ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ Γ.ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ.
ΠΤΥΧΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΑ

Υποβληθείσα για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα στη Διοίκηση Επιχειρήσεων.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

2004

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επ. Καθηγητή Μιχαήλ Σφακιανάκη για την πολύτιμη συμβολή του στην προετοιμασία, συγγραφή και παρουσίαση της εργασίας αυτής, συμβολή χωρίς την οποία η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής θα ήταν αδύνατη.

Στους γονείς μου
Γιώργο, Ναυσικά
και στον αδελφό
μου Αλέξανδρο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επ. Καθηγητή Μιχαήλ Σφακιανάκη για την πολύτιμη συμβολή του στην προετοιμασία, συγγραφή και παρουσίαση της εργασίας αυτής, συμβολή χωρίς την οποία η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής θα ήταν αδύνατη.

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ:

ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1.1 Τι είναι τα δικαιώματα (options) ;

Τα δικαιώματα είναι παράγωγα συμβόλαια που η αξία τους εξαρτάται από την τιμή του δείκτη ή της μετοχής ή οποιουδήποτε άλλου αγαθού είναι συνδεδεμένα.

1.1.1 Ποια είναι τα είδη των δικαιωμάτων ;

Υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων :

Τα **call options (ή αλλιώς δικαιώματα αγοράς)** δίνουν το δικαίωμα αλλά όχι και την υποχρέωση στον κάτοχο τους να **αγοράσει** το αγαθό με το οποίο είναι συνδεδεμένο το δικαίωμα , μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (μέχρι την λήξη του δικαιώματος) , σε μια καθορισμένη από πριν τιμή (την λεγόμενη τιμή εξάσκησης ή Strike Price).

Τα **put options (ή αλλιώς δικαιώματα πώλησης)** δίνουν το δικαίωμα αλλά όχι και την υποχρέωση στον κάτοχο τους να **πουλήσει** το αγαθό με το οποίο είναι συνδεδεμένο το δικαίωμα , μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (μέχρι την λήξη του δικαιώματος) , σε μια καθορισμένη από πριν τιμή (την λεγόμενη τιμή εξάσκησης ή Strike Price).

Εάν η εξάσκηση του δικαιώματος μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε ημερομηνία μέχρι την λήξη του τότε τα δικαιώματα λέμε ότι είναι **Αμερικάνικου τύπου**. Εάν η εξάσκηση του δικαιώματος μπορεί να γίνει μόνο στην λήξη του τότε λέμε ότι το δικαίωμα αυτό είναι **Ευρωπαϊκού τύπου**.

1.1.2 Γιατί ένα δικαίωμα έχει αξία ;

Ας φανταστούμε ένα **δικαίωμα αγοράς (call option)** Ευρωπαϊκού τύπου που αφορά τον δείκτη FTSE-20 με ημερομηνία λήξης σε ένα μήνα και με τιμή εξάσκησης 1000. Ο δείκτης αυτή την στιγμή έχει τιμή 950.

Αν όταν έρθει η λήξη του δικαιώματος ο δείκτης παραμένει κάτω από το 1000 (π.χ. είναι 930) τότε το δικαίωμα δεν έχει καμία αξία γιατί ο κάτοχος του δικαιώματος δεν θα θέλει να το εξασκήσει και να αγοράσει τον δείκτη στην τιμή εξάσκησης 1000 αφού αυτήν την στιγμή στην αγορά έχει 930.

Αν όμως όταν έρθει η λήξη του δικαιώματος ο δείκτης έχει ξεπεράσει το 1000 και βρίσκεται για παράδειγμα στο 1050 τότε το δικαίωμα έχει αξία 50 μονάδες διότι μπορεί ο κάτοχος του να αγοράσει τον δείκτη στην τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που είναι 1000 και να πουλήσει στο 1050 που είναι η τρέχουσα τιμή του δείκτη κρατώντας την διαφορά των 50 μονάδων. (Στην πράξη η πίστωση των 50 μονάδων γίνεται αυτόματα στον λογαριασμό του με την λήξη του συμβολαίου και χωρίς να χρειάζεται να γίνει η παραπάνω αγοροπωλησία).

Όπως καταλαβαίνουμε από το παραπάνω παράδειγμα ένα **δικαίωμα αγοράς (call option)** έχει αξία αφού υπάρχει πιθανότητα στην λήξη του να δώσει στον κάτοχο του κάποιο κέρδος. Άρα για να αγοράσει ένα **δικαίωμα αγοράς (call option)** κάποιος θα πρέπει να καταβάλλει στον πωλητή του **δικαιώματος αγοράς (call option)** ένα αντίτιμο (το λεγόμενο **premium**) διότι ο πωλητής αναλαμβάνει την υποχρέωση να καλύψει την αξία που θα έχει το δικαίωμα στην λήξη του εάν ενδεχομένως ο δείκτης κινηθεί πάνω από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

Αντίστοιχα για να αγοράσει κάποιος ένα **δικαίωμα πώλησης (put option)** θα πρέπει να καταβάλλει στον πωλητή του δικαιώματος ένα αντίτιμο **premium** διότι αυτός θα αναλάβει να καλύψει το κέρδος του αγοραστή στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του FTSE-20 είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης (Strike Price). Πράγματι στην περίπτωση αυτή που για παράδειγμα η τιμή εξάσκησης είναι 1000 και ο δείκτης είναι στην λήξη του δικαιώματος στο 910 το **δικαίωμα πώλησης (put option)** έχει αξία 90 μονάδες διότι ο κάτοχος του θα μπορούσε να πουλήσει τον δείκτη στην τιμή εξάσκησης (1000) και να τον αγοράσει στην τρέχουσα τιμή της αγοράς (910) κρατώντας την διαφορά.

Το premium που θα πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής του call ή του put option στον πωλητή του δικαιώματος για να το αποκτήσει εξαρτάται από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Κάποιος για παράδειγμα αγοράζει ένα call option με λήξη τον επόμενο μήνα και τιμή εξάσκησης 1100 ενώ αυτή την στιγμή ο δείκτης διαπραγματεύεται στο 950. Σίγουρα το premium που θα πλήρωνε για αυτό το call option θα ήταν πολύ μικρότερο σε σχέση με αυτό που θα πλήρωνε για ένα call option με την ίδια ημερομηνία λήξης αλλά με τιμή εξάσκησης το 1000 γιατί αυτό θα εμφάνιζε σε κάθε περίπτωση ποιο εύκολα κέρδος και μάλιστα μεγαλύτερο κέρδος. Τα αντίθετα ακριβώς ισχύουν για τα put options. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή εξάσκησης τόσο μεγαλύτερο είναι το premium που θα πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής του put option στον πωλητή του γιατί οι μεγαλύτερες τιμές εξάσκησης στο put option δίνουν το δικαίωμα κάποιος να πουλήσει το συνδεδεμένο αγαθό σε μεγαλύτερη τιμή και άρα να καρπωθεί με μεγαλύτερη πιθανότητα κάποιο κέρδος και μάλιστα μεγαλύτερο κέρδος από αυτό που θα είχε στην περίπτωση που η τιμή εξάσκησης είναι χαμηλότερη.

Η αξία του δικαιώματος εξαρτάται επίσης και από τον χρόνο που απομένει μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο χρόνος τόσο πιθανότερο είναι η τιμή του αγαθού που συνδέεται με το δικαίωμα να προλάβει να κάνει κάποια μεγάλη κίνηση και άρα είναι πολύ πιθανότερο το δικαίωμα να έχει μεγαλύτερη αξία στη λήξη του.

Η αξία των δικαιωμάτων εξαρτάται και από την μεταβλητότητα των τιμών του αγαθού που είναι συνδεδεμένο το δικαίωμα. Όσο αυξάνονται οι έντονες διακυμάνσεις τόσο αυξάνεται και η αξία του δικαιώματος αφού η πιθανότητα κέρδους για τον κάτοχο του είναι μεγαλύτερη.

Τέλος η αξία των δικαιωμάτων μεταβάλλεται με την μεταβολή του τρέχοντος επιτοκίου. Αφού τα δικαιώματα αφορούν πράξεις αγοροπωλησιών που ενδέχεται να γίνουν στο μέλλον οι τιμές τους πρέπει να προεξοφληθούν σε σημερινές τιμές και η προεξόφληση αυτή εξαρτάται από το ύψος του επιτοκίου. Αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε αύξηση της τιμής των call options και μείωση της τιμής των put option.

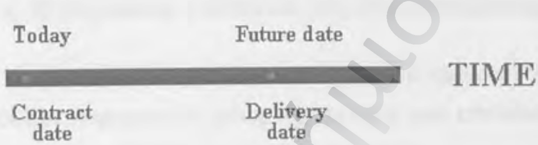
Δηλαδή το μέγιστο κέρδος που μπορεί να έχει ο πωλητής ενός call ή ενός put option είναι το premium που εισπράττει από τον αγοραστή ενώ η μέγιστη χασούρα του είναι απεριόριστη. Από την άλλη ο αγοραστής δικαιωμάτων έχει ως μέγιστη χασούρα το premium που πληρώνει για το δικαίωμα ενώ το κέρδος του μπορεί θεωρητικά να είναι απεριόριστο.

Οι απολαβές που μπορεί να έχει κάποιος από δικαιώματα είναι **ασύμμετρες.** Ο πωλητής δικαιωμάτων έχει συχνότερα και μικρότερα κέρδη και λιγότερο συχνές αλλά μεγαλύτερες απώλειες. Το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει με τον αγοραστή δικαιωμάτων.

Για να μην απλοποιούμε όμως τα πράγματα θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι υπάρχει η δυνατότητα από κάποιον να ακολουθήσει μια ποιο σύνθετη στρατηγική με αποτέλεσμα τα κέρδη ή οι ζημιές του να έχουν ποιο "σύνθετη" μορφή. Ένα πλεονέκτημα των δικαιωμάτων είναι ότι μας δίνουν αυτή την δυνατότητα

Για να καταλάβουμε τα παράγωγα, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε κάποια βασικά χρηματοοικονομικά προϊόντα : τα forward και τα futures.

Τα Forward (ΣΜΕ – Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης), τα futures και τα δικαιώματα (options) έχουν ένα κοινό στοιχείο: **Αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη στιγμή στο μέλλον.**

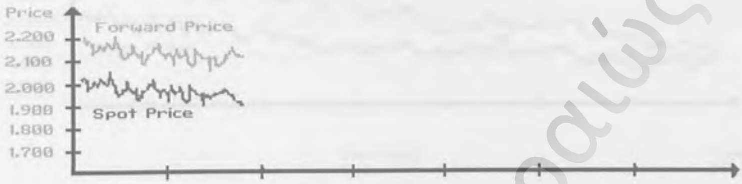


Για συναλλαγές στη **τρέχουσα (spot) αγορά**, κάποιος αγοράζει, πουλάει και πληρώνει μέσα σε δύο εργάσιμες ημέρες. Στα **Forward** και στα **futures** είναι συμφωνίες για αγορά ή πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος, σε μια προκαθορισμένη ποσότητα, με την υποχρέωση να γίνει η παράδοση και η πληρωμή στην προκαθορισμένη ημερομηνία. Η τιμή για το δικαίωμα αυτό καθορίζεται από τις δυνάμεις της αγοράς και πληρώνεται με τη σύναψη του συμβολαίου.

Τα ΣΜΕ (Forward) είναι άμεσες συμφωνίες μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή για παράδοση συγκεκριμένης ποσότητας ενός αγαθού στο μέλλον. Ο αγοραστής και ο πωλητής είναι τα άμεσα συμβαλλόμενα μέρη.

1.2 Μια μελλοντική συναλλαγή

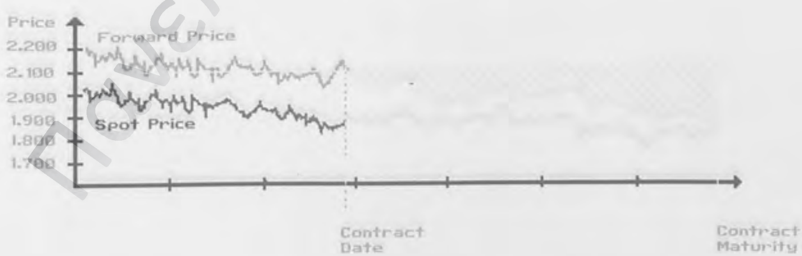
Ας αρχίσουμε με μια μελλοντική συναλλαγή. Όταν κάποιος ζητάει μια τιμή για ένα αγαθό (όποιο και να είναι αυτό) πρέπει να είναι απόλυτα ξεκάθαρη η ημερομηνία που υποχρεούται να το παραδώσει.



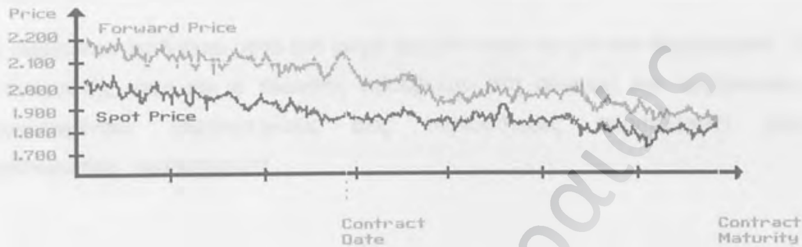
Η **Spot τιμή** – η τιμή που πληρώνεται αν η συναλλαγή λάβει χώρα τώρα π.χ. 15 Μαρτίου– είναι διαφορετική από την τιμή στις 15 Μαρτίου για παράδοση στο μέλλον π.χ. 28 Αυγούστου, η οποία και ονομάζεται **Forward τιμή.**

Η διαφορά μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Μπορεί να μεταβάλλεται λόγω πολλών παραγόντων, όπως π.χ. το ύψος των επιτοκίων, τις διαφορές στις εκτιμήσεις και στις προσδοκίες του επενδυτικού κοινού.

Τόσο η **Spot**, όσο και η **Forward** τιμή μεταβάλλονται στη διάρκεια του χρόνου, συνήθως προς την ίδια κατεύθυνση, αλλά όχι απαραίτητα με το ίδιο ποσοστό .



Μέχρι στιγμής έχουμε αναφέρει δύο τιμές.. Είναι ώρα να εισάγουμε και μια Τρίτη τιμή στην προσπάθεια που κάνουμε να καλύψουμε το τεράστιο θέμα των παραγώγων προϊόντων. Η **(Contract Price) τιμή συμβολαίου**. Αν το ΣΜΕ έγινε στις 27Απριλίου η τιμή συμβολαίου αντιπροσωπεύει τη μελλοντική τιμή στις 27 Απριλίου για παράδοση στις 30 Αυγούστου.

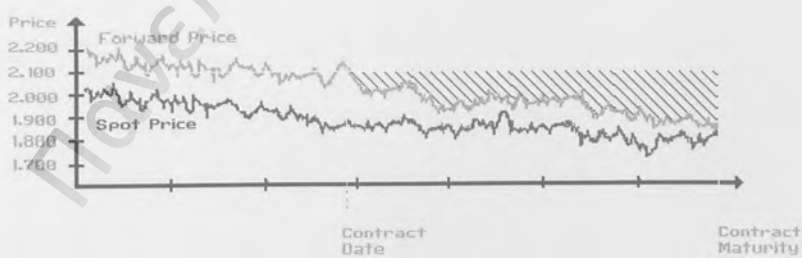


Με το πέρασμα του χρόνου η τιμή συμβολαίου παραμένει σταθερή ενώ η **(Spot) τρέχουσα** και η **(Forward) μελλοντική** τιμή συνεχίζουν να μεταβάλλονται.

Έστω ότι την 1η Ιουνίου οι τιμές για το χρυσό είναι οι ακόλουθες :

Έστω ότι για παράδοση στις 15 Αυγούστου:	Forward Price:	**$ 420/oz**
	Spot Price:	**$ 410/oz**

Ένα συμβόλαιο αγοράς (ή πώλησης) συγκεκριμένης ποσότητας χρυσού με παράδοση στις 15 Αυγούστου έχει μια συγκεκριμένη τιμή ,αυτή η τιμή θα είναι ίση με την τρέχουσα τιμή Forward .



Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει μια πτωτική forward τιμή από την ημερομηνία σύναψης του συμβολαίου μέχρι την ημερομηνία ωρίμανσης του (ημερομηνία που πρέπει να γίνει η παράδοση και ταυτόχρονα η εκκαθάριση του συμβολαίου). Η διαφορά μεταξύ την τρέχουσα forward τιμή και την τιμή συμβολαίου αντιπροσωπεύει το κέρδος στη συγκεκριμένη περίπτωση για τον πωλητή και τη ζημία για τον αγοραστή.

Το συμβόλαιο αυτό είναι μόνο ένα μικρό κομμάτι στην αγορά των παραγώγων. Τόσο ο αγοραστής, όσο και ο πωλητής προέβηκαν στη σύναψη του συμβολαίου για συγκεκριμένους (διαφορετικούς στις περισσότερες περιπτώσεις) λόγους, κερδοσκοπίας, hedging κ.λ.π.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1. Ross, Sheldon M, "**<u>An introduction to mathematical finance: options and other topics</u>**", Cambridge, 1999

2. DonM. Chance, "**<u>An introduction to derivatives</u>**", Dryden, 1998

3. Dubofsky, David A., "**<u>Derivatives, valuation and risk management</u>**", Oxford New York, 2003

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

2.1 Εισαγωγή

Η ιδέα ενός δικαιώματος δεν είναι καινούρια. Οι αρχαίοι Έλληνες, οι Ρωμαίοι και οι Φοίνικες διαπραγματευόντουσαν δικαιώματα σε εξερχόμενα φορτία. Αν ερμηνευτεί χρηματοοικονομικά το δικαίωμα είναι «ένα συμβόλαιο μεταξύ δυο μερών, στο οποίο το ένα μέρος έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο. Το να έχεις κάποιο δικαίωμα χωρίς ουδεμία υποχρέωση έχει χρηματοοικονομική αξία, γι' αυτό το λόγο οι κάτοχοι αυτών των δικαιωμάτων πρέπει να αγοράσουν αυτά τα δικαιώματα, καθιστώντας τα αυτομάτως προϊόντα και αυτά.. Από εκεί πήραν και το όνομα «παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα». Τα δικαιώματα αγοράς (Call options) είναι συμβόλαια που δίνουν το δικαίωμα στον κάτοχο να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο, ενώ τα δικαιώματα πώλησης (Put options) αντίθετα είναι συμβόλαια που δίνουν το δικαίωμα στον κάτοχο να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο. Η τιμή του δικαιώματος ονομάζεται premium.

2.2 Προέλευση των τεχνικών τιμολόγησης των παραγώγων

Οι μοντέρνες τεχνικές τιμολόγησης των παραγώγων, με βαθιές ρίζες στο στοχαστικό υπολογισμό, θεωρούνται από τις πιο σύνθετες (από μαθηματική άποψη) τεχνικές στο χώρο της χρηματοοικονομικής. Οι ρίζες αυτών των σύγχρονων τεχνικών βρίσκονται στο 1877, οπότε ο Charles Castelli έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο «The Theory of Options in Stocks and Shares». Το βιβλίο του Castelli έδωσε στο ευρύ κοινό την έννοια της κερδοσκοπίας, αλλά και του hedging στα options, αλλά δεν είχε καθόλου καλή θεωρητική βάση. Είκοσι τρία χρόνια αργότερα, ο Louis Bachelier έδωσε την πρώτη αναλυτική περιγραφή για τα παράγωγα, στη διατριβή του "Theorie de la Speculation" στο πανεπιστήμιο της Σορβόννης. Ο Bachelier ήταν σε σωστό δρόμο, αλλά χρησιμοποίησε μια τεχνική για να υπολογίσει την τιμή της μετοχής, η οποία υπολόγιζε αρνητικές τιμές στον υποκείμενο τίτλο και τιμή του option που ήταν μεγαλύτερη του υποκείμενου τίτλου. Η δουλειά του Bachelier κίνησε το ενδιαφέρον ενός καθηγητή στο MIT, του Paul Samuelson, ο οποίος το 1955 έγραψε μια εργασία (που ποτέ δεν εκδόθηκε) με τίτλο "Brownian Motion in the Stock Market".Την ίδια χρονιά ο Richard

Kruizenga, ένας από τους φοιτητές του Samuelson', αναφέρθηκε στην εργασία του Bachelier στη διατριβή του με τον τίτλο "Put and Call Options: A Theoretical and Market Analysis". Το 1962, μια άλλη διατριβή , αυτή του A. James Boness, επικεντρωνόταν στα παράγωγα. Στη διατριβή αυτή με τίτλο "A Theory and Measurement of Stock Option Value", ο Boness ανέπτυξε ένα μοντέλο αποτίμησης, το οποίο έκανε ένα θεαματικό θεωρητικό άλμα σε σχέση με τους προκάτοχούς του. Το πιο σημαντικό στοιχείο είναι ότι η εργασία αυτή του Boness ενήργησε ως προκάτοχος του μοντέλου που το 1973 οι Fischer Black και Myron Scholes ανακάλυψαν, μοντέλο που έως και σήμερα θεωρείται το πληρέστερο, ακριβέστερο και πλέον πολύπλοκο και ολοκληρωμένο από μαθηματικής άποψης.

Ήταν ένα κλασσικό φθινοπωρινό απόγευμα στο Belmont, Mass του 1969, όταν ο Fischer Black, ένας 31/χρονος ανεξάρτητος χρηματοοικονομικός σύμβουλος, και ο Myron Scholes, ένας 28/χρονος βοηθός καθηγητή στην έδρα των χρηματοοικονομικών στο MIT σκέφτηκαν κάτι που θα άλλαζε την παγκόσμια ιστορία των χρηματοοικονομικών. Ο Black εργαζόταν για τον Arthur D. Little στο Cambridge, Mass., όταν συνάντησε ένα συνάδελφο, ο οποίος είχε επινοήσει ένα μοντέλο αποτίμησης χρεογράφων (securities). Με το Ph.D. in applied mathematics από το Harvard μόλις πριν από πέντε χρόνια, ο Black ενδιαφέρθηκε αμέσως. Το μοντέλο του συνάδελφού του επικεντρωνόταν σε μετοχές, έτσι ο Black έστρεψε το ενδιαφέρον του προς τα δικαιώματα, τα οποία δεν ήταν ένα πολύ διαδεδομένη προϊόν εκείνη την εποχή. Το 1973, η ομάδα των Fischer Black και Myron Scholes είχαν γράψει το πρώτο πρόχειρο που αποδείκνυε την ύπαρξη ενός αναλυτικού μοντέλου που θα προσδιόριζε τη fair market value για ένα call options ευρωπαϊκού τύπου σε χρηματοοικονομικά στοιχεία. Έστειλαν την εργασία τους στο the Journal of Political Economy για έκδοση, το οποίο όμως την απέρριψε. Πεπεισμένοι όμως ότι οι ιδέες τους είχαν βάση, έστειλαν ένα αντίγραφο στο Review of Economics and Statistics, το οποίο όμως και αυτό την απέρριψε. Αφού έκαναν κάποιες τροποποιήσεις, βασισμένες σε υποδείξεις του Merton Miller (Κάτοχος Nobel από το University of Chicago) και του Eugene Fama, από το University of Chicago, έστειλαν ξανά την εργασία τους στο Journal of Political Economy, το οποίο τελικά και τη δέχτηκε. Από την στιγμή που εκδόθηκε το 1973, το μοντέλο Black and Scholes κέρδισε μια θέση μέσα στα πιο αποδεκτά χρηματοοικονομικά μοντέλα.

2.3 Παράγωγα Συμβόλαια

2.3.1 Ορισμός

Το παράγωγο είναι ένα συμβόλαιο του οποίου η αξία εξαρτάται (παράγεται) από την τιμή ενός άλλου αγαθού που ονομάζεται υποκείμενο αγαθό. Το υποκείμενο αγαθό μπορεί να είναι μια μετοχή ή ένας δείκτης ή ένα προϊόν (commodities) ή ακόμα και κάτι πιο σύνθετο όπως για παράδειγμα ένα επιτόκιο. Κατά συνέπεια η αξία του παραγώγου θα εξαρτάται από την τιμή που έχει αυτή η μετοχή ή αυτός ο δείκτης ή αυτό το προϊόν ή το συγκεκριμένο επιτόκιο.

2.3.2 Είδη Συμβολαίων

α. Forwards

Ένα Σ.Μ.Ε. – Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (forward contract) είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών, να θέσουν σήμερα την τιμή για μια αγοροπωλησία μεταξύ τους που θα γίνει στο μέλλον. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι ένα τραπεζικό ίδρυμα θα χρειαστεί 2 εκατομμύρια δολάρια σε 3 μήνες από τώρα. Μπορεί να συμφωνήσει σε αυτή την αγορά από ένα άλλο τραπεζικό ίδρυμα με ένα forward contract μεταξύ τους που θα τους δεσμεύει ότι θα πραγματοποιήσουν αυτή την συναλλαγή σε τρεις μήνες με μια τιμή που συμφωνούν σήμερα π.χ. 1,06 δολάρια ανά ευρώ. Το forward contract ενέχει τον κίνδυνο, αν και μικρό συνήθως, κάποιο από τα συμβαλλόμενα μέρη να μην τηρήσει το συμβόλαιο.

β. Futures

Τα futures είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων να θέσουν μια τιμή σήμερα για μια συναλλαγή που θα πραγματοποιηθεί στο μέλλον. Αυτός που θα είναι ο αγοραστής σε αυτή την συναλλαγή λέμε ότι λαμβάνει long θέση και θα κερδίσει από μια ενδεχόμενη ανοδική κίνηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού στο μέλλον. Αυτός που θα είναι ο πωλητής σε αυτή την συναλλαγή λέμε ότι λαμβάνει short θέση και θα κερδίσει από μια ενδεχόμενη πτωτική κίνηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού στο μέλλον Σε αντίθεση με τα forwards, τα futures διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια παραγώγων με αποτέλεσμα να έχουν σταντερισμένα χαρακτηριστικά που έχουν καθοριστεί από το χρηματιστήριο παραγώγων. Ο κίνδυνος να μην τηρηθεί το συμβόλαιο έχει πρακτικά εξαλειφθεί λόγω ενός μηχανισμού εκκαθάρισης που έχει θεσπιστεί από το χρηματιστήριο παραγώγων. Σύμφωνα με αυτόν απαιτείται η καταβολή ενός χρηματικού περιθωρίου (margin) από τους αντισυμβαλλόμενους και στο τέλος κάθε εργάσιμης μέρας προσθαφαιρείται το κέρδος ή η ζημιά που επιφέρει στις θέσεις των αντισυμβαλλομένων η μεταβολή της τιμής του υποκείμενου αγαθού και αν απαιτείται ζητείται πρόσθετο margin από κάποιον από αυτούς.

γ. Options

Σε αντίθεση με τα forwards και τα futures, τα δικαιώματα (options) δίνουν στον αγοραστή τους το δικαίωμα αλλά όχι και την υποχρέωση να προχωρήσει από την πλευρά του στη μελλοντική συναλλαγή που περιγράφουν δηλαδή του δίνει το δικαίωμα να αποφασίσει αν θα το εξασκήσει. Για να αποκτήσει αυτό το δικαίωμα ο αγοραστής των option καταβάλλει προκαταβολικά στον πωλητή τους ένα αντίτιμο , το λεγόμενο premium. Τα χαρακτηριστικά των option περιγράφονται στις παραγράφους που ακολουθούν.

2.4 Δικαιώματα (Options)

2.4.1 Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης (*Call και Put options)*

Γενικά υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων, τα call options και τα put options.

Τα δικαιώματα αγοράς (*call options)* δίνουν το δικαίωμα στον αγοραστή τους να *αγοράσει* το υποκείμενο αγαθό, σε μια συγκεκριμένη τιμή (την λεγόμενη τιμή εξάσκησης ή strike price) και σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Η αξία ενός call option κατά την εξάσκηση του είναι η διαφορά της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου αγαθού από την τιμή εξάσκησης. Αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινείται κάτω από την τιμή εξάσκησης δεν έχει νόημα η εξάσκηση του call option.

Τα δικαιώματα πώλησης (ι*put options)* δίνουν το δικαίωμα στον αγοραστή τους να *πουλήσει* το υποκείμενο αγαθό, σε μια συγκεκριμένη τιμή (την λεγόμενη τιμή εξάσκησης ή strike price) και σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Η αξία ενός put option κατά την εξάσκηση του είναι η διαφορά της τιμής εξάσκησης από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου αγαθού. Αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινείται πάνω από την τιμή εξάσκησης δεν έχει νόημα η εξάσκηση του put option.

2.4.2 Options Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου

Αν ένα δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την λήξη του τότε λέμε ότι το δικαίωμα αυτό είναι *Αμερικανικού τύπου.* Αν αντίθετα η εξάσκηση ενός δικαιώματος μπορεί να γίνει μόνο στην λήξη του τότε λέμε ότι το δικαίωμα αυτό είναι *Ευρωπαϊκού τύπου.* Τα δικαιώματα που το υποκείμενο αγαθό είναι μετοχές είναι συνήθως δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, ενώ αυτά στα οποία το υποκείμενο αγαθό είναι κάποιος δείκτης συνήθως είναι Ευρωπαϊκού τύπου.

2.4.3 Exotics

Ως exotic options χαρακτηρίζονται κάποια δικαιώματα με ειδικά χαρακτηριστικά. Αυτά τα είδη δικαιωμάτων δεν διαπραγματεύονται στα χρηματιστήρια παραγώγων αλλά στην λεγόμενη over the counter market, που δραστηριοποιούνται τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Για παράδειγμα ένας τύπος exotic options είναι τα *Asian options* στα οποία η απολαβή τους εξαρτάται από την μέση τιμή του υποκείμενου αγαθού κατά την διάρκεια τους.

2.5 Θεωρητικά δίκαιη τιμή

Όταν ένα μοντέλο ενσωματώσει αυτές τις μεταβλητές, το αποτέλεσμα του μοντέλου ονομάζεται **θεωρητικά δίκαιη τιμή ή θεωρητική αξία (theoretical fair value)**.

Τα σημερινά μοντέλα αποτίμησης είναι δύο. Το μοντέλο των Black Scholes και το διονυμικό (binomial). Για τους περισσότεροι αναλυτές τα αποτελέσματα των δύο αυτών μοντέλων αντιπροσωπεύουν αρκετά καλά την πραγματικότητα. Υπάρχουν πολλά ακόμα μοντέλα αποτίμησης παραγώγων αξιογράφων.

2.6 Το διονυμικό μοντέλο

Προτάθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein σε μια δημοσίευση που έκαναν το 1979. Αυτή η λύση για την αποτίμηση – τιμολόγηση των option πιθανών να είναι η πιο προσφιλής σήμερα. Το μοντέλο διαιρεί το χρόνο που απομένει μέχρι την ωρίμανση του προϊόντος σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό διαστημάτων (ή βημάτων). Για κάθε διάστημα υπολογίζει ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου (μετοχής) είτε θα κινηθεί ανοδικά είτα καθοδικά με συγκεκριμένη πιθανότητα και το μέγεθος της μεταβολής υπολογίζεται σε συνάρτηση με τη μεταβλητότητα (volatility) του υποκείμενου τίτλου, το χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Έτσι δημιουργείται μια διονυμική κατανομή τιμών για τον υποκείμενο τίτλο (μετοχή ή δείκτη). Στη λήξη του δικαιώματος, η αξία του ισούται με την εσωτερική αξία κάθε μετοχής ή δείκτη. Το μοντέλο μετά προχωράει προς τα πίσω ένα – ένα τα διαστήματα που χώρισε στην αρχή υπολογίζοντας την αξία του δικαιώματος για κάθε διάστημα. Τη στιγμή που πληρώνεται το μέρισμα το μοντέλο το λαμβάνει και αυτό υπ' όψιν του. Στο τελικό στάδιο είναι το παρόν και η σημερινή τιμή του υποκείμενου τίτλου, όπου υπολογίζεται η θεωρητική αξία του δικαιώματος (theoretical fair value).

Ο αριθμός των βημάτων προσδιορίζει την ταχύτητα με την οποία η theoretical fair value μπορεί να υπολογιστεί. Με 100 τιμές οι περισσότεροι υπολογιστές μπορούν σήμερα να μας δώσουν αποτελέσματα με πολύ μεγάλο ποσοστό ακρίβειας όσον αφορά στη θεωρητική αξία του δικαιώματος (theoretical fair value).

2.7 Το μοντέλο των Black Scholes

Πρωτοπροτάθηκε από τους Black και Scholes σε μία εργασία τους που δημοσιεύθηκε το 1973 και αποτελεί την καλύτερη λύση στην αποτίμηση ενός δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου σε μια μετοχή, χωρίς όμως να λαμβάνει υπ' όψιν του την πληρωμή των μερισμάτων (αν υπάρχει).

Η εξίσωση των Black Scholes χρησιμοποιεί τις πραγματικές τιμές για να δώσει την θεωρητική αξία του δικαιώματος (theoretical fair value) ενός δικαιώματος. Το μοντέλο αυτό έχει πολλές παραλλαγές προκειμένου να μπορέσει να υπολογίσει τιμή και για δικαιώματα αμερικάνικου τύπου και για τίτλους πού έχουν μερισματική απόδοση.

Πάντως σήμερα με την ισχύ που έχουν οι υπολογιστές, το διονυμικό μοντέλο είναι πιο διαδεδομένο.

2.8 Σχέση μεταξύ της fair value και της τρέχουσας τιμής (market price)

Η fair value μπορεί να είναι πολύ κοντά στην τρέχουσα τιμή, η ύπαρξη όμως και άλλων παραγόντων στην αγορά σημαίνει ότι η fair value χρησιμοποιείται περισσότερο σαν εκτιμητής της αξίας του δικαιώματος.

