ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ

---

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

μετὰ 29 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ.

*Πρὸς χρῆσιν τῶν φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου, τοῦ Πολυτεχνείου καὶ τῶν Ἀνωτέρων Στρατιωτικῶν Σχολῶν.*

---

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Ε. & Ι. ΜΠΛΑΖΟΥΔΑΚΗ
1925

# ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

*Περὶ ἐπιφανειῶν ἐκ μεταφορᾶς.*



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

## ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

*Περὶ ἐλλειψοειδοῦς.*



*Περὶ ὑπερβολοειδῶν.*



*Περὶ παραβολοειδῶν*



---

(*) Ἡ ἀπόδειξις ἐλήφθη ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ Ι. Χατζηδάκη «*Στερεὰ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία*»

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

### *Περὶ καμπύλων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐν γένει.*

§ 1. **Διάκρισις τῶν καμπύλων β΄ βαθμοῦ εἰς γένη.**—

α΄) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0. \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀναφερομένη ὡς πρὸς ἄξονας συντεταγμένων εὐθυγράμμους οxy δύναται νὰ παριστάνῃ τόπον, ἢ καμπύλην τινά, ἢ σημεῖον, ἢ καὶ οὐδένα τόπον.

Αὕτη περιέχει πέντε αὐθαιρέτους παραμέτρους· τοὺς λόγους τῶν πέντε συντελεστῶν αὐτῆς πρὸς τὸν ἕκτον συντελεστήν.

Λέγοντες ὁ τόπος ἢ ἡ καμπύλη (1) θὰ ἐννοοῦμεν τὸν τόπον ἢ τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστάνει εν γένει ἡ ἐξίσωσις (1).

Θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν εἰς τίνα σχέσιν πρέπει νὰ ὑπόκεινται συντελεσταὶ τῆς (1) ἵνα ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν x, y τείνουσαι εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν· ἤτοι ἵνα ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ κλάδους ἐκτεινομένους εἰς ἄπειρον· οὕτω δὲ θὰ διακρίνωμεν τὰς καμπύλας (1) εἰς γένη

Πρὸς τοῦτο ἐξετάζομεν τὰς τομὰς τῆς (1) ὑπὸ τῆς εὐθείας

$$y = \lambda x, \qquad (2)$$

ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

Θέτοντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ y τὴν τιμὴν αὐτοῦ ἐκ τῆς (2) ἔχομεν

$$(\Gamma \lambda^2 + 2 B \lambda + A) x^2 + 2 (E \lambda + \Delta) x + Z = 0. \qquad (3)$$

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ $x^2$ εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν (3), εἶνε πεπερασμέναι. Ἐὰν δ' ὁ συν-συντελεστὴς τοῦ $x^2$ μεταβάλλεται καὶ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἐνῷ ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, ἡ μία τῶν τιμῶν τοῦ x τείνει εἰς τὸ $\infty$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι διὰ τιμὰς τοῦ λ τοιαύτας, ὥστε νὰ εἶνε

$$\Gamma \lambda^2 + 2 B \lambda + A = 0 \qquad (4),$$

μία τῶν ριζῶν τῆς (3) γίνεται ἄπειρος.

Ἐκ τῆς (4) ἔχομεν

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A\Gamma}}{\Gamma}.$$

Ἑπομένως, ἂν τὸ $B^2 - A\Gamma$ εἶνε θετικὸν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν, αἱ ρίζαι τῆς (4) εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἢ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἢ φανταστικαί.

Ἤτοι ἐὰν εἶνε $B^2 - A\Gamma > 0$,

ὑπάρχουν δύο τιμαὶ τοῦ λ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα (2) τέμνει τὴν καμπύλην (1) εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἐὰν εἶνε $B^2 - A\Gamma = 0$,

ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ λ $\left(\text{ἡ } \lambda = -\frac{B}{\Gamma}\right)$ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα (2) τέμνει τὴν (1) εἰς τὸ ἄπειρον. Ἐὰν δ' εἶνε

$$B^2 - A\Gamma < 0,$$

ἡ (4) ἔχει ρίζας φανταστικάς, ἤτοι δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ ἡ (2) τέμνει τὴν (1) εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

«***ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως***

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0$$

***παριστώμενος τόπος ἔχει δύο σημεῖα κείμενα εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, ἢ ἕν, ἢ οὐδέν, ἂν τὸ $B^2 - A\Gamma$ εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν***».

6') Ἂν ὁ τόπος (1) ἔχῃ δύο σημεῖα κείμενα εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, λέγομεν ὅτι παριστάνει καμπύλην γένους *ὑπερβολῆς*· ἂν ἔχῃ ἓν ὅτι παριστάνει καμπύλην γένους *παραβολῆς*, καὶ ἂν δὲν ἔχῃ σημεῖα κείμενα εἰς ἄπειρον, ὅτι παριστάνει καμπύλην γένους *ἐλλείψεως*.

Ὅθεν

| | | |
|---|---|---|
| ἂν εἶνε | $B^2 - A\Gamma < 0$ | ὁ τόπος (1) εἶνε ἔλλειψις, |
| ἂν εἶνε | $B^2 - A\Gamma > 0$ | ὁ τόπος (1) εἶνε ὑπερβολή, |
| ἂν εἶνε | $B^2 - A\Gamma = 0$ | ὁ τόπος (1) εἶνε παραβολή. |

***Σπουδὴ τοῦ σχήματος τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῶν $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$.***

## § 2. Διάμετρος καμπύλων β' βαθμοῦ. Τριώνυμον τῆς μορφῆς $Mx^2+2Nx+P$.—

α') Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν καμπύλων τοῦ β' βαθμοῦ

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0. \quad (1)$$

Ζητεῖται νὰ σπουδάσωμεν τὸ σχῆμα τοῦ τόπου, τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

Ὑποθέτομεν πρῶτον ὅτι εἶνε $\Gamma\neq 0$ καὶ λύομεν τὴν (1) ὡς y, ὅτε εὑρίσκομεν

$$y=-\frac{Bx+E}{\Gamma}\pm\sqrt{Mx^2+2Nx+P} \quad (2)$$

ἐν ᾧ ἐτέθη $M=B^2-A\Gamma$, $N=BE-\Gamma\Delta$, $P=E^2-\Gamma Z$.

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις

$$y=-\frac{Bx+E}{\Gamma} \quad (3)$$

(ἥτις δὲν εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\Gamma\neq 0$), ἔστω δ' αὕτη ἡ ΔΔ' (σχ. 1, σελ. 5).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου (1) τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ x, ἔστω τὴν x= (οΙ), φέρομεν ἐκ τοῦ Ι εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, τέμνουσαν τὴν ΔΔ', ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἐκ τοῦ Κ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης δύο σημεῖα, ἔστω τὰ Β, Β', ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ Κ ἀποστάσεις ἀπολύτως ἴσας μὲ

$$\psi=\frac{1}{\Gamma}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}.$$

Τὰ σημεῖα Β, Β' θὰ εἶνε σημεῖα τοῦ τόπου (1) τὸ δὲ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΒ' εἶνε χορδὴ αὐτοῦ, ἔχουσα τὸ μέσον αὐτῆς Κ ἐπὶ τῆς ΔΔ'.

β') «***Ἡ εὐθεῖα (3) λέγεται, ἐν γένει, διάμετρος τοῦ τόπου ἢ τῆς καμπύλης (1), ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε***

$$Bx+\Gamma y+E=0,$$

***ἡ δὲ ποσότης ψ εἶνε μέρος τῆς τεταγμένης τῆς (1), μετρούμενον ἀπὸ τῆς διαμέτρου (3)***».

**γ')** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς (1) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου

$$M x^2 + 2 N x + P. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ τὸ γένος τῆς γραμμῆς (1) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ $B^2 - A\Gamma = M$, ἐξετάζομεν τὸ τριώνυμον κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις καθ' ἃς εἶνε τὸ M ἀρνητικόν, ἢ θετικόν, ἢ μηδέν.

**§ 3. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε** $M = B^2 - A\Gamma < 0$.—

**α')** Ἔστω ὅτι εἶνε $M < 0$ καὶ $x_1$, $x_2$ αἱ ῥίζαι τοῦ (4), ὅτε θὰ ἔχωμεν $\quad M x^2 + 2 N x + P = M (x - x_1)(x - x_2).$

Ἔστω πρῶτον ὅτι $x_1$, $x_2$ εἶνε πραγματικὰ καὶ ἄνισα, ὅτε θὰ εἶνε $N^2 - M P > 0$, καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶνε $x_1 < x_2$. Διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας μεταξὺ τῶν $x_1$ καὶ $x_2$ ($x_1 < x < x_2$) τὸ τριώνυμον (4) εἶνε ἑτερώσημον τοῦ M· ἄρα θετικόν· ἐνῷ διὰ $x < x_1$ καὶ $x > x_2$ εἶνε ἀρνητικόν.

Ὅθεν, «***ὅταν τὸ τριώνυμον (4) ἔχῃ δύο ῥίζας $x_1$, $x_2$ πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὁ τόπος ἢ ἡ καμπύλη (1) περιέχεται μεταξὺ δύο εὐθειῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν y, τῶν ΡΣ, ΡΑ (σχ. 1) ἐχουσῶν ἐξισώσεις $x = x_1$, $x = x_2$ ἀντιστοίχως***».

Ὅταν τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιτῆς $x_1$ μέχρι $x_2$, τὸ ψ μεταβάλλεται ἔχον πεπερασμένην τιμὴν καὶ εἶνε $\psi = 0$ διὰ $x = x_1$, $x = x_2$. Ἑπομένως τὰ σημεῖα Α', Α καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι $x = x_1$, $x = x_2$ τέμνουν τὴν διάμετρον (3) κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης (1), ἥτις καλεῖται *ἔλλειψις*.

**β')** Ἐὰν μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα Ρ' Ρ τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ ἔχον τετμημένην $x_2 - x_1$, γράψωμεν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου, ἔκ τινος δὲ σημείου Π αὐτῆς (ἐνῷ εἶνε $(o\Pi) = x$) φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν μέχρι τῆς περιφερείας, ἔστω τὴν ΠΣ, θὰ εἶνε

$$(P'\Pi)(\Pi P) = (\Pi\Sigma)^2.$$

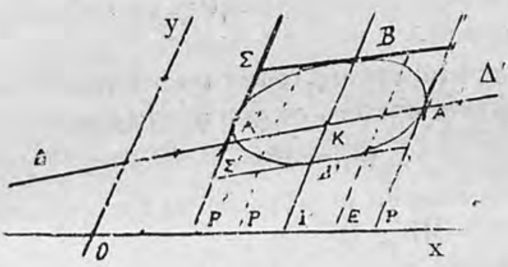
Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\psi = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{M (x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{-M (x - x_1)(x_2 - x)}$$

$$\text{ἢ} \quad \psi = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{-M (P'\Pi)(\Pi P)} = \frac{\sqrt{-M}}{\Gamma}(\Pi\Sigma).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ψ καὶ τὸ (ΠΣ) ἔχουν λόγον σταθερόν.

Ὅταν μὲν τὸ σημεῖον Π κινῆται συνεχῶς ἐπὶ τῆς διαμέτρου Ρ΄Ρ




(Σχ. 1)

ἀπὸ τοῦ Ρ΄ μέχρι τοῦ μέσου Ι αὐτῆς $\left(\text{ἔχοντος τετμημένην } \frac{x_1+x_1}{2}\right)$ τὸ (ΠΣ) μεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι $\frac{x_2-x_1}{2}$. Ὅταν δὲ τὸ Π κινῆται ἀπὸ τοῦ μέσου μέχρι τοῦ Ρ, τὸ (ΠΣ) ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ μηδενός, διερχόμενον διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν κατ᾽ ἀντίστροφον τάξιν. Ἤτοι τὸ (ΠΣ) λαμβάνει τιμὰς ἴσας ἀντιστοίχως εἰς θέσεις τοῦ κινητοῦ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸ μέσον Ι τοῦ Ρ΄ Ρ.

Ἑπομένως ὅταν μὲν τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $x_1$ μέχρι τοῦ $\frac{x_1+x_2}{2}$ τὸ ψ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τῆς μεγίστης τιμῆς αὐτοῦ $\frac{\sqrt{-M}}{\Gamma}\,\frac{x_2-x_1}{2}$ · ὅταν δὲ τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $\frac{x_1+x_2}{2}$ μέχρι τοῦ $x_2$, τὸ ψ ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ μηδενός.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι δύο σημεῖα ἀναχωροῦντα ἀπὸ τοῦ Α΄, γράφουν δύο τόξα τῆς καμπύλης (1), ἀρχόμενα ἀπὸ τοῦ Α΄ καὶ περατούμενα εἰς τὸ Α, κείμενα δ᾽ ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου Δ Δ΄. Ἐὰν Β καὶ Β΄ εἶνε τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, τὰ ἔχοντα τετμημένην $\frac{x_1+x_2}{2}$ καὶ φέρωμεν δ᾽ αὐτῶν εὐθείας, παραλλήλους τῇ Δ Δ΄, σχηματίζουν αὗται μετὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τῷ ἄξονι τῶν y, τῶν ἀγομένων διὰ τῶν Α΄ καὶ Α, παραλληλόγραμμον (σχ. 1) ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχεται ὁ τόπος (1).

γ΄) Ἔστω ἤδη ὅτι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου (4) εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ὅτε θὰ εἶνε $N^2 - MP = 0$. Ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν ῥιζῶν, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ $x_1$, εἶνε $-\frac{N}{M}$.

Θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$\psi = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{M(x-x_1)^2} = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{M}\,(x-x_1).$$

Ἐπειδὴ εἶνε τὸ $M < 0$, τὸ $\psi$ εἶνε φανταστικὸν διὰ $x \neq x_1$ καὶ μηδὲν διὰ $x = x_1$.

Ἑπομένως κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν *ὁ τόπος (1) εἶνε ἓν μόνον πραγματικὸν σημεῖον, τὸ ἔχον συντεταγμένας*

$$(x_1, -(B\,x_1 + E):\Gamma).$$

**δ'**) Ἔστω τέλος ὅτι αἱ ῥίζαι τοῦ (4) εἶνε φανταστικαὶ (συζυγεῖς) ὅτε θὰ εἶνε $N^2 - MP < 0$.

Ἐπειδὴ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν

$$M\,x^2 + 2\,N\,x + P = M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{P\,M - N^2}{M},$$

ἕπεται ὅτι τοῦτο εἶνε ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἑπομένως τὸ $\psi$ καὶ y εἶνε φανταστικά, ἡ δὲ ἐξίσωσις (1) δὲν παριστάνει πραγματικόν τινα τόπον.

## § 4. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε $M = B^2 - A\Gamma > 0$.—

**α'**) Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι εἶνε $M > 0$. Διακρίνομεν καὶ ἐνταῦθα τρεῖς περιπτώσεις· ἂν τὸ $N^2 - MP$ εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν.

Ἔστω πρῶτον ὅτι εἶνε $N^2 - MP > 0$, ὅτε αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $M\,x^2 + 2\,N\,x + P$ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἔστωσαν αἱ $x_1$, $x_2$ $(x_1 < x_2)$ καὶ τίθεται τοῦτο ὑπὸ τὴν μορφὴν $M\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Ἔστω δὲ ὅτι εἶνε (σχ. 2) $x_1 = (oP')$, $x_2 = (oP'')$.

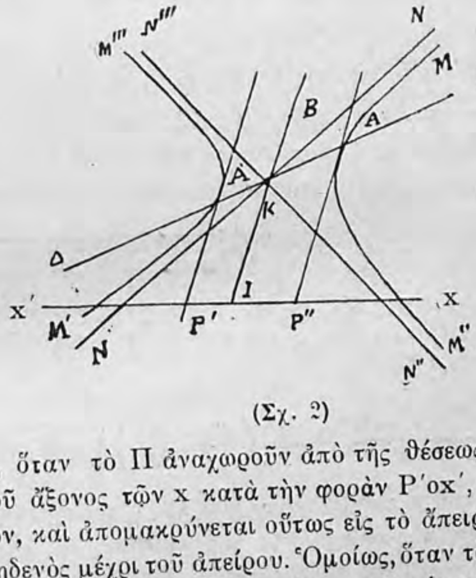
Διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν ($x < x_1$, $x_2 < x$) τὸ τριώνυμον εἶνε ὁμόσημον τῷ M, ἤτοι θετικόν, ἐνῷ διὰ τιμὰς τοῦ x περιεχομένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν εἶνε ἀρνητικόν.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι «***ὅταν εἶνε $M < 0$ καὶ $N^2 - MP > 0$, ὁ τόπος (1) κεῖται ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν y, τῶν ἐχουσῶν ἐξισώσεις*** $x = x_1$ $x = x_2$».

Τὰ σημεῖα A, A' εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι P'A', P'' A, ἔχουσαι ἐξισώσεις $x = x_1$ $x = x_2$, τέμνουν τὴν διάμετρον ΔΔ' (3) (§ 2) τοῦ τόπου προφανῶς εἶνε σημεῖα τοῦ τόπου (1) (§ 2). Ἄρα ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, διερχομένους ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων A καὶ A' καὶ ἐκτεινομένους εἰς τὸ ἄπειρον ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου ΔΔ' (σχ. 2).

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x λάβωμεν σημεῖόν τι, ἔστω τὸ Π, κείμενον ἐκτὸς τοῦ τμήματος $P' P''$, φέρωμεν δὲ δι' αὐτοῦ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΔΔ', ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Λ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ Λ εὐθύγραμμα τμήματα ἔχοντα μήκη ἀπολύτως ἴσα μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ψ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς x=(οΠ), τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων, π.χ. τὰ $M_1$ καὶ $M_2$, θὰ εἶνε σημεῖα τοῦ τόπου (1) (§ 2). Ἐπειδὴ ἔχομεν

$$\psi = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{M(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{M(P'\Pi)(P''\Pi)},$$




(Σχ. 2)

ἕπεται ὅτι, ὅταν τὸ Π ἀναχωροῦν ἀπὸ τῆς θέσεως P' κινῆται συνεχῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ τὴν φορὰν P'οx', ἐνῷ ο εἶνε ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, καὶ ἀπομακρύνεται οὕτως εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ψ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ἀπείρου. Ὁμοίως, ὅταν τὸ Π κινῆται ἀπὸ τῆς θέσεως P'' κατὰ τὴν φορὰν P'x καὶ ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον, τὸ ψ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ∞, λαμβάνει δὲ τοῦτο τιμὰς ἴσας, ὅταν τὸ Π εὑρίσκεται εἰς θέσεις συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸ μέσον I τοῦ τμήματος P' P''. Τὸ μέσον K τοῦ τμήματος AA' καλεῖται ***κέντρον*** τοῦ τόπου (1), ὅστις εἶνε ***ὑπερβολή***, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΔΔ' καὶ IKB λέγονται ***συζυγεῖς διάμετροι*** αὐτῆς.

**β') Ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς.** Θεωροῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ y

$$y = -\frac{Bx+E}{\Gamma} \pm \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}.$$

Ὅταν τὸ x ἔχῃ τιμήν τινα ἀρκούντως μεγάλην, ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ποσότητος, ἥτις εἶνε ὑπὸ τὸ ριζικόν, δίδει ἐξαγόμενον ἀπολύτως θεωρούμενον, μεγαλύτερον ὡς πρὸς τὸν δεύτερον (σταθερὸν ὅρον αὐτοῦ). Ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος λάβωμεν μόνον τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν ἔστω τὴν $y_1$ ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει δύο εὐθείας διακεκριμένας, αἵτινες τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τῆς διαμέτρου $\Delta\Delta'$, ἔχον τετμημένην $-\frac{N}{M}$, ἤτοι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν σημείων $P'$ καὶ $P''$. Ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε τὸ κέντρον K τῆς ὑπερβολῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) τῆς § 2.

Θεωροῦμεν ἤδη τὸν πρὸς τὰ ἄνω τῆς $\Delta\Delta'$ καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ κείμενον κλάδον τῆς ὑπερβολῆς, ἐνῷ κεῖται τὸ τόξον AM (σχ. 2). Ἐὰν τὸ Γ εἶνε θετικόν, τὸ μέρος τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$y = -\frac{Bx+E}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}$$

ἐνῷ τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $x_2$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Θεωροῦμεν προσέτι τὴν εὐθεῖαν KN, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\,.$$

Διά τινα τιμὴν τοῦ x μεγαλυτέραν τοῦ $x_2$, ἡ τεταγμένη τῆς καμπύλης εἶνε μικροτέρα τῆς τεταγμένης τῆς εὐθείας, καὶ τὸ ἄνω μέρος τῆς καμπύλης, ἐνῷ κεῖται τὸ M, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας $NK\Delta'$.

Ἡ διαφορὰ $y_1 - y$ τῶν τεταγμένων, τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῆς εὐθείας καὶ τῆς καμπύλης εἰς τὴν αὐτὴν τετμημένην x, εἶνε

$$y_1 - y = \frac{1}{\Gamma}\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} - \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}\right]$$

$$= \frac{N^2-MP}{\Gamma M}\,\frac{1}{\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} + \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}}\,.$$

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται καὶ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, ὁ παρανομαστὴς τοῦ ἀνωτέρω κλάσματος αὐξάνεται ὁμοίως καὶ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ δὲ διαφορὰ $y_1$—$y$ τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἡ εὐθεῖα ΚΝ πρὸς τὴν ὁποίαν προσεγγίζει τὸ ἄνω μέρος τοῦ κλάδου τῆς ὑπερβολῆς (1) τῆς § 2, ἐνῷ κεῖται τὸ σημεῖον Μ καλεῖται *ἀσύμπτωτος* τοῦ κλάδου τούτου τῆς καμπύλης, τοῦ περιεχομένου ἐν τῇ γωνίᾳ ΝΚΔ΄.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι οἱ κλάδοι τῆς ὑπερβολῆς ΑΜ΄΄, Α΄Μ΄΄΄, Α΄Μ΄ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐντὸς τῶν γωνιῶν Ν΄΄ΚΔ΄,Ν΄΄΄ΚΔ,Ν΄ΚΔ καὶ ἔχουν ὡς ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας ΚΝ΄΄,ΚΝ΄΄΄, ΚΝ΄. Οὕτω ἡ καμπύλη κεῖται ἐντὸς τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΝΚΝ΄΄ καὶ Ν΄ΚΝ΄΄΄ ἑκάστη δὲ τῶν εὐθειῶν ΝΚΝ΄, Ν΄΄΄ΚΝ΄΄ εἶνε ἀσύμπτωτος εἰς δύο κλάδους τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ λ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς (1) ἐν τῇ θεωρουμένῃ περιπτώσει, θὰ εἶνε

$$\lambda = \frac{-\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{M}}}{\Gamma}$$

καὶ

$$\Gamma\lambda^2 + 2\,\mathrm{B}\lambda + \mathrm{A} = 0,$$

τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος προκύπτει ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y τῆς ἐξισώσεως (1) ἐν τῇ § 2, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x καὶ y διὰ τοῦ 1 καὶ τοῦ λ ἀντιστοίχως.

**γ΄)** Ἔστω δεύτερον ὅτι εἶνε $\mathrm{N}^2 - \mathrm{MP} = 0$, ὅτε τὸ τριώνυμον (4) ἔχει τὰς ρίζας αὐτοῦ πραγματικὰς καὶ ἴσας μὲ $x_1 = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$. Ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ «***ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς § 2 τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν***

$$y = -\frac{\mathrm{B}x + \mathrm{E}}{\Gamma} \pm \frac{\sqrt{\mathrm{M}}}{\Gamma}(x - x_1),$$

***καὶ παριστάνει δύο εὐθείας γραμμάς, τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον***

$$\left(x_1, -\frac{\mathrm{B}x + \mathrm{E}}{\Gamma}\right)$$

***κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας (3)***».

**δ΄)** Ἔστω τέλος ὅτι εἶνε $\mathrm{N}^2 - \mathrm{MP} < 0$, ὅτε αἱ ρίζαι τοῦ (4) εἶνε φανταστικαὶ (συζυγεῖς).

Ἐπειδὴ εἶνε

$$\mathrm{M}x^2 + 2\,\mathrm{N}x + \mathrm{P} = \mathrm{M}\left(x + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\right)^2 + \frac{\mathrm{PM} - \mathrm{N}^2}{\mathrm{M}},$$

ἕπεται ὅτι τὸ τριώνυμον (4) εἶνε θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἐνῷ διὰ $x = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ λαμβάνει τοῦτο τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμὴν $\frac{PM-N^2}{M}$, τὸ δὲ ψ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x λαμβάνει ἐπίσης τὴν ἐλαχίστην τιμὴν αὐτοῦ

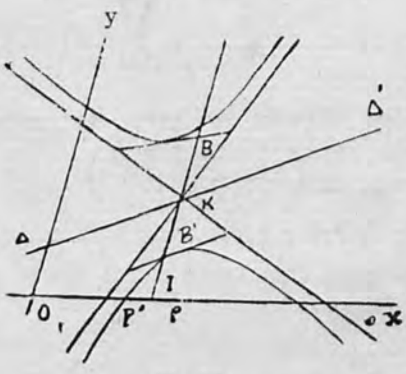
$$\psi = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{\frac{PM-N^2}{M}}.$$

Εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἔστω τὴν x = (οΠ), ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα τοῦ τόπου (1), κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας (3) ὥστε, ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ μὲν τῶν δύο τούτων σημείων γράφει ἕνα ἀπέρατον κλάδον τοῦ τόπου (1), κείμενον πρὸς τὸ ἕν μέρος (ἄνω) τῆς (3), τὸ δὲ ἄλλο σημεῖον γράφει ἄλλον τοιοῦτον κλάδον κείμενον πρὸς τὸ ἄλλο μέρος (κάτω) τῆς διαμέτρου (3).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω μορφῆς τοῦ τριωνύμου (4) συνάγομεν ὅτι, εἰς τιμὰς τοῦ $x = -\frac{N}{M} \pm k$, τοῦ k ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ θετικοῦ, τὸ τριώνυμον (4) ἄρα καὶ τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς ἴσας· ἤτοι ἡ εὐθεῖα $x = -\frac{N}{M}$ εἶνε διάμετρος τοῦ τόπου, ὅστις εἶνε ὑπερβολή, ἀντιστοιχοῦσα εἰς χορδὰς παραλλήλους τῇ (3) (σχ. 3).

**ε')** Εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει β', ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι, αἱ ἔχουσαι ἐξισώσεις

$$y = -\frac{Bx+E}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M},$$




(Σχ. 3)

αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ κέντρον K τῆς ὑπερβολῆς εἶνε ἀσύμπτωτοι τῶν κλάδων αὐτῆς (σχ. 3).

## § 5. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε $M = B^2 - A\Gamma = 0$.—

α') Ἔστω τέλος $M = 0$. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0 \quad (1)$$

γράφεται καὶ οὕτω

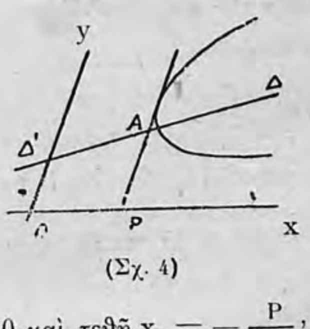
$$y = -\frac{B x + E}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma}\sqrt{2 N x + P}.$$

Διακρίνομεν καὶ ἐνταῦθα τρεῖς περιπτώσεις, ἂν εἶνε τὸ $N$ θετικόν, ἢ ἀρνητικόν, ἢ μηδέν.

Ἔστω πρῶτον ὅτι εἶνε $N > 0$ καὶ θέτομεν

$$x_1 = -\frac{P}{2N}, \text{ ὅτε θὰ εἶνε } 2 N x + P = 2 N (x - x_1).$$

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ $2 N x + P$ εἶνε θετικὸν διὰ τιμὰς τοῦ $x$ μεγαλυτέρας τοῦ $x_1$, μηδενίζεται δὲ διὰ $x = x_1$. Ἑπομένως ὁ τόπος (1) ἔχει σημεῖα κείμενα μόνον πρὸς τὸ ἓν μέρος (δεξιὰ) τῆς εὐθείας $x = x_1$, διέρχεται δ' οὗτος διὰ τοῦ σημείου $A$, καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη $PA$ τέμνει τὴν διάμετρον $\Delta\Delta'$. Διὰ τιμήν τινα τοῦ $x = (oP) > x_1$ ἔχομεν δύο σημεῖα τοῦ τόπου, ἔστωσαν τὰ $M_1$ καὶ $M_2$. Ὅταν τὸ $x$ αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $x_1$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὰ $M_1$, $M_2$ γράφουν δύο τόξα, ἅτινα ἀποτελοῦν ἕνα κλάδον καμπύλης, ἥτις εἶνε ***παραβολή***, ἐκτεινόμενον εἰς ἄπειρον ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta\Delta'$ (σχ. 4).

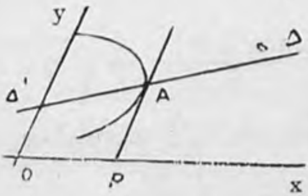



(Σχ. 4)

β') Ἂν εἶνε $N < 0$ καὶ τεθῇ $x_1 = -\frac{P}{2N}$, ἡ ὑπόρριζος ποσότης τῆς τιμῆς τοῦ $y$ εἶνε θετική, ὅταν εἶνε $x < x_1$, μηδενίζεται δ' αὕτη διὰ $x = x_1$. Ἑπομένως ὁ τόπος κεῖται ὁλόκληρος πρὸς τὸ ἕτερον μέρος (ἀριστερὰ) τῆς εὐθείας $PA$, ἐχούσης ἐξίσωσιν $x = x_1$, καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $A$, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν $\Delta\Delta'$, ἀποτελεῖ δ' ἕνα συνεχῆ κλάδον *παραβολῆς*, ἐκτεινόμενον εἰς ἄπειρον ἑκατέρωθεν τῆς ΔΔ′ (σχ. 5).

γ′) Ἐὰν τέλος εἶνε $N=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν μορφὴν

$$y = -\frac{Bx+E}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma}\sqrt{P},$$




(Σχ. 5)

ἥτις παριστάνει δύο εὐθείας παραλλήλους τῇ ΔΔ′, ἐχούσας δὲ συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{B}{\Gamma}$.

Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε πραγματικαὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων, ἂν εἶνε $P < 0$, ὅτε κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΔΔ′ καὶ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπ' αὐτῆς. Ἂν εἶνε $P=0$, αἱ εὐθεῖαι αὗται συμπίπτουν μὲ τὴν ΔΔ′, εἶνε δὲ φανταστικαὶ (συζυγεῖς), ἂν εἶνε $P<0$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν ὅτι αἱ φανταστικαὶ (συζυγεῖς) αὗται εὐθεῖαι ἔχουν ἓν κοινὸν πραγματικὸν σημεῖον, κείμενον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ἐπὶ τῆς ΔΔ′.

### § 6. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε $\Gamma = 0$.—

α′) Ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0 \qquad (1)$$

ὁ συντελεστὴς Γ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, ὁ τόπος (1) δύναται νὰ εἶνε μόνον γένους ὑπερβολῆς, ἢ παραβολῆς, ἂν εἶνε $B \neq 0$, ἢ $B = 0$. Διότι τότε θὰ εἶνε

$$B^2 - A\Gamma = B^2 \geq 0.$$

Ἔστω πρῶτον $B \neq 0$.

Ἡ ἐξίσωσις (1) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$2 (B x + E) y + A x^2 + 2 \Delta x + Z = 0.$$

Ἐπομένως εἶνε

$$y = -\frac{A x^2 + 2 \Delta x + Z}{2(B x + E)}.$$

Ὑποθέτομεν πρῶτον ὅτι τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε ἀνάγωγον. Ἔστω ὅτι μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ εὑρίσκομεν πηλίκον (πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x) τὸ $\alpha x + \beta$ καὶ ὑπόλοιπον $\upsilon$.

Θὰ ἔχωμεν τότε

$$y = \alpha x + \beta + \frac{\upsilon}{2(Bx + E)}$$

ἢ

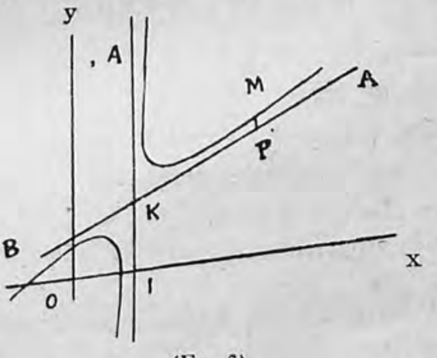
$$y = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - x_1}$$

ἐν ᾧ ἐτέθη

$$\gamma = \frac{\upsilon}{2B}, \quad x_1 = -\frac{E}{B}.$$

Κατασκευάζομεν τὰς εὐθείας $y = \alpha x + \beta$ καὶ $x = x_1$, ἔστωσαν δ' αὗται αἱ ΒΚΡ καὶ ΙΚΑ.

Εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ x διάφορον τοῦ $x_1$ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ y πραγματικὴ καὶ πεπερασμένη, ἐνῷ διὰ $x = x_1$ τὸ y γίνεται ἄπειρον. Ἐπομένως πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y καὶ διάφορος τῆς $x = x_1$ τέμνει τὸν τόπον εἰς ἓν σημεῖον, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων.




(Σχ. 6)

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Μ τοῦ τόπου, τοῦ ἔχοντος τετμημένην $x = (o\Pi)$ φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Π τοῦ ἄξονος τῶν x εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, ἥτις τέμνει τὴν ΒΡ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ρ (σχ. 6). Ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Ρ τμῆμα ΡΜ, ἔχον μῆκος ἴσον μὲ $\gamma : (x - x_1)$ καὶ τὸ Μ εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον.

**β')** Ἂν εἶνε $\gamma > 0$ θὰ ἔχωμεν διὰ $x > x_1$ καὶ $\gamma : (x - x_1) > 0$, τὸ δὲ Μ θὰ κεῖται πρὸς τὸ ἓν μέρος (ἄνω) τοῦ Ρ. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ $x_1$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\gamma:(x-x_1)$ θὰ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ μηδενός, καὶ ἑπομένως τὸ M θὰ γράφῃ ἕνα κλάδον ὑπερβολῆς ἀπέρατον, ἔχοντα ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας $y=\alpha x+\beta$, καὶ $x=x_1$ (σχ. 6).

Ὅταν τὸ x ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $x_1$ μέχρι τοῦ $-\infty$, τὸ $\gamma:(x-x_1)$ εἶνε ἀρνητικὸν καὶ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ μηδενός. Ἑπομένως τὸ M γράφει ἤδη τὸν ἄλλον κλάδον τῆς ὑπερβολῆς.

γ') Ἂν εἶνε $\gamma<0$, ὁ τόπος (1) εἶνε ὑπερβολὴ ἔχουσα ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας

$$y=\alpha x+\beta,\ x=x_1,$$

τῆς ὁποίας οἱ κλάδοι κεῖνται εἰς τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας AKB, PKI τῶν εὐθειῶν τούτων, αἵτινες εἶνε ἀσύμπτωτοι αὐτῆς.

δ') Ἂν τὸ κλάσμα

$$\frac{A x^2+2\Delta x+Z}{2(B x+E)}$$

δὲν εἶνε ἀνάγωγον, ὑποθέσωμεν δ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ $\lambda x+\mu$, τότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(B x+E)\, y=(B x+E)(\lambda x+\mu),$$

ἢ

$$(B x+E)(y-\lambda x-\mu)=0,$$

ἥτις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὰς

$$B x+E=0,\quad y-\lambda x-\mu=0,$$

αἱ ὁποῖαι παριστάνουν δύο εὐθείας τεμνομένας.

**ε') Ἔστω ὅτι εἶνε καὶ $B=0$.**

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ἂν εἶνε E διάφορον τοῦ μηδενός, ἢ ἴσον μὲ μηδέν.

Ἔστω πρῶτον ὅτι εἶνε $E \neq 0$. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις θὰ εἶνε

$$A x^2+2\Delta x+2 E y+Z=0$$

καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y=\alpha_1 x^2+2\beta_1 x+\gamma_1,$$

ἢ

$$y=\alpha_1\left(x+\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2+\frac{\alpha_1\gamma_1-\beta_1^2}{\alpha_1}.$$

Ὁ τόπος τὸν ὁποῖον παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις αὕτη διέρχεται προφανῶς διὰ τοῦ σημείου $\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_1\gamma_1-\beta_1^2}{\alpha_1}\right)$. Ἂν μεταφέρωμεν τοὺς ἄξονας παραλλήλως πρὸς ἑαυτούς, ὥστε νὰ ἔχουν ἀρχὴν τὸ σημεῖον τοῦτο, παραστήσωμεν δὲ διὰ $(x_1, y_1)$ τὰς νέας συντεταγμένας σημείου τινὸς $M(x, y)$ τοῦ τόπου, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ γίνεται

$$x_1^2 = \frac{1}{\alpha_1} y_1,$$

ἥτις παριστάνει *παραβολὴν* ἔχουσαν ἄξονα τὸν (νέον) ἄξονα τῶν $y_1$.

§ **7. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε καὶ $E = 0$.—**

Ἂν τέλος εἶνε καὶ $E = 0$ ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται τῆς μορφῆς

$$A x^2 + 2 \Delta x + Z = 0,$$

καὶ ὁ τόπος τὸν ὁποῖον αὕτη παριστάνει εἶνε *τοῦ γένους μὲν παραβολῆς*, πράγματι δὲ παριστάνει δύο εὐθείας· καὶ ἂν αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἢ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἢ φανταστικαὶ (συζυγεῖς), παριστάνει δύο εὐθείας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν $y$ καὶ διακεκριμένας, ἢ συμπιπτούσας, ἢ φανταστικὰς καὶ ἐχούσας ἓν πραγματικὸν σημεῖον εἰς τὸ ἄπειρον.

§ **8. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε $A = \Gamma = 0$.—**

α΄) Ἐὰν εἶνε $A=\Gamma=0$, θὰ εἶνε τὸ $B \neq 0$, διότι ἂν ἦτο καὶ $B=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν θὰ ἦτο δευτέρου βαθμοῦ. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2 B x y + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν

$$y = - \frac{2 \Delta x + Z}{2 B x + 2 E},$$

ἢ

$$y = \beta + \frac{\lambda}{x - \alpha}$$

ἐνῷ ἐτέθη $\qquad \beta = - \frac{\Delta}{B}, \quad \alpha = - \frac{E}{B}, \ldots$

Ἐὰν ἤδη εἶνε $\lambda \neq 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολήν, ἔχουσαν ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας $x = \alpha$, καὶ $y = \beta$.

β΄) Ἂν εἶνε $\lambda = 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$2 B (x - \alpha)(y - \beta) = 0,$$

παριστάνει δὲ δύο εὐθείας, ἐχούσας ἐξισώσεις $x=\alpha$, καὶ $y=\beta$.

§ **9. Περίπτωσις καθ' ἣν εἶνε $A \neq 0$.—**

Ἂν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει (1) § 2 εἶνε $A \neq 0$, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς $x$, ὅτε φθάνομεν εἰς ἐξαγόμενα ἀνάλογα ἐκείνων τὰ ὁποῖα εὕρομεν ὑποθέτοντες τὸ $\Gamma \neq 0$.

### § 10. Ἀνακεφαλαίωσις.—

Ἀνακεφαλαιοῦντες τἀνωτέρω ἔχομεν ὡς συμπέρασμα τὸν κατωτέρω πίνακα.

| *Γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἐξισώσεως* $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ | *θέτομεν* $B^2-A\Gamma=M,\ BE-\Gamma\Delta=N,\ E^2-\Gamma Z=P$ |
|---|---|

Ἂν εἶνε $\Gamma \neq 0$ καὶ $M < 0$,
ἂν μὲν εἶνε $N^2-MP > 0$, ἔλλειψις,
ἂν εἶνε $N^2-MP = 0$, ἓν σημεῖον,
ἂν εἶνε $N^2-MP < 0$, οὐδεὶς τόπος.

Ἂν εἶνε $\Gamma \neq 0$ καὶ $M > 0$
ἂν μὲν εἶνε $N^2-MP > 0$, ὑπερβολή,
ἂν εἶνε $N^2-MP = 0$, δύο εὐθεῖαι πραγματικαί,
ἂν εἶνε $N^2-MP < 0$, ὑπερβολή.

Ἂν εἶνε $\Gamma \neq 0$ καὶ $M = 0$
ἂν μὲν εἶνε $N \neq 0$, παραβολή,
ἂν δὲ εἶνε $N = 0$ καὶ $P > 0$, δύο εὐθεῖαι παράλληλοι,
ἂν εἶνε καὶ $P = 0$, δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι,
ἂν εἶνε καὶ $P < 0$, δύο εὐθεῖαι φανταστικαί.

Ἂν εἶνε $\Gamma = 0$ καὶ $B \neq 0$
ἂν μὲν τὸ κλάσμα $-\dfrac{Ax^2+2\Delta x+Z}{2(Bx+E)}$ εἶνε ἀνάγωγον, ὑπερβολή,
ἂν τὸ κλάσμα » ἁπλοποιῆται, δύο εὐθεῖαι.

Ἂν εἶνε $\Gamma = 0$ καὶ $B = 0$
ἂν μὲν εἶνε $E \neq 0$, παραβολή,
ἂν δ' εἶνε $E = 0$
ἀλλὰ καὶ $\Delta^2-AZ > 0$, δύο εὐθεῖαι παράλληλοι,
» » $\Delta^2-AZ = 0$, δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι,
» » $\Delta^2-AZ < 0$, δύο εὐθεῖαι φανταστικαί.

Ἂν εἶνε $A = \Gamma = 0$, $B \neq 0$
καὶ εἶνε $y = -\dfrac{2\Delta x+Z}{2Bx+2E} = \beta + \dfrac{\lambda}{x-\alpha}$
ἂν μὲν εἶνε $\lambda \neq 0$, ὑπερβολή,
ἂν δ' εἶνε $\lambda = 0$ δύο εὐθεῖαι $x=\alpha$, $y=\beta$.

### *Περὶ διαμέτρων τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ.*

§ **11. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες.**—

α') Καλοῦμεν *διάμετρον* καμπύλης τινὸς β' βαθμοῦ, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς σειρὰν χορδῶν αὐτῆς παραλλήλων, τὸν τόπον τῶν μέσων τῶν χορδῶν τούτων.

β') ***«Πᾶσα διάμετρος καμπύλης β' βαθμοῦ εἶνε εὐθεῖα γραμμή».***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις καμπύλης β' βαθμοῦ

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0 \qquad (1)$$

καὶ $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$ δύο σημεῖα τῆς καμπύλης ταύτης.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ $(x, y)$ τὰς συντεταγμένας τοῦ μέσου $M$ τῆς χορδῆς $M_1 M_2$ καὶ $(\alpha, \beta)$ τὰς συντεταγμένας προβολὰς τοῦ ἀνύσματος $M_1 M_2$ θὰ ἔχωμεν

$$2 x = x_1 + x_2, \quad 2 y = y_1 + y_2$$

$$\alpha = x_2 - x_1, \quad \beta = y_2 - y_1 .$$

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ τόπου (1) θὰ εἶνε

$$A x_1^2 + 2 B x_1 y_1 + \Gamma y_1^2 + 2 \Delta x_1 + 2 E y_1 + Z = 0,$$

$$A x_2^2 + 2 B x_2 y_2 + \Gamma y_2^2 + 2 \Delta x_2 + 2 E y_2 + Z = 0.$$

Ἀφαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$A (x_2^2 - x_1^2) + 2 B (x_2 y_2 - x_1 y_1) + \Gamma (y_2^2 - y_1^2) + 2 \Delta (x_2 - x_1) +$$
$$+ 2 E (y_2 - y_1) = 0, \text{ ἢ}$$

$$A (x_2 - x_1)(x_1 + x_2) + B [(y_2 - y_1)(x_1 + x_2) + (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)] +$$
$$+ \Gamma (y_2 - y_1)(y_1 + y_2) + 2 \Delta (x_2 - x_1) + 2 E (y_2 - y_1) = 0.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς ταύτην τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ λαμβάνομεν

$$A \alpha x + B (\alpha y + \beta x) + \Gamma \beta y + \Delta \alpha + E \beta = 0,$$

ἢ $$\alpha (A x + B y + \Delta) + \beta (B x + \Gamma y + E) = 0 \qquad (2)$$

καὶ ἂν $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ παριστάνῃ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς εὐθείας $M_1 M_2$, θὰ ἔχωμεν

$$A x + B y + \Delta + \lambda (B x + \Gamma y + E) = 0. \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις αὕτη συνδέει τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda$ τῆς τυχούσης χορδῆς $M_1 M_2$ τῆς καμπύλης (1) μὲ τὰς συντεταγμένας $(x, y)$ τοῦ μέσου $M$ τῆς χορδῆς ταύτης.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται τὸ $\lambda$, ἡ ἐξίσωσις (3) παριστάνει τὸν τόπον τῶν μέσων τῶν χορδῶν $M_1 M_2$, αἵτινες ἔχουν δοθέντα συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda$, εἶνε δ' ὁ τόπος οὗτος εὐθεῖα γραμμή.

γ') Ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει (2) ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $\beta = 0$ καὶ ἔπειτα $\alpha = 0$, λαμβάνομεν ὡς διαμέτρους τῆς (1) τὰς ἐχούσας ἐξισώσεις,

$$\begin{aligned} A x + B y + \Delta &= 0, \qquad (4) \\ B x + \Gamma y + E &= 0, \end{aligned}$$

αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

δ') Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (3) παριστάνει εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς τομῆς τῶν (4), ἕπεται ὅτι,

«***πᾶσα διάμετρος τῆς καμπύλης (1) διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν διαμέτρων αὐτῆς (4)***».

Καὶ ἂν μὲν εἶνε

$$B^2 - A\Gamma \neq 0,$$

αἱ εὐθεῖαι (4) τέμνονται (εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν), ἂν δ' εἶνε $B^2 - A\Gamma = 0$, αὗται εἶνε παράλληλοι μὲν ἐὰν εἶνε καὶ

$$\frac{A}{B} \neq \frac{\Delta}{E}$$

συμπίπτουν δὲ ἐὰν εἶνε καὶ

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}.$$

Ἀλλ' ἂν εἶνε $B^2 - A\Gamma \neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἐν γένει ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν, ἐνῷ ὅταν εἶνε $B^2 - A\Gamma = 0$, παριστάνει παραβολὴν ἐν γένει.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«***ὅταν ὁ τόπος τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) εἶνε ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή, πᾶσαι αἱ διάμετροι αὐτῆς διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου, κειμένου εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν· ὅταν δ' ὁ τόπος εἶνε παραβολή, πᾶσαι αἱ διάμετροι αὐτῆς εἶνε παράλληλοι ἢ συμπίπτουν***».

ε΄) Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς διαμέτρου (3) τὸν ὁποῖον παριστάνομεν διὰ τοῦ μ εἶνε

$$\mu = -\frac{A + B\lambda}{B + \Gamma\lambda}. \qquad (5)$$

Ἐὰν ὑπάρχῃ καμπύλη τις β΄ βαθμοῦ (1)· ἐν τῇ ὁποίᾳ διάμετροι αὐτῆς εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς χορδὰς αὐτῆς τὰς ὁποίας διχοτομοῦν, θὰ ἔχωμεν

$$\mu = \lambda$$

ἢ

$$-\frac{A + B\lambda}{B + \Gamma\lambda} = \lambda,$$

ἢ καὶ

$$\Gamma\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0. \qquad (6)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν διαμέτρων, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς χορδὰς τὰς ὁποίας διχοτομοῦν.

Αἱ ρίζαι τῆς (6) δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A\Gamma}}{\Gamma}.$$

Ἐὰν εἶνε $B^2 - A\Gamma > 0$,

ὅτε ὁ τόπος (1) εἶνε ὑπερβολή, ὑπάρχουν δύο τιμαὶ τοῦ λ δι᾽ ἃς ἀληθεύει ἡ ἐν λόγῳ ἰδιότης.

Ἐὰν εἶνε $B^2 - A\Gamma < 0$,

ὅτε ὁ τόπος (1) εἶνε ἔλλειψις, αἱ τιμαὶ τοῦ λ εἶνε φανταστικαί, ἤτοι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ λ πραγματική, δι᾽ ἣν ἀληθεύει ἡ ἰδιότης.

