ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

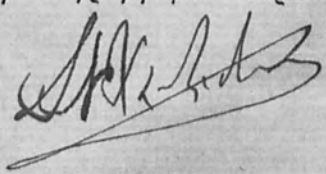
ΕΙΣ ΤΗΝ

ΑΝΩΤΕΡΑΝ ΑΛΓΕΒΡΑΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
(8 — Ὁδὸς Λυκούργου — 8)
1898

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου θεωρεῖται προερχόμενον ἐκ τυποκλοπίας.



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐν τῷ παρόντι βιβλίῳ ἐξέθηκα τὰ διάφορα εἴδη τῶν ἀριθμῶν τὰ πρὸς διάπλασιν τῆς ἀλγέβρας ἀπαιτούμενα, τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους καὶ τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀναγκαίαν ἐξάρτησιν, ἔτι δὲ καὶ τοὺς νόμους, οἵτινες διέπουσι τὰς ἐπ' αὐτῶν τέσσαρας πράξεις καὶ ὁρίζουσιν αὐτὰς ἐντελῶς. Τοὺς νόμους τούτους εὑρίσκομεν μὲν καὶ ἀποδεικνύομεν ἰσχύοντας ἐπὶ τῶν ἁπλουστάτων ἀριθμῶν, οὓς πρώτους πάντων ἀπαντῶμεν, τῶν ἀκεραίων, διατηροῦμεν δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν λοιπῶν, οὓς κατόπιν, χάριν τῆς ἀναπτύξεως καὶ προόδου τῆς ἀλγέβρας, σχηματίζομεν καὶ εἰσάγομεν· καὶ τοῦτο ὁρίζει τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις. Οἱ νόμοι οὗτοι εἶνε ἐπομένως εἴδός τι ἀρχῶν ἢ ὁρισμῶν, ἐφ' ὧν τὸ ὅλον οἰκοδόμημα τῆς ἀλγέβρας στηρίζεται· καὶ ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὴν ἄλγεβραν ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ τὰ ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας ὁρίζουσιν ἐντελῶς καὶ περιέχουσιν αὐτήν. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶνε, ὅτι τὰ μὲν γεωμετρικὰ ἀξιώματα ἐκφράζουσί τι, οὗ ἡ παραδοχὴ ἐπιβάλλεται ἡμῖν ὑπὸ τῆς φύσεως· ἡ δὲ παραδοχὴ τῶν εἰρημένων νόμων ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν (ὡς καὶ ἡ εἰσαγωγὴ διαφόρων εἰδῶν ἀριθμῶν) εἶνέ τι σκόπιμον, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἀπαραίτητον. Ὅτι δὲ ἡ παραδοχὴ τῶν νόμων τούτων ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν δὲν εἶνε ἀναγκαία, γίνεται δῆλον καὶ ἐκ τούτου, ὅτι, καὶ μεταβαλλομένων τινῶν ἐξ αὐτῶν, πάλιν εὑρίσκεται ἄλλη ἄλγεβρα, τέλειόν τι καὶ ἀντιφάσεων ὅλως ἀπηλλαγμένον ἀποτελοῦσα καὶ ἐφαρμογὰς γεωμετρικὰς ἔχουσα.

Ἐπειδὴ ἀληθὴς ἐπιστήμη, ἄνευ τῆς τελείας κατανοήσεως τῶν ἀρχῶν, ἐφ' ὧν στηρίζεται, δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ, αἱ δὲ ἀρχαὶ τῆς ἀλγέβρας ἀτελῶς ἐκτίθενται ἐν τοῖς διδακτικοῖς βιβλίοις, ἐθε-

ώρησα καλὸν νὰ προβῶ εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ παρόντος ἔργου, ἐν τῷ ὁποίῳ συμπεριελήφθησαν καὶ αἱ εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας ἀπαραίτητοι θεωρίαι, (οἷαι, ἡ τῶν ὁρίων, ἡ τῶν ἀλγεβρικῶν πολυωνύμων καὶ τῶν ῥιζῶν αὐτῶν, ἡ τῶν ὁριζουσῶν κτλ), ὡς ἀναγκαῖαι εἰς τὴν ἀποπεράτωσιν τοῦ ἔργου, ἤτοι εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εὐρυνθῇ περισσότερον.

Βοήθημα ἐν τῇ συντάξει τοῦ βιβλίου μόνον σχεδὸν εἶχον τὴν διδασκαλίαν τοῦ διασήμου καθηγητοῦ C. Weierstrass, οὗ τὰ μαθήματα ηὐτύχησα νὰ ἀκούσω ἐν Βερολίνῳ· διότι, πλὴν τοῦ συγγράμματος τοῦ H. Hankel (Theorie der complexen Zahlen systeme 1867), οὐδὲν ἄλλο, οὔτε ἐν τῇ γαλλικῇ γλώσσῃ, οὔτε ἐν τῇ γερμανικῇ, ὅσον ἐμοὶ γνωστόν, ὑπάρχει, πραγματευόμενον τὰ τῶν ἀριθμῶν ὑπὸ τὴν γενικὴν ταύτην ἔποψιν. Ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐν πολλοῖς εἶνε ἀσαφὲς καὶ ἔν τισιν ἐλλιπές, μάλιστα δὲ ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1879

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ ἐκδόσει διετηρήθη μὲν ἡ θεμελιώδης ἰδέα καὶ τὸ σχέδιον τοῦ βιβλίου, ἐγένοντο δ' ὅμως προσθῆκαι πολλαὶ καὶ μεταβολαί τινες, δι' ὧν, ὡς φρονῶ, καὶ ἡ κατανόησις τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος ἀποβαίνει εὐκολωτέρα, καὶ τὸ σύγγραμμα τελειότερον. Ἐκ τῶν προσθηκῶν ἄξιαι μνείας εἶνε, ἡ θεωρία τῶν ἰσοζύγων πράξεων καὶ τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστρόφων, ἡ πρόσθεσις τῶν τμημάτων, ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν τμημάτων ἐπιπέδου ἐπὶ τοὺς μιγάδας ἀριθμούς· διεσκευάσθησαν δὲ πλὴν ἄλλων τινῶν καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀπειρομερῶν ἀριθμῶν, ἡ θεωρία τῶν δυνάμεων, ὧν οἱ ἐκθέται εἶνε ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀριθμητικῶν συστημάτων ἐν γένει, ἥτις καὶ ἔλαβεν ἱκανὴν αὔξησιν· ἐπίσης ἐξετέθησαν λεπτομερέστερον αἱ ἐφαρμογαὶ τῶν ὁριζουσῶν εἰς τὴν λύσιν τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Αὐγούστου 1898.

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣ ΤΗΝ

ΑΝΩΤΕΡΑΝ ΑΛΓΕΒΡΑΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Αἱ ἔννοιαι τοῦ *ἑνὸς* καὶ τῶν *πολλῶν* εἶνε *πρῶται ἔννοιαι.*

2. Ἐὰν συγκρίνωμεν πλῆθός τι πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων, ἐξ ὧν σύγκειται (θεωροῦντες ταῦτα ὅμοια), σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ἀριθμοῦ.* Ἡ σύγκρισις αὕτη λέγεται *ἀρίθμησις* καὶ γίνεται ὡς ἀκολούθως· ὁ νοῦς προσηλοῦται εἰς ἓν τῶν ὁμοίων μερῶν καὶ χωρίζει τοῦτο ἀπὸ τῶν λοιπῶν καλῶν αὐτὸ *ἕν* ἢ *μονάδα*· ἔπειτα συνάπτει ἓν ἕτερον μετὰ τοῦ πρώτου καὶ ὀνομάζει ταῦτα ὁμοῦ *δύο*· καὶ οὕτω καθεξῆς.

3. Ἀριθμὸς ἄρα εἶνε ἔννοια, δι' ἧς ἐκφράζομεν τὴν σχέσιν πολλῶν ὁμοίων ἀντικειμένων πρὸς ἓν τούτων, ὅταν θεωρῶμεν αὐτὰ μόνον ὑπὸ τὴν ἔποψιν τοῦ πλήθους.

Σημ. Αἱ ἔννοιαι αὗται ἢ οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται καὶ μεταδίδονται ἀπὸ ἑνὸς εἰς ἄλλον ἄνθρωπον διὰ σημείων ἐξωτερικῶν, γραπτῶν ἢ προφορικῶν (λέξεων). Οἱ δὲ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς διὰ τῶν σημείων ἢ συμβόλων τούτων κατορθοῦται ἡ παράστασις τῶν ἀριθμῶν εἶνε γνωστοὶ ἐκ τῶν Στοιχείων τῆς Ἀριθμητικῆς

4. Οἱ κατὰ τὰ εἰρημένα ὑπὸ τοῦ νοῦ σχηματιζόμενοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι σειρὰν ἄπειρον, ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ ἑνός, ἐν ᾗ ἕκαστος γίνεται ἀπὸ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ μιᾶς μονάδος. Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *ἄθροισμα* πολλῶν μονάδων, ἤτοι ἡ μονὰς πολλάκις ἐπαναλαμβανομένη.

5. *Ἴσοι* λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν λογιστικήν, (τὴν ἐκ τῆς ἰδιαιτέρας ὄψεως, καθ' ἣν ὁ νοῦς ἐξετάζει τὰ ἀντικείμενα, προκύπτουσαν ἐπιστήμην), ὅταν αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτοὺς μονάδες δύνανται

οὕτω νὰ συσχετισθῶσιν, ὥστε εἰς ἑκάστην τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχῇ μία τοῦ ἄλλου καὶ τἀνάπαλιν. *Ἄνισοι δέ, ἐὰν εἰς τὴν τοιαύτην τῶν μονάδων αὐτῶν συσχέτισιν μονάδες τινὲς τοῦ ἑτέρου τούτων μὴ ἔχωσιν ἀντιστοιχούσας ἐν τῷ ἄλλῳ, ὅτε ὁ πρῶτος λέγεται μείζων τοῦ δευτέρου, ἢ ὅτι ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἢ ὁ δεύτερος.*

6. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν γίνεται φανερόν, ὅτι ἰσχύουσιν ἐπ' αὐτῆς οἱ ἑπόμενοι *λογικοὶ νόμοι* (οἱ ἐπὶ πάσης ἰσότητος καθόλου ἰσχύοντες).

α΄) *Οἱ τῷ αὐτῷ ἴσοι ἀριθμοὶ εἰσὶ καὶ ἀλλήλοις ἴσοι.*

β΄.) Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἴσων ἀριθμῶν προστεθῇ μία μονάς, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, καὶ γενικῶς, *ἐὰν εἰς ἴσους προστεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοί, οἱ προκύπτοντες εἶνε ἴσοι.*

7. Πάντα τὰ ζητήματα, ἅτινα παρουσιάζονται εἰς τὸν νοῦν, ὅταν θεωρῇ τὰ ἀντικείμενα ὑπὸ τὴν ἔποψιν τοῦ πλήθους, ἀνάγονται εἰς τὰ τέσσαρα στοιχειώδη· *πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν.*

Πρόσθεσις.

8. Εἰς τὴν πρόσθεσιν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουσιν οἱ δεδομένοι ὁμοῦ· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται *ἄθροισμα* τῶν δοθέντων.

9. Ἡ πρόσθεσις δύο ἀριθμῶν, ὡς τῶν α καὶ β, δύναται νὰ γείνῃ εἴτε ἂν εἰς τὸν α προσθέσωμεν διαδοχικῶς καὶ ἀνὰ μίαν πάσας τὰς μονάδας τοῦ β, ὅτε λέγομεν ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν α προσθέτομεν τὸν β καὶ παριστῶμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ

$$\alpha+\beta$$

εἴτε, ἂν τοὐναντίον προσθέσωμεν εἰς τὸν β ἀνὰ μίαν καὶ διαδοχικῶς πάσας τὰς μονάδας τοῦ α, ὅτε παριστῶμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ

$$\beta+\alpha$$

10. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν πρόκειται νὰ γείνῃ ἔπειτα ἄλλη πρᾶξις, ἐγκλείεται τὸ ἄθροισμα εἰς παρένθεσιν, ὡς $(\alpha+\beta)$ ἢ $[\alpha+\beta]$.

11. Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις πάντοτε δυνατή· ἤτοι, δοθέντων ὡς ἔτυχε δύο ἀριθμῶν, ὑπάρχει πάντοτε εἷς ἀριθμὸς καὶ εἷς μόνος ἴσος τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν.

12. Περισσοτέρους δοθέντας ἀριθμούς, ὡς τοὺς α, β, γ, δ... δυνάμεθα

νὰ προσθέσωμεν, ἐὰν προσθέσωμεν πρῶτον δύο ἐξ αὐτῶν ἔπειτα εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα προσθέσωμεν τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

13. Ἡ πρόσθεσις ἔχει τὰς ἑπομένας δύο ἀρχικὰς ἰδιότητας.

α΄.) *Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ὡς τῶν α καὶ β, εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό, εἴτε εἰς τὸν πρῶτον προσθέσωμεν τὸν δεύτερον, εἴτε εἰς τὸν δεύτερον προσθέσωμεν τὸν πρῶτον*

Τοῦτο ἐκφράζει ἡ ἰσότης

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

β΄.) *Εἴτε τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν εἰς ἄλλον, εἴτε αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, ἓν καὶ τὸ αὐτὸ προκύπτει ἄθροισμα.*

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐκφράζει ἡ ἰσότης

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

ἥτις καὶ ὡς ἐξῆς δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ·

Ἐὰν ἀριθμὸς (ὁ γ) προστεθῇ εἰς τὸ ἕτερον τῶν μερῶν (β) ἀθροίσματος (τοῦ α+β), εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ προστεθῇ εἰς αὐτὸ τὸ ἄθροισμα.

14. Αἱ ἰδιότητες αὗται τῆς προσθέσεως εἶνε φανεραὶ ἀφ' ἑαυτῶν· καὶ ἡ μὲν πρώτη λέγεται *ἰδιότης τῆς ἀνταλλαγῆς*· διότι κατ' αὐτὴν δύνανται οἱ δύο προσθετέοι ἀριθμοὶ νὰ ἀνταλλαχθῶσι χωρὶς νὰ βλαφθῇ τὸ ἄθροισμα· ἡ δὲ δευτέρα λέγεται *ἰδιότης διαλυτική*· διότι κατ' αὐτὴν ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα ἄλλον, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν διαδοχικῶς τὰ μέρη αὐτοῦ.

15. Τῶν δύο τούτων ἰδιοτήτων ἀκολούθημα ἀναγκαῖον (ὡς παρακατιόντες θὰ ἀποδείξωμεν) εἶνε ἡ πλήρης ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν, καθ' ἣν λαμβάνονται οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ προσθέσει.

16. Ἐκ τῶν δύο ἀρχικῶν ἰδιοτήτων ὁρίζεται ἐντελῶς ἡ πρόσθεσις ὡς πρᾶξις, ἐὰν προσληφθῇ καὶ ἡ ἰδιότης·

$$\alpha\star 1=\alpha_1 \qquad (1)$$

ἔνθα α_1 εἶνε ὁ ἑπόμενος τῷ α ἀριθμὸς ἐν τῇ σειρᾷ τῶν ἀριθμῶν·

1 2 3 4 5 . . .

τὸ δὲ σημεῖον ★ γραφόμενον μεταξὺ δύο ἀριθμῶν δεικνύει πρᾶξιν, ἐν ᾗ ὑπάρχει ἡ ἰδιότης τῆς ἀνταλλαγῆς καὶ ἡ διαλυτική, καὶ ἥτις ἔχει τὴν ἰδιότητα (1).

Καὶ ὄντως εἶνε

$$5\star 4 = 5\star(3\star 1) =$$
$$(5\star 1)\star 3 = (5\star 1)\star(2\star 1) =$$
$$\big((5\star 1)\star 1\big)\star 2 = \big[(5\star 1)\star 1\big]\star(1\star 1) =$$
$$= \Big(\big[(5\star 1)\star 1\big]\star 1\Big)\star 1$$

17. Ἡ ἰδιότης τῆς ἀνταλλαγῆς καὶ ἡ διαλυτικὴ ὑπάρχουσι καὶ ἐν ἄλλαις πράξεσιν (λέγω δὲ πρᾶξιν πάντα τρόπον, δι' οὗ ἐκ δύο ὡς ἔτυχε δοθέντων ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος). Ὑπάρχουσι δηλαδὴ πράξεις, αἵτινες ἐπὶ δύο τυχόντων ἀριθμῶν ἐφαρμοζόμεναι δίδουσι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, εἴτε μετὰ τοῦ πρώτου συνδυασθῇ ὁ δεύτερος, εἴτε μετὰ τοῦ δευτέρου ὁ πρῶτος· καὶ ἐν αἷς, εἴτε συνδυασθῇ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο ἄλλων προκύψαντα, εἴτε συνδυασθῇ πρῶτον πρὸς τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὁ προκύπτων συνδυασθῇ πρὸς τὸν ἄλλον, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει·

ἤτοι

(1)
$$\alpha\star\beta = \beta\star\alpha$$
$$\alpha\star(\beta\star\gamma) = (\alpha\star\beta)\star\gamma$$

ἔνθα διὰ τοῦ σημείου ★ δηλοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

18. Ὅταν πρᾶξίς τις ἐκτελῆται ἐπὶ δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ ἐπὶ ὁσωνδήποτε· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γραφῶσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἰς μίαν σειράν, ἔπειτα νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις ἐπὶ τῶν δύο πρώτων καὶ νὰ ἀντικατασταθῶσιν οὗτοι διὰ τοῦ ἐξαγομένου, ὅπερ ἔδωκαν· νὰ γίνηται δὲ τοῦτο μέχρις οὗ μείνῃ εἷς ἀριθμός, ὅστις εἶνε τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἐφαρμοσθείσης ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καὶ κατὰ τὴν παραδεδεγμένην σειράν.

19. Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἄγει πρᾶξίς τις ἐπὶ ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἐφαρμοζομένη εἶνε τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λαμβάνωνται οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ πράξει, ἡ τοιαύτη πρᾶξις λέγεται *ἰσόζυγος*.

20 Ἡ ἰσοζυγία εἶνε ἀναγκαῖον ἀκολούθημα τῶν δύο ἰδιοτήτων, τῆς ἀνταλλαγῆς καὶ τῆς διαλυτικῆς· λέγω δηλαδή, ὅτι *πᾶσα πρᾶξις ἔχουσα τὰς δύο ταύτας ἰδιότητας εἶνε ἰσόζυγος*.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ κατά τινα τάξιν τεταγμένοι οἱ ἑξῆς·

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \eta,\ \theta,\ \ldots\ \mu,\ \nu$$

ἐν πρώτοις λέγω, ὅτι τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον δὲν βλάπτεται, ἂν ἀνταλλαχθῶσι δύο ἐφεξῆς ἀριθμοί, ὡς λ. χ. οἱ η, θ.

Διότι, ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις κατὰ τὴν παραδεδεγμένην τάξιν, πρέπει νὰ συνδυασθῇ ὁ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως ἐπὶ τῶν προηγουμένων τοῦ η ἀριθμῶν προκύψας ἀριθμός, ὃν παριστῶ διὰ τοῦ ω, πρῶτον μὲν πρὸς τὸν η ἔπειτα δὲ ὁ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τούτου προκύπτων ω★η νὰ συνδυασθῇ πρὸς τὸν θ· ὅτε προκύπτει ὁ ἀριθμὸς (ω★η)★θ· ἀλλὰ κατὰ τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θὰ προκύψῃ καὶ ἂν συνδυασθῇ ὁ ω μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὃν δίδουσιν οἱ η καὶ θ, ἤτοι τοῦ η★θ ἢ μετὰ τοῦ ἴσου θ★η (κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀνταλλαγῆς)· καὶ κατὰ τὴν διαλυτικὴν πάλιν ἰδιότητα, ἀντὶ νὰ συνδυάσωμεν τὸν ω μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ἀριθμῶν θ καὶ η προκύψαντος θ★η, δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν αὐτὸν πρῶτον μετὰ τοῦ θ καὶ ἔπειτα τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ω★θ νὰ συνδυάσωμεν μετὰ τοῦ η, ὅτε προκύπτει (ω★θ)★η· ἡ ἀνταλλαγὴ ἄρα τῶν δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν η καὶ θ, οὐδόλως βλάπτει τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τῆς πράξεως.

Τούτου τεθέντος, λέγω, ὅτι *ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν θὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις, τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς μένει τὸ αὐτό.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι, παραδεχθέντες τάξιν τινά, θέλομεν ἔπειτα νὰ ἀλλάξωμεν αὐτὴν καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἔλθῃ πρῶτος ὁ τυχὼν ἀριθμὸς α, δεύτερος ὁ β, τρίτος ὁ γ, καὶ καθεξῆς· πρὸς τοῦτο ἀνταλλάσομεν τὸν α μετὰ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του (ὅτε ἔρχεται ὁ α μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἔμπρὸς) καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἀνταλλάσσοντες αὐτὸν μετὰ τοῦ ἑκάστοτε προηγουμένου του, μέχρις οὗ γίνῃ πρῶτος· ὁμοίως φέρομεν καὶ τὸν β εἰς τὴν δευτέραν θέσιν (ἐὰν εἶνε ἀνάγκη)· ὁμοίως καὶ τὸν γ εἰς τὴν τρίτην, καὶ οὕτω καθεξῆς·

Παραδείγματος χάριν ἐκ τῆς τάξεως

δ, β, γ, α

μεταβαίνομεν εἰς τὴν α, β, γ, δ ποιοῦντες τὰς ἑξῆς ἀνταλλαγὰς

δ β γ α
δ β α γ
δ α β γ
α δ β γ
α β δ γ
α β γ δ

Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἑκάστην τῶν ἀνταλλαγῶν τούτων τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως δὲν βλάπτεται, ἔπεται ὅτι εἴτε κατὰ τὴν πρώτην τάξιν εἴτε κατ' ἄλλην οἱανδήποτε ληφθῶσιν οἱ ἀριθμοί, τὸ αὐτὸ προκύπτει ἐξαγόμενον.

Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς·

$$\alpha \star \beta \star \gamma \star \delta \star \varepsilon$$

21. Ἐκ τῆς ἰσοζυγίας ἕπονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες·

1) *Ἐν ἰσοζύγῳ πράξει δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε ἀριθμοὺς διὰ τοῦ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντος ἀριθμοῦ, ἢ καὶ τοὐναντίον νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἀριθμὸν δι' ἄλλων ὁσωνδήποτε, ἐὰν ἐξ αὐτῶν προκύπτῃ διὰ τῆς πράξεως·*

ἤτοι $\alpha \star \beta \star \gamma \star \delta = \alpha \star (\beta \star \delta) \star \gamma$

2) *Εἴτε συνδυασθῇ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἐξ ἄλλων προκύψαντα διὰ τῆς πράξεως, εἴτε συνδυασθῇ πρὸς ἕνα μόνον ἐξ αὐτῶν καὶ ἐκτελεσθῇ ἔπειτα ἡ πρᾶξις, τὸ αὐτὸ προκύπτει ἐξαγόμενον·*

ἤτοι $(\alpha \star \beta \star \gamma \star \delta) \star \varepsilon = \alpha \star (\beta \star \varepsilon) \star \gamma \star \delta$

3) *Δύο ἐξαγόμενα τῆς πράξεως συνδυάζονται πρὸς ἄλληλα καὶ ἂν συνδυασθῶσι πρὸς ἀλλήλους πάντες οἱ ἀριθμοί, ἐξ ὧν τὰ ἐξαγόμενα προέκυψαν·*

ἤτοι $(\alpha \star \beta \star \gamma) \star (\delta \star \varepsilon) = \alpha \star \beta \star \gamma \star \delta \star \varepsilon$

Τὰ πορίσματα ταῦτα τῆς ἰσοζυγίας ἀποδεικνύονται ὡς ἀπεδείχθησαν ἤδη ἐν τῇ στοιχειώδει ἀλγέβρᾳ διὰ τὴν πρόσθεσιν.

Ἀφαίρεσις.

22. Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἡ ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως πρᾶξις· ἐν αὐτῇ δίδονται δύο ἀριθμοί, α καὶ β, καὶ ζητεῖται τρίτος γ, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β, νὰ δίδῃ ἄθροισμα τὸν α, ἤτοι $\alpha = \beta + \gamma$.

23. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς γ λέγεται *διαφορὰ* τῶν δεδομένων καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ $\alpha - \beta$, ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης δύναται καὶ ὡς ἕπεται νὰ γραφῇ $\gamma = \alpha - \beta$. Ὁ α λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ β *ἀφαιρετέος*.

24. Ἡ διαφορὰ εὑρίσκεται προφανῶς, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μειωτέου ἀφαιρεθῶσι μία μετ' ἄλλην πᾶσαι αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου.

25. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ μειωτέου ἀφαιρετέου καὶ διαφορᾶς σχέσις

εἶνε σχέσις προσθέσεως, ἔπεται ὅτι αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ ἐκ τῶν τῆς ἰσότητος· τοιαῦται εἶνε αἱ ἑξῆς·

α') Ἐὰν προστεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοὶ εἴς τε τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ μένει ἀμετάβλητος.

β') Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.

γ') Εἴτε τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν διὰ μιᾶς ἀπὸ ἄλλου, εἴτε αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, μία καὶ ἡ αὐτὴ προκύπτει διαφορά· ἤτοι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$.

26. Πρόδηλον δὲ εἶνε ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶνε δυνατὴ (ἤτοι ἡ διαφορὰ ὑπάρχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς 1, 2, 3, 4 . . .), μόνον ὅταν ὁ μειωτέος εἶνε μείζων (5) τοῦ ἀφαιρετέου.

27. Ἀντίστροφος τῆς ἰσοζύγου πράξεως ★ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β εὑρίσκεται τρίτος γ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶνε

$$\alpha=\beta\star\gamma.$$

Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἰσοζύγου πράξεως ★ σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου »· ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\gamma=\alpha\ »\ \beta.$$

28. Ἡ πρᾶξις » δὲν εἶνε ἰσόζυγος, διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἐφαρμόζεται ἐκ τοῦ α εἰς τὸν β (ἐκ τοῦ πρώτου εἰς τὸν δεύτερον).

29. Ἐν τοῖς ἑξῆς ὑποτίθεται, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως α » β (ὅταν ὑπάρχῃ) εἶνε μόνον ἕν· ἤτοι ὅτι εἷς μόνον ἀριθμὸς γ ὑπάρχει ὅστις συνδυαζόμενος μετὰ τοῦ δοθέντος β διὰ τῆς ἰσοζύγου πράξεως ★ δίδει τὸν δοθέντα ἀριθμὸν α.

30. Πᾶσα πρᾶξις ἀντίστροφος ἰσοζύγου (ἐὰν ἔχῃ ἐξαγόμενον καὶ μόνον ἕν), ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1) *Ἐὰν ἑκάτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, α, β, συνδυασθῇ μετὰ τρίτου οἱουδήποτε δ, διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἰσοζύγου πράξεως ★, τὸ ἐξαγόμενον μένει τὸ αὐτό·*

ἤτοι $$(\alpha\star\delta)\ »\ (\beta\star\delta)=\alpha\ »\ \beta$$

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ γ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντιστρόφου πράξεως α » β, θὰ εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῆς·

$$\alpha=\beta\star\gamma$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς $(\beta \star \gamma)$ εἶνε ὁ αὐτὸς τῷ α, εἴτε ὁ $(\beta \star \gamma)$ συνδυασθῇ πρὸς τρίτον τινα δ εἴτε ὁ α, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶνε τὸ αὐτό·

ἤτοι $\alpha \star \delta = (\beta \star \gamma) \star \delta = (\beta \star \delta) \star \gamma$ (ἐδ. 21 ἰδιότ. 2)

ἐξ ὧν βλέπομεν ὅτι εἶνε πάλιν

$$(\alpha \star \delta) \,»\, (\beta \star \delta) = \gamma$$

2) *Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου ἰσοζύγου πράξεως ἐφαρμόζεται ἡ ἀντίστροφος, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ἐξ ἑνὸς τῶν διὰ τῆς ἰσοζύγου συνδεομένων ἀριθμῶν·* ἤτοι

$$(\alpha \star \beta \star \gamma \star \delta) \,»\, \varepsilon = \alpha \star (\beta \,»\, \varepsilon) \star \gamma \star \delta.$$

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ θ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως $\beta \,»\, \varepsilon$, θὰ εἶνε· $\beta = \varepsilon \star \theta$

λέγω δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\alpha \star \theta \star \gamma \star \delta$ συνδυασθεὶς διὰ τῆς ἰσοζύγου πράξεως $\star$ μετὰ τοῦ ε δίδει τὸν $(\alpha \star \beta \star \gamma \star \delta)$· καὶ ὄντως εἶνε

$$(\alpha \star \theta \star \gamma \star \delta) \star \varepsilon = \alpha \star (\theta \star \varepsilon) \star \gamma \star \delta = \alpha \star \beta \star \gamma \star \delta$$

εἶνε λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς $\alpha \star \theta \star \gamma \star \delta$ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως·

$$(\alpha \star \beta \star \gamma \star \delta) \,»\, \varepsilon.$$

3) *Εἰς τὸ ἐξαγόμενον ἰσοζύγου πράξεως ἐφαρμόζεται ἡ ἀντίστροφος, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ἀλλεπαλλήλως εἰς ἕκαστον τῶν διὰ τῆς ἰσοζύγου συνδεομένων ἀριθμῶν·*

ἤτοι $\alpha \,»\, (\beta \star \gamma \star \delta) = \Big((\alpha \,»\, \beta) \,»\, \gamma \Big) \,»\, \delta$

Διότι παριστῶντες διὰ θ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως $\alpha \,»\, (\beta \star \gamma \star \delta)$, θὰ ἔχωμεν $\alpha = \beta \star \gamma \star \delta \star \theta$

ὅθεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀντιστρόφου πράξεως

$$\alpha \,»\, \beta = \gamma \star \delta \star \theta$$

καὶ $(\alpha \,»\, \beta) \,»\, \gamma = \delta \star \theta$

καὶ τέλος $\Big((\alpha \,»\, \beta) \,»\, \gamma \Big) \,»\, \delta = \theta.$

Σημείωσις. Τὰ ἐξαγόμενα ἀντιστρόφου πράξεως, ὅταν ἐφαρμόζηται ἐξ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, οἷον τὰ $\alpha \,»\, \alpha$, $\beta \,»\, \beta$ κλ. εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Διότι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha \,»\, \alpha$, $\beta \,»\, \beta$ συνδυαζόμενοι διὰ τῆς ἰσοζύγου πράξεως μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ $(\alpha \star \beta)$ δίδουσιν ἀμφότεροι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ὡς ἑξῆς φαίνεται·

$$(\alpha \star \beta) \star (\alpha \,»\, \alpha) = \big[(\alpha \,»\, \alpha) \star \alpha \big] \star \beta = \alpha \star \beta$$

$$(\alpha \star \beta) \star (\beta \,»\, \beta) = \big[(\beta \,»\, \beta) \star \beta \big] \star \alpha = \beta \star \alpha$$

ἑπομένως ἀμφότεροι οἱ $\alpha \,»\, \alpha$, $\beta \,»\, \beta$, ἰσοῦνται τῷ ἐξαγομένῳ τῆς πράξεως $(\alpha \star \beta) \,»\, (\alpha \star \beta)$, ἤτις ἐξ ὑποθέσεως ἕνα μόνον ἀριθμὸν δίδει.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος α » α, ὃν παριστῶ διὰ τοῦ θ (ἐὰν ὑπάρχῃ) συνδυαζόμενος πρὸς οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ τῆς ἰσοζύγου πράξεως ✱ οὐδόλως μεταβάλλει αὐτόν· ἤτοι εἶνε

$$\beta \star \theta = \beta$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ β.

Διότι ἀμφότεροι συνδυαζόμενοι μετὰ τοῦ α διὰ τῆς ἰσοζύγου πράξεως δίδουσι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον (α ✱ β).

Ἐπίσης, ὅταν εἰς αὐτὸν ἐφαρμόζηται ἡ ἀντίστροφος πρᾶξις οὐδόλως μεταβάλλειτὸν ἐξ οὗ ἐφαρμόζεται ἀριθμόν· ἤτοι $\beta \text{ » } \theta = \beta$

διότι μετὰ τοῦ θ συνδυαζόμενοι δίδουσιν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ὁ ἀριθμὸς θ λέγεται διὰ ταῦτα *πόλος* τῶν δύο ἀντιστοίχων πράξεων· ✱ καὶ ».

Ὁ συνδυασμὸς τοῦ πόλου πρὸς ἑαυτὸν δι' ὁποτέρας τῶν πράξεων δίδει πάντοτε τὸν πόλον· ἤτοι $\theta \ast \theta = \theta, \quad \theta \star \theta \star \theta = \theta$ κλ.

ἐπίσης $\theta \text{ » } \theta = \theta.$

Πολλαπλασιασμός.

31. *Πολλαπλασιασμὸς* ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἕτερον β εἶνε ἡ πρόσθεσις τόσων ἀριθμῶν ἴσων τῷ α, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ β· ὁ ἐκ τῆς προσθέσεως ταύτης προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον* καὶ σημειοῦται διὰ α β· οἱ δὲ δοθέντες, *παράγοντες*. Κατὰ ταῦτα, πολλαπλασιάσαι τὸν 5 ἐπὶ 3 σημαίνει εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα

$$5+5+5$$

γίνεται ἄρα τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καθ' ὃν τρόπον ἐκ τῆς μονάδος γίνεται ὁ δεύτερος.

32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἀριθμῶν ἐκτελεῖται πάντοτε καὶ τὸ γινόμενον εἶνε ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος.

33. Δεδομένων πολλῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ . . . κατὰ σειράν, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους, ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ ἀριθμοί.

34. Ἐν τοῖς στοιχείοις ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὰς ἰδιότητας τῆς ἀνταλλαγῆς καὶ τὴν διαλυτικήν, ἤτοι

$$\alpha.\ \beta = \beta.\ \alpha$$

$$\alpha.\ (\beta.\ \gamma) = (\alpha.\ \beta).\ \gamma$$

εἶνε ἄρα ἰσόζυγος πρᾶξις καὶ ἔχει καὶ πάσας τὰς ἐκ τῆς ἰσοζυγίας ἀπορρεούσας ἰδιότητας (ἐδ. 21, 1, 2, 3).

35. Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς συνδέονται διὰ τῆς ἰδιότητος

$$(\alpha+\beta).\ \gamma = (\alpha.\gamma)+(\beta.\gamma)$$

τουτέστιν· *ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον, καὶ ἐὰν ἑκάτερος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπ' αὐτὸν καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα τὰ δύο γινόμενα.*

Ἡ προηγουμένη ἰσότης (διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀνταλλαγῆς) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\gamma\cdot(\alpha+\beta)=(\gamma.\alpha)+(\gamma.\beta)$$

τουτέστιν· *ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑκάτερον καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα τὰ δύο γινόμενα.*

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται *ἐπιμεριστική*.

36. Ἀκολούθημα ἀναγκαῖον τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος εἶνε αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

1) *Ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι πάντες οἱ προσθετέοι καὶ ἔπειτα προστεθῶσι τὰ γινόμενα.*

ἢ (διὰ τὴν ἀνταλλαγὴν)

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ ἔπειτα προστεθῶσι τὰ γινόμενα·

καὶ γενικώτερον

2) *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἄλλου καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα τὰ προκύψαντα γινόμενα.*

Τὰ πορίσματα ταῦτα τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος ἀπεδείξαμεν ἐν τοῖς στοιχείοις (ἰδὲ Στ. ἄλγεβρα ἐδ. 33).

37. Ἡ ἰσοζυγία καὶ ὁ ἐπιμερισμός, ἤτοι αἱ ἰδιότητες

$$\alpha.\beta=\beta.\alpha$$

$$\alpha.(\beta.\gamma)=(\alpha.\beta).\gamma$$

καὶ $$(\alpha+\beta).\gamma=(\alpha.\gamma)+(\beta.\gamma)$$

ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς πρᾶξιν, ἐὰν προσληφθῇ καὶ ἡ ἰδιότης $$1.1=1$$

Καὶ ὄντως εἶνε $\alpha\,1=(1+1+..+1).\,1=1+1+1+..+1=\alpha$ κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα·

καὶ $$\alpha.\beta=\alpha.(1+1+1+..+1)=\alpha+\alpha+...+\alpha$$

38. Τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια εἶνε ἴσα, τῶν δὲ ἀνίσων ἄνισα (ἐδ. 6, β).

Διαίρεσις.

39. Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 27) Ἐν αὐτῇ δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται τρίτος γ, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν β (ἢ πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β) νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν α, ἤτοι νὰ εἶνε

$$\alpha = \beta . \gamma$$

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον* καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$.

ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ὁ α λέγεται *διαιρετέος* καὶ ὁ β *διαιρέτης*.

40. Ἡ διαίρεσις εἶνε τότε μόνον δυνατὴ (ἤτοι τὸ πηλίκον ὑπάρχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς 1, 2, 3, 4 ...), ὅταν ὁ α εἶνε ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν πάντων ἴσων τῷ β, ἤτοι, ὅταν ὁ α εἶνε πολλαπλάσιος τοῦ β.

41 Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις εἶνε ἀντίστροφος ἰσοζύγου πράξεως (ἔχει δὲ καὶ ἓν μόνον ἐξαγόμενον), ἔχει τὰς ἐν τῷ ἐδ. 30 ἀποδειχθείσας ἰδιότητας· ἤτοι

1) *Τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (ὅταν ὑπάρχῃ), ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι, ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

2) *Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.*

3) *Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου καὶ ἂν διαιρεθῇ ἀλλεπαλλήλως δι' ἑκάστου τῶν παραγόντων* (ἤτοι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς).

42 Ἐκ δὲ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πηγάζει ἡ ἑξῆς ἰδιότης τῆς διαιρέσεως.

Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ καὶ ἂν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προστεθέντων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιρῆται) *καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα τὰ πηλίκα.*

Συμπέρασμα.

43. Πᾶσαι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων, τουτέστιν αἱ ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἰσχύουσαι, πηγάζουσιν ἐκ τριῶν ἀρχικῶν ἰδιο-

τήτων, αἵτινες εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, ἤτοι 1) Ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς ἀνταλλαγῆς· 2) ἐκ τῆς διαλυτικῆς, καὶ 3) ἐκ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος. (Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἕπεται ἀμέσως ἡ ἰσοζυγία τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ)· ἡ δὲ τρίτη συνδέει τὰς δύο ταύτας πράξεις πρὸς ἀλλήλας

Τὰς ἰδιότητας ταύτας ἀπεδείξαμεν μὲν ὑπαρχούσας ἐν τῷ συστήματι τῶν ἁπλουστέρων ἀριθμῶν, οὓς μία μονὰς ἀποτελεῖ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, θὰ διατηρῶμεν δ' αὐτὰς καὶ κατὰ πᾶσαν προσάρτησιν νέων ἀριθμῶν. ἀποκαθιστῶμεν δηλαδὴ αὐτὰς *ἀρχὰς ἢ νόμους* τῶν πράξεων.

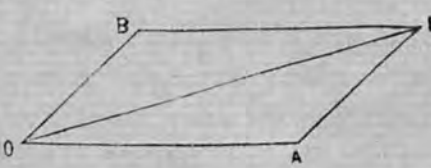
Σημείωσις. Ὅτι ἡ διαλυτικὴ ἰδιότης καὶ ἡ τῆς ἀνταλλαγῆς εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, ἀποδεικνύεται ἐκ τούτου, ὅτι ὑπάρχουσι πράξεις ἔχουσαι τὴν ἑτέραν τῶν ἰδιοτήτων τούτων μὴ ἔχουσαι δὲ τὴν ἄλλην.

Π. χ. ἡ πρᾶξις $a \star b = a^2 + b^2$ ἔχει τὴν ἀνταλλαγὴν ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα.

Ἐπίσης ὁ πολλαπλασιασμὸς γραμμῆς ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχει τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα $(M\ \alpha).\beta = M(\alpha.\beta)$ ἀλλ' οὐχὶ τὴν τῆς ἀνταλλαγῆς.

44. Ὑπάρχουσι καὶ γεωμετρικαὶ πράξεις (ἤτοι κατασκευαί, δι' ὧν ἐκ δύο σχημάτων εὑρίσκεται τρίτον) ἔχουσαι τὴν ἰδιότητα τῆς ἰσοζυγίας. Ἁπλούστατον παράδειγμα τοιαύτης πράξεως εἶνε ἡ πρόσθεσις τῶν τμημάτων.

Ἄθροισμα γεωμετρικὸν δύο τμημάτων ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχομένων λέγεται ἡ διαγώνιος τοῦ ἀπ' αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμμου.



Τὴν πρᾶξιν ταύτην σημειοῦμεν διὰ τοῦ σημείου ♯ γραφομένου μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων (πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ κοινοῦ ἀθροίσματος, ἐν τῷ ὁποίῳ μόνον τὰ μήκη τῶν τμημάτων θεωροῦνται καὶ τὸ ὁποῖον σημειοῦμεν διὰ τοῦ $+$).

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶνε

$$OA \sharp OB = OB \sharp OA$$

ἤτοι ἡ πρᾶξις ἔχει τὴν ἰδιότητα τῆς ἀνταλλαγῆς· ὅτι δὲ καὶ τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα ἔχει, δεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Ἔστωσαν τρία τυχόντα τμήματα OA, OB, OΓ

λέγω ὅτι $OA \sharp (OB \sharp O\Gamma) = (OA \sharp OB) \sharp O\Gamma$

Ἐὰν τῷ ὄντι κατασκευασθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΟΑΕΒ καὶ ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β, Ε εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ ἴσαι τῇ ΟΓ, αἱ ΑΘ, ΒΔ, ΕΣ, θὰ εἶνε

$$OA \# OB = OE$$

καὶ $OE \# O\Gamma = O\Sigma$ διότι τὸ σχῆμα ΟΕΣΓ εἶνε παραλληλόγραμμον· ὅθεν

$$(OA \# OB) \# O\Gamma = O\Sigma.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΟΓΔΒ ἔχομεν

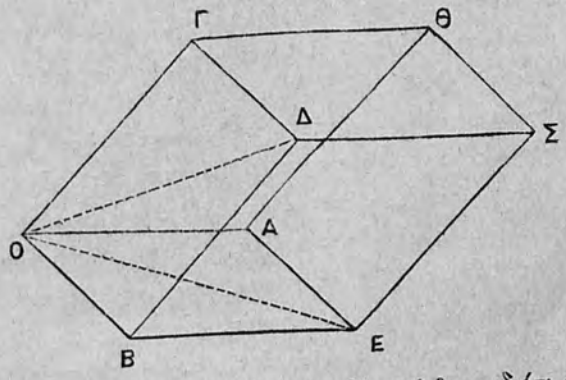
$$OB \# O\Gamma = O\Delta$$

ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ σχῆμα ΟΑΣΔ εἶνε παραλληλόγραμμον (διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΟΑ καὶ ΔΣ εἶνε ἀμφότεραι παράλληλοι τῇ ΒΕ καὶ ἴσαι αὐτῇ) συνάγεται.

$$OA \# O\Delta = O\Sigma$$

ἤτοι

$$OA \# (OB \# O\Gamma) = O\Sigma.$$



Ἡ πρᾶξις ἄρα εἶνε ἰσόζυγος· λέγεται δὲ πρόσθεσις διότι ἐν τῇ μερικῇ περιπτώσει, καθ' ἣν τὰ δύο τμήματα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, εἶνε τῷ ὄντι πρόσθεσις· ἑπομένως εἶνε γενίκευσις τῆς κοινῆς προσθέσεως τῶν εὐθειῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Κλασματικοὶ ἀριθμοί.

45. Τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, ὧν τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας συνοπτικῶς διεξήλθομεν, δὲν ἐξαρκεῖ εἰς τὰς ἀνάγκας τῆς λογιστικῆς, διότι ὡς εἴδομεν, ἐὰν μένωμεν ἐν αὐτῷ, αἱ δύο ἀντίστροφοι πράξεις, ἡ ἀφαίρεσις δηλονότι καὶ ἡ διαίρεσις, δὲν εἶνε πάντοτε δυναταί, ἤτοι ἡ διαφορὰ καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν τοῦ εἰρημένου συστήματος δὲν ὑπάρχει πάντοτε ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἐκείνοις. Ἀνάγκη ἄρα, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀρθῇ τὸ ἐμπόδιον τοῦτο τῆς προόδου τῆς λογιστικῆς, νὰ εὐρύνωμεν τὸ σύστημα ἐκεῖνο διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἐν αὐτῷ νέων ἐννοιῶν, ἤτοι νέων ἀριθμῶν, καὶ τοιούτων ὥστε αἱ εἰρημέναι δύο πράξεις νὰ ὦσι πάντοτε δυναταὶ ἐν τῷ νέῳ συστήματι. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ εὐρύνωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ... οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἐν αὐτῷ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν τοῦ αὐτοῦ συστήματος.

46. Ἐπειδὴ εἰς τὸ νέον σύστημα θὰ δύναται πᾶς ἀριθμὸς νὰ διαιρῆται εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, ἔπεται, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἐν αὐτῷ εἷς ἀριθμός, ὅστις δὶς λαμβανόμενος νὰ δίδῃ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπάρχουσαν μονάδα· ὁμοίως θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμός (ἕνα δὲ μόνον παραδεχόμεθα τοιοῦτον), ὅστις τρὶς λαμβανόμενος νὰ δίδῃ τὴν μονάδα, καὶ καθεξῆς· καὶ ἐν γένει θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμός (καὶ εἷς μόνος), ὅστις μ. φορὰς λαμβανόμενος ($\mu = 2, 3, 4 \ldots$) νὰ δίδῃ τὴν μονάδα. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους παριστῶμεν διὰ τῶν σημείων

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{\mu}$$

ὥστε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν νέων τούτων λογιστικῶν ἐννοιῶν εἶνε

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1, \text{ κτλ.}$$

Πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τούτους $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{\mu}, \ldots$

εἰσάγομεν διὰ ταῦτα εἰς τὸ ἤδη θεωρηθὲν σύστημα τῶν ἀριθμῶν καὶ θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς *νέας μονάδας* ἐντελῶς ὡρισμένας· ὀνομάζομεν δὲ

αὐτὰς *κλασματικάς*· τὴν δὲ ἐξ ἀρχῆς ὑπάρχουσαν, *ἀκεραίαν*. Τὸ νέον ἄρα σύστημα ἔχει τὴν πρώτην μονάδα 1 (ἧς τινος ἐπαναλήψεις εἶνε πάντες οἱ τοῦ πρώτου συστήματος ἀριθμοὶ) καὶ τὰς νέας $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... ἤτοι ἔχει ἀπείρους μονάδας. Αἱ μονάδες αὗται ἔχουσι σχέσιν *μεγέθους* πρὸς τὴν πρώτην 1· διότι ὡρισμένον πλῆθος ἑκάστης αὐτῶν θεωρεῖται ὡς ἴσον τῇ κυρίᾳ μονάδι 1.

Τούτων τεθέντων εὑρύνομεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἕπεται·

Ἀριθμὸς λέγεται ἡ περιληπτικὴ ἐν τῷ νῷ παράστασις πολλῶν μονάδων, ἤτοι τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.

Ὁ ἀριθμὸς ἐκφράζει τὴν σχέσιν πλήθους τινὸς (2) πρὸς τὰ μέρη του.

Αἱ τὸν ἀριθμὸν ἀποτελοῦσαι μονάδες δύνανται νὰ εἶνε ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... ἀλλὰ πάντοτε εἰς πλῆθος ὡρισμένον· ὁ ἀριθμὸς ὁρίζεται, ὅταν δοθῶσιν αἱ τοῦτον συναποτελοῦσαι μονάδες καὶ ὁρισθῇ ποσάκις ἑκάστη λαμβάνεται, ὡς

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1,\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+1+\frac{1}{8},\quad \frac{1}{3}+1+1$$

εἶνε ἀριθμοί.

47. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συστήματος τούτου, ἐν ᾧ καὶ τὸ πρῶτον περιέχεται, λέγονται *κλασματικοὶ* τοῦ δὲ πρώτου *ἀκέραιοι*.

48. Ἐν τῷ προκειμένῳ συστήματι τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁρισμοὶ τῆς τε ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων πρέπει νὰ γενικευθῶσιν· ἀλλ' ἡ γενίκευσις αὐτῶν *θέλομεν νὰ γίνῃ τοιαύτη, ὥστε νὰ διατηρηθῶσι καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος καὶ τῶν πράξεων*. Δεχόμεθα λοιπὸν τοὺς νόμους τούτους ἐκ *τῶν προτέρων* ὡς ἰσχύοντας καὶ ζητοῦμεν, ὑπ' αὐτῶν βοηθούμενοι, νὰ εὕρωμεν τὸν τρόπον τῆς γενικεύσεως· τοῦτο γίνεται, ὡς φαίνεται ἐν τοῖς ἑξῆς, καὶ μόνον καθ' ἕνα τρόπον.

49. *Πᾶς ἀριθμὸς πολλάκις ἐπαναλαμβανόμενος, ἤτοι προστιθέμενος εἰς ἑαυτόν, γίνεται ἀκέραιος*· διότι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοὶ πᾶσαι αἱ μονάδες, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται.

Ἔστω π.χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$.

ἡ μονὰς $\frac{1}{2}$ γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός, ἐὰν ληφθῇ δίς, ἡ δὲ $\frac{1}{5}$ ἐὰν

πεντάκις· ἐὰν ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος ληφθῇ 2. 5, ἤτοι δεκάκις, γίνεται

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$

ἤτοι, διὰ τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν μονάδων,

$$5+2+2 \text{ ἢ } 9.$$

50. *Πᾶς ἀριθμὸς ἐπὶ τὴν μονάδα 1 πολλαπλασιαζόμενος μένει ὁ αὐτός·* ἤτοι $\alpha.1=\alpha$

Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶνε μονάδων ἄθροισμα, ἰσχύει δὲ ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ τοῦτο διὰ τὰς μονάδας.

Ἔστω π. χ. ἡ μονὰς $\frac{1}{3}$. Ἐὰν τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ 1 ληφθῇ τρὶς $\frac{1}{3}.1+\frac{1}{3}.1+\frac{1}{3}.1$ κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον τοῦτο ἰσοῦται τῷ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right).1$ ἤτοι τῷ 1.1 ἢ 1· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον $\frac{1}{3}.1$ τρὶς ληφθὲν ποιεῖ τὴν μονάδα 1· ἀλλὰ τοῦτο ποιεῖ καὶ ἡ μονὰς $\frac{1}{3}$· ἐπειδὴ δὲ ἕνα μόνον τοιοῦτον ἀριθμὸν παρεδέχθημεν (46) ἕπεται $\frac{1}{3}.1=\frac{1}{3}$. Ὡσαύτως καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι *αἱ ἐπαναλήψεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Καὶ ὄντως εἶνε

$$\alpha+\alpha+\alpha.=\alpha.1+\alpha.1+\alpha.1=\alpha(1+1+1)=\alpha.3.$$

51. *Δοθέντων ἀριθμῶν, ὡς ἔτυχεν, ὑπάρχει πάντοτε ἀκέραιός τις ἀριθμὸς ἐλάχιστος, ὅστις, πολλαπλασιάζων αὐτούς, ποιεῖ πάντας ἀκεραίους· πᾶς δὲ ἄλλος ἀκέραιος, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενοι οἱ δοθέντες γίνονται ἀκέραιοι, εἶνε πολλαπλάσιος τοῦ ἀκεραίου τούτου.*

Ἔστω μ ὁ ἐλάχιστος ἀκέραιος καὶ ν οἱοσδήποτε ἄλλος· ἐπειδὴ ν φορὰς λαμβανόμενοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ γίνονται ἀκέραιοι, ὡσαύτως δὲ καὶ μ φοράς, ἕπεται ὅτι καὶ ν—μ φορὰς λαμβανόμενοι γίνονται ἀκέραιοι. ὁμοίως δὲ καὶ ν—2μ φοράς, καὶ γενικῶς ν—κ. μ φοράς· ἐὰν δὲ ὁ ν δὲν εἶνε πολλαπλάσιόν τι τοῦ μ, ἡ διαφορὰ ν—κ.μ θὰ γίνῃ ποτέ, αὐξανο-

μένου τοῦ κ, μικροτέρα τοῦ μ, χωρὶς νὰ εἶνε μηδέν, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

52. *Ἐκτὸς τῶν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἴσων, ἴσοι λέγονται οἱ ἀριθμοί, ὧν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια εἶνε ἀκέραιοι ἴσοι (5), ἄνισοι δέ, ὧν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια εἶνε ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μείζων λέγεται ὁ μεῖζον πολλαπλάσιον ἔχων, ἐλάσσων δὲ ὁ ἔλασσον.* (*)

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου τῆς ἰσότητος γίνεται φανερόν, ὅτι οἱ νόμοι αὐτῆς (5, α, β) ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν· διότι ἡ ἰσότης αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν ἀκεραίων.

Φανερὸν δὲ εἶνε ἐκ τῶν προειρημένων, ὅτι, ἐάν τινες ἀριθμοί, ἐπί τινα ἀκέραιον πολλαπλασιασθέντες, γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι, καὶ ἐπὶ πάντα ἄλλον ἀκέραιον πολλαπλασιαζόμενοι, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι, θὰ γίνωσιν ἴσοι· διότι, ἐὰν ὁ ἐλάχιστος τῶν τοιούτων ἀκεραίων ποιῇ αὐτοὺς ἴσους, καὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ ποιήσῃ αὐτοὺς ἴσους καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια ὁμοίως· ἐὰν δὲ ὁ ἐλάχιστος ποιῇ αὐτοὺς ἀνίσους, τὸ αὐτὸ ποιοῦσι καὶ τὰ πολλαπλάσια.

53. *Πᾶς ἀριθμὸς εἶνε πολλαπλάσιον ἢ ἐπανάληψις μιᾶς μονάδος.* Ἔστω ἀριθμός τις, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον α (α=1, 2, 3,..), γίνεται ἀκέραιος β (β=1, 2, 3,...)· ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{\alpha}$· β, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον α, ἤτοι α φορὰς ἐπαναλαμβανόμενος, γίνεται ἐπίσης β, ἕπεται, ὅτι ὁ θεωρούμενος ἀριθμὸς εἶνε ἴσος τῷ $\frac{1}{\alpha}$. β, ἤτοι πολλαπλάσιον τῆς μονάδος $\frac{1}{\alpha}$. Παρατηρητέον δὲ ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν (39) εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διὰ α, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἕπεται $\frac{\beta}{\alpha}$.

Πᾶς ἄρα ἀριθμὸς εἶνε τῆς μορφῆς $\frac{\beta}{\alpha}$ ἢ $\frac{1}{\alpha}$. β ὅπου β=1, 2, 3, ... καὶ ὁ μὲν β λέγεται *ἀριθμητὴς* ὁ δὲ α *παρονομαστὴς* τοῦ κλάσματος.

54. *Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, ὁ ἀριθμὸς μένει ἴσος ἑαυτῷ·* καὶ

(*) Ἀνάγκη νὰ θεωρῶνται ἴσοι οἱ ἀριθμοί, ὧν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια εἶνε ἀκέραιοι ἴσοι· ἄλλως θὰ εἶχε μία καὶ ἡ αὐτὴ διαίρεσις δύο διάφορα πηλίκα· ὥστε ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς ἰσότητος ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν παραδοχὴν τοῦ ὅτι ἡ διαίρεσις δίδει ἓν μόνον ἐξαγόμενον.

ὄντως οἱ δύο ἀριθμοὶ

$$\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \frac{\beta \cdot \mu}{\alpha \cdot \mu}$$

εἶνε ἴσοι, διότι ἀμφότεροι ἐπὶ α. μ πολλαπλασιαζόμενοι γίνονται ἀκέραιοι ἴσοι.

55. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δύναται διὰ ταῦτα νὰ παρουσιασθῇ ὑπὸ ἀπείρους μορφάς· διότι μία μονὰς αὐτοῦ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ πλήθους τινὸς ἄλλων.

Πρόσθεσις.

56. Δεδομένων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἄλλος, ὅστις νὰ ἀποτελῆται ὑπὸ πασῶν τῶν μονάδων, ἃς ἔχουσιν οἱ δοθέντες.

57. Ἐὰν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ εἶνε ἀνηγμένοι εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα, δῆλον ὅτι ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἐκτελεῖται προστιθεμένων μόνον τῶν ἀριθμητῶν· διότι τότε, πολλαπλάσια ὄντες τῆς αὐτῆς μονάδος, προστίθενται ὡς οἱ ἀκέραιοι.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{10}$ καὶ $\frac{5}{6}$

ἀναγόμενοι εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα γίνονται

$$\frac{9}{30} \text{ καὶ } \frac{25}{30} \text{ ἢ } \frac{1}{30} \cdot 9 \text{ καὶ } \frac{1}{30} 25$$

ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε $\frac{1}{30} \cdot (25+9)$ ἤτοι

$$\frac{1}{30} \cdot 34 \text{ ἢ } \frac{34}{30}.$$

58. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε εἷς ἀριθμὸς τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἐντελῶς ὡρισμένος, καὶ ἡ πρόσθεσις ἔχει καὶ ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ἃς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων· διότι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμητῶν, ὅ ἐστιν εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀκεραίων.

Ἀφαίρεσις.

59. Ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς ἐδόθη ἤδη (22)· ἐκτελεῖται δὲ ἀναγομένων τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα· διότι τότε, πολλαπλάσια ὄντες τῆς αὐτῆς μονάδος, ἀφαιροῦνται ὡς οἱ ἀκέραιοι· εἶνε δὲ φανερὸν ὅτι ἀνάγκη καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ μειωτέος νὰ εἶνε μείζων τοῦ ἀφαιρετέου, ἵνα ὑπάρχῃ ἡ διαφορά.

Πολλαπλασιασμός.

60. *Γινόμενον δύο μονάδων.*

Ἔστωσαν δύο τυχοῦσαι μονάδες, αἱ $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$. τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta}$ ἀνάγκη νὰ θεωρηθῇ ὡς ἴσον τῇ μονάδι $\frac{1}{\alpha.\beta}$. διότι πολλαπλασιαζόμενον τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον α. β. κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἰσοζυγίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, γίνεται

$$\left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\beta}\right).(\alpha.\beta)=\left(\frac{1}{\alpha}.\alpha\right).\left(\frac{1}{\beta}.\beta\right)=1.1=1\cdot$$

ἀλλὰ ἡ καὶ μονὰς $\frac{1}{\alpha.\beta}$ ποιεῖ τὸ αὐτό, εἶνε ἄρα $\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha.\beta}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον εἰς τὸ γινόμενον

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\ldots+\frac{1}{\alpha}\right).\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}+\ldots+\frac{1}{\beta}\right)$$ ὅπερ εἶνε 1. 1 ἤτοι 1.

61. Ἔχοντες τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονάδων, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο τυχόντας ἀριθμούς· διότι πᾶς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων, ἄθροισμα δὲ ἐπὶ ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον (35).

62. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶνε πολλαπλάσιον μιᾶς μονάδος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τοὺς παράγοντας ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\delta}{\gamma}$, τότε κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἰσοζυγίας εἶνε

$$\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\delta}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}.\beta.\frac{1}{\gamma}.\delta=\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\gamma}.\beta.\delta=\frac{1}{\alpha.\gamma}.\beta.\delta=\frac{\beta.\delta}{\alpha.\gamma}$$

ὅθεν ὁ γνωστὸς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

63. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος εἶνε ἀριθμὸς τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένοι ὡς γινόμενα δύο ἀκεραίων (32).

64. Τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ γινόμενα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶνε ἴσα καὶ τῶν ἀνίσων ἄνισα (38).

65. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β, εὑρίσκεται τρίτος συγκείμενος ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ ὡς σύγκειται ὁ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Διότι, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς β σύγκειται ἐκ τῶν μονάδων.

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}$$

τὸ γινόμενον αβ θὰ εἶνε α. $\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)$

ἤτοι κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον

$$\alpha.\frac{1}{2}+\alpha.1+\alpha.\frac{1}{3}+\alpha.\frac{1}{8}$$

ἢ $$\frac{\alpha}{2}+\alpha.+\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{8}.$$

66. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἰσχύουσιν ἐπὶ τοῦ κλασματικοῦ συστήματος οἱ νόμοι τῶν πράξεων· ἀλλ' εἶνε ἀνάγκη νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ ῥηθέντες νόμοι, ὅταν αἱ πράξεις ἐκτελῶνται, καθ' ὃν τρόπον ὡρίσαμεν, ἰσχύουσιν ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος. Καὶ ἡ μὲν ἰσοζυγία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε πρόδηλος· διότι τοῦ γινομένου ἀριθμητὴς εἶνε τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴς τὸ τῶν παρονομαστῶν· ταῦτα δὲ εἶνε γινόμενα ἀκεραίων· ἡ δὲ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma}\right)=\frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\beta.\gamma}{\alpha.\gamma}+\frac{\delta.\alpha}{\alpha.\gamma}\right)=\frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\beta.\gamma+\delta.\alpha}{\alpha.\gamma}\right)=\frac{\mu(\beta.\gamma+\delta.\alpha)}{\nu.\alpha.\gamma}=$$

$$\frac{\mu.\beta.\gamma.+\mu.\delta.\alpha}{\nu.\alpha\gamma}=\frac{\mu.\beta.\gamma}{\nu.\alpha.\gamma.}+\frac{\mu.\delta.\alpha}{\nu.\alpha.\gamma.}=\frac{\mu.}{\nu}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\mu.}{\nu}\frac{\delta}{\gamma}$$

Διαίρεσις.

67. Πηλίκον τῶν δύο ἀριθμῶν $\frac{\beta}{\alpha}$ διὰ $\frac{\delta}{\gamma}$ εἶνε ὁ ἀριθμὸς $\frac{\beta.\gamma}{\alpha.\delta}$ διότι οὗτος, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν $\frac{\delta}{\gamma}$ δίδει τὸν διαιρετέον $\frac{\beta}{\alpha}$.

68. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{\alpha}$ σημαίνει διαίρεσιν διὰ τοῦ ἀκεραίου α, καὶ τἀνάπαλιν ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ $\frac{1}{\alpha}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ α· ὥστε πᾶς παλλαπλασιασμὸς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς διαίρεσις καὶ τἀνάπαλιν.

Ὥστε διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν κλασμάτων ἐταὐτίσθησαν ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἢ συνεχωνεύθησαν εἰς μίαν πρᾶξιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ.

Τὸ μηδὲν ὡς ἀριθμός.

69. Ἐν τῇ ἀφαιρέσει, ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α καὶ β εἶνε ἴσοι, δὲν ὑπάρχει διαφορά, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, διὰ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν οὐδεμία καταλείπεται μονὰς οὔτε ἀκεραία οὔτε κλασματική. Ἐντεῦθεν ἀγόμεθα εἰς τὸν σχηματισμὸν καὶ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν λογιστικὴν νέας τινὸς ἐννοίας, τῆς ἐννοίας τοῦ *μηδενός, ὡς ἀριθμοῦ ὡρισμένου καὶ τὴν διαφορὰν δύο ἴσων ἀριθμῶν παριστῶντος*. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον σημειοῦμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δι' οὗ σημειοῦμεν τὴν ἔλλειψιν ἢ τὴν μὴ ὕπαρξιν μονάδων τάξεώς τινος ἐν τῇ γραφῇ τῶν ἀριθμῶν, ἤτοι διὰ τοῦ σημείου 0.

70. Αἱ τὸν νέον τοῦτον ἀριθμὸν ὁρίζουσαι ἰσότητες εἶνε

$$\alpha - \alpha = 0 \quad \text{ἤ} \quad \alpha = \alpha + 0 \quad \text{ἤ} \quad \alpha - 0 = \alpha.$$

ἤτοι τὸ 0 προστιθέμενον ἢ ἀφαιρούμενον ἀπὸ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ οὐδόλως μεταβάλλει αὐτόν (παράβλ. σελ. 14 Σημ.).

Σημ. Ὅτι πᾶσαι αἱ διαφοραὶ δύο ἴσων ἀριθμῶν ὡς $5-5$, $1-1$, $\frac{3}{5}-\frac{3}{5}$, εἶνε ἴσαι, ἕπεται ἀναγκαίως ἐκ τῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τῆς προσθέσεως. Καὶ ὄντως ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶνε $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} + 0$ ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἴσων προσθέσωμεν $\frac{2}{5}$, εὑρίσκομεν $1 = (\frac{3}{5} + 0) + \frac{2}{5}$ ἢ κατὰ τὸν διαλυτικὸν νόμον $1 = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + 0$ ὅθεν $1 = 1 + 0$· ἄρα ἡ διαφορὰ $\frac{3}{5} - \frac{3}{5}$ εἶνε ἴση τῇ διαφορᾷ $1-1$ (παράβλ. σελ. 14 Σημ.).

71. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις κατ' οὐδὲν μεταβάλλονται ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ νέου τούτου ἀριθμοῦ· διότι ὡς προσθετέος ἢ ἀφαιρετέος, ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ φαίνεται, ὁ ἀριθμὸς 0 ὅλως παραλείπεται.

72. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 0 ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν α· ἐὰν ὁ α εἶνε ἀκέραιος, καὶ δεχθῶμεν καὶ διὰ τὸ 0 τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (31), εἶνε

$$0 \cdot \alpha = 0 + 0 + \ldots + 0$$

καὶ ἐπειδὴ ὁσαςδήποτε φορὰς καὶ ἂν προσθέσωμεν εἰς τινα ἀριθμὸν τὸ 0,

ὁ ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μηδενικῶν εἶνε ἴσον τῷ 0, ὅθεν

$$0 \cdot \alpha = 0$$

Ἀλλὰ καὶ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α, φθάνομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, *ἐὰν θέλωμεν νὰ ἰσχύωσι καὶ ἐπὶ τοῦ 0 οἱ νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ οἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἰσχύοντες*· διότι, ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$$

τεθῇ $\gamma = 0$, ἕπεται

$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$$

$\alpha . 0$ εἶνε ἄρα διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ἴσων, ἤτοι 0, ὅθεν

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος βλέπομεν, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον $0 \cdot 0$ ἀνάγκη νὰ θεωρῆται ὡς ἴσον τῷ 0, ἄλλως δὲν ἰσχύει ἡ εἰρημένη ἰσότης διὰ $\alpha = 0$,

Ἰσχύει ἄρα ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ μηδενός, ὁ ἑπόμενος νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ γινόμενον εἶνε 0, ἐάν τις τῶν παραγόντων εἶνε 0, οὐδέποτε δὲ ἄλλως.

73. Τὸ θεώρημα τῆς ἀνισότητος, τὸ ἐν τῷ ἐδαφ. 64 ἀναφερόμενον, δὲν ἀληθεύει, ὅταν ὁ πολλαπλασιάζων ἀριθμὸς εἶνε 0, διότι καὶ ἄνισοι ἀριθμοὶ ἐπὶ 0 πολλαπλασιασθέντες γίνονται ἴσοι.

74. Ἐὰν τὸ 0 διαιρεθῇ δι' ἄλλου ἀριθμοῦ α (οὐχὶ διὰ τοῦ 0), τὸ πηλίκον εἶνε πάντοτε 0· τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πηλίκου καὶ ἐκ τῆς ἰδιότητος $\alpha \cdot 0 = 0$.

75. Διὰ τοῦ 0 οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ, τουτέστιν ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶνε ἀδύνατος. Καὶ ὄντως οὐδεὶς τῶν ἀριθμῶν τοῦ θεωρουμένου συστήματος δύναται νὰ εἶνε πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, διότι πάντες ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι γινόμενον 0.

76. Οὔτε εἶνε δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ τὸ πηλίκον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως (ὡς τῆς $\frac{1}{0}$) ὡς *ἔννοια ὡρισμένη* ἢ *ἀριθμὸς ὡρισμένος* εἰς τὸ ἤδη ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν· διότι καταστρέφει εἰσαγόμενον πάντας τοὺς νόμους τῆς ἰσότητος καὶ τοὺς νόμους τῶν τεσσάρων πράξεων· καὶ πρέπει διὰ τοῦτο νὰ ἀποκλεισθῇ ἀπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν πρὸς ἀποφυγὴν ἀντιφάσεων.

Ἔστω τῷ ὄντι λ νέος τις ἀριθμός, ὅστις ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενος

νὰ δίδῃ γινόμενον 1 (τότε λ εἶνε τὸ πηλίκον $\frac{1}{0}$)· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λ μένει ὁ αὐτός, ἤτοι οὐδόλως μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς αὐτὸν οἱοσδήποτε ἀριθμὸς α ἐκ τῶν ἄλλων. Καὶ ὄντως, ἐὰν εἶνε $0\cdot\lambda=1$, εἶνε καὶ $0\ (\lambda+\alpha)=0\cdot\lambda+0\cdot\alpha=0\cdot\lambda=1$· καὶ ἐπειδὴ παρεδέχθημεν τὸν ἀριθμὸν λ ὡρισμένον ἐκ τῆς ἰδιότητος αὐτοῦ $0\ \lambda=1$, ἕπεται $\lambda=\lambda+\alpha$, ὅπερ προφανῶς ἀντίκειται εἰς τοὺς νόμους τῆς ἰσότητος.

Ἀλλὰ καὶ οἱ νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν ἰσχύουσιν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων πράξεων·

$$0\ 5\ \lambda=0\ \lambda=1$$

ἀλλὰ πάλιν $\quad 0\cdot5\cdot\lambda=0\cdot\lambda\cdot5=1\cdot5=5$

ὁμοίως $\quad 0\cdot0\cdot5\cdot\lambda=0\cdot5\cdot\lambda=0\ \lambda=1$

ἀλλὰ καὶ $\quad 0\cdot0\ 5\ \lambda=0\ 0\cdot\lambda\ 5=0\ \lambda\cdot5=1\ 5=5$

ἢ καὶ $\quad 0\cdot0\cdot5\cdot\lambda=0\cdot\lambda\cdot0\ 5=1\cdot0\cdot5=0$

ὁμοίως δεικνύεται ὅτι $\quad 0\cdot0\ \lambda\cdot\lambda=1\ \ \eta\ =\lambda$

πρὸς τούτοις $\quad \lambda(\beta+0)=\lambda\cdot\beta$

ἀλλὰ καὶ $\quad =\lambda\cdot\beta+\lambda\cdot0=\lambda\cdot\beta+1$

Διὰ ταῦτα πάντα ἡ παραδοχὴ τοῦ $\frac{1}{0}$ ὡς ὡρισμένου ἀριθμοῦ καθίσταται ἀδύνατος καὶ ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶνε ἀδύνατος.

