ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΣΕ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ DYCK ΚΑΙ GRAND-DYCK

ΚΩΝ/ΝΟΣ Β. ΜΑΝΕΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2014

Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Πληροφορικής

Διατριβή για την απόκτηση
Διδακτορικού Διπλώματος

του Τμήματος Πληροφορικής

"Απαρίθμηση προτύπων σε μονοπάτια
Dyck και Grand-Dyck"

Εξεταστική Επιτροπή

Χρήστος Αθανασιάδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Μιχάλης Γεωργιακόδης
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Φώτης Γεωργιακώδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Χαράλαμπος Ευαγγελάρας
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Χρήστος Κουκουβίνος
Καθηγητής Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αριστείδης Σαπουνάκης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Συμβουλευτική επιτροπή

Επιβλέπων:
Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Μέλη:
Αριστείδης Σαπουνάκης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Μιχάλης Γεωργιακόδης
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Στους γονείς μου,
Βασίλη και Μερσίνη

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ολόψυχα τους Καθηγητές κ. Παναγιώτη Τσικούρα και κ. Αριστείδη Σαπουνάκη, για τη συμβολή τους στην εκπόνηση αυτής της διατριβής. Η συνεργασία μου μαζί τους ήταν για μένα μια ανεκτίμητη εμπειρία.

Επίσης, ευχαριστώ τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Μιχάλη Γεωργιακόδη καθώς και τον Καθηγητή κ. Φώτη Γεωργιακώδη, για τη στήριξη που απλόχερα μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια της προσπάθειας αυτής.

Επιπλέον, ευχαριστώ τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Αντώνιο Παναγιωτόπουλο, ο οποίος αποτέλεσε μια αστείρευτη πηγή γνώσεων και εμπειριών σε επιστημονικά και εκπαιδευτικά θέματα.

Επιπρόσθετα, ευχαριστώ τον διδάκτορα Ιωάννη Τασούλα, για τη βοήθεια που μου προσέφερε για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής, αλλά και για τα πολύτιμα ερεθίσματα που μου έδωσε σε διάφορα επιστημονικά θέματα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάκτορες Μιχάλη Φραγκάκη και Μαριλένα Πούλου καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Νίκο Αρούκατο.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη συνεχή υποστήριξη που μου προσέφεραν.

Περίληψη

Οι αριθμοί Catalan θεωρούνται ως οι πιο σημαντικοί αριθμοί της Συνδυαστικής, μετά τους διωνυμικούς συντελεστές, λόγω της εντυπωσιακά συχνής εμφάνισής τους σε διάφορα προβλήματα. Ενδεικτικά, ο R. Stanley διατηρεί αρχείο [67] με περισσότερα από 100 διαφορετικά σύνολα συνδυαστικών αντικείμενων που απαριθμούνται από τους αριθμούς Catalan και άρα είναι πληθικά αλλά και δομικά ισοδύναμα. Τα πιο διαδεδομένα από αυτά είναι ίσως τα μονοπάτια (λέξεις) Dyck και τα δυαδικά δένδρα.

Το κεντρικό αντικείμενο μελέτης της διατριβής αυτής είναι τα μονοπάτια Dyck, τα οποία αποτελούν απλά μια αναπαράσταση στο επίπεδο των λέξεων Dyck. Λόγω της απλής και εύληπτης γεωμετρικής τους αναπαράστασης, αποτελούν ένα αντιπροσωπευτικό αντικείμενο της οικογένειας των αντικειμένων Catalan και προσφέρονται για τη μελέτη ιδιοτήτων, οι οποίες μπορούν στη συνέχεια να μεταφραστούν κατάλληλα και σε ιδιότητες των υπόλοιπων αντικειμένων της οικογένειας.

Επιπλέον, με την εισαγωγή κατάλληλων περιορισμών (παραμέτρων), προκύπτουν ειδικές κατηγορίες μονοπατιών Dyck που ισοδυναμούν με σύνολα άλλων γνωστών αντικειμένων, οπότε τα αποτελέσματα επεκτείνονται και στα αντικείμενα αυτά.

Στη διατριβή αυτή, μελετάται η παράμετρος "πλήθος εμφανίσεων του προτύπου τ", όπου ως πρότυπο θεωρείται μια οποιαδήποτε δυαδική λέξη

Στο πρώτο Κεφάλαιο, παρουσιάζονται εκτενώς οι βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στα υπόλοιπα Κεφάλαια.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο, μελετάται το πρόβλημα της απαρίθμησης των εμφανίσεων ενός προτύπου τ σε καθορισμένο ύψος j στο μονοπάτι Dyck. Το πρόβλημα απαντάται πλήρως, για κάθε πρότυπο τ και δίνεται ο τύπος της αντίστοιχης γεννήτριας συνάρτησης. Τα βασικά αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευθεί στην εργασία [44].

Στο τρίτο Κεφάλαιο, μελετάται το πρόβλημα της απαρίθμησης των εμφανίσεων ενός προτύπου τ ανεξαρτήτως ύψους ή όταν το ύψος τους είναι τουλάχιστον j. Το πρόβλημα απαντάται πλήρως, μέσω της αντίστοιχης γεννήτριας συνάρτησης, όταν το πρότυπο τ είναι ένα πρόθεμα Dyck ή ένα επίθεμα Dyck, καθώς και σε ορισμένες άλλες γενικές περιπτώσεις. Σημειώνεται ότι η πλήρης γενίκευση των αποτελεσμάτων που καλύπτει όλες τις δυνατές μορφές του προτύπου τ αποτελεί ανοικτό πρόβλημα. Τα βασικά αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευθεί στην εργασία [45].

Στο τέταρτο Κεφάλαιο, μελετάται το πρόβλημα της απαρίθμησης των εμφανίσεων ενός προτύπου τ μήκους 3 σε μονοπάτια Grand-Dyck. Επιπλέον, θεωρώντας τη βοηθητική παράμετρο "πλήθος ανόδων σε αρνητικό ύψος", προκύπτουν σε ορισμένες περιπτώσεις εκλεπτύνσεις του θεωρήματος Chung-Feller. Τα βασικά αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευθεί στην εργασία [47].

Στο πέμπτο Κεφάλαιο, μελετώνται τρεις νέες παράμετροι οι οποίες αποτελούν εξειδικεύσεις της γνωστής παραμέτρου "πλήθος κορυφών" των μονοπατιών Dyck. Τα βασικά αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου είναι υπό κρίση προς δημοσίευση.

Στο έκτο Κεφάλαιο δίδονται ακριβείς αλλά και ασυμπτωτικοί τύποι για τη μέση τιμή και τη διακύμανση των παραμέτρων που παρουσιάζονται στα υπόλοιπα κεφάλαια. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν παρουσιαστεί στα συνέδρια [43] και [48].

Δημοσιεύσεις - Ανακοινώσεις

Δημοσιεύσεις σε περιοδικά με κριτές:

1. Recursive generation of k-ary trees, *Journal of Integer Sequences*, Vol. **12** (2009), Article 09.7.7.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

2. Counting strings at height j in Dyck paths, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **141** (2011), pp. 2100-2107.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

3. General results on the enumeration of strings in Dyck paths, *Electronic Journal of Combinatorics*, Vol. **18** (2011), #P74.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

4. Strings of length 3 in Grand-Dyck paths and the Chung-Feller property, *Electronic Journal of Combinatorics*, Vol. **19** (2012), #P2.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

5. Nonleft peaks in Dyck paths: A combinatorial approach, *submitted.*

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

Δημοσιεύσεις σε τιμητικούς τόμους:

1. Counting some long strings in Dyck paths, *Essays in Honour of Prof. K. Rigas*, University of Piraeus (2010) (in press).

   Με Π. Τσικούρα.

Ανακοινώσεις σε Συνέδρια:

1. A new decomposition of k-ary trees, 1st Istanbul Design Theory and Combinatorial Conference, Instanbul, June 16-20, 2008.

   Με Π. Τσικούρα.

2. k-ary trees and generalized Dyck paths, 22nd British Combinatorial Conference, St. Andrews, July 5-10, 2009.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

3. Strings in Dyck paths. 7th International Conference on Lattice Paths Combinatorics and Applications, Siena, Italy, July 4-7, 2010.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

4. The enumeration of strings at height j in Dyck paths, 3rd Polish Combinatorial Conference, Bedlewo, September 24-30, 2010.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

5. Mean value and variance for some Dyck path parameters, 23rd British Combinatorial Conference, Exeter, July 3-8, 2011.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

6. Counting strings in Dyck path using the Goulden-Jackson cluster method, 2nd European Conference for the Applied Mathematics and Informatics, Montreux, Switzerland, December 29-31, 2011.

   Με Α. Σαπουνάκη, Π. Τσικούρα και Ι. Τασούλα.

   Δημοσιεύτηκε στο Recent Researches in Applied Mathematics and Informatics.

7. Data Hiding Techniques in Steganography using Fibonacci and Catalan numbers, The International Conference on Information Technology: New Generations, Las Vegas, Nevada, USA, April 15-18, 2012.

   Με Ν. Αρούκατο, Σ. Ζήμερα και Φ. Γεωργιακώδη.

8. Data Hiding Techniques in Steganography using sub-Fibonacci Sequences, Eighth International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing, University of Piraeus, July 18-20, 2012.

   Με Ν. Αρούκατο, Σ. Ζήμερα και Φ. Γεωργιακώδη.

9. Counting nonleft peaks in Dyck paths, 24th British Combinatorial Conference, Royal Holloway, University of London, June 30 - July 5, 2013.

   Με Α. Σαπουνάκη, Ι. Τασούλα και Π. Τσικούρα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

1.1 Συμβολισμοί

Αν p είναι μια λογική πρόταση, τότε ορίζεται η έκφραση

$$[p] = \begin{cases} 1, & p \text{ αληθής}, \\ 0, & p \text{ ψευδής}, \end{cases}$$

η οποία ονομάζεται *συμβολισμός Iverson*.

Το *δέλτα του Kronecker* $\delta_{n,k}$, όπου $n, k \in \mathbb{Z}$, ορίζεται ως

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

Ισοδύναμα, είναι

$$\delta_{n,k} = [n = k].$$

Το *(κάτω) ακέραιο μέρος* (floor) του πραγματικού x συμβολίζεται με $\lfloor x \rfloor$ και ορίζεται ως ο μέγιστος ακέραιος, όχι μεγαλύτερος από το x, δηλαδή

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Το *άνω ακέραιο μέρος* (ceiling) του πραγματικού x συμβολίζεται με $\lceil x \rceil$ και ορίζεται ως ο ελάχιστος ακέραιος, όχι μικρότερος από το x, δηλαδή

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$

Ισοδύναμα, οι ακέραιοι $\lfloor x \rfloor$ και $\lceil x \rceil$ ορίζονται μονοσήμαντα από τη σχέση

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Το *θετικό μέρος* του πραγματικού x συμβολίζεται με x^+ και ορίζεται ως

$$x^+ = \max\{0, x\}.$$

Αν $k, n \in \mathbb{Z}$, τότε συμβολίζουμε με $[k, n]$ το σύνολο

$$[k, n] = \{x \in \mathbb{Z} : k \leq x \leq n\}.$$

Ειδικά, συμβολίζουμε με $[n]$ το σύνολο

$$[n] = [1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Το *παραγοντικό πολυώνυμο* (falling factorial), βαθμού k, ως προς τη μεταβλητή x, συμβολίζεται με $x^{\underline{k}}$ ή με $[x]_k$ και ορίζεται ως

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad k \in \mathbb{N}^*, \qquad x^{\underline{0}} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά, αν $n, k \in \mathbb{N}$, με $n \geq k$, τότε ο αριθμός $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ ισούται με το πλήθος των διατεταγμένων k-άδων από στοιχεία του $[n]$.

Ο *διωνυμικός συντελεστής* "r ανά k" συμβολίζεται με $\binom{r}{k}$ και ορίζεται ως

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!}, & k \geq 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά, αν $n, k \in \mathbb{N}$, με $n \geq k$, τότε ο αριθμός $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$, τα οποία έχουν πληθάριθμο k.

Από τον ορισμό, άμεσα προκύπτουν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, \quad r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, \qquad \binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k}, \quad r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N},$$

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}, \quad m, k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}.$$

Η ονομασία των διωνυμικών συντελεστών προκύπτει από το *διωνυμικό θεώρημα*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

το οποίο γενικεύεται ως εξής:

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}, \qquad r \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{x}{y}\right| < 1.$$

1.2 Δυναμοσειρές

Στην ενότητα αυτή, δίνεται ο ορισμός της δυναμοσειράς από καθαρά αλγεβρική σκοπιά. Ο ορισμός αυτός επαρκεί για την εφαρμογή των δυναμοσειρών στα περισσότερα συνδυαστικά προβλήματα. Εντούτοις, έννοιες που αφορούν τις δυναμοσειρές στην Ανάλυση, όπως η ομοιόμορφη σύγκλιση και η ακτίνα σύγκλισης, είναι επίσης χρήσιμες, για παράδειγμα στην εύρεση ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων.

Ορισμός. *Έστω $(R, +, \cdot)$ ένα σώμα*[1] *με χαρακτηριστική 0.*[2] *Κάθε ακολουθία $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ αναπαριστάνεται από την έκφραση*

$$\sum_{i \geq 0} a_i x^i,$$

η οποία ονομάζεται δυναμοσειρά (της μεταβλητής x).

Τα στοιχεία $a_i \in R$, ονομάζονται *συντελεστές* της δυναμοσειράς $A(x)$. Το σύνολο των δυναμοσειρών με συντελεστές στο R συμβολίζεται ως

$$R[[x]] = \{\sum_{i \geq 0} a_i x^i : \quad a_i \in R, i \in \mathbb{N}\}.$$

[1] Ο ορισμός των δυναμοσειρών γενικεύεται και στην περίπτωση που $(R, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

[2] Δηλαδή, ισχύει ότι $na = 0 \Rightarrow n = 0$, για κάθε $a \in R \setminus \{0\}$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Ισότητα δυναμοσειρών: Οι δυναμοσειρές $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ και $\sum_{i\geq 0} b_i x^i$ είναι ίσες αν και μόνο αν $a_i = b_i$, για κάθε i.

Πράξεις δυναμοσειρών: Στο σύνολο $R[[x]]$ ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (συνέλιξη) ως εξής:

$$\left(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i\geq 0} b_i x^i\right) = \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i) x^i$$

και

$$\left(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} b_i x^i\right) = \sum_{i\geq 0} \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} x^i.$$

Οι πράξεις αυτές γενικεύονται για πεπερασμένο πλήθος όρων. Ειδικά, συμβολίζουμε με $A^i(x)$ το γινόμενο $A(x)A(x)\cdots A(x)$ από i παράγοντες, $i \in \mathbb{N}$, με $A^0(x) = 1$.

Επιπλέον, ορίζουμε την εξωτερική πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot : R \times R[[x]] \to R[[x]]$ ως εξής:

$$\lambda \cdot \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \lambda \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} \lambda a_i x^i, \qquad \lambda \in R.$$

Οι πράξεις αυτές αντιστοιχούν στις πράξεις ακολουθιών του $R^{\mathbb{N}}$:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \qquad \text{(πρόσθεση)},$$

$$(a_n) * (b_n) = (c_n), \quad \text{με } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, n \in \mathbb{N} \qquad \text{(συνέλιξη)},$$

$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n), \quad \lambda \in R \qquad \text{(βαθμωτός πολλαπλασιασμός)}.$$

Παρατηρήσεις

- Στην πράξη, το R είναι συνήθως το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών, ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Επίσης, η μεταβλητή x συνήθως θεωρείται ότι παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, ή στο $\mathbb{C}$.
- Οι δυναμοσειρές συμβολίζονται όπως και οι συναρτήσεις της μεταβλητής x (συνήθως με κεφαλαίο γράμμα):
$$A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i.$$
- Το σύμβολο του αθροίσματος στην έκφραση $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ συμβολίζει ένα άπειρο άθροισμα δυναμοσειρών, δηλαδή
$$\sum_{i\geq 0} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad \text{όπου } a_n x^n = \sum_{i\geq 0} a_i [i = n] x^i, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Το άπειρο άθροισμα δυναμοσειρών ορίζεται, αρκεί ο συντελεστής του x^i να είναι μη μηδενικός σε πεπερασμένο πλήθος όρων του αθροίσματος.

Με τις πράξεις αυτές, η δομή $(R[[x]], +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος[3] με μοναδιαίο στοιχείο τη δυναμοσειρά x^0, η οποία χάριν απλότητας συμβολίζεται με 1. Πράγματι, είναι

$$x^0 \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} [i = 0] x^i \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} \sum_{k=0}^{i} [k = 0] a_{i-k} x^i = \sum_{i\geq 0} a_i x^i = A(x).$$

[3]Μάλιστα, άμεσα προκύπτει ότι το $R[[x]]$ είναι ακέραιη περιοχή, διότι και το R είναι ακέραιη περιοχή.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι

$$x^m \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Συμμετρική δυναμοσειρά: Ο συντελεστής a_0 της δυναμοσειράς $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ ονομάζεται *σταθερός όρος* της $A(x)$ και συμβολίζεται με $A(0)$.

Η δυναμοσειρά $A(x)$ έχει *συμμετρική* (ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού), η οποία συμβολίζεται με $A^{-1}(x)$ ή $\frac{1}{A(x)}$ αν και μόνο αν $A(0) \neq 0$. Πράγματι, είναι

$$A(x)B(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0} a_i x^i \sum_{i\geq 0} b_i x^i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0} \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} x^i = \sum_{i\geq 0} [i=0] x^i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = [i=0], \forall i \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ \vdots \\ a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0 = 0. \end{cases}$$

Έτσι, αν $A(x)B(x) = 1$, τότε $a_0 b_0 = 1$, οπότε $a_0 \neq 0$, ενώ αν είναι $a_0 \neq 0$, τότε οι συντελεστές της $B(x)$ μπορούν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, έτσι ώστε να είναι $A(x)B(x) = 1$.

Για παράδειγμα, η συμμετρική της $\sum_{i\geq 0} x^i$ είναι η $1-x$, αφού αν θέσουμε $1 - x = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, με $a_0 = 1, a_1 = -1$ και $a_i = 0$, για κάθε $i > 1$, τότε $\sum_{k=0}^{i} a_k = [i = 0]$, οπότε είναι

$$(1-x)\sum_{i\geq 0} x^i = \sum_{i\geq 0} \sum_{k=0}^{i} a_k x^i = \sum_{i\geq 0} [i=0] x^i = x^0 = 1$$

και γράφουμε

$$\sum_{i\geq 0} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται *γεωμετρική σειρά* και έχει ιδιαίτερα σημαντικές ιδιότητες. Για παράδειγμα,

$$\frac{1}{1-x} \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} x^i \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} \sum_{k=0}^{i} a_k x^i,$$

δηλαδή το γινόμενό της με μια οποιαδήποτε δυναμοσειρά, με συντελεστές τους όρους της ακολουθίας (a_i), δίνει μια νέα δυναμοσειρά με συντελεστές τους όρους της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της (a_i).

Σύνθεση δυναμοσειρών: Αν $A(x), B(x) \in R[[x]]$, με $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ και $B(x) = \sum_{i\geq 0} b_i x^i$, τότε η σύνθεση

$$A(B(x)) = \sum_{i\geq 0} a_i B^i(x)$$

είναι ένα άθροισμα δυναμοσειρών (αφού η έκφραση $a_i B^i(x)$ είναι δυναμοσειρά). Το άθροισμα αυτό ορίζεται, αρκεί κάθε μονώνυμο x^i να εμφανίζεται με μη μηδενικό συντελεστή πεπερασμένες το πλήθος φορές σε αυτό, ώστε οι συντελεστές της νέας δυναμοσειράς να ανήκουν στο R. Μια ικανή συνθήκη για να ισχύει αυτό, είναι η $A(x)$ να είναι πολυώνυμο, δηλαδή να έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών συντελεστών. Μια άλλη ικανή συνθήκη είναι η $B(0) = 0$. Πράγματι, αναπτύσσοντας το δεύτερο μέλος:

$$\sum_{i\geq 0} a_i B^i(x) = a_0 + a_1(b_0 + b_1 x + \cdots) + a_2(b_0 + b_1 x + \cdots)^2 + \cdots ,$$

παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος προκύπτει από το άπειρο άθροισμα $a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots$, το οποίο δεν είναι πάντα ορισμένο στο R. Από την άλλη, αν $B(0) = 0$, τότε ο παραπάνω σταθερός όρος ισούται με a_0 και ο όρος $a_k B^k(x)$ δεν συνεισφέρει στον συντελεστή του x^i, όταν $k > i$, οπότε ο συντελεστής του x^i στην $A(B(x))$ ισούται με το συντελεστή του x^i στο άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{i} a_k B^k(x) = \sum_{k=0}^{i} a_k (b_0 + b_1 x + \cdots)^k,$$

το οποίο είναι ορισμένο ως πεπερασμένο άθροισμα δυναμοσειρών.

Αντίστροφη δυναμοσειρά: Αν $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \in R[[x]]$ και υπάρχει $B(x) \in R[[x]]$, με $B(0) \neq 0$, τέτοια ώστε $A(x) = xB(x)$ (δηλαδή ισχύουν $a_0 = 0$ και $a_1 \neq 0$), τότε υπάρχει δυναμοσειρά, η οποία συμβολίζεται με $A^{(-1)}(x)$ και ονομάζεται *αντίστροφη* (ως προς την πράξη της σύνθεσης) της $A(x)$, τέτοια ώστε $A(A^{(-1)}(x)) = A^{(-1)}(A(x)) = x$. Οι συντελεστές της $A^{(-1)}(x)$ προσδιορίζονται μονοσήμαντα από ένα σύστημα εξισώσεων, όπως στην περίπτωση της συμμετρικής δυναμοσειράς.

Παράγωγος δυναμοσειράς: Αν $A(x) \in R[[x]]$, με $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, τότε η παράγωγος της $A(x)$ συμβολίζεται με $\dfrac{dA}{dx}$ ή $A'(x)$ και ισούται με

$$A'(x) = \sum_{i\geq 1} i a_i x^{i-1} = \sum_{i\geq 0} (i+1) a_{i+1} x^i.$$

Ο τελεστής παραγώγισης ισοδύναμα ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση $\frac{d}{dx} : R[[x]] \to R[[x]]$, με

$$\frac{d}{dx} 1 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx} x^i = i x^{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Κατόπιν τούτων, οι γνωστές από την Ανάλυση ιδιότητες της παραγώγισης, άμεσα προκύπτουν και για τις δυναμοσειρές:

$$\begin{aligned} &(\lambda A(x) + \mu B(x))' = \lambda A'(x) + \mu B'(x) && \text{(γραμμικότητα)},\\ &(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x) && \text{(κανόνας γινομένου)},\\ &(A(B(x)))' = \left(\frac{d}{dB} A(B(x))\right) \frac{dB}{dx} = A'(B(x))B'(x) && \text{(κανόνας αλυσίδας)}. \end{aligned}$$

Οι παράγωγοι ανώτερης τάξης συμβολίζονται με $\dfrac{d^n A}{dx^n}$ ή $A^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζονται επαγωγικά κατά τα γνωστά, και επιπλέον ισχύει ο γνωστός τύπος του Taylor:

$$a_n = \frac{1}{n!} A^{(n)}(0), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ολοκλήρωμα δυναμοσειράς: Αν $A(x) \in R[[x]]$, με $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, τότε το ολοκλήρωμα της $A(x)$ συμβολίζεται με $\int_0^x A(t)dt$ και ισούται με

$$\int_0^x A(t)dt = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} a_{i-1} x^i.$$

Άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες:

$$\int_0^x A'(t)dt = A(x) - A(0), \qquad \left(\int_0^x A(t)dt\right)' = A(x)$$

και

$$\int_0^x A'(t)B(t)dt = A(x)B(x) - A(0)B(0) - \int_0^x A(t)B'(t)dt, \quad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση).}$$

Η διωνυμική σειρά: Όταν το σύνολο R των συντελεστών είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, τότε, για $s \in R$, ορίζουμε τη δυναμοσειρά

$$(1+x)^s = \sum_{i\geq 0} \binom{s}{i} x^i,$$

η οποία ονομάζεται *διωνυμική σειρά*. Όπως προκύπτει, η διωνυμική σειρά ικανοποιεί όλες τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων, όπως παραδείγματος χάριν

$$(1+x)^s(1+x)^t = (1+x)^{s+t} \quad \text{και} \quad ((1+x)^s)' = s(1+x)^{s-1}.$$

Αν $A(x) \in R[[x]]$, με $A(0) = 0$, τότε ορίζεται η σύνθεση $(1 + A(x))^s$. Γενικότερα, ορίζεται η σύνθεση $(a + A(x))^s$, για κάθε $a \neq 0$, αφού είναι

$$(a + A(x))^s = a^s(1 + \frac{1}{a}A(x))^s, \qquad \text{με } \frac{1}{a}A(0) = 0.$$

Κατόπιν τούτων, για κάθε $B(x) \in R[[x]]$, με $B(0) \neq 0$, ορίζεται η δύναμη $B^s(x)$, για κάθε $s \in R$.

Ρίζες δυναμοσειράς: Με βάση τα προηγούμενα, η εξίσωση $A^n(x) = B(x)$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $B(x)$ είναι μια γνωστή δυναμοσειρά με $B(0) \neq 0$, έχει λύση την $A(x) = B^{1/n}(x)$, η οποία ονομάζεται *ρίζα* της $B(x)$. Μάλιστα, η λύση αυτή είναι μοναδική. Πράγματι, αν υπάρχει και μια άλλη λύση $\Gamma(x)$, τότε είναι $A^n(x) = \Gamma^n(x)$, οπότε

$$(A(x) - \Gamma(x))(A^{n-1}(x) + A^{n-2}(x)\Gamma(x) + \cdots + \Gamma^{n-2}(x)A(x) + \Gamma^{n-1}(x)) = 0.$$

Επειδή το $R[[x]]$ είναι ακέραιη περιοχή, έπεται ότι αν $A(x) \neq \Gamma(x)$, τότε

$$\Delta(x) = A^{n-1}(x) + A^{n-2}(x)\Gamma(x) + \cdots + \Gamma^{n-2}(x)A(x) + \Gamma^{n-1}(x) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\Delta(0) = n\left(B^{1/n}(0)\right)^{n-1} \neq 0$ (διότι το R έχει χαρακτηριστική 0). Άρα, τελικά είναι $\Gamma(x) = A(x)$.

Συνεπώς, οι πολυωνυμικές εξισώσεις με αγνώστους και συντελεστές στο $R[[x]]$ λύνονται όπως και οι γνωστές πολυωνυμικές εξισώσεις της μεταβλητής x.

Δυναμοσειρές πολλών μεταβλητών: Οι δυναμοσειρές με πολλές μεταβλητές ορίζονται ανάλογα με την περίπτωση μιας μεταβλητής, αρκεί να τεθούν

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = (i_1, i_2, \ldots, i_m) \quad \text{και} \quad x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m},$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_m$, με $m \in \mathbb{N}^*$, είναι μεταβλητές και $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$.

Δεδομένου ότι το $R[[x]]$ είναι φορέας αντιμεταθετικού δακτυλίου με μοναδιαίο στοιχείο, μια δυναμοσειρά πολλών μεταβλητών μπορεί να θεωρηθεί ως δυναμοσειρά με λιγότερες μεταβλητές και με συντελεστές που είναι δυναμοσειρές. Για παράδειγμα, είναι

$$A(x,y) = \sum_{i,j\geq 0} a_{i,j} x^i y^j = \sum_{i\geq 0} \left(\sum_{j\geq 0} a_{i,j} y^j \right) x^i = \sum_{i\geq 0} A_i(y) x^i, \qquad A_i(y) \in R[[y]].$$

Οι ιδιότητες των δυναμοσειρών μίας μεταβλητής επεκτείνονται και στην περίπτωση πολλών μεταβλητών. Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η έννοια της μερικής παραγώγου, η οποία ορίζεται ανάλογα και ικανοποιεί όλες τις γνωστές από την Ανάλυση ιδιότητες. Έτσι, για την $A(x,y)$ του προηγούμενου παραδείγματος, η μερική παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x είναι

$$\frac{\partial}{\partial x} A(x,y) = \sum_{i\geq 1, j\geq 0} a_{i,j} i x^{i-1} y^j = \sum_{i\geq 1} i A_i(y) x^{i-1}.$$

Ο τελεστής $[x^n]$: Για κάθε δυναμοσειρά $A(x) \in R[[x]]$, με $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, συμβολίζουμε το συντελεστή a_n του μονωνύμου x^n με $[x^n]A(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο αυστηρά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο τελεστής $[x^n]$ ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση $[x^n] : R[[x]] \to R$, με

$$[x^n]x^i = \delta_{n,i}.$$

Έτσι, είναι

$$[x^n]A(x) = [x^n] \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} a_i [x^n] x^i = \sum_{i\geq 0} a_i \delta_{n,i} = a_n.$$

Βάσει του ορισμού, άμεσα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. **(Γραμμικότητα)** $[x^n](\kappa A(x) + \lambda B(x)) = \kappa [x^n] A(x) + \lambda [x^n] B(x)$.
2. **(Ολίσθηση)** $[x^n] x^k A(x) = [x^{n-k}] A(x), \quad k \in \mathbb{Z}$.
3. **(Παραγώγιση)** $[x^n] A'(x) = [x^{n+1}](n+1) A(x)$.
4. **(Συνέλιξη)** $[x^n] A(x) B(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} [x^k] A(x) [x^{n-k}] B(x)$.
5. **(Σύνθεση)** $[x^n] A(B(x)) = \sum_{i\geq 0} a_i [x^n] B^i(x) = \sum_{i=0}^{n} [x^i] A(x) [x^n] B^i(x)$.

Σημειώνεται ότι όλη η θεωρία που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα, γενικεύεται και για σειρές της μορφής $\sum_{i\geq m} a_i x^i$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, οι οποίες ονομάζονται σειρές Laurent.

1.3 Το Θεώρημα Αντιστροφής Lagrange

Το Θεώρημα Αντιστροφής Lagrange παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη Συνδυαστική Απαρίθμηση, καθώς επιτρέπει τον προσδιορισμό των συντελεστών μιας δυναμοσειράς μέσω του προσδιορισμού των συντελεστών μιας άλλης, συνήθως απλούστερης έκφρασης.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Αντιστροφής Lagrange). *Αν $A(x) \in R[[x]]$, με $A(0) = 0$ και $A'(0) \neq 0$, τότε ισχύει ότι*

$$[x^n]A^k(x) = \frac{k}{n}[x^{n-k}]\left(\frac{x}{A^{(-1)}(x)}\right)^n, \qquad n > 0, k > 0,$$

όπου $A^{(-1)}(x)$ είναι η αντίστροφη της $A(x)$.

Ενδεικτικά, διάφορες αποδείξεις του παραπάνω θεωρήματος παρουσιάζονται στα [28,66,71].

Οι συνθήκες $A(0) = 0$ και $A'(0) \neq 0$ απλώς εξασφαλίζουν την ύπαρξη της $A^{(-1)}(x)$. Η έκφραση $\frac{x}{A^{(-1)}(x)}$ αντιστοιχεί στη συμμετρική της $B(x) = x^{-1}A^{(-1)}(x)$ (η οποία υπάρχει, διότι $[x]A^{(-1)} \neq 0 \Rightarrow B(0) \neq 0$).

Επιπλέον, το θεώρημα αυτό γενικεύεται και στην περίπτωση που η $A(x)$ είναι σειρά Laurent, οπότε οι n, k μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές.

Το Θεώρημα 1.1 μπορεί επίσης να διατυπωθεί στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

Πόρισμα 1.2. *Αν $A(x), H(x) \in R[[x]]$, με $H(0) \neq 0$ και $A(x) = xH(A(x))$, τότε ισχύει ότι*

$$[x^n]A^k(x) = \frac{k}{n}[x^{n-k}]H^n(x), \qquad n > 0, k > 0.$$

Πράγματι, η $\frac{1}{H(x)}$ ορίζεται, αφού $H(0) \neq 0$. Επιπλέον, από τη σχέση $A(x) = xH(A(x))$ έπεται ότι ορίζεται και η $A^{(-1)}(x)$. Έτσι, έχουμε ότι

$$A(x) = xH(A(x)) \Rightarrow \frac{A(x)}{H(A(x))} = x \Rightarrow \frac{x}{H(x)} = A^{(-1)}(x) \Rightarrow \frac{x}{A^{(-1)}(x)} = H(x).$$

Το Πόρισμα 1.2 γενικεύεται στο επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο εμφανίζεται στη βιβλιογραφία συνήθως με την ονομασία "Τύπος Αντιστροφής Lagrange" (Lagrange Inversion Formula).

Πρόταση 1.3 (Τύπος Αντιστροφής Lagrange). *Αν $A(x), H(x), G(x) \in R[[x]]$, με $H(0) \neq 0$ και $A(x) = xH(A(x))$, τότε ισχύει ότι*

$$[x^n]G(A(x)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]G'(x)H^n(x), \qquad n > 0.$$

Απόδειξη. Αν $G(x) = \sum_{i\geq 0} g_i x^i$, τότε, για $n > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[x^n]G(A(x)) &= [x^n]\sum_{i\geq 1} g_i A^i(x) = \sum_{i\geq 1} g_i [x^n]A^i(x) = \sum_{i\geq 1} g_i \frac{i}{n}[x^{n-i}]H^n(x) \\
&= \sum_{i\geq 1} g_i \frac{i}{n}[x^{n-1}]x^{i-1}H^n(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]H^n(x)\sum_{i\geq 1} g_i i x^{i-1} \\
&= \frac{1}{n}[x^{n-1}]H^n(x)G'(x).
\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια, δίνεται μια παραλλαγή της Πρότασης 1.3 (βλ. [17]), η οποία αφορά δυναμοσειρές με σταθερό όρο 1.

Πρόταση 1.4 (Τύπος Αντιστροφής Lagrange - 2η μορφή). *Αν $A(x) \in R[[x]]$, με $A(x) = 1 + xH(A(x))$, όπου $H(\lambda)$ είναι πολυώνυμο του λ, με συντελεστές στο $R[[x]]$ και $H(1) \neq 0$, τότε ισχύει ότι*

$$[x^n]A^s(x) = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{s-1}H^n(1+\lambda), \qquad n > 0, s \in R$$

και

$$[x^n]G(A(x)) = \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]G'(1+\lambda)H^n(1+\lambda), \qquad n > 0,$$

όπου $G(\lambda)$ είναι πολυώνυμο του λ, με συντελεστές στο $R[[x]]$.

Απόδειξη. Αρχικά, επισημαίνεται ότι, επειδή τα $H(\lambda), G(\lambda)$ είναι πολυώνυμα, ορίζονται οι συνθέσεις $H(A(x))$ και $G(A(x))$. Θέτοντας $h(\lambda) = H(1+\lambda)$ και $g(\lambda) = G(1+\lambda)$, έχουμε ότι

$$A(x) = 1 + xH(A(x)) \Rightarrow A(x) - 1 = xh(A(x) - 1)$$

και $G(A(x)) = g(A(x)-1)$, οπότε, από την Πρόταση 1.3 και με την αντικατάσταση $x = \lambda$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}[x^n]G(A(x)) = [\lambda^n]G(A(\lambda)) = [\lambda^n]g(A(\lambda) - 1) &= \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]g'(\lambda)h^n(\lambda)\\ &= \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]G'(1+\lambda)H^n(1+\lambda).\end{aligned}$$

Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned}[x^n]A^s(x) = [\lambda^n]A^s(\lambda) = [\lambda^n](1 + A(\lambda) - 1)^s &= \sum_{i\geq 1}\binom{s}{i}[\lambda^n](A(\lambda)-1)^i\\ &= \sum_{i\geq 1}\binom{s}{i}[\lambda^{n-i}]\frac{i}{n}h^n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}\binom{s}{i}[\lambda^{n-1}]\lambda^{i-1}\frac{i}{n}h^n(\lambda)\\ &= [\lambda^{n-1}]\frac{1}{n}h^n(\lambda)\sum_{i\geq 1}\binom{s}{i}i\lambda^{i-1} = [\lambda^{n-1}]\frac{1}{n}h^n(\lambda)((1+\lambda)^s)'\\ &= [\lambda^{n-1}]\frac{s}{n}h^n(\lambda)(1+\lambda)^{s-1}.\end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις:

- Στη διατριβή αυτή, χρησιμοποιείται αυτή η μορφή του Τύπου Αντιστροφής Lagrange, διότι όλες οι δυναμοσειρές που προκύπτουν έχουν σταθερό όρο 1 και ικανοποιούν κάποια πολυωνυμική εξίσωση της μορφής $A(x) = 1 + xH(A(x))$.

- Η εισαγωγή της μεταβλητής λ στον τύπο γίνεται προκειμένου να συμπεριληφθούν και οι περιπτώσεις όπου το πολυώνυμο $H(\lambda)$ έχει συντελεστές που περιέχουν το x. Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, είναι δυνατή η εφαρμογή του Τύπου Αντιστροφής Lagrange και η δυναμοσειρά $A(x)$ γράφεται ως

$$A(x) = 1 + \sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}[\lambda^{i-1}]H^i(1+\lambda)x^i.$$

  Μάλιστα, για $n > 0$, είναι

$$\begin{aligned}[x^n]A(x) = [x^n]\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}[\lambda^{i-1}]H^i(1+\lambda)x^i &= \sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}[x^{n-i}][\lambda^{i-1}]H^i(1+\lambda)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}[x^{n-i}][\lambda^{i-1}]H^i(1+\lambda),\end{aligned}$$

  δηλαδή, ο συντελεστής $[x^n]A(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με μια διαδικασία πεπερασμένων σε πλήθος βημάτων.

1.4 Γεννήτριες συναρτήσεις

Ορισμός. *(Συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ονομάζεται η δυναμοσειρά*

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Παράδειγμα: Οι αριθμοί Fibonacci ορίζονται από την αναδρομική σχέση

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \geq 0, \qquad f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Έστω $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(f_n)_{n\geq 0}$. Με τη βοήθεια της $f(x)$, θα προσδιορισθεί ένας κλειστός τύπος για τον όρο f_n.

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω αναδρομική σχέση με x^{n+2} και αθροίζοντας για κάθε $n \geq 0$, προκύπτει ότι

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n\geq 0} f_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n\geq 0} f_n x^{n+2} \Rightarrow f(x) - f_0 - f_1 x = x(f(x) - f_0) + x^2 f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, οπότε

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-x\phi_1)(1-x\phi_2)} = \frac{1}{\phi_1-\phi_2}\left(\frac{1}{1-x\phi_1} - \frac{1}{1-x\phi_2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0}\phi_1^n x^n - \sum_{n\geq 0}\phi_2^n x^n\right).$$

Επομένως, τελικά προκύπτει ο γνωστός τύπος

$$f_n = [x^n]f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_1^n - \phi_2^n\right).$$

Ορισμός. *Αν* $\mathcal{A}$ *είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και* $p : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ *μια απεικόνιση, τότε η* p *ονομάζεται παράμετρος (του συνόλου* $\mathcal{A}$*).*

Στις εφαρμογές, το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων και μελετώνται διάφορες παράμετροι σε αυτό.

Παραδείγματα:

- Για το σύνολο $\{0,1\}^*$ των δυαδικών λέξεων, ορισμένες συνηθισμένες παράμετροι είναι το πλήθος των γραμμάτων την λέξης, το πλήθος των 0 κ.τ.λ.

- Για το σύνολο των δυαδικών δένδρων, ορισμένες συνηθισμένες παράμετροι είναι το πλήθος των κορυφών, το πλήθος των φύλλων του δένδρου κ.τ.λ.

Μια παράμετρος p στο σύνολο $\mathcal{A}$ ονομάζεται *βασική*, αν τα σύνολα

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} : p(\alpha) = n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι πεπερασμένα. Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς την παράμετρο αυτή:

Ορισμός. *Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και $p : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ είναι μια βασική παράμετρος, τότε η δυναμοσειρά*

$$A(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{p(\alpha)}$$

ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς την παράμετρο p.

Ισοδύναμα, η απεικόνιση p ορίζει την ακολουθία πληθαρίθμων $(|\mathcal{A}_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Κατόπιν τούτου, οι δύο παραπάνω ορισμοί των γεννητριών συναρτήσεων είναι ισοδύναμοι, αν τεθεί $|\mathcal{A}_n| = a_n$. Πράγματι, τότε είναι

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{p(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}} x^{p(\alpha)} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} x^{p(\alpha)} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} x^n = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{A}_n| x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Το μονώνυμο $x^{p(\alpha)}$ ονομάζεται *βάρος* του στοιχείου $\alpha \in \mathcal{A}$ και η τιμή $p(\alpha)$ ονομάζεται *μέγεθος* του στοιχείου α. Λέμε ότι η μεταβλητή x *κωδικοποιεί* την παράμετρο p και ότι η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ *απαριθμεί* το σύνολο $\mathcal{A}$, ως προς την παράμετρο p, με την έννοια ότι η απάντηση στην ερώτηση "πόσα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{A}$ έχουν τιμή της παραμέτρου p ίση με n" είναι ο συντελεστής του x^n στην $A(x)$.

Οι γεννήτριες συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν είτε ως αλγεβρικές δυναμοσειρές, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, είτε ως δυναμοσειρές της Ανάλυσης, όταν έχουν μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης. Στην παρούσα διατριβή, όλες οι γεννήτριες συναρτήσεις που προκύπτουν έχουν μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης, οπότε όλες οι πράξεις που αφορούν γεννήτριες συναρτήσεις τεκμηριώνονται και ως πράξεις πραγματικών συναρτήσεων.

Αναμφίβολα, η σημαντικότερη γεννήτρια συνάρτηση είναι η διωνυμική σειρά

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k, \qquad r \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση των διωνυμικών συντελεστών $\binom{r}{k}$. Ενδεικτικά, βάσει της διωνυμικής σειράς, προκύπτουν οι γεννήτριες συναρτήσεις

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k \geq 0} \binom{-r}{k} (-x)^k = \sum_{k \geq 0} \binom{r+k-1}{k} x^k, \quad r \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

και

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{j \geq 0} \binom{m+j}{j} x^{m+j} = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{m} x^k, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Σημειώνεται ότι η γεωμετρική σειρά αποτελεί ειδική περίπτωση της $\frac{1}{(1-x)^r}$, για $r = 1$.

Ο κύριος λόγος που καθιστά τις γεννήτριες συναρτήσεις ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων είναι το γεγονός ότι οι πράξεις γεννητριών μεταφράζονται άμεσα σε πράξεις συνόλων. Πιο συγκεκριμένα, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, η ισότητα, το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο γεννητριών συναρτήσεων, αντιστοιχούν στην ισοδυναμία, την ένωση, τη διαφορά και το καρτεσιανό γινόμενο των αντίστοιχων συνόλων. Οι ιδιότητες αυτές παρουσιάζονται πιο αναλυτικά στα επόμενα δύο λήμματα.

Λήμμα 1.5. *Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι δύο αριθμήσιμα σύνολα και $p_A : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$, $p_B : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ είναι δύο βασικές παράμετροι, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) $\mathcal{A}_n \sim \mathcal{B}_n$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *όπου* $\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} : p(\alpha) = n\}$, $\mathcal{B}_n = \{\beta \in \mathcal{B} : p(\beta) = n\}$.

ii) *Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη*[4] *απεικόνιση* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, *τέτοια ώστε* $p_A(\alpha) = p_B(\varphi(\alpha))$, *για κάθε* $\alpha \in \mathcal{A}$.

iii) $A(x) = B(x)$, *όπου* $A(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p_A(\alpha)}$, $B(x) = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{p_B(\beta)}$ *είναι οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις των συνόλων* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, *ως προς τις παραμέτρους αυτές.*

Απόδειξη. "$(i) \Rightarrow (ii)$": Αν είναι $\mathcal{A}_n \sim \mathcal{B}_n$, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\varphi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$. Όμως, τότε ορίζεται η απεικόνιση $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, με

$$\varphi(\alpha) = \varphi_n(\alpha) \Leftrightarrow p_A(\alpha) = n,$$

η οποία είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη. Επομένως, είναι

$$p_A(\alpha) = n \Rightarrow \alpha \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \varphi(\alpha) \in \mathcal{B}_n \Rightarrow p_B(\varphi(\alpha)) = n.$$

"$(ii) \Rightarrow (iii)$": Ο περιορισμός $\varphi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$ της φ στο $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ένα προς ένα, και επιπλέον ισχύει ότι $\varphi_n(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n$, αφού, για $\beta = \varphi(\alpha)$, είναι

$$\alpha \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow p_A(\alpha) = n \Leftrightarrow p_B(\varphi(\alpha)) = n \Leftrightarrow p_B(\beta) = n \Leftrightarrow \beta \in \mathcal{B}_n.$$

Επομένως, είναι $|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{B}_n|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε οι γεννήτριες συναρτήσεις $A(x), B(x)$ είναι ίσες, αφού οι συντελεστές τους ταυτίζονται.

"$(iii) \Rightarrow (i)$": Αν $A(x) = B(x)$, τότε, δεδομένου ότι

$$A(x) = B(x) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |\mathcal{A}_n| x^n = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{B}_n| x^n \Rightarrow |\mathcal{A}_n| = |\mathcal{B}_n|, \forall n \in \mathbb{N},$$

προκύπτει ότι $\mathcal{A}_n \sim \mathcal{B}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Λήμμα 1.6. *Αν* $\mathcal{E}$ *είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, με* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ *και* $p : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ *είναι μια βασική παράμετρος στο* $\mathcal{E}$, *τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

i) *Αν* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, *τότε* $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} x^{p(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p(\alpha)} + \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} x^{p(\alpha)}$.

ii) *Αν* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, *τότε* $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} x^{p(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p(\alpha)} - \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} x^{p(\alpha)}$.

iii) *Η απεικόνιση* $r : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbb{N}$, *με* $r(\alpha,\beta) = p(\alpha) + p(\beta)$, *είναι μια βασική παράμετρος στο* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, *και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} x^{r(\alpha,\beta)} = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} x^{p(\alpha)+p(\beta)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p(\alpha)} \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{p(\beta)}.$$

Απόδειξη. Τα *i)* και *ii)* είναι προφανή. Για το *iii)*, η απεικόνιση r είναι μια βασική παράμετρος στο $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, διότι ορίζει την οικογένεια $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου τα σύνολα

$$\Gamma_n = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : p(\alpha) + p(\beta) = n\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

είναι πεπερασμένα και ξένα ανά δύο και επιπλέον είναι $\Gamma = \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n$. Όμως, επειδή ισοδύναμα είναι

$$\Gamma_n = \{(\alpha,\beta) : \alpha \in \mathcal{A}_k, \beta \in \mathcal{B}_{n-k}, 0 \leq k \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} (\mathcal{A}_k \times \mathcal{B}_{n-k}),$$

[4] Όταν λέμε ότι μια απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη, εννοούμε ότι είναι ένα προς ένα και επί.

έπεται ότι $|\Gamma_n| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{A}_k||\mathcal{B}_{n-k}|$, και επομένως

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} x^{p(\alpha)+p(\beta)} = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} x^{r(\gamma)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{\gamma\in\Gamma_n} x^n = \sum_{n\geq 0} |\Gamma_n| x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} |\mathcal{A}_k||\mathcal{B}_{n-k}| x^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} |\mathcal{A}_n| x^n \sum_{n\geq 0} |\mathcal{B}_n| x^n = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p(\alpha)} \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{p(\alpha)}.$$

□

Αν $p : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ είναι μια βασική παράμετρος και $q : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ είναι μια δεύτερη παράμετρος στο $\mathcal{A}$, τότε η q ονομάζεται *δευτερεύουσα παράμετρος*. Σημειώνεται ότι τα σύνολα

$$\{\alpha \in \mathcal{A} : q(\alpha) = k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

που ορίζει μια δευτερεύουσα παράμετρος δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένα.

Ο περιορισμός της q στο $\mathcal{A}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζει μια ακολουθία $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, με $a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}|$, όπου

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\alpha \in \mathcal{A}_n : q(\alpha) = k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

άρα, ορίζει και τη γεννήτρια συνάρτηση

$$A_n(y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_n} y^{q(\alpha)} = \sum_{k\geq 0} \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}_n \\ q(\alpha)=k}} y^k = \sum_{k\geq 0} a_{n,k} y^k$$

του συνόλου $\mathcal{A}_n$ ως προς την παράμετρο q. Η ακολουθία $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι πεπερασμένη, διότι το $\mathcal{A}_n$ είναι πεπερασμένο, άρα η $A_n(y)$ είναι ένα πολυώνυμο. Η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$, ως προς τις παραμέτρους p, q είναι η δυναμοσειρά

$$A(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p(\alpha)} y^{q(\alpha)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_n} x^n y^{q(\alpha)} = \sum_{n\geq 0} x^n A_n(y) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{n,k} x^n y^k.$$

Επειδή η $A_n(y)$ είναι ένα πολυώνυμο, η μεταβλητή y μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε δυναμοσειρά. Το γεγονός αυτό επισημαίνεται διότι, όπως θα δούμε, τέτοιες αντικαταστάσεις έχουν σημαντικές συνδυαστικές ερμηνείες. Προς το παρόν, απλώς αναφέρουμε ενδεικτικά την αντικατάσταση $y = 1$, για την οποία έχουμε

$$A(x,1) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{k\geq 0} a_{n,k} = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{A}_n| x^n = A(x),$$

δηλαδή με την αντικατάσταση αυτή προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση μιας μεταβλητής, ως προς την παράμετρο p.

Ανάλογα ορίζονται και γεννήτριες συναρτήσεις τριών ή περισσότερων μεταβλητών. Σημειώνεται ότι το πλήθος των μεταβλητών μπορεί να είναι άπειρο (αλλά αριθμήσιμο).

Στατιστική της δευτερεύουσας παραμέτρου q (ως προς τη βασική παράμετρο p) ονομάζεται η κατανομή των στοιχείων $\alpha \in \mathcal{A}_n$ στις κλάσεις $\mathcal{A}_{n,k}$, με βάση την τιμή k της δευτερεύουσας παραμέτρου. Η στατιστική αυτή συμβολίζεται με N_q και ταυτίζεται με τη διπλή ακολουθία $(a_{n,k})_{k,n\in\mathbb{N}}$.

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι δύο αριθμήσιμα σύνολα με αντίστοιχες βασικές παραμέτρους τις p_A, p_B και αντίστοιχες δευτερεύουσες παραμέτρους τις q_A, q_B, οι οποίες ορίζουν αντίστοιχα τις στατιστικές $(a_{n,k})_{k,n\in\mathbb{N}}$ και $(b_{n,k})_{k,n\in\mathbb{N}}$, τότε λέμε ότι οι παράμετροι q_A, q_B είναι *ισοκατανεμημένες* αν και μόνο αν είναι

$$a_{n,k} = b_{n,k}, \quad \text{για κάθε } n, k \in \mathbb{N}.$$

Στην περίπτωση αυτή, οι αντίστοιχες στατιστικές επίσης ονομάζονται ισοκατανεμημένες και γράφουμε $N_{q_A} \sim N_{q_B}$.

Άμεσα προκύπτει ότι οι q_A, q_B είναι ισοκατανεμημένες αν και μόνο αν οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις είναι ίσες. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} N_{q_A} \sim N_{q_B} \Leftrightarrow a_{n,k} = b_{n,k}, \forall n,k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{n,k}x^n y^k = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} b_{n,k}x^n y^k \\ \Leftrightarrow A(x,y) = B(x,y). \end{aligned}$$

Επιπλέον, οι q_A, q_B είναι ισοκατανεμημένες αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, τέτοια ώστε

$$p_A(\alpha) = p_B(\varphi(\alpha)) \quad \text{και} \quad q_A(\alpha) = q_B(\varphi(\alpha)),$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$. Πράγματι, τότε είναι

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{p_B(\beta)}y^{q_B(\beta)} = \sum_{\varphi(\alpha)\in\mathcal{B}} x^{p_B(\varphi(\alpha))}y^{q_B(\varphi(\alpha))} = \sum_{\varphi(\alpha)\in\mathcal{B}} x^{p_A(\alpha)}y^{q_A(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{p_A(\alpha)}y^{q_A(\alpha)} = A(x,y). \end{aligned}$$

Παραδείγματα:

1. Έστω $\mathcal{B} = \{0,1\}^*$, το σύνολο των δυαδικών λέξεων. Κάθε δυαδική λέξη $\alpha \in \mathcal{B}$ είναι κενή, ή έχει πρώτο γράμμα το 0, ή έχει πρώτο γράμμα το 1, δηλαδή

   $$\alpha = \varepsilon \quad \text{ή} \quad \alpha = 0\beta \quad \text{ή} \quad \alpha = 1\beta, \qquad \text{όπου } \beta \in \mathcal{B},$$

   όπου ε είναι η κενή λέξη. Με άλλα λόγια, τα σύνολα

   $$\mathcal{B}_0 = \{0\beta : \beta \in \mathcal{B}\}, \qquad \mathcal{B}_1 = \{1\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$$

   σχηματίζουν μια διαμέριση του $\mathcal{B} \setminus \{\varepsilon\}$.

   Αν θεωρήσουμε τη βασική παράμετρο στο $\mathcal{B}$

   $$|\alpha| = \text{ πλήθος γραμμάτων στη λέξη } \alpha$$

   και τη δευτερεύουσα παράμετρο στο $\mathcal{B}$

   $$|\alpha|_1 = \text{ πλήθος 1 στη λέξη } \alpha,$$

   τότε ορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση $B(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_1}$. Βάσει του Λήμματος 1.6*i*), προκύπτει ότι

   $$\begin{aligned} B(x,y) &= x^{|\varepsilon|}y^{|\varepsilon|_1} + \sum_{\alpha\in\mathcal{B}\setminus\{\varepsilon\}} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_1} = 1 + \sum_{\alpha\in\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_1} \\ &= 1 + \sum_{\alpha\in\mathcal{B}_0} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_1} + \sum_{\alpha\in\mathcal{B}_1} x^{|\alpha|}y^{|\alpha|_1} = 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{|0\beta|}y^{|0\beta|_1} + \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{|1\beta|}y^{|1\beta|_1} \\ &= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{|\beta|+1}y^{|\beta|_1} + \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{|\beta|+1}y^{|\beta|_1+1} = 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_1} + xy\sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{|\beta|}y^{|\beta|_1} \\ &= 1 + xB(x,y) + xyB(x,y) = 1 + x(y+1)B(x,y), \end{aligned}$$

οπότε τελικά, η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{B}$ είναι η

$$B(x,y) = \frac{1}{1 - x(y+1)}.$$

Με τη βοήθεια της γεωμετρικής και της διωνυμικής σειράς, βρίσκουμε ότι

$$B(x,y) = \sum_{n\geq 0} x^n (y+1)^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^n y^k,$$

οπότε έχουμε το γνωστό αποτέλεσμα, ότι το πλήθος των δυαδικών λέξεων με n γράμματα, από τα οποία τα k είναι 1, ισούται με $[x^n y^k]B(x,y) = \binom{n}{k}$.

Επίσης, θέτοντας $y = 1$, έχουμε

$$B(x,1) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n,$$

οπότε έχουμε ότι το πλήθος των δυαδικών λέξεων με n γράμματα ισούται με $[x^n]B(x,1) = 2^n$.

2. Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο των δυαδικών λέξεων που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά 1. Έστω $F(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_1}$ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{F}$, ως προς τις παραμέτρους του προηγούμενου παραδείγματος. Ομοίως με πριν, κάθε λέξη $\alpha \in \mathcal{F}$ ανήκει σε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha = \varepsilon, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 0\beta, \quad \alpha = 10\beta, \qquad \text{όπου } \beta \in \mathcal{F}.$$

Επομένως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος, καταλήγουμε στη σχέση

$$F(x,y) = 1 + xy + xF(x,y) + x^2 y F(x,y),$$

η οποία δίνει

$$F(x,y) = \frac{1+xy}{1 - x(1+xy)}.$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω συνάρτηση σε σειρά, όπως και πριν, έχουμε

$$F(x,y) = \sum_{m\geq 0} x^m (1+xy)^{m+1} = \sum_{m\geq 0}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k} x^{m+k} y^k.$$

Θέτοντας $m + k = n$, οπότε $k \leq m+1 = n-k+1 \Rightarrow 2k \leq n+1$, προκύπτει ότι

$$F(x,y) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-k+1}{k} x^n y^k,$$

οπότε το πλήθος των λέξεων χωρίς διαδοχικά 1, με n γράμματα από τα οποία τα k είναι 1, ισούται με

$$[x^n y^k]F(x,y) = \binom{n-k+1}{k}.$$

Θέτοντας $y = 1$, προκύπτει μια γεννήτρια συνάρτηση που σχετίζεται με τη γεννήτρια συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ της ακολουθίας Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ που παρουσιάστηκε σε προηγούμενο παράδειγμα:

$$F(x,1) = \frac{1+x}{1-x-x^2} = f(x) + xf(x),$$

οπότε το πλήθος των λέξεων χωρίς διαδοχικά 1, με n γράμματα, ισούται με

$$[x^n]F(x,1) = [x^n]f(x) + [x^{n-1}]f(x) = f_n + f_{n-1} = f_{n+1}.$$

Επιπλέον, επειδή είναι

$$F(x,1) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-k+1}{k}x^n,$$

προκύπτει η γνωστή ταυτότητα

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-k+1}{k}.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αντικατάσταση $y = \frac{1}{1-x}$ στη γεννήτρια συνάρτηση του τελευταίου παραδείγματος, οπότε προκύπτει ότι

$$F(x,\frac{1}{1-x}) = \frac{1 + x\frac{1}{1-x}}{1 - x(1 + x\frac{1}{1-x})} = \frac{1-x+x}{1-x-x(1-x+x)} = \frac{1}{1-2x},$$

δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση $B(x,1)$ των δυαδικών λέξεων, του προηγούμενου παραδείγματος. Η αντικατάσταση αυτή έχει την ακόλουθη συνδυαστική ερμηνεία:

Το σύνολο $\mathcal{B}$ κατασκευάζεται από το σύνολο $\mathcal{F}$ και το βοηθητικό σύνολο

$$\mathcal{A} = \{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \ldots\},$$

αν, για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$, παρεμβάλουμε μετά από κάθε 1 μία λέξη του $\mathcal{A}$, δημιουργώντας έτσι ακολουθίες από διαδοχικά 1 μέσα στην παραγόμενη λέξη. Με αυτόν τον τρόπο, κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$ παράγει ένα σύνολο $R(\alpha)$ από λέξεις του $\mathcal{B}$. Όμως, κάθε δυαδική λέξη β μπορεί να παραχθεί από ακριβώς μία $\alpha \in \mathcal{F}$. Πραγματικά, η α ανακτάται αν αντικαταστήσουμε στη β κάθε ακολουθία από 1, από το γράμμα 1. Επομένως, η οικογένεια $(R(\alpha))_{\alpha\in\mathcal{F}}$ αποτελεί διαμέριση του $\mathcal{B}$.

Τέλος, η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$, ως προς την ίδια βασική παράμετρο είναι προφανώς η $A(x) = \frac{1}{1-x}$, η οποία και αντικαθιστά το y.

Γενικά, αποδεικνύεται (βλ. [28]) ότι όταν υπάρχει μια τέτοια κατασκευή ενός συνόλου, η γεννήτρια συνάρτησή του θα προκύπτει ως σύνθεση των γεννητριών συναρτήσεων των συνόλων από τα οποία κατασκευάζεται.

1.5 Βασικές ακολουθίες αριθμών

1.5.1 Αριθμοί Catalan

Οι αριθμοί Catalan (ακολουθία $A000108$ στην [64]) θεωρούνται ως οι πιο σημαντικοί αριθμοί της Συνδυαστικής, μετά τους διωνυμικούς συντελεστές, λόγω της εντυπωσιακά συχνής εμφάνισής τους σε διάφορα προβλήματα. Εμφανίστηκαν για πρώτη φορά σε ένα πρόβλημα που διατύπωσε και έλυσε ο Euler (1758), το οποίο αφορούσε το πλήθος των τριγωνοποιήσεων (δηλαδή της υποδιαίρεσης σε τρίγωνα) ενός κανονικού n-γώνου, από μη τεμνόμενες διαγωνίους του. Εντούτοις, πήραν το όνομά τους από τον μαθηματικό Eugene Catalan (1838), ο οποίος έδωσε μια διαφορετική λύση του ίδιου προβλήματος.

Οι αριθμοί Catalan ορίζονται από την αναδρομική σχέση, γνωστή και ως σχέση του Segner:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad n \geq 1, \qquad C_0 = 1. \tag{1.3}$$

Για τον προσδιορισμό της γεννήτριας συνάρτησης $C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$ της ακολουθίας $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των αριθμών Catalan, πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω αναδρομική σχέση με x^n και προσθέτοντας για όλες τις τιμές του n, για τις οποίες η σχέση ισχύει (δηλαδή για $n \geq 1$), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} C_n x^n &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} x^n \overset{m=n-1}{=} \sum_{m\geq 0}\sum_{k=0}^{m} C_k C_{m-k} x^{m+1}\\ &= x\sum_{m\geq 0}\sum_{k=0}^{m} C_k C_{m-k} x^m = xC^2(x).\end{aligned}$$

Όμως, είναι $\sum_{n\geq 1} C_n x^n = \sum_{n\geq 0} C_n x^n - C_0 x^0 = C(x) - 1$, οπότε τελικά η $C(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$C(x) = 1 + xC^2(x), \quad C(0) = 1. \tag{1.4}$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή, βρίσκουμε ότι

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{1.5}$$

(η δεύτερη ρίζα απορρίπτεται, διότι $C(0) = 1$).

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τους συντελεστές $C_n^{(s)} = [x^n]C^s$ με τη βοήθεια του Τύπου Αντιστροφής Lagrange. Οι συντελεστές αυτοί συχνά ονομάζονται *γενικευμένοι αριθμοί Catalan*.

Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $H(\lambda) = \lambda^2$, τότε, βάσει της (1.4), έχουμε ότι $C(x) = 1 + xH(C(x))$. Δεδομένου ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες της Πρότασης 1.4, έχουμε, για $n > 0$, ότι

$$\begin{aligned}C_n^{(s)} &= [x^n]C^s(x) = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{s-1}H^n(1+\lambda) = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{2n+s-1}\\ &= \frac{s}{n}\binom{2n+s-1}{n-1} = \frac{s}{2n+s}\binom{2n+s}{n}.\end{aligned}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών, έχουμε τις ακόλουθες τρεις εκφράσεις για τους συντελεστές $C_n^{(s)}$:

$$\begin{aligned}C_n^{(s)} &= [x^n]C^s(x) = \frac{s}{2n+s}\binom{2n+s}{n} = \binom{2n+s-1}{n} - \binom{2n+s-1}{n-1}\\ &= \frac{s}{n+s}\binom{2n+s-1}{n}, \qquad n\in\mathbb{N}, s\in\mathbb{R}^*.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ειδικά, για $s = 1$, προκύπτει ότι ο n-οστός αριθμός Catalan δίνεται από τον τύπο

$$C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Για συντομία, θα συμβολίζουμε με $C = C(x)$ τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan, δηλαδή

$$C = C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n.$$

Η ακτίνα σύγκλισης της C είναι $\rho = 1/4$, όπως άμεσα προκύπτει:

$$\rho = \lim\frac{C_n}{C_{n+1}} = \lim\frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}} = \lim\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(2n)!(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!n!n!} = \lim\frac{n+2}{4n+2} = \frac{1}{4}.$$

1.5.2 Αριθμοί Narayana

Η διπλή ακολουθία (ακολουθία $A001263$ στην [64]) των αριθμών Narayana $(\nu_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$\nu_{n,k} = \nu_{n-1,k-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\min\{i,k\}} \nu_{i,j}\nu_{n-i-1,k-j}, 1 \le k \le n, \qquad \nu_{n,0} = \delta_{n,0}.$$

Ισοδύναμα, οι αριθμοί Narayana ορίζονται μέσω της γεννήτριας συνάρτησής τους $N = N(x,y) = \sum_{n\ge 0}\sum_{k\ge 0}\nu_{n,k}x^n y^k$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$N(x,y) = 1 + xN^2(x,y) + x(y-1)N(x,y), \tag{1.8}$$

οπότε είναι

$$N(x,y) = \frac{1 + x - xy - \sqrt{(1+x-xy)^2 - 4x}}{2x}.$$

Για τον υπολογισμό των αριθμών Narayana, θα χρησιμοποιηθεί ο Τύπος Αντιστροφής Lagrange. Πράγματι, θεωρώντας το πολυώνυμο $H(\lambda) = \lambda(\lambda + y - 1)$, από τη σχέση (1.8), έπεται ότι $N(x,y) = 1 + xH(N(x,y))$, οπότε, με τη βοήθεια της Πρότασης 1.4, προκύπτει, για $n > 0$, $s \in \mathbb{R}$, ότι

$$\begin{aligned}
[x^n]N^s(x,y) &= \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{s-1}H^n(\lambda+1) = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](\lambda+1)^{n+s-1}(\lambda+y)^n \\
&= \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}]\sum_{i=0}^{n+s-1}\binom{n+s-1}{i}\lambda^i(\lambda+y)^n = \frac{s}{n}\sum_{i=0}^{n+s-1}\binom{n+s-1}{i}[\lambda^{n-i-1}](\lambda+y)^n \\
&= \frac{s}{n}\sum_{i=0}^{n+s-1}\binom{n+s-1}{i}\binom{n}{n-i-1}y^{n-(n-i-1)} = \frac{s}{n}\sum_{i=0}^{n+s-1}\binom{n+s-1}{i}\binom{n}{i+1}y^{i+1}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\begin{aligned}
N^s(x,y) &= 1 + \sum_{n\ge 1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{s}{n}\binom{n+s-1}{i}\binom{n}{i+1}y^{i+1}x^n \\
&= 1 + \sum_{n\ge 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{s}{n}\binom{n+s-1}{k-1}\binom{n}{k}y^k x^n,
\end{aligned}$$

οπότε

$$[x^n y^k]N^s(x,y) = \frac{s}{n}\binom{n+s-1}{k-1}\binom{n}{k}, \quad 0 < k \le n,$$

και έτσι προκύπτει ο γνωστός τύπος

$$[x^n y^k]N(x,y) = \nu_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}, \quad 0 < k \le n.$$

Οι αριθμοί Narayana συνδέονται άμεσα με του αριθμούς Catalan. Συγκεκριμένα, είναι $N(x,1) = C(x)$, από όπου έπεται ότι

$$C_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}, \quad n > 0.$$

1.5.3 Αριθμοί Motzkin

Η ακολουθία (ακολουθία A001006 στην [64]) των αριθμών Motzkin $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_k M_{n-k-2}, n \geq 1, \qquad M_0 = 1.$$

Ισοδύναμα, οι αριθμοί Motzkin ορίζονται μέσω της γεννήτριας συνάρτησής τους $M = M(x) = \sum_{n\geq 0} M_n x^n$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$M(x) = 1 + xM(x) + x^2 M^2(x), \tag{1.9}$$

οπότε είναι

$$M(x) = \frac{1 - \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Από τον παραπάνω τύπο, και με τη βοήθεια του τύπου (1.5), εύκολα επαληθεύονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C(x) = 1 + \frac{x}{1-x} M\left(\frac{x}{1-x}\right), \qquad M(x) = \frac{1}{1-x} C\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right).$$

Από την πρώτη σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C(x) - 1 &= \frac{x}{1-x} \sum_{k\geq 0} M_k \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = x \sum_{k\geq 0} M_k \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \\ &\overset{(1.1)}{=} x \sum_{k\geq 0} M_k \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} M_k x^{n+1}, \end{aligned}$$

οπότε τελικά προκύπτει η ταυτότητα

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k.$$

Ομοίως, από τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι

$$M(x) = \sum_{k\geq 0} C_k \frac{x^{2k}}{(1-x)^{2k+1}} = \sum_{k\geq 0} C_k \sum_{n\geq 0} \binom{n}{2k} x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} C_k \binom{n}{2k} x^n,$$

οπότε τελικά προκύπτει η ταυτότητα

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k.$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών των δυνάμεων της $M(x)$, θεωρώντας το πολυώνυμο $H(\lambda) = \lambda(1 + x\lambda)$, από τη σχέση (1.9) έπεται ότι $M(x) = 1 + xH(M(x))$, οπότε, με τη βοήθεια του Τύπου Αντιστροφής Lagrange, προκύπτει, για $n > 0$, ότι

$$\begin{aligned} [x^n]M^s(x) &= \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{n+s-1}(1 + x(1+\lambda))^n = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}] \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1+\lambda)^{n+i+s-1} \\ &= \frac{s}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k [\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{n+k+s-1} = \frac{s}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k+s-1}{n-1} x^k, \end{aligned}$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} M^s(x) &= 1 + \sum_{m\geq 1} \frac{s}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{m+k+s-1}{k+s} x^{m+k} \\ &\overset{n=m+k}{=} 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{s}{n-k} \binom{n-k}{k} \binom{n+s-1}{k+s} x^n, \end{aligned}$$

και επομένως,

$$[x^n]M^s(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{s}{n-k} \binom{n-k}{k} \binom{n+s-1}{k+s}, \quad n > 0.$$

Ειδικά, για $s = 1$, έχουμε ότι

$$[x^n]M(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{k} \binom{n}{k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k, \quad n > 0,$$

αφού

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{k} \binom{n}{k+1} &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(k+1)!(n-2k)!} = \frac{n!}{(n-2k)!(2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \\ &= \binom{n}{2k} C_k. \end{aligned}$$

1.5.4 Αριθμοί Touchard

Οι όροι της διπλής ακολουθίας $(b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, με

$$b_{n,k} = 2^{n-2k-1} \binom{n-1}{2k} C_k, \qquad b_{0,0} = 1, \tag{1.10}$$

ονομάζονται αριθμοί Touchard (ακολουθία A091894 στην [64]).

Ισοδύναμα, οι αριθμοί Touchard ορίζονται μέσω της γεννήτριας συνάρτησής τους

$$B = B(x, y) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} b_{n,k} x^n y^k,$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$B = 1 + (y-1)x - 2(y-1)xB + xyB^2 = 1 + x(1 + 2(B-1) + y(B-1)^2). \tag{1.11}$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών των δυνάμεων της B, θεωρώντας το πολυώνυμο $H(\lambda) = 1 + 2(\lambda - 1) + y(\lambda - 1)^2$, από τη σχέση (1.11) έπεται ότι $B = 1 + xH(B)$, οπότε, με τη βοήθεια του Τύπου Αντιστροφής Lagrange, προκύπτει, για $n > 0$, ότι

$$[x^n]B^i = \frac{i}{n} [\lambda^{n-1}](1 + \lambda)^{i-1} H^n(\lambda + 1).$$

Όμως,

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda)^{i-1}H^n(1+\lambda) &= (1+\lambda)^{i-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2+y\lambda)^j\lambda^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i-1}{s}\binom{n}{j}\binom{j}{k}2^{j-k}y^k\lambda^{k+s+j} \\
&= \sum_{m=0}^{2n+i-1}\sum_{k=0}^{\lfloor (m-s)/2\rfloor}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i-1}{s}\binom{n}{m-k-s}\binom{m-k-s}{k}2^{m-2k-s}y^k\lambda^m \\
&= \sum_{m=0}^{2n+i-1}\sum_{k=0}^{\lfloor (m-s)/2\rfloor}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i-1}{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-2k-s}2^{m-2k-s}y^k\lambda^m,
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{i-1}H^n(1+\lambda) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1-s)/2\rfloor}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i-1}{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-2k-s-1}2^{n-2k-s-1}y^k.
$$

Επομένως,

$$
B^i = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1-s)/2\rfloor}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i-1}{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-2k-s-1}2^{n-2k-s-1}y^kx^n,
$$

και τελικά, για $n>0$, προκύπτει ότι

$$
[x^ny^k]B^i = \sum_{s=0}^{i-1}\frac{s+1}{n}\binom{i}{s+1}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-2k-s-1}2^{n-2k-s-1}.
$$

Προκειμένου να εκφράσουμε τον παραπάνω συντελεστή συναρτήσει των συντελεστών των δυνάμεων της συνάρτησης Catalan, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{s+1}{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-2k-s-1} &= \frac{s+1}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-2k-s-1)!(k+s+1)!} \\
&= \frac{s+1}{k+s+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-2k-s-1)!(2k+s)!}\cdot\frac{(2k+s)!}{k!(k+s)!} \\
&= \frac{s+1}{k+s+1}\binom{n-1}{2k+s}\binom{2k+s}{k} \\
&= \binom{n-1}{2k+s}C_k^{(s+1)},
\end{aligned}
$$

όπου[5] $C_k^{(s+1)} = [x^k]C^{s+1}$.

Επομένως, έχουμε ότι

$$
[x^ny^k]B^i = \sum_{s=0}^{i-1}\binom{i}{s+1}b_{n,k,s}, \qquad n>0, \tag{1.12}
$$

όπου

$$
b_{n,k,s} = \binom{n-1}{2k+s}C_k^{(s+1)}2^{n-2k-s-1}. \tag{1.13}
$$

Ονομάζουμε τους αριθμούς αυτούς *γενικευμένους αριθμούς Touchard*, αφού για $s=0$ ταυτίζονται με τους αριθμούς Touchard, δηλαδή ισχύει ότι $b_{n,k,0} = b_{n,k}$.

[5] Βλ. σχέση (1.6).

1.6 Λέξεις και περιοδικότητα

Αλφάβητο ονομάζεται κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{L}$. Τα στοιχεία του $\mathcal{L}$ ονομάζονται *γράμματα*. Κάθε πεπερασμένη ακολουθία από γράμματα του $\mathcal{L}$ ονομάζεται *λέξη* στο αλφάβητο $\mathcal{L}$. Ο αριθμός των γραμμάτων μιας λέξης α λέγεται *μήκος* της λέξης α και συμβολίζεται με $|\alpha|$. Η λέξη με μήκος 0 ονομάζεται *κενή λέξη* και συμβολίζεται με ε. Το σύνολο όλων των λέξεων με γράμματα από το $\mathcal{L}$, συμπεριλαμβανομένης και της κενής λέξης, συμβολίζεται με $\mathcal{L}^*$.

Αν $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^*$, με $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ και $\beta = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_m$, τότε η λέξη

$$\alpha\beta = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l\beta_1\beta_2 \cdots \beta_m$$

ονομάζεται *σύζευξη* ή *παράθεση* ή *γινόμενο* των α και β. Προφανώς, η πράξη της σύζευξης είναι προσεταιριστική. Επιπλέον, $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{L}^*$, οπότε το σύνολο $\mathcal{L}^*$, εφοδιασμένο με την πράξη της σύζευξης, αποτελεί μονοειδές. Οι δυνάμεις μιας λέξης $\alpha \in \mathcal{L}^*$ ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

$$\alpha^0 = \varepsilon \quad \text{και} \quad \alpha^n = \alpha\alpha^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Η λέξη $\beta = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_k$ είναι μια *υπακολουθία* της λέξης $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$, όπου $k \leq n$, αν και μόνο αν υπάρχει γνησίως αύξουσα απεικόνιση $f : [k] \to [n]$, με $\beta_i = \alpha_{f(i)}$, για κάθε $i \in [k]$. Ειδικά αν $f : [k] \to [i, k+i-1]$, με $1 \leq i \leq n-k+1$, (δηλαδή είναι $\beta = \alpha_i\alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+k-1}$), τότε η β ονομάζεται *τμήμα* ή *υπολέξη* της α.

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^*$, η β είναι *πρόθεμα* (αντίστοιχα *επίθεμα*) της α, αν και μόνο αν υπάρχει $\gamma \in \mathcal{L}^*$ τέτοια ώστε $\alpha = \beta\gamma$ (αντίστοιχα $\alpha = \gamma\beta$). Προφανώς, κάθε λέξη $\alpha \in \mathcal{L}^*$ έχει δύο τετριμμένα προθέματα και επιθέματα, τα ε και α. Κάθε πρόθεμα ή επίθεμα β της α, ονομάζεται *γνήσιο* αν και μόνο αν $|\beta| < |\alpha|$.

Αν $\tau, \alpha \in \mathcal{L}^*$, λέμε ότι η α *περιέχει μια εμφάνιση* του *προτύπου* τ αν και μόνο αν υπάρχουν λέξεις $\beta, \gamma \in \mathcal{L}^*$, τέτοιες ώστε

$$\alpha = \beta\tau\gamma.$$

Πιο συγκεκριμένα, κάθε ζεύγος (β, γ) που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση, αντιστοιχεί σε μία ξεχωριστή εμφάνιση του τ στην α. Αν η α δεν περιέχει καμία εμφάνιση του τ, τότε λέμε ότι το *αποφεύγει*. Το πλήθος των εμφανίσεων του τ στην α συμβολίζεται με $|\alpha|_\tau$.

Αν η λέξη $\alpha \in \mathcal{L}^* \setminus \{\varepsilon\}$ γράφεται ως $\alpha = px = ys$, όπου $p, x, y, s \in \mathcal{L}^* \setminus \{\varepsilon\}$, και είναι $|y| < |p|$, τότε προφανώς το πρόθεμα p και το επίθεμα s της α έχουν ένα κοινό τμήμα, δηλαδή υπάρχει ένα μη κενό τμήμα της α, το οποίο είναι ταυτόχρονα επίθεμα του p και πρόθεμα του s. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το p *επικαλύπτεται* με το s (ή, ισοδύναμα, ότι το s επικαλύπτεται με το p).

