ΑΝΩΤΕΡΑ ΣΧΟΛΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΠΕΤΗΡΙΣ

ΚΕΝΤΡΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΑΝΑΤΥΠΟΝ ΕΚ ΤΟΥ ΥΠ' ΑΡ. 7 - 8/1958 ΤΕΥΧΟΥΣ
ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΤΗΣ Α. Σ. Β. Σ. « ΣΠΟΥΔΑΙ ».

ΑΘΗΝΑΙ 1958

ΑΝΩΤΕΡΑ ΣΧΟΛΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΠΕΤΗΡΙΣ

ΚΕΝΤΡΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΑΝΑΤΥΠΟΝ ΕΚ ΤΟΥ ΥΠ' ΑΡ. 7 - 8/1958 ΤΕΥΧΟΥΣ
ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΤΗΣ Α. Σ. Β. Σ. «ΣΠΟΥΔΑΙ».

ΑΘΗΝΑΙ 1958

ΤΥΠΟΙΣ: "ΠΙΓΚΟΥΪΝΟΣ„
'Οδὸς Φαλήρου 6 - Τηλ. 90 064
ΑΘΗΝΑΙ

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις ἐγένετο

ΕΠΙ ΠΡΟΕΔΡΙΑΣ ΤΗΣ Α.Σ.Β.Σ.
ΣΤΑΥΡΟΥ ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΤΗΣ Α.Σ.Β.Σ.
ΣΤΡΑΤΟΥ Κ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΟΥ Κ.Σ.Ε..
ΣΤΑΘΗ ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ

Ἐν ἔτει 1958

Ἐπιμέλεια
ΦΑΝΗΣ ΒΑΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ
Γραμματέως τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως

Ἡ Ἀνωτέρα Σχολὴ Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, ἀντιλαμβανομένη τὴν σημασίαν τῆς Στατιστικῆς, συνέστησε πρώτη ἐν Ἑλλάδι τακτικὴν ἕδραν Στατιστικῆς Μεθοδολογίας καὶ Οἰκονομικῆς Στατιστικῆς, τὴν διδασκαλίαν τῆς ὁποίας παμψηφεὶ ἀνέθεσεν εἰς τὸν κ. Στάθην Μαργαρίτην.

Συνεχίζουσα τὴν δρᾶσιν της ἡ Σχολὴ ἵδρυσε τὸ «Κέντρον Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως», ὅπερ ἀνεγνωρίσθη παρὰ τοῦ Κράτους ὡς ἐπίσημος Στατιστικὴ Σχολή, συμφώνως πρὸς τὸ ἀπὸ 3 Σεπτεμβρίου 1955 Βασιλικὸν Διάταγμα ἐκδοθὲν βάσει τοῦ Ν. Διατάγματος 2516/53 «περὶ ὀργανώσεως τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος».

Χάρις εἰς τὰς ἐνεργείας ταύτας τῆς Σχολῆς ἐδημιουργήθη τὸ κατάλληλον κλῖμα ὑπὲρ τῆς Στατιστικῆς, κατενοήθη ἡ σημασία τοῦ καταρτισμοῦ εἰδικευμένων στελεχῶν τοῦ Κράτους καὶ τῶν Δημοσίων Ὀργανισμῶν καὶ τῶν ἐπιχειρήσεων, σειρὰ δὲ λαμπρῶν μελετῶν καὶ μονογραφιῶν στατιστικῆς φύσεως εἶδε τὸ φῶς εἰς τὸν τόπον μας.

Παρὰ πάντων σήμερον ὁμολογεῖται ἡ ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου εἰσφορὰ τῆς Σχολῆς. Ἡ παροῦσα ἔκδοσις, ἐν συνεχείᾳ προηγουμένων, ἀποτελεῖ δεῖγμα τῆς καταβαλλομένης μορφωτικῆς προσπαθείας. Ἡ ἐκτέλεσις ἑνὸς χρέους ἀποτελεῖ πάντοτε τὴν ὑψίστην ἡδονήν, πολὺ δὲ περισσότερον δι' ὅσους διοικοῦν ἢ διδάσκουν εἰς ἓν ἀνώτατον πνευματικὸν Ἵδρυμα.

Η Α.Σ.Β.Σ.

ΕΠΕΤΗΡΙΣ

ΚΕΝΤΡΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

(ΑΝΑΤΥΠΟΝ ΕΚ ΤΟΥ ΥΠ' ΑΡΙΘ. 7–8/1958 ΤΕΥΧΟΥΣ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΤΗΣ Α.Σ.Β.Σ. «ΣΠΟΥΔΑΙ»)

Η ΘΕΜΕΛΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΠΛΗΘΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΡΟΠΩΝ

Ὑπὸ Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

Γενικά. 1. Κατὰ κανόνα, σχεδόν, ἀπαράβατον εἰς τὴν Στατιστικὴν σήμερον ἐπιδιώκομεν νὰ ἐξακριβώσωμεν τὴν Δομὴν (structure) ἑνὸς συνόλου—πληθυσμοῦ—μιᾶς ἰδιότητος, ποσοτικῶς ἐκφραζομένης, ἐπαγωγικῶς, συναρτήσει ὡρισμένης παραμέτρου δείγματος, *κατὰ τύχην ληφθέντος ἀπὸ τοῦ συνόλου τούτου*—ἀπὸ τοῦ πληθυσμοῦ ὡς εἴθισται τὸ σύνολον νὰ ἀποκαλῆται. Ἡ *Δομὴ τοῦ πληθυσμοῦ* ἐξακριβοῦται τώρα διὰ τῆς συγκρίσεως τῆς παραμέτρου τοῦ δείγματος καὶ τῆς ἀντιστοίχου ὁμοειδοῦς παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ, βάσει τῆς *ὑποθέσεως μηδέν*[1], ὁπότε, ἂν τὸ δεῖγμα, ὅπερ διαθέτομεν, ἔχει ληφθῇ ἀπὸ τοῦ ὑπ' ὄψει πληθυσμοῦ, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὁμοειδῶν παραμέτρων πρέπει νὰ εἶναι *στατιστικῶς ἀσήμαντος*, τουτέστιν νὰ ἔχῃ μεγάλην πιθανότητα (μείζονα δεδομένης συμβατικῆς τοιαύτης, παρ. χάριν 5 °/₀ ἢ 1 °/₀) νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ τῆς καθαρᾶς τύχης (Random).

Ἐὰν ὅθεν ἔχει ληφθῇ ὡς ἐπίπεδον σημαντικότητος τὸ 5 °/₀, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν ἐνεργήσωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος λήψεις, ἰσοπληθῶν δειγμάτων, μόνον εἰς τὰ 5 °/₀ ἐκ τούτων ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου τῶν δειγμάτων θὰ εἶναι μείζων κατὰ πολὺ τῆς τοιαύτης τῆς παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἐπειδὴ εἶναι τοῦτο δύσκολον δι' ἑνὸς μόνον δείγματος νὰ ἐκτιμηθῇ, ἡ *ἄγνωστος* παράμετρος τοῦ πληθυσμοῦ, διότι εἰς τοῦτο κατατείνομεν ἐπαγωγικῶς, συναρτήσει

[1] Γενικῶς ὁ ὅρος οὗτος ἀναφέρεται πρὸς ὡρισμένην τινὰ ὑπόθεσιν ἥτις τελεῖ ὑπὸ ἔλεγχον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν παραλλαγὴν αὐτῆς ἥτις ἔχει προκύψει ἐκ τῶν γεγονότων. Ἐὰν π.χ. ἡ παράμετρος τοῦ δείγματος εἶναι Θ ἐλέγχεται ἡ πιθανότης νὰ ἔχῃ προκύψει τὸ δεῖγμα τοῦτο ἐκ πληθυσμοῦ ἔχοντος ὁμώνυμον παράμετρον τὴν Θ_0, δηλ. ἐὰν ἡ διαφορὰ $\Theta - \Theta_0$ ἔχῃ μεγάλην πιθανότητα, μείζονα τῆς συμβατικῆς τοιαύτης 5 °/₀ ἢ 1 °/₀ νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ τῶν τυχαίων κυμάνσεων τῆς δειγματοληψίας, ἢ τοὐναντίον νὰ ἔχῃ μικροτέραν τοιαύτην πιθανότητα. Κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν εἶναι πάνυ ἀπίθανον ἡ τοιαύτη διαφορὰ νὰ ὀφείλεται εἰς μόνην τὴν τύχην. Κατὰ συνέπειαν τεκμαίρεται ὅτι τὸ ὑπ' ὄψει δεῖγμα δὲν ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ ὑπ' ὄψει πληθυσμοῦ, διότι ἡ διαφορὰ τῶν ὁμωνύμων παραμέτρων εἶναι *στατιστικῶς σημαντική*. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ δομὴ τοῦ δείγματος εἶναι διάφορος τῆς δομῆς τοῦ ὑπ' ὄψει πληθυσμοῦ, ἣν ἐπιδιώκομεν νὰ γνωρίσωμεν, συναρτήσει τῆς τοιαύτης τοῦ δείγματος, συνοψιζομένης εἰς τὴν ὑπ' ὄψει παράμετρον.

τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος, καθορίζομεν *δύο ὅρια: Ἕν μέγιστον* καὶ *ἓν ἐλάχιστον*, μεταξὺ τῶν ὁποίων θὰ περιλαμβάνεται, μετὰ δεδομένης πιθανότητος, ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ. Τὰ ὅρια ταῦτα καλοῦνται *διάστημα ἐμπιστοσύνης, ὅρια* ἢ *περιοχαὶ παραδοχῆς* (Fiducial limits ἢ Confidence limits καὶ Regions of acceptance). Ἐὰν ὅθεν συμβατικῶς θεωρηθῇ τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης 95 %, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν λάβωμεν ἄπειρα τὸ πλῆθος, ἰσοπληθῆ ὅμως δείγματα ἀπό τινος πληθυσμοῦ, εἰς τὰ 95 % τούτων ἡ ἄγνωστος τιμὴ τῆς παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ θὰ περιλαμβάνεται ἐντὸς τῶν, a priori, καθορισθέντων ὁρίων καὶ μόνον εἰς τὰ 5 % θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης αὐτοῦ καὶ δὴ εἰς τὰ 2,5 % θὰ εἶναι κατωτέρα τοῦ ἐλάσσονος ὁρίου καὶ εἰς τὰ 2,5 % μείζων τοῦ μείζονος ὁρίου.

2. Ἡ θεμελίωσις τῶν κριτηρίων σημαντικότητος τῶν *πολυπληθῶν δειγμάτων* ἑδράζεται ἐπὶ τοῦ καλουμένου *κεντρικοῦ ὁρικοῦ θεωρήματος*, καθ' ὅ, ἐὰν ἀπό τινος *ἀπείρου* πληθυσμοῦ (ἐννοεῖται ἰδιότητός τινος ποσοτικῶς ἐκφραζομένης) λάβωμεν *ἄπειρα* κατ' ἀριθμόν, ἰσοπληθῆ ὅμως δείγματα, τότε ἡ κατανομὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ὅμως παραμέτρου τῶν καθ' ἕκαστον δειγμάτων ἀκολουθεῖ τὸν Νόμον τοῦ Gauss - Laplace, μὲ μέσον τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον τοῦ πληθυσμοῦ καὶ διακύμανσιν ταύτης, συνδεομένην δι' ὡρισμένης σχέσεως πρὸς τὴν διακύμανσιν τοῦ πληθυσμοῦ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει, ἀσχέτως ἂν ὁ πληθυσμὸς ἀκολουθῇ ἢ ὄχι τὸν Νόμον τῶν Gauss - Laplace, μὲ μόνον περιορισμὸν νὰ εἶναι *ἄπειρος*, τὰ δείγματα *ἄπειρα τὸ πλῆθος* καὶ τὸ *μέγεθος ἑκάστου δείγματος* νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον, τεῖνον πρὸς τὸ ἄπειρον.

3. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐλαχίστων προεισαγωγικῶν ἐννοιῶν, ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς *γεννητρίας συναρτήσεως ροπῶν* (Moment generating function) (*).

Ἀρχικῶς ἡ γεννήτρια συνάρτησις εἶχε τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma(\theta, \varphi) = \sum_i \varphi(x_i)\theta^{x_i} \text{ (δι' ἀσυνεχῆ τυχαῖα μεταβλητά)},$$

ὅπου $\varphi(x_i)$ ἡ πυκνότης πιθανότητος καί:

$$\Gamma(\theta) = \int_R \varphi(x)\theta^x dx \text{ (διὰ συνεχῆ τυχαῖα μεταβλητά)},$$

τῆς ὁλοκληρώσεως ἐκτεινομένης καθ' ὅλην τὴν τάξιν R τῶν δυνατῶν τιμῶν τῆς x.

Ἐὰν νῦν τεθῇ: $\theta = e^t$, τότε:

$$\Gamma(e^t) = E(e^{tx}) = \Sigma\varphi(x)e^{tx} \text{ ἢ } \int_R \varphi(x)e^{tx}dx$$

(ἀναλόγως ἂν πρόκειται περὶ ἀσυνεχῶν ἢ συνεχῶν τυχαίων μεταβλητῶν),

(*) Ἡ ἔννοια τῆς γεννητρίας συναρτήσεως φαίνεται ὅτι τὸ πρῶτον εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Cauchy εἰς πλεῖστα ὑπομνήματα ὑποβληθέντα εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν τὸ 1853. Βραδύτερον τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς e^{tx}, δηλ. $E(e^{tx})$ ὁ H. Poincaré ἐκάλεσε *χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν* (H. Poincaré, Calcul des probabilités, 1912, σελ. 206). Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τοῦ Poincaré ἐτροποποιήθη βραδύτερον ὑπὸ τοῦ P. Levy, τὸ 1923, κληθείσης ὡς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως τῆς $E(e^{itx})$ (Calcul des probabilités, σελ. 161), ὅπου $i = \sqrt{-1}$. Ἡ $E(e^{itx})$ ἐμφανίζει ἔναντι τῆς $E(e^{tx})$ ὡρισμένα ἀναλυτικὰ πλεονεκτήματα, ἰδίως κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος ἀντιστροφῆς τοῦ Fourier.

ἢ
$$E(e^{tx}) = \int_R \left(1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \dots\right)\varphi(x)dx$$
$$= \int_R \varphi(x)dx + t\int_R \varphi(x)\,xdx + \frac{t^2}{2!}\int_R \varphi(x)x^2dx + \frac{t^3}{3!}\int_R \varphi(x)x^3dy + \dots$$
$$= 1 + t\nu_1 + \frac{t^2}{2!}\nu_2 + \frac{t^3}{3!}\nu_3 + \dots, \quad \text{διότι} \int \varphi(x)dx = 1,$$
ἀλλὰ $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ εἶναι αἱ ροπαὶ 1ης, 2ας, 3ης, ... τάξεως περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχὴν $x = o$. Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τῆς (e^{tx}) καλεῖται *γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν*, ἀρκεῖ ὅπως τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνῃ καθ' ὅλην τὴν τάξιν τοῦ t. Βάσει τῶν ἄνω προκύπτει ὅτι ἡ ροπὴ r τάξεως περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχὴν $x = o$ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ $t^r/_{r!}$ δηλ. τὸ ν_r.

4. Δυνάμεθα, συνεπῶς, εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα νὰ καλῶμεν τὸ $\varphi(x)dx$ *πυκνότητα πιθανότητος* τοῦ τυχαίου μεταβλητοῦ x καὶ νὰ θεωρῶμεν τὸ E ὡς *γραμμικὸν ἐκτελεστὴν* (Linear operator). Ἤδη ζητήσωμεν τὴν γεννήτριαν συνάρτησιν ροπῶν τῆς κατανομῆς τῶν Gauss - Laplace. Πρὸς τοῦτο θέτομεν:
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{ὅτε:}$$
$$E(e^{tx}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x-\mu)-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$
ἢ
$$E(e^{tx}) = \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + t(x-\mu)} dx$$
$$\text{ἀλλά:} -\frac{(x-\mu)^2}{20} + t(x-\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2t\sigma^2(x-\mu) + \sigma^4t^2 - \sigma^4t^2\right]$$
$$= -\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2t^2}{2}$$
συνεπῶς:
$$E(e^{tx}) = \frac{e^{t\mu + \frac{\sigma^2t^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{t\mu + \frac{\sigma^2t^2}{2}}$$
δηλ. ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν τῆς: $\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ εἶναι ἡ $e^{t\mu + \frac{\sigma^2t^2}{2}}$

δηλ. ἡ x κατανέμεται κανονικῶς μὲ μέσον τὸ μ καὶ διακύμανσιν σ^2. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν ἡμιαναλλοίωτον (Semi-invariant) τῆς x, αὕτη ὡς γνωστὸν δίδεται ὑπό: $\log [E(e^{tx})] = K(x) = t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι $K_1 = \mu$ καὶ $K_2 = \sigma^2$, $K_3 = K_4 = \ldots = 0$. Συνήθως θέτομεν $M(t) = E(e^{tx})$, ὅτε $K(x) = \log M(t)$, τῆς $K(x)$ ἀναπτυσσομένης εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς $K(x) = t_1 K_1 + \frac{t^2}{2!} K_2 + \frac{t^3}{3!} K_3 + \ldots$

I θεώρημα 4 §. *Ἐὰν τὰ ἀνεξάρτητα τυχαῖα μεταβλητὰ* x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ *κατανέμωνται κανονικῶς* (δηλ. ἡ κατανομὴ ἑνὸς ἑκάστου τούτων εἶναι ἡ τοῦ Gauss-Laplace), *μὲ μέσους* μ_i *καὶ διακυμάνσεις* σ_i^2, *τότε τὸ ἄθροισμά των κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον* $\mu = \Sigma\mu_i$ *καὶ διακύμανσιν* $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2$

$$\text{Πράγματι: } E\left(e^{t\Sigma x_i}\right) = \Pi E\left(e^{x_i t}\right) \text{ ἀλλὰ } E\left(e^{x_i t}\right) = e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}}$$

$$\text{Ἑπομένως: } E\left(e^{t\Sigma x_i}\right) = \Pi\left(e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}}\right) = e^{t\Sigma\mu_i + \frac{t^2}{2}\Sigma\sigma_i^2} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

ὅπου: $\mu = \Sigma\mu_i$ καὶ: $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2$.

Ἡ ἔκφρασις: $e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ῥοπῶν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $X = \Sigma x_i$, ἐχούσης μέσον $\mu = \Sigma\mu_i$ καὶ διακύμανσιν $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2$.

II θεώρημα 5 §. *Ἐὰν X κατανέμεται κανονικῶς μὲ μέσον* $\overline{x}$ *καὶ διακύμανσιν* σ_x^2 *καὶ Ψ κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον* $\overline{y}$ *καὶ διακύμανσιν* σ_y^2, *τότε*: $Z = X \pm \Psi$ *κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον*: $\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}$ *καὶ διακύμανσιν πάντοτε*: $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Πράγματι, ἔχομεν:

$$E\left(e^{zt}\right) = E\left(e^{(X\pm\psi)t}\right) = E\left(e^{xt}\right) E\left(e^{\pm\psi t}\right)$$

$$= e^{\overline{x}t + \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} \; e^{\pm\overline{y} + \frac{\sigma_y^2 t^2}{2}} = e^{(\overline{x}\pm\overline{y})\, t + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \cdot t^2}{2}}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ῥοπῶν μιᾶς κανονικῆς κατανομῆς ἐχούσης ὡς μέσον: $\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}$ καὶ ὡς διακύμανσιν: $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

III θεώρημα 6 §. *Ἐὰν τὰ ἀνεξάρτημα μεταβλητὰ* x_i $(i=1, 2, 3, \ldots n)$ *κατανέμωνται κανονικῶς περὶ κοινὸν μέσον* μ *καὶ κοινὴν διακύμανσιν* σ^2, *τότε ὁ μέσος αὐτῶν κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον* μ *καὶ διακύμανσιν*: σ^2/n.

Πράγματι, ζητήσωμεν τὴν γεννήτριαν συνάρτησιν ῥοπῶν τοῦ: $\overline{x}$. Θὰ ἔχωμεν:

$$E\left(e^{\overline{x}t}\right) = E\left(e^{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)t/n}\right) = E\left(e^{x_1 t/n}\right) E\left(e^{x_2 t/n}\right) \ldots E\left(e^{x_n t/n}\right)$$

ἀλλά: $E\left(e^{\bar{x}t}\right) = \Pi E\left(e^{x_i t/n}\right)$. Ὡς γνωστὸν ὅμως $E\left(e^{x_i t/n}\right) = e^{\mu t/n + \frac{\sigma^2 t^2}{2n^2}}$

Ἑπομένως: $$E\left(e^{\bar{x}t}\right) = \Pi\left(e^{\mu t/n + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

ἥτις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν κανονικῆς κατανομῆς, ἐχούσης μέσον τὸ μ καὶ διακύμανσιν σ^2/n. Τὰ ἀνωτέρω ἐδείχθησαν βάσει τῆς ὑποθέσεως ὅτι x_i εἶναι *ἀνεξάρτητα κανονικὰ μεταβλητά*, ἔχοντα μέσον τό: μ καὶ διακύμανσιν: σ^2. Οἱ μέσοι, ἑπομένως, τῶν ἐκ n ἰσοπληθῶν δειγμάτων κατανέμονται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον τό: μ (μέσον τοῦ πληθυσμοῦ) καὶ διακύμανσιν: σ^2/n, ὅπου σ^2 ἡ διακύμανσις τοῦ πληθυσμοῦ καὶ n τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος.

IV Θεώρημα 7 §. *Ἐὰν ὁ μέσος δείγματος ἐκ n_1 εἶναι $\bar{x}_1$ καὶ ἡ διακύμανσις σ_1^2 καὶ ὁ μέσος δείγματος ἐκ n_2 εἶναι $\bar{x}_2$ καὶ ἡ διακύμανσις σ_2^2, τότε ἡ διαφορὰ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, ἀπείρων ὁμοίων πρὸς τὰ ἀνωτέρω δειγμάτων, κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς, μὲ μέσον τό: $\mu_1 - \mu_2$ καὶ διακύμανσιν: $\frac{\sigma_1^2}{n_2} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.*

Πράγματι:

$$E\left(e^{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)t}\right) = E\left(e^{\bar{x}_1 t}\right) E\left(e^{-\bar{x}_2 t}\right) = e^{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2}{n_1}\cdot\frac{t^2}{2}} e^{-\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\cdot\frac{t^2}{2}},$$

δηλ.: $$E\left(e^{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)t}\right) = e^{(\mu_1 - \mu_2)t + \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\frac{t^2}{2}},$$

ἥτις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν κατανομῆς ἐχούσης μέσον τό: $\mu_1 - \mu_2$ καὶ διακύμανσιν: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

V Θεώρημα 8 §. *Ἐὰν πρόκειται τώρα περὶ διωνυμιακῆς κατανομῆς, τότε, ὡς γνωστόν, $\bar{x} = np$ καὶ $\sigma = \sqrt{npq}$. Ἑπομένως θέτοντες:* $\tau = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$

ἢ $$\tau = \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \quad \left(p' = \frac{x}{n}\right)$$

τοῦ τ κατανεμομένου κανονικῶς μὲ μέσον τὸ p καὶ διακύμανσιν $\sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Πράγματι:

$$E\left(^{xt/n}\right) E = \left(e^{p't}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{pq}{n}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{p't - \frac{n}{2pq}(p'-p)^2} dp'$$

$$= \frac{e^{pt}}{\sqrt{\frac{2\pi pq}{n}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(p^1-p)t}\, e^{-\frac{n}{2pq}(p^1-p)^2}\, dp^1$$

ἀλλὰ $-\frac{n}{2pq}\left[(p^1-p)^2 - \frac{2pqt.\ (p^1-p)}{n} + \frac{p^2q^2t^2}{n^2} - \frac{p^2q^2t^2}{n^2}\right] =$

$$= -\frac{x}{2pq}\left[\left(p^1-p-\frac{pqt}{n}\right)^2\right] + \frac{pqt}{2n} \text{ δηλ.}$$

$$E\left(e^{p^1t}\right) = e^{pt + \frac{pq}{n}\cdot\frac{t^2}{2}}.$$

ἥτις εἶναι ἡ γενήτρια συνάρτησις ροπῶν κανονικῆς κατανομῆς, μὲ μέσον p καὶ διακύμανσιν pq/n.

VI θεώρημα 9 §. *Ἐὰν εἴς τι δεῖγμα ἡ ἀναλογία εἶναι* p^1_1 *καὶ ἡ διακύμανσις* p_1q_1/n *καὶ εἰς ἄλλο δεῖγμα ἡ ἀναλογία εἶναι* p^1_2 *καὶ ἡ διακύμανσις* p_2q_2/n, *τότε ἡ διαφορά :* $p^1_1-p^1_2$, *κατανέμεται κανονικῶς μὲ μέσον :* (p_1-p_2) *καὶ διακύμανσιν :* $\left(\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}\right)$

πράγματι,

$$E\left(e^{(p^1_1-p^1_2)t}\right) = E\left(e^{p^1_1t}\right)E\left(e^{-p^1_2t}\right) = e^{p^1t+\frac{p_1q_1}{n_1}\cdot\frac{t^2}{2}}\, e^{-p_2t+\frac{p_2q_2}{n_2}\cdot\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{δηλ. } E\left(e^{(p^1_1-p^1_2)t}\right) = e^{(p_1-p_2)t+\left(\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}\right)\frac{t^2}{2}}$$

ἥτις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν κανονικῆς κατανομῆς ἐχούσης μέσον τὴν διαφοράν: (p_1-p_2) καὶ διακύμανσιν: $\left(\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}\right)$

10 §. Ὁ ἔλεγχος τῆς σημαντικότητος γίνεται εὐκόλως πλέον διότι, ἂν πρόκειται νὰ ἐλεγχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι: $\bar{x} \neq 0$ ἔναντι τῆς ὑποθέσεως ὅτι $\mu=0$, θὰ τεθῇ:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{x}-0)\sqrt{n}}{s},$$ ὅπου s^2 ἡ ἀμερόληπτος – δηλ. ἡ ἄνευ σφάλματος – ἐκτίμησις τοῦ σ^2 τοῦ πληθυσμοῦ (*), τοῦ $\bar{x}$ ὑποτιθεμένου τυχαίου μεταβλητοῦ, μὲ μέσον τὸ μ καὶ διακύμανσιν s^2/n.

Ἐὰν ὅθεν ληφθῇ ὡς ἐπίπεδον σημαντικότητος τὸ $\alpha=0{,}05$ ὅτε καὶ $t>1{,}96$ (*) ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς $\alpha=0{,}05$, τότε ἀπορρίπτεται ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\bar{x}=0$ καὶ γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\bar{x}$ διαφέρει σημαντικῶς τοῦ μηδενός.

(*) Ἀμερόληπτος ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι $E(s^2)=\sigma^2$ καὶ $s^2 = \frac{\Sigma(x_1-\bar{x})^2}{n-1}$ ὅπου n τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος καὶ ὅπου E παριστᾷ τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα τῶν s^2 ὅλων τῶν ἐκ n ἰσοπληθῶν δειγμάτων, ἅτινα ἔχουν ληφθῆ, κατὰ τρόπον τυχαῖον ἐκ τοῦ ἰδίου πληθυσμοῦ, ἔχοντος διακύμανσιν σ^2.

(*) Διὰ $t=\pm 1{,}96$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης διὰ τιμὰς τοῦ t μεγαλυτέρας τοῦ 1,96 κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ πρὸς τὰ πέρατα κατὰ τὰς δύο ἐννοίας αὐτῆς εἶναι ἀκριβῶς 5 %, δηλαδὴ 2,5 % διὰ $t=+1{,}96$ καὶ 2,5 % διὰ $t=-1{,}96$.

Ἐὰν πάλιν πρόκειται νὰ ἐλεγχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, σχηματίζεται ὁ λόγος:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \mu_1) - (\bar{x}_2 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$ [τῆς διαφορᾶς $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ ὑποτιθεμένης τυχαίας μεταβλητῆς μὲ μέσον τὸ $(\mu_1 - \mu_2)$ καὶ διακύμανσιν $\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$]

βάσει τῆς ὑποθέσεως μηδέν, δηλ. ὅτι $\mu_1 = \mu_2$, ἤτοι ὅτι τὰ δείγματα ἔχουν ληφθῇ ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμόν, ἔχοντα μέσον: $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἄγνωστα τά: σ_1^2 καὶ σ_2^2, ἀντικαθίστανται ταῦτα ὑπὸ τῶν ἀμερολήπτων ἐκτιμήσεων αὐτῶν s_1^2 καὶ s_2^2. Ἐὰν ὅθεν $\alpha = 0{,}05$ καὶ $\pm t < 1{,}96$. γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, δηλ. *ὅτι τὰ δύο δείγματα ἔχουν ληφθῇ ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμὸν* μὲ μέσον $\mu = \mu_1 = \mu_2$, τῆς διαφορᾶς τῶν μέσων τότε τῶν δειγμάτων $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ οὔσης *στατιστικῶς ἀσημάντου*, δηλ. δυναμένης νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ μόνον τῶν τυχαίων κυμάνσεων τῆς δειγματοληψίας.

11 §. Ἐξυπακούεται ὅτι εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἡ διακύμανσις τοῦ πληθυσμοῦ σ^2, ἐξ οὗ τὸ δεῖγμα ἔχει ληφθῇ, παραμένει *ἄγνωστος*. Αὐτη, κατ' ἀκολουθίαν, εἰς τοὺς σχετικοὺς τύπους, ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς διακυμάνσεως τοῦ δείγματος s^2, διδομένης ὑπό: $s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ καὶ ἀποτελούσης ἐκτίμησιν τῆς σ^2 ἄνευ σφάλματος (unbiassed estimation). Τὸ τελευταῖον ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα ὡς ἑξῆς:

Ὡς γνωστὸν διὰ τὴν κατανομὴν τοῦ: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\nu s^2}{\sigma^2}$

ἰσχύει ὁ ἀναλυτικὸς νόμος:

$$f(\chi^2)d(\chi^2) = \frac{e^{-\chi^2/2} (\chi^2)^{\nu/2 - 1} d(\chi^2)}{2^{\nu/2}\, \Gamma(\nu/2)},$$ (διότι αὔτη εἶναι γ μεταβλητὸν μὲ παράμετρον $\nu/2$).

$$= \frac{e^{-\nu s^2/2\sigma^2} (\nu s^2)^{\nu/2 - 1} (\nu s^2)}{2^{\nu/2}\, \Gamma(\nu/2)\, (\sigma^2)}\, d\left(\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\right)$$

$$f(s^2)\, d(s^2) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \cdot \left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/2} e^{-\nu s^2/2\sigma^2} (s^2)^{\nu/2 - 1} d(s^2).$$

Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ἐπίσης ὅτι: $E(\chi^2) = \nu$ καὶ $V(\chi^2) = 2\nu$ (ὅπου $V(\chi^2)$ ἡ διακύμανσις τοῦ χ^2). Ἑπομένως ἐκ τῆς σχέσεως $\chi^2 = \frac{\nu s^2}{\sigma^2}$ λαμβάνομεν:

$$s^2 = \frac{\sigma^2 \chi^2}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad E(s^2) = \frac{\sigma^2\, E(\chi^2)}{\nu} = \frac{\sigma^2 \nu}{\nu} = \sigma^2$$

δηλ. *ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς ὅλων τῶν* s^2 *ἰσοῦται πρὸς* σ^2.

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$V(s^2) = \frac{\sigma^4 V(\chi^2)}{\nu^2} = \frac{\sigma^4\, 2\nu}{\nu^2} = \frac{2\sigma^4}{\nu} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

ἡ τελευταία ἰσχύει διὰ κατανομάς, δι' ἃς ἡ τετάρτη ἡμιαναλλοίωτος $K_4 = O$. Εἰς τὰς κατανομὰς ταύτας, ὡς γνωστόν, περιλαμβάνεται καὶ ἡ κανονικὴ κατανομὴ ὡς ἐδείχθη εἰς § 3.

12 §. Σημειωτέον ὅτι:

$$f(s)ds = \frac{2}{(\Gamma\nu/_2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/2} e^{-\nu s^2/2\sigma^2} s^{\nu-1} ds.$$

Ἑπομένως: $$E(s) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/_2} \int_0^\infty s e^{-\nu s^2/2\sigma^2} s^{\nu-1} ds.$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/_2} \int_0^\infty e^{-\nu s^2/2\sigma^2} s^{\nu} ds.$$

θέτομεν: $\frac{\nu s^2}{2\sigma^2} = t$, $s = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\sqrt{t}$, $ds = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}} \cdot \frac{t^{-1/2}\, dt}{2}$

καὶ $s^\nu = \frac{\sigma^\nu\, 2^{\nu/2}\, t^{\nu/2}}{\nu^{\nu/2}}$, ἑπομένως:

$$E(s) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/2} \frac{\sigma^\nu\, \sigma\sqrt{2}\, 2^{\nu/2}}{\sqrt{\nu}\; 2\, \nu^{\nu/2}} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\nu/2-1/2}\, dt$$

$$= \left(\frac{2\sigma^2}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)} \quad \text{ἢ} \quad \nu = n-1.$$

Δηλαδή: $$E(s) = \left(\frac{2\sigma^2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \simeq \sigma \sqrt{\frac{n-3/2}{n-1}}.$$

Ἐπειδὴ δέ: $E(s^2) = \sigma^2$, θὰ ἔχωμεν:

$$V(s) = E(s^2) - [E(s)]^2, \text{ (ὅπου } V \text{ ἡ διακύμανσις τοῦ } s)$$

$$= \sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{n-1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^2 \simeq \frac{\sigma^2}{2n},$$ ὅπου $\simeq$ παριστᾷ τὸ περίπου ἴσον.

Ἑπομένως ἡ διακύμανσις τοῦ s δίδεται ὑπὸ $\frac{\sigma^2}{2n}$, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ δείγματα εἶναι ἄπειρα καὶ τὸ μέγεθος ἑκάστου δείγματος $n \to \infty$.

13 §. Ἑπομένως διὰ νὰ ἐλεγχθοῦν τὰ s_1 καὶ s_2 διὰ δειγμάτων ἐκ n_1 καὶ n_2 στηριζόμεθα, mutatis mutandis, εἰς τὴν ἄποψιν ὅτι οἱ πληθυσμοὶ εἶναι *κανονικοί*, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δείγματα ἔχουν ληφθῇ, καὶ ὅτι ἡ διαφορά: $s_1 - s_2$ κατανέμεται ἐπίσης κανονικῶς μὲ διακύμανσιν ἴσην πρὸς $s^2 = \frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}$,

ὁπότε σχηματίζομεν καὶ πάλιν τὸν λόγον $t = \frac{s_1 - s_2}{s}$ καὶ ἀναλόγως τῆς τιμῆς τοῦ t, εἰς διδόμενον ἐπίπεδον σημαντικότητος α, εἴτε ἀποδεχόμεθα τὴν ἄποψιν ὅτι: $s_1 = s_2$, δηλ. ὅτι τὰ δύο δείγματα ἔχουν ληφθῆ ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμόν, εἴτε ἀπορρίπτομεν αὐτήν. Ἡ χρησιμοποίησις τώρα τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου ἐνδείκνυται ὅταν θέλομεν νὰ διακριβώσωμεν τὴν ὁμοιογένειαν τῶν καθ' ἕκαστον μετρήσεων εἰς τὰ δείγματα, δεδομένου ὅτι ἡ διασπορὰ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς περὶ τὸν μέσον αὐτῆς μετρεῖται ὑπὸ τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου.

14 §. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν διακύμανσιν τοὺ συντελεστοῦ συσχετίσεως r, ἀποδεικνύεται ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $\sigma_r^2 = \frac{(1-\rho^2)^2}{n}$ ἢ $\sigma_r^2 = \frac{(1-\rho^2)^2}{n-1}$*, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι $n > 500$ καὶ ρ εἶναι ἐγγύτατα τοῦ μηδενός. Ἡ ὑποκατάστασις τοῦ ρ ὑπὸ τοῦ r τοῦ δείγματος καὶ δὴ ὅταν $r \to |1|$ καὶ $n < 500$ ἄγει κατὰ κανόνα εἰς *ἐσφαλμένην ἐκτίμησιν* τῆς μ. ἀποκλίσεως τετραγώνου τοῦ r, διότι ἡ κατανομὴ τῶν r, κατὰ κανόνα, δὲν εἶναι συμμετρική, δηλ. δὲν ἀκολουθεῖ τὸν νόμον Gauss–Laplace, παρὰ μόνον, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὅταν $\rho \to o$ καὶ n εἶναι ὑπερμέτρως μέγας ἀριθμός.

Διὰ τὸν ἔλεγχον ὅθεν τῆς σημαντικότητος τοῦ r ἀνεξαρτήτως τοῦ μεγέθους τῶν δειγμάτων εἰσάγεται ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ Fisher : $Z = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} = 1{,}15129 \text{ λογ } \frac{1+r}{1-r}$, ὁ ὁποῖος προκύπτει ὡς κάτωθι:

15 §. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ μεταβλητὸν x ἔχει κατανομὴν τοιαύτην ὥστε: $E(x) = \mu$ καὶ διακύμανσιν: $V(x) = f(\mu)$ ὥστε $f(\mu)$ δὲν εἶναι σταθερά. Ἐπιδιώκομεν τώρα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν νέαν μεταβλητὴν y, συνάρτησιν τοῦ x, δι' ἧς ἡ διακύμανσις νὰ εἶναι *ἀνεξάρτητος τοῦ μ*. Ἔστω, συνεπῶς, $y = \varphi(x)$, τότε θὰ ἔχωμεν ἀναπτύσοντες κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor καὶ περιοριζόμενοι εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους

$$y = \varphi(\mu) + (x - \mu)\,\varphi'(\mu),$$ ὅπου φ' ἡ παράγωγος τοῦ φ

Ἀλλά: $E(y) = E[\varphi(\mu) + \varphi'(\mu)\,E(x-\mu)] = \varphi(\mu)$, διότι $E(x-\mu) = O$

Ἐπομένως: $y - \varphi(\mu) = (x - \mu)\,\varphi'(\mu)$

ἢ $E[y - \varphi(\mu)]^2 = V(y) = [\varphi'(\mu)]^2 E(x-\mu)^2 = V(x)\,[\varphi'(\mu)]^2 = f(\mu)\,[\varphi'(\mu)]^2$

Ἐὰν τεθῇ: $V(y) = c^2$, σταθερά, τότε

$$\varphi'(\mu) = c/\sqrt{f(m)} \quad \text{ἢ} \quad \varphi(\mu) = c \int \frac{dm}{\sqrt{f(m)}}$$

τούτου τεθέντος, ἔχομεν:

$$f(m) = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n-1}}$$

* M. Kendall «The advanced theory of statistics», τόμος I σελὶς 211 καὶ ρ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως τοῦ πληθυσμοῦ.

ἄρα: $$\varphi(\mu) = c\int \frac{\sqrt{n-1}\ d\rho}{1-\rho^2} = \int \frac{d\rho}{1-\rho^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right)d\rho$$

$\left(\text{τιθεμένου } c = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$

δηλ.: $$\varphi(\mu) = \frac{1}{2}\int\frac{d\rho}{1+\rho} + \frac{1}{2}\int\frac{d\rho}{1-\rho} = \frac{1}{2}\log(1+\rho) - \frac{1}{2}\log(1-\rho) =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{2-\rho}$$

ἢ $$\varphi(\mu) = Z = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$$

16 §. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὸ z τοῦτο κατανέμεται κατὰ *προσέγγισιν κανονικῶς*. Πράγματι διὰ δείγματα ληφθέντα ἀπὸ *ἀσυσχέτιστον κανονικὸν πληθυσμόν*, ἡ κατανομὴ τοῦ r εἶναι:

$$dp = \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-4)}dr}{B(^1/_2, {}^1/_2(n-2))} \quad *$$

Ἐκ τοῦ ἄνω μετασχηματισμοῦ ὅμως τοῦ Fisher ἔχομεν: $2z = \log\frac{1+r}{1-r}$

ἢ τέλος: $$r = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \text{εφ}hz.\ \text{Ἑπομένως: } dr = \text{τεμ}\ h^2z\ dz.$$

Κατὰ συνέπειαν: $$1-r^2 = 1-\text{εφ}hz^2 = \frac{1}{\text{συν}hz^2} = \text{τεμ}hz^2 \text{ καὶ ἄρα: } dp = \frac{\text{τεμ}hz^{n-2}dz}{B(^1/_2, {}^1/_2(n-2)}$$

$$\text{τεμ}hz = \frac{1}{\text{συν}hz} = \frac{2}{e^z+e^{-z}} = \frac{2}{1+z+z^2/_2+\ldots+1-z+z^2/_2\ldots+} \doteq \frac{1}{1+z^2/_2+\ldots} = e^{-z^2/2}$$

$$e^{-\frac{1}{2}(n-2)z^{2E}}\ dz$$

ἑπομένως: $$dp \doteq \frac{e\qquad dz}{\left(B^1/_2, \frac{(n-2)}{2}\right)} = ce^{-\frac{z^2}{2}(n-2)}\ dz$$

δηλ. ἡ κατανομὴ τοῦ z εἶναι κατὰ προσέγγισιν κανονικὴ μὲ διακύμανσιν: $\sigma_z^2 = \frac{1}{n-2}$. Ὁ Fisher ὅμως ἔδειξεν ὅτι καλυτέρα προσέγγισις ἐπιτυγχάνεται ὅταν: $\sigma^2 z = \frac{1}{n-3}$

---

* Ἴδε M. Kendall op. cit. σελὶς 342.

Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΩΣ ΟΡΓΑΝΟΝ ΕΡΕΥΝΗΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΑΣΟΠΟΝΙΑΣ

Ὑπὸ Ε. Β. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗ

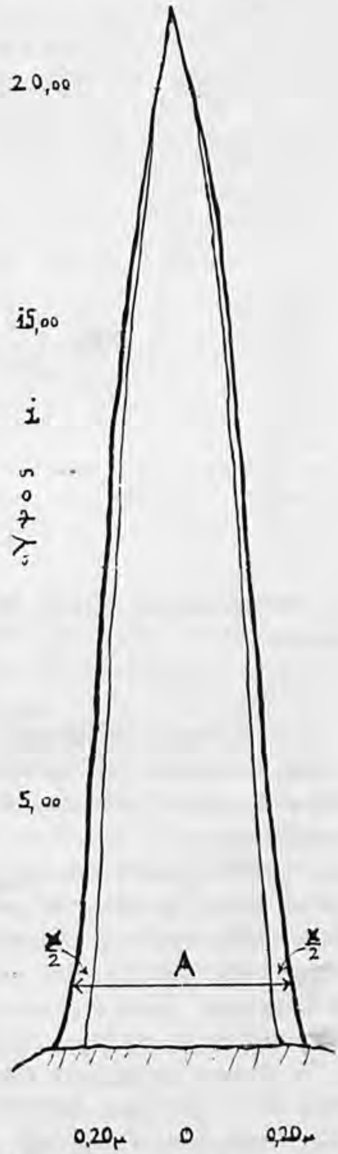
Δασολόγου παρὰ τῷ Ἰνστιτούτῳ Δασικῶν Ἐρευνῶν τοῦ Ὑπ. Γεωργίας

Α'.

Τὸ πάχος τοῦ φλοιοῦ τῶν δένδρων τῆς μαύρης πεύκης (Pinus Nigra, Arn.) ὡς συνάρτησις τῆς ἐμφλοίου στηθιαίας διαμέτρου αὐτῶν

Πρὸς εὕρεσιν μιᾶς συναρτησιακῆς σχέσεως μεταξὺ ἀφ' ἑνὸς τῆς ἐμφλοίου στηθιαίας διαμέτρου τῶν δένδρων μαύρης πεύκης ὡς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ ἀφ' ἑτέρου τοῦ πάχους τοῦ φλοιοῦ τῆς ἐν λόγῳ διαμέτρου, ὡς ἐξηρτημένης τοιαύτης, διεμορφώθη ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τοῦ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ὑλοτομηθέντος στατιστικοῦ ὑλικοῦ: 1) Εἰς τὸ δασικὸν σύμπλεγμα Δυτικοῦ Ταϋγέτου κατὰ τὰ ἔτη 1951 καὶ 1952 φροντίδι τοῦ ὑποφαινομένου, 2) Εἰς τὸ δασικὸν σύμπλεγμα Πάρνωνος κατὰ τὸ ἔτος 1954, μερίμνῃ ὁμοίως τοῦ ὑποφαινομένου, 3) εἰς τὸ δάσος Ζαρούχλης κατὰ τὸ ἔτος 1952 φροντίδι τοῦ Λ. Οἰκονομίδου, Ἐπιθεωρητοῦ Δασῶν (θέσαντος εὐγενῶς τὰ οἰκεῖα στοιχεῖα εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ γράφοντος). Τὸ δεῖγμα τοῦτο ἀπετελέσθη ἐκ 289 δένδρων μὲ ἀναλογίαν 100 δένδρων, ἐκ τοῦ δασικοῦ συμπλέγματος Δ. Ταϋγέτου, 110 δένδρων ἐκ τοῦ δασικοῦ συμπλέγματος Πάρνωνος καί, τέλος, 79 δένδρων ἐκ τοῦ δάσους Ζαρούχλης. Αἱ τιμαὶ παρατηρήσεως τῶν ἐμφλοίων στηθιαίων διαμέτρων τῶν δένδρων τούτων ὡς καὶ τοῦ πάχους τοῦ φλοιοῦ αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους 1,30 μ., ὅρα καὶ παρακείμενον σχῆμα 1) παρατίθενται εἰς τὸν πίνακα Α' τοῦ παρόντος.

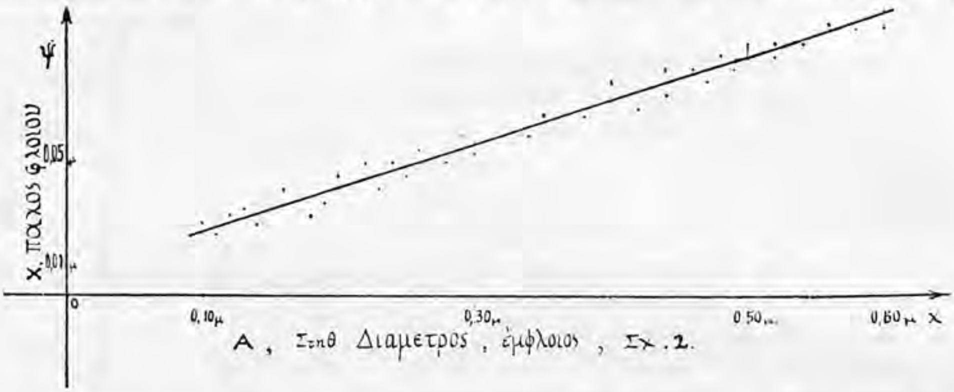
Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον παρατηρεῖ τις εὐκόλως ὅτι εἰς μὲν τὸ ἀριστερὸν μέρος αὐτοῦ αἱ τιμαὶ παρατηρήσεως καταχωροῦνται ἁπλῶς κατ' αὔξουσαν τάξιν χωρὶς νὰ ταξινομοῦνται εἰς στατιστικὴν κατανομὴν συχνοτήτων, ἐνῷ εἰς τὸ δεξιὸν μέρος τοῦ ἰδίου πί-



Σχηματικὴ παράστασις δένδρου
Α, στηθ. διάμετρος
x, πάχος φλοιοῦ
Σχ. 1

νακος καταχωροῦνται αἱ ἴδιαι τιμαὶ ἀνηγμέναι εἰς μέσους ὅρους καὶ ταξινομημέναι οὕτω εἰς στατιστικὴν κατανομὴν συχνοτήτων.

Ἡ ἐφ' ἑνὸς συστήματος ὀρθογωνίων συντεταγμένων σχεδίασις τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν ὡς ἀνωτέρω μεταβλητῶν, διὰ τοποθετήσεως ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν Χ τῶν τιμῶν παρατηρήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (ἔμφλοιος στηθιαία διάμετρος), ἐπὶ ἐκείνης δὲ τῶν Ψ τῶν τιμῶν παρατηρήσεως τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης (πάχος φλοιοῦ εἰς τὸ ὕψος τῆς στηθιαίας διαμέτρου) ἀπέδειξε τὴν ὕπαρξιν εὐθυγράμμου τάσεως, πρᾶγμα ὅπερ συμφωνεῖ καὶ μὲ τὰ γενικώτερον ἐκ τῆς Ξυλομετρίας γνωστὰ ἐπὶ τοῦ προκειμένου θέματος. (Σχῆμα 2).



Ἡ προκειμένη εὐθεῖα δύναται νὰ παρασταθῇ ἀναλυτικῶς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως,

$$\Psi = \alpha X + \kappa$$

ἔνθα:

Ψ, τὸ πάχος τοῦ φλοιοῦ τῆς στηθιαίας διαμέτρου,

Χ, τὸ μέγεθος τῆς ἐμφλοίου στηθιαίας διαμέτρου εἰς ἕκαστον δένδρον τοῦ δείγματος ὡς ἐξετέθη ἀνωτέρω, ἐνῷ α καὶ κ εἶναι ἄγνωστοι προσδιοριστέαι παράμετροι.

Ἡ προσαρμογὴ τῶν τιμῶν παρατηρήσεως εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων διότι αἱ διὰ ταύτης ἐκτιμώμεναι τιμαὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Ψ ἔχουν, κατὰ τὰ δεδομένα τῆς στατιστικῆς μεθοδολογίας, μεγίστην πιθανότητα ν' ἀνταποκρίνωνται εἰς τὰς πραγματικὰς τιμὰς παρατηρήσεως ἑνὸς στατιστικοῦ πλήθους δένδρων τυχαίως ἐκλεγομένων εἰς τὰ δάση ἐξ ὧν ἐλήφθησαν τὰ δείγματα.

Ἡ βασικὴ διαδικασία διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων ἐλέγχου ἐκτίθεται εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 29/1957 τεῦχος τοῦ περιοδικοῦ «ΤΟ ΔΑΣΟΣ». (Ἔκδοσις τοῦ Ὑπουργείου Γεωργίας), εἰς ὃ παραπέμπεται πρὸς τοῦτο ὁ ἀναγνώστης. Πρὶν ὅμως προχωρήσωμεν περαιτέρω ἂς ἐπιτραπῇ ἡμῖν νὰ διατυπώσωμεν τ' ἀκόλουθα:

Κατὰ τοὺς D. Bruce καὶ F. Schumacher, συγγραφεῖς τοῦ βιβλίου:

Forest Mensuration, 3rd Edition, N. York, 1950

τὰ δεδομένα διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων ἐλέγχου (περὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων βλέπε καὶ «ΣΠΟΥΔΑΙ» (τεῦχος 6-7, Μάρτιος - Ἀπρίλιος 1957) καὶ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, εἰς περιπτώσεις ὡς ἡ παροῦσα, δύνανται νὰ καταχωρηθοῦν εἰς πίνακα κατὰ 2 τρόπους, εἴτε ὡς ἀταξινόμητα δεδομένα κατατασσόμενα ἁπλῶς κατ' αὔξουσαν τάξιν τῶν τιμῶν παρατηρήσεως τῶν τυχαίων μονάδων τοῦ οἰκείου στατιστικοῦ φαινομένου, εἴτε ὡς δεδομένα ταξινομημένα ὑπὸ μορφὴν στατιστικῆς κατανομῆς συχνοτήτων. Τοῦτο, ὡς προεξετέθη ἤδη, δείκνυται σαφῶς εἰς τὸν συνημμένον πίνακα ὑπὸ στοιχεῖον Α', ὅπου ὁ ἀναγνώστης βλέπει τὰ ἴδια στοιχεῖα διατεταγμένα ὑπὸ δύο μορφάς.

Πρὸς μόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων ἐλέγχου καὶ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μὴ ταξινομημένων εἰς πίνακα στατιστικῆς κατανομῆς συχνοτήτων στοιχείων, τὰ στοιχεῖα ταῦτα κατατάσσονται ὡς ὁ πίναξ Β' δεικνύει: Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ ἐξισώσεις ἐλέγχου εἶναι:

$$\Sigma (A^2) + \Sigma (AK) + \Sigma (AX) = \Sigma (AS)$$
$$\Sigma (AK) + \Sigma (K^2) + \Sigma (KX) = \Sigma (KS)$$

Αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις εἶναι:

$$\Sigma (A^2)\,\alpha + \Sigma (AK)\,\kappa - \Sigma (AX) = 0$$
$$\Sigma (AK)\,\alpha + \Sigma (K^2)\,\kappa - \Sigma (KX) = 0.$$

Τὸ γράμμα Σ σημαίνει: ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα. Ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Α' φέρονται κατ' αὔξουσαν τάξιν αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐν προκειμένῳ αἱ τῆς ἐμφλοίου στηθιαίας διαμέτρου.

Οὕτω: $\Sigma (A^2)$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης A^2. Ἡ 1 εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ κ, εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\psi = \alpha X + \kappa$. Ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Χ φέρονται αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, ἤτοι ἐν προκειμένῳ τὸ πάχος τοῦ φλοιοῦ, ἐνῷ S παριστᾷ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα
$A + K + X = S$. Κατὰ τὰ ἄλλα αἱ στῆλαι εἶναι ἐφ' ἑαυτῶν νοηταί.

Ἡ προκειμένη διαδικασία πρὸς μόρφωσιν τῶν ἐν λόγῳ ἐξισώσεων εἶναι λίαν δαπανηρὰ εἰς χρόνον. Αὕτη συντομεύεται κατὰ πολύ, ἐὰν τὰ ἀταξινόμητα δεδομένα ταξινομηθοῦν εἰς συνοπτικὸν πίνακα στατιστικῆς κατανομῆς συχνοτήτων. Τούτου γενομένου, πρὸς μόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων ἐλέγχου καὶ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, τὰ δεδομένα ταῦτα καταχωροῦνται ὡς εἰς τὸν οἰκεῖον πίνακα Γ' ἐμφαίνεται. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις ἔχουν ὡς ἑξῆς:

Α'. Αἱ ἐξισώσεις ἐλέγχου εἶναι:

$$\Sigma (fA^2) + \Sigma (fAK) + \Sigma (fAX) = \Sigma (fAS)$$
$$\Sigma (fAK) + \Sigma (fK^2) + \Sigma (fKX) = \Sigma (fKS)$$

καὶ ἐν προκειμένῳ:

$$33{,}5367 + 91{,}39 + 6{,}15030 = 131{,}07700$$
$$91{,}39 + 289 + 17{,}127 = 397{,}517.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ταυτότητες. Οἱ λογαριασμοί μας ἔχουν καλῶς. Δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν μόρφωσιν τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων.

Β'. Αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις εἶναι:

$$33{,}5367\alpha + 91{,}39\ \kappa - 6.15030 = 0$$
$$91{,}39\alpha + 289.00\ \kappa - 17{,}12700 = 0$$

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας λαμβάνομεν,

$$\alpha = 0{,}15837$$
$$\kappa = 0{,}00918$$

Ἡ ζητουμένη συνάρτησις ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως $\widehat{\Psi} = 0{,}15837\,X + 0{,}00918$

ἔνθα:

$\widehat{\Psi}$, τὸ αἰτούμενον πάχος τοῦ φλοιοῦ τῶν δένδρων εἰς τὸ ὕψος τῆς στηθιαίας διαμέτρου, Χ ἡ ἔμφλοιος στηθιαία διάμετρος τοῦ ἰδίου δένδρου, 0,15837 παράμετρος ἐκφράζουσα τὴν σχέσιν φλοιοῦ καὶ ἐμφλοίου στηθιαίας διαμέτρου καὶ 0,00918 σταθερὸς ὅρος.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς παραμέτρου ταύτης καὶ τοῦ οἰκείου σταθεροῦ ὅρου κατηρτίσθη ὁ συνημμένος ὑπὸ στοιχεῖον Δ΄ πίναξ, δίδων τὸ πάχος τοῦ φλοιοῦ τῶν δένδρων ὡς συνάρτησιν τῆς στηθιαίας διαμέτρου αὐτῶν.

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ τονισθῇ ὅτι διὰ τῆς συμπτύξεως τῶν δεδομένων ὑπὸ τὴν μορφὴν στατιστικῆς κατανομῆς συχνοτήτων διαπράττεται ἓν σφάλμα συνήθως ἀσήμαντον. Τὸ σφάλμα τοῦτο δύναται ν' ἀποβῇ σημαντικὸν ὅταν τὸ διάστημα τάξεως τῆς τε ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης εἶναι πολὺ μέγα ἐν σχέσει πρὸς τὸ συνολικὸν εὖρος τῆς τάξεως —πρᾶγμα ὅπερ ἐν προκειμένῳ δὲν συμβαίνει.

Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς σταθμικὸς ὅρος τῶν τιμῶν παρατηρήσεως τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ἤτοι τοῦ πάχους τοῦ φλοιοῦ, ὑπολογιζόμενος βάσει τοῦ τύπου,

$$\overline{X} = \frac{(\Sigma\, fX)}{N}$$

ἀνευρέθη ὡς ἴσος πρὸς 0,0593. Ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου τῶν ἰδίων τιμῶν ὑπολογιζομένη βάσει τοῦ τύπου,

$$S = \pm\sqrt{\frac{S(fd^2)}{N}}$$

ἀνευρέθη ὡς ἴση πρὸς 0,0212 μ. ἡ δὲ διακύμανσις τῶν ἰδίων τιμῶν ὡς ἴση πρὸς 0,0004514 μ.

Τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως τῶν θεωρητικῶν τιμῶν ὑπολογιζόμενον διὰ τοῦ τύπου,

$$S\psi = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(\Theta-\Theta')}{N-P-I}}$$

(P, ὁ ἀριθμὸς τῶν παραμέτρων)

ἀνευρέθη ὡς ἴσον πρὸς 0,00693 μ, ἤτοι ἀνέρχεται εἰς 12% τῆς μέσης τιμῆς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, ἥτις, ὡς προεξετέθη, ἀνέρχεται εἰς 0,0593 μ. Τὸ σφάλμα τοῦτο κατανέμεται κανονικῶς συμφώνως τῷ νόμῳ τοῦ Gauss. Ἡ διακύμανσις τοῦ ἐν λόγῳ σφάλματος ἀνέρχεται εἰς 0,0000481 μ.

Ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ὁ ἐμφαίνων τὴν ἔντασιν τοῦ δεσμοῦ ἐξαρτήσεως μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν Α καὶ Χ, ὑπολογιζόμενος βάσει τοῦ τύπου

$$r = \pm\sqrt{1 - \frac{S^2_{\psi\cdot x}}{S^2_{\psi}}}$$

ἀνευρέθη ὡς ἴσος πρὸς + 0,945. (Οἱ στατιστικοὶ συνειθίζουν νὰ δίδουν εἰς τὸν συντελεστὴν r τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, ἐν προκειμένῳ +, διότι ἔχομεν : α = συντελεστὴς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς εἰς τὴν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως, $\psi = 0{,}15837\,X + 0{,}00918$, καὶ $\alpha = +\,0{,}15837$).

Ὁ συντελεστὴς οὗτος ἐγγίζει ἀρκετὰ πρὸς τὴν 1 ὥστε νὰ χαρακτηρίζῃ τὸν ὡς ἀνωτέρω δεσμὸν ὡς λίαν ἰσχυρόν. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ἐξίσωσις

$$\Psi = \alpha X + \kappa$$

πιστῶς ἀναπαριστᾷ τὸν νόμον τῆς συμμεταβολῆς τῶν ὡς ἀνωτέρω μεταβλητῶν.

Αἱ διὰ τῆς προμνησθείσης ἐξισώσεως παλινδρομήσεως

$$\widehat{\Psi} = 0{,}15837\ X + 0{,}00918$$

ἐκτιμηθεῖσαι τιμαὶ τοῦ $\widehat{\Psi}$ ὀλίγον μόνον διαφέρουν τῶν χρησιμοποιηθεισῶν κατὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ ὀγκομετρικοῦ πίνακος διπλῆς εἰσόδου τοῦ καταρτισθέντος διὰ τὸ δασικὸν σύμπλεγμα Πάρνωνος (περὶ οὗ βλέπε περιοδικὸν «ΣΠΟΥΔΑΙ» Μάρτιος—Ἀπρίλιος 1957 ἔνθ' ἀνωτέρω) ἢ τῶν ἰδίων τῶν χρησιμοποιηθεισῶν κατὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ ὀγκομετρικοῦ πίνακος ἁπλῆς εἰσόδου τοῦ καταρτισθέντος διὰ τὸ δασικὸν σύμπλεγμα Δ. Ταϋγέτου (περιοδικὸν τὸ «ΔΑΣΟΣ», ἔνθ' ἀνωτέρω). Ἡ μικρὰ αὐτὴ ἀσυμφωνία ἐξηγεῖται εὐκόλως ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τοὺς ἐν λόγῳ ὀγκομετρικοὺς πίνακας αἱ τιμαὶ τοῦ πάχους φλοιοῦ ὡς συναρτήσεως τῆς στηθιαίας ἐμφλοίου διαμέτρου τῶν δένδρων ὑπελογίσθησαν μόνον γραφικῶς βάσει τυχαίου δείγματος ἐξ 70 περίπου μονάδων προερχομένων ἐξ ἡμισείας ἐκ τοῦ Δ. Ταϋγέτου καὶ τοῦ Πάρνωνος.

Ὡς εὐνόητον αἱ προκείμεναι νέαι τιμαὶ εἶναι ἀκριβέστεραι διότι προέρχονται ἐξ ἀναλυτικῶν ὑπολογισμῶν. Θὰ ἠδύνατό τις μάλιστα νὰ διακρίνῃ ὅτι ὁ προκείμενος πίναξ δίδει ἐλαφρῶς ἀνωτέρας τιμὰς πάχους φλοιοῦ εἰς τὰς ἀνωτέρας διαμέτρους, καὶ τοῦτο διότι εἰς τὸ προκείμενον δεῖγμα περιελήφθησαν περισσότεροι κορμοὶ ἀνωτέρων διαμέτρων ἢ εἰς τὸ δεῖγμα εἰς τὸ ὁποῖον ἐφηρμόσθη μόνον ἡ γραφικὴ μέθοδος. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον θὰ ἠδύνατό τις νὰ συστήσῃ ὅπως ὁ ἀνὰ χεῖρας πίναξ χρησιμοποιῆται ὅταν πρόκειται νὰ ἐκτιμηθῇ τὸ πάχος τοῦ φλοιοῦ τῶν κορμῶν γηραιῶν συστάδων, ἐνῷ ὁ ἐκ γραφικοῦ ὑπολογισμοῦ πίναξ θὰ προσιδίαζεν μᾶλλον εἰς κορμοὺς νεαρῶν συστάδων. Ὅπως καὶ ἂν ἔχῃ τὸ πρᾶγμα, ἡ διαφορὰ δὲν εἶναι οὐσιώδης καὶ δύναταί τις νὰ χρησιμοποιῇ ἀδιαφόρως εἴτε τὸν ἕνα εἴτε τὸν ἄλλον πίνακα ἐξ ἴσου ἱκανοποιητικῶς δι' οἱασδήποτε μορφῆς συστάδας.

Ἐάν, τώρα, ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ ἐκ μαύρης πεύκης δάση τοῦ Δυτικοῦ Ταϋγέτου, τοῦ Πάρνωνος καὶ τῆς Ζαρούχλης, ἐξ ὧν προέρχεται τὸ ἀνὰ χεῖρας χρησιμοποιηθὲν δεῖγμα, δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἀντιπροσωπευτικὰ τῶν ὁμοειδῶν δασῶν ὁλοκλήρου τῆς Πελοποννήσου, ἔπεται ἐκ τούτου ὅτι οἱ ἀνὰ χεῖρας πίνακες δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ πᾶν δάσος μαύρης πεύκης ἐν Πελοποννήσῳ. Ἀλλὰ καὶ διὰ πᾶν δάσος ἐκ μαύρης πεύκης ὁπουδήποτε ἐν τῇ Χώρᾳ θὰ ἠδύναντο οὗτοι νὰ χρησιμοποιηθοῦν, ἀρκεῖ νὰ ἐδοκιμάζετο προηγουμένως ἡ ἀκρίβεια τῆς ἐφαρμογῆς των ἀφ' ἑνὸς σχετικῶς πολυαρίθμου τυχαίου δείγματος ἐκ τοῦ δάσους τούτου, ἐπ' εὐκαιρίᾳ ὑλοτομιῶν εἰς αὐτό.

Ἀθῆναι, Ὀκτώβριος 1957

ΠΙΝΑΞ Α'

'Εμφαίνων τὰς τιμὰς παρατηρήσεως τοῦ πάχους τοῦ φλοιοῦ 289 δένδρων μαύρης πεύκης, τυχαίως ἐκλεγέντων εἰς τὰ δασικὰ συμπλέγματα Δ. Ταϋγέτου, Πάρνωνος καὶ Ζαρούχλης.

(Δεδομένα μὴ κατατεταγμένα εἰς συχνότητας)

α/α δένδρου	Στηθ. Διάμετρος ("Εμφλοιος) (μέτρα) A	Πάχος Φλοιοῦ (μέτρα) X
1	0,096	0,015
2	100	20
3	100	20
4	0,104	25
5	0,105	0,015
6	107	20
7	108	20
8	110	20
9	112	25
10	114	25
11	0,114	29
12	0,115	0,019
13	118	20
14	120	20
15	121	23
16	122	25
17	0,124	25
18	0,125	0,028
19	129	32
20	132	33
21	0,134	0,035
. . .	. . . . .	. . . . .
. . .	. . . . .	. . . . .
. . .	. . . . .	. . . . .
282	0,566	0,090
283	,570	097
284	,574	104
285	,580	140
286	,590	120
287	,600	090
288	,610	090
289	0,620	0,150
289		

$\bar{A} = 0{,}3166$ μ.

$\bar{X} = 0{,}0593$ μ.

(Τὰ ἴδια δεδομένα ἀνηγμένα εἰς μέσους ὅρους καὶ κατατεταγμένα οὕτω εἰς συχνότητας)

Στηθ. Διάμετρος ("Εμφλοιος) Μέσ. ὅρος (μέτρα) A	Πάχος Φλοιοῦ Μέσος ὅρος (μέτρα) X	Συχνότης (f)
0,10	0,020	4
1	22	7
2	22	6
3	32	4
4	35	5
5	29	7
6	29	5
7	39	6
8	37	9
0,19	46	5
0,20	37	9
1	49	9
2	47	8
3	50	7
4	53	7
5	55	7
6	55	8
7	56	5
8	54	7
0,29	50	8
0,30	55	9
1	58	9
2	51	7
3	63	5
4	58	8
5	72	6
6	58	7
7	64	9
8	78	5
0,39	78	5
0,40	90	3
1	73	6
2	80	6
3	79	6
4	72	9
5	84	6
6	82	8
7	80	5
8	85	6
0,49	68	5
0,50	87	8
1	87	5
2	110	1
3	100	1
4	070	1
5	100	1
6	100	1
7	097	3
8	140	1
0,59	120	1
0,60	090	1
1	090	1
0,62	0,150	1
		289

Π Ι Ν Α Ξ Β'

Δεικνύων τὸν τρόπον τῆς κατατάξεως τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων ἐλέγχου καὶ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐξισώσεως προσαρμογῆς $\widehat{\Psi} = \alpha X + \kappa$ *(περίπτωσις μὴ χρησιμοποιήσεως συχνοτήτων).*

A/A δένδρου	A	K	X	S	A^2	AK	AX	AS	K^2	KX	KS
1	0,096	1	0,015	1,111	0,009216	0,096	0,001440	0,106650	1	0,015	1,111
2	0,100	1	0,020	1,120	0,100000	0,100	0,000200	0,112000	1	0,020	1,120
3	0,100	1	0,020	1,120	0,100000	0,100	0,000200	0,112000	1	0,020	1,120
. .	. . .	.	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .	.	. . .	. . .
. .	. . .	.	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .	.	. . .	. . .
. .	. . .	.	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .	.	. . .	. . .
287	0,600	1	0,090	1,150	0,003600	0,600	0,005400	0,006900	1	0,090	1,150
288	0,610	1	0,090	1,151	0,003721	0,610	0,005490	0,070211	1	0,090	1,151
289	0,620	1	0,150	1,212	0,003844	0,620	0,009300	0,075144	1	0,150	1,212
289	Σ(A)	Σ(K)	Σ(X)	Σ(S)	$\Sigma(A^2)$	Σ(AK)	(Σ)AX)	Σ(AS)	$\Sigma(K^2)$	Σ(KX)	Σ(KS)

Π Ι Ν Α Ξ Γ'

Δεικνύων τὸν τρόπον τῆς κατατάξεως τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων ἐλέγχου καὶ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐξισώσεως προσαρμογῆς $\widehat{\Psi} = aX + \kappa$

(Περίπτωσις χρησιμοποιήσεως συχνοτήτων).

A	K	X	S	f	fA^2	fAK	fAX	fAS	fK^2	fKX	fKS
0,10	1	0,020	1,120	4	0,0400	0,40	0,00800	0,44800	4	0,080	4,480
11	1	22	132	7	0847	77	01694	87164	7	154	7,924
12	1	22	142	6	0864	72	01584	82224	6	132	6,852
. . .	. .	. . .	. . .	. .	. . . .	. .	. . . .	. . . .	. .	. . .	. . .
. . .	. .	. . .	. . .	. .	. . . .	. .	. . . .	. . . .	. .	. . .	. . .
. . .	. .	. . .	. . .	. .	. . . .	. .	. . . .	. . . .	. .	. . .	. . .
0,60	1	0,090	1,690	1	0,3600	0,60	0,05400	1,01400	1	0,090	1,690
61	1	0,090	700	1	3721	61	05490	03700	1	090	700
0,62	1	0,150	1,770	1	0,3844	0,62	0,09300	1,09740	1	0,150	1,770
19,08	53	3,150	75,666	289	33,5367	91,36	6,15030	131,07700	289	17,127	397,517
Σ(A)	Σ(K)	Σ(X)	Σ(S)	Σ(f)	Σ(fA²)	Σ(fAK)	Σ(fAX)	Σ(fAS)	Σ(fK²)	Σ(fKX)	Σ(fKS)

ΠΙΝΑΞ Δ'

Ἐμφαίνων τὰ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως $\widehat{\Psi} = aX + \kappa$ ἐκτιμηθέντα διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων πάχη φλοιοῦ τῶν δένδρων μαύρης πεύκης βάσει τυχαίου δείγματος ἐκ 289 τοιούτων, ὑλοτομηθέντων εἰς τὰ δασικὰ συμπλέγματα Δ. Ταϋγέτου, Πάρνωνος καὶ τοῦ δάσους Ζαρούχλης.

Στηθ. Διάμ. ("Εμφλοιος)	Πάχος Φλοιοῦ	Στηθιαία Διάμετρος ("Αφλοιος)		Πάχος Φλοιοῦ	
		Ἀπεστρογγυλωμένη εἰς τὸ ἐγγύτερον 0,005	Ἀπεστρογγυλωμένη εἰς τὸ ἐγγύτερον 0,01	Ἀπεστρογγυλωμένον εἰς τὸ ἐγγύτερον 0,005	Ἀπεστρογγυλωμένον εἰς τὸ ἐγγύτερον 0,01
0,0800	0,0218	0,0600	0,0600	0,0200	0,0200
0900	334	650	700	250	200
0,1000	250	750	700	250	200
1110	266	850	800	250	300
1200	282	900	900	300	300
1300	298	0,1000	0,1000	300	300
1400	314	1100	1100	300	300
1500	329	1150	1200	350	300
1600	345	1250	1300	350	300
1700	361	1350	1300	350	400
1800	377	1400	1400	400	400
1900	393	1500	1500	400	400
0,2000	409	1600	1600	400	400
2100	424	1700	1700	400	400
2200	440	1750	1800	450	400
2300	456	1850	1800	450	500
2400	472	1950	1900	450	500
2500	488	0,2000	0,2000	500	500
2600	504	2100	2100	500	500
2700	519	2200	2200	500	500
2800	535	2250	2300	550	500
2900	551	2350	2300	550	600
0,3000	567	2450	2400	550	600
3100	583	2500	2500	600	600
3200	599	2600	2600	600	600
3300	614	2700	2700	600	600
3400	630	2750	2800	650	600
3500	646	2850	2900	650	600
3600	662	2950	2900	650	700
3700	678	0,3000	0,3000	700	700
3800	694	3100	3100	700	700
3900	709	3200	3200	700	700
0,4000	725	3250	3300	750	700
4100	741	3350	3400	750	700
4200	757	3450	3400	750	800
4300	773	3550	3500	750	800
4400	789	3600	3600	800	800
4500	804	3700	3700	800	800
4600	820	3800	3800	800	800
4700	836	3850	3900	850	800
4800	852	3950	3900	850	900
4900	868	0,4050	0,4000	850	900
0,5000	884	4100	4100	900	900
5100	889	4200	4200	900	900
5200	915	4300	4300	900	900
5300	931	4350	4400	950	900
5400	947	4450	4500	950	900
5500	963	4550	4500	950	1000
5600	979	4600	4600	1000	1000
5700	995	4700	4700	1000	1000
5800	1002	4800	4800	1000	1000
5900	1026	4850	4900	1050	1000
0,6000	1042	4950	0,5000	1050	1000
6100	1058	0,5050	0,5000	1050	1100
0,6200	0,1074	0,5150	0,5100	0,1050	0,1100

Β'

Μιὰ τρίτη μέθοδος διὰ τὴν κατάρτισιν ὀγκομετρικῶν πινάκων ἁπλῆς εἰσόδου ἱσταμένων δένδρων. Πίνακες μαύρης πεύκης ἰσχύοντες δι' ὁλόκληρον τὴν Πελοπόννησον.

Εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 6 - 7, τῶν μηνῶν Μαρτίου - Ἀπριλίου 1957 τεῦχος τοῦ περιοδικοῦ «ΣΠΟΥΔΑΙ» (Ἔκδοσις τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, Ἀθῆναι), ἐδημοσιεύθη μελέτη τοῦ ὑποφαινομένου ὑπὸ τὸν τίτλον : *«Μία στατιστικὴ μέθοδος καταρτίσεως πινάκων κυβισμοῦ ἱσταμένων δένδρων.* Οἱ πίνακες διπλῆς εἰσόδου κυβισμοῦ ἱσταμένων δένδρων μαύρης πεύκης κλπ.».

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 29/1958 τεῦχος τοῦ περιοδικοῦ «ΤΟ ΔΑΣΟΣ» (Ἔκδ. τοῦ Ὑπουργ. Γεωργίας, Ἀθῆναι) ἐδημοσιεύθη ἑτέρα μελέτη τοῦ ὑποφαινομένου περιγράφουσα μίαν ἄλλην στατιστικὴν μέθοδον, περὶ τρόπου συντάξεως ὀγκομετρικῶν πινάκων ἁπλῆς εἰσόδου ἱσταμένων δένδρων μαύρης πεύκη; κλπ.

Δίδομεν κατωτέρω τὴν περιγραφὴν μιᾶς τρίτης στατιστικῆς μεθόδου περὶ τρόπου συντάξεως ὀγκομετρικῶν πινάκων ἁπλῆς εἰσόδου ἱσταμένων δένδρων κλπ. δυναμένην νὰ θεωρηθῇ ὡς συνέχεια τῆς πρώτης ὡς ἀνωτέρω μελέτης μας.

Εἰς τὴν μελέτην ταύτην, πρὸς εὕρεσιν μιᾶς συναρτησιακῆς σχέσεως μεταξὺ τῆς στηθιαίας διαμέτρου καὶ τοῦ ὕψους ἀφ' ἑνός, ὡς ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, καὶ τοῦ ξυλώδους ὄγκου ἀφ' ἑτέρου, ὡς ἐξηρτημένης τοιαύτης, διεμορφώθησαν 4 τυχαῖα δείγματα καὶ προσηρμόσθησαν αἱ τιμαὶ παρατηρήσεως αὐτῶν εἰς τὴν ἐξίσωσιν Schumacher καὶ Hall: $V = D^{\alpha} H^{\beta}$ κ. διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Πρὸς περαιτέρω ἔρευναν τῆς συναρτησιακῆς ταύτης σχέσεως, διεμορφώθησαν δύο εἰσέτι τυχαῖα δείγματα, ἐκ τοῦ οἰκείου εἰς χεῖρας μας στατιστικοῦ ὑλικοῦ τοῦ ὑλοτομηθέντος τῇ ἐποπτείᾳ μας εἰς τὸ δασικὸν σύμπλεγμα Πάρνωνος κατὰ τὸ ἔτος 1954 εἰς τρόπον ὥστε, τελικῶς, τὰ δείγματα ἀνῆλθον εἰς 6, μὲ τὰ κάτωθι γνωρίσματα ἕκαστον :

Α/Α	*Μονάδες τοῦ δείγματος*	*Εὖρος κυμάνσεως τῶν μεταβλητῶν*		*Τιμαὶ τῶν παραμέτρων* α, β καὶ κ
1	50	Στηθ. Διάμ. Ὕψος Ξυλ. Ὄγκος	0,09 μ. - 0,21 μ. 8,00 μ. - 16,00 μ. 0,028 κ.μ. - 0,287 κ.μ.	$\alpha = +2,14033$ $\beta = +0,65316$ $\kappa = +0,12788$
2	50	Στηθ. Διαμ. Ὕψος Ξυλ. Ὄγκος	0,21 μ. - 0,35 μ. 12,00 μ. - 21,00 μ. 0,221 κ.μ. - 0,863 κ.μ.	$\alpha = +2,76870$ $\beta = +0,92788$ $\kappa = +0,13041$
3	50	Στηθ. Διαμ. Ὕψος Ξυλ. Ὄγκος	0,36 μ. - 0,49 μ. 13,00 μ. - 28,00 μ. 0,629 κ.μ. - 2,723 κ.μ.	$\alpha = +2,98275$ $\beta = +0,65470$ $\kappa = +0,42018$
4	150	Στηθ. Διαμ. Ὕψος Ξυλ. Ὄγκος	0,09 μ. - 0,49 μ. 8,00 μ. - 28,00 μ. 0,028-2κ.μ - 2,723 κ.μ.	$\alpha = +2,00451$ $\beta = +0,80961$ $\kappa = -0,16527$

Α/Α Δείγματος	Μονάδες τοῦ Δείγματος	Εὖρος κυμάνσεως τῶν μεταβλητῶν		Τιμαὶ τῶν παραμέτρων α, β, καὶ κ
5	50	Στηθ. Διάμ.	0,09 μ. - 0,35 μ.	α = + 1,98316
		Ὕψος	7,00 μ. - 20 μ. οο	β = + 0,78662
		Ξυλ. Ὄγκος	0,025 κ.μ. -0 ,818 κ.μ.	κ = — 0,14626
		Στηθ. Διάμ.	0,09 μ. - 0,49 μ.	α = + 2,02328
6	200	Ὕψος	7,00 μ. - 28,οο μ.	β = + 0,74318
		Ξυλ. Ὄγκος	0,025 κ.μ. - 2,723 κ.μ.	κ = — 0,07308

Ἐκ τῆς ὡς ἀνωτέρω μελέτης καὶ τοῦ προκειμένου πίνακος προκύπτει ὅτι ὑπὸ τὴν βασικὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῆς στηθιαίας διαμέτρου καὶ τῶν λογαρίθμων τοῦ ξυλώδους ὄγκου καὶ μεταξὺ ἐκείνων τοῦ ὕψους καὶ τῶν λογαρίθμων τοῦ ἰδίου ὄγκου, εἶναι εὐθύγραμμος, ἡ στηθιαία διάμετρος τῶν δένδρων ἐπηρεάζει τὸν ξυλώδη ὄγκον ἑνὸς στατιστικοῦ πλήθους ἐξ αὐτῶν 2,47592 ἕως 4,55590 φορὰς περισσότερον ἢ τὸ ὕψος τούτων, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν κάτωθι πηλίκων τῆς διαιρέσεως τῆς παραμέτρου α (τῆς ἐκφραζούσης τὴν ἐπίδρασιν τῆς διαμέτρου) διὰ τῆς παραμέτρου β (τῆς ἐκφραζούσης τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ὕψους).

Δεῖγμα ὑπ' ἀριθ. 1 α : β = 3,27688
» » 2 α : β = 2,98373
» » 3 α : β = 4,55590
» » 4 α : β = 2,47592
» » 5 α : β = 2,52111
» » 6 α : β = 2,72259

Ὁ ἔλεγχος τῆς εὐθυγραμμίας τῶν ὡς ἄνω σχέσεων γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐξακριβωθεῖσα συναρτησιακὴ σχέσις μεταξὺ τῶν ὡς ἀνωτέρω μεταβλητῶν, ὡς αὕτη διεμορφώθη ἐκ τῆς ἐρεύνης τοῦ ὑπ' ἀριθ. 4 δείγματος, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πορισμάτων ἐκ τοῦ ὁποίου κατηρτίσθησαν καὶ οἱ οἰκεῖοι ὀγκομετρικοὶ πίνακες, εἶναι ἡ ἀκόλουθος (Ἐξίσωσις παλινδρομήσεως):

$$\text{λογ } \widehat{\Psi} = \text{λογ. } V = 2{,}00451 \text{ λογ. } D. + 0{,}80961 \text{ λογ. } H - 0{,}16527$$

$$\widehat{\Psi} = V$$

Πρόκειται νὰ ἐξακριβωθῇ ἐὰν ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι εὐθύγραμμος, χωριστὰ μεταξὺ στηθιαίας διάμετρου καὶ ξυλώδους ὄγκου καὶ χωριστὰ μεταξὺ ὕψους καὶ ξυλώδους ὄγκου :

Ἐὰν τηρήσωμεν τὸν παράγοντα

λογ. H

σταθερὸν εἰς τὴν μέσην τιμὴν αὐτοῦ, ἴσην μὲ 177,68 : 150 = 1,18453, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\text{Λογ. } V = 2{,}00451 \text{ Λογ. } D + 0{,}79374$$

(Ὅρα τὸ προμνησθὲν τεῦχος τῶν «ΣΠΟΥΔΩΝ»).

Ἐὰν τηρήσωμεν τὸν παράγοντα

λογ. D

σταθερὸν εἰς τὴν μέσην αὐτοῦ τιμὴν ἴσην μὲ - 90,77 : 150 = – 0,60513 λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

λογ. V = 0,80961 Λογ. H. – 1,37826

Ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν τὴν ἀκόλουθον σειρὰν τιμῶν :

Α΄.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως

Λογ. V = 2,00451 Λογ. D + 0,79364

(παραλειπομένου τοῦ ὕψους)

Στηθ. Διάμ.:	Λογ. V	Λογ. Στηθ. Δ.
0,10	– 1,21077	– 1,00
12	– 1,05041	– 0,92
14	– 0,91009	– 0,85
15	– 0,84996	– 0,82
19	– 0,64951	– 0,72
23	– 0,48915	– 0,64
24	– 0,44906	– 0,62
25	– 0,40897	– 0,60
27	– 0,34883	– 0,57
28	– 0,30874	– 0,55
30	– 0,24861	– 0,52
32	– 0,18847	– 0,49
35	– 0,12833	– 0,46
37	– 0,06820	– 0,43
39	– 0,02811	– 0,41
40	– 0,00806	– 0,40
42	+0,03203	– 0,38
44	+0,07212	– 0,36
46	+0,09216	– 0,35
48	+0,15230	– 0,32
0,50	+0,19239	– 0,30

Β΄.