77 Οὐ μόνον ἐν τῷ προκειμένῳ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ καὶ ἐν παντὶ ἄλλῳ συστήματι γενικωτέρῳ (ἤτοι περιέχοντι τοῦτο) ἡ πρᾶξις $\frac{1}{0}$ εἶνε ἀδύνατος· διότι καὶ ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι τὰ αὐτὰ δεικνύονται ἄτοπα καὶ πρὸς τοὺς θεμελιώδεις νόμους τῆς ἰσότητος καὶ τῶν πράξεων ἀντιβαίνοντα. Ἔχομεν ἄρα καὶ τὸν ἑπόμενον νόμον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\quad \alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0$

οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ φύσις τοῦ ἀριθμοῦ α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

78. Ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ εὑρυνθῇ τὸ θεωρηθὲν σύστημα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν οὕτως, ὥστε ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος νὰ ὑπάρχῃ ἐν τῷ αὐτῷ συστήματι, χωρὶς νὰ ἀλλοιωθῶσι τὸ παράπαν οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος καὶ οἱ νόμοι τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μηδὲ τὰ ἐξαγόμενα τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, αἱ δύο διαφοραὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\beta-\alpha$, α καὶ β ὄντων δύο ἀριθμῶν ἀνίσων τοῦ κλασματικοῦ συστήματος, πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν ἐν τῷ νέῳ συστήματι, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $(\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)$. Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε

$$\alpha+(\beta-\alpha)=\beta$$
$$\beta+(\alpha-\beta)=\alpha$$

ὅθεν κατὰ τοὺς νόμους τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἰσότητος

$$\alpha+\beta+(\beta-\alpha)+(\alpha-\beta)=\alpha+\beta.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $(\beta-\alpha)+(\alpha-\beta)$ εἶνε διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν· ἀπεδείχθη δὲ ὅτι πᾶσαι αἱ διαφοραὶ δύο ἴσων ἀριθμῶν ἀνάγκη νὰ θεωρῶνται ὡς εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὃν ἐσημειώσαμεν διὰ τοῦ σημείου 0· εἶνε ἄρα

$$(\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)=0$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι πρέπει δι' ἕκαστον ἀριθμὸν νὰ παραδεχθῶμεν ἕνα ἀντίθετον, ἤτοι τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν ἀμφότεροι προστεθῶσιν ἢ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ ἀριθμοῦ, νὰ μὴ ἀλλοιῶσι ποσῶς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

79. Κατὰ ταῦτα παραδεχόμεθα καὶ εἰσάγομεν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν δι' ἑκάστην μονάδα

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$$

μίαν (καὶ μίαν μόνην) ἀντίθετον· τὰς νέας ταύτας μονάδας παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν σημείων φερόντων τόνον, ὡς

$$1' \quad \left(\frac{1}{2}\right)' \quad \left(\frac{1}{3}\right)' \quad \left(\frac{1}{4}\right)', \quad \left(\frac{1}{5}\right)' \ldots$$

καὶ καλοῦμεν *ἀρνητικάς*, τὰς δὲ προϋπαρχούσας, *θετικάς*. Ὥστε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν νέων μονάδων εἶνε

$$1+1'=0,\quad \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)'=0,\ \ldots\ \frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)'=0$$

Αἱ ἀρνητικαὶ κλασματικαὶ μονάδες ἔχουσι πρὸς τὴν ἀκεραίαν $1'$ τὴν αὐτὴν σχέσιν, ἣν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι θετικαὶ πρὸς τὴν ἀκεραίαν 1· καθὼς δηλαδὴ ἡ μονὰς $\frac{1}{3}$ τρὶς ληφθεῖσα δίδει 1, οὕτω καὶ ἡ ἀρνητικὴ μονὰς $\left(\frac{1}{5}\right)'$ τρὶς ληφθεῖσα δίδει τὴν ἀκεραίαν $1'$· ἤτοι εἶνε τὸ τρίτον τῆς $1'$· διότι εἶνε

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)'+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)'+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)'=0$$

ἢ κατὰ τοὺς νόμους τῆς προσθέσεως (οὓς καὶ πάλιν θέλομεν νὰ ἰσχύωσιν)

$$1+\left(\frac{1}{3}\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'=0$$

τὸ ἄθροισμα $\left(\frac{1}{3}\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'$ εἶνε λοιπὸν ὁ ἀντίθετος τοῦ 1 ἀριθμός, ἤτοι εἶνε ἡ μονὰς $1'$.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ὁ ἀντίθετος τοῦ 2 ἤτοι ὁ $2'$ εἶνε τὸ ἄθροισμα $1'+1'$, ὁ $3'$ τὸ ἄθροισμα $1'+1'+1'$ κλ.

80. *Ἀριθμὸς* καὶ πάλιν εἶνε τὸ σύνολον ἢ τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονάδων. Ὁ ἀριθμὸς ὁρίζεται, ὅταν δοθῶσιν αἱ συναποτελοῦσαι αὐτὸν μονάδες (εἰς πλῆθος πάντοτε πεπερασμένον) καὶ ποσάκις ἑκάστη λαμβάνεται, ὡς

$$1+\frac{1'}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8},\quad 1+1+\frac{1'}{1}+\frac{1'}{3}+1'$$

Πᾶς ἀριθμὸς πολλάκις ἐπαναλαμβανόμενος, ἤτοι προστιθέμενος πολλάκις εἰς ἑαυτόν, γίνεται καὶ πάλιν ἀκέραιος· διότι αἱ μονάδες ἐξ ὧν σύγκειται πολλάκις ληφθεῖσαι γίνονται ἀκέραιαι.

81. *Πᾶς ἀριθμὸς καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ, ἐπὶ τὴν θετικὴν μονάδα πολλαπλασιασθείς, πρέπει νὰ μένῃ ὁ αὐτός*· ἤτοι $\alpha.\ 1=\alpha$.

Τοῦτο ἀπεδείχθη ἤδη διὰ τὰς θετικὰς μονάδας· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δειχθῇ διὰ τὰς ἀρνητικάς.

Ἔστω τυχοῦσα ἀρνητικὴ μονὰς ἡ $\left(\frac{1}{\nu}\right)'$ κατὰ τὸν ὁρισμόν. αὐτῆς εἶνε $\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)'=0$, ἄρα καὶ $\left\{\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)'\right\}.1=0$, ἤτοι $\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)'.1=0$. Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον $\left(\frac{1}{\nu}\right)'.1$ εἶνε ὁ ἀντίθετος τοῦ $\frac{1}{\nu}$ ἀριθμός· ἤτοι $\left(\frac{1}{\nu}\right)'.1=\left(\frac{1}{\nu}\right)'$

καὶ ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων καὶ ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος, ἔπεται γενικῶς $\alpha'.1=\alpha$. Ὥστε καὶ ἐνταῦθα αἱ ἐπαναλήψεις ἀριθμοῦ εἶνε πολλαπλάσια αὐτοῦ ἐπὶ τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους 1, 2, 3 .. διότι

$$\alpha+\alpha+\alpha=\alpha(1+1+1)=\alpha.\ 3$$

82. Ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελουμένων, ὡρίσθη ἤδη ἐν τοῖς ἐδαφίοις 52 καὶ 5.

Δύο ἀριθμοὶ καθόλου λέγονται ἴσοι, ἐὰν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι, βοηθούσης, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη, τῆς σχέσεως $1+1'=0$, ἄνισοι δέ, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι.

Ὅτι δὲ διατηροῦνται καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς ἰσότητος οἱ νόμοι αὐτῆς εἶνε φανερόν.

83. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ παρουσιασθῇ ὑπὸ πολλὰς μορφάς. διότι δύναται 1) νὰ ἀναλυθῇ μία μονὰς εἰς ἄλλας τῆς αὐτῆς κυρίας μονάδος καὶ 2) νὰ προστεθῇ μονάς τις καὶ συνάμα ἡ ἀντίθετος αὐτῇ, ἢ καὶ νὰ παραλειφθῇ μονάς τις καὶ συνάμα ἡ ἀντίθετος αὐτῇ.

84. Πᾶς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0 δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς πολλαπλάσιον μιᾶς μόνον μονάδος, εἴτε ἐκ τῶν θετικῶν εἴτε ἐκ τῶν ἀρνητικῶν.

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς α' ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ληφθεὶς μ. φορὰς γίνεται ἀκέραιος

$$A+B'$$

ἂν τότε αἱ θετικαὶ καὶ ἀκέραιαι μονάδες A καὶ αἱ ἀρνητικαὶ ἀκέραιαι B′ εἶνε ἰσοπληθεῖς (ἤτοι $A=B$),ὁ ἀριθμὸς εἶνε ἴσος τῷ 0·

ἂν δὲ αἱ θετικαὶ μονάδες εἶνε περισσότεραι, ἔστω

$$A=B+\Delta \quad \text{τότε} \quad A+B'=B+\Delta+B'=\Delta$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς α, ληφθεὶς μ φοράς, ἔγινε θετικὸς ἀκέραιος Δ, συνάγεται, ὅτι ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ $\frac{1}{\mu}.\Delta$

ἂν τέλος αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες εἶνε περισσότεραι, ἔστω

$$B'=A'+\Delta' \text{ . τότε } A+B'=A+A'+\Delta'=\Delta'$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς α εἶνε ἴσος τῷ ἀριθμῷ $\left(\frac{1}{\mu}\right)'.\Delta$

Οἱ ἐκ θετικῶν μόνον μονάδων συγκείμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *θετικοί*, οἱ δὲ ἐξ ἀρνητικῶν *ἀρνητικοί*.

Πρόσθεσις.

85. Ἡ ἔννοια τῆς προσθέσεως εἶνε ἁπλουστάτη καὶ θεμελιώδης καὶ στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀμέσου ἀντιλήψεως. Ὁρίζεται δὲ ἡ πρόσθεσις ὡς *πρᾶξις, ἐν ᾗ, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις ἔχει πάσας τὰς μονάδας, ἃς ἔχουσιν οἱ δοθέντες, καὶ μόνον ταύτας καὶ ἑκάστην τοσάκις, ὁσάκις ὑπάρχει ἐν τοῖς δεδομένοις.*

86. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ὦσι τῆς αὐτῆς κυρίας μονάδος, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν δὲν διαφέρει τῆς προσθέσεως ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἀντιθέτων μονάδων, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι.

87. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς τοῦ αὐτοῦ συστήματος *ἐντελῶς ὡρισμένος*· διότι ἀνάγεται ἡ πρόσθεσις αὐτῶν εἴτε εἰς πρόσθεσιν εἴτε εἰς ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν κλασματικῶν, αἱ δὲ πράξεις αὗται δίδουσιν ἐξαγόμενον ἐντελῶς ὡρισμένον.

88. Ὅτι οἱ νόμοι τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουσι καὶ ἐν τῇ προσθέσει τοῦ συστήματος τούτου, δύναταί τις νὰ ἴδῃ εὐκόλως.

Ἀφαίρεσις.

89. Αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν· καὶ ὄντως ἔστω α ἀριθμὸς οἱοσδήποτε καὶ α′ ὁ ἀντίθετος αὐτῷ· ἡ διαφορὰ β—α εἶνε προφανῶς ἴση τῷ ἀθροίσματι β + α′· διότι, ἐὰν εἰς ταύτην προστεθῇ ὁ α, προκύπτει ὁ μειωτέος β.

Ἡ ἀφαίρεσις ἄρα ἀριθμοῦ σημαίνει πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου αὐτῷ.

Πολλαπλασιασμός.

90. Ἐπειδὴ ἑκάτερος τῶν παραγόντων εἶνε ἄθροισμα μονάδων καὶ ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονάδων.

91. Παραδεχόμενοι, ὡς ἤδη εἴπομεν, ὅτι οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος, τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν πρέπει νὰ διέπωσι καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $1'$ τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $1+1'$ καὶ 0, εὑρίσκομεν

$$1\cdot 1' + 1'\cdot 1' = 0 \quad \text{ἢ ἐπειδὴ } 1\cdot 1' = 1'$$

$$1' + 1'.1' = 0$$

Ὁ ἀριθμὸς $1'\cdot 1'$ εἶνε ἄρα ἀντίθετος τῷ $1'$· καὶ ἐπειδὴ ἕνα μόνον τοιοῦτον παρεδέχθημεν, συμπεραίνομεν ὅτι θὰ εἶνε

$$1'.1' = 1$$

ὁμοίως δεικνύεται ὅτι

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1'}{\beta} = \frac{1'}{\alpha\cdot\beta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1'}{\alpha}\cdot\frac{1'}{\beta} = \frac{1}{\alpha\cdot\beta}$$

92. Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος $1'$ ἐπὶ τὸν ἀντίθετον θετικὸν ἀριθμόν.

Καὶ ὄντως εἶνε $\frac{1'}{\alpha}.\mu = 1'.\frac{1}{\alpha}.\mu = 1'.\frac{\mu}{\alpha}$

93. *Μέτρον* ἀριθμοῦ λέγεται, τοῦ μὲν θετικοῦ αὐτὸς οὗτος, τοῦ δὲ ἀρνητικοῦ ὁ ἀντίθετος θετικός· ὡς τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{8}$, $\frac{1'}{8}$.7 μέτρα εἶνε οἱ $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{7}{8}$.

94. Τὸ μέτρον τοῦ γινομένου δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι τὰ μέτρα τῶν δύο παραγόντων· τὸ δὲ γινόμενον εἶνε θετικὸν μέν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶνε τῆς αὐτῆς κυρίας μονάδος, ἀρνητικὸν δέ, ἐὰν ἀντιθέτων. Καὶ ὄντως, ἐπειδὴ εἶνε

$$\alpha' = \alpha\cdot 1' \text{ καὶ } \beta' = \beta\cdot 1',$$

ἔπεται

$$\alpha\cdot\beta' = \alpha\cdot\beta\cdot 1'$$

καὶ

$$\alpha'\cdot\beta' = \alpha\cdot\beta\cdot 1'\cdot 1' = \alpha\cdot\beta.$$

95. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶνε πάντοτε ἀριθμὸς τοῦ αὐτοῦ

συστήματος έντελῶς ὡρισμένος, διότι τὸ μὲν μέτρον αὐτοῦ εἶνε έντελῶς ὡρισμένον ὡς γινόμενον δύο ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος, τὸ δὲ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν τοῦ γινομένου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ ἢ θετικοῦ τῶν παραγόντων καθ' ὡρισμένον νόμον.

96. Καὶ ἐν τῷ προκειμένῳ συστήματι οἱ νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διατηροῦνται. Καὶ ἡ μὲν ἰσοζυγία εἶνε προφανής· διότι ἀρκεῖ νὰ νοηθῶσιν οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ὡς γινόμενα τῆς ἀρνητικῆς μονάδος $1'$ ἐπὶ τὸ μέτρον αὐτοῦ ἕκαστος. Ὁ δὲ ἐπιμερισμός, εἰ μὲν εἶνε οἱ προσθετέοι ὁμοειδεῖς (ἀμφότεροι θετικοὶ ἢ ἀμφότεροι ἀρνητικοί) ἀποδεικνύεται κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. 66 εἰρημένα, εἰ δὲ εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

1) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta'$ εἶνε 0, θὰ εἶνε $\beta=\alpha$ καὶ ἑπομένως

$$\gamma(\alpha+\beta')=\gamma\alpha+\gamma\beta',\ \text{ὡς ἴσα τῷ } 0.$$

Ἐὰν $\alpha+\beta'=\delta$, ἤτοι θετικόν, θὰ εἶνε καὶ $\alpha=\beta+\delta$

ὅθεν $$\gamma(\alpha+\beta')=\gamma.\delta$$

ἀλλὰ καὶ $$\gamma\alpha+\gamma\beta'=\gamma(\beta+\delta)+\gamma\beta'=\gamma\beta+\gamma\beta'+\gamma\delta=\gamma\delta$$

3) Ἐὰν τέλος $\alpha+\beta'=\delta'$ ἤτοι ἀρνητικόν, θὰ εἶνε $\beta'=\alpha'+\delta'$

ὅθεν $$\gamma(\alpha+\beta')=\gamma.\delta'$$

ἀλλὰ καὶ $$\gamma\alpha+\gamma\beta'=\gamma\alpha+\gamma(\alpha'+\delta')=\gamma\alpha+\gamma\alpha'+\gamma\delta'=\gamma\delta'$$

ὥστε πάντοτε εἶνε $$\gamma(\alpha+\beta')=\gamma\alpha+\gamma\beta'.$$

97. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐν τῷ συστήματι τούτῳ δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β (θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν), εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ α καὶ ἐκ τοῦ ἀντιθέτου αὐτῷ καὶ ἐκ τῶν μερῶν ἀμφοτέρων τούτων, ὅπως ὁ β ἀποτελεῖται ἐκ τῶν μονάδων 1 καὶ $1'$ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν· ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πρέπει ἑκάστην θετικὴν μονάδα τοῦ β νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ α, ἑκάστην δὲ ἀρνητικὴν διὰ τοῦ α', προσέτι ἕκαστον μέρος τῆς θετικῆς μονάδος διὰ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ α καὶ ἕκαστον μέρος τῆς ἀρνητικῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ α'.

Καὶ ὄντως, ἐὰν εἶνε $\beta=1+1+1'+\frac{1}{8}+\frac{1'}{3}$

ἔπεται $\alpha\beta=\alpha(1+1+1'+\frac{1}{8}+\frac{1'}{3})=\alpha+\alpha+\alpha'+\frac{\alpha}{8}+\frac{\alpha'}{3}$

Διαίρεσις.

98. Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρεθῶσι τὰ μέτρα αὐτῶν καὶ τὸ πηλίκον τῶν μέτρων ληφθῇ θετικῶς μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ὁμοειδεῖς, ἀρνητικῶς δέ, ἂν ἑτεροειδεῖς.

π χ. $\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\alpha.1'}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.\ 1'$, $\frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} 1'$, $\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha.1'}{\beta.1'} = \frac{\alpha}{\beta}$

Παρατήρησις.

Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἐν τῷ παρόντι συστήματι ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις (πλὴν τῆς διὰ 0) ἀνήχθησαν εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ ὅτι αἱ πράξεις αὗται δίδουσι πάντοτε ἓν ὡρισμένον ἐξαγόμενον, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις γίνονται ἐν τῷ συστήματι τούτῳ πάντοτε (πλὴν μιᾶς ἐξαιρέσεως), καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἑκάστης τούτων εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένον. Ὥστε τὸ σύστημα τοῦτο, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς τέσσαρας στοιχειώδεις πράξεις, εἶνε *τέλειον*.

Γραφὴ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν

Τοὺς θετικοὺς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς διακρίνομεν συνήθως προτάσσοντες αὐτῶν τὰ σημεῖα + (διὰ τοὺς θετικοὺς) καὶ — (διὰ τοὺς ἀρνητικούς).

Ἡ νέα αὕτη τῶν σημείων τούτων χρῆσις συμφωνεῖ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς δοθεῖσαν αὐτοῖς σημασίαν (τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως), ἐὰν παριστῶμεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν γράφοντες αὐτοὺς κατὰ σειρὰν καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ.

Ἐὰν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 5′, 7′ 4

γράφωνται $+2, -5, -7, +4,$

τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὅπερ ἔπρεπε νὰ γράφηται

$$(+2) + (-5) + (-7) + (+4),$$

γράφεται ἁπλῶς ὡς ἑξῆς

$$2 - 5 - 7 + 4$$

εἴτε δὲ ἐκληφθῶσιν ἐνταῦθα τὰ σημεῖα + καὶ — ὡς σημεῖα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, εἴτε ἐκληφθῶσιν ὡς δηλωτικὰ τοῦ εἴδους τῶν προστιθεμένων ἀριθμῶν, εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ· διότι ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 7

καὶ 5 δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἀντιθέτων 7′ καὶ 5′· ὥστε $2-5-7+4=2+5'+7'+4$.

Περὶ ἀνισοτήτων.

99. Ἐπὶ τῶν ἀνίσων θετικῶν ἀριθμῶν (52) ἰσχύουσιν αἱ ἑπόμεναι προτάσεις, ὧν ἡ ἀπόδειξις εἶνε ἁπλουστάτη.

1) *Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἑκάτερον τῶν ἀνίσων, ἡ ἀνισότης μένει.*

2) *Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ἄνισοι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, (διάφορον τοῦ 0), ἡ ἀνισότης μένει· ὡσαύτως καὶ ἐὰν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ*

3) *Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους προστεθῶσιν ἄνισοι ἀλλ' εἰς τὸν μείζονα ὁ μείζων καὶ εἰς τὸν ἐλάσσονα ὁ ἐλάσσων, ἡ ἀνισότης μένει.*

4) *Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἄνισοι ἐπὶ ἀνίσους ἀλλ' ὁ μείζων ἐπὶ τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων ἐπὶ τὸν ἐλάσσονα, ἡ ἀνισότης μένει.*

100. Αἱ προτάσεις αὗται εἰσὶν ἀληθεῖς ἐν τῷ συστήματι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν· ἐὰν θέλωμεν ἡ πρώτη πρότασις, ἡ πασῶν ἁπλουστάτη, νὰ ἰσχύῃ γενικῶς ἐπί τε τῶν θετικῶν καὶ ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἀνάγκη νὰ θεωρῶμεν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς μικροτέρους τοῦ 0, καὶ ἐκ δύο ἀρνητικῶν μείζονα τὸν τὸ μικρότερον μέτρον ἔχοντα· καὶ ὄντως εἶνε $5>1$ καὶ προστιθεμένου -5 εἰς ἀμφότερα, ἕπεται $0>-4$.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ θεωρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς λέγομεν τὸν ἀριθμὸν α μείζονα τοῦ β, α καὶ β ὄντων οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶνε θετικὸς ἀριθμός. Ὅτι τότε ἡ πρώτη πρότασις μένει ἀληθὴς εἶνε φανερόν· ἡ δὲ δευτέρα ἰσχύει, ἐὰν ὁ πολλαπλασιάζων ἢ ὁ διαιρῶν ἀριθμὸς εἶνε θετικός, ἀλλ' ἐὰν εἶνε ἀρνητικὸς ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται· καὶ ἡ τρίτη πρότασις μένει πάντοτε ἀληθής· διότι ἐὰν εἶνε

$$\alpha-\beta=\delta$$

καὶ

$$A-B=\Delta$$

ἕπεται

$$\alpha+A-(\beta+B)=\delta+\Delta$$

ὥστε

$$\alpha+A>\beta+B$$

Ἡ δὲ τετάρτη ἰσχύει μόνον ὅταν πάντες οἱ ἀριθμοὶ ὦσι θετικοί.

Σημειώσεις.

α′. Ἐνῷ οἱ θετικοὶ ἀριθμοί, αὐτοὶ καθ' ἑαυτούς, ἀποτελοῦσι σύστημα, ἐν τῷ ὁποίῳ αἱ τέσσαρες πράξεις γίνονται πάντοτε πλὴν τῆς ἀφαιρέσεως, οἱ ἀρνητικοί, ἄνευ τῶν θετικῶν

νοούμενοι, ἀποτελοῦσι σύστημα. ἐν τῷ ὁποίῳ μόνον ἡ πρόσθεσις ἐκτελεῖται πάντοτε, ἡ ἀφαίρεσις ἐν μέρει, ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις εἶνε ὅλως ἀδύνατοι. (Τὸ πλεονέκτημα τοῦτο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει προφανῶς τὴν αἰτίαν του ἐν τῇ ἰδιότητι τῆς θετικῆς μονάδος 1.1=1, ἐν ᾧ διὰ τὴν ἀρνητικὴν εἶνε 1'.1'=1). Ἐκ τούτου δύναται ἴσως νὰ δικαιολογηθῇ τὸ ὄνομα ἀρνητικοὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων, καθόσον αὐτοὶ καθ' ἑαυτοὺς λαμβανόμενοι εἶνε ἄχρηστοι· ἂν καὶ ἡ ὀνομασία αὕτη προῆλθεν ἐξ ἄλλης ἐσφαλμένης ἀπόψεως, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐθεώρησαν αὐτοὺς ὅτε κατὰ πρῶτον εὑρέθησαν.

β'. Ποσὰ ἐπιδεχόμενα τὴν ἐν τῷ θεωρηθέντι συστήματι ἐνυπάρχουσαν ἀντίθεσιν, καὶ ἐν οἷς ἑπομένως ἐφαρμόζεται τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀριθμῶν, εἶνε, ὁ χρόνος, παρελθὸν καὶ μέλλον, περιουσία καὶ χρέος, κέρδος καὶ ζημία, δρόμος ἀπό τινος σημείου ἐπὶ εὐθείας πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, κτλ. Ἐν πᾶσι τούτοις καὶ τοῖς ὁμοίοις αἱ τὴν αὐτὴν φορὰν ἔχουσαι καταστάσεις τοῦ ποσοῦ δύνανται κατὰ συνθήκην νὰ παριστῶνται ὑπὸ ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς κυρίας μονάδος, αἱ δὲ τὴν ἐναντίαν ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων. Τὰ ἐκ τῆς τοιαύτης παραστάσεως προκύπτοντα πλεονεκτήματα εἶνε ἀρκούντως γνωστά. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον ὅτι ἡ συστοιχία αὕτη τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ποσῶν μένει κυρίως μόνον ἐν τῇ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει· διότι ἡ θεμελιώδης ἔννοια τῶν πράξεων τούτων εἶνε ἡ αὐτὴ καὶ ἐν τοῖς ποσοῖς καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς.

Διὰ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ἡ θέσις ἀντικειμένου τινὸς ἐν σειρᾷ πολλῶν ἀντικειμένων (ἢ καὶ ἀπείρων), ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὁρισθῇ αὐθαιρέτως τὸ ἀντικείμενον, ὅπερ θέλομεν νὰ παριστᾷ ὁ ἀριθμὸς 0· τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ παριστῶνται τότε ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 . . . κατὰ σειράν, τὰ δὲ πρὸς ἀριστερὰ ὑπὸ τῶν —1, —2, —3, —4 κτλ.

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι καὶ ποσὰ μὴ ἐπιδεχόμενα ἀντίθεσιν καταστάσεων, εἶνε πρόδηλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

101. Τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν πληροῖ μὲν πάσας τὰς ἀνάγκας τῆς Ἀριθμητικῆς, ἑνόσῳ αὕτη περιορίζεται εἰς τὰς τέσσαρας στοιχειώδεις πράξεις, (ἤτοι εἰς ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ), φαίνεται ὅμως καὶ τοῦτο ἐλλιπές, ὅταν τις, μένων ἐν αὐτῷ, ἐπιχειρήσῃ νὰ λύσῃ ἀνώτερα ζητήματα, οἷον τὸ ἑπόμενον·

Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 5,

ἢ τὸ ἑπόμενον

Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ ὁ κύβος νὰ εἶνε 9, κτλ.

Τὰ ζητήματα ταῦτα καὶ τὰ τούτοις ὅμοια ἢ πρέπει νὰ θεωρηθῶσιν ἄλυτα καὶ νὰ περιορισθῇ ἡ Ἀριθμητικὴ εἰς τὰ ἁπλούστερα ζητήματα, τὰ διὰ τῶν τεσσάρων στοιχειωδῶν πράξεων λυόμενα (τὰ τοῦ πρώτου βαθμοῦ), ἢ, ἵνα ἀρθῇ καὶ τὸ ἐμπόδιον τοῦτο τῆς προόδου τῆς Ἀριθμητικῆς, πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ ὑπάρχον σύστημα διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων ἀριθμῶν.

102 Εἰσαγαγόντες εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τὰς κλασματικὰς μονάδας, παρεδέχθημεν καὶ ὠνομάσαμεν ἀριθμὸν τὸ σύνολον πλήθους τινὸς μονάδων πεπερασμένου. Τὸν περιορισμὸν τοῦτον, τοῦ νὰ εἶνε δηλονότι αἱ τὸν ἀριθμὸν συναποτελοῦσαι μονάδες εἰς πλῆθος πεπερασμένον, αἴρομεν ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ καὶ ζητοῦμεν, ἂν εἶνε δυνατὸν οὕτω νὰ αὐξήσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, διατηροῦντες τοὺς νόμους τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων ἀβλαβεῖς.

103. Εἰς τὴν ἄρσιν τοῦ εἰρημένου περιορισμοῦ ἄγει ἡμᾶς ἡ παρατήρησις, ὅτι δύναται ἡ μονάς, ὡς καὶ πᾶς ἀριθμός, νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελουμένη ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος μερῶν· καὶ ὄντως, προσθέτοντες ὁσαδήποτε ἐκ τῶν κλασμάτων

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots+\frac{9}{10^{\nu}}+\ldots \quad \text{ἢ } 0{,}99999\ldots$$

εὑρίσκομεν πάντοτε ὡς ἄθροισμα κλάσμα τι ἔλασσον τῆς μονάδος, ὡς τὰ

$$0{,}9, \quad 0{,}99, \quad 0{,}999 \quad 0{,}909, \text{ κτλ.}$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τόσα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν εἰλημμένων νὰ διαφέρῃ τῆς μονάδος ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ἄν τις προστάξῃ. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ ἄπειρον ἐκεῖνο πλῆθος τῶν κλασμάτων *ἐν συνόλῳ παριστᾷ* τὴν μονάδα, ἐκλαμβάνοντες ταῦτα ὡς *ἓν ὅλον*, ἢ ἀθροίζοντες ταῦτα διὰ τῆς φαντασίας.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐν τοῖς κλάσμασιν

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu}}+\ldots$$

ὧν ἕκαστον εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου. Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶνε ἔλασσον τῆς μονάδος· ἀλλὰ δύναταί τις νὰ λάβῃ τόσα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν εἰλημμένων νὰ διαφέρῃ τῆς μονάδος ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ἄν τις προστάξῃ. Ἐὰν ἄρα διὰ τῆς φαντασίας ἀθροίσωμεν πάντα ταῦτα (διότι ἡ πρόσθεσις αὐτῶν οὐδέποτε δύναται νὰ περατωθῇ), βλέπομεν, ὅτι συναποτελοῦσι τὴν μονάδα.

Κατὰ ταῦτα γενικεύομεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἑξῆς.

104. ᾽*Αριθμὸς* εἶνε ἡ περιληπτικὴ ἐν τῷ νῷ παράστασις ἤτοι τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους, (εἴτε πεπερασμένον εἶνε τὸ πλῆθος αὐτῶν εἴτε μή), ἐάν, ὁσασδήποτε ἐκ τούτων καὶ ἂν λάβωμεν, τὸ ἄθροισμα τῶν εἰλημμένων εἶνε μικρότερον ἀκεραίου τινός.

Ὁ ἀριθμὸς ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσι πᾶσαι αἱ συναποτελοῦσα, αὐτὸν μονάδες καὶ ὁρισθῇ ποσάκις ἑκάστη ἐν αὐτῷ λαμβάνεται, π. χ.

0, 10 100 1000 10000 100000 . . .
0, 101 1001 10001 100001 1000001 . . .
0, 25 205 2005 20005 . . .
0, 25 250 2500 25000 250000 . . .

105. ᾽Ότι ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τοῦ νέου συστήματος περιλαμβάνονται καὶ τοῦ προηγουμένου πάντες, εἶνε φανερόν, ὅτι δὲ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς ἔχει τὸ σύστημα τοῦτο, μὴ ἐν ἐκείνῳ εὑρισκομένους, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις.

106. Οἱ νέοι ἀριθμοί, οἱ μὴ διὰ πεπερασμένου πλήθους μονάδων δυνάμενοι νὰ ἐκφρασθῶσι, λέγονται *ἀσύμμετροι*, οἱ δὲ λοιποὶ *σύμμετροι*.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης.

107. Ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι πᾶς ἀριθμὸς πολλάκις λαμβανόμενος ἐγίνετο ἀκέραιος· διὰ τῆς ἰδιότητος δὲ ταύτης ἀνηγάγομεν

τὴν ἰσότητα καὶ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος εἰς τὴν ἰσότητα καὶ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων. Ἀλλ' ἐνταῦθα ἡ ῥηθεῖσα ἰδιότης δὲν ὑπάρχει· διὰ τοῦτο εἶνε ἀνάγκη νὰ στηρίξωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότήτος ἐπὶ ἄλλης γενικωτέρας βάσεως

Ἐν πρώτοις εἶνε προφανές, ὅτι οὐδόλως βλάπτεται ὁ ἀριθμὸς (εἴτε ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων σύγκειται, εἴτε ἐξ ἀπείρου), ἂν μονάδας τινὰς αὐτοῦ, ὧν τὸ πλῆθος πεπερασμένον, ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλων ἐπίσης πεπερασμένου πλήθους καὶ ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ καὶ ἐκεῖναι ἄθροισμα.

Δυνάμεθα παραδείγματος χάριν μίαν μονάδα νὰ ἀναλύσωμεν εἰς πολλὰς ἄλλας· οἷον ἀντὶ $\frac{1}{3}$ νὰ θέσωμεν $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$· ἢ καὶ τοὐναντίον πολλὰς μονάδας νὰ ἑνώσωμεν εἰς μίαν· οἷον ἀντὶ $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$ νὰ θέσωμεν $\frac{1}{5}$.

108. Ἐὰν ἐκ τῶν μονάδων ἀριθμοῦ ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε ἀλλ' εἰς πλῆθος πεπερασμένον, αἱ εἰλημμέναι ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν σύμμετρον, ὅστις λέγεται *μέρος* τοῦ πρώτου.

109. Τὸ μέρος τοῦ μέρους εἶνε καὶ αὐτὸ μέρος. Διότι, ἂν ἐκ τινων μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ προέκυψεν ὁ σύμμετρος ἀριθμὸς $\frac{3}{5}$, καὶ πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $\frac{3}{5}$ θὰ προκύψῃ ἐκ τῶν αὐτῶν μονάδων, ὅταν προσηκόντως ἀναλυθῶσι καὶ ληφθῶσι μέρη ἐξ αὐτῶν.

110. Τούτων τεθέντων ὁρίζομεν τὴν ἰσότητα καὶ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν πᾶν μέρος τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν εἶνε μέρος καὶ τοῦ ἑτέρου.

Μεγαλήτερος λέγεται ἀριθμὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν μέρος τι αὐτοῦ εἶνε μεγαλήτερον παντὸς μέρους τοῦ ἄλλου.

Κατὰ ταῦτα ἐκ δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν, ἢ ὁ εἷς εἶνε μεγαλήτερος τοῦ ἄλλου, ἢ εἶνε ἴσοι ἀλλήλοις.

111. Ὅτι οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἐφαρμόζονται ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος, εἶνε πρόδηλον.

112. Καὶ αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος διατηροῦνται· ἤτοι

1) *Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶνε καὶ ἀλλήλοις ἴσοι.*

Ἔστω $\alpha=\beta$ καὶ $\beta=\gamma$· λέγω ὅτι θὰ εἶνε καὶ $\alpha=\gamma$.

Διότι ἔστω Μ τυχὸν μέρος τοῦ α· τοῦτο θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ β (διότι $\beta=\alpha$)· ἄρα θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ γ (διότι $\gamma=\beta$)· καὶ τἀνάπαλιν· ἔστω Ν τυχὸν μέρος τοῦ γ· τοῦτο θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ β (διότι $\beta=\gamma$)· ἄρα θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ α (διότι $\beta=\alpha$)· ὥστε πᾶν μέρος τοῦ α εἶνε μέρος καὶ τοῦ γ, καὶ τἀνάπαλιν· ἄρα $\alpha=\gamma$.

2) *Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι οἱ προκύπτοντες εἶνε ἴσοι*

Ἐὰν δηλαδὴ εἶνε $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$ καὶ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες τῶν α καὶ β, ὅτε προκύπτει ὁ ἀριθμὸς $\alpha+\beta$, ἐπίσης καὶ αἱ μονάδες τῶν γ καὶ δ, ὅτε προκύπτει ὁ ἀριθμὸς $\gamma+\delta$, θὰ εἶνε

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta$$

Ἔστω Μ μέρος τι τοῦ $\alpha+\beta$· πρὸς σχηματισμὸν τοῦ μέρους τούτου ἐλήφθησαν μονάδες τινὲς τοῦ α καὶ μονάδες τινὲς τοῦ β· καὶ αἱ μὲν ἐκ τοῦ α ληφθεῖσαι ἂς ἀποτελῶσι τὸ μέρος αὐτοῦ Α αἱ δὲ ἐκ τοῦ β τὸ μέρος αὐτοῦ Β. (τότε $M=A+B$).

Ὁ Α μέρος ὢν τοῦ α, θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ γ· ἐπίσης ὁ Β, μέρος ὢν τοῦ β, θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ, δ· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $A+B$, ἤτοι ὁ Μ, θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ $\gamma+\delta$ (ὁ μὲν Α γίνεται ἐκ τῶν μονάδων τοῦ γ ὁ δὲ Β ἐκ τῶν τοῦ δ)· ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον· ἄρα εἶνε

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta$$

Σημείωσις. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι πρὸς σχηματισμὸν τοῦ μέρους Μ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta$ δὲν ἐλήφθησαν πᾶσαι αἱ μονάδες οὐδετέρου τῶν μερῶν ἐὰν ἐλήφθησαν πᾶσαι αἱ μονάδες τοῦ α (ὅπερ τότε μόνον δύναται νὰ συμβῇ, ὅταν ὁ α εἶνε σύμμετρος ἀριθμός), τὸ σχηματισθὲν μέρος τοῦ $\alpha+\beta$ θὰ εἶνε $\alpha+B$. ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶνε μέρος τοῦ $\gamma+\delta$· διότι, ἂν διὰ τοῦ $\frac{1}{\nu}$ παραστήσωμεν μίαν μονάδα τοῦ β ἐκ τῶν μὴ ληφθεισῶν, τὸ μὲν $B+\frac{1}{2\nu}$ εἶνε μέρος τοῦ β, ἄρα καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ δ, τὸ δὲ $\alpha-\frac{1}{2\nu}$ εἶνε μέρος τοῦ α, ἄρα καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ γ· ὥστε τὸ $\left(B+\frac{1}{2\nu}\right)+\left(\alpha-\frac{1}{2\nu}\right)$, ἤτοι τὸ $B+\alpha$, εἶνε μέρος τοῦ $\gamma+\delta$.

Ἐπίσης δεικνύεται ὅτι

Ἐὰν εἰς ἄνισα προσθέσωμεν ἴσα, τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶνε ὁμοίως ἄνισα.

113. Τὸ ἀπειροπληθὲς ἄθροισμα τῶν μονάδων, ἐὰν ἀποτελῇ ἀριθμόν, ἔχει πάσας τὰς ἰδιότητας τοῦ συνήθους ἀθροίσματος καὶ δύνανται ἐπο-

μένως νὰ γίνωσιν εἰς αὐτὸ πᾶσαι αἱ πράξεις αἱ ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν γινόμεναι· τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἑξῆς προτάσεων

114. *Ἐν παντὶ ἀριθμῷ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς ἀποτελούσας αὐτὸν μονάδας καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν.*

Τοῦτο καὶ ἐν τῇ θεμελιώδει ἐννοίᾳ τοῦ ἀριθμοῦ ὑπόκειται· διότι ὁ ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἴσων ἀμέσως συνάγεται.

115. *Ἐὰν αἱ μονάδες δύο ἀριθμῶν δύνανται νὰ συνταχθῶσιν ἑκάτεραι εἰς ὁμάδας ἀντιστοιχούσας ἀλλήλαις ἀνὰ δύο, μία ἐκ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν ἐκ τοῦ ἄλλου, ἀποτελῶσι δὲ αἱ μονάδες τῶν ἀντιστοίχων ὁμάδων ἀριθμοὺς ἴσους, καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι*

Ἔστωσαν αἱ μονάδες τῶν δύο ἀριθμῶν αἱ ἑξῆς :

τοῦ ἑνὸς $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots$

τοῦ ἄλλου $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots$

καὶ ἂς σχηματίζωσιν αἱ μονάδες τοῦ πρώτου τὰς ὁμάδας

$$M_1+M_2+M_3+\ldots$$

αἱ δὲ τοῦ δευτέρου τὰς $N_1+N_2+N_3+\ldots$

ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι εἶνε $M_1=N_1$, $M_2=N_2$, $M_3=N_3$ . . .

λέγω ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ οἱ ὑπὸ τῶν μονάδων ἑκατέρων ἀποτελούμενοι εἶνε ἴσοι.

Διότι ἔστω ρ τυχὸν μέρος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν μονάδων $\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma+\ldots+\mu_\iota$

αἱ μονάδες αὗται περιέχονται εἰς ὁμάδας τινάς· ἔστω εἰς τὰς

$$M_\alpha,\ M_\beta,\ M_\gamma,\ \ldots\ M_\iota$$

ἐὰν λάβωμεν μίαν ἐκ τῶν λοιπῶν ὁμάδων τὴν τυχοῦσαν, ἔστω τὴν M_λ, τὸ ρ θὰ εἶνε μέρος τοῦ ἀριθμοῦ $M_\alpha+M_\beta+M_\gamma+\ldots+M_\iota+M_\lambda$

ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε ἐξ ὑποθέσεως

$$M_\alpha=N_\alpha, M_\beta=N_\beta, M_\gamma=N_\gamma\ \ldots\ M_\iota=N_\iota, M_\lambda=N_\lambda$$

ἕπεται (112) ἡ ἰσότης

$$M_\alpha+M_\beta+M_\gamma+\ldots+M_\iota+M_\lambda=N_\alpha+N_\beta+N_\gamma+\ldots+N_\iota+N_\lambda$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ρ εἶνε μέρος τοῦ ἀριθμοῦ $M_\alpha+M_\beta+\ldots+M_\iota+M_\lambda$ θὰ εἶνε μέρος καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ $N_\alpha+N_\beta+\ldots+N_\iota+N_\lambda$, τουτέστι θὰ ἀποτε-

λῆται ὁ ρ ἔκ τινων μονάδων ἐκ τῶν περιεχομένων εἰς τὰς ὁμάδας N_α, N_ε, N_γ, . . N_θ, N_λ· θὰ εἶνε ἄρα μέρος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots$

Ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον· ἑπομένως οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἑκάστης ὁμάδος δύναται νὰ εἶνε ἢ πεπερασμένος ἢ καὶ ἄπειρος.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς·

1) *Δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ὁσασδήποτε μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἑκάστην εἰς πλῆθος ἄλλων (πεπερασμένον ἢ ἄπειρον) ἐχουσῶν αὐτὴν ἄθροισμα ἢ καὶ νὰ ἑνώσωμεν ὁσασδήποτε μονάδας εἰς μίαν*

2) *Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἕνα ἀριθμὸν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὁμοειδῶν ἀριθμῶν $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots$ ἀρκεῖ ὁσουσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν λάβωμεν, τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων νὰ μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀκεραίου τινός.*

Διότι, ἂν νοήσωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ πλήθους ἀναλελυμένον εἰς ὁμοειδεῖς μονάδας, θὰ προκύψῃ πλῆθος μονάδων· τὸν ἀριθμὸν δέ, ὃν τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἀποτελεῖ, τοῦτον λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς δοθὲν πλῆθος τῶν ἀριθμῶν· διότι δύναται μὲν ἕκαστος ἀριθμὸς τοῦ πλήθους νὰ ἀναλυθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς, ἀλλὰ πάντα τὰ προκύπτοντα πλήθη μονάδων ἐκ τοῦ δοθέντος πλήθους $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ ἀποτελοῦσιν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

116. *Ἐὰν ἄπειρον πλῆθος μονάδων ἀποτελῇ ἀριθμόν, καὶ δοθῇ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρὸς ε, δύναται τὸ πλῆθος τοῦτο νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον νὰ ἔχῃ πεπερασμένον πλῆθος μονάδων, τὸ δὲ δεύτερον, τὸ ἀπείρους ἔχον μονάδας, νὰ εἶνε τοιοῦτον, ὥστε, ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν μονάδων αὐτοῦ καὶ ἂν προστεθῶσι, νὰ δίδωσιν ἄθροισμα πάντοτε μικρότερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ε.*

Ἂς ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν αἱ μονάδες

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots$$

ἂν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἐκ τῶν μονάδων τούτων εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ε, ἡ πρότασις εἶνε ἀποδεδειγμένη· ἂν δὲ τοὐναντίον μονάδες τινὲς τοῦ πλήθους δίδωσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον τοῦ ε, ἀποχωρίζομεν αὐτάς, ὅτε μένει πάλιν πλῆθος ἄπειρον μονάδων· ἐὰν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ νέου τούτου πλήθους μένῃ πάντοτε μικρότερον τοῦ ε, εὑρέθη τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μή, ἀποχωρίζομεν

πάλιν ἐξ αὐτοῦ τὰς μονάδας, αἵτινες δίδουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον τοῦ ε, ὅτε προκύπτει τρίτον πλῆθος ἐξ ἀπείρων μονάδων συγκείμενον· ἐφαρμόζοντες καὶ ἐπ' αὐτοῦ τὰ αὐτὰ καὶ ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, ἐξ ἀνάγκης θὰ φθάσωμεν εἴς τι πλῆθος ἐξ ἀπείρων μονάδων συγκείμενον καὶ οὗ τινος αἱ μονάδες ὁσαιδήποτε καὶ ἂν προστεθῶσι νὰ δίδωσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ε. Διότι, ὅταν ἡ πρᾶξις αὕτη γίνῃ ν φοράς, αἱ ἀποχωρισθεῖσαι μονάδες (ὧν τὸ πλῆθος εἶνε πεπερασμένον) θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον τοῦ ε. ν. ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ δοθέντος πλήθους εἶνε πάντοτε μικρότερον ἀκεραίου τινος Α, πρέπει νὰ εἶνε ε. ν $<$ Α· ὅθεν ν $<$ $\frac{A}{\varepsilon}$· ὥστε τὸ πολὺ τόσας φορὰς θὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς $\frac{A}{\varepsilon}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν πάντα ἀσύμμετρον ἀριθμὸν διὰ συμμέτρων καθ' ὁσηνδήποτε προσέγγισιν.

Πρόσθεσις.

117. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἔννοιαν τῆς προσθέσεως ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀποτελεῖται ὑπὸ πασῶν τῶν μονάδων ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν, ὁμοῦ λαμβανομένων.

Ἐὰν ἄρα οἱ προσθετέοι ὦσιν ὁμοειδεῖς

$$\frac{1}{\alpha}.\mu+\frac{1}{\beta}.\nu+\frac{1}{\gamma}.\pi+\ldots$$

$$\frac{1}{A}.M+\frac{1}{B}.N+\frac{1}{\Gamma}.\Pi+\ldots$$

τότε τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ὑπὸ πασῶν τῶν μονάδων τούτων, καθ' οἱανδήποτε τάξιν γεγραμμένων, ἢ καὶ ὁπωσδήποτε τινῶν προστιθεμένων, ὡς ἐν παραδείγματι

$$\left(\frac{1}{\alpha}.\mu+\frac{1}{A}.M\right)+\left(\frac{1}{\beta}.\nu+\frac{1}{B}.N\right)+\ldots$$

Ὅτι τὸ ἄθροισμα εἶνε ἀριθμὸς καὶ ὅτι οἱ νόμοι τῆς προσθέσεως μένουσιν οἱ αὐτοί, ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα.

Ἀφαίρεσις.

118. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β ὁμοειδεῖς καὶ ἂς ὑποτεθῇ ὁ α μείζων τοῦ β· λέγω ὅτι ὑπάρχει τις ἀριθμὸς γ τοιοῦτος, ὥστε

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

Διότι ἔστω Α ἀκέραιός τις μείζων τοῦ α· μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\beta,\ \beta+1,\ \beta+2,\ \beta+3,\ \ldots\ \beta+\mathrm{A}$$

ὧν ὁ πρῶτος εἶνε μικρότερος τοῦ α ὁ δὲ τελευταῖος μεγαλήτερος αὐτοῦ, ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, ὅτε ἀπεδείχθη τὸ προκείμενον, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο διαδοχικῶν· ἔστω μεταξὺ τῶν $\beta+\mu$ καὶ $\beta+\mu+1$, τότε πάλιν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\beta+\mu,\ \beta+\mu+\frac{1}{10},\ \beta+\mu+\frac{2}{10},\ \ldots\ \beta+\mu+\frac{10}{10},$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο διαδοχικῶν, ἔστω μεταξὺ τῶν

$$\beta+\mu+\frac{\mu_1}{10} \quad \text{καὶ} \quad \beta+\mu+\frac{\mu_1}{10}+\frac{1}{10}.$$

ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, ἢ θὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα

$$\mu+\frac{\mu_1}{10}+\frac{\mu_2}{10^2}+\ldots+\frac{\mu_\sigma}{10^\sigma}\ (\text{ὄντινα παριστῶ διὰ τοῦ } \gamma_\sigma)$$

ἐκ πεπερασμένου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma_\sigma$ νὰ εἶνε ἴσον τῷ α, ἢ ὁρίζομεν ἀριθμόν τινα γ ἐξ ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὡρισμένων συγκείμενον· λέγω δὲ ὅτι οὗτος προστιθέμενος εἰς τὸν β δίδει ἄθροισμα τὸν α,

ἤτοι $$\beta+\gamma=\alpha.$$

Διότι ἔστω τυχὸν μέρος τοῦ $\beta+\gamma$ τὸ $\mathrm{B}+\Gamma$ (ὁ μὲν Β ἐκ τῶν μονάδων τοῦ β ὁ δὲ Γ ἐκ τῶν μονάδων τοῦ γ)· ἐὰν πᾶσαι αἱ μονάδες τοῦ γ, ἐξ ὧν ἀπετελέσθη τὸ μέρος Γ, εὑρίσκωνται ἐν τῷ ἀριθμῷ

$$\mu+\frac{\mu_1}{10}+\frac{\mu_2}{100}+\ldots+\frac{\mu_\rho}{10^\rho}\ \text{ὃν περιστῶ διὰ τοῦ } \gamma_\rho$$

ὁ Γ θὰ εἶνε μέρος τοῦ γ_ρ

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ γ εἰξεύρομεν ὅτι εἶνε

$$\alpha > \beta + \gamma,$$

ὑπάρχει ἄρα μέρος τι Α τοῦ μείζονος, ὅπερ ὑπερβαίνει πᾶν μέρος $B+\Gamma$ τοῦ ἐλάσσονος.

ἤτοι $$A > B+\Gamma$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ $B+\Gamma$ εἶνε μέρος τοῦ Α ἄρα μέρος καὶ τοῦ α.

Ἔστω πάλιν Α τυχὸν μέρος τοῦ α· λέγω ὅτι τὸ Α εἶνε μέρος καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\beta+\gamma$· διότι ἂν $\frac{1}{M}$ εἶνε μία ἐκ τῶν μὴ ληφθεισῶν μονάδων τοῦ α καὶ $\frac{1}{10^\rho}$ δεκαδικὴ μονὰς μικροτέρα τῆς $\frac{1}{M}$, καὶ ὁ ἀριθμὸς $A+\frac{1}{10^\rho}$ θὰ εἶνε μέρος τοῦ α· ἐπειδὴ δὲ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γ) εἶνε

$$\alpha < \beta + \gamma + \frac{1}{10^\rho},$$

θὰ ὑπάρχῃ μέρος τι τοῦ μεγαλητέρου, ἔστω τὸ $B+\Gamma+\frac{1}{10^\rho}$ μεγαλήτερον παντὸς μέρους τοῦ μικροτέρου· τουτέστι θὰ εἶνε

$$B+\Gamma+\frac{1}{10^\rho} > A+\frac{1}{10^\rho} \quad \text{ἢ καὶ} \quad B+\Gamma > A$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ Α εἶνε μέρος τοῦ $B+\Gamma$ ἄρα μέρος καὶ τοῦ $\beta+\gamma$· Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι πᾶν μέρος τοῦ $\beta+\gamma$ εἶνε μέρος καὶ τοῦ α καὶ τἀνάπαλιν πᾶν μέρος τοῦ α εἶνε μέρος καὶ τοῦ $\beta+\gamma$· ἄρα εἶνε $\alpha = \beta+\gamma$.

119. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἡ μὲν πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται (86) εἰς τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν ὁμοειδῶν, ἡ δὲ ἀφαίρεσις εἰς τὴν πρόσθεσιν ὁμοίως δύο ὁμοειδῶν, ὥστε ἐν πάσῃ περιπτώσει τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς καὶ μάλιστα ἐντελῶς ὡρισμένος.

Πολλαπλασιασμός.

120. Γινόμενον δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὃν ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες, ἃς εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἑκάστην μονάδα τοῦ ἑνὸς ἐφ' ἑκάστην μονάδα τοῦ ἑτέρου (90).

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε

$$\alpha = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$$
$$\beta = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots$$

τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ ἀποτελῆται ὑπὸ τῶν μονάδων

$$
\begin{aligned}
\alpha.\beta = {} & \mu_1\rho_1+\mu_1\rho_2+\mu_1\rho_3+\mu_1\rho_4+\ \ldots \\
& +\mu_2\rho_1+\mu_2\rho_2+\mu_2\rho_3+\mu_2\rho_4+\ \ldots \\
& +\mu_3\rho_1+\mu_3\rho_2+\mu_3\rho_3+\mu_3\rho_4+\ \ldots \\
& +\mu_4\rho_1+\mu_4\rho_2+\mu_4\rho_3+\mu_4\rho_4+\ \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (\varepsilon)
$$

Ὅτι αἱ μονάδες αὗται ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου ὅτι πᾶσαι εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι καὶ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἐξ αὐτῶν οὐδέποτε φθάνει ἀκεραιόν τινα.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε ἐξ αὐτῶν· αἱ ληφθεῖσαι θὰ εἶνε γινόμενα μονάδων τινῶν τοῦ πρώτου, αἵτινες θὰ εὑρίσκωνται μεταξὺ τῶν

$$\mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\ \ldots\ \mu_\nu$$

καὶ μονάδων τινῶν τοῦ δευτέρου, εὑρισκομένων μεταξὺ τῶν

$$\rho_1,\quad \rho_2,\quad \rho_3,\ \ldots\ \rho_\varkappa$$

τότε πᾶσαι αἱ ληφθεῖσαι μονάδες εὑρίσκονται ἐν τῷ γινομένῳ

$$(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ \ldots\ +\mu_\nu)\cdot(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ \ldots\ +\rho_\varkappa)$$

ἑπομένως ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀκεραίου A. B (ἔνθα A εἶνε ἀκέραιος ὑπερβαίνων πᾶν μέρος τοῦ α καὶ B ἀκέραιος ὑπερβαίνων πᾶν μέρος τοῦ β).

(Ὅτι ἐν τοῖς συμμέτροις ἀριθμοῖς τὸ γινόμενον τὸ μεγαλητέρους ἔχον παράγοντας εἶνε μεγαλήτερον, ἕπεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου).

121. Ἐπειδὴ αἱ τὸ γινόμενον συναποτελοῦσαι μονάδες δύνανται νὰ ληφθῶσι καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς:

$$\alpha.\beta=\mu_1\rho_1+(\mu_1\rho_2+\mu_2\rho_1)+(\mu_1\rho_3+\mu_2\rho_2+\mu_3\rho_1)+\ \ldots$$

ἔνθα τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν ἐν ἑκάστῃ ὁμάδι μένει τὸ αὐτό.

122. Καὶ ἂν αἱ μονάδες ἑκατέρου τῶν παραγόντων συνταχθῶσι καθ' ὁμάδας οἱασδήποτε καὶ προστεθῶσιν αἱ μονάδες ἑκάστης ὁμάδος, ὥστε νὰ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ \ldots$$
$$\beta=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ \ldots$$

ἔνθα α_ν καὶ β_ν εἶνε σύμμετροι ἀριθμοί, καὶ πολλαπλασιασθῇ ἔπειτα ἕκαστος

ἀριθμὸς τοῦ πρώτου ἐφ' ἕκαστον τοῦ δευτέρου, πάντα τὰ οὕτω προκύπτοντα γινόμενα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν ἴσον τῷ γινομένῳ αβ.

Διότι τὰ γινόμενα

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_1\beta_3+\ \ldots$$
$$\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_2\beta_3+\ \ldots$$
$$\alpha_3\beta_1+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ \ldots$$

γίνονται ἐκ τῶν γινομένων (ε) τῶν μονάδων διὰ τῆς καθ' ὁμάδας ἑνώσεως.

123. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου α·β ἕπεται ἀμέσως, ὅτι τὸ γινόμενον εἶνε θετικὸν μέν, ἐὰν οἱ παράγοντες εἶνε ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἐὰν ἑτεροειδεῖς.

124. Οἱ νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$$
$$\alpha\,(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$$
$$\alpha\,(\beta+\gamma)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$$
$$\alpha\cdot 0=0$$

διατηροῦνται καὶ ἐνταῦθα· διότι ἀκολούθως τῷ ὁρισμῷ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (120) οἱ τὰ δύο μέλη ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων τούτων ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μονάδων ἐν ἄλλῃ τάξει γεγραμμένων.

Ὁμοίως εἶνε $\alpha\cdot 1=\alpha$.

125. *Δοθέντος γινομένου, δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων κατὰ τοιοῦτον ἀριθμόν, ὥστε ἡ ἐκ τούτου προερχομένη μεταβολὴ τοῦ γινομένου* (αὔξησις ἢ ἐλάττωσις) *νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ε.*

Ἔστω τὸ γινόμενον α.β· ἐὰν αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ ὁ παράγων α κατά τινα ἀριθμὸν ρ, τὸ γινόμενον αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται κατὰ τὸ β.ρ (συμφώνως τῷ ἐπιμεριστικῷ νόμῳ)· ἡ δὲ μεταβολὴ αὕτη τοῦ γινομένου εἶνε μικροτέρα τοῦ B.ρ (ἔνθα B εἶνε ἀκέραιος μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμοῦ β)· ἑπομένως, ἐὰν εἶνε $B\,\rho<\varepsilon$, καὶ ἡ μεταβολὴ τοῦ γινομένου (ἤτοι ὁ βρ) θὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε· ἀλλὰ τοῦτο γίνεται ἐὰν ληφθῇ $\rho<\frac{\varepsilon}{B}$.

126. Ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἴσους, τὰ γινόμενα εἶνε ἴσα· ἐὰν δηλ. εἶνε $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha\cdot\gamma=\beta\,\delta$.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου εἶνε ἁπλουστάτη.

Διαίρεσις.

127. Ὅτι δοθέντων δύο ἀριθμῶν, πάντοτε ὑπάρχει τὸ πηλίκον αὐτῶν, ἀποδεικνύεται ὡς ἕπεται.

Ἔστωσαν πρότερον οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α καὶ β ὁμοειδεῖς (β διαφέρει τοῦ 0)· ἐὰν ὁ β εἶνε σύμμετρος καί, εἰς μίαν μονάδα ἀνηγμένος, ἴσος τῷ $\frac{1}{N}.M$, τὸ πηλίκον εἶνε προφανῶς ἴσον τῷ γινομένῳ $\alpha.\frac{1}{M}.N$.

ἐὰν δὲ ὁ β εἶνε ἀσύμμετρος, ἔστω μονάς τις αὐτοῦ, ἡ τυχοῦσα, $\frac{1}{M}$ καὶ Α ἀκέραιός τις μείζων τοῦ α· μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$0,\quad \beta\cdot 1,\quad \beta\cdot 2,\quad \beta\cdot 3,\quad \ldots\quad \beta\cdot(A\cdot M)$$

ὧν ὁ τελευταῖος εἶνε μείζων τοῦ α, ἢ εἶνέ τις ἴσος τῷ α, ὅτε ἀπεδείχθη τὸ προκείμενον, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς, ἔστω δὲ

$$\beta.\mu<\alpha<\beta\,(\mu+1)$$

τότε πάλιν, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\beta\cdot\mu,\quad \beta\cdot\left(\mu+\frac{1}{10}\right),\quad \beta\cdot\left(\mu+\frac{2}{10}\right),\quad \ldots\quad \beta\cdot\left(\mu+\frac{10}{10}\right)$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, ὅτε εὑρέθη τὸ πηλίκον, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς, ἔστω

$$\beta\cdot\left(\mu+\frac{\mu_1}{10}\right)<\alpha<\beta\cdot\left(\mu+\frac{\mu_1}{10}+\frac{1}{10}\right)$$

ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἢ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον διὰ πεπερασμένου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐκπεφρασμένον, ἢ ὁρίζομεν ἀριθμόν τινα γ ἐξ ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὡρισμένων συγκείμενον

$$\gamma=\mu+\frac{\mu_1}{10}+\frac{\mu_2}{100}+\frac{\mu_3}{1000}+\ldots$$

ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ β λέγω ὅτι δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν α· ἤτοι

$$\alpha=\beta\cdot\gamma.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον καὶ ἔστω κατὰ πρῶτον

$$\alpha<\beta.\gamma$$

ἐὰν τότε λάβωμεν ἀριθμόν τινα ε μικρότερον τῆς διαφορᾶς β.γ—α, δυνάμεθα (125) νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν παράγοντα γ κατὰ δεκαδικήν τινα

μονάδα τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἐλάττωσις τοῦ γινομένου νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε· ὥστε καὶ πάλιν νὰ εἶνε

$$\alpha<\beta\left(\gamma-\frac{1}{10^{\rho}}\right)$$

ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον· διότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γ εἰξεύρομεν, ὅτι εἶνε

$$\alpha>\beta.\gamma_{\rho}$$

καὶ πρὸς τούτοις $\gamma<\gamma_{\rho}+\frac{1}{10^{\rho}}$ ὅθεν καὶ $\gamma-\frac{1}{10^{\rho}}<\gamma_{\rho}$

ἄρα καὶ $$\beta\left(\gamma-\frac{1}{10^{\rho}}\right)<\beta.\gamma_{\rho}<\alpha.$$

Ἂς ὑποτεθῇ δεύτερον $\alpha>\beta.\gamma$

ἐὰν τότε λάβωμεν ἀριθμόν τινα ε μικρότερον τῆς διαφορᾶς $\alpha-(\beta.\gamma)$, δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὸν παράγοντα γ κατὰ δεκαδικήν τινα μονάδα τόσον μικράν, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ γινομένου βγ νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε· ὥστε καὶ πάλιν νὰ εἶνε

$$\alpha>\beta\left(\gamma+\frac{1}{10^{\rho}}\right)$$

ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον· διότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γ εἶνε γνωστὸν ὅτι

$$\alpha<\beta\left(\gamma_{\rho}+\frac{1}{10^{\rho}}\right) \quad \text{τὸ δὲ } \gamma_{\rho}<\gamma.$$

Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἡ μὲν ἀπόδειξις κατ' οὐδὲν διαφέρει τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ἀρνητικόν.

Ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις μένει, ὡς πάντοτε, ἀδύνατος.

128. Ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἴσων, τὰ πηλίκα εἶνε ἴσα· ἐὰν δηλονότι εἶνε $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶνε καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$· διότι πολλαπλασιαζόμενα τὰ πηλίκα ταῦτα ἐπὶ γ.δ γίνονται ἴσα.

129. Παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει ἴσος ἐκ δεκαδικῶν μονάδων ἀποτελούμενος. Παραβάλλοντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν πρὸς τοὺς ἐκ δεκαδικῶν μονάδων ἀποτελουμένους, ἢ εὑρίσκομέν τινα ἴσον τῷ δοθέντι ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων ἀποτελούμενον, ἤ, ὡς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει, εὑρίσκομεν ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον καὶ ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος μονάδων συγκείμενον· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ἴσον τῷ δοθέντι.

Σημειώσεις.

α΄.) Ἡ διὰ τῶν δεκαδικῶν μονάδων παράστασις τῶν ἀριθμῶν εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη μόνον διὰ τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ διὰ τοὺς συμμέτρους τοὺς μὴ ὑπὸ πεπερασμένου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐκφραζομένους, οἱ δὲ ὑπὸ πεπερασμένου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐκφραζόμενοι ἔχουσι καὶ δευτέραν παράστασιν, ἐν ᾗ πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶνε 9, ὡς 0,31 εἶνε ὁ αὐτὸς τῷ 0,3099999 . . .

β΄.) Ἐν τῇ ἀφαιρέσει καὶ διαιρέσει ἀπεδείξαμεν μόνον τὴν ὕπαρξιν τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ πηλίκου· ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς πολλάκις ὑπάρχουσιν ἰδιαίτεραι, συντομώτεραι μέθοδοι, δι' ὧν ἐκτελοῦνται αἱ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων πράξεις· αἱ μέθοδοι αὗται στηρίζονται ἐπὶ τῆς ἰδιαιτέρας φύσεως τῶν ἀσυμμέτρων, ἐφ' ὧν ἐφαρμόζονται. Ἐὰν οἱ ἀσύμμετροι ὦσιν ἐκπεφρασμένοι διὰ τῶν δεκαδικῶν μονάδων, δύναταί τις, ἀντικαθιστῶν τοὺς ἀσυμμέτρους διὰ συμμέτρων, νὰ εὕρῃ τοῦ ἐξαγομένου ὅσα ἂν θέλῃ δεκαδικὰ ψηφία·

γ΄.) Διακρίνομεν, ἂν δοθέν τι πλῆθος ἄπειρον μονάδων ἀποτελῇ ἀριθμὸν ἢ οὔ, συγκρίνοντες αὐτὸ πρὸς ἄλλο, περὶ οὗ γνωρίζομεν ἤδη ὅτι ἀποτελεῖ ἀριθμὸν (ὡς λ. χ. αἱ κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον προχωροῦσαι μονάδες $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\ldots$)· ἐὰν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι μονάδες τοῦ δοθέντος πλήθους εἶνε μικρότεραι τῶν τοῦ ἄλλου, τὸ δοθὲν ἀποτελεῖ προφανῶς ἀριθμόν. Γνωστοῦ ὄντος π. χ. ὅτι αἱ μονάδες $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν, ἕπεται ἀμέσως ὅτι καὶ αἱ ἑπόμεναι $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\ldots$ ἀποτελοῦσιν ὡσαύτως ἀριθμόν. Ἐκ τῆς τοιαύτης συγκρίσεως προκύπτουσι κανόνες τινές, οὓς ἡ περὶ σειρῶν θεωρία διδάσκει ἐν ἐκτάσει.

Ἀριθμοὶ ἐξ ἀπείρου πλήθους μονάδων θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀποτελούμενοι.

130. Τὰ πλήθη τὰ συγκείμενα ἐκ θετικῶν καὶ ἐξ ἀρνητικῶν μονάδων (ἀναριθμήτων ἀμφοτέρων) δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τὰ ἑξῆς τέσσαρα.

1) Ἐκεῖνα ἐν οἷς αἱ μονάδες ἑκατέρου τῶν εἰδῶν χωρὶς λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν.

2) Ἐκεῖνα ἐν οἷς αἱ θετικαὶ μονάδες ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν αἱ δὲ ἀρνητικαὶ οὐχί.

3) Ἐκεῖνα ἐν οἷς αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες ἀποτελοῦσι ἀριθμὸν αἱ δὲ θετικαὶ οὐχί.

4) Ἐκεῖνα ἐν οἷς οὔτε αἱ θετικαὶ μονάδες οὔτε αἱ ἀρνητικαὶ ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν.

131. Ὅτι τὰ τρία τελευταῖα πλήθη δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀποτελοῦντα ἀριθμούς, εἶνε προφανές· ἀλλὰ τὰ πλήθη τοῦ πρώτου γένους

δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀποτελοῦντα ἀριθμοὺς ὡς δεικνύεται ἐκ τῶν ἑξῆς προτάσεων.

Ἔστω πλῆθός τι ἄπειρον μονάδων θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀλλὰ τοιοῦτον, ὥστε αἱ θετικαὶ μονάδες αὐτοῦ χωρὶς λαμβανόμεναι νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν τὸν α καὶ αἱ ἀρνητικαὶ ἐπίσης τὸν β'· ἔστω δὲ καὶ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρὸς ὁ $\frac{1}{M}$· *λέγω ὅτι, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθῶσιν αἱ μονάδες τοῦ πλήθους, εἶνε δυνατὸν νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ πρῶτον τμῆμα ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων συγκείμενον νὰ ἔχῃ ἄθροισμα ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ* $\alpha+\beta'$ *ὀλιγώτερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ* $\frac{1}{M}$, *νὰ συμβαίνῃ δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἐὰν προστεθῶσιν εἰς αὐτὸν ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου τμήματος.*

Ἔστωσαν αἱ θετικαὶ μονάδες τοῦ πλήθους αἱ ἑξῆς

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\ \ldots$$

αἱ δὲ ἀρνητικαὶ αἱ ἑξῆς $\nu'_1\ \ \nu'_2\ \ \nu'_3\ \ldots$

ἐπειδὴ αἱ θετικαὶ μονάδες ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν, τὸν α, εἶνε δυνατὸν νὰ ληφθῶσιν ἐξ αὐτῶν τόσαι, ὥστε αἱ λοιπαὶ ὁσαιδήποτε καὶ ἂν προστεθῶσι νὰ δίδωσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4M}$· ἂς γίνηται τοῦτο, ὅταν ληφθῶσιν αἱ ἑξῆς

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots\ldots+\mu_\varrho \quad \text{ὧν τὸ ἄθροισμα ἔστω A}$$

τότε εἶνε $$\alpha=A+\varepsilon \qquad (1)$$

ἔνθα ε σημαίνει τὸν ἀριθμόν, ὃν αἱ λοιπαὶ μονάδες ἀποτελοῦσι καὶ ὅστις δὲν ὑπερβαίνει τὸν $\frac{1}{4M}$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν, τὸν β', εἶνε δυνατὸν νὰ ληφθῶσιν ἐξ αὐτῶν τόσαι, ὥστε αἱ λοιπαὶ ὁσαιδήποτε καὶ ἂν προστεθῶσι νὰ δίδωσιν ἄθροισμα ἔχον μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4M}$· ἂς γίνηται τοῦτο, ὅταν ληφθῶσιν αἱ ἑξῆς

$$\nu'_1+\nu'_2+\nu'_3+\ldots+\nu'_\pi \quad \text{ὧν τὸ ἄθροισμα ἔστω B'}$$

τότε εἶνε $$\beta'=B'+\eta' \qquad (2)$$

ένθα η′ εἶνε ὁ ἀριθμὸς ὃν αἱ λοιπαὶ μονάδες ἀποτελοῦσι καὶ οὗτινος τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει τὸν $\frac{1}{4M}$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται

$$\alpha+\beta'=A+B'+\varepsilon+\eta'. \qquad (3)$$

Ἂς χωρισθῇ νῦν τὸ δοθὲν πλῆθος (οἱανδήποτε τάξιν ἢ σειρὰν καὶ ἂν ἔχωσιν αἱ μονάδες του) εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ πρῶτον τμῆμα, ἔχον μονάδας εἰς πεπερασμένον πλῆθος, νὰ ἔχῃ πάσας τὰς μονάδας $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\rho$ καὶ $\nu'_1, \nu'_2, \ldots \nu'_\sigma$ καὶ ἄλλας ὁσασδήποτε· ἐὰν ὁ σύμμετρος ἀριθμός, ὃν ἀποτελοῦσι τότε αἱ μονάδες τοῦ πρώτου τμήματος, παρασταθῇ διὰ τοῦ Γ, θὰ εἶνε

$$\Gamma=A+B'+\theta\cdot$$

ἔνθα ὁ θ, ὡς συγκείμενος ἔκ τινων μονάδων τοῦ ε καὶ ἔκ τινων μονάδων τοῦ η′, θὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4M}$.

Ἡ ἰσότης αὕτη μετὰ τῆς (3) συνδυαζομένη δίδει

$$(\alpha+\beta')-\Gamma=(\varepsilon+\eta')-\theta\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ $(\varepsilon+\eta')$ καὶ θ ἔχουσιν ἀμφότεροι μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4M}$, ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2M}$· ἑπομένως τὸ χωρισθὲν τμῆμα τοῦ πλήθους ἔχει ἄθροισμα τὸν Γ, ὅστις διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta'$ διαφορὰν ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2M}$.

