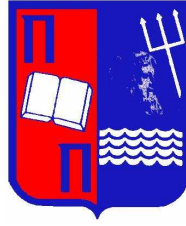


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Μελέτη ανανεωτικών εξισώσεων
με εφαρμογές στη Θεωρία Χρεοκοπίας

Βάιος Ν. Δερμιτζάκης

Διδακτορική Διατριβή

Υποβλήθηκε στο
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Αθήνα
Μάιος 2011

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

**A study of renewal equations
with applications to Ruin Theory**

Vaios N. Dermitzakis

PhD Thesis

Submitted to
Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus

Athens
May 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΙΑ

Στους γονείς μου Νίκο και Αναστασία,
στις αδερφές μου Ειρήνη και Μάρτζυ
και στην Ρένα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή Κωνσταντίνο Πολίτη για την βοήθεια, την κατανόηση και την στήριξη που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της έρευνας μου. Τα σχόλια, οι παρατηρήσεις και οι παροτρύνσεις του, αποτέλεσαν σημαντικό παράγοντα βελτίωσης και ολοκλήρωσης αυτής της διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Μάρκο Κούτρα και τον αναπληρωτή καθηγητή Νικόλαο Μαχαιρά για την άριστη συνεργασία μας. Θα ήταν παράλειψη μου να μην ευχαριστήσω την καθηγήτρια του University of Cambridge Susan Pitts για την πολύτιμη βοήθεια της και τις εύστοχες υποδείξεις της. Ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να απευθύνω στην Ρένα για την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση της σε όλη την διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών. Το μεγαλύτερο ευχαριστώ θα ήθελα να το δώσω στους γονείς μου και στις αδερφές μου Ειρήνη και Μάρτζυ για την προσπάθεια που έχουν καταβάλει όλα αυτά τα χρόνια και την απεριόριστη υποστήριξη τους σε κάθε μου απόφαση.

Περίληψη

Οι ανανεωτικές εξισώσεις είναι ολοκληρωτικές εξισώσεις ως προς μία άγνωστη συνάρτηση, οι οποίες έχουν βρει πληθώρα εφαρμογών σε πολλές περιοχές των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Ειδικότερα, οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (defective renewal equations) συναντώνται πολύ συχνά και αποτελούν σημαντικά μαθηματικά εργαλεία στη θεωρία αξιόπιστίας, τη δημογραφία, τη θεωρία ουρών και τον αναλογισμό.

Στην παρούσα διατριβή αρχικά μελετάμε τη συμπεριφορά της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε συνθήκες που μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη μονοτονίας για τη συνάρτηση αυτή. Επίσης, γενικεύοντας τη μεθοδολογία των Cai και Garrido (1998), κατασκευάζουμε φράγματα για τη συνάρτηση αυτή, ενώ μελετάται και η ασυμπτωτική συμπεριφορά της.

Στη συνέχεια, η διατριβή επικεντρώνεται σε μία συγκεκριμένη ανανεωτική εξίσωση, λύση της οποίας αποτελεί η k τάξης ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_k(u)$, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Θεωρώντας την ποσότητα αυτή σαν συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u στο μοντέλο, εξάγουμε αποτελέσματα που αφορούν φράγματα και την ύπαρξη μονοτονίας για τη συνάρτηση $\psi_k(u)$. Επίσης, μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτής της συνάρτησης στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων έχουν ελαφριά, μεσαία ή βαριά ουρά. Τέλος, ασχολούμαστε με τις ιδιότητες γήρανσης της κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας. Εκτός από το κλασικό μοντέλο που αναφέρθηκε παραπάνω, πολλά από τα αποτελέσματα γενικεύονται για το μοντέλο που εισήχθη από τον Gerber (1970) και περιλαμβάνει έναν όρο διάχυσης.

Abstract

A renewal equation is an integral equation with respect to an unknown function. Such equations have found numerous applications in many areas of applied probability. In particular, defective renewal equations are found very frequently and are important mathematical tools in reliability theory, demography, queuing theory and in actuarial science.

In this thesis we study the behaviour of the solution of a defective renewal equation.

Specifically, we consider conditions that ensure the existence of monotonicity for this function. Also, generalizing the methods of Cai and Garrido (1998), we construct bounds and we study the asymptotic behaviour for this solution.

Then, the thesis focuses on a specific renewal equation, the solution of which is the k th moment of the ruin time, $\psi_k(u)$, in the classical model of risk theory. Considering this quantity as a function of the initial reserve u in the model, we present bounds and examining the existence of monotonicity for the function $\psi_k(u)$. Also, we study the asymptotic behavior of this function in the case that the distribution of claims has light, medium or heavy tail. Finally, we investigate the existence of aging properties of the distribution of the ruin time. Apart from the classical model that mentioned above, many of the results are generalized for the model introduced by Gerber (1970) and includes a diffusion term.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Ανανεωτικές εξισώσεις	5
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 Ανανεωτικές εξισώσεις	7
1.2.1 Συνελίξεις συναρτήσεων και κατανομών	8
1.2.2 Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης	10
1.3 Φράγματα για την λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης	12
1.3.1 Φράγματα για την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης	13
1.4 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις	17
1.4.1 Βαριές ουρές	19
1.5 Ασυμπτωτική συμπεριφορά ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων	25
2 Θεωρία Χρεοκοπίας	31
2.1 Εισαγωγή	31
2.2 Μελέτη του κλασικού μοντέλου	31
2.2.1 Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος	32
2.2.2 Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων	34
2.2.3 Πιθανότητα Χρεοκοπίας	36
2.2.4 Βασική υπόθεση	38
2.2.5 Πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και πεπερασμένο χρόνο	41
2.2.6 Ανανεωτική Εξίσωση για την Πιθανότητα Χρεοκοπίας	42
2.2.7 Συντελεστής Προσαρμογής	44
2.2.8 Κάποιες τυχαίες μεταβλητές που συνδέονται με τη πιθανότητα χρεοκοπίας	46
2.2.9 Εφαρμογές	52
2.2.10 Ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου	60
2.3 Μελέτη του κλασικού μοντέλου με διάχυση	62
3 Ροπές του Χρόνου Χρεοκοπίας	69
3.1 Εισαγωγή	69
3.1.1 Μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων	70
3.1.2 Μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στο γενικευμένο κλασικό μοντέλο με διάχυση	74

3.2	Κίνητρα για την μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας	80
4	Μελέτη των ανανεωτικών εξισώσεων	85
4.1	Μελέτη της μονοτονίας της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης	86
4.2	Φράγματα για την λύση των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων	90
4.2.1	Ανανεωτικές εξισώσεις για την $\int_t^\infty Z(x)dx$ και $Z(t) - v \int_t^\infty Z(x)dx$	91
4.2.2	Φράγματα για την $Z(u) / \int_u^\infty Z(x)dx$	94
4.2.3	Φράγματα για την λύση των ανανεωτικών εξισώσεων	98
4.2.4	Εφαρμογές στις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας	109
4.3	Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ανανεωτικές εξισώσεις	112
5	Φράγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας	121
5.1	Εισαγωγή	121
5.2	Φράγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων	121
5.2.1	Παρατηρήσεις	136
5.2.2	Παραδείγματα	139
6	Μελέτη της μονοτονίας των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.	161
6.1	Εισαγωγή	161
6.2	Μελέτη της μονοτονίας της $\psi_k(u)$ στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής	163
6.3	Μελέτη της παραγώγου της $\psi_k(u)$ όταν $u = 0$	177
6.4	Μελέτη της μονοτονίας του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας	179
6.5	Μελέτη της Κυρτότητας της $\psi_1(u)$	195
6.5.1	Ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας σαν διαφορά δυο κυρτών και φθινουσών συναρτήσεων	196
6.6	Χρόνος Χρεοκοπίας και κλάσεις γήρανσης	198
6.6.1	Χρόνος Χρεοκοπίας και κλάσεις γήρανσης στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής	199
6.6.2	Χρόνος Χρεοκοπίας και κλάσεις γήρανσης στη γενική περίπτωση . .	202
7	Ασυμπτωτική μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας	209
7.1	Ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνων	210
7.1.1	Ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής	210
7.1.2	Μελέτη της Ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_k(u)$ στο κλασικό μοντέλο για περίπτωση των βαριών ουρών	213
7.1.3	Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_k(u)$ στο κλασικό μοντέλο με $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$	220
7.2	Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση	225
7.2.1	Μελέτη της Ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_k(u)$ στο μοντέλο με διάχυση για περίπτωση των ελαφριών ουρών	225
7.2.2	Μελέτη της Ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_{s;k}(u)$ στο μοντέλο με διάχυση για την περίπτωση των βαριών ουρών	228

7.2.3	Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_{s;k}(u)$ στο κλασικό μοντέλο με διάχυση στην περίπτωση όπου $F \in S(\gamma)$, $\gamma > 0$	240
Παραρτήματα		244
A'	Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης	245
B'	Κλάσεις Γήρανσης	249
Βιβλιογραφία		253

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Πίνακας τιμών της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u), U_{W,L}(u), U_F(u), L_1(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$. . .	146
5.2	Πίνακας τιμών της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u), U_{R,2}(u), L_2(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	147
5.3	Πίνακας τιμών της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u), U_{R,1}(u), L_1(u)$ για τη γάμμα κατανομή με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	156
5.4	Πίνακας τιμών της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u), U_{R,2}(u), L_2(u)$ για τη γάμμα κατανομή με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	158
6.1	Πίνακας προσήμων πρώτης παραγώγου της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική κατανομή όταν $0 < \theta < 1$	167
6.2	Πίνακας προσήμων πρώτης παραγώγου της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική κατανομή όταν $\theta > 1$	167
6.3	Πίνακας προσήμων της διακρίνουσας (Δ) και της ρίζας u_2	170
6.4	Πίνακας τιμών της $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή 2 και $\theta = 0.5$	171
6.5	Πίνακας τιμών της πρώτης και της δεύτερης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 και $\theta = 2.75$	174
6.6	Πίνακας προσήμων της διακρίνουσας (Δ) και κλάσεων αξιοπιστίας του χρόνου χρεοκοπίας	201
B'1	Πίνακας σύνδεσης των $f(t), F(t), \Lambda(t)$ και $\lambda(t)$	250

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος	34
2.2	Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας	39
2.3	Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας	40
2.4	Συντελεστής προσαρμογής	50
2.5	Γραφική παράσταση της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και απεικόνιση των βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών L_1 και L	50
2.6	Χρεοκοπία που οφείλεται σε απαίτηση	64
2.7	Χρεοκοπία που οφείλεται σε ταλάντωση	64
5.1	Γραφική παράσταση της $b(u)$	141
5.2	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	144
5.3	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ ($u \in [10, 14]$) για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	144
5.4	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $L_2(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	145
5.5	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{R,1}(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	145
5.6	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $U_{R,2}(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	148
5.7	Γραφική παράσταση της $b(u)$	150
5.8	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	153
5.9	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ ($u \in [10, 14]$) για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	154
5.10	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $L_2(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	154
5.11	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{R,1}(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	155
5.12	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $U_{R,2}(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$	155
5.13	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)/\int_u^\infty \psi_1(x)dx$ και του φράγματος της, $1/\int_u^\infty \psi(x)dx$, για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	157
5.14	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_V(u)$, $L_1(u)$, $L_V(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$	159

6.1	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 0.5163$	
6.2	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 0.5164$	
6.3	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 3$	164
6.4	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 3$	165
6.5	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική ($1/2$) και για $\theta=0.5$	171
6.6	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική ($1/2$) και $\theta=0.5$	172
6.7	Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική ($1/2$) και $\theta=2.75$	173
6.8	Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική ($1/2$) και $\theta=2.75$	173

Εισαγωγή

Οι ανανεωτικές εξισώσεις αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο για την μελέτη μιας σειράς ποσοτήτων και μοντέλων στο χώρο των Θετικών Επιστημών. Το γεγονός αυτό έχει στρέψει ένα μεγάλο αριθμό ερευνητών στη μελέτη των ιδιοτήτων τους. Η μελέτη αυτή αφορά τόσο την γενική περίπτωση της ανανεωτικής εξίσωσης όσο και ειδικές περιπτώσεις που προκύπτουν σε συγκεκριμένα ερευνητικά πεδία. Όπως θα δούμε στα κεφάλαια που ακολουθούν η εύρεση της λύσης μιας ανανεωτικής εξίσωσης δεν είναι πάντα εφικτή. Η διαπίστωση αυτή οδήγησε την επιστημονική κοινότητα στη μελέτη επιμέρους ιδιοτήτων της λύσης των εξισώσεων αυτών. Συγκεκριμένα υπήρξε έντονο ενδιαφέρον για τον υπολογισμό φραγμάτων, προσεγγίσεων και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων, προκειμένου να αποκτήσουμε μια γενική εικόνα της μορφής που έχει η λύση. Στην παρούσα διατριβή θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων και θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με μια συγκεκριμένη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση από το χώρο της Θεωρίας Κινδύνων. Η ελλειμματική αυτή εξίσωση δόθηκε από τους Lin και Willmot (2000) και σχετίζεται με τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αλλά και σε όλες τις παραλλαγές του, μια από τις τυχαίες μεταβλητές με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο, είναι ο χρόνος χρεοκοπίας. Έχουν περάσει περισσότερα από εκατό χρόνια από τότε που ο Lundberg εισήγαγε για πρώτη φορά το κλασικό μοντέλο (1903) και οι πληροφορίες σχετικά με αυτήν την μεταβλητή είναι περιορισμένες. Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα όταν τα ύψη των αποζημιώσεων έχουν την εκθετική κατανομή, έχει βρεθεί η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων. Γενικά, δεν υπάρχει συνάρτηση κλειστού τύπου που να

μας δίνει την κατανομή αυτής της μεταβλητής καθώς επίσης δεν είναι γνωστά και επιμέρους χαρακτηριστικά της όπως για παράδειγμα οι ροπές της, εκτός από τις προαναφερθείσες κατανομές που τα τελευταία χρόνια έχει γίνει σημαντική έρευνα και έχουν αναπτυχθεί αρκετά αποτελέσματα τόσο για την κατανομή όσο και για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι είναι χρήσιμο να αναπτύξουμε φράγματα, προσεγγίσεις και ασυμπτωτικούς τύπους τόσο για τις ροπές όσο και για την ίδια την κατανομή του χρόνου. Το 1998 οι Gerber και Shiu μελέτησαν την από κοινού κατανομή τριών τυχαίων μεταβλητών: του χρόνου χρεοκοπίας (time to ruin), του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία (surplus before ruin) και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (deficit at ruin). Συνεπώς έδωσαν μια νέα διάσταση στη μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας και νέα εργαλεία για την διερεύνηση των ιδιοτήτων της. Οι Lin και Willmot (2000) απέδειξαν ότι στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιούν ένα σύνολο από αναδρομικές ελλειμματικές εξισώσεις. Λίγο αργότερα οι Tsai και Willmot (2002) γενίκευσαν το αποτέλεσμα αυτό στην περίπτωση που στο κλασικό μοντέλο υπάρχει επιπλέον και διάχυση (diffusion). Οι αναδρομικές αυτές εξισώσεις χρησιμοποιήθηκαν από πολλούς συγγραφείς προκειμένου να μελετήσουν τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Η πορεία που έχει ακολουθηθεί μέχρι σήμερα για την μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας χωρίζεται γενικά σε δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη κατεύθυνση ασχολείται με την μελέτη της κατανομής του ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει την έρευνα των ροπών του. Κύριος εκπρόσωπος του πρώτου κλάδου είναι ο Dickson (και οι συν - συγγραφείς του) όπου με μια σειρά από δημοσιεύσεις έχουν καταφέρει να βρουν την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή και την κατανομή Erlang (βλέπε Dickson και Hipp (2001), Dickson και Waters (2002), Dickson και Willmot (2005), Dickson et al. (2005), Borovkov και Dickson (2008)). Επίσης την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας έχουν μελετήσει και οι Drekić και Willmot (2003). Από την άλλη μεριά με τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας έχουν ασχοληθεί οι Delbaen (1990), Egidio dos Reis (2000), Tsai και Willmot (2002), Chiu και Yin (2003), Drekić et al. (2004), Dickson και Wong, (2004), Frostig (2004), Pitts και Politis (2008).

Δομή της διατριβής

Η διατριβή αποτελείται από επτά κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την γενική ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Θα αναφέρουμε την γενική της λύση και θα περιγράψουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα που αφορούν τα φράγματα και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της. Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά την Θεωρία Χρεοκοπίας, έναν βασικό κλάδο της Θεωρίας Κινδύνων. Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται μια εισαγωγή στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων καθώς επίσης και στο γενικευμένο κλασικό μοντέλο που περιλαμβάνει επιπλέον και διάχυση. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε το σύνολο των αναδρομικών ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας τόσο στο κλασικό όσο και στο μοντέλο με την διάχυση. Στο Κεφάλαιο 4 αναπτύσσουμε αποτελέσματα που αφορούν την γενική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα θα δώσουμε κατάλληλες συνθήκες ώστε να είναι γνωστή η μονοτονία της λύσης τους. Επίσης θα κατασκευάσουμε φράγματα και θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης μια ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Στα κεφάλαια πέντε, έξι και επτά μελετάμε αντίστοιχα : φράγματα, την μονοτονία και την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας. Επιπλέον υπάρχουν και δύο παραρτήματα που αφορούν αντίστοιχα, το μεν πρώτο το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης και το δεύτερο τις κλάσεις γήρανσης, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε πολλά σημεία της παρούσας διατριβής.

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

Κεφάλαιο 1

Ανανεωτικές εξισώσεις

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στις ανανεωτικές εξισώσεις και θα αναφερθούν τα σημαντικότερα αποτελέσματα που τις αφορούν. Οι ανανεωτικές εξισώσεις αποτελούν ειδική περίπτωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ανήκουν στη γενικότερη κατηγορία των συναρτησιακών εξισώσεων και όπως αποκαλύπτει και το όνομα τους είναι εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση που ζητείται να βρεθεί ως λύση τους, βρίσκεται εντός ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, που μας ενδιαφέρουν στην παρούσα διατριβή, έχουν την εξής μορφή

$$c_*U(x) = g(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)h(U(t))dt, \quad (1.1.1)$$

όπου η συνάρτηση $K(x,t)$ καλείται πυρήνας (kernel) της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Οι συναρτήσεις $K(x,t)$ και $g(x)$ θεωρούνται γνωστές (προκαθορισμένες). Οι συναρτήσεις $a(x)$ και $b(x)$ αποτελούν τα όρια του ολοκληρώματος και όμοια με τις προηγούμενες είναι γνωστές συναρτήσεις, η c_* είναι μια θετική σταθερά και τέλος η $h(U(x))$ είναι μια συνάρτηση της άγνωστης συνάρτησης $U(x)$. Σκοπός της θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης $U(x)$ και στις περιπτώσεις που αυτό δεν είναι εφικτό, περιορίζεται στη μελέτη των ιδιοτήτων της, όπως για παράδειγμα φράγματα, προσεγγίσεις και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $U(x)$, για $x \rightarrow \infty$.

Αρχικά οι ολοκληρωτικές εξισώσεις χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία για την μελέτη προβλημάτων στις διαφορικές εξισώσεις λόγω της ισοδυναμίας των λύσεων τους, για παράδειγμα αναφέρουμε τις εξισώσεις Maxwell καθώς επίσης και τις αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις από το χώρο της κυματικής και της ακουστικής, που έχουν θεμελιώδη αξία στη Μηχανική και στη Φυσική Επιστήμη. Αργότερα οι ολοκληρωτικές εξισώσεις απέκτησαν την δική τους οντότητα και σημασία στη μαθηματική επιστήμη μιας και πολλές ποσότητες από διάφορους επιστημονικούς κλάδους ικανοποιούσαν άμεσα μια ολοκληρωτική εξίσωση. Τα τελευταία εκατό χρόνια παρουσιάζεται έντονο ενδιαφέρον για την μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων κάτι που οφείλεται στις εφαρμογές τους που συνεχώς αυξάνονται. Τέτοιες εφαρμογές συναντώνται για παράδειγμα στη Μαθηματική Ανάλυση (Διαφορικές εξισώσεις) στη Φυσική, στη Χημεία, στη Βιολογία, στη Δημογραφία και στον Αναλογισμό (Θεωρία Κινδύνων).

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ομαδοποιούνται ανάλογα με την μορφή που έχει η $h(x)$, σε γραμμικές όταν η $h(x)$ είναι γραμμική συνάρτηση και σε μη γραμμικές στην αντίθετη περίπτωση. Εμείς θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στις γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες έχουν την εξής μορφή

$$c_*U(x) = g(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)U(t)dt. \quad (1.1.2)$$

Οι γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις διακρίνονται στις εξής τέσσερις κατηγορίες

1. εξισώσεις Fredholm,
2. εξισώσεις Volterra,
3. ολοκληρωτικό - διαφορικές εξισώσεις (integro differential equations, βλέπε Abdul-Majid Wazwaz (1997)),
4. ιδιάζουσες εξισώσεις (singular equations, βλέπε Abdul-Majid Wazwaz (1997)).

Από τις παραπάνω κατηγορίες οι δύο πρώτες παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον λόγω της πληθώρας των εφαρμογών τους. Η γενική τους μορφή αντίστοιχα είναι η εξής

1. Εξισώσεις Fredholm

$$c_*U(x) = g(x) + \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

και

2. Εξισώσεις Volterra

$$c_*U(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t)U(t)dt.$$

Η κύρια διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι στις μεν εξισώσεις Fredholm το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ορισμένο ενώ στις εξισώσεις Volterra το αντίστοιχο διάστημα ολοκλήρωσης είναι άοριστο. Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στις εξισώσεις Volterra. Οι εξισώσεις αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την τιμή της σταθεράς c_* . Συγκεκριμένα αν $c_* = 0$, τότε έχουμε τις εξισώσεις Volterra πρώτης τάξεως, ενώ αν $c_* = 1$ έχουμε αντίστοιχα τις εξισώσεις Volterra δεύτερης τάξεως. Συγκεκριμένα

$$0 = g(x) + \int_a^x K(x,t)U(t)dt \quad (1\text{ης τάξης}),$$

$$U(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t)U(t)dt \quad (2\text{ης τάξης}).$$

Μια ειδική περίπτωση των Volterra εξισώσεων δεύτερης τάξης αποτελούν και οι ανανεωτικές εξισώσεις τις οποίες θα μελετήσουμε στην ενότητα που ακολουθεί.

1.2 Ανανεωτικές εξισώσεις

Οι ανανεωτικές εξισώσεις είναι υποκατηγορία των γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων και πιο συγκεκριμένα των Volterra εξισώσεων δεύτερης τάξης. Η γενική μορφή της ανανεωτικής εξίσωσης είναι η εξής

$$Z(x) = g(x) + \phi \int_0^x Z(x-y)dF(y), \quad (1.2.1)$$

όπου ϕ είναι μια θετική σταθερά και $g(u)$, $F(u)$ είναι γνωστές συναρτήσεις με τις παρακάτω ιδιότητες

1. η συνάρτηση $F(u)$ αποτελεί συνάρτηση κατανομής κάποιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας με $F(0) = 0$,
2. η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ είναι τοπικά φραγμένη συνάρτηση.

Οι ανανεωτικές εξισώσεις, αν υποθέσουμε ότι $\|F\| := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την τιμή της σταθεράς ϕ ,

1. Αν $\phi < 1$, η εξίσωση (1.2.1) ονομάζεται ελλειμματική (defective) ανανεωτική εξίσωση,
2. Αν $\phi = 1$ η εξίσωση (1.2.1) ονομάζεται κανονική (proper) ανανεωτική εξίσωση,
3. Αν $\phi > 1$ η εξίσωση (1.2.1) ονομάζεται υπερβολική (excessive) ανανεωτική εξίσωση.

Οι κανονικές ανανεωτικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται στη Θεωρία των Εφαρμοσμένων Πιθανοτήτων και ιδιαίτερα στην Ανανεωτική Θεωρία (βλέπε Feller (1971)) όπου και έχουν αναπτυχθεί πολλά αποτελέσματα για την λύση τους (ακριβής λύση (υπό συνθήκες), φράγματα, προσεγγίσεις και ασυμπτωτικά αποτελέσματα). Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις βρίσκουν πολλές εφαρμογές στη Θεωρία των Κινδύνων. Η διατριβή επικεντρώνεται στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

1.2.1 Συνελίξεις συναρτήσεων και κατανομών

Οι συνελίξεις κατανομών και γενικότερα οι συνελίξεις συναρτήσεων μαζί με το μετασχηματισμό Laplace μιας κατανομής F ,

$$m_F(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma y} dF(y),$$

αποτελούν δύο από τα σημαντικότερα εργαλεία στην μελέτη της Θεωρία Κινδύνων αλλά και των ανανεωτικών εξισώσεων. Η μελέτη της συμπεριφοράς των συνελίξεων (π.χ. μονοτονία, φράγματα, ασυμπτωτική συμπεριφορά) δεν είναι πάντα εφικτή και αποτελέσματα υπάρχουν μόνο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό των συνελίξεων

δύο συναρτήσεων κατανομής και γενικότερα δυο θετικών συναρτήσεων, στη συνέχεια θα ακολουθήσει μια πρόταση που θα συνοψίζει τα κυριότερα αποτελέσματα τους.

Ορισμός 1.2.1. Αν F και G είναι συναρτήσεις κατανομής στο διάστημα $[0, \infty)$ τότε η συνέλιξη τους ορίζεται ως εξής

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(x-y)dG(y), \quad x \geq 0.$$

Ορισμός 1.2.2. Η συνέλιξη δύο Lebesgue μετρήσιμων¹ και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων f και g στο $[0, \infty)$ ορίζεται ως εξής

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy, \quad x \geq 0.$$

Οι βασικές ιδιότητες της \otimes συνέλιξης, που ορίστηκε παραπάνω, συγκεντρώθηκαν στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 1.2.1. Αν ικανοποιούνται οι κατάλληλες συνθήκες προκειμένου να ορίζεται η συνέλιξη των f και g τότε ισχύουν τα εξής

1. $f \otimes g = g \otimes f$,
2. $f^{\otimes 1} = f$, $f^{\otimes n} = f \otimes f^{\otimes(n-1)}$, όπου $f^{\otimes n}$ η n -φορές συνέλιξη της f με τον εαυτό της,
3. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$.

Ακριβώς οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και στην περίπτωση της $*$ συνέλιξης.

Στη σχέση που ακολουθεί παρουσιάζεται η παράγωγος της \otimes συνέλιξης δύο πραγματικών συναρτήσεων f και g

$$(f \otimes g)'(x) = (f' \otimes g)(x) + f(0)g(x) = (f \otimes g')(x) + g(0)f(x). \quad (1.2.2)$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα συνάρτηση τότε και η συνέλιξη $f \otimes g$ είναι επίσης αύξουσα στο αντίστοιχο πεδίο ορισμού της. Στην περίπτωση που η f είναι

¹Μια συνάρτηση, f , καλείται Lebesgue μετρήσιμη αν $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}^*) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}^*)$ με \mathcal{L}^* συμβολίζουμε την σ άλγεβρα Lebesgue μετρήσιμων συνόλων και \mathcal{B}^* είναι μια Borel άλγεβρα στο \mathbb{R} (βλέπε Folland (1999)).

φθίνουσα προκειμένου να αποφασίσουμε την μονοτονία της συνέλιξης είναι απαραίτητο να υποθέσουμε κάποιες επιπλέον συνθήκες για την μονοτονία της g και της παραγώγου της f .

Η σχέση (1.2.2) προκύπτει άμεσα από τον κανόνα παραγώγισης του Leibniz (βλέπε Fleming (1977), σελ 239) που παρουσιάζεται παρακάτω

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y),$$

όπου η $f(x, y)$ και η $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a_0, b_0] \times V$, με V απεικονίζεται ένα ανοικτό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και $a(t), b(t) \in [a_0, b_0], \forall t \in V$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι $a(t)$ και $b(t)$ είναι συνεχής και έχουν συνεχείς παραγώγους ως προς t .

1.2.2 Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

Στο Θεώρημα που ακολουθεί περιγράφεται η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) στην ελλειμματική περίπτωση ($\phi < 1$).

Θεώρημα 1.2.1. Έστω $F(u)$ συνάρτηση κατανομής με $F(0) = 0$, ϕ μια θετική σταθερά, με $\phi < 1$ και $g(u)$ μια μη αρνητική, φραγμένη πραγματική συνάρτηση τότε η λύση της εξίσωσης (1.2.1) είναι η εξής

$$Z(x) = g(x) + \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^x g(x - y) dH(y) \quad (1.2.3)$$

όπου

$$\bar{H}(x) = 1 - H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n \bar{F}^{*n}(x), \quad x \geq 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot και Lin (2001) σελίδα 152. □

Η συνάρτηση $H(x)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής και καλείται σύνθετη γεωμετρική κατανομή (compound geometric distribution). Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η $H(x)$ δεν εξαρτάται από την συνάρτηση $g(x)$ καθώς επίσης και ότι $H(0) = 1 - \phi$. (Βλέπε Willmot και Lin (2001) σελίδα 154). Στη θεωρία Πιθανοτήτων και στη Μαθηματική

Ανάλυση χρησιμοποιείται η σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n F^{*n}(x), x \geq 0$$

και επομένως η λύση της εξίσωσης (1.2.1) δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$Z(x) = \phi \int_0^x g(x-y) dH(y).$$

Πρόταση 1.2.2. Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.1 και επιπλέον η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε για την λύση της εξίσωσης (1.2.1) θα ισχύει ότι

$$Z(x) = \frac{1}{1-\phi} g(x) - \frac{g(0)}{1-\phi} \bar{H}(x) - \frac{1}{1-\phi} \int_0^x \bar{H}(x-y) g'(y) dy.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot και Lin (2001) σελίδα 154. □

Η συνάρτηση κατανομής $H(x)$ ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση.

$$\bar{H}(x) = \phi \int_0^x \bar{F}(x-y) dH(y) + \phi \bar{F}(x), \quad x \geq 0. \quad (1.2.4)$$

Στο Θεώρημα που ακολουθεί εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις προκειμένου η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) να είναι καλά ορισμένη και μοναδική.

Θεώρημα 1.2.2. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη και πεπερασμένη σε πεπερασμένα διαστήματα τότε η λύση της εξίσωσης (1.2.1), $Z(x)$, είναι καλά ορισμένη μοναδική και πεπερασμένη σε πεπερασμένα διαστήματα.

Απόδειξη. Βλέπε Asmussen (2003), Θεώρημα 2.4. □

Έστω η ανανεωτική εξίσωση

$$Z(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u Z(u-x) dG_1(x) + \frac{1}{1+\theta} H_1(u), \quad u \geq 0, \quad (1.2.5)$$

όπου $\theta > 0$, $G_1(x)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής με $G_1(0) = 0$ και $H_1(u)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση για $u \geq 0$. Στο επόμενο Θεώρημα παρουσιάζουμε την λύση της εξίσωσης

(1.2.5) που έδωσαν οι Lin και Willmot (1999) με την βοήθεια μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 1.2.3. Η λύση της εξίσωσης (1.2.5) δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$Z(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^u H_1(u-x) dK_1(x) + \frac{1}{1+\theta} H_1(u)$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) = -\frac{1}{\theta} \int_0^u \overline{K}_1(u-x) dH_1(x) - \frac{H_1(0)}{\theta} \overline{K}_1(u) + \frac{1}{\theta} H_1(u).$$

Επιπλέον αν η $H_1(u)$ είναι παραγωγίσιμη τότε η $Z(u)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$Z(u) = -\frac{1}{\theta} \int_0^u \overline{K}_1(u-x) H_1'(x) dx - \frac{H_1(0)}{\theta} \overline{K}_1(u) + \frac{1}{\theta} H_1(u),$$

όπου

$$\overline{K}_1(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n \overline{G}_1^{*n}(u).$$

Απόδειξη. Βλέπε Lin και Willmot (1999). □

1.3 Φράγματα για την λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης

Πάρα πολλές φορές τόσο σε πρακτικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο είναι δύσκολο ή ανέφικτο να υπολογιστεί η ακριβής τιμή της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Το φαινόμενο αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι στη λύση της εξίσωσης (1.2.1) περιέχεται η k συνέλιξη συναρτήσεων κατανομής. Για το λόγο αυτό στο σύνολο των προβλημάτων αυτού του είδους, η Μαθηματική επιστήμη επικεντρώνεται στον υπολογισμό φραγμάτων, προσεγγίσεων και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων. Τα μεν φράγματα μας δίνουν ένα άνω ή κάτω όριο ή και τα δυο ταυτόχρονα, για την συμπεριφορά της ποσότητας που μελετάμε. Κυρίως χρησιμοποιούνται για μικρές τιμές στο πεδίο ορισμού της ζητούμενης ποσότητας ενώ για μεγάλες τιμές χρησιμοποιούνται οι ασυμπτωτικοί τύποι. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε πως όπου είναι δυνατόν θα πρέπει να γίνεται συνδυαστική χρήση τόσο των

φραγμάτων όσο και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων προκειμένου να έχουμε μια πλήρη εικόνα για την ποσότητα που μελετάμε. Τέλος υπάρχουν και οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν κυρίως μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για την προσέγγιση της ζητούμενης ποσότητας στο πεδίο ορισμού της. Εμείς στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με διάφορα φράγματα και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ανανεωτικές εξισώσεις.

1.3.1 Φράγματα για την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

Για τα φράγματα της λύσης της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία. Ενδεικτικά αναφέρουμε, για μη εκθετικά φράγματα, τους Barthlomew (1963), Stoyan (1983), Delingonl (1985) και για εκθετικά τους Ross (1974), Gerber (1979), Cai και Garrido (1999) και τις αναφορές τους. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε άνω και κάτω φράγματα, τα οποία απέδειξαν οι Willmot, Cai και Lin (2001). Συγκεκριμένα, έστω η εξίσωση

$$m(x) = \phi r(x) + \phi \int_0^x m(x-y)dF(y), \quad (1.3.1)$$

όπου $\phi > 0$, $F(y)$ είναι μια κανονική συνάρτηση κατανομής με $F(0) = 0$ και $r(y) \geq 0$ τοπικά φραγμένη συνάρτηση. Τα φράγματα αυτά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τα εκθετικά και τα μη εκθετικά. Εκθετικά φράγματα μπορούν να κατασκευαστούν στην περίπτωση που υπάρχει λύση ως προς k της εξίσωσης

$$\int_0^\infty e^{ky}dF(y) = \frac{1}{\phi}. \quad (1.3.2)$$

Στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει πεπερασμένος θετικός αριθμός που να ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση οι Willmot, Cai και Lin (2001) ανέπτυξαν μη εκθετικά φράγματα γενικεύοντας την εξίσωση (1.3.2)

$$\int_0^\infty g(y)dF(y) = \frac{1}{\phi}, \quad (1.3.3)$$

όπου για παράδειγμα μια επιλογή για την $g(x)$ μπορεί να είναι η $g(x) = (1 + kx)^n$.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί αποτυπώνεται η γενική ιδέα και ο τρόπος λειτουργίας της μεθοδολογίας που ανέπτυξαν οι Willmot, Cai και Lin (2001).

Θεώρημα 1.3.1. Έστω ότι $g(y)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση (1.3.3) και $h(y)$ μια μη αρνητική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την $g(y)h(x) \geq (\leq)h(x+y)$, $\forall x \geq 0$ και $\forall y \geq 0$. Αν $c(x)$ είναι επίσης μια μη αρνητική συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$r(z) \leq (\geq)c(x)h(x-z) \int_z^\infty g(y)dF(y), 0 \leq z \leq x,$$

τότε ισχύει ότι

$$m(x) \leq (\geq)h(0)c(x).$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot, Cai και Lin (2001). □

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα πιο γνωστά εκθετικά φράγματα για τις ανανεωτικές εξισώσεις. Δηλαδή φράγματα για τα οποία ισχύει ότι η σχέση (1.3.2). Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να επισημάνουμε πως η εύρεση της λύσης της εξίσωσης (1.3.2), k , είναι πάντα δυνατή στις περιπτώσεις που ισχύει $\phi \geq 1$ σε αντίθεση με την περίπτωση που $\phi < 1$. Για την διατύπωση των εκθετικών αποτελεσμάτων θέτουμε $x_0 = \inf \{x : F(x) = 1\}$. Αν $\bar{F}(x) > 0$ για $x \geq x_0$ τότε $x_0 = \infty$.

Θεώρημα 1.3.2. Έστω ότι υπάρχει η λύση, k , της εξίσωσης (1.3.2). Αν $r(x) = 0$ για $x \geq x_0$ (για κάποιο x_0) τότε ισχύουν ότι

1.

$$m(x) \leq a_U(x)e^{-kx}, \quad x \geq 0,$$

2.

$$m(x) \leq a_L(x)e^{-kx}, \quad x \geq 0,$$

όπου

$$a_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z) > 0} a(z), \quad x \geq 0,$$

$$a_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z) > 0} a(z), \quad x \geq 0$$

και

$$a(z) = \frac{e^{kz}r(z)}{\int_z^\infty e^{ky}dF(y)}, \quad z \geq 0.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot, Cai και Lin (2001). □

Πόρισμα 1.3.1. Έστω ότι υπάρχει η λύση, k , της εξίσωσης (1.3.2) τότε ισχύουν ότι

1.

$$m(x) \leq \sigma_U(x)\psi_U(x)e^{-kx}, \quad x \geq 0,$$

2.

$$m(x) \geq \sigma_L(x)\psi_L(x)e^{-kx}, \quad x \geq 0,$$

όπου

$$\begin{aligned} \psi_U(x) &= \sup_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z) > 0} \frac{r(z)}{\bar{F}(z)}, \\ \psi_L(x) &= \inf_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z) > 0} \frac{r(z)}{\bar{F}(z)}, \\ \sigma_U(x) &= \sup_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z) > 0} \frac{e^{kz}\bar{F}(z)}{\int_z^\infty e^{ky}dF(y)}, \\ \sigma_L(x) &= \inf_{0 \leq z \leq x, \bar{F}(z) > 0} \frac{e^{kz}\bar{F}(z)}{\int_z^\infty e^{ky}dF(y)}. \end{aligned}$$

Αν $\phi \leq 1$ τότε ισχύει ότι $1 \leq \sigma_L(x) \leq \phi$ και $\sigma_U(x) \geq \phi$. Επιπλέον αν $F \in NWUC$ (για τις κλάσεις γήρανσης βλέπε Παράρτημα Β) τότε $\sigma_L(x) = \phi$ και αν $F \in NBUC$ τότε $\sigma_U(x) = \phi$. Στην περίπτωση που $\phi \leq 1$ τότε ισχύει ότι $\phi \leq \sigma_U(x) \leq 1$. Επιπλέον αν $F \in NWUC$ τότε $\sigma_L(x) = \phi$ και $\sigma_L(x) \leq \phi$. Επιπλέον αν $F \in NWUC$ τότε $\sigma_U(x) = \phi$ και αν $F \in NBUC$ τότε $\sigma_L(x) = \phi$.

Απόδειξη. Βλέπε Willmot, Cai και Lin (2001). □

Για τα τρία αποτελέσματα που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα (Θεώρημα 1.3.1, Θεώρημα 1.3.2 και Πόρισμα 1.3.1) τα φράγματα των ανανεωτικών εξισώσεων μπορούν να εφαρμοστούν για κάθε θετική τιμή του ϕ . Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που ισχύει $0 < \phi < 1$. Όπως προαναφέρθηκε μια τέτοια επιλογή του ϕ υποθάλπει και την περίπτωση να μην υπάρχει πεπερασμένη λύση ως προς k της εξίσωσης (1.3.2). Σε αυτή την περίπτωση στην

εξίσωση (1.3.3) χρησιμοποιείται η $g(y) = 1/\overline{B}(y)$, όπου $B(y)$ είναι συνάρτηση κατανομής και έτσι η εξίσωση (1.3.3) λαμβάνει την μορφή

$$\int_0^{\infty} \{B(y)\}^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}. \quad (1.3.4)$$

Για την περίπτωση του άνω (κάτω) φράγματος της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης είναι απαραίτητο να επιλέξουμε μια συνάρτηση κατανομής $V(y)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\overline{B}(y)\overline{V}(x) \leq (\geq)\overline{V}(x+y), \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Θεώρημα 1.3.3. Έστω ότι η συνάρτηση κατανομής $B(y)$ ικανοποιεί την (1.3.4) και ότι η συνάρτηση κατανομής $V(y)$ ικανοποιεί την (1.3.5). Αν $r(x) = 0$ για $x \geq x_0$ τότε

1.

$$m(x) \leq \frac{\tau_U(x)}{\overline{V}(0)}, \quad \forall x \geq 0$$

2.

$$m(x) \geq \frac{\tau_L(x)}{\overline{V}(0)}, \quad \forall x \geq 0,$$

όπου

$$\tau_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, \overline{F}(z) > 0} \tau(x, z), \quad \forall x \geq 0,$$

$$\tau_L(x) = \inf_{0 \leq z \leq x, \overline{F}(z) > 0} \tau(x, z), \quad \forall x \geq 0$$

και

$$\tau(x, z) = \frac{r(z)\overline{V}(x-z)}{\int_z^{\infty} \{B(y)\}^{-1} dF(y)}, \quad 0 \leq z \leq x.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot, Cai και Lin (2001). □

Πόρισμα 1.3.2. Έστω ότι η συνάρτηση κατανομής $B(y)$ ικανοποιεί την (1.3.4) και ότι η συνάρτηση κατανομής $V(y)$ ικανοποιεί την (1.3.5). Αν $r(x) = 0$ για $x \geq x_0$ (για κάποιο x_0) τότε

$$m(x) \leq \frac{\psi_U(x)}{\overline{V}(0)} \overline{V}(x), \quad \forall x \geq 0,$$

όπου

$$\psi_U(x) = \sup_{0 \leq z \leq x, \overline{F}(z) > 0} \frac{r(z)}{\overline{F}(z)}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot, Cai και Lin (2001). □

Πρέπει να τονίσουμε στο σημείο αυτό πως η Woo (2011) πρόσφατα βελτίωσε κάποια από τα γενικά φράγματα που απέδειξαν οι Willmot, Cai και Lin (2001).

1.4 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης των ανανεωτικών εξισώσεων παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στο χώρο της Θεωρίας Κινδύνων αλλά και γενικότερα των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Σημαντικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση έχουν δοθεί από τους Asmussen (1998, 2003), τους Yin και Zhao (1998, 2003) και Arpleby και Reynolds (2002), ενώ με την περίπτωση της κανονικής ανανεωτικής εξίσωσης έχουν ασχοληθεί μεταξύ άλλων οι Feller (1941, 1971) Teugels (1968, 1975), Baltrunas και Omev (1998, 2002). Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα που αφορούν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης στο χώρο των βαριών ουρών. Ένα βασικό αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης προέρχεται από το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (Key Renewal Theorem) και αφορά την περίπτωση που υπάρχει θετικός αριθμός, k τέτοιος ώστε να ισχύει η (1.3.2).

Θεώρημα 1.4.1 (Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα). Έστω η κανονική ανανεωτική εξίσωση

$$Z(x) = g(x) + \int_0^x Z(x-y)dF(y),$$

όπου F είναι μια συνάρτηση κατανομής με $\|F\| = 1$ και g μια φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(0, \infty)$ με $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) = \frac{\int_0^{\infty} g(t)dt}{\mu}$$

με $\mu = \int_0^{\infty} x dF(x)$.

Απόδειξη. Βλέπε Feller (1971). □

Θεώρημα 1.4.2. Αν F είναι συνάρτηση κατανομής και υπάρχει $k > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση (1.3.2) και επιπλέον η $e^{kx}g(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε η λύση της εξίσωσης (1.2.1) έχει την εξής ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) = \frac{\int_0^{\infty} e^{ky} g(y) dy}{\phi \int_0^{\infty} y e^{ky} dF(y)}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot και Lin (2001), Θεώρημα 9.1.3. □

Το Λήμμα που ακολουθεί ουσιαστικά αποτελεί μια εφαρμογή του κανόνα του 1' Hospital και θα μας είναι χρήσιμο για την απόδειξη πολλών ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων. Αν f, g είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις και α μια θετική σταθερά με το συμβολισμό $f(x) \sim \alpha g(x)$, $x \rightarrow \infty$ (ή ισοδύναμα όταν είναι προφανές ότι αναφερόμαστε στο x , $f \sim \alpha g$, $x \rightarrow \infty$) θα εννοούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Λήμμα 1.4.1. Έστω f και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[u, \infty)$, όπου u είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και επίσης ισχύει ότι $f(u) \sim \alpha g(u)$, $u \rightarrow \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε

$$\int_u^{\infty} f(t) dt \sim \alpha \int_u^{\infty} g(t) dt, \quad u \rightarrow \infty. \quad (1.4.1)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του 1' Hospital θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^{\infty} f(t) dt}{\int_u^{\infty} g(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{d(\int_u^{\infty} f(t) dt) / du}{d(\int_u^{\infty} g(t) dt) / du} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-f(u)}{-g(u)} = \alpha.$$

□

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των βαριών ουρών και θα περιγράψουμε τα σημαντικότερα ασυμπτωτικά αποτελέσματα που αφορούν την λύση των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων.

1.4.1 Βαριές ουρές

Τα τελευταία χρόνια η ασυμπτωτική Θεωρία που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια της Θεωρίας Κινδύνων και γενικότερα των ανανεωτικών εξισώσεων, έχει επικεντρωθεί στην παραγωγή αποτελεσμάτων που προϋποθέτουν για τα ύψη των αποζημιώσεων ή γενικά για την κατανομή F (σχέση (1.2.1)) να ανήκει σε κάποια από τις κλάσεις των βαριών ουρών, $\mathcal{L}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ ή και υποκλάσεων τους (π.χ $\mathcal{Ld}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, $\mathcal{Sd}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, \mathcal{S}^* , \mathcal{RV}) για τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις κατανομής. Αυτό συμβαίνει γιατί οι κλάσεις αυτές στην πράξη έχουν αρκετά καλή συμπεριφορά στη μελέτη και την περιγραφή ακραίων συμβάντων και καταστάσεων (όπως για παράδειγμα ενός χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρείας). Στη συνέχεια ακολουθεί μια σειρά από ορισμούς για τις κλάσεις :

1. $\mathcal{Ld}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$,
2. $\mathcal{L}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$,
3. $\mathcal{Sd}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$,
4. $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$,
5. \mathcal{S}^* ,
6. $\mathcal{RV}(a)$.

Ορισμός 1.4.1. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, με $f(x) > 0$, $\forall x \in [A, \infty)$ με $A \in \mathbb{R}_+$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{Ld}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ αν ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που $\gamma = 0$ τότε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathcal{Ld} := \mathcal{Ld}(0)$.

Ορισμός 1.4.2. Μια κατανομή F ορισμένη στο $[0, \infty)$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{L}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που $\gamma = 0$ γράφουμε $\mathcal{L} := \mathcal{L}(0)$.

Ορισμός 1.4.3. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ με $f(x) > 0$ για x στο διάστημα $[A, \infty)$, $A \in \mathbb{R}_+$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ αν ισχύει ότι

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{\otimes 2}(x)}{f(x)} = 2 \int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που $\gamma = 0$ τότε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathcal{S}d := \mathcal{S}d(0)$ και η αντίστοιχη κλάση καλείται κλάση υποεκθετικών πυκνοτήτων. Στην περίπτωση που $f \in \mathcal{S}d$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{\otimes n}(x)}{f(x)} = n.$$

(Βλέπε Embrechts et al. (1997)).

Ορισμός 1.4.4. Μια συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην κλάση $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ αν ισχύει ότι

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2 \int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που $\gamma = 0$ τότε $\mathcal{S} := \mathcal{S}(0)$.

Ορισμός 1.4.5. Μια συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην κλάση \mathcal{S}^* αν έχει πεπερασμένη μέση τιμή, μ και ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} dy = 2\mu.$$

Ορισμός 1.4.6. Μια θετική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση (*Lebesgue measurable function*) h στο $(0, \infty)$ ονομάζεται ομαλής κύμανσης με δείκτη $a \in \mathbb{R}$ (*regular varying at ∞ of index $a \in \mathbb{R}$*) αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(xy)}{h(x)} = y^{-a}$$

για κάθε $y > 0$.

Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιούμε προκειμένου να χαρακτηρίσουμε μια συνάρτηση h ως συνάρτηση ομαλής κύμανσης είναι ο εξής : $h \in RV(a)$.

Ορισμός 1.4.7. Μια συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην κλάση RV (*regularly varying*) αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-a}$$

για κάποιο $a > 0$ και για κάθε $y > 0$.

Πρόταση 1.4.1. Έστω F συνάρτηση κατανομής.

1. Αν $F \in \mathcal{S}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}_e(x)} = 0,$$

2. Αν $F \in \mathcal{L}(\gamma)$, $\gamma > 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}_e(x)} = \mu\gamma.$$

όπου $\bar{F}_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy$ ονομάζεται κατανομή ισορροπίας που αντιστοιχεί στην F .

Απόδειξη. Βλέπε Kluppelberg (1988)

□

Στην περίπτωση που $F \in \mathcal{S}$ με την βοήθεια του Θεωρήματος του l' Hospital αποδυναμώνεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = 0.$$

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι σαφές ότι ισχύουν τα εξής

$$\mathcal{S}(\gamma) \subset \mathcal{L}(\gamma), \forall \gamma > 0 \quad (1.4.2)$$

$$RV \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}, \quad (1.4.3)$$

για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Embrechts et al. (1997).

Πρόταση 1.4.2. Οι κλάσεις RV και \mathcal{L} είναι κλειστές ως προς την συνέλιξη.

Απόδειξη. Βλέπε Cai και Tang (2004). □

Η επόμενη πρόταση συγκεντρώνει διάφορα αποτελέσματα για τις κλάσεις που ορίστηκαν στην παρούσα ενότητα.

Πρόταση 1.4.3. 1. Αν $f \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ τότε

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{\otimes n}(x)}{f(x)} \geq n \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy \right)^{n-1} dy$$

2. Αν $k \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ και ορίσουμε την αντίστοιχη κατανομή στο $(0, \infty)$

$$K(x) = \frac{\int_0^x k(y) dy}{\int_0^\infty k(y) dy},$$

τότε $K \in \mathcal{S}$.

3. Για $\gamma > 0$ έχουμε

(α') $F \in \mathcal{S}(\gamma)$ αν και μόνο αν $\bar{F} \in \mathcal{S}d(\gamma)$.

(β') Αν F έχει πυκνότητα f τότε

$$f \in \mathcal{S}d(\gamma) \Leftrightarrow F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \bar{F} \in \mathcal{S}d(\gamma).$$

4. Αν $f, g \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ και $\int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy, \int_0^\infty e^{\gamma y} g(y) dy < \infty$ τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$f \otimes g \in \mathcal{L}d(\gamma) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f \otimes g)(x)}{f(x) \int_0^\infty e^{\gamma y} g(y) dy + g(x) \int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy} = 1.$$

5. Αν $F \in \mathcal{S}^*$ τότε συνεπάγεται ότι $F \in \mathcal{S}$ και $F_e \in \mathcal{S}$.

Απόδειξη. Βλέπε Kluppelberg (1989b). □

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα Λήμμα (βλέπε Kluppelberg(1989α), Λήμμα 3.1(b)) στο οποίο δίνεται ένα άνω φράγμα της συνέλιξης υποεκθετικών πυκνοτήτων με τον εαυτό τους.

Λήμμα 1.4.2. Αν $f \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma \geq 0$ μια φραγμένη συνάρτηση τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε

$$f^{\otimes n}(x) \leq k \left(\int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy + \epsilon \right)^n f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.4.4)$$

Θεώρημα 1.4.3. Αν $f \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, η f είναι φραγμένη συνάρτηση, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [A, \infty)$ με $A \in \mathbb{R}_+$ και $\int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy < \infty$. Έστω $\{\lambda_n\}$ μια ακολουθία στο \mathbb{R}_+ με $\lambda_j > 0$ για $j > 1$ και $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left(\int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy + \epsilon \right)^n < \infty$ για κάποιο $\epsilon > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n f^{\otimes n}(x).$$

Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. $f \in \mathcal{S}d(\gamma)$,
2. $g \in \mathcal{S}d(\gamma)$,
3. $g \sim cf$ με $c = \sum_{n=1}^\infty n \lambda_n \left(\int_0^\infty e^{\gamma y} f(y) dy \right)^{n-1}$.

Απόδειξη. Βλέπε Kluppelberg (1989α). □

Το Θεώρημα που ακολουθεί είναι το αντίστοιχο του προηγούμενου για συναρτήσεις κατανομών.

Θεώρημα 1.4.4. Αν $F \in \mathcal{S}$, $\{\lambda_n\}$ μια ακολουθία στο \mathbb{R}_+ με $\lambda_j > 0$ για $j > 1$ και υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n (1 + \epsilon)^n < \infty$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F^{*n} \in \mathcal{S}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{F^{*n}}(x) \sim \overline{F^{*n}}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

Απόδειξη. Βλέπε Embrechts et al. (1997). \square

Πρόταση 1.4.4. Αν $f \in \mathcal{S}d$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [A, \infty)$, $A \in \mathbb{R}_+$ και f_1, f_2 δύο πυκνότητες στο $[A, \infty]$ τέτοιες ώστε $f_1(x)/f(x) \rightarrow c_1$ και $f_2(x)/f(x) \rightarrow c_2$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Τότε ισχύει ότι

$$\frac{(f_1 \otimes f_2)(x)}{f(x)} \rightarrow c_1 + c_2, \quad x \rightarrow \infty.$$

Απόδειξη. Βλέπε Asmussen et al. (2003). \square

Πρόταση 1.4.5. Αν $f \in \mathcal{S}d$ και ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{h(u)}{f(u)} \in \mathbb{R}_+. \quad (1.4.5)$$

Τότε $h \in \mathcal{S}d$.

Απόδειξη. Βλέπε Appleby και Reynolds (2002). \square

Πρόταση 1.4.6. Αν $f \in \mathcal{L}d$ και ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{h(u)}{f(u)} \in \mathbb{R}_+. \quad (1.4.6)$$

Τότε $h \in \mathcal{L}d$.

Απόδειξη. Προκείμενου να αποδείξουμε ότι $h \in \mathcal{L}d$ θα χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 1.4.1.

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x-y)}{h(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι αν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{h(u)}{f(u)} = c > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x-y)}{h(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{h(x-y)}{h(x)} \cdot \frac{f(x-y)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(x-y)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x-y)}{f(x-y)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Συνεπώς λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $f \in \mathcal{Ld}$ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Πρόταση 1.4.7. Αν f, g δυο θετικές συναρτήσεις στο \mathbb{R}^+ , $g \in \mathcal{Sd}$, g ολοκληρώσιμη με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{\otimes 2}(x)}{g(x)} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0$$

τότε $f \in \mathcal{Sd}$.

Απόδειξη. Βλέπε Appleby και Reynolds (2002). \square

1.5 Ασυμπτωτική συμπεριφορά ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων

Είναι σαφές πως η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της λύσης (σχέση 1.2.3) μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης εξαρτάται άμεσα από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνέλιξης $(g \otimes h)(x)$ και συνεπώς της h και κατ' επέκταση της f .

Θεώρημα 1.5.1. Έστω G μια ελλειμματική κατανομή ($\|G\| < 1$) στο $(0, \infty)$ με πυκνότητα $g \in \mathcal{Sd}$ και $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)$. Αν Z είναι η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης $Z = z + G * Z$ με $z \in \mathcal{Sd}$ τότε

1. Αν $z(x)/g(x) \rightarrow \infty$,

$$Z(x) \sim \frac{1}{1 - \|G\|} z(x).$$

2. Αν $z(x)/g(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$

$$Z(x) \sim \left(\frac{\int_0^\infty z(y)dy}{(1 - \|G\|)^2} + \frac{c}{1 - \|G\|} \right) g(x).$$

3. Αν $z(x)/g(x) \rightarrow 0$,

$$Z(x) \sim \frac{\int_0^\infty z(y)dy}{(1 - \|G\|)^2} g(x).$$

Απόδειξη. Βλέπε Asmussen (1998) Θεώρημα 7.1. □

Θεώρημα 1.5.2. Έστω η συνάρτηση Z που είναι λύση της εξίσωσης (1.2.1) με $g(x) \geq 0$ μια δεξιά συνεχής και φθίνουσα στο μηδέν συνάρτηση. Ορίζουμε την $G(x) = (g(0) - g(x))/g(0)$, $x \geq 0$, τότε θα ισχύει

1. Αν $F \in \mathcal{S}$, $G \in \mathcal{S}$ και $\sup_x (\bar{F}(x)/\bar{G}(x)) < \infty$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - \phi}.$$

2. Αν $F \in \mathcal{S}$ και $\bar{G}(x) = o(\bar{F}(x))$ τότε

$$Z(x) = o(G(x)).$$

3. Αν $\gamma > 0$, $\phi m_F(\gamma) < 1$, $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $G \in \mathcal{S}(\gamma)$ και $\sup_x (\bar{F}(x)/\bar{G}(x)) < \infty$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{\phi g(0)(m_G(\gamma) - 1)}{(1 - \phi m_F(\gamma))^2} \bar{F}(x) + \frac{g(x)}{1 - \phi m_F(\gamma)}.$$

4. Αν $\gamma > 0$, $\phi m_F(\gamma) < 1$, $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $G \in \mathcal{S}(\gamma)$ και $\bar{G}(x) = o(\bar{F}(x))$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{\phi g(0)(m_G(\gamma) - 1)}{(1 - \phi m_F(\gamma))^2} \bar{F}(x).$$

Απόδειξη. Βλέπε Yin και Zhao (2006). □

Οι Yin και Zhao (2008) έδωσαν πιο γενικές συνθήκες για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $Z(x)$. Για την απόδειξη των αποτελεσμάτων τους, έκαναν χρήση του Θεωρήματος

1.4.3 της Kluppelberg (1989a). Για την διατύπωση του θεωρήματος που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$\hat{g}(-\gamma) = \gamma \int_0^{\infty} e^{\gamma y} g(y).$$

Θεώρημα 1.5.3. Έστω F μια συνάρτηση κατανομής στο $(0, \infty)$ με πυκνότητα f στο $[\hat{x}, \infty)$, $\hat{x} \in \mathbb{R}_+$ και g μια ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση τότε για την λύση $Z(x)$ της $Z(x) = g(x) + (g * F)(x)$ θα έχουμε

1. Αν $f \in \mathcal{S}d$, $g \in \mathcal{L}d$ και $\sup_{x \geq x_0} (g(x)/f(x)) < \infty$, για κάποιο $x_0 > 0$, τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - \phi} + \frac{\int_0^{\infty} g(y) dy}{(1 - \phi)^2} f(x)$$

και αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - \phi}.$$

2. Αν $f \in \mathcal{S}d$, $g \in \mathcal{S}d$ και $\sup_{x \geq x_0} (g(x)/f(x)) = \infty$, για κάποιο $x_0 > 0$, τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - \phi} + \frac{\int_0^{\infty} g(y) dy}{(1 - \phi)^2} f(x)$$

και αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - \phi}.$$

3. Αν $\gamma > 0$, $f \in \mathcal{S}d$, $g \in \mathcal{L}d$, $m_F(\gamma) < 1$, $\hat{g}(-\gamma) < 0$ και $\sup_{x \geq x_0} (g(x)/f(x)) < \infty$, για κάποιο $x_0 > 0$, τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - m_F(\gamma)} + \frac{\hat{g}(-\gamma)}{(1 - m_F(\gamma))^2} f(x)$$

και αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - m_F(\gamma)}.$$

4. Αν $\gamma > 0$, $f \in \mathcal{S}d$, $g \in \mathcal{S}d$, $m_F(\gamma) < 1$, $\hat{g}(-\gamma) < 0$ και $\sup_{x \geq x_0} (g(x)/f(x)) = \infty$, για

κάποιο $x_0 > 0$, τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - m_F(\gamma)} + \frac{\hat{g}(-\gamma)}{(1 - m_F(\gamma))^2} f(x)$$

και αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ τότε

$$Z(x) \sim \frac{g(x)}{1 - m_F(\gamma)}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Yin και Zhao (2008). □

Στο θεώρημα που ακολουθεί θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της \otimes συνέλιξης δύο πραγματικών συναρτήσεων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

Θεώρημα 1.5.4. Έστω δύο πραγματικές συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{L}d$. Αν $f(u)/g(u) \rightarrow 0$ με $u \rightarrow \infty$, τότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(f \otimes g)(u)}{g(u)} = \int_0^\infty f(x) dx,$$

Απόδειξη. Αρχικά γράφουμε την \otimes συνέλιξη των f και g ως εξής

$$(f \otimes g)(u) = \int_0^u f(u-x)g(x)dx = \int_0^{u/2} f(u-x)g(x)dx + \int_0^{u/2} g(u-x)f(x)dx.$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε και αφαιρούμε τις παραστάσεις $f(u) \int_0^{u/2} g(x)dx$ και $g(u) \int_0^{u/2} f(x)dx$

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(u) &= \int_0^{u/2} f(u-x)g(x)dx - f(u) \int_0^{u/2} g(x)dx + f(u) \int_0^{u/2} g(x)dx \\ &+ \int_0^{u/2} g(u-x)f(x)dx - g(u) \int_0^{u/2} f(x)dx + g(u) \int_0^{u/2} f(x)dx. \end{aligned}$$

και κάνοντας πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(u) &= f(u) \int_0^{u/2} \left(\frac{f(u-x)}{f(u)} - 1 \right) g(x)dx + f(u) \int_0^{u/2} g(x)dx \\ &+ g(u) \int_0^{u/2} \left(\frac{g(u-x)}{g(u)} - 1 \right) f(x)dx + g(u) \int_0^{u/2} f(x)dx. \quad (1.5.1) \end{aligned}$$

Συνεπώς αν διαιρέσουμε το πρώτο και το δεύτερο μέλος της (1.5.1) με $g(u)$, πάρουμε το όριο για $u \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιήσουμε τις υποθέσεις ότι $f(u)/g(u) \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$ και

$f, g \in \mathcal{L}d$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(f \otimes g)(u)}{g(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{g(u)} \int_0^{u/2} \left(\frac{f(u-x)}{f(u)} - 1 \right) g(x) dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{g(u)} \int_0^{u/2} g(x) dx \\ &+ \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{u/2} \left(\frac{g(u-x)}{g(u)} - 1 \right) f(x) dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{u/2} f(x) dx \\ &= \int_0^\infty f(x) dx\end{aligned}$$

□

РАНЕЕ НЕ ПЕРПА

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1 Εισαγωγή

Η Θεωρία Χρεοκοπίας ασχολείται με την μελέτη δυναμικών συστημάτων στα οποία έχουμε εισροές και εκροές χρηματικών ποσοτήτων με την ίδια μονάδα μέτρησης στη διάρκεια του χρόνου. Κύριο αντικείμενο μελέτης του συγκεκριμένου κλάδου είναι η πιθανότητα να μείνει το σύστημα χωρίς πόρους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Οι σημαντικότερες εφαρμογές της θεωρίας αυτής συναντώνται στα ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια όπου και μελετάτε η πιθανότητα να χρεοκοπήσει το χαρτοφυλάκιο στη διάρκεια του χρόνου, συνυπολογίζοντας το αρχικό κεφάλαιο που έχει τοποθετηθεί για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο στην αρχή της λειτουργίας του. Στο παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε μια γενική εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας, μελετώντας το κλασικό μοντέλο και το μοντέλο που περιλαμβάνει επιπλέον και την διάχυση (diffusion). Για το μεν κλασικό μοντέλο θα δώσουμε μια αναλυτική παρουσίαση των πιο βασικών εννοιών ενώ για το κλασικό μοντέλο με διάχυση θα παρουσιάσουμε τα αντίστοιχα γενικευμένα αποτελέσματα.

2.2 Μελέτη του κλασικού μοντέλου

Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, εμφανίστηκε το 1903 στη διατριβή του Σουηδού Filip Lundberg. Από τότε μελετήθηκαν πολλές παραλλαγές και γενικεύσεις του. Το

κλασικό μοντέλο μελετήθηκε από ένα μεγάλο αριθμό σημαντικών συγγραφέων τόσο από το χώρο των Πιθανοτήτων όσο και από του Αναλογισμού (βλέπε Βιβλιογραφία). Στην ενότητα αυτή ξεκινώντας από την στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος θα περιγράψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά και αποτελέσματα του κλασικού μοντέλου.

2.2.1 Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος

Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης στη Θεωρία της Χρεοκοπίας. Συνήθως χρησιμοποιείται για τη μελέτη εκείνων των χαρτοφυλακίων που εκτός από τα προκαθορισμένα στοιχεία (έσοδα - έξοδα), περιέχουν και ποσότητες οι οποίες έχουν τυχαίο μέγεθος και τυχαίο ρυθμό εμφάνισης. Τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια, συναντώνται σε ασφαλιστικές εταιρείες, χρηματοοικονομικές εταιρείες, αλλά και γενικότερα σε κάθε οικονομική επιχείρηση που το χαρτοφυλάκιο της δεν είναι προβλέψιμο αλλά επηρεάζεται από τυχαία, για παράδειγμα έξοδα.

Για τη καλύτερη κατανόηση της ανέλιξης του πλεονάσματος θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Όπως γνωρίζουμε, οι ασφαλιστικές εταιρείες αναλαμβάνουν τη κάλυψη κινδύνων έναντι προκαθορισμένων ασφαλίσεων που λαμβάνουν. Οι κίνδυνοι που καλείται να καλύψει η εταιρεία αναγράφονται στο συμβόλαιο που υπογράφει με τον πελάτη της. Αν πραγματοποιηθεί ένας ή και περισσότεροι κίνδυνοι τότε η ασφαλιστική εταιρεία υποχρεούται να καλύψει τα έξοδα που προκλήθηκαν, στον κάτοχο της ασφάλειας. Ας υποθέσουμε πως μια ασφαλιστική εταιρεία τη στιγμή που υπογράφει το συμβόλαιο διαθέτει αποθεματικό u . Θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο της στο συνεχές χρονικό διάστημα $[0, t]$, $\forall t > 0$. Θεωρούμε τη χρονική στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο σαν σημείο αναφοράς από το οποίο αρχίζει να μετράει ο χρόνος. Τέλος, αν υποθέσουμε πως τα έσοδα από τα ασφάλιστρα που πληρώνει ο ασφαλισμένος έρχονται με συνεχή τρόπο και είναι συνολικά $P(t)$ για το χρονικό διάστημα $[0, t]$ ενώ τα έξοδα που προκύπτουν είναι $S(t)$ για το ίδιο χρονικό διάστημα, τότε κατά τη χρονική στιγμή t , η αξία του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας είναι

$$\mathcal{R}(t) = u + P(t) - S(t). \quad (2.2.1)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε πως η ποσότητα $S(t)$ και επομένως και η $\mathcal{R}(t)$ είναι τυχαίες μεταβλητές, για συγκεκριμένες τιμές του t , ενώ αν τις παρατηρήσουμε στη διάρκεια του χρόνου, η πρώτη μας δίνει τη στοχαστική ανέλιξη του εξόδων που προκύπτουν και η δεύτερη τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος.