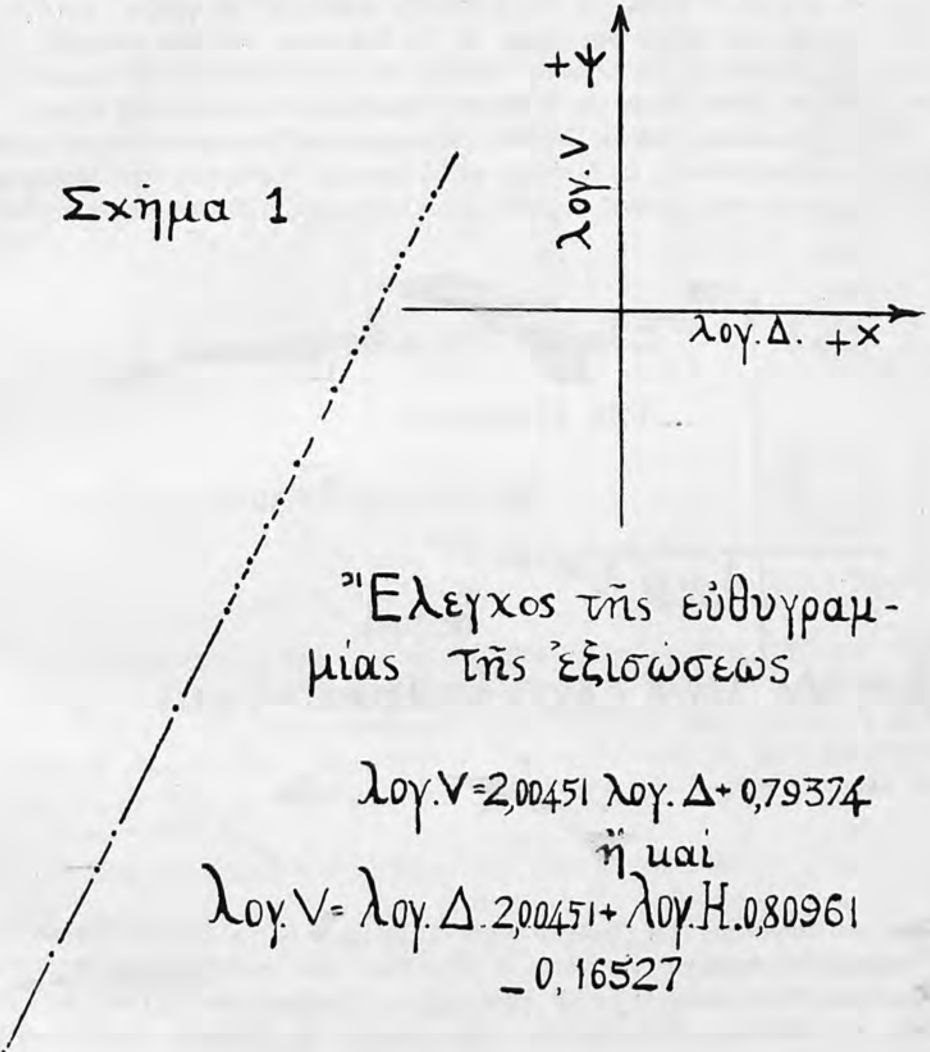
Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως

Λογ. V = 0,80961 Λογ. H – 1,37826

(παραλειπομένης τῆς στηθιαίας διαμέτρου)

Ὕψος	Λογ. V	Λογ. Ὕψους
10,00	– 0,56965	1,00
11,00	– 0,53627	1,04
12,00	– 0,50388	1,08
14,00	– 0,44721	1,15
16,00	– 0,40773	1,20
18,00	– 0,35815	1,26
20,00	– 0,32577	1,30
21,00	– 0,31057	1,32
22,00	– 0,29338	1,34
24,00	– 0,26100	1,38
26,00	– 0,23671	1,41
28,00	– 0,20433	1,45
29,00	– 0,19623	1,46
30,00	–0,18004	1,48

Ἐὰν ἐφ᾽ ἑνὸς συστήματος ὀρθογωνίων συντεταγμένων τοποθετήσωμεν ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν Χ τοὺς λογαρίθμους τῆς στηθιαίας διαμέτρου, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν Ψ τοὺς ἀντιστοίχους λογαρίθμους τοῦ ξυλώδους ὄγκου, ἐκ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον Α΄. Πίνακος, τότε λαμβάνομεν μίαν σειρὰν σημείων τὰ ὁποῖα εὐκόλως δυνάμεθα νὰ διευθετήσωμεν ὡς κείμενα ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς. (Σχῆμα 1).

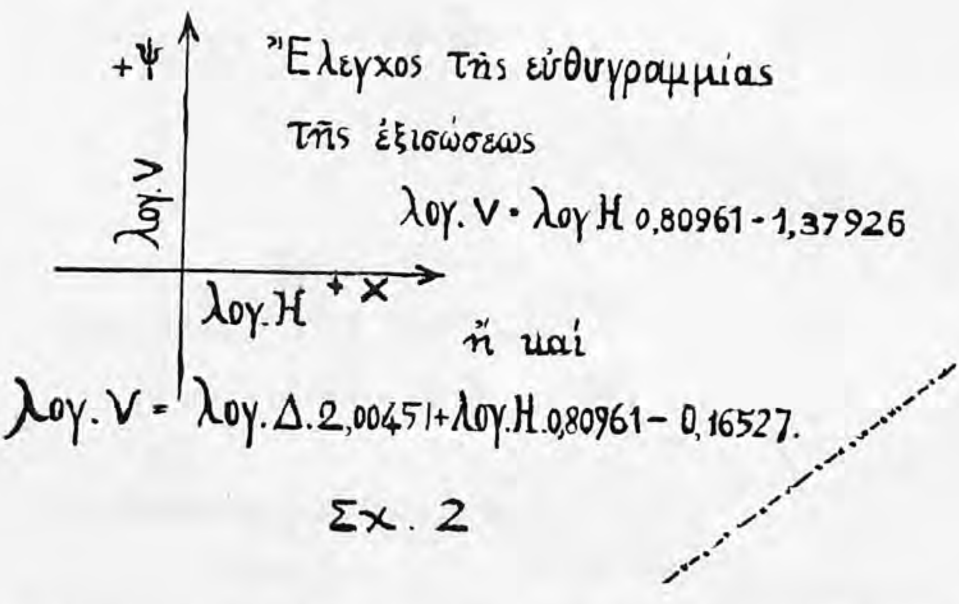


Ἐκ τούτου ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν λογαρίθμων στηθιαίων διαμέτρων καὶ ἐκείνων τοῦ ξυλώδους ὄγκου εἶναι εὐθύγραμμος, τὸ αὐτὸ δὲ ἀποδεικνύεται εὐκόλως καὶ διὰ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων ὕψους καὶ ἐκείνων τοῦ ξυλώδους ὄγκου (Σχῆμα 2).

Δεχόμενοι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ ἄλλα 5 δείγματα, ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἐλέγχεται ὡς ἀληθὲς τὸ ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης γραφὲν ὅτι ἡ στηθιαία διάμετρος ἑνὸς στατιστικοῦ πλήθους δένδρων ἐπηρεάζει τὴν διαμόρφωσιν τοῦ ξυλώδους ὄγκου αὐτοῦ 2,47592 ἕως 4,5590 φορὰς περισσότερον ἢ τὸ ὕψος τούτων καὶ δὴ τόσον περισσότερον, ὅσον μεγαλυτέρας διαμέτρου εἶναι τὰ δένδρα.

Ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους σκεπτόμεθα ὅτι δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ ὕψος ὡς ὀλίγον, ἐν σχέσει μὲ τὴν στηθιαίαν διάμετρον, ἐπηρεάζον τὸν ὄγκον τῶν δένδρων, περιοριζόμενοι μόνον εἰς τὴν διάμετρον ταύτην, καταρτίζοντες οὕτω ἕνα πίνακα ἁπλῆς εἰσόδου, δίδοντα τὸν ὄγκον στατιστικοῦ τινος πλήθους δένδρων, βάσει μόνον τῆς στηθιαίας διαμέτρου ἑνὸς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, λοιπόν, διεμορφώσαμεν ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἐκ 300 δένδρων μαύρης πεύκης, ὡς ὁ οἰκεῖος πίναξ δεικνύει, ληφθέντων κατ' ἀναλογίαν 120 δένδρων ἐκ τοῦ δασικοῦ συμπλέγματος Πάρνωνος, 100 δένδρων ἐκ τοῦ δα-



Σχ. 2

σικοῦ συμπλέγματος Δυτ. Ταϋγέτου καὶ 80 δένδρων ἐκ τοῦ δάσους Ζαρούχλης (Στοιχεῖα Πάρνωνος καὶ Ταϋγέτου ἐξ ἐργασιῶν τοῦ ὑποφαινομένου, στοιχεῖα Ζαρούχλης ἐξ ἐργασίας τοῦ κ. Λ. Οἰκονομίδου, Ἐπιθ)τοῦ Δασῶν) καὶ ἐφηρμόσαμεν τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Ὡς ἐξίσωσις προσαρμογῆς ἐλήφθη ἡ ἐξίσωσις

$$\text{Λογ. } V = \alpha.\ \text{λογ. } D + \kappa.$$

Κατὰ τὸ βιβλίον:

Forest Mensuration by Bruce and Schumacher, 3rd Edition
N. York, 1950,

ἐξ οὗ ἐλήφθη καὶ ὁ τρόπος ἐλέγχου τῶν ὡς ἀνωτέρω εὐθυγραμμιῶν, οἱ ὑπολογισμοὶ καταστρώνονται ὡς κατωτέρω.

ΠΙΝΑΞ

κατατάξεως τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

D	*V*	*A* (*Λογ. D.*)	*A*²	*μικτὸς Λογ. V*	*ἀμιγὴς Λογ. V* X	*A.X.*	*K.*
0,08	0,020	− 1,10	1,21	$\bar{2}$,30	− 1,70	+ 1,8700	1
»	22	»	»	34	66	8260	1
»	25	»	»	40	60	7600	1
»	29	»	»	46	54	6940	1
0,08	0,039	− 1,10	1,21	$\bar{2}$,59	41	5510	1
0,09	0,024	− 1,05	1,10	$\bar{2}$,38	62	7010	1
›	28	»	»	45	55	6275	1
»	32	»	»	51	49	5645	1
»	38	»	»	58	42	4910	1
0,09	0,045	− 1,05	1,10	$\bar{2}$,65	− 1,35	+ 1,4175	1
. . .	. . .	. . .	. .	.	. . .	. . . .	.
. . .	. . .	. . .	. .	.	. . .	. . . .	.
0,50	2,461	− 0,30	0,09	−	+ 0,39	− 0,1170	1
0,51	1,928	− 0,29	0,08	−	+ 0,29	− 0,0841	1
0,52	1.691	− 0,28	0,09	−	+ 0,23	− 0,0644	1
		− 180,72	+121,16		− 124,87	+ 105,4738	300

Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον D φέρονται αἱ στηθιαῖαι διάμετροι (ἄφλοιοι), ὑπὸ τὸ στοιχεῖον V οἱ (ἄφλοιοι) ξυλώδεις ὄγκοι, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον A οἱ λογάριθμοι τῶν στηθιαίων διαμέτρων, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον A², τὰ τετράγωνα τῶν ἐν λόγῳ λογαρίθμων, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον X ὁ ἀμιγὴς λογάριθμος τοῦ ὄγκου, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον K, τέλος, ὁ συντελεστὴς τοῦ σταθεροῦ ὅρου κ, τουτέστιν ἡ μονάς.

Αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἶναι :

$$\Sigma\,(A^2)\ \alpha + \Sigma\,(AK)\ \kappa - \Sigma\,(AX) = 0$$
$$\Sigma\,(AK)\ \alpha + \Sigma\,(K^2)\ \kappa - \Sigma\,(KX) = 0$$

καὶ ἐν προκειμένῳ :

$$+\,121,16\alpha - 180,72\,\kappa - 105,4738 = 0$$
$$-\,180,72\alpha + 300,00\,\kappa + 124,8700 = 0$$

Ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν :

$$\alpha = 2,46067$$
$$\kappa = 1,07166$$

Ἡ ἐξίσωσις παλινδρομήσεως εἶναι :

$$\text{Λογ. } V = 2,46067\ \text{Λογ. } D + 1,07166 = \text{λογ. } \widehat{\Psi}$$
$$\text{καὶ}\ \ V = \widehat{\Psi}$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως ταύτης κατηρτίσθησαν οἱ κατωτέρω πίνακες κυβισμοῦ:

Στηθ. Διάμ.	Ξυλ. Ὄγκος	Στηθ. Διάμ.	Ξυλ. Ὄγκος
(Ἄφλοια στοιχεῖα)		(Ἄφλοια στοιχεῖα)	
0,08	0,023	0,31	0,656
0,09	31	2	734
0,10	41	3	777
1	51	4	823
2	64	5	871
3	76	6	975
4	96	7	1,032
5	113	8	092
6	127	9	156
7	150	0,40	217
8	178	1	294
9	200	2	370
0,20	223	3	449
1	250	4	534
2	280	5	633
3	314	6	718
4	352	7	818
5	394	8	1,924
6	417	9	2,036
7	467	0,50	155
8	523	1	281
0,29	0,553	0,52	2,414
0,30	0,620		

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος τῶν τιμῶν παρατηρήσεως τῶν ξυλωδῶν ὄγκων ὑπολογιζόμενος βάσει τοῦ τύπου $\overline{x} = \frac{\Sigma(X),}{N}$ εἶναι 0,635 κ.μ. Ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου τῶν ἰδίων τιμῶν, ὑπολογιζομένη καὶ αὕτη βάσει τοῦ τύπου

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N-1}}$$

ἀνευρέθη ὡς ἴση πρὸς 0,545 κ.μ. ἡ δὲ διακύμανσις αὐτῶν ὡς ἴση πρὸς 0,297 κ.μ. Τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως τῶν θεωρητικῶν τιμῶν, ὑπολογιζόμενον καὶ τοῦτο βάσει τοῦ τύπου

$$S = \pm \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N\text{-}I\text{-}P}}$$

(P, ὁ ἀριθμὸς τῶν παραμέτρων)

ἀνευρέθη ὡς ἴσον πρὸς 0,174 κ.μ. ἡ δὲ διακύμανσις αὐτοῦ ὡς ἴση πρὸς 0,030 κ.μ. Τὸ σφάλμα τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ 27 °/₀ τοῦ πραγματικοῦ μέσου κορμοῦ ἐκ 0,635 κ.μ. ὡς προεξετέθη καὶ κατανέμεται κανονικῶς σύμφωνα μὲ τὸν Νόμον τοῦ Gauss. Ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ὑπολογισθεὶς βάσει τοῦ τύπου

$$r = \pm \sqrt{1 - \frac{S_{\chi.\psi}}{S_\psi}}$$

εὑρέθη ἴσον πρὸς

$$r = \pm \sqrt{1 - \frac{0{,}03036}{0{,}29724}} = + 0{,}948.$$

(Οἱ στατιστικοὶ συνηθίζουν νὰ δίδουν εἰς τὸν συντελεστὴν τοῦτον τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς εἰς τὴν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως. Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν: λογ. V = 2,46067 λογ. D + 1,09166, δηλ. + 2,46067 καὶ r = + 0,948).

Ὁ συντελεστὴς οὗτος πλησιάζει ἱκανοποιητικῶς πρὸς τὴν μονάδα ὥστε νὰ χαρακτηρίζῃ ὡς ἰσχυρὸν τὸν δεσμὸν ἐξαρτήσεως μεταξὺ στηθιαίας διαμέτρου καὶ ξυλώδους ὄγκου καὶ πιστῶς περιγράφουσαν τὸν ἐν λόγῳ δεσμὸν τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν ἐξίσωσιν προσαρμογῆς.

Προελέχθη ἤδη ὅτι τὸ δεῖγμα ὅπερ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν ἐν λόγῳ πινάκων συνεκροτήθη ἐκ δένδρων προερχομένων ἐκ τῶν δασῶν Πάρνωνος, Δυτ. Ταϋγέτου καὶ Ζαρούχλης. Ἑπομένως οἱ συνημμένοι πίνακες δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται διὰ τὸν κυβισμὸν τῶν δασικῶν συστάδων τῶν δασῶν τούτων ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις: Βασικαὶ προϋποθέσεις τῆς ἐπιτυχοῦς χρησιμοποιήσεώς των εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ αὐτῶν μόνον ἐπὶ στατιστικοῦ τινος πλήθους τυχαίως ἐκλεγομένων δένδρων ἐκ 300 τοὐλάχιστον, διότι δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται ὅτι τὸ στατιστικὸν φαινόμενον δὲν ἐφαρμόζεται ἐπὶ μικροσκοπικῆς κλίμακος, ἀλλὰ μόνον ἐπὶ μακροσκοπικῆς. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐφαρμογὴ τῶν πινάκων τούτων νοεῖται μόνον ἐπὶ δένδρων ὅπου ἡ σχέσις μεταξὺ στηθιαίας διαμέτρου καὶ ὕψους εἶναι ἡ αὐτὴ οἵα ἡ ἐπικρατοῦσα μεταξὺ τῶν δένδρων τοῦ χρησιμοποιηθέντος δείγματος. Ἐὰν ἡ σχέσις αὕτη δὲν εἶναι ἡ ἰδία, ἀλλὰ πρὸς μίαν κατεύθυνσιν σταθερῶς διάφορος, τότε ὁ κίνδυνος συστηματικοῦ σφάλματος εἶναι μέγας. Ὁ κίνδυνος οὗτος ἐξουδετεροῦται ὅταν ἡ σχέσις αὕτη μεταβάλλεται συνεχῶς αὐξομειουμένη πέριξ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ὁ πληθυσμὸς τῶν ὑψῶν εἶναι κανονικὸς καὶ τὰ παρατηρούμενα σφάλματα ἐξισορροποῦνται ἀμοιβαίως. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ πάσης διαχειριστικῆς μορφῆς δάση μαύρης πεύκης, τὰ ὁποῖα ἁπλοῦνται ἐπὶ ἐδαφῶν διαφόρου ποιότητος, ὁπότε ὑπάρχει ἰσχυρὰ διαφόρισις ὑψῶν. Εἰς δάση φυόμενα ἐπὶ ἐδαφῶν τῆς αὐτῆς ἢ περίπου τῆς αὐτῆς ποιότητος ὑπάρχει σοβαρὸς κίνδυνος συστηματικοῦ σφάλματος.

Δεδομένου πάντως ὅτι τὰ ὡς ἀνωτέρω δάση ἀντιπροσωπεύουν τὸ σύνολον σχεδὸν τῶν ἐκ μαύρης πεύκης δασῶν τῆς Πελοποννήσου, ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι οἱ προκείμενοι πίνακες εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόζωνται ἱκανοποιητικῶς ὑπὸ τὰς μνησθείσας προϋποθέσεις εἰς πᾶν δάσος μαύρης πεύκης ἐν Πελοποννήσῳ.

Ἐὰν κάμωμεν μίαν σύγκρισιν μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν ἀνὰ χεῖρας πινάκων καὶ ἐκείνων αἵτινες ὑπελογίσθησαν βάσει τῆς ἐξισώσεως

$$\widehat{V} = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$$

καὶ αἱ ὁποῖαι ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 29/1957 τεῦχος τοῦ περιοδικοῦ «ΤΟ ΔΑΣΟΣ» (βλέπε ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης μας) παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀνὰ χεῖρας πίνακες δίδουν τιμὰς ἐλαφρῶς μεγαλυτέρας διὰ τὰς κατωτέρας διαμέτρους καὶ ἐλαφρῶς κατωτέρας διὰ τὰς μεγαλυτέρας τοιαύτας. Ἐν τῷ συνόλῳ των ὅμως οἱ δύο πίνακες δὲν διαφέρουν οὐσιωδῶς—ἢ μᾶλλον οὐδόλως διαφέρουν, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν θεωρητικῶν τιμῶν τῶν ξυλωδῶν ὄγκων τῆς κλίμακος ἀπὸ στηθιαίας διαμέτρου 0,10 μ. ἕως 0,50 μ. εἶναι εἰς μὲν τοὺς ἀνὰ χεῖρας πίνακας 31,764 κ.μ. εἰς δὲ τοὺς ἄλλους 31,755. Ἑπομένως διὰ τὸ δάσος Δ. Ταϋγέτου δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται ἐξ ἴσου ἱκανοποιητικῶς οἱ δύο πίνακες.

Τέλος οἱ προκείμενοι πίνακες δύνανται νὰ ἔχουν ἐφαρμογήν, ὑπὸ τὰς μνησθείσας προϋποθέσεις, εἰς οἱονδήποτε δάσος μαύρης πεύκης, ἐν τῇ Χώρα, ἐὰν καὶ ἐφ' ὅσον ἤθελεν ἀποδειχθῆ, ἐπ' εὐκαιρίᾳ ὑλοτομιῶν κλπ., ὅτι οὗτοι ἔχουν ἱκανοποιητικὴν ἐφαρμογὴν ἐπὶ τυχαίου πολυαρίθμου δείγματος ὑλοτομουμένου εἰς τὸ δάσος τοῦτο.

Ἀθῆναι, Δεκέμβριος 1957

Π Ι Ν Α Ξ

Ἐμφαίνων τὰς τιμὰς παρατηρήσεως τῶν 300 δένδρων τοῦ δείγματος τοῦ χρησιμοποιηθέντος διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν ὀγκομετρικῶν πινάκων ἁπλῆς εἰσόδου ἱσταμένων δένδρων μαύρης πεύκης δι' ὁλόκληρον τὴν Πελοπόννησον.

Τοῦ δένδρου			Τοῦ δένδρου			Τοῦ δένδρου			Τοῦ δένδρου		
α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)	α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)	α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)	α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)
1	0,08	0,020	46	0,14	0,091	91	0,20	0,266	136	0,26	0,471
2	»	22	7	»	92	2	»	316	7	»	507
3	»	25	8	«	97	3	»	376	8	0,26	0,704
4	»	29	49	0,14	117	4	0,20	0,388	9	0,27	0,307
5	0,08	0,039	50	0,15	0,107	5	0,21	0,204	140	»	341
6	0,09	0,024	1	»	111	6	»	210	1	»	451
7	»	28	2	»	117	7	»	221	2	»	461
8	»	32	3	»	119	8	»	234	3	»	497
9	»	38	4	»	131	99	»	279	4	»	504
10	0,09	0,045	5	»	138	100	»	295	5	»	583
1	0,10	0,033	6	0,15	0,180	1	0,21	297	6	»	599
2	»	34	7	0,16	0,101	2	0,22	0,201	7	0,27	0,605
3	»	36	8	»	104	3	»	213	8	0,28	0,342
4	«	38	59	»	110	4	»	228	9	»	365
5	»	39	60	»	132	5	»	257	150	»	410
6	»	40	1	»	139	6	»	274	1	»	520
7	»	41	2	»	170	7	»	283	2	»	539
8	0,10	0,048	3	0,16	0,175	8	0,22	0,350	3	»	541
19	0,11	0,031	4	0,17	0,108	9	0,23	0,274	4	»	592
20	»	34	5	»	118	110	»	312	5	0,28	0,742
1	»	41	6	»	132	11	»	335	6	0,29	0,415
2	»	46	7	»	147	12	»	353	7	»	434
3	»	55	8	»	158	13	»	422	8	»	464
4	»	56	69	»	175	14	»	455	9	»	477
5	»	75	70	»	185	15	0,23	0,533	160	»	491
6	0,11	0,089	1	»	220	16	0,24	0,274	1	»	495
7	0,12	0,052	2	0,17	0,257	17	»	322	2	»	509
8	»	56	3	0,18	0,120	18	»	345	3	»	598
29	»	61	4	»	133	19	»	352	4	0,29	0,697
30	»	67	5	»	154	120	»	388	5	0,30	0,410
1	»	68	6	»	157	21	»	430	6	»	480
2	»	75	7	»	174	22	»	464	7	»	498
3	0,12	0,082	8	»	190	23	0,24	0,542	8	»	573
4	0,13	0,065	79	»	191	24	0,25	0,267	9	»	577
5	»	72	80	0,18	0,271	25	»	293	170	»	602
6	»	73	1	0,19	0,121	26	»	353	1	»	676
7	»	75	2	»	139	27	»	375	2	0,30	0,751
8	»	82	3	»	165	28	»	443	3	0,31	0,539
39	»	85	4	»	178	29	0,25	0,458	4	»	556
40	»	92	5	»	190	130	0,26	0,281	5	»	591
1	»	92	6	»	193	31	»	338	6	»	626
2	0,13	0,098	7	0,19	0,232	32	»	414	7	»	648
3	0,14	0,064	8	0,20	0,194	33	»	420	8	»	755
4	»	66	89	»	205	34	»	440	9	»	763
45	»	81	90	»	0,231	135	»	0,451	180	0,31	0,817

(Συνέχεια ἐκ τοῦ πίνακος τῆς προηγουμένης σελίδος)

Τοῦ δένδρου			Τοῦ δένδρου			Τοῦ δένδρου			Τοῦ δένδρου		
α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)	α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)	α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)	α/α	Στηθ. Διάμ. (ἄφλ.)	Ξυλ. Ὄγκ. (ἄφλ.)
181	0,31	0,898	211	0,35	1,016	241	0,39	0,954	271	0,42	1,892
2	0,32	518	2	»	073	2	»	0,966	2	0,43	182
3	»	591	3	0,35	1,119	3	»	1,100	3	»	352
4	»	652	4	0,36	0,768	4	»	189	4	»	672
5	»	667	5	»	816	5	»	194	5	0,43	823
6	»	675	6	»	911	6	»	242	6	0,44	177
7	»	679	7	»	921	7	»	466	7	»	567
8	»	739	8	»	940	8	0,39	0,479	8	»	649
9	»	799	9	»	0,970	9	0,40	0,862	9	»	830
190	0,32	0,820	220	»	1,028	250	»	1,003	280	»	856
1	0,33	0,534	1	»	159	1	»	026	1	0,44	892
2	»	662	2	»	174	2	»	039	2	0,45	186
3	»	818	3	0,39	1,235	3	»	093	3	»	496
4	»	853	4	0,37	0,629	4	»	212	4	0,45	636
5	»	909	5	»	0,801	5	»	270	5	0,46	049
6	0,33	0,995	6	»	844	6	»	312	6	»	186
7	0,34	0,542	7	»	883	7	0,40	448	7	0,46	636
8	»	565	8	»	929	8	0,41	223	8	0,47	567
9	»	600	9	»	949	9	»	246	9	»	674
200	»	739	230	»	954	260	»	253	290	»	1,704
1	»	741	1	»	0,976	1	»	273	1	0,47	2,576
2	»	835	2	»	1,016	2	»	443	2	»	1,361
3	»	857	3	0,37	1,150	3	»	613	3	»	1,856
4	0,34	0,863	4	0,38	0,671	4	»	615	4	0,47	2,290
5	0,35	0,735	5	»	802	5	0,41	828	5	0,48	1,420
6	»	799	6	»	918	6	0,42	062	6	0,49	2,723
7	»	859	7	»	0,934	7	»	213	7	0,50	1,412
8	»	913	8	»	1,158	8	»	322	8	0,50	2,461
9	»	930	9	»	371	9	»	649	9	0,51	1,928
210	0,35	0,938	240	0,38	1,388	270	0,42	1,665	300	0,52	1,691

ΠΕΡΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ "ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ,,

Ὑπὸ τοῦ κ. Ε. Α. ΖΟΥΛΙΑ

Γενικά. Ἡ «ἐκτίμησις» τῶν παραμέτρων τῶν πληθυσμῶν διὰ τυχαίας δειγματοληψίας καὶ ἡ εὕρεσις διαστημάτων ὡρισμένης ἐμπιστοσύνης τούτων, διὰ τῶν συνήθων στατιστικῶν μεθόδων[1], προϋποθέτει (ἰδίᾳ εἰς τὰ δείγματα μικροῦ μεγέθους) γνῶσιν τῆς μορφῆς τῆς κατανομῆς τῆς παραμέτρου εἰς τὸν πληθυσμόν.

Π.χ. τὸ κριτήριον t τοῦ Student ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῇ προϋποθέσει ὅτι ἡ κατανομὴ τῆς παραμέτρου εἰς τὸν πληθυσμὸν εἶναι κανονική.

Τὸ ἴδιον πρόβλημα παρουσιάζεται καὶ κατὰ τὴν κρίσιν στατιστικῶν ὑποθέσεων ἐπὶ παραμέτρου ἢ παραμέτρων ἐκ τῆς ἐκτιμήσεως τούτων ἐξ ἀντιστοίχων δειγμάτων.

Συμβαίνει ὅμως, οὐχὶ σπανίως, ἰδίως εἰς πειραματικὰς ἐρεύνας ἐπὶ νέων πεδίων τῆς ἐπιστήμης, νὰ ἀγνοεῖται ἡ μορφὴ τῆς κατανομῆς τῆς ἐρευνωμένης παραμέτρου καὶ τὸ «δεῖγμα» τῶν παρατηρήσεών μας νὰ εἶναι περιωρισμένου μεγέθους.

Διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν τοιούτων περιπτώσεων παρετηρήθη τὴν τελευταίαν 20ετίαν μία ὤθησις τῶν Μαθηματικῶν - Στατιστικολόγων πρὸς τὴν ἀνάπτυξιν νέων μεθόδων, ἀνεξαρτήτων τῆς μορφῆς τῆς κατανομῆς τῶν παραμέτρων, διὰ τὴν ἐκτίμησιν τούτων ἢ τὴν κρίσιν στατιστικῶν ὑποθέσεων διὰ δειγματοληψίας.

Μερικαὶ ἐκ τῶν μεθόδων αὐτῶν, αἵτινες εἶναι γνωσταὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα: «Μέθοδοι ἐλεύθεραι κατανομῆς» (Distribution - free Methods), θὰ ἐξετασθοῦν ἐν τοῖς ἑπομένοις, μὲ βάσιν κυρίως τὴν ἀκόλουθον βιβλιογραφίαν καὶ ἄρθρα:

1) S. S. Wilks: Mathematical statistics (1946).

2) A. M. Mood: «The theory of runs», Annals of Mathematical Statistics, vol. XI (1940) p. 367.

3) A. M. Mood: Introduction to Statistical Analysis (1950).

4) Dixon and Massey: Introduction to Statistical Analysis (1951).

5) A. C. Rosander: Elementary Principles of Statistics (1951).

6) A. C. Rosander: «The use of inversions as a test of random order», Journal of the American Statistical Association (1942) p. 352 - 358.

7) F. Swed and C. Eisenhart: «Tables for testing Randomness of

---

(1) Τὸ κριτήριον τοῦ χ^2 εἶναι ἐφαρμόσιμον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν ἡ παράμετρος ἐν τῷ πληθυσμῷ ἔχει κανονικὴν ἢ μὴ κατανομήν· ἐν τούτοις εἰς τὴν ἐφαρμογήν του διὰ τὸν «ἔλεγχον τῆς καλῆς προσαρμογῆς» (goodness of fit) προϋποθέτει μόνον μεγάλα δείγματα, ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου εἰς τὰς ἄλλας ἐφαρμογάς του προϋποθέτει μέγεθος δείγματος $n = 50$ τουλάχιστον (ἴδε C. E. Weatherburn Mathematical Statistics (1952) σελὶς 185 καὶ C. U. Yule and M. C. Kendall «An introduction to the theory of Statistics (1950, σελὶς 469), ὡς καὶ ἄλλους τινὰς περιορισμούς.

grouping in a sequence of alternatives». Annals of Mathematical Statistics (1943) p.p. 66-87.

8) Johnson and Telley: Statistics (1950), volume II.

9) M. C. Kendall: ἓν ἄρθρον διὰ τὴν θεωρίαν τῶν Inversions (Biometrica (1938).

10) G. M. Dantzig: ἓν ἄρθρον διὰ τὴν θεωρίαν τῶν Inversions (Annals of Math. Statistics (1939) καὶ ἄλλα.

I. Ἐλεύθεραι κατανομῆς μέθοδοι βασιζόμεναι ἐπὶ διατεταγμένων δειγμάτων

Διατεταγμένον δεῖγμα (ordered sample).

Ἓν δεῖγμα μεγέθους n (ἀποτελούμενον ἐκ n στοιχείων) θὰ λέγεται «διατεταγμένον» ἐὰν κατατάξωμεν τὰ στοιχεῖα του οὐχὶ κατὰ τὴν χρονικὴν τάξιν καθ' ἣν ταῦτα ἐκλέγονται, ἀλλὰ κατὰ τάξιν ἀνιόντος μεγέθους.

Δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν διὰ τῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ τῆς μεταβλητῆς x, ὅπου $x_i \leqslant x_j$ ἐφ' ὅσον $i < j$

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x εἶναι συνεχὴς μεταξὺ τῶν n τιμῶν τοῦ δείγματος, δὲν θὰ ἔχωμεν «συμπτώσεις», δηλαδὴ ἴσας τιμάς, διότι πιθ. $(x_i = x_j) = 0$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $x_1 < x_2 < x_3 \ldots . < x_n$.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μεταβλητή μας εἶναι συνεχὴς κατ' ἀρχὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ θὰ ἴδωμεν πῶς πρέπει νὰ τροποποιήσωμεν τὰ συμπεράσματά μας εἰς περιπτώσεις «συμπτώσεων» ἐν τῷ δείγματι (δηλαδὴ εἰς περιπτώσεις ἀσυνεχῶν μεταβλητῶν).

Ὡς μέτρον θέσεως λαμβάνεται ἡ διάμεσος ν καὶ ὡς μέτρον διασπορᾶς ἡ ἐνδοτεταρτημοριακὴ ἀπόκλισις $Q_3 - Q_1$ (ἢ γενικώτερον ἡ ἀπόστασις δύο ἑτέρων ποσοστημορίων, π.χ. $\xi_{0.95} - \xi_{0.05}$, ὅπου $\xi_{0.95}$ καὶ $\xi_{0.05}$ εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς, αἵτινες εἶναι τοιαῦται ὥστε $95\,\%$ καὶ $5\,\%$ τῶν ὅλων τιμῶν τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι μικρότεραι αὐτῶν ἀντιστοίχως).

Μία σημειακὴ ἐκτίμησις τῆς παραμέτρου ν εἶναι ἡ διάμεσος $\widehat{\nu}$ τοῦ δείγματος, ἥτις εἶναι τὸ μέσον κατὰ μέγεθος στοιχεῖον εἰς τὸ διατεταγμένον δεῖγμα, ἐὰν τὸ n εἶναι περιττός, ἢ ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο μέσων κατὰ μέγεθος στοιχείων, ὅταν τὸ n εἶναι ἄρτιον.

Διάστημα ἐμπιστοσύνης διὰ τὴν ν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν διάστημα ἐμπιστοσύνης (confidence interval) διὰ τὴν διάμεσον ν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ πιθανότης ὅτι ἓν στοιχεῖον τοῦ δείγματος (οἱονδήποτε) θὰ ἐκλεγῇ μεταξὺ ἐκείνων ποὺ εὑρίσκονται ἀριστερὰ (ἢ δεξιὰ) τῆς διαμέσου ν τοῦ πληθυσμοῦ (δηλαδὴ θὰ εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ $\widehat{\nu}$), εἶναι προφανῶς $\frac{1}{2}$.

Ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις ποὺ θὰ ἔχωμεν μετὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν στοιχείων τοῦ τυχαίου δείγματος θὰ εἶναι: νὰ ἔχωμεν 0 ἢ 1 ἢ 2 ἢ . . . . . n στοιχεῖα μικρότερα τοῦ ν.

Ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν 0 στοιχεῖα μικρότερα τοῦ ν (ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, καὶ τὰ n στοιχεῖα μεγαλύτερα τοῦ ν) εἶναι $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, δεδομένου ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ δείγματος ὑποτίθενται ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων.

Ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν ἀ κ ρ ι β ῶ ς 1 στοιχεῖον τοῦ δείγματος (ὡ ρ ι σ μ έ ν ο ν κ α τ ὰ χ ρ ο ν ι κ ὴ ν τ ά ξ ι ν) μικρότερον τοῦ ν εἶναι $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ἀλλά, ἐπειδὴ τὸ γεγονὸς τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ δι' οἱονδήποτε ἐκ τῶν n στοιχείων τοῦ δείγματος, ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν ἀ κ ρ ι β ῶ ς 1 στοιχεῖον τοῦ δείγματος (ο ἱ ο ν δ ή π ο τ ε κ α τ ὰ χ ρ ο ν ι κ ὴ ν τ ά ξ ι ν) μικρότερον τοῦ ν εἶναι $n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(Τοῦτο προφανῶς σημαίνει ὅτι τὸ ἐν λόγῳ στοιχεῖον θὰ εἶναι τὸ μικρότερον ὅλων εἰς τὸ διατεταγμένον δεῖγμα μας, ἤτοι τὸ x_1)

Ὅθεν: πιθανότης (ἵνα μόνον $x_1 < \nu$) $= n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ὁμοίως ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν ἀ κ ρ ι β ῶ ς 2 στοιχεῖα (οἱονδήποτε ζεῦγος κατὰ χρονικὴν τάξιν ἐκλογῆς τῶν στοιχείων) μικρότερα τοῦ ν εἶναι $\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ἤτοι: (¹)

πιθανότης (ἵνα μόνον x_1 καὶ $x_2 < \nu$) $= \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Καὶ γενικῶς

ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν ἀ κ ρ ι β ῶ ς i στοιχεῖα (οἱαδήποτε χρονικῶς) μικρότερα τοῦ ν εἶναι $\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ἤτοι πιθανότης (ἵνα μόνον x_1, x_2, x_3 .. καὶ $x_i < \nu$) $= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ἐξ ἄλλου ἡ πιθανότης ἵνα τὸ x_r, δηλαδὴ τὸ κατέχον τὴν τάξιν r στοιχεῖον τοῦ διατεταγμένου δείγματος, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ν εἶναι ἡ κάτωθι:

Πιθ. $(x_r > \nu)$ = πιθ. (ἵνα μόνον $x_1 < \nu$) + πιθ. (ἵνα μόνον x_1 καὶ $x_2 < \nu$) + + ... + πιθ. (ἵνα μόνον $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{r-1} < \nu$)

διότι εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις τὸ r κατὰ τάξιν στοιχεῖον τοῦ διατεταγμένου δείγματος θὰ εἶναι προφανῶς μεγαλύτερον τοῦ ν.

ὅθεν

$$\text{Πιθ}\ (x_r > \nu) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{3}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{Πιθ}\ (x_s < \nu) = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{4}$$

(¹) Διὰ τοῦ συμβόλου $\binom{n}{2}$ ἐννοεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν n πραγμάτων ἀνὰ 2.

Αἱ ἰσότητες (3) καὶ (4) εἶναι ἀληθεῖς δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ r καὶ s μικροτέραν τοῦ n.

Ἐὰν νῦν ὑποθέσωμεν ὅτι s καὶ r εἶναι μικρότερα τοῦ n καὶ ὅτι $r < s$ τότε

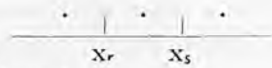
$$\text{πιθ.}\ (x_r > \nu) + \text{πιθ.}\ (x_s < \nu) + \text{πιθ.}\ (x_r < \nu < x_s) = 1 \qquad (5)$$

διότι, ἐφ' ὅσον $s > r$ καὶ κατὰ συνέπειαν $x_s > x_r$ τρία γεγονότα εἶναι δυνατά:

1) $x_r > \nu$ ὁπότε φυσικὰ καὶ $x_s > \nu$

2) $x_s < \nu$ ὅτε φυσικὰ καὶ $x_r < \nu$

3) $x_r < \nu < x_s$



Ἑπομένως ἡ (5) εἶναι ἀληθὴς καὶ ἐκ ταύτης ἔχομεν :

$$\text{πιθ.}\ (x_r < \nu < x_s) = 1 - \text{πιθ.}\ (x_r > \nu) - \text{πιθ.}\ (x_s < \nu)$$

ἀλλὰ

$$1 - \text{πιθ.}\ (x_r > \nu) - \text{πιθ.}\ (x_s < \nu) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ὅθεν

$$\text{πιθ.}\ (x_r < \nu < x_s) = \sum_{i=r}^{s-i} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (6)$$

Ἐὰν ἤδη τὸ δεξιὰ μέλος τῆς (6) εἶναι π.χ. >0.75 δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν r καὶ s, τὸ διάστημα x_r ἕως x_s ἀποτελεῖ ἓν διάστημα ἐμπιστοσύνης διὰ τὴν διάμεσον τοῦ πληθυσμοῦ ν μεγέθους ἴσου πρὸς τὴν ἀντίστοιχον πιθανότητα.

Συνήθως λαμβάνομεν $s = n - r + 1$ οὕτως ὥστε τὰ x_r καὶ x_s νὰ εἶναι ἰσαπέχοντα ἐκ τῶν ἄκρων στοιχεῖα (κατὰ τάξιν).' Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν ἓν δεῖγμα μεγέθους 6, τὸ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 (διατεταγμένον), θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς ἰσότητος (6)

$$\text{πιθ.}\ (x_1 < \nu < x_6) = \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} = \frac{31}{32} = \frac{97}{100}\ \text{περίπου.}$$

Λέγομεν ὅθεν ὅτι τὸ διάστημα x_1 ἕως x_6 ἀποτελεῖ ἓν 97% διάστημα ἐμπιστοσύνης διὰ τὸ ν.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ μεταβλητὸν διάστημα x_1 ἕως x_6 (μεταβλητὸν διὰ διάφορα δείγματα μεγέθους 6) καλύπτει τὴν ἀληθῆ διάμεσον ν τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὰ 97 % τῶν περιπτώσεων (δηλαδὴ εἰς τὰ 97 % ἑνὸς μεγάλου πλήθους τοιούτων δειγμάτων $n = 6$).

Ἐὰν λοιπὸν θεωρήσωμεν ἓν ὡρισμένον τυχαῖον δεῖγμα (ὅτε φυσικὰ τὰ x_1 καὶ x_6 ἔχουν ὡρισμένας σταθερὰς τιμὰς) εἴμεθα δικαιολογημένοι νὰ ἔχωμεν ἕνα μεγάλον βαθμὸν ἐμπιστοσύνης (97 %) εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ἄγνωστον ν τοῦ πληθυσμοῦ θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν x_1 καὶ x_6 τοῦ δείγματος τούτου.

Πίνακες διὰ διαστήματα ἐμπιστοσύνης διὰ τὴν διάμεσον ἔχουν ὑπολογισθῆ Nair, K. R. «Table of confidence interval for median in samples from any continuous population» Sankhyâ vol. 4 (1940) p.p. 551 - 558 ἀναδημοσιευόμεναι εἰς Introduction to Statistical analysis: W. Dixon and F. Massey ⟨New York Mc Graw - Hill 1951⟩ table 25 p. 360.

Οἱ πίνακες δίδουν διὰ διαστήματα ἐμπιστοσύνης $\geqslant 95\%$ καὶ $\geqslant 99\%$ τὰς μεγαλυτέρας τιμὰς τοῦ r ἵνα ἡ διάμεσος τοῦ πληθυσμοῦ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν x_r καὶ x_{n-r+1} εἰς ἓν δεῖγμα διατεταγμένον, διὰ τιμὰς τοῦ n ἀπὸ 6 ἕως 65. Π.χ. ἐὰν $n = 20$ ὁ πίναξ τοῦ Nair δεικνύει ὅτι $r = 6$ καὶ $n - r + 1 = 15$ καὶ ὅτι ἡ ἐμπιστοσύνη τοῦ διαστήματος x_6 ἕως x_{16}, διὰ τὸ ν, εἶναι 95,9%.

Δοκιμασίαι ὑποθέσεων (tests of Hypotheses) περὶ μιᾶς παραμέτρου

Ἔστω ν_0 δοθεὶς ἀριθμὸς ὅστις, κατὰ τὴν γνώμην μας, εἶναι ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς ἀλλ' ἀγνώστου τιμῆς τῆς διαμέσου τοῦ πληθυσμοῦ ν.

Διὰ νὰ κρίνωμεν τὴν ὑπόθεσιν μηδὲν (H_0) ὅτι $\nu = \nu_0$ εἰς ἓν ἐπίπεδον πιθανότητος π. χ. $5\,^0/_0$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α) Εἰς περίπτωσιν ἀμφιπλεύρου (ἢ δύο ἄκρων) δοκιμασίας (two sided test) (δηλαδὴ ὅταν ὡς ἐναλλακτέον τῆς ὑποθέσεως μηδὲν(H_0) θεωροῦμεν ἀμφότερα τὰ γεγονότα $\nu < \nu_0$ ἢ $\nu > \nu_0$), ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν διάστημα ἐμπιστοσύνης 95 % διὰ τὴν ἄγνωστον ν (ἀντίστοιχον πρὸς μέγεθος δείγματος n) καὶ ἐὰν π.χ. τοῦτο εἶναι τὸ x_λ ἕως $x_{n+1-\lambda}$ νὰ ἐκλέξωμεν ἓν τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους n καὶ νὰ εὕρωμέν, εἰς τὸ ἀντίστοιχον διατεταγμένον δεῖγμα, τὰς τιμὰς τοῦ x_λ καὶ $x_{n+1-\lambda}$ καὶ ἂν $x_\lambda < \nu_0 < x_{n+1-\lambda}$, δὲν ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὸ θεωρηθὲν ἐπίπεδον πιθανότητος 5% ἀλλ' ἀποφαινόμεθα ὅτι τὰ ἀποτελέσματα τοῦ δείγματος δὲν εὑρίσκονται εἰς ἀσυμφωνίαν μὲ τὴν ὑπόθεσιν $\nu = \nu_0$, ἐνῷ ἐὰν τὸ ν_0 εἶναι ἐκτὸς τοῦ διαστήματος x_λ ἕως $x_{n+1-\lambda}$, ἀπορρίπτομεν τὴν H_0 εἰς τὸ ἐπίπεδον $5\,^0/_0$.

β) Εἰς περίπτωσιν μονοπλεύρου (ἢ ἑνὸς ἄκρου) δοκιμασίας καθ' ἣν θέλομεν νὰ κρίνωμεν τὴν H_0 μὲ ἐναλλακτέαν περίπτωσιν μόνον τὴν $\nu_0 < \nu$ εἰς τὸ $5^0/_0$ π.χ. ἐπίπεδον σημαντικότητος, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν ἕνα ἀκέραιον $r = r_0$ τοιοῦτον ὥστε τὸ δεξιὸν μέλος τῆς σχέσεως

(3) δηλαδὴ τῆς $\text{Πιθ}\,(x_r > \nu) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ νὰ ἔχῃ τιμὴν ἴσην ἢ μικρότεραν τοῦ $5^0/_0$ ἀλλὰ ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον ταύτης (μὲ ἄλλους λόγους εὑρίσκομεν τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν τοῦ r δι' ἣν ἡ $\text{Πιθ}\,(x_r > \nu) \leqslant 5\,^0/_0$).

Ἔστω ὅτι εὕρομεν τοιοῦτον ἀκέραιον τὸν $r = r_0$.

Λαμβάνομεν ἓν δεῖγμα τοῦ καθορισθέντος μεγέθους n· ἂν εὕρωμεν εἰς τὸ δεῖγμα αὐτὸ ὅτι $x_{r=r_0} > \nu_0$ ἡ ὑπόθεσις μηδὲν $\nu = \nu_0$ ἀπορρίπτεται, καθ' ὅσον ἡ πιθανότης νὰ συμβῇ τοῦτο ἐκ τῆς διακυμάνσεως τῆς τυχαίας δειγματοληψίας εἶναι $\leqslant 5^0/_0$.

Ἐὰν ὅμως $\nu_0 > x_{r=r_0}$ τότε δὲν δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν ὑπόθεσιν μηδὲν $\nu = \nu_0$ εἰς τὸ $5\,^0/_0$ ἐπίπεδον πιθανότητος (ἢ σημαντικότητος).

γ) Τέλος εἰς περίπτωσιν μονοπλεύρου δοκιμασίας μὲ ἐναλλακτέαν περίπτωσιν μόνον τὴν $\nu_0 > \nu$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν τὴν σχέσιν (4), δηλαδὴ τὴν σχέσιν :

$$\text{Πιθ}\ (x_s < \nu) = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

δ ι ὰ τ ὸ δ ο θ ὲ ν n καὶ εὑρίσκομεν ἕνα $s=s_0$ ὥστε :

Πιθ ($x_{s=s_0} < \nu$) $\leqslant 5\,\%$ (εἰς περίπτωσιν ἀνισότητος τὸ εὑρεθὲν $s=s_0$ δέον νὰ εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἡ πιθ ($x_{s=s_0} < \nu$) νὰ εἶναι μὲν μικροτέρα τοῦ $5\,\%$ ἀλλὰ ὅσον τὸ δυνατὸν πλησιέστερον τούτου, δηλαδὴ εὑρίσκομεν τὴν μικροτέραν δυνατὴν τιμὴν τοῦ s δι' ἣν πιθ. ($x_s < \nu$) $\leqslant 5\,\%$).

Ἂν τώρα λάβωμεν ἓν τυχαῖον δεῖγμα καὶ εὕρωμεν $x_{s_0} < \nu_0$ ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν μηδέν. Ἂν ὅμως $\nu_0 < x_{s_0}$ τότε δὲν ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν $\nu = \nu_0$ εἰς τὸ $5\,\%$ ἐπίπεδον σημαντικότητος (ἢ πιθανότητος). Δηλαδὴ τότε λέγομεν ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ δείγματος δὲν εὑρίσκεται εἰς ἀσυμφωνίαν πρὸς τὴν ὑπόθεσιν $\nu = \nu_0$ εἰς τὸ $5\,\%$ ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Περίπτωσις ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς

Εἰς τὴν περίπτωσιν ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς εἰς τὸ δεῖγμα μας δυνατὸν νὰ ἔχωμεν συμπτώσεις.

Τότε ἡ σχέσις (6), δηλαδὴ ἡ σχέσις

$$\text{Πιθ}\ (x_r < \nu < x_s) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς σχέσεως

$$\text{Πιθ}\ (x_r < \nu < x_s) \geq \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{7}$$

διότι ἂν μὲν εἰς τὸ δεῖγμα μας συμβῇ τὰ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ νὰ εἶναι διάφορα, ἔχομεν πάλιν τὴν (6) ἀμετάβλητον· ἂν ὅμως π.χ. (ἐπὶ δείγματος μεγέθους $n=6$) ἔχωμεν $x_1 = x_2$ καὶ $x_5 = x_6$, τότε τὸ διάστημα x_2 ἕως x_5 εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ διάστημα x_1 ἕως x_6, ἀλλὰ πιθ ($x_1 < \nu < x_6$) $= \frac{97}{100}$ ἐνῷ πιθ ($x_2 < \nu < x_5$) $= \frac{78}{100}$, ὡς εὐκόλως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς παραστάσεως $\sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ἂν θέσωμεν $r=1$, $s=6$ ἢ $r=2$ καὶ $s=5$ καὶ $n=6$.

Ὅθεν εἰς τὴν περίπτωσιν ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς, καθ' ἣν ἐν τῷ δείγματι $x_1 = x_2$ καὶ $x_5 = x_6$, τὸ διάστημα x_2 ἕως x_5 ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐπίπεδον πιθανότητος οὐχὶ πράγματι $78\,\%$ ἀλλὰ $97\,\%$ ἀφοῦ εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ διάστημα x_1 ἕως x_6.

Ἀναλόγως, συνεπῶς, τῆς παρουσιαζομένης ἐν τῷ δείγματι περιπτώσεως (ἀριθμοῦ συμπτώσεων κλπ.) δυνάμεθα διὰ καταλλήλων τροποποιήσεων τῶν ἐπιπέδων πιθανότητος νὰ ἔχωμεν ἀνάλογα συμπεράσματα πρὸς τὰ ἤδη ἐκτεθέντα διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν συνεχῶν μεταβλητῶν.

Σύγκρισις δύο πληθυσμῶν.

Ἐὰν δύο πληθυσμοὶ ἔχωσι τὴν ἰδίαν διάμεσον, ὅτε λέγομεν ὅτι ἔχουσι τὴν αὐτὴν θέσιν, εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι κατανομὴν διαφόρου μορφῆς (σχήματος).

Ἐὰν ὅμως, ὅπως συνήθως συμβαίνει εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐνδιαφερώμεθα νὰ κρίνωμεν ἁπλῶς ἐὰν ἔχωσι τὴν αὐτὴν διάμεσον, δηλαδὴ ἂν $\nu_1=\nu_2$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n_1}$ εἶναι ἓν διατεταγμένον δεῖγμα μεγέθους n_1 ἐξ ἑνὸς πληθυσμοῦ Α καὶ $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n_2}$ ἓν δεύτερον δεῖγμα μεγέθους n_2 ἐξ ἑνὸς πληθυσμοῦ Β.

Σχηματίζομεν ἓν μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα ἐκ τῶν n_1 τιμῶν τοῦ πρώτου δείγματος καὶ τῶν n_2 τιμῶν τοῦ δευτέρου. Θὰ ἔχωμεν οὕτω ἓν τρίτον δεῖγμα $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{n_1+n_2}$ μεγέθους n_1+n_2 στοιχείων. Ἔστω ὅτι ν_0 εἶναι ἡ διάμεσος εἰς τὸ μικτὸν δεῖγμα.

Μετροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων x, ἔστω m_1, τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ν_0 (εἰς τὸ μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα) καὶ τὸν ἀριθμὸν m_2 τῶν στοιχείων y ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.

Ἐὰν ἡ ὑπόθεσις μηδὲν H_0 $(\nu_1=\nu_2)$ εἶναι ἀληθής, θὰ ἀναμένωμεν (κατὰ μέσον ὅρον) ὅτι $m_1=\frac{n_1}{2}$ καὶ $m_2=\frac{n_2}{2}$

Ζητοῦμεν τὴν κατανομὴν τῶν m_1 καὶ m_2 ὅταν ἡ H_0 εἶναι ἀληθής.

Ἔστω ὅτι τὰ δείγματα τῶν δύο πληθυσμῶν κατὰ χρονικὴν τάξιν εἶναι:

δεῖγμα Α: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{n_1}$

» Β: $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_{n_2}$,

ὅπου ὑπετέθη ὅτι Α ἐκαλέσαμεν τὸ μικρότερον δεῖγμα, δηλαδὴ ὅτι $n_1<n_2$ (εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν $n_1 \neq n_2$, ἐνῷ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν $n_1=n_2$ καλῶ Α οἱονδήποτε ἐκ τῶν δύο δειγμάτων).

Περίπτωσις 1η. Ἔστω ὅτι $n_1+n_2=$ ἄρτιος.

Τότε τὸ ν_0 κεῖται μεταξὺ τῶν $\frac{n_1+n_2}{2}$ καὶ $\left(\frac{n_1+n_2}{2}+1\right)$ στοιχείων τοῦ μικτοῦ δείγματος.

Ὅθεν ἐὰν $m_1=0$ τὸ m_2 πρέπει νὰ εἶναι $\frac{n_1+n_2}{2}$

» $m_1=1$ » » $\frac{n_1+n_2}{2}-1$

$\vdots$

καὶ ἐὰν $m_1=n_1$ » » $\frac{n_1+n_2}{2}-n_1$

διότι εἰς τὸ μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα ἡ διάμεσος ν_0 διαιρεῖ τὰ (n_1+n_2) στοιχεῖα τοῦ δείγματος εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ συνεπῶς πάντοτε πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{n_1+n_2}{2}$ στοιχεῖα (x ἢ y) μεγαλύτερα τοῦ ν_0,

θὰ ἔχωμεν:

$$\text{πιθ}\left(m_1=0,\ m_2=\frac{n_1+n_2}{2}\right)=\frac{\binom{n_1}{0}\binom{n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}}}{\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

διότι τὰ $\frac{n_1+n_2}{2}$ στοιχεῖα τοῦ μικτοῦ δείγματος, τὰ ὁποῖα ἠμπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ν_0 ἠμποροῦν νὰ ἐκλεγοῦν κατὰ $\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}}$ ἐν συνόλῳ τρόπους μεταξὺ τῶν $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_{n_1}, \beta_1, \beta_2 \ldots . \beta_{n_2}$ στοιχείων.

Αἱ εὐνοϊκαὶ δὲ περιπτώσεις ἵνα ἔχωμεν 0 ἐκ τῶν $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_{n_1}$ καὶ $\frac{n_1+n_2}{2}$ ἐκ τῶν β εἶναι τὸ γινόμενον $\binom{n_1}{0}\binom{n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}}$,

Ὁμοίως:

$$\pi\iota\theta\left(m_1=1,\ m_2=\frac{n_1+n_2}{2}-1\right)=\frac{\binom{n_1}{1}\binom{n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}-1}}{\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

καὶ γενικῶς

$$\pi\iota\theta\ (m_1=m_1, m_2=m_2)=\frac{\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}}{\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2}{2}}}=\frac{\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}}{\binom{n_1+n_2}{\alpha_1}} \tag{8}$$

ὅπου $\frac{n_1+n_2}{2}=\alpha_1$ καὶ $m_1+m_2=\alpha_1$ · ἢ $m_2=\frac{n_1+n_2}{2}-m_1$

Περίπτωσις 2α: n_1+n_2 = περιττὸς

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ν_0 εἶναι τὸ $\frac{n_1+n_2+1}{2}$ κατὰ τάξιν στοιχεῖον τοῦ μικτοῦ δείγματος, δηλαδὴ τὸ $z_{\frac{n_1+n_2+1}{2}}$

Ἑπομένως:

Ἐὰν $m_1=o$ πρέπει $m_2=\frac{n_1+n_2-1}{2}$

Ἐὰν $m_1=1$ » $m_2=\frac{n_1+n_2-1}{2}-1$

⋮ ⋮ ⋮

καὶ ἐὰν $m_1=n_1$ » $m_2=\frac{n_1+n_2-1}{2}-n_1$

διότι εἰς τὸ μικτὸν δεῖγμα θὰ ἔχωμεν τώρα πάντοτε $\frac{n_1+n_2-1}{2}$ στοιχεῖα μεγαλύτερα τοῦ ν_0.

Καὶ

$$\pi\iota\theta\left(m_1=o,\ m_2=\frac{n_1+n_2-1}{2}\right)=\frac{\binom{n_1}{0}\binom{n_2}{\frac{n_1+n_2-1}{2}}}{\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2-1}{2}}}$$

'Ομοίως

$$\pi\iota\theta\left(m_1=1,\ m_2=\frac{n_1+n_2-1}{2}-1\right)=\frac{\binom{n_1}{1}\binom{n_2}{\frac{n_1+n_2-1}{2}-1}}{\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2-1}{2}}}$$

Καὶ γενικῶς

$$\pi\iota\theta\left(\mathbf{m}_1=m_1,\ m_2=m_2\right)=\frac{\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}}{\binom{n_1+n_2}{\frac{n_1+n_2-1}{2}}}=\frac{\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}}{\binom{n_1+n_2}{\alpha_1-\frac{1}{2}}} \tag{9}$$

ὅπου $m_1+m_2=\dfrac{n_1+n_2-1}{2}=\dfrac{n_1+n_2}{2}-\dfrac{1}{2}=\alpha_1-\dfrac{1}{2}$

Οὕτω ἡ μηδενικὴ ὑπόθεσις $\nu_1=\nu_2$, δηλαδὴ ὅτι οἱ δύο πληθυσμοὶ ἔχουν τὴν ἰδίαν διάμεσον, δύναται νὰ κριθῇ ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς πιθανότητος (8) ἢ (9) ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ n_1+n_2 (δηλαδὴ ἂν $n_1+n_2=$ περιττὸς ἢ ἄρτιος) καὶ τῆς πιθανότητος περιπτώσεων ἔτι περισσότερον ἀπεχουσῶν τῶν ἀναμενομένων τιμῶν (expected values) τῶν m_1 καὶ m_2.

Παράδειγμα 1ον

Δύο δείγματα, Α μεγέθους 5 καὶ Β μεγέθους 7, ἀναμιγνυόμενα ἀποτελοῦν ἓν μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα ἐκ 12 στοιχείων, εἰς ὃ εὑρίσκομεν ὅτι ὑπάρχουν 1 στοιχεῖον ἐκ τοῦ Α καὶ 5 στοιχεῖα ἐκ τοῦ Β δείγματος μεγαλύτερα τοῦ ν_0 (διαμέσου τοῦ μικτοῦ διατεταγμένου δείγματος).

Ζητεῖται νὰ κριθῇ ἡ H_0 ($\nu_1=\nu_2$) εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Ἐὰν τὰ δύο δείγματα προήρχοντο ἀπὸ πληθυσμοὺς μὲ τὴν ἰδίαν διάμεσον (δηλαδὴ ἐὰν H_0 ἀληθής), τότε ἐκ τῆς (8) εὑρίσκομεν

$$\pi\iota\theta\ (m_1=1, m_2=5)=\frac{\binom{5}{1}\binom{7}{5}}{\binom{12}{6}}=\frac{105}{924}$$

$$\pi\iota\theta\ (m_1=0, m_2=6)=\frac{7}{924}$$

$$\pi\iota\theta\ (m_1=5, m_2=1)=\frac{7}{924}$$

$$\pi\iota\theta\ (m_1=4, m_2=2)=\frac{105}{924}$$

Ὅθεν, ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν «κατὰ τύχην» ἓν γεγονὸς ὡς τὸ ἐμφανισθὲν εἰς τὸ μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα ἢ χειρότερον (ἢ σπανιώτερον, δυνάμεθα μᾶλλον νὰ εἴπωμεν) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὡς ἄνω πιθανοτήτων, ἤτοι περίπου $^{24}/_{100}$. Ἡ πιθανότης αὕτη εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 5 % καὶ ἑπομένως ἡ παρουσιασθεῖσα εἰς τὸ μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα διαφορὰ (ἀπόκλισις) τιμῶν τῶν $m_1=1$ καὶ $m_2=5$ ἐκ τῶν ἀναμενομένων $m_1=2{,}5$ καὶ $m_2=3{,}5$ δὲν εἶναι στατιστικῶς σημαντικὴ εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν ὑπόθεσιν μηδὲν (δηλαδὴ ὅτι $\nu_1=\nu_2$).

Ἐὰν ὅμως εἰς τὸ ἴδιον παράδειγμα εἴχομεν ὅτι εἰς τὸ μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα καὶ τὰ 6 στοιχεῖα, τὰ μεγαλύτερα τῆς διαμέσου του ν_0 προήρχοντο ἀπὸ τὸ Β δεῖγμα, τότε περιπτώσεις τόσον σπάνιαι ὡς ἡ $m_1=0$ καὶ $m_2=6$ εἶναι μόνον ἡ $m_1=5$ καὶ $m_2=1$ (διότι ἡ ἀναμενομένη τιμὴ τοῦ $m_1=2{,}5$ καὶ τοῦ $m_2=3{,}5$, ὅταν δὲ $m_1=0$ καὶ $m_2=6$ ἔχομεν ἀπόκλισιν ἀπὸ τὰς ἀναμενομένας τιμὰς 2,5, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν $m_1=5$ καὶ $m_2=1$ πάλιν ἡ ἀπόκλισις ἀπὸ τὰς «ἀναμενομένας» τιμὰς εἶναι 2,5).

Ἔχομεν: $\pi\iota\theta(m_1=0, m_2=6)=\frac{7}{924}$ (ἐκ τῆς (8) ἐφ' ὅσον $n_1+n_2=$ ἄρτιος)

καὶ $\pi\iota\theta\,(m_1=5,\ m_2=1)=\frac{7}{924}$.

Ἄρα $\pi\iota\theta(m_1=0,\ m_2=6$ ἢ $m_1=5$ καὶ $m_2=1)=\frac{14}{924}$, ἤτοι περίπου 1,5 %.

Ἄρα, εἰς τοιαύτην περίπτωσιν τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἦτο στατιστικῶς σημαντικὸν καὶ ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν μηδὲν ($\nu_1=\nu_2$) εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος, ἐφ' ὅσον γεγονότα ὡς τὸ ἐμφανισθὲν ἢ χειρότερα ἔχουν πιθανότητα 1,5 %, δηλαδὴ μικροτέραν τοῦ 5 %, νὰ ὀφείλωνται εἰς τὴν τύχην.

2. Ἐλεύθεραι κατανομῆς μέθοδοι βασιζόμεναι ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν «διαδρομῶν» ἢ ὁμοειδῶν ὁμάδων (runs).

Ὁρισμοί. Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν ἀκολουθίαν Ν στοιχείων ἀποτελουμένην ἐξ ἐμφανίσεων κατὰ οἱανδήποτε τάξιν n γεγονότων ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων (mutually exclusive) ὅπου $N \geqslant n$.

Μία τοιαύτη ἀκολουθία π.χ. εἶναι ἡ ΑΓΓΓΓΒΒΑΑΒΒΒΒΒΒ (10)
ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων $N=15$ καὶ τὰ διάφορα γεγονότα $n=3$ (τὰ Α, Β καὶ Γ).

Καλοῦμεν διαδρομὴν (run) κάθε ἀκολουθίαν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ὁμοίων γεγονότων, περιλαμβανομένην εἰς τὴν ἀρχικὴν ἀκολουθίαν τῶν Ν στοιχείων, τῆς ὁποίας προηγοῦνται ἢ ἕπονται (ἢ προηγοῦνται καὶ ἕπονται) διαφορετικὰ πρὸς ταύτην γεγονότα (ἢ οὐδὲν γεγονός). Π.χ. εἰς τὴν ἀκολουθίαν (10) ἔχομεν 5 διαδρομάς, τὰς Α, ΓΓΓΓ, ΒΒ, ΑΑ, ΒΒΒΒΒΒ.

Εἰς τὴν ἀκολουθίαν ΕΕΕΕΕΕΕΕ, εἰς ἣν $N=8$ καὶ $n=1$, ἔχομεν μίαν μόνον διαδρομὴν (αὐτὴν ταύτην τὴν ἀκολουθίαν).

Ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων ἑκάστης διαδρομῆς καλεῖται μῆκος της. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα (10) ἔχομεν 2 διαδρομὰς διὰ τὸ γεγονὸς Α, μήκους 1 καὶ 2 στοιχείων ἀντιστοίχως, μίαν διαδρομὴν διὰ τὸ γεγονὸς Γ, μήκους 4, καὶ 2 διαδρομὰς διὰ τὸ γεγονὸς Β, μήκους 2 καὶ 6 στοιχείων ἀντιστοίχως.

Ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἔχομεν ἀκολουθίας μὲ δύο μόνον διάφορα γεγονότα ἢ ἐναλλακτέα.

Ἀκολουθίαι δύο ἐναλλακτέων, καὶ συνεπῶς καὶ διαδρομαὶ δύο ἐναλλακτέων, παρουσιάζονται συχνότατα εἰς τὴν πρᾶξιν.

Ἔχομεν π.χ. ἀκολουθίας «κορωνῶν» καὶ «γραμμάτων» κατὰ τὴν ῥῖψιν ἑνὸς νομίσματος, διαδρομὰς ἀρρένων καὶ θηλέων εἰς σειρὰν γεννήσεων κατὰ χρονολογικὴν τάξιν, ἀκολουθίας ὑγιῶν καὶ ἀσθενῶν ἀτόμων κατὰ μίαν ὁμαδικὴν ἐξέτασιν κατὰ χρονολογικὴν τάξιν ἐξετάσεως, κενὰ καὶ πλήρη καθίσματα εἰς μίαν σειρὰν καθισμάτων ἑνὸς θεάτρου κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς παραστάσεως, ἀκολουθίας μονῶν καὶ ζυγῶν ἀριθμῶν κατὰ τὰς διαδοχικὰς κληρώσεις μιᾶς ρουλέττας κλπ.

Ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ συγκρίνωμεν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς δείγματος (κατὰ χρονικὴν τάξιν ἐμφανίσεώς των) μὲ ἕνα δοθέντα σταθερὸν ἀριθμὸν Κ καὶ ἐὰν ἓν στοιχεῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Κ νὰ σημειώνωμεν εἰς τὴν θέσιν του ἕνα (+), ἐὰν δὲ μικρότερον ἕνα (—). Θὰ ἔχωμεν οὕτω διαδρομὰς θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν σημείων.

Ἐνδιαφέροντα στατιστικὰ προβλήματα δύνανται νὰ ἀναλυθῶσι δι' ἁπλῆς ἀπαριθμήσεως τῶν διαδρομῶν μιᾶς ἀκολουθίας ἐκ δύο ἐναλλακτέων.

Τινὰ τῶν προβλημάτων τούτων θὰ θεωρήσωμεν.

Ἔστω κατ' ἀρχὴν ἕνας πληθυσμὸς μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς.

Ἂς λάβωμεν δύο τυχαῖα δείγματα μεγέθους n_1 καὶ n_2 ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ τούτου καὶ ἄς καλέσωμεν Α καὶ Β τὰ δείγματα ἀντιστοίχως.

Πρὸς διάκρισιν, τὰ στοιχεῖα τοῦ δείγματος Α ἄς τὰ καλέσωμεν α_i καὶ τοῦ Β, β_i, δηλαδή :

δεῖγμα Α: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{n_1}$

» Β: $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots\cdots \beta_{n_2}$

ἔνθα τὰ στοιχεῖα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὴν χρονικὴν σειρὰν ἐκλογῆς των.

Καὶ ἔστω

$$\left.\begin{array}{l} X: x_1, x_2 \cdots\cdots x_{n_1} \\ \Psi: y_1, y_2 \cdots\cdots y_{n_2} \end{array}\right\} \text{τὰ ἴδια δείγματα (Α=Χ) καὶ (Β=Υ) διατεταγμένα}$$

κατὰ μέγεθος.

Καὶ ἔστω τέλος

$Z: z_1, z_2, \ldots\ldots z_{n_1+n_2}$ τὸ μικτὸν διατεταγμένον κατὰ μέγεθος δεῖγμα ἐκ τῶν Α καὶ Β ληφθέντων ὁμοῦ.

Τὸ μικτὸν δεῖγμα Ζ θὰ σχηματισθῇ ἀπὸ κάποιαν διάταξιν τῶν x_i καὶ y_i.

Π. χ. μιὰ δυνατὴ διάταξις τοῦ Ζ εἶναι $x_1\, x_2\, y_1\, y_2 \ldots y_{n_2}\, x_3\, x_4\, x_5 \ldots x_{n_1}$ (11)

Θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν πιθανότητα ἵνα τὸ Ζ ἔχῃ τὴν διάταξιν (11).

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὴν (11) εἰς τὰς θέσεις τῶν y_j δυνάμεθα νὰ θέσωμεν οἱανδήποτε μετάθεσιν τῶν β_j διότι κάθε β δύναται νὰ εἶναι y_1 ἢ y_2 κλπ. ὅλαι αὐταὶ αἱ μεταθέσεις εἶναι $n_2!$ Ὁμοίως εἰς τὴν θέσιν τῶν x_i εἰς τὴν (11) δυνάμεθα νὰ θέσωμεν κάθε μετάθεσιν τῶν α_i καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν τῶν μεταθέσεων θὰ εἶναι n_1 !

Ἕνας ὡρισμένος τρόπος σχηματισμοῦ τοῦ μικτοῦ δείγματος Ζ, π.χ. ὁ (11), δύναται νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς $(n_1!)(n_2!)$ μεταθέσεις τῶν n_1+n_2 στοιχείων α_i καὶ β_j.

Ἀλλὰ ὅλαι αἱ δυναταὶ μεταθέσεις τῶν (n_1+n_2) στοιχείων α_i καὶ β_j εἶναι $(n_1+n_2)!$ Ἑπομένως ἡ πιθανότης σχηματισμοῦ τοῦ Ζ κατὰ τὴν διάταξιν (11) εἶναι: $\dfrac{(n_1!)\cdot(n_2!)}{(n_1+n_2)!} = \dfrac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἕνα ἄλλον ὡρισμένον τρόπον σχηματισμοῦ τοῦ Ζ, εὑρίσκομεν πάλιν τὴν ἰδίαν πιθανότητα, δηλαδὴ ὅλοι οἱ τρόποι σχηματισμοῦ τοῦ Z εἶναι ἐξ ἴσου πιθανοί.

Ἐξ ἄλλου ἐφ' ὅσον ἡ πιθανότης κάθε ὡ ρ ι σ μ έ ν ο υ τ ρ ό π ο υ σχηματισμοῦ τοῦ Z εἶναι $\frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$ ἕπεται ὅτι ὅλοι οἱ διάφοροι τρόποι σχηματισμοῦ τοῦ Z εἶναι $\binom{n_1+n_2}{n_1}$ (διότι ἡ πιθανότης σχηματισμοῦ οἱουδήποτε ἐξ αὐτῶν ἀδιαφόρως θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα).

Συγκρίσεις πληθυσμῶν ἢ δοκιμασία ὑποθέσεων ὅτι δύο δείγματα προέρχονται ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμόν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι δύο ἀκολουθίαι στοιχείων ὡς αἱ ἀνωτέρω, ἀλλὰ διὰ τὰς ὁποίας δὲν γνωρίζομεν ἐὰν προέρχωνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ πληθυσμοῦ, ἀναμιγνύονται εἰς ἓν δεῖγμα Z διατεταγμένον κατὰ μέγεθος καὶ ὅτι καταμετρῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν διαδρομῶν τῶν x καὶ y, ἔστω δὲ οὗτος u.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν τὰ δύο δείγματα (δηλαδὴ αἱ δύο ἀκολουθίαι στοιχείων) προέρχωνται ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμὸν τὰ x καὶ y εἰς τὸ Z εἶναι κατ' ἀρχὴν (ἢ κατὰ μέσον ὅρον) καλῶς ἀναμεμιγμένα καὶ τὸ u θὰ εἶναι μεγάλον.

Ἐὰν ἀντιθέτως τὰ δείγματα ἀνήκουν εἰς πληθυσμοὺς τελείως ξεχωριστούς, δηλαδὴ ὅταν τὸ εὗρος τῆς μεταβλητῆς εἰς τὸν ἕνα πληθυσμὸν δὲν ἔχει οὐδὲν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ εὗρος τῆς μεταβλητῆς τοῦ δευτέρου πληθυσμοῦ, τὸ u θὰ εἶναι ἴσον μὲ 2.

Καὶ γενικῶς διαφοραὶ μεταξὺ τῶν δύο πληθυσμῶν θὰ τείνωσι νὰ ἐλαττώσωσι τὸ u. Οὕτω π.χ. οἱ δύο πληθυσμοὶ δυνατὸν νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν διάμεσον, ἀλλὰ εἰς τὸν πληθυσμὸν τῶν x δυνατὸν νὰ ἔχωμεν πολὺ μικρὰν διασπορὰν (δηλαδὴ ὅλα τὰ x νὰ εἶναι πολὺ πλησίον τοῦ μέσου ἢ τῆς διαμέσου), ἐνῷ εἰς τὸν πληθυσμὸν τῶν y νὰ ἔχωμεν μεγάλην διασποράν.

Τότε εἰς τὰ δύο ἄκρα τοῦ Z θὰ ἔχωμεν (κατὰ μέσον ὅρον) μακρὰς διαδρομὰς στοιχείων y καὶ συνεπῶς τὸ u θὰ εἶναι ἐν γένει ἠλαττωμένον.

Οὕτω τὸ κριτήριον τὸ βασιζόμενον εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν διαδρομῶν συνίσταται εἰς τὸ νὰ μετρήσωμεν τὸ u εἰς τὸ μικτὸν δεῖγμα Z καὶ νὰ ἀπορρίψωμεν ἢ μὴ τὴν H_0 (δηλαδὴ ὅτι τὰ δείγματα ἀνήκουν εἰς τὸν ἴδιον πληθυσμὸν ἢ εἰς δύο ὁμοίους πληθυσμούς), ἐὰν τὸ u εἶναι μικρότερον ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ u_0.

Πρὸς τοῦτο δέον νὰ γνωρίζωμεν τὴν κατανομὴν πιθανότητος τοῦ u.

Κατανομὴ πιθανότητος τοῦ u.

Εἴδομεν ὅτι ὅλοι οἱ διάφοροι τρόποι σχηματισμοῦ τοῦ Z εἶναι $\binom{n_1+n_2}{n_1}$ καὶ ἔχουν τὴν ἰδίαν πιθανότητα νὰ συμβοῦν ὅταν ἡ H_0 εἶναι ἀληθής.

Περίπτωσις 1η ἔστω ὅτι τὸ u = ἄρτιον, ἔστω 2K (ἔνθα K = ἀκέραιος).

Θὰ ἔχωμεν K διαδρομὰς διὰ τὰ x καὶ K διαδρομὰς διὰ τὰ y, διότι ἂν τὸ πρῶτον στοιχεῖον τοῦ Z εἶναι τὸ x_1, διὰ νὰ ἔχωμεν ζυγὸν u πρέπει νὰ τελειώσωμεν τὸν σχηματισμὸν τοῦ Ζ μὲ τὸ y_{n_2} καὶ συνεπῶς ἔχομεν Κ διαδρομὰς τῶν x καὶ Κ διαδρομὰς τῶν y.

Τὸ ἴδιον ἰσχύει ὅταν $z_1 = y_1$ ὅτε $z_{n_1+n_2} = x_{n_1}$

Διὰ νὰ ἔχωμεν Κ διαδρομὰς τῶν x πρέπει τὰ n_1 στοιχεῖα x νὰ διαιρῶνται ὑπὸ τῶν y εἰς Κ ὁμάδας καὶ ὁμοίως διὰ νὰ ἔχωμεν Κ διαδρομὰς τῶν y πρέπει τὰ n_2 στοιχεῖα y νὰ διαιρῶνται ὑπὸ τῶν x εἰς Κ ὁμάδας.

Ἡ διαίρεσις τῶν n_1 στοιχείων x εἰς Κ ὁμάδας δύναται νὰ γίνῃ κατὰ πολλοὺς ἐν γένει τρόπους· διὰ νὰ εὕρωμεν πόσοι εἶναι οἱ τρόποι μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως θεωροῦμεν τὴν ταυτότητα:

$$\frac{1-x^{n_1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n_1-1}$$

ἢ τὴν
$$\frac{x(1-x^{n_1})}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n_1}$$

ἢ τὴν
$$\left(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n_1}\right)^K \equiv x^K \left(1-x^{n_1}\right)^K \frac{1}{(1-x)^K} \qquad (11\alpha)$$

ἀλλὰ

$$\frac{1}{(1-x)^K} \equiv 1 + \binom{K}{1} x + \binom{K+1}{2} x^2 + \binom{K+2}{3} x^3 + \dots \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \binom{K+i-1}{i} x^i \qquad (12)$$

ὅθεν ἡ (11α) γίνεται

$$(x + x^2 + \dots + x^{n_1})^K \equiv x^K (1-x^{n_1})^K \sum_{i=0}^{\infty} \binom{K+i-1}{i} x^i$$

Ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου x^{n_1-K} εἰς τὸ γινόμενον $(1-x^{n_1}) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{K+i-1}{i} x^i$

εἶναι $\binom{K+(n_1-K)-1}{n_1-K} = \binom{n_1-1}{n_1-K}$

Ὁ συντελεστὴς οὗτος μᾶς δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν τρόπων καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐκ «Κ διατεταγμένων» μερῶν (μεγαλυτέρων τοῦ μηδενὸς) τοῦ n_1 ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ n_1, ἤτοι κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν Κ διαδρομὰς τῶν x εἰς τὸ δεῖγμα Ζ.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν τρόπων καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν Κ διαδρομὰς τῶν y εἰς τὸ Ζ θὰ εἶναι $\binom{n_2-1}{K-1}$. Ἐπειδὴ δὲ κάθε τρόπος καθ' ὃν ἔχομεν Κ διαδρομὰς x δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ οἱονδήποτε τρόπον καθ' ὃν ἔχομεν Κ διαδρομὰς τῶν y, προκύπτει ὅτι ὅλοι οἱ δυνατοὶ τρόποι καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸ Ζ ὥστε νὰ ἔχωμεν Κ διαδρομὰς τῶν x καὶ Κ διαδρομὰς τῶν y, εἶναι $\binom{n_1-1}{K-1} \cdot \binom{n_2-1}{K-1}$

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς πρέπει τέλος νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, διότι δυνατὸν τὸ Ζ νὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ x_1 καὶ νὰ τελειώνῃ εἰς y_{n_2} ἢ νὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ y_1 καὶ νὰ τελειώνῃ εἰς x_{n_1}.

Θὰ ἔχωμεν οὕτω ἐν γένει $2\binom{n_1-1}{K-1}\binom{n_2-1}{K-1}$ τρόπους.

Ἡ πιθανότης ἑκάστης διατάξεως Ζ (ἢ ἑκάστου τρόπου σχηματισμοῦ τοῦ Ζ) εὕρομεν ὅτι ἦτο $\frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$, συνεπῶς

$$\Pi\iota\theta(u=2K)=\frac{2\binom{n_1-1}{K-1}\binom{n_2-1}{K-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \tag{14}$$

Δευτέρα περίπτωσις: Ἔστω $u=2K+1$.

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν:

$$\Pi\iota\theta\,(u=2K+1)=\frac{\binom{n_1-1}{K}\binom{n_2-1}{K-1}+\binom{n_1-1}{K-1}\binom{n_2-1}{K}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \tag{15}$$

Αἱ (14) καὶ (15) μᾶς δίδουν τὴν ζητουμένην κατανομὴν πιθανότητος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαδρομῶν u εἰς τὸ μικτὸν δεῖγμα Ζ [1].

Διὰ νὰ κρίνωμεν ὅθεν τὴν μηδενικὴν ὑπόθεσιν (ὅτι τὰ δύο δείγματα προέρχονται ἀπὸ τὸν αὐτὸν πληθυσμὸν) εἰς ἓν ἐπίπεδον σημαντικότητος π.χ. 5 %, εὑρίσκομεν τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον u_0 τοιοῦτον ὥστε ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν 0 ἢ 1 ἢ 2 ἢ . . . u_0 διαδρομὰς νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 5 %.

Ἐὰν τότε σχηματίσωμεν ἓν δεῖγμα Ζ ἐκ δύο τυχαίων δειγμάτων καὶ εὕρωμεν $u<u_0$ ἀπορρίπτομεν τὴν H_0 εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος. Ἐὰν u παρατηρηθὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κ_0 δὲν δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν H_0 εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν κρίνωμεν τὴν H_0 εἰς ἄλλο ἐπίπεδον σημαντικότητος π.χ. εἰς τὸ 2,5 % κλπ.

Δέον νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἰς τὸ πρόβλημα τῆς κρίσεως τῆς ὑποθέσεως ὅτι δύο δείγματα προέρχονται ἀπὸ τὸν ἴδιον (ἢ ὁμοίους) πληθυσμοὺς διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδρομῶν, ἐφαρμόζομεν μονόπλευρον (ἢ ἑνὸς ἄκρου) δοκιμασίαν, διότι πράγματι ἀπορρίπτομεν τὴν H_0 ὅταν ἔχωμεν ὀλιγωτέρας διαδρομὰς τοῦ u_0 καὶ δὲν ἐνδιαφερόμεθα νὰ τὴν ἀπορρίψωμεν ὅταν ἔχωμεν περισσοτέρας διαδρομὰς ἑνὸς ἀριθμοῦ π.χ. u_0.

Εἰς ἄλλου ὅμως εἴδους προβλήματα, ἀναλυόμενα διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδρομῶν, μᾶς ἐνδιαφέρει νὰ μὴ ἔχωμεν οὔτε πάρα πολλὰς οὔτε πολὺ ὀλίγας τοιαύτας. Τέλος εἰς ἄλλας περιπτώσεις, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἐνδιαφερόμεθα μόνον νὰ μὴ ἔχωμεν πάρα πολλὰς διαδρομάς. Θὰ ἔχωμεν δηλαδὴ ἐν γένει «δύο ἄκρων» ἢ «ἑνὸς ἄκρου» δοκιμασίαν ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως.

---

(1) Ἡ κατανομὴ αὕτη εὑρέθη ὑπὸ τοῦ W. L. Stevens καὶ ὑπὸ τῶν Wald καὶ Wolfowitz, ἴδε W. L. Stevens: «Distribution of groups in a sequence of alternatives» Annals of Eugenics Vol. IX (1939) καὶ A. Wald and J. Wolfowitz «On a test of whether two samples are from the same population», Annals of Mathematical Statistics Vol. XI (1940). Ἴδε ὁμοίως Mathematical Statistics (1946) S. S. Wilks, σελὶς 200–207. Ἐπέκτασιν τῆς θεωρίας τῶν runs εἰς περίπτωσιν περισσοτέρων ἐναλλακτέων ἴδε Mood: The theory of runs (Annals of M. Stat. Vol. XI 1940 p. 367).

Τὸ κριτήριον τῶν διαδρομῶν εἶναι «εὐαίσθητον» ὄχι μόνον κατὰ τὴν θέσιν ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν μορφὴν τῶν κατανομῶν. Ὅταν κρίνωμεν ἐὰν δύο δείγματα προέρχονται ἀπὸ ὁμοίους πληθυσμοὺς διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδρομῶν (runs), κρίνομεν ἐὰν οἱ πληθυσμοὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν θέσιν καὶ τὴν αὐτὴν κατανομὴν συχνότητος συγχρόνως.

Αἱ σχέσεις (14) καὶ (15) ὑπολογίζονται ἀπ' εὐθείας διὰ μικρὰς τιμὰς τῶν n_1 καὶ n_2. Ὅταν τὰ n_1 καὶ n_2 εἶναι μεγάλα, ὁ ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμὸς τοῦ u_0 τῇ βοηθείᾳ τῶν (14) ἢ (15) εἶναι κοπιώδης. Ὅταν n_1 καὶ n_2 εἶναι μεγάλα ἡ κατανομὴ τοῦ u εἶναι κατὰ προσέγγισιν κανονική. Ἡ προσέγγισις εἶναι ἀρκετὰ καλὴ πρακτικῶς ὅταν n_1 καὶ n_2 εἶναι ἀμφότερα μεγαλύτερα τοῦ 10.