Επιπλέον, η fair value εξαρτάται από κάποιες υποθέσεις που έχουμε κάνει, όπως για το ύψος της μεταβλητότητας, τη πληρωμή των μερισμάτων, κ.α., υποθέσεις που θέτονται κάθε φορά από τον αναλυτή που υπολογίζει τη fair market value. Διαφορετικές προσδοκίες στη μεταβλητότητα ή στο μέρισμα θα δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε δεδομένη στιγμή μπορεί αν υπάρχουν πολλές διαφορετικές απόψεις όσον αφορά στο ύψος της δίκαιης τιμής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Henin, Claude G., "**Options :theory and practice**", Lexington Books, 1977

2. Marshall, John Francis , "**Futures and option contracting :theory and practice**", South-Western Pub. Co., 1989

3. DonM. Chance, "**An introduction to derivatives**", Dryden, 1998

4. Hull, John C., "**Options, futures, and other derivatives**", Prentice Hall, 2003

5. Cox, John C., "**Options markets**", Prentice-Hall , 1985

6. Kallianpur, G., "**Introduction to option pricing theory**", Birkhauser, 2000

7. Daigler, Robert T., "**Advanced options trading**", Probus, 1994

8. McCafferty, Thomas A , "**All about options**", McGraw-Hill, 1998

9. McCafferty, Thomas A , "**All about futures**", Irwin, 1992

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕ OPTIONS

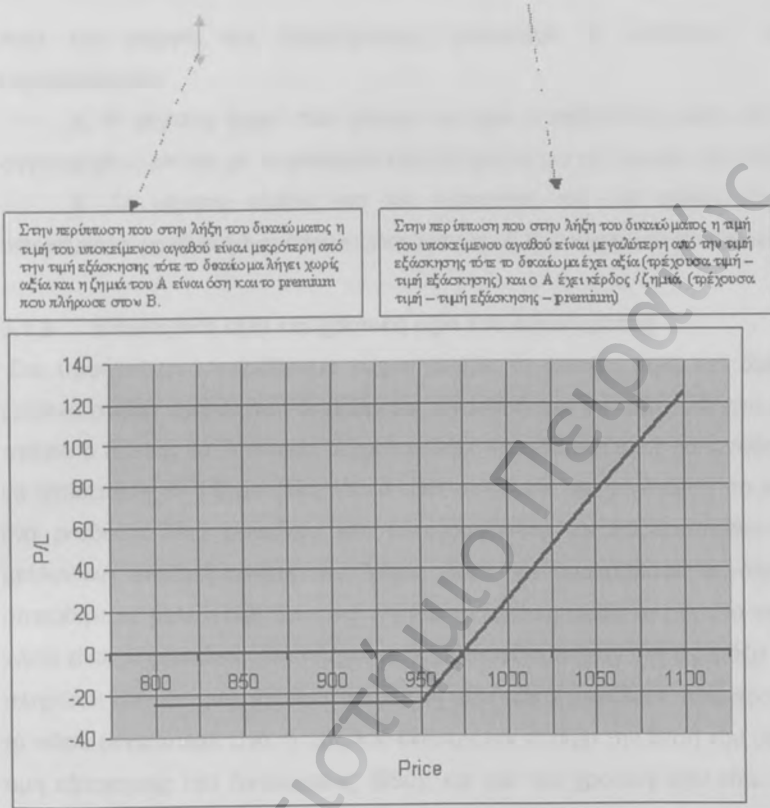
3.1 Call options

3.1.1 Διαγράμματα P/L (κέρδους / ζημιάς)

Ο έμπορος (*trader) Α* βλέπει στην οθόνη του τις τιμές των δικαιωμάτων του δείκτη που λήγουν σε 19 εργάσιμες μέρες από σήμερα.

Strike Price	900	950	1000
Call price	58,8	24,9	9
Put price	7	21,1	53,3

Ο δείκτης αυτή την στιγμή διαπραγματεύεται στις 952 μονάδες. Ο Α είναι αισιόδοξος για την πορεία της αγοράς και πιστεύει ότι θα κάνει άμεσα ένα ανοδικό ξέσπασμα προς τις 1000 μονάδες. Αγοράζει λοιπόν ένα call option (δικαίωμα αγοράς) με τιμή εξάσκησης 950 μονάδες και πληρώνει το premium των 24,9 μονάδων στον πωλητή του call option τον *trader B*. Το κέρδος ή η ζημιά του Α κατά την εξάσκηση του δικαιώματος μπορεί να αποτυπωθεί σε ένα διάγραμμα που στον κατακόρυφο άξονα του έχει το κέρδος ή την ζημιά και στον οριζόντιο άξονα του έχει την τιμή του υποκείμενου αγαθού κατά την εξάσκηση του δικαιώματος. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται αυτό το διάγραμμα για την περίπτωση του παραδείγματος μας:



Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία και η ζημιά του Α είναι όση και το premium που πλήρωσε στον Β.

Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα έχει αξία

(τρέχουσα τιμή – τιμή εξάσκησης)

και ο Α έχει κέρδος / ζημιά

P/L = (τρέχουσα τιμή – τιμή εξάσκησης – premium)

Από την μορφή του διαγράμματος μπορούμε να βγάλουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α. Η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχει ο αγοραστής ενός call option είναι συγκεκριμένη και ίση με το premium που πλήρωσε για την αγορά του δικαιώματος.

β. Το μέγιστο κέρδος για τον αγοραστή του call option είναι θεωρητικά απεριόριστο αφού αυξάνει όσο αυξάνει και η τιμή του υποκείμενου αγαθού.

3.1.2 Εσωτερική αξία και χρονική αξία του δικαιώματος

Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι αφού η τιμή του δείκτη κατά την χρονική στιγμή αγοράς του δικαιώματος είναι 952, για να έρθει ο Α στα λεφτά του θα πρέπει ο δείκτης το διάστημα μέχρι την λήξη του δικαιώματος να κινηθεί ανοδικά και να φτάσει στις 974,9 μονάδες. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι ο Α πληρώνει ένα premium 24,9 μονάδων για να εξασφαλίσει ότι θα καρπωθεί οποιαδήποτε μελλοντική ανοδική κίνηση του δείκτη χωρίς να αναλαμβάνει μεγάλο κίνδυνο σε οποιαδήποτε μελλοντική αρνητική κίνηση του δείκτη αφού το μέγιστο που μπορεί να χάσει είναι το premium που πλήρωσε. Κατά συνέπεια όταν ο Α αγοράζει το call option πληρώνει και για την τρέχουσα εσωτερική αξία των 2 μονάδων, που προκύπτουν από το πόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δείκτη όταν ανοίγει την θέση του (952) μείον την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος (950), και για την χρονική αξία που ενσωματώνει αυτό το δικαίωμα (22,9 μονάδες) και αντικατοπτρίζει την δυνατότητα που έχει μελλοντικά μέχρι την λήξη του να δώσει κέρδη στον κάτοχο του. Κατά συνέπεια το premium που πληρώνει ο αγοραστής ενός δικαιώματος ενσωματώνει δύο παράγοντες, την εσωτερική του αξία και την χρονική του αξία.

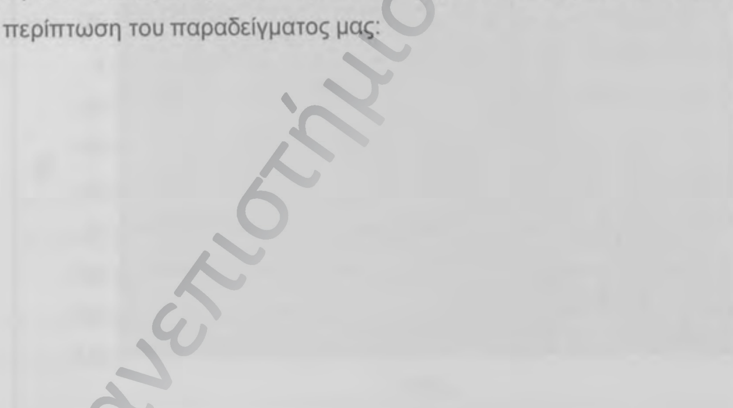
Premium = εσωτερική αξία του δικαιώματος + χρονική αξία του δικαιώματος

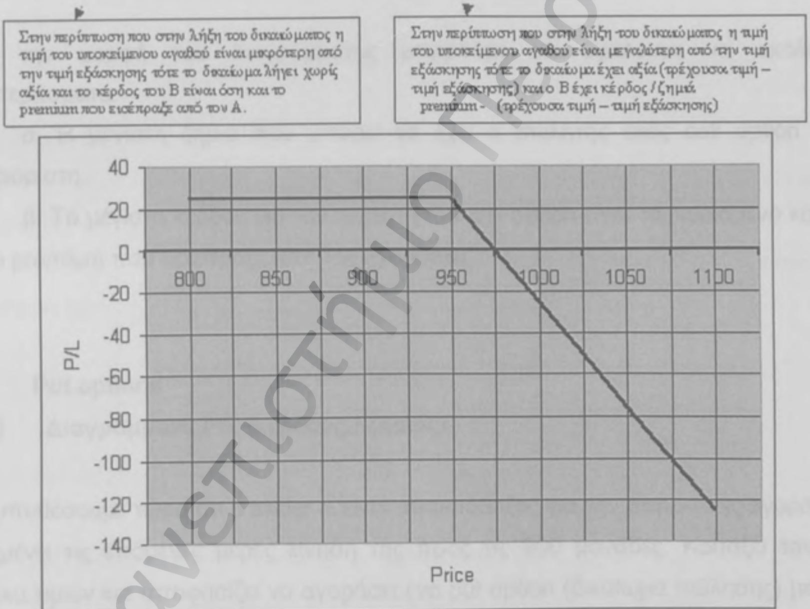
Στην περίπτωση που η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης ενός call option τότε αυτό έχει εσωτερική αξία και λέμε χαρακτηριστικά ότι είναι *in the money*.

Στην περίπτωση που η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης ενός call option τότε αυτό δεν έχει εσωτερική αξία και λέμε χαρακτηριστικά ότι είναι *out of the money*.
Στην περίπτωση που η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι ίση με την τιμή εξάσκησης ενός call option τότε λέμε χαρακτηριστικά ότι είναι *at the money*.

3.1.3 Ο πωλητής call option

Στην περίπτωση του πωλητή call option (ο trader B του προηγούμενου παραδείγματος) η ζημιά του αγοραστή θα είναι κέρδος του και το κέρδος του αγοραστή ζημιά του. Συγκεκριμένα θα έχει κέρδος όσο το premium που εισέπραξε αν η τιμή του δείκτη, όταν ο Α θα πρέπει να εξασκήσει το δικαίωμα, είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης του συμβολαίου (δηλαδή 950). Από εκεί και πάνω τα κέρδη του θα περιορίζονται και για τιμές του δείκτη πάνω από 974,9 θα περάσει πλέον σε ζημιές , οι οποίες αυξάνονται απεριόριστα όσο αυξάνεται η τιμή που θα έχει ο δείκτης κατά την εξάσκηση του δικαιώματος. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται αυτό το διάγραμμα για την περίπτωση του παραδείγματος μας:




Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία και το κέρδος του Β είναι όση και το premium που εισέπραξε από τον Α.
Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα έχει αξία (τρέχουσα τιμή – τιμή εξάσκησης) και ο Β έχει κέρδος / ζημιά premium - (τρέχουσα τιμή – τιμή εξάσκησης)
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
P/L
800
850
900
950
1000
1050
1100
Price

Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία και το κέρδος του Β είναι όσο και το premium που εισέπραξε από τον Α.
Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα έχει αξία

(τρέχουσα τιμή – τιμή εξάσκησης)
και ο Β έχει κέρδος / ζημιά

P/L = premium - (τρέχουσα τιμή – τιμή εξάσκησης)

Από την μορφή του διαγράμματος μπορούμε να βγάλουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

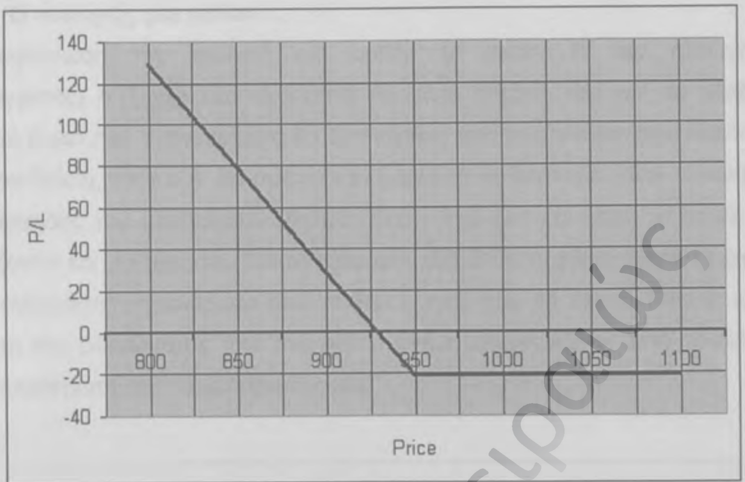
α. Η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχει ο πωλητής ενός call option είναι απεριόριστη.

β. Το μέγιστο κέρδος για τον πωλητή του call option είναι περιορισμένο και ίσο με το premium που εισέπραξε από τον αγοραστή.

3.2 Put options

3.2.1 Διαγράμματα P/L (κέρδους / ζημιάς)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο trader A είναι απαισιόδοξος για την πορεία της αγοράς και περιμένει τις επόμενες μέρες κίνηση της προς τις 900 μονάδες. Κοιτάζει τον ίδιο πίνακα τιμών και αποφασίζει να αγοράσει ένα put option (δικαίωμα πώλησης) με τιμή εξάσκησης 950 μονάδες και πληρώνει ένα premium 21,1 μονάδες στον πωλητή του δικαιώματος trader B. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται αυτό το διάγραμμα κέρδους / ζημιάς του Α για την περίπτωση του παραδείγματός μας:



Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία και η ζημιά του Α είναι όση και το premium που πλήρωσε στον Β.
Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα έχει αξία

(τιμή εξάσκησης - τρέχουσα τιμή)

και ο Α έχει κέρδος / ζημιά

P/L = (τιμή εξάσκησης - τρέχουσα τιμή – premium)

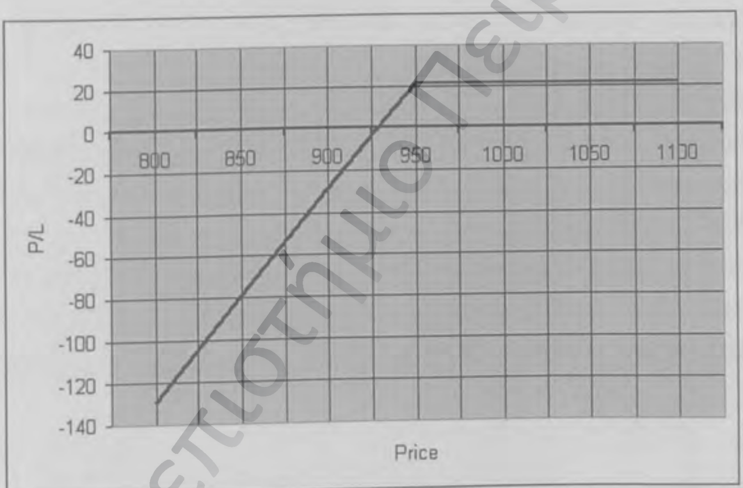
Από την μορφή του διαγράμματος μπορούμε να βγάλουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

α. Η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχει ο αγοραστής ενός put option είναι συγκεκριμένη και ίση με το premium που πλήρωσε για την αγορά του δικαιώματος.

β. Το μέγιστο κέρδος για τον αγοραστή του put option είναι θεωρητικά απεριόριστο αφού αυξάνει όσο πέφτει και η τιμή του υποκείμενου αγαθού.

3.2.2 Ο πωλητής put option

Στην περίπτωση του πωλητή put option (ο trader B του προηγούμενου παραδείγματος) η ζημιά του αγοραστή θα είναι κέρδος του και το κέρδος του αγοραστή ζημιά του. Συγκεκριμένα θα έχει κέρδος όσο το premium που εισέπραξε αν η τιμή του δείκτη, όταν ο Α θα πρέπει να εξασκήσει το δικαίωμα, είναι πάνω από την τιμή εξάσκησης του συμβολαίου (δηλαδή 950). Από εκεί και κάτω τα κέρδη του θα περιορίζονται και για τιμές του δείκτη κάτω από 928,9 θα περάσει πλέον σε ζημιές , οι οποίες αυξάνονται απεριόριστα όσο πέφτει η τιμή που θα έχει ο δείκτης κατά την εξάσκηση του δικαιώματος. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται αυτό το διάγραμμα για την περίπτωση του παραδείγματος μας:



Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία και το κέρδος του B είναι όσο και το premium που εισέπραξε από τον A.

Στην περίπτωση που στην λήξη του δικαιώματος η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε το δικαίωμα έχει αξία

(τιμή εξάσκησης - τρέχουσα τιμή) και ο B έχει κέρδος / ζημιά

P/L = premium - (τιμή εξάσκησης - τρέχουσα τιμή)

Από την μορφή του διαγράμματος μπορούμε να βγάλουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

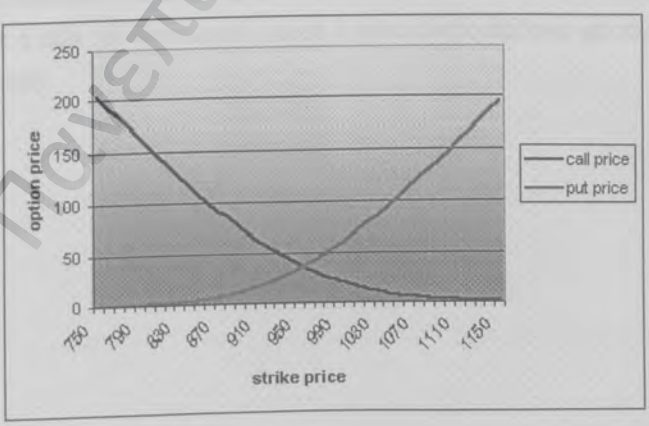
α. Η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχει ο πωλητής ενός put option είναι απεριόριστη.

β. Το μέγιστο κέρδος για τον πωλητή του put option είναι περιορισμένο και ίσο με το premium που εισέπραξε από τον αγοραστή.

3.3 Παράγοντες που επηρεάζουν το premium ενός option

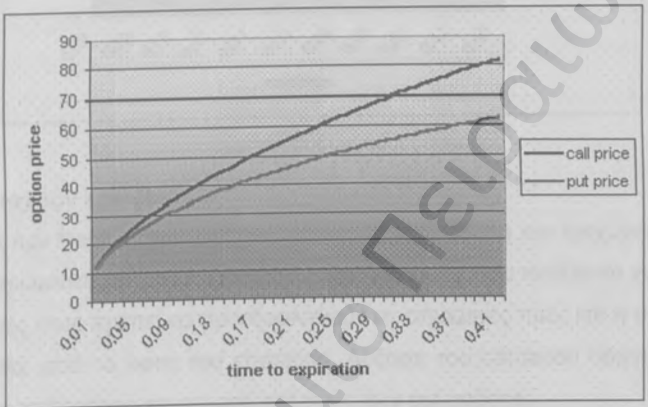
3.3.1 Η τιμή εξάσκησης

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα call option με λήξη τον επόμενο μήνα και τιμή εξάσκησης 1100 ενώ αυτή την στιγμή ο δείκτης διαπραγματεύεται στο 950. Σίγουρα το premium για αυτό το call option θα ήταν πολύ μικρότερο σε σχέση με αυτό για ένα call option με την ίδια ημερομηνία λήξης αλλά με τιμή εξάσκησης το 1000 γιατί αυτό θα εμφάνιζε σε κάθε περίπτωση πιο εύκολα κέρδος και μάλιστα μεγαλύτερο κέρδος. Τα αντίθετα ακριβώς ισχύουν για τα put options. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή εξάσκησης τόσο μεγαλύτερο είναι το premium που θα πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής του put option στον πωλητή του γιατί οι μεγαλύτερες τιμές εξάσκησης στο put option του δίνουν το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο αγαθό σε μεγαλύτερη τιμή και άρα να καρπωθεί με μεγαλύτερη πιθανότητα κάποιο κέρδος και μάλιστα μεγαλύτερο κέρδος από αυτό που θα είχε στην περίπτωση που η τιμή εξάσκησης είναι χαμηλότερη.



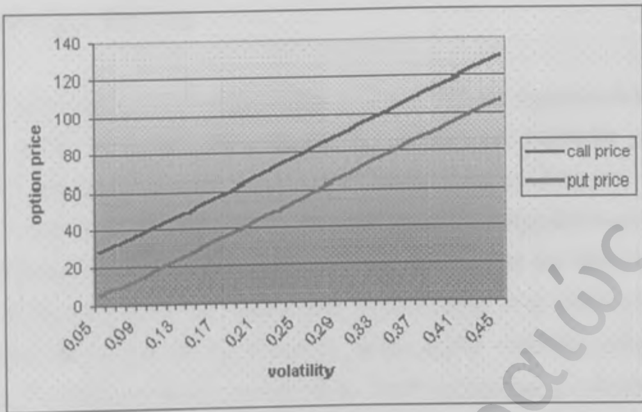
3.3.2 Ο χρόνος μέχρι την λήξη

Η αξία του δικαιώματος εξαρτάται επίσης και από τον χρόνο που απομένει μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο χρόνος τόσο πιθανότερο είναι η τιμή του αγαθού που συνδέεται με το δικαίωμα να προλάβει να κάνει κάποια μεγάλη κίνηση και άρα είναι πολύ πιθανότερο το δικαίωμα να έχει μεγαλύτερη αξία στη λήξη του.



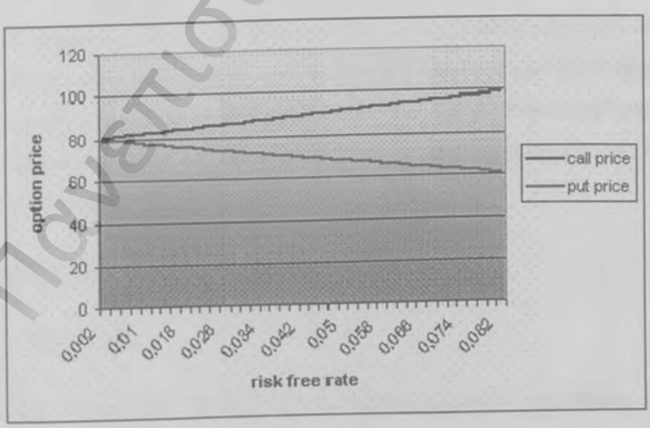
3.3.3 Η μεταβλητότητα του υποκείμενου αγαθού

Η αξία των δικαιωμάτων εξαρτάται και από την μεταβλητότητα των τιμών του αγαθού που είναι συνδεδεμένο το δικαίωμα. Όσο αυξάνονται οι έντονες διακυμάνσεις τόσο αυξάνεται και η αξία του δικαιώματος αφού η πιθανότητα κέρδους για τον κάτοχο του είναι μεγαλύτερη.



3.3.4 Το ισχύον επιτόκιο

Τέλος η αξία των δικαιωμάτων μεταβάλλεται με την μεταβολή του τρέχοντος επιτοκίου. Αφού τα δικαιώματα αφορούν πράξεις αγοροπωλησιών που ενδέχεται να γίνουν στο μέλλον οι τιμές τους πρέπει να προεξοφληθούν σε σημερινές τιμές και η προεξόφληση αυτή εξαρτάται από το ύψος του επιτοκίου. Αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε αύξηση της τιμής των call options και μείωση της τιμής των put options.



3.4 Στρατηγικές με Options

3.4.1 Γενικά

Με κατάλληλο συνδυασμό call και put options, μπορούμε να δημιουργήσουμε πλήθος στρατηγικών με τα επιθυμητά για εμάς χαρακτηριστικά και πρακτικά να πετύχουμε οποιοσδήποτε μορφής γράφημα κέρδους / ζημιάς όσο σύνθετο και αν είναι. Οι στρατηγικές αυτές διαφέρουν ως προς τον κίνδυνο που αναλαμβάνουμε αλλά και ως προς τις ενδεχόμενες απολαβές που θα έχουμε. Πρέπει να θυμόμαστε ότι το διάγραμμα Κέρδους/Ζημιάς της συνολικής στρατηγικής που υλοποιούμε είναι η πρόσθεση των διαγραμμάτων των επιμέρους θέσεων από τις οποίες αποτελείται αυτή η στρατηγική. Τα τέσσερα βασικά μπλοκ με τα οποία μπορούμε με πρόσθεση τους να δημιουργήσουμε οποιαδήποτε στρατηγική είναι:

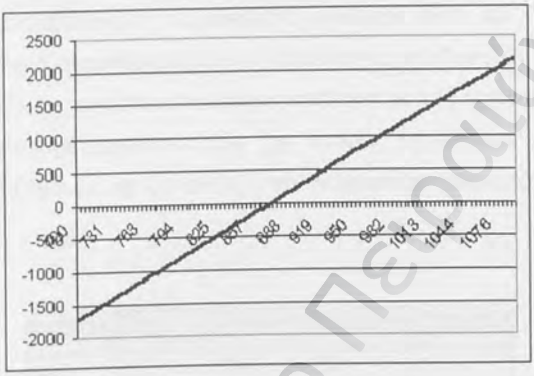
- η αγορά call (θέση long call)
- η πώληση call (θέση short call)
- η αγορά put (θέση long put)
- η πώληση put (θέση short put)

Ας δούμε αλγεβρικά πως μπορεί να παρασταθεί αυτή η πρόσθεση. Αν με το σύμβολο 0 ορίζουμε μια οριζόντια γραμμή, με το σύμβολο -1 μια γραμμή με αρνητική κλίση και με το σύμβολο 1 μια γραμμή με θετική κλίση τότε, με αυτό το συμβολισμό, το διάγραμμα P/L μιας long θέσης σε call θα είναι (0,1) και αντίστοιχα μια short θέση σε call θα είναι (0,-1) , μια long θέση σε put θα είναι (-1,0) και μια short θέση σε put θα είναι (1,0). Κατά συνέπεια, αν θέλουμε για παράδειγμα να δημιουργήσουμε μια long θέση στο υποκείμενο αγαθό χρησιμοποιούμε call και put options με την ίδια τιμή εξάσκησης και την ίδια ημερομηνία λήξης και έχουμε:

Long a synthetic underlying asset = long a call + short a put

δηλαδή (1,1) = (0,1) + (1,0)

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται και η διαγραμματική πρόσθεση για αυτό το παράδειγμα:



Ομοίως θα έχουμε:

Short a synthetic underlying asset = short a call + long a put δηλαδή (-1,-1) = (0,-1) + (-1,0)

Long a synthetic call = long the underlying asset + long a put δηλαδή (0,1) = (1,1) + (-1,0)

Short a synthetic call = short the underlying asset + short a put δηλαδή (0,-1) = (-1,-1) + (1,0)

Long a synthetic put = short the underlying asset + long a call δηλαδή (-1,0) = (-1,-1) + (0,1)

Short a synthetic put = long the underlying asset + short a call δηλαδή (1,0) = (1,1) + (0,-1)

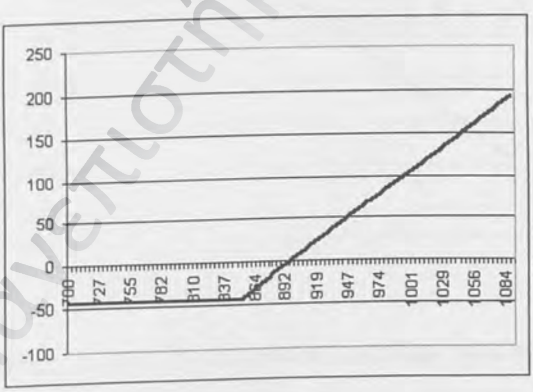
Στις παραγράφους που ακολουθούν δίνονται παραδείγματα στρατηγικών με σύνθεση των τεσσάρων βασικών μπλοκ.

(Σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν υποθέτουμε ότι η τρέχουσα τιμή του δείκτη είναι 870, η volatility 30% και ο χρόνος μέχρι την λήξη των δικαιωμάτων είναι 25 ημέρες).

3.4.2 Long Call

Η αγορά call option είναι μια στρατηγική που ακολουθούμε όταν αναμένουμε άνοδο της αγοράς. Αναλαμβάνουμε περιορισμένο κίνδυνο (όσο και το premium του δικαιώματος το οποίο αγοράζουμε) ενώ η δυνατότητα κέρδους είναι απεριόριστη. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος επιλέγεται ανάλογα με την προσδοκία ανόδου που έχουμε. Αν αναμένουμε μεγάλη άνοδο της αγοράς επιλέγουμε υψηλότερες τιμές εξάσκησης ώστε να έχουμε την δυνατότητα να αγοράσουμε περισσότερα δικαιώματα.

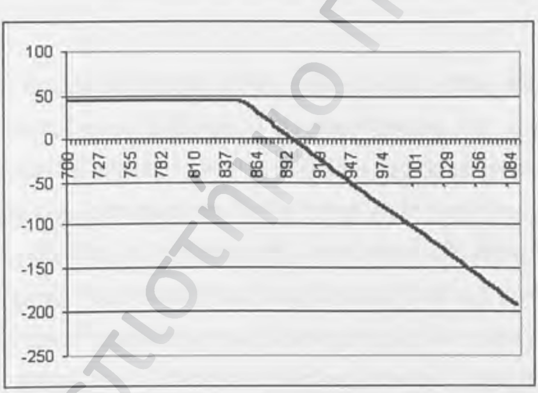
Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
Buy	call	850	25	1



3.4.3 Short Call

Η στρατηγική αυτή πραγματοποιείται με την πώληση call option και εφαρμόζεται στην περίπτωση που περιμένουμε στάσιμη ή πτωτική αγορά. Το μέγιστο κέρδος που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι το premium του δικαιώματος που πουλήσαμε ενώ η μέγιστη ζημιά είναι απεριόριστη. Εάν η προσδοκία μας είναι για στάσιμη αγορά τότε πουλάμε call options με τιμές εξάσκησης κοντά στην τρέχουσα τιμή (at the money call options) ενώ στην περίπτωση που αναμένουμε πτωτική κίνηση μπορούμε να πουλήσουμε call option με χαμηλότερη τιμή εξάσκησης (in the money call options). Στην περίπτωση που αναμένουμε ιδιαίτερα πτωτική αγορά τότε είναι περισσότερο αποδοτική η στρατηγική της αγοράς put options.

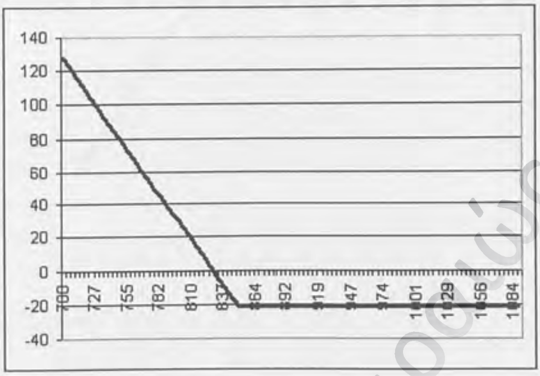
Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
sell	Call	850	25	1



3.4.4 Long Put

Η αγορά put option είναι μια στρατηγική που ακολουθούμε όταν αναμένουμε πτώση της αγοράς. Αναλαμβάνουμε περιορισμένο κίνδυνο (όσο και το premium του δικαιώματος το οποίο αγοράζουμε) ενώ η δυνατότητα κέρδους είναι απεριόριστη. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος επιλέγεται ανάλογα με την προσδοκία πτώσης που έχουμε. Αν αναμένουμε μεγάλη πτώση της αγοράς επιλέγουμε χαμηλότερες τιμές εξάσκησης ώστε να έχουμε την δυνατότητα να αγοράσουμε περισσότερα δικαιώματα.

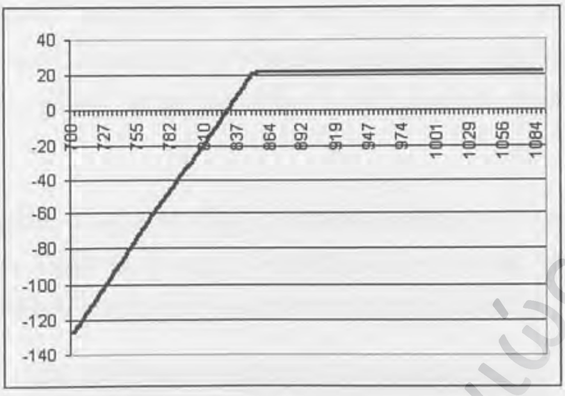
Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
buy	put	850	25	1



3.4.5 Short Put

Η στρατηγική αυτή πραγματοποιείται με την πώληση put option και εφαρμόζεται στην περίπτωση που περιμένουμε στάσιμη ή ανοδική αγορά. Το μέγιστο κέρδος που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι το premium του δικαιώματος που πουλήσαμε ενώ η μέγιστη ζημιά είναι απεριόριστη. Εάν η προσδοκία μας είναι για στάσιμη αγορά τότε πουλάμε put options με τιμές εξάσκησης κοντά στην τρέχουσα τιμή (at the money put options) ενώ στην περίπτωση που αναμένουμε ανοδική κίνηση μπορούμε να πουλήσουμε put option με υψηλότερη τιμή εξάσκησης (in the money put options). Στην περίπτωση που αναμένουμε ιδιαίτερα ανοδική αγορά τότε είναι περισσότερο αποδοτική η στρατηγική της αγοράς call options.

Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
sell	put	850	25	1



3.4.6 Bull Call Spread

Οι στρατηγικές Spread υλοποιούνται με την λήψη θέσεων σε δύο ή περισσότερα δικαιώματα του ίδιου όμως τύπου (calls ή puts). Μια από τις δημοφιλέστερες στρατηγικές spread είναι η bull call spread. Πρόκειται για μια στρατηγική που όπως φανερώνει και το όνομα της ακολουθείται όταν αναμένουμε άνοδο. Για να την υλοποιήσουμε αγοράζουμε ένα call option με μια τιμή εξάσκησης και πουλάμε ένα call option που έχει την ίδια λήξη αλλά μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης από το πρώτο. Η στρατηγική αυτή έχει και περιορισμένο μέγιστο κέρδος και περιορισμένη μέγιστη ζημιά. Το μέγιστο κέρδος πραγματοποιείται στην περίπτωση που ο δείκτης, στην λήξη των δικαιωμάτων, έχει τιμή μεγαλύτερη από την δεύτερη τιμή εξάσκησης (τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που πουλήσαμε). Η μέγιστη ζημιά πραγματοποιείται στην περίπτωση που ο δείκτης, στην λήξη των δικαιωμάτων, έχει τιμή μικρότερη από την πρώτη τιμή εξάσκησης (τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που αγοράσαμε). Όταν ακολουθούμε αυτή την στρατηγική έχουμε αρχικά τρεις δυνατότητες:

1. Και τα δύο call options είναι αρχικά "in the money"

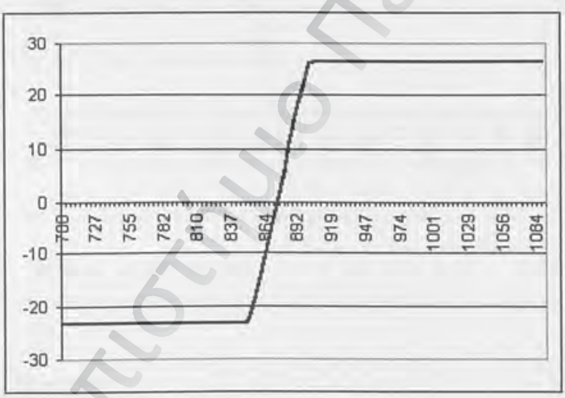
2. Το call option που αγοράζουμε είναι "in the money" και το call option που πουλάμε είναι "out of the money"

3. Και τα δύο call options είναι "out of the money"

Η πρώτη δυνατότητα ακολουθείται όταν περιμένουμε μικρή ανοδική πορεία της αγοράς και η τελευταία δυνατότητα χρησιμοποιείται όταν αναμένουμε πολύ μεγάλη ανοδική πορεία της αγοράς. Η δεύτερη δυνατότητα χρησιμοποιείται όταν αναμένουμε κάτι ενδιάμεσο.

Στρατηγική bull spread μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας put options αντί call options. Στην περίπτωση αυτή αγοράζουμε το put με την μικρότερη τιμή εξάσκησης και πουλάμε το put με την μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης.

Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
buy	call	850	25	1
sell	call	900	25	1



3.4.7 Bear Call Spread

Για να υλοποιήσουμε την στρατηγική "bear call spread" αγοράζουμε ένα call option με μια τιμή εξάσκησης και πουλάμε ένα call option που έχει την ίδια λήξη αλλά μικρότερη τιμή εξάσκησης από το πρώτο. Πρόκειται για μια στρατηγική που όπως φανερώνει και το όνομα της ακολουθείται όταν αναμένουμε πτώση. Η στρατηγική αυτή έχει και περιορισμένο μέγιστο κέρδος και περιορισμένη μέγιστη ζημιά. Το μέγιστο κέρδος πραγματοποιείται στην περίπτωση που ο δείκτης, στην λήξη των δικαιωμάτων, έχει τιμή μικρότερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που πουλήσαμε. Η μέγιστη ζημιά πραγματοποιείται στην περίπτωση που ο δείκτης, στην λήξη των δικαιωμάτων, έχει τιμή μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που αγοράσαμε.

Στρατηγική bear spread μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας put options αντί call options. Στην περίπτωση αυτή αγοράζουμε το put με την μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης και πουλάμε το put με την μικρότερη τιμή εξάσκησης.

Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
sell	Call	850	25	1
buy	Call	900	25	1

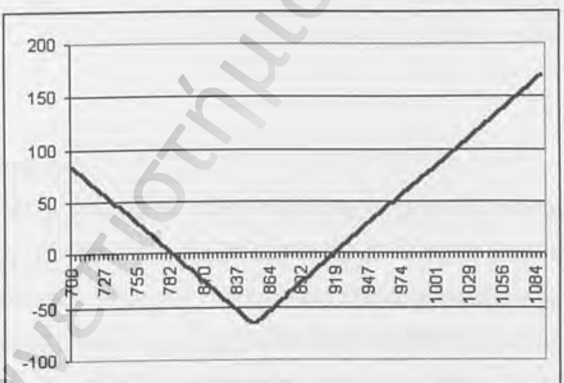
3.4.8 Calendar Spreads

Η στρατηγική αυτή πραγματοποιείται πουλώντας ένα call option με μια τιμή εξάσκησης και αγοράζοντας ένα call option με την ίδια τιμή εξάσκησης αλλά με μεγαλύτερη διάρκεια μέχρι την λήξη του. Κέρδος από αυτή την στρατηγική έχουμε αν κατά την λήξη του πρώτου δικαιώματος η τιμή του δείκτη είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης ενώ ζημιά πραγματοποιείται αν ο δείκτης κατά την λήξη του πρώτου δικαιώματος έχει απομακρυνθεί σημαντικά από την τιμή εξάσκησης είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω. Στην στρατηγική αυτή τόσο το μέγιστο κέρδος όσο και η μέγιστη ζημιά είναι περιορισμένα. Η στρατηγική μπορεί να υλοποιηθεί και με τη χρήση put options στην θέση των call options.

3.4.9 Long Straddle

Η στρατηγική αυτή πραγματοποιείται αγοράζοντας ένα call option και ένα put option με την ίδια τιμή εξάσκησης και ίδιας χρονικής διάρκειας μέχρι την λήξη τους. Κέρδος από αυτή την στρατηγική έχουμε αν η αγορά παρουσιάσει μια σημαντική μεταβολή ανεξάρτητα αν αυτή είναι ανοδική ή καθοδική. Αντίθετα ζημιά θα έχουμε αν στην λήξη των δικαιωμάτων η τιμή του δείκτη βρίσκεται κοντά στην τιμή εξάσκησης. Με αυτή την στρατηγική το μέγιστο κέρδος που μπορούμε να έχουμε είναι απεριόριστο και η μέγιστη ζημιά που μπορεί να πραγματοποιηθεί είναι το premium των δύο δικαιωμάτων (περίπτωση που ο δείκτης στην λήξη των δικαιωμάτων βρίσκεται ακριβώς στην τιμή εξάσκησης τους).

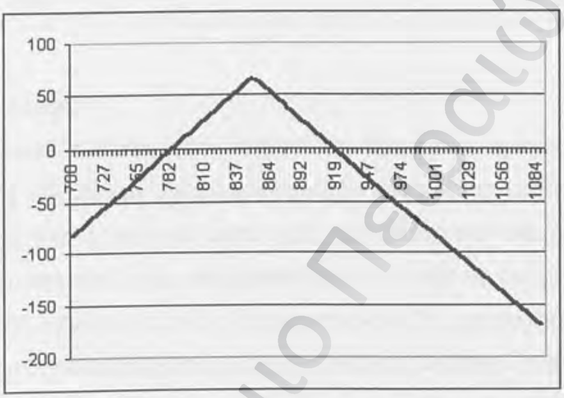
Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
buy	Put	850	25	1
buy	Call	850	25	1



3.4.10 Short Straddle

Η στρατηγική αυτή πραγματοποιείται πουλώντας ένα call option και ένα put option με την ίδια τιμή εξάσκησης και ίδιας χρονικής διάρκειας μέχρι την λήξη τους. Κέρδος από αυτή την στρατηγική έχουμε αν η αγορά παραμείνει στάσιμη. Αντίθετα ζημιά θα έχουμε αν στην λήξη των δικαιωμάτων η τιμή του δείκτη έχει απομακρυνθεί σημαντικά από την τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων. Με αυτή την στρατηγική το μέγιστο κέρδος που μπορούμε να έχουμε είναι περιορισμένο ενώ η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχουμε είναι απεριόριστη. Την στρατηγική αυτή την ακολουθούμε όταν η τεκμαρτή μεταβλητότητα των δικαιωμάτων είναι κατά την άποψη μας πολύ υψηλή.

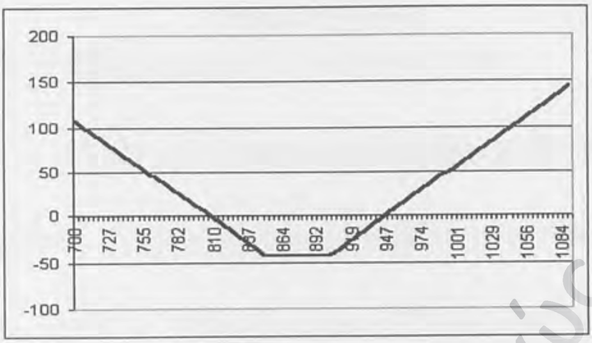
Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
sell	put	850	25	1
sell	call	850	25	1



3.4.11 Long Strangle

Η στρατηγική αυτή ακολουθείται στην περίπτωση που αναμένουμε μια σημαντική μεταβολή της τιμής του δείκτη, αλλά δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε προς τα που θα είναι αυτή (ανοδική ή πτωτική). Πραγματοποιείται αγοράζοντας ένα put option με τιμή εξάσκησης μικρότερη από την τρέχουσα τιμή του δείκτη και ένα call option με τιμή εξάσκησης μεγαλύτερη από την τρέχουσα τιμή του δείκτη. Η μέγιστη ζημιά είναι περιορισμένη και το μέγιστο κέρδος απεριόριστο. Το χαρακτηριστικό αυτής της στρατηγικής είναι ότι παρουσιάζει συχνότερα απώλειες και λιγότερο συχνά κέρδη αλλά όταν πραγματοποιούνται κέρδη, συνήθως αυτά είναι μεγάλα.

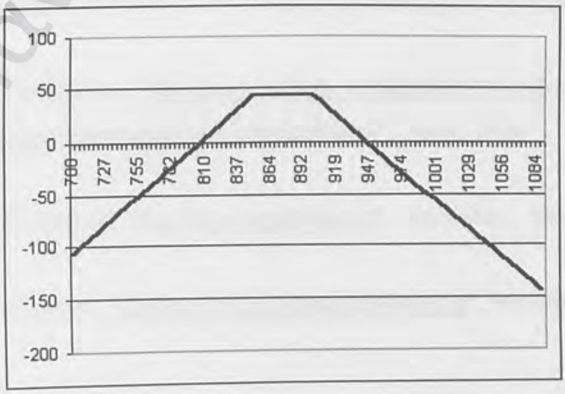
Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
buy	put	850	25	1
buy	call	900	25	1



3.4.12 Short Strangle

Η στρατηγική αυτή ακολουθείται στην περίπτωση που δεν αναμένουμε μια σημαντική μεταβολή της τιμής του δείκτη. Πραγματοποιείται πουλώντας ένα put option με τιμή εξάσκησης μικρότερη από την τρέχουσα τιμή του δείκτη και ένα call option με τιμή εξάσκησης μεγαλύτερη από την τρέχουσα τιμή του δείκτη. Η μέγιστη ζημιά είναι απεριόριστη και το μέγιστο κέρδος περιορισμένο. Το χαρακτηριστικό αυτής της στρατηγικής είναι ότι παρουσιάζει συχνότερα κέρδη και λιγότερο συχνά απώλειες αλλά όταν πραγματοποιούνται απώλειες, συνήθως αυτές είναι μεγάλες.

Position	Type	Strike	Expiration	Quantity
Sell	put	850	25	1
Sell	call	900	25	1



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Cox, John C., "**Options markets**", Prentice-Hall , 1985

2. Kallianpur, G., "**Introduction to option pricing theory**", Birkhauser, 2000

3. Daigler, Robert T., "**Advanced options trading**", Probus, 1994

4. McCafferty, Thomas A , "**All about options**", McGraw-Hill, 1998

5. McCafferty, Thomas A , "**All about futures**", Irwin, 1992

6. Clewlow, Les , "**Exotic options**", International Thomson Business, 1997

7. Hull, John C., "**Fundamentals of futures and options markets**", Prentice-Hall, 2002

8. Edwards, Franklin R. ;Ma, Cindy W., "**Futures and options**", McGraw-Hill, 1992

9. Kolb, Robert W., "**Futures, options, and swaps**", Blackwell, 2000

10. Engle, Robert F. ;Rosenberg, Joshua , "**Hending options in a garch environment, testing the term structure of stochastic volatility models**", National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA, 1994

11. Tompkins, Robert G., "**Options analysis, a state-of-the-art guide to options pricing, trading and portfolio applications**", Irwin, 1994

12. Tompkins, Robert G., "**Options explained 2**", Macmillan, 1994

13. Dubofsky, David A., "**Options and financial futures**", McGraw-Hill , 1992

14. Dubofsky, David A., "**<u>Derivatives, valuation and risk management</u>**", Oxford New York, 2003

15. Feeney, Francis D. ;Feeney, Paul W.; "**<u>A guide to financial</u>**", Woodhead-Faulkner, 1991

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ VOLATILITY TRADING, GAMMA ΚΑΙ DELTA TRADING

4.1 Μεταβλητότητα (Volatility)

4.1.1 Ορισμός

Σύμφωνα με το μοντέλο που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η διαδικασία που ακολουθεί η τιμή μιας μετοχής είναι:

$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz$ με αποτέλεσμα η μεταβολή των τιμών dS/S να ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους N(μdt, $\sigma\sqrt{dt}$). Η αβεβαιότητα που υπάρχει ως προς την μεταβολή της τιμής εξαρτάται από τον παράγοντα στην τυπική απόκλιση σ ο οποίος ονομάζεται μεταβλητότητα (volatility) των τιμών της μετοχής. Η μεταβλητότητα είναι η μοναδική παράμετρος από τα μοντέλα αποτίμησης την οποία πρέπει να εκτιμήσει κάποιος διότι οι υπόλοιπες είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Πράγματι τόσο η τρέχουσα τιμή της μετοχής ή του δείκτη, όσο και η τιμή εξάσκησης είναι άμεσα γνωστές για το συγκεκριμένο δικαίωμα που θέλουμε να διαπραγματευτούμε. Επίσης ως risk free επιτόκιο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επιτόκιο που έχει το έντοκο γραμμάτιο με την ίδια διάρκεια μέχρι την λήξη του με το δικαίωμα που θέλουμε να διαπραγματευτούμε. Κατά συνέπεια μόνος άγνωστος απομένει η volatility.

4.1.2 Υπολογισμός μεταβλητότητας (Volatility) με βάση το ιστορικό των τιμών – Ιστορική μεταβλητότητα (Historical Volatility)

Το παραπάνω μοντέλο θεωρεί ότι η μεταβλητότητα των τιμών παραμένει σταθερή. Κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε την μελλοντική μεταβλητότητα θεωρώντας ότι αυτή είναι ίση με την μεταβλητότητα που παρουσίασαν οι τιμές στο παρελθόν. Κατά συνέπεια βάση των αρχών της στατιστικής παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα προηγούμενων τιμών και υπολογίζουμε την μεταβλητότητα με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια θέλουμε αυξάνοντας απλώς το μέγεθος του δείγματος μας. Η λογική υπολογισμού χρησιμοποιώντας ημερήσια κλεισίματα τιμών είναι η εξής:

Έστω ότι διαθέτουμε n ημερήσια κλεισίματα τιμών. Ορίζουμε ως S_i το κλείσιμο της τιμής την ημέρα i και υπολογίζουμε τις ποσότητες $u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$. Η εκτιμώμενη τυπική απόκλιση των u_i θα είναι

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} {u_i}^2 - \frac{1}{(n-2)(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i\right)^2}$$

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν 252 trading days (ημέρες διαπραγμάτευσης) ανά έτος, έχουμε την εκτιμώμενη volatility να είναι:

$$\sigma = s \cdot \sqrt{252}$$

και το σφάλμα σε αυτή την εκτίμηση να είναι της τάξης $\sigma / \sqrt{2 \cdot (n-1)}$.

4.1.3 Γενίκευση του παραπάνω υπολογισμού

Στην περίπτωση που στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιούμε εβδομαδιαία ή μηνιαία κλεισίματα τιμών τότε για τον υπολογισμό της σε ετήσια βάση μεταβλητότητας (annualized volatility) θα χρησιμοποιούμε την σχέση:

$$\sigma = s \cdot \sqrt{\tau}$$

όπου τ ισούται με 12 μήνες ανά έτος αν χρησιμοποιούμε μηνιαία κλεισίματα τιμών ή 52 εβδομάδες ανά έτος αν χρησιμοποιούμε μηνιαία κλεισίματα τιμών.

4.1.4 Αποτελέσματα από την παραπάνω μέθοδο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η αποτελεσματικότητα της παραπάνω μεθόδου στην πρόβλεψη της volatility για τους επόμενους μήνες χρησιμοποιώντας μετρήσεις της volatility σε μήνες που προηγήθηκαν. Παρατηρούμε βελτίωση της πρόβλεψης με την αύξηση του δείγματος των ιστορικών δεδομένων που λαμβάνουμε υπόψη και με την αύξηση του χρονικού διαστήματος στο μέλλον για το οποίο θέλουμε να εκτιμήσουμε την volatility. Σε κάθε περίπτωση όμως παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι σχετικά μεγάλο.

S&P 500 stock index Jan 1952 – Dec 1990

Root Mean Squared Forecast Error for Volatility

Forecast Horizon (Months)

Months in Sample	6	12	24	36	48	60
6	0,0692	0,0626	0,0635	0,0634	0,0616	0,0593
12	0,0629	0,0574	0,0579	0,0562	0,0529	0,0509
24	0,0640	0,0582	0,0549	0,0503	0,0461	0,0448
36	0,0631	0,0561	0,0501	0,0447	0,0413	0,0400
48	0,0603	0,0522	0,0450	0,0399	0,0363	0,0346
60	0,0574	0,0489	0,0417	0,0362	0,0320	0,0310
Average Realized Volatility	0,1360	0,1395	0,1425	0,1437	0,1441	0,1439

4.1.5 H Volatility δεν είναι σταθερή

Στην πράξη η volatility δεν είναι σταθερή. Είναι μια ποσότητα που μεταβάλλεται στοχαστικά. Αυτό δικαιολογεί και το σφάλμα στον προσδιορισμό της με βάση το ιστορικό των τιμών. Κατά συνέπεια η παραπάνω όταν χρησιμοποιούμε την παραπάνω μεθοδολογία θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη και αυτό τον περιορισμό. Αν η μεταβλητότητα ήταν μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου, τότε στους υπολογισμούς με βάση το υπόδειγμα των Black Scholes θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως volatility την ποσότητα:

$$\sigma_t^{*} = \left(\frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma_s^{2} \, ds \right)^{1/2}$$

4.1.6 Η συσχέτιση μεταξύ διαδοχικών μεταβολών

Οι διαδοχικές μεταβολές των τιμών των μετοχών ή των δεικτών στον πραγματικό κόσμο δεν είναι ασυσχέτιστες η μια από την άλλη όπως απαιτεί το υπόδειγμα μας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η volatility που προσδιορίζουμε με βάση την ιστορική μεταβλητότητα άλλοτε να υπερεκτιμά (όταν υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών μεταβολών) και άλλοτε να υποεκτιμά (όταν υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών μεταβολών) την πραγματική volatility.

4.2 GARCH

4.2.1 Η ανάγκη για ένα πιο σύνθετο μοντέλο

Το γεγονός των αποκλίσεων που παρουσιάζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολών των τιμών από τις συνθήκες που απαιτεί το μοντέλο μας, δημιουργούν αρκετές δυσκολίες όπως περιγράφηκε και παραπάνω. Κατά συνέπεια απαιτείται ένα συνθετότερο μοντέλο για την εκτίμηση της volatility που θα ενσωματώνει και αυτά τα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Έτσι υιοθετήθηκαν μοντέλα όπως τα GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) στα οποία οι είσοδοι του μοντέλου μας GARCH(p,q) είναι τόσο οι p πρόσφατες είσοδοι u_i^2, όσο και οι q πρόσφατες εκτιμήσεις της σ_i^2. Το μοντέλο αυτό παρουσιάζει και την επιθυμητή από τα πειραματικά δεδομένα ιδιότητα για την volatility ότι είναι *mean reverting*, ότι δηλαδή ακραίες υψηλές ή χαμηλές τιμές της volatility τείνουν να επανέλθουν σε πιο μέσες τιμές.

4.2.2 Το μοντέλο GARCH(1,1)

Στην περίπτωση που στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιούμε μόνο τις πιο πρόσφατες εισόδους των u_i^2 και σ_i^2 τότε έχουμε την απλούστερη μορφή του μοντέλου την GARCH(1,1). Το μοντέλο αυτό έχει την μορφή:

$$\sigma_n^2 = \gamma \cdot V_L + \alpha \cdot u_{n-1}^2 + \beta \cdot \sigma_{n-1}^2$$

όπου VL είναι μακροπρόθεσμος μέσος του μοντέλου και α,β,γ είναι τα αντίστοιχα βάρη που αντιστοιχούμε σε κάθε παράγοντα. Για τα βάρη ισχύει α+β+γ=1. Ο παράγοντας γ* VL ονομάζεται ω και το μοντέλο μας μπορεί να πάρει την μορφή:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha \cdot u_{n-1}^2 + \beta \cdot \sigma_{n-1}^2$$

4.2.3 Προσδιορισμός των α , β και ω

Για να προσδιορίσουμε μια εκτίμηση της volatility για το επόμενο διάστημα χρησιμοποιώντας το μοντέλο GARCH(1,1) θα πρέπει να προσδιορίσουμε πρώτα τις παραμέτρους α , β και ω. Για τον προσδιορισμό χρησιμοποιούμε την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood) που ορίζει ότι η πιθανότητα να παρατηρήσουμε τα συγκεκριμένα u_i^2 δεδομένου ότι σε κάποια χρονική στιγμή η μεταβλητότητα (volatility) είναι σ_i θα μας δίνεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_i^2}\right)}$$

Κατά συνέπεια η πιθανότητα να παρατηρήσουμε μια σειρά από m τέτοιες μεταβολές θα είναι ένα γινόμενο από παράγοντες της παραπάνω μορφής:

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_i^2}\right)}$$

Ο σκοπός μας είναι η μεγιστοποίηση αυτού του γινομένου ή ,ισοδύναμα παίρνοντας λογαρίθμους, η μεγιστοποίηση του αθροίσματος:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-\ln\left(\sigma_i^2\right)-\frac{u_i^2}{\sigma_i^2}\right)$$

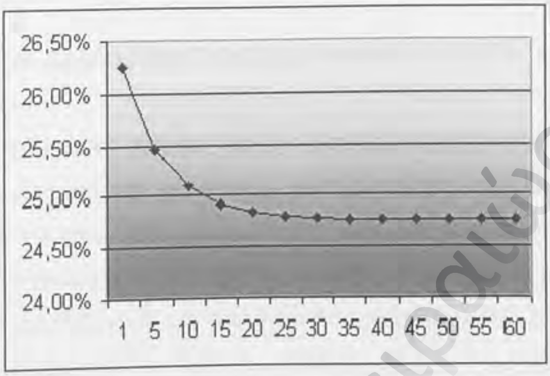
Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να γίνει με την βοήθεια ενός ισχυρού αλγορίθμου που μπορεί να εντοπίζει ολικά και όχι τοπικά μέγιστα όπως ο αλγόριθμος Levenberg – Marquardt.

4.2.4 Πρόβλεψη της volatility k βήματα μπροστά

Αφού έχουμε προσδιορίσει τις παραμέτρους του μοντέλου, η πρόβλεψη της volatility k χρονικά βήματα μπροστά μπορεί να γίνει με την βοήθεια της σχέσης:

$$E\left[\sigma_{n+k}^2\right] = V_L + (\alpha+\beta)^k\left(\sigma_n^2 - V_L\right)$$

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας ημερήσια κλεισίματα μπορούμε να υπολογίσουμε την πρόβλεψη για την volatility την ημέρα n+k χρησιμοποιώντας τα κλεισίματα μέχρι την μέρα n-1 και την παραπάνω σχέση. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ο προσδιορισμός μελλοντικών τιμών της volatility με βάση το μοντέλο GARCH(1,1).



6.2.5. Δυσκολίες του μοντέλου

Πράγματι τα μοντέλα GARCH ενσωματώνουν πολλά από τα επιθυμητά χαρακτηριστικά που παρατηρούνται στην volatility. Δεν λείπουν όμως και από αυτά τόσο οι πρακτικές όσο και οι θεωρητικές δυσκολίες. Στις πρακτικές δυσκολίες κατατάσσουμε την δυσκολία σύγκλισης και εύρεσης των παραμέτρων του μοντέλου όταν έχουμε λίγα δεδομένα τιμών, για αυτό είναι συνηθέστερο το μοντέλο να χρησιμοποιείται με ημερήσιες και όχι με μηνιαίες τιμές. Στις θεωρητικές δυσκολίες κατατάσσουμε το γεγονός ότι και οι ίδιες οι παράμετροι του μοντέλου δεν είναι κάποιες σταθερές αλλά μεταβάλλονται με το χρόνο. Κατά συνέπεια δεν μπορεί να μας εγγυηθεί κάτι ότι όσο καλά και αν ταιριάζουν αυτές οι παράμετροι με τα *in sample* δεδομένα, θα έχουμε ικανοποιητική εκτίμηση με αυτές τις παραμέτρους σε *out of sample* δεδομένα.

4.3. Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)

4.3.1 Ορισμός

Μια εναλλακτική μέθοδος για να πάρουμε εκτιμήσεις της μελλοντικής μεταβλητότητας είναι να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές που τεκμαίρονται από τις τρέχουσες τιμές των δικαιωμάτων στην αγορά. Συγκεκριμένα αν Cmarket είναι η τρέχουσα τιμή ενός δικαιώματος στην αγορά και Cmodel είναι η αποτίμηση που μας δίνει για αυτό το δικαίωμα το μοντέλο μας, τότε η implied volatility είναι εκείνη η τιμή *σIV* για την οποία ισχύει:

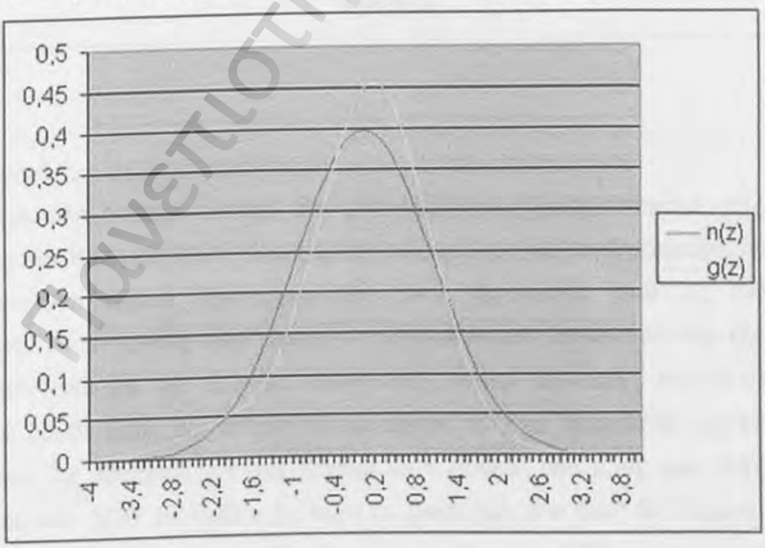
$$Cmodel\ (\sigma IV) = Cmarket$$

4.3.2 Η άποψη του Ακαδημαϊκού για την Implied Volatility και η άποψη του Trader

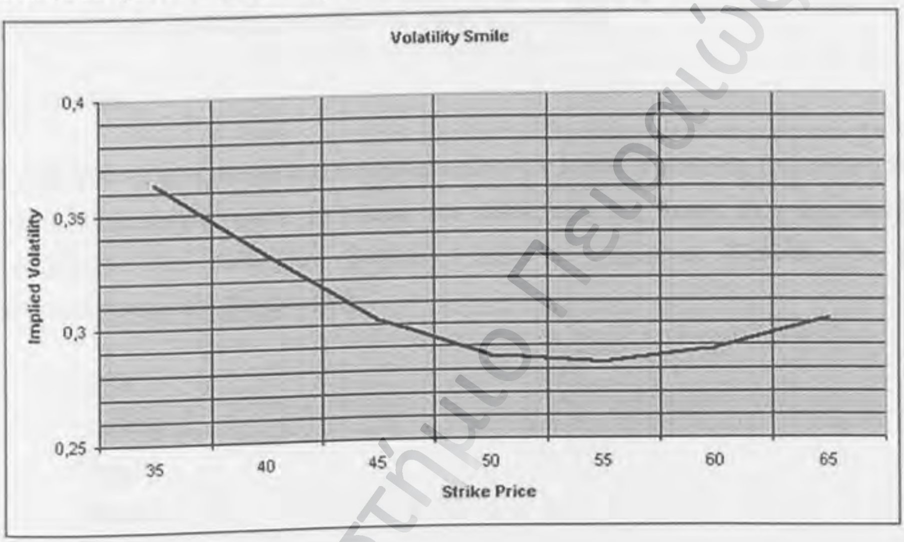
Η επικρατούσα ακαδημαϊκή άποψη για την Implied volatility είναι ότι αποτελεί την πρόβλεψη της αγοράς για την μελλοντική μεταβλητότητα που θα επικρατήσει στο αντίστοιχο επόμενο χρονικό διάστημα. Αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό διότι ο trader που αγοράζει ένα δικαίωμα στις περισσότερες φορές δεν το κρατά μέχρι την λήξη του. Γι' αυτόν η Implied volatility είναι μια τιμή που θα χρησιμοποιήσει στα μοντέλα του για να δει πόσο θα μεταβληθεί η τιμή του δικαιώματος αν μεταβληθεί η τιμή του υποκείμενου αγαθού.

4.3.3 Volatility Smile

Στην πράξη οι μεταβολές των τιμών των μετοχών και των δεικτών δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή αλλά μια κατανομή που έχει χαρακτηριστικά υψηλότερου "λαιμού" και παχύτερων "ουρών" όπως δείχνει και το σχήμα που ακολουθεί:



Αυτό σημαίνει ότι ακραία γεγονότα συμβαίνουν συχνότερα από ότι υποθέτει η κανονική κατανομή και μάλιστα οι ακραίες αρνητικές μεταβολές είναι περισσότερες από τις ακραίες θετικές μεταβολές. Αυτό φαίνεται να υιοθετείται και από αυτούς που δραστηριοποιούνται στο trading δικαιωμάτων. Πράγματι τα out of the money options διαπραγματεύονται με μεγαλύτερη τεκμαρτή μεταβλητότητα από τα at the money options και παρατηρείται ένα φαινόμενο γνωστό ως "volatility smile". Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται το volatility smile για μια μετοχή με τρέχουσα τιμή 50$.



4.3.4 Γενικά

Υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των μοντέλων που χρησιμοποιούμε στις φυσικές επιστήμες και των μοντέλων που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την εξέλιξη των τιμών και άλλων δραστηριοτήτων που εξαρτώνται από τις ανθρώπινες αποφάσεις. Στην πρώτη περίπτωση οι φυσικοί νόμοι δεσμεύουν την εξέλιξη των φαινομένων ενώ για την δεύτερη περίπτωση πολλοί διανοητές πιστεύουν ότι δεν υπάρχουν νόμοι, έστω και πιθανό περιγραφικοί, που να δεσμεύουν την εξέλιξη του φαινομένου. Ας πάρουμε για παράδειγμα το τι συνέβη στο κραχ του 1987. Στις 19 Οκτωβρίου του 1987 το Future με λήξη το Δεκέμβρη του S&P 500 έχασε 29% της αξίας του. Με μια ιστορική μεταβλητότητα της τάξης του 20% για τον συγκεκριμένο δείκτη, ένα τέτοιο γεγονός θα είχε πιθανότητα να συμβεί 10^{-160}, δηλαδή θα έπρεπε να ζήσουμε αρκετές φορές την ηλικία του σύμπαντος για να το δούμε! Άρα το μοντέλο μας που περιγράφει την εξέλιξη των τιμών πρέπει να είναι λάθος. Ακόμα όμως και αν κάνουμε πιο σύνθετο ένα μοντέλο λαμβάνοντας υπόψη και άλλους παράγοντες που μεταβάλλουν την εξέλιξη των τιμών, πάλι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι, όσο καλά και να ταιριάζουν οι παρατηρήσεις μας με αυτό, ότι θα μπορεί να προβλέπει την πιθανότητα ακραίων γεγονότων. Επιπλέον θα έχουμε πρόσθετες δυσκολίες να το καλιμπράρουμε διότι θα υπάρχουν πρόσθετες παράμετροι και σταθερές που θα πρέπει να υπολογίσουμε για ένα πιο σύνθετο μοντέλο.

4.4 Greeks

Εκτός από την τρέχουσα τιμή των δικαιωμάτων, ο trader πρέπει να έχει υπόψη του και άλλες πληροφορίες ώστε να εκτιμά την κατάσταση της θέσης που έχει ανοίξει σε δικαιώματα. Σε αυτό τον βοηθούν πολύ οι λεγόμενοι **Greeks**. Οι πλέον χρησιμοποιούμενοι Greeks είναι:

- Delta
- Gamma
- Vega
- Theta
- Rho

Ο **Delta** δίνει την μεταβολή της τιμής των δικαιωμάτων ανά μονάδα μεταβολής της τιμής της μετοχής ή του δείκτη.

Ο **Gamma** δίνει την μεταβολή της τιμής του Delta ανά μονάδα μεταβολής της τιμής της μετοχής ή του δείκτη.

Ο **Vega** δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής της Volatility (συχνά στον ορισμό χρησιμοποιούμε την κατά 1% μεταβολή της volatility).

