὁδηγούμενοι οὕτω εἰς τόν τύπον (1.69).

(B) Ἐνῶ εἰς τό προηγούμενον ἐρώτημα - ἐνδεχόμενον A - ἐζητεῖτο ὅπως ὁμάδες ἐκ $k_1,k_2,\dots,k_N$ σφαιριδίων, ὅπου φυσικά $k_1+k_2+\dots+k_N=n$, πέσουν ἀντιστοίχως εἰς τήν πρώτην, δευτέραν κ.ο.κ. κληρωτίδα - ἤ γενικώτερον ἑκάστη ὁμάς εἰς σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η κληρωτίδα - εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν μᾶς εἶναι ἀ δ ι ά φ ο ρ ο ν εἰς ποία κληρωτίδα θά πέσουν τά k_1 σφαιρίδια, εἰς ποία τά k_2 κ.ο.κ.

Οὕτω, ο ἱ α δ ή π ο τ ε δ ι ά τ α ξ ι ς τῶν N ὁμάδων $k_1,k_2,\dots,k_N$ ἔναντι τῶν ἀριθμημένων κληρωτίδων $1,2,\dots,N$ εἶναι ἕνα ἀποτέλεσμα εὐνοϊκόν διά τό ἐνδεχόμενον B καί κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη ἐν προκειμένῳ πιθανότης P(B) εἶναι γινόμενον τῆς προηγουμένης πιθανότητος P(A) - ἑκάστη ἐκ τῶν ὁμάδων $k_1,k_2,\dots,k_N$ νά πέση εἰς σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η κληρωτίδα - ἐπί τόν ἀριθμόν τῶν ὡς ἄνω διατάξεων. Ὑποθέτοντες ὅμως ὅτι οἱ N ἀριθμοί $k_1, k_2, \ldots, k_N$ ἀποτελοῦνται ἀπό r ὁμάδας ἴσων μεταξύ τους ἀριθμῶν - ἀλλά διαφόρων ἀπό ὁμάδα εἰς ὁμάδα - καί συγκεκριμένως j_1 ἀριθμῶν ἴσων π.χ. πρός λ_1, j_2 ἴσων πρός λ_2 κ.ο.κ., τέλος δέ j_r ἀριθμῶν ἴσων πρός λ_r ὅπου $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_r$ καί $j_1 + j_2 + \ldots + j_r = N$, εἶναι γνωστόν ὅτι αἱ δ ι ά φ ο ρ ο ι μεταξύ των δυναται διατάξεις τῶν ἐν λόγω ἀριθμῶν - ὅσον καί αἱ μεταθέσεις N ἀντικειμένων ἀποτελουμένων ἀπό r ὁμάδας ὁμοειδῶν μεταξύ τους ἀλλά διαφόρων ἀπό ὁμάδα εἰς ὁμάδα στοιχείων $j_1, j_2, \ldots, j_r$ - εἶναι

$$\frac{N!}{j_1! j_2! \ldots j_r!}$$

Κατά συνέπειαν, ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου B δίδεται ἐν γένει ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B) = \frac{N!}{j_1! j_2! \ldots j_r!} \times \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_N!} N^{-n} \qquad (1.70)$$

<u>Εἰδικαί περιπτώσεις</u>:

Ρίπτομεν, ὡς καί ἀνωτέρω, n σφαιρίδια εἰς N ἀριθμημένας κληρωτίδας καί ζητοῦμεν τήν πιθανότητα τῶν κάτωθι - εἰδικωτέρων - ἐνδεχομένων:

(Γ)= {Εἰς μίαν σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η ν κληρωτίδα - π.χ. τήν ὑπ' ἀριθ. (1) - νά πέσουν k ἀκριβῶς σφαιρίδια - ὅπου $k \leq n$ - τά δέ ὑπόλοιπα n-k νά πέσουν - ἀδιάφορον κατά ποῖον τρόπον - εἰς τάς ὑπολοίπους N-1}.

(Δ)= {k ἀκριβῶς σφαιρίδια νά πέσουν εἰς μία ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε - ὄχι πλέον μία συγκεκριμένη - ἐκ τῶν N κληρωτίδων, τά δέ ὑπόλοιπα n-k νά πέσουν - ἀδιάφορον κατά ποῖον τρόπον - εἰς τάς ὑπολοίπους N-1, ὑ π ο τ ι θ ε μ έ ν ο υ φυσικά ἐν προκειμένῳ ὅτι $n-k<k$ ἤ ἄλλως $k>\frac{n}{2}$ διότι ἄλλως θά ἦτο, ὡς εἶναι εὐνόητον, δυνατόν k σφαιρίδια νά πέσουν καί εἰς μίαν ἄλλην κληρωτίδα ἤ καί μία τρίτη κ.ο.κ.}.

Τό πλῆθος τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ἐν λόγῳ πειράματος - οἱ διάφοροι δηλαδή τρόποι μέ τούς ὁποίους τά n σφαιρίδια δύνανται νά κατανεμηθοῦν εἰς τάς N κληρωτίδας - εἶναι, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, N^n. Διά τόν ὑπολογισμόν, ἐξ ἄλλου, τοῦ πλήθους τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων τά ὁποῖα συνεπάγονται τήν πραγματοποίησιν τῶν ὡς ἄνω ἐνδεχομένων (Γ) καί (Δ) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

(Γ) Τό πλῆθος τῶν διαφόρων τρόπων μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά ἔχωμεν k σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α σφαιρίδια εἰς μία σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η - π.χ. τήν πρώτη - κληρωτίδα καί τά ὑπόλοιπα n-k εἰς οἱανδήποτε ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 κληρωτίδων - ἴσον πρός τό πλῆθος δειγμάτων μεγέθους n, ἐπιλεγομένων "μετ'ἐπαναθέσεως" ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ N, τά ὁποῖα περιλαμβάνουν μία συγκεκριμένη μονάδα τοῦ πληθυσμοῦ k φοράς καί κάποιαν ἐκ τῶν ὑπολοίπων N-1 μονάδων, n-k φοράς - εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρός τό γινόμενον τό ὁποῖον περιλαμβάνει τούς παράγοντας 1 καί N-1 ἀντιστοίχως k καί n-k φοράς, ἤτοι ἰσοῦται πρός τό γινόμενον $1^k(N-1)^{n-k}=(N-1)^{n-k}$. Ἐπειδή ὅμως εἰς τό ἀνωτέρω πρόβλημα δέν ἐνδιαφερόμεθα νά πέσουν εἰς τήν συγκεκριμένην - π.χ. τήν πρώτη - κληρωτίδα k συγκεκριμένα σφαιρίδια ἀλλά k ο ἱ α δ ή π ο τ ε τοιαῦτα, τά ὁποῖα ὡς γνωστόν εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τῶν n κατά $\binom{n}{k}$ τρόπους, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι τά εὐνοϊκά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος εἶναι $\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}$ κατά συνέπειαν δέ ἡ ζητουμένη ἐν προκειμένῳ πιθανότης ὁρίζεται ἐκ τοῦ πηλίκου

$$P(\Gamma) = \binom{n}{k}\frac{(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

ἤ ἄλλως ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\Gamma)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \qquad (1.71)$$

Εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα ὀδηγούμεθα καί ὡς ἐξῆς: Τό ἐνδεχόμενον "k σφαιρίδια νά πέσουν εἰς μίαν συγκεκριμένη κληρωτίδα" ἰσοδυναμεῖ προφανῶς πρός τό ἐνδεχόμενον "εἰς τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους n, ἐπιλεγόμενον "μετ' ἐπαναθέσεως" ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ N, μία συγκεκριμένη μονάς νά ἐμφανισθῆ k φοράς". Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης $P(\Gamma)$ δύναται νά εὑρεθῆ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τῆς διωνυμικῆς κατανομῆς - σχέσις (1.67) - θέτοντες εἰς αὐτόν $\lambda=1$ ἤ ἄλλως $p=\frac{1}{N}$ καί $x=k$ ὀδηγούμενοι οὕτω εἰς τόν ἀνωτέρω τύπον (1.71).

Σημείωσις:

Διά $k=n$ ὁ τύπος (1.71) δίδει $p=\frac{1}{N^n}=N^{-n}$ τήν πιθανότητα δηλαδή ὅπως εἰς μία συγκεκριμένη κληρωτίδα πέσουν ὅλα - καί τά n - σφαιρίδια.

(Δ) Ἐν ἀντιθέσει πρός τό προηγούμενον πρόβλημα - ὅπου ἐζητεῖτο τά k σφαιρίδια νά πέσουν εἰς συγκεκριμένη κληρωτίδα - εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν μᾶς εἶναι ἀδιάφορον εἰς ποία κληρωτίδα θά πέσουν. Λαμβάνοντες ἐξ ἄλλου ὑπ' ὄψιν ὅτι k σφαιρίδια εἰς μίαν μόνον ἐκ τῶν N κληρωτίδων εἶναι δυνατόν νά πέσουν - ἀφοῦ ὑπετέθη $k>\frac{n}{2}$ - συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι ἡ ζητουμένη πιθανότης $P(\Delta)$ εἶναι ἴση πρός τό γινόμενον τῆς προηγουμένης πιθανότητος $P(\Gamma)$ ἐπί τό πλῆθος τῶν τρόπων μέ τούς ὁποίους ἐκ τῶν N κληρωτίδων δυνάμεθα νά ἐπιλέξωμεν μία - τήν ἑκάστοτε συγκεκριμένην - ἤτοι ἐπί $\binom{N}{1}$. Οὕτω, ἡ ζητουμένη ἐνταῦθα πιθανότης δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(\Delta)=N\binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \qquad (1.72)$$

ὅπου φυσικά ὑποτίθεται $\frac{n}{2}<k\leq n$.

Οὕτω π.χ. ἡ πιθανότης ὅλα - καί τά n - τά σφαιρίδια νά συγκεντρωθοῦν - νά πέσουν - εἰς μίαν οἱανδήποτε κληρωτίδα, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (1.72), διά k=n, εἶναι $\frac{1}{N^{n-1}}$.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν καί πάλιν ὡρισμένα ἁπλᾶ παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους n ἐπιλέγεται "μετ' ἐπαναθέσεως" ἐξ ἑνός πεπερασμένου πληθυσμοῦ N. Ὑποθέτοντες ὅτι $n\leq N$, ζητοῦμεν τήν πιθανότητα αἱ δειγματικαί μονάδες νά εἶναι διάφοροι μεταξύ των (νά μήν ὑπάρχουν ἐπαναλήψεις).

Ἐξομοιοῦντες τάς πληθυσμιακάς μονάδας μέ N κληρωτίδας καί τάς δειγματικάς τοιαύτας μέ n σφαιρίδια, παρατηροῦμεν ὅτι τό ἀνωτέρω ἐνδεχόμενον ταυτίζεται μέ τό ἐνδεχόμενον κατά τήν ρίψιν n σφαιριδίων εἰς N κληρωτίδας τά n σφαιρίδια νά πέσουν εἰς n - οἱασδήποτε - ἐκ τῶν N κληρωτίδων - ἀνά ἕν εἰς ἑκάστην - αἱ δέ ὑπόλοιποι N-n κληρωτίδες νά μείνουν κεναί. Κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη πιθανότης εὑρίσκεται δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.70), θέτοντες εἰς αὐτόν $k_1=k_2=\ldots=k_n=1$, $k_{n+1}=k_{n+2}=\ldots=k_N=0$, $j_1=n$, $j_2=N-n$ (ἐν προκειμένῳ r=2). Οὕτω ἔχομεν

$$p=\frac{N!}{n!(N-n)!}\times\frac{n!}{1!\ldots1!0!\ldots0!}\,N^{-n}=\frac{(N)n}{N^n} \qquad (1.73)$$

Σημείωσις:

Διά $n=N$ ἔχομεν προφανῶς $p=\frac{(N)_N}{N^N}=\frac{N!}{N^N}$.

Οὕτω π.χ. ἐάν ἐκ τῶν μονοψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν 0,1,2,...,9 ἐπιλέξωμεν μετ'ἐπαναλήψεως τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τριῶν ἡ πιθανότης οἱ ἐν λόγω ἀριθμοί νά εἶναι διάφοροι μεταξύ των εἶναι

$$p=\frac{(10)_3}{10^3}=\frac{10\times9\times8}{10^3}=0,72$$

Ἐάν ὅμως ἐπιλέξωμεν τυχαῖον δεῖγμα ἐκ 10 ἀριθμῶν αἱ πιθανότητες νά ἐξαχθοῦν διάφοροι ἀριθμοί - καί κατά συνέπειαν ἅπαντες οἱ μονοψήφιοι - εἶναι μόνον

$$p=\frac{10!}{10^{10}}\approx 0,00036$$

Ὁμοίως, ἡ πιθανότης 7 ἄτομα νά ἔχουν γεννηθῆ εἰς 7 διαφορετικάς ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος εἶναι

$$p=\frac{7!}{7^7}\approx 0,006$$

Παράδειγμα 2

Οἱ ὀκτώ ἐπιβάται ἑνός λεωφορείου πρόκειται νά κατέβουν εἰς τάς 6 ὑπολοίπους στάσεις τῆς διαδρομῆς. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

A: Νά κατέβουν ὅλοι εἰς τήν τελευταίαν στάσιν

B: Νά κατέβουν ὅλοι εἰς μίαν οἱανδήποτε στάσιν

Γ: Νά κατέβουν ἀνά δύο εἰς τάς 4 τελευταίας στάσεις

Δ: Νά κατέβουν ἀνά δύο εἰς 4 οἱασδήποτε στάσεις.

'Αντιστοιχοῦντες στάσεις μέ κληρωτίδας καί ἐπιβάτας μέ σφαιρίδια αἱ ζητούμεναι πιθανότητες εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς:

(Α) Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.71), θέτοντες ὅπου $n=8$, $k=8$, $N=6$ ἔχομεν

$$P(A)=\binom{8}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{6^8}$$

(Β) 'Επειδή ἐν προκειμένῳ μᾶς ἐνδιαφέρει οἱαδήποτε στάσις ἐφαρμόζεται - μέ τάς ὡς ἄνω τιμάς - ὁ τύπος (1.72) ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$P(B) = 6\binom{8}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{6^7}$$

(Γ) 'Επειδή ἐν προκειμένῳ ζητοῦμεν τήν κάθοδο ὡρισμένων ἐπιβατῶν εἰς συγκεκριμένας στάσεις, πρέπει προφανῶς νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (1.69) θέτοντες ὅπου $n=8$, $N=6$ καί $k_1=k_2=0$, $k_3=k_4=k_5=k_6=2$.