Ἀναφέρομεν ἄνευ ἀποδείξεως ὅτι $E(u) = \dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1$

καὶ $\sigma^2_u = \dfrac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}$. Ἔνθα $E(u)$ = ἀναμενομένη τιμὴ τοῦ u (expected value) ἢ μέσος ἀριθμητικὸς τοῦ u.

Ἔχουν ἤδη ὑπολογισθῆ πίνακες, οἵτινες δίδουν ἑτοίμους, διὰ τιμὰς τῶν n_1 καὶ n_2 ἀπὸ 2 ἕως 100, τὰς τιμὰς $u_{0\cdot025}$ καὶ $u_{0\cdot975}$ τοιαύτας ὥστε, ἐὰν εἰς τὸ δεῖγμα z εὕρωμεν $u\delta \leqslant u_{0\cdot025}$ τοῦ πίνακος, διὰ δοθέντα n_1 καὶ n_2, τοῦτο θὰ συμβαίνῃ ἕνεκα τυχαίας διακυμάνσεως μὲ πιθανότητα $\leqslant 2{,}5\%$. Ὁμοίως ὅταν $u\delta \geqslant u_{0\cdot975}$. (Ἴδε Eisenhart C. and Swed F. «Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives» Annals of Mathematical Statistics, vol. XIV (1943) p. 66 ἢ Dixon and Massey: Introduction to Statistical Analysis (1951) p. 325-326 (πίνακες 11), ὅπου οἱ ἀνωτέρω πίνακες ἀναδημοσιεύονται).

Παράδειγμα

Προκειμένου νὰ κριθῇ ἡ ἀποδοτικὴ ἀξία μιᾶς νέας ποικιλίας σπόρου σίτου Β ἐν συγκρίσει πρὸς μίαν ἄλλην Α, ἤδη χρησιμοποιουμένην, ἐκτελεῖται τὸ ἑξῆς πείραμα:

Μίαν ἔκτασιν ἐδάφους (τῆς αὐτῆς ποιότητος) ἐκ 16 στρεμμάτων τὴν χωρίζομεν εἰς 16 ἴσα μέρη, ἐκτάσεως ἑνὸς στρέμματος. Εἶτα «τυχαίως» ἐκλέγομεν 8 μέρη ἐκ τούτων, εἰς ἃ σπείρομεν τὴν ποικιλίαν Β, ἐνῷ εἰς τὰ ἕτερα 8 σπείρομεν τὴν ποικιλίαν Α (μὲ ἴσας ποσότητας σπόρων).

Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς συγκομιδῆς μετρῶμεν τὰς στρεμματικὰς ἀποδόσεις εἰς τὰ 16 μέρη κεχωρισμένως καὶ ἔστω ὅτι αἱ στρεμματικαὶ ἀποδόσεις, κατατασσόμεναι κατὰ μέγεθος καὶ κατ' εἶδος σπόρου, εἶναι αἱ κάτωθι εἰς κιλά:

Ποικιλία Α	110,5	111,3	112,7	113,1	114,6	117,1	120,2	120,6
Ποικιλία Β	111,6	111,8	113,2	114,8	115,2	116,0	121,0	121,4

Εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἡ ποικιλία Β τοῦ σίτου εἶναι ἀποδοτικωτέρα τῆς ποικιλίας Α εἰς τὸ 2,5% ἐπίπεδον σημαντικότητος;

Λύσις: Ἡ ὑπόθεσις μηδὲν (H_0) ἐνταῦθα εἶναι ὅτι τὰ δύο εἴδη σπόρων εἶναι τῆς αὐτῆς ἀποδόσεως, δηλαδὴ ὅτι αἱ διαφοραὶ εἰς τὰς ἀποδόσεις ὀφείλονται εἰς τὰς διακυμάνσεις τῆς τυχαίας δειγματοληψίας.

Σχηματίζω τὸ μικτὸν διατεταγμένον δεῖγμα, εἰς ὃ ὑποσημειώνω κάτωθεν ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον Α ἢ Β, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς δηλοῖ ἀπόδοσιν τῆς Α ἢ τῆς Β ποικιλίας. Θὰ ἔχω:

110,5	111,3	111,6	111,8	112,7	113,1	113,2	114,6
Α	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Α
114,8	115,2	116,0	117,1	120,2	120,6	121,0	121,4
Β	Β	Β	Α	Α	Α	Β	Β

Ἔχομεν εἰς τὴν ἀκολουθίαν ταύτην $n_1=8$, $n_2=8$ καὶ $u_0=8$.

Ἐκ τῶν προαναφερθέντων πινάκων ἔχω $u_{0.025}=4$.

Τὸ παρατηρηθὲν $u_0=8$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 4 καὶ συνεπῶς δὲν ἀπορρίπτω τὴν H_0 (ὅτι αἱ ποικιλίαι σπόρων εἶναι τῆς ἰδίας ἀποδόσεως) εἰς τὸ 2,5% ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἔχομεν μονόπλευρον δοκιμασίαν (ἢ ἑνὸς ἄκρου), διότι οἱ σπόροι θὰ ἦσαν διαφορετικῆς ἀποδόσεως ἐὰν ὑπῆρχον εἰς τὸ διατεταγμένον δεῖγμα πολὺ ὀλίγαι διαδρομαί.

Δοκιμασία τοῦ «τυχαίου» (randomness) τῆς διατάξεως μιᾶς μακρᾶς ἀκολουθίας.

Ἓν ἄλλο πρόβλημα τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν διὰ τῶν διαδρομῶν εἶναι τὸ νὰ κρίνωμεν τὴν ὑπόθεσιν τῆς «τυχαίας» διατάξεως μιᾶς μακρᾶς ἀκολουθίας δυὸ ἐναλλακτέων.

Μία μακρὰ σειρὰ δύο ἐναλλακτέων (ἢ γενικώτερον ὁσωνδήποτε ἐναλλακτέων) λέγομεν ὅτι ἔχει «τυχαίαν διάταξιν», ὅταν ἡ γνῶσις ἑνὸς στοιχείου τῆς σειρᾶς οὐδεμίαν πληροφορίαν μᾶς παρέχει περὶ τοῦ εἴδους τῶν ἄλλων.

Π.χ. ἡ σειρὰ ΑΒΑΒΑΒΑΒΑΒ... δὲν εἶναι «τυχαία» (τουλάχιστον εἰς τὸ τμῆμα τῶν 10 πρώτων στοιχείων της), διότι, ὡς παρατηροῦμεν, μετὰ ἕκαστον Α ἔχομεν ἓν Β. Ἀναλύοντες τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαδρομῶν, χρησιμοποιοῦμεν ἀμφίπλευρον (ἢ δύο ἄκρων) κριτήριον· δηλαδὴ ἀπορρίπτομεν τὸ «τυχαῖον» τῆς διατάξεως ἐὰν ἔχωμεν ἢ π ο λ ὺ ὀ λ ί γ α ς ἢ π ά ρ α π ο λ λ ὰ ς διαδρομάς.

Πράγματι, π ο λ ὺ ὀ λ ί γ α ι διαδρομαὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς μία τάσις ὁμοίων γεγονότων νὰ παρουσιάζωνται ὁμαδικῶς. Οὕτω ἔχομεν ἓν εἶδος πληροφορίας ἀπὸ ἓν ὡρισμένον στοιχεῖον τῆς ἀκολουθίας διὰ τὰ ἑπόμενα ἢ τὰ προηγούμενα. Π ά ρ α π ο λ λ α ὶ ἐξ ἄλλου διαδρομαὶ δύνανται ἐπίσης νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔνδειξις ὑπάρξεως μιᾶς «κυματοειδοῦς μεταβολῆς» τοῦ εἴδους τῶν στοιχείων τῆς ἀκολουθίας (wave-like variation) καὶ συνεπῶς καὶ πάλιν ἔχομεν ἕνα βαθμὸν πληροφορίας ἀπὸ ἓν στοιχεῖον τῆς ἀκολουθίας διὰ τὰ ἄλλα.

Ἐν τούτοις ὑπάρχουν ὡρισμέναι περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας κρίνομεν τὸ τυχαῖον τῆς ἀκολουθίας διὰ μονοπλεύρου κριτηρίου (πολὺ ὀλίγων ἢ πάρα πολλῶν διαδρομῶν) ὅταν γνωρίζωμεν τὸ πιθανὸν ἐναλλακτέον τοῦ μὴ τυχαίου.

Π ρ δείγματα (1)

1ον) Ὡς μίαν περίπτωσιν ὅπου δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν τὸ τυχαῖον τῆς διατάξεως μιᾶς μακρᾶς σειρᾶς δύο ἐναλλακτέων, ὅταν ὑποψιαζόμεθα ὡς ἐναλλακτέον τοῦ τυχαίου τὴν ὁμαδοποίησιν τῶν ὁμοίων στοιχείων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς κατὰ τάξιν θέσεις ὑγιῶν καὶ προσβεβλημένων ὑπό τινος ἀσθενείας φυτῶν εἰς μίαν μακρὰν σειρὰν φυτῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Ἔχομεν ἐνταῦθα τὴν εὔλογον ὑποψίαν ὅτι ἡ ἀσθένεια τῶν φυτῶν εἶναι μεταδοτικὴ καὶ συνεπῶς ὅτι ἐὰν κάπου, εἰς τὴν μακρὰν σειρὰν τῶν φυτῶν, ὑπάρχει ἓν προσβεβλημένον ὑπὸ τῆς ἀσθενείας φυτόν, τότε καὶ τὰ γειτονικὰ πρὸς αὐτὸ θὰ εἶναι ἐπίσης προσβεβλημένα.

Πληθυσμός μας ἐνταῦθα εἶναι ὁλόκληρος ἡ μακρὰ σειρὰ τῶν φυτῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἔστω ὅτι λαμβάνομεν ἓν τυχαῖον διάστημα 25 στοιχείων εἰς τὴν μακρὰν σειρὰν (π.χ. ἀπὸ τὸ 51ον ἕως τοῦ 75ου στοιχείου τῆς σειρᾶς) καὶ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἑξῆς :

ΥΥΥΥΥΥΥΥΥΥΑΥΑΑΑΑΥΥΥΥΥΥΥΥΥ (ἔνθα Υ = ὑγιὲς καὶ Α = ἀσθενὲς φυτόν).

Ἔχομεν $n_1 = 20$, $n_2 = 5$ καὶ $u = 5$. Ἐκ τῶν πινάκων $u_{0,025} = 5$, ἑπομένως τὸ γεγονὸς εἶναι σημαντικὸν στατιστικῶς εἰς τὸ 2,5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος καὶ ἀπορρίπτομεν τὴν H_0 (H_0 = ὅτι διάταξις εἶναι τυχαία), δηλαδὴ ἀποφαινόμεθα ὅτι καὶ εἰς τὴν μακρὰν σειρὰν τῶν χιλιάδων φυτῶν ἡ ἐναλλαγὴ τῶν Υ καὶ Α δὲν εἶναι τυχαία, διότι ἂν ἦτο τυχαία, ὁπουδήποτε καὶ ἐὰν ἐλαμβάνομεν τυχαῖα διαστήματα 25 διαδοχικῶν στοιχείων, θὰ εὑρίσκομεν εἰς τὰ 97,5 % τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τυχαίων τούτων 25άδων ἀριθμὸν διαδρομῶν u μεγαλύτερον τοῦ 5.

2ον) Ὡς μίαν περίπτωσιν, ὅπου πάρα πολλαὶ διαδρομαὶ δύνανται νὰ εἶναι τὸ πιθανὸν ἐναλλακτέον τοῦ τυχαίου τῆς διατάξεως μιᾶς ἀκολουθίας, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἑξῆς :

Εἰς ἓν μπὰρ-ἑστιατόριον (ὅπου οἱ πελάται κάθηνται εἰς μίαν μακρὰν σειρὰν καθισμάτων πυκνῶς τοποθετημένων τὸ ἓν παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, διὰ τὴν ἐξυπηρέτησιν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρων ἀτόμων πρὸ τοῦ μακροῦ πάγκου (counter) σερβιρίσματος ροφημάτων καὶ φαγητῶν), ἡμισείαν ὥραν πρὸ τῆς συνήθους ὥρας τοῦ μεσημβρινοῦ γεύματος, μετρῶμεν καὶ καταγράφομεν κατὰ τὴν ἰδίαν σειρὰν (ὅπως τὰ βλέπομεν ἐν τῷ ἑστιατορίῳ) τὰ κενὰ καὶ τὰ πλήρη καθίσματα τοῦ ἑστιατορίου.

Ἔστω ὅτι ἓν τμῆμα τῆς μακρᾶς σειρᾶς μᾶς παρέσχε τὴν ἑξῆς ἀκολουθίαν ΚΠΚΚΠΚΚΚΠΚΠΚΠΚΠΚ (ἔνθα Κ = κενὸν καὶ Π = πλῆρες κάθισμα). Δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν ὑπόθεσιν H_0 περὶ τυχαίας διατάξεως κενῶν καὶ πλήρων καθισμάτων (τὴν ὥραν ἐκείνην), εἰς τὴν μακρὰν σειρὰν καθισμάτων τοῦ ἑστιατορίου εἰς τὸ 2,5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος ;

Ἔχομεν $n_1 = 10$, $n_2 = 6$ καὶ $u = 13$ καὶ ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

(1) Τὰ παραδείγματα 1 καὶ 2 ἀναφέρονται μὲ μικρὰς ἀριθμητικὰς παραλλαγὰς εἰς τὸ προαναφερθὲν ἄρθρον τῶν C. Eisenhart καὶ F. Swed εἰς τὸ Annals of Math. Statistics (1943) p. p. 66-87.

$u_{0,975} = 12$. Ὅθεν ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν τυχαίας διατάξεως εἰς τὸ 2,5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Εἰς τὸ ὡς ἄνω παράδειγμα ἔχομεν τὴν εὔλογον ὑποψίαν ὅτι οἱ πελάται προτιμοῦν, χάριν τῆς ἀνέσεώς των καὶ τῆς ἐλευθερίας κινήσεών των κατὰ τὴν ὥραν τοῦ φαγητοῦ των, νὰ κάθηνται εἰς καθίσματα τοιαῦτα, ὥστε τὰ γειτονικά των νὰ εἶναι κενά, διὰ νὰ μὴν ἐνοχλῶνται ἀπὸ τὰς κινήσεις τῶν παραπλεύρως καθημένων (ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ πράξουν τοῦτο), δηλαδὴ ἀναμένομεν ὡς ἐναλλακτέον τοῦ τυχαίου μίαν τάσιν πρὸς κυματοειδῆ μεταβολὴν τῶν κενῶν καὶ πλήρων καθισμάτων (παρόμοιον φαινόμενον παρατηρεῖται καὶ εἰς τὸν κινηματογράφον ὅταν οὗτος δὲν εἶναι τελείως πλήρης θεατῶν, διότι συνήθως προτιμῶμεν θέσεις ἐλευθέρας τόσον ἐμπρὸς ὅσον καὶ παραπλεύρως μας διὰ τὴν ἄνετον παρακολούθησιν τῆς ταινίας).

3ον) Ὡς περίπτωσιν, τέλος, ἀμφιπλεύρου κριτηρίου διὰ τὴν H_0 (περὶ «τυχαίας» διατάξεως τῶν στοιχείων μιᾶς ἀκολουθίας) δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ κάτωθι παράδειγμα:

Εἰς τὰς πρώτας 30 κληρώσεις μιᾶς ρουλέττας τὰ ἀποτελέσματα ἦσαν:

ΜΜΚΚΜ ΜΚΜΜΚ ΚΜΚΜΚ ΚΜΜΚΚ ΜΚΜΜΜ ΚΚΜΚΚ (Μ=μαῦρο Κ=κόκκινο).

Ζητεῖται νὰ κριθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ρουλέττα δὲν παρουσιάζει, οὔτε τάσιν κυματοειδοῦς μεταβολῆς κληρώσεων ἐρυθρῶν καὶ μαύρων, οὔτε τάσιν ὁμαδοποιήσεως τῶν ἐρυθρῶν καὶ μαύρων κατὰ τὰς κληρώσεις της, δηλαδὴ ὅτι ἡ ρουλέττα κατὰ τὰς κληρώσεις της παρουσιάζει τυχαίαν διάταξιν χρώματος εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Ἔχομεν $n_1 = 15$, $n_2 = 15$ καὶ $u = 18$.

Ἐκ τῶν πινάκων τῶν Eisenhart - Swed ἔχομεν $u_{0,025} = 10$ καὶ $u_{0,975} = 21$

Ἡ παρατηρηθεῖσα τιμὴ τοῦ $u = 18$ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ $u_{0,025} = 10$ καὶ τοῦ $u_{0,975} = 21$. Ἑπομένως δὲν ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν H_0 περὶ τυχαίας μεταβολῆς τῶν μαύρων καὶ ἐρυθρῶν κατὰ τὰς κληρώσεις τῆς ρουλέττας εἰς τὸ 5 % ἐπίπεδον σημαντικότητος.

ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Δοκιμασία ἀνεξαρτησίας τῶν δύο μεταβλητῶν δι' ἐλευθέρων κατανομῆς μεθόδων. Μέθοδος τῶν ἀντιστροφῶν.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἓν δεῖγμα ἐκ n στοιχείων ἐξ ἑνὸς πληθυσμοῦ δύο μεταβλητῶν x καὶ y (ὅπου αἱ μεταβληταὶ x καὶ y ὑποτίθενται συνεχεῖς).

Εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν n στοιχείων ἀντιστοιχεῖ ἓν ζεῦγος τιμῶν (x_i, y_i) καὶ συνεπῶς ἔχομεν n ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν x καὶ y, ἐξ ὧν ἐνδέχεται νὰ προκύπτῃ μία συσχέτισις μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν (ἐν τῷ δείγματι). Εἶναι ὅμως ἡ συσχέτισις αὕτη στατιστικῶς σημαντικὴ (εἰς ἓν ἐπίπεδον σημαντικότητος α %) ἢ μήπως ὀφείλεται, ἡ παρουσιασθεῖσα ἐν τῷ δείγματι συσχέτισις, εἰς τὰς διακυμάνσεις τῆς τυχαίας δειγματοληψίας;

Πῶς θὰ κρίνωμεν τοῦτο, ἰδίᾳ ὅταν οὐδεμίαν ἔχομεν γνῶσιν ἐπὶ τῆς μορφῆς τῶν κατανομῶν συχνότητος τῶν μεταβλητῶν εἰς τὸν πληθυσμόν;

Δηλαδὴ ἂν H_0 εἶναι ὅτι αἱ δύο μεταβληταὶ εἶναι εἰς τὸν πληθυσμὸν ἀνεξάρτητοι, δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν H_0 ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος εἰς ἓν ἐπίπεδον σημαντικότητος α $^0/_0$;

Ἐκ τῶν διαφόρων ἐλευθέρων κατανομῆς μεθόδων, δι᾽ ὧν δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, θὰ ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα μίαν μόνον, τὴν μέθοδον τὴν βασιζομένην ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν «ἀντιστροφῶν» τῶν δύο σειρῶν τιμῶν τῶν x καὶ y εἰς τὸ δεῖγμα.

Ὁρισμοί. Εἰς τὴν τυχοῦσαν μετάθεσιν π.χ. τῶν πέντε πρώτων (κατὰ φυσικὴν σειρὰν) ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἔστω τὴν 3, 5, 4, 1, 2 καλοῦμεν ἀντιστροφὴν (inversion), ἀντίστοιχον πρὸς ἓν στοιχεῖον της π.χ. τὸ 3, κάθε ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 3, εὑρισκόμενον ἐν τῇ μεταθέσει πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ (ἢ ἐὰν ἡ μετάθεσις εἶναι γεγραμμένη εἰς μιὰν κάθετον στήλην, κάθε ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 3 εὑρισκόμενον κάτωθι αὐτοῦ).

Οὕτω εἰς τὴν ἄνω μετάθεσιν ἔχομεν δύο ἀντιστροφὰς ἀντιστοίχους πρὸς τὸ 3: τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2, τρεῖς ἀντιστροφὰς ἀντιστοίχους πρὸς τὸ 5, δύο ἀντιστροφὰς ἀντιστοίχους πρὸς τὸ 4 καὶ μηδὲν ἀντιστροφὰς ἀντιστοίχους πρὸς τὸ 1 ἢ 2.

Ἀριθμὸν ἀντιστροφῶν ὁλοκλήρου τῆς σειρᾶς 3, 5, 4, 1, 2 (κατὰ τὴν σειρὰν ταύτην γεγραμμένην) καλοῦμεν τὸ σύνολον τῶν ἀντιστροφῶν ὅλων τῶν στοιχείων της καὶ τὸ παριστῶμεν διὰ λ.

Οὕτω εἰς τὴν 3, 5, 4, 1, 2 ἔχομεν $\lambda = 2+3+2+0+0 = 7$ ἀντιστροφάς.

Οἱ ὁρισμοὶ αὐτονοήτως ἰσχύουν καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν μεταθέσεων τῶν 5 πρώτων ἀριθμῶν (κατὰ φυσικὴν τάξιν) ἔχομεν μεταθέσεις τῶν n πρώτων κατὰ φυσικὴν σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἢ γενικώτερον μεταθέσεις n διαφόρων κατὰ μέγεθος ἀριθμῶν ἢ n τιμῶν μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς.

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὴν μετάθεσιν 1, 2, 3, 4... n ἔχομεν ἀριθμὸν ἀντιστροφῶν τῆς σειρᾶς μηδὲν (δηλαδὴ τὸν ἐλάχιστον δυνατὸν ἀριθμόν), ἐνῷ εἰς τὴν μετάθεσιν: $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$ θὰ ἔχωμεν $\frac{n(n-1)}{2}$ ἀντιστροφὰς (καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος δυνατὸς ἀριθμὸς ἀντιστροφῶν διὰ σειρὰς n ἀριθμῶν).

Ὅθεν τὸ εὖρος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς λ εἶναι ἀπὸ 0 ἕως $\frac{n(n-1)}{2}$ διὰ κάθε n.

Ἐξ ἄλλου τὸ λ δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ τοῦ $\frac{n(n-1)}{2}$, διότι ἐὰν εἰς τὴν σειρὰν 1, 2, 3 .... n, ἥτις ἔχει 0 διαδρομάς, ἐναλλάξωμεν τὰς θέσεις τοῦ n καὶ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του στοιχείου $(n-1)$, θὰ ἔχωμεν τὴν διάταξιν $1, 2, 3 \ldots n-2, n, n-1$ εἰς ἣν $\lambda=1$.

Ἐὰν νῦν εἰς τὴν νέαν διάταξιν ἐναλλάξωμεν τὰς θέσεις τοῦ n καὶ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του $(n-2)$, θὰ ἔχωμεν τὴν διάταξιν :

$$1, 2, 3, \ldots (n-3), n, (n-2), (n-1) \text{ εἰς } \lambda=2.$$

Προχωροῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, φθάνομεν εἰς τὴν διάταξιν :

$$n, 1, 2, 3, \ldots (n-1) \text{ εἰς ἣν } \lambda=n-1. \qquad (20)$$

τοῦ λ διατρέξαντος ἤδη διαδοχικῶς ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 ἕως τοῦ $(n-1)$.

Ἤδη συνεχίζομεν τὰς ἰδίας ἐναλλαγὰς θέσεων εἰς τὴν (20) μεταξὺ τοῦ στοιχείου $(n-1)$ καὶ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του μέχρι τῆς διατάξεως:

$$n,\ n-1,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ n-2. \tag{21}$$

Συνεχίζοντες κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐναλλαγὰς τοῦ στοιχείου $(n-2)$ καὶ εἶτα ὁμοίως διὰ τὸ $(n-3)$ κλπ. θὰ φθάσωμεν εἰς τὴν διάταξιν:

$$n,\ (n-1),\ (n-2) \ldots\ 3,\ 2,\ 1, \text{ ἥτις ἔχει } \lambda = \frac{n(n-1)}{2}$$

Οὕτω τὸ λ διέτρεξε διαδοχικῶς ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ $\frac{n(n-1)}{2}$

Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι εἰς κάθε διάταξιν τῶν n ἀριθμῶν, ποὺ ἔχει λ_0 ἀντιστροφάς, ἀντιστοιχεῖ μία διάταξις μὲ $\frac{n(n-1)}{2} - \lambda_0$ ἀντιστροφάς, δηλαδὴ ὅτι διὰ τιμὰς τοῦ λ ἰσαπεχούσας ἀπὸ τὰς ἀκραίας τιμὰς 0 καὶ $\frac{n(n-1)}{2}$ ἔχομεν ἴσας συχνότητας εἰς τὴν κατανομὴν συχνότητος τοῦ λ.

Πράγματι ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι γενικῶς εἰς τὸ σύστημα ἀριθμήσεως κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς K ἔχει $(K-1)$ ἀκεραίους μικροτέρους του. Ἂν δὲ $K \leqslant n$ εἰς μίαν τυχοῦσαν διάταξιν τῶν n ἀριθμῶν, π.χ. τὴν

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \cdots \alpha_\rho \cdots \alpha_{n-1},\ \alpha_n \tag{22}$$

(ὅπου τὰ α_i εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $1, 2, \cdots\cdots n$ κατά τινα τάξιν), ὁ K θὰ εἶναι ἓν ἐκ τῶν στοιχείων ταύτης ἔστω τὸ α_ρ (δηλαδὴ $K=\alpha_\rho$). Οἱ $(K-1)$ ἢ $\alpha_\rho-1$ ἀριθμοὶ ποὺ εἶναι εἰς τὸ σύστημα ἀριθμήσεως μικρότεροι τοῦ α_ρ θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν (1) εἴτε ἀριστερὰ τοῦ α_ρ ἢ δεξιά του ἢ μερικοὶ ἀριστερά του καὶ οἱ ὑπόλοιποι δεξιά του. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἂν τὸ πλῆθος ἐκείνων ποὺ εὑρίσκονται ἀριστερά του καλέσωμεν K_ρ καὶ ἐκείνων ποὺ εὑρίσκονται δεξιά του λ_ρ θὰ ἔχωμεν πάντοτε

$$\alpha_\rho - 1 = K_\rho + \lambda_\rho \quad (\text{ὅπου } K_\rho \geqslant 0 \text{ καὶ } \lambda_\rho \geqslant 0)$$

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει δι' ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς (22) καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}
\alpha_1-1 &= K_1+\lambda_1\\
\alpha_2-1 &= K_2+\lambda_2\\
\alpha_3-1 &= K_3+\lambda_3\\
\vdots\quad &\quad\ \vdots\\
\alpha_n-1 &= K_n+\lambda_n
\end{aligned}$$

$$\text{ἄρα } \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i) - n = \sum_{i=1}^{n} K_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\text{ἢ } \frac{n(n+1)}{2} - n = \sum_{i=1}^{n} K_i + \lambda. \tag{23}$$

Ἂν ἤδη θεωρήσωμεν τὴν ἀκριβῶς κατ' ἀντίστροφον τάξιν τῆς (22) διάταξιν

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_{n-2} \ldots\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1 \tag{24}$$

θὰ ἔχωμεν διὰ κάθε στοιχεῖον της, π.χ. τὸ α_ρ, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ εἶναι μικρότεροι τοῦ α_ρ καὶ εὑρίσκονται δεξιά του εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἀριθμοὶ ποὺ εἰς τὴν (22) εἶναι μικρότεροι τοῦ α_ρ καὶ εὑρίσκονται ἀριστερά του, δηλαδὴ εἰς τὴν (24) θὰ εἶναι: $\sum_{i=1}^{n}\lambda'_i=\sum_{i=1}^{n}K_i$ ἀλλὰ $\sum_{i=1}^{n}\lambda'_i=\lambda'$, ὅπου λ' εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀντιστροφῶν τῆς (24), ἄρα θὰ ἔχωμεν ἕνεκα τῆς (23) $\frac{n(n-1)}{2}-\lambda=\lambda'$.

Ἐπομένως, ἐπειδὴ εἰς κάθε διάταξιν (22) ἀντιστοιχεῖ μία μόνη διάταξις (24), ἀπεδείχθη ὅτι εἰς κάθε διάταξιν μὲ λ_0 ἀντιστροφὰς θὰ ἀντιστοιχῇ μία διάταξις μὲ $\lambda'_0=\frac{n(n-1)}{2}-\lambda_0$ ἀντιστροφάς, ἤτοι ὅτι αἱ τοιαῦται διατάξεις εἶναι ἰσάριθμοι.

Ἀπεδείχθη οὕτω ὅτι ἡ κατανομὴ συχνότητος τοῦ λ εἶναι μία κατανομὴ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς ἀκραίας τιμὰς τοῦ εὔρους της καὶ συνεπῶς ὅτι ἡ μέση τιμὴ τοῦ λ θὰ εὑρίσκεται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον τοῦ εὔρους της, δηλαδὴ θὰ εἶναι

$$\bar{\lambda}=\frac{n(n-1)}{4} \tag{25}$$

Γενικῶς ἡ κατανομὴ συχνότητος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστροφῶν λ διὰ κάθε n δύναται νὰ εὑρεθῇ ὡς ἀκολούθως:

Ἔστω ὅτι γνωρίζομεν τελείως τὴν κατανομὴν συχνότητος τοῦ λ διὰ $n=n_0-1$ καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς $\lambda=\lambda_0-1$ διὰ $n=n_0$ καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς $\lambda=\lambda_0$ διὰ $n=n_0$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\text{Περιπτώσεις } (\lambda=\lambda_0,\ n=n_0)=\text{Περιπτ.}(\lambda=\lambda_0,\ n=n_0-1)+\text{Περιπτ.}(\lambda=\lambda_0-1,\ n=n_0)-\text{Περιπτ.}(\lambda=\lambda_0-n_0,\ n=n_0-1) \tag{26}$$

ὅπου ἐνδεχομένως τινὲς ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν λάβω ὅλας τὰς διατάξεις καθ' ἃς $\lambda=\lambda_0$ διὰ $n=n_0-1$ (ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται) καὶ τοποθετήσω τὸν ἀριθμὸν n_0 εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ἐξ αὐτῶν θὰ ἔχω ὅλας τὰς διατάξεις ποὺ ἔχουν $\lambda=\lambda_0$, $n=n_0$ καὶ τὸ n_0 ὡς τελευταῖον στοιχεῖον των. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς τούτων K_1.

Ἐὰν ἐπίσης λάβω ὅλας τὰς διατάξεις καθ' ἃς $\lambda=\lambda_0-1$ διὰ $n=n_0$ πλὴν ἐκείνων ἐξ αὐτῶν ποὺ ἔχουν τὸ n_0 εἰς τὴν πρώτην θέσιν (ἐὰν ὑπάρχωσι τοιαῦται) καὶ ἐναλλάξω τὴν θέσιν τοῦ n_0 καὶ τοῦ προηγουμένου τοῦ n_0 στοιχείου, θὰ εὕρω διατάξεις μὲ $n=n_0$ καὶ $\lambda=\lambda_0$ διαφόρους ἐκείνων τὰς ὁποίας εὕρομεν προηγουμένως (διότι αἱ προηγούμεναι ἔχουν τελευταῖον στοιχεῖον των τὸ n_0) καὶ ἔστω ὁ ἀριθμὸς τούτων K_2.

Ἤδη λέγω ὅτι: Περιπτώσεις $(\lambda=\lambda_0,\ n=n_0)=K_1+K_2$

διότι ἂν φαντασθῶ τυχοῦσαν τοιαύτην διάταξιν μὲ $\lambda=\lambda_0$ καὶ $n=n_0$ ἡ διάταξις αὕτη θὰ ἔχῃ τὸ n_0 ἢ εἰς τὸ τέλος της, ὅτε ἀφαιρῶν τὸ n_0 ἔχω μίαν διάταξιν ἐκ τῶν K_1, καὶ συνεπῶς τὴν ἔχω ἤδη μετρήσει εἰς τὰς K_1, ἢ θὰ ἔχῃ τὸ n_0 εἰς ἄλλην τινὰ θέσιν καὶ ἂν ἐναλλάξωμεν εἰς ταύτην τὴν θέσιν τοῦ n_0 μὲ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον στοιχεῖον θὰ προκύψῃ μία διάταξις μὲ $\lambda=\lambda_0-1$ καὶ $n=n_0$, δηλαδὴ μία ἐκ τῶν K_2 ἣν ἐπίσης ἔχομεν ἤδη μετρήσει.

Ὁ ἀριθμὸς K_1 εἶναι ἐξ ὑποθέσεως γνωστός, ἐφ' ὅσον ὑπετέθη ὅτι γνωρίζομεν τελείως τὴν κατανομὴν τοῦ λ διὰ $n=n_0-1$. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως K_2 ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων αἵτινες ἔχουν $\lambda=\lambda_0-1$ καὶ $n=n_0$, ἔστω K_3, πλὴν ἐκείνων ἐξ αὐτῶν ποὺ ἔχουν τὸ n_0 εἰς τὴν πρώτην θέσιν (ἐὰν ὑφίστανται τοιαῦται).

Ἐὰν τοιαῦται περιπτώσεις ὑφίστανται καὶ ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός των εἶναι K_4 τότε θὰ ὑφίστανται ἰσάριθμοι διατάξεις μὲ $n=n_0-1$ καὶ $\lambda=\lambda_0-n_0$. Διότι, ἂν ἀφαιρέσω ἀπὸ τὰς διατάξεις $\lambda=\lambda_0-1$ καὶ $n=n_0$ τὸ n_0 ποὺ κατέχει τὴν πρώτην θέσιν, θὰ ἔχω περιπτώσεις μὲ $n=n_0-1$ καὶ $\lambda=\lambda_0-1-(n_0-1)=\lambda_0-n_0$ ἀντιστροφὰς καὶ ἀντιστρόφως οἱαδήποτε διάταξις μὲ $n=n_0-1$ καὶ $\lambda=\lambda_0-n_0$ γίνεται διάταξις μὲ $\lambda=\lambda_0-1$ καὶ $n=n_0$ ἂν θέσω τὸ n_0 ὡς πρῶτον στοιχεῖον πρὸ τῶν (n_0-1) στοιχείων της.

Ἄρα θὰ εἶναι $K_2=K_3-K_4$ καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ K_3 καὶ K_4 εἶναι ἀριθμοὶ ἐξ ὑποθέσεως γνωστοὶ ὑπελογίσθη καὶ τὸ K_2, δηλαδὴ ἐδείχθη ἡ (26) ([1]).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν $n=n_0-1=2$ ἡ κατανομὴ τοῦ λ εἶναι ἡ:

	συχνότης
$\lambda=0$	1
$\lambda=1$	1

(διότι ὅταν $n=2$ αἱ δυναταὶ διατάξεις εἶναι 1,2 καὶ 2,1 μὲ ἀντιστροφὰς 0 καὶ 1 ἀντιστοίχως).

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι δι' οἱονδήποτε n ὁ ἀριθμὸς τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς ἔχομεν 0 ἀντιστροφὰς εἶναι 1 (δηλαδὴ ἡ κατάταξις 1, 2, 3 . . . . n). Οὕτω δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πίνακας κατανομῆς συχνότητος τοῦ λ διὰ διαφόρους τιμὰς τοῦ λ. Ἔχομεν π. χ. τὸν πίνακα I (ἴδε τέλος παρούσης ἐργασίας) ὅταν $n=10$.

Σημείωσις. Ἕνας πρακτικὸς τρόπος κατασκευῆς τῆς κατανομῆς συχνότητος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστροφῶν λ διὰ $n=2, 3, 4 \ldots$ κλπ. εἶναι ὁ ἑξῆς:

διὰ $n=2$ ἔχομεν, ὡς ἐλέχθη, τὴν κατανομὴν $\lambda=0$ συχνότης 1
$\lambda=1$ » 1

Ἐὰν ἤδη γράψωμεν τρεῖς φορὰς τὰς συχνότητας τῆς περιπτώσεως $n=2$ ὡς κάτωθι καὶ προσθέσωμεν, ἔχομεν τὴν κατανομὴν συχνότητος τοῦ λ διὰ $n=3$ ($\lambda=0, 1, 2, 3$)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1, & 2, & 2, & 1 \end{array}$$

δηλαδὴ γράφομεν κάτωθι τῆς 1, 1 τὰ ἴδια ψηφία ἀλλὰ μίαν θέσιν δεξιώτερον, ὁμοίως τὴν τρίτην φορὰν γράφομεν 1, 1 μίαν εἰσέτι θέσιν δεξιώτερον καὶ εἶτα προσθέτομεν.

Ὁμοίως ἐὰν γράψωμεν τὴν κατανομὴν συχνότητος τοῦ λ διὰ $n=3$ (δηλαδὴ τὴν εὑρεθεῖσαν 1, 2, 2, 1) τέσσαρας φορὰς κατ' ἀνάλογον τρόπον

([1]) Μέθοδοι εὑρέσεως τῆς κατανομῆς τοῦ λ ἀνεπτύχθησαν ὑπὸ τοῦ M. C. Kendall καὶ ἄλλων. Ἡ ἀναπτυχθεῖσα ἐνταῦθα στοιχειώδης μέθοδος ἀποτελεῖ ἀτομικὴν ἐργασίαν τοῦ γράφοντος.

καὶ προσθέσωμεν, θὰ εὕρωμεν τὴν κατανομὴν τοῦ λ διὰ $n = 4$ ὡς κάτωθι:

$$(\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 2 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{array}$$

Ὁμοίως ἡ κατανομὴ τοῦ λ διὰ $n = 5$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 10) \qquad \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & & & \\ & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & \\ & & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & \\ & & & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ \hline 1, & 4, & 9, & 15, & 20, & 22, & 20, & 15, & 9, & 4, & 1 \end{array}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς (¹).

Ἡ κατανομὴ τοῦ λ προσεγγίζει τὴν κανονικὴν κατανομὴν πολὺ ταχέως, δηλαδὴ ὅταν τὸ n εἶναι μετρίως μεγάλον (π.χ. >10).

Ἀναφέρεται ἄνευ ἀποδείξεως ὅτι

$$\sigma^2_{\lambda} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$$

Ὅθεν ὅταν τὸ n εἶναι >10 δυνάμεθα, διὰ τὰ ἐπὶ πιθανοτήτων βασιζόμενα συμπεράσματά μας, νὰ χρησιμοποιήσωμεν πίνακας τῶν ἐμβαδῶν κανονικῆς κατανομῆς μὲ μέσον $\bar{\lambda} = \frac{n(n-1)}{4}$ καὶ $\sigma^2_{\lambda} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$

Δέον νὰ σημειώσωμεν ὅτι διὰ n ἀριθμοὺς τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν μεταθέσεων εἶναι $n!$, ὅθεν τὸ ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων τοῦ πίνακος I διὰ $n = 10$ εἶναι $10!$

Ἐὰν ἤδη ὑποτεθῇ ὅτι ὅλαι αἱ μεταθέσεις εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί, ἡ πιθανότης ἵνα εἰς ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἐκ $n_0 = 10$ ἀριθμῶν ἔχωμεν διάταξιν εἰς ἣν $\lambda \leqslant \lambda_0$ ἢ $\lambda \geqslant \frac{n_0(n_0-1)}{2} - \lambda_0$ δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ πίνακος I ἐὰν λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων ὅλων τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς

$$\lambda \leqslant \lambda_0 \text{ ἢ } \lambda \geqslant \frac{n_0(n_0-1)}{2} - \lambda_0$$

καὶ διαιρέσωμεν διὰ $n_0! = 10!$ (τὸ λ_0 ὑποτίθεται μικρότερον τοῦ $\bar{\lambda} = 22{,}5$).

Δυνάμεθα οὕτω νὰ σχηματίσωμεν τὸν πίνακα II ὅστις μᾶς δίδει τοιούτου εἴδους πιθανότητας ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Ἂς ἐπανέλθωμεν νῦν εἰς τὴν περίπτωσιν δύο σειρῶν τιμῶν x_i καὶ y_i ἡ ὁποία μᾶς δίδει ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἐξ ἑνὸς πληθυσμοῦ δύο μεταβλητῶν.

Θὰ ἔχωμεν n ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καὶ y.

(¹) Τοιοῦτοι πίνακες ὡς ὁ I καὶ II τοῦ τέλους τῆς παρούσης διὰ τιμὰς τοῦ n ἀπὸ 2 ἕως 10 ἔχουν ἤδη ὑπολογισθῆ. Ἴδε A. C. Rosander: Elementary principles of Statistics (1951).

Κατατάσσομεν τὰ xi κατὰ σειρὰν κατιόντος μεγέθους (κάτωθεν δὲ ἑκάστου xi τοποθετοῦμεν τὰ ἀντίστοιχα yi).

Ἀντικαθιστῶμεν εἶτα τὰ πραγματικὰ xi μεγέθη δι' ἀριθμῶν ἐκφραζόντων τὴν σειρὰν κατατάξεώς των κατὰ μέγεθος (διὰ τοῦ 1 τὸ μεγαλύτερον ὅλων κλπ.).

Θὰ ἔχωμεν οὕτω διὰ τὰ x τὴν διάταξιν

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots n \tag{28}$$

Ἐὰν ἤδη ἀντικαταστήσωμεν καὶ τὰ yi (ὡς εἶναι ταῦτα γεγραμμένα κάτωθι τῶν ἀντιστοίχων xi) διὰ τῶν ἀριθμῶν ποὺ ἐκφράζουν τὴν σειρὰν κατατάξεώς των κατὰ μέγεθος θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν θέσιν τῶν yi μίαν διάταξιν τῶν n ἀριθμῶν ἀντίστοιχον τῆς (28) ἥτις ἐν γένει θὰ εἶναι διάφορος τῆς (28).

Ἂν ἡ διάταξις τῶν y εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία μὲ τὴν 1, 2, 3 . . . n τῶν x τότε λέγομεν ὅτι τὰ x καὶ y παρουσιάζουν μίαν τελείαν θετικὴν συσχέτισιν. Ἂν ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὴν (28) διάταξις τῶν y εἶναι ἡ n, (n − 1). . .3, 2, 1 τότε ἔχομεν μίαν τελείαν ἀρνητικὴν συσχέτισιν.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν διὰ τὴν κατάταξιν τῶν y : $\lambda = o$, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν $\lambda = \frac{n(n-1)}{2}$.

Γενικῶς παραδεχόμεθα ὅτι δύο κατατάξεις τῶν y κάτωθι τῶν x ποὺ ἔχουν τὸ αὐτὸ λ θὰ παρέχωσι τὸν αὐτὸν βαθμὸν συσχετίσεως τῶν x καὶ y. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς συσχετίσεως τῶν x καὶ y ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστροφῶν χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον :

$$r' = 1 - \frac{4\lambda}{n(n-1)} \tag{29}$$

Ὁ τύπος (29) μᾶς παρέχει ἕνα συντελεστὴν συσχετίσεως r' βασιζόμενον εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀντιστροφῶν τῶν διατάξεων τῶν y, ὅστις εὑρίσκεται ἐν ἁρμονίᾳ πρὸς τοὺς συνήθεις συντελεστὰς συσχετίσεως, διότι ὅταν ἡ σειρὰ τῶν y εἶναι ἡ 1, 2, 3 . . . . n (ὅτε $\lambda = o$) ὁ τύπος (29) μᾶς δίδει $r' = 1$. Ὅταν δὲ ἡ σειρὰ τῶν y εἶναι n, n − 1, ... 3, 2, 1 τότε $\lambda = \frac{n(n-1)}{2}$ καὶ ὁ τύπος (29) δίδει $r' = -1$.

Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις $-1 < r' < 1$.

Κρίσις τῆς ὑποθέσεως H_0 περὶ ἀνεξαρτησίας τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y τοῦ πληθυσμοῦ. (Δοκιμασία δύο ἄκρων).

Ἔστω ἤδη ὅτι εἰς ἓν «τυχαῖον» δεῖγμα μεγέθους ($n = n_0$) εὕρομεν $\lambda = \lambda_0$, εἰς τὴν κατὰ τὸν περιγραφέντα τρόπον σχηματισθεῖσαν διάταξιν τῶν y. Ἐὰν H_0 = ὅτι: αἱ μεταβληταὶ x καὶ y εἶναι ἀνεξάρτητοι εἰς τὸν πληθυσμόν, αἱ διατάξεις τῶν y αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὴν (28) τῶν x εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί.

Ἡ ἐμφάνισις διατάξεως μὲ $\lambda = \lambda_0$ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πιθανότητα νὰ ὀφείλεται τοῦτο (ἢ αἱ σπανιώτεραι περιπτώσεις) εἰς τὴν τύχην (ἐὰν H_0 ἀληθής, ὅτε $E(\lambda)$ ἢ $\bar{\lambda} = \frac{n_0(n_0-1)}{4}$).

Ἐὰν ἐκ τοῦ πίνακος II εὕρωμεν ὅτι πιθ $\left(\lambda \leqslant \lambda_0 \text{ ἢ } \lambda \geqslant \frac{n_0(n_0-1)}{2} - \lambda_0\right)$

εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς 5 $\%$ διὰ τὸ δοθὲν n_0 ἀπορρίπτομεν τὴν H_0 εἰς τὸ 5 $\%$ ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Ἐὰν ὅμως πιθ $(\lambda \leqslant \lambda_0$ ἢ $\lambda \geqslant \frac{n_0(n_0-1)}{2} - \lambda_0) > 5\,\%$ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν H_0 (περὶ ἀνεξαρτησίας τῶν x καὶ y) εἰς τὸ θεωρηθὲν ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πιθ $(\lambda \leqslant \lambda_0$ καὶ $\lambda \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - \lambda_0)$ λαμβάνομεν ὡς λ_0 τὸν μικρότερον τῶν δύο ἀριθμῶν λ_0 καὶ $\frac{n(n-1)}{2} - \lambda_0$. Ἂν π.χ. ἔχω $n = 5$ καὶ εὕρω μίαν διάταξιν τῶν y μὲ $\lambda = 7$, ἐπειδὴ $\frac{5\times4}{2} - 7 = 3$ λαμβάνω τὴν πιθ. $(\lambda \leqslant 3$ καὶ $\lambda \geqslant 7)$.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι εἰς ἓν «τυχαῖον» δεῖγμα ἐκ 10 μαθητῶν ἑνὸς σχολείου ἡ σειρὰ ἐπιδόσεως τῶν 10 μαθητῶν συγκρινομένων μεταξύ των εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴν Ἱστορίαν ἔχει ὡς ἑξῆς :

Μαθηταί :	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ
Μαθηματικά :	3ος	1ος	6ος	10ος	7ος	2ος	8ος	5ος	9ος	4ος
Ἱστορία :	9ος	8ος	3ος	2ος	1ος	10ος	5ος	7ος	6ος	4ος

Δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ ἐπίδοσις τῶν μαθητῶν εἰς ὁλόκληρον τὸ σχολεῖον εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τοιαύτης εἰς τὴν Ἱστορίαν εἰς τὸ 5 $\%$ ἐπίπεδον σημαντικότητος ;

Κατατάσσω τοὺς μαθητὰς κατὰ σειρὰν ἐπιδόσεως εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ κάτωθεν αὐτῆς γράφω τὴν σειρὰν ἐπιδόσεώς των εἰς τὴν Ἱστορίαν.

Μαθηταί :	Β	Ζ	Α	Κ	Θ	Γ	Ε	Η	Ι	Δ
Μαθηματικά :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ἱστορία :	8	10	9	4	7	3	1	5	6	2

ἡ διάταξις 8, 10, 9, 4, 7, 3, 1, 5, 6, 2 ἔχει $\lambda = 34$ ἀντιστροφάς. Ἓν τοιοῦτον γεγονὸς ἢ καὶ σπανιώτερα (ἐὰν H_0 ἦτο ἀληθὲς μὲ ἐναλλακτέα $r'>0$ ἢ $r'<0$) συμβαίνουσιν ἕνεκα τυχαίας διακυμάνσεως τῆς δειγματοληψίας μὲ πιθανότητα $<\frac{5}{100}$. Πράγματι εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πίνακος ΙΙ ὅτι :

$$\text{πιθ. } (\lambda \geqslant 34 \text{ ἢ } \lambda \leqslant 11) = 2 \times 0{,}023 = 4{,}6\,\%$$

Ἄρα τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι στατιστικῶς σημαντικὸν εἰς τὸ 5 $\%$ ἐπίπεδον σημαντικότητος καὶ ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ ἐπίδοσις τῶν μαθητῶν εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐπιδόσεώς των εἰς τὴν Ἱστορίαν εἰς τὸ σχολεῖον τοῦτο εἰς τὸ 5 $\%$ ἐπίπεδον σημαντικότητος.

Αἱ ἐλεύθεραι κατανομῆς μέθοδοι ἰσχύουν ἄνευ οὐδεμιᾶς ὑποθέσεως ἐπὶ τῆς μορφῆς τῆς κατανομῆς συχνότητος τῶν παραμέτρων. Ἡ θεωρία των ἀπαιτεῖ τὰς βασικὰς γνώσεις τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων καὶ τῆς συνδυαστικῆς, ἀλλὰ ἡ ἐφαρμογή των, ὅταν ἰδίως ἔχωμεν εἰς τὴν διάθεσίν μας τοὺς σχετικοὺς πίνακας τῶν διαφόρων μεθόδων, εἶναι λίαν ἁπλῆ καὶ οὐδένα ἀπαιτεῖ ὑπολογισμὸν ἀλλὰ ἁπλᾶς ἀπαριθμήσεις. Ἐπιφυλασσόμεθα νὰ περιγράψωμεν μερικὰς εἰσέτι στατιστικὰς μεθόδους «ἐλευθέρας κατανομῆς» εἰς ἄλλην εὐκαιρίαν, ἰδίᾳ τὴν δοκιμασίαν τῶν σημείων (Sign test), ἥτις ἔχει πλείστας πρακτικὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὴν Γεωργίαν καὶ λοιπὰς ἐπιστήμας.

ΠΙΝΑΞ Ι

Κατανομῆς συχνότητος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστροφῶν διὰ $n=10$.

λ	συχνότης	λ	συχνότης	λ	συχνότης	λ	συχνότης
0	1	12	47043	24	243694	36	13640
1	9	13	64889	25	230131	37	8095
2	44	14	86054	26	211089	38	4489
3	155	15	110010	27	187959	39	2298
4	440	16	135853	28	162337	40	1068
5	1068	17	162337	29	135853	41	440
6	2298	18	187959	30	110010	42	155
7	4489	19	211089	31	86054	43	44
8	8095	20	230131	32	64889	44	9
9	13640	21	243694	33	47043	45	1
10	21670	22	250749	34	32683	Σύνολον	10!
11	32683	23	250749	35	21670		(3628800)

ΠΙΝΑΞ ΙΙ

Πιθανότητος ἐμφανίσεως λ ἀντιστροφῶν ἢ ὀλιγωτέρων (διὰ τιμὰς τοῦ λ μικροτέρας τοῦ $\bar{\lambda}$) καὶ τῆς πιθανότητος ἐμφανίσεως λ ἀντιστροφῶν ἢ περισσοτέρων (διὰ τιμὰς τοῦ λ μεγαλυτέρας τοῦ $\bar{\lambda}$) ὅταν $n=10$.

λ	πιθανότης διὰ n=10	λ	πιθανότης διὰ n=10	λ	πιθανότης διὰ n=10	λ	πιθανότης διὰ n=10
0	0,0000003	12	0,036	24	0,431	36	0,008
1	0,000003	13	0,054	25	0,364	37	0,005
2	0,000015	14	0,078	26	0,300	38	0,002
3	0,00006	15	0,108	27	0,242	39	0,001
4	0,0002	16	0,146	28	0,190	40	0,0005
5	0,0005	17	0,190	29	0,146	41	0,0002
6	0,001	18	0,242	30	0,108	42	0,00006
7	0,002	19	0,300	31	0,078	43	0,000015
8	0,005	20	0,364	32	0,054	44	0,000003
9	0,008	21	0,431	33	0,036	45	0,0000003
10	0,014	22	0,500	34	0,023		
11	0,023	23	0,500	35	0,014		

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $\bar{\lambda} = \frac{n(n-1)}{4} = 22{,}5$, ὁ πίναξ διὰ τιμὰς τοῦ $\lambda \leqslant 22$ δεικνύει τὴν πιθανότητα νὰ ἔχωμεν λ ἢ ὀλιγωτέρας ἀντιστροφάς, ἐνῷ διὰ τιμὰς τοῦ $\lambda \geqslant 23$ δεικνύει τὴν πιθανότητα νὰ ἔχωμεν λ ἢ περισσοτέρας ἀντιστροφάς. Προκειμένου περὶ ἀμφιπλεύρου κριτηρίου πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων δύο ἰσαπεχουσῶν τιμῶν τοῦ λ ἀπὸ τὰς ἀκραίας 0 καὶ 45.

ΚΡΙΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΕΣΦΑΛΜΕΝΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΝΟΣΗΛΕΙΑΣ ΕΙΣ ΤΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΝΟΣΗΛΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Τοῦ κ. ΒΑΣ. Σ. ΚΑΛΥΒΑ

Προϊσταμένου Ὑπηρεσίας Μελετῶν Θεραπευτηρίου «Εὐαγγελισμὸς»

§ 1. **Πρώτη παραλλαγὴ παλαιᾶς μεθόδου καὶ μειονεκτήματα αὐτῆς.**

Εἰς τὰ Ἀσφαλιστικὰ καὶ Νοσηλευτικὰ Ἱδρύματα ἐν Ἑλλάδι ἐφαρμόζεται ἀπὸ ἐτῶν ὁ ἑξῆς τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας τῶν ἀσθενῶν αὐτῶν ὑπὸ δύο παραλλαγάς:

Πρώτη παραλλαγή

$$\left(\frac{\text{Ἡμέραι νοσηλείας μηνὸς (δεδομένα Λογ/ρίου)}}{\text{Ἀριθμὸς νοσηλευθέντων κατὰ τὸν μῆνα (εἰσελθόντες κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ μηνὸς + παραμένοντες προηγουμένων)}}\right)$$

Ὁ κατὰ τὸν ἀμέσως ἀνωτέρω τρόπον ἐξαγόμενος δείκτης ἔχει δύο βασικὰ μειονεκτήματα:

α) προσκρούει εἰς τὰ καθοριστικὰ στοιχεῖα τῆς ἐννοίας τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας τῶν ἀσθενῶν, ἓν τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἔξοδος τῶν ὡς ἄνω ἀσθενῶν ἐκ τοῦ νοσοκομείου (ἄλλως δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος περὶ μέσου χρόνου νοσηλείας).

β) μαθηματικῶς ὁ δείκτης οὗτος ἀποτελεῖ ἐπισφαλῆ βάσιν συγκρίσεως διότι εἶναι δυνατὸν μὲ τὰς αὐτὰς ἡμέρας νοσηλείας καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀσθενῶν νὰ ἐξάγεται διαφορετικὸς δείκτης ὡς κάτωθι:

Εἰσελθόντες	Χρόνος νοσηλείας	Ἡμέραι νοσηλείας		
	Νοσοκομεῖον Α'.	Ἰαν.	Φεβρ.	Σύνολον
1	1. 1 – 20. 1	19	–	19
1	21. 1 – 6. 2	11	5	16
2		30	5	35
	Νοσοκομεῖον Β'.			
1	21. 1 – 9. 2	11	8	19
1	31. 1 – 16. 2	1	15	16
2		12	23	35

Κατὰ τὴν ἐφαρμοζομένην ὡς ἄνω μέχρι τοῦδε μέθοδον θὰ ἔχωμεν τοὺς κάτωθι δείκτας μέσου χρόνου νοσηλείας εἰς τὸ ἀνωτέρω ληφθὲν παράδειγμα:

Δεῖκται μέσου χρόνου

Μῆνες	Νοσοκομεῖα Α'.	Νοσοκομεῖα Β'.
Ἰανουάριος	30 : 2 = 15	12 : 2 = 6
Φεβρουάριος	5 : 1 = 5	23 : 2 = 11,5

Βάσει τῶν ἀνωτέρω συνάγονται τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

1. Ὅτι κατὰ τὸν Ἰανουάριον τὸ Νοσοκομεῖον Α' ἔχει μειονεκτικὴν θέσιν ἔναντι τοῦ Ἀσφαλιστικοῦ Ἱδρύματος τῶν ἀσθενῶν, ἐπὶ τῷ λόγῳ ὅτι κατὰ μέσον ὅρον ἐπιβαρύνει τὸ ἀσφαλιστικὸν ταμεῖον κατὰ $60 \times 9 = 540$ δρχ. (ἐὰν 60 δρχ. = νοσήλεια 1 ἡμέρας) περισσότερον τοῦ Β'. Νοσοκομείου δι' ἕκαστον ἀσθενῆ.

Ἄρα συμπέρασμα: Συμφέρει εἰς τὸ Ἀσφαλιστικὸν Ἵδρυμα νὰ νοσηλεύῃ τοὺς ἀσθενεῖς του εἰς τὸ Β' Νοσοκομεῖον.

2. Ἐντελῶς ἀντίθετα συμπεράσματα ἐξάγονται κατὰ τὸν ἑπόμενον μῆνα, ἤτοι εὐμενὴς δείκτης διὰ τὸ Νοσοκομεῖον Α'. καὶ δυσμενὴς διὰ τὸ Β'.

Ἐν τούτοις τὰ συμπεράσματα αὐτὰ εἶναι τελείως ἀνακριβῆ. Πράγματι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἀμφότερα τὰ Νοσοκομεῖα παρουσιάζουν τὸν αὐτὸν χρόνον νοσηλείας, ἤτοι 35 : 2 = 17,5 ἡμέρας καὶ συνεπῶς οὐδεμία ὑφίσταται διαφορὰ ὡς πρὸς τὸν μέσον χρόνον νοσηλείας μεταξὺ τῶν δύο ὡς ἄνω Ἱδρυμάτων.

Ὁ ὀρθὸς καθορισμὸς τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας κατὰ μῆνας δέον νὰ ἐνεργῆται ὡς κάτωθι:

Ἐὰν α_1 εἶναι οἱ ἀσθενεῖς οἱ εἰσελθόντες καθ' ὡρισμένον μῆνα (π.χ. τὸν Ἰανουάριον) ἐπραγματοποίησαν δὲ μέχρι τῆς ἐξόδου αὐτῶν ἡμέρας νοσηλείας ὡς κάτωθι (κατὰ σειρὰν) $\eta_1^1\ \eta_2^1\ \eta_3^1 \ldots\ldots \eta_\nu^1$ θὰ ἔχωμεν:

$$M\frac{1}{X|} = \frac{\eta_1^1 + \eta_2^1 + \eta_3^1 + \ldots\ldots + \eta_\nu^1}{\alpha_1}$$

Αἱ διαπιστωθεῖσαι διαφοραὶ μεταξὺ τοῦ ἐφαρμοζομένου μέχρι τοῦδε τρόπου καὶ τοῦ ὑποδειχθέντος ὡς ἄνω ὀρθοῦ ἔχουν ὡς κάτωθι:

Παλαιὰ Μέθοδος

Μὴν Μάϊος 1955

I. Παθολογικοὶ ἀσθενεῖς:

α) Ἡμέραι νοσηλείας τοῦ μηνὸς (δεδομένα Λογ/ρίου)	11.422
β) Εἰσελθόντες κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ μηνὸς	344
γ) Παραμένοντες προηγουμένων μηνῶν	354

ἤτοι:

$$\left[\frac{\text{Ἡμέραι νοσηλείας μηνὸς}}{\text{Σύνολον ἀσθενῶν (εἰσελθ. + παραμέν.)}}\right]$$

Συνεπῶς ὁ μέσος χρόνος νοσηλείας τῶν παθολογικῶν ἀσθενῶν θὰ ἔχῃ ὡς ἑξῆς:

$$\text{Παθολογικοὶ } 11.422 : 698 = 16{,}3 \ \text{M}\frac{3}{\text{X}\,\text{I}}$$

2. Ὁμοίως καὶ διὰ τοὺς χειρουργικοὺς ἀσθενεῖς θὰ ἔχωμεν:

α) Ἡμέραι νοσηλείας μηνὸς	13.092
β) Εἰσελθόντες κατὰ τὸν μῆνα	442
γ) Παραμένοντες προηγ. μηνῶν	406

$$\text{Χειρουργικοὶ } 13.092 : 848 = 15{,}4 \ \text{M}\frac{3}{\text{X}\,\text{I}}$$

Ὑποδεικνυομένη Μέθοδος (*)

Ἡμέραι νοσηλείας ἀσθενῶν εἰσελθόντων κατὰ τὸν Μάϊον, ἀπὸ τῆς εἰσόδου μέχρι τῆς ἐξόδου αὐτῶν, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀσθενῶν τῶν εἰσελθόντων κατὰ τὸν μῆνα.

Παθολογικοὶ	$12.122 : 344 = 35{,}8 \ \text{M}\frac{3}{\text{X}\,\text{I}}$
Χειρουργικοὶ	$13.762 : 442 = 31.1 \ \text{M}\frac{3}{\text{X}\,\text{I}}$

ἤτοι τὸ σφάλμα (ἡ ἀπόκλισις ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ καθορισμοῦ) διὰ τοὺς παθολογικοὺς ἀσθενεῖς ἀνέρχεται εἰς

$$\frac{(35{,}8 - 16{,}3) \times 100}{16{,}3} = 119{,}62\%$$

ἐπὶ τοῦ ἐσφαλμένου ποσοῦ, ἤτοι $16{,}3 \times 119{,}62\% = 35{,}8 - 16{,}3 = 19{,}5$ (**), κατὰ τὸ αὐτὸ δὲ περίπου ποσοστὸν καὶ διὰ τοὺς χειρουργικούς.

(*) Ὁ ἐσφαλμένος ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας τῶν ἀσθενῶν δημιουργεῖ πλήρη σύγχυσιν εἰς τὰ Ἀσφαλιστικὰ Ἱδρύματα ὄχι μόνον ὡς πρὸς τὰ ἀναφερθέντα ἤδη ζητήματα προτιμήσεως νοσοκομείων διὰ τὴν νοσηλείαν τῶν ἀσθενῶν, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως τῶν δαπανῶν αὐτῶν ἐκ τῆς ἀντιστοίχου μεταβολῆς τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας. Ὡσαύτως ὁ μέσος χρόνος νοσηλείας, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸ εἶδος τῆς ἀσθενείας καὶ ἄλλα τινὰ στοιχεῖα, ἀποτελεῖ βασικὸν παράγοντα εἰς τὸν καθορισμὸν τῶν ἐφ' ἅπαξ καταβολῶν εἰς τὰ Νοσοκομεῖα δι' ἐργαστηριακὰς ἐξετάσεις ὡς καὶ εἰς τὴν μελέτην πλείστων ἄλλων θεμάτων.

Τὰ ζητήματα ταῦτα, μετ' ἄλλων ὀργανωτικῆς φύσεως θεμάτων, θὰ ἀποτελέσουν σειρὰν εἰδικῶν μελετῶν πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως αὗται ὑποκινήσουν τὸ γενικώτερον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ἐπὶ ἐπιστημονικωτέρων βάσεων μελέτην καὶ ὀργάνωσιν τῶν Ὑγειονομικῶν Ἱδρυμάτων τῆς χώρας καὶ τὸν συντονισμὸν τῶν ἀσφαλιστικῶν ἐνεργειῶν ἐν σχέσει πρὸς τὴν περίθαλψιν τῶν ἀσθενῶν.

(**) Ἡ $\frac{(35{,}8 - 16{,}3) \times 100}{35{,}8} = 54{,}46\%$ ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ποσοῦ, ἤτοι $35{,}8 \times 54{,}46\% = 35{,}8 - 16{,}3 = 19{,}5$.

Συνεπῶς $16{,}3 \times 119{,}62\% = 35{,}8 \times 54{,}46\% = 35{,}8 - 16{,}3 = 19{,}5$.

§ 2. **Δευτέρα παραλλαγὴ παλαιᾶς μεθόδου καὶ μειονεκτήματα αὐτῆς.**

Ἡ δευτέρα αὕτη παραλλαγὴ ἐφηρμόσθη τελευταίως παρ' Ἑλληνικῶν Ἀσφαλιστικῶν Ἱδρυμάτων, προέκυψε δὲ ἐκ τροποποιήσεως τῆς πρώτης συνεπείᾳ τῶν ὑποδειχθέντων ὡς ἄνω μειονεκτημάτων αὐτῆς.

$$\left[\frac{\text{Ἡμέραι νοσηλείας μηνὸς (δεδομένα Λογ/ρίου)}}{\text{Ἀριθμὸς εἰσελθόντων κατὰ τὸν μῆνα}}\right]$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος (ἡμέραι νοσηλείας τοῦ μηνὸς) παριστᾶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν νοσηλείας ἀφ' ἑνὸς τῶν ἀσθενῶν τῶν εἰσελθόντων εἰς τὸν μῆνα μέχρι τέλους αὐτοῦ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν νοσηλείας κατὰ τὸν τρέχοντα μῆνα τῶν παραμενόντων ἀσθενῶν ἐκ προηγουμένων μηνῶν.

Ἡμέραι νοσηλείας μηνὸς Μαΐου	Παθολογ.	11.422
» » » »	Χειρουρ.	13.092
Ἀριθμὸς εἰσελθόντων ἀσθενῶν	Παθολογ.	344
» » »	Χειρουρ.	442

θὰ ἔχωμεν :

Παθολογικοὶ	11.422 : 344 = 33,2	$M^3_{\chi|}$
Χειρουργικοὶ	13.092 : 442 = 29,6	$M^3_{\chi|}$

Ἡ τελευταία αὕτη παραλλαγὴ προσεγγίζει εἰς τὸν ὀρθὸν καθορισμὸν τοῦ συνολικοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας, δεδομένου ὅτι ἔχομεν :

	Ὀρθὴ μέθοδος	Δευτέρα παραλλαγὴ
$M^3_{\chi|}$ Παθολογικῶν	35,8	33,2
$M^3_{\chi|}$ Χειρουργικῶν	31,1	29,6

Ἐν τούτοις ἡ προσέγγισις αὕτη δὲν ἔχει καθολικὸν χαρακτῆρα διότι εἶναι ἀποτέλεσμα ἀφανῶν συμψηφισμῶν τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐπὶ μέρους κατηγοριῶν τῶν ἀσθενῶν. Τοῦτο θὰ καταδειχθῇ ἐκ τῶν ἑπομένων ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων : (*)

(*) Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἡ ἀναφερομένη κίνησις ἀσθενῶν χάριν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων εἶναι ὑποθετικὴ καὶ συνεπῶς διάφορος πρὸς πᾶσαν πραγματικὴν κίνησιν ἀσθενῶν εἰς οἱονδήποτε νοσηλευτικὸν ἢ ἀσφαλιστικὸν Ἵδρυμα.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

Μὴν Αὔγουστος 1956

Κατηγορίαι ἀσθενῶν	Παραμείναντες ἐκ προηγουμένων μηνῶν		Εἰσελθόντες κατὰ τὸν τρέχοντα μῆνα		Μέσος χρόνος νοσηλείας
	Ἀριθ. ἀσθ.	Ἡμ. νοσηλ. παρὰ τούτων ἐντὸς τρέχοντ. μηνὸς	Ἀριθ. ἀσθ.	Ἡμ. νοσηλ. παρὰ τούτων ἐντὸς τρέχοντ. μηνὸς	
Χειρουργικὰ	298	5.982	232	3.102	(5.982 + 3.102) : 232 = 39,1
Παθολογικὰ	264	3.882	322	3.728	(3.882 + 3.728) : 322 = 23,6
Καρδιολογικὰ	50	1.488	24	254	(1.488 + 254) : 24 = 72,5
Νευρολογικὰ	28	740	34	380	(740 + 380) : 34 = 32,9
Οὐρολογικὰ	90	1.468	106	1.308	(1.468 + 1.308) : 106 = 26,1
Γυναικολογικὰ	40	802	16	284	(802 + 284) : 16 = 67,8
Ὀφθαλμολογικὰ	32	324	74	824	(324 + 824) : 74 = 15,5
Ὠνορινολαρυγγολογ.	28	386	64	600	(386 + 600) : 64 = 15,4
Σύνολον	830	15.072	872	10.480	(15.072 + 10.480) : 872 = 29,3

Μὴν Σεπτέμβριος 1956

Χειρουργικὰ	302	6.508	192	2.452	(6.508 + 2.452) : 192 = 46,6
Παθολογικὰ	252	4.262	340	4.760	(4.262 + 4.760) : 340 = 26,5
Καρδιολογικὰ	54	946	68	860	(946 + 860) : 68 = 26,5
Νευρολογικὰ	44	1.052	28	386	(1.052 + 386) : 28 = 51,3
Οὐρολογικὰ	102	1.726	128	1.522	(1.726 + 1.522) : 128 = 25,3
Γυναικολογικὰ	22	554	24	368	(554 + 368) : 24 = 38,4
Ὀφθαλμολογικὰ	30	328	40	450	(328 + 450) : 40 = 19,4
Ὠτορινολαρυγγολογ.	38	790	44	520	(790 + 520) : 44 = 29,7
Σύνολον	844	16.166	864	11.318	(16.166 + 11.318) : 864 = 31,8

§ 3. **Ὑποδεικνυομένη μέθοδος καὶ πλεονεκτήματα αὐτῆς.**

Ὁ ὀρθὸς μέσος χρόνος νοσηλείας μὲ τὴν μαθηματικῶς ἀκριβῆ ἔννοιαν καθορίζεται κατὰ τὴν ὑποδεικνυομένην ἐν § 1 μέθοδον, ἤτοι ὡς κάτωθι :

$$M_{\frac{1}{x}} = \frac{\eta_1^1 + \eta_2^1 + \ldots + \eta_\nu^1}{\alpha_1} \qquad (*)$$

Κατὰ ταῦτα ὁ μέσος χρόνος νοσηλείας ἑ. π. κατ' Αὔγουστον καὶ Σεπτέμβριον δέον νὰ καθορισθῇ ὡς ἑξῆς :

Μὴν Αὔγουστος 1956

Κατηγορίαι ἀσθενῶν	Ἡμ. νοσηλ. ἀσθενῶν ἀπὸ εἰσόδου μέχρι ἐξόδου αὐτῶν		Ἀρ. εἰσελθόντων ἀσθενῶν κατὰ Αὔγουστον		Μέσος χρόνος νοσηλείας (μαθηματικῶς ἀκριβής).
Χειρουργικὰ	3.953	:	116	=	34,1
Παθολογικὰ	4.534	:	161	=	28,1
Καρδιολογικὰ	297	:	12	=	24,7
Νευρολογικὰ	607	:	17	=	35,7
Οὐρολογικὰ	1.505	:	53	=	28,3
Γυναικολογικὰ	216	:	8	=	27,0
Ὀφθαλμολογικὰ	528	:	37	=	14,2
Ὠτορινολαρυγγ.	678	:	32	=	21,2
Σύνολον	12.318	:	436	=	28,2

Μὴν Σεπτέμβριος 1956

Κατηγορίαι ἀσθενῶν	Ἡμερ. νοσηλ. ἀσθεν. ἀπὸ εἰσόδου μέχρι τῆς ἐξόδου αὐτῶν		Ἀριθ. εἰσελθόντων ἀσθενῶν κατὰ Σεπτέμβριον		Μέσος χρόνος νοσηλείας (μαθηματικῶς ἀκριβής)
Χειρουργικὰ	2.412	:	96	=	25,1
Παθολογικὰ	5.316	:	170	=	31,3
Καρδιολογικὰ	916	:	34	=	26,9
Νευρολογικὰ	586	:	14	=	41,8
Οὐρολογικὰ	1.657	:	64	=	25,8
Γυναικολογικὰ	282	:	12	=	23,5
Ὀφθαλμολογικὰ	443	:	20	=	22,1
Ὠτορινολαρυγγ.	375	:	22	=	17,0
Σύνολον	11.987	:	432	=	27,7

Διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ ὀρθοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας λαμβάνονται αἱ ἡμέραι τῶν εἰσελθόντων ἀσθενῶν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ μηνὸς ὑπολογιζόμεναι ἀπὸ τῆς εἰσόδου μέχρι τῆς ἐξόδου αὐτῶν. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἀσθενῶν εἶναι μόνον τῶν εἰσελθόντων κατὰ τὸν μῆνα.

Ἤδη μελετᾶται λεπτομερῶς καὶ καθορίζεται ὁ βαθμὸς ἀποκλίσεως ἐξαγομένων δεικτῶν κατὰ τὴν δευτέραν παραλλαγὴν τῆς παλαιᾶς μεθόδου ἀπὸ τοῦ ὑποδειχθέντος ὡς ἄνω μαθηματικῶς ἀκριβοῦς καθορισμοῦ τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας.

(*) Βλ. ὑποσημείωσιν εἰς σελ. 65.

Διαφοραὶ μεταξὺ ἀκριβοῦς μέσου χρόνου νοσηλείας
καὶ τοῦ καθορισθέντος βάσει τῆς δευτέρας παραλλαγῆς τῆς παλαιᾶς μεθόδου

Μὴν Αὔγουστος 1956

Κατηγορίαι ἀσθενῶν	Δεῖκται βάσει τῆς δευτέρας παραλλαγῆς τῆς παλαιᾶς μεθόδου	Δεῖκται βάσει ἀκριβοῦς μαθηματικοῦ ὑπολογισμοῦ (ὑποδεικνυομένη μέθοδος)	(*) Ἀπόλυτοι ἀριθμοί +	(*) Ἀπόλυτοι ἀριθμοί −	(**) Σχετικοὶ ἀριθμοὶ (ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) +	(**) Σχετικοὶ ἀριθμοὶ (ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) −
Χειρουργικὰ	39,1	34,1	39,1 − 34,1 = 5,0		14,6 °/₀	
Παθολογικὰ	23,6	28,1		28,1 − 23,6 = 4,5		16,0 °/₀
Καρδιολογικὰ	72,5	24,7	72,5 − 24,7 = 47,8		193,5 °/₀	
Νευρολογικὰ	32,9	35,7		35,7 − 32,9 = 2,8		7,8 °/₀
Οὐρολογικὰ	26,1	28,3		28,3 − 26,1 = 2,2		7,7 °/₀
Γυναικολογικὰ	67,8	27,0	67,8 − 27,0 = 40,8		151,1 °/₀	
Ὀφθαλμολογικὰ	15,5	14,2	15,5 − 14,2 = 1,3		9,9 °/₀	
Ὠτορινολαρυγγολ.	15,4	21,2		21,2 − 15,4 = 5,8		27,3 °/₀
Σύνολον	29,3	28,2	29,3 − 28,2 = 1,1		3,9 °/₀	

(*) Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐκφράζουν τὴν θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν ἀπόκλισιν τῶν καθορισθέντων δεικτῶν βάσει τῆς δευτέρας παραλλαγῆς τῆς παλαιᾶς μεθόδου ἀπὸ τῶν δεικτῶν τῶν καθορισθέντων βάσει ἀκριβοῦς μαθηματικοῦ ὑπολογισμοῦ· ὠνομάσθησαν δὲ ἀπόλυτοι κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τοὺς ἐκφράζοντας τὴν ἑκατοστιαίαν ἀναλογίαν καὶ ὄχι κατὰ τὴν εἰδικὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν.

(**) Αἱ ἀποκλίσεις ὑπολογίζονται εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῶν δεικτῶν βάσει ἀκριβοῦς μαθηματικῶς ὑπολογισμοῦ.

Διαφοραὶ μεταξὺ ἀκριβοῦς μέσου χρόνου νοσηλείας
καὶ τοῦ καθορισθέντος βάσει τῆς δευτέρας παραλλαγῆς τῆς παλαιᾶς μεθόδου

Μὴν Σεπτέμβριος 1956

Κατηγορίαι ἀσθενῶν	Δεῖκται βάσει τῆς δευτέρας παραλλαγῆς τῆς παλαιᾶς μεθόδου	Δεῖκται βάσει ἀκριβοῦς μαθηματικοῦ ὑπολογισμοῦ (ὑποδεικνυομένη μέθοδος)	Ἀπόλυτοι ἀριθμοί (*) +	Ἀπόλυτοι ἀριθμοί (*) −	Σχετικοὶ ἀριθμοὶ (ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) +	Σχετικοὶ ἀριθμοὶ (ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) −
Χειρουργικὰ	46,6	25,1	46,6 − 25,1 = 21,5		85,6%	
Παθολογικὰ	26,5	31,3		31,3 − 26,5 = 4,8		15,3%
Καρδιολογικὰ	26,5	26,9		26,9 − 26,5 = 0,4		1,4%
Νευρολογικὰ	51,3	41,8	51,3 − 41,8 = 9,5		22,7 %	
Οὐρολογικὰ	25,3	25,8		25,8 − 25,3 = 0,5		1,9 %
Γυναικολογικὰ	38,4	23,5	38,4 − 23,5 = 14,9		63,4 %	
Ὀφθαλμολογικὰ	19,4	22,1		22,1 − 19,4 = 2,7		12,2%
Ὠτορινολαρυγγολ.	29,7	17,0	29,7 − 17,0 = 12,7		74,7%	
Σύνολον	31,8	27,7	31,8 − 27,7 = 4,1		14,8%	

(*) Βλ. ὑποσημείωσιν προηγουμένου πίνακος.

Τὰ σοβαρὰ μειονεκτήματα τῆς πρώτης παραλλαγῆς τῆς ἐφαρμοζομένης παλαιᾶς μεθόδου καθορισμοῦ τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας καὶ τὰ ἐσφαλμένα συμπεράσματα εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη ὁδηγεῖ ἔχουν ἐπαρκῶς ἐκτεθῆ εἰς τὰ προηγούμενα (*).

Ἤδη εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον διαπιστοῦται ὅτι ἡ σημειωθεῖσα μεγίστη ἀπόκλισις ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ δείκτου, κατὰ τὸν μῆνα Αὔγουστον, ἀνέρχεται εἰς 193,3%, κατὰ δὲ τὸν Σεπτέμβριον εἰς 85,6%.

Βάσει τῶν ἐσφαλμένων ἀνωτέρω δεικτῶν τὸ Ἀσφαλιστικὸν Ἵδρυμα καταλήγει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι δεδομένον νοσοκομεῖον νοσηλεύει τοὺς ἀσθενεῖς αὐτοῦ κατὰ μέσον ὅρον ἐπὶ μακρὸν χρονικὸν διάστημα ἐν σχέσει πρὸς ἄλλα νοσηλευτικὰ Ἱδρύματα. Ἐξ αὐτοῦ δὲ ἀναγκάζεται νὰ προτιμᾷ τὴν ἀποστολὴν τῶν ἀσθενῶν του εἰς ἄλλα νοσοκομεῖα, καίτοι δυνατὸν ἡ παρεχομένη νοσηλεία εἰς τὸ ὡς ἄνω νοσοκομεῖον νὰ εἶναι ἀνωτέρου ἐπιπέδου.

Ἡ στατιστικὴ διαγραμματικὴ ἀπεικόνισις τοῦ ἤδη ὑποδειχθέντος ὀρθοῦ καθορισμοῦ τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας βάσει

1. τοῦ τύπου $$M_{\overline{X}|}^{1\to\mu} = \frac{\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2 + \ldots + \bar{\eta}_\mu}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu} \quad (\alpha') \quad (**)$$

ἐφ' ὅσον ὁ μέσος χρόνος ἀναφέρεται εἰς τὸ χρονικὸν διάστημα 1→μ (δείκτης ἀνακεφαλαιωτικὸς) καὶ

2. τοῦ τύπου $$M_{\overline{X}|}^{\mu} = \frac{\bar{\eta}_\mu}{\alpha_\mu} \quad (\beta')$$

ἐφ' ὅσον ὁ μέσος χρόνος ἀναφέρεται εἰς τὸν μῆνα μ (δείκτης μηνιαῖος), πραγματοποιεῖται κατὰ πρωτότυπον καὶ ἐπιτυχῆ τρόπον ὡς ἑξῆς:

Σημείωσις ἀπὸ σελ. 62.

(*) Προκειμένου περὶ τῶν εἰσελθόντων ἀσθενῶν κατὰ Ἰανουάριον· ἀναλόγως δὲ προκειμένου καὶ περὶ τῶν ἀσθενῶν τῶν ἄλλων μηνῶν. Οὕτω ὅσον ἀφορᾷ τοὺς ἀσθενεῖς τοῦ μηνὸς Ἰουνίου ἔχομεν:

$$M_{\overline{X}|}^{6} \quad \frac{\eta_1^6 + \eta_2^6 + \ldots + \eta_\nu^6}{\alpha_6}$$

(*) Βλ. § 1.

(**) Ἐφ' ὅσον $\bar{\eta}_1 = \eta_1^1 + \eta_2^1 + \ldots + \eta_\nu^1$

$\bar{\eta}_2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_\mu^2$ κ.ο.κ.