Καὶ ἂν ἔπειτα προστεθῶσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν Γ, ὃν ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον τμῆμα, ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου τμήματος, ἐπειδὴ αἱ προστιθέμεναι καὶ θετικῶς πᾶσαι ἐὰν ληφθῶσι δίδουσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2M}$, ἕπεται ὅτι αὐξάνουσιν ἢ ἐλαττοῦσι τὸν Γ κατὰ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2M}$. ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ $\alpha+\beta'$ θὰ μένῃ πάντοτε μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{M}$.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης συνάγεται, ὅτι, ἐὰν γράψωμεν τὰς μονάδας τοῦ πλήθους καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ προσθέτωμεν ἔπειτα αὐτὰς

κατὰ σειράν, ὅσον προχωροῦμεν τόσον προσεγγίζομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν α+β′ ἤτοι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν οὓς ἀποτελοῦσιν αἱ μονάδες ἑκατέρου τῶν εἰδῶν, ὅταν λαμβάνωνται χωρὶς ἀλλήλων.

Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ ἄπειρον πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν μονάδων (ἐὰν αἱ μονάδες ἑκατέρου τῶν εἰδῶν ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν) ἀποτελεῖ ἐν συνόλῳ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν, οὓς αἱ μονάδες αὐτοῦ χωρὶς λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσιν.

132. Ὅτι δὲ τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα, πλὴν τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν ἔχει καὶ τὰς λοιπὰς ἰδιότητας τοῦ συνήθους ἀθροίσματος, γίνεται φανερὸν ἐκ τῆς ἑξῆς προτάσεως.

Ἐὰν δύο πλήθη μονάδων ἀποτελῶσιν ἀριθμοὺς καὶ συντάσσωνται αἱ μονάδες ἑκατέρου εἰς ὁμάδας ἀντιστοιχούσας ἀλλήλαις ἀνὰ δύο, μία ἐκ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν ἐκ τοῦ ἄλλου, ἀποτελῶσι δὲ αἱ μονάδες τῶν ἀντιστοίχων ὁμάδων ἀριθμοὺς ἴσους, καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ οὓς τὰ δύο πλήθη ἀποτελοῦσιν, εἶνε ἴσοι.

Τὰ δύο πλήθη τῶν μονάδων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots$$
$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots$$

ἂς σχηματίζωσι δὲ αἱ μονάδες τοὺ πρώτου τὰς ὁμάδας

$$\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_3+\ldots$$

αἱ δὲ τοῦ δευτέρου τὰς $\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2+\mathrm{N}_3+\ldots$

ἂς ὑποτεθῇ πρὸς τούτοις ὅτι εἶνε

$$\mathrm{M}_1=\mathrm{N}_1,\quad \mathrm{M}_2=\mathrm{N}_2,\ \ldots\ \mathrm{M}_3=\mathrm{N}_3\ldots$$

λέγω ὅτι οἱ δύο ἀριθμοί, οὓς ἀποτελοῦσι τὰ δύο πλήθη, εἶνε ἴσοι.

Ὅτι αἱ ὁμάδες M καὶ N, καὶ ἀπειροπληθεῖς μονάδας ἂν ἔχωσι, πάντοτε ἀποτελοῦσιν ἀριθμούς, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι αἱ μονάδες ἃς ἔχει ἑκάστη εἶνε τινὲς μόνον ἐκ τῶν μονάδων ἃς ἔχουσι τὰ δύο πλήθη, ἅτινα ἐξ ὑποθέσεως ἀποτελοῦσιν ἀριθμούς.

Ἐπειδὴ τὰ δύο πλήθη ἀποτελοῦσιν ἀριθμούς, δυνάμεθα δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ε, νὰ χωρίσωμεν ἑκάτερον εἰς δύο τμήματα οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον τμῆμα ἐν ἑκατέρῳ νὰ ἔχῃ πεπερασμένον ἀριθμὸν μονάδων, καὶ νὰ ἀποτελῇ ἀριθμὸν σύμμετρον διαφέροντα ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελεῖ τὸ πλῆθος, διαφορὰν μικροτέραν τοῦ ε· νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο καὶ ἂν εἰς τὸν σύμμετρον ἐκεῖνον ἀριθμὸν προστεθῶσιν ὁσαιδήποτε μονάδες τοῦ δευτέρου τμήματος. Ἔστωσαν τὰ τμήματα ταῦτα

$\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma+\ldots+\mu_\iota$ τοῦ πρώτου πλήθους,

$\nu_\varkappa+\nu_\lambda+\ldots\ldots+\nu_\varrho$ τοῦ δευτέρου·

αἱ μονάδες τῶν τμημάτων τούτων ὑπάρχουσιν εἴς τινας ὁμάδας ἔστω εἰς τὰς

$$\mathrm{M}_\alpha \quad \mathrm{M}_\beta \quad \mathrm{M}_\gamma \ldots \mathrm{M}_\iota$$

καὶ $$\mathrm{N}_\varkappa \quad \mathrm{N}_\lambda \ldots\ldots \mathrm{N}_\varrho$$

ἐπειδὴ νῦν εἶνε

$$\mathrm{M}_\alpha=\mathrm{N}_\alpha \quad \mathrm{M}_\beta=\mathrm{N}_\beta \quad \mathrm{M}_\iota=\mathrm{N}_\iota$$

καὶ $$\mathrm{N}_\varkappa=\mathrm{M}_\varkappa \quad \mathrm{N}_\lambda=\mathrm{M}_\lambda \quad \mathrm{N}_\varrho=\mathrm{M}_\varrho$$

ἔπεται

$$\mathrm{M}_\alpha+\mathrm{M}_\beta+\ldots+\mathrm{M}_\iota+\mathrm{M}_\varkappa+\mathrm{M}_\lambda+\ldots+\mathrm{M}_\varrho=$$
$$=\mathrm{N}_\alpha+\mathrm{N}_\beta+\ldots+\mathrm{N}_\iota+\mathrm{N}_\varkappa+\mathrm{N}_\lambda+\ldots+\mathrm{N}_\varrho$$

ἀλλ' ἑκάτερος τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελεῖ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῷ πλῆθος, διαφορὰν μικροτέραν τοῦ ε· διότι ἀποτελεῖται ὑπὸ πασῶν τῶν μονάδων τοῦ πρώτου τμήματος καὶ ὑπὸ ὁσωνδήποτε τοῦ δευτέρου· ἄρα οἱ δύο ἀριθμοί, οὓς τὰ δύο πλήθη ἀποτελοῦσι, διαφέρουσιν ὀλιγώτερον ἢ 2ε· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο δεικνύεται ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν ληφθῇ τὸ ε, συνάγεται ὅτι οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἀριθμοὶ οὐδεμίαν δύνανται νὰ ἔχωσι διαφοράν, ἤτοι εἶνε ἴσοι.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἔπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς

1) *Δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ὁσασδήποτε μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ, ἑκάστην εἰς πλῆθος ἄλλων* (πεπερασμένον ἢ ἄπειρον) *ὁμοειδῶν ἢ ἑτεροειδῶν· ἀρκεῖ τὸ τότε προκύπτον νέον πλῆθος μονάδων νὰ ἀποτελῇ ἀριθμόν. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν ὁσασδήποτε μονάδας εἰς μίαν.*

2) *Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἕνα ἀριθμὸν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν*

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots$$

ἀρκεῖ ὁσουσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν λάβωμεν, τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων νὰ εἶνε πάντοτε μικρότερον ἀκεραίου τινός.

Διότι, ἂν νοήσωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ πλήθους ἀναλελυμένον εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς αὐτῷ, θὰ προκύψῃ πλῆθος μονάδων, ὅπερ ἀποτελεῖ προδήλως ἀριθμόν· τὸν ἀριθμὸν δὲ τοῦτον λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ καὶ τὸ δοθὲν πλῆθος· διότι δύναται μὲν ἕκαστος ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος πλήθους νὰ ἀναλυθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους εἰς πλῆθος μονάδων ὁμοειδῶν ἢ καὶ ἑτεροει-

δῶν, ἀλλὰ πάντα τὰ οὕτω προκύπτοντα πλήθη, ἐὰν ἀποτελῶσιν ἀριθμόν, ἀποτελοῦσιν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

133. Καὶ ἐν τῇ προσθέσει καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τὰ πλήθη τὰ ἀποτελοῦντα ἀριθμοὺς ἔχουσι τὰς ἰδιότητας τῶν κοινῶν ἀθροισμάτων ἤτοι 1) τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν, οὓς ἀποτελοῦσι δύο πλήθη, εὑρίσκεται, ἂν ἑνωθῶσι πᾶσαι αἱ μονάδες ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν· διότι ἂν τὸ πρῶτον πλῆθος ἀποτελῇ τὸν ἀριθμὸν α+β′ (α ὁ ἐκ τῶν θετικῶν μονάδων τοῦ πλήθους ἀποτελούμενος καὶ β′ ὁ ἐκ τῶν ἀρνητικῶν), τὸ δὲ δεύτερον τὸν ἀριθμὸν γ+δ′, προφανὲς εἶνε, ὅτι τὸ διὰ τῆς ἑνώσεως πασῶν τῶν μονάδων προκύπτον πλῆθος ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν

$$(\alpha+\gamma)+(\beta'+\delta').$$

2) Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν (α+β′).(γ+δ′), οὓς ἀποτελοῦσι δύο πλήθη, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην μονάδα τοῦ ἑνὸς πλήθους ἐφ' ἑκάστην τοῦ ἄλλου· τὸ ἐκ τῶν γινομένων μονάδων συγκροτούμενον πλῆθος θὰ ἀποτελῇ τὸ γινόμενον (α+β′).(γ+δ′) ἤτοι τὸν ἀριθμὸν αγ+βδ+αδ′+β′γ.

Διότι τὸ πλῆθος τῶν γινομένων μονάδων δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα μέρη· 1) εἰς τὸ πλῆθος τῶν γινομένων τῶν θετικῶν μονάδων τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὰς θετικὰς μονάδας τοῦ ἄλλου· τοῦτο δὲ τὸ πλῆθος προδήλως ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν α.γ· 2) εἰς τὸ πλῆθος τῶν γινομένων τῶν ἀρνητικῶν μονάδων τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὰς ἀρνητικὰς τοῦ ἄλλου· τοῦτο δὲ τὸ πλῆθος ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν β.δ· 3) εἰς τὸ πλῆθος τῶν γινομένων τῶν θετικῶν μονάδων τοῦ πρώτου ἐπὶ τὰς ἀρνητικὰς τοῦ δευτέρου, ὅπερ πλῆθος ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν α.δ′ καὶ τέλος 4) εἰς τὸ πλῆθος τῶν γινομένων τῶν ἀρνητικῶν μονάδων τοῦ πρώτου ἐπὶ τὰς θετικὰς τοῦ δευτέρου, ὅπερ πλῆθος ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν β′.γ· ἑπομένως τὸ ὅλον πλῆθος τῶν γινομένων μονάδων θὰ ἀποτελῇ τὸν ἀριθμὸν αγ+βδ+αδ′+β′γ.

134. Τὰς αὐτὰς ἰδιότητας ἔχουσι καὶ τὰ ἐξ ἀριθμῶν οἱωνδήποτε συγκείμενα πλήθη, ἀρκεῖ νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμούς· ἀποδεικνύονται δὲ ὁμοίως.

135. Ἐὰν μήτε αἱ θετικαὶ μονάδες πλήθους τινὸς μήτε αἱ ἀρνητικαὶ ἀποτελῶσιν ἀριθμόν, προχωρῶσιν ὅμως ἐλαττούμεναι καὶ γίνωνται μικρότεραι πάσης μονάδος, δύναται νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε, καθ' ὅσον ἡ πρόσθεσις προχωρεῖ, τὸ ἄθροισμα νὰ προσεγγίζῃ εἰς ὃν ἄν τις προστάξῃ ἀριθμόν· καὶ εὑρίσκεται ἄθροισμα, οὗτινος ἡ διαφορὰ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶνε μικροτέρα πάσης δοθείσης μονάδος ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν ληφθῇ αὕτη.

Ἔστωσαν $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \ldots$ αἱ θετικαί,
$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \ldots$ αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες·

ἔστω δὲ καὶ Κ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θετικός· ἂς προστεθῶσιν ἐκ τῶν θετικῶν μονάδων ἀπὸ τῆς πρώτης κατὰ σειρὰν τόσαι, ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς μείζων τοῦ Κ, (ὅπερ πάντοτε δυνατόν) ὁ

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\pi\cdot$$

εἶτα ἂς λαμβάνωνται ἀρνητικαὶ μονάδες ἀπὸ τῆς πρώτης κατὰ σειράν, μέχρις οὗ τὸ ἄθροισμα ἐν τῇ τελευταίᾳ προσθέσει γίνῃ μικρότερον τοῦ Κ· ὥστε τὸ ἄθροισμα

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\pi)+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\rho)$$

διαφέρει τοῦ Κ ὀλιγώτερον τοῦ β_ρ· ἂς ληφθῶσιν ἤδη θετικαὶ μονάδες κατὰ σειρὰν μέχρις οὗ τὸ ἄθροισμα, κατὰ τὴν τελευταίαν πρόσθεσιν, γίνῃ πάλιν μεῖζον τοῦ Κ,

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\pi)+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\rho)+(\alpha_{\pi+1}+\ldots+\alpha_\nu)$$

καὶ διαφέρῃ ἑπομένως αὐτοῦ ὀλιγώτερον τοῦ τελευταίου ὅρου α_ν· εἶτα πάλιν ἂς ληφθῶσιν ἀρνητικαὶ καὶ καθεξῆς· φανερὸν εἶνε ὅτι τὸ ἄθροισμα προσεγγίζει ὅσον ἄν τις θέλῃ εἰς τὸν ἀριθμὸν Κ· διότι ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Κ εἶνε μικροτέρα τῆς τελευταίας ἐκ τῶν ἑκάστοτε λαμβανομένων μονάδων· αὗται δὲ γίνονται μικρότεραι πάσης μονάδος.

Ἐκ τῶν εἰρημένων ἔπεται, ὅτι τὰ πλήθη ταῦτα δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀριθμοί, οὐδὲ ἐφαρμόζονται ἐπ' αὐτῶν οἱ κανόνες τῶν πράξεων οἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἰσχύοντες· διότι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης παντὸς ἀριθμοῦ, ἄνευ τῆς ὁποίας ἀδύνατον νὰ νοηθῇ, εἶνε, ὅτι ὁρίζουσιν αὐτὸν αἱ μονάδες αὐτοῦ ἐντελῶς καὶ οὐδόλως μεταβάλλεται ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς θέσεως ἢ τῆς ἀλληλουχίας αὐτῶν· ἡ δὲ ἰδιότης αὕτη δὲν ὑπάρχει ἐν τοῖς τοιούτοις πλήθεσι.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ πλῆθος πασῶν τῶν κλασματικῶν μονάδων θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν· ἐὰν λάβωμεν αὐτὰς κατὰ τὴν ἑξῆς σειρὰν

$$\frac{1}{2}+\frac{1'}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1'}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1'}{4}+\ldots+\frac{1}{\nu}+\frac{1'}{\nu}+\ldots$$

φανερὸν εἶνε ὅτι ὅσῳ μᾶλλον προχωροῦμεν προσθέτοντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους καθ' ἣν σειρὰν εἶνε γεγραμμένοι, τόσῳ προσεγγίζομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 0· ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν τὰς αὐτὰς μονάδας ὡς ἑξῆς

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1'}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1'}{3}+\ldots$$

ἐὰν δηλαδὴ λαμβάνωμεν δύο θετικὰς μονάδας καὶ ἔπειτα μίαν ἀρνητικὴν κατὰ σειράν, τὸ

ἄθροισμα δὲν τείνει εἰς τὸ 0· διότι ἂν προχωρήσωμεν μέχρις οὗ ληφθῶσιν αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες μέχρι τῆς $\frac{1'}{\nu}$ καὶ ταύτης συμπεριλαμβανομένης, τὸ ἄθροισμα εἶνε

$$\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1} \qquad (1)$$

τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅταν προχωρῶμεν, ἤτοι ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, δὲν τείνει πρὸς τὸ 0· διότι εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἑξῆς ἀθροίσματος

$$\frac{1}{2\nu-1}+\frac{1}{2\nu-1}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\nu-1}{2\nu-1}$$

ὅπερ τείνει πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$.

* Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, πρὸς ὃν τείνει τὸ ἄθροισμα (1) διὰ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}+\frac{1}{1+\frac{2}{\nu}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{\nu-1}{\nu}}\right]$$

ἢ ἂν τεθῇ $\frac{1}{\nu}=\varepsilon$

$$\varepsilon\left[\frac{1}{1+\varepsilon}+\frac{1}{1+2\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{1+(\nu-1)\varepsilon}\right]$$

ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι ὁ ἀριθμός, πρὸς ὃν τείνει ὅταν ε τείνῃ πρὸς τὸ 0, εἶνε τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad \text{ἤτοι ὁ } l2.$$

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Τὸ ὑπὸ τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν (θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν) ἀποτελούμενον σύστημα οὐ μόνον εἶνε τέλειον ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τεσσάρων πράξεων, ὡς καὶ τὸ σύστημα τῶν συμμέτρων, ἀλλὰ καὶ τὴν λύσιν πολλῶν ζητημάτων ἀλύτων ἐν τῷ συστήματι τῶν συμμέτρων παρέχει· καί, τὸ πάντων σπουδαιότατον, εἶνε τὸ μόνον σύστημα, ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε θεωρηθέντων, ἐν ᾧ ἡ θεωρία τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου (τῶν λεγομένων συνεχῶν ποσῶν) δύναται νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, καθ' ὅσον μόνον διὰ τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος τούτου δύνανται ταῦτα νὰ παρασταθῶσιν ἐντελῶς.

Ῥίζαι.

136. Γινόμενον, οὗ πάντες οἱ παράγοντες εἶνε ἴσοι, λέγεται *δύναμις* καὶ σημειοῦται ὡς ἕπεται α^{μ}. ὅπου α εἶνε εἷς τῶν παραγόντων καὶ μ τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Ἐὰν ἡ βάσις α αὐξηθῇ καὶ ἡ δύναμις αὐξάνεται (120).

137. Δύναται νὰ εὑρεθῇ αὔξησις τῆς βάσεως ἢ καὶ ἐλάττωσις τόσον μικρά, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς δυνάμεως νὰ εἶνε μικροτέρα πάσης δοθείσης μονάδος $\frac{1}{\rho}$.

Ἔστω α ἡ βάσις· ἐὰν μεταβάλωμεν αὐτὴν κατὰ ε καὶ θέσωμεν $\alpha+\varepsilon=\beta$, ἡ μεταβολὴ τῆς δυνάμεως εἶνε

$$\beta^{\mu}-\alpha^{\mu}=(\beta-\alpha)\,(\beta^{\mu-1}+\beta^{\mu-2}\alpha+\ \ldots\ +\alpha^{\mu-1})$$

ἐὰν δὲ A εἶνε ἀκέραιος μείζων τοῦ $\alpha+1$ θὰ εἶνε

$$\beta^{\mu}-\alpha^{\mu}<\varepsilon\cdot A^{\mu-1}\cdot\mu$$

ἑπομένως ἡ μεταβολὴ τῆς δυνάμεως θὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\rho}$, ἐὰν ληφθῇ $\varepsilon<\frac{1}{\mu\cdot\rho\cdot A^{\mu-1}}$.

138. Δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ οἱουδήποτε, α, ὑπάρχει πάντοτε ἐν τῷ προκειμένῳ συστήματι ἀριθμός τις β, οὗ ἡ μ δύναμις ἰσοῦται τῷ δοθέντι α (μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός).

Ἔστω A ἀκέραιός τις μείζων τοῦ α· μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$0,\quad 1^{\mu},\quad 2^{\mu},\quad 3^{\mu},\quad \ldots\quad A^{\mu}$$

ἢ εἷνέ τις ἴσος τῷ α, ὅτε εὑρέθη τὸ ζητούμενον, ἢ εὑρίσκονται δύο ἐφεξῆς, ὧν ὁ μὲν μείζων ὁ δὲ ἐλάσσων τοῦ α· ἔστω

$$\rho^{\mu}<\alpha<(\rho+1)^{\mu}$$

πάλιν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\rho^{\mu},\quad \left(\rho+\frac{1}{10}\right)^{\mu},\quad \left(\rho+\frac{2}{10}\right)^{\mu},\quad \ldots\quad \left(\rho+\frac{10}{10}\right)^{\mu}$$

ἢ εἷνέ τις ἴσος τῷ α, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς· ἔστω

$$\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}\right)^{\mu}<\alpha<\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{1}{10}\right)^{\mu}$$

καὶ πάλιν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}\right)^{\mu},\ \left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{1}{100}\right)^{\mu}\ \ldots\ \left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{10}{100}\right)^{\mu}$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς· ἔστω

$$\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}\right)^{\mu}<\alpha<\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\frac{1}{100}\right)^{\mu}$$

ἐξακολουθοῦντες οὕτω, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις β

$$\beta=\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\frac{\rho_3}{1000}+\ldots+\frac{\rho_\nu}{10^\nu}+\ldots$$

οὗτινος πᾶσαι αἱ μονάδες εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι· λέγω δὲ ὅτι ἡ μ δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἰσοῦται τῷ δοθέντι α.

Ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμὸς β σύγκειται ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων δεκαδικῶν, εἶνε ἀποδεδειγμένον ὅτι $\beta^\mu=\alpha$, ἐὰν δὲ σύγκειται ἐξ ἀπείρων τοιούτων μονάδων ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης $\beta^\mu=\alpha$ ὡς ἑξῆς.

Ἂν ἦτο $\beta^\mu<\alpha$, λαμβάνοντες ἀριθμόν τινα $\frac{1}{\rho}$ μικρότερον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta^\mu$, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὔξησιν τῆς βάσεως β τόσον μικράν, $\left(\text{ἔστω τὴν } \frac{1}{10^\sigma}\right)$ ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς προξενουμένη αὔξησις τῆς δυνάμεως νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\rho}$· ὥστε καὶ πάλιν θὰ ἦτο

$$\left(\beta+\frac{1}{10^\sigma}\right)^{\mu}<\alpha$$

ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον· διότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ β εἶνε γνωστὸν ὅτι

$$\left(\beta_\sigma+\frac{1}{10^\sigma}\right)^{\mu}>\alpha \quad \text{τὸ δὲ } \beta_\sigma \text{ εἶνε } <\beta.$$

Αν δὲ ἦτο

$$\beta^\mu>\alpha,$$

λαμβάνοντες καὶ πάλιν ἀριθμόν τινα $\frac{1}{\rho}$ μικρότερον τῆς διαφορᾶς $\beta^\mu-\alpha$, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐλάττωσιν τῆς βάσεως β τόσον μικρὰν $\left(\text{ἔστω τὴν } \frac{1}{10^\sigma}\right)$, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς προξενουμένη ἐλάττωσις τῆς δυνάμεως νὰ

εἶνε μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\rho}$· ὥστε καὶ πάλιν θὰ ἦτο

$$\left(\beta-\frac{1}{10^{\sigma}}\right)^{\mu}>\alpha$$

ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶνε ἄτοπον· διότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ β εἶνε γνωστὸν ὅτι εἶνε

$$\alpha>\beta_{\sigma}{}^{\mu} \quad \text{καὶ πρὸς τούτοις}$$

$$\beta<\beta_{\sigma}+\frac{1}{10^{\sigma}} \quad \text{ὅθεν καὶ} \quad \beta-\frac{1}{10^{\sigma}}<\beta_{\sigma}$$

$$\text{ἄρα καὶ} \quad \left(\beta-\frac{1}{10^{\sigma}}\right)^{\mu}<\beta_{\sigma}{}^{\mu}<\alpha$$

139. Ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα θετικὴ λύσις εἶνε μόνη, εἶνε φανερόν. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ εἶνε ἄρτιος, καὶ ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς —β ἔχει προφανῶς μ δύναμιν τὸ α, ὥστε *ὑπάρχουσι δύο ῥίζαι ἄρτιαι παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ἀλλὰ δύο μόνον.*

140. *Ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ δὲν ὑπάρχει ῥίζα ἀρτία·* διότι παντὸς ἀριθμοῦ πᾶσα ἀρτία δύναμις εἶνε θετική.

141. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ εἶνε περιττός, εἴτε θετικὸς εἶνε ὁ α εἴτε ἀρνητικός, μίαν μόνην ῥίζαν εὑρίσκομεν ὁμοειδῆ τῷ α.

Νόμοι τῶν δυνάμεων.

142. Ἐὰν α εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμός, μ καὶ ν δύο ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, ἔχομεν προφανῶς τὴν ἰσότητα

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὁ νόμος οὗτος θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν ὦσιν οἱοιδήποτε σύμμετροι ἀριθμοί, ἀνάγκη νὰ ὁρίσωμεν τὰς κλασματικὰς καὶ ἀρνητικὰς δυνάμεις καταλλήλως.

Ἐν πρώτοις, ἐὰν $\mu=0$

ἕπεται $\alpha^{0}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\nu}$

καὶ ἐπειδὴ α διαφέρει τοῦ μηδενός, ἔχομεν

$$\alpha^{0}=1.$$

τοιαύτην ἄρα σημασίαν δέον νὰ δώσωμεν εἰς τὴν 0 δύναμιν ἀριθμοῦ οἱουδήποτε (πλὴν τοῦ 0), ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόζηται ὁ ῥηθεὶς νόμος ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων.

Ἔστω δεύτερον $\mu = -\nu$

τότε εἶνε (ἐὰν α διαφέρῃ τοῦ 0)

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{-\mu} = \alpha^{0} = 1$$

ὅθεν, $$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}.$$

τοιοῦτος ἄρα πρέπει νὰ δοθῇ ὁρισμὸς διὰ τὰς ἀρνητικὰς δυνάμεις παντὸς ἀριθμοῦ (πλὴν τοῦ 0).

Τέλος ἐκ τοῦ αὐτοῦ νόμου ἕπεται, ἐὰν τεθῇ $\mu = \nu = \frac{1}{2}$

$$\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{1} = \alpha$$

ὅθεν βλέπομεν ὅτι $\alpha^{\frac{1}{2}}$ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α· ὁμοίως δεικνύεται ὅτι $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ ($\rho = 1, 2, 3, 4 \ldots$) πρέπει νὰ σημαίνῃ τὴν ρ ῥίζαν τοῦ α, καὶ ὅτι $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ $\left(\frac{\pi}{\rho}\right.$ ὄντος ἀναγώγου κλάσματος$\left.\right)$ πρέπει νὰ σημαίνῃ τὴν ρ ῥίζαν τοῦ α^{π}· διότι ὑψούμενον εἰς τὴν ρ δύναμιν γίνεται

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\pi}{\rho}} \ldots \alpha^{\frac{\pi}{\rho}} = \alpha^{\rho.\frac{\pi}{\rho}} = \alpha^{\pi}$$

ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ πρέπει νὰ σημαίνῃ καὶ τὴν π δύναμιν τῆς ρ ῥίζης τοῦ α· διότι εἶνε

$$\alpha^{\frac{1}{\rho}}.\alpha^{\frac{1}{\rho}} \ldots \alpha^{\frac{1}{\rho}} = \alpha^{\pi.\frac{1}{\rho}} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$$

ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ π δύναμις τῆς ρ ῥίζης τοῦ α πρέπει νὰ εἶνε ἴση τῇ ρ ῥίζῃ τῆς π δυνάμεως τοῦ α, ἤτοι

$$\left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^{\pi} = \sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$$

Ὅτι δὲ τοῦτο εἶνε ἀληθές, ἀποδεικνύεται εὐκόλως (ἴδε στοιχ. ἄλγεβραν).

Ἐάν, τοῦ ρ ὄντος ἀρτίου, α εἶνε ἀρνητικόν, ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ συστήματι τούτῳ· ἐὰν δὲ α εἶνε θετικόν, ἡ αὐτὴ δύναμις ἔχει δύο τιμὰς ἴσας καὶ ἀντιθέτους.

143. Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἐκθέτας ἐχου-

σῶν δυνάμεων ἰσχύουσι κατὰ τοὺς δοθέντας ὁρισμοὺς καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε οἱοιδήποτε σύμμετροι ἀριθμοί· ἤτοι εἶνε

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu},\quad (\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu.\nu},\quad (\alpha\beta)^{\mu}=\alpha^{\mu}.\beta^{\mu}.$$

Τὴν ἀπόδειξιν τούτων ἰδὲ ἐν στοιχ. ἀλγέβρᾳ (ἐδ. 193).

Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος.

144. Αἱ δυνάμεις τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, αἱ ἔχουσαι ἐκθέτην θετικὸν καὶ ἀκέραιον, δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι κατ' ἀκολουθίαν τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου διὰ τῶν δυνάμεων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν. Εὐκόλως δὲ εὑρίσκει τις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅτι εἶνε

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2}=\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha}{1}.\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^3}{1.2.3}=\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha}{1}.\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}.$$

Ἐν τοῖς τύποις τούτοις ἑκάστη δύναμις ἔχει διαιρέτην τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος 1 μέχρι τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς· καὶ ἡ οὕτω διηρημένη δύναμις τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ εἶνε ἄθροισμα ὁμογενὲς πρὸς α καὶ β ἐκ τῶν ὁμοίως διηρημένων δυνάμεων τοῦ α καὶ τοῦ β συγκροτούμενον· καὶ οἱ μὲν ἐκθέται τοῦ α προβαίνουσι κατὰ μονάδα ἐλαττούμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, οἱ δὲ τοῦ β αὐξανόμενοι.

Ἐκ τούτων ἀγόμεθα νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν γενικῶς διὰ πάντα θετικὸν καὶ ἀκέραιον ἐκθέτην μ ἀληθεύῃ ὁ τύπος

$$(\iota)\quad \frac{(\alpha+\beta)^{\mu}}{1.2.3.\,\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{1.2.3..\mu}+\frac{\alpha^{\mu-1}}{1.2..(\mu-1)}.\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha^{\mu-2}}{1.2..(\mu-2)}.\frac{\beta^2}{1.2}+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha}{1}.\frac{\beta^{\mu-1}}{1.2..(\mu-1)}+\frac{\beta^{\mu}}{1.2..\mu}.$$

Ὑποθέσωμεν τὸν τύπον τοῦτον ἀληθῆ διὰ τὴν δύναμιν μ· λέγω, ὅτι θὰ ἀληθεύῃ τότε καὶ διὰ τὴν ἀμέσως ἑπομένην δύναμιν, ἤτοι τὴν

$$(\mu+1).$$

Ἐὰν τῷ ὄντι ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης (ι) καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ $\alpha+\beta$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\mu+1).(\alpha+\beta)^{\mu+1}}{1.2.3\ldots\mu(\mu+1)}=\frac{(\mu+1)\alpha^{\mu+1}}{1.2.3\ldots\mu(\mu+1)}+\frac{\mu\alpha^{\mu}}{1.2.3\ldots(\mu-1)\mu}\cdot\frac{\beta}{1}+$$

$$+\frac{(\mu-1)\alpha^{\mu-1}}{1.2.3\ldots(\mu-2)\ (\mu-1)}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}+\ldots+\frac{2.\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{\beta^{\mu-1}}{1.2\ldots\mu-1}+\frac{1.\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu}}{1.2.3.\ \mu}+$$

$$+\frac{\alpha^{\mu}}{1.2.3..\mu}\cdot\frac{1.\beta}{1}+\frac{\alpha^{\mu-1}}{1.2.3..\mu-1}\cdot\frac{2.\beta^2}{1.2}+\frac{\alpha^{\mu-2}}{1.2.3..\mu-2}\cdot\frac{3.\beta^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\mu\beta^{\mu}}{1.2.3..(\mu-1)\mu}+\frac{(\mu+1)\beta^{\mu+1}}{1.2.3..\mu(\mu+1)}.$$

Ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος ταύτης αἱ μὲν δύο πρῶται σειραὶ περιέχουσι τὰ γινόμενα ἐπὶ α, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο τὰ ἐκ τοῦ β· ἐγράφησαν δὲ πᾶσαι αἱ δυνάμεις οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι πάλιν ἑκάστη τὸν προσήκοντα αὐτῇ διαιρέτην.

Ἐὰν νῦν διατάξωμεν τὸ δεύτερον μέλος, εὑρίσκομεν ὅτι πάντες οἱ ὅροι ἔχουσι παράγοντα κοινὸν τὸν $(\mu+1)$· π. χ. ὁ τυχὼν ὅρος $\frac{\alpha^{\mu-\lambda}}{1.2.3..\mu-\lambda}\cdot\frac{\beta^{\lambda+1}}{1.2.3..(\lambda+1)}$ ἔχει, ὡς γινόμενον μὲν ἐπὶ α, συντελεστὴν τὸν $(\mu-\lambda)$, ὡς ἐπὶ β δὲ τὸν $\lambda+1$· ὥστε μετὰ τὴν ἀναγωγὴν θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὸν $\mu+1$. Μετὰ τὴν διαίρεσιν δὲ τῆς ἰσότητος διὰ $\mu+1$ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\frac{(\alpha+\beta)^{\mu+1}}{1.2.3\ldots(\mu+1)}=\frac{\alpha^{\mu+1}}{1.2.3..(\mu+1)}+\frac{\alpha^{\mu}}{1.2..\mu}\cdot\frac{\beta}{1}+$$

$$+\frac{\alpha^{\mu-1}}{1.2..(\mu-1)}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}+\ldots\ \ \ldots+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu}}{1.2.3..\mu}+\frac{\beta^{\mu+1}}{1.2.3..(\mu+1)}$$

ἐξ ἧς βλέπομεν ὅτι ἂν ὁ τύπος (ι) εἶνε ἀληθὴς διὰ τὴν μ δύναμιν, ὁ αὐτὸς ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν $(\mu+1)$ δύναμιν· ἐπειδὴ δὲ ἀληθεύει διὰ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην δύναμιν (ὡς ἀμέσως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐφάνη), ἕπεται, ὅτι θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὴν τετάρτην καὶ ἐπειδὴ ἀληθεύει διὰ τὴν τετάρτην, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὴν ἑπομένην, ἤτοι διὰ τὴν πέμπτην· ἄρα καὶ διὰ τὴν ἕκτην κτλ. ἤτοι ὁ τύπος ἀληθεύει διὰ πᾶσαν δύναμιν (θετικὸν καὶ ἀκέραιον ἔχουσαν ἐκθέτην), ἤτοι εἶνε γενικός.

Ὁ τύπος οὗτος λέγεται τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

Περὶ τοῦ ἀριθμοῦ e καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ.

145. Ἐὰν ὑποθέσωμεν διαδοχικῶς $\mu=0, 1, 2\ldots$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (ι)

$$1=1$$

$$\frac{(\alpha+\beta)}{1}=\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta}{1}$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2}=\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^3}{1.2.3}=\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{1.2.3..\mu}=\frac{\alpha^\mu}{1.2.3..\mu}+\frac{\alpha^{\mu-1}}{1.2.3..(\mu-1)}\cdot\frac{\beta}{1}+\ldots+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu-1}}{1.2..\mu-1}+\frac{\alpha^\mu}{1.2.3..\mu}.$$

καὶ ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη

$$1+\frac{(\alpha+\beta)}{1}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{1.2.3..\mu}=$$

$$=1+\left(\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta}{1}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}\right)+\left(\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{\beta}{1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}\right)+\ldots+\left(\frac{\alpha^\mu}{1.2.3..\mu}+\frac{\alpha^{\mu-1}}{1.2.3..\mu-1}\cdot\frac{\beta}{1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu-1}}{1.2.3..(\mu-1)}+\frac{\beta^\mu}{1.2.3.\mu}\right).$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης περιέχει μὲν πάντας τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου

$$\left(1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^\nu}{1.2..\nu}\right).\left(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}++\frac{\beta^\nu}{1.2..\nu}\right)$$

ἔνθα ν εἶνε ὁ μέγιστος ἀκέραιος ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ ἀριθμῷ $\frac{\mu}{2}$, ἀλλὰ περιέχεται ὅλον ἐν τῷ γινομένῳ

$$\left(1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^\mu}{1.2..\mu}\right)\left(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\ldots+\frac{\beta^\mu}{1.2.\mu}\right)$$

ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο γινομένων περιλαμβάνεται.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων τούτων ἐξαφανίζεται, ὅταν ὁ μ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ἀγόμεθα εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀθροισμάτων

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}+\ldots.$$

ὧν ἑκάτερον εἶνε ἄθροισμα πασῶν τῶν δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ διηρημένων ἑκάστης διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος 1 μέχρι τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς.

146. Ἐν πρώτοις δέον νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν τὰ τοιαῦτα πλήθη ἀποτελῶσιν ἀριθμούς.

Οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ α, ἐξ οὗ γίνεται τὸ πλῆθος

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\ldots.$$

εὑρίσκεται πάντοτε ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμὸς ὑπερβαίνων τὸ μέτρον τοῦ α, ἔστω τοιοῦτος ὁ M· ἐὰν τότε χωρίσωμεν τὸ πλῆθος εἰς τὰ δύο μέρη

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^M}{1.2.3\ldots M}.$$

καὶ

$$\frac{\alpha^{M+1}}{1.2.3..M(M+1)}+\frac{\alpha^{M+2}}{1.2..(M+2)}+\ldots$$

τὸ μὲν πρῶτον μέρος ἀποτελεῖ ἀριθμὸν ὡρισμένον, τὸν A, τοῦ δὲ δευτέρου οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μικρότεροι τῶν ἑξῆς κατὰ σειρὰν

$$\frac{\alpha}{M}\,\frac{\alpha^M}{1.2.3..M}+\left(\frac{\alpha}{M}\right)^2\cdot\frac{\alpha^M}{1.2.3..M}+\left(\frac{\alpha}{M}\right)^3\,\frac{\alpha^M}{1.2.3..M}+\ldots.$$

(οὓς εὑρίσκομεν γράφοντες M ἀντὶ τῶν M+1, M+2,...), οἵτινες ἀποτελοῦσι πρόοδον γεωμετρικὴν φθίνουσαν· καὶ ἔχουσιν ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν

$$\frac{\alpha^M}{1.2.3..M}\cdot\frac{\alpha}{M-\alpha}$$

ἑπομένως καὶ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἐξεταζομένου πλήθους ἀποτελεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ ὅλον πλῆθος ἀποτελεῖ διὰ τοῦτο ἀριθμόν.

147. Ἐὰν νῦν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\frac{\alpha^\mu}{1.2.3\ldots\mu}+\ldots\ldots$$

$$1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\frac{\beta^\mu}{1.2.3\ldots\mu}+\ldots\ldots$$

καὶ διατάξωμεν τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου κατὰ βαθμούς, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον

$$1+\left(\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta}{1}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha}{1}\,\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}\right)+$$

$$\left(\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha}{1}\,\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\alpha^\mu}{1.2.3\ldots\mu}+\frac{\alpha^{\mu-1}}{1.2\ldots\mu-1}\cdot\frac{\beta}{1}+\ldots+\frac{\alpha}{1}\,\frac{\beta^{\mu-1}}{1.2.3\ldots\mu-1}+\frac{\beta^\mu}{1.2.3\ldots\mu}\right)+\ldots$$

καὶ ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ μ βαθμοῦ συναποτελοῦσι τὴν μ δύναμιν τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta)$ διῃρημένην διὰ τοῦ $1.2.3\ldots\mu$, ἔχομεν

$$\left(1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}+\ldots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{\alpha+\beta}{1}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\right).$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συντομώτερον ὡς ἑξῆς· ἐὰν τὸν ἐκ τῶν δυνάμεων τοῦ α ἀποτελούμενον ἀριθμὸν

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots$$

παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\varphi(\alpha)$, ὁ ὑπὸ τῶν δυνάμεων τοῦ β ὁμοίως ἀποτελούμενος πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $\varphi(\beta)$ καὶ ὁ ἐκ τῶν δυνάμεων τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ διὰ τοῦ $\varphi(\alpha+\beta)$· ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἰδιότης γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) \qquad (1)$$

ἤτοι ὁ ὑπὸ τῶν δυνάμεων τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς $\varphi(\alpha+\beta)$ εἶνε γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν $\varphi(\alpha)$ καὶ $\varphi(\beta)$, οἵτινες σχηματίζονται ὁμοίως ὑπὸ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

148. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει ἐπὶ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν. Διότι

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\varphi\big([\alpha+\beta]+\gamma\big)=\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\gamma)=\varphi(\alpha).\varphi(\beta).\varphi(\gamma)$$

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\varphi\big([\alpha+\beta+\gamma]+\delta\big)=\varphi(\alpha+\beta+\gamma).\varphi(\delta)=$$

$$=\varphi(\alpha)\ \varphi(\beta)\ \varphi(\gamma)\ \varphi(\delta)$$

ὥστε γενικῶς εἶνε

$$\varphi(\alpha)\ \varphi(\beta)\ \varphi(\gamma)\ldots\varphi(\varkappa)=\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varkappa) \qquad (2)$$

149. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ὑποθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \varkappa$$

πάντας ἴσους τῇ μονάδι 1 καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν παραστήσωμεν διὰ ν, εὑρίσκομεν

$$\varphi(\nu)=\big[\varphi(1)\big]^{\nu}.$$

150. Ἐὰν ἔπειτα ὑποθέσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots^{\varkappa}$ ἐν τῷ τύπῳ (2) ἴσους τῷ κλάσματι $\frac{\mu}{\nu}$, εὑρίσκομεν

$$\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=\varphi(\mu)=\big[\varphi(1)\big]^{\mu}$$

ὅθεν

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\Big[\varphi(1)\Big]^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

151. Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι (1) τεθῇ $\beta=-\alpha$, ἔπεται, ἀ ὄντος θετικοῦ ἀριθμοῦ

$$\varphi(\alpha)\varphi(-\alpha)=\varphi(0)=1 \qquad (4)$$

ὅθεν ἔπεται

$$\varphi(-\alpha)=\varphi(1)^{-\alpha}$$

ἔχομεν ἄρα διὰ πάντα σύμμετρον ἀριθμὸν

$$\varphi(\alpha)=\varphi(1)^{\alpha}. \qquad (5)$$

152. Ὁ ἀριθμὸς $\varphi(\alpha)$ εἶνε πάντοτε θετικός· διὰ ταῦτα ἐν τῇ ἰσότητι (5), ἐὰν τὸ δεύτερον μέλος ἔχῃ δύο τιμάς, δέον νὰ λαμβάνωμεν μόνον τὴν θετικήν.

153. Ὁ ἀριθμὸς $\varphi(1)$, οὗτινος αἱ σύμμετροι δυνάμεις παρίστανται ὑπὸ τοῦ θεωρουμένου πλήθους, εἶνε

$$\varphi(1)=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3.4\ldots\nu}+\ldots$$

Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὃν οἱ μαθηματικοὶ παριστῶσι διὰ τοῦ γράμματος e, ἔχει τὸ ἄξιον λόγου ἰδίωμα, ὅτι πᾶσα σύμμετρος δύναμις αὐτοῦ, ἑπομένως καὶ πᾶσα ῥίζα, εὑρίσκεται εὐκόλως· διότι εἶνε

$$e^{\frac{\beta}{\alpha}}=1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\left[\frac{\beta}{\alpha}\right]^2}{1.2}+\frac{\left[\frac{\beta}{\alpha}\right]^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{\left[\frac{\beta}{\alpha}\right]^\nu}{1.2.3..\nu}+\cdots$$

Ἐὰν λ. χ. θέλωμεν τὴν $100^{στὴν}$ ῥίζαν τοῦ e, ἔχομεν

$$e^{\frac{1}{100}}=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{2.100^2}+\frac{1}{6.100^3}+\cdots$$

καὶ λαμβανομένων τῶν 3 πρώτων ὅρων,

$$e^{\frac{1}{100}}=1{,}01005\ \ldots$$

154. Ὁ ἀριθμὸς e εἶνε ἀσύμμετρος· καὶ ὄντως ἀκέραιος δὲν εἶνε διότι εἶνε μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\cdots$$

ὅ ἐστι τοῦ 3, καὶ μεγαλήτερος τοῦ 2· ὑποτεθείσθω ἴσος κλάσματι ἀναγώγῳ καὶ ἔστω

$$e=\frac{\beta}{\rho}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots$$

τότε εἶνε

$$1.2.3.(\rho-1).\beta=1.2.3\ldots\rho.\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)}+\frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}+\cdots$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ παρένθεσις, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $1.2.3\ldots\rho$, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός, εἶνε δὲ ἀκέραιος καὶ τὸ πρῶτον μέλος, ἕπεται ὅτι αἱ μονάδες τῆς δευτέρας γραμμῆς πρέπει νὰ ἀποτελῶσιν ἀκέραιον ἀριθμόν· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· διότι ὁ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶνε ἐλάσσων τοῦ ἀριθμοῦ

$$\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{(\rho+1)^2}+\frac{1}{(\rho+1)^3}+\cdots \text{ ἤτοι τοῦ } \frac{1}{\rho}$$

ἀλλὰ $\rho>1$ (διότι ὁ e δὲν εἶνε ἀκέραιος)· ὥστε τὸ $\frac{1}{\rho}$ εἶνε μικρότερον

τῆς μονάδος· μικρότερον ἄρα τῆς μονάδος εἶνε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν μονάδων τῆς δευτέρας γραμμῆς ἀποτελούμενον· ἀδύνατος ἄρα ἡ τεθεῖσα ἰσότης· ὥστε ὁ e εἶνε ἀσύμμετρος (*). Λογιζομένων τῶν 15 πρώτων δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ, εὑρίσκεται

$$e=2,7\ 1828\ 1828\ 4590\ 45\ldots$$

Μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.

155. Ἐὰν ἡ μονὰς 1 παριστᾷ εὐθεῖάν τινα γραμμήν, ἔστω τὴν AB, πᾶς σύμμετρος θετικὸς ἀριθμὸς παριστᾷ ὡσαύτως γραμμὴν ἐντελῶς ὡρισμένην κατὰ τὸ μέγεθος (τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς AB καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς ὅπως ὁ ἀριθμὸς ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς)· καὶ οἱ μὲν ἴσοι ἀριθμοὶ παριστῶσιν ἴσας εὐθείας, διότι ἰσάκις ἐπαναλαμβανόμεναι δίδουσιν εὐθείας ἴσας οἱ δὲ ἄνισοι ἀνίσους· ὁ μεγαλήτερος μεγαλητέραν καὶ ὁ μικρότερος μικροτέραν.

156. Καὶ πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς παριστᾷ γραμμήν. Διότι ἔστω α ὁ ἀριθμὸς καὶ A ἀκέραιός τις μεῖζων αὐτοῦ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΓΔ, ἣν παριστᾷ ὁ A, λαμβάνωνται ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐφεξῆς αἱ τὸν α συναποτελοῦσαι μονάδες, μία μετ' ἄλλην, ἀποτελοῦνται γραμμαὶ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλήτεραι, ἀλλὰ πᾶσαι μικρότεραι τῆς ΓΔ· καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΓΔ, ἄλλα μὲν κεῖνται ἐπί τινος τῶν εἰρημένων εὐθειῶν (καὶ ἐπὶ πάσης ἑπομένης) ἄλλα δὲ ἐπὶ οὐδεμιᾶς· χωρίζει δὲ τὰ πρῶτα ἀπὸ τῶν δευτέρων προδήλως σημεῖόν τι δ τῆς ΓΔ εὐθείας· τότε ἡ ὑπὸ τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ α παριστωμένη γραμμὴ εἶνε ἡ Γδ.

Αἱ ὑπὸ δύο ἴσων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παριστώμεναι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· διότι ἔστωσαν ΓΔ καὶ EZ εὐθεῖαι ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν ($\alpha=\beta$) παριστώμεναι· ἐὰν ληφθῇ μέρος τι τῆς ΓΔ, τὸ ΓΗ, τὸ σημεῖον Η κεῖται ἐπί τινος τῶν εὐθειῶν, ἃς λαμβάνομεν προσθέτοντες κατὰ σειρὰν μίαν μετ' ἄλλην τὰς μονάδας τοῦ α· ἃς κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΘ, ἣν παριστᾷ τὸ μέρος Μ τοῦ α· καὶ ἔστω Ν μέρος τι τοῦ β μεῖζον τοῦ Μ καὶ ἐκ μονάδων ἐφεξῆς ἀλλήλαις εὑρισκομένων ἀποτελούμενον· ἡ ὑπὸ τοῦ Ν παριστωμένη εὐθεῖα εἶνε προφανῶς μέρος τῆς EZ· ἑπομένως καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ Μ παριστωμένη ΓΘ, ὡς μικροτέρα· πᾶν ἄρα μέρος τῆς ΓΔ εἶνε καὶ τῆς EZ

(*) Καὶ πᾶσαι αἱ δυνάμεις τοῦ e αἱ ἔχουσαι ἐκθέτην θετικὸν καὶ ἀκέραιον εἶνε ἀσύμμετροι ἀριθμοί· καὶ πᾶν ἄθροισμα ἐκ τοιούτων δυνάμεων τοῦ e συγκροτούμενον εἶνε ἀσύμμετρος ἀριθμός ὡς ἀπέδειξεν ὁ γάλλος μαθηματικὸς Hermite.

μέρος· ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τἀνάπαλιν· αἱ ἄρα εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ εἶνε ἴσαι.

Ὅτι οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ παριστῶσι γραμμὰς ἀσυμμέτρους τῇ μονάδι καὶ οἱ σύμμετροι συμμέτρους, εἶνε φανερόν.

157. Καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει· ἤτοι πᾶσα δοθεῖσα γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκειμένη ἐκ τῆς ΑΒ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς καὶ παρίσταται ὑπὸ θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὸ ἀξίωμα· *πᾶν μέρος εὐθείας δύναται πολλάκις ἐπαναλαμβανόμενον νὰ ὑπερβῇ τὸ ὅλον.*

Ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα θὰ σύγκειται ἐξ ὡρισμένου τινὸς πολλαπλασίου τῆς ΑΒ (ἔστω τοῦ ρ) καὶ ἔκ τινος γραμμῆς Γ_1 μικροτέρας τῆς ΑΒ· ἡ γραμμὴ Γ_1 θὰ σύγκειται ἐξ ὡρισμένου τινὸς πολλαπλασίου τοῦ δεκάτου τῆς ΑΒ (ἔστω τοῦ ρ_1) καὶ ἐξ ἄλλης τινὸς Γ_2 μικροτέρας αὐτοῦ· ὡσαύτως ἡ Γ_2 θὰ σύγκειται ἐξ ὡρισμένου τινὸς πολλαπλασίου τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς ΑΒ καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου καὶ καθεξῆς· ὁ οὕτω ὁριζόμενος ἀριθμὸς $\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{100} + \ldots$ παριστᾷ τὴν δοθεῖσαν γραμμήν.

158. Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν νοηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἀναλυομένη εἰς μέρη πολλοστὰ τῆς ΑΒ, πάντοτε ὁ αὐτὸς προκύπτει ἀριθμός· διότι ἄνισοι ἀριθμοὶ παριστῶσιν, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ἀνίσους εὐθείας.

Παράστασις τῶν σημείων εὐθείας κατ' ἀμφότερα ἀπείρου διὰ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

159. Ἐὰν ληφθῶσιν ὡς ἔτυχε τὰ δύο σημεῖα Ο καὶ Α, ἄτινα παρίστανται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ 1, πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ ἐντελῶς ὡρισμένου καὶ τἀνάπαλιν· πᾶς ἀριθμὸς παριστᾷ σημεῖον τῆς εὐθείας ἐντελῶς ὡρισμένον.

Διότι ἀρκεῖ νὰ παριστᾷ τὸ σημεῖον Μ ὁ τὴν γραμμὴν ΟΜ ἐκφράζων ἀριθμός, ὅταν ΟΑ εἶνε ἡ μονάς, θετικὸς μὲν λαμβανόμενος, ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΑ ἔχωσι κοινόν τι μέρος, ἀρνητικὸς δέ, ἐὰν τοὐναντίον.

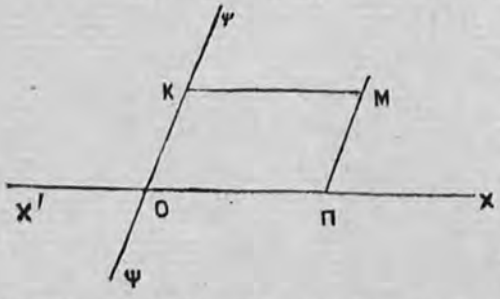
Ἐὰν δοθῇ ἀριθμός τις, τὸ μὲν μέτρον αὐτοῦ ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν τοῦ παριστωμένου σημείου Μ ἀπὸ τοῦ Ο, τὸ δὲ σημεῖον αὐτοῦ δεικνύει τὸ μέρος τῆς εὐθείας, πρὸς ὃ κεῖται τὸ σημεῖον.

Τὸ μέρος τῆς εὐθείας, πρὸς ὃ κεῖται τὸ σημεῖον Α λέγεται *θετικόν*·

διότι πᾶν σημεῖον αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ θετικοῦ ἀριθμοῦ· τὸ δὲ ἕτερον *ἀρνητικόν*· διότι τὰ σημεῖα αὐτοῦ παρίστανται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

Παράστασις τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου δι' ἀριθμῶν.

160. Ἐὰν ληφθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΨ καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι αὐταῖς ΜΠ, ΜΚ, οἱ δύο ἀριθμοὶ x, y, οἱ τὰ τμήματα ΟΠ, ΟΚ ἐκφράζοντες, δύνανται νὰ παραστήσωσι τὸ σημεῖον Μ· λαμβάνεται δὲ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων, θετικὸς μέν, ἐὰν τὸ τμῆμα, ὅπερ ἐκφράζει, κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΨ, ἀρνητικὸς δέ, ἐὰν ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ἑτέρας τούτων· καὶ τοῦτο γίνεται, ἵνα αἱ τέσσαρες κορυφαὶ τοῦ παραλληλογράμμου, οὗ κέντρον τὸ Ο καὶ πλευραὶ αἱ ἐκ τοῦ Μ ἠγμέναι εὐθεῖαι, διακρίνωνται ἀπ' ἀλλήλων.



Ὅτι, δοθέντος τοῦ σημείου, οἱ τοῦτο παριστῶντες ἀριθμοὶ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένοι, εἶνε φανερόν· διότι τὰ τμήματα, ἅτινα αἱ διὰ τούτου ἠγμέναι ποιοῦσιν ἐπὶ τῶν εἰλημμένων εὐθειῶν, εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένα κατά τε τὸ μῆκος καὶ κατὰ τὴν θέσιν· ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν, ἐάν, ὡς ἔτυχε, δοθῶσι δύο ἀριθμοὶ x, y, οὗτοι παριστῶσιν ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου· διότι, ὁ μὲν ἀριθμὸς x ὁρίζει ἐντελῶς τμῆμά τι τῆς ΟΧ ἢ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς καθ' ὅσον εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικός· ὁμοίως καὶ ὁ y ὁρίζει τμῆμά τι τῆς ΟΨ ἢ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς καὶ αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν τμημάτων τούτων ἠγμέναι παράλληλοι ταῖς ΟΧ, ΟΨ τέμνονται κατά τι σημεῖον Μ· ὅπερ προφανῶς, μοναδικὸν ὄν, παρίσταται ὑπὸ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Οἱ ἀριθμοὶ x, y οἱ παριστῶντες τὸ σημεῖον Μ λέγονται *συντεταγμένοι* αὐτοῦ.

Σημ. Ἡ παράστασις αὕτη τῶν σημείων δι' ἀριθμῶν ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας.

Πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμόν.

161. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν πρέπει νὰ ὁρισθῇ οὕτως, ὥστε νὰ διατηρῶνται ἐν αὐτῷ ὅσον τὸ δυνατὸν αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ δὲ περὶ ἀνταλλαγῆς τῶν παραγόντων δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος, μένει νὰ διατηρηθῶσιν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες

(1) $$(M.\alpha).\beta = M.(\alpha.\beta)$$

(2) $$M(\alpha+\beta) = (M.\alpha)+(M.\beta)$$

(3) $$(M+N).\alpha = (M\alpha)+(N\alpha)$$

καὶ $$M.1 = M\cdot$$

τουτέστιν ἡ διαλυτική, ἡ ἐπιμεριστικὴ καὶ ἡ ἰδιότης τῆς μονάδος.

162. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ θετικὸν καὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ὁρισθῇ* (ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν) *ὡς ἀλλεπάλληλος πρόσθεσις τοῦ μεγέθους M εἰς ἑαυτό·*

διότι λ.χ. εἶνε $M.3 = M(1+1+1) = M.1+M.1+M.1 = M+M+M.$

163. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ θετικὴν κλασματικὴν μονάδα πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς μερισμὸς τοῦ μεγέθους M εἰς ἴσα μέρη* (ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν).

Διότι τὸ γινόμενον $M.\frac{1}{\nu}$, ν φορὰς ληφθέν, ἤτοι ἐπὶ ν πολλαπλασιασθέν, γίνεται $\left(M.\frac{1}{\nu}\right).\nu$ ἤτοι $M\left(\frac{1}{\nu}.\nu\right)$ ἢ M.1 ἤτοι M· ἄρα εἶνε τὸ νυοστὸν μέρος τοῦ μεγέθους M.

164. *Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τοῦ μεγέθους ἐπὶ τὸν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν πρέπει νὰ ὁρισθῇ* (ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν) *ὡς εὕρεσις μεγέθους συγκειμένου ἐκ τοῦ δοθέντος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ ὡς σύγκειται ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς* παρ. ἐδ. 65).

Σημ. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἀπαιτεῖται ὁ μερισμὸς τοῦ μεγέθους εἰς ἴσα μέρη καὶ ἡ πρόσθεσις μερῶν τινῶν αὐτοῦ.

165. Ὅτι ὁ οὕτω ὁριζόμενος πολλαπλασιασμὸς τῶν μεγεθῶν ἐπὶ τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς ἔχει τὰς προειρημένας ἰδιότητας ἀποδεικνύεται ἐκ τούτου, ὅτι ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων (1) (2) (3) σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν τοῦ μεγέθους M, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ πολλαπλασιασταὶ α, β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

ΜΙΓΑΔΕΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

166. Τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἶνε ἐπίσης ἐλλιπές· διότι πολλὰ ζητήματα δὲν ἔχουσι λύσιν ἐν αὐτῷ· π. χ. τὸ ἑξῆς: νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς νὰ δίδῃ γινόμενον —1, ἢ οἱονδήποτε ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ζητήσωμεν, εἰ δυνατόν, νὰ αὐξήσωμεν τὸ εἰρημένον σύστημα, ὥστε νὰ λύωνται ἐν αὐτῷ καὶ τὰ τοιαῦτα ζητήματα, διατηρουμένων, ὡς πάντοτε, τῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων.

167. Ἐν τῷ γενικωτέρῳ συστήματι, (ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τοιοῦτον), πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις, ὅστις, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, νὰ δίδῃ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα 1′. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου i καὶ εἰσάγομεν εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, θεωροῦντες αὐτὸν ὡς νέαν μονάδα, ὅλως διάφορον τῶν προτέρων 1 καὶ 1′. Τῆς νέας ταύτης μονάδος i εἰσάγομεν καὶ πάσας τὰς ἐπαναλήψεις, i+i, i+i+i, i+i+i+i κτλ. καὶ πάντα τὰ μέρη, ἅτινα σημειοῦμεν διὰ τῶν σημείων $\frac{i}{2}$, $\frac{i}{3}$, $\frac{i}{4}$, κτλ. καὶ ὁρίζομεν ὡς καὶ τὰ τῶν ἄλλων μονάδων (46). Πρὸς τούτοις, ἵνα γίνηται ἡ ἀφαίρεσις, εἰσάγομεν καὶ νέαν ἄλλην μονάδα i′ ἀντίθετον (78) τῇ i, ὡς εἶνε ἡ 1′ τῇ 1, καὶ τὰς ἐπαναλήψεις καὶ τὰ μέρη αὐτῆς. Ὅτι δὲ καὶ ἡ μονὰς i′ εἶνε διάφορος τῶν πραγματικῶν μονάδων, εἶνε φανερόν.

168. Ἀριθμὸς καὶ πάλιν λέγεται ἡ περιληπτικὴ ἐν τῷ νῷ παράστασις, ἤτοι τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ ἔννοια ἡ ἐκφράζουσα τὴν σχέσιν πλήθους τινὸς πρὸς τὰ μέρη του.

Ὁ ἀριθμὸς ὁρίζεται, ὅταν δοθῶσιν αἱ μονάδες αὐτοῦ καὶ ποσάκις ἑκάστη λαμβάνεται, ὡς

$$i+1+\frac{1}{2}+\frac{1'}{3}+i'+\frac{i}{5}$$

Καὶ τὸ 0, ἤτοι ἡ ἀπουσία πάσης μονάδος, θεωρεῖται ὡς ἀριθμός.

169. Αἱ νέαι μονάδες i καὶ i′ λέγονται *φανταστικαὶ* (θετικὴ ἡ i καὶ ἀρνητικὴ ἡ i′) καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν (καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν) συγκείμενοι

ἀριθμοὶ λέγονται *φανταστικοί*· αἱ δὲ προϋπάρχουσαι 1 καὶ 1′ λέγονται πρὸς διάκρισιν *πραγματικαὶ* καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ *πραγματικοί*, οἱ δὲ ἐκ πραγματικῶν καὶ ἐκ φανταστικῶν μονάδων συγκείμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *μιγάδες*

π. χ. $i+1+\frac{1}{2}+\frac{i}{3}$ εἶνε μιγὰς ἀριθμός.

---

170. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν θετικὴν μονάδα 1 οὐδόλως ἀλλοιοῖ αὐτόν*

ἤτοι $\alpha.1=\alpha.$

Διότι οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ α.1 πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τὴν μονάδα 1 γίνονται ἴσοι κατὰ τὸν διαλυτικὸν νόμον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ἐπομένως ἀμφότεροι εἶνε πηλίκα τῆς διαιρέσεως α.1 διὰ τῆς μονάδος 1· ἐπειδὴ δὲ θέλομεν ἑκάστη διαίρεσις νὰ ἔχῃ ἓν καὶ μόνον ἓν ἐξαγόμενον, ἀνάγκη νὰ δεχθῶμεν αὐτοὺς ἴσους.

(Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι, ἂν ἐδεχόμεθα ὅτι διαίρεσίς τις δίδει δύο πηλίκα διάφορα ἀπ' ἀλλήλων, θὰ ἐδεχόμεθα ἐξ ἀνάγκης καὶ ὅτι γινόμενόν τι μηδενίζεται χωρὶς νὰ μηδενισθῇ μηδεὶς τῶν παραγόντων αὐτοῦ· διότι, ἂν ἦτο $\alpha=\beta.\gamma_1$ καὶ $\alpha=\beta.\gamma_2$, θὰ ἦτο κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον καὶ $\beta(\gamma_1-\gamma_2)=0$).

171. Ἐκ τούτου ἔπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς προτάσεις (αἵτινες ἀποδεικνύονται διὰ τῆς διαλυτικῆς ἰδιότητος καὶ διὰ τῆς ἐπιμεριστικῆς $\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha\gamma$).

α′) *Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν εἶνε ἀλλεπάλληλος πρόσθεσις τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του.* (ἐδ. 50).

β′) *Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ κλασματικὴν θετικὴν μονάδα εἶνε μερισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη* (ἐδ. 60).

γ′) *Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν εἶνε πρόσθεσις τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ* ἐδ. 65).

Ἐν τῇ προσθέσει ταύτῃ λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ καθὼς λαμβάνεται ἡ μονὰς καὶ τὰ μέρη αὐτῆς πρὸς σχηματισμὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

δ′) *Πᾶς ἀριθμὸς ἐκ μιᾶς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελούμενος εἶνε γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.*

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν, εἶνε

$$i+\frac{i}{3}+\frac{i}{5}+i=i\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1\right)$$

$$i'+\frac{i'}{3}+\frac{i'}{5}+i'=i'\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1\right)$$

$$1'+\frac{1'}{3}+\frac{1'}{5}+1'=1'\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1\right)$$

ε') *Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα 1' εἶνε τροπὴ αὐτοῦ εἰς τὸν ἀντίθετον* (ἐδ. 92).

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $1+1'=0$ ἕπεται $\alpha.(1+1')=0$

ἢ $\alpha 1+\alpha.1'=0$ ἢ καὶ $\alpha+\alpha.1'=0$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\alpha.1'$ εἶνε ὁ ἀντίθετος τοῦ α ἀριθμός· διότι ἕνα μόνον ἀντίθετον ἑκάστου ἀριθμοῦ παραδεχόμεθα (προκύπτει δὲ ἐκ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ὁ ἀντίθετος, ἐὰν ἑκάστη μονὰς αὐτοῦ τραπῇ εἰς τὴν ἀντίθετον).

Κατὰ ταῦτα εἶνε $i'=i.1'$ καὶ $i=i'.1'$

ὅθεν καὶ $i'^2=i^2=-1$

ἤτοι καὶ τῆς μονάδος i' τὸ τετράγωνον εἶνε -1· ὑπάρχουσι δηλαδὴ δύο τετρ. ῥίζαι τοῦ -1· ἀλλὰ καὶ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν δύο ὑπάρχουσι τετρ. ῥίζαι.

172. *Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀχθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν*

$$1.\alpha+1'.\beta+i\gamma+i'\delta$$

ἔνθα α, β, γ, δ εἶνε θετικοὶ ἀριθμοὶ (ἢ καὶ 0). Διότι αἱ θετικαὶ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμόν τινα θετικὸν α ἢ $1.\alpha$, αἱ ἀρνητικαὶ θὰ ἀποτελῶσιν ἀρνητικόν τινα ἀριθμὸν β' ἢ $1'.\beta$, αἱ θετικαὶ φανταστικαὶ θὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμόν τινα, ὅστις εἶνε γινόμενον τῆς μονάδος i ἐπὶ θετικόν τινα ἀριθμὸν γ· καὶ αἱ ἀρνητικαὶ φανταστικαὶ θὰ ἀποτελῶσιν ὁμοίως ἀριθμόν, ὅστις θὰ εἶνε γινόμενον τῆς μονάδος i' ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν δ.

173. Τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστου εἴδους (θετικῶν, ἀρνητικῶν, θετικῶν φανταστικῶν, ἀρνητικῶν φανταστικῶν) δύναται νὰ εἶνε πεπερασμένον ἢ καὶ ἄπειρον· ἀρκεῖ αἱ μονάδες ἑκάστου εἴδους χωρὶς λαμβανόμεναι νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμόν· ἤτοι, ὁσαιδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν λη-

φθῶσι, τὸ ἄθροισμα τῶν εἰλημμένων νὰ εἶνε πάντοτε μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς.

174. Αἱ προτάσεις τῶν ἐδ. 131, 132, 133 ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν, οἵτινες ἔχουσιν ἄπειρον πλῆθος μονάδων (ἐὰν αἱ μονάδες ἑκάστου εἴδους ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν) καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

175. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς ἐκ δύο ἀντιθέτων μονάδων καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν ἀποτελούμενος ἀνάγεται (ἐδ. 84) εἰς ἀριθμὸν μιᾶς ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς (ἢ εἰς τὸν 0), ἔπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς $1.\alpha+1\beta+i\gamma+i'\delta$ ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν

$$A+iB$$

ἔνθα A καὶ B εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ ἢ καὶ 0), ἤτοι ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου συστήματος.

Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς σύγκειται ἐξ ἑνὸς πραγματικοῦ καὶ ἐξ ἑνὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ.

176. Ἡ ἰσότης τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κυρίας μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς (τουτέστι τῶν ὁμοειδῶν), ὁρίζεται ὡς ἡ ἰσότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ὡρίσθη· ὁμοίως καὶ ἡ ἀνισότης.

177. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἐν τῷ συστήματι τούτῳ, ἐὰν τὰ πραγματικὰ μέρη αὐτῶν εἶνε ἴσα καὶ τὰ φανταστικὰ ἴσα.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς ἰσότητος ἐκφράζει τὴν διαφορότητα τῶν πραγματικῶν μονάδων ἀπὸ τῶν φανταστικῶν. Καὶ ὄντως· ἐὰν ἐδεχόμεθα $\alpha.1+\beta.i=\gamma.1+\delta.i$ χωρὶς νὰ εἶνε $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$, ἤθελεν εἶσθαι

$$\alpha+\gamma'=(\beta+\beta')i$$

γ' καὶ β' ὄντων τῶν ἀντιθέτων τοῖς γ καὶ β, ἢ καὶ

$$\rho=\sigma.i$$

ρ καὶ σ ὄντων θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἑπομένως

$$\rho.\rho=\sigma.i.\sigma.i=\sigma.\sigma.i.i.=-\sigma.\sigma$$ ὅπερ ἀδύνατον.

Ὅτι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου τῶν ἴσων ἕπονται οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος, εἶνε φανερόν.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀνισότητος ὑποθέτει ἀριθμοὺς ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελουμένους, ἤτοι ὁμοειδεῖς, δὲν ἐφαρμόζεται δὲ ἐπὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν· διότι αἱ μονάδες 1, i εἶνε μεγέθει ἄσχετοι.

Πρόσθεσις καὶ Ἀφαίρεσις.

178. Ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν λέγεται, ὡς πάντοτε, ὁ ἀριθμός, ὃν ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες αὐτῶν ὁμοῦ λαμβανόμεναι.

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τὰς πραγμα-

τικὰς αὐτῶν μονάδας καὶ χωριστὰ τὰς φανταστικάς· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha+\beta i \quad \text{καὶ} \quad \gamma+\delta i$$

εἶνε

$$\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i.$$

179. Ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου αὐτῷ.

180. Τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δεδομένων εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμὸς καὶ οἱ νόμοι τῆς προσθέσεως προφανῶς ἐφαρμόζονται καὶ ἐν τῇ προσθέσει ταύτῃ.

Πολλαπλασιασμός.

181. Ἐὰν κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $(\alpha+\beta.i)$, $(\gamma+\delta.i)$, προκύπτει

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha.\gamma+\alpha.\delta.i+\beta.\gamma.i+\beta.\delta.i.i$$

καὶ ἐπειδὴ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μονάδος i εἶνε $i.i=-1$, ἔπεται

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha.\gamma-\beta.\delta)+(\alpha.\delta+\beta.\gamma).i$$

Ἀνάγεται ἄρα ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

182. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος καὶ οἱ νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πάντες ἰσχύουσι καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ. Καὶ ὄντως, ἐὰν τεθῇ $\alpha=A+Bi$ $\beta=\Gamma+\Delta i$ $\gamma=E+Zi$, εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἰσότητες

$$\alpha.\beta=\beta.\alpha$$

$$\alpha.(\beta.\gamma)=(\alpha.\beta).\gamma$$

$$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta)+(\alpha.\gamma)$$

$$\alpha.0=0, \qquad \alpha.1=\alpha$$

183. Καὶ ἐὰν τοῦ γινομένου $\alpha.\beta$ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες διαφέρωσι τοῦ μηδενός, καὶ τὸ γινόμενον διαφέρει ἐπίσης τοῦ 0. Διότι, ἵνα τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta.i)$ εἶνε 0, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\alpha\gamma-\beta\delta=0$$

$$\alpha\delta+\beta\gamma=0$$

ὅθεν καὶ $(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2=0=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$

Ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶνε ἢ $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἢ $\gamma=0$ καὶ $\delta=0$, ἤτοι νὰ εἶνε ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων 0.

