ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Συμβολή της δεσμευμένης πιθανότητας στη θεωρία παιγνίων και εφαρμογές στις διαπραγματεύσεις

Παναγιώτης Κοσμίδης

Επιβλέπων

Καθηγητής Ε. Χ. Φούντας

Πειραιάς, Ιούλιος 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Συμβολή της δεσμευμένης πιθανότητας στη θεωρία παιγνίων και εφαρμογές στις διαπραγματεύσεις

Παναγιώτης Κοσμίδης

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Ευάγγελος Φούντας
Καθηγητής

Πειραιάς, Ιούλιος 2012

Κοσμίδης Παναγιώτης (ΑΜ : ΜΠΣΠ 10046)

Πτυχιούχος του τμήματος Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Περίληψη

Η μεταπτυχιακή διατριβή θα προσπαθήσει να αναπτύξει, να περιγράψει καθώς και να επεξεργαστεί, με τη βοήθεια των Δεσμευμένων Πιθανοτήτων, κάποια προβλήματα που πηγάζουν από τη Θεωρία Παιγνίων. Το παίγνιο συνεργασίας που καλείται «Δίλημμα του Φυλακισμένου – Prisoner's Dilemma», της κατηγορίας των Παιγνίων που οδηγούνται και σε αδιέξοδο, θα προσπαθήσουμε να το δούμε από μια άλλη οπτική γωνία απαντώντας σε κάποια ερωτήματα μέσω της θεωρίας των Δεσμευμένων Πιθανοτήτων και του Θεωρήματος του Bayes. Στη συνέχεια, αφού λάβουμε τα συμπεράσματά μας, θα ενσωματώσουμε στο πρόβλημά μας το σχήμα διαιτησίας κατά Nash και θα δώσουμε μια λύση ισορροπίας. Έπειτα, ασχοληθούμε με μια εφαρμογή διαιτησίας-διοίκησης του εργατικού δυναμικού και θα συνεχίσουμε με μια εκτεταμένη μελέτη του παιγνίου Markov και τις διάφορες πτυχές του σε συνδυασμό με τα σειριακά παίγνια. Καταλήγοντας, παραθέτεται και ένα κεφάλαιο για τη διαδικασία διαπραγματεύσεων μέσα από την οπτική γωνία του Ariel Rubinstein. Η επεξεργασία δεδομένων και μελέτη γενικότερα της Θεωρίας Παιγνίων με Μαθηματικά και συγκεκριμένα εδώ με τις Δεσμευμένες Πιθανότητες αποτελούν μια ιδιαίτερη δραστηριότητα με πολλές πτυχές που παραμένουν μέχρι σήμερα άγνωστες.

Λέξεις Κλειδιά

Δίλημμα του Φυλακισμένου, τύπος Bayes, Δεσμευμένη Πιθανότητα, ισορροπία Nash, ασυμβίβαστα παίγνια, αδιέξοδο, σχήμα διαιτησίας Nash, διαπραγμάτευση, στρατηγική, σειριακά παίγνια , Markov , Rubinstein

Abstract

The thesis will attempt to develop, describe and edit, using the conditional probability, some problems arising from game theory. The game co-called «Prisoner's Dilemma» which is referred to the category of games that are driven at an impasse, we will try to see it from another angle answering some questions via the theory of Conditional Probability and the theorem of Bayes. Then, once we receive our conclusions, we will incorporate in our problem the Nash arbitration scheme and will give an equilibrium solution. Then, we will deal with an application-management arbitration of labor and we will continue with an extensive study of Markov game and its various aspects in combination with sequential games. In conclusion, we present a chapter on the negotiating process through the perspective of Ariel Rubinstein. Data processing and general study of Game Theory with Mathematics and specifically here with the conditional probability is a great activity as it has many aspects remain unknown to date.

Keywords

Prisoner's Dilemma, type of Bayes, conditional probability, equilibrium Nash, incompatible games, impasse, arbitration scheme of Nash, negotiation, strategy, sequential games, Markov, Rubinstein

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1. Εισαγωγή – Σύντομη Περιγραφή Προβλήματος/Αντικειμένου

1.1 Θεωρία Παιγνίων – Συνοπτική αναφορά

Η θεμελίωση της θεωρίας παιγνίων οφείλεται στον John von Neuman και Oskar Morgenstern. Το 1944 στο βιβλίο τους «Theory of Games and economic Behavior» που αφορά παίγνια μηδενικού αθροίσματος, όρισαν τη θεωρία της χρησιμότητας, μελέτησαν τις βέλτιστες λύσεις σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος και εισήγαγαν τα συνεργατικά παίγνια (cooperative games).

Από το 1950 μέχρι το 1953 ο John Nash συνεισφέρει σημαντικότατα, στη θεωρία παιγνίων, εισάγοντας την έννοια της ισορροπίας. Στα προβλήματα μη μηδενικού αθροίσματος πρότεινε τη λύση ισορροπία κατά Nash (Nash equilibration).

Η θεωρία των παιγνίων έχει αντικείμενο μελέτης τις αντιθέσεις που παρουσιάζονται στο ανθρώπινο είδος.

Έχει ευρύτατες εφαρμογές στους κλάδους της οικονομίας, της βιομηχανίας αλλά και στην επιστήμη της ψυχολογίας, της κοινωνιολογίας και στην εξελικτική βιολογία [4].

1.2 Θεμελιώδεις έννοιες

Η θεωρία των παιγνίων επιτρέπει τη μελέτη, ανάλυση και λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις συγκρούσεως και συμφερόντων. Οι συμμετέχοντες σε ένα παίγνιο ονομάζονται παίκτες. Ένας παίκτης μπορεί να είναι ένα άτομο, μια ομάδα ατόμων, μια εταιρεία ή ακόμα και ένα κράτος.

Η θεωρία των παιγνίων έχει δύο διαφορετικούς ρόλους: Ο πρώτος ερμηνεύει την πραγματικότητα δηλαδή πως σε καταστάσεις συγκρούσεων συμφερόντων οι παίκτες προκαλούν έναν ορισμένο αριθμό στρατηγικών και τακτικών κινήσεων. Στο δεύτερο ρόλο καθορίζονται οι καταστάσεις ισορροπίας που μπορούν (ή δε μπορούν) να ικανοποιηθούν ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των παικτών.

Στη θεωρία των παιγνίων λαμβάνονται υπόψη οι παρακάτω παράγοντες:

α) *Ο αριθμός των παικτών*. Αν το παίγνιο εξελίσσεται μόνο μεταξύ δύο παικτών, τότε ονομάζεται παίγνιο δύο ατόμων (two-person game). Αν ο αριθμός των παικτών είναι μεγαλύτερος από δύο, τότε το παίγνιο ονομάζεται n-ατόμων (n-person game).

β) *Άθροισμα κερδών και ζημιών*. Αν σε ένα παίγνιο τα κέρδη του ενός παίκτη ισούται με τις ζημιές του άλλου, τότε αυτό ονομάζεται παίγνιο μηδενικού-αθροίσματος (zero-sum game). Σε αντίθετη περίπτωση το παίγνιο ονομάζετε μη-μηδενικού αθροίσματος (non-zero sum game).

γ) *Στρατηγική*. Είναι η δυνατότητα επεμβάσεως που προσφέρουν σε κάθε παίκτη οι κανόνες του παιγνίου.

Η θεωρία παιγνίων διερευνά εκείνες τις στρατηγικές που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση του παίκτη. Γενικά, υπάρχουν δύο είδη στρατηγικών σε ένα παίγνιο.

1) *Η καθαρή στρατηγική (pure strategy)*

Σε αυτή ο παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις επιλογές του , με πιθανότητα ίση με τη μονάδα ενώ δεν επιλέγει καμία από τις υπόλοιπες.

2) *Η μικτή στρατηγική (mixed strategy)*

Σε αυτή τη στρατηγική περιλαμβάνονται συνδυασμοί στρατηγικών, καθεμιά από τις οποίες επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.

Από μαθηματικής άποψης, μια μικτή στρατηγική για ένα παίκτη με δύο ή περισσότερες δυνατότητες επιλογής είναι ένα σύνολο S με n μη αρνητικούς ακεραίους αριθμούς (πιθανότητες) που το άθροισμά τους ισούται με τη μονάδα ενώ n είναι ο αριθμός των καθαρών στρατηγικών του παίκτη [4].

Αν P_j, $j=1,2,\ldots,n$ είναι οι πιθανότητες με τις οποίες θα επιλεγεί η καθαρή στρατηγική τότε έχουμε:

$$S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \text{ με } P_1+P_2+\ldots+P_n = 1$$

και

$$P_j \geq 0 \ \forall j$$

1.3 Παίγνια δύο ατόμων μηδενικού-αθροίσματος

Ένα παίγνιο με μόνο δύο άτομα, Α και Β, ονομάζεται δύο-ατόμων μηδενικού-αθροίσματος, αν τα κέρδη του παίκτη Α ισούνται με τις ζημιές του παίκτη Β, έτσι ώστε το ολικό άθροισμα να ισούται με μηδέν.

Τα κέρδη (ή ζημιές), όταν οι παίκτες επιλέγουν συγκεκριμένες στρατηγικές μπορούν να παρασταθούν μέσω μιας μήτρας η οποία ονομάζεται Μήτρα παιγνίου ή Μήτρα αποτελεσμάτων (payoff matrix).

Αναλυτικότερα, η μήτρα περιγράφει το αποτέλεσμα του παιγνίου για κάθε συνδυασμό στρατηγικών των παικτών. Η λύση του παιγνίου προσδιορίζεται από την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής όλων των παικτών [4].

Έστω $S_1,S_2,\ldots,S_m$ είναι οι στρατηγικές του παίκτη Α ενώ $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ είναι οι στρατηγικές του παίκτη Β. Οι αριθμοί m και n δεν απαιτείται να είναι ίσοι.