Χρησιμοποιώντας μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές, $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ που αντιστοιχούν στα ύψη των εξόδων που φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο και μια απαριθμητρία στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ που εκφράζει το πλήθος των ζημιογόνων συμβάντων μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_i, \forall i$, μπορούμε να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων σαν μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη, όπως φαίνεται παρακάτω

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}$$

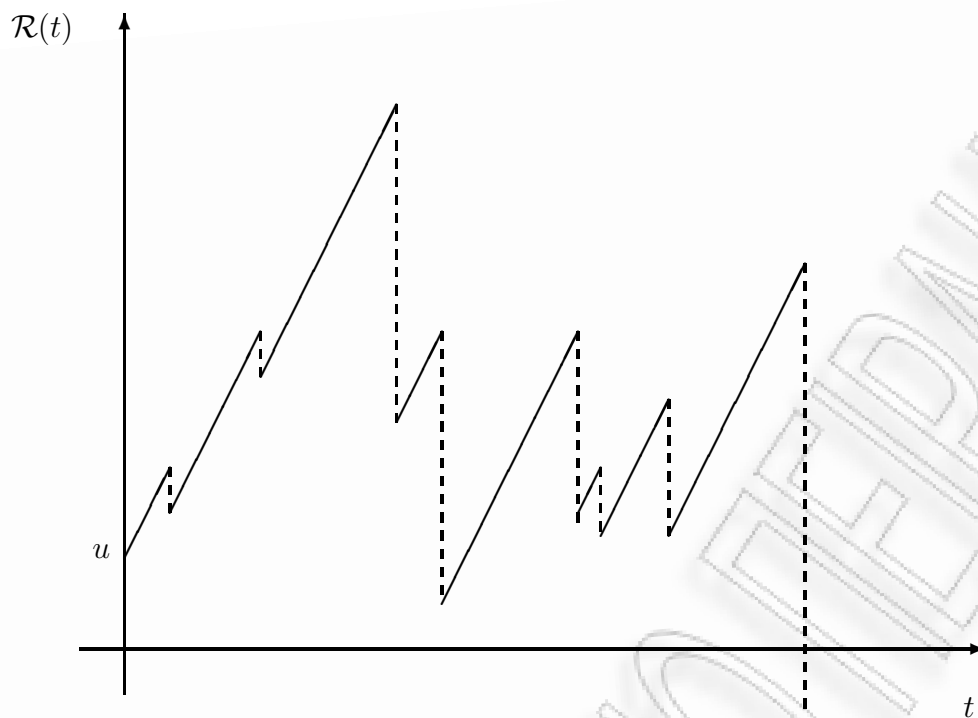
Τέλος, συνοψίζοντας έχουμε τον παρακάτω Ορισμό.

Ορισμός 2.2.1. Η στοχαστική ανέλιξη, $\{\mathcal{R}(t), t \geq 0\}$, καλείται στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος, αν για κάθε $t \geq 0$, η τιμή του πλεονάσματος ορίζεται από τη τυχαία μεταβλητή

$$\mathcal{R}(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου

- u = αρχικό αποθεματικό.
- $P(t)$ = συνολικά ασφάλιστρα που λαμβάνει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ (έσοδα).
- $S(t)$ = συνολικές αποζημιώσεις που καλείται να καλύψει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ (έξοδα).



Σχήμα 2.1: Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

2.2.2 Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στη προηγούμενη παράγραφο έγινε εισαγωγή στην έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος μέσω της οποίας θα δοθεί ο ορισμός του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνων. Στο μοντέλο αυτό βασίζεται μεγάλο πλήθος της έρευνας που γίνεται στο χώρο του αναλογισμού και θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ορισμός 2.2.2. Αν σε μια στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος $\{R(t), t \geq 0\}$ ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις

1. Η $P(t)$ είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή

$$P(t) = ct, \forall t,$$

όπου c είναι μια θετική σταθερά.

2. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i , που αντιστοιχούν στις αποζημιώσεις που πρέπει να καταβληθούν είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή συνάρτηση κατανομής F ,

με πυκνότητα f και i τάξης ροπή γύρω από το μηδέν, $\mu_i = E(X_i) = \int_0^\infty x^i dF(x)$ (με $\mu_1 := \mu$)

3. Η απαριθμητήρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο (ή ένταση) λ .

τότε έχουμε το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ή Μοντέλο. Cramér-Lundberg

Παρατήρηση

Από την υπόθεση ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Poisson, προκύπτουν τα εξής

1. Η στοχαστική ανέλιξη $\{S(t), t \geq 0\}$ που μας δίνει το συνολικό ύψος των αποζημιώσεων στο $[0, t]$, είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.
2. Αποδεικνύεται ότι, αφού η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη Poisson οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων που απαιτούν αποζημίωση ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Μια εισαγωγή στη Θεωρία Κινδύνων, μπορεί να γίνει μέσα από τα συγγράμματα των Bowers et al. (1986) και Kaas et al. (2004), ενώ μια πιο λεπτομερής προσέγγιση του θέματος γίνεται από τους Rolski et al. (1999) και Asmussen (2000).

Ορισμός 2.2.3. Στο κλασικό μοντέλο η σταθερά

$$c = \frac{P(t)}{t}, \quad (2.2.2)$$

που απεικονίζει το ασφάλιστρο που λαμβάνεται στη μονάδα του χρόνου, ονομάζεται ένταση του ασφαλιστρού.

Ορισμός 2.2.4. Η σταθερά

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1, \quad (2.2.3)$$

καλείται συντελεστής ασφαλείας ή περιθώριο ασφαλείας (*premium loading factor*) και εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή.

Παρατήρηση

1. Μια βασική υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, τα έσοδα του ασφαλιστή είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα του, το οποίο γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} E(ct) &> E\left(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right) \\ &\Rightarrow ct > \lambda\mu t \\ &\Rightarrow \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0. \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι κάτω από την παραπάνω υπόθεση, το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές.

2. Ο συντελεστής ασφαλείας, όπως έχει αναφερθεί μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή επομένως στη πράξη οι τιμές που παίρνει είναι μεταξύ 0 και 1 ή αν θέλουμε να εκφραστούμε με ποσοστά μεταξύ 0 και 100%.

2.2.3 Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Χρεοκοπία ονομάζεται η κατάσταση στην οποία υπεισέρχεται η επιχείρηση τη στιγμή που έχει χάσει την ικανότητα να εξοφλήσει τις υποχρεώσεις της προς τρίτους. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που το συνολικό αποθεματικό που διαθέτει δεν επαρκεί για την εξόφληση των οφειλών που προκύπτουν από τα ζημιογόνα συμβάντα. Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα δώσουμε τον ορισμό της πιθανότητας να συμβεί ένα τέτοιο γεγονός για το κλασικό μοντέλο, ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα που μελετάμε αυτό το ενδεχόμενο. Αν θεωρήσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

$$\mathcal{R}(t) = u + P(t) - S(t), \quad \forall t \geq 0$$

τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για χρονικό ορίζοντα

$$\mathcal{A} = \{ t \text{ για τα οποία θέλουμε να μελετήσουμε το πλεόνασμα } R(t) \} \subseteq \mathbb{R}^+,$$

ορίζεται, ως εξής

$$\begin{aligned} \psi(u) &= Pr(\mathcal{R}(t) < 0, \text{ για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u) \\ &= Pr(u + P(t) - S(t) < 0, \text{ για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Ανάλογα με το είδος του συνόλου \mathcal{A} , που εκφράζει το χρονικό διάστημα που θέλουμε να μελετήσουμε την ανέλιξη, η πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίζεται στις εξής τέσσερις κατηγορίες

1. Αν \mathcal{A} είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών δηλαδή, $\mathcal{A} = \{ t : t \in [0, \infty) \}$ τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο

$$\psi(u) = Pr(\mathcal{R}(t) < 0, \text{ για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u).$$

2. Αν \mathcal{A} είναι ένα συνεχές υποσύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών με πεπερασμένα άκρα, ισόμορφο με το $[0,1]$ δηλαδή, $\mathcal{A} = \{ t : t \in [a, b] \}$ τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και πεπερασμένο χρόνο

$$\psi(u, t) = Pr(\mathcal{R}(\tau) < 0, \text{ για κάποιο } \tau : 0 < \tau \leq t \mid u).$$

3. Αν $\mathcal{A} = \{ t : t \in [0, h, 2h, 3h, \dots], h \in \mathbb{N} \}$, δηλαδή ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών τότε ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για διακριτό και άπειρο χρόνο ως εξής

$$\psi_h(u) = Pr(\mathcal{R}(t) < 0, \text{ για κάποιο } t = 0, 1h, 2h, 3h, \dots, h \in \mathbb{N}).$$

4. Αν $\mathcal{A} = \{ t : t \in [0, h, 2h, 3h, \dots, nh], h \in \mathbb{N} \}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών, τότε έχουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό και πεπερασμένο χρόνο

$$\psi_h(u, t) = Pr(\mathcal{R}(\tau) < 0, \text{ για κάποιο } \tau = 0, 1h, 2h, 3h, \dots, nh, h \in \mathbb{N}).$$

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του κλασικού μοντέλου σε χρόνο συνεχή και άπειρο.

Ορισμός 2.2.5. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο, ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}\delta(u) &= Pr(\mathcal{R}(t) \geq 0, \text{ για κάθε } t | u) && (2.2.5) \\ &= Pr(u + P(t) - S(t) \geq 0, \text{ για κάθε } t | u) \\ &= 1 - \psi(u).\end{aligned}$$

2.2.4 Βασική υπόθεση

Όπως είδαμε στο κλασικό μοντέλο υποθέτουμε πάντα ότι το περιθώριο ασφαλείας είναι θετικό συνεπώς βάσει της (2.2.3) παίρνουμε ότι

$$c > \lambda\mu, \quad (2.2.6)$$

όπου λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson. Έτσι, εξασφαλίζουμε ότι η μέση τιμή των εσόδων του ασφαλιστή στη μονάδα του χρόνου θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέση τιμή των εξόδων του.

Παρατηρήσεις

1. Αν δεν ισχύει η συνθήκη $c > \lambda\mu$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι σίγουρη αφού σε κάθε χρονική στιγμή τα αναμενόμενα έξοδα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα έσοδα, δηλαδή

$$\psi(u) = 1, \quad \forall u \geq 0.$$

2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του u αφού όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει η πιθανότητα για χρεοκοπία. Αντίθετα, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι αύξουσα συνάρτηση του u . Επομένως, ισχύουν τα εξής

(α')

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0,$$

(β')

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1.$$

3. Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση κατανομής, αφού έχει τις παρακάτω ιδιότητες

(α') είναι αύξουσα ως προς u ,

(β') είναι συνεχής από δεξιά,

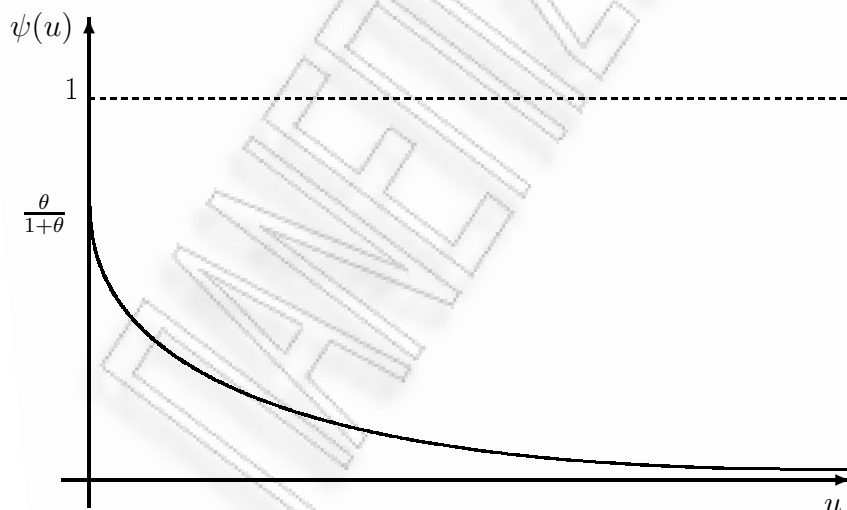
(γ') $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$.

4. Η $\delta(u)$ αντιστοιχεί σε μεικτή κατανομή, αφού

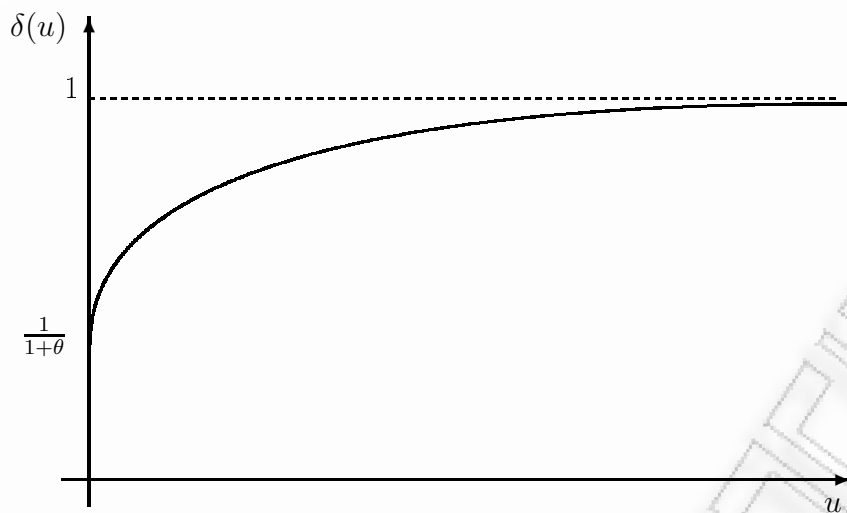
(α') $\delta(0) > 0$,

(β') $\delta(u)$ έχει πυκνότητα στο $(0, \infty)$, άρα είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Στα Σχήματα 2.2 και 2.3 φαίνεται η γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας και της πιθανότητας μη χρεοκοπίας συναρτήσει του αποθεματικού u , αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας

Πρόταση 2.2.1. Στο κλασικό μοντέλο σε συνεχή και άπειρο χρόνο, με $u \geq 0$, ισχύουν τα εξής

1.

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) f(x) dx, \quad (2.2.7)$$

2.

$$\delta(u) = \delta(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx, \quad (2.2.8)$$

όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων X_i .

3.

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\theta}{1+\theta} \quad (2.2.9)$$

και

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}. \quad (2.2.10)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986) και Kaas et al. (2004). □

2.2.5 Πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και πεπερασμένο χρόνο

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου σε συνεχή και πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, t]$, εξαρτάται εκτός από το αρχικό αποθεματικό u και από το μήκος του διαστήματος t . Αυτή η επιπλέον παράμετρος, εμποδίζει ακόμα και σε απλές περιπτώσεις (όπως η εκθετική κατανομή) τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για το λόγο αυτό περιοριζόμαστε στη δημιουργία προσεγγίσεων και φραγμάτων της πιθανότητας $\psi(u, t)$.

Λήμμα 2.2.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων και για αρχικό αποθεματικό $u=0$, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u, t) = 1 - \psi(u, t)$ στο $[0, t]$, έχει το εξής άνω φράγμα

$$\delta(u, t) \leq \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{\mu_2}{\theta \mu} \frac{1}{ct}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.11)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986). □

Πρέπει να αναφέρουμε πως η πιθανότητα χρεοκοπίας για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο συνδέονται με τη σχέση

$$\psi(u, t) = \psi(u) Pr[T \leq t | T < \infty], \quad (2.2.12)$$

όμως, για μεγάλες τιμές του u ισχύει το εξής

$$Pr[T \leq t | T < \infty] \sim \Phi\left(\frac{t - m}{\sigma}\right),$$

όπου $\Phi(\cdot)$, η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής και

$$m = E[T \leq t | T < \infty],$$

$$\sigma^2 = Var[T \leq t | T < \infty].$$

(βλέπε Segerdahl (1955)).

2.2.6 Ανανεωτική Εξίσωση για την Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Αντικαθιστώντας, την τιμή $\delta(0)$ στην εξίσωση (2.2.8), έχουμε

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx. \quad (2.2.13)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω εξίσωση θα ορίσουμε μια νέα συνάρτηση κατανομής την $H_R(x)$. Αν ολοκληρώσουμε την ουρά των αποζημιώσεων $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ και διαιρέσουμε με την μέση τιμή, μ , τότε θα πάρουμε την συνάρτηση κατανομής

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y)dy \quad (2.2.14)$$

που καλείται κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution) της F . Επομένως η εξίσωση (2.2.13) γίνεται

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \delta(u-x)dF_e(x) \quad (2.2.15)$$

και αντίστοιχα η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με

$$1 - \delta(u) = \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \delta(u-x)dF_e(x). \quad (2.2.16)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u [1 - \psi(u-x)]dF_e(x) \\ &= \left(\frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} F_e(x) \right) + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \psi(u-x)dF_e(x) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \bar{F}_e(u) + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \psi(u-x)dF_e(x), \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

όπου $\bar{F}_e(x) = 1 - F_e(x)$. Παρατηρούμε, πως η εξίσωση (2.2.17) είναι μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, αφού έχουμε υποθέσει ότι ισχύει η συνθήκη

$$\lambda\mu < c \Rightarrow \frac{\lambda\mu}{c} < 1$$

και επιπλέον έχουμε ότι η συνολική μάζα πιθανότητας της F_e ισούται με την μονάδα, εφόσον

$$\|F_e\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(x)dx = \frac{\mu}{\mu} = 1.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πως η εξίσωση (2.2.17) μπορεί να μετατραπεί σε μια κανονική ανανεωτική εξίσωση, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός R τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dF_e(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = \frac{1}{1+\theta}. \quad (2.2.18)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (2.2.17) με e^{Ru} έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(u)e^{Ru} &= \frac{\lambda\mu}{c}\overline{F}_e(u)e^{Ru} + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \psi(u-x)e^{Ru}dF_e(x) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c}\overline{F}_e(u)e^{Ru} + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u e^{R(u-x)}\psi(u-x)e^{Rx}dF_e(x). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Προκειμένου να καταλήξουμε στην κανονική ανανεωτική εξίσωση θα ορίσουμε την εξής αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Ορισμός 2.2.6. Αν η ουρά του ύψους των αποζημιώσεων είναι $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ τότε ορίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$H_R(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^x e^{Rt}d\overline{F}_e(t). \quad (2.2.20)$$

Το διαφορικό της $H_R(x)$ είναι ίσο με

$$dH_R(x) = \frac{\lambda}{\mu c}e^{Rx}dF_e(x) \quad (2.2.21)$$

Άρα, με βάση τον Ορισμό 2.2.6, η εξίσωση (2.2.19) λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\psi(u)e^{Ru} = \frac{\lambda\mu}{c}\overline{F}_e(u)e^{Ru} + \int_0^u e^{R(u-x)}\psi(u-x)dH_R(x), \quad (2.2.22)$$

όπου

$$\|H_R\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{c}\int_0^x e^{Rt}\overline{F}(t)dt = \frac{\lambda}{c}\frac{c}{\lambda} = 1. \quad (2.2.23)$$

Παρατηρούμε πως η εξίσωση (2.2.22) αποτελεί την κανονική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η (2.2.18).

2.2.7 Συντελεστής Προσαρμογής

Στη προηγούμενη παράγραφο αναφερθήκαμε στην ύπαρξη μιας θετικής σταθεράς R προκειμένου να υπολογίσουμε την ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η σταθερά αυτή καλείται συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient) και ο υπολογισμός της γίνεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{Rx} dF_e(x) &= \frac{c}{\lambda\mu} \\ \Rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{Rx} \bar{F}(x) dx &= \frac{c}{\lambda\mu} \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{Rx} \bar{F}(x) dx &= \frac{c}{\lambda}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{R}e^{Rx}\right)' \bar{F}(x) dx &= \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{R}e^{Rx}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{R}e^{Rx} f(x) dx &= \frac{c}{\lambda} \\ \Rightarrow -\frac{1}{R} + \int_0^{\infty} \frac{1}{R}e^{Rx} f(x) dx &= \frac{c}{\lambda} \\ \Rightarrow -\frac{1}{R} + M_X(R) &= \frac{c}{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

όπου $M_X(R)$, η ροπογεννήτρια της κατανομής των X_i .

Από την εξίσωση (2.2.24), παρατηρούμε πως ο συντελεστής προσαρμογής R υπολογίζεται σαν λύση της παρακάτω εξίσωσης ως προς r

$$-\frac{1}{r} + M_X(r) = \frac{c}{\lambda} \tag{2.2.25}$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$, βλέπουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής ικανοποιεί την ισοδύναμη εξίσωση

$$M_X(R) = (1 + \theta)\mu R + 1. \tag{2.2.26}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα από τα πρώτα αποτελέσματα που δόθηκαν στο κλασικό μοντέλο, την ανισότητα του Lundberg.

Θεώρημα 2.2.1. Έστω το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg με

$$\mathcal{R}(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη $\theta > 0$ και επιπλέον υπάρχει θετική σταθερά R , τέτοια ώστε

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dF_e(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \theta,$$

τότε ισχύει ότι

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0. \quad (2.2.27)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986). □

Στην ειδική περίπτωση όπου τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u , δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta u}{\mu(\theta+1)}}. \quad (2.2.28)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι σαφές ότι για τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής αναγκαία συνθήκη είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια της κατανομής που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων. Σε πολλές κατανομές δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια, όπως για παράδειγμα στη Pareto και τη Weibull(τ, γ), με $\gamma < 1$, ή δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικός τύπος για αυτήν, όπως στην Weibull(τ, γ), με $\gamma > 1$. Στις περιπτώσεις αυτές είναι απαραίτητο να βρεθούν κάποια φράγματα για το συντελεστή προσαρμογής, λόγω της σημαντικότητας που παρουσιάζει αυτός στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής μπορεί να προκύψει αν πάρουμε το ανά-

πτυγμα Taylor της ροπογεννήτριας γύρω από το μηδέν. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
 M_X(R) &= E(e^{Rx}) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Rx)^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} E\left(\frac{(Rx)^i}{i!}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R^i E(x^i)}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(R)^i \mu_i}{i!} \\
 &= 1 + R\mu + \frac{R^2 \mu_2}{2} + \frac{R^3 \mu_3}{6} + \dots \quad (2.2.29)
 \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας το αριστερό μέλος της (2.2.29) από την (2.2.26) και χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους της σειράς, έχουμε

$$1 + R\mu + \frac{R^2 \mu_2}{2} > (1 + \theta)\mu R + 1.$$

Μετά από πράξεις παίρνουμε

$$\frac{R^2 \mu_2}{2} + (R - (1 + \theta)\mu) < 0.$$

Επομένως ένα άνω φράγμα για το R είναι το εξής

$$R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2}. \quad (2.2.30)$$

Αν πάρουμε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor θα έχουμε

$$R < \frac{12\theta\mu}{\sqrt{9\mu^2 + 24\theta\mu\mu_3 + 3\mu}}. \quad (2.2.31)$$

Είναι σαφές πως όσο περισσότερους όρους χρησιμοποιούμε από το ανάπτυγμα της ροπογεννήτριας, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια του φράγματος επιτυγχάνουμε. Στο Σχήμα 2.4 φαίνεται γραφικά η ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής.

2.2.8 Κάποιες τυχαίες μεταβλητές που συνδέονται με τη πιθανότητα χρεοκοπίας

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές τυχαίες μεταβλητές που μας βοηθούν στη μελέτη της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ορισμός 2.2.7. Η τυχαία μεταβλητή

$$T = \begin{cases} \inf \{t : \mathcal{R}(t) < 0\} \\ \infty, & \text{αν } \mathcal{R}(t) \geq 0 \ \forall t, \end{cases}$$

καλείται χρόνος χρεοκοπίας.

Παρατηρήσεις

1. Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική (defective) τυχαία μεταβλητή, αφού
(α') $Pr(\text{να συμβεί χρεοκοπία}) = Pr(T < \infty) < 1$,
(β') $Pr(\text{να μην συμβεί χρεοκοπία}) = Pr(T = \infty) > 0$.
2. Ισχύει, ότι $Pr(T = \infty) = Pr(\mathcal{R}(t) > 0, \forall t) = 1 - \psi(u) = \delta(u)$.

Ορισμός 2.2.8. Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν την χρονική στιγμή $t = T$ καλείται έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(T)$ ή αν θέλουμε να το εκφράσουμε σε θετική κλίμακα με $-\mathcal{R}(T)$.

Ορισμός 2.2.9. Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρονική στιγμή $t = T$ καλείται πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία συμβολίζεται με $\mathcal{R}(T-)$ και δίνεται από τον τύπο $\mathcal{R}(T-) = \lim_{t \rightarrow T-} \mathcal{R}(t)$.

Ορισμός 2.2.10. Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u , συμβολίζεται με L_1 .

Αν η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u έγινε τη χρονική στιγμή t_1 με το πλεόνασμα να είναι ίσο με $\mathcal{R}(t_1) = u_1$, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή την L_2 που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό u_1 . Επομένως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία δημιουργούμε μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές, L_3, L_4, \dots, L_i , οι οποίες απεικονίζουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος, όταν για πρώτη φορά πέσει κάτω από, u_2, u_3, \dots, u_{i-1} , αντίστοιχα.

Πόρισμα 2.2.1. Αν ισχύει η συνθήκη $c > \lambda \mu$ στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, τότε το πλήθος των L_i που εμφανίζονται (έστω K), είναι πεπερασμένο και μάλιστα ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $\delta(0)$, δηλαδή

$$K \sim Geo(\delta(0)) \Rightarrow \quad (2.2.32)$$

$$Pr(K = x) = [\psi(0)]^x \delta(0) \Rightarrow \quad (2.2.33)$$

$$Pr(K = x) = \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^x \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (2.2.34)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986). □

Ορισμός 2.2.11. Στο κλασικό μοντέλο, ορίζουμε σαν μέγιστη σωρευτική απώλεια την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το σύνολο της πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας. Την συμβολίζουμε με L και ισούται με

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_K = \sum_{i=0}^K L_i. \quad (2.2.35)$$

Παρατηρήσεις

1. Η L είναι σύνθετη γεωμετρική τυχαία μεταβλητή.
2. Η τυχαία μεταβλητή L έχει μεικτή κατανομή εφόσον έχει θετική μάζα στο σημείο 0 ενώ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.
3. $Pr(L = 0) = Pr(K = 0) = \delta(0)$.

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο η τυχαία μεταβλητή L , να υπερβεί το αρχικό αποθεματικό είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία, δηλαδή

$$Pr(L > u) = \psi(u) \quad (2.2.36)$$

ή ισοδύναμα

$$Pr(L \leq u) = \delta(u). \quad (2.2.37)$$

Στο Σχήμα 2.5 φαίνονται γραφικά οι τυχαίες μεταβλητές L_1, L , και $\mathcal{R}(T)$.

Λήμμα 2.2.2. Για την τυχαία μεταβλητή L_1 , η οποία ορίζεται στο κλασικό μοντέλο στην περίπτωση που συμβεί πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u , ισχύουν τα εξής

1. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της ισούται με

$$F_{L_1}(x) = Pr(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu} [1 - F_X(t)] dt = F_e(x). \quad (2.2.38)$$

2. Η ροπογεννήτρια της είναι η

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu} (M_X(r) - 1). \quad (2.2.39)$$

3. Ειδικότερα, για την περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές X_i , ακολουθούν εκθετική κατανομή, με παράμετρο β τότε και η τυχαία μεταβλητή L_1 , ακολουθεί εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.

4. Η r τάξης ροπή της (γύρω από το μηδέν) είναι ίση με

$$E(L_1^r) = \frac{\mu_{r+1}}{\mu(r+1)}. \quad (2.2.40)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986) και Kaas et al. (2004). □

Όπως έχουμε αναφέρει η κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας, ακολουθεί μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, επομένως η ροπογεννήτρια της δίνεται από την σχέση

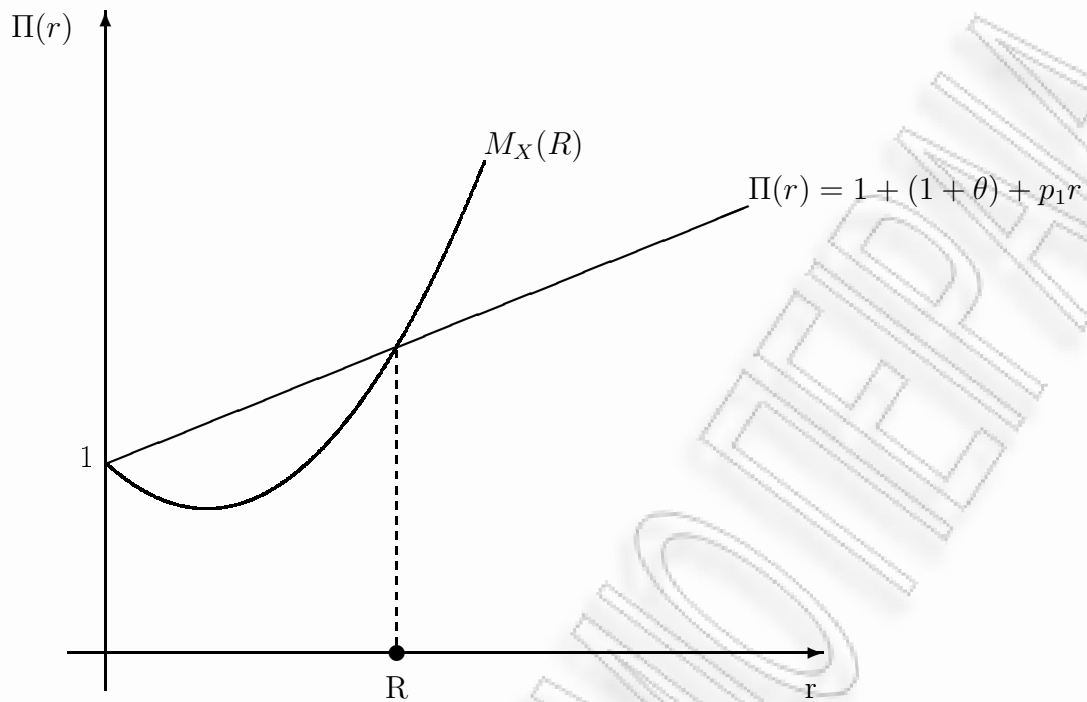
$$M_L(r) = M_K(\ln(M_{L_1}(r))), \quad (2.2.41)$$

όπου

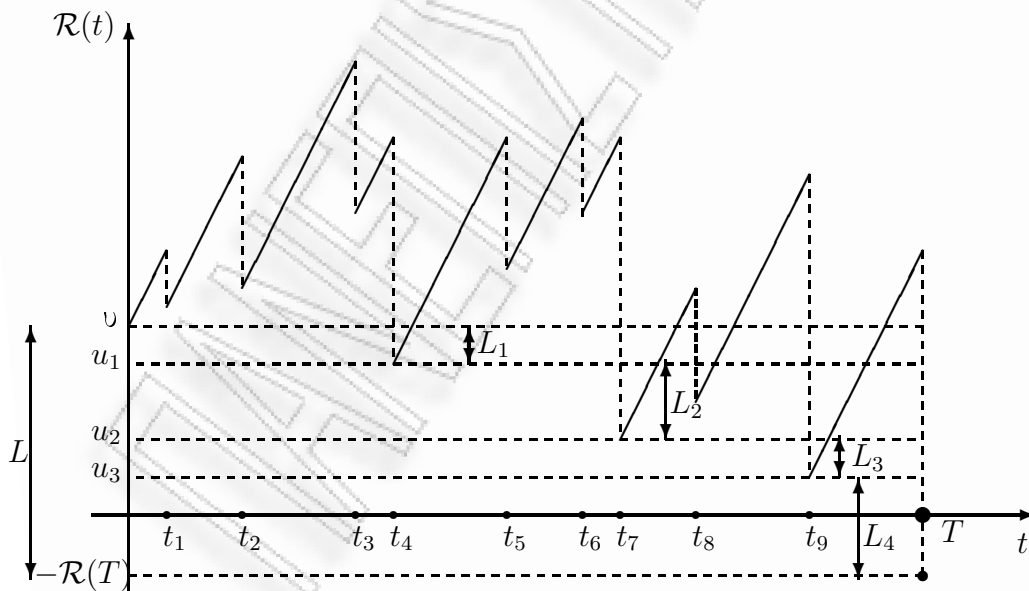
$$M_K(r) = E(e^{rK}) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)e^r} \quad (2.2.42)$$

και αφού

$$K \sim Geo(\delta(0)),$$



Σχήμα 2.4: Συντελεστής προσαρμογής



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και απεικόνιση των βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών L_1 και L .

αν αντικαταστήσουμε τις (2.2.39) και (2.2.42) στην (2.2.41) θα προκύψει ότι

$$M_L(r) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}M_{L_i}(r)} = \frac{\theta}{(1+\theta) - M_{L_i}(r)}. \quad (2.2.43)$$

Λήμμα 2.2.3. Στο κλασικό μοντέλο για τη μέγιστη σωρευτική απώλεια ισχύουν τα εξής

1. έχει μέση τιμή

$$E(L) = \frac{1\mu_2}{\theta\mu} \quad (2.2.44)$$

και

2. διασπορά

$$Var(L) = \frac{\mu_3}{3\theta\mu} + \left(\frac{\mu_2}{2\theta\mu}\right)^2. \quad (2.2.45)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986) και Kaas et al. (2004). \square

Θεώρημα 2.2.2. Στο κλασικό μοντέλο, αν $L = L_1 + L_1 + \dots + L_K$, είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια, όπου L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και $K \sim Geo(\delta(0))$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u , δίνεται από τον τύπο

$$\delta(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} F_e^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k, \quad (2.2.46)$$

όπου $F_e^{*k}(u) = Pr(L_1 + L_2 + \dots + L_K = u)$, είναι η συνέλιξη της H , με τον εαυτό της k φορές.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \delta(u) &= Pr(L \leq u) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr(L \leq u | K = k) Pr(K = k) \\ &= Pr(K = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} Pr(L_1 + L_2 + \dots + L_K \leq u) Pr(K = k) \\ &= \delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} F_e^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}. \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

Όμως, αν ορίσουμε

$$F_e^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

τότε η (2.2.47) γίνεται

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \frac{\theta}{1+\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} F_e^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^0 F_e^{(0)}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} F_e^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} F_e^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k.\end{aligned}\tag{2.2.48}$$

□

Θα πρέπει να τονίσουμε πως το προηγούμενο θεώρημα μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι έννοιες ταυτόσημες. Έτσι κάθε ιδιότητα που αποδεικνύεται για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής μεταφέρεται και στην πιθανότητα χρεοκοπίας και αντίστροφα.

2.2.9 Εφαρμογές

Στην παρούσα παράγραφο, θα ασχοληθούμε με τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για πολλές κατανομές, ο υπολογισμός ενός αναλυτικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι δύσκολος έως και ακατόρθωτος. Για το λόγο αυτόν θα περιοριστούμε στην παρουσίαση δύο μεθόδων υπολογισμού, στις περιπτώσεις που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν μια από τις παρακάτω κατανομές

1. Εκθετική κατανομή,
2. Γάμμα κατανομή,
3. Συνδυασμό Εκθετικών κατανομών,
4. Συνδυασμό Γάμμα κατανομών.

Μέθοδος 1 (Bowers et al. (1986))

Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται άμεσα από τη συνάρτηση κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L .

Παράδειγμα

Έστω, $X_i \sim \text{Εκθετική}(b)$, $b > 0$. Αρχικά, θα υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής L

$$\begin{aligned} M_L(r) &= \frac{\theta}{1 + \theta - M_{X_i}(r)} \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta - \frac{b}{b-r}}, \quad r < b. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι η τυχαία μεταβλητή L , είναι μεικτή¹ θα γράψουμε τη ροπογεννήτρια σαν άθροισμα δύο μελών, με το ένα από αυτά να αντιστοιχεί στο διακριτό και το άλλο στο συνεχές κομμάτι της.

$$\begin{aligned} M_L(r) &= \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{\theta}{1 + \theta - \frac{b}{b-r}} - \frac{\theta}{1 + \theta} \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{\theta(b-r)}{(1 + \theta)(b-r) - b} - \frac{\theta}{1 + \theta} \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \left[\frac{(1 + \theta)\theta(b-r) - \theta[b + \theta b - r - r\theta - b]}{b + b\theta - r - r\theta - b} \right] \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \left[\frac{(1 + \theta)(\theta b - \theta r) - \theta^2 b + r\theta + r\theta^2}{\theta b - r(1 + \theta)} \right] \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \frac{\theta b}{\theta b - r(1 + \theta)} \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \frac{\frac{\theta b}{1 + \theta}}{\frac{\theta b}{1 + \theta} - r}. \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

Στην εξίσωση (2.2.49), παρατηρούμε πως ο όρος

$$\frac{\theta}{1 + \theta},$$

¹Έχει μάζα στο μηδέν ($\delta(0) = \theta/(1 + \theta)$) και είναι συνεχής στο $(0, \infty)$

αντιστοιχεί στο διακριτό κομμάτι της κατανομής ενώ το

$$\frac{1}{1 + \theta \frac{\theta b}{1 + \theta} - r},$$

στο συνεχές κομμάτι της και αποτελεί τη ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής πολλαπλασιασμένη με $\frac{1}{1 + \theta}$. Με βάση τα παραπάνω, η τυχαία μεταβλητή L έχει

1. Μάζα στο μηδέν που ισούται $\delta(0) = Pr(L \leq 0) = \frac{1}{1 + \theta}$,

2. Είναι συνεχής στο $(0, \infty)$, με πυκνότητα

$$Pr(L = x) = \frac{1}{1 + \theta} \frac{\theta b}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta b}{1 + \theta} x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της L , είναι

$$Pr(L \leq u) = 1 - \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta b}{1 + \theta} u}$$

και άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον παρακάτω, τύπο

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta b}{1 + \theta} u}.$$

Όμως, όπως έχουμε αποδείξει ο όρος $\frac{\theta b}{1 + \theta}$, ισούται με το συντελεστή προσαρμογής R στην περίπτωση που τα ύψη αποζημίωσης ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Άρα, έχουμε

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-Ru} \tag{2.2.50}$$

και αφού $\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$, ισχύει

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}. \tag{2.2.51}$$

Μέθοδος 2

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε στη δεύτερη μέθοδο περιγράφηκε από τους Gerber, Goovaerts and Kaas (1987) και εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που το ύψος της κάθε αποζημίωσης ακολουθεί μείξη εκθετικών ή και γάμμα κατανομών. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας $p_i(x)$ που αντιστοιχούν σε κατανομές του ίδιου τύπου αλλά με

διαφορετικές παραμέτρους, τότε ορίζουμε σαν συνδυασμό (combination) των κατανομών αυτών, την κατανομή εκείνη που έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας

$$p(x) = \sum_{j=1}^n A_j p_i(x), \quad (2.2.52)$$

όπου οι σταθερές A_j , έχουν την ιδιότητα

$$\sum_{j=1}^n A_j = 1.$$

Στην περίπτωση που οι σταθερές A_j είναι επιπλέον και θετικές, τότε ορίζεται η μείξη (mixture) των κατανομών.

Α. Συνδυασμός Εκθετικών κατανομών

Έστω οι εκθετικές κατανομές

$$p_j(x) = b_j e^{-b_j x}, \quad x > 0 \quad (2.2.53)$$

και ο συνδυασμός τους είναι

$$p(x) = \sum_{j=1}^n A_j b_j e^{-b_j x}, \quad x > 0, \quad (2.2.54)$$

με

$$\sum_{j=1}^n A_j = 1$$

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνδυασμό των εκθετικών κατανομών, ορίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^n C_k e^{-r_k u} \quad (2.2.55)$$

όπου για $k = 1, 2, 3, \dots, n$ οι σταθερές C_k υπολογίζονται από τη σχέση

$$C_k = \sum_{j=1}^n \frac{C_{jk}}{b_j} \quad (2.2.56)$$

με

$$C_{jm} = \frac{\frac{A_j}{(b_j - r_m)}}{\sum_i^n \frac{A_i}{(b_j - r_m)^2}} \quad (2.2.57)$$

και r_1, r_2, \dots, r_n οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης

$$\frac{\lambda}{c} \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{(b_j - r)^2} = 1, \quad (2.2.58)$$

ως προς r . Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2.2.58), είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής R , συνεπώς η μικρότερη από αυτές τις ρίζες συμπίπτει με τον R .

B. Συνδυασμός Γάμμα κατανομών

Έστω οι κατανομές Γάμμα

$$p_i(x) = b_j^2 x e^{-b_j x}, \quad x > 0 \quad (2.2.59)$$

και ο συνδυασμός τους

$$p(x) = \sum_{j=1}^n A_j b_j^2 x e^{-b_j x}, \quad x > 0, \quad (2.2.60)$$

με

$$\sum_{j=1}^n A_j = 1.$$

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για το συνδυασμό των Γάμμα($2, b_j$), $j = 1, 2, \dots, n$ ορίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{2n} C'_k e^{-r_k u}, \quad (2.2.61)$$

όπου

$$C'_k = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty C'_{jk}(y) e^{-b_j x} dy \quad (2.2.62)$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n A_j \frac{3 - 2r_k}{b_j}}{\sum_{j=1}^n A_j \frac{3b_j - r_k}{(b_j - r_k)^2}} \quad (2.2.63)$$

και r_1, r_2, \dots, r_n οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης

$$1 - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=1}^n A_j \frac{2b_j - r}{(b_j - r)^2} = 0. \quad (2.2.64)$$

Όμοια με την εκθετική περίπτωση, η μικρότερη από τις ρίζες αντιστοιχεί στο συντελεστή προσαρμογής.

Παραδείγματα (Gerber, Goovarents and Kaas (1987))

1. Συνδυασμός εκθετικών κατανομών

Αν θεωρήσουμε τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών

$$p(x) = A_1 p_1(x) + A_2 p_2(x) \quad (2.2.65)$$

με $p_1(x) = 3e^{-3x}$ και $p_2(x) = 4e^{-4x}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$, $c = 1$, $A_1 = 4$ και $A_2 = -3$, τότε έχουμε ότι

$$p(x) = 12e^{-3x} - 12e^{-4x}. \quad (2.2.66)$$

Η λύση της (2.2.49) ως προς r , μας δίνει

$$r_1 = R = 1 \text{ και } r_2 = 5.$$

Από την (2.2.57) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{\frac{A_1}{(b_1-r_1)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_1-r_1)^2}} = 3, \\
 C_{12} &= \frac{\frac{A_1}{(b_1-r_2)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_1-r_2)^2}} = 1, \\
 C_{21} &= \frac{\frac{A_2}{(b_2-r_1)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_2-r_1)^2}} = -\frac{3}{2}, \\
 C_{22} &= \frac{\frac{A_2}{(b_2-r_2)}}{\frac{\sum_i^2 A_i}{(b_2-r_2)^2}} = -\frac{3}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.67}$$

Επομένως, η (2.2.56) μας δίνει

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sum_{j=1}^2 \frac{C_{j1}}{b_j} = \frac{5}{8}, \\
 C_2 &= \sum_{j=1}^2 \frac{C_{j2}}{b_j} = -\frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας, βάσει της (2.2.55), δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = \frac{5}{8}e^{-u} - \frac{1}{24}e^{-5u}.
 \tag{2.2.68}$$

2. Μείξη γάμμα κατανομών

Έστω η μείξη δύο Γάμμα(2, b_j) κατανομών

$$p(x) = A_1 p_1(x) + A_2 p_2(x)
 \tag{2.2.69}$$

με $p_1(x) = b_1^2 e^{-b_1 x}$, $b_1 = 3 - \sqrt{3}$ και $p_2(x) = b_2^2 e^{-b_2 x}$, $b_2 = 3 + \sqrt{3}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$, $c = 2$, $A_1 = \frac{1}{2}$ και $A_2 = \frac{1}{2}$, τότε έχουμε την εξής μείζη

$$p(x) = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{3})^2 e^{-(3-\sqrt{3})x} + \frac{1}{2} (3 + \sqrt{3})^2 e^{-(3+\sqrt{3})x}. \quad (2.2.70)$$

Η λύση της (2.2.64) ως προς r , μας δίνει

$$r_1 = R = 0.506, \quad r_2 = 1.756, \quad r_3 = 3.544 \quad \text{και} \quad r_4 = 5.685.$$

Από την (2.2.63) προκύπτει ότι

$$C'_1 = \frac{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3 - 2r_1}{b_j (b_j - r_1)^2}}{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3b_j - r_1}{(b_j - r_1)^2}} = 0.517,$$

$$C'_2 = \frac{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3 - 2r_2}{b_j (b_j - r_2)^2}}{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3b_j - r_2}{(b_j - r_2)^2}} = -0.070,$$

$$C'_3 = \frac{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3 - 2r_3}{b_j (b_j - r_3)^2}}{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3b_j - r_3}{(b_j - r_3)^2}} = 0.089,$$

$$C'_4 = \frac{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3 - 2r_4}{b_j (b_j - r_4)^2}}{\sum_{j=1}^2 A_j \frac{3b_j - r_4}{(b_j - r_4)^2}} = -0.036.$$

Άρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας την (2.2.61), δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = 0.517e^{-0.506u} - 0.070e^{-1.765u} + 0.089e^{-3.544u} - 0.036e^{-5.685u}. \quad (2.2.71)$$

2.2.10 Ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου

Η παράγραφος αυτή είναι αφιερωμένη στη μελέτη της συμπεριφοράς της πιθανότητας χρεοκοπίας για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού. Θα παραθέσουμε τρία θεωρήματα που περιγράφουν αντίστοιχα την συμπεριφορά αυτή για την περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων

1. έχουν ελαφριά ουρά (υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής),
2. ανήκουν στην κλάση \mathcal{S}^* ,
3. ανήκουν στην κλάση $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$.

Θεώρημα 2.2.3. Έστω το κλασικό μοντέλο Cramér-Lundberg με

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0,$$

αν υποθέσουμε ότι $\theta > 0$, $\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) < \infty$ και επιπλέον ότι υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \theta,$$

τότε υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια ώστε να ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty \quad (2.2.72)$$

δηλαδή,

$$\exists C > 0 : \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1. \quad (2.2.73)$$

Η σταθερά C ισούται με

$$C = \frac{\theta\mu}{M'_X(R) - \mu(1 + \theta)}, \quad (2.2.74)$$

όπου $M'_X(t)$ η παράγωγος της ροπογεννήτριας που έχει η κατανομή των υψών αποζημιώσης.

Απόδειξη. Βλέπε Bowers et al. (1986). □

Θεώρημα 2.2.4. Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ισχύουν τα εξής

$$F_e \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1 - \psi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_e(u)} = \frac{\phi}{1 - \phi} \Leftrightarrow \psi(u) \sim \frac{\phi}{1 - \phi} \overline{F}_e(u). \quad (2.2.75)$$

Απόδειξη. Βλέπε Goldie και Klüppelberg (1998). \square

Θεώρημα 2.2.5. Αν στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων υποθέσουμε ότι τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλάση $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$ και υποθέσουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

1. $F \in \mathcal{S}(\gamma)$,

2. $1 - \psi \in \mathcal{S}(\gamma)$,

3.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}(u)} = \frac{\phi(1 - \phi)}{\mu\gamma(1 - \phi \int_0^\infty e^{\gamma y} dF_e(y))}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Goldie και Klüppelberg (1998). \square

Ο Omey (1988) στο θεώρημα που θα αναφέρουμε μελέτησε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνέλιξης δυο συναρτήσεων όταν και οι δυο αυτές συναρτήσεις έχουν την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά με μια συνάρτηση που ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών πυκνοτήτων.

Θεώρημα 2.2.6 (Omey(1988), Θεώρημα 2.1). Έστω f και g συνεχής και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[0, \infty)$ και $m \in \mathcal{Sd}$ συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύουν $f(x) \sim Am(x)$ και $g(x) \sim Bm(x)$, ($A, B \in \mathbb{R}$), τότε

$$(f \otimes g)x \sim \left(A \int_0^\infty g(y)dy + B \int_0^\infty f(y)dy \right) m(x). \quad (2.2.76)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα για να αποδείξουμε ότι αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι υποεκθετική πυκνότητα. Θα θεωρήσουμε ότι $f = \psi$, $g = \psi$ και $m = \overline{F}_e/\mu_e$ όπου $\mu_e = \int_0^\infty x dF_e(x)$.

Πρόταση 2.2.2. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε $\psi(u) \in \mathcal{Sd}$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.4.3 γνωρίζουμε ότι αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε $\overline{F}_e \in \mathcal{S}d$. Επίσης από το Θεώρημα 2.2.4 γνωρίζουμε ότι αν $F_e \in \mathcal{S}$ τότε $\psi(u) \sim \frac{\phi}{1-\phi} \overline{F}_e(u)$ και τέλος από το Θεώρημα 2.2.6 όπως προαναφέρθηκε αν θέσουμε $f = \psi$, $g = \psi$, $m = \overline{F}_e/\mu_e$ και $A = B = \frac{\phi}{1-\phi}$ θα έχουμε

$$(\psi \otimes \psi)(u) \sim \frac{2\phi}{1-\phi} \overline{F}_e(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Επομένως

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi \otimes \psi)(u)}{\psi(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi \otimes \psi)(u) \overline{F}_e(u)}{\overline{F}_e(u) \psi(u)} = \frac{2\phi}{1-\phi} \frac{1-\phi}{\phi}.$$

Συνεπώς

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi \otimes \psi)(u)}{\psi(u)} = 2$$

και άρα $\psi(u) \in \mathcal{S}d$. □

2.3 Μελέτη του κλασικού μοντέλου με διάχυση

Το γενικευμένο κλασικό μοντέλο εισήγαγε ο Gerber το 1970. Στην περίπτωση αυτή, έχει προστεθεί στη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος του κλασικού μοντέλου και μια ανεξάρτητη ανέλιξη Wiener, $W(t)$. Πάρα πολλά χαρακτηριστικά του απλού κλασικού μοντέλου έχουν γενικευτεί στο μοντέλο με την διάχυση. Τα κυριότερα εκ των οποίων θα περιγράψουμε στην ενότητα αυτή. Αρχικά θα δώσουμε δύο ορισμούς. Ο πρώτος αφορά την ανέλιξη Wiener και ο δεύτερος την γενικευμένη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος που περιλαμβάνει και διάχυση.

Ορισμός 2.3.1. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ καλείται κίνηση Brown ή Wiener με παραμέτρους $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, αν για κάθε $y \geq 0$ και $t > 0$ ισχύει ότι

1. Η τυχαία μεταβλητή

$$X_{t+y} - X_y \sim N(\alpha t, t\beta^2).$$

2. Η τυχαία μεταβλητή $X_{t+y} - X_y$ είναι ανεξάρτητη από τις X_u για κάθε $0 \leq u \leq y$ με $X_0 = 0$ ή $X_0 = x_0$, όπου x_0 κάποια σταθερά.

Οι σταθερές α και β καλούνται τάση (drift) και μεταβλητότητα (volatility), αντίστοιχα.

Όμοια με το κλασικό μοντέλο η αξία του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας στην περίπτωση που υπάρχει και η ανέλιξη Wiener ισούται με

$$\mathcal{R}(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i + \sigma W(t),$$

όπου $\sigma > 0$ και για την ανέλιξη, $\{W(t), t \geq 0\}$, ισχύουν $\alpha = 0$ και $\beta = 1$. Θεωρούμε επιπλέον ότι η ανέλιξη $\{W(t), t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητη από την στοχαστική ανέλιξη $\{S(t)\}_{t \geq 0} = \left\{ \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, t \geq 0 \right\}$. Στο σημείο αυτό ορίζουμε τις σταθερές θετικές $D = \frac{\sigma^2}{2}$ και $\zeta = \frac{c}{D}$ που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Στο μοντέλο με διάχυση έχουν μελετηθεί οι παρακάτω πιθανότητες χρεοκοπίας (βλέπε Dufresne και Gerber (1991)).

1. Πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται σε ταλάντωση (oscillation)

$$\psi_d(u) = Pr(T < \infty, \mathcal{R}(T) = 0 \mid \mathcal{R}(0) = u),$$

2. Πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται σε απαίτηση (claim)

$$\psi_s(u) = Pr(T < \infty, \mathcal{R}(T) < 0 \mid \mathcal{R}(0) = u),$$

3. Πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται είτε σε ταλάντωση είτε σε απαίτηση

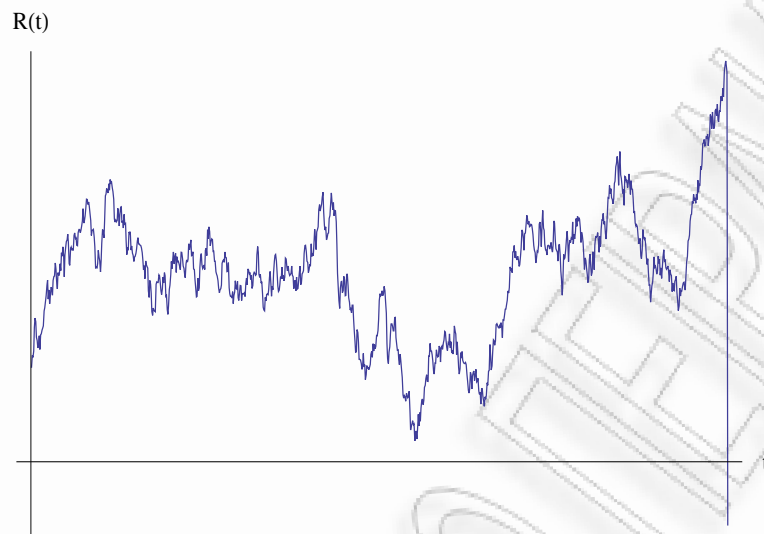
$$\psi_t(u) = Pr(T < \infty, \mathcal{R}(T) \leq 0 \mid \mathcal{R}(0) = u),$$

όπου ισχύει προφανώς ότι

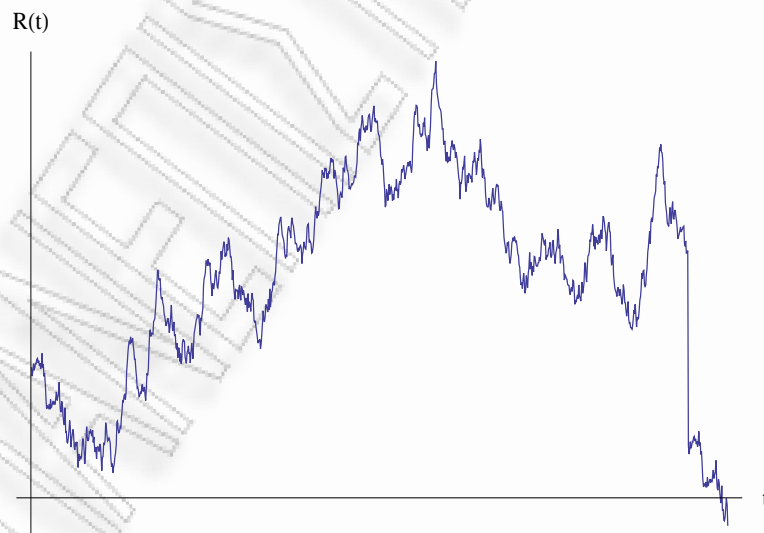
$$\psi_t(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u). \quad (2.3.1)$$

Στα Σχήματα 2.6 και 2.7 φαίνονται και γραφικά οι δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να έχουμε χρεοκοπία στο γενικευμένο μοντέλο με διάχυση.

Αν συμβολίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας με $\delta_t(u)$, τότε ισχύει ότι $\delta_t(u) = 1 - \psi_t(u)$. Για την $\delta_t(u)$ έχει αποδειχτεί (βλέπε εξισώσεις 2.1 και 2.9, αντίστοιχα, από Dufresne και



Σχήμα 2.6: Χρεοκοπία που οφείλεται σε απαίτηση



Σχήμα 2.7: Χρεοκοπία που οφείλεται σε ταλάντωση

Gerber (1991)) ότι ικανοποιεί την ολοκληρωτικό - διαφορική εξίσωση

$$D\delta_t''(u) + c\delta_t'(u) = \lambda\delta_t(u) - \lambda \int_0^u \delta_t(u-x)dF(x)$$

και μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\delta_t(u) = qH_1(u) + (1-q) \int_0^u \delta(u-x)(h_1 \otimes h_2)(x)dx,$$

όπου $q = \frac{\theta}{1+\theta}$, h_1 η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής

$$\bar{H}_1(u) = 1 - H_1(u) = e^{-\zeta u}$$

και h_2 η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας. Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με μηδέν τότε ισχύουν τα εξής

1. $\delta_t(0) = \psi_s(0) = 0$,
2. $\psi_t(0) = \psi_d(0) = 1$.

Επίσης ισχύει ότι η $\psi_t(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u . Τον ισχυρισμό αυτό μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε από την σχέση (4.7) των Dufresne και Gerber (1991)

$$\delta_t'(u) = -\psi_t'(u) = \frac{c - \lambda\mu}{D}\psi_d(u). \quad (2.3.2)$$

Όμοια με την περίπτωση του κλασικού μοντέλου (βλέπε Παράγραφο 2.2.7) οι Dufresne και Gerber (1991) όρισαν την αντίστοιχη εξίσωση του Lundberg (βλέπε (2.2.25) ή (2.2.26)), η οποία είναι η εξής

$$\lambda \int_0^\infty e^{rx}dF(x) + Dr^2 = \lambda + cr. \quad (2.3.3)$$

Η μικρότερη θετική ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης καλείται συντελεστής προσαρμογής και συμβολίζεται με R_t . Το φράγμα του Lundberg γενικεύεται στην περίπτωση που στο κλασικό μοντέλο προστεθεί και η διάχυση και λαμβάνει την εξής μορφή

$$\psi_t(u) \leq e^{-R_t u}, \quad \forall u \geq 0. \quad (2.3.4)$$

Όπως είναι αναμενόμενο στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο, η

$\psi_t(u)$ τείνει στο μηδέν, δηλαδή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_t(u) = 0. \quad (2.3.5)$$

Μια σύντομη απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος προκύπτει με την χρήση του φράγματος της σχέσης (2.3.4).

Στα επόμενα τρία Θεωρήματα περιγράφεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_t(u)$ στις περιπτώσεις που (i) για τα ύψη των αποζημιώσεων υπάρχει ο συντελεστής R_t (ii) ανήκουν στην κλάση \mathcal{S}^* και (iii) ανήκουν στην κλάση $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$.

Θεώρημα 2.3.1. *Αν στο κλασικό μοντέλο με διάχυση για τα ύψη των αποζημιώσεων μπορεί να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής*

1. υπάρχει σταθερά $C_d > 0$:

$$\psi_t(u) \sim C_d e^{-R_t(u)}, \quad u \rightarrow \infty$$

2. υπάρχει σταθερά $C_s > 0$:

$$\psi_s(u) \sim C_s e^{-R_t(u)}, \quad u \rightarrow \infty$$

3. υπάρχει σταθερά $C_t > 0$:

$$\psi_d(u) \sim C_t e^{-R_t(u)}, \quad u \rightarrow \infty$$

όπου $C_t = C_d + C_s$ και

$$C_t = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) / \left[\frac{\lambda R_t}{c} \int_0^\infty t e^{R_t t} (1 - F(t)) dt + R_t \frac{D}{c}\right] \quad (2.3.6)$$

Στα επόμενα δυο θεωρήματα δίνεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ροών του χρόνου χρεοκοπίας στην περίπτωση που $F_e \in \mathcal{S}_d$ και $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.3.2. *Για το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων στο οποίο υπάρχει διάχυση, αν συμβολίσουμε με \mathcal{S} την κλάση των υποεκθετικών συναρτήσεων, τα επόμενα είναι ισόδυναμα*

1. $F_e \in \mathcal{S}$,
2. $\psi_t(u) \sim \frac{\lambda}{c-\lambda\mu} \int_u^\infty \overline{F}(t) dt$, $u \rightarrow \infty$,
3. $1 - \psi_t(u) \in \mathcal{S}$.

Απόδειξη. Βλέπε Veraverbeke (1993) Θεώρημα 1. □

Θεώρημα 2.3.3. Για το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων με διάχυση τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. $F \in \mathcal{S}(\gamma)$,
2. $\psi_t(u) \sim K_0 \overline{F}(u)$, $u \rightarrow \infty$,

όπου $K_0 = \frac{\lambda}{\gamma c} \left[\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) / \left(1 - \frac{D\gamma}{c} - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{\gamma t} \overline{F}(t) dt\right)^2 \right]$.

Απόδειξη. Βλέπε Veraverbeke (1993) Θεώρημα 2. □

Πρόταση 2.3.1. Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση αν $F_e \in \mathcal{S}$ τότε ισχύει ότι

$$\psi_t(u) \sim \psi_s(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (2.3.7)$$

Απόδειξη. Από την σχέση (2.3.2) θα έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_d(u)}{\psi_t(u)} = -\frac{D}{c - \lambda\mu} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi'_t(u)}{\psi_t(u)}.$$

Επομένως με τη βοήθεια του Λήμματος 1.4.1 θα έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_d(u)}{\psi_t(u)} = -\frac{D}{c - \lambda\mu} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x) dx}$$

και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.3.2 προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_d(u)}{\psi_t(u)} = -\frac{D}{c - \lambda\mu} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_e}(u)}{\int_u^\infty \overline{F_e}(x) dx}.$$

Συνεπώς με χρήση πάλι του Λήμματος 1.4.1 έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_d(u)}{\psi_t(u)} = -\frac{D}{c - \lambda\mu} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(u)}{\mu \overline{F}_e(u)}. \quad (2.3.8)$$

Όμως επειδή έχουμε υποθέσει ότι $F_e \in \mathcal{S}$ από την Πρόταση 1.4.1 ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}_e(u)} = 0 \quad (2.3.9)$$

και επομένως αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (2.3.8) και (2.3.9) είναι προφανές το ζητούμενο. \square

Πρόταση 2.3.2. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε $\psi_t(u) \in \mathcal{S}d$.

Απόδειξη. Από Θεώρημα 2.3.2 ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{F_e(u)} > 0,$$

και με την βοήθεια της Πρότασης 1.4.5 συνεπάγεται ότι $\psi_t(u) \in \mathcal{S}d$. \square

Κεφάλαιο 3

Ροπές του Χρόνου Χρεοκοπίας

3.1 Εισαγωγή

Οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας αποτελούν ειδική περίπτωση της συνάρτησης της προεξοφλημένης ποινής (discounted penalty function) που όρισαν οι Gerber και Shiu (1998). Συγκεκριμένα η συνάρτηση αυτή είναι η εξής

$$\phi_\delta(u) = E(e^{-\delta T} \omega(U_{T-}, |U_T|) I(T < \infty)), \quad \forall u \geq 0,$$

όπου U_{T-} είναι το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία (surplus prior to ruin), $|U_T|$ συμβολίζει το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας (deficit at ruin) και δ μια θετική σταθερά. Παρατηρούμε ότι για $\delta = 0$ και $\omega(x, y) = 1$ προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ αν ισχύει μόνο ότι $\omega(x, y) = 1$ έχουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$\phi_0(u) = E(e^{-\delta T} I(T < \infty)).$$

Οι Lin και Willmot (1999) απέδειξαν ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί ως η ουρά μιας γεωμετρικής κατανομής. Συγκεκριμένα έδειξαν ότι

$$\phi_0(u) = E(e^{-\delta T} I(T < \infty)) = (1 - a_T) \sum_{n=1}^{\infty} a_T^n \bar{F}^{*n}(u),$$

όπου

$$a_T = \frac{(1 + \theta)\mu}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy},$$

$$\bar{P}(u) = \frac{\bar{F}(u) - e^{\rho x} \int_x^{\infty} e^{-\rho y} dF(y)}{\rho \int_0^{\infty} e^{-\rho y} F(y) dy}$$

και $\rho = \rho(\delta)$ η μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$c\rho - \delta = \lambda - \lambda M_X(\rho).$$

Όπως γνωρίζουμε από την Στατιστική οι ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής προκύπτουν άμεσα αν παραγωγίσουμε το μετασχηματισμό Laplace. Συνεπώς αν με $\psi_k(u)$ συμβολίσουμε την k ροπή της τυχαίας μεταβλητής T έχουμε ότι

$$\psi_k(u) = \left. \frac{d^k \phi_0(u)}{du} \right|_{\delta=0}.$$

Στις δύο παραγράφους που ακολουθούν θα δοθεί μια εισαγωγή στις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο και το μοντέλο με διάχυση και στην τελευταία παράγραφο θα δοθούν τα κίνητρα που μας οδήγησαν στη μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.

3.1.1 Μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στην περίπτωση που το μοντέλο που χρησιμοποιούμε για την μελέτη του χαρτοφυλακίου μας είναι το κλασικό, η k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας συμβολίζεται με $\psi_k(u)$ και ισούται με

$$\psi_k(u) = E(T^k I(T < \infty) | \mathcal{R}(0) = u), \quad \forall u \geq 0 \text{ και } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

με αρχική συνθήκη για $k = 0$

$$\psi_0(u) = \psi(u).$$

Οι Lin και Willmot (2000) απέδειξαν πως οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_k(u)$, ικανοποιούν ένα σύνολο από αναδρομικές ελλειμματικές εξισώσεις (recursive defective renewal equations).

Θεώρημα 3.1.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας κινδύνων οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιούν την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\psi_k(u) = \frac{k}{c} \int_u^{\infty} \psi_{k-1}(x) dx + \frac{1}{1-\phi} \int_0^u \psi_k(u-x) dF_e(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.2)$$

με $F_e(x)$ συμβολίζουμε την κατανομή ισορροπίας

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

Ισοδύναμα η εξίσωση (3.1.2) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\psi_k(u) = \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi(u-x)\psi_{k-1}(x)dx + \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.3)$$

Απόδειξη. Βλέπε Lin και Willmot (2000). □

Αν θέσουμε

$$f_k(u) = \frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.4)$$

η (3.1.2) λαμβάνει την εξής μορφή

$$\psi_k(u) = f_k(u) + \frac{1}{1-\phi} \int_0^u \psi_k(u-x)dF_e(x) \quad (3.1.5)$$

και επομένως η λύση της ελλειμματικής εξίσωσης (3.1.5) είναι ίση με

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1-\phi} \int_0^u f_k(u-x)dG(x). \quad (3.1.6)$$

όπου

$$G(x) = (1-\phi) \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i F_e^{*i}(x) \quad (3.1.7)$$

και $F_e^{*i}(x)$ είναι η i τάξης συνέλιξη της F_e με τον εαυτό της. Αν με T_c συμβολίσουμε την τυχαία μεταβλητή $T \mid T < \infty$ τότε ισχύει ότι η T_c είναι κανονική (proper) τυχαία μεταβλητή και έχει ροπές k τάξης ίσες με $\psi_k(u)/\psi(u)$.

Οι Delbaen (1990), Pitts και Politis (2008) μελέτησαν αντίστοιχα, ικανές συνθήκες ώστε η $\psi_k(u)$ και $\int_0^\infty \psi_k(x)dx$ να είναι πεπερασμένες ποσότητες.