Ορισμός. *Μια μη κενή λέξη $w = w_1w_2 \cdots w_n$ μήκους $|w| = n$, ονομάζεται* περιοδική *αν και μόνο αν υπάρχει θετικός ακέραιος $p < |w|$, τέτοιος ώστε $w_{i+p} = w_i$, για κάθε $i \in [n-p]$. Ο αριθμός p είναι μια* περίοδος *της λέξης w.*

Κάθε μη κενή λέξη v η οποία είναι πρόθεμα και επίθεμα της w, ονομάζεται *σύνορο* της w. Μια λέξη w είναι περιοδική αν και μόνο αν έχει ένα σύνορο. Πιο συγκεκριμένα, αν p είναι μια περίοδος της w, τότε το πρόθεμα v μήκους $|w| - p$ είναι ένα σύνορο της w. Αντίστροφα, αν v είναι ένα σύνορο της w, τότε ο $|w| - |v|$ αποτελεί περίοδο της w.

Ισοδύναμα, όπως προκύπτει από το επόμενο Λήμμα, η w είναι περιοδική αν και μόνο αν υπάρχουν λέξεις λ, μ, με $\lambda \neq \varepsilon$, τέτοιες ώστε $w = (\lambda\mu)^k\lambda$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Στην έκφραση αυτή, η περίοδος $p = |\lambda\mu|$ καθορίζει μονοσήμαντα τα λ, μ, k.

Λήμμα 1.7. *Έστω w μια λέξη και v ένα σύνορο της w. Αν k είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει $k|w| \geq (k+1)|v|$, τότε υπάρχουν μοναδικές λέξεις λ, μ, με $\lambda \neq \varepsilon$, τέτοιες ώστε*

$$w = (\lambda\mu)^k\lambda \quad \textit{και} \quad v = (\lambda\mu)^{k-1}\lambda.$$

Απόδειξη. Θα δειχθεί με επαγωγή ως προς το k. Προφανώς, αν $k = 1$, η πρόταση ισχύει για $\lambda = v$.

Για $k > 1$, από τον ορισμό του k, έπεται ότι $(k-1)|w| < k|v|$, οπότε $|w| < 2|v|$. Επομένως, δεδομένου ότι υπάρχουν λέξεις ρ, σ ώστε $w = \rho v = v\sigma$, για τις λέξεις αυτές ισχύει ότι $|\rho| = |\sigma| < |v|$, οπότε

$$v = \rho\xi = \zeta\sigma,$$

για κάποιες μη κενές λέξεις ξ, ζ. Συνεπώς, $w = \rho\xi\sigma = \rho\zeta\sigma$, που σημαίνει ότι $\xi = \zeta$, και άρα η ζ είναι σύνορο της v. Θα δειχθεί ότι

$$k - 1 = \min\{ j \in \mathbb{N}^* : j|v| \geq (j+1)|\zeta|\}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} k|w| \geq (k+1)|v| &\Rightarrow k|\rho v| \geq (k+1)|\rho\zeta| \Rightarrow k|v| \geq (k+1)|\zeta| + |\rho| \\ &\Rightarrow k|v| \geq k|\zeta| + |v| \Rightarrow (k-1)|v| \geq k|\zeta| \end{aligned}$$

και επιπλέον,

$$\begin{aligned} (k-1)|w| < k|v| &\Rightarrow (k-1)(|\rho| + |v|) < k(|\rho| + |\zeta|) \\ &\Rightarrow (k-1)|v| - |\rho| < k|\zeta| \Rightarrow (k-2)|v| < (k-1)|\zeta|. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, από την υπόθεση της επαγωγής, έπεται ότι υπάρχουν μοναδικές λέξεις λ, μ, με $\lambda \neq \varepsilon$, τέτοιες ώστε

$$v = (\lambda\mu)^{k-1}\lambda \quad \text{και} \quad \zeta = (\lambda\mu)^{k-2}\lambda.$$

Αφού $v = \rho\zeta = \rho(\lambda\mu)^{k-2}\lambda$, είναι $\rho = \lambda\mu$, οπότε τελικά $w = (\lambda\mu)^k\lambda$. □

Τα σύνορα της λέξης w μπορούν να διαταχθούν με βάση το μήκος τους. Προφανώς, το μεγαλύτερο σύνορο της w αντιστοιχεί στη μικρότερη περίοδο της w.

Αν v είναι ένα σύνορο της w και v' μια μη κενή λέξη με $|v'| < |v|$, τότε η v' είναι σύνορο της w αν και μόνο αν η v' είναι σύνορο της v.

Αν λ είναι το μικρότερο σύνορο της w, τότε $|w| \geq 2|\lambda|$, έτσι ώστε η w μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = \lambda\mu\lambda$, όπου μ είναι μια (ενδεχομένως κενή) λέξη. Πράγματι, αν ήταν $k|w| \leq (k+1)|\lambda|$, με $k > 1$, τότε, βάσει του Λήμματος 1.7, θα υπήρχαν λέξεις $\rho \neq \varepsilon$, σ, ώστε $w = (\rho\sigma)^k\rho$ και $\lambda = (\rho\sigma)^{k-1}\rho$, οπότε το ρ θα ήταν σύνορο του w, με $|\rho| < |\lambda|$, το οποίο είναι άτοπο.

Λήμμα 1.8.

i) Αν w, u είναι δύο λέξεις με $wu = uw$, τότε υπάρχει λέξη α τέτοια ώστε

$$w = \alpha^t \quad \textit{και} \quad u = \alpha^s, \quad s, t \in \mathbb{N}.$$

ii) Αν w, u είναι δύο λέξεις με $wu = \alpha^t$, όπου $t \in \mathbb{N}^*$, τότε υπάρχουν λέξεις β, γ και $\xi, \zeta \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$t = \xi + \zeta + 1, \quad \beta\gamma = \alpha, \quad w = \alpha^\xi\beta, \quad u = \gamma\alpha^\zeta.$$

Απόδειξη. *i*) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το μήκος $|wu|$. Αν $|wu| \leq 2$, τότε ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάθε ζεύγος λέξεων με συνολικό μήκος μικρότερο του $n > 2$, και έστω οι λέξεις w, u, με $|wu| = n$ και $wu = uw$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $0 < |u| < |w|$ (αφού αν κάποια είναι κενή ή έχουν το ίδιο μήκος, τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές). Τότε, η u είναι σύνορο της w και επομένως υπάρχουν (μη κενές) λέξεις x, y, τέτοιες ώστε $w = ux = yu$. Όμως,

$$wu = uw \Rightarrow uxu = uyu \Rightarrow x = y,$$

οπότε $w = ux = xu$ και επειδή $|ux| = |w| < |wu| = n$, βάσει της υπόθεσης της επαγωγής, υπάρχει λέξη α τέτοια ώστε

$$u = \alpha^{s_1} \quad \text{και} \quad x = \alpha^{t_1}, \quad s_1, t_1 \in \mathbb{N},$$

δηλαδή $w = \alpha^{s_1+t_1}$ και $u = \alpha^{s_1}$.

ii) Υποθέτουμε ότι η w δεν γράφεται σαν δύναμη της α (αλλιώς, το αποτέλεσμα είναι προφανές). Επομένως, ούτε και η u γράφεται σαν δύναμη της α, άρα υπάρχουν $\xi, \zeta \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε

$$\xi|\alpha| < |w| < (\xi + 1)|\alpha| \qquad \text{και} \qquad \zeta|\alpha| < |u| < (\zeta + 1)|\alpha|.$$

Έτσι, δεδομένου ότι η α^{ξ} είναι πρόθεμα της w, υπάρχει λέξη $\beta \neq \varepsilon$, τέτοια ώστε $w = \alpha^{\xi}\beta$. Ομοίως, υπάρχει λέξη $\gamma \neq \varepsilon$, τέτοια ώστε $u = \gamma\alpha^{\zeta}$. Όμως,

$$wu = \alpha^t \Rightarrow \alpha^{\xi}\beta\gamma\alpha^{\zeta} = \alpha^t \Rightarrow \beta\gamma = \alpha,$$

οπότε είναι και $\xi + \zeta + 1 = t$. □

Πρόταση 1.9. *Έστω w μια περιοδική λέξη και ν ο μέγιστος θετικός ακέραιος για τον οποίο υπάρχουν λέξεις λ, μ, με $\lambda \neq \varepsilon$, τέτοιες ώστε $w = (\lambda\mu)^{\nu}\lambda$. Τότε, για κάθε σύνορο v της $\lambda\mu\lambda$, είναι $|v| \leq |\lambda\mu|$.*

Απόδειξη. Έστω v ένα σύνορο της $\lambda\mu\lambda$ με $|v| > |\lambda\mu|$. Προφανώς, αφού οι $\mu\lambda$ και v είναι επιθέματα της $\lambda\mu\lambda$, έπεται ότι η $\mu\lambda$ είναι επίθεμα της v, δηλαδή υπάρχει λέξη v' τέτοια ώστε

$$v = v'\mu\lambda \quad \text{και} \quad 0 < |v'| < |\lambda|.$$

Επιπλέον, αφού οι λ και v' είναι προθέματα της v, έπεται ότι η v' είναι πρόθεμα της λ, οπότε η $\lambda\mu v'$ είναι πρόθεμα της $\lambda\mu\lambda$. Ως εκ τούτου, και δεδομένου ότι η $v'\mu\lambda$ είναι επίσης πρόθεμα της $\lambda\mu\lambda$ και $|v'\mu\lambda| = |\lambda\mu v'|$, συνεπάγεται ότι $v'\mu\lambda = \lambda\mu v'$.

Θέτοντας $\lambda = v'x$, όπου $x \neq \varepsilon$, από την προηγούμενη ισότητα έπεται ότι $\mu v'x = x\mu v'$. Επομένως, από το Λήμμα 1.8, υπάρχει λέξη $\alpha \neq \varepsilon$ τέτοια ώστε

$$\mu v' = a^t \quad \text{και} \quad x = a^s, \quad t, s \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή $\mu v' = a^t$, υπάρχουν λέξεις β, γ και $\xi, \zeta \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$t = \xi + \zeta + 1, \quad \beta\gamma = \alpha, \quad \mu = \alpha^{\xi}\beta, \quad v' = \gamma\alpha^{\zeta}.$$

Επομένως, είναι $\lambda = \gamma(\beta\gamma)^{\zeta+s}$ και $w = (\gamma\beta)^{\nu(t+s)+\zeta+s}\gamma$.

Αν $\gamma \neq \varepsilon$, τότε επειδή $\nu(t + s) + \zeta + s > \nu$, από την προηγούμενη έκφραση της w, προκύπτει άτοπο.

Στην περίπτωση που $\gamma = \varepsilon$, είναι $w = \beta^{\nu(t+s)+\zeta+s-1}\beta$ και δεδομένου ότι

$$\nu(t + s) + \zeta + s - 1 > \nu,$$

προκύπτει επίσης άτοπο. □

Από την προηγούμενη Πρόταση, εύκολα προκύπτει ότι, όταν $\nu \geq 2$, οι λέξεις λ, μ στην έκφραση της w είναι μοναδικές. Πράγματι, υποθέτοντας ότι $w = (\lambda\mu)^\nu\lambda = (\rho\sigma)^\nu\rho$, με $\rho, \lambda \neq \varepsilon$ και $|\rho| < |\lambda|$, έπεται ότι

$$|\lambda\mu\lambda| - |\rho\sigma\rho| = \frac{\nu-1}{\nu}(|\lambda| - |\rho|) > 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η λέξη $\rho\sigma\rho$ είναι σύνορο της $\lambda\mu\lambda$. Επομένως, από την Πρόταση 1.9, θα ισχύει ότι $|\rho\sigma\rho| \leq |\lambda\mu|$. Επομένως, θα είναι

$$|w| = (\nu+1)|\rho| + \nu|\sigma| < \nu|\rho\sigma\rho| \leq \nu|\lambda\mu| = |w| - |\lambda|,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Έτσι, ισχύει $|\rho| = |\lambda|$ και η έκφραση $w = (\lambda\mu)^\nu\lambda$, όπου $\lambda \neq \varepsilon$ και $\nu \geq 2$ είναι το μέγιστο δυνατό, είναι μοναδική. Η έκφραση αυτή ονομάζεται *κανονική μορφή* της w.

Αντιθέτως, όταν $\nu = 1$, η έκφραση $w = \lambda\mu\lambda$ δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα, η λέξη $w \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^*$ με $w = \mathrm{u}^2\mathrm{d}\mathrm{u}^2 = \mathrm{u}(\mathrm{udu})\mathrm{u}$, έχει δύο εκφράσεις. Ωστόσο, επειδή σε αυτή την περίπτωση είναι $w = \lambda\mu\lambda$, με λ το μέγιστο σύνορο της w, η κανονική μορφή μπορεί να επεκταθεί για $\nu = 1$, απαιτώντας το λ να είναι μέγιστο.

Τα επόμενα δύο Λήμματα αναφέρονται στον προσδιορισμό του συνόλου V των συνόρων μιας περιοδικής λέξης.

Λήμμα 1.10. *Έστω η περιοδική λέξη w, οι λέξεις λ, μ, με $\lambda \neq \varepsilon$, και $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η w γράφεται στην κανονική της μορφή ως $w = (\lambda\mu)^\nu\lambda$ αν και μόνο αν η $(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της w (δηλαδή ο $|\lambda\mu|$ είναι η ελάχιστη περίοδος της w).*

Απόδειξη. Για $\nu = 1$ ισχύει εξ ορισμού. Έστω $\nu \geq 2$.

Αν η v είναι σύνορο της w, από το Λήμμα 1.7, έπεται ότι υπάρχουν λέξεις ρ, σ, με $\rho \neq \varepsilon$, και $k \in \mathbb{N}^*$, με $w = (\rho\sigma)^k\rho$ και $v = (\rho\sigma)^{k-1}\rho$.

Προφανώς, $k \leq \nu$. Αν $k = \nu$, τότε, λόγω της μοναδικότητας της κανονικής μορφής, προκύπτει ότι $v = (\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$.

Αλλιώς, αν δηλαδή $k < \nu$, έχουμε

$$\nu|\lambda\mu| < (\nu+1)|\lambda| + \nu|\mu| = (k+1)|\rho| + k|\sigma| \leq \nu|\rho| + (\nu-1)|\sigma| \leq \nu|\rho\sigma|,$$

οπότε $|\lambda\mu| < |\rho\sigma|$, και

$$|v| = k|\rho| + (k-1)|\sigma| = (k+1)|\rho| + k|\sigma| - |\rho\sigma| < (\nu+1)|\lambda| + \nu|\mu| - |\lambda\mu| = |(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda|.$$

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι η $(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της w και ότι η κανονική μορφή της w είναι $w = (\rho\sigma)^k\rho$, έπεται ότι η $(\rho\sigma)^{k-1}\rho$ είναι το μέγιστο σύνορο της w, οπότε $(\rho\sigma)^{k-1}\rho = (\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$. Συνεπώς,

$$|\rho\sigma| = |w| - |(\rho\sigma)^{k-1}\rho| = |w| - |(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda| = |\lambda\mu|$$

και

$$(k-\nu)|\lambda\mu| = k|\rho\sigma| - \nu|\lambda\mu| = |\lambda| - |\rho| < |\lambda\mu|.$$

Επομένως, $k = \nu$, δηλαδή $w = (\lambda\mu)^\nu\lambda$ είναι η κανονική μορφή της w. □

Λήμμα 1.11. *Για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους $\nu, k \geq 2$ και οποιεσδήποτε λέξεις λ, μ, η $(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της $(\lambda\mu)^\nu\lambda$ αν και μόνο αν η $(\lambda\mu)^{k-1}\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της $(\lambda\mu)^k\lambda$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι η $(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της $(\lambda\mu)^{\nu}\lambda$ αν και μόνο αν η $\lambda\mu\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της $\lambda\mu\lambda\mu\lambda$, για $\nu \geq 3$.

Έστω ότι η $(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της $(\lambda\mu)^{\nu}\lambda$. Αν υπάρχει σύνορο v της $\lambda\mu\lambda\mu\lambda$, τέτοιο ώστε $|v| > |\lambda\mu\lambda|$, τότε

$$v = \alpha\lambda\mu\lambda = \lambda\mu\lambda\beta,$$

για κάποιες λέξεις α, β, όπου $0 < |\alpha| = |\beta| < |\lambda\mu|$, και

$$\lambda\mu\lambda\mu\lambda = \gamma v = v\delta,$$

για κάποιες λέξεις γ, δ, όπου $0 < |\gamma| = |\delta| < |\lambda\mu|$.

Από τα παραπάνω, έπεται ότι $\lambda\mu\lambda\mu\lambda = \gamma\alpha\lambda\mu\lambda$, και άρα $\gamma\alpha = \lambda\mu$. Δεδομένου ότι $|\alpha| < |\lambda\mu|$, προκύπτει ότι $\lambda\mu = \alpha\xi$, για κάποια λέξη ξ. Επομένως, είναι $\alpha\lambda\mu\lambda = \alpha\xi\lambda\beta$ και συνεπώς $\lambda\mu\lambda = \xi\lambda\beta$, δίνοντας $\gamma\alpha\lambda = \xi\lambda\beta$. Επειδή $|\gamma| = |\xi|$, έπεται ότι $\gamma = \xi$ και άρα

$$\lambda\mu = \alpha\gamma = \gamma\alpha.$$

Έτσι, είναι

$$(\lambda\mu)^{\nu}\lambda = (\lambda\mu)^{\nu-2}\lambda\mu\lambda\mu\lambda = (\gamma\alpha)^{\nu-2}\gamma v = \gamma(\alpha\gamma)^{\nu-2}v = \gamma(\lambda\mu)^{\nu-2}v,$$

οπότε η $(\lambda\mu)^{\nu-2}v$ είναι σύνορο της $(\lambda\mu)^{\nu}\lambda$ με $|(\lambda\mu)^{\nu-2}v| > |(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda|$, το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\lambda\mu\lambda$ είναι το μέγιστο σύνορο της $\lambda\mu\lambda\mu\lambda$. Αν υπάρχει σύνορο v της $(\lambda\mu)^{\nu}\lambda$ τέτοιο ώστε $|v| > |(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda|$, τότε

$$v = \alpha(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda = (\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda\beta,$$

για κάποιες λέξεις α, β, όπου $0 < |\alpha| = |\beta| < |\lambda\mu|$, οπότε, αφού $|\alpha\lambda\mu\lambda| < |\lambda\mu\lambda\mu\lambda|$, η $\alpha\lambda\mu\lambda$ είναι (γνήσιο) πρόθεμα της $\lambda\mu\lambda\mu\lambda$. Επιπλέον, αφού η $\alpha(\lambda\mu)^{\nu-1}\lambda = \alpha\lambda\mu\lambda(\mu\lambda)^{\nu-2}$ είναι γνήσιο επίθεμα της $(\lambda\mu)^{\nu}\lambda = \lambda\mu\lambda\mu\lambda(\mu\lambda)^{\nu-2}$, έπεται ότι η $\alpha\lambda\mu\lambda$ είναι γνήσιο επίθεμα της $\lambda\mu\lambda\mu\lambda$. Συνεπώς, η $\alpha\lambda\mu\lambda$ είναι σύνορο της $\lambda\mu\lambda\mu\lambda$, με $|\alpha\lambda\mu\lambda| > |\lambda\mu\lambda|$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 1.12. *Αν $w = (\lambda\mu)^{\nu}\lambda$ είναι η κανονική μορφή της περιοδικής λέξης w, τότε η v είναι σύνορο της w αν και μόνο αν είναι σύνορο της $\lambda\mu\lambda$, ή είναι της μορφής $v_k = (\lambda\mu)^k\lambda$, $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι για $\nu \geq 2$ και για κάθε σύνορο v της w, με $|v| \geq |v_1|$, υπάρχει $k \in [\nu - 1]$, τέτοιο ώστε $v = v_k$.

Έστω k το μέγιστο στοιχείο του $[\nu - 1]$ τέτοιο ώστε $|v_k| \leq |v|$. Τότε, $|v| < |v_{k+1}|$, οπότε η v είναι σύνορο της v_{k+1}. Αφού, από τα Λήμματα 1.10 και 1.11, η v_k είναι το μέγιστο σύνορο της v_{k+1}, έπεται ότι $v = v_k$. □

Για κάθε πρόθεμα p μιας λέξης w, συμβολίζουμε με $r_w(p)$ το δεξιό συμπλήρωμα του p ως προς την w, δηλαδή $w = pr_w(p)$. Ανάλογα ορίζεται το αριστερό συμπλήρωμα $l_w(s)$ ενός επιθέματος s της w, δηλαδή $w = l_w(s)s$.

Πρόταση 1.13. *Έστω $w = (\lambda\mu)^{\nu}\lambda$ η κανονική μορφή της περιοδικής λέξης w. Τότε,*

i) για κάθε σύνορο v της w, η $r(v)$ αρχίζει με $\mu\lambda$ αν και μόνο αν $v = v_k$, για κάποιο $k \in \{0, 1, \ldots, \nu - 1\}$,

ii) για κάθε ζεύγος συνόρων v, v' της $\lambda\mu\lambda$ με $|v| < |v'|$, η $r(v)$ δεν αρχίζει με $r(v')$.

Απόδειξη. *i*) Προφανώς, η $r(v_k) = (\mu\lambda)^{v-k}$ αρχίζει με $\mu\lambda$ για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, v-1\}$. Για το αντίστροφο, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.12, αρκεί να δειχθεί ότι αν η $r(v)$ αρχίζει με $\mu\lambda$ και η v είναι σύνορο της $\lambda\mu\lambda$, τότε $v = \lambda$. Πράγματι, εύκολα προκύπτει ότι η $v\mu\lambda$ είναι σύνορο της w, αν $v \geq 2$, ή $v\mu\lambda = w$, αν $v = 1$. Δεδομένου ότι $|v\mu\lambda| > |\lambda\mu|$, από την Πρόταση 1.9 προκύπτει ότι $v\mu\lambda = \lambda\mu\lambda$, και συνεπώς $v = \lambda$.

ii) Αν η $r(v)$ αρχίζει με $r(v')$, τότε εύκολα προκύπτει ότι η $vr(v')$ είναι σύνορο της w. Προφανώς, αφού από την Πρόταση 1.9 ισχύει ότι $|v'| \leq |\mu\lambda|$, έπεται ότι

$$|r(v')| = |(\lambda\mu)^{v}\lambda| - |v'| \geq (v+1)|\lambda| + v|\mu| - |\mu\lambda| = |v_{v-1}|.$$

Τότε όμως $|vr(v')| > |v_{v-1}|$, το οποίο είναι άτοπο. □

1.7 Μονοπάτια σε δικτυωτό

Ένα *μονοπάτι σε δικτυωτό* ή απλά *μονοπάτι* είναι μια πεπερασμένη ακολουθία

$$(x_k, y_k)_{0 \leq k \leq n}$$

σημείων με ακέραιες συντεταγμένες του καρτεσιανού επιπέδου, τέτοια ώστε $x_k < x_{k+1}$, για κάθε $0 \leq k < n$. Το σύνολο των *βημάτων* ενός μονοπατιού είναι το $S = \{(x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k) : 0 \leq k < n\}$. Το *ύψος* του σημείου (x_k, y_k) ενός μονοπατιού είναι η τιμή y_k. Ένα μονοπάτι αναπαριστάνεται γραφικά σχεδιάζοντας για κάθε ζεύγος διαδοχικών του σημείων (x_k, y_k) και (x_{k+1}, y_{k+1}) ένα ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει. Τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα αναπαριστάνουν τα βήματα του μονοπατιού. Ως ύψος του βήματος θεωρείται το $\min\{y_k, y_{k+1}\}$.

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι το αρχικό σημείο κάθε μονοπατιού είναι η αρχή των αξόνων, δηλαδή $x_0 = y_0 = 0$, μεταφράζοντας τις συντεταγμένες κάθε σημείου του στο σύστημα αυτό. Έτσι, ένα μονοπάτι μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα από την ακολουθία βημάτων του. Επομένως, αν το σύνολο βημάτων S θεωρηθεί ως ένα αλφάβητο, τότε ένα μονοπάτι ισοδυναμεί με μια λέξη του S^*. Για το λόγο αυτό, στο εξής θα θεωρούμε τις έννοιες της λέξης και του μονοπατιού ισοδύναμες.

Η σύζευξη (ή παράθεση) δύο μονοπατιών ορίζεται ως η σύζευξη των αντίστοιχων λέξεών τους. Το κενό μονοπάτι συμβολίζεται με ε και είναι το μονοπάτι που δεν περιέχει βήματα, δηλαδή αποτελείται από ένα και μόνο σημείο. Το *μήκος* ενός μονοπατιού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται ως το πλήθος των βημάτων του. Ένα μονοπάτι $\tau \in S^*$, το οποίο καλείται *πρότυπο*, *εμφανίζεται* στο μονοπάτι $\alpha \in S^*$, αν $\alpha = \beta\tau\gamma$, για κάποια $\beta, \gamma \in S^*$. Το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου τ στο α, συμβολίζεται με $|\alpha|_\tau$, ή με $N_\tau(\alpha)$. Αν το α δεν περιέχει εμφάνιση του τ, τότε λέμε ότι το α *αποφεύγει* το πρότυπο τ.

Στο εξής, με τον όρο μονοπάτι θα εννοούμε ένα μονοπάτι που αποτελείται από δύο είδη βημάτων, τα $\mathrm{u} = (1, 1)$ και $\mathrm{d} = (1, -1)$, τα οποία καλούνται *άνοδος* και *κάθοδος* αντίστοιχα. Το σύνολο των μονοπατιών αυτών συμβολίζεται με $\{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^*$.

Το *αντίστροφο* ενός μονοπατιού α συμβολίζεται με α' και είναι το συμμετρικό του μονοπάτι ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Πρακτικά, το α' προκύπτει διαβάζοντας τα βήματα του α από το τελευταίο προς το πρώτο και αντικαθιστώντας κάθε u με d και κάθε d με u. Το *κατοπτρικό* ενός μονοπατιού α συμβολίζεται με $\overline{\alpha}$ και είναι το συμμετρικό του μονοπάτι ως προς τον οριζόντιο άξονα. Πρακτικά, το $\overline{\alpha}$ προκύπτει αντικαθιστώντας κάθε u του α με d και κάθε d με u.

Το *βάθος* (αντίστοιχα *ύψος*) ενός μονοπατιού ορίζεται ως η απόλυτη διαφορά μεταξύ του ύψους του χαμηλότερου σημείου του και του ύψους του πρώτου (αντίστοιχα τελευταίου) σημείου του. Ένα μονοπάτι βάθους δ και ύψους h ονομάζεται (δ, h)-*μονοπάτι*. Για παράδειγμα, το μονοπάτι udduuuud που ξεκινά από το δεύτερο και καταλήγει στο δέκατο σημείο του μονοπατιού του Σχήματος 1.1 είναι ένα $(1, 3)$-μονοπάτι.

1.7.1 Βασικές απαριθμήσεις μονοπατιών

Συμβολίζουμε με $P_{(r,s)\to(x,y)}$ το σύνολο των μονοπατιών του $\{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^*$ που ξεκινούν από το σημείο (r, s) και καταλήγουν στο σημείο (x, y) και γράφουμε $P_{x,y}$ αντί για $P_{(0,0)\to(x,y)}$.

Έστω μονοπάτι $\alpha \in P_{(r,s)\to(x,y)}$. Προφανώς, η διαφορά του ύψους του τελικού σημείου πλην το ύψος του αρχικού σημείου είναι $|\alpha|_u - |\alpha|_d = y - s$. Επιπλέον, το πλήθος των βημάτων του α είναι $|\alpha|_u + |\alpha|_d = x - r$. Επομένως, έχουμε ότι $|\alpha|_u = \frac{x+y-r-s}{2}$ και $|\alpha|_d = \frac{x-y-r+s}{2}$.

Έτσι, έχουμε ότι

$$|P_{(r,s)\to(x,y)}| = \binom{x-r}{\frac{x+y-r-s}{2}}$$

και

$$|P_{x,y}| = \binom{x}{\frac{x+y}{2}}.$$

Συμβολίζουμε με $A_{x,y}$ το σύνολο των μονοπατιών από το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο (x, y) τα οποία δεν έχουν βήματα κάτω από τον άξονα x και με $B_{x,y}$ το σύνολο των μονοπατιών από το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο (x, y) τα οποία έχουν βήματα και κάτω από τον άξονα x. Έτσι, $|P_{x,y}| = |A_{x,y}| + |B_{x,y}|$.

Πρόταση 1.14. *Το πλήθος των μονοπατιών από το $(0, 0)$ στο (x, y) χωρίς βήματα κάτω από τον άξονα είναι ίσο με*

$$|A_{x,y}| = \frac{2y+2}{x+y+2}\binom{x}{\frac{x+y}{2}}.$$

Απόδειξη. Ένα μονοπάτι $\alpha \in B_{x,y}$ θα είναι της μορφής $\alpha = f\mathrm{d}\beta$, όπου d το πρώτο βήμα κάτω από τον άξονα x. Αντικαθιστώντας το τμήμα $f\mathrm{d}$ με το συμμετρικό του gu ως προς την ευθεία $y = -1$, προκύπτει το μονοπάτι $\gamma = gu\beta$ με $\gamma \in P_{(0,-2)\to(x,y)}$. Η απεικόνιση αυτή είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη κι επομένως,

$$|B_{x,y}| = |P_{(0,-2)\to(x,y)}| = \binom{x}{\frac{x+y+2}{2}}.$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$|A_{x,y}| = |P_{x,y}| - |B_{x,y}| = \binom{x}{\frac{x+y}{2}} - \binom{x}{\frac{x+y+2}{2}} = \frac{2y+2}{x+y+2}\binom{x}{\frac{x+y}{2}}.$$

□

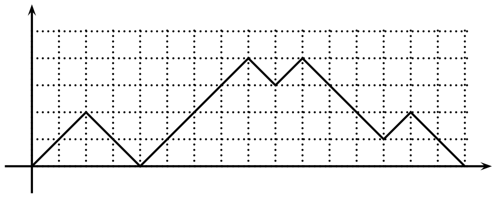
Παρατηρήσεις

1. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη είναι γνωστή ως *αρχή της ανάκλασης*.
2. Αν θέσουμε $x = 2n$ και $y = 0$, παίρνουμε $|A_{2n,0}| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
3. Αν θέσουμε $\frac{x+y}{2} = n$ (όπου $\frac{x+y}{2}$ είναι το πλήθος των ανόδων του μονοπατιού), παίρνουμε

$$|A_{x,y}| = \frac{2y+2}{2n+2}\binom{2n-y}{n} = \frac{y+1}{n+1}\binom{2n-y}{n} = \frac{y+1}{2n-y+1}\binom{2n-y+1}{n+1}.$$

1.8 Μονοπάτια Dyck

Μονοπάτι Dyck είναι ένα μονοπάτι με βήματα $\mathrm{u} = (1, 1)$ και $\mathrm{d} = (1, -1)$, τα οποία καλούνται *άνοδοι* και *κάθοδοι* αντίστοιχα, που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στον άξονα x χωρίς να έχει βήματα κάτω από αυτόν.



Σχήμα 1.1: Το μονοπάτι Dyck uudduuuududddudd.

Το πλήθος των ανόδων ενός μονοπατιού Dyck ονομάζεται *ημιμήκος* του μονοπατιού. Το σύνολο των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n συμβολίζεται με $\mathcal{D}_n$ και γράφουμε $\mathcal{D} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{D}_n$, όπου $\mathcal{D}_0 = \{\varepsilon\}$. Όπως είναι γνωστό, ισχύει ότι

$$|\mathcal{D}_n| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(βλ. Παρατήρηση 2, μετά την Πρόταση 1.14).

Ένα μονοπάτι που είναι πρόθεμα (αντ. επίθεμα) ενός μονοπατιού Dyck, ονομάζεται *πρόθεμα Dyck* (αντ. *επίθεμα Dyck*). Για παράδειγμα, το μονοπάτι uudduu (αντ. udddudd), το οποίο αποτελείται από τα 6 πρώτα (αντ. 7 τελευταία) βήματα του μονοπατιού του Σχήματος 1.1 είναι ένα πρόθεμα Dyck (αντ. επίθεμα Dyck). Όπως είναι γνωστό, το πλήθος των προθεμάτων Dyck με n ανόδους και ύψος h ισούται με

$$\frac{h+1}{2n-h+1}\binom{2n-h+1}{n+1}$$

(βλ. Παρατήρηση 3, μετά την Πρόταση 1.14). Ανάλογο αποτέλεσμα προκύπτει και για το πλήθος των επιθεμάτων Dyck, με τη βοήθεια της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης $\alpha \mapsto \alpha'$.

Σημειώνεται ότι τα προθέματα Dyck συναντώνται στη βιβλιογραφία και με την ονομασία *μονοπάτια ballot*. Η δεύτερη ονομασία είναι προγενέστερη της πρώτης και οφείλεται στο ότι κάθε τέτοιο μονοπάτι κωδικοποιεί το ιστορικό μιας ψηφοφορίας (ballot) μεταξύ δύο υποψηφίων u και d, κατά την οποία, ανά πάσα στιγμή, ο u προηγείται σε ψήφους από τον d.

Ένα μονοπάτι α είναι Dyck αν και μόνο αν

1. $|p|_{\mathrm{u}} \geq |p|_{\mathrm{d}}$, για κάθε $p, q \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^*$, με $\alpha = pq$, και

2. $|\alpha|_{\mathrm{u}} = |\alpha|_{\mathrm{d}}$.

Η πρώτη συνθήκη εξασφαλίζει ότι το μονοπάτι δεν έχει βήματα κάτω από τον οριζόντιο άξονα, ενώ η δεύτερη ότι καταλήγει στον οριζόντιο άξονα. Επιπλέον, το α είναι πρόθεμα Dyck αν και μόνο αν ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη, ενώ είναι επίθεμα Dyck αν και μόνο αν $|q|_{\mathrm{u}} \leq |q|_{\mathrm{d}}$, για κάθε p, q, με $\alpha = pq$.

1.8.1 Διασπάσεις μονοπατιών Dyck

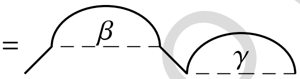
Με τον όρο διάσπαση ενός συνόλου συνδυαστικών αντικειμένων εννοούμε την ανάλυση κάθε στοιχείου του σε στοιχεία (όχι απαραίτητα του ίδιου συνόλου) τα οποία είναι "μικρότερα" ως προς κάποια προκαθορισμένη έννοια μεγέθους. Επιπλέον, η ανάλυση αυτή πρέπει να είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή κάθε στοιχείο να αναλύεται σε επιμέρους στοιχεία και να ανασυντίθεται από αυτά με μοναδικό τρόπο. Οι διασπάσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία στη Συνδυαστική Απαρίθμηση, αφού επιτρέπουν, μεταξύ άλλων, τον προσδιορισμό αναγωγικών σχέσεων, γεννητριών συναρτήσεων, καθώς και την κατασκευή αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων μεταξύ ισοδύναμων συνόλων.

Η πιο σημαντική διάσπαση στη διατριβή αυτή είναι η *διάσπαση της πρώτης επιστροφής* του συνόλου $\mathcal{D}$, σύμφωνα με την οποία κάθε μονοπάτι Dyck α διασπάται ως

$$\alpha = \varepsilon, \qquad \text{ή} \qquad \alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma, \quad \text{όπου } \beta, \gamma \in \mathcal{D}.$$

Γενικά, κάθε βήμα που καταλήγει στον οριζόντιο άξονα του μονοπατιού ονομάζεται *επιστροφή*. Η κάθοδος που ακολουθεί το μονοπάτι β λαμβάνεται ως η πρώτη επιστροφή του α και έτσι εξασφαλίζεται το αμφιμονοσήμαντο της διάσπασης. Για την ακρίβεια, η διάσπαση αυτή εκφράζει την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}$, με $f(\beta, \gamma) = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$. Ειδικά, αν $\gamma = \varepsilon$, οπότε $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}$, τότε το α ονομάζεται *πρώτο*.

Η διάσπαση της πρώτης επιστροφής αναπαριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 1.2. Τα μονοπάτια Dyck αναπαριστώνται με ημικύκλια, υποδηλώνοντας ότι δεν περιέχουν βήματα σε ύψος μικρότερο από εκείνο του αρχικού σημείου τους.

$\alpha =$ 

Σχήμα 1.2: Η διάσπαση της πρώτης επιστροφής ενός μη κενού μονοπατιού Dyck α.

Στη συνέχεια, δίνεται ως παράδειγμα η μέθοδος προσδιορισμού, βάσει της παραπάνω διάσπασης, της γεννήτριας συνάρτησης του συνόλου $\mathcal{D}$. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά στη διατριβή αυτή, σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, όπου οι διασπάσεις είναι πιο σύνθετες και οι γεννήτριες συναρτήσεις αφορούν περισσότερες από μία παραμέτρους. Αν $D(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{D}$ ως προς την παράμετρο "ημιμήκος του μονοπατιού", και ορίσουμε τη βασική παράμετρο $q : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{N}$, με $q(\beta, \gamma) = |\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}} + 1$, τότε, βάσει του Λήμματος 1.6 (*iii*), έχουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ είναι η

$$\sum_{(\beta,\gamma) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}} x^{q(\beta,\gamma)} = \sum_{(\beta,\gamma) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}} + 1} = x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} = xD^2(x).$$

Από την άλλη, η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}$ είναι η $D(x) - 1$. Επιπλέον, είναι

$$|f(\beta, \gamma)|_{\mathrm{u}} = |\mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma|_{\mathrm{u}} = |\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}} + 1 = q(\beta, \gamma),$$

άρα, βάσει του Λήμματος 1.5, έχουμε ότι

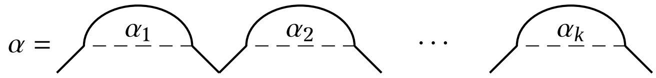
$$D(x) - 1 = xD^2(x),$$

οπότε η $D(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση (1.4), δηλαδή είναι $D(x) = C(x)$. Κατόπιν τούτων, προκύπτει το γνωστό αποτέλεσμα:

$$|\mathcal{D}_n| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής στο τελικό τμήμα (εκείνο που έπεται της πρώτης επιστροφής) ενός μονοπατιού Dyck, προκύπτει η *διάσπαση πρώτων παραγόντων* (βλ. Σχ. 1.3):

$$\alpha \in \mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\} \Rightarrow \alpha = \mathrm{u}\alpha_1\mathrm{d}\mathrm{u}\alpha_2\mathrm{d} \cdots \mathrm{u}\alpha_k\mathrm{d}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}^*.$$



Σχήμα 1.3: Η διάσπαση πρώτων παραγόντων ενός μη κενού μονοπατιού Dyck α.

Η διάσπαση πρώτων παραγόντων, σύμφωνα με την προηγούμενη μέθοδο, οδηγεί στην εξίσωση

$$D(x) - 1 = \sum_{k \geq 1} (xD(x))^k\,,$$

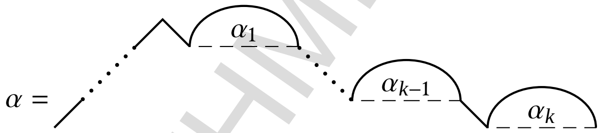
από την οποία έχουμε ότι

$$D(x) = \sum_{k \geq 0} (xD(x))^k \Rightarrow D(x) = \frac{1}{1 - xD(x)} \Rightarrow D(x) = 1 + xD^2(x),$$

λαμβάνοντας έτσι το ίδιο αποτέλεσμα για την $D(x)$.

Κάθε μεγιστική ακολουθία διαδοχικών ανόδων (αντ. καθόδων) σε ένα μονοπάτι ονομάζεται *ανάβαση* (αντ. *κατάβαση*). Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής στο αρχικό τμήμα (εκείνο που προηγείται της πρώτης επιστροφής) ενός μονοπατιού Dyck, προκύπτει η *διάσπαση της πρώτης ανάβασης* (βλ. Σχ. 1.4):

$$\alpha \in \mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\} \Rightarrow \alpha = \mathrm{u}^k \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \cdots \mathrm{d}\alpha_k, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}^*.$$



Σχήμα 1.4: Η διάσπαση πρώτης ανάβασης ενός μη κενού μονοπατιού Dyck α.

Η διάσπαση πρώτης ανάβασης οδηγεί επίσης στην ίδια εξίσωση για τη γεννήτρια συνάρτηση $D(x)$.

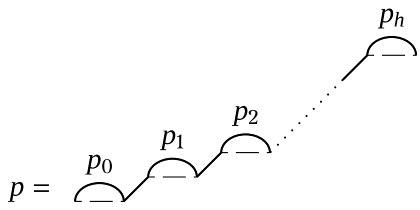
Σε κάθε μια από τις προηγούμενες διασπάσεις, επιλέχθηκε ένα μονοσήμαντο χαρακτηριστικό των μονοπατιών, το οποίο να εξασφαλίζει το αμφιμονοσήμαντο της διάσπασης. Το χαρακτηριστικό αυτό ήταν η πρώτη επιστροφή, το σύνολο όλων των επιστροφών και η πρώτη κάθοδος του μονοπατιού. Η ίδια προσέγγιση ακολουθείται γενικά, για τη διάσπαση οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων. Έτσι, για παράδειγμα, κάθε πρόθεμα Dyck p διασπάται, θεωρώντας την τελευταία άνοδο σε κάθε ύψος, ως

$$p = \varepsilon \qquad \text{ή} \qquad p = p_0 \mathrm{u} p_1 \cdots \mathrm{u} p_h, \quad p_0, p_1, \ldots, p_h \in \mathcal{D}, h \in \mathbb{N}.$$

Σημειώνεται ότι, στην περίπτωση που $h = 0$, οπότε $p = p_0 \in \mathcal{D}$, η παραπάνω ανάλυση είναι διάσπαση, αρκεί το p_0 να αναλυθεί περαιτέρω (για παράδειγμα με τη διάσπαση πρώτης επιστροφής). Ομοίως προκύπτει και η διάσπαση ενός επιθέματος Dyck, θεωρώντας την πρώτη κάθοδο σε κάθε ύψος.

Από τη διάσπαση του Σχήματος 1.5, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των προθεμάτων Dyck ύψους h ισούται με $x^h C^{h+1}(x)$, οπότε το πλήθος των προθεμάτων Dyck ύψους h με n ανόδους ισούται με

$$[x^n] x^h C^{h+1}(x) = [x^{n-h}] C^{h+1}(x) \overset{6}{=} \frac{h+1}{2n-h+1}\binom{2n-h+1}{n-h} = \frac{h+1}{2n-h+1}\binom{2n-h+1}{n+1}$$



Σχήμα 1.5: Η διάσπαση ενός μη κενού προθέματος Dyck p.

(βλ. Παρατήρηση 3, μετά την Πρόταση 1.14).

1.9 Συνεχή κλάσματα και γεννήτριες συναρτήσεις

Ένα συνεχές κλάσμα είναι ένα κλάσμα της μορφής

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cdots}}}$$

όπου οι όροι a_i και b_i μπορούν να είναι πραγματικοί ή και μιγαδικοί αριθμοί. Στην περίπτωση που $b_0 = b_1 = \ldots = 1$, τότε το συνεχές κλάσμα καλείται *απλό*. Αν το πλήθος των όρων a_i και b_i είναι πεπερασμένο (αντίστοιχα άπειρο), τότε το συνεχές κλάσμα ονομάζεται *πεπερασμένο* (αντίστοιχα *άπειρο*). Στην περίπτωση απλού κλάσματος, συνηθίζεται και ο συμβολισμός $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$, ή και ο συμβολισμός $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, στην περίπτωση που ο a_0 είναι ακέραιος.

Αν έχουμε το άπειρο συνεχές κλάσμα $f = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, τότε το κλάσμα

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

ονομάζεται *k-οστή προσέγγιση* του f.

Ένα απλό παράδειγμα γεννήτριας συνάρτησης που εκφράζεται ως συνεχές κλάσμα, είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας Catalan. Από τον τύπο (1.4) προκύπτει ότι

$$C(x) = \frac{1}{1 - xC(x)}.$$

Από τον παραπάνω τύπο, με διαδοχικές αντικαταστάσεις, παίρνουμε

$$C(x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 - \cdots}}}. \tag{1.14}$$

Αν συμβολίσουμε με $C_k(x)$ τη γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck που δεν ξεπερνούν το ύψος k, τότε, από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, είναι $C_0(x) = 1$ και $C_k(x) = 1 + xC_{k-1}(x)C_k(x)$, όπου $k \geq 1$. Πράγματι, ένα μη κενό μονοπάτι α που δεν ξεπερνά το ύψος k διασπάται ως $\alpha = u\beta d\gamma$, όπου τα β, γ είναι μονοπάτια Dyck που δεν ξεπερνούν τα ύψη $k - 1$ και k αντίστοιχα, οπότε προκύπτει η προηγούμενη σχέση, η οποία μπορεί να γραφτεί ως

$$C_k(x) = \frac{1}{1 - xC_{k-1}}, \quad k \geq 1, \qquad C_0(x) = 1, \tag{1.15}$$

δηλαδή η $C_k(x)$ αποτελεί την k-οστή προσέγγιση της $C(x)$.

[6] Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.6).

1.10 Πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους

Τα πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους ορίζονται από τον τύπο

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad n \geq 0.$$

Έτσι, θέτοντας $x = \cos\theta$, προκύπτει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$U_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2x, & n = 1, \\ 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), & n \geq 2. \end{cases} \tag{1.16}$$

Πράγματι, βάσει του ορισμού και της γνωστής ταυτότητας

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

είναι

$$U_0(x) = U_0(\cos\theta) = \frac{\sin 1\theta}{\sin\theta} = 1,$$

$$U_1(x) = U_1(\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2x$$

και

$$\begin{aligned} U_n(x) = U_n(\cos\theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n\theta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= xU_{n-1}(x) + \frac{\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta} = xU_{n-1}(x) + \frac{\sin n\theta\cos\theta - \sin(n\theta-\theta)}{\sin\theta} \\ &= 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Έστω η ρητή συνάρτηση

$$R_k(x) = \frac{U_{k-1}(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\sqrt{x}U_k(\frac{1}{2\sqrt{x}})}, \quad k \geq 1, \quad R_0(x) = 1. \tag{1.17}$$

Από τις σχέσεις (1.16) και (1.17) προκύπτει ότι

$$R_k(x) = \frac{1}{1 - xR_{k-1}(x)}, \quad k \geq 2, \quad R_0(x) = R_1(x) = 1. \tag{1.18}$$

Πράγματι, για $k = 1$ είναι

$$R_1(x) = \frac{U_0(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\sqrt{x}U_1(\frac{1}{2\sqrt{x}})} = \frac{1}{\sqrt{x}2\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 1$$

και για $k \geq 2$, από τη σχέση (1.16) είναι

$$U_k(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{1}{\sqrt{x}}U_{k-1}(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - U_{k-2}(\frac{1}{2\sqrt{x}}).$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{\sqrt{x}}{U_{k-1}(\frac{1}{2\sqrt{x}})}$, έχουμε ότι $\frac{1}{R_k(x)} = 1 - xR_{k-1}(x)$, οπότε $R_k(x) = \frac{1}{1 - xR_{k-1}(x)}$.

Από τις σχέσεις (1.15) και (1.18) προκύπτει ότι η συνάρτηση $R_k(x)$ αποτελεί την $(k-1)$-οστή προσέγγιση της γεννήτριας συνάρτησης Catalan, δηλαδή η $R_k(x)$ αποτελεί τη γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck που δεν ξεπερνούν το ύψος $k-1$.

Η χρήση της συνάρτησης $R_k(x)$ εισήχθηκε από τους Chow και West [10] και έκτοτε χρησιμοποιείται ευρέως από πολλούς συγγραφείς σε προβλήματα απαρίθμησης μονοπατιών Dyck στα οποία υπεισέρχεται η έννοια του ύψους.

1.11 Πολυώνυμα Fibonacci-like

Τα πολυώνυμα $q_i = q_i(x)$ που ορίζονται αναδρομικά από τη σχέση

$$q_i = q_{i-1} - xq_{i-2}, \quad i \geq 1, \qquad q_{-1} = 0, q_0 = 1, \tag{1.19}$$

ονομάζονται *πολυώνυμα Fibonacci-like* (βλ. [5, 25]) και συνδέονται άμεσα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan, επομένως και με την απαρίθμηση μονοπατιών Dyck. Τα πολυώνυμα αυτά αποτελούν μια ισοδύναμη έκφραση των πολυωνύμων Chebyshev, βάσει της σχέσης

$$q_i(x) = (\sqrt{x})^i U_i(\frac{1}{2\sqrt{x}}), \quad i \geq 0. \tag{1.20}$$

Πράγματι, είναι

$$(\sqrt{x})^0 U_0(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 1 = q_0(x),$$

$$(\sqrt{x})^1 U_1(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x}2\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 = q_1(x)$$

και, από τη σχέση (1.16), έχουμε ότι

$$U_i(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{1}{\sqrt{x}}U_{i-1}(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - U_{i-2}(\frac{1}{2\sqrt{x}}), \quad i \geq 2,$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας με $(\sqrt{x})^i$, προκύπτει ότι

$$(\sqrt{x})^i U_i(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = (\sqrt{x})^{i-1}U_{i-1}(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - x(\sqrt{x})^{i-2}U_{i-2}(\frac{1}{2\sqrt{x}}), \quad i \geq 2,$$

δηλαδή τα πολυώνυμα $(\sqrt{x})^i U_i(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση (1.19).

Οι επόμενες τρεις σχέσεις μπορούν εύκολα να αποδειχθούν με επαγωγή και θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

$$q_i(x) = \frac{1 - (xC^2)^{i+1}}{1 - xC^2}C^{-i}, \tag{1.21}$$

$$xq_{i-1}C^{i+1} + 1 = q_i C^i, \tag{1.22}$$

$$q_{i-1} + x^i C^{i+1} = q_i C. \tag{1.23}$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η σχέση (1.21), επιλύοντας την αναγωγική εξίσωση (1.19) με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων:

Απόδειξη της σχέσης (1.21). Έστω η γεννήτρια συνάρτηση

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(x)t^i.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.19) με t^i και αθροίζοντας για $i \geq 2$, προκύπτει

$$\sum_{i=2}^{\infty} q_i(x)t^i = t\sum_{i=2}^{\infty} q_{i-1}(x)t^{i-1} - xt^2 \sum_{i=2}^{\infty} q_{i-2}(x)t^{i-2} \Rightarrow$$

$$Q(t) - q_0(x) - q_1(x)t = t(Q(t) - q_0(x)) - xt^2 Q(t) \Rightarrow$$

$$Q(t) = \frac{1}{1 - t + xt^2}.$$

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = C \quad \text{και} \quad \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1-(1-4x)}{2x(1-\sqrt{1-4x})} = \frac{1}{xC},$$

οπότε,

$$Q(t) = \frac{1}{x(t-C)(t-\frac{1}{xC})} = \frac{1}{(\frac{t}{C}-1)(xCt-1)} = \frac{1}{1-xC^2}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{C}} - \frac{xC^2}{1-xCt}\right).$$

Επομένως, είναι

$$q_i(x) = [t^i]\frac{1}{1-xC^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{t}{C}\right)^i - xC^2\sum_{i=0}^{\infty}(xCt)^i\right) = \frac{1}{1-xC^2}\left(\frac{1}{C^i} - xC^2(xC)^i\right)$$

και τελικά,

$$q_i(x) = \frac{1-(xC^2)^{i+1}}{1-xC^2}C^{-i}.$$

□

Στη συνέχεια, ορίζεται ένα άλλο είδος πολυωνύμων Fibonacci-like, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα. Τα πολυώνυμα p_i ορίζονται ως εξής:

$$p_i(t) = p_{i-1}(t) - xp_{i-2}(t), \quad p_{-1}(t) = \frac{1}{x}, \quad p_0(t) = t, \quad i \in \mathbb{N}^*, \tag{1.24}$$

όπου το x θεωρείται ως παράμετρος.

Εύκολα επαληθεύεται ότι τα πολυώνυμα αυτά ικανοποιούν τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$p_i(t) = xtp_{i-1}(\tfrac{t-1}{xt}), \tag{1.25}$$

$$(1-xt)p_i(t) - (t-1-xt^2)q_i(x) = xp_{i-1}(t), \tag{1.26}$$

$$p_{i-1}(t)p_i(t) - p_i^2(t) - xp_{i-1}^2(t) = x^{i-1}(t-1-xt^2), \tag{1.27}$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

1.12 Απαρίθμηση προτύπου σε m-αδικές λέξεις

Στην περίπτωση λέξεων με γράμματα από κάποιο πεπερασμένο αλφάβητο, χωρίς επιπλέον περιορισμούς, το πρόβλημα της απαρίθμησης των λέξεων ως προς τις εμφανίσεις κάποιου συνόλου από πρότυπα έχει πλήρως απαντηθεί. Συγκεκριμένα, οι Guibas και Odlyzko [30] προσδιόρισαν τη γεννήτρια συνάρτηση των λέξεων που αποφεύγουν ένα σύνολο από πρότυπα, ενώ οι Goulden και Jackson [27] προσδιόρισαν τη γεννήτρια συνάρτηση των λέξεων για οποιοδήποτε πλήθος εμφανίσεων από ένα σύνολο προτύπων, το οποίο δεν περιέχει πρότυπα που είναι υπολέξεις άλλων προτύπων. Το αποτέλεσμα αυτό, γενικεύτηκε αργότερα για οποιοδήποτε σύνολο προτύπων από τους Nooan και Zeilberger [55], οι οποίοι ανέπτυξαν μια αλγοριθμική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος αυτού. Η έκφραση της αντίστοιχης γεννήτριας συνάρτησης και μια πλήρης απόδειξη αυτής παρουσιάζεται στην εργασία [3].

Στην ενότητα αυτή, προσδιορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί λέξεις ως προς το πλήθος εμφανίσεων ενός προτύπου, με μία διαφορετική μέθοδο από αυτές που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία. Η μέθοδος αυτή, με κατάλληλες τροποποιήσεις, δίνει απάντηση και σε ορισμένες περιπτώσεις απαρίθμησης προτύπων σε μονοπάτια Dyck, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

Θεώρημα 1.15. *Η γεννήτρια συνάρτηση* $F = F(x,y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}^*} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_\tau}$*, η οποία απαριθμεί το σύνολο των λέξεων σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο* $\mathcal{L}$*, με* $|\mathcal{L}| = m$*, ως προς το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου* $\tau \in \mathcal{L}^*$*, ισούται με*

$$F = \frac{1 - (y-1)x^{|\tau|} \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|}}{1 - mx - (y-1)x^{|\tau|}\left(1 + (1-mx)\sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|}\right)},$$

όπου $\mathcal{V}$ *είναι το σύνολο των συνόρων του* τ*.*

Απόδειξη. Έστω $\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, με $\tau_i \in \mathcal{L}$, $i \in [\ell]$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_i$ το σύνολο των λέξεων του $\mathcal{L}^*$ που έχουν ως πρόθεμα την $\tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_\ell$, για κάθε $i \in [\ell]$, και με $A_i = A_i(x,y)$ την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου. Επιπλέον, ορίζουμε $A_{\ell+1} = F$.

Κάθε λέξη $\alpha \in \mathcal{L}^*$ διασπάται ως εξής:

$$\alpha = \varepsilon \quad \text{ή} \quad \alpha = c\beta, \qquad \text{όπου } c \in \mathcal{L}, \beta \in \mathcal{L}^*.$$

Αν $c \neq \tau_1$ (οπότε υπάρχουν $m-1$ δυνατές τιμές για το c), τότε όλες οι εμφανίσεις της τ στην α περιέχονται στην β. Αντίθετα, αν $c = \tau_1$, τότε $|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + [\beta \in \mathcal{A}_2]$. Έτσι, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{\alpha \in \mathcal{L}^*} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_\tau} = 1 + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{L}^* \\ c \in \mathcal{L}}} x^{|c\beta|} y^{|c\beta|_\tau} = 1 + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{L}^* \\ c \in \mathcal{L} \setminus \{\tau_1\}}} x^{|c\beta|} y^{|c\beta|_\tau} + \sum_{\beta \in \mathcal{L}^*} x^{|\tau_1\beta|} y^{|\tau_1\beta|_\tau} \\
&= 1 + x \sum_{c \in \mathcal{L} \setminus \{\tau_1\}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}^*} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau} + x \sum_{\beta \in \mathcal{L}^*} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau + [\beta \in \mathcal{A}_2]} \\
&= 1 + x(m-1)F + x \sum_{\beta \in \mathcal{L}^* \setminus \mathcal{A}_2} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau + [\beta \in \mathcal{A}_2]} + x \sum_{\beta \in \mathcal{A}_2} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau + [\beta \in \mathcal{A}_2]} \\
&= 1 + x(m-1)F + x(F - A_2) + xyA_2,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$F = 1 + mxF + x(y-1)A_2. \tag{1.28}$$

Αν $|\tau| = \ell = 1$, τότε $A_2 = F$ και $\mathcal{V} = \varnothing$, οπότε από τη σχέση (1.28) προκύπτει απευθείας το ζητούμενο. Για την περίπτωση που $\ell > 1$, θα δοθεί μια αναδρομική σχέση για τις γεννήτριες συναρτήσεις A_i, $2 \le i \le \ell$, βάσει της οποίας θα γίνει ο προσδιορισμός της γεννήτριας συνάρτησης A_2.

Αν $\alpha \in \mathcal{A}_i$, τότε $\alpha = \tau_i\beta$, όπου $\beta \in \mathcal{A}_{i+1}$. Η α περιέχει μία παραπάνω εμφάνιση του προτύπου τ από την β αν και μόνο αν $\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}$ και $\beta \in \mathcal{A}_2$. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}][\beta \in \mathcal{A}_2], \qquad 2 \le i \le \ell.$$

Κατόπιν τούτου, και λαμβάνοντας υπόψη ότι αν $\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}$, τότε $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_{i+1}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
A_i &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} x^{|\alpha|} y^{|\alpha|_\tau} = \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i+1}} x^{|\tau_i\beta|} y^{|\tau_i\beta|_\tau} = x \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i+1}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}][\beta \in \mathcal{A}_2]} \\
&\overset{7}{=} x \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i+1}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau} (1 + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}](y^{[\beta \in \mathcal{A}_2]} - 1)) \\
&= xA_{i+1} + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}] x \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i+1}} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau} (y^{[\beta \in \mathcal{A}_2]} - 1) \\
&= xA_{i+1} + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}] x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i+1} \setminus \mathcal{A}_2} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau} (y^0 - 1) + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_2} x^{|\beta|} y^{|\beta|_\tau} (y - 1) \right) \\
&= xA_{i+1} + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}] x(y-1)A_2,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$A_i = xA_{i+1} + [\tau_i \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}]x(y-1)A_2, \quad 2 \le i \le l.$$

Πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη δύναμη του x κάθε μία από τις $\ell - 1$ παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{array}{rcl} A_2 & = & xA_3 + [\tau_2 \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}]x(y-1)A_2 \\ xA_3 & = & x^2A_4 + [\tau_3 \cdots \tau_\ell \in \mathcal{V}]x^2(y-1)A_2 \\ & \vdots & \\ x^{\ell-2}A_\ell & = & x^{\ell-1}F + [\tau_\ell \in \mathcal{V}]x^{\ell-1}(y-1)A_2 \end{array}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$A_2 = x^{\ell-1}F + (y-1)A_2 \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{\ell-|v|},$$

οπότε

$$A_2 = \frac{x^{\ell-1}F}{1-(y-1)\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{\ell-|v|}}. \tag{1.29}$$

Από τις σχέσεις (1.28) και (1.29), θέτοντας $S = S(x) = \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F &= 1 + mxF + \frac{x^\ell(y-1)F}{1-(y-1)x^\ell S} \\ \Rightarrow F - (y-1)Fx^\ell S &= (1+mxF)(1-(y-1)x^\ell S) + x^\ell(y-1)F \\ \Rightarrow (1-mx)F - (y-1)Fx^\ell S &+ mxF(y-1)x^\ell S - x^\ell(y-1)F = 1-(y-1)x^\ell S \\ \Rightarrow (1-mx)F - (y-1)x^\ell F(1+(1-mx)S) &= 1-(y-1)x^\ell S \\ \Rightarrow F &= \frac{1-(y-1)x^\ell S}{1-mx-(y-1)x^\ell(1+(1-mx)S)}. \end{aligned}$$

□

Σημειώνεται ότι η γεννήτρια συνάρτηση F είναι πάντα μια ρητή συνάρτηση, δηλαδή πηλίκο δύο πολυωνύμων των x και y, σε αντίθεση με την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση των λέξεων Dyck, η οποία, όπως θα δούμε στα επόμενα, είναι μια αλγεβρική συνάρτηση, δηλαδή λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2.

Θέτοντας $y = 0$ στον τύπο του Θεωρήματος 1.15, προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.16. *Η γεννήτρια συνάρτηση $F_0(x)$, η οποία απαριθμεί το σύνολο των λέξεων σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο $\mathcal{L}$, με $|\mathcal{L}| = m$, που αποφεύγουν το πρότυπο $\tau \in \mathcal{L}^*$, ισούται με*

$$F_0(x) = \frac{1 + x^{|\tau|}\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|}}{1 - mx + x^{|\tau|}\left(1 + (1-mx)\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|}\right)} = \frac{c_\tau(x)}{x^{|\tau|} + (1-mx)c_\tau(x)},$$

όπου $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων του τ και $c_\tau(x) = 1 + x^{|\tau|}\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|}$.

Το πολυώνυμο $c_\tau(x)$ ονομάζεται *πολυώνυμο αυτοσυσχέτισης* (autocorrelation polynomial) του προτύπου τ.

[7] Βάσει της ταυτότητας $y^{[p][q]} = 1 + [p](y^{[q]} - 1)$.

Κεφάλαιο 2

Πρότυπα σε καθορισμένο ύψος σε μονοπάτια Dyck

2.1 Εισαγωγή

Μια εμφάνιση του μονοπατιού τ στο μονοπάτι Dyck α είναι *σε ύψος* j, όταν το χαμηλότερο σημείο του τ είναι σε ύψος j. Αν $j = 0$, τότε η εμφάνιση αυτή ονομάζεται *χαμηλή*.

Συμβολίζουμε με $F_j = F_j(x, y)$ τη γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck, όπου οι μεταβλητές x και y κωδικοποιούν αντίστοιχα το ημιμήκος και το πλήθος εμφανίσεων του τ σε ύψος j, δηλαδή

$$F_j = F_j(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{N_{\tau,j}(\alpha)},$$

όπου $N_{\tau,j}(\alpha)$ είναι το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου τ σε ύψος j στο μονοπάτι α. Ειδικά, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $L = F_0$ για τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς τις χαμηλές εμφανίσεις, δηλαδή

$$L = L(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)},$$

όπου $L_\tau(\alpha)$ είναι το πλήθος των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου τ στο μονοπάτι α.

Επιπλέον, συμβολίζουμε με $A_p(x)$ (αντίστοιχα $B_s(x)$) τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς το ημιμήκος, του συνόλου $\mathcal{A}_p$ (αντίστοιχα $\mathcal{B}_s$) των μονοπατιών Dyck που έχουν πρόθεμα p (αντίστοιχα έχουν επίθεμα s), καθώς επίσης με $\Gamma_{p,s}(x)$ τη γεννήτρια συνάρτηση της τομής των δύο αυτών συνόλων.

Λήμμα 2.1. *Για κάθε πρόθεμα Dyck p ύψους h και για κάθε επίθεμα Dyck s βάθους δ, ισχύουν*

i) $A_p(x) = x^{|p|_{\mathrm{u}}} C^{h+1}$,

ii) $B_s(x) = x^{|s|_{\mathrm{u}}+\delta} C^{\delta+1}$,

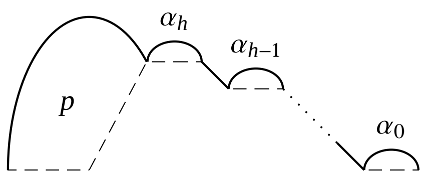
iii) $\Gamma_{p,s}(x) \overset{1}{=} x^{|p|_{\mathrm{u}}+|s|_{\mathrm{u}}+\delta-m} C^{|h-\delta|+m+1} q_m + x^{|p|_{\mathrm{u}}+|s|_{\mathrm{u}}} \sum_{v \in \mathcal{U}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}$,

όπου $m = \min\{h, \delta\}$ και $\mathcal{U}$ το σύνολο των μη κενών μονοπατιών v που είναι προθέματα του s και επιθέματα του p με $|v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} = h - \delta$.

[1] Τα πολυώνυμα q_i έχουν οριστεί στην Ενότητα 1.11.

Απόδειξη. i) Από τη διάσπαση των μονοπατιών Dyck με πρόθεμα p (βλ. Σχ. 2.1), προκύπτει ότι

$$A_p(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathcal{D} \\ 0 \le i \le h}} x^{|p|_{\mathrm{u}} + \sum_{i=0}^{h} |\alpha_i|_{\mathrm{u}}} = x^{|p|_{\mathrm{u}}} \prod_{i=0}^{h} \sum_{\alpha_i \in \mathcal{D}} x^{|\alpha_i|_{\mathrm{u}}} = x^{|p|_{\mathrm{u}}} \prod_{i=0}^{h} C = x^{|p|_{\mathrm{u}}} C^{h+1}.$$



Σχήμα 2.1: Το μονοπάτι Dyck α με πρόθεμα p και $h = |p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και η σχέση ii).

iii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $h \ge \delta$, αφού $\Gamma_{p,s}(x) \overset{2}{=} \Gamma_{s',p'}(x)$.

Αρχικά, θα προσδιοριστεί η γεννήτρια συνάρτηση $\Gamma_1(x)$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck α των οποίων το πρόθεμα p και το επίθεμα s δεν επικαλύπτονται. Έστω

$$s = \beta_\delta \mathrm{d} \beta_{\delta-1} \mathrm{d} \cdots \beta_1 \mathrm{d} \beta_0, \quad \text{και} \quad s_i = \beta_\delta \mathrm{d} \beta_{\delta-1} \mathrm{d} \cdots \beta_{i+1} \mathrm{d} \beta_i,$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$ και $0 \le i \le \delta$. Κάθε μονοπάτι α του συνόλου αυτού διασπάται στη μορφή

$$\alpha = p \alpha_h \mathrm{d} \alpha_{h-1} \mathrm{d} \cdots \alpha_1 \mathrm{d} \alpha_0, \quad \alpha_j \in \mathcal{D}, \quad 0 \le j \le h,$$

έτσι ώστε να ισχύει ακριβώς μία από τις ακόλουθες $\delta + 1$ περιπτώσεις:

$$\alpha_j = \beta_j, \text{ για κάθε } j, \text{ με } 0 \le j < i \text{ και } s_i \text{ είναι επίθεμα του } \alpha_i,$$

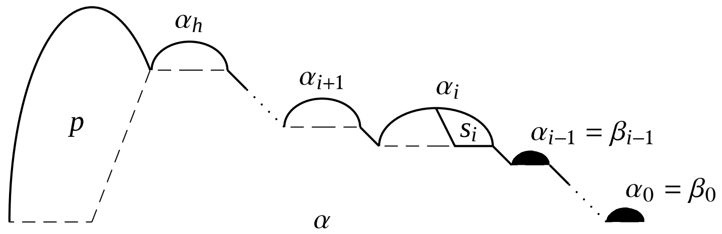
για $i = 0, 1, \ldots, \delta$. Οι περιπτώσεις αυτές ορίζουν μία διαμέριση του συνόλου των μονοπατιών αυτών, κάθε κλάση της οποίας περιγράφεται στο Σχήμα 2.2 και έχει γεννήτρια συνάρτηση ίση με

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha_j \in \mathcal{D}, j \in [i,h] \\ s_i \text{ επίθεμα του } \alpha_i}} x^{|p|_{\mathrm{u}} + \sum_{j=0}^{i-1} |\beta_j|_{\mathrm{u}} + \sum_{j=i}^{h} |\alpha_j|_{\mathrm{u}}} = x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}} - |s_i|_{\mathrm{u}}} \sum_{s_i \text{ επίθεμα του } \alpha_i} x^{|\alpha_i|_{\mathrm{u}}} \prod_{j=i+1}^{h} \sum_{\alpha_j \in \mathcal{D}} x^{|\alpha_j|_{\mathrm{u}}} \\
&= x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}} - |s_i|_{\mathrm{u}}} B_{s_i} C^{h-i} = x^{|p|_{\mathrm{u}}} x^{|s|_{\mathrm{u}} - |s_i|_{\mathrm{u}}} x^{|s_i|_{\mathrm{u}} + \delta - i} C^{\delta - i + 1} C^{h-i} \\
&= x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} x^{\delta - i} C^{h + \delta - 2i + 1}.
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας για όλες τις κλάσεις της διαμέρισης, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(x) &= \sum_{i=0}^{\delta} x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} x^{\delta - i} C^{h + \delta - 2i + 1} = x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} x^{\delta} C^{h + \delta + 1} \sum_{i=0}^{\delta} (xC^2)^{-i} \\
&= x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} x^{\delta} C^{h + \delta + 1} \frac{(\frac{1}{xC^2})^{\delta+1} - 1}{\frac{1}{xC^2} - 1} = x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} x^{\delta} C^{h + \delta + 1} xC^2 \frac{(\frac{1}{xC^2})^{\delta+1} - 1}{1 - xC^2} \\
&= x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} x^{\delta} C^{h + \delta + 1} xC^2 (xC^2)^{-\delta-1} \frac{1 - (xC^2)^{\delta+1}}{1 - xC^2} \\
&= x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} C^{h+1} \frac{1 - (xC^2)^{\delta+1}}{1 - xC^2} C^{-\delta} = x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} C^{h+1} q_\delta.
\end{aligned}$$

[2]Υπενθυμίζεται ότι, αν $\alpha \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^*$, τότε το μονοπάτι α' είναι το συμμετρικό του α ως προς τον κατακόρυφο άξονα, δηλαδή αυτό που προκύπτει διαβάζοντας τα βήματα του α από το τελευταίο προς το πρώτο και αντικαθιστώντας κάθε u με d και κάθε d με u.



Σχήμα 2.2: Ένα μονοπάτι Dyck α χωρίς επικάλυψη των p, s.

Από την άλλη, αν το πρόθεμα p και το επίθεμα s του α επικαλύπτονται, τότε το κοινό τους τμήμα v ανήκει στο $\mathcal{U}$, καθώς είναι $\alpha = pr_s(v)$, οπότε

$$\begin{aligned} |v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} &= |s|_{\mathrm{u}} - |r_s(v)|_{\mathrm{u}} - |s|_{\mathrm{d}} + |r_s(v)|_{\mathrm{d}} \\ &= |s|_{\mathrm{u}} - (|\alpha|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{u}}) - |s|_{\mathrm{d}} + (|\alpha|_{\mathrm{d}} - |p|_{\mathrm{d}}) \\ &= (|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}) - (|s|_{\mathrm{d}} - |s|_{\mathrm{u}}) \\ &= h - \delta. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η γεννήτρια συνάρτηση $\Gamma_2(x)$ των μονοπατιών Dyck των οποίων το πρόθεμα p και το επίθεμα s επικαλύπτονται είναι

$$\Gamma_2(x) = \sum_{v \in \mathcal{U}} x^{|p|_{\mathrm{u}} + |r_s(v)|_{\mathrm{u}}} = x^{|p|_{\mathrm{u}} + |s|_{\mathrm{u}}} \sum_{v \in \mathcal{U}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}.$$

Η σχέση *iii*) (για $m = \delta$) προκύπτει αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις που δίνουν τις $\Gamma_1(x)$ και $\Gamma_2(x)$. □

2.2 Απαρίθμηση χαμηλών εμφανίσεων προτύπου

Για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης L, για το πρότυπο τ ύψους h και βάθους δ, θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το πρότυπο δεν είναι πρόθεμα Dyck χωρίς επιστροφές.[3] Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε τη διάσπαση του προτύπου με βάση το αριστερότερο χαμηλότερο, όχι αρχικό σημείο του:

$$\tau = s\mathrm{d}\sigma t,$$

όπου $\sigma \in \mathcal{D}$, το s είναι ένα επίθεμα Dyck ή $s = \mathrm{u}b$, $b \in \mathcal{D}$, και $t = \varepsilon$ ή $t = \mathrm{u}p$, όπου p ένα πρόθεμα Dyck.

Στο επόμενο Λήμμα υπολογίζεται η γεννήτρια συνάρτηση $A_{\sigma t}$, όπου γενικότερα, για κάθε πρόθεμα Dyck q, θα συμβολίζουμε με $A_q = A_q(x, y)$ τη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}_q$ των μονοπατιών Dyck που έχουν πρόθεμα q, με τις μεταβλητές x, y να κωδικοποιούν το ημιμήκος και το πλήθος των χαμηλών εμφανίσεων του τ αντίστοιχα.

Λήμμα 2.2. *Για το πρότυπο $\tau = s\mathrm{d}\sigma t$, σύμφωνα με τη διάσπαση του αριστερότερου χαμηλότερου, όχι αρχικού σημείου ισχύει ότι*

$$A_{\sigma t} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \left(A_t + (y-1) \textstyle\sum_{w \in \mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} \right), \tag{2.1}$$

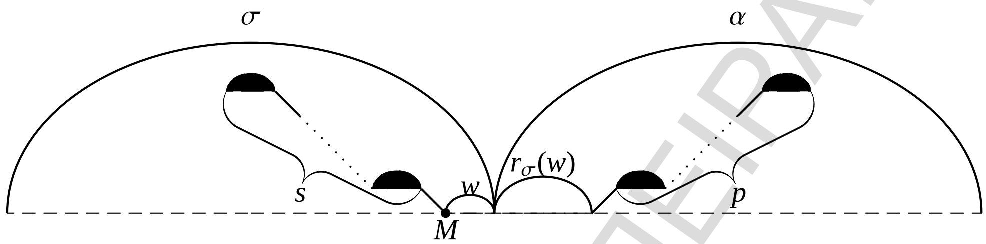
όπου $\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{D} : s\mathrm{d}w$ επίθεμα του σ, wt πρόθεμα του $\sigma\}$.

[3] Αν το τ είναι πρόθεμα Dyck χωρίς επιστροφές, υπολογίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $L_{\tau'}(x, y) = L_\tau(x, y)$.

Απόδειξη (1ος τρόπος). Επειδή κάθε μονοπάτι Dyck με πρόθεμα σt γράφεται στη μορφή $\sigma\alpha$, όπου το α είναι ένα μονοπάτι Dyck με πρόθεμα t, προκύπτει ότι

$$A_{\sigma t} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_t} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\sigma\alpha)}. \tag{2.2}$$

Για κάθε χαμηλή εμφάνιση του τ στο $\sigma\alpha$, η οποία δεν περιέχεται στο α, αν M είναι το αριστερότερο χαμηλότερο, όχι αρχικό σημείο στην εμφάνιση αυτή, τότε το M θα ανήκει στο σ και το επίθεμα w του σ που αρχίζει από το σημείο M θα ανήκει στο $\mathcal{W}$ (βλ. Σχ. 2.3). Επιπλέον, θα ισχύει ότι το $r_\sigma(w)t$ είναι ένα πρόθεμα του α.



Σχήμα 2.3: Ένα μονοπάτι Dyck $\sigma\alpha$, όπου το α έχει πρόθεμα t και υπάρχει χαμηλή εμφάνιση του τ που δεν περιέχεται στο α.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$L_\tau(\sigma\alpha) = L_\tau(\alpha) + |\{w \in \mathcal{W} : r_\sigma(w)t \text{ πρόθεμα του } \alpha\}|. \tag{2.3}$$

Για την απόδειξη της σχέσης (2.1), διακρίνουμε περιπτώσεις για το σύνολο $\mathcal{W}$:
i) Αν $\mathcal{W} = \varnothing$, τότε η σχέση (2.3) γίνεται

$$L_\tau(\sigma\alpha) = L_\tau(\alpha),$$

οπότε, βάσει της σχέσης (2.2), προκύπτει ότι

$$x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}}\left(A_t + (y-1)\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t}\right) = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} A_t = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_t} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_t} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\sigma\alpha)} = A_{\sigma t}.$$

ii) Αν $\mathcal{W} = \{\varepsilon\}$, τότε η σχέση (2.3) γίνεται

$$L_\tau(\sigma\alpha) = L_\tau(\alpha) + [\sigma t \text{ πρόθεμα του } \alpha],$$

οπότε, από τη σχέση (2.2), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A_{\sigma t} &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}}\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)} + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)+1}\Big) \\ &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}}(A_t - A_{\sigma t} + yA_{\sigma t}) \\ &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}}(A_t + (y-1)\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t}). \end{aligned}$$

iii) Αν το $\mathcal{W}$ περιέχει μη κενά στοιχεία, τότε το σ είναι περιοδικό, οπότε γράφεται στην κανονική μορφή $\sigma = \lambda(\mu\lambda)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Προφανώς είναι $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$. Έστω

$$\mathcal{W}' = \mathcal{W} \setminus \{v_i = \lambda(\mu\lambda)^i : 0 \le i \le \nu - 1\}.$$

Αρχικά, θα δειχθεί ότι

$$A_{\sigma t} = x^{|w|_{\mathrm{u}}} A_{r_\sigma(w)t}, \quad w \in \mathcal{W}', \tag{2.4}$$

για κάθε $w \in \mathcal{W}'$.