Αν a_{ij} είναι τα κέρδη του παίκτη Α με την προϋπόθεση ότι ο παίκτης Α επέλεξε τη στρατηγική s_i ενώ ο παίκτης Β τη στρατηγική σ_j, τότε η μήτρα αποτελεσμάτων δίδεται από τον επόμενο πίνακα:

Στρατηγικές του παίκτη Β

Στρατηγικές του παίκτη Α

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Μήτρα αποτελεσμάτων

1.4 Στρατηγική Minimax και Maxmin

Η επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής είναι το βασικότερο πρόβλημα σε ένα παίγνιο.

Για ένα δοσμένο παίγνιο είναι απαραίτητη η μήτρα αποτελεσμάτων που θα περιλαμβάνει τις στρατηγικές του κάθε παίκτη. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι ποιες στρατηγικές πρέπει να επιλέξουν οι παίκτες έτσι ώστε οι ανταμοιβές τους να είναι βέλτιστες. Αυτή είναι η στρατηγική Minimax - Maxmin.

Αν ο παίκτης Α επιλέξει τη στρατηγική i, τότε τα κέρδη του θα είναι το ελάχιστο του πίνακα ανταμοιβών, min a_{ij}, τα οποία θα αντιστοιχούν στο ελάχιστο της i-οστής γραμμής στη μήτρα αποτελεσμάτων. Επειδή ο αντικειμενικός σκοπός είναι να μεγιστοποιήσει τα κέρδη το τότε, ο παίκτης Α, θα επιλέγει πάντοτε το μέγιστο των ελαχίστων στοιχείων των γραμμών του πίνακα αποτελεσμάτων. Τα κέρδη αυτά δεν πρέπει να είναι μικρότερα από

$$\max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij}$$

Ομοίως ο παίκτης Β θα επιλέγει τα στοιχεία τη j-οστής στήλης για τα οποία η ζημία δε πρέπει να είναι μεγαλύτερη από

$$\min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij}$$

δηλαδή ο παίκτης Β θα επιλέγει πάντοτε το ελάχιστο των μεγίστων στοιχείων των στηλών.

Αν η maxmin τιμή για ένα παίκτη ισούται με τη minimax τιμή του άλλου παίκτη:

$$\max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} = u = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij}$$

Τότε το παίγνιο έχει ένα σαγματικό (ισορροπία) σημείο και καθορίζει τη βέλτιστη στρατηγική, ενώ U είναι η τιμή του παιγνίου. Ένα παίγνιο μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σαγματικό σημείο. Ένα παίγνιο που δεν έχει σαγματικό σημείο λύνεται με μικτές στρατηγικές [4].

1.5 Κυρίαρχη στρατηγική

Στην περίπτωση που μία στρατηγική κυριαρχεί μια άλλης είναι δυνατή η μείωση της μήτρας των αποτελεσμάτων. Αυτό γίνεται απαλείφοντας τις υποδεέστερες στρατηγικές, δηλαδή εκείνες που ένας παίκτης δεν θα επέλεγε ποτέ.

1.6 Μικτή στρατηγική

Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων, στα οποία δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας ονομάζονται παίγνια μικτής στρατηγικής. Κάθε παίκτης πρέπει να προσδιορίσει την πιθανότητα με την οποία θα επιλέξει κάθε στρατηγική του ώστε να μεγιστοποιήσει το ελάχιστο αναμενόμενο κέρδος (ή να ελαχιστοποιήσει τη μέγιστη αναμενόμενη ζημιά) ανεξάρτητα από τις επιλογές του άλλου παίκτη [4].

Έστω $\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ η μήτρα ενός παίκτη και οι μήτρες-γραμμές των πιθανοτήτων:

$p \equiv (p_1,p_2,\dots p_m)$

και

$q \equiv (q_1,q_2,\dots q_n)$

με αντίστοιχες στρατηγικές:

$s \equiv (s_1,s_2,\dots s_m)$

και

$\sigma \equiv (\sigma_1,\sigma_2,\dots \sigma_n)$

Συμβολίζουμε με E(p,q) το αναμενόμενο κέρδος για έναν παίκτη A, για το οποίο ισχύει:

$$E(p,q) \equiv \sum_{u=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

1.6.1 Κριτήριο Mimimax (Maxmin)

Έστω $p_1,p_2,\ldots p_m$, ($pi \geq 0$) είναι οι πιθανότητες του παίκτη Α να επιλέξει τις μικτές στρατηγικές $s_1,s_2,\ldots s_m$ ενώ με $q_1,q_2,\ldots q_n$, ($qj \geq 0$) συμβολίζονται οι πιθανότητες με τι οποίες ο παίκτης Β επιλέγει τις μικτές στρατηγικές $\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n$,

Είναι:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \text{ και } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Αν η μήτρα αποτελεσμάτων για τους παίκτες Α και Β είναι $[a_{ij}]_{mxn}$, τότε το κέρδος του παίκτη Α (συνάρτηση ωφελιμότητας του Α) δίδεται από την ισότητα:

$$E(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

Αν εφαρμοστεί το minimax και maxmin κριτήριο στη συνάρτηση E(p,q), στην περίπτωση ενός παιγνίου μικτής στρατηγικής, τότε για τους παίκτες Α και Β έχουμε αντίστοιχα:

Παίκτης Α

$$u = \max_p \min_q E(p,q)$$

$$= \max_p \left[\min_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \right\}_j \right]$$

$$= \max_p \left[\min_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_i a_{in} \right\} \right]$$

Ο παράγοντας $\min_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \right\}$ δηλώνει το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη Α όταν ο παίκτης Β ακολουθεί τη j-στη καθαρή στρατηγική.

Παίκτης Β

Είναι

$$\bar{u} = \min_q \left[\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j a_{2j}, ..., \sum_{j=1}^{n} q_j a_{mj} \right\} \right]$$

Ο παράγοντας $\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}$ δηλώνει την αναμενόμενη ζημία του παίκτη Β όταν ο παίκτης Α ακολουθεί τη i-στη καθαρή στρατηγική.

Η σχέση $\bar{u} \geq u$ οδηγεί σε καλά αποτελέσματα στην περίπτωση παιγνίων καθαρής στρατηγικής. Όταν p_i και q_i αντιστοιχούν σε μία βέλτιστη λύση ενός παιγνίου, τότε η σχέση οδηγεί προς την κατεύθυνση της «ισότητας» και οι αναμενόμενες τιμές για τους παίκτες γίνονται ίσες με τη βέλτιστη αναμενόμενη τιμή του παιγνίου.

Ένα ζεύγος στρατηγικών για τις οποίες ισχύει $u = \bar{u}$ ονομάζεται σαγματικό σημείο της συνάρτησης E(p,q) E(p,q) [4].

Θεώρημα

Για ένα παίγνιο δύο ατόμων μικτής στρατηγικής 2 x 2 που δίδεται από τον ακόλουθο πίνακα πληρωμών:

B

			q_1	q_2
			σ_1	σ_2
A	p_1,	s_1	a_{11}	a_{12}
	p_2,	s_2	a_{21}	a_{22}

Οι πιθανότητες p_1 και p_2 για τις στρατηγικές s_1 και s_2 του παίκτη Α καθώς και τη μέγιστη τιμή U του παιγνίου δίδονται από τις σχέσεις:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

και

$$u = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Όμοια οι πιθανότητες q_1 και q_2 για τις στρατηγικές σ_1 και σ_2 για τον παίκτη Β, δίδονται:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Έτσι για τη μήτρα πληρωμών:

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} \\
 & & q_1 & q_2 \\
 & & \sigma_1 & \sigma_2 \\
\hline
A & p_1, \; s_1 & 1 & 3 \\
 & p_2, \; s_2 & 2 & 1
\end{array}$$

έχουμε

$$p \equiv (p_1,p_2) = \left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right), \quad q \equiv (q_1,q_2) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

και

$$u = \frac{5}{3} = 1{,}6$$

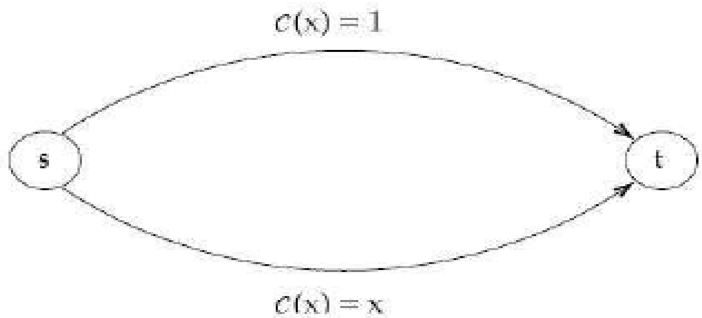
1.7 Κόστος Αναρχίας – Εγωιστική Δρομολόγηση (Selfish Routing)

Ποιά διαδρομή θα έπρεπε να πάρουμε για να φτάσουμε στη δουλειά μας αύριο το πρωί ; Παρόλο που φαινομενικά οι διαθέσιμες διαδρομές είναι περίπου ίδιες, οι περισσότεροι από εμάς θα επιλέγαμε εκείνη τη διαδρομή που θα ήταν κοντινότερη, εκείνη τη διαδρομή που θα μας έδινε περισσότερα λεπτά ύπνου, εκείνη τη διαδρομή που τελικά δεν θα μας ανάγκαζε να σηκωθούμε από τα χαράματα για να φτάσουμε εγκαίρως στον προορισμό μας. Όπως είναι γνωστό, ο χρόνος που χρειαζόμαστε για τη διαδρομή μας, εξαρτάται κυρίως από τη κυκλοφοριακή συμφόρηση που θα συναντήσουμε καθώς και τον αριθμό των ατόμων που επέλεξαν την ίδια διαδρομή με εμάς και θα παρεμβάλλονται στην πορεία μας. Στην επιλογή της διαδρομής, από το σπίτι στην δουλειά, λογαριάζουμε την πρόσθετη συμφόρηση που προκαλούμε εμείς στους άλλους κατά την μετακίνηση μας; Πιθανότατα, όχι. Σχεδόν, το πιο σίγουρο είναι ότι επιλεγούμε την διαδρομή μας **εγωιστικά (selfishly)**, στοχεύοντας να φτάσουμε στη δουλειά μας όσο το δυνατόν ταχύτερα, χωρίς να λογαριάζουμε τις συνέπειες που έχει η επιλογή μας (**κόστος αναρχίας**) για τους άλλους. Φυσικά, είναι γνωστό ότι και εμείς με τη σειρά μας θα πρέπει να περιμένουμε από τους άλλους να δρουν παρόμοια. Τι θα συμβεί, λοιπόν, εάν ο καθένας συνεργαστεί με το συντονισμό των διαδρομών; Είναι πιθανόν να περιοριστεί η παρέμβαση άλλων μεταξύ των διαδρομών με αυτόν τον τρόπο και επιπλέον να βελτιωθεί ο παράγοντας χρόνος; Αν ναι, με ποιον τρόπο;

Σε αυτή την ενότητα θα παραθέσουμε δύο σημαντικά παραδείγματα της βιβλιογραφίας αυτού του τομέα της Θεωρίας Παιγνίων που δραστηριοποιούνται με την εγωιστική δρομολόγηση και το κόστος της αναρχίας. Εδώ, γίνεται μια απλή περιγραφή. Το πρώτο παράδειγμα ανακαλύφθηκε και παρουσιάστηκε από τον **Pigou** το 1920 και το δεύτερο από τον **Braess** το 1968 [5].