ΠΑΘΟΓΙΚΟΙ ΑΣΘΕΝΕΙΣ

1956

I ΗΜΕΡΑΙ ΝΟΣΗΛΕΙΑΣ

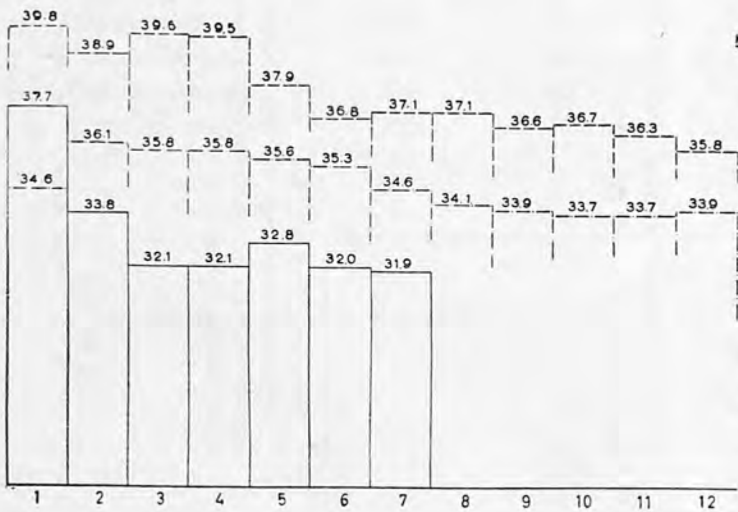
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17.684											
17.684	29.814										
17.684	12.130	41.712									
17.684	12.130	11.898	54.858								
17.684	12.130	11.898	13.146	67.772							
17.684	12.130	11.898	13.146	12.914	78.986						
17.684	12.130	11.898	13.146	12.914	11.214	93.346					
17.684	12.130	11.898	13.146	12.914	11.214	14.360					

II ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΕΛΘΟΝΤΩΝ ΑΣΘΕΝΩΝ

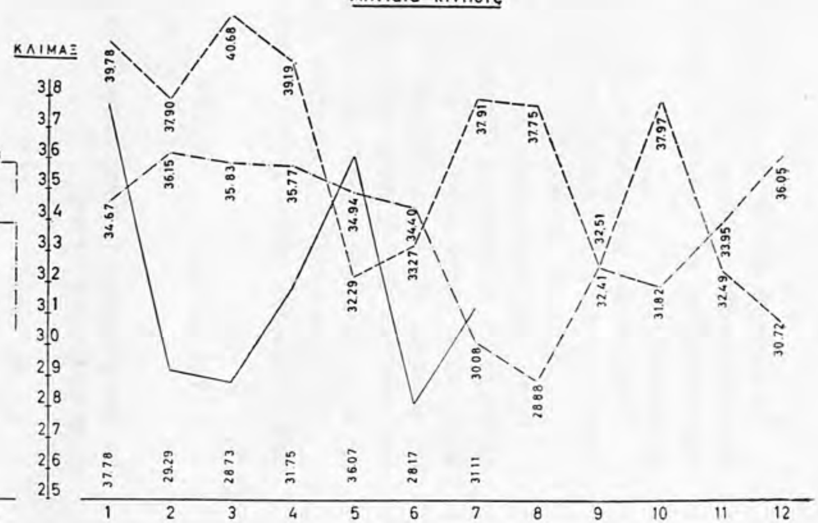
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
468											
468	882										
468	414	1.296									
468	414	414	1710								
468	414	414	414	2068							
468	414	414	414	358	2466						
468	414	414	414	358	398	2928					
468	414	414	414	358	398	462					

ΥΜΟΜΝΗΜΑ
Μεσος χρόνος 1956 ——
" " 1955 — —
" " 1954 — — —

Άνακεφαλαιωτική κίνησις



Μηνιαία κίνησις



ΧΕΙΡΟΥΡΓΙΚΟΙ ΑΣΘΕΝΕΙΣ

1956

Ι ΗΜΕΡΑΙ ΝΟΣΗΛΕΙΑΣ

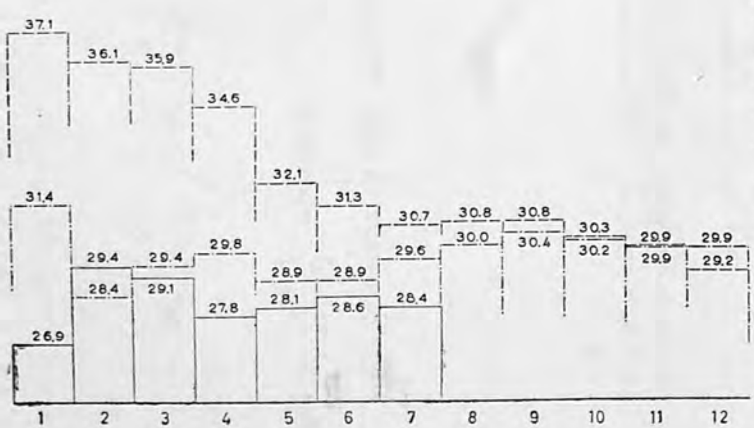
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10.718											
10.718	22.866										
10.718	12.148	34.472									
10.718	12.148	11.606	46.724								
10.718	12.148	11.606	12.252	60.326							
10.718	12.148	11.606	12.252	13.602	74.906						
10.718	12.148	11.606	12.252	13.602	14.580	85.596					
10.718	12.148	11.606	12.252	13.602	14.580	10.690					

ΙΙ ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΣΕΛΘΟΝΤΩΝ ΑΣΘΕΝΩΝ

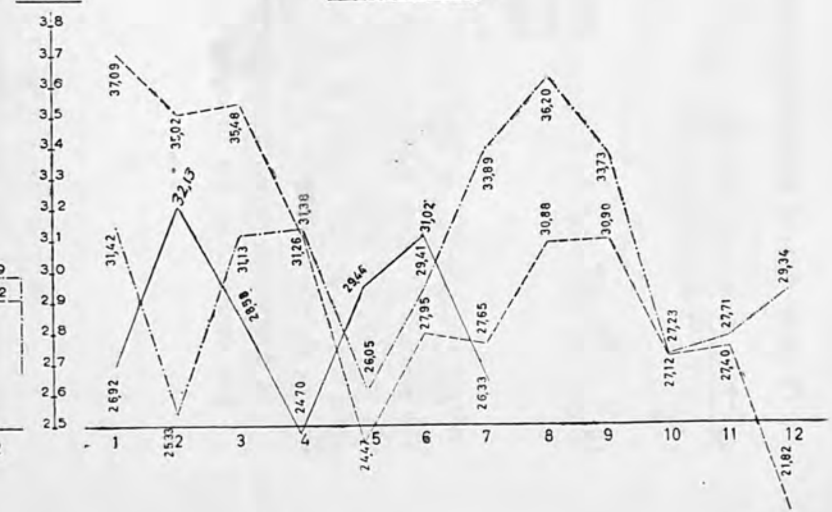
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
398											
398	776										
398	378	1.182									
398	378	406	1.678								
398	378	406	496	2.140							
398	378	406	496	462	2.610						
398	378	406	496	462	470	3.016					
398	378	406	496	462	470	406					

ΥΜΟΜΝΗΜΑ
Μέσος χρόνος 1956
" " 1955
" " 1954

Ἀνακεφαλαιωτική κινησις



Μηνιαία κίνησις



Οἱ μέσοι ὅροι οἱ καταρτιζόμενοι εἰς τὸν πίνακα Α' εἶναι τῆς μορφῆς:

$$M\frac{1\rightarrow\mu}{X\,|}=\frac{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu} \quad (\alpha')$$

εἰς δὲ τὸν πίνακα Β' τῆς μορφῆς:

$$M\frac{\mu}{X\,|}=\frac{\bar{\eta}_\mu}{\alpha_\mu} \quad (\beta')$$

ἔνθα διὰ τοῦ $\bar{\eta}$ δηλοῦται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν νοσηλείας καὶ διὰ τοῦ α ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀσθενῶν, τοῦ μ δυναμένου νὰ ἰσοῦται πρὸς 1, 2, 3, 4, ... κ.ο.κ.

Λόγῳ τῆς διαφορᾶς τῶν τύπων ἡ πορεία τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας εἰς τὸν πίνακα Α'. εἶναι δυνατὸν μέχρι σημείου τινὸς νὰ διαγράφεται ἀντιθέτως τῆς πορείας τοῦ μέσου χρόνου νοσηλείας εἰς τὸν πίνακα Β', π. χ. τὸν αὐτὸν μῆνα πτῶσις εἰς τὸν πίνακα Β' μὲ ἄνοδον εἰς τὸν πίνακα Α', ἢ καὶ ἀντιθέτως πτῶσις εἰς τὸν πίνακα Α' μὲ ἄνοδον εἰς τὸν πίνακα Β'.

Αἱ ἀποκλίσεις αὗται ἐπαληθεύονται ὡς κάτωθι:

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τυχοῦσα τιμὴ τοῦ $\mu > 2$ θὰ ἔχωμεν:

$$M\frac{1\rightarrow(\mu-1)}{X\,|} \gtrless M\frac{1\rightarrow\mu}{X\,|}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}} \gtrless \frac{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}+\bar{\eta}_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}}\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}}{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}} \gtrless \frac{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}}{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}}$$

$$\text{ἢ} \quad 1 \gtrless \frac{1+\dfrac{\bar{\eta}_\mu}{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}}}{1+\dfrac{\alpha_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}}} \quad (\gamma')$$

Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μαθηματικῆς σχέσεως (γ') πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $M\frac{1\rightarrow(\mu-1)}{X\,|}$ προκύπτει

$$M\frac{1\rightarrow(\mu-1)}{X\,|} \gtrless M\frac{1\rightarrow(\mu-1)}{X\,|}\cdot\frac{1+\dfrac{\bar{\eta}_\mu}{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}}}{1+\dfrac{\alpha_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}}} \quad (\delta')$$

ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως ἐξάγεται ἡ ἰσότης:

$$M\overline{\underset{X|}{1\to\mu}} = M\overline{\underset{X|}{1\to(\mu-1)}} \cdot \frac{1+\dfrac{\bar{\eta}_\mu}{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\ldots+\bar{\eta}_{\mu-1}}}{1+\dfrac{\alpha_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}}} \qquad (\varepsilon')$$

Ὅθεν ἡ ἰσότης (ε΄) προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (δ΄) ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς ἀναφέρεται εἰς τὸν ὅρον $M\overline{\underset{X|}{1\to\mu}}$

Ἡ διερεύνησις αὕτη συνιστᾶ χρήσιμον συμπλήρωσιν τοῦ ὡς ἄνω ὑποδειχθέντος τρόπου διαγραμματικῆς ἀπεικονίσεως, ἥτις δέον νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν παρακολουθήσεως α) τῆς καταναλώσεως φαρμάκων ἢ ἄλλου ὑλικοῦ δι' ἑκάστην ἡμέραν νοσηλείας καὶ β) τῶν νόσων, τῶν κακώσεων καὶ αἰτιῶν θανάτου, δεδομένου ὅτι οὕτω θὰ ἐξυπηρετηθῇ ἐπιτυχῶς ὁ στατιστικὸς νόμος τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ περιπτώσεων, ἄνευ τῶν ὁποίων δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος περὶ πρακτικῆς ἀξιολογήσεως τῶν στατιστικῶν συμπερασμάτων.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΔΙΩΝ ΚΑΙ Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Ὑπὸ τοῦ κ. Δ. ΚΟΝΙΔΑΡΗ

1. Τὰ παιγνίδια 2. Ὀρθογώνια παιγνίδια μὲ δύο παίκτας καὶ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. 3. Τὰ σελλοσημεῖα. 4. Ἡ μικτὴ στρατηγική. 5. Γραφικαὶ λύσεις. 6. Συνεχὴς στρατηγική. 7. Ὀρθογώνια παιγνίδια μὲ ν παίκτας καὶ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. 8. Ἡ θεωρία τῶν Von Neumann - Morgenstern *καὶ ἡ οἰκονομία.*

Ἀπὸ τοῦ 1928, ὁ πρὸ ὀλίγων μηνῶν ἀποθανὼν μεγάλος μαθηματικὸς John von Neumann εἶχε παρουσιάσει μίαν θεωρίαν σχετικὴν μὲ τὴν «στρατηγικὴν» τῶν παιγνιδίων: τὴν «Theory of Games»· καὶ μέχρι τοῦ 1944, ἐκτὸς μιᾶς μερίδος μαθηματικῶν—στατιστικῶν ἀσχολουμένων εἰδικῶς μὲ τὰς νέας θεωρητικὰς ἐπιτεύξεις, ἐγνώριζον ὅλοι διὰ τὴν θεωρίαν τόσα, ὅσα διὰ τοὺς κατοίκους τοῦ Ἄρεως καὶ ἐνδιεφέροντο δι' αὐτὴν ὅσον δι' ἐκείνους. Ὁπότε τὸ 1944 ὁ John von Neumann καὶ ὁ οἰκονομολόγος Oscar Morgenstern ἀπεφάσισαν νὰ λύσουν βάσει τῶν πορισμάτων τῆς θεωρίας τοῦ πρώτου—καὶ τοῦτο διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μαθηματικῶν βασανιστηρίων εἰς ἃ ὑποβάλλονται ἀπό τινος χρόνου οἱ οἰκονομολόγοι—ὄχι μόνον προβλήματα σχετικὰ μὲ τὸ «σκάκι», τὸ «μπρίτζ», τὸ «δυὸ δάχτυλα τοῦ Morra», ἀλλὰ καὶ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην· καὶ παρουσιάζουν τὸ περιώνυμον πλέον ἔργον των Theory of Games and Economic Behavior (1 ἔκδ. 1944, 2 ἔκδ. 1947), ἀρκετὸν εἰς ὄγκον, πλούσιον εἰς θεωρητικὰς εἰσηγήσεις, ἐπαναστατικὸν μέχρι σημείου ἀπορρίψεως ὅλων τῶν προηγηθέντων συστημάτων οἰκονομικῆς μετρικῆς, αἰσιόδοξον διὰ τὴν συνέπειάν του εἰς τὸν τομέα τῶν ἐφαρμογῶν καὶ—τοῦτο εἶναι τὸ περιεργότερον—ὑποσχόμενον εὔκολον χειρισμόν, διότι, κατὰ τὴν εἰσαγωγικὴν παρατήρησιν τῶν συγγραφέων, δὲν ἀπαιτεῖται ἀνωτέρα μαθηματικὴ κατάρτισις διὰ τὴν κατανόησιν τῆς μεθόδου καὶ τὴν λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Τὸ τελευταῖον μάλιστα ἐπιβεβαιώνουν καὶ μερικοὶ ἐκ τῶν μελετησάντων τὸ βιβλίον. Δὲν θέλομεν νὰ διαψεύσωμεν οὔτε τας διαβεβαιώσεις τῶν συγγραφέων, οὔτε τὰς διαπιστώσεις τῆς προαναφερθείσης μερίδος τῶν ἀναγνωστῶν των· τὸ μόνον ἴσως τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ζητήσωμεν εἶναι «μία ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῶν συνεχῶν παιχνιδίων, ἄνευ τῆς χρήσεως ὁλοκληρώματος κατὰ Stieltjes». Καὶ τοῦτο διότι δὲν δυνάμεθα ν' ἀντιληφθῶμεν πῶς μία θεωρία ἥτις λύει τὰ προβλήματά της μὲ τὴν χρῆσιν τῶν μαθηματικῶν ἐργαλείων τύπου «matrix» «min. max», «Stieltjes integral», «convex payoff functions» κ.τ.τ., εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι εὔχρηστος εἰς τοὺς οἰκονομολόγους καὶ μάλιστα εἰς τοὺς μὴ ἔχοντας ἀνωτέραν μαθηματικὴν κατάρτισιν· βεβαίως οἱ κύριοι ἐκπρόσωποι τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης δὲν ἀπεφάνθησαν ἀκόμη κατὰ πόσον ἡ θεωρία εἶναι ἐφαρμόσιμος, παρ' ὅλον ὅτι ἄλλοι, οἱ ὀλιγώτερον ὑπεύθυνοι καὶ ὡς συνήθως περισσότερον ἐνθουσιώδεις, ἰσχυρίζονται ὅτι πρόκειται περὶ «ἐπαναστάσεως».

Θ' ἀπαιτηθῆ μεγάλη ἐξοικείωσις μὲ τὴν θεωρίαν καὶ πλῆθος τεχνικῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν υἱοθέτησίν της ἀπὸ ὅλους τοὺς εἰδικοὺς τῆς οἰκονομίας. Λέγοντες ταῦτα δὲν ἀσκοῦμεν δυσμενῆ κριτικὴν τῆς θεωρίας· ἀπ' ἐναντίας. Ἁπλῶς θέλομεν νὰ διατυπώσωμεν ἀμφιβολίας ὅσον ἀφορᾶ τοὺς ἰσχυρισμοὺς περὶ εὐκόλου μεταχειρίσεως αὐτῆς.

Κατωτέρω δίδομεν ἁπλῆν ἔκθεσιν τῆς θεωρίας, δι' ἁπλουστεύσεως—κατὰ τὸ δυνατὸν—καὶ τοῦ συμβολισμοῦ καὶ τῶν ἀποδείξεων, ὁπότε δίδεται ἡ εὐκαιρία εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ παρόντος νὰ κρίνουν διὰ τὸν βαθμὸν τῆς ἁπλότητος. Παραλλήλως πρὸς τὰ βασικὰ θέματα δίδεται καὶ μία σύντομος ἔκθεσις τῶν τελευταίων ἐπιτευγμάτων τῆς θεωρίας τῶν ἐμφανισθέντων εἰς τὰ τελευταῖα ἐπιστημονικὰ περιοδικά, διὰ τὴν ἐμφάνισιν τῶν νέων προοπτικῶν τῆς θεωρίας.

1. ΤΑ ΠΑΙΓΝΙΔΙΑ

Ἡ λέξις παιγνίδιον εἰς τὴν καθημερινὴν γλῶσσαν χρησιμοποιεῖται εἰς δύο περιπτώσεις: εἰς τὴν πρώτην, τῆς ὁποίας καὶ θὰ κάμωμεν χρῆσιν ἐνταῦθα, ἡ λέξις ἀποδίδει ἓν σύνολον συνθηκῶν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν κινήσεων καὶ τῶν συνεπειῶν τὰς ὁποίας θὰ ἔχουν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κινήσεων διὰ τοὺς παίκτας· εἰς τὴν δευτέραν ἡ λέξις ἀποδίδει μίαν πλήρη ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν κινήσεων ποὺ ἐπιβάλλονται διὰ νὰ θεωρηθῆ ἕνα «παίξιμο» τερματισθέν, δηλαδὴ διὰ νὰ τερματισθῆ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον οἱ παῖκται συνήθως καλοῦν «παρτίδα». Π.χ. ἡ πρώτη περίπτωσις παρουσιάζεται ὅταν λέγωμεν ὅτι «τὸ σκάκι εἶναι δυσκολώτερο ἀπὸ τὸ τάβλι» καὶ ἡ δευτέρα ὅταν λέγωμεν «παίξαμε τρία παιχνίδια τάβλι». Τὴν τελευταίαν ταύτην ἔκφρασιν θ' ἀποφεύγωμεν ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν μὲ τὴν ἔκφρασιν «παίξαμε τρεῖς παρτίδες τάβλι». Δηλαδὴ τὴν λέξιν παιγνίδιον θὰ χρησιμοποιοῦμεν ὁσάκις πρόκειται νὰ παρουσιάσωμεν μονολεκτικῶς ἓν σύνολον κανόνων καὶ συνθηκῶν ἐκτελέσεως κινήσεων καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν κινήσεων τούτων διὰ τοὺς ἐκτελεστὰς αὐτῶν.

Τὸ πλῆθος τῶν παιγνιδίων ποὺ ὑπῆρξαν, ὑπάρχουν καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν εἶναι προφανῶς ὑπερμέγεθες. Ἡ θεωρία τῶν παιγνιδίων ἀσχολεῖται μ' ἐκεῖνα τὰ παιγνίδια εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῆ μία «στρατηγικὴ» ἀπὸ μέρους τῶν παικτῶν, δηλαδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπηρεασθῆ κατὰ κάποιον τρόπον ἡ τελικὴ ἔκβασις τοῦ παιγνιδίου διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς κινήσεων τῶν παικτῶν. Κατὰ κοινὴν ὁμολογίαν τὸ στρατηγικώτερον τῶν παιγνιδίων εἶναι τὸ σκάκι· καὶ τοῦτο διότι κατὰ μέγα μέρος τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἐξαρτηθῆ ἐκ τῶν κινήσεων τὰς ὁποίας θὰ ἐκτελέσουν οἱ παῖκται.

Τὰ κυριώτερα γνωρίσματα τῶν παιγνιδίων εἶναι.

I. «Ὁ ἀριθμὸς τῶν παικτῶν». Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν παιγνίδια μὲ ἕνα, δύο, τρεῖς, . . ., ν παίκτας. Ἡ «πασέντζα» π.χ. εἶναι παιγνίδιον μ' ἕνα παίκτην. Τὸ σκάκι παίζεται ὑπὸ δύο παικτῶν καὶ τὸ τάβλι ἐπίσης. Τὸ μπρὶτζ παίζεται ὑπὸ 4 παικτῶν — 2 ὁμάδων τῶν δύο — τὸ ποδόσφαιρον (*) μὲ 22 παί-

(*) Ἐπειδὴ προεβλέψαμεν κάποιαν «ἀναπήδησιν εἰς τὸ κάθισμα» τοῦ πλείστου τῶν ἀναγνωστῶν, ἅμα τῇ ἀναγνώσει τῆς λέξεως, ἐρχόμεθα νὰ σημειώσωμεν ἐδῶ ὅτι ἡ ἀπὸ κτας — δύο ὁμάδας τῶν 11. Τὰ δύο τελευταῖα παιγνίδια, παρ' ὅλον ὅτι παίζονται ὑπὸ περισσοτέρων τῶν δύο προσώπων, ἐν τούτοις πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ὡς παιγνίδια δύο παικτῶν — ἀκριβέστερον δύο «ὁμάδων» — καὶ τοῦτο διότι τὰ ἐντὸς ἑκάστης ὁμάδος πρόσωπα ἔχουν ταυτοσήμους ἐπιδιώξεις καὶ ἐφαρμόζουν κοινὴν στρατηγικήν. Δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν παικτῶν ἐξαρτᾶται κυρίως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαφορετικῶν ἐπιδιώξεων εἰς τὸ παιγνίδιον. Δυνατὸν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν προσώπων ποὺ λαμβάνουν μέρος εἰς τὸ παιγνίδιον νὰ μὴ εἶναι ὡρισμένος, ὡς π. χ. συμβαίνει εἰς τὴν ρουλέτα, τὸ «31» κ. ἄ.

II. «Ὁ ἀριθμὸς κινήσεων». Ἡ λέξις «κίνησις» ἀποδίδει τὴν ἐκλογὴν ἀπὸ μέρους ἑνὸς παίκτου μιᾶς παραλλαγῆς ἐξ ὅσων παρουσιάζονται εἰς τὸ παιγνίδιον. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κινήσεων εἰς ἓν παιγνίδιον δυνατὸν νὰ εἶναι ὡρισμένος, δυνατὸν ὅμως ὄχι. Τὸ παιγνίδιον «δυὸ δάχτυλα τοῦ Morra» παίζεται ὑπὸ δύο παικτῶν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον: Ἕκαστος παίκτης δεικνύει εἰς τὸν ἄλλον «ἕνα ἢ δύο δάχτυλα» προφέρων συγχρόνως ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν «ἕνα» ἢ «δύο», τῆς τελευταίας ταύτης ἐκφωνήσεως σκοπὸν ἐχούσης τὸν προσδιορισμὸν τῶν δακτύλων τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιδείξῃ ὁ συμπαίκτης. Μεθ' ἕκαστον τοιοῦτον ζεῦγος κινήσεων ὁ παίκτης Α λαμβάνει ἀπὸ τὸν παίκτην Β ἓν ποσὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἑπομένου πίνακος:

Α \ Β	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	0	2	− 3	0
(1, 2)	− 2	0	0	3
(2, 1)	3	0	0	− 4
(2, 2)	0	− 3	4	0

Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἑκάστης παρενθέσεως φανερώνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπιδειχθέντων δακτύλων καὶ ὁ δεύτερος τὸν ἀναφωνηθέντα ὑπὸ τοῦ παίκτου ἀριθμόν. Τὰ ἀρνητικὰ πρόσημα δηλώνουν ὅτι ὁ Α θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Β τὸ ἑπόμενον τοῦ προσήμου ποσόν. Ἑκάστη τῶν παρενθέσεων—παραλλαγῶν τοῦ παιχνιδίου—(1,1) (1,2) (2,1) (2,2) ἀποτελεῖ μίαν κίνησιν δι' ἕκαστον παίκτην· τοιουτοτρόπως τὸ παιχνίδιον «δυὸ δάχτυλα τοῦ Morra» εἶναι παιγνίδιον

πολλῶν ἐτῶν ἀναπτυχθεῖσα τεχνικὴ τοῦ ποδοσφαίρου ἀπέδειξεν ὅτι πρόκειται περὶ παιγνιδίου ἐπιδεχομένου σωρείαν στρατηγημάτων, ἐξ ὧν ἄλλα πρέπει νὰ εἶναι μακροχρόνια καὶ ἄλλα νὰ ἐφαρμόζωνται εἰς κλάσματα τοῦ δευτερολέπτου. Τὸ τελευταῖον τοῦτο προσδίδει καὶ τὴν γνωστὴν συναρπαστικότητα εἰς τὸ παιγνίδιον καὶ κατέστησε τοῦτο — πρὸς ἔκπληξιν τῶν σοβαρῶν ἀνθρώπων — δημοφιλέστατον.

τεσσάρων κινήσεων, τῆς ἐκλογῆς ἑκάστης κινήσεως πραγματοποιουμένης συγχρόνως ὑπὸ τῶν δύο παικτῶν. Τὸ παιγνίδιον τῆς τράπουλας «ξερή», ὅταν παίζεται ὑπὸ δύο παικτῶν, ἔχει 24 κινήσεις (4 ὁμάδας 6 κινήσεων). Τὸ παιγνίδιον τῆς ρουλέτας ἔχει μίαν κίνησιν (ὕστερα ἀπὸ κάθε «μπιλιὰ» ἐπακολουθοῦν πληρωμαὶ καὶ κατόπιν ἐπαναλαμβάνεται). Ἄλλα παιγνίδια ὅμως ἔχουν μὴ ὡρισμένον ἀριθμὸν κινήσεων, περατούμενα ὁσάκις ἔλθωμεν εἰς ὅρους ἀποδίδοντας εἰς ἕνα παίκτην ἢ ὁμάδα παικτῶν τὸ ἐπιδιωκόμενον κέρδος—ἐνδεχομένως καὶ ἰσοπαλίαν—ἢ ἄλλα ἅμα τῇ παρελεύσει ὡρισμένου χρονικοῦ διαστήματος ἀνεξαρτήτως κέρδους παικτῶν. Μία «παρτίδα σκακιοῦ» περατοῦται ὅταν ἕνας τῶν παικτῶν ἐπιτύχη «μάτ» ἤ, πρᾶγμα ἐπίσης σύνηθες, ὅταν ἐπιτευχθῇ ἰσοπαλία—περίπτωσις «πάτ» καὶ «νούλας». Ἕνα «μάτς» ποδοσφαίρου ὅμως περατοῦται εἰς 90 λεπτὰ ἀνεξαρτήτως νίκης τοῦ ἑνὸς ἢ ἰσοπαλίας.

III. «Τὸ ποσὸν τῆς πληροφορίας». Ἡ ταξινόμησις ἀφορᾶ τὸ τί γνωρίζει ἕκαστος παίκτης, πρὸ ἑκάστης κινήσεως του, διὰ τὰς προηγουμένας κινήσεις τοῦ ἀντιπάλου ἢ τῶν ἀντιπάλων, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ προβλέψη μερικὰς τῶν ἑπομένων καὶ νὰ ἐφαρμόση κατάλληλον στρατηγικήν.

Τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὡς γνωστόν, ἀπολύτως εἰς τὸ σκάκι, τὸ τάβλι, τὴν ντάμα κ.ἄ. Εἰς τὸ πόκερ ὅμως ἀγνοῶν ὁ παίκτης «τὶς κάρτες» τῶν ἄλλων στερεῖται πληροφορίας σχετικῆς μὲ τὸ «παίξιμο» τῶν ἄλλων καὶ προσπαθεῖ «νὰ ἐκτιμήση τὸ φύλλο τους διὰ παρακολουθήσεως τῶν ψυχολογικῶν ἀντιδράσεών των κατὰ τὸ παίξιμο».

IV. «Αἱ πληρωμαί». Ἐὰν θεωρήσωμεν ἓν παιγνίδιον ν παικτῶν Π_1, Π_2, ..., Π_ν καὶ ὀνομάσωμεν π_1, π_2, ..., π_ν τὰς πληρωμὰς εἰς ἕκαστον εἰς τὸ τέλος τοῦ παιγνιδίου, τότε ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_\nu = 0$$

καλοῦμεν τὸ παιγνίδιον «μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν». Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὡρισμένα ἐκ τῶν π_i ($i=1, 2, ..., \nu$)—ἓν τουλάχιστον—πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικά: τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι παῖκται ἀντὶ νὰ λάβουν θὰ δώσουν ἓν ποσόν. Ὅλα τὰ παιγνίδια τῶν λεσχῶν, τῶν σαλονιῶν καὶ τῶν ἐν γένει συγκεντρώσεων εἶναι παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, δηλαδὴ διατηροῦν ἀμετάβλητον τὸν συνολικὸν πλοῦτον τῶν παικτῶν, δι' αὐτὸ ἀπὸ κοινωνικο-οικονομικῆς πλευρᾶς θεωροῦνται ἐπιβλαβῆ, τόσον διὰ τὴν κατασπατάλησιν τοῦ πολυτίμου χρόνου τῶν παικτῶν, ὅσον καὶ διὰ τὴν ἐκμετάλλευσιν τῶν ἀδαῶν ἀπὸ τοὺς τεχνίτας· ἀλλ' οὔτε καὶ ἀπὸ ψυχαγωγικῆς πλευρᾶς εἶναι δυνατὸν νὰ συστηθοῦν τὰ ἐπὶ χρήμασι παιζόμενα παιγνίδια, λόγῳ τοῦ πάθους διὰ τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον μεταβιβάζουν εἰς τοὺς παίκτας. Καθαρῶς ψυχαγωγικὰ πρέπει νὰ θεωρηθοῦν τὰ παιγνίδια διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\pi_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). Ἐνδιαφέροντα ἀπὸ κοινωνικο-οικονομικῆς πλευρᾶς πρέπει νὰ θεωρηθοῦν τὰ παιγνίδια τὰ δυνάμενα νὰ ληφθοῦν ὡς πρότυπα—ὑποδείγματα, models—οἰκονομικῶν διαδικασιῶν, ὁπότε θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ οἰκονομικὴ διαδικασία αὐξάνει ἢ ἐλαττώνει τὸν πλοῦτον, παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενός, ταῦτα δὲ ἐξετάζονται εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος.

2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΙΓΝΙΔΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟΝ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΜΗΔΕΝ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ παρουσιασθέντος πίνακος πληρωμῶν διὰ τὸ παιγνίδιον «δυὸ δάκτυλα τοῦ Morra» παραλείψωμεν τὰς παρενθέσεις τὰς ἐνδεικτικὰς τῶν παραλλαγῶν τοῦ παιγνιδίου καὶ τὴν σχετικὴν γραμμογράφησιν, διατηρήσωμεν ὅμως τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν τῶν δεικνυόντων τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ Α, τότε δι' ἐγκλείσεως αὐτῶν ἁπλῶς εἰς μίαν παρένθεσιν λαμβάνομεν τὸ σχῆμα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται, ὡς γνωστόν, εἰς τὰ μαθηματικὰ «μήτρα» — matrix, matrice. — Εἰς τὴν περίπτωσίν μας καλοῦμεν ταύτην «μήτρα πληρωμῶν εἰς τὸν Α». Εἰς τὸ ἀνωτέρω παιγνίδιον αἱ παραλλαγαὶ — αἱ δυναταὶ κινήσεις — διὰ τὸν Α εἶναι ἴσαι μὲ αὐτὰς τοῦ Β, δηλαδὴ ἐν ὅλῳ τέσσαρες. Εἶναι δυνατὸν ὅμως, ὡς θὰ συνέβαινεν π.χ διὰ τὸ παιγνίδιον μὲ μήτραν πληρωμῶν διὰ τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

αἱ παραλλαγαὶ διὰ τὸν Α νὰ εἶναι ὀλιγώτεραι — ἢ περισσότεραι — ἀπὸ αὐτὰς τοῦ Β, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ὁ Α ἔχει τρεῖς δυνατὰς κινήσεις ἐνῷ ὁ Β τέσσαρας. Ἐν γένει, ἓν παιγνίδιον δύο παικτῶν μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ μήτραν πληρωμῶν διὰ τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1\nu} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{\mu 1} & \pi_{\mu 2} & \cdots & \pi_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{3}$$

θὰ τὸ καλοῦμεν «ὀρθογώνιον παιγνίδιον μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν». Τὴν μήτραν ταύτην θὰ παρουσιάζωμεν συντόμως μὲ τὸ γράμμα Π, τὸ δὲ τυχὸν στοιχεῖον αὐτῆς—τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὴν κ γραμμὴν εἰς τὴν λ στήλην—μὲ τὸ $\pi_{\kappa\lambda}$.

Δοθείσης τώρα τῆς μήτρας Π πληρωμῶν διὰ τὸν Α, γεννᾶται ἀμέσως τὸ ἐρώτημα: «Ποία κίνησις—δηλαδὴ ἡ ἐκλογὴ ποίας γραμμῆς—συμφέρει τὸν Α;» Ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ γνωστὴ προηγουμένως εἰς τὸν Α ἡ ἐκλογὴ τοῦ Β τότε τὸ πρόβλημα λύεται ἀμέσως: τῆς γραμμῆς εἰς ἣν θ' ἀνήκῃ ἡ μεγίστη ἐκ τῶν πληρωμῶν τῶν εὑρισκομένων εἰς τὴν ἐκλεγεῖσαν ὑπὸ τοῦ Β στήλην. Δεδομένου ὅμως ὅτι ὁ Α ἀγνοεῖ, πρὸ τῆς ἐκλογῆς του, τὴν ἐκλογὴν τοῦ Β, πρέπει νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρας ἀπωλείας· δηλαδὴ νὰ ἐκλέξῃ μίαν γραμμὴν εἰς τρόπον ὥστε, οἱανδήποτε στήλην καὶ νὰ ἐκλέξῃ ὁ Β, νὰ ἔχῃ οὗτος—ὁ Α—τὴν μικροτέραν ἀπώλειαν. Τοῦτο εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Συμβολίζομεν(*) μὲ $\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$ τὸ μέγιστον τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$ τῆς γραμμῆς καὶ μὲ $\underset{\kappa}{E}\pi_{\kappa\lambda}$ τὸ ἐλάχιστον· ὁμοίως μὲ $\underset{\lambda}{M}\pi_{\kappa\lambda}$ θὰ συμβολίζωμεν τὸ μέγιστον τῆς στήλης λ καὶ μὲ $\underset{\lambda}{E}\pi_{\kappa\lambda}$ τὸ ἐλάχιστον ταύτης. Τοιουτοτρόπως ἐὰν ὁ Α ἐκλέξῃ τὴν κ γραμμὴν δύναται νὰ εἶναι βέβαιος ὅτι ἡ μικροτέρα πληρωμὴ εἰς αὐτὸν θὰ εἶναι ἡ $\underset{\lambda}{E}\pi_{\kappa\lambda}$. ('Εὰν ἡ τελευταία αὕτη ποσότης εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς θὰ σημαίνῃ τοῦτο ὅτι θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Β τὸ ἑπόμενον τοῦ προσήμου ποσόν). Ἄρα θὰ πρέπῃ νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν εἰς τρόπον ὥστε ἡ ποσότης $\underset{\lambda}{E}\pi_{\kappa\lambda}$ νὰ εἶναι—ἀλγεβρικῶς—ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρα· δηλαδὴ νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν θ' ἀντιστοιχῇ ἡ ποσότης:

$$\boxed{\underset{\kappa}{M}\ \underset{\lambda}{E}\ \pi_{\kappa\lambda}} \qquad (4)$$

Καὶ τοῦτο διότι, καθὼς ἀνεφέρθη, ἀγνοεῖ τὴν ἐκλογὴν τῆς στήλης λ ὑπὸ τοῦ Β καὶ θέλει νὰ ἐξασφαλίσῃ τὴν μικροτέραν δυνατὴν ἀπώλειαν· τὸ νὰ ἐκλέξῃ τὴν γραμμὴν μὲ τὸ μέγιστον τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$ εἶναι προφανῶς ἀσύμφορον, διότι ἡ ἰδία γραμμὴ εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἓν ἀπὸ τὰ μικρότερα τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$ ἢ ἀκόμη καὶ αὐτὸ τοῦτο τὸ ἐλάχιστον τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$, ὁπότε ἡ ἐκλογὴ ὑπὸ τοῦ Β τῆς στήλης εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ ὁδηγήσῃ τὸν Α εἰς μεγαλυτέραν ἀπώλειαν. Δι' ἐκλογῆς λοιπὸν ὑπὸ τοῦ Α τῆς γραμμῆς εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ ποσότης (4) εἶναι βέβαιος ὅτι ὁ Α θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον τὸ ποσὸν (4).

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ Β πρέπει νὰ ἐκλέξῃ τὴν στήλην εἰς τὴν ὁποίαν θ' ἀντιστοιχῇ ἡ ποσότης $\underset{\lambda}{M}\ \underset{\kappa}{E}\ (-\pi_{\kappa\lambda})$, καὶ τοῦτο διότι αἱ πληρωμαὶ εἰς τὸν Β εἶναι ἀντίθετοι—ὡς πρὸς τὸ πρόσημον—τῶν πληρωμῶν εἰς τὸν Α. Λόγῳ ὅμως τῶν σχέσεων:

$$\underset{\lambda}{M}\ \underset{\kappa}{E}\ (-\pi_{\kappa\lambda}) = \underset{\lambda}{M}\ (-\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}) = -\underset{\lambda}{E}\ \underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$$

συμπεραίνομεν ὅτι ὁ Β πρέπει νὰ ἐκλέξῃ στήλην εἰς τρόπον ὥστε νὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὴν τὸ $-\underset{\lambda}{E}\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$, θὰ εἶναι δὲ βέβαιος ὅτι θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Α τουλάχιστον τὸ ποσὸν τοῦτο, ἤ, πρᾶγμα ταυτό, ὅτι ὁ Α θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τὸ πολὺ ποσὸν

$$\boxed{\underset{\lambda}{E}\ \underset{\kappa}{M}\ \pi_{\kappa\lambda}} \qquad (5)$$

Δηλαδὴ ὁ Α δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ «παίξιμο» εἰς τρόπον ὥστε νὰ πάρῃ

(*) Συνήθως χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμὸς $\underset{\kappa}{\max}\ \pi_{\kappa\lambda}$ ἀντὶ τοῦ $\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$ καὶ ὁ $\underset{\kappa}{\min}$ $\pi_{\kappa\lambda}$ ἀντὶ τοῦ $\underset{\kappa}{E}\pi_{\kappa\lambda}$. Ἐξελέξαμεν τοὺς πρώτους διὰ ταχυγραφικοὺς καὶ τυπογραφικοὺς λόγους.

ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον τὸ ποσὸν (4), ἀλλὰ πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμποδισθῇ ἀπὸ τὸν Β νὰ πάρῃ περισσότερα ἀπὸ τὸ ποσὸν (5).

Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\pi_{\kappa\lambda}=\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\pi_{\kappa\lambda}=\tau} \tag{6}$$

τότε ὁ Α ἀντιλαμβάνεται ὅτι ἠμπορεῖ νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον τὸ ποσὸν τ, ἀλλὰ καὶ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμποδισθῇ ἀπ' αὐτὸν νὰ πάρῃ περισσότερα ἀπὸ τ. Ἐὰν ἡ (6) ἀληθεύῃ διὰ μίαν μήτραν πληρωμῶν Π, τότε ἡ εὕρεσις ἑνὸς τρόπου παιξίματος προνομιούχου καὶ διὰ τοὺς δύο παίκτας εἶναι δυνατὴ καὶ οὐδὲν πέραν αὐτοῦ ἔχομεν νὰ εἴπωμεν.

Τὸ οὐσιῶδες πρὸς λύσιν πρόβλημα εἶναι ἐκεῖνο καθ' ὃ αἱ ποσότητες (4) καὶ (5) εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, ὡς συμβαίνει ἐπὶ παραδείγματι διὰ τὴν μήτραν πληρωμῶν (1). Πράγματι εἶναι δι' αὐτὴν

$$\underset{\kappa\,\lambda}{\mathrm{ME}}\pi_{\kappa\lambda}=\mathrm{M}\,[\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\pi_{1\lambda},\ \underset{\lambda}{\mathrm{E}}\pi_{2\lambda},\ \underset{\lambda}{\mathrm{E}}\pi_{3\lambda},\ \underset{\lambda}{\mathrm{E}}\pi_{4\lambda}]=\mathrm{M}\,[-3,\ -2,\ -4,\ -3]=-2$$

$$\underset{\lambda\,\kappa}{\mathrm{EM}}\pi_{\kappa\lambda}=\mathrm{E}\,[\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\pi_{\kappa1},\ \underset{\kappa}{\mathrm{M}}\pi_{\kappa2},\ \underset{\kappa}{\mathrm{M}}\pi_{\kappa3},\ \underset{\kappa}{\mathrm{M}}\pi_{\kappa4}]=\mathrm{E}\,[3,\ 2,\ 4,\ 3]=2$$

ΣΗΜ. Διὰ τῶν συμβόλων $\mathrm{M}[x, y, ..., z]$ καὶ $\mathrm{E}[x, y, ..., z]$ παρουσιάζομεν, ἀντιστοίχως, τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῶν $x, y, ..., z$.

Ἐρχόμεθα ν' ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἀκόλουθον θεμελιώδη πρότασιν:

Δοθείσης τῆς συναρτήσεως $z = \sigma(x, y)$ ὡρισμένης εἰς τὸν τόπον $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$ καὶ ὑπαρχόντων τῶν $\underset{x}{\mathrm{M}}\,\underset{y}{\mathrm{E}}\,z$ καὶ $\underset{y}{\mathrm{E}}\,\underset{x}{\mathrm{M}}\,z$ θὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{x}{\mathrm{M}}\,\underset{y}{\mathrm{E}}\,z \leqq \underset{y}{\mathrm{E}}\,\underset{x}{\mathrm{M}}\,z} \tag{7}$$

Πράγματι, ὡς γνωστόν, εἶναι

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,z \leqq z \quad \text{καὶ} \quad z \leqq \underset{x}{\mathrm{M}}\,z$$

δηλαδὴ καὶ

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,z \leqq \underset{x}{\mathrm{M}}\,z$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ y, ἕπεται ὅτι τὸ ἐλάχιστον αὐτοῦ ὡς πρὸς y εἶναι πάλιν τὸ $\underset{y}{\mathrm{E}}\,z$ καὶ συνεπῶς

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,z \leqq \underset{y}{\mathrm{E}}\,\underset{x}{\mathrm{M}}\,z$$

Τῆς νέας ταύτης σχέσεως τὸ δεξιὸν μέλος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x καὶ ἄρα τὸ μέγιστον αὐτοῦ ὡς πρὸς x εἶναι πάλιν τὸ $\underset{y}{\mathrm{E}}\,\underset{x}{\mathrm{M}}\,z$ καὶ ἄρα

$$\boxed{\underset{x}{\mathrm{M}}\,\underset{y}{\mathrm{E}}\,z \leqq \underset{y}{\mathrm{E}}\,\underset{x}{\mathrm{M}}\,z}$$

Ἡ σχέσις (7) εἶναι, προφανῶς, ἀληθὴς καὶ δι' οἱανδήποτε μήτραν πληρωμῶν Π μὲ τυχὸν στοιχεῖον τὸ $\pi_{\kappa\lambda}$, διότι διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ μόνον νὰ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν σ (κ,λ) ὡρισμένην εἰς τὰ σημεῖα Ρ (κ,λ) [ὅπου $\kappa=1, 2,\ldots, \mu$ καὶ $\lambda = 1, 2,\ldots, \nu$] διὰ τῆς ἐξισώσεως $\pi_{\kappa\lambda} = \sigma(\kappa, \lambda)$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} \leqq \underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda}} \tag{8}$$

3. ΤΑ ΣΕΛΛΟΣΗΜΕΙΑ (*)

Λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον Σ (x_0, y_0) εἶναι «σελλοσημεῖον», διὰ τὴν ὡρισμένην εἰς τὸν τόπον $x_1 \leqq x \leqq x_2,\ y_1 \leqq y \leqq y_2$ συνάρτησιν σ (x, y), ἐὰν ὑπάρχουν δι' αὐτὴν αἱ σχέσεις:

$$\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0) \leqq \sigma(x_0, y)$$

Σχετικῶς μὲ τὰ σελλοσημεῖα ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθος πρότασις χρησιμεύουσα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν παιγνιδίων:

«Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὸ σημεῖον Σ (x_0, y_0) εἶναι σελλοσημεῖον τῆς ὡρισμένης εἰς τὸν τόπον $x_1 \leqq x \leqq x_2,\ y_1 \leqq y \leqq y_2$ συναρτήσεως σ (x, y) διὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν τὰ

$$\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \quad \text{καὶ} \quad \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)$$

εἶναι ἡ

$$\boxed{\sigma(x_0, y_0) = \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) = \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)} \tag{1}$$

Πρῶτον θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία. Δηλαδὴ θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Σ (x_0, y_0) εἶναι ἓν σελλοσημεῖον τῆς σ (x, y) καὶ θὰ δείξωμεν, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, τὴν ἀλήθειαν τῶν (1).

Πράγματι, ἀφοῦ τὸ Σ εἶναι σελλοσημεῖον τῆς σ (x, y) θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμόν:

$$\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \sigma(x_0, y) \tag{2}$$

ἐξ αὐτῶν δὲ συμπεραίνομεν καὶ τὰς

$$\underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) \tag{3}$$

Εἶναι ὅμως

$$\underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y) \leqq \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0), \quad \underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) \leqq \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \tag{4}$$

ὁπότε ἐκ τῶν (4) γίνονται αἱ (3)

$$\underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y) \leqq \sigma(x_0, y_0) \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \tag{5}$$

(*) Μὲ τὴν λέξιν «σελλοσημεῖον» ἀπεδώσαμεν τὸ καλούμενον ἀγγλιστὶ Saddle-point. Ἐξελέξαμεν ταύτην ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι δίδει κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον πιστὴν μετάφρασιν, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι δὲν ἠδυνήθημεν νὰ σχηματίσωμεν ἄλλην λέξιν.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὅμως ὑπάρχει καὶ ἡ

$$\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \leqq \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)$$

συμπεραίνομεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν αἱ ἀνισωτικαὶ σχέσεις εἰς τὰς (5), ὁπότε

$$\boxed{\sigma(x_0, y_0) = \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) = \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)}$$

Διὰ νὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι καὶ ἱκανὴ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: ὑποθέτομεν ὅτι ἓν σημεῖον x_0 τοῦ διαστήματος $[x_1, x_2]$ καθιστᾶ τὴν $\underset{y}{E}\,\sigma(x, y)$ μεγίστην καὶ ἓν σημεῖον y_0 τοῦ διαστήματος $[y_1, y_2]$ καθιστᾶ τὴν $\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)$ ἐλαχίστην. Δηλαδὴ ὅτι εἶναι:

$$\underset{y}{E}\,(x_0, y) = \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y), \quad \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) = \underset{x}{E}\,\underset{y}{M}\,\sigma(x, y)$$

Ἀφοῦ ὅμως ἀληθεύει, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ (1) συμπεραίνομεν ὅτι

$$\underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) = \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) \tag{6}$$

καὶ λόγῳ τῶν σχέσεων

$$\underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0)$$

καὶ τῆς (6) ἔχομεν

$$\underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y)$$

ἄρα καὶ κατὰ μείζονα λόγον,

$$\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \sigma(x_0, y)$$

Δηλαδὴ συμπεραίνομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὅτι τὸ $\Sigma(x_0, y_0)$ θὰ εἶναι σελλοσημεῖον.

Ὡς πόρισμα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχομεν ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ μήτρα πληρωμῶν Π, μὲ τυχὸν στοιχεῖον τὸ $\pi_{\kappa\lambda}$, ἔχῃ ἓν σελλοσημεῖον, δηλαδὴ ἓν στοιχεῖον $\pi_{\kappa\lambda}$ διὰ τὸ ὁποῖον νὰ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\pi_{\kappa\lambda_0} \leqq \pi_{\kappa_0\lambda_0} \leqq \pi_{\kappa_0\lambda}$$

εἶναι ἡ

$$\boxed{\pi_{\kappa_0\lambda_0} = \underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} = \underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda}} \tag{7}$$

Συνεπῶς ἐὰν ἡ μήτρα πληρωμῶν εἰς τὸν Α ἔχῃ ἓν σελλοσημεῖον τότε πρέπει νὰ ἐκλέξῃ οὗτος τὴν κ_0 καὶ ὁ Β τὴν λ_0 στήλην, ἡ ἐκλογὴ δὲ αὕτη εἶναι ἡ ἀρίστη ἐξ ὅσων εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν καὶ δι' αὐτὸ καλεῖται καὶ «ἰδανικὴ ἐκλογή». Τὸ στοιχεῖον $\pi_{\kappa_0\lambda_0}$ καλεῖται «τιμὴ» τοῦ παιγνιδίου διὰ τὸν Α.

4. Η ΜΙΚΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δύο παῖκται Α καὶ Β παίζουν ἓν παιγνίδιον μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} \rho & -\rho \\ -\rho & \rho \end{pmatrix} \qquad \rho > 0 \qquad (1)$$

Εἶναι εὔκολον ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ μήτρα αὕτη δὲν ἔχει σελλοσημεῖον. Πράγματι εἶναι

$$\underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} = M\left[\underset{\lambda}{E}\,\pi_{1\lambda},\ \underset{\lambda}{E}\,\pi_{2\lambda}\right] = M\,[-\rho,\ -\rho] = -\rho$$

$$\underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda} = E\left[\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa 1},\ \underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa 2}\right] = E\,[\ \rho,\ \ \rho\ ] = \rho$$

καὶ συνεπῶς $$\underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} \neq \underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda}$$

'Εφ' ὅσον λοιπὸν ἡ μήτρα δὲν ἔχει σελλοσημεῖον, αἱ προηγούμεναι μέθοδοι εὑρέσεως ἰδανικῆς ἐκλογῆς δὲν ἐφαρμόζονται καὶ πρέπει ν' ἀναζητηθοῦν ἄλλαι μέθοδοι. 'Επὶ πλέον εἰς τὸ παιγνίδιον αὐτὸ ἕνας ἕκαστος ἐκ τῶν παικτῶν εὑρίσκεται εἰς ἀμηχανίαν προκειμένου νὰ ἐκλέξῃ τὴν κίνησίν του, διότι διὰ νὰ κερδίσῃ ὁ Α πρέπει νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὴν τῆς ἐκλεγείσης ὑπὸ τοῦ Β στήλης, ἐνῷ διὰ νὰ κερδίσῃ ὁ Β πρέπει νὰ ἐκλέξῃ στήλην διαφορετικῆς τάξεως. Τὸ νὰ ἐκλέξῃ ὁ Α μίαν ὡρισμένην γραμμὴν καὶ νὰ παίζῃ συνεχῶς αὐτὴν εἶναι προφανῶς ἀσύμφορον, διότι ὁ Β ὅταν ἀντιληφθῇ τοῦτο θ' ἀρχίσῃ νὰ παίζῃ τὴν στήλην μὲ τὴν διαφορετικὴν τάξιν· ἀνάλογος συλλογισμὸς γίνεται καὶ διὰ τὸν Β. 'Ο μόνος τρόπος λοιπὸν εἶναι νὰ ἐκλέγουν τυχαῖα τὰς κινήσεις των ἀλλὰ σὲ κάποιαν ἀναλογίαν, ἐὰν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι προνομιοῦχος. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐξετασθῇ τὸ ζήτημα τῆς ὑπάρξεως καὶ εὑρέσεως τῶν τοιούτων προνομιούχων ἀναλογιῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι ὁ Α παίζει, εἰς ἕνα σύνολον Τ κινήσεων, τὴν κίνησιν «ἕνα» — τὴν πρώτην γραμμὴν — αΤ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα α καὶ τὴν κίνησιν «δύο» — τὴν δευτέραν γραμμὴν — (1 - α)Τ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα 1 - α. 'Επίσης ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Β παίζει, εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον τῶν κινήσεων, τὴν κίνησιν «ἕνα» — τὴν πρώτην στήλην — βΤ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα β καὶ τὴν κίνησιν «δύο» — τὴν δευτέραν στήλην — (1-β)Τ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα 1 - β. Τὸ παίξιμο αὐτὸ δύναται νὰ ἐπιτύχῃ ὁ Α π.χ. καὶ δι' ἕνα Τ κάπως μεγάλο, ἀνασύρων ἐκ μιᾶς κάλπης περιεχούσης ἄσπρα σφαιρίδια εἰς ἀναλογίαν α καὶ μαῦρα εἰς ἀναλογίαν 1 - α, ἓν σφαιρίδιον πρὸ ἑκάστης κινήσεως καὶ παίζων τὴν πρώτην γραμμὴν ὁσάκις ἐμφανίζεται ἄσπρο καὶ τὴν δευτέραν ὁσάκις μαῦρο. 'Ανάλογος παρατήρησις γίνεται καὶ διὰ τὸν παίκτην Β. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ «ἕνα - ἕνα» — ὁ Α παίζει τὴν πρώτην γραμμήν, ὁ Β τὴν πρώτην στήλην — εἶναι ραβ, διότι πρόκειται περὶ συνθέτου γεγονότος: θὰ λάβῃ τὸ ποσὸν ρ ἐὰν ἐκλέξῃ τὴν πρώτην γραμμὴν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ Β θὰ ἐκλέξῃ τὴν πρώτην στήλην· ἡ πιθανότης ὅμως τοῦ νὰ ἐκλέξῃ ὁ Α τὴν πρώτην γραμμὴν εἶναι α καὶ ὁ Β τὴν πρώτην στήλην β καὶ ἄρα ἡ σύνθετος πιθανότης αβ. 'Ομοίως ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ «ἕνα - δύο» εἶναι — ρα (1 - β), ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ «δύο - ἕνα» — ρ (1 - α) β καὶ τοῦ συνδυασμοῦ «δύο - δύο» ρ (1 - α) (1 - β). Ἄρα ἡ συνολικὴ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α εἶναι :

$$\varepsilon(\alpha,\beta) = \rho\alpha\beta - \rho\alpha(1\text{-}\alpha)\beta + \rho(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\beta) \qquad \text{ἢ ἁπλούστερον}$$

$$\boxed{\varepsilon(\alpha,\beta) = \rho(2\alpha\text{-}1)(2\beta\text{-}1)} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι

$$\varepsilon\left(\alpha,\frac{1}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2},\beta\right)$$

συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον $\Sigma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ εἶναι σελλοσημεῖον διὰ τὴν συνάρτησιν ε(α,β) — καθὼς καὶ διὰ τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα $-$ ε(α,β) τοῦ Β.

Ὥστε ἡ «ἰδανικὴ μαθηματικὴ ἐλπὶς» διὰ τοὺς παίκτας τοῦ παιγνιδίου μὲ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν (1) ὑπάρχει ὅταν παίζουν μὲ συχνότητας $\alpha = \frac{1}{2}$ καὶ $\beta = \frac{1}{2}$. Ἐξ αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως λαμβάνοντες ἀφορμὴν καλοῦμεν τὴν συχνότητα $\overset{*}{\alpha}$ τοῦ Α — συχνότης παιξίματος ὑπὸ τοῦ Α τῆς πρώτης γραμμῆς εἰς ἓν παιγνίδιον μὲ μήτραν δύο γραμμῶν καὶ δύο στηλῶν — «ἰδανικὴν συχνότητα» καὶ τὴν $\overset{*}{\beta}$ ἰδανικὴν συχνότητα διὰ τὸν Β ἐὰν ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\varepsilon(\alpha,\overset{*}{\beta}) \leq \varepsilon(\overset{*}{\alpha},\overset{*}{\beta}) \leq \varepsilon(\overset{*}{\alpha},\beta)$$

ὅπου $\qquad 0 \leq \overset{*}{\alpha} \leq 1 \qquad 0 \leq \overset{*}{\beta} \leq 1$

Τ' ἀνωτέρω γενικεύομεν καὶ διὰ παιγνίδια μὲ τυχοῦσαν ὀρθογώνιον μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μήτρα αὐτὴ εἶναι τάξεως (μ,ν). Θὰ καλοῦμεν «μικτὴν στρατηγικὴν» διὰ τὸν Α μίαν διατεταγμένην μ—άδα θετικῶν ἀριθμῶν α_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \mu$), διὰ τοὺς ὁποίους ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} \alpha_\kappa = 1$$

Ἀντιστοίχως καλοῦμεν μικτὴν στρατηγικὴν διὰ τὸν Β μίαν διατεταγμένην ν—άδα θετικῶν ἀριθμῶν β_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$), διὰ τοὺς ὁποίους ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \beta_\lambda = 1$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α θὰ εἶναι, ὅταν οὗτος παίζῃ τὴν κ γραμμὴν μὲ συχνότητα α_κ καὶ ὁ Β τὴν λ στήλην μὲ συχνότητα β_λ, ἴση μὲ

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} \alpha_\kappa \beta_\lambda \pi_{\kappa\lambda}$$

συμβολίζομεν δὲ ταύτην μὲ ε(α,β), ὅπου α σημειώνει τὴν μ—άδα τῶν α_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \mu$) καὶ β τὴν ν—άδα τῶν β_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$).

Ἐὰν ὑπάρχῃ ζεῦγος $\overset{*}{\alpha}$, $\overset{*}{\beta}$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε

$$\varepsilon(\alpha,\overset{*}{\beta}) \leq \varepsilon(\overset{*}{\alpha},\overset{*}{\beta}) \leq \varepsilon(\overset{*}{\alpha},\beta) \qquad (3)$$

τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει «ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγικὴ» διὰ τοὺς παίκτας Α καὶ Β, εἶναι δὲ ἐκείνη καθ' ἣν ὁ Α παίζει τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\alpha}_1$, τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\alpha}_2,\ldots$, τὴν μ-στὴν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\alpha}_\mu$, ὁ δὲ Β τὴν πρώτην στήλην μὲ συχνότητα $\overset{*}{\beta}_1$, τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\beta}_2,\ldots$, τὴν ν-στὴν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\beta}_\nu$. Ἡ ποσότης $\varepsilon(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$ καλεῖται «τιμὴ» τοῦ παιγνιδίου διὰ τὸν Α, ἡ δὲ διατεταγμένη δυὰς $(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$ καλεῖται «λύσις» τοῦ παιγνιδίου ἢ «στρατηγικὸν σελλοσημεῖον». Ἡ ὕπαρξις δηλαδὴ λύσεως τοῦ παιγνιδίου σημαίνει, κατὰ τὰ προαναφερθέντα, ὅτι ὁ Α ἐλπίζει νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον $\varepsilon(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$, ἐνῷ ὁ Β ἐλπίζει εἰς τὸ νὰ ἐμποδίσῃ τὸν Α νὰ πάρῃ περισσότερα ἀπὸ τὸ ποσὸν αὐτό. Ἐὰν συμβῇ αἱ ποσότητες $\tau_1 = \underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$, $\tau_2 = \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ νὰ ὑπάρχουν καὶ νὰ εἶναι ἴσαι, τότε, συμφώνως πρὸς προαποδειχθὲν θεώρημα, θὰ ὑπάρχουν αἱ (3), δηλαδὴ θὰ ὑπάρχῃ μιὰ ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγική. Κατωτέρω θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε τὰ τ_1 καὶ τ_2 καὶ εἶναι ἴσα, ὑποθέτοντες γνωστὴν ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ν-διαστάτου Εὐκλειδείου χώρου E_ν τὴν πρότασιν καθ' ἥν, δοθείσης τῆς μήτρας

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{1\nu} \\ \pi_{21} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \pi_{\mu 1} & \pi_{\kappa 2} & \ldots & \pi_{\kappa\nu} \end{pmatrix}$$

τότε εἴτε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu)$ τοῦ E_μ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\alpha_1 \pi_{1\lambda} + \alpha_2 \pi_{2\lambda} + \ldots + \alpha_\mu \pi_{\mu\lambda} \geqq O \quad \text{διὰ } \lambda = 1, \ldots, \nu \tag{4}$$

εἴτε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ τοῦ E_ν διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\beta_1 \pi_{\kappa 1} + \beta_2 \pi_{\kappa 2} + \ldots + \beta_\nu \pi_{\kappa\nu} \leqq O \quad \text{διὰ } \kappa = 1, \ldots, \mu \tag{5}$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τώρα τῆς προτάσεως, τῆς καλουμένης καὶ «θεμελιώδους προτάσεως τῶν ὀρθογωνίων παιγνιδίων», τῆς ἀφορώσης τὴν ὕπαρξιν ἰδανικῆς μικτῆς στρατηγικῆς σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως :

Διὰ κάθε β ἡ συνάρτησις ε(α, β) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς α, ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ ὑποσυνόλου U_μ τοῦ E_μ. Ἄρα τὸ $\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ θὰ ὑπάρχῃ διὰ κάθε β τοῦ U_ν. Ἐπὶ πλέον εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι τὸ $\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ εἶναι μία γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ β καὶ συνεχής. Ἄρα τὸ U_ν εἶναι ἕνα κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ E_ν καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ ὑπάρχει· καθ' ὅμοιον τρόπον συμπεραίνομεν ὅτι τὸ $\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ ὑπάρχει. Ἐὰν ὑπάρχῃ τώρα ἡ συνθήκη (4), τότε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον α τοῦ U_μ εἰς τρόπον ὥστε διὰ κάθε β τοῦ U_ν νὰ εἶναι

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} (\alpha_1 \pi_{1\lambda} + \alpha_2 \pi_{2\lambda} + \ldots + \alpha_\mu \pi_{\mu\lambda})\, \beta_\lambda \geqq O \tag{6}$$

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ἡ (6) ὑπάρχει διὰ κάθε β τοῦ U_ν θὰ εἶναι

$$\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha, \beta) \geqq O$$

καὶ

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha, \beta) \geqq O \tag{7}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ συνθήκη (5) θὰ εἶναι

$$\underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha, \beta) \leqq O. \tag{8}$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὅμως θὰ ὑπάρχῃ μία μόνον τῶν συνθηκῶν (4) καὶ (5) συμπεραίνομεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν συγχρόνως αἱ σχέσεις

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha,\beta) < o \qquad \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha,\beta) > o \tag{9}$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τώρα τὴν μήτραν Π_c μὲ στοιχεῖον τῆς κ γραμμῆς καὶ λ στήλης τὸ $\pi_{\kappa\lambda} - C$ ($\kappa = 1, \ldots, \mu$, $\lambda = 1 \ldots, \nu$), τότε, ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ ε_c τὴν συνάρτησιν ἐλπίδος διὰ τὴν Π_c, θὰ εἶναι

$$\varepsilon_c\,(\alpha,\beta) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} (\pi_{\kappa\lambda} - C)\, \alpha_\kappa \beta_\lambda \tag{10}$$

καὶ δὲν θὰ ὑπάρχουν δι' αὐτὴν συγχρόνως αἱ σχέσεις

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon_c\,(\alpha,\beta) < O\,,\ \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon_c\,(\alpha,\beta) > O \tag{11}$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἐκ τῆς (10) εἶναι

$$\varepsilon_c = \varepsilon - C \tag{12}$$

συμπεραίνομεν διὰ συγκρίσεως τῶν (11) καὶ (12) ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν συγχρόνως αἱ σχέσεις

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha,\beta) < C \quad \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha,\beta) > C \tag{13}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ σχέσις:

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha,\beta) < \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha,\beta) \tag{14}$$

καὶ ἄρα θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι:

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha,\beta) \geqq \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha,\beta) \tag{15}$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι καὶ

$$\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha,\beta) \leqq \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha,\beta) \tag{16}$$

συμπεραίνομεν διὰ συγκρίσεως τῶν (15) καὶ (16) ὅτι θὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\, \varepsilon(\alpha,\beta) = \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\, \varepsilon(\alpha,\beta)} \tag{17}$$

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου συμπεραίνομεν τὴν τόσον μεγάλης σημασίας πρότασιν καθ' ἣν: «κάθε παίκτης ὀρθογωνίου παιγνιδίου ἔχει μίαν ἰδανικὴν στρατηγικήν».

5. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω ὑποδειχθεισῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων εὑρέσεως τῆς ἰδανικῆς μικτῆς στρατηγικῆς ὑπάρχουν καὶ γραφικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς εὔχρηστοι μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν μήτρας τάξεως (2, ν) ἢ (μ, 2) καί, μὲ κάποιαν περισσοτέραν δυσκολίαν, εἰς τὴν περίπτωσιν μήτρας τάξεως (3, ν) ἢ (μ, 3). Εἰς τὴν περίπτωσιν μήτρας τάξεως (μ. ν) ἡ γραφικὴ μέθοδος δὲν ἔχει ἐφαρμογήν.

Ἂς θεωρήσωμεν π.χ. τὸ παιγνίδιον μὲ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ μήτρα αὕτη δὲν ἔχει σελλοσημεῖον· ἄρα θὰ πρέπῃ ν' ἀναζητήσωμεν μίαν ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικήν.

Ἐὰν ὁ Α παίζῃ τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα α καὶ τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $1-\alpha$, τοῦ Β παίζοντος τὴν πρώτην στήλην, θὰ ἔχῃ οὗτος – ὁ Α – ὡς ἐλπίδα τὸ ποσὸν

$$\alpha \,.\, 1 + (1-\alpha)\ (-1)$$

δηλαδὴ τὸ

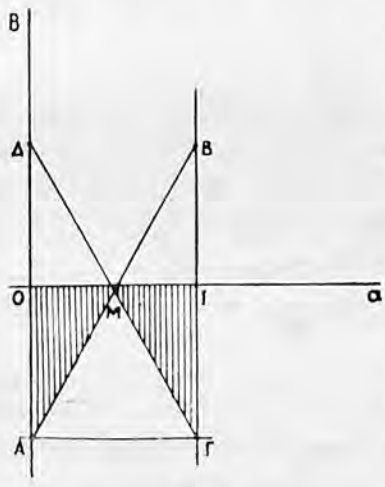
$$2\alpha - 1 \qquad (1)$$

Ἐὰν ὁ Β παίζῃ τὴν δευτέραν στήλην, ἡ ἐλπὶς τοῦ Α θὰ εἶναι

$$\alpha \,.\, (-1) + (1-\alpha) \,.\, 1$$

δηλαδὴ ἴση μὲ

$$1 - 2\alpha \qquad (2)$$



Σχ. 1.

Χαράσσομεν τώρα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων Οα καὶ Οβ τὰς εὐθείας

$$\beta = 2\alpha - 1 \ , \ \beta = 1 - 2\alpha$$

(βλέπε σχ. 1). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ δίδει τὴν ἐλπίδα τοῦ παίκτου Α συναρτήσει τῆς συχνότητος α καὶ ὅταν ὁ Β παίζῃ τὴν πρώτην στήλην, ἐνῷ τὸ ΓΔ δίδει τὴν ἐλπίδα τοῦ Α ὅταν ὁ Β παίζῃ τὴν δευτέραν στήλην.

Ἡ τεθλασμένη λοιπὸν ΑΜΓ δίδει τὰ ἐλάχιστα – δι' ὅλα τὰ α τοῦ διαστήματος [0,1] – · ἄρα ὁ Α θὰ ἐκλέξῃ τὸ α τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τῶν ἐλαχίστων αὐτῶν, δηλαδὴ τὸ α τοῦ σημείου Μ. Τοῦτο ἰσοῦται προφανῶς μὲ $\frac{1}{2}$. Ἄρα ἡ ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν Α ὑπάρχει καὶ διὰ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐκλεγεῖσα πρέπει οὗτος νὰ παίζῃ τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα ἴσην πρὸς τὴν τῆς δευτέρας. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ διὰ τὴν ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικὴν τοῦ Β.

Θεωροῦμεν τώρα τὸ παιγνίδιον μὲ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ἐὰν ὀνομάσωμεν $g(y)$ τὴν συνάρτησιν κατανομῆς τοῦ B εἰς τὴν στρατηγικήν του, τότε ἡ ὁλικὴ ἐλπὶς τοῦ A θὰ εἶναι

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \sigma(x,y)\ d\ f(x) \right] dg(y)$$

ἤ, δι' ἁπλουστέρας γραφῆς τοῦ ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν, καλοῦντες $E(f,g)$ τὴν ἐλπίδα τοῦ A ὅταν ἀκολουθῇ οὗτος τὴν κατανομὴν στρατηγικῆς f καὶ ὁ B τὴν g, τὴν

$$\boxed{\varepsilon(f,g) = \int_0^1 \int_0^1 \sigma(x,y)\ df\ dg}$$

Ὅταν τὰ

$$\Lambda_1 = \underset{f}{M}\ \underset{g}{E}\ \varepsilon(f,g)\ ,\ \Lambda_2 = \underset{g}{E}\ \underset{f}{M}\ \varepsilon(f,g)$$

ὑπάρχουν, τότε ὁ A δύναται νὰ ἐκλέξῃ μίαν κατανομὴν $f(x)$ τῆς στρατηγικῆς του εἰς τρόπον νὰ λάβῃ τουλάχιστον Λ_1 καὶ ὁ B νὰ ἐκλέξῃ μίαν στρατηγικὴν $g(y)$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ πληρώσῃ τὸ πολὺ Λ_2. Ἐὰν εἶναι $\Lambda_1 = \Lambda_2$ τότε ὁ A δύναται νὰ ἐκλέξῃ κατανομὴν στρατηγικῆς εἰς τρόπον ὥστε νὰ μὴ πάρῃ ὀλιγώτερα ἀπὸ Λ_1, ἀλλὰ πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλέξῃ ὁ B στρατηγικὴν εἰς τρόπον ὥστε νὰ τὸν ἐμποδίσῃ νὰ λάβῃ περισσότερα. Τὸ ποσὸν Λ_1 ἢ Λ_2 εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσότητος καλεῖται «τιμὴ» τοῦ παιγνιδίου.

Σχετικῶς μὲ τὰ παιγνίδια τὰ ἐπιδεχόμενα συνεχῆ στρατηγικὴν ἔχομεν τὴν ἑπομένην πρότασιν :

«Ἐὰν ἡ $\sigma(x,y)$ εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις τῶν x καὶ y τότε αἱ ποσότητες Λ_1 καὶ Λ_2 ὑπάρχουν καὶ εἶναι ἴσαι».

Ἀφοῦ ἡ $\sigma(x,y)$ εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς x καὶ y, συμπεραίνομεν ὅτι διὰ κάθε κατανομὴν $g(y)$ θὰ εἶναι ἡ

$$\int_0^1 \sigma(x,y)\ dg$$

συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x εἰς τὸ $[0,1]$. Σύμφωνα λοιπὸν πρὸς γνωστὸν θεώρημα, διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα Stieltjes [1], θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ

$$\underset{f}{M}\ \varepsilon(f,g)$$

ὑπάρχει καὶ εἶναι

$$\underset{f}{M}\ \varepsilon(f,g) = \underset{x}{M} \int_0^1 \sigma(x,y)\ dg \tag{1}$$

Ἄς εἶναι x_g μία τιμὴ τοῦ x καθιστῶσα μέγιστον τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1)· θὰ ἔχωμεν

$$\underset{f}{M} \int_0^1 \sigma(x,y)\ dg = \int_0^1 \sigma(x_g,y)\ dg \tag{2}$$

Διὰ ὁλοκλήρωμα Stieltjes βλέπε π.χ. H. Cramér: Mathematical methods of Statistics.

Σύμφωνα μὲ γνωστὸν πάλιν θεώρημα διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα Stieltjes, θὰ εἶναι

$$\int_0^1 \sigma(x_g, y)\, dg \geqq \int_0^1 \left[\underset{x}{\mathrm{E}}\ \underset{y}{\mathrm{E}}\ \sigma(x,y)\right] dg$$

ἐπειδὴ δέ,

$$\int_0^1 \left[\underset{x}{\mathrm{E}}\ \underset{y}{\mathrm{E}}\ \sigma(x,y)\right] dg = \left[\underset{x}{\mathrm{E}}\ \underset{y}{\mathrm{E}}\ \sigma(x,y)\right] \int_0^1 dg$$

καὶ

$$\int_0^1 dg = 1$$

συμπεραίνομεν ὅτι

$$\underset{f}{\mathrm{M}}\ \varepsilon(f, g) \leqq \underset{x}{\mathrm{E}}\ \underset{y}{\mathrm{E}}\ \sigma(x, y)$$

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἀνισότης ὑπάρχει διὰ κάθε $g(y)$ καὶ τὸ δεξιὸν μέλος της δὲν περιέχει τὴν $g(y)$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ

$$\underset{f}{\mathrm{M}}\ \varepsilon(f, g)$$

ἔχει κάτω πέρας τὸ ὁποῖον γράφομεν

$$\underset{g}{\mathrm{b}}\ \underset{f}{\mathrm{M}}\ \varepsilon(f, g) \tag{3}$$

Τοῦτο σημαίνει, ὡς γνωστόν, ὅτι ὑπάρχει μία ἀκολουθία κατανομῶν

$$g_1,\ g_2,\ g_3, \ldots,\ g_\nu, \ldots$$

εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

$$\underset{g}{\mathrm{b}}\ \underset{f}{\mathrm{M}}\ \varepsilon(f, g) = \lim_{\nu \to \infty} \underset{f}{\mathrm{M}}\ \varepsilon(f, g) \tag{4}$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία τῶν κατανομῶν ἐκλέγεται εἰς τρόπον ὥστε νὰ συγκλίνῃ πρὸς μίαν κατανομὴν G εἰς ὅλα τὰ σημεῖα συνεχείας τῆς G.

Καλέσωμεν x_0 μίαν τιμὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$\underset{x}{\mathrm{M}} \int_0^1 \sigma(x, y)\, dG = \int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dG \tag{5}$$

Συμφώνως πρὸς γνωστὸν θεώρημα — ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ὁλοκληρώματος Stieltjes — θὰ ἔχωμεν

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg_\nu = \int_0^1 \sigma(x_0\, y)\, dG \tag{6}$$

Ἐπειδὴ εἶναι διὰ κάθε ν,

$$\int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg_\nu \leqq \underset{x}{\mathrm{M}} \int_0^1 \sigma(x, y)\, dg_\nu$$

θὰ εἶναι καὶ

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg_\nu \leqq \lim_{\nu \to \infty} \underset{x}{\mathrm{M}} \int_0^1 \sigma(x, y)\, dg_\nu \tag{7}$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν, ἐκ τῶν σχέσεων (5), (6), (7) ὅτι

$$\underset{x}{M} \int_0^1 \sigma(x, y)\, d\,G \leqq \lim_{\nu \to \infty} \underset{x}{M} \int_0^1 \sigma(x, y)\, dg_\nu \qquad (8($$

Χρησιμοποιοῦντες πάλιν γνωστὸν θεώρημα, ἐπὶ τῆς ὁλοκληρώσεως κατὰ Stieltjes, ἔχομεν ἐκ τῆς (8) τὴν

$$\underset{f}{M}\, \varepsilon(F, G) \leqq \lim_{\nu \to \infty} \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g_\nu) \qquad (9)$$

καὶ συνεπῶς, μέσῳ τῶν (3) καὶ (4) ὅτι

$$\underset{f}{M}\, \varepsilon(f, G) \leqq \underset{g}{b}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \qquad (10)$$

Ἐκ τῆς γνωστῆς ὅμως ἐννοίας τοῦ κατωτέρου πέρατος εἶναι

$$\underset{g}{b}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \leqq \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, G) \qquad (11)$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν

$$\underset{g}{b}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) = \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, G) \qquad (12)$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις σημαίνει ὅτι τὸ κατώτερον ὅριον τῆς

$$\underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g)$$

λαμβάνεται διὰ $g = G$, δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις ἔχει ἕνα ἐλάχιστον. Τὸ ἐλάχιστον αὐτὸ συμβολίζομεν μὲ m· δηλαδὴ θέτομεν

$$m = \underset{g}{E}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \qquad (13)$$

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις τοῦ

$$n = \underset{f}{M}\, \underset{g}{E}\, \varepsilon(f, g) \qquad (14)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι εἶναι $m = n$.

Πράγματι ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ μίαν κατανομὴν g, ὁ ἀριθμὸς x_g ἱκανοποιεῖ τὰς ἑπομένας σχέσεις

$$\int_0^1 \sigma(x_g, y)\, dg = \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \geqq \underset{g}{E}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) = m$$

Συνεπῶς διὰ κάθε g θὰ ὑπάρχῃ x_0 τοῦ [0,1] εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg \geqq m \qquad (15)$$

Ἂς ὀνομάσωμεν τώρα μ θετικὸν ἀρκετὰ μικρόν. Ἐφ' ὅσον ἡ σ(x,y) ὑπετέθη συνεχής, θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς λ εἰς τρόπον ὥστε διὰ

$$\left| x_1 - x_2 \right| < \frac{1}{\lambda} \qquad \left| y_1 - y_2 \right| < \frac{1}{\lambda}$$

νὰ εἶναι

$$\left| \sigma(x_1, y_1) - \sigma(x_2, y_2) \right| < \mu$$

Συμβολίζομεν μὲ g_λ μίαν κλιμακωτὴν συνάρτησιν κατανομῆς μὲ ταξικὸν διάστημα πλάτους $1:\lambda$ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$g_\lambda(y) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \varphi_i \qquad \text{διὰ } \frac{\rho}{\lambda} \leqq y \, \frac{\rho+1}{\lambda}$$

ὅπου φ_i ἡ συχνότης τοῦ ταξικοῦ διαστήματος i.

Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ κάθε x τοῦ $[o,1)$ θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς $j \leqq \lambda$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\left| x - \frac{j}{\lambda} \right| < \frac{1}{\lambda}$$

καὶ συνεπῶς, λόγω τῆς συνεχείας τῆς $\sigma(x,y)$

$$\left| \int_0^1 \left[\sigma(x,y) - \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, y\right)\right] dg_\lambda \right| \leqq \int_0^1 \mu \, dg_\lambda$$

καὶ ἀφοῦ

$$\int_0^1 dg_\lambda = 1$$

θὰ εἶναι

$$\left| \int_0^1 \left[\sigma(x,y) - \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, y\right)\right] dg_\lambda \right| \leqq \mu$$

Ἄρα διὰ κάθε x τοῦ $[0,1]$ θὰ ὑπάρχῃ $j \leqq \lambda$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1 \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, y\right) dg_\lambda \geqq \int_0^1 \sigma(x,y)\, dg_\lambda - \mu \tag{16}$$

καὶ συνεπῶς, ἐκ τῶν (15) καὶ (16) συμπεραίνομεν ὅτι θὰ ὑπάρχῃ $j \leqq \lambda$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1 \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, y\right) dg_\lambda \geqq m - \mu \tag{17}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ g_λ ὑπετέθη κλιμακωτὴ συνάρτησις, θὰ ἔχωμεν

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \varphi_\kappa \geqq m - \mu \tag{18}$$

Σύμφωνα ὅμως μὲ γνωστὴν πρότασιν τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας, θὰ ὑπάρχουν τότε λ πραγματικοὶ υ_j $(j = 1, \ldots, \lambda)$, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι καὶ

$$\sum_{j=1}^{j=\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \varphi_\kappa \upsilon_j \geqq m - \mu \tag{19}$$

Ὁρίζομεν τώρα μίαν κλιμακωτὴν συνάρτησιν κατανομῆς f_0 μὲ ταξικὸν διάστημα πλάτους $1 : \lambda$, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{j=\rho} \upsilon_j \qquad \text{διὰ } \frac{\rho}{\lambda} \leqq x < \frac{\rho+1}{\lambda}$$

Τότε θὰ εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος Stieltjes

$$\int_0^1 \sigma(x, y)\, df_0 = \sum_{j=1}^{j=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, y\right) \upsilon j$$

Ἰδιαιτέρως, θὰ ἔχωμεν

$$\int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0 = \sum_{j=1}^{j=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \upsilon j \tag{20}$$

$$\text{διὰ } \kappa = 1, \ldots, \lambda$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἐξισώσεως κ τάξεως ἐκ τῶν (20) ἐπὶ φ_κ καὶ προσθέσεως λαμβάνομεν ἐκ τῆς (19)

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \left[\varphi_\kappa \int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0\right] = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \left[\varphi_\kappa \sum_{j=1}^{j=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \upsilon j\right] =$$

$$\sum_{j=1}^{j=\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \varphi_\kappa \, \upsilon_j > m - \mu \tag{21}$$

Ἀφοῦ ἡ (21) ὑπάρχει δι' ὅλα τὰ φ_κ $(\kappa = 1, \ldots, \lambda)$ λαμβάνομεν $\varphi_k = 1$ καὶ $\varphi_l = 0$ διὰ $l \neq k$. Ἄρα

$$\int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0 > m - \mu \quad \text{διὰ } \kappa = 1, \ldots, \lambda \tag{22}$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὅμως ἡ $\sigma(x, y)$ εἶναι συνεχὴς θὰ ἔχωμεν ὅτι διὰ κάθε y θὰ ὑπάρχῃ κάποιον κ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1 \sigma(x, y)\, df_0 \geqq \int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0 - \mu \tag{23}$$

Ἐκ τῶν (22) καὶ (23) συμπεραίνομεν ὅτι διὰ κάθε y

$$\int_0^1 \sigma(x, y)\, df_0 \geqq m - 2\mu \tag{24}$$

Δι' ἐφαρμογῆς γνωστοῦ θεωρήματος διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα Stieltjes βλέπομεν ὅτι διὰ κάθε κατανομὴν g εἶναι

$$\iota(f_0, g) \geqq \int_0^1 (m - 2\mu)\, dg$$

καὶ

$$\varepsilon(f_0,\ g) \geqq m - 2\mu.$$

Καὶ ἄρα

$$\underset{g}{E}\ \varepsilon(f_0,\ g) \geqq m - 2\mu \tag{25}$$

Μέσῳ τώρα τῶν (14) καὶ (25) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μεγίστου λαμβάνομεν

$$n = \underset{f}{M}\ \underset{g}{E}\ \varepsilon(f,\ g) \geqq \underset{g}{E}\ \varepsilon(f_0,\ g) \geqq m - 2\mu$$

Δηλαδὴ εἶναι

$$n \geqq m - 2\mu$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ μ ὑπετέθη μικρότερος παντὸς δοθέντος θετικοῦ, θὰ εἶναι

$$n \geqq m \tag{26}$$

Ἐξ ἄλλου ὅμως εἶναι, λόγῳ προαποδειχθέντος θεωρήματος διὰ τὰ ὀρθογώνια παιγνίδια καὶ τῶν (13) καὶ (14)

$$n \leqq m \tag{27}$$

Ἄρα ἔχομεν τελικῶς ἐκ τῶν (26) καὶ (27)

$$n = m.$$

7. ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΙΓΝΙΔΙΑ ΜΕ ν ΠΑΙΚΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟΝ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΜΗΔΕΝ

Θὰ ἐξετάσωμεν ὀρθογώνια παιγνίδια μὲ ν παίκτας· δηλαδὴ παιγνίδια ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ν κινήσεις. Εἰς τὴν i κίνησιν ($i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$) ὁ παίκτης A_i , μὴ ἔχων πληροφορίας διὰ τὰς προηγηθείσας κινήσεις, ἐκλέγει ἕνα ἀριθμὸν α_i ἀπὸ ἕνα σύνολον E_i . Μόλις παιχθῇ καὶ ἡ ν–στὴ κίνησις τότε ὁ παίκτης A_i λαμβάνει τὸ ποσὸν $\pi_i\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu)$. Ἐπειδὴ τὸ παιγνίδιον θεωρεῖται μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, θὰ εἶναι

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \pi_i\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu) = o$$

Διὰ τὴν ἁπλότητα τοῦ συμβολισμοῦ ἀντικαθιστῶμεν τὰ σύμβολα A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$, διὰ τοὺς παίκτας, μὲ τὰ i, $(i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$, γράφομεν δὲ τὸ σύνολον τῶν παικτῶν μὲ τὸ

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$$

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι τὸ σύνολον τῶν παικτῶν S διασπᾶται εἰς δύο ὑποσύνολα — δύο ὁμάδας παικτῶν — τὸ ὑποσύνολον R καὶ τὸ ὑποσύνολον $\overline{R}$.

Ἔχομεν δηλαδὴ

$$R \cup \overline{R} = S$$

Ὑποθέτομεν τοὺς παίκτας R συνεργαζομένους μεταξύ των καθὼς καὶ τοὺς $\overline{R}$. Τότε ὅμως τὰ R καὶ $\overline{R}$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο παῖκται ἑνὸς παιγνιδίου μὲ δύο παίκτας. Ὑποθέτομεν ὅτι, εἰς τὸ ἀρχικὸν παιγνίδιον, ὁ παίκτης i ἐκλέγει ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ τὸ σύνολον E_i καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι

$$R = [i_1, i_2, i_3, \ldots i_\lambda], \ \overline{R} = [j_1, j_2, j_3, \ldots, j_\mu] \quad (\lambda + \mu = \nu)$$

Τότε εἰς τὸ τεχνητὸν παιγνίδιον τῶν δύο παικτῶν, μὲ παίκτας R καὶ $\overline{R}$, ὁ παίκτης R ἐκλέγει ἓν στοιχεῖον ἀπὸ τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον (1) E τῶν συνόλων

$$E_{i_1}, E_{i_2}, E_{i_3}, \ldots, E_{i_\lambda}$$

καὶ ὁ παίκτης $\overline{R}$ ἓν στοιχεῖον ἀπὸ τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $\overline{E}$ τῶν συνόλων

$$E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3}, \ldots, E_{j_\mu}$$

Ἂς ὀνομάσωμεν X_l ὅπου

$$X_l = [x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}, \ldots, x_{l_\mu}] \qquad [\ ] = \text{πίναξ γραμμή},$$

τὰ στοιχεῖα τοῦ E καὶ Y_m, ὅπου

$$Y_m = [x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots, x_{m_\nu}]$$

τὰ στοιχεῖα τοῦ $\overline{E}$.

Εἶναι φανερὸν τότε ὅτι ἡ συνάρτησις πληρωμῆς εἰς τὸν σύνθετον παίκτην R θὰ εἶναι ἡ

$$\pi_i \ (X_l, Y_m)$$

Ἐὰν ὁ R χρησιμοποιῇ τὴν στρατηγικὴν X_l καὶ ὁ $\overline{R}$ τὴν Y_m τότε ἡ συνολικὴ πληρωμὴ εἰς ἕκαστον τῶν R καὶ $\overline{R}$, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\sum_R \pi_i (X_l, Y_m) \ , \ \sum_{\overline{R}} \pi_i (X_l, Y_m)$$

γραφόμεναι, συντόμως, ἀντιστοίχως

$$\pi_R (X_l, Y_m) \ , \ \pi_{\overline{R}} (X_l, Y_m)$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι τὸ παιγνίδιον εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν θὰ ἔχωμεν,

$$\pi_R + \pi_{\overline{R}} = 0$$

Ἐὰν τώρα τὸ E περιέχῃ r στοιχεῖα, τὰ περιλαμβανόμενα εἰς τὸν πίνακα

$$[X_1, X_2, \ldots, X_l, \ldots, X_r]$$

καὶ τὸ $\overline{E}$ s στοιχεῖα, τὰ περιλαμβανόμενα εἰς τὸν πίνακα

$$[Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \ldots, Y_s]$$

τότε μία μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν R θὰ εἶναι μέλος τοῦ u_r καὶ μία μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν $\overline{R}$ θὰ εἶναι μέλος τοῦ u_s.