Ἐὰν εἶνε $B^2 - A\Gamma = 0$,

ὅτε ὁ τόπος (1) εἶνε παραβολή, ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ $\lambda \left(\text{ἢ } \lambda = -\frac{B}{\Gamma}\right)$, δι᾽ ἣν ἀληθεύει ἡ ἰδιότης.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (6) παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ διεύθυνσις τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουν δοθεῖσαν καμπύλην β΄ βαθμοῦ εἰς τὸ ἄπειρον (§ 1, (4)) εἶνε ἡ τῶν χορδῶν, αἵτινες ἔχουν διαμέτρους παραλλήλους πρὸς ἑαυτάς.

## § 12. Συζυγεῖς διάμετροι.—

α΄) Καλοῦμεν *συζυγεῖς διαμέτρους* καμπύλης β΄ βαθμοῦ δύο διαμέτρους αὐτῆς, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶνε διάμετρος χορδῶν παραλλήλων τῇ ἄλλῃ.

**β΄**) Ἔστω ἡ καμπύλη β΄ βαθμοῦ

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0. \quad (1)$$

Ἂν λ εἶνε ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως χορδῶν παραλλήλων τῆς καμπύλης (1), μ δὲ παριστάνῃ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς διαμέτρου αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν ( § 11, (5) )

$$B(\lambda + \mu) + \Gamma \lambda \mu + A = 0. \quad (2)$$

Αὕτη εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς λ καὶ μ, ἤτοι δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ λ καὶ μ.

Ὅταν ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνῃ ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν, τὸ μ δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμήν, ὁριζομένου καταλλήλως τοῦ λ.

Ἐκ τῆς συμμετρίας τῆς (2) ἕπεται ὅτι, ἂν τὸ μ εἶνε ὁ συντελεστὴς διευθύντεως διαμέτρου, ἀντιστοιχούσης εἰς χορδὰς ἐχούσας συντελεστὴν διευθύνσεως λ, τὸ λ θὰ εἶνε συντελεστὴς διευθύνσεως διαμέτρου ἀντιστοιχούσης εἰς χορδάς, ἐχούσας συντελεστὴν διευθύνσεως μ.

Ἑπομένως, ὅταν ἡ καμπύλη (1) εἶνε ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή, αἱ χορδαί, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον ἑνὸς συστήματος χορδῶν, ἔχουν διάμετρον παράλληλον πρὸς τὰς χορδὰς ταύτας·

ἤτοι «***οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως λ καὶ μ δύο συζυγῶν διαμέτρων τῆς καμπύλης (1) (ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς) συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως***»

$$\boxed{B(\lambda + \mu) + \Gamma \lambda \mu + A = 0.}$$

**γ΄**) Ὅταν ἡ (1) παριστάνῃ παραβολήν, θὰ εἶνε

$$B^2 - A \Gamma = 0,$$

ἡ δὲ (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\sqrt{A} + \varepsilon \sqrt{\Gamma}.\lambda)(\sqrt{A} + \varepsilon \sqrt{\Gamma}.\mu) = 0, \quad (3)$$

ἐν ᾧ εἶνε $\varepsilon = \pm 1$, ἂν τὸ B εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

**δ΄**) Ἐὰν ζητοῦμεν τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς, αἵτινες εἶνε κάθετοι ἐπ᾿ ἀλλήλας, οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν, ἔστωσαν οἱ λ καὶ μ, θὰ ἐπαληθεύουν ἐκτὸς τῆς (2) καὶ τὴν συνθήκην καθετότητος (§ 65, Μέρος πρῶτον, σελ. 116)

$$1 + (\lambda + \mu) \text{ συν} \theta + \lambda \mu = 0, \quad (4)$$

ἐν ᾧ θ παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων.

Ἐν ᾗ περιπτώσει οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶνε ὀρθογώνιοι (συνϑ = 0) ϑὰ ἔχωμεν, λύοντες τὰς (2) καὶ (4) ὡς πρὸς λ μ καὶ (λ + μ),

$$\lambda\,\mu = -1, \quad \lambda + \mu = \frac{\Gamma - \mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

Ἐπομένως τὰ λ καὶ μ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β′ βαθμοῦ

$$\omega^2 - \frac{\Gamma - \mathrm{A}}{\mathrm{B}}\,\omega - 1 = 0,$$

ἢ τῆς

$$\mathrm{B}\,\omega^2 + (\mathrm{A} - \Gamma)\,\omega - \mathrm{B} = 0, \qquad (5)$$

αἵτινες δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\omega = \frac{(\Gamma - \mathrm{A}) \pm \sqrt{(\Gamma - \mathrm{A})^2 + 4\,\mathrm{B}^2}}{2\,\mathrm{B}}$$

καὶ εἶνε πραγματικαί, ἐπειδὴ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶνε ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

ε′) Ἂν ἡ καμπύλη (1) παριστάνῃ περιφέρειαν κύκλου, εἰς ἄξονας συντεταγμένων ὀρθογωνίους ϑὰ εἶνε Β = 0, Α = Γ (§ 96, ε′, Μέρος πρῶτον) καὶ ἡ (2) γίνεται

$$1 + \lambda\,\mu = 0,$$

ἤτοι «***ἀνὰ δύο συζυγεῖς διάμετροι περιφερείας κύκλου εἶνε κάϑετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας***».

στ′) Ἐπειδὴ διάμετρός τις καμπύλης β′ βαθμοῦ, ἀντιστοιχοῦσα εἰς χορδὰς παραλλήλους πρός τινα ἐφαπτομένην αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς τῆς ἐφαπτομένης ταύτης, ἕπεται ὅτι,

«***ἡ ἐφαπτομένη καμπύλης β′ βαθμοῦ εἰς τὸ ἄκρον διαμέτρου αὐτῆς εἶνε παράλληλος πρὸς τὰς χορδὰς τὰς ὁποίας διχοτομεῖ ἡ διάμετρος αὕτη***».

ζ′) Ἂν αἱ διάμετροι ( § 11, γ′ )

$$\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y + \Delta = 0,$$
$$\mathrm{B}\,x + \Gamma\,y + \mathrm{E} = 0,$$

αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας, συμπίπτουν, ϑὰ συμπίπτουν τότε καὶ πᾶσαι αἱ διάμετροι ( § 11, (3) ) τῆς ϑεωρουμένης καμπύλης. Ἐπειδὴ δ᾽ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ϑὰ ἔχωμεν

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\mathrm{E}} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}}$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(\sqrt{A}.x+\varepsilon\sqrt{\Gamma}.y)^2+2(\sqrt{A}.x+\varepsilon\sqrt{\Gamma}.y)k+Z=0,$$

ἢ $$(\sqrt{A}x+\varepsilon\sqrt{\Gamma}y+k)^2+(Z-k^2)=0. \qquad (6)$$

ἐν ᾧ ἐτέθη $$\frac{\Delta}{\sqrt{A}}=\frac{E}{\varepsilon\sqrt{\Gamma}}=k,\ \varepsilon=\pm1.$$

Ἡ ἐξίσωσις (6) παριστάνει δύο εὐθείας, ἐχούσας ἐξισώσεις

$$\sqrt{A}.x+\varepsilon\sqrt{\Gamma}.y+k\pm\sqrt{k^2-Z}=0.$$

Αὗται εἶνε πραγματικαὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων, ἢ πραγματικαὶ καὶ συμπίπτουσαι, ἢ φανταστικαί, ἂν εἶνε τὸ $k^2-Z$ θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν.

### *Περὶ τοῦ κέντρου τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ.*

§ **13. Ὁρισμὸς καὶ εὕρεσις τοῦ κέντρου.**—

**α')** Λέγομεν ὅτι σημεῖόν τι o εἶνε κέντρον καμπύλης τινός, ἂν σημείου τινὸς κειμένου ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ τὸ συμμετρικὸν τούτου ὡς πρὸς τὸ o κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

**β')** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις καμπύλης β' βαθμοῦ

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0. \qquad (1)$$

***«Ἵνα ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων o εἶνε κέντρον τῆς καμπύλης (1) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $\Delta=0$, $E=0$».***

Διότι, ἂν τμήσωμεν τὴν καμπύλην διά τινος εὐθείας $y=\lambda x$, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων o, αἱ τετμημέναι τῶν σημείων τῆς τομῆς θὰ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(\Gamma\lambda^2+2B\lambda+A)x^2+2(\Delta+E\lambda)x+Z=0,$$

θὰ εἶνε δὲ αὗται ἀντίθετοι, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ, ἂν τὸ o εἶνε κέντρον τῆς καμπύλης.

Ἤτοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\Delta+E\lambda=0,$$

ἑπομένως θὰ εἶνε (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ)

$$\Delta=0,\quad E=0.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν εἶνε $\Delta=0$, $E=0$, ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶνε κέντρον τῆς καμπύλης (1). Διότι ἂν σημεῖόν τι $M(x,y)$

κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης (1) καὶ αἱ συντεταγμέναι $(-x, -y)$ θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν.

γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ἂν δοθῇ καμπύλη τις β' βαθμοῦ καὶ μεταφέρωμεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ὥστε ἡ νέα ἀρχὴ αὐτῶν νὰ εἶνε σημεῖόν τι ο', ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ ο' εἶνε κέντρον τῆς καμπύλης εἶνε, ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ἀναφερομένης ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας νὰ στερῆται τῶν πρωτοβαθμίων ὅρων ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $x'$ καὶ $y'$. Ἑπομένως, ἡ εὕρεσις τῶν κέντρων καμπύλης β' βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν σημείων ο' (τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν) διὰ τὰ ὁποῖα ἡ νέα ἐξίσωσις τῆς καμπύλης στερεῖται πρωτοβαθμίων ὅρων.

δ') Ἂν $(\alpha, \beta)$ εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου ο' τῆς καμπύλης (1) καὶ ὑποθέσωμεν τοὺς νέους ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικούς, θὰ ἔχωμεν

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x καὶ y εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν,

$$A\,x'^2 + 2\,B\,x'\,y' + \Gamma\,y'^2 + 2\,\Delta'\,x + 2\,E'\,y + Z' = 0, \qquad (2)$$

ἐν ᾧ ἐτέθη

$$A\,\alpha + B\beta + \Delta = \Delta',$$
$$B\,\alpha + \Gamma\,\beta + E = E',$$
$$A\,\alpha^2 + 2\,B\,\alpha\beta + \Gamma\,\beta^2 + 2\,\Delta\,\alpha + 2\,E\beta + Z = Z'.$$

Ἵνα ἐκ τῆς (2) λείπουν οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι ὡς πρὸς τὰ $x'$, $y'$,

πρέπει νὰ ἔχωμεν $\Delta' = 0,\ E' = 0$·

ἤτοι νὰ εἶνε

$$A\,\alpha + B\,\beta + \Delta = 0,$$
$$B\,\alpha + \Gamma\,\beta + E = 0.$$

Ἑπομένως, ἵνα σημεῖόν τι $(\alpha,\beta)$ εἶνε κέντρον καμπύλης β' βαθμοῦ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε τοῦτο κοινὸν σημεῖον τῶν δύο εὐθειῶν

$$A\,x + B\,y + \Delta = 0, \qquad (3)$$
$$B\,x + \Gamma\,y + E = 0.$$

ε') Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε, ὡς γνωστὸν (§ 11, γ'), διάμετροι τῆς καμπύλης (1), ἀντιστοιχοῦσαι εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων· ἤτοι ἔχομεν ὅτι,

***«αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καμπύλης β' βαθμοῦ (1) εἶνε ἡ τομὴ τῶν διαμέτρων τῆς καμπύλης».***

στ′) Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς καμπύλης (1), ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς διαφόρους θέσεις τῶν εὐθειῶν (3).

Ἐὰν αἱ (3) τέμνωνται, ὅτε εἶνε $B^2 - A\Gamma \neq 0$, ἡ καμπύλη εἶνε ἔλλειψις ἢ ὑπερβολὴ καὶ ἔχομεν ἓν κέντρον τῆς καμπύλης, συμπῖπτον μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέτρων αὐτῆς, ἔχει δὲ τοῦτο συντεταγμένας

$$\left( \alpha = \frac{\Gamma\Delta - BE}{B^2 - A\Gamma},\ \beta = \frac{AE - B\Delta}{B^2 - A\Gamma} \right).$$

Ἂν αἱ (3) εἶνε παράλληλοι, ὅτε εἶνε

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} \neq \frac{\Delta}{E},$$

ἡ καμπύλη εἶνε παραβολὴ καὶ δὲν ἔχομεν κέντρον τῆς καμπύλης, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν, ἢ ἡ καμπύλη ἔχει κέντρον κείμενον εἰς τὸ ἄπειρον, καθ' ὃ τέμνονται αἱ (3).

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι (3) συμπίπτουν, ὅτε εἶνε

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E},$$

ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας (§ 12, ζ′) παραλλήλους καὶ πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας

$$\sqrt{A}\,.\,x + \varepsilon\sqrt{\Gamma}\,.\,y + k = 0,$$

$$\left(k = \frac{\Delta}{\sqrt{A}} = \frac{E}{\varepsilon\sqrt{\Gamma}},\quad \varepsilon = \pm 1\right)$$

μὲ τὴν ὁποίαν συμπίπτουν πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς καμπύλης, εἶνε κέντρα αὐτῆς.

## *Ἁπλοποίησις τῆς ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ.*

### § 14. Περίπτωσις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.—

**α′)** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $oxy$

$$Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0. \qquad (1)$$

(Ἂν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀναφέρεται ὡς πρὸς ἄξονας πλαγιογωνίους ἀναφέρομεν αὐτὴν ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους περὶ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν ( § 21, γ', Μέρος πρῶτον ) ).

Ἂν αὕτη παριστάνῃ ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν, ὅτε θὰ εἶνε

$$B^2 - A\Gamma \neq 0,$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμῆς ταύτης ὡς πρὸς ἄλλους ἄξονας o'x'y', παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς καὶ ἔχοντας (νέαν) ἀρχὴν τὸ κέντρον αὐτῆς o' (α, β), ἐν ᾧ εἶνε

$$\alpha = \frac{\Gamma\Delta - BE}{B^2 - A\Gamma}, \quad \beta = \frac{AE - B\Delta}{B^2 - A\Gamma}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τῶν x καὶ y τὰ ἴσα αὐτῶν $x = x' + \alpha$, $y = y + \beta$, εὑρίσκομεν

$$A x'^2 + 2B x'y' + \Gamma y'^2 + Z' = 0 \qquad (2)$$

ἐπειδὴ θὰ εἶνε

$$A\alpha + B\beta + \Delta = 0, \quad B\alpha + \Gamma\beta + E = 0, \qquad (3)$$

τὸ δὲ Z' ἔχει τὴν τιμὴν

$$Z' = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + \Gamma\gamma^2 + 2\Delta\alpha + 2E\beta + Z \quad \text{ἢ τὴν}$$

$$Z' = (A\alpha + B\beta + \Delta)\alpha + (B\alpha + \Gamma\beta + E)\beta + \Delta\alpha + E\beta + Z$$

καὶ ἕνεκα τῶν (3) εἶνε

$$Z' = \Delta\alpha + E\beta + Z. \qquad (4)$$

Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὰ α, β μεταξὺ τῶν (3) καὶ τῆς (4) ἢ τῆς

$$\Delta\alpha + E\beta + Z - Z' = 0,$$

εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z-Z' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & \Gamma & 0 \\ \Delta & E & -Z' \end{vmatrix} = 0.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας εὑρίσκομεν

$$Z' = \frac{1}{A\Gamma - B^2} \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} \qquad (5)$$

**β')** Ἡ ὁρίζουσα τῆς (5) καλεῖται συνήθως *διακρίνουσα* ὁρίζουσα τῆς καμπύλης (1) καὶ θὰ τὴν παριστάνωμεν ἐνίοτε διὰ τοῦ D.

γ') Καθ' ἥν περίπτωσιν εἶνε $Z' = 0$, ἤτοι ὅταν εἶνὲ

$$D = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = 0,$$

ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$A\,x'^2 + 2\,B\,x'y' + \Gamma\,y'^2 = 0$$

καὶ παριστάνει δύο εὐθείας, ἐπειδὴ εἶνε

$$A\,x'^2 + 2\,B\,x'y' + \Gamma\,y'^2 = \Gamma\,(\lambda_1\,x' - y')\,(\lambda_2\,x' - y'),$$

ἐνῶ $\lambda_1$, $\lambda_2$ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\Gamma\,\lambda^2 + 2\,B\,\lambda + A = 0.$$

Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε πραγματικαὶ μέν, ἂν εἶνε $A\,\Gamma - B^2 < 0$, φανταστικαὶ δέ, ἂν εἶνε $A\,\Gamma - B^2 > 0$.

δ') Ἂν εἶνε $Z' \neq 0$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης ὡς πρὸς ἄλλους ἄξονας, ἐπίσης ὀρθογωνίους $o'x_1y_1$, ἔχοντας ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τῆς καμπύλης $o'$ ἀλλὰ διευθύνσεις διαφόρους, τοιούτους δὲ ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ $x_1\,y_1$ ἐν τῇ νέα ἐξισώσει νὰ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν. Ἤτοι στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων $o'x'y'$ κατὰ γωνίαν, ἔστω φ, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ $x_1\,y_1$ ἐν τῇ νέα ἐξισώσει τῆς καμπύλης νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Οἱ τύποι ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων εἶνε

$$x' = x_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi - y_1\,\eta\mu\,\varphi$$
$$y' = x_1\,\eta\mu\,\varphi + y_1\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν $x'$, $y'$ εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν

$$A_1\,x_1^2 + 2\,B_1\,x_1\,y_1 + \Gamma_1\,y_1^2 + Z' = 0, \qquad (6)$$

ἐν ᾧ ἐτέθη

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\,\sigma\upsilon\nu^2\,\varphi + \Gamma\,\eta\mu^2\varphi + 2\,B\,\eta\mu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \\ B_1 &= B\,(\sigma\upsilon\nu^2\,\varphi - \eta\mu^2\varphi) + (\Gamma - A)\,\eta\mu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \\ \Gamma_1 &= A\,\eta\mu^2\,\varphi + \Gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\,\varphi - 2\,B\,\eta\mu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ἵνα δὲ εἶνε $B_1 = 0$, θὰ ἔχωμεν

$$(\Gamma - A)\,\eta\mu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + B\,(\sigma\upsilon\nu^2\varphi - \eta\mu^2\varphi) = 0, \qquad (8)$$

ἢ

$$B\,\epsilon\varphi^2\varphi + (A - \Gamma)\,\epsilon\varphi\,\varphi - B = 0. \qquad (9)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις (5) τῆς § 12, δι' ἧς προσδιορίονται οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς θεωρουμένης καμπύλης. Ὅθεν οἱ νέοι ἄξονες, πρὸς οὓς ἀναφέρεται ἡ καμπύλη, εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς, ἐπειδὴ δ' ἐλήφθησαν καὶ ὀρθογώνιοι εἶνε καὶ ἄξονες τῆς καμπύλης. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς γωνίας φ λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (8) γράφοντες αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$(\Gamma - \mathrm{A})\ \text{ημ}\,(2\,\varphi) + 2\,\mathrm{B}\ \text{συν}\,(2\,\varphi) = 0, \tag{10}$$

ἐξ ἧς ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,(2\,\varphi) = \frac{2\,\mathrm{B}}{\mathrm{A} - \Gamma}\,. \tag{11}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὁρίζεται ἡ γωνία φ, ἐκτὸς ἐὰν εἶνε $\mathrm{B} = 0$ καὶ $\mathrm{A} = \Gamma$, ὅτε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) παριστάνει περιφέρειαν κύκλου.

Ἂν εἶνε $\mathrm{A} = \Gamma$, καὶ $\mathrm{B} \neq 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς (10) συν $(2\,\varphi) = 0$.

Ἡ ἐξίσωσις (10) δίδει μίαν ὡρισμένην θετικὴν τιμὴν διὰ τὸ 2 φ, ἔστω τὴν ω, μικροτέραν τοῦ π, ἡ δὲ γωνία φ εἶνε μικροτέρα τοῦ $\frac{\pi}{2}$.

Αἱ διάφοροι τιμαὶ τοῦ 2 φ, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν (11) περιέχονται εἰς τὸν τύπον

$$2\,\varphi = \omega + \mathrm{k}\,\pi\,, \tag{12}$$

ἐνῷ k παριστάνει τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Ἐκ τῆς (12) ἔχομεν

$$\varphi = \frac{\omega}{2} + \mathrm{k}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ φ δίδουν τέσσαρας φορὰς διαφόρους ἀλλήλων διὰ τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν $x_1$. Αἱ τέσσαρες αὗται φοραὶ εἶνε ἀνὰ δύο ἀντίθετοι καὶ ὁρίζουν δύο εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Λαμβάνομεν ὡς τιμὴν τοῦ φ τὸ $\frac{\omega}{2}$, τὸ ὁποῖον εἶνε θετικὸν καὶ μικρότερον τοῦ $\frac{\pi}{2}$.

**ε')** Οἱ νέοι συντελεσταὶ $\mathrm{A}_1$, $\Gamma_1$ τῆς (6) ἐκφράζονται εὐκόλως διὰ τῶν Α καὶ Γ τῆς (1).

Τῷ ὄντι ἐκ τῶν (7) ἔχομεν

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}\ \text{συν}^2\varphi + \Gamma\ \text{ημ}^2\varphi + 2\,\mathrm{B}\ \text{ημ}\,\varphi\ \text{συν}\,\varphi \tag{7'}$$
$$\Gamma_1 = \mathrm{A}\ \text{ημ}^2\varphi + \Gamma\ \text{συν}^2\varphi - 2\,\mathrm{B}\ \text{ημ}\,\varphi\ \text{συν}\,\varphi.$$

καὶ διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη

$$A_1 + \Gamma_1 = A + \Gamma \tag{13}$$

Ἀφαιροῦντες τὰς (7΄) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν,

$$A_1 - \Gamma_1 = (A-\Gamma)(\text{συν}^2\varphi - \text{ημ}^2\varphi) + 4\,B\,\text{ημ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi$$

ἢ
$$A_1 - \Gamma_1 = (A-\Gamma)\,\text{συν}\,(2\,\varphi) + 2\,B\,\text{ημ}\,(2\,\varphi).$$

Ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν

$$\text{ημ}\,(2\varphi) = \frac{2\,B}{\pm\sqrt{4\,B^2 + (A-\Gamma)^2}}, \quad \text{συν}\,(2\,\varphi) = \frac{A-\Gamma}{\pm\sqrt{4\,B^2 + (A-\Gamma)^2}}$$

Ἐπομένως εἶνε

$$A_1 - \Gamma_1 = \pm\sqrt{4\,B^2 + (A-\Gamma)^2}$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τῶν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον τοῦ B. Διότι ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς γωνίας $2\,\varphi$ εἶνε μικροτέρα τῆς π, τὸ ημ $(2\varphi)$ θὰ εἶνε θετικόν.

Θέτοντες ἤδη

$$\sqrt{(A-\Gamma)^2 + 4\,B^2} = \Lambda$$

εὑρίσκομεν τὰ $A_1$ καὶ $\Gamma_1$ ἐκ τῶν

$$A_1 + \Gamma_1 = A + \Gamma,$$
$$A_1 - \Gamma_1 = \Lambda. \tag{14}$$

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + \Gamma + \Lambda), \quad \Gamma_1 = \frac{1}{2}(A + \Gamma - \Lambda).$$

**στ΄**) Ἐκ τῶν (14) ἔχομεν, ὑψοῦντες αὐτὰς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη

$$A_1\,\Gamma_1 = A\,\Gamma - B^2 \tag{15}$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι οἱ συντελεσταὶ $A_1$, $\Gamma_1$ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης, ἀναφερομένης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς, εἶνε ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$z^2 - (A + \Gamma)\,z + (A\,\Gamma - B^2) = 0.$$

**ζ΄**) Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (6) γίνεται

$$A_1 x_1^2 + \Gamma_1\,y_1^2 + Z' = 0 \tag{16}$$

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθόσον τὸ $A\,\Gamma - B^2$ εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Ἔστω πρῶτον ὅτι εἶνε $A\,\Gamma - B^2 > 0$ ἢ ὅτι $A_1\,\Gamma_1 > 0$ ἕνεκα τῆς (15).

Ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ τὰ A καὶ Γ τῆς (1) εἶνε ὁμόσημα, διότι ἄλλως θὰ ἦτο $A\,\Gamma - B^2 < 0$.

Δυνάμεθα δὲ νὰ ὑποθέσωμεν ταῦτα θετικὰ (ἀλλάσσοντες ἐν ἀνάγκῃ τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῆς (1) ) ὅτε καὶ τὰ $A_1$, $\Gamma_1$ εἶνε θετικά, ἕνεκα τῆς (13).

Κατὰ ταῦτα οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς (16) εἶνε θετικοί· ἵνα δ' αὕτη ἐπιδέχεται λύσεις πραγματικάς, πρέπει τὸ Z′ νὰ εἶνε ἀρνητικόν, ἤτοι νὰ εἶνε

$$D < 0.$$

Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς (16) διὰ τοῦ—Z′, εὑρίσκομεν

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1, \qquad (17).$$

ἐν ᾧ ἐτέθη

$$\frac{1}{\alpha^2} = -\frac{A_1}{Z'}, \qquad \frac{1}{\beta^2} = -\frac{\Gamma_1}{Z'}$$

ἢ

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{A_1\,(A\,\Gamma - B^2)}{-D}, \qquad \frac{1}{\beta^2} = \frac{\Gamma_1\,(A\,\Gamma - B^2)}{-D}.$$

Ἡ ἐξίσωσις (17) παριστάνει ἔλλειψιν (§ 113, Μέρος πρῶτον) ἐν ᾧ οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶνε ἄξονες αὐτῆς, ἔχουν δὲ οὗτοι μήκη 2 α καὶ 2 β ἀντιστοίχως καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς εἶνε τὸ o′.

**η′)** Ἐὰν εἶνε $D = 0$, ὅτε εἶνε καὶ $Z' = 0$, ἡ (16) παριστάνει τὸ σημεῖον $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Ἐπειδὴ δὲ ὅταν τοῦ Z′ ὄντος ἀρνητικοῦ καὶ τείνοντος εἰς τὸ μηδὲν οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως (17) ἐλαττοῦνται καὶ τείνουν εἰς τὸ μηδέν, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις (16) παριστάνει ἔλλειψιν, περιορισθεῖσαν εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς o′.

Ἡ ἐξίσωσις

$$A_1\,x_1^2 + \Gamma_1\,y_1^2 = 0$$

παριστάνει ἐπίσης δύο φανταστικὰς εὐθείας, διερχομένας διὰ τοῦ ο΄, διότι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\sqrt{A_1}\,.\,x_1 + i\sqrt{\Gamma_1}\,.\,y_1)(\sqrt{A_1}\,.\,x_1 - i\sqrt{\Gamma_1}\,.\,y_1) = 0.$$

**θ΄**) Ἂν εἶνε $D > 0$, ὅτε εἶνε καὶ $Z' > 0$, ἡ ἐξίσωσις (16) δὲν ἐπιδέχεται πραγματικὰς λύσεις, ἀλλ' ἀπείρους τὸ πλῆθος φανταστικάς, διὰ τοῦτο δὲ λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν φανταστικήν.

**ι΄**) Ἔστω ἤδη ὅτι εἶνε $A\Gamma - B^2 < 0$.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἂν εἶνε $D = 0$, ἡ ἐξίσωσις (16) γίνεται

$$A_1 x_1^2 + \Gamma_1 y_1^2 = 0.$$

Ὁ λόγος $\frac{A_1}{\Gamma_1}$ εἶνε ἀρνητικός, ἐπειδὴ εἶνε $A_1 \Gamma_1 < 0$, ἕνεκα τῆς (15). Ἐὰν τεθῇ

$$\frac{A_1}{\Gamma_1} = -\lambda^2,$$

θὰ ἔχωμεν

$$y_1^2 - \lambda^2 x_1^2 = 0,$$

ἢ

$$(y_1 - \lambda x_1)(y_1 + \lambda x_1) = 0,$$

ἥτις παριστάνει δύο εὐθείας, ἐχούσας ἐξισώσεις

$$y_1 \pm \lambda x_1 = 0$$

καὶ διερχομένας διὰ τοῦ σημείου ο΄.

**στ΄**) Ἂν εἶνε τὸ $Z' \neq 0$, ὅτε εἶνε καὶ $D \neq 0$, ἡ ἐξίσωσις (16) δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \pm\,\varepsilon, \qquad (18)$$

ἐφ' ἐτέθη $(\varepsilon = \pm 1)$

$$\frac{1}{\alpha^2} = -\,\varepsilon\,\frac{A_1}{Z'}, \quad \frac{1}{\beta^2} = \varepsilon\,\frac{\Gamma_1}{Z'}$$

ἢ

$$\alpha^2 = -\,\varepsilon\,\frac{D}{A_1(A\Gamma - B^2)}, \quad \beta^2 = \varepsilon\,\frac{D}{\Gamma_1(A\Gamma - B^2)}$$

καὶ τὸ ε εἶνε $+1$, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ $y_1^2$, δηλαδὴ τὸ $\Gamma_1$ εἶνε θετικὸς καὶ $-1$, ἂν οὗτος εἶνε ἀρνητικός.

Αἱ ἐξισώσεις (18) παριστάνουν συζυγεῖς ὑπερβολὰς (§ 132, σελ. 240, Μέρος πρῶτον) ἐχούσας ἄξονας μὲ μήκη 2 α καὶ 2 β, κέντρόν τὸ σημεῖον ο′ καὶ τὰς αὐτὰς εὐθείας ὡς ἀσυμπτώτους.

## § 15. Ἐφαρμογαί.—

α′) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους ο x y

$$x^2 - xy + 2y^2 + 5x - 8y = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει αὕτη.

Ἔχομεν

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{2},\ \Gamma = 2,\ \Delta = \frac{5}{2},\ E = -4,\ Z = 0.$$

Ἑπομένως εἶνε $\quad A\Gamma - B^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -4 \\ \frac{5}{2} & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -8 \\ 5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{148}{8} = -18,5.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν (§ 14, ζ′).

Ἡ ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα ρίζας τοὺς συντελεστὰς $A_1$ καὶ $\Gamma_1$ εἶνε

$$z^2 - 3z + \frac{7}{4} = 0.$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$A_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{2},\qquad \Gamma_1 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ἀναφερομένης πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

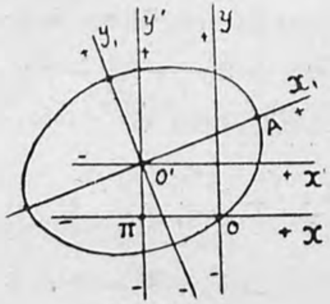
$$(3-\sqrt{2})\,x_1^2 + (3+\sqrt{2})\,y_1^2 = \frac{148}{8.7}\cdot 8 = \frac{148}{7}.$$

Τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων τῆς ἐλλείψεως ταύτης εἶνε

$$\alpha = \sqrt{\frac{148}{7(3-\sqrt{2})}} = \frac{2}{7}\sqrt{37(3+\sqrt{2})}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{148}{7(3+\sqrt{2})}} = \frac{2}{7}\sqrt{37(3-\sqrt{2})}\,.$$

Τὸ κέντρον τῆς καμπύλης εἶνε ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ( § 13, δ′ )




(Σχ. 1)

$$2x - y + 5 = 0,$$
$$-x + 4y - 8 = 0.$$

Ἤτοι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου εἶνε

$$\left(-\frac{12}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

Ὁ ἄξον ο′ $x_1$ σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x′ γωνίαν φ διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε ( § 14, (11) )

$$\varepsilon\varphi\,(2\varphi) = \frac{-1}{-1} = 1\,,$$

ἄρα $\quad 2\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{8} \quad$ ἢ $\varphi = 22^0\,30'$.

**ϛ′)** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει αὕτη.

Εἶνε $A = 2$, $B = -\frac{3}{2}$, $\Gamma = 3$, $\Delta = \frac{1}{2}$, $E = -\frac{7}{2}$, $Z = 1$,

Ἐπειδὴ τὸ $A\Gamma - B^2$ εἶνε θετικὸν (καὶ ἴσον μὲ $\frac{15}{4}$) ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν ἐν γένει. Τὸ κέντρον αὐτῆς ὁρίζεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$4x - 3y + 1 = 0,$$
$$-3x + 6y - 7 = 0.$$

αἵτινες δίδουν $\qquad x = 1, \quad y = \frac{5}{3}$.

Ἔχομεν

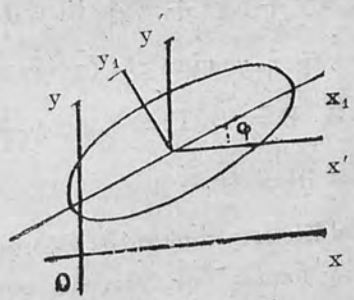
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -7 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{65}{4}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς καὶ ἔχοντας ἀρχὴν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως εἶνε

$$2\,x'^2 - 3\,x'\,y' + 3\,y'^2 - \frac{13}{3} = 0\cdot$$

στρέφοντες τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων κατὰ γωνίαν φ, ὁριζομένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως (§ 14, (11))

$$\varepsilon\varphi\,(2\,\varphi) = \frac{2\,B}{A - \Gamma} = 3\,,$$




(Σχ. 2)

εὑρίσκομεν (σχ. 2) $\qquad \varphi = 35^0\,46'\,57''$.

Ἔχομεν ἀκόμη (§ 14, (14))

$$A_1 + \Gamma_1 = 5, \quad A_1 - \Gamma_1 = -\sqrt{10}$$

ἐπειδὴ τὸ B εἶνε ἀρνητικόν. Ἑπομένως εὑρίσκομεν

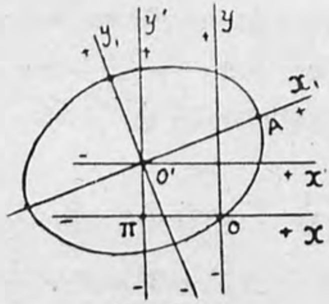
$$A_1 = \frac{5 - \sqrt{10}}{2}, \quad \Gamma_1 = \frac{5 + \sqrt{10}}{2}$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως γίνεται

$$(5 - \sqrt{10})\,x_1^2 + (5 + \sqrt{10})\,y_1^2 = \frac{26}{3}\,.$$

$$\beta = \sqrt{\frac{148}{7(3+\sqrt{2})}} = \frac{2}{7}\sqrt{37(3-\sqrt{2})}\,.$$

Τὸ κέντρον τῆς καμπύλης εἶνε ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ( § 13, δ' )




(Σχ. 1)

$$2x - y + 5 = 0,$$
$$-x + 4y - 8 = 0.$$

Ἤτοι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου εἶνε

$$\left(-\frac{12}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

Ὁ ἄξον ο' $x_1$ σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x' γωνίαν φ διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε ( § 14, (11) )

$$\varepsilon\varphi\,(2\varphi) = \frac{-1}{-1} = 1,$$

ἄρα $\quad 2\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{8}$ ἢ $\varphi = 22^{\circ}\,30'$.

**β')** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει αὕτη.

Εἶνε $A = 2,\ B = -\frac{3}{2},\ \Gamma = 3,\ \Delta = \frac{1}{2},\ E = -\frac{7}{2},\ Z = 1,$

Ἐπειδὴ τὸ $A\Gamma - B^2$ εἶνε θετικὸν (καὶ ἴσον μὲ $\frac{15}{4}$) ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν ἐν γένει. Τὸ κέντρον αὐτῆς ὁρίζεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$4x - 3y + 1 = 0,$$
$$-3x + 6y - 7 = 0.$$

αἵτινες δίδουν $\qquad x = 1, \quad y = \frac{5}{3}$.

Ἔχομεν

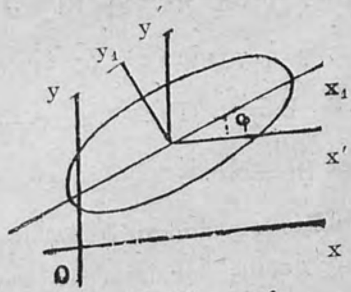
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -7 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{65}{4}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς καὶ ἔχοντας ἀρχὴν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως εἶνε

$$2\,x'^2 - 3\,x'\,y' + 3\,y'^2 - \frac{13}{3} = 0\cdot$$

στρέφοντες τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων κατὰ γωνίαν φ, ὁριζομένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως (§ 14, (11))

$$\varepsilon\varphi\,(2\,\varphi) = \frac{2\,B}{A - \Gamma} = 3\,,$$




(Σχ. 2)

εὑρίσκομεν (σχ. 2) $\qquad \varphi = 35^0\,46'\,57''$.

Ἔχομεν ἀκόμη (§ 14, (14))

$$A_1 + \Gamma_1 = 5, \quad A_1 - \Gamma_1 = -\sqrt{10}$$

ἐπειδὴ τὸ B εἶνε ἀρνητικόν. Ἑπομένως εὑρίσκομεν

$$A_1 = \frac{5 - \sqrt{10}}{2}, \quad \Gamma_1 = \frac{5 + \sqrt{10}}{2}$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως γίνεται

$$(5 - \sqrt{10})\,x_1^2 + (5 + \sqrt{10})\,y_1^2 = \frac{26}{3}\,.$$

Τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς εἶνε

$$\alpha = \sqrt{\frac{26}{3\,(5-\sqrt{10})}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{26}{3\,(5+\sqrt{10})}}\,.$$

γ΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$4\,x^2 - 2\,x\,y + y^2 + x - y + 1 = 0.$$

Ἔχομεν

$$A = 4,\ B = -1,\ \Gamma = 1,\ \Delta = \frac{1}{2},\ E = -\frac{1}{2},\ Z = 1.$$

Ἑπομένως εἶνε

$$A\,\Gamma - B^2 = 4 - 1 = 3, \quad D = \frac{9}{4}\,.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει δύο εὐθείας φανταστικάς.

δ΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$2\,x^2 + 4\,x\,y + 5\,y^2 + x + 10\,y + 1 = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν παριστάνει αὕτη.

Εἶνε $A = 2,\ B = 2,\ \Gamma = 5,\ \Delta = \frac{1}{2},\ E = 5,\ Z = 1,$

$$A\,\Gamma - B^2 = 10 - 4 = 6, \quad D = -\frac{141}{4}\,.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν.

Ἡ ἐξίσωσις ἐκ τῆς ὁποίας ὁρίζονται οἱ συντελεσταὶ $A_1$ καὶ $\Gamma_1$ εἶνε

$$z^2 - 7\,z + 6 = 0.$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$A_1 = 6\,, \quad \Gamma_1 = 1.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε (σχ. 2)

$$6\,x_1^2 + y_1^2 = \frac{47}{8}\,,$$

τὰ δὲ μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς εἶνε

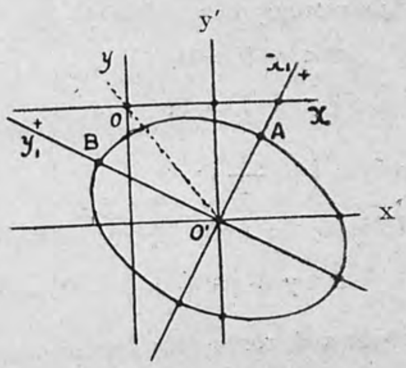
$$\alpha = \sqrt{\frac{47}{48}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{47}{8}}\,.$$

Τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ταύτης εἶνε τομὴ τῶν εὐθειῶν

$$4\,x + 4\,y + 1 = 0$$
$$4\,x + 10\,y + 10 = 0,$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν (σχ. 3)

$$x = \frac{5}{4},\quad y = -\frac{3}{2}.$$




(Σχ. 3)

Ὁ ἄξων ο′ $x_1$ τῆς ἐλλείψεως σχηματίζει μετὰ τοῦ (ἀρχικοῦ) ἄξονος τῶν x γωνίαν φ, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῆς

$$\varepsilon\varphi\,(2\,\varphi) = -\frac{4}{3},$$

ἢ ἐκ τῆς
$$\varepsilon\varphi\,(\pi - 2\,\varphi) = \frac{4}{3}.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν

$$\varphi = 63^{0}\ 26'\ 6''.$$

ε′) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$9\,x^2 + 16\,y^2 - 18\,x - 16\,y - 3 = 0.$$

Ζητεῖται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει αὕτη.

Ἔχομεν

$$A = 9,\quad B = 0,\quad \Gamma = 16,\quad \Delta = -9,\quad E = -8,\ Z = -3.$$

$$A\Gamma - B^2 = 16.9 = 144,\quad D = -2304,\ Z' = -\frac{2304}{9.16} = -16.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν.

Ἐπειδὴ εἶνε B = 0 οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀρχικούς.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$9\,x_1^2 + 16\,y_1^2 = 16.$$

Ἐπομένως οἱ ἡμιάξονες αὐτῆς ἔχουν μήκη

$$\alpha = \frac{4}{3},\ \beta = 1,$$

τὸ δὲ κέντρον αὐτῆς εἶνε τομὴ τῶν εὐθειῶν

$$9\,x - 9 = 0.$$
$$2\,y - 1 = 0,$$

ἤτοι ἔχει συντεταγμένας $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)\cdot$

στ΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους.

$$5\,x^2 - 2\,x\,y + y^2 + 4\,x + 1 = 0.$$

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ τόπου τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχομεν

$$A = 5,\ B = -1,\ \Gamma = 1,\ \Delta = 2,\quad E = 0,\ Z = 1.$$
$$A\,\Gamma - B^2 = 5 - 1 = 4,\ D = 0.$$

Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν (§ 14, η΄)

$$5\,x - y + 2 = 0,$$
$$-x + y = 0.$$

Ἤτοι τὸ σημεῖον ο΄ εἰς τὸ ὁποῖον περιωρίσθη ἔλλειψις

$$o'\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\cdot$$

ζ΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$2\,x^2 - 5\,x\,y + 5\,y - 1 = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τὸν ὁποῖον παριστάνει αὕτη. Ἔχομεν

$$A = 2,\ B = -\frac{5}{2},\ \Gamma = 0,\ \Delta = 0,\ E = \frac{5}{2},\ Z = 1,$$

$$A\,\Gamma - B^2 = -\frac{25}{4},\quad D = -\frac{50}{8},\ Z' = 1\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολὴν (§ 14, στ΄), ἔχουσαν κέντρον τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν

$$4x - 5y = 0, \quad -x + 1 = 0.$$

Ἤτοι τὸ κέντρον ἔχει συντεταγμένας $\left(1, \frac{4}{5}\right)$ ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς διερχομένους εἶνε

$$2x'^2 - 5x'y' + 1 = 0.$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς ἔχομεν

$$A_1 + \Gamma_1 = 2, \quad A_1 - \Gamma_1 = -\sqrt{29}.$$

$$A_1 = \frac{2-\sqrt{29}}{2}, \quad \Gamma_1 = \frac{2+\sqrt{29}}{2}.$$

Ἡ γωνία φ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ πρωτεύων ἄξων τῆς ὑπερβολῆς $o'x_1$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x δίδεται ὑπὸ τῆς

$$\varepsilon\varphi\,(2\varphi) = -\frac{5}{2},$$

ἡ δ' ἐξίσωσις αὐτῆς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$(2-\sqrt{29})\,x_1^2 + (2+\sqrt{29})\,y_1^2 + 2 = 0.$$

**η΄**) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$x^2 + xy - 3y^2 - 2x - y - 1 = 0.$$

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ τόπου τὸν ὁποῖον αὕτη παριστάνει ἔχομεν

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad \Gamma = -3, \quad \Delta = -1, \quad E = -\frac{1}{2}, \quad Z = -1.$$

$$A\Gamma - B^2 = -3 - \frac{1}{4} = -3{,}25, \quad D = \frac{52}{8}, \quad Z' = -2.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολήν.

Εὑρίσκομεν ἀκόμη

$$A_1 = \frac{-2+\sqrt{17}}{2}, \qquad \Gamma_1 = \frac{-2-\sqrt{17}}{2}.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$(\sqrt{17}-2)\,x_1^2-(\sqrt{17}+2)\,y_1^2=4,$$

τὰ δὲ μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς εἶνε

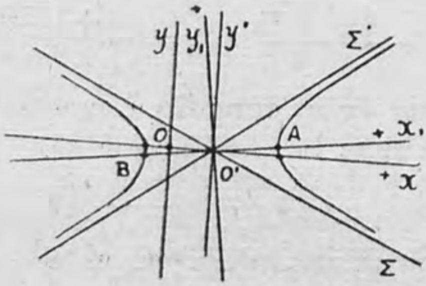
$$\alpha=2:\sqrt{\sqrt{17}-2},\quad \beta=2:\sqrt{\sqrt{17}+2}\cdot$$

Τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς ταύτης εἶνε τομὴ τῶν εὐθειῶν

$$2x+y-2=0,\quad x-6y-1=0,$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$x=1,\ y=0.$$




(Σχ. 4)

Ἡ γωνία τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦ x εὑρίσκεται ἐκ τῆς (σχ. 4)

$$\varepsilon\varphi\,(2\varphi)=\frac{1}{4},$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\qquad \varphi=7^0\ 1'\ 5''$

**θ')** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y-3=0.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόπου, τὸν ὁποῖον αὕτη παριστᾷ, ἔχομεν

$$A\Gamma-B^2=-2,\quad D=-\frac{176}{8}=-22,\quad Z'=11.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολήν.

Ἔχομεν ἀκόμη

$$A_1 + \Gamma_1 = 0, \quad A_1 = -\Gamma_1$$
$$A_1 = \sqrt{2}, \quad \Gamma_1 = -\sqrt{2}.$$

Ἄρα ἡ ὑπερβολὴ εἶνε ἰσοσκελὴς (§ 141, η', Μέρος πρῶτον) ἔχει δ' ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς

$$x_1^2 - y_1^2 = -\frac{11}{\sqrt{2}}.$$

Οἱ ἡμιάξονες αὐτῆς ἔχουν μῆκος

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}\sqrt{22.\sqrt{2}}.$$

Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἄξων τῆς ὑπερβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εὑρίσκεται ἐκ τῆς

$$\varepsilon\varphi\,(2\varphi) = \frac{2\,B}{A - \Gamma} = 1,$$

ἐξ ἧς ἔχομεν

$$\varphi = \frac{\pi}{8} = 22^0\ 30'$$

ι') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$y^2 - 2\,x\,y + x - y + 1 = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

Ἔχομεν

$$A\,\Gamma - B^2 = -1, \quad D = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}, \; Z' = \frac{3}{4}.$$

Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολήν.