1.7.1 Το παράδειγμα του Pigou

Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα προάστιο **(s)** και έναν κοντινό σιδηροδρομικό σταθμό **(t)**. Τα s και t συνδέονται μεταξύ τους με δύο μονοπάτια (εθνικές οδοί) τα οποία δεν έχουν άλλες παρεμβολές. Επιπλέον, θεωρούμε έναν σταθερό αριθμό οδηγών που επιθυμούν να μεταφερθούν από το προάστιο s στο σταθμό t, κατά προσέγγιση, στον ίδιο χρόνο. Το πρώτο μονοπάτι είναι κοντινό αλλά στενό και είναι αρκετά αισθητή η αύξηση του χρόνου για να το διασχίσεις καθώς αυξάνεται η χρήση του από τους οδηγούς. Το δεύτερο μονοπάτι είναι αρκετά φαρδύ για να αποφευχθεί η κυκλοφοριακή συμφόρηση αλλά θεωρείται σαν παρακαμπτήριος διαδρομή και είναι μεγάλη.



<u>Εικόνα 1.1</u> : Το παράδειγμα του Pigou με τη χρήση συνάρτησης κόστους c(x)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλοι οι οδηγοί σε αυτό το μονοπάτι χρειάζονται μία ώρα για να διασχίσουν τη διαδρομή s - t, ανεξαρτήτως του αριθμού των άλλων οδηγών που βρίσκονται σε αυτό {c(x)=1}. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε πως ο χρόνος για να διασχίσουμε το σύντομο μονοπάτι είναι ίσος, σε ώρες, με τη συνολική καθυστέρηση που δημιουργείται από τους οδηγούς που το επιλέγουν {c(x)=x}. Δηλαδή, στην κάτω ακμή αυξάνεται η καθυστέρηση με την αύξηση του φορτιού των αυτοκίνητων, ενώ η πάνω ακμή έχει μια σταθερή καθυστέρηση. Στην **Εικόνα 1.1** παρατηρούμε το συγκεκριμένο δίκτυο. Οι συναρτήσεις της μορφής c(·) ονομάζονται συναρτήσεις κόστους και εδώ στο παράδειγμά μας η c(x) περιγράφει το χρόνο μεταφοράς των οδηγών από το s στο t συναρτήσει με την καθυστέρηση κατά την αύξηση του φορτιού των αυτοκίνητων πάνω στο μονοπάτι. Η επάνω καμπύλη αντιπροσωπεύει το μακρύ και φαρδύ μονοπάτι, ενώ η κάτω το κοντινό και στενό.

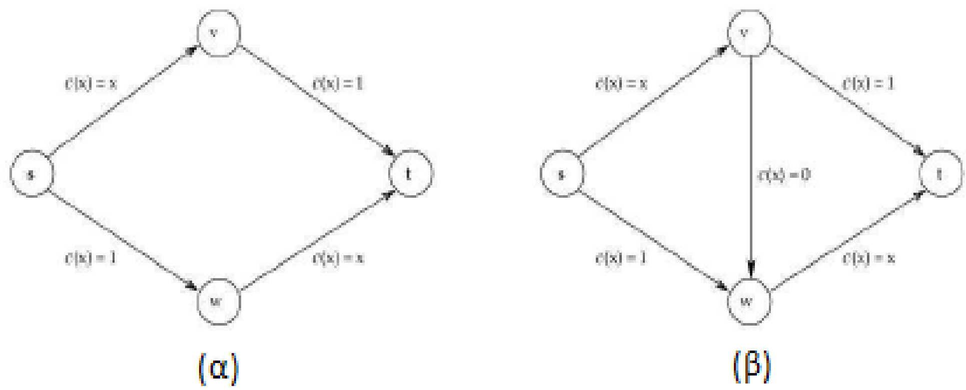
Αν θεωρήσουμε πως όλοι οι οδηγοί δρουν ανεξάρτητα και έχουν ως στόχο να ελαχιστοποιήσουν το χρόνο οδήγησης από το s στο t, έχουμε έναν καλό λόγο να πιστεύουμε πως όλοι οι χρηστές (οπότε και όλη η κίνηση) θα διαλέξουν την κάτω ακμή, που δεν είναι ποτέ χειρότερη από την πάνω για ροή μέχρι 1. Αντίθετα, μπορεί να είναι και καλύτερη αν κάποιοι οδηγοί είναι αρκετά αφελείς ώστε να επιλέξουν την πάνω ακμή. Έτσι, με αυτό το **«εγωιστικό παιχνίδι»,** περιμένουμε όλη η ροή να δρομολογηθεί με μια μονάδα καθυστέρησης.

Τώρα, ας υποθέσουμε πως έχουμε μια κεντρική αρχή με τη δυνατότητα να διαλέξουμε που θα κινηθεί κάθε οδηγός, δηλαδή ποιο μονοπάτι θα οδηγήσει. Αυτός ο έλεγχος των κινήσεων είναι ικανός να βοηθήσει στο γενικότερο αποτέλεσμα της εγωιστικής δρομολόγησης. Αν η αρχή αυτή αναγκάσει τους μισούς οδηγούς να χρησιμοποιήσουν την πάνω ακμή, τότε η μεν ροή δρομολογείται από πάνω, έχει πάλι καθυστέρηση 1, όπως και πριν, ενώ η ροή που δρομολογείται από κάτω έχει τώρα καθυστέρηση 1/2, δηλαδή οι οδηγοί θα φτάσουν στο t σε **30 λεπτά**. Με την παρούσα κατάσταση επωφελούνται και είναι ευχαριστημένοι οι μισοί οδηγοί. Πλέον, ο μέσος χρόνος γίνεται **3/4** του αρχικού που ήταν 1 **{(60 + 30) / 2**

= 45 λεπτά}. Τελικά, το παράδειγμα αυτό θέλει να μας επιβεβαιώσει πως η εγωιστική συμπεριφορά οδηγεί σε αποτελέσματα που υπολείπονται του βέλτιστου [5].

1.7.2 Το παράδοξο του Braess

Ξεκινώντας με την ίδια λογική, θεωρούμε ένα προάστιο **(s)**, έναν σιδηροδρομικό σταθμό **(t)** και έναν σταθερό αριθμό οδηγών που θέλουν να πραγματοποιήσουν τη διαδρομή s – t . Υπάρχουν 2 ξένα μονοπάτια από το s στο t. Το καθένα περιλαμβάνει ένα μακρύ-φαρδύ μονοπάτι και ένα σύντομο-στενό μονοπάτι, όπως φαίνεται και στην **Εικόνα 1.2(α)**. Επιπλέον, έχει κόστος 1+x, οπού x είναι το φορτίο των αυτοκινήτων κάθε ακμής. Επειδή τα δυο μονοπάτια είναι πανομοιότυπα η κίνηση θα μοιραστεί στη μέση και κάθε μονοπάτι θα μεταφέρει 1/2 ροή. Έτσι, στην περίπτωση αυτή η μέση καθυστέρηση θα είναι 3/2 (1 + 1/2 = 3/2) , δηλαδή οι οδηγοί θα φτάνουν στο t σε 90 λεπτά.



<u>Εικόνα 1.2</u> : Το παράδειγμα του Braess

Υποθέτουμε τώρα, ότι, σε μια προσπάθεια να βελτιώσουμε την απόδοση του θεωρητικού «δικτύου» αυτοκινήτων, προσθέτουμε μια πολύ γρήγορη ακμή {με c(x)=0} μεταξύ των κόμβων v και w –**Εικόνα 1.2(β)**. Πώς θα αντιδρούσαν οι ιδιοτελείς οδηγοί; Όπως και στο παράδειγμα του Pigou, το μονοπάτι s → v → w → t δεν είναι ποτέ χειρότερο από τα 2 αρχικά μονοπάτια, για μέχρι 1 μονάδα ροής και είναι καλύτερο αν κάποιος οδηγός επιλέξει απερίσκεπτα κάποιο από τα αρχικά μονοπάτια. Με το σκεπτικό αυτό, περιμένουμε όλους τους ιδιοτελείς χρήστες να επιλέξουν το νέο μονοπάτι, με αποτέλεσμα όλη η ροή τώρα να έχει μέση καθυστέρηση 2. Έτσι το κόστος – καθυστέρηση της ροής αυξήθηκε κατά ένα παράγοντα 4/3 στην προσπάθειά μας να βελτιώσουμε την ποιότητα του «δικτύου».

Το πρώτο ηθικό δίδαγμα αυτής της παραγράφου, ότι, δηλαδή, η εγωιστική συμπεριφορά δεν χρειάζεται να αποφέρει ένα κοινωνικά βέλτιστο αποτέλεσμα, είναι αναμφισβήτητα πάρα πολύ παλιό. Στη γλώσσα της οικονομίας, αυτή η ηθική ορίζει ότι αυτό το εγωιστικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι **ανεπαρκές κατά Pareto** (*Pareto-inefficient)* - μπορεί να υπάρξει μια διαφορετική κατάσταση κατά την οποία κάποιος είναι σε καλύτερη θέση, ενώ κανείς δεν είναι σε χειρότερη κατάσταση. Ίσως το πιο κανονικό παράδειγμα στην θεωρία των παιγνίων του ανεπαρκούς κατά Pareto της εγωιστικής συμπεριφοράς είναι το δίλημμα του φυλακισμένου που θα επικεντρωθεί αργότερα η διατριβή μας [5].