Ἐὰν τώρα ὁ R χρησιμοποιῇ τὴν μικτὴν στρατηγικὴν

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r]$$

καὶ ὁ $\overline{R}$ τὴν μικτὴν στρατηγικὴν

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_s]$$

---

(1) «Καρτεσιανὸν γινόμενον» δύο συνόλων E_1 καὶ E_2 (ὄχι ἀπαραιτήτως ὑποσυνόλων τοῦ αὐτοῦ χώρου) καλεῖται ὡς γνωστὸν τὸ σύνολον F ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x_1, x_2), ὅπου $x_1 \in E_1$ καὶ $x_2 \in E_2$.

τότε ἡ ὁλικὴ ἐλπὶς τῶν R καὶ $\bar{R}$, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\sum_{m=1}^{m=s} \sum_{l=1}^{l=r} \pi_R \, \alpha_l \, \beta_m , \quad \sum_{m=1}^{m=s} \sum_{l=1}^{l=r} \pi_{\bar{R}} \, \alpha_l \, \beta_m$$

ἢ δι' ἁπλουστέρας γραφῆς

$$\varepsilon_R(\alpha, \beta), \; \varepsilon_{\bar{R}}(\alpha, \beta).$$

Ἐκ τῆς προηγηθείσης θεωρίας τῶν ὀρθογωνίων παιγνιδίων μὲ δύο παίκτας, ἔχομεν ὅτι

$$\underset{\alpha}{M} \, \underset{\beta}{E} \, \varepsilon_R(\alpha, \beta) = \underset{\beta}{E} \, \underset{\alpha}{M} \, \varepsilon_R(\alpha, \beta)$$

Ἐὰν θέσωμεν

$$\Theta(R) = \underset{\alpha}{M} \, \underset{\beta}{E} \, \varepsilon_R(\alpha, \beta)$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις Θ(R), ὡρισμένη δι' ἕκαστον R τοῦ S, δίδει τὸ ὁλικὸν ποσὸν τὸ ὁποῖον ἐλπίζει νὰ λάβῃ τὸ σύνολον τῶν μελῶν τῆς ὁμάδος R. Ἡ συνάρτησις αὕτη καλεῖται «χαρακτηριστική» συνάρτησις τοῦ παιγνιδίου.

Σχετικῶς μὲ τὰ παιγνίδια μὲ ν παίκτας καὶ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν ὑπάρχουν αἱ ἑπόμεναι δύο θεμελιώδεις προτάσεις:

Πρότασις Ι. Ἐὰν Θ (R) εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἑνὸς παιγνιδίου μὲ παίκτας τοῦ

$$R = [1, 2, 3..., \nu]$$

τότε α) $\Theta(S) = O$

β) $\Theta(\bar{R}) = -\Theta(R)$ ὅπου $R \subset S$

γ) $\Theta(Q+R) \geq \Theta(Q) + \Theta(R)$, ὅπου $Q \subset S$, $R \subset S$, $Q \cap R = \emptyset$

Πρότασις ΙΙ. Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τῆς προτάσεως Ι εἶναι

α) $\Theta(\Phi) = O$ $\qquad \emptyset$ = τὸ κενὸν σύνολον

β) $\Theta(R_1 + R_2 + ... + R_\nu) \geq \Theta(R_1) + \Theta(R_2) + ... + \Theta(R_\nu)$

ὅπου $R_i \subset S$ $(i = 1, ..., \nu)$, $R_i \sqcap R_j = \emptyset$, $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., \nu)$

γ) $\Theta(R_1) + \Theta(R_2) + ... + \Theta(R_\eta) \geq O$, ὅπου

$R_i \subset S$ $(i = 1, ..., \nu)$, $R_i \cap R_j = \Phi$, $i \neq j$, $(i, j = 1, ..., \nu)$

Τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων αὐτῶν παραλείπομεν ὡς ἐξερχομένας τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος.

8. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ von NEUMANN - MORGESTERN ΚΑΙ Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Τὰ παιγνίδια τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε ἦσαν παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, ταῦτα δέ, καθὼς καὶ ἀλλοῦ ἀνεφέρθη, παίζονται συνήθως εἰς τὰς συγκεντρώσεις—σαλόνια, καζίνα κ.τ.τ. Ἐρχόμεθα ἐδῶ νὰ σημειώσωμεν—καὶ τοῦτο ἀκριβῶς ὑπῆρξεν ἡ ἀφορμὴ τῆς εὐρυτέρας γνωστοποιήσεως τῆς θεωρίας—ὅτι δὲν εἶναι τὰ μόνα δυνάμενα νὰ θεωρηθοῦν παιγνίδια, διότι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενός. Τὰ τελευταῖα δὲ εἶναι πολὺ χρήσιμα, ὑπὸ ἔποψιν ἐφαρμογῶν, εἰς τὴν οἰκονομίαν. Δηλαδὴ ἐὰν θεωρήσωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, τὰς ἀμοιβαίας σχέσεις ἑνὸς ἐργατοσυνόλου μὲ μίαν βιομηχανίαν ὡς ἓν παιγνίδιον δύο προσώπων, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ παιγνίδιον αὐτὸ θὰ εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενός, δεδομένου ὅτι ὡρισμέναι ἐνέργειαι δύνανται ν' ἀποβοῦν ἐπικερδεῖς καὶ διὰ τοὺς δύο παίκτας, ἐνῷ ἄλλαι ἐνέργειαι εἶναι δυνατὸν νὰ βλάψουν ἢ καὶ τοὺς δύο ἢ ἕνα τῶν παικτῶν. Γίνεται ἀμέσως φανερὸν ἐκ τοῦ παραδείγματος ὅτι μία θεωρία παιγνιδίων τὰ ὁποῖα εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενὸς θὰ ἦτο πολὺ χρήσιμος.

Ἡ μόρφωσις τῆς νέας θεωρίας ἐπιτυγχάνεται δι' ἐπεκτάσεως τῆς προηγηθείσης τῶν ν παικτῶν μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. Περισσότερον συγκεκριμένα, εἰσάγεται εἰς τὸ παιγνίδιον ἓν φανταστικὸν πρόσωπον καθαρῶς μαθηματικῆς ἐπινοήσεως, καλούμενον ἀγγλιστὶ mathematical fiction. Τὸ πρόσωπον αὐτὸ χωρὶς νὰ λαμβάνῃ μέρος εἰς τὰς κινήσεις τοῦ παιγνιδίου χάνει τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον κερδίζουν οἱ ἄλλοι παῖκται καὶ ἀντιστρόφως. Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ φανταστικοῦ αὐτοῦ προσώπου ἐπιτυγχάνεται ἡ σύνθεσις ἑνὸς παιγνιδίου $\nu+1$ προσώπων μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, ὁπότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθοῦν τὰ συμπεράσματα τῆς προηγηθείσης θεωρίας.

Εἰς τὸ ἑξῆς τὰ παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενὸς θὰ καλοῦνται «γενικὰ παιγνίδια».

Εἶναι ἀμέσως φανερὸν ὅτι διὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῶν γενικῶν παιγνιδίων ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῶν ὀρθογωνίων παιγνιδίων καὶ τοῦτο διότι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς στρατηγικῆς δυνάμεθα πάντοτε ν' ἀναγάγωμεν κάθε γενικὸν παιγνίδιον εἰς ἓν γενικὸν παιγνίδιον μὲ ὀρθογώνιον μορφήν.

Τοιουτοτρόπως ἓν γενικὸν παιγνίδιον μὲ τοὺς παίκτας

$$S_\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

εἶναι ὡρισμένον ὅταν δοθοῦν ν σύνολα – ἐκλογῆς

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\nu$$

καὶ ν συναρτήσεις πληρωμῆς

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu$$

Ἕνα παίξιμο τοῦ παιγνιδίου εἶναι ἡ ἑξῆς διαδικασία: Ὁ παίκτης i ($i = 1, 2, 3. \ldots, \nu$) ἐκλέγει ἓν στοιχεῖον x_i ἀπὸ τὸ σύνολον E_i, τὴν ἐκλογήν του δὲ ταύτην καθιστᾷ γνωστὴν εἰς ἕνα διαιτητήν, χωρὶς οὐδεὶς τῶν ἄλλων παικτῶν νὰ λάβῃ γνῶσιν· ὅταν πραγματοποιηθοῦν ὅλαι αἱ ἐκλογαὶ τότε ὁ διαιτητὴς πληρώνει εἰς τὸν παίκτην i τὸ ποσὸν

$$\sigma_i\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$$

Τὸ παιγνίδιον θὰ εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν ἐὰν δι' οἱονδήποτε

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu]$$

ἀνῆκον εἰς τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_\nu$$

ἔχωμεν,

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sigma_i (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu) = 0$$

Ἐρχόμεθα τώρα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δὲν ὑπάρχει.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ἓν παιγνίδιον ν προσώπων μέ τοὺς παίκτας

$$S_\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

καὶ ν σύνολα ἐκλογῆς

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\nu$$

καθὼς καὶ ν συναρτήσεις πληρωμῆς

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu$$

ὑποθέτομεν ὅτι λαμβάνομεν τὸ $E_{\nu+1}$ ὡς ἓν αὐθαίρετον σύνολον καὶ ὅτι ορίζομεν τὸ $\sigma_{\nu+1}$ εἰς τρόπον ὥστε διὰ κάθε μέλος

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu]$$

τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots E_\nu$$

νὰ εἶναι

$$\sigma_{\nu+1} + \sum_{i=1}^{i=1} \sigma_i = 0$$

Τότε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰ E_i $(i = 1, 2, 3, \ldots \nu + 1)$ ὡς σύνολα ἐκλογῆς καὶ τὰς σ_i $(i = 1. 2, 3, \ldots . \nu + 1)$ ὡς συναρτήσεις πληρωμῆς (payoff functions) ἑνὸς παιγνιδίου μὲ ν + 1 παίκτας· ἄρα θὰ ἔχωμεν, καθ' ὃν τρόπον ἐδόθη ὁ ὁρισμὸς τῆς $\sigma_{\nu+1}$, ἓν παιγνίδιον μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν.

Δὲν πρέπει ὅμως νὰ νομισθῇ ὅτι διὰ μιᾶς ἀνήχθη ἡ γενικὴ θεωρία τῶν παιγνιδίων εἰς τὴν θεωρίαν μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ τοῦτο διότι διὰ τὸ εἰσαχθὲν ν + 1 πρόσωπον ἀληθεύουν μερικαὶ προτάσεις. Ἐκτὸς τοῦ ὅτι τὸ ν + 1 πρόσωπον εἶναι ἓν φανταστικὸν δημιούργημα τῆς μαθηματικῆς τεχνικῆς, ἐπὶ πλέον αἱ παραδεδεγμέναι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως πληρωμῆς εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς γενομένης ἐκλογῆς ὑπὸ τοῦ παίκτου ν + 1. Παρ' ὅλον ὅτι αἱ διαφοραὶ αὗται εἶναι βασικαί, ἐν τούτοις καταβάλλεται προσπάθεια ὅπως γίνῃ ἡ ἐπέκτασις ἑνὸς γενικοῦ παιγνιδίου ν προσώπων εἰς ἓν παιγνίδιον ν + 1 προσώπων μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν λόγῳ τῆς χρησιμότητος ἣν ἔχουν τὰ γενικὰ παιγνίδια διὰ τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα.

Ἂς σημειώσωμεν μὲ Π ἓν παιγνίδιον ν προσώπων καὶ μὲ $\overset{*}{\Pi}$ τὴν ἐπέκτασίν του εἰς ἓν παιγνίδιον ν + 1 προσώπων μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. Ἐκ τῶν προηγηθεισῶν παραγράφων βλέπομεν ὅτι τὸ $\overset{*}{\Pi}$ ἐπιδέχεται μίαν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν Θ, ὡρισμένην ἐπὶ ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου

$$S_{\nu+1} = \{ 1, 2, 3, \ldots \nu + 1 \}$$

τῶν παικτῶν τοῦ $\overset{*}{\Pi}$, ἡ ὁποία δι' ἓν ὑποσύνολον R τοῦ $S_{\nu+1}$ θὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν $\Theta(R)$ καὶ θὰ παριστάνῃ τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἐλπίζουν νὰ κερδίσουν οἱ παῖκται τοῦ R ἐὰν συνεργάζωνται. Καλοῦμεν ἐπίσης τὴν Θ «χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν» τοῦ ἀρχικοῦ παιγνιδίου Π.

Ἐρχόμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὰς ἑπομένας θεμελιώδεις προτάσεις:

Πρότασις I. Ἐὰν Θ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἑνὸς γενικοῦ παιγνιδίου μὲ παίκτας τοὺς

$$S_\nu = \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$$

τότε θὰ εἶναι

$$\Theta(\emptyset) = 0 \qquad\qquad \emptyset = \text{τὸ κενὸν σύνολον}$$

Πράγματι ἐὰν Θ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις τοῦ γενικοῦ παιγνιδίου Π τοῦ ὁποίου οἱ παῖκται ἀνήκουν εἰς τὸ S_ν, τότε θὰ ὑπάρχῃ ἓν ἐπεκτεταμένον παιγνίδιον $\overset{*}{\Pi}$ μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ παίκτας ἀνήκοντας εἰς τὸ

$$S_{\nu+1} = \{1, 2, 3, \ldots, \nu+1\}$$

εἰς τρόπον ὥστε ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις $\overset{*}{\Theta}$ τοῦ $\overset{*}{\Pi}$ νὰ ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν

$$\Theta(R) = \overset{*}{\Theta}(R) \qquad \text{διὰ } R \subseteq S_\nu \tag{1}$$

Τότε ὅμως σύμφωνα μὲ προαναφερθείσας προτάσεις θὰ εἶναι

$$\Theta(\Phi) = \overset{*}{\Theta}(\emptyset) = \overset{*}{\Theta}(-S_{\nu+1}) = -\overset{*}{\Theta}(S_{\nu+1}) = -0 = 0$$

ἄρα καὶ

$$\Theta(\emptyset) = 0$$

Πρότασις II. Ἐὰν Θ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἑνὸς γενικοῦ παιγνιδίου μὲ παίκτας τοὺς

$$S_\nu = \{1, 2, 3, \ldots \nu\}$$

τότε θὰ εἶναι

$$\Theta(Q+R) \geqq \Theta(Q) + \Theta(R)$$

διὰ

$$Q \subset S_\nu \qquad R \subset S_\nu \qquad Q \cap R = \emptyset$$

Ἐπειδὴ πάλιν συμφώνως πρὸς προαναφερθεῖσαν πρότασιν εἶναι

$$\overset{*}{\Theta}(Q+R) \geqq \overset{*}{\Theta}(Q) + \overset{*}{\Theta}(R)$$

διὰ

$$Q \subset S_\nu \qquad R \subset S_\nu \qquad Q \cap R = \emptyset$$

συμπεραίνομεν, λόγῳ τῆς ἰσότητος (1) τῆς προηγουμένης προτάσεως, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$\Theta(Q+R) \geqq \Theta(Q) + \Theta(R)$$

διὰ

$$Q \subset S_\nu \qquad R \subset S_\nu \qquad Q \cap R = \emptyset$$

Πρότασις III. Ἐὰν Θ εἶναι μία πραγματικὴ συνάρτησις ὡρισμένη ἐπὶ τῆς κλάσεως ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ S_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν αἱ προτάσεις I καὶ II, τότε ὑπάρχει ἓν γενικὸν παιγνίδιον Π τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν Θ ὡς χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς τρίτης ταύτης προτάσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $\overset{*}{\Theta}$ ἐπὶ τῶν κλάσεων ὅλων τῶν ὑποσυνόλων $S_{\nu+1}$ ὡς ἀκολούθως:

$$\overset{*}{\Theta}(R) = \Theta(R) \tag{2}$$

ὅταν τὸ $\nu+1$ δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ R καὶ

$$\overset{*}{\Theta}(R) = -\Theta(S_{\nu+1} - R) \tag{3}$$

ὅταν τὸ $\nu+1$ ἀνήκῃ εἰς τὸ R.

Χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\nu+1$ ἀνήκει εἰς τὸ Q καὶ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ R.

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὰ δύο σύνολα R καὶ $S_{\nu+1} - (Q \cup R)$ εἶναι ξένα ὑποσύνολα τοῦ S_ν· ἄρα κατὰ τὴν πρότασιν II θὰ εἶναι

$$\Theta(R \cup [S_{\nu+1} - (Q \cup R)]) \geqq \Theta(R) + \Theta[S_{\nu+1} - (Q \cup R)] \tag{4}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι τὰ Q καὶ R εἶναι ξένα θὰ ἔχωμεν

$$R \subseteqq S_{\nu+1} - Q$$

καὶ ἄρα

$$R \cup [S_{\nu+1} - (Q \cup R)] = R \cup [S_{\nu+1} - Q] = S_{\nu+1} - Q \tag{5}$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) ἔχομεν λοιπὸν

$$\Theta(S_{\nu+1} - Q) \geqq \Theta(R) + [S_{\nu+1} - (C \cup R)]$$

ἢ λόγῳ τῶν (2) καὶ (3)

$$-\overset{*}{\Theta}(Q) \geqq \overset{*}{\Theta}(R) - \overset{*}{\Theta}(Q \cup R)$$

Ἄρα καὶ

$$\overset{*}{\Theta}(Q \cup R) \geqq \overset{*}{\Theta}(Q) + \overset{*}{\Theta}(R)$$

ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΕΠΟΧΙΑΚΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΣ ΣΕΙΡΑΣ

Τοῦ κ. Ε. Δ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ, Καθηγητοῦ τῆς Α.Σ.Β.Σ.

1. Εἰσαγωγή.

Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν μέγα ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν αἱ λεγόμεναι περιοδικαὶ κινήσεις αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν χώραν κατὰ χρονικὰ διαστήματα ἴσα καὶ μὲ μίαν μορφὴν σχεδὸν σταθεράν. Ὁ πλέον συνήθης τύπος τοιούτων κινήσεων, τὸν ὁποῖον συχνότερον συναντῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν οἰκονομικῶν σειρῶν, εἶναι ἡ ἐποχιακὴ κίνησις.

Ὅταν τὰ δεδομένα εἶναι ἐτήσια ἡ ἀνάλυσις περιορίζεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς γενικῆς τάσεως καὶ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων. Εἴς τινας περιπτώσεις ὅμως αἱ περιοδικαὶ κινήσεις ἀναφαίνονται εἰς χρονικὰ διαστήματα βραχύτερα τοῦ ἔτους (μῆνας, ἑβδομάδας, ὥρας). Ἡ ἐποχιακὴ μεταβολὴ παρουσιάζει τὴν διακύμανσιν τοῦ μεγέθους ἑνὸς φαινομένου, ἡ ὁποία δύναται νὰ ὀφείλεται πραγματικῶς εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐποχικότητος, ὡς π.χ. ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τῶν λαχανικῶν καὶ τῶν φρούτων συνδεομένη μὲ τὴν συγκομιδήν, ἡ μεταβολὴ εἰς τὴν παραγωγὴν συνδεομένη μὲ τὰς ἀγορὰς ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῶν ἑορτῶν, ἡ μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς νομισματικῆς κυκλοφορίας συνδεομένη μὲ τὴν χορήγησιν τῶν δώρων ἢ τὴν ἔκτακτον πιστοδότησιν ἑνὸς κλάδου παραγωγῆς κ.ο.κ.

Τὸ πρόβλημα συνίσταται τότε νὰ ἀποκαλυφθῇ ὁ ἐποχιακὸς χαρακτὴρ ἑνὸς φαινομένου, ὅταν ὑφίσταται τοιοῦτος, μετὰ ταῦτα δὲ νὰ γίνῃ ἀπαλοιφὴ τῶν ἐποχιακῶν διακυμάνσεων διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ μία νέα σειρὰ δεδομένων ἀπηλλαγμένων τῆς ἐποχαικῆς ἐπιδράσεως καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας νὰ γίνῃ ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἄλλων κινήσεων (γενικῆς τάσεως, κυκλικῶν διακυμάνσεων).

Ἡ ὕπαρξις μιᾶς ἐποχιακῆς κινήσεως εἰς μίαν σειρὰν δύναται νὰ ἀποκαλυφθῇ ἐποπτικῶς, οὕτως εἰπεῖν, διὰ γραφικῆς παραστάσεως τῆς σειρᾶς. Ἡ γραφικὴ ὅμως παράστασις δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως, ἥτις ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέραν στατιστικὴν καὶ τεχνικὴν ἐπεξεργασίαν.

2. Μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως.

Ὑπάρχουν πολλαὶ μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως, ὡς ἡ μέθοδος τῶν μηνιαίων μέσων, ἡ μέθοδος τῶν λόγων πρὸς τὸν κινητὸν μέσον, ἡ μέθοδος τῶν λόγων πρὸς τὸν ἐτήσιον μέσον, ἡ μέθοδος τῶν σχετικῶν κρίκων ἢ τῆς ἁλύσεως τῶν διαδοχικῶν λόγων (méthode des chaînes de rapport aux mois précedents). Ἡ προτίμησις τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης μεθόδου δὲν ὑπόκειται εἰς γενικόν τινα κανόνα καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν διαθέσιμον χρόνον πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν, οἱ ὁποῖοι κατὰ κανόνα εἶναι μακροί, καὶ ἀπὸ τὰς τιθεμένας βασικῶς ὑποθέσεις διὰ τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως ἥτις προσιδιάζει εἰς τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων. Τὰ ἀποτελέσματα διαφέρουν προφανῶς μεταξύ των ἀπὸ τῆς μιᾶς μεθόδου εἰς τὴν ἄλλην. Κατωτέρω ἐκθέτομεν τὴν τεχνικὴν τῶν πλείστων ἐκ τῶν ἀνωτέρω μεθόδων παρέχοντες καὶ τὰς σχετικὰς ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς ἐπὶ συγκεκριμένων παραδειγμάτων.

I. Ἡ μέθοδος τῶν μέσων μηνιαίων.

Κατὰ ταύτην προσδιορίζομεν, διὰ τὴν ἐξεταζομένην περίοδον, τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμὴν δι' ἕκαστον τῶν μηνῶν ἀπὸ Ἰανουαρίου μέχρι Δεκεμβρίου καὶ μετὰ ταῦτα τὸν γενικὸν μέσον πάντων τῶν δεδομένων. Αἱ ἀποκλίσεις τῶν μέσων μηνιαίων ἀπὸ τοῦ γενικοῦ μέσου ὑπολογίζονται τότε εὐκόλως καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ἀποκλίσεων τούτων παρέχει τότε τὴν ἐποχιακὴν φυσιογνωμίαν τοῦ ἐξεταζομένου φαινομένου. Κατωτέρω παρέχομεν ὡς ἐφαρμογὴν δεδομένα τοῦ πίνακος 1, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφαίνονται αἱ μηνιαῖαι δαπάναι δι' ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἑνὸς ἰδιώτου ἐν Γαλλίᾳ[1] κατὰ τὰ τέσσαρα διαδοχικὰ ἔτη.

ΠΙΝΑΞ 1.

Μῆνες	*Ἔτος*					*Μέσος μηνιαῖος*	*Ἀπόκλισις*
	1948	*1949*	*1950*	*1951*	*Ὁλικὰ*		
Ἰανουάριος	1634	1908	2388	2082	8012	2003	+296
Φεβρουάριος	1586	1851	2525	1794	7756	1939	+232
Μάρτιος	1321	1709	2284	1722	7036	1759	+ 52
Ἀπρίλιος	1464	1815	2400	1657	7336	1834	+127
Μάϊος	1316	1640	2019	1285	6260	1565	−142
Ἰούνιος	1315	1493	1986	1322	6116	1529	−178
Ἰούλιος	1210	1471	1790	1289	5760	1440	−267
Αὔγουστος	1200	1349	1487	1272	5308	1327	−380
Σεπτέμβριος	1250	1588	1566	1428	5832	1458	−249
Ὀκτώβριος	1545	1825	1918	1572	6860	1715	+ 8
Νοέμβριος	1766	2178	1978	1722	7644	1911	+204
Δεκέμριος	1767	2477	1875	1873	7992	1998	+291
Σύνολα	17374	21304	24216	19018	81912	20478	
Μέσος ἐτήσιος	1448	1775	2018	1585	6826	1707	Μέσος γενικὸς

Τὰ δεδομένα παρουσιάζονται εἰς τὰς πρώτας τέσσαρας στήλας τῶν ἀριθμῶν, εἰς τὴν πέμπτην στήλην ὑπολογίζονται τὰ ὁλικὰ δι' ἕκαστον μῆνα τῶν τεσσάρων ἐτῶν, εἶτα οἱ μέσοι μηνιαῖοι καὶ τέλος αἱ ἀποκλίσεις ἑκάστου μέσου μηνιαίου ἀπὸ τὸν γενικὸν μέσον.

Ὁμοίως εἰς ἑκάστην στήλην ὑπολογίζονται τὰ ἐτήσια δεδομένα καὶ ἐν συνεχείᾳ οἱ μέσοι ἐτήσιοι. Διὰ τὸ 1948 π.χ. ἔχομεν ὡς μέσον ἐτήσιον τὸ πηλίκον 17974 : 12 = 1448. Ὁ γενικὸς μέσος εἶναι 1707 καὶ ὑπολογίζεται εἴτε ὡς μέσος ἀριθμητικὸς τῶν 12 μηνιαίων μέσων τῆς προτελευταίας στήλης, δηλ. 20478 : 12, εἴτε ὡς πηλίκον τοῦ 81912 : 48, εἴτε ὡς πηλίκον 6826 : 4.

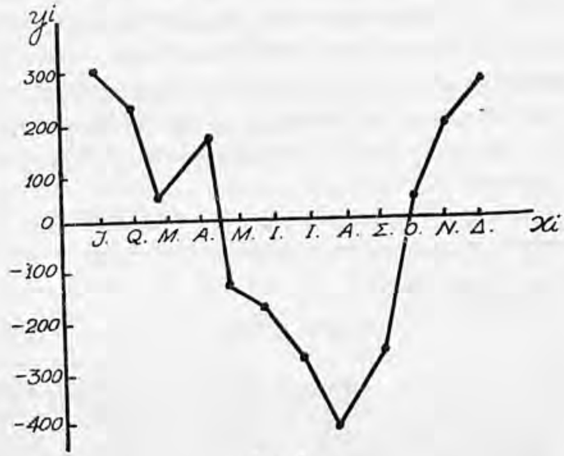
Αἱ ἀποκλίσεις αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην προκύ-

1. Πρβλ. A. MONJALON : Introduction à la méthode statistique, σελ. 234.

πτουν εὐκόλως. Διὰ τὸν μῆνα Ἰανουάριον π.χ. ἔχομεν 2003 — 1707 = + 296, διὰ τὸν μῆνα Φεβρουάριον: 1939 — 1707 = + 232, διὰ τὸν Ἰούνιον : 1529 — 1707 = — 178 κ.ο.κ.

Αἱ ἀποκλίσεις αὗται ἐμφαίνονται γραφικῶς εἰς τὸ κάτωθι διάγραμμα.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ δαπάνη δι' ἠλεκτρικὸν ρεῦμα βαίνει ἐλαττουμένη ἀπὸ Ἰανουαρίου μέχρι Αὐγούστου, ἐκτὸς μιᾶς ἀνωμαλίας κατ' Ἀπρίλιον, ἔπειτα δὲ βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ τοῦ Αὐγούστου μέχρι τοῦ Δεκεμβρίου. Διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν ἐποχιακῶν διακυμάνσεων, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἀρκεῖ ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀρχικῶν μηνιαίων δεδομένων νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν σχετικὴν ἀπόκλισιν τοῦ ἰδίου μηνός. Οὕτω διὰ τὸν Ἰανουάριον τοῦ 1948 ἔχομεν: 1634 - 296 καὶ διὰ τὸν Μάϊον τοῦ 1948 ἔχομεν: 1316 - (- 142) = 1316 + 142 = 1458. Ἂν τοῦτο γίνῃ δι' ὅλας τὰς τιμὰς



Σχ. 1.

πίνακος προκύπτει ὁ ἀκόλουθος πίναξ 2 ὅστις περιέχει τὰ διωρθωμένα δεδομένα, τῶν ὁποίων δύναται νὰ γίνῃ ἐν συνεχείᾳ τὸ γραφικὸν διάγραμμα τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται ἀπηλλαγμένον τῶν ἐποχιακῶν ἐπιδράσεων.

Ἡ ἐκτεθεῖσα ἀνωτέρω μέθοδος παρουσιάζει ἀσθενῆ σημεῖα, καθόσον τὰ ἐξαγόμενα εἰς τὰ ὁποῖα ὁδηγεῖ ἡ ἐφαρμογή της εἶναι ἐπηρεασμένα ὑπὸ τῆς τάσεως μακρᾶς διαρκείας καὶ τῆς κυκλικῆς κινήσεως. Χρησιμοποιεῖται ἐν τούτοις λόγῳ τῆς ἁπλότητός της καὶ ἰδίως ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, εἰς ἃ ἀναφέρεται τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν φαινόμενον, εἶναι περιωρισμένος καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν ἐμφανίζεται σημαντικὴ ἡ ἐπίδρασις τῆς τάσεως μακρᾶς διαρκείας (ὑπόθεσις ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερά).

ΠΙΝΑΞ 2.

Μῆνες	*Ἔτος*			
	1948	*1249*	*1950*	*1551*
Ἰανουάριος	1338	1612	2082	1786
Φεβρουάριος	1354	1619	2293	1562
Μάρτιος	1269	1657	2232	1670
Ἀπρίλιος	1337	1688	2273	1530
Μάϊος	1458	1782	2161	1427
Ἰούνιος	1493	1671	2164	1500
Ἰούλιος	1477	1738	2057	1556
Αὔγουστος	1580	1729	1867	1652
Σεπτέμβριος	1499	1837	1815	1617
Ὀκτώβριος	1537	1817	1910	1564
Νοέμβριος	1562	1914	1774	1518
Δεκέμβριος	1476	2186	1584	1582

Σημειωτέον ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν ἀκριβεστέραν εἰκόνα τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως εἶναι προτιμώτερον νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἀποκλίσεις ὡς ποσοστὰ καὶ ὄχι ὑπὸ μορφὴν ἀπολύτων ἀριθμῶν.

Συνηθέστερον ἡ μέθοδος τῶν μηνιαίων μέσων ἐφαρμόζεται μὲ ἱκανοποιητικώτερα ἀποτελέσματα ὡς ἀκολούθως:

Ἐὰν $\varphi_{i\kappa}$ εἶναι τὰ δεδομένα τοῦ κ μηνός, τοῦ i ἔτους ($\kappa = 1, 2, 3, ... 12$) καὶ ($i = 1, 2, 3, ... \nu$) εὑρίσκομεν τὸν μηνιαῖον μέσον δι' ἕκαστον μῆνα (Ἰανουάριον, Φεβρουάριον κ.ο.κ.) διὰ τοῦ τύπου:

$$\varphi_\kappa = \frac{\Sigma \varphi_{i\kappa}}{n}$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐλέχθη, τὸν γενικὸν μέσον διὰ τοῦ τύπου

$$\varphi = \frac{\Sigma \varphi_\kappa}{12}$$

Ὁ γενικὸς οὗτος μέσος προκύπτει καὶ κατ' ἄλλους τρόπους, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα παρετηρήθη. Οἱ ἐποχιακοὶ συντελεσταὶ προκύπτουν τότε διὰ τοῦ τύπου:

$$S_\kappa = \frac{100 \cdot \varphi_\kappa}{\varphi}$$

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς τελειοποιημένης οὕτω μεθόδου μηνιαίων μέσων παρέχομεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα, τοῦ ὁποίου τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα ἐμφανίζονται εἰς τὸν πίνακα 3, μετὰ τῶν ὑπολογιζομένων ἐποχιακῶν συντελεστῶν.

ΠΙΝΑΞ 3.

Μέσος ἡμερήσιος ἀριθμὸς γάμων κατὰ μῆνα ἐν Γαλλίᾳ διὰ τὰ ἔτη 1946 - 1951.

Ἔτος	Ἰανουάρ.	Φεβρουάρ.	Μάρτιος	Ἀπρίλιος	Μάϊος	Ἰούνιος	Ἰούλιος	Αὔγουστος	Σεπτέμβρ.	Ὀκτώβρ.	Νοέμβριος	Δεκέμβριος
1946	879	1158	1174	2076	1076	1859	1393	1553	1796	1707	1222	1118
1947	730	957	762	2077	902	1363	1215	1268	1449	1408	1006	923
1948	715	727	749	1712	708	1169	1188	984	1256	1272	820	865
1949	599	836	549	1522	613	1092	1081	941	1142	1208	759	886
1950	581	760	510	1562	567	1003	1064	923	1217	1091	701	922
1951	566	605	847	1261	538	1087	951	911	1129	1024	697	889
Ἄθροισμα	4070	5037	4591	10210	4404	7573	6892	6580	7989	7710	5205	5603
Μέσος ἑκάστης στήλης $\varphi_\kappa = \frac{\Sigma \varphi_{i\kappa}}{N}$	678,33	839,50	765,17	1701,67	734	1262,17	1148,66	1096,66	1331,50	1285,00	867,50	933,83
Γενικὸς μέσος: $\varphi = \frac{\Sigma \varphi_\kappa}{12}$	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,61	1053,67	1053,67
Συντελεστὴς ἐποχιακῆς μεταβολῆς $S = \frac{\varphi_\kappa \cdot 100}{\varphi}$	64,4	79,7	72,6	161,4	69,7	119,7	109,0	104,0	126,3	121,9	82,3	88,6

II. Ἡ μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων 12 μηνῶν.

Περαιτέρω βελτίωσιν τῆς τεχνικῆς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συντελεστῶν ἐποχιακῆς μεταβολῆς ἀποτελεῖ ἡ μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων ἤ, καλύτερον, ἡ μέθοδος τῶν λόγων ὡς πρὸς τοὺς κινητοὺς μέσους 12 μηνῶν.

Ἂς παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\varphi_{i\kappa}$ τὰ δεδομένα τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἔτους i ($i = 1, 2, ... \nu$) καὶ τοῦ μηνὸς κ ($\kappa = 1, 2 ..... 12$) καὶ διὰ τοῦ συμβόλου $Y_{i\kappa}$ τὰς ἐξω-ἐποχιακὰς κινήσεις, δηλονότι τὴν γενικὴν ἢ μακραίωνα τάσιν καὶ τὰς κυκλικὰς κυμάνσεις, διὰ τοῦ συμβόλου $S_{i\kappa}$ τὴν ἐποχικὴν αὐτῆς συνιστῶσαν καὶ διὰ $Z_{i\kappa}$ τὴν κατάλοιπον ἢ ἄρρυθμον συνιστῶσαν.

Ὑποθέτομεν πρὸς τούτοις ὅτι ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος εἶναι πολλαπλασιαστικὴ καὶ ὅτι ἡ ἐξωεποχιακὴ συνιστῶσα πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν συντελεστὴν $1 + S_\kappa$ δι' ἕκαστον ὡρισμένον μῆνα. Τούτων τεθέντων ἔχομεν :

$$\varphi_{i\kappa} = Y_{i\kappa}\,(1 + S_\kappa) + Z_{i\kappa} = Y_{i\kappa} + Y_{i\kappa}\,S_\kappa + Z_{i\kappa}$$

Συνήθως ἡ συνιστῶσα $Z_{i\kappa}$ εἶναι ἀμελητέα καὶ ἡ ἐποχιακὴ κίνησις χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ δείκτου :

$1 + S_{i\kappa} = \dfrac{\varphi_{i\kappa}}{Y_{i\kappa}}$, ὅστις προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως $\varphi_{i\kappa} = Y_{i\kappa}\,(1 + S_\kappa)$

ἤ, πρακτικώτερον, διὰ τοῦ λόγου τούτου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 100 πρὸς ἀποφυγὴν τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ψηφίων. Ὁ ἀνωτέρω τύπος τροποποιεῖται ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον, ἂν τεθῇ $\Psi_{i\kappa} = \bar{\varphi}_{i\kappa}$ ἔνθα μὲ τὸ σύμβολον $\bar{\varphi}_{i\kappa}$ παριστῶμεν τοὺς κινητοὺς μέσους τῶν 12 μηνῶν.

Οἱ δώδεκα συντελεσταὶ τῆς μορφῆς $1 + S_\kappa$ δέον νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην :

$$\Sigma(1 + S_k) = 12 \quad (\text{ἢ } 1200)$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ἂς θεωρήσωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου πίνακος 3, εἰς τὸν ὁποῖον παρέχεται ὁ μέσος ἡμερήσιος ἀριθμὸς γάμων κατὰ μῆνα ἐν Γαλλίᾳ.

Ἡ τεχνικὴ τῶν ὑπολογισμῶν ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 4.

Ἐν συνεχείᾳ καταρτίζομεν τὸν ὑπ' ἀριθ. 5 πίνακα διπλῆς εἰσόδου πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτω ὑπολογιζομένων συντελεστῶν δὲν εἶναι ἀκριβῶς 1200, κάμνομεν σχετικὴν διόρθωσιν πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον συντελεστὴν S_k μὲ τὸ πηλίκον $1200 : \Sigma S_k$.

Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον 5 ἔχουν ὑπογραμμισθῆ καὶ διαγράφονται οἱ κρινόμενοι ὡς ἀνώμαλοι δεῖκται (εἷς ἢ καὶ δύο εἰς ἑκάστην στήλην, παρουσιάζοντες ἀκροτάτας τιμάς).

Μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν, ὡς οὗτοι ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 5, διορθώνομεν τὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων διαιροῦντες ἑκάστην τιμὴν τοῦ ἀρχικοῦ πίνακος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ τοῦ μηνὸς καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 100 τὸ ἐξαγόμενον. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι, ὁ ἀριθμὸς 879 τοῦ Ἰανουαρίου 1946 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν ποσότητα 100/64, ὁ ἀριθμὸς 1158 ἐπὶ 100/74 κ.ο.κ.

Τὰ οὕτω λαμβανόμενα ἐξαγόμενα ἀποτελοῦν τὰ διωρθωμένα δεδομένα, ἤτοι τὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων ἀπηλλαγμένα τῆς ἐποχιακῆς ἐπιδράσεως. Μία ἐπὶ πλέον γραφικὴ παράστασις τούτων ἐν συγκρίσει μὲ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων καθιστᾶ κατάδηλον τὴν ἐπελθοῦσαν ἐξομάλυνσιν.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν γραφικὴν μέθοδον χαράσσοντες βάσει τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τὴν γραμμὴν τάσεως δι' ἐλευθέρας χειρός. Δύναται τότε νὰ γίνῃ μία σύγκρισις μεταξὺ τῶν ἐπιτευχθέντων ἐξαγομένων διὰ διαφόρων μεθόδων.

III. Μέθοδος τῶν λόγων ὡς πρὸς τὸν ἐτήσιον μέσον ὅρον [1].

Εἰς τὴν μέθοδον ταύτην ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐξομάλυνσις τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως, ἅτινα ἀπεικονίζονται δι' ἑνὸς πολυγωνικοῦ διαγράμματος, γίνεται δι' ἐκθετικῆς καμπύλης τῆς μορφῆς

$$Y = AB^t$$

ὁπότε ὁ λόγος δύο τιμῶν τῆς συναρτήσεως ταύτης διὰ δύο διαδοχικὰς χρονικὰς βαθμίδας ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{Y_{i,k+1}}{Y_{i,k}} = \frac{AB^{t+1}}{AB^t} = B$$

Ὅταν ἡ κλίσις τῆς τάσεως δὲν εἶναι αἰσθητὴ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ β ἐλάχιστα διαφέρει τῆς μονάδος καὶ δύναται νὰ τεθῇ $B = 1 + \beta$, ἔνθα β πολὺ μικρόν. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ β σχηματίζομεν τοὺς λόγους

$$\frac{Y_1, k+12}{Y_1, k}, \quad \frac{Y_2, k+12}{Y_2 k}, \quad \ldots \ldots \quad \frac{Y\nu, k+12}{Y\nu k}$$

καὶ λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον αὐτῶν, ὃν καλοῦμεν $(1+\alpha)$. Ἐὰν τὰ δεδομένα προσαρμόζωνται εἰς ἐκθετικὴν συνάρτησιν ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω λόγων πρέπει νὰ εἶναι ἴσος πρὸς $(1+\beta)^{12}$

καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$(1+\beta)^{12} = 1+\alpha \quad \text{ἢ} \quad 1+\beta = \sqrt[12]{1+\alpha}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι πολὺ μικρὸς θὰ ἔχωμεν:

$$\beta = \sqrt[12]{1+\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{12}$$

μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ $(1+\alpha)^{1/12}$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

1. Βλ. σχετικῶς Μ. ΜΠΡΙΚΑ «Μαθήματα στατιστικῆς», Τεῦχος ΙΙ, σελ. 267-276.

ΠΙΝΑΞ 4.

Μέσος ἡμερήσιος ἀριθμὸς γάμων κατὰ μῆνα ἐν Γαλλίᾳ.

Ἔτος i	Μῆνες κ	Ἀρχικὰ δεδομένα μηνιαίως $\varphi_{i\kappa}$	Ἄθροισμα δεδομένων 12 διαδοχικῶν μηνῶν	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων	Κινητοὶ μέσοι $\bar{\varphi}_{i\kappa}$	Λόγοι $100 \times \frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$
1946 = 1	1	879				
	2	1.158				
	3	1.174				
	4	2.076				
	5	1.076				
	6	1.859				
			17.011			
	7	1.393		33.873	1.411	99
			16.862			
	8	1.553		33.517	1.397	111
			16.655			
	9	1.796		32.848	1.371	131
			16.243			
	10	1.707		32.487	1.354	126
			16.244			
	11	1.222		32.314	1.346	91
			16.070			
	12	1.118		31.644	1.318	85
1947 = 2			15.574			
	1	730		30.970	1.270	57
			15.396			
	2	951		30.507	1.271	75
			15.111			
	3	762		29.875	1.245	61
			14.764			
	4	2.077		29.229	1.218	171
			14.465			
	5	902		28.714	1.196	75
			14.249			
	6	1.363		28.303	1.179	116
			14.054			
	7	1.215		28.093	1.171	104
			14.039			
	8	1.268		27.854	1.156	110
			13.815			
	9	1.449		27.617	1.151	126
			13.802			
	10	1.408		27.239	1.135	124
$i = 2$			13.437			
	11	1.006		26.680	1.112	90
			13.243			
1948 = 3	12	923		26.292	1.095	84
			13.049			
	1	715		26.071	1.086	66
			13.022			
	2	727		25.760	1.073	68
			12.738			

ΠΙΝΑΞ 4 (συνέχεια).

Ἔτος i	Μῆνες κ	Ἀρχικὰ δεδομένα μηνιαίως $\varphi_{i\kappa}$	Ἀθροίσματα δεδομένων 12 διαδοχικῶν μηνῶν	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων	Κινητὸς μέσος $\bar{\varphi}_{i\kappa}$	Λόγοι $100 \times \frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$
	3	749		25.283	1.053	71
			12.545			
	4	1.712		24.954	1.040	165
			12.409			
	5	708		24.632	1.026	69
			12.223			
	6	1.169		24.388	1.016	115
			12.165			
	7	1.188		24.214	1.009	118
			12.049			
	8	984		24.207	1.009	97
			12.858			
	9	1.256		24.116	1.005	125
			11.958			
	10	1.272		23.726	989	129
			11.768			
	11	820		23.441	977	84
			11.673			
	12	865		23.269	974	89
1949 = 4			11.596			
	1	599		23.085	962	62
			11.489			
	2	836		22.935	956	87
			11.446			
	3	549		22.778	949	58
			11.332			
	4	1.522		22.600	942	162
			11.268			
	5	613		22.475	936	65
			11.207			
	6	1.092		22.435	935	117
			11.228			
	7	1.081		22.438	935	116
			11.210			
	8	941		22.344	931	101
			11.134			
	9	1.142		22.229	926	123
			11.095			
	10	1.208		22.230	926	130
			11.135			
	11	759		22.224	926	82
			11.089			
	12	886		22.089	920	96
1950 = 5			11.000			
	1	581		21.983	916	63
			10.983			
	2	760		21.948	914	83

ΠΙΝΑΞ 4 (συνέχεια).

Ἔτος i	Μῆνες κ	Ἀρχικὰ δεδομένα μηνιαίως $\varphi_{i\kappa}$	Ἀθροίσματα δεδομένων 12 διαδοχικῶν μηνῶν	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων	Κινητὸς μέσος $\bar{\varphi}_{i\kappa}$	Λόγοι $100\times\frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$
			10.965			
	3	510		21.005	917	56
			11.040			
	4	1.562		21.963	915	171
			10.923			
	5	567		21.788	908	62
			10.865			
	6	1.003		21.766	907	111
			10.901			
	7	1.064		21.787	908	117
			10.886			
	8	923		21.617	901	102
			10.731			
	9	1.217		21.709	908	134
			11.068			
	10	1.091		21.835	910	120
			10.767			
	11	701		21.505	896	78
			10.738			
	12	922		21.560	898	103
			10.822			
1951 = 6	1	566		21.531	897	63
			10.709			
	2	605		21.406	892	68
			10.697			
	3	847		21.306	888	95
			10.609			
	4	1.261		21.151	881	143
			10.542			
	5	538		21.081	876	61
			10.538			
	6	1.087		21.043	877	124
			10.505			
	7	951				
	8	911				
	9	1.129				
	10	1.024				
	11	697				
	12	889				

ΠΙΝΑΞ 5.

Ἔτος		Μῆνες 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Δεδομένα	i=1							99	111	131	126	91	85	
μηνιαῖα εἰς ἑκατο-	2	57	75	61	171	75	116	104	110	126	124	90	84	
στὰ τοῦ	3	66	68	71	165	69	115	118	97	125	129	84	89	
κινητοῦ μέσου	4	62	87	58	162	65	117	116	101	123	130	82	96	
$100 \cdot \frac{\varphi_{i\kappa}}{\overleftarrow{\varphi}_{i\kappa}}$	5	63	83	56	171	62	111	117	102	134	120	78	103	
	6	63	68	95	143	61	124							
Μέσος		63,5	73,5	63,3	167,2	64,2	118	117	106	127,3	127,2	86,7	86	Ὁλικὸν
Ἐποχιακοὶ συντελεσταὶ		64	74	63	167	64	118	117	106	127	127	87	86	1200

Ἐὰν ἤδη παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\bar{y}_i$ τὸν ἐτήσιον μέσον ὅρον τοῦ ἔτους i, ὁ μέσος $\bar{y}_{i\kappa}$ θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$\bar{y}_{i\kappa} = \frac{\bar{y}_i}{(1+\beta)^{6,5-\kappa}}$$

καὶ θὰ ἔχωμεν

$$(1 + S_{i\kappa}) = \frac{y_{i\kappa}}{\bar{y}_{i\kappa}} = \frac{y_{i\kappa}}{\bar{y}_i} \quad (1+\beta)^{6,5-\kappa}$$

καὶ τελικῶς εὑρίσκομεν διὰ τοὺς ἐποχιακοὺς συντελεστὰς τὰς παραστάσεις

$$100\,(1 + S_{i\kappa}) = 100\,\frac{y_{i\kappa}}{\bar{y}_i}\,(1 + \theta_\kappa)$$

Ἔνθα $\qquad \theta_\kappa = (6,5 - \kappa)\,\frac{\alpha}{12} \;\; ἢ \;\; (6,5 - \kappa)\,\beta.$

Ὡς παράδειγμα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης λαμβάνομεν τὰ αὐτὰ δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω πίνακος 3. Αἱ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν ἐμφαίνονται εἰς τοὺς ἀκολούθους πίνακας 6, 7, 8 καὶ 9.

ΠΙΝΑΞ 6.

Ἔτη	Μῆνες Ἰαν.	Φεβρ.	Μάρτ.	Ἀπρ.	Μάϊος	Ἰούν.	Ἰούλ.	Αὔγ.	Σεπτ.	Ὀκτ.	Νοέμβ.	Δεκ.	Ἐτήσιοι μέσοι ὅροι
1946	879	1158	1174	2076	1076	1859	1393	1553	1796	1707	1222	1118	1417,6
1947	730	951	762	2077	902	1363	1215	1268	1449	1408	1006	923	1171,2
1948	715	727	749	1712	708	1169	1188	984	1256	1272	820	865	1013,7
1949	599	836	549	1522	613	1092	1081	941	1142	1208	759	886	935,7
1950	581	760	510	1562	567	1003	1064	923	1217	1091	701	922	908,4
1951	566	605	847	1261	538	1087	951	911	1129	1024	697	889	875,4

ΠΙΝΑΞ 7.

	ΜΗΝΕΣ												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1947 : 1946	83	82	65	100	84	73	87	82	81	82	82	83	
1948 : 1947	98	76	98	82	78	86	98	78	87	90	82	94	
1949 : 1948	84	115	73	89	87	93	91	96	91	95	93	102	
1950 : 1949	97	91	93	103	92	92	98	98	107	90	92	104	
1951 : 1950	97	80	166	81	95	108	89	99	93	94	99	96	
Σύνολον	459	444	495	455	436	452	463	453	459	451	448	479	5494

$$100\ (1+\alpha)=\frac{5494}{60}=91{,}57$$

$$1+\alpha=0{,}9157$$

$$\alpha=0{,}9157-1 \qquad \beta=\frac{\alpha}{12}$$

$$\alpha=-0{,}0843 \qquad \beta=-\frac{0{,}0843}{12}=-0{,}007$$

ΠΙΝΑΞ 8.

κ	$6{,}5-\kappa$	$\theta_\kappa=(6{,}5-\kappa)\ \beta=$ $=(6{,}5-\kappa)\ (-0.007)$	$1+\theta_\kappa$
1	5,5	— 0,0385	0,9615
2	4,5	— 0,0315	0,9685
3	3,5	— 0,0245	0,9755
4	2,5	— 0,0175	0,9825
5	1,5	— 0,0105	0,9895
6	0,5	— 0,0035	0,9965
7	— 0,5	0,0035	1,0035
8	— 1,5	0,0105	1,0105
9	— 2,5	0,0175	1,0175
10	— 3,5	0,0245	1,0245
11	— 4,5	0,0315	1,0315
12	— 5,5	0,0385	1,0385

ΠΙΝΑΞ 9.

Ἔτη	Μῆνες											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1946	0,62	0,82	0,83	1,46	0,76	1,31	0,98	1,10	1,27	1,20	0,86	0,79
1947	0,62	0,81	0,65	1,77	0,77	1,16	1,04	1,08	1,24	1,20	0,86	0,79
1948	0,76	0,72	0,74	1,69	0,70	1,15	1,17	0,97	1,24	1,25	0,81	0,85
1949	0,64	0,89	0,59	1,63	0,66	1'17	1,16	1,02	1,22	1,29	0,81	0,95
1950	0,64	0,84	0,56	1,72	0,62	1,10	1,17	1,01	1,34	1,20	0,77	0,01
1951	0,65	0,69	0,97	1,44	0,61	1,24	1,09	1,04	1,29	1,17	0,80	1,02
Μέσοι ὅροι	0,65	0,80	0,72	1,62	0,69	1,19	1,10	1,04	1,27	1,22	0,82	0,90
$1 + \theta_{\kappa}$	0,9615	0,9685	0,9755	0,9825	0,9895	0,9965	1,0035	1,0105	1,0175	1,0245	1,0315	1,0385
Ἐποχ. συντελεσταὶ	0,62	0,77	0,70	1,59	0,68	1,19	1,10	1,05	1,29	1,25	0,85	0,93

IV. Μέθοδος τῶν σχετικῶν κρίκων ἢ ἀλύσεως τῶν λόγων.

Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρήσεως τῶν λόγων μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν μηνιαίων μέσων.

Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἢ ἡ διάμεσος (χαρακτηριστικὸν κεντρικῆς τάσεως) τῶν ν λόγων τῆς μορφῆς $\frac{yik}{yi(k-1)}$ μεταξὺ τῶν παρατηρήσεων τῶν μηνῶν κ καὶ κ − 1 τῶν ἐτῶν i = 1, 2, ... ν, τὸν ὁποῖον ἂς παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $M_{\kappa/\kappa-1}$, ἐμφανίζει τὸν λόγον μεταξὺ τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν τῶν μηνῶν κ καὶ κ − 1 ἤτοι:

$$\frac{1 + S_{\kappa+1}}{1 + S_{\kappa}}$$

ὡς καὶ τὴν μέσην σχετικὴν ἐξωεποχικὴν αὔξησιν κατὰ ἕνα μῆνα, ἤτοι 1+α (ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐξωεποχιακὴ συνιστῶσα εἶναι ἐκθετική).

Ἔχομεν οὕτω:

$$M_{\kappa/\kappa-1} = 1 + \alpha \, \frac{1 + S_{\kappa}}{1 + S_{\kappa-1}}$$

ἐξ οὗ, ἀφ' ἑνός:

$$M_{1/12} \times M_{2/1} \times M_{3/2} \times \ldots\ldots \times M_{12/11} = (1 + \alpha)^{12}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν θεωρητικῶς τὸ ποσοστὸν τῆς μέσης μηνιαίας μεταβολῆς α τῆς ἐξωεποχιακῆς συνιστώσης ($M_{1/12}$ παριστᾶ τὸν μέσον λόγον τῆς παρατηρήσεως τοῦ Ἰανουαρίου τοῦ ἔτους i πρὸς τὴν παρατήρησιν τοῦ Δεκεμβρίου τοῦ ἔτους i − 1), καὶ ἀφ' ἑτέρου:

$$1+S_1 = 1+S_1$$

$$1+S_2 = \frac{1+S_1}{1+\alpha} \text{M}^2/_1$$

$$1+S_3 = \frac{1+S_1}{(1+\alpha)^2} \text{M}^3/_2 \times \text{M}^2/_1$$

. . . .

. . . .

$$1+S_{12} = \frac{1+S_1}{(1+\alpha)^{12}} \text{M}^2/_1 \times \text{M}^3/_2 \times \ldots\ldots \times \text{M}^{12}/_{11}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ α εἶναι γνωστὴ καθὼς καὶ ἡ τοιαύτη τῶν Μ, βλέπομεν ὅτι οἱ ἐποχιακοὶ συντελεσταὶ προσδιορίζονται ὅλοι συναρτήσει ἑνὸς τούτων, τοῦ $1+S_1$. Ἡ τιμὴ τοῦ ἀναλογικοῦ τούτου παράγοντος ὁρίζεται ὑπὸ τῆς συνθήκης:

$$\Sigma(1+S_\kappa) = 12$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ παράστασις $1+S_\kappa$ συνεπάγεται τὴν ἐμφάνισιν τοῦ γινομένου τῶν διαδοχικῶν λόγων:

$\text{M}^2/_1$, $\text{M}^3/_2$, $\text{M}^4/_3$ .... $\text{M}_{\kappa/\kappa-1}$.

Ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία τῆς μεθόδου, ὡς μεθόδου τῶν σχετικῶν κρίκων ἢ ἁλύσεως τῶν λόγων τῶν διαδοχικῶν μηνῶν.

Πρὸς ἐφαρμογὴν ἂς θεωρήσωμεν τὰ δεδομένα τοῦ ἀκολούθου πίνακος 10.

ΠΙΝΑΞ 10.

Ἔτος		Μῆνες (κ)												Ἐτήσιος μέσος
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	yi /
Μηνιαῖα δεδομένα yiκ	1	416	318	316	345	330	337	350	345	346	362	358	366	349,1
	2	429	316	306	342	823	329	334	336	342	352	355	353	343,1
	3	444	334	315	352	340	348	372	346	346	368	375	372	359,4
	4	445	327	339	379	356	355	363	374	371	378	376	385	370,0
	5	448	375	357	382	371	370	363	405	409	410	418	424	394,4
	6	483	374	365	391	364	379	387	375	373	401	412	397	391,8
	7	478	273	358	397	382	364	399	399	401	417	417	406	399,3

ΠΙΝΑΞ 11.

Ἔτος x	Μῆνες Κ/κ—1											
	1/12	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	7/6	8/7	9/8	10/9	11/10	12/11
1		764	993	1,091	956	1,021	1,038	985	1,002	1,046	988	1,022
2	1,172	736	968	1,117	944	1,018	1,015	1,005	1,017	1,060	1,008	994
3	1,249	757	943	1,117	965	1,023	1'068	930	1,000	1,060	1,019	992
4	1,196	734	1,009	1,148	939	997	1,022	1,030	991	1,018	994	1,023
5	1,163	837	952	1,070	971	997	981	1,115	1,009	1,002	1,019	1,014
6	1,139	768	975	1,071	930	1,041	1,021	968	994	1,075	1,027	963
7	1,204	780	959	1.108	962	952	1,096	1,000	1,005	1,039	1,000	973
Διάμεσος Μκ/κ—1	1,184	764	968	1,108	956	1,018	1,022	1,000	1,002	1,039	1,008	994

Προσδιορίζομεν εἰς ἑκάστην στήλην τοῦ πίνακος (11) τὴν διάμεσον $M_{\kappa/\kappa-1}$. Αὕτη μεταφέρεται εἰς τὸν πίνακα (12).

ΠΙΝΑΞ 12.

Λόγος μηνῶν Κ/κ–1	Διάμεσος $M_{\kappa/\kappa-1}$	Λογ. $M_{\kappa/\kappa-1}$	Λογ. $M_{\kappa/\kappa-1}$ Λογ. $(1+\alpha)$	Λογάριθμοι Ἀθροιστικοί	Ἀντιλογάριθμος	Ἐποχιακοί Συντελεσταί $100(1+\bar{S}k)$	Μῆνες
$^1/_{12}$	1,184	0,07335	0,07311	0,07311	118,3	121	Ἰανουάριος
$^2/_1$	0,764	1,88309	1,88285	1,95596	90,4	93	Φεβρουάριος
$^3/_2$	0,968	1,98588	1,98564	1,94160	87,4	90	Μάρτιος
$^4/_3$	1,108	0,04454	0,04430	1,98590	96,8	99	Ἀπρίλιος
$^5/_4$	0,956	1,98046	1,98022	1,96612	92.5	95	Μάϊος
$^6/_5$	1,018	0,00775	0,00751	1,97363	94,1	97	Ἰούνιος
$^7/_6$	1,022	0,00945	0,00921	1,98284	96,1	99	Ἰούλιος
$^8/_7$	1,000	0,00000	1,99976	1,98260	96,1	99	Αὔγουστος
$^9/_8$	1,002	0,00087	0,00063	1,98323	96,2	99	Σεπτέμβριος
$^{10}/_9$	1,039	0,01662	0,01638	1,99961	99,9	102	Ὀκτώβριος
$^{11}/_{10}$	1,008	0,00346	0,00322	0,00283	100,7	103	Νοέμβριος
$^{12}/_{11}$	0,994	1,99739	1,99715	1,99998	100,0	103	Δεκέμβριος
Ὁλικὸν		0,00286	0,00000	S = 1168,5		2,200	
Μέσος λογ.(1+α)		0,00024		1200/S = 1,027			

Εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τοὺς δώδεκα λογ. Μ, τὸν μέσον λογ. (1+α), ὅστις ἀφαιρεῖται ἐξ ἑκάστου λογ. Μ. Ἀθροίζομεν μετὰ ταῦτα τὰς διαφορὰς λογ. Μ – λογ. (1 + α) καὶ ὑπολογίζομεν τοὺς διαδοχικοὺς ἀντιλογαρίθμους. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι S οἱ συντελεσταὶ ἐποχιακῆς μεταβολῆς λαμβάνονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιλογαρίθμων ἐπὶ 1200/S εἰς τρόπον ὥστε :

$$\Sigma\ (1 + S_\kappa) = 1200.$$

Η ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ
ΩΣ ΟΡΓΑΝΟΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΗΣ
(Περιληπτικῶς)

Ὑπὸ Ἀντισμηνάρχου Ι. Α. ΣΑΚΑΛΗ
Διευθυντοῦ Στατιστικῆς Γεν. Ἐπιτελείου Ἀεροπορίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Ἡ Στατιστικὴ Μέθοδος κατὰ τὴν ἐφαρμογήν της ἐπὶ δοθέντος πλήθους δεδομένων βοηθεῖ ἡμᾶς ν' ἀναλύσωμεν τὰ δεδομένα ταῦτα διττῶς. Ὅταν δηλαδὴ ἔχωμεν πρὸ ἡμῶν ἓν σύνολον μονάδων, τῶν ὁποίων ἐπιθυμοῦμεν νὰ μελετήσωμεν χαρακτηριστικά τινα, εἴτε πρόκειται περὶ ἀνθρώπων τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ γνωρίσωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, τὴν ἡλικίαν, εἴτε περὶ ἀντικειμένων διὰ τὸ βάρος αὐτῶν, δύο μέθοδοι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσι : Ἡ Μέθοδος τῆς Ἀπογραφῆς (Census) καὶ ἡ Μέθοδος τῆς Δειγματοληψίας (Sampling). Κατὰ τὴν πρώτην ἐξετάζομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς ἀνθρώπους ἢ πράγματα τοῦ ὑπὸ ἔρευναν πληθυσμοῦ πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἡλικίας των ἢ τοῦ βάρους. Κατὰ τὴν δευτέραν περιοριζόμεθα εἰς τὴν λῆψιν μερικῶν μόνον μονάδων ἔκ τινος πολυαρίθμου κατὰ κανόνα πληθυσμοῦ, καὶ τὴν ἐξ αὐτοῦ συναγωγὴν συμπερασμάτων, τὰ ὁποῖα θὰ ἰσχύωσι δι' ὁλόκληρον τὸν πληθυσμόν. Ἐφαρμόζομεν τουτέστι τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς Λογικῆς μέθοδον τῆς Ἐπαγωγῆς διὰ τὴν ἐξαγωγὴν ἐκ μερικῶν περιπτώσεων ἢ παρατηρήσεων γενικωτέρων τινῶν ἀληθειῶν, ἐξ οὗ καὶ ἡ ἑτέρα ὀνομασία τῆς Δειγματοληψίας ὡς Στατιστικῆς Ἐπαγωγῆς (Statistical Inference). Τὰ ἀποτελέσματα τῆς Δειγματοληψίας θὰ εἶναι προφανῶς καλὰ ἢ οὐ ἐφ' ὅσον τὸ ληφθὲν δεῖγμα θὰ εἶναι ἀντιπροσωπευτικὸν ἢ ὄχι τοῦ μελετωμένου συνόλου. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ πληθυσμοῦ διαμερίσματός τινος ἐὰν λάβωμεν ὡς δεῖγμα μόνον τοὺς ἄγοντας ἡλικίαν 15 - 25 ἐτῶν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποκομίσωμεν καμμίαν ἔνδειξιν ἐπὶ τῆς μέσης ἡλικίας τοῦ ὑπ' ὄψιν πληθυσμοῦ, ὡς ἐπίσης ἐὰν ἐκ τῶν προϊόντων ἐργοστασίου τινὸς ἐκλέξωμεν τὰ πλέον ἐλαφρὰ δὲν δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὸ μέσον βάρος τῶν παραχθέντων ἀντικειμένων. Τὰ μνημονευθέντα παραδείγματα τονίζουσιν ἀφ' ἑαυτῶν ὅτι ἡ ἀπαίτησις τῆς ἀντιπροσωπευτικότητος τοῦ δείγματος τυγχάνει οὐσιώδης καὶ μόνον αὐτὴ δύναται νὰ μᾶς προσφέρῃ πληροφορίας ἐπὶ τοῦ ζητουμένου συνόλου, πρᾶγμα ὅπερ ἐπιτυγχάνεται βάσει Μεθόδων στηριζομένων κυρίως ἐπὶ τοῦ Τυχαίου καὶ τοῦ Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων. Μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα θέλουσιν ἀποσαφηνίσει τὰς ἐκτεθείσας ἐννοίας. Εἰς τὰς Φυσικὰς Ἐπιστήμας συχνάκις ἀποβαίνει ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν περαιτέρω δεδομένα καὶ υἱοθετοῦμεν τὴν δειγματοληψίαν π.χ. ὅταν ἓν πείραμα δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ πέραν ὡρισμένου δοθέντος χρονικοῦ ὁρίου. Ὁμοίως ἀποτελέσματα ἐπιστημονικοῦ πειράματος, ἐπαναληφθέντος δεκάκις, δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς γενίκευσις τῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα λογικῶς ὑποτίθενται ὅτι εἶναι ἐπιτευκτὰ ἐὰν τὸ πείραμα ἤθελεν ἐκτελεσθῇ εἰς ἀπεριόριστον ἀριθμὸν χρονικῶν περιόδων. Εἰς τὴν Ἐκπαίδευσιν διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν Μέσον Δείκτην Εὐφυΐας (Intelligent Quotient) τῶν μαθητῶν τῶν Δημοτικῶν Σχολείων, ἡ τυχὸν χρησιμοποίησις μεθόδου διαφόρου τῆς Δειγματοληψίας συνεπάγεται τὴν δαπανηρὰν συσσώρευσιν ἀπεράντου πλήθους δεδομένων. Ἔτι περαιτέρω ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λάβωμεν τὴν μέσην τιμὴν τοῦ ἄρτου εἰς τὴν Πόλιν τῶν Ἀθηνῶν. Προφανῶς τόσον ὁ παράγων τοῦ κόστους ὅσον καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος διὰ πλήρη ἔρευναν τῶν ἑκατοντάδων ἀρτοποιείων καὶ ζαχαροπλαστείων ἀποτελοῦσιν ἀνασχετικοὺς παράγοντας, ἀλλ' ἐκ παραλλήλου καὶ ἐὰν λάβωμεν τιμὰς μόνον ἐκ τῶν κεντρικῶν καταστημάτων τὸ δεῖγμα μας θὰ ἦτο μεροληπτικόν. Διὰ νὰ ἐξασφαλίσωμεν ἀντιπροσωπευτικὰ δεδομένα εἶναι ἀνάγκη νὰ λάβωμεν τιμὰς δειγμάτων ἐκ τῶν καταστημάτων ὅλων τῶν ποικιλιῶν ἢ κατὰ τεχνικὴν ὁρολογίαν ἐκ τοῦ Συνόλου Πληθυσμοῦ, τοῦ πληθυσμοῦ νοουμένου ὑπὸ τὴν στατιστικήν του ἔννοιαν ὡς τοῦ συνόλου τῶν δεδομένων ἐξ ὧν λαμβάνεται τὸ δεῖγμα, ἐὰν τὸ ὅλον τούτου ἦτο ἐπιτευκτόν.

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἓν ἀντιπροσωπευτικὸν δεῖγμα[1] δέον νὰ πληροῦνται αἱ ἑξῆς τέσσαρες συνθῆκαι:

α) Τὸ δεῖγμα νὰ ἐκλέγεται ἄνευ μεροληψίας ἢ προκαταλήψεως.

β) Τὰ μέρη τοῦ Δείγματος δέον νὰ εἶναι τελείως ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.

γ) Ὑποκειμενικαὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν περιοχῶν, ἐξ ὧν ἐκλέγονται τὰ δεδομένα, δέον νὰ μὴν ὑπάρχωσι.

δ) Δέον νὰ ὑφίστανται αἱ αὐταὶ δυνατότητες δι' ὅλα τὰ ποσὰ ἐν τῷ Δείγματι.

Οἱοσδήποτε ἔχει χύσει διαλελυμένον οὐΐσκυ εἰς ἕνα κύπελλον δοκιμῆς, ἀφοῦ ἐπῆρε μία ρουφηξιά, ἀσυναισθήτως ἔχει σχετικὴν πεῖραν τῆς δειγματοληψίας. Εἶναι εὔκολον ὅθεν ν' ἀντιληφθῇ τις ὅτι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἶναι πτυχιοῦχος Μαθηματικὸς διὰ νὰ δύναται λογικῶς ν' ἀντιμετωπίζῃ τὰ δειγματολογικὰ θέματα κατὰ πρακτικὸν τρόπον. Παρὰ ταῦτα ὁ χειρισμὸς τοῦ προβλήματος τῆς δειγματοληψίας κατὰ τὸ πλεῖστον περιωρίσθη εἰς ἀρκετὰ στρατοσφαιρικὸν ἐπίπεδον. Περίπλοκοι τύποι καὶ ὅροι ἐπενοήθησαν μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐνόχλησιν καὶ σύγχυσιν τοῦ μέσου ἀναγνώστου. Μία ἀρκούντως διαδεδομένη μεταξὺ τῶν Στατιστικῶν τάσις, ἀλλὰ δυστυχῶς παρατηρουμένη καὶ εἰς τὸν κύκλον τῶν Νομικῶν, Ἰατρῶν καὶ Οἰκονομολόγων, εἶναι νὰ χρησιμοποιῶσιν καθ' ὑπερβολὴν τὰ μαθηματικὰ καὶ τοὺς τεχνικοὺς ὅρους, πρᾶγμα ὅπερ δημιουργεῖ παρὰ τοῖς πολλοῖς τὴν εὔλογον ὑπόνοιαν ὅτι τοῦτο γίνεται ὄχι τόσον διὰ περισσοτέρας διευκρινίσεις ὅσον διὰ σύγχυσιν μᾶλλον καὶ δικαιολόγησιν τῶν ζητουμένων ἑκάστοτε ὑψηλῶν ἀμοιβῶν. Στατιστικοὶ ὅροι ὡς «Leptocurtic», «Homoscedasticity», «Interpenetrating Replicate Subsamples», καίτοι περιγραφικοὶ αὐτοὶ καθ' ἑαυτούς, θὰ ἠδύναντο νὰ ἔχωσιν ἁπλουστευθῆ ὥστε νὰ γίνωσι κτῆμα τῶν πάντων. Βεβαίως αἱ ἀρχαὶ τῆς Δειγματοληψίας στηρίζονται ἐπὶ τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων καὶ ἀπαιτοῦσι μίαν σχετικῶς ἐπαρκῆ μαθηματικὴν ὑποθεμελίωσιν, ἀλλὰ

1. Ἡ ἀντιπροσωπευτικὴ δειγματοληψία ἀπαντᾶται εἰς τὰς σφυγμομετρήσεις τῆς Κοινῆς Γνώμης τοῦ Ἰνστιτούτου GALLUP, ὅπου λαμβάνεται φροντὶς ὅπως ἐξασφαλισθῇ ἡ εἰς καταλλήλους ἀναλογίας ἀντιπροσώπευσις τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ πληθυσμοῦ χωρὶς νὰ ἀφήνεται εἰς τὴν Τύχην ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀναλογιῶν αὐτῶν.

πέρα τούτων ἀνήκει εἰς τὴν Μαθηματικὴν Στατιστικὴν ἡ ἐξονυχιστικὴ διερεύνησις τοῦ μαθηματικοῦ μέρους.

Ἂν καὶ ἡ Δειγματοληψία κερδίζει σταθερῶς περισσότερον ἔδαφος εἰς τοὺς Ἰδιωτικοὺς Ὀργανισμοὺς καὶ τὰς Κρατικὰς Λειτουργίας, οὐχ ἧττον πολλοὶ παραμένουσιν εἰσέτι σκεπτικοὶ ἂν ὄχι τελείως δύσπιστοι ἐπὶ τῆς ἀκριβείας οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπιτυγχανομένων ἔκ τινος μερικοῦ μᾶλλον ἢ πλήρους ὑπολογισμοῦ. Ἔν τινι μέτρῳ τοῦτο ἀντικατοπτρίζει μίαν φυσικὴν ἀπροθυμίαν δι' ἀποδοχὴν μιᾶς ἀποδείξεως, παρεχομένης ἔκ τινος μικροῦ ἀριθμοῦ ὡς ὀρθοῦ ἔναντι τῆς συνολικῆς ὑπὸ μελέτην ὁμάδος. Ἀλλὰ καὶ πάλιν τοῦτο ὀφείλεται εἰς ἀπροσέκτους ἐφαρμογὰς τῶν μεθόδων δειγματοληψίας κατὰ τὸ παρελθόν.

Ὁ πολὺς κόσμος ἀσφαλῶς δὲν γνωρίζει ὅτι δι' ὡρισμένους τύπους μεθόδων δειγματοληψίας καθορίζεται ἐκ τῶν προτέρων ὁ βαθμὸς τῆς ἐπιθυμητῆς ἀκριβείας ἐκ τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ δείγματος. Ἐπίσης εἶναι ἀρκετὰ ἐνδιαφέρον νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ ἀκρίβεια συγκεκριμένου δείγματος τοιούτου τύπου δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ δείγματος. Ἐπιπροσθέτως πολλοί, οἱ ὁποῖοι ἐπιμένουσιν ὅτι ὁ ἀκριβέστερος τρόπος εἶναι νὰ κάμωσι πλήρη καταμέτρησιν, παραβλέπουσι τὸ γεγονὸς ὅτι πολλὰς φορὰς ὑπάρχουσι πηγαὶ σφάλματος εἰς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα καὶ ὅτι μία 100% καταμέτρησις δύναται νὰ ἀποβῇ τελείως ἐσφαλμένη ἂν ὄχι σχετικῶς ἀδύνατος πρὸς ἐπίτευξιν. Πράγματι πολλάκις τὸ δεῖγμα δύναται νὰ ἀποφέρῃ περισσότερον ἀκριβῆ ἀποτελέσματα ἢ μία ἀποπερατωθεῖσα πλήρης καταμέτρησις, δοθέντος ὅτι αἱ πηγαὶ τοῦ σφάλματος δύνανται νὰ ἐλεγχθῶσι πλέον ἀποτελεσματικῶς ὅταν σχετικῶς μικρὸς ἀριθμὸς δεδομένων πρόκειται νὰ ἐξετασθῇ. Ὡς παράδειγμα τούτου, ἔστω ἡ ἐκτίμησις τῆς ἀξίας τῶν ὑλικῶν ἀπογραφῆς 500.000 ἀναλωσίμων ὑλικῶν καὶ ἡ λῆψις δείγματος 60.000 ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἡ ἐκτίμησις βάσει τοῦ δείγματος εὑρέθη ὅτι ἔφθασε κατὰ 8% κάτω τῆς συνολικῆς ἀξίας, ἥτις ἐλήφθη ἐκ τῆς πλήρους ἀπαριθμήσεως τῶν 500.000 ὑλικῶν. Ὁπωσδήποτε τόσον βασικὰ στοιχεῖα ἠλέγχθησαν προσεκτικῶς διὰ τὰ 60.000 ὑλικὰ τοῦ δείγματός μας, ὡς ἐπίσης ἐγένοντο καὶ πολλαὶ ἀναθεωρήσεις, ἐνῷ πάντα ταῦτα θὰ ἦσαν ἀδύνατα διὰ τὰ ὑπόλοιπα 440.000 ὑλικά. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ὑφίσταται περισσοτέρα τοῦ δέοντος πιθανότης ὅτι ἡ ἐκτίμησις τοῦ δείγματος θὰ πλησιάζῃ τὴν ἀληθῆ τιμὴν παρ' ὅσον ἡ συνολικὴ ἀπαρίθμησις.

Ἐν τέλει ὑποσημειοῦμεν ὅτι ἀναμφιβόλως ἡ Δειγματοληψία προσφέρει πολυτίμους ὑπηρεσίας. Ἡ πεῖρα τοῦ παρελθόντος ὑποδεικνύει τὴν ἐξάπλωσίν της μὲ ταχύτατα βήματα. Μέχρι τοῦδε ἐχρησιμοποιήθη ἐλάχιστα καὶ δὴ ἐπιβοηθητικῶς, ἀλλὰ ἡ προοπτικὴ τοῦ μέλλοντος ἐπιβάλλει πλέον τὴν Δειγματοληψίαν ὡς τὸ μοναδικὸν ὄργανον ἐρεύνης, μὲ τὸ ὁποῖον καλοῦνται νὰ ἐξοικειωθῶσιν οἱ ἀσχολούμενοι εἰς τὰς Στατιστικὰς Ὑπηρεσίας. Δείγματα δύνανται νὰ ληφθῶσιν ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ τοὺς κατωτέρω τρόπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ. ΑΠΛΗ ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ (SIMPLE RANDOM SAMPLING)

Μία ἐπιλογὴ ἔχει γίνει κατὰ τύχην ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ πληθυσμοῦ ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα ἐπιλογῆς ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κληρωτίδος, ἡ ὁποία περιέχει δέκα σφαιρίδια ἠριθμημένα ἀπὸ τοῦ 0 ἕως 9, ἐκ τῶν ὁποίων ἐξάγομεν μὲ κλειστοὺς ὀφθαλμοὺς ἓν σφαιρίδιον κατὰ τύχην. Ἐφ' ὅσον τὰ σφαιρίδια εἶναι ἀπολύτως ὅμοια, θὰ ἔχωσι βεβαίως τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ ἐξαχθῶσιν ἐκ τῆς κληρωτίδος.

Τὸ Τυχαῖον Δεῖγμα ἀποτελεῖ ἀντιπροσωπευτικὴν ὁμάδα τοῦ Συνόλου. Ὡς κριτήριον τῆς τυχαίας ἐπιλογῆς ἔχομεν ὅτι ἑκάστη μονὰς τοῦ συνόλου ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ ἐκλεγῇ κατὰ τὴν λῆψιν τοῦ δείγματος ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ γενόμεναι ἐπιλογαὶ εἶναι στατιστικῶς ἀνεξάρτητοι. Τὸ ἰδιαίτερον γνώρισμα τῆς τυχαίας ἔκ τινος πληθυσμοῦ ἐπιλογῆς εἶναι ὅτι τὸ δεῖγμα δέον νὰ εἶναι ἀποδεκτὸν ὡς ἀντιπροσωπευτικὸν τοῦ συνόλου καὶ τὴν ἀντιπροσωπευτικότητα αὐτὴν ἐξασφαλίζει ὁ Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν [2], ἀνεξαρτήτως τῆς ὑποκειμενικότητος τοῦ ἐρευνητοῦ. Κάθε μονὰς ἐκλεγομένη κατὰ τύχην ἀντιπροσωπεύει μόνον ἑαυτὴν καὶ μόνον τὸ σύνολον τῶν ληφθεισῶν μονάδων ἀπαρτίζει τὸ ἀντιπροσωπευτικὸν δεῖγμα.

Ὁ καλλίτερος τρόπος ἐξασφαλίσεως τῆς τυχαίας ἐπιλογῆς εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῶν Πινάκων Τυχαίων Ἀριθμῶν τῶν R. Fisher – F. Yates περιλαμβανόντων 300 ἐν συνόλῳ συμπλέγματα ἀριθμῶν. Ἡ βασικὴ ἀρχὴ τῶν Πινάκων αὐτῶν συνίσταται εἰς τὸ νὰ ὁρίσωμεν ἕνα καὶ μόνον ἀριθμὸν δι' ἑκάστην μονάδα τοῦ ἐρευνωμένου συνόλου, εἰς τρόπον ὥστε ἡ μονὰς αὐτὴ νὰ ἐπιλεγῇ εὐθὺς ὡς ὁ ἀντιπροσωπεύων αὐτὴν ἀριθμὸς ἐπιλεγῇ.

Παράδειγμα: Κατασκευαστὴς γλυκισμάτων ἔχει ἕνα κάλαθον διαφόρων εἰδῶν καρύων καὶ ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίζῃ πόσα κάρυα ὑπάρχουσι κατὰ λίτραν πρὶν ἢ προβῇ εἰς τὴν διὰ σοκολάτας ἐπικάλυψιν. Θὰ ἠδύνατο πράγματι νὰ προσλάβῃ μερικὰ μικρὰ παιδιὰ διὰ νὰ μετρήσωσι τὸν σωρὸν τῶν καρύων καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσῃ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν διὰ 500 διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸν αἰτούμενον κατὰ λίτραν ἀριθμὸν ἢ νὰ ἐκλέξῃ μερικὰς ἑκατοντάδας καρύων κατὰ τύχην ἐκ τοῦ καλάθου, νὰ τὰς μετρήσῃ καὶ ζυγίσῃ καὶ διαιρέσῃ τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ βάρους εἰς λίτρας. Ἐὰν τὰ κάρυα εἶχον ἀναμιχθῆ ἀκριβῶς πρὸ πάσης ἐκλογῆς τὸ Δεῖγμα θὰ μᾶς ἔδιδε ὁμοίως ἕνα ἀποδεκτὸν ἀποτέλεσμα. Τὸ σημαντικὸν πρᾶγμα, ὅπερ δέον νὰ ἐνθυμούμεθα, εἶναι ὅτι ἕκαστον κάρυον *πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ ἐπιλεγῇ εἰς τὸ δεῖγμα καὶ αὐτὴ εἶναι καὶ ἡ πρώτη ἀπαίτησις τῆς Ἁπλῆς Τυχαίας Δειγματοληψίας* κατὰ τὰ προλεχθέντα.

Διὰ νὰ συνειδητοποιήσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀλήθειαν ἂς ἴδωμεν ἐπὶ παραδείγματι πῶς ἐξάγεται ἓν ἁπλοῦν τυχαῖον δεῖγμα 6 καρύων ἔκ τινος πληθυσμοῦ 18 καρύων, συγκειμένου ἐκ 3 καρύων, 6 λεπτοκαρύων καὶ 9 γαιοκαρύων, καὶ ἂς ἀριθμήσωμεν τὰ 18 κάρυα, προσδιορίζοντες ὑποθετικὰ βάρη δι' ἕκαστον εἰς χιλιοστὰ τοῦ γραμμαρίου.

---

2. Δυνάμει τοῦ Νόμου τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν ἀπεδείχθη θεωρητικῶς καὶ πρακτικῶς ὅτι ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων αὐξάνει τόσον παραλλήλως αὐξάνει καὶ ἡ ἀκρίβεια τῶν ἀποτελεσμάτων. Ὁ QUETELET εἶχε τὴν ὑπομονὴν νὰ ἐπαληθεύσῃ πειραματικῶς τὸν Νόμον διὰ τοῦ κλασσικοῦ παραδείγματος τῶν 40 βώλων ἐντὸς δοχείου, ἐξ ὧν οἱ 20 λευκοὶ καὶ ἕτεροι 20 μέλανες, καὶ τοὺς ὁποίους ἀνέσυρεν ἕνα πρὸς ἕνα καὶ τοὺς ἐπανέθετεν πάλιν εἰς τὸ δοχεῖον ὥστε νὰ μὴν ἀλλάζουν αἱ συνθῆκαι τοῦ πειράματος. Καίτοι αἱ πιθανότητες ἦσαν

ΚΑΡΥΑ		ΛΕΠΤΟΚΑΡΥΑ		ΓΑΙΟΚΑΡΥΑ	
᾿Αριθμὸς Καρύου	Βάρος εἰς MG	᾿Αριθμὸς Καρύου	Βάρος εἰς MG	᾿Αριθμὸς Καρύου	Βάρος εἰς MG
1	55	4	27	10	8
2	67	5	32	11	12
3	43	6	24	12	8
		7	28	13	11
		8	31	14	7
		9	26	15	9
				16	7
				17	10
				18	9
Σύνολον Βάρους	165		168		81
Μέσος Ὅρος Βάρους	55		28		9
Μέσος Ὅρος Βάρους 18 Καρύων.	23				
Γενικὸν Σύνολον Βάρους 18 Καρύων	414				

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν τυχαίαν ἐπιλογὴν 6 Καρύων ἐκ τῶν 18 τοιούτων χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἀκόλουθον Πίνακα Τυχαίων ᾿Αριθμῶν, ἐκλέγοντες τοὺς πρώτους 6 διαφόρους ἀριθμοὺς μεταξὺ 01 καὶ 18.

ΠΙΝΑΞ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

22	57	53	93
19	48	40	21
$\boxed{16}$	61	02	95
78	36	95	97
$\boxed{03}$	$\boxed{18}$	35	69
93	88	16	04
78	$\boxed{09}$	77	61
23	$\boxed{12}$	46	85
$\boxed{15}$	85	37	21
38	38	61	15

᾿Εὰν ὁ ἀναγνώστης ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ χρησιμοποιῇ Τυχαίους ᾿Αριθμούς, καλὸν θὰ εἶναι νὰ ἀναφέρεται μᾶλλον εἰς δημοσιευμένους Πίνακας παρὰ νὰ προσπαθῇ νὰ σταχυολογῇ τοιούτους ἐκ τῆς κεφαλῆς του.

αἱ αὐταὶ νὰ τραβήξωμεν ἕνα λευκὸν καὶ ἕνα μέλανα βῶλον, μολατοῦτα προέκυψαν διάφορα ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα διορθώνονται μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν τραβηγμάτων.