Σημ. Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\alpha.1+\beta.1'+\gamma.i+\delta.i'$ τρέψωμεν τὰς μονάδας 1, i, 1′, i′ κυκλικῶς εἰς ἀλλήλας, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται ***ἀκόλουθος*** τοῦ δοθέντος· ἐὰν δὲ καὶ ἐν τούτῳ ποιήσωμεν τὸ αὐτό, προκύπτει ὁ δεύτερος ἀκόλουθος καὶ καθεξῆς.

Εὐκόλως βλέπει τις ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἔχει τρεῖς ἀκολούθους καὶ ὅτι ὁ δεύτερος ἀκόλουθος ἀριθμοῦ εἶνε ὁ ἀντίθετος αὐτῷ· ὁ δὲ τέταρτος εἶνε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς

$$\alpha.1+\beta.1'+\gamma.i+\delta.i'$$
$$\alpha.i+\beta.i'+\gamma.1'+\delta.1$$
$$\alpha.1'+\beta.1+\gamma.i'+\delta.i$$
$$\alpha.i'+\beta.i+\gamma.1+\delta.1'$$

Τῆς θετικῆς μονάδος 1 ἀκόλουθοι εἶνε αἱ μονάδες i, 1′, i′.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ α, οἱ ἀκόλουθοι αὐτῷ εἶνε

$$\alpha\,i, \quad \alpha.1', \quad \alpha.i'.$$

Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἕπεται

$$\alpha(A.1+B.1'+\Gamma.i+\Delta.i')=A.(\alpha)+B.(\alpha.1')+\Gamma.(\alpha.i)+\Delta.(\alpha.i')$$

γίνεται ἄρα τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων α καὶ τῶν ἀκολούθων αὐτοῦ, αi, α1′, αi′. ὡς ὁ ἄλλος γίνεται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ τῶν ἀκολούθων αὐτῆς i, 1′, i′, τοῦτο πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ ἐν τῷ ἑνὶ τῶν παραγόντων ἡ θετικὴ μονὰς καὶ τὰ μέρη αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἄλλου παράγοντος καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ἑκάστη δὲ τῶν ἀκολούθων μονάδων ὑπὸ τῶν ἀκολούθων τῷ α ἀριθμῶν.

184. Αἱ τέσσαρες μονάδες τοῦ προκειμένου συστήματος εἶνε δυνάμεις μιᾶς αὐτῶν, τῆς i, καὶ ὄντως εἶνε

$$i^1=i, \quad i^2=1', \quad i^3=i', \quad i^4=1.$$

Διαίρεσις.

185. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\chi+\psi i$ εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\gamma+\delta i$ διὰ τοῦ $\alpha+\beta i$, ἔχομεν

$$(\chi+\psi i)(\alpha+\beta i)=\gamma+\delta i$$

ὅθεν (177)

$$\alpha\chi-\beta\psi=\gamma$$
$$\beta\chi+\alpha\psi=\delta$$

ἐκ τούτων ἕπεται

$$(\alpha^2+\beta^2)\chi=\alpha\gamma+\beta\delta$$
$$(\alpha^2+\beta^2)\psi=\alpha\delta-\beta\gamma$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης $\alpha+\beta i$ ὑποτίθεται διάφορος τοῦ 0, ὁ ἀριθμὸς $\alpha^2+\beta^2$ εἶνε διάφορος τοῦ 0, ὅθεν (128)

$$\chi=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \psi=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}.$$

186. Ἡ διαίρεσις εἶνε ἑπομένως πάντοτε δυνατὴ καὶ τὸ πηλίκον εἶνε ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος, πλὴν ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε 0. Ἡ ἐξαίρεσις

αὕτη ὑπῆρχεν ἐξ ἀρχῆς ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀριθμῶν, οὐδὲ δύναται, ὡς ἀπεδείξαμεν (77), νὰ ἐκλείψῃ.

187. Τὸ πηλίκον $\frac{\gamma+\delta i}{\alpha+\beta i}$ εὑρίσκομεν ἀμέσως, πολλαπλασιάζοντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην (41, 1) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\alpha-\beta i$.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$ λέγονται *συζυγεῖς*.

188. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ προειρημένα, βλέπομεν, ὅτι οἱ ἐκ τῶν τεσσάρων μονάδων 1, 1′, i, i′ καὶ τῶν μερῶν αὐτῶν συγκείμενοι ἀριθμοὶ (καὶ τὸ 0) ἀποτελοῦσι σύστημα, ἐν τῷ ὁποίῳ οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων, οἱ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εὑρεθέντες, διατηροῦνται καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις δίδουσιν ἐξαγόμενα ἐντελῶς ὡρισμένα, ἐπὶ δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν τοῦ συστήματος τούτου ἐφαρμοζόμεναι. Ἀλλὰ καὶ πᾶν ζήτημα, ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ἐφ' οὗ ἐκτελούμεναί τινες (ἢ πᾶσαι) ἐκ τῶν τεσσάρων πράξεων καθ' ὡρισμένην τάξιν, νὰ δίδωσιν ἐξαγόμενον δεδομένον ἀριθμόν, λύεται, ὡς θὰ ἀποδειχθῇ ἀκολούθως, ἐν τῷ παρόντι συστήματι. Οὐδεμία δὲ αὔξησις τοῦ συστήματος τούτου εἶνε δυνατή, ἄνευ βλάβης τῶν θεμελιωδῶν τῆς λογιστικῆς νόμων, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἀποδειχθῇ. Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε τέλειον καὶ αὐτάρκες.

Ἑτέρα μορφὴ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν καὶ σύμμετροι δυνάμεις αὐτῶν.

189. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ὑποτίθενται γνωσταὶ ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ κύκλου καὶ τῶν κυκλικῶν γραμμῶν.

1) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου ληφθῇ ὡς μονὰς τοῦ μήκους, ἡ ὅλη περιφέρεια αὐτοῦ ἔχει μῆκος, ὅπερ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2π ($\pi=3{,}1415\ldots$) καὶ πᾶν τόξον αὐτοῦ ἔχει μῆκος ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος πραγματικοῦ παριστώμενον.

2) Δεδομένων δύο ἀριθμῶν θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἰσοῦται τῇ μονάδι 1, ὑπάρχει πάντοτε τόξον τι ἐν τῷ κύκλῳ (τῷ ἔχοντι ἀκτῖνα τὴν μονάδα 1) μικρότερον περιφερείας, οὗ τινος οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁ μὲν ἡμίτονον ὁ δὲ συνημίτονον, καὶ ἓν μόνον.

3) Τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τριῶν τόξων φ, ω, $\varphi+\omega$ συνδέονται διὰ τῶν ἑπομένων σχέσεων

$$\text{συν}(\varphi+\omega)=\text{συν}\varphi.\text{συν}\omega-\text{ημ}\varphi.\text{ημ}\omega$$

$$\text{ημ}(\varphi+\omega)=\text{ημ}\varphi.\text{συν}\omega+\text{συν}\varphi.\text{ημ}\omega.$$

190. Ἔστω μιγὰς ἀριθμός, ὁ $\alpha+\beta i$, ἐὰν θέσωμεν $\rho=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, οἱ δύο ἀριθμοὶ $\frac{\alpha}{\rho}$, $\frac{\beta}{\rho}$ εἶνε τόξου τινὸς ὁ μὲν πρῶτος συνημίτονον, ὁ δὲ δεύτερος ἡμίτονον· τὸ μῆκος τοῦ τόξου τούτου (ἀκτὶς=1) τοῦ μικροτέρου περιφερείας σημειούσθω διὰ φ, ὥστε

$$\text{συν}\,\varphi=\frac{\alpha}{\rho},\quad \text{ημ}\,\varphi=\frac{\beta}{\rho}$$

ἐντεῦθεν προκύπτει $\alpha+\beta i=\rho.(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)$.

Ἐν τῇ νέᾳ ταύτῃ μορφῇ $\rho.(\text{συν}\,\varphi+i\,\text{ημ}\,\varphi)$ τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς ρ λαμβάνεται πάντοτε θετικῶς καὶ λέγεται *μέτρον* τῆς μιγάδος (module), ἡ δὲ γωνία φ, ἥτις εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη καὶ εὑρίσκεται μεταξὺ 0 καὶ 2π, λέγεται *ὅρισμα* τῆς μιγάδος (argument).

Ὁ ἀριθμὸς οὐδόλως βλάπτεται, ἂν εἰς τὸ ὅρισμα αὐτοῦ προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ πολλαπλάσιόν τι τῆς περιφερείας 2π.

Τῶν μὲν θετικῶν ἀριθμῶν τὸ ὅρισμα φ εἶνε 0, τῶν δὲ ἀρνητικῶν εἶνε π.

Τῶν μὲν θετικῶν ἀριθμῶν μέτρον εἶνε ἕκαστος ἑαυτοῦ, τῶν δὲ ἀρνητικῶν ὁ ἀντίθετος θετικὸς (93).

Τύπος τοῦ Moivre.

191. Ἔστωσαν δύο μιγάδες ὑπὸ τὴν νέαν μορφήν,

οἱ $\rho(\text{συν}\,\varphi+i\,\text{ημ}\,\varphi)$ καὶ $\rho'(\text{συν}\,\varphi'+i\,\text{ημ}\,\varphi')$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς, εὑρίσκομεν

$$\rho.(\text{συν}\,\varphi+i\,\text{ημ}\,\varphi).\rho'(\text{συν}\,\varphi'+i\,\text{ημ}\,\varphi')=$$
$$=\rho.\rho'.\left[\text{συν}\,(\varphi+\varphi')+i\,\text{ημ}\,(\varphi+\varphi')\right]$$

ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι τοῦ γινομένου δύο μιγάδων μέτρον μὲν εἶνε τὸ γινόμενον τῶν μέτρων, ὅρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων.

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ ταῦτα τοὺς ἀριθμοὺς

$$\text{συν}\,\varphi_1+i\,\text{ημ}\,\varphi_1,\quad \text{συν}\,\varphi_2+i\,\text{ημ}\,\varphi_2,\quad \ldots\quad \text{συν}\,\varphi_\nu+i\,\text{ημ}\,\varphi_\nu$$

εὑρίσκομεν

$$(\text{συν}\,\varphi_1+i\,\text{ημ}\,\varphi_1).(\text{συν}\,\varphi_2+i\,\text{ημ}\,\varphi_2)\ \ldots\ (\text{συν}\,\varphi_\nu+i\,\text{ημ}\,\varphi_\nu)=$$
$$=\text{συν}\,(\varphi_1+\varphi_2+\ \ldots\ +\varphi_\nu)+i\,\text{ημ}\,(\varphi_1+\varphi_2+\ \ldots\ +\varphi_\nu)$$

καί, ἂν αἱ γωνίαι $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_\nu$ γίνωσιν ἴσαι τῇ φ, ἕπεται ὁ τύπος

$$(\sigma\upsilon\nu\ \varphi + i\ \eta\mu\ \varphi)^\nu = \sigma\upsilon\nu\ \nu\varphi + i\ \eta\mu\ \nu\varphi \qquad (1)$$

τοῦ ν παριστῶντος οἱονδήποτε ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν.

Ὁ τύπος οὗτος λέγεται τύπος τοῦ Moivre.

Ῥίζαι.

192. Πᾶς ἀριθμὸς ἔχει ἐν τῷ συστήματι τούτῳ μ μοστὰς ῥίζας, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^\mu = \alpha$$

ἐν ᾗ α εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, ἔχει πάντοτε μ λύσεις. Καὶ ὄντως, ἵνα ἀριθμός τις ρ συν φ + iρ ἡμ φ πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\rho^\mu(\sigma\upsilon\nu\ \varphi + i\ \eta\mu\ \varphi)^\mu = \alpha$$

ἢ, δυνάμει τοῦ ἀποδειχθέντος τύπου (1),

$$\rho^\mu.(\sigma\upsilon\nu\ \mu\varphi + i\ \eta\mu\ \mu\varphi) = \alpha \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ εἶνε Α τὸ μέτρον καὶ ω τὸ ὅρισμα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ α, ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$\rho^\mu\ \sigma\upsilon\nu\ \mu\varphi + i\rho^\mu\ \eta\mu\ \mu\varphi = A.\sigma\upsilon\nu\ \omega + iA.\eta\mu\ \omega$$

καὶ ἵνα ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀληθεύῃ (177), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\rho^\mu.\sigma\upsilon\nu\ \mu\varphi = A.\sigma\upsilon\nu\ \omega \quad \text{καὶ συνάμα} \quad \rho^\mu.\eta\mu\ \mu\varphi = A.\eta\mu\ \omega$$

ἐντεῦθεν λαμβάνομεν $\rho^{2\mu} = A^2$ καὶ $\rho^\mu = A$, ἢ $\rho = +\sqrt[\mu]{A}$.

Ἐπειδὴ ὁ ρ πρέπει νὰ εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς (190), ἡ μ ῥίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ Α λαμβάνεται πάντοτε θετικῶς.

Πρὸς τούτοις εἶνε $\sigma\upsilon\nu\ \mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\ \omega$ καὶ $\eta\mu\ \mu\varphi = \eta\mu\ \omega$.

Ἀλλ' ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι τὰ αὐτὰ συνημίτονα καὶ ἡμίτονα, δὲν διαφέρουσιν ἢ κατὰ περιφερείας τινάς· ὥστε

$$\mu\varphi = \omega + 2\kappa\pi$$

τοῦ κ ὄντος ἀκεραίου θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ οἱουδήποτε· ὅθεν ἕπεται

$$\varphi = \frac{\omega + 2\kappa\pi}{\mu}$$

πληροῖ ἄρα τὴν ἐξίσωσιν $\chi^\mu = \alpha$ ὁ ἀριθμὸς

$$+\sqrt[\mu]{A}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega + 2\kappa\pi}{\mu} + i\ \eta\mu\ \frac{\omega + 2\kappa\pi}{\mu}\right) \qquad (3)$$

Ὁ ἀκέραιος κ δύναται μὲν νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμάς, ἀλλὰ δύο τιμαὶ αὐτοῦ διαφέρουσαι κατὰ μ δίδουσι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ἐν τῇ εὑρεθείσῃ λύσει· διότι τὰ ὁρίσματα τότε διαφέρουσι κατὰ ὁλόκληρον περιφέρειαν 2π· τόξα δὲ κατὰ ὅλην περιφέρειαν διαφέροντα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ κ πρέπει νὰ λάβῃ μόνον τὰς τιμὰς

$$\kappa=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (\mu-1) \qquad (4)$$

διότι πᾶσα ἄλλη τιμὴ αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς μίαν ἐκ τούτων, ἐὰν παραλειφθῶσιν ἢ προστεθῶσι πολλαπλάσιά τινα τοῦ μ.

Αἱ μ τιμαί, ἃς ἡ παράστασις (3) δίδει διὰ τὰς μ τιμὰς τοῦ κ (4) εἶνε πᾶσαι διάφοροι ἀλλήλων, ἤτοι μεταξὺ αὐτῶν δὲν ὑπάρχουσι δύο ἴσαι.

Ἔστωσαν ἴσαι αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν τιμῶν κ′, κ″ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων

$$\frac{\omega+2\kappa'\pi}{\mu} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\omega+2\kappa''\pi}{\mu}$$

πρέπει νὰ ὦσι τὰ αὐτὰ καὶ διὰ τοῦτο τὰ τόξα ταῦτα θὰ διαφέρωσι κατὰ περιφερείας τινάς, ὅθεν

$$\frac{2(\kappa'-\kappa'')\pi}{\mu}=2\nu\pi, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\kappa'-\kappa''}{\mu}=\nu.$$

Ἀλλὰ κ′ καὶ κ″ εἶνε μικρότερα τοῦ μ, ἡ διαφορὰ ἄρα αὐτῶν ἀδύνατον νὰ διαιρῆται ὑπὸ τοῦ μ. Ἀδύνατον ἄρα δύο τιμαὶ τῆς παραστάσεως (3) νὰ εἶνε ἴσαι.

Ἀπεδείχθη ἄρα, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἔχει μ $\mu^{\text{στὰς}}$ ῥίζας· (μόνον τοῦ 0 αἱ μ $\mu^{\text{σταὶ}}$ ῥίζαι συμπίπτουσι πᾶσαι εἰς μίαν μόνην).

Ῥίζαι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

193. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α εἶνε θετικός, ἔχομεν ω=0 καὶ Α=α καὶ αἱ μ $\mu^{\text{σταὶ}}$ ῥίζαι αὐτοῦ εἶνε

$$+\sqrt[\mu]{\alpha}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\mu}+\text{i}\ \eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\mu}\right), \quad \kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \mu-1$$

Τούτων ἡ πρώτη εἶνε πάντοτε πραγματική· ἐὰν δὲ ὁ μ εἶνε ἄρτιος εἶνε πραγματικὴ ἀλλ' ἀρνητικὴ ἡ εἰς $\kappa=\frac{\mu}{2}$ ἀντιστοιχοῦσα (139).

Ῥίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν

194. Ἐὰν α εἶνε ἀρνητικός, ἔχομεν ω=π, A=—α καὶ αἱ ῥίζαι αὐτοῦ εἶνε

$$+\sqrt[\mu]{-\alpha}\left(\text{συν}\frac{(2\kappa+1)\pi}{\mu}+\text{i}\ \eta\mu\ \frac{(2\kappa+1)\pi}{\mu}\right),\quad \kappa=0,1,2,\ldots\mu-1$$

Τούτων μία μόνη εἶνε πραγματική, ἐὰν μ εἶνε περιττός, ἡ εἰς $\kappa=\frac{\mu-1}{2}$ ἀντιστοιχοῦσα· οὐδεμία δέ, ἐὰν ἄρτιος (140) καὶ (141).

Αἱ ῥίζαι τῆς θετικῆς μονάδος 1.

195. Αἱ μ μυοσταὶ ῥίζαι τῆς θετικῆς μονάδος 1 εἶνε αἱ ἐξῆς

$$\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi}{\mu}\right)+\text{i}\ \eta\mu\left(\frac{2\kappa\pi}{\mu}\right)\quad \text{ἔνθα } \kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (\mu-1)$$

Ἐὰν μίαν τούτων, τὴν τυχοῦσαν, παραστήσωμεν διὰ λ, πᾶσαι αἱ δυνάμεις τῆς λ εἶνε μυοσταὶ ῥίζαι τῆς μονάδος 1

διότι $$(\lambda^\rho)^\mu=\lambda^{\mu\rho}=(\lambda^\mu)^\rho=1^\rho=1$$

ὥστε λ^ρ εἶνε μία τῶν μυοστῶν ῥιζῶν τῆς μονάδος 1.

Δύο δυνάμεις τῆς ῥίζης λ, ὧν οἱ ἐκθέται διαφέρουσι κατὰ μ, εἶνε ἴσαι.

Διότι $$\lambda^{\rho+\mu}=\lambda^\rho.\lambda^\mu=\lambda^\rho.1=\lambda^\rho$$

ἑπομένως ἐκ τῶν δυνάμεων τῆς λ μόνον αἱ ἐξῆς *δύνανται νὰ εἶνε* διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων

$$\lambda^0\quad\lambda^1\quad\lambda^2\ \ldots\ \lambda^{\mu-1}\qquad(\iota)$$

Αἱ δυνάμεις αὗται τῆς ῥίζης λ θὰ εἶνε διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἑπομένως θὰ εἶνε αἱ μ μυοσταὶ ῥίζαι τῆς μονάδος 1, ἐὰν ὁ λ δὲν εἶνε ῥίζα τῆς μονάδος 1 βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ μ. Διότι ἂν ἦτο

$$\lambda^\rho=\lambda^\sigma,$$ τῶν ρ καὶ σ ὄντων διαφόρων ἀριθμῶν ἐκ τῶν 0, 1, 2 . . . μ—1, καὶ ρ>σ, θὰ ἦτο καὶ

$$\lambda^{\rho-\sigma}=1$$

ἔνθα ἡ διαφορὰ ρ—σ εἶνε μικροτέρα τοῦ μ· θὰ ἦτο λοιπὸν ἡ λ ῥίζα τῆς μονάδος βαθμοῦ ρ—σ κατωτέρου τοῦ μ.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ λ εἶνε ῥίζα τῆς μονάδος βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ μ, αἱ δυνάμεις (ι) προφανῶς δὲν εἶνε πᾶσαι διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἑπομένως δὲν δίδει ἡ ῥίζα λ πάσας τὰς μυοστὰς ῥίζας τῆς μονάδος 1.

196. Ἐὰν ῥίζα τις μυοστὴ τῆς μονάδος 1 δίδῃ διὰ τῶν δυνάμεων αὐτῆς πάσας τὰς μ μυοστὰς ῥίζας τῆς μονάδος 1, ἡ ῥίζα αὕτη λέγεται ἀρχικὴ μυοστὴ ῥίζα τῆς μονάδος, εἰ δὲ μὴ λέγεται καταχρηστική.

197. Ἀρχικαὶ μυοσταὶ ῥίζαι τῆς μονάδος 1 εἶνε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τιμὰς τοῦ κ πρὸς ἃς ὁ μ εἶνε πρῶτος· καταχρηστικαὶ δὲ αἱ λοιπαί.

Ἔστω τῷ ὄντι θ τιμή τις τοῦ κ καὶ ἃς εἶνε οἱ ἀριθμοὶ θ καὶ μ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι αἱ δυνάμεις

$$\lambda^0 \quad \lambda^1 \quad \lambda^2 \ldots \lambda^{\mu-1} \qquad \text{ἔνθα } \lambda = \text{συν}\frac{2\theta\pi}{\mu} + i\,\text{ἡμ}\left(\frac{2\theta\pi}{\mu}\right)$$

εἶνε πᾶσαι διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων.

Διότι, ἂν ἦτο $\lambda^\rho = \lambda^\sigma$

ἤτοι $\text{συν}\left(\frac{2\theta\rho\pi}{\mu}\right) + i\ \text{ημ}\left(\frac{2\theta\rho\pi}{\mu}\right) = \text{συν}\left(\frac{2\theta\sigma\pi}{\mu}\right) + i\ \text{ἡμ}\left(\frac{2\theta\sigma\pi}{\mu}\right)$

θὰ ἦτο $\frac{2\theta\rho\pi}{\mu} - \frac{2\theta\sigma\pi}{\mu} = 2\tau\pi$, ἔνθα τ ἀκέραιος,

ἢ $\frac{\theta(\rho-\sigma)}{\mu} = \tau$· ὅπερ ἄτοπον, διότι ρ—σ εἶνε μικρότερον τοῦ μ, ὁ δὲ θ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν μ.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ εἶνε πρῶτος, πᾶσαι αἱ μ μυοσταὶ ῥίζαι τῆς μονάδος εἶνε ἀρχικαὶ ῥίζαι· πλὴν τῆς 1.

198. Αἱ τέσσαρες μονάδες τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε αἱ τέταρται ῥίζαι τῆς θετικῆς μονάδος 1.

199. Παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ αἱ μ μυοσταὶ ῥίζαι εἶνε γινόμενα τῶν μ ῥιζῶν τῆς θετικῆς μονάδος 1 ἐπὶ τὴν πραγματικὴν καὶ θετικὴν μυοστὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ.

Νόμοι τῶν δυνάμεων.

200. Οἱ τὰς δυνάμεις (συμμέτρους) τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν διέποντες νόμοι

$$\alpha^\mu . \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$
$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu.\nu}$$
$$\alpha^\mu . \beta^\mu = (\alpha.\beta)^\mu$$

ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν (συμμέτρων) δυνάμεων τῶν μιγάδων ἀριθμῶν, ὡς

ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν αὐτῶν δύναται εὐκόλως νὰ ἀποδειχθῇ.

Ἀλλ' ἡ ἰσότης

$$\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}} = (\sqrt[\rho]{\alpha})^{\pi} = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$$

δὲν εἶνε τελεία, ἐὰν μὴ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ἀριθμοὶ π καὶ ρ, οὐδὲ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ εἶνε ἀκριβῶς ἴσον τῷ $\alpha^{\frac{\pi\nu}{\rho\nu}}$· διότι τὸ πρῶτον ἔχει ρ τιμὰς τὸ δὲ δεύτερον $\rho.\nu$, ἂν θεωρηθῇ ἴσον τῇ $\sqrt[\rho\nu]{\alpha^{\pi\nu}}$.

Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

201. Διὰ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν ποσά, ὅταν ταῦτα σύγκεινται ἐκ δύο μερῶν ἀνομοίων, ἤτοι ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων ἐν τῇ προσθέσει· καὶ φανερὸν εἶνε, ὅτι τότε ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν ποσῶν τούτων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ταῦτα παριστώντων ἀριθμῶν.

202. Διὰ τῶν ἀκεραίων μιγάδων ἀριθμῶν δύναται προσέτι νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις ἀντικειμένου τινὸς ἐν ἐπιφανείᾳ, ὡς λ. χ. ἡ θέσις πόλεως ἐπὶ χάρτου γεωγραφικοῦ, ἡ θέσις τόπου ἐπὶ τῆς γηΐνης σφαίρας κτλ. Διότι ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας χαραχθῇ σειρά τις γραμμῶν μὴ τεμνουσῶν ἀλλήλας (ἢ εἰς ἓν σημεῖον συντρεχουσῶν) καὶ ληφθῇ μία τούτων, ἡ τυχοῦσα, ὡς πρώτη καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ 0, πᾶσα ἄλλη δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἀκεραίου τινὸς θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ· ἀλλὰ καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν γραμμῶν δύναται ἕκαστον σημεῖον νὰ παρασταθῇ ὑπὸ θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ· ἑπομένως ἕκαστον τῶν θεωρουμένων σημείων δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μιγάδος ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου πραγματικὸν μέρος εἶνε ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων, φανταστικὸν δὲ ὁ ἄλλος ἐπὶ τὴν μονάδα i πολλαπλασιαζόμενος.

203. Ἀλλὰ πασῶν τῶν παραστάσεων τούτων ἡ ἐφαρμογῶν τῶν μιγάδων ἁρμοδιωτάτη καὶ χρησιμωτάτη εἶνε ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γινομένη. Ἐν αὐτῇ ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ παριστᾷ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, οὗτινος αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι εἶνε $x=\alpha$ καὶ $y=\beta$. Θεωρεῖται δηλ. ἡ μονὰς i ὡς παριστῶσα γραμμὴν ἴσην τὸ μῆκος τῇ μονάδι 1 καὶ κάθετον ἐπ' αὐτήν. Κατὰ τὴν παράστασιν ταύτην *πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀριθμὸν καὶ τἀνάπαλιν εἰς πάντα ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον* τοῦ ἐπιπέδου (ἐδ. 160).

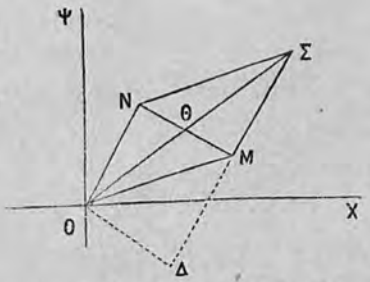
204. Ἐὰν οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ παριστῶσι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, τὸ μὲν ἡμιάθροισμα αὐτῶν

$$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}(\beta+\delta)i$$

παριστᾷ τὸ μέσον Θ τῆς ΜΝ· διότι συντεταγμέναι τοῦ σημείου Θ εἶνε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \text{ καὶ } \frac{1}{2}(\beta+\delta)$$

(Ἐπιπ. Ἀναλ. ἑδ. 19), τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i$ παριστᾷ τὴν κορυφὴν Σ τοῦ ἀπὸ τῶν τμημάτων ΟΜ, ΟΝ ἀναγραφομένου παραλληλογράμμου· διότι τοῦ σημείου τούτου Σ αἱ συντεταγμέναι εἶνε $\alpha+\gamma$, $\beta+\delta$, (διότι Θ εἶνε μέσον καὶ τῆς ΟΣ).



Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς

$$\alpha-\gamma+(\beta-\delta)i$$

παριστᾷ τὴν κορυφὴν Δ τοῦ παραλληλογράμμου, οὗ διαγώνιοι εἶνε ἡ ΟΜ καὶ πλευρὰ ΟΝ.

205. Ἐπειδή, ὁρισθέντος τοῦ σημείου Μ, ὁρίζεται ἐντελῶς καὶ τὸ τμῆμα ΟΜ (οὗ ἀρχὴ τὸ Ο καὶ τέλος τὸ Μ) κατά τε τὴν φορὰν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος, καὶ ἀντιστρόφως, ὁρισθέντος τοῦ τμήματος ΟΜ, ὁρίζεται καὶ τὸ ἄκρον αὐτοῦ Μ, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὸ τμῆμα ΟΜ ὡς παριστώμενον ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ μιγάδος $\alpha+\beta i$ (ἔνθα α, β εἶνε αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ ἄκρου Μ).

Κατὰ τὴν παράστασιν ταύτην *ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕκαστον τμῆμα ἐκ τοῦ Ο ἀρχόμενον εἷς ἀριθμός, καὶ ἀντιστρόφως πρὸς ἕκαστον ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν τμῆμα ἀρχόμενον ἐκ τοῦ Ο.*

Τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ἰσοῦται τῷ μέτρῳ τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ δι' οὗ τὸ τμῆμα παρίσταται, ἡ δὲ γωνία, ἣν τὸ τμῆμα σχηματίζει πρὸς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x, ἰσοῦται τῷ ὁρίσματι τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐὰν δηλονότι ὁ ἀριθμὸς ρ (συνφ + i ημφ) παριστᾷ τὸ τμῆμα ΟΜ, αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ Μ (πρὸς πόλον τὸ Ο καὶ πολικὸν ἄξονα τὸν ΟΧ) εἶνε ρ καὶ φ· καὶ ἀντιστρόφως.

206. Τὰ ἰσομήκη μὲν διάφορον ὅμως ἔχοντα φορὰν τμήματα τὰ ἐκ

τοῦ Ο ἀρχόμενα παρίστανται κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δι' ἀριθμῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ μέτρον διάφορα ὅμως ὁρίσματα, ἤτοι δι' ἀριθμῶν διαφόρων· ἑπομένως καὶ τὰ τμήματα ταῦτα θεωροῦνται ὡς διάφορα.

207. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$, $\gamma+\delta i$ παριστᾷ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δύο τμημάτων, ἅτινα παριστῶσιν οἱ δύο ἀριθμοί· διότι τοῦ ἄκρου Σ τῆς διαγωνίου ταύτης αἱ συντεταγμέναι εἶνε, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, $\alpha+\gamma$, $\beta+\delta$.

208. Ἐπειδὴ τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)$ ἰσοῦται τῷ μήκει τῆς διαγωνίου ΟΣ, τὰ δὲ μέτρα τῶν προσθετέων ἰσοῦνται πρὸς τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΟΜ, ΟΝ, ἔπεται ἡ πρότασις.

Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δύο τυχόντων ἀριθμῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἀληθεύει δὲ τὸ αὐτὸ καὶ δι' ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

209. Ἡ δὲ διαφορὰ $\alpha+\beta i-(\gamma+\delta i)$ τῶν τὰ τμήματα ΟΜ, ΟΝ παριστώντων ἀριθμῶν παριστᾷ τὸ τμῆμα ΟΔ, τὸ ἰσόμηκες καὶ ὁμόρροπον τῷ τμήματι ΝΜ, ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ τμήματος, ὅπερ παριστᾷ ὁ ἀφαιρετέος, εἰς τὸ πέρας τοῦ τμήματος, ὅπερ παριστᾷ ὁ μειωτέος.

210. Μέτρον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν $\alpha+\beta i-(\gamma+\delta i)$ εἶνε κατὰ ταῦτα τὸ μῆκος τῆς εὐθείας, ἥτις συνδέει τὰ ὑπ' αὐτῶν παριστώμενα σημεῖα, ὅρισμα δ' αὐτῆς ἡ γωνία τῆς αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ.

211. Αἱ μ μυοσταὶ ῥίζαι τῆς μονάδος 1 παριστῶσιν ἀκτῖνας τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἀκτὶς ἴση τῇ μονάδι, διαιρούσας αὐτὸν εἰς μ ἴσα μέρη.

Σημ. Τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς μηχανικῆς δύναται κατὰ τὴν θεωρίαν ταύτην νὰ ἐκφρασθῇ ἁπλούστατα καὶ φυσικώτατα ὡς ἑξῆς· «Συνισταμένη δύο δυνάμεων ἐφ' ἑνὸς σημείου ἐνεργουσῶν εἶνε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν», ὅταν αἱ δυνάμεις παριστῶνται διὰ τμημάτων.

212. Ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἀριθμῶν πάντα τὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κείμενα τμήματα, εἶνε ἀνάγκη νὰ παριστῶμεν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ νὰ θεωρῶμεν ἑπομένως ὡς ἴσα, πάντα τὰ ἰσομήκη καὶ ὁμόρροπα τμήματα, ἐξ οἱωνδήποτε σημείων καὶ ἂν ἄρχωνται. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ ὁρίζειν τὴν ἰσότητα τῶν τμημάτων γενικεύεται καὶ ὁ διὰ τὰ ἐπ' εὐθείας κείμενα τμήματα ἰσχύων τύπος

$$\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}=\text{ΑΓ}$$

διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων ΟΜ, ΟΝ (ἤτοι ἡ διαγώνιος ΟΣ) εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΟΜ καὶ ΜΣ (διότι ΟΝ=ΜΣ), ἤτοι· *ἄθροισμα δύο τμημάτων, ὅταν τεθῶσιν οὕτως, ὥστε*

τὸ τέλος τοῦ πρώτου νὰ εἶνε ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, εἶνε τὸ τμῆμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τοῦ δευτέρου.

Τουτέστιν εἶνε $$AB\#\#B\Gamma=A\Gamma$$

εἴτε ἐπ' εὐθείας κεῖνται τὰ τρία σημεῖα ('Επ. 'Αν. ἐδ. 11) εἴτε ὁπωσδήποτε.

'Εκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ γενικῶς εἶνε

$$AB\#\#B\Gamma\#\#\Gamma\Delta\#\#\Delta E=AE$$

Σημ. 'Η παράστασις αὕτη ἡ ἀπεικόνισις τῶν μιγάδων ἀριθμῶν χρησιμεύει τὰ μέγιστα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συναρτήσεων, τὸν διαφορικὸν καὶ ὁλοκληρωτικὸν ὑπολογισμόν, εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ τὰς λοιπὰς θεωρίας τῆς μαθηματικῆς. 'Αλλ' ἡ ἀφήγησις τῶν ἐφαρμογῶν τούτων ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος ἔργου.

Πολλαπλασιασμὸς τῶν τμημάτων ἐπὶ ἀριθμούς.

213. *'Ο πολλαπλασιασμὸς τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν ὁρίζεται* ὡς καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε μεγέθους (ἐδ. 164) οὐδόλως δὲ ἀλλοιοῖ τὴν φορὰν τοῦ τμήματος· ἤτοι *τὸ γινόμενον τμήματος ἐπὶ ἀριθμὸν θετικὸν εἶνε ὁμόρροπον τμῆμα συγκείμενον ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ ὡς σύγκειται ὁ ἀριθμὸς ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.*

214. Δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένων τμημάτων ἐπὶ πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος, ἔχοντα τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεγέθους ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν· ἤτοι

$$(M.\alpha)\beta=M.(\alpha.\beta) \tag{1}$$

$$M(\alpha+\beta)=(M\alpha)\#\#(M\beta) \tag{2}$$

$$(M\#\#N)\alpha=(M\alpha)\#\#(N\alpha) \tag{3}$$

$$M.1=M,$$

καὶ $$M.0=0.$$

Τῷ ὄντι ἐκ τῆς ἰδιότητος (2) ἕπεται

$$M(1+1')=M.1+M.1'=M+M.1'$$

ἀλλὰ M.0 εἶνε 0, ὥστε τὸ τμῆμα M.1' εἶνε τὸ ἀντίθετον τοῦ τμήματος M·

ἤτοι *ὁ πολλαπλασιασμὸς τμήματος ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα πρέπει*

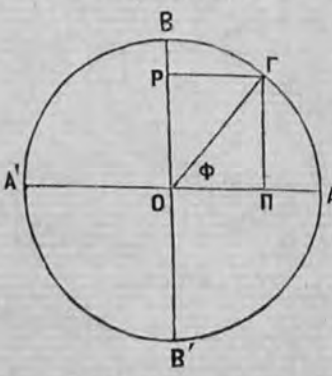
νὰ ὁρισθῇ ὡς τροπὴ αὐτοῦ εἰς τὸ ἀντίθετον ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὡς στροφὴ αὐτοῦ περὶ τὴν ἀρχήν του κατὰ 180^0.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τμήματος ἐπὶ τὴν θετικὴν φανταστικὴν μονάδα i πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς θετικὴ στροφὴ τοῦ τμήματος περὶ τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ κατὰ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Διότι εἶνε $(Mi)i=M(ii)=M.1'$

γίνεται δηλαδὴ τὸ ἀντίθετον τοῦ M τμῆμα, τὸ M′, ἐκ τοῦ Mi ὡς γίνεται τοῦτο ἐκ τοῦ M· ἤτοι, ἂν ὁ ἐπὶ i πολλαπλασιασμὸς ἐφαρμοσθῇ δὶς ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ τοῦ M, προκύπτει τὸ ἀντίθετον τοῦ M τμῆμα M′· ἑπομένως τὸ τμῆμα Mi εἶνε τὸ ἰσόμηκες καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ M· προκύπτει δὲ ἐκ τοῦ M διὰ τῆς θετικῆς στροφῆς· διότι, ἂν τὸ τμῆμα M εἶνε ἡ μονὰς τῶν εὐθειῶν, τὸ Mi κεῖται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ ἄξονος OΨ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τμήματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν συνφ+i ημφ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς στροφὴ αὐτοῦ περὶ τὴν ἀρχήν του κατὰ τὴν γωνίαν φ (ἐν θετικῇ περιφορᾷ).



Διότι κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα πρέπει νὰ εἶνε

$$M.(συνφ+iημφ)=(M.συνφ)\#\#(Mi).ημφ.$$

Ἐὰν δὲ M εἶνε τὸ τμῆμα OA, Mi θὰ εἶνε τὸ ἐπ' αὐτὸ κάθετον καὶ ἰσόμηκες τμῆμα OB· καὶ ἂν ἀχθῇ τὸ τὴν γωνίαν φ μετὰ τῆς OA σχηματίζον τμῆμα OΓ καὶ αἱ ΓΠ, ΓP κάθετοι πρὸς τὰ τμήματα OA, OB, θὰ εἶνε

$$OΓ=OΠ\#\#OP, \quad ἀλλὰ \quad OΠ=OA.συνφ=M.συνφ$$

$$OP=OB.ημφ=(Mi)ημφ$$

$$ἄρα \quad OΓ=(Mσυνφ)\#\#(Mi)ημφ=M(συνφ+i\,ημφ).$$

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τμήματος ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν

$$ρ(συνφ+i\,ημφ)$$

πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς πολλαπλασιασμὸς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν ρ καὶ στροφὴ ἔπειτα κατὰ τὴν γωνίαν φ.

Διότι εἶνε

$$M.ρ(συνφ+i\,ημφ)=(M.ρ)\,(συνφ+i\,ημφ).$$

Ὅτι δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος ἔχει τὰς ἰδιότητας, ἃς ἀνωτέρω ἐμνημονεύσαμεν, ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Σημ Τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τμημάτων δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν καὶ ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι ἡ σχέσις $N = M.(\alpha + \beta i)$ πρέπει νὰ μένῃ καὶ ὅταν τὰ τμήματα M καὶ N παρασταθῶσι δι' ἀριθμῶν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Ἀνακεφαλαιοῦντες πάντα τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν εἰρημένα καὶ ἐπιθεωροῦντες τὴν διαδοχικὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀριθμητικῶν συστημάτων καὶ τὴν ἑκάστοτε ἀπὸ ἑνὸς τούτων εἰς ἄλλο εὐρύτερον μετάβασιν, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν καὶ πάντα τὰ ἐν τῷ μεταξὺ εὑρεθέντα εὑρέθησαν ὡς ἀναγκαῖαι συνέπειαι τῆς ἀρχῆς, καθ' ἣν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων, οἱ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εὑρεθέντες καὶ *τὴν φύσιν*, ὡς εἰπεῖν, *τῶν πράξεων τούτων ὁρίζοντες*, ἔπρεπε νὰ διατηρηθῶσιν ἀβλαβεῖς ἐν πάσῃ τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν αὐξήσει. Ἡ ἀρχὴ αὕτη εἶνε μὲν αὐθαίρετος· διότι ἀληθῶς δύναταί τις νὰ μὴ δεχθῇ τοὺς νόμους τῶν πράξεων ὡς ἰσχύοντας ἐπὶ τῶν ἑκάστοτε εἰσαγομένων νέων ἀριθμῶν, ὅτε θὰ ὁρίσῃ τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐν μέρει αὐθαιρέτως, καθόσον δηλαδὴ αἱ πράξεις αὗται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν εἰσαγομένων νέων ἀριθμῶν δὲν ὁρίζονται· ἀλλὰ τὴν μεγίστην χρησιμότητα καὶ σχεδὸν ἀναγκαιότητα τῆς ἀρχῆς ταύτης ἐννοεῖ τις, ἐὰν ἐνθυμηθῇ ὅτι διὰ τῶν εἰρημένων νόμων καθίστανται αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν διαφόρων ἀριθμῶν ὁμοιόμορφοι, ἐν ᾧ ἄνευ αὐτῶν ἦθελον εἶσθαι λίαν μὲν πολύπλοκοι αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις, ἀδύνατος δὲ πᾶς μετασχηματισμὸς καὶ πᾶς λογισμὸς ἐπὶ ἀριθμῶν μὴ ὡρισμένων ἐντελῶς, ὡς λ. χ. ἐπὶ γραμμάτων ἢ μεταβλητῶν ἀριθμῶν· διότι πᾶς μετασχηματισμὸς τῶν ἐγγραμμάτων παραστάσεων στηρίζεται ἐπὶ ἑνὸς ἢ πολλῶν ἐκ τῶν θεμελιωδῶν ἐκείνων νόμων· ὡς καὶ πᾶν γεωμετρικὸν θεώρημα ἐπὶ ἑνὸς ἢ πολλῶν ἀξιωμάτων· ἡ ἄλγεβρα ἄρα θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ μορφωθῇ ἄνευ αὐτῶν καὶ ἡ ὅλη μαθηματικὴ θὰ εἶχε παράδοξόν τινα καὶ ἀνώμαλον ὄψιν, καὶ αἱ ἀποδείξεις τῶν διαφόρων αὐτῆς θεωρημάτων θὰ ἦσαν ἐπιπονώταται ἐκ τῆς πληθύος τῶν διακρίσεων ἢ μερικῶν περιπτώσεων, ἃς τινας ἐξ ἀνάγκης θὰ ἐθεωροῦμεν. Πρὸς τούτοις ὁ ζήτημά τι λύων, θεωρεῖ, ἀφοῦ τοῦτο ἀναχθῇ εἰς ἀριθμητικὸν ζήτημα, οὐχὶ τὸ περιεχόμενον τῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τὸ ὑπ' αὐτῶν παριστώ-

μενον, οὐδὲ τὸ εἶδος αὐτῶν, ἂν δηλ. εἶνε ἀκέραιοι ἢ κλάσματα, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ κτλ. οὐδὲ τὸ παράπαν τοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ μόνον μέλημα αὐτοῦ εἶνε αἱ πράξεις, αἵτινες ἐπ' αὐτῶν πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσι καὶ ὁ τρόπος, καθ' ὃν γίνονται, ἐν ἑνὶ λόγῳ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις μόνος ἐκ πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος δύναται νὰ λύσῃ τὸ ζήτημα. Ἐὰν δὲ αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ ζητήματος (δεδομένων ἢ ἀγνώστων) ἐκτελεστέαι πράξεις εἶνε πάντοτε αἱ αὐταί, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ μερικαὶ τιμαὶ αὐτῶν, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν πάντοτε ἐκτελῶνται τρόπον, ὅπερ διὰ τῆς εἰρημένης τηρήσεως τῶν θεμελιωδῶν νόμων συμβαίνει, τότε, παριστῶντες τοὺς ἀριθμοὺς διὰ γραμμάτων, οὐ μόνον λύομεν τὸ πρόβλημα ταχύτερον καὶ γενικώτερον, ἀλλὰ καὶ σαφεστέραν ἰδέαν τῆς φύσεως αὐτοῦ ἀποκτῶμεν. Ἀλλ' ἡ ἀρχὴ αὕτη τῆς διατηρήσεως τῶν θεμελιωδῶν νόμων ἔχει εὐρυτέραν καὶ ἀνωτέραν σπουδαιότητα καὶ ἐφαρμογήν· διότι καὶ ἐν τῷ ὁρισμῷ τῶν δυνάμεων ἐξ αὐτῆς ὡρμήθημεν εἰπόντες ὅτι ὁ νόμος $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$, ὁ διὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἐκθέτας ἰσχύων καὶ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις ὁρίζων, πρέπει νὰ διατηρηθῇ δι' οἱουσδήποτε ἐκθέτας. Καὶ ἐν γένει ἐν πάσῃ αὐξήσει, ἐν πάσῃ εἰσαγωγῇ νέων ἐννοιῶν, αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ὁρίζονται οὕτως, ὥστε οἱ γενικώτατοι, οἱ χρησιμώτατοι τῶν πρὶν ἰσχυόντων νόμων, καὶ δι' ἰσοτήτων τινῶν ἐκφραζόμενοι, νὰ διατηρῶνται καὶ μετὰ ταῦτα. Καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ, εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην ὀφείλεται ἡ γενικὴ καὶ συνάμα ἁπλῆ διαμόρφωσις καὶ ἀνάπτυξις τῆς μαθηματικῆς καὶ ἡ ἁρμονία τῶν μερῶν αὐτῆς πρὸς ἄλληλα.

Ἐπειδή, ἰσχυόντων τῶν εἰρημένων νόμων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, πᾶσα αὔξησις τοῦ εὑρεθέντος συστήματος τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε ἀδύνατος, σύστημα δηλονότι ἀριθμῶν περισσοτέρας τούτου ἔχον διαστάσεις ἢ διαφόρους μονάδας καὶ εἰς πάντας τοὺς νόμους τούτους ὑποκείμενον εἶνε ἀδύνατον, διὰ τοῦτο ἐζητήθη τίνες ἐκ τῶν νόμων τούτων πρέπει νὰ ληφθῶσιν ὡς γενικοί, ὥστε νὰ ὁρισθῇ ὑπ' αὐτῶν σύστημα ἀριθμῶν περισσοτέρας τῶν δύο ἔχον διαφόρους μονάδας καὶ δυνάμενον ἑπομένως νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸν χῶρον, ὅπως οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ὁ τοῦτο ζητήσας Ἄγγλος Hamilton παρέλειψε τὸν νόμον τῆς ἀναλλαγῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\alpha.\beta=\beta.\alpha$, ὅστις φαίνεται ὀλιγώτερον τῶν ἄλλων χρήσιμος ὤν, καὶ εὗρεν οὕτω σύστημα ἐξ ὀκτὼ μονάδων ἀνὰ δύο ἀντιθέτων ἀποτελούμενον καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ πάντες οἱ λοιποὶ θεμελιώδεις νόμοι ἰσχύουσι. Μετὰ τοῦτον ἄλλοι, ἄλλους λαβόντες θεμελιώδεις

νόμους, ἄλλα εὗρον ἀριθμῶν συστήματα· καὶ ἐν γένει ἕκαστον σύστημα ἀριθμῶν ὁρίζεται ἐκ τῶν γενικῶν νόμων, εἰς τοὺς ὁποίους οἱ ἀριθμοὶ αὐτοῦ πάντες ὑπόκεινται. Τὰ διάφορα ταῦτα συστήματα, ἔχουσι μὲν ἐφαρμογάς τινας καὶ θεωρίαι τινὲς τῆς μαθηματικῆς γίνονται εὐκολώτεραι δι' αὐτῶν, ἀλλ' ὅμως ὑπολείπονται πολὺ κατὰ τὴν ἁπλότητα καὶ χρησιμότητα τοῦ τῶν μιγάδων συστήματος, ὅπερ εἶνε φυσικώτερον ὡς φυσικὴ ἐπέκτασις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἰς οὓς ἄγει ἡμᾶς αὐτὴ ἡ φύσις.

Ὅμοιόν τι συμβαίνει καὶ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ. Ἐάν τις μὴ δεχθῇ τὸ περὶ παραλλήλων αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου, δέχηται δὲ πάσας τὰς λοιπὰς ἀρχάς, ἐφ' ὧν ἡ γεωμετρία στηρίζεται, διαπλάσσει ἄλλην γεωμετρίαν, διάφορον τῆς τοῦ Εὐκλείδου, ἥτις καὶ λογικῶς εἶνε δυνατὴ καὶ ὅλον τι ἁρμονικὸν ἀποτελεῖ, ὡς ἐκείνη, καὶ πραγματοῦται ἐν τῇ φύσει. Τὸ αὐτὸ δὲ προφανῶς συμβαίνει καὶ ἐν πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις, ὧν ἡ ὅλη διαμόρφωσις καὶ ἀνάπτυξις εἶνε ἀποκλειστικῶς ἔργον τοῦ νοῦ, δεχομένου ἀρχάς τινας καὶ ἐξ αὐτῶν ὁρμωμένου. Ἐπειδὴ τὰ μὲν ταῖς ἀρχαῖς συμφωνοῦντα, ἤτοι ἐξ αὐτῶν ἀπορρέοντα, λέγονται *ἀληθῆ*, τὰ δὲ ἀντιβαίνοντα *ψευδῆ*, εἶνε φανερὸν ὅτι, μεταβαλλομένων τῶν ἀρχῶν, μεταβάλλεται καὶ ἡ ὅλη ἐξ αὐτῶν ἐπιστήμη.

Τὸ ζήτημα, ἂν ὑπάρχωσιν ἀριθμοί τινες (ὡς λ. χ. οἱ ἀρνητικοὶ ἢ οἱ φανταστικοί) ἢ μή, δὲν δύναται νὰ ἐννοῇ τι ἄλλο ἢ τοῦτο: ἔχουσιν αἱ ἔννοιαι αὗται ὡρισμένην σχέσιν πρὸς τὰς λοιπὰς καὶ συμφωνοῦσι πρὸς αὐτὰς ἢ οὔ; ἡ εἰς τοῦτο ἀπάντησις εἶνε ἤδη πρόχειρος· διότι ἐκ τῆς πορείας, ἣν κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν διαφόρων ἀριθμῶν ἠκολουθήσαμεν, ἐγένετο καταφανὲς ὅτι πάντες οὗτοι, ὡς ἔννοιαι θεωρούμενοι, καὶ ὡρισμέναι ἐντελῶς εἶνε ἐκ τῆς πρὸς ἀλλήλας σχέσεως καὶ συμφωνοῦσιν ἐντελῶς ἀλλήλαις, οὐδεμιᾶς προκυπτούσης ἀντιφάσεως, καὶ τέλειόν τι καὶ ἁρμονικὸν ὅλον ἀποτελοῦσιν. Οὐδὲν ἄρα ἔχουσιν, ὡς ἔννοιαι, τὸ ἀνύπαρκτον ἢ ἀδύνατον. Ἀδύνατος ἢ ἀνύπαρκτος εἶνε ἔννοιά τις, ἐὰν μὴ συμφωνῇ πρὸς τὰς ὡς ἀληθεῖς παραδεδεγμένας, ὡς π. χ. ἡ ἔννοια ἰσοπλεύρου καὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ἔννοια κύκλου σύμμετρον ἔχοντος περιφέρειαν καὶ ἀκτῖνα, ἡ ἔννοια κανονικοῦ ἑπταέδρου, ἡ ἔννοια τοῦ $\frac{1}{0}$ κτλ.

Εἰς τὸ ζήτημα, ἂν ὑπάρχωσιν οἱ ἀριθμοὶ ἢ μή, δίδεται συνήθως ἡ ἑπομένη σημασία: ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐφαρμογάς; ἤτοι, εἶνε χρήσιμοι; εἰς τοῦτο ἀποκρινόμεθα ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τῶν μιγάδων συστήματος ἔχουσιν ἐφαρμογὰς (καὶ τοιαύτας ἐμάθομεν) καὶ τόσῳ περισ-

σοτέρας καὶ εἰς τὸν συνήθη βίον ἀπαντώσας, ὅσῳ ὀλιγώτερον διαφέρουσι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν πάντων ἁπλουστάτων· ἀλλ' ὅτι ἡ αἰτία τῆς ὑπάρξεως τῶν ἀριθμῶν δὲν εὑρίσκεται ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς αὐτῶν, αἵτινες ἀποτελοῦσί τι δευτερεῦον καὶ ἐπουσιῶδες, ἀλλ' ἐν τῷ ὁρισμῷ τῆς σχέσεως ἑκάστου αὐτῶν πρὸς τοὺς λοιποὺς καὶ ἐν τῇ πλήρει συμφωνίᾳ αὐτῶν, καθ' ἣν ἀποτελοῦσιν ἓν ἀδιάσπαστον ὅλον καὶ εἰς ὡρισμένους κοινοὺς νόμους ὑποκείμενον. Εἰς τοῦτο πείθεταί τις, ἐὰν ἐνθυμηθῇ, πρῶτον μὲν ὅτι εἰς πολλὰ ζητήματα καὶ αὐτοὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δὲν εἶνε ἡ προσήκουσα λύσις, ὃ ἐστι δὲν ἐφαρμόζονται, καὶ δεύτερον ὅτι αἱ ἐφαρμογαὶ δὲν δύνανται νὰ ὁρίσωσιν ἐντελῶς τὴν φύσιν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν πρὸς ἀλλήλους σχέσιν. Ἐκ τοῦ ὅτι π. χ. —5 σημαίνει πέντε δραχμὰς χρέους καὶ +5 πέντε δραχμὰς περιουσίας, ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (—5).(—5) ἰσοῦται τῷ +25· καὶ πᾶσαι αἱ ἐφαρμογαὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, αἱ τὴν ἀντίθεσιν αὐτῶν πρὸς τοὺς θετικοὺς ἐκφράζουσαι, μένουσιν αἱ αὐταὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν πολλαπλασιάζωμεν δύο ἀνομοίους ἢ δύο ἀρνητικοὺς ἀριθμούς· οὐδὲν ἐμποδίζει λ. χ. νὰ λαμβάνωμεν, ὅπερ καὶ συμμετρικώτερον,

$$(+1).(+1)=-1,\quad (-1).(-1)=+1,\quad (+1).(-1)=-1,$$
$$(-1).(+1)=+1$$

αἱ ἐφαρμογαί, ἃς εἴπομεν, θὰ ἔμενον αἱ αὐταί· ἀλλ' οἱ νόμοι, ἐφ' ὧν θεμελιοῦται ὁ λογισμός, δὲν ἐπιτρέπουσι τοῦτο.

Τὸ αὐτὸ δὲ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ καὶ ἀριθμοὺς δύναταί τις νὰ ἐπινοήσῃ πρὸς παράστασιν ποσῶν τριχῇ διαστατῶν, ὡς λ. χ. τῶν σημείων τοῦ διαστήματος· καὶ ἑπομένως ἐν τῷ χώρῳ ἐφαρμοζομένους· ἀλλ' ἡ ὕπαρξις αὐτῶν εἶνε πρὸς τοὺς θεμελιώδεις νόμους τοῦ λογισμοῦ ἀσυμβίβαστος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

215. Ὅταν θεωρῶμεν πλῆθος ποσῶν ὁμοειδῶν καὶ ἀνίσων, δυνάμεθα νὰ νοῶμεν ταῦτα πάντα ὡς μερικὰς τιμὰς ἢ καταστάσεις ἑνὸς ποσοῦ· καὶ σχηματίζομεν οὕτω τὴν ἔννοιαν τοῦ *μεταβλητοῦ ποσοῦ*, ὅπερ μεταβαλλόμενον διαδοχικῶς γίνεται ἴσον ἑκάστῳ τῶν θεωρουμένων.

Οὕτως ἐκ μερικῶν χρονικῶν διαστημάτων σχηματίζομεν τὴν καθόλου ἔννοιαν τοῦ χρόνου, ἐκ τῶν σωμάτων τὴν ἔννοιαν τῆς ἐκτάσεως καὶ τοῦ χώρου, καὶ καθεξῆς.

216. Ὁμοίως, ὅταν θεωρῶμεν πλῆθός τι ἀριθμῶν κοινόν τι ἐχόντων (ὡς ὅταν παριστῶσι τὰς διαδοχικὰς καταστάσεις ποσοῦ τινος μεταβλητοῦ), δυνάμεθα νὰ νοῶμεν αὐτοὺς πάντας ὡς *μερικὰς τιμὰς ἑνὸς ἀριθμοῦ*, ὅστις διαδοχικῶς μεταβαλλόμενος γίνεται ἴσος ἑκάστῳ τῶν θεωρουμένων ἀριθμῶν· καὶ σχηματίζομεν οὕτω τὴν ἔννοιαν τοῦ *μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ*.

Σημ. Τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ποσὰ περιλαμβάνουσι συνήθως εἰς τὸ κοινὸν ὄνομα *ποσότης*.

217. Ἐὰν τὸ μέτρον μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ, ἀπείρους λαμβάνοντος τιμάς, γίνηταί ποτε ἔλασσον τῆς μονάδος $\frac{1}{\mu}$, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ληφθῇ αὕτη, καὶ μένῃ καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις τιμαῖς ἔλασσον αὐτῆς, τότε λέγομεν ὅτι τοῦ μεταβλητοῦ τούτου ἀριθμοῦ *ὅριον* εἶνε τὸ 0 καὶ σημειοῦμεν τοῦτο ὡς ἕπεται

$$\text{ὅρ.}\alpha = 0.$$

Ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς ἐξαρτᾶται ἐξ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἄλλων μεταβλητῶν, ὧν ἕκαστος διανύει σειρὰν ἀπείρων τιμῶν προδιαγεγραμμένων. Ἑπόμεναι δὲ τιμαὶ αὐτοῦ λογίζονται πᾶσαι αἱ τιμαί, ἃς λαμβάνει οὗτος, ὅταν οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοί, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται, προχωρῶσιν ἕκαστος ἐν τῇ προδιαγεγραμμένῃ σειρᾷ τῶν τιμῶν αὐτοῦ.

218. Τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ α λέγεται ὅριον ὁ ἀριθμὸς A, ὅταν τῆς διαφορᾶς α—A ὅριον εἶνε τὸ 0.

Παράδειγμα. Ἐὰν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ν διατρέχῃ τὰς τιμὰς ν=1, 2, 3, 4 . . ., ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς $\frac{\nu}{\nu+1}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα 1· διότι ἡ διαφορὰ $1-\frac{\nu}{\nu+1}$ ἢ $\frac{1}{\nu+1}$ γίνεται καὶ μένει μικροτέρα πάσης δοθείσης μονάδος, ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν εἶνε.

Σημ. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ τὸ ὅριον ποσοῦ.

219. *Ἐὰν μεταβλητὸς θετικὸς ἀριθμός, ἀπείρους λαμβάνων τιμάς, αὐξάνηται ἀπαύστως, μένῃ δὲ πάντοτε ἐλάσσων ἀκεραίου τινὸς Α, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ὅριον.*

Μεταξὺ τῶν ἀκεραίων 0, 1, 2, 3, . . . Α ὑπερβαίνει μέν τινας ὁ μεταβλητός, ἀλλ' οὐχὶ πάντας· ὑποτεθείσθω ὅτι ὑπερβαίνει μὲν τὸν ρ ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὸν ἑπόμενον αὐτῷ ρ+1· ὡσαύτως μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\rho, \rho+\frac{1}{10}, \rho+\frac{2}{10}, \ldots \rho+\frac{10}{10}$ ἀνάγκη νὰ εὑρίσκηται εἷς, ὃν οὐδέποτε φθάνει ὁ ἀριθμός, ἐν ᾧ τὸν ἀμέσως προηγούμενον φθάνει καὶ ὑπερβαίνει· ἔστω $\rho+\frac{\rho_1}{10}$ ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμός· ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις ἐντελῶς ὡρισμένος

$$\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\ldots$$

ὅστις λέγω, ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ α· διότι προφανῶς ἡ διαφορὰ τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ οὕτω εὑρεθέντος γίνεται καὶ μένει ἐλάσσων πάσης δοθείσης μονάδος.

Καὶ ὅταν θετικὸς ἀριθμὸς μεταβλητὸς ἐλαττῶται ἀπαύστως, μένῃ δὲ πάντοτε μεῖζων μονάδος τινός, ἔχει ὅριον.

Ἐπὶ τῶν ὁρίων ἰσχύουσιν αἱ ἑπόμεναι προτάσεις, ὧν ἡ ἀπόδειξις εἶνε ἁπλουστάτη.

220. *Τὸ ἄθροισμα δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν* (α καὶ β), *ἐχόντων ὅρια* (τοὺς Α καὶ Β), *ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων.*

Ἐὰν δηλ. εἶνε $\text{ὅρ.}\alpha=A$ καὶ $\text{ὅρ.}\beta=B$

θὰ εἶνε καὶ $\text{ὅρ.}(\alpha+\beta)=A+B=(\text{ὅρ.}\alpha)+(\text{ὅρ.}\beta)$

Διότι ἡ διαφορὰ $\alpha+\beta-(A+B)$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο διαφορῶν $(\alpha-A)+(\beta-B)$, ὧν ἑκατέρα ἐξ ὑποθέσεως γίνεται καὶ μένει, ὅσον ἂν τις προστάξῃ, μικρά· ἐὰν ἄρα ἑκατέρα τῶν διαφορῶν τούτων γείνῃ μικρὰ τις προστάξῃ, μικρά· ἐὰν ἄρα ἑκατέρα τῶν διαφορῶν τούτων γείνῃ μι-

κροτέρα τῆς μονάδος $\frac{1}{2\mu}$, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ γείνῃ μικρότερον τῆς $\frac{1}{\mu}$· ἑπομένως τὸ ὅριον τοῦ $\alpha+\beta$ εἶνε $A+B$.

Ἡ πρότασις ἐκτείνεται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀλλ' εἰς πεπερασμένον πλῆθος.

221. *Τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων.*

Ἐὰν δηλ. εἶνε ὁρ. $\alpha=A$ καὶ ὁρ. $\beta=B$ εἶνε καὶ ὁρ. $(\alpha\cdot\beta)=A\cdot B$

Ἂς παρασταθῶσιν αἱ μεταβληταὶ διαφοραί, $\alpha-A$ καὶ $\beta-B$, διὰ τῶν ἀριθμῶν ε καὶ η, ἤτοι ἂς τεθῇ

$$\alpha-A=\varepsilon \quad \text{καὶ} \quad \beta-B=\eta$$

τότε εἶνε $\alpha=A+\varepsilon$ καὶ $\beta=B+\eta$

ὥστε $\alpha\cdot\beta=A\cdot B+A\cdot\eta+B\cdot\varepsilon+\eta\cdot\varepsilon$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι, ἵνα ἡ διαφορὰ

$$\alpha\beta-AB$$

γίνῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\mu}$, ἀρκεῖ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $A\eta$, $B\varepsilon$, ἤτοι νὰ γίνῃ μικρότερος τοῦ $\frac{1}{3\mu}$· τοῦτο δὲ θὰ γίνῃ, ὅταν ἕκαστον τῶν ε καὶ η γίνῃ μικρότερον τοῦ

$$\frac{1}{3K\mu}$$

τοῦ K ὄντος ἀκεραίου μεγαλητέρου τοῦ A καὶ B.
ὅθεν ἕπεται

$$\text{ὁρ.}(\alpha\cdot\beta)=A\cdot B=(\text{ὁρ.}\alpha)(\text{ὁρ.}\beta)$$

Καὶ ἡ πρότασις αὕτη ἐκτείνεται προφανῶς ἐπὶ τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων, ἀλλ' εἰς πεπερασμένον πλῆθος.

222. *Καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν μεταβλητῶν, ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον, ἐὰν τὸ ὅριον τοῦ διαιρέτου διαφέρῃ τοῦ 0, τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων.*

Ἔστω ὁρ.$\alpha=A$ καὶ ὁρ.$\beta=B$ καὶ $\alpha=A+\varepsilon$ $\beta=B+\eta$

τότε εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{A}{B}=\frac{A+\varepsilon}{B+\eta}-\frac{A}{B}=\frac{B\varepsilon-A\eta}{B(B+\eta)}$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $B(B+\eta)$ ἔχει ὅριον τὸ B^2, ὅπερ διαφέρει τοῦ 0, ἐὰν μία μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ B^2 εἶνε ἡ $\frac{1}{\sigma}$, ὁ παρονομαστὴς $B^2+B\eta$ θὰ εἶνε μεγαλήτερος τοῦ $\frac{1}{2\sigma}$, ὅταν γίνῃ $B\eta$ μικρότερον $\frac{1}{2\sigma}$, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{B\varepsilon-A\eta}{B(B+\eta)}$ θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ $2\sigma(B\varepsilon-A\eta)$ καὶ διὰ τοῦτο, ἵνα γίνῃ τὸ εἰρημένον κλάσμα μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$, ἀρκεῖ τὸ $2\sigma(B\varepsilon-A\eta)$ νὰ γίνῃ μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$· τοῦτο δὲ θὰ γίνῃ, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν $\sigma B\varepsilon$ καὶ $\sigma A\eta$ γίνῃ μικρότερος τοῦ $\frac{1}{4\mu}$· γίνεται δὲ τοῦτο, ὅταν ε καὶ η γίνωσιν ἀμφότερα μικρότερα τοῦ

$$\frac{1}{4\sigma\mu K}$$

K ὄντος ἀκεραίου μεγαλητέρου τῶν A καὶ B· ἐντεῦθεν συνάγεται

$$\text{ὅρ}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{A}{B}=\frac{\text{ὅρ.}\alpha}{\text{ὅρ.}\beta}.$$

223. Καὶ πάσης παραστάσεως ῥητῶς ὑπό τινων μεταβλητῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ . . . συντεθειμένης, ἐὰν οὗτοι ἔχωσιν ὅρια A, B, Γ . . ., εὑρίσκεται τὸ ὅριον, ἐὰν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσιν οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ ὑπὸ τῶν ὁρίων αὐτῶν· ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι πάντων τῶν παρονομαστῶν τὰ ὅρια διαφέρουσι τοῦ 0.

Ἐπειδὴ ἐν τοιαύτῃ παραστάσει, κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῆς, μόνον αἱ τέσσαρες πράξεις εὑρίσκονται σεσημειωμέναι ἐπὶ τῶν α, β, γ, δ . . ., ἡ παράστασις αὕτη τίθεται πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφὴν κλάσματος, οὗτινος ὅ τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶνε πολυώνυμα ἀκέραια τῶν α, β, γ . . ., ἤτοι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $K\alpha^{\mu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\pi}$ . . ., ὅπου K εἶνε ἀριθμός τις ὡρισμένος, μ, ν, π . . . ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί· τοῦ δὲ ὅρου τούτου τὸ ὅριον εἶνε τὸ $K.A^{\mu}.B^{\nu}.\Gamma^{\pi}$ . . .

Ὅριον τῆς παραστάσεως $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν διατρέχῃ τὰς τιμὰς 1, 2, 3, 4 . . .

224. Ἐπειδὴ εἶνε (153)

$$e^{\frac{1}{\nu}}=1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{1\,2}\cdot\frac{1}{\nu^2}+\ldots,\quad \text{ἔπεται}\quad 1+\frac{1}{\nu}<e^{\frac{1}{\nu}}.$$

ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν εἶνε

$$e^{\frac{1}{\nu+1}}=1+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(\nu+1)^2}+\ldots,\quad \text{ἢ καὶ}$$

$$e^{\frac{1}{\nu+1}}<1+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)^2}+\frac{1}{(\nu+1)^3}+\ldots,\quad \text{ὅ ἐστι τοῦ}\ 1+\frac{1}{\nu}$$

συνάγεται ὅτι $$e^{\frac{1}{\nu+1}}<1+\frac{1}{\nu}<e^{\frac{1}{\nu}}.$$

ἑπομένως εἶνε καὶ $$e^{\frac{\nu}{\nu+1}}<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e.$$

διαφέρει ἄρα ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ τοῦ e ὀλιγώτερον ἢ ὁ ἀριθμὸς $e^{\frac{\nu}{\nu+1}}$, ἤτοι

$$e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e-e^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

καὶ $$e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e^{\frac{\nu}{\nu+1}}\left(e^{\frac{1}{\nu+1}}-1\right)$$

καὶ ἐὰν ἀντὶ τῶν $e^{\frac{\nu}{\nu+1}}$ καὶ $e^{\frac{1}{\nu+1}}$ τεθῶσιν οἱ μείζονες ἀριθμοὶ e καὶ $1+\frac{1}{\nu}$, ἡ ἀνισότης ἐνισχύεται, ὥστε εἶνε

$$e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e.\frac{1}{\nu}<\frac{3}{\nu}.$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ν γίνεται μείζων παντὸς ἀριθμοῦ, συνάγομεν

$$\text{ὅρ}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=e.$$

225. Ὑπεθέσαμεν ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὅτι ὁ ν διατρέχει πάντας τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους· ἀλλ' ἡ παράστασις $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ ἔχει τὸ αὐτὸ ὅριον καὶ ὅταν ὁ ν διατρέχῃ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀκεραίους· διότι, ἐὰν τεθῇ $\nu=-\rho$, θὰ διατρέχῃ ὁ ρ τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους καὶ θὰ εἶνε

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^{-\rho}=\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)^{\rho}=\left(1+\frac{1}{\rho-1}\right)^{\rho}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\rho-1}\right)^{\rho-1}\left(1+\frac{1}{\rho-1}\right)$$

καὶ $$\text{ὅρ}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\text{ὅρ}\left(1+\frac{1}{\rho-1}\right)^{\rho-1}=e.$$

Παρατήρησις. Τῶν ὁρίων γίνεται συχνὴ χρῆσις ἐν τῇ γεωμετρίᾳ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς μεταξὺ δύο μεγεθῶν ὑπαρχούσης σχέσεως, θεωροῦνται ταῦτα ὡς ὅρια ἄλλων μεγεθῶν ἁπλουστέρων, ὧν αἱ σχέσεις ἤδη εἶνε γνωσταί· οὕτως εὑρίσκεται ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κύκλων καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐκ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, θεωρουμένου τοῦ κύκλου ὡς ὁρίου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· ὁμοίως εὑρίσκονται οἱ ὄγκοι καὶ αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν κυλίνδρων καὶ τῶν κώνων, θεωρουμένων ὡς ὁρίων πρισμάτων καὶ πυραμίδων· ὁμοίως ἐκφράζεται ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας διὰ τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς, ἐὰν ἡ σφαῖρα θεωρηθῇ ὡς ὅριον πολυεδρικοῦ σώματος ἐγγεγραμμένου (εἰς τὴν σφαῖραν), ὅταν πᾶσαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ τείνωσι πρὸς τὸ 0 κτλ. ἐπίσης ἀποδεικνύεται ἡ κατ' ὄγκον ἰσότης δύο πυραμίδων ἰσοϋψῶν καὶ ἰσοδυνάμους βάσεις ἐχουσῶν, ἐὰν θεωρηθῶσιν ὡς ὅρια τοῦ ἀθροίσματος πρισμάτων ἰσοδυνάμων κ.τ.λ. καὶ ἐν γένει πᾶν μὴ εὐθύγραμμον μέγεθος (καμπύλη γραμμή, ἐπίπεδον χωρίον ὑπὸ καμπύλης περατούμενον, καμπύλη ἐπιφάνεια, ὄγκος ὑπὸ καμπύλης ἐπιφανείας περατούμενος) θεωρεῖται ὡς ὅριον εὐθυγράμμων, ὅταν πρόκειται νὰ μετρηθῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

226. Ἀπεδείξαμεν ἤδη (ἐδ. 151) ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ e, σύμμετρον ἐκθέτην x ἔχουσα, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \ldots + \frac{x^\nu}{1.2.3..\nu} + \ldots \quad (1)$$

ἀλλὰ καὶ ὅταν ὁ x εἶνε ἀσύμμετρος ἀριθμός, πάλιν τὸ πλῆθος

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^\nu}{1.2.3..\nu} + \ldots$$

ἀποτελεῖ ἀριθμὸν (ἐδ. 146) καὶ πάλιν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ ἄλλο ὅμοιον πλῆθος

$$1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{y^\nu}{1.2.3..\nu} + \ldots$$

ἰσοῦται (κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. 147 εἰρημένα) πρὸς τὸ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $x+y$ σχηματιζόμενον ὅμοιον πλῆθος

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots$$

Διὰ ταῦτα *ὁρίζομεν τὰς δυνάμεις τοῦ* e ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου (1), εἴτε σύμμετρον ἐκθέτην ἔχουσιν, εἴτε ἀσύμμετρον.

227. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων διατηρεῖται κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον διὰ τὰς δυνάμεις τοῦ e· διότι εἶνε

$$\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right) = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots$$

τουτ' ἔστιν $$e^x . e^y = e^{x+y}$$

228. Αὐξανομένου τοῦ ἐκθέτου x, αὐξάνει καὶ ἡ δύναμις e^x καὶ ἐλαττουμένου ἐλαττοῦται.

Διότι εἶνε

$$e^{x+\delta} = e^x . e^\delta = e^x\left(1 + \frac{\delta}{1} + \frac{\delta^2}{1.2} + \ldots\right)$$

ἑπομένως, ἐὰν $\delta>0$, θὰ εἶνε

$$e^{x+\delta}>e^{x}.$$

229. *Δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ε, δύναται νὰ εὑρεθῇ μεταβολὴ τοῦ ἐκθέτου* x *τόσον μικρά, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα μεταβολὴ τῆς δυνάμεως* e^{x} *νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε.*

Ἂς αὐξηθῇ ὁ ἐκθέτης x κατὰ δ· τότε ἡ δύναμις e^{x} γίνεται $e^{x+\delta}$ καὶ ἡ αὔξησις ἄρα αὐτῆς εἶνε

$$e^{x+\delta}-e^{x}=e^{x}(e^{\delta}-1)=e^{x}\left(\frac{\delta}{1}+\frac{\delta^2}{1.2}+\frac{\delta^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$

ἄρα $$e^{x+\delta}-e^{x}<e^{x}(\delta+\delta^2+\delta^3+\ldots)$$

ἤτοι $$e^{x+\delta}-e^{x}<e^{x}\frac{\delta}{1-\delta}$$

θὰ γίνῃ λοιπὸν ἡ αὔξησις τῆς δυνάμεως e^{x} μικροτέρα τοῦ ε, ἐὰν γίνῃ

$$e^{x}\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon, \qquad \text{ἤτοι ἂν ληφθῇ } \delta<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+e^{x}}$$

Ἂς ἐλαττωθῇ νῦν ὁ ἐκθέτης x κατὰ δ· τότε ἡ δύναμις e^{x} γίνεται $e^{x-\delta}$ καὶ ἐπομένως ἐλαττοῦται κατὰ $e^{x}-e^{x-\delta}$, ἤτοι κατὰ

$$e^{x-\delta}(e^{\delta}-1) \quad \text{ἢ} \quad e^{x-\delta}\left(\frac{\delta}{1}+\frac{\delta^2}{1.2}+\ldots\right)$$

ἡ δὲ ἐλάττωσις αὕτη εἶνε μικροτέρα τοῦ

$$e^{x}\frac{\delta}{1-\delta}.$$ ἐὰν λοιπὸν γίνῃ $e^{x}\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon,$

θὰ εἶνε καὶ ἡ ἐλάττωσις τῆς δυνάμεως μικροτέρα τοῦ ε· ἀλλὰ τοῦτο γίνεται, ἐὰν ληφθῇ

$$\delta<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+e^{x}}.$$

230. Ἡ ἐξίσωσις $e^{x}=\alpha$, ἔνθα α εἶνε τυχὼν θετικὸς ἀριθμός, ἔχει πάντοτε μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν, θετικὴν μέν, ἂν $\alpha>1$, ἀρνητικὴν δέ, ἂν $\alpha<1$ (καὶ 0 ἂν $\alpha=1$).

Ἔστω κατὰ πρῶτον $\alpha>1$ καὶ A ἀκέραιος ὑπερβαίνων τὸν α· τότε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$e^{0}, \quad e^{1}, \quad e^{2}, \ldots \quad e^{A}$$

(ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἶνε μικρότερος τοῦ α ὁ δὲ τελευταῖος μεγαλήτερος αὐτοῦ), ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, ὅτε εὑρέθη τὸ ζητούμενον, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς· ἔστω μεταξὺ τῶν

$$e^{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad e^{\lambda+1}.$$

τότε πάλιν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$e^{\lambda}, \quad e^{\lambda+\frac{1}{10}}, \quad e^{\lambda+\frac{2}{10}}, \ \ldots \ e^{\lambda+\frac{10}{10}}$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, ὅτε εὑρέθη τὸ ζητούμενον, ἢ περιλαμβάνεται ὁ α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς· ἔστω μεταξὺ τῶν

$$e^{\lambda+\frac{\lambda_1}{10}} \quad \text{καὶ} \quad e^{\lambda+\frac{\lambda_1}{10}+\frac{1}{10}}$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, βλέπομεν, ὅτι, ἢ εὑρίσκεται ἐκθέτης τις ἐκ πεπερασμένου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενος, εἰς ὃν ὑψούμενος ὁ e δίδει τὸν α, ἢ ὁρίζονται αἱ δεκαδικαὶ μονάδες ἀριθμοῦ τινος χ

$$\chi=\lambda+\frac{\lambda_1}{10}+\frac{\lambda_2}{100}+ \ \ldots$$

λέγω δέ, ὅτι οὗτος λύει τὴν ἐξίσωσιν $e^x=\alpha$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον καὶ ἔστω κατὰ πρῶτον $e^{\chi}>\alpha$· ἐὰν τότε λάβωμεν ἀριθμόν τινα ε μικρότερον τῆς διαφορᾶς $e^{\chi}-\alpha$, δυνάμεθα κατὰ τὰ προαποδειχθέντα νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην χ κατὰ δεκαδικήν τινα μονάδα τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἐλάττωσις τῆς δυνάμεως νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε, ἤτοι καὶ πάλιν νὰ εἶνε

$$e^{\chi-\frac{1}{10^{\rho}}}>\alpha.$$

ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· διότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ χ εἰξεύρομεν ὅτι εἶνε $e^{X_\rho}<\alpha$, ἔνθα $X_\rho=\lambda+\frac{\lambda_1}{10}+ \ \ldots \ +\frac{\lambda_\rho}{10^{\rho}}$.

καὶ πρὸς τούτοις εἶνε

$$\chi<X_\rho+\frac{1}{10^{\rho}} \quad \text{ὅθεν καὶ} \quad \chi-\frac{1}{10^{\rho}}<X_\rho$$

Ἔστω δεύτερον $e^{\chi}<\alpha$· ἐὰν τότε λάβωμεν ἀριθμόν τινα ε μικρότερον τῆς διαφορᾶς $\alpha-e^{\chi}$, δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὸν ἐκθέτην χ κατὰ δεκα-

δικήν τινα μονάδα $\frac{1}{10^\rho}$ τόσον μικράν, ὥστε ἡ αὔξησις τῆς δυνάμεως νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε, ἑπομένως καὶ πάλιν νὰ εἶνε

$$e^{\chi+\frac{1}{10^\rho}}<\alpha\cdot$$

ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον, διότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ χ εἶνε γνωστόν, ὅτι

$$e^{X_\rho+\frac{1}{10^\rho}}>\alpha \quad \text{τὸ δὲ } X_\rho<\chi$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι θὰ εἶνε $e^\chi=\alpha$.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμὸς α εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος, ὁ ἀντίστροφος αὐτοῦ $\frac{1}{\alpha}$ θὰ εἶνε μεγαλήτερος τῆς μονάδος καὶ θὰ ὑπάρχῃ ἑπομένως ἐκθέτης τις y τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶνε

$$e^y=\frac{1}{\alpha}.$$ ἀλλὰ τότε θὰ εἶνε $e^{-y}=\alpha$,

ἤτοι ὑπάρχει τότε ἀρνητικὸς ἐκθέτης—y λύων τὴν ἐξίσωσιν $e^x=\alpha$.

Ὅτι δὲ ἡ ἐξίσωσις $e^x=\alpha$ $(\alpha>0)$ μίαν καὶ μόνον ἔχει λύσιν, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι, αὐξανομένου τοῦ ἐκθέτου, καὶ ἡ δύναμις αὐξάνεται.

231. Ὁ ἐκθέτης x, εἰς ὃν ὑψούμενος ὁ e δίδει τὸν θετικὸν ἀριθμὸν α, λέγεται *λογάριθμος τοῦ α κατὰ τὴν βάσιν* e, παρίσταται δὲ ὡς ἑξῆς $l\alpha$, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $e^x=\alpha$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $x=l\alpha$.

232. Δυνάμεθα νῦν νὰ ὁρίσωμεν τὰς δυνάμεις παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ α τὰς ἐχούσας ἀσυμμέτρους ἐκθέτας· καὶ ὄντως εἶνε

$$e^{l\alpha}=\alpha$$

ὅθεν ἕπεται διὰ πάντα σύμμετρον ἀριθμὸν x

$$\alpha^{x\,l\alpha}=\alpha^x$$

ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ τὸ δεύτερον μέλος α^x λαμβάνεται πάντοτε θετικῶς, διότι καὶ τὸ πρῶτον μόνον θετικὰς τιμὰς λαμβάνει.

Ἐκ τούτου ὁρμώμενοι ὁρίζομεν πᾶσαν δύναμιν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α, οἱονδήποτε ἐκθέτην καὶ ἂν ἔχῃ, διὰ τῆς ἰσότητος

$$\alpha^x=e^{x\,l\alpha}=1+\frac{x\,l\alpha}{1}+\frac{(x\,l\alpha)^2}{1.2}+\ \ldots$$

233. Ἡ ἐξίσωσις $a^x = b$, ἐὰν b εἶνε θετικὸς ἀριθμός, ἔχει πάντοτε μίαν καὶ μίαν μόνον λύσιν·

διότι εἶνε $a^x = e^{x\,la}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $e^{x\,la} = b$· ἐντεῦθεν συνάγεται

$$x\,la = lb \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad x = \frac{lb}{la}.$$

Ὁ ἐκθέτης x, εἰς ὃν ὁ a ὑψούμενος παράγει τὸν b, λέγεται *λογάριθμος τοῦ* b *κατὰ τὴν βάσιν* a· ἄρα εἶνε

$$\log_a b = \frac{lb}{la}.$$

Αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ἀποδεικνύονται νῦν ἁπλούστατα (ἴδε Στοιχ. Ἄλγεβραν)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX.

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ὁρισμοί

234. Ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ χ λέγεται πᾶν πολυώνυμον, οὗ ἕκαστος ὅρος εἶνε τῆς μορφῆς

$$A\cdot\chi^{\mu}$$

ὅπου A εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος, μὴ ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ χ, καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Μέγιστος ὅρος ἢ *πρῶτος* ὅρος τοῦ πολυωνύμου λέγεται ὁ τὸν μέγιστον ἐκθέτην τοῦ χ ἔχων· *ἐλάχιστος* δὲ ἢ *τελευταῖος* ὁ τὸν ἐλάχιστον.

Ὁ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ χ ἐν τῷ πολυωνύμῳ λέγεται *βαθμὸς* τοῦ πολυωνύμου.

Ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου πολυωνύμου εὑρίσκεται διὰ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἐπὶ τοῦ χ, ὅταν δοθῇ ἢ ὁρισθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος· ἐξαρτᾶται ἄρα τὸ πολυώνυμον ἐκ τοῦ χ καὶ συμμεταβάλλεται μετὰ τούτου· διὰ τὴν αἰτίαν ταύτην λέγομεν τὸ πολυώνυμον καὶ *ἀκεραίαν συνάρτησιν* τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ χ.

Σημ. Καὶ ἐν γένει *συνάρτησιν* τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ χ λέγομεν πάντα ἀριθμὸν μεταβλητόν, οὗ ἡ τιμὴ ὁρίζεται διὰ τῆς τιμῆς τοῦ χ. Ἐὰν πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως, ὅταν δοθῇ ὁ χ, δὲν ἐκτελῶνται ἄλλαι πράξεις ἐπὶ τοῦ χ ἢ αἱ τέσσαρες πράξεις, ἡ συνάρτησις λέγεται *ῥητὴ συνάρτησις* τοῦ χ· τοιαύτη συνάρτησις εἶνε τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων συναρτήσεων. — Αἱ συναρτήσεις τοῦ χ παρίστανται συμβολικῶς διὰ τῶν σημείων $\sigma(\chi)$, $\varphi(\chi)$, $\Phi(\chi)$ κτλ.

235. Πᾶσα τιμὴ τοῦ χ, δι' ἣν τὸ πολυώνυμον γίνεται 0, λέγεται *ῥίζα* τοῦ πολυωνύμου.

Κατὰ ταῦτα τοῦ μὲν πολυωνύμου $\chi^3+4\chi^2+\chi-6$ ῥίζαι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ $1, -2, -3$· τοῦ δὲ πολυωνύμου χ^4-1 οἱ ἀριθμοὶ $1, -1, i, -i$.

Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων.

236. Ἔστω $\sigma(\chi)$ πολυώνυμόν τι τοῦ χ, ἤτοι

$$(1)\quad \sigma(\chi)=A_{\mu}\chi^{\mu}+A_{\mu-1}\chi^{\mu-1}+A_{\mu-2}\chi^{\mu-2}+\ldots+A_1\chi_1+A_0.$$

ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν μεταβλητὸν ἀριθμὸν χ κατὰ ἀριθμὸν οἱονδήποτε ε καὶ

διατάξωμεν τὴν προκύπτουσαν αὔξησιν τοῦ πολυωνύμου, ἤτοι τὴν διαφορὰν $\sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)$, κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ ε, θὰ ἔχωμεν

$$(2) \qquad \sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)=$$

$$=\varepsilon\sigma'(\chi)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\chi)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\sigma'''(\chi)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{1.2.3\ldots\mu}\sigma^{(\mu)}(\chi).$$

Οἱ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων τοῦ ε ἐν τῷ ἀναπτύγματι τούτῳ εἶνε ἐπίσης ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ χ καὶ λέγονται *παράγωγα* (ἐνν. πολυώνυμα) ἢ *παράγωγοι* (ἐνν. συναρτήσεις) τοῦ $\sigma(\chi)$. Καὶ ὁ μὲν συντελεστὴς τῆς πρώτης δυνάμεως λέγεται *πρῶτον* παράγωγον ἢ ἁπλῶς *παράγωγον*, ὁ τοῦ $\frac{\varepsilon^2}{1.2}$ *δεύτερον* ἢ *δευτέρας τάξεως* παράγωγον· καὶ οὕτω καθεξῆς.

237. Ἐπειδὴ πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου (1) προκύπτουσιν ἐκ τοῦ γενικοῦ ὅρου $A_\nu\chi^\nu$, ἐὰν ὁ ἀκέραιος ν διατρέξῃ τὰς τιμὰς $\nu=0, 1, 2, 3, \ldots\mu$, καὶ τὸ πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ πολυώνυμον καὶ ὡς ἕπεται

$$\sigma(\chi)=\Sigma A_\nu\chi^\nu, \qquad \nu=0, 1, 2, 3, \ldots\mu$$

τοῦ σημείου Σ δεικνύοντος ἄθροισιν τῶν ὅρων, οἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς μετ' αὐτὸ γραφομένης παραστάσεως, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν διατρέξῃ τὰς σημειουμένας τιμάς. Ἀλλ' ὅταν ὁ χ αὐξηθῇ κατὰ ε, ὁ γενικὸς ὅρος αὐξάνεται κατὰ

$$A_\nu(\chi+\varepsilon)^\nu-A_\nu\chi^\nu, \qquad \text{ἤτοι κατὰ}$$

$$A_\nu\Big[\nu\varepsilon\chi^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\varepsilon^2\chi^{\nu-2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\varepsilon^3\chi^{\nu-3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}\varepsilon^\nu\Big]$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν αὐξήσεων πάντων τῶν ὅρων ἀποτελεῖ τὴν αὔξησιν τοῦ πολυωνύμου, ἕπεται ὅτι συντελεστὴς τοῦ ε ἐν τῇ αὐξήσει τοῦ $\sigma(\chi)$ εἶνε τὸ πολυώνυμον

$$\Sigma\nu A_\nu\chi^{\nu-1}, \qquad \nu=0, 1, 2, 3\ldots\mu.$$

ὁμοίως τοῦ $\frac{\varepsilon^2}{1.2}$, εἶνε τὸ $\Sigma\nu(\nu-1)A_\nu\chi^{\nu-2}$

καὶ γενικῶς τοῦ $\frac{\varepsilon^\rho}{1.2.3\ldots\rho}$ συντελεστὴς εἶνε τὸ πολυώνυμον

$$\Sigma\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\rho+1)A_\nu\chi^{\nu-\rho}.$$

238. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ πρῶτον παράγωγον $\sigma'(\chi)$ γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου ἕκαστος ὅρος ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ χ ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ καὶ ἐλαττωθῇ ἔπειτα ὁ ἐκθέτης οὗτος κατὰ μονάδα.

Τὸ δεύτερον παράγωγον $\sigma''(\chi)$ γίνεται ἐκ τοῦ πρώτου $\sigma'(\chi)$, καθ' ὃν τρόπον καὶ τὸ πρῶτον ἐκ τοῦ δοθέντος, ἤτοι εἶνε τὸ παράγωγον τοῦ $\sigma'(\chi)$. Καὶ γενικῶς ἕκαστον τῶν πολυωνύμων

$$\sigma(\chi),\quad \sigma'(\chi),\quad \sigma''(\chi),\quad \ldots\quad \sigma^{(\mu)}(\chi)$$

εἶνε τὸ παράγωγον τοῦ προηγουμένου αὐτῷ.

Τὸ παράγωγον τοῦ χ^μ εἶνε κατὰ τὰ προηγούμενα $\mu\chi^{\mu-1}$, τὸ δὲ παράγωγον τοῦ $(\chi-\alpha)^\mu$ εἶνε $\mu(\chi-\alpha)^{\mu-1}$. διότι ἡ αὔξησις τῆς δυνάμεως $(\chi-\alpha)^\mu$, ὅταν ἡ χ αὐξηθῇ κατὰ ε, εἶνε

$$(\chi-\alpha+\varepsilon)^\mu-(\chi-\alpha)^\mu$$

ἤτοι $$\varepsilon\mu(\chi-\alpha)^{\mu-1}+\ldots$$

ὁ συντελεστὴς ἄρα τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ε ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς αὐξήσεως εἶνε $\mu(\chi-\alpha)^{\mu-1}$,

οὗτος δὲ ὀνομάζεται παράγωγος τῆς δυνάμεως $(\chi-\alpha)^\mu$.

239. Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) ἔπεται

$$\frac{\sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)}{\varepsilon}=\sigma'(\chi)+\frac{\varepsilon}{1.2}\sigma''(\chi)+\ldots+\frac{\varepsilon^{\mu-1}}{1.2.3\ldots\mu}\sigma^\mu(\chi)$$

καὶ ἐὰν ἡ αὔξησις ε τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἔχομεν

$$\text{ὅρ.}\frac{\sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)}{\varepsilon}=\sigma'(\chi) \qquad (3)$$

ἤτοι, *ἡ παράγωγος εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τοῦ πολυωνύμου πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ χ, ἐὰν ἡ αὔξησις τοῦ χ τείνῃ πρὸς τὸ 0.*

240. Ἐὰν πολυώνυμόν τι $\Phi(\chi)$ εἶνε ἄθροισμα δύο ἄλλων, καὶ ἡ παράγωγος αὐτοῦ εἶνε ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν δύο ἄλλων· διότι ἐὰν εἶνε

$$\Phi(\chi)=\sigma(\chi)+\varphi(\chi)$$

καὶ αὐξηθῇ τὸ χ κατὰ ε, εἶνε

$$\Phi(\chi+\varepsilon)=\sigma(\chi+\varepsilon)+\varphi(\chi+\varepsilon)$$

ὅθεν ἔπεται $\Phi(\chi+\varepsilon)-\Phi(\chi)=\sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)+\varphi(\chi+\varepsilon)-\varphi(\chi)=$

$$=\varepsilon\sigma'(\chi)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\chi)+\ldots+\varepsilon\varphi'(\chi)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(\chi)+\ldots$$

ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ ε ἐν τῇ αὐξήσει

$$\Phi(\chi+\varepsilon)-\Phi(\chi), \quad \text{εἶνε} \quad \sigma'(\chi)+\varphi'(\chi).$$

Ἀλλ' ὁ συντελεστὴς οὗτος ὠνομάσθη παράγωγος τοῦ $\Phi(\chi)$· εἶνε ἄρα

$$\Phi'(\chi)=\varphi'(\chi)+\sigma'(\chi).$$

Ἡ πρότασις ἐκτείνεται προφανῶς καὶ ἐπὶ ὁσωνδήποτε ὅρων εἰς πλῆθος πεπερασμένον.

241. Ἐὰν πολυώνυμόν τι $F(\chi)$ εἶνε γινόμενον δύο ἄλλων $\sigma\chi).\varphi(\chi)$, τὸ παράγωγον αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ παράγωγον τοῦ δευτέρου σὺν τῷ δευτέρῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ παράγωγον τοῦ πρώτου.

Διότι, ἐὰν εἶνε $F(\chi)=\varphi(\chi).\sigma(\chi)$ καὶ αὐξηθῇ ὁ χ κατὰ ε, ἕπεται $F(\chi+\varepsilon)=\varphi(\chi+\varepsilon)\sigma(\chi+\varepsilon)$,

ὅθεν $F(\chi+\varepsilon)-F(\chi)=\varphi\chi+\varepsilon).\sigma(\chi+\varepsilon)-\varphi(\chi).\sigma(\chi)$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\varphi(\chi+\varepsilon=\varphi(\chi)+\varepsilon\varphi'(\chi)+\ldots$

$\sigma(\chi+\varepsilon)=\sigma(\chi)+\varepsilon\sigma'(\chi)+\ldots$

βλέπομεν, ὅτι ἐν τῇ αὐξήσει τοῦ $F(\chi)$ ὁ συντελεστὴς τοῦ ε εἶνε

$$\sigma'(\chi).\varphi(\chi)+\sigma(\chi)\varphi'(\chi)\cdot$$

ἀλλ' ὁ συντελεστὴς οὗτος εἶνε ἡ παράγωγος τοῦ $F(\chi)$· ὅθεν

$$F'(\chi)=\varphi(\chi)\sigma'(\chi)+\sigma(\chi)\varphi'(\chi).$$

Ἐὰν τὸ γινόμενον ἔχῃ ν παράγοντας, τὸ παράγωγον αὐτοῦ εἶνε ἄθροισμα τῶν ν γινομένων, ἅτινα λαμβάνομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ παράγωγον ἑκάστου ἐπὶ πάντας τοὺς λοιπούς.

Διότι π. χ. τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων

$$\varphi(\chi).\sigma'\chi).f(\chi)$$

δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $\varphi(\chi)$ καὶ $\sigma(\chi).f(\chi)$. καὶ διὰ τοῦτο ἡ παράγωγος αὐτοῦ εἶνε

$$(\iota) \qquad \varphi'(\chi)\sigma(\chi)f(\chi)+\varphi(\chi)\big[\sigma(\chi)f(\chi)\big]'$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ παράγωγος τοῦ

$\sigma(\chi).f(\chi)$ εἶνε $\sigma'(\chi)f(\chi)+\sigma(\chi f'(\chi)$,

ἡ παράστασις (ι) γίνεται

$$\varphi'(\chi)\sigma(\chi)f(\chi)+\varphi(\chi\sigma'(\chi)f(\chi)+\varphi(\chi)\sigma(\chi).f'(\chi).$$

Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ἐπὶ περισσοτέρων παραγόντων.

242. *Δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ δ, δύναται νὰ εὑ-*

ρεθῇ μεταβολὴ τοῦ χ τόσον μικρά, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς προξενουμένη μεταβολὴ τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ νὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ δ.

Ἔστω μ ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου.

ἤτοι $\sigma(\chi)=A_\mu\chi^\mu+A_{\mu-1}\chi^{\mu-1}+\ldots+A_1\chi+A_0$

ἐὰν ὁ χ μεταβληθῇ κατὰ ε, ἤτοι γίνῃ $\chi+\varepsilon$, θὰ εἶνε

$$\sigma(\chi+\varepsilon)=A_\mu(\chi+\varepsilon)^\mu+A_{\mu-1}(\chi+\varepsilon)^{\mu-1}+\ldots+A_1(\chi+\varepsilon)+A_0$$

ὅθεν $\sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)=\left[A_\mu(\chi+\varepsilon)^\mu-A_\mu\chi^\mu\right]+$

$$+\left[A_{\mu-1}(\chi+\varepsilon)^{\mu-1}-A_{\mu-1}\chi^{\mu-1}\right]+\ldots+A_1(\chi+\varepsilon)-A_1\chi$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ πολυωνύμου εἶνε ἄθροισμα τῶν μεταβολῶν τῶν μ ὅρων αὐτοῦ (ὁ τελευταῖος A_0 δὲν μεταβάλλεται). Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων, συνάγεται, ὅτι, ἵνα τὸ μέτρον τῆς μεταβολῆς $\sigma(\chi+\varepsilon)-\sigma(\chi)$ γίνῃ μικρότερον τοῦ δ, ἀρκεῖ τὸ μέτρον τῆς μεταβολῆς ἑκάστου ὅρου νὰ γίνῃ μικρότερον τοῦ $\frac{\delta}{\mu}$.

ἀλλ' ἡ μεταβολὴ τοῦ τυχόντος ὅρου $A_\nu\chi^\nu$, ἤτοι ἡ διαφορὰ $A_\nu\left[(\chi+\varepsilon)^\nu-\chi^\nu\right]$ ἔχει μέτρον $|A_\nu|\cdot|(\chi+\varepsilon)^\nu-\chi^\nu|$.

καὶ ἵνα τὸ μέτρον τοῦτο γίνῃ μικρότερον τοῦ $\frac{\delta}{\mu}$,

ἀρκεῖ νὰ γίνῃ $|(\chi+\varepsilon)^\nu-\chi^\nu|<\frac{\delta}{\mu.N}$,

ἔνθα N δηλοῖ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν μέτρων $|A_1|, |A_2|\ldots|A_\mu|$

ἀλλὰ τοῦτο γίνεται (ἐδ.137), ἐὰν ληφθῇ $\varepsilon<\frac{\delta}{\mu^2N.A^{\mu-1}}$

ἔνθα A δηλοῖ ἀκέραιον ὑπερβαίνοντα τὸ μέτρον τοῦ χ.

Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ὑποθέτουσι τοὺς συντελεστὰς τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ πάντας πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸν μεταβλητὸν ἀριθμὸν χ ἐν τῷ αὐτῷ συστήματι.

243. Ἐάν τις τιμὴ τοῦ χ, ἔστω $\chi=\alpha$, δίδῃ, εἰσαγομένη εἰς τὴν παράγωγον, ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν, ἡ συνάρτησις, ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης ἀρχομένη, αὐξάνεται αὐξανομένου τοῦ χ μέχρι τινὸς καὶ ἐλαττοῦται ἐλαττουμένου· τοὐναντίον δέ, ἐὰν ἡ παράγωγος διὰ τὴν θεωρουμένην τιμὴν τοῦ χ γίνηται ἀρνητική.

Ἔστω πρότερον $\sigma'(\alpha)>0$ καὶ μονὰς τις μικροτέρα αὐτοῦ ἡ $\frac{1}{\mu}$.

ἡ διαφορὰ δ τοῦ $\frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)}{\varepsilon}$ ἀπὸ τοῦ ὁρίου αὐτοῦ $\sigma'(\alpha)$ δύναται, ἐὰν ε ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν, νὰ γίνῃ καὶ μείνῃ μικροτέρα τῆς δοθείσης μονάδος· τότε ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\varepsilon\sigma'(\alpha)+\varepsilon.\delta$$

βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ ε, ἐξ οὗ ἕπεται ἡ πρότασις· ἡ ἀπόδειξις εἶνε ὁμοία καὶ ὅταν $\sigma'(\alpha)$ εἶνε ἀρνητικόν.

244. Ἐὰν τὸ μέτρον τοῦ χ ὑπερβαίνῃ ἀριθμόν τινα, τὸ πολυώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ· ἐὰν δὲ τὸ μέτρον τοῦ χ εἶνε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος, τὸ πολυώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ὅρου.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$\sigma(\chi)=A_\mu\chi^\mu+A_{\mu-1}\chi^{\mu-1}+\ \ldots\ +A_1\chi+A_0.$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὸ ὡς ἀκολούθως

$$\sigma(\chi)=A_\mu\chi^\mu\cdot\left(1+\frac{A_{\mu-1}}{A_\mu}\cdot\frac{1}{\chi}+\frac{A_{\mu-2}}{A_\mu}\cdot\frac{1}{\chi^2}+\ldots+\frac{A_0}{A_\mu}\frac{1}{\chi^\mu}\right).$$

Ἔστω M ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μείζων πάντων τῶν συντελεστῶν

$$\frac{A_{\mu-1}}{A_\mu},\quad \frac{A_{\mu-2}}{A_\mu},\ \ldots\ \frac{A_0}{A_\mu}$$

θετικῶς λαμβανομένων καὶ ρ τὸ μέτρον τοῦ χ· οἱ εἰς τὴν μονάδα ἐν τῇ παρενθέσει προστιθέμενοι ὅροι εἶνε, καὶ θετικῶς ἐὰν πάντες ληφθῶσι, μικρότεροι τοῦ

$$M\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+\ldots\right)$$ [illegible] $(\rho>1)$

ἤτοι τοῦ $M\,\frac{1}{\rho-1}$· τοῦτο δὲ γίνεται μικρότερον τῆς μονάδος, ἐὰν εἶνε $\rho>1+M$· ἄρα τότε καὶ οἱ εἰρημένοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῆς μονάδος· ὥστε ἡ παρένθεσις εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἑπομένως τὸ πολυώνυμον καὶ ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω νῦν $A_\nu\,\chi^\nu$ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πολυωνύμου· τότε γράφομεν αὐτὸ ὡς ἕπεται

$$\sigma(\chi)=A_\nu\chi^\nu\left(1+\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}\cdot\chi+\ \ldots\ +\frac{A_\mu}{A_\nu}\chi^{\mu-\nu}\right)$$

Ἔστω καὶ πάλιν M ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μείζων πάντων τῶν ἐν τῇ παρενθέσει συντελεστῶν θετικῶς λαμβανομένων καὶ ρ τὸ μέτρον τοῦ χ· οἱ εἰς τὴν μονάδα 1 προστιθέμενοι ὅροι, καὶ θετικῶς ἐὰν ληφθῶσι πάντες, ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ

$$M(\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots) \text{ ἤτοι τοῦ } \frac{M\rho}{1-\rho}.$$

τοῦτο δὲ γίνεται μικρότερον τῆς μονάδος, ἐὰν γίνῃ

$$\rho<\frac{1}{1+M}$$

ἄρα τότε καὶ οἱ εἰρημένοι ὅροι ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν τῆς μονάδος μικρότερον καὶ ἡ παρένθεσις εἶναι θετικὸς ἀριθμός· ὥστε τὸ πολυώνυμον καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος αὐτοῦ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον.

245. *Ἐὰν δύο ἀριθμοί, α καὶ β, τιθέμενοι ἐν πολυωνύμῳ ἀντὶ τοῦ χ, δίδωσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ, τὸ πολυώνυμον ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβανομένην.*

Ἔστω $\beta>\alpha$ καὶ A, A+1, A+2, . . . B οἱ μεταξὺ α καὶ β περιλαμβανόμενοι ἀκέραιοι (θετικοὶ ἢ καὶ ἀρνητικοί). Ἐὰν εἰσαχθῶσιν εἰς τὸ πολυώνυμον οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha,\ A,\ A+1,\ A+2,\ \ldots B,\ \beta$$

ἢ δίδει τις αὐτῶν ἐξαγόμενον 0, ὅτε ἀπεδείχθη ἡ πρότασις, ἢ εὑρίσκονται δύο ἐφεξῆς δίδοντες ἐξαγόμενα ἀντιθέτων σημείων· διότι ἐξ ὑποθέσεως σ(α) καὶ σ(β) εἶνε ἀντιθέτων σημείων· ἔστωσαν τοιοῦτοι οἱ ρ καὶ ρ+1· τότε πάλιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν

$$\rho,\ \rho+\frac{1}{10},\ \rho+\frac{2}{10},\ \ldots\ \rho+\frac{10}{10}$$

εἰσαγομένων εἰς τὸ πολυώνυμον, ἢ ποιεῖ τις τὸ πολυώνυμον 0, ἢ εὑρίσκονται δύο ἐφεξῆς δίδοντες ἐξαγόμενα ἀντιθέτων σημείων· ἔστωσαν τοιοῦτοι οἱ $\rho+\frac{\rho_1}{10}$ καὶ $\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{1}{10}$. ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἢ εὑρίσκομεν ἀριθμόν τινα ἐκ πεπερασμένου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενον καὶ δίδοντα ἐξαγόμενον 0, ἢ εὑρίσκομεν ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον α

$$\alpha=\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\frac{\rho_3}{1000}+\ldots+\frac{\rho_\nu}{10^\nu}+\ldots$$

λέγω δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος α εἰσαγόμενος ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὸ πολυώνυμον δίδει ἐξαγόμενον 0· ἤτοι

$$\sigma(\alpha)=0$$

Διότι ἔστω σ(α) διάφορον τοῦ 0 καὶ ἔστω πρότερον θετικὸς ἀριθμὸς κ=σ(α) καὶ μονὰς τις $\frac{1}{\mu}$ μικροτέρα τοῦ κ· κατὰ τὰ προαποδειχθέντα (242) δύναται νὰ εὑρεθῇ αὔξησίς τις τοῦ α (θετικὴ ἢ ἀρνητική) τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐκ ταύτης καὶ τῶν μικροτέρων αὐτῆς προερχομένη μεταβολὴ τοῦ πολυωνύμου, καὶ θετικῶς ἐὰν ληφθῇ, νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\mu}$. ἔστω ἡ αὔξησις αὕτη ε καὶ $\frac{1}{10^\nu}$ δεκαδική τις μονὰς ἐλάσσων τοῦ ε· τότε πρέπει οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ

$$\sigma\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\ldots+\frac{\rho_\nu}{10^\nu}\right),\ \sigma(\alpha),\ \sigma\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\ldots+\frac{\rho_\nu}{10^\nu}+\frac{1}{10^\nu}\right)$$

νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον· διότι οἱ ἀντὶ τοῦ χ τιθέμενοι ἀριθμοὶ διαφέρουσι τοῦ α ὀλιγώτερον ἢ ε· διαφέρουσιν ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ πολυωνύμου ἀπὸ τῆς κ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$. ἑπομένως εἶνε καὶ αἱ τρεῖς θετικαί. Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον· διότι ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ὡρίσθη ὁ α, ἕπεται ὅτι αἱ δύο ἄκραι τιμαὶ εἶνε ἀντιθέτων σημείων· ἀδύνατον ἄρα νὰ εἶνε σ(α) θετικόν· ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι οὐδὲ ἀρνητικὸν δύναται νὰ εἶνε· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\sigma(\alpha)=0.$$

246. Ἐὰν πολυώνυμόν τι σ(χ) λαμβάνῃ δύο τιμὰς Α καὶ Β, λαμβάνει καὶ πᾶσαν ἄλλην ἐν τῷ μεταξὺ κειμένην· ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ πολυώνυμον σ(χ) ἀδύνατον νὰ μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην χωρὶς νὰ διέλθῃ καὶ διὰ πασῶν τῶν ἐν τῷ μεταξύ.

Ἔστω Γ τιμή τις μεταξὺ Α καὶ Β, ἤτοι $A<\Gamma<B$· τὸ πολυώνυμον σ(χ)—Γ λαμβάνει διὰ τὰς δύο τιμὰς τῆς χ, α, β, ἐξ ὧν τὰ ἐξαγόμενα Α καὶ Β προκύπτουσι, τιμὰς ἐχούσας ἐναντία σημεῖα· ὑπάρχει ἄρα τιμή τις τοῦ χ, γ μεταξὺ τῶν ἄλλων, δι' ἣν ἔχομεν

$$\sigma(\gamma)=\Gamma.$$

247. *Πᾶν πολυώνυμον περιττοῦ βαθμοῦ ἔχει μίαν τοὐλάχιστον πραγματικὴν ῥίζαν.*

Επειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου μένουσιν αἱ αὐταί, καὶ ὅταν τοῦτο διαιρεθῇ διὰ δοθέντος ἀριθμοῦ οἱουδήποτε, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μέγιστος αὐτοῦ ὅρος ἔχει συντελεστὴν τὴν μονάδα 1.

Ἔστω χ^{μ} ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πολυωνύμου· ἐὰν τεθῇ $\chi=-N$, N ὄντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ἱκανῶς μεγάλου (244), τὸ πολυώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου καὶ θὰ εἶνε ἐπομένως ἀρνητικόν· διότι περιττὴ δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶνε ἀρνητική· ἐὰν δὲ τεθῇ $\chi=+N$, τὸ πολυώνυμον θὰ εἶνε θετικόν· ἑπομένως μεταξὺ $-N$ καὶ $+N$ ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ῥίζα τοῦ πολυωνύμου.

248. *Πᾶν πολυώνυμον ἀρτίου βαθμοῦ ἔχει, ἐὰν ὁ τελευταῖος αὐτοῦ ὅρος εἶνε ἀρνητικὸς* (τοῦ πρώτου ὅρου ἔχοντος συντελεστὴν 1), *δύο τοὐλάχιστον πραγματικὰς ῥίζας, ἤτοι μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικήν·* διότι αἱ δύο τιμαὶ $\chi=-N$ καὶ $\chi=+N$, ἐὰν N εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἱκανῶς μέγας, δίδουσιν ἐξαγόμενα τὸ αὐτὸ ἔχοντα σημεῖον (τὸ τοῦ πρώτου ὅρου), ἡ δὲ τιμὴ $\chi=0$ δίδει ἐξαγόμενον τὸν τελευταῖον ὅρον A_0, ὅστις ἐξ ὑποθέσεως ἔχει ἐναντίον τοῦ πρώτου σημεῖον· ὥστε μεταξὺ 0 καὶ $+N$ ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ῥίζα (θετικὴ) καὶ μεταξὺ 0 καὶ $-N$ ὑπάρχει ἄλλη ῥίζα (ἀρνητική).

Ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ὑποτίθενται οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου ἀριθμοὶ τοῦ τῶν μιγάδων συστήματος καὶ ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς χ ἐν τῷ αὐτῷ συστήματι.

249. *Ἐάν τις ἀριθμὸς α εἶνε ῥίζα πολυωνύμου, ἡ διαφορὰ $\chi-\alpha$ διαιρεῖ τὸ πολυώνυμον ἀκριβῶς·* καὶ τἀνάπαλιν· *ἐὰν ἡ διαφορὰ $\chi-\alpha$ διαιρῇ πολυώνυμόν τι ἄνευ ὑπολοίπου, ὁ ἀριθμὸς α εἶνε τοῦ πολυωνύμου ῥίζα.*

Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$\sigma(\chi) \quad \text{ἢ} \quad \chi^{\mu}+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ \ldots\ +A_{\mu}.$$

ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶνε

$$\alpha^{\mu}+A_1\alpha^{\mu-1}+A_2\alpha^{\mu-2}+\ \ldots\ +A_{\mu}=0,$$

τὸ αὐτὸ πολυώνυμον γράφεται καὶ ὡς ἑπεται

$$(\chi^{\mu}-\alpha^{\mu})+A_1(\chi^{\mu-1}-\alpha^{\mu-1})+A_2(\chi^{\mu-2}-\alpha^{\mu-2})+\ \ldots\ +A_{\mu-1}(\chi-\alpha)$$

διότι οἱ ἀφαιρεθέντες ὅροι ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὸ 0.

Ἀλλὰ πάντα τὰ μέρη τοῦ πολυωνύμου διαιροῦνται νῦν διὰ τῆς διαφορᾶς $\chi-\alpha$· διότι εἶνε, ὡς γνωστὸν

$$\chi^{\lambda}-\alpha^{\lambda}=(\chi-\alpha)(\chi^{\lambda-1}+\alpha.\chi^{\lambda-2}+\alpha^{2}.\chi^{\lambda-3}+\ldots+\alpha^{\lambda-1})\cdot$$

διαιρεῖται ἄρα καὶ τὸ πολυώνυμον ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ $\chi-\alpha$· καὶ ἐὰν τὸ πηλίκον, ὅπερ εἶνε ἐπίσης ἀκέραιον πολυώνυμον (κατὰ μονάδα κατωτέρου βαθμοῦ), παρασταθῇ διὰ $\Phi(\chi)$, θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha).\Phi(\chi). \qquad (1)$$

Ὅτι δὲ καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει, εἶνε φανερόν· διότι, ἐὰν ἐν τῇ ταυτότητι (1) τεθῇ

$$\chi=\alpha,$$

ἕπεται

$$\sigma(\alpha)=0.$$

250. *Τὸ πλῆθος τῶν ῥιζῶν πολυωνύμου ἀδύνατον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν βαθμὸν αὐτοῦ.*

Ἐὰν α εἶνε μία τῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$, εἶνε

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)\,\sigma_1(\chi)$$

Ἐὰν νῦν τὸ πολυώνυμον $\sigma_1(\chi)$, ὅπερ εἶνε τοῦ $\mu-1$ βαθμοῦ, μηδεμίαν ἔχῃ ῥίζαν, ἡ μόνη ῥίζα τοῦ $\sigma(\chi)$ εἶνε ἡ α (διότι μόνον διὰ $\chi=\alpha$ μηδενίζεται)· ἐὰν ὅμως ἔχῃ ῥίζαν τινά, ἔστω τὴν β, θὰ εἶνε

$$\sigma_1(\chi)=(\chi-\beta)\sigma_2(\chi)$$

ἄρα καὶ

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)\sigma_2(\chi)$$

ἐὰν πάλιν τὸ πολυώνυμον $\sigma_2(\chi)$, ὅπερ εἶνε βαθμοῦ $\mu-2$, μηδεμίαν ἔχῃ ῥίζαν, τὸ ἀρχικὸν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχει δύο μόνον ῥίζας, τὰς α, β· ἐὰν ὅμως ἔχῃ τινά, ἔστω τὴν γ, θὰ εἶνε

$$\sigma_2(\chi)=(\chi-\gamma)\sigma_3(\chi)\cdot$$

ἄρα

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)\,(\chi-\beta)\,(\chi-\gamma)\,\sigma_3(\chi)\cdot$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$, οὗ ὁ βαθμὸς εἶνε μ, ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων τινῶν παραγόντων καὶ παράγοντος τινὸς οὐδεμίαν ἔχοντος ῥίζαν· ἐπειδὴ δὲ ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου εἶνε ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων, συνάγεται, ὅτι, ἂν μὲν οἱ πρωτοβάθμιοι παράγοντες εἶνε μ, ὁ παράγων $\sigma_\mu(\chi)$ θὰ εἶνε σταθερὸς ἀριθμός· ἂν δὲ εἶνε οἱ πρωτοβάθμιοι παράγοντες ρ, τὸ πολυώνυμον $\sigma_\rho(\chi)$ εἶνε βαθμοῦ $\mu-\rho$· ἀλλ' εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς τῶν ῥιζῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸν βαθμὸν μ.

251. Ἐκ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν γίνεται δῆλον, ὅτι, *ἂν ὑποτεθῇ ὅτι πᾶν πολυώνυμον ἔχει ῥίζαν τινὰ* (τοῦτο δὲ ἀληθῶς συμβαίνει ὡς

παρακατιόντες θὰ ἀποδείξωμεν), *πᾶν πολυώνυμον μ βαθμοῦ ἀναλύεται εἰς γινόμενον μ πρωτοβαθμίων παραγόντων* (ἴσων ἢ ἀνίσων)· διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην πάντα τὰ πηλίκα $\sigma_1(\chi)$ $\sigma_2(\chi)$ . . . $\sigma_{\mu-1}(\chi)$ θὰ ἔχωσι ῥίζαν, ἑπομένως ἡ ἀνάλυσις θὰ προχωρήσῃ μέχρις τοῦ πηλίκου $\sigma_\mu(\chi)$, ὅπερ ἐξ ἀνάγκης θὰ εἶνε σταθερὸς ἀριθμός· ἄλλως τὸ γινόμενον θὰ ἦτο βαθμοῦ μεγαλητέρου τοῦ μ· ὅπερ ἄτοπον.

252. Ἡ ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας, (ὅπως καὶ ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ ἀκεραίου εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας), καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ, ἄγει πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον· ἤτοι πᾶν πολυώνυμον μ βαθμοῦ παρίσταται ὡς γινόμενον μ παραγόντων πρωτοβαθμίων, πάντοτε τῶν αὐτῶν· διότι δύο γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων ἀδύνατον νὰ εἶνε ἴσα, ἐὰν μὴ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας καὶ ἕκαστον ἰσάκις. Καὶ ὄντως· ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν γινομένων ἔχῃ τὸν παράγοντα $\chi-\alpha$, λ φοράς, καὶ τὸ ἕτερον θὰ ἔχῃ αὐτὸν καὶ μάλιστα ἰσάκις· διότι, μηδενιζομένου τοῦ πρώτου διὰ $\chi=\alpha$, θὰ μηδενίζηται καὶ τὸ δεύτερον (διότι εἶνε ἴσα διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ)· ἑπομένως θὰ ἔχῃ παράγοντα τὸν $\chi-\alpha$· λέγω δέ, ὅτι θὰ ἔχῃ αὐτὸν λ φοράς· διότι, ἐὰν τοὐναντίον, διαιροῦντες τὰ γινόμενα ἐπανειλημμένως διὰ $\chi-\alpha$, θὰ φθάσωμεν εἰς δύο ἴσα γινόμενα, ὧν τὸ ἕτερον μόνον θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα $\chi-\alpha$, ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

253. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ τοῦ μ βαθμοῦ, εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας ἀναλυθέν, ἔχῃ τὸν παράγοντα $(\chi-\alpha)$, λ φοράς, τὸν παράγοντα $(\chi-\beta)$, ν φορὰς κτλ., θὰ ἔχωμεν τὴν ταὐτότητα

$$\sigma(\chi)=A(\chi-\alpha)^\lambda.(\chi-\beta)^\nu.(\chi-\gamma)^\rho \ . \ . \ . \ (\chi-\varkappa)$$

ἔνθα A εἶνε ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου χ^μ.

Τούτων τεθέντων, λέγεται ῥίζα τις α, ἁπλῆ μέν, ἐὰν μόνον ἡ πρώτη δύναμις τῆς διαφορᾶς $\chi-\alpha$ διαιρῇ τὸ πολυώνυμον, ἤτοι ἐὰν $\lambda=1$, διπλῆ, ἐὰν ἡ δευτέρα, τριπλῆ, ἐὰν ἡ τρίτη, καὶ καθεξῆς· ὥστε ἑκάστη τῶν ῥιζῶν α, β, γ, . . . ἔχει καὶ βαθμόν τινα πολλαπλότητος. Αἱ διπλαῖ τριπλαῖ κτλ. ῥίζαι λέγονται συλλήβδην πολλαπλαῖ ῥίζαι.

254. *Αἱ πολλαπλαῖ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου εἶνε καὶ τοῦ παραγώγου ῥίζαι· ἀλλ' ἐν τῷ παραγώγῳ ἡ πολλαπλότης αὐτῶν εἶνε κατὰ μονάδα μικροτέρα.* Καὶ τἀνάπαλιν· *αἱ κοιναὶ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου καὶ τοῦ παραγώγου αὐτοῦ εἶνε πολλαπλαῖ τοῦ πολυωνύμου ῥίζαι.*

Ἔστω α ῥίζα τις τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ καὶ λ ὁ βαθμὸς τῆς πολλα-

πλότητος αὐτῆς· τότε θὰ εἶνε

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^{\lambda}.\varphi(\chi)$$

τοῦ $\varphi(\chi)$ συγκειμένου ἐκ τῶν λοιπῶν παραγόντων, ἐπομένως μὴ ἔχοντος τὴν ῥίζαν α· ὅθεν ἕπεται (241)

$$\sigma'(\chi)=(\chi-\alpha)^{\lambda}.\varphi'(\chi)+\lambda(\chi-\alpha)^{\lambda-1}.\varphi(\chi)$$

ἢ καὶ $$\sigma'(\chi)=(\chi-\alpha)^{\lambda-1}\left[(\chi-\alpha)\varphi'(\chi)+\lambda.\varphi(\chi)\right]$$

Ἡ παρένθεσις, ἐὰν χ γίνῃ ἴσον τῷ α, γίνεται $\lambda.\varphi(\alpha)$, ἤτοι διαφέρει τοῦ 0, ἐπομένως τὸ πολυώνυμον, ὅπερ ἀποτελεῖ, δὲν ἔχει τὸν παράγοντα $(\chi-\alpha)$· ἡ παράγωγος ἄρα ἔχει τὸν παράγοντα $(\chi-\alpha)$ μόνον $\lambda-1$ φοράς.

Ἐὰν $\lambda=1$, ἡ ῥίζα α ἀδύνατον νὰ εἶνε κοινὴ ῥίζα τοῦ πολυωνύμου καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ κοιναὶ ῥίζαι εἶνε πᾶσαι πολλαπλαῖ.

255. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται ὅτι ἡ ῥίζα, ἧς ἡ πολλαπλότης εἶνε λ, εἶνε ῥίζα πάντων τῶν παραγώγων πολυωνύμων, ὧν ἡ τάξις μικροτέρα τοῦ λ,

$$\sigma'(\chi),\quad \sigma''(\chi),\ \ldots\ \sigma^{\lambda-1}(\chi)$$

οὐχὶ δὲ καὶ τοῦ $\sigma^{\lambda}(\chi)$· διότι ἡ ῥίζα αὕτη θὰ εἶνε ῥίζα τοῦ $\sigma'(\chi)$ καὶ θὰ ἔχῃ πολλαπλότητα $\lambda-1$, ἐπομένως θὰ εἶνε ῥίζα καὶ τοῦ $\sigma''(\chi)$ μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος $\lambda-2$, καὶ καθεξῆς.

Σημ. Αἱ ἰδιότητες αὗται παρέχουσι τὸ ἁπλούστατον μέσον, δι' οὗ διακρίνομεν ἂν ῥίζα τις δοθεῖσα εἶνε πολλαπλῆ καὶ τίς ἡ πολλαπλότης αὐτῆς.

256. Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα, ὧν ὁ βαθμὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸν μ, εἶνε ἴσα διὰ $\mu+1$ τιμὰς τοῦ χ, εἶνε καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ ἴσα, ἤτοι εἶνε τὰ αὐτά.

Διότι ἡ διαφορὰ αὐτῶν $\sigma(\chi)-\varphi(\chi)$, ἐὰν διαφέρῃ τοῦ 0, θὰ εἶνε πολυώνυμον βαθμοῦ οὐχὶ ἀνωτέρου τοῦ μ καὶ θὰ μηδενίζηται διὰ $\mu+1$ τιμὰς τοῦ χ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀκέραια πολυώνυμα δύο μεταβλητῶν.

Ὁρισμοί.

257. Ἀκέραιον πολυώνυμον ἡ ἀκεραία συνάρτησις δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ λέγεται πᾶν πολυώνυμον, οὗ ἕκαστος ὅρος εἶνε τῆς μορφῆς $A.\chi^{\mu}.\psi^{\nu}$

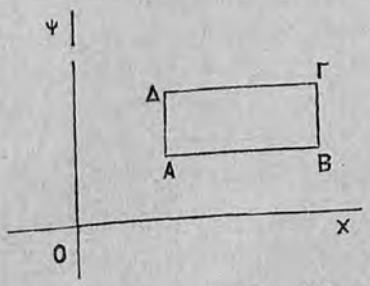
Α εἶνε ἀριθμὸς ἀνεξάρτητος τῶν χ καὶ ψ, οἱ δὲ μ καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι θετικοί, ἢ καὶ 0.

Τὰ ἀκέραια πολυώνυμα τῶν δύο μεταβλητῶν σημειοῦνται συντόμως ὡς ἕπεται: $\Phi(\chi,\psi)$, $\sigma(\chi,\psi)$, $\varphi(\chi,\psi)$ κτλ. Καὶ τούτων αἱ τιμαὶ εὑρίσκονται, ὅταν δοθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ, μόνον διὰ τῶν τεσσάρων πράξεων, ἐπ' αὐτῶν ἐκτελουμένων.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις θεωροῦμεν πολυώνυμα, ὧν οἱ συντελεσταὶ Α εἶνε ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ μένουσιν ἐν τῷ συστήματι τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

258. Τοὺς μεταβλητοὺς ἀριθμοὺς χ καὶ ψ δυνάμεθα νὰ νοῶμεν ὡς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ· τότε εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi,\psi)$ ἔχει μίαν τιμὴν ἐντελῶς ὡρισμένην.

259. Ἐάν, τοῦ ψ μένοντος ἀμεταβλήτου, ὁ χ, ἀεὶ αὐξανόμενος, διατρέξῃ πάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ α μέχρι ε ($\varepsilon > \alpha$) (ὅπερ σημειοῦμεν συντόμως ὡς ἕπεται $\chi = \alpha \ldots \varepsilon$, $\psi = \gamma$), τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον διατρέχει προφανῶς εὐθεῖάν τινα AB παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν χ· ἐὰν ἔπειτα, τοῦ χ μένοντος ἀμεταβλήτου καὶ ἴσου τῷ ε, ὁ ψ, ἀεὶ αὐξανόμενος, διατρέξῃ τὰς τιμὰς $\gamma \ldots \delta$, τὸ σημεῖον διατρέχει τὴν ΒΓ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν ψ καὶ ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ πρώτη λήγει.



Ὁμοίως αἱ τιμαὶ $\chi = \varepsilon \ldots \alpha$, $\psi = \delta$ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ΓΔ παραλλήλου καὶ ἰσομήκους τῇ ΒΑ, αἱ δὲ τιμαὶ $\chi = \alpha$, $\psi = \delta \ldots \gamma$ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΔΑ. Ὅθεν συνάγομεν ὅτι, ἐὰν οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ διατρέξωσι κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $\chi = \alpha \ldots \varepsilon$, $\psi = \gamma$· $\chi = \varepsilon$, $\psi = \gamma \ldots \delta$· $\chi = \varepsilon \ldots \alpha$, $\psi = \delta$· $\chi = \alpha$, $\psi = \delta \ldots \gamma$, τὸ παριστώμενον σημεῖον

διατρέχει τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ὡρμήθη. Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τούτων, καθ' ἣν διαδέχονται ἀλλήλας σειράν, θὰ λέγωμεν *ὀρθογώνιον*.

260. Ἔστωσαν $\varphi(\chi,\psi)$ καὶ $\sigma(\chi,\psi)$ πολυώνυμα ἀκέραια τῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ· ὑποθέσωμεν ὅτι, ἐὰν μόνον ὁ εἷς τῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν χ ἢ ψ ὁρισθῇ, οἱαδήποτε τιμὴ καὶ ἂν δοθῇ αὐτῷ, εἶνε ἀδύνατον τὰ πολυώνυμα ταῦτα νὰ γίνωσι 0, ἐνόσῳ ὁ ἕτερος τῶν μεταβλητῶν μένῃ ἀόριστος. Ἐὰν οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ διατρέξωσι τιμὰς ὀρθογώνιον ἀποτελούσας καὶ κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ἤδη σειράν, τὸ πηλίκον $\frac{\varphi(\chi,\psi)}{\sigma(\chi,\psi)}$ ἔχει δι' ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν, ἤτοι εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου, τιμὴν ἐντελῶς ὡρισμένην, ἐξαιρουμένων τῶν σημείων, ἐν οἷς ὁ παρονομαστὴς γίνεται 0 Ἀλλ' ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς περιμέτρου τὸ πλῆθος τῶν σημείων, ἐν οἷς ὁ παρονομαστὴς μηδενίζεται, εἶνε πεπερασμένον· διότι ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἵνα ταύτην θεωρήσωμεν, εἶνε $\psi=\gamma$ καὶ τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi,\psi)$ γίνεται ἐπ' αὐτῆς ἴσον τῷ πολυωνύμῳ $\sigma(\chi,\gamma)$ τῆς μιᾶς μεταβλητῆς χ, ὅπερ διαφέρει τοῦ 0 καί, ὡς ἀπεδείξαμεν, μηδενίζεται, τὸ πλεῖστον, διὰ μ τιμὰς τοῦ χ, μ ὄντος τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ· εὑρίσκονται ἄρα ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἐπομένως καὶ ἐπὶ τῆς ὅλης περιμέτρου, ὡρισμένα καὶ πεπερασμένα τὸ πλῆθος σημεῖα, ἐν οἷς ἡ συνάρτησις $\sigma(\chi,\psi)$ γίνεται 0· εἰς πάντα δὲ τὰ ἄλλα διαφέρει τοῦ 0· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ καὶ ἐπὶ τῆς $\varphi(\chi,\psi)$.

261. Θεωρήσωμεν ἓν τῶν σημείων, ἐν οἷς ὁ παρονομαστὴς $\sigma(\chi,\psi)$ γίνεται 0, τὸ **M**· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα, ἐν οἷς τὰ πολυώνυμα $\sigma(\chi,\psi)$ καὶ $\varphi(\chi,\psi)$ γίνονται 0, εἶνε μεμονωμένα καὶ εἰς πλῆθος πεπερασμένον, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα πλησίον τοῦ σημείου **M** καὶ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ νὰ λάβωμεν δύο τμήματα τῆς περιμέτρου ἀρκούντως μικρά, ὥστε ἐν πᾶσι τοῖς σημείοις αὐτῶν, πλὴν τοῦ **M**, ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα νὰ διαφέρωσι τοῦ 0· καὶ ἐπομένως ἐν ἑκάστῳ τμήματι τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου αὐτῶν νὰ μὴ μεταβάλληται. Ἐὰν τότε αἱ τιμαὶ τοῦ πηλίκου ἐν τοῖς εἰρημένοις τμήμασιν ὦσιν ἀντιθέτων σημείων, θὰ λέγωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὐτοῦ διακόπτονται εἰς τὸ σημεῖον **M**· καὶ τὴν διακοπὴν ταύτην θὰ καλῶμεν *θετικὴν* μέν, ἐάν, διατρέχοντες τὴν περίμετρον κατὰ τὴν ἤδη ὁρισθεῖσαν φοράν, ἀπὸ τῶν θετικῶν τιμῶν μεταβαίνωμεν εἰς τὰς ἀρνητικάς, *ἀρνητικὴν* δέ, ἐὰν τοὐναντίον· καὶ τὰς μὲν θετικὰς διακοπὰς θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ $+1$, τὰς δὲ ἀρνητικὰς διὰ τοῦ -1· τέλος εἰς οὐδὲν λογιζό-

μεθα τὸ σημεῖον Μ, ἢ παριστῶμεν διὰ τοῦ Ο, ἐὰν τὸ πηλίκον ἔχῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐν ἀμφοτέροις τοῖς περὶ αὐτὸ τμήμασι.

262. Τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν μονάδων, ὅταν παρασταθῶσι πᾶσαι αἱ ἐπὶ τῆς περιμέτρου διακοπαί, ὡς εἴπομεν, λέγεται *δύναμις* τοῦ ὀρθογωνίου.

263. Ἐάν τι ὀρθογώνιον διαιρεθῇ, ὡς ἔτυχεν, εἰς ἄλλα, ἡ δύναμις αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δυνάμεων τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Διαιρεθήτω πρότερον τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ διὰ τῆς ΗΘ εἰς τὰ δύο ὀρθογώνα ΑΗ, ΗΘ, ΘΔ, ΔΑ καὶ ΗΒ, ΒΓ, ΓΘ, ΘΗ· φανερὸν ὅτι αἱ μὲν τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου εὐθεῖαι διατρέχονται καὶ ἐν τοῖς μικροῖς ὀρθογωνίοις κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἑπομένως θὰ δώσωσι τὰς αὐτὰς καὶ πρὶν διακοπάς, ἡ δὲ διαιροῦσα εὐθεῖα ΗΘ διατρέχεται δὶς καὶ κατὰ φορὰς ἐναντίας· ὥστε, ἐὰν σημεῖόν τι αὐτῆς δώσῃ ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ὀρθογωνίων θετικὴν διακοπήν, ἐν τῷ λοιπῷ θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀρνητικὴν διακοπὴν καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν διακοπῶν οὐδόλως μεταβάλλεται.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ταύτῃ ὑποτίθεται, ὅτι τὰ σημεῖα Η καὶ Θ δὲν εἶνε διακοπαί· ἀλλ' εὐκόλως βλέπει τις ὅτι καὶ τότε ἀληθεύει ἡ πρότασις.

Ἐὰν νῦν διαιρεθῇ ἑκάτερον τῶν ὀρθογωνίων ΑΔΗΘ καὶ ΗΒΓΘ εἰς δύο ἄλλα, καὶ ἐφαρμοσθῇ ἡ αὐτὴ πρότασις, καὶ τοῦτο γίνῃ πολλάκις, βλέπομεν ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει εἰς ὁσαδήποτε μέρη καὶ ἂν διαιρεθῇ τὸ ἐξ ἀρχῆς δοθὲν ὀρθογώνιον.

264. Ἐὰν ἐπὶ τῆς περιμέτρου ὀρθογωνίου τινὸς τὸ πολυώνυμον $\varphi(\chi,\psi)$ μηδαμοῦ γίνηται Ο, ἡ δύναμις τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶνε Ο.

Διότι τότε τὸ πολυώνυμον φ ἔχει εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιμέτρου ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἑπομένως αἱ διακοπαὶ προέρχονται ἐκ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τοῦ παρονομαστοῦ $\sigma(\chi,\psi)$· ἀλλ' ἐὰν εἷς τι σημεῖον Μ τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἀπὸ θετικοῦ γίνηται ἀρνητικόν, θὰ γίνηταί που ἀπὸ ἀρνητικοῦ πάλιν θετικόν· διότι, ἐπιστρέφοντες εἰς τὸ Μ, εὑρίσκομεν αὐτὸ θετικόν· ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται διακοπαὶ εἶνε ἀντίθετοι, δίδουσιν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν διακοπῶν Ο· τὸ αὐτὸ δὲ προφανῶς συμβαίνει καὶ ἐὰν πλεονάκις τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi,\psi)$ μηδενισθῇ ἐπὶ τῆς περιμέτρου.

265. Ἐάν τινος ὀρθογωνίου ἡ δύναμις διαφέρῃ τοῦ Ο, εὑρίσκεται ἐν αὐτῷ ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον, ἐν ᾧ ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα γίνονται Ο, ἤτοι εὑρίσκεται ἓν τοὐλάχιστον ζεῦγος τιμῶν τῶν χ καὶ ψ, (ἐν τῷ

ὁποίῳ ὁ χ περιέχεται μεταξὺ α καὶ β, ὁ δὲ ψ μεταξὺ γ καὶ δ), δι' ὃ ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα γίνονται 0.

Διαιρεθήτω τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς 100 ἴσα ὀρθογώνια· ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τούτων ἓν τοὐλάχιστον ἔχει δύναμιν διάφορον τοῦ 0· διότι ἐὰν πάντων ἡ δύναμις εἶνε 0, καὶ τοῦ ὅλου ἡ δύναμις θὰ ἦτο 0· ἔστω τοιοῦτον τὸ ὀρθογώνιον

$$\alpha+\frac{\lambda_1}{10}\varepsilon\ldots\ldots\alpha+\left(\frac{\lambda_1}{10}+\frac{1}{10}\right)\varepsilon,\quad \varepsilon=\beta-\alpha$$

$$\gamma+\frac{\rho_1}{10}\eta\ldots\ldots\gamma+\left(\frac{\rho_1}{10}+\frac{1}{10}\right)\eta,\quad \eta=\delta-\gamma.$$

Διαιρεθήτω καὶ τοῦτο εἰς 100 ἴσα μέρη καὶ ἔστω ἓν ἐκ τούτων, ἔχον δύναμιν διάφορον τοῦ 0, τὸ ἑξῆς

$$\alpha+\left(\frac{\lambda_1}{10}+\frac{\lambda_2}{100}\right)\varepsilon\ldots\ldots\alpha+\left(\frac{\lambda_1}{10}+\frac{\lambda_2}{100}+\frac{1}{100}\right)\varepsilon$$

$$\gamma+\left(\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}\right)\eta\ldots\ldots\gamma+\left(\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\frac{1}{100}\right)\eta.$$

Ἐξακολουθοῦντες οὕτω, βλέπομεν ὅτι εὑρίσκονται δύο ἀριθμοὶ χ' ψ' ἐντελῶς ὡρισμένοι

$$\chi'=\alpha+\left(\frac{\lambda_1}{10}+\frac{\lambda_2}{100}+\frac{\lambda_3}{1000}+\ldots+\frac{\lambda_\nu}{10^\nu}+\ldots\right)\varepsilon\cdot$$

$$\psi'=\gamma+\left(\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\frac{\rho_3}{1000}+\ldots+\frac{\rho_\nu}{10^\nu}+\ldots\right)\eta$$

λέγω δὲ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, εἰσαγόμενοι ἀντὶ χ, ψ, μηδενίζουσιν ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα $\varphi(\chi,\psi)$ καὶ $\sigma(\chi,\psi)$, ἤτοι

$$\sigma(\chi',\psi')=0\quad\text{καὶ}\quad\varphi(\chi',\psi')=0.$$

Διότι, ὅταν πολυωνύμόν τι εἴς τι σημεῖον (χ',ψ') ἔχῃ τιμὴν διάφορον τοῦ 0, δύναται (ὡς θὰ ἀποδείξωμεν ἔπειτα) νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον ἱκανῶς μικρόν, ἔχον πλευρὰς παραλλήλους τοῖς ἄξοσιν OX, OΨ καὶ κέντρον τὸ σημεῖον χ',ψ' καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου νὰ μὴ μηδενίζηται τὸ πολυώνυμον τοῦτο. Ἂν λοιπὸν ἓν τῶν πολυωνύμων $\sigma(\chi,\psi)$ ἢ $\varphi(\chi,\psi)$ δὲν ἐμηδενίζετο εἰς τὸ σημεῖον χ',ψ', θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιόν τι H, κέντρον ἔχον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ πλευρὰς ἱκανῶς μικρὰς καὶ ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ μὴ μηδενίζηται τὸ πολυώνυμον· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον, διότι τὸ σημεῖον (χ',ψ') εἶνε σημεῖον πάντων τῶν ὀρθογωνίων Θ, Θ_1, Θ_2 ... δι' ὧν εὐ-

ρέθησαν οἱ ἀριθμοὶ χ', ψ', αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὀρθογωνίων τούτων τεινουσι πρὸς τὸ 0· ἑπομένως πάντα τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς θὰ κεῖνται ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου H· εἶνε δὲ γνωστὸν ἐκ τῆς εὑρέσεως τῶν ἀριθμῶν χ', ψ' ὅτι ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἑκάστου τῶν ὀρθογωνίων Θ, Θ_1, Θ_2, . . . μηδενίζονται ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα $\sigma(\chi,\psi)$ καὶ $\varphi(\chi,\psi)$.

Μένει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι, ἂν $\varphi(\chi',\psi')$ εἶνε διάφορον τοῦ 0, δύναται νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον ἱκανῶς μικρὸν

$$\chi'-\zeta \ldots\ldots \chi'+\zeta$$
$$\psi'-\zeta \ldots\ldots \psi'+\zeta$$

καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἐν αὐτῷ νὰ εἶνε $\varphi(\chi,\psi)$ διάφορον τοῦ 0· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ προδήλως νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν $\varepsilon < |\varphi(\chi',\psi')|$ δύναται νὰ εὑρεθῇ μεταβολή τις ζ τῶν χ', ψ' ἱκανῶς μικρά, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῆς καὶ ἐκ τῶν μικροτέρων αὐτῆς προξενουμένη μεταβολὴ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(\chi',\psi')$ νὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ ε· τοῦτο δὲ δεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω A ἀκέραιος μείζων τῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ καὶ p τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς $\sigma(\chi+\zeta, \psi+\zeta)-\sigma(\chi,\psi)$, ἀφοῦ διαταχθῇ κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν ζ, χ καὶ ψ· ἔστω πρὸς τούτοις N τὸ μέγιστον μέτρον τῶν συντελεστῶν τῶν διαφόρων ὅρων, μ ἡ μεγίστη δύναμις τοῦ χ καὶ ν ἡ τοῦ ψ· τότε πᾶς ὅρος τῆς διαφορᾶς ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ

$$N.A^{\mu+\nu}.\zeta$$

καὶ ἡ ὅλη διαφορὰ ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ $N.p.A^{\mu+\nu}.\zeta$· ἐὰν ἄρα λάβωμεν $\zeta < \frac{\varepsilon}{p.N.A^{\mu+\nu}}$, γίνεται τὸ προσταχθέν.

266. Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι αἱ προηγούμεναι προτάσεις ἐφαρμόζονται καὶ ὅταν ὑπάρχωσι τιμαὶ τοῦ ἑνὸς τῶν μεταβλητῶν μηδενίζουσαι ἓν τῶν πολυωνύμων (ἢ καὶ ἀμφότερα) διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἑτέρου. Καὶ ὄντως· αἱ τοιαῦται τιμαί, ῥίζαι οὖσαι πολυωνύμου ἑνὸς μεταβλητοῦ (διότι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἄλλον αὐθαιρέτως), εἶνε εἰς πλῆθος περασμένον· ἀντιστοιχοῦσι δὲ εἰς εὐθείας τινὰς παραλλήλους τοῖς ἄξοσιν OX, OΨ. Ἐὰν δὲ τὸ ἐξ ἀρχῆς λαμβανόμενον ὀρθογώνιον μηδεμίαν τῶν εὐθειῶν τούτων ἔχῃ ὡς πλευράν, δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν αὐτὸ εἰς ἄλλα μικρότερα οὕτως, ὥστε καὶ τούτων αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συμπίπτωσι μηδεμιᾷ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ὅτε προφανῶς ἰσχύουσιν ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσαι προτάσεις.

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ὅτι πᾶν πολυώνυμον ἀκέραιον ἑνὸς μεταβλητοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ ἔχει τόσας ῥίζας, ὅσας ἔχει μονάδας ὁ βαθμὸς αὐτοῦ.