Ο **Theta** δίνει την μεταβολή της τιμής των δικαιωμάτων ανά μονάδα μεταβολής της χρονικής διάρκειας του δικαιώματος (συχνά στον ορισμό χρησιμοποιούμε την κατά 1 ημέρα μεταβολή της χρονικής διάρκειας).

Ο **Rho** δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής του επιτοκίου (συχνά στον ορισμό χρησιμοποιούμε την κατά 1% μεταβολή του επιτοκίου).

Η μεταβλητότητα (volatility) είναι η μοναδική παράμετρος σε όλα τα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων η οποία δεν μας είναι γνωστή. Συγκεκριμένα ο trader θα πρέπει να εκτιμήσει την volatility που θα επικρατήσει στο μέλλον μέχρι την λήξη των δικαιωμάτων ώστε να εκτιμήσει και την δίκαιη αποτίμηση τους. Μια χρήσιμη πληροφορία του δίνει η ιστορική μεταβλητότητα για το αντίστοιχο προηγούμενο διάστημα της αγοράς. Αυτή υπολογίζεται ως εξής:

Έστω X(i) , X(i-1), X(i-2), ... , X(i-n) οι τιμές της μετοχής ή του δείκτη με τον δείκτη i να υποδηλώνει το κλείσιμο την ημέρα i.

Υπολογίζουμε τους φυσικούς λογαρίθμους των μεταβολών

Ln(X(i)/X(i-1)), Ln(X(i-1)/X(i-2)), ...

Η μεταβλητότητα σε ετήσια βάση είναι το γινόμενο της τετραγωνικής ρίζας των εργασίμων ημερών ενός έτους επί την τυπική απόκλιση αυτών των λογαρίθμων

Volatility = sqrt(252) * stdev(Ln(X(i)/X(i-1))

Συχνά στον υπολογισμό χρησιμοποιείται κάποια εξομάλυνση η οποία δίνει μεγαλύτερο βάρος στα ποιο πρόσφατα δεδομένα.

Εάν χρησιμοποιήσουμε τις τρέχουσες στην αγορά τιμές των δικαιωμάτων μπορούμε από το μοντέλο μας να υπολογίσουμε ποια θα ήταν αυτή η μεταβλητότητα η οποία δικαιολογεί την τρέχουσα τιμή. Τότε λέμε ότι έχουμε υπολογίσει την λεγόμενη τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility). Η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι συνήθως καλύτερη προσέγγιση της μελλοντικής μεταβλητότητας από ότι η ιστορική μεταβλητότητα.

Οι παρακάτω συναρτήσεις της VBA μπορούν να εισαχθούν στο excel και να μας βοηθήσουν στους υπολογισμούς των τιμών των δικαιωμάτων και των Greeks.

Call_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Put_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Call_Delta_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Put_Delta_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Gamma_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Vega_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Call_Theta_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Put_Theta_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Call_Rho_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Put_Rho_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Volatility)

Call_ImpVol_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Premium)

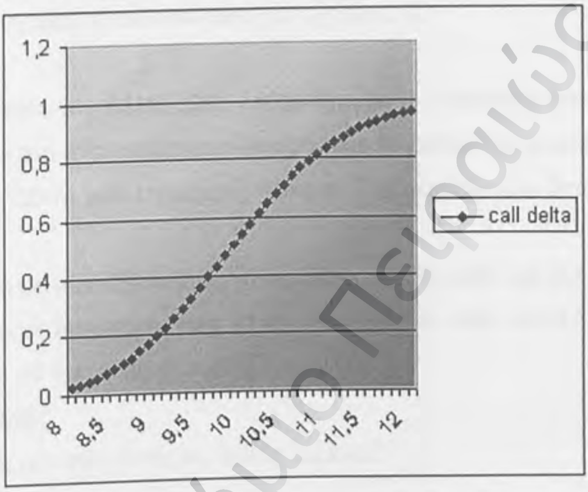
Put_ImpVol_Eur(Price;Strike;Time;Interest Rate;Premium)

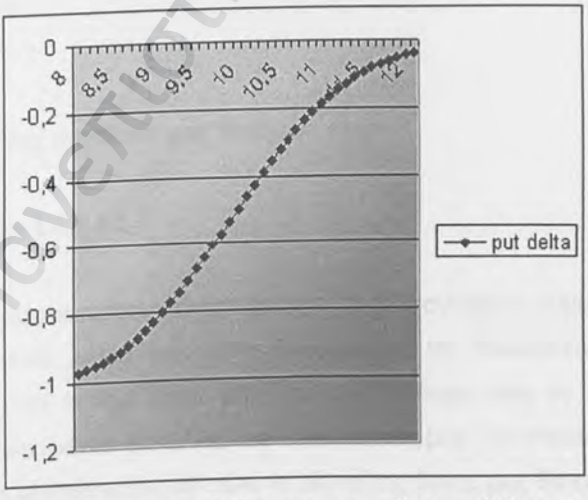
Delta:

$$\mathrm{Delta} = N(d_1)$$

Το Delta είναι μια μέτρηση της ευαισθησίας της αξίας που έχει το δικαίωμα σε μικρές αλλαγές της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

Ο πλέον σημαντικός από τους Greeks είναι ο Δέλτα που όπως είπαμε δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος αν μεταβληθεί το υποκείμενο αγαθό. Ο Δέλτα είναι θετικός για τα calls και αρνητικός για τα puts, κατά συνέπεια άνοδος της τιμής του υποκείμενου αγαθού οδηγεί σε άνοδο της τιμής των call και μείωση της τιμής των puts. Το Δέλτα ενός call παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Αν για παράδειγμα ένα call μιας μετοχής έχει Δέλτα 0,4 τότε άνοδος της τιμής της μετοχής κατά 10 λεπτά (πχ από μια τιμή 11,4 σε μια τιμή 11,5), οδηγεί σε άνοδο της τιμής του call κατά 4 λεπτά καθόσον Δέλτα*Μεταβολή_Τιμής_Μετοχής = 0,4*0,1 = 0,04 δηλαδή 4 λεπτά. Το Δέλτα ενός put παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 0. Αν για παράδειγμα ένα put μιας μετοχής έχει Δέλτα -0,3 και μειωθεί η τιμή της μετοχής κατά 10 λεπτά (π.χ. από μια τιμή 9,95 σε μια τιμή 9,85), τότε η τιμή του Put θα μεταβληθεί κατά -0,3 * (-0,1) = 0,03 δηλαδή η τιμή του put θα αυξηθεί κατά 3 λεπτά. Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι τιμές των Δέλτα ενός Call και ενός Put με τιμή εξάσκησης 10 για διάφορες τιμές του υποκείμενου αγαθού (παράμετροι: strike=10 , vol = 20% , r = 2% , t = 0,3).





Παρατηρούμε ότι ένα deep out of the money call έχει Δέλτα περίπου 0 δηλαδή πρακτικά η τιμή του δεν μεταβάλλεται με μικρές μεταβολές της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Ένα deep in the money call έχει Δέλτα περίπου 1 δηλαδή πρακτικά για μικρές μεταβολές του υποκείμενου αγαθού η μεταβολή της τιμής του call είναι όση και η μεταβολή του υποκείμενου αγαθού. Ένα at the money call έχει Δέλτα περίπου 0,5 δηλαδή η μεταβολή της τιμής του είναι πρακτικά ίση με το μισό της μεταβολής της τιμής του υποκείμενου αγαθού (για μικρές μεταβολές αυτού). Αντίστοιχα το Δέλτα ενός deep out of the money put είναι περίπου 0, το Δέλτα ενός deep in the money put είναι περίπου -1 και το Δέλτα ενός at the money put είναι περίπου -0,5. Το Δέλτα του ίδιου του υποκείμενου αγαθού όταν αυτό είναι μετοχή είναι 1.

Μια χρήσιμη ιδιότητα του Δέλτα είναι ότι αν έχουμε μια σύνθετη θέση σε δικαιώματα και μετοχές πάνω στο ίδιο υποκείμενο αγαθό τότε το Δέλτα της συνολικής θέσης είναι το άθροισμα των Δέλτα των επιμέρους θέσεων. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε την εξής θέση:

1. long 3 calls με τιμή εξάσκησης 10 και Δέλτα για το κάθε call 0,5
2. long 2 calls με τιμή εξάσκησης 11 και Δέλτα για το κάθε call 0,3
3. long 2 puts με τιμή εξάσκησης 10 και Δέλτα -0,5
4. long 2 μετοχές

Το Δέλτα για κάθε μία από αυτές τις θέσεις θα είναι:

1. 3 * 0,5 = 1,5
2. 2 * 0,3 = 0,6
3. 2 * (-0,5) = -1
4. 2 * 1 = 2

Και άρα το Δέλτα της συνολικής μας θέσης θα είναι:

Δέλτα = 1,5 + 0,6 - 1 + 2 = 3,1

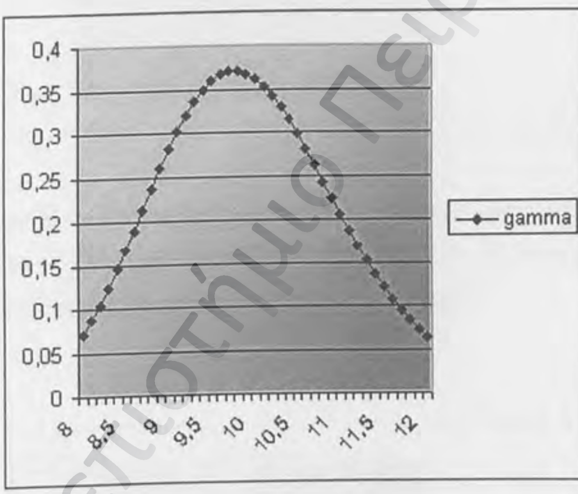
Αν το κάθε δικαίωμα αφορούσε εκατό μετοχές (όπως συνήθως συμβαίνει τότε για να βρούμε το συνολικό Δέλτα του κάθε δικαιώματος θα πολλαπλασιάζαμε με ένα συντελεστή 100). Αν έχουμε short θέση σε ένα δικαίωμα τότε το Δέλτα αυτής της θέσης μας είναι το αντίθετο του Δέλτα του δικαιώματος μας. Για παράδειγμα αν έχουμε short θέση σε ένα at the money call τότε το Δέλτα της θέσης μας θα είναι - (0,5) = -0,5. Ομοίως αν έχουμε short θέση σε μια μετοχή το Δέλτα της θέσης μας θα είναι -1.

Gamma:

$$\text{Gamma} = \frac{d^2C}{dS^2} = \frac{e^{(-d^2/2)}}{S\sigma\sqrt{2}\,\pi T}$$

Το Gamma είναι η μέτρηση της ευαισθησίας του delta σε μικρές αλλαγές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου.

Το ίδιο το Δέλτα δεν διατηρείται σταθερό αλλά μεταβάλλεται με την μεταβολή της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Η μεταβολή αυτή είναι μεγαλύτερη για τα at the money options. Για να μετρήσουμε αυτή την μεταβολή χρησιμοποιούμε το Gamma που μας δίνει την μεταβολή της τιμής του Δέλτα ανά μονάδα μεταβολής της τιμής του υποκείμενου αγαθού.



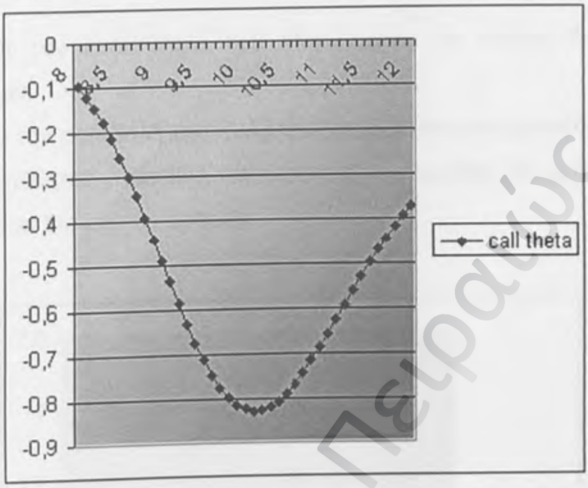
Για παράδειγμα αν το Δέλτα ενός call option όταν το υποκείμενο αγαθό έχει τιμή 10 είναι 0,5 και το υποκείμενο αγαθό μεταβληθεί και πάρει την τιμή 10,1 τότε το Δέλτα θα πάρει την τιμή Δέλτα' = Δέλτα + Gamma * 0,1 = 0,5 + 0,37*0,1 = 0,537.

Theta:

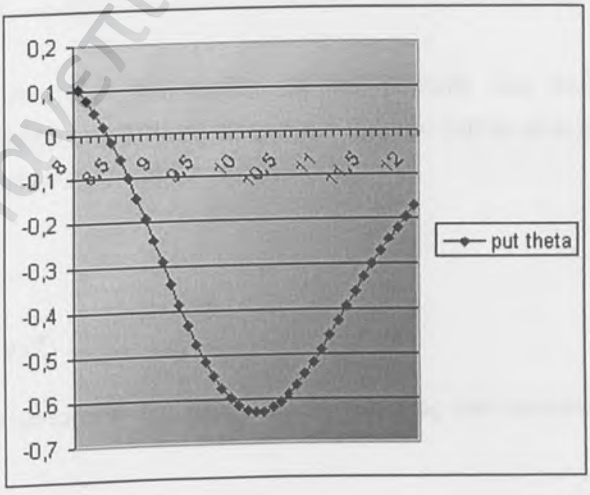
$$\text{Theta} = \frac{dC}{dt} = \frac{\frac{S\sigma}{e^{(d^2/2)}}}{2\sqrt{2}\,\pi T} - \frac{rE}{e^{rT}} * N(d-\sigma\sqrt{T})$$

Το Theta μετράει την ευαισθησία ενός δικαιώματος σε μικρές αλλαγές έως την ημερομηνία ωρίμανσής του.

Το Theta μας δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής της χρονικής διάρκειας μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Η μεταβολή αυτή είναι μεγαλύτερη για τα at the money options.



Για παράδειγμα αν το at the money call της μετοχής έχει τιμή 0,46 € και περάσει μια βδομάδα η τιμή του call θα γίνει call' = call + theta * (0,22 - 0,20) = 0,46 - 0,62 * (0,3 - 0,28) = 0,448 (αφού η μια βδομάδα είναι 1/52 = 0,02 έτος).

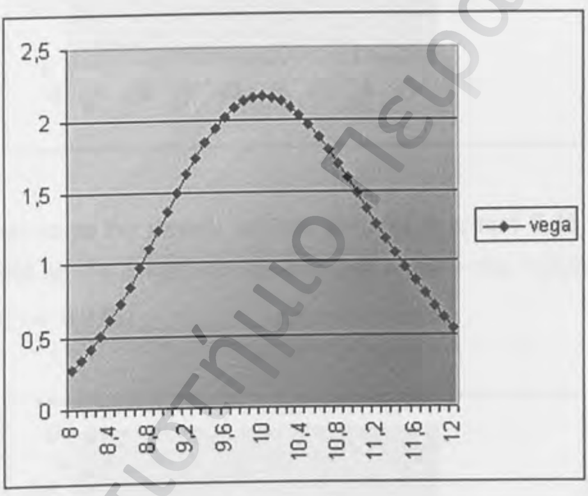


Vega:

$$\text{Vega} = \frac{S\sqrt{T}}{\frac{e^{(d^2/2)}}{\sqrt{2\pi}}}$$

Το Vega μετράει την ευαισθησία του δικαιώματος σε μικρές διακυμάνσεις της μεταβλητότητάς του.

Το Vega μας δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής της τιμής της μεταβλητότητας (volatility) του υποκείμενου αγαθού. Η μεταβολή αυτή είναι μεγαλύτερη για τα at the money options.



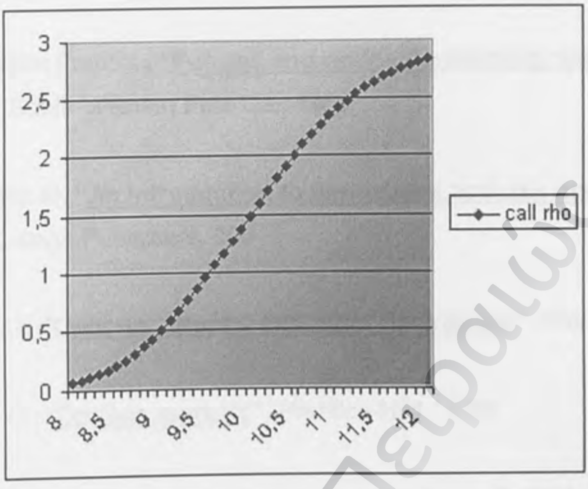
Για παράδειγμα αν το at the money call της μετοχής έχει τιμή 0,46 € και η μεταβλητότητα αλλάξει από 20% σε 22% τότε η τιμή του call θα γίνει call' = call + vega * (0,22 - 0,20) = 0,46 + 2,17 * (0,22 - 0,20) = 0,503.

Rho:

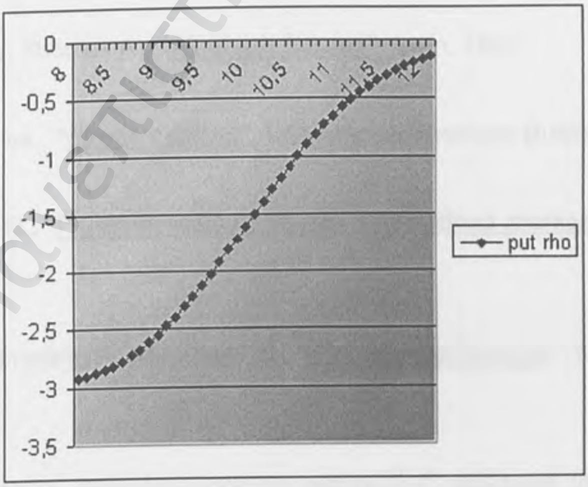
$$\text{Rho} = \frac{TE}{e^{rt}} N(d-\sigma\sqrt{T})$$

Το Rho δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής του επιτοκίου.

Το Rho μας δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής της τιμής του επιτοκίου.



Για παράδειγμα αν το at the money call της μετοχής έχει τιμή 0,46 € και το επιτόκιο μεταβληθεί από 2% σε 3% η τιμή του θα γίνει call' = call + rho * (0,03 - 0,02) = 0,46 + 1,49 * (0,03 - 0,02) = 0,475.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Henin, Claude G., "**Options :theory and practice**", Lexington Books, 1977

2. Marshall, John Francis , "**Futures and option contracting :theory and practice**", South-Western Pub. Co., 1989

3. Chance, Don M.,"**An introduction to derivatives and risk management**", Harcourt College Publishers, 200

4. Hull, John C., "**Options, futures, and other derivatives**", Prentice Hall, 2003

5. Cox, John C., "**Options markets**", Prentice-Hall , 1985

6. Kallianpur, G., "**Introduction to option pricing theory**", Birkhauser, 2000

7. Daigler, Robert T., "**Advanced options trading**", Probus, 1994

8. McCafferty, Thomas A , "**All about options**", McGraw-Hill, 1998

9. McCafferty, Thomas A , "**All about futures**", Irwin, 1992

10. Clewlow, Les , "**Exotic options**", International Thomson Business, 1997

11. Hull, John C., "**Fundamentals of futures and options markets**", Prentice-Hall, 2002

12. Edwards, Franklin R. ;Ma, Cindy W., "**Futures and options**", McGraw-Hill, 1992

13. Kolb, Robert W., "**Futures, options, and swaps**", Blackwell, 2000

14. Neftci, Salih N.,"**An introduction to the mathematics of financial derivatives**", 2nd ed., Academic, San Diego, 2000

15. Ross, Sheldon M, "**An introduction to mathematical finance: options and other topics**", Cambridge 1999

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ, ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BLACK–SCHOLES ΚΑΙ ΑΛΛΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

5.1 Αποτίμηση Options Ευρωπαϊκού τύπου: Το μοντέλο των Black - Scholes

5.1.1 Γενικά

Το υπόδειγμα Black and Scholes δεν εμφανίστηκε σε μια νύχτα. Ο Fisher Black άρχισε να εργάζεται στη δημιουργία ενός μοντέλου για την αποτίμηση stock warrants. Αυτή η εργασία σήμαινε την δημιουργία και υπολογισμό ενός παραγώγου που θα έδινε το πώς το discount rate ενός warrant μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο, αλλά και σε σχέση με την αξία του υποκείμενου τίτλου. Το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού έμοιαζε με τη πασίγνωστη εξίσωση μεταφοράς θερμότητας. Λίγο μετά την ανακάλυψη αυτή του Black, ο Myron Scholes συνεργάστηκε με τον Black και το αποτέλεσμα της δουλειάς τους ήταν ένα πραγματικά αξιόλογο και ακριβές υπόδειγμα. Στους Black και Scholes δεν μπορούν να αποδοθούν όλες οι τιμές για τη δουλειά τους. Στην πραγματικότητα το υπόδειγμά τους είναι μια βελτιωμένη έκδοση ενός προγενέστερου υποδείγματος, του υποδείγματος που ο A. James Boness ανακάλυψε στη διδακτορική διατριβή του στο πανεπιστήμιο του Chicago. Οι βελτιώσει των Black και Scholes στο υπόδειγμα του Boness ήρθε με τη μορφή της απόδειξης ότι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free interest rate) είναι ο σωστός παρανομαστής προεξόφλησης και μάλιστα χωρίς την απαραίτητη ύπαρξη των υποθέσεων για τις προτιμήσεις των επενδυτών και τη θέση τους ως προς το κίνδυνο.

The Model:

$C = SN(d_1) - Ke^{(-rt)}N(d_2)$

C = Theoretical call premium

S = Current Stock price

t = time until option expiration

K = option striking price

r = risk - free interest rate

N = Cumulative standard normal distribution

e = exponential term (2.7183)

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{s^2}{2}\right)t}{s\sqrt{t}}$$

$d_2 = d_1 - s\sqrt{t}$

s = standard deviation of stock returns

ln = natural logarithm

7.1.2 Προϋποθέσεις του μοντέλου

Το μοντέλο των Black – Scholes υπολογίζει την τιμή ενός call option ευρωπαϊκού τύπου το οποίο λήγει σε χρόνο T. Προϋποθέτει ότι το υποκείμενο αγαθό δεν πληρώνει μερίσματα κατά την διάρκεια μέχρι την λήξη του δικαιώματος και ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο $dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz$. Προϋποθέτει επίσης ότι ισχύει σταθερό risk free επιτόκιο r.

Προκειμένου να καταλάβουμε την βαθύτερη έννοια του μοντέλου, θα το διαιρέσουμε σε δύο τμήματα. Το πρώτο κομμάτι, SN(d1), προέρχεται από το αναμενόμενο κέρδος από την απόκτηση του δικαιώματος. Αυτό βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας την τιμή της μετοχής [S] με την στο premium του δικαιώματος σε συνάρτηση με τη μεταβολή στην τιμή του υποκείμενου τίτλου. Το δεύτερο κομμάτι του μοντέλου, Ke(-rt)N(d2), δίνει την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης την ημερομηνία ωρίμανσης του δικαιώματος. Μετά υπολογίζεται η fair market value του call option ως η διαφορά των δύο τμημάτων του μοντέλου.

1) Η μετοχή δεν πληρώνει μέρισμα καθ' όλη την περίοδο που ισχύει το δικαίωμα.

Οι περισσότερες εταιρείες πληρώνουν κάποιο μέρισμα στους μετόχους τους. Αυτό είναι ένας μεγάλος περιορισμός του υποδείγματος αν λάβουμε ακόμα υπ' όψιν μας το γεγονός ότι υψηλότερες μερισματικές αποδόσεις σημαίνουν χαμηλότερο call premium. Μπορούμε βέβαια να διορθώσουμε αυτή την αδυναμία του υποδείγματος αφαιρώντας την παρούσα αξία του μερίσματος από την τιμή της μετοχής, και την τιμή αυτή να εισάγουμε στο υπόδειγμά μας.

2) Το υπόδειγμα ισχύει για δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου.

Τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου εξασκούνται όνο την ημερομηνία λήξης τους, ενώ τα αμερικάνικου τύπου δύναται να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή έως την ημερομηνία λήξης τους καθιστώντας τα δικαιώματα αμερικάνικου τύπου πιο ακριβά λόγω αυτής της ευελιξίας που έχουν. Βέβαια αυτό δεν αποτελεί και μεγάλο περιορισμό για το υπόδειγμα μας γιατί πολύ λίγα δικαιώματα εξασκούνται πολύ πριν τη λήξη τους. Συνήθως εξασκούνται τις τελευταίες ημέρες διαπραγμάτευσής τους. Αυτό είναι μια πραγματικότητα, γιατί όταν κάποιος εξασκήσει το δικαίωμά του νωρίτερα, χάνει την υπολειμματική time value και παίρνει μόνο την εσωτερική αξία. Προς το τέλος της ζωής του δικαιώματος η υπολειμματική time value είναι πολύ μικρή, ενώ η εσωτερική αξία παραμένει η ίδια.

3) Οι αγορές είναι αποτελεσματικές.

Αυτή η υπόθεση λέει ότι η κατεύθυνση της αγοράς ή κάποιας μεμονωμένης μετοχής δεν μπορεί να προβλεφθεί. Οι αγορές λειτουργούν συνεχώς και οι τιμές των μετοχών ακολουθούν μια συνεχή διαδικασία Ito. Για να καταλάβουμε πως λειτουργεί μια συνεχής Ito διαδικασία, πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε ότι είναι μια διαδικασία Markov (Markov process) η οποία υποστηρίζει ότι μια παρατήρηση στο χρόνο t εξαρτάται μόνο απο την προηγούμενη παρατήρηση (στο χρόνο t-1). Μία Ito process είναι απλά μία Markov process σε συνεχή χρόνο.

4) Δεν υπάρχουν προμήθειες.

Συνήθως οι μετέχοντες σε μια αγορά πρέπει να πληρώσουν προμήθεια σε κάθε αγορά ή πώληση δικαιωμάτων. Η προμήθεια που οι μεμονωμένοι επενδυτές πληρώνουν είναι αρκετά υψηλή, έτσι ώστε να διαστρεβλώνει το αποτέλεσμα του εκάστοτε υποδείγματός μας.

5) Τα επιτόκια είναι γνωστά και σταθερά

Το υπόδειγμα των Black and Scholes χρησιμοποιεί το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate). Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, αλλά το επιτόκιο προεξόφλησης των εντόκων γραμματίων του Αμερικάνικου Δημοσίου, 30 ημέρες πριν από τη λήξη τους είναι ό,τι πιο αντιπροσωπευτικό υπάρχει στην αγορά προκειμένου να παραστήσουμε το risk–free–rate. Τις περιόδους που τα επιτόκια αλλάζουν γρήγορα, αυτό το διάστημα των 30 ημερών είναι πιθανόν να μεγαλώσει, παραβιάζοντας την υπόθεση των γνωστών και σταθερών επιτοκίων.

6) Οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή

Αυτή η υπόθεση προτείνει ότι οι αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου ακολουθούν την κανονική κατανομή.

5.2 Η διαφορική εξίσωση

5.2.1 Η διαφορική εξίσωση - ορισμός

Έστω ότι f είναι η τιμή ενός call option. Το f θα είναι μια συνάρτηση της τιμής της μετοχής S και του χρόνου t. Με βάση το λήμμα του Ito θα έχουμε:

$$df = \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Αν σχηματίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από την πώληση ενός call option και την αγορά $\frac{\partial f}{\partial S}$ μετοχών τότε αυτό το χαρτοφυλάκιο θα έχει αξία $\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$. Η μεταβολή της αξίας αυτού του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα dt θα είναι $d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS$ και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$d\Pi = -\left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz)$$

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt$$

Δηλαδή η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μας στο χρόνο dt είναι καθορισμένη και δεν εξαρτάται από την στοχαστική διαδικασία Wiener η οποία απαλείφεται στην παραπάνω εξίσωση. Κατά συνέπεια αφού δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την μελλοντική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου, για λόγους μη ύπαρξης δυνατότητας αρμπιτράζ αυτό θα πρέπει να κερδίζει το risk free επιτόκιο. Δηλαδή $d\Pi = r\Pi dt$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt = r\left(-f+\frac{\partial f}{\partial S}S\right)dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+r\frac{\partial f}{\partial S}S = rf$$

Η οριακή συνθήκη για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης είναι f(t=T)=max{S-K,0} όπου K είναι η τιμή εξάσκησης του call option.

5.2.1.1 Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μας δίνει:

$$c = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right)+\left(r+\sigma^2/2\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}$$ και $d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$

N(x) είναι η κανονική αθροιστική συνάρτηση κατανομής, c είναι η τιμή του call, So είναι η αρχική τιμή της μετοχής, K είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, T ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος, r το risk free επιτόκιο και σ η μεταβλητότητα (volatility) της μετοχής.

5.2.2 Put – Call Parity

Αν θεωρήσουμε δύο χαρτοφυλάκια που το μεν πρώτο αποτελείται από ένα call option ευρωπαϊκού τύπου και Ke^{-rT} σε μετρητά ενώ το δεύτερο αποτελείται από ένα put option ευρωπαϊκού τύπου, με την ίδια τιμή εξάσκησης και ίδια διάρκεια μέχρι την λήξη, καθώς και από μία μετοχή. Και τα δύο χαρτοφυλάκια στην λήξη τους θα έχουν ίδια αξία max{S,K} και επειδή τα option δεν μπορούν να εξασκηθούν πριν την λήξη τους συμπεραίνουμε ότι τα δύο χαρτοφυλάκια θα έχουν και ίδια παρούσα αξία. Κατά συνέπεια θα ισχύει η σχέση:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

5.2.3 Η θεωρητική τιμή των Put options

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα put-call parity έχουμε:

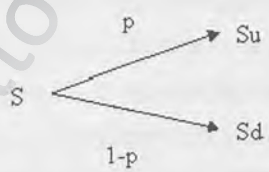
$$p = c + Ke^{-rT} - S_0 = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) + Ke^{-rT} - S_0$$

$$p = K \cdot e^{-rT} \cdot (1 - N(d_2)) - S_0 \cdot (1 - N(d_1)) = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1)$$

5.3. Αποτίμηση Options Αμερικάνικου τύπου: Το μοντέλο των Cox–Ross-Rubinstein

5.3.1 Το διονυμικό μοντέλο

Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο χωρίζουμε την χρονική διάρκεια T μέχρι την λήξη του δικαιώματος σε N βήματα μεγέθους δt. Στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος η τιμή της μετοχής μπορεί να μεταβληθεί είτε ανοδικά από S σε S*u με πιθανότητα p, είτε καθοδικά από S σε S*d με πιθανότητα 1-p όπως δείχνει και το σχήμα που ακολουθεί:



5.3.2 Θεώρηση ουδετερότητας κινδύνου (Risk Neutral Valuation)

Οι διαφορικές εξισώσεις που πληρούν οι αξίες των δικαιωμάτων είναι ανεξάρτητες από την απαίτηση απόδοσης του επενδυτή από την τοποθέτηση του μ. Κατά συνέπεια μπορεί κάποιος να κοστολογήσει την θεωρητική τιμή των δικαιωμάτων υποθέτοντας ότι ο κόσμος είναι ουδέτερος στον κίνδυνο (risk neutral). Κατά συνέπεια μπορεί κάποιος να υποθέσει τα εξής:

- Η αναμενόμενη απόδοση από όλες τις μετοχές είναι το risk free επιτόκιο

- Οι μελλοντικές χρηματικές αξίες μπορούν να προεξοφληθούν σε σημερινές τιμές με το risk free επιτόκιο

Με βάση τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύει $Se^{r\delta t} = pSu + (1-p)Sd$.

Για να πληρείται η απαίτηση οι παρατηρούμενες τιμές να παρουσιάζουν volatility σ θα πρέπει:

$$Variance = pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2 \cdot \delta t$$

Μια τρίτη συνθήκη που χρησιμοποίησαν οι Cox, Ross και Rubinstein στο υπόδειγμα τους ήταν $u = \frac{1}{d}$. Με βάση τις τρεις αυτές συνθήκες καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων του μοντέλου μας:

$$p = \frac{a-d}{u-d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$a = e^{r\cdot\delta t}$$

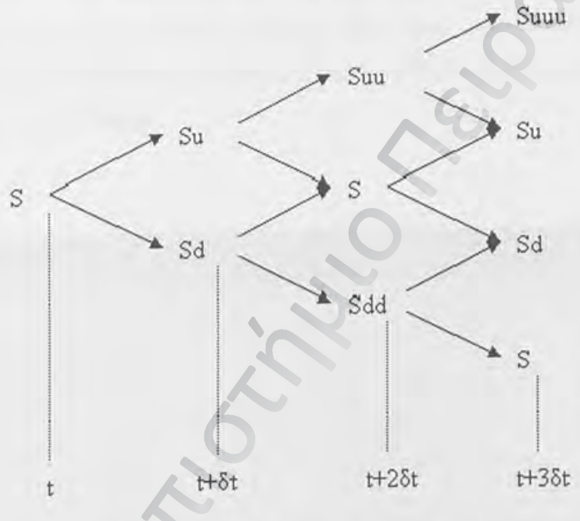
5.3.3 Προσδιορίζοντας την αξία ενός call option αμερικάνικου τύπου

Στο παράδειγμα του σχήματος μετά το 3-ο βήμα, δηλαδή την χρονική στιγμή T=3*δt που λήγει το δικαίωμα, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τρέχουσα αξία ενός call option σε κάθε έναν από τους 3+1 κόμβους του μοντέλου ως το μέγιστο του ζεύγους {S-K,0}. Με βάση αυτές τις τιμές μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του call option σε κάθε ένα από τους 2+1 κόμβους του δεύτερου βήματος με βάση την εξής λογική:

- Υπολογίζουμε την αξία από την διακράτηση του call: p*c1+(1-p)*c2, όπου c1 είναι η αξία του call στον κόμβο του 3-ου βήματος που καταλήγουμε αν κινηθούμε ανοδικά από τον συγκεκριμένο κόμβο του 2-ου βήματος, p είναι η πιθανότητα να κινηθούμε ανοδικά, c2 είναι η αξία του call στον κόμβο του 3-ου βήματος που καταλήγουμε αν κινηθούμε πτωτικά από τον συγκεκριμένο κόμβο του 2-ου βήματος, (1-p) είναι η πιθανότητα να κινηθούμε πτωτικά.