Πράγματι, για $w = \varepsilon$ είναι προφανές, ενώ για $w \neq \varepsilon$, κάθε μονοπάτι Dyck με πρόθεμα σt γράφεται στη μορφή $w\gamma$, όπου το γ είναι ένα μονοπάτι Dyck με πρόθεμα $r_\sigma(w)t$. Έστω ότι υπάρχει χαμηλή εμφάνιση του τ στο $w\gamma$, η οποία δεν περιέχεται στο γ. Τότε, το w θα έχει επίθεμα sdv, όπου το v είναι κενό, ή σύνορο του σ μικρότερου μήκους από το w, και επιπλέον, το $r_\sigma(w)$ θα είναι πρόθεμα του $r_\sigma(v)$. Τούτο όμως είναι άτοπο, λόγω της Πρότασης 1.13. Επομένως, κάθε χαμηλή εμφάνιση του τ στο $w\gamma$ πρέπει να περιέχεται στο γ, δηλαδή $L_\tau(w\gamma) = L_\tau(\gamma)$. Άρα είναι

$$A_{\sigma t} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|w\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(w\gamma)} = x^{|w|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\gamma)} = x^{|w|_{\mathrm{u}}} A_{r_\sigma(w)t}.$$

Στη συνέχεια, διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

α) Αν είναι $\mathcal{W} = \mathcal{W}''$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.13, δεν μπορεί ταυτόχρονα να είναι $r_\sigma(w_1)t$ και $r_\sigma(w_2)t$ προθέματα του α, για δύο διαφορετικά $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$, οπότε η σχέση (2.3) γίνεται

$$L_\tau(\sigma\alpha) = L_\tau(\alpha) + [r_\sigma(w)t \text{ πρόθεμα του } \alpha \text{ για κάποιο } w \in \mathcal{W}].$$

Τότε όμως, διαμερίζοντας το σύνολο των μονοπατιών Dyck α με πρόθεμα t ως προς την ιδιότητα "$r_\sigma(w)t$ πρόθεμα του α για κάποιο $w \in \mathcal{W}$" προκύπτει από τις σχέσεις (2.2) και (2.4) ότι

$$\begin{aligned} A_{\sigma t} &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \Big(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_t} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)} - \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)} + \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)+1} \Big) \\ &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \Big(A_t + (y-1) \sum_{w \in \mathcal{W}} A_{r_\sigma(w)t} \Big) \\ &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \Big(A_t + (y-1) \sum_{w \in \mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} \Big). \end{aligned}$$

β) Αν $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, τότε υπάρχει $i \in [0, \nu-1]$, με $v_i = \lambda(\mu\lambda)^i \in \mathcal{W}$. Τότε όμως προκύπτει ότι το sd είναι επίθεμα του $(\lambda\mu)^{\nu-i}$ και το t είναι πρόθεμα του $(\mu\lambda)^{\nu-i}$, και στη συνέχεια ότι το sd είναι επίθεμα του $\lambda\mu$ και το t είναι πρόθεμα του $\mu\lambda$. Κατόπιν τούτων, εύκολα προκύπτει ότι $v_i \in \mathcal{W}$, για κάθε $i \in [0, \nu-1]$, και συνεπώς

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}' \cup \{v_i = \lambda(\mu\lambda)^i : i \in [0, \nu-1]\}.$$

Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις της υποπερίπτωσης β):

1) Αν $\mu \neq \varepsilon$, τότε τα sd και t είναι αντίστοιχα επίθεμα και πρόθεμα του μ. Αρχικά θα δειχθεί ότι

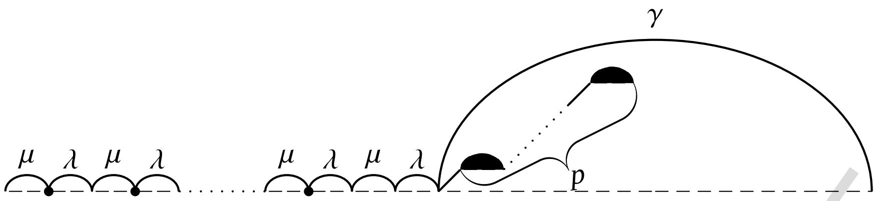
$$A_{(\mu\lambda)^k t} - A_{(\mu\lambda)^{k+1} t} = z^k y^{(k-\nu)^+} \left(A_t - A_{\mu\lambda t} + (y-1) \sum_{w \in \mathcal{W}'} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} \right), \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{2.5}$$

όπου $z = x^{|\lambda\mu|_{\mathrm{u}}}$.

Το πρώτο μέλος της σχέσης αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck που έχουν πρόθεμα $(\mu\lambda)^k t$ αλλά όχι $(\mu\lambda)^{k+1} t$. Κάθε μονοπάτι β αυτής της μορφής διασπάται στη μορφή $\beta = (\mu\lambda)^k \gamma$, όπου το $\gamma \in \mathcal{D}$ έχει πρόθεμα t αλλά όχι $\mu\lambda t$ (βλ. Σχ. 2.4).

Για μια χαμηλή εμφάνιση του τ στο β η οποία δεν περιέχεται στο γ, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Αν δεν περιέχεται στο $\mu\lambda\gamma$, τότε το αριστερότερο χαμηλότερο σημείο της P είναι το αρχικό σημείο κάποιου από τα $k-1$ πρώτα λ (βλ. τα σημειωμένα σημεία του Σχ. 2.4), διότι στην



Σχήμα 2.4: Το μονοπάτι Dyck $\beta = (\mu\lambda)^k\gamma$, όπου το γ έχει πρόθεμα t αλλά όχι $\mu\lambda t$.

αντίθετη περίπτωση το μονοπάτι w που αρχίζει από το P και τελειώνει στο πρώτο δεξιά τελικό σημείο κάποιου λ θα ήταν σύνορο του σ τέτοιο ώστε $|\lambda| \neq |w| \leq |\mu\lambda|$, ενώ το $\mu\lambda$ θα ήταν πρόθεμα του $r_\sigma(w)$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της Πρότασης 1.13. Επιπλέον, επειδή τα sd και t είναι αντίστοιχα επίθεμα και πρόθεμα του μ, και το $\mu\lambda t$ δεν είναι πρόθεμα του γ, έπεται ότι, για $k \geq \nu+1$, το αριστερότερο χαμηλότερο σημείο P μιας τέτοιας χαμηλής εμφάνισης του τ βρίσκεται αναγκαστικά σε κάποια από τις πρώτες $k-\nu$ θέσεις, ενώ αν $k \leq \nu$, τότε δεν υπάρχει εμφάνιση που δεν περιέχεται στο $\mu\lambda\gamma$.

Από την άλλη, μια χαμηλή εμφάνιση του τ στο β, η οποία περιέχεται στο $\mu\lambda\gamma$ αλλά όχι στο γ, υπάρχει αν και μόνο αν το γ έχει πρόθεμα $r_\sigma(w)t$, για κάποιο $w \in \mathcal{W}'$. Το σύνολο των μονοπατιών που έχουν μια τέτοια εμφάνιση διαμερίζεται ως προς το w, αφού σε κάθε περίπτωση το πρόθεμα του γ είναι διαφορετικό, σύμφωνα με την Πρόταση 1.13.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned} L_\tau(\beta) &= L_\tau(\gamma) + (k-\nu)^+ + L_\tau(\mu\lambda\gamma) \\ &= L_\tau(\gamma) + (k-\nu)^+ + [\gamma \text{ έχει πρόθεμα το } r_\sigma(w)t, \text{ για κάποιο } w \in \mathcal{W}'] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} A_{(\mu\lambda)^k t} - A_{(\mu\lambda)^{k+1} t} &= \sum_{\substack{\beta=(\mu\lambda)^k\gamma \\ \gamma\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\mu\lambda t}}} x^{|\beta|_u} y^{L_\tau(\beta)} \\ &= x^{k|\lambda\mu|_u} y^{(k-\nu)^+} \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\mu\lambda t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)+[\gamma\in\mathcal{A}_{r_\sigma(w)t},\text{ για } w\in\mathcal{W}']} \\ &\overset{4}{=} x^{k|\lambda\mu|_u} y^{(k-\nu)^+} \Bigg(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\mu\lambda t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)} - \sum_{w\in\mathcal{W}'} \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)} + \sum_{w\in\mathcal{W}'} \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)+1} \Bigg) \\ &= x^{k|\lambda\mu|_u} y^{(k-\nu)^+} \left(A_t - A_{\mu\lambda t} + (y-1) \sum_{w\in\mathcal{W}'} A_{r_\sigma(w)t}, \right) \end{aligned}$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4), προκύπτει η σχέση (2.5).

Από τη σχέση (2.5), αθροίζοντας ως προς k, αφενός για $1 \leq k < \nu$ και αφετέρου για $k \geq \nu$, προκύπτουν αντίστοιχα οι δύο επόμενες σχέσεις:

$$A_{\mu\lambda t} - A_{(\mu\lambda)^\nu t} = \frac{z(1-z^{\nu-1})}{1-z} \left(A_t - A_{\mu\lambda t} + (y-1) \sum_{w\in\mathcal{W}'} x^{-|w|_u} A_{\sigma t} \right),$$

$$A_{(\mu\lambda)^\nu t} = \frac{z^\nu}{1-zy} \left(A_t - A_{\mu\lambda t} + (y-1) \sum_{w\in\mathcal{W}'} x^{-|w|_u} A_{\sigma t} \right). \tag{2.6}$$

[4]Αν το γ έχει πρόθεμα το $r_\sigma(w)t$, για κάποιο $w \in \mathcal{W}'$, τότε το γ έχει πρόθεμα το t αλλά όχι το $\mu\lambda t$. Τούτο προκύπτει από την Πρόταση 1.13 για $w \neq \varepsilon$, ενώ για $w = \varepsilon$ ισχύει επειδή $\mu \neq \varepsilon$.

Διαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$A_{\mu\lambda t} = \frac{z^{1-\nu} - z + zy\left(1 - z^{1-\nu}\right)}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $A_{\mu\lambda t}$ στη σχέση (2.6), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
A_{(\mu\lambda)^\nu t} &= \frac{z^\nu}{1-zy}\left(S - \frac{z^{1-\nu} - z + zy\left(1 - z^{1-\nu}\right)}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t}\right) \Rightarrow \\
(1-zy)A_{(\mu\lambda)^\nu t} &= z^\nu S - \frac{z - z^{\nu+1} + zy(z^\nu - z)}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t} \Rightarrow \\
(1-zy)A_{(\mu\lambda)^\nu t} &= z^\nu S - \frac{(y-1)z^{\nu+1} + z(1-zy)}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t} \Rightarrow \\
z^\nu S &= \left(1 - zy + \frac{(y-1)z^{\nu+1} + z(1-zy)}{1-z}\right) A_{(\mu\lambda)^\nu t} \Rightarrow \\
z^\nu S &= \frac{(1-zy)(1-z) + (y-1)z^{\nu+1} + z(1-zy)}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t} \Rightarrow \\
z^\nu S &= \frac{1 - zy + (y-1)z^{\nu+1}}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t},
\end{aligned}$$

όπου $S = A_t + (y-1)\sum_{w\in\mathcal{W}'} x^{-|w|_u} A_{\sigma t}$.

Επιπλέον, ομοίως με τη σχέση (2.4), προκύπτει ότι

$$A_{\sigma t} = x^{|\lambda|_u} A_{(\mu\lambda)^\nu t}.$$

Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με τη σχέση

$$\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_u} = \sum_{w\in\mathcal{W}'} x^{-|w|_u} + \sum_{i=0}^{\nu-1} x^{-|\lambda(\mu\lambda)^i|_u} = \sum_{w\in\mathcal{W}'} x^{-|w|_u} + x^{-|\lambda|_u}\frac{z^{1-\nu} - z}{1-z}$$

μετατρέπουν τη ζητούμενη σχέση (2.1) σε

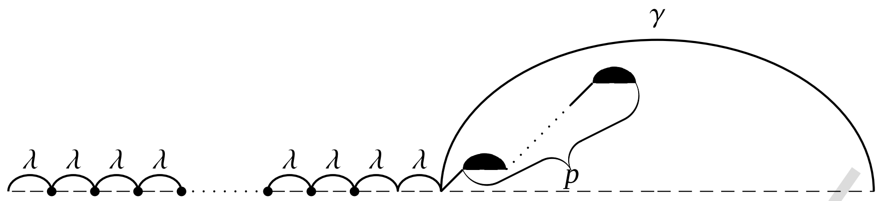
$$A_{(\mu\lambda)^\nu t} = z^\nu\left(S + (y-1)\frac{z^{1-\nu} - z}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t}\right),$$

η οποία πράγματι ισχύει, αφού, αντικαθιστώντας στο δεύτερο μέλος αυτής την ποσότητα $z^\nu S$, όπως υπολογίστηκε παραπάνω, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
z^\nu\left(S + (y-1)\frac{z^{1-\nu} - z}{1-z} A_{(\mu\lambda)^\nu t}\right) &= \left(\frac{1 - zy + (y-1)z^{\nu+1}}{1-z} + (y-1)\frac{z - z^{\nu+1}}{1-z}\right) A_{(\mu\lambda)^\nu t} \\
&= \left(1 - zy + (y-1)z^{\nu+1} + (y-1)(z - z^{\nu+1})\right)\frac{A_{(\mu\lambda)^\nu t}}{1-z} \\
&= (1 - zy + (y-1)z)\,\frac{A_{(\mu\lambda)^\nu t}}{1-z} = A_{(\mu\lambda)^\nu t}.
\end{aligned}$$

2) Αν $\mu = \varepsilon$, τότε $\sigma = \lambda^{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Επειδή, $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, δηλαδή υπάρχει $i \in [\nu]$ τέτοιο ώστε $v_i = \lambda^i \in \mathcal{W}$, έπεται ότι τα sd και t είναι αντίστοιχα επίθεμα και πρόθεμα του λ, οπότε $\varepsilon \in \mathcal{W}$.

Ένα μονοπάτι Dyck β που έχει πρόθεμα $\lambda^k t$, $k \in \mathbb{N}^*$, αλλά δεν έχει πρόθεμα $\lambda^{k+1}t$ διασπάται στη μορφή $\beta = \lambda^k\gamma$, όπου το γ είναι ένα μονοπάτι Dyck που έχει πρόθεμα t αλλά δεν έχει πρόθεμα λt.



Σχήμα 2.5: Το μονοπάτι Dyck $\beta = \lambda^k\gamma$, όπου το γ έχει πρόθεμα t αλλά όχι λt.

Για μια χαμηλή εμφάνιση του τ στο β η οποία δεν περιέχεται στο γ, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Αν δεν περιέχεται στο $\lambda\gamma$, τότε το αριστερότερο χαμηλότερο σημείο της P είναι το τελικό σημείο κάποιου από τα $k-2$ πρώτα λ (βλ. τα σημειωμένα σημεία του Σχ. 2.5), διότι στην αντίθετη περίπτωση το μονοπάτι w που αρχίζει από το P και τελειώνει στο πρώτο δεξιά τελικό σημείο κάποιου λ θα ήταν σύνορο του σ τέτοιο ώστε $|w| < |\lambda|$, ενώ το λ θα ήταν πρόθεμα του $r_\sigma(w)$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της Πρότασης 1.13. Το σημείο P δεν μπορεί να είναι το τελικό σημείο του $(k-1)$-οστού λ, διότι $\sigma \neq \lambda$. Επιπλέον, επειδή τα sd και t είναι αντίστοιχα επίθεμα και πρόθεμα του λ και το λt δεν είναι πρόθεμα του γ, έπεται ότι, για $k > \nu+1$, το αριστερότερο χαμηλότερο σημείο P μιας τέτοιας χαμηλής εμφάνισης του τ βρίσκεται αναγκαστικά σε κάποια από τις πρώτες $k-\nu-1$ θέσεις, ενώ αν $k \leq \nu+1$, τότε δεν υπάρχει εμφάνιση που δεν περιέχεται στο $\lambda\gamma$.

Από την άλλη, μια χαμηλή εμφάνιση του τ στο β, η οποία περιέχεται στο $\lambda\gamma$, χωρίς να περιέχεται στο γ, υπάρχει αν και μόνο αν το γ έχει πρόθεμα $r_\sigma(w)t$, για κάποιο $w \in \mathcal{W}' \setminus \{\varepsilon\}$. Το σύνολο των μονοπατιών που έχουν μια τέτοια εμφάνιση διαμερίζεται ως προς το w, αφού σε κάθε περίπτωση το πρόθεμα του γ είναι διαφορετικό, σύμφωνα με την Πρόταση 1.13.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned} L_\tau(\beta) &= L_\tau(\gamma) + (k-\nu-1)^+ + L_\tau(\lambda\gamma) \\ &= L_\tau(\gamma) + (k-\nu-1)^+ + [\gamma \text{ έχει πρόθεμα το } r_\sigma(w)t, \text{ για κάποιο } w \in \mathcal{W}' \setminus \{\varepsilon\}]. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει, ανάλογα με τη σχέση (2.5), ότι

$$A_{\lambda^k t} - A_{\lambda^{k+1} t} = z^k y^{(k-\nu-1)^+}\left(A_t - A_{\lambda t} + (y-1)\sum_{w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}} x^{-|w|_u} A_{\sigma t}\right), \quad k \in \mathbb{N}^*, \tag{2.7}$$

όπου $z = x^{|\lambda|_u}$. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} A_{\lambda^k t} - A_{\lambda^{k+1} t} &= \sum_{\substack{\beta=\lambda^k\gamma \\ \gamma\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\lambda t}}} x^{|\beta|_u} y^{L_\tau(\beta)} \\ &= x^{k|\lambda|_u} y^{(k-\nu-1)^+} \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\lambda t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)+[\gamma\in\mathcal{A}_{r_\sigma(w)t},\ \text{για}\ w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}]} \\ &= x^{k|\lambda|_u} y^{(k-\nu-1)^+}\Bigg(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_t\setminus\mathcal{A}_{\lambda t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)} - \sum_{w\in\mathcal{W}'}\ \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)} + \sum_{w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}}\ \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{r_\sigma(w)t}} x^{|\gamma|_u} y^{L_\tau(\gamma)+1}\Bigg) \\ &= x^{k|\lambda|_u} y^{(k-\nu-1)^+}\left(A_t - A_{\lambda t} + (y-1)\sum_{w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}} A_{r_\sigma(w)t}\right). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.7), αθροίζοντας ως προς k, αφενός για $1 \le k \le \nu$ και αφετέρου για $k \ge \nu + 1$, προκύπτουν αντίστοιχα οι δύο επόμενες σχέσεις:

$$A_{\lambda t} - A_{\sigma t} = z\frac{1 - z^{\nu}}{1 - z}(S - A_{\lambda t})$$

και

$$A_{\sigma t} = \frac{z^{\nu+1}}{1 - zy}(S - A_{\lambda t}), \tag{2.8}$$

όπου $S = A_t + (y-1)\sum_{w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t}$.

Διαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$A_{\lambda t} = \frac{1 - zy + (y-1)z^{\nu+1}}{(1-z)z^{\nu}} A_{\sigma t}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $A_{\lambda t}$ στη σχέση (2.8), σε συνδυασμό με τη σχέση

$$\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} = \sum_{w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} + \sum_{i=0}^{\nu} x^{-|\lambda^i|_{\mathrm{u}}} = \sum_{w\in\mathcal{W}'\setminus\{\varepsilon\}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} + \frac{z - z^{-\nu}}{z-1},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
A_{\sigma t} &= \frac{z^{\nu+1}}{1-zy}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\left(\frac{z - z^{-\nu}}{1-z} + \sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}}\right) - \frac{1 - zy + (y-1)z^{\nu+1}}{(1-z)z^{\nu}} A_{\sigma t}\right) \\
&= \frac{z^{\nu+1}}{1-zy}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\left(\frac{z - z^{-\nu}}{1-z} - \frac{1 - zy + (y-1)z^{\nu+1}}{(y-1)(1-z)z^{\nu}} + \sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}}\right)\right) \\
&= \frac{z^{\nu+1}}{1-zy}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\left(\frac{(y-1)(z^{\nu+1}-1) - 1 + zy - (y-1)z^{\nu+1}}{(y-1)(1-z)z^{\nu}} + \sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}}\right)\right) \\
&= \frac{z^{\nu+1}}{1-zy}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\left(\frac{y}{(1-y)z^{\nu}} + \sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}}\right)\right) \\
&= \frac{z^{\nu+1}}{1-zy}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} - \frac{y}{z^{\nu}} A_{\sigma t}\right),
\end{aligned}$$

οπότε

$$(1-zy)A_{\sigma t} + zyA_{\sigma t} = z^{\nu+1}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\textstyle\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}}\right),$$

δηλαδή

$$A_{\sigma t} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}}\left(A_t + (y-1)A_{\sigma t}\textstyle\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}}\right).$$

□

Απόδειξη (2ος τρόπος). Αν το μονοπάτι Dyck σ είναι κενό, τότε η σχέση (2.1) προφανώς ισχύει.

Στην αντίθετη περίπτωση, το σ διασπάται στη μορφή

$$\sigma = \mathrm{u}\sigma_1\mathrm{d}\mathrm{u}\sigma_2\mathrm{d}\cdots\mathrm{u}\sigma_k\mathrm{d}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \sigma_i \in \mathcal{D}, i \in [k].$$

Έστω

$$w_i = \mathrm{u}\sigma_i\mathrm{d}\cdots\mathrm{u}\sigma_k\mathrm{d}, i \in [k] \quad \text{και} \quad w_{k+1} = \varepsilon.$$

Προφανώς, είναι $\mathcal{W} \subseteq \{w_i : 2 \le i \le k+1\}$.

Για κάθε $i \in [k]$, κάθε μονοπάτι Dyck α με πρόθεμα $w_i t$ διασπάται ως $\alpha = \mathrm{u}\sigma_i \mathrm{d}\beta$, όπου το β είναι ένα μονοπάτι Dyck με πρόθεμα $w_{i+1}t$. Το α περιέχει (το πολύ) μία επιπλέον χαμηλή εμφάνιση του τ από το β, αν και μόνο αν $w_{i+1} \in \mathcal{W}$ και $\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}$. Πράγματι, μια τέτοια εμφάνιση υπάρχει αν και μόνο αν το sd είναι επίθεμα του $\mathrm{u}\sigma_i\mathrm{d}$ και το $\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}$, οπότε, δεδομένου ότι το β έχει πρόθεμα $w_{i+1}t$, ισχύει ότι

$$\begin{cases} \mathrm{sd} \text{ επίθεμα του } \mathrm{u}\sigma_i\mathrm{d} \\ \beta \text{ έχει πρόθεμα } \sigma t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{sd}w_{i+1} \text{ επίθεμα του } \sigma \\ w_{i+1}t \text{ πρόθεμα του } \sigma \\ \beta \text{ έχει πρόθεμα } \sigma t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_{i+1} \in \mathcal{W} \\ \beta \text{ έχει πρόθεμα } \sigma t \end{cases}$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$\alpha = \mathrm{u}\sigma_i\mathrm{d}\beta, \beta \in \mathcal{A}_{w_{i+1}t} \Rightarrow L_\tau(\alpha) = L_\tau(\beta) + [w_{i+1} \in \mathcal{W}][\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}], \qquad i \in [k].$$

Έτσι, αν $w_{i+1} \notin \mathcal{W}$, τότε προφανώς είναι $A_{w_i t} = x^{|\sigma_i|_{\mathrm{u}}+1} A_{w_{i+1}t}$, ενώ αν $w_{i+1} \in \mathcal{W}$, τότε είναι $\mathcal{A}_{\sigma t} \subseteq \mathcal{A}_{w_{i+1}t}$ και

$$\begin{aligned} A_{w_i t} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{w_i t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)} = x^{|\sigma_i|_{\mathrm{u}}+1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{w_{i+1}t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\beta) + [\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}]} \\ &= x^{|\sigma_i|_{\mathrm{u}}+1} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{w_{i+1}t} \setminus \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\beta)} + y \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\beta)} \right) \\ &= x^{|\sigma_i|_{\mathrm{u}}+1} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}_{w_{i+1}t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\beta)} + (y-1) \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\beta)} \right) \\ &= x^{|\sigma_i|_{\mathrm{u}}+1} \left(A_{w_{i+1}t} + (y-1) A_{\sigma t} \right), \end{aligned}$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$A_{w_i t} = x^{|\sigma_i|_{\mathrm{u}}+1} \left(A_{w_{i+1}t} + [w_{i+1} \in \mathcal{W}](y-1) A_{\sigma t} \right), \quad i \in [k].$$

Για κάθε $i \in [2, k+1]$, πολλαπλασιάζοντας την αντίστοιχη σχέση με

$$x^{|\sigma_1|_{\mathrm{u}}+1} x^{|\sigma_2|_{\mathrm{u}}+1} \cdots x^{|\sigma_{i-1}|_{\mathrm{u}}+1} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}} - |w_i|_{\mathrm{u}}},$$

προκύπτουν οι εξισώσεις

$$x^{|\sigma|_{\mathrm{u}} - |w_i|_{\mathrm{u}}} A_{w_i t} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}} - |w_{i+1}|_{\mathrm{u}}} A_{w_{i+1}t} + [w_{i+1} \in \mathcal{W}] x^{|\sigma|_{\mathrm{u}} - |w_{i+1}|_{\mathrm{u}}} (y-1) A_{\sigma t}, \quad i \in [k].$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω k εξισώσεις, προκύπτει τελικά ότι

$$A_{\sigma t} = A_{w_1 t} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \left(A_t + (y-1) \sum_{i=1}^{k} [w_{i+1} \in \mathcal{W}] x^{-|w_{i+1}|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} \right).$$

Όμως, είναι $\mathcal{W} \subseteq \{w_i : 2 \le i \le k+1\}$, άρα ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{k} [w_{i+1} \in \mathcal{W}] x^{-|w_{i+1}|_{\mathrm{u}}} = \sum_{w \in \mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}},$$

και επομένως, η τελευταία έκφραση της $A_{\sigma t}$ ταυτίζεται με την (2.1). □

Απόδειξη (3ος τρόπος). Αν $\mathcal{W} = \emptyset$, τότε για κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{A}_{\sigma t}$, με $\alpha = \sigma\gamma$ και $\gamma \in \mathcal{A}_t$, είναι $L_\tau(\alpha) = L_\tau(\gamma)$. Πράγματι, αν υπήρχε εμφάνιση του τ που να επικαλύπτεται με το πρόθεμα σ, το κοινό τμήμα της με το σ θα ήταν της μορφής $s\mathrm{d}w$, με $w \in \mathcal{D}$ και w γνήσιο πρόθεμα του σ. Επιπλέον, επειδή το t είναι πρόθεμα του γ, έπεται ότι το wt είναι πρόθεμα του σ, οπότε $w \in \mathcal{W}$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, έχουμε ότι

$$A_{\sigma t} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)} = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_t} x^{|\sigma\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\sigma\gamma)} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_t} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\gamma)} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} A_t,$$

δηλαδή η σχέση (2.1) ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{W} \neq \emptyset$ (οπότε και $\sigma \neq \varepsilon$). Τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{W}$ διατάσσονται ως προς το μήκος τους. Έστω $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$, με $|w_1| < |w_2| < \cdots < |w_r|$ και έστω

$$\mathcal{E}_j = \{\alpha \in \mathcal{D} : \alpha = l_\sigma(w_j)\beta, \beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}\}, \quad j \in [r].$$

Το $\mathcal{E}_j$ αποτελείται από τα μονοπάτια Dyck με πρόθεμα σt, τα οποία περιέχουν τουλάχιστον μία χαμηλή εμφάνιση του τ η οποία επικαλύπτεται με το πρόθεμα σ (διότι $w_j \in \mathcal{W}$, οπότε το $s\mathrm{d}$ είναι επίθεμα του $l_\sigma(w_j)$). Πρέπει να τονιστεί πάντως, ότι τα σύνολα $\mathcal{E}_j$ δεν είναι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους (αυτό εξαρτάται από την κανονική μορφή του προτύπου τ), αφού μπορεί να είναι $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}_j$ για κάποιους δείκτες $1 \leq i < j \leq r$.

Ορίζουμε τις παραμέτρους $\chi_j : \mathcal{A}_{\sigma t} \to \mathbb{N}$, $j \in [r]$, με

$$\chi_j(\alpha) = \#\text{χαμηλών εμφανίσεων του } \tau \text{ στο } \alpha, \text{ που επικαλύπτονται με το πρόθεμα } l_\sigma(w_j).$$

(Προφανώς, το α έχει πάντα πρόθεμα $l_\sigma(w_j)$, αφού έχει πρόθεμα σ και $\sigma = l_\sigma(w_j)w_j$.) Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\chi_1(\alpha) = \#\text{χαμηλών εμφανίσεων του } \tau \text{ στο } \alpha, \text{ που επικαλύπτονται με το πρόθεμα } \sigma,$$

αφού $\alpha = \sigma\gamma$, $\gamma \in \mathcal{A}_t$, οπότε $\alpha = l_\sigma(w_1)w_1\gamma$ και μια τέτοια εμφάνιση του τ δεν μπορεί να περιέχεται στο $w_1\gamma$, διότι το w_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathcal{W}$.

Άμεσα προκύπτει ότι, για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}_{\sigma t}$, οι χαμηλές εμφανίσεις του τ που επικαλύπτονται με το πρόθεμα σ απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα στο σύνολο των δεικτών $j \in [r]$ για τους οποίους $\alpha \in \mathcal{E}_j$. Επομένως, για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}_{\sigma t}$, ισχύει η σχέση:

$$\chi_j(\alpha) = \chi_{j+1}(\alpha) + [\alpha \in \mathcal{E}_j], \quad j \in [r],$$

όπου $\chi_{r+1}(\alpha) = 0$. Βάσει της σχέσης αυτής, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}\left(y^{L_\tau(\alpha)-\chi_{j+1}(\alpha)} - y^{L_\tau(\alpha)-\chi_j(\alpha)}\right) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)}\left(y^{-\chi_j(\alpha)+[\alpha\in\mathcal{E}_j]} - y^{-\chi_j(\alpha)}\right)\\
= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_j(\alpha)}\left(y^{[\alpha\in\mathcal{E}_j]} - 1\right) &= (y-1)\sum_{\alpha\in\mathcal{E}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_j(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_1(\alpha)} + (y-1)\sum_{j=1}^{r}\sum_{\alpha\in\mathcal{E}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_j(\alpha)}\\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_1(\alpha)} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}\left(y^{L_\tau(\alpha)-\chi_{j+1}(\alpha)} - y^{L_\tau(\alpha)-\chi_j(\alpha)}\right)\\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_1(\alpha)} + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_{r+1}(\alpha)} - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)-\chi_1(\alpha)}\\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha)}\\
&= A_{\sigma t}.
\end{aligned}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση $x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} A_t$ απαριθμεί το σύνολο $\mathcal{A}_{\sigma t}$, αγνοώντας τις χαμηλές εμφανίσεις του τ που επικαλύπτονται με το πρόθεμα σ. Πράγματι, είναι

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha) - \chi_1(\alpha)} = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_t} x^{|\sigma\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\sigma\gamma) - \chi_1(\sigma\gamma)} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_t} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\gamma)} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} A_t.$$

Ομοίως, η γεννήτρια συνάρτηση $x^{|l_\sigma(w_j)|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t}$ απαριθμεί το σύνολο $\mathcal{E}_j$, αγνοώντας τις χαμηλές εμφανίσεις του τ που επικαλύπτονται με το πρόθεμα $l_\sigma(w_j)$. Πράγματι, είναι

$$x^{|l_\sigma(w_j)|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} = x^{|l_\sigma(w_j)|_{\mathrm{u}}} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\beta)} = \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|l_\sigma(w_j)\beta|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(l_\sigma(w_j)\beta) - \chi_j(l_\sigma(w_j)\beta)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha) - \chi_j(\alpha)}.$$

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A_{\sigma t} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha) - \chi_1(\alpha)} + (y-1) \sum_{j=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\alpha) - \chi_j(\alpha)} = x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} A_t + (y-1) \sum_{j=1}^{r} x^{|l_\sigma(w_j)|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} \\ &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}} \left(A_t + (y-1) \sum_{w \in \mathcal{W}} x^{-|w|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t} \right). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.3. *Η γεννήτρια συνάρτηση L του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και το πλήθος των χαμηλών εμφανίσεων ενός προτύπου τ, βάθους δ και ύψους h, ισούται με*

$$L = C + \frac{(y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}+\delta} C^{M+m+2}}{1 - (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}} \left(x^{\delta - m} C^{M+1} q_m + \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}} \right)},$$

όπου $M = \max\{h, \delta\}$, $m = \min\{h, \delta\}$ και $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων v του τ, για τα οποία ισχύει $|v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} = h - \delta$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, όπως και προηγουμένως, υποτίθεται ότι το πρότυπο τ διασπάται στη μορφή $\tau = s\mathrm{d}\sigma t$, όπου $\sigma \in \mathcal{D}$, s είναι επίθεμα Dyck ή $s = \mathrm{u}b$, $b \in \mathcal{D}$, και $t = \varepsilon$ ή $t = \mathrm{u}p$, όπου p είναι πρόθεμα Dyck.

Τότε, σύμφωνα με τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, το (μη κενό) μονοπάτι Dyck $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$, περιέχει χαμηλή εμφάνιση του τ η οποία δεν περιέχεται στο γ αν και μόνο αν το $\mathrm{u}\beta\mathrm{d}$ έχει επίθεμα $s\mathrm{d}$ και το γ έχει πρόθεμα σt, δηλαδή

$$L_\tau(\alpha) = L_\tau(\gamma) + [\mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}][\gamma \in \mathcal{A}_{\sigma t}].$$

Κατόπιν τούτων, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} L &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}} + 1} y^{L_\tau(\gamma) + [\mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}][\gamma \in \mathcal{A}_{\sigma t}]} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} \sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\gamma)} + \sum_{\beta \in \mathcal{D}} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_{\sigma t}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{L_\tau(\gamma) + [\mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}]} \\ &= 1 + xC(L - A_{\sigma t}) + xA_{\sigma t} \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{[\mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}]} \\ &= 1 + xC(L - A_{\sigma t}) + xA_{\sigma t} \left(C - \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D} \\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} + y \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D} \\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} \right) \\ &= 1 + xCL + (y-1) \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D} \\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d} \in \mathcal{B}_{s\mathrm{d}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} A_{\sigma t}. \end{aligned}$$

Αν το s είναι επίθεμα Dyck (οπότε έχει βάθος $\delta - 1$), τότε βάσει του Λήμματος 2.1 *ii*), είναι

$$\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{D}\\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} = \sum_{\beta\in\mathcal{B}_s} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} = B_s(x) = x^{|s|_{\mathrm{u}}+\delta-1}C^{\delta}.$$

Αν $s = \mathrm{u}b$, $b \in \mathcal{D}$ (οπότε $\delta = 0$), τότε είναι

$$\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{D}\\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} = \sum_{\beta=b} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} = x^{|b|_{\mathrm{u}}} = x^{|s|_{\mathrm{u}}+\delta-1}C^{\delta}.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, ισχύει η επόμενη σχέση:

$$L = 1 + xCL + (y-1)x^{|s|_{\mathrm{u}}+\delta}C^{\delta}A_{\sigma t}. \tag{2.9}$$

Για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης $A_{\sigma t}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το t. Αν $t = \mathrm{u}p$, τότε από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$ ενός μονοπατιού $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}p}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{u}p} &= \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{A}_p\\ \gamma\in\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}+1}y^{L_\tau(\gamma)+[\mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}][\gamma\in\mathcal{A}_{\sigma\mathrm{u}p}]}\\
&= x\sum_{\beta\in\mathcal{A}_p} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}}\sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}}y^{L_\tau(\gamma)} + x(y-1)\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{A}_p\\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}}\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_{\sigma\mathrm{u}p}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}}y^{L_\tau(\gamma)}\\
&= xA_p(x)L + x(y-1)\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{A}_p\\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}}A_{\sigma\mathrm{u}p}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Αν το s είναι επίθεμα Dyck, τότε, βάσει του Λήμματος 2.1 *iii*), και δεδομένου ότι σε αυτή την περίπτωση τα p και s έχουν αντίστοιχα ύψος $h-1$ και βάθος $\delta-1$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{A}_p\\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} = \Gamma_{p,s}(x) &= x^{|p|_{\mathrm{u}}+|s|_{\mathrm{u}}+(\delta-1)-(m-1)}C^{|h-\delta|+(m-1)+1}q_{m-1} + x^{|p|_{\mathrm{u}}+|s|_{\mathrm{u}}}\sum_{v\in\mathcal{U}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}\\
&= x^{|p|_{\mathrm{u}}+|s|_{\mathrm{u}}+\delta-m}C^{M}q_{m-1} + x^{|p|_{\mathrm{u}}+|s|_{\mathrm{u}}}\sum_{v\in\mathcal{U}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}},
\end{aligned}$$

όπου $\mathcal{U}$ είναι[5] το σύνολο των μη κενών μονοπατιών v τα οποία είναι προθέματα του s και επιθέματα του $\mathrm{u}p$ (οπότε και σύνορα του τ) με $|v|_u - |v|_d = h - \delta$.

Ο ίδιος τύπος ισχύει και όταν $s = \mathrm{u}b$, $b \in \mathcal{D}$, αφού τότε είναι $\delta = m = 0$ και

$$v \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \begin{cases} |v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} = h\\ v \text{ επίθεμα του } \mathrm{u}p\\ v \text{ πρόθεμα του } s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \mathrm{u}p\\ b \in \mathcal{A}_p\end{cases}$$

οπότε

$$\mathcal{U} = \begin{cases}\{\mathrm{u}p\}, & b\in\mathcal{A}_p\\ \varnothing, & b\notin\mathcal{A}_p\end{cases} \quad \text{και} \quad \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{A}_p\\ \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\in\mathcal{B}_{\mathrm{sd}}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} = \begin{cases} x^{|b|_{\mathrm{u}}}, & b\in\mathcal{A}_p\\ 0, & b\notin\mathcal{A}_p.\end{cases}$$

[5] Εδώ, το σύνολο $\mathcal{U}$ ορίζεται με ισοδύναμο τρόπο όπως στο Λήμμα 2.1 *iii*) (προκειμένου να διατηρηθεί η ομοιομορφία των τύπων για τις δύο περιπτώσεις του s), αφού αν το s είναι επίθεμα Dyck, τότε $\delta > 0$, οπότε το $v \in \mathcal{U}$ θα είναι και επίθεμα του p, διότι και $|v|_u - |v|_d = h - \delta < h = |\mathrm{u}p|_u - |\mathrm{u}p|_d$.

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (2.10), και βάσει του Λήμματος 2.1 *i*), προκύπτει ότι

$$A_{\mathrm{u}p} = x^{|p|_u+1}C^h L + (y-1)x^{|p|_u+|s|_u+1}\left(x^{\delta-m}C^M q_{m-1} + \textstyle\sum_{v\in\mathcal{U}} x^{-|v|_u}\right)A_{\sigma\mathrm{u}p}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $A_{\mathrm{u}p}$ στη σχέση (2.1), προκύπτει ότι

$$A_{\sigma\mathrm{u}p} = x^{|\sigma\mathrm{u}p|_u}C^h L + (y-1)x^{|\tau|_u}\left(x^{\delta-m}C^M q_{m-1} + \sum_{v\in\mathcal{U}} x^{-|v|_u}\right)A_{\sigma\mathrm{u}p} + (y-1)x^{|\sigma|_u}\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{-|w|_u}A_{\sigma\mathrm{u}p}.$$

Δεδομένου ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{V}\setminus\mathcal{U} = \{\mathrm{sd}w\mathrm{u}p : w \in \mathcal{W}\}$, έπεται ότι

$$\sum_{w\in\mathcal{W}} x^{|\sigma|_u-|w|_u} = \sum_{w\in\mathcal{W}} x^{|\mathrm{sd}\sigma t|_u-|\mathrm{sd}wt|_u} = \sum_{v\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{U}} x^{|\tau|_u-|v|_u},$$

οπότε

$$A_{\sigma t} = \frac{x^{|\sigma t|_u}C^h L}{1-(y-1)x^{|\tau|_u}\left(x^{\delta-m}C^M q_{m-1} + \sum\limits_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_u}\right)}. \tag{2.11}$$

Η σχέση (2.11) προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2.2 και στην δεύτερη περίπτωση, όπου $t = \varepsilon$, αφού τότε είναι $m = h = 0$, $A_t = L$ και $\mathcal{V} = \{\mathrm{sd}w : w \in \mathcal{W}\}$.

Τελικά, θέτοντας $S = \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_u}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (2.9) την έκφραση της $A_{\sigma t}$, όπως αυτή δίνεται στη σχέση (2.11), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L-1-xCL &= \frac{(y-1)x^{|s|_u+|\sigma t|_u+\delta}C^{h+\delta}L}{1-(y-1)x^{|\tau|_u}(x^{\delta-m}C^M q_{m-1}+S)} \\ \Rightarrow (L-1-xCL)&\left(1-(y-1)x^{|\tau|_u}(x^{\delta-m}C^M q_{m-1}+S)\right) = (y-1)x^{|\tau|_u+\delta}C^{h+\delta}L \end{aligned}$$

και επομένως,

$$L-1-xCL = (y-1)x^{|\tau|_u}\left(x^{\delta}C^{h+\delta}L + (L-1-xCL)(x^{\delta-m}C^M q_{m-1}+S)\right). \tag{2.12}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με C, δεδομένου ότι $C = \frac{1}{1-xC}$ και $h+\delta = M+m$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L-C &= (y-1)x^{|\tau|_u}\left(x^{\delta}C^{M+m+1}L + (L-C)(x^{\delta-m}C^M q_{m-1}+S)\right) \\ &= (y-1)x^{|\tau|_u}\left((L-C)(x^{\delta}C^{M+m+1} + x^{\delta-m}C^M q_{m-1}+S) + x^{\delta}C^{M+m+2}\right). \end{aligned}$$

Με χρήση της ταυτότητας (1.23), είναι

$$x^{\delta-m}C^M q_{m-1} + x^{\delta}C^{M+m+1} = x^{\delta-m}C^M(q_{m-1} + x^m C^{m+1}) = x^{\delta-m}C^{M+1}q_m,$$

οπότε

$$L-C = (y-1)x^{|\tau|_u}\left((L-C)(x^{\delta-m}C^{M+1}q_m+S) + x^{\delta}C^{M+m+2}\right)$$

και, τελικά,

$$L-C = \frac{(y-1)x^{|\tau|_u+\delta}C^{M+m+2}}{1-(y-1)x^{|\tau|_u}(x^{\delta-m}C^{M+1}q_m+S)}.$$

□

2.3 Απαρίθμηση εμφανίσεων προτύπου σε ύψος j

Θεώρημα 2.4. *Η γεννήτρια συνάρτηση F_j του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και το πλήθος των εμφανίσεων σε ύψος j ενός προτύπου τ, βάθους δ και ύψους h, ισούται με*

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}+\delta+j}C^{M+m+2j+2}}{1-(y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+\sum_{v\in\mathcal{V}}x^{-|v|_{\mathrm{u}}}\right)},$$

όπου $M = \max\{h,\delta\}$, $m = \min\{h,\delta\}$ και $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων v του τ, για τα οποία ισχύει $|v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} = h - \delta$.

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς το j. Για $j = 0$, ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει, λόγω της Πρότασης 2.3. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $j \in \mathbb{N}$. Θα δειχθεί ότι τότε ισχύει και για $j+1$.

Από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, προκύπτει ότι

$$F_{j+1} = 1 + xF_jF_{j+1}, \quad j \geq 0.$$

Επομένως, θέτοντας $S = S(x) = \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}$ και $T = T(x,y) = (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}$, είναι

$$\begin{aligned}
F_{j+1} - C &= \frac{1}{1-xF_j} - C = \frac{1}{1 - xC - x\dfrac{Tx^{\delta+j}C^{M+m+2j+2}}{1-T\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)}} - C\\
&= \frac{C}{1-\dfrac{Tx^{\delta+j+1}C^{M+m+2j+3}}{1-T\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)}} - C\\
&= \frac{C-TC\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)}{1-T\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)-Tx^{\delta+j+1}C^{M+m+2j+3}} - C\\
&= \frac{C-TC\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+1}(q_{m+j}+x^{m+j+1}C^{m+j+2})+S\right)} - C = \frac{C-TC\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+1}q_{m+j+1}C+S\right)} - C\\
&= \frac{C-TC\left(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+S\right)-C+TC\left(x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}+S\right)}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}+S\right)}\\
&= \frac{TC\left(-x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1}+x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}\right)}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}+S\right)}\\
&= \frac{TCx^{\delta-m}C^{M+j+1}\left(-q_{m+j}+Cq_{m+j+1}\right)}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}+S\right)} = \frac{TCx^{\delta-m}C^{M+j+1}x^{m+j+1}C^{m+j+2}}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}+S\right)}\\
&= \frac{Tx^{\delta+j+1}C^{M+m+2j+4}}{1-T\left(x^{\delta-m}C^{M+j+2}q_{m+j+1}+S\right)}.
\end{aligned}$$

□

Ο συντελεστής του y^k στη γεννήτρια συνάρτηση F_j, είναι μια γεννήτρια συνάρτηση με μία μεταβλητή (την x), η οποία απαριθμεί το σύνολο των μονοπατιών Dyck που περιέχουν ακριβώς k εμφανίσεις στο ύψος j, ως προς το ημιμήκος τους. Στο επόμενο αποτέλεσμα, υπολογίζονται οι συντελεστές αυτοί.

Πόρισμα 2.5. *Οι συντελεστές $[y^k]F_j$ δίνονται από τους τύπους*

$$[y^0]F_j = C - \frac{a}{1+b} \qquad \textit{και} \qquad [y^k]F_j = \frac{ab^{k-1}}{(1+b)^{k+1}}, \quad k \geq 1,$$

όπου

$$a = a(x) = x^{|\tau|_u+\delta+j}C^{M+m+2j+2} \quad \textit{και} \quad b = b(x) = x^{|\tau|_u}(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1} + \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_u}).$$

Επιπλέον, η γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck που περιέχουν (τουλάχιστον μία) εμφάνιση του προτύπου τ σε ύψος j ισούται με $\frac{a}{1+b}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4, έχουμε ότι

$$F_j - C = \frac{(y-1)a}{1-(y-1)b} \Rightarrow \frac{b}{a}(F_j - C) = \frac{(y-1)b}{1-(y-1)b}.$$

Αναπτύσσοντας το τελευταίο κλάσμα ως γεωμετρική σειρά, και στη συνέχεια εφαρμόζοντας το διωνυμικό θεώρημα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}(F_j - C) = \frac{(y-1)b}{1-(y-1)b} &= \sum_{i=1}^{\infty}(y-1)^i b^i = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}b^i y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=\max\{1,k\}}^{\infty}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}b^i y^k, \end{aligned} \tag{2.13}$$

οπότε, για $k \geq 1$, είναι

$$[y^k]\frac{b}{a}(F_j - C) = \sum_{i=k}^{\infty}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}b^i = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{k+s}{k}(-1)^s b^{s+k}.$$

Όμως, βάσει του γενικευμένου διωνυμικού θεωρήματος, είναι

$$\begin{aligned}\frac{x^k}{(1+x)^{k+1}} = x^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k-1}{s}x^s &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-1-s+1)}{s!}x^{s+k} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+s)}{s!}(-1)^s x^{s+k} = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{k+s}{k}(-1)^s x^{s+k},\end{aligned}$$

οπότε,

$$[y^k]\frac{b}{a}(F_j - C) = \frac{b^k}{(1+b)^{k+1}} \Rightarrow [y^k](F_j - C) = \frac{ab^{k-1}}{(1+b)^{k+1}},$$

και δεδομένου ότι, για $k \geq 1$, είναι $[y^k]C = 0$, τελικά προκύπτει ότι

$$[y^k]F_j = \frac{ab^{k-1}}{(1+b)^{k+1}}, \quad k \geq 1.$$

Ο συντελεστής $[y^0]F_j$ προκύπτει άμεσα από τον τύπο της F_j, θέτοντας $y = 0$, οπότε είναι ίσος με

$$[y^0]F_j = C - \frac{a}{1+b}.$$

Εξάλλου, από τη σχέση (2.13), για $k = 0$, έχουμε ότι

$$[y^0]\frac{b}{a}(F_j - C) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i}{0} (-1)^i b^i = \sum_{i=1}^{\infty} (-b)^i = \frac{-b}{1+b},$$

οπότε προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

Τέλος, αφού είναι $\frac{a}{1+b} = C - [y^0]F_j$, και δεδομένου, ότι η C απαριθμεί το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck, ενώ η $[y^0]F_j$ απαριθμεί το σύνολο εκείνων που αποφεύγουν το τ σε ύψος j, άμεσα προκύπτει και το τελευταίο αποτέλεσμα. □

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4 για διάφορα πρότυπα, προκύπτουν κάποια γνωστά, καθώς και κάποια νέα αποτελέσματα.

Παραδείγματα

1. Για $\tau = \mathrm{u}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, είναι $\delta = 0$, $h = k$ και $\mathcal{V} = \varnothing$. Επομένως,

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{k+j}C^{k+2j+2}}{1-(y-1)x^k q_j C^{k+j+1}}. \tag{2.14}$$

2. Για $\tau = (\mathrm{ud})^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, είναι $\delta = h = 0$ και $\mathcal{V} = \{(\mathrm{ud})^i : 1 \le i \le k-1\}$. Επομένως,

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{k+j}C^{2j+2}}{1-(y-1)\left(x^k q_j C^{j+1} + x\frac{1-x^{k-1}}{1-x}\right)}. \tag{2.15}$$

3. Για $\tau = (\mathrm{du})^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, είναι $\delta = h = 1$ και $\mathcal{V} = \{(\mathrm{du})^i : 1 \le i \le k-1\}$. Επομένως,

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{k+j+1}C^{2j+4}}{1-(y-1)\left(x^k q_{j+1} C^{j+2} + x\frac{1-x^{k-1}}{1-x}\right)}. \tag{2.16}$$

Από τις σχέσεις (2.15) και (2.16), προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι στατιστικές "πλήθος εμφανίσεων του $(\mathrm{ud})^k$ σε ύψος $j+1$" και "πλήθος εμφανίσεων του $(\mathrm{du})^k$ σε ύψος j" είναι ισοκατανεμημένες. Το αποτέλεσμα αυτό τεκμηριώνεται και συνδυαστικά, θεωρώντας την ενέλιξη[6] επί του $\mathcal{D}$, η οποία μετατρέπει κάθε εμφάνιση του ud σε ύψος $j+1$ σε μια εμφάνιση του du σε ύψος j και αντιστρόφως (βλ. Θεώρημα 2.1 στην εργασία [49]).

4. Για $\tau = (\mathrm{ud})^k\mathrm{u}$, $k \in \mathbb{N}^*$, είναι $\delta = 0$, $h = 1$ και $\mathcal{V} = \{(\mathrm{ud})^i\mathrm{u} : 0 \le i \le k-1\}$. Επομένως,

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{k+j+1}C^{2j+3}}{1-(y-1)\left(x^{k+1} q_j C^{j+2} + x\frac{1-x^k}{1-x}\right)}. \tag{2.17}$$

Ειδικά, για $j = 0$, προκύπτει ο τύπος της L όπως αυτός δίνεται στο Θεώρημα 3.3 της εργασίας [50].

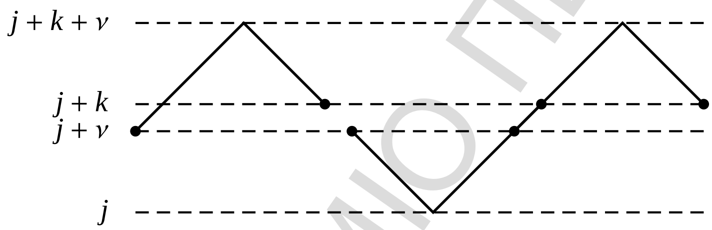
[6] Μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ονομάζεται ενέλιξη (involution) αν και μόνο αν ταυτίζεται με την (συναρτησιακή) αντίστροφή της.

5. Για $\tau = \mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$, $k, \nu \in \mathbb{N}^*$, είναι $\delta = 0$, $h = k - \nu$ (αντ. $\delta = \nu - k$, $h = 0$) αν $k \geq \nu$ (αντ. $k < \nu$), και $\mathcal{V} = \emptyset$. Επομένως,
$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{M+j}C^{|k-\nu|+2j+2}}{1-(y-1)x^M q_j C^{|k-\nu|+j+1}}, \tag{2.18}$$
όπου $M = \max\{k, \nu\}$.

6. Για $\tau = \mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$, $k, \nu \in \mathbb{N}^*$, είναι $\delta = \nu$, $h = k$ και $\mathcal{V} = \emptyset$. Επομένως,
$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{1-(y-1)x^M q_{m+j} C^{M+j+1}}, \tag{2.19}$$
όπου $M = \max\{\nu, k\}$ και $m = \min\{\nu, k\}$.

Από τους τύπους (2.18) και (2.19), προκύπτει ότι οι στατιστικές: "πλήθος εμφανίσεων του $\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$ σε ύψος j" και "πλήθος εμφανίσεων του $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$ σε ύψος $j+m$" είναι ισοκατανεμημένες.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να προκύψει και συνδυαστικά: Αρχικά, παρατηρούμε ότι δύο εμφανίσεις του $\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$ (αντ. $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$) σε ύψος j (αντ. $j+m$) ποτέ δεν επικαλύπτονται (βλ. Σχ. 2.6).



Σχήμα 2.6: Μια εμφάνιση του $\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$ σε ύψος j επικαλύπτεται με μια εμφάνιση του $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$ σε ύψος $j+\nu$ μόνο όταν η πρώτη προηγείται της δεύτερης, για $\nu < k$.

Επιπλέον, για $\nu < k$, μια εμφάνιση του $\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$ σε ύψος j και μια εμφάνιση του $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$ σε ύψος $j+m$ μπορούν να επικαλύπτονται μόνο όταν η πρώτη προηγείται της δεύτερης (βλ. Σχ. 2.6), ενώ, για $k < \nu$, μπορούν να επικαλύπτονται μόνο αν η δεύτερη προηγείται της πρώτης. Αν $\nu = k$, τότε δεν υπάρχει περίπτωση επικάλυψης.

Επομένως, μετατρέποντας, σε κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$, μόνο τις μη επικαλυπτόμενες εμφανίσεις (το $\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$ μετατρέπεται σε $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$ και αντίστροφα) στα αντίστοιχα ύψη, προκύπτει ένα μονοπάτι $\beta \in \mathcal{D}$, τέτοιο ώστε
$$N_{j,\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k}(\alpha) = N_{j+m,\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu}(\beta) \quad \text{και} \quad N_{j+m,\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu}(\alpha) = N_{j,\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k}(\beta).$$

Η απεικόνιση αυτή είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη, πιο συγκεκριμένα είναι μια ενέλιξη επί του $\mathcal{D}$, η οποία στέλνει τη στατιστική $N_{j,\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k}$ στη στατιστική $N_{j+m,\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu}$.

Από το Πόρισμα 2.5, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί το πλήθος των μονοπατιών Dyck με i εμφανίσεις του προτύπου $\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k$ σε ύψος j ισούται, για $i > 0$, με
$$\begin{aligned}[y^i]F_j &= \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}(x^M q_{m+j}C^{M+j+1})^{i-1}}{(1+x^M q_{m+j}C^{M+j+1})^{i+1}} \\ &= \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{(x^M q_{m+j}C^{M+j+1})^2}\left(1+\frac{1}{x^M q_{m+j}C^{M+j+1}}\right)^{-i-1}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζεται με τη βοήθεια των πολυωνύμων Chebyshev ως εξής: Επειδή είναι $q_j(x) = (\sqrt{x})^j U_j(\frac{1}{\sqrt{2x}})$ (βλ. σχέση (1.20)), αν τεθεί $R_j = R_j(x) = \frac{U_{j-1}(\frac{1}{\sqrt{2x}})}{\sqrt{x}U_j(\frac{1}{\sqrt{2x}})}$ (βλ. σχέση

(1.17)), τότε είναι $R_j = \frac{q_{j-1}}{q_j}$. Επιπλέον, από τη σχέση (1.22), βρίσκουμε ότι $\frac{1}{q_j} = C^j - \frac{q_{j-1}}{q_j}xC^{j+1} = C^j - R_j xC^{j+1}$.

Έτσι, η σχέση (2.20) γίνεται

$$\begin{aligned}
[y^i]F_j &= \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{x^{2M}C^{2M+2j+2}x^{m+j}U^2_{m+j}(\frac{1}{\sqrt{2x}})}\left(1+\frac{C^{m+j}-R_{m+j}xC^{m+j+1}}{x^M C^{M+j+1}}\right)^{-i-1}\\
&= \frac{C^{m-M}}{x^M U^2_{m+j}(\frac{1}{\sqrt{2x}})}\left(1+x^{-M}C^{m-M-1}-R_{m+j}x^{1-M}C^{m-M}\right)^{-i-1}\\
&= \frac{C^{m-M}}{x^M U^2_{m+j}(\frac{1}{\sqrt{2x}})}(x^M C^{M-m+1})^{i+1}\left(1-R_{m+j}xC+x^M C^{M-m+1}\right)^{-i-1}\\
&= \frac{x^{iM}C^{i(M-m+1)+1}}{U^2_{m+j}(\frac{1}{\sqrt{2x}})\left(1-R_{m+j}xC+x^M C^{M-m+1}\right)^{i+1}}.
\end{aligned}$$

Προκειμένου να ενσωματώσουμε στη σχέση (2.20) την περίπτωση που $i = 0$, θέτουμε $i = 0$ στο δεύτερο μέλος της σχέσης και αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την έκφραση της $[y^0]F_j$, όπως αυτή προκύπτει από το Πόρισμα 2.5, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned}
&[y^0]F_j - \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{(1+x^M q_{m+j}C^{M+j+1})x^M q_{m+j}C^{M+j+1}}\\
=&C - \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{1+x^M q_{m+j}C^{M+j+1}} - \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{(1+x^M q_{m+j}C^{M+j+1})x^M q_{m+j}C^{M+j+1}}\\
=&C - \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{1+x^M q_{m+j}C^{M+j+1}}\left(1+\frac{1}{x^M q_{m+j}C^{M+j+1}}\right)\\
=&C - \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{x^M q_{m+j}C^{M+j+1}} = C - \frac{x^{m+j}C^{m+j+1}}{q_{m+j}}\\
=&\frac{1}{q_{m+j}}(q_{m+j}C - x^{m+j}C^{m+j+1}) \overset{7}{=} \frac{q_{m+j-1}}{q_{m+j}} = R_{m+j},
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε ότι

$$[y^0]F_j = R_{m+j} + \frac{x^{M+m+j}C^{M+m+2j+2}}{(1+x^M q_{m+j}C^{M+j+1})x^M q_{m+j}C^{M+j+1}},$$

άρα η σχέση (2.20) γενικεύεται στην

$$[y^i]F_j = \delta_{i,0}R_{m+j} + \frac{x^{iM}C^{i(M-m+1)+1}}{U^2_{m+j}(\frac{1}{2\sqrt{x}})\left(1-x(R_{m+j}-x^{M-1}C^{M-m})C\right)^{i+1}}, \quad i \geq 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό, για $\nu = k = 1$, αντιστοιχεί στο βασικό θεώρημα στην εργασία [49].

7. Για $\tau = \mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\xi$, $k, \nu, \xi \in \mathbb{N}^*$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

   α) Αν $k > \nu$, τότε $\delta = 0$, $h = k + \xi - \nu$ και $\mathcal{V} = \emptyset$. Επομένως,

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{k+\xi+j}C^{k+\xi-\nu+2j+2}}{1-(y-1)x^{k+\xi}q_j C^{k+\xi-\nu+j+1}}. \qquad (2.21)$$

[7] Βάσει της σχέσης (1.23).

β) Αν $k \leq \nu$, τότε $\delta = \nu - k$, $h = \xi$ και

$$\mathcal{V} = \begin{cases} \varnothing & , \text{ αν } \xi > \nu \text{ ή } \xi \leq \nu - k \\ \{\mathrm{u}^{\xi+k-\nu}\} & , \text{ αν } \nu - k < \xi \leq \nu. \end{cases}$$

Επομένως, για $\xi > \nu$ ή $\xi \leq \nu - k$, είναι

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{\xi+\nu+j}C^{\nu-k+\xi+2j+2}}{1-(y-1)x^{k+M}q_{m+j}C^{M+j+1}}, \tag{2.22}$$

όπου $m = \min\{\xi, \nu - k\}$ και $M = \max\{\xi, \nu - k\}$, ενώ, για $\nu - k < \xi \leq \nu$, είναι

$$F_j = C + \frac{(y-1)x^{\xi+\nu+j}C^{\nu-k+\xi+2j+2}}{1-(y-1)\left(x^{k+\xi}q_{\nu-k+j}C^{\xi+j+1} + x^{\nu}\right)}. \tag{2.23}$$

Από τις σχέσεις (2.18), (2.21) και (2.22), προκύπτει ότι οι στατιστικές "πλήθος εμφανίσεων του $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\xi$ σε ύψος j" και "πλήθος εμφανίσεων του $\mathrm{u}^{k+\xi}\mathrm{d}^\nu$ σε ύψος $m + j$", όπου $m = \min\{\xi, (\nu - k)^+\}$, είναι ισοκατανεμημένες αν και μόνο αν $k > \nu$, ή $k \leq \nu < \xi$, ή $\xi \leq \nu - k$.

Από την άλλη, από τη σχέση (2.23), προκύπτει ότι οι στατιστικές "πλήθος εμφανίσεων του $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\xi$ σε ύψος j" και "πλήθος εμφανίσεων του $\mathrm{u}^\nu\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{k+\xi-\nu}$ σε ύψος $\nu - k + j$" είναι ισοκατανεμημένες αν και μόνο αν $0 \leq \nu - k < \xi \leq \nu$.

Οι ισοκατανομές αυτές μπορούν να προκύψουν και συνδυαστικά, κατά τρόπο ανάλογο με την ισοκατανομή του παραδείγματος 6.

Σημειώνεται ότι, εφαρμόζοντας τους τύπους (2.21) και (2.22) για $\nu = 1$ και $j = 0$, προκύπτει η Πρόταση 3.5 της εργασίας [61]. Επιπλέον, εφαρμόζοντας τον τύπο (2.23) για $k = \nu = \xi = 1$ και οποιοδήποτε j, και με τη βοήθεια της σχέσης (1.22), προκύπτει το Θεώρημα 4.1 της εργασίας [69].

Κεφάλαιο 3

Πρότυπα σε μονοπάτια Dyck

3.1 Εισαγωγή

Στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τον όρο μονοπάτι εννοώντας ένα μονοπάτι σε δικτυωτό, που αποτελείται από βήματα u, d. Αν τ είναι ένα μονοπάτι και α ένα μονοπάτι Dyck, λέμε ότι το α περιέχει μια *εμφάνιση* του τ αν και μόνο αν υπάρχουν μονοπάτια β, γ τέτοια ώστε

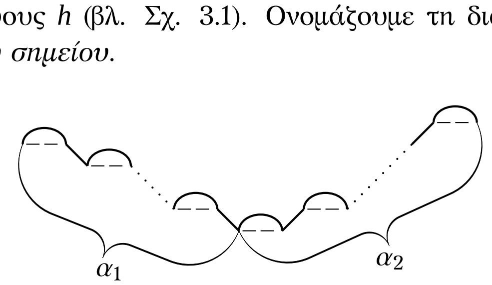
$$\alpha = \beta\tau\gamma.$$

Πιο συγκεκριμένα, κάθε ζεύγος (β, γ) που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση, αντιστοιχεί σε μία ξεχωριστή εμφάνιση του τ στο α. Αν το α δεν περιέχει καμία εμφάνιση του τ, τότε λέμε ότι το *αποφεύγει*.

Ένα ερώτημα που γεννιέται αμέσως είναι πόσα μονοπάτια Dyck έχουν τον ίδιο αριθμό εμφανίσεων του τ. Η απάντηση βέβαια είναι άπειρα. Όμως, αν εισαχθεί κάποια βασική παράμετρος, η οποία διαμερίζει το $\mathcal{D}$ σε κλάσεις με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, και το ίδιο ερώτημα τεθεί σε κάθε κλάση ξεχωριστά, τότε αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και είναι εξαιρετικά δύσκολο να απαντηθεί. Η πιο φυσική παράμετρος για το σκοπό αυτό είναι το ημιμήκος, οπότε ζητείται το πλήθος των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n που περιέχουν k εμφανίσεις του τ. Σε αυτή την περίπτωση, το τ ονομάζεται *πρότυπο* και η επιλογή του καθορίζει αποκλειστικά τη δυσκολία του προβλήματος, το οποίο αποτελεί το βασικό αντικείμενο αυτής της διατριβής.

Υπενθυμίζεται ότι το *βάθος* (αντίστοιχα *ύψος*) ενός μονοπατιού α ορίζεται ως η απόλυτη διαφορά μεταξύ του ύψους του χαμηλότερου σημείου του και του ύψους του πρώτου (αντίστοιχα τελευταίου) σημείου του. Ένα μονοπάτι βάθους δ και ύψους h ονομάζεται (δ, h)-*μονοπάτι*.

Κάθε (δ, h)-μονοπάτι α, με $\delta, h > 0$, διασπάται στη μορφή $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, όπου το α_1 είναι ένα πρώτο επίθεμα Dyck (δηλαδή ένα επίθεμα ενός πρώτου μονοπατιού Dyck) βάθους δ, ενώ το α_2 είναι ένα πρόθεμα Dyck ύψους h (βλ. Σχ. 3.1). Ονομάζουμε τη διάσπαση αυτή *διάσπαση του αριστερότερου χαμηλότερου σημείου*.



Σχήμα 3.1: Η διάσπαση του αριστερότερου χαμηλότερου σημείου του $\alpha = \alpha_1\alpha_2$.

Για τη μελέτη της στατιστικής N_τ: 'πλήθος εμφανίσεων του τ' (στο σύνολο $\mathcal{D}$ και με βασική παράμετρο το ημιμήκος), θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$F = F(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau}.$$

Ορίζουμε επίσης τη γεννήτρια συνάρτηση A_p (αντίστοιχα B_s) του συνόλου των μονοπατιών Dyck με πρόθεμα p (αντίστοιχα επίθεμα s), καθώς και τη γεννήτρια συνάρτηση $\Gamma_{p,s}$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck με πρόθεμα p και επίθεμα s. Συμβολίζουμε, χάριν απλότητας, τις γεννήτριες συναρτήσεις A_{u^j}, B_{d^i} και $\Gamma_{\mathrm{u}^j,\mathrm{d}^i}$ ως A_j, B_i και $\Gamma_{j,i}$ αντίστοιχα.

Αν τ είναι ένα πρότυπο, τότε το συμμετρικό πρότυπο του τ ως προς τον κατακόρυφο άξονα ονομάζεται *αντίστροφο* πρότυπο του τ και συμβολίζεται με τ'. Προφανώς, οι στατιστικές N_τ και $N_{\tau'}$ είναι ισοκατανεμημένες.

Τα τελευταία χρόνια, έχουν εμφανισθεί πολλά άρθρα στη διεθνή βιβλιογραφία, τα οποία ασχολούνται με την απαρίθμηση των μονοπατιών Dyck ως προς το πλήθος εμφανίσεων κάποιου προτύπου (ενδεικτικά, βλ. [2, 7, 13, 17, 49–51, 60–62, 69]). Πιο συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί (βλ. [17]) ότι η στατιστική N_τ ακολουθεί την κατανομή Narayana (βλ. [64], ακολουθία A001263) για κάθε πρότυπο τ μήκους 2, η στατιστική N_{udu} ακολουθεί την κατανομή Donaghey (βλ. [69]) και η στατιστική N_{duu} ακολουθεί την κατανομή Touchard (βλ. [17]). Μια συστηματική μελέτη όλων των προτύπων μήκους μέχρι και 4 παρουσιάζεται στην εργασία [60], ενώ κάποιες ειδικές μορφές προτύπων ανεξάρτητες του μήκους έχουν μελετηθεί στις εργασίες [50, 51]. Πρότυπα σε μονοπάτια Motzkin με k χρώματα έχουν μελετηθεί στην εργασία [63], ενώ πρότυπα σε μονοπάτια ballot έχουν μελετηθεί στις εργασίες [53, 54].

Μέχρι τώρα, όλα τα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία αφορούν συγκεκριμένα πρότυπα. Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται γενικά αποτελέσματα, τα οποία αφορούν γενικές μορφές προτύπων και καλύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις όλα τα γνωστά αποτελέσματα στη βιβλιογραφία. Όπως προκύπτει, η στατιστική N_τ εξαρτάται από κάποια βασικά χαρακτηριστικά του προτύπου τ, συγκεκριμένα, από το μήκος, το ύψος, το βάθος και την περιοδικότητά του. Τα βασικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου, έχουν δημοσιευθεί στην εργασία [45].

3.2 Απαρίθμηση προθεμάτων Dyck

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε ότι το πρότυπο τ είναι πρόθεμα Dyck και προσδιορίζουμε την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση F. Για το επόμενο Θεώρημα, δίνονται 3 διαφορετικές αποδείξεις: η πρώτη έχει δημοσιευθεί στην εργασία [45], ενώ οι υπόλοιπες δύο είναι μεταγενέστερες και δεν έχουν δημοσιευθεί σε κάποιο περιοδικό ή συνέδριο.

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, παρουσιάζεται μια επιπλέον απόδειξη του ίδιου Θεωρήματος, η οποία έχει παρουσιαστεί στο συνέδριο [46].

Θεώρημα 3.1. *Η γεννήτρια συνάρτηση F που απαριθμεί τις εμφανίσεις ενός προθέματος Dyck τ, ικανοποιεί την εξίσωση*

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}} F^{|\tau|_{\mathrm{u}} - |\tau|_{\mathrm{d}}} \Big(F + (F - 1 - xF^2) \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}} F^{|v|_{\mathrm{d}} - |v|_{\mathrm{u}}} \Big),$$

όπου $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων του τ.

Απόδειξη (1ος τρόπος). Αρχικά, θέτουμε $\tau = wp$, όπου p είναι ένα πρόθεμα Dyck και $w = \mathrm{u}$, αν το τ δεν επιστρέφει στον άξονα x, ή $w = \mathrm{u}\sigma\mathrm{d}$, $\sigma \in \mathcal{D}$, στην αντίθετη περίπτωση.

Βάσει της διάσπασης της πρώτης επιστροφής $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$, προκύπτει ότι το α έχει μια εμφάνιση του τ, η οποία δεν περιέχεται στο β ή στο γ, αν και μόνο αν $w = \mathrm{u}$ και το p είναι πρόθεμα του β (αντίστοιχα $\sigma = \beta$ και το p είναι πρόθεμα του γ), όταν το τ δεν επιστρέφει (αντίστοιχα επιστρέφει) στον άξονα x. Επομένως, είναι

$$|\alpha|_\tau = \begin{cases} |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + [p \text{ πρόθεμα του } \beta], & \text{αν } w = \mathrm{u}, \\ |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + [\beta = \sigma][p \text{ πρόθεμα του } \gamma], & \text{αν } w = \mathrm{u}\sigma\mathrm{d}. \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων, για $w = \mathrm{u}$, είναι

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_\mathrm{u}} y^{|\alpha|_\tau} = 1 + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{D}} x^{1+|\beta|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau+[p \text{ πρόθεμα του } \beta]} \\ &= 1 + x\sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\gamma|_\tau} \sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau+[p \text{ πρόθεμα του } \beta]} \\ &= 1 + xF\left(\sum_{\beta\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}_p} x^{|\beta|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau} + \sum_{\beta\in\mathcal{A}_p} x^{|\beta|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau+1}\right) = 1 + xF\left(F - A_p + yA_p\right) \\ &= 1 + xF^2 + x(y-1)FA_p. \end{aligned}$$

Από την άλλη, για $w = \mathrm{u}\sigma\mathrm{d}$, είναι

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_\mathrm{u}} y^{|\alpha|_\tau} = 1 + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{D}} x^{1+|\beta|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau+[\beta=\sigma][p \text{ πρόθεμα του } \gamma]} \\ &= 1 + x\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{D}\setminus\{\sigma\}\\ \gamma\in\mathcal{D}}} x^{|\beta|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau} + \sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\sigma|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\sigma|_\tau+|\gamma|_\tau+[p \text{ πρόθεμα του } \gamma]}\Big) \\ &= 1 + x\left((F - x^{|\sigma|_\mathrm{u}})F + \sum_{\gamma\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}_p} x^{|\sigma|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\sigma|_\tau+|\gamma|_\tau} + \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_p} x^{|\sigma|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\sigma|_\tau+|\gamma|_\tau+1}\right) \\ &= 1 + x\left((F - x^{|\sigma|_\mathrm{u}})F + x^{|\sigma|_\mathrm{u}}(F - A_p + yA_p)\right) = 1 + x\left(F^2 + x^{|\sigma|_\mathrm{u}}(y-1)A_p\right) \\ &= 1 + xF^2 + x^{|w|_\mathrm{u}}(y-1)A_p. \end{aligned}$$

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις, ισχύει ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|w|_\mathrm{u}} F^{|w|_\mathrm{u}-|w|_\mathrm{d}} A_p. \tag{3.1}$$

Για τον προσδιορισμό της γεννήτριας συνάρτησης A_p, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) Το πρότυπο τ δεν είναι περιοδικό.

Ένα μονοπάτι Dyck α με πρόθεμα p διασπάται ως $\alpha = p\beta$, όπου

$$\beta = \beta_0\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\cdots\beta_{\xi-1}\mathrm{d}\beta_\xi, \quad \xi = |p|_\mathrm{u} - |p|_\mathrm{d}, \quad \beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_\xi \in \mathcal{D}.$$

Προφανώς, αφού το τ δεν είναι περιοδικό, κάθε εμφάνιση του τ στο α περιέχεται στο β και επιπλέον, επειδή το τ είναι πρόθεμα Dyck, κάθε εμφάνιση θα περιέχεται σε κάποιο β_i, με $i \in [0,\xi]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_\mathrm{u}} y^{|\alpha|_\tau} = \sum_{\beta_0,\ldots,\beta_\xi\in\mathcal{D}} x^{|p|_\mathrm{u}+|\beta_0|_\mathrm{u}+\cdots+|\beta_\xi|_\mathrm{u}} y^{|\beta_0|_\tau+\cdots+|\beta_\xi|_\tau} \\ &= x^{|p|_\mathrm{u}} \prod_{i=0}^{\xi} \sum_{\beta_i\in\mathcal{D}} x^{|\beta_i|_\mathrm{u}} y^{|\beta_i|_\tau} = x^{|p|_\mathrm{u}} \prod_{i=0}^{\xi} F = x^{|p|_\mathrm{u}} F^{\xi+1} \\ &= x^{|p|_\mathrm{u}} F^{|p|_\mathrm{u}-|p|_\mathrm{d}+1}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.1), έχουμε ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}F^{|\tau|_{\mathrm{u}}-|\tau|_{\mathrm{d}}+1} \tag{3.2}$$

και δεδομένου ότι σε αυτή την περίπτωση είναι $\mathcal{V} = \emptyset$, λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

ii) Το πρότυπο τ είναι περιοδικό.

Έστω $\tau = \lambda(\mu\lambda)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ η κανονική μορφή του προτύπου τ.

Άμεσα προκύπτει ότι $|w| \leq |\lambda\mu|$, οπότε το μέγιστο σύνορο $v_{\nu-1} = \lambda(\mu\lambda)^{\nu-1}$ είναι επίθεμα του p.

Αν το α είναι ένα μονοπάτι Dyck με πρόθεμα p, τότε, επειδή το $v_{\nu-1}$ είναι το μέγιστο σύνορο του τ, έπεται ότι κάθε εμφάνιση του τ στο α, η οποία ξεκινά από κάποιο σημείο του p, θα πρέπει να ξεκινά από κάποιο σημείο του $v_{\nu-1}$ (βλ. Σχ. 3.2). Επομένως, το α διασπάται ως

$$\alpha = l_p(v_{\nu-1})\beta \mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_\xi, \quad \beta \in \mathcal{A}_{v_{\nu-1}}, \beta_i \in \mathcal{D}, i \in [\xi],$$

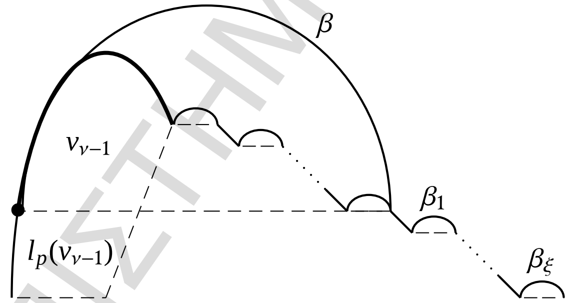
όπου $\xi = |l_p(v_{\nu-1})|_{\mathrm{u}} - |l_p(v_{\nu-1})|_{\mathrm{d}} = |p|_{\mathrm{u}} - |v_{\nu-1}|\mathrm{u} - (|p|_{\mathrm{d}} - |v_{\nu-1}|\mathrm{d})$, και μια εμφάνιση του τ στο α ανήκει εξ ολοκλήρου στο β ή σε κάποιο β_i. Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$A_p = x^{|p|_{\mathrm{u}}-|v_{\nu-1}|_{\mathrm{u}}}F^{|p|_{\mathrm{u}}-|v_{\nu-1}|_{\mathrm{u}}-(|p|_{\mathrm{d}}-|v_{\nu-1}|_{\mathrm{d}})}A_{v_{\nu-1}},$$

ή, ισοδύναμα,

$$A_p = x^{-|w|_{\mathrm{u}}}F^{|w|_{\mathrm{d}}-|w|_{\mathrm{u}}}GA_{v_{\nu-1}}, \tag{3.3}$$

όπου $G = x^{|\lambda\mu|_{\mathrm{u}}}F^{|\lambda\mu|_{\mathrm{u}}-|\lambda\mu|_{\mathrm{d}}}$.