267. *Πᾶν πολυώνυμον ἑνὸς μεταβλητοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν.*

Ἔστω τὸ πολυώνυμον, οὗτινος οἱ συντελεσταὶ Α ὑποτίθενται πραγματικοὶ ἀριθμοί,

$$f(z) \quad \text{ἢ} \quad z^{\mu}+A_1z^{\mu-1}+A_2z^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu}$$

ἐπειδὴ ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς z εἶνε μιγάς, ἔστω $z=\chi+\psi i$, τῶν χ καὶ ψ ὄντων ἐν τῷ πραγματικῷ συστήματι· τότε εἶνε

$$f(z)=f(\chi+\psi i)=(\chi+\psi i)^{\mu}+A_1(\chi+\psi i)^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu}$$

καὶ ἐκτελουμένων τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν

$$f(z)=\sigma(\chi,\psi)+i\varphi(\chi,\psi)$$

ἔνθα τῶν $\sigma(\chi,\psi)$ καὶ $\varphi(\chi,\psi)$ πολυωνύμων οἱ συντελεσταὶ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν ἀριθμός τις μιγάς, ὁ $z'=\chi'+\psi' i$, εἶνε ῥίζα τοῦ πολυωνύμου $f(z)$, ἤτοι, ἐὰν $f(z')=\sigma(\chi',\psi')+i\varphi(\chi',\psi')=0$, οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χ',ψ' μηδενίζουσιν ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα φ καὶ σ· καὶ ἀνάπαλιν· ἑπομένως, ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι εὑρίσκονται τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ μηδενίζουσαι ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα φ καὶ σ, ἀποδεικνύομεν συνάμα καὶ τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ῥίζης τοῦ πολυωνύμου $f(z)$.

Ἔστω ρ τὸ μέτρον καὶ θ τὸ ὅρισμα τοῦ z, ἤτοι

$$z=\rho\,\text{συν}\,\theta+i\rho\,\text{ἡμ}\,\theta=\chi+\psi i$$

τότε εἶνε

$$f(z)=\rho^{\mu}(\text{συν}\,\theta+i\,\text{ἡμ}\,\theta)^{\mu}+A_1\rho^{\mu-1}(\text{συν}\,\theta+i\,\text{ἡμ}\,\theta)^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu}=$$
$$=\rho^{\mu}(\text{συν}\,\mu\theta+i\,\text{ἡμ}\,\mu\theta)+A_1\rho^{\mu-1}[\text{συν}(\mu-1)\theta+i\,\text{ἡμ}(\mu-1)\theta]+\ldots$$
$$=[\rho^{\mu}\text{συν}\,\mu\theta+A_1\rho^{\mu-1}\,\text{συν}\,(\mu-1)\theta+\ldots+A_{\mu}]+$$
$$+i[\rho^{\mu}\text{ἡμ}\,\mu\theta+A_1\rho^{\mu-1}\text{ἡμ}(\mu-1)\theta+\ldots]=\sigma(\chi,\psi)+i\varphi(\chi,\psi).$$

ὅθεν ἕπεται, (διότι οἱ συντελεσταὶ Α εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ)

$$\sigma(\chi,\psi)=\rho^{\mu}\text{συν}\,\mu\theta+A_1\rho^{\mu-1}\text{συν}\,(\mu-1)\theta+\ldots+A_{\mu}$$
$$\varphi(\chi,\psi)=\rho^{\mu}\,\text{ἡμ}\,\mu\theta+A_1\rho^{\mu-1}\text{ἡμ}\,(\mu-1)\,\theta+\ldots+A_{\mu-1}\,\text{ἡμ}\,\theta.$$

Θεωρήσωμεν τετράγωνον, ἔχον κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ πλευρὰς πα-

ραλλήλους τοῖς ἄξοσιν, ἐφ' ὧν οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ παρίστανται· ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου τούτου εἶνε

$$\frac{\varphi(\chi,\psi)}{\sigma(\chi,\psi)}=\frac{\rho^{\mu}\eta\mu\,\mu\theta+\ldots}{\rho^{\mu}\sigma\upsilon\nu\,\mu\theta+\ldots}=$$

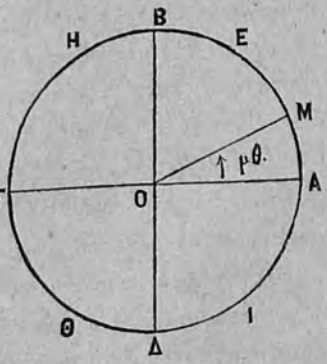
$$=\frac{\eta\mu\,\mu\theta+\frac{1}{\rho}A_1\eta\mu\,(\mu-1)\theta+\frac{1}{\rho^2}A_2\eta\mu\,(\mu-2)\theta+\cdots}{\sigma\upsilon\nu\,\mu\theta+\frac{1}{\rho}A_1\sigma\upsilon\nu\,(\mu-1)\theta+\frac{1}{\rho^2}A_2\sigma\upsilon\nu\,(\mu-2)\theta+\ldots}=\frac{\eta\mu\,\mu\theta+\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\,\mu\theta+\eta}$$

Οἱ διὰ τοῦ ε καὶ η παριστώμενοι ἀριθμοὶ ἔχουσι μέτρον μικρότερον τοῦ

$$N\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+\ldots+\frac{1}{\rho^{\mu}}\right)\quad\text{ἢ καὶ τοῦ}\quad N\frac{1}{\rho-1}$$

ἔνθα N εἶνε τὸ μέγιστον μέτρον τῶν συντελεστῶν A_0, A_1, . . . A_μ· ἐὰν ἄρα διαμένῃ $\rho>2N+1$, οἱ ἀριθμοὶ ε καὶ η θὰ ἔχωσιν, ἕκαστος μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου μεγαλητέρα τοῦ $4N+2$, διότι τότε ἡ ἀπόστασις ρ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῶν σημείων τῆς περιμέτρου αὐτοῦ θὰ εἶνε μεγαλητέρα τοῦ $2N+1$.

Θεωρήσωμεν νῦν τὰς τιμὰς τοῦ κλάσματος $\frac{\varphi(\chi,\psi)}{\sigma(\chi,\psi)}$ ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου τούτου· ἐὰν τὸ σημεῖον (χ,ψ), ἀπὸ τοῦ σημείου ἀρχόμενον, ἔνθα τέμνει τὴν περίμετρον ὁ ἡμιάξων OX, διανύῃ τὴν περίμετρον ἀεὶ προχωροῦν μέχρις οὗ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ὡρμήθη, ἡ γωνία θ, ὡς πολικὴ γωνία τοῦ κινουμένου σημείου, θὰ διανύσῃ τὰς τιμὰς 0 . . . 2π ἀεὶ αὐξανομένη· ἄρα καὶ ἡ γωνία $(\mu\theta)$ θὰ διανύσῃ τὰς τιμὰς 0 . . . . $2\mu\pi$ καί, ἂν περὶ κέντρον τὴν ἀρχὴν O γραφῇ κύκλος, ἔχων ἀκτῖνα τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, τὸ ἄκρον M τοῦ τὴν γωνίαν $\mu\theta$ μετροῦντος τόξου AM θὰ διατρέξῃ μ φορὰς τὴν περιφέρειαν ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ A (ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς OX) καὶ ἀεὶ προχωροῦν.



Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν ταύτην εἰς 6 ἴσα μέρη ΑΕ, ΕΗ, ΗΓ, ΓΘ, ΘΙ, ΙΑ, κατὰ τὸν πρῶτον γῦρον, ἐν ὅσῳ τὸ ἄκρον Μ τοῦ τόξου μθ εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ ΑΕ (ἐν ὅσῳ δηλαδὴ εἶνε $\mu\theta \leq 60^0$), οὐδεμίαν διακοπὴν ἔχει τὸ κλάσμα $\frac{\varphi}{\sigma}$· διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ δὲν μηδενίζεται $\left(\text{ὡς συγκείμενος ἐκ δύο μερῶν, ὧν τὸ μὲν ἕν εἶνε τοὐλάχιστον } \frac{1}{2},\right.$ τὸ δὲ ἕτερον διαμένει μικρότερον τοῦ $\left.\frac{1}{2}\right)$· ὅταν δὲ τὸ ἄκρον Μ διανύῃ τὸ τόξον ΕΗ, ὁ μὲν ἀριθμητὴς ημ(μθ)+ε διαμένει θετικὸς πάντοτε $\left(\text{διότι ημ}(\mu\theta) \text{ εἶνε τότε μεῖζον τοῦ } \frac{1}{2}, \text{ τὸ δὲ } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπὸ θετικοῦ γίνεταί που ἀρνητικός· διότι εἰς μὲν τὸ Ε εἶνε θετικός, εἰς δὲ τὸ Η ἀρνητικός ἔχομεν ἄρα μίαν θετικὴν διακοπὴν καὶ μίαν μόνην, εἴτε ἅπαξ ἀλλάξῃ σημεῖον ὁ παρονομαστής, εἴτε καὶ πλεονάκις. Ὅταν δὲ τὸ ἄκρον Μ διανύῃ τὸ τόξον ΗΘ, οὐδεμία διακοπὴ γίνεται· διότι ὁ παρονομαστὴς συν(μθ)+η δὲν μηδενίζεται (ὡς συγκείμενος ἐκ δύο μερῶν, ὧν τὸ μὲν ἕν εἶνε ἀρνητικὸν καὶ ἔχει μέτρον μεῖζον τοῦ $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ ἄλλο ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$)· ὅταν δὲ τὸ ἄκρον Μ διανύῃ τὸ τόξον ΘΙ, ἔχομεν πάλιν μίαν θετικὴν διακοπήν· διότι ὁ μὲν ἀριθμητὴς ημ(μθ)+ε διαμένει πάντοτε ἀρνητικός, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπὸ ἀρνητικοῦ (εἰς τὸ Θ) γίνεταί που θετικὸς (οἷος εἶνε εἰς Ι)· μίαν δὲ καὶ μόνην, καὶ ἂν πλεονάκις ἀλλάξῃ σημεῖον ὁ παρονομαστής· τέλος, ὅταν τὸ Μ διανύῃ τὸ τόξον ΙΑ, οὐδεμία γίνεται διακοπή· διότι δὲν μηδενίζεται ὁ παρονομαστής· ἔχομεν ἄρα κατὰ τὸν πρῶτον γῦρον 2 θετικὰς διακοπάς.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐπὶ ἑκάστου τῶν ἑπομένων γύρων, συνάγεται ὅτι, ὅταν τὸ ἄκρον Μ διανύσῃ μ φορὰς τὴν περιφέρειαν, τοῦτέστιν ὅταν τὸ κινούμενον σημεῖον (χ,ψ) διανύσῃ ὁλόκληρον τὴν περίμετρον τοῦ τετραγώνου, θὰ ἔχωμεν 2μ θετικὰς διακοπάς· ὑπάρχει ἄρα ἐντὸς τοῦ ρηθέντος τετραγώνου ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον (χ',ψ'), ἐν ᾧ μηδενίζονται ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα $\varphi(\chi,\psi)$ καὶ $\sigma(\chi,\psi)$· ἤτοι ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ῥίζα τοῦ δοθέντος πολυωνύμου $f(z)$.

268. Τούτου τεθέντος, ἕπεται ἐκ τῶν ἐν (251) εἰρημένων ὅτι πᾶν πολυώνυμον f(z) ἀναλύεται εἰς μ πρωτοβαθμίους παράγοντας, ἤτοι ἔχει μ ῥίζας ἐν τῷ συστήματι τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

269. Πᾶν πολυώνυμον $f(z)$ λαμβάνει πᾶσαν δοθεῖσαν τιμὴν κ· καὶ μάλιστα διὰ μ τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ z, ἀφ' οὗ ἐξαρτᾶται.

Καὶ ὄντως· τὸ πολυώνυμον $f(z)-\kappa$ ἔχει μ ῥίζας· καὶ ἐὰν z' εἶνε μία τούτων, εἶνε $f(z')-\kappa=0$, ἢ $f(z')=\kappa$.

270. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου ὑπετέθησαν ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει πραγματικοὶ ἀριθμοί· ἀλλά, καὶ μιγάδες ἐὰν εἶνε, ἡ πρότασις εἶνε ἀληθής. Καὶ ὄντως· διακρινομένων τῶν πραγματικῶν ὅρων ἀπὸ τῶν φανταστικῶν, τὸ πολυώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\sigma(z)+i\varphi(z)$$

καί, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\sigma(z)-i\varphi(z)$, γίνεται

$$\sigma(z)^2+\varphi(z)^2$$

ἤτοι πολυώνυμον ἔχον συντελεστὰς πραγματικούς· ἔστω $\alpha+\beta i$ μία τῶν ῥιζῶν τούτου· ὁ ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ θὰ εἶνε ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων, ὧν γινόμενον εἶνε τὸ πολυώνυμον, ὁ δὲ συζυγὴς $\alpha-\beta i$ θὰ εἶνε τοῦ λοιποῦ. Διότι οἱ δύο οὗτοι παράγοντες, ὅταν τεθῶσιν ἐν αὐτοῖς ἀντὶ z συζυγεῖς ἀριθμοί, διαφέρουσι μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ i.

Ἐάν, τῷ ὄντι, εἶνε $\sigma(\alpha+\beta i)+i\varphi(\alpha+\beta i)=T+i\Sigma$

θὰ εἶνε καὶ $\sigma(\alpha-\beta i)-i\varphi(\alpha-\beta i)=T-i\Sigma$.

271. Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον ἑνὸς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν τεθῇ ἴσον τῷ 0, προκύπτει ἐξίσωσις, ἥτις λέγεται *ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις*. Ἡ θεωρία τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων εἶνε τὸ κύριον θέμα τῆς *ἀνωτέρας ἀλγέβρας*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ.

ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

Προκαταρκτικαὶ γνώσεις.

272. Αἱ μεταθέσεις, ἃς ἐπιδέχονται οἱ ν ἀριθμοὶ 1, 2, 3, . . . ν, διαιροῦνται εἰς θετικὰς καὶ εἰς ἀρνητικάς· καὶ θετικὴ μὲν λέγεται ἡ μετάθεσις, ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν, ἃς εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἑκάστου ἀριθμοῦ πάντας τοὺς ἑπομένους αὐτῷ, εἶνε θετικόν, ἀρνητικὴ δέ, ἐὰν ἀρνητικόν.

Κατὰ ταῦτα ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν δύο ἀριθμῶν 1, 2

12 καὶ 21

εἶνε θετικὴ μὲν ἡ δευτέρα, ἀρνητικὴ δὲ ἡ πρώτη· καὶ ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν τριῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, θετικαὶ μὲν εἶνε αἱ

213, 132, 321,

ἀρνητικαὶ δὲ αἱ 123, 231, 312.

273. Ἐὰν ἀνταλλαχθῶσι δύο ἀριθμοί, ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τῆς μεταθέσεως.

Ἔστωσαν α καὶ β οἱ ἀνταλλασσόμενοι ἀριθμοί· $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \ldots \gamma_\rho$ οἱ τυχὸν μεταξὺ αὐτῶν εὑρισκόμενοι· τότε ἡ μετάθεσις $\ldots\alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_\rho\beta\ldots$ τρέπεται εἰς τὴν $\ldots\beta\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_\rho\alpha\ldots$· φανερὸν δὲ ὅτι αἱ διαφοραί, ἃς χορηγοῦσι κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον οἱ πρὸ τοῦ α καὶ μετὰ τὸ β εὑρισκόμενοι (ἐὰν εὑρίσκωνται) ἀριθμοί, μένουσιν αἱ αὐταί, ἀλλ' αἱ διαφοραὶ

γίνονται ἐν τῇ δευτέρᾳ ὡσαύτως αἱ διαφοραὶ γίνονται

$\alpha—\gamma_1,\ \alpha—\gamma_2,\ \ldots\ \alpha—\gamma_\rho,\ \alpha—\beta$
$\gamma_1—\alpha,\ \gamma_2—\alpha,\ \ldots\ \gamma_\rho—\alpha,\ \beta—\alpha$·
$\gamma_1—\beta,\ \gamma_2—\beta,\ \ldots\ \gamma_\rho—\beta$
$\beta—\gamma_1,\ \beta—\gamma_2,\ \ldots\ \beta—\gamma_\rho$.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι $2\rho+1$ διαφοραὶ ἀλλάσσουσι σημεῖον· ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον πασῶν τῶν διαφορῶν ἀλλάσσει σημεῖον.

274. Πᾶσα μετάθεσις τῶν ν ἀριθμῶν δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς πρώτης διὰ τῆς ἀνταλλαγῆς δύο ἀριθμῶν, ἐὰν πολλάκις τοῦτο γίνῃ.

Ἐὰν ἐν τῇ δοθείσῃ μεταθέσει τὸ 1 κατέχῃ ἄλλην θέσιν πλὴν τῆς

πρώτης, ἀντιμεταλλάσσομεν αὐτὸ μετὰ τοῦ εἰς τὴν πρώτην θέσιν γεγραμμένου ἀριθμοῦ, οὕτως ἔρχεται ἡ μονὰς εἰς τὴν πρώτην θέσιν· ἑτέρα ἀνταλλαγή, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη, θὰ φέρῃ τὸ 2 εἰς τὴν δευτέραν θέσιν καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε μετά τινα ἀριθμὸν ἀνταλλαγῶν θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς δοθείσης ἡ πρώτη μετάθεσις 1234 . . . ν· ἑπομένως διὰ τῶν αὐτῶν ἀνταλλαγῶν, κατ' ἀντίθετον τάξιν γινομένων, θὰ προκύψῃ ἡ δοθεῖσα ἐκ τῆς πρώτης.

275. Δοθεισῶν δύο μεταθέσεων, ὡς ἔτυχεν, Α καὶ Β, δύναται ἡ μία νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἄλλης διὰ πλήθους τινὸς ἀνταλλαγῶν.

Διότι ἀρκεῖ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τῆς Α εἰς τὴν πρώτην 123 . . . ν καὶ εἶτα ἀπὸ ταύτης εἰς τὴν Β.

276. Αἱ δι' ἀρτίου πλήθους ἀνταλλαγῶν εἰς ἀλλήλας τρεπόμεναι μεταθέσεις εἶνε ὁμοειδεῖς, ἤτοι εἶνε ἢ ἀμφότεραι θετικαὶ ἢ ἀμφότεραι ἀρνητικαί, αἱ δὲ διὰ περιττοῦ ἑτεροειδεῖς. Καὶ τἀνάπαλιν· αἱ ὁμοειδεῖς μεταθέσεις τρέπονται εἰς ἀλλήλας δι' ἀρτίου πλήθους ἀνταλλαγῶν, αἱ δὲ ἑτεροειδεῖς διὰ περιττοῦ.

Διότι εἰς ἑκάστην ἀνταλλαγὴν ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τῆς μεταθέσεως.

Κατὰ ταῦτα αἱ μεταθέσεις 4231 καὶ 2341 εἶνε ὁμοειδεῖς· διότι ἡ δευτέρα τρέπεται εἰς τὴν πρώτην διὰ τῶν δύο ἀνταλλαγῶν 34 εἰς 43 καὶ εἶτα 24 εἰς 42· αἱ δὲ μεταθέσεις 2413 καὶ 2143 εἶνε ἑτεροειδεῖς· διότι τρέπονται εἰς ἀλλήλας διὰ τῆς ἀνταλλαγῆς 14 εἰς 41.

Ὁρισμὸς τῆς ὁριζούσης.

277. Ἔστωσαν ν^2 ἀριθμοὶ εἰς ν σειρὰς ὁριζοντίας καὶ ν καθέτους γεγραμμένοι, ὡς ἕπεται

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2\nu} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{matrix}$$

ὅπου, ὁ μὲν πρῶτος δείκτης δεικνύει τὴν ὁριζοντίαν, ὁ δὲ δεύτερος τὴν κάθετον γραμμήν, ἐν ᾗ εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν γινομένων, ἅτινα δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀνὰ

ν λαμβανομένων καὶ οὕτως, ὥστε οἱ ἑκάστοτε λαμβανόμενοι νὰ εἶνε πάντες ἐκ διαφόρων ὁριζοντίων καὶ ἐκ διαφόρων καθέτων γραμμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ ἕκαστον γινόμενον λαμβάνεται θετικῶς μέν, ἐὰν ἡ μετάθεσις, ἣν οἱ πρῶτοι δεῖκται τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἀποτελοῦσιν, εἶνε ὁμοειδὴς τῇ ὑπὸ τῶν δευτέρων δεικτῶν ἀποτελουμένῃ, ἀρνητικῶς δέ, ἐὰν αἱ εἰρημέναι μεταθέσεις εἶνε ἑτεροειδεῖς, τὸ ἄθροισμα τοῦτο λέγεται *ὁρίζουσα* τοῦ συστήματος τῶν ν^2 ἀριθμῶν καὶ σημειοῦται συνήθως ὡς ἕπεται

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Οἱ ἀριθμοὶ a_{11} κτλ. λέγονται *στοιχεῖα* τῆς ὁριζούσης.

278. Τὸ γινόμενον τῶν ἐπὶ τῆς διαγωνίου εὑρισκομένων στοιχείων

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \dots\ a_{\nu\nu}$$

ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον + καὶ λέγεται *πρῶτος ὅρος* τῆς ὁριζούσης.

279. Ὅτι τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου τῆς ὁριζούσης εἶνε ἀνεξάρτητον (ὡς ὡρίσθη) ἐκ τῆς θέσεως, ἣν ἔχουσιν ἐν τῷ γινομένῳ οἱ συγκροτοῦντες τὸν ὅρον τοῦτον ν παράγοντες, εἶνε φανερόν· διότι ἑκάστη ἀνταλλαγὴ τῶν παραγόντων προξενεῖ μίαν ἀνταλλαγὴν εἰς ἑκατέραν τῶν μεταθέσεων, ἃς οἱ δεῖκται ἀποτελοῦσιν· ἑπομένως ἡ σχέσις (276) τῶν μεταθέσεων τούτων μένει ἡ αὐτή.

280. Ἕκαστος ὅρος τῆς ὁριζούσης ἔχει ὡς παράγοντα ἓν (καὶ μόνον ἓν) ἐκ τῶν στοιχείων ἑκάστης καθέτου γραμμῆς· διότι πρέπει νὰ σύγκειται ἐκ ν παραγόντων ἐκ διαφόρων καθέτων εἰλημμένων· εἶνε δὲ μόνον ν αἱ κάθετοι γραμμαί. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν ὁριζοντίων· ὥστε πᾶς ὅρος τῆς ὁριζούσης εἶνε τῆς μορφῆς

$$a_{1\alpha}\ a_{2\beta}\ a_{3\gamma}\ \dots\ a_{\nu\rho}$$

τῶν γραμμάτων α, β, γ . . . ρ παριστώντων τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3 . . . ν, καθ' οἱανδήποτε τάξιν γεγραμμένους.

281. Ἡ ἐκ τῶν ν^2 ἀριθμῶν συγκειμένη ὁρίζουσα (1) λέγεται ὁρίζουσα τοῦ ν βαθμοῦ· διότι πάντες οἱ ὅροι αὐτῆς ἔχουσι ν παράγοντας.

282. Ἡ ἁπλουστάτη τῶν ὁριζουσῶν εἶνε ἡ ὁρίζουσα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ἥτις κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν ἰσοῦται τῇ παραστάσει

$$a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

283. Ἡ τοῦ τρίτου βαθμοῦ ὁρίζουσα εἶνε τῆς μορφῆς

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

καὶ ἰσοῦται τῇ παραστάσει

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

284. Πάντες οἱ ὅροι τῆς ὁριζούσης προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πρώτου $a_{11}\ a_{22} \ldots a_{\nu\nu}$, ἐὰν οἱ δεύτεροι δεῖκται λάβωσι πάσας τὰς μεταθέσεις αὐτῶν· ἐπομένως τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶνε $1.2.3 \ldots \nu$.

Ἐὰν ἐν ὁριζούσῃ παραλειφθῶσι κάθετοί τινες γραμμαὶ καὶ ἰσάριθμοι ὁριζόντιαι, τὰ μένοντα στοιχεῖα ἀποτελοῦσιν ὁρίζουσαν μικροτέρου βαθμοῦ, ἥτις λέγεται ἐλάσσων τῆς πρώτης.

Ἐὰν παραλειφθῇ μία ὁριζοντία σειρὰ καὶ μία κάθετος, προκύπτει ἐλάσσων βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου, ἥτις λέγεται ἀντίστοιχος τοῦ κοινοῦ στοιχείου τῶν δύο σειρῶν.

Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν.

285. *Ἡ ὁρίζουσα δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν αἱ κάθετοι γραμμαὶ γίνωσιν ὁριζόντιαι καὶ αἱ ὁριζόντιαι κάθετοι, φυλασσομένης τῆς σχετικῆς αὐτῶν θέσεως· ἤτοι εἶνε*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{\nu 1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{\nu 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Διότι ἀμφότεραι αἱ ὁρίζουσαι αὗται σύγκεινται, ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἀμέσως φαίνεται, ἐκ τῶν αὐτῶν ὅρων καὶ μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

286. *Ἡ ὁρίζουσα ἀλλάσσει σημεῖον, ἐὰν δύο παράλληλοι γραμμαὶ (ὁριζόντιαι ἢ κάθετοι ἀμφότεραι) ἀντιμετατεθῶσιν.*

Ἔστωσαν α, β, γ, . . . τὰ στοιχεῖα τῆς λ ὁριζοντίας γραμμῆς (α τὸ πρῶτον, β τὸ δεύτερον καὶ καθεξῆς) καὶ Α, Β, Γ, . . . τὰ στοιχεῖα τῆς μ· ἔστω δὲ καί τις οἱοσδήποτε ὅρος τῆς ὁριζούσης (1), ὁ . . . β.Γ . . . ἔνθα οἱ παραλειφθέντες παράγοντες εἶνε στοιχεῖα τῶν

ἄλλων ὁριζοντίων γραμμῶν· ὁ ὅρος οὗτος θὰ εἶνε καὶ τῆς νέας ὁριζούσης (τῆς ἐκ τῆς ἀντιμεταθέσεως προκυπτούσης) ὅρος· ἀλλ' ἐν μὲν τῇ πρώτῃ τὸ σημεῖον αὐτοῦ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δεικτῶν τῆς θέσεως . . . λ2.μ3. . ., ἐν δὲ τῇ νέᾳ ὑπὸ τῶν . . . μ2.λ3 . . . ἐπειδὴ δὲ οἱ πρῶτοι δεῖκται ἀντιμετετέθησαν ἅπαξ, οἱ δὲ δεύτεροι εἶνε οἱ αὐτοί, ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι οὗτοι θὰ ἔχωσιν ἐναντίον σημεῖον· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἰσχύει διὰ πάντα ὅρον τῆς πρώτης ὁριζούσης, ἕπεται ὅτι αἱ δύο ὁρίζουσαι θὰ ἔχωσιν ἐναντίον σημεῖον.

Καὶ ὅταν ἀντιμεταλλάσσωνται δύο κάθετοι γραμμαί, ἡ ἀπόδειξις εἶνε προφανῶς ὁμοία.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \gamma' & \beta' & \alpha' \\ \gamma'' & \beta'' & \alpha'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \beta' & \gamma' & \alpha' \\ \beta'' & \gamma'' & \alpha'' \end{vmatrix}.$$

Ὡσαύτως εἶνε

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

287. *Ἡ ὁρίζουσα εἶνε μηδέν, ἐὰν δύο παράλληλοι γραμμαὶ* (ὁριζόντιαι ἢ κάθετοι) *εἶνε αἱ αὐταί.*

Διότι διὰ τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν δύο τούτων παραλλήλων γραμμῶν ἡ ὁρίζουσα προφανῶς μένει ἀμετάβλητος· κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἀλλάσσει σημεῖον· ἐὰν ἄρα παρασταθῇ διὰ P, θὰ ἔχωμεν

$$P = -P, \quad \text{ὅθεν} \quad 2P = 0 \quad \text{καὶ} \quad P = 0.$$

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

288. *Ἐὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς πολλαπλασιασθῶσι πάντα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ὁρίζουσα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Διότι ἕκαστος ὅρος τῆς ὁριζούσης ἔχει ἓν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς θεωρουμένης γραμμῆς, καὶ ἓν μόνον· ἑπομένως πάντες οἱ ὅροι τῆς ὁριζούσης πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 25 & 6 & 8 \\ 10 & 18 & 6 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 18 & 6 \end{vmatrix} = 5.3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 5.3.2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Ὡσαύτως εἶνε

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

289. *Ἐὰν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης καθέτου γραμμῆς, πλὴν τοῦ πρώτου a_{11}, γίνωσι 0, ἡ ὁρίζουσα γίνεται ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ στοιχείου τούτου ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ ν—1 βαθμοῦ, ἣν εὑρίσκομεν, παραλείποντες πάντα τὰ τῷ a_{11} ὁμόστοιχα στοιχεῖα· ἤτοι*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Διότι πᾶς ὅρος τῆς ὁριζούσης ἔχει ὡς παράγοντα ἓν τῶν στοιχείων τῆς πρώτης καθέτου· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἄλλα εἶνε 0, οἱ ταῦτα ἔχοντες ὅροι μηδενίζονται· ἑπομένως ἡ ὁρίζουσα ἀποτελεῖται ἐξ ὅρων ἐχόντων πάντων κοινὸν παράγοντα τὸ a_{11}, ἐὰν δὲ $a_{11}a_{2\sigma}a_{3\tau} \dots a_{\nu\pi}$ εἶνε ὅρος τις τῆς ὁριζούσης, τότε καὶ ἡ εἰρημένη ὁρίζουσα τοῦ ν—1 βαθμοῦ ἔχει τὸν ὅρον $a_{2\sigma}a_{3\tau} \dots a_{\nu\pi}$ καὶ μάλιστα μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον· καὶ τἀνάπαλιν· πᾶς ὅρος τῆς ὁριζούσης τοῦ ν—1 βαθμοῦ εὑρίσκεται ἐν τῇ θεωρουμένῃ ὁριζούσῃ πολλαπλασιασμένος ἐπὶ τὸν παράγοντα a_{11}· ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ἡ τεθεῖσα ἰσότης.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει προφανῶς καὶ ὅταν τῆς πρώτης ὁριζοντίας γραμμῆς μηδενισθῶσι πάντα τὰ στοιχεῖα, πλὴν τοῦ πρώτου a_{11}.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 45$$

290. *Καὶ γενικῶς, ἐὰν μηδενισθῶσι πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς τυχούσης γραμμῆς, πλὴν ἑνός, ἔστω τοῦ αλμ, ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται τῷ γι-*

νομένῳ τοῦ στοιχείου τούτου ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν, ἣν εὑρίσκομεν, παραλείποντες πάντα τὰ ὁμόστοιχα αὐτῷ, καὶ ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$.

Διότι διὰ λ—1 διαδοχικῶν ἀντιμεταθέσεων τῆς λ ὁριζοντίας γραμμῆς καὶ ἑκάστης τῶν ὑπεράνω αὐτῆς κειμένων ἄγονται τὰ στοιχεῖα αὐτῆς $a_{\lambda 1}\ a_{\lambda 2}\ \ldots\ a_{\lambda\mu}\ \ldots\ a_{\lambda\nu}$ εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα διὰ μ—1 διαδοχικῶν ἀντιμεταθέσεων τῆς μ καθέτου γραμμῆς καὶ τῶν προηγουμένων αὐτῇ ἄγονται τὰ στοιχεῖα αὐτῆς $a_{\lambda\mu}\ a_{1\mu}\ a_{2\mu}\ \ldots\ a_{\nu\mu}$ εἰς τὴν πρώτην θέσιν καὶ γίνεται πρῶτον τὸ στοιχεῖον $a_{\lambda\mu}$, χωρὶς νὰ ἀλλοιωθῇ τὸ παράπαν ἡ σχετικὴ θέσις τῶν μὴ ὁμοστοίχων αὐτῷ στοιχείων· ἐπειδὴ δὲ αἱ γινόμεναι ἀντιμεταθέσεις εἶνε λ+μ—2, ἡ ὁρίζουσα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$ καὶ γίνεται ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ $a_{\lambda\mu}$ ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$ καὶ ἐπὶ τὴν εἰρημένην ὁρίζουσαν τοῦ ν—1 βαθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 100.$$

291. *Ἐὰν ἐν ὁριζούσῃ ἕκαστον στοιχεῖον μιᾶς γραμμῆς* (ὁριζοντίας ἢ καθέτου) *πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν, ἣν συγκροτοῦσι τὰ μὴ ὁμόστοιχα αὐτῷ στοιχεῖα, καὶ τὰ μὲν γινόμενα τῶν στοιχείων ἀρτίας τάξεως ληφθῶσιν ὡς εἶνε, τὰ δὲ γινόμενα τῶν στοιχείων περιττῆς τάξεως ληφθῶσιν ἀντίθετα, τὸ ἐξ αὐτῶν προκύπτον ἄθροισμα εἶνε ἴσον τῇ δοθείσῃ ὁριζούσῃ.*

Ἀρτίαν μὲν τάξιν λέγω, ὅτι ἔχει στοιχεῖόν τι ἐν τῇ ὁριζούσῃ, ὅταν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ πρώτου στοιχείου a_{11} ὑπάρχουσιν ἄρτια τὸν ἀριθμὸν διαστήματα (ὁριζόντια ἢ κάθετα), περιττὴν δὲ ὅταν περιττά· εὐκόλως δὲ βλέπει τις, ὅτι τὸ στοιχεῖον $a_{\lambda\mu}$ εἶνε ἄρτιον, ἐὰν λ+μ εἶνε ἄρτιον, περιττὸν δέ, ἐὰν λ+μ εἶνε περιττόν.

Θεωρήσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς μυοστῆς καθέτου, ἤτοι τὰ $a_{1\mu}a_{2\mu}\ldots a_{\nu\mu}$· ἐπειδὴ πᾶς ὅρος τῆς ὁριζούσης P ἔχει ὡς παράγοντα ἓν καὶ μόνον ἓν ἐκ τούτων, ἕπεται ὅτι ἡ ὁρίζουσα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$P = a_{1\mu}T_{1\mu} + a_{2\mu}T_{2\mu} + \ldots + a_{\nu\mu}T_{\nu\mu},$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ $T_{1\mu}, T_{2\mu}, \ldots T_{\nu\mu}$ οὐδὲν τῶν στοιχείων $a_{1\mu}$

$a_{2\mu}, \ldots a_{\nu\mu}$ περιέχουσιν. Ἀλλ' ἂν ὑποτεθῶσι τὰ $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots a_{\nu\mu}$ πάντα 0 πλὴν ἑνός, τοῦ $a_{\lambda\mu}$, ἡ ὁρίζουσα γίνεται $a_{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}$. ἄρα $T_{\lambda\mu}$ (κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν) εἶνε ἡ ἐκ τῶν μὴ ὁμοστοίχων τῷ $a_{\lambda\mu}$ στοιχείων συγκροτουμένη ὁρίζουσα πολλαπλασιασμένη ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀναλύεται ἡ ὁρίζουσα τοῦ βαθμοῦ ν εἰς ν ὁριζούσας τοῦ βαθμοῦ ν—1· ἡ δὲ ἀνάλυσις αὕτη λέγεται *ἀνάπτυξις* τῆς ὁριζούσης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς ληφθείσης γραμμῆς.

Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ τοῦ + τὰς θέσεις τῶν στοιχείων τῆς ἀρτίας τάξεως καὶ διὰ τοῦ — τὰς θέσεις τῶν στοιχείων τῆς περιττῆς, σχηματίζομεν διὰ τὰς ὁριζούσας τοῦ β' καὶ γ' καὶ δ' βαθμοῦ τοὺς ἑξῆς πίνακας

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \alpha' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ a_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(6) - 3(6) + 8(-2) = -10.$$

292. *Ἐὰν ἕκαστον τῶν στοιχείων μιᾶς γραμμῆς εἶνε ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἡ ὁρίζουσα εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο ὁριζουσῶν, ἃς εὑρίσκομεν παραλείποντες πρῶτον μὲν τὰ πρῶτα μέρη τῶν στοιχείων εἶτα δὲ τὰ δεύτερα· ἤτοι*

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \xi_1+\eta_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \xi_2+\eta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \xi_\nu+\eta_\nu & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \xi_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \xi_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \xi_\nu & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \eta_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \eta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \eta_\nu & \cdot \end{vmatrix}$$

ὅπου τὰ διὰ στιγμῶν ὑποδεικνυόμενα στοιχεῖα μένουσιν ἀμετάβλητα. Διότι πᾶς ὅρος τῆς ὁριζούσης ἔχει ὡς παράγοντα ἓν καὶ μόνον ἓν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς θεωρουμένης γραμμῆς· ἑπομένως τίθεται ἡ ὁρίζουσα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(\xi_1+\eta_1)\Pi_1+(\xi_2+\eta_2)\Pi_2+\ \ldots\ +(\xi_\nu+\eta_\nu)\Pi_\nu$$

ὅπου τὰ Π σύγκεινται ἐκ τῶν διὰ στιγμῶν σημειωθέντων στοιχείων. Ἀλλ' ὁμοίως τίθενται καὶ αἱ εἰρημέναι δύο ὁρίζουσαι ὑπὸ τὴν μορφὴν

$(\xi_1\Pi_1+\xi_2\Pi_2+\ \ldots\ +\xi_\nu\Pi_\nu)$ καὶ $(\eta_1\Pi_1+\eta_2\Pi_2+\ \ldots\ +\eta_\nu\Pi_\nu)$

ὅθεν ἕπεται ἀμέσως ἡ πρότασις.

293. *Ἡ ὁρίζουσα μένει ἀμετάβλητος, ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς προστεθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς παραλλήλου γραμμῆς, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ.*

Διότι τότε ἡ ὁρίζουσα ἀναλύεται εἰς δύο ἄλλας, ὧν ἡ μὲν πρώτη εἶνε αὐτὴ ἡ θεωρουμένη, ἡ δὲ δευτέρα ἰσοῦται τῷ 0, ὡς ἔχουσα μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ κοινοῦ παράγοντος ρ δύο γραμμὰς τὰς αὐτάς.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & 13 & 14 \\ 1 & 8 & 9 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 13 & 0 \\ 1 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 1 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 5 & 9 & -1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 180.$$

Ἐφαρμογαὶ τῶν ὁριζουσῶν.

1) Λύσεις ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους.

294. Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} &a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\ \ldots\ +a_{1\nu}\chi_\nu=\beta_1\\ &a_{21}\chi_1+a_{22}\chi_2+\ \ldots\ +a_{2\nu}\chi_\nu=\beta_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{\nu 1}\chi_1+a_{\nu 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\nu\nu}\chi_\nu=\beta_\nu \end{aligned} \qquad (1)$$

ἔνθα ὁ μὲν πρῶτος δείκτης τῶν συντελεστῶν δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ἐξισώσεως, ὁ δὲ δεύτερος τὸν ἄγνωστον, ὃν πολλαπλασιάζει.

Αἱ ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν παρέχουσιν ἁπλουστάτην λύσιν τοῦ συστήματος τούτου· διότι δι' αὐτῶν εὑρίσκομεν εὐκόλως καταλλήλους πολλαπλασιαστάς, ἐφ' οὓς ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν ἕνα μόνον ἄγνωστον (ἢ καὶ μηδένα) περιέχουσαν· ἤτοι ἀπαλείφομεν διὰ μιᾶς τοὺς ν—1 ἀγνώστους· τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἡ ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, καθ' ἣν ἔχουσι θέσιν, συγκροτουμένη ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\nu}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\nu}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

(ἥτις λέγεται ὁρίζουσα τοῦ συστήματος) εἶνε διάφορος τοῦ 0· ἐὰν παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ Δ καὶ ἀναπτύξωμεν αὐτὴν κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς μυοστῆς καθέτου σειρᾶς, θὰ εἶνε

$$\Delta=a_{1\mu}\Delta_{1\mu}+a_{2\mu}\Delta_{2\mu}+\ \ldots\ +a_{\nu\mu}\Delta_{\nu\mu} \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις (1) κατὰ σειρὰν ἐπὶ $\Delta_{1\mu}$, $\Delta_{2\mu}$, $\Delta_{3\mu}$, . . . $\Delta_{\nu\mu}$ καὶ ἔπειτα προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\Delta.\chi_\mu=\beta_1\Delta_{1\mu}+\beta_2\Delta_{2\mu}+\ \ldots\ +\beta_\nu\Delta_{\nu\mu} \qquad (3)$$

Οἱ συντελεσταὶ τῶν λοιπῶν ἀγνώστων εἶνε 0. Τῷ ὄντι ὁ συντελεστὴς τοῦ χ_ρ εἶνε τὸ ἄθροισμα

$$a_{1\rho}\Delta_{1\mu}+a_{2\rho}\Delta_{2\mu}+\ \ldots\ +a_{\nu\rho}\Delta_{\nu\mu} \qquad (4)$$

τοῦτο δέ, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), προκύπτει ἐκ τῆς ὁριζούσης

Δ, ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῆς μυοστῆς καθέτου ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν στοιχείων τῆς ρ· ἀλλὰ τότε, ἂν εἶνε ρ διάφορον τοῦ μ, ἡ ὁρίζουσα μηδενίζεται (ὡς ἔχουσα δύο καθέτους σειρὰς τὰς αὐτάς).

Ἡ ἐξίσωσις (3) δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος· διότι δὲν δύνανται πάντες οἱ πολλαπλασιασταὶ $\Delta_{1\mu}$, $\Delta_{2\mu}\cdots$ νὰ εἶνε 0· ἐκ δὲ ταύτης ἕπεται ἡ τιμὴ τοῦ χ_μ

$$\chi_\mu = \frac{\beta_1\Delta_{1\mu} + \beta_2\Delta_{2\mu} + \ldots + \beta_\nu\Delta_{\nu\mu}}{\Delta} \qquad (3')$$

ὁ ἀριθμητὴς τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ χ_μ προκύπτει ἐκ τῆς ὁριζούσης Δ, ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῆς μυοστῆς καθέτου (ἤτοι οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου χ_μ) ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν δευτέρων μελῶν $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$· ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων δύνανται νὰ γραφῶσιν ἀμέσως, ἑκάστη ὡς πηλίκον δύο ὁριζουσῶν.

Εἶνε δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ ὑπὸ τῆς ἰσότητος (3′) διδόμεναι, ὅταν ὑποτεθῇ $\mu = 1, 2, \ldots \nu$, ἐπαληθεύουσι πάσας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ὅτι δὲ αὐταὶ μόνον αἱ τιμαὶ ἐπαληθεύουσι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων, ἐφάνη ἐκ τῶν εἰρημένων.

295. Τὴν λύσιν τοῦ συστήματος (1), ὅταν ἡ ὁρίζουσα αὐτοῦ διαφέρῃ τοῦ 0, δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν, ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὁρίζουσαν αὐτοῦ ἐπὶ χ_1 (ἐδ. 288), εὑρίσκομεν

$$\chi_1.\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\chi_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21}\chi_1 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu 1}\chi_1 & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης καθέτου τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα ἑκάστης τῶν λοιπῶν πολλαπλασιασμένα, ἐπὶ χ_2 τὰ τῆς δευτέρας καθέτου, ἐπὶ χ_3 τὰ τῆς τρίτης καὶ οὕτω καθεξῆς, εὑρίσκομεν, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἐξισώσεις (1),

$$\chi_1.\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1\nu} \\ \beta_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_\nu & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν ἀγνώστων.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα

$$5\chi+3\psi-z=1$$
$$3\chi-3\psi+2z=8$$
$$\chi+\psi-z=1$$

Ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶνε

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ χ εἶνε ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ψ εἶνε ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -40$$

Τέλος ὁ ἀριθμητὴς τοῦ z εἶνε

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -34$$

ὅθεν ἕπεται $\chi=\frac{10}{7}$, $\psi=-\frac{20}{7}$ καὶ $z=-\frac{17}{7}$.

296. Θεωρήσωμεν νῦν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ὁρίζουσα Δ τοῦ συστήματος (1) εἶνε 0. Ἐκ τῶν ἐλασσόνων, ἃς εὑρίσκομεν παραλείποντες ὁριζοντίας τινὰς σειρὰς καὶ ἰσαρίθμους καθέτους, ἐξάπαντος θὰ ὑπάρχῃ τις διάφορος τοῦ 0 (ἄλλως οἱ συντελεσταὶ a τῶν ἀγνώστων θὰ ἦσαν πάντες ἴσοι τῷ 0). Ἂς ὑποθέσωμεν γενικῶς, ὅτι πᾶσαι μὲν αἱ ἐλάσσονες, ἃς εὑρίσκομεν παραλείποντες ὀλιγωτέρας τῶν λ σειρὰς ὁριζοντίας καὶ ἰσαρίθμους καθέτους εἶνε 0, μία δὲ τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ἐλασσόνων, ἃς εὑρίσκομεν παραλείποντες λ σειρὰς ὁριζοντίας καὶ ἰσοπληθεῖς καθέτους, εἶνε διάφορος τοῦ 0· τὴν ὁρίζουσαν ταύτην καλοῦμεν *σημαντικὴν* ἐλάσσονα τῆς ὁριζούσης Δ. Οὐδὲν κωλύει νὰ γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις καὶ τοὺς ἀγνώστους κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε ἡ εἰρημένη ὁρίζουσα τοῦ βαθμοῦ ν—λ, ἡ τοῦ 0 διάφορος, νὰ εἶνε ἡ ἐκ τῶν συντελεστῶν

τῶν $\mu(=\nu-\lambda)$ πρώτων ἐξισώσεων καὶ τῶν μ πρώτων ἀγνώστων συγκροτουμένη

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$ ἣν παριστῶμεν διὰ E·

παραλείποντες τότε τὰς ἐξισώσεις ἀπὸ τῆς $\mu+1$ καὶ ἐφεξῆς καὶ μεταφέροντες τοὺς ὅρους, οἵτινες ἔχουσι τοὺς ἀγνώστους $\chi_{\mu+1}, \chi_{\mu+2}, \dots \chi_\nu$, εἰς τὰ δεύτερα μέλη, ἔχομεν τὸ σύστημα

$$(5)\quad \begin{aligned} &\alpha_{11}\chi_1+\alpha_{12}\chi_2+\dots+\alpha_{1\mu}\chi_\mu=\beta_1-\alpha_{1\mu+1}\chi_{\mu+1}-\dots-\alpha_{1\nu}\cdot\chi_\nu \\ &\alpha_{21}\chi_1+\alpha_{22}\chi_2+\dots+\alpha_{1\mu}\chi_\mu=\beta_2-\alpha_{2\mu+1}\chi_{\mu+1}-\dots-\alpha_{2\nu}\cdot\chi_\nu \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{\mu1}\chi_1+\alpha_{\mu2}\chi_2+\dots+\alpha_{\mu\mu}\chi_\mu=\beta_\mu-\alpha_{\mu,\mu+1}\chi_{\mu+1}-\dots-\alpha_{\mu\nu}\chi_\nu \end{aligned}$$

ἐξ οὗ ὁρίζονται ἐντελῶς οἱ ἄγνωστοι $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \dots \chi_\mu$ διὰ τῶν λοιπῶν, ὡς ἕπεται.

$$\begin{aligned} &E\chi_1=E_1-E_{1(\mu+1)}\chi_{\mu+1}-E_{1(\mu+2)}\chi_{\mu+2}-\dots-E_{1\nu}\chi_\nu \\ &E\chi_2=E-{}_2E_{2(\mu+1)}\chi_{\mu+1}-E_{2(\mu+2)}\chi_{\mu+2}-\dots-E_{2\nu}\chi_\nu \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &E\chi_\mu=E_\mu-E_{\mu(\mu+1)}\chi_{\mu+1}-E_{\mu(\mu+2)}\chi_{\mu+2}-\dots-E_{\mu\nu}\chi_\nu. \end{aligned}\quad (6)$$

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων προκύπτουσιν ἐκ τῆς ὁριζούσης E, καθ' ὃν τρόπον ἤδη ἐμάθομεν.

Ἑπομένως E_ρ εἶνε ἡ ὁρίζουσα E, εἰς ἣν ἀντικατεστάθησαν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου χ_ρ ὑπὸ τῶν $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_\mu$ κατὰ σειράν· τὸ δὲ $E_{\rho(\mu+\sigma)}$ εἶνε ἡ αὐτὴ ὁρίζουσα E, εἰς ἣν ἀντικατεστάθησαν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου χ_ρ ὑπὸ τῶν συντελεστῶν τοῦ $\chi_{\rho+\sigma}$.

Καὶ αἱ μὲν μ πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) ἐλύθησαν καὶ ἐπαληθεύονται ὑπὸ τῶν τιμῶν (6) τῶν ἀγνώστων $\chi_1\ \chi_2 \dots \chi_\mu$ οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ λοιποὶ $\chi_{\mu+1}, \dots \chi_\nu$· μένει δὲ νὰ ἴδωμεν, ἂν εἶνε δυνατὸν νὰ ἐπαληθεύωνται καὶ αἱ λοιπαὶ ἐξισώσεις.

Ἔστω μία ἐκ τούτων, ἡ τὴν τάξιν $\varkappa$ ἔχουσα $(\varkappa=\mu+1$, ἢ $\mu+2, \dots$ ἢ $\nu)$,

$$(\varkappa)\quad \alpha_{\varkappa1}\chi_1+\alpha_{\varkappa2}\chi_2+\dots+\alpha_{\varkappa\nu}\chi_\nu=\beta_\varkappa$$

καὶ ἂς ἐξετάσωμεν, ἂν δύναται αὕτη νὰ ἐπαληθεύηται, ὅταν ἀληθεύω-

σιν αἱ μ πρῶται (5)· τουτέστιν ἂν ὑπάρχωσι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\ \ldots\ +a_{1\nu}\chi_\nu=\beta_1\\
&a_{21}\chi_1+a_{22}\chi_2+\ \ldots\ +a_{2\nu}\chi_\nu=\beta_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{\mu 1}\chi_1+a_{\mu 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\mu\nu}\chi_\nu=\beta_\mu\\
&a_{\varkappa 1}\chi_1+a_{\varkappa 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\varkappa\nu}\chi_\nu=\beta_\varkappa.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀγνώστους τοὺς χ_1, χ_2 . . . χ_μ καὶ τὸν τυχόντα ἐκ τῶν λοιπῶν, ἔστω τὸν χ_σ($\sigma=\mu+1$, ἢ $\mu+2$, . . . ἢ ν)· ἐὰν τότε ἐπιχειρήσωμεν νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄγνωστον χ_σ, πρέπει κατὰ τὰ προειρημένα, νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων συγκροτουμένην ὁρίζουσαν

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\mu} & a_{1\sigma}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\mu} & a_{2\sigma}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \ldots & a_{\mu\mu} & a_{\mu\sigma}\\
a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \ldots & a_{\varkappa\mu} & a_{\varkappa\sigma}
\end{vmatrix}
$$

ἣν παριστῶμεν, συντομίας χάριν, διὰ τοῦ H, κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας καθέτου καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοὺς συντελεστὰς τῶν στοιχείων αὐτῆς· ἔπειτα δὲ νὰ προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη. Ἡ οὕτω προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (7)· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς αὐτῆς εἶνε ἡ ἐλάσσων E, ἥτις διαφέρει τοῦ 0.

Ἔστω $H=H_1.a_{1\sigma}+H_2.a_{2\sigma}+\ \ldots\ +H_\mu a_{\mu\sigma}+Ea_{\varkappa\sigma}$

τότε ἡ ὡς εἴρηται προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶνε

$$
\begin{aligned}
&H_1(a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\ \ldots\ +a_{1\nu}\chi_\nu-\beta_1)+\\
&+H_2(a_{21}\chi_2+a_{22}\chi_2+\ \ldots\ +a_{2\nu}\chi_\nu-\beta_2)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+H_\mu(a_{\mu 1}\chi_1+a_{\mu 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\mu\nu}\chi_\nu-\beta_\mu)+\\
&+E\,(a_{1\varkappa}\chi_1+a_{\varkappa 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\varkappa\nu}\chi_\nu-\beta_\varkappa)=0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη οὐδένα ἄγνωστον περιέχει· διότι οἱ συντελεσταὶ

πάντων τῶν ἀγνώστων εἶνε 0· καὶ ὄντως ἑκάστου τῶν $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_\mu$ συντελεστὴς εἶνε ὁρίζουσα ἔχουσα δύο καθέτους τὰς αὐτάς· ἑκάστου δὲ τῶν λοιπῶν συντελεστὴς εἶνε ἐλάσσων τις τῆς ὁριζούσης Δ τοῦ βαθμοῦ $\mu+1$, πᾶσαι δὲ αἱ ἐλάσσονες τῆς Δ, ὧν ὁ βαθμὸς ὑπερβαίνει τὸν μ, εἶνε ἐξ ὑποθέσεως 0· ὥστε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις καταντᾷ

$$H_1\beta_1+H_2\beta_2+\ \ldots\ H_\mu\beta_\mu+E\beta_\varkappa=0$$

ἢ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\mu} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\mu} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \ldots & a_{\mu\mu} & \beta_\mu \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \ldots & a_{\varkappa\mu} & \beta_\varkappa \end{vmatrix} =0 \qquad (9)$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ μ πρῶται ἐξισώσεις (5) καὶ ἡ εὑρεθεῖσα (9) ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ συστήματι (7), συνάγεται ὅτι, ἂν τὰ δεύτερα μέλη καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων πληρῶσι τὴν ἰσότητα (9), ἡ ἐξίσωσις $a_{\varkappa 1}\chi_1+a_{\varkappa 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\varkappa\nu}\chi_\nu=\beta_\nu$ ἐπαληθεύεται, ὅταν αἱ μ πρῶται ἐξισώσεις ἐπαληθεύωνται, ἤτοι ὅταν αἱ ἄγνωστοι $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_\mu$ ἔχωσι τὰς τιμὰς (6), τῶν λοιπῶν ἀγνώστων μενόντων ἐντελῶς ἀορίστων· ἂν ὅμως ἡ ἰσότης (9) δὲν ἀληθεύῃ, ἡ ἐξίσωσις

$$a_{\varkappa 1}\chi_1+a_{\varkappa 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\varkappa\nu}\chi_\nu=\beta_\varkappa$$

εἶνε ἀσυμβίβαστος πρὸς τὰς μ πρώτας· ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶνε ἀδύνατον.

Ἡ ἐξίσωσις (8) ἀληθεύει, ὅταν ἡ ἰσότης ἀληθεύῃ (9) (καὶ τότε μόνον), ἐὰν δὲ γραφῇ ὡς ἑξῆς

$$(a_{\varkappa 1}\chi_1+a_{\varkappa 2}\chi_2+\ldots+a_{\varkappa\nu}\chi_\nu-\beta_\nu)=-\frac{H_1}{E}(a_{11}\chi_1+\ \ldots\ +a_{1\nu}\chi_\nu-\beta_1)-$$

$$-\frac{H_2}{E}(a_{21}\chi_1+\ \ldots\ +a_{2\nu}\chi_\nu-\beta_2)-$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{H_\mu}{E}(a_{\mu 1}\chi_1+\ \ldots\ +a_{\mu\nu}\chi_\nu-\beta_\mu)$$

δεικνύει, ὅτι ἡ θεωρουμένη ἐξίσωσις $a_{\varkappa 1}\chi_1+\ \ldots\ +a_{\varkappa\nu}\chi_\nu-\beta_\varkappa$ προκύπτει ἐκ τῶν μ πρώτων ἐξισώσεων, ἐὰν αὗται προστεθῶσι κατὰ μέλη, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἀριθμούς τινας ὡρισμένους· ἑπομένως εἶνε ἀναγκαῖον ἀκολούθημα αὐτῶν.

Ἡ ὁρίζουσα (9), ἧς ὁ μηδενισμὸς ἐκφράζει τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἐπαρκῆ συνθήκην, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $a_{x1}\,\chi_1 + \ldots + a_{x\nu}\,\chi_\nu = \beta_x$ εἶνε ἀκολούθημα αὐτῶν, λέγεται *χαρακτηριστικὴ* τῆς ἐξισώσεως ταύτης.

297. Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται ὅτι

Τὸ σύστημα τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (1) *ὁρίζει ἐντελῶς τοὺς ἀγνώστους* $\chi_1\ \chi_2 \ldots \chi_\nu$, *ἐὰν ἡ ὁρίζουσα αὐτοῦ* Δ *διαφέρῃ τοῦ* 0· *καὶ τότε μόνον.*

Ἐὰν δὲ ἡ ὁρίζουσα Δ *εἶνε* 0, *τὸ σύστημα εἶνε ἢ ἀόριστον ἢ ἀδύνατον· καὶ ἀδύνατον μὲν εἶνε, ἂν τις τῶν χαρακτηριστικῶν ὁριζουσῶν εἶνε διάφορος τοῦ* 0· *ἀόριστον δέ, ἂν πᾶσαι εἶνε* 0.

Βαθμὸς τῆς ἀοριστίας αὐτοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων, οἵτινες μένουσιν ἀόριστοι· εἶνε δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἴσος τῷ ν—μ, ἔνθα μ εἶνε ὁ βαθμὸς τῆς σημαντικῆς ἐλάσσονος Ε.

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ἀοριστίας τὸ σύστημα ἔχει μ μόνον ἐξισώσεις ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων, αἱ δὲ λοιπαὶ αὐτοῦ ἐξισώσεις εἶνε ἀκολουθήματα ἀναγκαῖα τῶν μ πρώτων.

298. Ἐὰν οἱ γνωστοὶ ὅροι $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_\nu$ τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων εἶνε πάντες ἴσοι τῷ 0, αἱ ἐξισώσεις λέγονται *ὁμογενεῖς.*

Ἐφαρμόζοντες τὰ προειρημένα εἰς τὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις, φθάνομεν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα.

1) *Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα* Δ *τοῦ συστήματος τῶν ὁμογενῶν ἐξισώσεων διαφέρῃ τοῦ* 0, *αἱ μόναι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἵ ἐπαληθεύουσαι αὐτό, εἶνε*

$$\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 0 \ldots \chi_\nu = 0$$

2) *Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα* Δ *τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος εἶνε* 0, *τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον* (διότι πᾶσαι αἱ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι εἶνε 0) *καὶ βαθμὸν ἀοριστίας ἔχει τὴν διαφορὰν τοῦ βαθμοῦ τῆς ὁριζούσης* Δ *ὑπὲρ τὸν βαθμὸν τῆς σημαντικῆς ἐλάσσονος Ε.*

Λύσις ὁσωνδήποτε πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἐχουσῶν ὁσουσδήποτε ἀγνώστους.

299. Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\ \ldots\ +a_{1\rho}\chi_\rho=\beta_1\\
&a_{21}\chi_1+a_{22}\chi_2+\ \ldots\ +a_{2\rho}\chi_\rho=\beta_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{\nu 1}\chi_1+a_{\nu 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\nu\rho}\chi_\rho=\beta_\nu.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

αἵτινες ἔχουσι ρ ἀγνώστους τοὺς $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_\rho$.

Ἐπειδὴ ἡ περίπτωσις ν=ρ ἐξητάσθη ἤδη, μένουσι πρὸς ἐξέτασιν αἱ ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

1) Ἐὰν οἱ ἄγνωστοι εἶνε περισσότεροι τῶν ἐξισώσεων, ἤτοι ἐὰν ρ>ν.

300. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν μία ἐκ τῶν ὁριζουσῶν τοῦ ν βαθμοῦ, αἵτινες σχηματίζονται ἐκ τῶν συντελεστῶν, καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν (διὰ τῆς παραλείψεως ρ—ν ἀγνώστων), εἶνε διάφορος τοῦ 0, τὸ σύστημα (10) λύεται πρὸς τοὺς ν ἀγνώστους, ὧν οἱ συντελεσταὶ σχηματίζουσι τὴν ὁρίζουσαν ταύτην, καὶ ἐπαληθεύεται, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ λοιποὶ ρ—ν ἄγνωστοι· ἤτοι τότε τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον καὶ βαθμὸν ἀοριστίας ἔχει ρ—ν.

Καὶ γενικῶς, ἂν ἐκ τῶν συντελεστῶν, τῶν ἀγνώστων, καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν, εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσιν ὁρίζουσαι διάφοροι τοῦ 0 μόνον μέχρι τῆς τάξεως μ, ἤτοι, ἂν μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ὁριζουσῶν τοῦ μ βαθμοῦ, αἵτινες σχηματίζονται ἐκ τῶν συντελεστῶν μ ἀγνώστων εἰς μ ἐξισώσεις, καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν, εἶνε διάφορος τοῦ 0, πᾶσαι δὲ αἱ ὁρίζουσαι ἀνωτέρου βαθμοῦ, αἱ δυνάμεναι νὰ σχηματισθῶσιν ἐκ τῶν συντελεστῶν (καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν) εἶνε 0, ἡ ὁρίζουσα ἐκείνη λέγεται καὶ πάλιν *σημαντικὴ* ὁρίζουσα καὶ αἱ μὲν μ ἐξισώσεις, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἀπαρτίζουσι τὴν σημαντικὴν ὁρίζουσαν, λύονται πρὸς τοὺς μ ἀγνώστους καὶ ἐπαληθεύονται, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ ἐπίλοιποι ρ—μ ἄγνωστοι· ἀλλ' ἵνα ἐπαληθεύωνται καὶ αἱ παραλειφθεῖσαι ν—μ ἐξισώσεις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μηδενίζωνται αἱ ν—μ χαρακτηριστικαὶ ὁρί-

ζουσαι, ἂς εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σημαντικῆς διὰ τῆς προσκρτήσεως τῶν γνωστῶν ὅρων καὶ τῶν συντελεστῶν ἑκάστης τῶν ν—μ ἐξισώσεων· ἤτοι ἂν ἡ σημαντικὴ ὁρίζουσα εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

πρέπει νὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} & \beta_\mu \\ a_{\kappa 1} & a_{\kappa 2} & \cdots & a_{\kappa\mu} & \beta_\kappa \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad \kappa = \mu+1,\ \mu+2, \ldots \nu \cdot$$

Ἐὰν αἱ ν—μ αὗται χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι εἶνε πᾶσαι ἴσαι τῷ 0, τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον καὶ βαθμὸν ἀοριστίας ἔχει τὸν ρ—μ· ἀλλ' ἐὰν μὴ συμβαίνῃ τοῦτο, τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον· ἤτοι αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ εἶνε ἀσυμβίβαστοι πρὸς ἀλλήλας

2) Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις εἶνε περισσότεραι τῶν ἀγνώστων, ἤτοι ἂν ν > ρ.

301. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ὁριζουσῶν τοῦ ρ βαθμοῦ, τῶν δυναμένων νὰ σχηματισθῶσιν ἐκ τῶν συντελεστῶν διὰ τῆς παραλείψεως ν—ρ ἐξισώσεων, εἶνε διάφορος τοῦ 0, αἱ ρ ἐξισώσεις, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἀπαρτίζουσι τὴν ὁρίζουσαν ταύτην, λύονται πρὸς τὰς ρ ἀγνώστους καὶ ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὰς τιμὰς αὐτῶν· ἀλλ' ἵνα τότε αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύωσι καὶ τὰς ὑπολοίπους ν—ρ ἐξισώσεις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μηδενίζωνται πᾶσαι αἱ ν—ρ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι, αἱ πρὸς τὰς ν—ρ ταύτας ἐξισώσεις ἀντιστοιχοῦσαι· ἤτοι ἂν εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} \end{vmatrix} \text{ διάφορος τοῦ } 0,$$

πρέπει νὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & \beta_\rho \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \cdots & a_{\varkappa\rho} & \beta_\varkappa \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad \varkappa = \rho+1,\ \rho+2, \ldots \nu.$$

Καὶ γενικῶς, ἂν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν, εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσιν ὁρίζουσαι διάφοροι τοῦ 0 μόνον μέχρι τῆς τάξεως μ, ἤτοι ἂν μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ὁριζουσῶν, αἵτινες δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἐκ τῶν συντελεστῶν μ ἀγνώστων ἐν μ ἐξισώσεσιν, εἶνε διάφορος τοῦ 0, πᾶσαι δὲ αἱ ἀνωτέρου βαθμοῦ ὁρίζουσαι, αἱ ἐκ τῶν συντελεστῶν (κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν) δυνάμεναι νὰ σχηματισθῶσιν, εἶνε 0, ἡ ὁρίζουσα ἐκείνη λέγεται *σημαντική*, καὶ αἱ μὲν μ ἐξισώσεις, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἀπαρτίζουσι τὴν σημαντικὴν ὁρίζουσαν, λύονται πρὸς τὰς μ ἀγνώστους καὶ ἐπαληθεύονται, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ ἐπίλοιποι ρ—μ ἄγνωστοι· ἀλλ' ἵνα ἐπαληθεύωνται καὶ αἱ λοιπαὶ ν—μ ἐξισώσεις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μηδενίζωνται αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντίστοιχοι ν—μ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι· ἤτοι ἂν ἡ σημαντικὴ ὁρίζουσα εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} & \beta_\mu \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \cdots & a_{\varkappa\mu} & \beta_\varkappa \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad \varkappa = \mu+1,\ \mu+2, \ldots \nu.$$

Ἐὰν πᾶσαι αὗται αἱ ν—μ ὁρίζουσαι εἶνε ἴσαι τῷ 0, τὸ σύστημα ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τῶν μ ἀγνώστων, τῶν λοιπῶν ρ—μ μενόντων ἐντελῶς ἀορίστων· ἀλλ' ἐάν τις ἐκ τῶν ὁριζουσῶν τούτων δὲν εἶνε 0, αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶνε ἀσυμβίβαστοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἀπαλοιφὴ ν—1 ἀγνώστων μεταξὺ ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

302. Ἐκ ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, περιεχουσῶν ν—1 ἀγνώστους, προκύπτει πάντοτε διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ν—1 ἀγνώστων μία τοὐλάχιστον ἰσότης τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν συνδέουσα, ἥτις, κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα, ἐκφράζει τὸν ὅρον, ὑπὸ τὸν ὁποῖον αἱ ἐξισώσεις συμβιβάζονται πρὸς ἀλλήλας.

Διότι ἔστωσαν αἱ ν ἐξισώσεις

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\ \ldots\ +a_{1,\nu-1}\chi_{\nu-1}+a_{1\nu}=0\\
&a_{21}\chi_1+a_{22}\chi_2+\ \ldots\ +a_{2,\nu-1}\chi_{\nu-1}+a_{2\nu}=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{\nu 1}\chi_1+a_{\nu 2}\chi_2+\ \ldots\ +a_{\nu,\nu-1}\chi_{\nu-1}+a_{\nu\nu}=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Ἂν μία ἐκ τῶν ν ὁριζουσῶν τοῦ ν—1 βαθμοῦ, ἃς σχηματίζουσιν οἱ συντελεσταὶ τῶν ν—1 ἀγνώστων, ὅταν παραλειφθῇ μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, εἶνε διάφορος τοῦ 0, αἱ ν—1 ἄγνωστοι ὁρίζονται ἐντελῶς ἐκ τῶν ν—1 ἐξισώσεων, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἀπαρτίζουσι τὴν ὁρίζουσαν ἐκείνην· ἵνα δὲ ἡ μένουσα ἐξίσωσις ἐπαληθεύηται ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μηδενίζηται ἡ ἀντίστοιχος χαρακτηριστικὴ ὁρίζουσα, ἥτις εἶνε

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\nu}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\nu}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu\nu}
\end{vmatrix}=0 \tag{12}
$$

303. Ἀλλ' ἂν πᾶσαι αἱ ὁρίζουσαι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ μ, αἱ ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων (κατὰ τάξιν ἣν ἔχουσι) συγκροτούμεναι εἶνε 0, μία δὲ τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ὁριζουσῶν τοῦ βαθμοῦ μ διαφέρῃ τοῦ 0, αἱ μ ἐξισώσεις, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἀπαρτίζουσι τὴν ὁρίζουσαν ἐκείνην, ὁρίζουσι τοὺς μ ἀγνώστους καὶ ἐπαληθεύονται, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ λοιποὶ ν—1—μ ἄγνωστοι· ἀλλ' ἵνα καὶ αἱ λοιπαὶ ν—μ ἐξισώσεις ἐπαληθεύωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, κατὰ τὰ προειρημένα, νὰ μηδενίζωνται αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ν—μ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι· ἤτοι ἂν ἡ σημαντικὴ ὁρίζουσα εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot\cdot & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot\cdot & a_{2\mu} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdot\cdot\cdot & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot\cdot & a_{1\mu} & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot\cdot & a_{2\mu} & a_{2\nu} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdot\cdot\cdot & a_{\mu\mu} & a_{\mu\nu} \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \cdot\cdot\cdot & a_{\varkappa\mu} & a_{\varkappa\nu} \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad \varkappa = \mu+1,\ \mu+2, \cdot\cdot\cdot \nu.$$

Ἐὰν αἱ $\nu-\mu$ αὗται ὁρίζουσαι εἶνε 0, τὸ σύστημα (11) ἐπαληθεύεται καὶ αἱ $\nu-1-\mu$ ἐπίλοιποι ἄγνωστοι μένουσιν ἐντελῶς ἀόριστοι· εἰ δὲ μή, εἶνε ἀδύνατον. Αἱ ἰσότητες ἄρα (13) ἐκφράζουσι τοὺς ὅρους, ὑπὸ τοὺς ὁποίους τὸ δοθὲν σύστημα ἐπαληθεύεται, μενόντων τῶν $\mu-1-\nu$ ἀγνώστων ἐντελῶς ἀορίστων.

304. Ὅταν ὑπάρχωσι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων $\chi_1\ \chi_2 \cdot\cdot\cdot \chi_{\nu-1}$ ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα (11), εἴτε ἐντελῶς ὡρισμένοι εἶνε οἱ ἄγνωστοι, εἴτε μένουσί τινες τούτων ἀόριστοι, πάντοτε ἡ ὁρίζουσα (12) εἶνε 0, διότι προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων (11), ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοὺς συντελεστὰς τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας καθέτου ἐν τῇ αὐτῇ ὁριζούσῃ καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα κατὰ μέλη· διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης αὕτη (12) λέγεται, ὅτι προκύπτει ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν $\nu-1$ ἀγνώστων μεταξὺ τῶν ν ἐξισώσεων.

305. Ἐὰν ζητῆται τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων $\chi_1\ \chi_2 \cdot\cdot\cdot \chi_{\nu-1}$ (ὅταν αἱ τιμαὶ αὐτῶν ὁρίζωνται ἐντελῶς ὑπὸ τῶν $\nu-1$ πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (11)) εἰς τὴν νυοστὴν ἐξίσωσιν, παριστῶμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διὰ τοῦ ρ καὶ γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς ἑξῆς

$$a_{\nu 1}\chi_1 + a_{\nu 2}\chi_2 + \cdot\cdot\cdot + a_{\nu,\nu-1}\chi_{\nu-1} + a_{\nu\nu} - \rho = 0$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν τιμῶν τῶν $\nu-1$ ἀγνώστων $\chi_1\ \chi_2 \cdot\cdot\cdot \chi_{\nu-1}$ (ἃς δίδουσιν αἱ λοιπαὶ) θὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot\cdot & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot\cdot & a_{2\nu} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdot\cdot\cdot & a_{\nu\nu} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

ἄρα $$\Delta = \rho . \delta$$

καὶ $$\rho = \frac{\Delta}{\delta}$$

ἔνθα εἶνε

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\nu-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\nu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu-1,1} & a_{\nu-1,2} & \cdots & a_{\nu-1,\nu-1} \end{vmatrix}$$

306. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, ἂν μόνον αἱ μ πρῶται ἐξισώσεις λύωνται πρὸς τοὺς μ ἀγνώστους $\chi_1\ \chi_2\ \cdots\ \chi_\mu$, οἱ δὲ λοιποὶ ἄγνωστοι μένωσιν ἀόριστοι, τὸ ἐξαγόμενον ρ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων $\chi_1\ \chi_2\ \cdots\ \chi_\mu$ εἰς μίαν τῶν λοιπῶν ἐξισώσεων, ἔστω εἰς τὴν

$$a_{\kappa 1}\chi_1 + a_{\kappa 2}\chi_2 + \cdots + a_{\kappa,\nu-1}\chi_{\nu-1} + a_{\kappa\nu} = 0$$

εἶνε $$\rho = \frac{\Delta_\kappa}{\Sigma}$$

ἔνθα Δ_κ εἶνε ἡ χαρακτηριστικὴ ὁρίζουσα, ἡ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντίστοιχος, καὶ Σ ἡ σημαντικὴ ὁρίζουσα.