Κεφάλαιο 2

2. Δεσμευμένη Πιθανότητα – Παίγνια Συνεργασίας

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε δύο από τις βασικότερες έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων: τη δεσμευμένη πιθανότητα και την ανεξαρτησία ενδεχομένων.

Η χρησιμότητα των δεσμευμένων πιθανοτήτων είναι διπλή. Πρώτον, κρίνεται απαραίτητη η χρήση τους όταν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός πιθανοτήτων στην περίπτωση που διαθέτουμε κάποιες πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την έκβαση του αποτελέσματος το οποίο μελετάμε. Για παράδειγμα κάποιος θα μπορούσε να μας πληροφορήσει ότι ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο έχει συμβεί, περιορίζοντας έτσι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Επομένως θα πρέπει να «τροποποιήσουμε κατάλληλα» τις «αρχικές μας πιθανότητες» λαμβάνοντας υπόψη την πρόσθετη πληροφορία που μας δόθηκε. Οι νέες αυτές ποσότητες λέγονται δεσμευμένες πιθανότητες.

Μια δεύτερη περίπτωση όπου η χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η εξής: αρκετά συχνά, παρότι δε διαθέτουμε πρόσθετες πληροφορίες για ένα πείραμα, η εισαγωγή κατάλληλων δεσμευμένων πιθανοτήτων μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για τον υπολογισμό (μη δεσμευμένων) πιθανοτήτων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εμφάνιση (ή η μη εμφάνιση) ενός ενδεχόμενου Α δεν επηρεάζει καθόλου την εμφάνιση ενός δεύτερου ενδεχόμενου Β. Θα λέμε τότε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα. Η έννοια της ανεξαρτησίας, η οποία προφανώς συμφωνεί και με τη διαισθητική αντίληψη που έχουμε γι' αυτήν από την καθημερινή ζωή, διαδραματίζει πρωταρχικό ρόλο στη θεωρία πιθανοτήτων. Και τούτο γιατί, στις περιπτώσεις που εμφανίζονται στο πρόβλημά μας ανεξάρτητα ενδεχόμενα, προκύπτουν σημαντικές απλοποιήσεις στους υπολογισμούς των πιθανοτήτων σύνθετων ενδεχομένων που περιγράφονται μέσω αυτών [1],[2].

2.1 Δεσμευμένη πιθανότητα

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα το οποίο θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε την αναγκαιότητα που υπάρχει για την εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας.

Θεωρούμε ένα δοχείο το οποίο περιέχει τέσσερις μπλε και έξι άσπρες σφαίρες. Εξάγουμε τυχαία μια από τις 10 σφαίρες και στη συνέχεια, χωρίς να επιστρέψουμε στο δοχείο τη σφαίρα που βγάλαμε*, εξάγουμε μια δεύτερη.

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα

A1: στην i εξαγωγή διαλέγουμε άσπρη σφαίρα

B1: στην i εξαγωγή διαλέγουμε μπλε σφαίρα

Για i=1,2. Αφού η εξαγωγή της πρώτης σφαίρας γίνεται εντελώς τυχαία είναι φανερό ότι

$$P(A_1) = \frac{6}{10}, \; P(B_1) = \frac{4}{10}$$

Θέλοντας να υπολογίσουμε στη συνέχεια τις πιθανότητες P(A2), P(B2) αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα. Τη στιγμή της δεύτερης εξαγωγής, ενώ γνωρίζουμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων (9, όσες και οι σφαίρες που απέμειναν στο δοχείο), δε μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων, αφού αυτό εξαρτάται από το αποτέλεσμα της πρώτης εξαγωγής.

Μπορούμε ωστόσο να διατυπώσουμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) αν στην πρώτη εξαγωγή επιλέχτηκε άσπρη σφαίρα, η πιθανότητα να επιλεγεί στη δεύτερη εξαγωγή άσπρη είναι 5/9, ενώ η πιθανότητα να επιλεγεί πράσινη είναι 4/9.

β) αν στην πρώτη εξαγωγή επιλέχτηκε μπλε σφαίρα, η πιθανότητα να επιλεγεί στη δεύτερη εξαγωγή άσπρη είναι 6/9, ενώ η πιθανότητα να επιλεγεί πράσινη είναι 3/9.

Οι προηγούμενες πιθανότητες λέγονται δεσμευμένες πιθανότητες, αφού αναφέρονται στην εμφάνιση ή μη ενός ενδεχομένου δοθέντος (υπό την προϋπόθεση) ότι συνέβη κάποιο άλλο ενδεχόμενο. Πιο συγκεκριμένα θα γράφουμε

$$P(A_2/A_1) = \frac{5}{9}, \; P(B_2/A_1) = \frac{4}{9},$$

$$P(A_2/B_1) = \frac{6}{9}, \; P(B_2/B_1) = \frac{3}{9}$$

* Η διαδικασία αυτή λέγεται δειγματοληψία χωρίς επανάθεση. Όταν η σφαίρα επιστρέφεται στο δοχείο πριν την επόμενη εξαγωγή σφαίρας, θα λέμε ότι έχουμε δειγματοληψία με επανάθεση.

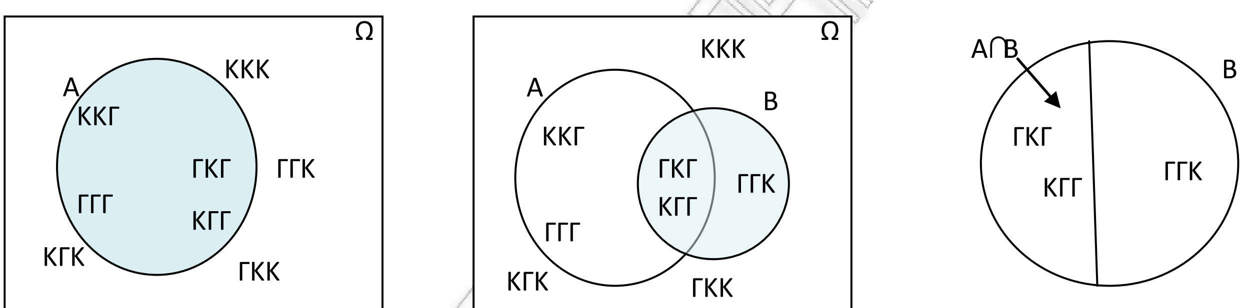
Όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις τέσσερις παραπάνω δεσμευμένες πιθανότητες για να υπολογίσει τις (μη δεσμευμένες) πιθανότητες $P(A_2)$, $P(B_2)$.

Με στόχο να διερευνήσουμε περαιτέρω τη σχέση μεταξύ δεσμευμένης και μη δεσμευμένης πιθανότητας ας εξετάσουμε προσεκτικά το επόμενο παράδειγμα. Ένας φίλος μας ρίχνει ένα νόμισμα 3 φορές χωρίς εμείς να βλέπουμε τα αποτελέσματα και έστω το ενδεχόμενο:

Α : το αποτέλεσμα της τρίτης ρίψης είναι «Γράμματα».

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από 8 στοιχειώδη ενδεχόμενα, εκ των οποίων τα τέσσερα ανήκουν στο ενδεχόμενο Α (ευνοϊκά αποτελέσματα). Επομένως

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



α. Ο «αρχικός» δειγματικός χώρος και τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το Α

β. Τα ενδεχόμενα Α και Β

γ. Ο «νέος» δειγματικός χώρος και τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το Α

Ρωτάμε στη συνέχεια το φίλο μας πόσες φορές έφερε «Γράμματα» στις 3 ρίψεις και μα απαντάει ότι έφερε 2 φορές. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα η Τρίτη ρίψη να έδωσε «Γράμματα»;

Μετά την απάντηση του φίλου μας, ο δειγματικός χώρος περιορίζεται σε ένα υποσύνολο του Ω και πιο συγκεκριμένα στο υποσύνολο που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο Β: στις 3 ρίψεις, οι δύο (ακριβώς) έδωσαν «Γράμματα».

Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι τώρα 3, ενώ των ευνοϊκών 2. Επομένως, η πιθανότητα η τρίτη ρίψη να είναι «Γράμματα» ισούται πλέον με 2/3 (αντί για 1/2 που ήταν αρχικά).

Είναι φανερό ότι η τελευταία τιμή είναι η «διορθωμένη» πιθανότητα για το ενδεχόμενο Α όπου έχουμε λάβει υπόψη ότι έχει συμβεί το γεγονός Β, δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα P(A/B).

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να γράψουμε

$$P(A/B) = \frac{2}{3} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}},$$

δηλαδή,

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Ο τελευταίος τύπος μπορεί να επαληθευτεί και σε πολλά άλλα παραδείγματα στα οποία υπάρχει η δυνατότητα απ' ευθείας υπολογισμού της δεσμευμένης πιθανότητας P(A/B) και των μη δεσμευμένων πιθανοτήτων P(AB), P(B). Συμφωνεί με τη διαισθητική έννοια που έχουμε σχετικά με την πραγματοποίηση του ενδεχομένου A δοθέντος ότι έχει ήδη συμβεί το B, καθώς επίσης και με την ερμηνεία της πιθανότητας ως (οριακό) ποσοστό φορών πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου σε πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος. Για τους λόγους αυτούς χρησιμοποιείται ως τύπος ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Δεσμευμένη πιθανότητα

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο του Ω με $P(B) \succ 0$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A του Ω, ***η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B*** δίνεται από τον τύπο

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Αν P(B) = 0, 0 προηγούμενος τύπος δεν έχει νόημα, οπότε δεν ορίζουμε καθόλου τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ο τύπος που αναφέρθηκε για την εισαγωγή της δεσμευμένης πιθανότητας, δεν είναι ούτε αξίωμα ούτε θεώρημα. Αποτελεί ορισμό ο οποίος είναι συμβατός με τη διαίσθησή μας και δικαιολογείται από τη συζήτηση του παραδείγματος που προηγήθηκε.