Σχήμα 3.2: Ένα μονοπάτι Dyck α με πρόθεμα p.

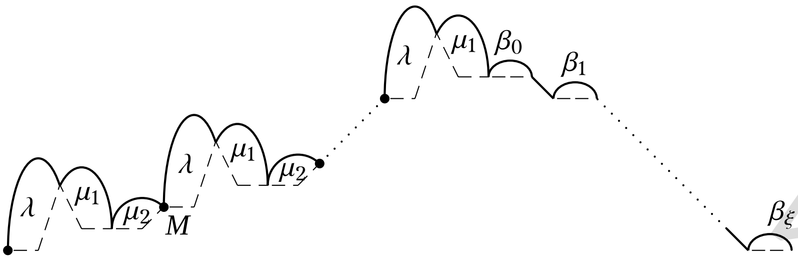
Έστω E_k η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{E}_k$ των μονοπατιών Dyck που έχουν ως πρόθεμα το $\lambda(\mu\lambda)^k$ αλλά όχι το $\lambda(\mu\lambda)^{k+1}$, με $k \in \mathbb{N}^*$ και έστω E η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{E}$ των μονοπατιών Dyck που έχουν ως πρόθεμα το $\mu_2\lambda$ αλλά όχι το $\mu_2\lambda\mu\lambda$, όπου $\mu = \mu_1\mu_2$ είναι η διάσπαση του αριστερότερου χαμηλότερου σημείου του μ.

Κάθε μονοπάτι Dyck $\beta \in \mathcal{E}_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, διασπάται ως

$$\beta = \lambda(\mu\lambda)^{k-1}\mu_1\beta_0\mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_\xi,$$

όπου $\xi = k(|(\mu\lambda)^{k-1}\mu_1|_{\mathrm{u}} - |\lambda(\mu\lambda)^{k-1}\mu_1|_{\mathrm{d}}), \beta_i \in \mathcal{D}, i \in [\xi]$ και $\beta_0 \in \mathcal{E}$ (βλ. Σχ. 3.3).

Κάθε εμφάνιση του τ στο β, η οποία δεν περιέχεται σε κάποιο β_i, θα ξεκινά από ένα σημείο του $\lambda(\mu\lambda)^{k-1}$. Κάθε τέτοιο σημείο M θα είναι το αρχικό σημείο κάποιου λ στην έκφραση $\lambda(\mu\lambda)^{k-1}$, (δηλ. μια από τις έντονα σημειωμένες κορυφές στο Σχ. 3.3) αφού αλλιώς το μονοπάτι v που ξεκινά από το M και καταλήγει στο πρώτο δεξιά τερματικό σημείο κάποιου λ του $\lambda(\mu\lambda)^{k-1}$ θα ήταν ένα σύνορο του $\lambda\mu\lambda$, ενώ το $\mu\lambda$ θα ήταν πρόθεμα του $r(v)$, το οποίο είναι άτοπο, λόγω της Πρότασης 1.13.



Σχήμα 3.3: Ένα μονοπάτι Dyck $\beta \in \mathcal{E}_k$, με $\beta_0 \in \mathcal{E}$.

Επομένως, αφού το β_0 δεν ξεκινά με $\mu_2\lambda\mu\lambda$, για $k < \nu$ δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια εμφάνιση του τ, ενώ για $k \geq \nu$ θα υπάρχουν $k - \nu + 1$ τέτοιες εμφανίσεις, οι οποίες θα ξεκινούν από τα αριστερότερα $k - \nu + 1$ σημεία M.

Κατόπιν τούτων, ισχύει ότι

$$E_k = x^{k|\lambda\mu|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{k(|\lambda\mu|_{\mathrm{u}} - |\lambda\mu|_{\mathrm{d}}) - (|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}})} y^{(k-\nu+1)^+} E,$$

ή, ισοδύναμα,

$$E_k = G^k x^{-|\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{-(|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}})} y^{(k-\nu+1)^+} E, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.4}$$

Επομένως,

$$A_{v_{\nu-1}} = \sum_{k=\nu-1}^{\infty} E_k = x^{-|\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{-(|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}})} \sum_{k=\nu-1}^{\infty} G^k y^{k-\nu+1} E,$$

οπότε,

$$A_{v_{\nu-1}} = \frac{x^{-|\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{-(|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}})} G^{\nu-1} E}{1 - yG} \tag{3.5}$$

και για $\nu \geq 2$, προκύπτει η σχέση

$$A_{v_1} = \sum_{k=1}^{\nu-2} E_k + A_{v_{\nu-1}} = x^{-|\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{-(|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}})} \left(\sum_{k=1}^{\nu-2} G^k + \frac{G^{\nu-1}}{1 - yG} \right) E,$$

η οποία δίνει ότι

$$A_{v_1} = x^{-|\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{-(|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}})} \frac{G(1 - yG) + (y - 1)G^{\nu}}{(1 - G)(1 - yG)} E. \tag{3.6}$$

Από τις σχέσεις (3.1), (3.3) και (3.5), προκύπτει ότι

$$E = (F - 1 - xF^2) x^{|\mu_2|_{\mathrm{u}}} F^{|\mu_2|_{\mathrm{u}} - |\mu_2|_{\mathrm{d}}} G^{-\nu} \frac{1 - yG}{y - 1}. \tag{3.7}$$

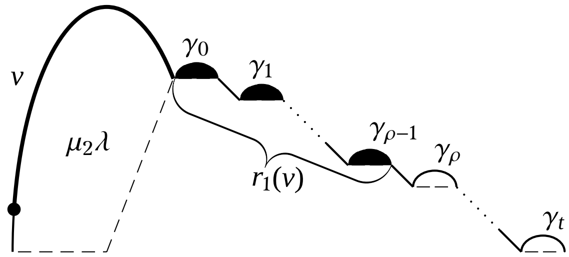
Στη συνέχεια, δίνεται ένας διαφορετικός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση E.

Κάθε μονοπάτι Dyck $\beta \in \mathcal{E}$ διασπάται ως εξής:

$$\beta = \mu_2\lambda\gamma,$$

όπου $\gamma = \gamma_0 \mathrm{d}\gamma_1 \cdots \mathrm{d}\gamma_t$, $t = |\mu_2\lambda|_{\mathrm{u}} - |\mu_2\lambda|_{\mathrm{d}}$, $\gamma_i \in \mathcal{D}, i = 0, 1, \ldots, t$ και το γ δεν ξεκινά με $\mu\lambda$.

Κάθε εμφάνιση του τ στο β που δεν περιέχεται σε κάποιο γ_i, θα έχει ως πρόθεμα κάποιο $v \in \mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{v_i : i = 0, 1, \ldots, \nu - 1\}$ (το οποίο είναι επίθεμα του $\mu_2\lambda$) και υπάρχει αν και μόνο αν το $r(v)$ είναι πρόθεμα του γ, δηλαδή αν $r_1(v) = \gamma_0 \mathrm{d}\gamma_1 \cdots \mathrm{d}\gamma_{\rho-1}\mathrm{d}$ και το $r_2(v)$ είναι πρόθεμα του γ_ρ, όπου $\rho = |r_1(v)|_{\mathrm{d}} - |r_1(v)|_{\mathrm{u}}$ και $r(v) = r_1(v) r_2(v)$ είναι η διάσπαση του αριστερότερου χαμηλότερου σημείου του $r(v)$ (βλ. Σχ. 3.4).



Σχήμα 3.4: Ένα μονοπάτι Dyck $\beta \in \mathcal{E}$ που περιέχει μια εμφάνιση του τ που δεν ξεκινά από κάποιο σημείο του προθέματος $\mu_2\lambda$.

Επιπλέον, βάσει της Πρότασης 1.13, το γ ξεκινά με $r(\nu)$ για ένα το πολύ $\nu \in \mathcal{V}'$, οπότε

$$\begin{aligned} E = x^{|\mu_2\lambda|_u}\Big(&F^{|\mu_2\lambda|_u-|\mu_2\lambda|_d+1} - x^{|\mu_1|_u}F^{|\mu_2\lambda|_u-|\mu_2\lambda|_d-(|\mu_1|_d-|\mu_1|_u)}A_{\mu_2\lambda} \\ &+ (y-1)\sum_{\nu\in\mathcal{V}'} x^{|r_1(\nu)|_u}F^{|\mu_2\lambda|_u-|\mu_2\lambda|_d-(|r_1(\nu)|_d-|r_1(\nu)|_u)}A_{r_2(\nu)}\Big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Για $\nu \geq 2$, έχουμε ότι

$$A_{\mu_2\lambda} = E + A_{\mu_2\nu_1} = E + x^{|\mu_2|_u}F^{|\mu_2|_u-|\mu_2|_d}A_{\nu_1},$$

και, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.6), προκύπτει ότι

$$A_{\mu_2\lambda} = \frac{1-yG+(y-1)G^\nu}{(1-G)(1-yG)}E. \tag{3.9}$$

Σημειώνεται ότι, για $\nu = 1$, η σχέση (3.9) προκύπτει άμεσα από τη σχέση (3.5).

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A_{r_2(\nu)} &= x^{|r_2(\nu)|_u-|\nu_{\nu-1}|_u}F^{|r_2(\nu)|_u-|r_2(\nu)|_d-(|\nu_{\nu-1}|_u-|\nu_{\nu-1}|_d)}A_{\nu_{\nu-1}} \\ &= x^{|\lambda\mu|_u-|r_1(\nu)|_u-|\nu|_u-|\mu_2|_u}F^{|\lambda\mu|_u-|r_1(\nu)|_u-|\nu|_u-|\mu_2|_u-(|\lambda\mu|_d-|r_1(\nu)|_d-|\nu|_d-|\mu_2|_d)}\frac{G^{\nu-1}}{1-yG}E, \end{aligned} \tag{3.10}$$

για κάθε $\nu \in \mathcal{V}'$.

Από τις σχέσεις (3.8), (3.9) και (3.10), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E = x^{|\mu_2\lambda|_u}&F^{|\mu_2\lambda|_u-|\mu_2\lambda|_d+1} - \frac{1-yG+(y-1)G^\nu}{(1-G)(1-yG)}GE \\ &+(y-1)x^{|\lambda|_u}F^{|\lambda|_u-|\lambda|_d}\frac{G^\nu E}{1-yG}\sum_{\nu\in\mathcal{V}'}x^{-|\nu|_u}F^{|\nu|_d-|\nu|_u}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

Θέτοντας $S = \sum_{\nu\in\mathcal{V}} x^{-|\nu|_u}F^{|\nu|_d-|\nu|_u}$, είναι

$$\sum_{\nu\in\mathcal{V}'}x^{-|\nu|_u}F^{|\nu|_d-|\nu|_u} = S - x^{|\mu|_u}F^{|\mu|_u-|\mu|_d}\frac{G^{-\nu}-1}{1-G}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.11), τελικά προκύπτει ότι

$$\frac{E}{1-yG} = x^{|\mu_2\lambda|_u}F^{|\mu_2\lambda|_u-|\mu_2\lambda|_d+1} + (y-1)x^{|\lambda|_u}F^{|\lambda|_u-|\lambda|_d}\frac{SG^\nu E}{1-yG}.$$

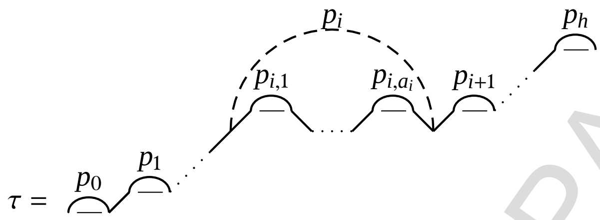
Τέλος, αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της E στη σχέση (3.7), προκύπτει το ζητούμενο. □

Απόδειξη (2ος τρόπος). Έστω το πρότυπο $\tau = p_0 \mathrm{u} p_1 \cdots \mathrm{u} p_h$, με $p_i \in \mathcal{D}$, για κάθε $0 \le i \le h$, και έστω $s_i = p_i \mathrm{u} p_{i+1} \cdots \mathrm{u} p_h$.

Αν $p_i \neq \varepsilon$, τότε το p_i διασπάται ως

$$p_i = \mathrm{u} p_{i,1} \mathrm{d} \mathrm{u} p_{i,2} \mathrm{d} \cdots \mathrm{u} p_{i,a_i} \mathrm{d}, \qquad p_{i,j} \in \mathcal{D},\ j \in [a_i],$$

όπου a_i είναι ο αριθμός των πρώτων συνιστωσών του p_i. Προφανώς, αν $p_i = \varepsilon$, τότε είναι $a_i = 0$.



Σχήμα 3.5: Η διάσπαση του p_i σε πρώτους παράγοντες.

Για κάθε $0 \le i \le h$ και $1 \le j \le a_i + 1$, θεωρείται η διπλή ακολουθία μονοπατιών $s_{i,j}$ (βλ. Σχ. 3.5), με

$$s_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{u} p_{i,j} \mathrm{d} \mathrm{u} p_{i,j+1} \mathrm{d} \cdots \mathrm{u} p_{i,a_i} \mathrm{d} z_{i+1}, & j \le a_i, \\ z_{i+1}, & j = a_i + 1, \end{cases} \quad \text{όπου} \quad z_i = \begin{cases} \mathrm{u} s_i, & i \le h, \\ \varepsilon, & i = h+1. \end{cases}$$

Προφανώς, αν $p_i = \varepsilon$, τότε εφαρμόζεται μόνο το δεύτερο σκέλος του τύπου για το $s_{i,j}$, όταν $j = 1$, αφού $1 \le j \le a_i + 1 = 1$.

Στα επόμενα, συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_{i,j}$, όπου $0 \le i \le h$ και $1 \le j \le a_i + 1$, το σύνολο των μονοπατιών Dyck που έχουν ως πρόθεμα το $s_{i,j}$ και με $A_{i,j} = A_{i,j}(x, y)$ τη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου αυτού. Ειδικά, τίθεται $A_i = A_{i,1} = A_{s_i}$.

Στο σημείο αυτό, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Αν $p_0 \neq \varepsilon$, τότε, θέτοντας $\sigma = p_{0,1}$, από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής προκύπτει[1] η σχέση

$$F = 1 + xF^2 + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}. \tag{3.12}$$

Στη συνέχεια, θα δοθεί μια αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης $A_{i,j}$, $1 \le i \le h$ και $1 \le j \le a_i$, όταν $p_i \neq \varepsilon$. (Προφανώς, όταν $p_i = \varepsilon$, τότε ορίζεται μόνο η γεννήτρια συνάρτηση $A_{i,1}$ και είναι ίση με $A_{\mathrm{u}s_{i+1}}$, όταν $i < h$, και με F, όταν $i = h$).

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{A}_{i,j}$ διασπάται ως $\alpha = \mathrm{u} p_{i,j} \mathrm{d} \beta$, με $\beta \in \mathcal{A}_{i,j+1}$. Μια εμφάνιση του τ στο α που δεν περιέχεται στο β, θα ξεκινά από την αρχή του μονοπατιού και θα υπάρχει αν και μόνο αν $p_{i,j} = \sigma$ και $\beta \in \mathcal{A}_{0,2}$, δηλαδή αν και μόνο αν $s_{i,j} \in \mathcal{V}$ και $\beta \in \mathcal{A}_{0,2}$. Κατόπιν τούτων, ισχύει η σχέση $|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + [s_{ij} \in \mathcal{V}][\beta \in \mathcal{A}_{0,2}]$, οπότε,

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{i,j}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} = \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i,j+1}} x^{|p_{i,j}|_{\mathrm{u}} + |\beta|_{\mathrm{u}} + 1} y^{|\beta|_\tau + [s_{i,j} \in \mathcal{V}][\beta \in \mathcal{A}_{0,2}]} \\ &\overset{2}{=} x^{|p_{i,j}|_{\mathrm{u}}+1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i,j+1}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau} + [s_{i,j} \in \mathcal{V}] x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i,j+1}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau} (y^{[\beta \in \mathcal{A}_{0,2}]} - 1) \\ &= x^{|p_{i,j}|_{\mathrm{u}}+1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i,j+1}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau} + [s_{i,j} \in \mathcal{V}] x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{0,2}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau}. \end{aligned}$$

[1] Όπως προκύπτει και η σχέση (3.1) στην πρώτη απόδειξη.

[2] Με τη βοήθεια της ταυτότητας $y^{[p][q]} = 1 + [p](y^{[q]} - 1)$.

Επομένως,

$$A_{i,j} = x^{|p_{i,j}|_{\mathrm{u}}+1}A_{i,j+1} + [s_{i,j} \in \mathcal{V}]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}, \quad p_i \neq \varepsilon, i \in [h], j \in [a_i]. \tag{3.13}$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται ανάλογα στην περίπτωση που είναι $i = 0$ και $2 \leq j \leq a_0$.

Στη συνέχεια, θα υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_{i,a_i+1}, για κάθε $0 \leq i \leq h$, με $p_i \neq \varepsilon$. Επειδή

$$A_{i,a_i+1} = \begin{cases} A_{\mathrm{u}s_{i+1}}, & i \leq h-1, \\ F, & i = h, \end{cases} \tag{3.14}$$

αρκεί να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $A_{\mathrm{u}s_i}$, για κάθε $i \in [h]$.

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}s_i}$ διασπάται ως $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$, με $\beta \in \mathcal{A}_i$ και $\gamma \in \mathcal{D}$, για κάθε $i \in [h]$. Μια εμφάνιση του τ στο α που δεν περιέχεται ούτε στο β ούτε στο γ, θα ξεκινά από την αρχή του μονοπατιού α και θα υπάρχει αν και μόνο αν $\beta = \sigma$ και $\gamma \in \mathcal{A}_{0,2}$. Δηλαδή, ισχύει η σχέση

$$|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + [\beta = \sigma][\gamma \in \mathcal{A}_{0,2}]$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{u}s_i} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}s_i}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{A}_i \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}+1} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau+[\beta=\sigma][\gamma\in\mathcal{A}_{0,2}]} \\ &= \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{A}_i \setminus \{\sigma\} \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}+1} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau} + [\sigma \in \mathcal{A}_i] \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}+1} y^{|\sigma|_\tau+|\gamma|_\tau+[\gamma\in\mathcal{A}_{0,2}]} \\ &= xF(A_i - [\sigma \in \mathcal{A}_i]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}}) + [\sigma \in \mathcal{A}_i]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}\left(y \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_{0,2}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau} + \sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}_{0,2}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau} \right) \\ &= xFA_i - [\sigma \in \mathcal{A}_i]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}F + [\sigma \in \mathcal{A}_i]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(yA_{0,2} + F - A_{0,2}), \end{aligned}$$

οπότε, τελικά προκύπτει[3] η σχέση

$$A_{\mathrm{u}s_i} = xA_iF + [\mathrm{u}s_i \in \mathcal{V}]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}, \quad i \in [h]. \tag{3.15}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (3.13) με $\prod_{t=1}^{j-1} x^{|p_{i,t}|_{\mathrm{u}}+1} = x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,j}|_{\mathrm{u}}}$, προκύπτει η σχέση

$$x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,j}|_{\mathrm{u}}}A_{i,j} = x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,j+1}|_{\mathrm{u}}}A_{i,j+1} + [s_{i,j} \in \mathcal{V}]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,j}|_{\mathrm{u}}}(y-1)A_{0,2}, \quad j \in [a_i].$$

Θεωρώντας $i \in [h-1]$, πολλαπλασιάζοντας την (3.15) με $x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,a_i+1}|_{\mathrm{u}}} = x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|\mathrm{u}s_{i+1}|_{\mathrm{u}}} = x^{|p_i|_{\mathrm{u}}}$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.14), προκύπτει η σχέση

$$x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,a_i+1}|_{\mathrm{u}}}A_{i,a_i+1} = x^{|p_i|_{\mathrm{u}}+1}A_{i+1}F + [\mathrm{u}s_{i+1} \in \mathcal{V}]x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|\mathrm{u}s_{i+1}|_{\mathrm{u}}}(y-1)A_{0,2}, i \in [h-1].$$

Αθροίζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει ότι

$$A_i = x^{|p_i|_{\mathrm{u}}+1}A_{i+1}F + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{j=1}^{a_i+1}[s_{i,j} \in \mathcal{V}]x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|s_{i,j}|_{\mathrm{u}}}, \quad i \in [h-1]$$

και τελικά, αν τεθεί $\mathcal{V}_i = \{v \in \mathcal{V} : |s_{i+1}| < |v| \leq |s_i|\}$, ότι

$$A_i \overset{4}{=} x^{|p_i|_{\mathrm{u}}+1}A_{i+1}F + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{v \in \mathcal{V}_i} x^{|s_i|_{\mathrm{u}}-|v|_{\mathrm{u}}}, \quad i \in [h-1]. \tag{3.16}$$

[3] Αφού $\sigma \in \mathcal{A}_i$ αν και μόνο αν $\mathrm{u}s_i \in \mathcal{V}$.

Για $i = 0$, η μέθοδος είναι ανάλογη, μόνο που η αναδρομή ξεκινά από $j = 2$, δίνοντας

$$x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}A_{0,2} \overset{5}{=} x^{|p_0|_{\mathrm{u}}+1}A_1F + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{v\in\mathcal{V}_0} x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-|v|_{\mathrm{u}}}. \tag{3.17}$$

Τέλος, για $i = h$, η μέθοδος είναι πάλι ανάλογη, μόνο που η αναδρομή τελειώνει στο a_h-οστό βήμα, δίνοντας

$$A_h \overset{6}{=} x^{|p_h|_{\mathrm{u}}}F + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{v\in\mathcal{V}_h} x^{|s_h|_{\mathrm{u}}-|v|_{\mathrm{u}}}. \tag{3.18}$$

Οι σχέσεις (3.16), (3.17) και (3.18) επαληθεύονται εύκολα και όταν $p_i = \varepsilon$, για $i \in [h-1]$, $i = 0$ και $i = h$ αντίστοιχα.

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (3.16), (3.17) και (3.18) με $x^{-|s_i|_{\mathrm{u}}}F^i$, $x^{-|\tau|_{\mathrm{u}}}$ και $x^{-|s_h|_{\mathrm{u}}}F^h$ αντίστοιχα προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1-|\tau|_{\mathrm{u}}}A_{0,2} &= x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1-|\tau|_{\mathrm{u}}}A_1F + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{v\in\mathcal{V}_0} x^{-|v|_{\mathrm{u}}},\\
x^{-|s_i|_{\mathrm{u}}}F^iA_i &= x^{-|s_{i+1}|_{\mathrm{u}}}A_{i+1}F^{i+1} + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{v\in\mathcal{V}_i} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}F^i, \quad i\in[h-1],\\
x^{-|s_h|_{\mathrm{u}}}F^hA_h &= F^{h+1} + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}(y-1)A_{0,2}\sum_{v\in\mathcal{V}_h} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}F^h.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει η σχέση

$$x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}A_{0,2} = x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}F^{h+1} + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1+|\tau|_{\mathrm{u}}}(y-1)A_{0,2}\sum_{i=0}^{h}\sum_{v\in\mathcal{V}_i} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}F^i,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα[7] ως

$$x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}A_{0,2} = x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}F^{h+1} + x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1+|\tau|_{\mathrm{u}}}(y-1)A_{0,2}F^h\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}F^{|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}}. \tag{3.19}$$

Θέτοντας $S = \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}F^{|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}}$, από τις σχέσεις (3.12) και (3.19) προκύπτει ότι

$$x^{|\sigma|_{\mathrm{u}}+1}A_{0,2} = x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}F^h(F + (F-1-xF^2)S).$$

Αντικαθιστώντας στην (3.12), και δεδομένου ότι $h = |\tau|_{\mathrm{u}} - |\tau|_{\mathrm{d}}$, έχουμε τελικά ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}F^h(F + (F-1-xF^2)S),$$

δηλαδή τη συναρτησιακή εξίσωση της F, όπως αυτή διατυπώνεται στο Θεώρημα 3.1.

ii) Έστω $p_0 = \varepsilon$, οπότε $\tau = up_1up_2\cdots up_h$. Από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής προκύπτει[8] ότι

$$F = 1 + xF^2 + x(y-1)A_1F. \tag{3.20}$$

[4] Αφού $\mathcal{V}_i = \{s_{i,j} : 1 \le j \le a_i + 1 \text{ και } s_{i,j} \in \mathcal{V}\}$.

[5] Στην περίπτωση αυτή, είναι $\mathcal{V}_0 = \{s_{0,j} : 2 \le j \le a_0 + 1 \text{ και } s_{0,j} \in \mathcal{V}\}$.

[6] Στην περίπτωση αυτή, είναι $\mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{V} : |v| \le |s_h|\} = \{s_{h,j} : 1 \le j \le a_h \text{ και } s_{h,j} \in \mathcal{V}\}$.

[7] Αφού το ύψος κάθε συνόρου $v \in \mathcal{V}_i$ ισούται με $|v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} = |s_i|_{\mathrm{u}} - |s_i|_{\mathrm{d}} = h - i$ και $(\mathcal{V}_i)_{0\le i\le h}$ είναι διαμέριση του $\mathcal{V}$.

[8] Όπως προκύπτει και η σχέση (3.1) στην πρώτη απόδειξη.

Έστω $h > 1$. Για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης A_1, θα δοθεί μια αναδρομική σχέση για τις γεννήτριες συναρτήσεις A_i, $i \in [h]$.

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{A}_i$, $i \in [h-1]$, διασπάται ως $\alpha = p_i \mathrm{u} \beta \mathrm{d} \gamma$, όπου $\beta \in A_{i+1}$ και $\gamma \in \mathcal{D}$. Μια εμφάνιση του τ στο α δεν μπορεί να ξεκινά από ένα σημείο του αρχικού p_i, αφού το τ δεν έχει σημεία επιστροφής στον άξονα, οπότε αν δεν περιέχεται σε κάποιο από τα β, γ, τότε θα ξεκινά από την άνοδο αμέσως πριν το β και θα υπάρχει αν και μόνο αν $\mathrm{u}s_{i+1} \in \mathcal{V}$ και $\beta \in \mathcal{A}_1$, δηλαδή

$$|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + [\mathrm{u}s_{i+1} \in \mathcal{V}][\beta \in \mathcal{A}_1].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
A_i &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i} x^{|\alpha|_\mathrm{u}} y^{|\alpha|_\tau} = x^{|p_i|_\mathrm{u}+1} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{A}_{i+1} \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{|\beta|_\mathrm{u}+|\gamma|_\mathrm{u}+1} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau+[\mathrm{u}s_{i+1}\in\mathcal{V}][\beta\in\mathcal{A}_1]} \\
&\overset{9}{=} x^{|p_i|_\mathrm{u}+1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{i+1}} x^{|\beta|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau} (1 + [\mathrm{u}s_{i+1}](y^{[\beta\in\mathcal{A}_1]} - 1)) \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{|\gamma|_\mathrm{u}} y^{|\gamma|_\tau} \\
&= x^{|p_i|_\mathrm{u}+1} F(A_{i+1} + [\mathrm{u}s_{i+1} \in \mathcal{V}] \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1} x^{|\beta|_\mathrm{u}} y^{|\beta|_\tau}),
\end{aligned}$$

οπότε, τελικά προκύπτει η σχέση

$$A_i = x^{|p_i|_\mathrm{u}+1} (A_{i+1} + [\mathrm{u}s_{i+1} \in \mathcal{V}](y-1)A_1)\, F, \quad i \in [h-1].$$

Ομοίως προκύπτει ότι

$$A_h = x^{|p_h|_\mathrm{u}} F.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων με $x^{|\tau|_\mathrm{u}-|s_i|_\mathrm{u}-1}F^{i-1}$ και $x^{|\tau|_\mathrm{u}-|s_h|_\mathrm{u}-1}F^{h-1}$ αντίστοιχα και προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
A_1 &= x^{|\tau|_\mathrm{u}-1}F^h + (y-1)A_1 \sum_{i=1}^{h-1} [\mathrm{u}s_{i+1} \in \mathcal{V}] x^{|\tau|_\mathrm{u}-|s_{i+1}|_\mathrm{u}-1} F^i \\
&= x^{|\tau|_\mathrm{u}-1}F^h + (y-1)A_1 \sum_{i=2}^{h} [\mathrm{u}s_i \in \mathcal{V}] x^{|\tau|_\mathrm{u}-|s_i|_\mathrm{u}-1} F^{i-1}
\end{aligned}$$

και τελικά[10]

$$A_1 = x^{|\tau|_\mathrm{u}-1}F^h + (y-1)A_1 x^{|\tau|_\mathrm{u}} F^h \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|_\mathrm{u}} F^{|v|_\mathrm{d}-|v|_\mathrm{u}}. \tag{3.21}$$

Η σχέση (3.21) ισχύει και στην περίπτωση που $h = 1$, αφού τότε το τ δεν έχει σύνορα.

Η σχέση (3.20) δίνει την

$$x(y-1)A_1 = \frac{F - 1 - xF^2}{F},$$

η οποία αν αντικατασταθεί στη σχέση (3.21), θέτοντας $S = \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|_\mathrm{u}} F^{|v|_\mathrm{d}-|v|_\mathrm{u}}$, δίνει ότι

$$A_1 = x^{|\tau|_\mathrm{u}-1}F^h + x^{|\tau|_\mathrm{u}-1}F^{h-1}(F - 1 - xF^2)S.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στη σχέση (3.20), προκύπτει τελικά η ζητούμενη εξίσωση:

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_\mathrm{u}}F^h \left(F + (F - 1 - xF^2)S\right).$$

□

[9] Με τη βοήθεια της ταυτότητας $y^{[p][q]} = 1 + [p](y^{[q]} - 1)$.

[10] Αφού $\mathcal{V} \subseteq \{\mathrm{u}s_i : 2 \le i \le h\}$ και $i - 1 = h - (|\mathrm{u}s_i|_\mathrm{u} - |\mathrm{u}s_i|_\mathrm{d})$.

Απόδειξη (3ος τρόπος). Το πρότυπο τ γράφεται στη μορφή $\tau = wp$, όπου p είναι ένα πρόθεμα Dyck και $w = \mathrm{u}$, ή $w = \mathrm{u}\sigma\mathrm{d}$, $\sigma \in \mathcal{D}$. Και στις δύο περιπτώσεις, ισχύει η σχέση (3.1), οπότε αρκεί να προσδιορισθεί η γεννήτρια συνάρτηση A_p.

Αν $\mathcal{V} \neq \emptyset$, τότε τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{V}$ διατάσσονται ως προς το μήκος τους, δηλαδή $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, με $|v_1| < |v_2| < \cdots < |v_r|$.

Έστω το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{\alpha \in \mathcal{A}_p : \alpha \text{ περιέχει εμφάνιση του } \tau \text{ που επικαλύπτεται με το πρόθεμα } p\}.$$

Προφανώς, αν $\alpha \in \mathcal{E}$, τότε, για κάθε εμφάνιση του τ που επικαλύπτεται με το πρόθεμα p, το κοινό τμήμα της εμφάνισης αυτής με το p θα είναι ένα σύνορο $v \in \mathcal{V}$, οπότε η εμφάνιση αυτή θα ξεκινά από το τελικό σημείο του $l_p(v)$ και, κατόπιν τούτου, αν τεθεί $\mathcal{E}_j = \mathcal{A}_{l_p(v_j)\tau}$, $j \in [r]$, ισχύει ότι

$$\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{E}_j.$$

Ορίζουμε τις παραμέτρους $\chi_j : \mathcal{A}_p \to \mathbb{N}$, $j \in [r]$, με

$$\chi_j(\alpha) = \#\text{εμφανίσεων του } \tau \text{ στο } \alpha \text{ που ξεκινούν από το τελικό σημείο του } l_p(v_t), t \in [j, r].$$

Τότε, για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}_p$, προφανώς ισχύει ότι

$$\chi_j(\alpha) = \chi_{j+1}(\alpha) + [\alpha \in \mathcal{E}_j], \quad j \in [r],$$

όπου $\chi_{r+1}(\alpha) = 0$. Επιπλέον, είναι

$$\chi_1(\alpha) = \#\text{εμφανίσεων του } \tau \text{ στο } \alpha \text{ που επικαλύπτονται με το πρόθεμα } p,$$

διότι, αν υπήρχε εμφάνιση του τ που να επικαλύπτεται με το πρόθεμα p αλλά να μην επικαλύπτεται ούτε να συνορεύει με το πρόθεμα $l_p(v_1)$, τότε το κοινό της τμήμα με το p θα ήταν ένα σύνορο του τ μικρότερου μήκους από το v_1, το οποίο είναι άτοπο.

Βάσει των παραπάνω, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A_p &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_1(\alpha)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} (1 - y^{-\chi_1(\alpha)}) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_1(\alpha)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} \sum_{j=1}^{r} (y^{-\chi_{j+1}(\alpha)} - y^{-\chi_j(\alpha)}) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_1(\alpha)} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_j(\alpha)} (y^{[\alpha \in \mathcal{E}_j]} - 1) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_1(\alpha)} + (y - 1) \sum_{j=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_j(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Όμως, δεδομένου, ότι κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{A}_p$ διασπάται ως

$$\alpha = p\beta_0 \mathrm{d}\beta_1 \mathrm{d} \cdots \mathrm{d}\beta_{h(p)}, \qquad \text{με } \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{h(p)} \in \mathcal{D}, \qquad \text{όπου } h(p) = |p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}$$

και ισχύει ότι $|\alpha|_\tau - \chi_1(\alpha) = |\beta_0 \mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_{h(p)}|_\tau = \sum_{i=0}^{h(p)} |\beta_i|_\tau$, προκύπτει ότι

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_p} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau - \chi_1(\alpha)} = x^{|p|_{\mathrm{u}}} \prod_{i=0}^{h(p)} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{|\beta_i|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta_i|_\tau} = x^{|p|_{\mathrm{u}}} F^{h+1-(|w|_{\mathrm{u}} - |w|_{\mathrm{d}})}. \tag{3.23}$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{E}_j$ διασπάται ως

$$\alpha = l_p(v_j)w\beta_0\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\cdots\mathrm{d}\beta_{h_j}, \beta_0 \in \mathcal{A}_p, \beta_i \in \mathcal{D}, i \in [h_j], \quad j \in [r],$$

όπου $h_j = |l_p(v_j)|_\mathrm{u} - |l_p(v_j)|_\mathrm{d} + |w|_\mathrm{u} - |w|_\mathrm{d} = |\tau|_\mathrm{u} - |\tau|_\mathrm{d} - (|v_j|_\mathrm{u} - |v_j|_\mathrm{d}) = h - (|v_j|_\mathrm{u} - |v_j|_\mathrm{d})$ και ισχύει ότι $|\alpha|_\tau - \chi_j(\alpha) \overset{11}{=} |\beta_0\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\cdots\mathrm{d}\beta_{h_j}|_\tau = \sum_{i=0}^{h_j}|\beta_i|_\tau$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{E}_j} x^{|\alpha|_\mathrm{u}}y^{|\alpha|_\tau-\chi_j(\alpha)} &= x^{|l_p(v_j)w|_\mathrm{u}}\sum_{\beta_0\in\mathcal{A}_p} x^{|\beta_0|_\mathrm{u}}y^{|\beta_0|_\tau}\prod_{i=1}^{h_j}\sum_{\beta_i\in\mathcal{D}} x^{|\beta_i|_\mathrm{u}}y^{|\beta_i|_\tau} = x^{|l_p(v_j)w|_\mathrm{u}}A_pF^{h_j}\\ &= x^{|\tau|_\mathrm{u}-|v_j|_\mathrm{u}}A_pF^{h-(|v_j|_\mathrm{u}-|v_j|_\mathrm{d})}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Από τις σχέσεις (3.22), (3.23) και (3.24), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}A_p &= x^{|p|_\mathrm{u}}F^{h+1-(|w|_\mathrm{u}-|w|_\mathrm{d})} + (y-1)\sum_{j=1}^{r} x^{|\tau|_\mathrm{u}-|v_j|_\mathrm{u}}A_pF^{h-(|v_j|_\mathrm{u}-|v_j|_\mathrm{d})}\\ &= x^{|p|_\mathrm{u}}F^{h+1-(|w|_\mathrm{u}-|w|_\mathrm{d})} + x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)A_pF^hS,\end{aligned}$$

όπου $S = \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_\mathrm{u}}F^{|v|_\mathrm{d}-|v|_\mathrm{u}}$.

Αν $\mathcal{V} = \emptyset$, τότε κάθε εμφάνιση του τ στο $\alpha \in \mathcal{A}_p$ θα περιέχεται σε κάποιο β_i, $0 \le i \le h(p)$, οπότε θα είναι $A_p = x^{|p|_\mathrm{u}}F^{h(p)+1}$, δηλαδή ο προηγούμενος τύπος ισχύει, με $S = 0$.

Τέλος, από την τελευταία σχέση, λύνοντας ως προς A_p και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (3.1), προκύπτει το ζητούμενο:

$$\begin{aligned}&F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|w|_\mathrm{u}}F^{|w|_\mathrm{u}-|w|_\mathrm{d}}\frac{x^{|p|_\mathrm{u}}F^{h+1-(|w|_\mathrm{u}-|w|_\mathrm{d})}}{1-x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)F^hS}\\ \Rightarrow&(F-1-xF^2)(1-x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)F^hS) = x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)F^{h+1}\\ \Rightarrow&F = 1 + xF^2 + x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)F^{h+1} + (F-1-xF^2)x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)F^hS\\ \Rightarrow&F = 1 + xF^2 + x^{|\tau|_\mathrm{u}}(y-1)F^h\left(F + (F-1-xF^2)S\right).\end{aligned}$$

□

3.2.1 Εφαρμογές

1. Αν $\tau = p^\xi$, όπου p είναι ένα μη περιοδικό πρόθεμα Dyck, και $\xi \in \mathbb{N}^*$, $\xi \ge 2$, τότε $\mathcal{V} = \{p^i : i \in [\xi-1]\}$ και

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_\mathrm{u}}F^{|v|_\mathrm{d}-|v|_\mathrm{u}} = \frac{G^{1-\xi}-1}{1-G},$$

όπου $G = x^{|p|_\mathrm{u}}F^{|p|_\mathrm{u}-|p|_\mathrm{d}}$. Από το Θεώρημα 3.1 έπεται ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)G\Big(F + (GF-1-xF^2)\frac{1-G^{\xi-1}}{1-G}\Big). \tag{3.25}$$

[11]Αφού μια εμφάνιση του τ στο α, που επικαλύπτεται με το πρόθεμα w, δεν μπορεί να ξεκινά από εσωτερικό σημείο του w.

Παραδείγματα

ι) Αν $\tau = \mathrm{u}^{\xi}$, τότε $G = xF$ και επομένως, από την εξίσωση (3.25), έπεται ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)xF\Big(F - \frac{1-(xF)^{\xi-1}}{1-xF}\Big).$$

ιι) Αν $\tau = (\mathrm{u}\sigma\mathrm{d})^{\xi}$, όπου $\sigma \in \mathcal{D}$ με $|\sigma|_{\mathrm{u}} = r$, τότε αφού το μονοπάτι $\mathrm{u}\sigma\mathrm{d}$ είναι μη περιοδικό και $G = x^{r+1}$, αντικαθιστώντας στην (3.25), έπεται ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{r+1}\Big(F + (x^{r+1}F - 1 - xF^2)\frac{1-x^{(r+1)(\xi-1)}}{1-x^{r+1}}\Big).$$

2. Αν $\tau = p\mathrm{u}^{\xi}$, όπου το p είναι ένα μη περιοδικό πρόθεμα Dyck, και $\xi \in \mathbb{N}^*$, τότε είναι $\mathcal{V} = \{\mathrm{u}^i : i \in [m]\}$, όπου $m = \min\{\xi, k\}$ και k είναι το μήκος της πρώτης ανάβασης του p. Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}} F^{|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}} = \frac{(xF)^{-m}-1}{1-xF},$$

ώστε, από το Θεώρημα 3.1, έπεται ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-m}F^{|\tau|_{\mathrm{u}}-|\tau|_{\mathrm{d}}-m}\Big(F - \frac{1-(xF)^m}{1-xF}\Big).$$

Παράδειγμα

Αν $p = \mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu$, όπου $k, \nu \in \mathbb{N}^*$, με $\nu \le k$, από τον προηγούμενο τύπο, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί τις εμφανίσεις του προτύπου $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\xi$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^M F^{M-\nu}\Big(F - \frac{1-(xF)^m}{1-xF}\Big), \tag{3.26}$$

όπου $M = \max\{k, \xi\}$ και $m = \min\{k, \xi\}$.

Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα αυτό αποδείχθηκε αρχικά στην εργασία [50], για $\nu = \xi = 1$ και γενικεύτηκε στην [61], για $\nu = 1$.

Αν $k, \xi \ge \nu$, τότε τα k, ξ μπορούν να εναλλαχθούν. Επομένως, οι στατιστικές $N_{\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\xi}$ και $N_{\mathrm{u}^\xi\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k}$ είναι ισοκατανεμημένες. Για μια συνδυαστική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού, αρκεί να κατασκευαστεί μια ενέλιξη $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, τέτοια ώστε

$$|\varphi(\alpha)|_{\mathrm{u}} = |\alpha|_{\mathrm{u}} \quad \text{και} \quad N_{\mathrm{u}^k\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\xi}(\varphi(\alpha)) = N_{\mathrm{u}^\xi\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^k}(\alpha), \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathcal{D}.$$

Για το σκοπό αυτό, αρχικά ορίζεται η ενέλιξη ψ επί του συνόλου $\mathcal{B}$ των μονοπατιών της μορφής

$$\beta = \mathrm{u}^{\xi_1}\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{\xi_2}\cdots\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{\xi_{k-1}}\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{\xi_k},$$

όπου $k \ge 2$ και $\xi_i \ge \nu$, $i \in [k]$, ως εξής:

$$\psi(\beta) = \mathrm{u}^{\xi_k}\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{\xi_{k-1}}\cdots\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{\xi_2}\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^{\xi_1}.$$

Προφανώς, κάθε μονοπάτι Dyck α που περιέχει το πρότυπο $\mathrm{u}^\nu\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\nu$ διασπάται στη μορφή $\alpha = \gamma_0\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2\cdots\beta_\ell\gamma_\ell$, όπου, για κάθε $i \in [\ell]$, το β_i είναι ένα μεγιστικό υπομονοπάτι του α στο $\mathcal{B}$ και το γ_i αποφεύγει το πρότυπο $\mathrm{u}^\nu\mathrm{d}^\nu\mathrm{u}^\nu$. Κατόπιν τούτων, η ζητούμενη ενέλιξη δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\varphi(\alpha) = \gamma_0\psi(\beta_1)\gamma_1\psi(\beta_2)\gamma_2\cdots\psi(\beta_\ell)\gamma_\ell.$$

Παρατήρηση

Για κάθε επίθεμα Dyck τ, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1 για το πρότυπο τ', προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση F που απαριθμεί τις εμφανίσεις του τ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{d}}} F^{|\tau|_{\mathrm{d}} - |\tau|_{\mathrm{u}}} \Big(F + (F - 1 - xF^2) \sum_{\nu \in \mathcal{V}} x^{-|\nu|_{\mathrm{d}}} F^{|\nu|_{\mathrm{u}} - |\nu|_{\mathrm{d}}} \Big), \tag{3.27}$$

όπου $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων του τ.

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται άμεσα για την απαρίθμηση των εμφανίσεων του επιθέματος Dyck τ σε μονοπάτια ballot.[12] Για το σκοπό αυτό, θα προσδιοριστεί η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση $G = G(x, y, z)$, όπου οι μεταβλητές x, y, z κωδικοποιούν το πλήθος ανόδων, το πλήθος εμφανίσεων του τ και το ύψος $h(\alpha)$ ενός μονοπατιού ballot α αντίστοιχα.

Κάθε μονοπάτι ballot α ύψους $h(\alpha) = h$ διασπάται στη μορφή

$$\alpha = \beta_0 \mathrm{u} \beta_1 \cdots \mathrm{u} \beta_h, \quad \beta_i \in \mathcal{D}, \quad 0 \le i \le h.$$

Δεδομένου ότι το τ είναι ένα επίθεμα Dyck, κάθε εμφάνιση του τ στο α θα περιέχεται σε κάποιο β_i, με $0 \le i \le h$. Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G &= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \\ h(\alpha)=h}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} z^h = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_i \in \mathcal{D} \\ 0 \le i \le h}} x^{h + \sum_{i=0}^{h} |\beta_i|_{\mathrm{u}}} y^{\sum_{i=0}^{h} |\beta_i|_\tau} z^h \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} x^h z^h \prod_{i=0}^{h} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{|\beta_i|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta_i|_\tau} = \sum_{h=0}^{\infty} x^h z^h F^{h+1}(x, y). \end{aligned}$$

Άρα,

$$G = \frac{F(x, y)}{1 - xzF(x, y)},$$

όπου η F ικανοποιεί τη σχέση (3.27).

Ο Sullivan [68], χρησιμοποιώντας μια διαφορετική προσέγγιση, δίνει έναν αναδρομικό τύπο για τους συντελεστές της G.

3.3 Πρότυπα με θετικό βάθος και ύψος

Σε αυτή την ενότητα, το πρότυπο τ θεωρείται ως ένα (δ, h)-μονοπάτι με $\delta, h > 0$, δηλαδή το τ δεν είναι πρόθεμα Dyck ούτε επίθεμα Dyck. Στην περίπτωση αυτή, το τ διασπάται στη μορφή $\tau = s\mathrm{d}p$, όπου το s είναι ένα επίθεμα Dyck βάθους $\delta - 1$ και το p είναι ένα πρόθεμα Dyck ύψους h. Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, έπεται ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)xB_s A_p. \tag{3.28}$$

Πράγματι, υπάρχει το πολύ μία εμφάνιση του τ στο $\alpha = u\beta \mathrm{d}\gamma$ που δεν περιέχεται στο β ή στο γ, και αυτή υπάρχει αν και μόνο αν $\beta \in \mathcal{B}_s$ και $\gamma \in \mathcal{A}_p$. Επομένως,

$$|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + [\beta \in \mathcal{B}_s][\gamma \in \mathcal{A}_p].$$

[12] Τα προθέματα Dyck εμφανίζονται στη βιβλιογραφία και ως μονοπάτια ballot.

Άρα, είναι

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} = 1 + x \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau+[\beta\in\mathcal{B}_s][\gamma\in\mathcal{A}_p]} \\
&= 1 + x \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{B}_s\\ \gamma\in\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau} + x \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{B}_s\\ \gamma\in\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau+|\gamma|_\tau+[\gamma\in\mathcal{A}_p]} \\
&= 1 + xF(F-B_s) + xB_s \sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau+[\gamma\in\mathcal{A}_p]} \\
&= 1 + xF(F-B_s) + xB_s \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}_p} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau} + \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_p} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau+1} \right) \\
&= 1 + xF(F-B_s) + xB_s(F - A_p + yA_p) \\
&= 1 + xF^2 + x(y-1)B_sA_p.
\end{aligned}
$$

Για τον προσδιορισμό των γεννητριών συναρτήσεων B_s, A_p συναρτήσει της F, θα χρησιμοποιηθούν τα (Fibonacci-like) πολυώνυμα p_i, q_i, $i \geq -1$, τα οποία έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Λήμμα 3.2. *Για κάθε (δ, h)-μονοπάτι τ, ισχύουν*

$$B_i = p_i(F), \quad i \leq \min\{h+k, h+2\} \tag{3.29}$$

και

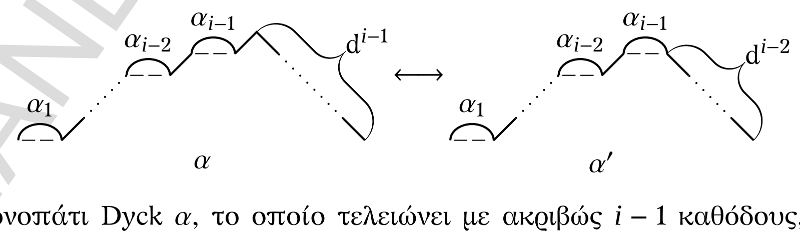
$$\Gamma_{p,\mathrm{d}^i} = q_i(x)A_p, \quad i \leq \min\{h+k, h+2, |p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}} + t\}, \tag{3.30}$$

όπου το p είναι ένα μη κενό πρόθεμα Dyck και k (αντ. t) είναι το πλήθος των διαδοχικών καθόδων στο τέλος του τ (αντ. p).

Απόδειξη. Βάσει της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης του Σχ. 3.6, και βάσει των περιορισμών που θέτουν οι ανισότητες των σχέσεων (3.29) και (3.30) αντίστοιχα, για $i \geq 2$, έχουμε ότι

$$B_{i-1} - B_i = xB_{i-2} \quad \text{και} \quad \Gamma_{p,\mathrm{d}^{i-1}} - \Gamma_{p,\mathrm{d}^i} = x\Gamma_{p,\mathrm{d}^{i-2}},$$

αφού, για $i \leq h+k$, η τελευταία κορυφή του μονοπατιού Dyck α δεν ανήκει σε καμία εμφάνιση του τ, ενώ για $i \leq h+2$, η διαγραφή της δεν δημιουργεί νέα εμφάνιση του τ στο α'.



Σχήμα 3.6: Το μονοπάτι Dyck α, το οποίο τελειώνει με ακριβώς $i-1$ καθόδους, απεικονίζεται στο α', το οποίο τελειώνει με (τουλάχιστον) $i-2$ καθόδους.

Επιπλέον, δεδομένου ότι $B_0 = F$, $B_1 = F - 1$ και $\Gamma_{p,\mathrm{d}^0} = \Gamma_{p,\mathrm{d}} = A_p$, το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (1.24) και (1.19). □

Σημειώνεται ότι αν το προηγούμενο Λήμμα εφαρμοστεί για το πρότυπο τ', προκύπτει ότι

$$A_j = p_j(F), \quad j \leq \min\{\delta + k', \delta + 2\}, \tag{3.31}$$

και

$$\Gamma_{\mathrm{u}^j,s} = q_j(x)B_s, \quad j \leq \min\{\delta + k', \delta + 2, |s|_{\mathrm{d}} - |s|_{\mathrm{u}} + t'\}, \tag{3.32}$$

όπου το s είναι ένα μη κενό επίθεμα Dyck και k' (αντ. t') είναι το πλήθος των διαδοχικών ανόδων στην αρχή του τ (αντ. s).

Ειδικά, έχουμε ότι

$$\Gamma_{j,i} = \begin{cases} q_i(x)A_j, & i \leq \min\{h + k, h + 2, j\} \\ q_j(x)B_i, & j \leq \min\{\delta + k', \delta + 2, i\}. \end{cases} \tag{3.33}$$

Στο επόμενο αποτέλεσμα, προσδιορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση F, για ένα μη περιοδικό πρότυπο.

Θεώρημα 3.3. *Η γεννήτρια συνάρτηση F που απαριθμεί τις εμφανίσεις ενός μη περιοδικού (δ, h)-προτύπου τ, ικανοποιεί την εξίσωση*

$$F = 1 + xF^2 + (y - 1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}} - h + 1} \frac{p_m^{|h-\delta|+1}(F)}{p_{m-1}^{|h-\delta|-1}(F)},$$

όπου $m = \min\{h, \delta\}$.

Απόδειξη. Αρχικά, θεωρούμε τη διάσπαση $\tau = s\mathrm{d}p$, όπου $s = \beta_0 \mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_{\delta-1}$, $p = \gamma_h \mathrm{u} \cdots \gamma_1 \mathrm{u} \gamma_0$ και $\beta_i, \gamma_j \in \mathcal{D}$, $0 \leq i \leq \delta - 1$, $0 \leq j \leq h$.

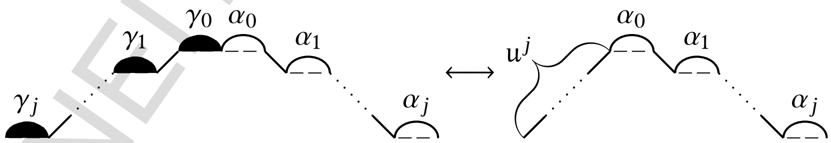
Έστω $b_i = \beta_0 \mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_i$, $0 \leq i \leq \delta - 1$ και έστω $c_j = \gamma_j \mathrm{u} \cdots \gamma_1 \mathrm{u} \gamma_0$, $0 \leq j \leq h$. Λόγω της μη περιοδικότητας του τ, χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, εύκολα προκύπτει ότι

$$A_{c_j} = x^{|c_j|_{\mathrm{u}} - |c_{j-1}|_{\mathrm{u}}} \left(A_{c_{j-1}} F + (y - 1)\Gamma_{c_{j-1},s} A_p \right), \tag{3.34}$$

για κάθε $0 \leq j \leq h$, όπου $c_{-1} = \varepsilon$.

Για κάθε $j \leq \delta$, δεδομένου ότι το τ είναι μη περιοδικό, η απεικόνιση του Σχ. 3.7 διατηρεί το πλήθος των εμφανίσεων του τ, έτσι ώστε

$$A_{c_j} = x^{|c_j|_{\mathrm{u}} - j} A_j, \quad j \leq m. \tag{3.35}$$



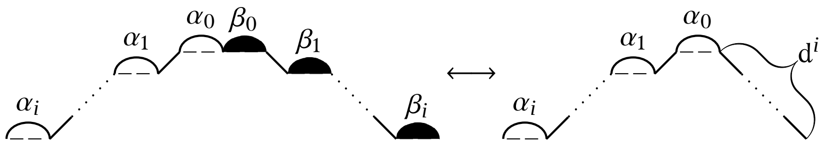
Σχήμα 3.7: Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ μονοπατιών Dyck με πρόθεμα p_j και εκείνων με πρόθεμα u^j.

Ομοίως, βάσει της απεικόνισης του Σχ. 3.8, προκύπτει ότι

$$B_{b_i} = x^{|b_i|_{\mathrm{u}}} B_i, \quad i \leq m, \qquad \text{και} \qquad \Gamma_{c_j,b_i} = x^{|b_i|_{\mathrm{u}}} \Gamma_{c_j,\mathrm{d}^i}, \quad i \leq j. \tag{3.36}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\delta \leq h$, αφού, στην αντίθετη περίπτωση το τ μπορεί να αντικατασταθεί από το τ'. Για $\delta \leq j \leq h$, βάσει των σχέσεων (3.30), (3.34) και (3.36), έπεται ότι

$$\frac{A_{c_j} x^{-|c_j|_{\mathrm{u}}}}{A_{c_{j-1}} x^{-|c_{j-1}|_{\mathrm{u}}}} = F + (y - 1)x^{|s|_{\mathrm{u}}} q_{\delta-1}(x) A_p.$$



Σχήμα 3.8: Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των μονοπατιών Dyck με επίθεμα s_i και εκείνων με επίθεμα d^i.

Επομένως, από τις σχέσεις (3.31) και (3.35), έπεται ότι

$$A_p = x^{|p|_{\mathrm{u}}-|c_{\delta-1}|_{\mathrm{u}}} A_{c_{\delta-1}} \left(\frac{A_{c_\delta} x^{-|c_\delta|_{\mathrm{u}}}}{A_{c_{\delta-1}} x^{-|c_{\delta-1}|_{\mathrm{u}}}} \right)^{h-\delta+1} = x^{|p|_{\mathrm{u}}-h} \frac{p_\delta^{h-\delta+1}(F)}{p_{\delta-1}^{h-\delta}(F)}.$$

Επιπλέον, αφού είναι $\delta \leq h$, από τις σχέσεις (3.29) και (3.36), λαμβάνουμε ότι

$$B_s = x^{|s|_{\mathrm{u}}} B_{\delta-1} = x^{|s|_{\mathrm{u}}} p_{\delta-1}(F).$$

Κατόπιν τούτων, αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των A_p και B_s στη σχέση (3.28), προκύπτει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα

Το πρότυπο $\tau = \mathrm{d}^\nu \mathrm{u} \mathrm{d}^\nu \mathrm{u}^2 \cdots \mathrm{d}^\nu \mathrm{u}^{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι μη περιοδικό με $\delta = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και $h = \frac{\nu(\nu+3)}{2}$. Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 3.3, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1) x^{\frac{3\nu^2-\nu+2}{2}} \frac{p^{\nu+1}_{\frac{\nu^2+\nu}{2}}(F)}{p^{\nu-1}_{\frac{\nu^2+\nu-2}{2}}(F)}.$$

Η περίπτωση του περιοδικού προτύπου παρουσιάζει ιδιαίτερα μεγαλύτερη πολυπλοκότητα σε σχέση με τις περιπτώσεις που αναλύθηκαν στα προηγούμενα. Θα εξετασθούν ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, όπου επίσης χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα p_i. Προηγουμένως, στο επόμενο αποτέλεσμα δίνεται μια έκφραση της γεννήτριας συνάρτησης A_p, όπου το p είναι ένα πρόθεμα Dyck, συναρτήσει των γεννητριών συναρτήσεων A_i, $i \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 3.4. *Έστω τ ένα (δ, h)-πρότυπο που ξεκινά με κάθοδο και έστω p ένα πρόθεμα Dyck τέτοιο ώστε $|p| < |\tau|$. Τότε, η γεννήτρια συνάρτηση A_p ως προς το πρότυπο τ δίνεται από τη σχέση*

$$A_p = x^{|p|_{\mathrm{d}}} A_{|p|_{\mathrm{u}}-|p|_{\mathrm{d}}} + \sum_{w \in \mathcal{W}_p} x^{|l_p(w)|_{\mathrm{d}}} (A_{j_w} - x A_{j_w-1} - A_{j_w+1}),$$

όπου $\mathcal{W}_p$ είναι το σύνολο των μη κενών επιθεμάτων του p τα οποία είναι προθέματα του τ, $l_p(w)$ είναι το συμπληρωματικό ως προς το w πρόθεμα του p (δηλαδή $p = l_p(w)w$) και $j_w = |l_p(w)|_{\mathrm{u}} - |l_p(w)|_{\mathrm{d}}$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το $M_p = \max\{|w| : w \in \mathcal{W}_p\}$.

Αν $M_p = 0$, τότε $\mathcal{W}_p = \varnothing$ και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα, αφού για κάθε μονοπάτι Dyck με πρόθεμα p, το πρόθεμα αυτό μπορεί να αντικατασταθεί από το $\mathrm{u}^{|p|_{\mathrm{u}}-|p|_{\mathrm{d}}}$ χωρίς να αλλάξει το πλήθος των εμφανίσεων του τ στο μονοπάτι.

Για $M_p > 0$, έστω q το μέγιστο στοιχείο του $\mathcal{W}_p$, δηλαδή $|q| = M_p$. Αρχικά υποθέτουμε ότι το p τελείωνει με κάθοδο και γράφουμε $q = q'\mathrm{d}$, $p_1 = \mathrm{u}^\xi q'$ και $p_2 = \mathrm{u}^\xi q'\mathrm{u}$, όπου $\xi =$

$|l_p(q)|_{\mathrm{u}} - |l_p(q)|_{\mathrm{d}} > 0$. Προφανώς, τα p_1, p_2 είναι προθέματα Dyck τέτοια ώστε $M_{p_1} = |q'| < |q| = M_p$ και $M_{p_2} < |q'\mathrm{u}| = |q| = M_p$.

Έστω $\mathcal{W}$ (αντ. $\mathcal{W}'$) το σύνολο των στοιχείων $w \in \mathcal{W}_{p_1}$, για τα οποία το $w\mathrm{d}$ (αντ. $w\mathrm{u}$) είναι πρόθεμα του τ. Προφανώς, τα σύνολα $\mathcal{W}$ και $\mathcal{W}'$ αποτελούν διαμέριση του $\mathcal{W}_{p_1}$ έτσι ώστε

$$\mathcal{W}_p = \{w\mathrm{d} : w \in \mathcal{W}\} \cup \{\mathrm{d}\}, \qquad \mathcal{W}_{p_2} = \{w\mathrm{u} : w \in \mathcal{W}'\}$$

και

$$l_{p_1}(w) = \begin{cases} l_{p_1\mathrm{d}}(w\mathrm{d}), & w \in \mathcal{W} \\ l_{p_2}(w\mathrm{u}), & w \in \mathcal{W}'. \end{cases}$$

Βάσει της υπόθεσης της επαγωγής, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A_p &= x^{|l_p(q)|_{\mathrm{d}}} A_{p_1\mathrm{d}} = x^{|l_p(q)|_{\mathrm{d}}}(A_{p_1} - A_{p_2}) \\ &= x^{|l_p(q)|_{\mathrm{d}}}\Big(x^{|p_1|_{\mathrm{d}}} A_{|p_1|_{\mathrm{u}} - |p_1|_{\mathrm{d}}} + \sum_{w \in \mathcal{W}_{p_1}} x^{|l_{p_1}(w)|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1}) \\ &\qquad - x^{|p_2|_{\mathrm{d}}} A_{|p_2|_{\mathrm{u}} - |p_2|_{\mathrm{d}}} - \sum_{w \in \mathcal{W}_{p_2}} x^{|l_{p_2}(w)|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1})\Big) \\ &= x^{|l_p(q)|_{\mathrm{d}}}\Big(x^{|q|_{\mathrm{d}}-1}(A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}+1} - A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}+2}) + \sum_{w \in \mathcal{W}} x^{|l_{p_1}(w)|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1})\Big) \\ &= x^{|p|_{\mathrm{d}}} A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}} + x^{|p|_{\mathrm{d}}-1}(A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}+1} - xA_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}} - A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}+2}) \\ &\qquad + \sum_{w \in \mathcal{W}} x^{|l_p(w\mathrm{d})|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1}) \\ &= x^{|p|_{\mathrm{d}}} A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}} + \sum_{w \in \mathcal{W}_p} x^{|l_p(w)|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1}). \end{aligned}$$

Η απόδειξη της περίπτωσης όπου το p τελειώνει με άνοδο είναι παρόμοια, εκτός αν το ύψος του p ισούται με 1, αφού, σε αυτή την περίπτωση, το μονοπάτι που προκύπτει αντικαθιστώντας την τελευταία άνοδο του $\mathrm{u}^{\xi}q$ με μία κάθοδο είναι επίθεμα Dyck, οπότε το επαγωγικό βήμα δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Αυτή η συγκεκριμένη περίπτωση, όπου $p = \alpha\mathrm{u}$ και $\alpha \in \mathcal{D}$, αναλύεται παρακάτω.

Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, κάθε $w \in \mathcal{W}_\alpha$ είναι ένα επίθεμα Dyck βάθους $|w|_{\mathrm{d}} - |w|_{\mathrm{u}} \leq \delta$. Επιπλέον, αν το βάθος του w είναι μικρότερο του δ, τότε είναι

$$j_w = |l_\alpha(w)|_{\mathrm{u}} - |l_\alpha(w)|_{\mathrm{d}} = |w|_{\mathrm{d}} - |w|_{\mathrm{u}} \leq \delta - 1,$$

οπότε, από τη σχέση (3.31), προκύπτει ότι

$$A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1} = 0.$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $w \in \mathcal{W}_\alpha$, τέτοιο ώστε το $w\mathrm{d}$ να είναι πρόθεμα του τ, γεγονός το οποίο δίνει ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_\alpha} x^{|l_\alpha(w)|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1}) = \sum_{w \in \mathcal{W}_p} x^{|l_p(w)|_{\mathrm{d}}}(A_{j_w} - xA_{j_w-1} - A_{j_w+1}). \tag{3.37}$$

Έστω q το μέγιστο στοιχείο του $\mathcal{W}_\alpha$. Αν $|q|_{\mathrm{d}} - |q|_{\mathrm{u}} \leq \delta - 1$, τότε κάθε μονοπάτι Dyck με πρόθεμα p δεν περιέχει εμφάνιση του τ η οποία να ξεκινά από σημείο του p, οπότε

$$A_p = x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}(F - 1) = x^{|p|_{\mathrm{d}}} A_{|p|_{\mathrm{u}} - |p|_{\mathrm{d}}}.$$

Δεδομένου ότι σε αυτή την περίπτωση τα αθροίσματα της σχέσης (3.37) είναι ίσα με 0, προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, αν $|q|_{\mathrm{d}} - |q|_{\mathrm{u}} = \delta$, τότε $q\mathrm{u} \in \mathcal{W}_p$, έτσι ώστε $M_\alpha = |q| < |q\mathrm{u}| = M_p$. Επομένως, αφού είναι $A_p = A_\alpha - x^{|\alpha|_{\mathrm{d}}}$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής και τη σχέση (3.37), προκύπτει ξανά το ζητούμενο. □

Στο επόμενο αποτέλεσμα, περιοριζόμαστε στην περίπτωση του προτύπου $\tau = \mathrm{d}^\delta p$, όπου το p είναι ένα πρόθεμα Dyck.

Θεώρημα 3.5. *Έστω F η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί τις εμφανίσεις του προτύπου $\mathrm{d}^\delta p$, όπου το p είναι ένα πρόθεμα Dyck ύψους h. Τότε, έχουμε ότι*

i) αν $\delta \le \min\{h+k, h+3\}$, τότε

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h+1}\left(\frac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^{h-\delta}$$
$$\left(p_\delta(F)p_{\delta-1}(F) + (F-1-xF^2)x^{\delta-1}\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{d}}}\left(\frac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^{|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}}\right), \tag{3.38}$$

ii) αν $h+k+1 \le \delta$ και $\mathcal{V} = \{\mathrm{d}^i : i \in [k]\}$, τότε

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{d}}-\delta+1}\left(\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}\right)^{\delta-h}$$
$$\left(p_h(F)p_{h-1}(F) + (F-1-xF^2)x^{h-1}\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}\left(\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}\right)^{|v|_{\mathrm{u}}-|v|_{\mathrm{d}}}\right), \tag{3.39}$$

όπου $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων του τ και k είναι το πλήθος των διαδοχικών καθόδων στο τέλος του τ.

Απόδειξη. i) Έστω $\delta \le \min\{h+k, h+3\}$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής και τη σχέση (3.33), προκύπτει ότι

$$A_j = x(A_{j-1}F + (y-1)\Gamma_{j-1,\delta-1}A_p) = xA_{j-1}(F + (y-1)q_{\delta-1}(x)A_p), \quad j \ge \delta. \tag{3.40}$$

Από τη σχέση (3.31), έπεται ότι

$$A_j = p_{\delta-1}(F)\left(\frac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^{j-\delta+1}, \quad j \ge \delta - 1. \tag{3.41}$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 3.4, έπεται ότι

$$\begin{aligned} A_p &= x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}\Big(A_h + \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{d}}}(A_{h+|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}} - xA_{h+|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}-1} - A_{h+|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}+1})\Big) \\ &= x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h} p_{\delta-1}(F)\left(\tfrac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^{h-\delta} \\ &\qquad \cdot \left(\tfrac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)} + \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{d}}}\left(\tfrac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^{|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}}\left(\tfrac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)} - x - \left(\tfrac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^2\right)\right). \end{aligned}$$

Τελικά, δεδομένου ότι από τη σχέση (3.29) έχουμε ότι $B_{\delta-1} = p_{\delta-1}(F)$, το ζητούμενο προκύπτει αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των A_p και B_s στη σχέση (3.28) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.27).

Συγκεκριμένα, θέτοντας, για απλότητα,

$$S = \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{d}}} \left(\frac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)}\right)^{|v|_{\mathrm{d}}-|v|_{\mathrm{u}}} \quad \text{και} \quad T = \frac{p_\delta(F)}{p_{\delta-1}(F)},$$

είναι

$$\begin{aligned}
F - 1 - xF^2 &\overset{(3.28)}{=} x(y-1)B_sA_p \overset{(3.29)}{=} x(y-1)p_{\delta-1}(F)A_p \\
&= (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h+1}p_{\delta-1}^2(F)T^{h-\delta}\left(T + (T - x - T^2)S\right) \\
&= (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h+1}T^{h-\delta}\left(p_\delta(F)p_{\delta-1}(F) + \left(p_\delta(F)p_{\delta-1}(F) - xp_{\delta-1}^2(F) - p_\delta^2\right)S\right) \\
&\overset{(1.27)}{=} (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h+1}T^{h-\delta}\left(p_\delta(F)p_{\delta-1}(F) + x^{\delta-1}(F - 1 - xF^2)S\right).
\end{aligned}$$

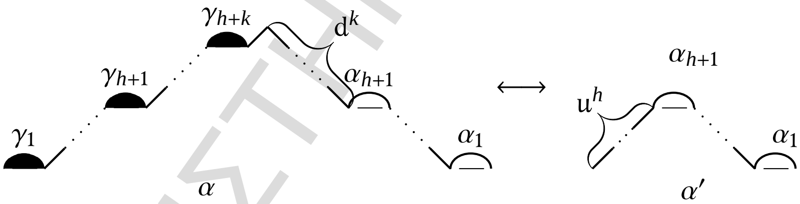
ii) Έστω $h + k + 1 \le \delta$. Τότε, αφού έχουμε επίσης υποθέσει ότι κάθε σύνορο του τ είναι της μορφής d^i, $i \in [k]$, συμπεραίνουμε ότι η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του Σχ. 3.9 διατηρεί το πλήθος των εμφανίσεων του τ. Επομένως, είναι

$$A_p = x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}A_h \tag{3.42}$$

και

$$\Gamma_{p,\mathrm{d}^i} = \begin{cases} x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}\Gamma_{h,i} + x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}, & h+1 \le i \le h+k \\ x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}\Gamma_{h,i}, & i \ge h+k+1. \end{cases} \tag{3.43}$$

Για την αιτιολόγηση της σχέσης (3.43), παρατηρούμε επίσης ότι το d^i είναι επίθεμα του α αν και μόνο αν το d^i είναι επίθεμα του α', εκτός όταν $\alpha = p\mathrm{d}^h$ και $h+1 \le i \le h+k$ (βλ. Σχ. 3.9).



Σχήμα 3.9: Το μονοπάτι Dyck α απεικονίζεται στο α' αντικαθιστώντας το πρόθεμά του $p = \gamma_1\mathrm{u}\cdots\gamma_{h+k}\mathrm{u}\mathrm{d}^k$ με u^h.

Για τον προσδιορισμό της $B_{\delta-1}$, αρχικά, χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, προκύπτει ότι

$$B_i = x\left(B_{i-1} + FB_i + (y-1)B_{\delta-1}\Gamma_{p,\mathrm{d}^i}\right), \quad i \ge 1. \tag{3.44}$$

Στη συνέχεια, για $i \ge h + k + 1$, με τη βοήθεια των σχέσεων (3.28), (3.31), (3.33), (3.42) και (3.43), από τη σχέση (3.44) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
(1 - xF)B_i &= xB_{i-1} + x(y-1)B_{\delta-1}\Gamma_{p,\mathrm{d}^i} \overset{(3.28)}{=} xB_{i-1} + \frac{F - 1 - xF^2}{A_p}\Gamma_{p,\mathrm{d}^i} \\
&\overset{(3.42)}{=} xB_{i-1} + \frac{F - 1 - xF^2}{x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}A_h}\Gamma_{p,\mathrm{d}^i} \overset{(3.43)}{=} xB_{i-1} + \frac{F - 1 - xF^2}{x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}A_h}x^{|\tau|_{\mathrm{u}}-h}\Gamma_{h,i} \\
&\overset{(3.33)}{=} xB_{i-1} + \frac{F - 1 - xF^2}{A_h}q_h(x)B_i \overset{(3.31)}{=} xB_{i-1} + \frac{F - 1 - xF^2}{p_h(F)}q_h(x)B_i,
\end{aligned}$$

οπότε,

$$(1 - xF)p_h(F)B_i = xp_h(F)B_{i-1} + (F - 1 - xF^2)q_h(x)B_i$$

και τελικά

$$\Big((1-xF)p_h(F)-(F-1-xF^2)q_h(x)\Big)B_i = xp_h(F)B_{i-1},$$

ή ισοδύναμα, με τη βοήθεια της σχέσης (1.26),

$$\frac{B_i}{B_{i-1}} = \frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}.$$

Επομένως, είναι

$$B_i = B_{h+k}\left(\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}\right)^{i-h-k}, \quad i \geq h+k. \tag{3.45}$$

Για τον προσδιορισμό της B_i, για $h+1 \leq i \leq h+k$, εργαζόμαστε όπως πριν, λαμβάνοντας

$$p_{h-1}(F)B_i - p_h(F)B_{i-1} = x^{h-1}(F-1-xF^2).$$

Λύνοντας την προηγούμενη γραμμική αναγωγική σχέση με αρχική συνθήκη $B_{h+1} = p_{h+1}(F)$, και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.27), τελικά προκύπτει ότι

$$B_i = p_h(F)\left(1 - x\frac{p_{h-1}^2(F)}{p_h(F)}\cdot\frac{1-\left(\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}\right)^{i-h}}{p_{h-1}(F)-p_h(F)}\right),$$

για κάθε $h+1 \leq i \leq h+k$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη ισότητα για $i = h+k$, καθώς και τη σχέση (3.45) για $i = \delta - 1$, προκύπτει ότι

$$B_{\delta-1} = \frac{p_h^{\delta-h-k}(F)}{p_{h-1}^{\delta-h-k-1}(F)}\left(1 - x\frac{p_{h-1}(F)}{p_h(F)}\cdot\frac{1-\left(\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}\right)^k}{1-\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}}\right)$$

από όπου, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη τη σχέση (1.27), καταλήγουμε στη σχέση

$$B_{\delta-1} = \frac{p_h^{\delta-h}(F)}{p_{h-1}^{\delta-h-1}(F)}\left(p_h(F)p_{h-1}(F) + (F-1-xF^2)x^{h-1}\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}\left(\frac{p_h(F)}{p_{h-1}(F)}\right)^{|v|_{\mathrm{u}}-|v|_{\mathrm{d}}}\right).$$

Τέλος, από τις σχέσεις (3.31) και (3.42) έχουμε ότι $A_p = x^{|\tau|_{\mathrm{d}}-\delta}p_h(F)$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει, κατόπιν αντικατάστασης των εκφράσεων των A_p και B_s στη σχέση (3.28). □

Παράδειγμα

Έστω $\tau = \mathrm{d}^{\xi}\mathrm{u}^{\nu}\mathrm{d}^{k}$, όπου $\xi, \nu \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ και έστω F η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση.

Αν $\nu \leq k$, τότε, από την ισοκατανομή των στατιστικών $N_{\mathrm{d}^{\xi}\mathrm{u}^{\nu}\mathrm{d}^{k}}$ και $N_{\mathrm{u}^{k}\mathrm{d}^{\nu}\mathrm{u}^{\xi}}$, έπεται ότι η F δίνεται από τη σχέση (3.26).

Αν $\nu > k$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3, προκύπτει ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{k-m+1}\frac{p_{\xi}^{\nu-M+1}(F)}{p_{\xi-1}^{\nu-M-1}(F)}\left(1 - x\frac{p_{\xi}(F)}{p_{\xi-1}(F)}\cdot\frac{1-\left(x\frac{p_{\xi-1}(F)}{p_{\xi}(F)}\right)^m}{1-x\frac{p_{\xi-1}(F)}{p_{\xi}(F)}}\right), \tag{3.46}$$

για $\xi \leq \min\{\nu, \nu-k+3\}$, $m = \min\{\xi, k\}$ και $M = \max\{\xi, k\}$, και ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{k+1}\frac{p_{\nu-k}^{\xi-\nu+1}(F)}{p_{\nu-k}^{\xi-\nu-1}(F)}\left(1 - x\frac{p_{\nu-k-1}(F)}{p_{\nu-k}(F)}\cdot\frac{1-\left(\frac{p_{\nu-k}(F)}{p_{\nu-k-1}(F)}\right)^k}{1-\frac{p_{\nu-k}(F)}{p_{\nu-k-1}(F)}}\right), \tag{3.47}$$

για $\xi \geq \nu + 1$.

Σημειώνεται ότι η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης F παραμένει μέχρι στιγμής άγνωστη, για τις περιπτώσεις που είναι $\nu > k$ και $\nu - k + 4 \leq \xi \leq \nu$.

3.4 Εμφανίσεις σε ύψος τουλάχιστον j

Το πρόβλημα της απαρίθμησης των εμφανίσεων ενός προτύπου σε μονοπάτια Dyck και σε καθορισμένο ύψος πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία [49], για συγκεκριμένα πρότυπα, και μελετήθηκε εκτεταμένα για αυθαίρετα πρότυπα στην εργασία [60], όπου αποδεικνύεται ότι η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί τις εμφανίσεις ενός προτύπου τ σε ύψος j μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των πολυωνύμων Chebyshev δεύτερου είδους και της γεννήτριας συνάρτησης L που απαριθμεί τις χαμηλές εμφανίσεις του τ (βλ. Πρόταση 1, [60]). Η γεννήτρια συνάρτηση L προσδιορίζεται πλήρως στο Κεφάλαιο 2, για οποιοδήποτε πρότυπο τ, και κατά επέκταση, προσδιορίζεται και η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί τις εμφανίσεις ενός προτύπου τ σε ύψος j.

Σε αυτή την ενότητα, μελετώνται οι εμφανίσεις ενός προτύπου σε ύψος μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου $j \in \mathbb{N}$. Το πρότυπο *τ εμφανίζεται σε ύψος τουλάχιστον j* σε ένα μονοπάτι Dyck, αν το ελάχιστο ύψος των σημείων του τ σε αυτή την εμφάνιση είναι μεγαλύτερο ή ίσο του j. Για παράδειγμα, το μονοπάτι Dyck του Σχ. 1.1 έχει τέσσερεις εμφανίσεις του προτύπου ud σε ύψος τουλάχιστον 1 (δύο σε ύψος 1 και δύο σε ύψος 3).