Οὕτω, ἔχομεν

$$P(\Gamma)=\frac{8!}{(2!)^4}\times\frac{1}{6^8}\approx 0{,}0016$$

(Δ) Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν καί πάλιν $k_1=k_2=0$, $k_3=k_4=k_5=k_6=2$ ἀλλ' ὄχι ἀντιστοίχως πρός συγκεκριμένας στάσεις. Οὕτω πρέπει νά ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (1.70), ὅπου $j_1=2$ καί $j_2=4$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$P(\Delta)=\frac{6!}{2!4!}\times\frac{8!}{(2!)^4}\times\frac{1}{6^8}\approx 0{,}024$$

Παράδειγμα 3

'Επτά ἐκλέκτορες προκειμένου νά ἐπιλέξουν ἕνα ἐκ τριῶν ὑποψηφίων καί μή ἔχοντες ἰδιαίτερες προτιμήσεις ψηφίζουν ἕκαστος ἕνα ἐκ τῶν ὑποψηφίων "τυχαίως". Ποία ἡ πιθανότης νά ἐκλεγῆ μέ τήν πρώτην ψηφοφορίαν - λαμβάνοντες τήν ἀπόλυτον πλειοψηφίαν - κάποιος ἐκ τῶν τριῶν ὑποψηφίων;

Διά νά ἐκλεγῆ κάποιος ἐκ τῶν ὑποψηφίων πρέπει νά συγκεντρώση 4 ἤ περισσοτέρους ψήφους. Κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη πιθανότης - ἀφοῦ δέν ἐνδιαφερόμεθα νά συγκεντρώση τήν πλειοψηφίαν ($k>\frac{n}{2}$) ἕνας συγκεκριμένος ὑποψήφιος ἀλλ'οἱοσδήποτε ἐκ τῶν τριῶν - θά πρεπει νά εὑρεθῆ δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.72) - θέτοντες εἰς αὐτόν N=3, n=7 - συγκεκριμένως δέ δι'ἀθροίσεως τῶν ἐξαγομένων τά ὁποῖα εὑρίσκομεν ἐάν θέσωμεν διαδοχικῶς k=4,5,6,7. Οὕτω ἔχομεν

$$p_4 = 3\binom{7}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{280}{729}$$

$$p_5 = 3\binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{84}{729}$$

$$p_6 = 3\binom{7}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{14}{729}$$

$$p_7 = 3\binom{7}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{729}$$

καί κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι

$$p = p_4+p_5+p_6+p_7 = \frac{379}{729} \approx 0,52$$

ἡ πιθανότης δηλαδή νά μήν ἀπαιτηθῆ δευτέρα ψηφοφορία εἶναι ἐλαφρῶς μεγαλυτέρα ἐκείνης τοῦ νά ἀπαιτηθῆ.

(4) Διατεταγμένα Δείγματα

Μία κληρωτίς περιλαμβάνει N σφαιρίδια ἀριθμημένα ἀπό 1 ἕως N. Ἐκ τοῦ ἐν λόγω πληθυσμοῦ διά "τυχαίας" καί "ἄνευ ἐπαναθέσεως" ἐπιλογῆς - δειγματοληψίας - ἐξάγονται διαδοχικῶς - τό ἕνα μετά τό ἄλλο - n σφαιρίδια, ὅπου φυσικά $n \leq N$. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

(A)= {Νά ἐξαχθοῦν οἱ n πρῶτοι ἀριθμοί κατά τήν φυσικήν των σειράν - ἤτοι 1,2,...,n - ἤ γενικώτερον νά ἐξαχθοῦν n σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν ο ι ἀριθμοί μέ σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η - ἐκ τῶν προτέρων καθωρισμένη - σειρά}.

(B)= {Νά ἐξαχθοῦν n ο ἱ ο ι δ ή π ο τ ε ἀριθμοί μέ τήν φυσικήν των σειράν ἤ γενικώτερον μέ συγκεκριμένην - ἐκ τῶν προτέρων καθωρισμένην - σειράν}.

(A) Τό πλῆθος τῶν διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους $n \leq N$ τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγοῦν "ἄνευ ἐπαναθέσεως" ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ N εἶναι, ὡς γνωστόν, $(N)_n$. Κατά συνέπειαν, ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A={νά ἐξαχθοῦν n σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν ο ι ἀριθμοί εἰς σειράν ἐκ τῶν π ρ ο τ έ ρ ω ν κ α θ ω ρ ι σ μ έ ν η ν - π.χ. οἱ n πρῶτοι ἀριθμοί κατά τήν φυσικήν των σειράν}, τό ὁποῖον εἶναι ἕνα καί μόνον συγκεκριμένον δεῖγμα - π.χ. (1,2,...,n) - δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A)=\frac{1}{(N)_n}=\frac{(N-n)!}{N!} \qquad (1.74)$$

Προφανῶς διά n=N ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται

$$P(A)=\frac{1}{N!}$$

(B) Ἐπειδή εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν δέν ἐνδιαφερόμεθα διά τήν ἐξαγωγήν n σ υ γ κ ε κ ρ ι-μ έ ν ω ν ἀριθμῶν ἀλλά ο ἱ ω ν δ ή π ο τ ε τοιούτων, οἱ ὁποῖοι ὡς γνωστόν δύνανται νά ἐπιλεγοῦν ἐκ τῶν N κατά $\binom{N}{n}$ τρόπους, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι ἡ ζητουμένη ἐν προκειμένω πιθανότης P(B) εἶναι ἴση πρός τό γινόμενον τῆς προηγουμένης πιθανότητος P(A) ἐπί τόν ἀριθμόν $\binom{N}{n}$, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(B) = \binom{N}{n}\frac{1}{(N)_n} = \frac{1}{n!} \tag{1.75}$$

Οὕτω π.χ. ἐάν ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχούσης 10 σφαιρίδια ἀριθμημένα 0,1,2,...,9 ἐξάγομεν τυχαίως καί ἄνευ ἐπαναθέσεως 3, ἡ πιθανότης

(A) νά ἐξαχθοῦν οἱ ἀριθμοί 0,1,2 κατά τήν φυσικήν των τάξιν - ἤ γενικώτερον π.χ. οἱ ἀριθμοί 5, 7,8 κατά τήν συγκεκριμένην σειράν 8,5,7 - εἶναι

$$P(A) = \frac{1}{(10)_3} = \frac{1}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{720}$$

(B) νά ἐξαχθοῦν τρεῖς ο ἱ ο ι δ ή π ο τ ε ἀριθμοί κατά τήν φυσικήν των τάξιν - ἤ οἱαδήποτε ἄλλη συγκεκριμένη σειρά - εἶναι

$$P(B) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Ὁμοίως, ἐάν τά δέκα σφαιρίδια ἐξαχθοῦν διαδοχικῶς - ἕνα μετά τό ἄλλο - μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων, ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοί (0 ἕως 9) κατά τήν φυσικήν των τάξιν - ἤ οἱαδήποτε ἄλλη συγκεκριμένη σειρά - εἶναι $p = \frac{1}{10!}$

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν δύο ἀκόμη παραδείγματα - ἐφαρμογάς τῶν τύπων (1.74) καί (1.75).

Παράδειγμα 1

Μία κληρωτίς περιλαμβάνει 10 σφαιρίδια φέροντα τούς ἀριθμούς 0,1,2,...,9. Τά ἐν λόγω σφαιρίδια ἐξάγονται τό ἕνα μετά τό ἄλλο - "ἄνευ ἐπαναθέσεως" - μέχρις ἐξαντλήσεώς των. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

(A) Εἰς τάς 5 πρώτας κληρώσεις νά ἐξαχθοῦν μέ τήν φυσικήν των σειράν οἱ πέντε "μικροί" ἀριθμοί, εἰς δέ τάς ὑπολοίπους καθ' οἱανδήποτε σειράν οἱ "μεγάλοι".

(B) Εἰς τάς πέντε πρώτας κληρώσεις νά ἐξαχθοῦν οἱ "μικροί" ἀριθμοί - ἀδιαφόρως σειρᾶς - εἰς δέ τάς ὑπολοίπους - ἐπίσης ἀδιαφόρως σειρᾶς - οἱ 5 "μεγάλοι".

Οἱ δυνατοί τρόποι μέ τούς ὁποίους δύνανται νά ἐξαχθοῦν οἱ ὡς ἄνω ἀριθμοί εἶναι, ὡς γνωστόν, $(10)_{10}$ ἤ ἄλλως 10!.

Ἐξ ἄλλου, τά δείγματα μεγέθους n=10 τά ὁποῖα ἔχουν εἰς τάς πέντε πρώτας θέσεις τούς ἀριθμούς 1,2, 3,4,5 μέ τήν φυσικήν των σειράν καί εἰς τάς ὑπολοίπους τούς ἀριθμούς 6,7,...,10 καθ' οἱανδήποτε σειράν εἶναι ὅσαι αἱ μεταθέσεις τῶν 5 ἀντικειμένων ἤτοι 5!. Κατά συνέπειαν

$$P(A) = \frac{5!}{10!} = \frac{1}{(10)_5}$$

Ὁμοίως, ἐπειδή οἱ "μικροί" ἀριθμοί δύνανται νά ἐμφανισθοῦν εἰς τάς 5 πρώτας θέσεις κατά 5! τρόπους, οἱ δέ "μεγάλοι" εἰς τάς 5 τελευταίας θέσεις ἐπίσης κατά 5! τρόπους, οἱοσδήποτε δέ ἐκ τῶν ὡς ἄνω τρόπων ἐμφανίσεως τῶν "μικρῶν" συνδυαζόμενος μέ οἱονδήποτε ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων ἐμφανίσεως τῶν "μεγάλων" ἀποτελεῖ ἕνα "εὐνοϊκόν" ἀποτέλεσμα συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι

$$P(B) = \frac{5!5!}{10!} \approx 0,0007$$

Παράδειγμα 2

Πέντε ἄτομα περιμένουν εἰς μίαν σειράν. Ποία ἡ πιθανότης νά εὑρίσκωνται κατ'ἀπόλυτον ἀλφαβητικήν τάξιν;

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1.75) ἔχομεν ἀμέσως

$$p = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

1.11 Ἀνεξάρτητα πειράματα τύχης καὶ ἀνεξάρτητοι διαδοχικαὶ δοκιμαὶ

Εἰς τάς προηγουμένας παραγράφους μᾶς ἀπησχόλησεν ἡ πιθανοθεωρητική μελέτη διαφόρων ἐνδεχομένων ἀναφερομένων εἰς ὡ ρ ι σ μ έ ν ο ν κατά περίπτωσιν π ε ί ρ α μ α τ ύ χ η ς καί κατά συνέπειαν ὑποσυνόλων ἑ ν ό ς κ α ί τ ο ῦ α ὐ τ ο ῦ - ἑκάστοτε - δειγματικοῦ χώρου.

Εἰς πολλάς ὅμως περιπτώσεις ἐνδιαφερόμεθα δι'ἐνδεχόμενα τά ὁποῖα ἀναφέρονται ὄχι εἰς ἕνα ἀλλ' εἰς μία σ ε ι ρ ά ν πειραμάτων τύχης καί κατά συνέπειαν ἀποτελοῦν ἐν γένει ὑποσύνολα δ ι α φ ό ρ ω ν δειγματικῶν χώρων. Ἡ ἀπό κοινοῦ - ἡ συλλογική - μελέτη τοιούτων ἐνδεχομένων, ἀναφερομένων κατά βάσιν εἰς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α π ε ι ρ ά μ α τ α τ ύ χ η ς καί εἰδικώτερον εἰς ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ο υ ς δ ι α δ ο χ ι κ ά ς δ ο κ ι μ ά ς - ἐπαναλήψεις - τοῦ αὐτοῦ πειράματος, θά μᾶς ἀπασχολήση κατωτέρω.

1.11.1 Ἀνεξάρτητα πειράματα τύχης

Προκειμένου νά ὁρίσωμεν τήν ἔννοιαν τῆς α ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς δύο ἤ περισσοτέρων - διαφόρων ἐν γένει - πειραμάτων τύχης $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ μέ ἀντιστοίχους δειγματικούς χώρους $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ καθίσταται, ὡς θά ἴδωμεν, ἀπαραίτητον νά ὁρίσωμεν προηγουμένως τήν ἔννοιαν τοῦ συνθέτου πειράματος $\Pi_{12\ldots n}$ ὡς ἐπίσης τόν δειγματικόν χῶρον $\Omega_{12\ldots n}$ ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό.

'Ορισμός

Σ ύ ν θ ε τ ο ν καλεῖται ἕνα πείραμα τύχης τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν ἐκτέλεσιν δύο ἤ περισσοτέρων ἁπλῶν πειραμάτων. Τό σύνθετον πείραμα τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν ἐκτέλεσιν τῶν πειραμάτων τύχης $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ θά συμβολίζεται $\Pi_{12\ldots n}$, ὁ δέ δειγματικός χῶρος ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό $\Omega_{12\ldots n}$·

'Ο δ ε ι γ μ α τ ι κ ό ς χ ῶ ρ ο ς $\Omega_{12\ldots n}$ ἑνός συνθέτου πειράματος $\Pi_{12\ldots n}$ περιλαμβάνων ὡς στοιχεῖα του - στοιχειώδη ἐνδεχόμενον τοῦ συνθέτου πειράματος - ὅλα τά σ ύ ν θ ε τ α γεγονότα τῆς μορφῆς $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ - ὅπου ω_i, $i=1,2,\ldots,n$ συμβολίζει οἱονδήποτε στοιχειῶδες ἐνδεχόμενον τοῦ ἀντιστοίχου πειράματος Π_i - ἀποτελεῖ προφανῶς τό κ α ρ τ ε σ ι α κ ό γ ι ν ό μ ε ν ο τῶν δειγματικῶν χώρων οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ἐπί μέρους πειράματα $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ ὁρίζεται δηλαδή ἐκ τῆς σχέσεως $\Omega_{12\ldots n} = \Omega_1\Omega_2\ldots\Omega_n$.