Ιστορικά, οι ασχολούμενοι με τα τυχερά παιχνίδια, χρησιμοποιούσαν έμμεσα τον τύπο αυτό, πολύ πριν οριστεί η έννοια αυστηρά από τον Abraham de Moivre στο βιβλίο του The Boctrime of Chance (1730). Από τις δύο πιθανότητες P(A) και P(A/B), η πρώτη ονομάζεται εκ των προτέρων πιθανότητα, ενώ η δεύτερη εκ των υστέρων πιθανότητα (διότι προκύπτει ως συνέπεια μιας πρόσθετης γνώσης που έχουμε για την έκβαση του πειράματος) [4],[5].

Σε αντιστοιχία με τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B, ορίζουμε επίσης τη δεσμευμένη πιθανότητα του B δοθέντος του A (με την προϋπόθεση ότι ισχύει $P(A) \succ 0$ από τον τύπο

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε μια χώρα, η πιθανότητα να ζήσει ο άντρας τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0.85, ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0.80. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 70-χρονο άντρα από τη χώρα αυτή, ποια είναι η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον άλλα 5 χρόνια (ώστε να ξεπεράσει το 75ο έτος σε ηλικία);

Απάντηση

Έστω A,B τα ενδεχόμενα ένας άντρας ο οποίος επιλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό, να ζήσει περισσότερο από 75,70 χρόνια αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε

$$P(A) = 0.80, \quad P(B) = 0.85$$

Και $AB = A$ (γιατί $A \subseteq B$). Η πιθανότητα που ζητάμε να υπολογίσουμε, είναι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/B)$ και προκύπτει εύκολα ως εξής

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.80}{0.85} = \cong 0.94$$

2.2 Θεώρημα Bayes

Ένα πολύ συνηθισμένο και βασικό πρόβλημα της θεωρίας πιθανοτήτων είναι ο υπολογισμός των εκ των υστέρων πιθανοτήτων $P(B_1/A)$ από τις εκ των προτέρων (ή μη δεσμευμένες) πιθανότητες $P(B_1)$ και τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(A/B_1)$. Η γενική έκφραση υπολογισμού είναι στην πραγματικότητα με απλή εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού τύπου και του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και αποδίδεται στον αιδεσιμότατο Thomas Bayes, ο οποίος έζησε τον 18ο αιώνα.

<u>Θεώρημα Bayes</u>

Έστω {B1,B2,….,Bν} μια διαίρεση του δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε P(B) $\succ$ 0 για όλα τα i=1,2,…,ν. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου με P(A) $\succ$ 0, ισχύει

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/Bi)P(Bi)}{P(A/B1)P(B1)+P(A/B2)P(B2)+....+P(A/B\nu)P(B\nu)} =$$

$$\frac{P(A/Bi)P(Bi)}{\sum_{j=1}^{\nu} P(A/Bj)P(Bj)}, \quad i=1,2,\ldots\nu.$$

<u>Απόδειξη</u>

Προκύπτει άμεσα, αν στην έκφραση

$$P(Bi/A) = \frac{P(ABi)}{P(A)}$$

αντικαταστήσουμε τον αριθμητή με βάση τον πολλαπλασιαστικό τύπο, δηλαδή

$$P(ABi) = P(A/Bi)P(Bi), \quad i=1,2,....\nu$$

και τον παρανομαστή με βάση το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Η πρόταση με τη μορφή που δίνεται εδώ, οφείλεται στον Pierre-Simon Laplace (1749-1827), ο οποίος όμως της έδωσε την ονομασία θεώρημα του Bayes, προς τιμή του Άγγλου φιλόσοφου και ιερέα Thomas Bayes (1701-1761). Ο τελευταίος είχε επιχειρήσει μια συστηματική μελέτη για τρόπους υπολογισμού της δεσμευμένης πιθανότητας P(B/A) μέσω της δεσμευμένης πιθανότητας P(A/B). Η δουλειά του Bayes συνεχίστηκε αργότερα από άλλους σημαντικούς μαθηματικούς όπως ο Laplace, Gauss κ.ά.

Το θεώρημα Bayes έχει πάρα πολλές εφαρμογές στη Στατιστική, για το λόγο αυτό προκάλεσε ζωηρό ενδιαφέρον αλλά και αντιδικίες μεταξύ των στατιστικών. Αναπτύχθηκε μάλιστα ένας ιδιαίτερος κλάδος της Στατιστικής με την ονομασία Μπεϋζιανή Στατιστική. Ακόμη και σήμερα υπάρχει διαμάχη μεταξύ της λεγόμενης Μπεϋζιανής σχολής και της κλασικής (μη Μπεϋζιανής) σχολής.

Στην ειδική περίπτωση ν=2, B1=B, B2=B΄, το θεώρημα του Bayes παίρνει την απλούστερη μορφή

$$P(B/A)=\frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B)+P(A/B')P(B')}$$

$$P(B'/A)=\frac{P(A/B')P(B')}{P(A/B)P(B)+P(A/B')P(B')}$$

Αυτοί οι τύποι χρησιμοποιούνται όταν γνωρίζουμε (ή μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα) τις ποσότητες P(A/B), P(A/B΄), P(B) και μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των δεσμευμένων πιθανοτήτων P(B/A), P(B΄/A), όπου η δέσμευση έχει αντιστραφεί.

Στις πιο συνηθισμένες εφαρμογές του τύπου του Bayes, το ενδεχόμενο A μπορεί να συμβεί (λογικά ή χρονικά) μετά από το ενδεχόμενο B. Έτσι, όταν γνωρίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα να συμβεί το πιο πρόσφατο γεγονός A δοθέντος ότι, συνέβη το χρονικά προγενέστερο γεγονός B, ο τύπος του Bayes, μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα να είχε συμβεί το (προγενέστερο) γεγονός B του δοθέντος ότι εμφανίστηκε το γεγονός A.

Με άλλα λόγια, ο τύπος του Bayes, έχει πρακτική αξία όταν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα (A) και θέλουμε να διατυπώσουμε κάποια λογικά συμπεράσματα για την αιτία (B) που το προκάλεσε. Τα παραδείγματα που ακολουθούν διασαφηνίζουν καλύτερα τις παραπάνω σκέψεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Ένας φοιτητής απαντάει σε ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος πολλαπλής επιλογής με 4 απαντήσεις ανά ερώτηση (εκ των οποίων η μία είναι σωστή και οι άλλες τρεις λανθασμένες). Η πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση μιας ερώτησης, είναι 70%. Στις περιπτώσεις που ο φοιτητής δεν γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση, απαντάει εντελώς τυχαία διαλέγοντας μια από τις 4 απαντήσεις που δίνονται. Αν ο φοιτητής απαντήσει σωστά σε μια ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση;

Απάντηση

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα

A: ο φοιτητής απαντάει σωστά στην ερώτηση,

B: ο φοιτητής γνωρίζει τη σωστή απάντηση της ερώτησης.

Το ζητούμενο είναι η δεσμευμένη πιθανότητα P(B/A) ενώ, σύμφωνα με την εκφώνηση, γνωρίζουμε τα εξής :

$$P(B) = 0.7, \quad P(B')=1 - P(B) = 0.3$$

$$P(A/B)=1, \quad P(A/B') = \frac{1}{4} = 0.25$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B)+P(A/B')P(B')}$$

βρίσκουμε

$$P(B/A) = \frac{1\cdot(0.7)}{1\cdot(0.7)+(0.25)\cdot(0.3)} \cong 90\%.$$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε (έχουμε ως δεδομένο) κάποιο αποτέλεσμα, πιο συγκεκριμένα τη σωστή απάντηση του φοιτητή. Ο τύπος του Bayes μας βοηθάει να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την αιτία που προκάλεσε το αποτέλεσμα αυτό. Πράγματι, το ποσοστό που βρέθηκε, μας πληροφορεί ότι υπάρχει πιθανότητα 90%, η ερώτηση να απαντηθεί σωστά γιατί ο φοιτητής γνώριζε τη σωστή απάντηση και πιθανότητα μόλις 10% ο φοιτητής να ήταν «αρκετά τυχερός» ώστε, απαντώντας εντελώς τυχαία, να βρήκε τη σωστή απάντηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Πολλαπλές γραμμές παραγωγής

Ας υποθέσουμε ότι τα προϊόντα των τριών γραμμών παραγωγής, αναμιγνύονται δημιουργώντας μια ενιαία σειρά και στη συνέχεια προωθούνται στο τμήμα ελέγχου ποιότητας του εργοστασίου. Αν ο εκεί υπεύθυνος διαλέξει ένα προϊόν στη τύχη και διαπιστώσει ότι είναι ελαττωματικό, η πιθανότητα να προέρχεται αυτό από την πρώτη γραμμή παραγωγής θα είναι ίση με

$$P(B/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2)+P(A/B_3)P(B_3)} =$$

$$\frac{(0.50)(0.004)}{0.0020+0.0018+0.0024} = \frac{0.002}{0.0062} \cong 0{,}32 = 32\%$$

Οι αντίστοιχες πιθανότητες για τις άλλες δύο γραμμές βρίσκονται όμοια και είναι ίσες με

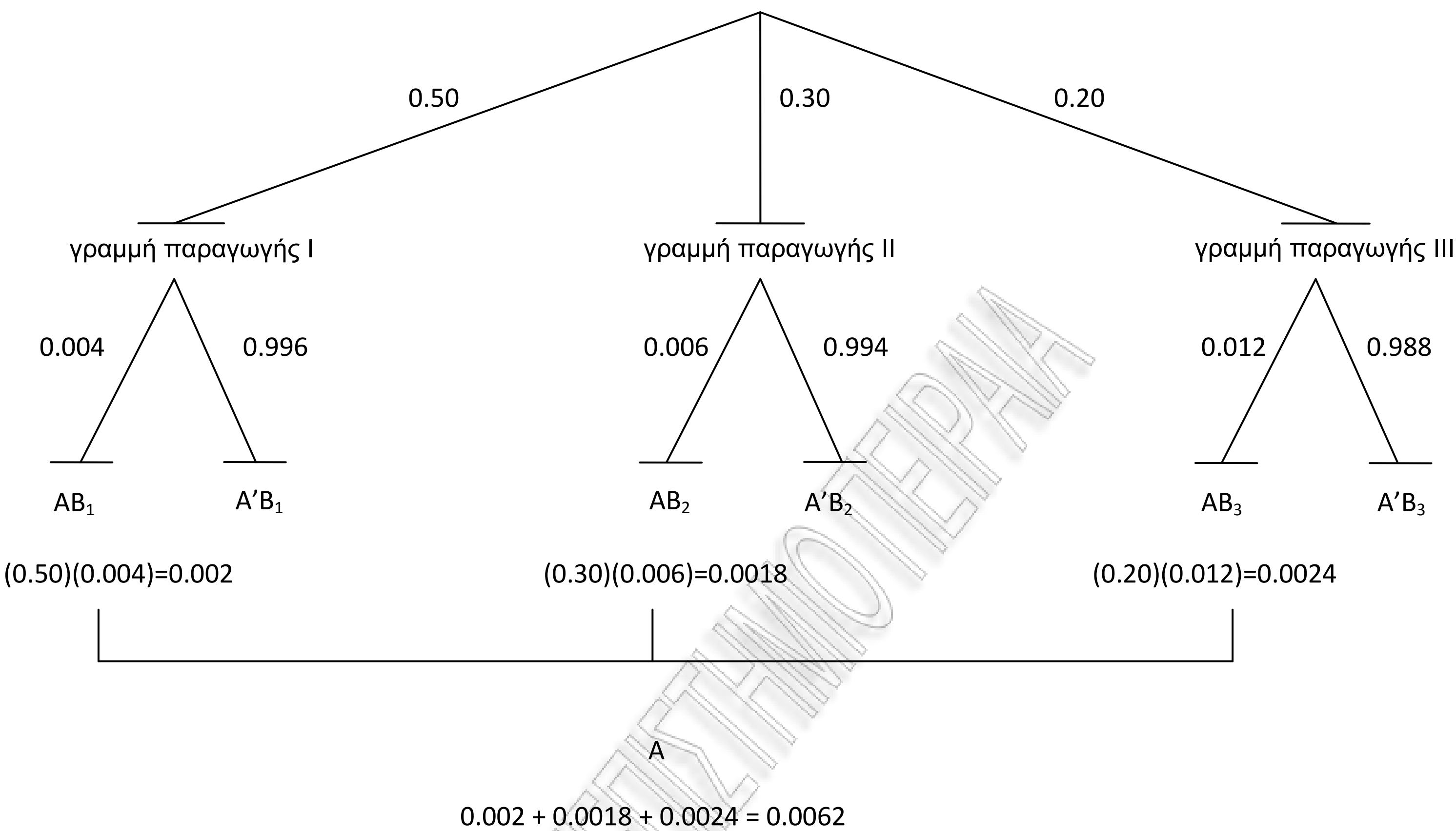
$$P(B_2/A) = \frac{(0.30)(0.006)}{0.0062} \cong 0{,}29 = 29\%$$

$$P(B_3/A) = \frac{(0.20)(0.012)}{(0.0062)} \cong 0.39 = 39\%$$

Οι πιθανότητες 32%, 29%, 39% είναι οι εκ των υστέρων πιθανότητες για το ενδεχόμενο να διαλεχτεί αντικείμενο από καθεμία από τις τρεις γραμμές παραγωγής, αν γνωρίζουμε ότι αυτό είναι ελαττωματικό. Οι αντίστοιχες εκ των προτέρων (αρχικές) πιθανότητες ήταν 50%, 30% και 20%.

Η σημαντική «διόρθωση» που παρατηρείται στην πιθανότητα να προέρχεται το προϊόν από την πρώτη γραμμή παραγωγής (μειώθηκε στο 32% από την αρχική τιμή 50%) οφείλεται στο γεγονός ότι το προϊόν βρέθηκε ελαττωματικό, ενώ η πρώτη γραμμή παραγωγής παράγει μικρό ποσοστό ελαττωματικών σε σχέση με τις άλλες δύο. Το φαινόμενο φυσικά αντιστρέφεται για την τρίτη γραμμή παραγωγής (αύξηση στο 39% από την αρχική τιμή 20%) η οποία έχει το μεγαλύτερο ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων [2],[3],[4].

Δενδροδιάγραμμα για τρεις γραμμές παραγωγής



Ο υπολογισμός των εκ των υστέρων πιθανοτήτων δοθέντος ότι συνέβη το ενδεχόμενο Α μπορεί να γίνει επάνω στο δενδροδιάγραμμα του παραπάνω σχήματος ως εξής :

- ✓ Υπολογίζουμε τα τρία γινόμενα (0.002, 0.0018 και 0.0024) που προκύπτουν ακολουθώντας τις τρεις διαδρομές που οδηγούν στο ενδεχόμενο Α.
- ✓ Αθροίζουμε τα τρία γινόμενα που υπολογίσαμε (οπότε προκύπτει η πιθανότητα P(A) = 0.0062).
- ✓ Διαιρούμε κάθε γινόμενο με το άθροισμα, παίρνοντας έτσι την εκ των υστέρων πιθανότητα που αντιστοιχεί σε κάθε γραμμή παραγωγής.

2.3 Παίγνια Συνεργασίας – Σχήμα διαιτησίας κατά Nash

Θεωρούμε ένα παίγνιο όπου δύο παίχτες δέχονται να αποφασίσουν μια δίκαιη και λογική έκβαση του παιγνίου και στη συνέχεια συμφωνούν να την εφαρμόσουν. Για να εφαρμοστούν οι κανόνες του παιγνίου συμφωνούν να καλέσουν έναν αμερόληπτο διαιτητή.

Υπάρχει ένα σύνολο λύσεων και για τους δύο παίχτες που καλούμαστε να αποφασίσουμε. Μέσα από αυτό το σύνολο των λύσεων υπάρχει μόνον ένα αποτέλεσμα που να είναι λογικό και δίκαιο και για τους δύο παίκτες;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα έδωσε ο J. Nash προτείνοντας, μάλιστα, μια πολύ καλή λύση η οποία ονομάζεται «σχήμα διαιτησίας κατά Nash». Συγκεκριμένα, οι διαπραγματευόμενοι παίχτες πρέπει να συμφωνήσουν σε κάποιο αποτέλεσμα από το σύνολο των λύσεων. Τα αποτελέσματα της διαπραγμάτευσης αυτής, ο J. Nash τα τοποθέτησε στο επίπεδο και ειδικά στις κορυφές ενός πολύπλευρου. Αν οι διαπραγματευόμενοι παίχτες δεν συμφωνήσουν, τότε οφείλουν να αποδεχτούν ένα προκαθορισμένο αποτέλεσμα από το πολύπλευρο, το οποίο ονομάζεται status quo (sq).

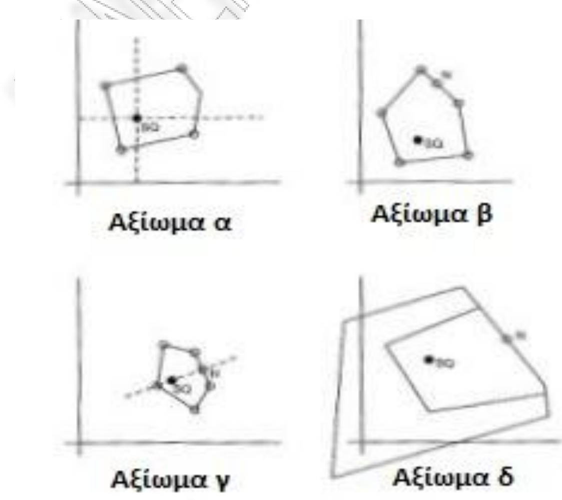
Για να είναι λογικό και δίκαιο ένα σχήμα διαιτησίας ο J. Nash διατύπωσε τα παρακάτω αξιώματα:

α) Αξίωμα λογικότητας: Η αποδεκτή λύση πρέπει να βρίσκεται στο πολύπλευρο διαπραγμάτευσης,

β) Αξίωμα γραμμικότητας: Αν οι ωφέλειες των διαπραγματευόμενων παιχτών μεταβάλλονται σύμφωνα με μια γραμμική συνάρτηση (θετική) τότε η εφικτή λύση του παιγνίου αλλάζει σύμφωνα με την ίδια συνάρτηση.

γ) Αξίωμα συμμετρίας: Αν το πολύπλευρο διαπραγμάτευσης είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία με κλίση +1, τότε η εφικτή λύση πρέπει να βρίσκεται πάνω στην ευθεία αυτή.

δ) Αξίωμα ανεξαρτησίας: Αυτό αφορά τις μη εφικτές εναλλακτικές λύσεις, και προσδιορίζει τη μοναδική λύση κατά J. Nash.



Εικόνα 2.1 : Τα αξιώματα του Nash

Θεώρημα Nash

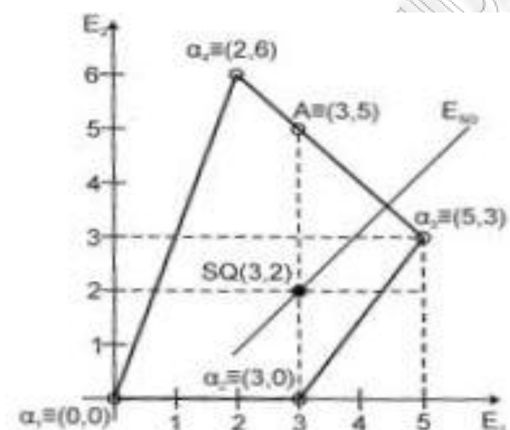
Η μοναδικότητα του σχήματος διαιτησίας ικανοποιείται και από τα τέσσερα αξιώματα. Για το SQ = (x_0,y_0) η εφικτή λύση είναι το σημείο (x,y) μέσα στο πολύπλευρο το οποίο μεγιστοποιεί το γινόμενο $(x\text{-}x_0)(y\text{-}y_0)$ με $\chi \geq 0$ και $y \geq y_0$.