Μια εμφάνιση του προτύπου τ σε ύψος τουλάχιστον 1 καλείται *υψηλή εμφάνιση* του τ. Όπως είναι γνωστό (βλ. [75]), οι στατιστικές "πλήθος υψηλών $(\mathrm{ud})^r$" και "πλήθος $(\mathrm{du})^r$" είναι ισοκατανεμημένες για κάθε $r \in \mathbb{N}^*$ (για $r = 1$, βλ. [15] και [17]).

Συμβολίζουμε με $F_j = F_j(x, y)$ τη γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί τις εμφανίσεις του προτύπου τ σε ύψος τουλάχιστον j. Προφανώς, η $F_0 = F$ (αντ. F_1) είναι η γεννήτρια συνάρτηση που απαριθμεί όλες τις εμφανίσεις (αντ. τις υψηλές εμφανίσεις) του προτύπου τ.

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, άμεσα προκύπτει ότι

$$F_j = \frac{1}{1 - xF_{j-1}}, \quad j \in \mathbb{N}^*. \tag{3.48}$$

Επιπλέον, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράφεται στην εργασία [60], και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.20), η F_j μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της F, σύμφωνα με την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 3.6. *Για κάθε πρότυπο τ, η γεννήτρια συνάρτηση F_j δίνεται από τη σχέση*

$$F_j = \frac{q_{j-1}(x)}{q_j(x)} + \frac{x^j}{q_j^2(x)\left(\dfrac{1}{F} - x\dfrac{q_{j-1}(x)}{q_j(x)}\right)}.$$

Στο επόμενο αποτέλεσμα, προσδιορίζεται η F_j (χωρίς τη χρήση της F), για την περίπτωση που το τ είναι ένα πρόθεμα Dyck.

Θεώρημα 3.7. *Η γεννήτρια συνάρτηση F_j, για ένα πρότυπο τ που είναι πρόθεμα Dyck, ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\begin{aligned} F_j = 1 + xF_j^2 + (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{d}} - j+1} \left(\frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)}\right)^{|\tau|_{\mathrm{u}} - |\tau|_{\mathrm{d}}} \\ \left(p_j(F_j)p_{j-1}(F_j) + \left(F_j - 1 - xF_j^2\right) x^{j-1} \sum_{v \in \mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{d}}} \left(\frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)}\right)^{|v|_{\mathrm{d}} - |v|_{\mathrm{u}}}\right), \end{aligned}$$

όπου $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων του τ.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δειχθεί ότι

$$\frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)} = xF. \tag{3.49}$$

Πράγματι, με τη βοήθεια της ταυτότητας (1.25), για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, προκύπτει ότι

$$p_j(F_j) = xF_j p_{j-1}\left(\frac{F_j - 1}{xF_j}\right) \overset{(3.48)}{=} xF_j p_{j-1}\left(F_{j-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)} = \frac{p_{j-1}(F_{j-1})}{p_{j-1}(F_j)} xF_j \overset{(1.25)}{=} \frac{p_{j-1}(F_{j-1})}{xF_j p_{j-2}(F_{j-1})} xF_j = \frac{p_{j-1}(F_{j-1})}{p_{j-2}(F_{j-1})}.$$

Άρα, το πηλίκο $\dfrac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)}$ είναι μια σταθερή ακολουθία ως προς $j \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)} = \frac{p_{j-1}(F_{j-1})}{p_{j-2}(F_{j-1})} = \cdots = \frac{p_0(F_0)}{p_{-1}(F_0)} = xF_0 = xF.$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της σχέσης (3.49), θα δειχθεί ότι

$$\frac{p_j(F_j)p_{j-1}(F_j)}{F_j - 1 - xF_j^2} x^{1-j} = \frac{F}{F - 1 - xF^2}. \tag{3.50}$$

Από την ταυτότητα (1.27), έπεται ότι

$$p_{j-1}(F_j)p_j(F_j) - p_j^2(F_j) - xp_{j-1}^2(F_j) = x^{j-1}(F_j - 1 - xF_j^2).$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $p_{j-1}(F_j)p_j(F_j)$, προκύπτει ότι

$$\frac{x^{j-1}(F_j - 1 - xF_j^2)}{p_{j-1}(F_j)p_j(F_j)} = 1 - \frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)} - \frac{xp_{j-1}(F_j)}{p_j(F_j)} = 1 - xF - \frac{x}{xF} = \frac{F - 1 - xF^2}{F},$$

άρα η (3.50) ισχύει.

Τέλος, το ζητούμενο προκύπτει με αντικατάσταση των σχέσεων (3.49), (3.50) στον τύπο του Θεωρήματος 3.1. □

Παράδειγμα

Αν $\tau = \mathrm{u}^\xi \mathrm{d}^\nu \mathrm{u}^k$, όπου $\xi, \nu \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ με $k < \nu \le \xi$, τότε $\mathcal{V} = \{\mathrm{u}^i : i \in [k]\}$, για $k > 0$, και $\mathcal{V} = \varnothing$, για $k = 0$. Από το Θεώρημα 3.7, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (1.27), τελικά προκύπτει ότι

$$F_j = 1 + xF_j^2 + (y-1)x^{\nu-j+1} \frac{p_j^{\xi-\nu+1}(F_j)}{p_{j-1}^{\xi-\nu-1}(F_j)} \left(1 - x\frac{p_{j-1}(F_j)}{p_j(F_j)} \frac{1 - \left(\frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)}\right)^k}{1 - \frac{p_j(F_j)}{p_{j-1}(F_j)}}\right).$$

Επιπλέον, αν $\nu < \xi$, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $j = \nu - k$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.47), προκύπτει ότι οι στατιστικές "πλήθος $\mathrm{d}^\xi \mathrm{u}^\nu \mathrm{d}^k$" και "πλήθος $\mathrm{u}^\xi \mathrm{d}^\nu \mathrm{u}^k$ σε ύψος τουλάχιστον $\nu - k$" είναι ισοκατανεμημένες.

Η ισοκατανομή αυτή ισχύει επίσης και όταν $\nu = \xi$ και $k = 0$. Ακριβέστερα, χρησιμοποιώντας το συμμετρικό πρότυπο $\mathrm{u}^\nu \mathrm{d}^\xi$, όταν $\nu > \xi$, προκύπτει ότι οι στατιστικές "πλήθος $\mathrm{d}^\xi \mathrm{u}^\nu$" και "πλήθος $\mathrm{u}^\nu \mathrm{d}^\xi$ σε ύψος τουλάχιστον m", όπου $m = \min\{\xi, \nu\}$, είναι ισοκατανεμημένες.

Σημειώνεται ότι η ανάλογη εξίσωση για την F_j, όταν το τ είναι επίθεμα Dyck, προκύπτει εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.7 για το πρότυπο τ'.

3.5 Ενοποίηση αποτελεσμάτων

Όλες οι εξισώσεις της γεννήτριας συνάρτησης F που δόθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, για διάφορες κατηγορίες προτύπων, συνοψίζονται σε ένα γενικό τύπο. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τις ρητές συναρτήσεις

$$R_i(t) = \frac{p_i(t)}{x p_{i-1}(t)}, \quad i \in \mathbb{N}$$

και τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} R_i(F) = 1{+}xR_i^2(F) &+ (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{u}}} R_i^{|\tau|_{\mathrm{u}}-|\tau|_{\mathrm{d}}}(F) \\ &\left(R_i(F) + \Big(R_i(F) - 1 - xR_i^2(F) \Big) \sum_{\nu \in \mathcal{V}} x^{-|\nu|_{\mathrm{u}}} R_i^{|\nu|_{\mathrm{d}}-|\nu|_{\mathrm{u}}}(F) \right), \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} R_i(F) = 1{+}xR_i^2(F) &+ (y-1)x^{|\tau|_{\mathrm{d}}} R_i^{|\tau|_{\mathrm{d}}-|\tau|_{\mathrm{u}}}(F) \\ &\left(R_i(F) + \Big(R_i(F) - 1 - xR_i^2(F) \Big) \sum_{\nu \in \mathcal{V}} x^{-|\nu|_{\mathrm{d}}} R_i^{|\nu|_{\mathrm{u}}-|\nu|_{\mathrm{d}}}(F) \right). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Αν το τ είναι ένα πρόθεμα (αντ. επίθεμα) Dyck, τότε η F ικανοποιεί την εξίσωση (3.51) (αντ. (3.52)), για $i = 0$.

Αν το τ είναι ένα μη περιοδικό (δ, h)-πρότυπο, τότε η F ικανοποιεί την εξίσωση (3.51) (αντ. (3.52)), αν $h \geq \delta$ (αντ. $h \leq \delta$), για $i = \min\{h, \delta\}$.

Αν $\tau = \mathrm{d}^\delta p$, όπου το p είναι ένα πρόθεμα Dyck ύψους h, τότε, σύμφωνα με τις αντίστοιχες ανισότητες του Θεωρήματος 3.5, η F ικανοποιεί μία από τις εξισώσεις (3.51), (3.52), για $i = \delta, h$ αντίστοιχα.

Τέλος, η γεννήτρια συνάρτηση F_j, όταν το τ είναι ένα πρόθεμα (αντ. επίθεμα) Dyck, ικανοποιεί την εξίσωση (3.51) (αντ. (3.52)), για $i = j$.

Εικάζουμε ότι, για οποιοδήποτε πρότυπο τ, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί μία από τις εξισώσεις (3.51) και (3.52), χωρίς όμως να είναι ακόμα σαφές σε ποιό χαρακτηριστικό του προτύπου τ αντιστοιχεί η παράμετρος i. Η απόδειξη της εικασίας αυτής παραμένει ένα ανοιχτό πρόβλημα.

3.6 Απαρίθμηση προθεμάτων Dyck με τη μέθοδο Goulden-Jackson

Η μέθοδος GJCM (Goulden-Jackson cluster method) παρουσιάστηκε στην εργασία [27] ως μία γενική μέθοδος για την απαρίθμηση λέξεων σε ένα αλφάβητο $\mathcal{L}$, οι οποίες περιέχουν συγκεκριμένο αριθμό εμφανίσεων προτύπων ενός προκαθορισμένου συνόλου T από πρότυπα, με τον περιορισμό ότι ένα πρότυπο δεν αποτελεί υπολέξη άλλου προτύπου. Η μέθοδος αυτή γενικεύτηκε αργότερα από τους Nooan, Zeilberger [55], για οποιοδήποτε σύνολο προτύπων T.

Πρόσφατα, ο Wang, στη διδακτορική διατριβή του [70], τροποποίησε τη μέθοδο GJCM, ώστε να απαριθμήσει συγκεκριμένα πρότυπα μήκους το πολύ 3 σε μονοπάτια Dyck.

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται μια γενίκευση της μεθόδου αυτής, κατάλληλη για την απαρίθμηση οποιουδήποτε προτύπου που είναι πρόθεμα Dyck. Με τη μέθοδο αυτή, δίνεται μια διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.

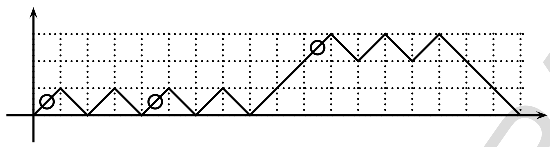
Έστω $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ ένα μονοπάτι μήκους n. Οι εμφανίσεις του προτύπου τ στο α μπορούν να κωδικοποιηθούν από τα στοιχεία του συνόλου

$$S_\tau(\alpha) = \{i \in [n] : a_i a_{i+1} \cdots a_{|\tau|+i-1} = \tau\},$$

δηλαδή, κάθε στοιχείο του $S_\tau(\alpha)$ υποδεικνύει τη θέση του πρώτου γράμματος μίας εμφάνισης του τ στο α. Προφανώς, $S_\tau(\varepsilon) = \emptyset$.

Ένα *σημειωμένο μονοπάτι* είναι ένα ζεύγος (α, I), όπου το α είναι ένα μονοπάτι και $I \subseteq S_\tau(\alpha)$. Μια εμφάνιση του τ, που ξεκινά στην i-οστή θέση του α, είναι *σημειωμένη* στο (α, I) αν και μόνο αν $i \in I$. Πρακτικά, ένα σημειωμένο μονοπάτι είναι ένα μονοπάτι α που έχει κάποιες από τις εμφανίσεις του τ σημειωμένες. Οι εμφανίσεις αυτές κωδικοποιούνται από το σύνολο I.

Για παράδειγμα, αν α = ududududuuudududdd και τ = ududu, τότε είναι $S_\tau(\alpha) = \{1, 3, 5, 11\}$. Για $I = \{1, 5, 11\}$, έχουμε το σημειωμένο μονοπάτι Dyck του Σχ. 3.10.



Σχήμα 3.10: Ένα σημειωμένο μονοπάτι Dyck (α, I).

Προφανώς, από ένα μονοπάτι α προκύπτουν $2^{|\alpha|_\tau}$ σημειωμένα μονοπάτια, με $\binom{|\alpha|_\tau}{k}$ από αυτά να έχουν ακριβώς k σημειωμένες εμφανίσεις. Κάθε μονοπάτι α μπορεί να θεωρηθεί ως σημειωμένο, μέσω της απεικόνισης $\alpha \mapsto (\alpha, \emptyset)$.

Η σύζευξη δύο σημειωμένων μονοπατιών (α, I), (β, J) ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha, I)(\beta, J) = (\alpha\beta, I \cup (|\alpha| + J)),$$

όπου $|\alpha| + J = \{|\alpha| + j : j \in J\}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{MD}$ το σύνολο των σημειωμένων μονοπατιών Dyck, και ορίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου αυτού

$$H = H(x, y) = \sum_{(\alpha,I)\in\mathcal{MD}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|I|},$$

ως προς τις παραμέτρους του ημιμήκους και του πλήθους σημειωμένων εμφανίσεων του τ. Η σημαντική παρατήρηση, η οποία καθιστά τον προσδιορισμό της F ευκολότερο, είναι ότι $H(x, y) = F(x, y + 1)$. Πράγματι,

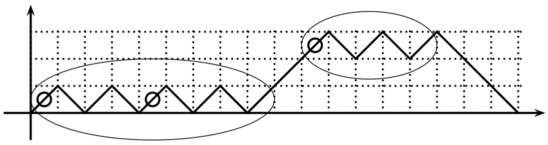
$$\begin{aligned} F(x, y+1) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} (y+1)^{|\alpha|_\tau} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} \sum_{k=0}^{|\alpha|_\tau} \binom{|\alpha|_\tau}{k} y^k \\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} \sum_{I\subseteq S_\tau(\alpha)} y^{|I|} = \sum_{(\alpha,I)\in\mathcal{MD}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|I|} \\ &= H(x, y). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Η δεύτερη κεντρική έννοια της μεθόδου είναι αυτή του συμπλέγματος. Ένα *σύμπλεγμα* (cluster) (του προτύπου τ) είναι ένα σημειωμένο μονοπάτι το οποίο δεν προκύπτει ως σύζευξη σημειωμένων μονοπατιών. Ισοδύναμα, ένα σύμπλεγμα είναι ένα σημειωμένο μονοπάτι (c, I) που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) Κάθε βήμα του c ανήκει σε κάποια σημειωμένη εμφάνιση του τ στο (c, I).

2) Δύο διαδοχικές σημειωμένες εμφανίσεις του τ στο (c, I) επικαλύπτονται.

Σημειώνεται, ότι ένα σύμπλεγμα μπορεί να περιέχει εμφανίσεις του τ που δεν είναι σημειωμένες.



Σχήμα 3.11: Τα συμπλέγματα του σημειωμένου μονοπατιού Dyck (α, I).

Για παράδειγμα, το σημειωμένο μονοπάτι Dyck του Σχ. 3.10 περιέχει δύο συμπλέγματα, το πρώτο από τα οποία περιέχει δύο σημειωμένες (και μία όχι σημειωμένη) εμφανίσεις του τ, ενώ το δεύτερο ταυτίζεται με το τ (βλ Σχ. 3.11).

Ένας τρίτος ισοδύναμος ορισμός του συμπλέγματος είναι ο ακόλουθος:

Για κάθε σημειωμένο μονοπάτι (c, I), ισχύει ότι

$$(c, I) \in C_\tau \Leftrightarrow \begin{cases} \min I = 1, \\ \max I = |c| - |\tau| + 1, \\ i, j \in I \Rightarrow |i - j| < |\tau|, \end{cases} \tag{3.54}$$

όπου με C_τ συμβολίζουμε το σύνολο των συμπλεγμάτων του τ. Το τετριμμένο σύμπλεγμα $(\tau, \{1\})$ του C_τ συμβολίζεται με τ, για απλότητα. Η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου C_τ είναι η

$$C_\tau(x, y, s) = \sum_{(c,I)\in C_\tau} x^{|c|_\mathrm{u}} y^{|I|} s^{h(c)}$$

όπου $h(c) = |c|_\mathrm{u} - |c|_\mathrm{d}$.

Επιπλέον, ορίζουμε την πράξη

$$* : \mathcal{V}_\tau \times C_\tau \to C_\tau \setminus \{\tau\},$$

όπου $\mathcal{V}_\tau$ είναι το σύνολο των συνόρων του τ, έτσι ώστε για $v \in \mathcal{V}_\tau$ και $(c', I') \in C_\tau$, έχουμε

$$v * (c', I') = (l(v)c', I),$$

όπου $I = \{1\} \cup (|l(v)| + I')$. Άμεσα προκύπτει, βάσει της σχέσης (3.54), ότι $v * (c', I') \in C_\tau \setminus \{\tau\}$.

Η πράξη αυτή οδηγεί σε μία διάσπαση των στοιχείων του $C_\tau \setminus \{\tau\}$. Συγκεκριμένα, αν $(c, I) \in C_\tau \setminus \{\tau\}$, τότε το κοινό τμήμα v της πρώτης και της δεύτερης σημειωμένης εμφάνισης του τ στο (c, I) είναι ένα σύνορο του τ. Θέτοντας $c = l(v)c'$ και $I' = -|l(v)| + (I \setminus \{1\})$, προκύπτει, βάσει της σχέσης (3.54), ότι $(c', I') \in C_\tau$, και ότι

$$(c, I) = v * (c', I').$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} C_\tau(x, y, s) &= \sum_{(c,I)\in C_\tau} x^{|c|_\mathrm{u}} y^{|I|} s^{h(c)} \\ &= x^{|\tau|_\mathrm{u}} y s^{|\tau|_\mathrm{u} - |\tau|_\mathrm{d}} + \sum_{v\in\mathcal{V}_\tau} \sum_{(c',I')\in C_\tau} x^{|l(v)|_\mathrm{u}} s^{|l(v)|_\mathrm{u} - |l(v)|_\mathrm{d}} x^{|c'|_\mathrm{u}} y^{|I'|+1} s^{h(c')} \\ &= x^{|\tau|_\mathrm{u}} y s^{|\tau|_\mathrm{u} - |\tau|_\mathrm{d}} + y C_\tau(x, y, s) \sum_{v\in\mathcal{V}_\tau} x^{|l(v)|_\mathrm{u}} s^{|l(v)|_\mathrm{u} - |l(v)|_\mathrm{d}} \end{aligned}$$

και τελικά

$$C_\tau(x, y, s) = \frac{x^{|\tau|_\mathrm{u}} y s^{|\tau|_\mathrm{u} - |\tau|_\mathrm{d}}}{1 - x^{|\tau|_\mathrm{u}} y s^{|\tau|_\mathrm{u} - |\tau|_\mathrm{d}} \sum_{v\in\mathcal{V}_\tau} x^{-|v|_\mathrm{u}} s^{|v|_\mathrm{d} - |v|_\mathrm{u}}}. \tag{3.55}$$

Στη συνέχεια, θα οριστεί μια διάσπαση των στοιχείων του $\mathcal{MD}$.

Γενικά, κάθε σημειωμένο μονοπάτι διασπάται σε μια σύζευξη συμπλεγμάτων και μεμονωμένων βημάτων που δεν ανήκουν σε κάποια σημειωμένη εμφάνιση του τ.

Μέχρι στιγμής, το πρότυπο τ θεωρείτο ως ένα οποιοδήποτε μονοπάτι. Στο εξής, θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το τ είναι πρόθεμα Dyck.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 (4ος τρόπος). Αφού το τ είναι πρόθεμα Dyck, εύκολα προκύπτει ότι για κάθε σύμπλεγμα $(c, I) \in \mathcal{C}_\tau$, το μονοπάτι c είναι επίσης ένα πρόθεμα Dyck. Επιπλέον, επειδή κάθε σημειωμένο μονοπάτι Dyck μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μονοπάτι με βήματα στο σύνολο $\{\mathrm{u}, \mathrm{d}\} \cup \mathcal{C}_\tau$, το οποίο ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στον άξονα x, χωρίς να πέφτει ποτέ κάτω από αυτόν, έπεται ότι κάθε $(\alpha, I) \in \mathcal{MD}$ διασπάται ως εξής:

$$(\alpha, I) = \begin{cases} \varepsilon, \quad \text{ή} \\ \mathrm{u}(\beta_1, I_1)\mathrm{d}(\beta_2, I_2), \quad \text{ή} \\ (c, J)(\beta_0, I_0)\mathrm{d}(\beta_1, I_1) \cdots \mathrm{d}(\beta_h, I_h), \end{cases}$$

όπου $(c, J) \in \mathcal{C}_\tau$, $(\beta_i, I_i) \in \mathcal{MD}$, για $0 \le i \le h$, και $h = h(c)$.

Κάθε σημειωμένη εμφάνιση του τ στο (α, I) περιέχεται εξ ολοκλήρου στο (c, J) ή σε κάποιο (β_i, I_i). Κατόπιν τούτων, η γεννήτρια συνάρτηση H μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα, ως εξής:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{(\alpha,I)\in\mathcal{MD}} x^{|\alpha|_\mathrm{u}} y^{|I|} \\ &= 1 + \sum_{(\beta_1,I_1),(\beta_2,I_2)\in\mathcal{MD}} x^{|\mathrm{u}\beta_1\mathrm{d}\beta_2|_\mathrm{u}} y^{|I_1|+|I_2|} + \sum_{\substack{(c,J)\in\mathcal{C}_\tau \\ (\beta_i,I_i)\in\mathcal{MD} \\ 0\le i\le h}} x^{|c\beta_0\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_h|_\mathrm{u}} y^{|J|+|I_0|+|I_1|+\cdots+|I_h|} \\ &= 1 + xH^2 + \sum_{(c,J)\in\mathcal{C}_\tau} x^{|c|_\mathrm{u}} y^{|J|} H^{h(c)+1}. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι

$$H - 1 - xH^2 = HC(x, y, H),$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.55), προκύπτει η σχέση

$$(H-1-xH^2)(1-x^{|\tau|_\mathrm{u}} y H^{|\tau|_\mathrm{u}-|\tau|_\mathrm{d}} \sum_{\nu\in\mathcal{V}_\tau} x^{-|\nu|_\mathrm{u}} H^{|\nu|_\mathrm{d}-|\nu|_\mathrm{u}}) = x^{|\tau|_\mathrm{u}} y H^{|\tau|_\mathrm{u}-|\tau|_\mathrm{d}+1}$$

η οποία δίνει

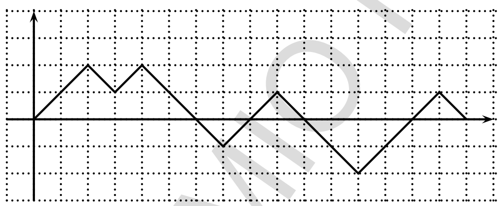
$$H - 1 - xH^2 = x^{|\tau|_\mathrm{u}} y H^{|\tau|_\mathrm{u}-|\tau|_\mathrm{d}}(H + (H - 1 - xH^2) \sum_{\nu\in\mathcal{V}_\tau} x^{-|\nu|_\mathrm{u}} H^{|\nu|_\mathrm{d}-|\nu|_\mathrm{u}}).$$

Τέλος, σύμφωνα με τη σχέση (3.53), αντικαθιστώντας το y με $y - 1$, λαμβάνουμε τη συναρτησιακή εξίσωση της $F(x, y)$, όπως αυτή διατυπώνεται στο Θεώρημα 3.1. $\square$

Κεφάλαιο 4

Πρότυπα σε μονοπάτια Grand-Dyck

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^*$ για το οποίο ισχύει $|\alpha|_{\mathrm{u}} = |\alpha|_{\mathrm{d}}$ (δηλαδή καταλήγει στο ίδιο ύψος από το οποίο ξεκινά), ονομάζεται *μονοπάτι Grand-Dyck* (βλ. Σχ. 4.1). Το ημιμήκος ενός μονοπατιού Grand-Dyck ορίζεται ως το πλήθος των ανόδων που περιέχει. Το σύνολο των μονοπατιών Grand-Dyck συμβολίζεται με $\mathcal{G}$.



Σχήμα 4.1: Το μονοπάτι Grand-Dyck uudududdduudddduuud.

Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n είναι ίσο με $\binom{2n}{n}$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα παρατηρώντας ότι κάθε τέτοιο μονοπάτι κατασκευάζεται με μοναδικό τρόπο επιλέγοντας n βήματα ως ανόδους από τα $2n$ βήματα που έχει συνολικά.

Για $\alpha \in \mathcal{G}$, ονομάζουμε *αρνητικό* (αντ. *θετικό*) κάθε βήμα του α που βρίσκεται κάτω (αντ. πάνω) από τον οριζόντιο άξονα. Το πλήθος των αρνητικών ανόδων (*flaws*) του α συμβολίζεται με $p(\alpha)$. Για παράδειγμα, αν α είναι το μονοπάτι του Σχήματος 4.1, τότε $p(\alpha) = 3$.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται απαρίθμηση του συνόλου των μονοπατιών Grand-Dyck ως προς τις παραμέτρους: "ημιμήκος", "πλήθος εμφανίσεων του προτύπου τ" και "πλήθος αρνητικών ανόδων", για κάθε πρότυπο τ μήκους 3.

Το σύνολο των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους, συμβολίζεται με $\mathcal{G}_{n,m}$. Προφανώς, $\mathcal{D}_n = \mathcal{G}_{n,0}$. Επιπλέον, τα στοιχεία του συνόλου $\overline{\mathcal{D}}_n = \mathcal{G}_{n,n}$ προφανώς απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα στα στοιχεία του $\mathcal{D}_n$ (μετατρέποντας κάθε άνοδο σε κάθοδο και αντίστροφα), για το λόγο αυτό ονομάζονται *κατοπτρικά μονοπάτια Dyck*.

Υπενθυμίζεται ότι με $\overline{\alpha}$ και α' συμβολίζονται τα συμμετρικά μονοπάτια ενός μονοπατιού α ως προς τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα.

4.1 Βασικές διασπάσεις μονοπατιών Grand-Dyck

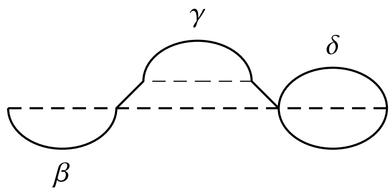
Στην ενότητα αυτή, θα δοθούν ορισμένες διασπάσεις των μονοπατιών Grand-Dyck, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.

4.1.1 Διάσπαση της πρώτης θετικής ανόδου

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{D}}$ (οπότε το α έχει τουλάχιστον μια θετική άνοδο) διασπάται στη μορφή

$$\alpha = \beta \mathrm{u} \gamma \mathrm{d} \delta, \quad \text{όπου } \beta \in \overline{\mathcal{D}}, \gamma \in \mathcal{D}, \delta \in \mathcal{G},$$

(βλ. Σχ. 4.2). Η διάσπαση αυτή θα καλείται στο εξής *διάσπαση της πρώτης θετικής ανόδου.*



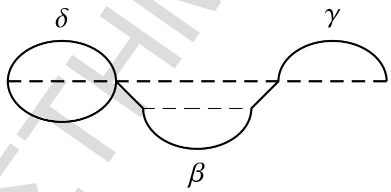
Σχήμα 4.2: Η διάσπαση της πρώτης θετικής ανόδου.

4.1.2 Διάσπαση της τελευταίας αρνητικής ανόδου

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$ (οπότε το α έχει τουλάχιστον μια αρνητική άνοδο) διασπάται στη μορφή

$$\alpha = \delta \mathrm{d} \beta \mathrm{u} \gamma, \quad \text{όπου } \beta \in \overline{\mathcal{D}}, \gamma \in \mathcal{D}, \delta \in \mathcal{G},$$

(βλ. Σχ. 4.3). Η διάσπαση αυτή θα καλείται *διάσπαση της τελευταίας αρνητικής ανόδου.*



Σχήμα 4.3: Η διάσπαση της τελευταίας αρνητικής ανόδου.

4.1.3 Διάσπαση της πρώτης επιστροφής

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \{\varepsilon\}$ διασπάται στη μορφή

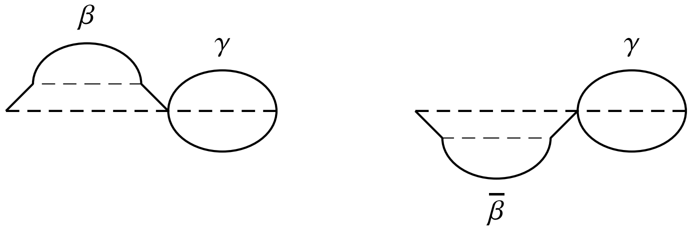
$$\alpha = \mathrm{u} \beta \mathrm{d} \gamma \qquad \text{ή} \qquad \alpha = \mathrm{d} \overline{\beta} \mathrm{u} \gamma, \qquad \beta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G},$$

(βλ. Σχ. 4.4). Η διάσπαση αυτή είναι παρόμοια με τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μονοπατιών Dyck (με τη διαφορά ότι εδώ η επιστροφή στον οριζόντιο άξονα μπορεί να γίνει και από αρνητικό ύψος). Για το λόγο αυτό, η διάσπαση αυτή θα καλείται επίσης *διάσπαση της πρώτης επιστροφής*.

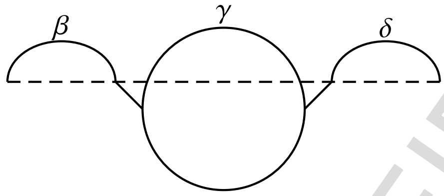
4.1.4 Διάσπαση του πρώτου και του τελευταίου αρνητικού βήματος

Κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$ διασπάται στη μορφή

$$\alpha = \beta \mathrm{d} \gamma \mathrm{u} \delta, \quad \beta, \delta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G},$$



Σχήμα 4.4: Η διάσπαση της πρώτης επιστροφής.



Σχήμα 4.5: Η διάσπαση του πρώτου και του τελευταίου αρνητικού βήματος.

(βλ. Σχ. 4.5).

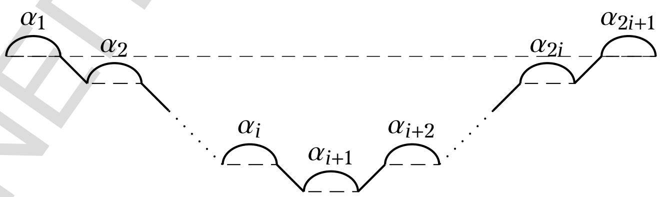
Τα βήματα d και u που παρεμβάλλονται μεταξύ των β, γ, δ ορίζονται μονοσήμαντα ως το πρώτο και το τελευταίο αντίστοιχα βήμα του α κάτω από τον οριζόντιο άξονα, οπότε η διάσπαση αυτή καλείται *διάσπαση του πρώτου και του τελευταίου αρνητικού βήματος*.

4.1.5 Διάσπαση του μέγιστου βάθους

Το $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$ διαμερίζεται ως προς το μέγιστο βάθος i στο οποίο φτάνει κάθε μονοπάτι του. Ένα μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$, με βάθος $i \geq 1$, διασπάται στη μορφή

$$\alpha = \alpha_1 \mathrm{d} \alpha_2 \cdots \mathrm{d} \alpha_{i+1} \mathrm{u} \alpha_{i+2} \cdots \mathrm{u} \alpha_{2i+1}, \quad \alpha_k \in \mathcal{D}, k \in [2i+1],$$

(βλ. Σχ. 4.6).



Σχήμα 4.6: Η διάσπαση μέγιστου βάθους i.

Η διάσπαση αυτή αποτελεί εκλέπτυνση της διάσπασης του πρώτου και του τελευταίου αρνητικού βήματος, με $a_1 = \beta$, $a_{2i+1} = \delta$ και $\gamma = \alpha_2 \mathrm{d} \cdots \alpha_i \mathrm{d} \alpha_{i+1} \mathrm{u} \alpha_{i+2} \cdots \mathrm{u} \alpha_{2i}$.

4.2 Γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Grand-Dyck

Η γεννήτρια συνάρτηση

$$G = G(x) = \sum_{\alpha \in G} x^{|\alpha|_u}$$

του συνόλου $\mathcal{G}$ μπορεί να προσδιοριστεί από οποιαδήποτε από τις παραπάνω διασπάσεις. Για παράδειγμα, από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G &= \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} = 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{D},\gamma\in\mathcal{G}} x^{|\mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma|_{\mathrm{u}}} + \sum_{\beta\in\mathcal{D},\gamma\in\mathcal{G}} x^{|\mathrm{d}\overline{\beta}\mathrm{u}\gamma|_{\mathrm{u}}} \\ &= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} + x\sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} \\ &= 1 + 2xCG, \end{aligned}$$

οπότε

$$G = \frac{1}{1-2xC} = \frac{1}{1-2x\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}} = \frac{1}{1-(1-\sqrt{1-4x})} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Κατόπιν τούτων, με τη βοήθεια της σχέσης $C = 1 + xC^2$, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες

$$G = \frac{1}{1-2xC} = \frac{C}{1-xC^2} = \frac{C}{2-C},$$

οι οποίες συνδέουν τις γεννήτριες συναρτήσεις C και G, και χρησιμοποιούνται επανειλημμένα στα επόμενα για την απλοποίηση σύνθετων παραστάσεων.

Οι συντελεστές των δυνάμεων της G υπολογίζονται άμεσα, εφαρμόζοντας το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα:

$$G^s = (1-4x)^{-\frac{s}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{s}{2}}{n} (-4)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{s}{2}+n-1}{n} 4^n x^n, \qquad s \in \mathbb{R}$$

και ειδικά για $s = 1$ είναι

$$G = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι συντελεστές των G^3 και G^5, οι οποίοι χρησιμοποιούνται συχνά σε υπολογισμούς σε επόμενα κεφάλαια.

$$\begin{aligned} [x^n]G^3 &= \binom{n+1/2}{n} 4^n = (2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n} = \frac{n+1}{2}\binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{4(2n+3)}\binom{2n+4}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8(2n+3)(2n+5)}\binom{2n+6}{n+3}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} [x^n]G^5 &= \binom{n+3/2}{n} 4^n = \frac{(2n+3)(2n+1)}{3}\binom{2n}{n} = \frac{(2n+3)(n+1)}{6}\binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{12}\binom{2n+4}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24(2n+5)}\binom{2n+6}{n+3}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} \binom{n+1/2}{n} 4^n &= 4^n \frac{(n+1/2)(n-1/2)\cdots(n+1/2-n+1)}{n!} = 2^n \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}{n!} \\ &= 2^n \frac{(2n+1)(2n)!}{n!\cdot 2\cdot 4\cdots 2n} = \frac{(2n+1)(2n)!}{n!n!} = (2n+1)\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\binom{n+3/2}{n}4^n &= 4^n\frac{(n+3/2)(n+1/2)\cdots(n+3/2-n+1)}{n!} = 2^n\frac{(2n+3)(2n+1)\cdots 5}{n!}\\ &= 2^n\frac{(2n+1)(2n+3)(2n)!}{n!\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdots 2n} = \frac{(2n+1)(2n)!}{3\cdot n!n!} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες ισότητες προκύπτουν άμεσα με εφαρμογή των ιδιοτήτων των διωνυμικών συντελεστών.

4.3 Μονοπάτια Grand-Dyck περιορισμένου βάθους

Έστω $\mathcal{G}_j$ το σύνολο των μονοπατιών Grand-Dyck που δεν έχουν βήματα σε βάθος μεγαλύτερο του j. Προφανώς, είναι $\mathcal{G} = \bigcup_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j$ και $\mathcal{G}_0 = \mathcal{D}$. Στην ενότητα αυτή, θα μελετηθεί η γεννήτρια συνάρτηση

$$G_j = G_j(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}$$

του συνόλου $\mathcal{G}_j$, η οποία, όπως θα δούμε, συνδέεται άμεσα με τα πολυώνυμα q_j που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 1.11 (βλ. σελ. 46). Επιπλέον, θα υπολογιστούν συντελεστές γεννητριών συναρτήσεων, που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για τις απαριθμήσεις και τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις που δίνονται σε επόμενα κεφάλαια.

Εφαρμόζοντας τη διάσπαση του πρώτου και του τελευταίου αρνητικού βήματος (βλ. Σχ. 4.5) για το μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G}_j \setminus \mathcal{D}$, έχουμε ότι

$$\alpha \in \mathcal{G}_j \setminus \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta \mathrm{d}\gamma\mathrm{u}\delta, \quad \beta,\delta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G}_{j-1}.$$

Έτσι, για τη γεννήτρια συνάρτηση $G_j = G_j(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}$, προκύπτει, για $j \geq 1$, ότι

$$\begin{aligned}G_j &= \sum_{\alpha\in\mathcal{G}_j} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} + \sum_{\alpha\in\mathcal{G}_j\setminus\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} = C + \sum_{\substack{\beta,\delta\in\mathcal{D}\\ \gamma\in\mathcal{G}_{j-1}}} x^{|\beta\mathrm{d}\gamma\mathrm{u}\delta|_{\mathrm{u}}}\\ &= C + x\sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}}\sum_{\delta\in\mathcal{D}} x^{|\delta|_{\mathrm{u}}}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_{j-1}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}}\\ &= C + xC^2G_{j-1},\end{aligned}$$

οπότε, τελικά έχουμε ότι

$$G_0 = C \quad \text{και} \quad G_j = C + xC^2G_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Για να λύσουμε την παραπάνω αναγωγική εξίσωση, έχουμε ότι

$$\begin{cases} G_j &= C + xC^2G_{j-1}\\ G_{j-1} &= C + xC^2G_{j-2}\\ &\vdots\\ G_1 &= C + xC^2G_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_j &= C + xC^2G_{j-1}\\ (xC^2)G_{j-1} &= (xC^2)C + (xC^2)^2G_{j-2}\\ &\vdots\\ (xC^2)^{j-1}G_1 &= (xC^2)^{j-1}C + (xC^2)^jG_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_j = C + (xC^2)C + (xC^2)^2C + \cdots + (xC^2)^jC = C\sum_{i=0}^{j}(xC^2)^i,$$

οπότε τελικά είναι

$$G_j = C\sum_{i=0}^{j}(xC^2)^i = \frac{1-(xC^2)^{j+1}}{1-xC^2}C = q_jC^{j+1}. \tag{4.3}$$

Παρατήρηση. Βάσει του τύπου (4.3), αποδεικνύονται συνδυαστικά οι σχέσεις (1.22) και (1.23).

Συγκεκριμένα, βάσει της διάσπασης του πρώτου και τελευταίου αρνητικού βήματος (βλ. Σχ. 4.5) για το μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G}_j \setminus \mathcal{D}$, έχουμε ότι

$$\alpha = \beta \mathrm{d} \gamma \mathrm{u} \delta, \quad \beta, \delta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G}_{j-1}.$$

Η διάσπαση αυτή (όπως και κάθε διάσπαση) εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ δύο συνόλων, των οποίων τα στοιχεία περιγράφονται αντίστοιχα από το πρώτο και δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας, άρα συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων. Η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου του πρώτου μέλους της ισότητας είναι η $G_j - C$, ενώ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου του δεύτερου μέλους είναι η xC^2G_{j-1}, οπότε έχουμε ότι

$$G_j - C = xC^2G_{j-1}.$$

Αντικαθιστώντας βάσει της (4.3), προκύπτει ότι

$$q_jC^{j+1} - C = xC^2q_{j-1}C^j,$$

και διαιρώντας με C, προκύπτει η (1.22).

Ομοίως, για τη σχέση (1.23), το μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G}_j \setminus \mathcal{G}_{j-1}$ διασπάται βάσει της διάσπασης μέγιστου βάθους (βλ. Σχ. 4.6) στη μορφή

$$\alpha = \alpha_1 \mathrm{d} \alpha_2 \cdots \mathrm{d} \alpha_{j+1} \mathrm{u} \alpha_{j+2} \cdots \mathrm{u} \alpha_{2j+1}, \quad \alpha_k \in \mathcal{D}, k \in [2j+1].$$

Η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου του πρώτου μέλους της ισότητας είναι η $G_j - G_{j-1}$, ενώ η γεννήτρια συνάρτηση του δεύτερου μέλους είναι η

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j+1} \in \mathcal{D}} x^{|\alpha_1 \mathrm{d} \alpha_2 \cdots \mathrm{d} \alpha_{j+1} \mathrm{u} \alpha_{j+2} \cdots \mathrm{u} \alpha_{2j+1}|_{\mathrm{u}}} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j+1} \in \mathcal{D}} x^{j+|\alpha_1|_{\mathrm{u}}+\cdots+|\alpha_{2j+1}|_{\mathrm{u}}} = x^j \prod_{k \in [2j+1]} \sum_{\alpha_k \in \mathcal{D}} x^{|\alpha_k|_{\mathrm{u}}} = x^jC^{2j+1},$$

οπότε έχουμε ότι

$$G_j - G_{j-1} = x^jC^{2j+1}.$$

Αντικαθιστώντας βάσει της (4.3), προκύπτει ότι

$$q_jC^{j+1} - q_{j-1}C^j = x^jC^{2j+1},$$

και διαιρώντας με C^j, προκύπτει η (1.23).

Πρόταση 4.1. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, χωρίς βήματα σε βάθος μεγαλύτερο του $j \geq 0$, είναι ίσο με*

$$[x^n]G_j = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+j+1}.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.3), προκύπτει ότι

$$[x^n]G_j = [x^n]\sum_{i=0}^{j} x^iC^{2i+1} = \sum_{i=0}^{j}[x^n]x^iC^{2i+1} = \sum_{i=0}^{j}[x^{n-i}]C^{2i+1}$$

και, δεδομένου ότι (βάσει της σχέσης (1.6)) $C^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s}{2n+s}\binom{2n+s}{n}x^n$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}[x^n]G_j &= \sum_{i=0}^{j}[x^{n-i}]\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i+1}{2n+2i+1}\binom{2n+2i+1}{n}x^n \\ &= \sum_{i=0}^{j} \frac{2i+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-i}.\end{aligned}$$

Το τελευταίο άθροισμα απλοποιείται περαιτέρω ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} \frac{2i+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-i} &= \sum_{i=0}^{j} \frac{n+i-(n-i)+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{j} \frac{n+i+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-i} - \sum_{i=0}^{j} \frac{n-i}{2n+1}\binom{2n+1}{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{2n}{n+i} - \sum_{i=0}^{j} \binom{2n}{n+i+1} \\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+j+1},
\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. □

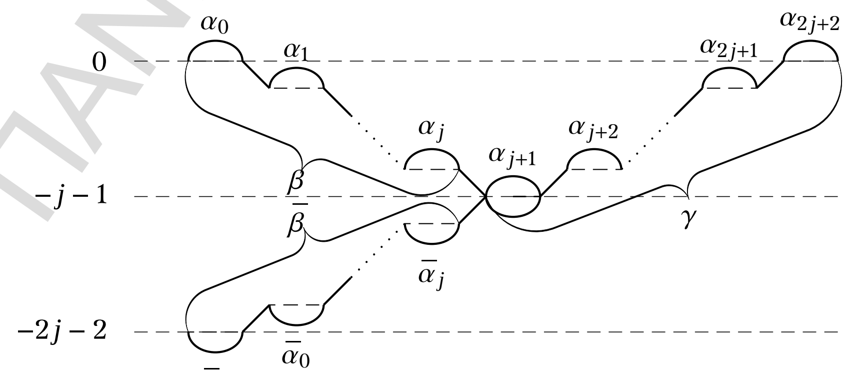
Παρατηρώντας ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω διαφοράς είναι το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Πόρισμα 4.2. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n που έχουν βήματα σε βάθος μεγαλύτερο του j είναι ίσο με $\binom{2n}{n+j+1}$.*

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί επίσης να αποδειχθεί συνδυαστικά ως εξής: Αν α είναι ένα τέτοιο μονοπάτι, τότε θα περιέχει ένα βήμα d το οποίο θα είναι το πρώτο βήμα του α που φτάνει σε βάθος $j+1$. Έστω λοιπόν ότι το α διασπάται με βάση αυτό το βήμα ως

$$\alpha = \beta \mathrm{d} \gamma.$$

(Τα βd και γ έχουν αντίστοιχα βάθος $j+1$ και ύψος $j+1$, αφού το α ξεκινά και καταλήγει στον οριζόντιο άξονα.) Θεωρώντας την απεικόνιση $\beta \mathrm{d} \gamma \mapsto \overline{\beta} \mathrm{u} \gamma$, δηλαδή, μετατρέποντας τα u σε d και αντίστροφα στο πρόθεμα βd, προκύπτει ένα μονοπάτι που ξεκινά από το σημείο $(0,0)$ και καταλήγει στο $(2n, 2j+2)$ (αφού τα $\overline{\beta}$u και γ έχουν το καθένα ύψος $j+1$) (βλ. Σχ. 4.7). Η απεικόνιση αυτή είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη, αφού το βήμα u που ακολουθεί το $\overline{\beta}$ εντοπίζεται μονοσήμαντα ως το πρώτο βήμα που φτάνει σε ύψος $j+1$. Επομένως ο ζητούμενος πληθάριθμος ισούται με το πλήθος των μονοπατιών από το $(0,0)$ στο $(2n, 2j+2)$. Τέλος, γνωρίζοντας ότι το πλήθος των μονοπατιών από το $(0,0)$ στο (x,y) ισούται με $\binom{x}{\frac{x+y}{2}}$, αρκεί να τεθεί $x = 2n$ και $y = 2j+2$ για να προκύψει το ζητούμενο.



Σχήμα 4.7: Η απεικόνιση $\beta \mathrm{d} \gamma \mapsto \overline{\beta} \mathrm{u} \gamma$.

Στο επόμενο αποτέλεσμα, υπολογίζονται οι συντελεστές ορισμένων γεννητριών συναρτήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα. Σημειώνεται ότι η σχέση (4.4) εμφανίζεται στη βιβλιογραφία με διάφορες αποδείξεις (βλ. για παράδειγμα [32], σχέση (5.72), σελ. 203), οι οποίες όμως είναι διαφορετικές από αυτές που δίνονται στη συνέχεια.

Πρόταση 4.3. *Για τις γεννήτριες συναρτήσεις GC^a και G_jC^a, όπου $a \in \mathbb{R}$, έχουμε αντίστοιχα ότι*

$$[x^n]GC^a = \binom{2n+a}{n}, \tag{4.4}$$

$$[x^n]G_jC^a = \binom{2n+a}{n} - \binom{2n+a}{n-j-1}. \tag{4.5}$$

Απόδειξη (1ος τρόπος). Για την απόδειξη της σχέσης (4.3), αρχικά παρατηρούμε ότι $G = (xC)'$. Πράγματι, είναι

$$C = 1 + xC^2 \Rightarrow xC = x + (xC)^2 \Rightarrow (xC)' = 1 + 2(xC)(xC)' \Rightarrow (xC)' = \frac{1}{1-2xC} = G.$$

Κατόπιν τούτων, για $a \neq -1$,

$$\begin{aligned}
[x^n]GC^a &= [x^n]C^a(xC)' = [x^n]\frac{x^{-a}}{a+1}\left((xC)^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1}[x^{n+a}]\left((xC)^{a+1}\right)' \\
&\overset{1}{=} \frac{n+a+1}{a+1}[x^{n+a+1}](xC)^{a+1} = \frac{n+a+1}{a+1}[x^n]C^{a+1} \\
&= \frac{n+a+1}{a+1}\,\frac{a+1}{n+a+1}\binom{2n+a+1-1}{n} = \binom{2n+a}{n}.
\end{aligned}$$

Αν $a = -1$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{G}{C} &= [x^n]\frac{1}{1-xC^2} = [x^n]\sum_{i=0}^{\infty} x^iC^{2i} = [x^n]\sum_{i=0}^{n} x^iC^{2i} = \sum_{i=0}^{n}[x^{n-i}]C^{2i} \\
&= [x^0]C^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1}[x^{n-i}]C^{2i} \\
&\overset{2}{=} 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{2n-1}{n-i} - \binom{2n-1}{n-i-1}\right) \\
&= 1 + \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{0} = \binom{2n-1}{n}.
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της σχέσης (4.5), δεδομένου ότι $G = \dfrac{C}{1-xC^2}$, έχουμε ότι

$$G_jC^a = q_jC^{a+j+1} = \frac{1-(xC^2)^{j+1}}{1-xC^2}C^{a+1} = (1-(xC^2)^{j+1})GC^a = GC^a - x^{j+1}GC^{a+2j+2},$$

οπότε, βάσει της σχέσης (4.4), είναι

$$\begin{aligned}
[x^n]G_jC^a &= [x^n]GC^a - [x^{n-j-1}]GC^{a+2j+2} \\
&= \binom{2n+a}{n} - \binom{2(n-j-1)+a+2j+2}{n-j-1} = \binom{2n+a}{n} - \binom{2n+a}{n-j-1}.
\end{aligned}$$

□

[1] Υπενθυμίζουμε ότι αν $F(x) = \sum_{k\geq 0} f_k x^k$, τότε $[x^n]F'(x) = [x^n]\sum_{k\geq 1} k f_k x^{k-1} = (n+1)f_{n+1} = (n+1)[x^{n+1}]F(x)$.

[2] Διότι $\binom{2n-1}{n-i} - \binom{2n-1}{n-i-1} = \binom{2n}{n-i}\left(\frac{2n-(n-i)}{2n} - \frac{n-i}{2n}\right) = \binom{2n}{n-i}\frac{2i}{2n} = [x^{n-i}]C^{2i}$.

Στη συνέχεια, δίνεται μια διαφορετική απόδειξη της Πρότασης 4.3, η οποία βασίζεται στον τύπο Ολοκλήρωσης του Cauchy.

Απόδειξη (2ος τρόπος). Σύμφωνα με τον τύπο Ολοκλήρωσης του Cauchy, αν μια (μιγαδική) συνάρτηση f είναι αναλυτική στο 0 (δηλαδή διαφορίσιμη σε μια περιοχή του 0), τότε ισχύει ότι

$$[x^n]f(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(x)}{x^{n+1}}dx.$$

Για τη συνάρτηση

$$f(x) = GC^a = \frac{C^{a+1}}{1-xC^2},$$

θέτοντας $u = u(x) = C - 1 = xC^2$, οπότε $x = \frac{u}{(1+u)^2}$, έχουμε ότι

$$f\left(\frac{u}{(1+u)^2}\right) = \frac{(1+u)^{a+1}}{1-u} \qquad \text{και} \qquad dx = d\left(\frac{u}{(1+u)^2}\right) = \frac{1-u}{(1+u)^3}du,$$

οπότε,

$$\begin{aligned}[x^n]f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(x)}{x^{n+1}}dx = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+u)^{a+1}}{1-u}\frac{(1+u)^{2n+2}}{u^{n+1}}\frac{1-u}{(1+u)^3}du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+u)^{2n+a}}{u^{n+1}}du = [u^n](1+u)^{2n+a} = \binom{2n+a}{n}.\end{aligned}$$

Ομοίως, για τη συνάρτηση

$$g(x) = G_jC^a = \frac{1-(xC^2)^{j+1}}{1-xC^2}C^{a+1},$$

με την ίδια αλλαγή μεταβλητής, έχουμε ότι

$$g\left(\frac{u}{(1+u)^2}\right) = \frac{1-u^{j+1}}{1-u}(1+u)^{a+1},$$

οπότε,

$$\begin{aligned}[x^n]g(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{g(x)}{x^{n+1}}dx = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1-u^{j+1}}{1-u}(1+u)^{a+1}\frac{(1+u)^{2n+2}}{u^{n+1}}\frac{1-u}{(1+u)^3}du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1-u^{j+1}}{u^{n+1}}(1+u)^{2n+a}du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+u)^{2n+a}}{u^{n+1}}du - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+u)^{2n+a}}{u^{n-j}}du = [u^n](1+u)^{2n+a} - [u^{n-j-1}](1+u)^{2n+a} \\ &= \binom{2n+a}{n} - \binom{2n+a}{n-j-1}.\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $q_jC^a = G_jC^{a-j-1}$, από τη σχέση (4.5) προκύπτει ότι

$$[x^n]q_jC^a = \binom{2n+a-j-1}{n} - \binom{2n+a-j-1}{n-j-1}. \tag{4.6}$$

Πόρισμα 4.4. *Το πολυώνυμο $q_j(x)$ είναι βαθμού $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:*

$$q_j(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{2n-j-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} (-1)^n \binom{j-n}{n} x^n, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.6) για $a = 0$, προκύπτει ότι

$$[x^n]q_j(x) = \binom{2n-j-1}{n} - \binom{2n-j-1}{n-j-1} = \begin{cases} \binom{2n-j-1}{n}, & 0 \le n \le j, \\ 0, & n > j. \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων, είναι $q_j(x) = \sum_{n=0}^{j} \binom{2n-j-1}{n} x^n$. Όμως, ο συντελεστής $\binom{2n-j-1}{n}$ είναι διάφορος του 0 αν και μόνο αν

$$2n - j - 1 \ge n \Leftrightarrow n > j \quad \text{ή} \quad 2n - j - 1 < 0 \Leftrightarrow n \le \frac{j}{2}.$$

Επομένως,

$$q_j(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{2n-j-1}{n} x^n,$$

και άρα ο βαθμός του $q_j(x)$ είναι[3] ίσος με $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$. Επιπλέον, βάσει της γνωστής ταυτότητας $\binom{r}{n} = (-1)^n \binom{n-r-1}{n}$, είναι $\binom{2n-j-1}{n} = (-1)^n \binom{j-n}{n}$, οπότε προκύπτει και η δεύτερη ισότητα του τύπου. □

Για τον συντελεστή $[x^n]C^k G^\lambda$ δεν υπάρχει εξίσου απλός τύπος με αυτόν της σχέσης (4.4). Μπορεί βέβαια να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνέλιξης των C^k και G^λ, οπότε είναι

$$[x^n]C^k G^\lambda = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+\lambda/2-1}{n-j} \frac{4^{n-j} k}{2j+k} \binom{2j+k}{j}.$$

Στην Πρόταση 4.6 που ακολουθεί, δίνεται ένας απλούστερος τύπος, όταν $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Για την απόδειξη της Πρότασης αυτής, θα εφαρμοστεί το ακόλουθο Λήμμα, για το οποίο δίνονται δύο αποδείξεις. Η πρώτη χρησιμοποιεί γεννήτριες συναρτήσεις, ενώ η δεύτερη είναι συνδυαστική.

Λήμμα 4.5. *Αν μια διπλή ακολουθία $(a_{k,\lambda})_{k,\lambda \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο*

$$a_{k,\lambda} = a_{k-1,\lambda} + a_{k,\lambda-1}, \qquad k, \lambda \in \mathbb{N}^*, \tag{4.7}$$

τότε ισχύει ότι

$$a_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k+\lambda-i-1}{\lambda-1} a_{i,0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{k+\lambda-j-1}{k-1} a_{0,j}.$$

Απόδειξη (1ος τρόπος). Έστω η γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x,y) = \sum_{i \ge 1} \sum_{j \ge 1} a_{i,j} x^i y^j$. Από τη

[3] Ο βαθμός του πολυωνύμου $q_j(x)$ μπορεί να προκύψει και άμεσα από τον αναδρομικό τύπο (1.19), με επαγωγή στο j.

σχέση (4.7) προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a_{i,j}x^i y^j &= x\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a_{i-1,j}x^{i-1}y^j + y\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a_{i,j-1}x^i y^{j-1}\\
F &= x\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 1} a_{i,j}x^i y^j + y\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 0} a_{i,j}x^i y^j\\
F &= (x+y)F + x\sum_{j\geq 1} a_{0,j}y^j + y\sum_{i\geq 1} a_{i,0}x^i\\
F &= \frac{1}{1-(x+y)}\left(y\sum_{i\geq 1} a_{i,0}x^i + x\sum_{j\geq 1} a_{0,j}y^j\right)\\
F &= \sum_{n\geq 0}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}\left(y\sum_{i\geq 1} a_{i,0}x^i + x\sum_{j\geq 1} a_{0,j}y^j\right),
\end{aligned}
$$

οπότε

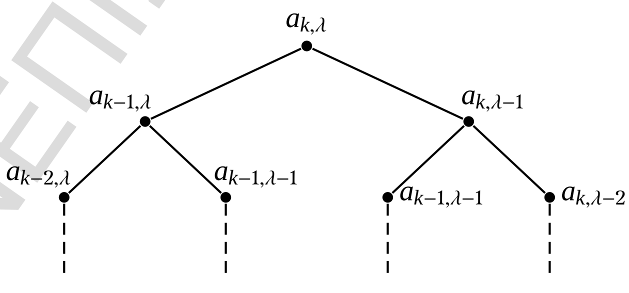
$$
F = \sum_{n\geq 0}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{i\geq 1}\binom{n}{\nu}a_{i,0}x^{\nu+i}y^{n-\nu+1} + \sum_{n\geq 0}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{j\geq 1}\binom{n}{\nu}a_{0,j}x^{\nu+1}y^{n-\nu+j}.
$$

Θέτοντας $k = \nu + i$ και $\lambda = n - \nu + 1$ στο πρώτο άθροισμα, και $k = \nu + 1$ και $\lambda = n - \nu + j$ στο δεύτερο άθροισμα, προκύπτει ότι

$$
F = \sum_{k\geq 1}\sum_{\lambda\geq 1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\binom{k+\lambda-i-1}{\lambda-1}a_{i,0}x^k y^\lambda + \sum_{k\geq 1}\sum_{\lambda\geq 1}\sum_{j=1}^{\lambda}\binom{k+\lambda-j-1}{k-1}a_{0,j}x^k y^\lambda
$$

και δεδομένου ότι $a_{k,\lambda} = [x^k y^\lambda]F$, προκύπτει το ζητούμενο. □

Απόδειξη (2ος τρόπος). Μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις στο δεύτερο μέλος του τύπου (4.7), ο $a_{k,\lambda}$ είναι τελικά ίσος με ένα άθροισμα από όρους της μορφής $a_{i,0}$ ή $a_{0,j}$, όπου $i \in [k]$ και $j \in [\lambda]$. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται σχηματικά από το ακόλουθο δυαδικό δένδρο



του οποίου τα φύλλα αντιστοιχούν στους όρους της μορφής $a_{i,0}$ ή $a_{0,j}$. Για κάθε $i \in [k]$, ένα μονοπάτι από τη ρίζα $a_{k,\lambda}$ του δένδρου έως κάποιο φύλλο της μορφής $a_{i,0}$ περιέχει λ δεξιά παιδιά και $k - i$ αριστερά παιδιά. Δεδομένου ότι το φύλλο αυτό είναι πάντα δεξί παιδί (διότι ο όρος $a_{i+1,0}$ δεν αντικαθιστάται περαιτέρω), έπεται ότι υπάρχουν $\binom{k+\lambda-i-1}{\lambda-1}$ τέτοια μονοπάτια στο δένδρο, άρα ο όρος $a_{i,0}$ εμφανίζεται $\binom{k+\lambda-i-1}{\lambda-1}$ φορές στο τελικό ανάπτυγμα του δεύτερου μέλους.

Ομοίως προκύπτει και για κάθε $j \in [\lambda]$ ότι ο όρος $a_{0,j}$ εμφανίζεται $\binom{k+\lambda-j-1}{k-1}$ φορές στο τελικό ανάπτυγμα του δεύτερου μέλους, οπότε αθροίζοντας για όλες τις δυνατές τιμές των i και j, προκύπτει ο ζητούμενος τύπος. □

Πρόταση 4.6. *Η γεννήτρια C^kG^λ με $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:*

$$C^kG^\lambda = \sum_{i=1}^{k} \binom{k+\lambda-i-1}{\lambda-1} (-1)^\lambda 2^{k-i} C^i + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{k+\lambda-j-1}{k-1} 2^k (-1)^{\lambda-j} G^j. \tag{4.8}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $G = \dfrac{C}{2-C}$, προκύπτει ότι $CG = 2G - C$. Από την τελευταία σχέση, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $\dfrac{C^{k-1}G^{\lambda-1}}{2^k(-1)^\lambda}$, προκύπτει ότι

$$\frac{C^kG^\lambda}{2^k(-1)^\lambda} = \frac{C^{k-1}G^\lambda}{2^{k-1}(-1)^\lambda} + \frac{C^kG^{\lambda-1}}{2^k(-1)^{\lambda-1}}.$$

Θέτοντας $a_{n,k} = \dfrac{C^kG^\lambda}{2^k(-1)^\lambda}$, η παραπάνω σχέση μετατρέπεται στην (4.7), οπότε βάσει του Λήμματος 4.5, προκύπτει το ζητούμενο. □

Πόρισμα 4.7. *Οι γεννήτριες συναρτήσεις C^kG και CG^λ, με $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:*

$$C^kG = 2^kG - \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} C^j, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{4.9}$$

$$CG^\lambda = 2\sum_{j=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-j} G^j + (-1)^\lambda C, \qquad \lambda \in \mathbb{N}^*. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν με άμεση εφαρμογή της σχέσης (4.8), για $\lambda = 1$ και $k = 1$ αντίστοιχα. □

Πόρισμα 4.8. *Για τους συντελεστές των γεννητριών συναρτήσεων C^kG^2 και C^kG^3, με $k \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν οι εξής τύποι:*

$$[x^n]C^kG^2 = 2^k4^n - \sum_{j=1}^{k} \binom{2n+j}{n} 2^{k-j}, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{4.11}$$

$$[x^n]C^kG^3 = (2n+k+1)\binom{2n+k}{n} - k[x^n]C^kG^2, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{4.12}$$

Απόδειξη. Ο τύπος (4.11) προκύπτει απευθείας από τη σχέση (4.9), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με G και λαμβάνοντας υπόψη ότι $[x^n]G^2 = 4^n$, καθώς και ότι $[x^n]C^jG = \binom{2n+j}{n}$.

Για τον τύπο (4.12), θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις $C' = C^2G$ και $G' = 2G^3$, οι οποίες επαληθεύονται εύκολα. Βάσει των προηγούμενων σχέσεων και του τύπου παραγώγισης κατά παράγοντες, έχουμε ότι

$$2C^kG^3 = C^kG' = (C^kG)' - (C^k)'G = (C^kG)' - kC^{k+1}G^2.$$

Επομένως, και βάσει του τύπου (4.11), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
[x^n]C^kG^3 &= \frac{1}{2}[x^n](C^kG)' - \frac{k}{2}[x^n]C^{k+1}G^2 = \frac{n+1}{2}[x^{n+1}]C^kG - k\left(2^k4^n - \sum_{j=1}^{k+1}\binom{2n+j}{n}2^{k-j}\right) \\
&= \frac{2n+k+2}{2}\binom{2n+k+1}{n} - k\left([x^n]C^kG^2 - \frac{1}{2}\binom{2n+k+1}{n}\right) \\
&= (n+k+1)\binom{2n+k+1}{n} - k[x^n]C^kG^2,
\end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο, αφού είναι

$$(n+k+1)\binom{2n+k+1}{n} = (n+k+1)\binom{2n+k+1}{n+k+1} = (2n+k+1)\binom{2n+k}{n+k} = (2n+k+1)\binom{2n+k}{n}.$$

□

4.4 Το Θεώρημα Chung-Feller

Το Θεώρημα 4.9 παρουσιάστηκε σε μια εργασία των Chung, Feller [11], με μια ισοδύναμη μορφή, σε ένα πρόβλημα Πιθανοτήτων, γι΄ αυτό και φέρει τα ονόματά τους. Στην πραγματικότητα, το αποτέλεσμα αυτό είχε διατυπωθεί αρκετά νωρίτερα από τον MacMahon [38]. Η αρχική απόδειξη είναι πολύπλοκη και χρησιμοποιεί εργαλεία της Μαθηματικής Ανάλυσης. Αργότερα, παρουσιάστηκαν ποικίλες αποδείξεις, βασισμένες σε συνδυαστικές μεθόδους (π.χ. [14,40,52,73,74]). Μια άλλη αναλυτική απόδειξη μπορεί να δοθεί με τη χρήση γεννητριών συναρτήσεων [22]. Πολλές ενδιαφέρουσες γενικεύσεις και εκλεπτύνσεις του θεωρήματος αυτού έχουν παρουσιαστεί στα [21,72].

Χάριν πληρότητας, θα δοθούν δύο αποδείξεις του θεωρήματος αυτού, παρόμοιες με κάποιες ήδη γνωστές από τη βιβλιογραφία. Η πρώτη είναι συνδυαστική και βασίζεται στην κατασκευή αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης, ενώ η δεύτερη είναι αναλυτική και χρησιμοποιεί γεννήτριες συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.9 (Chung-Feller). *Το πλήθος των μονοπατιών του συνόλου $\mathcal{G}_{n,m}$, δηλαδή των μονοπατιών από το $(0,0)$ στο $(2n,0)$ με m αρνητικές ανόδους, είναι ανεξάρτητο του m και ίσο με*

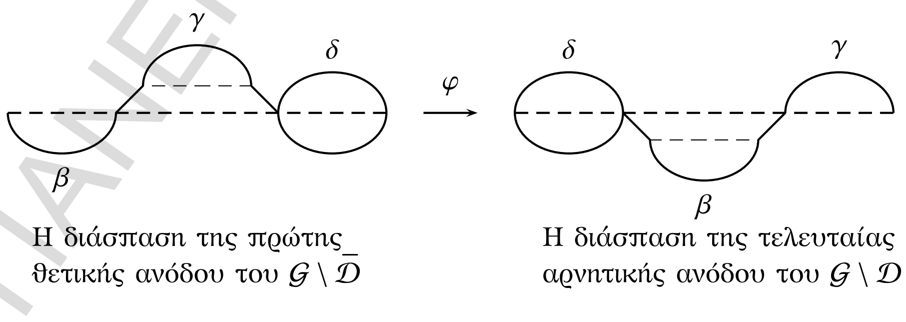
$$|\mathcal{G}_{n,m}| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

για κάθε $0 \le m \le n$.

Απόδειξη (1ος τρόπος). Έστω η απεικόνιση $\varphi : \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{D}} \to \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$, με

$$\varphi(\beta \mathrm{u} \gamma \mathrm{d} \delta) = \delta \mathrm{d} \beta \mathrm{u} \gamma, \qquad \beta \in \overline{\mathcal{D}}, \gamma \in \mathcal{D}, \delta \in \mathcal{G},$$

(βλ. Σχ. 4.8).



Σχήμα 4.8: Η απεικόνιση φ

Επειδή, το πρότυπο και η εικόνα της απεικόνισης είναι εκφρασμένα βάσει των διασπάσεων της πρώτης θετικής ανόδου και της τελευταίας αρνητικής καθόδου αντίστοιχα, έπεται ότι η απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη και μάλιστα είναι αμφιμονοσήμαντη. Επιπλέον, για κάθε $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{D}}$, είναι

$$|\varphi(\alpha)|_{\mathrm{u}} = |\alpha|_{\mathrm{u}} \quad \text{και} \quad p(\varphi(\alpha)) = p(\alpha) + 1,$$

δηλαδή η φ διατηρεί το ημιμήκος κάθε μονοπατιού και αυξάνει κατά 1 το πλήθος των αρνητικών του ανόδων. Επομένως, ο περιορισμός της φ στο $\mathcal{G}_{n,m}$, όπου $0 \leq m < n$, είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\mathcal{G}_{n,m}$ στο $\mathcal{G}_{n,m+1}$.

Κατόπιν τούτων, έχουμε ότι $|\mathcal{G}_{n,m}| = |\mathcal{G}_{n,m+1}|$, για κάθε $0 \leq m < n$. Όμως, ως γνωστό, είναι

$$\sum_{m=0}^{n} |\mathcal{G}_{n,m}| = \binom{2n}{n},$$

οπότε αφού οι κλάσεις $\mathcal{G}_{n,m}$, $0 \leq m \leq n$, είναι $n+1$ το πλήθος και επιπλέον είναι ισοπληθικές, έπεται ότι

$$|\mathcal{G}_{n,m}| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

για κάθε m, με $0 \leq m \leq n$. □

Απόδειξη (2ος τρόπος). Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F = F(x,z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} z^{p(\alpha)}$$

του συνόλου $\mathcal{G}$, ως προς τις παραμέτρους "ημιμήκος" και p, όπου

$$p(\alpha) = \text{ πλήθος αρνητικών ανόδων του } \alpha.$$

Από τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής του $\alpha \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} z^{p(\alpha)} = 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G}} x^{|\mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma|_{\mathrm{u}}} z^{p(\mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma)} + \sum_{\beta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G}} x^{|\mathrm{d}\bar{\beta}\mathrm{u}\gamma|_{\mathrm{u}}} z^{p(\mathrm{d}\bar{\beta}\mathrm{u}\gamma)} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}}} z^{p(\gamma)} + xz \sum_{\beta \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{G}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}} + |\gamma|_{\mathrm{u}}} z^{|\beta|_{\mathrm{u}}} z^{p(\gamma)} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} z^{p(\gamma)} + xz \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} z^{|\beta|_{\mathrm{u}}} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} z^{p(\gamma)} \\
&= 1 + xC(x)F + xzC(xz)F.
\end{aligned}$$

Επομένως, είναι

$$F = \frac{1}{1 - xC(x) - xzC(xz)}.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
1 - xC(x) - xzC(xz) &= 1 - x\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} - xz\frac{1 - \sqrt{1-4xz}}{2xz} \\
&= 1 - \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1-4xz}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{1-4x} + \sqrt{1-4xz}}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
F &= \frac{2}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1-4xz}} = \frac{2(\sqrt{1-4x}-\sqrt{1-4xz})}{(1-4x)-(1-4xz)} = \frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1-4xz}}{2xz-2x} \\
&= \frac{(1-\sqrt{1-4xz})-(1-\sqrt{1-4x})}{2x(z-1)} = \frac{1}{z-1}(zC(xz)-C(x)) \\
&= \frac{1}{z-1}(z\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} C_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k C_n x^n,
\end{aligned}$$

οπότε τελικά είναι $[x^n z^k]F = C_n$, για κάθε k, με $0 \le k \le n$. □

Παρατήρηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πλήθος των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n προκύπτει με άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 4.9, για $m = 0$, δηλαδή $|\mathcal{D}_n| = |\mathcal{G}_{n,0}| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

4.5 Απαριθμήσεις για πρότυπα μήκους 3

Για την απαρίθμηση των μονοπατιών Grand-Dyck, ως προς το πλήθος εμφανίσεων ενός προτύπου τ, θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F_\tau = F_\tau(x,y,z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} z^{p(\alpha)},$$

όπου

$$p(\alpha) = \text{ πλήθος αρνητικών ανόδων του } \alpha.$$

Η εισαγωγή της παραμέτρου p στην απαρίθμηση, γίνεται προκειμένου να εξεταστούν εκλεπτύνσεις του Θεωρήματος Chung-Feller. Συγκεκριμένα, αν ο συντελεστής $[x^n y^k z^m]F_\tau(x,y,z)$ προκύπτει ανεξάρτητος της τιμής του m, τότε λέμε ότι το πρότυπο τ διατηρεί την ιδιότητα Chung-Feller, αφού τότε το σύνολο των μονοπατιών ημιμήκους n με k εμφανίσεις του τ διαμερίζεται σε $n+1$ ισοπληθικές κλάσεις, βάσει του πλήθους των αρνητικών ανόδων.

Υπενθυμίζουμε ότι, για το πρότυπο τ, ορίζονται το συμμετρικό του ως προς τον οριζόντιο άξονα, το οποίο καλείται *κατοπτρικό* του τ και συμβολίζεται με $\overline{\tau}$, καθώς επίσης και το συμμετρικό του ως προς τον κατακόρυφο άξονα, το οποίο καλείται *αντίστροφο* του τ και συμβολίζεται με τ'.

Λήμμα 4.10. *Για κάθε πρότυπο $\tau \in \{\mathrm{u},\mathrm{d}\}^*$, ισχύει ότι*

$$[x^n y^k z^m]F_\tau = [x^n y^k z^{n-m}]F_{\overline{\tau}} = [x^n y^k z^m]F_{\tau'}, \quad 0 \le m \le n.$$

Απόδειξη. Θεωρώντας τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ και $\alpha \mapsto \alpha'$ του $\mathcal{G}$, έχουμε ότι

$$|\alpha|_{\mathrm{u}} = |\overline{\alpha}|_{\mathrm{u}} = |\alpha'|_{\mathrm{u}}, \qquad |\alpha|_\tau = |\overline{\alpha}|_{\overline{\tau}} = |\alpha'|_{\tau'}, \qquad p(\alpha) = |\overline{\alpha}|_{\mathrm{u}} - p(\overline{\alpha}) = p(\alpha').$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
F_\tau(x,y,z) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} z^{p(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\overline{\alpha}|_{\mathrm{u}}} y^{|\overline{\alpha}|_\tau} z^{p(\overline{\alpha})} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\overline{\tau}}} z^{|\alpha|_{\mathrm{u}}-p(\alpha)} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} (xz)^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\overline{\tau}}} z^{-p(\alpha)} = F_{\overline{\tau}}(xz, y, z^{-1}),
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}[x^n y^k z^m]F_\tau(x,y,z) &= [x^n y^k z^m]F_{\bar{\tau}}(xz,y,z^{-1}) = [(xz)^n y^k (z^{-1})^{n-m}]F_{\bar{\tau}}(xz,y,z^{-1}) \\ &= [x^n y^k z^{n-m}]F_{\bar{\tau}}(x,y,z).\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$F_\tau(x,y,z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} z^{p(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha'|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha'|_\tau} z^{p(\alpha')} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\tau'}} z^{p(\alpha)} = F_{\tau'}(x,y,z),$$

οπότε $[x^n y^k z^m]F_\tau(x,y,z) = [x^n y^k z^m]F_{\tau'}(x,y,z)$. □

Η εύρεση της γεννήτριας συνάρτηση $F_\tau(x,y,z)$, για οποιοδήποτε πρότυπο τ (ή τουλάχιστον για μεγάλες κλάσεις προτύπων), όπως έγινε για τις αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις των μονοπατιών Dyck στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι πολύ δύσκολη και, από όσο γνωρίζουμε, δεν έχει πραγματοποιηθεί. Το μόνο γνωστό αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή, οφείλεται στους Jun Ma και Yeong-Nah Yeh, οι οποίοι, σε μια πρόσφατη εργασία τους ([39]), υπολογίζουν τη γεννήτρια συνάρτηση $F_\tau(x,y,z)$ για κάθε πρότυπο μήκους 2.

Στα επόμενα, θα υπολογιστεί η $F_\tau(x,y,z)$ για κάθε πρότυπο μήκους 3. Προφανώς, σύμφωνα με το Λήμμα 4.10, για την απαρίθμηση των οκτώ προτύπων μήκους 3, αρκεί να περιοριστούμε στα ακόλουθα τρία: uuu, udu, duu.

4.5.1 Το πρότυπο $\tau = \mathrm{u}^\mu$

Στην εργασία [39], αποδεικνύεται ότι το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου $\tau = \mathrm{u}^2$, έχει την ιδιότητα Chung-Feller ως προς τη μεταβλητή m. Πιο γενικά, θα δείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.11. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου u^μ, $\mu \geq 2$, είναι ανεξάρτητο του m.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{G}_{n,k,m}$ το σύνολο των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου u^μ. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : \mathcal{G} \setminus \bar{\mathcal{D}} \to \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$ της απόδειξης του Θεωρήματος 4.9.

Η φ είναι αμφιμονοσήμαντη και επιπλέον διατηρεί το ημιμήκος καθώς και το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = \mathrm{u}^\mu$, ενώ αυξάνει κατά 1 το πλήθος των αρνητικών ανόδων (Σχ. 4.8). Κατόπιν τούτων, ισχύει ότι $\varphi(\mathcal{G}_{n,k,m}) = \mathcal{G}_{n,k,m+1}$, για κάθε $0 \leq m < n$, άρα $|\mathcal{G}_{n,k,m}| = |\mathcal{G}_{n,k,m+1}|$, για κάθε $0 \leq m < n$. □

Παρατήρηση. Βάσει της προηγούμενης πρότασης, ο πληθάριθμος $|\mathcal{G}_{n,k,m}|$ είναι ανεξάρτητος του m, άρα θα ισούται με τον πληθάριθμο του συνόλου $\mathcal{G}_{n,k,0}$ των μονοπατιών Dyck με ημιμήκος n και k εμφανίσεις του προτύπου $\tau = \mathrm{u}^\mu$, δηλαδή

$$|\mathcal{G}_{n,k,m}| = |\mathcal{G}_{n,k,0}|, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Έτσι, για $\mu = 3$, το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου u^3, ισούται με το πλήθος των μονοπατιών Dyck με ημιμήκος n και k εμφανίσεις του προτύπου $\tau = \mathrm{u}^3$. Το πλήθος αυτό όμως είναι γνωστό (βλ. ακολουθία $A092107$, [64]) και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο [60]:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+j}{n}\binom{n+1}{k-j}\sum_{i=j}^{\lfloor (n+j)/2\rfloor}\binom{n+j+1-k}{i+1}\binom{n-i}{i-j}.$$

4.5.2 Το πρότυπο $\tau = \mathrm{udu}$

Έστω
$$F = F(x,y,z) = \sum_{a\in\mathcal{G}} x^{|a|_{\mathrm{u}}} y^{|a|_{\mathrm{udu}}} z^{p(a)} = \sum_{m\geq 0} f_m(x,y) z^m,$$
όπου $f_m(x,y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των μονοπατιών Grand-Dyck με m αρνητικές ανόδους, ως προς το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = \mathrm{udu}$ και το ημιμήκος.