Ἔχομεν προσέτι $\quad A_1 + \Gamma_1 = 1, \quad A_1 - \Gamma_1 = -\sqrt{5}.$

Ἄρα $\quad A_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \Gamma_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$(\sqrt{5} - 1)\,x_1^2 - (\sqrt{5} + 1)\,y_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων τῆς καμπύλης εἶνε

$$\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{6\,(\sqrt{5}+1)}, \quad \beta = \frac{1}{4}\sqrt{6\,(\sqrt{5}-1)}.$$

Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ πρωτεύων ἄξων τῆς ὑπερβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\varepsilon\varphi\,(2\,\varphi) = \frac{-2}{-1} = +\,2\,.$$

**ια΄**) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$2\,x\,y - 2\,x - y = 0.$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστάνει, ἔχομεν

$$A\,\Gamma - B^2 = -\,1,\quad D = 1,\ Z' = -\,1,\quad A_1 + \Gamma_1 = A + \Gamma = 0.$$

Ἑπομένως παριστάνει ὑπερβολὴν δι' ἣν εἶνε

$$A_1 = 1,\quad \Gamma_1 = -\,1,$$

ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$x_1^2 - y_1^2 = 1.$$

Ἡ γωνία φ τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος τῆς ὑπερβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εὑρίσκεται ἐκ τῆς

$$\varepsilon\varphi\,(2\,\varphi) = \frac{2}{0} = \infty$$

Ἄρα εἶνε $\varphi = \frac{\pi}{4}\,\cdot$

**ιβ΄**) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$3\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,x - 4\,y + 2 = 0.$$

Ζητεῖται ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

Ἔχομεν $A\,\Gamma - B^2 = -\,9,\ D = 0.$

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει δύο εὐθείας.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\left(6\,x + 4\right)\left(y - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

ἥτις παριστάνει τὰς εὐθείας

$$6\,x + 4 = 0\,,\quad y - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,\cdot$$

## § 16. Περίπτωσις παραβολῆς.—

α΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τοῦ β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς ἄξονας o x y ὀρθογωνίους (διότι ἂν δὲν εἶνε ὀρθογώνιοι εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς ὡς πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας, ἔχοντας τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τοὺς δοθέντας, δι' ἀλλαγῆς τοῦ ἑνὸς τῶν ἀξόνων π. χ. τοῦ τῶν y),

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0 \quad (1)$$

καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶνε

$$A \Gamma - B^2 = 0. \quad (2)$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε τέλειον τετράγωνον μιᾶς παραστάσεως. Τῷ ὄντι, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ A διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ $\frac{B^2}{\Gamma}$ (ἕνεκα τῆς (2) ) ἔχομεν

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 = \Gamma\left(y^2 + \frac{2 B}{\Gamma} x y + \frac{B^2}{\Gamma^2} x^2\right) =$$
$$= \Gamma\left(y + \frac{B}{\Gamma} x\right)^2.$$

Ἑπομένως ἡ (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\Gamma\left(y + \frac{B}{\Gamma} x\right)^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0. \quad (3)$$

Εὑρίσκομεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης ὡς πρὸς νέον σύστημα ἀξόνων ὀρθογωνίων καὶ προκῦπτον ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ στροφῆς αὐτοῦ κατὰ γωνίαν φ. Θέτοντες εἰς τὴν (3) ἀντὶ τῶν x καὶ y τὰ ἴσα αὐτῶν ἐκ τῶν

$$x = x_1 \text{ συν } \varphi - y_1 \text{ ημ } \varphi$$
$$y = x_1 \text{ ημ } \varphi + y_1 \text{ συν } \varphi,$$

εὑρίσκομεν

$$\Gamma\left[\left(\text{συν}\,\varphi - \frac{B}{\Gamma}\,\text{ημ}\,\varphi\right) y_1 + \left(\text{ημ}\,\varphi + \frac{B}{\Gamma}\,\text{συν}\,\varphi\right) x_1\right]^2 \quad (4)$$
$$+ 2\left(\Delta\,\text{συν}\,\varphi + E\,\text{ημ}\,\varphi\right) x_1 + 2\left(E\,\text{συν}\,\varphi - \Delta\,\text{ημ}\,\varphi\right) y_1 + Z = 0.$$

Προσδιορίζομεν ἤδη τὴν γωνίαν φ οὕτως, ὥστε ὁ εἷς τῶν συντελεστῶν τοῦ $x_1$ ἢ τοῦ $y_1$ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ διωνύμῳ, τὸ ὁποῖον εἶνε ὑψωμένον εἰς τὸ τετράγωνον, νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Οὕτω ἂν θέσωμεν

$$\text{ημ}\,\varphi + \frac{B}{\Gamma}\,\text{συν}\,\varphi = 0, \quad (5)$$

ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = -\frac{B}{\Gamma},\ \eta\mu\,\varphi = \frac{-B}{\pm\sqrt{B^2+\Gamma^2}},\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{\Gamma}{\pm\sqrt{B^2+\Gamma^2}}.$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$\Gamma_1 y_1^2 + 2\,\Delta_1\,x_1 + 2\,E_1\,y_1 + Z = 0 \qquad (6)$$

ἐν ᾧ εἶνε (ἕνεκα τῆς (5) )

$$\Gamma_1 = \Gamma\left(\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \frac{B}{\Gamma}\,\eta\mu\,\varphi\right)^2 = \Gamma\left(\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \varepsilon\varphi\,\varphi.\ \eta\mu\,\varphi\right)^2 = \frac{\Gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

καὶ ἑπομένως

$$\Gamma_1 = \frac{B^2+\Gamma^2}{\Gamma} = A+\Gamma, \qquad (\text{ἐπειδὴ εἶνε } A\,\Gamma = B^2).$$

Τὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν $\Delta_1$ καὶ $E_1$ εὑρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες τὰ ημ φ καὶ συν φ διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν. Οὕτω εὑρίσκομεν

$$\Delta_1 = \frac{\Gamma\Delta - BE}{\pm\sqrt{\Gamma(A+\Gamma)}},\quad E_1 = \frac{\Gamma E + B\Delta}{\pm\sqrt{\Gamma(A+\Gamma)}}.$$

Μία τῶν τιμῶν τοῦ φ, αἵτινες δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (5) εἶνε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ π. Διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τὸ ημ φ θὰ εἶνε θετικὸν καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῶν πρὸ τοῦ ριζικοῦ σημείων τὸ ἀντίθετον πρὸς τὸ τοῦ B.

**β'**) Ἐὰν εἶνε $\Delta_1 = 0$, ἡ ἐξίσωσις (6), μὴ περιέχουσα τὸν x, παριστάνει δύο εὐθείας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν x.

**γ'**) Ἐὰν εἶνε $\Delta_1 \neq 0$ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης ὡς πρὸς ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς προηγουμένους, θέτοντες

$$x_1 = x' + \alpha,\ y_1 = y' + \beta.$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (6) γίνεται

$$\Gamma_1\,y'^2 + 2\,\Delta_1\,x' + 2\,(\Gamma_1\,\beta + E_1)\,y' + (\Gamma_1\,\beta^2 + 2\,\Delta_1\,\alpha + \\ + 2\,E_1\,\beta + Z) = 0.$$

Προσδιορίζομεν τὰς συντεταγμένας α, β τῆς νέας ἀρχῆς, ἔστω τῆς ο', ὥστε νὰ μηδενίζεται ὁ συντελεστὴς τοῦ y' καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος ἐν τῇ τελευταίᾳ ἐξισώσει.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma_1 \beta + E_1 = 0, \quad \Gamma_1 \beta^2 + 2\Delta_1 \alpha + 2 E_1 \beta + Z = 0,$$

ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζονται τὰ α καὶ β, ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς **καμπύλης** γίνεται

$$\Gamma_1 y^2 + 2\Delta_1 x' = 0 \tag{7}$$

Ἡ καμπύλη ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ λόγου $\frac{\Delta_1}{\Gamma_1}$ ἢ ἐκ **τοῦ**

$$\frac{B E - \Gamma \Delta}{(A + \Gamma)\sqrt{\Gamma(A+\Gamma)}},$$

ὅστις τιθέμενος ἴσος μὲ p παριστάνει τὴν ἡμιπερίμετρον τῆς **παραβολῆς** (7), ἐχούσης ἐξίσωσιν

$$y'^2 = 2 p x'$$

καὶ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x', ἐφαπτομένην δ' εἰς **τὴν κορυφὴν** αὐτῆς o' τὸν ἄξονα τῶν y'.

### § 17. Ἐφαρμογαί.—

**α'**) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$4 x^2 - 12 x y + 9 y^2 - 36 x + 100 = 0. \tag{1}$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν παριστᾷ αὕτη.

Ἔχομεν

$$A = 4,\ B = -6,\ \Gamma = 9,\ \Delta = -18,\ E = 0,\ Z = 100$$

$$A\Gamma - B^2 = 36 - 36 = 0.$$

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ἐν γένει **παραβολήν**.

Γράφομεν τὴν (1) ὡς ἑξῆς

$$9\left(y - \frac{2}{3}x\right)^2 - 36 x + 100 = 0.$$

Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων κατὰ γωνίαν φ, ὥστε **νὰ εἶνε**

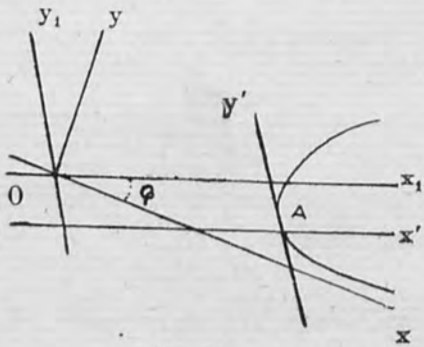
$$\varepsilon\varphi\,\varphi = -\frac{B}{\Gamma} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\varphi = 34^\circ\ 41'\ 25''$.

Οὕτω εὑρίσκομεν

$$\Gamma_1 = \mathrm{A} + \Gamma = 13, \ \text{συν}\, \varphi = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \ \text{ημ}\, \varphi = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\Delta_1 = -\frac{54\sqrt{13}}{13}, \quad \mathrm{E}_1 = \frac{36.\sqrt{13}}{13}.$$




(Σχ. 5)

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ο $x_1\, y_1$ εἶνε

$$13\, y_1^2 - \frac{108\sqrt{13}}{13} x_1 + \frac{72\sqrt{13}}{13} y_1 + 100 = 0.$$

Εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς τῇ βοηθείᾳ καὶ τῆς ἐξισώσεως

$$13\, y_1 + \frac{36\sqrt{13}}{13} = 0.$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κορυφὴ ἔχει συντεταγμένας

$$y_1 = -\frac{36\sqrt{13}}{13.13}, \quad x_1 = \frac{3901\sqrt{13}}{27.\,13.\,13}.$$

Μεταφέροντες τοὺς ἄξονας παραλλήλως πρὸς ἑαυτοὺς εἰς τὴν κορυφὴν ταύτην Α, εὑρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς (σχ. 5)

$$13\, y'^2 = \frac{108\sqrt{13}}{13} x'.$$

β') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους (σχ. 5)

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 + 4\,x - 10\,y + 5 = 0.$$

Ἔχομεν $A = 1,\ B = 1,\ \Gamma = 1,\ \Delta = 2,\ E = -5,\ Z = 5$

$$A\Gamma - B^2 = 1 - 1 = 0.$$

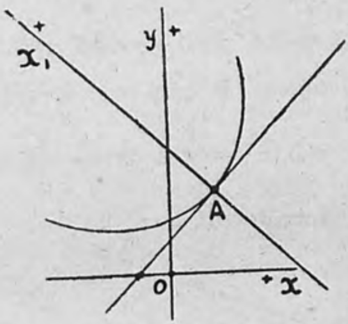
Ἄρα ἡ ἐξίσωσις παριστάνει παραβολήν.

Γράφομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς

$$(x + y)^2 + 4x - 10y + 5 = 0,$$

Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων κατὰ γωνίαν φ, ὥστε νὰ εἶνε

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = -\frac{B}{\Gamma} = -1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$




(Σχ. 6)

Θὰ ἔχωμεν ($B > 0$)

$$\Gamma_1 = A + \Gamma = 2, \quad \Delta_1 = \frac{\Gamma\Delta - BE}{\sqrt{\Gamma(A+\Gamma)}} = \frac{7\sqrt{2}}{-2},$$

$$E_1 = \frac{\Gamma E + B\Delta}{\sqrt{\Gamma(A+\Gamma)}} = \frac{-3}{-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας εἶνε

$$2y_1^2 - 2\,\frac{7\sqrt{2}}{2}\,x_1 + 2\,\frac{3\sqrt{2}}{2}\,y_1 + 5 = 0.$$

Ἡ κορυφὴ αὐτῆς A εἶνε τομὴ τῆς καμπύλης ταύτης μετὰ τῆς εὐθείας (σχ. 6)

$$2y_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Οὕτω ἡ κορυφὴ ἔχει συντεταγμένας

$$y_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad x_1 = \frac{11\sqrt{2}}{4.7.2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τὸν ἄξονα καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶνε

$$y'^2 = \frac{7\sqrt{2}}{2}x'.$$

γ') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 3x - 9y + 2{,}25 = 0.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόπου τὸν ὁποῖον παριστάνει αὕτη ἔχομεν

$$A = 1,\ B = -3,\ \Gamma = 9,\ \Delta = \frac{3}{2},\ E = -\frac{9}{2},\ Z = 2{,}25.$$

$$A\Gamma - B^2 = 9 - 9 = 0.$$

Ἑπομένως εἶνε

$$\Gamma_1 = A + \Gamma = 10,\ \Delta_1 = 0,\ E_1 = -\frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου ὡς πρὸς νέον σύστημα ἀξόνων, προκῦπτον ἐκ τοῦ δοθέντος διὰ στροφῆς περὶ τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ κατὰ γωνίαν φ τοιαύτην, ὥστε να εἶνε

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

εἶνε

$$10y_1^2 - 3\sqrt{10}\,y_1 + 2{,}25 = 0$$

ἢ

$$\left(\sqrt{10}\,y_1 - \frac{3}{2}\right)^2 = 0,$$

ἥτις παριστᾷ δύο εὐθείας συμπιπτούσας.

δ') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$16x^2 - 8xy + y^2 + 2x + 25y - 15 = 0.$$

Ἔχομεν

$$A = 16,\ B = -4,\ \Gamma = 1,\ \Delta = 1,\ E = \frac{25}{2},\ Z = -15.$$

$$A\Gamma - B^2 = 0,\ A + \Gamma = 17 = \Gamma_1,\ \Delta_1 = 3\sqrt{17},\ E_1 = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει παραβολήν, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας $o x_1 y_1$, προκύπτοντας διὰ στροφῆς τῶν δοθέντων περὶ τὴν ἀρχὴν κατὰ γωνίαν φ, ἐν ᾧ εἶνε

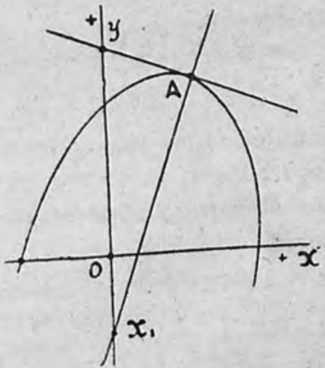
$$\varepsilon\varphi\, \varphi = 4\,,$$

εἶνε

$$17\, y_1^2 + 6\sqrt{17}\, x_1 + \sqrt{17}\, y_1 - 15 = 0.$$

Αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς εὑρίσκονται τῇ βοηθείᾳ καὶ τῆς ἐξισώσεως

$$17\, y_1 + \frac{\sqrt{17}}{2} = 0.$$




(Σχ. 7)

Οὕτω εὑρίσκομεν

$$y_1 = -\frac{\sqrt{17}}{2.17}, \qquad x_1 = \frac{61.\sqrt{17}}{408}.$$

Μεταφέροντες τοὺς ἄξονας εἰς τὴν κορυφὴν ταύτην A (σχ. 7) παραλλήλως ἑαυτοῖς ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης (σχ. 7)

$$17\, y'^2 = -6.\sqrt{17}\, x.$$

ε') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$2x^2 + 8xy + 8y^2 + x + 2y - 7 = 0.$$

Ἔχομεν

$$A\Gamma - B^2 = 0,\ \Gamma_1 = 10,\ \Delta_1 = 0,\ E_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις παριστάνει δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα $o\,y_1$, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ ἄξονος τῶν $y$, ὅταν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ ἐξίσωσις στραφῇ κατὰ γωνίαν $\varphi$ περὶ τὴν ἀρχήν, ὥστε νὰ εἶνε

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = -\frac{1}{2}\cdot$$

Αἱ εὐθεῖαι θὰ ἔχουν ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων

$$10\,y_1^2 - \sqrt{5}\,y_1 - 7 = 0.$$

ἢ

$$y_1 = \frac{\sqrt{5}\,(1 \pm \sqrt{57})}{20}\cdot$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*Ὁμὰς πρώτη.* 1) Εὕρετε τί παριστάνει ἑκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, ἀναφερομένων ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους. Φέρατε ἑκάστην αὐτῶν εἰς τὴν ἁπλουστέραν αὐτῆς μορφήν. Εὕρετε τὸ κέντρον, τὴν ἐξίσωσιν τῶν συζυγῶν διαμέτρων, τὰ μήκη τῶν ἀξόνων κλπ. ἑκάστης τῶν καμπύλων, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις.

α΄) $x^2 + xy - 3y^2 - 2x - y = 1$. β΄) $5x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$.
γ΄) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + x + 16y = -1$.
δ΄) $4x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$. ε΄) $x^2 - xy + 2y^2 + 5x - 8y = 0$.
στ΄) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = 3$. ζ΄) $3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y = 10$.
η΄) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0$.
θ΄) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y = 8$.
ι΄) $\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2 - 2\alpha\beta^2 x - 2\alpha^2\beta y + \alpha^2\beta^2 = 0$.
ια΄) $4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y = 10$.
ιβ΄) $16x^2 + 40xy + 25y^2 + 20x + 25y + 220 = 0$.
ιγ΄) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 10y + 5 = 0$.
ιδ΄) $15x^2 - 8xy + y^2 + 2x + 25y = 15$. ιε΄) $3x^2 - 6xy + 5x - 4y + 2 = 0$.

2) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον $M_1\,(x_1,\ y_1)$ τῆς καμπύλης

$$Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$$

εἶνε $(x - x_1)(A x_1 + B y_1 + \Delta) + (y - y_1)(B x_1 + \Gamma y_1 + E) = 0.$

(Ἐφαρμόσατε τὴν πορείαν τῆς § 100, γ' καὶ τὴν § 121, δ' τοῦ Α' Μέρους).

3) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν γραμμῶν τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις α', β', γ', δ', ε' καὶ ι' τῆς ἀσκήσεως 1).

4) Ἂν ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει τοῦ β' βαθμοῦ ἔχωμεν $A : B = B : \Gamma = \Delta : E$ δείξατε δι' ἀναλύσεως τοῦ πολυωνύμου εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, ὅτι ἡ ἐξίσωσις παριστάνει ζεῦγος εὐθειῶν.

*Ὁμὰς δευτέρα*. 1) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περικλειομένης ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 = 1.$$

2) Δείξατε ὅτι, ἂν ὀρθογώνιον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς ἔλλειψιν, τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς ἔχει περίμετρον σταθεράν, δύο δὲ διαδοχικαὶ πλευραὶ αὐτοῦ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν ἐφαπτομένην.

3) Ἀναχωροῦντες ἀπό τινος σημείου ἐλλείψεως λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστης καθέτου αὐτῆς μῆκος ἴσον μὲ $k^2 : \mu$ ἐν ᾧ τὸ $k$ εἶνε σταθερὸν, τὸ δὲ $\mu$ παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς ἀντιστοίχου ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως κάθετον ἐπ' αὐτήν. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τούτων.

4) Ἐὰν τρίγωνόν τι εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς ἔλλειψιν, ἔχουσαν ἡμιάξονας $\alpha$ καὶ $\beta$, $\rho$ δὲ παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ τὰ μήκη τῶν ἡμιχορδῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, δείξατε ὅτι εἶνε

$$\rho = \delta_1 \delta_2 \delta_3 : \alpha \beta.$$

5) Δοθείσης ἐλλείψεως καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὴν περιφερείας κύκλου, φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα τῆς ἐλλείψεως. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς τῶν καθέτων τούτων.

6) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν κορυφῶν παραλληλογράμμων, ἅτινα κατασκευάζονται ἐπὶ συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως.

7) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν μέσων χορδῶν ἐλλείψεως, διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

8) Δείξατε ὅτι ἐκ πάντων τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιγεγραμμένων εἰς ἔλλειψιν, τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ δύο συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς ἔχουν ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

9) Ἐκ πάντων τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς ἔλλειψιν, τὰ ἔχοντα διαγωνίους συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς ἔχουν μέγιστον ἐμβαδόν.

10) Δείξατε ὅτι ἐκ πάντων τῶν συστημάτων τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως οἱ ἄξονες αὐτῆς ἔχουν ἄθροισμα ἐλάχιστον, αἱ δὲ ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς μέγιστον ἄθροισμα.

*Ὁμὰς τρίτη.* 1) Δείξατε ὅτι (θεωρήματα τοῦ *Ἀπολλωνίου*). α') Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο συζυγῶν διαμέτρων ὑπερβολῆς εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

β') Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ δύο συζυγῶν διαμέτρων ὑπερβολῆς, εἶνε σταθερὸν καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

2) Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων τεμνούσης ὑπερβολήν, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς, τῆς παραλλήλου τῇ τεμνούσῃ.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τριγώνου, ἔχοντος βάσιν μὲν σταθεράν, διαφορὰν δὲ τῶν παρὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν ἴσην μὲ $\frac{\pi}{2}$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν κύκλου, αἵτινες ἀποκόπτουν ἀπὸ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας μήκη δοθέντα.

5) Δείξατε ὅτι πᾶσα χορδὴ ὑπερβολῆς διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ μέρος τῆς μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς.

6) Τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς ὑπερβολήν. Δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἔχουν φορὰς ὡρισμένας· νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.

7) Δείξατε ὅτι, πᾶσα ὑπερβολὴ ἰσοσκελὴς περιγεγραμμένη εἰς τρίγωνον διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν αὐτοῦ.

8) Ἐπὶ μιᾶς τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου (λαμβανομένης ὡς χορδῆς) κατασκευάζομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν δευτέραν διαγώνιον.

*Ὁμὰς τετάρτη.* 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας καθέτους πρὸς παραβολὴν καὶ σχηματιζούσας ὀρθὴν γωνίαν.

2) Μία τέμνουσα ὑπερβολήν στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τῆς ὑπερβολῆς. Ἐκ τῶν σημείων καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν ὑπερβολὴν φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν καμπύλην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν καθέτων τούτων.

3) Δίδεται ἔλλειψις καὶ διὰ σημείου δοθέντος φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων μετὰ τῆς ἐλλείψεως φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

4) Νὰ λυθῇ ἀνάλογον πρόβλημα πρὸς τὸ προηγούμενον, ἂν αἱ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ἄλλης δοθείσης ἐλλείψεως.

5) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἰσοπλεύρου τριγώνου, σχηματιζομένου ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἐφαπτομένων ἢ καθέτων παραβολῆς.

6) Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τριῶν ἐφαπτομένων παραβολῆς, εἶνε διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τούτων καὶ ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ

$$\pm \frac{1}{4p}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1),$$

ἂν $y_1$, $y_2$, $y_3$ παριστάνουν τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς, τῆς ἐχούσης ἡμιπαράμετρον p.

*Ὁμὰς πέμπτη.* 1) Ἂν Μ καὶ Μ′ εἶνε σημεῖα μιᾶς παραβολῆς Ε ἡ ἑστία αὐτῆς καὶ Ρ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης εἰς τὰ Μ καὶ Μ′, νὰ δειχθῇ ὅτι εἶνε

$$(PM)^2 : (ME) = (PM')^2 : (M'E).$$

2) Δείξατε ὅτι ἂν ἐν καμπύλῃ δευτέρου βαθμοῦ ἡ εὐθεῖα ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἑστίας αὐτῆς κάθετος ἐπί τινα χορδὴν αὐτῆς καὶ ἡ συζυγὴς διάμετρος τῆς χορδῆς τέμνονται ἐπὶ διευθετούσης τῆς καμπύλης.

3) Δείξατε ὅτι τὸ μῆκος ἡμιδιαμέτρου ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς εἶνε μέσον ἀνάλογον πρὸς τὰ μήκη τῶν τμημάτων, ἅτινα συνδέουν τὰς ἑστίας τῆς καμπύλης μὲ τὸ ἄκρον τῆς συζυγοῦς διαμέτρου τῆς δοθείσης.

4) Δείξατε ὅτι ἐν ἰσοσκελῇ ὑπερβολῇ ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου.

5) Δείξατε ὅτι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἀπὸ ἑστίαν τὸ μέρος κινητῆς ἐφαπτομένης εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, εἶνε σταθερά.

6) Ἐὰν τρίγωνον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς παραβολὴν (αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτονται τῆς καμπύλης) νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ὕψη αὐτοῦ τέμνονται ἐπὶ τῆς διευθετούσης, ἡ δὲ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας τῆς παραβολῆς.

7) Ἐὰν εἰς σημεῖόν τι Μ ἐλλείψεως φέρωμεν τὴν κάθετον αὐτῆς, τὸ τμῆμα τῆς καθέτου ταύτης, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ Μ καὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος τῆς καμπύλης, ἔχει ὡς ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ Μ ἴσην μὲ τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος.

8) Τὸ μέρος τῆς καθέτου εἰς τὸ Μ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ Μ καὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς ἐλλείψεως, ἔχει ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ Μ ἴσην μὲ τὴν ἡμιπαράμετρον τῆς ἐλλείψεως.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

### *Περὶ γεωμετρικῶν τόπων ἐν τῷ διαστήματι.*

### § 18. Ὁρισμοί.—

α΄) Καθὼς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ οὕτω καὶ ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων λέγομεν ὅτι ἐπιφάνειά τις εἶνε ὁ *γεωμετρικὸς τόπος* ἢ ἁπλῶς ὁ *τόπος* σημείων ἐχόντων κοινὴν μίαν ἢ περισσοτέρας γεωμετρικὰς ἰδιότητας, ἂν πᾶν τοιοῦτον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἔχει τὰς ἐν λόγῳ ἰδιότητας. Οὕτω ἡ σφαῖρα μὲ ἀκτῖνα ϱ εἶνε ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἀπεχόντων ἀπόστασιν ἴσην μὲ ϱ ἀπό τινος σταθεροῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον αὐτῆς.

β΄) Ἐπιφάνειά τις ὁρίζεται γεωμετρικῶς ἢ ὡς *τόπος σημείων ἐχόντων κοινήν τινα γεωμετρικὴν ἰδιότητα*, ἢ ὡς *τόπος γραμμῆς τινος κινουμένης*, τῆς ὁποίας τὸ σχῆμα δύναται νὰ εἶνε μεταβλητὸν κατὰ τὴν κίνησιν.

### § 19. Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις ἐπιφανείας ὁριζομένης γεωμετρικῶς.—

α΄) Ἂν ἐπιφάνειά τις ὁρίζεται ὡς γεωμετρικὸς τόπος σημείων, ἐχόντων κοινὴν ἰδιότητα καὶ ἐκφράσωμεν δι᾽ ἀλγεβρικῶν τύπων τὴν γεωμετρικὴν ἰδιότητα, εὑρίσκομεν σχέσιν τινὰ μεταξὺ τῶν συντεταγμένων x, y, z τοῦ σημείου εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτοῦ, ἡ σχέσις δ᾽ αὕτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

Οὕτω π. χ. ἔστω ὅτι ζητεῖται 1) «**ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν** (ε)».

Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν ΑΚ, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), τὴν ἐκ τοῦ μέσου ο τοῦ τμήματος Α Κ παράλληλον εὐθεῖαν πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὡς ἄξονα τῶν y, τὴν δ᾽ εὐθεῖαν ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν x y εἰς τὸ σημεῖον ο ὡς ἄξονα τῶν z. Οὕτω διὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ (x, y, z) κειμένου ἐπὶ τοῦ τόπου ἀπὸ τοῦ Α (p, o, o) ἔχομεν, ἂν τὸ μῆκος τῆς Α Κ παρασταθῇ διὰ τοῦ 2 p,

$$(MA)^2 = (x-p)^2 + y^2 + z^2$$

διὰ δὲ τὴν ἀπόστασιν (ΜΡ) τοῦ Μ ἀπὸ τῆς εὐθείας $z = - p$, $x=0$ ἔχομεν

$$(M\,P)^2 = (x+p)^2 + z^2$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου τῶν ἐν λόγῳ σημείων εἶνε

$$(x-p)^2 + y^2 + z^2 = (x+p)^2 + z^2\,, \quad \text{ἢ} \quad y^2 = 4\,p\,x,$$

ἥτις ὡς στερουμένη τοῦ z παριστάνει *κυλινδρικὴν* ἐπιφάνειαν (§ 34, θ΄, Μέρος πρῶτον) μὲ γεννετείρας παραλλήλους τῶν ἄξονι τῶν z, ὁδηγὸν δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν x y τὴν παραβολήν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y^2 = 4\,p\,x$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.

Ἂν ζητῆται 2) «***τόπος τῶν σημείων, τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον***»

λαμβάνομεν τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν x y, τὴν δὲ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὡς ἄξονα τῶν z.

Οὕτω διὰ μὲν τὴν ἀπόστασιν (Μ Ρ) τοῦ σημείου Μ (x, y, z) τοῦ τόπου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου x y ἔχομεν

$$(M\,P)^2 = z^2$$

διὰ δὲ τὴν ἀπόστασιν (Μ Σ) αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν z ἔχομεν

$$(M\,\Sigma)^2 = x^2 + y^2.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου τῶν σημείων εἶνε

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

6΄) Ἂν μία ἐπιφάνεια ὁρίζεται ὡς τόπος κινουμένης τινὸς γραμμῆς αἱ δύο ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὴν κινουμένην γραμμὴν θὰ ἔχουν μίαν ἀόριστον παράμετρον, εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ μία θέσις τῆς κινουμένης γραμμῆς καὶ ἓν ὡρισμένον σχῆμα ταύτης. Ἔστωσαν

$$\varphi_1\,(x, y, z, \alpha_1) = 0\,, \quad \varphi_2\,(x, y, z, \alpha_1) = 0 \qquad (1)$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς.

Ἐὰν ἐκ τῆς μιᾶς τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\alpha_1$ καὶ τεθῇ αὕτη εἰς τὴν ἄλλην, ἤτοι ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ $\alpha_1$ μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων (1), προκύπτει μία ἐξίσωσις, περιέχουσα τὰς μεταβλητὰς x, y, z, ἔστω ἡ

$$f\,(x, y, z) = 0. \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶνε ἀκολουθία τῶν (1), διότι προέκυψεν ἐξ αὐτῶν καὶ μόνον. Ἄρα ἡ (2) ἐπαληθεύεται, ὅταν ἐπαληθεύωνται αἱ (1). Ἀλλὰ αἱ (1) ἐπαληθεύονται δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ $\alpha_1$ εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς αὐτὰ γραμμῆς. Ἑπομένως καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ (2) δὲν περιέχει τὸ $\alpha_1$, ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ ὁποίου προέρχεται ἡ κίνησις τῆς γραμμῆς, ἕπεται ὅτι ἀληθεύει αὕτη εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς καὶ εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτῆς· ἤτοι εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραφομένης ἐπιφανείας. Ἄρα ἡ (2) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ γραμμὴ (1).

Ὅθεν «***ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γράφεται ὑπό τινος κινουμένης γραμμῆς, εὑρίσκεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς, ἂν ἀπαλειφθῇ μεταξὺ αὐτῶν ἡ παράμετρος, ἥτις προξενεῖ τὴν κίνησιν τῆς γραμμῆς***».

**γ')** Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινουμένης γραμμῆς περιέχουν δύο μεταβλητὰς παραμέτρους, ἔστω τὰς $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$, πρέπει μεταξὺ τῶν παραμέτρων τούτων νὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις, ἐκ τῆς ὁποίας, ὅταν ὁρισθῇ αὐθαιρέτως ἡ μία αὐτῶν, νὰ εὑρίσκεται ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς ἄλλης.

Διότι, ἂν ἦτο δυνατὸν καὶ αἱ δύο παράμετροι νὰ ἐλάμβανον αὐθαιρέτους τιμάς, ἡ κινουμένη γραμμὴ θὰ διέγραφεν ἐν γένει, ὁλόκληρον τὸν χῶρον καὶ ὄχι ἐπιφάνειαν. Τῷ ὄντι, ἂν δοθῇ σημεῖόν τι $M_1$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$) τοῦ χώρου καὶ θέσωμεν τὰ $x_1$, $y_1$, $z_1$ ἀντὶ τῶν x, y, z εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς, θὰ μένουν ἀόριστοι εἰς αὐτὰς αἱ δύο παράμετροι $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ καὶ ἑπομένως, δύνανται νὰ ὁρισθοῦν ἀκολούθως καὶ αὐταί, ὥστε νὰ ἐπαληθεύωνται αἱ δύο ἐξισώσεις, οὕτω δὲ ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $M_1$.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινουμένης γραμμῆς

$$\varphi_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \qquad (3)$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις, ἥτις ἐκφράζει τὴν σχέσιν ἥτις συνδέει μεταξύ των τὰ $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ ἡ

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \qquad (4)$$

Ἐὰν μεταξὺ τῶν (3) καὶ (4) ἀπαλείψωμεν τὰ $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$, προκύπτει μία ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει τὰ x, y, z, ἔστω ἡ

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (5)$$

ἥτις, ὡς ἀκολουθία τῶν (3) καὶ (4) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων παντὸς σημείου τῆς γραμμῆς καὶ εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτῆς. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (5) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ γραμμὴ (3).

Ἑπομένως, **«ἂν αἱ δύο δοθεῖσαι ἐξισώσεις κινουμένης γραμμῆς, ἥτις γράφει ἐπιφάνειαν, περιέχουν δύο παραμέτρους συνδεομένας δι' ἐξισώσεως ἥτις δίδεται, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εὑρίσκεται, ἂν μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἀπαληφθοῦν αἱ δύο παράμετροι»**.

ϛ') Οὕτω ἔστω ὅτι ζητεῖται,

**«νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν δύο ἐπιπέδων ἀνήκοντος ἑκάστου εἰς ἀξονικὴν δέσμην δοθεῖσαν καὶ τεμνομένων καθέτως, ὅταν οἱ ἄξονες τῶν δεσμῶν εἶνε παράλληλοι»**.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν παραλλήλων ἀξόνων $\Delta_1$ καὶ $\Delta_2$ τῶν δεσμῶν αἱ

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$$

$$\frac{x-x_2}{\alpha}=\frac{y-y_2}{\beta}=\frac{z-z_2}{\gamma}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τυχόντος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς $\Delta_1$ εἶνε

$$\alpha(z-z_1)-\gamma(x-x_1)+\lambda_1[\gamma(y-y_1)-\beta(z-z_1)]=0, \quad (1)$$

ἄλλου δὲ διερχομένου διὰ τῆς $\Delta_2$ εἶνε

$$\alpha(z-z_2)-\gamma(x-x_2)+\lambda_2[\gamma(y-y_2)-\beta(z-z_2)]=0. \quad (2)$$

Ἵνα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶνε κάθετα ἐπ' ἄλληλα πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\gamma^2(1+\lambda_1\lambda_2)+(\alpha-\lambda_1\beta)(\alpha-\lambda_2)\beta=0. \quad (3)$$

Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τόπου ἀπαλείφοντες τὰ $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ μεταξὺ τῶν (1), (2) καὶ (3). Θέτοντες

$$\gamma y_1-\beta z_1=\mu_1,\quad \alpha z_1-\gamma x_1=\nu_1,\quad \beta x_1-\alpha y_1=\varrho_1, \quad (4)$$

$$\gamma y_2-\beta z_2=\mu_2,\quad \alpha z_2-\gamma x_2=\nu_2,\quad \beta x_2-\alpha y_2=\varrho_2, \quad (5)$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τόπου, ὅστις εἶνε κυκλικὸς κύλινδρος ὀρθός.

$$(\gamma y-\beta z-\mu_1)(\gamma y-\beta z-\mu_2)+(\alpha z-\gamma x-\nu_1)(\alpha z-\gamma x-\nu_2)+$$
$$+(\beta x-\alpha y-\varrho_1)(\beta x-\alpha y-\varrho_2)=0,$$

ἢ
$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-$$
$$-(\mu_1+\mu_2)(\gamma y-\beta z)-(\nu_1+\nu_2)(\alpha z-\gamma x)-(\varrho_1+\varrho_2)(\beta x-\alpha y)$$
$$+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2+\varrho_1\varrho_2=0.$$

**ε΄)** Ἐν γένει, ἂν αἱ δύο ἐξισώσεις τῆς κινουμένης γραμμῆς περιέχουν $(\nu+1)$ παραμέτρους, ἔστω τὰς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1}$, αἱ παράμετροι αὗται θὰ συνδέωνται μεταξύ των διὰ $\nu$ ἐξισώσεων, ἵνα ἡ κινουμένη γραμμὴ γράφῃ ἐπιφάνειαν, καὶ τοιούτων, ὥστε ἂν δοθῇ τιμή τις αὐθαίρετος εἰς μίαν τῶν παραμέτρων τούτων, αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων νὰ ὁρίζωνται ἐκ τῶν $\nu$ ἐξισώσεων.

Ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς γραμμῆς εὑρίσκεται, ἂν μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς καὶ τῶν $\nu$ ἐξισώσεων μεταξὺ τῶν παραμέτρων ἀπαλειφθοῦν αἱ $(\nu+1)$ αὗται παράμετροι.

Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν τὰ ἐπίπεδα

$$x=\alpha, \quad y=\beta, \tag{6}$$

τὰ ὁποῖα κινοῦνται οὕτως, ὥστε αἱ παράμετροι $\alpha$ καὶ $\beta$ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως

$$\varphi(\alpha, \beta)=0. \tag{7}$$

Ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ εὐθεῖα (6).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ταύτης, πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς παραμέτρους $\alpha$ καὶ $\beta$ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7), ὅτε λαμβάνομεν

$$\varphi(x, y)=0,$$

ἥτις παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γεννετείρας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν z.

**στ΄)** Ἐνίοτε ἡ κίνησις γραμμῆς τινος

$$\varphi_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2)=0,$$
$$\varphi_2(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2)=0, \tag{8}$$

ἐξαρτωμένης ἐξ δύο παραμέτρων, ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης, ἵνα ἡ γραμμὴ αὕτη συναντᾷ δοθεῖσαν γραμήν, ἥτις καλεῖται συνήθως *ὁδηγὸς* τῆς κινουμένης γραμμῆς.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἵνα εὕρωμεν τὴν σχέσιν, ἥτις συνδέει τὰς παραμέτρους $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$, πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων (8) καὶ τῶν δύο ἐξισώσεων τῆς ὁδηγοῦ, αἵτινες ὑποτίθενται γνωσταί,

## *Περὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν.*

### § 20. Ὁρισμοί.—

α΄) Καλοῦμεν *κωνικὴν ἐπιφάνειαν* τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν παράγει εὐθεῖα, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ διαγράφουσα δοθεῖσαν γραμμήν. Τὸ δοθὲν σημεῖον λέγεται *κορυφὴ* τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἡ κινουμένη εὐθεῖα *γεννέτειρα* αὐτῆς, ἡ δὲ γραμμὴ τὴν ὁποίαν αὕτη διαγράφει λέγεται *ὁδηγὸς* τῆς κινουμένης εὐθείας.

β΄) Λέγομεν ὅτι συνάρτησίς τις φ (x, y, z) τῶν x, y, z εἶνε ὁμογενὴς ὡς πρὸς αὐτά, ἂν πολλαπλασιαζομένων τούτων ἐπὶ τινα ἀριθμὸν λ, ἡ ὅλη συνάρτησις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ λ οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k \varphi(x, y, z).$$

Ὁ ἐκθέτης k καλεῖται *βαθμὸς ὁμογενείας* τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως.

Οὕτω π. χ. ἡ συνάρτησις

$$x^2 + y^2 + z^2$$

εἶνε ὁμογενὴς καὶ βαθμοῦ δευτέρου, διότι εἶνε

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2).$$

Ἡ συνάρτησις

$$\frac{x y z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

εἶνε ὁμογενὴς δευτέρου βαθμοῦ, διότι εἶνε

$$\frac{(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z)}{\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}} = \frac{\lambda^2 (x y z)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

§ **21. Ἐξίσωσις κωνικῆς ἐπιφανείας.—**

α΄) Ἔστωσαν ($x'$, $y'$, $z'$) αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς Α τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ τῆς κινουμένης εὐθείας. Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας, ὡς διερχομένης διὰ τῆς τοῦ σημείου Α ($x'$, $y'$, $z'$) εἶνε

$$\frac{x-x'}{\alpha} = \frac{y-y'}{\beta} = \frac{z-z'}{\gamma}$$

ἢ

$$x-x' = \lambda\left(z-z'\right), \quad y-y' = \mu\left(z-z'\right) \tag{2}$$

$$\left(\text{ἂν τεθῆ } \frac{\alpha}{\gamma} = \lambda,\ \frac{\beta}{\gamma} = \mu\right).$$

Ἐπειδὴ ἡ γεννέτειρα (2) τέμνει τὸν ὁδηγὸν αὐτῆς, εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ τῶν παραμέτρων λ καὶ μ ὑπάρχουσαν σχέσιν, ἂν ἀπαλείψωμεν τὰ $x$, $y$, $z$ μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2). Ἔστω αὕτη ἡ

$$\sigma(\lambda, \mu) = 0.$$

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) τὰς παραμέτρους λ καὶ μ, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης κωνικῆς ἐπιφανείας

$$\sigma\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}\right) = 0.$$

β΄) Ἂν κορυφὴ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἶνε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε

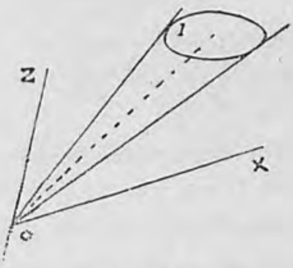
$$\sigma\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

ἥτις εἶνε ὁμογενὴς βαθμοῦ $k = 0$. Ὅθεν, πᾶσα κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἔχουσα κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ἔχει ἐξίσωσιν ὁμογενῆ ὡς πρὸς $x$, $y$, $z$.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

εἶνε ὁμογενής, ἔστω βαθμοῦ k, ὡς πρὸς x, y, z, παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων. Διότι ἂν ἡ (3) ἐπαληθεύεται διὰ τὰς συντεταγμένας $x_1$, $y_1$, $z_1$ σημείου τινὸς I, θὰ ἐπαληθεύεται καὶ διὰ τὰς συντεταγμένας x, y, z παν-




(Σχ. 14)

τὸς ἄλλου σημείου M τῆς εὐθείας o I, ( διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς o (σχ. 14) ). Διότι τὰ x, y, z εἶνε ἀνάλογα τῶν $x_1$, $y_1$, $z_1$ ἤτοι γινόμενον τῶν x, y, z ἐπί τινα ἀριθμόν ἔστω τὸν λ.

Ἑπομένως θὰ εἶνε

$$\varphi\,(x, y, z) = \varphi\,(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda^k \varphi\,(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Ἄρα ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα o I κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου, τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (3).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόπος παράγεται ἀπὸ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου o εἶνε κωνικὴ ἐπιφάνεια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ***«ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἐξίσωσίς τις φ (x, y, z) = 0 παριστάνῃ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων εἶνε, τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς νὰ εἶνε ὁμογενὴς συνάρτησις ὡς πρὸς x, y, z».***

γ') Γενικώτερον, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κορυφὴν τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος, ὁριζόμενον ὡς τομὴν τριῶν ἐπιπέδων,, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις, παριστώμεναι συντόμως, ἔστωσαν αἱ ἑξῆς

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = 0\,, \qquad (4)$$

(τῶν α, β, γ παριστώντων ἀκέραια πολυώνυμα καὶ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z).

Ἐπειδὴ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια παράγεται ἐκ τῆς κινήσεως εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (4) καὶ κινουμένης καθ' ὡρισμένον νόμον, αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς

$$\alpha - \lambda \gamma = 0 \tag{5}$$

$$\beta - \mu \gamma = 0.$$

Διότι, ἡ πρώτη τούτων παριστάνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων $\alpha = 0$ καὶ $\gamma = 0$, ἡ δὲ δευτέρα ἄλλο ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς τῶν $\beta = 0$ καὶ $\gamma = 0$.

Ἄρα τὰ ἐπίπεδα (5) τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς τομῆς τῶν (4), ἤτοι διὰ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν ἤδη γνωρίζωμεν τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς κινήσεως αὐτῆς εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν λ καὶ μ, ἔστω ἡ

$$\sigma(\lambda, \mu) = 0, \tag{6}$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἀπαλείφοντες τὰ λ καὶ μ μεταξὺ τῶν (5) καὶ (6), ὅτε εὑρίσκομεν

$$\sigma\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0, \tag{7}$$

ἥτις παριστάνει τὴν παραγομένην κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (7) ἐνῷ τὰ α, β, γ παριστάνουν πολυώνυμα πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κορυφὴν τὸ σημεῖον (4).

Πράγματι, ἂν σημεῖόν τι (x, y, z) ἀνήκῃ εἰς τὸν τόπον, τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (7), ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ ἐπαληθεύεται καὶ οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ θὰ ἔχουν ἀντιστοίχους τιμὰς λ καὶ μ, διὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\lambda, \mu) = 0,$$

$$\alpha - \lambda \gamma = 0,$$

$$\beta - \mu \gamma = 0.$$

Ἀλλὰ τότε πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha - \lambda\,\gamma = 0,$$

$$\beta - \mu\,\gamma = 0,$$

ὅταν τὰ λ καὶ μ ἔχουν τὰς ὁρισθείσας τιμάς, τὰ δὲ x, y, z μεταβάλλωνται, θὰ ἐπαληθεύῃ προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$\sigma\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0,$$

διότι καθιστᾷ τοὺς λόγους $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἀντιστοίχως ἴσους μὲ λ καὶ μ, ἑπομένως θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια εἶνε κωνική, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον (4).

§ **22. Ἐφαρμογαί.**—

α΄) «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἥτις ἔχει τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, ὁδηγὸν δὲ τῆς γεννετείρας ὑπερβολήν, κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ x y μὲ ἀσυμπτώτους παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν x καὶ y***».

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$x = \lambda z, \quad y = \mu z,$$

τῆς δὲ ὁδηγοῦ αὐτῆς αἱ

$$z = \gamma, \quad x\,y = k.$$

Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων, εὑρίσκομεν

$$\gamma^2 \lambda \mu = k,$$

ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε

$$\gamma^2 x\,y = k\,z^2.$$

β΄) «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ὁδηγὸν τῆς γεννετείρας αὐτῆς τὴν καμπύλην $z = \gamma$, $\varphi(x, y) = 0$ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x = \gamma$***».

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας

$$x = \lambda z\,,\quad y = \mu z\,.$$

Ἡ μεταξὺ τῶν λ, μ ὑπάρχουσα σχέσις εἶνε

$$\varphi(\lambda\gamma\,,\ \mu\gamma) = 0\,.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἶνε

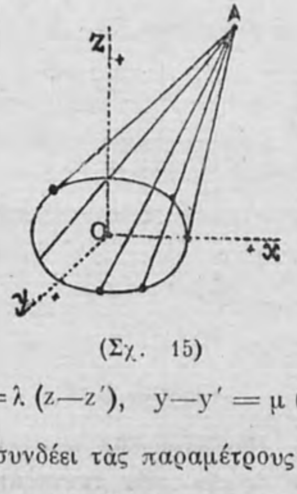
$$\varphi\left(\gamma\frac{x}{z}\,,\ \gamma\frac{y}{z}\right) = 0\,.$$

***γ′) «Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὸ σημεῖον A (x′, y′, z′) ὁδηγὸν δὲ τῆς γεννετείρας περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ x y».***

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ εἶνε (σχ. 15)

$$z = 0\,,\quad x^2 + y^2 = \varrho^2, \tag{8}$$

ἂν ϱ εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας. Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφήν




(Σχ. 15)

$$x - x' = \lambda\,(z - z'),\quad y - y' = \mu\,(z - z'). \tag{9}$$

Ἡ ἐξίσωσις ἥτις συνδέει τὰς παραμέτρους λ καὶ μ εἶνε

$$(x' - z'\lambda)^2 + (y' - z'\mu)^2 = \varrho^2\,,$$

ἥτις προκύπτει, ἂν ἀπαλείψωμεν τὰ x , y , z μεταξὺ τῶν (8) καὶ (9).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (ἥτις εἶνε πλάγιος κυκλικὸς κῶνος) εἶνε

$$(x'z - z'x)^2 + (y'z - z'y)^2 = \varrho^2 (z - z')^2.$$

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ xz ληφθῇ οὕτως, ὥστε νὰ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ θὰ εἶνε

$$(x'z - z'x)^2 + (z'y)^2 = \varrho^2 (z - z')^2.$$

Ἂν ὁ κῶνος εἶνε ὀρθός, ἡ κορυφὴ τούτου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε

$$z'^2 (x^2 + y^2) = \varrho^2 (z - z')^2.$$

δ') «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ὁδηγὸν τῆς γεννετείρας αὐτοῦ τὴν περιφέρειαν*** $z = \gamma$, $x^2 + y^2 = p^2$».