Οὕτω π.χ. τό πείραμα τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν "ρίψιν ἑνός νομίσματος" - πείραμα Π_1 μέ $\Omega_1=\{k,\Gamma\}$ - καί τήν "ρίψιν ἑνός ζαριοῦ" - πείραμα Π_2 μέ $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ - εἶναι ἕνα σύνθετον πείραμα Π_{12} μέ δειγματικό χῶρο τό σύνολον τῶν ζευγῶν

$$\Omega_{12}=\Omega_1\Omega_2=\{(k,1),(k,2),(k,3)(k,4),(k,5),(k,6),(\Gamma,1),$$
$$(\Gamma,2),(\Gamma,3),(\Gamma,4),(\Gamma,5),(\Gamma,6)\}.$$

'Ομοίως, τό πείραμα τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν "ρίψον ἑνός νομίσματος τ ρ ε ῖ ς φορές" εἶναι ἕνα σύνθετον πείραμα Π_{123} μέ δειγματικό χῶρο τό σύνολον

$\Omega_{123}=\{kkk,kk\Gamma,k\Gamma k,\Gamma kk,\Gamma\Gamma k,\Gamma k\Gamma,k\Gamma\Gamma,\Gamma\Gamma\Gamma\}$

Τό καρτεσιανόν γινόμενον $A=A_1A_2\ldots A_n$ - ὅπου A_i, $i=1,2,\ldots,n$ συμβολίζει ἐν γένει οἱονδήποτε ὑποσύνολον τοῦ ἀντιστοίχου δειγματικοῦ χώρου Ω_i, $i=1,2,\ldots,n$ - ὡς ὑποσύνολον τοῦ συνθέτου δειγματικοῦ χώρου $\Omega_{12\ldots n}$ ἀποτελεῖ ἐν γένει ἕνα ἐνδεχόμενον τοῦ συνθέτου πειράματος $\Pi_{12\ldots n}$. Οὕτω, ἐνδεχόμενα τοῦ συνθέτου πειράματος $\Pi_{12\ldots n}$ ἀποτελοῦν ἐν γένει ὅλα τά σύνθετα γεγονότα τῆς μορφῆς $A=A_1A_2\ldots A_n$ ὅπου A_i, $i=1,2,\ldots,n$, συμβολίζει ἀντιστοίχως οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον τοῦ πειράματος Π_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Ἕνα ἐνδεχόμενον - ὄχι στοιχειῶδες - τοῦ συνθέτου πειράματος τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν "ρίψιν ἑνός νομίσματος καί τήν ρίψιν ἑνός ζαριοῦ" εἶναι π.χ. τό σύνθετον γεγονός $A=A_1A_2$ ὅπου $A_1=\{k\}$ καί $A_2=\{$ζυγά$\}$. Τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τά ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τό A - συνεπάγονται δηλαδή τήν πραγματοποίησιν αὐτοῦ - εἶναι προφανῶς τά ζεύγη $\{(k,2),(k,4),(k,6)\}$.

Ἐξυπακούεται βεβαίως ἐν προκειμένῳ ὅτι οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον A_i, $i=1,2,\ldots,n$ ἑκάστου τῶν ἐπί μέρους πειραμάτων Π_i, $i=1,2,\ldots,n$ - θεωρούμενον τυπικῶς ὡς σύνθετον γεγονός τῆς μορφῆς $\Omega_1\Omega_2\ldots\Omega_{i-1}A_i\Omega_{i+1}\ldots\Omega_n$ ἤ ἄλλως ὡς καρτεσιανόν γινόμενον τοῦ ὑποσυνόλου A_i μέ ὁλοκλήρους τούς δειγματικούς χώρους τῶν ὑπολοίπων πειραμάτων - ἀποτελεῖ ἐπίσης ἕνα ἐνδεχόμενον τοῦ συνθέτου πειράματος $\Pi_{12\ldots n}$. Τό αὐτό, ὡς εἶναι εὐνόητον, δύναται γενικώτερον νά λεχθῆ καί δι' οἱονδήποτε συνθετώτερον γεγονός τῆς μορφῆς $A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k}$ - ὅπου $k\leq n$ καί $1\leq r_1<r_2<\ldots<r_k\leq n$ - δι' οἱονδήποτε δηλαδή ἐνδεχόμενον τοῦ συνθέτου πειράματος $\Pi_{r_1r_2\ldots r_k}$ τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν ἐκτέλεσιν k οἱωνδήποτε ἐκ τῶν πειραμάτων $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_n$.

Οὕτω π.χ. τό ἐνδεχόμενον $A_2=\{$ζυγά$\}$ τοῦ πειράματος $\Pi_2=\{$ρίψις ἑνός ζαριοῦ$\}$ θεωρούμενον ὡς σύνθετον γεγονός τῆς μορφῆς Ω_1A_2 - οἱονδήποτε ἀποτέλεσμα κατά τήν ρίψιν τοῦ νομίσματος, ζυγά κατά τήν ρίψιν τοῦ ζαριοῦ - ἀποτελεῖ τυπικῶς ἕνα ἐκ τῶν δυνατῶν ἐνδεχομένων τοῦ συνθέτου πειράματος Π_{12}={ρίψις ἑνός νομίσματος καί ρίψις ἑνός ζαριοῦ}.

Μετά τήν εἰσαγωγήν τῆς ἐννοίας ἑνός συνθέτου πειράματος $\Pi_{12...n}$ - εἰς τό πλαίσιον τοῦ δειγματικοῦ χώρου τοῦ ὁποίου δυνάμεθα, ὡς εἴδομεν, νά ἐξετάζωμεν (θεωροῦντες ὡς ὑ π ο σ ύ ν ο λ α αὐτοῦ) τόσον οἱαδήποτε ἁπλᾶ ἐνδεχόμενα ἀναφερόμενα εἰς τό ἐπί μέρους πείραμα $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, ὅσον καί συνθετώτερα ἐνδεχόμενα τῆς μορφῆς $A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k}$ - ἡ ἔννοια τῆς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς δύο ἤ περισσοτέρων πειραμάτων τύχης ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός

Δύο πειράματα τύχης Π_1 καί Π_2 λέγονται στοχαστικῶς ἤ στατιστικῶς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἐάν ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως οἱουδήποτε ἐνδεχομένου τοῦ ἑνός εἶναι ἀνεξάρτητος - δέν ἐπιρρεάζεται, δέν διαφοροποιεῖται - ἀπό τήν πραγματοποίησιν ἤ μή οἱουδήποτε ἐνδεχομένου τοῦ ἄλλου.

Οὕτω, ἐάν A_1 καί A_2 συμβολίζουν ἀντιστοίχως οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα τῶν πειραμάτων Π_1 καί Π_2, τά ἐν λόγω πειράματα λέγονται ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$P(A_2/A_1)=P(A_2) \text{ ἤ } P(A_1/A_2)=P(A_2)$$

ἤ ἁπλούστερον ἡ ἰσοδύναμος πρός αὐτάς π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ή σχέσις

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2) \tag{1.76}$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν τά ἐνδεχόμενα A_1 καί A_2 - θεωρούμενα τυπικῶς ὡς ἐνδεχόμενα τοῦ συνθέτου πειράματος Π_{12} - εἶναι μεταξύ των ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι δύο πειράματα τύχης Π_1 καί Π_2 θά εἶναι μεταξύ των ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἐάν - καί μόνον ἐάν - τό ὑπόδειγμα τό ὁποῖον περιγράφει τήν πιθανοθεωρητικήν δομήν τοῦ συνθέτου δειγματικοῦ χώρου $\Omega_{12}=\Omega_1\Omega_2$ ἤ ἁπλούστερον ἡ πιθανότης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς οἱονδήποτε σύνθετον γεγονός A_1A_2 - εἰς οἱονδήποτε δηλαδή ἐνδεχόμενον τοῦ συνθέτου πειράματος Π_{12} - ὁρίζεται ἐκ τῆς πολλαπλασιαστικῆς σχέσεως (1.76), ἰσοῦται δηλαδή πρός τό γινόμενον τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐνδεχομένων A_1 καί A_2 ἀναφορικῶς πρός τά ἀντίστοιχα ἐπί μέρους πειράματα Π_1 καί Π_2.

Οὕτω π.χ. ἐάν Π_1 καί Π_2 εἶναι δύο πειράματα τύχης μέ στοιχειώδη ἐνδεχόμενα - δειγματικούς χώρους - $\Omega_1=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ καί $\Omega_2=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\}$ καί ἀντιστοίχους πιθανότητας $p_1,p_2,...,p_n$ - ὅπου $p_1+p_2+...+p_n=1$ - καί $q_1,q_2,...,q_m$ - ὅπου $q_1+q_2+...+q_m=1$ - τά ἐν λόγω πειράματα εἶναι, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α, ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἡ πιθανότης p_{ij} ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τό στοιχεῖον $\alpha_i\beta_j$ τοῦ συνθέτου δειγματικοῦ χώρου $\Omega_{12}=\Omega_1\Omega_2$, ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$p_{ij}=p_iq_j \quad \text{διά } i=1,2,...,n \text{ καί } j=1,2,...,m$$

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀπαιτεῖται, ὡς εἶναι εὐνόητον, νά ἀποδείξωμεν πρῶτον, ὅτι $\sum\limits_{ij}\sum p_{ij}=1$ καί δεύτερον ὅτι ἐάν A_1 καί A_2 συμβολίζουν ἀντιστοίχως οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα τῶν πειραμάτων Π_1 καί Π_2 ἔχομεν $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$.

Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ὡς ἄνω σχέσεων ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_iq_j=(p_1+p_2+...+p_n)(q_1+q_2+...+q_m)=1\times1=1$$

Ἐξ ἄλλου, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $A_1=\{\alpha_{r_1},\alpha_{r_2},\ldots,\alpha_{r_k}\}$, ὅπου $k\leq n$ καί $1\leq r_1<r_2<\ldots<r_k\leq n$ καί $A_2=\{\beta_{t_1},\beta_{t_2},\ldots,\beta_{t_\lambda}\}$, ὅπου $\lambda\leq m$ καί $1\leq t_1<t_2<\ldots<t_\lambda\leq m$ ἔχομεν ὅτι

$$P(A_1A_2)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda}p_{r_it_j}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda}p_{r_i}q_{t_j}=(p_{r_1}+p_{r_2}+\ldots+p_{r_k})(q_{t_1}+q_{t_2}+\ldots$$

$$\ldots+q_{t_\lambda})=P(A_1)P(A_2)$$

Εἰς τήν πρᾶξιν δύο πειράματα τύχης Π_1 καί Π_2 θεωροῦνται ἐν γένει ὡς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α - καί κατά συνέπειαν ἡ πιθανότης $P(A_1A_2)$ οἱουδήποτε συνθέτου ἐνδεχομένου ὑπολογίζεται ἐκ τῆς πολλαπλασιαστικῆς σχέσεως (1.76) - ἐάν ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐν λόγῳ πειραμάτων καί τοῦ τρόπου ἐκτελέσεως αὐτῶν, δυνάμεθα λογικῶς νά δεχθῶμεν - μή ἔχοντες λόγους ἤ ἐνδείξεις περί τοῦ ἀντιθέτου - ὅτι τό ἀποτέλεσμα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ο ὔ τ ε ἐ π ι ρ ρ ε ά ζ ε ι ο ὔ τ ε ἐ π ι ρ ρ ε ά ζ ε τ α ι ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ ἄλλου.

Οὕτω π.χ. ρίπτοντες ἕνα νόμισμα καί ἐν συνεχείᾳ ἕνα ζάρι καί μή ἔχοντες λόγους νά πιστεύωμεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς μιᾶς ρίψεως ἐπιρρεάζει ἤ ἐπιρρεάζεται ἀπό τό ἀποτέλεσμα τῆς ἄλλης, δεχόμεθα ὅτι τά ἐν λόγῳ πειράματα εἶναι ἀνεξάρτητα ἤ ἄλλως ὅτι

$$P(A_2/A_1)=P(A_2) \text{ καί } P(A_1/A_2)=P(A_1)$$

κατά συνέπειαν δέ, ὑπολογίζομεν τήν πιθανότητα οἱουδήποτε συνθέτου ἐνδεχομένου A_1A_2 - ὅπου A_1 καί A_2 συμβολίζουν ἀντιστοίχως οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα τῶν ὡς ἄνω πειραμάτων Π_1 καί Π_2 - ἐκ τῆς πολλαπλασιαστικῆς σχέσεως (1.76). Λέγομεν π.χ. ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A_1A_2=\{κορώνα, ζυγά\} εἶναι ἴση πρός τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου A_1=\{κορώνα\} ἐπί τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου A_2=\{ζυγά\}, ἤτοι

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{12} \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἐν ἀντιθέσει πρός τά ἀνωτέρω ὑποθέσωμεν ὅτι τό πείραμα Π_1 συνίσταται εἰς τήν τυχαίαν ἐπιλογήν ἑνός σφαιριδίου ἀπό μία κληρωτίδα ἡ ὁποία περιέχει δύο λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια τό δέ Π_2 εἰς τήν ἐπιλογήν ἑνός σφαιριδίου ἀπό μία κληρωτίδα ἡ ὁποία περιέχει ἕνα λευκό καί δύο μαῦρα σφαιρίδια ἀλλ'ἀφοῦ προηγουμέ ως θ έ σ ω μ ε ν εἰς αὐτήν καί τό σφαιρίδιον τό ὁποῖον ἐπιλέγεται ἐκ τῆς πρώτης (τοῦ πειράματος Π_1).

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι προφανές ὅτι τό ἀποτέλεσμα τοῦ δευτέρου πειράματος δέν εἶναι ἀνεξάρτητον ἐκείνου τοῦ πρώτου. Πράγματι, ἡ πιθανότης π.χ. ἐπιλογῆς λευκοῦ σφαιριδίου εἰς τό δεύτερον πείραμα, ἐάν μέν εἰς τό πρῶτον ἐπελέγη λευκόν εἶναι $P(\lambda/\lambda)=\frac{2}{4}$ ἐνῶ ἐάν ἐπελέγη μαῦρον εἶναι $P(\lambda/\mu)=\frac{1}{4}$. Ἔχομεν δηλαδή ἐν προκειμένῳ ὅτι $P(\lambda/\lambda)\neq P(\lambda/\mu)\neq P(\lambda)=\frac{1}{3}$ καί κατά συνέπειαν τά ἐν λόγῳ πειράματα δέν εἶναι δυνατόν νά θεωρηθοῦν ὡς ἀνεξάρτητα.

Κατ'ἀναλογίαν πρός τά ἀνωτέρω ἡ ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α n πειραμάτων τύχης ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως.