Θεώρημα 3.1.2. Για το κλασικό μοντέλο και για κάθε $k \geq 1$ ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$E(T^k I(T < \infty)) < \infty \Leftrightarrow \mu_{k+1} < \infty.$$

Απόδειξη. Βλέπε Delbaen (1990). □

Πρόταση 3.1.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αν $\mu_{k+2} < \infty$ τότε ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} \psi_k(x) dx < \infty.$$

Απόδειξη. Βλέπε Pitts και Politis (2008). □

Στην πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύουμε ότι για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού οι $\psi_k(u)$ τείνει στο μηδέν για κάθε $k \geq 1$. Συνεπώς γενικεύουμε το γεγονός ότι $\psi(u) \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$ στην περίπτωση των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.

Πρόταση 3.1.2. Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνου έστω ότι $\mu_{k+1} < \infty$ και $\mu_{k+2} < \infty$, τότε για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισχύει

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_k(u) = 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα στηριχτεί στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 1$ θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.1.3). Με την βοήθεια του γεγονότος ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας τείνει στο μηδέν (βλέπε παραπάνω) καθώς επιπλέον και με τη χρήση του Θεωρήματος της Κυριαρχούμενης Σύγκλισης θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_u^{\infty} \psi(x)dx - \int_0^{\infty} \psi(x)dx \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) \right] = 0.$$

Έστω ότι η σχέση (3.1.8) ισχύει για $k = m$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_m(u) = 0. \quad (3.1.9)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$. Παίρνοντας το όριο της $\psi_{m+1}(u)$ (βλέπε σχέση (3.1.3) για $k = m + 1$) καθώς το u τείνει στο άπειρο έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \psi_{m+1}(u) &= \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left((\psi_m \otimes \psi)(u) + \int_u^{\infty} \psi_m(t)dt - \psi(u) \int_0^{\infty} \psi_m(t)dt \right) \\ &= \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^u \psi_m(t)\psi(u-t)dt + \int_u^{\infty} \psi_m(t)dt - \psi(u) \int_0^{\infty} \psi_m(t)dt \right). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Για τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^u \psi_m(t) \psi(u-t) dt \right),$$

θα δείξουμε ότι μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταξύ του ολοκληρώματος και του ορίου. Επειδή $\mu_{m+1} < \infty$, όπως αναφέρθηκε στο Θεώρημα 3.1.2 και την Πρόταση 3.1.1, ισχύει ότι $\psi_m(u) < \infty$, $\forall u \geq 0$ και επιπλέον ότι

$$\int_0^\infty \psi_m(x) dx < \infty$$

και συνεπώς η συνέλιξη $(\psi_m \otimes \psi)(u)$ είναι φραγμένη. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης (βλέπε Παράρτημα A) μπορεί να γίνει αλλαγή μεταξύ ολοκληρώματος και ορίου και με την βοήθεια της υπόθεσης (3.1.9) παίρνουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^u \psi_m(t) \psi(u-t) dt \right) = 0. \quad (3.1.11)$$

Επομένως η (3.1.10) με τη βοήθεια της σχέσης (3.1.11) λαμβάνει την εξής μορφή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_{m+1}(u) = \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \left(0 + \int_0^\infty \psi_m(t) dt - \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\psi(u) \int_0^\infty \psi_m(t) dt \right) \right) = 0.$$

□

Οι Lin και Willmot (2000) υπολόγισαν τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν

1. Την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και συντελεστή προσαρμογής $R = \theta\mu/(1+\theta)$.

Στην περίπτωση αυτή οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας είναι ίσες με

$$\psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \bar{C}_{j,k} \frac{(Ru)^j}{j!}, \quad u \geq 0,$$

όπου

$$\bar{C}_{0,k} = \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1},$$

$$\bar{C}_{j,k} = \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta} \left[\frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{j-1,k-1} \sum_{i=j}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right], \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

και

$$C_{0,0} = C = \frac{1}{1 + \theta}.$$

2. Την μείξη δύο εκθετικών κατανομών με γενικό τύπο για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u}.$$

Στην περίπτωση αυτή οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας δίνονται από την παρακάτω τύπο

$$\psi_k(u) = \sum_{j=0}^k [A_{j,k} e^{-R_1 u} + B_{j,k} e^{-R_2 u}] \frac{u^j}{j!} \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{ και } u \geq 0.$$

Οι σταθερές $A_{j,k}$ και $B_{j,k}$ υπολογίζονται αναδρομικά (βλέπε Lin και Willmot (2000) σελίδα 42)

3. Την μείξη δύο Erlang κατανομών με γενικό τύπο για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j \frac{(\mu u)^j}{j!}.$$

Η k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας υπολογίζεται από τον τύπο

$$\psi_k(u) = e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_{j,k} \frac{(\mu u)^j}{j!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{ και } u \geq 0,$$

με $\bar{C}_{j,0} = \bar{C}_j$.

3.1.2 Μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στο γενικευμένο κλασικό μοντέλο με διάχυση

Οι Tsai και Willmot (2002) γενίκευσαν τα αποτελέσματα των Lin και Willmot (2000). Όρισαν τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για την περίπτωση χρεοκοπίας από ταλάντωση και από απαίτηση και απέδειξαν ότι ικανοποιούν ένα σύνολο από αναδρομικές ελλειμματικές εξισώσεις. Οι ροπές για την περίπτωση του γενικευμένου μοντέλου ορίζονται ως εξής

1. Ταλάντωση

$$\psi_{d;n}(u) = E[T^n I(T < \infty, \mathcal{R}(T) = 0) \mid \mathcal{R}(0) = u],$$

2. Απαίτηση

$$\psi_{s;n}(u) = E[T^n I(T < \infty, \mathcal{R}(T) < 0) | \mathcal{R}(0) = u].$$

Η σχέση (2.3.1) γενικεύεται για την περίπτωση των ροπών και έχουμε

$$\psi_{t;n}(u) = \psi_{s;n}(u) + \psi_{d;n}(u), \quad \forall u \geq 0. \quad (3.1.12)$$

Στην περίπτωση που $n = 0$ θα έχουμε ότι $\psi_{d;0} = \psi_d$, $\psi_{s;0} = \psi_s$ και $\psi_{t;0} = \psi_t$. Για ευκολία παρουσίασης των αποτελεσμάτων ορίζουμε την συνάρτηση

$$H_2(u) = 1 - e^{-(c/D)u}, \quad \forall u \geq 0.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στην ταλάντωση και απαίτηση για το μοντέλο του Gerber (1970) δίνεται στα επόμενα δυο Θεωρήματα αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.1.3 (Tsai και Willmot(2002)). Για $D > 0$, $u > 0$ και $n = 1, 2, 3, \dots$ η n ροπή του χρόνου χρεοκοπίας που προέρχεται από ταλάντωση,

$$\psi_{d;n}(u) = E[T^n I(T < \infty, \mathcal{R}(T) = 0) | \mathcal{R}(0) = u],$$

αν το είδος αυτό της χρεοκοπίας συμβεί, ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική ελλειμματική εξίσωση

$$\psi_{d;n}(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{d;n}(u-x) d(F_e * H_2)(x) + \frac{n}{c} \int_0^u H_2(u-x) \int_x^\infty \psi_{d;n-1}(y) dy dx \quad (3.1.13)$$

και δίνεται αναδρομικά από τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} \psi_{d;n}(u) = & \frac{n}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi_{d;n-1}(x) \psi_t(u-x) dx \right. \\ & \left. + \int_u^\infty \psi_{d;n-1}(x) dx - \psi_t(u-x) \int_0^\infty \psi_{d;n-1}(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\int_0^\infty \psi_{d;n}(x) dx = \frac{n}{\lambda\mu\theta} \int_0^\infty x \psi_{d;n-1}(x) dx. \quad (3.1.15)$$

Για $D = 0$, έχουμε $\psi_{d;n}(u) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Απόδειξη. Βλέπε Tsai και Willmot (2002), Θεώρημα 6. □

Θεώρημα 3.1.4 (Tsai και Willmot(2002)). Για $D > 0$, $u > 0$ και $n = 1, 2, 3, \dots$ η n ροπή του χρόνου χρεοκοπίας που προέρχεται από απαίτηση,

$$\psi_{s;n}(u) = E[T^n I(T < \infty, \mathcal{R}(T) < 0) | \mathcal{R}(0) = u],$$

αν το είδος αυτό της χρεοκοπίας συμβεί, ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική ελλειμματική εξίσωση

$$\psi_{s;n}(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{s;n}(u-x) d(F_e * H_2)(x) + \frac{n}{c} \int_0^u H_2(u-x) \int_x^\infty \psi_{s;n-1}(y) dy dx \quad (3.1.16)$$

και δίνεται αναδρομικά από τον παρακάτω τύπο

$$\psi_{s;n}(u) = \frac{n}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi_{s;n-1}(x) \psi_t(u-x) dx + \int_u^\infty \psi_{s;n-1}(x) dx - \int_0^\infty \psi_{s;n-1}(x) dx \right]. \quad (3.1.17)$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\int_0^\infty \psi_{s;n}(x) dx = \frac{n}{\lambda\mu\theta} \int_0^\infty \psi_{s;n-1}(x) dx. \quad (3.1.18)$$

Για $D = 0$ θα έχουμε ότι η $\psi_{s;n}(u)$ είναι ίση με $\psi_{0;n}(u) = E(T^n I(T < \infty)) < \infty$, όπου $\psi_{0;0}(u) = \psi_0(u)$.

Απόδειξη. Βλέπε Tsai και Willmot (2002), Θεώρημα 7. □

Επομένως βάσει των σχέσεων (2.3.1), (3.1.16) και (3.1.13) ή ισοδύναμα των (3.1.17) και (3.1.14) προκύπτουν αντίστοιχα οι επόμενες αναδρομικές σχέσεις για την $\psi_{t;n}(u)$, $\forall n \geq 1$,

$$\psi_{t;n}(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{t;n}(u-x) d(F_e * H_2)(x) + \frac{n}{c} \int_0^u H_2(u-x) \int_x^\infty \psi_{t;n-1}(y) dy dx \quad (3.1.19)$$

και

$$\psi_{t;n}(u) = \frac{n}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi_{t;n-1}(x) \psi_t(u-x) dx + \int_u^\infty \psi_{t;n-1}(x) dx - \int_0^\infty \psi_{t;n-1}(x) dx \right]. \quad (3.1.20)$$

Έστω i ένα σύμβολο που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις τιμές t, s, d . Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες στις σχέσεις (3.1.15), (3.1.18) και (3.1.20) παίρνουμε την παρακάτω αναδρομική σχέση

$$\int_0^{\infty} \psi_{i;m}(x) dx = \frac{m}{\lambda\mu\theta} \int_0^{\infty} x^m \psi_{i;m-1}(x) dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.21)$$

Όμοια με το κλασικό μοντέλο, χωρίς διάχυση, απαραίτητη είναι η εύρεση κάποιων αναγκαίων συνθηκών ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $\psi_{t;k}(u) < \infty$ και $\int_0^{\infty} \psi_{t;k}(x) dx < \infty$. Τέτοιες συνθήκες περιγράφονται στην Πρόταση 3.1.5, για την απόδειξη της οποίας θα ακολουθήσουμε το συμβολισμό που περιγράφεται στις δημοσιεύσεις του Tsai (2003). Συγκεκριμένα ορίζουμε τις εξής ποσότητες

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\theta} \psi_d(u) + \psi_s(u), \quad (3.1.22)$$

$$\nu_{\bar{K},n} = \int_0^{\infty} x^n \bar{K}(x) dx. \quad (3.1.23)$$

Για $i = t, s, d$ ορίζουμε την k ροπή της $\psi_i(u)$ ως εξής

$$\nu_{\psi_i,n} = \int_0^{\infty} x^n \psi_i(x) dx. \quad (3.1.24)$$

Για τις ροπές που προαναφέρθηκαν ο Tsai (2003) απέδειξε τα αποτελέσματα που περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 3.1.3. Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση οι ροπές $\nu_{\bar{K},n}, \nu_{\psi_t,n}, \nu_{\psi_s,n}, \nu_{\psi_d,n}$ υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους

$$\nu_{\bar{K},n} = \frac{1}{\theta} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mu_{G,n-i} \nu_{\bar{K},i} + \frac{1}{n+1} \mu_{G,n+1} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.25)$$

$$\nu_{\psi_t,n} = \frac{n!}{b^{n+1}} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\nu_{\bar{K},i} b^{i+1}}{i!} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.26)$$

$$\nu_{\psi_s,n} = \nu_{\bar{K},n} - \frac{n!}{\theta b^{n+1}} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\nu_{\bar{K},i} b^{i+1}}{i!} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.27)$$

$$\nu_{\psi_d,n} = \frac{(1+\theta)n!}{\theta b^{n+1}} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\nu_{\bar{K},i} b^{i+1}}{i!} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.28)$$

όπου η ποσότητα $\mu_{G,n}$ υπολογίζεται σύμφωνα με τον Tsai (2002) από τον τύπο

$$\mu_{G,n} = \frac{n!}{b^n} \sum_{j=0}^n \frac{b^j}{(j+1)!} \frac{\mu_{j+1}}{\mu}. \quad (3.1.29)$$

Πρόταση 3.1.4. Για τις ποσότητες $\nu_{\psi_t;n}, \nu_{\psi_s;n}, \nu_{\psi_d;n}$ ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$\nu_{\psi_t,n} = \frac{n}{b} \nu_{\psi_t,n-1} + \nu_{\bar{K},n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.30)$$

$$\nu_{\psi_s,n} = \frac{n}{b} \nu_{\psi_t,n-1} + \nu_{\bar{K},n} - \frac{n(1+\theta)}{b\theta} \nu_{\bar{K},n-1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.31)$$

$$\nu_{\psi_d,n} = \frac{n}{b} \left[\nu_{\psi_d,n-1} + \frac{1+\theta}{\theta} \nu_{\bar{K},n-1} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.32)$$

Επομένως έχοντας το θεωρητικό υπόβαθρο που χρειαζόμαστε μπορούμε να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση σχετικά με την ύπαρξη των $\psi_{i,k}(u), \forall u \geq 0$ και $\int_0^\infty \psi_{i,k}(x) dx$ για κάθε $i = t, s, d$.

Πρόταση 3.1.5. Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση, έστω ότι το i παίρνει οποιαδήποτε από τις τιμές d, s, t και k μη αρνητικός ακέραιος. Τότε για την ποσότητα $\psi_{i,k}(u)$ ισχύουν τα εξής

1. Αν $\mu_{k+2} < \infty$ τότε

$$\int_0^\infty \psi_{i,k}(u) du < \infty.$$

2. Αν $\mu_{k+1} < \infty$ τότε

$$\psi_{i,k}(u) < \infty \quad \text{για } \forall u \geq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \psi_{i,k}(u) = 0.$$

Απόδειξη. 1. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $\mu_{k+2} < \infty$ τότε $\int_0^\infty \psi_{i,k}(x) dx < \infty$. Για $k = 0, 1, 2$ είναι γνωστό από την δημοσίευση των Tsai και Willmot (2002) (βλέπε τα Πορίσματα 7, 8, 9, 10 στην προαναφερθείσα εργασία), ότι αν $\mu_{k+2} < \infty$ τότε $\psi_{i,k}(u) \in \mathcal{L}^{11}$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots$. Η λογική της μαθηματικής επαγωγής, προκειμένου να αποδειχτεί το πεπερασμένο του ολοκληρώματος της $\psi_{i,k}(x) dx$ για κάθε φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$, υπαγορεύει ότι αν υποθέσουμε ότι $\int_0^\infty \psi_{i,k}(x) dx < \infty$ και ότι $\mu_{k+2} < \infty$ τότε πρέπει να ισχύει ότι

¹ $\mathcal{L}^1 [0, \infty] = \{f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], \int_0^\infty |f(x)| dx < \infty\}$.

$\int_0^\infty \psi_{i,k+1}(x)dx < \infty$. Εμείς θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα για $i = t$. Όμοια αποδεικνύονται και τα $\int_0^\infty \psi_{d,k+1}(x)dx < \infty$ και $\int_0^\infty \psi_{s,k+1}(x)dx < \infty$. Από την σχέση (3.1.21) γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^\infty \psi_{t,k}(x)dx = \int_0^\infty x^k \psi_t(x)dx = \nu_{\psi_t, n}.$$

Όμως επειδή έχουμε υποθέσει ότι

$$\int_0^\infty \psi_{t,k-1}(x)dx = \int_0^\infty x^{k-1} \psi_t(x)dx = \nu_{\psi_t, n-1} < \infty,$$

από την σχέση (3.1.26) θα έχουμε

$$\nu_{\psi_t, n} = \frac{n!}{b^{n+1}} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\nu_{\overline{K}, i} b^{i+1}}{i!} \right] = \frac{n!}{b^{n+1}} \left[1 + \frac{\nu_{\overline{K}, 0} b^1}{0!} + \frac{\nu_{\overline{K}, 1} b^2}{1!} + \dots + \frac{\nu_{\overline{K}, n-1} b^n}{(n-1)!} \right] < \infty.$$

Επομένως από το γεγονός ότι το άθροισμα πεπερασμένου αριθμού γινομένου μη αρνητικών αριθμών είναι θετικό συνεπάγεται ότι $\nu_{\overline{K}, i} < \infty$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Με την ίδια λογική προκύπτει από την σχέση (3.1.25) ότι $\mu_{G, i} < \infty$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$. Λαμβάνοντας αυτά υπόψιν μας, όπως επίσης και ότι $\mu_{k+2} < \infty$ προκύπτει με την βοήθεια επιπλέον και των σχέσεων (3.1.25), (3.1.26), (3.1.29) ότι

$$\int_0^\infty \psi_{i,k+1}(x)dx < \infty.$$

2. Από την σχέση (3.1.12) αρκεί να αποδείξουμε ότι $\psi_{t,k}(u) < \infty$. Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι η $\psi_t(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u , τότε από την σχέση (3.1.20) προκύπτει ότι

$$\psi_{t,k}(u) \leq (1 - \psi_t(u)) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx$$

και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx < \infty$ το οποίο και ισχύει από το 1. . Επίσης πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_{i,k}(u) = 0$, $i = t, s, d$. Η απόδειξη είναι άμεση με την χρήση της σχέσης (3.1.20) και της Πρότασης Α'.0.4 του Παραρτήματος Α' σε συνδυασμό με την σχέση (2.3.5) και το 1. της παρούσας Πρότασης. \square

3.2 Κίνητρα για την μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας

Ο χρόνος χρεοκοπίας συνεχίζει να παραμένει μια ανεξερεύνητη τυχαία μεταβλητή στο χώρο της Θεωρίας Κινδύνου. Η εύρεση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T περιορίζεται στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων είναι εκθετικά για το κλασικό μοντέλο και το ανανεωτικό². Στα επόμενα δύο Θεωρήματα θα διατυπώσουμε τα αποτελέσματα των Dickson και Willmot (2005) και των Borovkov και Dickson (2008) που αφορούν την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.2.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ο χρόνος χρεοκοπίας έχει την εξής κατανομή

1. Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν

$$f_{T_c}(t) = ce^{-\lambda t} f_e(ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_0^{ct} y f^{*n}(ct-y) f_e(y) dy.$$

2. Αν το αρχικό αποθεματικό είναι μεγαλύτερο του μηδενός τότε

$$f_T(t) = ce^{-\lambda t} \xi(u, ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_0^{ct} y f^{*n}(ct-y) \xi(u, y) dy,$$

όπου f_e η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας F_e ,

$$\xi(u, t) = \frac{\lambda}{c} \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \left(\frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{F}(x) b_n(u, t-x) dx - b_n(u, t)\right),$$

και

$$b_n(u, t) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{\Gamma(n)} \int_0^u (u-x)^{n-1} F^{*j}(x) f^{*(n-j)}(t+u-x) dx.$$

Απόδειξη. Βλέπε Dickson και Willmot (2005). □

²Πρόκειται για μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου. Συγκεκριμένα στο ανανεωτικό μοντέλο ο αριθμός των αποζημιώσεων $N(t)$ μέχρι την χρονική στιγμή t είναι μια ανανεωτική ανέλιξη (βλέπε Asmussen (2000))

Θεώρημα 3.2.2. Στο ανανεωτικό μοντέλο αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος που έχουμε το πρώτο συμβάν είναι T_0 με κατανομή f_{T_0} , η κατανομή του χρόνου των υπόλοιπων συμβάντων είναι η f_T και ότι τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο z τότε έχουμε ότι

$$f_{T_c}(t) = e^{-z(u+ct)} \left(f_{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n (u+ct)^{n-1}}{n!} (u (f_T^{*n} * f_{T_0})(t) + c (f_T^{*n} * f_{T_1})) \right),$$

όπου $f_{T_1} = t f_{T_0}$. Στην περίπτωση που $f_{T_0} = f_T$ τότε ισχύει ότι

$$f_{T_c}(t) = e^{-z(u+ct)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n (u+ct)^{n-1}}{n!}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Borovkov και Dickson (2008). □

Παρατηρώντας τα προηγούμενα θεωρήματα αυτής της παραγράφου, είναι σαφές ότι σε όλους τους τύπους περιέχονται συνελιξίες πυκνοτήτων, επομένως το γεγονός αυτό τους καθιστά δύσκολους στο χειρισμό τους. Οι εφαρμογές των ροπών στο πρόβλημα κατανόησης του χρόνου χρεοκοπίας είναι πολλές και προκύπτουν από τις γενικότερες εφαρμογές που έχουν οι ροπές μια τυχαίας μεταβλητής όπως τις γνωρίζουμε από την Στατιστική και τις Πιθανότητες. Η γνώση φραγμάτων και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, αν τις θεωρήσουμε ως συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού, μας οδηγεί αυτόματα στον υπολογισμό ποσοτήτων, όπως είναι για παράδειγμα

1. Ο συντελεστής ασυμμετρίας (moment coefficient of skewness) με βάση τις ροπές

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},$$

που μας δίνει τη συμμετρία ($\beta_1 = 1$) ή την ασυμμετρία ($\beta_1 < 1$) της κατανομής.

2. Ο συντελεστής κύρτωσης του Pearson

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2},$$

που εκφράζει το βαθμό κυρτότητας της κατανομής. Συγκεκριμένα αν $\beta_2 = 3$ τότε έχουμε την κανονική κατανομή, αν $\beta_2 > 3$ πρόκειται για λεπτόκυρτη κατανομή ενώ

αν $\beta_2 < 3$ τότε η κατανομή είναι πλατύκυρτη.

3. Συντελεστής Μεταβλητότητας (coefficient of variation) της τυχαίας μεταβλητής X

$$cv(X) = \frac{E \{ [X - E(X)]^2 \}^{1/2}}{E(X)}.$$

4. Συντελεστής ασυμμετρίας (coefficient of skewness),

$$skew(X) = \frac{E \{ [X - E(X)]^3 \}}{E \{ [X - E(X)]^2 \}^{3/2}}.$$

5. Συντελεστής κύρτωσης (coefficient of Kyrstosis)

$$kyrt(X) = \frac{E \{ [X - E(X)]^4 \}}{E \{ [X - E(X)]^2 \}^2}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι ροπές γύρω από την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής υπολογίζονται με βάση τις κεντρικές ροπές της τυχαίας μεταβλητής

$$E \{ [X - E(X)]^r \} = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} E \{ X^{r-j} \} E \{ X \}^j.$$

Επίσης η γνώση των ροπών μπορεί σύμφωνα με την προσέγγιση των σειρών Edgeworth να μας δώσει μια προσέγγιση της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας. Τέλος όπως γνωρίζουμε οι ροπές δεν χαρακτηρίζουν πάντοτε μονοσήμαντα την κατανομή από την οποία προέρχονται. Το πρόβλημα του πότε οι ροπές χαρακτηρίζουν την κατανομή είναι γνωστό στη βιβλιογραφία σαν Πρόβλημα των Ροπών (Moment Problem). Στη συνέχεια θα δώσουμε επαρκείς συνθήκες ώστε οι ροπές να καθορίζουν την κατανομή.

Θεώρημα 3.2.3. *Carleman's condition (1926)* Έστω F μια συνάρτηση κατανομής με ροπές γύρω από το μηδέν $\mu_n = \int_0^\infty x^n dF(x) < \infty$ τότε αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}^{-1/2n} = +\infty,$$

οι ροπές χαρακτηρίζουν την κατανομή.

Οι Drekić, Stafford και Willmot (2003) μελέτησαν τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας και

μεταξύ άλλων παρουσίασαν την παρακάτω λύση της εξίσωσης (3.1.2)

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1+\theta} \psi_k(0) (1 - \psi(u)) + c \sum_{j=2}^k (-1)^{j-1} \frac{k! \psi_{k-j+1}(0)}{(\lambda \mu \theta)^j (k-j+1)!} g_{j-1}(u) + (-1)^k \frac{k!}{(\lambda \mu \theta)^k} h_k(u), \quad (3.2.1)$$

όπου

$$g_i(u) = \int_0^u \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{i-1}} \left\{ \prod_{j=1}^i \delta(x_{j-1} - x_j) \right\} \delta(x_i) dx_i \dots dx_2 dx_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

και

$$h_i(u) = \int_0^u \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{i-1}} \left\{ \prod_{j=1}^i \delta(x_{j-1} - x_j) \right\} \psi(x_i) dx_i \dots dx_2 dx_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Όπως και οι ίδιοι οι συγγραφείς επισημαίνουν, η σχέση (3.2.1) είναι κατάλληλη για την περίπτωση των phase type³ κατανομών. Εμείς δεν θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.2.1) προκειμένου να μελετήσουμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας μιας και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας, $\delta(u)$, που χρησιμοποιείται δεν ενδείκνυται για κάτι τέτοιο. Τέλος, αν στη σχέση (2.22) των Lin και Willmot (1999) χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση του μετασχηματισμού Laplace με την βοήθεια των ροπών θα έχουμε

$$\bar{K}(u) = E(e^{-\delta T} I(T < \infty)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(u) \frac{(-1)^k \delta^k}{k!}.$$

Αν πάρουμε το όριο καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{K}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(u) \frac{(-1)^k \delta^k}{k!}. \quad (3.2.2)$$

Λόγω του ότι ισχύει $\bar{K}(u) \leq 1$ και $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{K}(u) = 0$ μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή του

³Η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που έχει μια κατανομή Phase Type με παραμέτρους α και \mathbb{S} (συμβολίζουμε $PT(\alpha, \mathbb{S})$) δίνεται από τον τύπο $f(x) = \alpha e^{\mathbb{S}x} \mathbb{S}_0$, όπου \mathbb{S} είναι ένας $m \times m$ πίνακας, $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}1$ όπου 1 είναι ένας $m \times 1$ πίνακας με όλα τα στοιχεία μονάδες. Επίσης αν X είναι ένας $n \times n$ πίνακας το σύμβολο e^X είναι ίσο με

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

συμβόλου του ορίου και του αθροίσματος στη σχέση (3.2.2)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{K}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{u \rightarrow \infty} \psi_k(u) \frac{(-1)^k \delta^k}{k!} \quad (3.2.3)$$

Όμοια αν γνωρίζουμε κάποια άνω ή κάτω φράγματα για τις ροπές $\psi_k(u)$ μπορούμε να υπολογίσουμε φράγματα για την $\bar{K}(u)$.

Κεφάλαιο 4

Μελέτη των ανανεωτικών εξισώσεων

Στο παρόν Κεφάλαιο θα περιγράψουμε γενικά αποτελέσματα που αφορούν την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1). Τα αποτελέσματα αυτά χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την μονοτονία και στη συνέχεια θα δώσουμε φράγματα και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την λύση της (1.2.1). Για την μελέτη της μονοτονίας της $Z(x)$ μεταφέραμε την μεθοδολογία που εφάρμοσαν οι Feller (1941) και Yu (2011) στην κανονική ανανεωτική εξίσωση, στο χώρο των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων. Στην περίπτωση των φραγμάτων, βασικό ερέθισμα για την απόδειξη των φραγμάτων που θα περιγράψουμε, αποτελεί η δημοσίευση των Cai και Garrido (1998). Στη δημοσίευση αυτή, οι συγγραφείς λαμβάνοντας υπόψιν τους ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και επομένως σύμφωνα με τον Brown (1990) ανήκει στην κλάση κατανομών NWU , απέδειξαν ότι

$$\psi(u) \int_0^\infty \psi(x) dx \leq \int_u^\infty \psi(x) dx, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.0.1)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Čebyšev (1882) (βλέπε Θεώρημα 4.2.1) έδωσαν φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Εμείς θα γενικεύσουμε την μεθοδολογία που ακολούθησαν οι Cai και Garrido (1998), στη λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1). Συγκεκριμένα θα δώσουμε κάποιες αναγκαίες συνθήκες προκειμένου να είναι άνω φραγμένη η ποσότητα $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ανισότητες του Čebyšev και Grüss (βλέπε Θεώρημα 4.2.2) θα δώσουμε φράγματα για την $Z(u)$. Σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της εξίσωσης (1.2.1), η από-

δειξη των αποτελεσμάτων που θα δώσουμε χρησιμοποιεί στοιχεία από την μεθοδολογία που υπάρχει στις δημοσιεύσεις των Luxemburg (1978) και Omey (1988). Σε όλη την έκταση του κεφαλαίου θεωρούμε ότι πληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε να υπάρχουν τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη των αποτελεσμάτων.

4.1 Μελέτη της μονοτονίας της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης

Η γνώση της μονοτονίας, της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την μελέτη της, καθώς μας δίνει στοιχεία για την μορφή και την συμπεριφορά της. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε κάποιες αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι γνωστή η μονοτονία της λύσης της (1.2.1). Στην πρόταση που ακολουθεί, εκμεταλλευόμενοι την μεθοδολογία για την μελέτη της μονοτονίας μιας κανονικής ανανεωτικής εξίσωσης, όπως παρουσιάζεται από τον Feller (1941) θα δώσουμε κάποιες προϋποθέσεις προκειμένου η λύση της (1.2.1) να είναι αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση του u , αντίστοιχα.

Πρόταση 4.1.1. *Η μονοτονία της λύσης της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1), θεωρώντας ότι η συνάρτηση Z είναι παραγωγίσιμη, καθορίζεται από το πρόσημο της παράστασης*

$$M(u) := g'(u) + \phi g(0)f(u).$$

Συγκεκριμένα έχουμε ότι

1. Αν $M(u) \geq 0$, $\forall u \geq 0$ τότε η $Z(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του u .
2. Αν $M(u) \leq 0$, $\forall u \geq 0$ τότε η $Z(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u .

Απόδειξη. Αρχικά θα παραγωγίσουμε το πρώτο και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1.2.1) χρησιμοποιώντας την (1.2.2) και επομένως θα προκύψει η παρακάτω ανανεωτική εξίσωση

$$Z'(u) = g'(u) + \phi Z(0)f(u) + \phi \int_0^u Z'(u-x)f(x)dx \quad (4.1.1)$$

ή ισοδύναμα αντικαθιστώντας $Z(0) = g(0)$,

$$Z'(u) = g'(u) + \phi g(0)f(u) + \phi \int_0^u Z'(u-x)f(x)dx. \quad (4.1.2)$$

Η λύση της εξίσωσης (4.1.2) με την βοήθεια της σχέσης (1.2.3) είναι η εξής

$$Z'(u) = g'(u) + \phi g(0)f(u) + \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^u \left(g'(u-x) + \phi g(0)f(u-x) \right) dH(x) \quad (4.1.3)$$

με $H(x)$ συμβολίζουμε την αντίστοιχη σύνθετη γεωμετρική κατανομή (βλέπε (1.2.3)). Άρα για την λύση (4.1.3) παρατηρούμε ότι αν

$$g'(u) + \phi g(0)f(u) \geq 0, \quad \forall u \geq 0$$

συνεπάγεται ότι $Z'(u) \geq 0, \quad \forall u \geq 0$ και επομένως η $Z(u)$ θα είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u . Ομοίως και στην περίπτωση που

$$g'(u) + \phi g(0)f(u) \leq 0, \quad \forall u \geq 0,$$

πολλαπλασιάζοντας την (4.1.2) με -1 προκύπτει αντίστοιχα ότι η $Z(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u . □

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης πρότασης ισχύουν για την περίπτωση που το πρόσημο της συνάρτησης $M(u)$ είναι σταθερό σε όλον το μη αρνητικό ημιάξονα ή σε υποσύνολα του, που το αριστερό άκρο τους είναι το μηδέν. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε ένα Θεώρημα, η απόδειξη του οποίου, έχει επηρεαστεί από το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την κανονική ανανεωτική εξίσωση που έδωσε ο Yu (2010).

Θεώρημα 4.1.1. Αν $F \in DFR$, η συνάρτηση $g(x)/\bar{F}(x)$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \geq 0$ και επιπλέον η συνάρτηση Z είναι παραγωγίσιμη, τότε για την γενική λύση $Z(x)$, της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύει ότι

$$Z'(x) \leq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Απόδειξη. Αν παραγωγίσουμε την (1.2.1) θα έχουμε ότι

$$Z'(x) = g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(x-y)f(y)dy.$$

Έστω $r(x) = f(x)/\bar{F}(x)$, $x \geq 0$

$$Z'(x) = g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(y)r(x-y)\bar{F}(x-y)dy.$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε την $r(x)$ μέσα στο ολοκλήρωμα και θα έχουμε

$$\begin{aligned} Z'(x) &= g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(y) (r(x-y) - r(x)) \bar{F}(x-y)dy \\ &+ \phi \int_0^x Z'(y)r(x)\bar{F}(x-y)dy. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, στο δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους θα έχουμε

$$\begin{aligned} Z'(x) &= g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(y) (r(x-y) - r(x)) \bar{F}(x-y)dy \\ &+ \phi r(x) \left(Z(x) - g(0)\bar{F}(x) - \int_0^x Z(y)\bar{F}'(x-y)dy \right). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Επειδή $\phi < 1$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Z'(x) &\leq g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(y) (r(x-y) - r(x)) \bar{F}(x-y)dy \\ &+ \phi r(x) \left(Z(x) - g(0)\bar{F}(x) - \phi \int_0^x Z(y)f(x-y)dy \right). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Κάνοντας πράξεις

$$\begin{aligned} Z'(x) &\leq g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(y) (r(x-y) - r(x)) \bar{F}(x-y)dy \\ &+ \phi r(x) (g(x) - g(0)\bar{F}(x)) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

και αντικαθιστώντας το $r(x) = f(x)/\bar{F}(x)$, θα πάρουμε την παρακάτω ανισότητα

$$\begin{aligned} Z'(x) &\leq g'(x) + \phi g(0)f(x) + \phi \int_0^x Z'(y) (r(x-y) - r(x)) \bar{F}(x-y)dy \\ &+ \phi \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} g(x) - \phi g(0)f(x) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

ή ισοδύναμα προκύπτει ότι

$$Z'(x) \leq \frac{g'(x)\bar{F}(x) + \phi f(x)g(x)}{\bar{F}(x)} + \phi \int_0^x Z'(y) (r(x-y) - r(x)) \bar{F}(x-y)dy. \quad (4.1.8)$$

Αφού γνωρίζουμε ότι $g(x)/\bar{F}(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για κάθε $x \geq 0$ συνεπάγεται ότι

$$g'(x)\bar{F}(x) + f(x)g(x) < 0.$$

Έστω $U = \{x > 0 : Z'(x) > 0\}$ και $a^* = \inf_{x>0} \{U\}$ τότε θα ισχύει ότι

$$Z'(a^*) \leq \frac{g'(a^*)\bar{F}(a^*) + \phi f(a^*)g(a^*)}{\bar{F}(a^*)} + \phi \int_0^{a^*} Z'(y) (r(a^* - y) - r(a^*)) \bar{F}(a^* - y) dy \leq 0. \quad (4.1.9)$$

Επομένως έχουμε άτοπο και άρα συμπεραίνουμε ότι

$$Z'(x) \leq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

□

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια απλή εφαρμογή της Πρότασης 4.1.1. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε την μονοτονία της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων που όπως γνωρίζουμε είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u . Αρχικά, παραγωγίζουμε ως προς u την ανανεωτική εξίσωση (2.2.17). Επομένως θα έχουμε ότι

$$\psi'(u) = -\frac{\lambda}{c}\bar{F}(u) + \frac{\lambda\psi(0)}{c}\bar{F}(u) + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \psi'(u-x)dF_e(x).$$

Προκειμένου να εξετάσουμε την μονοτονία της πιθανότητας χρεοκοπίας, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.1.1. Επομένως αρκεί να μελετήσουμε το πρόσημο της $M(u)$

$$M(u) = -\frac{\lambda}{c}\bar{F}(u) + \frac{\lambda\psi(0)}{c}\bar{F}(u) = -\frac{\delta(0)\lambda}{c}\bar{F}(u) \leq 0.$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο γνωστό αποτέλεσμα για την μονοτονία της $\psi(u)$, δηλαδή ότι είναι φθίνουσα ως προς u , $\forall u \geq 0$.

4.2 Φράγματα για την λύση των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή των Θεωρημάτων Čebyšev και Grüss στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, προκειμένου να κατασκευάσουμε φράγματα για την λύση της εξίσωσης (1.2.1). Οι Čebyšev και Grüss έδωσαν αντίστοιχα ανισότητες για μια ποσότητα της μορφής,

$$\int_0^u f(x)g(x)dx.$$

Η ανισότητα που έδωσε ο Čebyšev απαιτεί τη γνώση της μονοτονίας των f και g ενώ η αντίστοιχη του Grüss προϋποθέτει την ύπαρξη άνω και κάτω φραγμάτων για τις f και g αντίστοιχα. Πρέπει να τονίσουμε πως παρόλο που οι δύο προαναφερθείσες ανισότητες αποδείχτηκαν το 1882 και 1935 αντίστοιχα, η βελτίωσή τους συνεχίζεται ακόμα και σήμερα. Το βιβλίο των Mitrinović et al. (1992) αποτελεί μια λεπτομερή εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία των Ανισοτήτων. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τα γενικά αποτελέσματα όπως αυτά δόθηκαν από τους Čebyšev και Grüss, θέλοντας να αναπτύξουμε μια μεθοδολογία για την εφαρμογή τους στη λύση της γενικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1).

Θεώρημα 4.2.1 (Čebyšev, 1882). Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα εξής

1. Αν οι f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

2. Αν οι f και g έχουν διαφορετική μονοτονία τότε θα έχουμε ότι

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα 4.2.2 (Grüss, 1935). Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν υπάρχουν πραγματικές σταθερές ξ_1, ξ_2, ν_1 και ν_2 τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω ανισώσεις

$$\xi_1 \leq f(x) \leq \xi_2, \quad \forall x \in [a, b]$$

και

$$\nu_1 \leq g(x) \leq \nu_2, \quad \forall x \in [a, b].$$

Τότε ισχύει

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{1}{4} (\xi_2 - \xi_1) (\nu_2 - \nu_1).$$

Από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.2.2 είναι ισοδύναμο με

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx - \frac{1}{4} (\xi_2 - \xi_1) (\nu_2 - \nu_1) \quad (4.2.1)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \int_0^u g(x)dx + \frac{1}{4} (\xi_2 - \xi_1) (\nu_2 - \nu_1). \quad (4.2.2)$$

4.2.1 Ανανεωτικές εξισώσεις για την $\int_t^\infty Z(x)dx$ και $Z(t) - v \int_t^\infty Z(x)dx$

Στην παράγραφο αυτή ξεκινώντας από την γενική ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (1.2.1), λύση της οποίας είναι η $Z(x)$, θα δώσουμε την αντίστοιχη ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η $\int_x^\infty Z(y)dy$. Επίσης στη συνέχεια θα δοθεί και η ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $Z(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy$, $v \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 4.2.1. Αν με $Z(x)$ συμβολίσουμε την γενική λύση της εξίσωσης (1.2.1), τότε η $\int_u^\infty Z(x)dx$ ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση, $\forall t \geq 0$

$$\int_t^\infty Z(x)dx = \int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(u)du + \phi \int_0^t f(y) \int_{t-y}^\infty Z(u)dudy. \quad (4.2.3)$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την γενική ανανεωτική εξίσωση (1.2.1) θα βρούμε την ανανεωτική εξίσωση, λύση της οποίας είναι η $\int_t^\infty Z(x)dx$. Αρχικά ολοκληρώνουμε το πρώτο και το δεύτερο μέλος της (1.2.1) από t έως ∞

$$\int_t^\infty Z(x)dx = \int_t^\infty g(x)dx + \phi \int_t^\infty \int_0^x Z(x-y)f(y)dydx.$$

Από το Θεώρημα Fubini θα έχουμε ότι

$$\int_t^\infty Z(x)dx = \int_t^\infty g(x)dx + \phi \int_0^t f(y) \int_t^\infty Z(x-y)dx dy + \phi \int_t^\infty f(y) \int_y^\infty Z(x-y)dx dy.$$

Στη συνέχεια θέτουμε στο δεύτερο και τρίτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της παραπάνω σχέσης $x - y = u$

$$\int_t^\infty Z(x)dx = \int_t^\infty g(x)dx + \phi \int_0^t f(y) \int_{t-y}^\infty Z(u)dudy + \phi \int_t^\infty f(y) \int_0^\infty Z(u)dudy.$$

Συνεπώς η $\int_t^\infty Z(x)dx$ ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση

$$\int_t^\infty Z(x)dx = \int_t^\infty g(x)dx + \phi \int_0^t f(y) \int_{t-y}^\infty Z(u)dudy + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(u)du. \quad (4.2.4)$$

□

Πόρισμα 4.2.1. Για την λύση της γενικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύει ότι

$$\int_0^\infty Z(x)dx = \frac{1}{1-\phi} \int_0^\infty g(x)dx. \quad (4.2.5)$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την εξίσωση (4.2.3) για $t = 0$.

□

Πρόταση 4.2.2. Αν με $Z(x)$ συμβολίζουμε την λύση της (1.2.1), τότε ισχύει ότι

$$\int_0^\infty \int_x^\infty Z(y)dydx = \frac{1}{1-\phi} \int_0^\infty yg(y)dy + \frac{\phi}{(1-\phi)^2} \int_0^\infty g(y)dy.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.2.1 γνωρίζουμε την ανανεωτική εξίσωση για την $\int_t^\infty Z(x)dx$ και με την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_t^\infty Z(x)dx \\ &= \int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi \int_0^t \left(\int_{t-y}^\infty Z(x)dx \right) (\bar{F}(y))' dy \\ &= \int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi \left[\left(\int_{t-y}^\infty Z(x)dx \right) \bar{F}(y) \right]_0^t \\ &+ \phi \int_0^t Z(t-y) \bar{F}(y) dy \\ &= \int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(x)dx + \phi \int_t^\infty Z(x)dx \\ &+ \phi \int_0^t Z(t-y) \bar{F}(y) dy, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\int_t^\infty Z(x)dx = \frac{1}{1-\phi} \int_t^\infty g(x)dx + \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^t Z(t-y)\bar{F}(y)dy. \quad (4.2.7)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε το πρώτο και το δεύτερο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης.

Κάνοντας πράξεις και χρησιμοποιώντας επιπλέον το Πρόρισμα 4.2.1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_x^\infty Z(y)dydx &= \frac{1}{1-\phi} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty g(y)dy + \phi \int_0^t Z(t-y)f(y)dy \right) dx \\ &= \frac{1}{1-\phi} \int_0^\infty \int_x^\infty g(y)dy + \frac{\phi}{(1-\phi)} \left(\int_0^\infty Z(y)dy \right) \int_0^\infty f(y)dy \\ &= \frac{1}{1-\phi} \int_0^\infty yg(y)dy + \frac{\phi}{(1-\phi)^2} \int_0^\infty g(y)dy. \end{aligned}$$

□

Στην πρόταση που ακολουθεί δίνεται η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, λύση της οποίας είναι η $Z(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy$, όπου $v \in \mathbb{R}$ και $Z(x)$ η λύση της γενικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1).

Πρόταση 4.2.3. Η συνάρτηση $Z(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy$ ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση

$$\begin{aligned} Z(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy &= g(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy + \phi v \int_0^x \left(\int_{x-y}^\infty Z(t)dt \right) f(y)dy \\ &+ \phi \int_0^x \left(Z(x-y) - v \int_{x-y}^\infty Z(t)dt \right) f(y)dy. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την ανανεωτική εξίσωση (1.2.1) θα αφαιρέσουμε την ποσότητα $v \int_x^\infty Z(y)dy$ και από τα δύο μέλη της, συνεπώς θα έχουμε

$$Z(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy = g(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy + \phi \int_0^x Z(x-y)f(y)dy.$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε και αφαιρούμε την ποσότητα $v \int_{x-y}^\infty Z(t)dt$ εντός του ολοκληρώματος στο δεξιό μέλος

$$\begin{aligned} Z(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy &= g(x) - v \int_x^\infty Z(y)dy + \phi v \int_0^x \left(\int_{x-y}^\infty Z(t)dt \right) f(y)dy \\ &+ \phi \int_0^x \left(Z(x-y) - v \int_{x-y}^\infty Z(t)dt \right) f(y)dy. \end{aligned}$$

□

4.2.2 Φράγματα για την $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx$

Προκειμένου να ακολουθήσουμε την μεθοδολογία των Cai και Garrido (1988) πρέπει να αποδείξουμε ανισότητες, παρόμοιας μορφής με την (4.0.1). Επομένως είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τις κατάλληλες προϋποθέσεις προκειμένου η ποσότητα $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx$ να είναι άνω φραγμένη. Στις δύο προτάσεις που ακολουθούν παρέχουμε κάποιες κατάλληλες προϋποθέσεις προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος αυτός.

Πρόταση 4.2.4. Στην ανανεωτική εξίσωση (1.2.1), αν για κάποιο $v \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι

$$g'(u) + vg(u) + \phi g(0)f(u) \leq (\geq) 0, \quad \forall u \geq 0,$$

τότε η $Z(u) - v \int_u^\infty Z(x)dx$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση ως προς u .

Απόδειξη. Για ευκολία στη διατύπωση των πράξεων θέτουμε $Z_v(u) = Z(u) - v \int_u^\infty Z(x)dx$ και επομένως η (4.2.8) θα λάβει την παρακάτω μορφή

$$Z_v(u) = g(u) - v \int_u^\infty Z(x)dx + \phi v \int_0^u \left(\int_{u-x}^\infty Z(y)dy \right) f(x)dx + \phi \int_0^u Z_v(u-x)f(x)dx. \quad (4.2.9)$$

Προκειμένου να μελετήσουμε την μονοτονία της $Z_v(u)$ θα παραγωγίσουμε την εξίσωση (4.2.9)

$$\begin{aligned} Z'_v(u) &= g'(u) + vZ(u) - \phi v \int_0^u Z(u-x)f(x)dx \\ &+ \phi v f(u) \int_0^\infty Z(y)dy + \phi \int_0^u Z'_v(u-x)f(x)dx + \phi Z_v(0)f(u). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Από την εξίσωση (1.2.1) γνωρίζουμε ότι

$$Z(u) - \phi \int_0^u Z(u-x)f(x)dx = g(u).$$

Επομένως η $Z'_v(u)$ με την βοήθεια της (4.2.10) είναι ίση με

$$\begin{aligned} Z'_v(u) &= g'(u) + vg(u) + \phi \left(Z(0) - v \int_0^\infty Z(x)dx \right) f(u) + \phi v \int_0^u Z'_v(u-x)f(x)dx \\ &+ vf(u) \int_0^\infty Z(x)dx. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Αφού $Z(0) = g(0)$ θα έχουμε ότι

$$Z'_v(u) = g'(u) + vg(u) + \phi vg(0)f(u) + \phi \int_0^u Z'_v(u-x)f(x)dx, \quad \forall u \geq 0.$$

Επομένως βάσει της Πρότασης 4.1.1 προκειμένου να αποφασίσουμε την μονοτονία της $Z_v(u)$ θα πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της παράστασης

$$g'(u) + vg(u) + \phi g(0)f(u).$$

□

Πόρισμα 4.2.2. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 4.2.4 έτσι ώστε,

1. η $Z(u) - v \int_u^\infty Z(x)dx$ να είναι αύξουσα ως προς u και $\lim_{u \rightarrow \infty} Z(u) = 0$. Τότε προκύπτει ότι

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq v, \quad \forall u \geq 0.$$

Ενώ αν $Z(0) - v \int_0^\infty Z(x)dx \geq 0$ τότε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \geq v, \quad \forall u \geq 0.$$

2. η $Z(u) - v \int_u^\infty Z(x)dx$ να είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} Z(u) = 0.$$

Τότε θα έχουμε ότι

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \geq v, \quad \forall u \geq 0.$$

Στην περίπτωση που ισχύει ότι $Z(0) - v \int_0^\infty Z(x)dx \leq 0$ τότε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq v, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Άμεση από την Πρόταση 4.2.4. □

Πρόταση 4.2.5. Αν για την πυκνότητα f ισχύει ότι $f(x) \leq a^*$, $\forall x \geq 0$ και υπάρχει θετική σταθερά b^* τέτοια ώστε να ισχύει ότι

$$\left(\frac{g(u) + \frac{a^* \phi}{1-\phi} \int_0^\infty g(x) dx}{\int_u^\infty g(x) dx} \right) \leq b^*, \quad \forall u \geq 0, \quad (4.2.12)$$

τότε για την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύει ότι

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x) dx} \leq b^* - a^* \phi, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.13)$$

Απόδειξη. Από την εξίσωση (1.2.1) ισχύει ότι

$$Z(u) - \phi \int_0^u Z(u-x) f(x) dx = g(u), \quad \forall u \geq 0$$

και αφού έχουμε υποθέσει ότι $f(x) \leq a^* \forall x \geq 0$ προκύπτει η παρακάτω ανισότητα

$$Z(u) - a^* \phi \int_0^u Z(x) dx \leq g(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι $\int_0^\infty Z(x) dx = \int_0^u Z(x) dx + \int_u^\infty Z(x) dx$ η προηγούμενη ανισότητα λαμβάνει την εξής μορφή

$$Z(u) - a^* \phi \int_0^\infty Z(x) dx + a^* \phi \int_u^\infty Z(x) dx \leq g(u)$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) + a^* \phi \int_u^\infty Z(x) dx \leq g(u) + a^* \phi \int_0^\infty Z(x) dx$$

και διαιρώντας με $\int_u^\infty Z(x) dx$ προκύπτει η παρακάτω ανίσωση

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x) dx} \leq \frac{g(u) + a^* \phi \int_0^\infty Z(x) dx}{\int_u^\infty Z(x) dx} - a^* \phi. \quad (4.2.14)$$

Προφανώς θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω ανισότητα

$$\frac{g(u) + a^* \phi \int_0^\infty Z(x) dx}{\int_u^\infty Z(x) dx} - a^* \phi \geq 0, \quad \forall u \geq 0.$$

Το οποίο αποδεικνύεται εύκολα από το γεγονός ότι $\forall u \geq 0$

$$\frac{g(u) + a^* \phi \int_0^\infty Z(x) dx}{\int_u^\infty Z(x) dx} - a^* \phi \geq \frac{g(u) + a^* \phi \int_0^\infty Z(x) dx}{\int_0^\infty Z(x) dx} - a^* \phi = \frac{g(u)}{\int_u^\infty Z(x) dx} \geq 0. \quad (4.2.15)$$

Από την σχέση (4.2.3) ισχύει ότι $\int_u^\infty g(x)dx \leq \int_u^\infty Z(x)dx$ συνεπώς η ανισότητα (4.2.14) λαμβάνοντας υπόψιν μας το Πόρισμα 4.2.1 γίνεται

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq \left(\frac{g(u) + \frac{a^*\phi}{1-\phi} \int_0^\infty g(x)dx}{\int_u^\infty g(x)dx} \right) - a^*\phi \leq b^* - a^*\phi, \forall u \geq 0.$$

□

Πρόταση 4.2.6. Αν η λύση της γενικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) είναι φραγμένη συνάρτηση ως προς u , δηλαδή υπάρχουν πραγματικές σταθερές $Z_1, Z_2 \geq 0$ τέτοιες ώστε $Z_1 \leq Z(u) \leq Z_2, \forall u \geq 0$ και επιπλέον υπάρχει θετική σταθερά ϕ_1 έτσι ώστε $f(x) \leq \phi_1, \forall x \geq 0$ τότε ισχύει ότι

$$Z(u) \leq g(u) + \phi F(u) \int_0^u Z(x)dx + \frac{1}{4}\phi\phi_1(Z_2 - Z_1), \forall u \geq 0 \quad (4.2.16)$$

και

$$Z(u) \geq g(u) + \phi F(u) \int_0^u Z(x)dx - \frac{1}{4}\phi\phi_1(Z_2 - Z_1), \forall u \geq 0. \quad (4.2.17)$$

Απόδειξη. Άμεση με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.2.2. □

Πρέπει να τονίσουμε πως στην προηγούμενη πρόταση δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την μονοτονία της $Z(x)$ ή της $f(x)$ προκειμένου να πάρουμε φράγματα για την $Z(x)$

Πόρισμα 4.2.3. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 4.2.6 τότε τα φράγματα της $Z(u)$ λαμβάνουν την παρακάτω απλούστερη μορφή αντίστοιχα

$$Z(u) \leq g(u) + \phi F(u) \left(\int_0^\infty Z(x)dx - \int_u^\infty Z(x)dx \right) + \frac{1}{4}\phi\phi_1(Z_2 - Z_1), \forall u \geq 0 \quad (4.2.18)$$

και

$$Z(u) \geq g(u) + \phi F(u) \left(\int_0^\infty Z(x)dx - \int_u^\infty Z(x)dx \right) - \frac{1}{4}\phi\phi_1(Z_2 - Z_1), \forall u \geq 0 \quad (4.2.19)$$

Από το προηγούμενο Πόρισμα είναι σαφές ότι ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα ή κάτω φράγμα για την συνάρτηση $\int_u^\infty Z(x)dx$ μπορεί να μετατραπεί σε φράγμα για την $Z(u)$.

4.2.3 Φράγματα για την λύση των ανανεωτικών εξισώσεων

Στην προηγούμενη ενότητα δώσαμε αποτελέσματα που μας περιγράφουν προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν ανισότητες της μορφής

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq d^*, \quad \forall u \geq 0,$$

για την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) και για κάποια θετική σταθερά d^* . Στόχος μας στη συγκεκριμένη παράγραφο είναι να δώσουμε φράγματα για την λύση $Z(u)$ στην περίπτωση που η ποσότητα $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx$ είναι φραγμένη. Εκθετικά φράγματα για την $Z(u)$ περιγράφονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.7. Για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) αν ισχύει ότι

$$d_1^*(u) \leq \frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq d_2^*(u), \quad \forall u \geq 0, \quad (4.2.20)$$

όπου $d_1^*(u)$ και $d_2^*(u)$ είναι αύξουσα και φθίνουσα συνάρτηση ως προς u αντίστοιχα τότε θα έχουμε ότι

$$\left(\int_0^\infty Z(x)dx \right) e^{-d_2^*(u)u} \leq \int_u^\infty Z(x)dx \leq e^{-d_1^*(u)u} \left(\int_0^\infty Z(x)dx \right), \quad \forall u \geq 0$$

από άρα η $Z(u)$ έχει τα εξής φράγματα

$$d_1^*(u) \left(\int_0^\infty Z(x)dx \right) e^{-d_2^*(u)u} \leq Z(u) \leq d_2^*(u) e^{-d_1^*(u)u} \left(\int_0^\infty Z(x)dx \right), \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την διπλή ανισότητα

$$d_1^*(u) \leq \frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq d_2^*(u), \quad \forall u \geq 0$$

παίρνουμε ότι

$$d_1^*(u) \leq -\ln \left(\int_u^\infty Z(x)dx \right)' \leq d_2^*(u), \quad \forall u \geq 0$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$\left(\int_0^\infty Z(x)dx \right) e^{-\int_0^u d_2^*(x)dx} \leq \int_u^\infty Z(x)dx \leq e^{-\int_0^u d_1^*(x)dx} \left(\int_0^\infty Z(x)dx \right) \quad (4.2.21)$$

ή ισοδύναμα

$$e^{-\int_0^u d_2^*(x)dx} \leq \frac{\int_u^\infty Z(x)dx}{\int_0^\infty Z(x)dx} \leq e^{-\int_0^u d_1^*(x)dx}, \quad \forall u \geq 0.$$

Τα φράγματα της $Z(u)$ προκύπτουν από το συνδυασμό των σχέσεων (4.2.20) και (4.2.21). □

Μια εφαρμογή της παραπάνω πρότασης στην περίπτωση που η $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx$ είναι άνω και κάτω φραγμένη από σταθερές συναρτήσεις, είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u)$. Συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.2 που θα περιγράψουμε στο επόμενο κεφάλαιο, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{RC_1}{C_2} \leq \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(x)dx} \leq \frac{RC_2}{C_1}.$$

Στην πρόταση που ακολουθεί θα δώσουμε άνω και κάτω εκθετικά φράγματα για την $Z(u)$. Τα φράγματα αυτά παρουσιάζουν βέλτιστη συμπεριφορά στην περίπτωση που η $Z(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u .

Πρόταση 4.2.8. Για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) αν ισχύει ότι

$$n_1^*(u) \leq \frac{Z(u)}{\int_0^u Z(x)dx} \leq n_2^*(u), \quad \forall u \geq 0 \quad (4.2.22)$$

όπου $n_1^*(u)$ και $n_2^*(u)$ είναι αύξουσα και φθίνουσα συνάρτηση ως προς u αντίστοιχα, τότε θα έχουμε ότι

$$e^{\int_0^u n_1^*(x)dx} \leq \int_0^u Z(x)dx \leq e^{\int_0^u n_2^*(x)dx}, \quad \forall u \geq 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$n_1^*(u)e^{\int_0^u n_1^*(x)dx} \leq Z(u) \leq n_2^*(u)e^{\int_0^u n_2^*(x)dx}, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την διπλή ανισότητα

$$\int_0^u n_1^*(x)dx \leq \frac{Z(u)}{\int_0^u Z(x)dx} \leq \int_0^u n_2^*(x)dx, \quad \forall u \geq 0$$

έχουμε ότι

$$\int_0^u n_1^*(x)dx \leq \ln \left(\int_0^u Z(x)dx \right)' \leq \int_0^u n_2^*(x)$$

και συνεπώς

$$e^{\int_0^u n_1^*(x)dx} \leq \int_0^u Z(x)dx \leq e^{\int_0^u n_2^*(x)dx}, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.23)$$

Τα φράγματα της $Z(u)$ προκύπτουν από το συνδυασμό των σχέσεων (4.2.22) και (4.2.20). □

Τα αποτελέσματα των Προτάσεων 4.2.7 και 4.2.8 ισχύουν και στην περίπτωση που οι σχέσεις (4.2.20) και (4.2.22) είναι άνω και κάτω φραγμένες από σταθερές. Στην πρόταση που ακολουθεί δίνεται ένα κάτω φράγμα για την $\int_t^\infty Z(x)dx$.

Πρόταση 4.2.9. Ένα κάτω φράγμα για την γενική λύση $\int_t^\infty Z(x)dx$ της ανανεωτικής εξίσωσης (4.2.3) είναι το εξής

$$\int_t^\infty Z(x)dx \geq \frac{\int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(u)du}{(1 - \phi F(t))}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2.24)$$

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\int_t^\infty Z(u)du$ είναι φθίνουσα ως προς t , χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.2.3) θα έχουμε ότι

$$\int_t^\infty Z(x)dx \geq \int_t^\infty g(x)dx + \phi \int_t^\infty Z(u)du \int_0^t f(y)dy + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(u)du, \quad \forall u \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$(1 - \phi F(t)) \int_t^\infty Z(x)dx \geq \int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(u)du, \quad \forall u \geq 0.$$

Άρα ένα κάτω φράγμα για την $\int_t^\infty Z(x)dx$ περιγράφεται από την παρακάτω ανισότητα

$$\int_t^\infty Z(x)dx \geq \frac{\int_t^\infty g(x)dx + \phi \bar{F}(t) \int_0^\infty Z(u)du}{(1 - \phi F(t))}, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.25)$$

□

Στις Προτάσεις 4.2.4, 4.2.5 και το Πρόρισμα 4.2.2 δώσαμε κατάλληλες προϋποθέσεις προκειμένου να είναι άνω φραγμένη η

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx}, \quad \forall u \geq 0$$

στο μη αρνητικό ημιάξονα. Στις Προτάσεις 4.2.10 και 4.2.11 που ακολουθούν έχοντας υποθέσει ότι η $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx$ είναι άνω ή κάτω φραγμένη αντίστοιχα θα περιγράψουμε φράγματα για την $Z(u)$.

Πρόταση 4.2.10. Στην γενική ανανεωτική εξίσωση (1.2.1) αν $\int_0^\infty xZ(x)dx < \infty$ και υπάρχει θετική σταθερά U_b τέτοια ώστε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq U_b, \quad \forall u \geq 0$$

τότε

1. Αν η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο θετικό ημιάξονα, τότε

$$Z(u) \leq \frac{U_b (ug(u) + \phi U_b F(u) \int_0^\infty xZ(x)dx)}{U_b u + \phi F(u)}, \quad \forall u \geq 0.$$

2. Αν ο ρυθμός αποτυχίας, $r(x) = f(x)/\bar{F}(x)$, είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς x , η $Z(u)$ έχει το παρακάτω άνω φράγμα

$$Z(u) \leq \frac{U_b (ug(u) + \phi U_b f(0)\mu F_e(u) \int_0^\infty xZ(x)dx)}{U_b u + \phi f(0)\mu F_e(u)}, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. 1. Αν στην εξίσωση (1.2.1) χρησιμοποιήσουμε στο δεύτερο μέλος της, μέσα στο ολοκλήρωμα, την υπόθεση ότι $Z(u) \leq U_b \int_u^\infty Z(x)dx$ θα έχουμε

$$Z(u) = g(u) + \phi \int_0^u Z(x)f(u-x)dx \leq g(u) + \phi U_b \int_0^u \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) f(u-x)dx. \quad (4.2.26)$$

Επομένως αν θεωρήσουμε ότι η $f(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς x συνεπάγεται ότι $f(u-x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x . Επομένως από το Θεώρημα 4.2.1 και την (4.2.26) προκύπτει το παρακάτω φράγμα για την $Z(u)$, $\forall u \geq 0$

$$\begin{aligned} Z(u) &\leq g(u) + \frac{\phi U_b}{u} \left(\int_0^u \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) dx \right) \int_0^u f(u-x)dx \\ &\leq g(u) + \frac{\phi U_b F(u)}{u} \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) dx - \int_u^\infty \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) dx \right) \\ &= g(u) + \frac{\phi U_b F(u)}{u} \left(\int_0^\infty xZ(x)dx - \int_u^\infty \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) dx \right), \quad \forall u \geq 0. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε δύο διαδοχικές φορές την ανισότητα που έχουμε υπο-

θέσει για την $\int_u^\infty Z(x)dx$, στην εκφώνηση της πρότασης

$$\begin{aligned} Z(u) &\leq g(u) + \frac{\phi U_b F(u)}{u} \left(\int_0^\infty xZ(x)dx - \frac{1}{U_b} \int_u^\infty Z(x)dx \right) \\ &\leq g(u) + \frac{\phi U_b F(u)}{u} \left(\int_0^\infty xZ(x)dx - \frac{1}{U_b^2} Z(u) \right), \quad \forall u \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

και άρα προκύπτει το παρακάτω άνω φράγμα για την $Z(u)$

$$Z(u) \leq \frac{g(u) + \frac{\phi U_b F(u)}{u} \int_0^\infty xZ(x)dx}{1 + \frac{\phi F(u)}{U_b u}}, \quad \forall u \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) \leq \frac{U_b (ug(u) + \phi U_b F(u) \int_0^\infty xZ(x)dx)}{U_b u + \phi F(u)}, \quad \forall u \geq 0.$$

2. Στην περίπτωση που η $r(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x , δηλαδή ισχύει ότι $f(x) \leq f(0)\bar{F}(x)$, τότε από το Θεώρημα 4.2.1, την (4.2.26) και το γεγονός ότι $Z(u) \leq U_b \int_u^\infty Z(x)dx$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Z(u) &= g(u) + \phi \int_0^u Z(x)f(u-x)dx \leq g(u) + \phi U_b f(0) \int_0^u \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) \bar{F}(u-x)dx \\ &\leq g(u) + \frac{\phi U_b f(0)}{u} \left(\int_0^u \int_x^\infty Z(y)dydx \right) \int_0^u \bar{F}(u-x)dx \quad (4.2.28) \\ &= g(u) + \frac{\phi U_b f(0)\mu F_e(u)}{u} \left(\int_0^\infty \int_x^\infty Z(y)dydx - \int_u^\infty \int_x^\infty Z(y)dydx \right) \\ &= g(u) + \frac{\phi U_b f(0)\mu F_e(u)}{u} \left(\int_0^\infty xZ(x)dx - \int_u^\infty \int_x^\infty Z(y)dydx \right), \quad \forall u \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα χρησιμοποιώντας δυο διαδοχικές φορές την υπόθεση που έχουμε κάνει για την $Z(u)$ δηλαδή ότι $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx \leq U_b$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Z(u) &\leq g(u) + \frac{\phi U_b f(0)\mu F_e(u)}{u} \left(\int_0^\infty xZ(x)dx - \frac{1}{U_b} \int_u^\infty Z(x)dx \right) \\ &\leq g(u) + \frac{\phi U_b f(0)\mu F_e(u)}{u} \left(\int_0^\infty xZ(x)dx - \frac{1}{U_b^2} Z(u) \right), \quad \forall u \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

και άμεσα έχουμε το ζητούμενο άνω φράγμα για την $Z(u)$

$$Z(u) \leq \frac{g(u) + \frac{\phi U_b f(0)\mu F_e(u)}{u} \int_0^\infty xZ(x)dx}{1 + \frac{\phi f(0)\mu F_e(u)}{U_b u}}, \quad \forall u \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) \leq \frac{U_b (ug(u) + \phi U_b f(0) \mu F_e(u) \int_0^\infty x Z(x) dx)}{U_b u + \phi f(0) \mu F_e(u)}, \quad \forall u \geq 0.$$

□

Όμοια αποτελέσματα προκύπτουν και αν η συνάρτηση $r(x)$ είναι άνω φραγμένη. Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε το $f(0)$ με το άνω φράγμα της.

Πόρισμα 4.2.4. Στην γενική ανανεωτική εξίσωση (1.2.1) έστω ότι υπάρχει θετική σταθερά U_b τέτοια ώστε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x) dx} \leq U_b, \quad \forall u \geq 0.$$

Τότε

$$Z(u) \leq g(u) + \frac{\phi U_b f(0)}{u} \left(\int_u^\infty Z(x) dx - \int_u^\infty g(x) dx - \phi \mu \bar{F}_e(u) \int_0^\infty Z(x) dx \right), \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Πορίσματος θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.2.3) και (4.2.28)

$$\begin{aligned} Z(u) &\leq g(u) + \frac{\phi U_b f(0)}{u} \left(\int_0^u \int_x^\infty Z(y) dy dx \right) \int_0^u \bar{F}(u-x) dx \\ &\leq g(u) + \frac{\phi U_b f(0)}{u} \left(\int_u^\infty Z(x) dx - \int_u^\infty g(x) dx - \phi \mu \bar{F}_e(u) \int_0^\infty Z(x) dx \right). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.2.11. Αν $\int_0^\infty x Z(x) dx < \infty$ και υπάρχει θετική σταθερά L_b τέτοια ώστε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x) dx} \geq L_b, \quad \forall u \geq 0 \quad (4.2.30)$$

και ισχύει ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα στο θετικό ημιάξονα τότε

$$Z(u) \geq \frac{L_b (ug(u) + \phi L_b F(u) \int_0^\infty x Z(x) dx)}{L_b u + \phi F(u)}, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Όμοια με την Πρόταση 4.2.10. □

Στην επόμενη πρόταση θεωρούμε πως είναι γνωστό το πρόσημο της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της f προκειμένου αντίστοιχα να υπολογίσουμε άνω ή κάτω φράγματα για την λύση $Z(u)$ της (1.2.1).