- Προεξοφλούμε αυτή την αξία σε σημερινές τιμές: $e^{-r\delta t}\cdot(p\cdot c1+(1-p)\cdot c2)$
- Συγκρίνουμε αυτή την αξία με την αξία του call που θα είχαμε αν εξασκούσαμε άμεσα αυτό το δικαίωμα αμερικανικού τύπου και κρατάμε ως αξία του call σε αυτό τον κόμβο την μεγαλύτερη από τις δύο αξίες

Αφού προσδιορίσουμε την αξία του call σε όλους τους κόμβους του δεύτερου βήματος προχωρούμε στον υπολογισμό της αξίας του call στους δύο κόμβους του 1-ου βήματος και τέλος την αξία του call στον ένα κόμβο του μηδενικού βήματος που είναι και η τρέχουσα αξία του δικαιώματος που ψάχνουμε. Στην πράξη χρησιμοποιούμε αρκετά μεγαλύτερο αριθμό βημάτων από 3 (της τάξης των 50 – 500).



5.3.4 Αδυναμίες του υποδείγματος των Black-Scholes

Το μοντέλο των Black-Scholes προϋποθέτει ότι ο λογάριθμος των μεταβολών των τιμών ακολουθεί την κανονική κατανομή και ότι η volatility παραμένει σταθερή ή είναι μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Τα δεδομένα παρατήρησης δείχνουν ότι οι δύο αυτές προϋποθέσεις δεν ισχύουν. Συγκεκριμένα η κατανομή που ακολουθεί ο λογάριθμος των μεταβολών των τιμών παρουσιάζει ασυμμετρία καθώς και παχύτερες ουρές και στενότερο λαιμό σε σχέση με την κανονική κατανομή. Επίσης η μεταβλητότητα μεταβάλλεται στοχαστικά και παρουσιάζει περιόδους υψηλότερης και χαμηλότερης τιμής.

5.3.5 Ασυμμετρία (Skewness)

Η κανονική κατανομή είναι συμμετρική και έχει ροπή τρίτης τάξης (skewness) ίση με το μηδέν. Η ροπή τρίτης τάξης ορίζεται ως εξής:

$$\frac{E[(X-\mu_X)^3]}{\mathrm{Var}[X]^{3/2}}$$

Σε αντίθεση οι παρατηρούμενες κατανομές που ακολουθεί ο λογάριθμος των μεταβολών των τιμών έχουν κάποια ασυμμετρία, εμφανίζουν δηλαδή skewness διάφορο του μηδενός. Όταν η αριστερή ουρά της κατανομής είναι μακρύτερη από την δεξιά τότε λέμε ότι η κατανομή αυτή έχει αρνητικό skewness ενώ όταν η δεξιά ουρά της κατανομής είναι μακρύτερη από την αριστερή τότε λέμε ότι η κατανομή αυτή έχει θετικό skewness. Ακολουθεί πίνακας που δίνει το skewness των ημερήσιων λογαρίθμων των μεταβολών γνωστών δεικτών για την χρονική περίοδο μεταξύ 1-1-1997 μέχρι 31-12-1999.

Index	*Skewness*
SP500	-0.4423
NASDAQ-composite	-0.5474
Nikkei-225	0.1187
AEX	-0.3132
DAX	-0.4329
SSMI	-0.3595
BEL-20	-0.4141
CAC-40	-0.2123

5.3.6 Κύρτωση (Kurtosis)

Μεγάλες μεταβολές (άλματα) των τιμών παρατηρούνται συχνότερα από όσο προβλέπει η κανονική κατανομή. Αυτό έχει σαν συνέπεια η κατανομή που ακολουθεί ο λογάριθμος των μεταβολών των τιμών να έχει παχύτερες ουρές από όσο προβλέπει η κανονική κατανομή. Η ροπή τέταρτης τάξης μετράει αυτή την συμπεριφορά και ορίζεται ως εξής:

$$\frac{E[(X-\mu_X)^4]}{\mathrm{Var}[X]^2}$$

Η κανονική κατανομή έχει κύρτωση (kurtosis) ίση με τρία. Μεγαλύτερες τιμές συνεπάγονται παχύτερες ουρές και στενότερο λαιμό της κατανομής. Ακολουθεί πίνακας που δίνει τη κύρτωση (kurtosis) των ημερήσιων λογαρίθμων των μεταβολών γνωστών δεικτών για την χρονική περίοδο μεταξύ 1-1-1997 μέχρι 31-12-1999.

Index	Kurtosis
SP500	6.96
NASDAQ-composite	5.81
Nikkei-225	4.76
AEX	5.10
DAX	4.67
SSMI	5.40
BEL-20	5.40
CAC-40	4.64

5.4 Άλλα μοντέλα

5.4.1 Το μοντέλο των Corrado και Su

Οι Corrado και Su ανέπτυξαν μια μέθοδο ώστε να ενσωματώσουν στο μοντέλο των Black-Scholes τις διορθώσεις που προκύπτουν από την ύπαρξη στην κατανομή skewness και kurtosis. Η κατανομή g(z) που ακολουθεί ο κανονικοποιημένος λογάριθμος των μεταβολών είναι:

$$g(z) = n(z)\left[1 + \frac{\mu_3}{3!}(z^3 - 3z) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(z^4 - 6z^2 + 3)\right]$$

όπου n(z) η κανονική κατανομή μ_3 η skewness, μ_4 η kurtosis και $z = \frac{\ln(S_t/S_0) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$. Με βάση αυτό το μοντέλο η τιμή του call ευρωπαϊκού τύπου παίρνει την μορφή:

$$C_{CC} = C_{BS} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)\, Q_4$$

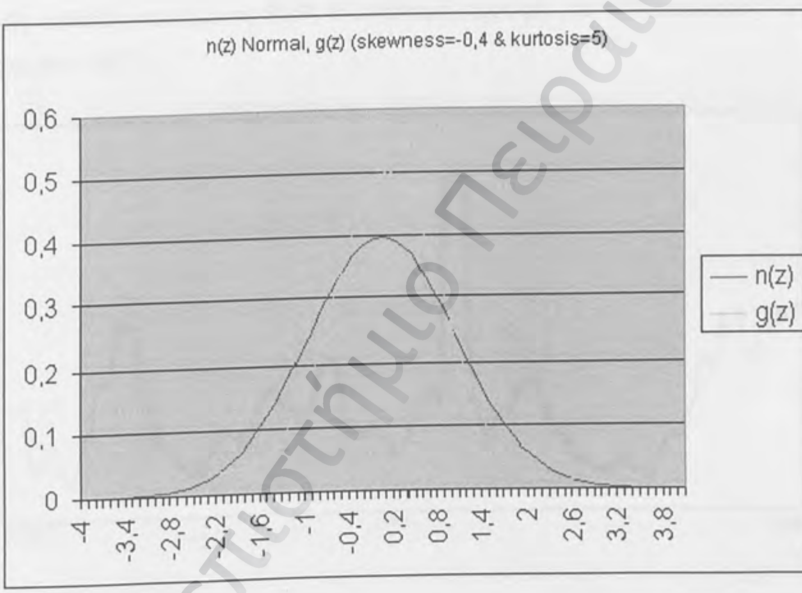
όπου:

$C_{BS} = S_0 N(d) - Ke^{-rt} N(d - \sigma\sqrt{t})$ είναι η τιμή που μας δίνει το μοντέλο των Black-Scholes και

$$Q_3 = \frac{1}{3!} S_0 \sigma\sqrt{t}((2\sigma\sqrt{t} - d)n(d) - \sigma^2 t N(d))$$

$$Q_4 = \frac{1}{4!} S_0 \sigma\sqrt{t}((d^2 - 1 - 3\sigma\sqrt{t}(d - \sigma\sqrt{t}))n(d) + \sigma^3 t^{3/2} N(d))$$

$$d = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$



5.4.1.1 Τεκμαρτή μεταβλητότητα, Ασυμμετρία και Κύρτωση (Implied Volatility, Skewness and Kurtosis)

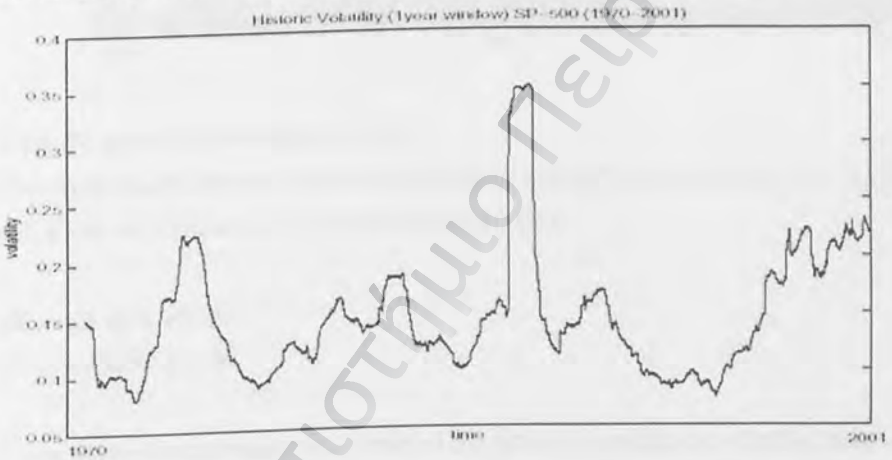
Αν έχουμε N τρέχουσες τιμές δικαιωμάτων, για διάφορες τιμές εξάσκησης, με την ίδια χρονική διάρκεια μέχρι την λήξη τους, μπορούμε να εξάγουμε τις implied τιμές των ροπών δεύτερης, τρίτης και τέταρτης τάξης ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων:

$$\min_{ISD,ISK,IKT} \sum_{j=1}^{N} \left[C_{OBS,j} - \left(C_{BS,j}(ISD) + ISK\,Q_3 + (IKT-3)\,Q_4\right) \right]^2$$

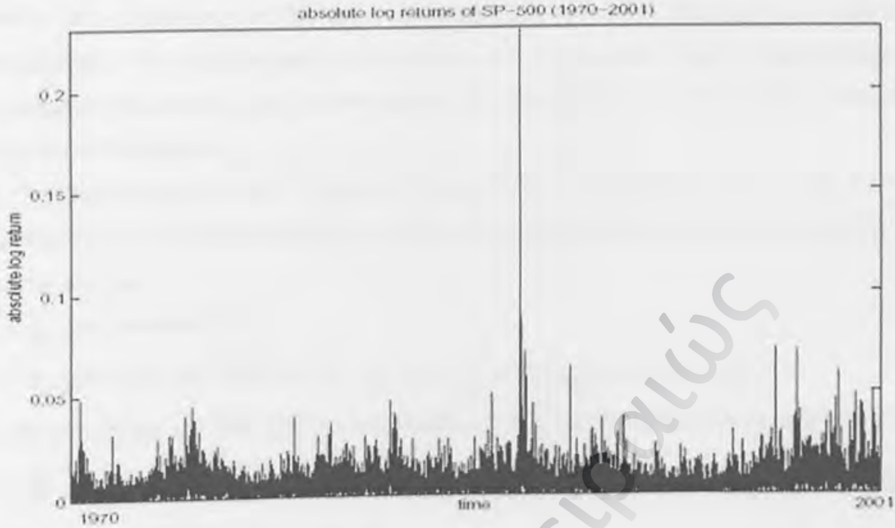
Όπου C_{OBS} είναι οι παρατηρούμενες τρέχουσες τιμές, ISD είναι η implied volatility, ISK είναι η implied skewness και IKT είναι η implied kurtosis.

5.4.1.2 Η στοχαστική μεταβολή της μεταβλητότητας (volatility)

Η μεταβλητότητα (volatility) των τιμών διακυμαίνεται στοχαστικά και παρουσιάζει τάση επανόδου προς τον μακροπρόθεσμο μέσο όρο της όπως φαίνεται και στο διάγραμμα ιστορικής volatility του δείκτη S&P. Η απότομη κορυφή του διαγράμματος αντιστοιχεί στο κραχ του 1987.



Μια ημέρα με μεγάλη ημερήσια μεταβολή των τιμών τείνει να ακολουθείται από μια ημέρα με επίσης μεγάλη μεταβολή των τιμών και το αντίστροφο. Κατά συνέπεια σχηματίζονται ομάδες ημερών με υψηλή και ομάδες ημερών με χαμηλή μεταβλητότητα όπως δείχνει και το σχήμα που ακολουθεί.



5.4.2 Το μοντέλο των Hull και White

Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο μας έχει δύο στοχαστικά μεταβαλλόμενα μεγέθη την τιμή S και την Variance V. Η γενική του μορφή είναι:

$$dS = \phi S\, dt + \sigma S\, dw$$
$$dV = \mu V\, dt + \xi V\, dz.$$

Για την γενική περίπτωση που υπάρχει συσχέτιση ρ μεταξύ των διαδικασιών wiener dw και dz δεν υπάρχει αναλυτική λύση και χρησιμοποιούμε εξομοίωση Monte Carlo για να αποτιμήσουμε τα δικαιώματα, όπως δείχνουν οι περιπτώσεις που ακολουθούν:

(i) Περίπτωση που το ρ=0 , ενώ τα ξ και μ είναι συναρτήσεις των σ και t. Για παράδειγμα τα V μπορεί να ακολουθεί μια mean reverting process όταν $\mu = a(\sigma^* - \sigma)$ και τα ξ , α, και σ* είναι σταθερές. Στην περίπτωση αυτή παράγουμε τα Vi από την σχέση:

$V_i = V_{i-1} e^{[(\mu - \xi^2/2)\Delta t + u\xi\sqrt{\Delta t}]}$, για την χρονική στιγμή $t + i(T - t)/n$

και τα αντίστοιχα μ,ξ που εξαρτώνται από το σ υπολογίζονται με βάση την τιμή $\sigma = \sqrt{V_{i-1}}$. Υπολογίζουμε τον αριθμητικό μέσο των Vi και τον χρησιμοποιούμε ως είσοδο στο μοντέλο των Black – Scholes για να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος. Ο υπολογισμός μας δείχνει ότι το μοντέλο BS υπερτιμολογεί τα δικαιώματα που είναι close to the money και υποτιμολογεί τα δικαιώματα που είναι deep out of the money.

(ii) Περίπτωση που το $\rho \neq 0$, ενώ τα ξ και μ είναι συναρτήσεις των σ, t και S. Στην περίπτωση αυτή εξομοιώνουμε και το S και το V με τα αντίστοιχα Si και Vi να δίδονται από τις σχέσεις:

$S_i = S_{i-1}e^{[(r-V_{i-1}/2)\Delta t+u_i\sqrt{V_{i-1}\Delta t}]}$

$V_i = V_{i-1}e^{[(\mu-\xi^2/2)\Delta t+\rho u_i \xi\sqrt{\Delta t}+\sqrt{1-\rho^2}v_i \xi\sqrt{\Delta t}]}$. για την χρονική στιγμή $t + i(T-t)/n$

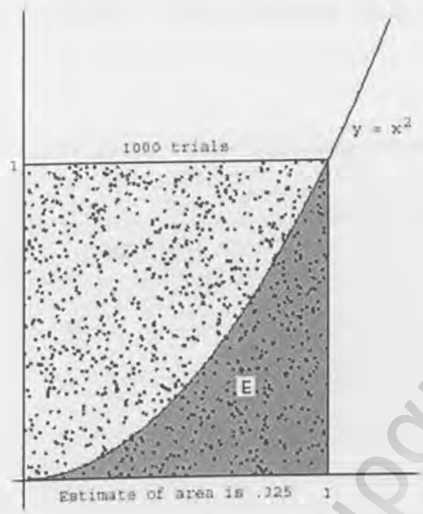
και τα αντίστοιχα μ,ξ που εξαρτώνται από τα σ και S υπολογίζονται με βάση την τιμή $\sigma = \sqrt{V_{i-1}}$ και $S = S_{i-1}$. Για το κάθε δείγμα η αντίστοιχη τιμή του δικαιώματος δίνεται από την σχέση $e^{-r(T-t)}\mathbf{max}[S_n - X, 0]$.

5.4.3 Monte Carlo

Βρισκόμαστε μπροστά σε ένα αδιέξοδο. Έχουμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο δεν έχουμε τις μαθηματικές γνώσεις να προχωρήσουμε στην επίλυση του ή ακόμα χειρότερα δεν υπάρχει γνωστός τρόπος να το επιλύσουμε μαθηματικά. Τι κάνουμε σε αυτή την περίπτωση ;

Η απάντηση είναι ότι καταφεύγουμε στην «ωμή βία» του Monte Carlo. Βάζουμε το Pentium 4 να μας λύσει το πρόβλημα και προκαλούμε την αποστροφή κάθε θεωρητικού μαθηματικού. Ένα απλοϊκό παράδειγμα:

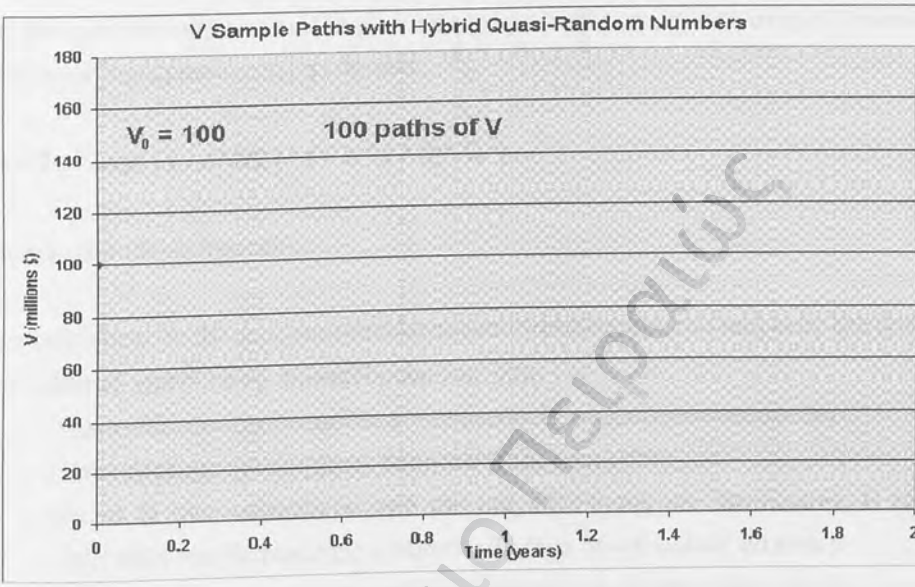
Έχουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη y = x^2 για τιμές του x μεταξύ 0 και 1 (το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του παρακάτω σχήματος) και δεν έχουμε την παραμικρή ιδέα από ολοκληρώματα. Τι κάνουμε;



Απλό. Βάζουμε το Pentium 4 να «πετάει βελάκια» στην επιφάνεια του προβλήματος μας (το x παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και 1 , άρα και το y θα παίρνει τιμές μεταξύ y = 0^2 = 0 και y = 1^2 = 1). Το ποσοστό από βελάκια που πέφτει μέσα στην γραμμοσκιασμένη επιφάνεια ως προς τα συνολικά βελάκια που έχουμε ρίξει είναι ίσο με το ποσοστό αυτού του εμβαδού ως προς το εμβαδόν του τετραγώνου που εύκολα βλέπουμε ότι είναι 1 x 1 = 1. Και πως κάνουμε το Pentium 4 να πετάει αυτά τα βελάκια; Βάζουμε τον υπολογιστή να μας δώσει δύο τυχαίους αριθμούς x και y μεταξύ 0 και 1 με την εντολή RAND() στο excel. Εάν το x στο τετράγωνο είναι μικρότερο από το y τότε βρισκόμαστε «μέσα στην γραμμοσκιασμένη επιφάνεια». Αντίθετα αν το x στο τετράγωνο είναι μεγαλύτερο από το y τότε βρισκόμαστε εκτός γραμμοσκιασμένης επιφάνειας. Στο παραπάνω παράδειγμα πετώντας 1000 τέτοια βελάκια μέσα σε όλο το τετράγωνο, βρίσκουμε περίπου 325 να πέφτουν μέσα στην γραμμοσκιασμένη επιφάνια. Κατά συνέπεια το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι 325/1000 * 1 = 0,325. Μεγαλώνοντας τον αριθμό από βελάκια που έχουμε ρίξει μεγαλώνουμε και την ακρίβεια της εκτίμησης μας.

5.4.3.1 Παράδειγμα σχέσης των παραπάνω με την αποτίμηση δικαιωμάτων

Κάποιος έχει πάρει μια απλή ή σύνθετη κερδοσκοπική θέση. Φτιάχνει το μοντέλο των μεταβολών που ακολουθεί αυτή η θέση και θέλει να δει σε κάποιο διάστημα κατά μέσο όρο τι θα του αποδώσει και ποια είναι η πιθανότητα να κινηθεί πάνω από το α επίπεδο ή κάτω από το β επίπεδο. Τρέχει την Monte Carlo εξομοίωση και παίρνει τις απαντήσεις του.



Η τεχνική Monte Carlo χρησιμοποιείται εκτενέστατα στην αποτίμηση παραγώγων και στην αξιολόγηση σεναρίων VAR (Value at Risk) λόγω της τεράστιας ευελιξίας που έχει.

Ένα διαδεδομένο μοντέλο που περιγράφει την μεταβολή των τιμών το μετοχών είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Σύμφωνα με αυτό η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής dS δίνεται από την σχέση:

$dS = \mu*S*dt + \sigma*S*dW(t)$

όπου η dW(t) είναι μια διαδικασία Wiener , μ είναι η μέση τιμή της μεταβολής της τιμής ανά μονάδα χρόνου και σ είναι η μεταβλητότητα της μετοχής. Για μικρές χρονικές μεταβολές δt η μεταβολή δW μπορεί να γραφεί ως:

$\delta W = \varepsilon*(\delta t)^{\wedge} \frac{1}{2}$

όπου ε είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους N(0,1).
Με βάση το παραπάνω μοντέλο αν η τιμή μιας μετοχής τη χρονική στιγμή 0 είναι So τότε η τιμή την χρονική στιγμή t θα είναι:

$$St = So * \exp((r - \sigma^2/2) * t + \sigma * \varepsilon * (t)^{1/2})$$

όπου r είναι το risk free rate.

Κατά συνέπεια αν θέλουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε την τιμή ενός call option που λήγει σε χρόνο t από σήμερα δρούμε ως εξής:

- Παίρνουμε ένα τυχαίο αριθμό ε που ακολουθεί την κανονική κατανομή
- Υπολογίζουμε την τιμή St με βάση τον παραπάνω τύπο
- Αν το St είναι μεγαλύτερο από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K τότε, στην λήξη του δικαιώματος, η αξία του θα είναι St – K αλλιώς θα είναι 0
- Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για πολλές άλλες τυχαίες τιμές ε και παίρνουμε τελικά την μέση τιμή της αξίας του δικαιώματος E
- Η σημερινή τιμή του δικαιώματος θα είναι η present value του E δηλαδή E * exp(-r*t)

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR της θέσης μας δρούμε ως εξής:

- Έστω ότι η θέση μας αποτελείται από ν διαφορετικά assets που έχουν γνωστούς μεταξύ τους συντελεστές συσχέτισης
- Παράγουμε ν τυχαίες μεταβλητές ε(i) οι οποίες ακολουθούν μια πολυμετάβλητη κανονική κατανομή με τους ίδιους συντελεστές συσχέτισης με τα assets μας
- Υπολογίζουμε τις μεταβολές των τιμών των assets μας S(i)
- Υπολογίζουμε την μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μας
- Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για πολλά άλλα τυχαία σετ ε(i) και υπολογίζουμε την μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μας
- Κατασκευάζουμε ιστόγραμμα αυτών των μεταβολών και υπολογίζουμε το VaR

Θα αναφέρουμε τρόπους τώρα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν συγκεκριμένες κατανομές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στις εξομοιώσεις μας. Καταρχήν το excel μας δίνει τη δυνατότητα μέσω της συνάρτησης Rand να πάρουμε ένα τυχαίο αριθμό ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα [0,1) . Στην περίπτωση που χρειαζόμαστε ένα τυχαίο αριθμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους N(0,1) φτιάχνουμε μια δικιά μας συνάρτηση, την συνάρτηση gauss:

5.4.4 Το κριτήριο του Kelly

Το κριτήριο του Kelly (Kelly, J. L. "A New Interpretation of Information Rate," Bell System Technical Journal, Vol. 35, pp 917-926, 1956), αφορά την μεγιστοποίηση του λογαρίθμου του πλούτου και γενικά αναγνωρίζεται ως το βέλτιστο σύστημα πονταρίσματος.

Θεωρούμε την περίπτωση του στοιχήματος που η θετική ή αρνητική απολαβή του είναι ίδια με το ποσό που ποντάρουμε. Κατά συνέπεια αν η έκβαση είναι ευνοϊκή για εμάς ο πλούτος που θα έχουμε μετά θα είναι:

$$B_1 = B_0 * (1+f)$$

όπου B1 ο πλούτος μας μετά την έκβαση του στοιχήματος

B0 ο πλούτος μας πριν την έκβαση του στοιχήματος

f το ποσοστό του πλούτου μας που ποντάραμε στο στοίχημα

Στην περίπτωση αρνητικής έκβασης του στοιχήματος θα είχαμε:

$$B_1 = B_0 * (1-f)$$

Αυτό που θέλουμε να βρούμε είναι ένα βέλτιστο κριτήριο για το ποσοστό του πλούτου μας που θα πρέπει να ποντάρουμε σε ένα επαναλαμβανόμενο στοίχημα αυτής της μορφής. Μετά την πραγματοποίηση N τέτοιων στοιχημάτων θα έχουμε W νικηφόρα και L με αρνητική έκβαση και θα ισχύει N = W + L. O πλούτος μας θα είναι:

$$B_N = B_0 * (1+f)^W * (1-f)^L$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει η ταυτότητα $x = e^{\ln(x)}$ και κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$B_N \Big/ N \cdot B_0 = e^{\frac{1}{N}\ln\left[(1+f)^W * (1-f)^L\right]}$$

Ο εκθέτης $G(f)=\frac{1}{N}\ln\left[(1+f)^{W}*(1-f)^{L}\right]$ εκφράζει την γεωμετρική αύξηση του πλούτου ανά στοίχημα. Η αναμενόμενη τιμή του G(f) θα είναι:

$$g(f)=E\left[\frac{W}{N}\cdot\ln(1+f)+\frac{L}{N}\cdot\ln(1-f)\right]=p\cdot\ln(1+f)+q\cdot\ln(1-f)$$

όπου p η πιθανότητα θετικής έκβασης του στοιχήματος και q = (1-p) η πιθανότητα αρνητικής έκβασης του στοιχήματος. Το κριτήριο του Kelly βελτιστοποιεί την γεωμετρική αύξηση του πλούτου ανά στοίχημα. Η παράγωγος της G(f) είναι:

$$g'(f)=\frac{p}{1+f}-\frac{q}{1-f}=\frac{p-p\cdot f-q-q\cdot f}{(1+f)\cdot(1-f)}=\frac{p-q-f}{(1+f)\cdot(1-f)}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $g'(f)=0\Rightarrow f^{*}=p-q$ είναι το βέλτιστο ποσοστό πονταρίσματος με το κριτήριο του Kelly στο συγκεκριμένο είδος στοιχήματος. Στην περίπτωση που έχουμε στοίχημα που η θετική ή αρνητική απολαβή δεν είναι ίδια με το ποσό που ποντάραμε τότε η G(f) γίνεται:

$$G(f)=\frac{1}{N}\ln\left[(1+a\cdot f)^{W}*(1-b\cdot f)^{L}\right]$$

όπου a η θετική απολαβή ανά μονάδα πονταρίσματος και b η αρνητική απολαβή ανά μονάδα πονταρίσματος, κατά συνέπεια:

$$g'(f)=\frac{a\cdot p}{1+a\cdot f}-\frac{b\cdot q}{1-b\cdot f}=\frac{a\cdot p-b\cdot q-a\cdot b\cdot p\cdot f-a\cdot b\cdot q\cdot f}{(1+a\cdot f)\cdot(1-b\cdot f)}=\frac{a\cdot p-b\cdot q-a\cdot b\cdot f}{(1+a\cdot f)\cdot(1-b\cdot f)}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $g'(f)=0\Rightarrow f^{*}=\frac{a\cdot p-b\cdot q}{a\cdot b}$ είναι το βέλτιστο ποσοστό πονταρίσματος με το κριτήριο του Kelly στο συγκεκριμένο είδος στοιχήματος. Στην περίπτωση που έχουμε στοιχήματα με πολλές διαφορετικές απολαβές κέρδους ή ζημιάς τότε η g(f) γίνεται:

$$g(f)=\sum_{i}p_{i}\cdot\ln(1+x_{i}\cdot f)$$

όπου x_i είναι οι αντίστοιχες απολαβές με x_i>0 για κέρδος και x_i<0 για ζημιά και οι οποίες εμφανίζονται με πιθανότητα p_i. Στην περίπτωση που τα $x_i\cdot f$ είναι μικρά σε σχέση με την μονάδα μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $\ln(1+z)=z-z^2/2$ οπότε έχουμε :

$$g(f)=\sum_i p_i\cdot x_i\cdot f-\frac{1}{2}\cdot\sum_i p_i\cdot x_i^2\cdot f^2$$

Κατά συνέπεια:

$$g'(f)=\sum_i p_i\cdot x_i-\sum_i p_i\cdot x_i^2\cdot f$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $g'(f)=0\Rightarrow f^*=\dfrac{\sum_i p_i\cdot x_i}{\sum_i p_i\cdot x_i^2}$ είναι το βέλτιστο ποσοστό πονταρίσματος με το κριτήριο του Kelly στο συγκεκριμένο είδος στοιχήματος.

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Είδος Στοιχήματος	*Βέλτιστο Ποσοστό Πονταρίσματος με βάση το κριτήριο του Kelly (f^*)*
• θετική ή αρνητική απολαβή που είναι ίδια με το ποσό που ποντάρουμε • η πιθανότητα να κερδίσουμε είναι p και η πιθανότητα να χάσουμε είναι q	$f^*=p-q$
• θετική απολαβή a φορές και αρνητική απολαβή b φορές το ποσό που ποντάρουμε • η πιθανότητα να κερδίσουμε είναι p και η πιθανότητα να χάσουμε είναι q	$f^*=\dfrac{a\cdot p-b\cdot q}{a\cdot b}$
• πιθανότητα p_i να έχουμε απολαβή x_i • $x_i\cdot f$ μικρά σε σχέση με την μονάδα	$f^*=\dfrac{\sum_i p_i\cdot x_i}{\sum_i p_i\cdot x_i^2}$

5.4.5 Υπόδειγμα Προεξόφλησης Μερισμάτων (Dividend Discount Model)

Εάν τοποθετήσουμε 20 € σε ένα τοκοφόρο γραμμάτιο που μας αποδίδει ετήσιο επιτόκιο 4% τότε σε τρία χρόνια τα χρήματα αυτά θα είναι :

$$20 \cdot (1+0{,}04)^3 = 22{,}50$$

Κατά συνέπεια η παρούσα αξία 22,50€ που θα λάβουμε σε τρία χρόνια είναι 20€. Γενικά, η παρούσα αξία ενός κεφαλαίου k που θα λάβουμε σε n χρόνια είναι:

$$p = \frac{k}{(1+r)^n}$$

όπου r είναι το ετήσιο επιτόκιο αν υποθέσουμε ετήσιο ανατοκισμό του κεφαλαίου. Στην περίπτωση που λαμβάνουμε εισόδημα k κάθε χρονιά και για τα επόμενα n χρόνια τότε η παρούσα αξία αυτών των χρηματικών ροών θα είναι:

$$p = \frac{k}{1+r} + \frac{k}{(1+r)^2} + \ldots\ldots + \frac{k}{(1+r)^n} = k \cdot \frac{(1-X^n)}{1-X}$$, όπου $$X = \frac{1}{1+r}$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντιστοιχήσουμε μια παρούσα αξία σε μια μετοχή για την οποία k είναι οι χρηματικές ροές των μερισμάτων που θα έχουμε τα επόμενα χρόνια (θεωρούμε σταθερό μέρισμα) και r είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο που απαιτούμε να έχουμε από αυτήν την επένδυση μας. Το προεξοφλητικό αυτό επιτόκιο θα είναι μεγαλύτερο από το risk free επιτόκιο του αντίστοιχου ομολόγου λόγω του μεγαλύτερου κινδύνου που θα έχει αυτή η επένδυση μας. Στην περίπτωση που τα μερίσματα που λαμβάνουμε δεν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλονται με ένα ρυθμό G=1+g από έτος σε έτος θα ισχύει ο ίδιος τύπος για την παρούσα αξία της μετοχής αλλά το X την φορά αυτή θα είναι:

$$X = \frac{G}{1+r}$$

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $1 + X + X^2 + X^3 + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1-X}$, όταν $-1<X<1$. Κατά συνέπεια όταν λαμβάνουμε υπόψη μας την ροή των μερισμάτων από τώρα μέχρι την αιωνιότητα θα έχουμε:

$$p = \frac{k}{1-X} = \frac{k}{1-G/_{1+r}} = \frac{k\cdot(1+r)}{1+r-1-g} = \frac{k+k\cdot r}{r-g}$$

και επειδή συνήθως το kr είναι μικρό σχετικά με το k κάνουμε την προσέγγιση:

$$p = \frac{k}{r-g}$$

Αυτό είναι το λεγόμενο μοντέλο του Gordon. Αν σε αυτό το μοντέλο χρησιμοποιήσουμε την τρέχουσα αποτίμηση της μετοχής στην αγορά τότε μπορούμε να επιλύσουμε ως προς το προεξοφλητικό επιτόκιο που απαιτεί ένας επενδυτής από την τοποθέτηση του σε αυτή την μετοχή:

$$r = \frac{k}{p} + g = dividend\_yield + dividend\_growth\_rate$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια λογική στους υπολογισμούς μας ακόμα και στην περίπτωση που ο ρυθμός αύξησης των μερισμάτων δεν διατηρείται σταθερός. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα που ο ρυθμός αυτός έχει δύο στάδια. Ένα αρχικό στάδιο που διαρκεί N χρόνια με ρυθμό G1 και ένα επόμενο στάδιο με ρυθμό G2. Στην περίπτωση αυτή οι υπολογισμοί μας γίνονται:

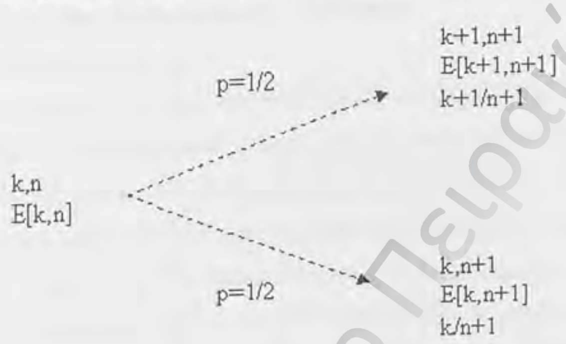
$$p = k\cdot\frac{(1-X^N)}{1-X} + \frac{k'}{r-g_2}$$

όπου $X = \frac{G_1}{1+r}$ και $k' = \frac{k\cdot G_1^{\,N}}{(1+r)^N}$. Με την ίδια λογική μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία στην περίπτωση που ο ρυθμός αύξησης των μερισμάτων έχει τρία ή περισσότερα στάδια. Συχνά, όταν οι εταιρείες παρακρατούν σημαντικό μέρος των κερδών τους ή προβαίνουν σε επαναγορά μετοχών, χρησιμοποιούμε στο παραπάνω μοντέλο αντί για το μέρισμα, κάποιο κλάσμα των *κερδών ανά μετοχή* (*EPS*).