'Απλοῦν Τυχαῖον Δεῖγμα

'Αριθμὸς Καρύων	Βάρος εἰς MG
16	7
3	43
15	9
18	9
9	26
12	8
Συνολικὸν Βάρος	102
Μέσον Βάρος	17 (ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ 23 ὅλων τῶν 18 καρύων)

Αὐτὸ εἶναι ἓν δεῖγμα ἐκ 18.564 δυνατῶν διαφόρων δειγμάτων ἐξ 6, ἑκάστου ἐκ πληθυσμοῦ 18 καρύων. Ὅλα τὰ δυνατὰ δείγματα ἐξ ἑκάστων τῶν 6 καρύων δύνανται νὰ ταξινομηθῶσι συστηματικῶς κατά τινα τρόπον ὡς ἀκολούθως :

1 2 3 4 5 6	2 3 4 5 6 7	11 13 14 15 16 17
1 2 3 4 5 7	2 3 4 5 6 8	11 13 14 15 16 18
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
		11 14 15 16 17 18
1 3 4 5 6 7	2 4 5 6 7 8	12 13 14 15 16 17
1 14 15 16 17 18	2 14 15 16 17 18	13 14 15 16 17 18

'Αποδεικνύεται μαθηματικῶς ὅτι τὸ μέσον βάρος τῶν 18564 μέσων Τυχαίων Δειγμάτων ἀνέρχεται εἰς 23 MG, τὸ αὐτὸ δηλαδὴ ὡς ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀρχικῶν καρύων εἰς τὸν πληθυσμόν μας.

Ἓν δυσάρεστον χαρακτηριστικὸν τῶν ἁπλῶν τυχαίων δειγμάτων εἶναι ὅτι καθ' ὅσον ἐπιλέγομεν ὁ μέσος ὅρος τῆς ἐπιλογῆς ἀπομακρύνεται ἀρκετὰ ἀπὸ τοῦ ἀληθοῦς μέσου. Οὕτω ἀντὶ τοῦ πραγματικῶς ἐξαχθέντος δείγματος (Μέσον Βάρος 17 MG) θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἓν ἐκ τῶν ἀκολούθων δειγμάτων :

ΔΕΙΓΜΑ Α		ΔΕΙΓΜΑ Β	
'Αριθμὸς Καρύων	Βάρος εἰς MG	'Αριθμὸς Καρύων	Βάρος εἰς MG
1	55	10	8
2	67	12	8
3	43	14	7
5	32	15	9
7	28	16	7
8	31	18	9
Συνολικὸν Βάρος	256		48
Μέσον Βάρος	42 2/3		8

Τῇ ἀληθείᾳ αἱ ἐκτιμήσεις τοῦ μέσου βάρους τοῦ πληθυσμοῦ μας τῶν 18 καρύων, ὅπως ἐπετεύχθησαν ἐξ ἑκατέρου ἐκ τῶν δύο τούτων δειγμάτων, εἶναι ὀλίγον πτωχαί.

Τὸ σημειωθὲν μειονέκτημα, τοῦ μικροῦ τουτέστι κινδύνου ἐπιλογῆς ἑνὸς τοιούτου λίαν πτωχοῦ δείγματος, ἐξουδετεροῦται διὰ τῆς Μεθόδου τῆς Στρωματοειδοῦς Δειγματοληψίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ. ΣΤΡΩΜΑΤΟΕΙΔΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ (STRATIFIED SAMPLING)

Μία μέθοδος διὰ νὰ βελτιώσωμεν τὴν ἐκ τῆς ἁπλῆς τυχαίας δειγματοληψίας ληφθεῖσαν ἐκτίμησιν θὰ ἦτο νὰ ταξινομήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν 18 καρύων εἰς στρώματα, προφανῶς δὲ ὁ καλύτερος τρόπος θὰ ἦτο νὰ συνενώσωμεν τὰ κάρυα εἰς τὰς κεχωρισμένας ποικιλίας των (Κάρυα, Λεπτοκάρυα, Γαιοκάρυα), ὁπότε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἐξ ἑκάστου στρώματος.

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην δηλαδὴ ὁ ἐρευνητὴς διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας κρίνει ἀπαραίτητον νὰ περιληφθῶσιν εἰς τὸ δεῖγμα, εἰς τόσας ὑποομάδας, ὅσαι ὑποδιαιρέσεις ἢ στρώματα (Stratum) ὑπάρχουσιν εἰς τὸ σύνολον καὶ εἰς ἕκαστον τῶν ὑποδειγμάτων τούτων δίδει τὴν ἀνάλογον βαρύτητα. Οἴκοθεν νοεῖται ὅτι καὶ δι' ἑκάστην λῆψιν ὑποδείγματος ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ συνόλου τηρεῖται ἡ διαδικασία τῆς τυχαίας ἐπιλογῆς.

᾿Αναλογικὴ Δειγματοληψία: Διὰ νὰ λάβωμεν ἓν δεῖγμα ἀπὸ 6 ἐκλέγομεν ἓν ἐκ τῶν τριῶν καρύων, δύο ἐκ τῶν 6 λεπτοκαρύων καὶ τρία ἐκ τῶν 9 γαιοκαρύων, δηλ. τὸ 1/3 ἐκ τῶν καρύων ἑκάστου στρώματος. Χρησιμοποιοῦντες τὸν Περιληπτικὸν Πίνακα Τυχαίων ᾿Αριθμῶν, ὅπως συνηντήσαμεν τοῦτον εἰς προηγούμενον Κεφάλαιον, ἐκλέγομεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν μεταξὺ 01 καὶ 03, τοὺς πρώτους δύο μεταξὺ 04 καὶ 09 καὶ τοὺς πρώτους τρεῖς μεταξὺ 10 καὶ 18.

᾿Αναλογικὸν Στρωματοειδὲς Δεῖγμα

Στρῶμα	᾿Αριθμὸς Καρύων	Βάρος εἰς MG
Κάρυα	3	43
Λεπτοκάρυα	9	26
»	4	27
Γαιοκάρυα	16	7
»	15	9
»	18	9
Συνολικὸν Βάρος 6 Καρύων		121

Μέσος Ὅρος 121 : 6 ἴσον 20.16 (ἐν συγκρίσει πρὸς τὸν Μέσον Ὅρον 23 δι' ὅλα τὰ 18 Κάρυα). Δοθέντος ὅτι ἕκαστον κάρυον ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα ἐκλογῆς εἰς τὸ δεῖγμα μας (ἓν πρὸς τρία) δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ σταθμίσωμεν τὰ ἀποτελέσματα τῶν κεχωρισμένων στρωμάτων διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸ μέσον βάρος τῶν 6 Καρύων. Θὰ ἠδύνατό τις ἐκ διαισθήσεως νὰ ἀναμένῃ γενικῶς καλλιτέραν ἐκτίμησιν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω στρωματοειδοῦς δείγματος παρὰ ἀπὸ τὸ Ἁπλοῦν Τυχαῖον τῶν 6 Καρύων. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἔχομεν Κάρυα ἐξ ἑκάστης ποικιλίας τοῦ στρωματοειδοῦς δείγματος, ἀποφευγομένων οὕτω δειγμάτων ἀκανονίστων ὡς τὰ 6 Γαιοκάρυα. Εἰς τὴν προκειμένην μέθοδον στρωματοειδοῦς δείγματος ὑφίστανται 3780 δυνατὰ δείγματα, ἐξ ἓξ ἕκαστον, ἐν συγκρίσει πρὸς τὰ 18564 δείγματα τῶν 6 ἐξ ἑκάστου δυνατῶν κατὰ τὴν Ἁπλῆν Τυχαίαν Δειγματοληψίαν.

Ἰσομεγέθη Δείγματα

Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπαιτεῖ τὴν ἐπιλογὴν δύο Καρύων, δύο Λεπτοκαρύων καὶ δύο Γαιοκαρύων διὰ τὸ δεῖγμα μας τῶν ἕξ. Καὶ πάλιν χρησιμοποιοῦμεν τὸν Πίνακα τῶν Τυχαίων Ἀριθμῶν διὰ νὰ ἐπιλέξωμεν τὰ Κάρυα ἑκάστου στρώματος.

Στρῶμα	Ἀριθμὸς Καρύων	Βάρος εἰς MG	Συντελεστὴς Σταθμίσεως	Σταθμιζόμενα Σύνολα
Κάρυα	3	43	—	— $\frac{10.3}{4}$
	2	67	—	—
Σύνολον		110	3/2	165
Λεπτοκάρυα	9	26	—	— $\frac{53.6}{2}$
	4	27	—	—
Σύνολον		53	6/2	159
Γαιοκάρυα	16	7	—	— $\frac{16 \cdot 9}{2}$
	15	9	—	—
Σύνολον		16	9/2	72
Γενικὸν Σύνολον				396

Σταθμικὸς Μέσος 396 : 18 ἴσον 22 (ἐν συγκρίσει πρὸς τὰ 23 τοῦ Πλήθους μας).

Πράγματι ἐὰν ἐκλέξωμεν τὰ 2/3 τῶν καρύων τοῦ πλήθους, τὸ 1/3 τῶν λεπτοκαρύων καὶ τὰ 2/9 τῶν γαιοκαρύων θὰ πρέπῃ νὰ προσαρμόσωμεν τὰς ποικιλλούσας αὐτὰς ἀναλογίας διὰ νὰ ἐπιτυχωμεν ἓν ἀποδεκτὸν ἀποτέλεσμα. Ὁ καλούμενος Συντελεστὴς Σταθμίσεως εἶναι ὁ ἀντίστροφος τῆς ἀναλογίας δειγματοληψίας· π.χ. ἐπὶ τῶν 2/3 τῶν καρύων, ἅτινα ἐξελέξαμεν, ὁ Συντελεστής μας θὰ εἶναι 3/2.

ʼΑρίστη Διάταξις (Optimum Allocation)

Ὅπως καὶ ἡ λέξις δηλοῖ, ἡ μέθοδος αὐτὴ παρέχει τὴν καλλιτέραν δυνατὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ συνολικοῦ μας δείγματος εἰς ἀτομικὰ στρώματα. Δηλαδὴ ἀνεπτύχθησαν τύποι, οἱ ὁποῖοι μᾶς λέγουν τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος ἑκάστου στρώματος, ὅπερ θέλει ἀποφέρει τὰς πλέον ἀκριβεῖς ἐκτιμήσεις κατὰ μέσον ὅρον διὰ συγκεκριμένον συνολικὸν μέγεθος δείγματος. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι περιττὸν νὰ προβῶμεν εἰς προσαρμογὴν διὰ ποικιλλούσας ἀναλογίας τοῦ δείγματος εἰς τὰ κατ' ἰδίαν στρώματα. ʼΑφήνοντες κατὰ μέρος τοὺς μαθηματικοὺς τύπους παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μέθοδος αὐτὴ μᾶς ὑποδεικνύει νὰ συλλέξωμεν τρία Κάρυα, δύο Λεπτοκάρυα καὶ ἓν Γαιοκάρυον. Χρησιμοποιοῦντες τὸν Πίνακα Τυχαίων ʼΑριθμῶν διὰ νὰ ἐπιλέξωμεν τὰ δύο λεπτοκάρυα καὶ τὸ ἓν γαιοκάρυον εὕρομεν τὸν ἀριθμὸν 21 1/2 MG ὡς Σταθμικὸν Μέσον ἔναντι τοῦ 23 τοῦ Πλήθους.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐν τῇ Στρωματοειδεῖ Δειγματοληψίᾳ δύναται νὰ ἐπεκταθῇ εἰς καταστάσεις, ὅπου τὸ κόστος διεξαγωγῆς τῆς δειγματολογικῆς ἐρεύνης ποικίλλει ἀπὸ στρώματος εἰς στρῶμα. Κατ' ἀκολουθίαν ὁσάκις αἱ δυνατότητες τοῦ Προϋπολογισμοῦ δὲν ἐπιτρέπουσι τὴν διεξαγωγὴν μιᾶς ἐρεύνης, ὁ ἀποτελεσματικώτερος τρόπος εἶναι νὰ ὑποδιαιρέσωμεν τὸ συνολικὸν δεῖγμα εἰς στρώματα, ἐὰν δὲ ἔχῃ προκαθορισθῇ καὶ βαθμός τις ἀκριβείας δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος καὶ τὴν κατάτμησίν του κατὰ στρώματα οὕτως ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος μὲ τὴν μεγίστην ἐπιθυμητὴν ἀκρίβειαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV. ΣΩΡΕΥΤΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ (CLUSTER SAMPLING)

Ἕτερος τρόπος ἐπιλογῆς δείγματος 6 Καρύων ἐκ τῶν 18 τοῦ μικροσκοπικοῦ πληθυσμοῦ μας εἶναι νὰ συνενώσωμεν τὰ 18 Κάρυα εἰς ἀνομοιογενεῖς σωρούς. Πρὸς τοῦτο δημιουργοῦμεν τρεῖς Σωρούς, ἑκάστου περιέχοντος ἓν κάρυον, δύο λεπτοκάρυα καὶ τρία γαιοκάρυα ὡς κατωτέρω :

ΣΩΡΟΣ I			ΣΩΡΟΣ II			ΣΩΡΟΣ III		
ʼΑριθμὸς Καρύων	Ποικιλία	Βάρος MG	ʼΑριθμὸς Καρ.	Ποικιλία	Βάρος MG	ʼΑριθ. Καρ.	Ποικιλία	Βάρος MG
1	Κάρυον	55	2	Κάρυον	67	3	Κάρυον	43
4	Λεπτοκάρ.	27	6	Λεπτοκάρ.	24	8	Λεπτοκάρ.	31
5	»	32	7	»	28	9	»	26
10	Γαιοκάρ.	8	13	Γαιοκάρ.	11	16	Γαιοκάρ.	7
11	»	12	14	»	7	17	»	10
12	»	8	15	»	9	18	»	9
Σύνολον		142			146			126
Μέσος Ὅρος Σωροῦ		23 4)6			24 2)6			21

Χρησιμοποιοῦντες καὶ πάλιν τὸν μικρὸν Πίνακα Τυχαίων 'Αριθμῶν, ὁ πρῶτος ἀριθμὸς μεταξὺ 01 καὶ 03 πλησιάζει πρὸς τὸ 03, διὸ καὶ ἐκλέγεται ὁ Σωρὸς III ὡς δεῖγμα, ἔνθα τὸ μέσον βάρος εἶναι 21 MG ἔναντι τοῦ μέσου βάρους 23 τοῦ πληθυσμοῦ. Γενικῶς εἰπεῖν τὰ πλέον ἀκριβῆ ἀποτελέσματα κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν ἀναμένονται ὁσάκις ἕκαστος Σωρὸς περιλαμβάνει ὅσον τὸ δυνατὸν ποικίλλον μῖγμα, ἐνῷ ἐκ παραλλήλου ὁ εἷς Σωρὸς ὁμοιάζει κατὰ τὸ δυνατὸν πρὸς τὸν ἕτερον. Ἡ αἰτιολογία τῆς κατὰ τὰ ἀνωτέρω ληφθείσης τόσον καλῆς ἐκτιμήσεως ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ κάρυα εἰς ἕκαστον σωρὸν ἦσαν ὅλα ἀναμίξ, ἐνῷ συγχρόνως ἕκαστος ἐκ τῶν τριῶν Σωρῶν ὡμοίαζε πρὸς τοὺς ἄλλους δύο κατὰ πολύ, τουτέστιν εἶχεν ἕκαστος Σωρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καρύων, λεπτοκαρύων καὶ γαιοκαρύων. Τὰ σημειωθέντα εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον κριτήρια διὰ μίαν καλὴν στρωματοειδῆ δειγματοληψίαν ἦσαν ἀκριβῶς τὰ ἀντίθετα, ἤτοι στρώματα ὅσον ἔνεστι ὁμογενῆ ἐσωτερικῶς καὶ ταῦτα δὲ διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ τὸ δυνατὸν περισσότερον, τὸ δὲ παράδειγμα ἐπεβεβαίωσε ταῦτα, δηλ. ἕκαστον στρῶμα περιελάμβανε κεχωρισμένην ποικιλίαν καρύων καὶ αἱ τρεῖς δὲ ποικιλίαι ἦσαν τελείως διαφορετικαὶ ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην ἐν σχέσει πρὸς τὰ μέσα βάρη. 'Ενῷ λοιπὸν ἡ στρωματοποίησις, λογικῶς ἐκτελουμένη, σχεδὸν πάντοτε ἀποφέρει περισσότερον ἀκριβῆ ἐκτίμησιν ἢ τὸ 'Απλοῦν Τυχαῖον Δεῖγμα, ἡ Σωρευτικὴ Δειγματοληψία γενικῶς ἀποδίδει ὀλιγώτερον ἀκριβῆ ἐκτίμησιν ἢ τὸ 'Απλοῦν Τυχαῖον Δεῖγμα τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Ἡ αἰτία τούτου δέον νὰ ἀναζητηθῇ εἰς τὸ ὅτι εἰς πολλὰς ἐν τῇ πράξει καταστάσεις πρέπει νὰ ἀποδεχθῶμεν τὰ δείγματα ὅπως εἶναι, πολλάκις δὲ ἕκαστον ἐκ τούτων εἶναι σχετικῶς ὁμογενές, καίτοι διαφέρει ἀπὸ τῶν ἄλλων στωμμάτων. Κατὰ συνέπειαν ἡ χρῆσις τῆς Σωρευτικῆς Δειγματοληψίας κατὰ γενικὴν ἀναγνώρισιν ὑπαγορεύεται μᾶλλον ἐξ ὑπολογισμῶν κόστους καὶ διοικήσεως.

Ὑποτεθείσθω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι μία 'Εταιρία Ξηρῶν Καρπῶν ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίζῃ τὴν μέσην ἐτησίαν κατανάλωσιν τῶν προϊόντων της κατ' οἰκογένειαν εἰς τὴν πόλιν τῆς Θεσσαλονίκης. 'Εὰν μὲν ὑπάρχῃ διαθέσιμος εἷς κατάλογος ὅλων τῶν οἰκογενειῶν τῆς πόλεως θὰ ἠδύνατο νὰ λάβῃ ἓν Τυχαῖον Δεῖγμα, ἔστω 2000 οἰκογενειῶν καὶ ἐκ τούτου νὰ πληροφορηθῇ τὴν μέσην κατανάλωσιν. Παρὰ ταῦτα ἁπλούστερον καὶ εὐθηνότερον διὰ τὴν 'Εταιρίαν εἶναι νὰ ἐκλέξῃ κατὰ τύχην περὶ τὰ 100 οἰκοδομικὰ τετράγωνα τῆς πόλεως μὲ μέσον ὅρον 40 οἰκογενείας εἰς ἕκαστον καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ προβῇ εἰς τελείαν καταγραφὴν τῶν τετραγώνων τούτων. Ὑποτίθεται γενικῶς ὅτι αἱ οἰκογένειαι εἰς ἕνα ἁπλοῦν τετράγωνον θὰ εἶναι σχεδὸν ὁμοιογενεῖς ἐξ ἀπόψεως εἰσοδήματος (ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον τετράγωνον ἑτέρου τμήματος τῆς αὐτῆς πόλεως, κατοικουμένου λόγῳ θέσεως παρὰ τῶν λίαν εὐπόρων), ἀλλὰ καὶ οἱ ἔνοικοι τῶν τετραγώνων δὲν διαφέρουσι ἀπὸ πλευρᾶς γαστρονομικῶν ὀρέξεων. Οὕτω τὰ στρώματά μας θὰ εἶναι ὁμοιογενῆ καὶ τὸ δεῖγμα τῶν 100 τετραγώνων μὲ τὰς 4000 οἰκογενείας δύναται νὰ παράσχῃ εὐκόλως τόσον ἀκριβὲς ἀποτέλεσμα ὅσον καὶ τὸ εὐρέως διασπειρόμενον τυχαῖον δεῖγμα τῶν 2000 οἰκογενειῶν καὶ μὲ ἐλάχιστον μάλιστα συνολικὸν κόστος. 'Ενῷ λοιπὸν τὸ τυχαῖον δεῖγμα εἶναι πλέον ἀκριβὲς μέγεθος πρὸς μέγεθος εἰς τὸ παράδειγμά μας, τὸ μεγαλύτερον σωρευτικὸν δεῖγμα θὰ εἶναι πλέον ἀποτελεσματικὸν ἐξ ἀπόψεως κόστους. Εἰς τὴν σύγχρονον πρακτικὴν ἡ δειγματοληψία πλήρων στρωμάτων δὲν εἶναι καὶ τόσον συνήθης. Συνηθέστερον τὸ δεῖγμα ἐκλέγεται κατὰ δύο ἢ περισσότερα στάδια. Εἰς δειγματοληψίαν δύο σταδίων τὰ δείγματα ἐπιλέγονται κατὰ τύχην καὶ ἐξάγεται ἓν ὑπόδειγμα κατὰ τύχην ἐξ ἑκάστου στρώματος. Τὰ στρώματα εἰς μίαν τοιαύτην σχεδίασιν δειγμάτων καλοῦνται Ἀρχικαὶ Δειγματολογικαὶ Μονάδες, ἐνῷ τὰ στοιχεῖα τῶν ὑποδειγμάτων καλοῦνται Στοιχειώδεις Μονάδες. Παράδειγμα: ἐκλέγομεν 100 σάκκους διαφόρων εἰδῶν καρύων, βάρους μιᾶς λίτρας, ἔκ τινος πληθυσμοῦ 1000 τοιούτων σάκκων. Οἱ σάκκοι ἢ στρώματα εἶναι αἱ Ἀρχικαὶ Δειγματολογικαὶ Μονάδες καὶ τὰ κάρυα αἱ Στοιχειώδεις Μονάδες.

Ἡ Σωρευτικὴ Δειγματοληψία συχνάκις εἶναι κατορθωτὴ κατὰ τὴν ἑτοιμασίαν δειγματολογικῶν ὑπολογισμῶν ἐκ δεδομένων, περιεχομένων εἰς μέγαν ὄγκον Διατρήτων Δελτίων. Ἐὰν αἱ Καρτέλλαι ἐναποτίθενται εἰς ἀριθμόν τινα ἑρμαρίων, ἕκαστον ἑρμάριον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς Σωρός. Κατόπιν συλλέγομεν πολλὰ ἑρμάρια κατὰ τύχην καὶ εἴτε ὅλα εἴτε καθοριζόμενον κλάσμα ἐκ τῶν Δελτίων ἑκάστου ἑρμαρίου δύναται νὰ ἐπιλεγῇ διὰ τὸ τελικὸν δεῖγμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V. ΕΤΕΡΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

1. **Συστηματικὴ Δειγματοληψία (Systematic or Patterned or Serial Sampling).**

Εἰς τὸ παράδειγμά μας τοῦ πληθυσμοῦ τῶν 18 Καρύων θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ἓν δεῖγμα 6 καρύων ὡς ἀκολούθως: Πρῶτον ἐκλέγομεν κατὰ τύχην ἕνα ἀριθμὸν μεταξὺ 1 καὶ 3, ἔστω π.χ. τὸν ἀριθμὸν 2. Κατόπιν περιλαμβάνομεν εἰς τὸ δεῖγμα μας τὸν ἀριθμὸν καρύου 02 καὶ κάθε τρίτον κάρυον μετέπειτα. Οὕτω τὸ δεῖγμα μας θὰ συνίσταται ἐκ τῶν καρύων 02, 05, 08, 11, 14 καὶ 17.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπαντᾶται συχνάκις καθόσον εἶναι ἁπλῆ, ἄμεσος καὶ ἀνέξοδος. Ὅταν ἔχωμεν διαθέσιμον ἕνα Πίνακα ὀνομάτων ἢ πραγμάτων ἡ συστηματικὴ δειγματοληψία ἀποτελεῖ τὴν ἀποδοτικωτέραν μέθοδον. Διὰ τὴν ἐπιλογὴν δείγματος Διατρήτων Δελτίων ἐξ ἀριθμοῦ ἑρμαρίων, πλήρων ἐκ Καρτελλῶν, χρησιμοποιεῖται πολλάκις εἷς Κανὼν διὰ νὰ ἐκλέξωμεν μίαν Καρτέλλαν, π.χ. κατ' ἴντσαν.

2. **Διπλῆ Δειγματοληψία (Double or Two-Phased Sampling).**

Κατὰ ταύτην ἐκλέγομεν ἓν μέγα δεῖγμα καὶ αἱ πληροφορίαι τοῦ δείγματος τούτου χρησιμεύουσιν ὡς βάσις διὰ τὴν ἐκλογὴν ἑνὸς μικροῦ δείγματος χάριν ἐξονυχιστικωτέρας μελέτης. Παράδειγμα: Ἓν ἁπλοῦν σύντομον ἐρωτηματολόγιον χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν δεδομένα ἐπὶ τῆς ἐπαγγελματικῆς κατανομῆς μεγάλου πληθυσμοῦ ἐκ δείγματος 10000 προσώπων καὶ ἓν ἀρκετὰ περιεκτικὸν ἐρωτηματολόγιον ἀποστέλλεται τότε εἰς ἓν δεῖγμα 1000 ἐκ τῶν 10000 αὐτῶν προσώπων. Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἀναλογίας ἑκάστης ἐπαγγελματικῆς ὁμάδος εἰς τὸ μέγα δεῖγμα εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἐκλέξωμεν τὸ δεῖγμα τῶν 1000.

3. **Ἀνεξάρτητα Ὑποδείγματα (Interpenetrating Replicate Subsamples).**

Τὰ ὑπο-δείγματα ταῦτα συνιστῶνται κατὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βαθμοῦ τῆς συμφωνίας τῶν ἀποτελεσμάτων διαδοχικῶν δειγμάτων καὶ διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἐντυπωσιακοὺς ὑπολογισμούς. Ἓν ὑπό-δειγμα δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον πρὸ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τελικῆς ἐκτιμήσεως ἐκ τοῦ συνολικοῦ δείγματος. Ἡ περαιτέρω ἐνέργειά μας εἶναι νὰ ἐλέγξωμεν ἕνα ἀπαριθμητὴν ἔναντι ἑτέρου δίδοντες εἰς ἕκαστον κεχωρισμένον ὑπό-δειγμα διὰ νὰ ἐργασθῇ μ' αὐτό. Παράδειγμα : Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν 1000 σάκκους μιᾶς λίτρας ἐκ καρύων ἠριθμημένους ἀπὸ τοῦ 1 ἕως τὸ 1000 διαδοχικῶς. Δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν 10 διαφορετικὰ δείγματα τῶν 10 σάκκων ἕκαστον κατὰ τύχην καὶ νὰ ἐκλέξωμεν 10 κάρυα ἐξ ἑκάστου σάκκου κατὰ τύχην πάλιν. Ἐὰν θέσωμεν τὰ 100 κάρυα ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπό-δειγμα τῶν 10 σάκκων εἰς τὸ πρῶτον τῶν 10 καλάθων,τὰ 100 κάρυα τοῦ δευτέρου ὑποδείγματος τῶν 10 σάκκων εἰς τὸ δεύτερον ἐκ τῶν 10 καλάθων κ.ο.κ. τὰ 10 καλάθια τῶν 100 καρύων ἕκαστον θέλουσιν ἀντιπροσωπεύσει δέκα ἀνεξάρτητα ὑπο-δείγματα.

4. Ἀνάλυσις Ἀκολουθίας (Sequential Analysis).

Μία σημαντικὴ μέθοδος ἀποδοχῆς τῆς δειγματοληψίας εἰς ἐργασίαν ἐλέγχου ποιότητος σημειοῦται ἐν ἁδραῖς γραμμαῖς καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ Ἀνάλυσις Ἀκολουθίας, ἡ ὁποία ἀνεπτύχθη κατὰ τὸ ἔτος 1945. Διαφέρει τῶν ἄλλων τύπων δειγματοληψίας κατὰ τὸ ὅτι διαδοχικαὶ μονάδες ἐξετάζονται καὶ ἡ ἀπόφασις πρὸς ἀποδοχὴν ἑνὸς συνολικοῦ μεριδίου (κλήρου), ἀπορρίψεως τούτου, ἢ ἐξετάσεως τῆς ἑπομένης μονάδος λαμβάνει χώραν ἀφοῦ ἐξετασθῇ ἑκάστη διαδοχικὴ μονάς. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπεδείχθη λυσιτελὴς καὶ οἰκονομικὴ διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν Διατρήτων Δελτίων IBM. Ἓν ὑψηλὸν ἐπίπεδον ἀκριβείας ἐπιτυγχάνεται ἀκόμη καὶ ὅταν πολὺ μικρὰ ἀναλογία Καρτελλῶν ἔχει ἐπαληθευθῆ.

5. Μικταὶ Μέθοδοι Δειγματοληψίας (Combined Sampling Methods).

Εἰς πολλὰς ἐρεύνας χρησιμοποιεῖται συνδυασμὸς μεθόδων δειγματοληψίας μᾶλλον ἢ μία μόνον μέθοδος. Ἐπὶ παραδείγματι εἰς τὴν Πολεμικὴν Ἀεροπορίαν μία δειγματολογικὴ ἔρευνα συνεπάγεται τὴν διευθέτησιν ἀριθμοῦ τινος στρωμάτων (Ἀρχηγεῖα), ἑκάστου περιλαμβάνοντος στρώματά τινα (Ὑποδιοικήσεις). Μεθ' ὃ ἐκλέγομεν Σωροὺς ἐξ ἑκάστου στρώματος μὲ ἀρίστην διάταξιν, ἐξάγομεν ἀναλογικὸν δεῖγμα τῶν Τμημάτων (Πτέρυγες) ἐξ ἑκάστου σωροῦ, ἐκλέγομεν τυχαῖον δεῖγμα ὑπομονάδων (Μοῖραι) ἐξ ἑκάστου τμήματος καὶ τέλος ἐξάγομεν συστηματικὸν δεῖγμα στοιχειωδῶν μονάδων (Ἀεροσκάφη) ἐξ ἑκάστης ὑπομονάδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΣ

Γενικά:

Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐζητήθη νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ σύνολον τῶν Ὡρῶν Πτήσεως τῶν 10 Μοιρῶν τῶν Μαχίμων Πτερύγων τοῦ 28 Α.Τ.Α Πρὸς τοῦτο ἀποφασίζομεν νὰ λάβωμεν τὴν ἐκτίμησίν μας ἔκ τινος τυχαίου δείγματος τριῶν Μοιρῶν. Ὑποθετικὰ δεδομένα διὰ τοὺς μῆνας Ἰούλιον καὶ Αὔγουστον καὶ τῶν 10 Μοιρῶν καταγράφονται κατωτέρω διὰ νὰ καταδείξωμεν τὰ ἐπιτυγχανόμενα ἐκ διαφόρων διαδικασιῶν ἐκτιμήσεως ἀποτελέσματα.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΩΡΩΝ ΠΤΗΣΕΩΣ ΜΑΧΙΜΩΝ ΜΟΙΡΩΝ ΕΒΑ (ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΟΙΡΩΝ	ΩΡΑΙ ΠΤΗΣΕΩΣ	
	ΙΟΥΛΙΟΥ (Ψ)	ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ (Χ)
ΜΟΙΡΑ Α'	1179	1227
» Β'	714	885
» Γ'	1076	1145
» Δ'	763	843
» Ε'	874	913
» ΣΤ'	1191	1284
» Ζ'	483	651
» Η'	745	890
» Θ'	1272	1370
» Ι'	703	792
Σύνολον Ὡρῶν Πτήσεως Μονάδων 28 ΑΤΑ	9000	10000
Μέσος Ὅρος Ὡρῶν	900	1000

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΩΡΩΝ ΠΤΗΣΕΩΣ ΤΡΙΩΝ ΜΟΙΡΩΝ
(ΑΠΛΟΥΝ ΤΥΧΑΙΟΝ ΔΕΙΓΜΑ)

ΕΠΙΛΕΓΕΙΣΑΙ ΜΟΙΡΑΙ	ΩΡΑΙ ΠΤΗΣΕΩΣ	
	ΙΟΥΛΙΟΥ (Ψ)	ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ (Χ)
ΜΟΙΡΑ Β'	714	885
» Ε'	874	913
» Η'	745	890
Σύνολον Δείγματος	2.333	2.688
Μέσος Ὅρος Ὡρῶν Πτήσεως Δείγματος	778	896

Ἁπλῆ Ἀμερόληπτος Ἐκτίμησις (Blowup or Simple Unbiased Estimate).

Ἡ πλέον προφανὴς ἐκτίμησις τοῦ συνολικοῦ χρόνου πτήσεως μ. Αὐγούστου εἶναι ἡ Ἁπλῆ Ἀμερόληπτος Ἐκτίμησις, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀντιστρόφου τῆς ἀναλογίας δείγματος πρὸς τὸ σύνολον δείγματος μ. Αὐγούστου. Ἐφ' ὅσον ἐπελέγησαν τρεῖς ἐξ ὅλων τῶν Μοιρῶν διὰ τὸ δεῖγμα μας ἡ προκειμένη ἐκτίμησις θὰ εἶναι 2688 × 10 : 3 ἴσον 8960 ὧραι ἔναντι τοῦ συνολικοῦ χρόνου πτήσεως τοῦ μηνὸς Αὐγούστου ὅλων τῶν Μοιρῶν, ὅστις εἶναι 10000 ὧραι. Ὡς πρὸς τὸν Ἰούλιον θὰ ἔχωμεν 2333 × 10 : 3 = 7777.

Ἀναλογικὴ Ἐκτίμησις (Ratio Estimate).

Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποφέρει περισσότερον ἀκριβῆ ἀποτελέσματα ἢ ἡ προηγουμένη. Ἐὰν ἔχωμεν διαθέσιμα δεδομένα ὡρῶν πτήσεως ὅλων τῶν Μοιρῶν τοῦ προηγουμένου μηνὸς ἡ ἀναλογικὴ ἐκτίμησις χρησιμοποιεῖται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{c}\text{Ἀναλογικὴ Ἐκτίμησις}\\ \text{Συνολικοῦ χρόνου πτή-}\\ \text{σεως μηνὸς Αὐγούστου}\end{array} = \frac{\begin{array}{c}\text{Χρόνος Πτήσεως Μοι-}\\ \text{ρῶν Δείγματος μηνὸς}\\ \text{Αὐγούστου}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Χρόνος Πτήσεως τῶν}\\ \text{Μοιρῶν Δείγματος μη-}\\ \text{νὸς Ἰουλίου}\end{array}} \times \begin{array}{c}\text{Χρόνον Πτήσεως ὅλων}\\ \text{τῶν Μοιρῶν μηνὸς}\\ \text{Ἰουλίου}\end{array}$$

$$\text{ἢ } \frac{2688}{2333} \times 9000 = 10.369 \text{ Ὧραι.}$$

Ἐκτίμησις Διαφορᾶς (Difference Estimate).

$$\begin{array}{c}\text{Ἐκτίμησις Δια-}\\ \text{φορᾶς Συνόλου}\\ \text{Ὡρῶν Πτήσεως}\\ \text{μ. Αὐγούστου}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Ἀμερόληπτος Ἐκ-}\\ \text{τίμησις Συνόλου}\\ \text{Ὡρῶν Πτήσεως}\\ \text{μ. Αὐγούστου}\end{array} + \left(\begin{array}{c}\text{Ὧραι Πτήσεως}\\ \text{ὅλων τῶν Μοι-}\\ \text{ρῶν μ. Ἰουλίου}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Ἀμερόληπτος}\\ \text{Ἐκτίμησις Συνό-}\\ \text{λου Ὡρῶν Πτή-}\\ \text{σεως μ. Ἰουλίου}\end{array} \right)$$

$$\text{ἢ } 8960 + (9000 - 7777) = 10.183 \text{ Ὧραι}$$

Ἐκτίμησις Γραμμικῆς Παλινδρομήσεως (Linear Regression Estimate).

Ἡ ἐκτίμησις γραμμικῆς παλινδρομήσεως εἶναι παρομοία τῆς προηγουμένης, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ὁ ἐν τῇ παρενθέσει ὅρος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ β, ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν εἶδος τοῦ ἀπαντωμένου ἐν τῇ Ἁπλῇ Γραμμικῇ Συσχετίσει Συντελεστοῦ Συσχετίσεως (ἐν τῇ ἐξισώσει πάλινδρομήσεως $\psi = \alpha + \beta\chi$). Οὕτως ἡ ἐξίσωσις τῆς Ἐκτιμήσεως Γραμμικῆς Παλινδρομήσεως εἶναι $X'' = X' + \beta(\Psi - \Psi')$, ἔνθα:
X'' εἶναι ἡ ἐκτίμησις γραμμικῆς παλινδρομήσεως μηνὸς Αὐγούστου
X' εἶναι ἡ Ἀμερόληπτος Ἐκτίμησις τοῦ μηνὸς Αὐγούστου
Ψ εἶναι τὸ πραγματικὸν σύνολον τοῦ μηνὸς Ἰουλίου
Ψ' εἶναι ἡ Ἀμερόληπτος Ἐκτίμησις τοῦ μηνὸς Ἰουλίου

Εἰς τὸ παράδειγμά μας $X'' = 8960 + 0{,}8959(9000 - 7777) = 10.056$ Ὧραι. Διὰ τὸν ἐπιθυμοῦντα νὰ ἐλέγξῃ τὴν ἀπάντησιν αὐτὴν ὑπενθυμίζομεν ὅτι

$$\beta = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X}) - (\Psi_i - \bar{\Psi})}{\Sigma(\Psi_i - \bar{\Psi})^2} \quad \text{ἔνθα}$$

X_i εἶναι ὁ χρόνος πτήσεως τῆς Μοίρας i μηνὸς Αὐγούστου
Ψ_i » » » » i » Ἰουλίου
$\bar{X}$ εἶναι ὁ μέσος χρόνος πτήσεως ὅλων τῶν Μοιρῶν μ. Αὐγούστου
$\bar{\Psi}$ εἶναι ὁ μέσος χρόνος πτήσεως ὅλων τῶν Μοιρῶν μ. Ἰουλίου
Σ εἶναι τὸ σύμβολον τῆς ἀθροίσεως τῶν γινομένων ἢ τετραγώνων καὶ τῶν 10 Μοιρῶν.

Κανονικῶς τὸ β θὰ ἠδύνατο νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος διὰ τοὺς δύο διαδοχικοὺς μῆνας, δοθέντος ὅτι τὰ δεδομένα ὅλων τῶν Μοιρῶν δὲν θὰ ἦσαν διαθέσιμα διὰ τὸν τελευταῖον μῆνα.

Σύνοψις:

Ὡς ἴδωμεν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους εἶναι ἀναγκαῖον ὄχι μόνον νὰ ἐπιδιώκωμεν τὴν πλέον ἀποτελεσματικὴν μέθοδον δειγματοληψίας ἀλλὰ νὰ ἐκλέγωμεν καὶ μίαν κατάλληλον διαδικασίαν ἐκτιμήσεως εἰς συγκεκριμμένον πρόβλημα δειγματοληψίας.

Ἐπανερχόμενοι καὶ πάλιν ἐπὶ τοῦ παραδείγματός μας βλέπομεν ὅτι προέκυψαν τὰ ἀκόλουθα ἀποτελέσματα :

	ΩΡΑΙ ΠΤΗΣΕΩΣ	% ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ
Πραγματικὸν Σύνολον Ὡρῶν Αὐγούστου	10.000	——
Ἀμερόληπτος Ἐκτίμησις	8.960	10.40 %
Ἀναλογικὴ Ἐκτίμησις	10.369	3.69 %
Ἐκτίμησις Διαφορᾶς	10.183	1.83 %
Ἐκτίμησις Γραμ. Παλινδρομήσεως	10.056	0.56 %

Ὅταν τὰ δεδομένα διαδοχικῶν περιόδων ἢ κεχωρισμένων μονάδων συσχετίζωνται ἡ Ἀναλογικὴ Ἐκτίμησις πολλάκις ὑπερτερεῖ τῆς Ἀμεροληπτου τοιαύτης. Ὁμοίως αἱ Ἐκτιμήσεις Διαφορᾶς καὶ Γραμμικῆς Παλινδρομήσεως συνήθως συνεπάγονται καλύτερα ἀποτελέσματα ὑπὸ τοιαύτας περιστάσεις, καίτοι οἱ ὑπολογισμοὶ ἰδίᾳ τῆς Ἐκτιμήσεως Παλινδρομήσεως παρουσιάζονται πλέον ἐπίπονοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΕΚ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗ

Γενικά:

Εἰς τοὺς ἐκ τῶν ἀναγνωστῶν μεμψιμοίρους διὰ τὴν ἀποτελεσματικότητα τῆς δειγματοληψίας ὡς μέσου περιγραφικοῦ μιᾶς ὁλότητος δεδομένων ἐξ ἴσου ἂν ὄχι καλλίτερον συνιστωμένου ἔναντι τῆς πλήρους ἀπαριθμήσεως τοῦ Συνόλου κρίνεται σκόπιμον νὰ ὑπομνησθῶσι τὰ ἀκόλουθα :

α) Ὁσάκις ἡ δειγματοληψία ἐνεργῆται οὕτως ὥστε ἑκάστη μονὰς τοῦ στατιστικοῦ πληθυσμοῦ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τύχην νὰ ἐπιλεγῇ καὶ ἡ πιθανότης τῆς ἐπιλογῆς εἶναι γνωστή, τότε τὰ σφάλματα τῆς δειγματοληψίας δύνανται νὰ ἐλεγχθῶσιν ἱκανοποιητικῶς καὶ ἡ τοιαύτη δειγματοληψία ὁρολογεῖται ὡς Δειγματοληψία Πιθανότητος (Probability Sampling).

β) Εἶναι ἐξ ἴσου ἀληθὲς ὅτι ὑφίσταται ἀριθμός τις μεθόδων δειγματοληψίας οὐχὶ ἐκ πιθανότητος, ὅπου τὸ σφάλμα τῆς δειγματοληψίας δὲν δύναται νὰ ἐλεγχθῇ

Παρὰ ταῦτα ἱκανοὶ δειγματολῆπται ἀποφεύγουσι τὸν τύπον αὐτὸν δειγματοληψιῶν ἐξαιρέσει εἰδικῶν περιπτώσεων καὶ μόνον ὁσάκις ἡ χρησιμοποίησις δεδομένων μὲ ἄγνωστα σφάλματα καὶ μεροληψίας κατὰ τὴν δειγματοληψίαν δὲν εἶναι σημαντική.

γ) Οἱονδήποτε σύστημα συλλογῆς καὶ προωθήσεως δεδομένων ὑπόκειται εἰς σωρείαν σφαλμάτων, τὰ δὲ μὴ δειγματολογικὰ σφάλματα εἰς τοιοῦτον σύστημα πολλάκις εἶναι μεγαλυτέρα ἢ τὰ ἐκ δειγματοληψίας τοιαῦτα. Προσέτι ὁ βαθμὸς σφάλματος μιᾶς ἐκτιμήσεως ἑνὸς δείγματος δύναται νὰ μετρηθῇ ἐπὶ δειγμάτων πιθανότητος διὰ τῶν ὑπαρχόντων μέσων τῆς Στατιστικῆς Μεθοδολογίας, ἐνῷ τὰ μὴ ἐκ δειγματοληψίας σφάλματα γενικῶς δὲν εἶναι μετρήσιμα (ἐκτὸς ἐὰν χρησιμοποιηθῶσιν ἔλεγχοι δείγματος). Ἀλλὰ καὶ τὰ ἐκ δειγματοληψίας σφάλματα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφευχθῶσιν ἐὰν προβῶμεν εἰς πλήρη ἀπαρίθμησιν. Ὁπωσδήποτε μία καθολικὴ ἀκρίβεια συχνάκις δύναται νὰ ἐπαυξηθῇ ἐφ' ὅσον ἐνεργήσωμεν μίαν δειγματολογικὴν ἔρευναν παρὰ νὰ κάμωμεν πλήρη ἀπαρίθμησιν. Τὸ μικρότερον πεδίον τοῦ σχεδιασθέντος δείγματος ἐπιτρέπει εἰς τοῦτο νὰ εἶναι περισσότερον ἐκλεκτικόν, πλέον ὀρθὸν καὶ ἱκανὸν ἂν συγκεντροῦται εἰς μεγαλύτερον βαθμὸν πρὸς μείωσιν τῶν μὴ ἐκ δειγματοληψίας σφαλμάτων. Τὸ καθαρὸν προϊὸν μιᾶς δειγματολογικῆς ἐρεύνης ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν 100% ἀπαρίθμησιν πολλάκις παρέχει ἀκριβεστέραν ἀπάντησιν, ἐπιτυγχανόμενον μὲ ὀλιγώτερον προσωπικόν, ὀλιγωτέραν γραφικὴν ἐργασίαν, ἠλαττωμένον κόστος καὶ τέλος εἰς βραχύτερον χρονικὸν διάστημα.

Κατωτέρω ἐπισημαίνομεν τοὺς πλέον σοβαροὺς τύπους σφαλμάτων, τοὺς ὁποίους δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας κατὰ τὴν συλλογὴν τῶν δεδομένων.

Σφάλματα Ἀναφορῶν καὶ Προωθήσεως

Ἓν ἀρκετὰ ἐν χρήσει στατιστικὸν παράδοξον εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μέση ἡλικία τῶν ἄνω τῶν 40 ἐτῶν γυναικῶν ἐμφανίζεται πολὺ κάτω τῶν 40 ὁσάκις ἀναφέρεται παρὰ τῶν Κυριῶν. Παρομοίως εἷς καλλιεργητὴς μπανανῶν δύναται ν' ἀναφέρῃ τὸ ἐπάγγελμά του ὡς κιτροκαλλιεργητοῦ καὶ ὁ συρράπτων τὰς ὀπὰς τῶν κομβιοδόχων εἰς τὰ πέτα τῶν ζακετῶν ὡς ράπτου. Ἄλλος πάλιν δύναται νὰ ἀναφέρῃ διαφόρους ἀριθμοὺς δι' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, π.χ. τὴν ἡλικίαν του ὡς αὕτη γράφεται ἐπὶ μιᾶς αἰτήσεώς του δι' Ἀσφάλειαν Ζωῆς καὶ ὅπως ἀναφέρεται καὶ εἰς τὸ Ἀσφαλιστήριον Συμβόλαιον.

Βασικὰ δεδομένα δύνανται νὰ καταγραφῶσιν ἀνακριβῶς, νὰ ἀντιγραφῶσι ἐσφαλμένως, νὰ κωδικοποιηθῶσι μὴ ὀρθῶς, νὰ χειρισθῶσι μὴ καταλλήλως ἢ νὰ παραλειφθῶσι τελείως. Οὕτω ἐκ μιᾶς ἐρεύνης διαταχθείσης διὰ τὴν συλλογὴν τοῦ χρόνου πτήσεως καὶ τῶν χορηγηθέντων καυσίμων βάσει ἀρχικῶν πηγῶν προέκυψεν ὅτι ἀεροσκάφη τινὰ ἐπέταξαν 20, 30 ἢ περισσοτέρας ὥρας χωρὶς νὰ καταναλώσωσιν οὐδὲ σταγόνα καυσίμων καὶ τὸ κατόρθωμα αὐτὸ δὲν ἐπετεύχθη διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τυχὸν νέου βελτιωμένου τύπου ἀναμικτῆρος ἀλλ' ἁπλῶς διὰ τῆς παραλείψεως τῆς ἐγγραφῆς τῆς χορηγήσεως τῶν καυσίμων εἰς τὸ οἰκεῖον ἔντυπον.

Σφάλματα μὴ 'Αποκρίσεως

Πολλαὶ σοβαραὶ μεροληψίαι ἠμποροῦν νὰ προέλθωσι διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἀναφερθέντων δεδομένων ὑπὸ τῶν ἀποκρινομένων εἰς ἕνα ἐρωτηματολόγιον ἢ τῶν ἐνοίκων κατὰ μίαν οἰκογενειακὴν ἔρευναν, ἀδιαφόρως ἐὰν ἀνάγωνται εἰς ἓν δεῖγμα ἢ εἰς τὸν συνολικὸν πληθυσμόν. Μία ἡμερησία ἀπὸ οἰκίας εἰς οἰκίαν ἔρευνα, διεξαχθεῖσα ἐντὸς μιᾶς ἑβδομάδος θὰ ἀπέφερεν ἀναμφιβόλως πολὺ πτωχὴν ἐκτίμησιν τῶν οἰκοκυρῶν, ἐνῷ μία ἀπογευματινὴ συνέχισις διὰ τὰς μὴ εὑρισκομένας οἴκοι θὰ ἦτο ἀναγκαία διὰ νὰ ὑπερνικήσωμεν τὴν προφανῆ αὐτὴν μεροληψίαν. Εἶναι πάντοτε ἐπικίνδυνον νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι οἱ μὴ ἀποκρινόμενοι ἢ οἱ ἀπουσιάζοντες κατέχουσι τὰ αὐτὰ χαρακτηριστικὰ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν βαθμὸν ὅπως οἱ ἀποκρινόμενοι καὶ οἱ κατ' οἶκον, χωρὶς νὰ ἐλέγξωμεν τὸ δεῖγμα διὰ νὰ ἐξασφαλίσωμεν τὸ κῦρος τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς.

Σφάλματα κατὰ τὴν ἐκλογὴν Δείγματος

Μία ἐπίσης λίαν κοινὴ πηγὴ σφάλματος εἶναι ἡ μὴ πρέπουσα καὶ ἀνεπιστημονικὴ ἐκλογὴ τῶν μονάδων τοῦ δείγματος ὡς ἐπὶ παραδείγματι τὰ ἐπιλεγόμενα χάριν εὐκολίας χονδροειδῆ δείγματα. 'Ο Δειγματολήπτης ὁ ὁποῖος καταλήγει εἰς τὸ Μπὰρ τῶν Ζόες καὶ Γρὶλλ ὡς τὸ μέρος ὅπου πρόκειται νὰ ἐρευνήσῃ τὰ τῆς ποτοαπαγορεύσεως, ἀσφαλῶς θὰ εἶναι ὁ δράστης ἐλαφρᾶς μεροληπτικῆς,χονδροειδοῦς δειγματοληψίας. Δείγματα Κρίσεως ἂν καὶ πολλάκις ἀποφέροντα καλὰ ἀποτελέσματα εἶναι οὐχ ἧττον ἐπικίνδυνα,διὰ τὸν ἁπλούστατον λόγον ὅτι ἀκόμη καὶ ἡ κρίσις τῶν εἰδημόνων ποικίλλει σημαντικῶς κατὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν ἀντιπροσωπευτικῶν δειγμάτων.'Ομοίως 'Αναλογικὰ Δείγματα (Quota Samples) πάσχουσιν ἀπὸ τὸ ἐλάττωμα ὅτι ἐξαρτῶνται περισσότερον ἐκ τῆς ὑποκειμενικῆς διαθέσεως τοῦ Δειγματολήπτου ἢ ἐπὶ τῆς τυχαίας δειγματοληψίας. "Εν τοιοῦτον δεῖγμα π.χ. δύναται νὰ προσδιορίσῃ εἰδικῶς πῶς ὁ Δειγματολήπτης θὰ ἐπιτύχῃ δεδομένα ἐξ ἀρρένων ἡλικίας 35 - 40 ἐτῶν μὲ εἰσόδημα δρχ. 5000 - 7000. Καίτοι τοῦτο περιορίζει τοῦτον ἔν τινι μέτρῳ ἀπὸ τοῦ νὰ κάμῃ μίαν ἐξ ὁλοκλήρου μὴ ἀντιπροσωπευτικὴν ἐκλογὴν δύναται μολαταῦτα νὰ ἐκλέξῃ ὥστε νὰ ἐνεργήσῃ τὰς συνεντεύξεις του κατὰ τὴν διάρκειαν 'Αθλητικῶν 'Αγώνων εἰς τὸ Στάδιον.

Σφάλματα Δειγματοληψίας

Τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς δειγματολογικῆς ἐρεύνης σχεδὸν πάντοτε δὲν συμφωνεῖ τελείως πρὸς τὸ ἐπιτυγχανόμενον τοιοῦτον ἐκ μιᾶς πλήρους ἀπαριθμήσεως κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. 'Η μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰ ὀφείλεται εἰς τὸ σφάλμα δειγματοληψίας. 'Εὰν χρησιμοποιηθῇ ἓν σχεδιασθὲν δεῖγμα πιθανότητος εἶναι δυνατὸν νὰ προκαθορίσωμεν τὸ μέγεθος τοῦ ἀπαιτουμένου δείγματος διὰ νὰ ἔχωμεν εἰδικῶς προσδιωρισμένον βαθμὸν ἀκριβείας. Αὐτὴ ἡ σπουδαιοτάτη καὶ λίαν εὔστοχος ἰδιότης τοῦ δείγματος πιθανότητος συνήθως καθιστᾷ αὐτὸ δυνατὸν ὥστε τὸ ἀναμενόμενον σφάλμα δείγματος νὰ κρατῆται ἐντὸς τῶν ἐπιθυμητῶν ὁρίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ
(Κανονικὰ Σφάλματα)

Ἐκ τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὰ προηγούμενα Κεφάλαια προκύπτει ὅτι, ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς πληθυσμοῦ διαφέρουσι μεταξύ των, ἡ δὲ τύχη ἢ ἀνεξέλεγκτα αἴτια ὑπεισῆλθον κατὰ τὸν καταρτισμὸν ἑνὸς δείγματος, τὸ ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου προκύψαν στατιστικὸν ἀποτέλεσμα διαφέρει βεβαίως ἐκείνου ὅπερ θὰ ἐπετυγχάνετο ἐκ τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ. Τὸ ἀποτέλεσμα ὅθεν αὐτὸ δὲν δύναται νὰ ληφθῇ εἰμὴ ὡς ἐκτίμησις τοῦ ἀληθοῦς ἀποτελέσματος. Ἐκ παραλλήλου ὅμως μᾶς χρειάζεται νὰ γνωρίζωμεν κατὰ ποῖον μέτρον δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς μίαν καλὴν ἐκτίμησιν τῆς ζητουμένης τιμῆς διὰ νὰ μὴ ἀποδώσωμεν πραγματικὴν σημασίαν εἰς γεγονότα κατὰ τὸ πλεῖστον τυχαίας μορφῆς ἢ νὰ ἑρμηνεύσωμεν ἓν γεγονὸς σημασίας ὡς ἁπλῆν σύμπτωσιν.

Εἰς τὸ κεφάλαιον λοιπὸν αὐτὸ θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ ὡρισμένας μεθόδους, αἱ ὁποῖαι θὰ μᾶς ἐπιτρέψωσι νὰ ἀναλύσωμεν τὰ ἐκ τῶν παρατηρήσεων ἐξαγόμενα στατιστικὰ ἀποτελέσματα. Πρὸς τοῦτο ὅμως θὰ προτάξωμεν στοιχεῖα τινὰ τῆς Θεωρίας τῶν Σφαλμάτων τῆς Δειγματοληψίας καὶ τὴν Λογικήν, ἐφ' ἧς αὕτη ἐρείδεται.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ μελετήσωμεν χαρακτηριστικόν τι καὶ δὴ τὸ μέσον ἀνάστημα ἐνηλίκων, ἡλικίας 18 ἐτῶν. Δοθέντος ὅτι εἶναι ἀνέφικτον νὰ διέλθωσιν ἐκ τοῦ ἀναστημομέτρου ὅλοι οἱ ἄγοντες τὴν ἡλικίαν τῶν 18 ἐτῶν λαμβάνομεν κατὰ τύχην ἕνα ἀρκετὰ μεγάλον ἀριθμὸν ἐξ αὐτῶν διὰ νὰ ἀπαρτίσωμεν τὸ δεῖγμα μας. Ὑπολογίζομεν τότε τὸν Μέσον τῶν ἀναστημάτων τοῦ δείγματος αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος συνιστᾷ μίαν ἐκτίμησιν τοῦ ζητουμένου μέσου ἀναστήματος. Ἐὰν ἡ ἐμπιστοσύνη μας ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ εἶναι κατὰ πολὺ μεγαλυτέρα παρ' ὅσον εἶναι σημαντικὸς ὁ ἀριθμὸς τοῦ δείγματος, τὸ γεγονὸς τοῦτο μετριάζεται καθ' ὅσον δὲν γνωρίζομεν ἐὰν τὸ θεωρούμενον δεῖγμα εἶναι ὄντως ἀντιπροσωπευτικὸν τοῦ ὑπ' ὄψιν πληθυσμοῦ. Ἡ τύχη θὰ συνέτεινεν ὥστε ἡ ἀναλογία τῶν Νέων ὑψηλοῦ ἀναστήματος ἢ μικροῦ τοιούτου νὰ εἶναι μὴ ὁμαλή, ὁπότε ὁ παρατηρηθεὶς Μέσος θὰ διαφέρῃ προφανῶς ἀρκετὰ ἐκ τοῦ ἀληθοῦς Μέσου. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἤδη νὰ μάθωμεν εἶναι ἡ μεγίστη ἀπόκλισις, ἥτις σημειοῦται μεταξὺ τοῦ παρατηρηθέντος Μέσου καὶ τοῦ πραγματικοῦ Μέσου ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, μὲ ποίαν ἐμπιστοσύνην δυνάμεθα νὰ πιστοποιήσωμεν ὅτι ὁ Μέσος τοῦ δείγματος εὑρίσκεται εἰς δοθεῖσαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Μέσου τοῦ πληθυσμοῦ. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἐὰν ἐκλέξωμεν ἀνεξαρτήτως τοῦ πρώτου καὶ ἓν δεύτερον δεῖγμα, ἔχον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μονάδων, ἡ κατανομὴ τῶν ἀναστημάτων τοῦ δείγματος τούτου θὰ διαφέρῃ πιθανῶς ἀπὸ τοῦ πρώτου. Ὁ Μέσος τῶν ἀναστημάτων τοῦ δευτέρου δείγματος θὰ διαφέρῃ σχεδὸν βεβαίως ἀπὸ τοῦ Μέσου τοῦ πρώτου δείγματος, πρᾶγμα ὅπερ ἀποδεικνύει ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν δύο ἀποτελεσμάτων δύναται νὰ γίνῃ δεκτὸν διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀπεικόνισιν τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ. Ἓν τρίτον δεῖγμα ἐξαγόμενον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποφέρει ἕνα νέον Μέσον τῶν ἀναστημάτων καὶ ἐν συνεχείᾳ, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν νὰ ἐξάγωμεν δείγματα ἐξ ἴσου πολυπληθῆ ἐκ τοῦ συνόλου πληθυσμοῦ, θὰ σχηματίσωμεν ἕνα σεβαστὸν ἀριθμὸν ἀποτελεσμάτων, ὁπότε οἱ ἐπιτυγχανόμενοι Μέσοι θὰ κατανέμωνται ἐπὶ εὐρυτάτης κλίμακος, τοῦ πλείστου ὅμως ἐξ αὐτῶν συγκεντρουμένου πέριξ μιᾶς κεντρικῆς τιμῆς, ἑτέρων ὀλιγαρίθμων βεβαίως τιμῶν ἐμφανιζουσῶν ἀπόκλισιν ἀπὸ τῆς Μέσης Τιμῆς, λίαν δὲ σημαντικήν. Ἡ μνημονευθεῖσα Σειρὰ τῶν Μέσων μεγάλου ἀριθμοῦ δειγμάτων τῶν αὐτῶν μονάδων καλεῖται Κατανομὴ τοῦ Μέσου (Mean Distribution) τῆς οἰκογενείας τῶν δειγμάτων καὶ ἡ Κατανομὴ αὐτὴ ἱκανοποιεῖ τὸν Κανονικὸν Νόμον.

Ἡ ἐμπιστοσύνη, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐπί τινος Μέσου ἑνὸς μοναδικοῦ δείγματος, ἐξαρτᾶται συνεπῶς ἐκ τῆς διασπορᾶς τῆς Κατανομῆς αὐτῆς τοῦ Μέσου. Πράγματι ἐὰν οἱ Μέσοι τῆς οἰκογενείας τῶν δειγμάτων ἐξαπλοῦνται ἐπὶ μεγάλου διαστήματος δὲν ἠμποροῦμεν καθόλου νὰ ἔχωμεν ἐμπιστοσύνην ἐπὶ τοῦ ληφθέντος ἐξ ἑνὸς μόνον δείγματος Μέσου, διότι εἶναι δυνατὸν οὗτος νὰ συνιστᾷ μίαν ἐκ τῶν τιμῶν αἵτινες ἐμφανίζουσιν ἰσχυρὰν ἀπόκλισιν. Ἐὰν ἀντιθέτως ἡ διασπορὰ τῶν Μέσων εἶναι πτωχὴ ἡ ληφθεῖσα τιμὴ δὲν θὰ διαφέρῃ ἐκ τοῦ ἀληθοῦς Μέσου εἰμὴ κατ' ἐλάχιστον, ὁπότε θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν βασίμως ὑψηλὴν ἐμπιστοσύνην ἐπὶ τῆς τιμῆς του. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ὅθεν τὸν βαθμὸν τῆς ἐπιτευχθείσης ἐμπιστοσύνης θὰ πρέπῃ νὰ μετρήσωμεν τὴν διασπορὰν τῆς Κατανομῆς τοῦ Μέσου καὶ ἡ μέτρησις αὐτὴ παρέχεται διὰ τῆς Σταθερᾶς Ἀποκλίσεώς της σ, ἡ ὁποία καὶ ὁρολογεῖται ἐν προκειμένῳ ὡς Κανονικὸν Σφάλμα[3].

Συνοπτικῶς ἡ ἔκφρασις ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐμπιστοσύνην εἰς τὸν Μέσον ἑνὸς δείγματος σημαίνει ὅτι οἱ Μέσοι τῶν δειγμάτων τῶν αὐτῶν μονάδων ἔχουσι μεγάλην διασπορὰν ἢ ὅτι ὁ Μέσος ἔχει ἓν ἰσχυρὸν Κανονικὸν Σφάλμα (Erreur-type). Παρίσταται λοιπὸν ἐπιτακτικὴ ἡ ἀνάγκη ὅπως ἐν συνεχείᾳ τῆς μελέτης μας ὁρίσωμεν ποσοτικῶς τὸν βαθμὸν τῆς ἐμπιστοσύνης, τὸν ὁποῖον εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἔχωμεν εἰς ἀποτελέσματα ἐξαχθέντα ἐκ γεγονότων παρατηρηθέντων ἐκ μοναδικοῦ τινος δείγματος, πρᾶγμα ὅπερ συνεπάγεται τὸν ἐννοιολογικὸν προσδιορισμὸν τοῦ Ἐπιπέδου Σημαντικότητος (Seuil de signification). Ὁ βαθμὸς τῆς ἐμπιστοσύνης τὸν ὁποῖον δύναταί τις νὰ προσδώσῃ εἰς δοθεῖσαν διαπίστωσιν μόνον μέσῳ τῶν Πιθανοτήτων εἶναι δυνατός. Ὑποτεθείσθω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι σάκκος τις περιέχει 100 σφαίρας, ἐξ ὧν 95 φέρουσι μίαν μάρκαν. Διαπιστοῦμεν μὲ πολὺ μεγάλην ἐμπιστοσύνην ὅτι ἐὰν ἐξαγάγωμεν κατὰ τύχην μίαν σφαῖραν ἐκ τοῦ σάκκου, αὕτη θὰ εἶναι μαρκαρισμένη καὶ ὁ βαθμὸς τῆς ἐμπιστοσύνης αὐτῆς καλεῖται ἐπίπεδον σημαντικότητος 5%. Τὸ κριτήριον τοῦτο δικαιολογεῖται ἐκ τοῦ γε-

3. Κατὰ τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων τὸ μέσον Σφάλμα εἶναι ἐπὶ ἀπολύτων μὲν ἀριθμῶν $\sigma = \sqrt{n.\,p.\,q.}$, ἐπὶ ἀναλογιῶν δὲ $\sigma = \sqrt{\frac{p.\,q.}{n}}$. Κατὰ τὸν Bernoulli τὸ ἁπλοῦν Μέσον Σφάλμα δηλοῖ ὅτι εἰς $^2/_3$ τῶν παρατηρήσεων ὁ ἀριθμὸς τῶν συμβάντων εἶναι ἴσος πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν ἀναλογίαν μὲ τὴν προσθήκην ἢ ἀφαίρεσιν τοῦ σ, ἐφ' ὅσον δὲν ἐπηρεάζεται ὁ ἀριθμὸς τούτων ἐξ ἄλλων αἰτιῶν. Περαιτέρω διὰ νὰ περιορισθῇ ἡ ὅλη ἔκτασις τῶν ἐκ τυχαίων ἐπιδράσεων προκαλουμένων δυνατοτήτων διακυμάνσεως λαμβάνομεν τὸ τριπλάσιον τοῦ Μέσου Σφάλματος.

γονότος ὅτι ἐὰν ἐπαναλάβωμεν πολλὰς φορὰς τὴν ἐν λόγῳ πρᾶξιν (ἀφ' οὗ βεβαίως ἀντικαταστήσωμεν κάθε φορὰν τὴν ἐξαγομένην ἐκ τοῦ σάκκου σφαῖραν) ἡ διαπίστωσίς μας θὰ εἶναι ἐσφαλμένη μόνον 5 φορὰς ἐπὶ τῶν 100 ἤ, καλλίτερον, ἡ πιθανότης τοῦ σφάλματός μας θὰ εἶναι 0.05. 'Αλλὰ καὶ ἕτερα ἐπίπεδα σημαντικότητος δύνανται νὰ ὁρισθῶσιν, ὅπως λ.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν ἐξαγωγῆς ἑνὸς παιγνιοχάρτου ἐκ δέσμης τριάκοντα δύο τοιούτων δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι σπαθὶ μὲ ἐπίπεδον σημαντικότητος 75 %. Πράγματι ἡ πιθανότης τοιαύτης ἐξαγωγῆς εἶναι 8 : 32 = 25 καὶ ἡ διαπίστωσίς μας θὰ εἶναι ἐσφαλμένη τρεῖς φορὰς ἐπὶ τεσσάρων. Περαιτέρω βαίνοντες ἐπὶ ρίψεως ἑνὸς κύβου δυνάμεθα νὰ προκαθορίσωμεν ὅτι θὰ ἐξαχθῇ ἄρτιος ἀριθμὸς μὲ ἐπίπεδον σημαντικότητος 50 %, τῆς πιθανότητος τῆς τοιαύτης ἐξαγωγῆς οὔσης 3 : 6 = 0.5.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Τὸ ὁριζόμενον ἐπίπεδον σημαντικότητος συνδέεται ἀρνητικῶς πρὸς τὸν βαθμὸν ἐμπιστοσύνης.

Οὕτω ἐπίπεδον σημαντικότητος 1 % σημαίνει ὑψηλὸν βαθμὸν ἐμπιστοσύνης, καθόσον ἀντιστοιχεῖ εἰς διαπίστωσιν, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἐσφαλμένη μόνον μίαν φορὰν ἐπὶ τῶν 100.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου σημαντικότητος δύναται νὰ συνδεθῇ εὐκόλως πρὸς τὴν Κανονικὴν Κατανομήν. Ὡς γνωστὸν τὰ 99 % τῶν μονάδων μιᾶς Στατιστικῆς Σειρᾶς τοῦ Κανονικοῦ Νόμου παρουσιάζουσιν ἀπόκλισιν κάτω τῶν 2.58 σ. Ἐὰν λάβωμεν κατὰ τύχην μονάδα τινὰ τῆς Σειρᾶς δυνάμεθα νὰ πιστοποιήσωμεν μὲ ἐπίπεδον σημαντικότητος 1 % ὅτι ἡ ἀπόκλισίς της ἔναντι τοῦ Μέσου θὰ εἶναι κάτω τῶν 2.58 σ. Ὁμοίως ἡ ἀπόκλισις αὐτὴ εἶναι κατωτέρα τοῦ 1,96 σ εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 5 %, κατωτέρα τῶν 2.33 σ εἰς ἐπίπεδον 2 % καὶ κατωτέρα τῆς σ εἰς ἐπίπεδον 33 %.

Παραδείγματα Κατανομῆς συχνότητος εἰδικοῦ χαρακτηριστικοῦ ὁμάδος Δειγμάτων.

1) Ἔστωσαν ἐκ τοῦ Ληξιαρχείου Θεσσαλονίκης 700 γεννήσεις, ἐξ ὧν 362 ἀρρένων καὶ 338 θηλέων. Ἡ συχνότης γεννήσεως ἄρρενος εἰς τὸ δεῖγμα αὐτὸ θὰ εἶναι

$$p' = \frac{X}{\eta} = \frac{362}{700} = 0{,}517 \qquad q = \frac{338}{700} = 0{,}482$$

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{362 \cdot 338}{700}} = 0.018.$$

Συνεπῶς εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 5% δυνάμεθα νὰ πιστοποιήσωμεν ὅτι ἡ συχνότης γεννήσεως ἄρρενος μεταξὺ τῶν κάτωθι ὁρίων θὰ εἶναι :

$$0{,}517 - 1.96 \cdot 0{,}018 = 0{,}482 \quad \text{καὶ} \quad 0{,}517 + 1.96 \cdot 0{,}018 = 0{,}552$$

2) κατὰ τὴν μέτρησιν ἀριθμοῦ τινος μεταλλικῶν ράβδων εὑρέθη ὅτι αὗται διαφέρουσι μεταξύ των λόγῳ ἐλαττώματος κατασκευῆς κατὰ τὸ 1/4 mm. Αἱ γενόμεναι μετρήσεις εἴτε εἶναι πλήρεις ἀριθμοὶ χιλιοστομέτρων εἴτε συνεπάγονται ἐπιπρόσθετον κλάσμα ὡς 1/4, 1/2, 3/4. Κανονικῶς, ἐὰν συνενώσωμεν τὰ μέτρα

τοῦ αὐτοῦ κλάσματος, ἢ τὰ μὴ ἔχοντα τοιοῦτον, θὰ προκύψωσι τέσσαρες ὁμάδες αἰσθητῶς ἴσαι. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ἐπὶ 1041 μετρήσεων μόνον 203 ἔχουσι ἐπιπρόσθετον κλάσμα 3/4. Φυσικὸν ὅθεν νὰ διερωτηθῶμεν μήπως ἡ παρατηρηθεῖσα διαφορὰ δύναται νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὴν τύχην. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ 1041 μετρήσεις συνιστῶσιν ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἑνὸς ἀπεριορίστου πληθυσμοῦ μετρήσεων, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ πιθανότης τοῦ χαρακτηριστικοῦ 3/4 εἶναι $p=0.25$. Ἐπανερχόμεθα πάλιν εἰς τὸ ἐρώτημα περὶ τοῦ ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὥστε ἐκ μιᾶς κατὰ τύχην ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ τούτου ἐκλογῆς νὰ λάβωμεν ἓν δεῖγμα, ὅπερ νὰ παρέχῃ τοιαύτην διαφορὰν μεταξὺ τῆς θεωρητικῆς καὶ τῆς παρατηρηθείσης πιθανότητος.

Ἐφ' ὅσον $p=0.25$ καὶ τὸ Κανονικὸν Σφάλμα $\sigma_p=\sqrt{\dfrac{0{,}25\cdot 0{,}75}{1041}}=0.0134$ ἡ παρατηρηθεῖσα συχνότης εἶναι $203:1041=0.195$ καὶ ἡ διαφορὰ $0.25-0.195=0.055$. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην πρὸς τὸ Κανονικὸν Σφάλμα θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνηγμένην ἀπόκλισιν $0.055:0.0134=4.1$.

Δοθέντος ὅτι ἡ Κατανομὴ τοῦ p' εἶναι σχεδὸν κανονική, ἐὰν ἀναζητήσωμεν εἰς ἕνα Πίνακα τοῦ Κανονικοῦ Νόμου τὴν πιθανότητα μιᾶς τοιαύτης ἀνηγμένης ἀποκλίσεως θὰ εὕρωμεν ὅτι περιλαμβάνεται μεταξὺ 0.0001 καὶ 0.00001. Εἶναι κατ' ἀκολουθίαν δύσκολον νὰ πιστεύσωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ ὀφείλεται εἰς τὴν τύχην, καθόσον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς περίπτωσιν ἐμφανιζομένην ἅπαξ ἐπὶ 10.000. Θὰ συμπεράνωμεν λοιπὸν ὅτι συχνότης τόσον μικρὰ τοῦ χαρακτηριστικοῦ 3/4 ὀφείλεται εἴτε εἰς ἐλάττωμα τῆς συσκευῆς μετρήσεως εἴτε εἰς τάσιν τοῦ χειριστοῦ νὰ ἀντικαθιστᾷ ἓν μέτρον, ὅπερ θὰ ἔδει νὰ προσδιορισθῇ διὰ 3/4, διὰ πλήρους μέτρου ἢ ἔχοντος ἐπιπρόσθετον κλάσμα 1/2.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΣ ΜΗΔΕΝ (NULL HYPOTHESIS)

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα συχνάκις ἀπαντῶνται ἐν τῇ Στατιστικῇ ὑπὸ τὸ ὄνομα Ἔλεγχος Ὑποθέσεως Μηδέν. Βάσει τῶν ἐκ τοῦ δείγματος προκυπτόντων δεδομένων διαμορφοῦμεν τὴν Ὑπόθεσιν Μηδὲν ὡς ἀκολούθως: τοῦ δείγματος ἐξαχθέντος κατὰ τύχην ἔκ τινος πληθυσμοῦ προσδιορισθέντος ὑπολογίζομεν τὸ ἀποτέλεσμα ὅπερ δέον νὰ ἀναμένωμεν. Ἐὰν τὸ παρατηρηθὲν ἀποτέλεσμα διαφέρει ἀπὸ τοῦ τελευταίου τούτου, ἐξετάζομεν μήπως ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ ἀποδοθῇ εἰς διακυμάνσεις ὀφειλομένας εἰς τὴν τυχαίαν δειγματοληψίαν. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζεται ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ὀφειλομένης εἰς τὴν ὑπόθεσιν τιμῆς καὶ τῆς παρατηρηθείσης τιμῆς καὶ ἀναζητοῦμεν τὴν πιθανότητα ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτὴ ὑπερπηδηθῇ εἰς παρόμοια δείγματα διὰ τῆς ἀποδοχῆς τῆς ἀληθοῦς ὑποθέσεως. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη τότε ἀπορρίπτεται ἢ γίνεται ἀποδεκτὴ ἀναλόγως τῆς τιμῆς αὐτῆς τῆς πιθανότητος. Ἐὰν ἡ πιθανότης εἶναι πτωχὴ ἐκλέγομεν μίαν ἐκ τῶν δύο ἀκολούθων ἀποφάσεων:

α) ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν, δεχόμενοι ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπέστη τὸ δεῖγμα κάτι τοῦ ὁποίου ἡ πιθανότης θὰ ἦτο ἰσχνὴ ἐὰν ἡ ὑπόθεσις ἦτο ἀληθής.

β) Δεχόμεθα τὴν ὑπόθεσιν, θεωροῦντες ὅτι εἶναι λογικὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι συνέβη εἰς τὸ δεῖγμα κάτι τὸ ἀρκετὰ σπάνιον.

Ἀνηγμένη Ἀπόκλισις	Πιθανότης	Ἀνηγμένη Ἀπόκλισις	Πιθανότης
0	1	1.881	0.06
0.126	0.9	1.960	0.05
0.253	0.8	2.054	0.04
0.385	0.7	2.170	0.03
0.524	0.6	2.326	0.02
0.674	0.5	2.576	0.01
0.842	0.4	3.291	0.001
1.036	0.3	3.891	0.0001
1.282	0.2	4.417	0.00001
1.645	0.1	4.892	0.000001
1.695	0.09	5.327	0.0000001
1.751	0.08	5.731	0.00000001
1.812	0.07	6.109	0.000000001

Ἐὰν ἡ πιθανότης εἶναι ἀρκετὰ ἰσχνή, μικροτέρα τοῦ 2% ἢ 1%, θὰ προτιμήσωμεν συνήθως τὴν πρώτην κατάστασιν. Παρὰ ταῦτα ὅταν ἡ πιθανότης εἶναι ἴση ἢ ἀνωτέρα τοῦ 5 % πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ στραφῶμεν πρὸς τὴν δευτέραν.

Ὅθεν τὸ ἐπίπεδον σημαντικότητος διὰ τοῦ ὁποίου ἀπορρίπτομεν τὴν ὑπόθεσιν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς πιθανότητος ἑνὸς σφάλματος, ἀνωτέρου τοῦ ὑπολογισθέντος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὑποθέσεως. Ἐὰν ἡ πιθανότης αὐτὴ εἶναι 2% δυνάμεθα ἐπὶ παραδείγματι νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν ὑπόθεσιν μὲ ἐπίπεδον σημαντικότητος 2%, ἀλλὰ πρὸ τῆς κατηγορηματικῆς ἀπορρίψεως θὰ ἐξετάσωμεν μήπως ἠμποροῦμεν νὰ τὸ πράξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον 5 % ἢ εἰς τὸ τοιοῦτον 1 %. Ὁμολογουμένως ἡ ἀπόφασις τῆς ἀπορρίψεως ἢ ἀποδοχῆς ἐξαρτᾶται ὀλίγον καὶ ἐκ τῆς ἰδιοσυστασίας τοῦ Στατιστικοῦ ὡς καὶ τῶν πρακτικῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀποφάσεώς του. Θὰ ἦτο παρακινδυνευμένον νὰ καθορίσωμεν a priori κανόνας. Ἡ ἐπιλογὴ τοῦ καταλλήλου ἐπιπέδου πρέπει νὰ ἀποφασίζεται ἀντικειμενικῶς καὶ ἀναλόγως τῆς συγκεκριμένης ὑπὸ ἐξέτασιν καταστάσεως μὲ ποιάν τινα δόσιν φρονήσεως. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὑπογραμμισθέντων συνάγεται ὅτι ἡ χρησιμοποιηθεῖσα μέθοδος ὁμοιάζει πρὸς τὴν τοιαύτην τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἔμμεσον ἀπόδειξιν. Οὕτω εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐξ ἐπόψεως ἀριθμοῦ ἐξηγγείλαμεν τὴν πρόγνωσιν ὅτι τὰ κλάσματα $^3/_4$ εἶχον παραμεληθῆ. Ἡ πρώτη μας σκέψις ἦτο νὰ κάμωμεν τὴν ἀντίθετον ὑπόθεσιν καὶ βάσει ταύτης εὕρομεν ὅτι ἡ πιθανότης μιᾶς τόσον μεγάλης διαφορᾶς ἦτο μικροτέρα τοῦ 0.0001, πρᾶγμα ὅπερ ἤρχετο εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἥτις θὰ ἔπρεπε πλέον νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνακριβής.

Σημειοῦμεν ἐπίσης ὅτι ἐκ τοῦ γεγονότος τοῦ ἐπιπέδου σημαντικότητος ὁδηγούμεθα πολλάκις νὰ ἀπορρίπτωμεν ἀληθεῖς ὑποθέσεις. Ἐὰν ἐπὶ παραδείγματι χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἐπίπεδον 1% ἡ ἀναλογία των θὰ εἶναι 1%. Ὁμοίως ἡ ἐλάττωσις τοῦ ἐπιπέδου σημαντικότητος συνεπάγεται τὴν ἀποδοχὴν μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ σφαλερῶν ὑποθέσεων.

Ἐκτίμησις τῶν Παραμέτρων ἑνὸς Πληθυσμοῦ βάσει Δείγματος.

Βάσει ἀποτελεσμάτων, ληφθέντων ἐκ δείγματος ἐξαχθέντος τυχαίως ἔκ τινος πληθυσμοῦ, δυνάμεθα νὰ τὰ ἐπεκτείνωμεν ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ τούτου. Ὑποτίθεται ὅτι ὑπελογίσθησαν διὰ τὸ δεῖγμα ὁ $\overline{X}_\delta$ καὶ ἡ σ_δ. Αἱ καλλίτεραι ἐκτιμήσεις τῶν $\overline{X}_\pi$ καὶ σ_π τοῦ πληθυσμοῦ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\overline{X}_\pi = \overline{X}_\delta \qquad \boxed{\sigma_\pi = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\sigma_\delta}$$

ἔνθα n εἶναι αἱ μονάδες τοῦ δείγματος.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὴν σ τοῦ Μέσου τοῦ πληθυσμοῦ βάσει τῶν παρατηρηθέντων ἀποτελεσμάτων θὰ πρέπῃ νὰ περιορίσωμεν τὴν σ_π μεταξὺ τῶν ἰσοτήτων:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_\pi}{\sqrt{n}} \quad \text{καὶ} \quad \sigma_\pi = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\sigma_\delta$$

ὁπότε προκύπτει ὅτι $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma_\delta}{\sqrt{n-1}}$

Ἡ ἐκτίμησις τοῦ Μέσου τοῦ Πληθυσμοῦ δύναται νὰ καθορισθῇ διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ βαθμοῦ ἐμπιστοσύνης, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ τοῦ ἀποδώσωμεν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον:

$$\boxed{\overline{X} = \overline{X}_\delta \pm \frac{\sigma_\delta}{\sqrt{n-1}}}$$

ὅστις δεικνύει ὅτι ὑπάρχει μία πιθανότης περίπου 2/3 ὅτι ὁ μέσος τοῦ Πληθυσμοῦ θὰ περιλαμβάνηται εἰς τὸ διάστημα:

$$\overline{X}_\delta - \frac{\sigma_\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \text{καὶ} \quad \overline{X}_\delta + \frac{\sigma_\delta}{\sqrt{n-1}}$$

Ἀλλ' εἶναι προφανὲς ὅτι ἔχομεν τὴν εὐχέρειαν νὰ ὁρίσωμεν καὶ ἄλλα διαστήματα, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ διαπιστώσωμεν μὲ συγκεκριμένους βαθμοὺς πιθανότητος ποῦ εὑρίσκεται ὁ Μέσος, τὸ δὲ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὁριζόμενον διάστημα ὁρολογεῖται ὡς Διάστημα Ἐμπιστοσύνης (confidence interval) καὶ τὰ ὅριά του Ὅρια Ἐμπιστοσύνης (confidence limits).

Παραδείγματα

Ἔστω δεῖγμα 65 μηνῶν μὲ $\overline{X}_\delta = 77$cm καὶ $\sigma_\delta = 9.6$ cm $n = 65$. Ἡ σ του πληθυσμοῦ θὰ εἶναι

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{9.6}{\sqrt{64}} = 1{,}2 \text{ cm}$$

καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον σημαντικότητος 5% τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης θὰ ἔχῃ ὡς ὅρια $77+1.96\times12 = 79.35$ cm καὶ $77-1.96\times12 = 77.65$ cm.

Μὲ πιθανότητα 98% ἢ ἐπίπεδον σημαντικότητος 2% πιστοποιοῦμεν ὅτι ὁ Μέσος τοῦ Πληθυσμοῦ θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ὁρίων $77+2.33\times1{,}2=$

$=79.6$ cm καὶ $77-2.33\times1.2=74.4$ cm καὶ τέλος τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης εἰς ἐπίπεδον 0.1 % περιορίζεται εἰς $77+3.3\times1.2=80.96$ cm καὶ $77-3.3\times1.2=$ $=73.04$ cm. Χρησιμοποιοῦντες τὸ διάστημα τοῦτο ἀποδεικνύομεν μίαν ὑπόθεσιν, γενομένην ἐπὶ τοῦ Μέσου τοῦ Πληθυσμοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Μέσος εἶναι 79, τοῦ εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντος διαστήματος ἐμπιστοσύνης ὄντος εἰς ἐπίπεδον 5 %, ἀποφαινόμεθα ὅτι ἡ ὑπόθεσίς μας βασίζεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου 5 %. Ἐὰν τὰ διαστήματα ἐμπιστοσύνης δὲν εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωστὰ ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν τὴν σχέσιν τῆς ληφθείσης ἐμπιστοσύνης, διαιροῦντες τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ὑποθετικοῦ Μέσου καὶ τοῦ παρατηρηθέντος Μέσου διὰ τῆς Σταθερᾶς Ἀποκλίσεως καὶ περαιτέρω ἀναζητοῦντες τὴν πιθανότητα μιᾶς Ἀποκλίσεως ἀνωτέρας βάσει ἑνὸς Πίνακος. $79-77=2$ cm $2:1.2=$ $=1.7$, ὁπότε ἡ ὑπόθεσίς μας δικαιολογεῖται περίπου εἰς τὸ ἐπίπεδον 9 %.