Ὁρισμός

Ἐάν $A_1,A_2,\ldots,A_n$ συμβολίζουν ἀντιστοίχως οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα τῶν πειραμάτων $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_n$, τά ἐν λόγῳ πειράματα λέγονται ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἐάν τά ἐνδεχόμενα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ - θεωρούμενα ἐν προκειμένῳ ὡς ἐνδεχόμενα τοῦ συνθέτου πειράματος $\Pi_{12\ldots n}$ - εἶναι ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν - καί μόνον ἐάν - διά κάθε $k\leq n$ καί $1\leq r_1<r_2<\ldots<r_k\leq n$ ἰσχύει ἡ π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ή σχέσις

$$P(A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k})=P(A_{r_1})P(A_{r_2})\ldots P(A_{r_k}) \qquad (1.77)$$

Οὕτω, n πειράματα τύχης $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_n$ εἶναι ἀνεξάρτητα ἐάν - καί μόνον ἐάν - τό ὑπόδειγμα τό ὁποῖον περιγράφει τήν πιθανοθεωρητικήν δομήν τοῦ συνθέτου δειγματικοῦ χώρου $\Omega_{12\ldots n}$ ἤ ἁπλούστερον ἡ πιθανότης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς οἱονδήποτε σύνθετον γεγονός τῆς μορφῆς $A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k}$ - θεωρούμενον ὡς ὑποσύνολον τοῦ $\Omega_{12\ldots n}$ - ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.77), ἰσοῦται δηλαδή πρός τό γινόμενον τῶν πιθανοτήτων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ἐνδεχόμενα $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots, A_{r_k}$ ἀναφορικῶς πρός τά ἐπί μέρους πειράματα $\Pi_{r_1}, \Pi_{r_2}, \ldots, \Pi_{r_k}$.

Εἰς τήν πρᾶξιν n πειράματα τύχης $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ θεωροῦνται ἐν γένει ὡς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α - καί κατά συνέπειαν ἡ πιθανότης οἱουδήποτε συνθέτου ἐνδεχομένου τῆς μορφῆς $A_{r_1}, A_{r_2}\ldots A_{r_k}$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς πολλαπλασιαστικῆς σχέσεως (1.77) - ἐάν, ὡς ἐκ τῆς φύσεως καί τοῦ τρόπου ἐκτελέσεως αὐτῶν, δυνάμεθα λογικῶς νά δεχθῶμεν ὅτι ἡ πραγματοποίησις ἤ μή οἱουδήποτε ἐνδεχομένου A_i, $i=1,2,\ldots,n$ ἀναφερομένου εἰς τό πείραμα Π_i, $i=1,2,\ldots,n$ ο ὔ τ ε ἐ π ι ρ ρ ε ά ζ ε ι ο ὔ τ ε ἐ π ι ρ ρ ε ά ζ ε τ α ι ἀπό τήν πραγματοποίησιν ἤ μή οἱωνδήποτε ἄλλων ἐνδεχομένων ἀναφερομένων εἰς τά ὑπόλοιπα πειράματα.

Οὕτω π.χ. ρίπτοντες ἕνα κανονικό νόμισμα, ἐν συνεχείᾳ ἕνα κανονικό ζάρι καί τέλος ἐπιλέγοντες τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχούσης δύο λευκά καί τρία μαῦρα σφαιρίδια καί μή ἔχοντας προφανῶς λόγους νά ὑποθέσωμεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα οἱουδήποτε ἐκ τῶν ἐν λόγῳ πειραμάτων ἐπιρρεάζει ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τῶν ἄλλων, δεχόμεθα ὅτι τά ὡς ἄνω πειράματα εἶναι ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α, κατά συνέπειαν δέ ὑπολογίζομεν τήν πιθανότητα οἱουδήποτε συνθέτου ἐνδεχομένου $A=A_1A_2A_3$ δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (1.77). Ἡ πιθανότης λόγου χάριν τοῦ συνθέτου ἐνδεχομένου A={κορώνα, ζυγά, λευκό} εἶναι $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$. Ὁμοίως, ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου B={μονά, μαῦρα} - ἐνδεχομένου τῆς μορφῆς $\Omega_1B_2B_3$ - εἶναι $P(B)=1\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$ κ.ο.κ.

1.11.2 Ἀνεξάρτητοι διαδοχικαί δοκιμαί

Εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν τά πειράματα τύχης $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ δ έ ν ε ἶ ν α ι δ ι άφορα πειράματα, ἀλλ' ἁπλῶς μία ἀκολουθία ἐπαναλήψεων ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ πειράματος Π. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁμιλοῦμεν περί ἐπανειλημμένων ἐκτελέσεων τοῦ πειράματος Π ἤ ἁπλούστερον περί διαδοχικῶν δοκιμῶν.

Ὁ δειγματικός χῶρος τοῦ συνθέτου πειράματος τό ὁποῖον συνίσταται εἰς τήν ἐκτέλεσιν n ἐπαναλήψεων ἑνός πειράματος Π μέ δειγματικόν χῶρον Ω - ἤ ἄλλως ἐκ μιᾶς ἀκολουθίας n διαδοχικῶν δοκιμῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων δύναται νά ἔχη ὡς ἀποτέλεσμα ἕνα ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ω - εἶναι προφανῶς τό καρτεσιανόν γινόμενον n τάξεως Ω.Ω...Ω ἤ ἁπλούστερον ἡ n-οστή δύναμις Ω^n τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω τοῦ ἐπαναλαμβανομένου πειράματος.

Οὕτω π.χ. τέσσαρες ρίψεις ἑνός νομίσματος ἀποτελοῦν τέσσαρας διαδοχικάς δοκιμάς τοῦ πειράματος Π = ={ρίψις ἑνός νομίσματος} μέ δειγματικόν χῶρον Ω={κορώνα, γράμματα}. Ὁ δειγματικός χῶρος τοῦ ἐν λόγω συνθέτου πειράματος εἶναι προφανῶς ἕνα σύνολον μέ 2^4 στοιχεῖα καί συγκεκριμένως τό σύνολον

$$\Omega^4=\{kkkk,\ kkk\Gamma,\ kk\Gamma k,\ k\Gamma kk,\ \Gamma kkk,\ kk\Gamma\Gamma,\ k\Gamma\Gamma k,\ \Gamma\Gamma kk,$$

$$k\Gamma k\Gamma,\ \Gamma k\Gamma k,\ \Gamma kk\Gamma,\ \Gamma\Gamma\Gamma k,\ \Gamma\Gamma k\Gamma,\ \Gamma k\Gamma\Gamma,\ k\Gamma\Gamma\Gamma,\ \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Κατ' ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων περί ἀνεξαρτήτων πειραμάτων τύχης ἡ ἔννοια τῆς ἀνεξαρτησίας δύο ἤ περισσοτέρων διαδοχικῶν δοκιμῶν ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός

Ἐάν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ συμβολίζουν οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα - ἐξυπακούεται ἐν προκειμένω ὅτι ἅπαντα τά A_1, $A_2, \ldots, A_n$ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἐπαναλαμβανόμενον πείραμα Π - ἀντιστοίχως εἰς τάς δοκιμάς $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ ἑνός πειράματος Π, αἱ ἐν λόγῳ δοκιμαί λέγονται *ἀνεξάρτητοι* ἐάν τά ἐνδεχόμενα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ - θεωρούμενα τυπικῶς ὡς ὑποσύνολα τοῦ συνθέτου δειγματικοῦ χώρου Ω^n τῆς μορφῆς $\Omega\Omega\ldots\Omega A_i\Omega\Omega\ldots\Omega$, $i=1,2,\ldots,n$ - εἶναι μεταξύ των *ἀνεξάρτητα*, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν - καί μόνον ἐάν - διά κάθε $k\le n$ καί $1\le r_1<r_2<\ldots<r_k\le n$ ἰσχύει ἡ *πολλαπλασιαστική* σχέσις

$$P(A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k})=P(A_{r_1})P(A_{r_2})\ldots P(A_{r_k}) \tag{1.78}$$

Οὕτω, n *διαδοχικαί δοκιμαί* ἑνός πειράματος Π θά εἶναι - ὅπως καί n πειράματα τύχης $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_n$ - *ἀνεξάρτητοι* ἐάν - καί μόνον ἐάν - τό ὑπόδειγμα τό ὁποῖον περιγράφει τήν πιθανοθεωρητικήν δομήν τοῦ συνθέτου δειγματικοῦ χώρου Ω^n ἤ ἁπλούστερον ἡ πιθανότης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς οἱονδήποτε σύνθετον γεγονός τῆς μορφῆς $A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k}$ - θεωρουμένου ὡς ὑποσυνόλου τοῦ Ω^n - ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.78), ἰσοῦται δηλαδή πρός τό γινόμενον τῶν πιθανοτήτων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ἐνδεχόμενα $A_{r_1},A_{r_2},\ldots,A_{r_k}$ ἀναφορικῶς πρός τό ἐπαναλαμβανόμενον πείραμα Π.

Εἰς τήν πρᾶξιν n διαδοχικαί δοκιμαί ἑνός πειράματος Π θεωροῦνται ἐν γένει ὡς *ἀνεξάρτητοι* - καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ πιθανότης οἱουδήποτε συνθέτου ἐνδεχομένου τῆς μορφῆς $A_{r_1}A_{r_2}\ldots A_{r_k}$ ὅπου $A_{r_i}\subset\Omega$ διά $i=1,2,\ldots,k$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (1.78) - ἐάν, ὡς ἐκ τῆς φύσεως αὐτῶν καί τοῦ τρόπου ἐκτελέσεώς των, δυνάμεθα λογικῶς νά δεχθῶμεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα οἱασδήποτε δοκιμῆς $i=1,2,\ldots,n$ *οὔτε ἐπιρρεάζει οὔτε ἐπιρρεάζεται* ἀπό τά ἀποτελέσματα τῶν ὑπολοίπων δοκιμῶν. Τοιαύτη π.χ. εἶναι ἡ περίπτωσις ἑνός πειράματος Π τό ὁποῖον ἐπαναλαμβάνεται ὑπό *τάς αὐτάς ἀκριβῶς συνθήκας* ἤτοι ἑνός πειράματος τά δυνατά ἀποτελέσματα - ὁ δειγματικός δηλαδή χῶρος - τοῦ ὁποίου ὡς καί ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως ἑκάστου ἐξ αὐτῶν παραμένουν καθ'ὅλας τάς δοκιμάς ἀ ν α λ λ ο ί ω τ α καί ὡς ἐκ τούτου ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως κατά τήν δοκιμήν $i=1,2,\ldots,n$ οἱουδήποτε ἐκ τῶν δυνατῶν ἐνδεχομένων τοῦ πειράματος εἶναι ἀνεξάρτητος - δέν ἐπιρρεάζεται, δέν διαφοροποιεῖται - ὄχι μόνον ἀπό τά γεγονότα τά ὁποῖα ἐπραγματοποιήθησαν προηγουμένως ἤ θά πραγματοποιηθοῦν εἰς τάς ἑπομένας δοκιμάς, ἀλλ' ἐπίσης καί ἐκ τῆς σ ε ι ρ ᾶ ς - τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ $i=1,2,\ldots,n$ - τῆς ὑπ'ὄψιν δοκιμῆς.

Οὕτω π.χ. ρίπτοντες ἕνα "κανονικό" ζάρι - ὅπου $P(i)=\frac{1}{6}$ διά $i=1,2,3,4,5,6$ - τρεῖς φορές μέ τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον καί μή ἔχοντας λόγους νά ὑποθέσωμεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα οἱασδήποτε ρίψεως ἐπιρρεάζει ἤ ἐπιρρεάζεται ἀπό τά ἀποτελέσματα τῶν δύο ἄλλων ρίψεων, δεχόμεθα ὅτι αἱ τρεῖς διαδοχικαί δοκιμαί εἶναι ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ι κατά συνέπειαν δέ ὑπολογίζομεν τήν πιθανότητα οἱουδήποτε συνθέτου ἐνδεχομένου $A_1A_2A_3$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

πρᾶγμα τό ὁποῖον - ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται - εἶναι ἰσοδύναμον καί μέ τήν παραδοχήν ὅτι εἰς ἕκαστον τῶν 6^3 στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων (i,j,k), ὅπου $i,j,k=1,2,3,4,5,6$ τοῦ συνθέτου πειράματος ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτή πιθανότης $P(i,j,k)=\frac{1}{6^3}$.

Ἰδιαίτερον - πρακτικόν ὅσον καί θεωρητικόν - ἐνδιαφέρον παρουσιάζει, ὡς θά ἴδωμεν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον, ἡ περίπτωσις πειραμάτων τύχης τά ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ὑ π ό τ ά ς α ὐ τ ά ς π ά ν τ ο τ ε σ υ ν θ ή κ α ς καί ὁ δειγματικός χῶρος τῶν ὁποίων εἶναι π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ς. Συγκεκριμένως, εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ θά μᾶς ἀπασχολήση ἡ μελέτη ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν διαδοχικῶν δοκιμῶν τά δυνατά ἀποτελέσματα τῶν ὁποίων - στοιχειώδη ἐνδεχόμενα τοῦ ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας ἐπαναλαμβανομένου πειράματος Π - εἶναι k τῶ πλῆθος - ἔχομεν δηλαδή $\Omega=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k\}$ -

τόσον δέ αὐτά ὅσον καί ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως ἑκάστου - τήν ὁποίαν θά συμβολίζωμεν μέ $P(\varepsilon_i)$ ἤ ἁπλούστερον p_i ὅπου $i=1,2,...,k$ καί $p_1+p_2+...+p_k=1$ - παραμένουν ἀ ν α λ λ ο ί ω τ α - πάντοτε τά αὐτά - καθ'ὅλας τάς δοκιμάς.

Σημειοῦται ἐν προκειμένῳ ὅτι τοιούτου εἴδους ἀνεξάρτητοι διαδοχικαί δοκιμαί καί ἰδιαιτέρως ἡ περίπτωσις ὅπου $k=2$ - ἡ περίπτωσις δηλαδή ἀνεξαρτήτων διαδοχικῶν δοκιμῶν τά δυνατά ἀποτελέσματα τῶν ὁποίων εἶναι δύο, ἐμελετήθησαν τό πρῶτον ὑπό τοῦ μαθηματικοῦ James Bernoulli (1654-1705). Διά τόν λόγον ἄλλωστε αὐτόν τοιούτου εἴδους δοκιμαί εἶναι εὐρέως γνωσταί ὡς Δ ο κ ι μ α ί B e r n o u l l i.

1.12 Δοκιμαὶ Bernoulli

Ἀνεξάρτητοι διαδοχικαί δοκιμαί καλοῦνται συνήθως δ ο κ ι μ α ί B e r n o u l l i ἐάν τά δ υ ν α τ ά ἀποτελέσματα ἑκάστης ἐξ αὐτῶν εἶναι δ ύ ο - καλούμενα ἐν γένει "ἐπιτυχία" (E) καί "μή ἐπιτυχία" ἤ "ἀποτυχία" ($\bar{E}$) - οἱ δέ ἀντίστοιχοι πρός αὐτά πιθανότητες $P(E)$ καί $P(\bar{E})$ - συμβολιζόμεναι κατά κανόνα μέ p καί q ὅπου φυσικά $p+q=1$ - παραμένουν ἀ ν α λ λ ο ί ω τ ο ι καθ'ὅλας τάς δοκιμάς.