Η παράμετρος "πλήθος εμφανίσεων του udu" έχει μελετηθεί στα μονοπάτια Dyck, ανεξάρτητα, από τον Sun [69] και τους Merlini, Sprungoli and Verri [51], όπου αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση f_0 ικανοποιεί την εξίσωση
$$x f_0^2(x,y) = (1 - x(y-1))(f_0(x,y) - 1) \tag{4.13}$$
και έχει συντελεστές
$$[x^n y^k] f_0 = \begin{cases} 1, & k = n = 0 \\ \binom{n-1}{k} M_{n-k-1}, & k \in [0, n-1], \end{cases} \tag{4.14}$$
όπου M_n είναι ο n-οστός αριθμός Motzkin (A001006, [64]).

Πρόταση 4.12. *Η γεννήτρια συνάρτηση $f_m(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Grand-Dyck με m αρνητικές ανόδους, ως προς το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = \mathrm{udu}$ και το ημιμήκος, ικανοποιεί τη σχέση:*
$$f_m(x,y) = (1 - x(y-1)) \sum_{n\geq m} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} M_{n-k-1} x^n y^k, \qquad m \geq 1.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δειχθεί ότι
$$F = \frac{(1 - x(y-1)) f_0(xz,y)}{1 - x(y-1) - x f_0(xz,y) f_0(x,y)}. \tag{4.15}$$

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \overline{D}$, με $a = \beta \mathrm{u} \gamma \mathrm{d} \delta$, $\beta \in \overline{\mathcal{D}}$, $\gamma \in \mathcal{D}$, $\delta \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι
$$|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + |\delta|_\tau + [\gamma = \varepsilon][\delta \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}}],$$
όπου $\mathcal{A}_{\mathrm{u}} = \{a \in \mathcal{G} : a \text{ αρχίζει με u}\}$.

Από την προηγούμενη ισότητα, βάσει της διάσπασης της πρώτης θετικής ανόδου για το σύνολο $\mathcal{G} \setminus \overline{D}$, έπεται ότι
$$\begin{aligned} F &= \sum_{\beta\in\overline{\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau} z^{p(\beta)} + x \sum_{\beta\in\overline{\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau} z^{p(\beta)} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{D} \\ \delta\in\mathcal{G}}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}} + |\delta|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau + |\delta|_\tau + [\gamma=\varepsilon][\delta\in\mathcal{A}]} z^{p(\delta)} \\ &= \sum_{\beta\in\mathcal{D}} (xz)^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_{\bar\tau}} + x \sum_{\beta\in\mathcal{D}} (xz)^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_{\bar\tau}} \left(\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{D}\setminus\{\varepsilon\} \\ \delta\in\mathcal{G}}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}} + |\delta|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau + |\delta|_\tau} z^{p(\delta)} + \sum_{\delta\in\mathcal{G}} x^{|\delta|_{\mathrm{u}}} y^{|\delta|_\tau + [\delta\in\mathcal{A}]} z^{p(\delta)} \right) \\ &= f_0(xz,y) \Big(1 + x\,(f_0(x,y) - 1)\, F + x\big(F + (y-1)A\big) \Big), \end{aligned}$$
όπου $A_{\mathrm{u}} = A_{\mathrm{u}}(x,y,z)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}_{\mathrm{u}}$.

Επομένως,
$$F = f_0(xz,y)(1 + x f_0(x,y) F + x(y-1) A_{\mathrm{u}}). \tag{4.16}$$

Κάθε μονοπάτι $a \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}}$ διασπάται στη μορφή $a = u\gamma d\delta$, όπου $\gamma \in \mathcal{D}$, $\delta \in \mathcal{G}$, έτσι ώστε $|a|_\tau = |\gamma|_\tau + |\delta|_\tau + [\gamma = \varepsilon][\delta \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}}]$, οπότε

$$A_{\mathrm{u}} = x((f_0(x,y)-1)F + F + (y-1)A_{\mathrm{u}}).$$

Κατόπιν τούτων,

$$A_{\mathrm{u}} = \frac{xf_0(x,y)F}{1-x(y-1)}.$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη έκφραση της A_{u} στη σχέση (4.16), προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.15).

Από τη σχέση (4.15) και βάσει της σχέσης (4.13), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&F - f_0(x,y)\\
&= \frac{(1-x(y-1))(f_0(xz,y) - f_0(x,y) + f_0(xz,y)(f_0(x,y)-1))}{1-x(y-1)-xf_0(xz,y)f_0(x,y)}\\
&= \frac{z(1-x(y-1))f_0(x,y)(f_0(xz,y)-1)(f_0(x,y)-f_0(zx,y))}{z(1-x(y-1))(f_0(x,y)-f_0(xz,y))-z(1-x(y-1))(f_0(x,y)-1)f_0(xz,y)+(1-xz(y-1))(f_0(xz,y)-1)f_0(x,y)}\\
&= \frac{z(1-x(y-1))f_0(x,y)(f_0(xz,y)-1)(f_0(x,y)-f_0(xz,y))}{(1-z)f_0(x,y)(f_0(xz,y)-1)}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$F = f_0(x,y) + (1-x(y-1))(f_0(x,y) - f_0(xz,y))\frac{z}{1-z}. \tag{4.17}$$

Από τη σχέση (4.14), έχουμε ότι

$$[z^m](f_0(x,y) - f_0(xz,y)) = \begin{cases} f_0(x,y) - 1, & m = 0\\ -\sum\limits_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}M_{m-k-1}x^m y^k, & m \geq 1. \end{cases}$$

Επομένως, από τη σχέση (4.17), προκύπτει ότι, για $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
f_m(x,y) &= (1-x(y-1))[z^{m-1}]\frac{f_0(x,y)-f_0(xz,y)}{1-z}\\
&= (1-x(y-1))(f_0(x,y) - 1 - \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}M_{n-k-1}x^n y^k)\\
&= (1-x(y-1))\sum_{n\geq m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}M_{n-k-1}x^n y^k.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.13. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck, ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου* udu *ισούται με*

$$[x^n y^k]f_m = \begin{cases} \binom{n-1}{k}M_{n-k-1}, & m \in \{0,n\},\\ \binom{n-2}{k}(M_{n-k-1}+M_{n-k-2}), & m \in [1,n-1]. \end{cases}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.12, για $m \in [1, n-1]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[x^n y^k]f_m &= \binom{n-1}{k}M_{n-k-1} - \binom{n-2}{k-1}M_{n-k-1} + \binom{n-2}{k}M_{n-k-2}\\
&= \binom{n-2}{k}M_{n-k-1} + \binom{n-2}{k}M_{n-k-2}\\
&= \binom{n-2}{k}(M_{n-k-1}+M_{n-k-2}).
\end{aligned}$$

Οι περιπτώσεις όπου $m \in \{0, n\}$ είναι τετριμμένες και παραλείπονται. □

Πόρισμα 4.14. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck, ημιμήκους n, με k εμφανίσεις του προτύπου* udu *ισούται με*

$$\binom{n-1}{k}\left((n-k+1)M_{n-k-1}+(n-k-1)M_{n-k-2}\right).$$

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διπλή ακολουθία του τελευταίου πορίσματος μπορούν να βρεθούν στην [64] (ακολουθία *A*097692).

Παρατήρηση. Το Πόρισμα 4.13 είναι ένα θεώρημα τύπου Chung-Feller, αφού υποδεικνύει ότι το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου udu είναι ανεξάρτητο του m, για κάθε $m \in [1, n-1]$.

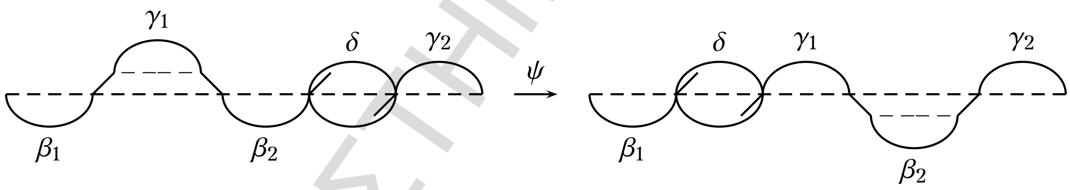
Κλείνουμε την ενότητα αυτή, δίνοντας μια συνδυαστική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να οριστεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\mathcal{G}_{n,m}$ στο $\mathcal{G}_{n,m+1}$, η οποία διατηρεί το πλήθος των εμφανίσεων του προτύπου udu, για κάθε $m \in [1, n-2]$.

Παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{D}}$ (αντ. $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$) διασπάται στη μορφή $\alpha = \beta_1 \mathrm{u} \gamma_1 \mathrm{d} \beta_2 \delta \gamma_2$ (αντ. $\alpha = \beta_1 \delta \gamma_1 \mathrm{d} \beta_2 \mathrm{u} \gamma_2$), όπου $\beta_1, \beta_2 \in \overline{\mathcal{D}}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}$ και $\delta \in \mathcal{G}$, τέτοιο ώστε $\delta = \varepsilon$ ή δ αρχίζει και τελειώνει με u.

Η απεικόνιση $\psi : \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{D}} \to \mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$, με

$$\psi(\beta_1 \mathrm{u} \gamma_1 \mathrm{d} \beta_2 \delta \gamma_2) = \beta_1 \delta \gamma_1 \mathrm{d} \beta_2 \mathrm{u} \gamma_2$$

(βλ. Σχ. 4.9) είναι αμφιμονοσήμαντη, διατηρεί το ημιμήκος και αυξάνει κατά 1 το πλήθος των αρνητικών ανόδων.



Σχήμα 4.9: Η απεικόνιση ψ.

Επιπλέον, είναι $|\psi(\alpha)|_{\mathrm{udu}} = |\alpha|_{\mathrm{udu}}$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{D}}$ με $1 \le p(\alpha) \le |a|_u - 2$. Πράγματι, κάθε εμφάνιση του udu στο α (αντ. στο $\psi(\alpha)$), που δεν περιέχεται σε κάποιο από τα $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, υπάρχει αν και μόνο αν $\gamma_1 = \beta_2 = \varepsilon$ και $\delta\gamma_2 \ne \varepsilon$ (αντ. $\gamma_1 = \beta_2 = \varepsilon$ και $\beta_1\delta \ne \varepsilon$). Έτσι, αν $\delta \ne \varepsilon$, τότε η ζητούμενη ισότητα προφανώς ισχύει. Από την άλλη, αν $\delta = \varepsilon$, δεδομένου ότι $|\alpha|_{\mathrm{u}} - p(\alpha) \ge 2$ (αντ. $p(\alpha) \ge 1$), έπεται ότι, αν $\gamma_1 = \varepsilon$ (αντ. $\beta_2 = \varepsilon$), τότε $\gamma_2 \ne \varepsilon$ (αντ. $\beta_1 \ne \varepsilon$). Επομένως, η ζητούμενη ισότητα ισχύει και στην περίπτωση αυτή. Έτσι, ο περιορισμός της ψ στο σύνολο $\mathcal{G}_{n,m}$ δίνει τη ζητούμενη αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

4.5.3 Το πρότυπο $\tau = \mathrm{duu}$

Έστω

$$F = F(x,y,z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\mathrm{duu}}} z^{p(\alpha)} = \sum_{m \ge 0} f_m(x,y) z^m,$$

όπου $f_m(x,y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των μονοπατιών Grand-Dyck με m αρνητικές ανόδους, με τις μεταβλητές x και y να κωδικοποιούν το ημιμήκος και το πλήθος των εμφανίσεων του $\tau = \mathrm{duu}$. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $g_0(x,y)$ τη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{D}$, ως προς το ημιμήκος και το πλήθος εμφανίσεων του $\overline{\tau} = \mathrm{udd}$. Οι παράμετροι "πλήθος εμφανίσεων του duu” και “πλήθος εμφανίσεων του udd” έχουν μελετηθεί για το σύνολο των μονοπατιών Dyck από τον Deutsch ([17]) και από τους Σαπουνάκη, Τασούλα, Τσικούρα ([60]) αντίστοιχα, και έχει αποδειχθεί ότι οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις f_0, g_0 ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$xyf_0^2(x,y) - (1+2x(y-1))f_0(x,y) + 1 + x(y-1) = 0 \tag{4.18}$$

και

$$x(1+x(y-1))g_0^2(x,y) - g_0(x,y) + 1 = 0, \tag{4.19}$$

με συντελεστές

$$a_{n,k} = [x^n y^k] f_0 = \begin{cases} 1, & k = n = 0 \\ 2^{n-2k-1} C_k \binom{n-1}{2k}, & n \geq 1 \end{cases} \tag{4.20}$$

και

$$b_{n,k} = [x^n y^k] g_0 = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} \sum\limits_{j=2k}^{n} \binom{j-k-1}{k-1}\binom{n+1-k}{n-j}, & k \geq 1. \end{cases} \tag{4.21}$$

Από τις σχέσεις (4.18), (4.19), έπεται ότι

$$f_0(x,y) = \frac{1+2x(y-1) - \sqrt{\Delta}}{2xy} \text{ και } g_0(x,y) = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2x(1+x(y-1))},$$

όπου $\Delta = 1 - 4x - 4x^2(y-1)$.

Από τις προηγούμενες ισότητες, έπεται ότι

$$f_0(x,y) = (1 - x(y-1)(f_0(x,y)-1))g_0(x,y) = \frac{1}{1 - xg_0(x,y)}. \tag{4.22}$$

Θεώρημα 4.15. *Η γεννήτρια συνάρτηση $f_m(x,y)$ του συνόλου των μονοπατιών Grand-Dyck με m αρνητικές ανόδους ικανοποιεί τη σχέση:*

$$f_m(x,y) = (1 - x(y-1)(f_0(x,y)-1)) \sum_{n\geq m}\sum_{k\geq 0} b_{n,k}x^n y^k, \qquad m \geq 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δειχθεί ότι

$$F = \frac{g_0(xz,y)}{1 - x(1+xz(y-1))g_0(x,y)g_0(xz,y)}. \tag{4.23}$$

Για κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{G} \setminus \bar{D}$, με $a = \beta \mathrm{u} \gamma \mathrm{d} \delta$, $\beta \in \bar{\mathcal{D}}$, $\gamma \in \mathcal{D}$, $\delta \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι

$$|\alpha|_\tau = |\beta|_\tau + |\gamma|_\tau + |\delta|_\tau + [\beta \text{ τελειώνει με du}] + [\delta \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}^2}],$$

όπου $\mathcal{A}_{\mathrm{u}^2} = \{a \in \mathcal{G} : a \text{ αρχίζει με } \mathrm{u}^2\}$.

Από την προηγούμενη ισότητα, βάσει της διάσπασης της πρώτης θετικής ανόδου του συνόλου $\mathcal{G} \setminus \bar{D}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\beta\in\bar{\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau} z^{p(\beta)} + x \sum_{\beta\in\bar{\mathcal{D}}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau + [\beta \text{ τελειώνει με du}]} z^{p(\beta)} \sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} y^{|\gamma|_\tau} \sum_{\delta\in\mathcal{G}} x^{|\delta|_{\mathrm{u}}} y^{|\delta|_\tau + [\delta\in\mathcal{A}_{\mathrm{u}^2}]} z^{p(\delta)} \\ &= g_0(xz,y) + x\Bigg(g_0(xz,y) + (y-1) \sum_{\substack{\beta\in\bar{\mathcal{D}} \\ \beta \text{ τελειώνει με du}}} (xz)^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{|\beta|_\tau}\Bigg) f_0(x,y)\,(F + (y-1)A)\,, \end{aligned}$$

όπου $A_{\mathrm{u}^2} = A_{\mathrm{u}^2}(x, y, z)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}_{\mathrm{u}^2}$. Κατόπιν τούτων,

$$F = g_0(xz, y)\,(1 + x(1 + xz(y-1))\,f_0(x,y)(F + (y-1)A_{\mathrm{u}^2}))\,. \tag{4.24}$$

Κάθε μονοπάτι $a \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}^2}$ διασπάται στη μορφή $a = \mathrm{u}\gamma\mathrm{d}\delta$, όπου $\gamma \in \mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}$, $\delta \in \mathcal{G}$, έτσι ώστε $|a|_\tau = |\gamma|_\tau + |\delta|_\tau + [\delta \in \mathcal{A}_{\mathrm{u}^2}]$, η οποία δίνει

$$A_{\mathrm{u}^2} = x(f_0(x,y) - 1)(F + (y-1)A_{\mathrm{u}^2}).$$

Επομένως,

$$A_{\mathrm{u}^2} = \frac{x(f_0(x,y) - 1)F}{1 - x(y-1)(f_0(x,y) - 1)}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση της A_{u^2} στη σχέση (4.24), και με χρήση της σχέσης (4.22), λαμβάνουμε τη ζητούμενη σχέση (4.23).

Από τη σχέση (4.23), και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.19) και (4.22), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F &= \frac{g_0(xz,y)\,(g_0(x,y) - zg_0(xz,y))}{g_0(x,y) - zg_0(xz,y) - x(1 + xz(y-1))g_0^2(x,y)g_0(xz,y) + g_0(x,y)(g_0(xz,y) - 1)} \\ &= \frac{g_0(x,y) - zg_0(xz,y)}{g_0(x,y) - xg_0^2(x,y) - z(1 + x^2(y-1)g_0^2(x,y))} \\ &= (1 - x(y-1)(f_0(x,y) - 1))\,\frac{g_0(x,y) - zg_0(xz,y)}{1 - z}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$[z^m](g_0(x,y) - zg_0(xz,y)) = \begin{cases} g_0(x,y), & m = 0 \\ -\sum_{k\ge 0} b_{m-1,k}x^{m-1}y^k, & m \ge 1 \end{cases}$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} f_m(x,y) &= (1 - x(y-1)(f_0(x,y) - 1))\,[z^m]\left(\frac{g_0(x,y) - zg_0(xz,y)}{1 - z}\right) \\ &= (1 - x(y-1)(f_0(x,y) - 1))\left(g_0(x,y) - \sum_{n=1}^{m}\sum_{k\ge 0} b_{n-1,k}x^{n-1}y^k\right) \\ &= (1 - x(y-1)(f_0(x,y) - 1))\sum_{n\ge m}\sum_{k\ge 0} b_{n,k}x^n y^k. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.16. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου* duu, *ισούται με*

$$[x^n y^k]\,f_m = b_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-m-1}\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}\left(b_{n-i-1,k-j} - b_{n-i-1,k-j-1}\right).$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$(f_0(x,y) - 1)\sum_{n\ge m}\sum_{k\ge 0} b_{n,k}x^n y^k = \sum_{n\ge m+1}\sum_{k\ge 0}\sum_{j=1}^{n-m}\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}b_{n-i,k-j}x^n y^k$$

οπότε, από το Θεώρημα 4.15, προκύπτει ότι

$$[x^n y^k]\,f_m = b_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-m-1}\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}\left(b_{n-i-1,k-j} - b_{n-i-1,k-j-1}\right).$$

□

Παρατήρηση. Από το προηγούμενο πόρισμα, έπεται ότι το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με m αρνητικές ανόδους και k εμφανίσεις του προτύπου $\tau = \mathrm{udd}$, ισούται με

$$b_{n,k} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} \left(b_{n-i-1,k-j} - b_{n-i-1,k-j-1} \right).$$

Πόρισμα 4.17. *Το πλήθος των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n, με k εμφανίσεις του προτύπου $\tau = \mathrm{ddu}$, ισούται με*

$$(n+1)b_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} \left(b_{n-i-1,k-j} - b_{n-i-1,k-j-1} \right).$$

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διπλή ακολουθία του προηγούμενου πορίσματος μπορούν να βρεθούν στο [64] (ακολουθία $A051288$).

Κεφάλαιο 5

Κατηγορίες κορυφών σε μονοπάτια Dyck

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μια *ανάβαση* (αντ. *κατάβαση*) σε ένα μονοπάτι Dyck είναι μια μεγιστική ακολουθία διαδοχικών ανόδων (αντ. καθόδων). Ένα σημείο P σε ένα μονοπάτι Dyck α ονομάζεται *κορυφή* αν είναι τελικό σημείο μιας ανόδου και αρχικό σημείο μιας καθόδου. Η κορυφή P ονομάζεται *δεξιά* (αντ. *αριστερή*, αντ. *ισοσκελής*) αν η ανάβαση αμέσως πριν το P είναι μεγαλύτερη (αντ. μικρότερη, αντ. ίση) από την κατάβαση αμέσως μετά το σημείο αυτό.

Λόγω συμμετρίας, οι στατιστικές "πλήθος δεξιών κορυφών" και "πλήθος αριστερών κορυφών" είναι ισοκατανεμημένες, οπότε στη συνέχεια θα μελετηθεί μόνο η πρώτη από αυτές. (Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την πρώτη, προφανώς ισχύουν και για τη δεύτερη.)

Θεωρούμε τις παραμέτρους

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= \text{ πλήθος δεξιών κορυφών στο } \alpha, \\ l(\alpha) &= \text{ πλήθος αριστερών κορυφών στο } \alpha, \\ c(\alpha) &= \text{ πλήθος ισοσκελών κορυφών στο } \alpha, \end{aligned}$$

όπου $\alpha \in \mathcal{D}$, και τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F = F(x, y, z, s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{r(\alpha)} z^{l(\alpha)} s^{c(\alpha)}. \tag{5.1}$$

Βάσει της διάσπασης της πρώτης επιστροφής: $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$, για το μη κενό μονοπάτι Dyck α, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= r(\beta) + r(\gamma) + [\beta \in \mathcal{A}], \\ l(\alpha) &= l(\beta) + l(\gamma) + [\beta \in \mathcal{B}], \\ c(\alpha) &= c(\beta) + c(\gamma) - [\beta \in \mathcal{A}] - [\beta \in \mathcal{B}] + [\beta = \varepsilon], \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{u}^i\mathrm{d}^i w : w \in \mathcal{D}^*, i \in \mathbb{N}^*\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{B} = \{w\mathrm{u}^i\mathrm{d}^i : w \in \mathcal{D}^*, i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Επιπλέον, θέτουμε

$$\Gamma = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathrm{u}^i\mathrm{d}^i w\mathrm{u}^j\mathrm{d}^j : w \in \mathcal{D}, i, j \in \mathbb{N}^*\}.$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις των παραπάνω συνόλων είναι αντίστοιχα οι

$$A = A(x, y, z, s) = \frac{sx}{1-x}(F-1), \quad B = B(x, y, z, s) = \frac{sx}{1-x}(F-1),$$

$$\Gamma = \Gamma(x,y,z,s) = \frac{s^2x^2}{(1-x)^2}F.$$

Το σύνολο των μη κενών μονοπατιών Dyck $\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\} = \{\mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma : \beta,\gamma \in \mathcal{D}\}$ διαμερίζεται σε ξένα ανά δύο σύνολα που αντιστοιχούν στις εξής περιπτώσεις:

- $\beta = \varepsilon$, με γεννήτρια συνάρτηση ίση με xsF.
- $\beta \in \mathcal{A} \setminus \Gamma$, με γεννήτρια συνάρτηση ίση με $\frac{xyF}{s}(A-\Gamma)$.
- $\beta \in \mathcal{B} \setminus \Gamma$, με γεννήτρια συνάρτηση ίση με $\frac{xzF}{s}(B-\Gamma)$.
- $\beta \in \Gamma$, με γεννήτρια συνάρτηση ίση με $\frac{xyzF}{s^2}\Gamma$.
- $\beta \in \mathcal{D}^* \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, με γεννήτρια συνάρτηση ίση με $xF\,(F-1-(A-\Gamma)-(B-\Gamma)-\Gamma)$.

Κατόπιν τούτων, η γεννήτρια συνάρτηση $F-1$ του συνόλου $\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}$ προκύπτει αθροίζοντας τις παραπάνω γεννήτριες, άρα

$$\begin{aligned}
F &= 1 + xsF + \frac{xyF}{s}(A-\Gamma) + \frac{xzF}{s}(B-\Gamma) + \frac{xyzF}{s^2}\Gamma + xF\,(F-1-(A-\Gamma)-(B-\Gamma)-\Gamma) \\
&= 1 + xF\left(F + s - 1 + \left(\frac{y}{s}-1\right)(A-\Gamma) + \left(\frac{z}{s}-1\right)(B-\Gamma) + \left(\frac{yz}{s^2}-1\right)\Gamma\right) \\
&= 1 + xF\left(F + s - 1 + (y+z-2s)\frac{x}{1-x}(F - 1 - \frac{sx}{1-x}F) + (yz-s^2)\frac{x^2}{(1-x)^2}F\right) \\
&= 1 + \left(1 + \frac{x}{1-x}(y+z-2s)(1-\frac{sx}{1-x}) + (yz-s^2)\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)xF^2 + \left(s - 1 - (y+z-2s)\frac{x}{1-x}\right)xF \\
&= 1 + \left(1 + \tfrac{x}{1-x}(y+z-2s) + (yz+s^2-sy-sz)\tfrac{x^2}{(1-x)^2}\right)xF^2 + \left(s-1-(y+z-2s)\tfrac{x}{1-x}\right)xF. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

5.1 Δεξιές κορυφές

Θέτοντας $z = s = 1$ στη σχέση (5.1), προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση

$$F = F(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{r(\alpha)},$$

η οποία απαριθμεί τις δεξιές κορυφές σε μονοπάτια Dyck. Επομένως, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.2), λαμβάνουμε την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)\frac{x^2}{1-x}(F^2 - F)$$

ή, ισοδύναμα, την εξίσωση

$$F = 1 - \frac{(y-1)x^2}{1-x}F + x\left(1 + \frac{(y-1)x}{1-x}\right)F^2.$$

Θέτοντας $t = 1 + \frac{(y-1)x}{1-x}$, έχουμε ότι

$$F = 1 - x(t-1)F + xtF^2,$$

οπότε $F(x,y) = N(xt, t^{-1})$, όπου $N(x,y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana.[1] Επομένως,

$$F = 1 + \sum_{m\geq 1}\sum_{i=1}^{m} \nu_{m,i} t^{m-i} x^m \overset{2}{=} 1 + \sum_{m\geq 1}\sum_{i=0}^{m-1} \nu_{m,i+1} t^i x^m.$$

[1] Βλ. εξίσωση (1.8).

Επιπλέον, για τους αριθμούς Narayana ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:

$$\sum_{i=j}^{n-1}\binom{i}{j}v_{n,i+1}=\frac{1}{n}\binom{n}{j}\binom{2n-j}{n+1}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{i=j}^{n-1}\binom{i}{j}v_{n,i+1} &= \sum_{i=j}^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i+1}\binom{i}{j} = \frac{1}{n}\binom{n}{j}\sum_{i=j}^{n-1}\binom{n-j}{i-j}\binom{n}{i+1} = \frac{1}{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-1-j}\binom{n-j}{i}\binom{n}{i+j+1}\\ &= \frac{1}{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-1-j}\binom{n-j}{i}\binom{n}{n-i-j-1} = \frac{1}{n}\binom{n}{j}\binom{2n-j}{n-j-1} = \frac{1}{n}\binom{n}{j}\binom{2n-j}{n+1}.\end{aligned}$$

Επομένως, βάσει της προηγούμενης ταυτότητας, έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{m-1}v_{m,i+1}t^{i} = \sum_{i=0}^{m-1}v_{m,i+1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\frac{(y-1)^{j}x^{j}}{(1-x)^{j}} = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(y-1)^{j}x^{j}}{(1-x)^{j}}\sum_{i=j}^{m-1}\binom{i}{j}v_{m,i+1} = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(y-1)^{j}x^{j}}{(1-x)^{j}}\frac{1}{m}\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m+1}.$$

Κατόπιν τούτων,

$$\begin{aligned}F &= 1+\sum_{m\ge1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m+1}\frac{(y-1)^{j}x^{m+j}}{(1-x)^{j}}\\ &= 1+\sum_{m\ge1}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j}\sum_{s\ge0}(-1)^{j-k}\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m+1}\binom{j}{k}\binom{j+s-1}{s}y^{k}x^{m+j+s}\\ &= 1+\sum_{n\ge1}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\sum_{s=0}^{n-2k-1}\sum_{j=k}^{\lfloor\frac{n-s-1}{2}\rfloor}\frac{1}{n-s-j}(-1)^{j-k}\binom{n-s-j}{j}\binom{2n-2s-3j}{n-s-j+1}\binom{j}{k}\binom{j+s-1}{s}y^{k}x^{n},\end{aligned}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned}[x^{n}y^{k}]F &= \sum_{s=0}^{n-2k-1}\sum_{j=k}^{\lfloor\frac{n-s-1}{2}\rfloor}\frac{(-1)^{j-k}}{n-s-j}\binom{n-s-j}{j}\binom{2n-2s-3j}{n-s-j+1}\binom{j}{k}\binom{j+s-1}{s}\\ &\overset{n-s=m}{=} \sum_{m=2k+1}^{n}\sum_{j=k}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\frac{(-1)^{j-k}}{m-j}\binom{m-j}{j}\binom{2m-3j}{m-j+1}\binom{j}{k}\binom{j+n-m-1}{j-1}\\ &= \sum_{j=k}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\sum_{m=2j+1}^{n}\frac{1}{m-j}\binom{m-j}{j}\binom{2m-3j}{m-j+1}\binom{j+n-m-1}{j-1}.\end{aligned}$$

Τελικά, θέτοντας $i=m-2j-1$, προκύπτει ότι

$$[x^{n}y^{k}]F = \sum_{j=k}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\sum_{i=0}^{n-2j-1}\frac{1}{i+j+1}\binom{i+j+1}{j}\binom{2i+j+2}{i}\binom{n-i-j-2}{j-1}.$$

[2]Θέτοντας i αντί για $m-i$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $v_{m,m+i}=v_{m,i+1}$.

5.2 Ισοσκελείς κορυφές

Θέτοντας $z = y = 1$ στη σχέση (5.1), προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση

$$F = F(x,s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_u} s^{c(\alpha)},$$

η οποία απαριθμεί τις ισοσκελείς κορυφές σε μονοπάτια Dyck. Επομένως, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.2), λαμβάνουμε την εξίσωση

$$F = 1 + \left(1 - \frac{x(s-1)}{1-x}\right)^2 xF^2 + \frac{x(s-1)(1+x)}{1-x} F.$$

Θέτοντας, $t = \frac{x(s-1)}{1-x}$, οπότε $1 - t = \frac{1-sx}{1-x}$, προκύπτει ότι

$$F = 1 + x(1-t)^2 F^2 + tF + xtF \Rightarrow (1-t)F = 1 + x((1-t)F)^2 + xtF,$$

οπότε θέτοντας $A = A(x,s) = (1-t)F$, έχουμε ότι

$$A = 1 + xA^2 + \frac{xt}{1-t} A.$$

Κατόπιν τούτων είναι $A(x,s) = N\left(x, \frac{1}{1-t}\right)$, όπου $N(x,y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana,[3] και επομένως

$$F(x,s) = \frac{1}{1-t} N\left(x, \frac{1}{1-t}\right) = \frac{1-x}{1-sx} N\left(x, \frac{1-x}{1-sx}\right).$$

Για τον συντελεστή της γεννήτριας συνάρτησης $F(x,s)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F &= \sum_{m \geq 0} \sum_{i=0}^{m} \nu_{m,i} x^m \left(\frac{1-x}{1-sx}\right)^{i+1} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{i+1} \nu_{m,i} (-1)^j \binom{i+k}{k} \binom{i+1}{j} x^{m+k+j} s^k \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-j} \nu_{n-k-j,i} (-1)^j \binom{i+k}{k} \binom{i+1}{j} x^n s^k \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} [x^n s^k]F &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k-j} \nu_{n-k-j,i} (-1)^j \binom{i+k}{k} \binom{i+1}{j} \\ &= (-1)^{n-k} + \sum_{j=0}^{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k-j} \frac{(-1)^j}{n-k-j} \binom{n-k-j}{i} \binom{n-k-j}{i-1} \binom{i+k}{k} \binom{i+1}{j}. \end{aligned}$$

[3] Βλ. εξίσωση (1.8).

5.3 Μη αριστερές κορυφές

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$, συμβολίζουμε με $nl(\alpha)$ το πλήθος των μη αριστερών κορυφών του μονοπατιού α, δηλαδή $nl(\alpha) = r(\alpha) + c(\alpha)$.

Θέτοντας $y = s$ και $z = 1$ στη σχέση (5.1), προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση

$$F = F(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_u} y^{r(\alpha)+c(\alpha)},$$

η οποία απαριθμεί τις μη αριστερές κορυφές σε μονοπάτια Dyck. Επομένως, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.2), λαμβάνουμε την εξίσωση

$$F = 1 + \left(1 - \frac{(y-1)x}{1-x}\right) xF^2 + \frac{(y-1)x}{1-x} F = 1 + \frac{1-xy}{1-x} xF^2 + \frac{(y-1)x}{1-x} F. \tag{5.3}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση F μπορεί να εκφραστεί μέσω της γεννήτριας συνάρτησης $N(u, t)$ των αριθμών Narayana.[4] Πράγματι, αν τεθεί $u = \frac{1-xy}{1-x} x$ και $u(t-1) = \frac{(y-1)x}{1-x}$, τότε είναι

$$u(t-1) = \frac{(y-1)x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1-xy}{1-x} x(t-1) = \frac{(y-1)x}{1-x} \Leftrightarrow t = 1 + \frac{y-1}{1-xy} = \frac{1-x}{1-xy} y,$$

οπότε

$$F(x, y) = N(u, t) = N\left(\frac{1-xy}{1-x} x, \frac{1-x}{1-xy} y\right).$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή και εργαζόμενοι όπως στις δύο προηγούμενες ενότητες, μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν τύπο για τους συντελεστές της F.

Εναλλακτικά, η γεννήτρια συνάρτηση F μπορεί να εκφραστεί σε απλούστερη μορφή, μέσω της γεννήτριας συνάρτησης C των αριθμών Catalan. Συγκεκριμένα, αν τεθεί $t = \frac{1-xy}{1-x}$, τότε, από την εξίσωση (5.3), προκύπτει ότι

$$\left(1 - \frac{(y-1)x}{1-x}\right) F = 1 + \frac{1-xy}{1-x} xF^2 \Rightarrow \frac{1-xy}{1-x} F = 1 + \frac{1-xy}{1-x} xF^2 \Rightarrow tF = 1 + \frac{x}{t}(tF)^2,$$

δηλαδή $tF = C(x/t)$, οπότε

$$F = \frac{1-x}{1-xy} C\left(\frac{1-x}{1-xy} x\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x\frac{1-x}{1-xy}}}{2x}. \tag{5.4}$$

Κατόπιν τούτων, αναπτύσσοντας την F σε σειρά, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{m \geq 0} C_m x^m t^{-m-1} = \sum_{m \geq 0} C_m x^m \left(\frac{1-x}{1-xy}\right)^{m+1} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \binom{m+k}{k} C_m x^{m+k+j} y^k \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-k-j+1}{j} \binom{n-j}{k} C_{n-k-j} x^n y^k, \end{aligned}$$

[4] Βλ. εξίσωση (1.8).

οπότε λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση για τους συντελεστές της F:

$$[x^n y^k]F = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-k-j+1}{j}\binom{n-j}{k} C_{n-k-j}.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση F, όπως αυτή δίνεται στην εξίσωση (5.4), εμφανίζεται στην εργασία [8], όπου απαριθμεί ένα διαφορετικό σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων (labeled colored ordered forests), καθώς και στην εργασία [9], όπου απαριθμεί το σύνολο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων (noncrossing partitions) του $[n]$, ως προς το n και το πλήθος των μπλοκ που αποτελούνται από διαδοχικούς αριθμούς (τα οποία ονομάζονται runs, και για το λόγο αυτό η F αποκαλείται “run transform” της C).

Επιπλέον, στην [64] (ακολουθία $A175136$) δίνεται χωρίς απόδειξη ο ακόλουθος τύπος για τους συντελεστές της:

$$[x^n y^k]F = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{n-k} b_{n-k,j}, \tag{5.5}$$

όπου $b_{n,k}$ είναι η διπλή ακολουθία των αριθμών Touchard[5] που ως γνωστό απαριθμεί το σύνολο των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με k εμφανίσεις του προτύπου duu (ακολουθία $A091894$ στην [64]):

$$b_{n,k} = 2^{n-2k-1}\binom{n-1}{2k} C_k, \qquad b_{0,0} = 1.$$

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ο τύπος (5.5), με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων.

Απόδειξη του τύπου (5.5). Η γεννήτρια συνάρτηση

$$B = B(u,t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} u^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} t^{|\alpha|_{\mathrm{duu}}} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k \geq 0} b_{n,k} u^n t^k$$

των αριθμών Touchard ικανοποιεί την εξίσωση (1.11):

$$B = 1 - (1-t)u + 2(1-t)uB + utB^2,$$

η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (5.3) δίνει ότι

$$F(x,y) = 1 + \frac{xy}{1-xy} B\left(\frac{x}{1-xy}, xy\right).$$

Πράγματι, αν τεθεί $u = \frac{x}{1-xy}$, $t = xy$ και $H = H(x,y) = 1 + \frac{xy}{1-xy}B\left(\frac{x}{1-xy}, xy\right)$, τότε

$$\begin{aligned}
&B = B\left(\frac{x}{1-xy}, xy\right) = \frac{x^2 y}{1-xy}B^2 + 2(1-xy)\frac{x}{1-xy}B + 1 - \frac{(1-xy)x}{1-xy}\\
&\Rightarrow \frac{xy}{1-xy}B = x\left(\frac{xy}{1-xy}B\right)^2 + 2x\left(\frac{xy}{1-xy}B\right) + \frac{xy}{1-xy}(1-x)\\
&\Rightarrow H - 1 = x(H-1)^2 + 2x(H-1) + \frac{xy}{1-xy}(1-x)\\
&\Rightarrow H = xH^2 + \frac{xy}{1-xy}(1-x) + 1 - x = xH^2 + \frac{1-x}{1-xy}\\
&\Rightarrow \frac{1-xy}{1-x}H = 1 + x\frac{1-xy}{1-x}H^2\\
&\Rightarrow H = 1 + \frac{y-1}{1-x}xH + \frac{1-xy}{1-x}xH^2\\
&\Rightarrow H = F.
\end{aligned}$$

[5] Βλ. σελ. 32.

Επομένως,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= 1 + \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} b_{i,j} x^i \frac{(xy)^{j+1}}{(1-xy)^{i+1}} = 1 + \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} b_{i,j} x^i (xy)^{j+1} \sum_{r\geq 0}\binom{r+i}{r}(xy)^r \\
&= 1 + \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\sum_{r\geq 0}\binom{r+i}{r} b_{i,j} x^{i+j+r+1} y^{j+r+1} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 0}\binom{n-j-1}{n-k} b_{n-k,j} x^n y^k.
\end{aligned}$$

□

5.4 Κατασκευή των μη αριστερών κορυφών

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται μια συνδυαστική κατασκευή του συνόλου $\mathcal{D}_{n,k}$ των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με k μη αριστερές κορυφές, από τα μονοπάτια του $\mathcal{D}_{n-k}$, η οποία ερμηνεύει συνδυαστικά τον τύπο (5.5). Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μονοπάτι $\beta \in \mathcal{D}$ και για $k \geq 1 + |\beta|_{\mathrm{duu}}$, ορίζουμε ένα σύνολο $\phi(\beta, k)$. Η οικογένεια αυτών των συνόλων, με δείκτες τα μονοπάτια $\beta \in \mathcal{D}_{n-k}$, αποτελεί διαμέριση του συνόλου $\mathcal{D}_{n,k}$. Για το σκοπό αυτό, αρχικά ορίζουμε ένα βοηθητικό σύνολο $\theta(\beta, k)$, με τη βοήθεια των ζ-μονοπατιών του β.

Ένα *μη κενό ζ-μονοπάτι* του $\beta \in \mathcal{D}$ είναι ένα μεγιστικό υπομονοπάτι του β της μορφής $(\mathrm{ud})^i$, $i \in \mathbb{N}^*$. Κάθε βήμα του β, που δεν ανήκει σε κάποιο ζ-μονοπάτι του, ονομάζεται *ζ-βασικό*. Ένα μη κενό ζ-μονοπάτι του β ονομάζεται xy-ζ-μονοπάτι, όπου $x, y \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}$, όταν αμέσως πριν και αμέσως μετά από αυτό υπάρχουν αντίστοιχα ένα ζ-βασικό βήμα x και ένα ζ-βασικό βήμα y. Ειδικά, για τον χαρακτηρισμό του πρώτου και του τελευταίου ζ-μονοπατιού του β, θεωρούμε ότι πριν και μετά το β υπάρχει μια κάθοδος.

Κάθε κενό υπομονοπάτι του β θεωρείται ως ένα uu-ζ-μονοπάτι (αντ. du-ζ-μονοπάτι), αν προηγείται αυτού μια ζ-βασική άνοδος και το ακολουθεί μια ζ-βασική άνοδος (αντ. ζ-βασική κάθοδος).

Υπάρχει μια προφανής αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των du-ζ-μονοπατιών και των ud-ζ-μονοπατιών: Κάθε du-ζ-μονοπάτι αντιστοιχεί σε ένα ud-ζ-μονοπάτι, το πρώτο δεξιά του. Τα ζ-μονοπάτια ενός τέτοιου ζεύγους ονομάζονται *συζυγή*.

Επίσης, ισχύουν οι τύποι:

$$\#\text{ud-ζ-μονοπατιών} + \#\text{uu-ζ-μονοπατιών} = |\beta|_{\mathrm{uud}}$$

και

$$\#\text{κενών uu-ζ-μονοπατιών} = |\beta|_{\mathrm{uuu}}.$$

Προφανώς, κάθε μονοπάτι Dyck β διασπάται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ζ-βασικών βημάτων και ζ-μονοπατιών. Ονομάζουμε τη διάσπαση αυτή *ζ-διάσπαση* του β. Στο Σχ. 5.1 δίνεται ένα παράδειγμα της διάσπασης αυτής, με τα κενά ζ-μονοπάτια να σημειώνονται με τελεία.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε μια διαφορετική κατηγορία υπομονοπατιών του β. Μια *πυραμίδα* είναι ένα μονοπάτι της μορφής $\mathrm{u}^i\mathrm{d}^i$, $i \in \mathbb{N}^*$. Ένα μονοπάτι ονομάζεται *π-μονοπάτι*, αν είναι γινόμενο πυραμίδων. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_{m,k}$ το σύνολο των π-μονοπατιών ημιμήκους m που αποτελούνται από ακριβώς k πυραμίδες. Προφανώς, είναι $|\mathcal{P}_{m,k}| = \binom{m-1}{k-1}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των π-μονοπατιών, συμπεριλαμβανομένου και του κενού μονοπατιού.

Ένα μη κενό π-μονοπάτι του β είναι ένα μεγιστικό υπομονοπάτι, το οποίο ανήκει στο $\mathcal{P}$. Προφανώς, κάθε μονοπάτι Dyck β διασπάται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο π-μονοπατιών και βημάτων που δεν ανήκουν σε π-μονοπάτι και τα οποία ονομάζουμε *π-βασικά* βήματα. Ονομάζουμε τη διάσπαση αυτή *π-διάσπαση* του β. Τα π-μονοπάτια του β διαχωρίζονται σε 4 κατηγορίες, όπως και στην περίπτωση της ζ-διάσπασης. Το κενό μονοπάτι θεωρείται ως uu-π-μονοπάτι (αντ. du-π-μονοπάτι), αν προηγείται αυτού μια π-βασική άνοδος (αντ. π-βασική κάθοδος) και ακολουθεί μια π-βασική άνοδος. Στο Σχ. 5.1 δίνεται ένα παράδειγμα της π-διάσπασης, με τα κενά π-μονοπάτια να σημειώνονται με τελεία.

Για την απαρίθμηση των συνόλων $\phi(\beta,k)$ και $\theta(\beta,k)$, θα χρησιμοποιηθεί επίσης η ακόλουθη γενίκευση της συνέλιξης Vandermonde:

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_s=k\\ k_i\geq a_i, i\in[s]}} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i+k_i-a_i}{k_i-a_i} = \binom{m+s+k-a-1}{k-a}, \tag{5.6}$$

όπου $a=\sum_{i=1}^{s} a_i$ και $m=\sum_{i=1}^{s} m_i$, η απόδειξη της οποίας, χάριν πληρότητας, δίνεται παρακάτω. Υπενθυμίζεται ότι ο συντελεστής του x^n στο γινόμενο δύο γεννητριών συναρτήσεων $A_1(x), A_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$[x^n]A_1(x)A_2(x) = \sum_{k=0}^{n}([x^k]A_1(x))([x^{n-k}]A_2(x)) = \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\geq 0}}([x^{k_1}]A_1(x))([x^{k_2}]A_2(x)).$$

Γενικεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα επαγωγικά, προκύπτει ότι ο συντελεστής του x^n στο γινόμενο των γεννητριών συναρτήσεων $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_s(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$[x^n]\prod_{i=1}^{s} A_i(x) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_s=n\\ k_i\geq 0, i\in[s]}} \prod_{i=1}^{s}([x^{k_i}]A_i(x)).$$

Απόδειξη της σχέσης (5.6). Έστω $\lambda_i = k_i - a_i$, ώστε το παραπάνω άθροισμα λαμβάνεται επί όλων των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s = k-a$, όπου $\lambda_i \geq 0$. Επιπλέον είναι

$$\binom{m_i+\lambda_i}{\lambda_i} = [x^{\lambda_i}]\frac{1}{(1-x)^{m_i+1}}.$$

Κατόπιν τούτων, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_s=k\\ k_i\geq a_i, i\in[s]}} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i+k_i-a_i}{k_i-a_i} &= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=k-a\\ \lambda_i\geq 0, i\in[s]}} \prod_{i=1}^{s} \tbinom{m_i+\lambda_i}{\lambda_i} \\
&= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=k-a\\ \lambda_i\geq 0, i\in[s]}} \prod_{i=1}^{s} [x^{\lambda_i}]\frac{1}{(1-x)^{m_i+1}} \\
&= [x^{k-a}]\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{(1-x)^{m_i+1}} \\
&= [x^{k-a}]\frac{1}{(1-x)^{m+s}} \\
&= \binom{m+s+k-a-1}{k-a}.
\end{aligned}$$

□

5.4.1 Το σύνολο $\theta(\beta, k)$.

Το σύνολο $\theta(\beta, k)$ ορίζεται για την περίπτωση που είναι $\beta = \varepsilon$ και $k = 0$, οπότε είναι $\theta(\varepsilon, 0) = \{\varepsilon\}$, καθώς για τις περιπτώσεις που είναι $\beta \in \mathcal{D}^*$ και $k \geq |\beta|_{\text{uud}}$. Όπως προκύπτει, τα στοιχεία του συνόλου αυτού είναι μονοπάτια Dyck ημιμήκους $|\beta|_{\text{u}} + k$ με k μη αριστερές και μη τελικές κορυφές. Μια κορυφή είναι τελική, αν είναι η τελευταία κορυφή του μονοπατιού.

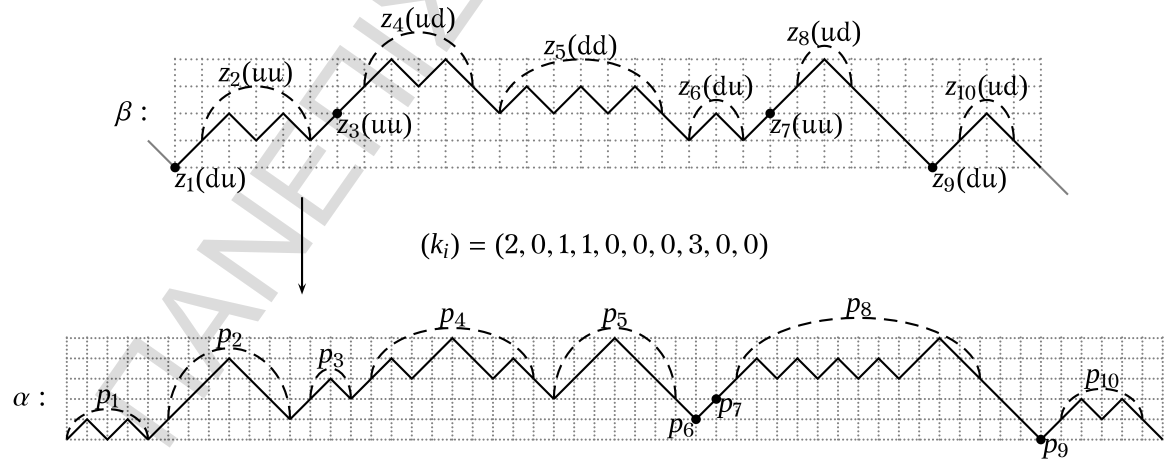
Έστω $\beta \in \mathcal{D}^*$ και έστω $k \geq |\beta|_{\text{uud}}$. Τότε, τα στοιχεία του $\theta(\beta, k)$ προκύπτουν αντικαθιστώντας τα ζ-μονοπάτια $z_1, z_2, \cdots, z_s$ του β από τα π-μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Πιο συγκεκριμένα, διαμερίζουμε τον μη αρνητικό ακέραιο $k - |\beta|_{\text{uud}}$ σε s μη αρνητικούς ακεραίους $k_1, k_2, \ldots, k_s$, δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{s} k_i = k - |\beta|_{\text{uud}}, \quad k_i \geq 0, \quad s = \#\text{ζ-μονοπατιών του } \beta$$

και αντικαθιστούμε κάθε z_i ημιμήκους m_i από ένα p_i ως εξής:

- Αν το z_i είναι uu-ζ-μονοπάτι, τότε $p_i \in \mathcal{P}_{m_i+k_i+1, k_i+1}$, ή $p_i \in \mathcal{P}_{k_i, k_i}$, αν $z_i = \varepsilon$.
- Αν το z_i είναι dd-ζ-μονοπάτι, τότε $p_i \in \mathcal{P}_{m_i+k_i, k_i+1}$.
- Αν το z_i είναι du-ζ-μονοπάτι και z_j είναι το συζυγές του ud-ζ-μονοπάτι, τότε το z_i αντικαθίσταται από το p_i, όπου $p'_i = p_i\pi \in \mathcal{P}_{m_i+k_i+1, k_i+1}$, ενώ το z_j αντικαθίσταται από το $p_j = p'_j\pi$, όπου $p'_j \in \mathcal{P}_{m_j+k_j, k_j+1}$.

Σημειώνεται ότι $p_i = \varepsilon$ μόνο αν $k_i = 0$ και το z_i είναι είτε du-ζ-μονοπάτι, είτε κενό uu-ζ-μονοπάτι. Από την άλλη, ένα ud-ζ-μονοπάτι και ένα μη κενό uu-ζ-μονοπάτι αντικαθίσταται πάντα από ένα μη κενό π-μονοπάτι, δημιουργώντας μία μη αριστερή κορυφή στο μονοπάτι α. Αυτό δικαιολογεί και τον περιορισμό $k \geq |\beta|_{\text{uud}}$. Επίσης, τονίζεται ότι, σε αυτήν την κατασκευή, τα ζ-βασικά βήματα του β παραμένουν αμετάβλητα και αποτελούν τα π-βασικά βήματα του μονοπατιού $\alpha \in \theta(\beta, k)$. Στο Σχ. 5.1 δίνεται ένα παράδειγμα κατασκευής ενός στοιχείου του συνόλου $\theta(\beta, k)$, για δεδομένα β και (k_i).



Σχήμα 5.1: Το μονοπάτι $\beta \in \mathcal{D}_{16}$, με $|\beta|_{\text{uud}} = 4$ και ένα μονοπάτι $\alpha \in \theta(\beta, 11)$.

Η αντίστροφη διαδικασία προκύπτει άμεσα, με τη βοήθεια της π-διάσπασης του μονοπατιού α. Από τα π-μονοπάτια p_i του α, ανακτούμε τους αριθμούς k_i και m_i, κατά συνέπεια και τα ζ-μονοπάτια z_i, οπότε είμαστε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αρχικό μονοπάτι β.

Για $|\beta|_{\text{uud}} \leq r \leq k$, συμβολίζουμε με $\theta(\beta, k, r)$ των μονοπατιών $\alpha \in \theta(\beta, k)$ με r δεξιές κορυφές.

Πρόταση 5.1. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

i) *Κάθε μονοπάτι του συνόλου $\theta(\beta, k)$, $\beta \in \mathcal{D}^*$, έχει ακριβώς k μη αριστερές μη τελικές κορυφές και ημιμήκος $|\beta|_{\mathrm{u}} + k$.*

ii) *Για κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με k μη αριστερές μη τελικές κορυφές, υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\beta \in \mathcal{D}_{n-k}$, τέτοιο ώστε $\alpha \in \theta(\beta, k)$.*

iii) $|\theta(\beta, k, r)| = \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}}}{r - |\beta|_{\mathrm{uud}}} \binom{|\beta|_{\mathrm{ud}} + k - 1}{k - r}$ *και* $|\theta(\beta, k)| = \binom{|\beta|_{\mathrm{u}} + k - |\beta|_{\mathrm{uud}} - 1}{|\beta|_{\mathrm{u}} - 1}$, *για κάθε* $\beta \in \mathcal{D}^*$.

Απόδειξη. *i)* Έστω $\alpha \in \theta(\beta, k)$. Κάθε μη αριστερή κορυφή του α αντιστοιχεί σε μια μοναδική πυραμίδα κάποιου π-μονοπατιού, στην π-διάσπαση του α, επομένως σχηματίζεται κατά τη μετατροπή κάποιου ζ-μονοπατιού του β σε π-μονοπάτι. Κάθε μη κενό uu-ζ-μονοπάτι z_i και κάθε ζεύγος συζυγών ζ-μονοπατιών z_i και z_j συνεισφέρουν αντίστοιχα $k_i + 1$ και $k_i + k_j + 1$ μη αριστερές μη τελικές κορυφές και $k_i + m_i + 1$ και $k_i + m_i + k_j + m_j + 1$ ανόδους στο α. Από την άλλη, κάθε κενό uu-ζ-μονοπάτι ή dd-ζ-μονοπάτι z_i συνεισφέρει k_i μη αριστερές μη τελικές κορυφές και $k_i + m_i$ ανόδους στο α. Επομένως, το πλήθος των μη αριστερών μη τελικών κορυφών του α ισούται με

$$\sum_{i=1}^{s} k_i + |\beta|_{\mathrm{uud}} = k,$$

ενώ το πλήθος των ανόδων του α ισούται με

$$\sum_{i=1}^{s}(k_i + m_i) + |\beta|_{\mathrm{uud}} + \#\text{ζ-βασικών ανόδων του } \beta = k + |\beta|_{\mathrm{u}}.$$

ii) Προκύπτει άμεσα, από την κατασκευή του συνόλου $\theta(\beta, k)$ και από την *i)*.

iii) Κάθε δεξιά κορυφή του $\alpha \in \theta(\beta, k)$ προκύπτει από ένα ζ-μονοπάτι z_i του β, το οποίο είναι είτε ένα ud-ζ-μονοπάτι, είτε ένα μη κενό uu-ζ-μονοπάτι, είτε ένα κενό uu-ζ-μονοπάτι με $k_i \geq 1$. Επομένως, για κάθε $\alpha \in \theta(\beta, k, r)$, οι $|\beta|_{\mathrm{uud}}$ (από τις r συνολικά) δεξιές κορυφές του α παράγονται από τα ud-ζ-μονοπάτια και τα μη κενά uu-ζ-μονοπάτια του β, ενώ οι υπόλοιπες δεξιές κορυφές του α παράγονται επιλέγοντας $r - |\beta|_{\mathrm{uud}}$ από τα $|\beta|_{\mathrm{uuu}}$ κενά uu-ζ-μονοπάτια.

Επιπλέον, αφού κάθε ζ-μονοπάτι z_i του β αντικαθίσταται από ένα π-μονοπάτι με $\binom{m_i'+k_i}{k_i}$ τρόπους, όπου $m_i' = m_i$ αν το z_i είναι uu-ζ-μονοπάτι ή du-ζ-μονοπάτι, και $m_i' = m_i - 1$ στην αντίθετη περίπτωση, και λαμβάνοντας υπόψη ότι για κάθε $\alpha \in \theta(\beta, k, r)$ το πλήθος των όρων k_i που δεν αντιστοιχούν σε κενό uu-ζ-μονοπάτι με $k_i = 0$ ισούται με

$$t = s - |\beta|_{\mathrm{uuu}} + r - |\beta|_{\mathrm{uud}} = s + r - |\beta|_{\mathrm{uu}},$$

με τη βοήθεια της ταυτότητας (5.6), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
|\theta(\beta, k, r)| &= \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}}}{r - |\beta|_{\mathrm{uud}}} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_t=k-r \\ k_i \geq 0, i \in [t]}} \prod_{i=1}^{t} \binom{m_i' + k_i}{k_i} \\
&= \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}}}{r - |\beta|_{\mathrm{uud}}} \binom{\sum_{i=1}^{t} m_i' + t + k - r - 1}{k - r} = \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}}}{r - |\beta|_{\mathrm{uud}}} \binom{|\beta|_{\mathrm{ud}} + k - 1}{k - r}.
\end{aligned}$$

Τέλος, αθροίζοντας ως προς τη μεταβλητή r, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\theta(\beta, k)| &= \sum_{r=0}^{k} |\theta(\beta, k, r)| = \sum_{r=0}^{k} \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}}}{r - |\beta|_{\mathrm{uud}}} \binom{|\beta|_{\mathrm{ud}} + k - 1}{k - r} = \sum_{i=0}^{k} \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}}}{k - |\beta|_{\mathrm{uud}} - i} \binom{|\beta|_{\mathrm{ud}} + k - 1}{i} \\
&= \binom{|\beta|_{\mathrm{uuu}} + |\beta|_{\mathrm{ud}} + k - 1}{k - |\beta|_{\mathrm{uud}}} = \binom{|\beta|_{\mathrm{uu}} - |\beta|_{\mathrm{uud}} + |\beta|_{\mathrm{ud}} + k - 1}{k - |\beta|_{\mathrm{uud}}} = \binom{|\beta|_{\mathrm{u}} + k - |\beta|_{\mathrm{uud}} - 1}{|\beta|_{\mathrm{u}} - 1}.
\end{aligned}$$

□

Βάσει της Πρότασης 5.1, είναι δυνατόν να υπολογιστεί το πλήθος των μονοπατιών Dyck συγκεκριμένου ημιμήκους και με συγκεκριμένο πλήθος μη αριστερών μη τελικών (και δεξιών) κορυφών. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί και το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.2. *Το πλήθος των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με i κορυφές και j εμφανίσεις του προτύπου uud ισούται με*

$$d_{n,i,j} = \frac{1}{n-i}\binom{n}{i-1}\binom{n-i}{j}\binom{i-1}{j-1},$$

όπου $n > i \geq j \geq 1$.

Απόδειξη. Έστω $D = D(x,y,z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\mathrm{ud}}} z^{|\alpha|_{\mathrm{uud}}}$ η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση. Βάσει της διάσπασης της πρώτης ανάβασης, προκύπτει η σχέση

$$D = 1 + xyD + yz\sum_{h=2}^{\infty} x^h D^h = 1 + xyD + \frac{yzx^2D^2}{1-xD},$$

η οποία δίνει

$$D = 1 + xD(y - 1 + (1 + xy(z-1))D).$$

Θέτοντας $a = y-1$, $b = 1 + xy(z-1)$ και $H(\lambda) = \lambda(a + b\lambda)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} H^n(1+\lambda) = (1+\lambda)^n(a + b(1+\lambda))^n &= \sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}a^{n-\mu}b^{\mu}(1+\lambda)^{n+\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+\mu}\binom{n}{\mu}\binom{n+\mu}{j}a^{n-\mu}b^{\mu}\lambda^j = \sum_{j=0}^{2n}\sum_{\mu=(j-n)^+}^{n}\binom{n}{\mu}\binom{n+\mu}{j}a^{n-\mu}b^{\mu}\lambda^j, \end{aligned}$$

οπότε $[\lambda^{n-1}]H^n(1+\lambda) = \sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\binom{n+\mu}{\mu+1}a^{n-\mu}b^{\mu}$.

Εφαρμόζοντας τον Τύπο Αντιστροφής Lagrange, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D &= 1 + \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\binom{m+\mu}{\mu+1}(y-1)^{m-\mu}(1+xy(z-1))^{\mu}x^m \\ &= 1 + \sum_{m\geq 1}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\mu}\sum_{s=0}^{m-\mu}\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(-1)^{m-\mu-s+\nu-j}}{m}\binom{m}{\mu}\binom{m+\mu}{\mu+1}\binom{\mu}{\nu}\binom{m-\mu}{s}\binom{\nu}{j}x^{m+\nu}y^{s+\nu}z^j. \end{aligned}$$

Θέτοντας $n = m+\nu$ και $i = s+\nu$, προκύπτει ότι

$$D = 1 + \sum_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{\nu=j}^{n-i}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu-\mu}}{n-\nu}\binom{n-\nu}{\mu}\binom{n+\mu-\nu}{\mu+1}\binom{\mu}{\nu}\binom{n-\nu-\mu}{i-\nu}\binom{\nu}{j}x^n y^i z^j,$$

οπότε

$$[x^n y^i z^j]D = \sum_{\nu=j}^{n-i}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu-\mu}}{n-\nu}\binom{n-\nu}{\mu}\binom{n+\mu-\nu}{\mu+1}\binom{\mu}{\nu}\binom{n-\nu-\mu}{i-\nu}\binom{\nu}{j}.$$

Το τελευταίο διπλό άθροισμα απλοποιείται με τη βοήθεια της ταυτότητας $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$, ως εξής:

$$\begin{aligned}
[x^n y^i z^j]D &= \sum_{\nu=j}^{n-i}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu-\mu}}{n-\nu}\binom{n-\nu}{\mu}\binom{\mu}{\nu}\binom{n+\mu-\nu}{\mu+1}\binom{n-\nu-\mu}{i-\nu}\binom{\nu}{j}\\
&= \sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{\nu}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}(-1)^{\mu}\binom{n-2\nu}{\mu-\nu}\binom{n+\mu-\nu}{\mu+1}\binom{n-\nu-\mu}{i-\nu}\\
&= \sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{\nu}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}(-1)^{\mu}\binom{n-2\nu}{n-\nu-\mu}\binom{n-\nu-\mu}{i-\nu}\binom{n+\mu-\nu}{\mu+1}\\
&= \sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu+1}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{\nu}\binom{n-2\nu}{i-\nu}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}(-1)^{\mu+1}\binom{n-\nu-i}{n-\mu-i}\binom{n-\nu+\mu}{\mu+1}\\
&= \sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{n-i-j+\nu+1}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{\nu}\binom{n-2\nu}{i-\nu}\sum_{\mu=\nu}^{n-i}\binom{n-\nu-i}{n-\mu-i}\binom{\nu-n}{\mu+1}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την εξής παραλλαγή της συνέλιξης Vandermonde:[6]

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\binom{x}{k+R}=\binom{N+x}{N+R},$$

έχουμε ότι

$$\sum_{\mu=\nu}^{n-i}\binom{n-\nu-i}{n-\mu-i}\binom{\nu-n}{\mu+1}=\sum_{k=0}^{n-\nu-i}\binom{n-\nu-i}{k}\binom{\nu-n}{\nu+1+k}=\binom{n-i-\nu+\nu-n}{n-i-\nu+\nu+1}=\binom{-i}{n-i+1}=(-1)^{n-i+1}\binom{n}{i-1},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
[x^n y^i z^j]D &= \binom{n}{i-1}\sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{\nu-j}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{\nu}\binom{n-2\nu}{i-\nu}=\binom{n}{i-1}\sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{\nu-j}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{n-2\nu}\binom{n-2\nu}{i-\nu}\\
&= \binom{n}{i-1}\sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{\nu-j}}{n-\nu}\binom{\nu}{j}\binom{n-\nu}{i-\nu}\binom{n-i}{\nu}=\binom{n}{i-1}\binom{n-i}{j}\sum_{\nu=j}^{n-i}\frac{(-1)^{\nu-j}}{n-\nu}\binom{n-i-j}{\nu-j}\binom{n-\nu}{n-i}\\
&= \frac{1}{n-i}\binom{n}{i-1}\binom{n-i}{j}\sum_{\nu=j}^{n-i}(-1)^{\nu-j}\binom{n-i-j}{\nu-j}\binom{n-\nu-1}{n-i-1}\\
&= \frac{1}{n-i}\binom{n}{i-1}\binom{n-i}{j}\sum_{k=0}^{n-i-j}(-1)^{k}\binom{n-i-j}{k}\binom{n-j-k-1}{n-i-1}.
\end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την ακόλουθη ταυτότητα:[7]

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\binom{x-k}{R}=\binom{x-N}{R-N},$$

προκύπτει ότι $[x^n y^i z^j]D=\frac{1}{n-i}\binom{n}{i-1}\binom{n-i}{j}\binom{i-1}{j-1}$. □

[6] Βλ. ταυτότητα (3.20) στο [26].
[7] Βλ. ταυτότητα (3.49) στο [26].

Πρόταση 5.3. *Το πλήθος $c_{n,k,r}$, $n \geq k+r+1$, των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n, με k μη αριστερές μη τελικές κορυφές και r δεξιές κορυφές ισούται με*

$$c_{n,k,0} = \binom{n-1}{k}$$

και

$$c_{n,k,r} = \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{1}{r}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-k-i-1}{r-1}, \quad r \geq 1.$$

Απόδειξη. Για $r = 0$, το αποτέλεσμα είναι προφανές, ενώ για $r \geq 1$, βάσει της Πρότασης 5.1 και του Λήμματος 5.2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
c_{n,k,r} &= \sum_{\beta \in \mathcal{D}_{n-k}} |\theta(\beta,k,r)| = \sum_{i=1}^{n-k}\sum_{j=1}^{r}\binom{n-k-i-j}{r-j}\binom{i+k-1}{k-r} d_{n-k,i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n-k-i}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\sum_{j=1}^{r}\binom{n-k-i-j}{r-j}\binom{n-k-i}{j}\binom{i-1}{j-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n-k-i}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{i-1}{j}\binom{n-k-i}{j+1}\binom{n-k-i-1-j}{r-1-j}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα:[8]

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{-x+j-1}{k+r}\binom{x}{j-r-k} = (-1)^r\binom{j+n}{j-r}\binom{x}{j},$$

για $r = 1$ και $m = j-1$, και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(-1)^m$, λαμβάνουμε την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{m-k}\binom{n}{k}\binom{m-x}{k+1}\binom{x}{m-k} = (-1)^{m+1}\binom{m+n+1}{m}\binom{x}{m+1},$$

η οποία, βάσει της ιδιότητας $(-1)^k\binom{r}{k} = \binom{k-r-1}{k}$, γράφεται ισοδύναμα ως

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m-x}{k+1}\binom{m-x-k-1}{m-k} = \binom{m+n+1}{m}\binom{m-x}{m+1}.$$

Θέτοντας $m - x = a + 1$, προκύπτει η ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{a+1}{k+1}\binom{a-k}{m-k} = \binom{m+n+1}{m}\binom{a+1}{m+1},$$

η οποία, αν εφαρμοστεί για $a = n-k-i-1$, $m = r-1$, $n = i-1$ και $k = j$, δίνει

$$\sum_{j=0}^{r-1}\binom{i-1}{j}\binom{n-k-i}{j+1}\binom{n-k-i-1-j}{r-1-j} = \binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-k-i}{r}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
c_{n,k,r} &= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n-k-i}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-k-i}{r} \\
&= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n-k}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-k-i-1}{r-1}.
\end{aligned}$$

□

[8] Βλ. ταυτότητα (6.15) στο [26].

Πόρισμα 5.4. *Το πλήθος των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με r δεξιές κορυφές, όπου $r \geq 1$, (αντ. με k μη αριστερές μη τελικές κορυφές) ισούται με*

$$\frac{1}{r}\sum_{j=r+1}^{n-1}\binom{j-1}{r-1}\binom{n-j-1}{r-1}\sum_{i=1}^{j-r}\binom{j-r}{i}\binom{n-j+i}{i-1}$$

$$\left(\text{αντ. } \binom{n-1}{k}+\sum_{i=1}^{n-k-1}\frac{1}{n-k-i}\binom{n-k}{i-1}\binom{i+k-1}{i}\binom{n-i-1}{k}\right).$$

Απόδειξη. Το πρώτο αποτέλεσμα προκύπτει από την Πρόταση 5.3, αθροίζοντας του όρους $c_{n,k,r}$ ως προς τη μεταβλητή k, οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n-r-1} c_{n,k,r} &= \frac{1}{r}\sum_{k=r}^{n-r-1}\sum_{i=1}^{n-k}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-k-i-1}{r-1} \\
&\overset{j=k+i}{=} \frac{1}{r}\sum_{j=r+1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-r}\binom{j-1}{i+r-1}\binom{n-j+i}{i-1}\binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-j-1}{r-1} \\
&= \frac{1}{r}\sum_{j=r+1}^{n-1}\binom{j-1}{r-1}\binom{n-j-1}{r-1}\sum_{i=1}^{j-r}\binom{j-r}{i}\binom{n-j+i}{i-1}.
\end{aligned}$$

Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει από την Πρόταση 5.3, αθροίζοντας του όρους $c_{n,k,r}$ ως προς τη μεταβλητή r, οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\min\{k,n-k-1\}} c_{n,k,r} = \\
&=\binom{n-1}{k}+\sum_{r=1}^{\min\{k,n-k-1\}}\sum_{i=1}^{n-k-1}\frac{1}{r}\binom{i+k-1}{k-r}\binom{n-k}{i-1}\binom{r+i-1}{r-1}\binom{n-k-i-1}{r-1} \\
&=\binom{n-1}{k}+\sum_{i=1}^{n-k-1}\binom{n-k}{i-1}\binom{i+k-1}{i}\sum_{r=1}^{\min\{k,n-k-1\}}\frac{1}{r}\binom{k-1}{r-1}\binom{n-k-i-1}{r-1} \\
&=\binom{n-1}{k}+\sum_{i=1}^{n-k-1}\binom{n-k}{i-1}\binom{i+k-1}{i}\frac{1}{k(n-k-i)}\sum_{r=1}^{\min\{k,n-k-1\}} r\binom{k}{r}\binom{n-k-i}{r}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα:[9]

$$\sum_{r=0}^{k} r\binom{k}{r}\binom{x}{r} = k\binom{x+k-1}{k}$$

για $x = n-k-i$, προκύπτει η σχέση

$$\sum_{r=1}^{\min\{k,n-k-1\}} r\binom{k}{r}\binom{n-k-i}{r} = k\binom{n-i-1}{k},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο. □

[9] Βλ. ταυτότητα (3.30) στο [26].

5.4.2 Το σύνολο $\phi(\beta, k)$

Για $k \geq 0$, ορίζουμε $\phi(\varepsilon, k) = \{(\mathrm{ud})^k\}$.

Έστω $\beta \in \mathcal{D}^*$ και έστω $k \geq |\beta|_{\mathrm{duu}} + 1$. Τότε, το β διασπάται σύμφωνα με τη διάσπαση της πρώτης ανάβασης ως

$$\beta = \mathrm{u}^h \mathrm{d}\beta_1 \mathrm{d}\beta_2 \cdots \mathrm{d}\beta_h, \qquad \beta_j \in \mathcal{D}, \quad j \in [h]. \tag{5.7}$$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε κάθε μονοπάτι $\alpha \in \phi(\beta, k)$, επιλέγουμε:

1) Έναν ακέραιο λ, με $1 \leq \lambda \leq k - |\beta|_{\mathrm{duu}}$.

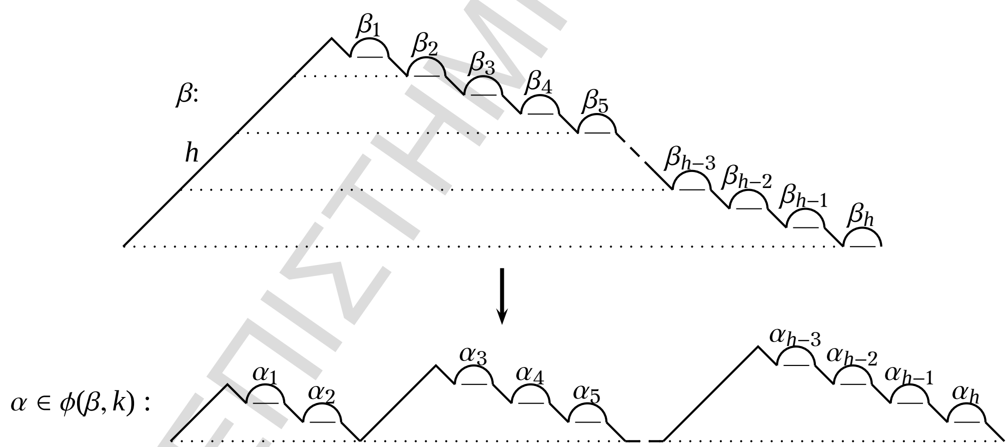
2) Μια ακέραια λύση της εξίσωσης $\sum_{j=1}^{h} k_j = k - \lambda$, όπου $k_j \geq |\beta_j|_{\mathrm{uud}}$ και $k_j = 0$, όταν $\beta_j = \varepsilon$.

3) Μια ακολουθία $(h_\nu)_{\nu \in [0,\lambda]}$, με $0 = h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_\lambda = h$.

Σημειώνεται ότι είναι $\sum_{j=1}^{h} |\beta_j|_{\mathrm{uud}} = |\beta|_{\mathrm{duu}}$, άρα η ανισότητα 1) εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης 2).

Κάθε β_j αντικαθίσταται από κάποιο $\alpha_j \in \theta(\beta_j, k_j)$. Κατόπιν, "κόβοντας" οριζόντια το μονοπάτι που προκύπτει σε λ τμήματα, όπως υποδεικνύει η ακολουθία (h_ν), σχηματίζονται οι πρώτοι παράγοντες του α (βλ. Σχ. 5.2). Πιο συγκεκριμένα, είναι

$$\alpha = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \left(\mathrm{u}^{h_\nu - h_{\nu-1}+1} \mathrm{d}\alpha_{h_{\nu-1}+1} \mathrm{d}\alpha_{h_{\nu-2}+1} \cdots \alpha_{h_\nu} \mathrm{d} \right), \qquad a_j \in \mathcal{D}, \quad j \in [h]. \tag{5.8}$$



Σχήμα 5.2: Οι διασπάσεις των μονοπατιών β και $\alpha \in \phi(\beta, k)$.

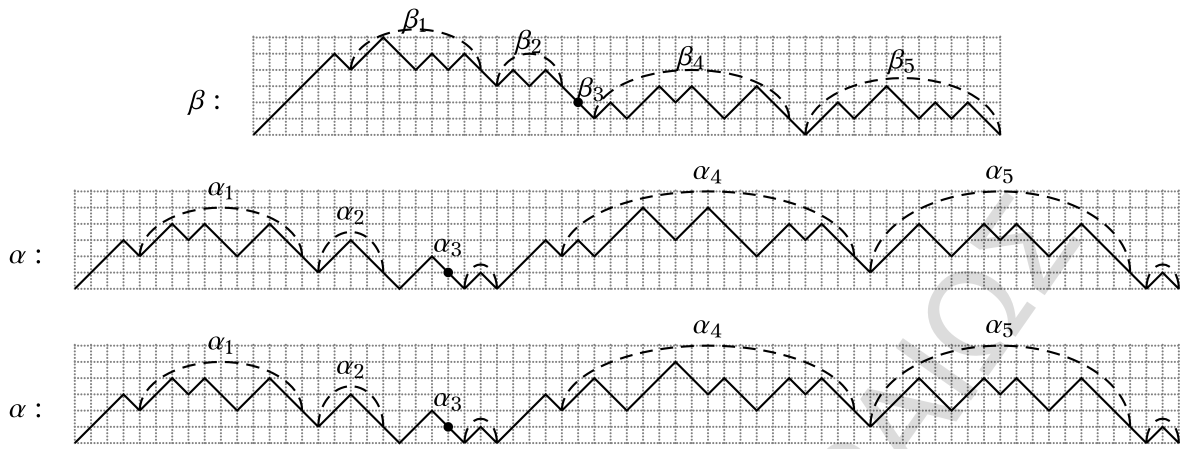
Σημειώνεται ότι οι πρώτοι παράγοντες του α που αντιστοιχούν σε ίσους όρους της ακολουθίας (h_ν) είναι τετριμμένοι (δηλαδή της μορφής ud).

Ως παράδειγμα, θεωρούμε το μονοπάτι β του Σχ. 5.3, για το οποίο είναι $|\beta|_{\mathrm{duu}} = 5$ και $h = 5$. Επιπλέον, επιλέγουμε $k = 11$, $\lambda = 5$, $(h_\nu)_{\nu \in [0,\lambda]} = (0, 2, 3, 3, 5, 5)$ και $(k_j)_{j \in [h]} = (1, 0, 0, 3, 2)$. Τότε, το σύνολο $\phi(\beta, k)$ αποτελείται από δύο μονοπάτια, τα οποία φαίνονται στο Σχ. 5.3. Πιο συκεκριμένα, εφαρμόζοντας την κατασκευή θ, όπως περιγράφτηκε νωρίτερα, βρίσκουμε ότι

$\alpha_1 \in \theta(\beta_1, 1) = \{$ $\}$, $\alpha_2 \in \theta(\beta_2, 0) = \{$ $\}$, $\alpha_3 \in \theta(\beta_3, 0) = \{\varepsilon\}$,

$\alpha_4 \in \theta(\beta_4, 3) = \{$, $\}$,

$\alpha_5 \in \theta(\beta_5, 2) = \{$ $\}$.