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$x = \lambda z, \quad y = \mu z.$$

Ἡ τὰ λ καὶ μ συνδέουσα σχέσις εὑρίσκεται, ἂν ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας καὶ τῆς ὁδηγοῦ. Οὕτω εὑρίσκομεν

$$(\lambda^2 + \mu^2)\gamma^2 = p^2.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἶνε

$$\left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)\gamma^2 = p^2$$

ἤ

$$x^2 + y^2 = \frac{p^2}{\gamma^2} z^2.$$

ε') «***Νὰ εὑρεθῇ τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις***

$$x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ὁμογενὴς ὡς πρὸς z, y, z παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

Γράφοντες τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \alpha^2,$$

παρατηροῦμεν ὅτι ὁδηγὸς κατὰ τὴν γέννεσιν τῆς ἐπιφανείας εἶνε ἡ περιφέρεια κύκλου

$$z = 1\,,\quad x^2 + y^2 = \alpha^2\,,$$

στ') «*Νὰ εὑρεθῇ τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις*

$$xy + yz + zx = 0.$$

Ἐπειδὴ αὕτη εἶνε ὡς ὁμογενὴς ἐξίσωσις ὡς πρὸς x, y, z παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων. Θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει $z = \gamma$, ἔχομεν ὅτι ἡ ὁδηγὸς κατὰ τὴν γέννεσιν τῆς ἐπιφανείας ἔχει ἐξισώσεις $z = \gamma$, $zy + \gamma(x + y) = 0$.

## *Περὶ κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.*

### § 23. Ὁρισμοὶ καὶ ἐξίσωσις κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.—

α') *Κυλινδρικὴ* ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις παράγεται ὑπὸ εὐθείας, κινουμένης παραλλήλως ἑαυτῇ καὶ συναντώσης δοθεῖσαν καμπύλην. Ἡ κινουμένη εὐθεῖα καλεῖται *γεννέτειρα* τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ καμπύλη τὴν ὁποίαν αὕτη συναντᾷ λέγεται *ὁδηγός*.

β') Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων

$$x = \lambda z\,,\quad y = \mu z. \tag{1}$$

Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν (1) ἔχει ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$x = \lambda z + \alpha\,,\quad y = \mu z + \beta\,, \tag{2}$$

ἐν ᾧ α καὶ β εἶνε ποσότητες ἀνεξάρτητοι τῶν x, y, z. Ἂν ἡ γεννέτειρα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἔχῃ τὰς ἐξισώσεις (2) συναντᾷ δὲ αὕτη τὴν ὁδηγόν, ἥτις ἔχει ἐξισώσεις

$$\varphi_1(x, y, z) = 0\,,\quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z. Ἔστω ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς ταύτης εἶνε

$$\sigma(\alpha, \beta) = 0. \tag{4}$$

Ἀπαλείφοντες τώρα τὰς παραμέτρους α καὶ β μεταξὺ τῶν (2) καὶ (4) εὑρίσκομεν

$$\sigma(x-\lambda z,\ y-\mu z)=0, \qquad (5)$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λυομένη ὡς πρὸς $y-\mu z$ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$y-\mu z=f(x-\lambda z).$$

**γ΄)** Ἐν γένει, πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, ἐχόντων ἐξισώσεις

$$\alpha=0,\quad \beta=0,$$

(ἐνῷ α καὶ β παριστάνουν ἀκέραια πολυώνυμα πρωτοβάθμια ὡς πρὸς x, y, z) ἔχει ἐξισώσεις

$$\alpha=\lambda,\quad \beta=\mu,$$

ἐνῷ λ καὶ μ εἶνε παράμετροι, ὁρίζουσαι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας.

Ἵνα ὁρίσωμεν τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας, πρέπει νὰ εὕρωμεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν παραμέτρων λ καὶ μ, εὑρίσκεται δ᾽ αὕτη ὡς ἀνωτέρω δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας καὶ τῆς ὁδηγοῦ. Ἔστω ἡ σχέσις αὕτη

$$\sigma(\lambda,\mu)=0.$$

Ἀπαλείφοντες τέλος τὰ λ καὶ μ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης και τῶν τῆς γεννετείρας, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας

$$\sigma(\alpha,\beta)=0.$$

Ἀντιστρόφως πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς ταύτης, τῆς ὁποίας δηλαδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶνε συνάρτησις δύο ἀκεραίων πρωτοβαθμίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x, y, z, παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν. Διότι, ἂν αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς M (x, y, z) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ καλέσωμεν λ καὶ μ τὰς τιμὰς τῶν α καὶ β, ἂν ἀντὶ τῶν x, y, z, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς αὐτά, θέσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ M, θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\lambda,\mu)=0,\quad \alpha=\lambda,\quad \beta=\mu.$$

Ἀλλὰ καὶ αἱ συντεταγμέναι παντὸς ἄλλου σημείου τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων $\alpha=\lambda$ καὶ $\beta=\mu$ καθιστᾷ τὰ α καὶ β ἀντιστοίχως ἴσα μὲ λ καὶ μ, ἤτοι αἱ συντεταγμέναι αὗται ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν

$$\sigma(\alpha, \beta) = 0 .$$

Ἤτοι τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Εἰς τὰς διαφόρους λύσεις (λ καὶ μ) ἀντιστοιχοῦν εὐθεῖαι

$$\alpha = \lambda , \quad \beta = \mu$$

παράλληλοι πρὸς τὴν

$$\alpha = 0 , \quad \beta = 0.$$

Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ἔχουσα γεννετείρας τὰς εὐθείας ταύτας, εἶνε κυλινδρική.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«***ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ὑποθήκη ἵνα ἐξίσωσίς τις σ*** $(x, y, z) = 0$ ***παριστάνῃ κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν εἶνε, τὸ πρῶτον μέλος ταύτης νὰ εἶνε συνάρτησις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς*** $x, y, z$».

δ΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν ἂν δοθεῖσα ἐπιφάνεια εἶνε κυλινδρική, τέμνομεν αὐτὴν δι' ἑνὸς τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων, ἔστω τοῦ $xy$, καὶ ἔστω ὡς τομὴ ἡ καμπύλη ἥτις ἔχει ἐξισώσεις $f(x, y) = 0$, $z = 0$.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες ἔχουν ὡς ὁδηγὸν τὴν γραμμὴν ταύτην εἶνε ἡ

$$f(x - \lambda z , \; y - \mu z) = 0 .$$

Ζητοῦμεν ἀκολούθως ἂν εἶνε δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὰ λ καὶ μ, ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη νὰ εἶνε ἐκ ταυτότητος ἴση μὲ τὴν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας.

## § 24. Ἐφαρμογαί.—

***α΄) «Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τῆς ἐχούσης γεννετείρας παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν*** $x = y = z$ ***καὶ ὁδηγὸν τὴν ἔλλειψιν***

$$z = 0 , \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 .$$

Αἱ ἐξισώσεις πάσης εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν δοθεῖσαν εἶνε

$$z - x = \lambda , \quad z - y = \mu .$$

Ἵνα αὕτη συναντᾷ τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν, πρέπει αἱ ἐξισώσεις ταύτης καὶ αἱ τῆς ἐλλείψεως νὰ ἔχουν κοινὴν λύσιν. Ἤτοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύεται ἡ

$$\frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{\mu^2}{\beta^2} = 1,$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἐν λόγῳ ἐξισώσεων.

Ἀπαλείφοντες τέλος τὰ λ καὶ μ μεταξὺ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως καὶ τῶν τῆς γεννετείρας εὑρίσκομεν

$$\frac{(z-x)^2}{\alpha^2} + \frac{(z-y)^2}{\beta^2} = 1,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

β') «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τῆς ἐχούσης γεννετείρας παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν*** $x = z$, $y = 2z$ ***καὶ ὁδηγὸν τὴν παραβολὴν*** $z = 0$, $y^2 = 2px$.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$x = z + \lambda, \quad y = 2z + \mu.$$

Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῶν τῆς ὁδηγοῦ ἔχομεν

$$\mu^2 = 2p\lambda.$$

Ἀπαλείφοντες δὲ τὰ λ καὶ μ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῶν τῆς γεννετείρας ἔχομεν

$$(y - 2z)^2 = 2p(x - z),$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

γ') ***Νὰ εὑρεθῇ τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις*** $xy + xz = 1$».

Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x(y + z) - 1 = 0,$$

παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γεννετείρας παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

καὶ ὁδηγὸν τὴν ὑπερβολὴν $z = 0$, $xy = 1$, κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου

$$z = 0.$$

## *Περὶ κωνοειδῶν ἐπιφανειῶν.*

§ **23. Ὁρισμοὶ καὶ ἐξίσωσις κωνοειδοῦς ἐπιφανείας.**—

α΄) *Κωνοειδὴς* λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία γράφεται ὑπὸ εὐθείας, ἥτις διατρέχει δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ δοθεῖσαν καμπύλην, μένει δὲ παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἡ εὐθεῖα ἥτις παράγει τὴν ἐπιφάνειαν λέγεται γεννέτειρα τῆς ἐπιφανείας. Τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ὁποῖον μένει παράλληλος ἡ γεννέτειρα καλεῖται *ὁδηγοῦν ἐπίπεδον*, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ἡ καμπύλη, τὰς ὁποίας διαγράφει ἡ γεννέτειρα, λέγονται *πρώτη* καὶ *δευτέρα ὁδηγὸς* ἀντιστοίχως.

β΄) Ὅτι εἶνε δυνατὴ ἡ ἀνωτέρω κίνησις εὐθείας ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Φανταζόμεθα τυχὸν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν (ὁδηγοῦν) καὶ τέμνον τὴν μὲν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Α, τὴν δὲ καμπύλην εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα. Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ Α μὲ ἓν τῶν σημείων τούτων τῆς καμπύλης δι' εὐθείας, ἔχομεν τὴν γεννέτειραν τῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον κινῆται μένον παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰς τομάς, κινεῖται καὶ γράφῃ τὴν ἐπιφάνειαν.

γ΄) Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως κωνοειδοῦς ἐπιφανείας λαμβάνομεν, πρὸς εὐκολίαν, τὴν πρώτην ὁδηγὸν ὡς ἄξονα τῶν z τὸ δὲ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν x y.

Τότε αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$y = \lambda x , \quad z = \gamma .$$

Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς δευτέρας ὁδηγοῦ εἶνε

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 , \quad \varphi_2(x_2, y, z) = 0 ,$$

εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ τῶν λ καὶ γ ὑπάρχουσαν σχέσιν, ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς δευτέρας ὁδηγοῦ καὶ τῆς γεννετείρας. Ἔστω ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς εἶνε

$$\sigma(\lambda , \gamma) = 0 .$$

Ἀπαλείφοντες τὰ $\lambda$ καὶ $\gamma$ μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς γεννετείρας, εὑρίσκομεν

$$\sigma\left(\frac{y}{x}, z\right)=0,$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας.

δ') Ἐν γένει, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$\sigma\left(\frac{\beta}{\alpha}, \gamma\right)=0,$$

ἐνῷ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ εἶνε ἀκέραια πολυώνυμα πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς $x$, $y$, $z$ παριστῶντα ἐπίπεδα, τεμνόμενα εἰς ἓν σημεῖον, παριστάνει κωνοειδῆ ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας τὸ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον ἔχει ἐξίσωσιν

$$\gamma=0,$$

ἡ δὲ ὁδηγὸς εὐθεῖα ἔχει ἐξισώσεις

$$\alpha=0, \quad \beta=0.$$

Διότι, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\beta-\alpha\mu=0, \quad \gamma=\lambda$$

$$\sigma(\mu, \lambda)=0$$

δι' ἀπαλοιφῆς τῶν $\mu$ καὶ $\lambda$. Ἀλλ' αἱ δύο πρῶται τῶν ἐξισώσεων τούτων παριστάνουν εὐθεῖαν γραμμήν, ἥτις κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ $\gamma=0$, τέμνουσαν δὲ τὴν εὐθεῖαν $\alpha=0$, $\beta=0$ εἰς τὸ σημεῖον, ἐνῷ εἶνε $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\lambda$. Ἑπομένως ἡ ὑπὸ τῆς εὐθείας γραφομένη ἐπιφάνεια, ὅταν αὕτη κινῆται τοιουτοτρόπως, ὥστε αἱ παράμετροι αὐτῆς $\mu$ καὶ $\lambda$ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς τρίτης ἐξισώσεως, εἶνε κωνοειδὴς ἐπιφάνεια.

§ **26. Ἐφαρμογαί.—**

α') «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ἡ γεννέτειρα εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ x y, στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z καὶ ἔχει ὁδηγὸν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου***

$$x=\alpha, \quad y^2+z^2=\varrho^2».$$

Ἡ γεννέτειρα ἔχει ἐξισώσεις $z=\gamma$, $y=\lambda x$. Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῆς ὁδηγοῦ, εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ τῶν λ καὶ γ σχέσιν

$$\lambda^2 \alpha^2 + \gamma^2 = \varrho^2 .$$

Ἀπαλείφοντες τέλος τὰ λ καὶ γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας λαμβάνομεν

$$\frac{y^2}{x^2} \alpha^2 + z^2 = \varrho^2,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

**ϛ΄) «Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, τῆς γραφομένης ὑπὸ εὐθείας, ἥτις κινουμένη τέμνει δύο δεδομένας εὐθείας καὶ μένει παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον μὴ παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας».**

Λαμβάνομεν τὸ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν x y, ὡς ἄξονα τῶν z τὴν μίαν τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ὡς ἐπίπεδον τῶν y z τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τῶν z ἀγόμενον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν, ὡς ἄξονα δὲ τῶν x τὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὰς τομὰς τοῦ ὁδηγοῦντος ἐπιπέδου καὶ τῶν δύο εὐθειῶν. Οὕτω αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$z = \gamma , \quad y = \lambda x,$$

τῆς δὲ δευτέρας ὁδηγοῦ

$$x = \alpha , \quad y = \mu z .$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἔχομεν

$$\mu \gamma = \lambda \alpha .$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν γ καὶ λ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας εὑρίσκομεν

$$\alpha y = \mu x z,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ y z παριστάνεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $x = \alpha_1$, $\alpha_1 \mu z - \alpha y = 0$, αἵτινες ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν. Ἡ εὐθεῖα αὕτη κινουμένη συναντᾷ τὰς γεννετείρας τοῦ ἀνωτέρου πρώτου συστήματος καὶ μένει παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ y z.

Ἔστωσαν $x'$, $y'$, $z'$ αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς $M'$ τῆς ἐπιφανείας. Θὰ ἔχωμεν $\mu\, x'\, z' = \alpha\, y'$. Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν εὐθεῖαν τοῦ πρώτου συστήματος διὰ τῶν ἐξισώσεων $z = \gamma$, $y = \frac{\gamma\mu}{\alpha}\, x$, νὰ ὁρίσωμεν δὲ τὸ $\gamma$, ὥστε ἡ εὐθεῖα αὕτη νὰ διέρχεται διὰ τοῦ $M'$, διότι εἶνε $z' = \gamma$, $y' = \frac{\gamma\mu}{\alpha}\, x'$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ $\alpha_1$ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶνε

$$x' = \alpha_1\,, \quad \alpha_1\, \mu\, z' - \alpha\, y' = 0\,.$$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας διέρχονται δύο εὐθεῖαι.

γ') «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει εὐθεῖα, ἥτις κινουμένη στηρίζεται εἰς τὸν ἄξονα τῶν z, μένει παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν xy καὶ ἔχει ὁδηγὸν τὴν ἔλλειψιν***

$$x = \alpha\,, \quad \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1\text{»}.$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$y = \lambda\, x\,, \quad z = \varrho\,.$$

Ἑπομένως ἡ μεταξὺ τοῦ $\lambda$ καὶ $\varrho$ σχέσις εἶνε

$$\frac{\lambda^2\, \alpha^2}{\beta^2} + \frac{\varrho^2}{\gamma^2} = 1\,.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2\, x^2}{\gamma^2\, \alpha^2} = \frac{x^2}{\alpha^2}\,.$$

ϛ') «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, ἥτις ἔχει ὁδηγὸν τὴν καμπύλην*** $x = \varrho\, \text{συν}\, \varphi$, $y = \varrho\, \text{ημ}\, \varphi$, $z = k\, \varphi$, ***ἥτις καλεῖται (ἕλιξ) καὶ γεννέτειραν τὴν εὐθεῖαν ἥτις, διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν z καὶ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ δοθεῖσα γραμμή***».

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ εἶνε

$$z = \gamma\,, \quad y = x\, \varepsilon\varphi\, \varphi\,.$$

Ἐκφράζοντες ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾷ τὴν γραμμήν, ἔχομεν

$$k\, \varphi = \gamma\,.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας, ἥτις καλεῖται *ἑλικοειδὲς* εἶνε

$$\frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\left(\frac{z}{k}\right).$$

### *Περὶ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς.*

**§ 27. Ὁρισμοὶ καὶ ἐξίσωσις ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.—**

**α΄)** Καλοῦμεν *ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς* τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν γράφει γραμμή τις στρεφομένη περὶ εὐθεῖαν οὕτως, ὥστε ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς νὰ γράφῃ περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν·

Ἡ εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ περιστροφή, καλεῖται ἄξων περιστροφῆς ἢ ἄξων τῆς ἐπιφανείας, αἱ δὲ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας, αἵτινες γίνονται ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος λέγονται *μεσημβρινοὶ* τῆς ἐπιφανείας, ἐνῷ αἱ γινόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων τῷ ἄξονι λέγονται *παράλληλοι τομαί.*

**β΄)** Ἐπειδὴ πᾶσα ἐπιφάνεια δύναται νὰ νοηθῇ ὡς γραφομένη ὑπὸ γραμμῆς, ἥτις κινεῖται ἐπ' αὐτῆς, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς ὡς γραφομένην ὑπὸ περιφερείας κύκλου, τῆς ὁποίας τὸ μὲν κέντρον κινεῖται ἐπ' εὐθείας σταθερᾶς (τοῦ ἄξονος τῆς ἐπιφανείας), τὸ δὲ ἐπίπεδον μένει κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον, ἐνῷ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ πάντοτε δοθεῖσαν γραμμήν. Κατὰ τὴν γένεσιν ταύτην τῆς ἐπιφανείας *γεννέτειρα* αὐτῆς εἶνε ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια, *ὁδηγὸς* δὲ ἡ δοθεῖσα γραμμή.

**γ΄)** Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισσώεως ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἐχούσης ὁδηγὸν τὴν γραμμὴν

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0,$$

λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς ὡς ἄξονα τῶν z, τοὺς δ' ἄξονας ὀρθογωνίους. Οὕτω αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας περιφερείας κύκλου θὰ εἶνε

$$z = \gamma, \quad x^2 + y^2 = \varrho^2.$$

Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀνωτέρω ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν, ἥτις συνδέει τὰς παραμέτρους γ καὶ ϱ. Ἔστω αὕτη

$$\sigma(\gamma, \varrho^2) = 0.$$

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας τὰ γ καὶ ρ εὑρίσκομεν τὴν

$$\sigma\left(z\,,\,x^2+y^2\right)=0\,,$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.

δ') Ἐὰν ἡ ὁδηγὸς εἶνε ἐπίπεδος καμπύλη, κεῖται δ' αὕτη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x z, θὰ ἔχῃ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$y=0\,,\quad \varphi\,(x\,,z)=0\,.$$

Τότε αἱ παράμετροι γ καὶ ρ θὰ συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi\,(\gamma\,,\varrho)=0\,,$$

τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας $z=\gamma$, $x^2+y^2=\varrho^2$ καὶ τῆς ὁδηγοῦ.

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς εἶνε

$$\varphi\,(z\,,\sqrt{x^2+y^2})=0\,,$$

ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varphi\,(x,z)=0$ τοῦ μεσημβρινοῦ αὐτῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ x z, ἂν τεθῇ ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ x τὸ $\sqrt{x^2+y^2}$.

ε') Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}\,, \tag{1}$$

αἱ δὲ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ

$$\varphi_1\,(x, y, z)=0\,,\quad \varphi_2\,(x, y, z)=0\,, \tag{2}$$

ἡ γεννέτειρα (περιφέρεια κύκλου) εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν (1) καὶ σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον $(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ τῆς (1). Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$\alpha\,x+\beta\,y+\gamma\,z=\lambda,\quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\varrho^2,\ (3).$$

Εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ τῶν λ καὶ $\varrho^2$ ὑπάρχουσαν σχέσιν, ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3). Ἔστω ὅτι ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς ταύτης προκύπτει

$$\sigma\,(\lambda\,,\varrho^2)=0\,. \tag{4}$$

Ἀπαλείφοντες τὰ λ καὶ $\varrho^2$ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (3) εὑρίσκομεν

$$\sigma\,(\alpha\,x+\beta\,y+\gamma z\,,\,(x-x_1)^2+(y-y)^2+(z-z_1)^2\,)=0\,, \tag{5}$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (5) παριστάνει, ἐν γένει ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς. Διότι αὕτη προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) δι' ἀπαλοιφῆς τῶν λ καὶ $\varrho^2$. Αἱ δὲ ἐξισώσεις (3) παριστάνουν περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν κέντρον ἐπὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας (1), ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας.

**στ')** Ἐὰν ἄξων περιστροφῆς εἶνε ὁ ἄξων τοῦ z, αἱ δ' ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ αἱ $x = f(z)$ $y = f_1(z)$, αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας περιφερείας, ἐχούσης ὡς ἄξονα τὸν τῶν z θὰ εἶνε

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho, \quad z = \gamma, \quad \text{ἢ} \quad x^2 + y^2 = \varrho', \; z = \gamma.$$

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ συναντᾷ τὴν γραμμήν, θὰ ἔχωμεν δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων

$$f^2(\gamma) + f_1^2(\gamma) = \varrho'$$

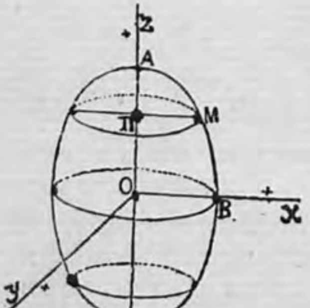
ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε

$$x^2 + y^2 = f^2(z) + f_1^2(z),$$

## § 28. Ἐφαρμογαί.—

**α')** «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἔλλειψις στρεφομένη περὶ τὸν μεγάλον αὐτῆς ἄξονα***».

Λαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδηγοῦ ἐλλείψεως ὡς ἐπίπεδον τῶν x z καὶ τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα, περὶ τὸν ὁποῖον αὕτη στρέφεται, ὡς ἄξονα τῶν z (σχ. 16). Αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ θὰ εἶνε οὕτω



(Σχ. 16)

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} = 1, \quad (\alpha > \beta) \quad (1)$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας περιφερείας κύκλου εἶνε

$$z = \gamma, \quad x^2 + y^2 = \varrho^2. \qquad (2)$$

Ἔχομεν ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2)

$$\frac{\varrho^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 1,$$

καὶ τέλος ἀπαλείφοντες τὰ ϱ καὶ γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) εὑρίσκομεν

$$\frac{x^2 + y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} = 1, \qquad (3)$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἥτις καλεῖται *ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς ἐπίμηκες* (σχ. 16).

**β') «Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἔλλειψις, στρεφομένη περὶ τὸν μικρὸν αὐτῆς ἄξονα».**

Λαμβάνοντες ὡς ἐπίπεδον τῶν x z τὸ τῆς ἐλλείψεως καὶ τὸν μεγάλον αὐτῆς ἄξονα ὡς τὸν τῶν x, ἔχομεν ὡς ἐξισώσεις ταύτης (σχ. 17)

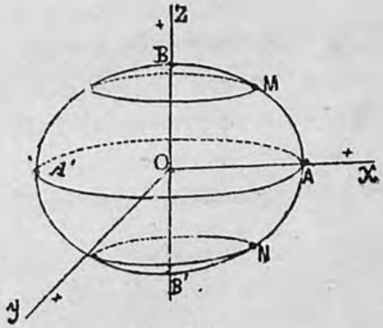
$$y=0\,,\quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=1\,,\qquad \left(\alpha>\beta\right) \qquad (1)$$

Ἡ γεννέτειρα ἔχει ἐξισώσεις

$$z=\gamma\,,\quad x^2+y^2=\varrho^2\,. \qquad (2)$$

Ἑπομένως εὑρίσκομεν δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2).

$$\frac{\varrho^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1\,,$$




(Σχ. 17)

καὶ ἀκολούθως
$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=1\,,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας καὶ καλεῖται αὕτη *ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς ἐπίπλατυ.*

**γ') Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ὑπερβολὴ στρεφομένη περὶ τὸν δευτερεύοντα αὐτῆς ἄξονα».**

Τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδηγοῦ ὑπερβολῆς λαμβάνομεν ὡς ἐπίπεδον τῶν x z καὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς ὡς ἄξονα τῶν x, ὅτε ἔχομεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ (σχ 18)

$$y=0\,,\quad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\beta^2}=1\,. \qquad (1)$$

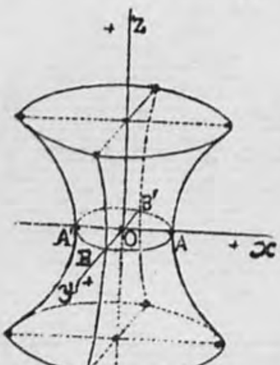
Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας περιφερείας εἶνε

$$z = \gamma\,,\quad x^2 + y^2 = \varrho^2\,. \qquad (2)$$

Ἐπομένως ἔχομεν δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2)

$$\frac{\varrho^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1$$

καὶ τέλος δι' ἀπαλόιφῆς τῶν ϱ καὶ γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2)




(Σχ. 18)

εὑρίσκομεν

$$\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 1\,,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία λέγεται *ὑπερβολοειδὴς ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον* (σχ. 18)

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ x y, ἔχον ἐξίσωσιν $z = k$, τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$z = k\,,\quad x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(k^2 + \beta^2\right),$$

ἥτις εἶνε πραγματικὴ καὶ ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{k^2 + \beta^2}$.

Ἂν ἡ στρεφομένη ὑπερβολὴ εἶνε ἰσοσκελὴς ὅτε εἶνε $\alpha = \beta$, ἡ γεννωμένη ἐπιφάνεια καλεῖται *ἰσοσκελὲς ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον ἐκ περιστροφῆς*, ἔχει δὲ ἐξίσωσιν

$$x^2 + y^2 - z^2 = \alpha^2\,.$$

**ϛ') «Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ὑπερβολή, στρεφομένη περὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς».**

Θεωροῦντες ὡς ἐπίπεδον τῶν x z τὸ τῆς στρεφομένης ὑπερβολῆς καὶ ὡς ἄξονα τῶν z τὸν πρωτεύοντα ἄξον αὐτῆς, ἔχομεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ (σχ. 19)

$$y = 0\,,\quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = -1\,. \qquad (1)$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας εἶνε

$$z = \gamma\,,\quad x^2 + y^2 = \varrho^2\,. \qquad (2)$$

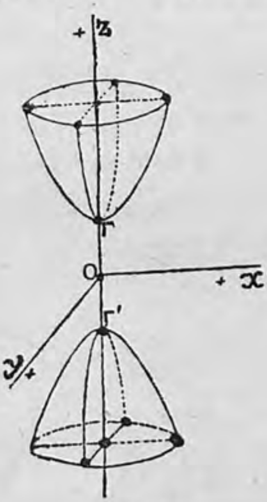
Ἑπομένως ἔχομεν ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2)

$$\frac{\rho^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = -1$$

καὶ ἂν μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) ἀπαλείψωμεν τὰ γ καὶ ρ εὑρίσκομεν

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = -1,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, ἥτις λέγεται *ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς δίχωνον*.




(σχ. 19)

Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου z = k ἔχει ἐξισώσεις

$$z = k, \quad x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(k^2 - \beta^2\right),$$

ἥτις εἶνε περιφέρεια κύκλου πραγματικὴ ἂν εἶνε $k > \beta$ ἢ $k < -\beta$.

Ἡ ἐπιφάνεια δὲν ἔχει σημεῖα κείμενα μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων $z = -k$ καὶ $z = +k$. Ἔχει λοιπὸν αὕτη δύο χωριστὰς χώνας.

Ἂν εἶνε $\alpha = \beta$ ἔχον *ἰσοσκελὲς δίχωνον ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς*, ἔχον ἐξίσωσιν

$$x^2 + y^2 - z^2 + \alpha^2 = 0.$$

ε') Κατὰ τὴν περιστροφὴν ὑπερβολῆς περὶ ἕνα τῶν ἀξόνων αὐτῆς αἱ ἀσύμπτωτοι ταύτης γράφουν κῶνον κυκλικόν, ὅστις λέγεται *ἀσύμπτωτος κῶνος* τῶν ἀντιστοίχων ὑπερβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς. Οἱ ἀσύμπτωτοι κῶνοι τοῦ μονοχώνου καὶ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν ἰσοσκελῶν τοιούτων ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχους

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

στ') «**Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει παραβολή, στρεφομένη περὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς**».

Ἂν λάβωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς παραβολῆς ὡς ἐπίπεδον τῶν x z καὶ ὡς ἄξονα τῶν z τὸν ἄξονα αὐτῆς, αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ θὰ εἶνε (σχ. 20)

$$y = 0, \quad x^2 = 2pz. \tag{1}$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας περιφερείας εἶνε

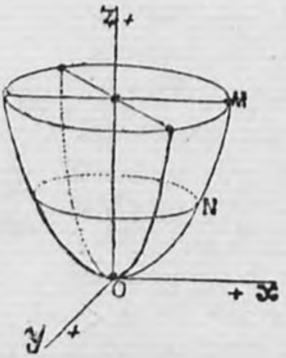
$$z = \gamma\,, \quad x^2 + y^2 = \varrho^2\,. \qquad (2)$$

Ἑπομένως ἔχομεν ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξύ τῶν (1) καὶ (2)

$$\varrho^2 = 2\,p\,\gamma$$

καὶ τέλος ἀπαλείφοντες τὰ ρ καὶ γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) εὑρίσκομεν

$$x^2 + y^2 = 2\,p\,z\,,$$




(Σχ. 20)

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία λέγεται ***παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς*** (σχ. 20).

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἔχει σημεῖα μόνον πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν z, ἐὰν εἶνε $p > 0$.

ζ΄) «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς σπείρας, ἤτοι τῆς ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν γράφει περιφέρεια κύκλου, στρεφομένη περὶ εὐθεῖαν, κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς***».

Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα περιστροφῆς ὡς ἄξονα τῶν z καὶ τὴν ἐπ' αὐτὸν κάθετον διάμετρον τῆς περιφερείας ὡς ἄξονα τῶν x, ὅτε αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ εἶνε

$$y = 0\,, \quad z^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2\,,$$

ἐν ᾧ α παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντὶ τοῦ x τὸ $\sqrt{x^2+y^2}$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς σπείρας (§ 27, δ΄)

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - \alpha\right)^2 = \varrho^2,$$

ἢ $\quad (x^2+y^2+z^2)^2-2(\alpha^2+\varrho^2)(x^2+y^2)+$

$$+2(\alpha^2-\varrho^2)z^2+(\alpha^2-\varrho^2)^2=0.$$

η΄) «*Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας, στρεφομένης περὶ ἄλλην εὐθεῖαν, μὴ κειμένην ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς πρώτης*».

Λαμβάνοντες τὸν ἄξονα περιστροφῆς ὡς ἄξονα τῶν z καὶ τὴν κοινὴν κάθετον τῶν δύο εὐθειῶν ὡς ἄξονα τῶν **x**, ἔχομεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ

$$x=\alpha\,,\quad y=\lambda z\,,$$

ἐνῷ α παριστάνει τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν καὶ λ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας αὐτῶν.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννετείρας περιφερείας εἶνε

$$x^2+y^2=\varrho^2\,,\quad z=\gamma\,.$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$\alpha^2+\lambda^2\gamma=\varrho^2\,.$$

καὶ

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}z^2=1\,,$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη λέγεται ὡς εἴδομεν *ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον*, διότι παράγεται, ἐὰν ὑπερβολὴ ἔχουσα δευτερεύοντα ἄξονα μήκους $\frac{2\alpha}{\lambda}$ καὶ πρωτεύοντα $2\alpha$ στραφῇ περὶ τὸν δευτερεύοντα αὐτῆς ἄξονα. Ὅθεν τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\beta^2}=1$$

παράγεται καὶ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν

$$x=\alpha\,,\quad y=\frac{\alpha}{\beta}z$$

$$x=\alpha\,,\quad y=-\frac{\alpha}{\beta}z$$

στρεφομένης περὶ τὸν ἄξονα τῶν z.

θ') Ἐὰν ἡ ὁδηγὸς (ἢ μεσημβρινὸς) εἶνε εὐθεῖα συναντῶσα τὸν ἄξονα περιστροφῆς, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $y = 0$, $z = x\ \varepsilon\varphi\ \varphi$, ἡ δὲ παραγομένη ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2 + y^2 - z^2\ \sigma\varphi^2\ \varphi = 0\,, \tag{1}$$

προκύπτουσαν, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γεννετείρας περιφερείας

$$z = \gamma\,,\quad x^2 + y^2 = \varrho^2$$

καὶ τῶν τῆς ὁδηγοῦ ἀπαλείψωμεν τὰ $x, y, z$ καὶ ἀκολούθως μεταξὺ τῆς οὕτω προκυπτούσης $\gamma^2 = \varrho^2\ \varepsilon\varphi^2\ \varphi$ καὶ τῶν τῆς γεννετείρας ἀπαλείψωμεν τὰ $\varrho$ καὶ $\gamma$. Ἡ ἐπιφάνεια (1) καλεῖται ***κῶνος ἐκ περιστροφῆς.***

ι') Ἐὰν ἡ στρεφομένη εὐθεῖα ἔχῃ ἐξισώσεις $y = 0$, $x = \alpha$, στρέφεται δ' αὕτη περὶ τὸν ἄξονα τῶν $z$, ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ἔχει ἐξίσωσιν

$$x^2 + y^2 = \alpha^2$$

ἥτις λέγεται ***κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς.***

### *Περὶ ἐπιφανειῶν ἐκ μεταφορᾶς.*

**§ 29.** Ἔστωσαν δύο καμπύλαι γραμμαὶ (Γ) καὶ ($\Gamma_1$) ἔχουσαι ἐξισώσεις ἀντιστοίχως τὰς

$$(\Gamma):\quad x = f(t)\,,\quad y = \varphi(t)\,,\quad z = \sigma(t)$$

καὶ

$$(\Gamma_1):\quad x = f_1(u)\,,\quad y = \varphi_1(u)\,,\quad z = \sigma_1(u)\,.$$

Τὸ μέσον τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον συνδέει ἓν σημεῖον M τῆς (Γ) μὲ ἓν σημεῖον P τῆς ($\Gamma_1$) γράφει ἐπιφάνειαν ὁριζομένην ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$2x = f(t) + f_1(u),\quad 2y = \varphi(t) + \varphi_1(u),\quad 2z = \sigma(t) + \sigma_1(u).$$

Τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας καλοῦμεν, κατὰ τὸν Sophus Lie, ***ἐπιφανείας ἐκ μεταφορᾶς*** καὶ δύνανται νὰ παραχθοῦν κατὰ δύο τρόπους διὰ μεταφορᾶς μιᾶς καμπύλης. Τῷ ὄντι, ἂν τὸ u διατηρῇ σταθεράν τινα τιμήν, ὅτε τὸ σημεῖον P μένει ἀκίνητον, τὸ μέσον M' τοῦ MP διαγράφει μίαν καμπύλην (Γ'), ἥτις λέγεται ***ὁμοιόθετος*** τῆς (Γ), ἐπειδὴ γίνεται ἂν ἀπὸ τοῦ P φέρωμεν τμήματα εὐθειῶν PM εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς (Γ) καὶ λάβωμεν τὰ μέσα αὐτῶν M', ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς καμπύλης (Γ), καλοῦμεν δὲ ***λόγον ὁμοιότητος*** τὸν λόγον $\dfrac{(PM')}{(PM)}$, ὅστις εἶνε ἴσος μὲ $1/2$. Ἐὰν τὸ σημεῖον P γράφῃ τὴν καμπύλην $(\Gamma_1)$ ἡ γραμμὴ $(\Gamma')$ ὑφίσταται μίαν μεταφοράν, γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν περὶ ἧς ὁ λόγος. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη παράγεται ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς $(\Gamma_1')$, ἥτις εἶνε ὁμοιόθετος τῆς $(\Gamma_1)$ καὶ ἔχει λόγον ὁμοιότητος $1/2$. Ἐὰν λάβωμεν

$$x = f(t) + f_1(u), \quad y = \varphi(t) + \varphi_1(u), \quad z = \sigma(t) + \sigma_1(u)$$

ἔχομεν ἐπιφάνειαν, ἥτις δύναται νὰ παραχθῇ ἐκ μεταφορᾶς μιᾶς γραμμῆς ἴσης τῇ $(\Gamma)$ ἢ μιᾶς γραμμῆς ἴσης τῇ $(\Gamma_1)$, τὸ ὁποῖον διακρίνομεν ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων, διότι ἐὰν ὑποτεθῇ $u = u_0$, ἔχομεν τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον συντεταγμένας

$$f(t) + f_1(u_0), \quad \varphi(t) + \varphi_1(u_0), \quad \sigma(t) + \sigma_1(u_0)$$

ἐν ᾧ τὸ σημεῖον $(f(t), \varphi(t), \sigma(t))$ ὑφίσταται μεταφορὰν τοιαύτην, ὥστε αἱ ἑκάστοτε συντεταγμέναι αὐτοῦ ἔχουν ὡς προσθετέους τοὺς $f_1(u_0)$, $\varphi_1(u_0)$, $\sigma_1(u_0)$ ἀντιστοίχως καὶ οἵτινες μένουν οἱ αὐτοὶ διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς $(\Gamma)$.

Οὕτω ἡ γραμμὴ $u =$ σταθ. εἶνε γραμμὴ ἴση τῇ $(\Gamma)$ καὶ ἥτις δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν $(\Gamma)$ διὰ μιᾶς μεταφορᾶς. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ καμπύλη $t =$ σταθ. εἶνε μία γραμμὴ ἴση τῇ γραμμῇ $(\Gamma_1)$.

***Ἐφαρμογή.*** Ἔστωσαν αἱ γραμμαὶ

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad z = 0,$$

$$x = \frac{u^2}{2q}, \quad y = 0, \quad z = u.$$

Η ἐπιφάνεια ἐκ μεταφορᾶς, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτάς, ἔχει ἐξίσωσιν ὁριζομένην ἐκ τῶν

$$x = \frac{t^2}{2p} + \frac{u^2}{2q}, \quad y = t, \quad z = u.$$

Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἐκ μεταφορᾶς εἶνε

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κυκλικοῦ κώνου. (Ἂν ὁ μεσημβρινός του ἐπὶ τοῦ $xz$ εἶνε ἡ εὐθεῖα $y = 0$, $x = \lambda z$, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$).

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν ὀρθοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ μεσημβρινὸς σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα περιστροφῆς γωνίαν $45^0$. (Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε $x^2 + y^2 - z^2 = 0$).

3) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἰσοσκελῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς. (Αἱ ζητούμεναι ἐξισώσεις εἶνε $x^2 + y^2 - z^2 \pm \alpha^2 = 0$).

4) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν κώνων τῶν ὑπερβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς. Ἤτοι τῶν κώνων τοὺς ὁποίους γράφουν αἱ ἀσύμπτωτοι ὑπερβολῆς, ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ ἕνα τῶν ἀξόνων της. (Αἱ ζητούμεναι ἐξισώσεις εἶνε

$$\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0).$$

5) Δείξατε ὅτι πᾶσα εὐθεῖα, ἔχουσα ἐξισώσεις

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

τέμνει ἑκάστην τῶν θεωρηθεισῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ὑπερβολοειδοῦς, παραβολοειδοῦς καὶ κώνου εἰς δύο σημεῖα ἐν γένει, τὰ ὁποῖα ἢ εἶνε πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα, ἢ πραγματικὰ καὶ συμπίπτοντα, ἢ φανταστικά. Διὰ τοῦτο αἱ ἐν λόγῳ ἐπιφάνειαι λέγονται *ἐπιφάνειαι δευτέρου βαθμοῦ*.

6) Εὕρετε τὴν συνθήκην, ἵνα δοθεῖσα εὐθεῖα ἐφάπτεται ἐπιφανείας τινὸς δευτέρου βαθμοῦ. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων της.

7) Δείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς ἓν σημεῖον ἑκάστης τῶν θεωρηθεισῶν ἐπιφανειῶν β' βαθμοῦ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον* τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖόν της.
Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἑκάστης.

8) Καθὼς εἰς τὰ περὶ σφαίρας, ὁρίσατε τὸν πόλον καὶ τὸ πολικὸν ἐπίπεδον ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν ἐπιφανειῶν δευτέρου βαθμοῦ. Εὕρετε ἰδιότητας μεταξὺ πόλων καὶ πολικῶν.

9) Δείξατε ὅτι, ἂν παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, μὴ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονά του, ἡ προβολὴ τῆς τομῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $xy$ εἶνε περιφέρεια κύκλου.

10) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γίνεται, ἂν τὸ κέντρον περιφερείας κύκλου ἐχούσης ἀκτῖνα σταθερὰν, κινῆται ἐπὶ παραβολῆς τὸ δὲ ἐπίπεδόν της μένει παράλληλον ἑαυτῷ.

11) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γράφεται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ δύο δεδομένας εὐθείας, μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ δοθεῖσαν περιφέρειαν.

12) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γίνεται ὑπὸ δοθείσης περιφερείας, ὅταν τὸ κέντρον της διατρέχῃ δοθεῖσαν γραμμήν, τὸ δὲ ἐπίπεδόν της μένῃ παράλληλον ἑαυτῷ.

13) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις γράφεται ὑπὸ εὐθείας τεμνούσης καθέτως τὴν εὐθεῖαν $x + y = 0$, $z = 0$ καὶ ἐχούσης ὁδηγὸν τὴν παραβολὴν $x^2 = \gamma z$.

14) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

15) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τυχουσῶν εὐθειῶν εἶνε σταθερά.

16) Δίδεται σφαῖρα καὶ σημεῖον Α ἐπ' αὐτῆς. Τέμνουσα τῆς σφαίρας διερχομένη διὰ τοῦ Α, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ρ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΡ τὸ μῆκος Ρ Μ ἴσον πρὸς α (σταθερόν). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

17) Ἀπὸ τῶν σημείων ἐλλείψεως ἄγονται εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα αὐτῆς καὶ γράφονται περιφέρειαι κύκλων μὲ κέντρα μὲν τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως, ἀκτῖνας δὲ τὰς καθέτους ταύτας ἀντιστοίχως, τῶν ὁποίων (περιφερειῶν) τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως καὶ διέρχονται διὰ τῶν τεταγμένων τῶν σημείων αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ περιφέρειαι αὗται. (Αὕτη ἔχῃ ἐξίσωσιν

$$\alpha^2 (y^2 + z^2)^2 + 4 \beta^2 x^2 y^2 = 4 \alpha^2 \beta^2 y^2 ).$$

18) Τρεῖς εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνονται ὑπὸ σειρᾶς παραλλήλων ἐπιπέδων. Διὰ τῶν τριῶν τομῶν ἑκάστου ἐπιπέδου γράφεται περιφέρεια κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν περιφερειῶν τούτων.

19) Εἰς ἔλλειψιν ἄγονται παράλληλοι χορδαὶ καὶ μὲ αὐτὰς ὡς διαμέτρους γράφονται περιφέρειαι κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ περιφέρειαι αὗται.

20) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ παραβολῆς, ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

21) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ μίαν ἀσύμπτωτόν της.

22) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται, ὅταν περιφέρεια κύκλου κινῆται οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς εὐθείας δοθείσας.

23) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει εὐθεῖα, ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς δοθείσας εὐθείας, ἀνὰ δύο μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου

(Ἂν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι δὲν εἶνε παράλληλοι πρὸς ἐπίπεδον καὶ δι' ἑκάστης φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα τῶν δύο ἄλλων, σχηματίζεται παραλληλεπίπεδον. Λαμβάνοντες τὸ κέντρον τούτου ὡς ἀρχὴν καὶ ὡς ἄξονας τὰς εὐθείας, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του, ἂν $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ εἶνε αἱ ἀκμαί του, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ ἔχουν ἐξισώσεις

$$y + \beta = 0, \quad z = \gamma \cdot \quad z + \gamma = 0, \quad x - \alpha = 0 \cdot \quad x + \alpha = 0, \quad y - \beta = 0 \cdot$$

ἡ δὲ γεννέτειρα $z - \gamma + \lambda (y + \beta) = 0$, $z + \gamma + \mu (x - \alpha) = 0$.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε

$$\alpha y z + \beta x z + \gamma x y + \alpha \beta \gamma = 0 ).$$

Ἂν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ληφθοῦν τὰ σημεῖα Α, Α′ ὥστε νὰ εἶνε (ΟΑ) = α, (ΟΑ′) = —α καὶ ἀχθοῦν ἐπίπεδα διὰ τῶν Α καὶ Α′ κάθετα τῷ ἄξονι τῶν x, τὸ ἐλλειψοειδὲς θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων $x = \pm \alpha$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλλειψοειδὲς περιέχεται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων $y = \pm \beta$, ἀγομένων καθέτως τῷ ἄξονι τῶν y εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ ἐνῷ εἶνε (ΟΒ) = β, (ΟΒ′) = —β καθὼς καὶ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων $z = \pm \gamma$, ἀγομένων καθέτως τῷ ἄξονι τῶν z εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′, ἐνῷ εἶνε (ΟΓ) = γ καὶ (ΟΓ′) = — γ. Οὕτω τὸ ἐλλειψοειδὲς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $x = \pm \alpha$, $y = \pm \beta$, $z = \pm \gamma$, περιγεγραμμένου εἰς αὐτό (σχ. 21).

**στ′)** Τὰ σημεῖα Α, Α′, Β, Β′, Γ, Γ′ καλοῦνται *κορυφαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς*.

**ζ′)** Τὰ ὑπὸ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς περατούμενα μέρη τῶν ἀξόνων ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶνε 2α, 2β, 2γ, λέγονται *ἄξονες τοῦ ἐλλειψοειδοῦς*, ὑποτίθεται δὲ συνήθως ὅτι εἶνε $\alpha > \beta > \gamma$. Ἤτοι λαμβάνεται ὡς ἄξων τῶν x ὁ μέγιστος ἄξων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ ὡς ἄξων τῶν z ὁ ἐλάχιστος.

## § 31. Περὶ ἐπιπέδων τομῶν ἐλλειψοειδοῦς.—

**α′)** Ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \qquad (1).$$

Αἱ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ὑπὸ ἑκάστου τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων εἶνε ἐλλείψεις, ἔχουσαι ἐξισώσεις (σχ. 21)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ y = 0, \end{cases}$$

αἱ ὁποῖαι λέγονται πρωτεύουσαι τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ ἔχουν ἄξονας τοὺς ἄξονας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἀνὰ δύο λαμβανομένους.

**β′)** Ἡ τομὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ὑπὸ ἐπιπέδου $x = x'$, παραλλήλου τῷ yz εἶνε ἔλλειψις, ἔχουσα ἐξισώσεις

$$x = x', \quad \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{x'^2}{\alpha^2} \qquad (2).$$

Τὸ κέντρον Ι τῆς ἐλλείψεως ταύτης κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ οἱ ἄξονες αὐτῆς εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν y καὶ τῶν z ἀντιστοίχως. Ἡ τομὴ αὕτη εἶνε πραγματική, ἐὰν εἶνε $x'^2 \leq \alpha^2$, ἤτοι ἂν τὸ ἐπίπεδον $x = x'$ τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν $x$ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Α', φανταστικὴ δὲ ἂν τοὐναντίον. Ἂν εἶνε $x = \pm\alpha$ ἡ τομὴ εἶνε ἓν σημεῖον.