Κανονικὰ Σφάλματα τῶν Παραμέτρων Κεντρικῆς Τάσεως

Γενικῶς Κανονικὸν Σφάλμα μιᾶς στατιστικῆς ποσότητος καλεῖται ἡ Σταθερὰ Ἀπόκλισις τῆς Κατανομῆς αὐτῆς τῆς ποσότητος εἴς τινα οἰκογένειαν δειγμάτων

$$\text{Ἀριθμητικοῦ Μέσου } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Διαμέσου } \sigma_{me} = \frac{5}{4}\cdot\sigma_{\bar{x}}$$

$$\text{Τεταρτημορίων } \sigma_Q = 0{,}787\ \sigma_{\bar{x}}$$

$$\text{Σταθερᾶς Ἀποκλίσεως } \sigma_\sigma = 0{,}707\ \sigma_{\bar{x}}$$

Διὰ μεγάλα Δείγματα ἐξαχθέντα κατὰ τύχην ἐκ πληθυσμῶν αἰσθητῶς κανονικῶν, οἱ ἀνωτέρω τύποι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσιν ἐπωφελῶς, καθόσον ὑποτίθεται ὅτι τὰ εἰς τὴν δειγματοληψίαν ὀφειλόμενα σφάλματα κατανέμονται κανονικῶς. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει εἰς Μικρὰ Δείγματα ($n<30$).

ΚΡΙΤΗΡΙΟΝ χ^2 PEARSON

Μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν τὸν προσδιοριζόμενον βαθμὸν ἐμπιστοσύνης εἰς μίαν στατιστικὴν ποσότητα ὁρισθεῖσαν βάσει ἑνὸς δείγματος. Ἤδη πρόκειται νὰ ἐρευνήσωμεν ἐὰν τὸ δεῖγμα εἶναι ὄντως ἀντιπροσωπευτικὸν τοῦ πληθυσμοῦ ἐξ οὗ ἐξήχθη καὶ ἡ σχετικὴ μέθοδος ἐπενοήθη παρὰ τοῦ K. Pearson διὰ τοῦ κριτηρίου χ^2, ὅπερ εἶναι τὸ ἄθροισμα διὰ τὸ σύνολον N παρατηρήσεων τῶν ληφθεισῶν ποσοτήτων ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς θεωρητικῶν - πραγματικῶν παρατηρήσεων διὰ τῆς θεωρητικῆς τοιαύτης:

$$\boxed{\chi^2 = \sum\left(\frac{(f_o - f)^2}{f}\right)}$$

Ἔνθα: f_o αἱ παρατηρηθεῖσαι τιμαί, f αἱ θεωρητικαὶ τιμαί.

Αἱ τιμαὶ τοῦ χ^2 αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς βαθμοὺς ἐλευθερίας 1—30 καὶ τὰς πλέον συνήθεις τιμὰς τῆς πιθανότητος P ἔχουσιν ὑπολογισθῆ παρὰ τοῦ Pearson εἰς ἴδιον Πίνακα. Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν Πίνακα ζητοῦμεν εἰς τὴν γραμμήν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας, τὴν τιμὴν χ^2, ἥτις εὑρέθη διὰ τὸ δεῖγμα. Ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ P εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ

Πίνακος μᾶς δίδει τὴν πιθανότητα διὰ μίαν τιμὴν τοῦ χ^2 ἴσην ἢ ἀνωτέραν ἐκείνης ἥτις ἐδόθη ἐκ τοῦ δείγματος. Γενικῶς τὸ P προσδιορίζεται διὰ μιᾶς κατὰ προσέγγισιν παρεμβολῆς, δοθέντος ὅτι ἡ παρατηρηθεῖσα τιμὴ τοῦ χ^2 σπανίως θὰ εὑρεθῇ εἰς τὸν Πίνακα.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ Κριτηρίου : α) Τὸ συνολικὸν N πρέπει νὰ εἶναι ἀρκούντως μέγα, τουλάχιστον δὲ 50. β) Τὸ δυναμικὸν (ἀριθμὸς) (effectif) ἑκάστης τάξεως πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὸ δυνατὸν ἀνώτερον τοῦ 5. γ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν τάξεων πρέπει νὰ εἶναι κάτω τῶν 20. δ) Τιμαὶ τοῦ P γειτονικαὶ πρὸς τὸ 1 ἢ 0 παρέχουσιν ἱκανὰς ἐνδείξεις ἐπὶ τοῦ χαρακτῆρος τοῦ δείγματος. ε) Τὸ Κριτήριον χρησιμεύει διὰ τὴν σύγκρισιν δύο ἢ πλειόνων μεταβλητῶν·. Ἐὰν τὸ P εἶναι μικρότερον τοῦ 0,02 τὸ δεῖγμα γενικῶς δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς δεῖγμα μὴ ἐξαχθὲν ἐκ τύχης. Ἐὰν τὸ P κεῖται μεταξὺ 0.02 καὶ 0.05 τὸ ὀλιγώτερον ὅπερ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν εἶναι ὅτι τὸ δεῖγμα εἶναι ἀρκετὰ ὕποπτον. στ) Τὸ κριτήριον εἶναι τὸ μέσον διὰ νὰ κρίνωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς ὑποθέσεως, ἀφορώσης τὸν πληθυσμὸν οὗτινος γνωρίζομεν ἓν δεῖγμα. Ἡ ὑπόθεσις θὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς εἴτε τοῦ χ^2 εἴτε στατιστικῆς τινος ποσότητος κατανεμομένης ὅπως τὸ χ^2 ὡς καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας. Ὁ Πιναξ θὰ μᾶς δώσῃ τὴν πιθανότητα P ὅπως εἰς ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἡ τιμὴ τοῦ χ^2 ἢ τῆς στατιστικῆς ποσότητος εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν παρατηρηθεῖσαν τιμήν. Ἐὰν ἡ πιθανότης εἶναι πολὺ μικρὰ θὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ. ἄλλως τὸ κριτήριον δὲν θὰ παράσχῃ ἀκριβὲς συμπέρασμα καὶ ἡ ὑπόθεσις θὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πιθανὴ ἀφοῦ τὸ κριτήριον δὲν θὰ μᾶς δίδῃ καμμίαν ἀπόδειξιν ἐναντίον της. ζ) Γενικῶς ἐὰν ἡ δειχθεῖσα τιμὴ τοῦ P εἶναι μικροτέρα εἰδικῆς τινος τιμῆς, συνήθως τοῦ 0,05 ἢ 0,01, αἱ διαφοραὶ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλαι διὰ νὰ ἀποδοθῶσιν εἰς τὴν τύχην. Τὸ ἀποδεκτὸν ὅριον τιμῆς τοῦ P 0,05 ἢ 0,01 καλεῖται Σημεῖον Ἐμπιστοσύνης (fiducial point). Μὲ ἄλλους λόγους ἐὰν τὸ κριτήριον χ^2 δείξῃ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ πραγματικῶν καὶ ἀναμενομένων συχνοτήτων εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη διὰ νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὴν τύχην, δηλ. τὸ P εἶναι μικρότερον τοῦ ἐκλεγέντος σημείου ἐμπιστοσύνης 0.01 ἢ 0,05, ἡ ὑπόθεσις δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι εἶναι ἐσφαλμένη.

Παράδειγμα

Εἰς πληθυσμὸν ἐνηλίκων ἀρρένων πέντε μεγάλων πόλεων βάσει δειγμάτων τυχαίων λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐγγάμων καὶ τῶν ἀγάμων:

Πόλεις	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Σύνολα
Ἔγγαμοι	130	165	151	172	146	764
Ἄγαμοι	39	56	47	67	43	252
Σύνολα	169	221	198	239	189	1016

Ἐρωτᾶται ἐὰν τὰ δεδομένα αὐτὰ δεικνύουσι μίαν σημαντικὴν διακύμανσιν τῆς τάσεως τῶν ἀνδρῶν νὰ νυμφεύωνται ἀναλόγως τῶν διαφόρων πόλεων. Ἂς λάβωμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ διακυμάνσεις αὐταὶ εἶναι ἀσήμαντοι. Τότε τὰ ἄτομα ἑκάστης πόλεως συνιστῶσιν ἓν ἁπλοῦν δεῖγμα ἑνὸς πληθυσμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον κατὰ τὰ σύνολα τῆς τελευταίας στήλης ἡ σχέσις τῶν ἀγάμων ἔναντι τοῦ συνολικοῦ πλυθυσμοῦ εἶναι 1/4. Βασιζόμενοι εἰς τὴν ὑπόθεσιν αὐτὴν ἀναπαριστῶμεν τὰ θεωρητικὰ δεδομένα ἑκάστης πόλεως ὡς κατωτέρω:

Πόλεις	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Σύνολον
Ἔγγαμοι	127	166	149	180	142	764
Ἄγαμοι	42	55	49	59	47	252
Σύνολα	169	221	198	239	189	1016

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο Πινάκων ὑπολογίζομεν τὰς ἀποκλίσεις τῶν θεωρητικῶν ἀπὸ τῶν πραγματικῶν δεδομένων, ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον κα. διαιροῦμεν διὰ τῶν θεωρητικῶν δεδομένων διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν χ^2

$$\chi^2 = \frac{3^2}{127} + \frac{(-1)^2}{166} + \frac{2^2}{149} + \frac{(-8)^2}{180} + \frac{4^2}{142} + \frac{(-3)^2}{42}$$

$$+ \frac{1^2}{55} + \frac{(-2)^2}{49} + \frac{8^2}{59} + \frac{(-4)^2}{47} = 2{,}307 \qquad n = 5 \qquad n-1 = 4$$

Ὁ Πίναξ δεικνύει ὅτι ἡ πιθανότης νὰ ὑπερβάλωμεν τὴν τιμὴν 2.307 διὰ χ^2 περιλαμβάνεται μεταξὺ 0.50 καὶ 0.70, ἀλλ' ἡ τιμὴ αὐτὴ δὲν εἶναι σημαντικὴ καὶ τὸ Κριτήριον χ^2 οὐδεμίαν ἀπόδειξιν παρέχει ἐναντίον τῆς ὑποθέσεώς μας.

Ὁσάκις εἰς Κατανομὴν Συχνότητος τὰ δεδομένα ἔχουσι προσαρμοσθῆ πρὸς τὸν Κανονικὸν Νόμον τῆς Κατανομῆς, ὁ ὑπολογισμὸς τῶν Βαθμῶν διαφέρει καὶ οὕτως ἀντὶ n–1 θὰ ἔχωμεν n–3, δοθέντος ὅτι αἱ $\bar{X}$, σ, Ν ἔχουσιν ὑπολογισθῆ.

Τέλος διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν ἐὰν τὸ χ^2 εἶναι στατιστικῶς σημαντικὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τιμὴν τούτου ὑπερβαίνουσαν τὸν ἀριθμὸν 6 ἢ κατ' ἄλλους τὸν ἀριθμὸν 9.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΙΚΡΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Προκειμένου περὶ μικρῶν δειγμάτων ($n < 30$) ὁ Student ἀντικατέστησε τὴν ἀνηγμένην ἀπόκλισιν διὰ μιᾶς νέας στατιστικῆς μεταβλητῆς:

$$\boxed{t = \frac{|\bar{X}_\delta - \bar{X}_\pi|}{S}\sqrt{n}}$$

Ἔνθα
$\bar{X}_\pi$ ὁ Μέσος του Πληθυσμοῦ
$\bar{X}_\delta$ ὁ Μέσος τοῦ Δείγματος

καὶ S εἶναι μία ποσότης, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον S^2 καλεῖται Ἀκριβὴς Ἐκτίμησις τῆς Διακυμάνσεως τοῦ Πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ Δείγματος

$$\boxed{S^2 = \frac{\Sigma\,(x_1 - \bar{X}_\delta)^2}{n-1}}$$

ὅπου $n-1$ εἶναι οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας τοῦ δείγματος.

Ἡ κατανομὴ τῆς μεταβλητῆς t τοῦ Student ἐμελετήθη καὶ ἀνευρέθησαν Πίνακες κριτικῶν τιμῶν τοῦ t διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς καὶ τὰ οἰκεῖα ἐπίπεδα σημαντικότητος. Ἡ χρῆσις τοῦ Πίνακος t εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν τοιοῦτον τῶν Πινάκων τοῦ Κανονικοῦ Νόμου ἢ τοῦ χ^2. Παραδείγματά τινα θὰ ἐξηγήσωσι τὸν μηχανισμόν :

1) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἓν τυχαῖον δεῖγμα ἔκ τινος πληθυσμοῦ μιᾶς μεγάλης πόλεως, περιλαμβάνον 9 ἄτομα, τῶν ὁποίων τὸ μέσον ἀνάστημα εἶναι 171 ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ ἀκριβὴς ἐκτίμησις τῆς διακυμάνσεως τοῦ ἄρρενος πληθυσμοῦ αὐτῆς τῆς πόλεως ἔστω ὅτι εἶναι 81 cm. Κατὰ ποῖον μέτρον δυνάμεθα νὰ πιστεύσωμεν ὅτι τὸ μέσον ἀνάστημα τῶν ἀτόμων τῆς πόλεως ταύτης θὰ εἶναι 173 cm ; Διατάσσομεν τὰ δεδομένα μας ὡς ἑξῆς :

$$\bar{X}_\delta = 171 \quad \bar{X}_\pi = 173 \quad n-1 = 8 \quad S = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}.$$

Ἐν συνεχείᾳ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $\bar{X}_\pi = 173$ σχηματίζομεν διὰ τὴν μεταβλητὴν t τὴν τιμὴν

$$t = \frac{171 - 173}{9}\sqrt{9} = 0.666$$

Ὁ Πίναξ t δεικνύει ὅτι διὰ $n - 1 = 8$ ἡ πιθανότης ὅτι ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ t θὰ ὑπερβαίνηται ἀριθμητικῶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 0.50. Ἡ τιμὴ ὅθεν αὐτὴ δὲν εἶναι σημαντικὴ καὶ τὸ κριτήριον οὐδεμίαν παρέχει ἀπόδειξιν ἔναντι τῆς Ὑποθέσεως ὅτι ὁ Μέσος τῶν ἀναστημάτων τῆς πόλεως αὐτῆς εἶναι 173 cm. Ἐὰν εἴχομεν κάμει τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ μέσον ἀνάστημα εἶναι 177 cm θὰ εὑρίσκομεν διὰ t τὴν τιμὴν

$$t = \frac{171 - 177}{9}\sqrt{9} = 2$$

Ὁ Πίναξ δεικνύει ὅτι διὰ $n - 1 = 8$ ἡ πιθανότης ὅπως τοιαύτη τιμὴ τοῦ t ὑπερβληθῇ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 0.05, ἀλλὰ καὶ ἀκόμη ἡ νέα αὐτὴ τιμὴ δὲν εἶναι σημαντική. Κατὰ συνέπειαν ὑπάρχουσιν ἀρκετὰ μεγάλα ὅρια διὰ τὸν ὑποθετικὸν Μέσον τῶν ἀναστημάτων, τοιούτων ὥστε διὰ τὰ δεδομένα τοῦ δείγματος ἡ τιμὴ τοῦ t νὰ μὴν εἶναι σημαντική. Ἂς προχωρήσωμεν ὅθεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης μὲ ἐπίπεδον σημαντικότητος τὸ 5 %. Ὁ Πίναξ μᾶς δεικνύει ὅτι διὰ $P = 0.05$ καὶ $n - 1 = 8$ ἡ τιμὴ $t = 2{,}31$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{|171 - \bar{X}_\pi|}{9}\sqrt{9} < 2.31 \text{ ἐξ οὗ } [\, 171 - \bar{X}_\pi \,] < 3\ 2.31$$

καὶ $171 - 3 \times 2.31 < \bar{X}_\pi < 171 + 3 \times 2.31.$

Τὰ ὅρια τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης εἰς τὸ ἐπίπεδον 5 % εἶναι 164.07 καὶ 177.93 cm.

2) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ὁρίσει εἰς πέντε ἀσθενεῖς ἓν φάρμακον καὶ ἀκολούθως κατεγράψαμεν δι' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὴν αὔξησιν τῆς πιέσεως τοῦ αἵματος ὡς 6, 2, –2, 3, –4. Τὰ ληφθέντα ἀποτελέσματα δεικνύουσιν ἄραγε μίαν ἐνέργειαν τοῦ φαρμάκου; Ἐνταῦθα ἡ πρὸς ἔλεγχον Ὑπόθεσις Μηδὲν μᾶς λέγει ὅτι τὰ ἀποτελέσματα ἐξήχθησαν κατὰ τύχην ἔκ τινος πληθυσμοῦ κανο-

νικοῦ, ἔχοντος ὡς Μέσον τὸ μηδέν. Ὑπολογίζοντες τὸν Μέσον τοῦ δείγματος ἔχομεν :

$$\bar{X}_\delta = \frac{6+2+(-2)+3+(-4)}{5} = 1 \qquad t = \frac{1}{4}\sqrt{5} = 0{,}559$$

$$S^2 = \frac{5^2+1^2+(-3)^2+2^2+(-5)^2}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

Ὁ Πίναξ μᾶς δεικνύει ὅτι ἡ πιθανότης νὰ ὑπερβῶμεν αὐτὴν τὴν τιμὴν εἶναι ἀνωτέρα τοῦ 50 %, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ t δὲν εἶναι σημαντική, ἡ δὲ Ὑπόθεσις Μηδὲν δὲν εἶναι συνεπῶς ἀνίσχυρος, δηλ. εἶναι δυνατὸν αἱ διακυμάνσεις τῆς πιέσεως τοῦ αἵματος μὴ ὀφείλωνται εἰς τὸ φάρμακον.

Σημαντικότης τῆς διαφορᾶς δύο $\bar{X}$.

Ἐὰν δύο μικρὰ ἀνεξάρτητα δείγματα n_1 n_2 μὲ Μέσους ἀντιστοίχως $\bar{X}_1$ καὶ $\bar{X}_2$ εἶναι γνωστά, δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν Κατανομὴν t διὰ νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν Μέσων των εἶναι σημαντικὴ ἢ ἐὰν τὰ δύο δείγματα δέον νὰ θεωρηθῶσιν ἐξαχθέντα ἐκ τοῦ αὐτοῦ κανονικοῦ πληθυσμοῦ. Ἂς λάβωμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ δύο δείγματα προέρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ πληθυσμοῦ. Τότε ἡ ἔκφρασις τῆς χρησιμοποιητέας στατιστικῆς μεταβλητῆς λαμβάνει τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

$$\boxed{t = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{S}\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2}}}$$

$$\boxed{S^2 = \frac{\Sigma(X_1 - \bar{X}_1)^2 + \Sigma(X_2 - \bar{X}_2)^2}{(n_1 + n_2) - 2}}$$

Παραδείγματα

1) Ἔστω ἓν δεῖγμα 9 ἀτόμων μὲ μέσον ἀνάστημα 171 cm καὶ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων ἀπὸ τοῦ Μέσου 60 καὶ ἕτερον δεῖγμα 8 ἀτόμων μὲ μέσον ἀνάστημα 173 cm καὶ ἄθροισμα τετραγώνων ἀποκλίσεων ἀπὸ Μέσου 90. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰ δύο αὐτὰ δείγματα ὡς ἐξαχθέντα ἐκ τοῦ αὐτοῦ πληθυσμοῦ ; Δεχόμενοι τὴν ὑπόθεσιν ταύτην θὰ ἔχωμεν :

$$S^2 = \frac{60+90}{17-2} = 10$$

$$t = \frac{|171-173|}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{8\times 9}{8+9}} = 1{,}30$$

Ὁ Πίναξ t δεικνύει ὅτι διὰ $n-2=15$ ἡ τιμὴ 1,30 δὲν εἶναι σημαντική. Τὸ κριτήριον ὅθεν οὐδεμίαν παρέχει ἀπόδειξιν ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἰσχύουσα.

2) Δύο Ἐργοστάσια παράγουσι τὸ αὐτὸ προϊόν. Λαμβάνομεν κατὰ τύχην 8 ἐργάτας ἐκ τοῦ Ἐργοστασίου Α καὶ 10 ἐκ τοῦ Ἐργοστασίου Β, σημειοῦντες τὸν ἀριθμὸν τῶν παρ' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν παραχθέντων τεμαχίων εἰς δοθέντα χρόνον. Τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ καταγράφονται κατωτέρω :

Ἐργοστάσιον Α			Ἐργοστάσιον Β		
Τεμάχια	$X-\bar{X}_A$	$(X-\bar{X}_A)^2$	Τεμάχια	$X-\bar{X}_B$	$(X-\bar{X}_B)^2$
12	—1	1	13	—1	1
11	—2	4	15	—1	1
13	0	0	12	—2	4
15	—2	4	17	—3	9
10	—3	9	11	—3	9
17	—4	16	18	—4	16
12	—1	1	12	—2	4
14	1	1	16	2	4
			14	—0	0
			12	—2	4
103		36	140		52
$\bar{X}_A = 13$			$\bar{X}_B = 14$		

Δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ ὅτι ἡ παραγωγικότης τοῦ Ἐργοστασίου Β εἶναι ἀνωτέρα τῆς τοιαύτης τοῦ Ἐργοστασίου Α;

Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι αἱ παραγωγικότητες τῶν δύο Ἐργοστασίων εἶναι συγκρίσιμοι ἡ ἀκριβὴς ἐκτίμησις τῆς διακυμάνσεως καὶ ἡ τιμὴ t θὰ ἔχωσιν ὡς ἀκολούθως:

$$S^2 = \frac{36+52}{(8+10-2)} = 5{,}50$$

$$t = \frac{|\,13-14\,|}{\sqrt{5{,}50}} \sqrt{\frac{8 \times 10}{8+18}} = 0{,}89$$

Ὁ Πίναξ t δεικνύει ὅτι διὰ $n-2=16$ ἡ τιμὴ 0,89 δὲν εἶναι σημαντικὴ καὶ οὐδεμία λοιπὸν προσάγεται ἀπόδειξις ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως περὶ τῆς ἰσότητος ἐν τῇ παραγωγικότητι τῶν δύο Ἐργοστασίων.

Ἔλεγχος t δύο Δειγμάτων βασιζόμενος ἐπὶ τοῦ Εὔρους.

Ὁ ἔλεγχος τῆς σημαντικότητος τῆς διαφορᾶς τῶν Μέσων διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὡς ὑπολογισμοῦ τῆς σ, ὅπως βασίζεται αὕτη ἐπὶ τοῦ εὔρους τοῦ δείγματος, καθιερώθη κατὰ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Lord (1947) ὡς ἓν εὔκολον ὑποκατάστατον τοῦ ἐλέγχου t τοῦ Student εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ δύο δείγματα εἶναι ἰσομεγέθη. Οὕτως ὁ Lord δίδει ἓξ ἐπίπεδα σημαντικότητος διὰ τὸν λόγον $\boxed{\kappa = \frac{|\,X_1 - X_2\,|}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}}$ ἔνθα ω_1 καὶ ω_2 εἶναι τὰ εὔρη τῶν δειγμάτων μεγέθους n ἐκ δύο κανονικῶν πληθυσμῶν ἐχόντων κοινὴν σ. Ἡ ὑπόθεσις μηδὲν δηλοῖ ὅτι οἱ Μέσοι τοῦ πληθυσμοῦ μ_1 μ_2 εἶναι ἴσοι.

Ὅταν ὅμως τὰ δείγματα εἶναι διαφόρου μεγέθους, δηλ. τὸ $n_1 \neq n_2$, χρησιμοποιοῦμεν τὸν λόγον $\boxed{\kappa = \dfrac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\omega_1 + \omega_2}}$, σχετικὸς δὲ Πίναξ δίδει τὴν τιμὴν κ ἀντιστοίχως πρὸς τέσσαρα διάφορα ἐπίπεδα σημαντικότητος α, χρησιμοποιούμενα εἰς ἕνα διπλῆς οὐρᾶς ἔλεγχον.

Παράδειγμα:

Δώδεκα παιδία ἡλικίας 12 ἐτῶν ἕως 12 ἐτῶν καὶ 3 μηνῶν ἐπελέγησαν κατὰ τύχην ἔκ τινος Σχολείου ἵνα ὑποβληθῶσιν εἰς δίαιταν διὰ παστεριωμένου γάλακτος ἐπὶ τετράμηνον. Τὸ ἀποκτηθὲν βάρος εἰς οὐγγίας μετὰ τὸ πέρας τοῦ τετραμήνου ἦτο

7, 17, 53, –2, 27, 41, 37, 35, 10, 12, 9, 38.

Ἕτερα ὀκτὼ παιδία τῆς αὐτῆς ἡλικίας ἐλήφθησαν ὡς ἔλεγχος ἄνευ διαίτης μὲ ἀποτέλεσμα εἰς βάρος κατὰ τὸ τέλος τοῦ 4μήνου

10, 0, 29, 11, – 21, 25, 19, – 19

Ἐρωτᾶται ἂν ἡ διὰ παστεριωμένου γάλακτος δίαιτα ἐπέφερε μεγαλυτέραν αὔξησιν βάρους μετὰ τὴν λῆξιν τοῦ 4μήνου.

$\bar{X}_1 = 23{,}669$	$\bar{X}_2 = 6{,}750$
$\Omega_1 = 55$	$\Omega_2 = 50$
$\Sigma\,(X_1 - \bar{X}_1)^2 = 3202{,}7$	$\Sigma\,(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 2485{,}5$
$n_1 = 12 \quad \sigma_1 = 16{,}34$	$n_2 = 8 \quad \sigma_2 = 17{,}60$

Λόγος Ἐλέγχου κατὰ LORD $\quad u = \dfrac{23{,}667 - 6{,}750}{50 + 55} = 0{,}161$

Ἔλεγχος Student $\quad t = \dfrac{23{,}667 - 6{,}750}{\sqrt{\dfrac{3{,}202{,}7 + 2485{,}5}{20 - 2}}} \sqrt{\dfrac{12 \times 8}{12 + 8}} = 2{,}090$

Ἄρα ὁ μὲν Λόγος τοῦ LORD μᾶς δίδει 0,161 καὶ ἐν ἀναφορᾷ εἰς τὸν εἰδικὸν Πίνακα μὲ $n_1 = 12$ καὶ $n_2 = 8$ βλέπομεν ὅτι τὸ u πίπτει ἀκριβῶς κάτω τοῦ ἐπιπέδου σημαντικότητος $2\,{}^1/_2\,\%$, ἐνῷ κατὰ τὸν Ἔλεγχον t τοῦ Student ἔχομεν εἰς $n - 2 = 18$ τιμὴν 2,090, ἥτις δὲν φθάνει ἀκριβῶς τὸ ἐπίπεδον $2\,{}^1/_2\,\%$.

Κατ' ἀμφοτέρους τοὺς Ἐλέγχους δεικνύεται ὅτι ὑπάρχει μία αὔξησις εἰς τὸ μέσον βάρος τῶν ὑποβληθέντων εἰς τὴν δίαιταν παστεριωμένου γάλακτος μαθητῶν καὶ ὅτι αὕτη περίπου εἶναι σημαντικὴ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $2\,{}^1/_2\,\%$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

F. Mills, Statistical Methods (1938).
R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers (1946).
H. Arkin - R. Colton, An Outline of Statistical Methods (1950).
E. Μαργαρίτη, Στατιστικὴ (1952).
F. Croxton - D. Cowden, Applied General Statistics (1953).
K. Ἀθανασιάδου, Στατιστικὴ (1953).
A. Monjallon, Introduction à la Methode Statistique (1954).
M. Slonim, Sampling in a Nutshell (1955).
P. G. Moore, The two sample t-test based on range εἰς Biometrica (Δεκ. 1957).

ΕΚΘΕΣΙΣ
ΕΠΙ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΕΝ ΕΛΛΑΔΙ

Ὑπὸ G. **GOUDSWAARD**
Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Ἄμστερνταμ
καὶ Γενικοῦ Γραμματέως τοῦ Διεθνοῦς Ἰνστιτούτου Στατιστικῆς

14 Νοεμβρίου 1957

Προεισαγωγικὸν Σημείωμα. Εἰς ἓν τηλεγράφημα τὸ ὁποῖον ἔλαβον ἀπὸ τὴν Διοίκησιν τῆς Τεχνικῆς Βοηθείας (ὑπὸ ἡμερομηνίαν 24 Ἰουλίου 1957 καὶ ὑπ' ἀριθμ. 3669) ἐδίδετο ἡ ἀκόλουθος περιγραφὴ τῆς ἀποστολῆς εἰς Ἑλλάδα, ἡ ὁποία ἀνετίθετο εἰς ἐμέ: «Τοποθέτησις ἐπὶ ἕνα μῆνα ὡς ἐμπειρογνώμονος ἐπὶ τῆς Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως». Ἀφ' ἑτέρου παραθέτω σχετικὸν ἀπόσπασμα τῆς ἀπὸ 7)8)57 ἐπιστολῆς τῆς αὐτῆς Διοικήσεως ἔχον οὕτω: «Ἡ ἐν τῷ συνημμένῳ περιγραφομένη ἐργασίᾳ ἀφορᾷ τὴν ἐπὶ ἓν ἔτος ἀπασχόλησιν εἰς τὸν τομέα τῆς βιομηχανικῆς στατιστικῆς τοῦ συναδέλφου ὑμῶν κ. Somermeijer τοποθετημένου ἤδη πρὸς τοῦτο. Αὕτη θέλει χρησιμεύσει ἐπίσης ὡς ὁδηγὸς διὰ τὴν κατανόησιν τῆς τεχνικῆς ἐργασίας ὑμῶν ὡς συμβούλου τῆς Κυβερνήσεως».

Ἀπὸ τῆς ἀφίξεώς μου εἰς Ἀθήνας, ἐγένετο φανερὸν ὅτι ἡ Ἑλληνικὴ Κυβέρνησις κατὰ πρῶτον λόγον ὑπελόγιζε νὰ ἐπιτύχῃ ἀπὸ μέρους μου μίαν μελέτην, ὡς καὶ εἰσηγήσεις ἀφορώσας τὴν στατιστικὴν ἐκπαίδευσιν. Κατόπιν τούτου ἡ ἐργασία μου ἐβασίσθη κυρίως ἐπὶ τοῦ μνημονευθέντος τηλεγραφήματος. Ἐξ ἄλλου, εἶχον τακτικῶς συζητήσεις μετὰ τοῦ κ. Somermeijer ἀφορώσας τὴν βιομηχανικὴν στατιστικήν. Ἐπίσης παρέστην εἰς συγκέντρωσιν εἰς τὴν ὁποίαν ἔλαβον μέρος ὁ Γενικὸς Διευθυντὴς τῆς Ε Σ Υ Ε καὶ μερικοὶ ἐκ τῶν συνεργατῶν του. Κατ' αὐτὴν ἔλαβε χώραν γενικὴ συζήτησις ἐπὶ τῶν προβλημάτων τῆς βιομηχανικῆς στατιστικῆς εἰς τὴν Ἑλλάδα.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἔκθεσιν, πάντως, περιορίζομαι εἰς τὰ ζητήματα τῆς στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως, δεδομένου ὅτι ὁ κ. Somermeijer θὰ συντάξῃ τὴν ἔκθεσιν περὶ πάντων ὅσων ἀφορῶσι τὴν βιομηχανικὴν στατιστικήν.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δύο ἐκ τῶν Ἱδρυμάτων Ἀνωτάτης Ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι, εὑρισκόμενα ἀμφότερα εἰς Ἀθήνας, διαθέτουν σήμερον ἕδρας στατιστικῆς. Τὴν μίαν ἕδραν, ὑφισταμένην ἀπὸ τοῦ 1948 εἰς τὴν Ἀνωτέραν Σχολὴν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, κατέχει ἔκτοτε ὁ Καθηγητὴς κ. Ε. Μαργαρίτης, τὴν δὲ ἄλλην, καθιερωθεῖσαν τὸ 1956 εἰς τὴν Ἀνωτάτην Σχολὴν Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν, κατέχει ὁ Καθηγητὴς κ. Κ. Ἀθανασιάδης. Ἡ στατιστικὴ ἀποτελεῖ ὑποχρεωτικῶς ἐξεταστέαν ὕλην τοῦ προγράμματος σπουδῶν τῶν ἀνωτέρω Σχολῶν, ἀλλ' ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν εἰς τὸν σπουδαστὴν νὰ ἐπιλέξῃ ταύτην ὡς κύριον θέμα τῶν σπουδῶν του. Ἐν τούτοις, ὑπάρχει ἕνα εἰδικὸν Ἵδρυμα διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς Στατιστικῆς: «Τὸ Κέντρον Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως», προσηρτημένον εἰς τὴν Ἀνωτέραν Σχολὴν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν.

Δὲν ἠσχολήθην μὲ τὴν μελέτην τῆς στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως ἐν τῷ πλαισίῳ τῶν οἰκονομικῶν σπουδῶν εἰς τὰς προαναφερθείσας δύο Σχολάς. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ παροῦσα ἔκθεσις περιορίζεται εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν τοῦ «Κέντρου», εἰδικώτερον μάλιστα ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὰ προβλήματα τῆς τεχνικῆς καταρτίσεως τοῦ προσωπικοῦ (παρόντος καὶ μελλοντικοῦ) τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος.

Τὸ «Κέντρον Στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως» λειτουργεῖ ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 1952)53. Ὀφείλομεν νὰ συγχαρῶμεν τὴν Ἀνωτέραν Σχολὴν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν καὶ ἰδιαιτέρως τὸν διευθυντὴν αὐτῆς, Καθηγητὴν κ. Σ. Παπαϊωάννου, διότι ἔσχεν αὐτὴν τὴν πρωτοβουλίαν, ἥτις μαρτυρεῖ ὀξυδερκῆ θεώρησιν τοῦ σημαντικοῦ ρόλου, τὸν ὁποῖον δύναται νὰ παίξῃ ἡ Στατιστικὴ εἰς τὴν σύγχρονον κοινωνίαν μας καὶ εἰς τὴν κοινωνικὴν καὶ οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν μιᾶς χώρας.

Ἡ ἐργασία, ἥτις ἐπετελέσθη κατὰ τὰ πρῶτα 5 ἔτη τοῦ «Κέντρου», ὑπὸ τὴν καθοδήγησιν τοῦ Διευθυντοῦ Σπουδῶν αὐτοῦ Καθηγητοῦ κ. Μαργαρίτη, εἶναι ἀνωτέρας ποιότητος ἐπιστημονικῶς καὶ μεγάλης ἀξίας διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Στατιστικῆς εἰς τὴν Ἑλλάδα.

Εἰς ἕνα φυλλάδιον, συντεταγμένον εἰς τὴν ἀγγλικὴν καὶ τιτλοφορούμενον: «Ἡ Ὀργάνωσις τῆς

'Ανωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν», καθορίζεται ὡς ἀκολούθως ὁ σκοπὸς τοῦ Κ.Σ.Ε. :

«'Ο σκοπὸς τοῦ Κέντρου Στατιστικῶν Σπουδῶν» συνίσταται εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν σπουδαστῶν, οἱ ὁποῖοι μετὰ τὸ πέρας τῶν σπουδῶν των θὰ δύνανται νὰ γίνουν ἱκανοὶ στατιστικοὶ ὑπάλληλοι εἰς τὴν Στατιστικὴν 'Υπηρεσίαν τοῦ Κράτους ἢ εἰς οἱανδήποτε ἄλλην ἐπιχείρησιν ἢ 'Οργανισμόν».

Τὸ Κ.Σ.Ε. ἀπέκτησεν ἐπίσημον καταστατικὸν ὀργανισμὸν λειτουργίας διὰ τοῦ Βασιλικοῦ Διατάγματος τῆς 3 Σεπτεμβρίου 1955, ἐκδοθέντος δυνάμει τοῦ ἄρθρου 14 παραγρ. 4 τοῦ Νόμου περὶ 'Οργανώσεως τῆς 'Εθνικῆς Στατιστικῆς 'Υπηρεσίας, τοῦ ἔτους 1953, συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον :

«Μετ' εἰσήγησιν τοῦ Γενικοῦ Διευθυντοῦ καὶ τῶν ἐνδιαφερομένων Σχολῶν τῶν 'Εκπαιδευτικῶν 'Ιδρυμάτων δύναται, διὰ Βασιλικοῦ Διατάγματος ἐκδιδομένου προτάσει τῶν 'Υπουργῶν Συντονισμοῦ, Οἰκονομικῶν καὶ Παιδείας, νὰ ἱδρυθῶσι μόνιμοι ἕδραι ἢ Σχολαὶ Στατιστικῆς ἢ νὰ ὀργανωθῶσι Φροντιστήρια Στατιστικῆς 'Εκπαιδεύσεως πρὸς ἐξασφάλισιν τῆς ἐπαγγελματικῆς μορφώσεως τῶν ὑπαλλήλων τῶν Στατιστικῶν 'Υπηρεσιῶν καὶ τῶν πρὸς τοῦτο ἐνδιαφερομένων ἰδιωτῶν».

Μετὰ τὴν πάροδον μιᾶς μεταβατικῆς περιόδου (ἡ ὁποία τελειώνει κατὰ τὸ 1958), οὐδεμία προαγωγὴ ὑπαλλήλων τῆς Ε Σ Υ Ε εἰς τοὺς ἀνωτέρους βαθμοὺς τῆς 'Υπηρεσίας αὐτῆς (Διευθυντοῦ καὶ Τμηματάρχου), εἶναι δυνατή, ἐὰν ὁ ὑποψήφιος δὲν ἔχῃ δίπλωμα τοῦ Κ.Σ.Ε.(*). 'Εξ ἄλλου, οἱ νέοι ὑπάλληλοι ἀκαδημαϊκῆς μορφώσεως διορίζονται μὲ βαθμὸν «γραμματέως», ἡ ἐπιλογὴ δὲ τούτων γίνεται βάσει εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων.

Εἰς τὸ Κ.Σ.Ε. δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν ὅσοι κέκτηνται ἀπολυτήριον σχολῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως, κατόπιν ἐπιτυχίας εἰς τὰς Εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τούτου διενεργουμένας ἐπὶ τῆς ἀκολούθου ὕλης : Στοιχειώδη Μαθηματικὰ ('Αριθμητική, ἄλγεβρα, γεωμετρία), Οἰκονομικὴ γεωγραφία καὶ ξένη γλῶσσα.

Τὸ πρόγραμμα τῶν μαθημάτων ἔχει ὡς ἀκολούθως :

Πρῶτον ἔτος

'Υποχρεωτικὰ μαθήματα	'Αριθμὸς ὡρῶν ἑβδομαδιαίως
Μαθηματικὰ	3
'Ομοίως : ἀσκήσεις	3
'Αριθμητικὸς Λογισμὸς	1
Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2
'Ομοίως : ἀσκήσεις	2
Πολιτικὴ Οἰκονομία	2
Δημογραφικὴ Στατιστικὴ	1
Φροντιστήρια (Πρακτικαὶ ἀσκήσεις)	3
	17
Προαιρετικὰ Μαθήματα	
Διοικητικὴ Νομοθεσία	1
Λογιστικὴ	1
Ξέναι Γλῶσσαι (ἀγγλικὰ-γαλλικὰ ἢ γερμανικὰ)	2

Δεύτερον ἔτος

'Υποχρεωτικὰ Μαθήματα	
Μαθηματικὴ Στατιστικὴ	1
Στατιστικὴ 'Ανάλυσις	2
'Ομοίως : 'Ασκήσεις	2
Δημογραφικὴ Στατιστικὴ	2
Οἰκονομικὴ Στατιστικὴ	2
Στατιστικαὶ μέθοδοι εἰς τὰς 'Επιχειρήσεις	1
Οἰκονομετρία	1
Οἰκονομικὴ ἀνάλυσις	1
Φροντιστήρια (πρακτικαὶ ἀσκήσεις)	3
	15

(*) Καλὸν θὰ ἦτο, ἴσως, ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου νὰ τροποποιηθῇ ἐπὶ τὸ ἐπιεικέστερον ὁ νόμος. Θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ προαγωγὴ εἰς Διευθυντὴν ἑνὸς Τμηματάρχου διατελέσαντος εἰς τὸν βαθμὸν τοῦτον, φέρ' εἰπεῖν, ἐπὶ εἰκοσαετίαν, ἔστω καὶ ἄνευ διπλώματος τοῦ Κ.Σ.Ε.

Προαιρετικὰ μαθήματα	
Δημοσία Οἰκονομία	1
Ἰδιωτικὴ Οἰκονομικὴ	1
Διοικητικὴ Νομοθεσία	1
Ὀργάνωσις	1
Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ	1
Ξέναι Γλῶσσαι (ἀγγλικά-γαλλικὰ ἢ γερμανικὰ)	2

Οἱ σπουδασταὶ ὑποχρεοῦνται νὰ ἐκλέξουν, νὰ παρακολουθήσουν καὶ νὰ ἐξετασθοῦν εἰς ἕνα τουλάχιστον προαιρετικὸν μάθημα. Πάντως διὰ τοὺς δημοσίους ὑπαλλήλους εἶναι ὑποχρεωτικὴ ἡ παρακολούθησις τῆς Διοικητικῆς Νομοθεσίας.

Τὰ μαθήματα γίνονται τὰς ἀπογευματινὰς καὶ βραδυνὰς ὥρας, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ συμμετοχὴ εἰς αὐτὰ τῶν ἐχόντων κάποιαν ἀπασχόλησιν τὴν πρωΐαν. Τὸ τέταρτον περίπου τῶν σπουδαστῶν τοῦ Κ.Σ.Ε., παραλλήλως πρὸς τὰς σπουδάς του, ἐργάζεται κανονικῶς.

Μέχρι τοῦ τέλους τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 1955)56 ὑπῆρχον 20 ἐν ὅλῳ διπλωματοῦχοι τοῦ «Κέντρου», ἐκ τῶν ὁποίων 10 εἶναι ἤδη ὑπάλληλοι τῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 1956 ἔτυχον διπλώματος τοῦ Κ.Σ.Ε. ἕτεροι 20 σπουδασταί. Ὑπάρχουν ἐπίσης μερικοὶ σπουδασταί, οἱ ὁποῖοι παρηκολούθησαν τὰ μαθήματα μόνον τοῦ πρώτου ἔτους καὶ ἔτυχον ἀντιστοίχου πιστοποιητικοῦ σπουδῶν.

Ἀπὸ ὡρισμένας ἀπόψεις, ἡ ὀργάνωσις τῆς ἐκπαιδεύσεως τοῦ Κ.Σ.Ε. δὲν θεωρεῖται εἰσέτι ὡς πλήρως ἱκανοποιητική. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, μίαν ἀνάλυσις τῆς καταστάσεως, σήμερον ὅτε παρῆλθον 5 ἔτη πείρας, θὰ εἶναι χρήσιμος, ὡς σκοποῦσα νὰ ἀποτελέσῃ παρόρμησιν ἀφ' ἑνὸς μὲν πρὸς μίαν συνεχῆ διαδικασίαν προσαρμογῆς τῆς λειτουργίας τοῦ Κ.Σ.Ε. εἰς τὰς ἀνάγκας τοῦ τόπου καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς στατιστικῆς. Πᾶσα σύστασις ἐπὶ τοῦ προκειμένου δέον νὰ ἔχῃ ὡς ἀφετηρίαν τὸ ὅτι δὲν πρέπει νὰ διακοπῇ ἡ συνέχεια τῆς πορείας τοῦ Κ.Σ.Ε. ἐν τῇ προσπαθείᾳ τῆς περαιτέρω ἀναπτύξεώς του: Ἡ παροῦσα δομὴ τοῦ «Κέντρου» ἔχει ἀποδείξεις περὶ τῆς ἀξίας της.Δι' ὃ τὸ ἀκαδημαϊκὸν ἐπίπεδον τῆς διδασκαλίας πρέπει νὰ διατηρηθῇ καὶ δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ διδακτικὸν προσωπικὸν τὸ ὁποῖον εἶναι διαθέσιμον διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ὑποδεικνυομένων μαθημάτων.

Αἱ ἀπαντῶσαι κύριαι δυσχέρειαι εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς: α) τὸ ἐν ἰσχύϊ πρόγραμμα εἶναι ἀρκούντως βεβαρυμένον ἐν σχέσει πρὸς τὸν διαθέσιμον χρόνον, ἰδίως εἰς μαθηματικά. β) Τὸ πρόγραμμα παρουσιάζει ὑπερβολικὴν ἀκαμψίαν, μὴ παρέχον ἐπαρκῆ δυνατότητα εἰδικεύσεως. γ) Τὰ ζητήματα πρακτικῆς στατιστικῆς, ὡς ἡ κατασκευὴ στατιστικῶν πινάκων, δὲν τυχάνουν ἐπαρκοῦς προσοχῆς. δ) Τὸ πρόγραμμα δὲν ἀνταποκρίνεται ἀρκούντως εἰς τὰς ἀνάγκας καταρτισμοῦ τῶν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω προσωπικοῦ ἐχόντων μίαν κάποιαν ἀρχαιότητα εἰς τὴν Ε.Σ.Υ.Ε.

Δι' ὑπουργικῆς ἀποφάσεως τῆς 4 Ἰουλίου 1957 συνεστήθη μία ἐπιτροπή, ἐν ὄψει «τῆς ἀφίξεως προσεχῶς τοῦ Καθηγητοῦ Goudswaard, ἐμπειρογνώμονος μετακληθέντος ὑπὸ τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως διὰ τὴν μελέτην καὶ τὴν σύνταξιν προγραμμάτων στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι.» Ἡ ἐν λόγῳ Ἐπιτροπὴ ἐπεφορτίσθη ὅπως «μελετήσῃ τὸ πρόβλημα τῆς στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι καὶ εἰδικώτερον τὸ πρόβλημα τῆς καταρτίσεως τοῦ ὑπάρχοντος εἰς τὴν Ε.Σ.Υ.Ε. προσωπικοῦ καὶ συζητήσῃ τὰ προβλήματα ταῦτα μετὰ τοῦ ἐμπειρογνώμονος». Ἡ σύνθεσις τῆς Ἐπιτροπῆς ταύτης ἔχει ὡς ἑξῆς:

Πρόεδρος: Στρ. Παπαϊωάννου, Διευθυντὴς τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν.

Ἀντιπρόεδρος: Π. Κουβέλης, Γενικὸς Διευθυντὴς τῆς Ἐθνικῆς Στατ. Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος.

Μέλη: Σ. Ἀγαπητίδης, Καθηγητὴς τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας εἰς τὴν Ἀν. Σχ. Βιομηχ. Σπουδῶν καὶ εἰς τὸ Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον.

Β. Helger, Σύμβουλος τῆς Διοικήσεως Τεχνικῆς Βοηθείας τοῦ Ο.Η.Ε. παρὰ τῇ Ἐθν. Στατ. Ὑπηρ. τῆς Ἑλλάδος.

Ε. Μαργαρίτης, Διευθυντὴς τῆς Ἐθν. Στατ. Ὑπηρ. τῆς Ἑλλάδος, Καθηγητὴς τῆς Στατιστικῆς εἰς τὴν Ἀν. Σχολὴν Βιομ. Σπουδῶν καὶ Διευθυντὴς Σπουδῶν τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως.

Δ. Ζούκας, Διευθυντὴς τῆς Ἐθν. Στατ. Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος, ἐπιφορτισμένος μὲ τὴν ἐσωτερικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν ὑπαλλήλων τῆς Ε Σ Υ Ε.

Γραμματεύς: Δ. Κονιδάρης, Τμηματάρχης τοῦ Τμήματος Στατιστικῆς Φυσικῆς Κινήσεως Πληθυσμοῦ εἰς τὴν Ἐθν. Στατ. Ὑπηρ. τῆς Ἑλλάδος.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραμονῆς μου εἰς Ἀθήνας, ἀπὸ 5 Σεπτεμβρίου ἕως 4 Ὀκτωβρίου 1957, ἡ Ἐπιτροπὴ συνῆλθε 5 φοράς. Κατὰ τὴν πρώτην συνεδρίασιν ἔλαβε χώραν γενικὴ συζήτησις πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως καταστῇ δυνατὸν νὰ προσανατολισθῶ ἐπὶ τῆς καταστάσεως καὶ ἐπὶ τῶν πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων. Κατὰ τὴν δευτέραν συνεδρίασιν συνεζητήθη ἓν ὑπόμνημα, τὸ ὁποῖον εἶχον ἐν τῷ μεταξὺ ὑποβάλει. Τοῦτο παρουσίαζεν εἰς γενικὰς γραμμὰς μερικὰς εἰσηγήσεις διὰ τήν, κατὰ τὸ δυνατόν, ἄρσιν τῶν ἀνωτέρω δυσκολιῶν. Αἱ εἰσηγήσεις αὗται ἐνεκρίθησαν κατ' ἀρχὴν ὑπὸ τῆς Ἐπιτροπῆς ὁμοφώνως. Μετὰ ταῦτα ἐπεξειργάσθην πλέον λεπτομερεῖς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι συνεζητήθησαν κατὰ τὰς τρεῖς ἑπομένας συνεδριάσεις. Νομίζω ὅτι δύναμαι νὰ εἴπω ὅτι αἱ προτάσεις αὗται ἔτυχον τῆς γενικῆς ἐπιδοκιμασίας. Μερικαὶ τροποποιήσεις ἐφάνη ὅτι ἦσαν ἐπιθυμηταί. Δι' ὃ καὶ ἐλήφθησαν αὗται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν σύνταξιν τῆς συνοδευούσης τὸ παρὸν ἐκθέσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς συντελεσθείσης μελέτης. Ἐλπίζω ὅτι αἱ προτάσεις μου, ἴσως μετὰ ἀπὸ μερικὰς τροπολογίας καὶ μετὰ διευκρίνισιν μερικῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀκόμη εἶναι πολὺ ἀόριστα, θὰ περιληφθοῦν εἰς τὴν ἔκθεσιν τὴν ὁποίαν ἡ Ἐπιτροπὴ πρόκειται νὰ ὑποβάλῃ εἰς τὸν Ὑπουργὸν Συντονισμοῦ.

Αἱ συζητήσεις κατὰ τὰς πέντε συνεδριάσεις τῆς Ἐπιτροπῆς εἰς ἃς παρέστην διηυκόλυνον πολὺ τὸ ἔργον μου. Ἐννοεῖται ὅτι ἐπὶ πλέον εἶχον ἰδιαιτέρας συζητήσεις μὲ τὰ μέλη τῆς Ἐπιτροπῆς καὶ μὲ ἄλλα πρόσωπα ἐνδιαφερόμενα διὰ τὸ προκείμενον θέμα. Εἰδικώτερον ἐπωφελήθην πολὺ τῆς καθημερινῆς μου ἐπαφῆς μὲ τὸν Καθηγητὴν κ. Μαργαρίτην, μετὰ τοῦ ὁποίου συνεζήτησα, κατὰ τρόπον λίαν λεπτομερῆ, ἅπαντα τὰ προβλήματα, καθὼς καὶ τὰ ἔγγραφα στοιχεῖα ἅτινα ἑτοίμασα διὰ τὴν Ἐπιτροπήν.

II. ΕΚΘΕΣΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΘΕΙΣΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

1. Γενικαὶ παρατηρήσεις. Εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο θὰ ἐκτεθοῦν γενικαὶ παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν διαφόρων μαθημάτων τὰ ὁποῖα εἰσηγοῦμαι. Εἰς τὰ ἑπόμενα δὲ τμήματα παρέχονται λεπτομέρειαι ἐπὶ τῶν προτεινομένων προβλημάτων.

Τὰ μαθήματα τοῦ «Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως» εἶναι προσανατολισμένα κατὰ πρῶτον λόγον πρὸς τὰς ἀνάγκας τεχνικῆς ἐκπαιδεύσεως τοῦ ἀνωτέρου προσωπικοῦ τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος. Τὸ ἀκαδημαϊκῆς μορφώσεως προσωπικὸν τῆς Ὑπηρεσίας αὐτῆς («προσωπικὸν Α' Κατηγορίας») διαβαθμίζεται εἰς τὰς ἑξῆς τέσσαρας βασικὰς τάξεις: 1) Διευθυνταί, 2) Τμηματάρχαι, 3) Εἰσηγηταί, 4) Γραμματεῖς. Ἐπίσης, οἱ ἀνώτεροι βαθμοὶ τοῦ προσωπικοῦ τῆς Βας κατηγορίας (κάτοχοι ἀπολυτηρίου σχολῶν μέσης ἐκπαιδεύσεως μόνον) ἀποκαλοῦνται ἐπίσης βαθμοὶ «Εἰσηγητοῦ» καὶ «Γραμματέως». Οἱ μισθοὶ τῶν τελευταίων τούτων εἶναι κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον τῆς αὐτῆς στάθμης μὲ τοὺς μισθοὺς τῶν Εἰσηγητῶν καὶ Γραμματέων τῆς Α' κατηγορίας.

Προκειμένου νὰ σχηματίσῃ τις γνώμην περὶ τῶν ἀναγκῶν μορφωτικοῦ καταρτισμοῦ ὑπαλλήλων διὰ τὰς διαφόρους κατηγορίας εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὁ ἀριθμὸς τῶν θέσεων μιᾶς ἑκάστης ἐκ τῶν ὡς ἄνω κατηγοριῶν. Τὸ ἤδη κατέχον θέσεις προσωπικὸν καθὼς καὶ ὁ προβλεπόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν Νόμον περὶ Ὀργανισμοῦ τῆς Ε Σ Υ Ε ἔχουν ὡς ἑξῆς:

Θέσεις Α' Κατηγορίας	Κατειλημμέναι (*)	Προβλεπόμεναι
Διευθυνταί	10 (2)	13
Τμηματάρχαι	31 (8)	44
Εἰσηγηταί	20 (15)	60
Γραμματεῖς	13 (10)	80
Σύνολον	74 (35)	197
Θέσεις Β'. Κατηγορίας		
Εἰσηγηταί	16	17
Ἄλλων βαθμῶν	60	65
Σύνολον	76	82
Γενικὸν Σύνολον	314 (50)	485

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κατάλληλον ἐπίπεδον τῶν μαθημάτων τοῦ «Κέντρου», πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς ἀφετηρίαν : Ποῖαι τεχνικαὶ γνώσεις δέον νὰ ἀπαιτοῦνται παρὰ τῶν ὑπαλλήλων τῶν διαφόρων βαθμῶν τῆς Ε Σ Υ Ε, δεδομένης τῆς εἰς τὸ Κ.Σ.Ε. σημαντικῆς θέσεως τὴν ὁποίαν κατέχει ἡ ἐκπαίδευσις στατιστικολόγων προοριζομένων νὰ προσληφθοῦν εἰς τὴν ἐν λόγῳ Ὑπηρεσίαν.

Νομίζω ὅτι τὸ παρὸν ἐπίπεδον τῶν μαθημάτων τοῦ πρώτου ἔτους τοῦ Κ.Σ.Ε. ἀνταποκρίνεται, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, εἰς ὅ,τι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπαιτηθῇ ἀπὸ ἕνα στατιστικὸν μὲ βαθμὸν τμηματάρχου. Πάντως θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπέλθουν μερικαὶ τροποποιήσεις. Ἐν πρώτοις, θεωρῶ εὐκταίαν τὴν περιστολὴν τοῦ ἑβδομαδιαίου ἀριθμοῦ ὡρῶν διδασκαλίας. Πρέπει, βεβαίως, νὰ διατηρηθῇ τὸ ἴδιον ἐπίπεδον καὶ ἡ αὐτὴ ποιότης, ἀλλὰ νὰ περιορισθῇ ἡ ποσότης.

Τὸ προτεινόμενον πρόγραμμα ἐξασφαλίζει μίαν στατιστικὴν μόρφωσιν ἀρκετὰ γενικήν, μέσου ἐπιπέδου, ἡ ὁποία, ὡς εἶναι εὐνόητον, θὰ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ διὰ τὴν κατάρτισιν στατιστικολόγων, οἱ ὁποῖοι θὰ πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς ἄλλας κρατικὰς ὑπηρεσίας ἢ εἰς ἰδιωτικὰς ἐπιχειρήσεις.

Φρονῶ ὅτι ἕνα ἑνιαῖον πρόγραμμα πρέπει νὰ καθιερωθῇ διὰ τὰς σπουδὰς δι' ἃς χορηγεῖται τὸ πιστοποιητικὸν σπουδῶν πρώτου ἔτους, διότι ἐγένετο ἤδη φανερὸν ὅτι τὸ σύστημα τῆς ἐκλογῆς ἑνὸς ἐκ τῶν προαιρετικῶν μαθημάτων ὑπὸ τὰς δεδομένας συνθήκας παρουσιάζει μειονεκτήματα.

Ἐξ ἄλλου, θὰ πρέπῃ νὰ παρασχεθῇ διὰ τῶν σπουδῶν τοῦ δευτέρου ἔτους ἡ δυνατότης εἰδικεύσεως. Πρέπει, δηλαδή, νὰ παρέχεται δυνατότης ἐκλογῆς μεταξὺ τῆς συνεχίσεως τῶν σπουδῶν ἐπὶ «μαθηματικῆς κατευθύνσεως» καὶ «μὴ μαθηματικῆς κατευθύνσεως». Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπαιτῆται ἡ κατοχὴ τοῦ διπλώματος τοῦ δευτέρου ἔτους σπουδῶν ὡς προσόντος διὰ τὴν προαγωγὴν εἰς τὸν βαθμὸν διευθυντοῦ τῆς Ε Σ Υ Ε.

Ὅμως καὶ ἐδῶ τὰ μαθήματα εἶναι δυνατὸν νὰ διατηρηθοῦν εἰς τὸ ὑφιστάμενον ἐπίπεδον, ἡ δὲ ἐπιθυμητὴ μείωσις τοῦ ὄγκου τῆς ὕλης δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ, ἐν προκειμένῳ, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον : Οἱ σπουδασταὶ δὲν θὰ εἶναι τοῦ λοιποῦ ὑποχρεωμένοι, συνεπείᾳ τῆς εἰδικεύσεως, νὰ παρακολουθοῦν ὅλα τὰ μαθήματα.

Ἕνας νέος κύκλος μαθημάτων στοιχειώδους καὶ πρακτικῆς μορφῆς θὰ ἔδει ὅπως ὀργανωθῇ διὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ τεχνικοῦ προσωπικοῦ τοῦ ἤδη ἐργαζομένου εἰς τὴν Ε Σ Υ Ε - τόσον τῆς α', ὅσον καὶ τῆς β' κατηγορίας - τὸ ὁποῖον μέχρι τοῦδε δὲν ἔτυχε τυπικῆς ἐκπαιδεύσεως εἰς τὴν στατιστικήν. Τὸ Κέντρον Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως ἔχει ἀκαδημαϊκὸν χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον εἶναι εὐκταῖον ὅπως διατηρήσῃ, ἐνῷ τὰ «Προπαρασκευαστικὰ Μαθήματα», τὰ ὁποῖα εἰσηγοῦμαι ἐδῶ, εὑρίσκονται ἐν μέρει κάτω τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἐπιπέδου. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ συνίστων ὅπως τὰ μαθήματα ταῦτα δίδωνται ὄχι ὑπὸ μορφὴν διαλέξεων εἰς τὸ «Κέντρον», ἀλλὰ ὑπὸ μορφὴν πολυγραφημένων φυλλαδίων, διανεμομένων εἰς τὰ ἐνδιαφερόμενα πρόσωπα. Ἡ διαδικασία αὕτη παρουσιάζει τὰ ἑξῆς πρόσθετα πλεονεκτήματα. α) Αἱ δαπάναι θὰ εἶναι πολὺ μικρότεραι ἐν συγκρί-

(*) Ἐντὸς παρενθέσεων : Ἀριθμὸς προσωπικοῦ προσφάτως ἐπιλεγέντος, ἀλλὰ μὴ ἀναλαβόντος εἰσέτι καθήκοντα.

σει πρὸς τὰς δαπάνας τῆς προφορικῆς διδασκαλίας, ἥτις δέον νὰ ἐπαναλαμβάνεται κατὰ περιόδους. Ἅπαξ καὶ συνταχθοῦν τὰ μαθήματα, εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν τόσας φορὰς ὅσας ἐπιθυμεῖ τις, ἂν καὶ ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν θὰ πρέπῃ νὰ γίνωνται ἀναθεωρήσεις καὶ ἀναπροσαρμογαὶ τούτων. β) Εἶναι δύσκολον νὰ ὑποχρεωθῇ τὸ ἤδη ἐργαζόμενον εἰς τὴν Ε Σ Υ Ε προσωπικόν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει πολλοὺς ἔχοντας σοβαρὸν ἀριθμὸν ἐτῶν προϋπηρεσίας, νὰ παρακολουθήσῃ προφορικὴν διδασκαλίαν, εἰς ὥρας μὴ περιλαμβανομένας εἰς τὸ κεκανονισμένον ὡράριον ἐργασίας καὶ μάλιστα δι' ἀρκούντως μακρὰν χρονικὴν περίοδον (*). γ) Διὰ τῆς προτεινομένης μεθόδου διευκολύνεται ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος τῆς συμμετοχῆς εἰς τὰ μαθήματα καὶ ἐκείνου τοῦ τεχνικοῦ προσωπικοῦ τὸ ὁποῖον εἶναι τοποθετημένον εἰς τὰ περιφερειακὰ γραφεῖα τῆς Ε Σ Υ Ε.

Ἐν σχέσει πρὸς τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παραθέσωμεν τὸ ἀκόλουθον ἀπόσπασμα ἐκ τῆς ἐκδόσεως τῆς UNESCO, ὅπερ φέρει τὸν τίτλον: «The University Theaching of Social Sciences»: «Statistics», σελ. 25: «Ἐν προκειμένῳ, ἡ ἐκπαίδευσις προσώπων ἤδη ἐργαζομένων, τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ μὴ ἔχουν προηγουμένην στατιστικὴν κατάρτισιν, εἶναι ἐξ ἴσου σημαντική.Πρόκειται περὶ ὑπαλλήλων ἐργαζομένων κατὰ κανόνα εἰς κρατικὰς ὑπηρεσίας ἢ εἰς ἰδιωτικὰς ἐπιχειρήσεις καὶ εἰς τοὺς ὁποίους εἶναι ἀπαραίτητον ὅπως χρησιμοποιοῦν τὴν στατιστικὴν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας των.Ἡ ἐκπαίδευσις αὐτοῦ τοῦ τύπου γίνεται συνήθως ὑπὸ ἐπαγγελματιῶν στατιστικολόγων ἐργαζομένων εἰς αὐτὰς ταύτας τὰς Ὑπηρεσίας ἢ ἐπιχειρήσεις καὶ μόνον ἐκτάκτως ὑπὸ διδασκόντων εἰς Πανεπιστήμια ἢ ἐπιστημονικὰ Ἱδρύματα».

Βάσει τοῦ ἄρθρου 14, παραγρ. 4, τοῦ ἀπὸ 1953 Νόμου περὶ ὀργανώσεως τῆς Ε Σ Υ Ε, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ θεσμοθετηθῇ διὰ Βασιλικοῦ Διατάγματος ἐπίσημον ἱδρυτικὸν καταστατικὸν τῶν «Προπαρασκευαστικῶν Μαθημάτων» διαλαμβάνον τὰ ἑξῆς : Μετὰ τὴν παρέλευσιν μιᾶς μεταβατικῆς περιόδου, μόνον οἱ ὑπάλληλοι οἱ ἔχοντες πιστοποιητικὸν σπουδῶν τοῦ ὡς ἄνω κύκλου θὰ δύνανται νὰ προαχθοῦν εἰς τὸν βαθμὸν τοῦ Εἰσηγητοῦ εἰς τὴν Ε Σ Υ Ε.

Ἡ ἀποστολὴ τῶν «Προπαρασκευαστικῶν Μαθημάτων» δυνατὸν νὰ μὴ περιορισθῇ μόνον εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν τοῦ ἐργαζομένου εἰς τὴν Ε Σ Υ Ε προσωπικοῦ.

Αἱ εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις, αἱ ὁποῖαι προβλέπονται ὑπὸ τοῦ προαναφερθέντος νόμου διὰ τὸ νεοπροσλαμβανόμενον τεχνικὸν προσωπικὸν τῆς Ε Σ Υ Ε, δύνανται νὰ βασίζωνται, μερικῶς τουλάχιστον, ἐπὶ τῆς διδασκομένης ὕλης αὐτοῦ τοῦ κύκλου μαθημάτων. Ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, ὡς εἶναι εὐνόητον, θὰ πρέπῃ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἀνάγκη παρόδου μιᾶς ὡρισμένης μεταβατικῆς περιόδου.

Εἰς ὅλους τοὺς κύκλους μαθημάτων τοὺς ὁποίους εἰσηγοῦμαι εἰς τὴν παροῦσαν ἔκθεσιν, σημαντικὴν θέσιν καταλαμβάνουν αἱ πρακτικαὶ ἀσκήσεις. Ἐπ' αὐτοῦ θὰ ἤθελα νὰ ἀναφέρω μίαν εἰδικὴν μορφὴν τὴν ὁποίαν θεωρῶ ἐξαιρετικῶς χρήσιμον, ἂν καὶ δὲν θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἡ μόνη ἐφαρμοστέα : Πρόκειται διὰ τὴν μελέτην ἑνὸς ἄρθρου ἢ ἑνὸς κεφαλαίου ἐξ ἑνὸς βιβλίου παρά τινος σπουδαστοῦ καὶ τὴν ἐν συνεχείᾳ προφορικὴν παρουσίασιν τοῦ κειμένου ὑπ' αὐτοῦ ἀκολουθουμένην ἀπὸ σχετικὴν συζήτησιν.

Ὅσον ἀφορᾷ τοὺς ὅρους εἰσδοχῆς εἰς τὸ Κ Σ Ε, θὰ εἶχα νὰ παρατηρήσω τὰ ἑξῆς : Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, θὰ ἔπρεπε νὰ παρέχεται ἡ δυνατότης ἀπ' εὐθείας ἐγγραφῆς εἰς τὸ δεύτερον ἔτος σπουδῶν εἰς πρόσωπα μὴ ἔχοντα στατιστικὰς γνώσεις ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς παρεχομένας κατὰ τὸ πρῶτον ἔτος σπουδῶν. Ἐπὶ παραδείγματι, ἕνας μηχανικός, ἐπιθυμῶν ὅπως ἐπιδοθῇ εἰς στατιστικὰς σπουδὰς ἐπὶ τῇ προόψει ἐφαρμογῆς ὑπ' αὐτοῦ ἐνδεχομένως τῶν στατιστικῶν μεθόδων ἐλέγχου ποιότητος, θὰ πρέπῃ νὰ γίνεται δεκτὸς κατ' εὐθεῖαν εἰς τὸ δεύτερον ἔτος σπουδῶν, ἀκόμη καὶ ἂν προηγουμένως δὲν ἔχῃ ἀποκτήσει γνώσεις στατιστικῆς. Κατ' ἀναλογίαν, θὰ πρέπῃ νὰ παρέχεται τὸ δικαίωμα εἰς τοὺς πτυχιούχους ὡρισμένων ἀνωτάτων σχολῶν ὅπως γίνωνται δεκτοὶ εἰς τὸ πρῶτον ἔτος σπουδῶν ἄνευ εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων. Ἐπειδὴ δὲν εἶμαι ἐπαρκῶς ἐνήμερος τῆς συνθέσεως τῆς ἀνωτάτης ἐκπαιδεύσεως εἰς τὴν Ἑλλάδα, δὲν εἶμαι συνεπῶς εἰς θέσιν νὰ εἰσηγηθῶ βάσει ποίων πτυχίων θὰ ἔδει ὅπως χορηγῆται τὸ δικαίωμα τῆς ἄνευ ἐξετάσεων ἐγγραφῆς.

(*) Ἀκόμη καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν υἱοθετηθῇ ἡ ἐδῶ περιγραφομένη μέθοδος, θὰ ἦτο ἴσως ἄξιον συστάσεως ὅπως συμμετέχουν εἰς τὰ μαθήματα ταῦτα μόνον οἱ σχετικῶς νέοι ὑπάλληλοι, φέρ' εἰπεῖν οἱ προσληφθέντες μεταπολεμικῶς.

Αἱ εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις διὰ τοὺς κατόχους μόνον ἀπολυτηρίου μέσης ἐκπαιδεύσεως θὰ πρέπῃ νὰ ἐξακολουθήσουν ἰσχύουσαι καὶ μάλιστα νὰ καταστοῦν περισσότερον ἐπαχθεῖς. Αἱ ἐν ἰσχύϊ εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις γίνονται ἐπὶ τῆς ὕλης ἥτις διδάσκεται εἰς τὴν μέσην ἐκπαίδευσιν. Δὲν νομίζω, ὅμως ὅτι ἕνας μέσης ἱκανότητος σπουδαστής, μὲ κατάρτισιν μόνον μέσης ἐκπαιδεύσεως, θὰ δυνηθῇ νὰ ἀφομοιώσῃ κατὰ τρόπον ἱκανοποιητικὸν τὴν ὕλην τοῦ πρώτου ἔτους. Θὰ ἦτο δυνατόν, λοιπόν, νὰ ἀντιμετωπισθῇ ἡ διενέργεια τῶν ἐξετάσεων εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρῶτον ἔτος βάσει τῆς ὕλης τῶν «Προπαρασκευαστικῶν Μαθημάτων». Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, οἱ ὑποψήφιοι οἱ κατέχοντες μόνον ἀπολυτήριον μέσης ἐκπαιδεύσεως θὰ ἀναπληρώνουν —οὕτως εἰπεῖν— διὰ τῶν προκαταρκτικῶν γνώσεων στατιστικῆς, ἃς θὰ ἔχουν ἀποκτήσει χάρις εἰς τὰ «Προπαρασκευαστικὰ Μαθήματα», τὴν ἔλλειψιν τῆς ἐπιστημονικῆς μορφώσεως, τὴν ὁποίαν διαθέτουν οἱ συνυποψήφιοι αὐτῶν οἱ προερχόμενοι ἐκ τῶν ἀνωτάτων σχολῶν. Οὕτω, ἡ ὁμὰς τῶν πρωτοετῶν σπουδαστῶν θὰ καταστῇ πλέον ὁμοιογενής.

Ἡ σειρὰ «Προπαρασκευαστικῶν Μαθημάτων» πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ Κ.Σ.Ε. διὰ τὴν «προκαταρκτικὴν ἐκπαίδευσιν» τῶν ὑποψηφίων του, κατόχων ἀπολυτηρίου μέσης ἐκπαιδεύσεως, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπιθυμοῦν νὰ προετοιμασθοῦν διὰ τὰς ἐξετάσεις εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρῶτον ἔτος αὐτοῦ. Διὰ τὴν εἰδικὴν αὐτὴν κατηγορίαν ὑποψηφίων δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ὀργανωθῇ προφορικὴ διδασκαλία. Πρέπει, ὅμως, νὰ δίδεται εἰς τούτους ἡ εὐκαιρία νὰ μετέχουν εἰς πρακτικὰς ἀσκήσεις καὶ εἰς συζητήσεις ὀργανουμένας ὑπὸ μορφὴν φροντιστηριακήν. Κατὰ κάποιον τρόπον, ἤθελε καθιερωθῇ, λοιπόν, εἰς τὸ Κέντρον ἓν νέον ἔτος σπουδῶν, προπαρασκευαστικοῦ χαρακτῆρος.

2. «Προπαρασκευαστικὰ Μαθήματα».

Τὸ προτεινόμενον πρόγραμμα τῶν μαθημάτων τούτων ἐκτίθεται εἰς τὸ ὑπ' ἀριθμ. 1 Παράρτημα. Ἡ σύνταξις τῶν μαθημάτων εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνατεθῇ εἰς τὸν ἐκ τῶν διευθυντῶν τῆς Ε Σ Υ Ε εἰδικῶς ἐπιφορτισμένον μὲ τὴν ἐντὸς τῆς Ὑπηρεσίας ἐκπαίδευσιν τοῦ προσωπικοῦ, ὅστις παρουσιάζεται πλήρως ἐνδεδειγμένος πρὸς τοῦτο. Εἶναι προφανές, ὅτι ἐπ' αὐτοῦ θὰ ἀπαιτηθῇ ἡ συνεργασία τῶν παρὰ τῇ Ε Σ Υ Ε ἐμπειρογνωμόνων ἑκάστου τομέως.

Ἐξ ἄλλου, δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ συνταχθοῦν εἰδικῶς διὰ τὸν κύκλον αὐτὸν ὅλα τὰ μαθήματα πρωτοτύπως. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ δανεισμὸς χρησίμου ὑλικοῦ ἐκ τῆς ὑφισταμένης βιβλιογραφίας. Οὕτω ὑπάρχουν πολλὰ στοιχειώδη ἐγχειρίδια, ἐπὶ τῶν ὁποίων δύναται, ἐν μέρει τουλάχιστον, νὰ βασισθῇ ἡ σύνταξις τοῦ κεφαλαίου «Στοιχεῖα στατιστικῆς μεθοδολογίας». Παραδείγματος χάριν, ἀναφέρω τὸ βιβλίον τοῦ R.G.D. Allen, «Statistics for Economists». Ὁμοίως δι' ὡρισμένα ἄλλα θέματα δυνατὸν νὰ χρησιμεύουν ὡς βάσις αἱ ἐκδόσεις τῶν Ἡνωμένων Ἐθνῶν ἢ τῶν Εἰδικῶν Διεθνῶν Ἱδρυμάτων.

Ἕκαστον μάθημα πρέπει νὰ συνοδεύεται ἀπὸ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἀσκήσεων καὶ ἐρωτήσεων, τῶν ὁποίων οἱ παραλῆπται θὰ ὀφείλουν νὰ ἀποστέλλουν τὰς λύσεις καὶ ἀπαντήσεις εἰς τὸν ἐπὶ κεφαλῆς τῆς συντάξεως τῶν μαθημάτων. Οὗτος θὰ διορθώνῃ ταύτας καὶ θὰ τὰς ἐπιστρέφῃ εἰς τὸν ἀποστείλαντα συνοδευομένας ὑπὸ μιᾶς ἐγκυκλίου, ἥτις θὰ περιέχῃ τὰς ὀρθὰς λύσεις καὶ μίαν ἔκθεσιν περὶ τῶν συχνότερον ἀπαντώντων λαθῶν εἰς τὰς ἀποσταλείσας λύσεις.

Ἐπὶ πλέον θὰ πρέπῃ νὰ ὀργανοῦται μία συζήτησις κάθε ἑβδομάδα, κατὰ προτίμησιν εἰς τὸ κτίριον τοῦ Κ.Σ.Ε. Κατ' αὐτήν, οἱ συμμετέχοντες θὰ δύνανται νὰ θέτουν ἐρωτήσεις ἐπὶ τοῦ μαθήματος τὸ ὁποῖον ἔχουν ἀμέσως προηγουμένως μελετήσει, καὶ μὲ τὴν σειράν των θὰ ὀφείλουν νὰ ἀπαντοῦν εἰς ἐρωτήσεις αἱ ὁποῖαι θὰ τίθενται εἰς τούτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὕλης. Τὰς συζητήσεις δυνατὸν νὰ διευθύνουν οἱ συντάκται τῶν ἐν λόγῳ μαθημάτων.

Ἡ διάρκεια τῶν μαθημάτων θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ καθορισθῇ ἐτησία.

Κατὰ τὸ πέρας τῶν μαθημάτων δυνατὸν νὰ προβλεφθοῦν ἐξετάσεις. Πάντως, διὰ τὸ προσωπικὸν τῆς Ε Σ Υ Ε τὸ ὁποῖον διαθέτει μίαν σχετικὴν ἀρχαιότητα θὰ ἦτο ἴσως προτιμότερον νὰ μὴν ὑπάρχουν τυπικαὶ ἐξετάσεις. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς γενομένης παρὰ τῶν τελευταίων μελέτης εἶναι δυνατὸν νὰ κριθοῦν ἐπὶ τῇ βάσει : α) τῶν ἀπαντήσεων τῶν μετεχόντων εἰς τὰς ἀσκήσεις καὶ τὰς ἐρωτήσεις αἱ ὁποῖαι θὰ συνοδεύουν ἕκαστον μάθημα, β) τοῦ ρόλου ἑκάστου εἰς τὰς ἑβδομαδιαίας φροντιστηριακὰς συζητήσεις, γ) μιᾶς προσωπικῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν ὀφείλουν νὰ συντάξουν κατὰ τὸ πέρας τῶν μαθημάτων.

Τὸ θέμα αὐτῆς τῆς ἐργασίας εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλέγεται ὑπὸ τοῦ σπουδαστοῦ συμβουλευομένου προκαταβολικῶς ἐπ' αὐτοῦ τὸν ἐπικεφαλῆς τῆς συντάξεως.

Ὡς ἐν ἐνδεχόμενον μεταξὺ πολλῶν ἄλλων ἀναφέρω, ὅτι μία τοιαύτη ἐργασία θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἑτοιμάζεται ἓν σχέδιον μεταφράσεως εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἑνὸς στατιστικοῦ κειμένου, μεθοδολογικοῦ χαρακτῆρος, ἐκ τῶν ἐκδιδομένων παρὰ τῶν διεθνῶν ὀργανισμῶν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀποκτηθῆ βαθμιαίως μία συλλογὴ μεταφράσεων τοιούτων κειμένων, δυναμένη νὰ προσφέρῃ χρησίμους ὑπηρεσίας εἰς τὸ ἔργον τῆς Ε Σ Υ Ε.

3. Πρῶτον ἔτος σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε.

Δυνατὸν νὰ προβλεφθοῦν τὰ ἀκόλουθα μαθήματα :

Α. Μαθηματικὰ

Β. Στατιστικὴ Μεθοδολογία

Γ. Πολιτικὴ Οἰκονομία

Δ. Θεωρία καὶ Ἐφαρμογὴ τῶν στατιστικῶν ἐρευνῶν

Ε. Δημογραφικὴ στατιστικὴ καὶ μελέτη τῶν πληθυσμιακῶν προβλημάτων.

ΣΤ. Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομικὴ ἀνάλυσις.

Παρατηρήσεις :

Ἐπὶ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον Α: Πρβλ. τὸ προτεινόμενον πρόγραμμα, ὅπερ ἐκτίθεται εἰς τὸ ὑπ' ἀριθμ. 2 παράρτημα.

Ἐπὶ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον Β: Ὁ σκοπὸς τῶν σπουδῶν Στατιστικῆς Μεθοδολογίας κατὰ τὸ πρῶτον ἔτος δὲν συνίσταται εἰς τὴν κατάρτισιν εἰδικῶν δυναμένων νὰ ἐφαρμόσουν τὰς προκεχωρημένας μεθόδους τῆς μαθηματικῆς στατιστικῆς. Οἱ παρακολουθήσαντες τὸ μάθημα τοῦτο θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι εἰς θέσιν : α) νὰ κρίνουν ἐπὶ ποίων σημείων τῆς ἐργασίας των εἶναι χρήσιμον νὰ συμβουλευθοῦν ἕνα εἰδικὸν ἐπὶ τῆς μαθηματικῆς στατιστικῆς, β) νὰ διεξάγουν μετὰ τοῦ εἰδικοῦ συζήτησιν τεχνικῆς φύσεως ἐπὶ τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος, γ) νὰ κατανοοῦν τὰς λύσεις τὰς ὁποίας θὰ δίδῃ ὁ εἰδικός.

Πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως δοθῇ κατὰ τὸ δυνατὸν σαφεστέρα εἰκὼν τοῦ εἰσηγουμένου προγράμματος, θεωρῶ προτιμότερον νὰ ἀναφερθῶ ἰδιαιτέρως εἰς ἓν ἐγχειρίδιον. Καὶ τοῦτο διότι μία ἁπλῆ ἀπαρίθμησις θεμάτων δὲν ἐκφράζει ἐπαρκῶς ἐπὶ ποίου ἐπιπέδου καὶ μέχρι ποίων λεπτομερειῶν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάπτυξις αὐτῶν. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης, φρονῶ ὅτι τὸ ἐγχειρίδιον τῶν W. Allen Wallis καὶ Harry G. Roberts: «Statistics, A New Approach» δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς πρότυπον. Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι εἶναι εὐκταῖον νὰ ἀκολουθηθῇ ἐπακριβῶς τὸ ἐν λόγῳ ἐγχειρίδιον. Ὅμως, τὸ ἐπίπεδόν του, ἡ ὕλη τὴν ὁποίαν πραγματεύεται καὶ ὁ πρακτικός του χαρακτὴρ προσαρμόζονται εἰς τὰς ἀνάγκας τοῦ μαθήματος στατιστικῆς μεθοδολογίας τοῦ πρώτου ἔτους σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε.

Τὸ ἐγχειρίδιον τοῦτο παρέχει, κατὰ τρόπον ἱκανοποιητικῶς ἁπλόν, ἐπαρκῶς πλήρη θεώρησιν τοῦ πεδίου τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς στατιστικῆς. Ἀφ' ἑτέρου, δὲν εἰσέρχεται εἰς τὰς μαθηματικὰς λεπτομερείας τῶν θεμάτων. Ἕνα μάθημα τοιούτου εἴδους εἶναι σκόπιμον νὰ ἔχουν παρακολουθήσει, εἰδικώτερον, ὅσοι διακόπτουν προσωρινῶς τὰς σπουδάς των μετὰ τὴν ἀποφοίτησιν ἐκ τοῦ πρώτου ἔτους τοῦ Κ.Σ.Ε., καθὼς καὶ ὅσοι κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος δὲν ἀκολουθοῦν τὸν κλάδον τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως. Ἐπὶ παραδείγματι, οἱ προαναφερθέντες ὀφείλουν νὰ γνωρίζουν τί εἶναι ἡ «ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως» καὶ εἰς ποῖα εἴδη προβλημάτων εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ. Δὲν εἶναι, ὅμως, ἀπαραίτητον νὰ δύνανται οὗτοι νὰ χρησιμοποιήσουν αὐτὴν τὴν τεχνικὴν μέθοδον. Ἐξαιροῦνται τούτου μόνον αἱ πλέον ἁπλαῖ περιπτώσεις.

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι τὸ βιβλίον τῶν Wallis καὶ Roberts χρησιμοποιεῖ μόνον τὰ στοιχειώδη μαθηματικὰ καὶ ὄχι τὸν διαφορικὸν λογισμόν, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνεται εἰς τὴν ὕλην τῶν μαθηματικῶν τοῦ πρώτου ἔτους. Ἑπομένως, κατὰ τὴν προφορικὴν διδασκαλίαν καὶ τὰς ἀσκήσεις εἶναι δυνατὸν νὰ προχωρήσῃ τις περισσότερον εἰς μαθηματικά. Προετίμησα, πάντως, νὰ ὑποδείξω ὡς «πρότυπον» τὸ βιβλίον τοῦτο ἐξ αἰτίας τοῦ πρακτικοῦ αὐτοῦ χαρακτῆρος. Πράγματι, τὰ ἐγχειρίδια τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦν ἀνώτερα μαθηματικὰ ἔχουν κατὰ κανόνα μᾶλλον θεωρητικὸν χαρακτῆρα. Ἐπὶ πλέον δὲν χρησιμοποιοῦν μόνον τὸν διαφορικὸν λογισμὸν ἀλλά, καὶ κυρίως, τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν, ὁ ὁποῖος δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὴν ὕλην τῶν μαθηματικῶν τοῦ πρώτου ἔτους

Ἐπὶ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον Δ: Σκοπὸς τοῦ μαθήματος αὐτοῦ εἶναι νὰ παράσχῃ μίαν πλέον ἐμβαθύνουσαν ἀνάπτυξιν τῶν κεφαλαίων «Ἀρχαὶ τῆς μεθόδου τῶν δειγματοληψιῶν» καὶ «Τεχνικὴ τῆς Ἐρεύνης», ὡς αὗται ἐκτίθενται εἰς τὰ «Προπαρασκευαστικὰ Μαθήματα». Τὸ βιβλίον τοῦ F. Yates δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ἐν προκειμένῳ ὡς πρότυπον, ἐὰν ἀφεθοῦν κατὰ μέρος τὰ πολὺ δύσκολα τμήματα αὐτοῦ. Δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ἐπίσης τὸ βιβλίον τοῦ H. Kellerer, τοῦ ὁποίου ἑτοιμάζεται ἤδη μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικήν.

Ἐπὶ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον Ε: Τὸ πρῶτον μέρος, περιλαμβάνον τὴν δημογραφικὴν στατιστικήν, εἶναι ἐκ τῶν καθιερωμένων ἤδη μαθημάτων τοῦ πρώτου ἔτους. Τοῦτο θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ συντμηθῇ ἐλαφρῶς διὰ νὰ ἀφήσῃ περιθώριον πρὸς διδασκαλίαν τῆς οἰκονομικῆς ἀπόψεως τῶν πληθυσμιακῶν προβλημάτων καὶ τῆς σχετικῆς πρὸς αὐτὰ δημογραφικῆς ἀναλύσεως.

Ἐπὶ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον ΣΤ: Εἰς τὸ μάθημα τοῦτο δέον νὰ ἐπεξηγηθοῦν ἐκεῖναι αἱ στατιστικαὶ τεχνικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν καὶ τὴν οἰκονομικὴν πολιτικήν. Τὰς ἐν λόγῳ μεθόδους δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν εἰς τρεῖς κατηγορίας:

α) Κατασκευὴ καὶ χρησιμοποίησις οἰκονομικῶν ἀριθμοδεικτῶν.