Δίδουμε ένα πρόβλημα επαφής για την κατανόηση του σχήματος διαιτησίας κατά Nash.

Δύο ανταγωνιστικές εταιρίες Ε, και E_2 αντίστοιχα πρέπει να συμφωνήσουν σε ένα από τα ακόλουθα αποτελέσματα $\alpha_1 \equiv (0,0)$, $\alpha_2 \equiv (3,0)$, $\alpha_4 \equiv (2,6)$ και $\alpha_3 \equiv (3,3)$ ή σε κάποιο συνδυασμό αυτών. Αν δεν συμφωνήσουν τότε πρέπει αν αποδεχτούν ως αποτέλεσμα το SQ $\equiv(3,2)$. Να ευρεθεί η βέλτιστη λύση, με τη βοήθεια του σχήματος διαιτησίας του Nash, ώστε το αποτέλεσμα να είναι δίκαιο.

1η ΛΥΣΗ

Το πολύπλευρο απολαβών απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Το σύνολο διαπραγμάτευσης, μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το σημείο Nash, ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία (3,5),(5,3).

Σύμφωνα με το θεώρημα του Nash το σημείο που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$f \equiv (x - x_0)(y - y_0), \quad (x_0,y_0) \equiv (3,2)$$

δηλαδή την $f \equiv (x-3)(y-2)$, βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα A $\equiv$ (3,5), $\alpha_3 \equiv (5,3)$, που έχει εξίσωση:

$$y = -x+8, \quad 3 \leq x \leq 5$$

Αντικαθιστούμε στο γινόμενο που πρέπει να μεγιστοποιηθεί το $y = -x + 8$:

$$(x-3)(-x + 8-2) = -x^2 + 9x -18$$

Το τριώνυμο $\varphi(x) = -x^2 + 9x -18$ επειδή το $\alpha = -1 < 0$, αυτό γίνεται μέγιστο όταν:

$$x = -\beta / 2\alpha = 9/2 = 4,5$$

και επειδή $y = -x + 8$ είναι

$$y = 3,5$$

Οπότε η βέλτιστη λύση κατά Nash είναι **N(4,5,3,5)**. Σημειώνουμε, ότι οι παίκτες πρέπει να επιλέγουν το πλησιέστερο προς το σημείο ισορροπίας κατά Nash, δυνατό αποτέλεσμα. Αυτό έχει καθοριστική σημασία για τις λύσεις.

2η ΛΥΣΗ

Επειδή το άθροισμα των παραγόντων του γινομένου (x-3)(y-2) είναι σταθερό, αυτό το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν:

$$y-2 = x-3$$

δηλαδή όταν

$$y = x - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Στην αναλυτική του επιπέδου, η εξίσωση (1) παριστά ευθεία με κλίση +1, η οποία διέρχεται από το SQ, δηλαδή από σημείο (3,2).

Άρα, η βέλτιστη λύση προσδιορίζεται από την τομή αυτής της ευθείας με μια πλευρά του πολύπλευρου απολαβών. Η ευθεία (1) όπως παρατηρούμε από το σχήμα, τέμνει την πλευρά $\alpha_3\alpha_4$ στο σημείο N(x,y) το οποίο θα προσδιοριστεί και αλγεβρικά.

Πράγματι, έχουμε:

$$y = x - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\ell sq)$$
$$y = -x + 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\ell\ \alpha_3\alpha_4)$$

οπότε ισχύει:

$x – 1 = -x + 8$,

δηλαδή

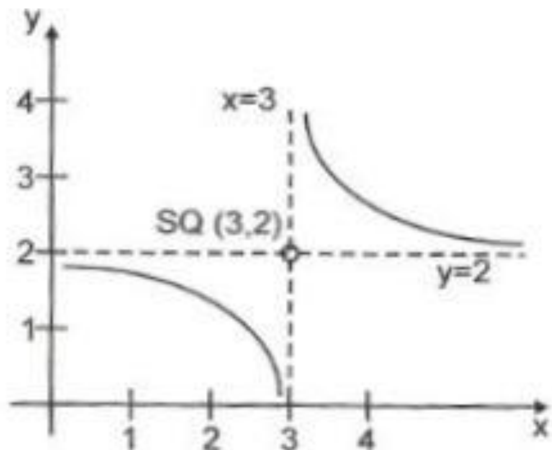
$$x = 9/2 = 4,5 \text{ και } y = 7/2 = 3,5$$

Διαγραμματική παρουσίαση του προβλήματος

Επειδή f ≡ (x-3)(y-2) = 8, ισχύει:

y-2 = 8/x-3 και y = 2x+2/1x-3

με αντίστοιχους κλάδους των υπερβολικών τροχιών που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



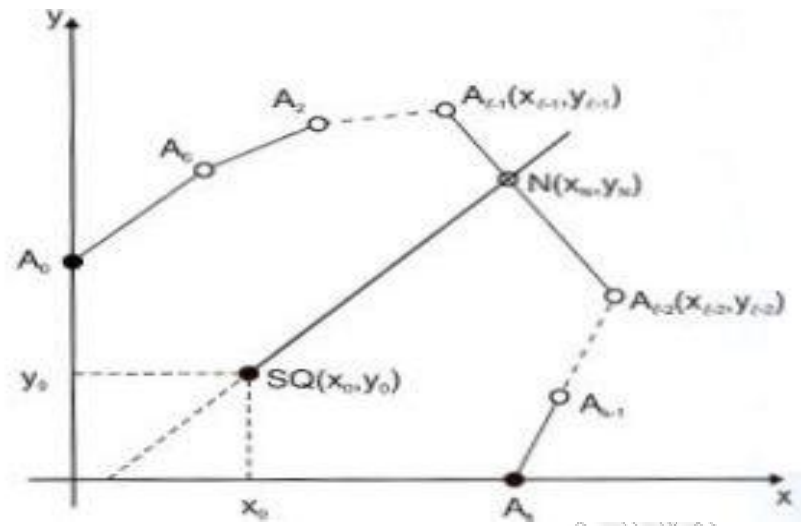
Σχόλιο : Παρατηρούμε ότι οι ασύμπτωτες των υπερβολικών τροχιών είναι οι συντεταγμένες του, κατά Nash, SQ.

Πρόταση

«Όταν το σύνολο διαπραγμάτευσης είναι ευθύγραμμο τμήμα κλίσης —1, τότε η άριστη λύση, κατά Nash, είναι το σημείο τομής αυτού του ευθύγραμμου τμήματος με την ευθεία που διέρχεται από το SQ και έχει κλίση +1».

Απόδειξη

Έστω $A_0A_1A_2...A_k$ ένα πολύπλευρο του οποίου οι κορυφές $A_0,A_1,A_2,..,A_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα της διαπραγμάτευσης με SQ(x_0 , y_0) το Status quo:



Έστω το ευθύγραμμο τμήμα $A_{\ell-1}A_{\ell-2}$ έχει κλίση -1, δηλαδή η εξίσωση της ευθείας του είναι:

$y - y_{A\,\ell-1} = -1\,(x - x_{A\,\ell-1})$……………………………………………………………………(1)

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το SQ και έχει κλίση +1,

$y = x - (x_0 - y_0)$……………………………………………………………………………………(2)

Από τις (1) και (2) προκύπτουν οι λύσεις κατά Nash:

$\mathbf{x_N} = (x_{A\,\ell-1} + y_{A\,\ell-1}) + (x_0 - y_0) / 2$

$\mathbf{y_N} = (x_{A\,\ell-1} + y_{A\,\ell-1}) - (x_0 - y_0) / 2$ ……………………………………………………………(3)

Αν θέσουμε στις (3) τα δεδομένα του προβλήματος που μελετάμε, δηλαδή $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ (συντεταγμένες του SQ) και $x_{A\,\ell-1} = 2$, $y_{A\,\ell-1} = 6$ (συντεταγμένες του $A_{\ell-1}$, αρχή του ευθύγραμμου τμήματος με αρνητική κλίση -1), προκύπτει ότι η άριστη λύση κατά Nash είναι:

N(x , y) = (4,5 , 3,5)

Παρατήρηση: Αν το SQ συμπίπτει με το σημείο (0,0) τότε το $x_N = y_N$, δηλαδή είναι το σημείο αλληλοτομής της ευθείας **y = χ** με το ευθύγραμμο τμήμα αρνητικής κλίσης -1. Αυτό προκύπτει, εύκολα, από τις (3). Άλλωστε σε αυτή την παρατήρηση στηρίχτηκε και ο Nash για να αποδείξει το θεώρημα του.

*Μια γενικευμένη απόδειξη της ισορροπίας κατά **Nash (με τη βοήθεια της μεθοδολογίας Lagrange**)*

Από το θεώρημα του Nash πρέπει να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση δύο μεταβλητών:

f $\equiv (x-x_0)(y-y_0)$ με $x \geq x_0$, $y \geq y_0$ όταν x + y = a είναι η πλευρά του πολύπλευρου των διαπραγματεύσεων, με κλίση -1.
Η συνάρτηση κατά Lagrange είναι: L = f + λφ όπου f η αντικειμενική συνάρτηση, λ ο πολλαπλασιαστής του Lagrange.

$$\Phi \equiv x + y - a$$

Οι αναγκαίες συνθήκες κατά Lagrange είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ x + y = a \end{cases} \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases} y - y_0 + \lambda = 0 \\ x - x_0 + \lambda = 0 \end{cases}$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} y - y_0 = x - x_0 \\ x + y = a \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x - y = x_0 - y_0 \\ x + y = a \end{cases}$$

Είναι

$$\begin{cases} 2x = \alpha + (x_0 - y_0)/\,2 \\ 2y = \alpha - (x_0 - y_0)/\,2 \end{cases}$$

οπότε

$$\begin{cases} x_N = \alpha + (x_0 - y_0)/\,2 \\ y_N = \alpha - (x_0 - y_0)/\,2 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\sigma_N)$$

Οι (σ_N) είναι ίδιες με τις προηγούμενες συνθήκες (3).