Γράφοντες τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (2) τῆς τομῆς ὡς ἑξῆς

$$\frac{y^2}{\beta^2\left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2}\right)} + \frac{z^2}{\gamma^2\left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2}\right)} = 1,$$

παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων τῆς τομῆς εἶνε

$$\beta\sqrt{1 - \frac{x'^2}{\alpha^2}}, \quad \gamma\sqrt{1 - \frac{x'^2}{\alpha^2}}.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα τῷ $y\,z$ τέμνουν τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ ἐλλείψεις ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ ὅτι αἱ τομαὶ σμικρύνονται καθόσον τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπομακρύνεται τοῦ κέντρου.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὰς τομὰς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ὑπὸ ἐπιπέδων $y = y'$ καὶ $z = z'$, παραλλήλων ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἐπίπεδα $x\,z$ καὶ $x\,y$.

**γ')** Ἡ τομὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου (τέμνοντος αὐτὸ) εἶνε ἐν γένει ἔλλειψις. Διότι ἡ τομὴ αὕτη εἶνε γραμμὴ πεπερασμένη καὶ καμπύλη β' βαθμοῦ, ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις τῆς τομῆς εἶνε αἱ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0,$$

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = 0.$$

Εἰσάγοντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ $z$ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων τούτων εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ ὡς πρὸς $x$ καὶ $y$. Διὰ τοῦτο καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια αὕτη *ἐλλειψοειδές*.

**δ')** Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (τοῦ δευτέρου ὄντος μηδέν)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1$$

εἶνε ἀρνητικὸν διὰ τὰς συντεταγμένας παντὸς σημείου, κειμένου ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ὡς τῆς ἀρχῆς O (0, 0, 0) π. χ., θετικὸν δὲ διὰ τὰς συντεταγμένας παντὸς σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ.

ε') Ἂν δύο ἐκ τῶν ἀξόνων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς γίνουν ἴσοι, ἔχομεν ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς. Ἤτοι

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2+z^2}{\beta^2}=1 & \text{ἐπίμηκες} \\ \frac{x^2+y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 & \text{ἐπίπλατυ} \end{array}} \quad (3).$$

Τὸ ἐλλειψοειδὲς ἔχον τρεῖς ἄξονας λέγεται συνήθως καὶ τριαξονικὸν ἐλλειψοειδὲς πρὸς διάκρισιν αὐτοῦ ἀπὸ τὰ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδῆ.

στ') Ἂν οἱ τρεῖς ἄξονες τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶνε ἴσοι ($\alpha=\beta=\gamma$) ἔχομεν σφαῖραν.

## § 32. Περὶ διαμετρικῶν ἐπιπέδων ἐλλειψοειδοῦς.—

α') Καλοῦμεν *χορδὴν ἐλλειψοειδοῦς* τινος τμῆμα εὐθείας, ἔχον τὰ πέρατα αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

β') Καλοῦμεν *διαμετρικὸν ἐπίπεδον* ἐλλειψοειδοῦς τὸ σχῆμα ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ μέσα χορδῶν παραλλήλων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σχῆμα τοῦτο εἶνε ἐπίπεδον καὶ θὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν παραλλήλων χορδῶν.

Ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad (1).$$

Ἔστωσαν ( a, b, c ) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν παραλλήλων χορδῶν τούτου καὶ ( $x', y', z'$ ) αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου μιᾶς ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν M ( x, y, z ) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου τῆς θεωρουμένης χορδῆς, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς θὰ εἶνε

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c} \quad (2).$$

Παριστάνοντες τοὺς ἴσους τούτους λόγους διὰ ρ, ἔχομεν

$$x=x'+a\rho,\quad y=y'+b\rho,\quad z=z'+c\rho \quad (3).$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τούτου (1) καὶ ἕνεκα τῶν (3) θὰ εἶνε

$$\frac{(x'+a\varrho)^2}{\alpha^2}+\frac{(y'+b\varrho)^2}{\beta^2}+\frac{(z'+c\varrho)^2}{\gamma^2}=1,$$

$$\text{ἢ}\quad \left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varrho^2+2\left(\frac{a\,x'}{\alpha^2}+\frac{b\,y'}{\beta^2}+\frac{c\,z'}{\gamma^2}\right)\varrho$$

$$=1-\frac{x'^2}{\alpha^2}-\frac{y'^2}{\beta^2}-\frac{z'^2}{\gamma^2} \qquad (4).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τοῦ ϱ, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὰς ἀποστάσεις τοῦ μέσου τῆς θεωρουμένης χορδῆς ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις εἶνε ἀντίθετοι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς (4) θὰ εἶνε μηδέν, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{a\,x'}{\alpha^2}+\frac{b\,y'}{\beta^2}+\frac{c\,z'}{\gamma^2}=0.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον $(x', y', z')$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

$$\frac{a\,x}{\alpha^2}+\frac{b\,y}{\beta^2}+\frac{c\,z}{\gamma^2}=0, \qquad (5)$$

τὸ ὁποῖον δὲν ἀλλάσσει, ἄν θεωρήσωμεν οἱανδήποτε ἐκ τῶν ἐν λόγῳ παραλλήλων χορδῶν. Ἤτοι,

«***τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1), τῶν ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα** (a, b, c) **εἶνε τὸ ἐπίπεδον (5)***».

γ′) Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) παρατηροῦμεν ὅτι τὰ διαμετρικὰ ἐπίπεδα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

δ′) Ἀντιστρόφως «***πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ***».

Τῷ ὄντι, ἔστω τὸ ἐπίπεδον

$$A\,x+B\,y+\Gamma\,z=0, \qquad (6)$$

διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1).

Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν (6) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{A\,\alpha^2\,x}{\alpha^2} + \frac{B\,\beta^2\,y}{\beta^2} + \frac{\Gamma\,\gamma^2\,z}{\gamma^2} = 0,$$

θέτοντες δὲ

$$A\,\alpha^2 = \varrho\,a, \quad B\,\beta^2 = \varrho\,b, \quad \Gamma\,\gamma^2 = \varrho\,c,$$

ἔχομεν ὅτι, τὸ ἐπίπεδον (6) εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1), ἐπειδὴ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν αὐτοῦ, τῶν ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα ἀνάλογα τῶν

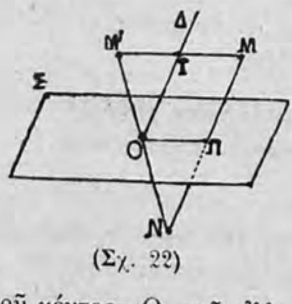
$$A\,\alpha^2, \quad B\,\beta^2, \quad \Gamma\,\gamma^2.$$

## § 33. Περὶ διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. —

α΄) Καλοῦμεν *διάμετρον ἐλλειψοειδοῦς* τὸ σχῆμα ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ κέντρα τῶν παραλλήλων τομῶν τούτου (αἵτινες γίνονται ἂν τμηθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων).

β΄) Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σχῆμα εἶνε χορδὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, τὸ δὲ μέσον αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶνε παράλληλον πρὸς τὰ παράγοντα τὰς θεωρουμένας παραλλήλους τομὰς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Τῷ ὄντι, ἔστω τομή τις (T) τοῦ ἐλλειψοειδοῦς γινομένη ὑπό τινος ἐπιπέδου καὶ σημεῖόν τι M τῆς τομῆς ταύτης (σχ. 22).




(Σχ. 22)

Ἔστω Σ τὸ διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ ἐλλειψοειδοῦς διερχόμενον διαμετρικὸν ἐπίπεδον καὶ παράλληλον τῇ τομῇ (T).

Ἔστω M Π N χορδὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἔχουσα τὸ μέσον αὐτῆς Π ἐπὶ τοῦ Σ καὶ M΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ N ὡς πρὸς τὸ O. Ἐὰν φέρωμεν τὰ τμήματα OΠ καὶ M΄M, παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδὴ τὰ M καὶ M΄ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τὸ τμῆμα M M΄ εἶνε χορδὴ αὐτοῦ, παράλληλον πρὸς τὸ OΠ καὶ διπλάσιον αὐτοῦ. Τὸ M M΄

εἶνε καὶ χορδὴ τῆς θεωρουμένης τομῆς (Τ) τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. **Διότι** ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΟΠ κεῖται ἐπὶ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τῷ Σ, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Μ.

Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου Ο ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΜΝ, ἔστω ἡ ΟΔ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν θεωρουμένην τομὴν (Τ) κατά τι σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς, ἔστω τὸ Ι καὶ θὰ εἶνε

$$(\mathrm{M\,I}) = (\mathrm{M'\,I}).$$

Ἐπομένως εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς τομῆς (Τ) ὑπάρχει **σημεῖόν** τι Μ΄ αὐτῆς συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ι κατὰ τὸ ὁποῖον, ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἀγομένη ἐκ τοῦ Ο παραλλήλως πρὸς τὰς χορδάς **τῶν** ὁποίων τὰ μέσα κεῖνται ἐπὶ τοῦ Σ, τέμνει τὴν τομὴν (Τ).

Ὅθεν, τὸ Ι εἶνε κέντρον τῆς τομῆς (Τ), τὰ δὲ κέντρα **τῶν τομῶν** τῶν παραλλήλων τῇ (Τ) κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Ο Δ, διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

γ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

***«πᾶσα τομὴ ἐλλειψοειδοῦς παράλληλος πρὸς διαμετρικόν τι ἐπίπεδον αὐτοῦ, ἔχει κέντρον· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν διὰ τοῦ κέν-τρου ἐλλειψοειδοῦς ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τινα τομὴν αὐτοῦ ἔχουσαν κέντρον, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς».***

Διότι, ἔστωσαν Μ καὶ Μ΄ καὶ δύο σημεῖα τομῆς, ἐχούσης κέντρον τὸ Ι (σχ. 22). Ἔστω Ν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ΄ ὡς πρὸς τὸ **κέντρον** τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Ἐὰν ἀχθῇ τὸ τμῆμα Ο Ι καὶ ἡ χορδὴ τοῦ **ἐλλει**-ψοειδοῦς Μ Ν, θὰ εἶνε αὕτη παράλληλος τοῦ τμήματος Ο Ι **καὶ** διπλασία αὐτοῦ, ἐπειδὴ εἶνε

$$(\mathrm{M'\,I}) = (\mathrm{I\,M}), \quad (\mathrm{M'\,O}) = (\mathrm{O\,N}).$$

Ἐὰν τὸ διὰ τοῦ κέντρου Ο παραλλήλως πρὸς τὴν τομὴν ἠγμένον ἐπίπεδον Σ τέμνῃ τὴν χορδὴν Μ Ν εἰς τὸ σημεῖον Π, θὰ εἶνε

$$(\mathrm{M\,\Pi}) = (\mathrm{I\,O}),$$

ἐπομένως καὶ

$$(\mathrm{M\,\Pi}) = (\mathrm{\Pi\,N}).$$

Ἄρα τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν πρὸς τὴν Ι Ο **κεῖνται** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Σ, ἤτοι τὸ ἐπίπεδον Σ εἶνε διαμετρικόν.

**δ')** *«Πᾶσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, εἶνε διάμετρος αὐτοῦ».*

Παρατηροῦμεν πρῶτον, ὅτι τυχοῦσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τέμνει αὐτὸ εἰς δύο σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς αὐτό. Διότι ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}\cdot$$

Ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους τούτους λόγους διὰ $\rho$ θὰ εἶνε

$$x=x'\rho,\quad y=y'\rho,\quad z=z'\rho.$$

Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς θὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν δι' αὐτὰ

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\rho^2},$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν δύο ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ $\rho$ εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ O καὶ κοινὰ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Διὰ τοῦτο τὸ ἐλλειψοειδὲς καλεῖται καὶ *ἐπιφάνεια δευτέρου βαθμοῦ*.

Ἔστω ἤδη τυχοῦσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ $M_1$, $M_2$ τὰ σημεῖα καθ' αὐτη τέμνει αὐτό. Ἂν διὰ τοῦ κέντρου ἀχθῇ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὰ παράλληλα πρὸς αὐτὸ δίδουν τομὰς ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς θεωρουμένης εὐθείας.

## § 34. Συζυγεῖς διάμετροι καὶ συζυγῆ διαμετρικὰ ἐπίπεδα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.—

**α')** Ἔστω ὅτι ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα ΟΔ, διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, εἶνε ἡμιδιάμετρος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad (1)$$

καὶ ΟΕΘ τὸ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν διαμετρικὸν ἐπίπεδον, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΟΕ καὶ ΟΘ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς τομῆς τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ΟΕΘ. Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς εὐθείας ΟΕ, ΟΘ, ΟΔ, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας (1) θὰ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ, θὰ περιέχῃ δὲ τὸ z μόνον εἰς δεύτερον βαθμόν. Διότι, εἰς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν x καὶ y πρέπει νἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ τοῦ z ἀντίθετοι. Ἔστω ἡ δι' ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$\Gamma z^2 + \varphi(x, y) = 0,$$

ἐνῷ $\varphi(x, y)$ παριστάνει πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y. Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας (1) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου xy ἔχει ἐξισώσεις

$$z = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ΟΕ, ΟΘ εἶνε συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι αὐτῆς, ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶνε τῆς μορφῆς

$$A x^2 + B y^2 + \Delta = 0.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A x^2 + B y^2 + \Gamma z^2 + \Delta = 0 \qquad (2).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) φαίνεται ὅτι, ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΟΕ, ΟΘ, ΟΔ ἔχει ἀντίστοιχον αὐτῆς διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ δύο ἄλλαι εὐθεῖαι, καὶ ὅτι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶνε διάμετρος τῶν τομῶν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ δύο ἄλλαι εὐθεῖαι. Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει δύο τιμὰς ἀντιθέτους δι' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν, ὅταν ὁρισθοῦν αἱ δύο ἐξ αὐτῶν. Ἐπομένως αἱ χορδαὶ αἱ παράλληλοι πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ δύο ἄλλαι μεταβληταί.

β') Αἱ τρεῖς τοιαῦται εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΟΕ, ΟΘ, ΟΔ, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστοιχον αὐτῆς διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων ἐξ αὐτῶν, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν *συζυγικὴν τριάδα* διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τὰ δὲ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τοιαύτης τριάδος τῶν εὐθειῶν λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν *τριάδα συζυγικῶν διαμετρικῶν ἐπιπέδων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς*.

γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι,

**«τὸ ἐλλειψοειδὲς ἔχει ἄπειρον πλῆθος τριάδων συζυγικῶν δια-**

***μέτρων, ἂν δ' ἡ ἐπιφάνεια εἰς ἄξονάς τινας ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (2) οἱ ἄξονες αὐτοὶ ἀποτελοῦν τριάδα συζυγικῶν διαμέτρων αὐτῆς».***

***«Πᾶσαι αἱ συζυγεῖς διάμετροι ἐλλειψοειδοῦς ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν διάμετρον αὐτοῦ κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διάμετρον αὐτοῦ ταύτην».***

**δ')** Ἐὰν τὰ μήκη τῶν χορδῶν τῶν συζυγῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς παρασταθοῦν διὰ $2\,\alpha'$, $2\,\beta'$, $2\,\gamma'$ ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἀξόνων (§ 22, γ' Μέρος πρῶτον) τὴν μορφὴν

$$\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}+\frac{z^2}{\gamma'^2}=1 \tag{3}$$

ἂν διατηρήσωμεν τὰς μεταβλητὰς x, y, z ἀντὶ τῶν x', y' z'. Διότι ἂν $(a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, c_3)$ εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν τριῶν συζυγῶν διαμέτρων, αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τῶν τριῶν ἡμιχορδῶν θὰ εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν συνημιτόνων καὶ θὰ ἔχωμεν, ἐπειδὴ τὰ ἄκρα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{a_1^2}{\alpha^2}+\frac{b_1^2}{\beta^2}+\frac{c_1^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\alpha'^2},\quad \frac{a_2^2}{\alpha^2}+\frac{b_2^2}{\beta^2}+\frac{c_2^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\beta'^2},$$

$$\frac{a_3^2}{\alpha^2}+\frac{b_3^2}{\beta^2}+\frac{c_3^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\gamma'^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐπὶ τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἑκάστην τῶν διαμέτρων κεῖνται αἱ δύο ἄλλαι συζυγεῖς αὐτῆς διάμετροι, θὰ εἶνε

$$\frac{a_1 a_2}{\alpha^2}+\frac{b_1 b_2}{\beta^2}+\frac{c_1 c_2}{\gamma^2}=0,\quad \frac{a_1 a_3}{\alpha^2}+\frac{b_1 b_3}{\beta^2}\ \frac{c_1 c_3}{\gamma^2}=0,$$

$$\frac{a_2 a_3}{\alpha^2}+\frac{b_2 b_3}{\beta^2}+\frac{c_2 c_3}{\gamma^2}=0.$$

**ε')** Αἱ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων εἶνε ὅμοιαι καὶ κεῖνται ὁμοίως πρὸς ἀλλήλας. Διότι, ἂν λάβωμεν τρεῖς συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐπιφανείας οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο, ἔστω τὸ x y, νὰ εἶνε παράλληλον πρὸς τὰ δίδοντα τὰς παραλλήλους τομάς, ἡ μὲν ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε τῆς μορφῆς (3), ἡ δὲ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου $z = z'$ θὰ ἔχῃ προβολὴν ἐπὶ τοῦ x y, ἔχουσαν ἐξίσωσιν

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 1 - \frac{z'^2}{\gamma^2}, \qquad z = 0,$$

αἵτινες παριστάνουν ἔλλειψιν ὁμοίαν καὶ ὁμοίως κειμένην πρὸς τὴν

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 1,$$

καθ' ἣν τέμνεται τὸ ἐλλειψοειδὲς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου x y, ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις τῶν τομῶν τούτων διαφέρουν κατὰ τὸν σταθερὸν ὅρον.

## § 35. Κυκλικαὶ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.—

α') Ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \qquad (1).$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τομαὶ τούτου ὑπὸ ἐπιπέδων, αἵτινες εἶνε περιφέρειαι κύκλων. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἐπίπεδον τέμνῃ τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ περιφέρειαν κύκλου καὶ τὰ παράλληλα αὐτῷ ἐπίπεδα καὶ τέμνοντα τὸ ἐλλειψοειδές, θὰ τὸ τέμνουν κατὰ περιφερείας κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ διαμέτρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν (1) κατὰ περιφερείας κύκλων, γράφομεν τὴν (1) ὡς ἑξῆς, ὑποθέτοντες ὅτι εἶνε $\alpha > \beta > \gamma$,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = 1 + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) z^2.$$

Θέτομεν τὰς θετικὰς διαφορὰς

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}$$

ἴσας μὲ $k^2$ καὶ $\lambda^2$ ἀντιστοίχως, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = 1 + k^2 x^2 - \lambda^2 z^2,$$

ἢ

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = 1 + (k x + \lambda z)(k x - \lambda z) \qquad (2).$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι, ἂν τεθῇ

$$k x + \lambda z = \mu \quad \text{καὶ} \quad k x - \lambda z = \nu ,$$

αἱ τομαὶ τοῦ (1) ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶνε κυκλικαί. Τῷ ὄντι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἐπιπέδων τούτων ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = 1 + \mu (kx - \lambda z) , \quad k x + \lambda z = \mu,$$

αἵτινες παριστάνουν περιφέρειαν κύκλου, ἐπειδὴ εἶνε τομὴ τῆς σφαίρας τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $k x + \lambda z = \mu$.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὰς τομάς, αἵτινες γίνονται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων

$$k x - \lambda z = \nu ,$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\nu$ (ἀνεξάρτητον τῶν $x, y, z$).

Ὅθεν «***αἱ κυκλικαὶ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) γίνονται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων*** $k x \pm \lambda z = 0$ ***καὶ τῶν παραλλήλων πρὸς αὐτά, ἅτινα εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν*** $y$».

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα $k x \pm \lambda z =$ σταθ. ἀποτελοῦν προφανῶς δύο ***διαφόρους σειρὰς ἐπιπέδων***.

**β'**) Δύο τυχοῦσαι κυκλικαὶ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς προκύπτουσαι ἐκ δύο ἐπιπέδων, ἀνηκόντων εἰς τὰς δύο σειράς, εἶνε περιφέρειαι τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Τῷ ὄντι, ἂν αἱ τομαὶ γίνωνται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων

$$k x + \lambda z = \mu \quad \text{καὶ} \quad k x - \lambda z = \nu ,$$

αἱ περιφέρειαι αὗται κεῖνται ἐπὶ τῆς σφαίρας

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = 1 + \mu (k x - \lambda z) + \nu (k x + \lambda z) - \mu \nu ,$$

Ἡ σφαῖρα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη, διέρχεται διὰ τῆς περιφερείας καθ' ἣν τέμνεται τὸ ἐλλειψοειδὲς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $k x + \lambda z = \mu$ . Διότι ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶνε ἡ περιφέρεια

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = 1 + \mu ( k x - \lambda z ) , \quad k x + \lambda z = \mu ,$$

ἥτις εἶνε ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τομὴν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $\kappa x - \lambda z = \nu$ γινομένη τομὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐν λόγῳ σφαίρας.

γ') Ἐὰν διὰ τῆς διαμέτρου τῶν κυκλικῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτάς, διαιρεῖ ἑκάστην περιφέρειαν κύκλου εἰς δύο ἴσα μέρη, κείμενα συμμετρικῶς ὡς πρὸς αὐτό.

Ἑπομένως διαιρεῖ καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς δύο μέρη ἴσα καὶ συμμετρικὰ ὡς πρὸς αὐτό. Ἤτοι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε πρωτεῦον ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

**«ἡ διάμετρος τῶν κυκλικῶν τομῶν ἐλλειψοειδοῦς κεῖται ἐφ' ἑνὸς τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων αὐτοῦ, τὰ δὲ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ περιφερείας κύκλων, εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ πρωτεῦον ἐπίπεδον τούτου».**

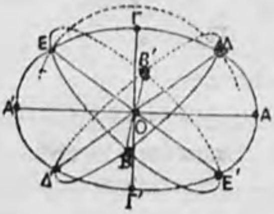
Προφανῶς ἓν τῶν ἐπιπέδων τούτων, τὰ ὁποῖα δίδουν τὰς κυκλικὰς τομάς, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, ὅστις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐν λόγῳ πρωτεῦον ἐπίπεδον.

δ') Ὅτι ὑπάρχουν κυκλικαὶ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1 αἵτινες γίνονται ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος τῶν $x$ ἢ τῶν $z$ ἔχουν ἀνίσους τοὺς ἄξονας αὐτῶν. Διότι ἂν διὰ τινος ἄξονος ἐλλειψοειδοῦς ἀχθῇ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ἔχει τὸν αὐτὸν ἄξονα (τῆς ἐπιφανείας οὔσης συμμετρικῆς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον), πᾶν δ' ἐπίπεδον κάθετον πρὸς πρωτεῦον ἐπίπεδον δίδει τομὴν ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἔχουσαν ἄξονα τὴν τομὴν τοῦ πρωτεύοντος ἐπιπέδου.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν $y$, οἱ ἄξονες τῆς τομῆς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶνε ὁ ἄξων τῶν $y$ καὶ ἡ τομὴ τῆς πρωτευούσης ἐλλείψεως, ἥτις ἔχει μήκη τῶν ἀξόνων αὐτῆς $2\alpha$ καὶ $2\gamma$. Ἄρα τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῆς τομῆς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τῶν $y$ εἶνε τοῦ μὲν ἑνὸς $2\beta$, τοῦ δὲ ἄλλου περιέχεται μεταξὺ $2\alpha$ καὶ $2\gamma$. Ἑπομένως, δύναται νὰ γίνῃ τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος τούτου $2\beta$, ὅτε ἡ τομὴ αὕτη θὰ εἶνε περιφέρεια κύκλου.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἂν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς πρωτευούσης τομῆς γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ β, ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν τομὴν ταύτην εἰς 4 σημεῖα, ἔστω τὰ Δ, Ε καὶ Δ′, Ε′(σχ. 23). Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται δι' ἑκάστης τῶν εὐθειῶν Δ Δ′ καὶ Ε Ε′ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, τέμνει τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ περιφέρειαν κύκλου. Ἤτοι τὸ ἐλλειψοειδὲς ἔχει δύο διαφόρους σειρὰς παραλλήλων κυκλικῶν τομῶν. Ἐὰν εἶνε $\beta = \gamma$, τὰ σημεῖα Δ, Δ′ καὶ Ε, Ε′ πίπτουν ἐπὶ τῶν Γ, Γ′ (ἄκρων τοῦ μικροῦ ἄξονος τῆς πρωτευούσης τομῆς), αἱ δ' εὐθεῖαι Δ Δ′ καὶ Ε Ε′ ἐφαρμόζουν. Ἐπομένως




(Σχ. 23)

τὸ ἐκ περιστροφῆς ἐπίμηκες ἐλλειψοειδὲς ἔχει μίαν μόνον σειρὰν κυκλικῶν τομῶν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸ ἐκ περιστροφῆς ἐπίπλατυ ἐλλειψοειδὲς ( $\alpha = \beta$ ). Διότι τότε τὰ Δ, Δ′ καὶ Ε, Ε′ συμπίπτουν μὲ τὰ **Α** καὶ Α′, ἄκρα τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς πρωτευούσης τομῆς.

### § 36. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου ἐφαπτομένου εἰς δοθὲν σημεῖον ἐλλειψοειδοῦς.—

α′) Λέγομεν ὅτι εὐθεῖά τις ἐφάπτεται τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς ἓν σημεῖον αὐτοῦ Μ′, ἂν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶνε τὸ ὅριον εὐθείας τεμνούσης τὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ , ὅταν τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ συμπίπτουν μὲ τὸ Μ′, ὅτε ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα λέγεται καὶ ἐφαπτομένη γραμμῆς τινος κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, εἰς τὸ σημεῖον Μ′.

**β′)** Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐλλειψοειδοῦς εἰς ἓν σημεῖον αὐτοῦ Μ′ λέγεται τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι τῶν γραμμῶν, τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \qquad (1),$$

καὶ σημεῖον αὐτοῦ Μ′ ( x′, y′, z′ ) .

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τοῦ (1) εἰς τὸ σημεῖον τούτου M′.

Αἱ ἐξισώσεις εὐθείας, τεμνούσης τὸ ἐλλειψοειδὲς εἰς δύο σημεῖα αὐτοῦ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ εἶνε

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2} \qquad (2).$$

Ἐπειδὴ τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) θὰ εἶνε

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}+\frac{z_1^2}{\gamma^2}=1,$$

$$\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}+\frac{z_2^2}{\gamma^2}=1.$$

Ἑπομένως ἔχομεν δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{\beta^2}+\frac{(z_1-z_2)(z_1+z_2)}{\gamma^2}=0 \quad (3).$$

Ἐκ τῶν (2) εὑρίσκομεν

$$y_1-y_2=\frac{x_1-x_2}{x-x_1}(y-y_1), \quad z_1-z_2=\frac{x_1-x_2}{x-x_1}(z-z_1).$$

Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν $y_1-y_2$ καὶ $z_1-z_2$ εἰσάγοντες εἰς τὴν (3) εὑρίσκομεν

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\frac{(y-y_1)(x_1-x_2)(y_1+y_2)}{(x-x_1)\beta^2}+$$

$$+\frac{(z-z_1)(x_1-x_2)(z_1+z_2)}{(x-x_1)\gamma^2}=0,$$

ἢ $$\frac{(x_1+x_2)(x-x_1)}{\alpha^2}+\frac{(y_1+y_2)(y-y_1)}{\beta^2}+\frac{(z_1+z_2)(z-z_1)}{\gamma^2}=0.$$

Ὑποθέτοντες ὅτι τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ συμπίπτουν μὲ τὸ σημεῖον M′ θὰ ἔχωμεν

$$x_1, x_2=x', \quad y_1, y_2=y', \quad z_1, z_2=z'$$

καὶ
$$\frac{(x-x')x'}{\alpha^2}+\frac{(y-y')y'}{\beta^2}+\frac{(z-z')z'}{\gamma^2}=0$$

ἤ
$$\frac{x\,x'}{\alpha^2}+\frac{y\,y'}{\beta^2}+\frac{z\,z'}{\gamma^2}=\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2} \qquad (4)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Μ' κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ἔχομεν

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2}=1$$

καὶ ἐπομένως ἡ (4) γίνεται

$$\boxed{\frac{x\,x'}{\alpha^2}+\frac{y\,y'}{\beta^2}+\frac{z\,z'}{\gamma^2}=1} \qquad (5)$$

Ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ Μ' κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (5), δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις (5) εἶνε ἡ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ Μ' (x', y', z').

γ') Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ Μ' (x', y', z') εἶνε τὸ ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Μ' καὶ παράλληλον πρὸς τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς τούτου τὰς παραλλήλους τῇ ΟΜ'.

Τῷ ὄντι, αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ Ο καὶ Μ' διερχομένης εὐθείας εἶνε

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}\cdot$$

Τὰ διευθύνοντα συνημίτονα ταύτης εἶνε ἀνάλογα τῶν x', y', z'.

Ἐπομένως τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς αὐτοῦ τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἔχει τὴν ἐξίσωσιν (5), ἂν εἰς τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς τεθῇ μηδὲν ἀντὶ τῆς μονάδος· ἤτοι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ Μ' εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ ἐν λόγῳ διαμετρικὸν ἐπίπεδον.

δ') Δοθέντος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου ἐλλειψοειδοῦς, τοῦ $Ax+By+\Gamma z=0$, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, παραλλήλου πρὸς τὸ δοθέν.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, ὡς παραλλήλου τῷ δοθέντι θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (6)$$

ἐνῷ ἄγνωστον εἶνε τὸ Δ.

Ἔστω ὅτι τοῦτο ἐφάπτεται τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ ( x′, y′, z′ ). Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον (6) πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ (5) πρέπει νὰ εἶνε

$$\frac{x'}{\alpha^2} = -\frac{A}{\Delta}\varrho, \quad \frac{y'}{\beta^2} = -\frac{B}{\Delta}\varrho, \quad \frac{z'}{\gamma^2} = -\frac{\Gamma}{\Delta}\varrho \qquad (7)$$

ἐνῷ ϱ παριστάνει σταθερόν τινα παράγοντα.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ( x′, y′, z′ ) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2} = \frac{A^2\alpha^2}{\Delta^2} + \frac{B^2\beta^2}{\Delta^2} + \frac{\Gamma^2\gamma^2}{\Delta^2} = 1,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$\Delta = \pm\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + \Gamma^2\gamma^2}\,.$$

Ἑπομένως ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς παράλληλα πρὸς τὸ δοθέν, ἔχοντα ἐξισώσεις

$$A x + B y + \Gamma z \pm \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + \Gamma^2\gamma^2} = 0\,.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως καθ' ἣν τέμνεται τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0$.

2) Εὕρετε τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν πληροῦν οἱ συντελεσταὶ εὐθείας, ἵνα αὕτη ἐφάπτεται δοθέντος ἐλλειψοειδοῦς.

3) Εὕρετε τὰς τομὰς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

ὑπὸ τῶν ἐπιδέδων $y = y'$, $z = z'$ διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν $y'$ καὶ $z'$.

4) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν ἑστιῶν τῶν τομῶν τοῦ ἀνωτέρω ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z = z'$.

5) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ ἀνωτέρω ἐλλειψοειδοῦς καὶ βάσιν τὴν τομὴν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0$.

6) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων ἐλλειψοειδοῦς, τὰ ὁποῖα ἄγονται διὰ δοθείσης εὐθείας, ἢ εἶνε κάθετα ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

7) Δείξατε ὅτι ἂν διά τινος σημείου τοῦ χώρου ἀχθοῦν ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς ἐλλειψοειδές, ὁ τόπος τῶν ἐπαφῶν αὐτῶν εἶνε ἔλλειψις.

8) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

εἰς τὸ σημεῖόν του ($\alpha a$, $\beta b$, $\gamma c$). Διερευνήσατε αὐτήν. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀρχήν.

9) Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου αὐτοῦ εἶνε παράλληλα πρὸς τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διάμετρον.

10) Ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς αὐτοῦ λέγεται *κάθετος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς* εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῆς καθέτου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ $M_1$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$).

## § 37. Τὸ ἐλλειψοειδὲς ὡς ὀρθὴ προβολὴ σφαίρας.

α΄) Καθὼς ἡ ἔλλειψις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθὴ προβολὴ τῆς περιφερείας κύκλου

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

ἐνῷ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν σχηματίζουν γωνίαν ω τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶνε

$$\text{συν}\,\omega = \frac{\beta}{\alpha},$$

οὕτω θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἐλλειψοειδὲς μὲ ἄξονας 2α, 2β, 2γ εἶνε ὀρθὴ προβολὴ τῆς σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \qquad (1)$$

ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον M (x, y, z) ἀντιστοιχῇ ὡς ὀρθὴ προβολή αὐτοῦ τὸ (x′, y′, z′) ἐνῷ εἶνε

$$x' = x, \quad y' = \frac{\beta}{\alpha} y, \quad z' = \frac{\gamma}{\alpha} z \qquad (2).$$

Οὕτω εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας (1) ἀντιστοιχεῖ ὡς προβολὴ αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις προκύπτει ἐκ τῆς (1), ἂν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν x, y, z διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν (2), ἤτοι εἶνε

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\beta^2}\alpha^2 + \frac{z'^2}{\gamma^2}\alpha^2 = \alpha^2, \quad \text{ἢ} \quad \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1,$$

ἥτις παριστάνει ἐλλειψοειδές.

β') Καθὼς τὴν ἔλλειψιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ δύο ἐξισώσεων $x = \alpha\,\text{συν}\,v$, $y = \beta\,\text{ημ}\,v$, τῶν x καὶ y ἐκφραζομένων συναρτήσει μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τῆς ἐκκέντρου γωνίας (§ 124, Μέρος πρῶτον) οὕτω καὶ τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῶν ἑξῆς τριῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{x = \alpha\,\text{συν}\,u\,\text{συν}\,v, \quad y = \beta\,\text{συν}\,u\,\text{ημ}\,v, \quad z = \gamma\,\text{ημ}\,u} \quad (3)$$

τῶν x, y, z ἐκφραζομένων ὡς συναρτήσεων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u καὶ v.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀντιστοιχίας τῶν σημείων Μ καὶ Μ΄ ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

γ') Ἐὰν τὰ σημεῖα Μ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ τὰ Μ΄ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τοῦ πρώτου.

Τὰ ἀντίστοιχα ταῦτα ἐπίπεδα τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x, ἐπειδὴ εἶνε $x = x'$.

Ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτά· ἕκαστον τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων ἀντιστοιχεῖ ἑαυτῷ· τὰ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶνε ἐπίπεδα παράλληλα.

δ') Ἐὰν τὰ σημεῖα Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν Μ΄ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἕκαστος τῶν ἀξόνων συντεταγμένων ἀντιστοιχεῖ ἑαυτῷ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοί αὐτῶν εἶνε παράλληλοι.

«*Εἰς τὸ μέσον τμήματος εὐθείας $M_1 M_2$ ἀντιστοιχεῖ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου αὐτοῦ τμήματος $M'_1 M'_2$. Καὶ γενικῶς, ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπὶ ἀντιστοίχων τμημάτων αὐτῶν κείμενα διαιροῦν αὐτὰ εἰς μέρη ἔχοντα ἴσους λόγους*».

ε΄) Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν ἰδιοτήτων σφαίρας μὲ ἀκτῖνα α καὶ ἐλλειψοειδοῦς μὲ ἄξονας 2 α, 2 β, 2 γ.

«*Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν σφαίρας κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς (διαμετρικοῦ)*».

«*Τὰ μέσα χορδῶν παραλλήλων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ (διαμετρικοῦ)*».

«*Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ κέντρου σφαίρας ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς παραλλήλους χορδὰς αὐτῆς ἔχῃ ἐξισώσεις*

$$\frac{\alpha x}{a} = \frac{\beta y}{b} = \frac{\gamma z}{c},$$

*τὸ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενον ἐπίπεδον καὶ κάθετον ἐπ' αὐτὰς (διαμετρικὸν ἐπίπεδον) ἔχει ἐξίσωσιν (§ 88 Μέρος πρῶτον)*

$$\frac{a x}{\alpha} + \frac{b y}{\beta} + \frac{c z}{\gamma} = 0.$$

«*Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς παραλλήλους χορδὰς αὐτοῦ ἔχῃ ἐξισώσεις*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

*τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς ταύτας ἔχει ἐξίσωσιν*

$$\frac{a x}{\alpha^2} + \frac{b y}{\beta^2} + \frac{c z}{\gamma^2} = 0.$$

«*Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς* $(x_1, y_1, z_1)$ *ἔχει ἐξίσωσιν* $x x_1 + y y_1 + z z_1 = \alpha^2$».

«*Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ* $x_1, y_1, z_1$ *ἔχει ἐξίσωσιν*

$$\frac{x x_1}{\alpha^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} + \frac{z z_1}{\gamma^2} = 1.$$

στ') Τὰ διευθύνοντα συνημίτονα εὐθείας Ο Μ, διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶνε, ἂν τὸ Μ ( x, y, z ) κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας

$$\frac{x}{\alpha}, \ \frac{y}{\alpha}, \ \frac{z}{\alpha}.$$

«*Τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς εὐθείας ΟΜ′, τοῦ Μ′ κειμένου ἐπὶ τῆς ἐλλειψοειδοῦς εἶνε*

$$\frac{x'}{\alpha}, \ \frac{y'}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}, \ \frac{z'}{\alpha}\frac{\alpha}{\gamma}, \ \text{ἢ} \ \frac{x'}{\alpha}, \ \frac{y'}{\beta}, \ \frac{z'}{\gamma}.$$

ζ') Ἔστωσαν ( $a_i$ , $b_i$ , $c_i$ ) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τριῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς σφαίρας ($i=1, 2, 3$), αἵτινες εἶνε ἀνὰ δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ( $a'_i$ , $b'_i$ , $c'_i$ ) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Θὰ ἔχωμεν ἕνεκα τῶν (2)

$$a'_i : b'_i : c'_i = \alpha . a_i : \beta b_i : \gamma c_i .$$

Ἕνεκα τῆς καθετότητος τῶν διαμέτρων τῆς σφαίρας ἔχομεν

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

$$a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 ,$$

αἵτινες τρέπονται εἰς τὰς ἑπομένας, ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν

$$\frac{a'_1 a'_2}{\alpha^2} + \frac{b'_1 b'_2}{\beta^2} + \frac{c'_1 c'_2}{\gamma^2} = 0 ,$$

$$\frac{a'_1 a'_3}{\alpha^2} + \frac{b'_1 b'_3}{\beta^2} + \frac{c'_1 c'_3}{\gamma^2} = 0 , \qquad (4)$$

$$\frac{a'_2 a'_3}{\alpha^2} + \frac{b'_2 b'_3}{\beta^2} + \frac{c'_2 c'_3}{\gamma^2} = 0 .$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἐκ δύο διαμέτρων μιᾶς τριάδος συζυγῶν διαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς εὑρίσκεται ἡ τρίτη, ὡς καὶ ἐξάγεται τοῦτο ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τριάδος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εὕρετε ὅτι συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ἐφάπτεται τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad \text{εἶνε}$$

$$\left(\frac{x_1x_2}{\alpha^2}+\frac{y_1y_2}{\beta^2}+\frac{z_1z_2}{\gamma^2}-1\right)^2=\left(\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}+\frac{z_1^2}{\gamma^2}-1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}+\frac{z_2^2}{\gamma^2}-1\right).$$

Ἂν γραφοῦν $x, y, z$ ἀντὶ τῶν $x_2, y_2, z_2$ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $M_1$.

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τῶν ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα $(a, b, c)$.

3) Εὕρετε τὰς τομὰς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

καὶ τῆς εὐθείας

$$\begin{cases} x = x_1 + \rho a \\ y = y_1 + \rho b \\ z = z_1 + \rho c \end{cases}$$

4) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, τὸν ὁποῖον ὁρίζει τὸ σημεῖον $(\alpha_1, o, o)$ μὲ τὸ ἐλλειψοειδές.

5) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦ ἐλλειψοειεοῦς, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζεται ὑπὸ τοῦ ζεύγους τῶν παραμέτρων $(u, v)$;

6) Ἂν $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ παριστάνῃ σημεῖον σφαίρας, τὸ ἀντίστοιχόν του ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῆς ἐλλειψοειδοῦς εἶνε $(\alpha a, \beta b, \gamma c)$ καὶ $\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2$ τὸ τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ ἡμιδιαμέτρου. Ἐὰν ἔχωμεν τρεῖς συζυγεῖς ἡμιδιαμέτρους καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ ἀντίστοιχοί των ἡμιδιάμετροι τῆς σφαίρας εἶνε ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι, εὑρίσκομεν ὅτι

**«τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$».**

7) Εἰς διάμετρον ἐλλειψοειδοῦς ἔχουσαν διευθύνοντα συνημίτονα $(a'_1, b'_1, c'_1)$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ συζυγῆ αὐτῆς. Διότι, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ $(a'_2, b'_2, c'_2)$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{a'_1a'_2}{\alpha^2}+\frac{b'_1b'_2}{\beta^2}+\frac{c'_1c'_2}{\gamma^2}=1, \quad a'_1a'_2+b'_1b'_2+c'_1c'_2=0.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

**«δι' ἑκάστης διαμέτρου ἐλλειψοειδοῦς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν**

*ἓν ἐπίπεδον τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἔλλειψις καθ' ἣν τέμνει τὸ ἐλλειψοειδὲς νὰ ἔχῃ τὴν δοθεῖσαν διάμετρον ὡς μέγαν ἄξονα αὐτῆς».*

8) Εἰς ἑκάστην διάμετρον ἐλλειψοειδοῦς δύναταί τις νὰ εὕρῃ συζυγῆ της, ἥτις κεῖται ἐπὶ ἑνὸς διαμετρικοῦ ἐπιπέδου ἐκ τῶν προτέρων ὡρισμένου καὶ διερχομένου διὰ τῆς δοθείσης. Διότι ἡ συνθήκη αὕτη διὰ τὴν δευτέραν ταύτην διάμετρον εἶνε γραμμική. Ἡ τρίτη διάμετρος τῆς τριάδος εἶνε ὁμοίως ὡρισμένη διὰ τοῦ ἐκλεγέντος διαμετρικοῦ ἐπιπέδου, ὡς εὐθεῖα ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων ἀφῆς τῶν δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων ἐπιπέδων.

### § 38. Πόλος καὶ πολικὸν ἐπίπεδον ὡς πρὸς ἐλλειψοειδές.—

α') Τὰ περὶ πόλου καὶ πολικοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς σφαῖραν ἰσχύουν κατ' ἀναλογίαν καὶ ὡς πρὸς ἐλλειψοειδές, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται προβολὴ τῆς σφαίρας ἢ ἀντίστοιχον αὐτῆς σχῆμα. Ἐπειδὴ εἰς ἀκτῖνας διερχομένας διά τινος σημείου ἀντιστοιχοῦν πάλιν ἀκτῖνες, διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀκτίνων τῆς πρώτης δέσμης μετὰ τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἀντιστοιχοῦν σημεῖα κείμενα ἐπὶ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀκτίνων τῆς δευτέρας δέσμης μετὰ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καλεῖται *πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς* ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς δέσμης τὸ ὁποῖον καλεῖται *πόλος* τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδές.

β') Τὴν ἐξίσωσιν πολικοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἐλλειψοειδὲς δοθέντος πόλου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Θεωροῦμεν τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον τοῦ πόλου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔστω τὸ $(\xi, \eta, \zeta)$. Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τούτου ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ ἔχει ἐξίσωσιν $\xi x + \eta y + \zeta z = \alpha^2$. Θέτοντες ἀντὶ τῶν $(x, y, z)$ καὶ $(\xi, \eta, \zeta)$ τἀντίστοιχα αὐτῶν

$$x', \quad y'\frac{\alpha}{\beta}, \quad z'\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \text{καὶ} \quad \xi', \quad \eta'\frac{\alpha}{\beta}, \quad \zeta'\frac{\alpha}{\gamma}$$

εἰς τὸ ἐλλειψοειδές, ἔχομεν

$$\xi' x' + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\eta' y' + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\zeta' z' = \alpha^2$$

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ πόλου $(\xi', \eta', \zeta')$ ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 .$$

Θέτοντες x, y, z ἀντὶ τῶν x′, y′, z′ καὶ ξ, η, ζ ἀντὶ τῶν ξ′, η′, ζ′ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸν πόλον (ξ, η, ζ)

$$\boxed{\frac{\xi x}{\alpha^2}+\frac{\eta y}{\beta^2}+\frac{\zeta z}{\gamma^2}=1} \qquad (1).$$

γ′) Ἐὰν ὁ πόλος (ξ, η, ζ) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἡ ἐξίσωσις (1) εἶνε ἡ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἤτοι

**«ὅταν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον εἶνε ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο».**

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν εὐκόλως τὰς ἑξῆς ἰδιότητας·

**«τὰ πολικὰ ἐπίπεδα σημείων κειμένων ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἐπιπέδου τούτου».**

**«Τὰ πολικὰ ἐπίπεδα τῶν σημείων εὐθείας διέρχονται δι᾽ ἄλλης εὐθείας, ἥτις καλεῖται ἀντίστροφος πολικὴ τῆς πρώτης».**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐξετάσατε τὴν κίνησιν τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου σημείου ὡς πρὸς ἐλλειψοειδές, ὅταν τὸ σημεῖον διαγράφῃ μίαν διάμετρον αὐτοῦ.

2) Τίνες εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς τῆς εὐθείας

$$x=x_1+\rho a, \quad y=y_1+\rho b, \quad z=z_1+\rho c$$

ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

3) Δείξατε τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν, ὅτι δι᾽ ἑκάστης εὐθείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο (πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ) ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

4) Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἐλλειψοειδοῦς εἰς σημεῖα αὐτοῦ ἔχοντα τὴν αὐτὴν τετμημένην, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x.

5) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x\,x_1}{\alpha'^2}+\frac{y\,y_1}{\beta'^2}+\frac{z\,z_1}{\gamma'^2}=1$$

παριστάνει τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ σημείου ($x_1$, $y_1$, $z_1$) ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}+\frac{z'^2}{\gamma'^2}=1$$

μὲ ἄξονας τὰς διαμέτρους αὐτοῦ $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$.

6) Δείξατε διὰ μετασχηματισμοῦ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ ( $x_1$, $y_1$, $z_1$ ) καὶ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς διαμέτρους αὐτοῦ $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$ εἶνε

$$\frac{x x_1}{\alpha'^2} + \frac{y y_1}{\beta'^2} + \frac{z z_1}{\gamma'^2} = 1 .$$

## § 39. Ὄγκος στερεοῦ περιοριζομένου ἐλλειψοειδοῦς.—

α') Ἔστω τετράεδόν τι ἐν τῇ σφαίρᾳ $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ ἔχον κορυφὰς τυχόντα σημεῖα ( $x_i$, $y_i$, $z_i$ ), $i = 1, 2, 3, 4$. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ V ἀπολύτως θεωρούμενος εἶνε

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Εἰς τὸ τετράεδον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ ἄλλο εἰς τὸ ἐλλειψοειδές, ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα ($x'_i$, $y'_i$, $z'_i$ ) ἐνῷ εἶνε $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i \frac{\alpha}{\beta}$, $z_i = z'_i \frac{\alpha}{\gamma}$. Ὁ ὄγκος τούτου V' εἶνε

$$V' = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \\ x_3 & y'_3 & z'_3 & 1 \\ x'_4 & y'_4 & z'_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} V .$$

Ἑπομένως ἔχομεν $\frac{V'}{V} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$. Ἤτοι, οἱ ὄγκοι τῶν ἀντιστοίχων τούτων τετραέδρων ἔχουν σταθερὸν λόγον ἴσον μὲ $\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$.

β') Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο ἀντίστοιχα πολυεδρικὰ σώματα, οἱ ὄγκοι αὐτῶν ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Διότι, ἀναλύονται εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα καὶ ἀνὰ δύο ἀντίστοιχα πρὸς ἄλληλα.

Κατὰ ταῦτα τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς τρεῖς συζυγεῖς ἡμιδιαμέτρους τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἔχει ὄγκον σταθερόν. Διότι, εἶνε προβολὴ τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἀκμαὶ εἶνε αἱ τρεῖς ἀντίστοιχοι συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς σφαίρας.