Πρόταση 4.2.12. Έστω ότι για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύει ότι $\int_0^\infty xZ(x)dx < \infty$ και υπάρχει σταθερά U_b τέτοια ώστε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \leq U_b, \quad \forall u \geq 0$$

και $f'(x) \geq 0, f''(x) \leq 0, \forall x \geq 0$. Τότε η λύση της (1.2.1) έχει το εξής άνω φράγμα

$$Z(u) \leq \frac{1}{1 + U_b^2 + \phi U_b f(u)} \left(g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \int_u^\infty Z(x)dx + \frac{\phi (f(u) - f(0)) \int_0^u xZ(x)dx}{u} \right), \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στο δεύτερο μέλος της (1.2.1) και συγκεκριμένα εντός του ολοκληρώματος άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} Z(u) &= g(u) + \phi \int_0^u Z(x)f(u-x)dx = g(u) - \phi \int_0^u \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right)' f(u-x)dx \\ &= g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \int_u^\infty Z(x)dx + \phi \int_0^u \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) f'(u-x)dx. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Αφού $f''(x) \leq 0, \forall x \geq 0$ συνεπάγεται ότι $f'(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς x και επομένως η $f'(u-x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε $x \in [0, u]$. Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.2.1 και την (4.2.26) στην (4.2.31).

$$\begin{aligned} Z(u) &\leq g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \int_u^\infty Z(x)dx \\ &\quad + \frac{\phi}{u} \left(\int_0^u \left(\int_x^\infty Z(y)dy \right) dx \int_0^u f'(u-x)dx \right) \\ &= g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \int_u^\infty Z(x)dx \\ &\quad + \frac{\phi (f(u) - f(0))}{u} \left(\int_0^u xZ(x)dx - \int_0^u \int_x^\infty Z(y)dydx \right) \end{aligned}$$

και επειδή ισχύει ότι $Z(u)/\int_u^\infty Z(x)dx \leq U_b$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 Z(u) &\leq g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \int_u^\infty Z(x)dx \\
 &+ \frac{\phi(f(u) - f(0))}{u} \left(\int_0^u xZ(x)dx - \int_0^u \int_x^\infty Z(y)dydx \right) \\
 &\leq g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \int_u^\infty Z(x)dx \\
 &+ \frac{\phi(f(u) - f(0))}{u} \left(\int_0^u xZ(x)dx - \frac{1}{U_b} \int_0^u Z(x)dx \right) \\
 &\leq g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx - \phi f(u) \frac{1}{U_b} Z(u) \\
 &+ \frac{\phi(f(u) - f(0))}{u} \left(\int_0^u xZ(x)dx - \frac{1}{U_b^2} Z(u) \right).
 \end{aligned}$$

Άρα μετά από απλές πράξεις προκύπτει το εξής άνω φράγμα για την $Z(u)$

$$\begin{aligned}
 Z(u) &\leq \frac{U_b^2 u + \phi u f(u) U_b - \phi(f(u) - f(0))}{u U_b^2} \left(g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx \right. \\
 &+ \left. \frac{\phi(f(u) - f(0))}{u} \int_0^u xZ(x)dx \right), \quad \forall u \geq 0.
 \end{aligned}$$

□

Στην συνέχεια θα δώσουμε την αντίστοιχη πρόταση για την εύρεση ενός κάτω φράγματος για την $Z(u)$.

Πρόταση 4.2.13. Έστω ότι για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύει ότι $\int_0^\infty xZ(x)dx < \infty$ και υπάρχει σταθερά L_b τέτοια ώστε

$$\frac{Z(u)}{\int_u^\infty Z(x)dx} \geq L_b, \quad \forall u \geq 0,$$

και $f'(x) \geq 0$ και $f''(x) \geq 0$. Τότε η λύση της (1.2.1) έχει το εξής άνω φράγμα

$$\begin{aligned}
 Z(u) &\geq \frac{L_b^2 u + \phi u f(u) L_b - \phi(f(u) - f(0))}{u L_b^2} \left(g(u) + \phi f(0) \int_0^\infty Z(x)dx \right. \\
 &+ \left. \frac{\phi(f(u) - f(0))}{u} \int_0^u xZ(x)dx \right), \quad \forall u \geq 0
 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.2.12.

□

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει φράγματα για την λύση της γενικής ανανεωτικής εξίσωσης, στην περίπτωση που γνωρίζουμε την μονοτονία των $Z(u)$ και $f(u)$.

Πρόταση 4.2.14. 1. Αν $Z(u)$ και $f(u)$ έχουν διαφορετική μονοτονία στο $[0, \infty)$ τότε ισχύει ότι

$$Z(u) \leq g(u) + \frac{\phi F(u)}{u} \left(\int_0^\infty Z(x) dx - \int_u^\infty Z(x) dx \right), \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.32)$$

2. Αν $Z(u)$ και $f(u)$ έχουν ίδια μονοτονία τότε έχουμε

$$Z(u) \geq g(u) + \frac{\phi F(u)}{u} \left(\int_0^\infty Z(x) dx - \int_u^\infty Z(x) dx \right), \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.33)$$

Απόδειξη. 1. Αν $Z(u)$ και $f(u)$ έχουν διαφορετική μονοτονία, τότε από το Θεώρημα 4.2.1 θα έχουμε ότι

$$Z(u) \leq g(u) + \frac{\phi}{u} \int_0^u Z(u-x) dx \int_0^u f(x) dx, \quad \forall u \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) \leq g(u) + \frac{\phi F(u)}{u} \int_0^u Z(x) dx, \quad \forall u \geq 0.$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$Z(u) \leq g(u) + \frac{\phi F(u)}{u} \left(\int_0^\infty Z(x) dx - \int_u^\infty Z(x) dx \right), \quad \forall u \geq 0.$$

Επομένως κάθε κάτω φράγμα της $\int_u^\infty Z(x) dx$ μετατρέπεται σε ένα άνω φράγμα για την $Z(u)$. 2. Όμοια με το 1. αν χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.2.1 προκύπτει ότι

$$Z(u) \geq g(u) + \frac{\phi}{u} \int_0^u Z(u-x) dx \int_0^u f(x) dx, \quad \forall u \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) \geq g(u) + \frac{\phi F(u)}{u} \int_0^u Z(x) dx, \quad \forall u \geq 0.$$

Άρα θα έχουμε ότι

$$Z(u) \geq g(u) + \frac{\phi F(u)}{u} \left(\int_0^\infty Z(x) dx - \int_u^\infty Z(x) dx \right), \quad \forall u \geq 0.$$

Επομένως κάθε άνω φράγμα της $\int_u^\infty Z(x) dx$ μετατρέπεται σε ένα κάτω φράγμα για την $Z(u)$. □

Στο Θεώρημα που ακολουθεί περιγράφεται η λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης με την βοήθεια μιας επιπλέον ανανεωτικής εξίσωσης απλούστερης μορφής.

Θεώρημα 4.2.3. Η ανανεωτική εξίσωση (1.2.1) με την βοήθεια της ανανεωτικής εξίσωσης

$$V(u) = 1 + \phi \int_0^u V(u-x)f(x)dx, \quad \forall u \geq 0$$

λαμβάνει την εξής μορφή

$$Z(u) = g(0)V(u) + \phi \int_0^u V(u-x)g'(x)dx, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.34)$$

Απόδειξη. Βλέπε Bellman και Cooke (1963). □

Επομένως, από το παραπάνω Θεώρημα είναι σαφές πως οποιοδήποτε φράγμα της $V(u)$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε φράγμα για την $Z(u)$. Η $V(u)$ είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή και είναι ίση με $V(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(1-\phi)^n F^{*n}(u)$. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετά αποτελέσματα που αναφέρονται σε φράγματα για την $V(u)$. Το βιβλίο των Willmot και Lin (2001) περιλαμβάνει αρκετά αποτελέσματα σχετικά με φράγματα για τις σύνθετες γεωμετρικές κατανομές. Επομένως στην περίπτωση που γνωρίζουμε την μονοτονία των φραγμάτων αυτών, χρησιμοποιώντας την ανισότητα που περιγράφεται στο Θεώρημα 4.2.1 και το Θεώρημα των 4.2.3, μπορούμε να κατασκευάσουμε φράγματα για την γενική λύση $Z(x)$.

Πρόταση 4.2.15. Έστω $V_1(u) \leq V(u) \leq V_2(u)$, $\forall u \geq 0$ και

1. $g'(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$. Τότε για την λύση $Z(u)$ της (1.2.1) ισχύει ότι

$$g(0)V_1(u) + \phi \int_0^u V_1(u-x)g'(x)dx \leq Z(u) \leq g(0)V_2(u) + \phi \int_0^u V_2(u-x)g'(x)dx,$$

$$\forall u \geq 0.$$

2. $g'(x) \leq 0$, $\forall x \geq 0$. Τότε η $Z(u)$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$g(0)V_1(u) + \phi \int_0^u V_2(u-x)g'(x)dx \leq Z(u) \leq g(0)V_2(u) + \phi \int_0^u V_1(u-x)g'(x)dx,$$

$$\forall u \geq 0$$

Απόδειξη. Άμεση από τα Θεωρήματα 4.2.1 και 4.2.3. \square

Πρόταση 4.2.16. Αν f είναι φθίνουσα συνάρτηση τότε η λύση $Z(u)$ της (1.2.1) έχει το εξής κάτω φράγμα

$$Z(u) \geq g(0)V(u) + \frac{\phi}{u} (g(x) - g(0)) \int_0^u V(x)dx, \quad \forall u \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) \geq g(0)V(u) + \frac{\phi}{u} (g(x) - g(0)) \left(\int_0^\infty V(x)dx - \int_u^\infty V(x)dx \right), \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Η $V(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση (βλέπε τον ορισμό της στο Θεώρημα 4.2.3), επομένως η $V(u-x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς x , $\forall x \leq u$. Από το Θεώρημα 4.2.1 προκύπτει άμεσα το αποτέλεσμα. \square

Πρόταση 4.2.17. Αν $F \in DFR$ τότε

$$Z(u) \geq \phi g'(u) + \int_0^u \frac{f(u-x)}{1-\phi F(u-x)} g(x)dx, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της σχέσης (4.2.34)

$$\begin{aligned} Z(u) &= g(0)V(u) + \phi \int_0^u V(u-x)g'(x)dx \\ &= g(0)V(u) + \phi \left[V(u-x)g'(x) \right]_0^u + \int_0^u V'(u-x)g(x)dx \\ &= g(0)V(u) + \phi V(0)g'(u) - V(u)g(0) + \int_0^u V'(u-x)g(x)dx \\ &= g(0)V(u) + \phi g'(u) - V(u)g(0) + \int_0^u V'(u-x)g(x)dx. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Από την Πρόταση 6.4.3 γνωρίζουμε ότι $V''(u) \leq 0, \forall u \geq 0$. Άρα $V'(u)$ είναι φθίνουσα. Συνεπώς θα έχουμε ότι

$$V'(u) \geq f(u) + \phi V'(u) \int_0^u f(x)dx, \quad \forall u \geq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$V'(u) \geq f(u) + \phi V'(u)F(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι

$$V'(u) \geq \frac{f(u)}{1 - \phi F(u)}, \quad \forall u \geq 0.$$

και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση μαζί με την (4.2.35) συνεπάγεται ότι

$$Z(u) \geq g(0)V(u) + \phi g'(u) - V(u)g(0) + \int_0^u \frac{f(u-x)}{1 - \phi F(u-x)} g(x) dx, \quad \forall u \geq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$Z(u) \geq \phi g'(u) + \int_0^u \frac{f(u-x)}{1 - \phi F(u-x)} g(x) dx, \quad \forall u \geq 0.$$

□

Πρέπει να παρατηρήσουμε πως τα αποτελέσματα των προτάσεων που αναφέρθηκαν στην ενότητα αυτή, μπορούν να ισχύουν και για διαστήματα της μορφής $[0, a_0]$, με $a_0 > 0$ αρκεί φυσικά να πληρούνται οι προϋποθέσεις που τέθηκαν, προκειμένου να ισχύουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

4.2.4 Εφαρμογές στις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε φράγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_k(u)$, $k \geq 1$. Υπενθυμίζουμε ότι οι $\psi_k(u)$, $k \geq 1$ αποτελούν λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (3.1.2). Στην συνέχεια θα δώσουμε άνω και κάτω φράγματα για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας.

Πρόταση 4.2.18. Για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$\frac{k!}{c^k} \psi(u) \left(\int_0^\infty \psi(x) dx \right)^k \leq \frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx \leq \psi_k(u), \quad \forall u \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Απόδειξη. Βασικός μας στόχος είναι να δώσουμε ανισοτικές σχέσεις που να συνδέουν την κάθε ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για $k = 1$ από την σχέση (3.1.2) θα έχουμε

$$\psi_1(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx + \frac{1}{\mu(1+\theta)} \int_0^u \psi_1(x) \bar{F}(x) dx, \quad \forall u \geq 0$$

Παρατηρούμε πως

$$\frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx \leq \psi_1(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.0.1) παίρνουμε το εξής κάτω φράγμα για την $\psi_1(u)$

$$\frac{1}{c} \psi(u) \int_0^\infty \psi(x) dx \leq \psi_1(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Έστω ότι ισχύει

$$\frac{k!}{c^k} \psi(u) \left(\int_0^\infty \psi(x) dx \right)^k \leq \psi_k(u), \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.36)$$

Τότε από την σχέση (3.1.2) γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\frac{k+1}{c} \int_u^\infty \psi_k(x) dx \leq \psi_{k+1}(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας την (4.2.36) σε συνδυασμό με την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει ότι

$$\psi_{k+1}(u) \geq \frac{k+1}{c} \int_u^\infty \psi_k(x) dx \geq \frac{(k+1)k!}{c^{k+1}} \int_u^\infty \psi(x) dx \left(\int_0^\infty \psi(x) dx \right)^k, \quad \forall u \geq 0$$

και άρα χρησιμοποιώντας την σχέση (4.0.1) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο κάτω φράγμα για την $\psi_{k+1}(u)$

$$\psi_{k+1}(u) \geq \frac{(k+1)!}{c^{k+1}} \psi(u) \left(\int_0^\infty \psi(x) dx \right)^{k+1}, \quad \forall u \geq 0.$$

□

Πρόταση 4.2.19. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας κινδύνων για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας $\forall u \geq 0$ και $\forall k \geq 1$ ισχύει ότι

$$\frac{\psi_k(u)}{\int_u^\infty \psi_k(x) dx} \leq \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.37)$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε την μεθοδολογία της μαθηματικής επαγωγής. Συνεπώς αρχικά οφείλουμε να αποδείξουμε ότι η σχέση (4.2.37) ισχύει για $k = 1$, δηλαδή ότι

$$\frac{\psi_1(u)}{\int_u^\infty \psi_1(x) dx} \leq \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}, \quad \forall u \geq 0.$$

Αν στην σχέση (3.1.2) θέσουμε $k = 1$ θα έχουμε ότι

$$\psi_1(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx + \frac{1}{(1+\theta)\mu} \int_0^u \psi_1(u-x) \bar{F}(x) dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.2.4, προκειμένου να ελέγξουμε την μονοτονία της $\psi_1(u) - v \int_u^\infty \psi_1(x) dx$ με $v = 1/\int_0^\infty \psi(x) dx$. Άρα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο, ως προς u , της παρακάτω παράστασης

$$-\psi(u) + \frac{\int_u^\infty \psi(x) dx}{\int_0^\infty \psi(x) dx} + \frac{\phi f(u) \int_u^\infty \psi(x) dx}{\int_0^\infty \psi_1(x) dx}.$$

Με την βοήθεια της σχέσης (4.0.1) είναι φανερό ότι η παραπάνω παράσταση είναι θετική, $\forall u \geq 0$. Επομένως, αποδείξαμε ότι $\psi_1(u) - \int_u^\infty \psi_1(x) dx / \int_0^\infty \psi(x) dx$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u . Άρα αν χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.1.2 θα έχουμε ότι

$$\psi_1(u) - \frac{\int_u^\infty \psi_1(x) dx}{\int_0^\infty \psi(x) dx} \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\psi_1(u) - \frac{\int_u^\infty \psi_1(x) dx}{\int_0^\infty \psi(x) dx} \right) \leq 0.$$

Συνεπώς, προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα

$$\frac{\psi_1(u)}{\int_u^\infty \psi_1(x) dx} \leq \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}, \quad \forall u \geq 0.$$

Έστω ότι ισχύει η σχέση (4.2.37) για $k = m$

$$\frac{\psi_m(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} \leq \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.38)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$

$$\frac{\psi_{m+1}(u)}{\int_u^\infty \psi_{m+1}(x) dx} \leq \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}, \quad \forall u \geq 0. \quad (4.2.39)$$

Από τις σχέσεις (4.2.38) (4.0.1) και (3.1.2) για $k = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\int_u^\infty \psi_m(x)}{\int_u^\infty \int_x^\infty \psi_m(y) dy dx} \leq \frac{\int_u^\infty \psi_m(x)}{\int_u^\infty \psi(x) dx \int_0^\infty \psi(x) dx} = \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}$$

και επομένως θα ισχύει ότι

$$\frac{\psi_{m+1}(u)}{\int_u^\infty \psi_{m+1}(x) dx} \leq \frac{1}{\int_0^\infty \psi(x) dx}, \quad \forall u \geq 0.$$

□

Στην πρόταση που ακολουθεί δίνουμε φράγματα για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Τα φράγματα αυτά προέρχονται από τις Προτάσεις 4.2.10 και 4.2.19 που μας δίνουν γενικά φράγματα για την λύση της ελλειμματικής εξίσωσης (1.2.1).

Πρόταση 4.2.20. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων η k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας έχει τα εξής άνω φράγματα $\forall k \geq 0$

$$\psi_k(u) \leq \frac{\frac{1}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx + \frac{\int_0^u \bar{F}(t) dt}{u(1+\theta)\mu \int_0^\infty \psi(x) dx} \int_0^\infty x \psi_k(x) dx}{1 + \frac{\int_0^\infty \psi(x) dx \int_0^u \bar{F}(t) dt}{u(1+\theta)\mu}}, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 4.2.10 και 4.2.19. \square

Πόρισμα 4.2.5. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας T έχει τα παρακάτω φράγματα, $\forall u \geq 0$

$$\psi_1(u) \geq \frac{1}{c} \psi(u) \int_0^\infty \psi(x) dx := L_V(u)$$

και

$$\psi_1(u) \leq \frac{\frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx + \frac{\int_0^u \bar{F}(t) dt}{u(1+\theta)\mu \int_0^\infty \psi(x) dx} \int_0^\infty x \psi_1(x) dx}{1 + \frac{\int_0^\infty \psi(x) dx \int_0^u \bar{F}(t) dt}{u(1+\theta)\mu}} := U_V(u).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από τις Προτάσεις 4.2.18 και 4.2.20. \square

Στο Κεφάλαιο 5 θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού των άνω και κάτω φραγμάτων για την πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας.

4.3 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ανανεωτικές εξισώσεις

Όπως παρατηρήσαμε στα Θεωρήματα 1.5.1, 1.5.2 (1.) και 1.5.3 (2.) του Κεφαλαίου 1, για να πάρουμε μια ασυμπτωτική σχέση για τη συνάρτηση Z στην περίπτωση που η κατανομή

F έχει βαριά ουρά και ισχύει ότι $g(x)/f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$, χρειαζόμαστε επιπλέον και τη συνθήκη $g \in \mathcal{S}d$. Στην πράξη, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η συνθήκη αυτή δεν ισχύει ή δεν είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι ισχύει, όπως για παράδειγμα στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που μας δίνει τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, (3.1.2) για $k \geq 2$. Για την συγκεκριμένη εξίσωση παρόλο που ισχύει κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες ότι $\psi(u) \in \mathcal{S}d$ (βλέπε σχέση 2.2.2) δεν είναι προφανές ότι $\frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx \in \mathcal{S}d$, $\forall k \geq 2$ ή ακόμα και αν βρεθούν συνθήκες για τις οποίες να ισχύει, αυτές θα είναι πολύ περιοριστικές (π.χ. η συνάρτηση κατανομής F να ανήκει στην κλάση της ομαλής κύμανσης (regularly varying)). Επομένως έχοντας σαν κίνητρο αυτή την δυσκολία εφαρμογής των προαναφερθέντων θεωρημάτων και λαμβάνοντας υπόψιν μας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 7 στο οποίο θα παρουσιάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$, δίνουμε μια σειρά από αποτελέσματα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Πρέπει να τονίσουμε πως το σύνολο των αποτελεσμάτων που περιγράφονται στην παρούσα παράγραφο έχουν εμπνευστεί από την μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας που ακολουθεί στο Κεφάλαιο 7.

Στην πρόταση και στο θεώρημα που παραθέτουμε στην συνέχεια, μελετάμε αντίστοιχα, την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνέλιξης δύο θετικών συναρτήσεων καθώς επίσης και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης που περιγράφεται στην σχέση (1.2.1). Για τις συναρτήσεις αυτές απαιτείται να είναι ολοκληρώσιμες σε όλο το θετικό ημιάξονα (ή ειδικότερα στο πεδίο ορισμού τους). Αν υποθέσουμε ότι $f \in \mathcal{S}d$ τότε από το Θεώρημα 1.4.3 ισχύει ότι $u(x) \sim lf(x)$ με $l = \phi/(1-\phi)^2$. Το γεγονός αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.1 και του Θεωρήματος 4.3.1.

Πρόταση 4.3.1. *Αν $f \in \mathcal{S}d$ μια φραγμένη και μη αρνητική συνάρτηση, $g \in \mathcal{L}d$, $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$ και $\int_0^\infty g(x) dx < \infty$, τότε για την συνέλιξη των u και g με*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^n f^{\otimes n}(x) \quad (4.3.1)$$

ισχύει ο παρακάτω τύπος

$$(u \otimes g)(x) = f(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{u(x-y)}{f(x)} - l \right) g(y) dy + lf(x) \int_0^{x/2} g(y) dy \\ + g(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{g(x-y)}{g(x)} - 1 \right) u(y) dy + g(x) \int_0^{x/2} u(y) dy \quad (4.3.2)$$

όπου $u(x) \sim lf(x), x \rightarrow \infty$ με $l = \phi / (1 - \phi)^2$.

Απόδειξη. Από τις ιδιότητες των συνελίξεων και των ολοκληρωμάτων θα έχουμε ότι

$$(u \otimes g)(x) = \int_0^x u(x-y)g(y)dy = \int_0^{x/2} u(x-y)g(y)dy + \int_0^{x/2} g(x-y)u(y)dy. \quad (4.3.3)$$

Επίσης αν κάνουμε πράξεις στο δεξιό μέλος της σχέσης (4.3.2) θα έχουμε

$$f(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{u(x-y)}{f(x)} - l \right) g(y) dy + lf(x) \int_0^{x/2} g(y) dy \\ + g(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{g(x-y)}{g(x)} - 1 \right) u(y) dy + g(x) \int_0^{x/2} u(y) dy \\ = f(x) \int_0^{x/2} \frac{u(x-y)}{f(x)} g(y) dy - lf(x) \int_0^{x/2} g(y) dy + lf(x) \int_0^{x/2} g(y) dy \\ + g(x) \int_0^{x/2} \frac{g(x-y)}{g(x)} u(y) dy - g(x) \int_0^{x/2} u(y) dy + g(x) \int_0^{x/2} u(y) dy \\ = \int_0^{x/2} u(x-y)g(y) dy + \int_0^{x/2} g(x-y)u(y) dy. \quad (4.3.4)$$

Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (4.3.3) και (4.3.4) προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Θεώρημα 4.3.1. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 4.3.1, τότε για την γενική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύουν τα εξής

1. Αν υπάρχει μη αρνητική σταθερά c_1^* τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)/g(x) \rightarrow c_1^*, x \rightarrow \infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{g(x)} = 1 + lc_1^* \int_0^\infty g(y) dy + \int_0^\infty u(y) dy. \quad (4.3.5)$$

2. Αν υπάρχει μη αρνητική σταθερά c_2^* τέτοια ώστε $g(x)/f(x) \rightarrow c_2^*, x \rightarrow \infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{f(x)} = c_2^* + l \int_0^\infty g(y) dy + c_2^* \int_0^\infty u(y) dy.$$

Απόδειξη. 1. Ξεκινώντας από την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) σε συνδυασμό με την (4.3.2) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} Z(x) &= g(x) + (u \otimes g)(x) \\ &= g(x) + f(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{u(x-y)}{f(x)} - l \right) g(y) dy + lf(x) \int_0^{x/2} g(y) dy \\ &+ g(x) \int_0^{x/2} \left(\frac{g(x-y)}{g(x)} - 1 \right) u(y) dy + g(x) \int_0^{x/2} u(y) dy. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Στην συνέχεια διαιρούμε με $g(x)$ και τα δύο μέλη της (4.3.6) και παίρνουμε τα όρια καθώς το x τείνει στο άπειρο

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{g(x)} &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \int_0^{x/2} \left(\frac{u(x-y)}{f(x)} - l \right) g(y) dy \right) + l \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \int_0^{x/2} g(y) dy \right) \\ &+ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x)}{g(x)} \int_0^{x/2} \left(\frac{g(x-y)}{g(x)} - 1 \right) u(y) dy \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x)}{g(x)} \int_0^{x/2} u(y) dy \right). \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι ισχύει $f(x)/g(x) \rightarrow c_1^*$, $x \rightarrow \infty$, $f \in \mathcal{Sd}$ και $g \in \mathcal{Ld}$ προκύπτει ο επόμενος ασυμπτωτικός τύπος

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{g(x)} = 1 + lc_1^* \int_0^\infty g(y) dy + \int_0^\infty u(y) dy. \quad (4.3.7)$$

2. Όμοια με το 1. αν διαιρέσουμε την (4.3.6) με $f(x)$ και πάρουμε τα όρια στο πρώτο και δεύτερο μέλος καθώς το $x \rightarrow \infty$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{f(x)} \int_0^{x/2} \left(\frac{u(x-y)}{f(x)} - l \right) g(y) dy \right) \\ &+ l \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{f(x)} \int_0^{x/2} g(y) dy \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \int_0^{x/2} \left(\frac{g(x-y)}{g(x)} - 1 \right) u(y) dy \right) \\ &+ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \int_0^{x/2} u(y) dy \right). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $g(x)/f(x) \rightarrow c_2^*$, $x \rightarrow \infty$, $f \in \mathcal{Sd}$ και $g \in \mathcal{Ld}$ συνεπώς η (4.3.8) λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{f(x)} = c_2^* + l \int_0^\infty g(y) dy + c_2^* \int_0^\infty u(y) dy. \quad (4.3.9)$$

□

Το Πόρισμα που θα δώσουμε στην συνέχεια αναφέρεται στις περιπτώσεις που $c_1^* = 0$ και $c_2^* = 0$.

Πόρισμα 4.3.1. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 4.3.1, τότε για την λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1) ισχύουν τα εξής

1. Αν f, g είναι θετικές πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x)/g(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{g(x)} = 1 + \int_0^{\infty} u(y)dy, \quad (4.3.10)$$

2. Αν $g(x)/f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z(x)}{f(x)} = l \int_0^{\infty} g(y)dy. \quad (4.3.11)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το Θεώρημα 4.3.1. □

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.1. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της δεύτερης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας που δίνεται σαν λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (3.1.2). Η περίπτωση της πρώτης ροπής αντιμετωπίζεται εύκολα με την βοήθεια των εργαλείων που μας προσφέρουν τα Θεωρήματα των Yin και Zhao (Θεώρημα 1.5.2, αντίστοιχο είναι και το αποτέλεσμα του Asmussen, Θεώρημα 1.5.1). Έτσι αν θέσουμε $k = 1$ στην εξίσωση (3.1.2) θα προκύψει μια ανανεωτική εξίσωση, λύση της οποίας είναι η πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)$.

$$\psi_1(u) = \frac{1}{c} \int_u^{\infty} \psi(x)dx + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_1(u-x)dF_e(x). \quad (4.3.12)$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $F_e \in \mathcal{S}^*$ και $\bar{F}/\mu \in \mathcal{S}d$. Τότε γνωρίζουμε ότι $\psi(u) \in \mathcal{S}d$ (βλέπε Πρόταση 2.2.2). Επομένως συνεπάγεται ότι

$$\frac{\frac{1}{c} \int_0^u \psi(x)dx}{\int_0^{\infty} \frac{1}{c} \psi(x)dx} = \frac{\int_0^u \psi(x)dx}{\int_0^{\infty} \psi(x)dx} \in \mathcal{S}.$$

Είναι προφανές ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.5.2 (2.) μιας και ισχύουν τα ακόλουθα

1. Αφού $F_e \in \mathcal{S}^*$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ανήκει στην κλάση $\mathcal{S}d$ και επομένως από την Πρόταση 1.4.3 θα έχουμε

$$\frac{\int_0^u \psi(x)dx}{\int_0^\infty \psi(x)dx} \in \mathcal{S},$$

2. $F_e \in \mathcal{S}$, από την Πρόταση 1.4.3.

- 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^\infty \psi(y)dy}{F_e(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu \psi(x)}{F(x)} = \mu \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{F_e(x)} \cdot \frac{\overline{F_e}(x)}{F(x)} = \infty$$

και συνεπώς θα έχουμε βάσει του αποτελέσματος του Θεωρήματος 1.5.2 ότι

$$\psi_1(u) \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\theta}} \cdot \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x)dx, \quad u \rightarrow \infty$$

ή ισοδύναμα

$$\psi_1(u) \sim \frac{1}{\lambda \mu \theta} \int_u^\infty \psi(x)dx, \quad u \rightarrow \infty. \quad (4.3.13)$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$, $k \geq 1$ μελετάται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 7. Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της δεύτερης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, που ικανοποιεί την σχέση (3.1.2) για $k = 2$

$$\psi_2(u) = \frac{2}{c} \int_u^\infty \psi_1(x)dx + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_2(u-x)dF_e(x), \quad (4.3.14)$$

τότε παρατηρούμε πως δεν ισχύει πάντα ή τουλάχιστον δεν είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι $\frac{2}{c} \int_u^\infty \psi_1(x)dx \in \mathcal{S}d$ ή $\frac{2}{c} \int_0^u \psi_1(x)dx / \int_0^\infty \psi_1(x)dx \in \mathcal{S}$. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.3.1. Καταρχήν θα πρέπει να ελέγξουμε ότι οι προαπαιτούμενες συνθήκες ισχύουν προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι μπορούμε να κάνουμε χρήση του αποτελέσματος, του Θεωρήματος 4.3.1, για την περίπτωση της δεύτερης ροπής, $\psi_2(u)$. Οι συνθήκες αυτές είναι

1. $\overline{F}/\mu \in \mathcal{S}d$,
2. $\frac{2}{c} \int_u^\infty \psi_1(x)dx \in \mathcal{L}d$,
3. $\int_0^\infty \int_u^\infty \psi_1(x)dx dy < \infty$, $\int_0^\infty \overline{F}(x)dx < \infty$,
4. $\overline{F}(u) / \int_u^\infty \psi_1(x)dx \rightarrow 0$.

Η απόδειξη των παραπάνω σχέσεων ακολουθεί στην συνέχεια.

Απόδειξη. 1. Ισχύει από την υπόθεση

2. Πρέπει να δείξουμε ότι $\frac{2}{c} \int_u^\infty \psi_1(x) dx \in \mathcal{L}d$. Με την βοήθεια του Θεωρήματος l' Hospital αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{2}{c} \psi_1(u) \in \mathcal{L}d$ ή ισοδύναμα ότι $\psi_1(u) \in \mathcal{L}d$. Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $\psi \in \mathcal{S}d$, επομένως από την σχέση (1.4.3) θα έχουμε ότι $\psi \in \mathcal{L}d$. Συνεπώς με χρήση της Πρότασης 1.4.2 ισχύει ότι $\psi \otimes \psi \in \mathcal{L}d$. Άρα

$$\begin{aligned} \psi_1(u-x) &= \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left((\psi \otimes \psi)(u-x) + \int_{u-x}^\infty \psi(y) dy - \psi(u-x) \int_0^\infty \psi(y) dy \right) \\ &\sim \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left((\psi \otimes \psi)(u) + \int_u^\infty \psi(y) dy - \psi(u) \int_0^\infty \psi(x) dx \right) = \psi_1(u) \end{aligned}$$

Συνεπώς αποδείξαμε ότι $\forall x \geq 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(u-x)}{\psi_1(u)} = 1.$$

3. Ολοκληρώνοντας το πρώτο και το δεύτερο μέλος της σχέσης (4.3.14) θα έχουμε

$$\int_0^\infty \psi_{k+1}(x) dx = \frac{k+1}{c} \int_0^\infty \int_x^\infty \psi_k(y) dy dx + \frac{1}{1+\theta} \int_0^\infty \int_0^x \psi_{k+1}(u-y) dF_e(y) dx.$$

Από την Πρόταση 3.1.1 γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^\infty \psi_{k+1}(x) dx < \infty.$$

Άρα

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \psi_k(y) dy dx < \infty.$$

Επίσης είναι προφανές ότι $\int_0^\infty \bar{F}(x) dx = \mu < \infty$ (στην περίπτωση φυσικά που η μέση τιμή είναι πεπερασμένη).

4. Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.4.1, το Θεώρημα 2.2.4 και το Πόρισμα 7.1.1 του Κεφαλαίου 5. Επομένως το ζητούμενο προκύπτει άμεσα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(u)}{\int_u^\infty \psi_1(x) dx} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(u)}{\psi(u)} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_1(x) dx} = 0.$$

Επομένως εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.3.1 θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(u)}{\frac{2}{c} \int_u^\infty \psi_1(x) dx} = 1 + \frac{1}{\mu\theta} \int_0^\infty u(y) dy$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(u)}{\int_u^\infty \psi_1(x) dx} = \frac{2}{c} \left(1 + \int_0^\infty u(y) dy \right)$$

και επειδή

$$\int_0^\infty u(y) dy = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1+\theta} \right)}$$

προκύπτει από το Πρόρισμα 4.3.1 ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(u)}{\int_u^\infty \psi_1(x) dx} = \frac{2}{\lambda\mu\theta}.$$

Με όμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχτεί επαγωγικά και η ασυμπτωτική συμπεριφορά της k ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_k(u)$. □

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά που αποδείξαμε για την δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας συμπίπτει με το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα που θα αναφέρουμε στο Κεφάλαιο 7. Συνοψίζοντας, πρέπει να πούμε ότι το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα του Θεωρήματος (4.3.1), για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.2.1), αποδείχτηκε αργότερα χρονικά από τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, αφού αρχικά αποδείξαμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$, $\forall k \geq 1$, με λιγότερες προϋποθέσεις από αυτές που απαιτούν τα Θεωρήματα 1.5.1 και 1.5.2 (όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 7), στην συνέχεια προχωρήσαμε στην μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς για την γενική λύση της (1.2.1). Στο Θεώρημα 4.3.1 παρατηρούμε ότι μας αρκεί να γνωρίζουμε ότι $g \in \mathcal{L}d$ προκειμένου να γνωρίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της (1.2.1).

РАНЕЕ НЕ ПЕРПА

Κεφάλαιο 5

Φράγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την κατασκευή άνω και κάτω φραγμάτων για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα το άνω φράγμα που θα δώσουμε γενικεύει το φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που έδωσε ο Lundberg (βλέπε ανισότητα ((2.2.27)) στην περίπτωση των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας. Η μεθοδολογία που θα εφαρμόσουμε έχει ως εξής. Ξεκινώντας από τα γενικά άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που δίνονται στο Λήμμα 5.2.2, το οποίο ακολουθεί, και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι η $\psi_k(u)$ ικανοποιεί την αναδρομική εξίσωση (3.1.3), θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής προκειμένου να κατασκευάσουμε φράγματα για την $\psi_k(u)$. Σε όλη την έκταση του κεφαλαίου θεωρούμε ότι ικανοποιούνται οι κατάλληλες συνθήκες ώστε οι $\psi_k(u)$ να είναι πεπερασμένες.

5.2 Φράγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στην ενότητα αυτή θα επικεντρωθούμε στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Συγκεκριμένα με τη βοήθεια δύο λημμάτων θα αποδείξουμε το Θεώρημα 5.2.1, το οποίο αποτελεί

και το βασικό αποτέλεσμα του παρόντος Κεφαλαίου. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουν δυο πορίσματα που θα περιγράφουν τα φράγματα των $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$. Τέλος θα ασχοληθούμε σε πρακτικό επίπεδο με τον υπολογισμό των φραγμάτων που προτείνουμε για την πρώτη και δεύτερη ροπή στις περιπτώσεις που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών και τη γάμμα κατανομή. Για την πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας θα γίνει σύγκριση του άνω φράγματος που προτείνουμε με τα φράγματα που έδωσαν οι Lin και Willmot (2001) και Frostig (2004). Επίσης θα συγκρίνουμε, με τη βοήθεια συγκεκριμένου παραδείγματος, τα φράγματα που θα αποδειχτούν στην ενότητα που ακολουθεί για την $\psi_1(u)$ με τα αντίστοιχα φράγματα που αναφέρονται στο Πρόγραμμα 4.2.5.

Λήμμα 5.2.1. *Ισχύουν τα εξής :*

1.

$$\int_0^u e^{-ix} x^j dx = \frac{j!}{i^{j+1}} \left[1 - e^{-iu} \sum_{n=0}^j \frac{i^n u^n}{n!} \right], \quad u \geq 0, \quad (5.2.1)$$

2.

$$\int_u^\infty e^{-ix} x^j dx = \frac{j!}{i^{j+1}} e^{-iu} \left[\sum_{n=0}^j \frac{i^n u^n}{n!} \right], \quad u \geq 0. \quad (5.2.2)$$

Απόδειξη. Βλέπε Χαραλαμπίδης Χ. (1993). □

Στο Λήμμα που ακολουθεί δίνονται άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ο υπολογισμός τους απαιτεί τη γνώση του συντελεστή προσαρμογής, R και των σταθερών C_1 και C_2 που ορίζονται στις σχέσεις (5.2.4) και (5.2.5), αντίστοιχα. Τα συγκεκριμένα φράγματα με την επιπλέον βοήθεια των σχέσεων του Λήμματος 5.2.1 θα μας βοηθήσουν να δώσουμε φράγματα για την ποσότητα $\int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^j dG(x)$ η οποία χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των φραγμάτων για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Λήμμα 5.2.2. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u)$, στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου έχει τα εξής φράγματα*

$$C_1 e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq C_2 e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0 \quad (5.2.3)$$

όπου

$$C_1 = \inf_{x \geq 0} \frac{1 - F(x)}{\int_x^\infty e^{R(y-x)} dF(y)} \quad (5.2.4)$$

και

$$C_2 = \sup_{x \geq 0} \frac{1 - F(x)}{\int_x^\infty e^{R(y-x)} dF(y)}. \quad (5.2.5)$$

Απόδειξη. Βλέπε Asmussen (2000) σελίδα 77. \square

Λήμμα 5.2.3. Έστω R συντελεστής προσαρμογής στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων και $G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \phi)\phi^k F_e^{*k}(u)$ η σύνθετη γεωμετρική κατανομή που αντιστοιχεί στην κατανομή ισορροπίας F_e που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων και τη σταθερά $\phi \in (0, 1)$. Τότε για $i = 0, 1, 2, \dots$ και $u \geq 0$ ισχύουν τα εξής

$$1. \quad \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) \leq RC_2 \frac{u^{i+1}}{i+1} + [1 - C_1] u^i, \quad \forall u \geq 0, \quad (5.2.6)$$

$$2. \quad \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) \geq RC_1 \frac{u^{i+1}}{i+1} + [1 - C_2] u^i, \quad \forall u \geq 0. \quad (5.2.7)$$

όπου τα C_1 και C_2 ορίζονται από τις σχέσεις (5.2.4) και (5.2.5) αντίστοιχα.

Απόδειξη. 1. Έστω ότι $i \geq 1$. Τότε λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι η κατανομή G έχει μάζα στο μηδέν και είναι απόλυτα συνεχής στο $(0, \infty)$ γράφουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα ως εξής

$$\int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) = e^{R0} (u-0)^i G(0) + \int_{(0,u]} e^{Rx} (u-x)^i g(x) dx,$$

όπου $g(x) = G'(x)$ για $x > 0$. Συνεπώς έχουμε ότι $G(x) = G(0) + \int_0^x g(t) dt$. Με τη βοήθεια της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $G(u) = 1 - \psi(u)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) &= u^i G(0) - \int_0^u R e^{Rx} (u-x)^i (\psi(0) - \psi(x)) dx \\ &+ \int_0^u i e^{Rx} (u-x)^{i-1} (\psi(0) - \psi(x)) dx \\ &= u^i G(0) - \int_0^u \psi(0) R e^{Rx} (u-x)^i dx + \int_0^u R e^{Rx} (u-x)^i \psi(x) dx \\ &+ \int_0^u \psi(0) i e^{Rx} (u-x)^{i-1} dx - \int_0^u i e^{Rx} (u-x)^{i-1} \psi(x) dx. \quad (5.2.8) \end{aligned}$$

Με τη χρήση της σχέσης (5.2.3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx}(u-x)^i dG(x) &\leq u^i G(0) - \psi(0)R \int_0^u e^{Rx}(u-x)^i dx + C_2 \int_0^u R(u-x)^i dx \\ &+ \psi(0)i \int_0^u e^{Rx}(u-x)^{i-1} dx - iC_1 \int_0^u (u-x)^{i-1} dx. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια στο πρώτο και στο τρίτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της παραπάνω ανισότητας θέτουμε $u-x=t$

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx}(u-x)^i dG(x) &\leq u^i G(0) - e^{Ru}\psi(0)R \int_0^u e^{-Rt}t^i dt + C_2R \int_0^u (u-x)^i dx \\ &+ \psi(0)ie^{Ru} \int_0^u e^{-Rt}t^{i-1} dt - iC_1 \int_0^u (u-x)^{i-1} dx. \quad (5.2.9) \end{aligned}$$

Με τη χρήση της σχέσης (5.2.1) η παραπάνω ανισότητα λαμβάνει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx}(u-x)^i dG(x) &\leq u^i G(0) + RC_2 \frac{u^{i+1}}{i+1} - C_1 u^i \\ &- Re^{Ru}\psi(0) \left[\frac{i!}{R^{i+1}} \left(1 - e^{-Ru} \sum_{n=0}^i \frac{R^n u^n}{n!} \right) \right] \\ &+ ie^{Ru}\psi(0) \left[\frac{(i-1)!}{R^i} \left(1 - e^{-Ru} \sum_{n=0}^{i-1} \frac{R^n u^n}{n!} \right) \right] \\ &= u^i - u^i \psi(0) + RC_2 \frac{u^{i+1}}{i+1} - C_1 u^i + \psi(0) \frac{i!}{R^i} \sum_{n=0}^i \frac{R^n u^n}{n!} \\ &- \psi(0) \frac{i!}{R^i} \sum_{n=0}^{i-1} \frac{R^n u^n}{n!} \\ &= RC_2 \frac{u^{i+1}}{i+1} + [1 - C_1] u^i. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $i=0$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx} dG(x) &= G(0) + e^{Ru}(\psi(0) - \psi(u)) - \int_0^u Re^{Rx}(\psi(0) - \psi(x)) dx \\ &= 1 - \psi(0) + e^{Ru}(\psi(0) - \psi(u)) - \psi(0)(e^{Ru} - 1) + \int_0^u \psi(x) Re^{Rx} dx \end{aligned}$$

και κάνοντας απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$\int_{[0,u]} e^{Rx} dG(x) = 1 - e^{Ru}\psi(u) + R \int_0^u \psi(x)e^{Rx} dx. \quad (5.2.10)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.2.3) παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα

$$\int_{[0,u]} e^{Rx} dG(x) \leq 1 - C_1 + RC_2 u.$$

2. Η μεθοδολογία της απόδειξης είναι παρόμοια με την αντίστοιχη απόδειξη του ερωτήματος

1. Επομένως αρχικά υποθέτουμε ότι $i \geq 1$. Τότε από τη σχέση (5.2.8) και τη σχέση (5.2.3) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) &\geq u^i G(0) - \psi(0)R \int_0^u e^{Rx} (u-x)^i dx + C_1 \int_0^u R(u-x)^i dx \\ &+ \psi(0)i \int_0^u e^{Rx} (u-x)^{i-1} dx - iC_2 \int_0^u (u-x)^{i-1} dx. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $u-x=t$ στο δεύτερο και στο τέταρτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της παραπάνω ανισότητας

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) &\geq u^i G(0) - e^{Ru} \psi(0)R \int_0^u e^{-Rt} t^i dt + C_1 R \int_0^u (u-x)^i dx \\ &+ \psi(0)i e^{Ru} \int_0^u e^{-Rt} t^{i-1} dt - iC_2 \int_0^u (u-x)^{i-1} dx. \quad (5.2.11) \end{aligned}$$

Με τη χρήση της σχέσης (5.2.1) η παραπάνω ανισότητα λαμβάνει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^i dG(x) &\geq u^i G(0) + RC_1 \frac{u^{i+1}}{i+1} - C_2 u^i \\ &- Re^{Ru} \psi(0) \left[\frac{i!}{R^{i+1}} \left(1 - e^{-Ru} \sum_{n=0}^i \frac{R^n u^n}{n!} \right) \right] \\ &+ ie^{Ru} \psi(0) \left[\frac{(i-1)!}{R^i} \left(1 - e^{-Ru} \sum_{n=0}^{i-1} \frac{R^n u^n}{n!} \right) \right] \\ &= u^i - u^i \psi(0) + RC_1 \frac{u^{i+1}}{i+1} - C_2 u^i + \psi(0) \frac{i!}{R^i} \sum_{n=0}^i \frac{R^n u^n}{n!} \\ &- \psi(0) \frac{i!}{R^i} \sum_{n=0}^{i-1} \frac{R^n u^n}{n!} \\ &= RC_1 \frac{u^{i+1}}{i+1} + [1 - C_2] u^i. \end{aligned}$$

Για $i = 0$ από τις σχέσεις (5.2.10) και (5.2.3) θα έχουμε ότι

$$\int_{[0,u]} e^{Rx} dG(x) \geq 1 - C_2 + RC_1 u.$$

□

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα θεώρημα στο οποίο παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_k(u)$ για $k = 1, 2, 3, \dots$. Τα συγκεκριμένα φράγματα αποτελούνται από ένα εκθετικό τμήμα πολλαπλασιασμένο με ένα πολυώνυμο βαθμού ίσου με την τάξη της ροπής για την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε φράγματα.

Θεώρημα 5.2.1. Για την k τάξης ροπή του χρόνου χρεοκοπίας υπάρχουν θετικές σταθερές $A_{i,k}$ και $B_{i,k}$ $i = 0, 1, 2, \dots, k$ τέτοιες ώστε

$$L_k(u) := e^{-Ru} \left[\sum_{i=0}^k A_{i,k} u^i \right] \leq \psi_k(u) \leq e^{-Ru} \left[\sum_{i=0}^k B_{i,k} u^i \right] := U_k(u), \quad \forall u \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.12)$$

όπου οι σταθερές $A_{i,k}$ και $B_{i,k}$ υπολογίζονται από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους

$$A_{i,k+1} = \begin{cases} \frac{k+1}{c(1-\phi)} (1-C_2) \sum_{j=0}^k A_{j,k} \frac{j!}{R^{j+1}}, & i = 0 \\ \frac{(k+1)R^i}{c(1-\phi)i!} \left(C_1 \sum_{j=i-1}^k \frac{j!}{R^{j+1}} A_{j,k} + (1-C_2) \sum_{j=i}^k \frac{j!}{R^{j+1}} A_{j,k} \right), & i = 1, 2, \dots, k+1 \end{cases}$$

και

$$B_{i,k+1} = \begin{cases} \frac{k+1}{c(1-\phi)} (1-C_1) \sum_{j=0}^k B_{j,k} \frac{j!}{R^{j+1}}, & i = 0 \\ \frac{(k+1)R^i}{c(1-\phi)i!} \left(C_2 \sum_{j=i-1}^k \frac{j!}{R^{j+1}} B_{j,k} + (1-C_1) \sum_{j=i}^k \frac{j!}{R^{j+1}} B_{j,k} \right), & i = 1, 2, \dots, k+1 \end{cases}$$

ως αρχικές τιμές ορίζουμε τις

$$A_{0,0} = C_1$$

και

$$B_{0,0} = C_2$$

με τα C_1, C_2 όπως ορίζονται στο Λήμμα 5.2.2.

Απόδειξη. Για την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας της (5.2.12) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Αρχικά παρατηρούμε ότι η σχέση (5.2.12) για $k = 0$ προκύπτει άμεσα από τη σχέση (5.2.3). Η περίπτωση $k = 1$ αποδεικνύεται αναλυτικά στο

Πόρισμα 5.2.1. Έστω ότι η (5.2.12) ισχύει για $k = m$, δηλαδή

$$\psi_m(u) \leq e^{-Ru} \left[\sum_{i=0}^m B_{i,m} u^i \right], \quad \forall u \geq 0. \quad (5.2.13)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$. Ο πρώτος μας στόχος είναι να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την $f_{m+1}(u)$ (βλέπε σχέση (3.1.4)). Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.1.6) προκειμένου να πάρουμε ένα άνω φράγμα για την $k + 1$ ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Από τις σχέσεις (5.2.3) και (3.1.4) έχουμε ότι

$$f_{m+1}(u) \leq \frac{m+1}{c} \int_u^\infty \left(e^{-Rx} \left[\sum_{i=0}^m B_{i,m} x^i \right] \right) dx = \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m B_{i,m} \int_u^\infty e^{-Rx} x^i dx.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (5.2.2) προκύπτει, κάνοντας πράξεις, το παρακάτω άνω φράγμα για την $f_{m+1}(u)$

$$f_{m+1}(u) \leq \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m B_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \left[\sum_{j=0}^i e^{-Ru} \frac{R^j u^j}{j!} \right], \quad \forall u \geq 0.$$

Συνεπώς αν εισάγουμε το φράγμα που βρήκαμε για την $f_{m+1}(u)$ στη σχέση (3.1.6) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(u) &= \frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} f_{m+1}(u-x) dG(x) \\ &\leq \frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m B_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \left[\sum_{j=0}^i e^{-R(u-x)} \frac{R^j (u-x)^j}{j!} \right] dG(x) \\ &= e^{-Ru} \frac{m+1}{c(1-\phi)} \sum_{i=0}^m B_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \sum_{j=0}^i \frac{R^j}{j!} \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^j dG(x). \end{aligned}$$

Με τη χρήση της εξίσωσης (5.2.1) το παραπάνω άνω φράγμα για την $\psi_{m+1}(u)$ λαμβάνει την

εξής μορφή.

$$\begin{aligned}
\psi_{m+1}(u) &\leq e^{-Ru} \frac{m+1}{c(1-\phi)} \sum_{i=0}^m B_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \sum_{j=0}^i \left(R^{j+1} C_2 \frac{u^{j+1}}{(j+1)!} + (1-C_1) \frac{R^j}{j!} u^j \right) \\
&= e^{-Ru} \frac{m+1}{c(1-\phi)} \left[B_{0,m} \frac{0!}{R} \left(C_2 \frac{R}{1!} u + 1 - C_1 \right) \right. \\
&+ B_{1,m} \frac{1!}{R^2} \left(C_2 \frac{R}{1!} u + C_2 \frac{R^2}{2!} u^2 + 1 - C_1 + (1-C_1) \frac{R}{1!} u \right) \\
&+ B_{2,m} \frac{2!}{R^3} \left(C_2 \frac{R}{1!} u + C_2 \frac{R^2}{2!} u^2 + C_2 \frac{R^3}{3!} u^3 + 1 - C_1 + (1-C_1) \frac{R}{1!} u + (1-C_1) \frac{R^2}{2!} u^2 \right) \\
&+ \dots \\
&+ B_{m-1,m} \frac{(m-1)!}{R^m} \left(C_2 \frac{R}{1!} u + C_2 \frac{R^2}{2!} u^2 + C_2 \frac{R^3}{3!} u^3 + \dots + C_2 \frac{R^m}{m!} u^m \right. \\
&+ 1 - C_1 + (1-C_1) \frac{R}{1!} u + (1-C_1) \frac{R^2}{2!} u^2 + (1-C_1) \frac{R^{m-1}}{(m-1)!} u^{m-1} \left. \right) \\
&+ B_{m,m} \frac{m!}{R^{m+1}} \left(C_2 \frac{R}{1!} u + C_2 \frac{R^2}{2!} u^2 + C_2 \frac{R^3}{3!} u^3 + \dots + C_2 \frac{R^{m+1}}{(m+1)!} u^{m+1} \right. \\
&+ 1 - C_1 + (1-C_1) \frac{R}{1!} u + (1-C_1) \frac{R^2}{2!} u^2 + (1-C_1) \frac{R^m}{m!} u^m \left. \right) \Big]
\end{aligned}$$

και κάνοντας παραγοντοποίηση στην παραπάνω παράσταση ως προς u προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\psi_{m+1}(u) &\leq e^{-Ru} \frac{m+1}{c(1-\phi)} \left[(1-C_1) \sum_{i=0}^m B_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \right. \\
&+ u \left(C_2 R \sum_{i=0}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} + (1-C_1) R \sum_{i=1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} \right) \\
&+ u^2 \left(C_2 \frac{R^2}{2!} \sum_{i=1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} + (1-C_1) \frac{R^2}{2!} \sum_{i=2}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} \right) \\
&+ \dots \\
&+ u^{m-1} \left(C_2 \frac{R^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=m-2}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} + (1-C_1) \frac{R^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=m-1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} \right) \\
&+ u^m \left(C_2 \frac{R^m}{m!} \sum_{i=m-1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} + (1-C_1) \frac{R^m}{m!} \sum_{i=m}^m \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,m} \right) \\
&+ \left. C_2 \frac{R^{m+1}}{(m+1)!} u^{m+1} \frac{B_{m,m} m!}{R^{m+1}} \right].
\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι $\psi_{m+1}(u) \leq e^{-Ru} \sum_{i=0}^{m+1} B_{i,m+1} u^i$, όπου $B_{0,0} = C_2$,

$$B_{0,m+1} = \frac{m+1}{c(1-\phi)} \left((1-C_1) \sum_{j=0}^m B_{j,m} \frac{j!}{R^{j+1}} \right),$$

και

$$B_{i,m+1} = \frac{m+1}{c(1-\phi)} \left(C_2 \frac{R^i}{i!} \sum_{j=i-1}^m \frac{j!}{R^{j+1}} B_{j,m} + (1-C_1) \frac{R^i}{i!} \sum_{j=i}^m \frac{j!}{R^{j+1}} B_{j,m} \right),$$

$i = 1, 2, \dots, m, m+1$. Όμοια αποδεικνύεται και το κάτω φράγμα της k ροπής του χρόνου χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα η αριστερή ανισότητα της σχέσης (5.2.12), στην περίπτωση που έχουμε $k = 0$, προκύπτει άμεσα από το κάτω φράγμα της σχέσης (5.2.3), ενώ όμοια με την περίπτωση του άνω φράγματος της $\psi_k(u)$, η περίπτωση $k = 1$ εξετάζεται αναλυτικά στο Πρόρισμα 5.2.1. Έστω ότι η αριστερή ανισότητα της σχέσης (5.2.12) ισχύει για $k = m$, δηλαδή

$$\psi_m(u) \geq e^{-Ru} \left[\sum_{i=0}^m B_{i,m} u^i \right], \quad \forall u \geq 0. \quad (5.2.14)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k = m+1$. Αρχικά θα υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $f_{m+1}(u)$ (σχέση 3.1.4) και στη συνέχεια με τη βοήθεια της σχέσης (3.1.6) θα βρούμε ένα άνω φράγμα για την $m+1$ ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Από τις (5.2.14) και (3.1.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_{m+1}(u) &= \frac{m+1}{c} \int_u^\infty \psi_m(x) dx \\ &\geq \frac{m+1}{c} \int_u^\infty \left(e^{-Rx} \left[\sum_{i=0}^m B_{i,m} x^i \right] \right) dx \\ &= \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m A_{i,m} \int_u^\infty e^{-Rx} x^i dx. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Επομένως η (5.2.15) με τη βοήθεια της (5.2.2) λαμβάνει την εξής μορφή

$$f_{m+1}(u) \geq \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m A_{i,k} \frac{i!}{R^{i+1}} \left[\sum_{j=0}^i e^{-Ru} \frac{R^j u^j}{j!} \right]. \quad (5.2.16)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.1.6) το φράγμα που βρήκαμε για την $f_{m+1}(u)$ στην (5.2.16) έχουμε $\forall u \geq 0$

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(u) &= \frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} f_{m+1}(u-x) dG(x) \\ &\geq \frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m A_{i,k} \frac{i!}{R^{i+1}} \left[\sum_{j=0}^i e^{-R(u-x)} \frac{R^j (u-x)^j}{j!} \right] dG(x) \\ &= e^{-Ru} \frac{1}{1-\phi} \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m A_{i,k} \frac{i!}{R^{i+1}} \sum_{j=0}^i \frac{R^j}{j!} \int_{[0,u]} e^{Rx} (u-x)^j dG(x). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε το δεξιό μέρος της ανισότητας ως προς το διπλό άθροισμα

$$\begin{aligned}
\psi_{m+1}(u) &\geq e^{-Ru} \frac{1}{1-\phi} \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m A_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \sum_{j=0}^i \frac{R^j}{j!} \left(RC_1 \frac{u^{j+1}}{j+1} + [1-C_2] u^j \right) \\
&= e^{-Ru} \frac{1}{1-\phi} \frac{m+1}{c} \sum_{i=0}^m A_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \sum_{j=0}^i \left(R^{j+1} C_1 \frac{u^{j+1}}{(j+1)!} + (1-C_2) \frac{R^j}{j!} u^j \right) \\
&= e^{-Ru} \frac{1}{1-\phi} \frac{m+1}{c} \left[A_{0,m} \frac{0!}{R} \left(C_1 \frac{R}{1!} u + 1 - C_2 \right) \right. \\
&+ A_{1,m} \frac{1!}{R^2} \left(C_1 \frac{R}{1!} u + C_1 \frac{R^2}{2!} u^2 + 1 - C_2 + (1-C_2) \frac{R}{1!} u \right) \\
&+ A_{2,m} \frac{2!}{R^3} \left(C_1 \frac{R}{1!} u + C_1 \frac{R^2}{2!} u^2 + C_1 \frac{R^3}{3!} u^3 + 1 - C_2 + (1-C_2) \frac{R}{1!} u + (1-C_2) \frac{R^2}{2!} u^2 \right) \\
&+ \dots \\
&+ A_{m-1,m} \frac{(m-1)!}{R^m} \left(C_1 \frac{R}{1!} u + C_1 \frac{R^2}{2!} u^2 + C_1 \frac{R^3}{3!} u^3 + \dots + C_1 \frac{R^m}{m!} u^m \right. \\
&+ 1 - C_2 + (1-C_2) \frac{R}{1!} u + (1-C_2) \frac{R^2}{2!} u^2 + (1-C_2) \frac{R^{m-1}}{(m-1)!} u^{m-1} \left. \right) \\
&+ A_{m,m} \frac{m!}{R^{m+1}} \left(C_1 \frac{R}{1!} u + C_1 \frac{R^2}{2!} u^2 + C_1 \frac{R^3}{3!} u^3 + \dots + C_1 \frac{R^{m+1}}{(m+1)!} u^{m+1} \right. \\
&+ 1 - C_2 + (1-C_2) \frac{R}{1!} u + (1-C_2) \frac{R^2}{2!} u^2 + (1-C_2) \frac{R^m}{m!} u^m \left. \right) \Big]
\end{aligned}$$

και κάνοντας παραγοντοποίηση ως προς u προκύπτει η εξής παράσταση

$$\begin{aligned}
\psi_{m+1}(u) &\geq e^{-Ru} \frac{1}{1-\phi} \frac{m+1}{c} \left[(1-C_1) \sum_{i=0}^m A_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \right. \\
&+ u \left(C_1 R \sum_{i=0}^m \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,m} + (1-C_2) R \sum_{i=1}^m \frac{i!}{R^i} B_{i,m} \right) \\
&+ u^2 \left(C_1 \frac{R^2}{2!} \sum_{i=1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,m} + (1-C_2) \frac{R^2}{2!} \sum_{i=2}^m \frac{i!}{R^i} A_{i,m} \right) \\
&+ \dots \\
&+ u^{m-1} \left(C_1 \frac{R^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=m-2}^m \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,m} + (1-C_2) \frac{R^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=m-1}^m \frac{i!}{R^i} A_{i,m} \right) \\
&+ u^m \left(C_1 \frac{R^i}{i!} \sum_{i=m-1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,m} + (1-C_2) \frac{R^i}{i!} \sum_{i=m}^m \frac{i!}{R^i} A_{i,m} \right) \\
&+ C_1 \frac{R^{m+1}}{(m+1)!} u^{m+1} \frac{A_{m,m} m!}{R^{m+1}} \Big].
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\psi_{m+1}(u) \geq e^{-Ru} \sum_{i=0}^{m+1} A_{i,m+1} u^i, \quad \forall u \geq 0, \quad (5.2.17)$$

όπου

$$A_{0,0} = C_1,$$

$$A_{0,m+1} = \frac{1}{1-\phi} \frac{(m+1)}{c} \left((1-C_2) \sum_{i=0}^m A_{i,m} \frac{i!}{R^{i+1}} \right),$$

ενώ για $j = 1, 2, \dots, m$,

$$A_{j,m+1} = \frac{1}{1-\phi} \frac{(m+1)}{c} \left(C_1 \frac{R^j}{j!} \sum_{i=j-1}^m \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,m} + (1-C_2) \frac{R^j}{j!} \sum_{i=j}^m \frac{i!}{R^i} A_{i,m} \right).$$

□

Στη συνέχεια θα δώσουμε δυο πορίσματα στα οποία περιγράφονται τα φράγματα για τη πρώτη και δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας αντίστοιχα. Συγκεκριμένα δίνονται αποδείξεις για κάθε Πόρισμα, εκ των οποίων η πρώτη είναι άμεση σαν εφαρμογή του Θεωρήματος 5.2.1 και η δεύτερη απόδειξη είναι αναλυτική.

Πόρισμα 5.2.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων τα φράγματα για τη πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)$, δίνονται από τη παρακάτω διπλή ανισότητα, $\forall u \geq 0$

$$L_1(u) := \frac{C_1 e^{-Ru}}{c(1-\phi)R} (RC_1 u + 1 - C_2) \leq \psi_1(u) \leq \frac{C_2 e^{-Ru}}{c(1-\phi)R} (RC_2 u + 1 - C_1) := U_1(u). \quad (5.2.18)$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις.