5.4.5.1 Βοήθεια από το Διονυμικό Μοντέλο

Έχουμε το εξής πρόβλημα: Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα και μετράμε στο σύνολο των n ρίψεων που έχουμε ρίξει μέχρι εκείνη την στιγμή τις φορές k που το νόμισμα έχει

έρθει «κορώνα». Το κέρδος μας από αυτό το παιχνίδι είναι κάθε στιγμή το κλάσμα k/n. Για παράδειγμα εάν μετά από 7 ρίψεις έχουμε φέρει 4 φορές «κορώνα» το κέρδος μας εκείνη την στιγμή είναι 4/7. Έχουμε το δικαίωμα να σταματήσουμε το παιχνίδι σε όποια ρίψη θεωρούμε εμείς. Ο μέγιστος αριθμός ρίψεων που μπορούμε να φτάσουμε είναι 20. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της συμμετοχής μας σε αυτό το παιχνίδι για να είναι δίκαιο;
Επιλύουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το εξής διονυμικό μοντέλο:



Σε κάθε κόμβο του k,n διονυμικού μοντέλου το E[k,n] εκφράζει την μέση τιμή της απολαβής που θα έχουμε από την συνέχιση του παιχνιδιού. Η E[k,n] μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τρόπο:
Όπως βλέπουμε και με την βοήθεια του σχήματος του διονυμικού μοντέλου, μετά την ρίψη του νομίσματος για άλλη μια φορά, υπάρχει πιθανότητα ½ από τον κόμβο k,n να καταλήξουμε στον κόμβο k+1,n+1 και πιθανότητα ½ να καταλήξουμε στον κόμβο k,n+1 ανάλογα με το αν στην ρίψη αυτή ήρθε ή δεν ήρθε «κορώνα». Εάν καταλήξουμε στον κόμβο k+1,n+1 τότε η απολαβή που θα έχουμε εάν επιλέξουμε να σταματήσουμε το παιχνίδι θα είναι (k+1)/(n+1). Εάν η απολαβή αυτή είναι μεγαλύτερη από την E[k+1,n+1], δηλαδή από την αναμενόμενη τιμή που θα είχε η απολαβή με συνέχιση του παιχνιδιού από αυτόν τον κόμβο, τότε πράγματι επιλέγουμε να σταματήσουμε το παιχνίδι σε αυτή την ρίψη ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα το συνεχίσουμε . Ανάλογα θα πράξουμε αν καταλήξουμε στον κόμβο k,n+1 (σε αυτή την περίπτωση θα συγκρίνουμε το k/n+1 με το E[k,n+1]). Επομένως καταλήγουμε στον εξής αναδρομικό τύπο για το E[k,n]:

E[k,n] = ½ * max{(k+1)/(n+1), E[k+1,n+1]} + ½ * max{k/(n+1), E[k,n+1]}

Οι οριακές συνθήκες στην περίπτωση που φθάσουμε μέχρι την $20^{η}$ ρίψη του νομίσματος και άρα στην αναγκαστική λήξη του παιχνιδιού θα μας δώσουν E[k,20] = k/20. Με βάση αυτές και με την βοήθεια του παραπάνω αναδρομικού τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές E[k,19] κ.ο.

5.4.6 Μοντέλα της συμπεριφοράς των τιμών

5.4.6.1 Διαδικασίες Markov

Οι τιμές των μετοχών συνήθως υποθέτουμε ότι ακολουθούν μια *διαδικασία Markov*. Η διαδικασία Markov είναι μια ειδική μορφή στοχαστικών διαδικασιών στην οποία μόνο η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής είναι χρήσιμη για την εκτίμηση των μελλοντικών τιμών της. Το προηγούμενο ιστορικό της τυχαίας μεταβλητής, και ο τρόπος με τον οποίο προέκυψε το παρόν από το παρελθόν, μας είναι αδιάφορο. Η ιδιότητα αυτή είναι συμβατή με τη λεγόμενη *weak form of market efficiency* κατά την οποία «η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής ενσωματώνει όλες τις πληροφορίες που εμπεριέχονται στο προηγούμενο ιστορικό των τιμών» και κατά συνέπεια ο τεχνικός αναλυτής δεν μπορεί να εντοπίσει κερδοφόρους σχηματισμούς στα διαγράμματα του.

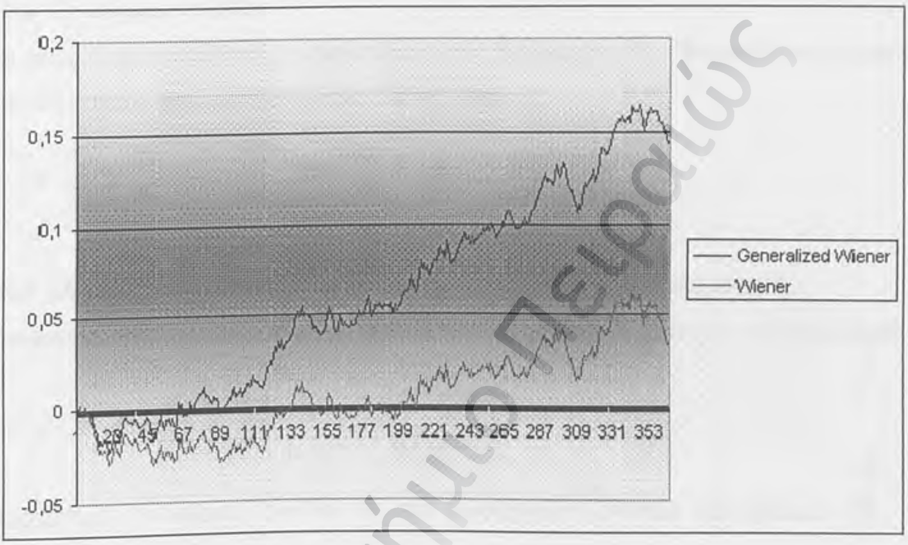
5.4.6.2 Διαδικασίες Wiener

Η διαδικασία Wiener είναι μια διαδικασία Markov που πληροί τις εξής δύο ιδιότητες:

- Η μεταβολή της δz ισούται με $\delta z = \varepsilon \cdot \sqrt{\delta t}$, όπου το ε ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους N(0,1)
- Τα δz για διαφορετικά μεταξύ τους διαστήματα δt είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και κατά συνέπεια $z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cdot \sqrt{\delta t}$, και επειδή τα ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ακολουθούν την κανονική κατανομή θα έχουμε E[z(T)-z(0)]=0 και Var[z(T)-z(0)]=Nδt=T.

5.4.6.3 Γενικευμένες διαδικασίες Wiener

Σε μια γενικευμένη διαδικασία Wiener η μεταβολή της έχει την μορφή : $dx = a \cdot dt + b \cdot dz$, όπου α και b σταθερές και η dz είναι μια διαδικασία Wiener. Για την γενικευμένη διαδικασία Wiener ισχύουν E[x(T)-x(0)]=αT και Var[x(T)-x(0)]= $b^2 \cdot T$.



5.4.6.4 Διαδικασία Ito

Σε μια διαδικασία Ito η μεταβολή της έχει την μορφή : $dx = a(x,t) \cdot dt + b(x,t) \cdot dz$, δηλαδή τα α και b δεν είναι πλέον σταθερά.

5.4.6.5 Η διαδικασία που ακολουθεί η τιμή μιας μετοχής

Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για τις τιμές των μετοχών είναι ότι αυτές ακολουθούν την γνωστή από τις φυσικές επιστήμες *geometric Brownian motion*. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει η τιμή της μετοχής S να έχει μεταβολές που ακολουθούν μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, δηλαδή:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz$$

Στο χρονικό διάστημα dt ο παράγοντας μdt δηλώνει την αναμενόμενη μεταβολή της τιμής της μετοχής ενώ ο παράγοντας σdz (όπου σ η μεταβλητότητα της μετοχής) δηλώνει το στοχαστικό κομμάτι αυτής της μεταβολής. Κατά συνέπεια το $\frac{dS}{S}$ θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους N(μdt, σ$\sqrt{dt}$).

5.4.6.6 Το λήμμα του Ito

Αν οι τιμές μιας μεταβλητής x ακολουθούν μια διαδικασία Ito, τότε κάθε συνάρτηση G των x και t ακολουθεί μια διαδικασία Ito της μορφής:

$$dG = \left(a \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \cdot dt + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot b \cdot dz$$

5.4.6.7 Οι τιμές των μετοχών ακολουθούν την LogNormal κατανομή

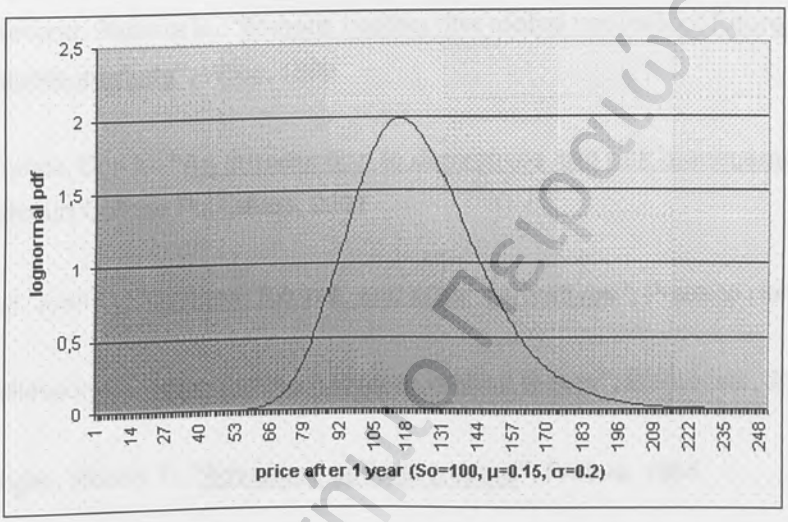
Σύμφωνα με το μοντέλο μας η διαδικασία που ακολουθεί η τιμή μιας μετοχής είναι:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz$$

Εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito για την συνάρτηση G=ln(S) και έχουμε $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$. Κατά συνέπεια:

$$dG = \left(\mu S \frac{1}{S} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{1}{S^2} \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dz = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Κατά συνέπεια η G=ln(S) ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener και η μεταβολή της σε χρόνο T ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους N[$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T$, $\sigma \cdot \sqrt{T}$] . Αφού ο λογάριθμος της τιμών των μετοχών ακολουθεί την κανονική κατανομή, συμπεραίνουμε ότι οι τιμές των μετοχών ακολουθούν την LogNormal κατανομή.


2,5
2
1,5
1
0,5
0
lognormal pdf
1
14
27
40
53
66
79
92
105
118
131
144
157
170
183
196
209
222
235
248
price after 1 year (So=100, μ=0.15, σ=0.2)

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1. Ross, Sheldon M, "**<u>An introduction to mathematical finance: options and other topics</u>**", Cambridge 1999

2. Diamond, Barbara B., "**<u>24-hour trading :the global network of futures and options markets</u>**", Wiley, 1989

3. Chance, Don M.,"**<u>An introduction to derivatives and risk management</u>**", Harcourt College Publishers, 2001

4. Hull, John C., "**<u>Options, futures, and other derivatives</u>**", Prentice Hall, 2003

5. Kallianpur, G., "**<u>Introduction to option pricing theory</u>**", Birkhauser, 2000

6. Daigler, Robert T., "**<u>Advanced options trading</u>**", Probus, 1994

7. Tompkins, Robert G., "**<u>Options analysis, a state-of-the-art guide to options pricing, trading and portfolio applications</u>**", Irwin, 1994

8. Neftci, Salih N.,"**<u>An introduction to the mathematics of financial derivatives</u>**", 2nd ed., Academic, San Diego, 2000

9. **http://www.derivatives.gr/**

10. Tompkins, Robert G., "**<u>Options explained 2</u>**", Macmillan, 1994

11. Dubofsky, David A., "**<u>Derivatives, valuation and risk management</u>**", Oxford New York, 2003

12. McCafferty, Thomas A , “**<u>All about options</u>**”, McGraw-Hill, 1998

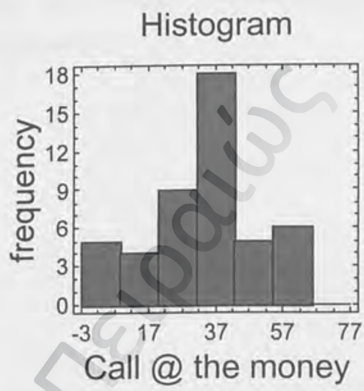
13. McCafferty, Thomas A , “**<u>All about futures</u>**”, Irwin, 1992

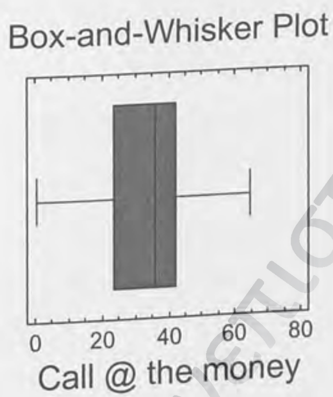
ΤΜΗΜΑ 2 : ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Ξεκινάμε την ανάλυση με στοιχεία περιγραφικής στατιστικής των δυο δειγμάτων.

SnapStat: One Sample Analysis

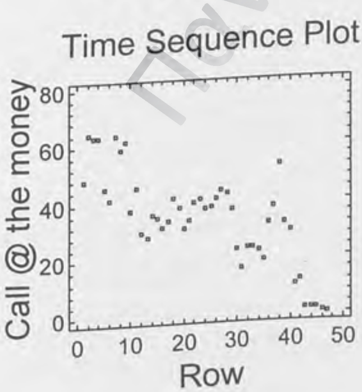
Data variable: Call @ the money
Count = 47
Average = 33,7704
Median = 36
Standard deviation = 17,2229
Minimum = 0,25
Maximum = 64,5
Stnd. skewness = -0,629551
Stnd. kurtosis = -0,273174

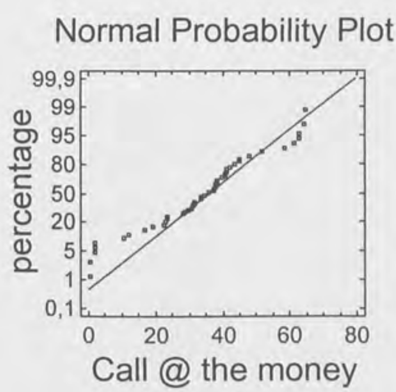




95% confidence intervals
Mean: 33,7704 +/- 5,05684 [28,7136;38,8273]
Sigma: [14,3118;21,6317]

Diagnostics
Shapiro-Wilks P-value = 0,0335
Lag 1 autocorrelation = 0,808281 +/- 0,285891

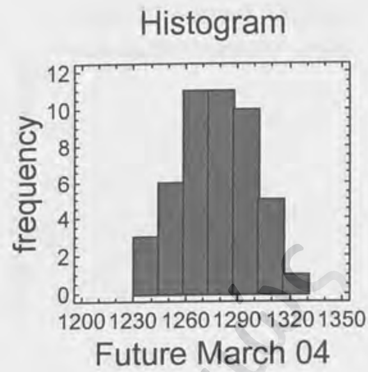


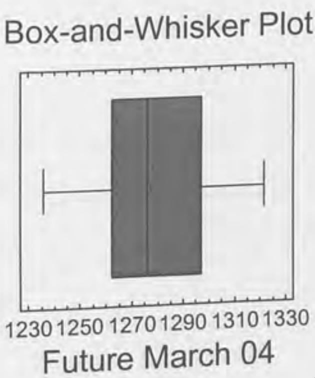


Ας αρχίσουμε αναλύοντας τα χαρακτηριστικά του δείγματος call at the money. Με 47 παρατηρήσεις, έχει μέσο όρο 33,7704 και διάμεσο 36. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι 17,2229 με μέγιστη τιμή το 64,5 και ελάχιστη το 0,25. Το γεγονός ότι οι τιμές της τυποποιημένης ασυμμετρίας και κύρτωσης (standardized skweness and kurtosis) είναι μεταξύ -2 και 2 δείχνει ότι υπάρχει ικανοποιητικός βαθμός προσαρμογής του δείγματος στην κανονική κατανομή.

SnapStat: One Sample Analysis

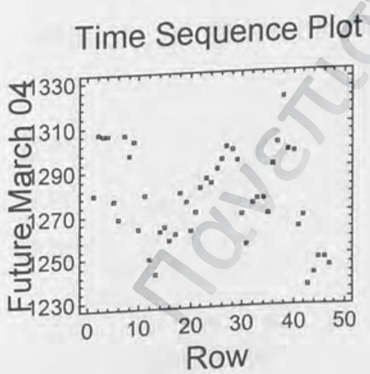
Data variable: Future March 04
Count = 47
Average = 1277,18
Median = 1276,25
Standard deviation = 20,9384
Minimum = 1235,75
Maximum = 1321,63
Stnd. skewness = -0,113619
Stnd. kurtosis = -1,11809

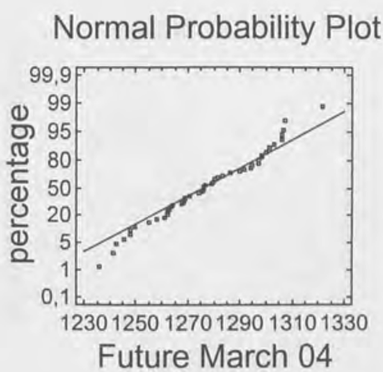




95% confidence intervals
Mean: 1277,18 +/- 6,14775 [1271,03;1283,33]
Sigma: [17,3993;26,2983]

Diagnostics
Shapiro-Wilks P-value = 0,3717
Lag 1 autocorrelation = 0,665017 +/- 0,285891





Αναλύοντας τώρα τα χαρακτηριστικά του δείγματος Future March 2004 βλέπουμε ότι με 47 παρατηρήσεις έχει μέσο όρο 1.277,18 και διάμεσο 1.276,25. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι 20,9384 με μέγιστη τιμή το 1.321,63 και ελάχιστο το 1.235,75. Το γεγονός ότι οι τιμές των skweness, kurtosis είναι μεταξύ -2 και 2 δείχνει ότι υπάρχει ικανοποιητικός βαθμός προσαρμογής του δείγματος στην κανονική κατανομή.

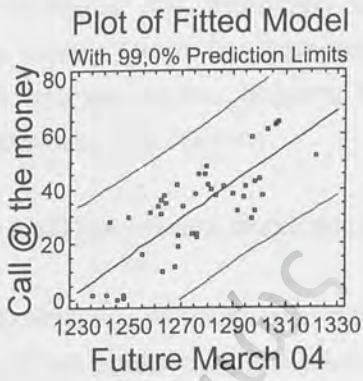
SnapStat: Curve Fitting

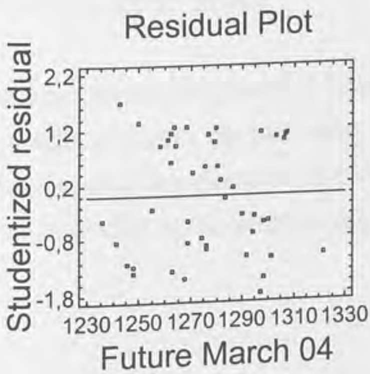
Call @ the money = -799,959 + 0,652788*Future I

	Estimate	Std. Error	t	P-Value
Intercept	-799,959	95,2952	-8,4	0,0000
Slope	0,652788	0,0746039	8,8	0,0000

Correlation Coefficient = 0,7936
R-squared = 62,98 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 62,16 percent

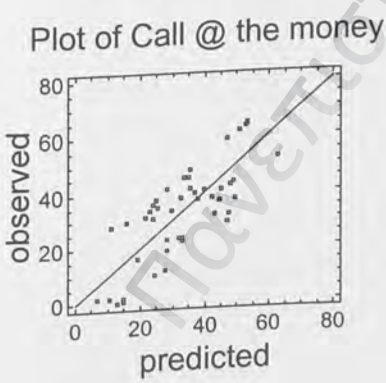
Standard Error of Est. = 10,5946
Mean absolute error = 9,4991
Durbin-Watson statistic = 0,0789534 (P=0,0000)
Lag 1 residual autocorrelation = 0,92902

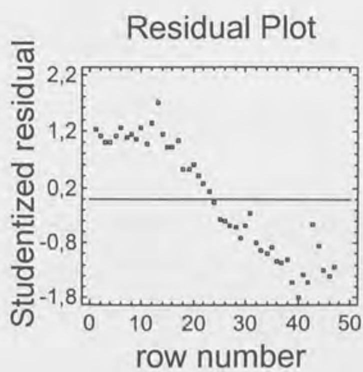




X	Predicted Y	Lower 99,0% Pred. Limit	Upper 99,0% Pred. Limit
1230	2,97117	-27,3417	33,284
1250	16,0269	-13,2816	45,3355
1270	29,0827	0,250075	57,9153
1290	42,1385	13,2272	71,0497
1310	55,1942	25,6543	84,7342
1330	68,25	37,565	98,935

X	Predicted Y	Lower 99,0% Conf. Limit	Upper 99,0% Conf. Limit
1230	2,97117	-7,36813	13,3105
1250	16,0269	9,16969	22,8842
1270	29,0827	24,6836	33,4818
1290	42,1385	37,2505	47,0264
1310	55,1942	47,407	62,9815
1330	68,25	56,8658	79,6342





Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να βρούμε το υπόδειγμα που περιγράφει καλύτερα τη συμπεριφορά των τιμών του Call at the money March 04. Κάνοντας μια απλή γραμμική παλινδρόμηση (από τη στιγμή που και τα δυο δείγματα έχουν καλή προσαρμογή στη κανονική κατανομή), καταλήγουμε στην εξίσωση

Call at the money = -799.959 + 0.652788 * Future March 2004

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το Future March 2004 είναι το προϊόν που προεξοφλεί τις τιμές του υποκείμενου τίτλου (FTSE/ASE 20) του προϊόντος που αναλύουμε (Call at the money March 2004)

Με συντελεστή συσχέτισης 0,7936 και R^2 ίσο με 62,98 % μπορούμε να θεωρήσουμε την εξίσωση αυτή σχετικά καλή για την ερμηνεία των τιμών του call αφού με την εξίσωση αυτή ερμηνεύεται το 63% της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής από τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Regression Analysis - Linear model: Y = a + b*X

Dependent variable: Call @ the money
Independent variable: Future March 04

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
Intercept	-799,959	95,2952	-8,39453	0,0000
Slope	0,652788	0,0746039	8,75006	0,0000

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	8593,88	1	8593,88	76,56	0,0000
Residual	5051,03	45	112,245		
Total (Corr.)	13644,9	46			

Correlation Coefficient = 0,793614
R-squared = 62,9823 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 62,1597 percent
Standard Error of Est. = 10,5946
Mean absolute error = 9,4991
Durbin-Watson statistic = 0,0789534 (P=0,0000)
Lag 1 residual autocorrelation = 0,92902

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και του Future March 2004. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

Call @ the money = -799,959 + 0,652788*Future March 04

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Future March 2004 είναι απαραίτητο (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο (και συγκεκριμένα η μεταβλητότητα του Future) εξηγεί το 62,9823% της μεταβλητότητας του call. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με 0,793614, δείχνοντας ότι υπάρχει μια σχετικά ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 10,5946. Αυτή τη τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

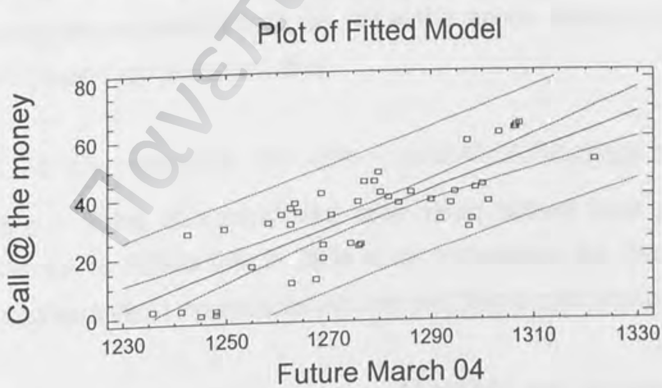
Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 3.

Comparison of Alternative Models

Model	Correlation	R-Squared
Reciprocal-X	-0,7945	63,12%
Logarithmic-X	0,7941	63,06%
Square root-X	0,7939	63,02%
Linear	0,7936	62,98%
Square root-Y	0,7681	58,99%
S-curve	-0,6788	46,08%
Multiplicative	0,6758	45,67%
Exponential	0,6728	45,26%
Double reciprocal	0,3957	15,66%
Reciprocal-Y	<no fit>	
Logistic	<no fit>	
Log probit	<no fit>	

Από αυτόν τον πίνακα παρατηρούμε ότι για την ανάλυσή μας το πιο κατάλληλο μοντέλο είναι το Reciprocal X. Παρακάτω θα κάνουμε την ανάλυση για το συγκεκριμένο μοντέλο

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τη κατανομή των τιμών στο επίπεδο X – Y (Y = Call, X = Future). Η εσωτερική γραμμή είναι η γραμμή παλινδρόμησης, όπως αυτή υπολογίστηκε από το πρόγραμμα Statgraphics.



Αναλύοντας το Reciprocal – X υπόδειγμα βρίσκουμε τα ακόλουθα :

Regression Analysis - Reciprocal-X model: Y = a + b/X

Dependent variable: Call @ the money
Independent variable: Future March 04

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
Intercept	867,499	95,0135	9,13028	0,0000
Slope	-1,06454E6	121301,0	-8,776	0,0000

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	8612,7	1	8612,7	77,02	0,0000
Residual	5032,2	45	111,827		
Total (Corr.)	13644,9	46			

Correlation Coefficient = -0,794483
R-squared = 63,1203 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 62,3007 percent
Standard Error of Est. = 10,5748
Mean absolute error = 9,46073
Durbin-Watson statistic = 0,0879215 (P=0,0000)
Lag 1 residual autocorrelation = 0,925731

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του Reciprocal – X μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και του Future March 2004. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

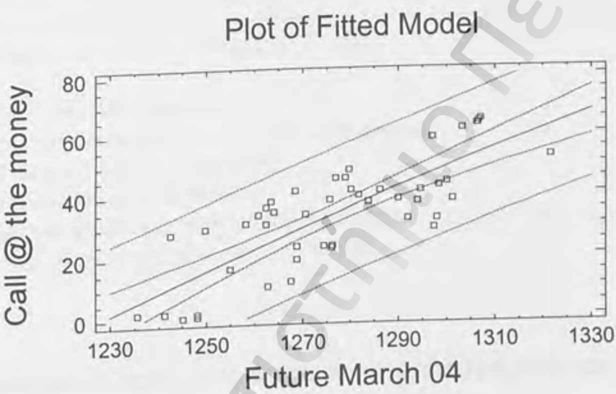
Call @ the money = 867,499 - 1,06454E6/Future March 04

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Future March 2004 είναι απαραίτητα (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 63,1203% της μεταβλητότητας του call. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με -0,794483, δείχνοντας ότι υπάρχει μια σχετικά ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός γιατί πλέον η μεταβλητή μας δεν είναι το X, αλλά το 1/X. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 10,5748. Αυτή τη τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 9,46073 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως υπάρχει αυτοσυσχέτηση. Η p – value που αντιστοιχεί στο D – W είναι μικρότερη από 0,05, αυτό σημαίνει ότι παραβιάζεται η υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 4.



Τώρα θα ερευνήσουμε αν το γραμμικό μοντέλο δεν είναι αρκετά καλό να ερμηνεύσει τη μεταβλητότητα του call, οπότε και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πιο πολύπλοκο, όπως το πολυωνυμικό.

```
Polynomial Regression Analysis
-----------------------------------------------------------------------------
Dependent variable: Call @ the money
-----------------------------------------------------------------------------
                                    Standard          T
Parameter              Estimate        Error      Statistic        P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
CONSTANT               -4155,49      5496,06      -0,756085         0,4536
Future March 04         5,91043      8,61057       0,686416         0,4961
Future March 04^2   -0,00205896   0,00337188      -0,610627         0,5446
-----------------------------------------------------------------------------

                           Analysis of Variance
-----------------------------------------------------------------------------
Source             Sum of Squares     Df  Mean Square    F-Ratio      P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
Model                     8636,32      2      4318,16      37,93       0,0000
Residual                  5008,58     44      113,831
-----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)             13644,9     46

R-squared = 63,2934 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 61,6249 percent
Standard Error of Est. = 10,6692
Mean absolute error = 9,34865
Durbin-Watson statistic = 0,121608 (P=0,0000)
Lag 1 residual autocorrelation = 0,912362
```

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του πολυονυμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και του Future March 2004. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

```
Call @ the money = -4155,49 + 5,91043*Future March
04-0,00205896*Future March 04^2
```

Αφού η p – value που αντιστοιχεί τόσο στον πρώτο βαθμό, όσο και στο δεύτερο βαθμό του παράγοντα της εξίσωσης είναι μεγαλύτερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Future March 2004 είναι δεν απαραίτητο (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option. Επειδή στην προηγούμενή μας ανάλυση βρήκαμε ότι το Future March 2004 είναι απαραίτητο στην περιγραφή της συμπεριφοράς του Call, συμπεραίνουμε ότι η εισαγωγή του δευτεροβάθμιου όρου δημιούργησε προβλήματα ετεροσκεδαστικότητας στο μοντέλο μας.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 63,2934% της μεταβλητότητας του call. Το R^2 adjusted (που ενδείκνυται προκειμένου να εκτιμήσουμε μοντέλα με διαφορετικό αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών) είναι 61,6249%. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 10,6692. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 9,34865 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η p – value του DW είναι μικρότερη από 0,05, αυτό σημαίνει ότι παραβιάζεται η υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

Για να προσδιορίσουμε αν το μοντέλο μας είναι σε σωστό βαθμό, κοιτάμε τη p – value του όρου που βρίσκεται στον υψηλότερο βαθμό (στο τετράγωνο), η οποία είναι 0,544588. Αφού η p – value είναι μεγαλύτερη από 0,10, ο όρος αυτός δεν είναι στατιστικά σημαντικός στο 90% ή και σε υψηλότερο διάστημα εμπιστοσύνης. Συνεπώς θα χρειαστεί να κατεβάσουμε το βαθμό του μοντέλου κατά ένα, γυρνώντας στο απλό γραμμικό μοντέλο, το οποίο έχουμε ήδη αναλύσει.

Further ANOVA for Variables in the Order Fitted

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Future March 04	8593,88	1	8593,88	75,50	0,0000
Future March 04^2	42,4437	1	42,4437	0,37	0,5446
Model	8636,32	2			

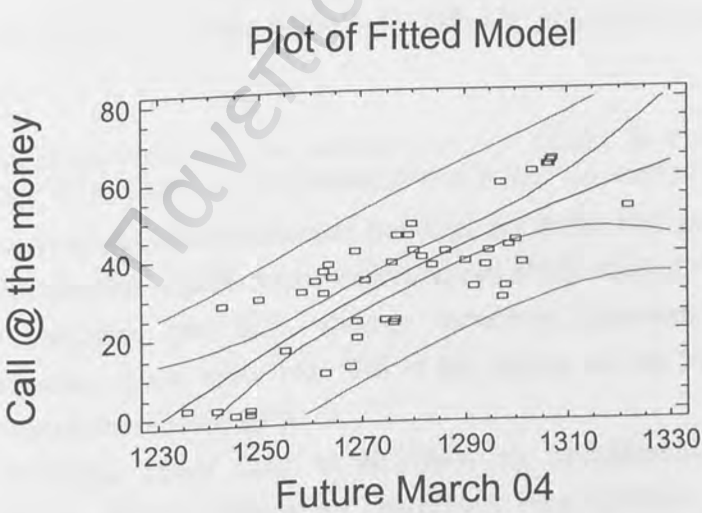
Ο παραπάνω πίνακας παρουσιάζει τη στατιστική σημαντικότητα κάθε βαθμού του Future March 2004 στο πολυονυμικό μοντέλο παλινδρόμησης. Ο πίνακας αυτός μας βοηθάει να δούμε μήπως ένα χαμηλότερου βαθμού μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα προκειμένου να περιγράψει τη σχέση μεταξύ του Call at the Money March 2004 και του Future March 2004.