γ') «*Ὁ ὄγκος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἔχει λόγον πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ἴσον μὲ* $\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$ ».

Διότι, ἂν φαντασθῶμεν τυχὸν πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ ἐλλειψοειδὲς ἄλλο πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτό. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν πολυέδρων τούτων εἶνε ἴσος μὲ $\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει ὅσον μικραὶ καὶ ἂν εἶνε αἱ ἕδραι τῶν θεωρουμένων πολυέδρων. Ἀλλ' ἂν πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ πρώτου πολυέδρου τείνουν εἰς τὸ μηδέν, καὶ αἱ τοῦ ἄλλου τείνουν εἰς τὸ μηδέν. Ὅταν ὅριον τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τετραέδρου εἶνε ἡ σφαῖρα, τὸ ὅριον τῆς ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου θὰ εἶνε τὸ ἐλλειψοειδές. Ἄρα ἂν παραστήσωμεν διὰ $V_1$, $V'_1$ τοὺς ὄγκους τῶν ἀντιστοίχων πολυέδρων διὰ $V$ καὶ $V'$ τοὺς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς θὰ εἶνε

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\,.$$

Ἐπομένως καὶ

$$\text{ὅριον τοῦ}\left(\frac{V'_1}{V_1}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\,.$$

Ἀλλ' εἶνε ὅριον τοῦ $V_1 = V$, ὅριον τοῦ $V'_1 = V'$. Ἄρα εἶνε καὶ

$$\frac{V'}{V} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\,.$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶνε $$V = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$$

ἔχομεν καὶ $$\boxed{V' = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma}$$

Ἤτοι, **«ὁ ὄγκος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τοῦ ἔχοντος ἄξονας $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, εἶνε $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$»**

ϛ') Ἂν εἶνε $\alpha = \beta$ ἔχομεν ὅτι, **«ὁ ὄγκος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς εἶνε $\frac{4}{3}\pi\alpha^2\gamma$»**

καὶ τὸ ἐλλειψοειδὲς τοῦτο ἐκ περιστροφῆς εἶνε ἐπίπλατυ μὲν ἂν εἶνε $\alpha > \gamma$, ἐπίμηκες δὲ ἂν εἶνε $\alpha < \gamma$ καὶ ἔχει ἐξίσωσιν (§ 28, α', β')

$$\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1\,.$$

## Περὶ ὑπερβολοειδῶν.

### § 40. Ὁρισμοὶ καὶ ἐξισώσεις ὑπερβολοειδῶν.—

α') Καλοῦμεν *ὑπερβολοειδῆ* τὰς ἐπιφανείας (β' βαθμοῦ), αἵτινες γίνονται ὑπὸ ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 1, \quad z = \nu\,,$$

κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ τὰς σταθερὰς ὑπερβολὰς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1,\ y = 0,\ \text{καὶ}\ \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1,\ x = 0\ .$$

**ϐ'**) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ὑπερβολοειδῶν εὑρίσκομεν τὰς μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν παραμέτρων λ, μ, ν σχέσεις, ἐκφράζοντες ὅτι ἡ ἔλλειψις

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 1\ ,\quad z = \nu\ , \tag{1}$$

συναντᾷ τὰς ὑπερβολὰς

$$(2)\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1,\quad y = 0,\quad \text{καὶ}\quad \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1, x=0\ (3).$$

Πρὸς τοῦτο ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τὰ x, y, z καθὼς καὶ μεταξὺ τῶν (1) καὶ τῶν (3) καὶ εὑρίσκομεν

$$\lambda^2 = \alpha^2\left(\frac{\nu^2}{\gamma^2} \pm 1\right) \qquad \mu^2 = \beta^2\left(\frac{\nu^2}{\gamma^2} \pm 1\right)\cdot$$

Ἀπαλείφομεν ἤδη μεταξὺ τούτων καὶ τῶν (1) τὰ λ, μ, ν καὶ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1} \tag{4}$$

αἵτινες παριστάνουν τὰ ὁρισθέντα ὑπερβολοειδῆ.

**γ'**) Ἂν τὸ β' μέλος τῆς (4) εἶνε + 1 τὸ ὑπερβολοειδὲς λέγεται *μονόχωνον*, ἂν δὲ τὸ — 1 λέγεται *δίχωνον*.

**δ'**) Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) τῶν ὑπερβολοειδῶν φαίνεται ἡ συμμετρία αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο τῶν συντεταγμένων, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ ὡς πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα.

Διὰ τοῦτο ἡ ἀρχὴ Ο καλεῖται ***κέντρον*** τῶν ἐπιφανειῶν τούτων· τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα καλοῦνται ***πρωτεύοντα ἐπίπεδα*** τῶν ἐπιφανειῶν, μήκη δὲ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων ἴσα μὲ 2 α, 2 β, 2 γ καὶ ἔχοντα τὰ μέσα αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον Ο λέγονται ***ἄξονες*** τῶν ἐπιφανειῶν, οἵτινες εἶνε ἄνισοι μεταξύ των.

**ε'**) Ἐὰν εἶνε α = β ἔχομεν τὰ ἐκ περιστροφῆς ὑπερβολοειδῆ (μονόχωνον καὶ δίχωνον).

## § 41. Μονόχωνον ὑπερβολοειδές.

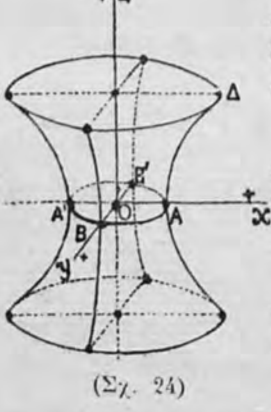
α΄) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς εἶνε

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1}$$

Αἱ πρωτεύουσαι τομαὶ τούτου ἔχουν ἐξισώσεις

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \\ z = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

καὶ ἡ μὲν πρώτη εἶνε ἔλλειψις ἔχουσα μήκη τῶν ἀξόνων αὐτῆς $2\alpha$, $2\beta$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν x καὶ τῶν y, αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶνε ὑπερβολαί, τῶν ὁποίων ὁ δευτερεύων ἄξων κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z καὶ ἔχει μῆκος $2\gamma$ (σχ. 24).




(Σχ. 24)

β΄) Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου $z = z'$, παραλλήλου τῷ x y, εἶνε ἡ ἔλλειψις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 + \frac{z'^2}{\gamma^2}, \quad z = z',$$

ἥτις εἶνε τόσῳ μεγαλυτέρα ὅσον τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπέχει περισσότερον τοῦ x y (σχ. 24).

Οἱ ἄξονες τῆς τομῆς ἔχουν μήκη

$$2\alpha\sqrt{1 + \frac{z'^2}{\gamma^2}}, \quad 2\beta\sqrt{1 + \frac{z'^2}{\gamma^2}}$$

τὰ ὁποῖα εἶνε ἀνάλογα τῶν α καὶ β. Ἐπομένως πᾶσαι αἱ τομαὶ αὗται εἶνε ὅμοιαι.

Ἡ ἔλλειψις A B′ A′ B, καθ' ἣν τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τοῦ x y εἶνε ἡ ἐλαχίστη τῶν τομῶν αὐτῆς ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων πρὸς τὸ x y, λέγεται δὲ συνήθως *λαιμὸς* τῆς ἐπιφανείας (σχ. 24).

Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ x z εἶνε ὑπερβολαὶ ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πρὸς τὴν πρωτεύουσαν τομήν, A Δ, ἐὰν ὁ λαιμὸς τῆς ἐπιφανείας τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς δέ, ἂν ὁ λαιμὸς δὲν τέμνεται ὑπ' αὐτοῦ.

γ') Ἡ τομὴ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐπίπεδον $y = y'$ ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{y'^2}{\beta^2}, \quad y = y'.$$

Ἐὰν εἶνε $|y'| < \beta$, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸν λαιμὸν τῆς ἐπιφανείας. Διότι ὁ λαιμός, ὡς τομὴ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = 0$, ἔχει ἄξονας μὲ μήκη αὐτῶν $(A A') = 2\alpha$ καὶ $(B B') = 2\beta$, τὸ δὲ ἐπίπεδον $y = y'$ τέμνει τὸν μικρὸν ἄξονα $B B'$ μεταξὺ τοῦ $O$ καὶ τοῦ $B$ ἢ τοῦ $B'$, ἐν ᾧ εἶνε $(O B) = \beta$ καὶ $(OB') = -\beta$. Αἱ τομαὶ αὗται τῆς ἐπιφανείας ἔχουσαι ἐξισώσεις, αἵτινες γράφονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x^2}{\alpha^2\left(1 - \frac{y'^2}{\beta^2}\right)} - \frac{z^2}{\gamma^2\left(1 - \frac{y'^2}{\beta^2}\right)} = 1, \quad y = y',$$

εἶνε ὑπερβολαὶ μὲ μήκη τῶν ἀξόνων ἴσα πρὸς $2\alpha\sqrt{1 - \frac{y'^2}{\beta^2}}$ καὶ $2\gamma\sqrt{1 - \frac{y'^2}{\beta^2}}$, ἔχουν δὲ αὗται πρωτεύοντα μὲν ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x, δευτερεύοντα δὲ τὸν ἄξονα τῶν z. Τὰ μήκη τῶν ἀξόνων αὐτῶν εἶνε ἀνάλογα τῶν α καὶ γ, ἑπομένως εἶνε αὗται ὅμοιαι πρὸς τὴν πρωτεύουσαν τομὴν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ ἐπίπεδον $y = 0$ καὶ κεῖνται ὁμοίως πρὸς αὐτήν.

Ἐὰν εἶνε $|y'| > \beta$, ἐπειδὴ τότε θὰ εἶνε $\frac{y'^2}{\beta^2} > 1$ καὶ $1 - \frac{y'^2}{\beta^2} < 0$, ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τῶν τομῶν τούτων τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{z^2}{\gamma^2\left(\frac{y'^2}{\beta^2} - 1\right)} - \frac{x^2}{\alpha^2\left(\frac{y'^2}{\beta^2} - 1\right)} = 1$$

καὶ ὡς παρατηροῦμεν αἱ τομαὶ αὗται ἔχουν πρωτεύοντα μὲν ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z καὶ δευτερεύοντα τὸν τῶν x, ἐπειδὴ δὲ τὰ μήκη τῶν ἀξόνων αὐτῶν εἶνε ἀνάλογα τῶν γ καὶ α εἶνε ὅμοιαι πρὸς τὴν ὑπερβολὴν

$$\frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1, \quad y = 0,$$

ἥτις εἶνε συζυγὴς τῆς πρωτευούσης τομῆς, τῆς ἐχούσης τὸν κλάδον $A\Delta$ (σχ. 24) καὶ ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ ἐπίπεδον $y=0$.

Ἐὰν εἶνε $|y|=\beta$, αἱ τομαὶ εἶνε δύο ζεύγη εὐθειῶν, διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων B καὶ B′ ἀνὰ μία. Διότι διὰ $y=\pm\beta$ ἔχομεν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0\,,\quad y=\pm\beta.$$

ἢ
$$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}\right)=0\,,\quad y=\pm\beta.$$

Ἀλλ' ἡ πρώτη τούτων ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰς

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=0\,,\quad \frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}=0\,,$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων παριστάνει ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τῶν $y$. Εἶνε δὲ ταῦτα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $x\,y$, ὡς σχηματίζοντα γωνίας ἀπολύτως ἴσας μὲ τὸ ἐπίπεδον $z=0$ (ἐπειδὴ τὰ συνημίτονα τῶν ἐν λόγῳ γωνιῶν ἔχουν τιμὰς ἀπολύτως ἴσας), καθὼς καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $y\,z$. Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις αὗται μετὰ τῶν $y=\pm\beta$ ὁρίζουν ζεύγη εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν σημείων B καὶ B′ ἀντιστοίχως.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὰς τομὰς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ $y\,z$. Αἱ τομαὶ αὗται εἶνε ὑπερβολαί, ἔχουσαι παραλλήλους ἀσυμπτώτους. Αἱ τομαὶ ὅμως ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $|x|=\alpha$ εἶνε εὐθεῖαι.

ϛ') Ἐκ τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς χώνης, ἐκτεινομένης ἑκατέρωθεν ἐπ' ἄπειρον (ἄνω καὶ κάτω τοῦ $x\,y$) καὶ ἥτις εὐρύνεται καθόσον ἀφίσταται τοῦ ἐπιπέδου τῶν $x\,y$, παρουσιάζουσα τὸ μεγαλύτερον στένωμα αὐτῆς κατὰ τὴν τομὴν ταύτης ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου $z=0$ (σχ. 24). Τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τῆς χώνης εἶνε κυρτὸν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῶν $z$. Διότι, ἂν φαντασθῶμεν ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ ἄξονος τούτου, ἔχοντα ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y=\lambda\,x$, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε ὑπερβολαὶ μὲ ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2\,x^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1\,,\quad y=\lambda\,x,$$

ἢ
$$\left(\frac{\beta^2+\alpha^2\lambda^2}{\alpha^2\,\beta^2}\right)x^2-\frac{z^2}{\gamma^2}=1\,,\quad y=\lambda\,x.$$

ἔχουσαι κλάδους συμμετρικοὺς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ τῶν ὁποίων τὰ κυρτὰ εἶνε ἐστραμμένα πρὸς ἄξονα τῶν $z$. Τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς τείνει νὰ λάβῃ κατὰ προσέγγισιν κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας αἱ μὲν γεννέτειραι εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν $z$, ὁδηγὸς δὲ ἡ ἔλλειψις Α Β Α΄ Β΄ (σχ. 24) ἥτις ἀποτελεῖ τὸν λαιμὸν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, ὅταν αἱ γεννέτειραι τούτου καμφθοῦν ἐπαρκῶς πρὸς τὰ ἔξω, προκύπτει δὲ τὸ ὑπερβολοειδές, ἂν αἱ ἐν λόγῳ γεννέτειραι καταντήσουν ὑπερβολαί, αἵτινες εἶνε τομαὶ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰ δύο πρωτεύοντα ἐπίπεδα ἐν γένει.

ε΄) Ἐκ τῶν τριῶν ἀξόνων τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς οἱ δύο πρῶτοι λέγονται *πρωτεύοντες* ἄξονες αὐτοῦ, ὁ δὲ τρίτος *δευτερεύων* ἄξων αὐτοῦ, ὡς μὴ ἔχων κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς ἐπιφανείας, διότι διὰ $x = 0$, $y = 0$ ἔχομεν $z^2 = -\gamma^2$.

## § 42. Δίχωνον ὑπερβολοειδές.—

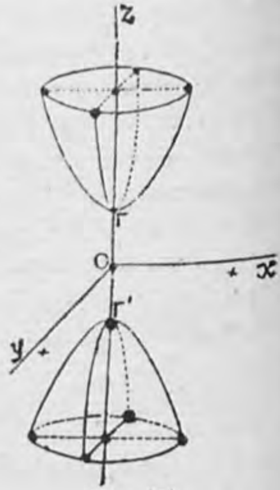
α΄) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς εἶνε

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1} \qquad (1).$$

Αἱ πρωτεύουσαι τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ πρωτεύοντα αὐτῆς ἐπίπεδα $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, ἔχουν ἐξισώσεις κατὰ σειρὰν

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = -1,\\ z = 0,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = -1,\\ y = 0,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = -1,\\ x = 0.\end{array}\right.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου ζεύγους τῶν ἐξισώσεων τούτων παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῶν $x\,y$ δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς ἐπιφανείας (διότι δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τῶν $x$ καὶ $y$ ἐπαληθεύεται ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων), τὰ δὲ δύο ἄλλα πρωτεύοντα ἐπίπεδα αὐτῆς $y = 0$ καὶ $x = 0$ τέμνουν αὐτὴν κατὰ ὑπερβολάς. Αἱ ὑπερβολαὶ αὗται ἔχουν κοινὸν τὸν ἕνα τῶν ἀξόνων αὐτῶν, συμπίπτοντα μὲ τὸν ἄξονα τῶν $z$ καὶ ἔχοντα μῆκος ἴσον μὲ $2\gamma$. Τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῶν ὑπερβολῶν τούτων εἶνε $2\alpha$, $2\beta$, καὶ $2\gamma$. Ἐκ τῶν τριῶν τούτων ἀξόνων τῆς ἐπιφανείας οἱ μὲν δύο πρῶτοι λαμβάνονται ὡς ἄξονες αὐτῆς μόνον ἕνεκα τῆς συμμετρίας τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ὡς πρὸς αὐτούς, χωρὶς νὰ ἔχουν κοινόν τι σημεῖον μετ' αὐτῆς καὶ λέγονται *δευτερεύοντες* ἄξονες τῆς ἐπιφανείας, ἐνῷ ὁ τρίτος ἄξων (ὁ τῶν z) εἶνε καὶ πραγματικὸς ἄξων αὐτῆς καὶ ὡς τέμνων ταύτην, λέγεται δὲ *πρωτεύων* ἄξων τῆς ἐπιφανείας (σχ. 25).




(Σχ. 25)

β') Ἡ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = z'$ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2} - 1\,, \quad z = z'$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2\left(\frac{z'^2}{\gamma^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(\frac{z'^2}{\gamma^2} - 1\right)} = 1, \; z = z'.$$

Ἑπομένως ἡ τομὴ αὕτη εἶνε ἔλλειψις πραγματική, ἂν εἶνε $|z'| > \gamma$. Ἐπειδὴ τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῶν ἐλλείψεων τούτων εἶνε $2\alpha\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2} - 1}$ καὶ $2\beta\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2} - 1}$ ἕπεται ὅτι, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων $z = z'$ εὐρύνονται καθόσον τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπομακρύνεται τοῦ κέντρου O, εἶνε δὲ αὗται καὶ ὅμοιαι, ὡς ἔχουσαι μήκη τῶν ἀξόνων ἀνάλογα τῶν α καὶ β. Ἐὰν εἶνε $|z'| = \gamma$ αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z = \pm\gamma$ θὰ ἔχουν ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0\,, \quad z = \pm\gamma$$

αἵτινες παριστάνουν τὰ σημεῖα Γ (ο, ο, γ) καὶ Γ' (ο, ο, —γ) καθ' ἃ τὰ ἐπίπεδα $z = \gamma$, καὶ $z = -\gamma$ ἐφάπτονται τοῦ ὑπερβολοειδοῦς.

Ἐὰν εἶνε $|z'| < \gamma$, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν τοιούτων ἐπιπέδων $z = z'$ εἶνε ἐλλείψεις φανταστικαί, ὡς ἔχουσαι ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2\left(\frac{z'^2}{\gamma^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(\frac{z'^2}{\gamma^2} - 1\right)} = 1\,, \quad z = z'$$

ἐνῷ τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρώτης εἶνε πάντοτε ἀρνητικόν. Ἤτοι τὰ τοιαῦτα ἐπίπεδα, ἅτινα εἶνε παράλληλα τῷ xy καὶ τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν z εἰς σημεῖα τοῦ τμήματος αὐτοῦ ΓΓ′ (σχ. 25), δὲν ἔχουν σημεῖα κοινὰ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν.

**γ′**) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, χωρισμένα τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ ἀνὰ ἓν ἀρχίζουν ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ (ο, ο, γ) καὶ Γ′ (ο, ο, −γ), ἀπομακρύνονται δὲ εἰς ἄπειρον, ἀποτελοῦντα ἀνὰ ἓν μίαν χώνην χωριστήν, αἵτινες ἀνοίγουν καθ' ὅσον προχωροῦν ἀπομακρυνόμεναι ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου x y. Τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἐπιφανείας ἑκάστης χώνης εἶνε κοῖλον, τὸ δὲ ἐξωτερικὸν κυρτόν. Διότι, αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἵτινες γίνονται ὑπὸ ἐπιπέδων $y = \lambda x$, διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος τῶν z, ἔχουν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1, \; y = \lambda x,$$

ἢ
$$\left( \frac{\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2}{\alpha^2 \beta^2} \right) x^2 - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1, \; y = \lambda x,$$

αἵτινες εἶνε ὑπερβολαί, μὲ πρωτεύοντα ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z καὶ δευτερεύοντα ἄξονα τὸν τῶν x, ἔχουν δὲ αὗται τὰ κυρτὰ αὐτῶν ἐστραμμένα πρὸς τὰ ἔξω τῆς ἐπιφανείας καὶ κορυφὰς τὰ Γ καὶ Γ′ (σχ. 25). Ἐπίσης αἱ ὑπὸ ἐπιπέδων $z = z'$ ἐλλειπτικαὶ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ἔχουν τὰ κυρτὰ αὐτῶν ἐστραμμένα πρὸς τὰ ἔξω αὐτῆς.

**δ′**) Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας (1) ὑπὸ ἐπιπέδων $x = x'$ ἢ ὑπὸ $y = y'$ ἔχουν ἐξισώσεις

$$\frac{z^2}{\gamma^2\left(1 + \frac{x'^2}{\alpha^2}\right)} - \frac{y^2}{\beta^2\left(1 + \frac{x'^2}{\alpha^2}\right)} = 1, \; x = x',$$

καὶ
$$\frac{z^2}{\gamma^2\left(1 + \frac{y'^2}{\beta^2}\right)} - \frac{x^2}{\alpha^2\left(1 + \frac{y'^2}{\alpha^2}\right)} = 1, \; y = y',$$

εἶνε δὲ αὗται ὑπερβολαὶ ἀντιστοίχως ὅμοιαι καὶ κείμεναι ὁμοίως, ἐπειδὴ ἔχουν μήκη τῶν ἀξόνων αὐτῶν ἀνάλογα τῶν γ καὶ β καὶ τῶν γ καὶ α.

**ε′**) Ἐὰν εἶνε $\alpha = \beta$, ὅτε ἡ ἐπιφάνεια (1) εἶνε δίχωνον ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς (§ 28, δ′), αἱ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδων

$z = z'$ καθέτων τῷ ἄξονι τοῦ z εἶνε περιφέρειαι κύκλων ( $|z'| > \gamma$ ) μὲ ἐξισώσεις τὰς

$$x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left(z'^2 - \gamma^2\right), \; z = z', \tag{2}$$

τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου. Ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ὄντως εἶνε ἐκ περιστροφῆς καὶ γεννᾶται ἂν ὑπερβολὴ στραφῇ περὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς, ἢ ὑπὸ τῆς κινητῆς περιφερείας (2) ἐχούσης ὁδηγὸν τὴν ἐν λόγῳ ὑπερβολήν.

στ΄) Καθὼς διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς εὕρομεν τρεῖς ἐξισώσεις αὐτοῦ διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζονται τὰ x, y, z τυχόντος σημείου αὐτοῦ συναρτήσει δύο μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων u καὶ v (§ 37, β΄) οὕτω δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τρεῖς ἐξισώσεις καὶ διὰ τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδές, θέτοντες

$$\boxed{x = \alpha \; \varepsilon\varphi \, u \; \sigma\upsilon\nu \, v, \; y = \beta \; \varepsilon\varphi \, u \; \eta\mu \, v, \; z = \frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu \, u}}$$

Τῷ ὄντι, ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν x, y, z τὰ ἀνωτέρω ἴσα αὐτῶν, εὑρίσκομεν ὅτι ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

ζ΄) Ἐὰν θέσωμεν

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{u}{2}\right) = u_1, \quad \varepsilon\varphi\left(\frac{v}{2}\right) = v_1,$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\boxed{x = \frac{2\alpha u_1 (1 - v_1^2)}{(1 - u_1^2)(1 + v_1^2)}, \; y = \frac{4\beta u_1 v_1}{(1 - u_1^2)(1 + v_1^2)}, \; z = \frac{\gamma(1 + u_1^2)}{1 - u_1^2}}$$

αἵτινες θεωροῦνται ἐπίσης ὡς ἐξισώσεις τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ὅταν αἱ μεταβληταὶ $u_1$ καὶ $v_1$ εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων. Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅτι δίδουν τὰς συντεταγμένας τυχόντος σημείου τῆς ἐπιφανείας διὰ συναρτήσεων ῥητῶν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $u_1$ καὶ $v_1$.

**ΑΣΚΗΣΙΣ.** Εὕρετε ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν (§ 37, (3))

$$x=\frac{\alpha(1-u_1^2)(1-v_1^2)}{(1+u_1^2)(1+v_1^2)},\ y=\frac{2\beta(1-u_1^2)v_1}{(1+u_1^2)(1+v_1^2)},\ z=\frac{2\gamma v_1}{1+v_1^2}.$$

ἂν τεθῇ

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{u}{2}\right)=u_1,\ \varepsilon\varphi\left(\frac{v}{2}\right)=v_1$$

§ 43. **Ἀσύμπτωτος κῶνος ὑπερβολοειδῶν. Συσχέτισις τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν.**—

α΄) Καλοῦμεν *ἀσύμπτωτον κῶνον* τῶν ὑπερβολοειδῶν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1, \tag{1}$$

τὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις γίνεται ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=1,\ z=\nu, \tag{1΄}$$

κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτῆς τὰς εὐθείας

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0,\ y=0 \text{ καὶ } \frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0,\ x=0 \quad (2),$$

αἵτινες εἶνε ἀσύμπτωτοι τῶν ὑπερβολῶν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1,\ y=0 \text{ καὶ } \frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1,\ x=0.$$

Ἐργαζόμενοι καθὼς καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν ὑπερβολοειδῶν (§ 40, β΄), εὑρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου αὐτῶν τὴν

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0} \tag{3}$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) (§ 40, (4)) τῶν ὑπερβολοειδῶν, ἂν ἀντὶ τῆς μονάδος τοῦ β΄ μέλους τεθῇ μηδέν, λέγεται δὲ *ἀσύμπτωτος κῶνος* αὐτῶν, διότι αἱ χῶναι τῶν ὑπερβολοειδῶν τείνουν νὰ ἐφαρμώσουν ἐπὶ τοῦ κώνου (3) καθόσον προχωροῦν εὐρυνόμεναι, ἢ ὅταν αἱ ὁδηγοὶ ὑπερβολαὶ τῆς γεννετείρας γραμμῆς (1΄) ὅταν παράγωνται τὰ ὑπερβολοειδῆ τείνουν νὰ καταντήσουν ἀσύμπτωτοι (2) τῶν ἐν λόγῳ ὑπερβολῶν.

**ϐ')** Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξὺ τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἂν τὰ ἐν λόγῳ ὑπερβολοειδῆ καὶ ἡ ἐπιφάνεια (3) τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδου $z = z'$, αἱ προκύπτουσαι τομαὶ εἶνε ἐλλείψεις, ἔχουσαι ἀντιστοίχους ἐξισώσεις τὰς

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 + \frac{z^2}{\gamma^2}, \\ z = z', \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 \\ z = z', \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2} \\ z = z'. \end{cases}$$

Ἐπειδὴ αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2\left(1+\frac{z'^2}{\gamma^2}\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(1+\frac{z'^2}{\gamma^2}\right)} = 1, \\ z = z', \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2\left(\frac{z'^2}{\gamma^2}-1\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(\frac{z'^2}{\gamma^2}-1\right)} = 1, \\ z = z', \end{cases}$$

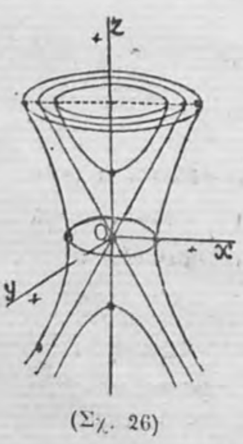
$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2 \frac{z'^2}{\gamma^2}} + \frac{y^2}{\beta^2 \frac{z'^2}{\gamma^2}} = 1, \\ z = z', \end{cases}$$

παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῶν ἐλλείψεων τούτων εἶνε ἀνάλογα τῶν α καὶ β, ἑπομένως αἱ ἐλλείψεις αὗται εἶνε ὅμοιαι καὶ κεῖνται ὁμοίως. Μεγίστη ἐξ αὐτῶν εἶνε ἡ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ὡς ἔχουσα ἄξονας

$$2\alpha\sqrt{1+\frac{z'^2}{\gamma^2}}, \quad 2\beta\sqrt{1+\frac{z'^2}{\gamma^2}}$$

ἐλαχίστη δὲ ἡ τοῦ διχώνου, ἐπειδὴ οἱ ἄξονες αὐτῆς εἶνε (σχ. 26)

$$2\alpha\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}-1}, \quad 2\beta\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}-1},$$



(Σχ. 26)

ἐνῶ ἡ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου (3) ἔχει ἄξονας $2\alpha\frac{z'}{\gamma}$, $2\beta\frac{z'}{\gamma}$. Αἱ διαφοραὶ τῶν ὁμωνύμων ἀντιστοίχων ἀξόνων τῆς ἀνωτέρω τομῆς τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς καὶ τῆς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου εἶνε

$$2\,\alpha\left(\sqrt{1+\frac{z'^2}{\gamma^2}}-\frac{z'}{\gamma}\right) \text{ καὶ } 2\,\beta\left(\sqrt{1+\frac{z'^2}{\gamma^2}}-\frac{z'}{\gamma}\right)$$

τείνουν δὲ αὗται εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ $z'$ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον $z = z'$ ἀπομακρύνεται ἀπείρως ἀπὸ τὸ κέντρον τῶν θεωρουμένων ἐπιφανειῶν.

Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων τῶν ἀνωτέρω τομῶν τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου, καθὼς καὶ διὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων τῶν ἀνωτέρω τομῶν τῶν ὑπερβολοειδῶν, ὅταν εἶνε ὅριον τοῦ $z$ τὸ ἄπειρον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

γ′) ***«Αἱ ἀντίστοιχοι τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδου*** $z = z'$ ***ἑκάστου τῶν ὑπερβολοειδῶν (1) τείνουν νὰ ἐφαρμόσουν μεταξὺ αὐτῶν καὶ μὲ τὴν τομὴν τοῦ κώνου (3), ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον».***

δ′) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων τῶν ἀνωτέρω τομῶν τοῦ μονοχώνου καὶ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἰσοῦται μὲ

$$4\,\alpha^2\left(1+\frac{z'^2}{\gamma^2}-\frac{z'^2}{\gamma^2}+1\right)=8\,\alpha^2,\quad 4\,\beta^2\left(1+\frac{z'^2}{\gamma^2}+1-\frac{z'^2}{\gamma^2}\right)=8\beta^2.$$

Ἤτοι ἔχομεν ὅτι

***«αἱ διαφοραὶ τῶν τετραγώνων τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων τῶν τομῶν μονοχώνου καὶ διχώνου ὑπερβολοειοῦς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ*** $xy$ ***εἶνε σταθεραὶ καὶ ἴσαι μὲ*** $8\alpha^2$ ***καὶ*** $8\,\beta^2$***».***

ε′) Τὰ ὑπερβολοειδῆ (μονόχωνον καὶ δίχωνον) τὰ ἔχοντα τὰς ἐξισώσεις (1) λέγονται συνήθως καὶ *συζυγεῖς* πρὸς ἀλλήλας ἐπιφάνειαι, ἔχουν δ᾽ ὡς εἴδομεν τὴν ἰδιότητα ὅτι οἱ πρωτεύοντες ἄξονες τῆς μιᾶς εἶνε δευτερεύοντες τῆς ἄλλης καὶ ὁ δευτερεύων τῆς πρώτης εἶνε πρωτεύων τῆς δευτέρας, εἶνε δ᾽ αἱ τομαὶ τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὁμοειδεῖς, ὅμοιαι καὶ ὁμόκεντροι, καθὼς π. χ. οἱ ἀνωτέρω θεωρηθεῖσαι.

§ 44. **Διαμετρικὰ ἐπίπεδα συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου.—**

α΄) Ἔστωσαν τὰ ὑπερβολοειδῆ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1 \qquad (1),$$

καὶ ὁ ἀσύμπτωτος αὐτῶν κῶνος

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0 \qquad (2).$$

Ἐὰν ἔχωμεν παραλλήλους χορδὰς μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν τούτων (τμήματα εὐθειῶν περατούμενα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν ὁποίων εἶνε (a, b, c), εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι τὰ μέσα τούτων θὰ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, τὸ ὁποῖον καλεῖται *διαμετρικὸν* ἐπίπεδον τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ διαμετρικοῦ τούτου ἐπιπέδου, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὰς χορδὰς (a, b, c) εἶνε

$$\boxed{\frac{a\,x}{\alpha^2}+\frac{b\,y}{\beta^2}-\frac{c\,z}{\gamma^2}=0\,.} \qquad (3)$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῶν ἐπιφανειῶν (1) καὶ (2) τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς παραλλήλους αὐτῶν εἶνε τὸ αὐτό.

β΄) Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου, ἔχον δ᾽ ἐξίσωσιν

$$A\,x+B\,y+\Gamma\,z=0,$$

εἶνε ἐν γένει διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῶν ἐν λόγῳ τριῶν ἐπιφανειῶν, ἀντιστοιχοῦν εἰς παραλλήλους χορδάς, ἐχούσας διευθύνοντα συνημίτονα ἀνάλογα τῶν ($A\alpha^2$, $B\beta^2$, $-\Gamma\gamma^2$) ἐκτὸς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Διότι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω

$$\frac{A\alpha^2}{\alpha^2}\,x+\frac{B\beta^2}{\beta^2}\,y+\frac{\Gamma\gamma^2}{\gamma^2}\,z=0\,,$$

ἢ

$$\frac{a\,x}{\alpha^2}+\frac{b\,y}{\beta^2}-\frac{c\,z}{\gamma^2}=0\,.$$

γ') Ἔστω ὅτι τὰ διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c) παραλλήλων εὐθειῶν ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{c^2}{\gamma^2}=0 \qquad (4),$$

ὅτε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην εὐθεῖαν

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \qquad (5).$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀσύμπτωτος κῶνος τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγόμενος ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης (5) κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ τὴν ἔλλειψιν ἥτις ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad z=\gamma.$$

Πράγματι, ἂν ἀπαλείψωμεν τὰς παραμέτρους a, b, c μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}=\frac{c^2}{\gamma^2}.$$

Ἐὰν δὲ μεταξύ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων (5) ἀπαλείψωμεν τὰ a, b, c ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου. Ἑπομένως ἡ (4) ἐκφράζει τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ εὐθεῖα (5) εἶνε γεννήτειρα τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου καὶ κεῖται αὕτη ἐπ' αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἑκάστη τῶν θεωρουμένων εὐθειῶν τέμνει ἕκαστον τῶν ὑπερβολοειδῶν εἰς ἓν μόνον σημεῖον, ἐκτὸς ἂν κεῖται ὁλόκληρος ἐπ' αὐτῶν. Διότι, ἵνα εὕρωμεν τὰ κοινὰ σημεῖα εὐθείας τοιαύτης καὶ ἑκάστου τῶν ὑπερβολοειδῶν, ἔχομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς εὐθείας

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c} \qquad (6)$$

ὡς παραλλήλου τῆς (5) καὶ διερχομένης διά τινος σημείου $(x', y', z')$, ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους (6) διὰ ϱ,

$$x=x'+a\varrho, \quad y=y'+b\varrho, \quad z=z'+c\varrho.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x, y, z εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) τῶν ὑπερβολοειδῶν εὑρίσκομεν

$$\left(\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}-\frac{z'^2}{\gamma^2}\right)+2\varrho\left(\frac{ax'}{\alpha^2}+\frac{by'}{\beta^2}-\frac{cz'}{\gamma^2}\right)=\pm 1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτει ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς ϱ, ἕνεκα τῆς (4). Οὕτω ἡ (6) ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μεθ' ἑκάστου τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν.

Διὰ τοῦτο αἱ παράλληλοι χορδαὶ πρὸς τὴν (5) δὲν ἔχουν ἀντίστοιχον διαμετρικὸν ἐπίπεδον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις (3) παριστάνει ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ὅριον τῶν διαμετρικῶν ἐπιπέδων, ὅταν αἱ παράλληλοι χορδαὶ πρὸς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ τείνουν νὰ γίνουν παράλληλοι πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ κώνου κειμένην εὐθεῖαν (5) (γεννέτειραν αὐτοῦ). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς γεννετείρας ταύτης τοῦ κώνου καὶ ἐφάπτεται αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεῖα αὐτῆς.

ϛ') Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τέμνον τὸν κῶνον κατὰ δύο γεννετείρας αὐτοῦ, αἱ τομαὶ τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν εἶνε ὑπερβολαί, αἵτινες ἔχουν ὡς κοινὰς ἀσυμπτώτους τὰς δύο ἐν λόγῳ γεννετείρας τοῦ κώνου. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

*«ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν εἶνε ὁ τόπος τῶν ἀσυμπτώτων τῶν ὑπερβολῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνονται ταῦτα ὑπὸ ἐπιπέδων, διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου».*

## § 45. Διάμετροι συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου.—

α') Αἱ τομαὶ τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου, αἱ ὁποῖαι γίνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, ἔχουν τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ εὐθείας, ἥτις καλεῖται *διάμετρος* ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὡς ἐδείχθη καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδές, ὅτι, διάμετρός τις τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν, τὸ δὲ ἐπίπεδον, τὸ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενον καὶ παράλληλον πρὸς τὰ ἐν λόγῳ παράλληλα ἐπίπεδα, εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον, ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς τὴν διάμετρον ταύτην.

β') Πᾶσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, διάφορος τῶν γεννετειρῶν ( § 44, (5) ) τοῦ κώνου, εἶνε διάμετρος τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν. Διότι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι εἶνε παράλληλοι πρὸς αὐτήν, ἔχουν ἀντίστοιχον διαμετρικὸν ἐπίπεδον. Τὰ δὲ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶνε παράλληλα πρὸς αὐτό, τέμνουν ἑκάστην τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν κατὰ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολάς, δηλαδὴ κατὰ τομὰς αἳ ὁποῖαι ἔχουν κέντρον.

γ') Ἔστω O M ἡμιδιάμετρός τις ὑπερβολοειδοῦς καὶ (a, b, c) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα αὐτῆς. Ἐὰν ρ παριστάνῃ τὸ μῆκος τῆς OM, ἔχομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῆς

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad x = a\rho, \quad y = b\rho, \quad z = c\rho.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἔχομεν

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} = \pm \frac{1}{\rho^2},$$

τοῦ + ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ μονόχωνον καὶ τοῦ — εἰς τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδές. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι εἰς πᾶσαν ἡμιδιάμετρον ρ πραγματικὴν τοῦ ἑνὸς τῶν δύο συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν ἀντιστοιχεῖ μία φανταστικὴ τοιαύτη τοῦ ἄλλου. Διότι ἂν εἰς τὸ β' μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος ληφθῇ + καὶ τὸ πρῶτον μέλος εἶνε θετικόν, θὰ ἔχωμεν πραγματικὴν μὲν ἡμιδιάμετρον διὰ τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς καὶ ἔχουσαν τὸ ἀντίστροφον τοῦ μήκους αὐτῆς ἴσον πρὸς τὴν $\sqrt{\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2}}$, φανταστικὴν δὲ τοιαύτην διὰ τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδὲς καὶ τοὐναντίον. Ἵνα ἔχωμεν πραγματικὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ μονοχώνου, πρέπει νὰ εἶνε

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} > 0,$$

ἥτις ἐκφράζει ὅτι τὸ σημεῖον M θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου τῶν ὑπερβολοειδῶν (διότι ἂν μὲν ἔκειτο ἐπ' αὐτοῦ ἢ ἐντὸς αὐτοῦ θὰ εἴχομεν $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} \leqq 0$). Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε $\alpha < \beta$, θὰ εἶνε $\alpha < \rho$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν ἄπειρα σημεῖα ἐπὶ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπόστασιν ρ μεγαλυτέραν τοῦ α. Τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ καὶ ἐπομένως ἐπὶ τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) z^2 = 0,$$

εἶνε δὲ οὗτος πραγματικός, ἐὰν εἶνε $\alpha < \rho$.

Προκειμένου περὶ τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ πραγματικαὶ ἡμιδιάμετροι αὐτοῦ κεῖνται ἐντὸς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου, διότι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{c^2}{\gamma^2} - \frac{a^2}{\alpha^2} - \frac{b^2}{\beta^2} > 0,$$

τὸ δὲ ρ θὰ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ γ. Τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μὲ ρ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\varrho^2}\right) z^2 = 0,$$

εἶνε δὲ οὗτος πραγματικός, ἐὰν εἶνε $\gamma < \varrho$.

### § 46. Συζυγεῖς διάμετροι καὶ συζυγῆ διαμετρικὰ ἐπίπεδα τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου.—

α΄) Ἐὰν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν διάμετρον τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν (τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου) ἐπὶ δὲ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὴν διαμετρικοῦ ἐπιπέδου λάβωμεν δύο συζυγεῖς διαμέτρους τῶν τομῶν αἱ ὁποῖαι γίνονται (καθὼς καὶ εἰς τὰ περὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀντίστοιχα), αἱ τρεῖς αὗται διάμετροι λέγονται *συζυγεῖς διάμετροι* τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπ' αὐτῶν *συζυγῆ διαμετρικὰ* ἐπίπεδα αὐτῶν.

Παρατηρητέον ὅτι ἂν ἡ ἀρχικῶς λαμβανομένη διάμετρος τοῦ μονοχώνου εἶνε πρωτεύουσα τοιαύτη, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν διαμετρικὸν ἐπίπεδον τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ ὑπερβολήν, ἔχουσαν μόνον μίαν διάμετρον πραγματικὴν (τέμνουσαν αὐτήν), τὴν δ' ἄλλην φανταστικὴν (ὡς κειμένην ἐκτὸς αὐτῆς). Ἐὰν ἡ ἀρχικῶς λαμβανομένη διάμετρος εἶνε δευτερεύουσα (μὴ τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μονοχώνου) τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν διαμετρικὸν ἐπίπεδον τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ ἔλλειψιν, ἔχουσαν καὶ τὰς δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς πραγματικάς.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν ὡς πρὸς ἄξονας τὰς τρεῖς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῶν εἶνε αἱ ἑξῆς, ἂν τὰ μήκη τῶν διαμέτρων τούτων (τῶν χορδῶν αὐτῶν αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῶν διαμέτρων) εἶνε $2\alpha'$, $2\beta'$, καὶ $2\gamma'$,

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = \pm 1} \quad (1) \quad \boxed{\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = 0}$$

(τοῦ μονοχώνου καὶ διχώνου) (τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου)

Τῷ ὄντι, ἂν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν τριῶν συζυγῶν διαμέτρων τοῦ μονοχώνου ἢ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς εἶνε κατὰ σειρὰν $(a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, c_3)$ αἱ δὲ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων $M_1$, $M_2$, $M_3$ τῶν ἡμιδιαμέτρων τούτων $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ θὰ ἔχωμεν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τρίτη τούτων εἶνε δευτερεύουσα τοῦ μονοχώνου διάμετρος (μὴ τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν), τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς νέον ἄξονα τῶν z,

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{\alpha^2} + \frac{y_2^2}{\beta^2} - \frac{z_2^2}{\gamma^2} = 1,$$

$$\frac{(ix_3)^2}{\alpha^2} + \frac{(iy_3)^2}{\beta^2} - \frac{(iz_3)^2}{\gamma^2} = 1.$$

Διὰ δὲ τὸ δίχωνον τὸ ἔχον τὰς δύο πρώτας ὡς δευτερευούσας καὶ τὴν τρίτην ὡς πρωτεύουσαν συζυγεῖς διαμέτρους, θὰ εἶνε

$$\frac{(ix_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(iy_1)^2}{\beta^2} - \frac{(iz_1)^2}{\gamma^2} = -1, \quad \frac{(ix_2)^2}{\alpha^2} + \frac{(iy_2)^2}{\beta^2} - \frac{(iz_2)^2}{\gamma^2} = -1,$$

$$\frac{x_3^2}{\alpha^2} + \frac{y_3^2}{\beta^2} - \frac{z_3^2}{\gamma^2} = -1.$$

Ἀλλ' εἶνε $x_1 = a_1\alpha'$, $y_1 = b_1\alpha'$, $z_1 = c_1\alpha'$, $x_2 = a_2\beta'$, $y_2 = b_2\beta'$, $z_2 = c_2\beta'$, $x_3 = a_3\gamma'$, $y_3 = b_3\gamma'$, $z_3 = c_3\gamma'$.

Ἐπομένως ἔχομεν

$$\frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{b_1^2}{\beta^2} - \frac{c_1^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\alpha'^2}, \quad \frac{a_2^2}{\alpha^2} + \frac{b_2^2}{\beta^2} - \frac{c_2^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\beta'^2},$$

$$\frac{a_3^2}{\alpha^2} + \frac{b_3^2}{\beta^2} - \frac{c_3^2}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma'^2}.$$

Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου ἀνὰ δύο ἐκ τῶν συζυγῶν διαμέτρων κεῖνται ἐπὶ τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ἄλλην συζυγῆ αὐτῶν διάμετρον θὰ ἔχωμεν

$$\frac{a_1a_2}{\alpha^2} + \frac{b_1b_2}{\beta^2} - \frac{c_1c_2}{\gamma^2} = 0, \quad \frac{a_1a_3}{\alpha^2} + \frac{b_1b_3}{\beta^2} - \frac{c_1c_3}{\gamma^2} = 0,$$

$$\frac{a_2a_3}{\alpha^2} + \frac{b_2b_3}{\beta^2} - \frac{c_2c_3}{\gamma^2} = 0,$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν ὑπερβολοειδῶν τὰ x, y, z διὰ τῶν x', y', z' ἐκ τῶν κατωτέρω τύπων τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων

$x = a_1x' + a_2y' + a_3z', \; y = b_1x' + b_2y' + b_3z', \; z = c_1x' + c_2y' + c_3z',$

εὑρίσκομεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους (1), θέτοντες x, y, z ἀντὶ τῶν x', y', z'. 'Αναλόγους παρατηρήσεις πρὸς τὰς ἀνωτέρω ἔχομεν προκειμένου περὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου.

β') Παρατηρητέον ὅτι ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς τεθῇ

$$\frac{x}{\alpha} = x', \; \frac{y}{\beta} = y', \; \frac{z}{\gamma} = z' i$$

μετασχηματίζεται ἡ ἐπιφάνεια εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Προκειμένου περὶ τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ἂν θέσωμεν

$$\frac{x}{\alpha} = x' i, \; \frac{y}{\beta} = y' i, \; \frac{z}{\gamma} = z',$$

μετασχηματίζεται καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἰς σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

γ') Αἱ ἰδιότητες περὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ διὰ τὰς ἐπιφανείας ταύτας, ἀρκεῖ νὰ τεθῇ i γ ὅπου ἐκεῖ εἶνε γ διὰ τὸ μονόχωνον καὶ ὅπου εἶνε α καὶ β τὰ α i καὶ β i διὰ τὸ δίχωνον.

**§ 42. Κυκλικαὶ τομαὶ ὑπερβολοειδῶν καὶ ἀσυμπτώτου κώνου αὐτῶν.—**

α') Δίδονται αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιφανειῶν τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου, ἐνῷ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $\alpha < \beta$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} &= \pm 1, \\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

καὶ ζητοῦνται αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἵτινες εἶνε περιφέρειαι κύκλων.

Γράφομεν τὰς ἐξισώσεις (1) ὡς ἑξῆς,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\beta^2} = \varepsilon + \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) z^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) x^2,$$

$$\left(\text{ἐνῷ εἶνε } \varepsilon \pm 1, \text{ ἢ } \varepsilon = 0\right).$$

Θέτοντες $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\lambda^2$, $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=\mu^2$, ἔχομεν

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\beta^2}=\varepsilon+(\lambda z+\mu x)\,(\lambda z-\mu x).$$

Αἱ τομαὶ τῶν ἐπιφανειῶν ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $\lambda z+\mu x=k$, $\lambda z-\mu x=\varrho$, τὰ ὁποῖα εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν $y$ εἶνε περιφέρειαι κύκλων.

Ἐὰν εἶνε $\alpha=\beta$, τὰ ὑπερβολοειδῆ καὶ ὁ κῶνος εἶνε ἐκ περιστροφῆς, αἱ δὲ δύο σειραὶ τῶν κυκλικῶν τομῶν αὐτῶν συμπίπτουν.