Πρὸς ἐφαρμογὴν ἔστωσαν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις

$$2\omega\chi - 3\psi + 7 = 0$$
$$5\chi - 6\omega\psi - 2 = 0$$
$$\chi - \psi - 3\omega = 0$$

περιέχουσαι τὰς τρεῖς ἀγνώστους χ, ψ, ω· πρὸς λύσιν αὐτῶν ἀπαλείφομεν τὰς δύο ἀγνώστους χ, ψ καὶ εὑρίσκομεν

$$\begin{vmatrix} 2\omega, & -3, & 7 \\ 5 & -6\omega, & -2 \\ 1 & -1, & -3\omega \end{vmatrix} = 0 = 36\omega^3 - 7\omega - 29.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἣν ἡ ἄγνωστος ω πρέπει νὰ πληροῖ, ἔχει τὴν ῥίζαν 1, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ διὰ $\omega - 1$, εὑρίσκονται αἱ λοιπαὶ δύο ῥίζαι αὐτῆς, $-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{3}\sqrt{5}$. Εἰσάγοντες ἑκάστην τῶν ῥιζῶν τούτων εἰς τὸ δοθὲν σύστημα, εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν χ, ψ.

Ἀνακεφαλαίωσις.

307. Συνοψίζοντες πάντα τὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων εἰρημένα, βλέπομεν, ὅτι, ἂν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν, σχηματίζωνται ὁρίζουσαι διάφοροι τοῦ μηδενὸς μόνον μέχρι τοῦ βαθμοῦ μ, ἀνωτέρου δὲ μηδεμία, αἱ μ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος λύονται πρὸς τοὺς μ ἀγνώστους, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἀπαρτίζουσι τὴν ὁρίζουσαν ἐκείνην. Ἑκάστη δὲ τῶν λοιπῶν ν—μ ἐξισώσεων ἢ εἶνε ἀσυμβίβαστος πρὸς τὰς μ ἐκείνας ἐξισώσεις (ὅτε τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον) ἢ ἀναγκαῖον αὐτῶν ἀκολούθημα· καὶ ἂν τὸ σύστημα εἶνε δυνατὸν (ὅτε μηδενίζονται αἱ ν—μ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι) οἱ λοιποὶ ρ—μ ἄγνωστοι αὐτοῦ ἔχουσιν ὅλως αὐθαιρέτους τιμάς.

Ἀπαλοιφὴ ἑνὸς ἀγνώστου ἐκ δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων.

308. Ἐὰν αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} &a_0+a_1\psi+a_2\psi^2+\ \ldots\ +a_\mu\psi^\mu=0 \\ &\beta_0+\beta_1\psi+\beta_2\psi^2+\ \ldots\ +\beta_\nu\psi^\nu=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

αἱ τὸν ἄγνωστον ψ περιέχουσαι, ἔχωσι κοινήν τινα λύσιν, τουτέστιν ἂν τὰ δύο πολυώνυμα $a_0+a_1\psi+\ \ldots\ +a_\mu\psi^\mu$ καὶ $\beta_0+\beta_1\psi+\ \ldots\ +\beta_\nu\psi^\nu$, ἅτινα παριστῶ διὰ $\varphi(\psi)$ καὶ $f(\psi)$, ἔχωσι κοινόν τινα πρωτοβάθμιον παράγοντα, οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν συνδέονται πρὸς ἀλλήλους διά τινος σχέσεως, ἣν εὑρίσκομεν ὡς ἀκολούθως· πολλαπλασιάζομεν τὸ μὲν πρῶτον πολυώνυμον διαδοχικῶς ἐπὶ $1, \psi, \psi^2 \ldots \psi^{\nu-1}$, τὸ δὲ δεύτερον ἐπὶ $1, \psi, \psi^2 \ldots \psi^{\mu-1}$. οὕτως ἔχομεν τὰς ἑπομένας $\mu+\nu$ ταυτότητας

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{rl} \varphi(\psi)= & a_0+a_1\psi+a_2\psi^2+\ \ldots\ +a_\mu\psi^\mu \\ \psi\,\varphi(\psi)= & a_0\psi+a_1\psi^2+\ \ldots\ +a_{\mu-1}\psi^\mu+a_\mu\psi^{\mu+1} \\ \psi^2\varphi(\psi)= & a_0\psi^2+\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \psi^{\nu-1}\varphi(\psi)= & a_0\psi^{\nu-1}+\ \ldots\ \ldots \\ f(\psi)= & \beta_0+\beta_1\psi+\beta_2\psi^2+\ \ldots\ +\beta_\nu\psi^\nu \\ \psi\,f(\psi)= & \beta_0\psi+\beta_1\psi^2+\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \psi^{\mu-1}f(\psi)= & \beta_0\psi^\mu+\ \ldots \end{array}\right.$$

ἐξ ὧν διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν $\psi, \psi^2, \ldots \psi^{\mu+\nu-1}$ προκύπτει ἡ ταύτότης

$$\begin{vmatrix} \varphi(\psi)-\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ \psi\,\varphi(\psi) & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ \psi^2\varphi(\psi) & & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \psi^{\nu-1}\varphi(\psi) & & \ldots\ldots\ldots & & \\ f(\psi)-\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots \\ \psi\,f(\psi) & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \psi^{\mu-1}f(\psi) & & \ldots\ldots\ldots & & \end{vmatrix} = 0$$

ἤτοι

$$\begin{vmatrix} \varphi(\psi) & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ \psi\,\varphi(\psi) & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ \psi^2\varphi(\psi) & & \ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \psi^{\nu-1}\varphi(\psi) & \ldots\ldots\ldots & & & \\ f(\psi) & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots \\ \psi\,f(\psi) & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots \\ \psi^2 f(\psi) & & \beta_0 & \beta_1 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \psi^{\mu-1}f(\psi) & \ldots\ldots\ldots & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots \\ & & \alpha_0 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots \\ & \beta_0 & \beta_1 & \ldots \\ & & \beta_0 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots & & & \end{vmatrix}$$

καὶ ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν ὁρίζουσαν τοῦ πρώτου μέλους κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης καθέτου, καὶ παραστήσωμεν τὴν ὁρίζουσαν τοῦ δευτέρου μέλους, τὴν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν δύο πολυωνύμων συγκροτουμένην, διὰ τοῦ R, θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(\psi)\ p(\psi) + f(\psi)\ q(\psi) = \mathrm{R}$$

ἔνθα $p(\psi)$ καὶ $q(\psi)$ εἶνε πολυώνυμα ἀκέραια τοῦ ψ, βαθμοῦ τὸ πλεῖστον $\nu-1$ τὸ $p(\psi)$ καὶ $\mu-1$ τὸ $q(\psi)$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι, ἂν μὴ οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῶν δύο πολυωνύμων πληρῶσι τὴν ἰσότητα $\mathrm{R}=0$, οὐδεμίαν κοινὴν ῥίζαν ἔχουσι τὰ πολυώνυμα $\varphi(\psi)$ καὶ $f(\psi)$· ἀλλ' ἂν εἶνε $\mathrm{R}=0$, τὰ δύο πολυώνυμα ἔχουσι κοινόν τινα παράγοντα· διότι ἕκαστος τῶν μ πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ $\varphi(\psi)$ θὰ εἶνε παράγων ἢ τοῦ $f(\psi)$ ἢ τοῦ $q(\psi)$, τὸ δὲ $q(\psi)$, βαθμοῦ ὂν $\mu-1$ τὸ πλεῖστον, ἔχει τὸ πολὺ $\mu-1$

πρωτοβαθμίους παράγοντας· διὰ τοῦτο εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων τοῦ $\varphi(\psi)$ θὰ εἶνε ἐξάπαντος παράγων καὶ τοῦ $f(\psi)$· ὥστε *ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη, ἵνα τὰ δύο πολυώνυμα* $\varphi(\psi)$ *καὶ* $f(\psi)$ *ἔχωσι κοινήν τινα ῥίζαν, εἶνε* $R=0$.

309. Ἡ ἰσότης $R=0$ εἶνε τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ ἀγνώστου ψ μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων $\varphi(\psi)=0$ καὶ $f(\psi)=0$, λέγεται δὲ *συναρμόζουσα* τῶν δύο ἐξισώσεων· διότι, ταύτης πληρουμένης, συμβιβάζονται αἱ δύο ἐξισώσεις.

310. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος (ἢ τῶν κοινῶν, ἂν ὦσι περισσότεροι τοῦ ἑνός), παρατηροῦμεν ὅτι, ἐκ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων (2) ἂν παραλειφθῇ ἡ τελευταία καὶ ἀπαλειφθῶσιν ἐκ τῶν ἄλλων $\mu+\nu-1$ ἐξισώσεων αἱ δυνάμεις ψ^2, ψ^3, ψ^4 . . . $\psi^{\mu+\nu-1}$, προκύπτει ἡ ταὐτότης

$$\varphi(\psi)\ p_1(\psi)+f(\psi)\ q_1(\psi)=A_1\psi+B_1 \qquad (3)$$

ἔνθα $p_1(\psi)$ καὶ $q_1(\psi)$ εἶνε πολυώνυμα ἀκέραια τοῦ ψ, ὧν ὁ βαθμὸς τὸ τὸ πλεῖστον εἶνε $\mu-2$ τοῦ $q_1(\psi)$ (διότι παρελείφθη ἡ τελευταία ἐξίσωσις, ἥτις ἔχει τὸ $\psi^{\mu-1}f(\psi)$) καὶ $\nu-2$ τοῦ $p_1(\psi)$· (διότι, ἂν τὸ $p_1(\psi)$ ἦτο τοῦ βαθμοῦ $\nu-1$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) θὰ ἦτο τοῦ βαθμοῦ $\mu+\nu-1$) τὰ δὲ A_1 καὶ B_1 εἶνε ὁρίζουσαι ἐκ τῶν συντελεστῶν συγκροτούμεναι.

Ἐπίσης, ἂν παραλείψωμεν τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις (2) καὶ μεταξὺ τῶν λοιπῶν $\mu+\nu-2$ ἀπαλείψωμεν τὰς δυνάμεις ψ^3, ψ^4 ... $\psi^{\mu+\nu-1}$, εὑρίσκομεν τὴν ταὐτότητα

$$\varphi(\psi)\ p_2(\psi)+f(\psi)\ q_2(\psi)=A_2\psi^2+B_2\psi+\Gamma_2 \qquad (4)$$

ἔνθα $p_2(\psi)$ εἶνε τὸ πλεῖστον βαθμοῦ $\nu-3$ καὶ $q_2(\psi)$ τοῦ βαθμοῦ $\mu-3$· τὰ δὲ A_2, B_2, Γ_2 εἶνε ὁρίζουσαι ἐκ τῶν συντελεστῶν ἀπαρτιζόμεναι.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ

$$\varphi(\psi)\ p_3(\psi)+f(\psi)\ q_3(\psi)=A_3\psi^2+B_3\psi^3+\Gamma_3\psi+\Delta_3 \qquad (5)$$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν ἄρα τὰ πολυώνυμα ἔχωσιν ἕνα μόνον πρωτοβάθμιον παράγοντα κοινόν, οὗτος θὰ εἶνε ὁ $A_1\psi+B_1$· ἐὰν δὲ ἔχωσι δύο κοινοὺς (ὅτε ἐξ ἀνάγκης εἶνε $A_1=B_1=0$· διότι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ κοινοῦ δευτεροβαθμίου παράγοντος τῶν $\varphi(\psi)$ καὶ $f(\psi)$), οὗτοι εἶνε οἱ τοῦ τριωνύμου $A_2\psi^2+B_2\psi+\Gamma_2$· ἐὰν τρεῖς, οὗτοι εἶνε οἱ τοῦ πολυωνύμου $A_3\psi^3+B_3\psi^2+\Gamma_3\psi+\Delta_3$· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Πολλαπλασιασμὸς τῶν ὁριζουσῶν.

311. Θεωρήσωμεν, χάριν συντομίας, δύο ὁριζούσας τοῦ τρίτου βαθμοῦ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \epsilon_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \epsilon_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \epsilon_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \delta$$

Ἐὰν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \alpha_1 X + \epsilon_1 \Psi + c_1 Z &= 0 \\ \alpha_2 X + \epsilon_2 \Psi + c_2 Z &= 0 \\ \alpha_3 X + \epsilon_3 \Psi + c_3 Z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

θέσωμεν

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 \chi + \alpha_2 \psi + \alpha_3 z \\ \Psi &= \beta_1 \chi + \beta_2 \psi + \beta_3 z \\ Z &= \gamma_1 \chi + \gamma_2 \psi + \gamma_3 z \end{aligned} \tag{2}$$

εὑρίσκομεν διὰ τοὺς ἀγνώστους χ, ψ, z τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} [\alpha_1\alpha_1]\chi + [\alpha_1\alpha_2]\psi + [\alpha_1\alpha_3] z &= 0 \\ [\alpha_2\alpha_1]\chi + [\alpha_2\alpha_2]\psi + [\alpha_2\alpha_3] z &= 0 \\ [\alpha_3\alpha_1]\chi + [\alpha_3\alpha_2]\psi + [\alpha_3\alpha_3] z &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ὅπου $[\alpha_1\alpha_1]$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1\alpha_1 + \epsilon_1\beta_1 + c_1\gamma_1$· καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως. Τοῦ συστήματος τούτου ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} [\alpha_1\alpha_1], & [\alpha_1\alpha_2], & [\alpha_1\alpha_3] \\ [\alpha_2\alpha_1], & [\alpha_2\alpha_2], & [\alpha_2\alpha_3] \\ [\alpha_3\alpha_1], & [\alpha_3\alpha_2], & [\alpha_3\alpha_3] \end{vmatrix} \tag{4}$$

μηδενίζεται, ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν θεωρουμένων μηδενισθῇ, οἱασδήποτε οὔσης τῆς ἄλλης. Διότι, ἂν μὲν εἶνε $\delta = 0$, τὸ σύστημα (2) ἔχει ἀπειροπληθεῖς λύσεις (ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν λύσιν $X=0$, $\Psi=0$, $Z=0$ τοῦ πρώτου), ἂν δὲ εἶνε $\delta \gtrless 0$, ἀλλὰ $\Delta = 0$, τὸ σύστημα (1) ἔχει ἀπειροπληθεῖς λύσεις, ἄρα καὶ τὸ σύστημα (2) ἔχει ἐπίσης ἀπειροπληθεῖς λύσεις, μίαν δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν X Ψ Z· ἂν ὅμως εἶνε ἀμφότεραι αἱ ὁρίζουσαι διάφοροι τοῦ 0, ἡ μόνη λύσις ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων (1) καὶ (2) εἶνε $X=0$, $\Psi=0$, $Z=0$, $\chi=0$, $\psi=0$, $z=0$. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ ὁρίζουσα (4) μηδενίζεται, ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν ὁριζουσῶν δ ἢ Δ μηδενισθῇ καὶ τότε μόνον. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι ἡ ὁρίζουσα (4) περιέχει ὡς παράγοντας τὰς δύο πρώτας. Παρατη-

ροῦντες δὲ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο ὁριζουσῶν εἶνε ἰσοβάθμιον τῇ ὁριζούσῃ (4) ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν γραμμάτων, ἅτινα περιέχουσι, συνάγομεν, ὅτι τὰ δύο ταῦτα δὲν δύνανται νὰ διαφέρωσιν ἢ κατὰ ἀριθμητικόν τινα παράγοντα· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὅρων εὑρίσκεται ἐν τῇ ὁριζούσῃ (4) ἔχον τὸν αὐτὸν συντελεστήν· ἐνταῦθεν συνάγομεν ὅτι ἡ ὁρίζουσα αὕτη εἶνε τὸ γινόμενον τῶν θεωρουμένων ὁριζουσῶν. Στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης ταύτης εἶνε τὰ ἀθροίσματα τῶν γινομένων, ἅτινα λαμβάνομεν πολλαπλασιάζοντες κατὰ τὰ ὁμοταγῆ στοιχεῖα ἑκάστην ὁριζοντίαν γραμμὴν τῆς μιᾶς ἐπὶ ἑκάστην τῆς ἄλλης· φανερὸν δέ, ὅτι τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ὁριζουσῶν τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ.

312. Ἐὰν οἱ βαθμοὶ τῶν ὁριζουσῶν εἶνε διάφοροι, δύναται ἡ μικροτέρου βαθμοῦ ὁρίζουσα νὰ παρασταθῇ ὡς ὁρίζουσα ἰσοβάθμιος τῇ λοιπῇ καὶ νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός· ἔστω

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1\alpha+\gamma_1\beta, & \beta_1\gamma+\gamma_1\delta \\ \alpha_2, & \beta_2\alpha+\gamma_2\beta, & \beta_2\gamma+\gamma_2\delta \\ \alpha_3, & \beta_3\alpha+\gamma_3\beta, & \beta_3\gamma+\gamma_3\delta \end{vmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI.

Ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ὅτι τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν α+βi ἀδύνατον νὰ αὐξηθῇ, ἐὰν πάντες οἱ νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων ἰσχύωσιν.

313. Ἔστω σύστημά τι ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν μονάδων

$$1,\ i,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \mu,$$

ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων αὐταῖς καὶ ὑπὸ πάντων τῶν μερῶν πασῶν τῶν μονάδων τούτων.

314. Ἀριθμὸς θὰ εἶνε, ὡς πάντοτε, τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.

315. Πᾶς ἀριθμὸς ἐπὶ τὴν θετικὴν μονάδα πολλαπλασιασθεὶς πρέπει νὰ μένῃ ὁ αὐτός· ἄλλως ἤθελεν ἔχει διαίρεσίς τις δύο πηλίκα διάφορα ἀλλήλων (170) καὶ ἑπομένως θὰ ἐμηδενίζετο γινόμενόν τι ἔχον τοὺς παράγοντας αὐτοῦ διαφόρους τοῦ 0. Ἐκ τούτου ἕπεται (171) ὅτι πᾶς ἀριθμός, ἐκ μιᾶς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελούμενος, εἶνε γινόμενον θετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα ταύτην· καὶ γενικώτερον· πᾶς ἀριθμός, ὑπὸ δύο ἀντιθέτων μονάδων καὶ τῶν μερῶν αὐτῶν ἀποτελούμενος, εἶνε γινόμενον ἀριθμοῦ πραγματικοῦ ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν μονάδων τούτων· ὥστε πᾶς ἀριθμὸς ἐν τῷ παρόντι συστήματι εἶνε τῆς μορφῆς

$$\Theta+H.i+A.\alpha+B.\beta+\Gamma.\gamma+\ \ldots\ +M.\mu$$

τῶν Θ, Η, Α, Β, ... Μ ὄντων ἀριθμῶν θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν ἢ καὶ 0.

316. Αἱ τὸ σύστημα ἀποτελοῦσαι μονάδες 1, i, α, β, ... μ ὑποτίθενται διάφοροι ἀλλήλων, ὅ ἐστι δύο ἀριθμοὶ θεωροῦνται ὡς διάφοροι ἀλλήλων, ἐὰν μὴ οἱ συντελεσταὶ ἑκάστης μονάδος ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τούτοις ὦσιν ἴσοι.

317. Τούτων τεθέντων, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ εἶνε πάλιν τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἀριθμός, ἔστω

$$\alpha^2=\Theta_1+H_1i+A_1\alpha+B_1\beta+\ \ldots\ +M_1\mu$$
$$\alpha^3=\Theta_2+H_2i+A_2\alpha+B_2\beta+\ \ldots\ +M_2\mu$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\alpha^\nu=\Theta_\nu+H_\nu i+A_\nu\alpha+B_\nu\beta+\ \ldots\ +M_\nu\mu$$

ἔνθα ν ἔστω ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν μονάδων

$$1,\ i,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots\ \mu\cdot$$

αἱ ἐξισώσεις αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha^2-A_1\alpha-\Theta_1&=H_1 i+B_1\beta+\ \ldots\ +M_1\mu\\ \alpha^3-A_2\alpha-\Theta_2&=H_2 i+B_2\beta+\ \ldots\ +M_2\mu\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha^\nu-A_\nu\alpha-\Theta_\nu&=H_\nu i+B_\nu\beta+\ \ldots\ +M_\nu\mu \end{aligned}$$

ἐὰν δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπαλείψωμεν τὰς μονάδας i, β, . . . μ κατὰ τὰ ἐν τῷ ἑδ. 302 εἰρημένα, εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν (ἢ καὶ περισσοτέρας) τῆς μορφῆς

$$\Delta_0\alpha^\rho+\Delta_1\alpha^{\rho-1}+\ \ldots\ +\Delta_\rho=0$$

ἔνθα Δ_0 Δ_1 . . . Δ_ρ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ Δ_0 διάφορον τοῦ 0.

Ἀλλ' ἂν τοῦ πολυωνύμου $\Delta_0\chi^\rho+\Delta_1\chi^{\rho-1}+\ \ldots\ +\Delta_\rho$ ῥίζαι εἶνε οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ φ_1, φ_2 . . . φ_ρ, ἔχομεν

$$\Delta_0\chi^\rho+\Delta_1\chi^{\rho-1}+\ \ldots\ +\Delta_\rho=\Delta_0(\chi-\varphi_1)(\chi-\varphi_2)\ \ldots\ (\chi-\varphi_\rho)$$

καὶ τοῦτο οἱουδήποτε ὄντος τοῦ χ· ἑπομένως εἶνε καὶ

$$\Delta_0\alpha^\rho+\Delta_1\alpha^{\rho-1}+\ \ldots\ +\Delta_\rho=\Delta_0(\alpha-\varphi_1)(\alpha-\varphi_2)\ \ldots\ (\alpha-\varphi_\rho)=0$$

ἀνάγκη λοιπὸν (ἵνα μηδενισθῇ τὸ γινόμενον) νὰ εἶνε ὁ α ἴσος ἑνὶ τῶν ἀριθμῶν φ_1 ἢ φ_2 ἢ φ^3 . . . ἢ φ_ρ· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον. διότι ὁ α εἶνε διάφορος τῶν μονάδων 1 καὶ i· ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν ὅτι,

Σύστημα γενικώτερον τοῦ τῶν μιγάδων $\alpha+\beta i$, ἐν τῷ ὁποίῳ νὰ ἰσχύωσι πάντες οἱ νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων, εἶνέ τι ἀδύνατον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΘΟΛΟΥ

318. Ἔστωσαν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_n$ μονάδες ὁσαιδήποτε καὶ αἱ ἀντίθετοι αὐτῶν $\rho'_1, \rho'_2, \ldots \rho'_n$ καὶ πάντα τὰ μέρη πασῶν τῶν μονάδων τούτων· ἅτινα θεωροῦνται ὡς μονάδες δευτερεύουσαι.

Τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων λέγεται ἀριθμός.

319. Πᾶς ἀριθμός, ἐκ μιᾶς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς συγκείμενος, δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς Αρ, ἔνθα Α εἶνε θετικός τις ἀριθμός· παρατηρητέον ὅμως ὅτι Αρ δὲν σημαίνει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν Α καὶ ρ· διότι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς Α δυνατὸν νὰ μὴ εἶνε ἀριθμὸς τοῦ συστήματος· ἀλλὰ τὸν ἀριθμόν, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ρ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὡς γίνεται ὁ θετικὸς ἀριθμὸς Α ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

320. Πᾶς ἀριθμός, ἐκ δύο ἀντιθέτων μονάδων ρ καὶ ρ′ καὶ τῶν μερῶν αὐτῶν συγκείμενος, εἶνε τῆς μορφῆς Αρ, τοῦ Α ὄντος ἀριθμοῦ πραγματικοῦ (θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ).

321. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς τοῦ προκειμένου συστήματος εἶνε τῆς μορφῆς

$A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + \ldots + A_n\rho_n$ τῶν $A_1 \ldots A_n$ ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὰς μονάδας $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ ὑποθέτομεν διαφόρους ἀλλήλων, ὅ ἐστι, θεωροῦμεν δύο ἀριθμοὺς τότε μόνον ὡς ἴσους, ὅταν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ συντελεσταὶ ἑκάστης τῶν μονάδων τούτων ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, εἶνε ἴσοι.

322. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις οὐδεμίαν παρέχουσι δυσκολίαν καὶ ὑπόκεινται πάντοτε εἰς τοὺς αὐτοὺς νόμους.

Α΄.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΝ ΟΙΣ ΙΣΧΥΕΙ Ο ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΕΝ ΤΩ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΩ

323. Ἐπειδὴ διὰ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου

$$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$$

καὶ $$(\beta+\gamma).\alpha=\beta.\alpha+\gamma.\alpha$$

ἀνάγεται ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονάδων ἀνὰ δύο, ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν νὰ ὁρισθῶσι τὰ γινόμενα τῶν μονάδων ἀνὰ δύο· καὶ μάλιστα ὅλως αὐθαιρέτως.

Ἔστω

$$(1) \qquad \rho_\lambda.\rho_\mu=\sum_\varkappa \Theta_\varkappa^{(\lambda\mu)}\rho_\varkappa \qquad \varkappa=1,2\ldots n$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

$$A\rho_\lambda \quad \text{καὶ} \quad B\rho_\mu \quad \text{εἶνε} \quad (AB)\,(\rho_\lambda.\rho_\mu)$$

Διότι, ἂν μὲν εἶνε οἱ συντελεσταὶ A, B ἀκέραιοι, οἷον $5\rho_\lambda$ ἐπὶ $2\rho_\mu$ τὸ γινόμενον εἶνε $(\rho_\lambda+\rho_\lambda+\rho_\lambda+\rho_\lambda+\rho_\lambda)\,(\rho_\mu+\rho_\mu)$ ἤτοι $10.\rho_\lambda\rho_\mu$· ἂν δὲ εἶνε κλασματικαὶ μονάδες οἷον $\frac{1}{3}\rho_\lambda$ ἐπὶ $\frac{1}{4}\rho_\mu$ θὰ εἶνε

$$\left(\frac{\rho_\lambda}{3}+\frac{\rho_\lambda}{3}+\frac{\rho_\lambda}{3}\right)\left(\frac{\rho_\mu}{4}+\frac{\rho_\mu}{4}+\frac{\rho_\mu}{4}+\frac{\rho_\mu}{4}\right)=\rho_\lambda\rho_\mu$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{1}{3}\rho_\lambda.\frac{1}{4}\rho_\mu=\frac{1}{12}\rho_\lambda\rho_\mu.$$

ἂν τέλος οἱ συντελεσταὶ A, B σύγκεινται ἐξ οἱωνδήποτε μονάδων

$$A=\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots$$
$$B=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots$$

θὰ εἶνε κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον

$$A\rho_\lambda . B\rho_\mu = \mu_1\nu_1\rho_\lambda\rho_\mu + \mu_1\nu_2\rho_\lambda\rho_\mu + \ldots = (AB)\rho_\lambda\rho_\mu$$

Ἔστωσαν νῦν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ

$$\alpha = \sum_\lambda A_\lambda\rho_\lambda \qquad \beta = \sum_\mu B_\mu\rho_\mu$$

τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, ἤτοι τὸ $\alpha.\beta$, θὰ εἶνε

$$\alpha.\beta = \left(\sum_\lambda A_\lambda\rho_\lambda\right)\left(\sum_\mu B_\mu\rho_\mu\right) = \sum_\lambda\sum_\mu A_\lambda B_\mu(\rho_\lambda\cdot\rho_\mu) =$$

$$= \sum_\lambda\sum_\mu\sum_\varkappa\left(A_\lambda B_\mu\Theta_\varkappa^{(\lambda\mu)}\right)\rho_\varkappa .$$

καὶ ἂν τεθῇ $\Gamma_\varkappa = \sum_\lambda\sum_\mu A_\lambda B_\mu\Theta_\varkappa^{(\lambda\mu)}$, ἕπεται

$$\alpha.\beta = \Gamma_1\rho_1 + \Gamma_2\rho_2 + \ldots + \Gamma_n\rho_n = \gamma$$

Σημ. Ὅτι ἰσχύοντος τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου τὰ $0.\alpha$ καὶ $\alpha.0$ πρέπει νὰ θεωρῶνται ὡς ἴσα τῷ 0, εἴδομεν ἤδη (ἐδ. 76).

324. Ὡς ἀντίστροφα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐμφανίζονται νῦν τὰ ἑξῆς δύο ζητήματα, ἤτοι ἡ διαίρεσις διασχίζεται εἰς δύο εἴδη.

α') *Δοθέντος τοῦ γινομένου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εὑρεῖν τὸν πολλαπλασιαστέον*
ἤτοι λύσαι τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi.\alpha = \beta$$

β') *Δοθέντος τοῦ γινομένου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου, εὑρεῖν τὸν πολλαπλασιαστὴν*
ἤτοι λύσαι τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha.\psi = \beta.$$

Ἐν τῷ πρώτῳ ζητήματι ἡ διαίρεσις ἐμφανίζεται ὡς πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιάζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον δίδει γινόμενον τὸν δεύτερον· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ὡς πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν πρῶτον δίδει γινόμενον τὸν δεύτερον.

Τὸ μὲν πρῶτον εἶδος τῆς διαιρέσεως καλοῦμεν *μερισμόν*, τὸ δὲ δεύτερον *μέτρησιν*· (διότι ἐν τῷ συστήματι τῶν πραγματικῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν οὕτως ὠνομάσαμεν τὰ δύο ταῦτα εἴδη τῆς διαιρέσεως).

Μερισμός.

325. Ἔστω διαιρετέος μὲν ὁ ἀριθμὸς

$$\beta = \sum_{\varkappa} B_{\varkappa} \rho_{\varkappa}$$

διαιρέτης δὲ ὁ ἀριθμὸς $\alpha = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \rho_{\lambda}$

πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου πηλίκου χ, ὅπερ, ὡς ἀριθμὸς τοῦ αὐτοῦ συστήματος, θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\chi = \sum_{\mu} \chi_{\mu} \rho_{\mu},$$

ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ἀγνώστους συντελεστὰς $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$ αὐτοῦ (οἵτινες εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί).

326. Ἡ ἐξίσωσις $\chi . \alpha = \beta$, ἣν πρέπει νὰ πληροῖ ὁ χ, γίνεται

$$\left(\sum_{\mu} \chi_{\mu} \rho_{\mu}\right) \cdot \left(\sum_{\lambda} A_{\lambda} \rho_{\lambda}\right) = \sum_{\varkappa} B_{\varkappa} \rho_{\varkappa}$$

ἢ

$$\sum_{\mu} \sum_{\lambda} A_{\lambda} \chi_{\mu} \left(\rho_{\mu} \rho_{\lambda}\right) = \sum_{\varkappa} B_{\varkappa} \rho_{\varkappa}$$

ἢ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου τῶν μονάδων

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\varkappa} A_{\lambda} \chi_{\mu} \Theta_{\varkappa}^{\mu\lambda} \rho_{\varkappa} = \sum_{\varkappa} B_{\varkappa} \rho_{\varkappa}$$

ὅθεν συνάγεται, ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\varkappa$ $(=1, 2, \ldots n)$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$(2) \qquad \sum_{\lambda} \sum_{\mu} A_{\lambda} \chi_{\mu} \Theta_{\varkappa}^{\mu\lambda} = B_{\varkappa} \qquad \varkappa = 1, 2, 3 \ldots n$$

Τὰς n ταύτας πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις πρέπει (καὶ ἀρκεῖ) νὰ ἐπαληθεύωσιν οἱ n συντελεσταὶ $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$ τοῦ ζητουμένου πηλίκου.

Ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶνε

$$\left| \sum_{\lambda} A_{\lambda} \Theta_{\varkappa}^{\mu\lambda} \right|_{(\varkappa,\mu)}$$

ἔνθα ὁ μὲν δείκτης $\varkappa$ δηλοῖ τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἣν κατέχει τὸ στοιχεῖον $\sum_{\lambda} A_{\lambda} \Theta_{\varkappa}^{\mu\lambda}$, ὁ δὲ μ τὴν κάθετον τὴν ὁρίζουσαν ταύτην. Ἥτις εἶνε ὁμογενὴς συνάρτησις τῶν συντελεστῶν $A_1, A_2, \ldots A_n$ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (τοῦ βαθμοῦ n) παριστῶ διὰ τοῦ

$$\Delta(A_1, A_2, \ldots A_n)$$ ἢ συντομώτερον διὰ τοῦ $\Delta(\alpha)$

327. Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα $\Delta(\alpha)$ εἶνε διάφορος τοῦ 0, αἱ ἐξισώσεις (2) λύονται πρὸς τοὺς ἀγνώστους $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_n$ καὶ ὁρίζουσιν αὐτοὺς ἐνὰριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ α δίδει τὸν β· καὶ τοῦτο συμτελῶς, ἑπομένως κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάρχει εἷς καὶ εἷς μόνος βαίνει δι' ἕκαστον ἀριθμὸν β· τουτέστιν

Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$ τοῦ ἀριθμοῦ

$$A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + \ldots + A_n\rho_n = \alpha$$

ποιῶσιν $\Delta(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) \gtrless 0$,

ὁ ἀριθμὸς α ὡς πολλαπλασιαστὴς λαμβανόμενος παράγει πάντα ἀριθμὸν τοῦ συστήματος, καὶ ἕκαστον παράγει πολλαπλασιάζων ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον· ἤτοι ἡ ἐξίσωσις

$$\chi.\alpha = \beta$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ β, ἔχει μίαν (δι' ἕκαστον β) καὶ μόνον μίαν λύσιν.

Ἀλλ' ἐὰν εἶνε διὰ τὸν ἀριθμὸν α

$$\Delta(\alpha) = 0$$

αἱ ἐξισώσεις (2) ἢ' οὐδεμίαν λύσιν ἔχουσιν ἢ ἀπείρους· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς α ὡς πολλαπλασιαστὴς λαμβανόμενος ἢ οὐδαμῶς παράγει τὸν δοθέντα ἀριθμὸν β ἢ παράγει αὐτὸν πολλαπλασιάζων ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀριθμούς

ἤτοι ἡ ἐξίσωσις $\chi.\alpha = \beta$

ἢ οὐδεμίαν τότε ἔχει λύσιν ἢ ἀπείρους τὸ πλῆθος.

328. Αἱ ἐξισώσεις (2) λύονται πάντοτε, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς β εἶνε 0· διότι τότε εἶνε ὁμογενεῖς (ἐδ. 298)· καὶ ἂν μὲν εἶνε $\Delta(\alpha) \gtrless 0$, ὁ α παρέχει τὸν ἀριθμὸν 0 πολλαπλασιάζων τὸ 0 καὶ μόνον αὐτό· ὥστε ὁ α οὐδένα μηδενίζει ἀριθμὸν πολλαπλασιάζων αὐτὸν (πλὴν τοῦ 0). Ἐὰν ὅμως εἶνε $\Delta(\alpha) = 0$, αἱ ἐξισώσεις (2) ἔχουσιν ἀπείρους λύσεις, ἤτοι ὑπάρχουσιν (πλὴν τοῦ 0) ἄπειροι τὸ πλῆθος ἀριθμοί, οὓς πολλαπλασιάζων ὁ α δίδει 0· τουτέστι μηδενίζει πολλαπλασιάζων αὐτούς. Ὁ δὲ βαθμὸς λ τῆς ἀοριστίας τοῦ συστήματος, ἤτοι τὸ πλῆθος τῶν συντελεστῶν $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_n$, οἵτινες μένουσιν ἀόριστοι, εἶνε ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ n (βαθμοῦ τῆς ὁριζούσης Δ) ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ μ. τῆς σημαντικῆς ἐλάσσονος αὐτῆς (ἐδ. 297).

329. Οἱ ἀριθμοὶ α δι' οὓς εἶνε $\Delta(\alpha) = 0$ λέγονται διὰ ταῦτα μηδενίζοντες καὶ ἕκαστος λέγεται ὅτι ἔχει *δύναμιν μηδενισμοῦ* ἴσην τῷ

ἀριθμῷ λ· ἤτοι τῷ βαθμῷ τῆς ἀοριστίας τοῦ συστήματος (2)· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὓς μηδενίζει, πολλαπλασιάζων αὐτούς, συνιστῶσι πλῆθος ἄπειρον τῆς τάξως λ· καὶ ὄντως ἂν οἱ συντελεσταὶ $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_\lambda$ μένωσιν ἀόριστοι, οἱ δὲ λοιποὶ προσδιορίζωνται ἐκ τούτων, θὰ εἶνε

$$\chi_\rho = \sum_x E_x^{(\rho)} \chi_x \qquad x = 1, 2, \ldots \lambda$$

$$\rho = \lambda+1,\ \lambda+2, \ldots n$$

καὶ οἱ ἀριθμοί, οὓς μηδενίζει ὁ α, εἶνε οἱ ἑξῆς

$$\begin{aligned} &\chi_1\left(\rho_1 + E_1^{(\lambda+1)}\rho_{\lambda+1} + \ldots + E_1^{(n)}\rho_n\right) + \\ &+\chi_2\left(\rho_2 + E_2^{\lambda+1)}\rho_{\lambda+1} + \ldots + E_2^{(n)}\rho_n\right) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\chi_\lambda\left(\rho_\lambda + E_\lambda^{(\lambda+1)}\rho_{\lambda+1} + \ldots + E_\lambda^{(n)}\rho_n\right) \end{aligned}$$

ἢ

$$\chi_1 p_1 + \chi_2 p_2 + \ldots + \chi_\lambda p_\lambda$$

ἂν παραστήσωμεν διὰ $p_1, p_2 \ldots p_\lambda$ τοὺς ἀριθμοὺς

$$\begin{aligned} &\rho_1 + E_1^{(\lambda+1)}\rho_{\lambda+1} + \ldots + E_1^{(n)}\rho_n = p_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\rho_\lambda + E_\lambda^{(\lambda+1)}\rho_{\lambda+1} + \ldots + E_\lambda^{(n)}\rho_n = p_\lambda \end{aligned} \qquad (3)$$

οἵτινες προφανῶς εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· οὐδεμία δηλονότι σχέσις τῆς μορφῆς

$$C_1 p_1 + C_2 p_2 + \ldots + C_\lambda p_\lambda = 0$$

δύναται νὰ ὑπάρχῃ (τῶν C ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν) ἂν μὴ εἶνε πάντα τὰ C ἴσα τῷ 0.

Μέτρησις.

330. Καὶ τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου ψ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha.\psi = \beta,$$

καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξετάζεται καὶ εἰς ὅμοια τοῖς προηγουμένοις ἄγει ἐξαγόμενα· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα νὰ ἀναγράψωμεν αὐτά.

331. Ἐὰν τεθῇ $\psi = \Sigma \psi_\mu \cdot \rho_\mu$, ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν ψ_μ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων·

$$\sum_\lambda \sum_\mu A_\lambda \psi_\mu \Theta_\varkappa^{\lambda\mu} = B_\varkappa \qquad (4)$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

ἡ ὁρίζουσα τούτων εἶνε

$$\left| \sum_\lambda A_\lambda \Theta_\varkappa^{\lambda\mu} \right|_{(\varkappa\mu)}$$

(ἔνθα ὁ μὲν δείκτης $\varkappa$ δηλοῖ τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἣν κατέχει τὸ στοιχεῖον $\sum_\lambda A_\lambda \Theta_\varkappa^{\lambda\mu}$ ὁ δὲ μ τὴν κάθετον)· τὴν ὁρίζουσαν ταύτην παριστῶμεν διὰ τοῦ

$$\delta(A_1, A_2 \ldots A_n)$$ ἢ συντομώτερον διὰ τοῦ $\delta(\alpha)$.

332. Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα $\delta(\alpha)$ εἶνε διάφορος τοῦ 0, ὁ ἀριθμὸς α ὡς πολλαπλασιαστέος λαμβανόμενος παράγει πάντα ἀριθμὸν τοῦ συστήματος καὶ ἕκαστον παράγει πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha . \psi = \beta$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ β ἔχει μίαν (δι' ἕκαστον β) καὶ μόνον μίαν λύσιν.

Ἀλλ' ἐὰν εἶνε διὰ τὸν ἀριθμὸν α

$$\delta(\alpha) = 0,$$

αἱ ἐξισώσεις (4) ἢ οὐδεμίαν λύσιν ἔχουσιν ἢ ἀπείρους· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς α, ὡς πολλαπλασιαστέος λαμβανόμενος, ἢ οὐδαμῶς παράγει τὸν δοθέντα ἀριθμὸν β, ἢ παράγει αὐτὸν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀριθμούς· ἤτοι ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha . \psi = \beta$$

ἢ οὐδεμίαν τότε ἔχει λύσιν ἢ ἀπείρους τὸ πλῆθος.

333. Αἱ ἐξισώσεις (4) λύονται πάντοτε, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς β εἶνε 0· καὶ ἂν μὲν εἶνε $\delta(\alpha)$ διάφορον τοῦ 0, ὁ ἀριθμὸς α παράγει τὸν ἀριθμὸν 0 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 καὶ τότε μόνον· ὥστε ὁ ἀριθμὸς α οὐδέποτε μηδενίζεται ἐφ' οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ (πλὴν ἐπὶ τὸ 0). Ἐὰν ὅμως εἶνε $\delta(\alpha) = 0$, αἱ ἐξισώσεις (4) ἔχουσιν ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, ἤτοι ὑπάρχουσι (πλὴν τοῦ 0) ἄπειροι τὸ πλῆθος ἀριθμοί, οἵτινες πολλαπλασιάζοντες τὸν α μηδενίζουσιν αὐτόν· ὁ δὲ βαθμὸς τ τῆς ἀοριστίας τοῦ συστήματος (4), ἤτοι τὸ πλῆθος τῶν συν-

τελεστῶν $\psi_1\ \psi_2\ \ldots\ \psi_n$ οἵτινες μένουσιν ἀόριστοι, εἶνε ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ n (βαθμοῦ τῆς ὁριζούσης δ) ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ ν τῆς σημαντικῆς ἐλάσσονος αὐτῆς.

Οἱ ἀριθμοὶ α, δι' οὓς εἶνε $\delta(\alpha)=0$, λέγονται *μηδενιζόμενοι* καὶ ἕκαστος αὐτῶν ἔχει *πάθος μηδενισμοῦ* ἴσον τῷ ἀριθμῷ τ, ἤτοι ἴσον τῷ βαθμῷ τῆς ἀοριστίας τοῦ συστήματος (4)· διότι οἱ ἀριθμοί, ὑφ' ὧν μηδενίζεται πολλαπλασιαζόμενος, συνιστῶσι πλῆθος ἄπειρον τῆς τάξεως τ· ἐὰν τῷ ὄντι ἐκ τῶν συντελεστῶν $\psi_1\ \psi_2\ \ldots\ \psi_n$ μένωσιν ἀόριστοι οἱ $\psi_1\ \psi_2\ \ldots\ \psi_\tau$ (ὅτε οἱ λοιποὶ ὁρίζονται ἐκ τούτων), οἱ μηδενίζοντες τὸν α ἀριθμοὶ θὰ εἶνε οἱ ἑξῆς

$$\psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 + \ldots + q_\tau \psi_\tau$$

ἔνθα $q_1, q_2, \ldots q_\tau$ εἶνε ὡρισμένοι ἀριθμοὶ τοῦ συστήματος καὶ πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων.

Σημείωσις. Ἁπλούστατον παράδειγμα συστήματος, ἐν ᾧ ἰμόνον ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος ἰσχύει ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, εἶνε τὸ ἑξῆς.

Αἱ μονάδες εἶνε δύο α καὶ β· ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$\alpha^2=\alpha, \qquad \beta^2=\beta$$
$$\alpha\beta=\beta+A\alpha, \qquad \beta\alpha=\alpha+B\beta$$

ἔνθα A καὶ B εἶνε τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ A, B ληφθῶσιν ὁμοειδεῖς (διάφοροι τοῦ 0) καὶ τοιοῦτοι ὥστε νὰ εἶνε $A.B<4$, τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν τοῦ συστήματος οὐδέποτε μηδενίζεται, ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες διαφέρωσι τοῦ 0.

Ἐὰν ληφθῇ $A=B=1$, ἰσχύει ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ὁ νόμος τῆς ἀνταλλαγῆς, ἀλλ' ὁ διαλυτικὸς νόμος δὲν ἰσχύει· διότι τὰ δύο γινόμενα $(\alpha.\alpha)\beta$ καὶ $\alpha.(\alpha.\beta)$ διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων.

334. Ἐὰν λάβωμεν n ἀριθμοὺς τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned}
r_1 &= \overset{(1)}{A}_1\rho_1 + \overset{(1)}{A}_2\rho_2 + \ldots + \overset{(1)}{A}_n\rho_n \\
r_2 &= \overset{(2)}{A}_1\rho_1 + \overset{(2)}{A}_2\rho_2 + \ldots + \overset{(2)}{A}_n\rho_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_n &= \overset{(n)}{A}_1\rho_1 + \overset{(n)}{A}_2\rho_2 + \ldots + \overset{(n)}{A}_n\rho_n
\end{aligned} \qquad (5)$$

τοιούτους, ὥστε ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν αὐτῶν

$$\left| \overset{\varkappa}{A}_i \right|$$

νὰ διαφέρῃ τοῦ μηδενός, δυνάμεθα διὰ τῶν n τούτων ἀριθμῶν νὰ παραστήσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συστήματος· πᾶς δηλαδὴ ἀριθμὸς τοῦ συστήματος (ρ_1, ρ_2 . . . ρ_n) δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$C_1r_1 + C_2r_2 + \ldots + C_nr_n \qquad (6)$$

τῶν C_1, C_2 . . . C_n ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Διότι ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ

$$\Gamma_1\rho_1 + \Gamma_2\rho_2 + \ldots + \Gamma_n\rho_n$$

ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις (5) πρὸς τὰ ρ_1, ρ_2, . . . ρ_n, θὰ εὕρωμεν

$$\rho_1 = B_1^{(1)}r_1 + B_2^{(1)}r_2 + \ldots + B_n^{(1)}r_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_n = B_1^{(n)}r_1 + B_2^{(n)}r_2 + \ldots + B_n^{(n)}r_n$$

καὶ ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ρ_1 ρ_2 . . . ρ_n εἰς τὸν ἀριθμὸν λαμβάνει οὗτος τὴν μορφὴν (6).

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς μονάδας τοῦ συστήματος καὶ τοὺς ἀριθμοὺς

$$r_1,\ r_2 \ldots r_n$$

ἀντὶ τῶν ρ_1 ρ_2 . . . ρ_n, διότι εἴτε ἐκ τῶν πρώτων εἴτε ἐκ τῶν δευτέρων ἀναχωρήσωμεν, ὡς ἀπὸ μονάδων, τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν.

Τὰ δύο συστήματα (ρ_1 ρ_2 . . . ρ_n) καὶ (r_1 r_2 . . . r_n) θεωροῦνται τότε ὡς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα.

335. Καὶ ὁσασδήποτε μονάδας τσῦ συστήματος· οἷον τὰς

$$\rho_1\ \rho_2 \ldots \rho_\sigma \qquad \sigma < n$$

δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δι' ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος

$$\nu_1\ \nu_2 \ldots \nu_\sigma$$

ἐὰν ἡ ὁρίζουσα ἡ ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν μονάδων τούτων ἐν τοῖς ἀριθμοῖς συγκροτουμένη εἶνε διάφορος τοῦ 0· διότι τότε αἱ μονάδες ρ_1 $\rho_2 \ldots \rho_\sigma$ ἐκφράζονται διὰ τῶν λοιπῶν μονάδων $\rho_{\sigma+1} \ldots \rho_n$ καὶ διὰ τῶν ν_1 $\nu_2 \ldots \nu_\sigma$· ἑπομένως πᾶς ἀριθμὸς τοῦ συστήματος δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς πρωτοβάθμιος καὶ ὁμογενὴς συνάρτησις τῶν ν_1 $\nu_2 \ldots \nu_\sigma$, $\rho_{\sigma+1} \ldots \rho_n$.

Β΄.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΝ ΟΙΣ ΙΣΧΥΟΥΣΙΝ Ο ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΚΑΙ Ο ΔΙΑΛΥΤΙΚΟΣ·

ἤτοι
$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$$
$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta.\alpha+\gamma.\alpha$$
$$\alpha.(\beta\gamma)=(\alpha\beta).\gamma$$
καὶ
$$0.\alpha=\alpha.0=0$$

---

336. Ἵνα ὑπάρχῃ καὶ ἡ διαλυτικὴ ἰδιότης ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μονάδων· πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει τὰ γινόμενα τῶν μονάδων ἀνὰ δύο νὰ μὴ ὁρισθῶσιν ὅλως αὐθαιρέτως, ἤτοι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ Θ (ὧν τὸ πλῆθος εἶνε n^3) δὲν πρέπει νὰ εἶνε ὅλως αὐθαίρετοι. Αἱ σχέσεις, ἃς πρέπει νὰ πληρῶσιν, εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν γινομένων $\rho_\lambda.(\rho_\mu.\mu_\nu)$ καὶ $(\rho_\lambda.\rho_\mu).\rho_\nu$ ἅτινα δέον νὰ εἶνε ἴσα· εἶνε δὲ αἱ ἑξῆς

$$(\iota)\qquad \sum_i \left\{ \Theta_i^{\lambda\mu}\Theta_x^{i\nu} - \Theta_i^{\mu\nu}\Theta_x^{\lambda i} \right\} = 0\cdot \qquad (\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varkappa)=1,\ 2,\ 3\ldots n$$
$$i=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n$$

337. Τὰ συστήματα, ἐν οἷς ὑπάρχει ἡ ἐπιμεριστικὴ καὶ ἡ διαλυτικὴ ἰδιότης, ἔχουσι καὶ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας, (αἵτινες εἶνε ἀναγκαῖα ἀκολουθήματα τῶν δύο εἰρημένων ἰδιοτήτων).

1) Αἱ ὁρίζουσαι Δ καὶ δ ἔχουσι τὴν ἑξῆς ἰδιότητα
$$\Delta(\alpha.\beta)=\Delta(\alpha).\Delta(\beta)$$
καὶ
$$\delta(\alpha.\beta)=\delta(\alpha).\delta(\beta)$$
Διότι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ἀγνώστου χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως
$$\chi(\alpha.\beta)=\gamma$$
κατὰ τὰ ἐν τοῖς ἐδ. 325 καὶ 326 εἰρημένα δίδει τὴν ὁρίζουσαν $\Delta(\alpha.\beta)$ ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τῶν συντελεστῶν $\chi_1\ \chi_2\ \ldots\ \chi_n$ τοῦ ἀγνώστου ἀρι-

θμοῦ χ· ἀλλ' ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς (διὰ τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα) $(\chi.\alpha).\beta=\gamma$

ὅθεν, ἂν τεθῇ $\chi.\alpha=\psi$, ἔπεται $\psi.\beta=\gamma$

Δυνάμεθα ἄρα νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸν ψ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi.\beta=\gamma$ καὶ ἔπειτα, γνωσθέντος τοῦ ψ, νὰ εὕρωμεν καὶ τὸν χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi.\alpha=\psi$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ $\psi_1\ \psi_2 \ldots \psi_n$ τοῦ ψ θὰ ἔχωσι παρονομαστὴν τὴν ὁρίζουσαν Δ(β), οἱ συντελεσταὶ $\chi_1\ \chi_2 \ldots \chi_n$ τοῦ χ θὰ ἔχωσι παρονομαστὴν τὸ γινόμενον Δ(α).Δ(β)· ὅθεν συμπεραίνεται ἡ ἰσότης

$$\Delta(\alpha).\Delta(\beta)=\Delta(\alpha\beta).$$

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα καὶ ἀμέσως νὰ δείξωμεν ὡς ἀκολούθως·

Ἐὰν εἶνε $\alpha=\sum_{\sigma} A_\sigma \rho_\sigma$ καὶ $\beta=\sum_{\tau} B_\tau \rho_\tau$, θὰ εἶνε (ἐδ. 326)

$$\Delta(\alpha)=\left|\sum_{\sigma} A_\sigma \Theta_\varkappa^{\mu\sigma}\right|_{(\varkappa,\,\mu)}$$

$$(\varkappa,\,\mu)=1,\ 2,\ 3 \ldots n$$

καὶ $$\Delta(\beta)=\left|\sum_{\tau} B_\tau \Theta_\varkappa^{\mu\tau}\right|_{(\varkappa,\,\mu)}$$

ὅθεν $$\Delta(\alpha).\Delta(\beta)=\left|\sum_{\lambda}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} A_\sigma B_\tau \Theta_\lambda^{\mu\sigma}\Theta_\varkappa^{\lambda\tau}\right|_{(\varkappa,\,\mu)} \qquad (\gamma)$$

Πρὸς τούτοις εἶνε

$$\Delta(\alpha.\beta)=\left|\sum_{\lambda}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} A_\sigma B_\tau \Theta_\lambda^{\sigma\tau}\Theta_\varkappa^{\mu\lambda}\right|_{\varkappa,\,\mu} \qquad (\gamma')$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\sum_{\lambda}\Theta_\lambda^{\mu\sigma}\Theta_\varkappa^{\lambda\tau}=\sum_{\lambda}\Theta_\lambda^{\sigma\tau}\Theta_\varkappa^{\mu\lambda}$$

συνάγεται, ὅτι τὰ στοιχεῖα ἀμφοτέρων τῶν ὁριζουσῶν (γ) καὶ (γ') εἶνε ἴσα· ὅθεν

$$\Delta(\alpha).\Delta(\beta)=\Delta(\alpha.\beta).$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ αὐτὴ ἰδιότης τῆς ὁριζούσης δ.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἐν τῷ συστήματι ἀριθμοί, δι' οὓς αἱ ὁρίζουσαι

*Δ καὶ δ νὰ μὴ μηδενίζωνται, τὸ σύστημα λέγεται κύριον, εἰ δὲ μὴ καταχρηστικόν**.

2) *Ἐν κυρίῳ συστήματι ὑπάρχει εἷς* (καὶ μόνον εἷς) *ἀριθμὸς ε, τοιοῦτος ὥστε*

$$\varepsilon.\varepsilon=\varepsilon$$

$$\varepsilon.\omega=\omega.\varepsilon=\omega$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ ω· ὑπάρχει δηλαδὴ ἐν αὐτῷ ἡ θετικὴ μονὰς καὶ πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἔστω α ἀριθμός τις δι' ὃν ἡ ὁρίζουσα Δ νὰ διαφέρῃ τοῦ 0· ἡ ἐξίσωσις

$$\chi.\alpha=\beta$$

ἔχει τότε δι' ἕκαστον ἀριθμὸν β μίαν καὶ μόνην λύσιν (ἐδ. 327)· ἑπομένως καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi.\alpha=\alpha \qquad (1)$$

ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν· ἔστω τὴν χ=ε, ὥστε εἶνε

$$\varepsilon.\alpha=\alpha \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται

$$\varepsilon.\varepsilon.\alpha=\varepsilon.\alpha=\alpha$$

ἐξ ἧς βλέπομεν ὅτι καὶ τὸ γινόμενον ε.ε εἶνε λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi.\alpha=\alpha$ ἐπειδὴ δὲ αὕτη μίαν μόνην λύσιν ἔχει, συνάγεται ὅτι εἶνε

$$\varepsilon.\varepsilon=\varepsilon \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) συνάγεται ἔπειτα

$$\Delta(\varepsilon.\alpha)=\Delta(\varepsilon).\Delta(\alpha)=\Delta(\alpha)$$

καὶ ἐπειδὴ $\Delta(\alpha)\gtrless 0$ ἕπεται $\Delta(\varepsilon)=1$

ἑπομένως καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi.\varepsilon=\omega.\varepsilon$$

---

* Παράδειγμα συστήματος ἐν ᾧ ἡ μία τῶν ὁριζουσῶν εἶνε 0 διὰ πάντα ἀριθμόν, ἡ δὲ ἑτέρα οὐχί, ἔστω τὸ ἑξῆς σύστημα.

Αἱ μονάδες αὐτοῦ εἶνε 1, i α καὶ β, ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς ἐν αὐτῷ ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς πίνακα

1.1=1	i1=i	α1=α	β1=β
1 i=i	i i=−1	α i=λα−μβ	β i=να−λβ
1.α=0	iα=0	αα=0	βα=0
1.β=0	iβ=0	αβ=0	ββ=0

Εἶνε δὲ εὔκολον νὰ ἴδῃ τις, ὅτι οἱ δύο νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ὁ διαλυτικὸς καὶ ὁ ἐπιμεριστικὸς) ἀληθεύουσιν, ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ, μ, ν πληρῶσι τὴν ἰσότητα

$$1+\lambda^2=\mu\nu.$$

*Η ὁρίζουσα δ εἶνε διὰ πάντας τοὺς ἀριθμοὺς 0· διότι πάντες μηδενίζονται· ἡ δὲ ὁρίζουσα Δ τοῦ ἀριθμοῦ $A_1+A_2i+A_3\alpha+A_4\beta$ εἶνε

$$\left(A_1^2+A_2^2\right)^2$$

δι' ἕκαστον ἀριθμὸν ω, ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν· ἀλλ' ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ω καὶ ω.ε λύουσιν αὐτήν· ἄρα θὰ εἶνε

$$\omega.\varepsilon=\omega \qquad (4)$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ ω.

Ἔστω νῦν ἀριθμός τις β, δι' ὃν ἡ ὁρίζουσα δ διαφέρει τοῦ 0· ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\beta.\varepsilon=\beta$$

ἕπεται

$$\delta(\beta)\delta(\varepsilon)=\delta(\beta)$$

καὶ ἐπειδὴ $\delta(\beta)\gtrless 0$ συνάγεται $\delta(\varepsilon)=1$· ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon.\chi=\varepsilon\omega$ ἔχει δι' ἕκαστον ἀριθμὸν ω μίαν μόνον λύσιν· ἀλλ' ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ω καὶ ε.ω λύουσιν αὐτήν· ἄρα θὰ εἶνε

$$\varepsilon.\omega=\omega$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ ω.

Ἔστω νῦν ε′ ὁ ἀντίθετος τῷ ε ἀριθμός· ἤτοι

$$\varepsilon+\varepsilon'=0$$

τότε

$$(\varepsilon+\varepsilon')\omega=\omega+\varepsilon'\omega=0$$

καὶ

$$\omega(\varepsilon+\varepsilon')=\omega+\omega\varepsilon'=0$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι $\omega\varepsilon'=\varepsilon'\omega=\omega'$· ἔνθα ω′ δηλοῖ τὸν ἀντίθετον τῷ ω ἀριθμόν· ἐὰν δὲ ληφθῇ $\omega=\varepsilon$, ἕπεται

$$\varepsilon.\varepsilon'=\varepsilon'.\varepsilon=\varepsilon'$$

ἐὰν δὲ $\omega=\varepsilon'$, εὑρίσκεται

$$\varepsilon'.\varepsilon'=\varepsilon.$$

ἐξ ὧν βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ε καὶ ε′ δύνανται νὰ νοηθῶσιν ὡς συμπίπτοντες τοῖς 1 καὶ 1′ ὅτε οἱ ἐκ τούτων ἀριθμοὶ $C_1\varepsilon+C_2\varepsilon'$ θὰ συμπέσωσι τοῖς πραγματικοῖς ἀριθμοῖς.

Εἷς καὶ μόνος ἀριθμὸς ε ἔχων τὰς εἰρημένας ἰδιότητας δύναται νὰ ὑπάρχῃ ἐν τῷ συστήματι· διότι ἂν ἦτο καὶ δεύτερος ὁ ε_1, τὸ γινόμενον $\varepsilon.\varepsilon_1$ θὰ ἦτο ε_1 τὸ αὐτὸ δὲ θὰ ἦτο καὶ ε, ὅπερ ἄτοπον ἂν μὴ $\varepsilon_1=\varepsilon$.

Ὁ ἀριθμὸς ε λέγεται *πρώτη μονὰς τοῦ συστήματος ἢ κυρία μονάς.*

Σημείωσις. Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· ἐὰν δηλαδὴ τὸ σύστημα ἔχῃ κυρίαν μονάδα, εἶνε κύριον, ἤτοι αἱ ὁρίζουσαι Δ καὶ δ δὲν εἶνε 0 διὰ πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συστήματος· διότι ἡ ἐξίσωσις $\chi\varepsilon=\omega$ ἔχει τὴν λύσιν $\chi=\omega$ καὶ οὐδεμίαν ἄλλην (διότι διὰ $\chi=\omega'$ εἶνε $\omega'\varepsilon=\omega'$) ἄρα $\Delta(\varepsilon)$ εἶνε διάφορον τοῦ 0 ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ $\delta(\varepsilon)$ εἶνε διάφορον τοῦ 0.

3) *Αἱ δυνάμεις παντὸς ἀριθμοῦ ἔχουσι τὴν ἀνταλλακτικὴν ἰδιότητα·*

$$\alpha^{\lambda}.\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}.\alpha^{\lambda}$$

ἔχουσι δὲ καὶ τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τῶν δυνάμεων τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος, ἤτοι

$$\alpha^{\lambda}.\alpha^{\mu}=\alpha^{\lambda+\mu}.$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δυνάμεις ὁρίζονται ὡς ἑξῆς·

$$\alpha^2=\alpha.\alpha$$
$$\alpha^3=\alpha^2.\alpha$$
$$\alpha^4=\alpha^3.\alpha$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha^{\mu+1}=\alpha^{\mu}.\alpha$$

ἀλλὰ διὰ τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα εἶνε

$$\alpha^{\mu}.\alpha^2=\alpha^{\mu}.(\alpha.\alpha)=(\alpha^{\mu}.\alpha).\alpha=(\alpha^{\mu+1}).\alpha=\alpha^{\mu+2}$$

ὁμοίως $\alpha^{\mu}.\alpha^3=\alpha^{\mu}.(\alpha^2.\alpha)=(\alpha^{\mu}.\alpha^2).\alpha=(\alpha^{\mu+2}).\alpha=\alpha^{\mu+3}$

καὶ γενικῶς εἶνε $\alpha^{\mu}.\alpha^{\lambda}=\alpha^{\mu+\lambda}=\alpha^{\lambda+\mu}$

4) Ἕκαστος ἀριθμὸς α τοῦ συστήματος πληροῖ ἐξίσωσίν τινα τῆς μορφῆς

$$(1)\qquad A_0\alpha^{p+1}+A_1\alpha^p+\ldots+A_p\alpha=0$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ A εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὁ βαθμὸς $p+1$ εἶνε τὸ πολὺ $n+1$.

Διότι καὶ αἱ δυνάμεις τοῦ α εἶνε ἀριθμοὶ τοῦ συστήματος· ἂν λοιπὸν εἶνε

$$\begin{aligned}
\alpha&=M_1^{(1)}\rho_1+M_2^{(1)}\rho_2+\ldots+M_n^{(1)}\rho_n\\
\alpha^2&=M_1^{(2)}\rho_1+M_2^{(2)}\rho_2+\ldots+M_n^{(2)}\rho_n\\
\alpha^3&=M_1^{(3)}\rho_1+M_2^{(3)}\rho_2+\ldots+M_n^{(3)}\rho_n\qquad (2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha^{(n+1)}&=M_1^{(n+1)}\rho_1+M_2^{(n+1)}\rho_2+\ldots+M_n^{(n+1)}\rho_n
\end{aligned}$$

δυνάμεθα ἐκ τῶν $n+1$ τούτων ἐξισώσεων νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς μονάδας $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ ὅτε προκύπτει ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (1) συνδέουσα τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ α. Ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ εἶνε $n+1$, ἂν ἡ ὁρίζουσα

$$\left|M_i^{(\nu)}\right|_{\nu,\,i}\qquad (\nu, i)=1, 2, 3\ldots n$$

εἶνε διάφορος τοῦ 0· εἰ δὲ μή, εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ $n+1$ (σελ. 149).

5) *Οἱ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μηδενίζοντες ἀποτελοῦσι ἴδιον*

σύστημα ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ. Ὁμοίως καὶ οἱ μηδενιζόμενοι ὑφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ α καὶ ἂς ἔχῃ πάθος μηδενισμοῦ τ· οἱ μηδενίζοντες αὐτὸν ἀριθμοὶ περιέχονται πάντες ἐν τῷ τύπῳ (ἔνθα τὰ C δηλοῦσιν αὐθαιρέτους πραγ. ἀριθμοὺς)

$$(\mu) \qquad C_1q_1+C_2q_2+\ldots+C_\tau q_\tau$$

ἐὰν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων (οἵτινες ἀποτελοῦσι πληθὺν τῆς τάξεως τ) λάβωμεν δύο τυχόντας, τοὺς β καὶ γ, θὰ εἶνε

$$\alpha.\beta=0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha.\gamma=0$$

ἀλλὰ καὶ $\alpha.(\beta.\gamma)=(\alpha.\beta).\gamma=0$

καὶ ὁ ἀριθμὸς ἄρα $(\beta.\gamma)$ μηδενίζει τὸν α πολλαπλασιάζων αὐτόν· ἄρα ὁ $(\beta.\gamma)$ εἶνε ἀριθμὸς τοῦ πλήθους (μ)

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $q_1, q_2 \ldots q_\tau$ ληφθῶσιν ὡς μονάδες τοῦ συστήματος, τὸ σύστημα θὰ ἔχῃ τὰς μονάδας

$$q_1, q_2 \ldots q_\tau \quad \text{καὶ} \quad \rho_{\tau+1}, \rho_{\tau+2} \ldots \rho_n$$

καὶ τὰ γινόμενα $q_\lambda.q_\mu$ θὰ εἶνε πάντα τῆς μορφῆς (μ).

Σημείωσις. Καὶ τὰ γινόμενα $q_\lambda.\eta$ ἔνθα η δηλοῖ τυχόντα ἀριθμὸν τοῦ συστήματος εἶνε τῆς μορφῆς (μ)· διότι μηδενίζουσι τὸν ἀριθμὸν α καὶ ὄντως εἶνε

$$\alpha.(q_\lambda\eta)=(\alpha.q_\lambda).\eta=0$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἰδιότης τῶν ὑφ' ἑνὸς ἀριθμοῦ μηδενιζομένων.

6) ***Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ δύναμιν μηδενισμοῦ σ, ἕκαστος τῶν ὑπ' αὐτοῦ μηδενιζομένων ἔχει δύναμιν μηδενισμοῦ τοὐλάχιστον ἴσην τῇ διαφορᾷ η—σ. Καὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ πάθος μηδενισμοῦ τ, ἕκαστος τῶν μηδενιζόντων αὐτὸν ἔχει πάθος μηδενισμοῦ τοὐλάχιστον ἴσον τῇ διαφορᾷ η—τ.***

Διότι ἔστω ἀριθμός τις α ἔχων δύναμιν μηδενισμοῦ σ· πάντες οἱ ὑπ' αὐτοῦ μηδενιζόμενοι περιέχονται ἐν τῷ τύπῳ

$$(\mu') \qquad C_1p_1+C_2p_2+\ldots C_\sigma p_\sigma$$

ἔνθα $C_1\ C_2\ldots C_\sigma$ εἶνε αὐθαίρετοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ δὲ ἀριθμοὶ $p_1\ p_2\ldots p_\sigma$ εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων (ἐδ. 329)· ἐὰν λάβωμεν τὸν τυχόντα ἐκ τῶν ἀριθμῶν (μ'), τὸν p, καὶ ἐπ' αὐτὸν πολλαπλασιάσωμεν τὰς n μονάδας τοῦ συστήματος $\rho_1\ \rho_2\ldots\rho_n$ θὰ ἔχωμεν γι-

νόμενα, ἄτινα μηδενίζει ὁ α (διότι $(\rho_1 p)\alpha = \rho_1.(p\alpha) = 0.$) ἑπομένως τὰ γινόμενα ταῦτα περιέχονται πάντα ἐν τῷ τύπῳ (μ')· ἤτοι

$$\rho_1 p = C_1' p_1 + C_2' p_2 + \ldots + C_\sigma' p_\sigma$$
$$\rho_2 p = C_1^{(2)} p_1 + C_2^{(2)} p_2 + \ldots + C_\sigma^{(2)} p_\sigma$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_n p = C_1^{(n)} p_1 + C_2^{(n)} p_2 + \ldots + C_\sigma^{(n)} p_\sigma$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν n τούτων ἰσοτήτων δυνάμεθα πάντοτε, ἐὰν $\sigma < n$, διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν $p_1\ p_2 \ldots p_\sigma$ νὰ εὕρωμεν τοὐλάχιστον $n-\sigma$ ἐξισώσεις διαφόρους ἀπ' ἀλλήλων καὶ τῆς μορφῆς

$$M_1\rho_1 p + M_2\rho_2 p + \ldots + M_n\rho_n p = 0$$

ἤτοι $$(M_1\rho_1 + M_2\rho_2 + \ldots + M_n\rho_n).p = 0$$

ἔχει ἄρα ὁ p δύναμιν μηδενισμοῦ τοὐλάχιστον $n-\sigma$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως.

7) *Ἐὰν μηδετέρα τῶν ὁριζουσῶν δ(ω), Δ(ω) εἶνε 0 διὰ πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συστήματος, πᾶς μηδενίζων ἀριθμὸς εἶνε καὶ μηδενιζόμενος καὶ πᾶς μηδενιζόμενος εἶνε καὶ μηδενίζων*· ἑπομένως ἂν τότε εἶνε $\delta(\alpha) = 0$ θὰ εἶνε καὶ $\Delta(\alpha) = 0$.

Διότι πᾶς μηδενιζόμενος ὑπὸ τοῦ α ἔχει δύναμιν μηδενισμοῦ τοὐλάχιστον $n-\sigma$ (ἔνθα σ ἡ δύναμις μηδενισμοῦ ἣν ἔχει ὁ α) ὁ δὲ σ δὲν δύναται νὰ εἶνε ἴσος τῷ n· διότι τότε ὁ α θὰ ἐμηδένιζε πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συστήματος ἄρα θὰ ἦτο $\delta(\omega) = 0$ διὰ πάντα ἀρίθμὸν ω.

Τέλεια συστήματα.

338. *Τέλειον* λέγεται σύστημά τι, ἐὰν αἱ ἑσσαρες πράξεις ἐκτελῶνται ἐν αὐτῷ πάντοτε καὶ δίδωσιν ἐξαγόμενον ἐντελῶς ὡρισμένον (πλὴν τῆς διὰ τοῦ 0 διαιρέσεως)· τοιοῦτον εἶνε λ. χ. τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

Καὶ ἡ μὲν πρόσθεσις ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελοῦνται πάντοτε· ἵνα δὲ καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελῆται πάντοτε καὶ δίδῃ ἐξαγόμενον ἐντελῶς ὡρισμένον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ *γινόμενα ὧν οἱ παράγοντες εἶνε διάφοροι τοῦ 0 νὰ εἶνε πάντοτε διάφορα τοῦ 0.* Διότι τότε καὶ μόνον τότε ἀμφότεραι αἱ ὁριζουσαι $\Delta(\alpha)$ καὶ $\delta(\alpha)$ εἶνε διὰ πάντα ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ 0) διάφοροι τοῦ 0.