Αφού η p – value του όρου του πρώτου βαθμού είναι μικρότερη από 0,01, τότε ένα μοντέλο πρώτου βαθμού είναι κατάλληλο να περιγράψει τη σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών.

95,0% confidence intervals for coefficient estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	Lower Limit	Upper Limit
CONSTANT	-4155,49	5496,06	-15232,1	6921,12
Future March 04	5,91043	8,61057	-11,4431	23,2639
Future March 04^2	-0,00205896	0,00337188	-0,00885454	0,00473662

Ο πίνακας αυτός δείχνει το διάστημα εμπιστοσύνης 95% για τους συντελεστές του μοντέλου. Το διάστημα εμπιστοσύνης δείχνει με πόση ακρίβεια μπορούν οι συντελεστές του υποδείγματος να εκτιμηθούν, βάσει του όγκου των παρατηρήσεων που έχουμε στη διάθεσή μας.



```
Box-Cox Transformations - Power = 0,959622 Shift = 0,0
-----------------------------------------------------------------------------
Dependent variable: Call @ the money
Independent variable: Future March 04
-----------------------------------------------------------------------------
                               Standard          T
Parameter       Estimate         Error       Statistic        P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
Intercept       -770,273        97,2669      -7,91917          0,0000
Slope             0,6303      0,0761063       8,28184          0,0000
-----------------------------------------------------------------------------


                           Analysis of Variance
-----------------------------------------------------------------------------
Source             Sum of Squares     Df  Mean Square    F-Ratio      P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
Model                     7594,98      1      7594,98      68,59       0,0000
Residual                   4872,2     44      110,732
-----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)             12467,2     45

Correlation Coefficient = 0,780511
R-squared = 60,9198 percent
Standard Error of Est. = 10,5229
```

Αυτή η διαδικασία μας επιτρέπει να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα αν αλλάζουμε το βαθμό του όρου Call at the Money στο υπόδειγμά μας. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

```
BoxCox(Call @ the money) = -770,273 + 0,6303*Future March 04
```

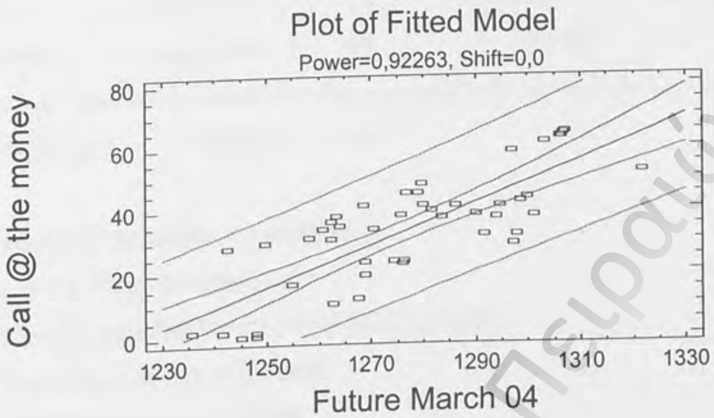
όπου

```
BoxCox(Call @ the money) = 1 + (Call @ the
money^0,959622-1)/(0,959622*26,3393^-0,0403781)
```

Αυτός είναι ένας μετασχηματισμός Box–Cox στο βαθμό που χρειάζεται, έτσι ώστε με ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE). Αφού η P – value στον πίνακα είναι μικρότερη από 0,01, υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ των μετασχηματισμένων τιμών του Call at the Money και του Future March 2004 σε διάστημα εμπιστοσύνης 99 %.

Το υπόδειγμα εξηγεί μόλις το 60,9198% της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής (R^2). Ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,780511, υποδεικνύοντας μια σχετικά ισχυρή σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα είναι 10,5229.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 5.



Σε αυτό το σημείο, και αφού όλα τα προηγούμενα μοντέλα που αναλύσαμε δεν περιγράφουν σε ικανοποιητικό βαθμό το Call, θα αναλύσουμε τις τιμές που δίνει το υπόδειγμα Black – Scholes.

Regression Analysis - Linear model: Y = a + b*X

Dependent variable: Call @ the money Independent variable: Black Scholes

Parameter	Estimate	Standard Error	T- Statistic	P-Value
Intercept	4,65657	1,16843	3,98531	0,0003
Slope	1,15057	0,0396647	29,0074	0,0000

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	11875,8	1	11.875,8	841,43	0,0000
Residual	621,013	44	14,1139		
Total (Corr.)	12496,9	45			

Correlation Coefficient = 0,974837

R-squared = 95,0306 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 94,9177 percent

Standard Error of Est. = 3,75685

Mean absolute error = 3,1899

Durbin-Watson statistic = 0,282102 (P=0,0000)

Lag 1 residual autocorrelation = 0,842417

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και των τιμών του υποδείγματος Black – Scholes. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

Call @ the money = 4,65657 + 1,15057*Black Scholes

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι οι τιμές του υποδείγματος Black – Scholes είναι απαραίτητες (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 95,0306% της μεταβλητότητας του call. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με 0,974837, δείχνοντας ότι υπάρχει μια αρκετά ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	11875,8	1	11.875,8	841,43	0,0000
Residual	621,013	44	14,1139		
Total (Corr.)	12496,9	45			

Correlation Coefficient = 0,974837

R-squared = 95,0306 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 94,9177 percent

Standard Error of Est. = 3,75685

Mean absolute error = 3,1899

Durbin-Watson statistic = 0,282102 (P=0,0000)

Lag 1 residual autocorrelation = 0,842417

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και των τιμών του υποδείγματος Black – Scholes. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

Call @ the money = 4,65657 + 1,15057*Black Scholes

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι οι τιμές του υποδείγματος Black – Scholes είναι απαραίτητες (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 95,0306% της μεταβλητότητας του call. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με 0,974837, δείχνοντας ότι υπάρχει μια αρκετά ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 3,75685. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 3,1899 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η P – value του DW test είναι μικρότερη από 0,05, αυτό σημαίνει ότι παραβιάζεται η υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

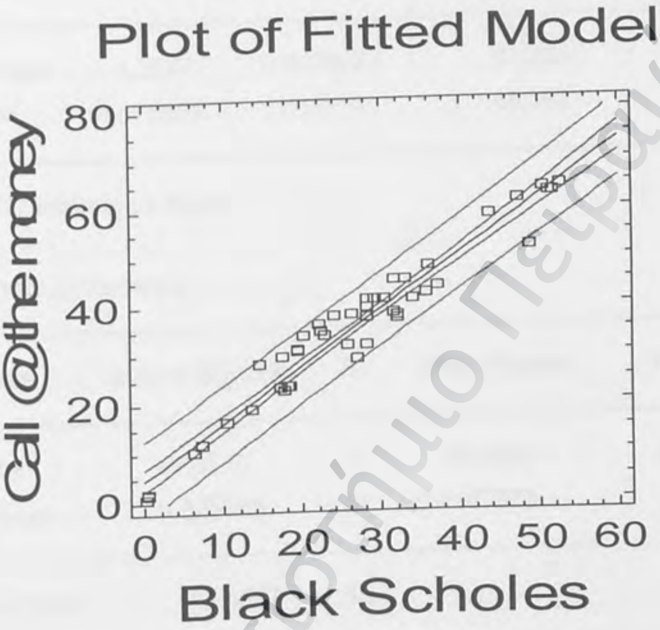
Αν συγκρίνουμε τα εναλλακτικά μοντέλα μεταξύ τους θα δούμε ότι το πολλαπλασιαστικό υπόδειγμα περιγράφει καλύτερα από όλα τα υπόλοιπα τη μεταβλητότητα του call. Για αυτό το λόγο παρακάτω θα αναλύσουμε το πολλαπλασιαστικό υπόδειγμα.

Comparison of Alternative Models

Model	Correlation	R-Squared
Multiplicative	0,9911	98,22%
Linear	0,9748	95,03%
Square root-X	0,9583	91,83%
Double reciprocal	0,9391	88,20%
Square root-Y	0,9311	86,70%
Exponential	0,8103	65,66%
Logarithmic-X	0,8059	64,94%
S-curve	-0,6756	45,64%
Reciprocal-X	-0,3943	15,55%
Reciprocal-Y	<no fit>	
Logistic	<no fit>	
Log probit	<no fit>	

Παρατηρούμε ότι το multiplicative model είναι πιο κατάλληλο για να περιγράψει το δείγμα μας, αφού το R^2 του είναι 98,22% ενώ του γραμμικού μοντέλου 95,03%.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 6



Αναλύοντας το πολλαπλασιαστικό μοντέλο με ανεξάρτητη μεταβλητή τα αποτελέσματα που δίνει το υπόδειγμα Black – Scholes καταλήγουμε στην εξής ανάλυση

Regression Analysis - Multiplicative model: Y = a*X^b

Dependent variable: Call @ the money

Independent variable: Black Scholes

Parameter	Estimate	Standard Error	T - Statistic	P-Value
Intercept	1,3647	0,0436224	31,2845	0,0000
Slope	0,675981	0,013711	49,302	0,0000

NOTE: intercept = ln(a)

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	45,5943	1	45,5943	2430,69	0 ,0000
Residual	0,825343	44	0,0187578		
Total (Corr.)	46,4197	45			

Correlation Coefficient = 0,99107

R-squared = 98,222 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 98,1816 percent

Standard Error of Est. = 0,136959

Mean absolute error = 0,114182

Durbin-Watson statistic = 0,448548 (P=0,4990)

Lag 1 residual autocorrelation = 0,681688

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των τιμών του Call at the money March 04 και των τιμών του Black – Scholes. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

Call @ the money = 3,91457*Black Scholes^0,675981

ή

ln(Call @ the money) = 1,3647 + 0,675981*ln(Black Scholes)

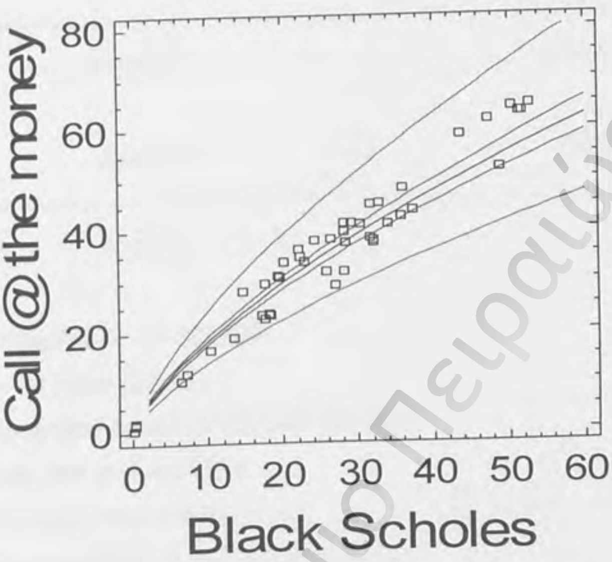
Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Black - Scholes είναι απαραίτητο (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 98,222% της μεταβλητότητας του call αφού λογαριθμοποιηθεί προκειμένου να γίνει πιο γραμμικό. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με 0,99107, δείχνοντας ότι υπάρχει μια ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 0,136959. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 0,114182 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η p – value του DW test είναι σχεδόν 0,05, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει παραβίαση της υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 7

Plot of Fitted Model



Τώρα θα κάνουμε την ίδια ακριβώς ανάλυση με τα αποτελέσματα που μας έδωσε το binominal model και θα τα συγκρίνουμε με αυτά του υποδείγματος Black – Scholes.

Regression Analysis - Linear model: Y = a + b*X

Dependent variable: Call @ the money

Independent variable: Binominal

Parameter	Estimate	Standard Error	T- Statistic	P-Value
Intercept	4,70383	1,27321	3,69447	0,0006
Slope	1,19384	0,0449502	26,5592	0,0000

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	11763,1	1	11763,1	705,39	0,0000
Residual	733,744	44	16,676		
Total (Corr.)	12496,9	45			

Correlation Coefficient = 0,970199
R-squared = 94,1286 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 93,9951 percent
Standard Error of Est. = 4,08363
Mean absolute error = 3,43512
Durbin-Watson statistic = 0,267779 (P=0,0000)
Lag 1 residual autocorrelation = 0,849465

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και τουBinominal. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

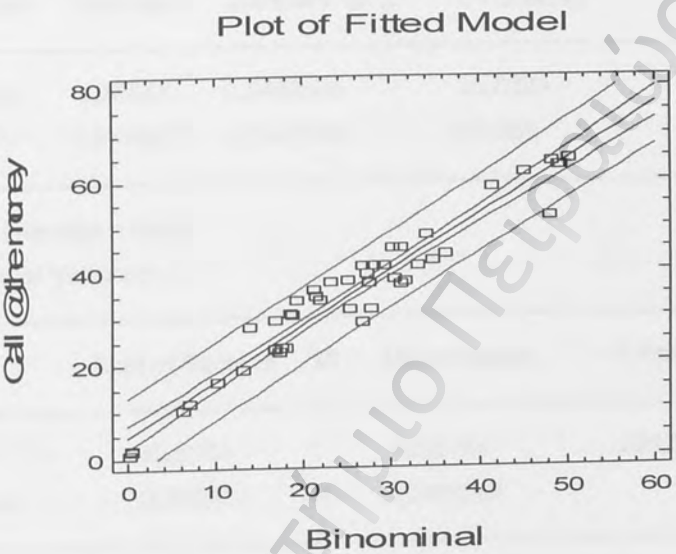
Call @ the money = 4,70383 + 1,19384*Binominal

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Binominal είναι απαραίτητα (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 94,1286 % της μεταβλητότητας του call. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με 0,970199 , δείχνοντας ότι υπάρχει μια αρκετά ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 4,08363. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Όπως και στο υπόδειγμα Black – Scholes, έτσι και στο Binominal το πολλαπλασιαστικό υπόδειγμα είναι καλύτερο του γραμμικού.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 8



Τώρα πρέπει να δούμε πως περιγράφει το call το πολλαπλασιαστικό μοντέλο του διονυμικού υποδείγματος.

Regression Analysis - Multiplicative model: Y = a*X^b

Dependent variable: Call @ the money

Independent variable: Binominal

Parameter	Estimate	Standard Error	T - Statistic	P-Value
Intercept	1,38641	0 ,0452589	30,6328	0,0000
Slope	0,677057	0,0143792	47,086	0,0000

NOTE: intercept = ln(a)

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	45,5164	1	45,5164	2217,09	0,0000
Residual	0,903311	44	0,0205298		
Total (Corr.)	46,4197	45			

Correlation Coefficient = 0,990222

R-squared = 98,054 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 98,0098 percent

Standard Error of Est. = 0,143282

Mean absolute error = 0,120761

Durbin-Watson statistic = 0,424552 (P=0,4780)

Lag 1 residual autocorrelation = 0,702451

Οι παραπάνω πίνακες μας δείχνουν τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ του call at the money March 04 και του Binominal. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

$$\text{Call @ the money} = 4{,}00045 * \text{Binominal}^{0{,}677057}$$

ή

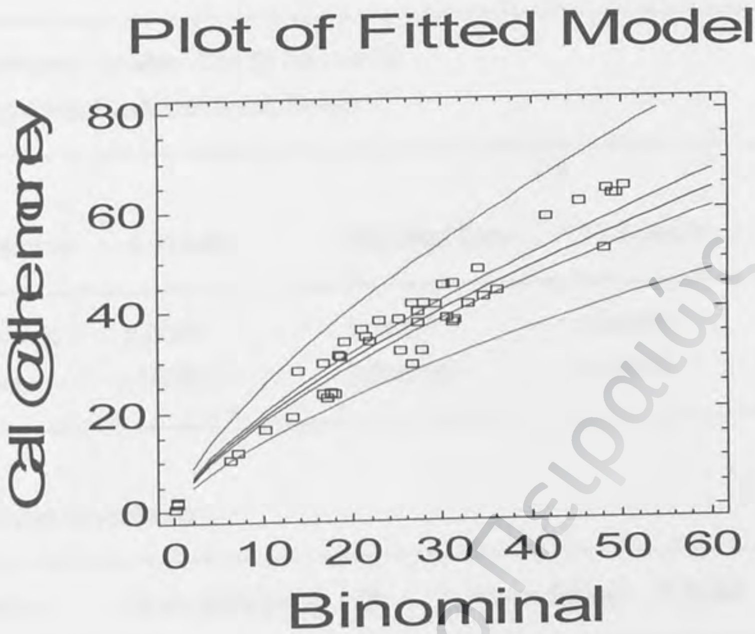
$$\ln(\text{Call @ the money}) = 1{,}38641 + 0{,}677057 * \ln(\text{Binominal})$$

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Binominal είναι απαραίτητα (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 98,054% της μεταβλητότητας του call αφού λογαριθμοποιηθεί προκειμένου να γίνει πιο γραμμικό. Ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με 0, 990222 , δείχνοντας ότι υπάρχει μια ισχυρή σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 0, 143282. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 0, 120761 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η P – value του DW test είναι σχεδόν 0,05, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει παραβίαση της υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 9



Παρατηρούμε λοιπόν ότι το υπόδειγμα Black – Scholes και στις 2 περιπτώσεις (linear, multiplicative) συμπεριφέρεται καλύτερα από τα αντίστοιχα υποδείγματα του binominal model.

Καλό θα ήταν σε αυτό το σημείο να κάναμε την Box – Cox transformation στο γραμμικό υπόδειγμα που χρησιμοποιεί τις τιμές του υποδείγματος Black – Scholes, όπως κάναμε στα προηγούμενα γραμμικά υποδείγματα με τις τιμές του Future.

Box-Cox Transformations - Power = 1,10807 Shift = 0,0

Dependent variable: Call @ the money
Independent variable: Black Scholes

Parameter	Estimate	Standard Error	T - Statistic	P-Value
Intercept	2,8023	1,14117	2,45564	0,0181
Slope	1,16222	0,038739	30,0014	0,0000

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	12117,7	1	12117,7	900,08	0,0000
Residual	592,367	44	13,4629		
Total (Corr.)	12710,1	45			

Correlation Coefficient = 0,976419
R-squared = 95,3394 percent
Standard Error of Est. = 3,66918

Αυτή η διαδικασία μας επιτρέπει να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα αν αλλάζουμε το βαθμό του όρου Call at the Money στο υπόδειγμά μας. Η εξίσωση του μοντέλου είναι :

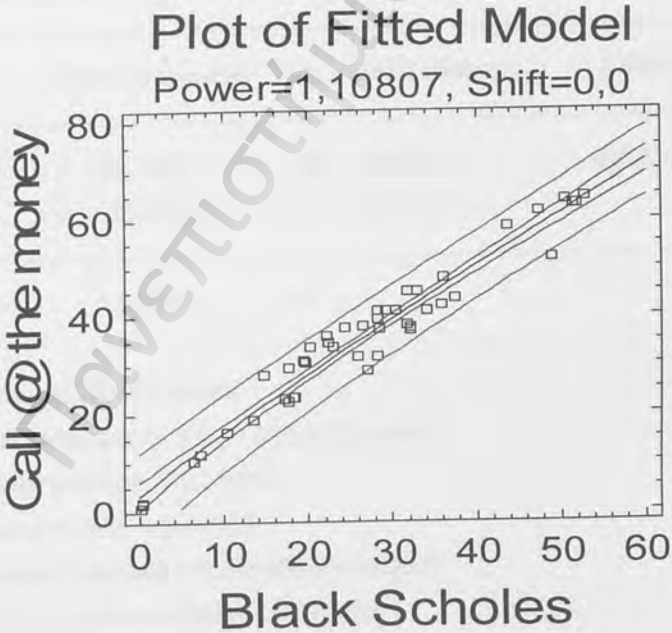
Box Cox (Call @ the money) = 2,8023 + 1,16222*Black Scholes

όπου

Box Cox (Call @ the money) = 1 + (Call @ the money^1,10807-1)/(1,10807*26,3393^0,108067)

Αυτός είναι ένας μετασχηματισμός Box–Cox στο βαθμό που χρειάζεται, έτσι ώστε με ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE). Αφού η p – value που αντιστοιχεί στη κλίση της εξίσωσης είναι μικρότερη από 0,01, υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ των μετασχηματισμένων τιμών του Call at the Money και του Black - Scholes σε διάστημα εμπιστοσύνης 99 %.

Τα studentized residuals παραμένουν όπως στα προηγούμενα υποδείγματα, με τις τιμές των σειρών 39 και 41 να παρουσιάζουν studentized residuals άνω του 3.



Τώρα θα κάνουμε μια συνδυασμένη ανάλυση για τον τρόπο διαμόρφωσης των τιμών το call συνδυάζοντας τόσο τις τιμές του υποδείγματος Black – Scholes όσο και αυτές του διονυμικού υποδείγματος.

Multiple Regression Analysis

Dependent variable: Call @ the money

Parameter	Estimate	Standard Error	T - Statistic	P-Value
CONSTANT	5,34076	0,799595	6,67934	0,0000
Black Scholes	8,62191	1,033570	8,34190	0,0000
Binominal	-7,79207	1,077570	-7,23116	0,0000

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	12.216,6	2	6.108,31	937,27	0,0000
Residual	280,236	43	6,51711		
Total (Corr.)	12.496,9	45			

R-squared = 97,7576 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 97,6533 percent

Standard Error of Est. = 2,55286

Mean absolute error = 2,05553

Durbin-Watson statistic = 0,336856 (P=0,4987)

Lag 1 residual autocorrelation = 0,778685

Το υπόδειγμα που περιγράφει καλύτερα τη συμπεριφορά του call είναι λοιπόν το ακόλουθο :

Call @ the money = 5,34076 + 8,62191*Black Scholes - 7,79207*Binominal

Αφού η p – value που αντιστοιχεί στην κλίση (slope) τόσο στον παράγοντα Black – Scholes, όσο και τον παράγοντα Binominal, είναι μικρότερη από 0,01, θεωρούμε ότι το Black – Scholes και το Binominal είναι απαραίτητα (με διάστημα εμπιστοσύνης μεγαλύτερο από 99%) για την ερμηνεία της μεταβλητότητας του option.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 97,7576% της μεταβλητότητας του call. Το adjusted R^2 (που είναι καλύτερο για πολλαπλά υποδείγματα) είναι 97,6533 %. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 2,55286. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 2,05553 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η p – value του DW test είναι σχεδόν 0,05, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει παραβίαση της υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

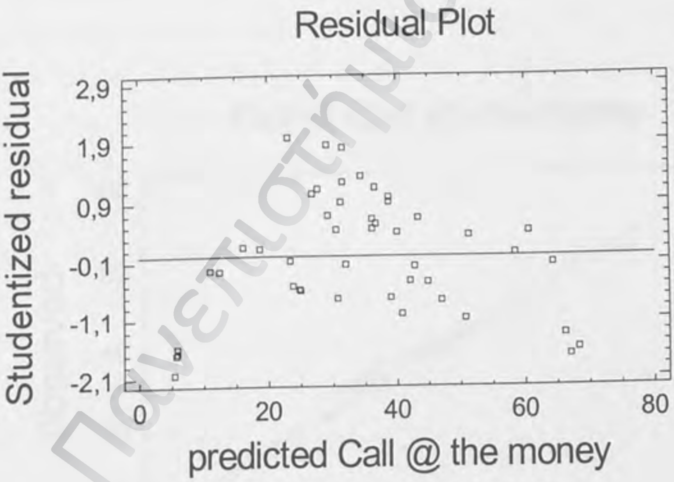
Η υψηλότερη p – value ανεξάρτητων μεταβλητών ανήκει στη Διονυμική μεταβλητή και είναι 0,00. Αφού είναι μικρότερη από 0,01, ο όρος με το μεγαλύτερο βαθμό είναι στατιστικά σημαντικός και πιθανότατα δεν χρειάζεται τροποποίηση το αρχικό υπόδειγμα.

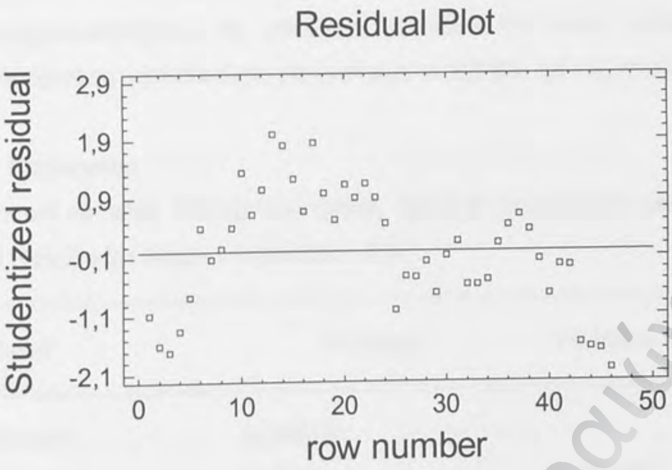
Correlation matrix for coefficient estimates

	CONSTANT	Black Scholes	Binominal
CONSTANT	1,0000	0,1029	-0,1262
Black Scholes	0,1029	1,0000	-0,9996
Binominal	-0,1262	-0,9996	1,0000

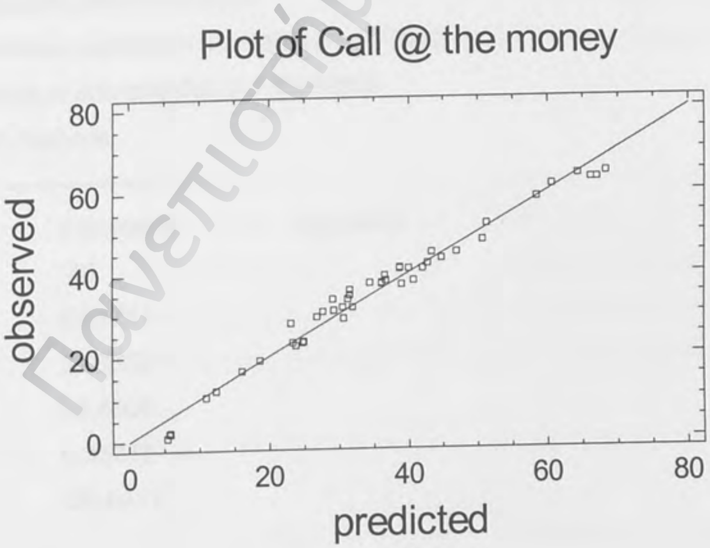
Ο πίνακας αυτός μας δείχνει τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών, μήπως υπάρχει πολυσυγγραμικότητα. Παρατηρούμε ότι μια τιμή είναι πάνω από 0,5 σε απόλυτη τιμή. Η συσχέτιση του Black – Scholes με το Binominal δίνει τιμή -0,9996. Αυτό σημαίνει ότι οι δυο μεταβλητές συσχετίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό, γεγονός που δημιουργεί πρόβλημα πολυσυγγραμικότητας. Ακριβώς για το λόγο αυτό (την ύπαρξη της πολυσυγγραμικότητας) το R^2 είναι τόσο υψηλό και η P – value τόσο χαμηλή, έτσι ώστε κάθε έλεγχος θα ήταν ανούσιος.

Περισσότερα στοιχεία παραθέτονται στο Παράρτημα 10





Βέβαια το γράφημα observed vs. predicted μας δίνει μια πολύ καλή προσαρμογή του υποδείγματος, το οποίο έχει πολλά προβλήματα για να αποδεχτούμε.



Επειδή το προηγούμενο υπόδειγμα μας έχει σοβαρό πρόβλημα πολυσυγγραμικότητας, το επόμενο μοντέλο θα είναι αποτέλεσμα ραχοειδούς παλινδρόμησης, προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα της πολυσυγγραμικότητας.

Ridge Regression

Dependent variable: Call @ the money, Number of complete cases: 46

Model Results for Ridge Parameter = 0,0

Parameter	Estimate	Variance Inflation Factor
CONSTANT	5,34076	
Black Scholes	8,62191	1.470,49
Binominal	-7,79207	1.470,49

R-Squared = 97,7576 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 97,6533 percent

Standard Error of Est. = 2,55286

Mean absolute error = 2,05553

Durbin-Watson statistic = 0,336856 (P=0,4970)

Lag 1 residual autocorrelation = 0,778685

Residual Analysis

	Estimation	Validation
n	46	
MSE	6,51711	
MAE	2,05553	
MAPE	36,4806	
ME	6,3331E-14	
MPE	-30,5412	

Αυτή η διαδικασία είναι σχεδιασμένη να δίνει εκτιμήσεις για τους συντελεστές παλινδρόμησης, της οποίας οι ανεξάρτητες μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους. Στη περίπτωση μας το υπόδειγμα είναι :

Call @ the money = 5,34076 + 8,62191*Black Scholes - 7,79207*Binominal

Η τιμή της ραχοειδούς παραμέτρου είναι 0,0, που είναι ίδιο με την OLS (Ordinary Least Squares – Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων) και κυμαίνεται μεταξύ 0.0 και 1.0.

Το R^2 δείχνει ότι το μοντέλο εξηγεί το 97,7576% της μεταβλητότητας του call. Το adjusted R^2 (που είναι καλύτερο για πολλαπλά υποδείγματα) είναι 97,6533 %. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δείχνει ότι η τυπική απόκλιση των καταλοίπων είναι 2,55286. Αυτή η τιμή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 2,05553 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η p – value του DW test είναι σχεδόν 0,05, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει παραβίαση της υπόθεση της αυτοσυσχέτησης των καταλοίπων.

Παρακάτω θα παραθέσουμε όλες τις πιθανές τιμές της ραχοειδούς παραμέτρου. Όσο μειώνονται οι τιμές του Black – Scholes και τουBinominal, τόσο διορθώνεται το πρόβλημα της πολυσυγγραμικότητας, αλλά μειώνεται και η ικανότητα του υποδείγματος να περιγράφει τη μεταβλητότητα της εξαρτημένης μεταβλητής. Άριστο σημείο δεν υπάρχει. Προσδιορίζεται με βάση το κατώτερο όριο που θέτουμε για το R^2.

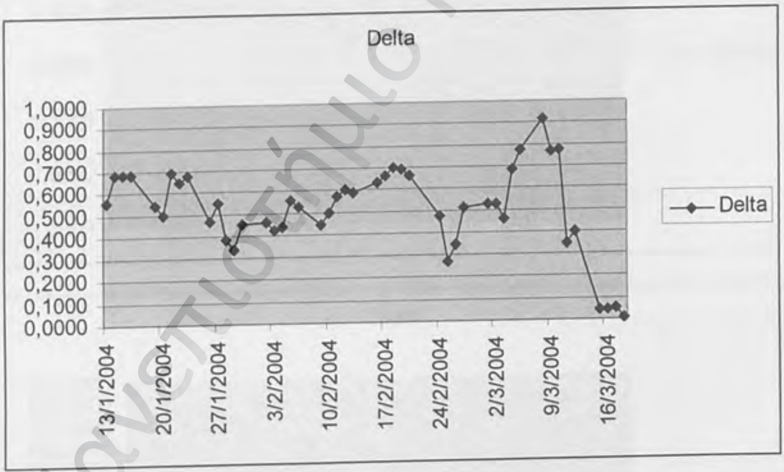
Όλες οι τιμές βρίσκονται στο Παράρτημα 11

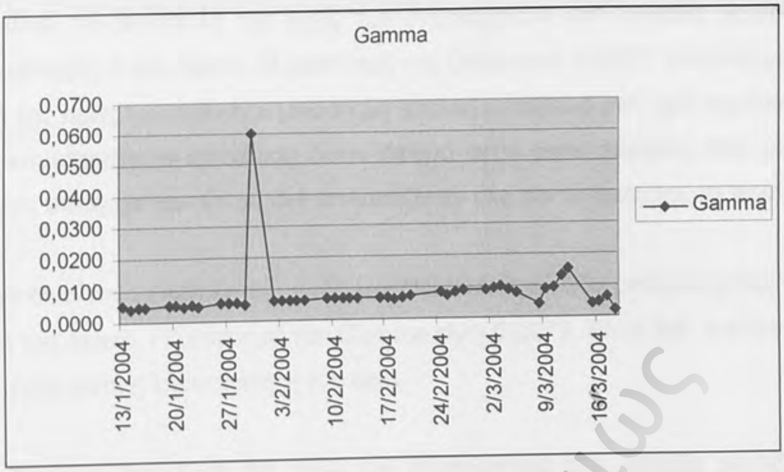
Βλέπουμε λοιπόν ότι το πιο αξιόπιστο στατιστικά υπόδειγμα για την περιγραφή και την εκτίμηση των τιμών του Call at the Money 2004 είναι το Multiplicative model με ανεξάρτητη μεταβλητή όχι τις τιμές του προϊόντος που προεξοφλεί τις τιμές του υποκείμενου τίτλου (FTSE/ASE 20), δηλ, το Future March 2004, αλλά τις τιμές που προκύπτουν από το υπόδειγμα των Black – Scholes. Το διονυμικό υπόδειγμα είναι πολύ καλό, αλλά όχι στατιστικά καλύτερο από αυτό των Black – Scholes. Δεν είναι τυχαίο λοιπόν ότι το συγκεκριμένο υπόδειγμα θεωρείται έως και σήμερα το πληρέστερο και πιο άρτιο υπόδειγμα εκτίμησης των τιμών των παραγώγων.