6′) Ἐὰν ἔχωμεν κῶνον πλάγιον μὲ βάσιν κυκλικήν, αἱ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν τούτου εἶνε περιφέρειαι. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν κῶνον κατὰ περιφερείας κύκλων.

Τῷ ὄντι, ἔστω ὁ πλάγιος κῶνος μὲ κορυφὴν τὸ Κ καὶ βάσιν τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἔστω ὅτι εἶνε ἡ Α Β, τὸ δὲ κέντρον τὸ Ο. Τὸ διὰ τῆς εὐθείας Κ Ο ἀγόμενον ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, εἶνε πρωτεῦον ἐπίπεδον τοῦ κώνου. Διότι, πᾶσαι αἱ τομαὶ αὐτοῦ, αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν τούτου, εἶνε περιφέρειαι κύκλων, κείμεναι συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

Αἱ εὐθεῖαι Κ Α καὶ Κ Β κατὰ τὰς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸν κῶνον ἀποτελοῦν πρωτεύουσαν τομὴν αὐτοῦ. Ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς πρωτευούσης τομῆς φέρωμεν εὐθεῖαν Α′ Β′, ἥτις νὰ σχηματίζῃ μὲ τὰς Κ Α καὶ Κ Β τὰς αὐτὰς γωνίας ἀλλ' ἐναλλὰξ μὲ ἐκείνας τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ Α Β μετ' αὐτῶν, φαντασθῶμεν δὲ ἐπίπεδον διὰ τῆς Α′ Β′ κάθετον ἐπὶ τὸ πρωτεῦον, ἡ τομὴ τούτου μὲ τὸν κῶνον, ἔστω ἡ Α′ Μ Β′, εἶνε περιφέρεια κύκλου. Διότι, ἔστω τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Μ. Διὰ τοῦ Μ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κώνου, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτὸν κατὰ περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν ἡμιπεριφέρειαν, ἔστω τὴν Δ Μ Ε καὶ διάμετρον τὴν Δ Ε. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὸ Α′Μ Β′ ἔστω κατὰ τὴν εὐθεῖαν Μ Ι, κάθετον ἐπὶ τὸ πρωτεῦον ἐπίπεδον, ἐπομένως κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας Δ Ε καὶ Α′ Β′. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Δ Μ Ε, ἐνῷ ἡ Μ Ι εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν Δ Ι Ε ἔχομεν (σχ. 27)

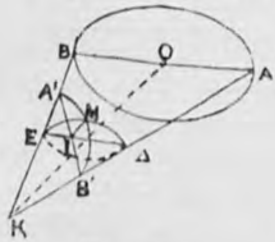
$$(\text{Μ Ι})^2=(\text{Δ Ι})\times(\text{Ι Ε}).$$

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων Δ Ι Β′ καὶ Α′ Ι Ε ἔχομεν

$$\frac{\text{Δ Ι}}{\text{Ι Α}'}=\frac{\text{Ι Β}'}{\text{Ι Ε}}.$$

Ἄρα εἶνε καὶ $(\Delta I)\times(IE)=(IA')\times(IB')$.

Ἐπομένως ἔχομεν $(MI)^2=(IA')\times(IB')$.




(Σχ. 27)

Διὰ τοῦτο ἡ γωνία A′ M B′ εἶνε ὀρθὴ καὶ ἐγγεγραμμένη, ἡ δὲ τομὴ A′ M B′ εἶνε περιφέρεια κύκλου.

γ′) Ἡ εὐθεῖα A′ B′ καλεῖται *ἀντιπαράλληλος* πρὸς τὴν A B, αἱ δὲ τομαὶ τοῦ κώνου αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν A′ M B′ λέγονται *ἀντιπαράλληλοι* πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.

Ἡ εὐθεῖα, ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν A K B, εἶνε ἄξων τοῦ κώνου, καθὼς καὶ ἡ διχοτομοῦσα τὴν παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας ταύτης· ὁ δὲ τρίτος ἄξων τοῦ κώνου εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ πρωτεῦον ἐπίπεδον.

### § 48. Περὶ ἐπιπέδου ἐφαπτομένου εἰς δοθὲν σημεῖον ὑπερβολοειδοῦς ἢ ἀσυμπτώτου κώνου.—

α′) Λέγομεν ὅτι εὐθεῖά τις *ἐφάπτεται* ὑπερβολοειδοῦς τινος ἢ τοῦ ἀσυμπτώτου αὐτοῦ κώνου εἰς ἓν σημεῖον τούτων M′, ἂν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶνε τὸ ὅριον εὐθείας τεμνούσης τὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$, ὅταν τὰ σημεῖα ταῦτα συμπίπτουν εἰς τὸ M′, ὅτε ἡ εὐθεῖα αὕτη λέγεται ἐφαπτομένη γραμμῆς τινος, κειμένης ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας, εἰς τὸ M′.

β′) *Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον* μιᾶς τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς M′ λέγεται τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου αὐτῶν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1\,,$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0\,.$$

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τούτων εἰς τὸ σημεῖον αὐτῶν Μ΄ ( x΄, y΄, z΄ ).

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε ἀντιστοίχως

$$\boxed{\frac{x\,x'}{\alpha^2}+\frac{y\,y'}{\beta^2}-\frac{z\,z'}{\gamma^2}=\pm 1}$$

τῶν ὑπερβολοειδῶν

$$\boxed{\frac{x\,x'}{\alpha^2}+\frac{y\,y'}{\beta^2}-\frac{z\,z'}{\gamma^2}=0}$$

τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ΄ κεῖται ἐπὶ τῆς γεννετείρας τοῦ κώνου

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=0.$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων διατηροῦν τὴν αὐτὴν μορφὴν καὶ ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι ἀναφέρωνται ὡς πρὸς ἄξονας τρεῖς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῶν, ἐχούσας μήκη 2 α΄, 2 β΄, 2 γ΄, μόνον τὰ α, β, γ εἰς αὐτὰς ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν α΄, β΄, γ΄.

γ΄) «***Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον Μ΄ μιᾶς τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς χορδὰς αὐτῆς παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν καὶ τοῦ σημείου Μ΄***».

Τῷ ὄντι, αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τοῦ Μ΄ ( x΄, y΄, z΄ ) εἶνε

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'},$$

ἡ δ' ἐξίσωσις τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἶνε

$$\frac{x\,x'}{\alpha^2}+\frac{y\,y'}{\beta^2}-\frac{z\,z'}{\gamma^2}=0,$$

τὸ ὁποῖον εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ΄ (x΄, y΄, z΄).

**δ΄) «Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτοῦ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ δύο εὐθείας, διερχομένας διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς».**

Τῷ ὄντι, ἂν λάβωμεν τρεῖς συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, τὰ δὲ μήκη αὐτῶν εἶνε $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὡς πρὸς τὰς διαμέτρους αὐτῆς ταύτας εἶνε, ὡς εἴδομεν,

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = 1 .$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha', o, o)$ εἶνε $x = \alpha'$.

Ἑπομένως ἡ τομὴ τούτου καὶ τῆς ἐπιφανείας ἔχει ἐξισώσεις

$$x = \alpha' , \quad \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = 0 ,$$

ἢ

$$x = \alpha' , \quad \frac{y}{\beta'} = \pm \frac{z}{\gamma'} .$$

Ἤτοι αἱ τομαὶ εἶνε δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι ὡς ἐξισώσεις τὰς ἀνωτέρω.

Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου ἐπὶ τοῦ θεωρουμένου ἐπιπέδου.

**ε΄) «Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἓν σημεῖον τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἔχει μετ' αὐτοῦ κοινὸν μόνον τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς».**

Διότι, ἂν λάβωμεν σύστημα συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐπιφανείας τῶν ὁποίων μία εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, τὰ δὲ μήκη αὐτῶν εἶνε $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = -1 .$$

Ἡ μόνη πραγματικὴ διάμετρος τῆς ἐπιφανείας εἶνε ἡ ἔχουσα μῆκος $2\gamma'$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἶνε $z = \gamma'$, ἡ δὲ τομὴ αὐτοῦ μετὰ τῆς ἐπιφανείας ἔχει ἐξισώσεις

$$x = \gamma' , \quad \frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 0 .$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἔχουν τὴν μόνην πραγματικὴν λύσιν $x=0$, $y=0$, $z=\gamma'$, ἤτοι ἡ τομὴ εἶνε τὸ σημεῖον $(o, o, \gamma')$ τῆς ἀφῆς.

στ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι ἐπὶ τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς οὐδεμία εὐθεῖα κεῖται. Διότι ἂν συνέβαινε τοῦτο, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης, θὰ περιεῖχε τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, ὡς εἴδομεν.

ζ') «***Δίδεται ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχον ἐξίσωσιν***

$$A x + B y + \Gamma z = 0,$$

***ζητεῖται δὲ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἐφαπτόμενον τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς***

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = 1,$$

***ὡς πρὸς ἄξονας τρεῖς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτοῦ, ἐχούσας μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$***».

Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0, \tag{1}$$

ἐνῷ ἄγνωστον εἶνε τὸ Δ. Ἂν παραστήσωμεν διὰ $x'$, $y'$, $z'$ τὰς ἀγνώστους συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἔστω τὸ Μ', τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε, ὡς εἴδομεν

$$\frac{x'x}{\alpha'^2} + \frac{y'y}{\beta'^2} - \frac{z'z}{\gamma'^2} = 1.$$

Ἵνα τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ (1) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x'}{A\alpha'^2} = \frac{y'}{B\beta'^2} = -\frac{z'}{\Gamma\gamma'^2} = -\frac{1}{\Delta}.$$

Ἐκ τῶν τελευταίων ἰσοτήτων ἔχομεν

$$\frac{x'}{\alpha'} = -\frac{\alpha' A}{\Delta}, \quad \frac{y'}{\beta'} = -\frac{\beta' B}{\Delta}, \quad \frac{z'}{\gamma'} = \frac{\gamma' \Gamma}{\Delta},$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{y'^2}{\beta'^2} - \frac{z'^2}{\gamma'^2} = \frac{(A^2\alpha'^2 + B^2\beta'^2 - \Gamma^2\gamma'^2)}{\Delta^2} = 1;$$

ἐπειδὴ τὸ M′ ( x′, y′, z′ ) κεῖται ἐπὶ τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$\Delta = \pm\sqrt{A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2\gamma'^2},$$

τὰ δὲ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ δοθέντος μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς καὶ παράλληλα πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶνε δύο ἐν γένει, ἔχοντα ἐξισώσεις τὰς

$$Ax+By+\Gamma z\pm\sqrt{A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2\gamma'^2}=0.$$

Τὰ δύο σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἐπιπέδων ἔχουν συντεταγμένας, αἵτινες ὁρίζονται ἐκ τῶν

$$x'=\frac{\mp A\alpha'^2}{\sqrt{A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2\gamma'^2}},\quad y'=\frac{\mp B\beta'^2}{\sqrt{A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2\gamma'^2}},$$

$$z'=\frac{\pm\Gamma\gamma'^2}{\sqrt{A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2\gamma'^2}}$$

Ἀνάλογον πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ διὰ τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδές, τὸ συζυγὲς τοῦ προηγουμένου, εὑρίσκομεν δ' εὐκόλως ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῶν δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέδων αὐτοῦ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ $Ax+By+\Gamma z=0$ εἶνε αἱ

$$Ax+By+\Gamma z\pm\sqrt{\Gamma^2\gamma'^2-A^2\alpha'^2-B^2\beta'^2}=0.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι

*η′) «δοθέντος ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πάντοτε δύο ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τοῦ ἑνὸς τῶν δύο συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν».*

Ὑποθέτοντες ὅτι τὰ συζυγῆ ὑπερβολοειδῆ ἀναφέρονται ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῶν, ἡ συνθήκη ἵνα ἄγωνται δύο ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα αὐτῶν καὶ παράλληλα πρὸς τὸ $Ax+By+\Gamma z=0$ γίνονται $A^2\alpha^2+B^2\beta^2-\Gamma^2\gamma^2>0$ διὰ τὸ μονόχωνον καὶ $\Gamma^2\gamma^2-A^2\alpha^2-B^2\beta^2>0$ διὰ τὸ δίχωνον.

Θεωροῦντες τὸ σύστημα

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0,\quad Ax+By+\Gamma z=0,$$

παραιηροῦμεν ὅτι, ἂν εἶνε $\Gamma = 0$, τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ὡς διερχόμεδιὰ τοῦ ἄξονος τῶν z, τέμνει τὸν ἀσύμπτωτον κῶνον κατὰ δύο γεννετείρας αὐτοῦ πραγματικάς, ἡ δ' ἀνωτέρω συνθήκη γίνεται

$$A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 > 0,$$

ἥτις πληροῦται ἀφ' ἑαυτῆς. Ἐὰν εἶνε $\Gamma \neq 0$, ἡ τομὴ τοῦ κώνου καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἐξισώσεις τὰς

$$\left(\frac{\Gamma^2}{\alpha^2} - \frac{A^2}{\gamma^2}\right) x^2 + \left(\frac{\Gamma^2}{\beta^2} - \frac{B^2}{\gamma^2}\right) y^2 - \frac{2AB}{\gamma^2} x y = 0,$$

$$Ax + Ay + \Gamma z = 0,$$

ἡ δὲ συνθήκη ἵνα τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς εἶνε πραγματικὰ εἶνε

$$\frac{A^2 B^2}{\alpha^2} - \left(\frac{\Gamma^2}{\alpha^2} - \frac{A^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{\Gamma^2}{\beta^2} - \frac{B^2}{\gamma^2}\right) > 0,$$

ἢ ἁπλούστερον

$$A^2 \alpha^2 + A^2 \beta^2 - \Gamma^2 \gamma^2 > 0.$$

Ἑπομένως ἵνα δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα ὑπερβολοειδοῦς καὶ παράλληλα πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον, πρέπει τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐπιφανείας νὰ τέμνῃ τὸν ἀσύμπτωτον κῶνον κατὰ δύο εὐθεία; πραγματικὰς μέν, ἂν πρόκειται περὶ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, κατὰ δύο δ' εὐθείας φανταστικάς, ἂν πρόκειται περὶ διχώνου.

ΑΣΚΗΣΙΣ. Νὰ ἀχθοῦν ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

καὶ παράλληλα πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον $Ax + By + \Gamma z = 0$.

## § 49. Περὶ τῶν εὐθειῶν τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς.—

α′) Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι αἱ τομαὶ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $y = \pm \beta$, $x = \pm \alpha$ εἶνε εὐθεῖαι κείμεναι ἐπ' αὐτοῦ (§ 41, γ′).

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἔχει ἀπείρους εὐθείας (γεννετείρας), ἀνηκούσας εἰς δύο διακεκριμένα συστήματα. Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

τῆς ἐπιφανείας τοῦ μονοχώνου ὑπερβαλοειδοῦς γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}\right)=\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\cdot$$

Ἀλλ' αὕτη προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου λ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}&=\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned}} \qquad (1)$$

αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων κινητῶν (ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς διαφόρους τομὰς τοῦ λ), ἤτοι εὐθεῖαν κινητήν, ἥτις κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὑπερβολοειδοῦς προκύπτει ἐπίσης ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου μ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}&=\mu\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}&=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned}} \qquad (2)$$

αἱ ὁποῖαι παριστάνουν εὐθεῖαν, ἀνήκουσαν εἰς δεύτερον σύστημα εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

**β')** Ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχεται μία εὐθεῖα ἐξ ἑκάστου τῶν συστημάτων (1) καὶ (2) εἶνε φανερόν. Διότι, αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τούτων εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ λ καὶ τὸ μ.

γ') «***Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ συστήματος (1) ἢ τοῦ (2) κεῖνται εἰς διάφορα ἐπίπεδα (δὲν τέμνονται)***».

Διότι, ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι τοῦ συστήματος (1), ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς τιμὰς $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ τῆς παραμέτρου λ. Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν εἶνε

$$\begin{aligned}\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}&=\lambda_1\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}&=\frac{1}{\lambda_1}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned} \quad \text{καὶ} \quad \begin{aligned}\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}&=\lambda_2\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}&=\frac{1}{\lambda_2}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Αἱ τέσσαρες αὗται ἐξισώσεις δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὴν λύσιν. Διότι, ἂν συνέβαινε τοῦτο, θὰ εἴχομεν $\lambda_1 = \lambda_2$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἐναντίον τῆς γενομένης ὑποθέσεως $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.

**δ΄) «*Τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ πρώτου συστήματος καὶ τυχοῦσα τοῦ δευτέρου τέμνονται*».**

Ἔστω τῷ ὄντι ἡ εὐθεῖα τοῦ (1) ἀντιστοιχοῦσα εἰς $\lambda = \lambda_1$ καὶ ἡ τοῦ (2) ἀντιστοιχοῦσα εἰς $\mu = \mu_1$.

Αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν εἶνε

$$\left\{\begin{aligned} \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} &= \lambda_1\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) \\ \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} &= \frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \end{aligned}\right. \quad \text{καὶ} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} &= \mu_1\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \\ \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} &= \frac{1}{\mu_1}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right). \end{aligned}\right.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἤδη τὴν πρώτην τοῦ πρώτου ζεύγους ἐπὶ 1, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ $\lambda_1 \mu_1$ εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη

$$\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) + \lambda_1 \mu_1 \left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right) = \lambda_1\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) + \mu_1\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \quad (3)$$

$$\text{ἢ} \quad \left(\mu_1 - \lambda_1\right)\frac{x}{\alpha} + \left(1 + \lambda_1 \mu_1\right)\frac{y}{\beta} + \left(1 - \lambda_1 \mu_1\right)\frac{z}{\gamma} - \left(\lambda_1 + \mu_1\right) = 0,$$

ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ πρώτη εὐθεῖα. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ δευτέρου ζεύγους τῆς δευτέρας εὐθείας τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (3). Ἄρα αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τέμνονται, αἱ δὲ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι τῶν ἐξισώσεων εἶνε ἐκεῖναι καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑπερβολοειδοῦς.

Καθ' ἣν περίπτωσιν εἶνε $\lambda_1 = -\mu_1$, ἔχομεν

$$\frac{y}{\beta}\left(1 - \lambda_1^2\right) + \frac{z}{\gamma}\left(1 + \lambda_1^2\right) - 2\lambda_1 \frac{x}{\alpha} = 0,$$

ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον καλούμενον *ἀσύμπτωτον* ἐπίπεδον, ἐπειδὴ παράγει τὸν ἀσύμπτωτον κῶνον τῶν συζυγῶν ὑπερβολοειδῶν, ὅταν μεταβάλλεται τὸ $\lambda_1$.

**ε΄)** Ἐὰν ζητῆται τὸ σημεῖον τῆς τομῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν τοῦ πρώτου συστήματος ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ λ καὶ μιᾶς τῶν τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ μ, ἔχομεν εὐκόλως ἐκ τῶν πρώτων ἐξισώσεων ἐκ τῶν (1) καὶ (2)

$$\frac{1+\frac{x}{\alpha}}{\mu}=\frac{1-\frac{x}{\alpha}}{\lambda}=\frac{2\frac{x}{\alpha}}{\mu-\lambda}=\frac{2}{\lambda+\mu},$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) καὶ τῆς ἀνωτέρω

$$\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu},$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας τῶν (1) καὶ τῆς ἀνωτέρω

$$\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=\frac{2}{\lambda+\mu}.$$

Οὕτω αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῶν δύο παραμέτρων λ καὶ μ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{\frac{x}{\alpha}=\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu},\quad \frac{y}{\beta}=\frac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu},\quad \frac{z}{\gamma}=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda+\mu}.}$$

**στʹ)** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τῶν εὐθειῶν ἑκάστου συστήματος συνάγομεν ὅτι, ἵνα εὐθεῖά τις τοῦ πρώτου συστήματος, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν λ, εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν μ εὐθείας τοῦ δευτέρου συστήματος, εἶνε ἢ $\lambda=-\mu$, ἢ $\lambda+\mu=0$.

**ζʹ)** ***«Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς τέμνει τὸν λαιμὸν τῆς ἐπιφανείας».***

Τῷ ὄντι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς παραμέτρους λ καὶ $\frac{1}{\lambda}$, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ θὰ εἶνε

$$x=\alpha\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},\ y=\frac{2\beta\lambda}{1+\lambda^2},\ z=0.$$

Ἤτοι τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ λαιμοῦ τῆς ἐπιφανείας καὶ συνάγομεν ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τοῦ λαιμοῦ διέρχεται μία εὐθεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρώτου συστήματος, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $\lambda$ καὶ μία τοῦ δευτέρου συστήματος ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

η') Ἔστω Μ σημεῖόν τι τοῦ λαιμοῦ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς. Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονας τῶν x καὶ y τὰς συζυγεῖς διαμέτρους τοῦ λαιμοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ τῶν x διέρχεται διὰ τοῦ Μ, διατηρήσωμεν δὲ τὸν ἄξονα τῶν z, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

ἂν $2\alpha'$, $2\beta'$ εἶνε τὰ μήκη τῶν θεωρουμένων συζυγῶν διαμέτρων τοῦ λαιμοῦ καὶ διατηρήσωμεν τοὺς μεταβλητὰς x, y, z. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε $x = \alpha'$. Ἐπομένως αἱ δύο εὐθεῖαι τῆς ἐπιφανείας, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ Μ, ἔχουν ὡς ἐξισώσεις τὰς

$$x = \alpha', \quad \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0.$$

Ἐὰν $\varphi$ παριστάνῃ τὴν κλίσιν μιᾶς τῶν ἐν λόγῳ εὐθειῶν μὲ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy τοῦ λαιμοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{\gamma}{\beta'}.$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ κινούμενον διαγράφῃ τὸ τέταρτον τῆς ἐλλείψεως τοῦ λαιμοῦ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β′ (σχ. 24) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $\alpha > \beta$, ἡ γωνία $\varphi$ βαίνει ἐλαττουμένη ἐκ τῆς τιμῆς $\varphi$ πρὸς τὴν $\varphi_1$, ἐν ᾧ εἶνε

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{\gamma}{\beta'}, \quad \varepsilon\varphi\, \varphi_1 = \frac{\gamma}{\alpha'}.$$

θ') Ἐὰν ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς γεννετείρας τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, σχηματίζεται ὑπ' αὐτῶν ὁ ἀσύμπτωτος κῶνος.

Διότι, αἱ εὐθεῖαι αὗται ἔχουν ἐξισώσεις, αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἂν παραλειφθῇ ἡ μονὰς εἰς τὸ δεύτερον μέλος αὐτῶν, ἤτοι τὰς

$$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \lambda\,\frac{x}{\alpha}, \quad \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = -\frac{1}{\lambda}\,\frac{x}{\alpha}$$

καὶ
$$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = -\frac{\mu x}{\alpha}, \quad \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = \mu\,\frac{x}{\alpha}$$

ἐξ ἑκάστου ζεύγους τῶν ὁποίων προκύπτει δι' ἀπολοιφῆς τοῦ $\lambda$ ἢ τοῦ $\mu$ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 .$$

Ἀλλ' οὕτω ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου.

**ι') «Τρεῖς γεννέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος εὐθειῶν οὐδέποτε εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον».**

Πράγματι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι συνέβαινε τοῦτο, αἱ εὐθεῖα αἵτινες ἄγονται ἀνὰ μία ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων παράλληλοι πρὸς τὰς τρεῖς ἐν λόγῳ εὐθείας ἀνὰ μίαν λαμβανομένας, θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, διότι τότε τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔπρεπε νὰ τέμνῃ τὸν ἀσύμπτωτον κῶνον κατὰ τρεῖς εὐθείας.

Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων

$$A x + B y + \Gamma z = 0 .$$

Ἵνα τοῦτο περιέχῃ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς μίαν γεννέτειραν τοῦ συστήματος $\lambda$, ἀγομένην διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\Gamma \gamma \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + B \beta \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) + 2 A \alpha = 0 .$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς $\lambda$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν τὸ πολὺ δύο γεννέτειραι τοῦ συστήματος $\lambda$ αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ διὰ τῆς ἀρχῆς διερχόμενον ἐπίπεδον.

**ια')** Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ γεννέτειραι τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ἀνήκουσαι εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα εὐθειῶν αὐτοῦ. Ἐὰν εὐθεῖα κινῆται, ὥστε νὰ συναντᾷ καὶ τὰς τρεῖς ταύτας εὐθείας, θὰ συμπίπτῃ διαδοχικῶς μὲ πάσας τὰς γεννετείρας τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, τὰς ἀνηκούσας εἰς τὸ ἄλλο σύστημα τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ. Τῷ ὄντι, ἔστω M σημεῖόν τι τῆς εὐθείας $\lambda_1$. Διὰ τοῦ σημείου M διέρχεται μία καὶ μόνη εὐθεῖα, συναντῶσα τὰς $\lambda_2$ καὶ $\lambda_3$. Ἡ εὐθεῖα αὕτη συμπίπτει λοιπὸν μὲ τὴν γεννέτειραν τοῦ ἄλλου συστήματος τῶν εὐθειῶν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ M' καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Μ διατρέχει ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν $\lambda_1$, ἡ κινητὴ εὐθεῖα συμπίπτει διαδοχικῶς μὲ πάσας τὰς γεννετείρας τοῦ ἄλλου συστήματος. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

*«πᾶν μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς γράφεται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς εὐθείας σταθεράς, ἀνὰ δύο μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, οὐδὲ παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον»*.

ιϐ') Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις τῆς ἀνωτέρω ἀληθεύει. Ἤτοι

*«ἂν εὐθεῖα κινῆται οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ τρεῖς δοθείσας εὐθείας $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ μὴ παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, παράγει ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον»*.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου κατασκευάζομεν παραλληλεπίπεδον (τὸ ὁποῖον καλεῖται *παραλληλεπίπεδον τοῦ* Binet) φέροντες δι' ἑκάστης τῶν τριῶν εὐθειῶν δύο ἐπίπεδα ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὰς δύο ἄλλας. Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς εὐθείας αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς δοθείσας καὶ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου, θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξισώσεις τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ἂν $2\alpha$, $2\beta$ καὶ $2\gamma$ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου

$$\lambda_1 \begin{cases} y+\beta=0, \\ z-\gamma=0, \end{cases} \quad \lambda_2 \begin{cases} z+\gamma=0, \\ x-\alpha=0, \end{cases} \quad \lambda_3 \begin{cases} x+\alpha=0 \\ y-\beta=0. \end{cases}$$

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν εὐθεῖαν, ἥτις τέμνει τὰς $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῶν $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ ἀντιστοίχως

$$\begin{cases} z-\gamma+\lambda\,(y+\beta)=0, \\ z+\gamma+\mu\,(x-\alpha)=0. \end{cases} \qquad (1).$$

Ἐκφράζοντες ὅτι ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ ἐξισώσεις αὗται συναντᾷ τὴν $\lambda_3$, ἔχομεν τὴν ἑξῆς σχέσιν μεταξὺ τῶν $\lambda$ καὶ $\mu$

$$\alpha\mu+\beta\lambda=\gamma. \qquad (2)$$

Ἀπαλείφοντες τὰ $\lambda$ καὶ $\mu$ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\alpha yz+\beta xz+\gamma xy+\alpha\beta\gamma=0 \qquad (3),$$

ἥτις παριστᾷ τὸν τόπον τῆς κινουμένης εὐθείας (1).

Ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις 3) ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, διότι ἂν σημεῖόν τι M (x, y, z) κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸ συμμετρικὸν τούτου ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν M′ (—x, —y, —z) κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπειφανείας. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας (καὶ λέγεται διὰ τοῦτο καὶ *εὐθειογεννὴς ἐπιφάνεια*) εἶνε ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον.

**ιγ′**) Ἐὰν εἰς τυχὸν σημεῖον πρωτευούσης τομῆς μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον αὐτοῦ, θὰ τέμνεται ὑπ' αὐτοῦ κατὰ τὰς δύο εὐθείας ( § 48, δ′ ), αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ ἀνὰ μία ἀνήκουν εἰς ἀνὰ ἓν τῶν δύο συστημάτων τῶν εὐθειῶν. Τὸ ἐφαπτόμενον τοῦτο ἐπίπεδον τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς πρωτευούσης τομῆς τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ ὁποῖον εἶνε κάθετον, κατὰ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Πράγματι ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν τῶν εὐθειῶν τοῦ πρώτου συστήματος, ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right),\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right) \quad (4)$$

καὶ τὴν προβολὴν ταύτης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$, αἱ ἐξισώσεις ταύτης θὰ εἶνε

$$\lambda^2\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)-2\lambda\frac{y}{\beta}+1-\frac{x}{\alpha}=0,\quad z=0 \quad (5)$$

Ἐὰν ἤδη ἀπαλείψωμεν τὸ λ μεταξὺ τούτων καὶ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω δύο εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\quad z=0,$$

αἵτινες παριστάνουν τὸν λαιμὸν τοῦ θεωρουμένου μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ὅστις ἔχει ἐφαπτομένην τὴν εὐθεῖαν (5).

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

**«αἱ εὐθεῖαι τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς καὶ τῶν δύο συστημάτων προβαλλόμεναι ἐπὶ ἑνὸς τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων γίνονται ἐφαπτόμεναι τῆς ὑπ' αὐτοῦ γινομένης πρωτευούσης τομῆς καὶ ἡ ἁφὴ ἑκάστης ἐφαπτομένης εἶνε σημεῖον τῶν δύο γεννετειρῶν, αἱ ὁποῖαι προβάλλονται ἐπ' αὐτήν».**

ιδ') Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς διά τινος σημείου Μ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς διερχομένας εὐθείας αὐτοῦ, ὅταν δοθῇ πρωτεύουσά τις τομὴ τούτου καὶ τὸ σημεῖον ἐπ' αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο προβάλλομεν ὀρθῶς τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς πρωτευούσης τομῆς, ἐκ τῆς προβολῆς αὐτοῦ, ἔστω τοῦ Μ', φέρομεν ἐφαπτομένας ταύτης, ἔστω τὰς Μ' Α καὶ Μ' Β. Αἱ εὐθεῖαι Μ Α καὶ Μ Β, ἂν Α καὶ Β εἶνε τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς, εἶνε αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι καὶ ἐπομένως τὸ μὲν ἐπίπεδον Μ Α Β ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ, τὰ δὲ Μ Α Μ' καὶ Μ Β Μ' ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς τὰ Α καὶ Β.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς εὐθείας, αἵτινες κεῖνται ἐπί τινος ἐπιφανείας, δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πορείαν.

Ἔστω $\varphi(x, y, z) = 0$ ἡ ἐξίσωσις δοθείσης ἐπιφανείας καὶ $x = \alpha z + p$, $y = \beta z + q$ αἱ ἐξισώσεις εὐθείας τινός. Ἵνα ἡ εὐθεῖα αὕτη κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύεται ἐκ ταυτότητος ἡ $\varphi(\alpha z + p, \beta z + q, z) = 0$. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε ἀλγεβρικὴ καὶ βαθμοῦ k, ἡ τελευταία ἐξίσωσις ὡς πρὸς z θὰ εἶνε τὸ πολὺ βαθμοῦ k καὶ οὕτω τὰ $\alpha, \beta, p, q$ θὰ ὑπόκεινται εἰς $k + 1$ συνθήκας. Ἐπομένως ἂν εἶνε $k > 3$ τὸ πρόβλημα εἶνε ἐν γένει ἀδύνατον. Ἐὰν εἶνε $k = 3$, θὰ ἔχωμεν 4 ἐξισώσεις πρὸς προσδιορισμὸν 4 ἀγνώστων καὶ ἐπομένως μία ἐπιφάνεια τρίτου βαθμοῦ ἔχει ἐν γένει ὡρισμένον πλῆθος εὐθειῶν. Ἐὰν εἶνε $k = 2$, αἱ 4 ἄγνωστοι ὑπόκεινται εἰς 3 συνθήκας καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι πραγματικαὶ ἢ φανταστικαὶ κείμεναι ἐπὶ ἐπιφανείας τινὸς β' βαθμοῦ. Οὕτω ἂν ζητοῦμεν τὰς εὐθείας τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

γράφομεν τὰς ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x}{\alpha} = a\frac{z}{\gamma} + p, \quad \frac{y}{\beta} = b\frac{z}{\gamma} + q$$

καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\left(a\frac{z}{\gamma} + p\right)^2 + \left(b\frac{z}{\gamma} + q\right)^2 - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0,$$

ἥτις πρέπει νὰ ἐπαληθεύεται ἐκ ταυτότητος. Πρὸς τοῦτο θὰ ἔχωμεν

$$a^2 + b^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1, \quad ap + bq = 0.$$

Ὅθεν πρέπει τὰ $(a, b)$ καὶ $(p, q)$ νὰ εἶνε συντεταγμέναι δύο σημείων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἐχούσης ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα, αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ταῦτα ἀκτῖνες νὰ εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Θέτομεν $a = \text{συν}\,\varphi$, $b = \text{ημ}\,\varphi$, $p = \text{συν}\,\theta$, $q = \text{ημ}\,\theta$, ὅτε εἶνε $\text{συν}(\theta - \varphi) = 0$, ἤτοι $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi$. Διὰ $k = 0$ ἔχομεν $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $p = -\text{ημ}\varphi$, $q = \text{συν}\varphi$

καὶ λαμβάνομεν ἓν σύστημα εὐθειῶν (γεννετειρῶν) τῆς ἐπιφανείας, ἐχουσῶν ἐξισώσεις

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma} \text{συν}\,\varphi - \text{ημ}\,\varphi, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \text{ημ}\,\varphi + \text{συν}\,\varphi.$$

Διὰ $k = 1$ εἶνε $\theta = \varphi + \frac{3\pi}{2}$, $p = \text{ημ}\,\varphi$, $q = -\text{συν}\,\varphi$ καὶ ἔχομεν τὸ σύστημα τῶν εὐθειῶν

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma} \text{συν}\,\varphi + \text{ημ}\,\varphi, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \text{ημ}\,\varphi - \text{συν}\,\varphi.$$

Ἄρα εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ $\varphi$ ἀντιστοιχοῦν δύο γεννέτειραι διαφόρων συστημάτων, παράλληλοι. Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς ἀγνώστους συναρτήσει τοῦ $\theta$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma} \text{ημ}\,\theta + \text{συν}\,\theta, \quad \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \text{συν}\,\theta = \text{ημ}\,\theta,$$

καὶ
$$\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} \text{ημ}\,\theta = \text{συν}\,\theta, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \text{συν}\,\theta + \text{ημ}\,\theta,$$

ἐκ τῶν ὁποίων παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς μίαν τιμὴν τοῦ $\theta$ ἔχομεν δύο γεννετείρας, ἀνηκούσας εἰς διάφορα συστήματα, αἵτινες τέμνουν τὸν λαιμὸν τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2) Πρὸς εὕρεσιν τῶν εὐθειῶν τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς γράφωμεν καταλλήλως τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ὥστε νὰ διακρίνῃ τις τὰς εὐθείας ταύτας.

Οὕτω ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις γεννετείρας τινὸς γράφονται οὕτω

$$\frac{x}{\alpha} \text{συν}\,\varphi + \frac{y}{\beta} \text{ημ}\,\varphi = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha} \text{ημ}\,\varphi - \frac{y}{\beta} \text{συν}\,\varphi = -1,$$

ἔχομεν

$$\left(\frac{x}{\alpha} \text{συν}\,\varphi + \frac{y}{\beta} \text{ημ}\,\varphi\right)^2 + \left(\frac{x}{\alpha} \text{ημ}\,\varphi - \frac{y}{\beta} \text{συν}\,\varphi\right)^2 - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$

Ἀλλ' αὕτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς καὶ ἐπαληθεύεται ἂν τεθῇ

$$\frac{x}{\alpha} \text{συν}\,\varphi + \frac{y}{\beta} \text{ημ}\,\varphi = \varepsilon \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha} \text{ημ}\,\varphi - \frac{y}{\beta} \text{συν}\,\varphi = \varepsilon.$$

Διὰ $\varepsilon = \pm 1$ ἔχομεν δύο γεννετείρας παραλλήλους.

3) Τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων τῆς § 37, ζ' δείξατε ὅτι $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (*θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου*).

4) Ἂν $x_1 = a_1 \alpha'$, $y_1 = b_1 \alpha'$, $z_1 = c_1 \alpha'$, $x_2 = a_2 \beta'$, $y_2 = b_2 \beta'$, $z_2 = c_2 \beta'$, $x_3 = a_3 \gamma'$, $y_3 = b_3 \gamma'$, $z_3 = c_3 \gamma'$ εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τριῶν ἡμιδιαμέτρων συζυγῶν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

καὶ $(a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, c_3)$ τὰ διευθύνοντα αὐτῶν συνημίτονα, νὰ δειχθῇ ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ τῶν ἐν λόγῳ διαμέτρων, ἰσοῦται μὲ $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$ (*θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου*). (Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τῶν ἑδρῶν τούτων ἐπὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων. Διὰ τὸ ἐπίπεδον $z = 0$ ἔχομεν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 \text{ καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ } \begin{vmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2).$$

5) Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τριῶν συζυγῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, εἶνε σταθερὸς (*θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου*).

(Ὁ ὄγκος τοῦ ἐν λόγῳ παραλληλεπιπέδου εἶνε ἀπολύτως ἴσος μὲ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ } \alpha^2\beta^2\gamma^2).$$

6) Νὰ διατυπωθοῦν καὶ ἀποδειχθοῦν τὰ ἀνάλογα θεωρήματα *τοῦ Ἀπολλωνίου* διὰ τὰ ὑπερβολοειδῆ.

7) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

αἵτινες εἶνε συζυγεῖς εἰς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

8) Ἐὰν προσδιορίσωμεν τετράεδρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἕδρας τρία διαμετρικὰ συζυγῆ ἐπίπεδα ἐλλειψοειδοῦς καὶ ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τούτου εἰς τρόπον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τμημάτων ἅτινα ὁρίζονται ὑπ' αὐτῶν ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων συζυγῶν διαμέτρων νὰ εἶνε ἐλάχιστον, οἱ ὄγκοι πάντων τῶν τετραέδρων τούτων εἶνε ἴσοι.

9) Εἰς ἐλλειψοειδὲς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τριῶν συζυγῶν διαμέτρων εἶνε μέγιστον, ὅταν αἱ διάμετροι αὗται εἶνε ἴσοι.

10) Καλοῦμεν *κάθετον εὐθεῖαν* ἐπιφανείας τινὸς εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Δείξατε ὅτι ἡ κάθετος ἐλλειψοειδοῦς, ἔχοντος μήκη τῶν ἀξόνων αὐτοῦ $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ εἰς τὸ σημεῖον τούτου $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha^2(x - x_1)}{x_1} = \frac{\beta^2(y - y_1)}{y_1} = \frac{\gamma^2(z - z_1)}{z_1}.$$

Αἱ συντεταγμέναι τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἀπὸ σημεῖον N $(\xi, \eta, \zeta)$ ἐπὶ τὸ ἐλλειψοειδὲς ὁρίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{\alpha^2(\xi - x)}{x} = \frac{\beta^2(\eta - y)}{y} = \frac{\gamma^2(\zeta - z)}{z}$$

καὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους τούτους λόγους διὰ λ, εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\alpha^2 \xi}{\alpha^2 + \lambda}, \quad y = \frac{\beta^2 \eta}{\beta^2 + \lambda}, \quad z = \frac{\gamma^2 \zeta}{\gamma^2 + \lambda},$$

αἵτινες ὁρίζουν μία ἐπιφάνειαν β' βαθμοῦ, αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ λ θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha^2 \xi^2}{(\alpha^2 + \lambda)^2} + \frac{\beta^2 \eta^2}{(\beta^2 + \lambda)^2} + \frac{\gamma^2 \zeta^2}{(\gamma^2 + \lambda)^2} - 1 = 0 .$$

Ἤτοι ὑπάρχουν ἐν γένει ἓξ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐλλειψοειδές, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ N.

11) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου ἐπὶ ὑπερβολοειδὲς εἰς ἓν σημεῖον αὐτοῦ $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ καὶ τὸ πλῆθος τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου N $(\xi, \eta, \zeta)$ ἐπ' αὐτό. Παρατηρητέον ὅτι ἔχομεν ἀνάλογα συμπεράσματα πρὸς τὰ διὰ τὸ ἐλλειψοειδές, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ $\gamma^2$ τὸ $-\gamma^2$ διὰ τὸ μονόχωνον καὶ $-\alpha^2, -\beta^2$ ὅπου $\alpha^2$ καὶ $\beta^2$ διὰ τὸ δίχωνον.

12) Δίδεται ἐλλειψοειδὲς, ἔχον κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων O καὶ ἡμιάξονας α, β καὶ γ. Ἐὰν $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ εἶνε αἱ γωνίαι τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς M μὲ τοὺς ἄξονας, νὰ εὑρεθῇ διὰ τῶν $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ α') ἡ ἀπόστασις τοῦ O ἀπὸ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον M. β') ἡ ἀπόστασις Oμ τοῦ O ἀπὸ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐλλειψοειδὲς εἰς τὸ M, γ') τὸ μῆκος τοῦ OM. δ') αἱ γωνίαι τῆς εὐθείας Oμ μὲ τοὺς ἄξονας. ε') τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ M τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ M καὶ ἑνὸς τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων.

13) Τίς εἶνε ἡ περισσότερον ἀπέχουσα τοῦ κέντρου ἐλλειψοειδοῦς ἐκ τῶν καθέτων ἐπ' αὐτό ;

14) Εἰς δύο σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ ἐλλειψοειδοῦς φέρομεν τὰς καθέτους εὐθείας ἐπ' αὐτό. Τὸ διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς $M_1 M_2$ διερχόμενον ἐπίπεδον καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ταύτην διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν εὐθειῶν, ἅτινα συνδέουν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν καθέτων μὲ ἕκαστον τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων.

15) Δείξατε ὅτι ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

κεῖται ἐπὶ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, τοῦ ἔχοντος ἄξονας 2α, 2β, 2γ πρέπει νὰ εἶνε

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = 1 ,$$

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} = 0 , \qquad \frac{a x_1}{\alpha^2} + \frac{b y_1}{\beta^2} - \frac{c z_1}{\gamma^2} = 0 .$$

16) Εὕρετε τὴν συνθήκην ἵνα τὸ ἐπίπεδον $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ τέμνει τὸ ὑπερβολοειδὲς τὸ ἔχον ἄξονας 2α, 2β, 2γ κατὰ δύο εὐθείας.

### *Περὶ παραβολοειδῶν.*

§ **50. Ὁρισμοὶ καὶ ἐξισώσεις παραβολοειδῶν.—**

α′) Καλοῦμεν *παραβολοειδῆ* τὰς ἐπιφανείας, αἵτινες γίνονται ὑπὸ τῶν γραμμῶν αἵτινες ἔχουν ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{\lambda^2} \pm \frac{z^2}{\mu^2} = 1\,, \quad x = \alpha \qquad (1)$$

καὶ κινοῦνται οὕτως, ὥστε νὰ γράφουν τὰς παραβολὰς

$$(2) \quad y^2 = 2\,p\,x\,, \quad z = 0\,, \text{ καὶ } z^2 = 2\,q\,x, \quad y = 0\,, \quad (3)$$

ἐνῷ p καὶ q εἶνε ἀριθμοὶ θετικοί.

β′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν παραβολοειδῶν, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν μεταξὺ τῶν λ, μ καὶ α ὑπάρχουσαν σχέσιν καὶ πρὸς τοῦτο ἀπαλείφομεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) καθὼς καὶ μεταξὺ τῶν (1) καὶ (3) ὅτε εὑρίσκομεν

$$\lambda^2 = 2\,p\,\alpha \qquad (4)$$
$$\mu^2 = \pm\, 2\,q\,\alpha\,.$$

Ἀκολούθως ἀπαλείφομεν τὰ λ, μ καὶ α μεταξὺ τῶν (1) καὶ (4) ὅτε εὑρίσκομεν

$$\boxed{\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2\,x}$$

Ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον +, λέγεται *ἐλλειπτικὸν* παραβολοειδές, ἡ δὲ δευτέρα ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ −, λέγεται *ὑπερβολικὸν* παραβολοειδές

γ′) Τὰ ἐπίπεδα τῶν x y καὶ τῶν x z εἶνε πρωτεύοντα ἐπίπεδα τῶν ἐπιφανειῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν καὶ ἑπομένως ὁ ἄξων τῶν x εἶνε *ἄξων* τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

§ **51. Ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές.—**

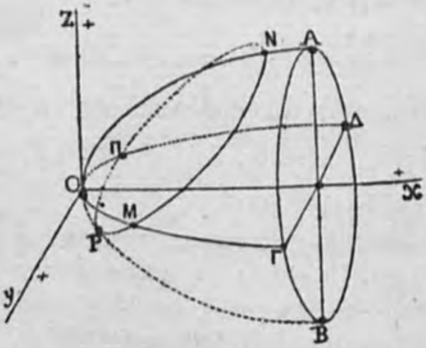
α′) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε

$$\boxed{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\,x} \qquad (1).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας ταύτης φαίνεται, ὅτι αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων O καὶ ἐφάπτεται τοῦ ἐπιπέδου τῶν y z. Διότι διὰ x = 0 ἔχομεν

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 0\,,$$

ἥτις ἀληθεύει μόνον διὰ $y = 0$, $z = 0$. Τὸ σημεῖον O καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς, κεῖται δὲ τοῦτο δεξιὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $y z$, διότι διὰ τιμὰς τοῦ $x$ ἀρνητικὰς δὲν ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις (1).




(Σχ. 28)

β') Τὸ ἐπίπεδον τῶν $x\,y$ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν (1) κατὰ παραβολὴν ΔΟΓ (σχ. 28) ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$y^2 = 2\,p\,x\,, \quad z = 0 \tag{2}$$

τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν $x\,z$ τέμνει αὐτὴν κατὰ παραβολήν, ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$z^2 = 2\,q\,x\,, \quad y = 0 \tag{3}$$

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $p > 0$, $q > 0$ καὶ αἱ δύο αὗται παραβολαὶ εἶνε ἐστραμμέναι πρὸς τὰ θετικὰ $x$.

Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ $x\,y$ εἶνε παραβολαὶ ἴσαι πρὸς τὴν (2). Τῷ ὄντι, τὸ ἐπίπεδον $z = \gamma$ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν (1) κατὰ γραμμήν, ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\,x\,, \quad z = \gamma\,, \tag{4}$$

ἢ τὰς

$$\frac{y^2}{p} + \frac{\gamma^2}{q} = 2\,x\,, \quad z = \gamma \tag{4'}$$

Ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν $z$, διερχομένην διὰ τῆς ἐν λόγῳ τομῆς. Τὸ ἴχνος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $x\,y$ εἶνε παραβολὴ ἴση μὲ τὴν (2). Διότι, ἄν μεταφέρωμεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων παραλλήλως πρὸς ἑαυτούς, λαμβάνοντες ὡς νέαν ἀρχὴν τὸ σημεῖον O′ $\left(\frac{\gamma^2}{2q}, o, \gamma\right)$, ἡ ἐξίσωσις (4′) λαμβάνει τὴν μορφὴν $y'^2 = 2px'$, $z'=0$ $z=z'+\gamma$

ἐνῷ ἐτέθη $x = x' + \frac{\gamma^2}{2q}$, $y=y'$.

Ἐκ ταύτης φαίνεται ὅτι ἡ παραβολὴ (4) εἶνε ἴση τῇ (2).

**γ′)** Ἐπειδὴ αἱ τομαὶ τοῦ παραβολοειδοῦς (1) ὑπὸ ἐπιπέδων $z=\gamma$ εἶνε παραβολαὶ ἴσαι τῇ (2); ἕπεται ὅτι,

«***δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς ὡς παραγόμενον ὑπὸ παραβολῆς ἴσης τῇ (2), κινουμένης οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ εἶνε παράλληλον τῷ*** $xy$, ***ὁ ἄξων αὐτῆς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν*** $x$, ***ἡ δὲ κορυφὴ αὐτῆς νὰ γράφῃ τὴν παραβολὴν (3)***».

**δ′)** Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας (1) ὑπὸ ἐπιπέδων $y=\beta$ παραλλήλων πρὸς τὸ $xz$, εἶνε παραβολαὶ ἴσαι τῇ (3) καὶ κεῖνται παραλλήλως πρὸς αὐτήν. Ἑπομένως,

«***δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν γεννωμένην ὑπὸ παραβολῆς ἴσης τῇ (3), κινουμένης παραλλήλως ἑαυτῇ, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ γράφῃ τὴν παραβολὴν (2)***».

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τυχὸν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τῶν $x$, εἶνε παραβολαὶ ἴσαι. Οὕτω ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $y=\lambda z$ ἔχει ἐξισώσεις $\left(\frac{\lambda^2}{p} + \frac{1}{q}\right) z^2 = 2x$, $y = \lambda z$, αἵτινες παριστάνουν παραβολήν.

**ε′)** Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων $x=\alpha$ παραλλήλων τῷ $yz$ εἶνε ἐλλείψεις ὅμοιαι. Τῷ ὄντι αἱ ἐξισώσεις τῆς τοιαύτης τομῆς εἶνε

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \\ x = \alpha, \end{array}\right. \quad (5) \qquad \text{ἢ} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\alpha \\ x = \alpha. \end{array}\right. \quad (5')$$

Ἡ πρώτη τούτων παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν $x$. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε κύλινδρος ἐλλειπτικός, διότι τὸ ἴχνος αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $yz$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὴν τομήν, εἶνε γραμμὴ ἔχουσα ἐξίσωσιν (ἐπὶ τοῦ $yz$)

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\alpha.$$

Αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{y^2}{2\,\alpha\,p}+\frac{z^2}{2\,\alpha\,q}=1, \qquad ἢ \quad \frac{y^2}{(\sqrt{2\alpha p})^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{2\alpha q})^2}=1,$$

ἥτις παριστάνει ἔλλειψιν, ἔχουσαν ἄξονας ΓΔ καὶ ΑΒ παραλλήλους τῶν Oy καὶ Oz καὶ ἴσους μὲ $2\sqrt{2\alpha p}$, $2\sqrt{2\alpha q}$, κέντρον δὲ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σημεῖον (α, ο, ο) (σχ. 28).

Ὅταν τὸ α αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου, οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως αὐτῆς αὐξάνονται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου, ἔχοντες λόγον ἴσον μὲ $\sqrt{\frac{p}{q}}$. Ἐπομένως, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ yz εἶνε ἐλλείψεις ὅμοιαι.

**στ′)** Ἐὰν εἶνε $p=q$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $y^2+z^2=2px$ καὶ παριστάνει παραβολοειδὲς ἐλλειπτικὸν ἐκ περιστροφῆς (§ 28, στ′).

**ζ)** Ἐὰν θέσωμεν

$$\boxed{y=\sqrt{p}\ \text{συν}\,u\ \text{συν}\,v,\quad z=\sqrt{q}\ \text{συν}\,u\ \text{ημ}\,v,\quad 2\,x=\text{συν}^2 u}$$

παρατηροῦμεν ὅτι αὗται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἐξισώσεις τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς (1), διότι ἡ (1) ἐπαληθεύεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὰ (x, y, z) διὰ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν αὐτῶν, ἐφ᾽ αἱ μεταβληταὶ u καὶ v ὑποτίθεται ὅτι εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ᾽ ἀλλήλων. Ἐὰν τεθῇ

$$\text{εφ}\left(\frac{u}{2}\right)=u_1,\quad \text{εφ}\left(\frac{v}{2}\right)=v_1,$$

εὑρίσκομεν

$$\boxed{x=\frac{(1-u_1^2)^2}{2\,(1+u_1^2)^2},\ y=\sqrt{p}\,\frac{(1-u_1^2)\,(1-v_1^2)}{(1+u_1^2)\,(1+v_1^2)},\ z=2\sqrt{q}\,\frac{(1-u_1^2)v_1}{(1+u_1^2)(1+v_1^2)}}$$

αἵτινες ὁρίζουν τὰ x, y, z ὡς ῥητὰς συναρτήσεις τῶν $u_1$ καὶ $v_1$ καὶ θεωροῦνται ἐπίσης ὡς ἐξισώσεις τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.

### § 32. Διαμετρικὰ ἐπίπεδα τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.—

**α′)** Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς τέμνει αὐτὸ εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Διότι, ἂν φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς παραλλήλου αὐτοῦ εὐθείας, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ παραβολήν, ἔχουσαν ἄξονα τὸν τῆς ἐπιφανείας. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς τέμνει τὴν παραβολὴν ταύτην, ἐπομένως καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς ἓν σημεῖον.

**β′)** Ἐὰν διά τινος σημείου τῆς ἐπιφανείας ἀχθῇ εὐθεῖα, μὴ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς, ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα. Διότι, πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον δι' αὐτῆς καὶ μὴ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ ἔλλειψιν, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας εἰς δύο ἐν γένει σημεῖα. Διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται *β′ βαθμοῦ*.

**γ′)** Καλοῦμεν *χορδὴν* ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς τμῆμα εὐθείας περατούμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Καλοῦμεν *διαμετρικὸν ἐπίπεδον* ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς, ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς αὐτοῦ παραλλήλους μὲν πρὸς ἀλλήλας ἀλλ' ὄχι καὶ πρὸς τὸν ἄξονα τούτου, τὸ ἐπίπεδον ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ μέσα αὐτῶν.

**δ′)** Ἐὰν αἱ παράλληλοι χορδαὶ ἔχουν διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c) ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὰς διαμετρικοῦ ἐπιπέδου εἶνε

$$\boxed{\frac{b y}{p} + \frac{c z}{q} = a} \qquad (1).$$

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως, ὡς διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς καὶ τὰ ὑπερβολοειδῆ.

Καθὼς φαίνεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τὰ διαμετρικὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας·

**ε′)** Ἀντιστρόφως, πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς. Διότι τυχὸν τοιοῦτον ἐπίπεδον ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$B y + \Gamma z + \Delta = 0 .$$

Ἀλλ' αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), ἐὰν τὰ a, b, c ὑποτεθοῦν ἀνάλογα τῶν $-\Delta$, $B p$, $\Gamma q$.

### § 83. Ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς δοθὲν σημεῖον ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.—

**α′)** Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς δοθὲν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2 x \qquad (1),$$

ορίζεται ἀναλόγως ὡς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ τῶν ὑπερβολοειδῶν, ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τούτου $M'(x', y', z')$ εἶνε

$$\boxed{\frac{y\,y'}{p} + \frac{z\,z'}{q} = x + x'} \qquad (2).$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς τέμνει αὐτὴν μόνον εἰς ἓν σημεῖον, ἕπεται ὅτι οὐδεμία εὐθεῖα κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.

**β') «Δίδεται τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς (1) καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ δοθέντος σημείου $M_1$ $(x_1, y_1, z_1)$».**

Ἂν (x, y, z) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \quad \text{καὶ} \quad \frac{y\,y_1}{p} + \frac{z\,z_1}{q} = x + x_1,$$

αἵτινες παριστάνουν τὴν γραμμὴν τῆς ἐπαφῆς τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα καὶ ὅστις ἔχει κορυφὴν τὸ $M_1$.

Ἡ δευτέρα τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς, ἕνεκα τῆς πρώτης,

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\left(\frac{y\,y_1}{p} + \frac{z\,z_1}{q} - x_1\right),$$

ἥτις παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν x καὶ εἶνε ἐλλειπτικὴ (ἐπειδὴ εἶνε $p > o$, $q > o$), γράφεται δὲ ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{p}\left(y - y_1\right)^2 + \frac{1}{q}\left(z - z_1\right)^2 = \frac{y_1^2}{p} + \frac{z_1^2}{q} - 2x_1,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν τὴν ἑπομένην συνθήκην, ἵνα ὁ τόπος εἶνε πραγματικός

$$\frac{y_1^2}{p} + \frac{z_1^2}{q} - 2x_1 > 0.$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη ὁρίζει τὸν ἐκτὸς τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς (1) κείμενον χῶρον.

**γ') «Δίδεται ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, $Ax + By + \Gamma z = 0$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ παραβολοειδὲς (1) καὶ παράλληλον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ».**

Ἂν $A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου καὶ $(x_1, y_1, z_1)$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν

$$\frac{y\,y_1}{p} + \frac{z z_1}{q} = x + x_1, \quad A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0$$

τὰς ἑξῆς σχέσεις

$$-\frac{1}{A} = \frac{y_1}{Bp} = \frac{z_1}{\Gamma q} = -\frac{x_1}{\Delta}$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$x_1 = \frac{\Delta}{A}, \quad y_1 = -\frac{Bp}{A}, \quad z_1 = -\frac{\Gamma q}{A}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $(x_1, y_1, z_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε

$$\frac{y_1^2}{p} + \frac{z_1^2}{q} = 2 x_1$$

καὶ εὑρίσκομεν $\quad \Delta = \dfrac{B^2 p + \Gamma^2 q}{2A}$,

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου εἶνε

$$A x + B y + \Gamma z + \frac{B^2 p + \Gamma^2 q}{2A} = 0,$$

ἡ δὲ συνθήκη ἵνα τῇ ἐπίπεδον τοῦτο ἐφάπτεται τοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε

$$B^2 p + \Gamma^2 q = 2 A \Delta.$$

Παρατηρητέον ὅτι καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς (ὅτε εἶνε $A = 0$) τὸ ζητούμενον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν.

## § 54. Κυκλικαὶ τομαὶ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.—

Ἔστω τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς

$$\frac{y^2}{p} + \frac{q^2}{q} = 2x \qquad (1).$$

Ζητοῦνται αἱ τομαὶ αὐτοῦ, αἵτινες εἶνε περιφέρειαι κύκλων καὶ θὰ καλοῦνται *κυκλικαὶ τομαὶ* τούτου.

Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{p}=2x+\frac{x^2}{p}-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)z^2$$

καὶ ὑποθέτοντες $p>q$, θὰ εἶνε $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}>0$.

Θέτοντες $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=\lambda^2$, ἔχομεν

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{p}=2x+\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\lambda z\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\lambda z\right).$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι τὰ ἐπίπεδα

$$\boxed{\frac{x}{\sqrt{p}}+\lambda z=\text{σταθ.}} \qquad \boxed{\frac{x}{\sqrt{p}}-\lambda z=\text{σταθ.}} \qquad (2)$$

τέμνουν τὴν ἐπιφάνειαν (1) κατὰ περιφερείας κύκλων.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη τέμνεται κατὰ περιφερείας κύκλων ὑπὸ δύο σειρῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. Αἱ δύο αὗται σειραὶ συμπίπτουν εἰς μίαν, ὅταν εἶνε $p=q$, ὅτε τὸ παραβολοειδὲς εἶνε ἐκ περιστροφῆς.

## § 55. Ὑπερβολικὸν παραβολοειδές.—

α΄) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε

$$\boxed{\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x} \qquad (1)$$

ἐνῷ p καὶ q εἶνε θετικά, διέρχεται δ' αὕτη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, διότι ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ἐπαληθεύεται διὰ $x=0$, $y=0$, $z=0$.

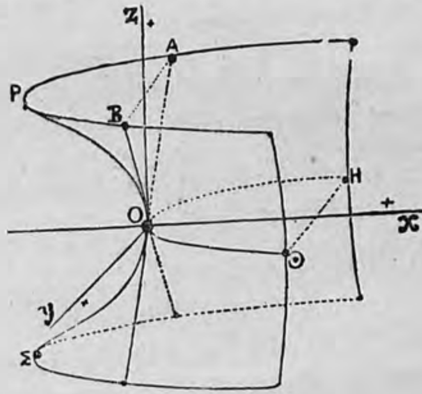
Τὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας $z=0$ καὶ $y=0$ τέμνουν αὐτὴν κατὰ τὰς παραβολάς (σχ. 29), ἐχούσας ἐξισώσεις

$$y^2=2px\,,\quad z=0 \qquad (2).$$

$$z^2=-2qx\,,\quad y=0 \qquad (3).$$

Αὗται ἔχουν ἄξονα τὸν τῶν x, κοινὴν ἀρχὴν τὸ O καὶ διευθύνεται ἡ μὲν πρώτη πρὸς τὰ θετικὰ x, ἡ δὲ δευτέρα πρὸς τὰ ἀρνητικὰ x (σχ. 29).

Καὶ πάντα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶνε παράλληλα πρὸς πρωτεῦον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας τέμνουν αὐτὴν κατὰ παραβολὴν ἴσην μὲ τὴν γινομένην ὑπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος αὐτῷ πρωτεύοντος ἐπιπέδου.




(Σχ. 29)

Οὕτω ἡ τομὴ τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου z = γ ἔχει ἐξισώσεις

$$y^2 = 2\,p\left(x + \frac{z^2}{2\,q}\right), \qquad z = \gamma .$$

Ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τοῦ x y εἶνε ἴση μὲ τὴν παραβολὴν (2) ἔχει δὲ ἄξονα παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸν τῆς (2). Ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς ταύτης A P B (σχ. 29) ἔχει συντεταγμένας $\left(-\frac{\gamma^2}{2\,q}, o, \gamma\right)$ εἶνε δὲ τοῦτο τὸ σημεῖον καθ' ὃ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τέμνει τὴν πρωτεύουσαν τομὴν (3).

β') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

***«τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς γράφεται ὑπὸ παραβολῆς κινουμένης οὕτως, ὥστε ὁ ἄξων καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ μένουν παράλληλα, ἡ δὲ κορυφὴ αὐτῆς νὰ γράφῃ ἄλλην παραβολήν, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ τῆς κινουμένης, ὁ δὲ ἄξων ἀντίρροπος».***

γ') Ἐκ τῆς γεννέσεως αὐτῆς τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς λαμβάνει τις ἰδέαν τοῦ σχήματος τῆς ἐπιφανείας. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λαμβάνει καὶ κύλινδρος παραβολικός, ὅταν αἱ γεννέτειραι αὐτοῦ κυρτωθοῦν πρὸς τὰ ἔξω καὶ γίνουν παραβολαί. Ἐπειδὴ δὲ τῆς γεννετείρας παραβολῆς ἕκαστον σημεῖον γράφει παραβολήν, συνάγομεν ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται δύο τομαὶ αὐτῆς ἐπίπεδοι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ αὐτῶν πρὸς ἄλληλα. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε διὰ τοῦτο κοιλόκυρτος.

δ΄) Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $yz$ παριστάνεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0\,, \quad x = 0\,,$$

ἀποτελεῖται δ' αὕτη ἐκ δύο εὐθειῶν $OA$ καὶ $OB$, (σχ. 29), τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε ἀντιστοίχως

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \; x = 0, \text{ καὶ } \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \quad x = 0.$$

ε΄) Τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας τέμνουν αὐτὴν κατὰ παραβολὰς (ἢ κατὰ μίαν εὐθεῖαν), πάντα δὲ τὰ ἄλλα κατὰ ὑπερβολὰς (ἢ κατὰ δύο εὐθείας τεμνομένας).

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας εἶνε τῆς μορφῆς

$$z = \lambda y + \beta\,,$$

ἡ δὲ τομὴ τούτου καὶ τῆς (1) ἔχει ἐξισώσεις

$$z = \lambda y + \beta\,, \; \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x\,.$$

Ἡ προβολὴ τῆς τομῆς ταύτης ἐπὶ τοῦ $xy$ ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p} - \frac{(\lambda y + \beta)^2}{q} = 2x\,, \quad z = 0\,,$$

αἵτινες παριστάνουν παραβολήν, ἐὰν εἶνε $q - \lambda^2 p \neq 0$, μίαν δ' εὐθεῖαν, ἂν τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ μηδέν, ἤτοι ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων, τῶν ἐχόντων ἀντιστοίχως ἐξισώσεις

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0\,, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0\,,$$

τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῶν εὐθειῶν $OA$ καὶ $OB$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν $x$. Ἑπομένως ἡ τομὴ εἶνε παραβολὴ ἢ εὐθεῖα.

στ΄) Ἔστω τὸ ἐπίπεδον, τέμνον τὸν ἄξονα τῶν $x$ εἰς τὸ σημεῖον $(\nu, o, o)$, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εἶνε

$$x = \lambda y + \mu z + \nu\,.$$

Ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τούτου καὶ τῆς ἐπιφανείας (1) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου y z ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2\lambda y + 2\mu z + 2\nu, \quad x = \lambda y + \mu z + \nu,$$

παριστάνουν δὲ αὗται ὑπερβολήν, ἢ δύο εὐθείας τεμνομένας (§ 4). Ἄρα καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ θεωρουμένου ἐπιπέδου εἶνε ὑπερβολὴ ἢ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι. Ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν.

ζ') Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων $x = \alpha$, παραλλήλων τῷ y z εἶνε ὑπερβολαὶ ὅμοιαι. Τῷ ὄντι ἡ τομὴ τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x, \quad x = \alpha$$

ἢ

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2\alpha; \quad x = \alpha.$$

Ἡ πρώτη τούτων παριστῶσα καὶ τὸ ἴχνος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἥν παριστάνει, ἐπὶ τοῦ y z γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{y^2}{(\sqrt{2\alpha p})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{2\alpha q})^2} = 1.$$

Αὕτη παριστάνει ὑπερβολήν. Ἂν εἶνε $\alpha > O$ οἱ ἄξονες ταύτης ἔχουν μήκη $2\sqrt{2\alpha p}$, $2\sqrt{2\alpha q}$ ἐπὶ ἀξόνων παραλλήλων πρὸς τοὺς τῶν y καὶ τῶν z καὶ τοὺς κλάδους αὐτῆς εἰς τὴν ἔμπροσθεν καὶ ὄπισθεν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων, τὸ δὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x. Ὅταν τὸ α αὐξάνεται ἀπὸ τὸ O μέχρι τοῦ $+\infty$, οἱ ἄξονες αὐξάνονται ὁμοίως καὶ ἔχουν σταθερὸν λόγον· διὰ τοῦτο ἡ ὑπερβολὴ μένει ὁμοία πρὸς ἑαυτήν. Ἂν εἶνε $\alpha < O$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{z^2}{(\sqrt{-2\alpha p})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-2\alpha q})^2} = 1$$

καὶ παριστάνει ὑπερβολήν, ἔχουσαν κλάδους ἕνα εἰς τὴν ἄνω καὶ ἕνα εἰς τὴν κάτω γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων, μένει δὲ ὁμοία πρὸς ἑαυτήν.

## § 56. Διαμετρικὰ ἐπίπεδα καὶ διάμετροι ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.—

α') Ἔστω ἡ ἐπιφάνεια

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \qquad (1).$$

Ἂν διά τινος σημείου τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἀχθῇ εὐθεῖα μὴ παράλληλος πρὸς ἐπίπεδα

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0 \qquad (2),$$

τέμνει αὕτη τὴν ἐπιφάνειαν εἰς ἓν ἀκόμη σημεῖον.

Τῷ ὄντι ἔστωσαν

$$\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c} \qquad (3)$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ σημείου $M'(x', y', z')$ τῆς ἐπιφανείας διερχομένης εὐθείας, ἐχούσης διευθύνοντα συνημίτονα $(a, b, c)$. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\varrho$ τοὺς ἀνωτέρω ἴσους λόγους, ἔχομεν

$$x = x' + a\varrho, \quad y = y' + b\varrho, \quad z = z' + c\varrho.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν $x, y, z$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ $x', y', z$ ἐπαληθεύουν τὴν (1),

$$\left(\frac{b^2}{p} - \frac{c^2}{q}\right)\varrho^2 + 2\left(\frac{b\,y'}{p} - \frac{c\,z'}{q} - a\right)\varrho = 0 \qquad (4).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη καταντᾷ πρώτου βαθμοῦ, ἂν εἶνε

$$\frac{b^2}{p} - \frac{c^2}{q} = 0, \quad \text{ἢ} \quad \frac{b}{\sqrt{p}} - \frac{c}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{b}{\sqrt{p}} + \frac{c}{\sqrt{q}} = 0.$$

Ἀλλ' αὗται ἐκφράζουν ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων παράλληλος τῇ (3) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων (2) (§ 40, Μέρος πρῶτον).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἂν ὁ συντελεστὴς τοῦ $2\varrho$ διαφέρῃ τοῦ μηδενός, ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχει ἄλλο κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας (1), ἐκτὸς τοῦ $M'$, ἄλλως ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἂν ἡ εὐθεῖα ἔχῃ οἱανδήποτε ἄλλην φοράν, ἡ ἐξίσωσις (4) ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον $M'$, δίδει δύο τιμὰς πραγματικὰς τοῦ $\varrho$ (ἀφοῦ ἡ μία δίδεται ἐκ τῶν προτέρων), ἤτοι ἡ εὐθεῖα (3) τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο σημεῖα.

**β')** Καλοῦμεν χορδὴν τῆς ἐπιφανείας (1) τμῆμα εὐθείας, ἔχον τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

**γ')** Τὰ μέσα χορδῶν παραλλήλων ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου. Ἐὰν $(a, b, c)$ εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν παραλλήλων χορδῶν τοῦ παραβολοειδοῦς (1) τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς ταύτας ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{by}{p} - \frac{cz}{q} = a \qquad (5).$$

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθὼς καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδές, τὰ ὑπερβολοειδῆ καὶ τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές.

δ') Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) παρατηροῦμεν ὅτι, πάντα τὰ διαμετρικὰ ἐπίπεδα τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ.

ε') Καλοῦμεν *διάμετρον* ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς τὸν τόπον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ κέντρα τῶν ὑπερβολῶν αὐτοῦ, αἵτινες γίνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ κέντρα τῶν τοιούτων τομῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἤτοι διάμετρός τις ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

στ') Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τυχούσης ὑπερβολῆς, τομῆς τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, φέρωμεν δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς καὶ τὴν παράλληλον εὐθεῖαν πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῶν συζυγῶν διαμέτρων καὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς λέγονται *συζυγῆ διαμετρικὰ* ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας. Ἕκαστον ἐξ αὐτῶν διχοτομεῖ τὰς χορδάς, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον καὶ τὴν θεωρουμένην τομὴν τῆς ἐπιφανείας.

## § 87. Ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς δοθὲν σημεῖον ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.—

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν ἐφαπτομένην εὐθεῖαν εἰς σημεῖόν τι ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς καὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, καθὼς καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδές, τὰ ὑπεοβολοειδῆ καὶ τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές. Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς δοθὲν σημεῖον M' $(x', y', z')$ τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

εἶνε ἡ

$$\boxed{\frac{yy'}{p} - \frac{zz'}{q} = x + x'}$$

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὸ παραβολοειδὲς κατὰ τὰς δύο εὐθείας (γεννετείρας) αὐτοῦ, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς.

§ 58. **Εὐθεῖαι τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.**— α') Ἔστω τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x \qquad (1).$$

Ζητοῦνται αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ λ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\lambda x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις (1) προκύπτει ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ μ

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\mu x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\mu}\end{aligned}} \qquad (3)$$

Ἕκαστον τῶν συστημάτων τούτων (2) καὶ (3) παριστάνει εὐθεῖαν κινητήν, ὅταν μεταβάλλωνται τὰ λ καὶ μ. Ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια (1) δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη ἐκ τῆς κινήσεως ἑκάστης τῶν εὐθειῶν (2) καὶ (3). Ἤτοι ὑπάρχουν δύο συστήματα εὐθειῶν, κειμένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (1), ἀντιστοιχοῦν δὲ ταῦτα εἰς τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων λ καὶ μ.

β') Εὐκόλως ἀποδεικνύεται (καθὼς καὶ διὰ τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς) ὅτι δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι, ἀνήκουσαι εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (δὲν τέμνονται), ἐνῷ πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς συστήματος τέμνει πάσας τὰς τοῦ ἄλλου.

Αἱ ἀνωτέρω εὐθεῖαι (2) καὶ (3) τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς καλοῦνται *γεννέτειραι εὐθεῖαι* τῆς ἐπιφανείας, ὡς παράγουσαι αὐτήν.

γ') Αἱ γεννέτειραι εὐθεῖαι (2) εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον (§ 39, β', Μέρος πρῶτον)

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0,$$

αἱ δὲ (3) πρὸς τὸ

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0.$$

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν Ο Α καὶ Ο Β, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν y z, καλοῦνται δὲ ***ὁδηγοῦντα ἐπίπεδα*** διὰ τὴν γέννεσιν τῆς ἐπιφανείας.

δ΄) Ἐπειδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας (1) εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς τῶν πρωτευουσῶν τομῶν αὐτῆς, εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ πρωτεῦον ἐπίπεδον, καθὼς συνάγεται ἐκ τῆς συμμετρίας, τέμνει δὲ τὴν μὲν ἐπιφάνειαν κατὰ τὰς εὐθείας αὐτοῦ, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου τούτου, τὸ δὲ ἐπίπεδον κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἕπεται ὅτι,

***«αἱ γεννέτειραι τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς προβαλλόμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μιᾶς τῶν πρωτευουσῶν τομῶν αὐτοῦ γίνονται ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς ταύτης».***

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς. Ἡ προβολὴ εὐθείας τινὸς τοῦ συστήματος (λ) π.χ. τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ x y ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{2y}{\sqrt{p}} = 2\lambda x + \frac{1}{\lambda}, \quad z = 0,$$

ἢ

$$2\lambda^2 x - 2\lambda \frac{y}{\sqrt{p}} + 1 = 0, \qquad z = 0 \qquad (4).$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς πρωτευούσης τομῆς τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ x y ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p} = 2x, \quad z = 0 \qquad (5).$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (4) καὶ (5) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (4) καὶ ἡ παραβολὴ (5) ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἤτοι ὅτι ἐφάπτονται.

ε΄) Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς γεννετείρας τῆς ἐπιφανείας, τὰς διερχομένας διὰ δοθέντος σημείου αὐτῆς, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν πρωτεύουσαν τομὴν αὐτῆς, ἐφ' ἧς δὲν κεῖται τὸ σημεῖον, καθὼς εἴδομεν τὸ ἀνάλογον ζήτημα καὶ διὰ τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδές.

Ἡ προβολὴ γεννετείρας τινὸς τοῦ συστήματος (λ) ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}, \; x = 0.$$

Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς γεννετείρας ταύτης καὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἔχει συντεταγμένας

$$x=0,\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{2\lambda},$$

γράφει δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο τὴν γεννέτειραν τοῦ συστήματος (μ), τὴν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου.

Ἂν ζητῆται νὰ εὕρωμεν γεννέτειράν τινα τῶν (λ) τῆς ἐπιφανείας παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, ἔχουσαν διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c), παρατηροῦμεν ὅτι γεννέτειρά τις τῶν (λ) ἀγομένη ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y}{\sqrt{p}}=\frac{z}{\sqrt{q}}=\lambda x.$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ λ, ὥστε νὰ εἶνε

$$\lambda a=\frac{b}{\sqrt{p}}=\frac{c}{\sqrt{q}}\cdot$$

Τὸ πρόβλημα εἶνε ἐν γένει ἀδύνατον. Πράγματι πρέπει νὰ εἶνε $\frac{b}{\sqrt{p}}=\frac{c}{\sqrt{q}}$, ἤτοι ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις πρέπει νὰ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον εἶνε παράλληλον πρὸς τὰς γεννετείρας τοῦ συστήματος (λ). Ἐὰν πληροῦται ἡ ἀναγκαία αὕτη συνθήκη, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν μόνον λύσιν. Τῷ ὄντι, ἂν θέσωμεν $b=k\sqrt{p}$, $c=k\sqrt{q}$, λαμβάνομεν $\lambda=\frac{k}{a}\cdot$ Ὁμοίως ἂν τεθῇ $b=k\sqrt{p}$, $c=-k\sqrt{q}$, πρέπει νὰ λάβωμεν $\mu=\frac{k}{a}\cdot$

**στ΄**) Ἐὰν $\lambda_1$, $\lambda_2$ εἶνε δύο εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ συστήματος (λ) ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς αἱ γεννέτειραι τοῦ δευτέρου συστήματος αὐτοῦ (μ) τέμνουν τὰς $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ καὶ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ (ὁδηγοῦν) ἐπίπεδον $\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0$, μὴ παράλληλον πρὸς τὰς $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$. Ἑπομένως,

***«ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγομένη ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ δύο εὐθείας $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ καὶ μενούσης παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον σταθερόν, μὴ παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας (§ 26, β΄)».***

Ἤτοι, «***τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς ἐπιφάνεια κωνοειδής***».

ζ΄) Ἐὰν φαντασθῶμεν τρεῖς γεννετείρας $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τοῦ αὐτοῦ συστήματος εὐθειῶν τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, αὗται δὲν τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ θὰ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ (ὁδηγοῦν) ἐπίπεδον (§ 58, β΄) Αἱ γεννέτειραι τοῦ ἄλλου συστήματος τέμνουν, ὡς γνωστόν, τὰς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ἐπομένως,

«***δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς ὅτι γίνεται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς δοθείσας εὐθείας***».

η΄) Ἀντιστρόφως, «***ἡ ἐπιφάνεια ἥτις γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ τρεῖς εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶνε ὑπερβολικὸν παραβολοειδές***».

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν z εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς τεῖς δοθείσας καὶ ἔστω ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας $\lambda_1$. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα O x εὐθεῖαν παράλληλον τῇ $\lambda_2$ καὶ ὡς ἄξονα τῶν O y παράλληλον τῇ $\lambda_3$. Οὕτω αἱ ἐξισώσεις τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν εἶνε

$$z = 0 \quad , \quad y = \lambda x \quad , \qquad (\text{τῆς } \lambda_1)$$

$$y = 0 \quad , \quad z = \gamma \quad , \qquad (\text{τῆς } \lambda_2)$$

$$x = 0 \quad , \quad z = k \quad , \qquad (\text{τῆς } \lambda_3).$$

Εὐθεῖά τις (ε) τέμνουσα τὰς $\lambda_2$ καὶ $\lambda_3$ ἔχει ἐξισώσεις

$$\begin{cases} z - \gamma + \mu y = 0 , & (6) \\ z - k + \nu x = 0 & (7). \end{cases}$$

Ἵνα ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνῃ καὶ τὴν $\lambda_1$ πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$k \mu \lambda - \gamma \nu = 0 \qquad (8).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου, τὸν ὁποῖον παράγει ἡ εὐθεῖα (ε) εὑρίσκεται, ἂν ἀπαλείψωμεν τὰ μ καὶ ν μεταξὺ τῶν (6), (7) καὶ (8). Θέτοντες $\lambda = \frac{p}{q}$ εὑρίσκομεν ὡς ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς

$$(k p x - \gamma q y) z = \gamma k (p x - q y).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ὡς ἀποδεικνύεται, παριστάνει ὑπερβολικὸν παραβολοειδές, ὑποτιθεμένου ὅτι εἶνε $\gamma k p q (\gamma - k) \neq 0$.

Ἐν ᾗ περιπτώσει ὁ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις παριστάνει δύο ἐπίπεδα.

α') Πρὸς εὕρεσιν τῶν εὐθειῶν αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς (1) δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωσεν καὶ τὴν ἑξῆς πορείαν.

Γράφομεν τὰς ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \gamma , \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = \beta x + \delta ,$$

καὶ ἂν αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x ,$$

θὰ εἶνε $\qquad (\alpha x + \gamma)^2 - (\beta x + \delta)^2 - 2x = 0 ,$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\alpha^2 - \beta^2 - 0 , \quad \alpha\gamma - \beta\delta = 1 , \quad \gamma^2 - \delta^2 = 0 ,$$

ἢ $\qquad \beta = \varepsilon\alpha , \quad \delta = \varepsilon'\gamma , \quad \alpha\gamma(1 - \varepsilon\varepsilon') = 0 ,$

ἐνῷ δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varepsilon' = 1$ καὶ ἑπομένως εἶνε $\varepsilon' = -\varepsilon$. ἄρα ἔχομεν καὶ

$$\beta = \varepsilon\alpha, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha} , \ \delta = \frac{-\varepsilon}{2\alpha} .$$

Θέτοντες $\varepsilon = +1$ καὶ $\varepsilon = -1$, εὑρίσκομεν τὰ δύο συστήματα τῶν εὐθειῶν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha} , \quad \frac{z}{\sqrt{q}} = \alpha x - \frac{1}{2\alpha}$$

καὶ $\qquad \dfrac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \dfrac{1}{2\alpha} , \quad \dfrac{z}{\sqrt{q}} = -\alpha x + \dfrac{1}{2\alpha} .$

Τὰς ἐξισώσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\alpha x , \ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha} ,$$

καὶ $\qquad \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = 2\alpha x , \ \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{1}{\alpha} .$

Δυνάμεθα δὲ νὰ δώσωμεν διαφόρους τιμὰς εἰς τὸ α εἰς τὰ δύο διάφορα ταῦτα συστήματα. Ἐὰν διατηρήσωμεν τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ α, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον δύο γεννετείρας ἔχει ἐξίσωσιν τὴν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha},$$

εἶνε δὲ τοῦτο κάθετον τῷ x y, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι αἱ δύο γεννέτειραι τέμνουν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

### § 59. Ἀσύμπτωτοι εὐθεῖαι ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.—

α.') Ἔστω τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν εὐθείας αἵτινες τέμνουν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην εἰς τὸ ἄπειρον καὶ αἵτινες καλοῦνται *ἀσύμπτωτοι* τῆς ἐπιφανείας.

Γράφομεν τὰς ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \gamma, \quad \frac{z}{\sqrt{q}} = \beta x + \delta$$

καὶ εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῆς τομῆς ταύτης μετὰ τῆς ἐπιφανείας, λύοντες τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha x + \gamma)^2 - (\beta x + \delta)^2 - 2x = 0.$$

Ἵνα αἱ δύο ῥίζαι ταύτης εἶνε ἄπειροι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\alpha^2 - \beta^2 = 0, \quad \alpha\gamma - \beta\delta - 1 = 0,$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $\beta = \alpha$, $\delta = \gamma - \frac{1}{\alpha}$, ἢ $\beta = -\alpha$, $\delta = -\gamma + \frac{1}{\alpha}$, ἐκ τούτων δ' ἔχομεν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \gamma, \quad \frac{z}{\sqrt{q}} = \alpha x + \gamma - \frac{1}{\alpha},$$

καὶ $$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \gamma, \quad \frac{z}{\sqrt{q}} = -\alpha x - \gamma + \frac{1}{\alpha}.$$

Θεωροῦμεν τὴν πρώτην εὐθεῖαν καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν γεννέτειραν ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha}, \quad \frac{z}{\sqrt{q}} = \alpha x - \frac{1}{2\alpha}.$$

Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται συμπίπτουν, ἂν εἶνε $\gamma = \frac{1}{2\alpha}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δευτέρα εὐθεῖα καὶ ἡ γεννέτειρα, ὡς ἔχουσα ὡς ἐξισώσεις τὰς

$$\frac{z}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha}, \quad \frac{z}{\sqrt{q}} = -\alpha x + \frac{1}{2\alpha},$$

εἶνε παράλληλοι καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ἐπομένως διὰ νὰ ἔχωμεν πάσας τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ἐπιφανείας (1), ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δι' ἑκάστης γεννετείρας αὐτῆς ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον ὁδηγοῦν ἐπίπεδον αὐτῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου νὰ φέρωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν παράλληλον τῇ θεωρουμένῃ γεννετείρᾳ.

β') Τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ἐπιφανείας (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν τὰς ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Παριστῶντες τοὺς ἴσους τούτους λόγους διὰ τοῦ $\varrho$ ἔχομεν, ἀντικαθιστῶντες τὰ x, y, z διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν ἐν τῇ (1)

$$\frac{(y_1 + b\varrho)^2}{p} - \frac{(z_1 + c\varrho)^2}{p} - 2(x_1 + a\varrho) = 0.$$

Ἵνα αἱ δύο τιμαὶ τοῦ $\varrho$ εἶνε ἄπειροι, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\frac{b^2}{p} - \frac{c^2}{q} = 0, \quad \frac{by_1}{p} - \frac{cz_1}{q} - a = 0.$$

Ἡ πρώτη τούτων χωρίζεται εἰς δύο ἄλλας καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$b = \sqrt{p}$, $c = \sqrt{q}$, ἐξ ἧς ἔχομεν $a = \frac{y_1}{\sqrt{p}} - \frac{z_1}{\sqrt{q}}$,

ἢ $b = \sqrt{p}$, $c = -\sqrt{q}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $a = \frac{y_1}{\sqrt{p}} + \frac{z_1}{\sqrt{q}}$.

Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς γενικὰς ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ἐπιφανείας (1)

$$\sqrt{pq}\;\frac{x-x_1}{\sqrt{q}\,y_1-\varepsilon\sqrt{p}\,z_1}=\frac{y-y_1}{\sqrt{p}}=\frac{z-z_1}{\varepsilon\sqrt{q}},$$

ἐν ᾧ εἶνε $\varepsilon=\pm 1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τοῦ χώρου διέρχονται δύο ἀσύμπτωτοι τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας θὰ ἔχωμεν τὰς ἐπ' αὐτῆς κειμένας εὐθείας.

### § 60. Ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.—

α') Δοθείσης τῆς ἐπιφανείας

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x \qquad (1)$$

ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς τὸ ἄπειρον καὶ καλοῦνται *ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα* τῆς ἐπιφανείας.

Ἔστωσαν δύο γεννέτειραι τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς ἀνήκουσαι εἰς διάφορα συστήματα, αἵτινες ἔχουν ἐξισώσεις

$$\frac{y}{\sqrt{p}}=\alpha x+\frac{1}{2\alpha},\qquad \frac{z}{\sqrt{q}}=\alpha x-\frac{1}{2\alpha}$$

καὶ

$$\frac{y}{\sqrt{p}}=\beta x+\frac{1}{2\beta},\qquad \frac{z}{\sqrt{q}}=-\beta x+\frac{1}{2\beta}.$$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου εἶνε

$$x=\frac{1}{2\alpha\beta},\quad y=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}\sqrt{p},\quad z=\frac{\alpha-\beta}{2\alpha\beta}\sqrt{q}.$$

Τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον, ἐὰν εἶνε $\alpha=0$ ἢ $\beta=0$. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας (1) εἰς τὸ κατ' ἐξοχὴν τοῦτο σημεῖον ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{p}}\,y-\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{q}}\,z=2\alpha\beta x+1.$$

Ἐὰν εἶνε $\beta=0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\alpha},$$

ἂν δ' εἶνε $\alpha=0$, καταντᾷ

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\beta}.$$

Ἑπομένως «*τὰ ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε τὰ ἐπίπεδα ἅτινα ἄγονται δι' ἑκάστης τῶν γεννητειρῶν αὐτοῦ παράλληλα πρὸς τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὰς διηγοῦντα ἐπίπεδα*».

**§ 61. Τόπος τῶν σημείων διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται κάθετοι γεννήτειραι παραβολοειδοῦς.**—

α') Δίδεται τὸ παραβολοειδὲς

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \tag{1}$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων διὰ τῶν ὁποίων ἄγονται γεννήτειραι αὐτοῦ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Ἂν αἱ ἐξισώσεις δύο γεννητειρῶν εἶνε αἱ

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{(τοῦ συστήματος } \lambda)$$

$$\text{καὶ } \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu} \quad \text{(τοῦ συστήματος } \mu) \tag{2}$$

ἡ συνθήκη τῆς καθετότητος αὐτῶν εἶνε

$$p - q + \frac{1}{\lambda\mu} = 0 .$$

Ἀρκεῖ τώρα νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ λ καὶ μ μεταξὺ τριῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων καὶ θὰ εὕρωμεν δύο ἐξισώσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία θὰ εἶνε ἡ δοθεῖσα τοῦ παραβολοειδοῦς. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἄλλης ἐξισώσεως παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δευτέρας ἐξισώσεις ἐκ τῶν (2) ἔχομεν

$$\frac{1}{\lambda\mu} = \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} .$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος τόπος ἔχει ἐξισώσεις τὴν τοῦ δοθέντος παραβολοειδοῦς καὶ τὴν

$$2x + p - q = 0 \tag{3}$$

ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον, εἶνε δ' ὁ τόπος οὗτος ὑπερβολή, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (3).

β') Τὸ ἐπίπεδον (3) καλεῖται ἐπίπεδον τοῦ Monge καὶ ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ εἶνε κορυφὴ ἀπείρων τρισορθογωνίων τριέδρων περιγεγραμμένων εἰς τὸ ὑπερβολοειδές.

γ') Ἐὰν εἶνε $p = q$, λέγομεν ὅτι τὸ παραβολοειδὲς (1) εἶνε *ἰσοσκελές*, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ Monge εἶνε ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ὁ δὲ ζητούμενος τόπος εἶνε κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην δύο γεννέτειραι διερχόμεναι διὰ τῆς κορυφῆς ταύτης. Αἱ γεννέτειραι αὗται εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, διότι τὰ δύο ὁδηγοῦντα ἐπίπεδα ἑνὸς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε κάθετα ἐπ' ἄλληλα καὶ ἀντιστρόφως.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς καθέτου εἰς ἓν σημεῖον $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ τοῦ παραβολοειδοῦς $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$, (1) εἶνε

$$\frac{x - x_1}{-1} = p\,\frac{y - y_1}{y_1} = q\,\frac{z - z_1}{z_1},$$

οἱ δὲ πόδες τῶν καθέτων εἰς τὸ (1), τῶν ἀγομένων ἔκ τινος σημείου N (ξ, n, ζ) ὁρίζονται ἐκ τῆς (1) καὶ τῶν

$$\frac{(\xi - x)}{-1} = p\,\frac{(\eta - y)}{y} = q\,\frac{(\zeta - z)}{z} \qquad (2).$$

Παριστῶντες διὰ λ τὴν τιμὴν τῶν ἴσων τούτων λόγων, ἔχομεν

$$x = \xi + \lambda, \quad y = \frac{n\,p}{p+\lambda}, \quad z = \frac{\zeta\,q}{q+\lambda}.$$

Εὑρίσκομεν τὸν κῶνον τῶν καθέτων ὡς ἑξῆς. Θέτοντες $x = \xi + X$, $y = n + \Psi$, $z = \zeta + Z$, εὑρίσκομεν

$$X = \lambda, \ \Psi = -\frac{n\,\lambda}{p+\lambda}, \ Z = \frac{-\zeta\,\lambda}{q+\lambda}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\lambda}{X} = 1,$$

$$\frac{\xi\,\lambda}{\Psi} = -(p+\lambda), \quad \frac{\lambda\,\zeta}{Z} = -(q+\lambda).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ἐπὶ $p$, $-q$, $-1$ κατὰ σειρὰν καὶ προσθέτοντες ἔχομεν $\frac{p-q}{X} + \frac{n}{\Psi} = \frac{\zeta}{Z}$, ἢ ἐπαναφέροντες τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας $(p-q)(y-n)(z-\zeta) + n(z-\zeta)(x-\xi) - \zeta(x-\xi)(y-n) = 0$ (3). Οἱ πόδες τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ N ἐπὶ τὸ (1) εἶνε κοινὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας (3) καὶ τῆς (1). Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ λ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{p^2\,n^2}{(p^2+\lambda)^2} + \frac{q^2\,\zeta^2}{(q^2+\lambda)^2} - 2(\xi + \lambda) = 0,$$

ἥτις εἶνε πέμπτου βαθμοῦ καὶ συνάγομεν ὅτι διὰ τυχόντος σημείου N ἄγονται ἐν γένει πέντε κάθετοι ἐπὶ τὸ παραβολοειδές.

2) Ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

θέσωμεν $x = X - \alpha$ καὶ ἀκολούθως $\frac{\beta^2}{\alpha} = p$, $\frac{\gamma^2}{\alpha} = q$, ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ $\alpha$ αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2X$ εἶνε ὅριον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Εὕρετε ὁμοίως ὅτι ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὅριον τοῦ ὑπερβολοειδοῦς καὶ εὕρετε ἰδιότητας τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἀναλόγους πρὸς τοιαύτας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ ὑπερβολοειδοῦς.

3) Δείξατε ὅτι τὰ ὕψη ἑνὸς τετραέδρου εἶνε τέσσαρες γεννέτειραι ἑνὸς μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

4) Δοθεισῶν τεσσάρων γεννετειρῶν ἑνὸς ὑπερβολοειδοῦς νὰ κατασκευασθῇ τετράεδρον, ἔχον ταύτας ὡς ὕψη.

5) Ἐκφράσατε ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι εἶνε τρεῖς γεννέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἑνὸς ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.

6) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δύο εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας καὶ μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

7) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολικῶν παραβολοειδῶν, διερχομένων διὰ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

8) Εὕρετε τὰς εὐθείας αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

$$x \text{ συν } (k z) - y \text{ ημ } (k z) = 0.$$

9) Ἐκφράσατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον $\lambda x + \mu y + \nu z + \rho = 0$ τέμνει τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδές, τὸ ἔχον μήκη τῶν ἀξόνων $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, κατὰ δύο εὐθείας.

10) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται δύο γεννέτειραι ἑνὸς ὑπερβολοειδοῦς ἢ παραβολοειδοῦς, σχηματίζουσαι μεταξύ των δοθεῖσαν γωνίαν.

11) Δείξατε ὅτι τετράεδρον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ὑπὸ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, διερχομένου διὰ δύο ζευγῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ.

12) Ἐὰν θεωρήσωμεν τετράεδρον καὶ τὸ ὑπερβολοειδὲς τὸ ἔχον γεννετείρας τὰ ὕψη τοῦ τετραέδρου, τὸ κέντρον τοῦ ὑπερβολοειδοῦς καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἥτις εἶνε περιγεγραμμένη εἰς τὸ τετράεδρον καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

13) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουν λόγον σταθερόν. Εὕρετε τὰς εὐθείας ὑπὸ τῶν ὁποίων δύναται νὰ παραχθῇ ὁ τόπος οὗτος.

14) Εὕρετε ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ δοθέντος σημείου ἀπόστασιν ἥτις εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

15) Ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς γεννετείρας ἑνὸς συστήματος αὐτοῦ. Ὁ τόπος τῶν καθέτων τούτων εἶνε κῶνος β' βαθμοῦ. Εὕρετε τὰς κυκλικὰς τομὰς τούτου καὶ τὸν τόπον τῶν ποδῶν τῶν καθέτων.

## ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΟΥ Β΄ ΜΕΡΟΥΣ

Ἐξίσωσις ἀσυμπτώτου κώνου ὑπερβολοειδῶν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0\,. \qquad 119$$

Διαμετρικὰ ἐπίπεδα ὑπερβολοειδῶν καὶ ἀσυμπτώτου αὐτῶν

κώνου $$\frac{a\,x}{\alpha^2} + \frac{bx}{\beta^2} - \frac{c\,z}{\gamma^2} = 0\,. \qquad 122$$

Ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ὑπερβολοειδῶν καὶ

ἀσυμπτώτου κώνου $\dfrac{x\,x'}{\alpha^2} + \dfrac{y\,y'}{\beta^2} - \dfrac{z\,z'}{\gamma^2} = \pm 1$ ἢ $0$. 131

Ἐξίσωσις εὐθειῶν τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς

$$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \lambda\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right),\ \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)$$

136

καὶ $$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \mu\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right),\ \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right).$$

Ἐξισώσεις παραβολοειδῶν (ἐλλειπτικοῦ καὶ ὑπερβολικοῦ)

$(p, q > 0)$ $$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2\,x\,. \qquad 147$$

Ἐξίσωσις διαμετρικῶν ἐπιπέδων παραβολοειδῶν

$$\frac{b\,y}{p} \pm \frac{c\,z}{q} = a\,. \qquad 151{,}159$$

Ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου παραβολοειδῶν

$$\frac{y\,y'}{p} \pm \frac{z\,z'}{q} = x + x'\,. \qquad 152{,}159$$

Ἐξισώσεις εὐθειῶν ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\,\lambda\,x,\quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}$$

καὶ $$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu\,x,\quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}\,. \qquad 160$$