Σχήμα 5.3: Παράδειγμα κατασκευής των μονοπατιών $\alpha \in \phi(\beta, k)$.

Η αντίστροφη διαδικασία είναι προφανής. Δοθέντος ενός μονοπατιού $\alpha \in \mathcal{D}^*$, το οποίο δεν είναι ζ-μονοπάτι, βρίσκουμε τους πρώτους παράγοντές του και εκφράζουμε κάθε έναν από αυτούς σύμφωνα με τη διάσπαση της πρώτης ανάβασης, οπότε το α εκφράζεται στη μορφή του τύπου (5.8), βάσει του οποίου προσδιορίζονται τα μονοπάτια α_i, $i \in [h]$. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την αντίστροφη διαδικασία της θ, βρίσκουμε τα μονοπάτια β_i, με $\alpha_i \in \theta(\beta_i, k_i)$, από τα οποία ανακατασκευάζουμε το β, σύμφωνα με τον τύπο (5.7).

Πρόταση 5.5. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

i) *Κάθε μονοπάτι του συνόλου $\phi(\beta, k)$ έχει ακριβώς k μη αριστερές κορυφές και ημιμήκος $|\beta|_{\mathrm{u}} + k$, για κάθε $\beta \in \mathcal{D}$.*

ii) *Για κάθε μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με k μη αριστερές κορυφές, υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\beta \in \mathcal{D}_{n-k}$, τέτοιο ώστε $\alpha \in \phi(\beta, k)$.*

iii) $|\phi(\beta, k)| = \binom{|\beta|_{\mathrm{u}} + k - |\beta|_{\mathrm{duu}} - 1}{|\beta|_{\mathrm{u}}}$, *για κάθε $\beta \in \mathcal{D}$.*

Απόδειξη. *i*) Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1 *i*), κάθε α_j, $j \in [h]$, έχει ακριβώς k_j μη αριστερές μη τελικές κορυφές. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε μη αριστερή κορυφή του α αντιστοιχεί είτε στην πρώτη κορυφή ενός πρώτου παράγοντα του α είτε σε μια μη αριστερή μη τελική κορυφή κάποιου β_j, προκύπτει ότι το α έχει ακριβώς k μη αριστερές κορυφές.

Για το ημιμήκος του α, βάσει της Πρότασης 5.1 *i*), από τη σχέση (5.8), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\alpha|_{\mathrm{u}} &= \sum_{\nu=1}^{\lambda} \left(h_\nu - h_{\nu-1} + 1 + \sum_{j=h_{\nu-1}+1}^{h_\nu} |\alpha_j|_{\mathrm{u}} \right) \\
&= h + \lambda + \sum_{j=1}^{h} (|\beta_j|_{\mathrm{u}} + k_j) \\
&= h + \lambda + |\beta|_{\mathrm{u}} - h + k - \lambda \\
&= |\beta|_{\mathrm{u}} + k.
\end{aligned}$$

ii) Προκύπτει άμεσα από την κατασκευή του συνόλου $\phi(\beta, k)$ και από το *i*).

iii) Όταν το β διασπάται στη μορφή (5.7), κάθε κενό β_j αντικαθίσταται από το $\alpha_j = \varepsilon$ και η αντίστοιχη τιμή του k_j είναι μηδέν. Επομένως, για την απαρίθμηση αρκεί να ληφθούν υπόψη μόνο τα μη κενά β_j. Για το σκοπό αυτό, θέτουμε $J = \{j \in [h] : \beta_j \neq \varepsilon\}$. Τότε, για δεδομένη τιμή του λ και για δεδομένη ακολουθία (h_ν), το πλήθος των μονοπατιών που παράγονται από το β, βάσει της Πρότασης 5.1 *ii*) και της ταυτότητας (5.6), ισούται με

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\sum_{j\in J} k_j=k-\lambda\\ k_j\geq |b_j|_{\mathrm{uud}}}} \prod_{j\in J} |\theta(\beta_j,k_j)| &= \sum_{\substack{\sum_{j\in J} k_j=k-\lambda\\ k_j\geq |b_j|_{\mathrm{uud}}}} \prod_{j\in J} \binom{|\beta_j|_{\mathrm{u}}+k_j-|\beta_j|_{\mathrm{uud}}-1}{k_j-|\beta_j|_{\mathrm{uud}}}\\ &= \binom{\sum_{j\in J}(|\beta_j|_{\mathrm{u}}-1)+|J|+k-\lambda-\sum_{j\in J}|\beta_j|_{\mathrm{uud}}-1}{k-\lambda-\sum_{j\in J}|\beta_j|_{\mathrm{uud}}}\\ &= \binom{|\beta|_{\mathrm{u}}-h+k-\lambda-|\beta|_{\mathrm{duu}}-1}{k-\lambda-|\beta|_{\mathrm{duu}}}.\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι το πλήθος των ακολουθιών (h_ν) είναι ίσο με $\binom{\lambda+h-1}{\lambda-1}$, θέτοντας $i = \lambda - 1$ και $m = k - |\beta|_{\mathrm{duu}} - 1$, έπεται ότι

$$|\phi(\beta,k)| = \sum_{i=0}^{m}\binom{h+i}{i}\binom{|\beta|_{\mathrm{u}}-h-1+m-i}{m-i} \overset{10}{=} \binom{|\beta|_{\mathrm{u}}+m}{m}.$$

□

Κατόπιν τούτων, από τους ισχυρισμούς *i*) και *ii*) της Πρότασης 1.9, έπεται ότι η οικογένεια $(\phi(\beta,k))_{\beta\in\mathcal{D}_{n-k}}$, με $n \geq k \geq 1$ και $|\beta|_{\mathrm{duu}} \leq k-1$, αποτελεί διαμέριση του συνόλου $\mathcal{D}_{n,k}$, οπότε, χρησιμοποιώντας και τον ισχυρισμό *iii*), προκύπτει ο τύπος (5.5).

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, επεκτείνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα για την περίπτωση που το μονοπάτι α είναι ένα πρόθεμα Dyck. Ένα πρόθεμα Dyck α ύψους h διασπάται ως

$$\alpha = \alpha_1 \mathrm{u} \alpha_2 \cdots \mathrm{u} \alpha_{h+1}, \qquad \alpha_s \in \mathcal{D}, \quad s \in [h+1].$$

Ονομάζουμε τα μονοπάτια α_s *συνιστώσες* του α. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\mathcal{D}^{(h)}_{n,k}$, $n \geq h+k$, το σύνολο των προθεμάτων Dyck ύψους h με n ανόδους και k μη αριστερές κορυφές. Προφανώς, είναι $\mathcal{D}^{(h)}_{h,0} = \{\mathrm{u}^h\}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο εκφράζει το πλήθος των προθεμάτων Dyck συναρτήσει των γενικευμένων αριθμών Touchard,[11] αποτελεί γενίκευση του τύπου (5.5).

Πρόταση 5.6. *Ο πληθάριθμος του συνόλου $\mathcal{D}^{(h)}_{n,k}$ των προθεμάτων Dyck ύψους h με n ανόδους και k μη αριστερές κορυφές δίνεται από τον τύπο:*

$$|\mathcal{D}^{(h)}_{n,k}| = \sum_{s=0}^{h}\binom{h+1}{s+1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\binom{n-s-j-1}{n-k} b_{n-k-h,j,s},$$

όπου

$$b_{n,j,s} = \binom{n-1}{2j+s} C^{(s+1)}_{j} 2^{n-2j-s-1} = \binom{n-1}{2j+s}\frac{s+1}{2j+s+1}\binom{2j+s+1}{j}2^{n-2j-s-1}.$$

Απόδειξη. Το πλήθος των μη αριστερών κορυφών του μονοπατιού $\alpha \in \mathcal{D}^{(h)}_{n,k}$ είναι το άθροισμα των μη αριστερών κορυφών των συνιστωσών του. Επομένως, για $n > h$, έχουμε ότι $\alpha \in \mathcal{D}^{(h)}_{n,k}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $((\beta_s,k_s))_{s\in[h+1]}$, με $(\beta_s,k_s) \in \mathcal{D}\times\mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\alpha_s \in \phi(\beta_s,k_s)$, για κάθε $s \in [h+1]$, $\sum_{s=1}^{h+1} k_s = k$ και $\sum_{s=1}^{h+1}|\beta_s|_{\mathrm{u}} = n-k-h$.

[10] Βάσει της συνέλιξης Vandermonde $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$.

[11] Βλ. σελ. 33.

Κατόπιν τούτων, διαμερίζοντας το σύνολο $\mathcal{D}_{n,k}^{(h)}$ ως προς την παράμετρο "πλήθος κενών συνιστωσών", σύμφωνα με την Πρόταση 1.9 *iii*) και την ταυτότητα (5.6), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}_{n,k}^{(h)}| &= \sum_{i=1}^{h+1}\binom{h+1}{i}\sum_{\substack{\beta_s\in\mathcal{D}, s\in[i]\\ \sum_{s=1}^{i}|\beta_s|_{\mathrm{u}}=n-k-h}}\ \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_i=k\\ k_s\geq|\beta_s|_{\mathrm{duu}}+1}}\prod_{s=1}^{i}|\phi(\beta_s,k_s)|\\ &= \sum_{i=1}^{h+1}\binom{h+1}{i}\sum_{\substack{\beta_s\in\mathcal{D}, s\in[i]\\ \sum_{s=1}^{i}|\beta_s|_{\mathrm{u}}=n-k-h}}\binom{n-h-\sum_{s=1}^{i}|\beta_s|_{\mathrm{duu}}-1}{n-k-h+i-1}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, διαμερίζοντας το παραπάνω σύνολο άθροισης ως προς την παράμετρο $j = \sum_{s=1}^{i}|\beta_s|_{\mathrm{duu}}$, έχουμε ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}^{(h)}| = \sum_{i=1}^{h+1}\binom{h+1}{i}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\binom{n-h-j-1}{n-k-h+i-1}[x^{n-k-h}y^j]B^i.$$

Αντικαθιστώντας βάσει του τύπου (1.12), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}_{n,k}^{(h)}| &= \sum_{i=1}^{h+1}\binom{h+1}{i}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\binom{n-h-j-1}{n-k-h+i-1}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i}{s+1}b_{n-k-h,j,s}\\ &= \sum_{s=0}^{h}\sum_{i=s+1}^{h+1}\binom{h+1}{i}\binom{i}{s+1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\binom{n-h-j-1}{n-k-h+i-1}b_{n-k-h,j,s}\\ &= \sum_{s=0}^{h}\binom{h+1}{s+1}\sum_{i=s+1}^{h+1}\binom{h-s}{i-s-1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\binom{n-h-j-1}{n-k-h+i-1}b_{n-k-h,j,s}\\ &\overset{\mu=h-i+1}{=} \sum_{s=0}^{h}\binom{h+1}{s+1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\left(\sum_{\mu=0}^{h-s}\binom{h-s}{h-s-\mu}\binom{n-h-j-1}{n-k-\mu}\right)b_{n-k-h,j,s}\\ &\overset{12}{=} \sum_{s=0}^{h}\binom{h+1}{s+1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-k-h}{2}\rfloor}\binom{n-s-j-1}{n-k}b_{n-k-h,j,s}.\end{aligned}$$

□

[12] Βάσει της συνέλιξης Vandermonde $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}=\binom{x+y}{n}$.

5.5 Συνολικός αριθμός κορυφών

Ο συνολικός αριθμός των κορυφών όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n έχει υπολογιστεί στην εργασία [19] συνδυαστικά, με τη βοήθεια μίας απεικόνισης. Στην παράγραφο αυτή δίνεται με απλούστερο τρόπο μια παραλλαγή της απεικόνισης αυτής, προκειμένου να υπολογιστεί ο συνολικός αριθμός κορυφών για κάθε μια από τις κατηγορίες που μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό.

Έστω $\mathcal{P}_n$ το σύνολο όλων των κορυφών των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n, και έστω $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 0}\mathcal{P}_n$. Το σύνολο $\mathcal{P}_n$ μπορεί να οριστεί ως

$$\mathcal{P}_n = \{(\alpha, i), \alpha \in \mathcal{D}_n, i \in h(\alpha)\},$$

όπου $h(\alpha)$ είναι το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν στις θέσεις των κορυφών στο α, δηλαδή, $i \in h(\alpha)$ αν και μόνο αν υπάρχουν μονοπάτια β, γ, με $|\beta| = i - 1$, τέτοια ώστε $\alpha = \beta \mathrm{ud}\gamma$.

Θεωρώντας μια κορυφή $P = (\alpha, i)$, τότε το μονοπάτι Dyck α διασπάται με βάση την τελευταία κάθοδο της κατάβασης που ακολουθεί την κορυφή P, ως εξής:

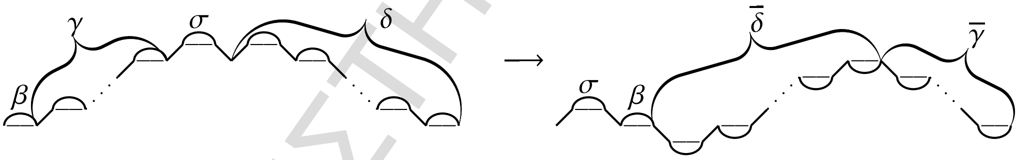
$$\alpha = \beta\gamma \mathrm{u}\sigma \mathrm{d}\delta,$$

όπου d είναι η κάθοδος αυτή, u είναι η συζυγής άνοδος της καθόδου αυτής, $\beta \in \mathcal{D}$, σ είναι ένα μονοπάτι Dyck με την P να είναι η τελευταία του κορυφή, γ είναι ένα πρόθεμα Dyck χωρίς επιστροφές και δ είναι ένα επίθεμα Dyck που ξεκινά με άνοδο, βάθους ίσου με το ύψος του γ.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}_{\mathrm{u}}$, όπου $\mathcal{G}_{\mathrm{u}}$ είναι το σύνολο των μονοπατιών Grand-Dyck που ξεκινούν με άνοδο, ως εξής:

$$\psi(\alpha, i) = \mathrm{u}\sigma \mathrm{d}\beta\overline{\delta}\overline{\gamma},$$

όπου $\alpha = \beta\gamma \mathrm{u}\sigma \mathrm{d}\delta$, σύμφωνα με την προηγούμενη διάσπαση (βλ. Σχ. 5.4).



$\alpha \in \mathcal{D}$ $\qquad$ $\psi(\alpha, i) \in \mathcal{G}_{\mathrm{u}}$

Σχήμα 5.4: Η απεικόνιση $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}_{\mathrm{u}}$.

Προφανώς, η απεικόνιση ψ είναι επί του συνόλου $\mathcal{G}_{\mathrm{u}}$, διότι το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι εκφρασμένο βάσει διάσπασης των στοιχείων του συνόλου αυτού. Πράγματι, το $\mathrm{u}\sigma \mathrm{d}\beta$ είναι ένα μη κενό μονοπάτι Dyck, το ύψος του γ ισούται με το βάθος του δ, ώστε το $\overline{\delta}\overline{\gamma}$ να είναι οποιοδήποτε μονοπάτι Grand-Dyck, το οποίο ξεκινά με κάθοδο και έχει διασπαστεί στο δεξιότερο υψηλότερο σημείο του (το σημείο μεταξύ των $\overline{\delta}$ και $\overline{\gamma}$).

Επιπλέον, η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη. Πράγματι, αν $\alpha' \in \mathcal{G}_{\mathrm{u}}$, τότε το α' διασπάται ως $\alpha' = \mathrm{u}\sigma \mathrm{d}\beta\overline{\delta}\overline{\gamma}$, όπου το τμήμα $\overline{\delta}\overline{\gamma}$ ξεκινά στο πρώτο βήμα του α' κάτω από τον άξονα x, ενώ το σημείο μεταξύ των $\overline{\delta}$ και $\overline{\gamma}$ είναι το δεξιότερο υψηλότερο σημείο του μονοπατιού $\overline{\delta}\overline{\gamma}$.

Κατόπιν τούτων, η απεικόνιση ψ είναι αμφιμονοσήμαντη και, επιπλέον, διατηρεί το μήκος του μονοπατιού. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$|\mathcal{P}_n| = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n}.$$

Θεωρώντας τον περιορισμό της ψ στο σύνολο των μη αριστερών κορυφών, έχουμε ότι $\sigma = \mathrm{u}^k\mathrm{d}^k$, $0 \leq k \leq n-1$, ώστε $\alpha' = \psi(\alpha, i) = \mathrm{u}^{k+1}\mathrm{d}^{k+1}\beta\overline{\delta}\overline{\gamma}$ και το $\beta\overline{\delta}\overline{\gamma}$ είναι ένα οποιοδήποτε μονοπάτι

Grand-Dyck ημιμήκους $j = n - k - 1$. Επομένως, ο συνολικός αριθμός μη αριστερών κορυφών στο $\mathcal{D}_n$ ισούται με

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} (r(\alpha) + c(\alpha)) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2j}{j}. \tag{5.9}$$

Ομοίως, θεωρώντας τον περιορισμό της ψ στο σύνολο των ισοσκελών κορυφών, έχουμε ότι $\sigma = \mathrm{u}^k \mathrm{d}^k$, $0 \le k \le n-1$, και το γ είναι κενό ή τελειώνει με κάθοδο, ώστε $\alpha' = \psi(\alpha, i) = \mathrm{u}^{k+1}\mathrm{d}^{k+1}\beta\overline{\delta}\overline{\gamma}$ και το $\beta\overline{\delta}\overline{\gamma}$ είναι ένα μονοπάτι Dyck ή ένα μονοπάτι Grand-Dyck που τελειώνει με άνοδο. Επομένως, θέτοντας ξανά $j = n - k - 1$, προκύπτει ότι ο συνολικός αριθμός ισοσκελών κορυφών στο $\mathcal{D}_n$ ισούται με

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} c(\alpha) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2}\binom{2j}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\left(C_j + \frac{j+1}{2}C_j\right) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j+3}{2} C_j. \tag{5.10}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, έπεται ότι

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} r(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{2j}{j} - \frac{j+3}{2}C_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j-1}{2} C_j. \tag{5.11}$$

Κεφάλαιο 6

Στατιστικά μεγέθη

6.1 Μέση τιμή και διακύμανση παραμέτρου

Έστω ένα σύνολο $\mathcal{X}$ συνδυαστικών αντικειμένων και έστω μια βασική παράμετρος $l : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$, η οποία διαμερίζει το $\mathcal{X}$ σε κλάσεις με πεπερασμένο πληθάριθμο. Πιο συγκεκριμένα, η οικογένεια $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με

$$\mathcal{X}_n = \{\alpha \in \mathcal{X} : l(\alpha) = n\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

και $\mathcal{X}_n \neq \varnothing$, είναι η διαμέριση του $\mathcal{X}$ που ορίζεται από την παράμετρο l.

Αν $p : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ είναι μια δευτερεύουσα παράμετρος και $p_n : \mathcal{X}_n \to \mathbb{N}$ είναι ο περιορισμός της p στο $\mathcal{X}_n$, τότε η μέση τιμή της p_n συμβολίζεται με $E[p_n]$ ή $E_n[p]$ και ορίζεται κατά τα γνωστά ως

$$E_n[p] = \frac{1}{|\mathcal{X}_n|} \sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p(\alpha).$$

Η διακύμανση της p_n συμβολίζεται με $V[p_n]$ ή $V_n[p]$ και ορίζεται κατά τα γνωστά ως

$$V_n[p] = E_n[(p - E_n[p])^2]$$

και λόγω γραμμικότητας του τελεστή E_n (εύκολα αποδεικνύεται ότι $E_n[\kappa + \lambda p] = \kappa + \lambda E_n[p]$ και $E_n[\kappa] = \kappa$, για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$), προκύπτει ο απλούστερος τύπος

$$\begin{aligned} V_n[p] &= E_n[(p - E_n[p])^2] = E_n[p^2 - 2pE_n[p] + E_n^2[p]] = E_n[p^2] - 2E_n[p]E_n[p] + E_n^2[p] \\ &= E_n[p^2] - E_n^2[p] = \frac{1}{|\mathcal{X}_n|} \sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p(\alpha)^2 - E_n^2[p]. \end{aligned}$$

Στα επόμενα, η μέση τιμή και η διακύμανση θα συμβολίζονται για απλότητα με E_n και V_n, όταν είναι σαφές ποιά είναι η υπό εξέταση παράμετρος p.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου p είναι δυνατό να υπολογιστούν μέσω της γεννήτριας συνάρτησης του συνόλου $\mathcal{X}_n$. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F = F(x, y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} x^{l(\alpha)} y^{p(\alpha)},$$

τότε, παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή y, έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} p(\alpha) x^{l(\alpha)} y^{p(\alpha)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p(\alpha) x^n y^{p(\alpha)-1},$$

οπότε, θέτοντας $y = 1$, είναι

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p(\alpha)\right)x^n,$$

και άρα, τελικά προκύπτει ότι

$$E_n[p] = \frac{1}{|\mathcal{X}_n|}[x^n]\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1}. \tag{6.1}$$

Επιπλέον, η δεύτερη παράγωγος της F ως προς τη μεταβλητή y είναι ίση με

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} p(\alpha)(p(\alpha)-1)x^{l(\alpha)}y^{p(\alpha)-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p(\alpha)(p(\alpha)-1)x^n y^{p(\alpha)-2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p^2(\alpha)x^n y^{p(\alpha)-2} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p(\alpha)x^n y^{p(\alpha)-2},\end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας $y = 1$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathcal{X}_n} p^2(\alpha)x^n = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1},$$

και άρα, τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}V_n[p] &= \frac{1}{|\mathcal{X}_n|}[x^n]\left(\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1}\right) - E_n^2[p]\\ &= \frac{1}{|\mathcal{X}_n|}[x^n]\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} + E_n[p] - E_n^2[p]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

6.2 Ασυμπτωτικοί τύποι

6.2.1 Ασυμπτωτική ισοδυναμία

Ορισμός. *Αν για τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

τότε λέμε ότι οι ακολουθίες αυτές είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες και γράφουμε

$$a_n \sim b_n.$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η τιμή b_n αποτελεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση της τιμής a_n και αντίστροφα.

Από τις ιδιότητες του ορίου ακολουθίας, άμεσα προκύπτουν οι επόμενες ιδιότητες για τη σχέση ασυμπτωτικής ισοδυναμίας:

Αν για τις ακολουθίες $(a_n), (b_n), (A_n), (B_n)$ ισχύει ότι $a_n \sim A_n$ και $b_n \sim B_n$, τότε

1. $a_n b_n \sim A_n B_n$.
2. $\dfrac{a_n}{b_n} \sim \dfrac{A_n}{B_n}$.
3. $|a_n| + |b_n| \sim |A_n| + |B_n|$.

Πράγματι, οι δύο πρώτες είναι προφανείς, ενώ για την τρίτη αρκεί να δειχθεί όταν πρόκειται για ακολουθίες θετικών όρων. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{a_n+b_n}{A_n+B_n}-1 &= \frac{a_n+b_n-A_n-B_n}{A_n+B_n} = \frac{a_n-A_n}{A_n}\cdot\frac{A_n}{A_n+B_n}+\frac{b_n-B_n}{B_n}\cdot\frac{B_n}{A_n+B_n}\\ &= \left(\frac{a_n}{A_n}-1\right)\frac{A_n}{A_n+B_n}+\left(\frac{b_n}{B_n}-1\right)\frac{B_n}{A_n+B_n}.\end{aligned}$$

Κάθε ένας από τους δύο όρους του τελευταίου αθροίσματος έχει όριο ίσο με μηδέν[1], επομένως είναι $\lim\frac{a_n+b_n}{A_n+B_n}=1$.

Προφανώς, η τρίτη ιδιότητα γενικεύεται επαγωγικά, για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος προσθετέων.

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η επόμενη ασυμπτωτική εκτίμηση της τιμής του $n!$, γνωστή ως *τύπος του Stirling*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{6.3}$$

Επιπλέον, για κάθε $r\in\mathbb{R}$, είναι

$$\lim\frac{(n+r)^{n+r}}{n^{n+r}} = \lim\left(1+\frac{r}{n}\right)^r\lim\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r,$$

οπότε

$$(n+r)^{n+r} \sim e^r n^{n+r}. \tag{6.4}$$

Κατόπιν τούτων, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\binom{2n-c_1}{n-c_2} \sim \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}, \qquad c_1,c_2\in\mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\binom{2n-c_1}{n-c_2} &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2n-c_1)}}{\sqrt{2\pi(n-c_2)}\sqrt{2\pi(n-c_1+c_2)}}\cdot\frac{\left(\frac{2n-c_1}{e}\right)^{2n-c_1}}{\left(\frac{n-c_2}{e}\right)^{n-c_2}\left(\frac{n-c_1+c_2}{e}\right)^{n-c_1+c_2}}\\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{(2n-c_1)^{2n-c_1}}{(n-c_2)^{n-c_2}(n-c_1+c_2)^{n-c_1+c_2}}\\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{(2n)^{2n-c_1}}{n^{n-c_2}n^{n-c_1+c_2}}\cdot\frac{e^{-c_1}}{e^{-c_2}e^{c_2-c_1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot 2^{2n-c_1}\\ &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}.\end{aligned}$$

Θέτοντας $c_1=c_2=0$ στον τύπο (6.5), έχουμε ότι

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}. \tag{6.6}$$

Επομένως,

$$\binom{2n-c_1}{n-c_2} \sim \frac{nC_n}{2^{c_1}}. \tag{6.7}$$

[1]Επειδή οι $\frac{a_n}{A_n}-1$ και $\frac{b_n}{B_n}-1$ είναι μηδενικές, καθώς επίσης οι $\frac{A_n}{A_n+B_n}$ και $\frac{A_n}{A_n+B_n}$ είναι φραγμένες.

Θέτοντας $c_1 = -s$ και $c_2 = 0$ στον τύπο (6.7), έχουμε ότι

$$[x^n]C^s = \frac{s}{2n+s}\binom{2n+s}{n} \sim s2^{s-1}C_n. \tag{6.8}$$

Επιπλέον, από τον τύπο (6.7), προκύπτει ότι

$$\binom{2n-c_1}{n-c_2} - \binom{2n-c_1}{n-c_3} \sim (c_3-c_2)(c_3+c_2-c_1)\frac{C_n}{2^{c_1}}. \tag{6.9}$$

Απόδειξη της σχέσης (6.9). Αρκεί να δειχθεί όταν $c_3 > c_2$, αφού αν $c_2 = c_3$, τα δύο μέλη μηδενίζονται, ενώ αν $c_2 > c_3$, τότε πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με -1, αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση, με εναλλαγή των ρόλων των c_2, c_3.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\binom{2n-c_1}{n-c_2} - \binom{2n-c_1}{n-c_3} &= \binom{2n-c_1}{n-c_2}\left(1 - \frac{(n-c_3+1)\cdots(n-c_2)}{(n-c_1+c_2+1)\cdots(n-c_1+c_3)}\right)\\ &= \binom{2n-c_1}{n-c_2}\cdot\frac{B(n)-A(n)}{B(n)}\\ &\sim \frac{nC_n}{2^{c_1}}\cdot\frac{B(n)-A(n)}{B(n)},\end{aligned}$$

όπου $A(x) = (x-c_3+1)\cdots(x-c_2)$ και $B(x) = (x-c_1+c_2+1)\cdots(x-c_1+c_3)$. Επειδή τα πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ είναι βαθμού $c_3 - c_2$, με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1, το πολυώνυμο $B(x)-A(x)$ είναι βαθμού c_3-c_2-1. Για την εύρεση του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του, αρκεί να υπολογίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές στα $A(x)$ και $B(x)$. Για το $A(x)$, έχουμε ότι

$$[x^{c_3-c_2-1}]A(x) = [x^{c_3-c_2-1}]\prod_{i=1}^{c_3-c_2}(x-c_3+i) = \sum_{i=1}^{c_3-c_2}(i-c_3).$$

Ομοίως, για το $B(x)$, έχουμε ότι

$$[x^{c_3-c_2-1}]B(x) = [x^{c_3-c_2-1}]\prod_{i=1}^{c_3-c_2}(x-c_1+c_2+i) = \sum_{i=1}^{c_3-c_2}(i-c_1+c_2).$$

Επομένως, είναι

$$\begin{aligned}[x^{c_3-c_2-1}](B(x)-A(x)) &= \sum_{i=1}^{c_3-c_2}(i-c_1+c_2) - \sum_{i=1}^{c_3-c_2}(i-c_3) = \sum_{i=1}^{c_3-c_2}(c_3+c_2-c_1)\\ &= (c_3-c_2)(c_3+c_2-c_1).\end{aligned}$$

Έτσι, είναι

$$\frac{B(n)-A(n)}{B(n)} \sim \frac{(c_3-c_2)(c_3+c_2-c_1)}{n},$$

βάσει του οποίου προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Ιδιαίτερα χρήσιμη, ειδικά για την ασυμπτωτική εκτίμηση αθροισμάτων, είναι η ακόλουθη Πρόταση, γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό.

Πρόταση 6.1 (Stolz). *Αν για μια ακολουθία* (a_n) *και μια γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη ακολουθία θετικών όρων* (A_n) *υπάρχει στο* $\overline{\mathbb{R}}$ *το* $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n}$, *τότε είναι*

$$\lim \frac{a_n}{A_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n}.$$

Πόρισμα 6.2. *Έστω ακολουθία* (a_n). *Για* $c \in \mathbb{R}^*$, $a, m \in \mathbb{Z}$ *και* $b \geq 0$, *ισχύουν:*

i) *Αν* $a_{n+1} - a_n \sim cn^b C_n$, *τότε* $a_n \sim \dfrac{c}{3} n^b C_n$.

ii) *Αν* $a_n \sim cn^b C_n$, *τότε* $\displaystyle\sum_{k=a}^{n-m} a_k \sim \frac{c}{3 \cdot 4^{m-1}} n^b C_n$.

iii) *Αν* $a_n \sim cn^b C_n$ *και* $b > 1/2$, *τότε* $\displaystyle\sum_{k=a}^{n-m} 4^{n-k} a_k \sim \frac{2c}{2b-1} n^{b+1} C_n$.

Απόδειξη. i) Έστω $A_n = n^b C_n$. Τότε είναι

$$A_{n+1} - A_n = (n+1)^b C_{n+1} - n^b C_n = n^b C_n \left(\frac{(n+1)^b C_{n+1}}{n^b C_n} - 1 \right).$$

Όμως, επειδή $\lim \dfrac{C_{n+1}}{C_n} = \lim \dfrac{4n+2}{n+2} = 4$, έπεται ότι

$$\lim \frac{A_{n+1} - A_n}{n^b C_n} = \lim \left(\frac{(n+1)^b C_{n+1}}{n^b C_n} - 1 \right) = 4 - 1 = 3.$$

Επομένως, αν $a_{n+1} - a_n \sim cn^b C_n$, τότε

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{n^b C_n} \frac{n^b C_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{n^b C_n} \lim \frac{n^b C_n}{A_{n+1} - A_n} = c \cdot \frac{1}{3}.$$

Άρα, βάσει της Πρότασης 6.1, είναι $\lim \dfrac{a_n}{A_n} = \dfrac{c}{3}$, δηλαδή είναι $a_n \sim \dfrac{c}{3} A_n = \dfrac{c}{3} n^b C_n$.

ii) Έστω $a_n \sim cn^b C_n$ και έστω $b_n = \sum_{k=a}^{n-m} a_k$. Τότε, είναι

$$b_{n+1} - b_n = a_{n-m+1} \sim c(n-m+1)^b C_{n-m+1}.$$

Όμως, για $m > 0$ (ανάλογα προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα και για $m \leq 0$), έχουμε

$$C_{n-m+1} = \frac{C_{n-m+1}}{C_{n-m+2}} \frac{C_{n-m+2}}{C_{n-m+3}} \cdots \frac{C_{n-1}}{C_n} C_n \Rightarrow \lim \frac{C_{n-m+1}}{C_n} = \frac{1}{4^{m-1}} \Rightarrow C_{n-m+1} \sim \frac{C_n}{4^{m-1}}.$$

Επομένως, είναι $b_{n+1} - b_n \sim cn^b \dfrac{C_n}{4^{m-1}}$, οπότε, λαμβάνοντας υπόψη το *i)*, προκύπτει ότι $b_n \sim \dfrac{c}{3 \cdot 4^{m-1}} n^b C_n$.

iii) Έστω $b_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n-m} 4^{n-k} a_k$, οπότε $\dfrac{b_n}{4^n} = \displaystyle\sum_{k=a}^{n-m} \frac{a_k}{4^k}$. Θέτοντας $f_n = \dfrac{b_n}{4^n}$ και $g_n = \dfrac{a_n}{4^n}$, είναι $f_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n-m} g_k$, άρα

$$f_{n+1} - f_n = g_{n-m+1} \sim \frac{c(n-m+1)^b C_{n-m+1}}{4^{n-m+1}} \sim \frac{cn^b C_n}{4^n} \sim \frac{cn^b}{n\sqrt{\pi n}} = \frac{cn^{b-3/2}}{\sqrt{\pi}},$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim \frac{f_{n+1} - f_n}{n^{b-3/2}} = \frac{c}{\sqrt{\pi}}.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \lim \frac{f_{n+1} - f_n}{(n+1)^{b-1/2} - n^{b-1/2}} &= \lim \frac{f_{n+1} - f_n}{n^{b-3/2}} n^{b-3/2} \frac{(n+1)^{b-1/2} + n^{b-1/2}}{(n+1)^{2b-1} - n^{2b-1}} \\ &= \lim \frac{f_{n+1} - f_n}{n^{b-3/2}} \frac{1}{n} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-1/2} + 1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2b-1} - 1}. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim \dfrac{1/n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2b-1} - 1}$, θεωρώντας την αντίστοιχη πραγματική συνάρτηση και εφαρμόζοντας τον κανόνα de L' Hopital, έχουμε ότι

$$\lim \frac{1/n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2b-1} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2b-1} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1/x^2}{(2b-1)\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2b-2}(-1/x^2)} = \frac{1}{2b-1}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lim \frac{f_{n+1} - f_n}{(n+1)^{b-1/2} - n^{b-1/2}} &= \lim \frac{f_{n+1} - f_n}{n^{b-3/2}} \lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-1/2} + 1\right) \lim \frac{1/n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2b-1} - 1} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2b-1}.\end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 6.1, είναι

$$\lim \frac{f_n}{n^{b-1/2}} = \frac{2c}{(2b-1)\sqrt{\pi}},$$

δηλαδή $f_n \sim \dfrac{2cn^{b-1/2}}{(2b-1)\sqrt{\pi}} \Rightarrow b_n \sim \dfrac{2cn^{b-1/2}4^n}{(2b-1)\sqrt{\pi}} \Rightarrow b_n \sim \dfrac{2c}{2b-1} n^{b+1} C_n.$ □

Εφαρμογές:

1. Βάσει της σχέσης (6.7) και του Πορίσματος 6.2 *ii*), προκύπτει το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα:
$$\sum_{k=a}^{n-m} \binom{2k - c_1}{k - c_2} \sim \frac{nC_n}{3 \cdot 2^{2m+c_1-2}}. \tag{6.10}$$

2. Επίσης, βάσει της σχέσης (6.7) και του Πορίσματος 6.2 *iii*), προκύπτει η ακόλουθη σχέση:
$$\sum_{k=a}^{n-m} 4^{n-k} \binom{2k - c_1}{k - c_2} \sim \frac{n^2 C_n}{2^{c_1-1}}. \tag{6.11}$$

3. Τέλος, βάσει του Πορίσματος 6.2 *iii*), προκύπτουν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τους συντελεστές των γεννητριών συναρτήσεων $C^k G^\lambda$, για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη ότι
$$[x^n]C^k G^{\lambda+2} = \sum_{j=0}^{n} 4^{n-j} \left([x^j]C^k G^\lambda\right), \qquad \lambda \in \mathbb{N},$$
καθώς και ότι
$$[x^n]C^k G = \binom{2n+k}{n} \sim 2^k n C_n$$
και[2]
$$[x^n]C^k G^2 = 2^k 4^n - \sum_{j=1}^{k} \binom{2n+j}{n} 2^{k-j} \sim 2^k 4^n \sim 2^k \sqrt{\pi} n^{3/2} C_n,$$

[2]Βλ. σχέση (4.11).

προκύπτουν με επαγωγή ως προς το λ οι ακόλουθες σχέσεις:

$$[x^n]C^kG^{2\lambda+1} \sim \frac{2^{k+\lambda}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\lambda-1)}n^{\lambda+1}C_n, \qquad k,\lambda\in\mathbb{N}^* \tag{6.12}$$

και

$$[x^n]C^kG^{2\lambda} \sim \frac{2^k n^{\lambda+1/2}4^n}{(\lambda-1)!}, \qquad k,\lambda\in\mathbb{N}^*. \tag{6.13}$$

6.2.2 Κεφαλαίο Όμικρον

Ορισμός. *Αν για τις ακολουθίες $a, b : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$$

τότε γράφουμε $a_n = o(b_n)$.

Προφανώς, το σύνολο των μηδενικών ακολουθιών μπορεί να συμβολιστεί ως $o(1)$.
Η ασυμπτωτική ισοδυναμία εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + o(a_n).$$

Ορισμός. *Αν για τις ακολουθίες $a, b : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ υπάρχουν μια πραγματική σταθερά $c > 0$ και ένας φυσικός $n_0\in\mathbb{N}^*$, τέτοιοι ώστε*

$$|a_n| \le c|b_n|, \qquad \text{για κάθε } n \ge n_0,$$

τότε γράφουμε

$$a_n \in O(b_n) \qquad \text{ή} \qquad a_n = O(b_n), \quad n\to\infty \qquad \text{ή} \qquad a_n = O(b_n).$$

Προφανώς, το σύνολο των φραγμένων ακολουθιών μπορεί να συμβολιστεί ως $O(1)$.
Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και για την περίπτωση πραγματικών (ή και μιγαδικών) συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν $f, g/A \subseteq \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του A, τότε γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x\to x_0,$$

αν υπάρχουν σταθερές $\epsilon, c > 0$, ώστε $|x-x_0| < \epsilon \Rightarrow |f(x)| \le c|g(x)|$. Επίσης, για τις συναρτήσεις $f, g/[a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$, γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x\to+\infty,$$

αν υπάρχουν σταθερές $\epsilon, c > 0$, ώστε $x > \epsilon \Rightarrow |f(x)| \le c|g(x)|$.
Βάσει του ορισμού, αποδεικνύονται[3] οι επόμενες ιδιότητες:

Ιδιότητες

1. $a_n = O(a_n)$.
2. $cO(a_n) = O(a_n), \quad c\in\mathbb{R}^*$.
3. $O(O(a_n)) = O(a_n)$.

[3]Στις ιδιότητες 2-5, όπου ο συμβολισμός O εμφανίζεται και στα δύο μέλη, τα μέλη των ισοτήτων είναι σύνολα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το σύμβολο = εκφράζει ότι το πρώτο μέλος είναι υποσύνολο του δευτέρου, δηλαδή μπορεί να αντικατασταθεί από το σύμβολο $\subseteq$.

4. $O(a_n)O(b_n) = O(a_n b_n) = a_n O(b_n)$.

5. $O(a_n) + O(b_n) = O(|a_n| + |b_n|)$.

Πολλές χρήσιμες ιδιότητες, προκύπτουν από τη σύγκλιση δυναμοσειρών. Συγκεκριμένα, αν μια δυναμοσειρά $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ συγκλίνει στο $c_0 > 0$, για $x = x_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε, ως γνωστό, συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in [-|x_0|, |x_0|]$. Επομένως, είναι $A(x) = O(1)$, $x \to 0$, αφού

$$|A(x)| \leq \sum_{i\geq 0} |a_i||x|^i \leq \sum_{i\geq 0} |a_i||x_0|^i = c_0.$$

Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση, το άθροισμα $\sum_{i\geq m+1} a_i x^i$ επίσης συγκλίνει απολύτως, έστω στο $c_m > 0$, και μάλιστα είναι $\sum_{i\geq m+1} a_i x^i = O(x^{m+1})$. Πράγματι,

$$\left|\sum_{i\geq m+1} a_i x^i\right| \leq \sum_{i\geq m+1} |a_i||x|^i \leq |x|^{m+1} \sum_{i\geq m+1} |a_i||x_0|^{i-m-1} = \frac{c_m}{|x_0|^{m+1}}|x|^{m+1}.$$

Κατόπιν τούτων, για κάθε δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + O(x^{m+1}), \qquad x \to 0.$$

Η παραπάνω παράσταση ονομάζεται ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $A(x)$ και αντικαθιστώντας τη μεταβλητή x από κάποια μηδενική ακολουθία, ή γενικότερα από κάποια ακολουθία φραγμένη στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, προκύπτουν σημαντικές ιδιότητες του συμβολισμού O.

Εφαρμογές

1. Με τη βοήθεια της γεωμετρικής σειράς, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα, για $k \geq 1$:

$$\frac{a}{bn^k - c} = \frac{a}{bn^k}\frac{1}{1 - \frac{c}{bn^k}} = \frac{a}{bn^k}\sum_{i\geq 0}\left(\frac{c}{bn^k}\right)^i = \frac{a}{bn^k}\left(1 + O(n^{-k})\right) = \frac{a}{bn^k} + O(n^{-2k}).$$

2. $\left(1 + O(n^{-1})\right)^k = \left(1 + O(n^{-1})\right)$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}^*$.

   Πράγματι, για $k = 2$, είναι

$$\left(1 + O(n^{-1})\right)^2 = 1 + 2O(n^{-1}) + O(n^{-1})^2 = 1 + O(n^{-1}) + O(n^{-2}) = 1 + O(n^{-1}),$$

   οπότε το αποτέλεσμα γενικεύεται επαγωγικά για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Επιπλέον, για $k = -1$, είναι $(1 + O(n^{-1}))^{-1} = \{\frac{1}{1+f_n} : f_n = O(n^{-1})\}$, οπότε με τη βοήθεια της γεωμετρικής σειράς, έχουμε ότι

$$\frac{1}{1 + f_n} = 1 - O(f_n) = 1 + O(n^{-1}),$$

   οπότε

$$\left(1 + O(n^{-1})\right)^{-1} = 1 + O(n^{-1}).$$

   Επομένως, το αποτέλεσμα ισχύει για $k = -1$ και ως εκ τούτου γενικεύεται επαγωγικά και για αρνητικές ακέραιες δυνάμεις.

3. $\left(1 + \frac{a}{n} + O(n^{-2})\right)^k = 1 + \frac{ka}{n} + O(n^{-2})$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}^*$.

   Προκύπτει ομοίως με το προηγούμενο.

Εκτός από τη γεωμετρική σειρά, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απλοποίηση μιας ασυμπτωτικής παράστασης υψωμένης στη δύναμη -1, επομένως και για τη διαίρεση δύο ασυμπτωτικών παραστάσεων, άλλα ασυμπτωτικά αναπτύγματα γνωστών σειρών μπορούν να χρησιμοποιηθούν, με την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχουν σταθερές τέτοιες ώστε η ασυμπτωτική ποσότητα που αναπτύσσεται να ανήκει στο διάστημα σύγκλισης της σειράς. Για παράδειγμα, με τη βοήθεια της λογαριθμικής σειράς:

$$\ln(1+x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

έχουμε

$$\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b} = (n+b)\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = (n+b)\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O(n^{-3})\right) = a + \frac{2ab-a^2}{2n} + O(n^{-2}),$$

και, με τη βοήθεια της εκθετικής σειράς:

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + O(x^2), \quad x \to 0,$$

έχουμε

$$e^{\frac{2ab-a^2}{2n}+O(n^{-2})} = 1 + \frac{2ab-a^2}{2n} + O(n^{-2}),$$

οπότε

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b} = e^a\left(1 + \frac{2ab-a^2}{2n} + O(n^{-2})\right). \tag{6.14}$$

Αν για τις ακολουθίες $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, με $h_n = o(g_n)$, ισχύει ότι $f_n = g_n + O(h_n)$, τότε λέμε ότι ο τελευταίος τύπος αποτελεί μια *ασυμπτωτική προσέγγιση* της f μέσω της g με *απόλυτο σφάλμα* (της τάξης) $O(h_n)$, διότι υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}^*$ και $c > 0$ ώστε

$$f_n - g_n = O(h_n) \Rightarrow |f_n - g_n| \leq c|h_n|, \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Ομοίως, ένας τύπος της μορφής $f_n = g_n(1+O(h_n))$ λέμε ότι αποτελεί μια *ασυμπτωτική προσέγγιση* της f μέσω της g με *σχετικό σφάλμα* (της τάξης) $O(h_n)$, διότι

$$\frac{f_n}{g_n} = 1 + O(h_n) \Rightarrow \left|\frac{f_n}{g_n} - 1\right| \leq c|h_n|.$$

Για παράδειγμα, όπως αποδεικνύεται[4], ο τύπος του Stirling για το $n!$ με σχετικό σφάλμα $O(n^{-5})$, είναι

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + O(n^{-5})\right), \tag{6.15}$$

διότι η έκφραση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4}\right)\left(1 + O(n^{-5})\right).$$

Στις εφαρμογές, προτιμάται η ασυμπτωτική προσέγγιση της f με απόλυτο ή σχετικό σφάλμα από την ασυμπτωτική εκτίμηση μέσω μιας ισοδύναμης ακολουθίας, επειδή στη δεύτερη περίπτωση δεν παρέχεται πληροφορία για το μέγεθος του σφάλματος. Εντούτοις, οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις που δόθηκαν στα προηγούμενα και αφορούν διωνυμικούς συντελεστές έχουν σχετικό σφάλμα τάξης $O(n^{-1})$, το οποίο είναι ικανοποιητικά μικρό, καθότι, όπως αποδεικνύεται, η σταθερά c που εμπεριέχεται στο σφάλμα αυτό είναι μικρή.

[4]Για παράδειγμα, βλ. [35], σελ. 115.

Πρόταση 6.3. *Για τον διωνυμικό συντελεστή* $\binom{2n-c_1}{n-c_2}$*, όπου* c_1, c_2 *είναι ακέραιοι, ισχύει ο ακόλουθος ασυμπτωτικός τύπος:*

$$\binom{2n-c_1}{n-c_2} = \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}\left(1 + \frac{-1/2 - c_1^2 + c_1 - 4c_2^2 + 4c_1c_2}{4n} + O(n^{-2})\right) \tag{6.16}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\binom{2n-c_1}{n-c_2} &= \frac{\sqrt{2\pi(2n-c_1)}}{\sqrt{2\pi(n-c_2)}\sqrt{2\pi(n-c_1+c_2)}} \cdot \frac{(2n-c_1)^{2n-c_1}}{(n-c_2)^{n-c_2}(n-c_1+c_2)^{n-c_1+c_2}}A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(2n-c_1)^{2n-c_1+\frac{1}{2}}}{(n-c_2)^{n-c_2+\frac{1}{2}}(n-c_1+c_2)^{n-c_1+c_2+\frac{1}{2}}}A \\ &= \frac{2^{2n-c_1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(1-\frac{c_1}{2n})^{2n-c_1+\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}(1-\frac{c_2}{n})^{n-c_2+\frac{1}{2}}(1-\frac{c_1-c_2}{n})^{n-c_1+c_2+\frac{1}{2}}}A \\ &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{(1-\frac{c_1}{2n})^{2n-c_1+\frac{1}{2}}}{(1-\frac{c_2}{n})^{n-c_2+\frac{1}{2}}(1-\frac{c_1-c_2}{n})^{n-c_1+c_2+\frac{1}{2}}}A,\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}A &= \left(1+\tfrac{1}{12(2n-c_1)}+O(n^{-2})\right)\left(1+\tfrac{1}{12(n-c_2)}+O(n^{-2})\right)^{-1}\left(1+\tfrac{1}{12(n-c_1+c_2)}+O(n^{-2})\right)^{-1} \\ &= \left(1+\tfrac{1}{12(2n-c_1)}+O(n^{-2})\right)\left(1-\tfrac{1}{12(n-c_2)}+O(n^{-2})\right)\left(1-\tfrac{1}{12(n-c_1+c_2)}+O(n^{-2})\right) \\ &= \left(1+\tfrac{1}{12(2n-c_1)}+O(n^{-2})\right)\left(1-\tfrac{1}{12(n-c_2)}-\tfrac{1}{12(n-c_1+c_2)}+O(n^{-2})\right) \\ &= 1+\tfrac{1}{12(2n-c_1)}-\tfrac{1}{12(n-c_2)}-\tfrac{1}{12(n-c_1+c_2)}+O(n^{-2}) \\ &= 1+\frac{1}{24n}-\frac{1}{12n}-\frac{1}{12n}+O(n^{-2}) \\ &= 1-\frac{1}{8n}+O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο (6.14), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\tbinom{2n-c_1}{n-c_2} &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{e^{-c_1}\left(1+\frac{c_1^2-c_1}{4n}+O(n^{-2})\right)}{e^{-c_2}\left(1+\frac{c_2^2-c_2}{2n}+O(n^{-2})\right)e^{c_2-c_1}\left(1+\frac{(c_1-c_2)^2-c_1+c_2}{2n}+O(n^{-2})\right)}A \\ &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{c_1^2-c_1}{4n}+O(n^{-2})\right)\left(1-\frac{c_2^2-c_2}{2n}+O(n^{-2})\right) \\ &\quad \left(1-\frac{(c_1-c_2)^2-c_1+c_2}{2n}+O(n^{-2})\right)A \\ &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{c_1^2-c_1}{4n}-\frac{c_2^2-c_2}{2n}-\frac{(c_1-c_2)^2-c_1+c_2}{2n}+O(n^{-2})\right)A \\ &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{-c_1^2+c_1-4c_2^2+4c_1c_2}{4n}+O(n^{-2})\right)\left(1-\frac{1}{8n}+O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{4^n}{2^{c_1}\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{-c_1^2+c_1-4c_2^2+4c_1c_2}{4n}-\frac{1}{8n}+O(n^{-2})\right).\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 6.4. *Για τις ακολουθίες των διωνυμικών συντελεστών $\binom{2n}{n}$ και των αριθμών Catalan ισχύουν αντίστοιχα οι ακόλουθοι ασυμπτωτικοί τύποι:*

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right), \tag{6.17}$$

$$C_n = \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{9}{8n} + O(n^{-2})\right). \tag{6.18}$$

Απόδειξη. Ο τύπος (6.17) προκύπτει άμεσα, θέτοντας $c_1 = c_2 = 0$ στον τύπο (6.16).

Για τον τύπο (6.18), πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $\frac{1}{n+1}$ στον τύπο (6.16), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1 - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{n} + O(n^{-2})\right)\left(1 - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{9}{8n} + O(n^{-2})\right). \end{aligned}$$

□

Συνδυάζοντας τους τύπους της Πρότασης 6.3 και του Πορίσματος 6.4, οι ασυμπτωτικοί τύποι των διωνυμικών συντελεστών $\binom{2n-c_1}{n-c_2}$, καθώς και των διαφορών τους, μπορούν να εκφραστούν μέσω των αριθμών Catalan, όπως φαίνεται στο επόμενο Πόρισμα. Η μετατροπή αυτή οδηγεί σε απλοποίηση των πράξεων κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης παραμέτρων που αφορούν μονοπάτια Dyck.

Πόρισμα 6.5. *Για τους διωνυμικούς συντελεστές ισχύουν οι ακόλουθοι ασυμπτωτικοί τύποι:*

$$\begin{aligned} \binom{2n-c_1}{n-c_2} &= \frac{nC_n}{2^{c_1}}\left(1 + \frac{4 - c_1^2 + c_1 - 4c_2^2 + 4c_1c_2}{4n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{nC_n}{2^{c_1}}\left(1 + \frac{4 - (c_1 - 2c_2)^2 + c_1}{4n} + O(n^{-2})\right), \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\binom{2n-c_1}{n-c_2} - \binom{2n-c_1}{n-c_3} = \frac{(c_3 - c_2)(c_3 + c_2 - c_1)}{2^{c_1}} C_n\left(1 + O(n^{-1})\right), \tag{6.20}$$

όπου c_1, c_2, c_3 ακέραιοι,

Απόδειξη. Από τους τύπους (6.16) και (6.18), με διαίρεση κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n-c_1}{n-c_2}}{C_n} &= \frac{n}{2^{c_1}}\left(1 + \frac{-c_1^2 + c_1 - 4c_2^2 + 4c_1c_2}{4n} - \frac{1}{8n} + O(n^{-2})\right)\left(1 + \frac{9}{8n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{n}{2^{c_1}}\left(1 + \frac{-c_1^2 + c_1 - 4c_2^2 + 4c_1c_2}{4n} - \frac{1}{8n} + \frac{9}{8n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \frac{n}{2^{c_1}}\left(1 + \frac{4 - c_1^2 + c_1 - 4c_2^2 + 4c_1c_2}{4n} + O(n^{-2})\right). \end{aligned}$$

Τέλος, ο τύπος (6.20) προκύπτει εφαρμόζοντας τον τύπο (6.19) για c_2 και για c_3 και στη συνέχεια αφαιρώντας κατά μέλη. □

Στη συνέχεια, βάσει του τύπου (6.19), δίνονται ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των συντελεστών $[x^{n-a}]C^k$, $[x^{n-a}]C^kG^2$ και $[x^{n-a}]C^kG^3$.

Πρόταση 6.6. *Για τους συντελεστές* $[x^{n-a}]C^k$, $[x^{n-a}]C^kG^2$ *και* $[x^{n-a}]C^kG^3$, *όπου* $a \in \mathbb{Z}$, *με* $a \le n$, *ισχύουν αντίστοιχα οι ακόλουθοι τύποι:*

$$[x^{n-a}]C^k = \frac{k2^{k-1}C_n}{4^a}\left(1 + \frac{4-k^2-3k+6a}{4n} + O(n^{-2})\right), \qquad k \in \mathbb{Z}^*, \tag{6.21}$$

$$[x^{n-a}]C^kG^2 = \frac{2^k4^n}{4^a} - \frac{k2^knC_n}{4^a}\left(1 - \frac{k^2+3k-10-6a}{12n} + O(n^{-2})\right), \qquad k \in \mathbb{N}^*, \tag{6.22}$$

$$[x^{n-a}]C^kG^3 = \frac{2^kn^2C_n}{4^a}\left(2 + \frac{k^2+k+6-2a}{2n} + O(n^{-2})\right) - \frac{k2^k4^n}{4^a}, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{6.23}$$

Απόδειξη. Για τον συντελεστή $[x^{n-a}]C^k$, βάσει του τύπου (6.19), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[x^{n-a}]C^k &= \frac{k}{2n-2a+k}\binom{2n-2a+k}{n-a} \\
&= \frac{nC_n}{2^{2a-k}}\frac{k}{2n-2a+k}\left(1 + \frac{4-(2a-k)^2+2a-k-4a^2+4(2a-k)a}{4n} + O(n^{-2})\right) \\
&= \frac{kC_n}{2^{2a-k+1}}\frac{1}{1-\frac{2a-k}{2n}}\left(1 + \frac{4-k^2-k+2a}{4n} + O(n^{-2})\right) \\
&= \frac{kC_n}{2^{2a-k+1}}\left(1 + \frac{2a-k}{2n} + O(n^{-2})\right)\left(1 + \frac{4-k^2-k+2a}{4n} + O(n^{-2})\right) \\
&= \frac{kC_n}{2^{2a-k+1}}\left(1 + \frac{4-k^2-3k+6a}{4n} + O(n^{-2})\right).
\end{aligned}$$

Για τον συντελεστή $[x^{n-a}]C^kG^2$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\binom{2n-2a+j}{n-a}2^{-j} &= \sum_{j=1}^{k}\frac{2^{-j}nC_n}{2^{2a-j}}\left(1 + \frac{4-j^2-j+2a}{4n} + O(n^{-2})\right) \\
&= \frac{nC_n}{4^a}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{4+2a}{4n} + O(n^{-2})\right) - \frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{k}(j^2+j)\right) \\
&= \frac{knC_n}{4^a}\left(1 + \frac{4+2a}{4n} + O(n^{-2}) - \left(\frac{(k+1)(2k+1)}{24n} + \frac{(k+1)}{8n}\right)\right) \\
&= \frac{knC_n}{4^a}\left(1 + \frac{4+2a}{4n} - \frac{(k+1)(k+2)}{12n} + O(n^{-2})\right) \\
&= \frac{knC_n}{4^a}\left(1 - \frac{k^2+3k-10-6a}{12n} + O(n^{-2})\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στη σχέση[5]:

$$[x^{n-a}]C^kG^2 = 2^k4^{n-a} - \sum_{j=1}^{k}\binom{2n-2a+j}{n}2^{k-j},$$

προκύπτει ο τύπος (6.22).

[5]Βλ. σχέση (4.11).

Για τον συντελεστή $[x^{n-a}]C^kG^3$, βάσει της σχέσης (6.19), έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(2n-2a+k+1)\binom{2n-2a+k}{n-a} &= \frac{2^k n^2 C_n}{4^a}\left(2+\frac{k+1-2a}{n}\right)\left(1+\frac{4-k^2-k+2a}{4n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2^k n^2 C_n}{4^a}\left(2+\frac{4-k^2-k+2a+2k+2-4a}{2n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2^k n^2 C_n}{4^a}\left(2-\frac{k^2-k-6+2a}{2n}+O(n^{-2})\right),
\end{aligned}
$$

οπότε, αντικαθιστώντας στη σχέση[6]:

$$
[x^{n-a}]C^kG^3 = (2n-2a+k+1)\binom{2n-2a+k}{n-a} - k[x^{n-a}]C^kG^2,
$$

προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
[x^{n-a}]C^kG^3 &= \frac{2^k n^2 C_n}{4^a}\left(2-\frac{k^2-k-6+2a}{2n}+O(n^{-2})\right)+\frac{2^k n^2 C_n}{4^a}\left(\frac{k^2}{n}+O(n^{-2})\right)-\frac{k2^k4^n}{4^a}\\
&= \frac{2^k n^2 C_n}{4^a}\left(2+\frac{k^2+k+6-2a}{2n}+O(n^{-2})\right)-\frac{k2^k4^n}{4^a}.
\end{aligned}
$$

□

Στις επόμενες παραγράφους, υπολογίζονται τα στατιστικά μεγέθη (μέση τιμή και διακύμανση) ορισμένων παραμέτρων, με τη βοήθεια των σχέσεων (6.1) και (6.2), και δίνονται οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις τους. Οι δύο πρώτες παράμετροι που εξετάζονται είναι ευρέως γνωστές και δίνονται για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί. Οι υπόλοιπες παράμετροι, των οποίων τα στατιστικά μεγέθη υπολογίζονται, είναι πιο σύνθετες και έχουν μελετηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια.

Οι εκτιμήσεις των ασυμπτωτικών μεγεθών γίνονται κυρίως με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ισοδυναμίας, δια εφαρμογής του Πορίσματος 6.2. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να δοθεί καλύτερη εκτίμηση με τη βοήθεια του συμβολισμού O. Βασικό εργαλείο στις περιπτώσεις αυτές αποτελεί το Θεώρημα Darboux, το οποίο εμφανίζεται στη βιβλιογραφία σε διάφορες παραλλαγές. Παρακάτω, παρατίθεται στη μορφή που διατυπώνεται στο [71].

Θεώρημα (Darboux). *Έστω μια γεννήτρια συνάρτηση $v(z)$, με ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη του 1, η οποία αναπτύσσεται γύρω από το 1 ως $v(z) = \sum_{j\geq 0} v_j(1-z)^j$. Αν $\beta \notin \mathbb{N}$, τότε*

$$
[z^n](1-z)^\beta v(z) = \sum_{j=0}^{m} v_j\binom{n-\beta-j-1}{n} + O(n^{-m-\beta-2}).
$$

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος αυτού θα δοθεί στην απόδειξη της Πρότασης 6.13, όπου θα χρησιμοποιηθούν και οι ακόλουθοι δύο τύποι για την απλοποίηση των πράξεων:

$$
4^n\binom{n-j-1/2}{n} = (-1)^j\binom{2n}{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2j+1)}, \qquad j\in\mathbb{N}^*. \tag{6.24}
$$

$$
4^n\binom{n+j-1/2}{n} = \binom{2n}{n}\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2j-1)}{1\cdot 3\cdots(2j-1)}, \qquad j\in\mathbb{N}^*. \tag{6.25}
$$

[6]Βλ. σχέση (4.12).

Απόδειξη της σχέσης (6.24). Από την ακόλουθη ιδιότητα των παραγοντικών πολυωνύμων:

$$(x+1)^{\underline{n}} = (x+1)x(x-1)\cdots(x+1-n+1) = \frac{x+1}{x-n+1}x^{\underline{n}}, \qquad x \neq n-1,$$

έπεται ότι

$$(n-(j-1)-1/2)^{\underline{n}} = \frac{n-(j-1)-1/2}{-(j-1)-1/2}(n-j-1/2)^{\underline{n}},$$

και επομένως,

$$\binom{n-j-1/2}{n} = \frac{-(2j-1)}{2n-2j+1}\binom{n-(j-1)-1/2}{n},$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\binom{n-1/2}{n}4^n = \binom{2n}{n}$, η σχέση (6.24) προκύπτει άμεσα με επαγωγή ως προς j. □

Ομοίως προκύπτει και η σχέση (6.25).

6.3 Μήκος της πρώτης ανάβασης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck α διασπάται ως

$$\alpha = \mathrm{u}^k \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \cdots \mathrm{d}\alpha_k, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Ο φυσικός αριθμός k ονομάζεται *μήκος της πρώτης ανάβασης*. Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η παράμετρος

$$p(\alpha) = \text{ μήκος της πρώτης ανάβασης του μονοπατιού Dyck } \alpha,$$

ως ένα πρώτο παράδειγμα της μεθοδολογίας που θα ακολουθηθεί και στα επόμενα.

Πρόταση 6.7. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "μήκος της πρώτης ανάβασης" δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$E_n = \frac{3n}{n+2}, \qquad V_n = \frac{2n(2n^2-n-1)}{(n+2)^2(n+3)}.$$

Απόδειξη. Βάσει της διάσπασης της πρώτης επιστροφής, το μη κενό μονοπάτι Dyck α διασπάται ως $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$. Προφανώς, ισχύει ότι

$$p(\alpha) = p(\beta) + 1.$$

Έστω $F = F(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{p(\alpha)}$ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των μονοπατιών Dyck, ως προς το ημιμήκος και την παράμετρο p. Τότε,

$$F = 1 + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}+1} y^{p(\beta)+1} = 1 + xy\sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}} \sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}} y^{p(\beta)} = 1 + xyCF,$$

οπότε

$$F = \frac{1}{1-xyC}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{xC}{(1-xyC)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{xC}{(1-xC)^2} = xC^3.$$

Επομένως, η μέση τιμή της παραμέτρου δίνεται από τον τύπο

$$E_n = \frac{1}{C_n}[x^n]\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \frac{1}{C_n}[x^{n-1}]C^3 = \frac{1}{C_n}\frac{3}{2n+1}\binom{2n+1}{n-1} = \frac{1}{C_n}\frac{3n}{(n+1)(n+2)}\binom{2n}{n} = \frac{3n}{n+2}.$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2x^2C^2}{(1-xyC)^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} = \frac{2x^2C^2}{(1-xC)^3} = 2x^2C^5,$$

οπότε

$$[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} = 2[x^{n-2}]C^5 = 2\frac{5}{2n+1}\binom{2n+1}{n-2} = \frac{10n(n-1)}{(n+2)(n+3)}C_n$$

και τελικά, $V_n = \dfrac{10n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + \dfrac{3n}{n+2} - \dfrac{9n^2}{(n+2)^2} = \dfrac{2n(2n^2-n-1)}{(n+2)^2(n+3)}$. □

6.4 Πλήθος κορυφών

Σαν δεύτερο παράδειγμα της μεθόδου, θεωρούμε την παράμετρο

$$p(\alpha) = \text{ πλήθος κορυφών του μονοπατιού Dyck } \alpha,$$

δηλαδή $p(\alpha) = |\alpha|_{\mathrm{ud}}$. Η παράμετρος αυτή έχει μελετηθεί στην εργασία [17] και, όπως είναι γνωστό, η κατανομή της δίνεται από την ακολουθία Narayana (βλ. σελ. 30).

Πρόταση 6.8. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος κορυφών" δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$E_n = \frac{n+1}{2}, \qquad V_n = \frac{n^2-1}{8n-4}.$$

Απόδειξη. Βάσει της διάσπασης της πρώτης επιστροφής, το μη κενό μονοπάτι Dyck α διασπάται ως $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$, οπότε

$$p(\alpha) = p(\beta) + p(\gamma) + [\beta = \varepsilon].$$

Έτσι, για τη γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}}y^{p(\alpha)}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F &= 1 + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}+|\gamma|_{\mathrm{u}}+1}y^{p(\beta)+p(\gamma)+[\beta=\varepsilon]} = 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{|\beta|_{\mathrm{u}}}y^{p(\beta)+[\beta=\varepsilon]}\sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{|\gamma|_{\mathrm{u}}}y^{p(\gamma)} \\ &= 1 + x(F-1+y)F = 1 + xF^2 + x(y-1)F, \end{aligned}$$

δηλαδή, η F ικανοποιεί την εξίσωση (1.8), και επομένως ισούται με τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana.

Παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xF\frac{\partial F}{\partial y} + xF + x(y-1)\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Θέτοντας $y = 1$, έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = 2xC\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} + xC \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \frac{xC}{1-2xC} = xGC.$$

Επομένως, βάσει της σχέσης (4.4), είναι

$$E_n = \frac{1}{C_n}[x^n](xGC) = \frac{1}{C_n}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{1}{C_n}\frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Για την εύρεση της διακύμανσης της p, η δεύτερη μερική παράγωγος της F ως προς τη μεταβλητή y είναι ίση με

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2xF\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + x\frac{\partial F}{\partial y} + x\frac{\partial F}{\partial y} + x(y-1)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

οπότε, θέτοντας $y = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= 2x^3G^2C^2 + 2xC\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} + 2x^2GC \\ \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{2x^2CG(xCG+1)}{1-2xC} = 2x^2CG^2\left(xC\frac{C}{1-xC^2}+1\right) = 2x^2CG^2\frac{1}{1-xC^2} = 2x^2G^3. \end{aligned}$$

Βάσει της σχέσης (4.1), είναι

$$[x^n]G^3 = \frac{(n+1)(n+2)}{4(2n+3)}\binom{2n+4}{n+2},$$

οπότε

$$[x^n]\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} = [x^n]2x^2G^3 = 2[x^{n-2}]G^3 = \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2n-1}\binom{2n}{n}.$$

Επομένως, $V_n = \frac{1}{2C_n}\frac{(n-1)n}{2n-1}\binom{2n}{n} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{8n-4}$. □

6.5 Πυραμίδες

Υπενθυμίζεται ότι κάθε μονοπάτι (Dyck) της μορφής $\mathrm{u}^k\mathrm{d}^k$, με $k \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται *πυραμίδα* (ύψους k). Στην ενότητα αυτή, θα μελετηθούν δύο παράμετροι που σχετίζονται με τις πυραμίδες.

6.5.1 Μονοπάτια Dyck που έχουν ως πρόθεμα μια πυραμίδα

Θεωρούμε την παράμετρο $p : \mathcal{D} \to \{0,1\}$: "το μονοπάτι έχει ως πρόθεμα μια πυραμίδα", δηλαδή αν $\alpha \in \mathcal{D}$, τότε

$$p(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = \mathrm{u}^k\mathrm{d}^k\beta, \beta \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Πρόταση 6.9. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "το μονοπάτι έχει ως πρόθεμα μια πυραμίδα" δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$E_n = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \sim \frac{1}{3}, \qquad V_n = E_n - E_n^2 \sim \frac{2}{9}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A} = \{\mathrm{u}^k\mathrm{d}^k w : w \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}^*\}$ το σύνολο μονοπατιών Dyck που έχουν πρόθεμα μια πυραμίδα. Η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$, με τη μεταβλητή x να κωδικοποιεί το ημιμήκος, είναι η

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k C = \frac{xC}{1-x}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_u} y^{p(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}} x^{|\alpha|_u} + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^{|\alpha|_u} y \\ &= C - A(x) + yA(x) = C + (y-1)A(x) \\ &= C + (y-1)\frac{xC}{1-x}. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{xC}{1-x} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

οπότε,

$$[x^n]\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = [x^{n-1}]\frac{C}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k,$$

και τελικά, η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου δίνονται από τους τύπους

$$E_n = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \text{και} \quad V_n = E_n - E_n^2.$$

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της τελευταίας έκφρασης, βάσει του Πορίσματος 6.2 *ii*), προκύπτει ότι

$$E_n \sim \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad V_n \sim \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9},$$

δηλαδή, κατά μέσο όρο, το ένα τρίτο των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n έχει πρόθεμα μια πυραμίδα, όταν $n \to \infty$. □

6.5.2 Πλήθος ανόδων που ανήκουν σε πυραμίδα

Θεωρούμε την παράμετρο $p : \mathcal{D} \to \mathbb{N}$: "πλήθος ανόδων που ανήκουν σε πυραμίδα". Λαμβάνοντας υπόψη τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής $\alpha = \mathrm{u}\beta\mathrm{d}\gamma, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$, του μονοπατιού $\alpha \in \mathcal{D}$, εύκολα προκύπτει ότι

$$p(\varepsilon) = 0 \qquad \text{και} \qquad p(\alpha) = \begin{cases} p(\gamma) + p(\beta), & \beta \notin \mathcal{P}, \\ p(\gamma) + p(\beta) + 1, & \beta \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

όπου $\mathcal{P} = \{\mathrm{u}^k\mathrm{d}^k : k \in \mathbb{N}\}$.

Πρόταση 6.10. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος ανόδων που ανήκουν σε πυραμίδα" δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2k+1}{k} \sim \frac{2n}{3}, \\ V_n &= \frac{2}{C_n}\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)\binom{2k+1}{k}(n-k-1) + E_n - E_n^2 \sim \frac{4n}{27}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η γεννήτρια συνάρτηση $P = P(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{P}$ είναι προφανώς ίση με

$$P = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} x^{|\alpha|_u} y^{p(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k = \frac{1}{1 - xy}.$$

Επιπλέον, για τη γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x, y)$ του συνόλου $\mathcal{D}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
F &= 1 + \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ \beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}}} x^{|\beta|_u + |\gamma|_u + 1} y^{p(\beta) + p(\gamma)} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ \beta \in \mathcal{P}}} x^{|\beta|_u + |\gamma|_u + 1} y^{p(\beta) + p(\gamma) + 1} \\
&= 1 + x \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{|\gamma|_u} y^{p(\gamma)} \sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}} x^{|\beta|_u} y^{p(\beta)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{|\gamma|_u} y^{p(\gamma)} \sum_{\beta \in \mathcal{P}} x^{|\beta|_u} y^{p(\beta)+1} \right) \\
&= 1 + x(F(F - P) + yFP) = 1 + xF^2 + x(y - 1)FP \\
&= 1 + xF^2 + \frac{x(y-1)}{1 - xy} F,
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x(1 - xy)F^2 - (1 + x - 2xy)F + 1 - xy = 0.$$

Από την τελευταία σχέση, παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&- x^2F^2 + 2x(1 - xy)F \frac{\partial F}{\partial y} + 2xF - (1 + x - 2xy) \frac{\partial F}{\partial y} - x = 0 \\
\Rightarrow &(2xF - 2x^2yF + 2xy - 1 - x) \frac{\partial F}{\partial y} = x^2F^2 - 2xF + x \\
\Rightarrow &\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2F^2 - 2xF + x}{2x(1 - xy)F - 1 - x + 2xy}. \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση $y = 1$ (και επειδή $F(x, 1) = C$), έχουμε ότι

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=1} = \frac{x^2C^2 - 2xC + x}{2x(1 - x)C - 1 + x} = \frac{x(xC^2 - 2C + 1)}{(1 - x)(2xC - 1)} = \frac{-xC}{(1 - x)(2xC - 1)} = \frac{xCG}{1 - x},$$

οπότε

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+1} CG.$$

Έτσι, βάσει της σχέσης (4.4), προκύπτει ότι

$$[x^n] \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=1} = [x^n] \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} CG = \sum_{i=0}^{n-1} [x^{n-i-1}] CG = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2(n - i - 1) + 1}{n - i - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k + 1}{k}$$

και, τελικά,

$$E_n = \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k + 1}{k}.$$

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της E_n, βάσει της σχέσης (6.10), έχουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k + 1}{k} \sim \frac{nC_n}{3 \cdot 2^{-1}},$$

και επομένως,

$$E_n \sim \frac{2n}{3}.$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης της παραμέτρου, από τη σχέση (6.26), παραγωγίζοντας ως προς y, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{(2x^2F\frac{\partial F}{\partial y} - 2x\frac{\partial F}{\partial y})a - (x^2F^2 - 2xF + x)\dfrac{\partial a}{\partial y}}{a^2}$$

όπου

$$a = a(x,y) = 2x(1-xy)F - 1 - x + 2xy,$$

οπότε,

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -2x^2F + 2x(1-xy)\frac{\partial F}{\partial y} + 2x.$$

Θέτοντας $y = 1$, έχουμε ότι

$$a(x,1) = 2x(1-x)C - 1 + x = (1-x)(2xC-1)$$

και

$$\left.\frac{\partial a}{\partial y}\right|_{y=1} = -2x^2C + 2x(1-x)\frac{xCG}{1-x} + 2x = 2x(-xC + xCG + 1).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{2x\frac{xCG}{1-x}(xC-1)(1-x)(2xC-1) - x(xC^2 - 2C + 1)2x(1 - xC + xCG)}{(1-x)^2(2xC-1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2x^2C(1 - xC + xCG)}{(1-x)^2(1-2xC)^2} = \frac{2x^2 + 2x^2(1 + xC^2G)}{(1-x)^2(1-2xC)^2} \\
&= 2x^2\frac{2 + xC^2G}{(1-x)^2(1-2xC)^2}
\end{aligned}$$

και επειδή

$$G = \frac{C}{1-xC^2} \Rightarrow G - xC^2G = C \Rightarrow xC^2G = G - C,$$

τελικά είναι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= 2x^2\frac{2 + G - C}{(1-x)^2(1-2xC)^2} = 2x^2\frac{1 - xC^2 + G}{(1-x)^2(1-2xC)^2} = 2x^2\frac{\frac{C}{G} + G}{(1-x)^2}G^2 \\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^2}(CG + G^3).
\end{aligned}$$

Για τη γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{x^2}{(1-x)^2} &= [x^n]x^2\left(\frac{1}{(1-x)}\right)' = [x^n]x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = [x^n]\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} \\
&= [x^n]\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n = [x^n]\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)^+x^n = (n-1)^+,
\end{aligned}$$

ενώ για την $CG + G^3$, από τη σχέση (4.4), έχουμε ότι

$$[x^n](CG + G^3) = \binom{2n+1}{n} + 4^n\binom{n+\frac{1}{2}}{n} = \binom{2n+1}{n} + (n+1)\binom{2n+1}{n} = (n+2)\binom{2n+1}{n},$$

οπότε, η συνέλιξη των δύο τελευταίων συντελεστών δίνει

$$[x^n]\frac{x^2}{(1-x)^2}(CG + G^3) = \sum_{k=0}^{n}(k+2)\binom{2k+1}{k}(n-k-1)^+ = \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)\binom{2k+1}{k}(n-k-1).$$

Έτσι, τελικά είναι

$$V_n = \frac{2}{C_n}\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)\binom{2k+1}{k}(n-k-1) + E_n - E_n^2.$$

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της διακύμανσης, αρχικά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$b_n = 2\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)a_k - \frac{4}{9}n^2C_n \quad \text{και} \quad a_n = (n+2)\binom{2n+1}{n},$$

οπότε

$$b_{n+1} - b_n = 2\sum_{k=0}^{n-1}a_k - \frac{4}{9}(n+1)^2C_{n+1} + \frac{4}{9}n^2C_n.$$

Θέτοντας $c_n = b_{n+1} - b_n$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1} - c_n}{nC_n} &= 2\frac{a_n}{nC_n} - \frac{4}{9}(n+2)^2\frac{C_{n+2}}{nC_n} + \frac{8}{9}(n+1)^2\frac{C_{n+1}}{nC_n} - \frac{4}{9}n\\ &= \frac{2(n+2)(2n+1)}{n} - \frac{4}{9}(n+2)^2\frac{(4n+2)(4n+6)}{n(n+2)(n+3)} + \frac{8}{9}(n+1)^2\frac{4n+2}{n(n+2)} - \frac{4}{9}n\\ &= \frac{18(n+2)^2(2n+1)(n+3) - 4n^2(n+2)(n+3) - 4(n+2)^2(4n+2)(4n+6) + 8(n+1)^2(4n+2)(n+3)}{9n(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

Ο συντελεστής του n^4 του αριθμητή ισούται με 0, ενώ ο συντελεστής του n^3 ισούται με 42, επομένως είναι $\dfrac{c_{n+1} - c_n}{nC_n} \sim \dfrac{42}{9}$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 6.2 *i*), έχουμε

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{nC_n} \sim \frac{42}{9} \Rightarrow \frac{c_n}{nC_n} \sim \frac{14}{9} \Rightarrow \frac{b_{n+1} - b_n}{nC_n} \sim \frac{14}{9} \Rightarrow \frac{b_n}{nC_n} \sim \frac{14}{27}$$

και, τελικά,

$$\frac{2}{C_n}\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)a_k - \frac{4}{9}n^2 \sim \frac{14}{27}n.$$

Επιπλέον, θέτοντας $A_n = C_nE_n - \frac{2}{3}nC_n$, έχουμε ότι

$$A_{n+1} - A_n = \binom{2n+1}{n} - \frac{2}{3}(n+1)C_{n+1} + \frac{2}{3}nC_n,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{A_{n+1} - A_n}{C_n} &= 2n + 1 - \frac{2}{3}(n+1)\frac{C_{n+1}}{C_n} + \frac{2}{3}n = 2n + 1 - \frac{2}{3}(n+1)\frac{4n+2}{n+2} + \frac{2}{3}n\\ &= \frac{3(n+2)(2n+1) - 2(n+1)(4n+2) + 2n(n+2)}{3(n+2)} \sim \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Επομένως, βάσει του Πορίσματος 6.2 *i*), έχουμε

$$\frac{A_n}{C_n} \sim \frac{7}{9} \Rightarrow E_n - \frac{2}{3}n \sim \frac{7}{9}.$$

Άρα,

$$E_n^2 - \frac{4}{9}n^2 = (E_n + \frac{2}{3}n)(E_n - \frac{2}{3}n) \sim \frac{4}{3}n(E_n - \frac{2}{3}n) \sim \frac{28}{27}n.$$

Τελικά, από τα παραπάνω, έπεται ότι

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{2}{C_n}\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)\binom{2k+1}{k}(n-k-1) - \frac{4}{9}n^2 + \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2k+1}{k} - \left(E_n^2 - \frac{4}{9}n^2\right) \\ &\sim \frac{14}{27}n + \frac{2}{3}n - \frac{28}{27}n = \frac{4}{27}n. \end{aligned}$$

□

6.6 Κατηγορίες κορυφών

Στην ενότητα αυτή, μελετώνται τα στατιστικά μεγέθη των παραμέτρων που ορίζονται στο Κεφάλαιο 5. Σημειώνεται ότι η μέση τιμή των παραμέτρων αυτών μπορεί να προκύψει απευθείας από τους τύπους (5.9), (5.10) και (5.11).