β) Ἀνάλυσις τῶν οἰκονομικῶν στατιστικῶν.

Μελέτη τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, τῶν οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν, τῆς κατανομῆς τῶν εἰσοδημάτων, τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως.

γ) Ὁλικαὶ Οἰκονομικαὶ στατιστικαί.

Ἐθνικὸν εἰσόδημα καὶ Ἐθνικοὶ λογαριασμοί, Πίνακες εἰσόδου καὶ ἐξόδου («Input — Output Tables»), ἰσοζύγιον πληρωμῶν.

Ὡράριον τοῦ ἀνωτέρω Προγράμματος

	Ὧραι ἑβδομαδιαίως		
Πρῶτον ἑξάμηνον	Μαθήματα —	Πρακτικαὶ — Ἀσκήσεις	Σύνολον
1. Μαθηματικὰ	1	2	3
2. Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2	2	4
3. Πολιτικὴ Οἰκονομία	2	—	2
4. Θεωρία καὶ ἐφαρμογὴ τῶν στατ. ἐρευνῶν	1	1	2
5. Δημογραφικὴ Στατιστικὴ	1	—	1
			12
Δεύτερον ἑξάμηνον			
1. Μαθηματικὰ	1	1	2
2. Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2	2	4
3. Θεωρία καὶ ἐφαρμογὴ στατ. ἐρευνῶν	1	1	2
4. Δημογραφικὴ Ἀνάλυσις	1	—	1
5. Οἰκονομικὴ στατιστικὴ καὶ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις	1 1)2	1 1)2	3(*)

4. Δεύτερον ἔτος σπουδῶν Κ.Σ.Ε.

Θεωρῶ εὐκταῖον ὅπως κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο δημιουργηθοῦν δυνατότητες εἰδικεύσεως. Ἐπὶ τοῦ παρόντος, τὰ βασικὰ μαθήματα εἶναι τὰ αὐτὰ διὰ πάντας τοὺς σπουδαστάς, ἡ δὲ εὐχέρεια ἐπιλογῆς περιορίζεται μόνον εἰς μερικὰ προαιρετικὰ μαθήματα. Νομίζω, ὅμως, ὅτι πρέπει νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ συνέχισις τῶν σπουδῶν, μετὰ τὴν ἀποφοίτησιν ἐκ τοῦ πρώτου ἔτους, ἄνευ παρακολουθήσεως προσθέτων μαθημάτων μαθηματικῶν καὶ μαθηματικῆς στατιστικῆς. Ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου παραπέμπω εἰς ὅσα παρετήρησα εἰς τὴν ἀνωτέρω παράγραφον 3 (ἐπὶ τοῦ ὑπὸ στοιχεῖον Β) ἐν σχέσει μὲ τὸ ζήτημα ποίας γνώσεις μαθηματικῆς στατιστικῆς δέον νὰ ἔχουν οἱ

(*) Ἀνὰ μίαν ὥραν ἑβδομαδιαίως δι' ἕκαστον τῶν μαθημάτων α, β καὶ γ, τὰ ὁποῖα ἀνελύθησαν ἀμέσως ἀνωτέρω. Ἤτοι, μίαν ὥραν διδασκαλίας καὶ μίαν ὥραν πρακτικῶν ἀσκήσεων, κάθε δύο ἑβδομάδας, δι' ἕκαστον μάθημα.

μὴ εἰδικευόμενοι ἐπὶ ταύτης. Τὰ ἀνωτέρω ἔχουν σημασίαν καὶ εὑρίσκουν ἐφαρμογὴν εἰδικώτερον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἀπαιτεῖται ἡ κατοχὴ τοῦ διπλώματος τοῦ δευτέρου ἔτους σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε. ὡς προσόντος διὰ τὴν προαγωγὴν εἰς τὸν βαθμὸν διευθυντοῦ εἰς τὴν Ε.Σ.Υ.Ε. Ἐπὶ παραδείγματι ἀπὸ ἕνα Τμηματάρχην, λόγου χάριν τῆς στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου, κατέχοντα πιστοποιητικὸν σπουδῶν τοῦ πρώτου ἔτους τοῦ Κ.Σ.Ε. καὶ ἐπιθυμοῦντα νὰ ἀποκτήσῃ προσόντα διὰ τὴν προαγωγήν του εἰς διευθυντήν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπαιτηθοῦν γνώσεις μαθηματικῶν πέραν ἐκείνων τοῦ πρώτου ἔτους, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἴδιος προτιμᾷ νὰ συνεχίσῃ σπουδὰς ἐπὶ μαθηματικῆς κατευθύνσεως. Ἄλλως, δέον νὰ παρασχεθῇ εἰς τοῦτον ἡ δυνατότης νὰ εἰδικευθῇ εἰς τὸ πεδίον τῆς «Ἐφηρμοσμένης στατιστικῆς», ὡς αὐτὴ ἀναπτύσσεται εἰς τὸ ὁμότιτλον μάθημα τὸ ὁποῖον διδάσκεται εἰς τὴν Σχολὴν Ἐφαρμογῆς τοῦ Ἐθνικοῦ Ἰνστιτούτου Στατιστικῆς καὶ Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν (INSEE) τῶν Παρισίων, διὰ τὴν κατηγορίαν τῶν «Attachés stagiaires» (ἀσκούμενοι ὑπάλληλοι μέσων βαθμῶν τοῦ INSEE). Διὰ λεπτομερεστέραν ἀνάλυσιν τοῦ μαθήματος τούτου παραπέμπω εἰς τὸ φυλλάδιον τὸ περιέχον τὸ πρόγραμμα τῆς Σχολῆς Ἐφαρμογῆς. Παρομοία ὕλη —ἂν καὶ κάπως ὀλιγώτερον πλήρης—διδάσκεται ἤδη εἰς τὸ δεύτερον ἔτος τοῦ Κ.Σ.Ε. ὑπὸ τὴν μορφὴν μαθημάτων τιτλοφορουμένων ὡς ἀκολούθως: Δημογραφικὴ Στατιστική, Οἰκονομικὴ στατιστική, Οἰκονομικὴ ἀνάλυσις, Ἐθνικοὶ λογαριασμοί. Ὡς συμπληρωματικὴ ὕλη δυνατὸν νὰ ἀπαιτῆται ἡ τῶν περιλαμβανομένων ἤδη εἰς τὸ πρόγραμμα μαθημάτων «Ὀργάνωσις» καὶ «Νομοθεσία».

Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ προβλεφθοῦν δύο προσέτι τομεῖς εἰδικεύσεως :

α) Στατιστικαὶ Μέθοδοι ἐν τῇ βιομηχανίᾳ.

β) Μαθηματικὴ Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομετρία.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν στατιστικῶν μεθόδων εἰς τὴν βιομηχανίαν ἀσφαλῶς δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ. Τὸ γεγονός, μάλιστα, ὅτι τὸ Κ.Σ.Ε. εἶναι προσηρτημένον εἰς Σχολὴν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν ἀποτελεῖ πρόσθετον λόγον διὰ νὰ δοθῇ ἰδιαιτέρα προσοχὴ εἰς τὸν τομέα τοῦτον.

Διὰ τὰ α' καὶ β' εἶναι ἀπαραίτητος μία πλέον προκεχωρημένη κατάρτισις εἰς μαθηματικὰ καὶ στατιστικὴν ἀνάλυσιν. Εἰς τὸ Παράρτημα 2 ἐκτίθεται τὸ προτεινόμενον πρόγραμμα τοῦ μαθήματος τῶν μαθηματικῶν. Τὸ μάθημα τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως δυνατὸν ν' ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βιβλίου «Analyse Statistique» τῶν E. Morice καὶ F. Chartier. Ἤτοι δέον νὰ συνεχισθῇ τὸ μάθημα τοῦτο ὡς διδάσκεται σήμερον εἰς τὸ Κέντρον.

Διὰ τοὺς ἀκολουθοῦντας τὰς «Στατιστικὰς Μεθόδους ἐν τῇ βιομηχανίᾳ» τὸ ὑφιστάμενον μάθημα περὶ τοῦ ἐλέγχου ποιότητος θὰ πρέπῃ προφανῶς νὰ εἶναι ἐξ ἴσου ὑποχρεωτικόν. Ἀφ' ἑτέρου, δι' ὅσους ἐκλέγουν «Μαθηματικὴν στατιστικὴν καὶ Οἰκονομετρίαν» θὰ πρέπῃ νὰ προστεθῇ εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν τὸ διδασκόμενον σήμερον μάθημα Οἰκονομετρίας.

Ἐν συμπεράσματι, συμφώνως πρὸς τὸ ἐκτεθὲν σχέδιον, κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος θὰ εἶναι ἀπαραίτητα τὰ κάτωθι μαθήματα :

1. Μαθηματικὰ
2. Στατιστικὴ Ἀνάλυσις
3. Ἔλεγχος τῆς ποιότητος
4. Οἰκονομετρία
5. Ἐφηρμοσμένη στατιστικὴ
6. Ὀργάνωσις καὶ Νομοθεσία.

Ἐκ τῶν μαθημάτων τούτων ὁ σπουδαστὴς θὰ δύναται νὰ ἐκλέξῃ ἕνα ἐκ τῶν ἀκολούθων συνδυασμῶν :

Τομεὺς εἰδικεύσεως	Ἀριθμοὶ μαθημάτων		
α) Στατιστικαὶ Μέθοδοι ἐν τῇ Βιομηχανίᾳ	1	2	3
β) Μαθηματικὴ Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομετρία	1	2	4
γ) Ἐφηρμοσμένη Στατιστικὴ		5	6

'Ωράριον τῶν ἀνωτέρω προγραμμάτων

	Ὧραι ἑβδομαδιαίως Μαθήματα	Πρακτικαὶ Ἀσκήσεις	Σύνολον
α) Στατιστικαὶ Μέθοδοι ἐν τῇ βιομηχανίᾳ			
— Μαθηματικὰ	1	1	2
— Στατιστικὴ 'Ανάλυσις	2	2	4
— Ἔλεγχος ποιότητος	1	1	2
			8
β) Μαθηματικὴ Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομετρία			
— Μαθηματικὰ	1	1	2
— Στατιστικὴ 'Ανάλυσις	2	2	4
— Οἰκονομετρία	1	1	2
			8
γ) 'Εφηρμοσμένη Στατιστικὴ			
— 'Εφηρμοσμένη Στατιστικὴ	4	2	6
— 'Οργάνωσις καὶ Νομοθεσία	2	—	2
			8

'Ο ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν —ἑπομένως δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν μαθημάτων— ἀντιστοιχεῖ σχεδὸν ἐπακριβῶς πρὸς τὰς ὥρας καὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς καθιερωμένης ἤδη διδασκαλίας. Συνεπῶς, αἱ προεκτεθεῖσαι προτάσεις εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθοῦν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἤδη διδασκομένων εἰς τὸ Κ.Σ.Ε. μαθημάτων καὶ εἰς τρόπον ὥστε, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο, νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ συνέχεια μεταξὺ ἰσχύοντος καὶ ὑπὸ τροποποίησιν προγράμματος. 'Η ἁπλούστευσις τοῦ ἰσχύοντος προγράμματος κατορθοῦται ἐνταῦθα διὰ τοῦ περιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑποχρεωτικῶν μαθημάτων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ συστήματος εἰδικεύσεως.

Ἓν ἐκ τῶν προαπαιτουμένων διὰ τὰς ἐξετάσεις κατὰ τὸ πέρας τοῦ ἔτους θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ σπουδαστοῦ σύνταξις μιᾶς προσωπικῆς ἐργασίας, ἐπὶ θέματος ἐκλεγομένου ὑπ' αὐτοῦ τούτου, κατόπιν συνεννοήσεως μετὰ τοῦ Διευθυντοῦ Σπουδῶν τοῦ «Κέντρου». Τοῦτο θὰ παράσχῃ τὴν δυνατότητα τῆς καθιερώσεως περαιτέρω εἰδικεύσεως ἐντὸς μιᾶς ἑκάστης ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω εἰδικοτήτων. 'Επὶ παραδείγματι, ἕνας σπουδαστὴς ἐφηρμοσμένης στατιστικῆς δυνατὸν νὰ ἐπιδοθῇ εἰδικῶς εἰς τὴν μελέτην τῆς δημογραφίας, προκειμένου νὰ ἐκλέξῃ τὸ θέμα τῆς «διατριβῆς» του ἐκ ταύτης.

Εἶναι πιθανὸν κατὰ τὴν διάρκειαν τούτου ἢ ἐκείνου τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους νὰ παρουσιασθοῦν ὀλιγάριθμοι ὑποψήφιοι δι' ὡρισμένας ἐκ τῶν εἰδικοτήτων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιμετωπισθῇ ἡ προσωρινὴ διακοπὴ τῆς διδασκαλίας ὡρισμένων μαθημάτων καὶ ἡ προπαρασκευὴ τῶν σπουδαστῶν διὰ τὰς ἐξετάσεις δι' ἀτομικῆς μελέτης τῆς ἀπαραιτήτου βιβλιογραφίας ἐπὶ τοῦ ἢ τῶν ἐν λόγῳ θεμάτων, ἥτις μελέτη θέλει γίνεται τῇ βοηθείᾳ καὶ ὑπὸ τὴν καθοδήγησιν τῶν καθηγητῶν τοῦ «Κέντρου». 'Ακόμη καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς τῶν σπουδαστῶν εἶναι κάπως μεγαλύτερος, δυνατὸν νὰ ὑποστηριχθῇ ἡ ἄποψις ὅτι ἡ μέθοδος ἐκπαιδεύσεως διὰ διαλέξεων δὲν εἶναι ἡ καλυτέρα δυνατή, καὶ ἀσφαλῶς δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἡ μόνη ἐφαρμοζομένη. 'Επ' αὐτοῦ παραπέμπω εἰς τὴν ἔκδοσιν τῆς UNESCO: «The University Teaching of Social Sciences, Statistics», Τμῆμα «Μέθοδοι διδασκαλίας» (σελ. 33-34).

ΕΚΘΕΣΙΣ

ΕΙΔΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Δυνάμει τῆς ὑπ' ἀριθ. Δ Κ. 3081/4.7.1957 ἀποφάσεως τοῦ κ. ἐπὶ τοῦ Συντονισμοῦ Ὑπουργοῦ συνεστήθη ἐκ τῶν κάτωθι ὑπογεγραμμένων Εἰδικὴ Ἐπιτροπὴ διὰ τὴν μελέτην τοῦ προβλήματος τῆς στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως καὶ εἰδικώτερον τῆς μετεκπαιδεύσεως τοῦ προσωπικοῦ τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος, ἐν ὄψει καὶ τῆς ἀφίξεως τοῦ ὑπὸ τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως μετακληθέντος Ὀλλανδοῦ Ἐμπειρογνώμονος, Καθηγητοῦ κ. Goudswaard διὰ τὴν μελέτην καὶ κατάρτισιν προγραμμάτων στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι.

Ἀπὸ τῆς συστάσεώς της ἡ Ἐπιτροπὴ συνῆλθεν εἰς ἐπανειλημμένας συνεδριάσεις καὶ καθώρισε τὸν τρόπον ἐργασίας αὐτῆς, πρὸ τῆς ἀφίξεως τοῦ Ὀλλανδοῦ Ἐμπειρογνώμονος, ἵνα προβῇ εἰς τὴν ἔγκαιρον μελέτην τῶν τεθέντων αὐτῇ προβλημάτων καὶ ἐπιτύχῃ τὴν καλυτέραν δυνατὴν συνεργασίαν τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος μετὰ τοῦ ἐν λόγῳ Ἐμπειρογνώμονος.

Ὑπ' ὄψιν τῆς Ἐπιτροπῆς ἐτέθη ἡ ἀπὸ 10ης Ἰουλίου 1957 γραπτὴ εἰσήγησις τοῦ Διευθυντοῦ Μεθοδολογίας καὶ Ἐκπαιδεύσεως τῆς ΕΣΥΕ κ. Ε. Μαργαρίτη, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἐκτίθεται τὸ ἱστορικὸν τῆς ἱδρύσεως καὶ λειτουργίας τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως, τὰ ἐπιτευχθέντα μέχρι τοῦδε ἀποτελέσματα, ὡς καὶ τὰ παρουσιασθέντα προβλήματα μετεκπαιδεύσεως τοῦ προσωπικοῦ τῆς ΕΣΥΕ.

Ὁμοίως ὑπ' ὄψιν τῆς Ἐπιτροπῆς ἐτέθη ἡ ἀπὸ 8/8/1957 εἰσήγησις τοῦ Διευθυντοῦ τῆς ΕΣΥΕ κ. Δ. Ζούκα, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἐκτίθενται λεπτομερῶς αἱ ἀπόψεις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ἐκπαίδευσιν τῶν ὑπηρετούντων ὑπαλλήλων τῆς ΕΣΥΕ.

Ἐν συνεχείᾳ ἡ Ἐπιτροπὴ συνεζήτησε σύντομον ὑπόμνημα τοῦ Ὀλλανδοῦ Ἐμπειρογνώμονος κ. Goudswaard τεθὲν ὑπ' ὄψιν αὐτῆς τὴν 10/9/1957 τὸ ὁποῖον περιελάμβανε τὰς κατ' ἀρχὴν ἀπόψεις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῆς ὀργανώσεως τῆς στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι βάσει τῶν ὑφισταμένων σήμερον διεθνῶς ἀπαιτήσεων διὰ μίαν γενικὴν στατιστικὴν μόρφωσιν, ὡς καὶ τῶν εἰδικῶν ἀναγκῶν πρὸς ἐπιμόρφωσιν τοῦ προσωπικοῦ τῆς ΕΣΥΕ.

Τέλος ὑπ' ὄψιν τῆς Ἐπιτροπῆς ἐτέθη σημείωμα τοῦ Δ/ντοῦ τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν καὶ Προέδρου τῆς Ἐπιτροπῆς κ. Στρ. Παπαϊωάννου, ἐν ᾧ ἐκτίθενται λεπτομερῶς οἱ σκοποὶ τῆς ἀπὸ τοῦ 1955 ἐπισήμου ἱδρύσεως τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκαιδεύσεως καὶ τὰ κατὰ τὴν γνώμην του ἀπαραίτητα μέτρα διὰ τὴν ἔτι καλυτέραν ὀργάνωσιν τοῦ Κέντρου πρὸς ἐπίτευξιν τῶν πράγματι ὑψηλῶν ἀντικειμενικῶν αὐτοῦ σκοπῶν.

Κατὰ τὰς τελευταίας αὐτῆς συνεδριάσεις ἡ Ἐπιτροπὴ ἔσχε τὴν εὐκαιρίαν νὰ συζητήσῃ ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἐκθέσεως πρὸς τὸν Ὀργανισμὸν Ἡνωμένων Ἐθνῶν τοῦ κ. Goudswaard, ἥτις ἐν ἐκτάσει περιλαμβάνει τὰς ἀπόψεις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ὅλου προβλήματος τῆς στατιστικῆς ἐκπαιδεύσεως τόσον τῶν ἐνδιαφερομένων ἰδιωτῶν ὅσον καὶ τῶν ὑπαλλήλων τῆς ΕΣΥΕ.

Βάσει τῶν γενομένων συζητήσεων ἡ Ἐπιτροπὴ κατέληξεν εἰς τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:

1. Διαπιστώνει τὴν ἀνάγκην ὅπως τὸ Κέντρον Στατιστικῆς Ἐκαιδεύσεως, ὅπερ διὰ τοῦ ἀπὸ 31/12/55 Βασιλικοῦ Διατάγματος ἀνεγνωρίσθη ὡς «Στατιστικὴ Σχολή», διατηρήσῃ βασικῶς τὴν παροῦσαν αὐτοῦ ἀκαδημαϊκὴν μορφὴν μὲ τὰς ὑποδεικνυομένας ὑπὸ τοῦ κ. Goudswaard τροποποιήσεις τοῦ προγράμματος αὐτοῦ, οὕτως ὥστε νὰ ἀνταποκριθῇ πληρέστερον εἰς τοὺς σκοπούς του οἵτινες εἶναι : α) παροχὴ εἰδικῆς στατιστικῆς μορφώσεως εἰς ἐνδιαφερομένους ἰδιώτας προοριζομένους νὰ καταλάβουν θέσεις εἰς τὴν Ἐθνικὴν Στατιστικὴν Ὑπηρεσίαν τῆς Ἑλλάδος ἢ εἰς ὀργανισμοὺς δημοσίου δικαίου καὶ μεγάλας τραπέζας ἢ ἀκόμη εἰς βιομηχανικὰς καὶ ἄλλας ἰδιωτικὰς ἐπιχειρήσεις, ἔνθα ὁσημέραι ἀναγνωρίζεται ἡ ἀνάγκη δημιουργίας στατιστικῶν ὑπηρεσιῶν διὰ τὴν στατιστικὴν ἐπεξεργασίαν καὶ ἀνάλυσιν τῶν συγκεντρουμένων πληροφοριῶν εἰς ὅλους τοὺς τομεῖς δραστηριότητος τῆς συγχρόνου οἰκονομικῆς καὶ κοινωνικῆς ὀργανώσεως, β) παροχὴ γενικῆς στατιστικῆς μορφώ-

σεως εἰς τοὺς ὑπηρετοῦντας στατιστικοὺς ὑπαλλήλους α' κατηγορίας τῆς ΕΣΥΕ, συμφώνως πρὸς τὰς προβαλλομένας σήμερον ἀπαιτήσεις διὰ μίαν ὅσον τὸ δυνατὸν πληρεστέραν τεχνικὴν κατάρτισιν εἰς τὰ θέματα τῆς Στατιστικῆς Μεθοδολογίας, γ)παροχὴ στοιχειώδους στατιστικῆς μορφώσεως, ἐπὶ τῶν ἁπλουστέρων θεμάτων τῆς ἐφηρμοσμένης Στατιστικῆς, εἰς τοὺς ὑπαλλήλους τῆς β' κατηγορίας τοὺς κεκτημένους ἀπολυτήριον Γυμνασίου (Στατιστικοὺς ἢ Διοικητικοὺς παρὰ τῇ ΕΣΥΕ) ὡς καὶ εἰς τοὺς ἰδιώτας μὲ ἀπολυτήριον Γυμνασίου, δ) παροχὴ ἀνωτέρας στατιστικῆς μορφώσεως εἰς τοὺς πτυχιούχους 'Ανωτέρων Σχολῶν, ὑπαλλήλους ἢ μή, ἐπιθυμοῦντας μίαν πλήρη εἰδίκευσιν εἰς τοὺς τόσον διαδεδομένους, σήμερον κλάδους τῆς Μαθηματικῆς Στατιστικῆς ἢ τῆς Οἰκονομετρίας ἢ τῆς 'Εφηρμοσμένης Στατιστικῆς

2. Διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῶν ἀνωτέρων σκοπῶν τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς 'Εκπαιδεύσεως κρίνει σκόπιμον ὅπως ἡ ὅλη Στατιστικὴ 'Εκπαίδευσις συντελῆται εἰς τρεῖς κύκλος σπουδῶν διακρινομένους ὡς ἀκολούθως:

α) Προπαρασκευαστικὸν ἔτος
β) Πρῶτον ἔτος στατιστικῶν σπουδῶν
γ) Δεύτερον ἔτος στατιστικῶν σπουδῶν ἢ ἔτος εἰδικεύσεως.

3. 'Η δημιουργία προπαρασκευαστικοῦ ἔτους ἀνεγνωρίσθη ὡς ἐπιβαλλομένη ἐκ τῶν πραγμάτων, λόγῳ τῆς ἀνεπαρκοῦς μαθηματικῆς μορφώσεως τῶν κεκτημένων ἀπολυτήριον Γυμνασίου οἵτινες ἀποτελοῦν τὸ μέγα πλῆθος τῶν ὑποψηφίων διὰ θέσεις στατιστικολόγων β' κατηγορίας εἰς τὴν 'Εθνικὴν Στατιστικὴν 'Υπηρεσίαν ἢ 'Οργανισμούς, ἢ ἀκόμη εἰς τὰς ἰδιωτικὰς ἐπιχειρήσεις. 'Επίσης τὸ προπαρασκευαστικὸν ἔτος, διὰ τοῦ ὑπ' ὄψει ἀναλυτικοῦ προγράμματος αὐτοῦ ὅπερ ἐκτίθεται ἐν τοῖς κατωτέρω, θέλει ἀποβῆ χρησιμώτατον διὰ μίαν μεγάλην κατηγορίαν προσωπικοῦ τῆς ΕΣΥΕ (Στατιστικολόγοι β' κατηγορίας, Διοικητικοὶ 'Υπάλληλοι ἐπιθυμοῦντες μετάταξιν εἰς τὸν κλάδον Στατιστικολόγων, Στατιστικοὶ 'Υπάλληλοι α' κατηγορίας μὲ ἐλλιπῆ στατιστικὴν μόρφωσιν).

'Η ὕλη τῶν μαθημάτων τοῦ προπαρασκευαστικοῦ τούτου ἔτους θὰ ἀναφέρεται εἰς τὰ ἀκόλουθα μαθήματα :

1. Στοιχειώδη μαθηματικὰ
2. Στοιχεῖα Στατιστικῆς Μεθοδολογίας
3. Τεχνικὴ τῆς ἐπεξεργασίας τῶν στατιστικῶν
4. Εἰσαγωγὴ εἰς τοὺς ἐπὶ μέρους τομεῖς τῆς Στατιστικῆς.

Τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω μαθημάτων ἀναγράφεται λεπτομερῶς ἐν τῇ ἐκθέσει τοῦ κ. Goudswaard, πρὸς τὸ περιεχόμενον τῆς ὁποίας ἡ 'Επιτροπὴ εἶναι ἀπολύτως σύμφωνος.

Αἱ γνώσεις θὰ παρέχωνται κατὰ τρόπον πρωτότυπον, ἄνευ διδασκαλίας ἀπὸ καθέδρας ἀλλὰ δι' ἐγχειριδίων, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ μαθήματα θὰ ἀναπτύσσωνται ἐπαγωγικῶς καὶ μὲ ἁπλότητα τοιαύτην, ὥστε ἕκαστος τῶν ὑποψηφίων διὰ τὸ ἔτος αὐτὸ νὰ δύναται αὐτοβούλως καὶ μὲ προσωπικὴν αὐτενέργειαν νὰ παρασκευάση τὰς λύσεις τῶν διαφόρων θεμάτων.

Πρὸς πληρεστέραν δὲ κατανόησιν τῶν γραπτῶν μαθημάτων, ἅτινα θὰ συνοδεύωνται ὑπὸ ἀφθόνων πρακτικῶν ἀσκήσεων καταλλήλως ἐκλεγομένων, θὰ ὀργανώση τὸ Κ.Σ.Ε. εἰδικὰ Σεμινάρια, δὶς τῆς ἑβδομάδος, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ γίνεται ἀνάπτυξις τῶν θεμάτων, συζήτησις ἐπ' αὐτῶν, λύσις ἀποριῶν καὶ ἐπεξηγήσεις ἐπὶ ὅλων τῶν ἀναγραφομένων ζητημάτων ὑπὸ ἁρμοδίων 'Επιμελητῶν τῶν σεμιναρίων, ὡς καὶ καθηγητῶν τοῦ Κ. Σ. Ε.

Οὕτω ὀργανούμενον τὸ προπαρασκευαστικὸν ἔτος θὰ ἀποβῆ ἀληθὲς φυτώριον κατωτέρων στατιστικῶν στελεχῶν μὲ ἐπαρκῆ κατάρτισιν εἰς τὴν τεχνικὴν τῆς συγχρόνου στατιστικῆς μεθοδολογίας καὶ ἱκανῶν νὰ ἀξιοποιήσουν τὰς γνώσεις των εἰς οἱονδήποτε τομέα τῆς κρατικῆς ἢ ἰδιωτικῆς δραστηριότητος καὶ ἂν ἐνταχθοῦν.

Εἰς τὸ προπαρασκευαστικὸν ἔτος θὰ ἐγγράφωνται, ἄνευ ἐξετάσεων, οἱ κεκτημένοι ἀπολυτήριον Μέσης 'Εκπαιδεύσεως.

Κατόπιν ἐπιτυχοῦς ἐξετάσεως εἰς τὰ μαθήματα τοῦ κύκλου τούτου θὰ χορηγῆται «πιστοποιητικὸν ἀποφοιτήσεως» ἐκ τοῦ προπαρασκευαστικοῦ ἔτους. Εἰς τὰς ἐξετάσεις ταύτας αἱ ὁποῖαι θὰ διενεργοῦνται κατὰ τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, θὰ ἔχουν δικαίωμα συμμετοχῆς ἅπαντες οἱ ἐγγραφέντες καὶ προσερχόμενοι δι' ἐξέτασιν ἀνεξαρτήτως ἂν συμμετέσχον ἢ ὄχι εἰς τὰ σεμινάρια. Τοῦτο θὰ παρέχῃ τὴν δυνατότητα εἰς πλείστους ἐνδιαφερομένους ἐκ τῶν ἐπαρχιῶν νὰ ἐπωφεληθοῦν τῆς παρεχομένης κατὰ τὸ προπαρασκευαστικὸν ἔτος μορφώσεως, ἐφ' ὅσον ἤθελον ἐπιτύχει δι' ἰδίας αὐτῶν προσπαθείας νὰ προπαρασκευασθοῦν εἰς τὰ διατιθέμενα αὐτοῖς γραπτῶς μαθήματα.

4. Τὸ πρῶτον ἔτος στατιστικῶν σπουδῶν θὰ προσφέρῃ εἰς τοὺς σπουδαστὰς μίαν περισσότερον προκεχωρημένην στατιστικὴν κατάρτισιν, χωρὶς αὐστηρὰν μαθηματικὴν μόρφωσιν, ἐπὶ τῷ σκοπῷ νὰ καταστήσῃ τούτους ἱκανούς: α) νὰ διεξάγουν ἐπιτυχῶς τὸ ἀνατιθέμενον αὐτοῖς ἔργον τρεχούσης δραστηριότητος τῆς ΕΣΥΕ ἢ οἱασδήποτε ἄλλης παρεμφεροῦς ὑπηρεσίας, β) νὰ κρίνουν ἐπὶ ποίων σημείων τῆς ἐργασίας των εἶναι χρήσιμον νὰ συμβουλευθοῦν ἕνα εἰδικὸν τῆς μαθηματικῆς στατιστικῆς, γ) νὰ διεξάγουν μετὰ τοῦ εἰδικοῦ μίαν τεχνικὴν συζήτησιν ἐπὶ παρουσιαζομένων προβλημάτων καὶ δ) ν' ἀντιλαμβάνωνται τὰς χορηγουμένας λύσεις ὑπὸ τῶν εἰδικῶν.

Ἐν τοιοῦτον ἐπίπεδον μορφώσεως δύναταί τις νὰ ἰσχυρισθῇ ὅτι ἱκανοποιεῖ τὰ 90% τῶν μέσων καὶ ἀνωτέρων στελεχῶν ἑκάστης Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας καὶ ἐξασφαλίζει λίαν ἀποδοτικὴν ἄσκησιν τῶν καθηκόντων τῶν ἐν λόγῳ στελεχῶν ἀπὸ ἀπόψεως στατιστικῆς.

Τὰ προβλεπόμενα πρὸς διδασκαλίαν κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ μαθήματα θὰ ἀναφέρωνται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά, τὴν Στατιστικὴν Μεθοδολογίαν καὶ Ἀνάλυσιν, τὴν Πολιτικὴν Οἰκονομίαν, τὴν Θεωρίαν καὶ Τεχνικὴν τῶν Στατιστικῶν Ἐρευνῶν καὶ τὴν Δημογραφικὴν Στατιστικήν. Αἱ γνώσεις ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω μαθημάτων θὰ παρέχωνται κατὰ τὸ μέχρι σήμερον ἰσχῦον σύστημα τῆς ἀκαδημαϊκῆς διδασκαλίας, μὲ καθιέρωσιν ὅμως εὐρυτάτου προγράμματος πρακτικῶν ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι, θὰ ἀποβλέπουν νὰ θέσουν εἰς ἐπαφὴν τοὺς σπουδαστὰς μὲ τὰς τρεχούσας ἀνάγκας ἑκάστης Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας καὶ θὰ περιλαμβάνουν τὴν τεχνικὴν τῶν κωδικογραφήσεων, τοῦ ἐλέγχου καὶ ἐπεξεργασίας στατιστικῶν δελτίων καὶ ἐρωτηματολογίων, τοῦ ὑπολογισμοῦ διὰ μηχανῶν κλπ.

Εἰς τὸ πρῶτον ἔτος στατιστικῶν σπουδῶν θὰ ἐγγράφωνται ἄνευ ἐξετάσεων: α) Οἱ κεκτημένοι τουλάχιστον ἀπολυτήριον Σχολῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, ἐφ' ὅσον ὑπέστησαν ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς τὴν ὕλην τοῦ προπαρασκευαστικοῦ ἔτους. Αἱ ἐξετάσεις αὗται διενεργοῦνται ταυτοχρόνως δι' ὅλους τοὺς ὑποψηφίους, ἐγγεγραμμένους ἢ μὴ εἰς τὸ προπαρασκευαστικὸν ἔτος, κατὰ τὸ πρῶτον δεκαήμερον τοῦ Ὀκτωβρίου, καταρτιζομένου σχετικοῦ πίνακος σειρᾶς ἐπιτυχίας, ἐκ τοῦ ὁποίου καθορίζεται καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὸ πρῶτον ἔτος ἐγγραφομένων, β) οἱ πτυχιοῦχοι τῶν Φυσικο-μαθηματικῶν Σχολῶν τῶν Πανεπιστημίων, ἡμεδαπῆς ἢ ἀλλοδαπῆς, τῶν Πολυτεχνείων, τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν, τῆς Ἀνωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς καὶ τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, δεδομένου ὅτι ἅπαντες οὗτοι ἔχουσι τὴν ἀπαραίτητον μαθηματικὴν προπαίδειαν διὰ τὴν παρακολούθησιν τῶν μαθημάτων τοῦ πρώτου ἔτους.

Ὁμοίως εἰς τὸ πρῶτον ἔτος σπουδῶν θὰ ἀποστέλλωνται πρὸς ἐκπαίδευσιν οἱ ἐκ τῶν ὑπηρετούντων παρὰ τῇ ΕΣΥΕ στατιστικοὶ ὑπάλληλοι α' κατηγορίας, ὑπὸ τὰς αὐτὰς ὡς ἄνω προϋποθέσεις. Κατόπιν ἐπιτυχοῦς ἐξετάσεως εἰς τὰ μαθήματα τοῦ ἔτους αὐτοῦ θὰ χορηγῆται «πτυχίον στατιστικῶν σπουδῶν».

5. Τὸ δεύτερον ἔτος στατιστικῶν σπουδῶν θὰ ἀποτελῇ ἔτος ἐξειδικεύσεως εἰς ἕνα τῶν ἑπομένων τριῶν συνδυασμῶν:

1. Στατιστικαὶ Μέθοδοι τῆς Βιομηχανίας
2. Μαθηματικὴ Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομετρικὴ
3. Ἐφηρμοσμένη Στατιστική.

Εἰς τὸ τμῆμα εἰδικεύσεως εἰς τὰς Στατιστικὰς Μεθόδους τῆς Βιομηχανίας θὰ διδάσκωνται: Ι. Μαθηματικά, ΙΙ. Στατιστικὴ Ἀνάλυσις. ΙΙΙ. Ἔλεγχος ποιότητος.

Εἰς τὸ τμῆμα εἰδικεύσεως εἰς τὴν Μαθηματικὴν Στατιστικὴν καὶ Οἰκονομετρικὴν θὰ διδάσκωνται Ι. Μαθηματικά, ΙΙ. Στατιστικὴ Ἀνάλυσις, ΙΙΙ. Οἰκονομετρική.

Εἰς τὸ τμῆμα εἰδικεύσεως εἰς τὴν Ἐφηρμοσμένην Στατιστικὴν θὰ διδάσκωνται: Ι. Ἐφηρμοσμένη Στατιστική, ΙΙ. Ὀργάνωσις καὶ Νομοθεσία.

Εἰς τὸ δεύτερον ἔτος στατιστικῶν σπουδῶν θὰ ἐγγράφωνται ἄνευ ἐξετάσεων μὲν οἱ ἀποφοιτήσαντες ἐκ τοῦ πρώτου ἔτους στατιστικῶν σπουδῶν, κατόπιν δὲ ἐξετάσεων εἰς τὰ μαθήματα τοῦ πρώτου ἔτους σπουδῶν ἐπὶ ὕλης καθοριζομένης ὑπὸ τῆς Διδακτικῆς 'Επιτροπῆς τοῦ Κ. Σ. Ε. οἱ ἔχοντες πτυχίον τῶν Φυσικομαθηματικῶν Σχολῶν τῶν Πανεπιστημίων τῆς ἡμεδαπῆς ἢ ἀλλοδαπῆς, τῶν Πολυτεχνείων, τῆς ΑΣΟΕΕ, τῆς 'Ανωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς καὶ τῆς 'Ανωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν.

Μετ' ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς τὰ μαθήματα ἑκάστου τῶν ἀνωτέρων κλάδων εἰδικεύσεως θὰ χορηγῆται «Δίπλωμα Στατιστικολόγου» μὲ μνείαν τοῦ τμήματος εἰδικεύσεως.

Διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ διπλώματος τούτου θὰ ἀπαιτῆται καὶ ἐπιτυχὴς γραπτὴ διαπραγμάτευσις (thèse) θέματος ἐκλεγομένου ὑπὸ τοῦ ὑποψηφίου μετ' ἔγκρισιν τοῦ ἁρμοδίου καθηγητοῦ καὶ ἐμπίπτοντος εἰς τὸν τομέα τῶν μαθημάτων τῆς εἰδικεύσεώς του.

6. 'Εκ τῶν μνημονευμένων ἀνωτέρω τίτλων σπουδῶν οἵτινες θὰ παρέχωνται ὑπὸ τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς 'Εκπαιδεύσεως τὸ πιστοποιητικὸν ἀποφοιτήσεως ἐκ τοῦ προπαρασκευαστικοῦ ἔτους κρίνεται ἐπαρκὲς διὰ τὴν προαγωγὴν τῶν στατιστικῶν ὑπαλλήλων τῆς 'Εθνικῆς Στατιστικῆς 'Υπηρεσίας τῆς 'Ελλάδος εἰς τὸν βαθμὸν τοῦ Εἰσηγητοῦ.

Τὸ πτυχίον στατιστικῶν σπουδῶν τοῦ πρώτου ἔτους θεωρεῖται ὡς ἀπαραίτητον τυπικὸν προσὸν διὰ τὴν προαγωγὴν τῶν ὡς ἄνω ὑπαλλήλων εἰς τὸν βαθμὸν Στατιστικοῦ Τμηματάρχου α' τάξεως συμπεριλαμβανομένου.

Τὸ δίπλωμα Στατιστικολόγου κρίνεται τέλος ἀπαραίτητον διὰ τὴν προαγωγὴν εἰς τὸν βαθμὸν τοῦ Στατιστικοῦ Διευθυντοῦ.

7. Τὸ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀπόψεων προτεινόμενον ὡρολόγιον πρόγραμμα ὑποχρεωτικῶν μαθημάτων διὰ τὰ δύο ἔτη σπουδῶν ἔχει ὡς ἀκολούθως:

1. Πρῶτον ἔτος σπουδῶν	***῞Ωραι καθ' ἑβδομάδα***		
Πρῶτον ἑξάμηνον:	*Θεωρία*	*'Ασκήσεις*	*Σύνολον*
1. Μαθηματικὰ	1	2	3
2. Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2	2	4
3. Πολιτικὴ Οἰκονομία	2	—	2
4. Θεωρία καὶ Τεχνικὴ Στατιστικῶν 'Ερευνῶν	1	1	2
5. Δημογραφικὴ Στατιστικὴ	1	—	1
Σύνολον	7	5	12
Δεύτερον ἑξάμηνον:	*Θεωρία*	*'Ασκήσεις*	*Σύνολον*
1. Μαθηματικὰ	1	1	2
2. Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2	2	4
3. Θεωρ. καὶ Τεχν. Στατ. 'Ερευνῶν	1	1	2
4. Δημογραφικὴ 'Ανάλυσις	1	—	1
5. Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομικὴ 'Ανάλυσις	$1^1/_2$	$1^1/_2$	3
Σύνολον	$6^1/_2$	$5^1/_2$	12

2. Δεύτερον ἔτος σπουδῶν	***῞Ωραι καθ' ἑβδομάδα***		
Α. Στατιστικαὶ Μέθοδοι εἰς τὴν Βιομηχανίαν	*Θεωρία*	*'Ασκήσεις*	*Σύνολον*
1. Μαθηματικὰ	1	1	2
2. Στατιστικὴ 'Ανάλυσις	2	2	4
3. ῎Ελεγχος Ποιότητος.	1	1	2
Σύνολον	4	4	8
Β. Μαθηματικὴ Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομετρικὴ	*Θεωρία*	*'Ασκήσεις*	*Σύνολον*
1. Μαθηματικὰ	1	1	2
2. Στατιστικὴ 'Ανάλυσις	2	2	4
3. Οἰκονομετρικὴ	1	1	2
Σύνολον	4	4	8

1. Πρῶτον ἔτος σπουδῶν *Πρῶτον ἑξάμηνον :*	*Ὧραι καθ' ἑβδομάδα*		
	Θεωρία	*'Ασκήσεις*	*Σύνολον*
Γ. 'Εφηρμοσμένη Στατιστική			
1. 'Εφηρμοσμένη Στατιστική	4	2	6
2. 'Οργάνωσις καὶ Νομοθεσία	2	–	2
Σύνολον	6	2	8

8. Ἡ 'Επιτροπὴ ἐκφράζει τὴν εὐχὴν ὅπως ληφθοῦν ἅπαντα τὰ ἀναγκαιοῦντα ὑπὸ τῆς Διοικήσεως τῆς ΕΣΥΕ μέτρα πρὸς διευκόλυνσιν τῶν σπουδῶν τόσον τῶν νέων ὅσον καὶ τῶν παλαιῶν ὑπαλλήλων, ὅσοι τουλάχιστον ἔχουν ὑπηρεσίαν κάτω τῶν 20 ἐτῶν καὶ εἶναι ἐπιδεκτικοί, κατὰ τεκμήριον, μιᾶς τοιαύτης στατιστικῆς μορφώσεως οἵα διαγράφεται εἰς τοὺς προσδιοριζομένους ἀνωτέρω κύκλους σπουδῶν.

Διὰ τῶν μέτρων τούτων εἶναι σχεδὸν βέβαιον ὅτι αἱ ἀναντιρρήτως προσφερθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς 'Εκπαιδεύσεως ὑπηρεσίαι, κατὰ τὸ βραχὺ διάστημα τῆς λειτουργίας του, θὰ ἀποβοῦν ἔτι μεγαλύτεραι ἐπ' ὠφελείᾳ τῆς 'Επιστήμης, τοῦ Κράτους καὶ τῆς Οἰκονομίας τῆς Χώρας.

Η ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ὁ Πρόεδρος
Στρ. Παπαϊωάννου

Τὰ Μέλη
Π. Κουβέλης
Σ. 'Αγαπητίδης
B. Helger
Ε. Μαργαρίτης
Δ. Ζούκας

Θέμα: **«Εἰσήγησις περὶ τροποποιήσεως καὶ συμπληρώσεως τοῦ ἀπὸ 3/12.9.1955 Β. Διατάγματος».**

Ἔχομεν τὴν τιμὴν νὰ διαβιβάσωμεν Ὑμῖν, ἐν σχεδίῳ, Β. Διάταγμα προβλέπον τὴν τροποποίησιν καὶ συμπλήρωσιν τοῦ ἀπὸ 3/12.9.1955 ἰσχύοντος Β. Διατάγματος «περὶ ἱδρύσεως Σχολῆς Στατιστικῆς», καταρτισθὲν κατόπιν τῆς ἀπὸ 18 Νοεμβρίου 1957 ὑποβληθείσης ἀναλυτικῆς ἐκθέσεως τῆς δυνάμει τῆς ὑπ' ἀριθμ. Δ Κ 3081/4.7.1957 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργοῦ Συντονισμοῦ συσταθείσης Εἰδικῆς Ἐπιτροπῆς διὰ τὴν μελέτην τοῦ προβλήματος τῆς στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως, ὡς καὶ τῆς ὑποβληθείσης πρὸς τὸν Ὀργανισμὸν Ἡνωμένων Ἐθνῶν ἐκθέσεως τοῦ ὑπὸ τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως μετακληθέντος Ὀλλανδοῦ Ἐμπειρογνώμονος, Καθηγητοῦ κ. Goudswaard διὰ τὴν μελέτην καὶ κατάρτισιν προγραμμάτων στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι.

Τὰς διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἐν σχεδίῳ Β. Δ/τος ἐπερχομένας μεταβολὰς εἰς τὴν ὀργάνωσιν καὶ λειτουργίαν τοῦ Κ. Σ. Ε. ἀποδέχεται καὶ εἰσηγεῖται καὶ ἡ Ἀνωτέρα Σχολὴ Βιομ. Σπουδῶν, συμφωνούσης καὶ τῆς Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ Κ. Σ. Ε., ὡς δείκνυται ἐκ τοῦ ἐπισυναπτομένου τῷ παρόντι ὑπ' ἀριθμ. 19109/17.1.58 ἐγγράφου Α. Σ. Β. Σ.

Αἱ κυριώτεραι τῶν ἐν τῷ σχεδίῳ προβλεπομένων τροποποιήσεων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

1. Διὰ τοῦ ἄρθρου 1 προβλέπεται ἡ ὀργάνωσις προπαρασκευοστικοῦ Τμήματος σπουδῶν διαρκείας ἑνὸς ἔτους πρὸς ἀρτιωτέραν κατάρτισιν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὸν πρῶτον κύκλον τακτικῶν σπουδῶν, ὡς καὶ τῶν κεκτημένων ἀπολυτήριον Γυμνασίου ὑποψηφίων διὰ θέσεις στατιστικολόγων Β' κατηγορίας εἰς τὴν Ἐθνικὴν Στατιστικὴν Ὑπηρεσίαν ἢ Ὀργανισμοὺς ἢ ἀκόμη καὶ εἰς Ἰδιωτικὰς Ἐπιχειρήσεις. Ἡ δημιουργία προπαρασκευαστικοῦ ἔτους ἀνεγνωρίσθη ὡς ἐπιβαλλομένη ἐκ τῶν πραγμάτων, τόσον λόγῳ τῆς ἀνεπαρκοῦς μαθηματικῆς μορφώσεως τῶν κεκτημένων ἀπολυτήριον Σχολῶν Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, ὅσον καὶ τῆς ἀπαιτουμένης στοιχειώδους στατιστικῆς καταρτίσεως διὰ μεγάλην κατηγορίαν προσωπικοῦ τῆς ΕΣΥΕ, ἥτις κατάρτισις εἶναι βέβαιον ὅτι θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τοῦ προβλεπομένου ἀναλυτικοῦ προγράμματος.

Διὰ τοῦ ἄρθρου 2 προβλέπονται σαφῶς αἱ κατηγορίαι τῶν δικαιουμένων νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον κύκλον τῶν τακτικῶν στατιστικῶν σπουδῶν, λαμβανομένης μερίμνης ὅπως οἱ σπουδασταὶ τῶν δύο τούτων κύκλων προέρχωνται ἀπὸ Σχολὰς ἔνθα παρέχεται ἐπαρκὴς μαθηματικὴ μόρφωσις, ἡ ὁποία κρίνεται ἀπαραίτητος διὰ περαιτέρω εἰδικὰς σπουδὰς εἰς τὴν Στατιστικήν. Ὁμοίως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἄρθρου προβλέπονται οἱ χορηγούμενοι τίτλοι μετὰ τὴν ἐπιτυχῆ ἀποπεράτωσιν τῶν σπουδῶν εἰς τοὺς δύο τούτους κύκλους.

Διὰ τοῦ ἄρθρου 3 ἐπέρχεται τροποποίησις τῆς συνθέσεως τῆς Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ Κ. Σ. Ε.

Διὰ τοῦ ἄρθρου 4 καθορίζονται αἱ ἐξεταστικαὶ περίοδοι, ὡς καὶ αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐπιτυχῆ ἐξέτασιν.

Διὰ τοῦ ἄρθρου 5 καθορίζονται τὰ διδασκόμενα μαθήματα εἰς τὸ προπαρασκευαστικὸν Τμῆμα, τὸν πρῶτον κύκλον σπουδῶν καὶ τὸν δεύτερον κύκλον κατὰ κλάδους εἰδικεύσεως.

Διὰ τοῦ ἄρθρου 6 ὁρίζεται λεπτομερῶς τὸ ὡρολόγιον πρόγραμμα ὑποχρεωτικῶν μαθημάτων καὶ διὰ τοὺς δύο κύκλους σπουδῶν.

Διὰ τῶν λοιπῶν προστιθεμένων διατάξεων ρυθμίζονται τὰ ἀνακύπτοντα ζητήματα ἀντιστοιχίας τῶν τίτλων σπουδῶν τῶν πρὸ τοῦ νέου Β. Διατάγματος φοιτησάντων εἰς τὸ Κ.Σ.Ε. σπουδαστῶν ὡς καὶ τῶν ἀποφοιτησάντων ἐξ αὐτοῦ πρὸ τῆς 12 Σεπτεμβρίου 1955, καθ' ἣν ἐδημοσιεύθη τὸ ἰσχῦον περὶ τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως Β. Διάταγμα.

Διὰ τῶν προτεινομένων τροποποιήσεων καὶ συμπληρώσεων ἐξασφαλίζεται ἡ καλυτέρα δυνατή, ὑπὸ τὰς παρούσας συνθήκας, ὀργάνωσις τοῦ λειτουργοῦντος Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως, ὅπερ ἀποβλέπει, συμφώνως ταῖς διατάξεσι τοῦ ἄρθρου 13 παρ. 4 τοῦ Νομοθετικοῦ Διατάγματος 3627/1956 εἰς τὴν ἐπαγγελματικὴν μόρφωσιν τῶν ὑπαλλήλων τῶν Στατιστικῶν Ὑπηρεσιῶν καὶ τῶν πρὸς τοῦτο ἐνδιαφερομένων ἰδιωτῶν.

Ὁ Γενικὸς Διευθυντὴς
Π. ΚΟΥΒΕΛΗΣ

ΣΧΕΔΙΟΝ Β. ΔΙΑΤΑΓΜΑΤΟΣ

Περὶ τροποποιήσεως καὶ συμπληρώσεως τοῦ ἀπὸ 3/12.9.1955 Β. Διατάγματος «Περὶ ἱδρύσεως Σχολῆς Στατιστικῆς».

Ἄρθρον 1

1. Ἡ παρ. 4 τοῦ ἄρθρου 1 τοῦ ἀπὸ 3/12.9.1955 Β. Διατάγματος «περὶ ἱδρύσεως Σχολῆς Στατιστικῆς» ἀντικαθίσταται ὡς ἀκολούθως:

«Διὰ τὴν καλυτέραν ἐπιλογὴν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὸν πρῶτον κύκλον σπουδῶν, τὸ Κ.Σ.Ε. ὀργανώνει προπαρασκευαστικὸν τμῆμα διαρκείας ἑνὸς ἔτους. Εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐγγράφονται ἄνευ ἐξετάσεως οἱ κεκτημένοι ἀπολυτήριον σχολείου Μέσης Ἐκπαιδεύσεως».

Ἄρθρον 2

1. Τὸ ἄρθρον 2 τοῦ ἀνωτέρω ἀπὸ 3/12.9.1955 Β. Διατάγματος ἀντικαθίσταται ὡς ἀκολούθως:

«1. Εἰς τὸν πρῶτον κύκλον στατιστικῶν σπουδῶν ἐγγράφονται ἄνευ μὲν ἐξετάσεων οἱ πτυχιοῦχοι τῶν Φυσικομαθηματικῶν Σχολῶν τῶν Πανεπιστημίων ἡμεδαπῆς ἢ ἀλλοδαπῆς, τῶν Πολυτεχνείων, τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν, τῆς Ἀνωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς καὶ τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, κατόπιν δὲ ἐξετάσεων, ἐφ' ὅλης τῆς ὕλης τῆς διδαχθείσης εἰς τὸ προπαρασκευαστικὸν τμῆμα, οἱ ἐγγραφέντες εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο ὡς καὶ οἱ κάτοχοι ἀπολυτηρίου σχολείου Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Αἱ ἐξετάσεις αὗται διεξάγονται ἐντὸς τοῦ μηνὸς Ὀκτωβρίου ἑκάστου ἔτους.

2. Εἰς τὸν δεύτερον κύκλον στατιστικῶν σπουδῶν ἐγγράφονται, ἄνευ μὲν ἐξετάσεων οἱ ἀποφοιτήσαντες ἐκ τοῦ πρώτου κύκλου στατιστικῶν σπουδῶν, κατόπιν δὲ ἐξετάσεων εἰς τὰ μαθήματα τοῦ πρώτου κύκλου σπουδῶν καὶ ἐπὶ ὕλης καθοριζομένης ὑπὸ τῆς Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ Κ.Σ.Ε., οἱ ἔχοντες πτυχίον τῶν Φυσικομαθηματικῶν Σχολῶν τῶν Πανεπιστημίων ἡμεδαπῆς ἢ ἀλλοδαπῆς, τῶν Πολυτεχνείων, τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν, τῆς Ἀνωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς καὶ τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν.

3. Εἰς τοὺς περατοῦντας τὸν πρῶτον κύκλον σπουδῶν χορηγεῖται μετ' ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς μαθήματα τοῦ κύκλου τούτου «πτυχίον Στατιστικῶν Σπουδῶν». Εἰς τοὺς περατοῦντας τὸν δεύτερον κύκλον σπουδῶν χορηγεῖται μετ' ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς τὰ μαθήματα ἑκάστου κλάδου εἰδικεύσεως «Δίπλωμα Ἀνωτέρων Στατιστικῶν Σπουδῶν» μὲ μνείαν τοῦ κλάδου εἰδικεύσεως. Οἱ ὑφιστάμενοι ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς πλείονας τοῦ ἑνὸς κλάδου εἰδικεύσεως ἔχουν τὸ δικαίωμα ν' ἀποκτήσουν τὰ σχετικὰ διπλώματα. Διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ διπλώματος ἀπαιτεῖται ἐπὶ πλέον ἐπιτυχὴς γραπτὴ ἀνάπτυξις θέματος ἐκλεγομένου ὑπὸ τοῦ ὑποψηφίου, μετ' ἔγκρισιν τοῦ ἁρμοδίου καθηγητοῦ, ἐμπίπτοντος εἰς τὸν τομέα τῶν μαθημάτων τῆς εἰδικεύσεώς του».

Ἄρθρον 3

Ἡ παρ. 1 τοῦ ἄρθρου 5 τοῦ ὡς ἄνω ἀπὸ 3) 12. 9. 1955 Β. Διατάγματος ἀντικαθίσταται ὡς ἀκολούθως:

«1. Τὸ Κ.Σ.Ε. διοικεῖται, ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν τῆς Ἀνωτ. Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, παρὰ Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς, ἀποτελουμένης ἐκ τοῦ Διευθυντοῦ τῆς Α.Σ.Β.Σ. ὡς Προέδρου, τοῦ Προέδρου τῆς Ἑλληνικῆς Στατιστικῆς Ἑταιρείας, τοῦ Γενικοῦ Διευθυντοῦ τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος, ἑνὸς ἀνωτάτου ὑπαλλήλου τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ, τοῦ Διευθυντοῦ Σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε. καὶ τοῦ Διευθυντοῦ τῆς Ἀνωτάτης Ἐκπαιδεύσεως τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων».

Ἄρθρον 4

1. Αἱ ἐν ἄρθρῳ 2 τοῦ παρόντος Διατάγματος ἐξετάσεις διεξάγονται κατὰ τὸ δεύτερον δεκαήμερον Ὀκτωβρίου καὶ Ἰανουαρίου ἑκάστου Ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους.

2. Ὡς ἐπιτυχὼν εἰς ταύτας θεωρεῖται ὁ λαμβάνων βαθμὸν τοὐλάχιστον πέντε (5) εἰς ἕκαστον τῶν μαθημάτων ἢ μέσον ὅρον τοὐλάχιστον ἕξ (6). Ὁ μὴ λαβὼν κατὰ τὰς ἐξετάσεις

τῆς πρώτης περιόδου (μηνὸς 'Οκτωβρίου) τὴν ἀνωτέρω βαθμολογίαν, ὡς καὶ ὁ μηδόλως προσελθὼν κατὰ ταύτας, ἐξετάζεται κατὰ τὴν δευτέραν περίοδον (μηνὸς 'Ιανουαρίου).

'Ως ἐπιτυχὼν κατὰ τὰς ἐξετάσεις ταύτας θεωρεῖται ὁ λαβὼν εἰς ἕκαστον τῶν μαθημάτων τὸν βαθμὸν τοὐλάχιστον πέντε (5) ἢ μέσον ὅρον τοὐλάχιστον ἕξ (6). 'Ο ἀποτυχὼν κατὰ τὰς ἐξετάσεις ταύτας δύναται νὰ προσέλθῃ ἐκ νέου κατὰ τὴν περίοδον τοῦ 'Οκτωβρίου τοῦ ἐπομένου 'Ακαδημαϊκοῦ ἔτους. Αἱ ὡς ἄνω ἐξετάσεις εἶναι γραπταὶ ἢ καὶ προφορικαί, κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ Καθηγητοῦ.

"Αρθρον 5

Τὸ ἄρθρον 4 τοῦ ὡς ἄνω ἀπὸ 3 12.9.1955 Δ. Διατάγματος ἀντικαθίσταται ὡς ἀκολούθως :

«1. Τὰ εἰς τὸ προπαρασκευαστικὸν τμῆμα διδασκόμενα μαθήματα εἶναι :

α) Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μαθηματικὴν 'Ανάλυσιν
β) Στοιχεῖα Στατιστικῆς Μεθοδολογίας
γ) Τεχνικὴ τῆς ἐπεξεργασίας τῶν στατιστικῶν δεδομένων.

2. Τὰ εἰς τὸν πρῶτον κύκλον σπουδῶν διδασκόμενα μαθήματα εἶναι :

α) Μαθηματικὴ 'Ανάλυσις
β) Στατιστικὴ Μεθοδολογία καὶ Στατιστικὴ 'Ανάλυσις
γ) Θεωρία καὶ Τεχνικὴ τῶν Στατιστικῶν 'Ερευνῶν
δ) Πολιτικὴ Οἰκονομία
ε) Δημογραφικὴ Στατιστικὴ καὶ μελέτη τῶν πληθυσμιακῶν προβλημάτων
στ) Οἰκονομικὴ Στατιστικὴ

3. Τὰ εἰς τὸν δεύτερον κύκλον σπουδῶν διδασκόμενα μαθήματα εἶναι :

I. Διὰ τὸν κλάδον εἰδικεύσεως εἰς τὰς Στατιστικὰς Μεθόδους ἐν τῇ Βιομηχανίᾳ :

α) Μαθηματικὴ Στατιστικὴ
β) Στατιστικὴ 'Ανάλυσις
γ) "Ελεγχος ποιότητος ἐν σειρᾷ παραγομένων προϊόντων.

II. Διὰ τὸν κλάδον εἰδικεύσεως εἰς τὴν Μαθηματικὴν Στατιστικὴν καὶ Οἰκονομετρικήν:

α) Μαθηματικὴ Στατιστικὴ
β) Στατιστικὴ 'Ανάλυσις
γ) Μαθηματικαὶ ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν Οἰκονομικήν.

III. Διὰ τὸν κλάδον ἐφηρμοσμένης Στατιστικῆς:

α) 'Εφηρμοσμένη Στατιστικὴ
β) 'Οργάνωσις
γ) Νομοθεσία

4. 'Εκτὸς τῶν ὡς ἄνω μαθημάτων, εἰς τὸν πρῶτον κύκλον σπουδῶν διδάσκεται καὶ ἡ 'Αγγλικὴ γλῶσσα ἐπὶ δίωρον τοὐλάχιστον καθ' ἑβδομάδα καὶ εἰς τὸν δεύτερον κύκλον σπουδῶν ἡ 'Αγγλικὴ Στατιστικὴ ὁρολογία ὁμοίως. Μετ' ἀπόφασιν τῆς Διδακτικῆς 'Επιτροπῆς τοῦ Κ.Σ.Ε. δύναται νὰ εἰσαχθῇ καὶ ἡ διδασκαλία τῆς Γαλλικῆς ἢ Γερμανικῆς γλώσσης.

5. Τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω μαθημάτων διὰ τὸ προπαρασκευαστικὸν τμῆμα καὶ τοὺς δύο κύκλους σπουδῶν καθορίζεται δι' εἰδικοῦ κανονισμοῦ τοῦ Κ.Σ.Ε., ἐγκρινομένου ὑπὸ τῆς Διδακτικῆς 'Επιτροπῆς αὐτοῦ.

6. Τὸ Κέντρον Στατιστικῆς 'Εκπαιδεύσεως δύναται νὰ ὀργανώνῃ σειρὰν ἐλευθέρων μαθημάτων καὶ διαλέξεων παρ' εἰδικῶν ἐπιστημόνων ἡμεδαπῶν ἢ ἀλλοδαπῶν, συμφώνως πρὸς πρόγραμμα ἐγκρινόμενον ὑπὸ τῆς Διδακτικῆς 'Επιτροπῆς.

7. Τὸ Κ.Σ.Ε. ὀργανώνει δὶς τῆς ἑβδομάδος εἰδικὰ σεμινάρια, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ γίνεται ἀνάπτυξις τῶν θεμάτων ἅτινα περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα μαθημάτων τοῦ προπαρασκευαστικοῦ τμήματος, συζήτησις ἐπ' αὐτῶν, λύσις ἀποριῶν καὶ θὰ δίδωνται ἐπεξηγήσεις ὑπὸ ἁρμοδίων Καθηγητῶν τοῦ Κ.Σ.Ε. καὶ ἐπιμελητῶν τῶν σεμιναρίων, ὁριζομένων κατόπιν ἀποφάσεως τῆς Διδακτικῆς 'Επιτροπῆς».

Ἄρθρον 6

1. Τὸ ὡρολόγιον πρόγραμμα ὑποχρεωτικῶν μαθημάτων διὰ τοὺς δύο κύκλους σπουδῶν ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως:

1. Πρῶτος κύκλος σπουδῶν	*Ὧραι καθ' ἑβδομάδα*		
Πρῶτον ἑξάμηνον	*Θεωρία*	*Ἀσκήσεις*	*Σύνολον*
1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν	1	2	3
2. Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2	2	4
3. Πολιτικὴ Οἰκονομία	2	—	2
4. Θεωρία καὶ Τεχνικὴ Στατιστικῶν Ἐρευνῶν	1	1	2
5. Δημογραφικὴ Στατιστικὴ	1	—	1
Σύνολον	7	5	12
Δεύτερον ἑξάμηνον	*Θεωρία*	*Ἀσκήσεις*	*Σύνολον*
1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν	1	1	2
2. Στατιστικὴ Μεθοδολογία	2	2	4
3. Θεωρία καὶ Τεχνικὴ Στατιστικῶν Ἐρευνῶν	1	1	2
4. Δημογραφικὴ Ἀνάλυσις	1	—	1
5. Οἰκονομικὴ Στατιστικὴ	1 1/2	1 1/2	3
Σύνολον	6 1/2	5 1/2	12
2. Δεύτερος κύκλος σπουδῶν	*Θεωρία*	*Ἀσκήσεις*	*Σύνολον*
Α. Στατιστικαὶ Μέθοδοι εἰς τὴν Βιομηχανίαν			
1. Μαθηματικὴ Στατιστικὴ	1	1	2
2. Στατιστικὴ Ἀνάλυσις	2	2	4
3. Ἔλεγχος Ποιότητος	1	1	2
Σύνολον	4	4	8
Β. Μαθηματικὴ Στατιστικὴ καὶ Οἰκονομετρικὴ			
1. Μαθηματικὴ Στατιστικὴ	1	1	2
2. Στατιστικὴ Ἀνάλυσις	2	2	4
3. Οἰκονομετρικὴ	1	1	2
Σύνολον	4	4	8
Γ. Ἐφηρμοσμένη Στατιστικὴ			
1. Ἐφηρμοσμένη Στατιστικὴ	4	2	6
2. Ὀργάνωσις καὶ Νομοθεσία	2	—	2
Σύνολον	6	2	8

2. Μετ' ἀπόφασιν τῆς Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς, κατόπιν εἰσηγήσεως τοῦ Διευθυντοῦ Σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε. τὸ ὡρολόγιον πρόγραμμα δύναται νὰ τροποποιηθῇ.

Ἄρθρον 7

1. Οἱ ἀποφοιτήσαντες ἐκ τοῦ Κ.Σ.Ε. πρὸ τῆς 12 Σεπτεμβρίου 1955 δύνανται, μετ' ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις διενεργουμένας κατὰ χρόνον ὁριζόμενον ἑκάστοτε ὑπὸ τῆς Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς, νὰ τύχουν «πτυχίου στατιστικῶν σπουδῶν» τοῦ πρώτου κύκλου.

2. Οἱ πρὸ τῆς ἰσχύος ταῦ παρόντος ἐγγεγραμμένοι εἰς τὸ πρῶτον ἔτος σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε. δύνανται, μετ' ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς τὰ μαθήματα τοῦ πρώτου κύκλου σπουδῶν, νὰ τύχουν πτυχίου στατιστικῶν σπουδῶν.

3. Ὁμοίως οἱ ἐγγεγραμένοι εἰς τὸ δεύτερον ἔτος σπουδῶν δύνανται, μετ' ἐπιτυχεῖς ἐξετάσεις εἰς τὰ διὰ τοῦ παρόντος καθοριζόμενα μαθήματα τοῦ δευτέρου κύκλου σπουδῶν, νὰ τύχωσι «διπλώματος ἀνωτέρων στατιστικῶν σπουδῶν».

4. Οἱ τυχόντες μέχρι τοῦδε διπλώματος στατιστικῶν σπουδῶν τοῦ Κ.Σ.Ε. ἐξομοιοῦνται πρὸς τοὺς λαμβάνοντας βάσει τοῦ παρόντος δίπλωμα ἀνωτέρων στατιστικῶν σπουδῶν εἰς τὸν κλάδον τῆς Ἐφηρμοσμένης Στατιστικῆς.

Ἄρθρον 8

Παρὰ τῷ Κέντρῳ Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως συνιστᾶται μία θέσις γραμματέως Β' ἢ Α' τάξεως καὶ μία κλητῆρος ἐπὶ βαθμῷ κλητῆρος Β' ἢ Α' τάξεως, τῶν ὁποίων ἡ μισθολογικὴ καὶ βαθμολογικὴ ἐξέλιξις καθορίζεται κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἰσχύοντα προκειμένου περὶ Δημοσίων Ὑπαλλήλων μέχρι καὶ τοῦ βαθμοῦ Τμηματάρχου Α' Τάξεως.

Ἄρθρον 9

Εἰς τὸν Ἡμέτερον ἐπὶ τοῦ Συντονισμοῦ Ὑπουργὸν ἀνατίθεμεν τὴν δημοσίευσιν καὶ ἐκτέλεσιν τοῦ παρόντος διατάγματος.

ΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ ΕΤΟΣ 1956—57

Τὸ λῆξαν ἀκαδημαϊκὸν ἔτος 1956/57 ὑπῆρξε τὸ δεύτερον ἔτος λειτουργίας τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως τῆς Σχολῆς ἀφ' ἧς τοῦτο ἀνεγνωρίσθη ἐπισήμως διὰ τοῦ ἀπὸ 3-9-1955 Β. Διατάγματος.

Κατὰ τὸ ἀκαδημ. τοῦτο ἔτος ἡ Διδακτικὴ Ἐπιτροπὴ τοῦ Κ.Σ.Ε. ἀπετελέσθη ἐκ τῶν κ.κ.

1. Στρ. Κ. Παπαϊωάννου, Διευθυντοῦ τῆς Α.Σ.Β.Σ., ὡς Προέδρου
2. Τρ. Κεραμιδᾶ, Καθηγητοῦ τῆς Α.Σ.Ο. καὶ Ε.Ε.
3. Γ. Λαμπρούκου, Γεν. Διευθυντοῦ τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ
4. Κ. Παπαπάνου, Διευθυντοῦ τῆς Ἀνωτάτης Ἐκπαιδεύσεως τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας.
5. Ε. Μαργαρίτη, Καθηγητοῦ τῆς Στατιστικῆς τῆς Α.Σ.Β.Σ., ὡς Διευθυντοῦ Σπουδῶν

Οἱ τακτικοὶ Καθηγηταὶ τοῦ Κέντρου ἐπὶ θητείᾳ μέχρι τῆς 31ης Αὐγούστου 1958 ἦσαν οἱ κάτωθι:

1. Ἀλ. Παππᾶς, Καθηγητὴς Πολυτεχνείου
2. Σ. Ἀγαπητίδης, Καθηγητὴς τῆς Α.Σ.Β.Σ.
3. Κ. Ἀθανασιάδης, Καθηγητὴς τῆς Σχολῆς Ν. Δοκίμων
4. Ε. Μαργαρίτης, Καθηγητὴς τῆς Α.Σ.Β.Σ.
5. Γ. Παπαχατζῆς, Καθηγητὴς τῆς Παντείου Σχολῆς Πολιτικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἐπίσης ἡ Δ. Ἐπιτροπὴ ἔδωκεν ἐντολὴν διδασκαλίας διὰ τὸ ἔτος 1956/57 εἰς τοὺς κάτωθι:

1. Νικ. Σβορῶνον, Διευθυντὴν τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας
2. Στ. Γερωνυμάκην, Διευθυντὴν Ὑπηρεσίας Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν
3. Γερ. Θεοδωράκην, Στατιστικὸν Τραπέζης Ἑλλάδος
4. Δημ. Κονιδάρην, Τμηματάρχην Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας
5. Γ. Παυλίδην, Καθηγητὴν Ἀγγλικῆς Γλώσσης
6. Β. Δαυίδ, » » »

Διώρισεν ἐπίσης ὡς Ἐπιμελητὴν τὸν κ. Γ. Ἀθανασόπουλον, πτυχιοῦχον τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν.

Χρέη Γραμματέως τοῦ Κ.Σ.Ε. ἐξετέλεσε καὶ ἐφέτος ἡ Δὶς Φανὴ Βακαλοπούλου.

Κατὰ τὸ ἔτος 1956/57 ἐνεγράφησαν εἰς τὸ Α' ἔτος σπουδῶν ἐν ὅλῳ 101 σπουδασταί, ἐξ ὧν 33 ὡς ὑπότροφοι ὑπηρεσιῶν καὶ 68 ἰδιῶται. Οἱ ἐξ ὑπηρεσιῶν προερχόμενοι κατανέμονται ὡς ἑξῆς:

1. Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος	14
2. Ὑπουργείου Συντονισμοῦ	8
3. Ὑπουργείου Οἰκονομικῶν	6
4. Ὑπουργείου Ἐμπορίου	1
5. Ὀργανισμοῦ Λιμένος Πειραιῶς	3
6. Χρηματιστηρίου Ἀξιῶν	1
Σύνολον	33

Εἰς τὸ Β' ἔτος σπουδῶν ἐνεγράφησαν 47 ἐν ὅλῳ σπουδασταί, ἐξ ὧν 20 ἰδιῶται καὶ 27 προερχόμενοι ἐκ τῶν ἀκολούθων Ὑπηρεσιῶν:

1. Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος	19
2. Ὑπουργείου Οἰκονομικῶν	1
3. Ὑπουργείου Ἐμπορικῆς Ναυτιλίας	1
4. Ταμείου Ἀσφαλίσεως Ἐμπόρων	3
5. Ἐμπορικοῦ καὶ Βιομηχανικοῦ Ἐπιμελητηρίου Πειραιῶς	2
6. Ἐθνικοῦ Ἱδρύματος Ραδιοφωνίας	1
Σύνολον	27

Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους ἐπραγματοποιήθησαν τὰ κάτωθι κατὰ καθηγητὴν ὡριαῖα μαθήματα, φροντιστήρια καὶ ἀσκήσεις.

1. Παππᾶς Ἀλ.	74	8. Σβορῶνος Νικόλ.	28
2. Ἀγαπητίδης Σ.	52	9. Χαλκιόπουλος Γ.	15
3. Ἀθανασιάδης Κ.	140	10. Παπαχατζῆς	56
4. Γερωνυμάκης Στ.	50	11. Ἀθανασόπουλος Γ.	60
5. Θεοδωράκης Γερ	68	12. Παυλίδης Γ.	50
6. Κονιδάρης Δ.	120	13. Δαυὶδ Γ.	50
7. Μαργαρίτης Εὐστ.	94		

Ὁ ἀπολογισμὸς τῆς διαχειρίσεως τοῦ Κέντρου Στατιστικῆς Ἐκπαιδεύσεως τῆς Α.Σ.Β.Σ. διὰ τὴν οἰκονομικὴν χρῆσιν 1956/57 ἔχει ὡς ἀκολούθως:

ΕΣΟΔΑ :

1. Ἐγγραφαὶ Αου καὶ Βου ἔτους	Δρχ.	27.000	
2. Δίδακτρα » » » »	»	149.600	
3. » Καθυστερούμενα	»	9.300	
4. Δικαιώματα ἐκ τίτλων	»	5.200	191.100
5. Ἐπιχορήγησις Ὑπουργείου Συντονισμοῦ	»		85.000
		τὸ ὅλον	276.100
		ὑπόλοιπον προηγουμένης χρήσεως	3.753
		τὸ ὅλον	279.853

Λογαριασμοὶ ἀποδιδόμενοι :

α) Φόροι καὶ Χαρτόσημον Δημοσίου	Δρχ.	10.846,10	
β) Ἐξέταστρα Καθηγητῶν	»	40.565	
γ) Ἐνίσχυσις Σχολῆς διὰ λογαριασμὸν αὐτῆς	»	45.853,50	97.264.60
		Σύνολον	377.118.60

ΕΞΟΔΑ :

1. Ἀποζημίωσις Διδασκαλίας — Ἔξοδα κινήσεως καὶ ἐπίδομα Βιβλιοθήκης	Δρχ.	96.300
2. Ἀποζημίωσις Διδακτικῆς Ἐπιτροπῆς	»	36.000
3. Ἀποζημίωσις Ἐπιμελητοῦ 10×500	»	5.000
4. Ἀποζημίωσις Διευθυντοῦ Κ.Σ.Ε.	»	13.500
5. Ὑπερωρίαι καὶ ὁδοιπορικὰ	»	13.950
6. Γενικὰ Ἔξοδα Διαχειρίσεως	»	14.611,10
7. Ἐνοίκια, ἐπισκευαὶ καὶ ἐγκαταστάσεις	»	87.536,20
	τὸ ὅλον	266.897,30

Λογαριασμοὶ ἀποδιδόμενοι :

α) Φόροι καὶ Χαρτόσημον Δημοσίου	Δρχ.	10.846.10	
β) Ἐξέταστρα Καθηγητῶν	»	40.555	
γ) Ἐνίσχυσις Σχολῆς διὰ λογαριασμὸν αὐτῆς	»	45.853.50	97.264.60
			364.161.90
		Ὑπόλοιπον εἰς νέαν χρῆσιν	12.956.70
		Σύνολον	377.118,60

Ἐπιτυχόντες κατὰ τὰς Εἰσαγωγικὰς Ἐξετάσεις Κ.Σ.Ε. Ὀκτωβρίου 1957.

Κατ' Ἀλφαβητικὴν σειράν :

1. Ἀθανασόπουλος Σωκράτης
2. Ἀποστολάκης Δημήτριος
3. Δελήμπασης Παναγιώτης
4. Διαμάντης Γεώργιος
5. Ζιώγας Ἠλίας
6. Καλαντζῆς Θωμᾶς
7. Κόντης Γεώργιος
8. Μελίδης Γεώργιος
9. Μέξας Ἰωάννης
10. Ματάκιας Κων)νος
11. Μυτιληναῖος Κων)τος
12. Καλόπλαστος Βασίλειος
13. Παπαβασιλείου Κλεόβουλος.
14. Παυλόπουλος Σωτήριος
15. Ροῦσσος Δημήτριος
16. Σακελλαρίου Ἑλένη
17. Φουντουλάκης Ἀθανάσιος
18. Φωτόπουλος Κων)νος

Ἐπιτυχόντες Α' ἔτους Ἀκαδ. Ἔτους 1956)57 κατὰ σειρὰν ἐπιτυχίας

1. Καραδήμας Δημήτριος
2. Καραμπάτσης Γεώργιος
3. Μαυρίδης Νικόλαος
4. Ἀναστασίου Δημήτριος
5. Κεμπερᾶς Εὐάγγελος

Ἐπιτυχόντες εἰς τὰς ἐπὶ πτυχίῳ ἐξετάσεις 1956)57 κατὰ σειρὰν ἐπιτυχίας :

1. Γκεβέτσης Μιχαὴλ
2. Τριανταφύλλου Γεώργιος
3. Καραδήμας Παναγιώτης
4. Σπηλιόπουλος Γεώργιος
5. Μπίρης Ἀπόστολος
6. Μιχαλόπουλος Νικόλαος
7. Μπασιᾶς Χαράλαμπος
8. Ἀγγελοπούλου Ἄννα

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΗΣ Α. Σ. Β. Σ.

Χ. 'Αγαλλοπούλου	*Κοινωνικαὶ 'Ασφαλίσεις*
»	*Μαθήματα 'Εργατικοῦ Δικαίου*
Σ. 'Αγαπητίδη	*Πολιτικὴ Οἰκονομία*
Δ. Γαλάνη	*Τραπεζικὰ*
Σ. Γεδεὼν	*Ψυχοτεχνικὴ*
Ε. Γεωργαντοπούλου	*Θαλάσσιαι Μεταφοραὶ*
Μ. Γεωργιάδη	*Οἰκονομικὴ τῶν 'Επιχειρήσεων*
»	*Τὸ Κόστος διαθέσεως τῶν προϊόντων*
Γ. Γιαννοπούλου	*'Ηλεκτροτεχνία*
Ν. Δελούκα	*Μαθήματα 'Εμπορικοῦ Δικαίου*
Ν. Δερτιλῆ	*Δημοσία Οἰκονομία*
Δ. Δημητρακάκη	*Γενικαὶ 'Αρχαὶ Δικαίου*
»	*Οἰκογενειακὸν Δίκαιον*
Ν. Θεοδώρου	*Μαθήματα Φυσικῆς*
Α. Καλλιαβᾶ	*Οἰκονομικὴ Γεωγραφία*
Σ. Καλογεροπούλου	*Δημόσιον Δίκαιον*
Χ. Κανελλοπούλου	*Μαθήματα Συγκοινωνιακῆς Οἰκονομίας*
Χ. Καραβᾶ	*Γαλλισμοὶ*
Δ. Κόλλια	*'Ιδιωτικὴ Οἰκονομικὴ*
Π. Κουβέλη	*'Ο τόπος ἐγκαταστάσεως τῶν βιομηχανιῶν*
»	*'Ενεργειακὴ Οἰκονομία*
»	*Μαθήματα Βιομηχανικῆς Πολιτικῆς*
»	*Προγραμματισμὸς καὶ ἐκβιομηχάνισις*
Ι. Κουτσογιάννη	*'Ασφαλιστικὰ*
»	*'Ερωτηματολόγιον 'Ασφαλιστικῶν*
Α. Κυρκιλίτση	*Μαθήματα 'Εμπορικῆς Πολιτικῆς*
Φ. Λέτσα	*'Οργανωτικὴ 'Εργοστασίων*
Ε. Μαργαρίτη	*Οἰκονομικὰ Μαθηματικὰ*
»	*Στατιστικὴ*
»	*'Αριθμοδεῖκται*
Ε. Μελετῆ	*Τρίγλωσσος Στενογραφία*
Θ. Μούντριχα	*'Εμπορικὴ 'Αλληλογραφία*
Κ. Μπανταλούκα	*'Οργανωτικὴ τῆς Οἰκονομίας*
Γ. Ξυνοπούλου	*Μεταλλευτικὸν Δίκαιον*
Δ. Παπαδημητρίου	*Βιομηχανικὴ Λογιστικὴ*
»	*'Εφαρμογαὶ Βιομηχανικῆς Λογιστικῆς*
Σ. Παπαϊωάννου	*Τεχνικὴ τοῦ 'Εμπορίου*
»	*Λογιστικὴ*
»	*Προβλήματα Λογιστικοῦ Δικαίου*
Γ. Παπακώστα	*Βιομηχανικὴ 'Υγιεινὴ*
Γ. Παυλίδη	*Commercial English Letter Writer*
»	*Μέθοδος 'Αγγλικῆς γλώσσης*
Π. Πέρδικα	*'Εμπορικὸν Δίκαιον*
Κ. Σημαντήρα	*'Εμπράγματον Δίκαιον*
»	*'Ενοχικὸν Δίκαιον*
Σ. Σταυροπούλου	*Μηχανογνωσία*
Ε. Συνοδινοῦ	*Χημεία*
»	*'Εμπορευματολογία*

Ι. Φράγκου	*Τελωνειακαί καὶ Δασμολογικαὶ Μελέται*
Γ. Χαλκιοπούλου	*Πολιτικὴ Οἰκονομία*
»	*Ὁ μηχανισμὸς τῶν τιμῶν*
»	*Ἡ χρυσῆ λίρα*
Ι. Χρυσοχοῦ	*Ὀργάνωσις τῶν Ἐπιχειρήσεων*
»	» » *Ἐργοστασίων*
»	*Ἐλεγκτική*

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Σ. ΑΓΑΠΗΤΙΔΗ :

1. *Πολιτικὴ Οἰκονομία*

ΚΩΣΤΑ Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ :

1. *Στατιστική*
2. *Οἰκονομετρία*
3. *Ἐφαρμογαὶ Στατιστικῆς*
4. *Ἀγγλοελληνικὸν γλωσσάριον τῶν στατιστικῶν ὅρων*
5. *Γραμμικὴ παλινδρόμησις καὶ συντελεστὴς συσχετίσεως*
6. *Προσδιορισμὸς τοῦ μέρους τοῦ ἐλλείμματος τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου τοῦ ὀφειλομένου εἰς τὴν δυσμένειαν τῶν ὅρων τοῦ ἐμπορίου*
7. *Αἱ ἐξισώσεις διαφορῶν ἐν τῇ Οἰκονομετρίᾳ*
8. *Διαθέσιμα ἀγαθὰ καὶ ὑπηρεσίαι παρ' ἡμῖν*

Σ. ΓΕΡΩΝΥΜΑΚΗ :

1. *Ἐθνικοὶ Λογαριασμοί*

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΔΑΒΙΔ :

1. *Ἀγγλικὴ Στατιστικὴ Ὀρολογία*

Γ. ΘΕΟΔΩΡΑΚΗ :

1. *Παραδόσεις Μαθηματικῆς Στατιστικῆς*
2. *Αἱ μέθοδοι ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων εἰς τοὺς μονοδιαστάτους νόμους πιθανοτήτων*

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΚΟΝΙΔΑΡΗ :

1. *Μνημόνιον Ἀπειροστικῆς Ἀναλύσεως*
2. *Μία ἀντιμετώπισις τοῦ δειγματοληπτικοῦ προβλήματος (Ἀνακοίνωσις)*
3. *Ἀνάπτυγμα συναρτήσεως εἰς σειρὰν δεδομένων συναρτήσεων*
4. *Τεχνικὴ τῶν δειγματοληψιῶν (Μετάφρασις ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ)*

ΣΤΑΘΗ ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ :

1. *Στατιστική*
2. *Ἀριθμοδεῖκται*
3. *Ἀναλυτικὴ σπουδὴ τῶν νόμων πιθανοτήτων*
4. *Αἱ μέθοδοι ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων ἑνὸς νόμου πιθανοτήτων*
5. *Ἀναλυτικὴ σπουδὴ χρονολογικῶν τινων σειρῶν*
6. *Αἱ τεχνικαὶ βάσεις τῶν κοινωνικῶν ἀσφαλίσεων*
7. *Οἱ ὅροι τοῦ ἐμπορίου εἰς τὸ Ἡνωμένον Βασίλειον (Μετάφρασις ἐκ τοῦ Ἀγγλικοῦ)*

Γ. ΠΑΠΑΧΑΤΖΗ :

1. *Διοικητικὴ Νομοθεσία*

Κ. Γ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. Ν. ΜΕΤΑΞΑ :

2. *Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν*