Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΝΩΤΑΤΗΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΣΧΟΛΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΑΘΗΝΑΙ 1963

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἀποτελεῖ ἕνα νέον καὶ ταχέως ἀναπτυσσόμενον τομέα τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν ἐξέτασιν δύο βασικῶν προβλημάτων: Πρῶτον, τοῦ προβλήματος τῆς **συνεπείας** τῶν τιθεμένων ὑπὸ τῶν οἰκονομικῶν μονάδων προγραμματικῶν σκοπῶν πρὸς τὰς ἑκάστοτε ὑφισταμένας οἰκονομικὰς δυνατότητας καὶ τὰς συνθήκας λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Δεύτερον, τοῦ προβλήματος τῆς **ἀριστοποιήσεως** τῆς οἰκονομικῆς δράσεως πρὸς ἐπίτευξιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν.

Η λύσις τοῦ πρώτου προβλήματος καθορίζει τὸ πραγματοποιήσιμον ἢ μὴ τῶν τιθεμένων σκοπῶν. Οὕτω, π.χ., ἐὰν ὁ σκοπὸς ἑνὸς κρατικοῦ προγράμματος συνίσταται εἰς τὴν ἐπίτευξιν δεδομένου ἐπιπέδου ἐθνικῆς καταναλώσεως βιομηχανικῶν προϊόντων, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τῆς συνεπείας θὰ δείξῃ ἂν ὁ σκοπὸς αὐτὸς συμβιβάζεται μὲ τὰς παραγωγικὰς δυνατότητας τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τῆς συνεπείας θὰ δείξῃ ἐπίσης ἐὰν αἱ συνθῆκαι λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος καθιστοῦν δυνατὴν τὴν ταυτόχρονον ἐπιδίωξιν δύο ἢ περισσοτέρων προγραμματικῶν σκοπῶν (π.χ. αὔξησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως καὶ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καθ' ὡρισμένα ποσοστά).

Ἡ λύσις τοῦ δευτέρου προβλήματος προσδιορίζει τὰς συνθήκας προσαρμογῆς τῆς οἰκονομικῆς δράσεως πρὸς τὸ οἰκονομικὸν ἀξίωμα, ἤτοι τὰς συνθήκας ἐλαχιστοποιήσεως τῆς οἰκονομικῆς θυσίας πρὸς ἐπίτευξιν δεδομένων σκοπῶν ἢ μεγιστοποιήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως δεδομένων πόρων.

Αἱ ἀνὰ χεῖρας παραδόσεις σκοπὸν ἔχουν νὰ ἐξοικειώσουν τὸν σπουδαστὴν εἰς τὰς βασικὰς ἐννοίας καὶ τὴν τεχνικὴν τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι οὗτος εἰς θέσιν νὰ παρακολουθήσῃ εὐχερῶς τὸ κύριον μέρος τῶν παραδόσεών μας, τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

Διὰ λόγους ἀνεξαρτήτους τῆς θελήσεώς μας δὲν κατέστη δυνατὸν νὰ περιληφθῇ εἰς τὸ παρὸν τεῦχος εἰδικὸν κεφάλαιον περὶ τῆς θεωρίας τῆς ἐπιλογῆς. Ἐπίσης τινὰ ἐκ τῶν ἐξεταζομένων ζητημάτων ἀπαιτοῦν πληρεστέραν θεωρητικὴν θεμελίωσιν καὶ ἐκτενεστέραν ἀνάλυσιν. Ἐλπίζεται ὅτι τὰ κενὰ ταῦτα θὰ καλυφθοῦν ἐν μέρει εἰς τὰς φροντιστηριακὰς συζητήσεις.

Α. Λ.

Μάρτιος, 1963

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

1. Ἡ ἀνεπάρκεια τῶν μέσων ἱκανοποιήσεως τῶν ἀνθρωπίνων ἀναγκῶν ἐπιβάλλει τὴν ἐφαρμογὴν ὀρθολογιστικῆς τινος διαδικασίας κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἑκάστοτε δεδομένων ποσοτήτων ἐκ τῶν μέσων αὐτῶν. Ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἀναφέρεται εἰς τὸ σύνολον τῶν οἰκονομικῶν σκέψεων αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὴν μορφὴν τῆς ὀρθολογιστικῆς αὐτῆς διαδικασίας, ἤτοι τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ μέσων πρὸς ἐπίτευξιν διαφόρων οἰκονομικῶν σκοπῶν, βάσει προκαθωρισμένων κριτηρίων. Συνεπῶς, ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ὁ κλάδος τῆς συγχρόνου οἰκονομικῆς ἐπιστήμης ὁ ἀφορῶν εἰς τὴν σπουδὴν καὶ συστηματοποίησιν *τῆς διαδικασίας καταστρώσεως τοῦ προγράμματος δράσεως* διαφόρων οἰκονομικῶν μονάδων.

Ἡ προσπάθεια ὀρθολογιστικῆς ἀξιοποιήσεως τῶν διαθεσίμων πόρων εἶναι θεμελιῶδες φαινόμενον τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, δύναται δὲ νὰ λεχθῇ ὅτι κατ' ἀρχὴν πᾶσαι αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες, ἀνεξαρτήτως σκοποῦ καὶ μεγέθους, προγραμματίζουν, δηλαδὴ ἐπιδιώκουν νὰ ἐξεύρουν λύσεις αἱ ὁποῖαι πληροῦν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον τὸ ἀξίωμα τοῦ ἀρίστου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος.

2. Ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς καλεῖται εἰδικώτερον Μικροοικονομικὸς Προγραμματισμὸς ὅταν ἀφορᾷ εἰς τὴν διαδικασίαν καταστρώσεως τοῦ προγράμματος δράσεως μεμονωμένων παραγωγικῶν μονάδων, καὶ Μακροοικονομικὸς Προγραμματισμὸς ἐὰν ἀναφέρεται εἰς τὴν διαδικασίαν καταρτίσεως τοῦ προγράμματος δράσεως μεγάλων ὁμάδων παραγωγικῶν μονάδων ἢ ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας μιᾶς χώρας. Εἰς τὰς ἀνὰ χεῖρας παραδόσεις, μετὰ τὴν ἐξέτασιν βασικῶν τινῶν ἐννοιῶν καὶ ὑποθέσεων ἰσχυουσῶν τόσον ἀπὸ μακροοικονομικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ μικροοικονομικῆς ἀπόψεως, ἡ ἀνάλυσις προσανατολίζεται βαθμιαίως εἰς τὴν διερεύνησιν προβλημάτων μακροοικονομικοῦ προγραμματισμοῦ, εἰδικώτερον δὲ προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

3. Ἡ κατάστρωσις προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως, ἀνταποκρινομένου ἐπιτυχῶς πρὸς τοὺς σκοποὺς καὶ τὰς συνθήκας τῆς προγραμματιζούσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ πλείστους παράγοντας.

Μεταξὺ τῶν παραγόντων αὐτῶν ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τοῦ προγράμματος ἐπέχει ἰδιαιτέραν σημασίαν (1).

Βασικῆς σημασίας διὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς καταλλήλου μεθόδου προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἐξακρίβωσις τῆς *μορφῆς τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως* ἡ ὁποία διέπει τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν σύστημα.

Ὡς γνωστὸν ἡ οἰκονομικὴ ἀλληλεξάρτησις ἀποτελεῖ θεμελιῶδες χαρακτηριστικὸν τῶν οἰκονομικῶν συστημάτων. Αὕτη δύναται νὰ νοηθῇ ὑπὸ τρεῖς κυρίως μορφάς: Ὡς *ἀνταγωνιστικὴ* ἀλληλεξάρτησις, ὡς *συνεργατικὴ* ἀλληλεξάρτησις καὶ ὡς *μικτὴ* ἀλληλεξάρτησις.

4. *Ἡ συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις* εἶναι ἡ κλασσικὴ μορφὴ οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, τύπου Walras - Cassel, ἡ χαρακτηρίζουσα κυρίως τὰ μακροοικονομικὰ συστήματα, δηλαδὴ τὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς μορφῆς ταύτης ἀλληλεξαρτήσεως θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι δοθεῖσα οἰκονομία ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἐπὶ μέρους κλάδους παραγωγῆς, τοὺς Α, Β καὶ Γ, ἕκαστος τῶν ὁποίων παράγει ἓν ὁμοιογενὲς προϊόν. Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα δεικνύονται αἱ ὑποθετικαὶ σχέσεις τῶν κλάδων αὐτῶν.

Πίναξ κατανομῆς προϊόντος

	Α	Β	Γ	Συνολικὸν Ποσὸν
Α		30	20	50
Β	40		20	60
Γ	30	10		40

Ὁ πίναξ οὗτος δύναται νὰ ἐξετασθῇ κατὰ σειρὰς ἢ κατὰ στήλας. Ἡ *κατὰ σειρὰς* ἐξέτασις δεικνύει *τί δίδει* ἕκαστος κλάδος εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους, δηλαδὴ τὸν τρόπον κατανομῆς τοῦ συνολικῶς παραχθέντος ἐντὸς τῆς περιόδου προϊόντος ἑκάστου κλάδου μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλά-

1) Ἡ πληρότης καὶ ἀκρίβεια τῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἐπίσης σημαντικοὶ παράγοντες διὰ τὴν κατάστρωσιν ἐπιτυχοῦς προγράμματος. Οἱ παράγοντες αὐτοὶ — ἐν πολλοῖς στατιστικῆς ἢ λογιστικῆς φύσεως — δὲν ἐξετάζονται ἐνταῦθα.

δων. Οὕτω, ἡ πρώτη σειρὰ δεικνύει ὅτι ὁ Α κλάδος δίδει προϊὸν 30 μονάδων [1] εἰς τὸν Β καὶ 20 μονάδων εἰς τὸν Γ. Αἱ δύο ἑπόμεναι σειραὶ δεικνύουν τὸν τρόπον κατανομῆς τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Ἡ ἐξέτασις τοῦ πίνακος *κατὰ στήλας* δεικνύει τί *λαμβάνει* ἕκαστος κλάδος ἀπὸ τοὺς ἄλλους κλάδους κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον, πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του. Οὕτω π.χ. ὁ κλάδος Α λαμβάνει (ὡς πρώτας ὕλας κλπ.) 40 μονάδας ἐκ τοῦ Β καὶ 30 μονάδας ἐκ τοῦ Γ. Αἱ δύο ἑπόμεναι στῆλαι δεικνύουν ἀντιστοίχως τὰς ποσότητας προϊόντος τὰς ὁποίας λαμβάνουν οἱ κλάδοι Β καὶ Γ. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ πίναξ δεικνύει τὰς *διακλαδικὰς* συναλλαγὰς τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας.

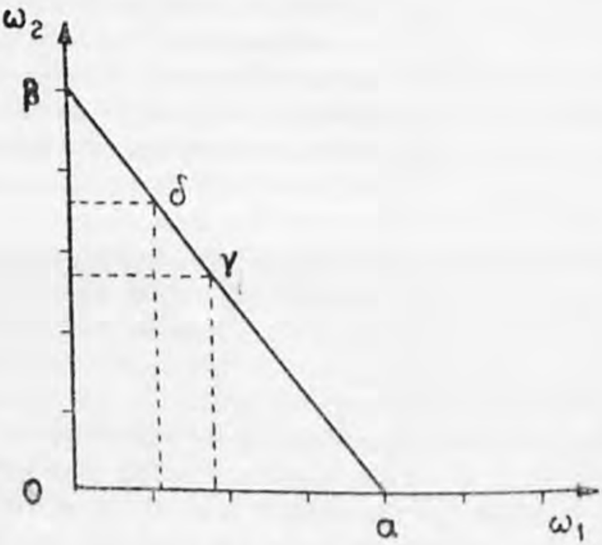
Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὴν ἑπομένην παραγωγικὴν περίοδον ὁ κλάδος Β πρέπει (ἔστω διὰ τεχνικοὺς λόγους) νὰ λάβῃ περισσοτέραν ποσότητα προϊόντος ἐκ τοῦ κλάδου Α. Προφανῶς τοῦτο θὰ ἀπαιτήσῃ αὔξησιν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου Α. Πρὸς ὑποστήριξιν ὅμως τῆς μεγαλυτέρας παραγωγῆς τοῦ κλάδου Α θὰ ἀπαιτηθῇ ἀντιστοίχως αὔξησις τῶν ὑπὸ τοῦ κλάδου τούτου λαμβανομένων προϊόντων τῶν ἄλλων κλάδων. Ἀλλ' ἐκ τοῦ λόγου τούτου θὰ προκληθῇ αὔξησις τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν κλάδων Β καὶ Γ καὶ συνεπῶς αὔξησις τῶν ὑπὸ τῶν κλάδων αὐτῶν λαμβανομένων προϊόντων ἐκ τῶν ἄλλων κλάδων. Κατὰ συνέπειαν μεταβολὴ ἑνὸς ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος ὁδηγεῖ εἰς μεταβολὴν πάντων τῶν λοιπῶν στοιχείων του. Αἱ μεταβολαὶ αὗται ἀποσκοποῦν εἰς τὴν ὑποστήριξιν τῶν μεταβληθέντων ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν οἰκονομικῶν κλάδων. Διὰ τοῦτο ἀκριβῶς λέγομεν ὅτι ὑφίσταται σχέσις συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν ὡς ἄνω ἐπιπέδων παραγωγῆς.

Τὰ προβλήματα προγραμματισμοῦ τὰ ἀφορῶντα εἰς οἰκονομικὰ συστήματα συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως ἐξετάζονται διὰ τῆς μεθόδου τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν - Ἐκροῶν (Input - Output Analysis), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ σημαντικὸν τομέα τῆς συγχρόνου οἰκονομικῆς ἐπιστήμης.

5. *Ἡ ἀνταγωνιστικὴ ἀλληλεξάρτησις* ἀπαντᾶται τόσον εἰς τὰ μακροοικονομικὰ ὅσον καὶ εἰς τὰ μικροοικονομικὰ συστήματα (π.χ. τὰς ἐπιχειρήσεις). Πρὸς κατανόησιν τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῆς μορφῆς ταύτης λαμβάνομεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα: ἔστω ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ ω_1 ἀπαιτοῦνται 2,5 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α διὰ δὲ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ ω_2 ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ αὐτοῦ συντελεστοῦ. Ἡ διαθέσιμος ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α εἶναι 10 μονάδες. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ποσότητος ταύτης εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθοῦν κατ' ἀνώτατον ὅριον 4 μονάδες ἐκ τοῦ ω_1 ἢ 5 μονάδες ἐκ τοῦ ω_2 ἢ διά-

1) Τὰ προϊόντα μετροῦνται εἰς φυσικὰς μονάδας.

φοροι συνδυασμοὶ ποσοτήτων τῶν ω_1 καὶ ω_2, οἱ ὁποῖοι καταναλίσκουν συνολικῶς 10 μονάδας τοῦ συντελεστοῦ Α. Τὰς δυνατότητας αὐτὰς δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς ὡς κάτωθι [1]:



Σχῆμα 1

Τὸ τμῆμα εὐθείας αβ παριστᾶ ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν ω_1 καὶ ω_2, οἱ ὁποῖοι εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθοῦν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως ὁλοκλήρου τῆς διαθεσίμου ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Α. Ἐκ τῆς συγκρίσεως δύο οἱωνδήποτε συνδυασμῶν ἐπὶ τῆς αβ δεικνύεται ὅτι ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ καθίσταται δυνατὴ *μόνον* διὰ τῆς μειώσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἄλλου ἀγαθοῦ. Οὕτω, ἡ μετάβασις ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ γ πρὸς τὸν συνδυασμὸν δ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει μεγαλυτέραν (ἢ ὁ συνδυασμὸς γ) ποσότητα ἐκ τοῦ ω_2, καθιστᾶ ἀναγκαίαν τὴν μείωσιν τῆς ποσότητος τοῦ ω_1. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς ἑκάστου ἀγαθοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου ἀγαθοῦ. Ἡ ἀλληλεξάρτησις αὕτη εἶναι ἀνταγωνιστικῆς μορφῆς, καθ' ὅσον αὔξησις τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου. Ταυτόχρονος αὔξησις τῆς ποσότητος ἀμφοτέρων τῶν ἀγαθῶν θὰ ἦτο δυνατὴ μόνον εἰς περίπτωσιν αὐξήσεως καὶ τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Α.

Τὰ προβλήματα τοῦ προγραμματισμοῦ τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς οἰκονομικὰ συστήματα ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως ἐξετάζονται ὑπὸ

1) Ὑποτίθεται πρὸς ἁπλούστευσιν ὅτι ὁ ὁριακὸς λόγος μετασχηματισμοῦ μεταξὺ τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2 εἶναι σταθερός.

διαφόρων μεθόδων κυρίως δὲ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (Linear Programming), ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ εἰδικὴν μαθηματικοοικονομικὴν τεχνικὴν ἀναπτυχθεῖσαν κατὰ τὴν τελευταίαν κυρίως δεκαετίαν.

6. *Ἡ μικτὴ ἀλληλεξάρτησις* εἶναι μῖγμα ἀμφοτέρων τῶν προηγουμένως ἐξετασθεισῶν μορφῶν ἀλληλεξαρτήσεως καὶ ἀπαντᾶται συνήθως εἰς τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ ἀναδιάρθρωσις μιᾶς ὑπαναπτύκτου οἰκονομίας καὶ ἡ ἐπιδίωξις τεθέντων προγραμματικῶν σκοπῶν, ὡς εἶναι π. χ. ἡ καθ' ὡρισμένον ποσοστὸν αὔξησις τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος ἐντὸς δοθείσης περιόδου, προϋποθέτει σκόπιμον κατανομὴν τῶν πρὸς ἐπένδυσιν κεφαλαίων μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν κλάδων, πρὸς ἐπαύξησιν τῆς παραγωγικῆς αὐτῶν δυναμικότητος. Δοθέντος ὅμως ὅτι τὰ πρὸς ἐπένδυσιν κεφάλαια εὑρίσκονται ἐν ἀνεπαρκείᾳ, ἡ διενέργεια ἐπενδύσεων εἰς ἕνα κλάδον σημαίνει κατ' ἀνάγκην μείωσιν τῶν δυνατοτήτων ἐπενδύσεως εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους. Ὑφίσταται συνεπῶς σχέσις ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κεφαλαιακῶν πόρων τῆς οἰκονομίας πρὸς ἐπαύξησιν τῆς παραγωγικῆς των δυναμικότητος. Ἐξ ἄλλου μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομίας ὑφίσταται ἐπίσης συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις κατὰ τὴν ἔννοιαν Walras, καθ' ὅσον ἡ παραγωγικὴ λειτουργία τῶν κλάδων αὐτῶν προϋποθέτει χρησιμοποίησιν τῶν προϊόντων ἀλλήλων. Οὕτω τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως χαρακτηρίζεται ταυτοχρόνως ἀπὸ ἀμφοτέρας τὰς μορφὰς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἡ ἀνταγωνιστικὴ ἀλληλεξάρτησις συνδέεται μὲ τὴν διενέργειαν ἐπενδύσεων καὶ τὴν ἀναδιάρθρωσιν τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος, αὕτη δύναται νὰ ὀνομασθῇ καὶ *διαρθρωτικὴ* ἀλληλεξάρτησις. Ἡ συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις, ἐξ ἄλλου, θὰ ἠδύνατο νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς *λειτουργικὴ* ἀλληλεξάρτησις, καθ' ὅσον ἐκδηλοῦται κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος.

Τὰ προβλήματα τῆς μικτῆς ἀλληλεξαρτήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξετασθοῦν διὰ συνδυασμοῦ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν — Ἐκροῶν.

Πρὶν προβῶμεν εἰς τὴν συστηματικὴν παρουσίασιν τῶν μεθόδων τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν θεωρητικῶν συνεπειῶν τῶν μεθόδων αὐτῶν ὅσον ἀφορᾷ τὸν προσανατολισμὸν τῆς συγχρόνου οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, διευκρινίζομεν κατωτέρω βασικάς τινας οἰκονομικὰς καὶ μαθηματικὰς ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν.

1

Βασικαὶ οἰκονομικαὶ ἔννοιες καὶ ὑποθέσεις

1. 1. Παραγωγικὴ δραστηριότης καὶ τεχνολογία

Ἡ θεμελιώδης ἔννοια τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἔννοια τῆς *παραγωγικῆς δραστηριότητος*. «Παραγωγικὴ δραστηριότης» εἶναι ἡ συγκεκριμένη μέθοδος ἐκτελέσεως τῆς μονάδος ἑνὸς οἰκονομικοῦ ἔργου. Οὕτω, π.χ., ὁ συνδυασμός: 7 κιλὰ τομάτας, 1/3 ὧραι ἐργασίας, 1/2 κιλὸν καυσίμου ὕλης (μαζοὺτ) καὶ 1 κυτίον, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς κιλοῦ τοματοπολτοῦ, ἀποτελεῖ μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Γενικῶς, ἂν διατίθενται ποσότητες α, β, γ, ... , ν ἐκ τῶν συντελεστῶν [1] Α, Β, Γ, ... , Ν πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω, ὁ ποσοτικὸς συνδυασμὸς (α, β, γ, ... , ν) συνιστᾷ μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον—ἐὰν βεβαίως ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν. Τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος μετρεῖται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων [2] τοῦ παραγομένου οἰκονομικοῦ ἔργου.

Τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τὰς ὁποίας ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της μία οἰκονομικὴ μονὰς εἰς δοθεῖσαν περίοδον ἀποτελεῖ τὰς *τεχνολογικὰς δυνατότητας* ἢ τὴν *τεχνολογίαν* τῆς ἐν λόγῳ μονάδος, κατὰ τὴν περίοδον ταύτην. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ τεχνολογία προσδιορίζει τὸ εἶδος τῶν δυναμένων νὰ παραχθοῦν ἀγαθῶν ὑπὸ δοθείσης παραγωγικῆς μονάδος, ὡς καὶ τὴν μέθοδον παραγωγῆς αὐτῶν.

1) Προφανῶς ὁ ὅρος «συντελεστὴς παραγωγῆς» δὲν χρησιμοποιεῖται ἐνταῦθα ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας, ἀλλ' ὑποδηλοῖ πᾶν συγκεκριμένον (ὑλικὸν ἢ ἄϋλον) ἀγαθὸν τὸ ὁποῖον λαμβάνει μέρος εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἑτέρου ἀγαθοῦ. Διακριτικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ «συντελεστοῦ» ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην εἶναι ἡ *ὁμοιογένεια* τοῦ εἰς τὴν παραγωγὴν χρησιμοποιουμένου ἀγαθοῦ. Οὕτω, ὁμιλοῦμεν περὶ τῶν συντελεστῶν: «μηχάνημα α' τύπου», «μηχάνημα β' τύπου» ἢ «ἐργασία ἀνδρῶν», «ἐργασία γυναικῶν» κλπ., ἀντὶ νὰ χρησιμοποιῶμεν ἀορίστως τοὺς ὅρους «Κεφάλαιον» καὶ «Ἐργασία».

2) Ὁ καθορισμὸς τῆς μονάδος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

1.2. Ὑποθέσεις

1.2.1. Σταθεραὶ ἀναλογίαι. Αἱ ὑφ' ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος χρησιμοποιούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν παραγομένην ποσότητα τῶν ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Οὕτω ἡ παραγωγὴ 3, 4, 6, . . . , ν μονάδων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἀπαιτεῖ 3, 4, 6, . . . , ν φορὰς τὰς ἀρχικὰς ποσότητας 3, 4, 5, τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, Α, Β καὶ Γ, οὕτως ὥστε :

$$\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{6}{18}=\ldots=\frac{\nu}{3\nu}=\frac{1}{3}=\frac{\text{ποσότης ω}}{\text{ποσότης Α}}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{6}{30}=\ldots=\frac{\nu}{5\nu}=\frac{1}{5}=\frac{\text{ποσότης ω}}{\text{ποσότης Β}}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{6}{24}=\ldots=\frac{\nu}{4\nu}=\frac{1}{4}=\frac{\text{ποσότης ω}}{\text{ποσότης Γ}}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

1.2.2. Πεπερασμένος ἀριθμὸς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν δὲν ἀποκλείει τὴν ὑποκατάστασιν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ὡς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ νομισθῇ ἐκ πρώτης ὄψεως. Ἁπλῶς ἀποκλείει τοιαύτην ὑποκατάστασιν ἐντὸς τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος, ἅπαξ καθορισθείσης. Πᾶσα ὑποκατάστασις μεταξὺ συντελεστῶν παραγωγῆς δέον συνεπῶς νὰ θεωρῆται ἢ ὡς καθορίζουσα νέαν παραγωγικὴν δραστηριότητα ἢ ὡς ὑποδηλοῦσα συνδυασμὸν διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Εἰς τὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμὸν ὑποτίθεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δυναμένων ἑκάστοτε νὰ χρησιμοποιηθοῦν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ ἢ διαφόρων ἀγαθῶν ἐντὸς μιᾶς οἰκονομικῆς μονάδος, εἶναι περιωρισμένος.

1.2.3. Προσθετικότης. Δύο ἢ καὶ περισσότεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταυτοχρόνως εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον (προϋποτιθεμένου ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες συντελεστῶν τὸ ἐπιτρέπουν)· τότε ἡ συνολικῶς προστιθεμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν αἱ ὁποῖαι θὰ ἐχρησιμοποιοῦντο ἂν ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν. Ἔστω, π.χ., ὅτι δύο παραγωγικαὶ δραστηριότητες Π_1 καὶ Π_2 χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα 3 καὶ 2 ἀντιστοίχως. Ἂν ἡ $Π_1$ ἀπαιτεῖ 2, 1/2, 1 μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως, διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ $ω_1$, ἡ δὲ $Π_2$ ἀπαιτεῖ 3, 1, 1 μονάδας ἐκ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ $ω_2$, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ σημειούμενα ἐπίπεδα δράσεως :

Ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς :

$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ μονάδες ἐκ τοῦ συντ. Α

$1/2 \times 3 + 1 \times 2 = 3\ 1/2$ » » » » Β

$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ » » » » Γ

καὶ σύνολον παραγομένων ἀγαθῶν : 3 μονάδες $ω_1$ καὶ 2 μονάδες $ω_2$.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως τῆς προσθετικότητος εἶναι ὅτι, ἡ ταυτόχρονος διεξαγωγὴ διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δὲν ἐπηρεάζει εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὸ συνολικὸν κόστος.

1.2.4. Διαιρετότης. Ὑποτίθεται ὅτι ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε (1) κλασματικὸν ἐπίπεδον, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης $Π_1$ (τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος) ὑποτίθεται ὅτι δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς ἐπίπεδα 1/10, 1/500 κλπ. μὲ ἀποτέλεσμα τὴν δαπάνην 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῶν ποσοτήτων 2, 1/2, 1 τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ καὶ παραγωγὴν 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος $ω_1$.