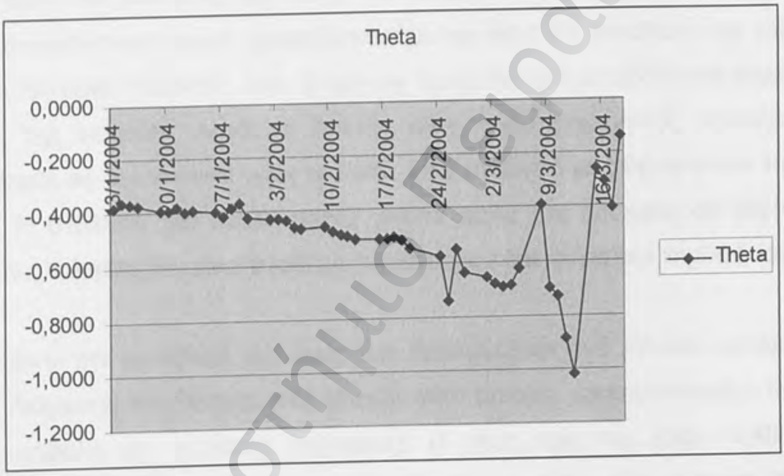
Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια ανάλυση των Greeks του συγκεκριμένου προϊόντος.

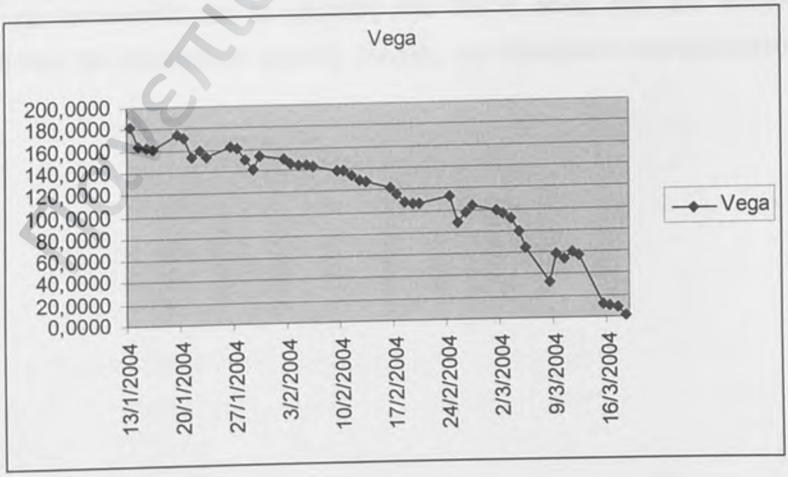
DATE	Delta	Gamma	Theta	Vega
13-Ιαν-04	0,5563	0,0050	-0,3790	181,3593
14-Ιαν-04	0,6877	0,0044	-0,3650	164,2440
15-Ιαν-04	0,6856	0,0045	-0,3690	162,8215
16-Ιαν-04	0,6863	0,0045	-0,3730	160,8325
19-Ιαν-04	0,5415	0,0053	-0,3930	173,8942
20-Ιαν-04	0,4965	0,0054	-0,3930	171,6568
21-Ιαν-04	0,6922	0,0047	-0,3820	154,0145
22-Ιαν-04	0,6468	0,0050	-0,3980	159,5602
23-Ιαν-04	0,6784	0,0049	-0,3940	152,6420
26-Ιαν-04	0,4641	0,0057	-0,4020	161,9662
27-Ιαν-04	0,5513	0,0056	-0,4210	161,0933
28-Ιαν-04	0,3831	0,0056	-0,3900	149,8143
29-Ιαν-04	0,3399	0,0055	-0,3700	140,9698
30-Ιαν-04	0,4535	0,0600	-0,4240	152,6752
2-Φεβ-04	0,4610	0,0061	-0,4320	150,9004
3-Φεβ-04	0,4243	0,0061	-0,4280	145,9464
4-Φεβ-04	0,4386	0,0062	-0,4390	144,8553
5-Φεβ-04	0,5579	0,0062	-0,4630	144,8544
6-Φεβ-04	0,5300	0,0064	-0,4690	143,0388
9-Φεβ-04	0,4433	0,0066	-0,4620	138,0905
10-Φεβ-04	0,4958	0,0067	-0,4810	137,8609
11-Φεβ-04	0,5701	0,0067	-0,4930	134,3632
12-Φεβ-04	0,6000	0,0067	-0,4990	130,0399
13-Φεβ-04	0,5840	0,0069	-0,5100	128,3933
16-Φεβ-04	0,6288	0,0068	-0,5120	122,3955
17-Φεβ-04	0,6621	0,0067	-0,5110	116,1841
18-Φεβ-04	0,7004	0,0065	-0,5040	108,3501
19-Φεβ-04	0,6940	0,0067	-0,5180	106,6235
20-Φεβ-04	0,6653	0,0072	-0,5440	107,5127
24-Φεβ-04	0,4703	0,0082	-0,5760	112,1028
25-Φεβ-04	0,2701	0,0072	-0,7420	88,7905
26-Φεβ-04	0,3482	0,0082	-0,5520	97,1451
27-Φεβ-04	0,5131	0,0090	-0,6350	103,0083
1-Μαρ-04	0,5296	0,0092	-0,6570	99,4404
2-Μαρ-04	0,5270	0,0096	-0,6800	95,4892

3-Μαρ-04	0,4553	0,0100	-0,6930	91,2101
4-Μαρ-04	0,6844	0,0092	-0,6830	79,7310
5-Μαρ-04	0,7744	0,0081	-0,6240	64,7010
8-Μαρ-04	0,9138	0,0044	-0,3910	32,6270
9-Μαρ-04	0,7690	0,0092	-0,6960	58,4932
10-Μαρ-04	0,7769	0,0096	-0,7270	53,6281
11-Μαρ-04	0,3435	0,0132	-0,8840	59,5581
12-Μαρ-04	0,3972	0,0151	-1,0190	57,2134
15-Μαρ-04	0,0436	0,0041	-0,2610	11,9541
16-Μαρ-04	0,0454	0,0049	-0,3120	10,7520
17-Μαρ-04	0,0491	0,0064	-0,4080	9,3882
18-Μαρ-04	0,0094	0,0022	-0,1420	1,6435
Μέσος Όρος	0,5157	0,0079	-0,4979	113,4857




Gamma
0,0700
0,0600
0,0500
0,0400
0,0300
0,0200
0,0100
0,0000
13/1/2004
20/1/2004
27/1/2004
3/2/2004
10/2/2004
17/2/2004
24/2/2004
2/3/2004
9/3/2004
16/3/2004
Gamma


Theta
0,0000
-0,2000
-0,4000
-0,6000
-0,8000
-1,0000
-1,2000
13/1/2004
20/1/2004
27/1/2004
3/2/2004
10/2/2004
17/2/2004
24/2/2004
2/3/2004
9/3/2004
16/3/2004
Theta


Vega
200,0000
180,0000
160,0000
140,0000
120,0000
100,0000
80,0000
60,0000
40,0000
20,0000
0,0000
13/1/2004
20/1/2004
27/1/2004
3/2/2004
10/2/2004
17/2/2004
24/2/2004
2/3/2004
9/3/2004
16/3/2004
Vega

Ο **Delta** δίνει την μεταβολή της τιμής των δικαιωμάτων ανά μονάδα μεταβολής της τιμής της μετοχής ή του δείκτη. Η μέση τιμή του Delta είναι 0,5157. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της τιμής του call είναι μικρότερη από τη μεταβολή στη τιμή του future. Είναι δηλ. μια «συντηρητική» επένδυση όσον αφορά στην delta analysis που μια πτώση στη τιμή του υποκείμενου τίτλου δεν επηρεάζει σε όλη την έκταση της το προϊόν μας.

Ο **Gamma** δίνει την μεταβολή της τιμής του Delta ανά μονάδα μεταβολής της τιμής της μετοχής ή του δείκτη. Η μέση τιμή του Gamma είναι 0,0079. Είναι δηλ. η ελαστικότητα του delta (που είναι η ελαστικότητα του call).

Ο **Vega** δίνει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος ανά μονάδα μεταβολής της Volatility (συχνά στον ορισμό χρησιμοποιούμε την κατά 1% μεταβολή της volatility). Η μέση τιμή του είναι 113,4857, δηλ. η τιμή της τιμής του call μεταβάλλεται πολύ σε κάθε μεταβολή της volatility. Αυτός ο δείκτης είναι πολύ σημαντικός προκειμένου να προβλέψουμε τις μελλοντικές τιμές του call. Στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε τη volatility σταθερή. Η ανάλυση του δείκτη αυτού γίνεται πολύ πιο δύσκολη αν δεχτούμε την άποψη ότι η volatility δεν είναι σταθερή (παίρνουμε κάθε φορά την implied volatility).

Ο **Theta** δίνει την μεταβολή της τιμής των δικαιωμάτων ανά μονάδα μεταβολής της χρονικής διάρκειας του δικαιώματος (συχνά στον ορισμό χρησιμοποιούμε την κατά 1 ημέρα μεταβολή της χρονικής διάρκειας). Η μέση τιμή του είναι -0,4979. Είναι αρνητική και αντανακλά και το μέγεθος του δείκτη delta, δηλ μια «συντηρητική» επένδυση που δεν αφομοιώνει όλες τις αλλαγές του εξωτερικού περιβάλλοντός της.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

DATE	FUTURE MARCH 04	L.BID - L.ASK	BLACK-SCHOLES	BINOMINAL
13-Ιαν-04	1.279,63	48,00	35,989	34,0115
14-Ιαν-04	1.307,13	64,50	52,7512	50,2947
15-Ιαν-04	1.306,38	63,00	51,8689	49,4763
16-Ιαν-04	1.306,25	63,00	51,4088	49,0716
19-Ιαν-04	1.276,88	45,13	32,9359	31,0960
20-Ιαν-04	1.268,50	41,13	28,1923	26,7299
21-Ιαν-04	1.306,63	64,00	50,5391	48,3529
22-Ιαν-04	1.297,00	58,50	43,6984	41,5422
23-Ιαν-04	1.303,13	61,50	47,3641	45,3289
26-Ιαν-04	1.263,38	37,75	24,1347	22,9688
27-Ιαν-04	1.278,88	45,00	31,5884	30,0644
28-Ιαν-04	1.249,75	29,50	17,5606	16,6651
29-Ιαν-04	1.242,50	28,00	14,5569	13,8139
30-Ιαν-04	1.262,50	36,00	22,0722	21,0555
2-Φεβ-04	1.264,00	34,63	22,3299	21,3428
3-Φεβ-04	1.258,25	31,00	19,3538	18,3390
4-Φεβ-04	1.260,88	33,75	20,0551	19,1259
5-Φεβ-04	1.280,00	41,25	29,1241	27,9322
6-Φεβ-04	1.275,63	38,13	26,2806	25,0437
9-Φεβ-04	1.262,50	30,63	19,4195	18,6037
10-Φεβ-04	1.270,63	33,63	22,7641	21,8480
11-Φεβ-04	1.281,75	39,50	28,2013	27,1902
12-Φεβ-04	1.286,13	41,00	30,2675	29,2079
13-Φεβ-04	1.283,63	37,38	28,283	27,3346
16-Φεβ-04	1.290,00	38,25	31,6342	30,4537
17-Φεβ-04	1.294,63	41,00	34,1109	33,0277
18-Φεβ-04	1.300,00	43,63	37,2613	36,1716
19-Φεβ-04	1.298,50	42,38	35,7043	34,6961
20-Φεβ-04	1.293,88	37,25	32,0323	31,1173
24-Φεβ-04	1.268,88	23,25	17,2015	16,7059
25-Φεβ-04	1.244,00	13,00	7,4989	7,2651
26-Φεβ-04	1.255,00	16,50	10,3756	10,0993

27-Φεβ-04	1.274,38	23,50	18,0888	17,4943
1-Μαρ-04	1.276,25	23,38	18,4179	17,8751
2-Μαρ-04	1.276,00	22,63	17,618	17,1108
3-Μαρ-04	1.268,88	19,00	13,4293	13,1483
4-Μαρ-04	1.291,88	31,75	25,8461	25,3479
5-Μαρ-04	1.301,25	37,75	32,0286	31,4701
8-Μαρ-04	1.321,63	52,00	48,8471	48,1534
9-Μαρ-04	1.298,00	31,75	28,2047	27,7751
10-Μαρ-04	1.297,38	28,88	27,0145	26,6382
11-Μαρ-04	1.262,88	10,40	6,3202	6,2642
12-Μαρ-04	1.267,63	11,75	7,1253	6,9769
15-Μαρ-04	1.235,75	2,00	0,3946	0,3797
16-Μαρ-04	1.241,38	1,80	0,3604	0,3442
17-Μαρ-04	1.248,13	1,60	0,3238	0,3196
18-Μαρ-04	1.248,13	0,60	0,0353	0,0346

Πρέπει σε αυτό το σημείο να εξηγήσουμε με ποιόν τρόπο βρήκαμε αυτές τις τιμές για το call και το put. Οι τιμές αυτές δεν είναι οι fixing, αλλά ο μέσος όρος μεταξύ των last bid και last ask. Αυτό έγινα γιατί η τιμή fixing προσδιορίζεται με τη βοήθεια του μοντέλου Black – Scholes. Επειδή παρακάτω θα κάνουμε μια ανάλυση των παρατηρούμενων τιμών με αυτές του μοντέλου Black – Scholes, η χρήση των τιμών fixing θα δημιουργήσει προβλήματα στην ανάλυση. Για το λόγο αυτό σε όλες τις αναλύσεις θα χρησιμοποιούμε σαν παρατηρηθείσες τιμές αυτές του μέσου όρου μεταξύ των last bid και last ask.

Όσον αφορά στη volatility, με βάση την οποία υπολογίστηκαν οι τιμές των Black – Scholes και του Binominal model, αυτή την ορίσαμε στο 17,2229 %, τιμή που έχει η τυπική απόκλιση στο δείγμα του μέσου όρου των Last Bid – Last Ask. Θεωρούμε ότι η τιμή αυτή είναι αντιπροσωπευτική της μεταβλητότητας.

Οι τιμές του υποδείγματος Black – Scholes υπολογίστηκαν με βάση το πρόγραμμα του Χ.Α. ADEX CALCULATOR με βάση τη μέση historical volatility.

Οι τιμές του Διονυμικού υποδείγματος υπολογίστηκαν με βάση το add – in "Opti Calc" του Microsoft Excel που δημιούργησε η εταιρεία ***J&E Research, Inc***.

Το risk – free rate το υπολογίστηκε στο 2,5% (Δεκαετές Ομόλογο Ελληνικού Δημοσίου), ενώ οι ημέρες για την ωρίμανση του προϊόντος σε καθαρές ημέρες διαπραγμάτευσης και όχι ημερολογιακές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

DATE	Delta	Gamma	Theta	Vega
13-Ιαν-04	0,5563	0,0050	-0,3790	181,3593
14-Ιαν-04	0,6877	0,0044	-0,3650	164,2440
15-Ιαν-04	0,6856	0,0045	-0,3690	162,8215
16-Ιαν-04	0,6863	0,0045	-0,3730	160,8325
19-Ιαν-04	0,5415	0,0053	-0,3930	173,8942
20-Ιαν-04	0,4965	0,0054	-0,3930	171,6568
21-Ιαν-04	0,6922	0,0047	-0,3820	154,0145
22-Ιαν-04	0,6468	0,0050	-0,3980	159,5602
23-Ιαν-04	0,6784	0,0049	-0,3940	152,6420
26-Ιαν-04	0,4641	0,0057	-0,4020	161,9662
27-Ιαν-04	0,5513	0,0056	-0,4210	161,0933
28-Ιαν-04	0,3831	0,0056	-0,3900	149,8143
29-Ιαν-04	0,3399	0,0055	-0,3700	140,9698
30-Ιαν-04	0,4535	0,0600	-0,4240	152,6752
2-Φεβ-04	0,4610	0,0061	-0,4320	150,9004
3-Φεβ-04	0,4243	0,0061	-0,4280	145,9464
4-Φεβ-04	0,4386	0,0062	-0,4390	144,8553
5-Φεβ-04	0,5579	0,0062	-0,4630	144,8544
6-Φεβ-04	0,5300	0,0064	-0,4690	143,0388
9-Φεβ-04	0,4433	0,0066	-0,4620	138,0905
10-Φεβ-04	0,4958	0,0067	-0,4810	137,8609

11-Φεβ-04	0,5701	0,0067	-0,4930	134,3632
12-Φεβ-04	0,6000	0,0067	-0,4990	130,0399
13-Φεβ-04	0,5840	0,0069	-0,5100	128,3933
16-Φεβ-04	0,6288	0,0068	-0,5120	122,3955
17-Φεβ-04	0,6621	0,0067	-0,5110	116,1841
18-Φεβ-04	0,7004	0,0065	-0,5040	108,3501
19-Φεβ-04	0,6940	0,0067	-0,5180	106,6235
20-Φεβ-04	0,6653	0,0072	-0,5440	107,5127
24-Φεβ-04	0,4703	0,0082	-0,5760	112,1028
25-Φεβ-04	0,2701	0,0072	-0,7420	88,7905
26-Φεβ-04	0,3482	0,0082	-0,5520	97,1451
27-Φεβ-04	0,5131	0,0090	-0,6350	103,0083
1-Μαρ-04	0,5296	0,0092	-0,6570	99,4404
2-Μαρ-04	0,5270	0,0096	-0,6800	95,4892
3-Μαρ-04	0,4553	0,0100	-0,6930	91,2101
4-Μαρ-04	0,6844	0,0092	-0,6830	79,7310
5-Μαρ-04	0,7744	0,0081	-0,6240	64,7010
8-Μαρ-04	0,9138	0,0044	-0,3910	32,6270
9-Μαρ-04	0,7690	0,0092	-0,6960	58,4932
10-Μαρ-04	0,7769	0,0096	-0,7270	53,6281
11-Μαρ-04	0,3435	0,0132	-0,8840	59,5581
12-Μαρ-04	0,3972	0,0151	-1,0190	57,2134
15-Μαρ-04	0,0436	0,0041	-0,2610	11,9541
16-Μαρ-04	0,0454	0,0049	-0,3120	10,7520
17-Μαρ-04	0,0491	0,0064	-0,4080	9,3882
18-Μαρ-04	0,0094	0,0022	-0,1420	1,6435

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE) 9,4991 είναι η μέση τιμή των καταλοίπων. Το Durbin-Watson test (DW) ελέγχει τα κατάλοιπα με βάση τη σειρά τους για να δει μήπως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Αφού η p – value της διακύμανσης είναι μικρότερη από 0,05, υπάρχει περίπτωση να υπάρχει γραμμική συσχέτιση των καταλοίπων μεταξύ τους.

Analysis of Variance with Lack-of-Fit

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	8593,88	1	8593,88	76,56	0,0000
Residual	5051,03	45	112,245		
Lack-of-Fit	5027,08	42	119,692	14,99	0,0227
Pure Error	23,9497	3	7,98323		
Total (Corr.)	13644,9	46			

Το lack of fit test είναι σχεδιασμένο να δείχνει αν το συγκεκριμένο μοντέλο είναι κατάλληλο για να περιγράψει τα παρατηρηθέντα στοιχεία, ή χρειάζεται κάποιο πιο σύνθετο μοντέλο. Το τεστ αυτό συγκρίνει τη μεταβλητότητα των καταλοίπων του τρέχοντος μοντέλου με τη μεταβλητότητα μεταξύ των τιμών της Χ. Επειδή η P–Value είναι μικρότερη από 0,05 υπάρχει στατιστικά σημαντική lack of fit για το 95% του επιπέδου σημαντικότητας. Συνεπώς θα ήταν καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο μοντέλο.

Unusual Residuals

Row	X	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual

Ο πίνακας με τα ασυνήθιστα κατάλοιπα αναφέρει τις παρατηρήσεις που έχουν Studentized κατάλοιπα άνω του 2,0 σε απόλυτη τιμή. Τα Studentized κατάλοιπα μετράνε κατά πόσες φορές της τυπικής απόκλισης κάθε τιμή του call αποκλίνει από το μοντέλο του χρησιμοποιούμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις παρατηρήσεις πλην της εξεταζόμενης. Στην περίπτωση μας δεν έχουμε τέτοιες αποκλίσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Analysis of Variance with Lack-of-Fit

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	8612,7	1	8612,7	77,02	0,0000
Residual	5032,2	45	111,827		
Lack-of-Fit	5008,25	42	119,244	14,94	0,0229
Pure Error	23,9497	3	7,98323		
Total (Corr.)	13644,9	46			

Το lack of fit test είναι σχεδιασμένο να δείχνει αν το συγκεκριμένο μοντέλο είναι κατάλληλο για να περιγράψει τα παρατηρηθέντα στοιχεία, ή χρειάζεται κάποιο πιο σύνθετο μοντέλο. Το τεστ αυτό συγκρίνει τη μεταβλητότητα των καταλοίπων του τρέχοντος μοντέλου με τη μεταβλητότητα μεταξύ των τιμών της Χ. Επειδή η P–Value είναι μικρότερη από 0,05 υπάρχει στατιστικά σημαντική lack of fit για το 95% του επιπέδου σημαντικότητας. Συνεπώς θα ήταν καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο μοντέλο.

Unusual Residuals

Row	X	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual

Ο πίνακας με τα ασυνήθιστα κατάλοιπα αναφέρει τις παρατηρήσεις που έχουν Studentized κατάλοιπα άνω του 2,0 σε απόλυτη τιμή. Τα Studentized κατάλοιπα μετράνε κατά πόσες φορές της τυπικής απόκλισης κάθε τιμή του call αποκλίνει από το μοντέλο του χρησιμοποιούμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις παρατηρήσεις πλην της εξεταζόμενης. Στην περίπτωση μας δεν έχουμε τέτοιες αποκλίσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

Analysis of Variance with Lack-of-Fit

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	7594,98	1	7594,98	68,59	0,0000
Residual	4872,2	44	110,732		
Lack-of-Fit	4848,86	42	115,449	9,89	0,0959
Pure Error	23,3436	2	11,6718		
Total (Corr.)	12467,2	45			

Βέβαια, αν κάνουμε μια Analysis of Variance with Lack–of–fit θα δούμε ότι η P – value είναι μικρότερη από 0,01, και συνεπώς θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο μοντέλο.

Πρέπει τέλος να αναφέρουμε ότι το μοντέλο μας δεν έχει ασυνήθιστα studentized residuals.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το MSE σε όλες τις τιμές του lambda από -2 έως +2. Η τιμή με το μικρότερο MSE είναι η lambda1 = 0,959622. Σε αυτή τη τιμή το MSE είναι κατά 0,159597% μικρότερο από τις μη μετασχηματισμένες τιμές.

lambda1	MSE
-2,0	1,32946E7
-1,96	1,02296E7
-1,92	7,8786E6
-1,88	6,07384E6
-1,84	4,6873E6
-1,8	3,62119E6
-1,76	2,80072E6
-1,72	2,16873E6
-1,68	1,68145E6
-1,64	1,30537E6
-1,6	1,0148E6
-1,56	790063,0
-1,52	616037,0
-1,48	481116,0
-1,44	376380,0
-1,4	294969,0
-1,36	231599,0
-1,32	182201,0
-1,28	143635,0
-1,24	113476,0
-1,2	89853,8
-1,16	71317,7
-1,12	56746,1
-1,08	45269,0
-1,04	36211,0
-1,0	29047,2
-0,96	23369,1
-0,92	18858,4
-0,88	15266,5
-0,84	12399,3
-0,8	10104,7
-0,76	8263,56
-0,72	6782,27
-0,68	5587,16
-0,64	4620,18
-0,6	3835,48
-0,56	3196,8
-0,52	2675,38
-0,48	2248,36
-0,44	1897,55
-0,4	1608,44
-0,36	1369,42
-0,32	1171,17
-0,28	1006,21
-0,24	868,513
-0,2	753,214
-0,16	656,367
-0,12	574,77
-0,08	505,817
-0,04	447,379

0,0	397,717
0,04	355,4
0,08	319,252
0,12	288,302
0,16	261,747
0,2	238,92
0,24	219,268
0,28	202,327
0,32	187,71
0,36	175,094
0,4	164,207
0,44	154,818
0,48	146,735
0,52	139,793
0,56	133,855
0,6	128,801
0,64	124,533
0,68	120,966
0,72	118,027
0,76	115,656
0,8	113,799
0,84	112,413
0,88	111,46
0,92	110,908
0,96	110,732
1,0	110,908
1,04	111,419
1,08	112,25
1,12	113,389
1,16	114,827
1,2	116,557
1,24	118,575
1,28	120,878
1,32	123,465
1,36	126,338
1,4	129,499
1,44	132,952
1,48	136,702
1,52	140,757
1,56	145,125
1,6	149,814
1,64	154,836
1,68	160,203
1,72	165,927
1,76	172,025
1,8	178,511
1,84	185,403
1,88	192,719
1,92	200,48
1,96	208,707
2,0	217,423

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

Unusual Residuals

Row	X	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual
38	48,8471	52,0	60,8584	-8,85843	-2,62

Σε αυτή την ανάλυση έχουμε δυο περιπτώσεις ασυνήθιστων studentized καταλοίπων. Πιστεύουμε ότι οφείλονται σε λάθη της αγοράς.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 7

Unusual Residuals

Row	X	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual
41	6,3202	10,4	13,6133	-3,21326	-2,07
46	0,0353	0,6	0,408327	0,191673	4,30

Και σε αυτό το υπόδειγμα βρίσκουμε δυο περιπτώσεις ασυνήθιστων studentized καταλοίπων. Πιστεύουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση οφείλονται σε λάθη της αγοράς, μην μπορώντας να δώσουμε κάποια άλλη εξήγηση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 8

Unusual Residuals

Row	X	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual
38	48,1534	52,0	62,1914	-10,1914	-2,81

Παρατηρούμε και εδώ τα unusual studentized residuals στις ίδιες ακριβώς σειρές, όπως και στο προηγούμενο υπόδειγμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 9

Unusual Residuals

Row	X	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual
41	6,2642	10,4	13,8558	-3,45584	-2,11
46	0,0346	0,6	0,410185	0,189815	3,97

Τα studentized κατάλοιπα παραμένουν όπως και στις 3 προηγούμενες περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 10

Unusual Residuals

Row	Y	Predicted Y	Residual	Studentized Residual
36	31,75	18,6159	13,1341	2,33
38	52,0	32,6816	19,3184	3,89
39	31,75	43,984	-12,234	-2,69
41	10,4	27,5752	-17,1752	-3,31
43	2,0	13,3768	-11,3768	-2,01

Επιπλέον, σε αυτό το υπόδειγμα βλέπουμε ότι υπάρχουν περισσότερα studentized residuals. Αυτό σημαίνει κακή προσαρμογή του υποδείγματος σε αρκετές τιμές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 11

Variance Inflation Factors

Ridge Parameter	Black Scholes	Binominal	R-Squared
0,0	1470,49	1470,49	97,76
0,03	0,427427	0,427427	93,23
0,06	0,282389	0,282389	91,86
0,09	0,249803	0,249803	90,53
0,12	0,234274	0,234274	89,25
0,15	0,223888	0,223888	88,00
0,18	0,215678	0,215678	86,79
0,21	0,208618	0,208618	85,61
0,24	0,202269	0,202269	84,46

0,27	0,196417	0,196417	83,35
0,3	0,190945	0,190945	82,26
0,33	0,18578	0,18578	81,20
0,36	0,180877	0,180877	80,17
0,39	0,176203	0,176203	79,16
0,42	0,171735	0,171735	78,18
0,45	0,167454	0,167454	77,22
0,48	0,163345	0,163345	76,29
0,51	0,159397	0,159397	75,37
0,54	0,155598	0,155598	74,48
0,57	0,15194	0,15194	73,61
0,6	0,148414	0,148414	72,76
0,63	0,145014	0,145014	71,93
0,66	0,141733	0,141733	71,12
0,69	0,138564	0,138564	70,33
0,72	0,135503	0,135503	69,55
0,75	0,132544	0,132544	68,79
0,78	0,129682	0,129682	68,05
0,81	0,126913	0,126913	67,33
0,84	0,124233	0,124233	66,61
0,87	0,121638	0,121638	65,92
0,9	0,119124	0,119124	65,24
0,93	0,116687	0,116687	64,57
0,96	0,114326	0,114326	63,91
0,99	0,112035	0,112035	63,27
1,02	0,109814	0,109814	62,64
1,05	0,107658	0,107658	62,03
1,08	0,105565	0,105565	61,42
1,11	0,103533	0,103533	60,83
1,14	0,101559	0,101559	60,25
1,17	0,099642	0,099642	59,68
1,2	0,0977784	0,0977784	59,12

1,23	0,0959668	0,0959668	58,57
1,26	0,0942053	0,0942053	58,03
1,29	0,092492	0,092492	57,50
1,32	0,090825	0,090825	56,98
1,35	0,0892029	0,0892029	56,47
1,38	0,0876239	0,0876239	55,97
1,41	0,0860866	0,0860866	55,48
1,44	0,0845894	0,0845894	54,99
1,47	0,0831311	0,0831311	54,52
1,5	0,0817102	0,0817102	54,05
1,53	0,0803254	0,0803254	53,59
1,56	0,0789757	0,0789757	53,14
1,59	0,0776597	0,0776597	52,70
1,62	0,0763764	0,0763764	52,26
1,65	0,0751246	0,0751246	51,83
1,68	0,0739035	0,0739035	51,41
1,71	0,0727119	0,0727119	50,99
1,74	0,0715489	0,0715489	50,58
1,77	0,0704136	0,0704136	50,18
1,8	0,0693052	0,0693052	49,78
1,83	0,0682227	0,0682227	49,39
1,86	0,0671654	0,0671654	49,01
1,89	0,0661326	0,0661326	48,63
1,92	0,0651234	0,0651234	48,26
1,95	0,0641371	0,0641371	47,89
1,98	0,0631731	0,0631731	47,53
2,01	0,0622307	0,0622307	47,18
2,04	0,0613092	0,0613092	46,83
2,07	0,0604081	0,0604081	46,48
2,1	0,0595267	0,0595267	46,14
2,13	0,0586645	0,0586645	45,81
2,16	0,0578208	0,0578208	45,47

2,19	0,0569953	0,0569953	45,15
2,22	0,0561873	0,0561873	44,83
2,25	0,0553963	0,0553963	44,51
2,28	0,054622	0,054622	44,20
2,31	0,0538638	0,0538638	43,89
2,34	0,0531213	0,0531213	43,59
2,37	0,052394	0,052394	43,29
2,4	0,0516816	0,0516816	42,99
2,43	0,0509836	0,0509836	42,70
2,46	0,0502997	0,0502997	42,42
2,49	0,0496294	0,0496294	42,13
2,52	0,0489725	0,0489725	41,85
2,55	0,0483285	0,0483285	41,58
2,58	0,0476971	0,0476971	41,30
2,61	0,0470781	0,0470781	41,04
2,64	0,046471	0,046471	40,77
2,67	0,0458756	0,0458756	40,51
2,7	0,0452915	0,0452915	40,25
2,73	0,0447186	0,0447186	39,99
2,76	0,0441564	0,0441564	39,74
2,79	0,0436048	0,0436048	39,49
2,82	0,0430635	0,0430635	39,25
2,85	0,0425322	0,0425322	39,00
2,88	0,0420106	0,0420106	38,76
2,91	0,0414986	0,0414986	38,53
2,94	0,0409959	0,0409959	38,29
2,97	0,0405023	0,0405023	38,06
3,0	0,0400175	0,0400175	37,83

1. Ross, Sheldon M, "**An introduction to mathematical finance: options and other topics**", Cambridge 1999

2. Chance Don M., "**An introduction to derivatives**", Dryden, 1998

3. Diamond, Barbara B., "**24-hour trading :the global network of futures and options markets**", Wiley, 1989

4. Henin, Claude G., "**Options :theory and practice**", Lexington Books, 1977

5. Marshall, John Francis , "**Futures and option contracting :theory and practice**", South-Western Pub. Co., 1989

6. Chance, Don M.,"**An introduction to derivatives and risk management**", Harcourt College Publishers, 2001

7. Hull, John C., "**Options, futures, and other derivatives**", Prentice Hall, 2003

8. Cox, John C., "**Options markets**", Prentice-Hall , 1985

9. Kallianpur, G., "**Introduction to option pricing theory**", Birkhauser, 2000

10. Daigler, Robert T., "**Advanced options trading**", Probus, 1994

11. McCafferty, Thomas A , "**All about options**", McGraw-Hill, 1998

12. McCafferty, Thomas A , "**All about futures**", Irwin, 1992

13. Clewlow, Les , "**Exotic options**", International Thomson Business, 1997

14. Hull, John C., "**Fundamentals of futures and options markets**", Prentice-Hall, 2002

15. Edwards, Franklin R. ;Ma, Cindy W., "**Futures and options**", McGraw-Hill, 1992

16. Kolb, Robert W., "**Futures, options, and swaps**", Blackwell, 2000

17. Engle, Robert F. ;Rosenberg, Joshua , "**Hending options in a garch environment, testing the term structure of stochastic volatility models**", National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA, 1994

18. Tompkins, Robert G., "**Options analysis, a state-of-the-art guide to options pricing, trading and portfolio applications**", Irwin, 1994

19. Tompkins, Robert G., "**Options explained 2**", Macmillan, 1994

20. Dubofsky, David A., "**Options and financial futures**", McGraw-Hill , 1992

21. Dubofsky, David A., "**Derivatives, valuation and risk management**", Oxford New York, 2003

22. Feeney, Francis D. ;Feeney, Paul W.; "**A guide to financial**", Woodhead-Faulkner, 1991

23. Neftci, Salih N.,"**An introduction to the mathematics of financial derivatives**", 2nd ed., Academic, San Diego, 2000

24. **Οι τιμές του υποδείγματος Black – Scholes υπολογίσθηκαν με το πρόγραμμα του Χ.Α. (Opti Calc)**

25. **Οι τιμές του διονυμικου μοντέλου υπολογήστηκαν με ένα add-in του Microsoft Excel ()**

26. **http://www.derivatives.gr/**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ: Μελέτη περίπτωσης παραγώγου του χρηματιστηρίου Αθηνών

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ Γ.ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2004