339. Ἐκ τῶν συστημάτων, ἐν οἷς ἰσχύουσιν οἱ δύο νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ὁ ἐπιμεριστικὸς καὶ ὁ διαλυτικὸς) τέλεια εἶνε μόνον τὰ ἑξῆς τρία

1) τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

2) τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

3) τὸ σύστημα τοῦ Hamilton ἢ τετραδικόν.

Καὶ τὰ μὲν δύο πρῶτα ἔχουσι καὶ τὴν ἀνταλλακτικὴν ἰδιότητα, τὸ δὲ τρίτον οὐχί.

Ὅτι πᾶν τέλειον σύστημα περιέχει τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, ἐδείχθη ἤδη (ἐδ. 337, 2)· ὅτι δὲ οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, αὐτοὶ καθ' ἑαυτούς, ἀποτελοῦσι τέλειον σύστημα, εἶνε πρόδηλον.

340. Ἔστω νῦν σύστημα τέλειον ἔχον πλὴν τῶν πραγματικῶν καὶ ἄλλους ἀριθμούς· ἃς ἰσχύωσι δὲ ἐν αὐτῷ καὶ οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ὁ ἐπιμεριστικός, ὁ διαλυτικὸς καὶ ὁ τῆς ἀνταλλαγῆς) καὶ ἔστω α ἀριθμός τις αὐτοῦ διάφορος τῆς μονάδος 1 (μὴ ἀποτελούμενος ἐξ αὐτῆς μηδὲ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς μηδὲ ἐκ τῆς ἀντιθέτου αὐτῇ 1′ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς)· ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ πληροῖ ἐξίσωσίν τινα τῆς μορφῆς (ἐδ. 337, 4)

$$A_0\alpha^{p+1}+A_1\alpha^p+\ldots+A_p\alpha=0 \quad \text{ἢ} \quad (A_0\alpha^p+A_1\alpha^{p-1}+\ldots+A_p.1)\alpha=0$$

$$\text{ἢ} \qquad A_0\alpha^p+A_1\alpha^{p-1}+\ldots+A_p=0$$

διότι τὸ σύστημα εἶνε τέλειον.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐν τῷ συστήματι ἰσχύουσιν οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ πολυώνυμον

$$A_0\chi^p+A_1\chi^{p-1}+\ldots,+A_p$$

δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ χ

$$A_0\chi^p+A_1\chi^{p-1}+\ldots+A_p=A_0(\chi-\omega_1)(\chi-\omega_2)\ldots(\chi-\omega_p)$$

ἔνθα $\omega_1\ \omega_2\ldots\omega_p$ εἶνε ἀριθμοὶ τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος (αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου)· ἔχομεν ἄρα τὴν ταὐτότητα

$$A_0\alpha^p+A_1\alpha^{p-1}+\ldots A_p=A_0.(\alpha-\omega_1)(\alpha-\omega_2\ldots(\alpha-\omega_p)$$

Ὁ ἀριθμὸς α πρέπει νὰ μηδενίζῃ καὶ τὸ δεύτερον μέλος, διότι μηδενίζει τὸ πρῶτον, ἀλλ' ἐν τῷ τελείῳ συστήματι γινόμενον δὲν δύναται νὰ μηδενισθῇ ἄλλως ἢ μηδενιζομένου τινὸς τῶν παραγόντων· ἄρα θὰ εἶνε ὁ α ἴσος τινὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_p$· καὶ τὸ σύστημα ὡς περιέχον τὸν ἀριθμὸν i, ἤτοι τὴν φανταστικὴν μονάδα, θὰ ἔχῃ πάντας τοὺς μιγάδας ἀριθμούς.

341. Ἐὰν ἐκ μόνων τῶν μιγάδων ἀριθμῶν ἀποτελῆται τὸ σύστημα, εἶνε τέλειον· ἐὰν δὲ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς διαφόρους τῶν μιγάδων περιέχῃ δὲν δύνανται νὰ ἀληθεύωσιν ἐν αὐτῷ καὶ οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (σελ. 157).

Ἑπομένως *ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν συστημάτων, ἐν οἷς ἰσχύουσιν οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ὁ τῆς ἀνταλλαγῆς, ὁ διαλυτικὸς καὶ ὁ ἐπιμεριστικός), μόνον τὸ πραγματικὸν καὶ τὸ γενικώτερον τούτου μιγαδικὸν σύστημα εἶνε τέλεια συστήματα.*

342. Ἐξετάσωμεν νῦν τὰ συστήματα, ἐν οἷς μόνον ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος καὶ ὁ διαλυτικὸς ἰσχύουσιν.

Ἐὰν καὶ πάλιν ὁ α εἶνε ἀριθμὸς διάφορος τῶν πραγματικῶν, θὰ πληροῖ ἐξίσωσίν τινα τῆς μορφῆς

$$A_0\,\alpha^p + A_1\alpha^{p-1} + \ldots + A_p = 0 \qquad (1)$$

Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α οὐδεμίαν πληροῖ ἐξίσωσιν κατωτέρου βαθμοῦ· διότι, ἂν περισσοτέρας πληροῖ ἐξισώσεις, λαμβάνομεν τὴν ἔχουσαν τὸν ἐλάχιστον βαθμόν (οὐδὲ ἴσου βαθμοῦ ἐξίσωσιν δύναται νὰ πληροῖ ἄλλην· διότι τότε ἐκ τῶν δύο ἰσοβαθμίων ἐξισώσεων θὰ προέκυπτεν ἄλλη κατωτέρου βαθμοῦ διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ α).

Τούτων τεθέντων, οἱ ἀριθμοὶ

$$1,\quad \alpha,\quad \alpha^2,\quad \alpha^3 \ldots \alpha^{p-1}$$

εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· διότι ἂν συνεδέοντο δι' ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \ldots + C_{p-1}\alpha^{p-1} = 0$$

θὰ ἐπλήρου ὁ α ἐξίσωσιν κατωτέρου ἢ τοῦ p βαθμοῦ, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ὡς μονάδας τοῦ συστήματος· ἑπομένως τὸ σύστημα ἔχει τὰς μονάδας $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}$, ἐνδέχεται δὲ νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλας τινὰς ($\text{ἂν } p < n$).

Ἀλλ' οἱ ἐκ τῶν μονάδων $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}$ συγκείμενοι ἀριθμοί, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς

$$C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \ldots + C_{p-1}\alpha^{p-1} \qquad (2)$$

ἀποτελοῦσιν, ἐν τῷ συστήματι, ὅπερ ἐξετάζομεν, ἴδιον σύστημα ἐν πάσαις

ταῖς πράξεσιν· διότι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν

$$A_0+A_1\alpha+A_2\alpha^2+\ldots+A_{p-1}\alpha^{p-1}$$

$$B_0+B_1\alpha+B_2\alpha^2+\ldots+B_{p-1}\alpha^{p-1}$$

εἶνε τῆς μορφῆς

$$N_0+N_1\alpha+N_2\alpha^2+\ldots+N_{2p-2}\alpha^{2p-2} \qquad (3)$$

ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει τὰς δυνάμεις α^p, $\alpha^{p+1}\ldots$ ὡς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς (2)· ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον (3) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (2).

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ διαιρέσει ἀποτελοῦσιν οἱ ἀριθμοὶ (2) ἴδιον σύστημα· διότι ἂν τεθῇ

$$\alpha^\lambda.\alpha^\mu=\sum_\nu \Theta_\nu^{\lambda\mu}\alpha^\nu \qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p-1,$$

πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\chi(A_0+A_1\alpha+\ldots+A_{p-1}\alpha^{p-1})=B_0+B_1\alpha+\ldots+B_{p-1}\alpha^{p-1}$$

ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν

$$\chi=\chi_0+\chi_1\alpha+\chi_2\alpha^2+\ldots+\chi_{p-1}\alpha^{p-1}=\Sigma\chi_\mu\alpha^\mu \qquad \mu=0,\ 1,\ldots p-1$$

καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς p ἀγνώστους $\chi_0\ \chi_1\ \ldots\ \chi_{p-1}$ ἐκ τῶν p πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων

$$\sum_\lambda\sum_\mu A_\lambda\chi_\mu\Theta_\nu^{\mu\lambda}\alpha^\nu=B_\nu \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ p-1)$$

ἡ δὲ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος τούτου

$$\left|\sum_\lambda A_\lambda\Theta_\nu^{\mu\lambda}\right|_{(\nu,\mu)}$$

εἶνε πάντοτε διάφορος τοῦ 0· διότι, ἂν διά τινα ἀριθμὸν $A_0+A_1\alpha+\ldots+A_{p-1}\alpha^{p-1}$ ἦτο 0, θὰ ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις χ τῆς μορφῆς $\chi_0+\chi_1\alpha+\ldots+\chi_{p-1}\alpha^{p-1}$ μηδενιζόμενος ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον διότι τὸ σύστημα εἶνε τέλειον.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$(A_0+A_1\alpha+\ldots+A_{p-1}\alpha^{p-1}).\chi=B_0+B_1\alpha+\ldots+B_{p-1}\alpha^{p-1}$$

λύεται ὑφ' ἑνὸς καὶ μόνου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς (2).

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν

$$C_0+C_1\alpha+\ldots+C_{p-1}\alpha^{p-1}$$

εἶνε τέλειον καὶ ἀνταλλακτικὸν (διότι $\alpha^{\lambda}.\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}.\alpha^{\lambda}$) καὶ γενικώτερον τοῦ πραγματικοῦ, συνάγεται, ὅτι δὲν δύναται νὰ εἶνε ἡ μιγαδικὸν σύστημα· ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς αὐτοῦ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A+B\varrho_1 \quad \text{ἔνθα} \quad \varrho_1^2=-1$$

καὶ οἱ A, B εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί.

343. Καὶ ἡ ἐξίσωσις (1), ἂν ὁ τυχὼν ἀριθμὸς α τοῦ τελείου συστήματος πληροῖ (ὅταν εἶνε διάφορος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν), εἶνε δευτέρου βαθμοῦ· διότι καὶ ὁ α εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha=A_0+A_1\varrho_1$$

ὅθεν πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha-A_0)^2+A_1^2=0$$

344. Ἐὰν τὸ ἐξεταζόμενον σύστημα ἔχῃ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς πλὴν τούτων, δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι καὶ ἐκεῖνοι (ἢ πάντες ἢ τινὲς μόνον) μετὰ τῆς πραγματικῆς μονάδος ἑνωθέντες ἀποτελοῦσι σύστημα μιγαδικόν, οὗτινος ἕκαστος ἀριθμὸς εἶνε τῆς μορφῆς

$$\Gamma+\Delta\varrho_2 \quad \text{ἔνθα} \quad \varrho_2^2=-1$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ἐξεταζόμενον τέλειον σύστημα δύναται νὰ ἔχῃ τὰς μονάδας

$$1,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots\ \varrho_\lambda$$

ἔνθα $$\varrho_1^2=\varrho_2^2=\varrho_3^2=\ \ldots\ =\varrho_\lambda^2=-1$$

καὶ πᾶς ἀριθμὸς αὐτοῦ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A_0+A_1\varrho_1+A_2\varrho_2+\ \ldots\ +A_\lambda\varrho_\lambda$$

Σημ. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\varrho_1^2=\varrho_2^2$ δὲν δυνάμεθα ἐνταῦθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι $\varrho_2=\varrho_1$ ἢ $\varrho_2=-\varrho_1$· διότι, μὴ ἰσχύοντος τοῦ νόμου τῆς ἀνταλλαγῆς, ἡ διαφορὰ $\varrho_1^2-\varrho_2^2$ δὲν εἶνε ἴση τῷ γινομένῳ $(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2)$.

345. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς τοῦ τελείου συστήματος (διάφορος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) πληροῖ ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πραγματικοὺς ἔχουσαν συντελεστάς, θὰ εἶνε

$$(\varrho_1+\varrho_2)^2+A(\varrho_1+\varrho_2)+B=0$$

καὶ $$(\varrho_1-\varrho_2)^2+A'(\varrho_1-\varrho_2)+B'=0$$

ἤτοι $$(-2+\varrho_1\varrho_2+\varrho_2\varrho_1)+A(\varrho_1+\varrho_2)+B=0$$
$$(-2-\varrho_1\varrho_2-\varrho_2\varrho_1)+A'(\varrho_1-\varrho_2)+B'=0$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$-4+(A+A')\varrho_1+(A-A')\varrho_2+B+B'=0$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ μονάδες ϱ_1, ϱ_2 πρέπει νὰ εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, ἕπεται

$$A=0 \quad \text{καὶ} \quad A'=0$$

ἑπομένως τὰ τετράγωνα $(\varrho_1+\varrho_2)^2$ καὶ $(\varrho_1-\varrho_2)^2$ θὰ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ ἄθροισμα

$\varrho_1\varrho_2+\varrho_2\varrho_1$ ἐπίσης πραγματικὸς ἀριθμὸς$=2a_{12}$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι γενικῶς τὸ ἄθροισμα

$\varrho_i\varrho_x+\varrho_x\varrho_i$ εἶνε πραγματικὸς ἀριθμὸς$=2a_{ix}$ $\quad (i\gtrless x)$

346. Ἐὰν νῦν λάβωμεν ὡς μονάδας τοῦ τελείου συστήματος τοὺς ἀριθμοὺς $\rho_1\ \rho_2\ \ldots\ \rho_\lambda$, οὓς ὁρίζουσιν αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{aligned}
\rho_1&=\varrho_1\\
\rho_2&=\beta_{12}\varrho_1+\varrho_2\\
\rho_3&=\beta_{13}\varrho_1+\beta_{23}\varrho_2+\varrho_3\\
\rho_4&=\beta_{14}\varrho_1+\beta_{24}\varrho_2+\varrho_4\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\rho_\lambda&=\beta_{1\lambda}\varrho_1+\beta_{2\lambda}\varrho_2+\varrho_\lambda,
\end{aligned}$$

δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς β οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε

$$\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_1=0$$

$$(\theta) \qquad \text{καὶ} \quad \left.\begin{aligned}\rho_1\rho_i+\rho_i\rho_1&=0\\ \rho_2\rho_i+\rho_i\rho_2&=0\end{aligned}\right\} \quad i=3,\ 4,\ 5\ \ldots\ \lambda$$

διότι, ἵνα τὸ πρῶτον συμβῇ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\beta_{12}=a_{12}$· ἵνα δὲ τὰ ἀθροίσματα (θ) μηδενίζωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{aligned}
-\beta_{1i}+a_{12}\beta_{2i}+a_{1i}&=0\\
a_{12}\beta_{1i}-\beta_{2i}+a_{2i}&=0
\end{aligned}$$

ἐκ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων δύνανται πάντοτε νὰ ὁρισθῶσι τὰ β_{1i} καὶ β_{2i}· διότι ἡ ὁρίζουσα αὐτῶν εἶνε $1-a_{12}^2$ εἶνε δὲ a_{12}^2 διάφορον τῆς μονάδος· ἄλλως θὰ ἦτο 0 τὸ ἕτερον τῶν τετραγώνων $(\varrho_1+\varrho_2)^2$ ἢ $(\varrho_1-\varrho_2)^2$ ὅπερ ἀδύνατον.

347. Λέγω νῦν, ὅτι περισσότεραι τῶν τριῶν φανταστικῶν μονάδων δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχωσιν ἐν τελείῳ συστήματι· διότι εἶνε

$$\rho_1\rho_2\rho_\nu=(\rho_1\rho_2)\rho_\nu=\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_\nu)=-\rho_1(\rho_\nu\rho_2)=-(\rho_1\cdot\rho_\nu)\cdot\rho_2=(\rho_\nu\rho_1)\cdot\rho_2=$$
$$=\rho_\nu\cdot(\rho_1\rho_2)=-\rho_\nu\rho_2\rho_1$$

ἄρα
$$(\rho_1\rho_2\rho_\nu)^2=-(\rho_1\rho_2\rho_\nu)\,(\rho_\nu\rho_2\rho_1)=1$$

ἐξ οὗ συνάγεται $\rho_1\rho_2\rho_\nu=\varepsilon$ ἔνθα $\varepsilon=+1$ ἢ -1·

(διότι ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-1=0$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $(\chi-1)\,(\chi+1)=0$ ἑπομένως ἔχει τὰς δύο λύσεις $\chi=1$ ἢ $\chi=-1$).

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν $\varepsilon=-1$· διότι ἂν εἶνε $\varepsilon=1$, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα τὸν $-\rho_\nu$ ἀντὶ ρ_ν, ὅτε γίνεται $\varepsilon=-1$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης $\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_\nu=-1$ ἀληθεύει διὰ $\nu=3, 4, \ldots \lambda$, ἕπεται
$$\rho_1\rho_2\rho_3=-1$$

ὅθεν
$$\rho_1\rho_2=-\rho_2\rho_1=\rho_3$$
$$\rho_2\rho_3=-\rho_3\rho_2=\rho_1$$
$$\rho_3\rho_1=-\rho_1\rho_3=\rho_2$$

ἀλλ' εἶνε καὶ
$$\rho_1\rho_2\rho_4=-1$$

ὅθεν $\rho_1\rho_2=\rho_4$ ἑπομένως $\rho_4=\rho_3$

τοῦτο ὅμως εἶνε ἄτοπον· διότι αἱ μονάδες ρ_3 καὶ ρ_4 πρέπει νὰ εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι περισσότεραι τῶν τριῶν φανταστικῶν μονάδων $\rho_1\ \rho_2\ \rho_3$ δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχωσιν ἐν τῷ συστήματι.

Ἀλλ' ἂν μία μόνη φανταστικὴ μονὰς ρ_1 ὑπάρχῃ, τὸ σύστημα κατ' οὐδὲν διαφέρει τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος· ἂν δὲ δύο, αἱ ρ_1 καὶ ρ_2, τὸ σύστημα δὲν δύναται νὰ εἶνε τέλειον· διότι θὰ ἔχῃ τρεῖς μονάδας $(1, \rho_1$ καὶ $\rho_2)$ ἑπομένως αἱ ὁρίζουσαι $\Delta(\alpha)$ καὶ $\delta(\alpha)$ θὰ εἶνε τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς (A_1, A_2, A_3) τοῦ ἀριθμοῦ α· ἑπομένως ὑπάρχουσι πάντοτε πραγματικαὶ τιμαὶ τῶν A_1, A_2, A_3, δι' ἃς ἑκατέρα τούτων μηδενίζεται καὶ τὸ σύστημα δὲν δύναται νὰ εἶνε τέλειον· (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον σύστημα οἱονδήποτε ἔχον περιττὸν ἀριθμὸν μονάδων δὲν δύναται νὰ εἶνε τέλειον). Μένει ἄρα μόνη δυνατὴ ἡ περίπτωσις τῶν τριῶν μονάδων ρ_1, ρ_2, ρ_3, δι' ἃς εἶνε

$$\rho_1^2=-1 \quad \rho_2^2=-1 \quad \rho_3^2=-1$$
$$\rho_2\rho_3=\rho_1 \quad \rho_3\rho_1=\rho_2 \quad \rho_1\rho_2=\rho_3 \qquad (\pi)$$
$$\rho_3\rho_2=-\rho_1 \quad \rho_1\rho_3=-\rho_2 \quad \rho_2\rho_1=-\rho_3$$

348. Τὸ σύστημα τοῦτο λέγεται τετραδικὸν ἢ Ἁμιλτώνειον ἀπὸ τοῦ εὑρόντος αὐτὸ ἄγγλου Hamilton· εἶνε δὲ τέλειον· διότι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha = A_0 + A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3\rho_3$$
$$\beta = B_0 + B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + B_3\rho_3$$

εἶνε κατὰ τὸν πίνακα (π) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{aligned}\alpha.\beta = &(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3)\\ &+(A_0B_1 + A_1B_0 + A_2B_3 - A_3B_2)\rho_1\\ &+(A_0B_2 + A_2B_0 - A_1B_3 + A_3B_1)\rho_2\\ &+(A_0B_3 + A_3B_0 + A_1B_2 - A_2B_1)\rho_3\end{aligned}$$

ὑψοῦντες δὲ τοὺς συντελεστὰς τοῦ γινομένου εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν

$$(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\ (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον εἶνε 0, μόνον ὅταν τις τῶν παραγόντων εἶνε 0· ἑπομένως τὸ σύστημα εἶνε τέλειον. (Ὅτι δὲ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ αὐτοῦ ἰσχύουσιν οἱ δύο νόμοι, ὁ διαλυτικὸς καὶ ὁ ἐπιμεριστικός, φαίνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ πίνακος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ λέγεται μέτρον τοῦ ἀριθμοῦ $A_0 + A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + A_3\rho_3$· ἐκ δὲ τῶν προειρημένων γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ τὸ μέτρον τοῦ γινομένου α.β εἶνε ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέτρων τῶν παραγόντων.

Πρὸς λεπτομερῆ σπουδὴν τοῦ τετραδικοῦ συστήματος καὶ τῶν ποικίλων ἐφαρμογῶν αὐτοῦ παραπέμπομεν εἰς τὸ σύγγραμμα τοῦ Hamilton « Elements of Quaternions ».

Σημ. Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐν μὲν τῷ συστήματι τῶν μιγάδων ἀριθμῶν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συντελεστῶν τοῦ γινομένου εἶνε $\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)\left(\beta_0^2+\beta_1^2\right)$ ἐν δὲ τῷ τετραδικῷ $\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)\left(\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)$, ἀγόμεθα εἰς τὴν ἑπομένην εὕρεσιν γενικωτέρου συστήματος.

Ἐὰν τὸ γινόμενον

$$\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_0^2+\beta_1^2+\ldots+\beta_\nu^2\right)$$

δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\gamma_0^2+\gamma_1^2+\ldots+\gamma_\nu^2$$

καὶ ὁρίζωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha_0+\alpha_1\rho_1+\ldots\alpha_\nu\rho_\nu$$
$$\beta_0+\beta_1\rho_1+\ldots+\beta_\nu\rho_\nu$$

ἴσον τῷ
$$\gamma_0+\gamma_1\rho_1+\ldots+\gamma_\nu\rho_\nu,$$

τὸ γινόμενον τοῦτο οὐδέποτε γίνεται 0, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες διαφέρωσι τοῦ 0· ἀλλ' οἱ δύο νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν δύναται κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδεχθέντα νὰ ἀληθεύωσι ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι. (Kirkman On Pluquaternios. Phil. Mag. 1848).

Περὶ τῶν διαλυτῶν συστημάτων.

349. *Διαλυτὸν* λέγεται σύστημά τι τῆς n τάξεως, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἐν αὐτῷ n ἀριθμοὶ

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_\sigma\quad \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau\qquad \sigma+\tau=n$$

πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων (καὶ δυνάμενοι ἑπομένως νὰ ληφθῶσιν ὡς μονάδες τοῦ συστήματος) καὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὰ μὲν γινόμενα $\alpha_i\alpha_\kappa$ νὰ σύγκεινται ἐκ τῶν $\alpha_1, \alpha_2\ \ldots\ \alpha_\sigma$, τὰ δὲ γινόμενα $\beta_i\beta_\kappa$ ἐκ τῶν $\beta_1, \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau$, τὰ δὲ λοιπὰ γινόμενα $\alpha_i\beta_\kappa$ καὶ $\beta_i\alpha_\kappa$ νὰ εἶνε πάντα 0.

Τὸ τοιοῦτον σύστημα λέγεται καὶ ἄθροισμα τῶν δύο συστημάτων $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_\sigma$ καὶ $\beta_1, \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau$· διότι προδήλως οἱ ἀριθμοὶ αὐτοῦ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_\sigma$$

καὶ ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος $\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau$ ἡνωμένων· καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ δύο μὲν ἀριθμοὶ τοῦ αὐτοῦ συστήματος πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσιν ἀριθμὸν τοῦ αὐτοῦ πάλιν συστήματος, δύο δὲ ἀριθμοὶ διαφόρων συστημάτων δίδουσι 0.

350. *Ἐὰν δύο συστήματα ἔχωσι τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα*· διότι ἂν καὶ οἱ τρεῖς παράγοντες εἶνε ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἡ διαλυτικὴ ἰδιότης ὑπάρχει ἐξ ὑποθέσεως· ἂν δὲ εἷς εἶνε διαφόρου συστήματος ἢ οἱ δύο ἄλλοι, τὸ γινόμενον εἶνε 0.

Ἐν τοῖς ἑξῆς ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ τῶν συστημάτων, ἐν οἷς ἰσχύουσιν ὁ ἐπιμεριστικὸς καὶ ὁ διαλυτικὸς νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

351. *Τὸ ἄθροισμα δύο κυρίων συστημάτων εἶνε καὶ αὐτὸ κύριον· καὶ ἡ πρώτη αὐτοῦ μονὰς εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων μονάδων τῶν δύο συστημάτων, ἐξ ὧν σύγκειται.*

Ἔστωσαν τὰ δύο συστήματα

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_\sigma) \quad \text{καὶ} \quad (\beta_1, \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau)$$

καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν

$$(\alpha_1, \alpha_2\ \ldots\ \alpha_\sigma \mid \beta_1, \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau)$$

ἔστω δὲ κυρία μονὰς τοῦ πρώτου ἡ ε_1 τοῦ δὲ δευτέρου ἡ ε_2· λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$$

εἶνε κυρία μονὰς τοῦ τρίτου συστήματος.

Διότι εἶνε ἐν πρώτοις

$$\varepsilon.\varepsilon=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\varepsilon_1.\varepsilon_1+\varepsilon_2\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$$

ἀλλὰ καὶ πᾶς ἀριθμὸς ω τοῦ τρίτου συστήματος εἶνε ἄθροισμα ἑνὸς ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου (ἔστω τοῦ α) καὶ ἑνὸς τοῦ δευτέρου (τοῦ β)· ὅθεν

$$\omega.\varepsilon=(\alpha+\beta)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\alpha.\varepsilon_1+\beta.\varepsilon_2=\alpha+\beta=\omega$$

καὶ

$$\varepsilon.\omega=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,(\alpha+\beta)=\varepsilon_1\alpha+\varepsilon_2\beta=\alpha+\beta=\omega$$

ἐξ ὧν συνάγεται ὅτι ε εἶνε ἡ πρώτη μονὰς τοῦ τρίτου συστήματος.

Αἱ κύριαι μονάδες ε_1 καὶ ε_2 τῶν δύο ἀθροιζομένων συστημάτων ἔχουσι ἐν τῷ ἀθροίσματι τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας

$$\varepsilon_1.\varepsilon_1=\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_2.\varepsilon_2=\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1.\omega=\omega.\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_2.\omega=\omega.\varepsilon_2$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ ω· (τοῦτο γίνεται φανερόν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ω χωρισθῇ εἰς τὰ δύο μέρη $\alpha+\beta$).

352. *Ἐὰν ἐν συστήματι πλὴν τῆς κυρίας μονάδος ε ὑπάρχῃ καί τις ἄλλος ἀριθμὸς ε_1 ἔχων τὰς δύο ἰδιότητας.*

$$\varepsilon_1\varepsilon_1=\varepsilon_1 \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon_1\omega=\omega.\varepsilon_1 \qquad (\omega\ \text{τυχὼν ἀριθμὸς})$$

τὸ σύστημα εἶνε διαλυτὸν καὶ αἱ κυρίαι μονάδες τῶν ἐξ ὧν σύγκειται δύο συστημάτων εἶνε ε_1 καὶ $\varepsilon-\varepsilon_1$.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἂν τεθῇ $\varepsilon-\varepsilon_1=\varepsilon_2$, καὶ ὁ ἀριθμὸς ε_2 ἔχει τὰς αὐτὰς δύο ἰδιότητας· διότι

$$\varepsilon_2\,\varepsilon_2=(\varepsilon-\varepsilon_1)\,(\varepsilon-\varepsilon_1)=\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon_2$$

καὶ

$$\varepsilon_2\omega=(\varepsilon-\varepsilon_1)\omega=\omega-\varepsilon_1\omega$$

$$\omega.\varepsilon_2=\omega(\varepsilon-\varepsilon_1)=\omega-\omega.\varepsilon_1$$

ὅθεν

$$\omega.\varepsilon_2=\varepsilon_2.\omega$$

ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\varepsilon_1.\varepsilon_2$ ἢ $\varepsilon_2.\varepsilon_1$ εἶνε 0· διότι

$$\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_1(\varepsilon-\varepsilon_1)=\varepsilon_1-\varepsilon_1=0$$

Ἔστω νῦν σ ἡ δύναμις τοῦ μηδενισμοῦ, ἣν ἔχει ὁ ε_1, καὶ τ ἡ δύναμις τοῦ ε_2· καὶ οἱ μὲν ὑπὸ τοῦ ε_1 μηδενιζόμενοι ἀριθμοὶ ἔστωσαν οἱ

$$C_1p_1+C_2p_2+\ .\ .\ .\ C_\sigma p_\sigma \qquad \sigma>0 \text{ διότι } \varepsilon_2\varepsilon_1=0$$

ἀλλὰ $\sigma<n$ διότι $\varepsilon.\varepsilon_1=\varepsilon_1$

οἱ δὲ ὑπὸ τοῦ ε_2 μηδενιζόμενοι ἔστωσαν

$$\Delta_1q_1+\Delta_2q_2+\ .\ .\ .\ +\Delta_\tau q_\tau \qquad \text{ὁμοίως } 0<\tau<n$$

Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς ω τοῦ συστήματος εἶνε ἄθροισμα δύο ἄλλων $\omega\varepsilon_1+\omega\varepsilon_2$ ὧν ὁ μὲν μηδενίζεται ὑπὸ τοῦ ε_1 (ὁ $\omega\varepsilon_2$) ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ ε_2 (ὁ $\omega\varepsilon_1$), συνάγεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς τοῦ συστήματος περιέχεται ἐν τῷ ἀθροίσματι

$$C_1p_1+C_2p_2+\ .\ .\ .\ +C_\sigma p_\sigma+\Delta_1q_1+\Delta_2q_2+\ .\ .\ .\ +\Delta_\tau q_\tau$$

ἀλλ' οἱ $\sigma+\tau$ ἀριθμοὶ p καὶ q εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· διότι, ἂν ὑπῆρχεν ἐξίσωσίς τις τῆς μορφῆς

$$\Sigma M_ip_i=\Sigma N_\varkappa q_\varkappa \qquad i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ \sigma \qquad \varkappa=1,\ 2,\ .\ .\ .\ \tau$$

πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ ε_1 θὰ εἴχομεν

$$0=\Sigma N_\varkappa q_\varkappa\varepsilon_1$$

εἶνε δὲ καὶ $0=\Sigma N_\varkappa q_\varkappa\varepsilon_2$

ἄρα καὶ $0=\Sigma N_\varkappa q_\varkappa.\varepsilon$ ὅπερ ἄτοπον· διότι ε εἶνε ἡ κυρία μονάς· ἐπειδὴ δὲ πάντες οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συστήματος ἐκφράζονται διὰ τῶν ἀριθμῶν p καὶ q, εἶνε δὲ οὗτοι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων πρωτοβαθμίως, συνάγεται, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν τούτων $\sigma+\tau$ εἶνε n καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι

$$p_1\ p_2\ .\ .\ .\ p_\sigma \quad \text{καὶ} \quad q_1\ q_2\ .\ .\ .\ q_\tau$$

δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὡς μονάδες τοῦ συστήματος.

Ἀλλὰ τότε τὰ γινόμενα p_ip_ν ὡς μηδενιζόμενα ὑπὸ τοῦ ε_1 θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $C_1p_1+C_2p_2+\ .\ .\ .\ +C_\sigma p_\sigma$, ἤτοι θὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ μόνων τῶν p, τὰ δὲ γινόμενα q_iq_ν, ὡς μηδενιζόμενα ὑπὸ τοῦ ε_2 θὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ μόνων τῶν q, καὶ τέλος τὰ γινόμενα p_iq_ν καὶ $q_\nu p_i$ θὰ εἶνε 0· διότι μηδενίζονται ὑπ' ἀμφοτέρων τῶν ε_1 καὶ ε_2· ἤτοι μηδενίζονται ὑπὸ τῆς κυρίας μονάδος ε.

Καὶ ὄντως εἶνε

$$(p_iq_\nu)\varepsilon_1=p_i(q_\nu\varepsilon_1)=p_i(\varepsilon_1q_\nu)=(p_i\varepsilon_1)q_\nu=0$$

καὶ $$(\mathrm{pi}q_\nu)\varepsilon_2 = \mathrm{p}_i(q_\nu \varepsilon_2) = 0$$

ἄρα $$(\mathrm{pi}q_\nu)\varepsilon = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathrm{pi}q_\nu = 0$$

Τὸ σύστημα ἄρα εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο συστημάτων

$$p_1\ p_2 \ldots p_\sigma \quad \text{καὶ} \quad q_1\ q_2 \ldots q_\tau$$

353. *Ἐὰν σύστημα εἶνε ἄθροισμα δύο ἄλλων, (α) καὶ (β) θὰ εἶνε*

$$\Delta(\alpha+\beta) = \Delta_1(\alpha).\Delta_2(\beta)$$

καὶ $$\delta(\alpha+\beta) = \delta_1(\alpha).\delta_2(\beta)$$

ἔνθα Δ_1 καὶ δ_1 δηλοῦσι τὰς ὁριζούσας τοῦ συστήματος (α) καὶ Δ_2, δ_2 τὰς τοῦ συστήματος (β).

Διότι πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\chi.\gamma = \omega$ ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι, ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα δύο ἄλλων, ἑνὸς ἐκ τοῦ συστήματος (α) καὶ ἑνὸς ἐκ τοῦ συστήματος (β)· ἔστω

$$\chi = \psi + \zeta$$

$$\gamma = \alpha + \beta$$

καὶ $$\omega = \varphi + \upsilon$$

τότε, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\chi.\gamma = \omega$ λυθῇ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λυθῶσιν αἱ ἑξῆς

$$\psi.\alpha = \varphi$$

$$\zeta.\beta = \upsilon$$

ἡ μὲν πρώτη ἐν τῷ συστήματι (α) ἡ δὲ δευτέρα ἐν τῷ (β).

Ἀλλ' οἱ μὲν συντελεσταὶ τοῦ ψ θὰ ἔχωσι παρονομαστὴν $\Delta_1(\alpha)$ οἱ δὲ συντελεσταὶ τοῦ ζ θὰ ἔχωσι παρονομαστὴν $\Delta_2(\beta)$· ἄρα οἱ συντελεσταὶ τοῦ χ θὰ ἔχωσι παρονομαστὴν κοινὸν τὸ γινόμενον $\Delta_1(\alpha).\Delta_2(\beta)$· ἐπειδὴ δὲ παρονομαστὴς αὐτῶν κοινὸς εἶνε ἡ ὁρίζουσα $\Delta(\alpha+\beta)$, συνάγεται ἡ ἰσότης

$$\Delta(\alpha+\beta) = \Delta_1(\alpha).\Delta_2(\beta)$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ τῆς ὁριζούσης δ.

Σημ. Καὶ ἀμέσως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰδιότης αὕτη, ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὁριζουσῶν Δ καὶ δ.

Πληροδύναμα συστήματα.

354 *Πληροδύναμον* λέγεται τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα, ἐὰν πᾶσα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ 0 εἶνε διάφορος τοῦ 0· τοὐτέστιν, ἂν ἡ ἐξίσωσις $\chi^m = 0$ μηδεμίαν ἔχει ἄλλην λύσιν ἢ τὴν $\chi = 0$ (m θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός).

Ἐλλιποδύναμον δὲ λέγεται τὸ σύστημα, ἐὰν δύναμίς τις ἀριθμοῦ

διαφόρου τοῦ 0 εἶνε 0· ἤτοι, ἂν ἡ ἐξίσωσις $\chi^m=0$ ἔχει πλὴν τοῦ 0 καὶ ἄλλην λύσιν.

Ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος καὶ ὁ διαλυτικὸς ὑποτίθενται ἰσχύοντες ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν συστημάτων, ἅτινα θεωροῦμεν.

355. *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2=0$ μηδεμίαν ἄλλην ἔχῃ λύσιν πλὴν τῆς $\chi=0$, τὸ σύστημα εἶνε πληροδύναμον.*

Διότι ἂν ἦτο $\alpha^3=0$ (χωρὶς νὰ εἶνε $\alpha^2=0$), θὰ ἦτο καὶ

$$\alpha^3.\alpha=\alpha^2.\alpha.\alpha=\alpha^2.\alpha^2=0 \quad \text{ἤτοι} \quad (\alpha^2)^2=0.$$

Καὶ γενικῶς, ἂν ἦτο $\alpha^m=0$ (ἀλλὰ $\alpha^{m-1}\geq 0$), θὰ ἦτο καὶ

$$\alpha^{m-1}.\alpha^{m-1}=(\alpha^{m-1})^2=0$$

356. *Ἐν πληροδυνάμῳ συστήματι, ἐὰν ἀριθμὸς μηδενίζῃ ἄλλον, καὶ ὁ δεύτερος μηδενίζει τὸν πρῶτον·*

ἐὰν δηλαδὴ εἶνε $\alpha.\beta=0$, θὰ εἶνε καὶ $\beta.\alpha=0$.

Διότι κατὰ τὴν διαλυτικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε

$$(\beta.\alpha)^2=(\beta.\alpha).(\beta.\alpha)=\big[(\beta.\alpha).\beta\big]\,\alpha=\big[\beta.(\alpha.\beta)\big]\alpha=(\beta.0)\alpha=0$$

ἄρα καὶ $\beta.\alpha=0$

357. *Πᾶν πληροδύναμον σύστημα εἶνε ἢ τέλειον ἢ ἄθροισμα τελείων.*

Ἂν μὲν ἐν τῷ συστήματι δὲν ὑπάρχῃ γινόμενον παραγόντων διαφόρων τοῦ 0 ἴσον τῷ 0, ἀμφότεραι αἱ ὁρίζουσαι $\Delta(\alpha)$ καὶ $\delta(\alpha)$ εἶνε διάφοροι τοῦ 0 διὰ πάντα ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ 0)· ἐπομένως ἡ διαίρεσις (ἥ τε μέτρησις καὶ ὁ μερισμὸς) ἐκτελεῖται πάντοτε καὶ δίδει ἓν ἐξαγόμενον ἐντελῶς ὡρισμένον (ἐδ. 327 καὶ 332)· τὸ σύστημα ἄρα εἶνε τέλειον.

Ἂν δὲ ὑπάρχῃ ἐν τῷ πληροδυνάμῳ συστήματι ἀριθμός τις μηδενίζων, ὁ θ, αἱ δυνάμεις αὐτοῦ θ^2, θ^3, θ^4 . . . διαφέρουσι τοῦ 0 καὶ μηδενίζει ἑκάστη πάντας τοὺς ἀριθμοὺς οὓς μηδενίζει ἡ προηγουμένη· ἔχει λοιπὸν ἑκάστη δύναμιν μηδενισμοῦ τοὐλάχιστον τόσην ὅσην καὶ ἡ προηγουμένη (διότι, ἂν $\rho.\theta^m$ εἶνε 0 καὶ $\rho.\theta^{m+1}$ εἶνε 0)· ἀλλ' οὐδεμία ἔχει δύναμιν μηδενισμοῦ ἴσην τῷ n (διότι τότε θὰ ἐμηδένιζε καὶ ἑαυτήν, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει)· ἐπομένως μία ἐκ τούτων θὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην δύμιν σ τοῦ μηδενισμοῦ, ταύτην δὲ θὰ ἔχωσι καὶ πᾶσαι αἱ ἑπόμεναι· θὰ εἶνε δὲ $\sigma<n$· ἡ δύναμις αὕτη τοῦ θ ἔστω ὁ ἀριθμὸς α· καὶ ἂς μηδενίζῃ ὁ α τοὺς ἀριθμοὺς

$$C_1p_1+C_2p_2+\ .\ .\ .\ +C_\sigma p_\sigma \qquad (1)$$

ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδας τοὺς ἀριθμοὺς p_1, p_2 . . . p_σ, τὸ σύστημα

θὰ ἔχῃ καὶ ἄλλας τινὰς μονάδας (διότι $\sigma < n$), $\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau$ $(\sigma+\tau=n)$ καὶ πᾶς ἀριθμὸς τοῦ συστήματος θὰ περιέχηται ἐν τῷ τύπῳ

$$(2)\quad C\,p_1 + C_2 p_2 + \ldots + C_\sigma p_\sigma + \Delta_1\beta_1 + \Delta_2\beta_2 + \ldots + \Delta_\tau\beta_\tau$$

ἔνθα $C_1,\ C_2\ \ldots\ C_\sigma$ καὶ $\Delta_1,\ \Delta_2\ \ldots\ \Delta_\tau$ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ δὲ ἀριθμοὶ $p_1,\ p_2\ \ldots\ p_\sigma$ καὶ $\beta,\ \beta_2\ \ldots\ \beta_\tau$ εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων.

Τούτου τεθέντος, τὰ γινόμενα

$$\beta_1\alpha,\ \beta_2\alpha\ \ldots\ \beta_\tau\alpha$$

εἶνε διάφορα τοῦ 0· ἐὰν δὲ τεθῇ

$$\beta_1\alpha = q_1,\quad \beta_2\alpha = q_2,\ \ldots\ \beta_\tau\alpha = q_\tau$$

οἱ ἀριθμοὶ

$$p,\ p_2\ \ldots\ p_\sigma \text{ καὶ } q_1,\ q_2\ \ldots\ q_\tau$$

εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· διότι, ἂν συνέδεεν αὐτοὺς ἐξίσωσίς τις τῆς μορφῆς

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots + P_\sigma p_\sigma + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots + Q_\tau q_\tau = 0$$

(ἐν ᾗ P, Q εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί), θὰ ἦτο καὶ

$$(Q_1q_1 + Q\,q_2 + \ldots + Q_\tau q_\tau)\alpha = 0$$

ἢ καὶ

$$(Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2 + \ldots + Q_\tau\beta_\tau)\alpha^2 = 0$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ α^2 μηδενίζει τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς οὓς καὶ ὁ α, θὰ ἦτο

$$Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2 + \ldots + Q_\tau\beta_\tau = N_1p_1 + N\,p + \ldots + N_\sigma p_\sigma$$

ὅπερ ἄτοπον διότι οἱ ἀριθμοὶ β καὶ p εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ $p_1,\ p_2\ \ldots\ p_\sigma$ καὶ $q_1,\ q_2\ \ldots\ q_\tau$ εἶνε πρωτοβαθμίως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶνε n, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτοὺς ὡς μονάδας τοῦ συστήματος· τότε πᾶς ἀριθμὸς τοῦ συστήματος θὰ περιέχηται ἐν τῷ τύπῳ

$$C\,p_1 + C\,p_2 + \ldots + C_\sigma p_\sigma + C'_1 q_1 + C'_2 q_2 + \ldots + C'_\tau q_\tau$$

Ἀλλὰ τότε τὰ μὲν γινόμενα $p_i p_\nu$ θὰ ἐκφράζωνται μόνον ὑπὸ τῶν p διότι μηδενίζονται ὑπὸ τοῦ α, $\big((p_ip_\nu)\alpha = p_i(p_\nu\alpha) = p_i.0 = 0\big)$ ἑπομένως εἶνε τῆς μορφῆς (1), τὰ δὲ γινόμενα q_ip_ν θὰ εἶνε 0· διότι

$$q_ip_\nu = (\beta_i\alpha).p_\nu = \beta_i(\alpha p_\nu)$$

ἐπειδὴ δὲ $p_\nu\alpha = 0$, καὶ $\alpha\,p_\nu$ θὰ εἶνε 0· ἄρα καὶ q_ip_ν θὰ εἶνε 0.

Καὶ τὰ γινόμενα $p_i q_\nu$ θὰ εἶνε 0· διότι τὰ $q_\nu p_i$ εἶνε 0.

Τέλος τὰ γινόμενα $q_i q_\nu$ ἐκφράζονται μόνον ὑπὸ τῶν q· διότι πάντες οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συστήματος εἶνε τῆς μορφῆς (2)· ἐπομένως

$$q_i\beta_\nu = M\,p_1 + M_2 p_2 + \ldots + M_\sigma p_\sigma + K_1\beta_1 + K_2\beta_2 + \ldots K_\tau\beta_\tau$$

ὅθεν καὶ $$q_i q_\nu = K_1 q_1 + K_2 q_2 + \ldots + K_\tau q_\tau.$$

Τὸ σύστημα ἄρα εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο συστημάτων

$$p_1,\ p_2 \ldots p_\sigma \quad \text{καὶ} \quad q_2,\ q_1 \ldots q_\tau.$$

Ἐὰν καὶ τὰ συστήματα ταῦτα δὲν εἶνε τέλεια, ἀναλύονται ὁμοίως εἰς ἄλλα καὶ τοῦτο γίνεται μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς συστήματα τέλεια· ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι *πᾶν πληροδύναμον σύστημα ἐὰν μὴ εἶνε τέλειον, εἶνε ἄθροισμα τελείων συστημάτων.*

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι *πᾶν σύστημα, ἐφ' οὗ ἰσχύουσι καὶ οἱ τρεῖς νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἐν ᾧ οὐδὲν τετράγωνον εἶνε 0 (πλὴν τὸ τοῦ 0) εἶνε ἄθροισμα πραγματικῶν τινων καὶ μιγαδικῶν τινων συστημάτων.*

Ἀμφιβρεπὲς σύστημα.

Ἐκ τῶν ἐλλιποδυνάμων συστημάτων, ἄξιον λόγου εἶνε τὸ ἑπόμενον.

358. Αἱ πρῶται μονάδες εἶνε ὁσαιδήποτε

$$\rho_1\ \rho_2 \ldots \rho_\nu$$

καὶ πᾶς ἀριθμὸς τοῦ συστήματος τούτου εἶνε

$$a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \ldots + a_\nu\rho_\nu$$

τῶν a ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος καὶ αἱ μονάδες πολλαπλασιάζονται ὡς ἕπεται

$$\rho_1^2 = 0 \quad \rho_2^2 = 0, \ldots \rho_\nu^2 = 0$$

$$\rho_\lambda \cdot \rho_\mu = -\rho_\mu \cdot \rho_\lambda \quad \text{καὶ} \quad (\rho_\lambda \cdot \rho_\mu)\cdot\rho_\nu = \rho_\lambda\cdot(\rho_\mu\cdot\rho_\nu).$$

359. Ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ

$$\alpha = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \ldots + a_\nu\rho_\nu$$
$$\beta = \beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2 + \ldots + \beta_\nu\rho_\nu$$

τὸ γινόμενον αὐτῶν $\alpha.\beta$ εἶνε

$$\alpha.\beta=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\rho_1\rho_2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\rho_1\rho_3+\ldots$$
$$+(\alpha_{\nu-1}\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_{\nu-1})\rho_{\nu-1}\rho_\nu$$

ὅθεν ἕπεται ὅτι $\alpha.\beta=-\beta.\alpha$ καὶ $\alpha^2=0$.

ἤτοι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ εἶνε 0· καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ἰσχύει ὁ νόμος $\alpha\,\beta=-\beta.\alpha$.

Ὁ διαλυτικὸς νόμος $(\alpha.\beta).\gamma=\alpha.(\beta.\gamma)$ ἰσχύει ἐν τῷ γινομένῳ· καὶ ἡ ἀπόδειξις ἁπλουστάτη.

360. Τοῦ συστήματος τούτου πάντες οἱ ἀριθμοὶ μηδενίζουσι· διότι ἐὰν εἶνε $\alpha.\beta=\gamma$

εἶνε καὶ $\alpha(\beta+\mu\alpha)=\gamma$.

ὥστε ἐν αὐτῷ ἡ διαίρεσις εἶνε παντάπασιν ἀδυνατος.

361. Ἐὰν ἐν γινομένῳ πολλῶν ἀριθμῶν ἀντιμετατεθῶσι δύο παράγοντες, τὸ γινόμενον ἀλλάσσει σημεῖον.

Ἐὰν μεταξὺ τῶν δύο παραγόντων, α καὶ β, ὑπάρχωσι μ ἄλλοι παράγοντες, ἀντιμεταθέτομεν τὸν α διαδοχικῶς μετὰ τοῦ ἑκάστοτε ἑπομένου αὐτῷ· τοιαῦται ἀλλαγαὶ γίνονται προφανῶς μ, μέχρις οὗ ὁ παράγων οὗτος φθάσῃ ἀμέσως πρὸ τοῦ β· εἶτα ἀντιμεταθέτομεν τὸν β διαδοχικῶς μετὰ τοῦ ἑκάστοτε προηγουμένου αὐτῷ, μέχρις οὗ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ α· ἐπειδὴ δὲ τότε γίνονται $\mu+1$ ἀλλαγαί, γίνονται τὸ ὅλον $2\mu+1$ ἀλλαγαὶ τοῦ σημείου· ἤτοι τὸ σημεῖον μεταβάλλεται εἰς τὸ ἀντίθετον.

362. Τὸ γινόμενον τῶν ν ἀριθμῶν

$$\alpha_1=\sum_\lambda \alpha_\lambda^{(1)}\rho_\lambda,\quad \alpha_2=\sum_\lambda \alpha_\lambda^{(2)}\rho_\lambda\ldots\alpha_\nu=\sum_\lambda \alpha_\lambda^{(\nu)}\rho_\lambda$$

εἶνε
$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\ldots\alpha_\nu=\begin{vmatrix}\alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_\nu^{(1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_1^{(\nu)} & \ldots & \ldots & \alpha_\nu^{(\nu)}\end{vmatrix}\cdot\rho_1\rho_2\rho_3\ldots\rho_\nu$$

Ὅτι ἐν τῷ γινομένῳ τούτῳ μόνον τὸ γινόμενον $\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu$ παντῶν τῶν ν μονάδων ὑπάρχει, εἶνε προφανές· οἱ δὲ συντελεσταὶ αὐτοῦ εἶνε πάντα τὰ γινόμενα, ἅπερ σχηματίζομεν λαμβάνοντες ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ ἕνα συντελεστὴν καὶ πάντας συντελεστὰς διαφόρων μονάδων· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu$ ἔχει τὸ σημεῖον + καὶ πᾶν ἄλλο γινόμενον τῶν αὐτῶν μονάδων ἀνάγεται εἰς τοῦτο διὰ τῆς ἀντιμεταθέ-

σεως τῶν παραγόντων του ἀνὰ δύο, ἕπεται ὅτι γινόμενόν τι θὰ εἶνε θετικὸν μέν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀντιμεταλλασσομένων ζευγῶν εἶνε ἄρτιον, ἀρνητικὸν δέ, ἐὰν τοὐναντίον· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν συντελεστῶν τοῦ γινομένου $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\nu$ ἀποτελεῖ τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν α' ὅθεν ἕπεται, ὅτι *ἐν τῷ συστήματι τούτῳ πᾶσα ὁρίζουσα τοῦ ν βαθμοῦ*, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\nu$, ἀναλύεται εἰς ν παράγοντας πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ στοιχεῖα αὐτῆς.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα πᾶσαι αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν (ἰδὲ Hankel Theorie der complexen Zahlensysteme).

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

Ὁ χρόνος, καθ' ὃν αἱ ἔννοιαι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἐμορφώθησαν καὶ προσηρτήθησαν εἰς τὰς κατὰ πρῶτον σχηματισθείσας ἐννοίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀπέχει τοσοῦτον ἀφ' ἡμῶν καὶ αἱ ἔννοιαι αὗται κατέστησαν σήμερον τοσοῦτον πρόχειροι καὶ φαίνονται τόσον ἁπλαῖ, ὥστε εἶνε σχεδὸν ἀδύνατον νὰ φαντασθῶμεν τὰς δυσκολίας, ἃς τινας εἶχε νὰ ὑπερνικήσῃ ἡ παραδοχὴ αὐτῶν εἰς τοὺς λογισμούς. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ αἱ ἁπλούσταται σχέσεις τῶν ἀνθρώπων πρὸς ἀλλήλους ἄγουσιν εἰς πλῆθος ζητημάτων, ὧν ἡ λύσις μόνον διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων γίνεται, φαίνεται πιθανώτατον, ὅτι καὶ ταχέως καὶ σχετικῶς εὐκόλως ἐγένετο τὸ πρῶτον τοῦτο βῆμα τῆς ἀναπτύξεως τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἀλλὰ δὲν ἔχει οὕτω καὶ διὰ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς (ἀσυμμέτρους, ἀρητικοὺς καὶ φανταστικούς). Τούτων αἱ ἐφαρμογαὶ εἰς τὸν συνήθη βίον ἦσαν πολὺ σπανιώτεραι· διὰ τοῦτο καὶ βραδύτερον εὑρέθησαν καὶ ἐπὶ πολὺν χρόνον ἡ παραδοχὴ αὐτῶν ὡς ἀριθμῶν διημφισβητεῖτο καὶ μόνον ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἡ πρόοδος τῆς μαθηματικῆς ἀπέδειξεν αὐτοὺς ἀπαραιτήτους εἰς συμπλήρωσιν τῶν ἄλλων. Καὶ τῶν μὲν ἀσυμμέτρων τὴν πρώτην ἀφορμὴν ἔδωκεν ἡ γεωμετρία. Αἱ ἀσύμμετροι ἀλλήλαις γραμμαὶ εὑρίσκονται ἐν αὐτῇ ἀμέσως σχεδὸν καὶ ἦσαν γνωσταὶ κατὰ τὸν Πλάτωνα (*) καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς Αἰγυπτίους. Ἀλλ' οὔτε οἱ Αἰγύπτιοι, οὔτε οἱ παρ' αὐτῶν τὴν γεωμετρίαν παραλαβόντες καὶ εἰς τὸ τέλειον προαγαγόντες Ἕλληνες εἶχον ἔννοιαν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ἀριθμὸς κατὰ τὸν Εὐκλείδην [Βιβλ. V ὅρος β.] εἶνε «τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος». Ἡ δὲ μετάβασις ἀπὸ τῶν τὰ διακεκριμένα ἐκφραζόντων τούτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς τὴν γεωμετρικὴν συνέχειαν παριστῶντας ἀριθμοὺς ἐφαίνετο αὐτοῖς ἀδύνατος, ὡς ἐγκλείουσα, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν θεωρηθῇ, τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου ἢ τῶν ἀπείρων μερῶν πράγματός τινος. Διὰ τοῦτο ῥητῶς ἀποφαίνεται ὁ Εὐκλείδης [Βιβλ. X πρότ. ζ] «τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν». Ἀλλ' ἄνευ ἀσυμμέτρων

(*) Νόμ. ζ'. 819. E.

ἀριθμῶν ἡ ἀριθμητικὴ μένει ἀτελὴς καὶ εἰς τὴν φυσικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν πάντῃ ἀνεφάρμοστος· διότι ἄνευ αὐτῶν ἀδύνατον νὰ παρασταθῶσιν ὑπ' ἀριθμῶν τὰ συνεχῆ λεγόμενα ποσά, ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος. Διὰ ταῦτα, ἡ κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα ἄνευ συζητήσεων γενομένη εἰσαγωγὴ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τὸν λογισμόν, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν τῶν σπουδαιοτάτων τῆς ἐπιστήμης ἐπὶ τὰ πρόσω βημάτων, καὶ ἀναμφιβόλως ἐπέδρασεν εἰς τὴν μόρφωσιν τῶν ἀνωτέρων μερῶν τῆς μαθηματικῆς, τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, ὧν θεμελιώδης ἔννοια εἶνε ἡ γεωμετρική, ὡς εἰπεῖν, συνέχεια τῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἥτις μόνον διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καθίσταται δυνατή

Οἱ ἀρνητικοὶ καὶ οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εὑρέθησαν ἐκ τῆς ἀλγέβρας. Εὐθὺς ὡς παρετήρησαν οἱ μαθηματικοί, ὅτι αἱ πρὸς λύσιν προβλήματός τινος ἐκτελεστέαι πράξεις ἐπὶ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μένουσιν αἱ αὐταί, καὶ ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχωσιν οἱαςδήποτε τιμάς, καὶ ἤρχισαν νὰ παριστῶσι τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ἐμορφώθη μικρὸν κατὰ μικρὸν ἡ γενικὴ ἀριθμητική, *ἐν ᾗ θεωροῦνται αἱ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν σχέσεις ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν αὐτῶν*, καὶ εὑρέθησαν γενικαί τινες ἀρχαὶ ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἰσχύουσαι καὶ ὡς βάσις ἢ νόμοι τοῦ λογισμοῦ χρησιμεύουσαι (*). Ἀλλ' ἡ ἐφαρμογὴ τῶν γενικῶν τούτων ἀρχῶν εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων ἤγαγεν ἀμέσως εἰς ἐξαγόμενα μηδεμίαν ἔχοντα σημασίαν μήτε ὕπαρξιν ἐν τῷ συστήματι τῶν πρὶν γνωστῶν ἀριθμῶν καὶ ἅτινα ἐξελήφθησαν διὰ τοῦτο ὡς ψευδῆ καὶ τὸ ἄτοπον ἢ τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος δεικνύοντα· διὸ καὶ *ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ* ὠνομάσθησαν. Κατόπιν εὑρέθη χρήσιμον, χάριν τῆς γενικότητος, νὰ παραδεχθῶσιν εἰς τοὺς λογισμοὺς ἀριθμοὺς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$, ἀλλὰ τὰ τὸ $-$ ἔχοντα ἐξαγόμενα ἐθεωροῦντο πάντοτε ὡς ἀπορριπτέα καὶ μηδὲν σημαίνοντα. Τέλος ἡ ὑπὸ τοῦ Κερτεσίου γενομένη ἐφαρμογὴ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἰς παράστασιν τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (**), ἥτις ἀπέδειξε τοὺς θετικοὺς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς ἰσοτίμους, καὶ τὰ θαυμάσια ἐξαγόμενα, εἰς ἃ αἱ ἐκ τῆς πα-

(*) Ὁ κανὼν τῶν σημείων, διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυωνύμων εὑρίσκεται ἤδη παρὰ τῷ Διοφάντῳ (Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri, sex. definitio IX.), ὅστις ἐκφράζει αὐτόν, ὡς ἔπεται, «λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασα εἶσα ποιεῖ ὕπαρξιν λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.»

(**) Descartes Geom. 1637.

ραστάσεως ἐκείνης ἀπορρέουσαι μέθοδοι ἤγαγον, δι' ὧν νέα προσετέθη εἰς τὴν μαθηματικὴν δύναμις, κατενίκησαν πάντας τοὺς κατὰ τῆς παραδοχῆς τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐγερθέντας δισταγμοὺς καὶ κατέστησαν ἀκλόνητον τὴν περὶ τῆς ἀναγκαιότητος καὶ τῆς ἀληθείας αὐτῶν πεποίθησιν.

Τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ ἐπὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν. Οὗτοι εὑρέθησαν (*) κατὰ πρῶτον εἰς τὴν λύσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων καὶ ἐθεωρήθησαν ὡς μηδὲν σημαίνοντες· διὸ καὶ φανταστικοὶ (**) ὠνομάσθησαν καὶ ἀπερρίπτοντο πάντοτε, ὁσάκις ὡς λύσις παρουσιάζοντο. Εἰς μίαν μόνην θεωρίαν ἐξ ἀνάγκης ἐθεωροῦντο καὶ οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί· εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ῥιζῶν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Ἐνταῦθα ἡ εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας ἀνάλυσις παντὸς πολυωνύμου ἔχει τὰς σπουδαιοτάτας συνεπείας καὶ ἐπιδρᾷ εἰς τὴν ὅλην τῆς ἀλγέβρας διαμόρφωσιν· μὴ θεωρουμένων ὅμως τῶν φανταστικῶν ῥιζῶν, ἡ ἀνάλυσις αὕτη εἶνε ἀδύνατος. Ἀλλ' ἡ χρησιμότης τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἐδείκνυτο ὁσημέραι μεγαλητέρα, ἰδίως ὅτε αἱ ἔρευναι διασήμων μαθηματικῶν, ὡς τῶν Moivre, Jean Bernoulli, d'Alembert καὶ μάλιστα τοῦ Euler, κατέδειξαν πλῆθος ἰδωμάτων αὐτῶν, ἅτινα, καίτοι μὴ πραγματικὰ ὑπολαμβανόμενα, ἐλαμβάνοντο ὅμως πάντοτε ὡς μέσα ἐρεύνης εἰς διαφόρους ἄλλας θεωρίας τῆς μαθηματικῆς· ὥστε ἐκαρποῦντο μὲν πάσας τὰς ὠφελείας, ἃς ἀφειδῶς οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εἰς πάσας σχεδὸν τὰς μαθηματικὰς θεωρίας παρεῖχον, ἐθεώρουν ὅμως αὐτοὺς ὡς σύμβολα τοῦ λογισμοῦ, μηδεμίαν ἔχοντα σημασίαν ἢ ὑπόστασιν. Τὴν περὶ τοῦ ἀνυπάρκτου τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν γνώμην πολὺ βεβαίως ἐνίσχυσεν ἡ ἐν τῇ ἀναλυτικῇ γεωμετρίᾳ γενομένη παρατήρησις, ὅτι, ὅταν δύο καμπύλαι μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀνύπαρκτον τῶν τομῶν δεικνύεται ὑπὸ τῶν φανταστικῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἧς αἱ τομαὶ ὁρίζονται. Διότι, ἐάν τις μὴ ἐνθυμηθῇ, ὅτι οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἀπεκλείσθησαν ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, δύναται νὰ ἐκλάβῃ τὸ ἀνύπαρκτον τῶν κοινῶν τομῶν ὡς ἀπόδειξιν τοῦ ἀνυπάρκτου τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

(*) Πρῶτος ἀναφέρει αὐτοὺς ὁ Cardano. Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus (1545).

(**) Τὸ ὄνομα φανταστικαὶ ῥίζαι ἀπαντᾷ πρῶτον ἐν τῇ γεωμετρίᾳ τοῦ Καρτεσίου (1637).

Ἡ ἰδέα τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ παραστάσεως τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται πρῶτον ἐν τῷ Wallis [Algebra, opera math. Bd. II (1693)]. Οὗτος παρετήρησεν ὅτι εἰς τὴν διὰ τῆς ἀλγέβρας λυσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων, ἐν ᾧ αἱ διά τινας τιμὰς τῶν δεδομένων προκύπτουσαι πραγματικαὶ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων ἄγουσιν εἰς σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν χ, αἱ δι' ἄλλας τιμὰς τῶν δεδομένων τοῦ αὐτοῦ προβλήματος προκύπτουσαι φανταστικαὶ ῥίζαι, ἐὰν τὸ i θεωρηθῇ ὡς μέση ἀνάλογος τῶν 1 καὶ —1 καὶ παρασταθῇ ἑπομένως ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν χ, ἄγουσιν εἰς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, λύοντα ὡσαύτως τὸ πρόβλημα, ἐὰν μικρὸν μεταβληθῇ ἡ ἐκφώνησις αὐτοῦ.

Ὅμοιαι ἀπόπειραι ἐγένοντο μετὰ ταῦτα καὶ ὑπ' ἄλλων· καὶ τέλος ὁ Caspar Wessel ἐν ὑπομνήματι δοθέντι ὑπ' αὐτοῦ τῇ δανικῇ Ἀκαδημίᾳ, καὶ ἐκδοθέντι τῷ 1799 ἔδειξε τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν μιγάδων ἀριθμῶν· μετὰ δὲ τοῦτον ὁ Argand οὐ μόνον τὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ παράστασιν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἐξέθηκεν, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις παρέστησε γεωμετρικῶς. [Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques (1806) καὶ ἐν τοῖς Annales de Gergone (1814) tom. IV et V.]

Ἐκ τῆς παραστάσεως τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν προέκυψεν ἀμέσως τὸ ζήτημα, ἂν εἶνε δυνατὸν νὰ παρασταθῶσι καὶ τοῦ χώρου τὰ σημεῖα ὑπὸ τινων ἀριθμῶν. Τὸ ζήτημα τοῦτο ἐπεχείρησε νὰ λύσῃ ὁ αὐτὸς Argand (Annales de Gergonne tom V) ἀλλ' ἄνευ ἀποτελέσματος. Εἰς τοῦτο δὲ ἀσχολούμενος ὁ W. R. Hamilton, ἔφθασε (1843) μετὰ πολλὰς ἐρεύνας εἰς τὸ τετραδικὸν σύστημα τῶν ἀριθμῶν.

Ἀλλ' ἐκεῖνο, ὅπερ ἀπέδειξε τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς χρησιμωτάτους καὶ ἀναγκαιοτάτους εἰς τὴν μαθηματικήν, ἦτο ἡ θεωρία τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων ἡ ὑπὸ τοῦ Abel καὶ Jacobi μορφωθεῖσα. Διότι ἡ πλήρης θεωρία τῶν συναρτήσεων τούτων ἀπαιτεῖ νὰ δίδωνται εἰς τὰς μεταβλητὰς τιμαὶ οἱαδήποτε, πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, καὶ εὑρέθησαν τῶν συναρτήσεων τούτων δύο περίοδοι, μία πραγματικὴ καὶ μία φανταστική· ἐδείχθησαν δηλονότι οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἰσότιμοι τοῖς πραγματικοῖς.

Τέλος ἡ ἰδέα τοῦ νὰ δίδωνται εἰς τὰς μεταβλητὰς πᾶσαι αἱ τιμαί, πραγματικαὶ καὶ φανταστικαί, ἤγαγεν εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ διασήμου μαθηματικοῦ Cauchy διαπλασθεῖσαν, θεωρίαν τῶν συναρτήσεων, ἥτις θεωρεῖται, καὶ δικαίως, ὡς ἓν τῶν σπουδαιοτάτων τῆς μαθηματικῆς μερῶν.

Ἐν αὐτῇ γίνεται φανερόν, ὅτι, ἵνα ἡ φύσις συναρτήσεώς τινος γνωσθῇ, εἶνε ἀπαραίτητος ἀνάγκη νὰ δίδωνται εἰς τὴν μεταβλητήν, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται, πᾶσαι αἱ τιμαί, πραγματικαὶ καὶ φανταστικαί· ἑπομένως ἄνευ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, οὐδεμίαν ἔχει βάσιν ἡ θεωρία αὕτη.

Εἶνε ἄξιον παρατηρήσεως, ὅτι οὐδὲν ἧττον ὁ Cauchy θεωρεῖ τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς ὡς μηδεμίαν ἔχοντας σημασίαν, ὡς ὄργανα μόνον ἢ σύμβολα τοῦ λογισμοῦ· καὶ ῥητῶς ἐκφράζει τὴν γνώμην του ταύτην [Cauchy, Exercices d' analyse et de physique mathématique (1844) Tome III p. 361].

Πρῶτος, ὅστις κατενόησε τὴν ἀληθῆ φύσιν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐξέθηκε τὰ περὶ αὐτῶν ἀκριβῶς [Causs Werke. Band 2. s. 313 καὶ 387] εἶνε ὁ τῶν Γερμανῶν διασημότατος μαθηματικὸς Gauss. Καὶ οὗτος, νεώτερος ὤν, φαίνεται διστάζων νὰ παραδεχθῇ αὐτούς· διὸ καὶ ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς ἀλγέβρας (1799) ἐκφράζει αὐτὸ ὡς ἔπεται « πᾶσα ἀκεραία συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς ἀναλύεται εἰς παράγοντας πραγματικοὺς πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ». ἀποφεύγων οὕτω τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς [Gauss Werke. Band 3]. Ἀλλ' ἔπειτα ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν διτετραγωνικῶν ὑπολοίπων, ἣν μόνον διὰ τῆς βοηθείας τῶν φανταστικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἠδυνήθη νὰ ἀποτελειώσῃ, κατενόησεν ὅτι ἡ παραδοχὴ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν εἶνε ἀναγκαία καὶ ἀπαραίτητος πρὸς συμπλήρωσιν καὶ τελείωσιν τῆς μαθηματικῆς [Gauss Werke. Band 2, s. 174.]

Τέλος, ἀφοῦ οἱ μαθηματικοὶ ἀνεγνώρισαν καὶ παρεδέχθησαν τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμούς, καὶ ἐπείσθησαν ὅτι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς αὐτῶν εἰς τὴν μαθηματικὴν οὐδεμία ἀντίφασις προκύπτει, ἀλλὰ τοὐναντίον πλήρης καὶ τελεία ἁρμονία πανταχοῦ καταφαίνεται, ἔφθασαν εἰς τὸ νὰ θεωρῶσι τοὺς ἀριθμοὺς ὑπὸ ὅλως νέαν καὶ γενικωτέραν ἔποψιν, καθ' ἣν πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι σύστημά τι ἐννοιῶν λογιστικῶν, εἴς τινας κοινοὺς νόμους ὑποκείμενον, δι' ὧν νόμων καὶ ὁρίζεται· καὶ ἡ ὕπαρξις τούτων ἢ ἐκείνων τῶν ἀριθμῶν δὲν στηρίζεται εἰς τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν· διότι πάντες οὗτοι πολλάκις (ἕνεκα τῆς ἰδιαιτέρας φύσεως τοῦ ζητήματος, ἐφ' οὗ ἐφαρμόζονται, μὴ συγχωρούσης τοιαύτην ἢ τοιαύτην λύσιν) δὲν δίδουσι τὴν προσήκουσαν λύσιν, ἀλλ' εἰς τὴν πρὸς ἀλλήλους ὡρισμένην σχέσιν καὶ συμφωνίαν.

Ὑπὸ τὴν ἔποψιν ταύτην ἐθεώρησε τοὺς ἀριθμοὺς ὁ διάσημος τοῦ ἐν Βερολίνῳ Πανεπιστημίου καθηγητὴς C. Weierstrass, ὁ καὶ τὴν θεω-

ρίαν ταύτην εἰς πέρας ἀγαγὼν καὶ ἀποδείξας, (ὅπερ ὁ Gauss ἄνευ ἀποδείξεως ἐξέφερεν), ὅτι, τῶν θεμελιωδῶν νόμων τοῦ λογισμοῦ μενόντων, πᾶσα περαιτέρω αὔξησις τοῦ συστήματος τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε ἀδύνατος. Ὁμοίως ἐθεώρησε τοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὁ H. Hankel ἐν τῷ συγγράμματί του (Theorie der complexen Zahlensysteme). Ἐντεῦθεν ἔλαβε τὴν γένεσιν νέος κλάδος τῆς μαθηματικῆς, ὅστις ἀριθμολογία δύναται νὰ ὀνομασθῇ, καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ ἐρευνῶνται τὰ διάφορα συστήματα, ἅτινα ὑπὸ δεδομένων θεμελιωδῶν νόμων διορίζονται, καὶ αἱ ἐφαρμογαὶ αὐτῶν εἰς τὰς διαφόρους θεωρίας τῆς μαθηματικῆς.

Ἐκ τῶν ὠφελειῶν, ἃς οἱ ἐκ πολλῶν διαφόρων μονάδων συγκείμενοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μέχρι τοῦδε παρέσχον, ἀξία λόγου εἶνε ἡ ὑπὸ τοῦ ἐν Βερολίνῳ διασήμου καθηγητοῦ E. Kummer γενομένη διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀπόδειξις τῶν νόμων τῆς ἀντιστροφῆς δι' οἱασδήποτε δυνάμεως ὑπόλοιπα. (E. Kummer. Ueber die Reciprocitätsgesetze Berlin 1859).

ΤΕΛΟΣ