1.2.5. Κύριον πλεονέκτημα τῆς ἐννοίας τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος, ὡς αὕτη γίνεται δεκτὴ εἰς τὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμόν, εἶναι ὅτι συμφωνεῖ πρὸς τὴν οἰκονομικὴν καὶ λογιστικὴν πρᾶξιν. Ἡ γενικὴ συνάρτησις παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως, ἡ ὁποία βασίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἀπεριορίστου δυνατότητος ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν, μολονότι χρήσιμος διὰ λόγους θεωρητικῆς γενικεύσεως, εἶναι ἀνεφάρμοστος πρακτικῶς. Ὁ ἐπιχειρηματίας ἀντιλαμβάνεται συνήθως τὴν ἐπιχείρησίν του ὡς ἓν σύνολον παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἑκάστη τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖ ὡρισμένας ποσότητας συντελεστῶν

1) Θετικόν.

παραγωγῆς καὶ παράγει ὡρισμένον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα. Ὑποκατάστασις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς θεωρεῖται ἐπίσης δυνατὴ ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων, ἀλλ' ὡς καθορίζουσα νέας παραγωγικὰς δραστηριότητας ἢ συνδυασμοὺς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Αἱ τεχνικαὶ συνθῆκαι τῶν περισσοτέρων ἐπιχειρήσεων δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ὑποκατάστασιν συντελεστῶν παραγωγῆς ἐντὸς τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, μολονότι ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται ὡς περιοριστική, εἶναι βάσιμος θεωρητικῶς. Ἐὰν αἱ ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα μεταβάλλωνται ἀναλόγως, οὐδεὶς λόγος ὑπάρχει ὅπως μὴ διατηρῆται σταθερὰ ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων παραγωγῆς καὶ παραγομένης ποσότητος ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Αἱ εἰς τὴν πρᾶξιν παρατηρούμεναι περιπτώσεις μὴ ἀναλογικῆς ἀποδόσεως ὀφείλονται εἰς τὴν διατήρησιν σταθερᾶς τῆς ποσότητος ἑνὸς τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν καθ' ὃν χρόνον αἱ ποσότητες τῶν ἄλλων μεταβάλλονται ἢ εἰς τὴν ἐμφάνισιν ἐσωτερικῶν οἰκονομιῶν κατὰ τὴν λειτουργίαν τῶν παραγωγικῶν μονάδων καὶ τὴν χρησιμοποίησιν νέων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐμφάνισις θετικοῦ ὁριακοῦ προϊόντος ἑνὸς συντελεστοῦ δυνατὸν νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν μὴ πλήρη χρησιμοποίησιν τῶν ἄλλων συντελεστῶν παραγωγῆς εἰς προγενεστέραν παραγωγικὴν περίοδον. Οὕτω, π.χ., ἐὰν διὰ τὴν πλήρη παραγωγικὴν ἀξιοποίησιν μιᾶς μηχανῆς ἀπαιτοῦνται 5 μονάδες ἐργασίας καὶ εἰς δεδομένην περίπτωσιν χρησιμοποιοῦνται μόνον 4 μονάδες ἐργασίας, εἶναι δυνατὴ ἡ αὔξησις τοῦ παραγομένου προϊόντος διὰ τῆς προσθήκης μιᾶς ἀκόμη μονάδος ἐργασίας καὶ ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς τῆς ποσότητος τῶν ἄλλων συντελεστῶν παραγωγῆς. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀναφέρεται μᾶλλον εἰς τὴν διατήρησιν μιᾶς τεχνικῶς optimum σχέσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν εἰς ὅλα τὰ στάδια παραγωγῆς, δηλαδὴ μιᾶς σχέσεως ἡ ὁποία ἀποκλείει τὴν ἀτελῆ χρησιμοποίησιν τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Ἐξ ἄλλου εἰς περιπτώσεις ἐσωτερικῶν οἰκονομιῶν λόγῳ αὐξήσεως τῆς κλίμακος παραγωγῆς (οἰκονομίαι πληθοπαραγωγῆς) πρόκειται συνήθως περὶ ἀλλαγῆς μεθόδου παραγωγῆς, ἤτοι περὶ χρησιμοποιήσεως νέων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Διὰ τὰς νέας ταύτας δραστηριότητας ἰσχύει, ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων, ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἐφ' ὅσον χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ optimum, δηλαδὴ ἄνευ ὑποαπασχολήσεως ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συντελεστῶν ([1]).

---

1) Αἱ ὑποθέσεις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχο-

Ἡ ὑπόθεσις τοῦ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μᾶλλον σύμφωνος πρὸς τὴν πραγματικότητα. Μὲ ἐξαίρεσιν ἴσως τὴν γεωργίαν καί τινας χημικὰς βιομηχανίας, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑφ' ἑκάστης οἰκονομικῆς μονάδος διαθεσίμων δραστηριοτήτων, ἤτοι παραγωγικῶν μεθόδων χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι περιωρισμένος. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀναφερθεισῶν ἐξαιρέσεων δυνατὸν αἱ ἑκάστοτε τεχνολογικαὶ καὶ οἰκονομικαὶ συνθῆκαι νὰ περιορίζουν σημαντικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν οἰκονομικῶς βασίμων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

Ἡ ὑπόθεσις τῆς προσθετικότητος φαίνεται, ἐκ πρώτης ὄψεως, ὡς μὴ γενικῶς ἰσχύουσα. Οὕτω π.χ., εἰς βιομηχανικάς τινας ἐκμεταλλεύσεις ἡ παραγομένη θερμότης ἐκ καταναλώσεως ποσότητος ἄνθρακος δυνατὸν νὰ χρησιμοποιῆται ταυτοχρόνως ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἂν αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἐλάμβανον χώραν εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους θὰ ἦτο προφανῶς ἀναγκαία ἡ κατανάλωσις περισσοτέρου ἄνθρακος. Παρόμοιαι περιπτώσεις παρατηροῦνται εἰς διαφόρους κλάδους τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς. Εἰς τὰς περιπτώσεις ὅμως αὐτὰς δυνάμεθα — ἄνευ ἀλλοιώσεως τῆς οὐσίας — νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἐν ἀλληλοεπιδράσει παραγωγικὰς δραστηριότητας ὡς συνιστώσας μίαν *νέαν* παραγωγικὴν δραστηριότητα. Συνεπῶς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ ὑπόθεσις περὶ προσθετικότητος δὲν παραβιάζεται.

Ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ εἴς τινας περιπτώσεις, κατὰ κανόνα ὅμως εἶναι ἀντιπραγματική. Π.χ. εἰς τὴν παραγωγὴν διαρκῶν ἀγαθῶν (πλοίων, αὐτοκινήτων, ραδιοφώνων κλπ.) τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι νοητὰ μόνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος εἶναι ἐν τούτοις χρήσιμος ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως. Εἰς περιπτώσεις συγκεκριμένων ἐφαρμογῶν τῆς τεχνικῆς, πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ φύσις τῶν παραγομένων ἀγαθῶν καὶ νὰ γίνωνται αἱ ἀναγκαῖαι προσαρμογαὶ εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως.

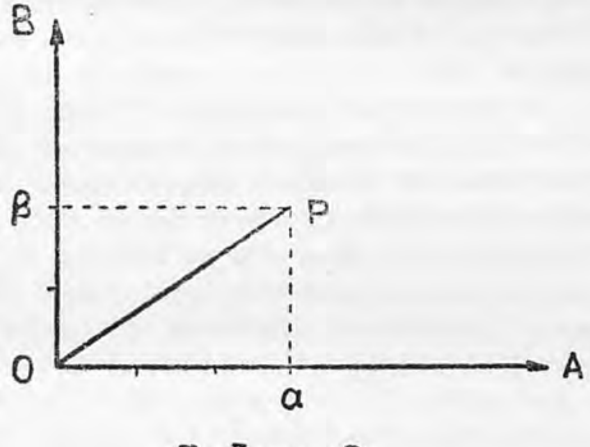
λήσεως εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Εἰς τὰς χώρας αὐτὰς παρατηρεῖται συνήθως σοβαρὰ ἀνεργία μὴ δυναμένη νὰ θεραπευθῇ οὔτε δι' αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως, κατὰ τὰ κεϋνσιανὰ διδάγματα (αὔξησις ἐνεργοῦ ζητήσεως δημιουργεῖ συνήθως πληθωρισμόν), οὔτε δι' ἀντικαταστάσεως — μέσῳ τοῦ μηχανισμοῦ τῆς ἀγορᾶς — τοῦ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ (π.χ. τοῦ κεφαλαίου) ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία», συμφώνως πρὸς τὴν νεοκλασσικὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς ἀποδοτικότητος. Ἡ ἐπίμονος ἀνεργία, ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν περιωρισμένην δυνατότητα ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ὡς ἀκριβῶς ὑποτίθεται εἰς τὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμόν. Ἀντιμετώπισις τῆς ἀνεργίας εἰς τὰς χώρας αὐτὰς εἶναι δυνατὴ μόνον δι' ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν.

2

Μαθηματικὸς συμβολισμὸς τῶν οἰκονομικῶν ἐννοιῶν

2. 1. Παραγωγικαὶ δραστηριότητες καὶ διανύσματα

2. 1. 1. Ὡς εἴδομεν, «παραγωγικὴ δραστηριότης» καλεῖται ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου. Ἔστω π.χ. ὁ συνδυασμὸς 3 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ 2 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ Β, πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω. Ὁ συνδυασμὸς οὗτος δύναται νὰ παρασταθῇ εἰς τὸ καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων ὡς ἀκολούθως:



Σχῆμα 2

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ Β. Τὸ σημεῖον Ρ τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας (3,2) παριστᾶ τὴν ὡς ἄνω παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἡ αὐτὴ παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται ἐπίσης νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΡ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, πέρας τὸ σημεῖον Ρ καὶ διεύθυνσιν τὴν τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τῶν σημείων O καὶ P. Τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται γεωμετρικῶς ***διάνυσμα***.

2. 1. 2. Γενικῶς διάνυσμα καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον ὡρισμένην κατεύθυνσιν, ἤτοι ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν. Διὰ τὸν συμβολισμὸν ἑνὸς διανύσματος χρησιμοποιοῦνται τὰ γράμματα τῶν ἄκρων αὐτοῦ μὲ μίαν ἐπιγραμμήν, π.χ., διὰ τὸ διάνυσμα τοῦ διαγράμματος 1 γράφομεν: $\overline{OP}$.

Τὰ διανύσματα διακρίνονται γενικῶς εἰς ***ἐλεύθερα***, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ χώρου καὶ εἰς ***ἐντετοπισμένα***. Τὰ ἐντετοπισμένα διανύσματα διακρίνονται περαιτέρω εἰς ***ὀλισθαίνοντα***, δυνάμενα νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον μιᾶς εὐθείας, διεύθυνσιν δὲ τὴν τῆς εὐθείας καὶ εἰς ***ἐφαρμοστά***, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς (σταθερὰν ἀρχήν). Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ διανύσματα τῆς τελευταίας κατηγορίας, εἰδικώτερον δὲ μὲ διανύσματα ἔχοντα ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

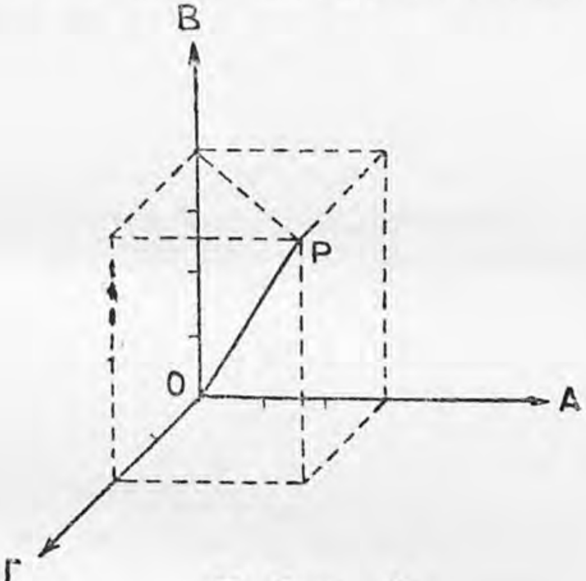
Ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας προκύπτει εὐκόλως ὅτι τὰ ὡς ἄνω διανύσματα ἔχουν ὡς συντεταγμένας τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατος αὐτῶν. Οὕτω π.χ. τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ (Σχῆμα 2) ἔχει συντεταγμένας Oα (= 3 μονάδες ἐκ τοῦ A) καὶ Oβ (= 2 μονάδες ἐκ τοῦ B), αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡς εἴδομεν καὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου P. Κατὰ συνέπειαν, ἀναλυτικῶς (ἀλγεβρικῶς), τὸ διάνυσμα δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς μία στήλη ἀριθμῶν διατεταγμένων καθ' ὡρισμένην τάξιν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὀνομάζονται ***στοιχεῖα*** τοῦ διανύσματος καὶ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς γεωμετρικὰς συντεταγμένας αὐτοῦ. Οὕτω π.χ. τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ ἀναλυτικῶς θὰ εἶναι:

$$\overline{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Διὰ τῆς ὡς ἄνω στήλης διατεταγμένων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν προφανῶς καὶ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ (ἢ εἰς τὸ σημεῖον P) τοῦ σχήματος 2.

2. 1. 3. Ἂν πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος ἑνὸς ἀγαθοῦ ἀπαιτοῦνται 3,6 καὶ 4 μονάδες ἐκ τῶν τριῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν A, B καὶ Γ ἀντιστοίχως, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἐν λόγῳ ἀγαθὸν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα $\overline{O'P'}$ ἐντὸς τοῦ τριδιαστάτου χώρου:

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κατηγμένων τοῦ κατωτέρω τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ Γ.



Σχῆμα 3

Ἀναλυτικῶς τὸ διάνυσμα $\overline{O'P'}$ θὰ εἶναι :

$$\overline{O'P'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 1. 4. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συντελεστῶν οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα καθορίζει προφανῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ συνεπῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ χώρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐν λόγῳ παραγωγικὴν δραστηριότητα διάνυσμα.

Ἂν εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα ὑπεισέρχωνται περισσότεροι τῶν τριῶν παραγωγικοὶ συντελεσταί [1], τὸ ἀντιστοιχοῦν διάνυσμα ἀνήκει εἰς τὸν καλούμενον *ὑπερχῶρον*, δηλ. εἰς τὸν νοητὸν χῶρον ὁ ὁποῖος ἔχει περισσοτέρας τῶν τριῶν διαστάσεις [2]. Γραφικὴ παράστασις τοιούτου διανύσματος δὲν εἶναι δυνατή, ἡ ἀναλυτικὴ ὅμως παράστασις αὐτοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἁπλῆ. Οὕτω, ἂν π.χ. εἰς μίαν

---

1) Βλ. ὑποσημ. 1 σελ. 7.

2) Οἱ ὑπερχῶροι λαμβάνονται ἐνταῦθα ὡς εὐκλείδειοι, δηλ. ὑποτίθεται ὅτι ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς χώρους αὐτοὺς αἱ ἀρχαὶ τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας.

παραγωγικὴν δραστηριότητα λαμβάνουν μέρος οἱ παραγωγικοὶ συντελεσταὶ Α, Β, Γ καὶ Δ εἰς ποσότητας 1, 2, 4 καὶ 3 μονάδας, ἀντιστοίχως, τὸ σχετικὸν διάνυσμα θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, ἡ δοθεῖσα παραγωγικὴ δραστηριότης ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τοὺς συντελεστὰς 1, 2, 3, ..., ν κατὰ ποσότητας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ μονάδας θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

2. 1. 5. Ὡς εἴδομεν (2. 1. 1.) ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος χρησιμοποιεῖ 3 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ 2 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β καὶ συνεπῶς αἱ σχέσεις τῆς ποσότητος τοῦ παραγομένου προϊόντος πρὸς τὰς χρησιμοποιουμένας ποσότητας συντελεστῶν Α καὶ Β εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἀντιστοίχως. Ἡ αὐτὴ παραγωγικὴ δραστηριότης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν 2 μονάδων θὰ ἀπαιτήσῃ, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, $(2 \times 3) = 6$ μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ $(2 \times 2) = 4$ μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β, οὕτως ὥστε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰς ἀρχικὰς σχέσεις ποσότητος παραγομένου προϊόντος καὶ ποσοτήτων χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν Α καὶ Β:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον 2 δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος διανύσματος $\overline{OP}$ (Σχῆμα 2) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

$$2 \times \overline{OP} = 2 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

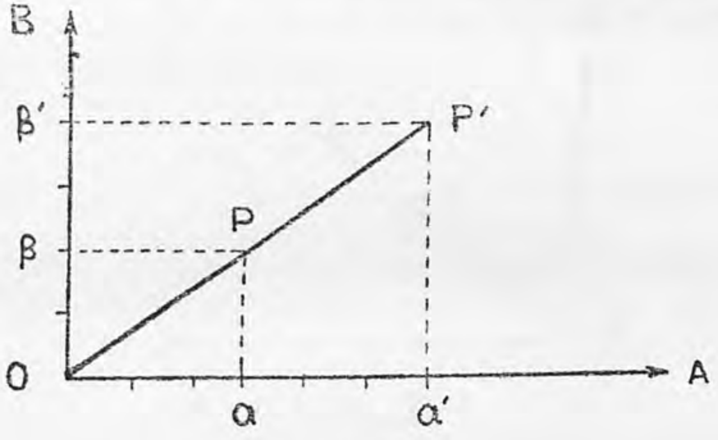
Πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ σχηματίζομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα 6 ($=2 \times 3$) καὶ 4 ($=2 \times 2$) κατὰ σειράν:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ ἀριθμὸν σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων τοῦ δοθέντος διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, π.χ.:

$$\kappa \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa\alpha_1 \\ \kappa\alpha_2 \\ \kappa\alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa\alpha_\nu \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικῶς τὸ γινόμενον δοθέντος διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν ρ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς νέου διανύσματος μὲ συντεταγμένας ρ φορὰς μεγαλυτέρας τῶν συντεταγμένων τοῦ δοθέντος διανύσματος.



Σχῆμα 4

Οὕτω, π.χ. τὸ γινόμενον $2 \times \overline{OP}$ (τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον 2) δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ διανύσματος $\overline{OP'}$ (σχῆμα 4), τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας Oα′ ($=2 \times$ Oα) καὶ Oβ′ ($=2 \times$ Oβ).

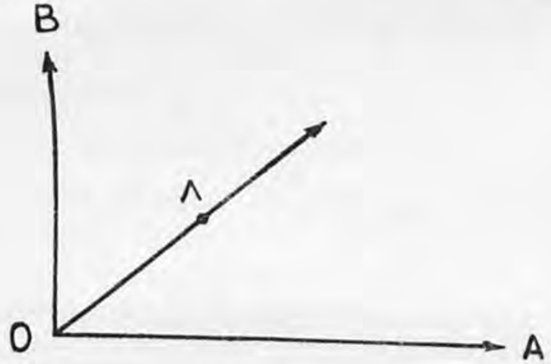
Ἂν πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ τὴν μονάδα λαμβάνομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα ἀνὰ ἓν ἴσα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ δοθέντος.

Τὰ δύο διανύσματα καλοῦμεν τότε *ἴσα*. Γενικῶς ἴσα εἶναι δύο ἢ περισσότερα διανύσματα ἂν ἔχουν τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα.

2. 1. 6. Καθ' ὑπόθεσιν, ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ διεξαχθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε [1] ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε κλασματικὸν ἐπίπεδον δράσεως, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν (***ὑπόθεσις διαιρετότητος***). Οὕτω, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον $\frac{1}{10}$ τῆς μονάδος θὰ ἀπαιτήσῃ $\frac{3}{10}$ μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ $\frac{2}{10}$ μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β. Διανυσματικῶς:

$$\frac{1}{10} \times \overline{OP} = \frac{1}{10} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος ὁδηγοῦν εἰς ***γραμμικὰς συνεχεῖς*** συναρτήσεις παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται γεωμετρικῶς ὡς εὐθεῖαι γραμμαὶ [2] ἐντὸς τοῦ θετικοῦ χώρου τοῦ συστήματος συντεταγμένων, μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τούτου:



Σχῆμα 5

Ἐκ τοῦ Σχήματος 5 καταφαίνεται ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις παραγωγῆς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς προκύπτουσα ἐκ δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος (ἤτοι ἐξ ἑνὸς διανύσματος [3]), ἂν τὰ ἐπίπεδα δράσεως αὐτῆς λαμβάνουν συνεχεῖς θετικὰς τιμάς.

1) Θετικόν.

2) Αἱ γραμμαὶ αὗται καλοῦνται ἀκριβέστερον *ἡμιευθεῖαι* ἢ *ἀκτῖνες* καθ' ὅσον δὲν ἐπεκτείνονται ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

3) Τοῦ διανύσματος $\overline{OΛ}$, ἐν προκειμένῳ.

2.1.7. Ἂν τὸ ἐπίπεδον δράσεως μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος, π.χ. τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (2.1.1.), εἶναι μηδέν, θὰ ἔχωμεν:

$$0\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τὸ διάνυσμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος καλεῖται ***μηδενικόν*** (1) καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου $\bar{0}$. Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον θὰ εἶναι:

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.8. Ἐφ' ὅσον αἱ ποσότητες ἑνὸς παραγωγικοῦ συντελεστοῦ μετροῦνται ἐπὶ ἑνὸς συγκεκριμένου ἄξονος τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα μὲ συντεταγμένην ἐπὶ τοῦ οἰκείου ἄξονος τὴν μονάδα καὶ τὰς λοιπὰς συντεταγμένας ἴσας πρὸς τὸ μηδέν. Οὕτω εἰς τὸ Σχῆμα 2 θὰ ἔχωμεν διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ἀντιπροσωπεύοντα τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν συντελεστῶν Α καὶ Β, ἀντιστοίχως. Ταῦτα καλοῦμεν ***μοναδιαῖα διανύσματα***.

Γενικῶς, εἰς ἕνα ν-διάστατον χῶρον θὰ ἔχωμεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0_1 \\ 1_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

1) Γεωμετρικῶς τὸ διάνυσμα του . πέρας τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων καὶ τυχοῦσαν ν.

τὰ ὁποῖα οἰκονομικῶς παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐπὶ τῶν ν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Πᾶσα συντεταγμένη διανύσματος δύναται τώρα νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἀντιστοίχου μοναδιαίου διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὴν συντεταγμένην. Π.χ. ἡ πρώτη συντεταγμένη τοῦ διανύσματος $\overline{OP}$ (Σχῆμα 2) θὰ εἶναι :

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.9. Μέχρι τοῦδε ἠσχολήθημεν μὲ μαθηματικὰς ἐννοίας καὶ παραστάσεις ἀναφερομένας εἰς μεμονωμένας παραγωγικὰς δραστηριότητας. Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ τὸν χειρισμὸν περισσοτέρων τῆς μιᾶς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

Εἰς τὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμὸν ὑποτίθεται, ὡς εἴδομεν, ὅτι δύο ἢ περισσότεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες χρησιμοποιούμεναι ταυτοχρόνως εἰς δεδομένα ἐπίπεδα, ἀπορροφοῦν ποσότητας συντελεστῶν ἴσας πρὸς τὰς ἀπορροφωμένας ποσότητας συντελεστῶν ἂν ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου· τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν *(ὑπόθεσις προσθετικότητος)*. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ταυτόχρονος διεξαγωγὴ διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων θεωρεῖται ὡς μὴ ἐπηρεάζουσα εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὴν συνολικὴν οἰκονομικὴν θυσίαν.

Μαθηματικῶς τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῆς *προσθέσεως διανυσμάτων*. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι τὰ διανύσματα :

$$\overline{OK} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \overline{O\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

παριστοῦν δύο παραγωγικὰς δραστηριότητας, ταυτοχρόνως χρησιμοποιουμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος. Αἱ ἀναλισκόμεναι ποσότητες τῶν συντελεστῶν, ἔστω Α καὶ Β, θὰ εἶναι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, 5 καὶ 7 μονάδες, ἀντιστοίχως. Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδεται καὶ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δύο διανυσμάτων :

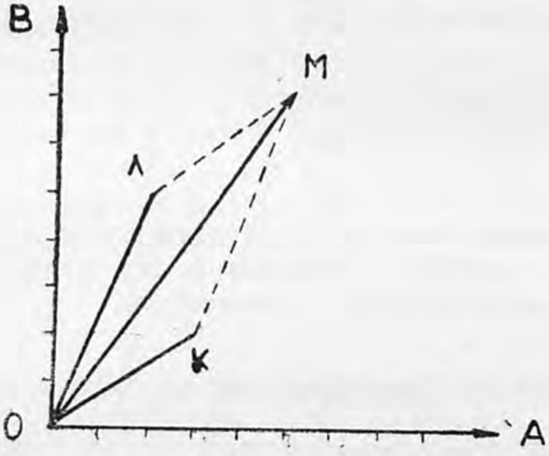
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ ὑπελογίσθησαν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προστιθεμένων διανυσμάτων.

Γενικῶς, διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα διανύσματα σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν *ἀντιστοίχων* (1) στοιχείων τῶν προσθετέων διανυσμάτων (2), π.χ. :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \rho_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \rho_2 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \alpha_\nu + \beta_\nu + \ldots + \rho_\nu \end{bmatrix}$$

Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων, π.χ. τῶν διανυσμάτων $\overline{\text{ΟΚ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΛ}}$ ἀνωτέρω, δεικνύεται εἰς τὸ κατωτέρω Σχῆμα :



Σχῆμα 6

Τὸ διάνυσμα $\overline{\text{ΟΜ}}$, μὲ συντεταγμένας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων τῶν διανυσμάτων $\overline{\text{ΟΚ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΛ}}$, ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων. Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ σπουδαστής, τὸ $\overline{\text{ΟΜ}}$ εἶναι τὸ *διαγώνιον διάνυσμα* τοῦ παραλληλογράμμου ΟΛΜΚ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζε-

1) Συνεπῶς πρόσθεσις διανυσμάτων μὴ ἐχόντων ἀντίστοιχα στοιχεῖα, δηλ. μὴ ἀνηκόντων εἰς τὸν ἴδιον γεωμετρικὸν χῶρον, ἀποκλείεται.

2) Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει (ὑπὸ ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν) καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν διανυσμάτων.

ται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μηκῶν [1] ΟΚ καὶ ΟΛ τῶν προστιθεμένων διανυσμάτων [2].

2. 1. 10. Ἂν αἱ ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $\overline{OK}$ καὶ $\overline{O\Lambda}$ παριστώμεναι παραγωγικαὶ δραστηριότητες χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα 3 καὶ 2 μονάδων, ἀντιστοίχως, πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν :

$$3 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων***. Γενικῶς "γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων" καλοῦμεν τὸ ἄθροισμα (ἢ τὴν διαφορὰν) διανυσμάτων ἑκάστου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν [3]. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς σχετικῆς παραστάσεως, ἐκτελοῦμεν τοὺς σημειουμένους πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα νέα διανύσματα. Οὕτω, διὰ τὴν ἀνωτέρω παράστασιν θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Τὸ τελευταῖον διάνυσμα τῆς ἰσότητος δεικνύει τὸ σύνολον τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν $\overline{OK}$ καὶ $\overline{O\Lambda}$ εἰς τὰ ἐπίπεδα 3 καὶ 2, ἀντιστοίχως.

2. 2 Παραγωγικαὶ δραστηριότητες καὶ μῆτραι

2. 2. 1. Αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες τὰς ὁποίας διαθέτει μία οἰκονομικὴ μονὰς πρὸς ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων οἰκονομικῶν ἔργων εἶναι συνήθως περιωρισμένου ἀριθμοῦ ***(ὑπόθεσις πεπερασμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων)***. Τὸ σύνολον τῶν ἐν λόγῳ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καθορίζει, ὡς εἴπομεν, τὴν παραγωγικὴν διάρ-

---

1) Τὸ μῆκος διανύσματος μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots}$, ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ἀποτελοῦν τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος.

2) Ἂν τὰ προστιθέμενα διανύσματα παριστάνουν δυνάμεις, ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τὴν Μηχανικήν, τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται «παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων».

3) Ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

θρωσιν καὶ τὰς τεχνολογικὰς δυνατότητας (1) ἢ ἁπλῶς τὴν *τεχνολογίαν* τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Τὰ κατωτέρω συμπαρατιθέμενα διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας δοθείσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἀποτελοῦν παράδειγμα τοιαύτης τεχνολογίας:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ἀπαλείφοντες τὰς ἐσωτερικὰς ἀγκύλας τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως λαμβάνομεν τὴν ἁπλουστέραν τοιαύτην:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ παράστασις αὕτη καλεῖται μαθηματικῶς "μήτρα".

Γενικῶς, ἡ μήτρα εἶναι σύστημα διανυσμάτων εὑρισκομένων ἐν τῷ αὐτῷ χώρῳ ἢ ἁπλῶς πίναξ διατεταγμένων ἀριθμῶν. Ἡ διάταξις τῶν ἀριθμῶν (στοιχείων) ὁρίζεται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν εἰς τὰς *σειρὰς* καὶ τὰς *στήλας* τῆς μήτρας. Ἂν $\iota\ (= 1, 2, \ldots, \mu)$ συμβολίζῃ τυχοῦσαν σειρὰν τῆς μήτρας καὶ $\kappa\ (= 1, 2, \ldots, \nu)$ τυχοῦσαν στήλην αὐτῆς, $\alpha_{\iota\kappa}$ εἶναι γενικῶς τὸ στοιχεῖον τῆς μήτρας τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς σειρᾶς ι καὶ τῆς στήλης κ.

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμόν, ἡ γενικὴ μορφὴ μήτρας μ σειρῶν καὶ ν στηλῶν — $\mu \times \nu$ *τάξεως* — δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς:

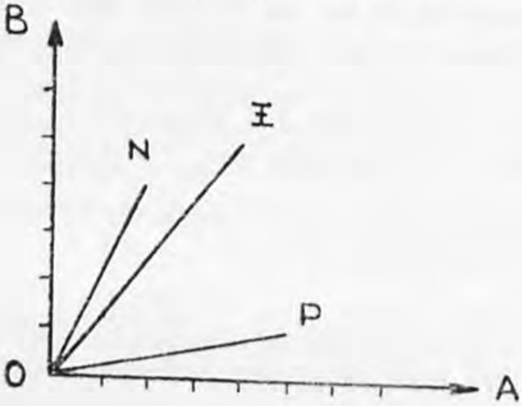
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

ἢ συντόμως: $$\begin{bmatrix} \alpha_{\iota\kappa} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \kappa = 1, 2, \ldots, \mu \end{matrix}$$

2. 2. 2. Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς μήτρας εἶναι ἀνάλογος

1) Αἱ τεχνολογικαὶ δυνατότητες ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς διαθεσίμους ποσότητας παραγωγικῶν συντελεστῶν καθορίζουν τὰς παραγωγικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομικῆς μονάδος.

πρὸς τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν διανυσμάτων. Οὕτω ἡ μήτρα τοῦ προηγουμένου ἀριθμητικοῦ παραδείγματος θὰ εἶναι:



Σχῆμα 7

Τὰ διανύσματα $\overline{ON}$, $\overline{O\Xi}$ καὶ $\overline{OP}$ ἔχουν συντεταγμένας (2, 4), (4, 5) καὶ (5, 1), ἀντιστοίχως.

Προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν διανυσμάτων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν τῆς μήτρας, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ διανύσματα εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς μήτρας. Ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς μήτρας δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν τὸν ἀριθμὸν τῶν συντελεστῶν οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγήν.

Ἂν αἱ εἰς τὰ διανύσματα ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι παραγωγικαὶ δραστηριότητες διέπωνται ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν (καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῆς διαιρετότητος), αἱ ἐκ τοῦ σημείου 0 ἐκκινοῦσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς κατευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\overline{ON}$, $\overline{O\Xi}$ καὶ $\overline{OP}$ προσδιορίζουν ἀντιστοίχους γραμμικὰς (καὶ συνεχεῖς) συναρτήσεις παραγωγῆς διὰ τὴν δοθεῖσαν οἰκονομικὴν μονάδα.

2.2.3. Ἂν μία μήτρα $\mu \times \nu$ (1) τάξεως ἔχῃ ἀριθμὸν σειρῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν ($\mu = \nu$) αὕτη καλεῖται "τετραγωνικὴ μήτρα" π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Τὰ μ καὶ ν θεωροῦνται βεβαίως ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἂν αἱ σειραὶ μήτρας εἶναι περισσότεραι τῶν στηλῶν αὐτῆς ἢ ἀντιθέτως ($\mu \neq \nu$) αὕτη καλεῖται "ὀρθογώνιος μήτρα". Ὀρθογώνιος εἶναι ἡ πρώτη μήτρα τῆς παραγρ. 2. 2. 1, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ κάτωθι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μήτρα ἔχουσα περισσοτέρας τῆς μιᾶς σειρὰς καὶ μίαν μόνον στήλην ($\mu = 1$ καὶ $\nu > \mu$) ἀποτελεῖ ἁπλοῦν διάνυσμα, π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Μήτρα ἔχουσα μίαν μόνον σειρὰν καὶ περισσοτέρας τῆς μιᾶς στήλας ($\mu > \nu$ καὶ $\nu = 1$) ἀποτελεῖ ἐπίσης διάνυσμα, π.χ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Τὰ διανύσματα τῆς μορφῆς ταύτης (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ σειραὶ μιᾶς μήτρας) καλοῦνται *σειραὶ - διανύσματα*. Πρὸς διάκρισιν, τὰ διανύσματα τῆς προηγουμένης μορφῆς (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ στῆλαι μιᾶς μήτρας) καλοῦνται *στῆλαι - διανύσματα*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ μητρῶν καὶ διανυσμάτων εἶναι διττή. Μία μήτρα σύγκειται ἐκ διανυσμάτων ἀλλὰ καὶ ἓν διάνυσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις μήτρας.

Ἂν $\mu = \nu = 1$ τότε ἔχομεν ἁπλῶς ἕνα ἀριθμόν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μήτρα 1×1 τάξεως.

Ἡ μήτρα ἡ ὁποία ἔχει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα καλεῖται "μηδενικὴ μήτρα", π.χ.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ μηδενικὴ μήτρα ἀποτελεῖ σύστημα μηδενικῶν διανυσμάτων. Ἡ τετραγωνική μήτρα ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὴν *κυρίαν διαγώνιον* (1) αὐτῆς μονάδας καὶ πάντα τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἴσα πρὸς τὸ μηδὲν καλεῖται "μοναδιαία μήτρα" καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου I, π.χ.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ μοναδιαία μήτρα ἀποτελεῖ σύνολον μοναδιαίων διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα, ὡς εἴπομεν, παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐντὸς τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων.

2. 3 Πράξεις ἐπὶ μητρῶν

Εἰς τὸ παρὸν τμῆμα δίδονται οἱ κυριώτεροι κανόνες χειρισμοῦ τῶν μητρῶν (2). Ἡ ἐκμάθησις τῶν κανόνων αὐτῶν εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν διατύπωσιν καὶ λύσιν βασικῶν προβλημάτων τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ.

2. 3. 1. Πρόσθεσις μητρῶν. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας μήτρας μ × ν τάξεως σχηματίζομεν νέαν μήτραν τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προστιθεμένων μητρῶν, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+3 \\ 3+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ὁμοίως:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Ἐφ' ὅσον ἡ ἀφαίρεσις ἐξομοιοῦται ἀλγεβρικῶς μὲ πρόσθεσιν, ἡ διαφορά:

---

1) Κυρία διαγώνιος τετραγωνικῆς μήτρας καλεῖται ἡ ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἄνω ἀρχομένη διαγώνιος.

2) Ἐθεωρήθη σκόπιμον ὅπως ἀποφευχθῇ ἡ ἀποδεικτικὴ ἐπεξεργασία τῶν διαφόρων πράξεων ἐπὶ τῶν μητρῶν, ἡ ὁποία θὰ ἐπεβάρυνεν ὑπερμέτρως τὸν σπουδαστήν. Ὁ ἐνδιαφερόμενος διὰ λεπτομερῆ ἀνάλυσιν πρέπει νὰ ἀνατρέξῃ εἰς εἰδικὸν μαθηματικὸν σύγγραμμα.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ διαφορὰ Α – Α, ὅπου Α ἔστω $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ μηδενικὴ μήτρα δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ διαφορὰ δύο ἴσων μητρῶν.

2. 3. 2. Πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ ἀριθμόν. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μήτραν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς μήτρας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰ οὕτω λαμβανόμενα γινόμενα θέτομεν, ἀντιστοίχως, ὡς στοιχεῖα μιᾶς νέας μήτρας. Οὕτω:

$$3 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2. 3. 3. Πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ μήτραν. Πρὸς ἐκμάθησιν τῆς πράξεως ταύτης ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα προσοχή. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μήτραν Α, τάξεως μΧν, ἐπὶ τὴν μήτραν Β, τάξεως πΧρ. Ἐν πρώτοις, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐκτέλεσις τοῦ ὡς ἄνω πολλαπλασιασμοῦ ἀπαιτεῖται ὅπως αἱ δύο μῆτραι εἶναι *συμβιβασταί*, δηλ. αἱ στῆλαι ν τῆς πρώτης μήτρας νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς σειρὰς π τῆς δευτέρας μήτρας. Ἂν πληροῦται ἡ προϋπόθεσις αὕτη, πρὸς καθορισμὸν τοῦ γινομένου τῶν δύο μητρῶν, σχηματίζομεν νέαν μήτραν Γ, ἔχουσαν σειρὰς ὅσας καὶ ἡ Α καὶ στήλας ὅσας καὶ ἡ Β, δηλ. μΧρ τάξεως καὶ μὲ στοιχεῖα προσδιοριζόμενα ὡς ἀκολούθως: Ἔστω γενικῶς ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ στοιχεῖον $γ_{ικ}$ τῆς Γ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ι σειρᾶς καὶ τῆς κ στήλης τῆς Γ. Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ι τῆς μήτρας Α ἐπὶ ἓν ἕκαστον τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς στήλης κ τῆς μήτρας Β καὶ προσθέτομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ οὕτω προκύπτοντα γινόμενα. Τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $γ_{ικ}$. Ἔστω π.χ. ὅτι:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Αἱ Α καὶ Β εἶναι συμβιβασταὶ μῆτραι, συνεπῶς τὸ γινόμενον ΑΒ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ. Ἡ νέα μήτρα Γ (=ΑΒ) θὰ ἔχῃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα 2 σειρὰς καὶ 3 στήλας. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ στοιχεῖον γ_{11} τῆς Γ, λαμβάνομεν τὴν σειρὰν 1 τῆς μήτρας Α καὶ τὴν στήλην 1 τῆς μήτρας Β, πολλαπλασιάζομεν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν (πρῶτον μὲ πρῶτον, δεύτερον μὲ δεύτερον κ.ο.κ.) καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα:

$$3 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 2 = 9$$

Τὸ ἄθροισμα 9 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ γ_{11}.
Ἀναλόγως τὸ στοιχεῖον γ_{12} θὰ εἶναι:

$$3 \times 4 + 2 \times 6 + 0 \times 2 = 24.$$

Τὸ στοιχεῖον γ_{23}:

$$1 \times 5 + 4 \times 3 + 3 \times 0 = 17$$

κ.ο.κ.

Συνεπῶς:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 21 \\ 19 & 34 & 17 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{παράδ. 1}$$

Ὁμοίως:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{παράδ. 2}$$

Ἂν ἔχωμεν δύο μήτρας, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι μοναδιαία, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἄλλην μήτραν, π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{παράδ. 3}$$

Γενικῶς ΑΙ = Α.

Ἐπειδή, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως, τὰ διανύσματα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις μητρῶν, ὁ πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ διάνυσμα καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ διάνυσμα ἀκολουθοῦν τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Οὕτω:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 22 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{ παράδ. } 4$$

Ὁμοίως:

$$[2\ 3\ 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = [20\quad 46] \quad \ldots \text{ παράδ. } 5$$

Ἐπίσης:

$$[1\ 4\ 5\ 6] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 + 8 + 15 + 30 = 54 \quad \text{παράδ. } 6$$

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [3\ 2\ 5\ 4] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{παράδ. } 7$$

Ὁ ἀναγνώστης δύναται εὐκόλως νὰ διαπιστώσῃ ὅτι πολλαπλασιασμὸς δύο σειρῶν—διανυσμάτων ἢ δύο στηλῶν—διανυσμάτων εἶναι ἀδύνατος, καθ' ὅσον δὲν πληροῦται εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἡ ἀρχικὴ προϋπόθεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περὶ συμβιβαστῶν μητρῶν.

Ἂν εἰς τὸ παράδ. 1 ἀνωτέρω ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν, λαμβάνομεν:

$$\begin{bmatrix} 1\,4\,5 \\ 3\,6\,9 \\ 2\,2\,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3\,2\,0 \\ \\ 1\,4\,3 \end{bmatrix}$$

Οὕτω διατασσόμεναι αἱ ὡς ἄνω μῆτραι δὲν εἶναι συμβιβασταὶ καὶ συνεπῶς ὁ σημειούμενος πολλαπλασιασμὸς δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ. Τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς παρατηροῦμεν ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν εἰς τὰ παραδ. 4, 5 καὶ 7. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ παράδ. 2 ἀλλαγὴ τῆς σειρᾶς τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν δίδει γινόμενον

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

δυνάμενον νὰ ὑπολογισθῇ, καθ' ὅσον αἱ μῆτραι ἐξακολουθοῦν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν σειρᾶς νὰ εἶναι συμβιβασταί. Ὁμοίως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀλλαγῆς σειρᾶς τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν εἰς τὸ παράδ. 6 ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} [1\ 4\ 5\ 6]$$

Ἂν ἐν τούτοις ἐκτελέσωμεν τοὺς ἀνωτέρω σημειουμένους πολλαπλασιασμοὺς θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \text{ διὰ τὸ πρῶτον γινόμενον}$$

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 12 & 15 & 18 \\ 5 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix} \text{ διὰ τὸ δεύυερον γινόμενον.}$$

Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα εἶναι, ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ σπουδαστής, *ἐντελῶς* διάφορα τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων τῶν παραδ. 2 καὶ 6.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ γνωστὸς ἀλγεβρικὸς νόμος περὶ ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον $\alpha\beta = \beta\alpha$, *δὲν ἰσχύει* προκειμένου περὶ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἔχομεν γενικῶς $AB \neq BA$. Καθίσταται συνεπῶς ἀναγκαῖον νὰ διακρίνωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν π.χ. τῆς μήτρας Β μὲ τὴν μήτραν Α εἰς *προπολλαπλασιασμὸν* τῆς Β μὲ τὴν Α, ὁπότε ἔχομεν τὸ γινόμενον ΑΒ, καὶ εἰς *μεταπολλαπλασιασμὸν* τῆς Β μὲ τὴν Α, ὁπότε ἔχομεν τὸ γινόμενον ΒΑ.

Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων ἰσχύει κατ' ἐξαίρεσιν εἰς δύο περιπτώσεις πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Ἡ πρώτη εἶναι ἡ περίπτωσις πολλαπλασιασμοῦ μήτρας μὲ ἄλλην μοναδιαίαν τοιαύτην: Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ παραδ. 3 δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι $AI = IA$. Ἡ δευτέρα περίπτωσις ἀναφέρεται εἰς 2.3.5 (Γ), κατωτέρω.

Ἐν συνόψει, διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ ἐνθυμῆται ὅτι: α) ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως καθίσταται δυνατὴ μόνον ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς πρώτης μήτρας ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς δευτέρας μήτρας, β) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως συσχετίζομεν –συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα κανόνα– σειρὰς τῆς πρώτης μήτρας μὲ στήλας τῆς δευτέρας μήτρας καὶ γ) γενικῶς $AB \neq BA$. (Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν περισσοτέρας τῶν δύο μητρῶν, τότε πολλαπλασιάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰς δύο πρώτας μήτρας, ἐν συνεχείᾳ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον μὲ τὴν τρίτην μήτραν, κ.ο.κ.).

2.3.4. Ἐναλλαγὴ μήτρας. Ἀπὸ μίαν μήτραν A δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μίαν νέαν μήτραν, τῆς ὁποίας αἱ σειραὶ εἶναι στῆλαι τῆς A καὶ (συνεπῶς) αἱ στῆλαι αὐτῆς σειραὶ τῆς A. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται «ἐναλλαγή», ἡ δὲ προκύπτουσα μήτρα «ἐνηλλαγμένη» τῆς A καὶ συμβολίζεται μὲ A΄. Οὕτω ἂν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Προφανῶς: $A'' = A$.

2.3.5. Ἀντιστροφὴ μήτρας.

A. Ἡ *ἔννοια τῆς ἀντιστρόφου μήτρας.* Εἰς τὴν στοιχειώδη ἄλγεβραν ἀριθμός τις καλεῖται *ἀντίστροφος* δοθέντος ἄλλου, ὅταν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα. Οὕτω π.χ. ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ β ἂν

$$\alpha\beta = 1$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἔχομεν $\alpha = \frac{1}{\beta}$, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀντίστροφος δοθέντος ἄλλου δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸν δοθέντα ἀριθμόν [1].

Ἐπειδὴ $\frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$, ἡ ἀρχικὴ σχέσις γίνεται:

$$\beta^{-1}\beta = 1$$

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἀριθμὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω π.χ. ἀντὶ $30:6$ ἢ $\frac{30}{6}$ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{6} \times 30$ ἢ $6^{-1} \times 30$.

Γενικῶς $\frac{\chi}{\psi} = \psi^{-1}\chi$.

---

1) Ὁ ἀριθμὸς β εἶναι ἐπίσης ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ α, δυνάμει τῆς σχέσεως $\alpha\beta = 1$, ἐξ ἧς $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω θὰ ὀνομάσωμεν μήτραν τινά, ἔστω Ε, *ἀντίστροφον* δοθείσης *τετραγωνικῆς* [1] μήτρας Α, ἂν τὸ γινόμενον ΕΑ ἰσοῦται πρὸς τὴν μοναδιαίαν μήτραν Ι [2]. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ γράψωμεν ἀναλόγως $E = A^{-1}$.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἀντιστρόφου μήτρας, ἡ πρᾶξις τῆς *διαιρέσεως* δύο μητρῶν, ἔστω Β : Α, μετατρέπεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν $A^{-1}B$.

Εἶναι ἀνάγκη βεβαίως νὰ γνωρίζωμεν πῶς ἀντιστρέφεται δοθεῖσα τετραγωνικὴ μήτρα. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται προηγουμένως γνῶσις στοιχείων τινῶν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὁριζουσῶν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα παραθέτομεν συνοπτικῶς εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον.

Β'. *Ὁρίζουσαι.* Μία μήτρα εἶναι, ὡς ἐλέχθη, πίναξ διατεταγμένων ἀριθμῶν καὶ ὄχι εἷς συγκεκριμένος ἀριθμός. Ἀπὸ τὰ στοιχεῖα μιᾶς μήτρας εἶναι ἐν τούτοις δυνατὸν νὰ ληφθοῦν, διὰ καταλλήλων πράξεων καὶ συνδυασμῶν, διάφοροι ἀριθμητικαὶ τιμαί. Μία ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι καὶ ἡ ὁρίζουσα. Ἔστω π.χ. ἡ τετραγωνικὴ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας λαμβάνομεν τὰ γινόμενα 3×4 καὶ 1×5. Ἀφαιροῦντες ἐν συνεχείᾳ τὸ δεύτερον γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον θὰ ἔχωμεν: $3 \times 4 - 1 \times 5 = 7$. Ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι ἡ ὁρίζουσα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὡς ἄνω μήτραν.

Ἡ ὁρίζουσα παριστᾶται διὰ τοῦ πίνακος ἀριθμῶν τῆς ἀντιστοίχου μήτρας, πλαισιουμένου ὅμως – πρὸς διάκρισιν – μὲ δύο καθέτους γραμμὰς ἀντὶ τῶν γνωστῶν ἀγκυλῶν. Οὕτω π.χ. ἡ προηγουμένη ὁρίζουσα θὰ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ὁμιλοῦμεν περὶ στοιχείων, σειρῶν, στηλῶν καὶ κυρίως διαγωνίου τῆς ὁριζούσης, ὡς ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μήτρας. Αἱ ὁρίζουσαι ὅμως ἔχουν πάντοτε ἀριθμὸν σειρῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν ὡς ἀναφερόμεναι *μόνον* εἰς τετραγωνικὰς μήτρας.

Ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἡ ὁρίζουσα νιοστῆς τάξεως ($\nu \times \nu$) θὰ εἶναι:

---

1) Μόνον αἱ τετραγωνικαὶ μῆτραι δύνανται νὰ ἀντιστραφοῦν.
2) Ἡ Ι εἶναι τάξεως οἵας καὶ ἡ Α.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \;.\;.\;.\;.\;. & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \;.\;.\;.\;.\;. & \alpha_{2\nu} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \;.\;.\;.\;.\;. & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας A γράφεται συμβολικῶς $|A|$.

Μετὰ τὰς ἀνωτέρω γενικότητας θὰ ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ τὸν *ὑπολογισμὸν* τῆς ὁριζούσης, δηλ. μὲ τὴν εὕρεσιν συγκεκριμένης ἀριθμητικῆς τιμῆς αὐτῆς.

Ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος εἶναι ἁπλοῦς προκειμένου περὶ ὁριζούσης δευτέρας τάξεως (2×2), ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὸ προηγουμένως ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τῆς κυρίας διαγωνίου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἕτερον γινόμενον. Ἡ προκύπτουσα διαφορὰ θὰ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ὁριζούσης. Ἂν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶναι νιοστῆς τάξεως ($\nu \times \nu$), τότε ἐφαρμόζεται ὡρισμένη διαδικασία πρὸς ἀναγωγὴν τῆς ὁριζούσης εἰς συνδυασμόν τινα ὁριζουσῶν δευτέρας τάξεως, εὐχερῶς ὑπολογιζομένων. Πρὸς ἐκμάθησιν τῆς διαδικασίας ταύτης εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἐννοίας τῆς *ἐλάσσονος* καὶ τοῦ *συμπαράγοντος*.

Ἐλάσσων ἑνὸς στοιχείου δοθείσης ὁριζούσης καλεῖται ἡ ὁρίζουσα ἡ ὁποία σχηματίζεται ἂν ἀφαιρεθοῦν ἐκ τῆς δοθείσης ἡ στήλη καὶ ἡ σειρὰ ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖται τὸ στοιχεῖον. Ἔστω, π.χ., ἡ ἀκόλουθος ὁρίζουσα τρίτης τάξεως :

$$\begin{vmatrix} 1_{11} & 3_{21} & 2 \\ 4_{12} & 0_{22} & 5 \\ 6_{13} & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου 1 θὰ εἶναι $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, τοῦ στοιχείου 4 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, τοῦ στοιχείου 0 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$, τοῦ στοιχείου 7 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ κ. ο. κ.

Προφανῶς τὰ στοιχεῖα ὁριζούσης νιοστῆς τάξεως ἔχουν ἐλάσσονας $\nu-1$ τάξεως.

Συμπαράγων (co-factor) στοιχείου δοθείσης ὁριζούσης καλεῖται ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου *προσημασμένη* μὲ θετικὸν μὲν σημεῖον ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τοῦ στοιχείου εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, μὲ ἀρνητικὸν δὲ σημεῖον ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τοῦ στοιχείου εἶναι περιττὸς ἀριθμός (1). Οὕτω, οἱ συμπαράγοντες τῶν στοιχείων 1, 4, 0 καὶ 7 εἰς τὴν ἀνωτέρω ὁρίζουσαν, θὰ εἶναι κατὰ σειράν:

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \text{ καὶ} -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν δοθείσης ὁριζούσης τρίτης τάξεως προχωροῦμεν τώρα ὡς ἀκολούθως:

α) Προσδιορίζομεν τοὺς συμπαράγοντας τυχούσης σειρᾶς (ἢ στήλης) τῆς ὁριζούσης.

β) Σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν συμπαραγόντων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς ληφθείσης σειρᾶς (ἢ στήλης).

γ) Εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὡς ἄνω γινομένων (ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν τὰς εἰς αὐτὰ περιεχομένας ὁριζούσας δευτέρας τάξεως).

Παράδειγμα 1ον: Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν προηγουμένως σημειωθεῖσαν ὁρίζουσαν τρίτης τάξεως. Πρὸς τοῦτο:

α) Προσδιορίζομεν τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς πρώτης, ἔστω, στήλης κατὰ σειρὰν (ἐκ τῶν ἄνω):

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

β) Σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν συμπαραγόντων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα:

$$1 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, -4 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, 6 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

γ) Ὑπολογίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν:

$$1 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= 1 \times (-35) - 4 \times (-5) + 6 \times 15 = 75$$

1) Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν μορφὴν τῶν ὁριζουσῶν οἱ δεῖκται τῶν στοιχείων δὲν γράφονται μέν, ἀλλὰ νοοῦνται.

2) Τὸ ἄθροισμα τοῦτο καλεῖται *ἀνάπτυγμα* τῆς ὁριζούσης *κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης*.

Ὁ ἀριθμὸς 75 εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὡς ἄνω ὁριζούσης τρίτης τάξεως.

Παράδειγμα 2ον: Ἔστω πρὸς ὑπολογισμὸν ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Οἱ συμπαράγοντες τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι:

$$+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν συμπαραγόντων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης, εἶναι:

$$1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 24 + 30 = 7$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν διαδικασίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν πᾶσαν ὁρίζουσαν νιοστῆς τάξεως ($\nu > 3$). Ὅταν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶναι τάξεως ἀνωτέρας τῆς τρίτης, οἱ συμπαράγοντες τῶν στοιχείων αὐτῆς εἶναι τάξεως τρίτης ἢ ἀνωτέρας καὶ πρὸς ὑπολογισμὸν αὐτῶν ἀπαιτεῖται δι' ἕνα ἕκαστον ἡ ἐφαρμογὴ τῆς αὐτῆς διαδικασίας πρὸς ἀναγωγήν του εἰς ὁριζούσας δευτέρας τάξεως. Συνεπείᾳ τούτου, ἡ ὡς ἄνω μέθοδος ὑπολογισμοῦ καθίσταται ἐπίπονος καὶ δυσεφάρμοστος εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἀντ' αὐτῆς χρησιμοποιοῦνται τότε ἄλλαι ἁπλούστεραι μέθοδοι ὑπολογισμοῦ. Ἐνταῦθα δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰς ἐν λόγῳ μεθόδους, διότι δὲν ἐνδιαφερόμεθα ἀμέσως διὰ πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων περὶ ὁριζουσῶν, δυνάμεθα τώρα νὰ ἐκθέσωμεν τὴν διαδικασίαν τῆς ἀντιστροφῆς μήτρας.