α) Από το Θεώρημα 5.2.1 για $k = 1$, έχουμε ότι

$$e^{-Ru} (A_{0,1} + A_{1,1}u) \leq \psi_1(u) \leq e^{-Ru} (B_{0,1} + B_{1,1}u), \quad \forall u \geq 0. \quad (5.2.19)$$

Επομένως για να υπολογίσουμε τα φράγματα της πρώτης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας αρκεί να υπολογίσουμε τις σταθερές $A_{0,1}, A_{1,1}, B_{0,1}, B_{1,1}$. Από τις αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν οι σταθερές $A_{i,k}$ και $B_{i,k}$, έχουμε

$$A_{0,1} = \frac{1}{1-\phi} \frac{1-C_2}{c} \frac{A_{0,0}}{R} = \frac{C_1(1-C_2)}{cR(1-\phi)},$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{1-\phi} \frac{C_1}{c} A_{0,0} = \frac{C_1^2}{c(1-\phi)},$$

$$B_{0,1} = \frac{1}{1-\phi} \frac{1-C_1}{c} \frac{B_{0,0}}{R} = \frac{(1-C_1)C_2}{cR(1-\phi)},$$

$$B_{1,1} = \frac{1}{1-\phi} \frac{C_2}{c} B_{0,0} = \frac{C_2^2}{c(1-\phi)}.$$

Επομένως αντικαθιστώντας στην (5.2.19) υπολογίζουμε τα εξής φράγματα για την $\psi_1(u)$,

$$e^{-Ru} \left(\frac{(1-C_2)C_1}{(1-\phi)cR} + \frac{c_1^2}{(1-\phi)c} u \right) \leq \psi_1(u) \leq e^{-Ru} \left(\frac{(1-C_1)C_2}{(1-\phi)cR} + \frac{c_2^2}{(1-\phi)c} u \right)$$

ή ισοδύναμα

$$e^{-Ru} \frac{C_1}{(1-\phi)cR} (RC_1u + 1 - C_2) \leq \psi_1(u) \leq e^{-Ru} \frac{C_2}{(1-\phi)cR} (RC_2u + 1 - C_1).$$

β) Ξεκινώντας από τις σχέσεις (3.1.6) και (5.2.3) έχουμε

$$\frac{1}{c} \int_u^\infty C_1 e^{-Rx} dx \leq f_1(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi_0(x) dx \leq \frac{1}{c} \int_u^\infty C_2 e^{-Rx} dx$$

Άρα,

$$\frac{C_1}{cR} e^{-Ru} \leq f_1(u) \leq \frac{C_2}{cR} e^{-Ru}. \quad (5.2.20)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε από την (3.1.6) πως

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} f_1(u-x) dG(x). \quad (5.2.21)$$

Οι σχέσεις (5.2.20) και (5.2.21) μας δίνουν

$$\frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} \frac{C_1}{c} \frac{e^{-R(u-x)}}{R} dG(x) \leq \psi_1(u) \leq \frac{1}{1-\phi} \int_{[0,u]} \frac{C_2}{c} \frac{e^{-R(u-x)}}{R} dG(x) \quad (5.2.22)$$

και επομένως

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{C_1}{c} \frac{e^{-Ru}}{R} \int_{[0,u]} e^{Rx} dG(x) \leq \psi_1(u) \leq \frac{1}{1-\phi} \frac{C_2}{c} \frac{e^{-Ru}}{R} \int_{[0,u]} e^{Rx} dG(x). \quad (5.2.23)$$

Η (5.2.23) με τη βοήθεια της (5.2.6) για $i = 0$, λαμβάνει την εξής μορφή

$$\frac{C_1}{cR(1-\phi)} e^{-Ru} (RC_1 u + 1 - C_2) \leq \psi_1(u) \leq \frac{C_2}{cR(1-\phi)} e^{-Ru} (RC_2 u + 1 - C_1). \quad (5.2.24)$$

□

Πόρισμα 5.2.2. Η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο ικανοποιεί τις παρακάτω ανισότητες, $\forall u \geq 0$

1. $\psi_2(u) \leq \frac{2C_2}{R^2(1-\phi)c^2} e^{-Ru} \left(R^2 C_2^2 \frac{u^2}{2} + RC_2 (2 - 2C_1) u + (C_2 + 1 - C_1) (1 - C_1) \right) := U_2(u).$
2. $\psi_2(u) \geq \frac{2C_1}{R^2(1-\phi)c^2} e^{-Ru} \left(R^2 C_1^2 \frac{u^2}{2} + RC_1 (2 - 2C_2) u + (C_2 + 1 - C_1) (1 - C_2) \right) := L_2(u).$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.2.1 για $k = 2$, έχουμε

$$e^{-Ru} (A_{0,2} + A_{1,2}u + A_{2,2}u^2) \leq \psi_2(u) \leq e^{-Ru} (B_{0,2} + B_{1,2}u + B_{2,2}u^2). \quad (5.2.25)$$

Οι σταθερές $A_{i,2}$ και $B_{i,2}$, $i = 0, 1, 2$ υπολογίζονται απο τις αναδρομικές σχέσεις που δίνονται στο Θεώρημα 5.2.1. Συγκεκριμένα για την $A_{0,2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A_{0,2} &= \frac{2(1-C_2)}{c(1-\phi)} \left(\sum_{i=0}^1 A_{i,1} \frac{i!}{R^{i+1}} \right) \\ &= \frac{2(1-C_2)}{c(1-\phi)} \left(\frac{A_{0,1}}{R} + \frac{A_{1,1}}{R^2} \right) \\ &= \frac{2(1-C_2)}{c(1-\phi)} \left(\frac{1}{1-\phi} \frac{1}{c} \frac{C_1(1-C_2)}{R^2} + \frac{1}{1-\phi} \frac{C_1^2}{cR^2} \right) \\ &= \frac{2(1-C_2)C_1(1-C_2+C_1)}{c^2R^2(1-\phi)^2}, \end{aligned}$$

ενώ για τη σταθερά $A_{1,2}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 A_{1,2} &= \frac{2R}{c(1-\phi)} \left(C_1 \sum_{i=0}^1 \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,1} + (1-C_2) \sum_{i=1}^1 \frac{i!}{R^{i+1}} A_{i,1} \right) \\
 &= \frac{2R}{c(1-\phi)} \left(C_1 \frac{A_{0,1}}{R} + C_1 \frac{A_{1,1}}{R^2} + (1-C_2) \frac{A_{1,1}}{R^2} \right) \\
 &= \frac{2}{cR(1-\phi)} (RC_1 A_{0,1} + (C_1 + 1 - C_2) A_{1,1}) \\
 &= \frac{2}{cR(1-\phi)} \left(RC_1 \frac{1}{1-\phi} \frac{1}{c} \frac{C_1(1-C_2)}{R} + (C_1 + 1 - C_2) \frac{1}{1-\phi} \frac{C_1^2}{c} \right) \\
 &= \frac{2}{c^2 R (1-\phi)^2} ((1-C_2) C_1^2 + c_1^2 (C_1 + 1 - C_2)) \\
 &= \frac{2c_1^2 (C_1 + 2(1-C_2))}{c^2 R (1-\phi)^2}
 \end{aligned}$$

και τέλος για τη σταθερά $A_{2,2}$ παίρνουμε

$$A_{2,2} = \frac{C_1 A_{1,1}}{c(1-\phi)} = \frac{C_1 \frac{1}{1-\phi} \frac{C_1^2}{c}}{c(1-\phi)} = \frac{C_1^3}{c^2 (1-\phi)^2}.$$

Αντίστοιχα, για τις σταθερές του άνω φράγματος παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 B_{0,2} &= \frac{2(1-C_1)}{c(1-\phi)} \left(\sum_{i=0}^1 B_{i,1} \frac{i!}{R^{i+1}} \right) \\
 &= \frac{2(1-C_1)}{c(1-\phi)} \left(\frac{B_{0,1}}{R} + \frac{B_{1,1}}{R^2} \right) \\
 &= \frac{2(1-C_1)}{c(1-\phi)} \left(\frac{1}{1-\phi} \frac{1}{c} \frac{C_2(1-C_1)}{R^2} + \frac{1}{1-\phi} \frac{C_2^2}{cR^2} \right) \\
 &= \frac{2(1-C_1)}{c^2 R^2 (1-\phi)^2} C_2 (1-C_1 + C_2)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
B_{1,2} &= \frac{2R}{c(1-\phi)} \left(C_2 \sum_{i=0}^1 \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,1} + (1-C_1) \sum_{i=1}^1 \frac{i!}{R^{i+1}} B_{i,1} \right) \\
&= \frac{2}{cR(1-\phi)} \left(C_2 \frac{B_{0,1}}{R} + C_2 \frac{B_{1,1}}{R^2} + (1-C_1) \frac{B_{1,1}}{R^2} \right) \\
&= \frac{2}{cR(1-\phi)} (RC_2 B_{0,1} + (C_2 + 1 - C_1) B_{1,1}) \\
&= \frac{2}{cR(1-\phi)} \left(RC_2 \frac{1}{1-\phi} \frac{1}{c} \frac{C_2(1-C_1)}{R} + (C_2 + 1 - C_1) \frac{1}{1-\phi} \frac{C_2^2}{c} \right) \\
&= \frac{2}{c^2 R (1-\phi)^2} ((1-C_1) C_2^2 + c^2 (C_2 + 1 - C_1)) \\
&= \frac{2c_2^2}{c^2 R (1-\phi)^2} (C_2 + 2(1-C_1))
\end{aligned}$$

και

$$B_{2,2} = \frac{C_2 B_{1,1} (1-\phi)}{c} = \frac{C_2 \frac{1}{1-\phi} \frac{C_2^2}{c}}{c(1-\phi)} = \frac{C_2^3}{c^2 (1-\phi)^2}.$$

Επομένως η αριστερή ανισότητα της (5.2.25) γίνεται

$$\begin{aligned}
\psi_2(u) &\geq e^{-Ru} \left(\frac{2}{c^2 R^2 (1-\phi)^2} (1-C_2) C_1 (1-C_2 + C_1) + \frac{2}{c^2 (1-\phi)^2 R} c_1^2 (C_1 + 2(1-C_2)) u \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_1^3}{c^2 (1-\phi)^2} u^2 \right)
\end{aligned}$$

και κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$\psi_2(u) \geq \frac{2C_2}{R^2 c^2 (1-\phi)} e^{-Ru} \left(\frac{R^2 c_2^2 u^2}{2} + RC_2 (C_2 + 2(1-C_1)) u + (1-C_1) (C_2 + 1 - C_1) \right).$$

Όμοια η δεξιά ανισότητα της (5.2.25) με αντικατάσταση των σταθερών $B_{0,2}$, $B_{1,2}$ και $B_{2,2}$ μας δίνει

$$\begin{aligned}
\psi_2(u) &\leq e^{-Ru} \left(\frac{2}{c^2 R^2 (1-\phi)^2} (1-C_1) C_2 (1-C_1 + C_2) + \frac{2}{c^2 R (1-\phi)^2} c_2^2 (C_2 + 2(1-C_1)) u \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_2^3}{c^2 (1-\phi)^2} u^2 \right)
\end{aligned}$$

και μετά από κάποιες απλές πράξεις υπολογίζουμε το εξής άνω φράγμα για την $\psi_2(u)$

$$\psi_2(u) \leq \frac{2C_1}{R^2 c^2 (1-\phi)} e^{-Ru} \left(\frac{R^2 c_1^2 u^2}{2} + RC_1 (C_1 + 2(1-C_2)) u + (1-C_2) (C_1 + 1 - C_2) \right).$$

□

5.2.1 Παρατηρήσεις

1. Οι Lin και Willmot (2000) όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3 υπολόγισαν τους τύπους που δίνουν τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για την εκθετική, τη μείξη εκθετικών κατανομών και τη μείξη Erlang κατανομών. Ειδικά για την τελευταία περίπτωση οι ροπές υπολογίζονται από ένα άπειρο άθροισμα σε αντίθεση με τα φράγματα που εμείς παρουσιάσαμε και υπολογίζονται από ένα πεπερασμένο άθροισμα.
2. Παρατηρούμε πως από το Θεώρημα 5.2.1 το άνω και κάτω φράγμα για την $\psi_k(u)$ είναι συμμετρικά ως προς C_1 και C_2 . Στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε γνωρίζουμε ότι $C_1 = C_2 = C_* = \frac{1}{1+\theta}$. Επομένως

$$\psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{i=0}^k D_{i,k} u^i. \quad (5.2.26)$$

Οι σταθερές $D_{i,k}$ υπολογίζονται από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους

$$D_{0,k} = \frac{1}{1-\phi} \frac{k}{c} \left((1-C_*) \sum_{i=0}^{k-1} D_{i,k-1} \frac{i!}{R^{i+1}} \right),$$

ενώ για $j = 1, 2, \dots, k$,

$$D_{j,k} = \frac{1}{1-\phi} \frac{k}{c} \left(C_* \frac{R^j}{j!} \sum_{i=j-1}^{k-1} \frac{i!}{R^{i+1}} D_{i,k-1} + (1-C_*) \frac{R^j}{j!} \sum_{i=j}^{k-1} \frac{i!}{R^{i+1}} D_{i,k-1} \right).$$

Στο Παράδειγμα 6.1 των Lin και Willmot (2000) σχέση (6.48), δίνεται ο ακριβής τύπος υπολογισμού της k ροπής του χρόνου χρεοκοπίας στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

$$\psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{i=0}^k \bar{C}_{i,k} \frac{(Ru)^i}{i!} \quad (5.2.27)$$

με τις σταθερές $\bar{C}_{i,k}$ να υπολογίζονται από τους αναδρομικούς τύπους

$$\bar{C}_{0,k} = \frac{k\mu(1+\theta)}{c\theta} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{C}_{j,k-1},$$

$$\bar{C}_{i,k-1} = \frac{k\mu(1+\theta)^2}{c\theta^2} \left(\frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{i-1,k-1} + \sum_{j=i}^{k-1} \bar{C}_{j,k-1} \right).$$

Προκειμένου οι $\psi_k(u)$ να υπολογίζονται μονοσήμαντα από τις σχέσεις (5.2.26) και (5.2.27) θα έχουμε ότι

$$D_{i,k} = \bar{C}_{i,k} \frac{R^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Αφού $\phi = (1 + \theta)^{-1}$, έχουμε

$$\begin{aligned} D_{0,k} &= \frac{k}{c(1-\phi)} (1 - C_*) \sum_{i=0}^{k-1} D_{i,k-1} \frac{i!}{R^{i+1}} \\ &= \frac{k(1+\theta)}{c\theta} \left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right) \sum_{i=0}^{k-1} D_{i,k-1} \frac{i!}{R^{i+1}} \\ &= \frac{k}{Rc} \sum_{i=0}^{k-1} D_{i,k-1} \frac{i!}{R^i}. \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

Όμως για την περίπτωση της εκθετικής κατανομής γνωρίζουμε ότι

$$R = \frac{\theta}{(1+\theta)\mu}.$$

Επομένως,

$$D_{0,k} = \frac{k(1+\theta)}{c\theta\mu} \sum_{i=0}^{k-1} D_{i,k-1} \frac{i!}{R^i}.$$

Για $j = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} D_{j,k} &= \frac{k}{c(1-\phi)} \left(C_* \frac{R^j (j-1)!}{j! R^j} D_{j-1,k-1} + \frac{R^j}{j!} \sum_{i=j}^{k-1} \frac{i!}{R^{i+1}} D_{i,k-1} \right) \\ &= \frac{kR^j (1+\theta)}{cj!\theta R} \left(\frac{1}{1+\theta} \frac{D_{j-1,k-1} (j-1)!}{R^j} + \frac{1}{R} \sum_{i=j}^{k-1} \frac{i!}{R^i} D_{i,k-1} \right) \\ &= \frac{kR^j (1+\theta)}{cj!\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \frac{D_{j-1,k-1} (j-1)!}{R^{j-1}} + \sum_{i=j}^{k-1} \frac{i!}{R^i} D_{i,k-1} \right) \\ &= \frac{kR^j (1+\theta)^2 \mu}{cj!\theta^2} \left(\frac{1}{1+\theta} \frac{D_{j-1,k-1} (j-1)!}{R^{j-1}} + \sum_{i=j}^{k-1} \frac{i!}{R^i} D_{i,k-1} \right). \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Άρα αποδείξαμε ότι οι σταθερές $D_{j,k}$ και $\bar{C}_{j,k}$ ικανοποιούν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

3. Οι Willmot και Lin (2001) (Πόρισμα 9.2.1) χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι σύν-

θετες γεωμετρικές κατανομές ανήκουν στη μη παραμετρική οικογένεια κατανομών NWU διατύπωσαν το εξής άνω φράγμα για την $\psi_1(u)$

$$\psi_1(u) \leq \frac{\psi(u)}{\lambda\theta\mu} \left(\frac{2\theta\mu u - \mu^2}{2\theta\mu} + \frac{1}{\psi(u)} \int_u^\infty \psi(x) dx \right) := U_{W,L}(u). \quad (5.2.30)$$

Επίσης η Frostig (2004) έδωσε ένα άνω φράγμα για την πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας

$$\psi_1(u) \leq \frac{e^{-Ru}}{\lambda M'_X(R) - 1} \left(u + \frac{(\lambda + R) M''_X(R)}{\lambda M'_X(R) - 1} - \frac{2}{R} \right) := U_F(u), \quad (5.2.31)$$

όπου $M'_X(R)$ και $M''_X(R)$ η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της ροπογεννήτριας για την κατανομή που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων. Το φράγμα της Frostig (2004) προκειμένου να υπολογιστεί απαιτεί την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής, R , και της παραγώγου μέχρι δεύτερης τάξης της ροπογεννήτριας της κατανομής που ακολουθούν τα ύψη των αποζημιώσεων. Το φράγμα U_1 , για τον υπολογισμό του, εκτός από το συντελεστή προσαρμογής προϋποθέτει τη γνώση των σταθερών C_1 και C_2 . Οι σταθερές αυτές δεν είναι πάντα εύκολο να υπολογιστούν. Πάντως στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκουν στην οικογένεια κατανομών IFR γνωρίζουμε ότι

$$\psi(u) \leq \frac{1}{1 + \theta} e^{-Ru}, \quad (5.2.32)$$

ενώ αν ανήκει στην ανήκει DFR τότε

$$\psi(u) \geq \frac{1}{1 + \theta} e^{-Ru}, \quad (5.2.33)$$

(βλέπε Willmot και Lin (2001) σελίδα 131). Τέλος το φράγμα των Willmot και Lin που περιγράφεται στην (5.2.30) υπολογίζεται όταν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας ή κάποιο άνω φράγμα της. Επομένως ο βαθμός δυσκολίας υπολογισμού του είναι όμοιος με αυτόν του φράγματος $U_1(u)$.

4. Τα φράγματα που παρουσιάστηκαν στο Θεώρημα 5.2.1 αναφέρονται στις ροπές της τυχαίας μεταβλητής T . Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε φράγματα για τις ροπές της τυχαίας μεταβλητής T_c , τότε αρκεί να διαιρέσουμε με την $\psi(u)$ ή αντίστοιχα κάποιο άνω ή κάτω φράγμα της. Ενδεικτικά στις επόμενες δύο σχέσεις παρουσιάζουμε τέτοια φράγματα για την πρώτη και δεύτερη ροπή με τη βοήθεια της

σχέσης (5.2.3)

$$\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \geq \frac{C_1}{C_2 c (1 - \phi) R} (RC_1 u + 1 - C_2) := L_1(u, c),$$

$$\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \leq \frac{C_2 e^{-Ru}}{C_1 c (1 - \phi) R} (RC_2 u + 1 - C_1) := U_{1,c}(u)$$

και

$$\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} \leq \frac{2C_2}{C_1 R^2 (1 - \phi) c^2} \left(R^2 C_2^2 \frac{u^2}{2} + RC_2 (2 - 2C_1) u + (C_2 + 1 - C_1) (1 - C_1) \right) := U_{2,c}(u)$$

$$\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} \geq \frac{2C_1}{C_2 R^2 (1 - \phi) c^2} \left(R^2 C_1^2 \frac{u^2}{2} + RC_1 (2 - 2C_2) u + (C_2 + 1 - C_1) (1 - C_2) \right) := L_{2,c}(u)$$

5. Τέλος πρέπει να τονίσουμε πως η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στο Θεώρημα 5.2.1 μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε εκθετικά φράγματα της πιθανότητας χρεοκοπίας. Επίσης ο τρόπος κατασκευής φραγμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου με διάχυση.

5.2.2 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε την ακριβή τιμή των δύο πρώτων ροπών, $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ και θα γίνει σύγκριση των αντίστοιχων φραγμάτων τους για τις περιπτώσεις που η κατανομή που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων είναι μια από τις παρακάτω :

1. Μείξη δυο εκθετικών κατανομών
2. Γάμμα κατανομή.

Παράδειγμα 5.2.1. Μείξη Εκθετικών κατανομών Gerber et al. (1987).

Έστω ότι η κατανομή που ακολουθούν τα ύψη των αποζημιώσεων είναι η μείξη δύο εκθετικών

κατανομών με παραμέτρους 7 και 3 αντίστοιχα και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}.$$

Επιπλέον θεωρούμε πως $\lambda = 3$ και $c = 1$ ($\theta = 2/5$). Τότε προκειμένου να υπολογίσουμε τα φράγματα για την πρώτη και τη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας και να τα συγκρίνουμε με τις ακριβείς τιμές $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ υπολογίζουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης κατανομής.

1. Μέση τιμή

$$E(X) = \mu = \frac{5}{21}.$$

2. Δεύτερη ροπή γύρω από το μηδέν

$$E(X^2) = \mu_2 = \frac{58}{441}.$$

3. Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{3}{2(3-t)} + \frac{7}{2(7-t)},$$

4. Πρώτη παράγωγος της ροπογεννήτριας

$$M'_X(t) = \frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{3}{2(3-t)^2} + \frac{7}{2(7-t)^2}.$$

5. Δεύτερη παράγωγος της ροπογεννήτριας

$$M''_X(t) = \frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = \frac{3}{(3-t)^3} + \frac{7}{(7-t)^3}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για τη συγκεκριμένη μείξη εκθετικών κατανομών είναι ίση με

$$\psi(u) = \frac{1}{35}e^{-6u} + \frac{24}{35}e^{-u}.$$

Γνωρίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορούμε αντικαθιστώντας στη σχέση (3.1.2) για $k = 1$ να βρούμε την πρώτη ροπή $\psi_1(u)$

$$\psi_1(u) = \frac{-419 + 15u + 12e^{5u}(337 + 720u)}{5250e^{6u}}$$

και όμοια αντικαθιστώντας την $\psi_1(u)$ στην (3.1.2) για $k = 2$ υπολογίζουμε τη δεύτερη ροπή $\psi_2(u)$

$$\psi_2(u) = \frac{-405317 + 45u(-269 + 5u) + 12e^{5u}(349141 + 720u(1393 + 360u))}{787500e^{6u}}.$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών C_1 και C_2 , αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης

$$b(u) = \frac{1 - F(u)}{\int_u^\infty e^{R(y-u)} dF(y)} = \frac{6(1 + e^{4u})}{7 + 9e^{4u}}.$$

Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται η γραφική παράσταση της $b(u)$. Παρατηρούμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της με

$$b'(u) = \frac{-48e^{4u}}{(7 + 9e^{4u})^2} < 0.$$

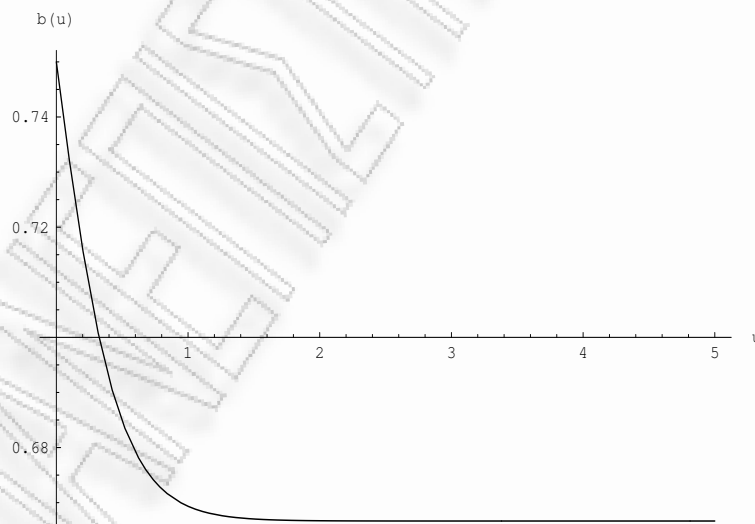
Άρα, έχουμε

$$C_1 = \lim_{u \rightarrow \infty} b(u) = \frac{2}{3}$$

και

$$C_2 = \lim_{u \rightarrow 0} b(u) = \frac{3}{4}.$$

Από το Πόρισμα 5.2.1 υπολογίζουμε τα φράγματα $U_1(u)$ και $L_1(u)$



Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση της $b(u)$

$$U_1(u) = \frac{7(4 + 9u)}{32e^u}$$

και

$$L_1(u) = \frac{7(3+8u)}{36e^u}.$$

Οι σχέσεις (5.2.31) και (5.2.30) μας δίνουν τα φράγματα των Frostig 2004 και Willmot και Lin (2001), αντίστοιχα

$$U_F(u) = \frac{4(86+45u)}{75e^u}$$

και

$$U_{W,L}(u) = \frac{-11+21u+12e^{5u}(13+42u)}{210e^{6u}}.$$

Τα φράγματα $U_2(u)$ και $L_2(u)$ που περιγράφηκαν στο Πρόσμημα 5.2.2 φαίνονται παρακάτω

$$U_2(u) = \frac{49(104+9u(34+9u))}{768e^u},$$

$$L_2(u) = \frac{49(33+16u(7+2u))}{432e^u}.$$

Αν λάβουμε υπόψιν μας πως η μείξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην οικογένεια DFR , τότε το ϕ αποτελεί ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $\psi(u)e^{Ru}$, δηλαδή

$$\psi(u) \leq \phi e^{-Ru} \leq C_2 e^{-Ru}.$$

Συνεπώς προκύπτουν δυο νέα άνω φράγματα για το $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$, αντίστοιχα

$$U_{R,1}(u) = \frac{5(7+15u)}{42e^u}$$

και

$$U_{R,2}(u) = \frac{5(308+15u(58+15u))}{252e^u}.$$

Τα Σχήματα 5.2, 5.3 και ο Πίνακας 5.1 παρουσιάζουν την ακριβή τιμή της πρώτης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας καθώς και τα φράγματα $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$. Παρατηρούμε πως το φράγμα των Willmot και Lin είναι ακριβές για μηδενικό αρχικό αποθεματικό και έχει την καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα άλλα δύο άνω φράγματα για μια μικρή περιοχή γύρω από το μηδέν, $[0, 0.316313)$. Όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μεγαλύτερο από 0.316313 το μικρότερο άνω φράγμα είναι το $U_1(u)$. Το $U_F(u)$ είναι το πιο απομακρυσμένο από την ακριβή τιμή για μια περιοχή γύρω από το μηδέν, όπου έχει μη αποδεκτή συμπεριφορά. Ασυμπτωτικά το $U_1(u)$ βρίσκεται πιο κοντά στην ακριβή τιμή όπως φαίνεται από τα παρακάτω

όρια

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_1(u)}{U_{W,L}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_1(u)}{U_F(u)} = 0.820313 < 1.$$

Τα φράγματα $U_{W,L}(u)$ και $U_F(u)$ ασυμπτωτικά έχουν την ίδια συμπεριφορά

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_{W,L}(u)}{U_F(u)} = 1.$$

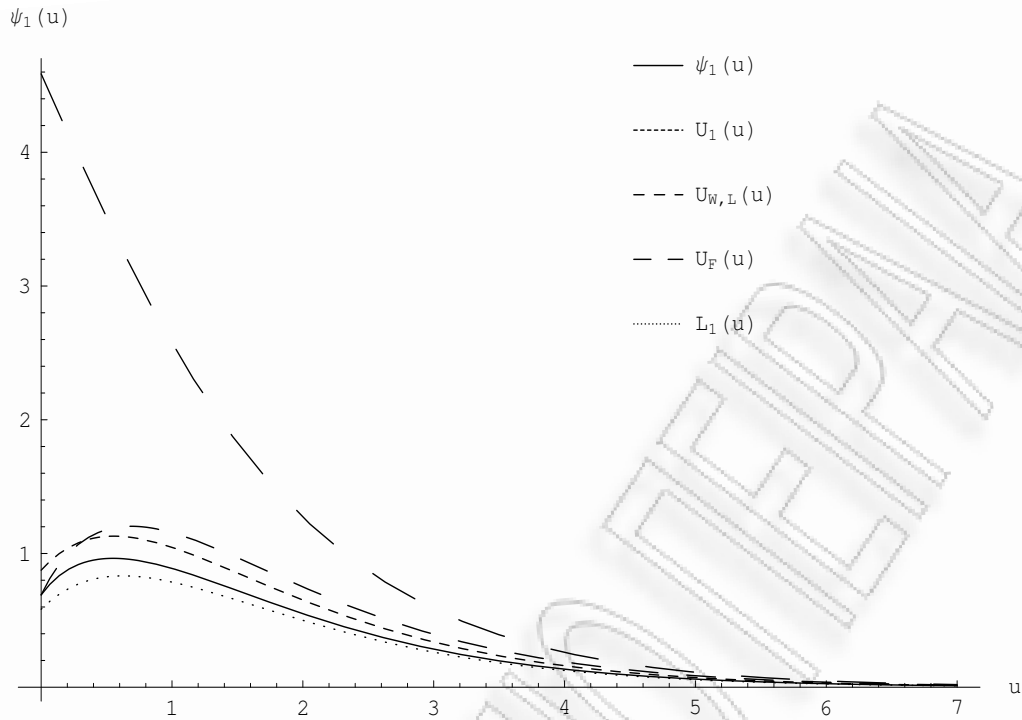
Στα Σχήματα 5.2, 5.3 και τον Πίνακα 5.1 φαίνεται επίσης και το κάτω φράγμα $L_1(u)$. Παρατηρούμε πως όπως και το $U_1(u)$ δεν είναι ακριβή για μηδενικό αρχικό αποθεματικό. Στο Σχήμα 5.4 και τον Πίνακα 5.2 παρουσιάζεται το άνω και το κάτω φράγμα για τη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας όταν τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν τη συγκεκριμένη μείξη Εκθετικών κατανομών. Η σύγκριση τους με άλλα φράγματα δεν ήταν εφικτή λόγω της μη ύπαρξης φραγμάτων για τη δεύτερη ροπή. Τέλος στα Σχήματα 5.5 και 5.6 δίνονται τα φράγματα $U_{R,1}(u)$ και $U_{R,2}(u)$ που χρησιμοποιούνται στη περίπτωση που λάβουμε υπόψιν μας πως η κατανομή που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκει στην οικογένεια DFR . Σε σύγκριση τους με τα φράγματα $U_1(u)$ και $U_2(u)$ είναι φανερό πως παρουσιάζουν βελτιωμένη συμπεριφορά για μικρές τιμές του αποθεματικού, ασυμπτωτικά μικρότερη τιμή έχουν τα $U_{R,1}(u)$ και $U_{R,2}(u)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_1(u)}{U_{W,L}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_1(u)}{U_F(u)} = 0.907029 < 1$$

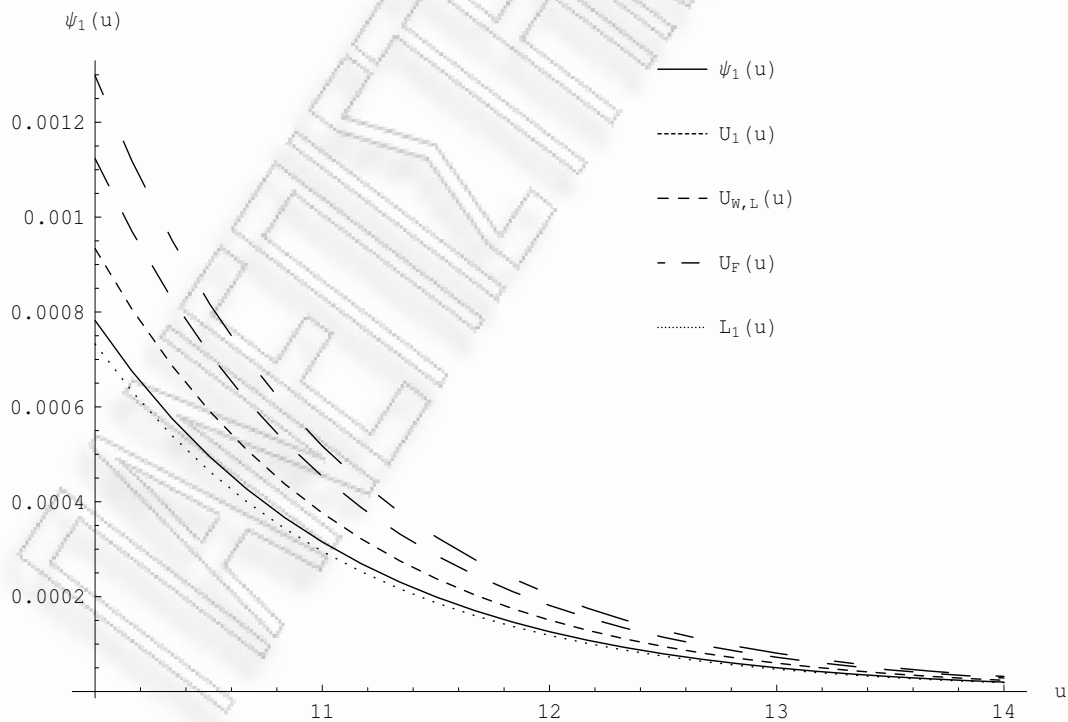
και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_{R,1}(u)}{U_1(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_{R,2}(u)}{U_2(u)} = 0.863838 < 1.$$

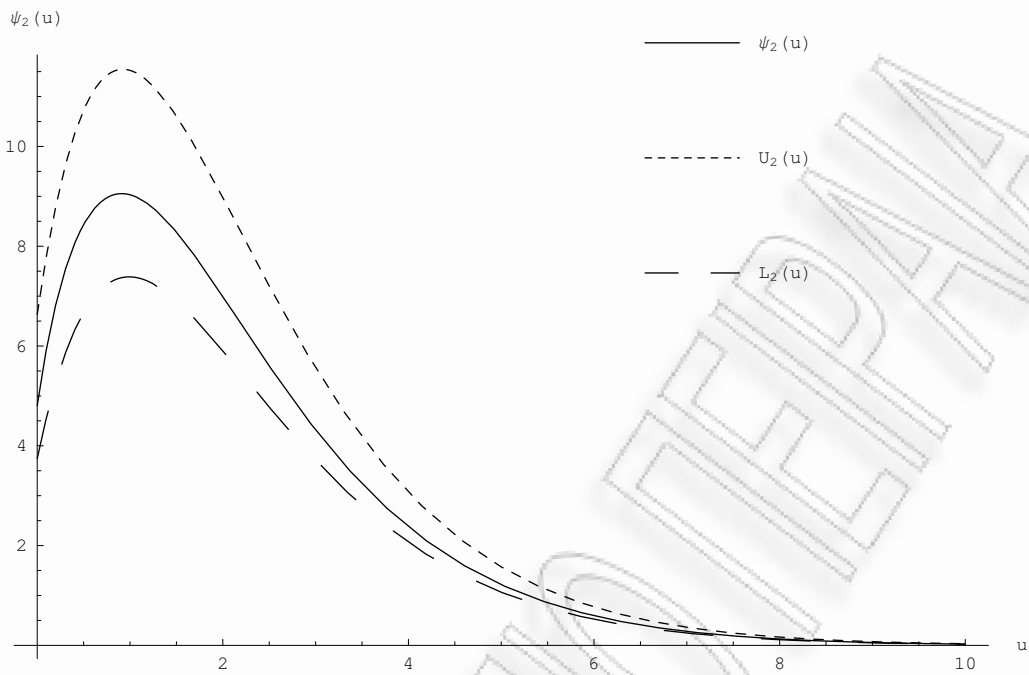
Το γεγονός αυτό μας δείχνει πόσο σημαντική είναι η επιλογή των σταθερών C_1 και C_2 και πώς επηρεάζεται η συμπεριφορά των φραγμάτων που προτείνουμε για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.



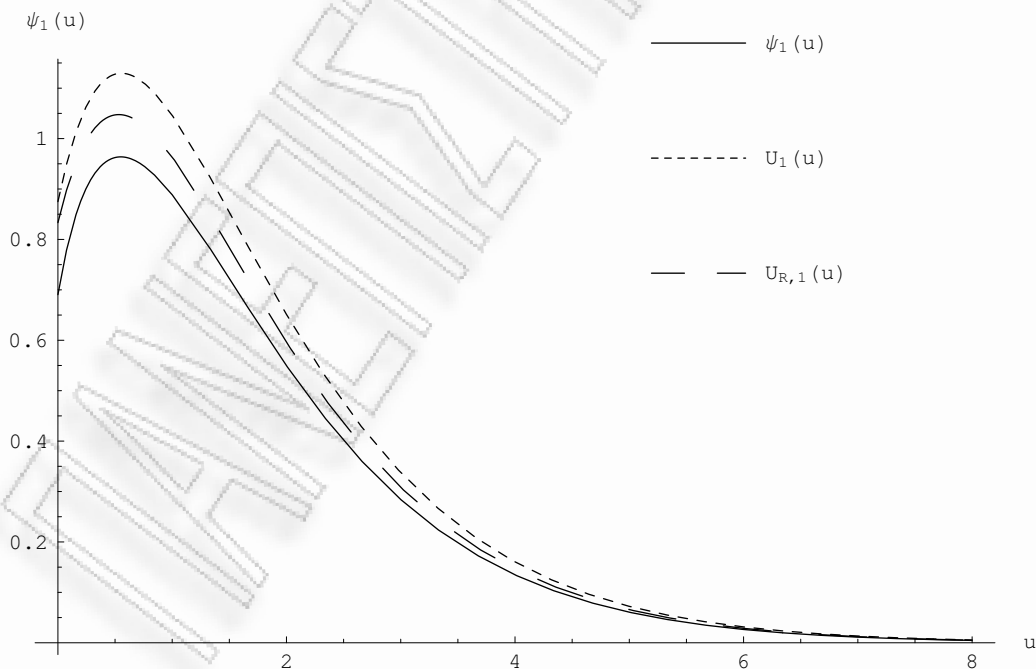
Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ ($u \in [10, 14]$) για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $L_2(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.



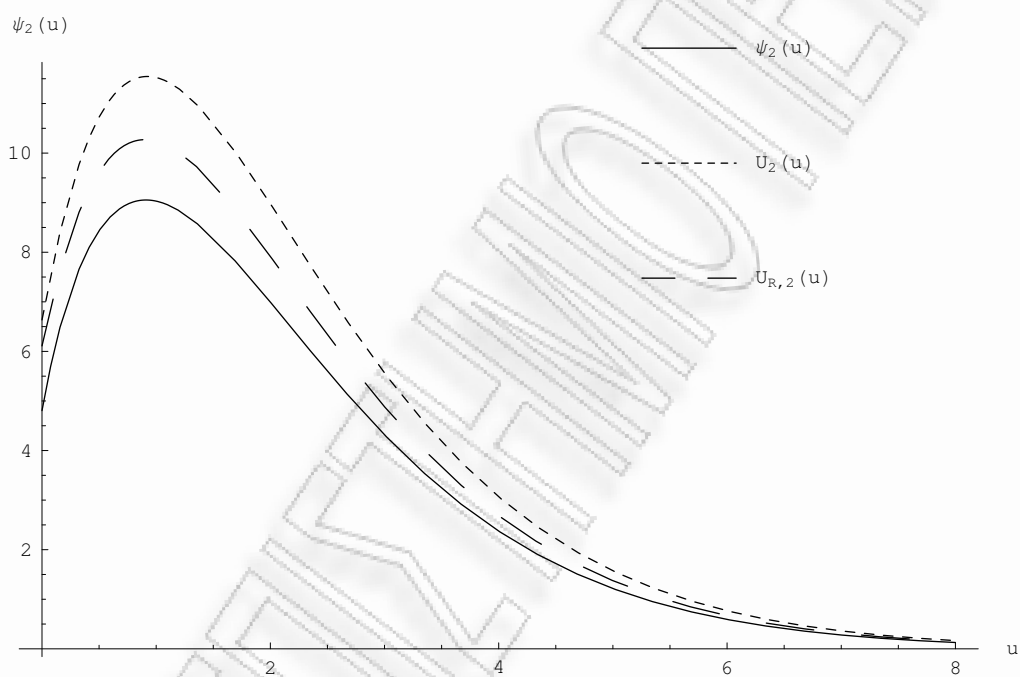
Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{R,1}(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.

u	$\psi_1(u)$	$U_1(u)$	$U_{R,1}(u)$	$U_{W,L}(u)$	$U_F(u)$	$L_1(u)$
0	0.690476	0.875	0.833333	0.690476	4.58667	0.583333
0.1	0.80225	0.969873	0.915609	0.866067	4.36735	0.668574
0.2	0.87627	1.03876	0.974679	0.991438	4.14824	0.732309
0.3	0.923343	1.08576	1.01422	1.08001	3.93128	0.777859
0.316313	0.928983	1.0916	1.33149	1.0916	3.8962	0.783768
0.4	0.950464	1.11441	1.0374	1.14034	3.71804	0.808108
0.5	0.962388	1.12777	1.04699	1.17828	3.50979	0.825556
0.6	0.96252	1.12849	1.04536	1.19819	3.3075	0.832364
0.7	0.953412	1.11887	1.03455	1.20342	3.11193	0.830401
0.8	0.937047	1.10086	1.01634	1.19673	2.92363	0.821273
0.9	0.915014	1.07614	0.992224	1.18038	2.74299	0.806363
1.	0.888606	1.04616	0.963494	1.15631	2.57025	0.786853
2.	0.549693	0.651301	0.59612	0.750145	1.27035	0.499989
4.	0.134678	0.160262	0.146089	0.189436	0.259838	0.124648
5.	0.0606338	0.0722224	0.0657752	0.0858607	0.11176	0.0563367
7.	0.0112073	0.0133648	0.0121584	0.015997	0.0195021	0.0104613
8.	0.0046750	0.0055770	0.0050718	0.0066900	0.0079795	0.0043703
9.	0.0019229	0.0022946	0.0020862	0.0027573	0.0032316	0.0017997
10	0.0007821	0.0009335	0.0008485	0.001123	0.001297	0.0007327
11	0.0003152	0.000376	0.0003419	0.0004533	0.000517	0.0002955
12	0.0001260	0.0001505	0.0001367	0.0001815	0.0002051	0.0001182
13	0.0000500	0.0000598	0.0000543	0.0000722	0.0000808	0.0000470
14	0.0000197	0.0000236	0.0000214	0.0000285	0.0000317	0.0000185
15	$7.787 \cdot 10^{-6}$	$9.301 \cdot 10^{-6}$	$8.448 \cdot 10^{-6}$	0.0000112	0.0000124	$7.316 \cdot 10^{-6}$
50	$1.601 \cdot 10^{-20}$	$1.915 \cdot 10^{-20}$	$1.738 \cdot 10^{-20}$	$2.328 \cdot 10^{-20}$	$2.402 \cdot 10^{-20}$	$1.511 \cdot 10^{-20}$

Πίνακας 5.1: Πίνακας τιμών της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u), U_{W,L}(u), U_F(u), L_1(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.

u	$\psi_2(u)$	$U_2(u)$	$U_{R,2}(u)$	$L_2(u)$
0	4.80556	6.63542	6.11111	3.74306
0.1	5.94927	7.81729	7.13188	4.56918
0.2	6.83182	8.79875	7.97613	5.2636
0.3	7.51546	9.5992	8.66125	5.83826
0.4	8.04049	10.2369	9.2036	6.30455
0.5	8.43466	10.729	9.61845	6.67324
0.6	8.71841	11.0915	9.91999	6.95451
0.7	8.90774	11.3391	10.1214	7.15786
0.8	9.01577	11.4856	10.2347	7.29215
0.9	9.05371	11.5436	10.2711	7.36557
1.	9.03129	11.5245	10.2408	7.38569
2.	6.99487	8.98006	7.91604	5.90995
3.	4.3174	5.56208	4.88289	3.71017
4.	2.37459	3.06634	2.68484	2.06293
5.	1.21606	1.57299	1.37473	1.06461
6.	0.59294	0.767974	0.670247	0.522104
7.	0.278889	0.361589	0.315233	0.246683
8.	0.127599	0.165575	0.144222	0.113275
9.	0.0571136	0.0741633	0.0645526	0.0508543
10.	0.0251118	0.0326274	0.0283822	0.0224159
11	0.0108787	0.0141416	0.0122953	0.00973156
12	0.0046541	0.00605269	0.00526013	0.00417102
13	0.00196989	0.00256282	0.00222638	0.00176825
14	0.000826065	0.00107507	0.000933622	0.000742557
15	0.000343606	0.000447315	0.000388344	0.000309257
16	0.000141904	0.000184784	0.00016038	0.000127861
17	0.0000582324	0.0000758468	0.0000658143	0.0000525221
18	0.0000237607	0.0000309546	0.0000268543	0.0000214501
19	$9.64548 \cdot 10^{-6}$	0.0000125683	0.0000109013	$8.71464 \cdot 10^{-6}$
20	$3.89737 \cdot 10^{-6}$	$5.07928 \cdot 10^{-6}$	$4.40482 \cdot 10^{-6}$	$3.52389 \cdot 10^{-6}$
50	$2.05292 \cdot 10^{-18}$	$2.68149 \cdot 10^{-18}$	$2.32027 \cdot 10^{-18}$	$1.8734 \cdot 10^{-18}$

Πίνακας 5.2: Πίνακας τιμών της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $U_{R,2}(u)$, $L_2(u)$ για τη μείζη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.



Σχήμα 5.6: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $U_{R,2}(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.

Παράδειγμα 5.2.2. Γάμμα κατανομή

Έστω ότι τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την κατανομή Γάμμα (2, 3) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = 9xe^{-3x}$$

και $\lambda = 1$, $c = 1$ και συνεπώς $\theta = 1/2$.

Για τη συγκεκριμένη κατανομή ισχύουν

1. Μέση τιμή

$$E(X) = \mu = \frac{2}{3}.$$

2. Δεύτερη ροπή γύρω από το μηδέν

$$E(X^2) = \mu_2 = \frac{2}{3}.$$

3. Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{9}{(3-t)^2}.$$

4. Πρώτη παράγωγος της Ροπογεννήτριας

$$M'_X(t) = \frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{18}{(3-t)^3}.$$

5. Δεύτερη παράγωγος της Ροπογεννήτριας

$$M''_X(t) = \frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = \frac{54}{(3-t)^4}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον παρακάτω τύπο (βλέπε Gerber et al. (1987))

$$\psi(u) = \frac{13 - 4\sqrt{13} + (13 + 4\sqrt{13}) e^{\sqrt{13}u}}{39 e^{\frac{(5+\sqrt{13})u}{2}}}.$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.1.2) για $k = 1$ και $k = 2$ βρίσκουμε την πρώτη και τη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας αντίστοιχα.

$$\psi_1(u) = \frac{13(39 + 58u) - \sqrt{13}(105 + 208u) + e^{\sqrt{13}u}(13(39 + 58u) + \sqrt{13}(105 + 208u))}{1014 e^{\frac{(5+\sqrt{13})u}{2}}}$$

και

$$\psi_2(u) = e^{\sqrt{13}u} \left(\frac{(1864 + 4900\sqrt{13} + 108(195 + 53\sqrt{13})u + 13(307 + 85\sqrt{13})u^2)}{507(-13 + 5\sqrt{13})e^{\frac{(5+\sqrt{13})u}{2}}} + \frac{3(-19662 + 5690\sqrt{13} + 12(-3575 + 991\sqrt{13})u + 13(-631 + 175\sqrt{13})u^2)}{507(-13 + 5\sqrt{13})e^{\frac{(5+\sqrt{13})u}{2}}} \right).$$

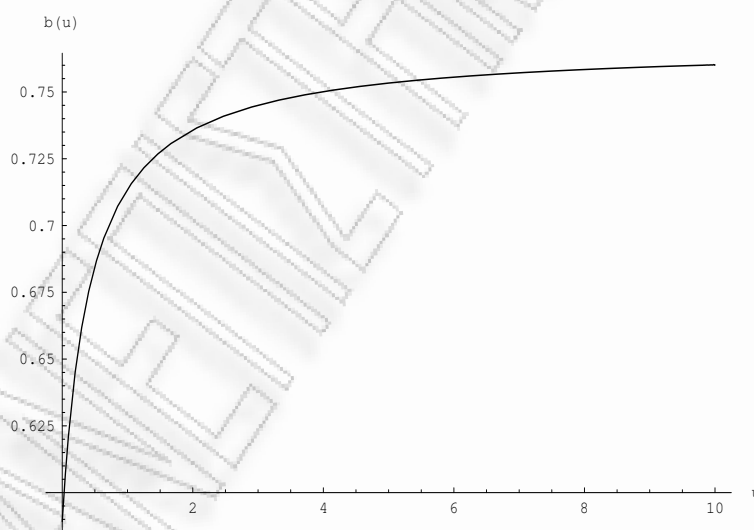
Προκειμένου να υπολογίσουμε τα φράγματα $U_1(u)$ και $L_1(u)$ πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_1 και C_2 , δηλαδή να βρούμε το μικρότερο άνω και το μεγαλύτερο κάτω φράγμα της συνάρτησης

$$b(u) = \frac{1 - F(u)}{\int_u^\infty e^{R(y-u)} dF(y)} = \frac{(7 + \sqrt{13}) e^{-3t + \frac{(5-\sqrt{13})u}{2} + \frac{(1+\sqrt{13})u}{2}} (1 + 3u)}{9(2 + t + \sqrt{13}u)}.$$

Η συνάρτηση $b(u)$ έχει θετική παράγωγο στο πεδίο ορισμού της

$$b'(u) = \frac{-2(-11 + \sqrt{13})}{9(2 + u + \sqrt{13}u)^2} > 0, \quad \forall u \geq 0$$

και άρα είναι γνησίως αύξουσα για κάθε αποθεματικό, u (Σχήμα 5.7).



Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση της $b(u)$

Επομένως οι σταθερές C_1 και C_2 είναι ίσες με

$$C_1 = \lim_{u \rightarrow 0} b(u) = \frac{7 + \sqrt{13}}{18} = 0.589197,$$

$$C_2 = \lim_{u \rightarrow \infty} b(u) = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} = 0.767592.$$

Τα φράγματα $U_1(u)$ και $L_1(u)$ υπολογίζονται με τη βοήθεια του πορίσματος 5.2.1

$$U_1(u) = \frac{e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} (10 + 4\sqrt{13} + 3(7 + \sqrt{13})u)}{18},$$

$$L_1(u) = \frac{e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} (3(7 + \sqrt{13}) + (31 + 7\sqrt{13})u)}{54}.$$

Το άνω φράγμα της Frostig που δίνεται στη σχέση (5.2.31) είναι ίσο σε αυτή την περίπτωση με

$$U_F(u) = \frac{e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} (63 + 13\sqrt{13} + (13 + 4\sqrt{13})u)}{13}$$

Το άνω φράγμα που έδωσαν οι Willmot και Lin για την πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας (σχέση (5.2.30) φαίνεται παρακάτω

$$U_{W,L}(u) = \frac{-14 + 4\sqrt{13} + (-33 + 9\sqrt{13})u + e^{\sqrt{13}u} (1 + \sqrt{13} + (7 + \sqrt{13})u)}{(-13 + 5\sqrt{13}) e^{\frac{(5+\sqrt{13})u}{2}}}.$$

Στο Πόρισμα 5.2.2 δίνονται το άνω και κάτω φράγμα για τη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Στη συνέχεια δίνονται οι τύποι που μας δίνουν τα φράγματα αυτά όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί τη Γάμμα(2, 3) κατανομή.

$$U_2(u) = \frac{e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} (184 + 52\sqrt{13} + 3u(113 + 29\sqrt{13} + 3(5 + 2\sqrt{13})u))}{27},$$

$$L_2(u) = \frac{e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} (6(31 + 7\sqrt{13}) + u(401 + 101\sqrt{13} + (77 + 20\sqrt{13})u))}{81}.$$

Η κατανομή Γάμμα (2,3) ανήκει στην οικογένεια *IFR* (βλέπε Barlow και Proschan (1981)) επομένως ένα βελτιωμένο κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας (βλέπε Willmot και Lin (2001)) είναι το εξής

$$\phi e^{-Ru} \leq C_1 e^{-Ru} \leq \psi(u).$$

Συνεπώς από τα $U_1(u)$ και $U_2(u)$ προκύπτουν δυο νέα άνω φράγματα για την πρώτη και δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας αντίστοιχα

$$U_{R,1}(u) = \frac{(3 + \sqrt{13}) e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}}}{6} + \frac{(7 + \sqrt{13}) e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} u}{6},$$

$$U_{R,2}(u) = \frac{(47 + 13\sqrt{13}) e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}}}{9} + \frac{(33 + 9\sqrt{13}) e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} u}{3} - \frac{(-15 - 6\sqrt{13}) e^{\frac{(-5+\sqrt{13})u}{2}} u^2}{9}.$$

Στα Σχήματα 5.8 και 5.9 και τον Πίνακα 5.3 παρατηρούμε την ακριβή τιμή της πρώτης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, τα άνω φράγματα $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$ και το κάτω φράγμα $L_1(u)$. Το φράγμα των Willmot και Lin έχει την καλύτερη συμπεριφορά όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μικρότερο από 1.2911. Επίσης το $U_{W,L}(u)$ είναι το μοναδικό από τα άνω φράγματα που είναι ακριβές για μηδενικό αρχικό αποθεματικό. Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι μεγαλύτερο από 1.2911 τότε το $U_1(u)$ βρίσκεται πιο κοντά στην $\psi_1(u)$. Το φράγμα $U_F(u)$ είναι το πιο απομακρυσμένο σε σχέση με τα άλλα άνω φράγματα για μικρό ή μέτριο αρχικό αποθεματικό και ιδιαίτερα για μια περιοχή γύρω από το μηδέν. Για το κάτω φράγμα $L_1(u)$ δεν υπάρχει κάποιο μέτρο σύγκρισης μιας και δεν έχει δημοσιευτεί κάποιο κάτω φράγμα για την πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας. Ασυμπτωτικά, όπως και στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούσαν τη μείζη εκθετικών κατανομών (βλέπε παράδειγμα 5.2.1), πιο κοντά στην ακριβή τιμή είναι το $U_1(u)$, όπως γίνεται σαφές και από τα παρακάτω όρια

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_1(u)}{U_{W,L}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_1(u)}{U_F(u)} = 0.820313 < 1.$$

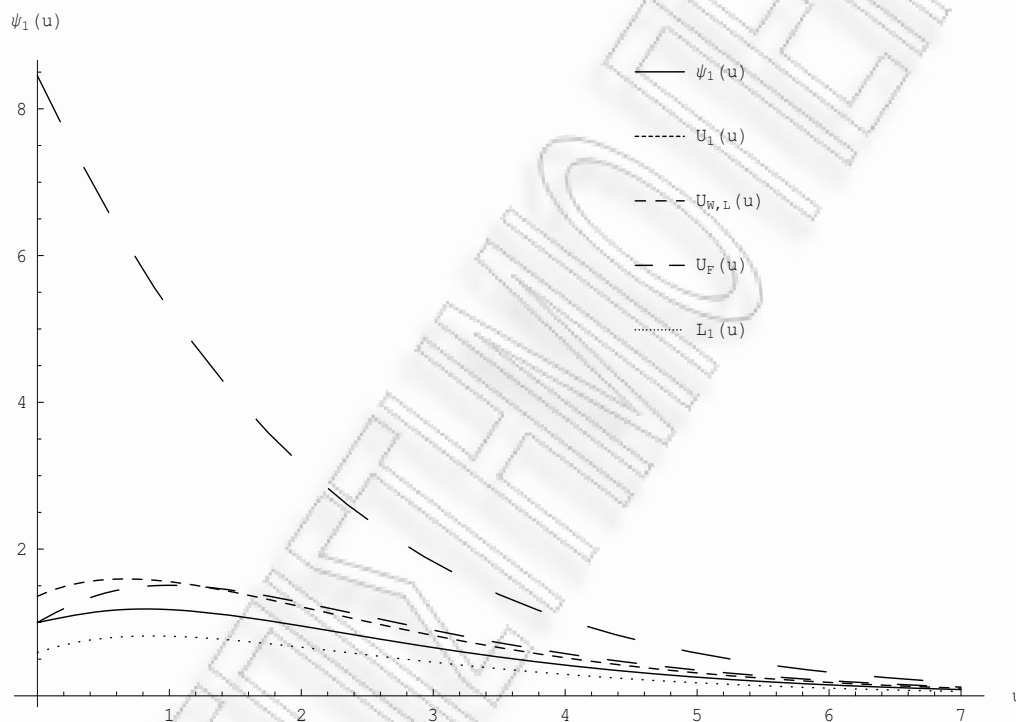
Τα $U_F(u)$ και $U_{W,L}(u)$ για μεγάλες τιμές του αποθεματικού παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_{W,L}(u)}{U_F(u)} = 1.$$

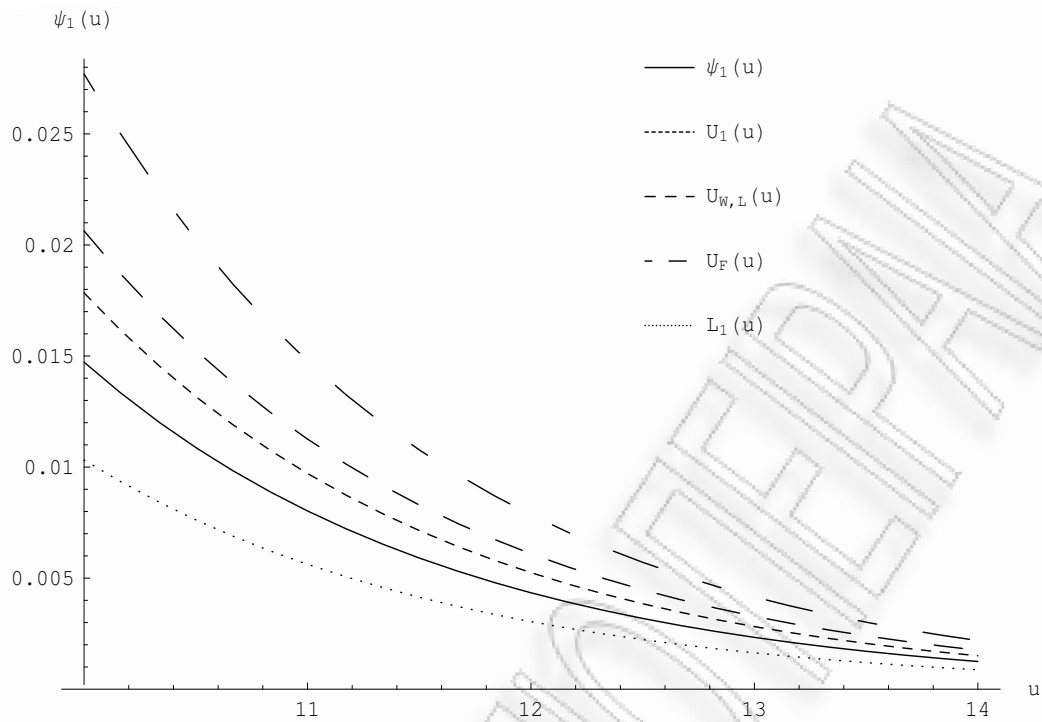
Στο Σχήμα 5.10 και τον Πίνακα 5.4 φαίνεται η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας και τα άνω και κάτω φράγματα της $U_1(u)$ και $L_1(u)$. Όπως και στην περίπτωση της πρώτης ροπής, $\psi_1(u)$ τα φράγματα αυτά δεν είναι ακριβή για μηδενικό αρχικό αποθεματικό αλλά η γενική τους συμπεριφορά είναι αποδεκτή. Τέλος στα Σχήματα 5.11 και 5.12 γίνεται σύγκριση των φραγμάτων $U_{R,1}(u)$, $U_{R,2}(u)$ με τα αντίστοιχα $U_1(u)$ και $U_2(u)$. Είναι προφανές πως τα

φράγματα $U_{R,1}(u)$ και $U_{R,2}(u)$ έχουν καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα άλλα δυο για μικρές τιμές του αποθεματικού και ιδιαίτερα για τιμές γύρω από το μηδέν. Ασυμπτωτικά τα δύο φράγματα συμπίπτουν τόσο για την πρώτη όσο και για τη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας.

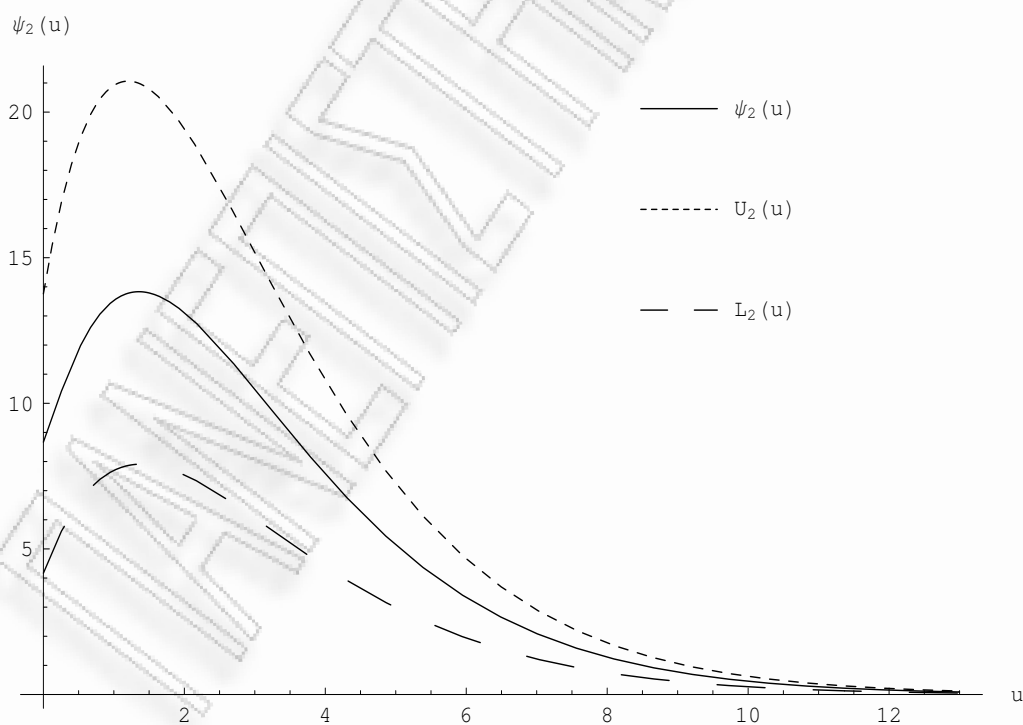
$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_{R,1}(u)}{U_1(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U_{R,2}(u)}{U_2(u)} = 1.$$



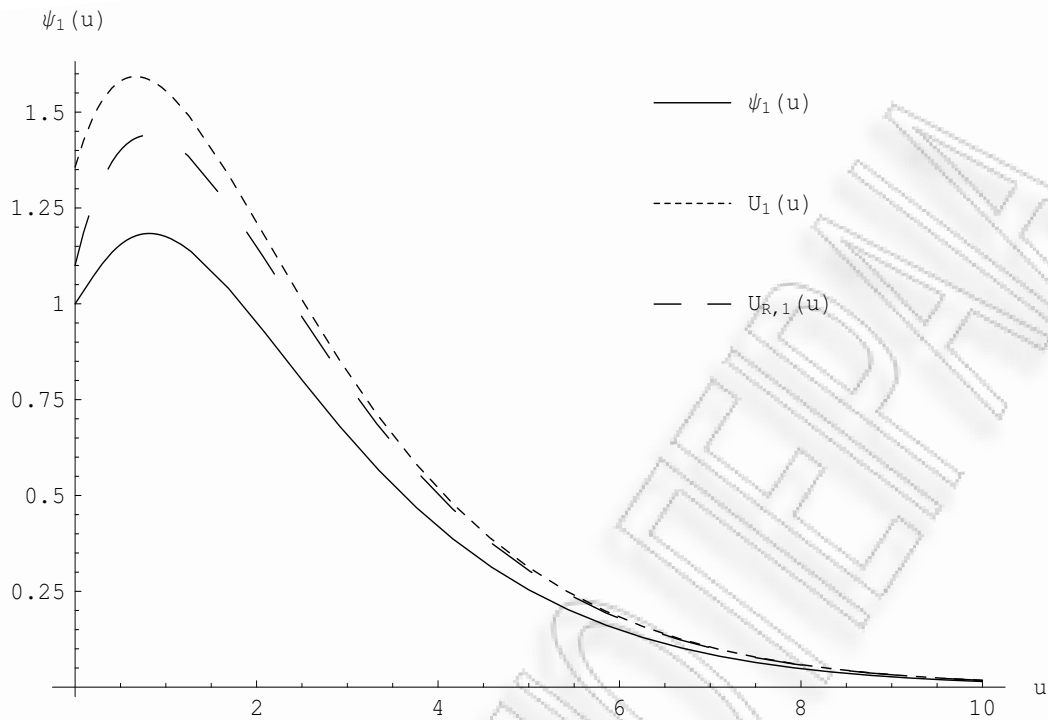
Σχήμα 5.8: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.



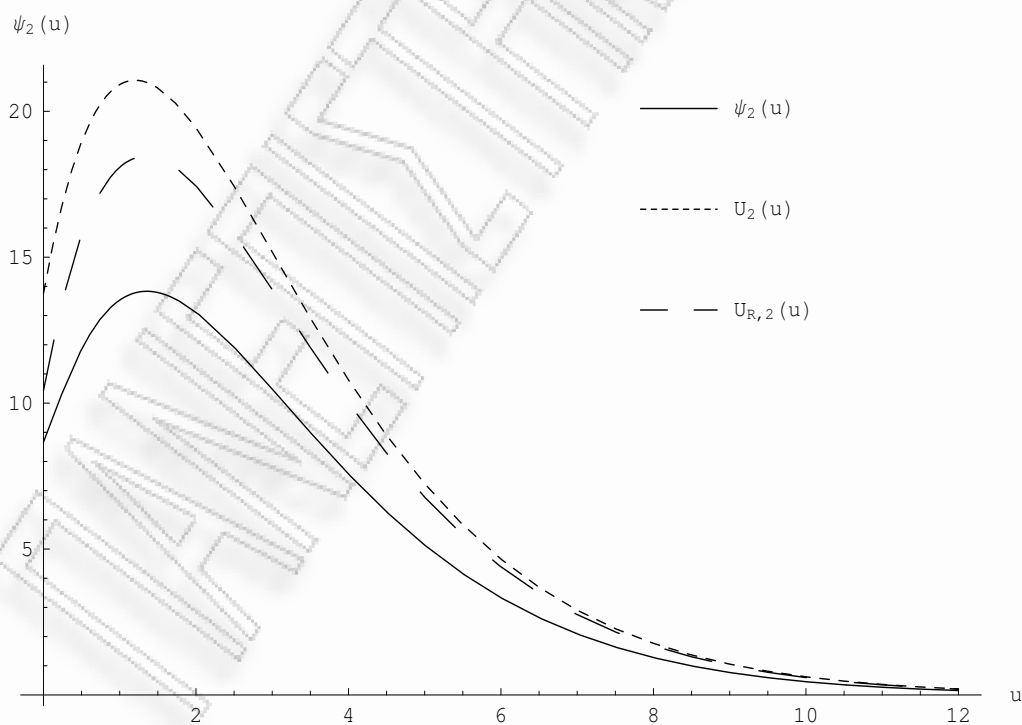
Σχήμα 5.9: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{W,L}(u)$, $U_F(u)$, $L_1(u)$ ($u \in [10, 14]$) για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.



Σχήμα 5.10: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $L_2(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.



Σχήμα 5.11: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{R,1}(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.



Σχήμα 5.12: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $U_{R,2}(u)$ για τη Γάμμα (2,3) με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.

u	$\psi_1(u)$	$U_1(u)$	$U_{R,1}(u)$	$U_{W,L}(u)$	$U_F(u)$	$L_1(u)$
0	1.	1.35679	1.10093	1.	8.45171	0.589197
0.1	1.03549	1.43027	1.19164	1.09856	8.07924	0.646648
0.2	1.07161	1.4877	1.26513	1.19003	7.71861	0.693689
0.3	1.10466	1.5309	1.32333	1.27059	7.36991	0.73146
0.4	1.13263	1.56154	1.36795	1.33869	7.03317	0.760998
0.5	1.15458	1.58111	1.40055	1.39408	6.70835	0.783239
0.6	1.17024	1.59096	1.42256	1.43723	6.39539	0.799033
0.7	1.17974	1.59231	1.43525	1.46899	6.09416	0.809147
0.8	1.18341	1.58626	1.43978	1.49036	5.80449	0.814274
0.9	1.18173	1.57381	1.43719	1.50242	5.5262	0.815041
1.	1.17525	1.55583	1.42842	1.50621	5.25907	0.812011
1.2911	1.13394	1.4792	1.37519	1.4792	4.54263	0.786089
2.	0.952163	1.21306	1.14961	1.27326	3.1419	0.662604
3.	0.657277	0.822326	0.790731	0.894519	1.82503	0.458554
4.	0.418501	0.518177	0.502444	0.575145	1.03851	0.292382
5.	0.253813	0.312157	0.304323	0.350991	0.581729	0.177485
6.	0.149005	0.182395	0.178493	0.206944	0.321844	0.104261
7.	0.0854608	0.104247	0.102304	0.119067	0.176283	0.0598259
9.	0.0267767	0.032506	0.0320243	0.037468	0.0516558	0.0187566
10.	0.0147244	0.0178441	0.0176042	0.0206354	0.0277005	0.0103166
11	0.0080247	0.00971096	0.0095915	0.0112605	0.0147787	0.00562352
12	0.0043408	0.0052466	0.0051871	0.0060977	0.0078496	0.0030424
13	0.0023333	0.0028172	0.0027876	0.0032806	0.0041530	0.001635
14	0.0012474	0.0015048	0.0014900	0.0017552	0.0021896	0.00087451
15	0.0006637	0.0008000	0.0007927	0.0009346	0.001150	0.0004653
16	0.0003517	0.0004236	0.0004200	0.0004955	0.0006032	0.0002466
17	0.0001857	0.0002235	0.0002217	0.0002617	0.0003154	0.0001302
18	0.0000977	0.0001175	0.0001166	0.0001378	0.0001645	0.0000685
19	0.0000512	0.0000616	0.0000612	0.0000723	0.0000856	0.0000359
20	0.0000268	0.0000322	0.0000320	0.0000378	0.0000445	0.0000188
21	0.0000140	0.0000168	0.0000167	0.0000197	0.00002308	$9.830 \cdot 10^{-6}$
50	$5.435 \cdot 10^{-14}$	$6.500 \cdot 10^{-14}$	$6.481 \cdot 10^{-14}$	$7.706 \cdot 10^{-14}$	$8.252 \cdot 10^{-14}$	$3.814 \cdot 10^{-14}$

Πίνακας 5.3: Πίνακας τιμών της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_{R,1}(u)$, $L_1(u)$ για τη γάμμα κατανομή με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.