Ρίπτοντες π.χ. ἕνα "κανονικό" νόμισμα δέκα φορές, ἔχομεν μίαν ἀκολουθίαν ἐκ $n=10$ δοκιμῶν B ὅπου $E=\{$κορῶνα$\}$, $\bar{E}=\{$γράμματα$\}$ - ἤ ἀντιστρόφως - καί $p=q=\frac{1}{2}$.

Ὁμοίως, ρίπτοντες ἕνα "κανονικό" ζάρι πέντε φορές καί θεωροῦντες ὡς "ἐπιτυχίαν" τήν ἐμφάνισιν τοῦ ἀριθμοῦ 6 καί ὡς "ἀποτυχίαν" οἱονδήποτε ἄλλο ἀποτέλεσμα, ἔχομεν μίαν ἀκολουθίαν ἐκ $n=5$ δοκιμῶν B ἀνά $E=\{6\}$, $\bar{E}=\{1,2,3,4,5\}$, $p=P(E)=\frac{1}{6}$ καί $q=1-p=P(\bar{E})=\frac{5}{6}$.

Τό πρόβλημα τό ὁποῖον μᾶς ἀπασχολεῖ κατά βάσιν εἰς τήν μελέτην μιᾶς ἀκολουθίας δοκιμῶν B εἶναι ἡ εὑρεσις τῆς πιθανότητος τοῦ ἐνδεχομένου

{μεταξύ n τοιούτων δοκιμῶν νά ἔχωμεν - ἀδιάφορον μέ ποίαν σειράν - x ἐπιτυχίας}

ὅπου φυσικά x=0 ἤ 1 ἤ 2 ἤ ... τέλος n.

Συμβολίζοντες τήν ἐν λόγῳ πιθανότητα μέ $P_n(x)$ θά ἀποδείξωμεν ὅτι

$$R_n(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{n-x} \quad \text{διά } x=0,1,2,\ldots,n \qquad (1.79)$$

Ἀπόδειξις

Ἡ πιθανότης x σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α ι δοκιμαί - π.χ. οἱ $r_1,r_2,\ldots,r_x$ ὅπου $0\leq x\leq n$ καί $1\leq r_1<r_2<\ldots<r_x\leq n$ - νά καταλήξουν εἰς "ἐπιτυχίαν" E οἱ δέ ὑπόλοιπες n-x εἰς "ἀποτυχίαν" ($\bar{E}$), συμφώνως πρός τήν πολλαπλασιαστικήν σχέσιν (1.78) ἰσοῦται πρός ἕνα γινόμενον ἐκ n παραγόντων ἐκ τῶν ὁποίων οἱ x καί συγκεκριμένως οἱ κατέχοντες τάς θέσεις $r_1,r_2,\ldots,r_x$ - εἶναι ἴσοι πρός p οἱ δέ ὑπόλοιποι n-x ἴσοι πρός q, ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ πιθανότης εἶναι ἴση πρός $p^x q^{n-x}$ ὅπου $x=0,1,2,\ldots,n$.

Εἰς τό τεθέν ὅμως πρόβλημα δέν ζητεῖται οἱ x "ἐπιτυχίες" νά ἐμφανισθοῦν εἰς x συγκεκριμένας δοκιμάς, ἀλλ'εἰς x ο ἱ α σ δ ή π ο τ ε τοιαύτας. Συνεπῶς, ἐάν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν ὅτι x δοκιμαί - γενικώτερον x ἀντικείμενα - δύνανται νά ἐπιλεγοῦν μεταξύ n τοιούτων κατά $\binom{n}{x}$ δ ι α φ ό ρ ο υ ς τρόπους, συμπεραίνομεν εὐκόλως - δι'ἐφαρμογῆς τοῦ ἀθροιστικοῦ θεωρήματος - ὅτι ἡ ζητουμένη πιθανότης $P_x(x)$ ἰσοῦται μέ $\binom{n}{x}$ φοράς τήν ὡς ἄνω πιθανότητα $p^x q^{n-x}$, δίδεται δηλαδή - διά $x=0,1,2,\ldots,n$ - ἐκ τῆς σχέσεως (1.79).

Οὕτω π.χ. ρίπτοντες ἕνα "κανονικό" νόμισμα n=10 φοράς ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν x=3 κορῶνες εἶναι

$$P_{10}(3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{120}{1024}\approx 0{,}117$$

Ὁμοίως, ρίπτοντες ἕνα "κανονικό" ζάρι n=5 φοράς ἡ πιθανότης νά μή ἐμφανισθῆ καθόλου ὁ ἀριθμός 6 εἶναι

$$P_5(0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{3125}{7776}\approx 0{,}402$$

Πέραν τῶν ὡς ἄνω ἀτομικῶν πιθανοτήτων $P_n(x)$, x= =0,1,2,...,n - τῶν πιθανοτήτων δηλαδή αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ἐπί μέρους ἐνδεχόμενα {μεταξύ τῶν n δοκιμῶν νά ἔχωμεν ἀντιστοίχως 0,1,2,...,n "ἐπιτυχίας"} - εἰς πολλάς περιπτώσεις ἐνδιαφερόμεθα καί διά τήν πιθανότητα συνθετωτέρων ἐνδεχομένων ὡς π.χ. τά {x≥α}, ἤτοι "ὁ ἀριθμός τῶν ἐπιτυχιῶν νά εἶναι τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο ν α", {x≤β}, ἤτοι "ὁ ἀριθμός τῶν ἐπιτυχιῶν x νά μήν ὑπερβαίνη ἤ ἄλλως νά εἶναι τ ό π ο λ ύ β" κ.ο.κ.

Ἐπειδή, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τό πλῆθος τῶν ἐπιτυχιῶν x εἰς μίαν ἀκολουθίαν ἐκ n δοκιμῶν B δέν δύναται παρά νά εἶναι ἕ ν α ς κ α ί μ ό ν ο ν ἕ ν α ς ἐκ τῶν ἀριθμῶν {0,1,2,...,n}, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐπειδή τά δυνατά ἐν προκειμένῳ ἀποτελέσματα 0,1,2,...,n εἶναι ἐνδεχόμενα ἀ σ υ μ β ί β α σ τ α μεταξύ των, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀθροιστικοῦ θεωρήματος συνάγονται ἀμέσως τά ἀκόλουθα:

(α) Τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$ - ἴσον πρός τήν πιθανότητα τοῦ βεβαίου γεγονότος - εἶναι ἡ μονάς, ἔχομεν δηλαδή

$$\sum_{x=0}^{n} P_n(x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=1 \qquad (1.80)$$

(β) Οἱ πιθανότητες ἐνδεχομένων ὡς π.χ. τά {x≥α}, {x≤β}, {α≤x≤β} κ.ο.κ., ὅπου α καί β ἀκέραιοι ἀριθμοί πληροῦντες τήν σχέσιν 0≤α<β≤n, δίδονται ἐκ τῶν σχέσεων

$$P\{x \geq \alpha\} = \sum_{x=\alpha}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - \sum_{x=0}^{\alpha-1} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (1.81)$$

$$P\{x \leq \beta\} = \sum_{x=0}^{\beta} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - \sum_{x=\beta+1}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (1.82)$$

$$P\{\alpha \leq x \leq \beta\} = \sum_{x=\alpha}^{\beta} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (1.83)$$

Οὕτω π.χ. ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν τρεῖς τουλάχιστον κορῶνες εἰς τάς δέκα ρίψεις τοῦ ὡς ἄνω νομίσματος - συμφώνως πρός τήν σχέσιν (1.81) - εἶναι

$$P\{x \geq 3\} = \sum_{x=3}^{10} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{45}{1024}\right] = \frac{968}{1024} \approx 0,95$$

Ὁμοίως, ἡ πιθανότης ὁ ἀριθμός 6 νά ἐμφανισθῆ μία τό πολύ φορά εἰς πέντε ρίψεις ἑνός "κανονικοῦ" ζαριοῦ - συμφώνως πρός τήν σχέσιν (1.82) - εἶναι

$$P\{x \leq 1\} = P_5(0) + P_5(1) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} +$$

$$+\frac{3125}{7776}=\frac{6250}{7776}\approx 0{,}80 \text{ κ.ο.κ.}$$

Εἰς τήν πρᾶξιν, ὁ ὑπολογισμός τόσον τῶν ἐπί μέρους - ἀτομικῶν - πιθανοτήτων $P_n(x)$, $x=0,1,2,\ldots,n$ - σχέσις (1.79) - ὅσον καί τῶν ἀθροιστικῶν τοιούτων $P\{x\leq\alpha\}$, $P\{x\geq\beta\}$ κλπ. δέν εἶναι πάντοτε ἁπλοῦς. Ἰδιαιτέρως εἰς περιπτώσεις ὅπου ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δοκιμῶν n εἶναι μ ε γ ά λ ο ς, αἱ ὑπολογιστικαί δυσχέρειαι εἶναι - δι'εὐνοήτους λόγους - τόσον σοβαραί, ὥστε ἡ εὕρεσις τῶν ἐν λόγῳ πιθανοτήτων νά εἶναι κατ' οὐσίαν - πρακτικῶς - ἀδύνατος.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς - ὅπου δηλαδή ὁ ἀριθμός n εἶναι μ ε γ ά λ ο ς - πρός εὕρεσιν τῶν ὡς ἄνω πιθανοτήτων χρησιμοποιοῦνται συνήθως ὡρισμένοι π ρ ο σ ε γ γ ι σ τ ι κ ο ί τύποι, ὡς π.χ. οἱ τύποι τῆς λεγομένης κ α ν ο ν ι κ ῆ ς π ρ ο σ ε γ γ ί σ ε ω ς - προσεγγίσεως διά τοῦ κ α ν ο ν ι κ ο ῦ ν ό μ ο υ - ὁ προσεγγιστικός τύπος τοῦ P o i s s o n - ὁ ὁποῖος ἐφαρμόζεται εἰς τάς περιπτώσεις ὅπου πέραν τῆς μεγάλης τιμῆς τοῦ n, ἡ πιθανότης $p=P(E)$ εἶναι π ο λ ύ μ ι κ ρ ή - κ.ο.κ.

Εἰς ἄλλας, ἐξ ἄλλου, περιπτώσεις - ὅπου ὁ ἀριθμός τῶν δοκιμῶν n δέν εἶναι πολύ μεγάλος - στατιστικοί πίνακες, γνωστοί ὡς πίνακες τῆς δ ι ω ν υ μ ι κ ῆ ς κ α τ α ν ο μ ῆ ς (βλ. παράρτημα στατιστικῶν πινάκων), εἰς τούς ὁποίους αἱ ἀτομικαί πιθανότητες

$$P_n(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \quad \text{διά } x=0,1,2,\ldots,n$$

ὡς καί αἱ ἀθροιστικαί τοιαῦται

$$P\{x\leq\alpha\}=\sum_{x=0}^{\alpha}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

ἔχουν προϋπολογισθεῖ διά διαφόρους τιμάς τῶν παραμέτρων n καί p, ἀποδεικνύονται πολλάκις ἐξαιρετικά χρήσιμοι.

Εἰς πολλάς τέλος περιπτώσεις, πρός ὑπολογισμόν τῶν ἐπί μέρους πιθανοτήτων $P_n(x)$, $x=0,1,2,\ldots,n$ -καί κατ'ἐπέκτασιν τῶν ἀθροιστικῶν τοιούτων $P\{x\leq\alpha\}$ κλπ.- χρησιμοποιεῖται ὁ τύπος

$$P_n(x+1)=\frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{p}{q}\,P_n(x) \qquad (1.84)$$

ἀνήκων εἰς μίαν κατηγορίαν τύπων γνωστῶν εὑρέως ὡς ἀ ν α δ ρ ο μ ι κ ῶ ν, καθ'ὅσον δι'αὐτῶν ἐκ τῆς τιμῆς τῆς πιθανότητος $P_n(x)$ καθίσταται δυνατή ἡ εὕρεσις τῆς - ἀμέσου ἑπομένης - πιθανότητος $P_n(x+1)$ κ.ο.κ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἐν λόγω τύπου εἶναι ἁπλουστάτη. Πράγματι, ἐάν εἰς τήν σχέσιν (1.79) θέσωμεν ἀντί x τό x+1 λαμβάνομεν τήν σχέσιν

$$P_n(x+1)=\binom{n}{x+1}p^{x+1}q^{n-x-1}$$

διαιροῦντες δέ αὐτήν - κατά μέλη - μέ τήν σχέσιν (1.79) καί ἐκτελοῦντες τάς σχετικάς ἁπλοποιήσεις καταλήγομεν εὐκόλως εἰς τόν πρός ἀπόδειξιν τύπον (1.84).

Πρός ὑπολογισμόν ἐξ ἄλλου τῶν πιθανοτήτων $P_n(x)$, $x=0,1,2,\ldots,n$ δι'ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως - τοῦ ἀναδρομικοῦ τύπου - (1.84) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν κατ'ἀρχήν - συνήθως τῆ βοηθεία τῶν λογαρίθμων - τήν πιθανότητα $P_n(0)$. Ἐν συνεχεία ἐφαρμόζοντες τήν σχέσιν (1.84) διά x=0 ὑπολογίζομεν τήν πιθανότητα $P_n(1)$. Ἀκολούθως, θέτοντες εἰς τόν τύπον (1.84) x=1 εὑρίσκομεν τήν πιθανότητα $P_n(2)$ κ.ο.κ. μέχρι καί τῆς πιθανότητος $P_n(n)$.

Ρίπτοντες π.χ. ἕνα "κανονικό" ζάρι - n=5 φορές, εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ πιθανότης νά μή ἐμφανισθῆ καθόλου ὁ ἀριθμός 6 εἶναι $P_5(0) \approx 0{,}402$.