Γ. *Ἡ διαδικασία τῆς ἀντιστροφῆς μήτρας.* Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀντιστροφῆς δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

α) Ὑπολογίζομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μήτραν ὁρίζουσαν. Ἂν αὕτη εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός (1)

β) Σχηματίζομεν μήτραν μὲ στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς ὑπὸ ἀντιστροφὴν μήτρας.

1) Ἂν ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν ἡ ἀντιστροφὴ δὲν εἶναι δυνατή, καθ' ὅσον ἀποκλείεται τότε ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπὸ στοιχεῖον (δ) ἀναφερομένων διαιρέσεων.

γ) Εὑρίσκομεν τὴν ἐνηλλαγμένην τῆς νέας μήτρας.

δ) Διαιροῦμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐνηλλαγμένης μήτρας διὰ τῆς ὑπολογισθείσης ὁριζούσης τῆς ἀρχικῆς μήτρας.

Ἡ οὕτω προκύπτουσα μήτρα εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῆς.

Ἔστω γενικῶς ἡ μήτρα Α

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Ἂν $|A| \neq 0$, τότε σχηματίζομεν μήτραν μὲ στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς Α:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω μήτραν $A_{\iota\kappa}$, γενικῶς, εἶναι ὁ συμπαράγων τοῦ στοιχείου $\alpha_{\iota\kappa}$ τῆς Α.

Ἂν ἐναλλάξωμεν τὰς σειρὰς μὲ τὰς στήλας τῆς προηγουμένης μήτρας καὶ διαιρέσωμεν ἐν συνεχείᾳ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐνηλλαγμένης μήτρας διὰ $|A|$, λαμβάνομεν τὴν ἀντίστροφον τῆς Α:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἀντιστροφῆς μήτρας: Ἂς λάβωμεν τὴν μήτραν

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία ἔχει ὁρίζουσαν μὲ τιμὴν 18. Ἡ μήτρα ἡ ἔχουσα στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς προηγουμένης εἶναι:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ +5 & +1 & -3 \\ -6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἐναλλάσσοντες τὰς σειρὰς μὲ τὰς στήλας τῆς τελευταίας μήτρας καὶ διαιροῦντες ἐν συνεχείᾳ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐνηλλαγμένης μήτρας διὰ 18, λαμβάνομεν τὴν μήτραν:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῆς τοιαύτης.

Ἂν προ-πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ἀντίστροφον μήτραν ἐπὶ τὴν ἀρχικήν, θὰ λάβωμεν τὴν μοναδιαίαν μήτραν I:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

συμφώνως πρὸς τὰ προηγουμένως (2.3.5A) ὁρισθέντα, διὰ τὴν ἀντιστροφήν. Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδει ἐπίσης καὶ ὁ μετα-πολλαπλασιασμὸς τῆς ὡς ἄνω ἀντιστρόφου μήτρας ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν μήτραν, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ σπουδαστής, ἐκτελῶν τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτόν. Γενικῶς (καὶ κατ' ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος περὶ μὴ ἰσχύος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν):

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

2.4. Μία ἐφαρμογή

Ὡς εἴδομεν, αἱ μῆτραι εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὸν συμβολισμὸν τῶν βασικῶν ἐννοιῶν καὶ ὑποθέσεων τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ. Πλὴν ὅμως τῆς ἐν λόγῳ χρησιμότητος τῶν μητρῶν, αὗται δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν συστηματικὴν διατύπωσιν καὶ μελέτην μεγάλου ἀριθμοῦ προβλημάτων προγραμματισμοῦ, ὡς ἐπίσης καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς λύσεώς των.

Κατὰ κανόνα τὰ προβλήματα ταῦτα, ἰδίᾳ ὅταν ἀφοροῦν εἰς τὴν ἐθνικὴν οἰκονομίαν ἐν τῷ συνόλῳ, εἶναι μεγάλης κλίμακος καὶ ἀπαιτοῦν ἐνίοτε ἀριθμομηχανὰς ὑψηλῆς ταχύτητος διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων πράξεων. Ἡ ἁπλότης καὶ συστηματικότης τοῦ συμβολισμοῦ τῶν μητρῶν διευκολύνει τὰ μέγιστα εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ μηχανῶν.

Πρὸς διευκρίνησιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας μητρῶν εἰς τὴν λύσιν μαθηματικῶν προβλημάτων, προβαίνομεν κατωτέρω εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς ἁπλοῦ συστήματος ἐξισώσεων [1].

Ἔστω τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} X_1 - 0.1X_2 - 0.4X_3 &= 80 \\ -0.2X_1 + X_2 - 0.4X_3 &= 100 \\ -0.3X_1 - 0.4X_2 + X_3 &= 40 \end{aligned} \qquad (1)$$

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων διανυσμάτων [2] τὸ σύστημα (1) δύναται νὰ γραφῇ οὕτω:

$$\begin{bmatrix} X_1 - 0.1X_2 - 0.4X_3 \\ -0.2X_1 + X_2 - 0.4X_3 \\ -0.3X_1 - 0.4X_2 + X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐν συνεχείᾳ γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

ὡς δύναται νὰ βεβαιωθῇ ὁ σπουδαστής, ἐκτελῶν τὸν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) σημειούμενον πολλαπλασιασμόν.

---

1) Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον ἡ θεωρία τῶν μητρῶν χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μελέτην καὶ λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων.

2) Βλ. 2. 1. 5., ἀνωτέρω.

Θέτοντες Α,Χ,Π, διὰ τὰς μήτρας τῆς ἐξισώσεως (3), κατὰ τὴν διδομένην σειράν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$AX = \Pi \tag{3'}$$

ἡ ὁποία συμβολίζει τὴν ἐξίσωσιν (3).

Ἂν τώρα προ-πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3') μὲ τὴν ἀντίστροφον μήτραν A^{-1} θὰ λάβωμεν:

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = A^{-1}\Pi \tag{3''}$$

Ἐπειδή: $A^{-1}A = I$ καὶ $IX = X$, ἡ (3'') γίνεται:

$$X = A^{-1}\Pi \tag{3'''}$$

Ἡ (3''') δίδει τὴν λύσιν τῆς (3').

Κατὰ ταῦτα, ἡ λύσις τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\text{Ἐπειδή:}\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.28048 & 0.39634 & 0.67073 \\ 0.4878 & 1.34146 & 0.7317 \\ 0.57926 & 0.655487 & 1.4939 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

δυνάμεθα, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὴν A^{-1} διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τῆς τιμῆς (5) καὶ ἐκτελοῦντες ἐν συνεχείᾳ τὸν πολλαπλασιασμόν, νὰ λάβωμεν:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168{,}9 \\ 202{,}4 \\ 171{,}6 \end{bmatrix} \tag{6}$$

ἐξ ἧς, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων διανυσμάτων, ἔχομεν τὰς λύσεις:

$$X_1 = 168{,}9$$
$$X_2 = 202{,}4$$
$$\text{καὶ } X_3 = 171{,}6$$

3

'Ανάλυσις Εἰσροῶν - 'Εκροῶν

3. 1. Εἰσαγωγή

'Ως ἤδη ἐλέχθη, ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν-ἐκροῶν χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μελέτην καὶ λύσιν προβλημάτων συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως. Αὕτη ἀποτελεῖ μέθοδον ἐρεύνης διαμορφωθεῖσαν ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harvard W. Leontief, δι' ὃ καὶ «σύστημα Leontief» καλεῖται ἐνίοτε.

Εἰδικώτερον, αἱ ἐργασίαι τοῦ καθηγητοῦ Leontief ἀφοροῦν εἰς τὴν κατάστρωσιν ἑνὸς συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας, προοριζομένου διὰ τὴν μελέτην μακροοικονομικῶν προβλημάτων, ὡς εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ τοῦ προγραμματισμοῦ μιᾶς οἰκονομίας. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ λογικὴν συνέχειαν τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας τῶν Quesnay, Walras, Pareto καὶ Cassel, τὰ ὁποῖα σκοπὸν εἶχον νὰ δώσουν μίαν ἐποπτικὴν περιγραφὴν τῆς οἰκονομίας καὶ νὰ προσδιορίσουν τὴν φύσιν τῶν ὑφισταμένων σχέσεων συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν. 'Ο ἴδιος ὁ καθηγητὴς Leontief θεωρεῖ τὴν κλασσικὴν ἐργασίαν του ἐπὶ τῆς διαρθρώσεως τῆς ἀμερικανικῆς οἰκονομίας (1) ὡς προσπάθειαν καταστρώσεως ἑνὸς Tableau Economique διὰ τὰς 'Ηνωμένας Πολιτείας.

'Αλλ' ἐνῶ οἱ κλασσικοὶ οἰκονομολόγοι τῆς γενικῆς ἰσορροπίας οὐδέποτε διενοήθησαν νὰ χρησιμοποιήσουν τὸ σύστημά των διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, ὁ καθηγητὴς Leontief ἀντιθέτως ἐπεδίωξε νὰ παρουσιάσῃ ἓν σύστημα τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν πρακτικῶν προβλημάτων.

Τὸ πολύπλοκον τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων καὶ ἰδίως ἡ ἔλλειψις ἐπαρκῶν στατιστικῶν στοιχείων καὶ καταλλήλων ὑπολογιστικῶν μέσων καθίστα οὐτοπικὴν πᾶσαν προσπάθειαν πρακτικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Walras καὶ Pareto. Οὕτω τὰ συστήματα ταῦτα, παρὰ τὴν θεωρητικήν των μεγαλο-

1) W. Leontief «The Structure of American Economy 1919 - 1939», N. Y. 1941 (νέα ἔκδοσις 1953).

πρέπειαν, ἐγκατελείφθησαν βαθμιαίως χάριν τῶν μαρσαλλιανῶν συστημάτων μερικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξητάζοντο ἰδιαιτέρως αἱ οἰκονομικαὶ μεταβολαὶ ἐντὸς ὡρισμένων ἀγορῶν καὶ ἀπεφεύγετο ἡ παρακολούθησις τῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἐντὸς ὁλοκλήρου τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἡ ἀναζωογόνησις τοῦ συστήματος τῆς γενικῆς ἰσορροπίας ὑπὸ τοῦ Cassel (1918) δὲν ἤλλαξε κατὰ βάσιν τὴν κρατοῦσαν τάσιν. Καὶ τοῦτο διότι ὁ Cassel, συνεχίσας τὴν κλασσικὴν παράδοσιν, ἐνδιεφέρθη κυρίως διὰ τὴν μαθηματικὴν θεμελίωσιν τοῦ συστήματός του καὶ δὲν ἔθεσε ζήτημα πρακτικῆς ἐφαρμογῆς αὐτοῦ.

Ὁ καθηγητὴς Leontief (1941) εἶναι ὁ πρῶτος οἰκονομολόγος ὁ ὁποῖος ἀντικατέστησε τὰ ἀφηρημένα ἀλγεβρικὰ σύμβολα τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας διὰ συγκεκριμένων στατιστικῶν στοιχείων καὶ ἐπεχείρησε νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς πραγματικότητος. Τὸ ἐγχείρημα ἦτο βεβαίως τολμηρόν, ἀλλ' ἡ ἀνάληψις αὐτοῦ καθίστατο δυνατὴ κατόπιν τῆς ἐν τῷ μεταξὺ ἐπελθούσης βελτιώσεως τῶν στατικῶν συνθηκῶν εἰς Ἀμερικὴν καὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος. Ἐξ ἄλλου ἡ προϊοῦσα σημασία τῶν προβλημάτων πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ κατὰ τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον προώθησεν ἐπίσης σημαντικῶς τὰς ἐρευνητικὰς ἐργασίας ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας.

3. 2. Ὑποθέσεις

Αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν – ἐκροῶν ἔχουν ὡς ἀκολούθως:

α) Ἡ οἰκονομία εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς ἕνα ἀριθμὸν παραγωγικῶν κλάδων.

β) Ἕκαστος κλάδος παράγει ἓν *μόνον* προϊὸν καὶ καθ' *ὡρισμένην* μέθοδον ἢ παραγωγικὴν δραστηριότητα.

γ) Αἱ ὑφ' ἑκάστου κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν ἀναλογίαν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

Ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ εἶδος τῶν εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν ἀναφερομένων κλάδων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος καὶ ποιότητος τῶν διατιθεμένων στατιστικῶν πληροφοριῶν, τῶν δυνατοτήτων τῶν ὑπολογιστικῶν μέσων (ἀριθμομηχανῶν), ὡς ἐπίσης καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἐξεταζομένου θέματος. Ἐνταῦθα ἀνακύπτει τὸ πρόβλημα τῆς συμπτύξεως τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων εἰς γενικωτέρας ὁμάδας ἢ ἄλλως τῆς «συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως» (agregation) τῶν στατιστικῶν στοιχείων (1). Τοιοῦτον πρόβλημα δὲν ὑφίστατο διὰ τοὺς κλασσικοὺς οἰκονομολόγους τῆς γενικῆς ἰσορροπίας, οἱ ὁποῖοι ἐνδιεφέροντο μόνον δι' ἀλγεβρικὰς ἀποδείξεις. Πρακτικὴ ὅμως ἐφαρμογὴ τοῦ ὡς ἄνω συστήματος εἶναι ἀδύνατος ἄνευ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὄχι μόνον λόγῳ τῶν δυσχερειῶν ἐξευρέσεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλὰ καὶ διότι ὁ μέγας ὄγκος τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν θὰ ἠμπόδιζε τὴν χρησιμοποίησίν των. Ὡς λέγει ὁ καθηγητὴς Leontief, τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι ἡ ἐκλονὴ μεταξὺ συγκεντρωτικῆς καὶ ἀναλυτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλ' ἡ ἐκλογὴ μεταξὺ μεγαλυτέρου ἢ μικροτέρου βαθμοῦ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως. Οὕτω π.χ. ἐὰν πρόκειται νὰ ἐξετασθῇ ἀπό τινος ἀπόψεως ἡ θέσις τῆς κλωστοϋφαντουργίας ἐντὸς μιᾶς οἰκονομίας, δὲν γεννᾶται ζήτημα χρησιμοποιήσεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν στοιχείων δι' ὅλας τὰς ἐπὶ μέρους κλωστοϋφαντουργικὰς ἐπιχειρήσεις, γεννᾶται μόνον ζήτημα ἐκλογῆς μεταξὺ συγκεντρωτικῶν στοιχείων διὰ τὴν κλωστοϋφαντουργίαν, λαμβανομένην ὡς ἑνιαῖον κλάδον παραγωγῆς, καὶ συγκεντρωτικῶν ἐπίσης στοιχείων ἀναφερομένων εἰς μικρὸν σχετικῶς ἀριθμὸν ὑποκλάδων, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ ἡ κλωστοϋφαντουργία (π.χ. ἐριουργίαν, βαμβακουργίαν κλπ.).

Ὅσον ὁ βαθμὸς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων εἶναι μεγαλύτερος, τόσον ἐλαττοῦται ἡ πληροφοριακὴ δύναμις τῶν στοιχείων αὐτῶν, ἐνῶ ἀντιθέτως διευκολύνεται ὁ ὑπολογιστικὸς χειρισμός των. Ἐπιβάλλεται ὅθεν ἡ ἐκλογὴ τοῦ βαθμοῦ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως, ὁ ὁποῖος ἀφ' ἑνὸς μὲν δὲν θίγει στατιστικὰς πληροφορίας χρησίμους διὰ τὸ ἐξεταζόμενον θέμα, ἀφ' ἑτέρου δὲ διευκολύνει κατὰ τὸ δυνατὸν τοὺς ὑπολογισμούς (2).

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις, ἀνωτέρω, σημαίνει ὅτι εἰς τὸ σύστημα Leontief δὲν τίθεται ζήτημα ἀριστοποιήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος, καθ' ὅσον τοιαύτη ἀριστοποίησις προϋποθέτει δυνατότητα ἐκλογῆς μεταξὺ διαφόρων παραγωγικῶν μεθόδων, ὁδηγουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

---

1) Ὡς «συγκεντρωτικὴ ταξινόμησις» στατιστικῶν στοιχείων νοεῖται ἡ συλλογὴ στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν διαφόρων κλάδων, θεωρουμένων ὡς *αὐτοτελῶν μονάδων*, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν συλλογὴν ἀναλυτικῶν στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τοὺς ἐν λόγῳ κλάδους.

2) Τὰ προβλήματα καὶ τὰ κριτήρια τῆς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀναπτύσσονται εἰς W. Leontief: The Structure of American Economy σ. σ. 14, 69 καὶ 208-11. Ἐπίσης εἰς Economic Activity Analysis, Edit. by Os. Morgenstern. London 1954, σ. σ. 79 - 102.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἶναι θεμελιώδης εἰς τὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν - ἐκροῶν, ὡς ἐπίσης καὶ διὰ τὰ κλασσικὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας. Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι αἱ πραγματικαὶ παραγωγικαὶ συναρτήσεις θεωροῦνται ὡς συμφωνοῦσαι κατ' ἀνάγκην πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἀλλ' ἁπλῶς ἡ ὑπόθεσις αὕτη λαμβάνεται ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἐκ τῶν ὑποθέσεων (β) καὶ (γ) προκύπτει ὅτι εἰς τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τοῦ συστήματος Leontief οἱ συντελεσταὶ παραγωγῆς εἶναι αὐστηρῶς συμπληρωματικοὶ καὶ συνεπῶς τὸ ὁριακὸν προϊὸν ἑκάστου εἶναι μηδέν. Τὸ προϊὸν δύναται νὰ αὐξηθῇ μόνον ἂν αἱ ποσότητες ὅλων τῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγὴν δεδομένου προϊόντος, αὐξηθοῦν καθ' ὡρισμένην ἀναλογίαν, καθοριζομένην ὑπὸ τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν τῆς δεδομένης παραγωγῆς.

3. 3. Τὸ βασικὸν ὑπόδειγμα

3. 3. 1. Ἀναλύομεν κατωτέρω τὰ κύρια σημεῖα τοῦ συστήματος Leontief μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Τὸ κεντρικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι *ὁ πίναξ εἰσροῶν - ἐκροῶν* (input - output table). Ὁ πίναξ οὗτος ὁμοιάζει κατὰ βάσιν πρὸς τὸ Tableau Economique τοῦ François Quesnay καὶ καταγράφει συστηματικῶς τὰς ροὰς ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, ἐντὸς μιᾶς δεδομένης χρονικῆς περιόδου.

Ὁ πίναξ 1, κατωτέρω, ἀποτελεῖ τὸν πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν τοῦ χρησιμοποιουμένου παραδείγματος.

Ὁ πίναξ 1 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία λογιστικὴ (ex post) κατάστασις, ἀπεικονίζουσα τὰς διακλαδικὰς (intersectoral) σχέσεις τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας κατὰ τὸ ληφθὲν ἔτος τ, ὡς ἐπίσης καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος παραχθέντος τελικοῦ προϊόντος. Ὁ πίναξ οὗτος ἐπισκοπούμενος κατὰ στήλας δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς δύο βασικοὺς τομεῖς, τὸν *παραγωγικὸν τομέα* — ὁ ὁποῖος ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κλάδον τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς (γεωργία - ὀρυχεῖα κ.λ.π.), τῶν κλάδων τῆς μεταποιήσεως (βιομηχανία - βιοτεχνία) καὶ τοὺς «λοιποὺς κλάδους» —καὶ τὸν *τομέα τῆς τελικῆς ζητήσεως*, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κατανάλωσιν, τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὰς ἐξαγωγάς. Ἐκ τῆς κατὰ σειρὰς ἐπισκοπήσεως τοῦ πίνακος εἶναι δυνατὸν νὰ διακριθοῦν ἐπίσης δύο τομεῖς, *ὁ παραγωγικὸς τομεὺς* (ὡς καὶ προηγουμένως) καὶ *ὁ τομεὺς τῶν προσωπικῶν ὑπηρεσιῶν, τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῶν φόρων*.

Εἰδικώτερον, κατὰ στήλας ἐξέτασις τοῦ πίνακος 1 δεικνύει τὰς «εἰσροὰς» (inputs), ἤτοι τὰς ὑφ' ἑκάστου οἰκονομικοῦ κλάδου ἀπορροφωμένας ποσότητας ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) κατὰ τὰς πηγὰς προελεύ-

Πίναξ 1

Εἰσροαὶ - Ἐκροαὶ (καὶ Τελικὴ Ζήτησις) κατὰ τὸ ἔτος τ

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	Πρωτογενὴς παραγωγὴ	Μεταποίησις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ Ζήτησις: Κατανάλωσις: Ἰδιωτικὴ	Τελικὴ Ζήτησις: Κατανάλωσις: Δημοσία	Τελικὴ Ζήτησις: Ἐπένδυσις (α): Πάγιαι	Τελικὴ Ζήτησις: Ἐπένδυσις (α): Ἀποθεματ.	Ἐξαγωγαὶ	Σύνολον
Πρωτογενὴς παραγωγὴ		60	20	50	7		8	10	155
Μεταποίησις	20		60	60	20	30	10	20	220
Λοιποὶ κλάδοι	20	40		40	20	15		10	145
Εἰσαγωγαὶ	5	30	10	10	3				58
Ὑπηρεσία προσώπων	100	70	45						215
Φόροι	10	20	10	20					60
Σύνολον	155	220	145	180	50	45	18	40	853

(α) Ἰδιωτικὴ Ἐπένδυσις.

σεως αὐτῶν. Αἱ ποσότητες αὗται δὲν μετροῦνται εἰς φυσικὰς μονάδας, ἀλλ' ἐκφράζονται εἰς νομισματικὰς ἀξίας, ὑπολογιζομένας εἰς σταθερὰς τιμάς. Οὕτω, αἱ τρεῖς πρῶται στῆλαι δεικνύουν τὰς ἀξίας τῶν ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος αὐτῶν κατὰ τὸ ἔτος τ. Ὁ κλάδος, π.χ., τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς ἐχρησιμοποίησε κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ προϊὸν τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως ἀξίας 20 νομισματικῶν μονάδων (ν. μ.), προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων ἀξίας 20 ν. μ., εἰσαγόμενα προϊόντα ἀξίας 5 ν. μ., προσωπικὰς ὑπηρεσίας ἀξίας 100 ν. μ. καὶ ἐπλήρωσε φόρους 10 ν. μ.

Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ αἱ ἑπόμεναι δύο στῆλαι. Αἱ στῆλαι τῆς τελικῆς ζητήσεως δεικνύουν τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ τελικοῦ προϊόντος τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, κατὰ τὸ ἔτος τ, μεταξὺ καταναλώσεως (ἰδιωτικῆς καὶ δημοσίας), ἐπενδύσεων καὶ ἐξαγωγῶν. Ἡ εἰς τὴν στήλην τῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ἀναγραφομένη ἀξία 20 ν. μ. ἐκ φόρων παριστᾷ τὸ ἀντίτιμον τῆς ὑπὸ τῶν ἰδιωτῶν καταναλώσεως κρατικῶν ὑπηρεσιῶν κατὰ τὸ δοθὲν ἔτος.

Ἡ κατὰ σειρὰς ἐξέτασις τοῦ πίνακος δεικνύει τὰς «ἐκροὰς» (outputs), ἤτοι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου κατὰ τὸ ἔτος τ. Οὕτω, π.χ., ἡ πρώτη σειρὰ τοῦ πίνακος δεικνύει ὅτι ἐκ τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς τοῦ ἔτους τ ἀξίας 155 ν. μ., διετέθη προϊὸν ἀξίας 60 ν. μ., διὰ τὸν κλάδον τῆς μεταποιήσεως, ὡς πρῶται ὕλαι κ.λ.π., 20 ν. μ. διὰ τοὺς λοιποὺς κλάδους, 50 ν. μ. δι' ἰδιωτικὴν κατανάλωσιν, 7 ν. μ. διὰ δημοσίαν κατανάλωσιν, 8 ν. μ. δι' ἀποθέματα καὶ τέλος προϊὸν ἀξίας 10 ν. μ. δι' ἐξαγωγάς (1).

Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ αἱ ἑπόμεναι δύο σειραί.

Ὁ πίναξ 1 δεικνύει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου παραγωγικοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου σειρᾶς) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χρηματικῶν καταβολῶν τοῦ αὐτοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου στήλης). Τοῦτο συμβαίνει διότι εἰς τὴν ἀξίαν δι' ὑπηρεσίας προσώπων συμπεριλαμβάνονται ἐνταῦθα καὶ τὰ ἐπιχειρηματικὰ κέρδη.

Ἡ τετάρτη σειρὰ καθορίζει τὸν τρόπον διαθέσεως τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν μεταξὺ τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἡ πέμπτη σειρὰ δεικνύει τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων καταβληθεῖσαν ἀξίαν διὰ τὰς χρησιμοποιηθείσας ὑπηρεσίας προσώπων (ἐργασίαν). Τέλος εἰς τὴν ἕκτην σειρὰν ἀναγράφονται αἱ ἐκ φόρων ἐπιβαρύνσεις τῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς καταναλώσεως. Αἱ ἐπιβαρύνσεις αὗται ἀποτελοῦν θεωρητικῶς τὸ ἀντίτιμον τῶν κρατικῶν ὑπηρεσιῶν πρὸς τὴν οἰκονομίαν.

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ πίνακος 1, τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν σειρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν ἰσοῦνται, ἀνὰ ἕν, πρὸς τὰ συνολικὰ ἀθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν, ἕπεται ὅτι τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων σειρῶν (ἀξία εἰσαγωγῶν + ἀξία ὑπηρεσιῶν προσώπων + φόροι), ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν τῆς τελικῆς ζητήσεως.

3. 3. 2. Ἐλέχθη ἤδη ὅτι ὁ πίναξ 1 ἔχει ἁπλῶς λογιστικὴν σημασίαν, ὡς ἀπεικονίζων τὰς λαβούσας χώραν κατὰ τὸ ἔτος τ συναλλακτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν κλάδων τῆς δοθείσης οἰκονομίας. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὁ πίναξ οὗτος θὰ ἠδύνατο νὰ παραβληθῇ πρὸς τὸ σύστη-

1) Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ χρησιμοποιούμενον προϊὸν ὑπὸ τοῦ κλάδου τοῦ παράγοντος τοῦτο.

μα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν [1]. Ἡ μετατροπὴ τοῦ πίνακος 1 ἀπὸ ἁπλῆν λογιστικὴν κατάστασιν εἰς *ἀναλυτικὸν ὄργανον*—δυνάμενον νὰ παρακολουθήσῃ τὰς ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν—εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, αἱ ὑφ' ἑκάστου παραγωγικοῦ κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου (καὶ χρόνου δράσεως) τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, δοθέντος τοῦ πίνακος 1, δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἡ μορφὴ τῆς παραγωγικῆς συναρτήσεως ἑκάστου κλάδου διὰ σειρᾶς τεχνολογικῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι λαμβάνονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν κονδυλίων τῶν εἰσροῶν τῶν ἐν λόγῳ κλάδων διὰ τῆς ἀξίας τοῦ ὑπ' αὐτῶν παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος [2]. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι εἶναι γνωστοὶ ὡς «συντελεσταὶ εἰσροῆς» (input coefficients) ἢ ὡς «τεχνολογικοὶ συντελεσταί».

Πίναξ 3

Συντελεσταὶ Εἰσροῆς

	Π (α)	Μ	Λ
Π	0/155 = 0	60/220 = 0,272	20/145 = 0,137
Μ	20/155 = 0,129	0/220 = 0	60/145 = 0,414
Λ	20/155 = 0,129	40/220 = 0,182	0/145 = 0
Ε	5/155 = 0,032	30/220 = 0,136	10/145 = 0,069
Υ	100/155 = 0,645	70/220 = 0,318	45/145 = 0,31!
Φ	10/155 = 0,065	20/220 = 0,092	10/145 = 0,069
	Σύνολον 1,000	1,000	1,000

(α) Τὰ σύμβολα Π, Μ, κλπ. εἶναι τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ὀνομάτων τῶν κλάδων τοῦ πίνακος 1.

Ἡ ἔννοια τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς εἶναι προφανής. Οὕτω, ὁ συντελεστὴς 0, 272 (πρῶτος εἰς στήλην Μ) καθορίζει τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως κατὰ τὴν παραγωγὴν προϊόν-

1) Βλέπετε σχετικὴν σύγκρισιν εἰς 3. 4., κατωτέρω.

2) Μολονότι ἐνδιαφέρουν κυρίως αἱ σχέσεις πραγματικῶν ποσοτήτων, ἡ χρησιμοποίησις ἐνταῦθα σταθερῶν τιμῶν καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐκτίμησιν τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν εἰς νομισματικὰς ἀξίας.

τος τοῦ κλάδου τούτου ἀξίας μιᾶς νομ. μονάδος. Ἀνάλογον ἑρμηνείαν δίδομεν καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς εἰσροῆς.

Ὁ εἰς τὸν πίνακα 1 γενόμενος διαχωρισμὸς μεταξὺ παραγωγικοῦ τομέως καὶ τελικῆς ζητήσεως ἐπιδιώκει νὰ τονίσῃ ὅτι εἰς τὸ ἐξεταζόμενον οἰκονομικὸν σύστημα τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως λαμβάνονται ὡς δεδομένα (ἐξωγενῆ), ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῶν κονδυλίων αὐτῶν πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ βαθμὸς παραγωγικῆς ἀπασχολήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἑκάστοτε ὕψος (καὶ τὴν σύνθεσιν) τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Διὰ νὰ καταδειχθῇ τώρα ἡ ἀναλυτικὴ ἀξία τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν, κατόπιν τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως μεταβάλλονται ὡς ἀκολούθως: Τὰ μὲν κονδύλια τῆς καταναλώσεως αὐξάνουν κατὰ 5 %, τὰ δὲ κονδύλια τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνουν κατὰ 10 %. Τὸ προκῦπτον ἐκ τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ νὰ ἱκανοποιήσουν τὴν αὐξηθεῖσαν τελικὴν ζήτησιν. Ἡ συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις μεταξὺ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας ἐκδηλοῦται εἰς τὴν ἀνάγκην *αὐξήσεως* τῶν διακλαδικῶν ροῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων δράσεως τῶν διαφόρων κλάδων εἰς τρόπον ὥστε νὰ καταστοῦν πραγματοποιήσιμοι αἱ προγραμματισθεῖσαι μεταβολαὶ εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας τὰς πληροφορίας τῶν πινάκων 1 καὶ 2 καὶ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸν πίνακα 3.

Εἰς τὸν πίνακα 3 τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, μεταβληθέντα συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Τὰ X_1 X_2 καὶ X_3 παριστοῦν τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ πίνακος. Αἱ ἐγγραφαὶ εἰς τὰς στήλας τοῦ παραγωγικοῦ τομέως ὑπελογίσθησαν ὡς γινόμενα τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα δράσεως X_1, X_2 καὶ X_3 (1).

Λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος σημαίνει νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν X_1, X_2, X_3, ἐξ ὧν τιμῶν δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἐν συνεχείᾳ πᾶσαι αἱ ἐγγραφαὶ τοῦ πίνακος 3.

1) Ἐφ' ὅσον ἕκαστος συντελεστὴς εἰσροῆς ἀποτελεῖ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἀντιστοίχου ἐγγραφῆς (εἰσροῆς) ἑνὸς κλάδου διὰ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τοῦ αὐτοῦ κλάδου, ἡ ὡς ἄνω ἐγγραφὴ (εἰσροῆς) δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ εἰσροῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον δράσεως τοῦ κλάδου.

Πίναξ 3

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	Πρωτογενής παραγωγή	Μεταποίησις	Λοιποί κλάδοι	Τελική ζήτησις					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Επενδύσεις		'Εξαγωγαί	
				'Ιδιωτική	Δημοσία	Πάγιαι	'Αποθεμ.		
Πρωτογενής παραγωγή		$0{,}272\ X_2$	$0{,}137\ X_3$	52,5	7,35		8,8	11	X_1
Μετοποίησις	$0{,}129\ X_1$		$0{,}414\ X_3$	63	21	33	11	22	X_2
Λοιποί κλάδοι	$0{,}129\ X_1$	$0{,}182\ X_2$		42	21	16,5		11	X_3
Εἰσαγωγαί	$0{,}032\ X_1$	$0{,}136\ X_2$	$0{,}069\ X_3$	10,5	3,15				X_4
'Υπηρεσίαι Προσώπων	$0{,}645\ X_1$	$0{,}318\ X_2$	$0{,}311\ X_3$						X_5
Φόροι	$0{,}065\ X_1$	$0{,}092\ X_2$	$0{,}069\ X_3$	21					X_6
Σύνολον	X_1	X_2	X_3	189	52,5	49,5	19,8	44	X

Προχωροῦμεν ὡς ἀκολούθως :

'Ως γνωρίζομεν, ἑκάστη τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν δεικνύει τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ προϊόντος τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν κλάδων μεταξὺ τῶν κλάδων τούτων καὶ τῶν διαφόρων ὑποτομέων τῆς τελικῆς ζητήσεως. Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν κονδυλίων ἑκάστης σειρᾶς πρέπει νὰ ἰσοῦται ἐξ ὁρισμοῦ πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου. 'Εκ τῆς σχέσεως ταύτης (βλ. πίν. 3) εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

$$
\begin{aligned}
0 \quad & + 0{,}272\,X_2 + 0{,}137\,X_3 + 79{,}65 = X_1 \\
0{,}129\,X_1 & + \quad 0 \quad + 0{,}414\,X_3 + 150 \quad = X_2 \\
0{,}129\,X_1 & + 0{,}182\,X_2 + \quad 0 \quad + 90{,}5 \quad = X_3
\end{aligned}
$$

'Εκ τῆς λύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος λαμβάνομεν :

$$X_1 = 164, \qquad X_2 = 234, \qquad X_3 = 154$$

'Επὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τούτων καὶ κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν σημειουμένων πολλαπλασιασμῶν, ὁ πίναξ 3 λαμβάνει τὴν μορφὴν τοῦ πίνακος 4, κατωτέρω :

Πίναξ 4 (α)

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	Πρωτογενὴς παραγωγὴ	Μεταποίησις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ ζήτησις					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Ἐπενδύσεις			
				Ἰδιωτικὴ	Δημοσία	Πάγιαι	Ἀποθεματ.	Ἐξαγωγαὶ	
Πρωτογενὴς παραγωγὴ		63,2	21,2	52,5	7,3		8,8	11	164
Μεταποίησις	21		63	63	21	33	11	22	234
Λοιποὶ κλάδοι	21,5	42		42	21	16,5		11	154
Εἰσαγωγαὶ	5,3	32	11	10,5	3,2				62
Ὑπηρεσία προσώπων	105,6	75,5	48						229,1
Φόροι	10,6	21,3	10,8	21					63,7
Σύνολον	164	234	154	189	52,5	49,5	19,8	44	906,8

(α) Κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μετεβλήθησαν ἐλαφρῶς ὡρισμένα ποσὰ πρὸς ἀποφυγὴν τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς ἐγγραφάς.

Ἤδη ἡ ἀπάντησις τοῦ τεθέντος προβλήματος δίδεται ἐκ τῶν ἐγγραφῶν τῆς στήλης τῶν συνόλων τοῦ πίνακος.

Τὸ ἐπίπεδον δράσεως τοῦ κλάδου Π	ηὐξήθη	ἀπὸ 155	εἰς 164	ἤτοι	κατὰ	6 %	περ.
» » » » » Μ	»	» 220	» 234	»	»	6,3 %	»
» » » » » Λ	»	» 145	» 164	»	»	6,2 %	»
» » τῶν εἰσαγωγῶν	»	» 58	» 62	»	»	6,9 %	»
» » ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως	»	» 215	» 229,1	»	»	6,5 %	»
» Ἡ φορολογ. ἐπιβάρυνσις τῆς οἰκον.	»	» 60	» 63,7	»	»	6,2 %	»

Ἡ διάρθρωσις τοῦ πίνακος 4 δεικνύει ἐπίσης τὰς μεταβολὰς εἰς τὰς εἰσροὰς καὶ ἐκροὰς αἱ ὁποῖαι ἦσαν ἀναγκαῖαι πρὸς παραγωγὴν τοῦ νέου συνολικοῦ προϊόντος τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων.

3. 3. 3. Εἶναι πρόδηλος ἡ πρακτικὴ σπουδαιότης τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως. Ἂν, π.χ., αἱ ὑποτεθεῖσαι μεταβολαὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως ἀποτελοῦν ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς ἑνὸς οἰκονομικοῦ προγράμματος, πραγματοποιητέους εἰς τὸ τέλος μιᾶς, ἔστω, τριετίας ἀπὸ τοῦ ἔτους τ τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 4 δεικνύουν τὰς ἀναγκαίας προϋποθέσεις ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιπέδων δράσεως τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ποσότητας (1) καὶ εἴδους πρώτων ὑλῶν, ἐπιπέδου εἰσαγωγῶν καὶ ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν σκοπῶν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος. Ἂν, ἑπομένως, ἐκ τῶν ὑπαρχουσῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν προκύπτῃ ὅτι ὁ κεφαλαιακὸς ἐξοπλισμὸς ὡρισμένων παραγωγικῶν κλάδων δὲν ἐπιτρέπει τὴν σχεδιασθεῖσαν ἐπέκτασιν ἢ ὅτι τὸ ἀπόθεμα συναλλάγματος τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας (λαμβανομένων ὑπ᾿ ὄψιν τῶν ἐξαγωγῶν) δὲν ἐπιτρέπει τὴν ἀπαιτουμένην αὔξησιν τῶν εἰσαγωγῶν, τότε οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος δὲν δύνανται νὰ πραγματοποιηθοῦν.

Ἐκ τοῦ συμπεράσματος αὐτοῦ αἱ ἁρμόδιαι ἀρχαὶ δύνανται νὰ ἀχθοῦν εἰς ἀποφάσεις οἰκονομικῆς πολιτικῆς διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ, πρώτων ὑλῶν κ.λ.π. τῆς δοθείσης οἰκονομίας, τὰ ὁποῖα ἀποκαλύπτει ἡ σύγκρισις τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 4 καὶ τῶν πραγματικῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας. Ἂν τοιαύτη λύσις εἶναι ἀδύνατος τότε καθίσταται ἀναγκαία ἡ ἀναπροσαρμογὴ τοῦ προγράμματος (ποσοτικῶς ἢ χρονικῶς), ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν πόρων. Οὕτω, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀποκαλυφθοῦν τυχὸν ὑπάρχουσαι ἀσυνέπειαι κατὰ τὴν κατάρτισιν ἑνὸς οἰκονομικοῦ προγράμματος.

3. 4. Πίναξ εἰσροῶν-ἐκροῶν καὶ ἐθνικοὶ λογαριασμοὶ

Ὁ πίναξ εἰσροῶν-ἐκροῶν δύναται, ὡς ἐλέχθη, νὰ παραβληθῇ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Ἐκ τῶν πληροφοριῶν τοῦ πίνακος τούτου δυνάμεθα, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμούς, νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως αὐτοῦ κατὰ δοθεῖσαν περίοδον.

Ὑπάρχουν ἐν τούτοις σημαντικαὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν καὶ τοῦ πίνακος εἰσροῶν-ἐκροῶν. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν διαφορῶν αὐτῶν εἶναι αἱ ἑξῆς δύο: α) εἰς τὸν πίνακα τῶν εἰσροῶν-ἐκροῶν περιέρχονται πληροφορίαι περὶ τοῦ τελικοῦ προϊόντος μιᾶς οἰκονομίας ἐντὸς μιᾶς δοθείσης περιόδου, ὡς συμβαίνει μὲ τοὺς ἐθνικοὺς λο-

1) Ἐφ᾿ ὅσον αἱ ἐγγραφαὶ τοῦ πίνακος 4 ἐκφράζουν ἀξίας προϊόντων ὑπολογιζομένας εἰς σταθερὰς τιμάς, πρὸς εὕρεσιν τῶν ποσοτήτων τῶν προϊόντων αὐτῶν ἀπαιτεῖται διαίρεσις τῶν ἀξιῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων σταθερῶν τιμῶν.

γαριασμούς, *ἐπὶ πλέον* ὅμως περιέχονται καὶ πληροφορίαι περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν τῆς δοθείσης οἰκονομίας, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείονται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. β) Ἐπειδὴ ἡ λογιστικὴ βάσις διὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν εἶναι αἱ ἀγοραὶ καὶ πωλήσεις ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, δὲν λαμβάνονται συνήθως ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, βάσει τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, τὰ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εἰσρέοντα εἰσοδήματα. Συνεπῶς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, ὡς δίδεται ἐκ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν, εἶναι συνήθως κατώτερον τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ὡς τοῦτο καθορίζεται εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν, κατὰ τὸ ποσὸν τῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εἰσρεόντων εἰσοδημάτων.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος δύναται νὰ προσδιορισθῇ κατὰ δύο τρόπους ἐκ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν: α) Διὰ προσθέσεως τῶν ἀθροιστικῶν κονδυλίων τῆς καταναλώσεως (ἰδιωτικῆς καὶ δημοσίας) καὶ τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (προσθέσεως) τοῦ ἐλλείμματος (πλεονάσματος) τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Οὕτω, βάσει τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 1 ἔχομεν:

$$180 + 50 + 45 + 18 - 18 = 275$$

Τὸ συνολικὸν ποσὸν 275 ἀποτελεῖ τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν εἰσόδημα (gross value added) τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους [1].

β) Διὰ προσθέσεως τῶν εἰσοδημάτων ἐξ ὑπηρεσιῶν καὶ τῶν φόρων:

$$215 + 60 = 275$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ πίνακος 4 λαμβάνομεν:

Ἀκαθ. ἐθν. εἰσόδημα: $241{,}5 + 69{,}3 - 18 = 292{,}8$

ἢ $229{,}1 + 63{,}7 = 292{,}8$

Ἐκ τῶν πινάκων 1 καὶ 4 δυνάμεθα τώρα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀναλυτικοὺς λογαριασμοὺς τοῦ πίνακος 5.

Οἱ λογαριασμοὶ I - IV ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀναλόγους τοιούτους τοῦ συστήματος ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Ὁ λογαριασμὸς V συναντᾶται μόνον εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν - ἐκροῶν.

Ἐφ' ὅσον ὁ πίναξ 1 παριστᾷ λογιστικὴν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας διὰ τὸ δοθὲν ἔτος, οἱ ἐκ τοῦ πίνακος τούτου ἀπορρέοντες λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς πραγματοποιηθέντα οἰκονομικὰ μεγέθη. Ἀντιθέτως οἱ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 4 διαμορφούμενοι λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς *προβλέψεις* περὶ τῆς ἐξελίξεως τῶν ὡς ἄνω μεγεθῶν, ὑπὸ τὴν

1) Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω σημειωθείσας ἐπιφυλάξεις καὶ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐν τῷ πίνακι ἀναγραφομένη ἀξία τῶν ἐπενδύσεων εἶναι ἀκαθάριστος.

προϋπόθεσιν τῆς μεταβολῆς τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Πίναξ 5

Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ καὶ Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ διὰ τὰ ἔτη τ καὶ ψ (α)

	Πραγματικὰ δεδομένα διὰ τὸ ἔτος Τ		Προβλέψεις διὰ τὸ ἔτος ψ		$^0/_0$ Μεταβολαὶ μεταξὺ ἐτῶν τ καὶ ψ
I. *Ἔσοδα καὶ ἔξοδα ἰδιωτῶν*					
α) Ἔσοδα (μισθοί, κέρδη κ.λ.π.)		215		229,1	6,5
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)		180		189	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)		35		40,1	14,5
II. *Ἔσοδα καὶ ἔξοδα Δημοσίου*					
α) Ἔσοδα (φόροι)		60		63,7	6,2
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)		50		52,5	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)		10		11,2	12
III. *Ἐξωτερικὸν ἐμπόριον*					
α) Εἰσαγωγαὶ		58		62	7
β) Ἐξαγωγαὶ		40		44	5
γ) Ἔλλειμμα Ἐμπορ. Ἰσοζυγίου		18		18	0
IV. *Ἐπένδυσις - Ἀποταμίευσις*					
α) Ἐπένδυσις		63		69,3	10
Παγία	45		49,5		
Ἀποθέματα	18		19,8		
β) Ἀποταμίευσις		63		69,3	10
Ἰδιωτῶν	35		40,1		
Δημοσίου	10		11,2		
Ἔλλειμμα Ἐμπ. Ἰσοζυγίου (β)	18		18		
V. *Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ*					
α) Ἀγοραὶ		220		231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	40		42,5		
» Μεταποιήσεως	100		105,2		
» Λοιπῶν Κλάδων	80		84,2		
β) Πωλήσεις		220		231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	80		84,4		
» Μεταποιήσεως	80		84		
» Λοιπῶν Κλάδων	60		63,5		

α) Διὰ τοῦ συμβόλου ψ παριστᾶται τὸ ἔτος εἰς ὃ ἀναφέρεται ὁ πίναξ 4.

β) Τὸ ἔλλειμμα τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποταμίευσις ἐξωτερικοῦ, χρηματοδοτοῦσα ἰσόποσον ἐπένδυσιν τῆς δοθείσης οἰκονομίας.

3. 5. Ἀνοικτὰ καὶ κλειστὰ ὑποδείγματα

Πάντα τὰ ὑποδείγματα τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν, ὡς καὶ τὸ ἤδη ἐξετασθὲν ὑπόδειγμα, ἕνα τομέα τελικῆς ζητήσεως, ἐξωγενῶς καθοριζόμενον, χαρακτηρίζονται ὡς «ἀνοικτά». Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα προῆλθον ἐκ τῶν «κλειστῶν» ὑποδειγμάτων εἰσροῶν - ἐκροῶν, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει τομεὺς τελικῆς ζητήσεως, τὰ δὲ ἐπίπεδα δράσεως πάντων τῶν οἰκονομικῶν κλάδων θεωροῦνται ὡς καθοριζόμενα ἐντὸς τοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ λαμβάνονται ὡς εἷς παραγωγικὸς κλάδος, τοῦ ὁποίου ἐκροαὶ (προϊόντα) εἶναι αἱ πρὸς τοὺς λοιποὺς κλάδους τῆς οἰκονομίας παρεχόμεναι ὑπηρεσίαι καὶ εἰσροαὶ εἶναι ἡ κατανάλωσις διαφόρων προϊόντων ἐγχωρίως παραγομένων ἢ εἰσαγομένων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

Τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον ἐπίσης θεωρεῖται εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα ὡς ἰδιαίτερος παραγωγικὸς κλάδος, μὲ εἰσροὰς τὰ ἐξαγόμενα προϊόντα καὶ ἐκροὰς τὰ εἰσαγόμενα τοιαῦτα [1]. Σταθεροὶ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ καθορίζονται ἐν προκειμένῳ διὰ πάντας τοὺς οἰκονομικοὺς κλάδους. Στατιστικαὶ δυσχέρειαι καὶ ἰδίως ὁ ἀπρόβλεπτος χαρακτὴρ τῆς ἐξελίξεως ὡρισμένων τομέων, π.χ. τοῦ τομέως τῶν Ἐξαγωγῶν, ὤθησαν εἰς τὴν ἐγκατάλειψιν τῶν κλειστῶν ὑποδειγμάτων καὶ τὴν ἀποδοχὴν τῶν ἀνοικτῶν τοιούτων. Τὰ ἀνοικτὰ συστήματα ἐξ ἄλλου εἶναι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των πρόσφορα διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐξετασθέντος ὑποδείγματος. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ὑποτίθεται συνήθως ὅτι τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὡρισμένων τομέων, π.χ. τοῦ κρατικοῦ τομέως καὶ τοῦ τομέως τῶν ἐξαγωγῶν, καθορίζονται ἐξωγενῶς ὡς σκοποὶ τοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιτρέψουν τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ σκοπῶν.

3. 6. Στατικὰ καὶ δυναμικὰ ὑποδείγματα

Εἰς τὸ προηγουμένως ἐξετασθὲν ὑπόδειγμα καθορίζονται τὰ ἐπίπεδα εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἀναφέρεται βεβαίως εἰς συγκεκριμένην χρονικὴν περίοδον ἀλλὰ δὲν δίδει τὴν διαχρονικὴν ἐξάρ-

1) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι οἱ ὅροι «κλειστὸν ἢ ἀνοικτὸν» ὑπόδειγμα δὲν σημαίνουν ἀποκλεισμὸν ἢ μὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου ἀπὸ τὸ ὑπόδειγμα.

τησιν τῶν μεταβλητῶν. Διὰ τοῦτο τὸ ὑπόδειγμα χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν».

Τὰ στατικὰ ὑποδείγματα δυνατὸν νὰ εἶναι ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν περιέχεται εἰς αὐτὰ ἰδιαίτερος τομεὺς τελικῆς ζητήσεως ἢ ἐὰν πάντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων ἀλληλοκαθορίζωνται ἐντὸς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς).

Διὰ τῶν στατικῶν ὑποδειγμάτων εἶναι, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, γενικῶς δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεταβολῶν εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν καὶ εἰς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐγγραφῶν πινάκων εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀνηκόντων εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους (συγκριτικὴ στατική), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ περιγραφὴ τῆς ἐξελίξεως τῶν διαφόρων μεγεθῶν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ἐν λόγῳ περιόδων χρονικὸν διάστημα. Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ κενοῦ αὐτοῦ ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ ἐπενόησε «δυναμικὰ» ὑποδείγματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσάγονται ὁ *χρόνος* καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν παραγωγικῶν κλάδων ὡς ὑπολογιστικοὶ παράγοντες. Τὰ δυναμικὰ ὑποδείγματα διακρίνονται ὡσαύτως εἰς ἀνοικτὰ καὶ κλειστά, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου. Μέχρι τοῦδε δὲν ἐγένετο σοβαρὰ προσπάθεια ἐμπειρικῆς ἐπαληθεύσεως τῆς ἀξίας τῶν δυναμικῶν ὑποδειγμάτων, λόγῳ στατιστικῶν καὶ ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν.

3. 7. Ἐφαρμογαὶ

Ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν ἤρχισεν ἤδη νὰ χρησιμοποιῆται διὰ πρακτικοὺς σκοπούς, εἰς διαφόρους χώρας.

Ἡ ταχεῖα διάδοσις τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν ὀφείλεται τόσον εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἀξίαν ὅσον καὶ εἰς τὴν στατιστικὴν χρησιμότητα αὐτοῦ. Ἀναλυτικῶς τὸ σύστημα τοῦτο (ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς βοηθητικὸν ὄργανον οἰκονομικῆς πολιτικῆς, εἰδικώτερον δὲ διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τοῦ συστήματος εἰσροῶν-ἐκροῶν, ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, εἶναι ἡ ἱκανότης αὐτοῦ νὰ παρακολουθῇ τόσον τὰς *ἀμέσους* ὅσον καὶ τὰς *ἐμμέσους* οἰκονομικὰς συνεπείας δοθείσης μεταβολῆς εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι εἰς μίαν χώραν μελετᾶται ἡ ἐκτέλεσις ἑνὸς στεγαστικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων. Δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δύσκολον νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ποσότητες σιδήρου, τσιμέντου καὶ λοιπῶν οἰκονομικῶν ὑλικῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ὡς ἄνω ἐκτέλεσιν. Πρέπει ὅμως νὰ ληφθῇ ἐπίσης ὑπ' ὄψιν ὅτι, πρὸς ἐξασφάλισιν τῶν ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων π.χ. σιδήρου, ἀπαιτοῦνται ἀνάλογοι ποσότητες σιδηρομεταλλεύματος, συγκοινωνιακῶν ὑπηρεσιῶν, καυσίμου ὕλης κ.λ.π., ἢ ἐνδεχομένως ἀνάλογος ποσότης συναλλάγματος, πρὸς εἰσαγωγὴν τοῦ σιδήρου ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

Καθίσταται εὐκόλως ἀντιληπτὸν πόσον πολύπλοκον ἀποβαίνει τὸ συνολικὸν πλέγμα τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι ἀναφαίνονται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος ἢ οἱουδήποτε ἄλλου προγράμματος ἐπενδύσεων ἢ καταναλώσεως. Ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν παρέχει τὴν δυνατότητα εὐχεροῦς παρακολουθήσεως τοῦ πολυπλόκου αὐτοῦ πλέγματος σχέσεων.

Μέχρι τοῦδε ὑπετίθετο ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν διαφόρων ἀγαθῶν (καὶ ὑπηρεσιῶν) παραμένουν σταθεραὶ καὶ ὅτι μόνον αἱ ποσότητες αὐτῶν εἶναι μεταβληταί. Εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ ἡ κατάστρωσις ἑνὸς ὑποδείγματος εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ποσότητες λαμβάνονται ὡς σταθερὰ μεγέθη, αἱ δὲ τιμαὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται. Αἱ μεταβληταὶ τιμαὶ τοῦ ὑποδείγματος δύνανται τότε νὰ ταξινομηθοῦν εἰς δύο κατηγορίας, τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τιμὰς καὶ τὰς ἐξηρτημένας τοιαύτας (1).

Ἂν εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῶν μεταβλητῶν τιμῶν ληφθοῦν ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, π.χ., οἱ ἐργατικοὶ μισθοὶ καὶ ὡς ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ αἱ τιμαὶ τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων, τότε θὰ ἦτο δυνατὸν διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ ὑποδείγματος τούτου (2) νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἄμεσοι καὶ ἔμμεσοι ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους καὶ τῶν τιμῶν διαφόρων προϊόντων, αἱ ἀπορρέουσαι ἀπὸ δοθεῖσαν μεταβολὴν εἰς τοὺς ἐργατικοὺς μισθοὺς (3). Τὰ προβλήματα τῆς ἐπιπτώσεως τῶν ἐμμέσων φόρων, τῶν ὅρων ἐμπορίου μεταξὺ γεωργίας καὶ βιομηχανίας καὶ γενικῶς προβλήματα νομισματικῆς φύσεως θὰ ἠδύναντο κατ' ἀρχὴν νὰ ἐρευνηθοῦν δι' ἑνὸς τοιούτου ὑποδείγματος.

Πλὴν τῶν καθαρῶς ἀναλυτικῶν ἐφαρμογῶν τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως (4), ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν καὶ αἱ στατιστικαὶ ἐφαρμογαὶ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν. Διευκρινίσθη ἤδη ἡ σχέσις τοῦ πίνακος τούτου πρὸς τὸ σύστημα ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Διὰ τῆς συστηματικῆς καταχωρήσεως εἰς τὸν ἐν λόγῳ πίνακα στατιστικῶν στοιχείων περὶ τοῦ τε-

---

1) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ ἐξετασθὲν (ἀνοικτὸν) ὑπόδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μεταβληταὶ ποσότητες ταξινομοῦνται εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν τομέων (ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ) καὶ τὴν τελικὴν ζήτησιν (ἀνεξάρτητοι μεταβληταί).

2) Κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν τμήματι (3. 3.), ἀνωτέρω, ἐφαρμοσθέντα.

3) Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο θὰ ἦτο χρήσιμον, π.χ., διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἐπιδράσεων σχεδιαζομένης ἀναπροσαρμογῆς ἐργατικῶν μισθῶν λόγῳ πληθωρισμοῦ.

4) Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναφερθείσας ἐφαρμογὰς πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ ἡ καλουμένη «διαχωρικὴ ἀνάλυσις» (interregional analysis), ἡ ὁποία παρουσιάζει ἐνδιαφέρον διὰ χώρας μὲ σοβαρὰς διαφορὰς εἰς τὰ ἐπίπεδα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῶν διαφόρων περιοχῶν των. Βλ. Chenery and Clark: The structure anc Growth of Italian Economy, Roma 1953.

λικοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς οἰκονομίας, ἐντὸς δοθείσης περιόδου, ὡς ἐπίσης καὶ περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν αἱ ὁποῖαι ἔλαβον χώραν κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον, παρέχεται ἡ δυνατότης ἐποπτικῆς ἐξετάσεως τῶν στοιχείων αὐτῶν καὶ συνεπῶς ἐκκαθαρίσεως τυχὸν ἀσυνεπειῶν ἢ συμπληρώσεως πληροφοριακῶν κενῶν (1). Τὰ κενὰ ταῦτα τοῦ πίνακος εἰσροῶν-ἐκροῶν χρησιμοποιεῖται ἐπιτυχῶς ὡς μέσον βελτιώσεως τῶν στατιστικῶν ἐκτιμήσεων ἢ πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν.

3. 8. Παρατηρήσεις

3.8.1. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ὡς καθίσταται προφανὲς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων, ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν βασίζεται εἰς σημαντικὸν βαθμὸν ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Τὴν μεθοδολογικὴν καὶ ἀπλοποιητικὴν ἀξίαν τῆς ὡς ἄνω ὑποθέσεως οὐδεὶς ἀμφισβητεῖ. Ἠγέρθησαν ὅμως σοβαραὶ ἀμφισβητήσεις ἐὰν αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν περιγραφὴν πραγματικῶν καταστάσεων. Τὰ προβαλλόμενα ἐν προκειμένῳ ἐπιχειρήματα εἶναι, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι εἰς τὰς παραγωγικὰς μονάδας παρατηρεῖται ἐνίοτε τὸ φαινόμενον τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως — εἴτε ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς φθινούσης, εἴτε ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς αὐξούσης ἀποδόσεως — ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἰδίως ἡ ἐξέλιξις τῆς τεχνικῆς ἐπιφέρουν σοβαρὰς μεταβολὰς εἰς τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστάς.

Μολονότι τὸ ἐπιχείρημα τῶν μεταβολῶν τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν, καὶ τὸ ἐπιχείρημα τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως, δὲν ἔχουν πάντοτε τὴν εἰς αὐτὰ ἀποδιδομένην σημασίαν (2), ἡ ἀνωτέρω κριτικὴ εἶναι νομίζομεν κατὰ βάσιν ὀρθή, λόγῳ κυρίως τῆς σοβαρότητος τοῦ ἐπιχειρήματος περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς τεχνικῆς. Δεδομένου μάλιστα ὅτι δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὸν νὰ προβλεφθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς τεχνικῆς, δὲν εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ περιληφθοῦν καὶ αἱ σχετικαὶ μεταβολαὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν εἰς τὸ ὑπόδειγμα ἀναλύσεως.

Βεβαίως ἡ τεχνικὴ δὲν μεταβάλλεται οὐσιωδῶς ἐντὸς σχετικῶς βραχέος χρονικοῦ διαστήματος καὶ συνεπῶς ἡ σταθερότης τῶν τεχνολογι-

1) Εἰς τινας περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν σχέσεων τοῦ πίνακος (π.χ. τῆς ἰσότητος τοῦ ἀθροίσματος τῶν στηλῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σειρῶν) τυχὸν ἐλλείποντα στατιστικὰ στοιχεῖα.

2) Βλ. σχετικῶς Masao Fukuoka: Full employment and constant coefficients of production, Quart. Journal of Economics, Febr. 1955 καὶ E. Simpson: Inflation, deflation and employment in Italy» εἰς Review of Economic Studies, 1941 - 1950.

κῶν συντελεστῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ βραχυχρονίως ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις εἰς τὴν πραγματικότητα. Διὰ μακροτέρας ὅμως περιόδους (π.χ. διὰ περιόδους 3–5 ἢ περισσοτέρων ἐτῶν) ἡ μεταβλητότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀγνοηθῇ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ προγνωστικὴ ἱκανότης τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἶναι μᾶλλον περιωρισμένη. Δὲν δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν μιᾶς ὡρισμένης περιόδου, διὰ νὰ προβλέψωμεν ἀσφαλῶς τὰς μελλοντικὰς οἰκονομικὰς ἐξελίξεις, λόγῳ ἀκριβῶς τῶν ἀπροβλέπτων μεταβολῶν εἰς τοὺς συντελεστὰς αὐτούς. Πρέπει νὰ ὁμολογηθῇ ὅτι ἡ μέχρι τοῦδε χρησιμοποίησις τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν δι' οἰκονομικὴν πρόγνωσιν δὲν εἶχε τὰ ἀνσμενόμενα ἀποτελέσματα (1). Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι ἄλλη τις μέθοδος προγνώσεως θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ μὲ μεγαλυτέρας πιθανότητας ἐπιτυχίας πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ἡ κτηθεῖσα πεῖρα, ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν «οἰκονομικῶν βαρομέτρων» μέχρι τῶν σημερινῶν πολυπλόκων οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων, κατέστησεν τοὺς οἰκονομολόγους λίαν ἐπιφυλακτικοὺς ὅσον ἀφορᾷ τὰς προγνωστικὰς δυνατότητας τῆς ἐπιστήμης των.

Θὰ ἠδύνατό τις, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, νὰ ἐρωτήσῃ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ βασιζώμεθα ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ διὰ τὴν κατάρτισιν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἶναι ἀνενδοιάστως καταφατική. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως ἀντιληπτὴ ἡ ἀπάντσσις εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ σαφὴς διάκρισις μεταξὺ δύο ἐννοιῶν, ἤτοι τῆς *περιγραφικῆς* (descriptive) καὶ τῆς *κανονιστικῆς* (normative) ἐννοίας τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν αὐτῆς ἔννοιαν ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ τὴν οἰκονομικὴν πρόγνωσιν. Ὑποτίθεται δηλαδὴ ὅτι αἱ παραγωγικαὶ συναρτήσεις συμπεριφέρονται καθ' ὡρισμένον ἁπλοῦν τρόπον καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι δυνατὴ ἡ προβολὴ τῶν οἰκονομικῶν ἐξελίξεων καὶ εἰς τὸ μέλλον. Αἱ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαι κριτικαὶ παρατηρήσεις καὶ γενικῶς αἱ συνήθως διατυπούμεναι παρατηρήσεις ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλονιῶν ἀφοροῦν ἀκριβῶς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ὑπὸ τὴν περιγραφικήν της ἔννοιαν.

Ἡ ὑπόθεσις ὅμως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμὸν οὐχὶ ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν ἀλλὰ ὑπὸ τὴν κανονιστικὴν αὐτῆς ἔννοιαν. Ὑπὸ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔννοιαν ἡ

---

1) Βλ. Nat. Bureau of Econ. Research: «Input - Output Analysis. An Appraisal». Princeton Univ. Press, 1955.

ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν συνδέεται μὲ τὸ βασικὸν πρόβλημα τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης οἰκονομικῆς διαρθρώσεως, δηλαδὴ τῶν καλυτέρων ἐκ τῶν *ὑφισταμένων* παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐπιλογῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἔννοια τῆς μελλοντικῆς ἐξελίξεως δὲν ὑπεισέρχεται κατ' ἀρχὴν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ. Ὅταν, π.χ., ἕνας μηχανικὸς προγραμματίζει τὴν κατασκευὴν ἑνὸς ἔργου, ἔχει νὰ ἐπιλέξῃ τὴν καλυτέραν—βάσει ὡρισμένων κριτηρίων—ἐκ τῶν *ὑφισταμένων τεχνικῶν μεθόδων* διὰ τὴν κατασκευὴν του ἔργου αὐτοῦ. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αἱ τεχνικαὶ μέθοδοι θὰ μεταβληθοῦν εἰς τὸ μέλλον. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται προφανῶς νὰ ἐπηρεάσῃ τὴν διατύπωσιν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀντιμετωπίζει ὁ μηχανικός. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι κανονιστικοῦ χαρακτῆρος, καὶ ἡ λύσις του καθορίζει τί *πρέπει* νὰ γίνῃ καὶ ὄχι τί πράγματι θὰ γίνῃ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁ οἰκονομικὸς προγραμματισμός, γενικώτερον, θέτει προβλήματα κανονιστικοῦ χαρακτῆρος, ἡ λύσις τῶν ὁποίων συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξὺ τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, πρὸς ἐπίτευξιν ὡρισμένου σκοποῦ [1].

Ὡς ἐλέχθη, παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν πρὸς παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ. Κατὰ συνέπειαν, «ἀρίστη παραγωγικὴ δραστηριότης» σημαίνει ἄριστος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ. Ἡ διατήρησις ὅμως τοῦ ἀρίστου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ—ὡς βεβαίως καὶ οἱουδήποτε ἄλλου ὡρισμένου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ—εἶναι δυνατὴ μόνον ἂν οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς παραμένουν σταθεροὶ κατὰ κλίμακα παραγωγῆς καὶ διαχρονικῶς, *ἂν δηλαδὴ ἡ συνάρτησις παραγωγῆς συμπεριφέρεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν*. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς εἶναι προφανὴς ὁ κανονιστικὸς χαρακτὴρ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν σημαίνουν ὅτι, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν προβλεπομένων ἐπενδύσεων, ἡ ἐπιλεγεῖσα παραγωγικὴ δραστηριότης θὰ λειτουργῇ ἀκριβῶς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Διάφορα αἴτια τεχνικῆς ἢ ἄλλης φύσεως (ὡς π.χ. ἡ ἔλλειψις πλήρους διαιρετότητος τῶν παραγομένων ἀγαθῶν ἢ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς) δημιουργοῦν ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸ παραγωγικὸν optimum τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Αἱ ἀποκλίσεις αὗται δὲν θίγουν ἐν τούτοις οὐσιω-

1) Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τῶν ἀρίστων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἐξετάζεται εἰδικώτερον εἰς Α. Λάζαρη «Προγραμματισμὸς τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶς καθυστερημένων Χωρῶν», Ἀθῆναι 1960.

δῶς τὴν σταθερότητα τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ὅσον ἀφορᾷ τὴν δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Κατὰ συνέπειαν εἶναι δυνατόν, μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς δραστηριότητος ταύτης, νὰ προβλεφθοῦν μελλονταὶ ἐξελίξεις, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως τῆς ἐκτελέσεως τοῦ σχετικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων.

Βεβαίως εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντικατάστασις εἰς τὸ μέλλον τῆς ἐπιλεγείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' ἄλλης καλυτέρας, ἥτις βασίζεται ἐπὶ νεωτέρων τεχνικῶν ἐξελίξεων, μὲ συνέπειαν τὴν ἀλλοίωσιν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ἀλλ' ἡ ἀντικατάστασις αὕτη εἶναι συνήθως ἀσύμφορος ἂν δὲν ἔχουν προηγουμένως ἀποσβεσθῇ αἱ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος διενεργηθεῖσαι ἐπενδύσεις. Ὁπωσδήποτε, πρὸς ἀποφυγὴν ἐσφαλμένων ἐκτιμήσεων, ἐπιβάλλεται ἡ ἐπανεξέτασις τοῦ καταρτισθέντος προγράμματος κατὰ περιόδους καὶ ἡ προσαρμογὴ αὐτοῦ εἰς τὰς ἑκάστοτε διαμορφουμένας νέας συνθήκας καὶ τεχνικὰς ἐξελίξεις. Τοῦτο καθίσταται ἄλλωστε δυνατὸν καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ προβλεπόμεναι ὑπὸ τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεις δὲν γίνονται ἐφ' ἅπαξ ἐντὸς μιᾶς βραχείας χρονικῆς περιόδου, ἀλλ' ἐκτελοῦνται τμηματικῶς ἐντὸς μιᾶς σχετικῶς μακρᾶς χρονικῆς περιόδου.

3.8.2. Στατιστικαὶ καὶ ὑπολογιστικαὶ δυσχέρειαι. Μολονότι διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν δύνανται νὰ ἀντιμετωπισθοῦν ἀποτελεσματικώτερον ἢ δι' ἄλλων ἐμπειρικῶν μεθόδων πλεῖστα οἰκονομικὰ προβλήματα, δὲν πρέπει πάντως νὰ παραβλέπεται ἡ σοβαρότης τῶν στατιστικῶν καὶ ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν τὰς ὁποίας συνεπάγεται συνήθως ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς.

Ἐν πρώτοις ἡ ἀνάλυσις αὕτη προϋποθέτει εἰδικευμένον προσωπικὸν καὶ ἀνεπτυγμένον στατιστικὸν σύστημα. Προϋποθέτει ἐπίσης λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὑπολογισμὸν τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς καὶ ἀντιστροφὴν τῆς μήτρας ταύτης (1). Ἡ ἐξασφάλισις τῶν ὡς ἄνω προϋποθέσεων ἀπαιτεῖ συνήθως χρόνον μακρόν, ἀκόμη καὶ εἰς ἀνεπτυγμένας ἀπὸ στατιστικῆς ἀπόψεως χώρας, καὶ ἀναλόγους οἰκονομικὰς θυσίας. Διὰ τοῦτο ἡ ἀξία τῆς μεθόδου εἰσροῶν - ἐκροῶν, ἐν σχέσει πρὸς ἄλλας μεθόδους, πρέπει νὰ κρίνεται ὄχι μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀναλυτικῆς της ὑπεροχῆς, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κόστους τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς.

3.9. Περίληψις

Ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀποτελεῖ συνέχειαν τῶν κλασσικῶν

1) Δυνατὸν ἀντὶ τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ κατὰ προσέγγισιν μεθόδων (βλ. 3.10.3.).

συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας καὶ στηρίζεται ὡς καὶ τὰ τελευταῖα εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἀλλ' ἐνῷ τὰ κλασσικὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας δὲν κατέρχονται ἀπὸ τοῦ ὕψους τῆς θεωρητικῆς ἐρεύνης, διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν ἐπιχειρεῖται ἡ δημιουργία ἑνὸς ἀναλυτικοῦ ὀργάνου διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων.

Τὰ ὑποδείγματα τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν χαρακτηρίζονται ὡς δυναμικὰ ἢ στατικά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν παρακολουθοῦν ἢ ὄχι διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Τὰ ὑποδείγματα τοῦτα διακρίνονται ἐξ ἄλλου εἰς ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν περιλαμβάνουν ἕνα ἐξωγενῶς καθοριζόμενον τομέα τελικῆς ζητήσεως προϊόντων, πρὸς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ὁλόκληρον τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, ἢ ἐὰν πάντα τὰ οἰκονομικὰ μεγέθη καθορίζωνται ἐνδογενῶς (ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς εἷς παραγωγικὸς κλάδος, παράγων ὑπηρεσίας καὶ ἀπορροφῶν καταναλωτικὰ ἀγαθά.

Αἱ προσπάθειαι ἐμπειρικῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀπέδειξαν ὅτι, πρὸς τὸ παρὸν τοὐλάχιστον, μόνον τὰ στατικὰ ἀνοικτὰ ὑποδείγματα εἶναι πρόσφορα διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, κυρίως διότι τὰ ὑποδείγματα ταῦτα παρουσιάζουν σχετικῶς ὀλιγωτέρας στατιστικὰς καὶ ὑπολογιστικὰς δυσχερείας καὶ διότι εἶναι κατάλληλα διὰ τὴν μελέτην θεμάτων οἰκονομικῆς πολιτικῆς.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν εἶναι ὅτι παρέχει τὴν δυνατότητα εὐχεροῦς παρακολουθήσεως τόσον τῶν ἀμέσων ὅσον καὶ τῶν ἐμμέσων οἰκονομικῶν συνεπειῶν δοθείσης μεταβολῆς ἑνὸς οἰκονομικοῦ μεγέθους (π.χ. τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐξαγωγῶν ἢ τῶν κρατικῶν ἐπενδύσεων). Ἡ ἀρχὴ τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως (ὑπὸ τὴν συνεργατικὴν αὐτῆς μορφὴν) χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διὰ μελέτην καὶ τὴν λύσιν πραγματικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Μηχανικὴ πάντως ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν δὲν ἀρκεῖ. Ἀπαιτεῖται ἐπίσης γνῶσις τῶν συνθηκῶν ἑκάστης συγκεκριμένης περιπτώσεως ἐφαρμογῆς, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὕψους καὶ τῆς συνθέσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ ὑποδείγματος. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποβῇ πολύτιμον ὄργανον πρακτικῆς οἰκονομικῆς ἐρεύνης, εἰς χεῖρας πεπειραμένου ἀναλυτοῦ.

Εἰς πλείστας χώρας ἔχει κατανοηθῆ ἡ πρακτικὴ χρησιμότης τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, τὸ ὁποῖον ἤρχισεν ἤδη νὰ ἐφαρμόζεται συστηματικῶς εἰς προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ἢ διὰ καθαρῶς στατιστικοὺς σκοπούς. Τὴν τάσιν ταύτην ὑποβοηθεῖ καὶ ἡ ὁλονὲν αὐξανομένη σημασία τῶν κυβερνητικῶν οἰκονομικῶν προγραμμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται γενικῶς νὰ ἀντιμετωπισθοῦν εὐχερέστερον καὶ ἀποτελεσματικώτερον διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν, παρὰ διὰ τῶν παλαιοτέρων στατιστικῶν μεθόδων.

3. 10. Μαθηματικὴ ἐπισκόπησις τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν-ἐκροῶν

3. 10. 1. Κλειστὸν ὑπόδειγμα. Ἂν X_ι παριστᾷ τὴν ἀξίαν (1) τοῦ ***συνολικοῦ*** ἐτησίου προϊόντος τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου ι καὶ $\chi_{\iota\kappa}$ τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τούτου, ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται ἐντὸς μιᾶς περιόδου (π.χ. ἑνὸς ἔτους) ὑπὸ τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου κ, τότε αἱ συναλλακτικαὶ σχέσεις τῶν ν παραγωγικῶν κλάδων μιᾶς οἰκονομίας, κατὰ τὴν ὡς ἄνω περίοδον, δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ ἀκολούθου συστήματος:

$$\begin{array}{l} X_1 - \chi_{12} - \chi_{13} - \ldots - \chi_{1\nu} = 0 \\ -\chi_{21} + X_2 - \chi_{23} - \ldots - \chi_{2\nu} = 0 \\ -\chi_{31} - \chi_{32} + X_3 - \ldots - \chi_{3\nu} = 0 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ -\chi_{\nu 1} - \chi_{\nu 2} - \chi_{\nu 3} - \ldots + X_\nu = 0 \end{array} \tag{1}$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$X_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \chi_{\iota\kappa} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \text{καὶ } \iota \neq \kappa \end{array} \right. \tag{1'}$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) παριστοῦν ἁπλῶς λογιστικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἀπεικονίζουσαι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν, κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον. Οὕτω, ἡ πρώτη ἐξίσωσις δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν ἐτήσιον προϊὸν τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου 1 διανέμεται ἐξ ὁλοκλήρου μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων 2, 3, . . , ν (2). Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Εἰς τὸ σύστημα (1) τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς εἷς παραγωγικὸς κλάδος, ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, ὁ ὁποῖος προσφέρει εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους τὰς ὑπηρεσίας του (ἐργασίαν) καὶ ἀπορροφᾷ καταναλωτικὰ ἀγαθά. Ὁμοίως, ὁ κρατικὸς τομεὺς δύναται νὰ θεω-

1) Ἡ ἀξία τῶν προϊόντων ἀποτιμᾶται εἰς σταθερὰς τιμάς.

2) Εἰς τὸ X_1 δὲν συμπεριλαμβάνεται ἡ ἀξία τῆς ὑπὸ τοῦ κλάδου 1 καταναλισκομένης ποσότητος ἰδίου προϊόντος, δι' ὃ καὶ εἰς τὴν συνοπτικὴν παράστασιν (1') δὲν ἀθροίζονται τὰ στοιχεῖα $\chi_{\iota\kappa}$ ὅταν $\iota = \kappa$.

ρηθῇ ὡς παραγωγικὸς κλάδος, προσφέρων ὑπηρεσίας διοικήσεως, ἀσφαλείας κ.λ.π., εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους καὶ καταναλίσκων μέρος τοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν (1). Τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῇ ὡς ἰδιαίτερος κλάδος, ἀπορροφῶν τὰ *ἐξαγόμενα* προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων καὶ προσφέρων εἰς αὐτοὺς τὰ *εἰσαγόμενα* ἐκ τῆς ἀλλοδαπῆς προϊόντα.

Αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀξιῶν τῶν ὑφ' ἑκάστου κλάδου καταναλισκομένων προϊόντων ἐντὸς μιᾶς περιόδου καὶ τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς σειρᾶς ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$\alpha_{\iota\kappa} = \frac{\chi_{\iota\kappa}}{X_\kappa} \left\{ \begin{array}{l} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \kappa = 1, 2, \ldots, \nu \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Τὸ $\alpha_{\iota\kappa}$ εἶναι «συντελεστὴς εἰσροῆς» (2) καὶ καθορίζει τὴν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τὸν κλάδον ι διὰ τὴν χρησιμοποίησιν ποσότητος προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου πρὸς παραγωγὴν προϊόντος τοῦ κλάδου κ ἀξίας μιᾶς νομισμ. μονάδος. Οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς θεωροῦνται *σταθεροί*, ἀνεξαρτήτως τοῦ βαθμοῦ καὶ τῆς περιόδου ἀπασχολήσεως τῶν οἰκείων κλάδων (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν). Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν δι' ἕκαστον κλάδον ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν «εἰσροῶν» αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν τοῦ ὡς ἄνω κλάδου. Ἐνταῦθα ὑποτίθεται γενικῶς, πρὸς ὁμοιομορφίαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰσροῶν δι' ὅλους τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους εἶναι ν, ἤτοι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγωγικῶν κλάδων τοῦ συστήματος, ἀλλ' ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ μερικῶν ἐκ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἤδη λεχθέντα, οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς διὰ τὸν κλάδον 1 θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \end{bmatrix}$$

1) Τὸ κόστος τῶν ὡς ἄνω προϊόντων καλύπτεται ἐκ τῶν φορολογικῶν ἐσόδων, τὰ ὁποῖα καταβάλλονται εἰς τὸ Κράτος ὑπὸ τῶν λοιπῶν κλάδων, ὡς οἱονεὶ ἀντιπαροχὴ διὰ τὰς κρατικὰς ὑπηρεσίας.

2) Βλ. 3.3.2., ἀνωτέρω.

Κατ' ἀναλογίαν, οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς τῶν κλάδων 2 καὶ ν θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu 2} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{3\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

ἀντιστοίχως.

Αἱ ἀνωτέρω «στῆλαι» τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς παριστοῦν προφανῶς τὰς *παραγωγικὰς δραστηριότητας* τῶν ἀντιστοίχων κλάδων, αἱ ὁποῖαι δεικνύουν τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας παραγωγῆς προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τῶν κλάδων αὐτῶν.

Ἐκ τῶν στηλῶν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν διαφόρων κλάδων δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὴν «μήτραν τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς», δι' ὁλόκληρον τὴν ἐξεταζομένην οἰκονομίαν :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα ἡ ὑφ' ἑκάστου κλάδου κατανάλωσις ἰδίου προϊόντος (βλ. ὑποσημ. 40), θὰ θέσωμεν συμβατικῶς $\chi_{\iota\iota} = 0$ καί :

$$\alpha_{\iota\iota} = \frac{0}{X_\iota} = 0 \qquad (\iota = 1, 2, \dots, \nu)$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ κυρία διαγώνιος (α_{11}, α_{22}, $\alpha_{33}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$) τῆς μήτρας Α περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς (ἐξίσωσις 2) δυνάμεθα τώρα, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ σύστημα (1), νὰ σχηματίσωμεν τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{array}{rl} X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \ldots - \alpha_{1\nu} X_\nu = 0 & \\ -\alpha_{21} X_1 + \quad X_2 - \alpha_{23} X_3 - \ldots - \alpha_{2\nu} X_\nu = 0 & \\ -\alpha_{31} X_1 - \alpha_{32} X_2 + \quad X_3 - \ldots - \alpha_{3\nu} X_\nu = 0 & \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot & (4) \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot & \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot & \\ -\alpha_{\nu 1} X_1 - \alpha_{\nu 2} X_2 - \alpha_{\nu 3} X_3 - \ldots + \quad X_\nu = 0 & \end{array}$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$X_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} X_\kappa = 0 \qquad \begin{cases} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \alpha_{\iota\kappa} = 0 \text{ διὰ } \iota = \kappa \end{cases}$$

Ἐφ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς παραμένουν σταθεροί, αἱ ἀξίαι τῶν συνολικῶν προϊόντων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἄγνωστοι μεταβληταὶ εἰς τὸ σύστημα (4). Δεδομένου ὅτι ὁ ἀριθμὸς ν τῶν ἐν τῷ συστήματι ἐξισώσεων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων (X_1, X_2, ..., X_ν), τὸ σύστημα τοῦτο δύναται κατ' ἀρχὴν νὰ λυθῇ. Ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία λύσεως στηρίζεται εἰς τὰ περὶ *ὁμογενῶν* συστημάτων ὁριζόμενα [1]. Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν ἡ λύσις εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, μόνον ἂν ἡ $\nu \times \nu$ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι μηδὲν καὶ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν $\mu \times \mu$ ὁριζουσῶν (διὰ $\mu = 1, 2, \ldots, \nu - 1$) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ τοιαύτη λύσις ἐν τούτοις δίδει μόνον τὴν *σχετικὴν* τιμὴν τῶν ζητουμένων μεταβλητῶν καὶ εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καθορισθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ μιᾶς οἱασδήποτε μεταβλητῆς πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν λοιπῶν. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὅλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

Ὡς ἐλέχθη, τὸ σύστημα (4) ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὸ σύστημα (1) διὰ τῆς καταλλήλου εἰσαγωγῆς εἰς τὸ τελευταῖον τῶν σταθερῶν συντελεστῶν εἰσροῆς, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἡ μετατροπὴ αὕτη προσδίδει εἰς τὸ σύστημα (4) λειτουργικὴν ἀξίαν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ κατ' ἀρχήν, ὄχι μόνον διὰ λογιστικὴν ἀπεικόνισιν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων τῆς οἰκονομίας, ἀλλ' ἐπίσης καὶ δι' οἰκονομικὴν πρόγνωσιν ἢ δοκιμαστικὸν σχεδιασμόν.