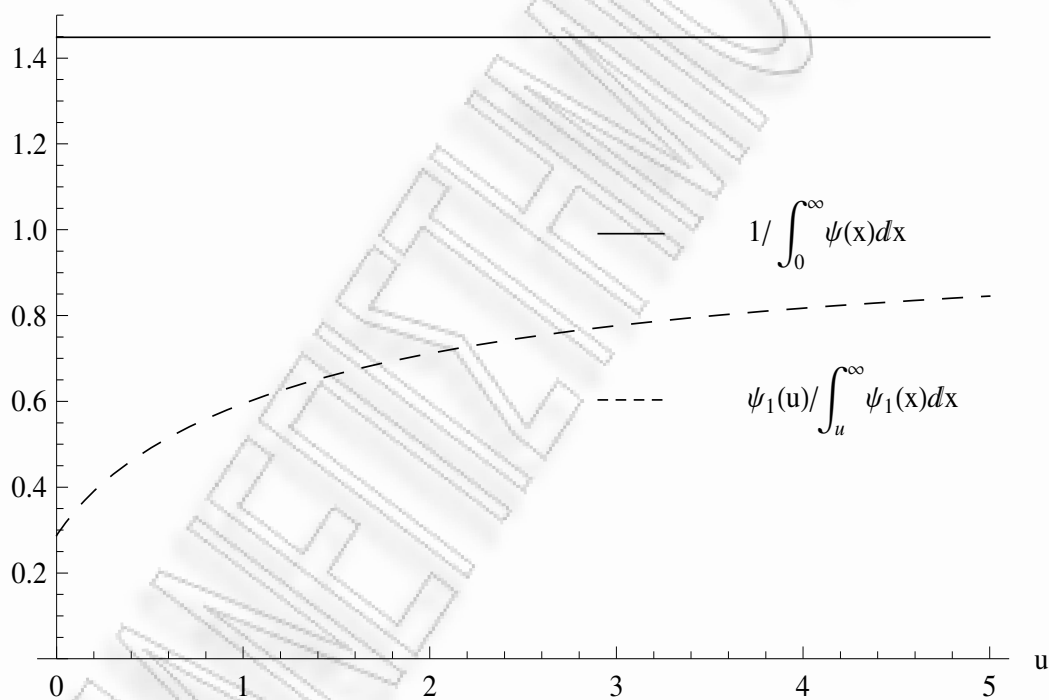
Παράδειγμα 5.2.3. Μείξη Εκθετικών κατανομών - Συνέχεια του Παραδείγματος 5.2.1. Θα συνεχίσουμε το Παράδειγμα 5.2.1 συγκρίνοντας τα φράγματα για την πρώτη ροπή που δίνονται από τα γενικά φράγματα των ανανεωτικών εξισώσεων όπως αυτά περιγράφονται από το Πρόσχημα 4.2.5. Με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica έχουμε

$$L_V(u) = \frac{2e^{-u}}{4}$$

και

$$U_V(u) = \frac{21(609e^{6u}u - 2387e^{4u} + 3410e^{7u} - 1023)}{29(e^{7u}(588u + 290) - 203e^{4u} - 87)}.$$

Στο Σχήμα 5.13 φαίνεται η $\psi_1(u)/\int_u^\infty \psi_1(x)dx$ με το αντίστοιχο φράγμα της $1/\int_u^\infty \psi(x)dx$.

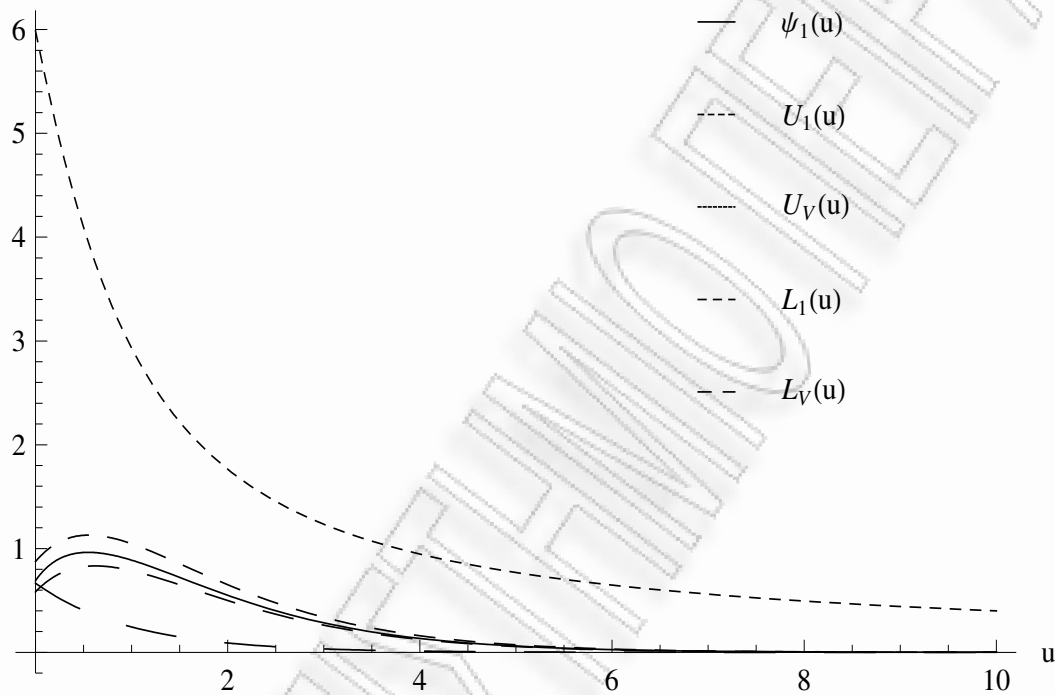


Σχήμα 5.13: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)/\int_u^\infty \psi_1(x)dx$ και του φράγματος της, $1/\int_u^\infty \psi(x)dx$, για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.

u	$\psi_2(u)$	$U_2(u)$	$U_{R,2}(u)$	$L_2(u)$
0	8.66667	13.7588	10.4302	4.16584
1	13.5324	20.9159	18.0847	7.69513
2	13.116	19.4376	17.4434	7.54379
3	10.4828	15.1773	13.8932	6.05955
4	7.57255	10.7961	10.0118	4.39066
5	5.13392	7.23797	6.77524	2.98294
6	3.33068	4.65553	4.38917	1.93819
7	2.09158	2.9036	2.75307	1.21858
8	1.28082	1.76813	1.68426	0.746928
9	0.768739	1.05626	1.01006	0.448651
10	0.453874	0.621153	0.595936	0.265061
11	0.264325	0.360505	0.346848	0.15445
12	0.152157	0.206904	0.199555	0.0889502
13	0.0867175	0.11761	0.113678	0.0507157
14	0.0489952	0.0662949	0.0642009	0.0286646
15	0.0274721	0.0370951	0.0359847	0.0160777
16	0.0153005	0.0206214	0.0200348	0.00895696
17	0.0084705	0.011397	0.0110881	0.00495994
18	0.00466416	0.00626601	0.00610383	0.00273176
19	0.0025558	0.00342877	0.00334385	0.00149723
20	0.00139433	0.00186819	0.00182383	0.000816977
21	0.000757637	0.00101392	0.000990803	0.000443998
22	0.000410166	0.000548317	0.00053629	0.000240408
23	0.000221305	0.000295548	0.000289303	0.000129732
24	0.000119034	0.000158819	0.000155582	0.0000697887
25	0.0000638411	0.0000851049	0.0000834296	0.0000374344
26	0.0000341484	0.0000454855	0.0000446196	0.0000200259
27	0.0000182206	0.0000242513	0.0000238044	0.0000106864
50	$6.26382 \cdot 10^{-12}$	$8.25672 \cdot 10^{-12}$	$8.16894 \cdot 10^{-12}$	$3.67888 \cdot 10^{-12}$

Πίνακας 5.4: Πίνακας τιμών της $\psi_2(u)$ και των φραγμάτων $U_2(u)$, $U_{R,2}(u)$, $L_2(u)$ για τη γάμμα κατανομή με σ.π.π. $f(x) = 9xe^{-3x}$.

Τα φράγματα $U_V(u)$ και $L_V(u)$ προκειμένου να είναι άμεσα συγκρίσιμα με τα $U_1(u)$ και $L_1(u)$ έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως αυτά περιγράφονται από τη σχέση (5.2.3), όπου οι σταθερές C_1 και C_2 έχουν υπολογιστεί στο Παράδειγμα 5.2.1. Στο Σχήμα 5.14 παρατηρούμε πως η συμπεριφορά των φραγμάτων $L_V(u)$ και $U_V(u)$ δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής ειδικά σε σχέση με τα φράγματα $L_1(u)$ και $U_1(u)$.



Σχήμα 5.14: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ και των φραγμάτων $U_1(u)$, $U_V(u)$, $L_1(u)$, $L_V(u)$ για τη μείξη δύο εκθετικών κατανομών με σ.π.π. $f(x) = \frac{7}{2}e^{-7x} + \frac{3}{2}e^{-3x}$.

РАНЕЕ НЕ ПЕРПА

Κεφάλαιο 6

Μελέτη της μονοτονίας των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.

6.1 Εισαγωγή

Όπως είναι γνωστό η πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται ένα από τα βασικά μέτρα φερεγγυότητας (solvency) ενός χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, όσο μεγάλο και αν είναι το αρχικό αποθεματικό σε ένα χαρτοφυλάκιο η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν μπορεί να μηδενιστεί, δηλαδή ο ασφαλιστής θα πρέπει πάντα να αντιμετωπίζει το ενδεχόμενο να χρεοκοπήσει το χαρτοφυλάκιο που αντιπροσωπεύει. Ένας επιπλέον τρόπος για τον έλεγχο της φερεγγυότητας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι η επιλογή των κατάλληλων παραμέτρων στο μοντέλο έτσι ώστε δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, ο αναμενόμενος χρόνος (proper) χρεοκοπίας να είναι αρκετά μεγάλος. Συνεπώς, αν για παράδειγμα η ασφαλιστική εταιρία αποφασίσει πως την χρονική στιγμή $t = 0$ ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χρεοκοπήσει το χαρτοφυλάκιο να είναι μεγαλύτερος από τα N έτη θα πρέπει να ισχύει ότι

$$N \leq E(T | T < \infty) = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$$

και επειδή η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u)$, στην πράξη δεν είναι γνωστή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $\psi(u) \leq \psi(0)$ (ή κάποιο από τα γνωστά φράγματα της $\psi(u)$)

και να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα u, θ έτσι ώστε

$$N \leq \frac{\psi_1(u)}{\psi(0)}$$

ή ισοδύναμα

$$\psi_1(u) \geq N\psi(0) = N \frac{1}{1+\theta}. \quad (6.1.1)$$

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές πως είναι απαραίτητη εκτός από την εύρεση φραγμάτων για τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας και η μελέτη της μονοτονίας της $\psi_1(u)$ μιας και αυτή θα μπορέσει να μας δώσει επιπλέον χαρακτηριστικά για την συμπεριφορά και τις ιδιότητες της. Η εύρεση των ακροτάτων και των διαστημάτων μονοτονίας της $\psi_1(u)$ θα μας βοηθήσουν να διερευνήσουμε τα αποθεματικά για τα οποία μπορεί να ισχύουν ανισότητες της μορφής (6.1.1). Εκτός από την $\psi_1(u)$ ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μονοτονία των ροπών μεγαλύτερης τάξης κυρίως γιατί μας δίνουν κάποια χαρακτηριστικά της κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας όπως για παράδειγμα της διασποράς, της λοξότητας (skewness) και της κύρτωσης (kurtosis).

Βασικός μας στόχος στο παρόν Κεφάλαιο είναι να μελετήσουμε την μονοτονία της $\psi_k(u)$ στη περίπτωση που η κατανομή που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων είναι η εκθετική και στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε σε κάποια αποτελέσματα για την μονοτονία της $\psi_k(u)$, $k \geq 1$. Υπενθυμίζουμε πως η k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας υπολογίζεται αναδρομικά από την σχέση (3.1.3). Με την βοήθεια της σχέσης (1.2.2) και της (3.1.3), η πρώτη παράγωγος της $\psi_k(u)$, $\forall k \geq 1$ ως προς u , είναι ίση με

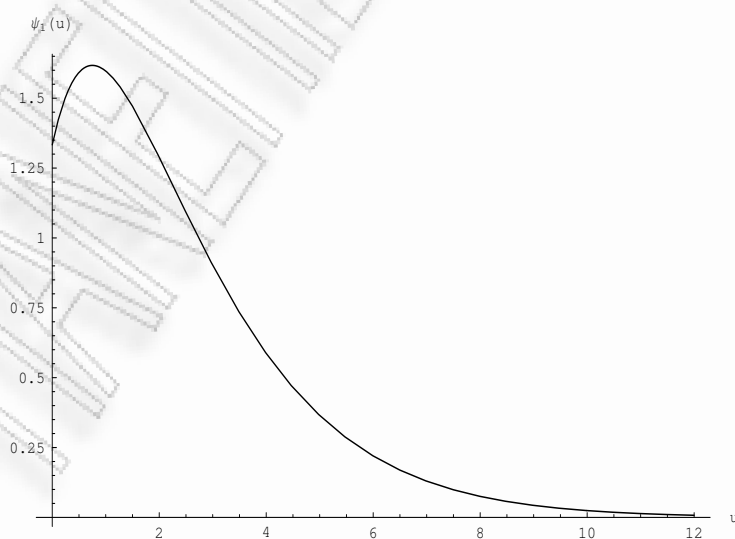
$$\begin{aligned} \psi'_k(u) &= \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi'(u-x)\psi_{k-1}(x)dx + \psi(0)\psi_{k-1}(u) - \psi_{k-1}(u) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right] \\ &= \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi(x)\psi'_{k-1}(u-x)dx + \psi_{k-1}(0)\psi(u) - \psi_{k-1}(u) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right] \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

και ομοίως η δεύτερη παράγωγος δίνεται από τον τύπο

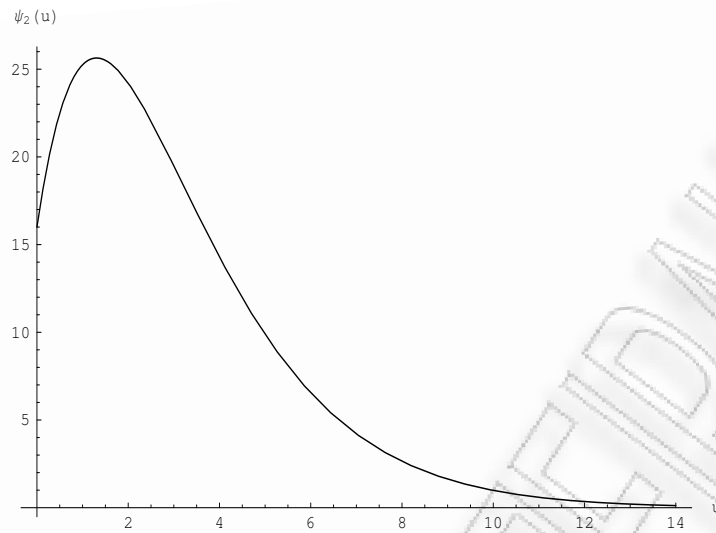
$$\begin{aligned}
 \psi_k''(u) &= \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi_{k-1}(u-x)\psi''(x)dx + \psi_{k-1}(u)\psi'(0) - \delta(0)\psi'_{k-1}(u) \right. \\
 &\quad \left. - \psi''(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right] \\
 &= \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left[\int_0^u \psi(x)\psi''_{k-1}(u-x)dx + \psi(u)\psi'_{k-1}(0) + \psi_{k-1}(0)\psi'(u) - \psi'_{k-1}(u) \right. \\
 &\quad \left. - \psi''(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right]. \tag{6.1.3}
 \end{aligned}$$

6.2 Μελέτη της μονοτονίας της $\psi_k(u)$ στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής

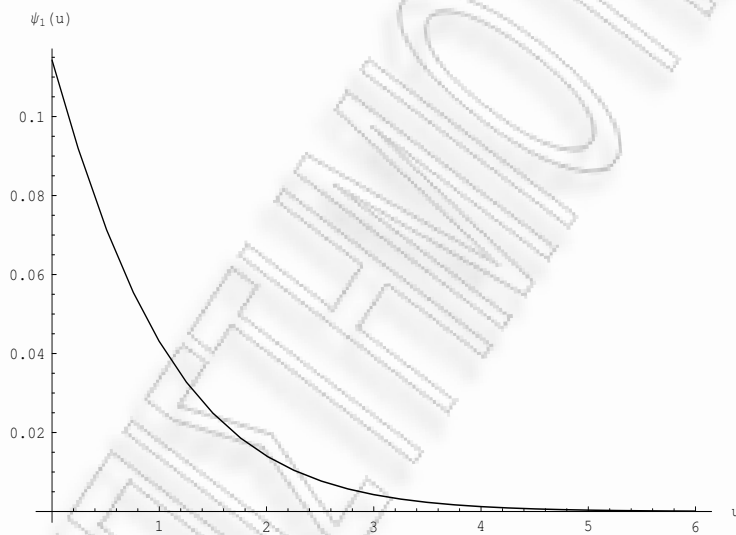
Στα Σχήματα 6.1, 6.2, 6.3 και 6.4 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου θ στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2. Παρατηρούμε πως η μέγιστη τιμή της $\psi_k(u)$ δεν επιτυγχάνεται πάντα στο σημείο $u = 0$ αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις που μεγιστοποιείται η τιμή της, σε σημείο $u > 0$. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε για ποιο αρχικό αποθεματικό u , παρουσιάζει μέγιστη τιμή η $\psi_k(u)$ και να διερευνήσουμε τις προϋποθέσεις που συντελούν ώστε το μέγιστο αυτό να εμφανίζεται για $u = 0$ ή αντίστοιχα για $u > 0$, στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή.



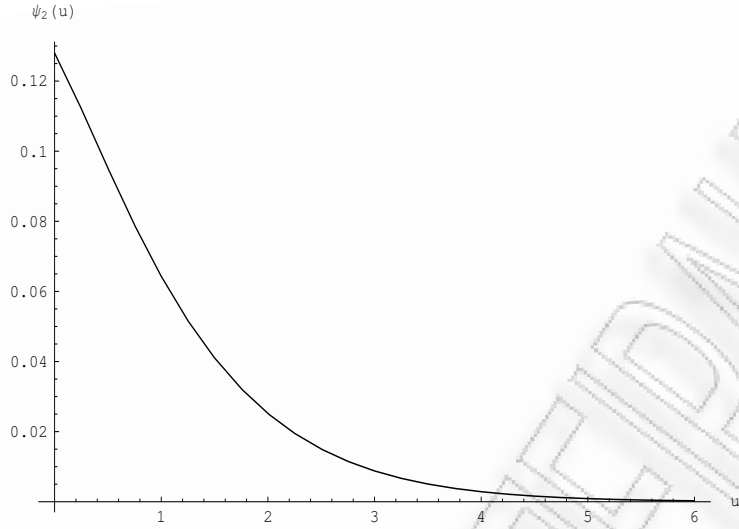
Σχήμα 6.1: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 0.5$



Σχήμα 6.2: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 0.5$



Σχήμα 6.3: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 3$



Σχήμα 6.4: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή $1/2$ και $\theta = 3$

Στην Πρόταση που ακολουθεί περιγράφεται μια πολυωνυμική εξίσωση, η λύση της οποίας μας δίνει τα πιθανά σημεία τοπικών ακροτάτων της $\psi_k(u)$, $\forall k \geq 1$.

Πρόταση 6.2.1. Αν θεωρήσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου και υποθέσουμε ότι τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή, τότε τα πιθανά σημεία τοπικών ακροτάτων για την k τάξης ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δίνονται σαν λύση της παρακάτω εξίσωσης

$$\sum_{j=1}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{(j-1)!} R^j u^{j-1} = R \sum_{j=0}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{j!} R^j u^j \quad (6.2.1)$$

ως προς u , όπου R ο αντίστοιχος συντελεστής προσαρμογής και $\bar{C}_{j,k}$ σταθερές που υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις (6.49) και (6.50) των Lin και Willmot (2000).

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (6.48) των Lin και Willmot (2000)

$$\psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{j!} R^j u^j \quad (6.2.2)$$

όπου η παραγωγή της ως προς u μας δίνει

$$\psi'_k(u) = \frac{d\psi_k(u)}{du} = e^{-Ru} \sum_{j=1}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{j!} R^j j u^{j-1} - R e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{j!} R^j u^j. \quad (6.2.3)$$

Τα πιθανά σημεία τοπικών ακροτάτων, u , της $\psi_k(u)$ υπολογίζονται σαν λύσεις της εξίσωσης

$\psi'_k(u) = 0$ ή ισοδύναμα της

$$e^{-Ru} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{j!} R^j j u^{j-1} - R \sum_{j=0}^k \frac{\bar{C}_{j,k}}{j!} R^j u^j \right) = 0$$

και επειδή $e^{-Ru} > 0, \forall u \geq 0$, τα πιθανά σημεία τοπικών ακροτάτων υπολογίζονται από την εξίσωση (6.2.1). \square

Στη συνέχεια θα δώσουμε δυο πορίσματα που καθορίζουν τα σημεία ολικού μεγίστου για την πρώτη και την δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας αντίστοιχα.

Πόρισμα 6.2.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με Εκθετικά ύψη αποζημίωσης η μέγιστη τιμή της πρώτης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_1(u)$, παρουσιάζεται όταν το αρχικό αποθεματικό ισούται με

$$u_1 = \frac{1 - \theta}{R}, \quad (6.2.4)$$

όπου θ το περιθώριο ασφαλείας και R ο συντελεστής προσαρμογής.

Απόδειξη. Από τη σχέση (6.2.1) για $k = 1$ λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\bar{C}_{1,1}R = R\bar{C}_{0,1} + \bar{C}_{1,1}R^2u \quad (6.2.5)$$

και λύνοντας ως προς u έχουμε

$$u = \frac{\bar{C}_{1,1}R - R\bar{C}_{0,1}}{\bar{C}_{1,1}R^2} = \frac{\bar{C}_{1,1} - \bar{C}_{0,1}}{\bar{C}_{1,1}R},$$

όπου οι σταθερές $\bar{C}_{1,1}$ και $\bar{C}_{0,1}$ έχουν υπολογιστεί από τους Lin και Willmot (2000) και είναι ίσες με

$$\bar{C}_{0,1} = \frac{1}{c\mu\theta},$$

$$\bar{C}_{1,1} = \frac{1}{c\mu\theta^2}.$$

Επομένως το αρχικό αποθεματικό για το οποίο εμφανίζει ακρότατη τιμή, η $\psi_1(u)$ είναι ίσο με

$$u_1 = \frac{\frac{1}{c\mu\theta^2} - \frac{1}{c\mu\theta}}{\frac{1}{c\mu\theta^2}R} = \frac{1 - \theta}{R}. \quad (6.2.6)$$

$u_1 (> 0)$		
$0 < \theta < 1$	$-\infty$	$+\infty$
$\psi_1'(u)$	$+$	$-$

Πίνακας 6.1: Πίνακας προσήμων πρώτης παραγώγου της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική κατανομή όταν $0 < \theta < 1$

$u_1 (< 0)$		
$\theta > 1$	$-\infty$	$+\infty$
$\psi_1'(u)$	$+$	$-$

Πίνακας 6.2: Πίνακας προσήμων πρώτης παραγώγου της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική κατανομή όταν $\theta > 1$

Το ακρότατο αυτό είναι ολικό μέγιστο όπως εύκολα συνεπάγεται από την σχέση (6.2.3) και τους Πίνακες 6.1 και 6.2. Παρατηρούμε πως όταν το $\theta \in (0, 1)$ έχουμε $u_1 > 0$, ενώ αν $\theta = 1$, τότε $u_1 = 0$ και τέλος αν $\theta > 1$ συνεπάγεται ότι $u_1 < 0$. Στην τελευταία περίπτωση η $\psi_1(u)$ αποκτά τη μεγαλύτερη της τιμή για αρνητικό αρχικό αποθεματικό για το λόγο αυτό και επειδή εξετάζουμε την μονοτονία της $\psi_1(u)$ στο θετικό ημιάξονα, η μέγιστη τιμή της λαμβάνεται όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν (μιας και στο θετικό ημιάξονα είναι φθίνουσα).

□

Πόρισμα 6.2.2. Η μέγιστη τιμή της δεύτερης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_2(u)$, στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με Εκθετικά ύψη αποζημίωσης, επιτυγχάνεται όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με

$$u_2 = \frac{\sqrt{2\theta^2 + 2\theta + 2} - 2\theta}{R}, \quad (6.2.7)$$

όπου θ είναι το περιθώριο ασφαλείας και R ο συντελεστής προσαρμογής.

Απόδειξη. Η σχέση (6.2.1) για $k = 2$ μας δίνει την παρακάτω εξίσωση

$$R\bar{C}_{1,2} + R^2\bar{C}_{2,2}u = R \left[\bar{C}_{0,2} + R\bar{C}_{1,2}u + \bar{C}_{2,2}\frac{R^3}{2}u^2 \right] \quad (6.2.8)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{C}_{2,2}\frac{R^3}{2}u^2 + R^2(\bar{C}_{1,2} - \bar{C}_{2,2})u + R(\bar{C}_{0,2} - \bar{C}_{1,2}) = 0,$$

η οποία είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς u , με διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta &= R^4 (\bar{C}_{1,2} - \bar{C}_{2,2})^2 - 4 \frac{R^4}{2} \bar{C}_{2,2} (\bar{C}_{0,2} - \bar{C}_{1,2}) \\ &= R^4 \left((\bar{C}_{1,2} - \bar{C}_{2,2})^2 - 2 \bar{C}_{2,2} (\bar{C}_{0,2} - \bar{C}_{1,2}) \right).\end{aligned}\quad (6.2.9)$$

Υπενθυμίζουμε πως οι σταθερές $\bar{C}_{0,2}$, $\bar{C}_{1,2}$ και $\bar{C}_{2,2}$ υπολογίζονται από τις αναδρομικές σχέσεις των Lin και Willmot (2000) (σχέσεις (6.49) και (6.50)) και είναι ίσες με

$$\begin{aligned}\bar{C}_{0,2} &= \frac{2(1+\theta)^2}{c^2 \mu^2 \theta^2}, \\ \bar{C}_{1,2} &= \frac{2(1+\theta)(1+2\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2}\end{aligned}$$

και

$$\bar{C}_{2,2} = \frac{2(1+\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2}.$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών που προαναφέρθηκαν στην (6.2.9) η διακρίνουσα ισούται με

$$\begin{aligned}\Delta &= R^4 \left(\left(\frac{2(1+\theta)(1+2\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2} - \frac{2(1+\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2} \right)^2 - 2 \frac{2(1+\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2} \left(\frac{2(1+\theta)^2}{c^2 \mu^2 \theta^2} - \frac{2(1+\theta)(1+2\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2} \right) \right) \\ &= \frac{4R^4 (1+\theta)^2}{(c^2 \mu^2 \theta^2)^2} (4\theta^2 - 2((1+\theta)\theta) - (1+2\theta)) \\ &= \frac{4R^4 (1+\theta)^2}{(c^2 \mu^2 \theta^2)^2} (4\theta^2 - 2(\theta + \theta^2 - 1 - 2\theta)) \\ &= \frac{4R^4 (1+\theta)^2}{(c^2 \mu^2 \theta^2)^2} (2\theta^2 + 2\theta + 2).\end{aligned}\quad (6.2.10)$$

Είναι προφανές πως αφού έχουμε υποθέσει ότι $\theta > 0$ η διακρίνουσα είναι θετική και επομένως το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες. Οι ρίζες αυτές είναι

$$\begin{aligned}u_{2,1} &= \frac{-\frac{2R^2(1+\theta)2\theta}{(c^2 \mu^2 \theta^2)} - \sqrt{\frac{4R^4(1+\theta)^2}{(c^2 \mu^2 \theta^2)^2} (2\theta^2 + 2\theta + 2)}}{2 \frac{2(1+\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^2} \frac{R^3}{2}} \\ &= \frac{-2\theta - \sqrt{2\theta^2 + 2\theta + 2}}{R}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} u_{2,2} &= \frac{-\frac{2R^2(1+\theta)2\theta}{(c^2\mu^2\theta^2)} + \sqrt{\frac{4R^4(1+\theta)^2}{(c^2\mu^2\theta^2)^2} (2\theta^2 + 2\theta + 2)}}{2\frac{2(1+\theta)R^3}{c^2\mu^2\theta^2} \frac{1}{2}} \\ &= \frac{-2\theta + \sqrt{2\theta^2 + 2\theta + 2}}{R}. \end{aligned}$$

Αναμφίβολα η πρώτη ρίζα $u_{2,1}$ είναι πάντα αρνητική ενώ το πρόσημο της δεύτερης ρίζας $u_{2,2}$ εξαρτάται από το θ . Άρα για να είναι θετική η δεύτερη αρκεί

$$\sqrt{(2\theta^2 + 2\theta + 2)} > 2\theta.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, έχουμε

$$2\theta^2 + 2\theta + 2 > 4\theta^2,$$

από όπου προκύπτει η ανίσωση

$$2\theta^2 - 2\theta - 2 < 0.$$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\Delta^* = 4 - 4 \cdot 2(-2) = 20 > 0 \quad (6.2.11)$$

και βρίσκουμε τις εξής δύο ρίζες

- $\theta_1 = \frac{2-\sqrt{20}}{2 \cdot 2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1.236,$
- $\theta_2 = \frac{2+\sqrt{20}}{2 \cdot 2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618.$

Είναι σαφές πως όταν το $\theta < 1.618$ η ρίζα u_2 είναι θετική και επομένως η $\psi_2(u)$ εμφανίζει ακρότατη τιμή όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με

$$u_2 = \frac{\sqrt{2\theta^2 + 2\theta + 2} - 2\theta}{R}.$$

Το ακρότατο αυτό είναι προφανώς ολικό μέγιστο όπως συνεπάγεται από τη σχέση (6.2.3) και τον Πίνακα 6.3. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο θα εξετάζουμε για διάφορες τιμές της

	($0 >$) θ_1 θ_2 (> 0)		
$2\theta^2 - 2\theta - 2$	+	-	+
u_2	+	-	+

Πίνακας 6.3: Πίνακας προσήμων της διακρίνουσας (Δ) και της ρίζας u_2

παραμέτρου θ την μονοτονία της $\psi_1(u)$.

Παράδειγμα 6.2.1. Υποθέτουμε πως τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις με βάση τις τιμές των λ και c (όπου λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson και c το ασφάλιστρο που λαμβάνει η εταιρία στη μονάδα του χρόνου, αντίστοιχα) ή ισοδύναμα του θ και θα υπολογίσουμε σε κάθε μια από τις περιπτώσεις την πρώτη και την δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας.

1^η Περίπτωση

Υποθέτουμε ότι $\lambda = \frac{1}{3}$ και $c = 1$. Επομένως

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{1}{2} (< 1).$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$\psi(u) = \frac{2}{3}e^{-\frac{u}{6}}.$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.1.3) για $k = 1$ και $k = 2$ παίρνουμε αντίστοιχα

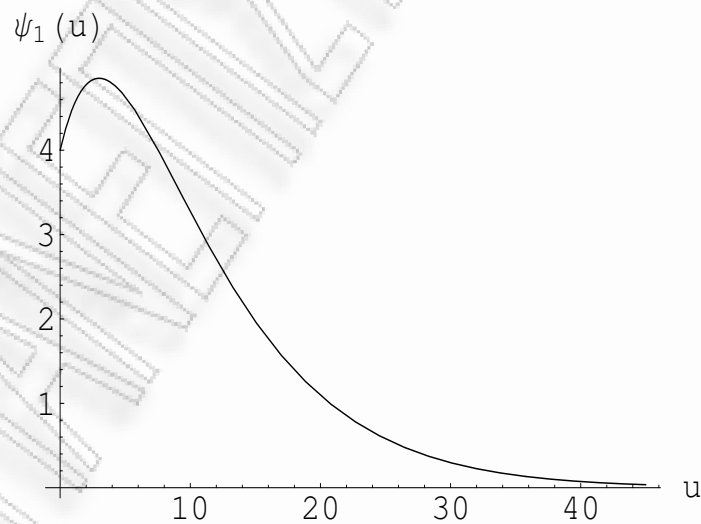
$$\psi_1(u) = \frac{4(3+u)}{3}e^{-\frac{u}{6}}$$

και

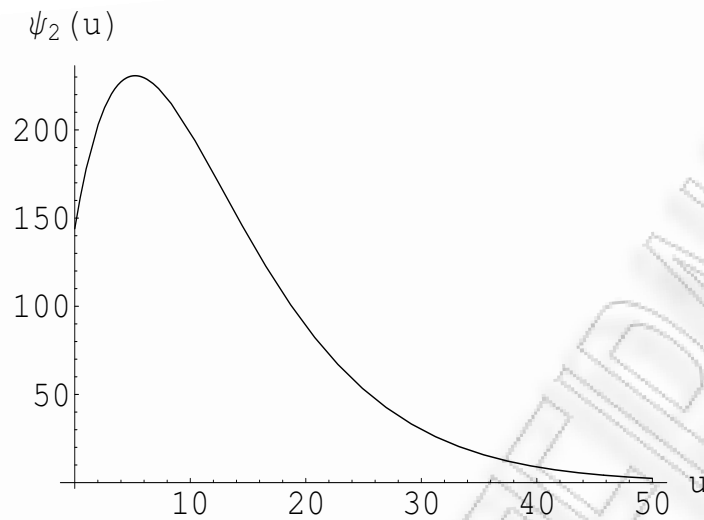
$$\psi_2(u) = \frac{8(54 + 24u + u^2)}{3}e^{-\frac{u}{6}}.$$

Αποθεματικό	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	4.	144.
1	4.51457	178.325
2	4.77688	202.54
3	4.85225	218.351
4	4.79189	227.273
5	4.63571	230.627
5.22497	4.59068	230.734
6	4.41455	229.557
7	4.15204	225.041
8	3.86609	217.907
9	3.57008	208.85
10	3.27384	198.445
11	2.98442	187.166
12	2.70671	175.395
13	2.44392	163.437
14	2.19803	151.535
15	1.97004	139.873

Πίνακας 6.4: Πίνακας τιμών της $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ για την Εκθετική με μέση τιμή 2 και $\theta = 0.5$



Σχήμα 6.5: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική (1/2) και για $\theta=0.5$



Σχήμα 6.6: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική (1/2) και $\theta=0.5$

2^η Περίπτωση

Έστω $\lambda = 0.4$ και $c = 3$. Τότε

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = 2.75 (> 1.618)$$

και

$$\psi(u) = \frac{4}{15} e^{-\frac{11u}{30}}.$$

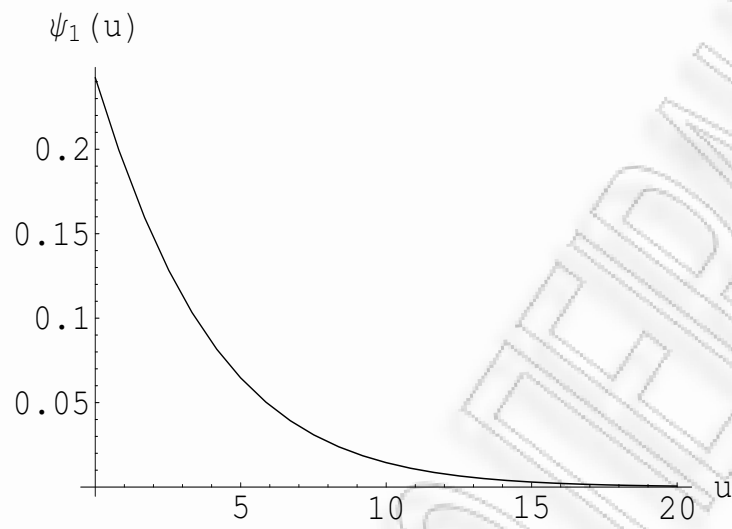
Η πρώτη και η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας υπολογίζονται με βάση την (3.1.3) για $k = 1$ και $k = 2$, αντίστοιχα και φαίνονται παρακάτω

$$\psi_1(u) = \frac{8(15 + 2u)}{495} e^{-\frac{11u}{30}}$$

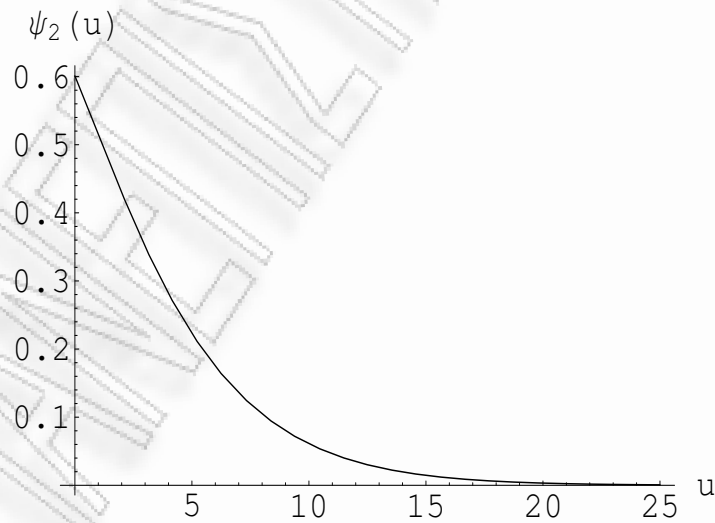
και

$$\psi_2(u) = \frac{32(3375 + 780u + 22u^2)}{179685} e^{-\frac{11u}{30}}$$

Από τα Σχήματα 6.5 και 6.6 και τον Πίνακα 6.4 παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή για τις $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ αποκτήσει όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μεγαλύτερο του μηδενός για θ είναι ίσο με 0.5, ενώ από τα Σχήματα 6.7, 6.8 και τον Πίνακα 6.5 το μέγιστο προκύπτει για αρχικό αποθεματικό ίσο με το μηδέν (όταν $\theta = 2,75$). Επίσης στους δύο προαναφερθέντες



Σχήμα 6.7: Γραφική παράσταση της $\psi_1(u)$ για την Εκθετική (1/2) και $\theta=2.75$



Σχήμα 6.8: Γραφική παράσταση της $\psi_2(u)$ για την Εκθετική (1/2) και $\theta=2.75$

Αποθεματικό	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	0.242424	0.601052
1	0.190411	0.515539
2	0.147488	0.429654
3	0.112974	0.350528
4	0.0857526	0.281302
5	0.0645979	0.2228
7	0.035991	0.135567
8	0.0266634	0.104474
9	0.019671	0.0799847
10	0.014459	0.0608862
11	0.0105933	0.046115
12	0.00773844	0.0347713
13	0.00563808	0.0261133
14	0.00409803	0.0195405
15	0.0029722	0.0145744

Πίνακας 6.5: Πίνακας τιμών της πρώτης και της δεύτερης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας για την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 και $\theta = 2.75$

πίνακες μπορούμε να παρατηρήσουμε και τα αρχικά αποθεματικά για τα οποία λαμβάνεται η μέγιστη τιμή. Στον Πίνακα 6.4 έχουμε ότι για $u = 3$ και $u = 5.22497$ έχουμε μέγιστο για $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ αντίστοιχα. Στον Πίνακα 6.5 όπως αναφέρθηκε προηγουμένως έχουμε μέγιστο των ροπών για $u = 0$. Από την σχέση (6.2.2) είναι σαφές πως ο υπολογισμός της k ροπής του χρόνου χρεοκοπίας απαιτεί τον υπολογισμό $k + 1$ σταθερών, $\bar{C}_{j,k}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Οι σταθερές αυτές υπολογίζονται συναρτήσει των σταθερών c, μ, θ και είναι θετικές. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε δυο Λήμματα και μια πρόταση που θα μας βοηθήσουν να αποδείξουμε πως η γραφική παράσταση της $\psi_k(u)$ είτε είναι φθίνουσα είτε έχει ένα μόνο ακρότατο (μέγιστο).

Λήμμα 6.2.1. Αν $0 < \theta \leq 1$ τότε

$$\bar{C}_{1,k} > \bar{C}_{0,k}, \quad \forall k \geq 0. \quad (6.2.12)$$

Απόδειξη. Θα υπολογίσουμε την διαφορά $\bar{C}_{1,k} - \bar{C}_{0,k}$, $\forall k \geq 0$.

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_{1,k} - \bar{C}_{0,k} \\
&= \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \left(\frac{1+\theta}{\theta} \frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{0,k-1} + \frac{1+\theta}{\theta} \sum_{i=1}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) - \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \\
&= \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \left(\frac{1}{\theta} \bar{C}_{0,k-1} + \frac{1+\theta}{\theta} \sum_{i=1}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) \\
&= \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \left(\left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \bar{C}_{0,k-1} + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) \\
&= \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \left(\left(\frac{1-\theta}{\theta} \right) \bar{C}_{0,k-1} + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right). \tag{6.2.13}
\end{aligned}$$

Επομένως από την σχέση (6.2.13) βλέπουμε πως αν το $\theta \leq 1$, τότε

$$\bar{C}_{1,k} > \bar{C}_{0,k}.$$

□

Λήμμα 6.2.2. Αν $j = 1, 2, \dots, k-1$ τότε ισχύει

$$\bar{C}_{j+1,k} < \bar{C}_{j,k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.2.14}$$

Απόδειξη. Θα υπολογίσουμε την διαφορά $\bar{C}_{j+1,k} - \bar{C}_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_{j+1,k} - \bar{C}_{j,k} \\
&= \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left(\frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{j,k-1} + \sum_{i=j+1}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) - \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left(\frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{j-1,k-1} + \sum_{i=j}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) \\
&= \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left(\frac{1}{1+\theta} (\bar{C}_{j,k-1} - \bar{C}_{j-1,k-1}) - \bar{C}_{j,k-1} \right) \\
&= \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left(\frac{\theta \bar{C}_{j,k-1} + \bar{C}_{j-1,k-1}}{1+\theta} \right) < 0. \tag{6.2.15}
\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια αναφέρουμε το γνωστό από την Άλγεβρα Θεώρημα του Descartes για το πλήθος των θετικών ριζών ενός πολυωνύμου.

Θεώρημα 6.2.1 (Descartes). Σε ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, ο αριθμός των θετικών ριζών του είναι είτε ίσος με το πλήθος των εναλλαγών στα πρόσημα των διαδοχικών συντελεστών είτε είναι ίσος με τον αριθμό αυτό αν αφαιρέσουμε ένα άρτιο ακέραιο.

Σαν πόρισμα παίρνουμε πως αν έχουμε μόνο μια εναλλαγή στο πρόσημο των συντελεστών του πολυώνυμου τότε το πολυώνυμο θα έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

Πόρισμα 6.2.3. Σε ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αν το πλήθος των εναλλαγών στα πρόσημα των διαδοχικών συντελεστών είναι ίσο με μονάδα τότε το πολυώνυμο έχει μια ακριβώς μια θετική ρίζα.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια πρόταση που θα αναφέρεται στη μονοτονία της, $\psi_k(u)$.

Πρόταση 6.2.2. Στο κλασικό μοντέλο αν $\theta < 1$ και τα ύψη των αποζημιώσεων έχουν την εκθετική κατανομή, τότε η $\psi_k(u)$, $\forall k \geq 1$ έχει ένα μόνο ακρότατο, στο οποίο αποκτάει μέγιστη τιμή.

Απόδειξη. Στη σχέση (6.2.3) δίνεται η πρώτη παράγωγος της $\psi_k(u)$ ως προς u . Άρα κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_k(u)}{du} &= e^{-Ru} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\bar{C}_{j,k} j R^j}{j!} u^{j-1} - R \sum_{j=0}^k \bar{C}_{j,k} \frac{(Ru)^j}{j!} \right) \\ &= e^{-Ru} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (\bar{C}_{j+1,k} - \bar{C}_{j,k}) \frac{R^{j+1} u^j}{j!} - \bar{C}_{k,k} \frac{R^{k+1} u^k}{k!} \right) \\ &= e^{-Ru} \left((\bar{C}_{1,k} - \bar{C}_{0,k}) R + \sum_{j=1}^{k-1} (\bar{C}_{j+1,k} - \bar{C}_{j,k}) \frac{R^{j+1} u^j}{j!} - \bar{C}_{k,k} \frac{R^{k+1} u^k}{k!} \right). \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Αν συνδυάσουμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 6.2.2, το Θεώρημα του Descartes και την υπόθεση που έχουμε κάνει για το θ (< 1), προκύπτει ότι το πολυώνυμο k βαθμού ως προς u που δίνεται μέσα στην παρένθεση της προηγούμενης σχέσης, έχει μια θετική ρίζα (επειδή παρουσιάζει μόνο μια διαδοχική εναλλαγή προσήμου). Επομένως αφού η παράγωγος

της συνεχούς $\psi_k(u)$ έχει μια μόνο θετική ρίζα συνεπάγεται ότι η $\psi_k(u)$ έχει ακριβώς ένα ακρότατο στο πεδίο ορισμού της. Το ακρότατο αυτό είναι μέγιστο μιας και γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_k(u) = 0,$$

από την Πρόταση 3.1.2. □

6.3 Μελέτη της παραγώγου της $\psi_k(u)$ όταν $u = 0$

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε κάποια λήμματα και προτάσεις που θα μας βοηθήσουν στη μελέτη της μονοτονίας του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας.

Λήμμα 6.3.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} \psi(x) dx = \frac{\mu_2}{2\mu\theta} \quad (6.3.1)$$

Απόδειξη. Προκύπτει από την ολοκλήρωση της ανανεωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, βλέπε σχέση (2.2.17) (βλέπε Asmussen (2000)). □

Στις επόμενες τρεις προτάσεις θα ασχοληθούμε με την παράγωγο της $\psi_k(u)$ στο μηδέν. Βασικός στόχος μας μέσα από αυτή την μελέτη είναι να ελέγξουμε, κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις, την μονοτονία της $\psi_k(u)$ όταν το αρχικό αποθεματικό κινείται σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν.

Πρόταση 6.3.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου για την πρώτη παράγωγο της πρώτης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας ισχύουν τα εξής

1. $\psi'_1(0) \leq 0$ αν και μόνο αν $\frac{\mu_2}{2\mu^2} \leq \theta$,
2. $\psi'_1(0) > 0$ αν και μόνο αν $\frac{\mu_2}{2\mu^2} > \theta$.

Απόδειξη. Από τη σχέση (6.1.2) γνωρίζουμε ότι

$$\psi'_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx - \delta(0)\psi(u) - \psi'(u) \int_0^{\infty} \psi(x)dx \right). \quad (6.3.2)$$

Επομένως για $u = 0$ έχουμε

$$\psi'_1(0) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(-\delta(0)\psi(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi(x)dx \right). \quad (6.3.3)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι (βλέπε Dickson (2005) σελίδα 137)

$$\psi'(0) = -\frac{\lambda}{c}\delta(0). \quad (6.3.4)$$

Συνεπώς

$$\psi'_1(0) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(-\frac{1}{(1+\theta)}\delta(0) + \frac{\lambda}{c}\delta(0)\frac{\mu_2}{2\mu\theta} \right).$$

Κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\psi'_1(0) = \frac{1}{\lambda\mu\theta}\delta(0) \left(-\frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu\theta} \right) = \frac{1}{\lambda\theta}\delta(0)\frac{\lambda}{c} \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2\theta} - 1 \right).$$

Άρα έχουμε

1. $\psi'_1(0) \leq 0$ αν και μόνο αν $\frac{\mu_2}{2\mu^2} \leq \theta$,
2. $\psi'_1(0) > 0$ αν και μόνο αν $\frac{\mu_2}{2\mu^2} > \theta$.

□

Έχοντας αποδείξει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε $\psi'_1(0) \leq (> 0)$ στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τα αποτελέσματα αυτά στην περίπτωση της $\psi'_k(0)$, $k \geq 1$.

Πρόταση 6.3.2. Για $k \geq 2$, έχουμε

$$\psi'_k(0) \leq 0 (> 0) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \leq (>) \frac{k-1}{\lambda} \int_0^\infty \psi_{k-2}(x)dx. \quad (6.3.5)$$

Απόδειξη. Από την σχέση (6.1.2) γνωρίζουμε ότι

$$\psi'_k(u) = \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'_{k-1}(u-x)\psi(x)dx - \psi_{k-1}(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right).$$

Άρα για $u = 0$ παίρνουμε

$$\psi'_k(0) = \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left(-\psi_{k-1}(0)\delta(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right)$$

και επομένως $\psi'_k(0) \leq (>)0$ αν και μόνο αν

$$-\psi'(0) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \leq (>)\psi_{k-1}(0)\delta(0)$$

ή ισοδύναμα από την σχέση (6.3.4) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι

$$\psi_{k-1}(0) = \frac{k-1}{\lambda\mu\theta}\delta(0) \int_0^\infty \psi_{k-2}(x)dx,$$

έχουμε ότι

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \leq (>)\frac{k-1}{\lambda\mu\theta}\delta(0) \int_0^\infty \psi_{k-2}(x)dx.$$

Πολλαπλασιάζοντας με την αναμενόμενη τιμή που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων, μ , το πρώτο και το δεύτερο μέλος της προηγούμενης σχέσης έχουμε ότι

$$\psi(0) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \leq (>)\frac{k-1}{\lambda\mu\theta}\delta(0)\mu \int_0^\infty \psi_{k-2}(x)dx$$

και επομένως

$$\int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \leq (>)\frac{k-1}{\lambda\mu\theta}\theta\mu \int_0^\infty \psi_{k-2}(x)dx = \frac{k-1}{\lambda} \int_0^\infty \psi_{k-2}(x)dx.$$

□

6.4 Μελέτη της μονοτονίας του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια την μονοτονία του αναμενόμενου χρόνου χρεοκοπίας στη γενική περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν οποιαδήποτε κατανομή. Αρχικά θα δώσουμε ένα Λήμμα από την Μαθηματική Ανάλυση και λόγω του γεγονότος ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_k(u) = 0$ (βλέπε Πρόταση 3.1.2) θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι η $\psi_k(u)$ είναι είτε φθίνουσα είτε έχει ένα μόνο μέγιστο.

Λήμμα 6.4.1. Έστω f πραγματική συνάρτηση που έχει τις εξής ιδιότητες

1. f είναι φθίνουσα (αύξουσα),
2. $f(0) > 0$ ($f(0) < 0$),

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Τότε $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$).

Το παρακάτω Λήμμα μας δίνει ένα γνωστό κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο.

Λήμμα 6.4.2. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ισχύει ότι

$$\psi(u) \geq \frac{\overline{F}_e(u)}{\theta + \overline{F}_e(u)}, \quad \forall u \geq 0. \quad (6.4.1)$$

Απόδειξη. Βλέπε De Vylder και Goovaerts (1984). □

Πόρισμα 6.4.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αν $F \in NWUE$ έχουμε ότι

$$\psi(u) \geq \frac{\overline{F}(u)}{\theta + 1} = \psi(0)\overline{F}(u), \quad \forall u \geq 0. \quad (6.4.2)$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Λήμματος 6.4.2 και της ιδιότητας που έχει η οικογένεια κατανομών $NWUE$ ($\overline{F}(u) \leq \overline{F}_e(u)$) (βλέπε Παράρτημα Β). □

Η Πρόταση που ακολουθεί μας δίνει την μονοτονία της $\psi_1(u)$ στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκουν στην οικογένεια $NWUE$.

Πρόταση 6.4.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου αν $F \in NWUE$ τότε

$$-\psi'(u) \leq -\frac{1}{\mu} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx + \delta(0)\psi(u) \right), \quad \forall u \geq 0. \quad (6.4.3)$$

Απόδειξη. Αν παραγωγίσουμε την σχέση (2.2.17) θα έχουμε

$$\psi'(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi'(u-x) \frac{\overline{F}(x)}{\mu} dx + \frac{\psi(0)\overline{F}(u)}{\mu(1+\theta)} - \frac{\overline{F}(u)}{\mu(1+\theta)}.$$

και πολλαπλασιάζοντας με -1 έχουμε

$$-\psi'(u) = -\frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi'(u-x) \frac{\overline{F}(x)}{\mu} dx + \frac{\theta\overline{F}(u)}{\mu(1+\theta)^2}. \quad (6.4.4)$$

Συνεπώς αφού έχουμε υποθέσει ότι $F \in NWUE$, η σχέση (6.4.4) με την βοήθεια της σχέσης (6.4.2) και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $-\psi'(u) > 0, \forall u \geq 0$ γίνεται

$$-\psi'(u) \leq \frac{1}{\mu} \left(- \int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx + \frac{\theta \bar{F}(u)}{(1+\theta)^2} \right),$$

η οποία με την βοήθεια της (6.4.2) μας δίνει τη ζητούμενη σχέση

$$-\psi'(u) \leq \frac{1}{\mu} \left(- \int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx + \delta(0)\psi(u) \right).$$

□

Πόρισμα 6.4.2. 1. Αν $F \in NWUE$ και $\psi'_1(0) \leq 0$. Τότε $\theta \geq 1$.

2. Αν $F \in NBUE$ και $\psi'_1(0) > 0$. Τότε $\theta < 1$.

Απόδειξη. 1. Από την Πρόταση 6.3.1 γνωρίζουμε ότι $\psi'_1(0) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\mu_2}{2\mu^2} \leq \theta$ και επειδή $F \in NWUE$ συνεπάγεται (βλέπε Παράρτημα Β)

$$1 \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2} \leq \theta.$$

2. Όμοια με το 1.

□

Πρόταση 6.4.2. Αν $F \in NWUE$ και $\psi'_1(0) < 0$ τότε

$$\psi'_1(u) \leq 0, \quad \forall u \geq 0. \quad (6.4.5)$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (6.1.2) για $k = 1$ θα έχουμε

$$\psi'_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x) - \psi(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \right). \quad (6.4.6)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 6.4.1 θα έχουμε

$$\begin{aligned} \psi'_1(u) &\leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx - \psi(u)\delta(0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu} \left(- \int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx + \psi(u)\delta(0) \right) \int_0^\infty \psi(x)dx \right) \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

ή ισοδύναμα

$$\psi'_1(u) \leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(1 - \frac{\int_0^\infty \psi(x)dx}{\mu} \right) \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x) - \psi(u)\delta(0) \right). \quad (6.4.8)$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\psi'_1(0) < 0$ από τις σχέσεις (6.3.2) και (6.4.2) προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty \psi(x)dx < \mu,$$

και από τη σχέση (6.4.8) συνεπάγεται ότι

$$\psi'_1(u) < 0, \quad \forall u \geq 0.$$

□

Λήμμα 6.4.3. Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνων ισχύουν τα εξής

1. $\int_0^u (\psi''(u-x)\psi(x)) dx + \psi'(0)\psi(u) = \int_0^u (\psi'(u-x)\psi'(x)) dx + \psi'(u)\psi(0),$
2. $\int_0^u (\psi''(u-x)\psi(x)) dx + \psi'(0)\psi(u) - \psi'(u)\psi(0) \geq 0.$

Απόδειξη. 1. Η παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $\psi'(u-x)\psi(x)$, $\forall x \in [0, u]$ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\left(\psi'(u-x)\psi(x) \right)' = - \left(\psi''(u-x)\psi(x) \right) + \psi'(u-x)\psi'(x)$$

και ολοκληρώνοντας από 0 έως u θα έχουμε

$$\int_0^u \left(\psi'(u-x)\psi(x) \right)' dx = - \int_0^u \psi''(u-x)\psi(x)dx + \int_0^u \psi'(u-x)\psi'(x)dx$$

κάνοντας πράξεις λαμβάνουμε το εξής

$$\psi'(0)\psi(u) - \psi'(u)\psi(0) = - \int_0^u \left(\psi''(u-x)\psi(x) \right) dx + \int_0^u \psi'(u-x)\psi'(x)dx$$

ή ισοδύναμα

$$\int_0^u \psi''(u-x)\psi(x)dx + \psi'(0)\psi(u) = \int_0^u \psi'(u-x)\psi'(x)dx + \psi'(u)\psi(0). \quad (6.4.9)$$

2. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\int_0^u (\psi''(u-x)\psi(x)) dx + \psi'(0)\psi(u) - \psi'(u)\psi(0) = \int_0^u (\psi'(u-x)\psi'(x)) dx \geq 0.$$

□

Πρόταση 6.4.3. Έστω η σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$G(x) = (1 - \phi) \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n B^{*n}(x), \quad (6.4.10)$$

με $\phi \in (0, 1)$ και $B(x)$ συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$. Αν $B \in DFR$ τότε $G''(x) > 0$.

Απόδειξη. Βλέπε Szekli (1986).

□

Πρόταση 6.4.4. Έστω το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου και $I = [0, a_0)$, $a_0 \in \mathbb{R}_+$ είναι ένα υποσύνολο του μη αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών αριθμών. Αν $\psi'_k(0) \leq 0$ και $\psi''(u) < 0$, $\forall u \in I$ τότε

$$\psi'_k(u) < 0, \quad \forall u \in I, \forall k \geq 1. \quad (6.4.11)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η σχέση (6.4.11) ισχύει για $k = 1$. Από την σχέση (6.1.2) για $k = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \psi'_1(u) &= \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx - \psi(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(-\psi(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \right). \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Η συνάρτηση

$$K_1(u) = -\psi(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi(x)dx$$

είναι αύξουσα. Επίσης ισχύουν και τα επόμενα

$$1. K_1(0) = -\psi(0)\delta(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi(x)dx = \lambda\mu\theta\psi'_1(0) \leq 0$$

2. $\lim_{u \rightarrow \infty} K_1(u) = 0$. Πράγματι από Gerber (1979) γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της πιθανότητας χρεοκοπίας ικανοποιεί την σχέση

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \bar{F}(u) \right). \quad (6.4.13)$$

Συνεπώς ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις που χρειάζεται το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης, επομένως έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi'(u) = 0.$$

Άρα βάσει του Λήμματος 6.4.1 θα έχουμε ότι

$$\psi'_1(u) \leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} K_1(u) \leq 0.$$

Έστω ότι η σχέση (6.4.11) ισχύει για $k = m$, δηλαδή

$$\psi'_m(u) \leq 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = m+1$. Από την σχέση (6.1.2) για $k = m+1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \psi'_{m+1}(u) &= \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'_m(u-x)\psi(x)dx - \psi_m(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_m(x)dx \right) \\ &\leq \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \left(-\psi_m(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_m(x)dx \right). \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

Όμοια με την απόδειξη για $k = 1$, θέτουμε

$$K_m(u) = -\psi_m(u)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_m(x)dx,$$

η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση. Επίσης ισχύουν και τα επόμενα

1. $K_m(0) \leq 0$,
2. $\lim_{u \rightarrow \infty} K_m(u) = 0$.

Επομένως βάση του Λήμματος 6.4.1 θα έχουμε ότι

$$\psi'_{m+1}(u) \leq \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} K_m(u) \leq 0.$$

□

Ο λόγος $\psi_1(u)/\psi(u)$ εκφράζει τον αναμενόμενο χρόνο χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δηλαδή την μέση τιμή για την τυχαία μεταβλητή T_c . Στην πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύουμε πως κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες δεν είναι πάντα αύξουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό u .

Πρόταση 6.4.5. Έστω ότι $F \in DFR$, $\psi'_1(0) < 0$ και $\mu_2/2\mu^2\theta < 1$. Τότε υπάρχει $u_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=u_0} \leq 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} \geq 0.$$

Η παράγωγος στο σημείο $u = 0$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} = \frac{\psi'_1(0)\psi(0) - \psi'(0)\psi_1(0)}{\psi^2(0)}. \quad (6.4.15)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (6.3.3) προκύπτει ότι

$$\psi'_1(0) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(-\psi(0)\delta(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi(x)dx \right).$$

Άρα η (6.4.15) γίνεται

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} = \frac{\frac{1}{\lambda\mu\theta} (-\delta(0)\psi(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi(t)dt) \psi(0) - \psi'(0)\psi_1(0)}{\psi^2(0)}.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.1.2) για $u = 0$

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} = \frac{\frac{1}{\lambda\mu\theta} (-\delta(0)\psi^2(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi(t)dt) \psi(0) - \psi'(0) \frac{1}{\lambda\mu\theta} \delta(0) \int_0^\infty \psi(t)dt}{\psi^2(0)}.$$

Μετά από πράξεις θα έχουμε

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{-\delta(0)\psi^2(0) - \psi'(0)\psi(0) \int_0^\infty \psi(t)dt - \psi'(0)(1 - \psi(0)) \int_0^\infty \psi(t)dt}{\psi^2(0)} \right)$$

ή ισοδύναμα

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{-\delta(0)\psi^2(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi(t)dt}{\psi^2(0)} \right).$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (6.3.4) και (6.3.1) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} &= \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{-\delta(0)\psi^2(0) + \frac{\lambda}{c}\delta(0)\frac{\mu_2}{2\mu\theta}}{\psi^2(u)} \right) \\ &= \frac{\delta(0)}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{-\psi^2(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\frac{\mu_2}{2\mu^2\theta}}{\psi^2(u)} \right) \\ &= \frac{\delta(0)}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{-\psi^2(0) + \psi(0)\psi(0)\frac{\theta\mu_2}{2\mu^2\theta}}{\psi^2(u)} \right). \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε ότι

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} = \frac{\delta(0)(\mu_2 - 2\mu^2)}{2\lambda\mu^3\theta}.$$

Είναι προφανές ότι αφού $F \in DFR$ (συνεπώς $F \in NWUE$, βλέπε Παράρτημα Β) θα ισχύει ότι $\mu_2 - 2\mu^2 \geq 0$ και συνεπώς θα έχουμε ότι

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=0} \geq 0.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει αποθεματικό $u_0 \geq 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\left. \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} \right|_{u=u_0} \leq 0.$$

Από την σχέση (6.3.2), αφού η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση, προκύπτει ότι

$$\psi_1'(u) \leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(-\delta(0)\psi(u) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi(x) \right), \quad \forall u \geq 0,$$

άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} &= \frac{\psi'_1(u)\psi(u) - \psi'(u)\psi_1(u)}{\psi^2(u)} \\ &\leq \frac{\frac{1}{\lambda\mu\theta}(-\delta(0)\psi(u) - \psi'(u)\int_0^\infty \psi(t)dt)\psi(u) - \psi'(u)\psi_1(u)}{\psi^2(u)}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.4.3 και αφού έχουμε υποθέσει ότι $F \in DFR$ ισχύει ότι η $\psi(u)$ έχει αύξουσα παράγωγο. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u . Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} &\leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \frac{(-\delta(0)\psi^2(u) - \psi'(0)\psi(0)\int_0^\infty \psi(t)dt - \psi'(0)\delta(0)\int_0^\infty \psi(t)dt)}{\psi^2(u)} \\ &= \frac{1}{\lambda\mu\theta} \frac{(-\delta(0)\psi^2(u) - \psi'(0)\psi(0)\int_0^\infty \psi(t)dt - \psi'(0)(1-\psi(0))\int_0^\infty \psi(t)dt)}{\psi^2(u)} \\ &= \frac{1}{\lambda\mu\theta} \frac{(-\delta(0)\psi^2(u) - \psi'(0)\int_0^\infty \psi(t)dt)}{\psi^2(u)}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (6.3.4) και (6.3.1).

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)}{du} &\leq \frac{\delta(0)\left(\frac{\lambda\mu}{c} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta} - \psi^2(u)\right)}{\lambda\mu\theta \psi^2(u)} \\ &= \frac{\delta(0)\left(\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta} - \psi^2(u)\right)}{\lambda\mu\theta \psi^2(u)}. \end{aligned}$$

Παραπάνω πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε την ποσότητα $(\lambda/c) \cdot (\mu_2/2\mu\theta)$ με μ . Λαμβάνοντας υπόψιν μας πως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση με τιμές μεταξύ 0 και 1, από την τελευταία σχέση είναι φανερό πως υπάρχει $u_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta} - \psi^2(u_0) = 0,$$

δηλαδή

$$\psi(u_0) = \sqrt{\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta}}.$$

Όμως

$$\sqrt{\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta}} < \frac{1}{1+\theta} = \psi(0).$$

Πράγματι

$$\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta} < \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\mu_2}{2\mu^2} < \frac{\theta}{1+\theta}.$$

το οποίο ισχύει από την υπόθεση. \square

Στις επόμενες δυο προτάσεις θα ασχοληθούμε με την μονοτονία της $\psi_k(u)$ για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού. Θα αποδείξουμε ότι η $\psi_k(u)$ είναι τελικώς φθίνουσα συνάρτηση, δηλαδή για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού είναι φθίνουσα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αν λάβουμε υπόψιν μας πως η $\psi_k(u)$ είναι μια θετική, συνεχής συνάρτηση που επιπλέον τείνει στο μηδέν καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο.

Πρόταση 6.4.6. Αν $F_e \in S$ τότε η $\psi_1(u)$ είναι τελικώς φθίνουσα συνάρτηση ως προς u .

Απόδειξη. Αν $F \in S$ τότε από την Λήμμα 7.1.2 του Κεφαλαίου 7 θα ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = 0.$$

Επομένως από τον ορισμό του ορίου έχουμε $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0$ τέτοιο ώστε

$$-\epsilon\psi(u) \leq \psi'(u) \leq \epsilon\psi(u), \quad \forall u > M.$$

και συνεπώς

$$-\psi'(u) \leq \epsilon\psi(u), \quad \forall u > M.$$

Άρα $\forall u > M$ έχουμε

$$\psi'_1(u) \leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x) dx + \psi(0)\psi(u) - \psi(u) + \epsilon\psi(u) \int_0^\infty \psi(x) dx \right).$$

Έστω $\epsilon \leq \frac{\delta(0)}{\int_0^\infty \psi(x) dx}$ τότε θα υπάρχει M_1 έτσι ώστε $\forall u > M_1$ να ισχύει

$$\psi'_1(u) \leq \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi'(u-x)\psi(x) dx + \psi(u) \left(\frac{\delta(0)}{\int_0^\infty \psi(x) dx} \int_0^\infty \psi(x) dx + \psi(0) - 1 \right) \right).$$

Επομένως

$$\psi'_1(u) \leq 0, \quad \forall u > M_1.$$

Συνεπώς αποδειξάμε πως για μεγάλες τιμές η $\psi_1(u)$ είναι φθίνουσα. \square

Πρόταση 6.4.7. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, αν $F_e \in S^*$ τότε η $\psi_k(u)$ είναι τελικώς φθίνουσα συνάρτηση ως προς u .

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγικό τρόπο. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $k \geq 1$ υπάρχει $M_k > 0$ έτσι ώστε

$$\psi'_k(u) \leq 0, \quad \forall u \geq M_k.$$

Για $k = 1$ από την Πρόταση 6.4.6 ($F_e \in S^* \Rightarrow F_e \in S$) υπάρχει $M_1 > 0$ έτσι ώστε

$$\psi'_1(u) \leq 0, \quad \forall u \geq M_1.$$

Έστω ότι υπάρχει $M_k > 0$ έτσι ώστε

$$\psi'_k(u) \leq 0, \quad \forall u \geq M_k.$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $M_{k+1} > 0$ έτσι ώστε

$$\psi'_{k+1}(u) \leq 0, \quad \forall u \geq M_{k+1}.$$

Από το Πρόγραμμα 7.1.1 γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_k(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(x) dx} \frac{\int_u^\infty \psi(x) dx}{\int_u^\infty \psi_k(x) dx} = 0$$

Συνεπώς με τη βοήθεια του κανόνα l'Hospital έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi'(u)}{\psi_k(u)} = 0.$$

Επομένως από τον ορισμό του ορίου έχουμε $\forall \epsilon > 0 \exists L_* > 0$ τέτοιο ώστε

$$-\epsilon \psi_k(u) \leq \psi'(u) \leq \epsilon \psi_k(u), \quad \forall u > L_*,$$

και συνεπώς

$$-\psi'(u) \leq \epsilon \psi_k(u), \quad \forall u > L_*.$$

Άρα παραγωγίζοντας την σχέση (3.1.3) (για $k + 1$) θα πάρουμε

$$\psi'_{k+1}(u) \leq \frac{k+1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_k(x)\psi'(u-x)dx + \psi(0)\psi_k(u) - \psi_k(u) + \epsilon\psi(u) \int_0^\infty \psi_k(x)dx \right).$$

Έστω $\epsilon \leq \frac{\delta(0)}{\int_0^\infty \psi_k(x)dx}$ τότε θα υπάρχει L έτσι ώστε $\forall u > L_*$ ισχύει

$$\psi'_{k+1}(u) \leq \frac{k+1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_k(x)\psi'(u-x)dx + \psi(u) \left(\frac{\delta(0)}{\int_0^\infty \psi_k(x)dx} \int_0^\infty \psi_k(x)dx + \psi(0) - 1 \right) \right).$$

Επομένως

$$\psi'_{k+1}(u) \leq 0, \quad \forall u > M_{k+1} = \max\{M_k, L_*\}.$$

Συνεπώς αποδειξαμε πως για μεγάλες τιμές η $\psi_k(u)$ είναι φθίνουσα, $\forall k \geq 1$. \square

Πρόταση 6.4.8. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αν $F \in NWUE$ έχουμε ότι

$$\psi_1(u) \geq \frac{\bar{F}(u)}{\theta+1} = \psi(0)\bar{F}(u). \quad (6.4.16)$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα (6.4.2) είναι σαφές ότι

$$\frac{\bar{F}(u)}{1+\theta} \leq \psi(u),$$

ολοκληρώνοντας από u έως ∞ θα έχουμε ότι

$$\int_u^\infty \frac{\bar{F}(x)}{1+\theta} dx \leq \int_u^\infty \psi(x) dx \leq c\psi_1(u). \quad (6.4.17)$$

Όμως

$$\mu\bar{F}_e(u) = \int_u^\infty \bar{F}(x) dx$$

και επειδή $F \in NWUE$, θα έχουμε ότι

$$\mu\bar{F}(u) \leq \int_u^\infty \bar{F}(x) dx.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα και την σχέση (6.4.17), έχουμε ότι

$$\frac{\bar{F}(u)}{1+\theta} \leq \frac{c\psi_1(u)}{\mu}.$$

\square

Πρόταση 6.4.9. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, αν $F \in NWUE$ τότε ισχύει

ότι

$$\frac{k! \mu^k \bar{F}(x)}{c^k (1 + \theta)} \leq \psi_k(u), \quad \forall u \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.4.18)$$

Απόδειξη. Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι από την εξίσωση (3.1.2) είναι προφανές ότι

$$\frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx \leq \psi_k(u), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.4.19)$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 1$ από την σχέση (6.4.18) πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{\mu \bar{F}(u)}{c(1 + \theta)} \leq \psi_1(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Έστω ότι η σχέση (6.4.18) ισχύει για $k = q$

$$\frac{q! \mu^q \bar{F}(x)}{c^q (1 + \theta)} \leq \psi_q(u), \quad \forall u \geq 0, \quad (6.4.20)$$

θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k = q + 1$. Από την σχέση (6.4.19) έχουμε ότι

$$\frac{q+1}{c} \int_u^\infty \psi_q(x) dx \leq \psi_{q+1}(u)$$

και λόγω της σχέσης (6.4.20) και της υπόθεσης $F \in NWUE$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{(q+1)! \mu^{q+1} \bar{F}(u)}{c^{q+1} (1 + \theta)} \leq \frac{q+1}{c} \int_u^\infty \frac{q! \mu^q \bar{F}(x)}{c^q (1 + \theta)} dx \leq \frac{q+1}{c} \int_u^\infty \psi_q(x) dx \leq \psi_{q+1}(u).$$

□

Πρόταση 6.4.10. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου αν $F \in NWUE$ τότε

$$-\psi'(u) \leq \frac{c^k}{(k+1)! \mu^{k+1}} \left(- \int_0^u \psi'(u-x) \psi_k(x) dx + \delta(0) \psi_k(u) \right), \quad \forall u \geq 0. \quad (6.4.21)$$

Απόδειξη. Από την σχέση (2.2.17) γνωρίζουμε ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(u-x) \frac{\bar{F}(x)}{\mu} dx + \frac{1}{1 + \theta} \bar{F}_e(u).$$

Άρα από την παραγωγή της προηγούμενης σχέσης παίρνουμε

$$\psi'(u) = \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi'(u-x) \frac{\bar{F}(x)}{\mu} dx + \frac{\psi(0) \bar{F}(u)}{\mu(1 + \theta)} - \frac{\bar{F}(u)}{\mu(1 + \theta)}$$

και πολλαπλασιάζοντας με -1 έχουμε

$$-\psi'(u) = -\frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi'(u-x) \frac{\bar{F}(x)}{\mu} dx + \frac{\theta \bar{F}(u)}{\mu(1+\theta)^2}. \quad (6.4.22)$$

Χρησιμοποιώντας την (6.4.18)

$$\frac{\bar{F}(u)}{(1+\theta)} \leq \frac{\psi_k(u)}{c^k k! \mu^k}$$

θα πάρουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα

$$-\psi'(u) \leq -\int_0^u \psi'(u-x) \frac{c^k \psi_k(u)}{k! \mu^{k+1}} dx + \frac{\theta}{(1+\theta)} \frac{\psi_k(u)}{c^k k! \mu^{k+1}}$$

ή ισοδύναμα

$$-\psi'(u) \leq \frac{c^k}{k! \mu^{k+1}} \left(-\int_0^u \psi'(u-x) \psi_k(u) dx + \delta(0) \psi_k(u) \right).$$

□

Πρόταση 6.4.11. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, αν $\psi'_i(0) \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ τότε ισχύει ότι

$$\frac{c^i}{i! \mu^{i+1}} \int_0^\infty \psi_i(x) dx \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2 \theta}, \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε πως από την σχέση (6.1.2) για $k = i + 1$ και $u = 0$, προκύπτει ότι $\psi'_{i+1}(0) \leq 0$ αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$-\psi_i(0)\delta(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi_i(x) dx \leq 0$$

ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας την σχέση (6.3.4)

$$\frac{\lambda}{c} \delta(0) \int_0^\infty \psi_i(x) dx \leq \frac{1}{\lambda \mu \theta} \delta(0) \delta(0) \int_0^\infty \psi_{i-1}(x) dx$$

και κάνοντας πράξεις θα έχουμε ότι

$$\int_0^\infty \psi_i(x) dx \leq \frac{i}{\lambda} \int_0^\infty \psi_{i-1}(x) dx, \quad i = 2, 3, 4, \dots, k.$$

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε

$$\int_0^{\infty} \psi_i(x) dx \leq \frac{i}{\lambda} \int_0^{\infty} \psi_{i-1}(x) dx \leq \dots \leq \frac{i!}{\lambda^i} \int_0^{\infty} \psi(x) dx = \frac{i!}{\lambda^i} \frac{\mu_2}{2\mu\theta}. \quad (6.4.23)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3.1 και επειδή $\theta = (c/\lambda\mu) - 1 > 0$ θα έχουμε ότι

$$\lambda^i \mu^i < c^i,$$

και συνεπώς η σχέση (6.4.23) θα μας δώσει την ανισότητα

$$\int_0^{\infty} \psi_i(x) dx \leq \frac{i! \mu^i \mu_2}{c^i 2\mu\theta} = \frac{i! \mu^{i+1} \mu_2}{c^i 2\mu^2\theta},$$

επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{c^i}{i! \mu^{i+1}} \int_0^{\infty} \psi_i(x) dx \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta}.$$

□

Θεώρημα 6.4.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου έστω ότι $F \in NWUE$, $\mu_2/(2\mu^2\theta) \leq 1$ και

$$\frac{c^k}{k! \mu^{k+1}} \int_0^{\infty} \psi_k(x) dx \leq 1.$$

Τότε $\psi'_k(u) \leq 0, \forall k \geq 1, \forall u \geq 0$.

Απόδειξη. Αν παραγωγίσουμε την σχέση (3.1.3) θα πάρουμε

$$\psi'_{k+1}(u) = \frac{k+1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_k(x) \psi'(u-x) dx - \psi_k(u) \delta(0) - \psi'(u) \int_0^{\infty} \psi_k(x) dx \right)$$

και από τις Προτάσεις 6.4.10 και 6.4.11 θα έχουμε

$$\begin{aligned} \psi'_{k+1}(u) &= \frac{k+1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_k(x) \psi'(u-x) dx - \psi_k(u) \delta(0) - \psi'(u) \int_0^{\infty} \psi_k(x) dx \right) \\ &= \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_k(x) \psi'(u-x) dx - \psi_k(u) \delta(0) \right) \\ &\quad - \left(\frac{c^k}{(k+1)! \mu^{k+1}} \left(- \int_0^u \psi'(u-x) \psi_k(x) dx + \delta(0) \psi_{k+1}(u) \right) \right) \int_0^{\infty} \psi_k(x) dx \\ &= \frac{k}{\lambda\mu\theta} \left(1 - \left(\frac{c^k}{(k+1)! \mu^{k+1}} \int_0^{\infty} \psi_k(x) dx \right) \left(- \int_0^u \psi'(u-x) \psi_k(x) dx + \delta(0) \psi_k(u) \right) \right). \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι

$$1 - \frac{c^k}{k! \mu^{k+1}} \int_0^\infty \psi_k(x) dx \geq 0$$

και ισχύει ότι

$$- \int_0^u \psi'(u-x) \psi_k(x) dx + \delta(0) \psi_k(u) \leq 0,$$

συνεπάγεται ότι

$$\psi'_k(u) \leq 0, \quad \forall u \geq 0.$$

□

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την μονοτονία της ποσότητας $\psi_k(u)e^{-Ru}$, $\forall k \geq 1$. Η περίπτωση για $k = 0$ έχει μελετηθεί από τους Psarrakos και Politis (2009).

Πρόταση 6.4.12. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

1. Αν $\psi_k(u) / \int_u^\infty \psi_k(x) dx \leq R$, $\forall k \geq 1$ και $f(u) / \bar{F}(u) \leq R$ τότε ισχύει ότι $\psi_k(u)e^{-Ru}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u .
2. Αν $\psi_k(u) / \int_u^\infty \psi_k(x) dx \geq R$, $\forall k \geq 1$ και $f(u) / \bar{F}(u) \geq R$ τότε ισχύει ότι $\psi_k(u)e^{-Ru}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u .

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε από την σχέση (7.1.9) που περιγράφει την μετασχηματισμένη ανανεωτική εξίσωση λύση της οποίας είναι η $\psi_k(u)e^{-Ru}$. Άρα θα έχουμε ότι

$$\psi_k^*(u) = f_k^*(u) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{k-1}^*(u) dG^*(x). \quad (6.4.24)$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$f_k^*(x) = \frac{k}{c} e^{Rx} \int_u^\infty \psi_{k-1},$$

$$\psi_k^*(x) = e^{Rx} \psi_k(x)$$

και

$$dG^*(x) = \frac{1}{1+\theta} e^{Rx} dG(x).$$

Είναι σαφές πως η ανανεωτική εξίσωση που περιγράφεται στη σχέση (6.4.24) είναι κανονική. Επομένως από την Πρόταση 4.1.1 θα έχουμε ότι η γνώση του προσήμου της ποσότητας

$$(f_k^*(u))' + \frac{1}{1+\theta} \psi_k^*(0) G^*(u)$$

ή ισοδύναμα της ποσότητας

$$e^{Ru} \left(\frac{k}{c} \left(R \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx - \psi_{k-1}(u) \right) + \frac{1}{1+\theta} \psi_{k-1}^*(0) (R\bar{F}(u) - f(u)) \right) \quad (6.4.25)$$

μας καθορίζει την μονοτονία της $\psi_k(u)e^{-Ru}$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τις αντίστοιχες υποθέσεις που έχουμε κάνει στην εκφώνηση της παρούσας Πρότασης και την σχέση (6.4.25). \square

6.5 Μελέτη της Κυρτότητας της $\psi_1(u)$

Υπενθυμίζουμε την παρακάτω σχέση μεταξύ των μη παραμετρικών οικογενειών DFR και $IMRL$. Αν $F \in DFR \Rightarrow F \in IMRL \Rightarrow F_e \in DFR$ (βλέπε Παράρτημα Β). Επομένως από την Πρόταση 6.4.3 ισχύει ότι

$$F \in DFR \Rightarrow \psi''(u) \geq 0, \quad \forall u \geq 0.$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι αν

$$F \in DFR \Rightarrow f'(u) \leq 0, \quad \forall u \geq 0.$$

Με βάση τους προηγούμενους συλλογισμούς θα δώσουμε στην επόμενη πρόταση τις επαρκείς συνθήκες ώστε να έχουμε $\psi_1''(u) > 0, \quad \forall u \geq 0$.

Πρόταση 6.5.1. Αν $F \in DFR$ και ισχύουν τα εξής

1.

$$\psi'(0) (\psi(0) - \delta(0)) - f(0)\psi(0) \geq 0,$$

2.

$$\psi_1'(u) < 0, \quad \forall u \geq 0.$$

Τότε

$$\psi_1''(u) > 0, \quad \forall u \geq 0.$$

Απόδειξη. Παραγωγίζουμε δυο φορές την σχέση (6.3.2) και έχουμε

$$\psi_1''(u) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi''(u-x)\psi(x)dx + \psi'(u)(\psi(0) - \delta(0)) - \psi''(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \right).$$

Για να δείξουμε ότι $\psi_1''(u) > 0$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^u \psi''(u-x)\psi(x)dx - \psi''(u) \int_0^\infty \psi(x)dx + \psi'(u)(\psi(0) - \delta(0)) > 0$$

ή ισοδύναμα από την Πρόταση (6.3.1)

$$\int_0^u \psi''(u-x)\psi(x)dx - \mu\psi''(u) + \psi'(u)(\psi(0) - \delta(0)) > 0.$$

Όμως από την Πρόταση 6.4.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\psi'(u)(\psi(0) - \delta(0)) - 2\psi'(u)\psi(0) - f(u)\psi(0) > 0.$$

Αφού $F \in DFR$ έχουμε ότι f είναι φθίνουσα και ότι η $\psi'(u)$ αύξουσα, συνεπώς η συνάρτηση $h(u) = \psi'(u)(\psi(0) - \delta(0)) - f(u)$ είναι αύξουσα. Άρα αρκεί να ισχύει ότι $h(0)$ είναι μη αρνητικό ή ισοδύναμα

$$\psi'(0)(\psi(0) - \delta(0)) - f(0)\psi(0) \geq 0.$$

□

6.5.1 Ο αναμενόμενος χρόνος χρεοκοπίας σαν διαφορά δυο κυρτών και φθίνουσών συναρτήσεων

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την μονοτονία της $\psi_1(u)$ στην περίπτωση που $\psi_1'(0) > 0$ και $F \in DFR$. Είναι απαραίτητο να παρατηρήσουμε ότι η $\psi_1(u)$, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες που θα αναφέρουμε στη συνέχεια, υπολογίζεται από την διαφορά δύο κυρτών συναρτήσεων που επιπλέον είναι και φθίνουσες. Συγκεκριμένα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\psi_1(u) = a(u) - b(u), \quad \forall u \geq 0,$$

όπου

$$a(u) = \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx \quad \forall u \geq 0$$

και

$$b(u) = \psi(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \quad \forall u \geq 0.$$

Οι συναρτήσεις $c = a - b$ που υπολογίζονται σαν διαφορά δύο συναρτήσεων, οι οποίες είναι φθίνουσες και κυρτές έχουν πολλές εφαρμογές στην επιχειρησιακή έρευνα και στο χώρο της βελτιστοποίησης. Η βιβλιογραφία που περιγράφει το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι αρκετά μεγάλη. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις δημοσιεύσεις των Hartman (1959), Horst και Thoai (1999) και τις αναφορές τους. Στη γενική περίπτωση ο υπολογισμός των ακροτάτων δεν είναι εύκολος και απαιτεί την χρήση της αριθμητικής ανάλυσης.

Πρόταση 6.5.2. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων η συνάρτηση

$$a(u) = \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του u .

Απόδειξη. Αν παραγωγίσουμε την a θα πάρουμε

$$a'(u) = \int_0^u \psi'(u-x)\psi(x)dx - \psi(u)(1 - \psi(0)) < 0.$$

□

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια Πρόταση που θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε την μονοτονία της $\psi_1(u)$ υπό την βασική προϋπόθεση ότι ισχύει $\psi'_1(0) > 0$.

Πόρισμα 6.5.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ισχύει

1. Αν $\theta < 1$ η

$$a(u) = \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx,$$

είναι κυρτή συνάρτηση.

2. Αν $F \in DFR$ η

$$b(u) = \psi'(u) \int_0^\infty \psi(x) dx,$$

είναι κυρτή συνάρτηση.

Απόδειξη. 1. Από την Πρόταση 6.4.3.

2. Από την υπόθεση $F \in DFR$ και την Πρόταση 6.4.3 έχουμε ότι $\psi''(u) > 0$.

□

6.6 Χρόνος Χρεοκοπίας και κλάσεις γήρανσης

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις ιδιότητες γήρανσης του χρόνου χρεοκοπίας, T , στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων. Κίνητρο μας για την μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας σε σχέση με τις κλάσεις γήρανσης αποτελεί η φράση των Drekić και Willmot (2003) 'We remark from the plots that the time of ruin time T_c does not exhibit consistent monotonic behaviour in terms of its reliability classification'. Στη δημοσίευση αυτή έδωσαν μια σειρά από παραδείγματα και διαγράμματα στα οποία παρουσίαζαν την επίδραση που είχαν οι τιμές των παραμέτρων λ, c, μ στην πυκνότητα T , για την περίπτωση που τα ύψη κάθε αποζημίωσης έχουν την εκθετική κατανομή. Μέσα από τα διαγράμματα αυτά κατέληξαν σε επιλογή κάποιων συγκεκριμένων παραμέτρων που οδηγούσαν σε συμπεράσματα για το πότε ο χρόνος T δεν ανήκει στις μη παραμετρικές οικογένειες κατανομών IFR και DFR , αντίστοιχα. Βασικός μας στόχος είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες γήρανσης του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο, αρχικά στην περίπτωση που η κατανομή που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων είναι η εκθετική κατανομή και στη συνέχεια για την γενική περίπτωση.

6.6.1 Χρόνος Χρεοκοπίας και κλάσεις γήρανσης στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας στην περίπτωση που τα ύψη αποζημίωσης προέρχονται από την εκθετική κατανομή και το αρχικό αποθεματικό είναι θετικό, δεν ανήκει γενικά ούτε στην κλάση $NBUE$ ούτε στην $NWUE$. Στην περίπτωση που έχουμε μηδενικό αρχικό αποθεματικό, θα δείξουμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας ανήκει στην κλάση $NWUE$. Όπως γνωρίζουμε για μια κατανομή F που ανήκει στην κλάση $NBUE$ (αντίστοιχα στην $NWUE$) ισχύει η εξής σχέση για τις ροπές της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής (βλέπε Παράρτημα Β)

$$\frac{E(X^2)}{(E(X))^2} \leq (\geq) 2. \quad (6.6.1)$$

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε τις παρακάτω συναρτήσεις που θα μας βοηθήσουν στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μας

$$\Sigma(u) = \frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} = \frac{\psi_2(u)\psi(u)}{2\psi_1(u)\psi_1(u)}$$

ή ισοδύναμα την συνάρτηση¹

$$\Lambda(u) = \psi_2(u)\psi(u) - 2\psi_1(u)\psi_1(u),$$

ως προς u . Στην περίπτωση του χρόνου χρεοκοπίας T_c θα δείξουμε πως δεν μπορεί να ισχύει μια σχέση της παρακάτω μορφής

$$\frac{E(T_c^2)}{(E(T_c))^2} \leq (\geq) 2,$$

για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού, ανεξάρτητα από τις τιμές των παραμέτρων θ, λ, μ . Για να υπολογίσουμε την $\Sigma(u)$ χρειάζεται να γνωρίζουμε τις εξής συναρτήσεις: $\psi(u), \psi_1(u), \psi_2(u)$. Αν υποθέσουμε πως η κατανομή που ακολουθούν τα ύψη των αποζημιώσεων είναι η εκθετική με παράμετρο β τότε όπως γνωρίζουμε η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}, \quad R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}.$$

¹Είναι προφανές ότι $\Sigma(u) \leq (\geq) 1$ αν και μόνο αν $\Lambda(u) \leq (\geq) 0$.

Από Lin και Willmot (2000) (Παράδειγμα 6.1) έχουμε ότι η πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\psi_1(u) = \frac{1 + \theta + \beta u}{\lambda \beta^2 \theta (1 + \theta)^2} e^{-Ru}$$

και η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας είναι ίση με

$$\psi_2(u) = \frac{2(1 + \theta)^3 + 2\beta(1 + \theta)(1 + 2\theta)u + \beta^2 \theta u^2}{\lambda^2 \beta^4 (\theta + \theta^2)^3} e^{-\frac{\beta \theta u}{1 + \theta}}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} = \frac{\psi_2(u)\psi(u)}{2\psi_1(u)\psi_1(u)} = \frac{2(1 + \theta)^3 + 2\beta(1 + \theta)(1 + 2\theta)u + \beta^2 \theta u^2}{2\theta(1 + \theta + \beta u)^2}$$

Το ζητούμενο είναι να διερευνήσουμε πότε ισχύουν ανισότητες της μορφής

$$\frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} = \frac{\psi_2(u)\psi(u)}{2\psi_1(u)\psi_1(u)} \leq (\geq) 1. \quad (6.6.2)$$

Συνεπώς θα πρέπει να μελετήσουμε για ποιες τιμές των παραμέτρων θ , β και u ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$\frac{2(1 + \theta)^3 + 2\beta(1 + \theta)(1 + 2\theta)u + \beta^2 \theta u^2}{2\theta(1 + \theta + \beta u)^2} \leq (\geq) 1. \quad (6.6.3)$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$2(1 + \theta)^3 + 2\beta(1 + \theta)(1 + 2\theta)u + \beta^2 \theta u^2 \leq (\geq) 2\theta(1 + \theta)^2 + 2\theta\beta^2 u^2 + 4\theta(1 + \theta)\beta u$$

Τελικά θα έχουμε ότι

$$\theta\beta^2 u^2 - 2(1 + \theta)\beta u - 2(1 + \theta)^2 > 0 (< 0).$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (2(1 + \theta)\beta)^2 + 4\theta\beta^2 2(1 + \theta)^2 = 4\beta^2 2(1 + \theta)^2 (1 + 2\theta) > 0$$

και επομένως προκύπτουν οι εξής ρίζες

	0	$u_2 (> 0)$
$E(T_c^2) - 2(E(T_c))^2$	-	+
F_{T_c}	$\notin NBUE$	$\notin NWUE$

Πίνακας 6.6: Πίνακας προσήμων της διακρίνουσας (Δ) και κλάσεων αξιοπιστίας του χρόνου χρεοκοπίας

$$u_1 = \frac{2(1+\theta)\beta - 2(1+\theta)\beta\sqrt{1+2\theta}}{2\theta\beta^2} = \frac{2(1+\theta)\beta(1-\sqrt{1+2\theta})}{2\theta\beta^2} = \frac{(1-\sqrt{1+2\theta})}{\delta(0)\beta} < 0$$

και

$$u_2 = \frac{2(1+\theta)\beta + 2(1+\theta)\beta\sqrt{1+2\theta}}{2\theta\beta^2} = \frac{2(1+\theta)\beta(1+\sqrt{1+2\theta})}{2\theta\beta^2} = \frac{(1+\sqrt{1+2\theta})}{\delta(0)\beta} > 0.$$

Αν παραγωγίσουμε την $\Sigma(u)$ προκειμένου να υπολογίσουμε την μονοτονία της θα έχουμε

$$\frac{d\left(\frac{E(T_c^2)}{(E(T_c))^2}\right)}{du} = -\left(\frac{\beta(1+\theta)^2(1+\beta u)}{\theta(1+\theta+\beta u)^3}\right) < 0.$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} \leq \frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2},$$

και επομένως θα ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \leq \frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} \leq 1 + \frac{1}{\theta}.$$

Τα όρια της συνάρτησης $\Sigma(u)$ καθώς $u \rightarrow \infty$ και $u \rightarrow 0$ προκύπτουν εύκολα από την σχέση (6.6.2). Η τελευταία σχέση μας δηλώνει πως ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου της εκθετικής κατανομής και την επιλογή της παραμέτρου θ η ποσότητα

$$\frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u και συνεπώς οι τιμές της θα κυμαίνονται μεταξύ $1/2$ και $1 + 1/\theta$. Επομένως με το παραπάνω σύνολο τιμών συμπεραίνουμε πως η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, T_c δεν ανήκει για κάθε τιμή του αρχικού αποθεματικού u ούτε στην

οικογένεια *NBUE* αλλά ούτε και στην οικογένεια *NWUE*. Όπως είναι προφανές από τον Πίνακα 6.6 για τιμές του u μεγαλύτερες από το u_2 ο χρόνος χρεοκοπίας δεν ανήκει στην *NWUE* οικογένεια κατανομών ενώ για τιμές μικρότερες του u_2 δεν ανήκει στην *NBUE*. Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν από τις σχέσεις (6.6.2) και (6.6.3) προκύπτει ότι

$$\frac{E(T_c^2)}{2(E(T_c))^2} = \frac{\psi_2(0)\psi(0)}{2\psi_1(0)\psi_1(0)} = \frac{2(1+\theta)^3}{2\theta(1+\theta)^2} = \frac{1+\theta}{\theta} > 1. \quad (6.6.4)$$

6.6.2 Χρόνος Χρεοκοπίας και κλάσεις γήρανσης στη γενική περίπτωση

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\Lambda(u)$ δεν μπορεί να διατηρεί σταθερό πρόσημο για όλες τις θετικές τιμές του αρχικού αποθεματικού, συνεπώς θα υπάρχουν διαδοχικά διαστήματα στα οποία ο χρόνος χρεοκοπίας δεν θα ανήκει διαδοχικά στις μη παραμετρικές οικογένειες κατανομών *NBUE* και *NWUE*. Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, γενικεύουμε το αποτέλεσμα που δείξαμε για την περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων προέρχονται από την εκθετική κατανομή, και συνεπώς ο χρόνος χρεοκοπίας δεν ανήκει στην κλάση *NBUE*. Άρα με βάση τη σχέση (6.6.1) βλέπουμε ότι η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας δεν μπορεί να είναι *NBUE* (ωστόσο αυτό δεν εξασφαλίζει ότι ανήκει στην οικογένεια *NWUE*). Οι τρεις επόμενες Προτάσεις μας δίνουν την συμπεριφορά της $\Sigma(u)$ στο μηδέν και στο άπειρο.

Πρόταση 6.6.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αν $\theta < 1$ τότε ισχύει ότι

$$\Sigma(0) = \frac{\psi_2(0)\psi(0)}{2\psi_1(0)\psi_1(0)} \geq 1.$$

Απόδειξη. Αν την αναδρομική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας (βλέπε σχέση (3.1.2)) θέσουμε $u = 0$ θα έχουμε ότι

$$\psi_k(0) = \frac{k}{c} \int_0^\infty \psi_{k-1}(x) dx.$$

Από την προηγούμενη σχέση η $\Sigma(0)$ λαμβάνει την εξής μορφή

$$\Sigma(0) = \frac{\left(\frac{2}{c} \int_0^\infty \psi_1(x) dx\right) \psi(u)}{2 \left(\frac{1}{c} \int_0^\infty \psi(x) dx\right) \left(\frac{1}{c} \int_0^\infty \psi(x) dx\right)}.$$

Όμως από Dickson και Waters (2002) (σχέσεις 2.1 και 2.2 αντίστοιχα) γνωρίζουμε ότι

$$E(L) = \int_0^\infty \psi(x) dx = \frac{\mu_2}{2\mu\theta}$$

και

$$\frac{1}{2\lambda\mu\theta} E(L^2) = \int_0^\infty \psi_1(x) dx = \frac{\mu_3}{3\mu\theta} + \frac{\mu_2^2}{2\theta^2\mu^2}.$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει να δείξουμε είναι ότι $\Sigma(0) \geq 1$ ή ισοδύναμα ότι

$$\psi_2(0)\psi(0) - 2\psi_1(0)\psi_1(0) \geq 0.$$

Συνεπώς αν χρησιμοποιήσουμε τις δυο προηγούμενες εκφράσεις των $\int_0^\infty \psi(x) dx$ και $\int_0^\infty \psi_1(x) dx$, θα έχουμε

$$\psi_2(0)\psi(0) - 2\psi_1(0)\psi_1(0) = \frac{2}{c} \left(\frac{E(L^2)}{2\lambda\mu\theta(1+\theta)} - \frac{(E(L))^2}{c} \right).$$

και επειδή $c = (1+\theta)\lambda\mu$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \psi_2(0)\psi(0) - 2\psi_1(0)\psi_1(0) &= \frac{2}{c\lambda\mu(1+\theta)} \left(\frac{E(L^2)}{2\theta} - (E(L))^2 \right) \\ &= \frac{2}{c\lambda\mu(1+\theta)} \left(\frac{\mu_3}{6\mu\theta^2} + \frac{\mu_2^2}{4\theta^3\mu^2} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu\theta} \right)^2 \right) \\ &= \frac{2}{c\lambda\mu(1+\theta)} \left(\frac{\mu_3}{6\mu\theta^2} + \frac{\mu_2^2}{4\theta^2\mu^2} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

και συνεπώς επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\theta < 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\psi_2(0)\psi(0) - 2\psi_1(0)\psi_1(0) \geq 1$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\Sigma(0) \geq 1.$$

□

Πρόταση 6.6.2. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αν για την κατανομή των

μεγεθών των αποζημιώσεων υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής, τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Sigma(u) = \frac{1}{2}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.1.1 του Κεφαλαίου 7 γνωρίζουμε ότι

$$\psi_k(u) \sim C_k u^k e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty.$$

όπου με C_k συμβολίζουμε τις σταθερές που δίνονται αναδρομικά από την σχέση (7.1.3). Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \Sigma(u) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(u)\psi(u)}{\psi_1(u)\psi_1(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{C_2 u^2 e^{-Ru} C_0 e^{-Ru}}{2C_1 u e^{-Ru} C_1 u e^{-Ru}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{C_2 C_0}{2C_1 C_1} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\tilde{\mu} R c)^{-2} C_0^2}{2(\tilde{\mu} R c)^{-1} C_0^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Στις Προτάσεις 6.6.1 και 6.6.2 μελετήσαμε την συμπεριφορά της συνάρτησης $\Sigma(u)$ για αρχικό αποθεματικό $u = 0$ και για $u \rightarrow \infty$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\psi_2(0)\psi(0)}{2\psi_1(0)\psi_1(0)} \geq 1$$

και ταυτόχρονα ότι ισχύει για μεγάλες τιμές του αποθεματικού ότι

$$\frac{\psi_2(u)\psi(u)}{2\psi_1(u)\psi_1(0)} \leq 1.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\Lambda(u)$ μπορεί να γραφτεί σαν διαφορά δύο

φθίνουσών συναρτήσεων που επιπλέον τείνουν στο μηδέν.

$$\begin{aligned}
 \Lambda(u) &= \psi_2(u)\psi(u) - 2\psi_1(u)\psi_1(u) \\
 &= \frac{2\psi(u)}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_1(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi_1(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_1(x)dx \right) \\
 &\quad - \frac{2}{(\lambda\mu\theta)^2} \left(\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \right)^2 \\
 &= \frac{2\psi(u)}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_1(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi_1(x)dx \right) \\
 &\quad + \frac{4}{(\lambda\mu\theta)^2} \left(\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx \right) \psi(u) \int_0^\infty \psi(x)dx \\
 &\quad - \frac{2\psi(u)}{\lambda\mu\theta} \psi(u) \int_0^\infty \psi_1(x)dx \\
 &\quad - \frac{2}{(\lambda\mu\theta)^2} \left(\left(\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx \right)^2 - \psi^2(u) \left(\int_0^\infty \psi(x)dx \right)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{6.6.5}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του u και πως η συνάρτηση $\int_0^u \psi_k(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi_k(x)dx$ είναι φθίνουσα για κάθε k και για κάθε u μιας και η παράγωγος της ισούται με

$$\int_0^u \psi_k(x)\psi'(u-x)dx - \psi_k(u)\delta(0) < 0,$$

συνεπάγεται άμεσα² ότι η συνάρτηση $\Lambda(u)$ γράφεται σαν διαφορά δυο φθίνουσών συναρτήσεων που επιπλέον τείνουν στο μηδέν ($\psi_k(u) \rightarrow 0, u \rightarrow \infty, \forall k \geq 0$). Επομένως, στην περίπτωση που $\theta < 1$ στηριζόμενοι στο γεγονός ότι $\Lambda(0) > 0, \Lambda(\infty) < 0$ και ότι η $\Lambda(u)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που δίνεται σαν διαφορά δύο συναρτήσεων που είναι φθίνουσες και τείνουν στο μηδέν συμπεραίνουμε ότι, δεν μπορεί η $\Lambda(u)$ να διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλο το φάσμα των θετικών τιμών που μπορεί να πάρει το αρχικό αποθεματικό. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή για το αρχικό αποθεματικό που χωρίζει το θετικό ημί-αξονα. Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο ένα σημείο, v^* , εναλλαγής του προσήμου της $\Lambda(u)$ και δεδομένου ότι $\Lambda(0) > 0$, τότε για την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας F_{T_c} θα ισχύει ότι, για $u \in (0, v^*), F_{T_c} \notin NBUE$ και για $u \in (v^*, \infty) F_{T_c} \notin NBUE$. Όμοια και στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία αρχικού αποθεματικού που αλλάζει

²Γινόμενο συναρτήσεων που είναι φθίνουσες είναι φθίνουσα συνάρτηση.

το πρόσημο της $\Lambda(u)$ συνεπάγεται ότι θα υπάρχουν και ισάριθμες διαδοχικές εναλλαγές της κλάσης κατανομών στις οποίες δεν ανήκει ο χρόνος χρεοκοπίας. Τέλος στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με το μηδέν, συνεπάγεται από Πρόταση 6.6.1 ότι $\Lambda(0) > 0$ και επομένως η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας δεν ανήκει στην κλάση *NBUE*.

Στην πρόταση που ακολουθεί περιγράφεται η συμπεριφορά της συνάρτησης $\Sigma(u)$ για $u = 0$.

Πρόταση 6.6.3. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ισχύει ότι $\psi'_2(0) \leq (\geq) 0$ αν και μόνο αν $\frac{\mu_2}{2\mu^2\theta} \geq (\leq) \Sigma(0)$.

Απόδειξη. Αρχικά υπολογίζουμε την $\Sigma(0)$

$$\Sigma(0) = \frac{\psi_2(0)\psi(0)}{2\psi_1(0)\psi_1(0)} = \frac{\frac{2}{\lambda\mu\theta}\delta(0)\psi(0) \int_0^\infty \psi_1(x)dx}{\frac{2}{(\lambda\mu\theta)^2}\delta(0)^2 \left(\int_0^\infty \psi(x)dx\right)^2} = \frac{\lambda\mu \int_0^\infty \psi_1(x)dx}{\left(\int_0^\infty \psi(x)dx\right)^2} \quad (6.6.6)$$

Από την σχέση (6.1.2) που μας δίνει την πρώτη παράγωγο του χρόνου χρεοκοπίας για $k = 2$ ισχύει ότι

$$\psi'_2(u) = \frac{2}{\lambda\mu\theta} \left(\int_0^u \psi_1(x)\psi'(u-x)dx - \psi_1(0)\delta(0) - \psi'(u) \int_0^\infty \psi_1(x)dx \right)$$

και θέτοντας $u = 0$

$$\psi'_2(0) = \frac{2}{\lambda\mu\theta} \left(-\psi_1(0)\delta(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi_1(x)dx \right).$$

Αν γνωρίζουμε ότι $\psi'_2(0) \leq (\geq) 0$ τότε από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε ότι

$$-\psi_1(0)\delta(0) - \psi'(0) \int_0^\infty \psi_1(x)dx \leq (\geq) 0.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (6.4.13) και (3.1.3). Συγκεκριμένα θα αντικαταστήσουμε $\psi'(0) = -\frac{\lambda}{c}\delta(0)$ και $\psi_1(0) = (1/\lambda\mu\theta)\delta(0) \int_0^\infty \psi(x)dx$, στην προηγούμενη σχέση επομένως θα έχουμε ότι

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \psi_1(x)dx \leq (\geq) \frac{1}{\lambda\mu\theta}\delta(0) \int_0^\infty \psi_1(x)dx$$

ή ισοδύναμα

$$\int_0^\infty \psi_1(x)dx \leq (\geq) \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \psi(x)dx. \quad (6.6.7)$$

Άρα από την σχέση (6.6.6) θα έχουμε ότι

$$\Sigma(0) = \frac{\lambda\mu \int_0^\infty \psi_1(x)dx}{\frac{\mu_2}{2\mu\theta} \int_0^\infty \psi(x)dx} \leq (\geq) \frac{2\mu^2\theta}{\mu_2}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Πόρισμα 6.6.1. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, αν $\psi'_j(0) \geq 0$, $j = 1, 2$ τότε $\Sigma(0) \geq 1$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.3.2 και την Πρόταση 6.6.3 θα έχουμε ότι

$$1 \leq \frac{\mu_2}{2\mu^2\theta} \leq \Sigma(0).$$

\square

РАНЕЕ НЕ ПЕРПА

Κεφάλαιο 7

Ασυμπτωτική μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, $\psi_k(u)$, για την ελλειμματική τυχαία μεταβλητή T . Το κεφάλαιο χωρίζεται σε δυο ενότητες, εκ των οποίων η μια αφορά το κλασικό μοντέλο (βλέπε Ενότητα 2.2) και η δεύτερη το γενικευμένο κλασικό μοντέλο που περιλαμβάνει και διάχυση (βλέπε Ενότητα 2.3). Φυσικά τα αποτελέσματα που θα δώσουμε μπορούν να γενικευτούν και για την περίπτωση της κανονικής (proper) τυχαίας μεταβλητής, T_c . Η μεθοδολογία σε αυτή την περίπτωση είναι όμοια με την περίπτωση των φραγμάτων και στηρίζεται στο γεγονός ότι η γνώση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας και της πιθανότητας χρεοκοπίας με μια απλή διαίρεση, μας δίνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ροπών για την T_c . Πρέπει να τονίσουμε ότι σε όλη την έκταση του κεφαλαίου θα θεωρούμε πως η k ροπή της κατανομής που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων είναι πεπερασμένη. Η υπόθεση αυτή σύμφωνα με το αποτέλεσμα των Delbaen (1990) (Θεώρημα 3.1.2), Pitts και Politis (2008) (Πρόταση 3.1.1) και την Πρόταση 3.1.5 για το γενικευμένο κλασικό μοντέλο με διάχυση, μας εξασφαλίζει σε κάθε περίπτωση ότι η $\psi_{k+1}(u)$ είναι πεπερασμένη καθώς επίσης και ότι η $\psi_{k-1}(u)$, $k \geq 1$ είναι ολοκληρώσιμη.

7.1 Ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνων

Η παρούσα ενότητα όπως δηλώνει και ο τίτλος της, είναι αφιερωμένη στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε το κλασικό μοντέλο. Τα αποτελέσματα που θα παραθέσουμε χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ στην περίπτωση που η λύση της εξίσωσης (2.2.26), R , είναι πεπερασμένη, δηλαδή τα αποτελέσματα θα αφορούν την περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκουν στις ελαφριές ουρές. Η δεύτερη κατηγορία αποτελεσμάτων προϋποθέτει τα ύψη των αποζημιώσεων να ανήκουν στις βαριές ουρές και επομένως δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής και τέλος στην τρίτη κατηγορία γίνεται μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της k ροπής στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκουν στις μεσαίες ουρές, δηλαδή στην κλάση $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$.

7.1.1 Ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής

Βασικός στόχος στην ενότητα αυτή είναι η παρουσίαση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, όταν το μοντέλο που χρησιμοποιούμε είναι το κλασικό και για τα ύψη των αποζημιώσεων μπορούμε να υπολογίσουμε πεπερασμένα το συντελεστή προσαρμογής, R (βλέπε ενότητα 2.2.7). Ο ασυμπτωτικός τύπος που θα αποδείξουμε στο Θεώρημα 7.1.1 γενικεύει τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramér και Lundberg (βλέπε (2.2.72)) που ισχύει για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Αρχικά θα διατυπώσουμε το Λήμμα 7.1.1 που είναι απαραίτητο για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1.

Λήμμα 7.1.1. *Αν θεωρήσουμε την κανονική ($\|F\| = 1$) ανανεωτική εξίσωση,*

$$Z(u) = z(u) + \int_{[0,u]} Z(u-x)dF(x) \quad (7.1.1)$$

και ισχύει ότι $z(u) \sim Cu^{a-1}$ για $u \rightarrow \infty$ και $a \geq 0$. Τότε η $Z(u)$ ικανοποιεί τον παρακάτω ασυμπτωτικό τύπο

$$Z(u) \sim C \frac{u^a}{a\mu}, \quad u \rightarrow \infty,$$

όπου $\mu = \int_0^\infty x dF(x)$ η μέση τιμή της F .

Απόδειξη. Βλέπε Feller (1971), Άσκηση 6, σελίδα 386. □

Θεώρημα 7.1.1. Για την k τάξης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας γύρω από το μηδέν, $\psi_k(u)$, υπάρχει σταθερά C_k τέτοια ώστε να ισχύει :

$$\psi_k(u) \sim C_k u^k e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.1.2)$$

όπου R ο συντελεστής προσαρμογής και C_k σταθερές που υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο

$$C_k = \frac{C_{k-1}}{Rc\hat{\mu}} = \frac{C_0}{(Rc\hat{\mu})^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1.3)$$

με $\hat{\mu} = \frac{\phi}{\mu} \int_0^\infty x e^{Rx} dF_e(x)$ και $C_0 = C$ είναι η σταθερά στον ασυμπτωτικό τύπο Cramér-Lundberg (βλέπε σχέση (2.2.74)).

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 0$, είναι γνωστό ότι υπάρχει σταθερά C_0 (βλέπε (2.2.74)) τέτοια ώστε να ισχύει

$$\psi_0(u) = \psi(u) \sim C_0 e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.1.4)$$

Η απόδειξη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_1(u)$ περιλαμβάνεται στη γενικότερη μεθοδολογία που ακολουθεί. Έστω ότι η σχέση (7.1.2) ισχύει για $k = \nu$, με $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\psi_\nu(u) \sim C_\nu u^\nu e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.1.5)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = \nu + 1$, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C_{\nu+1}$ τέτοια ώστε :

$$\psi_{\nu+1}(u) \sim C_{\nu+1} u^{\nu+1} e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.1.6)$$

Η $\psi_{\nu+1}(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.1.5). Επομένως για $k = \nu + 1$ θα έχουμε

$$\psi_{\nu+1}(u) = f_{\nu+1}(u) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{\nu+1}(u-x) dF_e(x), \quad (7.1.7)$$

όπου

$$f_{\nu+1}(u) = \frac{\nu+1}{c} \int_u^\infty \psi_\nu(x) dx. \quad (7.1.8)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (7.1.7) με e^{Ru} θα την μετατρέψουμε από ελλειμματική σε κανονική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε παράγραφο 2.2.6). Συγκεκριμένα η εξίσωση που προκύπτει είναι η εξής

$$\psi_{\nu+1}^*(u) = f_{\nu+1}^*(u) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{\nu+1}^*(u-x) dG^{*n}(x) \quad (7.1.9)$$

όπου

$$f_{\nu+1}^*(x) = e^{Rx} f_{\nu+1}(x),$$

$$\psi_{\nu+1}^*(x) = e^{Rx} \psi_{\nu+1}(x)$$

και

$$dG^*(x) = \frac{1}{1+\theta} e^{Rx} F_e(x).$$

Όμως από την (7.1.5) έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_\nu(u)}{C_\nu u^\nu e^{-Ru}} = 1,$$

και με τη βοήθεια του Λήμματος 1.4.1, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_\nu(t) dt}{\int_u^\infty C_\nu t^\nu e^{-Rt} dt} = 1.$$

Άρα,

$$f_{\nu+1}(u) \sim \frac{\nu+1}{c} \int_u^\infty C_\nu t^\nu e^{-Rt} dt, \quad u \rightarrow \infty$$

και κάνοντας χρήση του Λήμματος 5.2.1 προκύπτει ότι

$$f_{\nu+1}(u) \sim C_\nu \frac{(\nu+1)!}{cR^{\nu+1}} e^{-Ru} \left(\sum_{i=0}^{\nu} \frac{R^i u^i}{i!} \right).$$

Από τη στοιχειώδη Μαθηματική Ανάλυση γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\nu} \frac{R^i u^i}{i!}}{\frac{R^\nu u^\nu}{\nu!}} = 1,$$

επομένως

$$f_{\nu+1}(u) \sim C_\nu \frac{(\nu+1)!}{cR^{\nu+1}} e^{-Ru} \frac{R^\nu u^\nu}{\nu!} = C_\nu \frac{\nu+1}{c} \frac{e^{-Ru}}{R} u^\nu.$$

Άρα, από το Λήμμα 7.1.1 συνεπάγεται ότι

$$\psi_{\nu+1}(u) \sim C_\nu \frac{\nu+1}{c} \frac{e^{-Ru}}{R} \frac{u^{\nu+1}}{(\nu+1)\hat{\mu}},$$

ή ισοδύναμα

$$\psi_{\nu+1}(u) \sim C_\nu \frac{u^{\nu+1} e^{-Ru}}{cR\hat{\mu}}, \quad u \rightarrow \infty,$$

με $\hat{\mu} = \frac{\phi}{\mu} \int_0^\infty x e^{Rx} dF_e(x).$

Συνεπώς αποδειξάμε ότι

$$\psi_{\nu+1}(u) \sim C_{\nu+1} u^{\nu+1} e^{-Ru} \quad u \rightarrow \infty,$$

όπου

$$C_k = \frac{C_{k-1}}{Rc\hat{\mu}} = \frac{C_0}{(Rc\hat{\mu})^k}, \quad u \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

□

7.1.2 Μελέτη της Ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_k(u)$ στο κλασικό μοντέλο για περίπτωση των βαριών ουρών

Αρχικά θα αποδείξουμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις και λήμματα προκειμένου να καταλήξουμε με τη βοήθεια της επαγωγικής μεθόδου, στο Θεώρημα 7.1.2 που αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ για $k \geq 1$.

Λήμμα 7.1.2. Έστω F_e η κατανομή ισορροπίας των υψών αποζημίωσης στο κλασικό μοντέλο. Αν $F_e \in \mathcal{S}$ τότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = 0. \quad (7.1.10)$$

Απόδειξη. Αρχικά γράφουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u) (\int_u^\infty \bar{F}(t) dt / \int_u^\infty \bar{F}(t) dt)}{\int_u^\infty \psi(t) dt (\int_u^\infty \bar{F}_e(t) dt / \int_u^\infty \bar{F}_e(t) dt)}.$$

Επομένως

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)C(u)}{B(u)}, \quad (7.1.11)$$

όπου

$$A(u) = \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \overline{F}(t) dt},$$

$$B(u) = \frac{\int_u^\infty \psi(t) dt}{\int_u^\infty \overline{F}_e(t) dt}$$

και

$$C(u) = \frac{\int_u^\infty \overline{F}(t) dt}{\int_u^\infty \overline{F}_e(t) dt}.$$

Άρα από το Λήμμα 1.4.1 και το Θεώρημα 2.2.4 θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \overline{F}(t) dt} = \frac{\phi}{\mu(1-\phi)}, \quad (7.1.12)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} B(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi(t) dt}{\int_u^\infty \overline{F}_e(t) dt} = \frac{\phi}{1-\phi} \quad (7.1.13)$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} C(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \overline{F}(t) dt}{\int_u^\infty \overline{F}_e(t) dt} = 0. \quad (7.1.14)$$

Συνεπώς

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = 0.$$

□

Πρόταση 7.1.1. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_k(u)} = 0, \quad \forall k \geq 1. \quad (7.1.15)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 1$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_1(u)} = 0.$$

Η $\psi_1(u)$ δίνεται από τον τύπο (3.1.3) για $k = 1$

$$\psi_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left((\psi \otimes \psi)(u) + \int_u^\infty \psi(t) dt - \psi(u) \int_0^\infty \psi(t) dt \right).$$

Διαιρώντας με $\psi(u)$ έχουμε

$$\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{(\psi \otimes \psi)(u)}{\psi(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi(t)dt}{\psi(u)} - \int_0^\infty \psi(t)dt \right).$$

Αφού $F_e \in \mathcal{S}^*$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.3 προκύπτει ότι $F_e \in \mathcal{S}$. Άρα από την Πρόταση 2.2.2 ισχύει ότι $\psi(u) \in \mathcal{S}d$ και με τη βοήθεια του Λήμματος 7.1.2 θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{(\psi \otimes \psi)(u)}{\psi(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi(t)dt}{\psi(u)} - \int_0^\infty \psi(t)dt \right) \right) = \infty. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_1(u)} = 0.$$

Έστω ότι η (7.1.15) ισχύει για $k = m$, δηλαδή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_m(u)} = 0. \quad (7.1.16)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$, δηλαδή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_{m+1}(u)} = 0.$$

Αρχικά έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{m+1}(u)}{\psi(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\psi(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi(t)dt}{\psi(u)} - \frac{\psi(u)}{\psi(u)} \int_0^\infty \psi_m(t)dt \right)$$

και κάνοντας πράξεις θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{m+1}(u)}{\psi(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^u \psi_m(u-x)\psi(x)dx}{\psi(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_m(t)dt}{\psi(u)} - \int_0^\infty \psi_m(t)dt \right) \\ &\geq \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\psi(u) \frac{\int_0^u \psi_m(x)dx}{\psi(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_m(t)dt}{\psi(u)} - \int_0^\infty \psi_m(t)dt \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_u^\infty \psi_m(t)dt}{\psi(u)} \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_u^\infty \psi_m(t)dt}{\int_u^\infty \psi(t)dt} \frac{\int_u^\infty \psi(t)dt}{\psi(u)} \right) = \infty. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

Άρα συνεπάγεται το ζητούμενο

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\psi_{m+1}(u)} = 0.$$

□

Στο Πρόρισμα που ακολουθεί γενικεύουμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 7.1.2.

Πόρισμα 7.1.1. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_k(t) dt} = 0, \quad \forall k \geq 1. \quad (7.1.18)$$

Απόδειξη. Αναλύοντας το κλάσμα της σχέσης (7.1.18) σε δυο κλάσματα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_k(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \frac{\int_u^\infty \psi(t) dt}{\int_u^\infty \psi_k(t) dt}$$

και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.1.2, την Πρόταση 1.4.3 και την Πρόταση 7.1.1 συνεπάγεται ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_k(t) dt} = 0,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.1.2. Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε $\forall k \geq 1$ ισχύει ότι

$$\psi_k(u) \sim \frac{k}{\lambda \mu \theta} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx, \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.1.19)$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε και πάλι επαγωγή. Για $k = 1$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = \frac{1}{\lambda \mu \theta}.$$

Η $\psi_1(u)$ δίνεται από την εξίσωση (3.1.3) για $k = 1$,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \left((\psi \otimes \psi)(u) + \int_u^\infty \psi(t) dt - \psi(u) \int_0^\infty \psi(t) dt \right).$$

Διαιρώντας με $\int_u^\infty \psi(t) dt$ έχουμε

$$\frac{\psi_1(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \left(\frac{(\psi \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} + \frac{\int_u^\infty \psi(t) dt}{\int_u^\infty \psi(t) dt} - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \int_0^\infty \psi(t) dt \right).$$

Αν πάρουμε το όριο καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο έχουμε

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{(\psi \otimes \psi)(u)}{\psi(u)} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} + 1 - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \int_0^\infty \psi(t) dt \right) \right). \end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.3 και το Λήμμα 7.1.2, παίρνουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} = \frac{1}{\lambda\mu\theta}.$$

Εστω ότι η σχέση (7.1.19) ισχύει για $k = m$,

$$\psi_m(u) \sim \frac{m}{\lambda\mu\theta} \int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx. \quad (7.1.20)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$, δηλαδή

$$\psi_{m+1}(u) \sim \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \int_u^\infty \psi_m(x) dx.$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.1.3) για $k = m + 1$ και διαιρώντας με $\int_u^\infty \psi_m(x) dx$ έχουμε

$$\frac{\psi_{m+1}(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} = \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} + \frac{\int_u^\infty \psi_m(x) dx}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} \int_0^\infty \psi_m(x) dx \right).$$

Παίρνοντας τα όρια καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο στο πρώτο και στο δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{m+1}(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} = \frac{m+1}{\lambda\mu\theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} + 1 - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_m(x) dx} \int_0^\infty \psi_m(x) dx \right).$$

Αν πάρουμε τη συνέλιξη της $\psi_m(u)$ (σχέση (3.1.3) για $k = m$) με την $\psi(u)$ και τη διαιρέσουμε με $\int_u^\infty \psi_m(t) dt$ θα προκύψει η εξής παράσταση

$$\frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} = \frac{m}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{\psi_{m-1} \otimes \psi \otimes \psi(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} + \frac{(\Psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \int_0^\infty \psi_{m-1}(t) dt \right), \quad (7.1.21)$$

όπου

$$\Psi_m(u) = \int_u^\infty \psi_m(t) dt.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $u \rightarrow \infty$ και στα δύο μέλη της σχέσης (7.1.21) θα έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} = \frac{m}{\lambda \mu \theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} + \frac{(\Psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \int_0^\infty \psi_{m-1}(t) dt \right).$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση και το Λήμμα 1.4.2 θα έχουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά M τέτοια ώστε να ισχύει ότι $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \leq \frac{m}{\lambda \mu \theta} \left(M \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \int_0^\infty \psi_{m-1}(t) dt \right).$$

Άρα, εφόσον το τελευταίο όριο ισούται με μηδέν από το Πρόγραμμα 7.1.1 προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \leq \frac{m}{\lambda \mu \theta} \left(M_\epsilon \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \right). \quad (7.1.22)$$

Για τον υπολογισμό του ζητούμενου ορίου παρατηρούμε από την προηγούμενη σχέση ότι χρειάζεται να υπολογιστούν τα εξής

•

$$I = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt}$$

και

•

$$II = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt}.$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι ισχύει

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_m(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx} = \frac{m}{\lambda \mu \theta}.$$

Άρα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_m(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{m}{\lambda \mu \theta} \left(\frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx} + \frac{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx} - \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx} \int_0^\infty \psi_{m-1}(x) dx \right).$$

Επομένως άμεσα συνεπάγεται από το Πόρισμα 7.1.1 ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(x) dx} = 0.$$

Έχοντας αποδείξει την προηγούμενη σχέση και λαμβάνοντας υπόψιν μας το Λήμμα 7.1.2 μπορεί εύκολα να προκύψει το I . Πράγματι

$$\begin{aligned} I &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \frac{\int_u^\infty \psi(t) dt}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \frac{\psi(u)}{\psi_m(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \frac{m}{\lambda \mu \theta} \psi_{m-1}(t) dt} \\ &= \frac{\lambda \mu \theta}{m} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}(t) dt} \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(t) dt} \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

Για το II θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του l' Hospital

$$\begin{aligned} II &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\psi_m(u)} - \frac{\psi(u) \int_0^\infty \psi_m(t) dt}{\psi_m(u)} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\psi_m(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{m-1} \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_{m-1}} \frac{\int_u^\infty \psi_{m-1}}{\psi_m(u)} = 0 \cdot \frac{m}{\lambda \mu \theta} = 0. \end{aligned} \quad (7.1.24)$$

Άρα από τις σχέσεις (7.1.23) και (7.1.24) και με τη βοήθεια της σχέσης (7.1.22) προκύπτει το ζητούμενο,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_m \otimes \psi)(u)}{\int_u^\infty \psi_m(t) dt} = 0.$$

□

Στην πρόταση που ακολουθεί παρουσιάζεται η σύγκριση του ρυθμού με τον οποίο τείνουν στο μηδέν δύο διαδοχικές ροπές του χρόνου χρεοκοπίας καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο.

Πρόταση 7.1.2. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k-1}(u)}{\psi_k(u)} = 0. \quad (7.1.25)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.1.2 γνωρίζουμε ότι

$$\psi_k(u) \sim \frac{k}{\lambda\mu\theta} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx, \quad \forall k \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k-1}(u)}{\psi_k(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-1) \int_u^\infty \psi_{k-2}(u_1)du_1}{k \int_u^\infty \psi_{k-1}(u_1)du_1} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-1)(k-2) \int_u^\infty \int_{u_1}^\infty \psi_{k-3}(u_2)du_2du_1}{k(k-1) \int_u^\infty \int_{u_1}^\infty \psi_{k-2}(u_2)du_2du_1} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-1)(k-2)(k-3) \int_u^\infty \int_{u_1}^\infty \int_{u_2}^\infty \psi_{k-4}(u_3)du_3du_2du_1}{k(k-1)(k-2) \int_u^\infty \int_{u_1}^\infty \int_{u_2}^\infty \int_{u_3}^\infty \psi_{k-3}(u_3)du_3du_2du_1}. \end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή, διαδοχικά του προηγούμενου κλάσματος (από το Θεώρημα του l' Hospital) θα έχουμε

$$\begin{aligned} &\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k-1}(u)}{\psi_k(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-1)! \int_u^\infty \int_{u_1}^\infty \int_{u_2}^\infty \int_{u_3}^\infty \dots \int_{u_{k-2}}^\infty \psi(u_{k-1})du_{k-1}\dots du_2du_1du}{k! \int_u^\infty \int_{u_1}^\infty \int_{u_2}^\infty \int_{u_3}^\infty \dots \int_{u_{k-1}}^\infty \psi(u_k)du_k\dots du_2du_1du} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-1)!\psi(u)}{k! \int_u^\infty \psi(t)dt} = 0. \end{aligned}$$

□

7.1.3 Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_k(u)$ στο κλασικό μοντέλο με $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος 2.2.6 στην περίπτωση που $m \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma > 0$. Υπενθυμίζουμε ότι οι ορισμοί για τις κλάσεις $\mathcal{S}(\gamma)$ και $\mathcal{S}d(\gamma)$ δίνονται από τους Ορισμούς 1.4.4 και 1.4.3, αντίστοιχα.

Πρόταση 7.1.3. Έστω f, g συνεχείς και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[0, \infty)$ και $h \in \mathcal{S}d(\gamma)$, $\gamma > 0$ με $f(u) \sim a_1h(u)$ και $g(u) \sim a_2h(u)$ ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$), $u \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει θετική σταθερά K_* τέτοια ώστε

$$(f \otimes g)(u) \sim K_*h(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad (7.1.26)$$

όπου

$$K_* = a_1 \int_0^\infty e^{\gamma x} g(x) dx + a_2 \int_0^\infty e^{\gamma x} f(x) dx.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Θεωρήματος 2.1 του Omey (1988). Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(u) \sim a_1 h(u)$ και $g(u) \sim a_2 h(u)$, $u \rightarrow \infty$, άρα υπάρχει σταθερά $M > 0$ και $u_0 > 0$

$$f(u) < Mh(u) \quad (7.1.27)$$

και

$$g(u) < Mh(u), \quad (7.1.28)$$

$\forall u \geq u_0$. Για την \otimes -συνέλιξη δυο συναρτήσεων γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$(f \otimes g)(u) = \int_0^u f(x)g(u-x)dx = \int_0^u f(u-x)g(x)dx$$

και επομένως για $u \geq 2u_0$ έχουμε

$$(f \otimes g)(u) = \int_0^{u_0} f(u-x)g(x)dx + \int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx + \int_{u-u_0}^u f(u-x)g(x)dx$$

διαιρώντας με $h(u)$ και παίρνοντας τα όρια καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο έχουμε

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(f \otimes g)(u)}{h(u)} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^{u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} + \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} + \frac{\int_{u-u_0}^u f(u-x)g(x)du}{h(u)} \right). \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

Αφού $h \in \mathcal{Sd}(\gamma)$, $\gamma > 0$ από τον Ορισμό 1.4.3 έχουμε ότι

$$h(u-y) \sim e^{\gamma y} h(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της σχέσης (7.1.29) είναι ίσος με

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{u_0} f(u-x)g(x)du}{h(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{u_0} \frac{f(u-x)}{h(u-x)} \frac{h(u-x)}{h(u)} g(x)dx = a_1 \int_0^{u_0} e^{\gamma x} g(x)dx. \quad (7.1.30)$$

Όμοια και ο τρίτος όρος με μια αλλαγή μεταβλητής (θέτουμε $t = u - x$) τυγχάνει του ίδιου

χειρισμού με τον πρώτο όρο

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u-u_0}^u f(u-x)g(x)dx}{h(u)} = a_2 \int_0^{u_0} e^{\gamma x} f(x)dx. \quad (7.1.31)$$

Τέλος ο μεσαίος όρος της (7.1.29) υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψιν μας, από την υπόθεση, ότι $h \in Sd(\gamma)$ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{h(u-y)}{h(x)} = e^{\gamma y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Από τις σχέσεις (7.1.27) και (7.1.28) προκύπτει η επόμενη ανισότητα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} \leq M^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} h(u-x)h(x)dx}{h(u)}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} \leq M^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_{u_0}^0 h(u-x)h(x)dx}{h(u)} + \frac{\int_0^{u-u_0} h(u-x)h(x)dx}{h(u)} \right).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} \\ & \leq M^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_{u_0}^0 h(u-x)h(x)du}{h(u)} + \frac{\int_0^{u-u_0} h(u-x)h(x)du}{h(u)} \right) \\ & = M^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{-\int_0^{u_0} h(u-x)h(x)dx}{h(u)} + \frac{\int_0^u h(u-x)h(x)dx}{h(u)} - \frac{\int_{u-u_0}^u h(u-x)h(x)dx}{h(u)} \right) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $u-x=t$ στο τρίτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους και θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} \\ & \leq M^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{-\int_0^{u_0} h(u-x)h(x)dx}{h(u)} + \frac{\int_0^u h(u-x)h(x)dx}{h(u)} - \frac{\int_0^{u_0} h(t)h(u-t)dt}{h(u)} \right) \\ & \leq M^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(h \otimes h)(u)}{h(u)} - 2 \int_0^{u_0} \frac{h(u-x)h(x)}{h(u)} dx \right) \\ & = M^2 \left(2 \int_0^\infty e^{\gamma x} h(x)dx - 2 \int_0^{u_0} e^{\gamma x} h(x)dx \right) = 2M^2 \int_{u_0}^\infty h(x)dx. \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι το u_0 τείνει στο άπειρο τότε

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_0}^{u-u_0} f(u-x)g(x)dx}{h(u)} \leq 0. \quad (7.1.32)$$

Επομένως η σχέση (7.1.29) με τη βοήθεια των (7.1.30), (7.1.31), (7.1.32) λαμβάνει την εξής μορφή

$$\left(\frac{(f \otimes g)(u)}{h(u)} \right) \sim \left(a_1 \int_0^\infty e^{\gamma x} g(x) dx + a_2 \int_0^\infty e^{\gamma x} f(x) dx \right), \quad u \rightarrow \infty,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ στην περίπτωση που $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$ περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 7.1.3. Αν $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$ τότε για κάθε $k \geq 0$ υπάρχει σταθερά W_k τέτοια ώστε

$$\psi_k(u) \sim W_k \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad (7.1.33)$$

όπου για $k = 0, 1, 2, \dots$ οι W_k υπολογίζονται αναδρομικά από τον τύπο :

$$W_k = W_0 \left(\int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_k(t) dt - \int_0^\infty \psi_k(t) dt \right) + W_{k-1} \left(\int_0^\infty e^{\gamma t} \psi(t) dt + \frac{1}{\gamma \mu} \right)$$

και

$$W_0 = \frac{\phi(1-\phi)}{\mu \gamma (1 - \phi m_{F_e}^*(\gamma))^2},$$

$$m_{F_e}^*(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma y} dF_e(y) \text{ ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής ισορροπίας, } F_e.$$

Απόδειξη. Αν $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$ τότε από την Πρόταση 1.4.3 γνωρίζουμε ότι $\bar{F} \in \mathcal{S}d(\gamma)$.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγικό τρόπο. Για $k = 0$ υπάρχει σταθερά W_0 (βλέπε Θεώρημα 2.2.5) που είναι ίση με

$$W_0 = \frac{\phi(1-\phi)}{\mu \gamma (1 - \phi m_{F_e}^*(\gamma))^2}$$

ώστε

$$\psi_0(u) = \psi(u) \sim W_0 \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.1.34)$$

Έστω ότι η σχέση (7.1.33) ισχύει για $k = \nu$, δηλαδή υπάρχει σταθερά W_ν ώστε να ισχύει

ο επόμενος ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi_\nu(u) \sim W_\nu \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.1.35)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = \nu + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $W_{\nu+1}$ ώστε να ισχύει ο επόμενος ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi_{\nu+1}(u) \sim W_{\nu+1} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Αν στη σχέση (3.1.3) θέσουμε $k = \nu + 1$, διαιρέσουμε με $\bar{F}(u)$ και πάρουμε το όριο καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{\nu+1}(u)}{\bar{F}(u)} = \frac{\nu + 1}{\lambda \mu \theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_\nu \otimes \psi)(u)}{\bar{F}(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_\nu(t) dt}{\bar{F}(u)} - \frac{\psi(u) \int_0^\infty \psi_\nu(t) dt}{\bar{F}(u)} \right) \quad (7.1.36)$$

Όμως από την (7.1.34) έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u) \int_0^\infty \psi_\nu(t) dt}{\bar{F}(u)} = W_0 \int_0^\infty \psi_\nu(t) dt. \quad (7.1.37)$$

Από τη σχέση (7.1.35) έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_\nu(t) dt}{\bar{F}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_u^\infty \psi_\nu(t) dt}{\int_u^\infty \bar{F}(t) dt} \frac{\int_u^\infty \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(u)} \right) = \mu W_\nu \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_e(t)}{\bar{F}(t)}.$$

Επομένως από την Πρόταση 1.4.1 έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_\nu(t) dt}{\bar{F}(u)} = \mu \frac{W_\nu}{\gamma \mu} = \frac{W_\nu}{\gamma}. \quad (7.1.38)$$

Τέλος από τις σχέσεις (7.1.34) και (7.1.35) και την Πρόταση 7.1.3 έχουμε για $u \rightarrow \infty$,

$$(\psi_\nu \otimes \psi)(u) \sim \left(W_0 \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_\nu(t) dt + W_\nu \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi(t) dt \right) \bar{F}(u). \quad (7.1.39)$$

Συνεπώς με τη βοήθεια των σχέσεων (7.1.36), (7.1.37), (7.1.38) και (7.1.39) αποδείξαμε ότι υπάρχει σταθερά $W_{\nu+1}$ τέτοια ώστε γίνεται

$$\psi_{\nu+1}(u) \sim W_{\nu+1} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty,$$

όπου

$$W_{\nu+1} = W_0 \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_\nu(t) dt + W_\nu \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi(t) dt + \frac{W_\nu}{\gamma} - W_0 \int_0^\infty \psi_\nu(t) dt,$$

ή ισοδύναμα

$$W_{\nu+1} = W_0 \left(\int_0^\infty (e^{\gamma t} - 1) \psi_\nu(t) dt \right) + W_\nu \left(\int_0^\infty e^{\gamma t} \psi(t) dt + \frac{1}{\gamma} \right).$$

□

7.2 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ $k \geq 1$, όταν το μοντέλο που χρησιμοποιούμε προκειμένου να προσομοιώσουμε το χαρτοφυλάκιο μας είναι το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων με διάχυση (βλέπε Ενότητα 2.3). Όμοια με το κλασικό μοντέλο θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις που τα ύψη των αποζημιώσεων έχουν ελαφριά, βαριά και μεσαία ουρά.

7.2.1 Μελέτη της Ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_k(u)$ στο μοντέλο με διάχυση για περίπτωση των ελαφριών ουρών

Στο Θεώρημα που ακολουθεί παρουσιάζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στην περίπτωση που υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R_t .

Θεώρημα 7.2.1. Για την k τάξης ροπής του χρόνου χρεοκοπίας γύρω από το μηδέν, $\psi_{t;k}(u)$, υπάρχει σταθερά $C_{t;k}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\psi_{t;k}(u) \sim C_{t;k} u^k e^{-R_t u}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.2.1)$$

όπου R_t ο συντελεστής προσαρμογής (βλέπε σχέση (2.3.3)) και $C_{t;k}$ σταθερές που υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο

$$C_{t;k} = \frac{C_{t;k-1}}{R_t \widehat{\mu_{dif}}} = \frac{C_0}{(R_t \widehat{\mu_{dif}})^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$\mu \in \widehat{\mu_{dif}} = \frac{\phi}{\mu} \int_0^\infty x e^{Rx} d(F_e * H_2)(x)$ και $C_{t;0} = C_t$ (βλέπε σχέση (2.3.6)).

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 0$, είναι γνωστό ότι υπάρχει σταθερά $C_{t;0} = C_t$ τέτοια ώστε (βλέπε σχέση (2.3.6)),

$$\psi_{t;0}(u) = \psi_t(u) \sim C_{t;0}e^{Ru}. \quad (7.2.2)$$

Εστω ότι η σχέση (7.2.1) ισχύει για $k = \nu$,

$$\psi_{t;\nu}(u) \sim C_{t;\nu}u^\nu e^{-Ru}. \quad (7.2.3)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = \nu + 1$, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C_{t;\nu+1}$ τέτοια ώστε :

$$\psi_{t;\nu+1}(u) \sim C_{t;\nu+1}u^{\nu+1}e^{-Ru}. \quad (7.2.4)$$

Η $\psi_{t;\nu+1}(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.1.19) για $k = \nu + 1$

$$\psi_{t;\nu+1}(u) = f_{t;\nu+1}(u) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{t;\nu+1}(u-x) d(F_e * H_2)(x), \quad (7.2.5)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι

$$f_{t;\nu+1}(u) = \frac{\nu+1}{D} e^{-\frac{c}{D}u} \int_0^u e^{\frac{c}{D}x} \int_x^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy dx = \frac{\nu+1}{c} e^{-\frac{c}{D}u} \int_0^u (e^{\frac{c}{D}x})' \int_x^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy dx.$$

Κάνοντας χρήση της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f_{t;\nu+1}(u) &= \frac{\nu+1}{c} e^{-\frac{c}{D}u} e^{\frac{c}{D}u} \int_u^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy \\ &\quad - \frac{\nu+1}{c} e^{-\frac{c}{D}u} \int_0^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy + \frac{\nu+1}{c} e^{-\frac{c}{D}u} \int_0^u e^{\frac{c}{D}x} \psi_{t;\nu}(x) dx. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (7.2.5) με e^{Rtu} με σκοπό να τη μετατρέψουμε από ελλειμματική σε κανονική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Παράγραφο 2.2.6)

$$\psi_{t;\nu+1}^*(u) = f_{\nu+1}^*(x) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_{t;\nu+1}^*(u) dG_t^*(x), \quad (7.2.6)$$

όπου :

$$f_{\nu+1}^*(x) = e^{Rtx} f_{\nu+1}(x),$$

$$\psi_{\nu+1}^*(x) = e^{Rtx} \psi_{\nu+1}(x)$$

και

$$dG_t^*(x) = \frac{1}{1+\theta} e^{Rtx} d(F_e * H_2)(x).$$

Τότε θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_{t;\nu+1}^*(u)}{C_{t;\nu} u^{\nu+1}} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{\nu+1}{c} e^{R_t u} \int_u^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy - \frac{\nu+1}{c} e^{(R_t - \frac{c}{D})u} \int_0^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy + \frac{\nu+1}{c} e^{(R_t - \frac{c}{D})u} \int_0^u e^{\frac{c}{D}x} \psi_{t;\nu}(x) dx}{C_{t;\nu} u^{\nu+1}} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\nu+1}{c} e^{R_t u} \int_u^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy}{C_{t;\nu} u^{\nu+1}} - \frac{\frac{\nu+1}{c} e^{(R_t - \frac{c}{D})u} \int_0^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy - \frac{\nu+1}{c} e^{(R_t - \frac{c}{D})u} \int_0^u e^{\frac{c}{D}x} \psi_{t;\nu}(x) dx}{C_{t;\nu} u^{\nu+1}} \right). \tag{7.2.7}
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση (2.3.3) προκύπτει ότι

$$\lambda \int_0^\infty dF(x) + DR_t^2 \leq \lambda + cR_t$$

και επομένως επειδή η λύση R_t είναι θετική συνεπάγεται ότι

$$R_t \leq \frac{c}{D}.$$

Άρα η σχέση (7.2.7) απλοποιείται ως εξής

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_{t;\nu+1}^*(u)}{C_{t;\nu} u^\nu} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{\nu+1}{c} e^{R_t u} \int_u^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy}{C_{t;\nu} u^\nu}.$$

Λόγω της σχέσης (7.2.3) που έχουμε υποθέσει και των Λημμάτων 1.4.1 και 5.2.1 θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_{t;\nu+1}^*(u)}{C_{t;\nu} u^\nu} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{\nu+1}{c} e^{R_t u} \int_u^\infty \psi_{t;\nu}(y) dy}{C_{t;\nu} u^\nu} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{\nu+1}{c} e^{R_t u} C_{t;\nu} \int_u^\infty x^\nu e^{-R_t x} dx}{C_{t;\nu} u^\nu} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\nu+1)!}{cR_t^{\nu+1}} e^{-R_t u} \left(\sum_{i=0}^\nu \frac{R_t^i u^i}{i!} \right)}{e^{-R_t u} u^\nu} = \frac{(\nu+1)!}{cR_t^\nu} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{R_t^{\nu+1} u^\nu}{\nu!} \left(1 + \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{R_t^i u^i}{i!} / \frac{R_t^\nu u^\nu}{\nu!} \right) \\
&= \frac{\nu+1}{cR_t}. \tag{7.2.8}
\end{aligned}$$

Επομένως αποδείξαμε ότι

$$f_{t;\nu+1}^*(u) \sim \frac{\nu+1}{cR_t} C_{t;\nu} u^\nu, \quad u \rightarrow \infty$$

ή ισοδύναμα ότι

$$f_{t;\nu+1}(u) \sim \frac{\nu+1}{cR_t} C_{t;\nu} u^\nu e^{-R_t u}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Όπως και στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου χωρίς διάχυση εκμεταλλευόμενοι την

ασυμπτωτική συμπεριφορά της $f_{t;\nu+1}^*(u)$ καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο, που δίνεται στη σχέση (7.2.8) και το Λήμμα 7.1.1 παίρνουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_{t;\nu+1}(u)$. Συγκεκριμένα υπάρχει σταθερά τέτοια ώστε

$$\psi_{t;\nu+1}(u) \sim C_{t;\nu+1} u^{\nu+1} e^{-Rt u}, \quad u \rightarrow \infty, \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Επιπλέον η σταθερά αυτή υπολογίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$C_{t;\nu+1} = \frac{C_{t;\nu}}{R_t c \widehat{\mu}_{dif}} = \frac{C_{t;0}}{(R_t c \widehat{\mu}_{dif})^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

με $\widehat{\mu}_{dif} = \frac{\phi}{\mu} \int_0^\infty x e^{Rx} d(F_e * H_2)(x)$ και $C_{t;0} = C_t$ (βλέπε σχέση (2.3.6)). □

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που αποδείξαμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_{t;k}(u)$ αποδεικνύεται και η ασυμπτωτική συμπεριφορά για την $\psi_{s;k}(u)$.

7.2.2 Μελέτη της Ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_{s;k}(u)$ στο μοντέλο με διάχυση για την περίπτωση των βαριών ουρών

Στην παράγραφο 7.1.2 μελετήσαμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_k(u)$ για το κλασικό μοντέλο στην περίπτωση που η κατανομή ισορροπίας που έχουν τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκει στην κλάση \mathcal{S}^* . Στην παρούσα παράγραφο θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα αυτά χρησιμοποιώντας το κλασικό μοντέλο που περιέχει και διάχυση. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε πως η μελέτη μας πάνω στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας, για την περίπτωση του κλασικού μοντέλου με διάχυση, περιορίζεται λόγω της Πρότασης 7.2.2 μόνο στις ροπές $\psi_{s;k}$ και $\psi_{t;k}$, $k \geq 1$. Αρχικά θα αποδείξουμε κάποια βασικά αποτελέσματα που θα μας βοηθήσουν να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.2.2.

Λήμμα 7.2.1. *Αν για τις θετικές πραγματικές συναρτήσεις f_i ισχύει ότι $f_i \in \mathcal{L}d$, $\forall i \geq 1, i \in \mathbb{N}$ τότε προκύπτει ότι $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n \in \mathcal{L}d$ με $a_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη λόγω του επαγωγικού συλλογισμού αρκεί να γίνει για $n = 2$. Αν

$f_1, f_2 \in \mathcal{L}d$ τότε ισχύει ότι

$$\min \left\{ \frac{a_1 f_1(x-y)}{a_1 f_1(x)}, \frac{a_2 f_2(x-y)}{a_2 f_2(x)} \right\} \leq \frac{a_1 f_1(x-y) + a_2 f_2(x-y)}{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)}$$

και

$$\frac{a_1 f_1(x-y) + a_2 f_2(x-y)}{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)} \leq \max \left\{ \frac{a_1 f_1(x-y)}{a_1 f_1(x)}, \frac{a_2 f_2(x-y)}{a_2 f_2(x)} \right\},$$

για $x \geq y \geq 0$. Επομένως αν πάρουμε τα όρια για $x \rightarrow \infty$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο βάσει του Ορισμού 1.4.1. \square

Από τις Προτάσεις 2.3.2 και 1.4.7 προκύπτει ότι υπό τη συνθήκη $F_e \in \mathcal{S}^*$ ισχύει ότι $\psi_t \in \mathcal{S}d$. Στην Πρόταση που ακολουθεί δίνονται κάποιες επαρκείς προϋποθέσεις ώστε $\psi_{s;n} \in \mathcal{L}d$.

Πρόταση 7.2.1. Έστω ότι $\psi_s \in \mathcal{L}d$ και $\psi_{s;n}(u) < \infty$ για κάθε $u \geq 0$ τότε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι

$$\psi_{s;n} \in \mathcal{L}d. \quad (7.2.9)$$

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αφού $\psi_s \in \mathcal{L}d$ συνεπάγεται και ότι $\psi_t \in \mathcal{L}d$. Πράγματι για κάθε $x \geq 0$ και με τη βοήθεια της Πρότασης 2.3.1 έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u-x)}{\psi_s(u-x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u-x)}{\psi_t(u)} \frac{\psi_t(u)}{\psi_s(u)} \frac{\psi_s(u)}{\psi_t(u-x)} = 1.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τη σχέση (7.2.9) με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Αρχικά θα δείξουμε ότι η σχέση (7.2.9) ισχύει για $n = 1$, δηλαδή ότι $\psi_{s;1} \in \mathcal{L}d$. Υπενθυμίζουμε ότι η $\psi_{s;1}$ δίνεται από τη σχέση (3.1.17) για $n = 1$

$$\psi_{s;1}(u) = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \left[(\psi_s \otimes \psi_t)(u) + \int_u^\infty \psi_s(x) dx - \int_0^\infty \psi_s(x) dx \right].$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την προαναφερθείσα σχέση πρέπει αρχικά να λάβουμε υπόψιν μας ότι η κλάση $\mathcal{L}d$ είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη (Βλέπε Asmussen et al. (2003)) και επομένως θα έχουμε ότι

$$(\psi_s \otimes \psi_t)(u) \in \mathcal{L}d. \quad (7.2.10)$$

Επίσης με τη βοήθεια του Θεωρήματος του l'Hospital αποδεικνύεται ότι αν για μια θετική συνάρτηση ισχύει ότι $f \in \mathcal{L}d$ συνεπάγεται ότι $\int_u^\infty f(t) dt \in \mathcal{L}d$. Άρα με βάση τον

προηγούμενο συλλογισμό αφού από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\psi_s \in \mathcal{L}d$ θα έχουμε ότι

$$\int_u^\infty \psi_s(x)dx \in \mathcal{L}d. \quad (7.2.11)$$

Συνεπώς με τη βοήθεια του Λήμματος 7.2.1 και των σχέσεων (7.2.10) και (7.2.11) προκύπτει ότι θα έχουμε $\psi_{s;1} \in \mathcal{L}d$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η σχέση (7.2.9) ισχύει για $n = m$, δηλαδή $\psi_{s;m} \in \mathcal{L}d$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = m + 1$. Όμοια με την περίπτωση για $n = 1$, αφού έχουμε υποθέσει ότι $\psi_{s;m}$ και ψ_t ανήκουν στην κλάση $\mathcal{L}d$ θα έχουμε ότι η συνέλιξη $\psi_{s;m} \otimes \psi_t \in \mathcal{L}d$ και ότι $\int_u^\infty \psi_{s;m}(t)dt \in \mathcal{L}d$. Επομένως από την εξίσωση (3.1.17) για $n = m + 1$ και την Πρόταση 7.2.1 θα πάρουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Λήμμα 7.2.2. Έστω F_e η κατανομή ισορροπίας των αποζημιώσεων στο κλασικό μοντέλο με διάχυση. Θεωρούμε πως $F_e \in \mathcal{S}$, τότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} = 0. \quad (7.2.12)$$

Απόδειξη. Κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u) (\int_u^\infty \bar{F}(x)dx / \int_u^\infty \bar{F}(x)dx)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx (\int_u^\infty \bar{F}_e(x)dx / \int_u^\infty \bar{F}_e(x)dx)}.$$

Επομένως

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A_t(u)C_t(u)}{B_t(u)}, \quad (7.2.13)$$

όπου

$$A_t(u) = \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \bar{F}(x)dx},$$

$$B_t(u) = \frac{\int_u^\infty \psi_t(x)dx}{\int_u^\infty \bar{F}_e(x)dx}$$

και

$$C_t(u) = \frac{\int_u^\infty \bar{F}(x)dx}{\int_u^\infty \bar{F}_e(x)dx}.$$

Άρα από το Λήμμα 1.4.1 και το Θεώρημα 2.3.2 θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} A_t(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \bar{F}(x)dx} = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu}, \quad (7.2.14)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} B_t(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_t(x)dx}{\int_u^\infty \bar{F}_e(x)dx} = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \quad (7.2.15)$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} C_t(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \bar{F}(x) dx}{\int_u^\infty \bar{F}_e(x) dx} = 0. \quad (7.2.16)$$

Συνεπώς

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x) dx} = 0. \quad \square$$

Λήμμα 7.2.3. Αν υποθέσουμε ότι $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_s(x) dx} = 0. \quad (7.2.17)$$

Απόδειξη. Το δεύτερο όριο ομοίως προκύπτει άμεσα από τη χρήση των Λημμάτων 1.4.1, 7.2.2 και της Πρότασης 2.3.1. \square

Λήμμα 7.2.4. Έστω $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\psi_{s;k}(u)} = 0, \quad \forall k \geq 1. \quad (7.2.18)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 1$ θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\psi_{s;1}(u)} = 0. \quad (7.2.19)$$

Θέτουμε $k = 1$ στη σχέση (3.1.17) και διαιρούμε με $\psi_t(u)$

$$\frac{\psi_{s;1}(u)}{\psi_t(u)} = \frac{1}{\lambda\mu\theta} \left(\frac{\int_0^u \psi_t(u-x)\psi_s(x) dx}{\psi_t(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_s(x) dx}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_s(x) dx \right)$$

και κάνοντας χρήση της μονοτονίας (φθίνουσα) της $\psi_t(u)$ προκύπτει η παρακάτω ανισότητα

$$\frac{\psi_{s;1}(u)}{\psi_t(u)} \geq \psi_t(u) \frac{\int_0^u \psi_s(y) dy}{\psi_t(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_s(y) dy}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_s(y) dy.$$

Επομένως παίρνοντας τα όρια, στο πρώτο και το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης, για $u \rightarrow \infty$ θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;1}(u)}{\psi_t(u)} \geq \lim_{u \rightarrow \infty} \psi_t(u) \frac{\int_0^u \psi_s(y) dy}{\psi_t(u)} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_s(y) dy}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_s(y) dy.$$

Άρα από το Λήμμα 7.2.3 και το γεγονός ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_t(u) = 0$ προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\psi_{s;1}(u)} = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η (7.2.18) για $k = n$ δηλαδή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\psi_{s;n}(u)} = 0, \quad (7.2.20)$$

θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = n + 1$. Όμοια με την περίπτωση $k = 1$, θέτουμε $k = n + 1$ στη σχέση (3.1.17) και διαιρούμε με $\psi_t(u)$

$$\frac{\psi_{s;n+1}(u)}{\psi_t(u)} = \frac{\int_0^u \psi_{s;n}(u-y)\psi_t(y)dy}{\psi_t(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_{s;n}(y)dy}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_{s;n}(y)dy.$$

Από το γεγονός ότι η $\psi_t(u)$ είναι φθίνουσα, προκύπτει ότι

$$\frac{\psi_{s;n+1}(u)}{\psi_t(u)} \geq \psi_t(u) \frac{\int_0^u \psi_{s;n}(y)dy}{\psi_t(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_{s;n}(y)dy}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_{s;n}(y)dy.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τα όρια στο πρώτο και το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;n+1}(u)}{\psi_t(u)} &\geq \lim_{u \rightarrow \infty} \psi_t(u) \frac{\int_0^u \psi_{s;n}(y)dy}{\psi_t(u)} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_{s;n}(y)dy}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_{s;n}(y)dy \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_{s;n}(y)dy}{\psi_t(u)} - \int_0^\infty \psi_{s;n}(y)dy \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_u^\infty \psi_{s;n}(y)dy}{\int_u^\infty \psi_t(y)dy} \cdot \frac{\int_u^\infty \psi_t(y)dy}{\psi_t(u)} \right) - \int_0^\infty \psi_{s;n}(y)dy. \end{aligned}$$

Άρα από την σχέση (7.2.20) και το Λήμμα 1.4.1 προκύπτει το ζητούμενο,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\psi_{s;n+1}(u)} = 0.$$

□

Λήμμα 7.2.5. Έστω $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_s(u)}{\psi_{s;k}(u)} = 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (7.2.21)$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.3.1 και το Λήμμα 7.2.4. \square

Πρέπει να τονίσουμε πως η συνθήκη $F_e \in \mathcal{S}^*$ που χρησιμοποιείται στην πλειονότητα των αποτελεσμάτων αυτής της παραγράφου μας δίνει τη δυνατότητα να υποθέσουμε πως η πρώτη ροπή της F_e είναι πεπερασμένη επομένως είναι πεπερασμένη και η δεύτερη ροπή της F . Άρα ισχύει ότι $\psi_t(u), \psi_s(u), \psi_d(u) < \infty, \quad \forall u \geq 0$.

Πόρισμα 7.2.1. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε για $k = 1, 2, \dots$, ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;k}(y) dy} = 0.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση με τη χρήση του Λήμματος 7.2.4 μιας και το

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;k}(y) dy},$$

μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;k}(y) dy} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(u)} \frac{\int_u^\infty \psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;k}(y) dy}.$$

Συνεπώς με τη βοήθεια των Λημμάτων 1.4.1 και 7.2.2 έχουμε το ζητούμενο,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;k}(y) dy} = 0.$$

\square

Το Θεώρημα που ακολουθεί αναφέρεται στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_{s;k}(u)$ για $k \geq 0$.

Θεώρημα 7.2.2. Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση υποθέτουμε ότι η κατανομή ισορροπίας, F_e , ανήκει στην κλάση \mathcal{S}^* . Τότε για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi_{s;k}(u) \sim \frac{k}{\lambda \mu \theta} \int_u^\infty \psi_{s;k-1}(x) dx, \quad u \rightarrow \infty, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.2.22)$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του ζητούμενου αποτελέσματος θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση (7.2.22) για $k = 1$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;1}(u)}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} = \frac{1}{\lambda \mu \theta}.$$

Αν στη σχέση (3.1.17) θέσουμε $k = 1$ και στη συνέχεια διαιρέσουμε με $\int_u^\infty \psi_s(y) dy$ θα πάρουμε την εξίσωση που ακολουθεί

$$\frac{\psi_{s;1}(u)}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \left[\frac{\int_0^u \psi_t(u-x) \psi_s(x) dx}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} + \frac{\int_u^\infty \psi_s(x) dx}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} - \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_s(x) dx}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} \right].$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\psi_{s;0}(u) = \psi_s(u)$. Αν πάρουμε τα όρια στο πρώτο και το δεύτερο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο μηδέν θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;1}(u)}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_0^u \psi_t(u-x) \psi_s(x) dx}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} + 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_s(y) dy} \int_0^\infty \psi_s(x) dx \right]. \quad (7.2.23)$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $F_e \in \mathcal{S}^*$ και σε συνδυασμό με τις Προτάσεις 2.3.1, 2.3.2 και 2.2.6 προκύπτει η επόμενη ασυμπτωτική σχέση

$$(\psi_t \otimes \psi_s)(u) \sim \left(\int_0^\infty \psi_t(x) dx + \int_0^\infty \psi_s(x) dx \right) \psi_t(u), \quad u \rightarrow \infty \quad (7.2.24)$$

και άρα με τη βοήθεια του Λήμματος 7.2.17 και των σχέσεων (7.2.23) και (7.2.24) παίρνουμε τη ζητούμενη ασυμπτωτική σχέση

$$\psi_{s;1}(u) = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \int_u^\infty \psi_s(y) dy.$$

Αν υποθέσουμε ότι η σχέση (7.2.22) ισχύει για $k = n$, δηλαδή

$$\psi_{s;n}(u) \sim \frac{n}{\lambda \mu \theta} \int_u^\infty \psi_{s;n-1}(x) dx, \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.2.25)$$

Από την παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τη σχέση (3.1.17) προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n-1}(y) dy} = 0. \quad (7.2.26)$$

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για να ισχύει η σχέση (7.2.22) πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = n + 1$. Συνεπώς πρέπει να

δείξουμε ότι

$$\psi_{s;n+1}(u) \sim \frac{n+1}{\lambda\mu\theta} \int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx, \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.2.27)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.1.17) για $k = n+1$ και αφού διαιρέσουμε με $\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx$ θα πάρουμε τα όρια στο πρώτο και δεύτερο μέλος για $u \rightarrow \infty$ δηλαδή θα έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;n+1}(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} = \frac{n+1}{\lambda\mu\theta} \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} + 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} \int_0^\infty \psi_{s;n}(x)dx \right). \quad (7.2.28)$$

Με τη χρήση του Πορίσματος 7.2.1 η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;n+1}(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} = \frac{n+1}{\lambda\mu\theta} \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} + 1 \right). \quad (7.2.29)$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} = 0. \quad (7.2.30)$$

Για ευκολία στο χειρισμό των πράξεων θέτουμε $\Psi_{s;n}(u) = \int_u^\infty \psi_{s;n}(y)dy$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Με τη βοήθεια της σχέσης (3.1.17) ο αριθμητής της (7.2.30) είναι ίσος με την παρακάτω παράσταση

$$(\psi_{s;n} \otimes \psi_t)(u) = \frac{n}{\lambda\mu\theta} (\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t \otimes \psi_t)(u) + (\Psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u) - (\psi_t \otimes \psi_t)(u) \int_0^\infty \psi_{s;n-1}(x)dx. \quad (7.2.31)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα παρακάτω

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} = 0, \quad (7.2.32)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} = 0 \quad (7.2.33)$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x)dx} = 0. \quad (7.2.34)$$

Αρχικά αφού $F_e \in \mathcal{S}d$ από την Πρόταση 2.3.2 συνεπάγεται ότι $\psi_t \in \mathcal{S}d$ και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Λήμματος 1.4.2, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $K \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε να ισχύει $(\psi_t \otimes \psi_t)(u) \leq K\psi_t(u)$, $\forall \epsilon > 0$. Επομένως θα

έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x) dx} \leq K \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x) dx}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Με τη συνεισφορά της σχέσης (7.2.26) προκύπτει η (7.2.32)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x) dx} = 0.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την (7.2.33). Για την απόδειξη της είναι απαραίτητη η χρήση της σχέσης 1.2.2, του Λήμματος 7.2.4 και του Θεωρήματος του 1' Hospital. Άρα αν παραγωγίσουμε αριθμητή και παρανομαστή θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(y) dy} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\psi_{s;n}(u)} - \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{s;n-1}(y) dy}{\psi_{s;n}(u)} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\psi_{s;n}(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;n-1} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n-1}(y) dy} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_{s;n-1}(y) dy}{\psi_{s;n}(u)}. \end{aligned}$$

Από τις (7.2.26) και (7.2.25) προκύπτει άμεσα η σχέση (7.2.33). Τέλος η σχέση (7.2.34) προκύπτει από το γεγονός ότι η $\psi_t(u)$ ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών πυκνοτήτων και το Πόρισμα 7.2.1

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x) dx} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\psi_t(u)} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;n}(x) dx} \right) = 0.$$

Έχοντας αποδείξει τις σχέσεις (7.2.32), (7.2.33) και (7.2.34) είναι φανερό από τη σχέση (7.2.30) ότι έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη της (7.2.27) και συνεπώς η σχέση (7.2.22) ισχύει για κάθε $n \geq 1$. \square

Με τη χρήση της σχέσης (7.2.22) και την εφαρμογή του κανόνα του 1' Hospital προκύπτει εύκολα ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;k}(u)}{\psi_{s;k+1}(u)} = \frac{k}{k+1} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;k-1}(u)}{\psi_{s;k}(u)}, \quad \forall k \geq 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό επαγωγικά μας δείχνει όπως φαίνεται στο επόμενο Λήμμα ότι η k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας τείνει στο μηδέν με βραδύτερο ρυθμό όσο αυξάνει το k .

Πόρισμα 7.2.2. Αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ και $\mu_k < \infty$ για $k \in \mathbb{N}$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;k-1}(u)}{\psi_{s;k}(u)} = 0. \quad (7.2.35)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται στο βασικό ασυμπτωτικό αποτέλεσμα που περιγράφεται στο Θεώρημα 7.2.2

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;k-1}(u)}{\psi_{s;k}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\lambda\mu\theta) \psi_{s;k-1}(u)}{(k-1) \int_u^\infty \psi_{s;k-1}(x) dx}.$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία και με τη βοήθεια του Λήμματος 1.4.1 σε $k-1$ διαδοχικά βήματα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;k-1}(u)}{\psi_{s;k}(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\lambda\mu\theta) \psi_{s;k-1}(u)}{(k-1) \int_u^\infty \psi_{s;k-1}(x) dx} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-2) \int_u^\infty \psi_{s;k-2}(x) dx}{(k-1) \int_u^\infty \psi_{s;k-1}(x) dx} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-2) \psi_{s;k-2}(u)}{(k-1) \psi_{s;k-1}(u)} = \dots = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(k-2)! \psi_s(u)}{(k-1)! \psi_{s;1}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda\mu\theta (k-2)! \psi_s(u)}{(k-1)! \int_u^\infty \psi_s(x) dx} = 0. \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

□

Η συνθήκη που χρησιμοποιήθηκε ότι $\mu_k < \infty$ μας εξασφαλίζει ότι τουλάχιστον ο παρανομαστής του κλάσματος $\psi_{s;k-1}(u)/\psi_{s;k}(u)$ δεν είναι μηδέν.

Στην επόμενη πρόταση θα γενικεύσουμε την Πρόταση 2.3.1 στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου με διάχυση για τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.

Πρόταση 7.2.2. Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση αν $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε ισχύει ότι

$$\psi_{t;k}(u) \sim \psi_{s;k}(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.2.37)$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε επαγωγή. Αρχικά γνωρίζουμε ότι η σχέση (7.2.37) ισχύει για $k=0$ (βλέπε Πρόταση 2.3.1). Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $k=1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{t;1}(u)}{\psi_{s;1}(u)} = 1.$$

Επομένως, αν θέσουμε $k=1$ στις σχέσεις (3.1.17) και (3.1.20), διαιρέσουμε την $\psi_{t;1}(u)$ με $\psi_{s;1}(u)$ και πάρουμε το όριο και στα δύο μέλη καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο

άπειρο, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{t;1}(u)}{\psi_{s;1}(u)} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda\mu\theta} [(\psi_t \otimes \psi_t)(u) + \int_u^\infty \psi_t(x)dx - \psi_t(u) \int_0^\infty \psi_t(x)dx]}{\frac{1}{\lambda\mu\theta} [(\psi_s \otimes \psi_t)(u) + \int_u^\infty \psi_s(x)dx - \psi_t(u) \int_0^\infty \psi_s(x)dx]} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_t(x)dx \left[\frac{(\psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} + 1 - \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} \int_0^\infty \psi_t(x)dx \right]}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx \left[\frac{(\psi_s \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx} + 1 - \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx} \int_0^\infty \psi_s(x)dx \right]}.
\end{aligned} \tag{7.2.38}$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $F_e \in S^*$ και συνεπώς από την Πρόταση 2.3.2 συνεπάγεται ότι $\psi_t(u) \in Sd$. Άρα, κάνοντας χρήση του Ορισμού 1.4.3 προκύπτει ότι

$$(\psi_t \otimes \psi_t)(u) \sim 2\psi_t(u). \tag{7.2.39}$$

Επιπλέον από την Πρόταση 2.3.1 γνωρίζουμε ότι $\psi_t(u) \sim \psi_s(u)$, $u \rightarrow \infty$, με χρήση του αποτελέσματος του Omev (1988) (Θεώρημα 2.2.6) προκύπτει ότι

$$(\psi_s \otimes \psi_t)(u) \sim \psi_t(u) \int_0^\infty \psi_s(x)dx + \psi_s(u) \int_0^\infty \psi_s(x)dx. \tag{7.2.40}$$

Άρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.2.38), (2.3.1), (7.2.39), (7.2.40) και το Λήμμα 7.2.3 έχουμε

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{t;1}(u)}{\psi_{s;1}(u)} \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_t(x)dx \left[\frac{(\psi_t \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} + 1 - \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_t(x)dx} \int_0^\infty \psi_t(x)dx \right]}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx \left[\frac{(\psi_s \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx} \frac{\psi_t(u)}{\psi_s(u)} \frac{\psi_s(u)}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx} + 1 - \frac{\psi_t(u)}{\int_u^\infty \psi_s(x)dx} \int_0^\infty \psi_s(x)dx \right]} = 1
\end{aligned} \tag{7.2.41}$$

και επομένως αποδείξαμε ότι η σχέση (7.2.37) ισχύει για $k = 1$. Έστω ότι η σχέση αυτή ισχύει για $k = m$

$$\psi_{t;m}(u) \sim \psi_{s;m}(u), \quad u \rightarrow \infty \tag{7.2.42}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι

$$\psi_{t;m+1}(u) \sim \psi_{s;m+1}(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Αρχικά παρατηρούμε πως αφού $\psi_{s;m} \in \mathcal{Ld}$ (βλέπε Πρόταση 7.2.1), αν χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.4.6 στηριζόμενοι στην υπόθεση που έχουμε κάνει (βλέπε σχέση 7.2.42) προκύπτει ότι $\psi_{t;m} \in \mathcal{Ld}$. Άρα, αν στις σχέσεις (3.1.17) και (3.1.20) θέσουμε $k = m + 1$, διαιρέσουμε την $\psi_{t;m+1}(u)$ με $\psi_{s;m+1}(u)$ και πάρουμε το όριο και στα δύο μέλη καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο, θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{t;m+1}(u)}{\psi_{s;m+1}(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{m+1}{\lambda\mu\theta} [(\psi_{t;m} \otimes \psi_t)(u) + \int_u^\infty \psi_{t;m}(x)dx - \psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{t;m}(x)dx]}{\frac{m+1}{\lambda\mu\theta} [(\psi_{s;m} \otimes \psi_t)(u) + \int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx - \psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{s;m}(x)dx]} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_u^\infty \psi_{t;m}(x)dx}{\int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx} \cdot \frac{\frac{(\psi_{t;m} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{t;m}(x)dx} + 1 - \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{t;m}(x)dx}{\int_u^\infty \psi_{t;m}(x)dx}}{\frac{(\psi_{s;m} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx} + 1 - \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{s;m}(x)dx}{\int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx}} \right). \end{aligned} \quad (7.2.43)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $\psi_{t;m} \in \mathcal{Ld}$ και ότι $\psi_t \in \mathcal{Sd}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα Θεωρήματα 1.5.4 και 7.2.2 σε συνδυασμό με το Λήμμα 7.2.2 και τη σχέση (7.2.42), συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{t;m} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{t;m}(x)dx} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_{t;m} \otimes \psi_t)(u)}{\psi_{t;m}(u)} \cdot \frac{\psi_{t;m}(u)}{\psi_{s;m}(u)} \cdot \frac{\psi_{s;m}(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;m-1}(x)dx} \cdot \frac{\int_u^\infty \psi_{s;m-1}(x)dx}{\int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.44)$$

και με όμοια μεθοδολογία, μιας και η $\psi_{s;m}$ πληρεί όλες τις προϋποθέσεις που προαναφέρθηκαν παραπάνω για την $\psi_{t;m}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\psi_{s;m} \otimes \psi_t)(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_{s;m} \otimes \psi_t)(u)}{\psi_{s;m}(u)} \cdot \frac{\psi_{s;m}(u)}{\int_u^\infty \psi_{s;m-1}(x)dx} \cdot \frac{\int_u^\infty \psi_{s;m-1}(x)dx}{\int_u^\infty \psi_{s;m}(x)dx} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.2.45)$$

Επομένως η (7.2.43) με τη βοήθεια των σχέσεων (7.2.44), (7.2.45) και (7.2.1) λαμβάνει την εξής μορφή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{t;m+1}(u)}{\psi_{s;m+1}(u)} = 1$$

και επομένως ολοκληρώθηκε η επαγωγική απόδειξη. \square

Πρόταση 7.2.3. Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση αν ισχύει ότι $F_e \in \mathcal{S}^*$ τότε για την k ροπή του χρόνου χρεοκοπίας ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi_{t;k}(u) \sim \frac{k}{\lambda\mu\theta} \int_u^\infty \psi_{t;k-1}(x) dx, \quad u \rightarrow \infty, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.2.46)$$

Απόδειξη. Άμεσα από την Πρόταση 7.2.2 και το Θεώρημα 7.2.2. \square

Οι σχέσεις (7.2.22) και (7.2.46) μπορούν να γραφτούν, όπως φαίνεται παρακάτω, ως προς την ουρά της κατανομής ισορροπίας των υψών αποζημίωσης. Έτσι έχουμε αντίστοιχα $u \rightarrow \infty$ ότι

$$\begin{aligned} \psi_{s;k}(u) &\sim \frac{k!}{(\lambda\mu\theta)^k} \int_u^\infty \int_{x_1}^\infty \cdots \int_{x_{k-1}}^\infty \psi_t(x) dx_{k-1} \cdots dx_1 dx \\ &\sim \frac{k!}{\lambda^{k-1} (\mu\theta)^k (c - \lambda\mu)} \int_u^\infty \int_{x_1}^\infty \cdots \int_{x_{k-1}}^\infty \bar{F}_e(x) dx_{k-1} \cdots dx_1 dx \end{aligned} \quad (7.2.47)$$

και

$$\begin{aligned} \psi_{t;k}(u) &\sim \frac{k!}{(\lambda\mu\theta)^k} \int_u^\infty \int_{x_1}^\infty \cdots \int_{x_{k-1}}^\infty \psi_t(x) dx_{k-1} \cdots dx_1 dx \\ &\sim \frac{k!}{\lambda^{k-1} (\mu\theta)^k (c - \lambda\mu)} \int_u^\infty \int_{x_1}^\infty \cdots \int_{x_{k-1}}^\infty \bar{F}_e(x) dx_{k-1} \cdots dx_1 dx. \end{aligned} \quad (7.2.48)$$

7.2.3 Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\psi_{s;k}(u)$ στο κλασικό μοντέλο με διάχυση στην περίπτωση όπου $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της k ροπής του χρόνου για το κλασικό μοντέλο με διάχυση στην περίπτωση που τα ύψη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλάση $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$. Το Θεώρημα που θα δώσουμε ουσιαστικά αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 7.1.3.

Θεώρημα 7.2.3. Αν $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$ τότε υπάρχει θετική σταθερά $Q_{s;k}$ τέτοια ώστε

$$\psi_{s;k}(u) \sim Q_{s;k} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.2.49)$$

όπου

$$Q_{s;k} = Q_0 \left(\int_0^\infty (e^{\gamma t} - 1) \psi_{s;k-1}(t) dt + Q_{s;k-1} \left(\int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_t(y) dy + \frac{1}{\gamma} \right) \right), \quad k \geq 1$$

και

$$Q_{s;0} = Q_0 = \frac{\lambda}{\gamma c} \left[\left(1 - \frac{\lambda \mu}{c} \right) / \left(1 - \frac{D\gamma}{c} - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{\gamma t} \bar{F}(t) dt \right)^2 \right].$$

Απόδειξη. Αν $F \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$ τότε από την Πρόταση 1.4.3 γνωρίζουμε ότι $\bar{F} \in \mathcal{S}d(\gamma)$. Προκειμένου να αποδείξουμε τη σχέση (7.2.49) θα χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική μέθοδο. Αρχικά γνωρίζουμε ότι για $k = 0$ υπάρχει σταθερά Q_0 (βλέπε Θεώρημα 2.3.3) που είναι ίση με

$$Q_0 = \frac{\lambda}{\gamma c} \left[\left(1 - \frac{\lambda \mu}{c} \right) / \left(1 - \frac{D\gamma}{c} - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{\gamma t} \bar{F}(t) dt \right)^2 \right],$$

τέτοια ώστε

$$\psi_{s;0}(u) = \psi_s(u) \sim Q_0 \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.2.50)$$

Θα αποδείξουμε ότι η σχέση (7.2.49) ισχύει για $k = 1$. Ξεκινάμε από τη σχέση (3.1.14) όπου θέτουμε $k = 1$. Στη συνέχεια διαιρούμε με $\bar{F}(u)$ και παίρνουμε το όριο καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;1}(u)}{\bar{F}(u)} = \frac{1}{\lambda \mu \theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_s \otimes \psi_t)(u)}{\bar{F}(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_s(t) dt}{\bar{F}(u)} - \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_s(t) dt}{\bar{F}(u)} \right). \quad (7.2.51)$$

Από την Πρόταση 2.3.3 γνωρίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_t(u)$ και επειδή ισχύει ότι $\psi_t(u) \sim \psi_s(u)$ καθώς το u τείνει στο άπειρο (βλέπε σχέση (7.2.2) προκύπτει με χρήση της Πρότασης (7.1.3) ότι

$$(\psi_s \otimes \psi_t)(u) \sim Q_0 \left(\int_0^\infty e^{\gamma y} \psi_t(y) dy + \int_0^\infty e^{\gamma y} \psi_s(y) dy \right), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.2.52)$$

Επομένως αποδείξαμε τον ακριβή τύπο που περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi_{s;1}(u)$

$$\psi_{s;1}(u) \sim Q_{s;1} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Έστω ότι η σχέση (7.2.49) ισχύει για $k = \nu$, δηλαδή υπάρχει σταθερά Q_ν ώστε να ισχύει ο επόμενος ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi_{s;\nu}(u) \sim Q_{s;\nu} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.2.53)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = \nu + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $Q_{s;\nu+1}$ ώστε να ισχύει ο επόμενος ασυμπτωτικός τύπος

$$\psi_{s;\nu+1}(u) \sim Q_{s;\nu+1} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Αν στη σχέση (3.1.14) θέσουμε $k = \nu + 1$, διαιρέσουμε με $\bar{F}(u)$ και πάρουμε το όριο καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο άπειρο θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_{s;\nu+1}(u)}{\bar{F}(u)} = \frac{\nu + 1}{\lambda \mu \theta} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{(\psi_{s;\nu} \otimes \psi_t)(u)}{\bar{F}(u)} + \frac{\int_u^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt}{\bar{F}(u)} - \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt}{\bar{F}(u)} \right) \quad (7.2.54)$$

Όμως από την Πρόταση 2.3.3 έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi_t(u) \int_0^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt}{\bar{F}(u)} = Q_0 \int_0^\infty \psi_\nu(t) dt. \quad (7.2.55)$$

Από τη σχέση (7.2.53) έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt}{\bar{F}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_u^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt}{\int_u^\infty \bar{F}(t) dt} \frac{\int_u^\infty \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(u)} \right) = \mu Q_{s;\nu} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_e(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (7.2.56)$$

Επομένως από την Πρόταση 1.4.1 έχουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt}{\bar{F}(u)} = \mu \frac{Q_{s;\nu}}{\gamma \mu} = \frac{Q_{s;\nu}}{\gamma}. \quad (7.2.57)$$

Τέλος από τις σχέσεις (7.2.50) και (7.2.53) και την Πρόταση 7.1.3 έχουμε ότι

$$(\psi_{s;\nu} \otimes \psi_t)(u) \sim \left(Q_0 \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_{s;\nu}(t) dt + Q_{s;\nu} \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_t(t) dt \right) \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (7.2.58)$$

Συνεπώς με τη βοήθεια των σχέσεων (7.2.55), (7.2.57), (7.2.58) και (7.2.56) αποδεικνύεται το ζητούμενο ότι δηλαδή υπάρχει σταθερά $Q_{s;\nu+1}$ τέτοια ώστε να γίνεται

$$\psi_{s;\nu+1}(u) \sim Q_{s;\nu+1} \bar{F}(u), \quad u \rightarrow \infty,$$

όπου

$$Q_{\nu+1} = W_0 \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_{s;\nu}(t) dt + Q_{s;\nu} \int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_t(y) dy + \frac{Q_{s;\nu}}{\gamma} - Q_0 \int_0^\infty \psi_{s;\nu}(t) dt,$$

ή ισοδύναμα

$$Q_{s;\nu+1} = Q_0 \left(\int_0^\infty (e^{\gamma t} - 1) \psi_{s;\nu}(t) dt + Q_{s;\nu} \left(\int_0^\infty e^{\gamma t} \psi_t(y) dy + \frac{1}{\gamma} \right) \right).$$

□

Στην περίπτωση που ισχύει ότι $\mu_{k+1} < \infty$ και για κάθε $y > 0$ και $\gamma > k + 1$ ικανοποιείται η παρακάτω σχέση

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_e(xy)}{\overline{F}_e(x)} = y^\gamma$$

δηλαδή $\overline{F}_e \in RV(\gamma)$. Από Bingham et al (1987) γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\int_u^\infty x^i \overline{F}_e(x) dx \sim \frac{1}{1-\gamma} u^{i+1} \overline{F}_e(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Συνεπώς η σχέση (7.2.48) λαμβάνει την εξής μορφή

$$\psi_{t;k}(u) \sim \frac{k!}{(\lambda\mu)^{k-1} (\theta(1-\gamma))^k (c-\lambda\mu)} u^k \overline{F}_e(u), \quad u \rightarrow \infty$$

ή ισοδύναμα

$$\psi_{t;k}(u) \sim C_{t;k}^* u^k \overline{F}_e(u), \quad u \rightarrow \infty,$$

όπου

$$C_{t;k}^* = \frac{k!}{(\lambda\mu)^{k-1} (\theta(1-\gamma))^k (c-\lambda\mu)}$$

μια θετική σταθερά.

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

Παράρτημα Α'

Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης

Ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία στην μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης είναι το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης Σύγκλισης. Με την βοήθεια του θεωρήματος αυτού θα αποδείξουμε ότι η συνέλιξη της πιθανότητας χρεοκοπίας με οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση ακόμα και με την ίδια την πιθανότητα χρεοκοπίας συγκλίνει στο μηδέν καθώς το αρχικό αποθεματικό τείνει στο μηδέν.

Θεώρημα Α'.0.4 (Lebesgue's Dominated Convergence Theorem). Αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία από μετρήσιμες συναρτήσεις στο χώρο μέτρου (X, Σ, μ) τέτοιες ώστε η συνάρτηση f να ορίζεται στο X με

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ¹ τέτοια ώστε

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ και } x \in X,$$

τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu$$

¹ $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ μετρήσιμη και } \int_0^\infty |f| d\mu < \infty\}$.

Απόδειξη. Βλέπε Rudin (1986). □

Πρόταση Α'.0.4. Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και $g \in C_0(\mathbb{R})$ τότε

$$f \otimes g \in C_0(\mathbb{R}),$$

όπου

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C_b(\mathbb{R}) : \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \right\}$$

και

$$C_b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις} \}.$$

Απόδειξη. Βλέπε Folland (1999) □

Πρόταση Α'.0.5. Αν $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

1. Η g να είναι ολοκληρώσιμη στο πεδίο ορισμού της

$$\int_0^\infty g(x) dx < \infty$$

και

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Τότε ισχύει ότι

$$(f * g)(u) = \int_0^u f(u-x)g(x) dx \rightarrow 0, \text{καθώς } u \rightarrow \infty.$$

Απόδειξη. Ζητάμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(u-x)g(x) dx.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα με την βοήθεια της δείκτριας συνάρτησης

$$1_{[0, u_n]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, u_n] \\ 0 & x \notin [0, u_n] \end{cases}$$

λαμβάνει την εξής μορφή

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(u-x)g(x)1_{[0,u_n]}(x)dx.$$

Έστω $\{u_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$u_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A'.0.1})$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h_n(x) := f(u_n - x)g(x)1_{[0,u_n]}(x),$$

τότε για την συνάρτηση $h_n(x)$ θα ισχύουν τα εξής :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$,
2. $|h_n(x)| \leq g(x)$,
3. $\int_{[0,\infty)} g(x) < \infty$.

Άρα από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης του Lebesgue που περιγράφηκε στο Θεώρημα A'.0.4 θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty)} h_n(x) = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(u_n - x)g(x)1_{[0,u_n]}(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{u_n} f(u_n - x)g(x)(x)dx = 0$$

και συνεπώς λόγω της σχέσης (A'.0.1) θα έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(u-x)g(x)(x)dx = 0.$$

□

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

Παράρτημα Β'

Κλάσεις Γήρανσης

Στον παρόν παράρτημα παρουσιάζουμε τις κυριότερες κλάσεις γήρανσης (ageing classes) που χρησιμοποιούνται στο κύριο μέρος της διατριβής

Ορισμός Β'.0.1. Έστω, X μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f , τότε ορίζουμε σαν βαθμίδα αποτυχίας (failure rate) τη θετική συνάρτηση $\lambda(t)$, με τύπο :

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ορισμός Β'.0.2. Έστω, X μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, τότε η συνάρτηση κινδύνου ορίζεται από τον τύπο :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Στον Πίνακα Β'.1 φαίνονται όλες οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες:

$$f(t), F(t), \Lambda(t) \text{ και } \lambda(t).$$

Ορισμός Β'.0.3. Η τυχαία μεταβλητή T , θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα :

1. *IFR (Increasing Failure Rate)*, αν η βαθμίδα αποτυχίας της, $\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t .

2. DFR (Decreasing Failure Rate), αν η βαθμίδα αποτυχίας της, $\lambda(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς t .

Ορισμός Β'.0.4. Μια κατανομή F θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα :

1. IFRA (Increasing Failure Rate in Average), αν η συνάρτηση:

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(s) ds$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του t .

2. DFRA (Decreasing Failure Rate in Average), αν η συνάρτηση:

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(s) ds$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του t .

Ορισμός Β'.0.5. Μια κατανομή F λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών:

1. NBU (New Better than Used), αν

$$R(t|x) \leq R(t), \quad \forall t \geq 0, \quad x \geq 0.$$

2. NWU (New Worse than Used), αν

$$R(t|x) \geq R(t), \quad \forall t \geq 0, \quad x \geq 0.$$

όπου $\forall t \geq x \geq 0$:

$$R(t|x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(x)}, \quad R(t) = \bar{F}(t).$$

	$\lambda(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$\Lambda(t)$
$\lambda(t)$	-	$\frac{F'(t)}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_{t=0}^{\infty} f(s) ds}$	$\Lambda'(t)$
$F(t)$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}$	-	$\int_0^t f(s) ds$	$1 - e^{-\Lambda(t)}$
$f(t)$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}$	$F'(t)$	-	$\Lambda'(t)e^{-\Lambda(t)}$
$\Lambda(t)$	$\int_0^t \lambda(s) ds$	$\ln(1 - F(t))$	$-\ln \int_{t=0}^{\infty} f(s) ds$	-

Πίνακας Β'.1: Πίνακας σύνδεσης των $f(t)$, $F(t)$, $\Lambda(t)$ και $\lambda(t)$.

Ορισμός Β'.0.6. Μια κατανομή F , θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών:

1. *NBUE* (New Better than Used in Expectation) αν ισχύει :

(α') Η F , έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ ,

(β') Ισχύει η ανισότητα $\forall x \geq 0$:

$$MTTF_x \leq \mu.$$

2. *NWUE* (New Worse than Used in Expectation) αν ισχύει :

(α') Η F , έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ ,

(β') Ισχύει η ανισότητα $\forall x \geq 0$:

$$MTTF_x \geq \mu$$

όπου

•

$$MTTF_x = \int_0^{\infty} R(t|x)dt,$$

είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μονάδας που η ηλικία της είναι x .

και

•

$$R(t|x) = \frac{Pr(T > t+x)}{Pr(T > x)},$$

είναι η δεσμευμένη πιθανότητα επιπλέον επιβίωσης μιας μονάδας για χρονικό διάστημα μήκους t δεδομένου ότι η ηλικία της είναι x .

Ορισμός Β'.0.7. Μια κατανομή F , θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών *NWUC* (*NBUC*) (*New Worse (Better) Than Used in Convex ordering* αν ισχύει ότι

$$\overline{F}_e(x+y) \geq (\leq) \overline{F}_e(x)\overline{F}_e(y), \forall x, y \geq 0.$$

Ορισμός Β'.0.8. Μια κατανομή F , θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών:

1. *IMRL (Increasing Mean Residual Life)*, αν η συνάρτηση

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)}$$

είναι αύξουσα ως προς t .

2. *DMRL (Decreasing Mean Residual Life)*, αν η συνάρτηση

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)}$$

είναι φθίνουσα ως προς t .

Στην συνέχεια θα δώσουμε εναλλακτικούς ορισμούς για τις κλάσεις *DFR (IFR)* και *NWU (NBU)*.

Ορισμός Β'.0.9. 1. $F \in DFR(IFR)$ αν και μόνο αν $\bar{F}(x+y)/\bar{F}(x)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση (μη αύξουσα) ως προς y , $\forall x, y \geq 0$.

2. $F \in NWU(NBU)$ αν και μόνο αν $\bar{F}(x+y) \geq (\leq) \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ ως προς y , $\forall x, y \geq 0$.

Πρόταση Β'.0.1. Για μια συνάρτηση κατανομής F ισχύουν τα παρακάτω

1. $F \in IMRL (DMRL)$ αν και μόνο αν $F_e \in NWU(NBU)$, όπου F_e είναι η κατανομή ισορροπίας που αντιστοιχεί στην κατανομή F .

2. Αν $F \in NBUE (NWUE)$ τότε

(α') $\bar{F}_e(y) \leq (\geq) \bar{F}(y), \forall y \geq 0,$

(β') $\mu_2/2\mu^2 \leq (\geq) 1.$

Απόδειξη. Βλέπε Willmot και Lin (2001)

□

Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε πως η εκθετική κατανομή είναι η μόνη κατανομή που έχει την ιδιότητα να ανήκει τετριμμένα σε όλες τις μη παραμετρικές οικογένειες κατανομών που

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

Βιβλιογραφία

Α. Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Δερμιτζάκης Β. (2006) *Φράγματα για την ανανεώτική συνάρτηση*. Διπλωματική εργασία. ΠΜΣ στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- [2] Κουτσόπουλος, Κ.Ι. (1999) *Αναλογιστικά Μαθηματικά - Θεωρία Κινδύνων*. Εκδόσεις Συμμετρία.
- [3] Πολίτης, Κ. (2004) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στην Θεωρία Χρεοκοπίας*. Παν. Πειραιά.
- [4] Φακίνος, Δ. (1994) *Στοχαστικές μέθοδοι στην επιχειρησιακή έρευνα*. Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία.
- [5] Χαραλαμπίδης, Χ. (1993) *Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές*. Εκδόσεις συμμετρίας Τεύχος 1 και 2.
- [6] Χρυσαφίνου Ο. (2004) *Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις*. Εκδόσεις Σοφία.

Β. Ξένη Βιβλιογραφία

- [7] Abdul Majid Wazwaz (1997) *A First Course In Integral Equations*, World Scientific, Singapore.
- [8] Apostol, T., (1974) *Mathematical analysis*. Boston: Addison Wesley.

- [9] Appleby, J.A.D., Reynolds D. W.(2002) Subexponential solutions of linear integro-differential equations and transient renewal equations. *Proc. Roy. Soc. Edin. Ser. A*, **132**, 521 - 543.
- [10] Appleby, J.A.D., Reynolds D. W. (2004) Subexponential solutions of linear integrodifferential equations, *Proceedings of dynamic systems and applications*, (4), 488 - 494.
- [11] Asmussen, S. (1998) A probabilistic look at the Wiener-Hopf equation. *SIAM Review*, 40(2), 189-201.
- [12] Asmussen, S. (2000) *Ruin probabilities*. World Scientific, Singapore.
- [13] Asmussen, S. (2003) *Applied Probability and Queues*. 2nd edition, Springer, Berlin.
- [14] Asmussen, S., Foss, S., Korshunov, D. (2003a) Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour. *Journal Theoret. Probab.*, **62**, 489 - 518.
- [15] Baltrunas, A., Omeij, E., (2002) The rate of convergence for subexponential distributions and densities. *Lithuanian Mathematical Journal*, 42(1), 1-14.
- [16] Baltrunas, A., C. Kluppelberg. (2004) Subexponential distributions - Large deviations with applications to insurance and queueing models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 46(1), 145-154.
- [17] Barlow, R.E., Proschan, F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. Holt, Rinehart & Winston, New York.
- [18] Bartholomew, D.J. (1963) An approximate solution of the integral equation of renewal theory *J. Roy. Statist. Soc B*, (25), 432-441.
- [19] Bellman, R., Cooke, K.L. (1963) *Differential difference equations*. New York Academic.
- [20] Billingsley, P. (1995) *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Ltd.

- [21] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J. (1987) *Regular Variation*. Encyclopaedia of Mathematics and Its Applications, vol. 27. Cambridge University Press, Cambridge.
- [22] Bingham, N. H., Goldie, C. M., Omey, E. (2006) Regularly varying probability densities. *Publications de l'Institut Mathematique (N.S.)*, 80(94), 47 - 57.
- [23] Borovkov, K. A., Dickson, D. C. M. (2008) On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(3), 1104-1108.
- [24] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (1986) *Actuarial Mathematics*. Itasca (Illinois), The Society of Actuaries.
- [25] Brown, M. Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions (1990) *Annals of Probability*, 18(3), 1388-1402.
- [26] Carleman T. (1926) Les fonctions quasi analytiques, Collection Borel, Gauthier - Villars, Paris.
- [27] Cai, J. (2007) On the time value of absolute ruin with debit interest. *Advances in Applied Probability*, 39(2), 343-359.
- [28] Cai, J., Garrido, J. (1998) Aging properties and bounds for ruin probabilities and stop-loss premiums *Insurance: Mathematics and Economics*, 23(1), 33-43.
- [29] Cai, J., Wu, Y. (1997) Some improvements on the Lundberg bound for the ruin probability. *Statistics and Probability Letters*, 33(4), 395-403.
- [30] Cai, J., Tang, Q. (2004) On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications. *Journal of Applied Probability*, 41(1), 117 - 130.
- [31] Chadjiconstantinidis, S., Politis, K. (2007) Two-sided bounds for the distribution of the deficit at ruin in the renewal risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(1), 41-52.

- [32] Cheng, Y., Tang, Q., Yang, H. (2002) Approximations for moments of deficit at ruin with exponential and subexponential claims. *Statistics and Probability Letters*, 59(4), 367-378.
- [33] Chiu, S. N., C. C. Yin. (2003) The time of ruin, the surplus prior to ruin and the deficit at ruin for the classical risk process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(1), 59-66.
- [34] Delbaen, F. (1990) A remark on the moments of ruin time in classical risk theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 9 (2-3), 121-126.
- [35] Dermitzakis, V., Pitts, S.M., Politis, K. (2010) Lundberg-type bounds and asymptotics for the moments of the time to ruin *Methodology and Computing in Applied Probability*, 12(1), 155-175.
- [36] Dermitzakis, V., Politis, K. (2010) Asymptotics for the Moments of the Time to Ruin for the Compound Poisson Model Perturbed by Diffusion *Methodology and Computing in Applied Probability* . Article in Press.
- [37] Dermitzakis, V., Politis, K. (2011) Bounds and asymptotics for the solutions of defective renewal equations. In preparation.
- [38] Dermitzakis, V., Politis, K. (2011) Monotonicity of solutions for defective renewal equation. *In preparation*.
- [39] De Vylder, F., Goovaerts, M. (1984) Bounds for classical ruin probabilities *Insurance : Mathematics and Economics*, 3(2), 121-131.
- [40] Dickson, D.C.M. (2005) *Insurance risk and ruin*. Cambridge. University Press.
- [41] Dickson, D. C. M., Hipp, C. (2001) On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3) 333-344.
- [42] Dickson, D.C.M, Waters, H.R. (2002) The distribution of the time to ruin in the classical risk model. *ASTIN Bulletin*, (32), 299-313.

- [43] Dickson, D., Willmot, G.E. (2005) The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model, *ASTIN Bulletin*, 35(1), 45 - 60.
- [44] Dickson, D.C.M., Hughes B.D., Zhang, L. (2005a) The density of the time to ruin for a Sparre Andersen process with Erlang arrivals and exponential claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 358-376.
- [45] Dickson, D. C. M., Wong, K. S. (2004) De Vylder Approximations to the Moments and Distribution of the Time to Ruin. *Australian Actuarial Journal*, 10(4), 707 - 24.
- [46] Drekić, S., Willmot, G.E. (2003) On the density and moments of the time of ruin with exponential claims. *ASTIN Bulletin*, (33), 11-21.
- [47] Drekić, S., Stafford, J. E., Willmot, G. E. (2004) Symbolic calculation of the moments of the time of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(1), 109-120.
- [48] Dufresne, F., Gerber, H.U. (1991) Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion *Insurance: Mathematics and Economics*, 10(1), 51 - 59 .
- [49] Egidio dos Reis, A. D. (2000) On the moments of ruin and recovery times. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(3), 331-343.
- [50] Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T. (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance *Modelling Extremal Events*. Springer, Berlin.
- [51] Embrechts, P., Veraverbeke, N. (1982) Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(1), 55-72.
- [52] Embrechts P, Goldie CM (1982) On convolutions tails. *Stochastic Processes and their Applications*, 3, 263-278.
- [53] Fagioli, E., Pellerey, F. (1994) Preservation of certain classes of life distributions under Poisson shock models. *Journal of Applied Probability* , (31), 458-465.

- [54] Feller, W. (1941) On the integral equation of renewal theory, *Annals of Mathematical Statistics*, **(12)**, 243-267.
- [55] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*.vol II, 2nd edn. Wiley, New York.
- [56] Folland, G. (1999) *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. Wiley Interscience, New York.
- [57] Fleming, W. (1977) *Functions of Several Variables*. Berlin-Heidelberg-New York. Springer-Verlag.
- [58] Frostig, E. (2004) Upper bounds on the expected time to ruin and on the expected recovery time. *Advances in Applied Probability*, 36 **(2)**, 377-397.
- [59] Gerber, H.U. (1970) An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk, *Scandinavisk Aktuarietidskrift* (1970), 205 - 210.
- [60] Gerber, H.U. (1979) *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation, Philadelphia.
- [61] Gerber, H.U., Goovaerts, M.J., Kaas, R. (1987) On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin*, 17**(2)**, 151-163.
- [62] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. (1998) On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, **(2)**, 48-78.
- [63] Goldie, C. M., C. Kluppelberg. 1998. Subexponential distributions. A practical guide to heavy-tails. *Statistical techniques and applications*, 27-54.
- [64] Grandell, J. (1991) *Aspects of risk theory*. Springer - Verlag, New York.
- [65] Hartman P. (1959) On functions representable as a difference of convex functions, *Pacific J. Math.*, **(9)**, 707 - 713.
- [66] Horst, R., Thoai, N.V. (1999) Dc programming: Overview. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103**(1)**,1-43.

- [67] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2004) *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers.
- [68] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2009) *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. Kluwer Academic Publishers.
- [69] Kluppelberg, C. (1988) Subexponential distributions and integrated tails. *Journal of Applied Probability*, **25**, 132 - 141.
- [70] Kluppelberg, C. (1989a) Subexponential distributions and characterizations of related classes. *Probability Theory and Related Fields*, 82(**2**), 259-269.
- [71] Kluppelberg, C. (1989b) Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(**4**), 279-285.
- [72] Kluppelberg, C., Villasenor, J. (1991) The full solution of the convolution closure problem for convolution-equivalent distributions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 160(**1**), 79-92.
- [73] Lin, X. S., Willmot, G. E. (1999) Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25(**1**), 63-84.
- [74] Lin, X. S., Willmot, G. E. (2000) The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(**1**), 19-44.
- [75] Luxemburg, W., A., J. (1978) On an asymptotic problem concerning the Laplace transform, *Applicable Analysis*, (**8**), 61 - 70.
- [76] Mitrovic D.S., Pecaric, J. Fink J. (1992) *Classical and New Inequalities in Analysis*, Springer-Verlag.
- [77] Omey, E. (1988) Asymptotic properties of convolution products of functions. *Publications de l'Institut Mathematique (N.S.)*, 43(**57**), 41 - 57.
- [78] Pitts, S. M., Politis, K. (2007) The joint density of the surplus before and after ruin in the Sparre Andersen model. *Journal of Applied Probability*, 44(**3**), 695-712.

- [79] Pitts, S. M., Politis, K. (2008) Approximations for the moments of ruin time in the compound Poisson model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 668-679.
- [80] Psarrakos, G., Politis, K. (2009) Monotonicity properties and the deficit at ruin in the Sparre Andersen model. *Scandinavian Actuarial Journal*, (2), 104-118.
- [81] Resnick, S. (1992) *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhauser, Boston.
- [82] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999) *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, Chichester, 1999.
- [83] Ross, S.M. (1974) Bounds on the delay distribution in GI/G/1 queues. *Journal of Applied Probability* , 11, 417-421.
- [84] Rudin, W. (1987) *Real and Complex Analysis (third ed.)*, New York: McGraw-Hill Book Co.
- [85] Sengupta D., Nanda, A.K. (1999) Log-concave and concave distributions in reliability. *Naval Research Logistics*, 46(4), 419-433.
- [86] Segerdahl, C-O. (1955) When does ruin occur in the collective theory of risk? *Skandinavisk Aktuarietidskrift XXXVIII*, 22-36.
- [87] Seyda Deligonul, Z. (1985) Approximate solution of the integral equation of renewal theory. *Journal of Applied Probability*, 22(4), 926-931.
- [88] Stoyan, D. (1983) *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Wiley Chichester.
- [89] Szekli, R. (1986) On the concavity of the waiting time distribution in some GI/G/1 queues. *Journal of Applied Probability*, 23(2), 555-561.
- [90] Tang, Q., Wei, L. (2010) Asymptotic aspects of the Gerber-Shiu function in the renewal risk model using Wiener-Hopf factorization and convolution equivalence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46 (1), 19 - 31.

- [91] Teugels, J.L. (1968) Renewal theorem when the first or the second moment is infinite. *Annals of Mathematical Statistics* , **39**, 1210 - 1219.
- [92] Teugels, J.L. (1975) The class of subexponential distributions. *Annals of Probability*, 3(**6**), 1000-1011.
- [93] Tijms, H.C. (2003) *A First Course to Stochastic Models*. Chichester: Wiley.
- [94] Tsai, C. C., Willmot, G. E. (2002) On the moments of the surplus process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 31, (3), 327-350.
- [95] Tsai, C. C. (2003) On the expectations of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 32(**3**), 413-429.
- [96] Willmot, G.E., Lin, X. S. (2001) *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer, New York.
- [97] Willmot, G.E., LIN, X.S. (2001b) Lundberg inequalities for renewal equations. *Advances in Applied Probability*, 33(**3**), 674-689.
- [98] Woo, J. K. (2011) Refinements of two-sided bounds for renewal equations, *Insurance Mathematics and Economics*, 48(**2**), 189-196.
- [99] Veraverbeke, N. (1993) Asymptotic estimates for the probability of ruin in a Poisson model with diffusion. *Insurance Mathematics and Economics*, 131, 57-62.
- [100] Xing, Y., R. Wu. (2006) Moments of the time of ruin, surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(N) risk process. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 22(**4**), 599-606.
- [101] Yin, C., J. Zhao. (2006) Nonexponential asymptotics for the solutions of renewal equations, with applications. *Journal of Applied Probability*, 43(**3**), 815-824.
- [102] Yin, C., X. Zhao. (2008) Asymptotics for solutions of a defective renewal equation with applications. *Frontiers of Mathematics in China*, 3(**3**), 443-459.
- [103] Yu, Y. (2011) Concave Renewal Functions Do Not Imply DFR Inter-Renewal Times. *Journal of Applied Probability*, to appear.