'Εάν τώρα, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τό ἀνωτέρω ἐξαγόμενον καί ἀκόμη ὅτι εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν $\frac{p}{q}=\frac{1:6}{5:6}=\frac{1}{5}=0{,}2$, ἐφαρμόσωμεν - διαδοχικῶς - τόν ἀναδρομικόν τύπον (1.84) διά x=0,1,2,3,4 ἔχομεν εὐκόλως τά ἑξῆς:

$$P_5(1)=\frac{5-0}{0+1}\times 0{,}2\times 0{,}402 \approx 0{,}402$$

$$P_5(2)=\frac{5-1}{1+1}\times 0{,}2\times 0{,}402 \approx 0{,}161$$

$$P_5(3)=\frac{5-2}{2+1}\times 0{,}2\times 0{,}161 \approx 0{,}032$$

$$P_5(4)=\frac{5-3}{3+1}\times 0{,}2\times 0{,}032 \approx 0{,}003$$

$$P_5(5)=\frac{5-4}{4+1}\times 0{,}2\times 0{,}003 \approx 0{,}000$$

Τόσον ὅμως οἱ διάφοροι τρόποι ἀντιμετωπίσεως εἰς
τήν πρᾶξιν τῶν ὡς ἄνω ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν - πι-
ν α κ ο π ο ί η σ ι ς τῶν τιμῶν τῶν πιθανοτήτων

$$P_n(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \quad \text{καί} \quad P\{x \leq \alpha\}=\sum_{x=0}^{\alpha}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

διά διαφόρους τιμάς τῶν n καί p, τύποι διά τόν κ α τ ά
π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν ὑπολογισμόν αὐτῶν κλπ. - ὅ-

σου καί ή λεπτομερεστέρα γενικώτερον διερεύνησις τῶν ἰδιοτήτων τῶν πιθανοτήτων $P_n(x)$, ὡς αὗται ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως (1.79), θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἀργότερον (βλ. κεφ. 3).

Συγκεκριμένως, τά ὡς ἄνω προβλήματα θά μᾶς ἀπασχολήσουν - μεταξύ ἄλλων - κατά τήν μελέτην τῆς κατανομῆς πιθανοτήτων ἡ ὁποία ὁρίζεται - βλ. καί § (1.10.3) - ἐκ τῆς σχέσεως ἤ ἄλλως τοῦ ὑποδείγματος

$$P_n(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \text{ διά } x=0,1,2,\ldots,n$$

καί ἡ ὁποία, ὡς ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ποσότης $\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ ἀποτελεῖ, ὡς εἴδομεν, τόν γενικόν ὅρον τοῦ διωνυμικοῦ ἀναπτύγματος $(q+p)^n$, εἶναι γνωστή εὑρέως ὡς διωνυμική κατανομή.

Δοκιμαί Bernoulli ὑπό εὑρείαν ἔννοιαν

Ἡ ἔννοια τῶν δοκιμῶν B δύναται, ὡς εἶναι εὐνόητον, νά γενικευθῆ ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός

Μία ἀκολουθία n ἀνεξαρτήτων διαδοχικῶν δοκιμῶν καλεῖται ὑπό εὑρείαν ἔννοιαν ἀκολουθία δοκιμῶν Bernoulli ἐάν τά δυνατά ἀποτελέσματα οἱασδήποτε ἐξ αὐτῶν - συμβολιζόμενα ἐν γένει $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ - εἶναι k τῶ πλῆθος, αἱ δέ πιθανότητες αὐτῶν $P(\varepsilon_1),P(\varepsilon_2),\ldots,P(\varepsilon_k)$ - συμβολιζόμεναι ἀντιστοίχως $p_1,p_2,\ldots,p_k$, ὅπου φυσικά $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$ - παραμένουν ἀναλλοίωτοι - αἱ αὐταί - καθ' ὅλας τάς δοκιμάς.

Τό πρόβλημα τό ὁποῖον μᾶς ἀπασχολεῖ κατά βάσιν εἰς τήν μελέτην μιᾶς ὑπό εὑρείαν ἔννοιαν ἀκολουθίας δοκιμῶν Bernoulli εἶναι ἡ εὕρεσις -

ὁ ὑπολογισμός - τῆς πιθανότητος τοῦ ἐνδεχομένου "μεταξύ n τοιούτων δοκιμῶν νά ἔχωμεν - ἀνεξαρτήτως τάξεως - x_1 φορές τό ἀποτέλεσμα ε_1, x_2 φορές τό ε_2 κ.ο.κ. τέλος δέ x_k φορές τό ε_k" ὅπου φυσικά $x_i=0,1,2,\ldots,n$ διά $i=1,2,\ldots,k$ καί $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$.

Συμβολίζοντες τήν ἐν λόγῳ πιθανότητα μέ $P_n(x_1,x_2,\ldots,x_k)$, θά ἀποδείξωμεν ὅτι

$$P_n(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k} \qquad (1.85)$$

ὅπου φυσικά $x_i=0,1,2,\ldots,n$ διά $i=1,2,\ldots,k$ καί $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$.

Ἀπόδειξις

Ἡ πιθανότης τό ἐνδεχόμενον ε_1 νά πραγματοποιηθῆ εἰς x_1 συγκεκριμένας δοκιμάς, τό ε_2 εἰς ἑτέρας x_2 συγκεκριμένας ἐπίσης δοκιμάς κ.ο.κ. μέχρι καί τοῦ ε_k, συμφώνως πρός τήν πολλαπλασιαστικήν σχέσιν (1.76) ἰσοῦται πρός ἕνα γινόμενον n παραγόντων ἐκ τῶν ὁποίων οἱ x_1 εἶναι ἴσοι πρός p_1, οἱ x_2 ἴσοι πρός p_2 κ.ο.κ., τέλος δέ οἱ x_k ἴσοι πρός p_k, ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ πιθανότης ἰσοῦται πρός $p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$.

Ἡ διάταξις ὅμως μέ τήν ὁποίαν θά ἐμφανισθοῦν x_1 φορές τό ἀποτέλεσμα ε_1, x_2 φορές τό ε_2 κ.ο.κ. μᾶς εἶναι ἀδιάφορος. Κατά συνέπειαν, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους δυνάμεθα νά ὑποδιαιρέσωμεν τάς n δοκιμάς εἰς k ὁμάδας ἀπαρτιζομένας ἀντιστοίως ἐκ $x_1,x_2,\ldots,x_k$ τοιούτων εἶναι $\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}$ - βλ. § (1.10.3) - συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι ἡ ζητουμένη ἐν προκειμένῳ πιθανότης ἰσοῦται πρός $\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}$ φοράς τήν ὡς ἄνω πιθανότητα $p_1^{x_1}p_2^{x_1}\ldots p_k^{x_k}$, δίδεται δηλαδή ἐκ τῆς σχέσεως (1.85).

Οὕτω π.χ. ἐπιλέγοντες διαδοχικῶς - τό ἕνα μετά τό ἄλλο - καί μετ' ἐπαναθέσεως n=10 σφαιρίδια ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχούσης 2 λευκά, 4 μαῦρα, 8 κόκκινα καί 6 πράσινα σφαιρίδια, ἡ πιθανότης νά ἐξαχθοῦν $x_1=1$ λευκόν, $x_2=2$ μαῦρα, $x_3=4$ κόκκινα καί $x_4=3$ πράσινα εἶναι

$$P_{10}(1,2,4,3)=\frac{10!}{1!2!4!3!}\left(\frac{2}{20}\right)^1\left(\frac{4}{20}\right)^2\left(\frac{8}{20}\right)^4\left(\frac{6}{20}\right)^3\approx 0,035$$

Ὁμοίως, ρίπτοντες ἕνα "κανονικό" ζάρι $n=6$ φοράς, ἡ πιθανότης ἕκαστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,6 - τῶν δυνατῶν ἐν προκειμένῳ ἀποτελεσμάτων - νά ἐμφανισθῆ ἀπό μία ἀκριβῶς φορά εἶναι

$$P_6(1,1,1,1,1,1)=\frac{6!}{1!1!1!1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^6\approx 0,015,\ \text{κ.ο.κ.}$$

Θά ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων αἱ ὁποῖαι - συμφώνως πρός τό ὑπόδειγμα (1.85) - ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς διαφόρους πλειάδας $(x_1,x_2,\ldots x_k)$ - ὅπου $x_i=0,1,2,\ldots,n$ διά $i=1,2,\ldots,k$ καί $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ - ἰσοῦται πρός τήν μονάδα.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἡ ὡς ἄνω ἔκφρασις τῆς πιθανότητος $P_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - τό δεύτερον δηλαδή μέλος τῆς σχέσεως (1.85) - ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, τόν γ ε ν ι κ ό ν ὅ ρ ο ν τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ πολυωνύμου $(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n$. Κατά συνέπειαν - ὑπό τήν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ - ἔχομεν ἀμέσως ὅτι

$$\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_k} P_n(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n}\sum_{k_k=0}^{n}\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}p_1^{x_1}\times$$

$$\times p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}=(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n=1^n=1$$

Διά τόν λόγον ἄλλωστε αὐτόν - τῆς ταυτίσεως δηλαδή τῆς ἐκφράσεως (1.85) πρός τόν γενικόν ὅρον τοῦ π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ο ῦ ἀναπτύγματος $(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n$ - τό μαθηματικόν ὑπόδειγμα (1.85) - διά τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται ἡ κ α τ α ν ο μ ή τῆς συνολικῆς πιθανότητος $\Sigma P_n(x_1,x_2,\ldots,x_k)=1$ εἰς τάς διαφόρους πλειάδας $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ ἤ ὡς συνήθως λέγομεν περιγράφεται ἡ πιθανοθεωρητική δομή τοῦ δειγματικοῦ χώρου τοῦ συνθέτου πειράματος τῶν n ὑπό εὐρεῖαν ἔννοιαν δοκιμῶν B - εἶναι γνωστόν εὐρέως ὡς π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ή κ α τ α ν ο μ ή.

Μερικήν περίπτωσιν τῆς πολυωνυμικῆς κατανομῆς - διά k=2 - ἀποτελεῖ βεβαίως ἡ δ ι ω ν υ μ ι κ ή κατανομή. Λόγω τοῦ ἰδιάζοντος ἐνδιαφέροντός της, ἡ πολυωνυμική κατανομή ὅπως καί ἡ διωνυμική τοιαύτη θά μᾶς ἀπασχολήση διεξοδικώτερον εἰς τό Κεφάλαιον 5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐάν Α,Β,Γ εἶναι ἐνδεχόμενα ἀναφερόμενα εἰς τόν δειγματικόν χῶρον $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ καί συγκεκριμένως $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\Gamma=\{5,6,7,8,9,0\}$ νά εὑρεθοῦν τά ἐνδεχόμενα

   (i) $A\cup B\cup\Gamma$ (ii) $A\cap(B\cap\Gamma)$ (iii) $A\cup\bar{A}$
   (iv) $A\cup B$ (v) $\bar{B}\cap\bar{\Gamma}$ (vi) $(\bar{A}\cap\bar{B})\cup\bar{\Gamma}$

2. Ἐάν Α,Β,Γ εἶναι ἐνδεχόμενα ἀναφερόμενα εἰς τόν δειγματικόν χῶρον $\Omega=\{x/0\leq x\leq 20\}$ καί συγκεκριμένως $A=\{x/0\leq x\leq 5\}$, $B=\{x/3\leq x\leq 10\}$, $\Gamma=\{x/7\leq x\leq 15\}$ νά εὑρεθοῦν τά ἐνδεχόμενα

   (i) $A\cap\bar{B}$ (ii) $A\cup(B\cap\bar{\Gamma})$ (iii) $\overline{A\cup\Gamma}$
   (iv) $(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\bar{\Gamma}$ (v) $(\overline{A\cap B})\cup\Gamma$ (vi) $(A\cup\Omega)\cup\bar{\Gamma}$

3. Ἐάν Α,Β εἶναι ἐνδεχόμενα ἀναφερόμενα εἰς τόν δειγματικόν χῶρον $\Omega=\{(x,y)/x\geq 0,\ y\geq 0\}$ καί συγκεκριμένως

   $A=\{(x,y)/x\geq 0,\ 0\leq y\leq 5\}$
   $B=\{(x,y)/x\geq 0,\ 5\leq y\leq 10\}$

   νά εὑρεθοῦν τά ἐνδεχόμενα

   (i) $A\cup\bar{B}$ (ii) $\overline{A\cap B}$ (iii) $\bar{A}\cap\bar{B}$
   (iv) $\bar{A}\cap B$ (v) $(\bar{A}\cap\Omega)\cup B$ (vi) $(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$

4. Ἐάν Α,Β,Γ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω - οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα ἀναφερόμενα εἰς τόν δειγματικόν χῶρον Ω - ἀποδείξατε τάς κάτωθι σχέσεις

   (i) $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$ (v) $A\cup\Omega=\Omega$
   (ii) $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ (vi) $A\cap\Omega=A$
   (iii) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ (vii) $A\cup\bar{A}=\Omega$
   (iv) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ (viii) $A\cap\bar{A}=\emptyset$

5. Ἐάν A, B, Γ εἶναι τρία οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα ἀναφερόμενα εἰς ἕνα δειγματικόν χῶρον Ω - ἤτοι ἐάν A, B, Γ ὑποσύνολα τοῦ Ω - ἀποδείξατε ὅτι

(i) $(A-AB)\cup B=A\cup B$

(ii) $(A\cup B)-B=A\bar{B}$

(iii) $(A\cup B)-AB=A\bar{B}\cup\bar{A}B$

(iv) $A\cup B\cup\Gamma=A\cup(B-AB)\cup(\Gamma-A\Gamma)$

(v) $AB\Gamma\subseteq AB\cup A\Gamma\cup B\Gamma\subseteq A\cup B\cup\Gamma$

Σημείωσις: Διαφορά $A-B$ δύο συνόλων A καί B καλεῖται τό σύνολον τό ὁποῖον περιλαμβάνει τά στοιχεῖα τοῦ A τά ὁποῖα δέν ἀνήκουν εἰς τό B, εἶναι δηλαδή $A-B=A\bar{B}$.

6. Ρίπτονται δύο νομίσματα. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

A: Νά ἐμφανισθοῦν γράμματα εἰς τό ἕνα καί κορώνα εἰς τό ἄλλο

B: Νά ἐμφανισθῆ μία τουλάχιστον κορώνα

Γ: Νά μήν ἐμφανισθῆ κορώνα.

7. Ρίπτονται δύο κύβοι (ζάρια). Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

A: Τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων νά εἶναι πέντε

B: Τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων νά εἶναι μικρότερον τοῦ ἑπτά

Γ: Ἡ διαφορά τῶν δύο ἐνδείξεων νά εἶναι δύο

Δ: Ἡ μία ἔνδειξις νά εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης

E: Νά μή ἐμφανισθῆ ὁ ἄσσος

Z: Νά ἐμφανισθῆ εἰς τό ἕνα τουλάχιστον ζάρι ὁ ἄσσος

8. Ρίπτονται τέσσαρα νομίσματα. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

A: Νά ἐμφανισθοῦν δύο τουλάχιστον κορῶνες

B: Νά μή ἐμφανισθῆ κορώνα

Γ: Νά ἐμφανισθοῦν δύο κορῶνες καί δύο γράμματα

Δ: Ἡ διαφορά γραμμάτων καί κορωνῶν νά εἶναι δύο.