6.6.1 Αριστερές κορυφές

Για τη μελέτη της παραμέτρου "πλήθος αριστερών κορυφών", θέτοντας $z = s = 1$ στην εξίσωση (5.2), προκύπτει η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης $F = F(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_u} y^{l(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} F &= 1 + \left(1 + \frac{x}{1-x}(y-1)\right)xF^2 - (y-1)\frac{x}{1-x}xF \\ \Rightarrow F &= 1 + xF^2 + (y-1)\frac{x^2}{1-x}(F^2 - F). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Πρόταση 6.11. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος αριστερών κορυφών" δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$E_n = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-3}\binom{2k+3}{k} \sim \frac{n}{6},$$

$$V_n = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-4}(n-k-3)a_k + E_n - E_n^2 \sim \frac{n}{72},$$

όπου $a_k = (k+1)(k+2)C_{k+1} - (k+1)C_{k+2}$.

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (6.27) ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xF\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{x^2}{1-x}(F^2 - F) + (y-1)\frac{x^2}{1-x}\left(2F\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Θέτοντας $y = 1$, προκύπτει ότι

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = 2xC\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} + \frac{x^2}{1-x}(C^2 - C),$$

οπότε,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{x^2}{1-x}(C^2 - C)\frac{1}{1-2xC} = \frac{x^2 C}{1-x}(C-1)G = \frac{x^3}{1-x}C^3 G.$$

Έτσι, ο συντελεστής του x^n, για $n \geq 3$, είναι

$$[x^n]\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = [x^{n-3}]\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k+3}{k}x^n = \sum_{k=0}^{n-3}\binom{2k+3}{k}$$

και τελικά

$$E_n = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-3}\binom{2k+3}{k}, \quad n \geq 3,$$

οπότε, βάσει της σχέσης (6.10), προκύπτει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$E_n \sim \frac{n}{6}.$$

Για τη διακύμανση της παραμέτρου, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2xF\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{2x^2}{1-x}(2F-1)\frac{\partial F}{\partial y} + (y-1)\frac{x^2}{1-x}\frac{\partial}{\partial y}\left(2F\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

και επομένως,

$$\begin{aligned}
(1-2xC)\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{2x^7}{(1-x)^2}C^6G^2 + \frac{2x^5}{(1-x)^2}(2C-1)C^3G \\
\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{2x^5}{(1-x)^2}\left(x^2C^6G^3 + C^4G^2 + xC^5G^2\right)
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{2x^4}{(1-x)^2}\left(\left(xC^2G\right)^3 + xC^4G^2 + \left(xC^2G\right)^2C\right) \\
&= \frac{2x^4}{(1-x)^2}\left((G-C)^3 + (G-C)C^2G + (G-C)^2C\right) \\
&= \frac{2x^4}{(1-x)^2}\left(G^3 - 3G^2C + 3GC^2 - C^3 + C^2G^2 - C^3G + CG^2 - 2GC^2 + C^3\right) \\
&= \frac{2x^4}{(1-x)^2}\left(G^3 - 2G^2C + GC^2 + C^2G^2 - C^3G\right) \\
&= \frac{2x^4}{(1-x)^2}\left(G^3 - C^3G\right),
\end{aligned}$$

αφού

$$-2G^2C + GC^2 + C^2G^2 = -GC(2G - C - GC) = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$[x^n](G^3 - C^3G) = (n+1)\binom{2n+1}{n} - \binom{2n+3}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}C_{n+1} - \frac{n+1}{2}C_{n+2}$$

και ότι $[x^n]\dfrac{1}{(1-x)^2} = n+1$, συνεπάγεται ότι, για $n \geq 4$,

$$[x^n]\frac{2x^4}{(1-x)^2}(G^3 - C^3G) = \sum_{k=0}^{n-4}(n-k-3)a_k,$$

όπου $a_k = (k+1)(k+2)C_{k+1} - (k+1)C_{k+2}$. Συνεπώς,

$$V_n = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-4}(n-k-3)a_k + E_n - E_n^2.$$

Θεωρώντας της ακολουθίες $b_n = \sum_{k=0}^{n-4}(n-k-3)a_k - \frac{n^2}{36}C_n$ και $c_n = b_{n+1} - b_n$, έχουμε ότι

$$c_n = b_{n+1} - b_n = \sum_{k=0}^{n-3} a_k - \frac{(n+1)^2}{36}C_{n+1} + \frac{n^2}{36}C_n$$

και

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}-c_n}{C_n} &= \frac{a_{n-2}}{C_n} - \frac{(n+2)^2}{36}\frac{C_{n+2}}{C_n} + \frac{2(n+1)^2}{36}\frac{C_{n+1}}{C_n} - \frac{n^2}{36}\\ &= (n-1)n\frac{C_{n-1}}{C_n} - (n-1) - \frac{(n+2)^2}{36}\frac{C_{n+2}}{C_n} + \frac{2(n+1)^2}{36}\frac{C_{n+1}}{C_n} - \frac{n^2}{36}\\ &= \frac{n^3-n}{4n-2} - \frac{(n+2)^2}{36}\frac{(4n+6)(4n+2)}{(n+3)(n+2)} + \frac{2(n+1)^2}{36}\frac{4n+2}{n+2} - \frac{n^2}{36} - n + 1\\ &= \frac{1}{144}\left(-174n + 37 - \frac{27}{2n-1} - \frac{48}{n+2} + \frac{240}{n+3}\right),\end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{c_{n+1}-c_n}{C_n} \sim \frac{-174}{144}n = \frac{-29}{24}n.$$

Επομένως, βάσει του Πορίσματος 6.2 i),

$$\frac{c_n}{nC_n} \sim \frac{-29}{3\cdot 24} \Rightarrow \frac{b_{n+1}-b_n}{nC_n} \sim \frac{-29}{3\cdot 24} \Rightarrow \frac{b_n}{nC_n} \sim \frac{-29}{9\cdot 24} \Rightarrow \frac{b_n}{C_n} \sim \frac{-29}{9\cdot 24}n.$$

Επιπλέον, θέτοντας $A_n = \sum_{k=0}^{n-3}\binom{2k+3}{k} - \frac{n}{6}C_n$, έχουμε ότι

$$A_{n+1} - A_n = \binom{2n-1}{n-2} - \frac{n+1}{6}C_{n+1} + \frac{n}{6}C_n$$

και

$$\frac{A_{n+1}-A_n}{C_n} = \frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{6}\frac{4n+2}{n+2} + \frac{n}{6} = \frac{3(n-1)(n+2) - (n+1)(4n+2) + n(n+2)}{6(n+2)}.$$

Ο συντελεστής του n^2 στον αριθμητή ισούται με 0, ενώ ο συντελεστής του n ισούται με -1, οπότε

$$\frac{A_{n+1}-A_n}{C_n} \sim \frac{-1}{6} \Rightarrow \frac{A_n}{C_n} \sim \frac{-1}{18}.$$

Επομένως,

$$E_n^2 - \frac{n^2}{36} = \left(E_n + \frac{n}{6}\right)\left(E_n - \frac{n}{6}\right) \sim \left(\frac{n}{6} + \frac{n}{6}\right)\left(\frac{-1}{18}\right) = -\frac{n}{54}.$$

Από τα παραπάνω, τελικά προκύπτει ότι

$$V_n \sim \frac{-29}{9\cdot 24}n + \frac{n}{6} - \frac{n}{54} = \frac{-29}{4\cdot 54}n + \frac{8}{54}n = \frac{32-29}{4\cdot 54}n = \frac{1}{72}n.$$

□

6.6.2 Ισοσκελείς κορυφές

Για τη μελέτη της παραμέτρου "πλήθος ισοσκελών κορυφών", θέτοντας $z = y = 1$ στην εξίσωση (5.2), προκύπτει η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης $F = F(x, s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{|\alpha|_u} s^{c(\alpha)}$:

$$F = 1 + \left(1 - (s-1)\frac{x}{1-x}\right)^2 xF^2 + (s-1)\frac{x}{1-x}(1+x)F. \tag{6.28}$$

Πρόταση 6.12. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος ισοσκελών κορυφών", για $n \geq 3$, δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$E_n = \frac{1}{C_n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k+2}{2} C_{k-1}\right) \sim \frac{n}{6},$$

$$V_n = \frac{2n-2}{C_n} + \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)a_k + E_n - E_n^2 \sim \frac{5n}{24},$$

όπου $a_k = (2k+4)C_k + k(k-1)C_{k-1}$.

Απόδειξη. Θέτοντας $a = a(x,s) = 1 - (s-1)\frac{x}{1-x}$, η σχέση (6.28) γράφεται ως

$$F = 1 + a^2 xF^2 + (1+x)(1-a)F.$$

Παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή s και λαμβάνοντας υπόψη ότι $a(x,1) = 1$ και $\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{-x}{1-x}$, έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 2x\frac{-x}{1-x}aF^2 + 2xa^2F\frac{\partial F}{\partial s} + (1+x)\frac{x}{1-x}F + (1+x)(1-a)\frac{\partial F}{\partial s},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{s=1} &= 2x\frac{-x}{1-x}C^2 + 2xC\frac{\partial F}{\partial s} + (1+x)\frac{x}{1-x}C \\
\Rightarrow (1-2xC)\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{s=1} &= \frac{xC}{1-x}(x+1-2xC) \\
\Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{s=1} &= \frac{xC}{1-x}(xG+1) = \frac{1}{1-x}(x^2GC + xC).
\end{aligned}$$

Για $n \geq 2$, είναι

$$[x^n](x^2GC + xC) = [x^{n-2}]GC + [x^{n-1}]C = \binom{2n-3}{n-2} + C_{n-1} = \frac{n}{2}C_{n-1} + C_{n-1} = \frac{n+2}{2}C_{n-1}.$$

Επιπλέον, είναι $[x^1](x^2GC + xC) = [x^0]C = 1$ και $[x^0](x^2GC + xC) = 0$. Επομένως,

$$E_n = \frac{1}{C_n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{k+2}{2}C_{k-1}\right).$$

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της μέσης τιμής, αν τεθεί

$$A_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{k+2}{2}C_{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+3}{2}C_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}a_k,$$

όπου $a_n = \dfrac{n+3}{2}C_n \sim \dfrac{nC_n}{2}$, τότε $A_{n+1} - A_n = a_n \sim \dfrac{nC_n}{2}$, οπότε, βάσει του Πορίσματος 6.2 *i*), προκύπτει ότι $A_n \sim \dfrac{nC_n}{6}$ και συνεπώς ότι

$$E_n \sim \frac{n}{6}.$$

Για τη μερική παράγωγο δεύτερης τάξης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= 2x\frac{\partial a}{\partial s}\left(\frac{\partial a}{\partial s}F^2 + 2aF\frac{\partial F}{\partial s}\right) + 4xa\frac{\partial a}{\partial s}F\frac{\partial F}{\partial s} + 2xa^2\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 \\ &\qquad + 2xa^2F\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + (1+x)\left(\frac{2x}{1-x}\frac{\partial F}{\partial s} + (1-a)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right) \\ \Rightarrow (1-2xa^2F)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= 2x\left(\frac{\partial a}{\partial s}F\right)^2 + 8x\frac{\partial a}{\partial s}aF\frac{\partial F}{\partial s} + 2x\left(a\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 + \frac{2x(1+x)}{1-x}\frac{\partial F}{\partial s} + (1+x)(1-a)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}.\end{aligned}$$

Θέτοντας $s = 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{G}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\bigg|_{s=1} &= \frac{2x^3C^2}{(1-x)^2} - \frac{8x^3C^2}{(1-x)^2}(xG+1) + \frac{2x^3C^2}{(1-x)^2}(xG+1)^2 + \frac{2x^2(1+x)C}{(1-x)^2}(xG+1) \\ \Rightarrow \frac{(1-x)^2}{2x^2CG}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\bigg|_{s=1} &= xC - 4(x^2GC + xC) + xC(xG+1)^2 + (1+x)(xG+1) \\ &= xC - 4x^2GC - 4xC + x^3G^2C + 2x^2GC + xC + xG + 1 + x^2G + x \\ &= 1 - 2xC - 2x^2GC + x^3G^2C + x^2G + x + xG \\ &= \frac{1}{G} + xG(1-2xC) + x^3G^2C + x^2G + x \\ &= \frac{1}{G} + 2x + x^3G^2C + x^2G \\ \Rightarrow \frac{(1-x)^2}{2x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\bigg|_{s=1} &= C + 2xGC + x^2G^3(xC^2 + \frac{C}{G}) = C + 2xGC + x^2G^3.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\bigg|_{s=1} = \frac{2x^2}{(1-x)^2}(C + 2xGC + x^2G^3).$$

Αν τεθεί $a_n = 2[x^n](C + 2xGC + x^2G^3)$, τότε είναι $a_0 = 2$ και

$$a_n = 2C_n + 4\binom{2n-1}{n-1} + 2(n-1)\binom{2n-3}{n-2} = (2n+4)C_n + (n-1)nC_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $[x^n]\dfrac{x^2}{(1-x)^2} = (n-1)^+$, και επομένως,

$$[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\bigg|_{s=1} = 2n - 2 + \sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)\left((2k+4)C_k + k(k-1)C_{k-1}\right), \quad n \geq 3,$$

οπότε,

$$V_n = \frac{2n-2}{C_n} + \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)a_k + E_n - E_n^2,$$

όπου $a_k = (2k+4)C_k + k(k-1)C_{k-1}$.

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της διακύμανσης, θέτοντας

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)(2k+4)C_k \quad \text{και} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)k(k-1)C_{k-1} - \frac{n^2C_n}{36},$$

ο παραπάνω τύπος γράφεται ως

$$V_n = \frac{2n-2}{C_n} + \frac{1}{C_n}A_n + \frac{1}{C_n}B_n + E_n - \left(E_n - \frac{n}{6}\right)\left(E_n + \frac{n}{6}\right).$$

Για την ακολουθία A_n, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma_n = A_{n+1} - A_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(2k+4)C_k \\
\Rightarrow \Gamma_{n+1} - \Gamma_n &= (2n+4)C_n \Rightarrow \frac{\Gamma_{n+1}-\Gamma_n}{nC_n} \sim 2 \Rightarrow \frac{\Gamma_n}{nC_n} \sim \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A_n}{nC_n} \sim \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{A_n}{C_n} \sim \frac{2n}{9}.
\end{aligned}$$

Για την ακολουθία B_n, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta_n = B_{n+1} - B_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)C_{k-1} - \frac{(n+1)^2 C_{n+1}}{36} + \frac{n^2 C_n}{36} \\
\Rightarrow \Delta_{n+1} - \Delta_n &= n(n-1)C_{n-1} - \frac{(n+2)^2 C_{n+2}}{36} + \frac{2(n+1)^2 C_{n+1}}{36} - \frac{n^2 C_n}{36} \\
&= \left(36n(n-1)\frac{n+1}{4n-2} - \frac{(n+2)^2(4n+6)(4n+2)}{(n+3)(n+2)} + \frac{2(n+1)^2(4n+2)}{n+2} - n^2\right)\frac{C_n}{36} \\
&= \frac{15n^4 + 121n^3 + 204n^2 + 56n - 36}{(2n-1)(n+2)(n+3)} \cdot \frac{C_n}{36} \sim \frac{15nC_n}{2 \cdot 36} \\
\Rightarrow \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{nC_n} &\sim \frac{15}{2 \cdot 36} \Rightarrow \frac{\Delta_n}{nC_n} \sim \frac{15}{6 \cdot 36} \Rightarrow \frac{B_n}{nC_n} \sim \frac{15}{18 \cdot 36} \\
\Rightarrow \frac{B_n}{C_n} &\sim \frac{5n}{216}.
\end{aligned}$$

Τέλος, για την ακολουθία

$$Z_n = C_n E_n - \frac{nC_n}{6} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k+2}{2} C_{k-1} - \frac{nC_n}{6},$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{n+3}{2}C_n - \frac{n+1}{6}C_{n+1} + \frac{n}{6}C_n = \frac{4n+9}{6}C_n - \frac{n+1}{6}C_{n+1} \\
&= \left(\frac{4n+9}{6} - \frac{(n+1)(4n+2)}{6(n+2)}\right)C_n = \frac{(4n+9)(n+2) - (n+1)(4n+2)}{6(n+2)}C_n \\
&= \frac{11n+16}{6n+12}C_n \sim \frac{11}{6}C_n \\
\Rightarrow \frac{Z_{n+1} - Z_n}{C_n} &\sim \frac{11}{6} \Rightarrow \frac{Z_n}{C_n} \sim \frac{11}{18} \Rightarrow E_n - \frac{n}{6} \sim \frac{11}{18},
\end{aligned}$$

και ως εκ τούτου, είναι

$$(E_n - \frac{n}{6})(E_n + \frac{n}{6}) \sim \frac{11}{18}\frac{2n}{6} = \frac{22n}{108}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, τελικά προκύπτει ότι

$$V_n \sim \frac{2n}{9} + \frac{5n}{216} + \frac{n}{6} - \frac{44n}{216} = \frac{48n}{216} + \frac{5n}{216} + \frac{36n}{216} - \frac{44n}{216} = \frac{45n}{216} = \frac{5n}{24}.$$

□

6.6.3 Μη αριστερές κορυφές

Στην ενότητα αυτή, υπολογίζονται τα στατιστικά μεγέθη της παραμέτρου "πλήθος μη αριστερών κορυφών". Οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις τους μπορούν να υπολογισθούν με τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε και στις προηγούμενες περιπτώσεις. Εντούτοις, θα χρησιμοποιηθεί ενδεικτικά μια άλλη μέθοδος, για ακριβέστερη προσέγγιση, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Darboux.

Πρόταση 6.13. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος μη αριστερών κορυφών" δίνονται αντίστοιχα από τους ακόλουθους τύπους:*

$$E_n = \frac{1}{C_n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2j}{j} = \frac{n}{3} + \frac{5}{9} + \frac{4}{9n} + O(n^{-2}) \tag{6.29}$$

και

$$V_n = \frac{1}{C_n}\sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)(j+2)\binom{2j}{j} + E_n - E_n^2 = \frac{4n}{27} + \frac{14}{81} + O(n^{-1}). \tag{6.30}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (5.3), παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xF\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{x^2}{1-x}F^2 - (y-1)\frac{x^2}{1-x}2F\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{x}{1-x}F + (y-1)\frac{x}{1-x}\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{6.31}$$

η οποία δίνει, για $y = 1$,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{xG}{1-x}. \tag{6.32}$$

Από τη σχέση (6.31), παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή y, και στη συνέχεια θέτοντας $y = 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2x\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - \frac{4x^2}{1-x}F\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{2x}{1-x}\frac{\partial F}{\partial y} + (y-1)a \\
\Rightarrow (1-2xC)\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= 2x\frac{x^2G^2}{(1-x)^2} - \frac{4x^3CG}{(1-x)^2} + \frac{2x^2G}{(1-x)^2} \\
\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{2x^2G}{(1-x)^2}(xG^2 - 2xCG + G) = \frac{2x^2G}{(1-x)^2}(xG^2+1),
\end{aligned}$$

όπου $a = a(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{1-x}2F\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{x}{1-x}\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$, οπότε

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} = \frac{2x^2}{(1-x)^2}(xG^3 + G). \tag{6.33}$$

Ο συντελεστής της γεννήτριας συνάρτησης της σχέσης (6.32) είναι ίσος με

$$[x^n]\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = [x^{n-1}]\frac{G}{1-x} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{2j}{j},$$

άρα, η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο

$$E_n = \frac{1}{C_n}[x^n]\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{1}{C_n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2j}{j}.$$

Ο συντελεστής της γεννήτριας συνάρτησης της σχέσης (6.33) δίνεται από τη συνέλιξη των συντελεστών

$$[x^n]\frac{2x^2}{(1-x)^2} = 2[x^n]\sum_{n\geq 0}(n+1)x^{n+2} = 2(n-1)^+$$

και

$$[x^n](xG^3+G) = n\binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n}{n} = \frac{n+2}{2}\binom{2n}{n}, \qquad n \geq 0,$$

άρα είναι ίσος με

$$[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} = \sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)(j+2)\binom{2j}{j}.$$

Επομένως,

$$V_n = \frac{1}{C_n}\sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)(j+2)\binom{2j}{j} + E_n - E_n^2.$$

Για την ασυμπτωτική προσέγγιση της μέσης τιμής και της διακύμανσης, θέτοντας $4x = z$ στη σχέση (6.32), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} &= (1-4x)^{-1/2}\frac{x}{1-x} \\
&= (1-z)^{-1/2}\frac{z}{4-z} \\
&= (1-z)^{-1/2}\frac{z}{3+(1-z)} \\
&= (1-z)^{-1/2}\frac{z}{3}\frac{1}{1+(1-z)/3} \\
&= (1-z)^{-1/2}\frac{z}{3}\sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(1-z)^j.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Darboux και τη σχέση (6.24), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} &= 4^n[z^n](1-z)^{-1/2}\frac{z}{3}\sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(1-z)^j \\
&= \frac{4^n}{3}[z^{n-1}](1-z)^{-1/2}\sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(1-z)^j \\
&= \frac{4^n}{3}\sum_{j=0}^{2}(-1/3)^j\binom{n-1-j-1/2}{n-1} + \frac{4^n}{3}O(n^{-7/2}) \\
&= \frac{4}{3}\binom{2n-2}{n-1}\left(1+\frac{1}{3(2n-3)}+\frac{1}{3(2n-3)(2n-5)}\right) + \frac{4^n n^{-3/2}}{3}O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{C_n}[x^n]\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \frac{4n(n+1)}{3(4n-2)}\left(1+\frac{1}{3(2n-3)}+\frac{1}{3(2n-3)(2n-5)}\right) + O(n^{-2}) \\
&= \frac{n}{3}+\frac{5}{9}+\frac{4}{9n}+O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Για τη διακύμανση, θέτοντας $4x = z$ στη σχέση (6.33), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= \frac{2x^2 G}{(1-x)^2}\left(\frac{x}{1-4x}+1\right) = 2x^2(1-4x)^{-3/2}\frac{1-3x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2z^2}{16}(1-z)^{-3/2}\frac{1-3z/4}{(1-z/4)^2} = \frac{z^2}{2}(1-z)^{-3/2}\frac{4-3z}{(4-z)^2} \\ &= \frac{z^2}{2}(1-z)^{-3/2}\frac{1+3(1-z)}{(3+(1-z))^2} = \frac{z^2}{18}(1-z)^{-3/2}\frac{1+3(1-z)}{(1+(1-z)/3)^2}.\end{aligned}$$

Το κλάσμα της τελευταίας παράστασης αναπτύσσεται, σύμφωνα με τη διωνυμική σειρά

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j\geq 0}(j+1)x^j,$$

ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1+3(1-z)}{(1+(1-z)/3)^2} &= (1+3(1-z))\sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(j+1)(1-z)^j \\ &= \sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(j+1)(1-z)^j + \sum_{j\geq 0}3(-1/3)^j(j+1)(1-z)^{j+1} \\ &= \sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(j+1)(1-z)^j - \sum_{j\geq 0}9(-1/3)^{j+1}(j+1)(1-z)^{j+1} \\ &= 1 + \sum_{j\geq 1}(-1/3)^j(j+1)(1-z)^j - \sum_{j\geq 1}(-1/3)^j 9j(1-z)^j \\ &= 1 + \sum_{j\geq 1}(-1/3)^j(1-8j)(1-z)^j \\ &= \sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(1-8j)(1-z)^j.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Darboux για την $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=1}$, και με τη βοήθεια των σχέσεων (6.24) και (6.25), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= \frac{4^n}{18}[z^{n-2}](1-z)^{-3/2}\sum_{j\geq 0}(-1/3)^j(1-8j)(1-z)^j \\ &= \frac{4^n}{18}\sum_{j=0}^{2}(-1/3)^j(1-8j)\binom{n-2-j+1/2}{n-2} + \frac{4^n}{18}O(n^{-5/2}) \\ &= \frac{16}{18}\binom{2n-4}{n-2}\left(2n-3+\frac{7}{3}+\frac{5}{3(2n-5)}\right) + \frac{4^n n^{-3/2}}{18}O(n^{-1}).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_n}[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= \frac{2n(n^2-1)}{9(2n-1)(2n-3)}\left(2n-3+\frac{7}{3}+\frac{5}{3(2n-5)}\right) + O(n^{-1}) \\ &= \frac{n^2}{9}+\frac{5n}{27}+\frac{2}{9}+O(n^{-1}).\end{aligned}$$

Τέλος, προσθέτοντας στο παραπάνω αποτέλεσμα τον όρο $E_n - E_n^2$, προκύπτει ότι

$$V_n = \frac{4n}{27}+\frac{14}{81}+O(n^{-1}).$$

□

6.7 Εμφανίσεις προτύπου σε καθορισμένο ύψος

Στην παράγραφο αυτή, μελετώνται τα στατιστικά μεγέθη της παραμέτρου $N_{\tau,j}$: "πλήθος εμφανίσεων του προτύπου τ σε ύψος j", η οποία έχει οριστεί στο Κεφάλαιο 2.

Πρόταση 6.14. *Η μέση τιμή των εμφανίσεων σε ύψος j του προτύπου τ, ύψους h και βάθους δ σε ένα μονοπάτι Dyck ημιμήκους n ισούται με*

$$E_n = \frac{1}{C_n}\frac{h+\delta+2j+2}{2n-|\tau|+2}\binom{2n-|\tau|+2}{n-\frac{|\tau|+h+\delta}{2}-j}$$

και είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη με

$$E_n \sim \frac{h+\delta+2j+2}{2^{|\tau|-1}}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4, γνωρίζουμε ότι

$$(F_j - C)(1-(y-1)b) = (y-1)a,$$

όπου

$$a = a(x) = x^{|\tau|_\mathrm{u}+\delta+j}C^{M+m+2j+2}, \qquad b = b(x) = x^{|\tau|_\mathrm{u}}(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1} + \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_\mathrm{u}}),$$

$M = \max\{h,\delta\}$, $m = \min\{h,\delta\}$ και $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων v του τ, για τα οποία ισχύει $|v|_\mathrm{u} - |v|_\mathrm{d} = h - \delta$.

Παραγωγίζοντας κατά μέλη ως προς τη μεταβλητή y, έχουμε ότι

$$\frac{\partial F_j}{\partial y}(1-(y-1)b) - (F_j - C)b = a.$$

Θέτοντας $y = 1$, προκύπτει ότι

$$\left.\frac{\partial F_j}{\partial y}\right|_{y=1} = a = x^{|\tau|_\mathrm{u}+\delta+j}C^{M+m+2j+2}.$$

Επομένως, η ζητούμενη μέση τιμή ισούται με

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{C_n}[x^n]x^{|\tau|_\mathrm{u}+\delta+j}C^{M+m+2j+2} = \frac{1}{C_n}[x^{n-|\tau|_\mathrm{u}-\delta-j}]C^{M+m+2j+2} \\ &= \frac{1}{C_n}\frac{M+m+2j+2}{2(n-|\tau|_\mathrm{u}-\delta-j)+M+m+2j+2}\binom{2(n-|\tau|_\mathrm{u}-\delta-j)+M+m+2j+2}{n-|\tau|_\mathrm{u}-\delta-j}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|\tau|_\mathrm{u} - |\tau|_\mathrm{d} = h - \delta$, έπεται ότι $|\tau|_\mathrm{u} + \delta = \dfrac{|\tau|+h+\delta}{2}$, και επομένως,

$$E_n = \frac{1}{C_n}\frac{h+\delta+2j+2}{2n-|\tau|+2}\binom{2n-|\tau|+2}{n-\frac{|\tau|+h+\delta}{2}-j}.$$

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της $E_n(N_{\tau,j})$, βάσει του τύπου (6.7) προκύπτει ότι

$$E_n \sim \frac{h+\delta+2j+2}{2n}\cdot\frac{n}{2^{|\tau|-2}} = \frac{h+\delta+2j+2}{2^{|\tau|-1}}.$$

□

Πρόταση 6.15. *Η διακύμανση των εμφανίσεων σε ύψος j του προτύπου τ, ύψους h και βάθους δ σε ένα μονοπάτι Dyck ημιμήκους n ισούται με*

$$V_n = \frac{2}{C_n}\left(\binom{2n-2|\tau|+2}{n-|\tau|-M-j} - \binom{2n-2|\tau|+2}{n-|\tau|-h-\delta-2j-1} + \frac{1}{2}\frac{h+\delta+2j+2}{2n-|\tau|+2}\binom{2n-|\tau|+2}{n-\frac{|\tau|+h+\delta}{2}-j}\right.$$
$$\left. + \sum_{i\in I}\frac{h+\delta+2j+2}{2n-|\tau|-2i+2}\binom{2n-|\tau|-2i+2}{n-\frac{|\tau|+h+\delta}{2}-j-i}\right) - \left(\frac{1}{C_n}\frac{h+\delta+2j+2}{2n-|\tau|+2}\binom{2n-|\tau|+2}{n-\frac{|\tau|+h+\delta}{2}-j}\right)^2$$

και είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη με

$$V_n \sim \frac{1}{4^{|\tau|-1}}\left(2m_j(2M_j+m_j) + \left(\frac{1}{2}+\sum_{i\in I}4^{-i}\right)(M_j+m_j) - (M_j+m_j)^2\right),$$

όπου $M_j = M+j+1$, $m_j = m+j+1$, $M = \max\{h,\delta\}$, $m = \min\{h,\delta\}$, $\mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνόρων v του τ για τα οποία ισχύει $|v|_{\mathrm{u}} - |v|_{\mathrm{d}} = h-\delta$, και $I = \{|l_\tau(v)|_{\mathrm{u}} : v \in \mathcal{V}\}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4, γνωρίζουμε ότι

$$(F_j - C)(1-(y-1)b) = (y-1)a,$$

όπου

$$a = a(x) = x^{|\tau|_{\mathrm{u}}+\delta+j}C^{M+m+2j+2} \quad \text{και} \quad b = b(x) = x^{|\tau|_{\mathrm{u}}}(x^{\delta-m}q_{m+j}C^{M+j+1} + \sum_{v\in\mathcal{V}} x^{-|v|_{\mathrm{u}}}).$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές κατά μέλη ως προς τη μεταβλητή y, έχουμε ότι

$$\frac{\partial F_j}{\partial y}(1-(y-1)b) - (F_j - C)b = a$$

και

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2}(1-(y-1)b) - 2b\frac{\partial F_j}{\partial y} = 0,$$

οπότε, θέτοντας $y = 1$, προκύπτει ότι

$$\left.\frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2}\right|_{y=1} = 2b\left.\frac{\partial F_j}{\partial y}\right|_{y=1} = 2ba.$$

Επομένως, βάσει της σχέσης (6.2), η ζητούμενη διακύμανση δίνεται από τη σχέση

$$V_n = \frac{1}{C_n}[x^n]\left(\left.\frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2}\right|_{y=1} + \left.\frac{\partial F_j}{\partial y}\right|_{y=1}\right) - E_n^2 = \frac{1}{C_n}[x^n]a(2b+1) - E_n^2.$$

Θέτοντας $S = S(x) = 1 + 2\sum_{v\in\mathcal{V}} x^{|l_\tau(v)|_{\mathrm{u}}} = 1 + 2\sum_{i\in I} x^i$ (δηλαδή το $S(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a(2b+1) &= 2x^{2|\tau|_{\mathrm{u}}+2\delta-m+j}q_{m+j}C^{2M+m+3j+3} + x^{|\tau|_{\mathrm{u}}+\delta+j}C^{M+m+2j+2}S \\ &= 2x^{|\tau|+M+j}q_{m+j}C^{2M+m+3j+3} + x^{|\tau|_{\mathrm{u}}+\delta+j}C^{M+m+2j+2}S. \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια του τύπου (4.6), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} [x^n]2x^{|\tau|+M+j}q_{m+j}C^{2M+m+3j+3} &= 2[x^{n-|\tau|-M-j}]q_{m+j}C^{2M+m+3j+3} \\ &= 2\binom{2n-2|\tau|+2}{n-|\tau|-M-j} - 2\binom{2n-2|\tau|+2}{n-|\tau|-M-m-2j-1}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
[x^n]x^{|\tau|_u+\delta+j}C^{M+m+2j+2}S &= [x^{n-|\tau|_u-\delta-j}]C^{M+m+2j+2} + 2\sum_{i\in I}[x^{n-|\tau|_u-\delta-j-i}]C^{M+m+2j+2}\\
&= \frac{M+m+2j+2}{2n-|\tau|+2}\binom{2n-|\tau|+2}{n-\frac{|\tau|+M+m}{2}-j} + 2\sum_{i\in I}\frac{M+m+2j+2}{2n-|\tau|-2i+2}\binom{2n-|\tau|-2i+2}{n-\frac{|\tau|+M+m}{2}-j-i},
\end{aligned}$$

οπότε, με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση, προκύπτει ο ζητούμενος τύπος για την V_n.

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της τιμής $\frac{1}{C_n}[x^n]a(2b+1)$, εφαρμόζοντας τους τύπους (6.7) και (6.9), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_n}[x^n]a(2b+1) &\sim 2\frac{(m+j+1)(2M+m+3j+3)}{2^{2|\tau|-2}} + \frac{M+m+2j+2}{2n}\frac{n}{2^{2|\tau|-2}}\\
&\quad + 2\sum_{i\in I}\frac{M+m+2j+2}{2n}\frac{n}{2^{2|\tau|+2i-2}}\\
&= \frac{1}{4^{|\tau|-1}}\left(2m_j(2M_j+m_j)+\frac{M_j+m_j}{2}+(M_j+m_j)\sum_{i\in I}4^{-i}\right).
\end{aligned}$$

□

6.8 Εμφανίσεις προτύπου

Στην ενότητα αυτή, μελετώνται η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος εμφανίσεων του τ", για τις περιπτώσεις των προτύπων τ που καλύπτονται από τις σχέσεις (3.51) και (3.52). Πιο γενικά, θεωρούμε την παράμετρο p, με αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση την

$$F = F(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} x^{|\alpha|_u}y^{p(\alpha)},$$

η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$R_i(F) = 1+xR_i^2(F) + (y-1)x^{\mu}R_i^{\mu-\nu}(F)\left(R_i(F)+\left(R_i(F)-1-xR_i^2(F)\right)S\right), \tag{6.34}$$

όπου $\mu,\nu\in\mathbb{N}$, $S=S(x,y)=\sum_{j\in J}x^{-\mu_j}R_i^{\nu_j-\mu_j}(F)$, J ένα σύνολο δεικτών και $(\mu_j),(\nu_j)$ δύο ακολουθίες φυσικών αριθμών.

Για τις ρητές συναρτήσεις

$$R_i(t) = \frac{p_i(t)}{xp_{i-1}(t)},\quad i\in\mathbb{N},$$

ισχύει ότι $R_i(C)=C$. Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη ότι $C=\frac{C-1}{xC}$, καθώς και τη σχέση (1.25), προκύπτει ότι

$$p_i(C) = xCp_{i-1}\left(\frac{C-1}{xC}\right) \Rightarrow p_i(C) = xCp_{i-1}(C) \Rightarrow \frac{p_i(C)}{xp_{i-1}(C)} = C \Rightarrow R_i(C)=C.$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.24), προκύπτει ότι

$$R_i(t) = \frac{p_{i-1}(t)-xp_{i-2}(t)}{xp_{i-1}(t)} = \frac{1}{x}-\frac{xp_{i-2}(t)}{xp_{i-1}(t)} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{R_{i-1}(t)}\right),$$

οπότε, θέτοντας $t=F$, προκύπτει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$R_i(F) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{R_{i-1}(F)}\right),\qquad R_0(F)=F. \tag{6.35}$$

Λήμμα 6.16. *Αν η γεννήτρια συνάρτηση F ικανοποιεί τη σχέση* (6.34), *τότε*

$$\left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{1}{x^i C^{2i}} \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} \tag{6.36}$$

και

$$\left.\frac{\partial^2 R_i(F)}{\partial y^2}\right|_{y=1} = \frac{1}{x^i C^{2i}} \left(\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} - \frac{2x}{x^i C^{2i}} G_{i-1} \left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} \right)^2 \right), \tag{6.37}$$

όπου $G_i = \dfrac{1-(xC^2)^{i+1}}{1-xC^2} C = q_i C^{i+1}$.

Απόδειξη. Από τη σχέση (6.35), παραγωγίζοντας ως προς y, προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial R_i(F)}{\partial y} = \frac{1}{xR_{i-1}^2(F)} \frac{\partial R_{i-1}(F)}{\partial y}. \tag{6.38}$$

Θέτοντας $y = 1$ στη σχέση (6.38), έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{1}{xC^2} \left.\frac{\partial R_{i-1}(F)}{\partial y}\right|_{y=1}.$$

Ο τελευταίος τύπος ορίζει μια γεωμετρική πρόοδο ως προς τη μεταβλητή i, από την οποία έπεται η σχέση (6.36).

Για τη δεύτερη παράγωγο της F, παραγωγίζοντας ως προς y τα μέλη της σχέσης (6.38), προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i(F)}{\partial y^2} &= \frac{x \frac{\partial^2 R_{i-1}(F)}{\partial y^2} R_{i-1}^2(F) - 2xR_{i-1}(F) \left(\frac{\partial R_{i-1}(F)}{\partial y} \right)^2}{x^2 R_{i-1}^4(F)} \\ &= \frac{\frac{\partial^2 R_{i-1}(F)}{\partial y^2} R_{i-1}(F) - 2 \left(\frac{\partial R_{i-1}(F)}{\partial y} \right)^2}{xR_{i-1}^3(F)}\end{aligned}$$

από την οποία, θέτοντας $y = 1$ και βάσει της σχέσης (6.36), λαμβάνουμε

$$\left.\frac{\partial^2 R_i(F)}{\partial y^2}\right|_{y=1} = \frac{1}{xC^2} \left.\frac{\partial^2 R_{i-1}(F)}{\partial y^2}\right|_{y=1} - \frac{2xC}{(xC^2)^{2i}} \left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} \right)^2.$$

Η τελευταία σχέση είναι μία αναδρομική εξίσωση ως προς τη μεταβλητή i, η οποία τελικά δίνει τη σχέση (6.37). □

Πρόταση 6.17. *Η μέση τιμή της παραμέτρου p, για τη οποία η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση* (6.34), *ισούται με*

$$E_n = \frac{1}{C_n} \binom{2n-\mu-\nu+1}{n-\mu-i}$$

και είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη με

$$E_n \sim \frac{n}{2^{\mu+\nu-1}}.$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (6.34), ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial R_i(F)}{\partial y} = 2xR_i(F) \frac{\partial R_i(F)}{\partial y} + A + (y-1) \frac{\partial A}{\partial y}, \tag{6.39}$$

όπου

$$A = A(x, y) = x^{\mu} R_i^{\mu-\nu}(F) \left(R_i(F) + \left(R_i(F) - 1 - x R_i^2(F) \right) \sum_{j \in J} x^{-\mu_j} R_i^{\nu_j - \mu_j}(F) \right).$$

Επειδή

$$R_i(C) - 1 - x R_i^2(C) = C - 1 - x C^2 = 0,$$

έπεται ότι $A(x, 1) = x^{\mu} C^{\mu-\nu+1}$, οπότε, θέτοντας $y = 1$ στη σχέση (6.39), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1} &= 2xC \left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1} + x^{\mu} C^{\mu-\nu+1} \\ \Rightarrow (1 - 2xC) \left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1} &= x^{\mu} C^{\mu-\nu+1} \\ \Rightarrow \left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1} &= x^{\mu} C^{\mu-\nu+1} G. \end{aligned}$$

Βάσει της σχέσης (6.36), προκύπτει ότι

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = x^{\mu+i} C^{\mu-\nu+2i+1} G, \tag{6.40}$$

και επομένως,

$$E_n = \frac{1}{C_n} [x^{n-\mu-i}] C^{\mu-\nu+2i+1} G = \frac{1}{C_n} \binom{2n - \mu - \nu + 1}{n - \mu - i} \sim \frac{n}{2^{\mu+\nu-1}}.$$

□

Πρόταση 6.18. *Η διακύμανση της παραμέτρου p, για τη οποία η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση (6.34), ισούται με*

$$V_n = \frac{1}{C_n} (A_n + B_n - \Gamma_n - \Delta_n - Z_n + H_n) + E_n - E_n^2,$$

όπου

$$A_n = 4(2n - 2\mu - 2\nu + 1)\tbinom{2n-2\mu-2\nu}{n-2\mu-i-1}, \quad B_n = 8(\mu - \nu + i + 1) \sum_{j=1}^{2\mu-2\nu+2i+2} \tbinom{2n-4\mu-2i-2+j}{n-2\mu-i-1} 2^{2\mu-2\nu+2i+2-j},$$

$$\Gamma_n = 2(2n - 2\mu - 2\nu + 1)\tbinom{2n-2\mu-2\nu}{n-2\mu-2i-1}, \quad \Delta_n = 4(\mu - \nu + 2i + 1) \sum_{j=1}^{2\mu-2\nu+4i+2} \tbinom{2n-4\mu-4i-2+j}{n-2\mu-2i-1} 2^{2\mu-2\nu+4i+2-j},$$

$$Z_n = (2\mu - 2\nu + 2) \sum_{j=1}^{2\mu-2\nu+2i+1} \tbinom{2n-4\mu-2i+j}{n-2\mu-i} 2^{2\mu-2\nu+2i+1-j}, \quad H_n = 2 \sum_{j \in J} \tbinom{2n-2\mu-2\nu+\mu_j+\nu_j+1}{n-2\mu-i+\mu_j}$$

και είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη με

$$V_n \sim \frac{2n}{4^{\mu+\nu}} \left(1 - (\mu - \nu)^2 - 2(\mu + \nu) + 2^{\mu+\nu} + 2 \sum_{j \in J} 2^{\mu_j + \nu_j} \right).$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (6.39), ως προς τη μεταβλητή y, προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial^2 R_i(F)}{\partial y^2} = 2x\left(\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right)^2 + 2xR_i(F)\frac{\partial^2 R_i(F)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial A}{\partial y} + (y-1)\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \tag{6.41}$$

όπου

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial y} &= x^{\mu}(\mu-\nu)R_i^{\mu-\nu-1}(F)\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\left(R_i(F) + (R_i(F) - 1 - xR_i^2(F))S\right)\\ &\quad + x^{\mu}R_i^{\mu-\nu}(F)\left(\frac{\partial R_i(F)}{\partial y} + (1-2xR_i(F))\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}S + (R_i(F) - 1 - xR_i^2(F))\frac{\partial S}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

και

$$S = S(x,y) = \sum_{j\in J} x^{-\mu_j} R_i^{\nu_j-\mu_j}(F).$$

Θέτοντας $y = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{y=1} &= x^{\mu}C^{\mu-\nu}\left(\mu-\nu+1+\frac{1}{G}S(x,1)\right)\left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1}\\ &= x^{2\mu}C^{2\mu-2\nu+1}\left((\mu-\nu+1)G + S(x,1)\right).\end{aligned} \tag{6.42}$$

Θέτοντας $y = 1$ στη σχέση (6.41) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.16, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}&(1-2xC)\left.\frac{\partial^2 R_i(F)}{\partial y^2}\right|_{y=1} = 2x\left(\left.\frac{\partial R_i(F)}{\partial y}\right|_{y=1}\right)^2 + 2\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{y=1}\\ \Rightarrow &\frac{1}{(xC^2)^i G}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} - \frac{2xG_{i-1}}{(xC^2)^{2i}G}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1}\right)^2 = \frac{2x}{(xC^2)^{2i}}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1}\right)^2 + 2\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{y=1},\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \left(\frac{2x}{(xC^2)^i}G_{i-1} + \frac{2x}{(xC^2)^i}G\right)\left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1}\right)^2 + 2(xC^2)^i G\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{y=1}\\ &= \frac{2xG}{(xC^2)^i}\left(2-(xC^2)^i\right)\left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1}\right)^2 + 2(xC^2)^i G\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{y=1}\\ &= 2(xC^2)^{i+1}G^3\left(2-(xC^2)^i\right)x^{2\mu}C^{2\mu-2\nu} + 2(xC^2)^i G\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{y=1}\end{aligned}$$

η οποία, με τη βοήθεια της σχέσης (6.42), δίνει

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= 2(xC^2)^{i+1}G^3\left(2-(xC^2)^i\right)x^{2\mu}C^{2\mu-2\nu}\\ &\quad + 2(\mu-\nu+1)x^{2\mu+i}C^{2\mu-2\nu+2i+1}G^2 + 2x^{2\mu+i}C^{2\mu-2\nu+2i+1}GS(x,1).\end{aligned} \tag{6.43}$$

Θέτοντας $a = 2\mu + i$ και $b = 2\mu - 2\nu + 2i$, για απλότητα στις πράξεις, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}[x^n]\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= 4[x^{n-2\mu-i-1}]C^{2\mu-2\nu+2i+2}G^3 - 2[x^{n-2\mu-2i-1}]C^{2\mu-2\nu+4i+2}G^3\\ &\quad + (2\mu-2\nu+2)[x^{n-2\mu-i}]C^{2\mu-2\nu+2i+1}G^2 + 2[x^{n-2\mu-i}]C^{2\mu-2\nu+2i+1}GS(x,1)\\ &= 4[x^{n-a-1}]C^{b+2}G^3 - 2[x^{n-a-1-i}]C^{b+2+2i}G^3 + (b-2i+2)[x^{n-a}]C^{b+1}G^2\\ &\quad + 2\sum_{j\in J}[x^{n-a+\mu_j}]C^{b+1+\nu_j-\mu_j}G.\end{aligned} \tag{6.44}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.11) και (4.12):

$$[x^n]C^kG^2 = 2^k4^n - \sum_{j=1}^{k}\binom{2n+j}{n}2^{k-j} \quad \text{και} \quad [x^n]C^kG^3 = (2n+k+1)\binom{2n+k}{n} - k[x^n]C^kG^2,$$

αρχικά παρατηρούμε ότι οι όροι τάξεως 4^n απαλείφονται. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}
&-4\cdot(b+2)2^{b+2}4^{n-a-1} + 2\cdot(b+2+2i)2^{b+2+2i}4^{n-a-1-i} + (b-2i+2)2^{b+1}4^{n-a}\\
=&-(2b+4)2^{2n-2a+b+1} + (b+2+2i)2^{2n-2a+b+1} + (b-2i+2)2^{2n-2a+b+1}\\
=&(-2b-4+b+2+2i+b-2i+2)2^{2n-2a+b+1} = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, είναι

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} =& \ 4(2n-2a+b+1)\binom{2n-2a+b}{n-a-1} + 4(b+2)\sum_{j=1}^{b+2}\binom{2n-2a-2+j}{n-a-1}2^{b+2-j}\\
&-2(2n-2a+b+1)\binom{2n-2a+b}{n-a-1-i} - 2(b+2+2i)\sum_{j=1}^{b+2+2i}\binom{2n-2a-2-2i+j}{n-a-i-1}2^{b+2+2i-j}\\
&-(b+2-2i)\sum_{j=1}^{b+1}\binom{2n-2a+j}{n-a}2^{b+1-j} + 2\sum_{j\in J}\binom{2n-2a+b+1+\mu_j+\nu_j}{n-a+\mu_j}.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $2a-b=2\mu+2\nu$, κατόπιν αντικατάστασης των a,b, προκύπτει ο τύπος της διακύμανσης της παραμέτρου p.

Για την ασυμπτωτική εκτίμηση της διακύμανσης, εφαρμόζοντας τις σχέσεις (6.22) και (6.23), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&4[x^{n-a-1}]C^{b+2}G^3 - 2[x^{n-a-1-i}]C^{b+2+2i}G^3 + (b-2i+2)[x^{n-a}]C^{b+1}G^2\\
=&\frac{2^{b+2}n^2C_n}{4^a}\left(2 + \frac{(b+2)^2+b+8-2(a+1)}{2n} + O(n^{-2})\right)\\
&-2\frac{2^{b+2+2i}n^2C_n}{4^{a+1+i}}\left(2 + \frac{(b+2+2i)^2+b+2i+8-2(a+1+i)}{2n} + O(n^{-2})\right)\\
&-(b-2i+2)(b+1)\frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\left(\frac{1}{n} + O(n^{-2})\right)\\
=&\frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\left(4 + \frac{2b^2+10b+20-4a}{2n} + O(n^{-2})\right)\\
&-\frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\left(2 + \frac{b^2+5b+10+4bi+4i^2+8i-2a}{2n} + O(n^{-2})\right)\\
&-\frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\left(\frac{2b^2+6b-4bi-4i+4}{2n} + O(n^{-2})\right)\\
=&\frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\left(2 - \frac{b^2+b+2a+4i^2+4i-6}{2n} + O(n^{-2})\right).
\end{aligned}$$

Επιπλέον, βάσει της σχέσης (6.19), είναι

$$\begin{aligned}
2\sum_{j\in J}[x^{n-a+\mu_j}]C^{b+1+\nu_j-\mu_j}G &= 2\sum_{j\in J}\binom{2(n-a+\mu_j)+b+1+\nu_j-\mu_j}{n-a+\mu_j}\\
&= 2\sum_{j\in J}\binom{2n-(2a-b-1-\nu_j-\mu_j)}{n-a+\mu_j}\\
&= 2\sum_{j\in J}\frac{nC_n}{2^{2a-b-1-\nu_j-\mu_j}}\left(1+O(n^{-1})\right)\\
&= 2\frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j}\left(\frac{1}{n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2^{b+1}n^2C_n}{4^a}\left(\frac{1}{n}\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j+1}+O(n^{-2})\right).
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (6.44), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{2^{b+1}n^2}{4^a}\left(2-\frac{b^2+b+2a+4i^2+4i-6}{2n}+O(n^{-2})\right)\\
&\quad+\frac{2^{b+1}n^2}{4^a}\left(\frac{1}{n}\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j+1}+O(n^{-2})\right)\\
&\quad-\frac{2^{b+1}n^2}{4^a}\left(2+\frac{8-b^2+4a-6b-4i^2-4bi-8i}{4n}+O(n^{-2})\right)\\
&\quad+\frac{2^{b+1}n^2}{4^a}\left(\frac{2^{a-b/2}}{n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2^{b+1}n^2}{4^a}\left(\frac{4-b^2+4b-8a-4i^2+4bi+2^{a+2-b/2}+4\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j+1}}{4n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2n^2}{4^{\mu+\nu}}\left(\frac{1-(\mu-\nu+i)^2+2(\mu-\nu+i)-2(2\mu+i)-i^2+2(\mu-\nu+i)i+2^{\mu+\nu}+2\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j}}{n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2n^2}{4^{\mu+\nu}}\left(\frac{1-(\mu-\nu)^2-2(\mu-\nu)i-i^2+2(\mu-\nu)+2i-4\mu-2i-i^2+2(\mu-\nu)i+2i^2+2^{\mu+\nu}+2\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j}}{n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2n^2}{4^{\mu+\nu}}\left(\frac{1-(\mu-\nu)^2-2(\mu+\nu)+2^{\mu+\nu}+2\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j}}{n}+O(n^{-2})\right)\\
&= \frac{2n}{4^{\mu+\nu}}\left(1-(\mu-\nu)^2-2(\mu+\nu)+2^{\mu+\nu}+2\sum_{j\in J}2^{\mu_j+\nu_j}+O(n^{-1})\right).
\end{aligned}$$

□

6.9 Πρότυπα μήκους 2 και 3 σε μονοπάτια Grand-Dyck

Στην ενότητα αυτή, υπολογίζονται η μέση τιμή και η διακύμανση της στατιστικής N_τ: "πλήθος εμφανίσεων του προτύπου τ" σε μονοπάτια Grand-Dyck, όπου τ είναι οποιοδήποτε πρότυπο μήκους 2 ή 3. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να μελετηθούν οι περιπτώσεις των προτύπων

$$\mathrm{ud},\quad \mathrm{uu},\quad \mathrm{uuu},\quad \mathrm{udu},\quad \mathrm{duu}$$

καθώς οι υπόλοιπες περιπτώσεις ανάγονται σε κάποια από αυτές, βάσει των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ και $\alpha \mapsto \alpha'$, από τς οποίες προκύπτει η ισοκατανομή των αντίστοιχων στατιστικών. Συγκεκριμένα, προκύπτουν οι ισοκατανομές:

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{ud}} &\sim N_{\mathrm{du}}, \\ N_{\mathrm{u}^\mu} &\sim N_{\mathrm{d}^\mu}, \quad \mu > 0 \\ N_{\mathrm{udu}} &\sim N_{\mathrm{dud}}, \\ N_{\mathrm{duu}} &\sim N_{\mathrm{udd}} \sim N_{\mathrm{uud}} \sim N_{\mathrm{ddu}}. \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση, θεωρείται η γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x, y, 1)$, όπου

$$F(x, y, z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_\tau} z^{p(\alpha)}$$

και $p(\alpha)$ είναι το πλήθος των αρνητικών ανόδων του μονοπατιού α, οπότε η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$E_n = \frac{1}{|\mathcal{G}_n|} \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_n} |\alpha|_\tau = \binom{2n}{n}^{-1} [x^n] \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1}, \qquad V_n = \binom{2n}{n}^{-1} [x^n] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} + E_n - E_n^2,$$

όπου $\mathcal{G}_n$ είναι το σύνολο των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n.

6.9.1 Το πρότυπο ud

Πρόταση 6.19. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος εμφανίσεων των* ud*" σε μονοπάτια Grand-Dyck δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:*

$$E_n = \frac{n}{2}, \qquad V_n = \frac{n^2}{8n - 4}.$$

Απόδειξη. Η γεννήτρια συνάρτηση

$$F(x, y, z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\mathrm{ud}}} z^{p(\alpha)}$$

δίνεται από την ακόλουθη σχέση:[7]

$$F(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{f(x, y)} + \sqrt{f(xz, y)} + (1 - y)(1 - z)x}, \tag{6.45}$$

όπου $f(x, y) = 1 - 2(1 + y)x + (1 - y)^2 x^2$, με $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x((y - 1)x - 1)$.

[7] Βλ. [39].

Θέτοντας $z = 1$, προκύπτει

$$F = F(x,y) = F(x,y,1) = f^{-1/2}(x,y).$$

Επομένως,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2} f^{-3/2}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = x(1 - x(y-1)) f^{-3/2}(x,y).$$

Θέτοντας $y = 1$, προκύπτει

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{x}{(1-4x)^{3/2}} = xG^3,$$

και επομένως, για τη μέση τιμή της παραμέτρου έχουμε

$$E_n = \binom{2n}{n}^{-1}[x^{n-1}]G^3 = \binom{2n}{n}^{-1} n\binom{2n-1}{n-1} = \frac{n}{2}.$$

Για τη διακύμανση της παραμέτρου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= x(1 - x(y-1))(-3/2) f^{-5/2}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} - x^2 f^{-3/2}(x,y)\\ \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= x^2(3G^5 - G^3).\end{aligned}$$

Για τη γεννήτρια συνάρτηση

$$G^5 = (1-4x)^{-5/2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-5/2}{n}(-4)^n x^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+3/2}{n}4^n x^n,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\binom{n+3/2}{n} &= \frac{(n+3/2)(n+1/2)\cdots(n+3/2-n+1)}{n!} = \frac{(2n+3)(2n+1)\cdots 5}{2^n n!}\\ &= \frac{(2n+4)!}{3\cdot 2^n n! 2\cdot 4\cdots(2n+4)} = \frac{(2n+4)!}{3\cdot 2^{2n+2} n!(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2)}{3\cdot 4^{n+1}}\binom{2n+4}{n+2},\end{aligned}$$

και επομένως,

$$G^5 = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{12}\binom{2n+4}{n+2}x^n,$$

οπότε

$$[x^{n-2}]3G^5 = \frac{n(n-1)}{4}\binom{2n}{n}.$$

Ομοίως προκύπτει ότι

$$[x^{n-2}]G^3 = \frac{n(n-1)}{4(2n-1)}\binom{2n}{n},$$

οπότε τελικά έχουμε ότι

$$[x^n]\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} = [x^{n-2}](3G^5 - G^3) = \frac{n(n-1)}{4}\binom{2n}{n} - \frac{n(n-1)}{4(2n-1)}\binom{2n}{n} = \frac{n(n-1)^2}{4n-2}\binom{2n}{n},$$

και άρα, η διακύμανση της παραμέτρου δίνεται από τον τύπο

$$V_n = \frac{n(n-1)^2}{4n-2} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{8n-4}.$$

□

6.9.2 Το πρότυπο u^μ

Βάσει της Πρότασης 4.11, προκύπτει, για $\tau = \mathrm{u}^\mu$, $\mu > 0$, ότι $|\mathcal{G}_{n,k,m}| = |\mathcal{G}_{n,k,0}|$, για κάθε $0 \le m \le n$. Η παραπάνω ισότητα υποδεικνύει την ύπαρξη αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης μεταξύ των αντίστοιχων συνόλων, βάσει της οποίας άμεσα προκύπτει ότι

$$\binom{2n}{n}^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_n} |\alpha|_\tau = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \ge 0} \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{n,k,m}} |\alpha|_\tau = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \ge 0} \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{n,k,0}} |\alpha|_\tau$$
$$= \binom{2n}{n}^{-1} (n+1) \sum_{k \ge 0} \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{n,k,0}} |\alpha|_\tau = \frac{1}{C_n} \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} |\alpha|_\tau.$$

Ομοίως προκύπτει και ότι

$$\binom{2n}{n}^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_n} |\alpha|_\tau^2 = \frac{1}{C_n} \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} |\alpha|_\tau^2.$$

Επομένως, η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου ικανοποιούν αντίστοιχα του τύπους των Προτάσεων 6.17 και 6.18, για $\tau = \mathrm{u}^\mu$ και $i = 0$.

6.9.3 Το πρότυπο udu

Πρόταση 6.20. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος εμφανίσεων των* udu*" σε μονοπάτια Grand-Dyck δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:*

$$E_n = \frac{n(n-1)}{4n-2}, \qquad V_n = \frac{n(n-1)(3n^2-6n+2)}{(4n-6)(2n-1)^2}.$$

Απόδειξη. Για τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F(x,y,z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_\mathrm{u}} y^{|\alpha|_\mathrm{udu}} z^{p(\alpha)},$$

ισχύει η σχέση:[8]

$$F = \frac{(1-x(y-1))f_0(xz,y)}{1-x(y-1)-xf_0(xz,y)f_0(x,y)},$$

όπου $f_0(x,y)$ η γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και το πλήθος των εμφανίσεων του udu, για την οποία ισχύει[9]

$$xf_0^2(x,y) = (1-x(y-1))(f_0(x,y)-1).$$

Από την τελευταία σχέση, προκύπτει ότι

$$2xf_0(x,y)\frac{\partial f_0}{\partial y} = (1-x(y-1))\frac{\partial f_0}{\partial y} - x(f_0(x,y)-1)$$

και, στη συνέχεια, ότι

$$2x\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2 + 2xf_0(x,y)\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = (1-x(y-1))\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial f_0}{\partial y}.$$

[8]Βλ. σχέση (4.15).
[9]Βλ. σχέση (4.13).

Επομένως, για $y = 1$, λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$(1-2xC)\frac{\partial f_0}{\partial y}\bigg|_{y=1} = x(C-1) \Rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial y}\bigg|_{y=1} = x^2C^2G$$

και

$$(1-2xC)\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} = 2x\frac{\partial f_0}{\partial y}\bigg|_{y=1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\bigg|_{y=1}+1\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} = 2x^3C^2G^2(x^2C^2G+1).$$

Θέτοντας $z = 1$, προκύπτει

$$F = F(x,y,1) = \frac{(1-x(y-1))f_0(x,y)}{1-x(y-1)-xf_0^2(x,y)} = \frac{f_0(x,y)}{2-f_0(x,y)} = \frac{2}{2-f_0(x,y)} - 1.$$

Επομένως,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2\frac{\partial f_0}{\partial y}}{(2-f_0(x,y))^2},$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \frac{2x^2C^2G}{(2-C)^2} = 2x^2G^3.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$E_n = \binom{2n}{n}^{-1} 2[x^{n-2}]G^3 = \frac{n(n-1)}{4n-2}.$$

Για τη διακύμανση της παραμέτρου, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\frac{(2-f_0(x,y))^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + 2(2-f_0(x,y))\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2}{(2-f_0(x,y))^4} = 2\frac{(2-f_0(x,y))\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2}{(2-f_0(x,y))^3}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= \frac{2(2-C)2x^3C^2G^2(x^2C^2G+1)+4x^4C^4G^2}{(2-C)^3}\\ &= 4x^3G^4(x^2C^2G+1)+4x^4CG^5\\ &= 4x^3G^4(x(C-1)G+1+xCG)\\ &= 4x^3G^4(2xCG+1-xG)\\ &= 4x^3(1-x)G^5.\end{aligned}$$

Για την εύρεση του συντελεστή της τελευταίας γεννήτριας συνάρτησης, βάσει του τύπου (4.2), έχουμε

$$\begin{aligned}[x^n]G^5 &= \frac{(n+1)(n+2)}{12}\binom{2n+4}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{12(2n+5)}\binom{2n+5}{n+2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24(2n+5)}\binom{2n+6}{n+3}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}[x^n]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= 4[x^{n-3}]G^5 - 4[x^{n-4}]G^5 = \frac{(n-1)(n-2)n}{6(2n-1)}\binom{2n}{n} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6(2n-3)}\binom{2n-2}{n-1}\\ &= \frac{(n-1)(n-2)n}{6(2n-1)}\binom{2n}{n}\left(1-\frac{n-3}{4n-6}\right) = \frac{(n-1)^2(n-2)n}{(4n-2)(4n-6)}\binom{2n}{n},\end{aligned}$$

και τελικά, $V_n = \dfrac{(n-1)^2(n-2)n}{(4n-2)(4n-6)} - \dfrac{n^2(n-1)^2}{(4n-2)^2} + \dfrac{n(n-1)}{4n-2} = \dfrac{n(n-1)(3n^2-6n+2)}{(4n-6)(2n-1)^2}$. □

6.9.4 Το πρότυπο duu

Πρόταση 6.21. *Η μέση τιμή και η διακύμανση της παραμέτρου "πλήθος εμφανίσεων των* duu*" σε μονοπάτια Grand-Dyck δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:*

$$E_n = \frac{n(n-1)}{4n-2}, \qquad V_n = \frac{n^2(n-1)^2}{(4n-6)(2n-1)^2}.$$

Απόδειξη. Για τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F(x,y,z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|_{\mathrm{u}}} y^{|\alpha|_{\mathrm{duu}}} z^{p(\alpha)},$$

ισχύει:[10]

$$F = \frac{g_0(xz,y)}{1 - x(1+xz(y-1))g_0(x,y)g_0(xz,y)},$$

όπου $g_0(x,y)$ η γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και το πλήθος των εμφανίσεων του duu, για την οποία ισχύει:[11]

$$x(1+x(y-1))g_0^2(x,y) - g_0(x,y) + 1 = 0.$$

Από την τελευταία σχέση, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0}{\partial y} &= 2x(1+x(y-1))g_0(x,y)\frac{\partial g_0}{\partial y} + x^2 g_0^2(x,y) \\ \Rightarrow \frac{\partial g_0}{\partial y}\bigg|_{y=1} &= x^2C^2G \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_0}{\partial y^2} &= 2x(1+x(y-1))\left(\left(\frac{\partial g_0}{\partial y}\right)^2 + g_0(x,y)\frac{\partial^2 g_0}{\partial y^2}\right) + 4x^2 g_0(x,y)\frac{\partial g_0}{\partial y} \\ \Rightarrow (1-2xC)\frac{\partial^2 g_0}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= 2x(x^2C^2G)^2 + 4x^2C(x^2C^2G) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 g_0}{\partial y^2}\bigg|_{y=1} &= 2x^4C^2G^2(xC^2G + 2C) = 2x^4C^2G^2(G+C). \end{aligned}$$

Θέτοντας, $z = 1$, προκύπτει

$$F = F(x,y,1) = \frac{g_0(x,y)}{1 - x(1+x(y-1))g_0^2(x,y)} = \frac{g_0(x,y)}{2 - g_0(x,y)} = \frac{2}{2 - g_0(x,y)} - 1.$$

Επομένως,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{(2 - g_0(x,y))^2}\frac{\partial g_0}{\partial y},$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \frac{2x^2C^2G}{(2-C)^2} = 2x^2G^3.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$E_n = \binom{2n}{n}^{-1} 2[x^{n-2}]G^3 = \frac{n(n-1)}{4n-2}.$$

[10] Βλ. σχέση (4.23).

[11] Βλ. σχέση (4.19).

Για τη διακύμανση της παραμέτρου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2\frac{(2-g_0(x,y))^2\dfrac{\partial^2 g_0}{\partial y^2} + 2(2-g_0(x,y))\left(\dfrac{\partial g_0}{\partial y}\right)^2}{(2-g_0(x,y))^4}\\ &= 2\frac{(2-g_0(x,y))\dfrac{\partial^2 g_0}{\partial y^2} + 2\left(\dfrac{\partial g_0}{\partial y}\right)^2}{(2-g_0(x,y))^3}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= 4x^4G^4(G+C) + 4x^4CG^5\\ &= 4x^4G^5 + 2x^3G^3(2xCG) + 2x^3G^4(2xCG)\\ &= 4x^4G^5 + 2x^3G^3(G-1) + 2x^3G^4(G-1)\\ &= 4x^4G^5 - 2x^3G^3 + 2x^3G^5.\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, βάσει των σχέσεων (4.1) και (4.2), είναι

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}^{-1}[x^n]\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=1} &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{12(2n-1)(2n-3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{4(2n-1)(2n-3)} + \frac{(n-2)(n-1)n}{12(2n-1)}\\ &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4(2n-1)(2n-3)},\end{aligned}$$

και τελικά, η διακύμανση της παραμέτρου δίνεται από τον τύπο

$$V_n = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4(2n-1)(2n-3)} + \frac{n(n-1)}{4n-2} - \frac{n^2(n-1)^2}{(4n-2)^2} = \frac{n^2(n-1)^2}{(4n-6)(2n-1)^2}.$$

□

Βιβλιογραφία

[1] E. A. Bender, Asymptotic methods in enumeration, *SIAM Review*, **16** (1974), 485–515.

[2] Y. Le Borgne, Counting upper interactions in Dyck paths, *Sém. Lothar. Combin.* **54** (2005/06), Article B54f.

[3] F. Bassino, J. Clement and P. Nicodeme, Counting occurrences for a finite set of words: combinatorial methods, *ACM Transactions on Algorithms* **9** No. 4 (2010), Article 39.

[4] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, North-Holland Publishing Co. (1970).

[5] N. G. de Bruijn, D. E. Knuth, and S. 0. Rice, The average height of planted plane trees, *Graph Theory and Computing*, Academic Press, New York (1972), pp. 15–22.

[6] D. Callan, Two bijections for Dyck path parameters, Preprint (2004), `http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0406381`

[7] D. Callan, Some bijections and identities for the Catalan and Fine numbers, *Sém. Lothar. Combin.* **5** (2006), Article B53e.

[8] D. Callan, A bijection on Dyck paths and its cycle structure, *Electron. J. Combin.* **14** (2007), #R28.

[9] D. Callan and E. Deutsch, The run transform, *Discrete Math.* **312** (2012), 2927–2937.

[10] T. Chow and J. West, Forbidden subsequences and Chebyshev polynomials, *Discrete Math.* **204** (1999), 119–128.

[11] K. L. Chung and K. Feller, On fluctuations in coin-tossing, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949), 605–608.

[12] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, Dordrecht (1974).

[13] A. Denise and R. Simion, Two combinatorial statistics on Dyck paths, *Discrete Math.* **137** (1995), 155–176.

[14] N. Dershowitz and S. Zaks, The cycle lemma and some applications, *Europ. J. Combinatorics* **11** (1990), 35–40.

[15] E. Deutsch, A bijection on Dyck paths and its consequences, *Discrete Math.* **179** (1998), 253–256.

[16] E. Deutsch, An involution on Dyck paths and its consequences, Discrete Math. 204 (1999), 163–166.

[17] E. Deutsch, Dyck path enumeration, *Discrete Math.* **204** (1999), 167–202.

[18] E. Deutsch, D. Callan, S. Cautis and the Southwest Missouri Problems Group, Another Path to Generalized Catalan Numbers, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001), 872–873.

[19] Y. Ding and R.R.X Du, Counting humps in Motzkin paths, *Discrete Appl. Math.* **160**(1-2) (2012), 187–191.

[20] A. Dvoretzky and Th. Motzkin, A problem of arrangements, *Duke Math. J.* **14** (1947), 305–313.

[21] S.-P. Eu, T.-S. Fu and Y.-N. Yeh, Refined Chung-Feller Theorems for Lattice Paths, *Discrete Math.* **204** (1999), 119-128.

[22] S.-P. Eu, S.-C. Liu,Y.-N.Yeh, Taylor expansions for Catalan and Motzkin numbers, *Adv. Appl. Math.* **29** (2002), 345–357.

[23] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.*, **32** (1980), 125–161.

[24] P. Flajolet and A. M. Odlyzko, Singularity analysis of generating function, *SIAM J. Discrete Math.*, **3** (1990), 216–240.

[25] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press (2009).

[26] H. W. Gould, *Combinatorial Identities*, (private printing) (2009).

[27] I.P. Goulden and D.M. Jackson, An inversion theorem for cluster decompositions of sequences with distinguished subsequences, *J. London Math. Soc.* **20** (1979), 567–576.

[28] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Combinatorial enumeration*, John Wiley and Sons (1983).

[29] L. Guibas and A. Odlyzko, Periods in strings, *J. Combin. Theory Ser. A* **30** (1981), 19–42.

[30] L. Guibas and A. Odlyzko, String overlaps, pattern matching, and nontransitive games, *J. Comb. Theory Ser. A*, **30** (1981), 183–208.

[31] D. H. Greene and D. E. Knuth, *Mathematics for the Analysis of Algorithms*, 2nd ed. Birkhauser, Boston (1982).

[32] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley (1989).

[33] T. Harju and D. Nowotka, Border correlation of binary words, *J. Comb. Theory Ser. A* **108** (2004), 331–341.

[34] M. Jani and R. G. Rieper, Continued fractions and Catalan problems, *Electronic Journal of Combinatorics* **7** (2000), #R45, 8 pp.

[35] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming Vol. 1: Fundamental Algorithms*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading (1973).

[36] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming Vol. 2: Semi-Numerical Algorithms*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading (1981).

[37] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming Vol. 3: Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading (1973).

[38] P. A. MacMahon, Memoir on the Theory of the Partitions of Numbers, Part IV, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* **209** (1909), 153–175.

[39] J. Ma and Y.-N. Yeh, Refinements of (n, m)-Dyck paths, *European J. Combin.*, **32** (2011), 92–99.

[40] B. Montagh, A simple proof and a generalization of an old result of Chung and Feller, *Discrete Math.* **87** (1991), 105–108.

[41] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Strings in Dyck paths, 7th International Conference on Lattice Paths Combinatorics and Applications, Siena, Italy, July 4-7, 2010.

[42] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, The enumeration of strings at height j in Dyck paths, 3rd Polish Combinatorial Conference, Bedlewo, September 24-30, 2010.

[43] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Mean value and variance for some Dyck path parameters, 23rd British Combinatorial Conference, Exeter, July 3-8, 2011.

[44] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting strings at height j in Dyck paths, *J. Statist. Plann. and Infer.* **141** (2011), 2100–2107.

[45] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, General results on the enumeration of strings in Dyck paths, *Electron. J. Combin.* **18** (2011), #P74, 22pp.

[46] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting strings in Dyck paths using the Goulden-Jackson cluster method, 2nd European Conference for the Applied Mathematics and Informatics, Montreux, Switzerland, December 29-31, 2011. (Published in Recent Researches in Applied Mathematics and Informatics.)

[47] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Strings of length 3 in Grand-Dyck paths and the Chung-Feller property, *Electron. J. Combin.* , Vol. **19** (2012), #P2.

[48] K. Manes, A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting nonleft peaks in Dyck paths, 24th British Combinatorial Conference, Royal Holloway, University of London, 3 June 30 - July 5, 2013.

[49] T. Mansour, Counting peaks at height k in a Dyck path, *J. Integer Seq.* **5** (2002), Article 02.1.1.

[50] T. Mansour, Statistics on Dyck paths, *J. Integer Seq.* **9** (2006), Article 06.1.5.

[51] D. Merlini, R. Sprungoli and M. Verri, Some statistics on Dyck paths, *J. Statist. Plann. and Infer.* **101** (2002), 211–227.

[52] T. V. Narayana, Cyclic permutation of lattice paths and the Chung-Feller theorem, *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **50** (1967), 23–30.

[53] H. Niederhausen and S. Sullivan, Euler Coefficients and Restricted Dyck Paths. *Congr. Numer.* **188** (2007), 196–210.

[54] H. Niederhausen and S. Sullivan, Pattern Avoiding Ballot Paths and Finite Operator Calculus. *J. Statist. Plann. and Infer.* **140** (2010), 2312–2320.

[55] J. Noonan and D. Zeilberger, The Goulden-Jackson Cluster Method: Extensions, Applications, and Implementations, *J. Difference Eq. Appl.* **5** (1999), 355–377.

[56] A. M. Odlyzko, Asymptotic enumeration methods, *Handbook of Combinatorics*, R. Graham, M. Grotschel and L. Lovasz, Eds., **vol. II**, Elsevier (1995), 1063–1229.

[57] P. Peart and W.-J. Woan, Dyck paths with no peaks at height k, *J. Integer Seq.* **4** (2001), Article 01.1.3.

[58] Riordan, J., *Combinatorial Identities*, John Wiley and Sons (1968).

[59] E. Rivals and S. Rahmann, Combinatorics of periods in strings, *J. Comb. Theory Ser. A* **104** (2003), 95–113.

[60] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting strings in Dyck paths, *Discrete Math.* **307** (2007), 2909–2924.

[61] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Some strings in Dyck paths, *Australasian J. Combin.* **39** (2007), 49–72.

[62] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Enumeration of strings in Dyck paths: A bijective approach, *Discrete Math.* **309** (2009), 3033–3039.

[63] A. Sapounakis and P. Tsikouras, Counting peaks and valleys in k-colored Motzkin paths, *Electron. J. Combin.* **12** (2005), #R16.

[64] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `http://oeis.org`

[65] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, vol. 1*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[66] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[67] R. P. Stanley, *Catalan Addendum*, `http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf`

[68] S. Sullivan, Counting strings in ballot paths, (abstract), *Proceedings of the 7th International Conference on Lattice Paths Combinatorics and Applications*, Sienna, Italy (2010), 247–252.

[69] Y. Sun, The statistic “number of udu’s” in Dyck paths, *Discrete Math.* **287** (2004), 177–186.

[70] C. J. Wang, *Applications of the Goulden-Jackson cluster method to counting Dyck paths by occurrences of subwords*, Ph.D. thesis, Brandeis University (2011).

[71] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, Boston (1990).

[72] W. Woan, Uniform partitions of lattice paths and Chung-Feller generalizations, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001), 556–559.

[73] E. Wolfhagen, An investigation of the Chung-Feller theorem Preprint (2004), `http://arxiv.org/abs/math/0410124v1`

[74] Y.-M. Chen, The Chung-Feller theorem revisited, *Discrete Mathematics*, **308** (2008), 1328–1329.

[75] Ι. Τασούλας, *Πρότυπα σε μονοπάτια Dyck και διατεταγμένα δένδρα*, διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Πειραιώς (2009).