Τὸ ὑπόδειγμα τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ συστήματος ἐξισώ-

---

1) Βλ. Χ. Φουσιάνη: Ἀνωτέρα Ἄλγεβρα. Ἀθῆναι, 1954.

σεων (4) χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν», καθόσον ἡ λύσις αὐτοῦ δὲν δίδει διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, ἀλλ' εἰκονίζει μόνον μίαν κατάστασιν ex post ἰσορροπίας. Εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν σημείων (συγκριτικὴ στατική), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ παρακολούθησις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν κατὰ τὴν *διάρκειαν* δοθείσης περιόδου. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο χαρακτηρίζεται ἐξ ἄλλου ὡς «κλειστόν», διότι δὲν περικλείει ἐξωγενεῖς μεταβλητάς: Ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων, τὰ ὁποῖα ὑποδηλοῦνται διὰ τῶν X_1, $X_2, \ldots, X_\nu$, ἀλληλοκαθαρίζονται ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος.

Αἱ μεταβληταὶ $X_1, X_2, \ldots, X_\iota$ ἐκφράζουν, ὡς ἐλέχθη, τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων κλάδων, εἰς σταθερὰς τιμάς. Θὰ ὑποθέσωμεν περαιτέρω ὅτι αἱ τιμαὶ μονάδος $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$, τῶν προϊόντων τῶν κλάδων $1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι ἐπίσης σταθεραί. Δυνάμεθα τότε νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ποσότητας συνολικῆς παραγωγῆς τῶν προϊόντων τῶν ὡς ἄνω κλάδων ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{X_\iota}{\tau_\iota} = X'_\iota \\ \iota = (1, 2, \ldots, \nu) \end{array}\right\}$$

3.10.2. Ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα. Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ «ἀνοικτοῦ» ὑποδείγματος εἶναι ὅτι ὡρισμέναι τῶν ἐν αὐτῷ μεταβλητῶν θεωροῦνται ὡς ἀνεξαρτήτως (ἐκτὸς τοῦ ὑποδείγματος) καθοριζόμεναι. Οὕτω θὰ ἠδύνατο, π.χ., νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως προϊόντων ὑπὸ τῶν φυσικῶν προσώπων (1), ὁπότε ὁ σχετικὸς κλάδος «οἰκονομοῦντα ἄτομα» χαρακτηρίζεται ὡς ἐξωτερικὸς τομεὺς διὰ τὸ ὑπόδειγμα καὶ διασπᾶται εἰς τοὺς ὑποτομεῖς Ἰδιωτικὴ Κατανάλωσις καὶ Ὑπηρεσίαι Προσώπων, τῶν ὑποτομέων τούτων μόνον χαλαρῶς συνδεομένων.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ νιοστὸς κλάδος εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) ἀντιπροσωπεύει τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα, πρὸς μετατροπὴν τοῦ ὡς ἄνω ὑποδείγματος ἀπὸ κλειστοῦ εἰς ἀνοικτὸν ἡ νιοστὴ ἐξίσωσις ἀπολείφεται, αἱ δὲ ἐπὶ μέρους ἀξίαι τῶν ἀπορροφωμένων ὑπὸ τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων προϊόντων τῶν ὑπολοίπων κλάδων $(1, 2, 3, \ldots, \mu)$ (2) μεταφέρονται εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τοῦ συστήματος καὶ

1) Ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν κατανάλωσιν προϊόντων ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων.

2) Δηλαδὴ οἱ νιοστοὶ ὅροι τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων.

λαμβάνονται ὡς γνωσταὶ σταθεραὶ $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_\mu$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως:

$$\begin{array}{rl} X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \ldots - \alpha_{1\mu} X_\mu = \Psi_1 & \\ -\alpha_{21} X_1 + X_2 - \alpha_{23} X_3 - \ldots - \alpha_{2\mu} X_\mu = \Psi_2 & \\ -\alpha_{31} X_1 - \alpha_{32} X_2 + X_3 - \ldots - \alpha_{3\mu} X_\mu = \Psi_3 & \quad (5) \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot & \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot & \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot & \\ -\alpha_{\mu 1} X_1 - \alpha_{\mu 2} X_2 - \alpha_{\mu 3} X_3 - \ldots + X_\mu = \Psi_\mu & \end{array}$$

καὶ συνοπτικῶς

$$X_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\mu} \alpha_{\iota\kappa} X_\kappa = \Psi_\iota \quad \left\{ \begin{array}{l} \iota = 1, 2, \ldots, \mu \\ \mu = \nu - 1 \\ \alpha_{\iota\kappa} = 0 \ \text{διὰ} \ \iota = \kappa \end{array} \right. \qquad (5')$$

Τὸ σύστημα (5) εἶναι μὴ ὁμογενὲς [1] καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μ ἐξισώσεις καὶ μ ἀγνώστους. Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῇ ἂν ἡ μήτρα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους αὐτοῦ εἶναι μιοστοῦ βαθμοῦ, ἤτοι ἂν ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Λόγῳ τῆς ἰδιαιτέρας οἰκονομικῆς σπουδαιότητος τῶν ἀνοικτῶν ὑποδειγμάτων, παραθέτομεν κατωτέρω ἀναλυτικῶς τὴν διαδικασίαν λύσεως τοῦ συστήματος (5).

Συμφώνως πρὸς τὸν συμβολισμὸν τῶν «μητρῶν» τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & - \ldots & -\alpha_{1\mu} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{23} & - \ldots & -\alpha_{2\mu} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1 & - \ldots & -\alpha_{3\mu} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} & -\alpha_{\mu 3} & - \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_\mu \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Ὁ πρῶτος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς (6) ἀποτελεῖ τὴν «τεχνολογικὴν μήτρα» καὶ περιλαμβάνει τοὺς σταθεροὺς συντελεστὰς τοῦ συστήματος (5). Θὰ παραστήσωμεν ταύτην διὰ τοῦ συμβόλου A^*.

1) Βλ. Χ. Φουσιάνη: Ἀνωτέρα Ἄλγεβρα. Ἀθῆναι, 1954.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα ἀποτελεῖ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς μοναδιαίας μήτρας:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

καὶ τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς A (λαμβανομένου βεβαίως ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ κυρία διαγώνιος τῆς τελευταίας μήτρας περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα). Δυνάμεθα οὕτω νὰ παραστήσωμεν περιληπτικῶς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν ὡς ἀκολούθως:

$$A^* = [I - A] \qquad (8)$$

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα $[I-A]$ καλεῖται συνήθως «μήτρα τύπου Λεόντιεφ». Ὁ δεύτερος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξισώσεως (6) ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος (5), τὸ δὲ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης παριστᾶ τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἂν θέσωμεν περιληπτικῶς X καὶ Ψ διὰ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως, ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἐξίσωσις (6), καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (5), δύναται νὰ λάβῃ τὴν συνοπτικὴν μορφήν:

$$[I - A] \cdot X = \Psi \qquad (9)$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (9) ἐπὶ τὴν μήτραν $[I-A]^{-1}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς τεχνολογικῆς μήτρας, λαμβάνομεν:

$$[I-A]^{-1} \cdot [I-A] \cdot X = [I-A]^{-1} \cdot \Psi \qquad (10)$$

Καὶ ἐπειδὴ $[I-A]^{-1} \cdot [I-A] \cdot X = IX = X$

ἡ ἐξίσωσις 10 γίνεται:

$$X = [I-A]^{-1} \cdot \Psi \qquad (11)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως 11 καθίσταται προφανὲς ὅτι, δοθέντος τοῦ διανύσματος τελικῆς ζητήσεως, πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων X_1,

$X_2, \ldots, X_\nu$ ἀπαιτεῖται προηγουμένως ἀντιστροφὴ τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκτέλεσις τοῦ εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀναλυτικῶς ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως 11 (καὶ συνεπῶς καὶ τοῦ συστήματος (5)), ἔχει ὡς ἀκολούθως:

Θέτομεν:

$$[A_{\iota\kappa}] \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mu} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \ldots & A_{\mu\mu} \end{bmatrix},$$

διὰ τὴν μήτραν ἡ ὁποία ἔχει στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς τεχνολογικῆς μήτρας $[I-A]$, καί:

$$[A_{\iota\kappa}]' \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{\mu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{\mu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{1\mu} & A_{2\mu} & \ldots & A_{\mu\mu} \end{bmatrix}$$

διὰ τὴν ἐνηλλαγμένην τῆς $[A_{\iota\kappa}]$. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$[I-A]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|I-A|} & \frac{A_{21}}{|I-A|} & \cdots & \frac{A_{\mu 1}}{|I-A|} \\ \frac{A_{12}}{|I-A|} & \frac{A_{22}}{|I-A|} & \cdots & \frac{A_{\mu 2}}{|I-A|} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{A_{1\mu}}{|I-A|} & \frac{A_{2\mu}}{|I-A|} & \cdots & \frac{A_{\mu\mu}}{|I-A|} \end{bmatrix}^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \ldots & E_{1\mu} \\ E_{21} & E_{22} & \ldots & E_{2\mu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ E_{\mu 1} & E_{\mu 2} & \ldots & E_{\mu\mu} \end{bmatrix}$$

ὅπου:

$$E_{\iota\kappa} = \frac{A_{\kappa\iota}}{|I-A|} \tag{12}$$

---

1) Ἡ ὁρίζουσα $|I-A|$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ μάλιστα θετική (βλ. 3.10.3.).

Κατὰ συνέπειαν ἡ λύσις τῆς (6) θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1\mu} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2\mu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ E_{\mu 1} & E_{\mu 2} & \dots & E_{\mu\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_\mu \end{bmatrix}$$

ἤτοι:

$$\begin{aligned} X_1 &= E_{11}\Psi_1 + E_{12}\Psi_2 + E_{13}\Psi_3 + \dots + E_{1\mu}\Psi_\mu \\ X_2 &= E_{21}\Psi_1 + E_{22}\Psi_2 + E_{23}\Psi_3 + \dots + E_{2\mu}\Psi_\mu \\ X_3 &= E_{31}\Psi_1 + E_{32}\Psi_2 + E_{33}\Psi_3 + \dots + E_{3\mu}\Psi_\mu \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ X_\mu &= E_{\mu 1}\Psi_1 + E_{\mu 2}\Psi_2 + E_{\mu 3}\Psi_3 + \dots + E_{\mu\mu}\Psi_\mu \end{aligned} \tag{13}$$

καὶ συνοπτικῶς:

$$X_\iota = \sum_{\kappa=1}^{\mu} E_{\iota\kappa}\Psi_\kappa \qquad (\iota = 1, \dots, \mu) \tag{13'}$$

Οἰκονομικῶς ὁ ὅρος $E_{11}\Psi_1$ ἐκφράζει τὸ τμῆμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1 τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν Ψ_1 αὐτοῦ τούτου τοῦ προϊόντος. Ὁ ὅρος $E_{12}\Psi_2$ παριστᾶ τὸ τμῆμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν Ψ_2 τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 2 κ.ο.κ. Γενικῶς οἱ συντελεσταὶ $E_{\iota\kappa}$ δεικνύουν κατὰ πόσον τὸ συνολικὸν προϊὸν τοῦ κλάδου ι αὐξάνει ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις διὰ τὸ προϊὸν τοῦ κλάδου κ αὐξηθῇ κατὰ 1 μονάδα (τῶν ἄλλων κονδυλίων ζητήσεως παραμενόντων ἀμεταβλήτων). Ἐκ τῆς (12) καταφαίνεται ὅτι ἡ τιμὴ τῶν συντελεστῶν $E_{\iota\kappa}$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ὁριζούσης τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς τιμῆς *ὅλων* τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἱκανοποίησις δοθείσης αὐξήσεως τῆς ζητήσεως, π.χ., βιομηχανικῶν προϊόντων, εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὴ κατόπιν ὡρισμένων ὁμόρροπων μεταβολῶν, ***ἀμέσων*** ἢ ***ἐμμέσων*** εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὅλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων [1]. Τοῦτο ἀκριβῶς ἐκφράζεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων.

Ἡ διδομένη λύσις (13) καθορίζει τὰ ἐπίπεδα δράσεως $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ τῶν παραγωγικῶν κλάδων $1, 2, \ldots, \mu$., τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζητήσεως $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_\mu)$.

Αἱ ποσότητες προϊόντων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ὡς ἄνω ἐπίπεδα δράσεως θὰ εἶναι [2]:

$$X'_\iota = \frac{X_\iota}{\tau_\iota} \quad (\iota = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{14}$$

Ἐκ τῆς λύσεως (13) δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς ὑφ' ἑκάστου κλάδου καταβαλλομένης ἀξίας δι' ἐργασίαν καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως [3] τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας [4]. Τοιοῦτος προσδιορισμὸς καθίσταται ἐν τούτοις δυνατὸς ἂν γνωρίζωμεν τοὺς «συντελεστὰς εἰσροῆς ἐργασίας» δι' ἕκαστον κλάδον. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι καθορίζουν τὴν καταβαλλομένην ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων κλάδων ἀξίαν διὰ τὴν ἐργασίαν ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας μιᾶς νομισματ. μονάδος τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ οὗτοι παραμένουν σταθεροί, ὡς καὶ οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ εἰσροῆς. Ἂν χαρακτηρίσωμεν διὰ τοῦ γράμματος ν τὸν τομέα «Ὑπηρεσίαι Προσώπων» ἢ «Ἐργασία» τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, θὰ ἔχωμεν γενικῶς:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_{\nu\kappa} = \alpha_{\nu\kappa} X_\kappa \\ \kappa = 1, 2, \ldots, \mu \end{array}\right\} \tag{15}$$

Ὅπου $\alpha_{\nu\kappa}$ παριστᾷ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν εἰσροῆς ἐργασίας τοῦ κλάδου κ καὶ $\chi_{\nu\kappa}$ τὴν συνολικῶς καταβαλλομένην ἀξίαν δι' ἐργασίαν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου.

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ τιμὴ μονάδος τῆς ἐργασίας (π.χ. τὸ ὡρομίσθιον)

---

1) Ἡ αὐτὴ ἔννοια θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ ἐπίσης ὡς ἀκολούθως: Μία αὔξησις τῆς τελικῆς ζητήσεως ἑνὸς ὡρισμένου προϊόντος προκαλεῖ ἀμέσους καὶ ἐμμέσους αὐξήσεις εἰς τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ὅλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

2) Βλ. τέλος τμήματος 3.10.1.

3) Ὁ ὅρος «ἐργατικὴ ἀπασχόλησις» χρησιμοποιεῖται ἐνταῦθα ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, περιλαμβάνων τὰς πάσης φύσεως παραγωγικὰς ὑπηρεσίας προσώπων.

4) Ὡς ἐλέχθη, ἡ νιοστὴ ἐξίσωσις ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα (καὶ συνεπῶς καὶ εἰς τὴν ἐργασίαν) ἀπηλείφθη ἀπὸ τὸ σύστημα (5).

εἶναι ἴση πρὸς τὴν σταθερὰν τ_ν, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (εἰς ὥρας ἐργασίας):

$$X'_{\nu\kappa} = \frac{\alpha_{\nu\kappa}\, X_\kappa}{\tau_\nu} \tag{16}$$

$$\kappa = 1, 2, \ldots, \mu$$

Ἂν εἰς τὸ σύστημα (16) ἀντικαταστήσωμεν τὸ X_κ διὰ τῆς τιμῆς του, ὡς αὕτη ὁρίζεται ἐκ τῶν λύσεων (13), λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{c} X'_{\nu\kappa} = \dfrac{\alpha_{\nu\kappa}}{\tau_\nu}\,(E_{\kappa 1}\Psi_1 + E_{\kappa 2}\Psi_2 + \ldots + E_{\kappa\mu}\Psi_\mu) \\ \kappa = (1, 2, \ldots, \mu) \end{array}\right\} \tag{17}$$

ἐξ οὗ καταφαίνεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἰς δοθέντα κλάδον κ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαρθρώσεως *ὅλων* τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων τῆς οἰκονομίας καὶ ἐκ τοῦ μεγέθους *ὅλων* τῶν κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως.

Ἡ συνολικὴ ἐργατικὴ ἀπασχόλησις εἰς τὴν οἰκονομίαν (X'_ν) εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων τῆς οἰκονομίας:

$$X'_\nu = (X'_{\nu_1} + X'_{\nu_2} + \ldots + X'_{\nu\mu}) \tag{18}$$

Ἡ ἐξίσωσις (18) δεικνύει ἐξ ἄλλου τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (18) τὰς τιμὰς τῶν $X'_{\nu\kappa}$, ὡς αὗται δίδονται εἰς (17), θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} X'_\nu = {} & \frac{1}{\tau_\nu}\,(\alpha_{\nu_1} E_{11}\Psi_1 + \alpha_{\nu_1} E_{12}\Psi_2 + \ldots + \alpha_{\nu_1} E_{1\mu}\Psi_\mu) \\ & + \frac{1}{\tau_\nu}\,(\alpha_{\nu_2} E_{21}\Psi_1 + \alpha_{\nu_2} E_{22}\Psi_2 + \ldots + \alpha_{\nu_2} E_{2\mu}\Psi_\mu) + \ldots \\ & + \frac{1}{\tau_\nu}\,(\alpha_{\nu\mu} E_{\mu_1}\Psi_1 + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu_2}\Psi_2 + \ldots + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu\mu}\Psi_\mu) \end{aligned}$$

ἢ

$$X'_\nu = \frac{\Psi_1}{\tau_\nu}\,(\alpha_{\nu_1} E_{11} + \alpha_{\nu_2} E_{21} + \ldots + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu_1})$$

$$+ \frac{\Psi_2}{\tau_\nu} (\alpha_{\nu_1} E_{12} + \alpha_{\nu_2} E_{22} + \ldots + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu_2}) + \ldots$$

$$+ \frac{\Psi_\mu}{\tau_\nu} (\alpha_{\nu_1} E_{1\mu} + \alpha_{\nu_2} E_{2\mu} + \ldots + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu\mu}) \qquad (19)$$

καὶ συνοπτικῶς :

$$X'_\nu = \frac{\Psi_1}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota 1} + \frac{\Psi_2}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota 2} + \ldots + \frac{\Psi_\mu}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota\mu} \qquad (19')$$

Ὁ ὅρος $\frac{\Psi_1}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota 1}$ προσδιορίζει τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσειως τὴν ὀφειλομένην εἰς τὴν αὔξησιν κατὰ Ψ_1 μονάδας τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1.

Γενικῶς ὁ ὅρος $\frac{\Psi_\kappa}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \mu)$ δίδει τὴν αὔξησιν τῆς ἀπασχολήσεως τὴν ὀφειλομένην εἰς τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ κατὰ Ψ_κ μονάδας.

Κατ' ἀναλογίαν οἱ συντελεσταὶ $\frac{1}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \mu)$, καλούμενοι συνήθως «συντελεσταὶ ὁλικῆς ἀπασχολήσεως», προσδιορίζουν τὴν αὔξησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῆς οἰκονομίας, τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὐξήσεως κατὰ μίαν μονάδα τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \mu)$.

Ἕκαστος συντελεστὴς ὁλικῆς ἀπασχολήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ συντελεστοῦ «ἀμέσου ἀπασχολήσεως» [1] καὶ τῶν «συντελεστῶν ἐμμέσου ἀπασχολήσεως» [2].

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἶναι προφανής.

Καταφαίνεται ἤδη ὅτι ἐκ τῆς λύσεως (13) καὶ τῆς ἐξισώσεως (19)

---

1) Οὗτος δεικνύει τὴν ὑπὸ τοῦ οἰκείου κλάδου ἀμέσως ἀπορροφωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν ἱκανοποίησιν μιᾶς μονάδος τελικῆς ζητήσεως ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου καὶ παρίσταται διὰ τῶν στοιχείων

$$\frac{1}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\kappa\kappa} \quad (\kappa=1, 2, \ldots, \mu)$$

2) Οὗτοι δεικνύουν τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας ἀπορροφωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται ὡς πρῶται ὗλαι κλπ., πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τοῦ δοθέντος κλάδου κ. Οἱ ἔμμεσοι συντελεσταὶ παριστῶνται διὰ τῶν στοιχείων $\frac{1}{\tau_\nu} \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\nu\iota} E_{\iota\kappa}$, διὰ $\kappa = 1, 2, \ldots, \mu$ ἀλλὰ $\kappa \neq \iota$.

εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ἑκάστου κλάδου καὶ τὰ ἐπίπεδα ἀπασχολήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως τῶν προϊόντων τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι τιμαὶ λύσεως εἰς τὰς οἰκονομικὰς μεταβλητὰς (ἐπίπεδα δράσεως παραγωγικῶν τομέων καὶ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως) χαρακτηρίζονται συνήθως ὡς «συνεπεῖς» (consistent), καθ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς τὴν ἁρμονικὴν (1) συνεργασίαν τῶν παραγωγικῶν κλάδων πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν αὐτῶν πρὸς τὰς πραγματικὰς συνθήκας τῆς οἰκονομίας θὰ δείξῃ κατὰ πόσον τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τελικῆς ζητήσεως (2) εἶναι *πραγματοποιήσιμον*. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης θὰ δειχθῇ ἐπίσης ἂν ἐπιβάλλεται προηγουμένως ἄρσις τῶν τυχὸν ὑπαρχουσῶν στενοτήτων (λόγῳ ἐλλείψεως κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ εἴς τινας παραγωγικοὺς κλάδους ἢ λόγῳ ἀνεπαρκοῦς ποσότητος ἐργασίας), ἢ ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἱκανοποίησις αὐτῆς βάσει τῶν ὑπαρχουσῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας.

Τὸ ἀνωτέρω περιγραφὲν ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα εἶναι *στατικὸν* ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, διότι δὲν παρακολουθεῖ διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ ἀλλὰ δίδει μόνον λύσεις ἰσορροπίας αὐτῶν εἰς δεδομένην περίοδον ἢ συνολικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν περιόδων (συγκριτικὴ στατική).

3. 10. 3. ***Ἰδιότητες τῶν μητρῶν τύπου Λεόντιεφ.*** Ἡ μήτρα τύπου Λεόντιεφ ἔχει ὡρισμένας μαθηματικὰς ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἀντικατοπτρίζουν ἰδιότητας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι (3):

1η $\quad \sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} \leqslant 1 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots\ldots, \nu)$

2α $\quad \alpha_{\iota\kappa} \geqslant 0 \quad (\iota, \kappa = 1, 2, \ldots\ldots, \nu)$

3η $\quad 0 < |I - A| < 1$

4η $\quad (I - A)^{-1} = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots\ldots),$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἀποτελεῖ *συγκλίνουσαν* σειράν.

1) Ἄνευ ὑποαπασχολήσεως ἢ ὑπεραπασχολήσεως τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν κλάδων.

2) Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ δυνατὸν νὰ ἀποτελῇ πρόβλεψιν ἢ προγραμματικὸν σκοπόν.

3) Βλ. Dorfman Samuelson and Solow «Linear programming and economic analysis» Mcgraw Hill 1958 σ. 253 κ.ἑ. Ἐπίσης βλ. Morgenstern A. (edit) Economic activity analysis, σ. 341 κ.ἑ.

5η Πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς $(I-A)^{-1}$ εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ μεγαλύτερα, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς (I–A).

Συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην ἰδιότητα, τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῶν στηλῶν τῆς A δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἰδιότητος αὐτῆς εἶναι ὅτι τὸ σύνολον τῶν πληρωμῶν τοῦ δοθέντος κλάδου κ διὰ προϊόντα ἄλλων κλάδων, πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος τούτου. Ἡ συνήθης μάλιστα περίπτωσις εἶναι $\sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} < 1$.

Ἡ δευτέρα ἰδιότης ὁρίζει ὅτι ἡ ἑκάστοτε «εἰσροὴ» τοῦ δοθέντος κλάδου κ ἀπὸ ἄλλους κλάδους $(\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$ εἶναι μέγεθος μὴ ἀρνητικόν. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), δεδομένου ὅτι $X_\kappa > \chi_{\iota\kappa} > 0$, καὶ σημαίνει ὅτι δὲν εἶναι νοητὸν νὰ λαμβάνῃ ὁ κλάδος κ ἀρνητικὸν προϊὸν ἀπὸ τοὺς λοιποὺς κλάδους.

Προφανῶς ἐκ τῆς 1ης ἰδιότητος θὰ εἶναι:

$$0 \leqslant \alpha_{\iota\kappa} < 1$$

καὶ ἐκ τῆς 2ας ἰδιότητος:

$$0 \leqslant \sum^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} \leqslant 1$$

Ἡ συνήθης περίπτωσις εἶναι (¹):

$$0 < \sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} < 1$$

Αἱ ἰδιότητες 1 καὶ 2 ἀποτελοῦν *ἀναγκαίας* καὶ *ἐπαρκεῖς* συνθήκας διὰ χαρακτηρισμὸν μιᾶς μήτρας ὡς τύπου Λεόντιεφ. Αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες 3, 4 καὶ 5 εἶναι παράγωγοι τῶν ἰδιοτήτων 1 καὶ 2.

Συμφώνως πρὸς τὴν 3ην ἰδιότητα, ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας τύπου Λεόντιεφ, $|I-A|$, εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος (²).

Ἡ ἰδιότης αὕτη σημαίνει ὅτι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον περιγράφει ἡ (I–A) (³).

---

1) $0 = \sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa}$ ἐμφανίζεται ἐνίοτε εἰς τὰς καλουμένας «τριγωνικὰς» μήτρας τύπου Λεόντιεφ.

2) Βλ. Morgenstern (edit) Economic activity analysis, 356.

3) Βλ. D. Hawkins and H. Simon, «Note: Some conditions of macroeconomic stability» Econometrica, 1949.