9. Ἐάν A,B,Γ εἶναι ἐνδεχόμενα ἑνός πειράματος τύχης Π - ὑποσύνολα τοῦ ἀντιστοίχου δειγματικοῦ χώρου Ω - καί

$P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$, $P(\Gamma)=\frac{1}{8}$, $P(A+B)=\frac{3}{8}$,

$P(A+\Gamma)=\frac{5}{16}$, $P(B+\Gamma)=\frac{5}{16}$ καί $P(A+B+\Gamma)=\frac{13}{32}$

ἀποδείξατε ὅτι $P(AB)=\frac{1}{8}$, $P(B\Gamma)=\frac{1}{16}$, $P(A\Gamma)=\frac{1}{16}$, $P(AB\Gamma)=\frac{1}{32}$.

10. Ἐάν A_1,A_2,A_3,A_4 εἶναι ἀνά δύο ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα μέ $P(A_i)=\frac{1}{8}$ διά $i=1,2,3,4$ καί $A=A_1+A_2+A_3$, $B=A_3+A_4$ δείξατε ὅτι:

$P(A+B)=\frac{1}{2}$, $P(AB)=\frac{1}{8}$, $P(\bar{A}B)=\frac{1}{8}$, $P(\bar{A}+B)=\frac{3}{4}$

11. Δύο ἐνδεχόμενα A καί B εἶναι τοιαῦτα ὥστε $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B/A)=\frac{1}{2}$ καί $P(A/B)=\frac{1}{4}$. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων εἶναι ἀληθής;

(α) Τά A καί B εἶναι μεταξύ των ἀσυμβίβαστα

(β) $P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{3}{4}$

(γ) $P(\bar{A}/B)+P(\bar{A}/\bar{B})=1$

12. Μία κληρωτίς περιέχει δύο λευκά καί τρία μαῦρα σφαιρίδια. Δύο σφαιρίδια ἐπιλέγονται τυχαίως. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

A: Ἀμφότερα τά σφαιρίδια νά εἶναι λευκά

B: Ἕνα τουλάχιστον σφαιρίδιον νά εἶναι μαῦρον

Γ: Νά ἐξαχθοῦν ἕνα λευκό καί ἕνα μαῦρο σφαιρίδιον πρῶτον, ἐάν ἡ ἐπιλογή τῶν σφαιριδίων γίνεται ἄνευ ἐπαναθέσεως καί δεύτερον, ἐάν γίνεται μετ'ἐπαναθέσεως.

13. Μία κληρωτίς περιέχει 2 λευκά, 3 μαῦρα καί 5 κόκκινα σφαιρίδια. Μία ἄλλη περιέχει 5 λευκά, 2 μαῦρα καί 3 κόκκινα. Ἐξ ἑκάστης κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

Α: Ἀμφότερα τά σφαιρίδια νά εἶναι λευκά

Β: Νά εἶναι τοῦ αὐτοῦ χρώματος

Γ: Νά εἶναι διαφόρου χρώματος.

14. Μία κληρωτίς περιέχει 2 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια. Τρία σφαιρίδια ἐπιλέγονται τυχαίως καί τίθενται εἰς μίαν ἄλλη κληρωτίδα. Ἐν συνεχεία ἐκ τῆς δευτέρας κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι λευκόν;

15. Τρεῖς κληρωτίδες Α, Β καί Γ περιέχουν ἀντιστοίχως 1 λευκό καί 2 μαῦρα σφαιρίδια, 3 λευκά καί 1 μαῦρο καί τέλος 2 λευκά καί 3 μαῦρα. Ἐξ ἑκάστης κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης μεταξύ τῶν ἐξαχθέντων τριῶν σφαιριδίων νά ὑπάρχουν 2 λευκά καί 1 μαῦρο;

16. Ἡ κληρωτίς Α περιλαμβάνει 10 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια ἡ δέ κληρωτίς Β περιέχει 3 λευκά καί 5 μαῦρα. Δύο σφαιρίδια ἐπιλεγόμενα τυχαίως ἐκ τῆς κληρωτίδος Α τίθενται εἰς τήν Β καί ἐν συνεχεία ἐκ τῆς Β ἐπιλέγεται ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης τό ἐν λόγω σφαιρίδιον νά εἶναι λευκόν;

17. Μία κληρωτίς περιλαμβάνει ἐννέα σφαιρίδια φέροντα τούς ἀριθμούς 1,2,...,9 καί μία ἄλλη ἑπτά σφαιρίδια μέ τούς ἀριθμούς 1,2,...,7. Ἐξ ἑκάστης ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον.

(α) Ποία ἡ πιθανότης τό ἄθροισμα αὐτῶν νά ὑπερβαίνη τόν ἀριθμόν 12;

(β) Ποία ἡ πιθανότης τό γινόμενον αὐτῶν νά ὑπερβαίνη τό 8;

(γ) Ποία ἡ πιθανότης ἀπό τήν πρώτη κληρωτίδα νά ἐξαχθῆ ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τήν δευτέρα;

18. Δύο ὅμοιες κληρωτίδες περιέχουν ἀντιστοίχως 3 λευκά καί 2 μαῦρα σφαιρίδια ἡ μία καί 2 λευκά καί 5 μαῦρα ἡ ἄλλη. Μία κληρωτίς ἐπιλέγεται τυχαίως καί ἐξ αὐτῆς ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι λευκόν;

19. Ἕνα νόμισμα ρίπτεται τέσσαρες φορές. Ἐάν A συμβολίζει τό ἐνδεχόμενον {κορώνα εἰς τήν πρώτην ρίψιν} καί B τό ἐνδεχόμενον {εἰς τάς 4 ρίψεις νά ἔχωμεν δύο κορῶνες καί δύο γράμματα} ἀποδείξατε ὅτι τά ἐνδεχόμενα A καί B εἶναι ἀνεξάρτητα.

20. Τρία ἄτομα A, B καί Γ λέγουν τήν ἀλήθεια μέ πιθανότητας $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ καί $\frac{1}{5}$ ἀντιστοίχως. Ὁ Γ κάνει μίαν δήλωσιν. Ὁ B λέγει ὅτι ὁ Γ εἶπε ψέμματα ἐνῶ ὁ A λέγει ὅτι ὁ Γ εἶπε ἀλήθεια. Νά εὑρεθῆ ἡ πιθανότης ἡ δήλωσις τοῦ Γ νά εἶναι ἀληθής.

21. Μία κληρωτίς περιλαμβάνει 3 λευκά καί 2 μαῦρα σφαιρίδια. Μία δευτέρα κληρωτίς περιλαμβάνει 1 λευκό καί 2 μαῦρα. Ἐκ τῆς πρώτης κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον καί τίθεται εἰς τήν δευτέρα ἐν συνεχεία δέ ἐπιλέγονται ἐκ τῆς δευτέρας δύο σφαιρίδια. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

A: Ἀμφότερα τά ἐπιλεγέντα - ἐκ τῆς δευτέρας κληρωτίδος - σφαιρίδια εἶναι μαῦρα

B: Ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν ὡς ἄνω σφαιριδίων εἶναι λευκόν.

22. Ἐκ τινος κληρωτίδος περιεχούσης 6 σφαιρίδια μέ τούς ἀριθμούς 1,2,...,6 ἐξάγονται τυχαίως - ἄνευ ἐπαναθέσεως - 3. Δοθέντος ὅτι ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν ἐξαχθεισῶν ἐνδείξεων εἶναι 5, ζητεῖται:

A: Ἡ πιθανότης ἡ μικροτέρα ἔνδειξις νά εἶναι 2

B: Ἡ πιθανότης τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων νά εἶναι 10.

23. Ρίπτονται δύο ζάρια. Ποία ἡ πιθανότης τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ἐνεφανίσθησαν νά εἶναι 7 δοθέντος - γνωστοῦ ὄντος - ὅτι εἶναι μονός ἀριθμός;

24. 'Από μία τράπουλα τῶν 52 παιγνιοχάρτων ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα, ἐν συνεχεία δέ - ἐκ τῶν ὑπολοίπων 51 - ἐπιλέγονται ἄνευ ἐπαναθέσεως 13. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τό ἐπιλεγέν ἀρχικῶς χαρτί ἦτο κόκκινο καί ἀκόμη ὅτι τά ἑπόμενα 13 εἶναι τοῦ ἰδίου - μεταξύ των - χρώματος ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τό χρῶμα τῶν ἐν λόγω χαρτιῶν νά εἶναι μαῦρο.

25. 'Η κληρωτίς Α περιέχει 2 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια. 'Η κληρωτίς Β περιέχει 3 λευκά καί 2 μαῦρα σφαιρίδια. Ἕνα σφαιρίδιον ἐπιλεγόμενον τυχαίως ἐκ τῆς Α τίθεται εἰς τήν Β καί ἐν συνεχεία ἕνα σφαιρίδιον ἐπιλέγεται τυχαίως ἐκ τῆς Β. 'Εάν τό ἐπιλεγέν ἐκ τῆς Β σφαιρίδιον εἶναι μαῦρο, ποία ἡ πιθανότης τό μεταφερθέν εἰς αὐτήν - ἐκ τῆς Α - σφαιρίδιον νά ἦτο λευκόν;

26. 'Εκάστη ἐκ 5 κληρωτίδων περιέχει 10 σφαιρίδια. Μία ἐξ αὐτῶν περιέχει 7 λευκά καί 3 μαῦρα, δύο ἄλλες περιέχουν ἀνά 5 λευκά καί 5 μαῦρα καί οἱ τελευταῖες δύο ἀνά 4 λευκά καί 6 μαῦρα σφαιρίδια. Μία κληρωτίς ἐπιλέγεται τυχαίως καί ἐξάγονται ἐξ αὐτῆς 5 σφαιρίδια. 'Εάν 3 ἐκ τῶν ἐν λόγω σφαιριδίων εἶναι λευκά καί 2 μαῦρα, ποία ἡ πιθανότης ἡ ἐπιλεγεῖσα κληρωτίς νά περιέχη 5 λευκά καί 5 μαῦρα σφαιρίδια;

27. 'Η κληρωτίς Α περιλαμβάνει 3 λευκά καί 5 μαῦρα σφαιρίδια ἐνῶ ἡ κληρωτίς Β περιέχει 4 λευκά καί 6 μαῦρα. Μία ἐκ τῶν ἐν λόγω κληρωτίδων ἐπιλέγεται τυχαίως καί ἐξ αὐτῆς ἐξάγονται ἄνευ ἐπαναθέσεως τρία σφαιρίδια. 'Εάν ἐξήχθησαν 2 λευκά καί 1 μαῦρο σφαιρίδιον, ποία ἡ πιθανότης νά ἐπελέγησαν ἐκ τῆς πρώτης κληρωτίδος;

28. Τρεῖς ὅμοιαι κληρωτίδες Α,Β,Γ περιλαμβάνουν ἀντιστοίχως 1 λευκό καί 2 μαῦρα σφαιρίδια, 2 λευκά καί 1 μαῦρο καί τέλος 2 λευκά καί 2 μαῦρα. Μία κληρωτίς ἐπιλέγεται τυχαίως καί ἐξ αὐτῆς ἐξάγεται ἕνα σφαιρίδιον. 'Εάν τό ἐξαχθέν σφαιρίδιον εἶναι λευκόν, ποία ἡ πιθανότης νά ἐξήχθη ἐκ τῆς τρίτης κληρωτίδος;

29. Ἀπό μία κληρωτίδα Α περιέχουσα 5 λευκά καί 5 μαῦρα σφαιρίδια ἐπιλέγονται τυχαίως 5 καί τίθενται εἰς μίαν δευτέρα - κενή - κληρωτίδα Β. Ἐκ τῆς Β ἐπιλέγονται τυχαίως 3 σφαιρίδια καί τίθενται εἰς μίαν τρίτη - κενή - κληρωτίδα Γ. Τέλος, ἐκ τῆς Γ ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον τό ὁποῖον συμβαίνη νά εἶναι λευκόν. Ποία ἡ πιθανότης ἐκ τῆς κληρωτίδος Α νά ἔχουν ἐξαχθῆ καί τά 5 λευκά σφαιρίδια;

30. Μία κληρωτίς περιέχει 2 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια καί μία δευτέρα 2 λευκά καί 2 μαῦρα. Ἕνα σφαιρίδιον ἐπιλέγεται τυχαίως ἐκ τῆς πρώτης καί τίθεται εἰς τήν δευτέραν καί ἐν συνεχεία ἐκ τῆς δευτέρας ἐπιλέγεται ἕνα σφαιρίδιον. Ἐάν τό ἐπιλεγέν ἐκ τῆς δευτέρας κληρωτίδος σφαιρίδιον ἦτο λευκόν, ποία ἡ πιθανότης τό ἐπιλεγέν ἐκ τῆς πρώτης - καί μεταφερθέν εἰς τήν δευτέραν - νά ἦτο ἐπίσης λευκόν;

31. Ἐκ τῶν νοσηλευομένων εἰς ἕνα νοσοκομεῖον ἀσθενῶν 10% ὑποφέρουν ἀπό τήν ἀσθένεια Α, 30% ἀπό τήν Β καί 60% ἀπό τήν Γ. Ἐκ τῶν πρώτων θεραπεύεται τό 40%, ἐκ τῶν δευτέρων τό 80% καί ἐκ τῶν τρίτων τό 90%. Ποία ἡ πιθανότης νά ἀνήκη εἰς τήν κατηγορίαν Α ἕνας ἀσθενής ὁ ὁποῖος ἐθεραπεύθη καί ποία ἡ ἐν λόγω πιθανότης ἐάν ἀπέθανε;

32. Εἰς μίαν πόλιν ἐκδίδονται τρεῖς ἐφημερίδες Α, Β καί Γ. Ἐάν ἐκ τῶν διαβιούντων εἰς αὐτήν τήν πόλιν οἰκογενειῶν 25% διαβάζουν τήν Α, 15% τήν Β, 10% τήν Γ, 12% τήν Α καί Β, 8% τήν Α καί Γ, 5% τήν Β καί Γ καί τέλος 3% καί τάς τρεῖς ἐφημερίδας, ὑπολογίσατε:

(α) Ποῖον ποσοστόν οἰκογενειῶν διαβάζουν μία τουλάχιστον ἐφημερίδα;

(β) Μεταξύ ἐκείνων πού διαβάζουν μία τουλάχιστον ἐφημερίδα, ποῖον ποσοστόν διαβάζει ἀμφοτέρας τάς Α καί Β;

(γ) Ποῖον ποσοστόν δέν διαβάζει ἐφημερίδας;

33. Οἱ κάτοικοι μιᾶς πόλεως κατανέμονται ἐξ ἀπόψεως φύλου, ἡλικίας καί οἰκογενειακῆς καταστάσεως ὡς ἐξῆς:

	Α Ρ Ρ Ε Ν Ε Σ			Θ Η Λ Ε Ι Σ		
	ἕως 20	21-50	51 →	ἕως 20	21-50	51 →
Ἄγαμοι	185	135	20	140	150	10
Ἔγγαμοι	20	140	70	70	180	80
Χῆροι	1	10	2	10	20	30
Διαζευγμένοι	4	15	8	20	20	10

Συναντῶμεν τυχαίως μίαν γυναῖκα καί ἕναν ἡλικιωμένο (51 καί ἄνω) ἄνδρα κατοίκους τῆς ἐν λόγῳ πόλεως

Ποία ἡ πιθανότης νά εἶναι ἀμφότεροι διαζευγμένοι; Ἀμφότεροι ἄγαμοι;

34. Μία κληρωτίς περιέχει 7 λευκά καί 3 μαῦρα σφαιρίδια. Πέντε σφαιρίδια ἐξάγονται τυχαίως. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθοῦν τρία λευκά σφαιρίδια - καί φυσικά δύο μαῦρα - ἐάν

(α) Ἡ ἐξαγωγή γίνεται ἄνευ ἐπαναθέσεως

(β) Ἡ ἐξαγωγή γίνεται μετ'ἐπαναθέσεως.

35. Ἡ κληρωτίς Α περιέχει α λευκά καί β μαῦρα σφαιρίδια ἡ δέ Β γ λευκά καί δ μαῦρα. Ἐξ ἑκάστης κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθοῦν σφαιρίδια διαφόρου χρώματος; Τοῦ ἰδίου;

36. Ἐκ μιᾶς τράπουλας τῶν 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνονται ἄνευ ἐπαναθέσεως 5. Ποία ἡ πιθανότης μεταξύ αὐτῶν νά ἔχωμεν:

Α: Πέντε ἀνόμοια χαρτιά

Β: Δύο ὅμοια καί ἄλλα τρία διάφορα (ζεῦγος)

Γ: Δύο ὅμοια, ἄλλα δύο ὅμοια καί κάποιο ἄλλο (ζεύγη)

Δ: Τρία ὅμοια καί δύο ἄλλα διάφορα μεταξύ των (τρία)

Ε: Πέντε διαδοχικά χαρτιά ὄχι τοῦ αὐτοῦ χρώματος (κέντα)

Ζ: Τρία ὅμοια καί ἄλλα δύο ἐπίσης ὅμοια μεταξύ των (φούλ)

Η: Πέντε χαρτιά τοῦ ἰδίου χρώματος (χρῶμα)

Θ: Τέσσαρα ὅμοια καί ἕνα οἱοδήποτε ἄλλο (καρρέ)

Ι: Πέντε διαδοχικά χαρτιά τοῦ ἰδίου χρώματος (φλάς)

37. Ἐξ ἑνός κιβωτίου περιέχοντος 6 ζεύγη ὑποδημάτων λαμβάνονται τυχαίως 4 ὑποδήματα. Ποία ἡ πιθανότης μεταξύ τῶν ἐξαχθέντων νά περιλαμβάνωνται:

Α: Ἕνα ζεῦγος

Β: Δύο ζεύγη.

38. Ἀπό μία τράπουλα τῶν 52 παιγνιοχάρτων ἐπιλέγονται τυχαίως καί ἄνευ ἐπαναθέσεως δύο. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

Α: Νά εἶναι ἀμφότερα σπαθιά

Β: Ἕνα τουλάχιστον νά εἶναι κούπα

Γ: Ἀμφότερα νά εἶναι φιγοῦρες

Δ: Ἕνα τουλάχιστον νά εἶναι ἄσσος

Ε: Νά ἐξαχθοῦν μία ντάμα καί ἕνα σπαθί

Ζ: Νά ἐξαχθοῦν ἕνας ρήγας καί μία ντάμα.

39. Μία οἰκογένεια ἔχει 5 τέκνα. Ποία ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων;

Α: Τά τρία τελευταῖα νά εἶναι ἀγόρια

Β: Τά ἀγόρια νά εἶναι περισσότερα ἀπό τά κορίτσια

Γ: Διαδοχικά παιδιά νά εἶναι διαφόρου φύλου.

40. Ρίπτονται τρία ζάρια. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

Α: Νά ἐμφανισθοῦν τρεῖς ἄρτιοι (ζυγοί) ἀριθμοί

Β: Νά ἐμφανισθοῦν οἱ ἀριθμοί 1,2,3

Γ: Τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων νά εἶναι πέντε.

41. Ἕνα ζεῦγος ζαριῶν ρίπτεται δύο φοράς. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ τό αὐτό ἀκριβῶς ἀποτέλεσμα:

(α) ἐάν τά ζάρια εἶναι διάφορα (ἕνα ἄσπρο, ἕνα κόκκινο), καί

(β) ἐάν τά ζάρια δέν διαφέρουν μεταξύ των.

Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τοῦ ἰδίου ἐνδεχομένου ἐάν ριφθοῦν δύο φορές τρία ζάρια (πρῶτον διάφορα μεταξύ των καί δεύτερον ὅμοια).

42. Ποῖον ἐκ τῶν κατωτέρω ἐνδεχομένων Α καί Β εἶναι περισσότερον πιθανόν;

Α: Ρίπτοντες ἕνα ζάρι 4 φορές νά ἐμφανισθῇ μία τουλάχιστον φορά ὁ ἄσσος, ἤ

Β: Ρίπτοντες ἕνα ζεῦγος ζαριῶν 24 φορές νά ἐμφανισθοῦν μία τουλάχιστον φορά ἄσσοι;

43. Πέντε μονοψήφιοι ἀριθμοί ἐπιλέγονται τυχαίως μετ' ἐπαναθέσεως. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

Α: Νά μήν ἐξαχθῇ ὁ ἀριθμός 0

Β: Νά μήν ἐξαχθῇ οὔτε ὁ ἀριθμός 0 οὔτε ὁ ἀριθμός 1

Γ: Νά μήν ἐξαχθῇ τουλάχιστον ἕνας ἐκ τῶν ἀριθμῶν 0 καί 1

Δ: Νά ἐξαχθοῦν πέντε διάφοροι ἀριθμοί

Ε: Ἕνας ἀριθμός νά ἐξαχθῇ δύο φορές

Ζ: Ἕνας ἀριθμός νά ἐξαχθῇ τό πολύ τρεῖς φορές.

44. Ρίπτονται 6 νομίσματα. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐνεφανίσθησαν δύο τουλάχιστον κορῶνες, ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων:

Α: Οἱ κορῶνες νά εἶναι - ἀκριβῶς - τέσσαρες

Β: Νά εἶναι τουλάχιστον τέσσαρες.

45. Ποία ἡ πιθανότης τά γενέθλια 12 ἀτόμων νά εἶναι εἰς 12 διαφόρους μῆνας τοῦ ἔτους;

46. Ποία ἡ πιθανότης τά γενέθλια τῶν μελῶν μιᾶς τετραμελοῦς οἰκογενείας νά εἶναι τόν ἴδιο μῆνα; Σέ δύο διαφόρους μῆνας;

47. Τρία σφαιρίδια ρίπτονται τυχαίως εἰς πέντε δοχεῖα. Ποία ἡ πιθανότης εἰς οὐδέν δοχεῖον νά πέσουν περισσότερα τοῦ ἑνός σφαιρίδια;

48. Τρεῖς κληρωτίδες περιέχουν 2,3 καί 4 σφαιρίδια φέροντα ἀντιστοίχως τούς ἀριθμούς (1,2), (1,2,3), (1,2,3,4). Ἐξ ἑκάστης κληρωτίδος ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον. Ποία ἡ πιθανότης οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί νά πληροῦν τήν σχέσιν $X_1<X_2<X_3$;

49. Μία κληρωτίς περιέχει τούς ἀριθμούς 1,2,...,n. Ἐπιλέγονται - ἄνευ ἐπαναθέσεως - m ἀριθμοί. Ποία ἡ πιθανότης ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν νά εἶναι ἴσος πρός k ($m\leq k\leq n$);

50. Δώδεκα σφαιρίδια ρίπτονται τυχαίως εἰς τρία δοχεῖα. Ποία ἡ πιθανότης νά πέσουν 3 σφαιρίδια εἰς τό πρῶτον δοχεῖον;

51. Τέσσαρα σφαιρίδια φέροντα τούς ἀριθμούς 1,2,3,4 ρίπτονται τυχαίως εἰς 4 δοχεῖα φέροντα τούς ἀριθμούς 1,2,3,4. Ποία ἡ πιθανότης οὐδέν ἐκ τῶν σφαιριδίων νά πέσῃ εἰς δοχεῖον μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν;

52. Ποία ἡ πιθανότης ρίπτοντες ἕξη ζάρια νά ἐμφανισθοῦν ἀριθμοί μέ ἄθροισμα 20;

53. Δύο φίλοι εὑρίσκονται τυχαίως εἰς μίαν σειρά n ἀτόμων. Ποία ἡ πιθανότης μεταξύ αὐτῶν νά ὑπάρχουν k ἄτομα ($k\leq n-2$);

54. Δύο φίλοι A καί B ρίπτουν - ἕκαστος - δύο νομίσματα καί συμφωνοῦν τά ἑξῆς: Ἐάν ρίψουν τόν ἴδιο ἀριθμό κορωνῶν κερδίζει ὁ A εἰς οἱανδήποτε δέ ἄλλην περίπτωσιν ὁ B. Ποία ἡ πιθανότης νά κερδίσῃ ὁ A;

Γενίκευσις: Ὑποθέσατε ὅτι ἕκαστος ρίπτει n νομίσματα.

55. Ρίπτονται 6 ζάρια. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθοῦν καί αἱ 6 δυναταί ἐνδείξεις, ἤτοι οἱ ἀριθμοί 1,2,3,4,5,6. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ ἐν λόγω ἐνδεχομένου ἐάν ἐρρίπτοντο 12 ζάρια;

56. Ρίπτομεν συνεχῶς δύο ζάρια. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ ἄθροισμα 6 πρίν νά ἐμφανισθῇ ἄθροισμα 5;

57. Ἐκ τινος κληρωτίδος περιεχούσης 1 λευκό, 2 κόκκινα, 3 πράσινα καί 4 μαῦρα σφαιρίδια ἐπιλέγεται τυχαίως ἕνα σφαιρίδιον. Τοῦτο ἐπανατίθεται εἰς τήν κληρωτίδα καί γίνεται δευτέρα ἐπιλογή κ.ο.κ. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐξαχθῇ ἕνα κόκκινο σφαιρίδιον πρίν ἐξαχθῇ πράσινο;

58. Ἕξη σφαιρίδια ρίπτονται τυχαίως εἰς ἕξη δοχεῖα. Ὑπολογίσατε τήν πιθανότητα τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

A: Ἕνα δοχεῖο νά παραμένη ἄδειο

B: Τά ἕξη σφαιρίδια νά πέσουν εἰς τό αὐτό δοχεῖον

Γ: Δύο δοχεῖα νά δεχθοῦν ἀνά τρία σφαιρίδια καί τά ὑπόλοιπα νά παραμείνουν ἄδεια.

59. Ὁ A ρίπτει ἕνα νόμισμα 3 φορές καί ἐν συνεχεία ὁ B τά ρίπτει 5 φορές. Ὁ A κερδίζει ἐάν φέρη ἔστω καί μία κορώνα περισσότερο ἀπό τόν B ἐνῶ διά νά κερδίση ὁ B πρέπει νά φέρη δύο τουλάχιστον κορῶνες περισσότερες ἀπό τόν A. Εἰς οἱανδήποτε ἄλλην περίπτωσιν συμφωνοῦν ὅτι οὐδείς κερδίζει (ἰσοπαλία).

Ποία ἡ πιθανότης νά κερδίση ὁ A καί ποία ὁ B;

60. Ἐκ τινος πληθυσμοῦ μεγέθους N=5 μονάδων ἐπιλέγεται τυχαίως δεῖγμα n=15 μονάδων. Ποία ἡ πιθανότης ἑκάστη μονάς τοῦ πληθυσμοῦ νά περιληφθῇ εἰς τό δεῖγμα τρεῖς φορές (ἀκριβῶς);

61. Ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ μεγέθους N ἐπιλέγεται τυχαίως δεῖγμα μεγέθους n. Ποία ἡ πιθανότης οὐδεμία ἐκ r συγκεκριμένων μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ νά περιληφθῇ εἰς τό δεῖγμα:

(α) ἐάν ἡ δειγματοληψία γίνεται ἄνευ ἐπαναθέσεως καί

(β) ἐάν γίνεται μετ' ἐπαναθέσεως;

Ἐφαρμογή διά N=10, n=3, r=2.

62. Μία κληρωτίς περιέχει σφαιρίδια φέροντα τούς ἀριθμούς 1, 2,...,7. Τά σφαιρίδια ἐξάγονται ἕνα πρός ἕνα ἄνευ ἐπαναθέσεως. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν κάτωθι ἐνδεχομένων:

A: Τά 4 πρῶτα σφαιρίδια νά φέρουν μονούς ἀριθμούς

B: Τά μονά καί τά ζυγά σφαιρίδια νά ἐναλλάσσωνται

Γ: Τό πρῶτο σφαιρίδιο νά εἶναι ζυγό καί τό τελευταῖο μονό

Δ: Τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων σφαιριδίων νά εἶναι μικρότερον τοῦ 8

E: Τά τρία πρῶτα σφαιρίδια ἔχουν ἀριθμούς πληροῦντας τήν σχέσιν $X_1<X_2<X_3$.

63. Ρίπτομεν n ζάρια. Ποία ἡ πιθανότης p_n ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,6 νά ἐμφανισθῇ τουλάχιστον μία φορά;

Ὑπολογίσατε διά n=10 τήν πιθανότητα p_{10}.

64. Δύο ζάρια ρίπτονται 100 φορές. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ ἄθροισμα 12 τρεῖς τουλάχιστον φορές;

65. Ἑκάστη 100 διαδοχικῶν δοκιμῶν ὁδηγεῖ εἰς ἐπιτυχίαν (E) μέ πιθανότητα $\frac{1}{3}$ καί εἰς ἀποτυχίαν μέ πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Ποῖος ὁ πιθανώτερος ἀριθμός ἐπιτυχιῶν καί ποία ἡ πιθανότης αὐτοῦ;