Ἡ 4η ἰδιότης χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα εἰς τὰς διακλαδικὰς ἀναλύσεις διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων ἐξισώσεων:

Ὡς γνωστόν, ἡ ἀντιστροφὴ τῆς μήτρας (I—A) εἶναι, εἰς περίπτωσιν μεγάλων συστημάτων, δυσχερέστατον ὑπολογιστικὸν πρόβλημα, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἄνευ τῆς χρησιμοποιήσεως ἠλεκτρονικῶν ἀριθμομηχανῶν. Βάσει τῆς 4ης ὅμως ἰδιότητος ἡ ἐξίσωσις (11) γίνεται:

$$X = (I + A + A^2 + A^3 + \dots)\,\Psi = (\Psi + A\Psi + A^2\Psi + \dots) \qquad (20)$$

Ἐπειδὴ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς $(I + A + A^2 + A^3 + \dots)$ εἶναι σχετικῶς ταχεῖα ([1]), δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ διάνυσμα X κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δυνάμεως τοῦ A, π.χ. τῆς 4ης δυνάμεως ([2]):

$$X = (\Psi + A\Psi + A^2\Psi + A^3\Psi + A^4\psi) \qquad (21)$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης, ἡ ὁποία εἶναι συνήθως γνωστὴ ὡς «πολλαπλασιαστικὴ διαδικασία Cornfield-Leontief» ([3]), δὲν παρουσιάζει σοβαρὰ προβλήματα ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν σχετικῶς μεγάλων τεχνολογικῶν μητρῶν, δύναται δὲ νὰ γίνῃ μὲ συνήθεις ἀριθμομηχανὰς γραφείου ([4]).

1) Sal Cherubino: «Sull'analisi delle inderdepedenze stutturali dei settori economici εἰς L'industria No 1, 1953 (σ. 39 κ.ἑ.) καὶ H. Chenery, P. Clark κλπ. The structure of Italian economy» M.S A. Rome, 1953. Ἡ σειρὰ $I + A + A^2 + A^3 + \dots$ καλεῖται συνήθως «σειρὰ Newmann» (βλ. Morgenstern: Economic activity analysis σ. 291).

2) Ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως ἐξαρτᾶται κυρίως ἐκ τῆς ταχύτητος συγκλίσεως τῶν ὅρων A, A^2, A^3,.... Ἂν ἐπιτευχθῇ μία σταθερὰ σχέσις συγκλίσεως τῶν ὅρων εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάνυσμα X μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, διὰ συνυπολογισμοῦ τοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς πολλαπλασιαστικῆς διαδικασίας, ἥτις ἔχει λόγον τὴν σταθερὰν ταύτην σχέσιν. Βλ. σχετικῶς: C. Righi: Raffronto fra I metodi matriciale e iterativo per la solutione dello schema di Leontief (nota tecnica) εἰς l'Industria. No 1, 1952.

3) Βλ. Dorfman, Samuelson κλπ. «Linear programming κλπ.» σ. 253. Πρβ. καὶ R. Goodwin «The multiplier as a matrix» Econ. Journal. Dec 1949.

4) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι, κατὰ προσέγγισιν, $P\nu^2$, ὅπου P = ὁ ἀριθμὸς τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων εἰς μίαν σειρὰν τύπου (20) καὶ ν = ἡ τάξις τῆς μήτρας A, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν κλάδων τοῦ ἐξεταζομένου οἰκονομικοῦ συστήματος. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ X διὰ τῆς συνήθους μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας ἀπαιτοῦνται περίπου ν^3 πολλαπλασιασμοί. Κατὰ συνέπειαν, ἡ διαδικασία Cornfield-Leontief συμφέρει ἐὰν $P < \nu$, ὡς πράγματι συμβαίνει κατὰ κανόνα εἰς τὰς πραγματικὰς περιπτώσεις. (Βλ. Chenery, Clark κλπ. ἔνθ. ἀνωτέρω).

Ἡ 5η ἰδιότης ἀπορρέει προφανῶς ἐκ τῆς 4ης ἰδιότητος. Ἐφ' ὅσον $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς A εἶναι μὴ ἀρνητικὰ (2α ἰδιότης) θὰ ἔχωμεν καὶ τὰ στοιχεῖα τῶν A^2, A^3 κ.λ.π. μὴ ἀρνητικά. Ἡ I ἔχει ἐπίσης μὴ ἀρνητικὰ στοιχεῖα ἐξ ὁρισμοῦ, κατὰ συνέπειαν τὰ στοιχεῖα τῆς $(I - A)^{-1}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν I, A, A^2, κ.λ.π. θὰ εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικά. Ἐξ ἄλλου ἐὰν θέσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς $(I - A)$ μὲ θετικὸν σημεῖον λαμβάνομεν τὴν μήτραν $(I + A)$, ἥτις εἶναι:

$$(I + A) < (I + A + A^2 + A^3 + \ldots) = (I - A)^{-1} \tag{22}$$

ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον τῆς $(I - A)^{-1}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τῆς $(I + A)$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τῆς $(I – A)$.

3.10.4. *Σύγκρισις ὑπολογιζομένων καὶ δυνατῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς.* Ὡς γνωρίζωμεν ἤδη (1), ἡ σύγκρισις μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως (2) καὶ τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται ἐκ τῶν ὑφισταμένων δυνατοτήτων ἑκάστου κλάδου, εἶναι βασικῆς σημασίας ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος (ἡ ἐπιλεγεῖσα τελικὴ ζήτησις) εἶναι πραγματοποιήσιμοι ἢ ἐάν, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἀπαιτῆται ὅπως ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ λάβῃ ἀπόφασιν διὰ τὴν ἀναπροσαρμογὴν τῶν σκοπῶν αὐτῶν, βάσει τῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας ἢ διὰ τὴν διεύρυνσιν τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν κλάδων οἱ ὁποῖοι καθιστοῦν μὴ πραγματοποιήσιμον τὸ πρόγραμμα.

Κατωτέρω γίνεται μία ἀναλυτικὴ παρουσίασις τοῦ θέματος τῆς συγκρίσεως μεταξὺ ὑπολογιζομένων καὶ δυνατῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι: α) ἡ οἰκονομία ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κλάδους 1 καὶ 2 καὶ β) σκοπεῖται ἱκανοποίησις τελικῆς ζητήσεως ἀξίας Ψ_1 καὶ Ψ_2 ἐκ τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 1 καὶ 2, ἀντιστοίχως.

Αἱ ἐξισώσεις κατανομῆς τῆς παραγωγῆς τῶν δύο κλάδων θὰ εἶναι τότε:

$$\begin{aligned} X_1 - \alpha_{12} X_2 &= \Psi_1 \\ -\alpha_{21} X_1 + X_2 &= \Psi_2 \end{aligned} \tag{1}$$

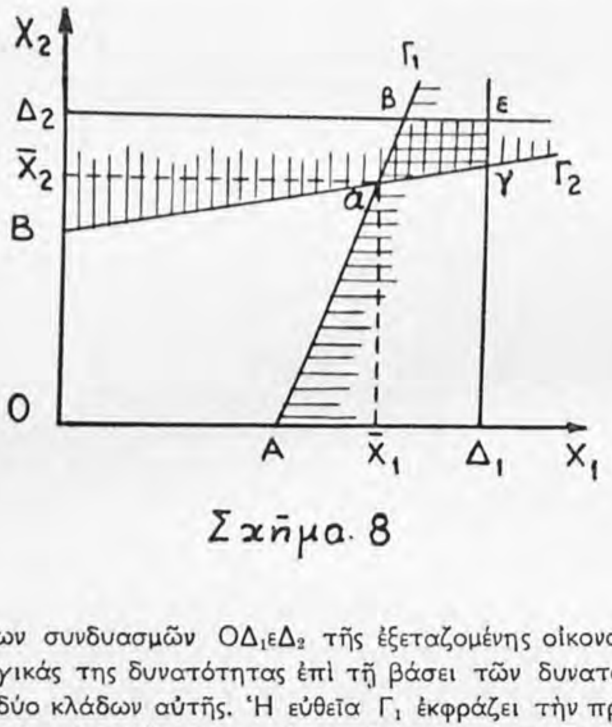
1) Βλ. 3. 3. 3.

2) Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ὑπολογίζονται ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος ἐξισώσεων κατανομῆς.

ὅπου X_1, X_2 ἐκφράζουν τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν δύο κλάδων καὶ α_{12}, α_{21} εἶναι οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ εἰσροῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι Δ_1 καὶ Δ_2 παριστοῦν τὰς ὑφισταμένας παραγωγικὰς δυναμικότητας τῶν κλάδων 1 καὶ 2, ἀντιστοίχως [1]. Διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν τὸ τεθὲν πρόγραμμα εἶναι πραγματοποιήσιμον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν τὰς ὡς ἄνω δυναμικότητας τῶν κλάδων μὲ τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς αὐτῶν, ὡς ταῦτα προκύπτουν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1).

Εἰς τὸ σχῆμα (8) αἱ εὐθεῖαι $\Delta_1 \varepsilon$ καὶ $\Delta_2 \varepsilon$ προσδιορίζουν, ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων, τὴν περιοχὴν πραγ-



Σχῆμα 8

ματοποιησίμων συνδυασμῶν $O\Delta_1\varepsilon\Delta_2$ τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας, ἤτοι τὰς παραγωγικάς της δυνατότητας ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δυνατοτήτων Δ_1 καὶ Δ_2 τῶν δύο κλάδων αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα Γ_1 ἐκφράζει τὴν πρώτην ἡ δὲ εὐθεῖα Γ_2 τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος κατανομῆς [2]. Πᾶν σημεῖον τῆς Γ_1 παριστᾷ συνεπῶς συνδυασμὸν τιμῶν τῶν X_1, X_2, ἱκανο-

1) Μετρουμένας εἰς ἀξίαν προϊόντος ἑκάστου κλάδου.

2) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ Γ_1 τέμνει τὸν ἄξονα τῶν X_1 εἰς τὸ σημεῖον $+\Psi_1$ ($=$A) καὶ τὸν ἄξονα τῶν X_2 εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{\Psi_1}{\alpha_{12}}$, ἡ δὲ Γ_2 τέμνει τὸν ἄξονα τῶν X_1 εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{\Psi_2}{\alpha_{21}}$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν X_2 εἰς τὸ σημεῖον $+\Psi_2$ ($=$ B). Τὰ σημεῖα A καὶ B ἐκφράζουν συνεπῶς τὰ ἐπίπεδα τῶν τελικῶν ζητήσεων Ψ_1 καὶ Ψ_2, ἀντιστοίχως.

ποιοῦντα τὴν πρώτην ἐξίσωσιν. Οἰκονομικῶς τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τοῦ πρώτου κλάδου εἶναι τοιοῦτον ὥστε νὰ *ἐπαρκεῖ ἀκριβῶς* διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως $Ψ_1$ καὶ τῶν τρεχουσῶν παραγωγικῶν ἀναγκῶν τοῦ κλάδου 2. Πᾶν σημεῖον κείμενον δεξιὰ τῆς $Γ_1$ (καὶ ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου τοῦ συστήματος συντεταγμένων) ἐκφράζει τιμὰς τῶν X_1, X_2, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὴν ἀνισότητα τῆς μορφῆς:

$$X_1 - α_{12} X_2 > Ψ_1 .$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ παραγωγὴ X_1 τοῦ κλάδου 1 εἶναι *μεγαλυτέρα* τῆς ἀπαιτουμένης πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως καὶ τῶν τρεχουσῶν παραγωγικῶν ἀναγκῶν τοῦ κλάδου 2. Ἀντιθέτως πᾶν σημεῖον κείμενον ἀριστερὰ τῆς $Γ_1$ (καὶ ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου) ὁρίζει τιμὰς τῶν X_1, X_2 αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα:

$$X_1 - α_{12} X_2 < Ψ_1 ,$$

ἥτις ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ συνολικὴ παραγωγὴ τοῦ κλάδου 1, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τμήματος αὐτῆς τὸ ὁποῖον καλύπτει τὰς ἀνάγκας τοῦ κλάδου 2, δὲν ἐπαρκεῖ πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως $Ψ_1$.

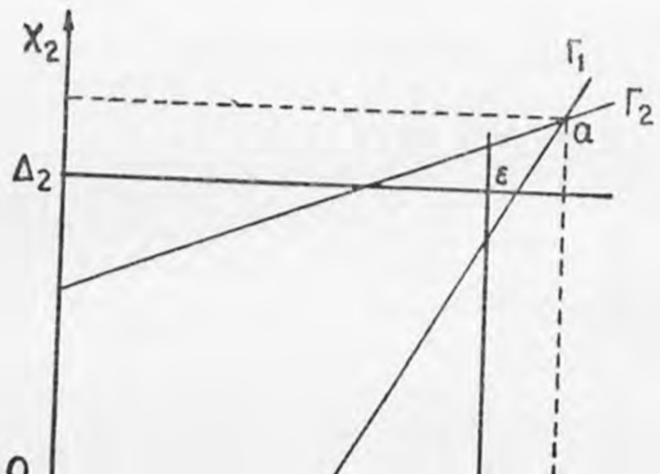
Κατ' ἀναλογίαν, ἡ $Γ_2$ ἀποτελεῖ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τὰ ὁποῖα παριστοῦν τιμὰς τῶν X_1, X_2 πληρούσας τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος, καὶ πᾶν σημεῖον κείμενον ἄνωθεν μὲν τῆς $Γ_2$ ἀντιστοιχεῖ εἰς παραγωγὴν τοῦ κλάδου 2 μεγαλυτέραν κάτωθεν δὲ τῆς $Γ_2$ μικροτέραν τῆς ἀπαιτουμένης πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζηζήσεως $Ψ_2$ καὶ τῶν παραγωγικῶν ἀναγκῶν τοῦ κλάδου 1.

Ἡ περιοχὴ τῶν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν τῶν ἐπιπέδων X_1, X_2 εἶναι, ὡς εἴπομεν, τὸ παραλληλόγραμμον $ΟΔ_1εΔ_2$. Ἐκ τῶν συνδυασμῶν αὐτῶν, μόνον οἱ κείμενοι εἰς τὴν περιοχὴν αβεγ, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν $Γ_1$, $Γ_2$ καὶ τῶν $Δ_1ε$ καὶ $Δ_2ε$ ἱκανοποιοῦν ταυτοχρόνως ἀμφότερα τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως $Ψ_1$ καὶ $Ψ_2$, ἤ, κατ' ἄλλην διατύπωσιν, τὸ σύστημα ἀνισοτήτων:

$$\begin{aligned} X_1 - α_{12} X_2 &\geq Ψ_1 \\ -α_{21} X_1 + \quad X_2 &\geq Ψ_2 . \end{aligned}$$

Εἷς ἐξ ὅλων τῶν συνδυασμῶν τῆς περιοχῆς αβεγ, ὁ συνδυασμὸς α, ἱκανοποιεῖ τὸ σύστημα (1), δηλαδὴ ὁρίζει τιμὰς $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος αὐτοῦ [1]. Ἐξ ἄλλου μολονότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς αβεγ ἐκφράζουν τιμὰς τῶν X_1, X_2 αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν, ὡς ἐλέχθη, τὴν τελικὴν ζήτησιν (Ψ_1, Ψ_2) μόνον τὸ σημεῖον α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ πλέον ἀποδοτικόν, ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως, διότι τοῦτο ὁρίζει ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν κλάδων 1 καὶ 2 τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν *ἀκριβῶς* τὴν τελικὴν ζήτησιν (καὶ τὰς παραγωγικὰς ἀνάγκας τῶν κλάδων αὐτῶν), δηλαδὴ ἄνευ δημιουργίας παραγωγικοῦ πλεονάσματος. Τοιοῦτον παραγωγικὸν πλεόνασμα [2] ὑποδηλοῦν ἀκριβῶς πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς αβεγ.

Ἤδη, μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1), δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι ἡ λύσις αὕτη εἶναι πραγματοποιήσιμος, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον α, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὴν λύσιν ταύτην, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιοχῆς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν $O\Delta_1\varepsilon\Delta_2$. Μὴ πραγματοποιήσιμος θὰ ἦτο ἡ λύσις αὕτη ἂν τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον τὴν ἐκφράζει ἔκειτο ἐκτὸς τῆς περιοχῆς $O\Delta_1\varepsilon\Delta_2$. Τὸ διάγραμμα (9) παριστᾷ μίαν τοιαύτην περίπτωσιν:

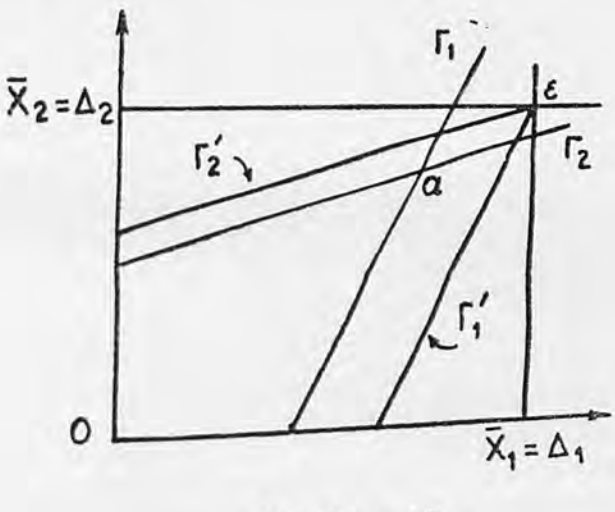


Σχῆμα 9

1) Ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον α εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν Γ_1 καὶ Γ_2, ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας, ἑπομένως τὸ ζεῦγος τιμῶν $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, τὰς ὁποίας ὁρίζει, ἱκανοποιοῦν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος 1.

2) Τοῦ ἑνὸς ἢ ἀμφοτέρων τῶν κλάδων.

Ἂν τὸ σημεῖον τῆς λύσεως εὑρίσκεται ὄχι ἁπλῶς εἰς τὴν περιοχὴν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, ἀλλ' *ἐντὸς* τῆς περιοχῆς ταύτης (1), τότε εἶναι δυνατὴ βελτίωσις ὅσον ἀφορᾷ τὸ ἐπίπεδον ἱκανοποιήσεως ἑνὸς ἢ περισσοτέρων κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως. Τοῦτο ἀκριβῶς συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς λύσεως α τοῦ σχήματος 8. Τὸ σχῆμα 10 ἐκφράζει μίαν νέαν λύσιν, ε, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται εἰς αὔξησιν ἀμφοτέρων τῶν κονδυλίων τῆς τελικῆς ζητήσεως, τοιαύτην ὥστε νὰ ἀξιοποιοῦνται πλήρως αἱ ὑφιστάμεναι παραγωγικαὶ δυνατότητες ἀμφοτέρων τῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας (2).



Σχῆμα 10

3.10.5. Ἡ συνθήκη **Hawkins – Simon.** Ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα: ὑπὸ ποίας προϋποθέσεις ἡ λύσις τοῦ συστήματος ἐξισώσεων κατανομῆς περιλαμβάνει θετικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ καὶ ἑπομένως παρουσιάζει ἐνδιαφέρον ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως (3), ἢ—διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ προηγουμένως ληφθὲν παράδειγμα— ποῖαι προϋ-

1) Τοιαῦτα εἶναι πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, πλὴν τῶν σημείων τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ μετώπου τῆς περιοχῆς αὐτῆς (δηλαδὴ ἐπὶ τῆς $\Delta_1\varepsilon\Delta_2$, εἰς τὸ σχῆμα 8).

2) Αἱ Γ'_1, Γ'_2 εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς Γ_1, Γ_2, καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων X_1, X_2, τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος, εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων X_1, X_2, εἰς τὸ σύστημα (1), τὸ ὁποῖον περιγράφουν αἱ Γ_1, Γ_2.

3) Προφανῶς λύσις περιλαμβάνουσα μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς μὲ ἀρνητικὴν τιμὴν δὲν παρουσιάζει οἰκονομικὸν ἐνδιαφέρον, διότι δὲν δύναται νὰ νοηθῇ περίπτωσις ἀρνητικῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς.

ποθέσεις ἐξασφαλίζουν ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ κεῖται ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας τὸ σχῆμα 8, συμπεραίνομεν εὐχερῶς ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ κεῖται ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου ὅταν ἡ κλίσις τῆς $Γ_1$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς $Γ_2$.

Ἡ κλίσις τῆς $Γ_1$ προσδιορίζεται ἐκ τοῦ λόγου $\frac{1}{α_{12}}$, ἡ δὲ κλίσις τῆς $Γ_2$ ἐκ τοῦ λόγου $\frac{α_{21}}{1} = α_{21}$. Ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω συνθήκη πληροῦται ὅταν:

$$\frac{1}{α_{12}} > α_{21} \quad ἢ \quad 1 - α_{12}α_{21} > 0 \tag{1}$$

Ἡ (1) δύναται ἐπίσης νὰ διατυπωθῆ ὡς:

$$\begin{vmatrix} 1 & -α_{12} \\ -α_{21} & 1 \end{vmatrix} > 0 \tag{2}$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ τέμνονται εἰς τὸ θετικὸν τεταρτημόριον ὅταν ἡ ὁρίζουσα τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος ἐξισώσεων κατανομῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός. Οἱ D. Hawkins καὶ H. Simon ἔδειξαν (1) ὅτι ἡ θετικότης τῆς ὁριζούσης–ἀποτελεῖ, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, ἀναγκαίαν καὶ ἐπαρκῆ συνθήκην διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ἰσορροπίας εἰς τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ προσδιορισμοῦ μὴ ἀρνητικῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων. Δι' ὃ καὶ «συνθήκη Hawkins – Simon» συνήθως καλεῖται.

---

1) Βλ. D Hawkins and H. Simon : Some Conditions of Macroeconomic Stabitity, Econometrica, 1949.

Μεταξὺ τῶν συντελεστῶν $\alpha_{\iota\kappa}$ καὶ τῶν συντελεστῶν $\beta_{\iota\kappa}$ ὑφίσταται ὡρισμένη σχέσις. Ὡς εἴπομεν, $\alpha_{\iota\kappa}$ δεικεύει τὴν ἀξίαν τοῦ κατὰ μονάδα παραγωγῆς κ ἀναλισκομένου ἐντὸς τοῦ ἔτους προϊόντος ι, ὑπὸ μορφὴν παραγωγικῶν μέσων. Διὰ τὴν αὔξησιν κατὰ μίαν μονάδα τοῦ προϊόντος κ κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος θὰ χρειασθῇ ἡ ἐπὶ πλέον κατανάλωσις $\alpha_{\iota\kappa}$ μονάδων ἐκ τοῦ ι. Ταυτοχρόνως ὅμως πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἀντιστοίχως τὸ ἀπόθεμα τῶν μέσων παραγωγῆς τοῦ κλάδου κ ἐκ τῶν προϊόντων τοῦ κλάδου ι. Ἡ ἀπαιτουμένη αὔξησις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ρυθμὸν ἐτησίας καταναλώσεως (ἀποσβέσεως) τῶν μέσων παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι τὰ ὑπὸ τοῦ κλάδου ι παρεχόμενα προϊόντα (π.χ. μηχαναὶ) εἰς τὸν κλάδον κ, πρὸς ἐπαύξησιν τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τοῦ τελευταίου, διαρκοῦν 15 ἔτη. Ἄν τὸ χρησιμοποιούμενον ἐτησίως τμῆμα εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον, π.χ., πρὸς τὸ 1/15 τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν προϊόντων αὐτῶν, διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ἐτησίας καταναλώσεως αὐτῶν κατὰ $\alpha_{\iota\kappa}$, πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς αὐξήσεως τῆς ἐτησίας παραγωγῆς τοῦ κλάδου κ κατὰ 1 μονάδα, θὰ ἀπαιτηθῇ ἐπένδυσις προϊόντος ι ἀξίας 15 $\alpha_{\iota\kappa}$. Δηλαδή :

$$\beta_{\iota\kappa} = 15\,\alpha_{\iota\kappa}\,. \tag{16}$$

Γενικῶς, ἂν $\Pi_{\iota\kappa}$ εἶναι ἡ περίοδος διαρκείας τῶν προϊόντων ι τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ δι' ἐπενδύσεις ὁ κλάδος κ, θὰ ἔχωμεν

$$\beta_{\iota\kappa} = \Pi_{\iota\kappa}\,\alpha_{\iota\kappa} \tag{17}$$

Οὕτω, οἱ τεχνολογικοὶ περιορισμοὶ τῆς παραγωγῆς δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῶν συντελεστῶν $\alpha_{\iota\kappa}$, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τεχνολογικοὺς περιορισμοὺς τῆς τρεχούσης παραγωγῆς καὶ τῶν συντελεστῶν $\beta_{\iota\kappa}$, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τοὺς τεχνολογικοὺς περιορισμοὺς τῆς διαδικασίας αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς. Προφανῶς ἀντὶ τῶν συντελεστῶν $\beta_{\iota\kappa}$ δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ γινόμενα $\alpha_{\iota\kappa}\,\Pi_{\iota\kappa}$.

4. 3. 3. Κλαδικοὶ συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς. Ἐκ τῶν (9) καὶ (15) λαμβάνομεν :

$$I^{(\kappa)} = \sum_{\iota} \beta_{\iota\kappa}\,\Delta X_{\kappa}$$

$$= \Delta X_{\kappa} \sum_{\iota} \beta_{\iota\kappa}\,. \tag{18}$$

Καὶ ἐκ τῆς (18)

$$\frac{I^{(\kappa)}}{\Delta X_\kappa} = \sum_\iota \beta_{\iota\kappa} = \beta_\kappa \qquad (19)$$

Τὸ β_κ ἀποτελεῖ τὸ ποσὸν τοῦ κεφαλαίου τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἐπενδυθῇ εἰς τὸν κλάδον κ, ὑπὸ μορφὴν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, πρὸς αὔξησιν τῆς ἀξίας τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου αὐτοῦ κατὰ μίαν μονάδα. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ὀνομάσωμεν τὸ β_κ συντελεστὴν ἐπενδύσεως τοῦ κλάδου ἢ κλαδικὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς. Ἐκ τῆς (19) βλέπομεν ὅτι ὁ κλαδικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως. Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν (17) καὶ (19) λαμβάνομεν:

$$\beta_\kappa = \sum_\iota \alpha_{\iota\kappa} \Pi_{\iota\kappa}, \qquad (20)$$

ἐξ ἧς συμπεραίνομεν ὅτι οἱ κλαδικοὶ συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν εἰσροῆς ἐπὶ τὰς περιόδους διαρκείας τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται δι' ἐπένδυσιν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ.

4.3.4. Γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς. Θὰ ὁρίσωμεν ὡς γενικὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς συνολικῆς παραγωγῆς, β, τὸν λόγον τῆς συνολικῆς ἐτησίας ἐπενδύσεως I πρὸς τὴν ἐτησίαν αὔξησιν ΔX τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς.

$$\frac{I}{\Delta X} = \beta \qquad (21)$$

Ὁ συντελεστὴς οὗτος δεικνύει τὸ ποσὸν τοῦ κεφαλαίου τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐπενδυθῇ διὰ νὰ αὐξηθῇ τὸ συνολικὸν ἐθνικὸν προϊὸν κατὰ μίαν μονάδα.

Ἐκ τῆς (4) συνάγεται ὅτι:

$$\Delta X = \Sigma\, \Delta X_\kappa \qquad (22)$$

Ἐκ τῆς (13) καὶ (22) ὁ γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος δύναται νὰ γραφῇ ὡς κάτωθι:

$$\beta = \frac{I}{\Delta X} = \frac{\Sigma\, I^{(\kappa)}}{\Sigma \Delta X_\kappa} \qquad (23)$$