Θα πρέπει, όμως, να αποδειχθεί η ικανή συνθήκη, της συνθήκης Lagrange, κατά την οποία η ορίζουσα:

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Οι μερικοπαράγωγοι των συναρτήσεων L και φ αντιστοιχούν στις αριθμητικές τιμές των λύσεων του προηγούμενου συστήματος. Πράγματι, είναι:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1$$

και

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Επειδή $\Delta_1 > O$, και ***n = 2*** (αριθμός μεταβλητών) είναι άρτιος, τότε η λύση x_N και y_N που έχουμε βρει αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο, το οποίο είναι:

$$\boldsymbol{f^{max}} = \frac{\left(\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{y_0})\right)^2}{\mathbf{4}}$$

Από τη λύση $N(x_N,y_N)$, επειδή:

$x_N \geq x_0$, και $y_N \geq y_0$ θα πρέπει:

$$a \geq x_0 - y_0$$

Σχόλιο: Πρέπει να γίνουν κτήμα μας οι τέσσερεις περιπτώσεις διερεύνησης μεγίστου και ελαχίστου κατά Lagrange με περιοριστικές συνθήκες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι n = 2, άρτιος αριθμός μεταβλητών, m = 1 αριθμός περιοριστικών συνθηκών, και $(-1)^i \Delta_(< 0$ με i=n—m=2—1=1, άρα (—1) Δ,<0 και Δ,>0, πράγμα που προέκυψε.

3" ΛΥΣΗ

Το γινόμενο κατά Nash (x-3**)**(y-2) που πρέπει να μεγιστοποιηθεί το θεωρούμε ως συνάρτηση δύο μεταβλητών x και y και το συμβολίζουμε:

$$f \equiv f(x, y) = (x-3)(y-2) ,$$

από όλες τις πλευρές του πολυπλεύρου επιλέγουμε την πλευρά x + y **=** 8 (γιατί έχει κλίση **-1**) η οποία θεωρείται ως συνάρτηση δύο μεταβλητών a και y

$$\varphi \equiv \varphi(x,y) = x + y - 8=0$$

Οπότε, το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών με περιορισμό, και πρέπει να ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία Lagrange:

maxf = (x-3)(y-2)..(α)
όταν

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x \geq 3,\ y \geq 2 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\varpi)$$

Θεωρούμε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$\mathbf{L = f + \lambda\varphi \equiv (x\text{-}3)(y\text{-}2) + \lambda(x+y\text{-}8)}$$

Έχουμε :

$\frac{\partial L}{\partial x}$ = y – 2 + λ = 0……………………………………………………………………………………………(1)

$\frac{\partial L}{\partial y}$ = x– 3 + λ = 0……………………………………………………………………………………………(2)

και

φ = x + y – 8 = 0…………………………….……………………………………………..……………………(3)

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτουν:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

δηλαδή x =4,5, y = 3,5 και λ = 1,5

Θα αποδείξουμε ότι η λύση κατά Nash ικανοποιεί τις συνθήκες K-T και τη συνθήκη κανονικότητας

α) Πρώτα θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (K-T), δηλαδή πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k_1, k_2 και k_3 μη αρνητικοί έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

$$k_1\varphi_1 = k_2\varphi_2 = k_3\varphi_3 = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi 1}{\partial x} k_1 + \frac{\partial \varphi 2}{\partial x} k_2 + \frac{\partial \varphi 3}{\partial x} k_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi 1}{\partial y} k_1 + \frac{\partial \varphi 2}{\partial y} k_2 + \frac{\partial \varphi 3}{\partial y} k_3 = 0$$

όπου όλες οι συναρτήσεις αυτές θεωρούνται με τις αριθμητικές τους τιμές.

$\varphi_1 \equiv 8 - x - y$,δηλαδή $\varphi_1(9/2,7/2) = 0$

$\varphi_2 \equiv x$,δηλαδή $\varphi_2(9/2,7/2) = ½$

$\varphi_3 \equiv y$,δηλαδή $\varphi_3(9/2,7/2) = 7/2$

$\frac{\partial \varphi 1}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial \varphi 1}{\partial x}(9/2,7/2) = -1$

$\frac{\partial \varphi 1}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial \varphi 1}{\partial y}(9/2,7/2) = -1$

$\frac{\partial \varphi 2}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \varphi 2}{\partial x}(9/2,7/2) = 1$

$\frac{\partial \varphi 2}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \varphi 2}{\partial y}(9/2,7/2) = 0$

$\frac{\partial \varphi 3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \varphi 3}{\partial x}(9/2,7/2) = 0$

$\frac{\partial \varphi 3}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial \varphi 3}{\partial y}(9/2,7/2) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y-2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(9/2,7/2) = 3/2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(9/2,7/2) = 3/2$

οπότε οι συνθήκες (K-T) γράφονται:

$0k_1 + 9/2k_2 + 7/2k_3 = 0$ ....(1)

$\frac{3}{2} + (-1)k_1 + 1k_2 + 0k_3 = 0$ ....(2)

$\frac{3}{2} + (-1)k_1 + 0k_2 + 1k_3 = 0$ ....(3)

Από την (1) παίρνουμε $k_1 \cdot 0 = 0$, $k_2 = k_3 = 0$, οπότε από τις (2) και (3) προκύπτει $k_1 = 3/2$

β) **Θα δείξουμε αν η λύση αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικότητας.**

Πράγματι, οι κλίσεις των περιοριστικών συναρτήσεων φ_1, φ_2 και φ_3 είναι:

$$\bar{V}_{\varphi 1} = (-1,1), \quad \bar{V}_{\varphi 2} = (1,0), \quad \bar{V}_{\varphi 3} = (0,1),$$

Θα αποδείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία των κλίσεων αυτών. Για να αποδειχθεί ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αρκεί να υπάρχουν αριθμοί λ και μ έτσι ώστε:

$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = 0$ τότε και μόνον τότε $\lambda = \mu = 0$.

Πράγματι, για τα διανύσματα $\bar{V}_{\varphi1}$, και $\bar{V}_{\varphi2}$ ισχύει:

$$\lambda\bar{V}_{\varphi1}(-1,-1) + \mu\bar{V}_{\varphi2}(1,0) = (0,0)$$

δηλαδή

$\begin{cases} -\lambda + \mu \ \cdot 1 = 0 \\ -\lambda + \mu \ \cdot 0 = 0 \end{cases}$ οπότε λ = μ = 0

Ομοίως αποδεικνύεται και η γραμμική ανεξαρτησία όλων τω\ συνδυασμών των διανυσμάτων [4].

Κεφάλαιο 3

3. Εφαρμογή «Δίλημμα του Φυλακισμένου – Prisoner' s Dilemma»

Η μεταπτυχιακή διατριβή θα προσπαθήσει να αναπτύξει και να επεξεργαστεί, με τη βοήθεια των Δεσμευμένων Πιθανοτήτων, ένα κοινό πρόβλημα της Θεωρίας Παιγνίων που αναφέραμε στο **Κεφάλαιο 1**. Το παίγνιο συνεργασίας που καλείται «Δίλημμα του Φυλακισμένου – Prisoner' s Dilemma», της κατηγορίας των Παιγνίων που οδηγούνται και σε αδιέξοδο, θα προσπαθήσουμε να το δούμε από μια άλλη οπτική γωνία ενσωματώνοντας σε αυτό κάποια ενδεχόμενα και κάποιες πιθανότητες. Στη συνεχεία, έχουμε καταλήξει σε κάποια ερωτήματα πάνω σε αυτό το θέμα και θα βρεθούμε σε θέση να τα απαντήσουμε μέσω της θεωρίας των Δεσμευμένων Πιθανοτήτων και του Θεωρήματος του Bayes. Τέλος, αφού λάβουμε τα συμπεράσματά μας, θα ενσωματώσουμε στο πρόβλημά μας το σχήμα διαιτησίας κατά Nash, που αναπτύχθηκε στο **Κεφάλαιο 2** και θα δώσουμε μια λύση ισορροπίας κατά Nash στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόβλημα

Δίλημμα Φυλακισμένου – Prisoner's Dilemma : Πίνακας Τιμών-Ποινών

Το «δίλημμα του φυλακισμένου» είναι ένα απλό, αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα της θεωρίας παιγνίων, του κλάδου των μαθηματικών που εξετάζει τις στρατηγικές επιλογές λογικά σκεπτόμενων παικτών που εμπλέκονται σε ανταγωνιστικές καταστάσεις.

Δύο άτομα συλλαμβάνονται από την αστυνομία σαν ύποπτοι διάπραξης κάποιων εγκλημάτων. Η αστυνομία δεν έχει όλα τα απαιτούμενα στοιχεία για να τους κατηγορήσει, οπότε τους βάζει σε χωριστά δωμάτια, εμποδίζοντάς τους να έχουν οποιαδήποτε επικοινωνία. Ο εισαγγελέας επισκέπτεται και τους δύο, τον καθένα χωριστά, και κάνει στον καθένα την εξής πρόταση:

- ✓ αν καταθέσει εναντίον του άλλου (και ο άλλος δεν μιλήσει) τότε η συνεργασία αμείβεται με άμεση απελευθέρωση, ενώ ο «άλλος» φυλακίζεται με 12 χρόνια (min ποινής).
- ✓ αν δε μιλήσει ούτε αυτός ούτε ο άλλος, φυλακίζονται 1 χρόνο έκαστος για όσο αδικήματα έχει η αστυνομία αποδείξεις
- ✓ αν καταθέσουν και οι δύο ο ένας εναντίον του άλλου τότε φυλακίζονται 4 χρόνια ο καθένας (max ποινής).

Έτσι :

-Φυλακισμένος-	Β δεν μιλάει	Β μιλάει
Α δεν μιλάει	(1,1)	(12,0)
Α μιλάει	(0,12)	(4,4)

- ✓ Η ενσωμάτωση ενδεχομένων και πιθανοτήτων, συγκεκριμένα, στο παραπάνω πρόβλημα, που θα αποτελέσουν δεδομένα στον πολλαπλασιαστικό τύπο του Bayes δεν υφίσταται. Τα ενδεχόμενα που πιθανώς να ορίσουμε για τους φυλακισμένους δεν μπορούν να είναι απολύτως ασυμβίβαστα (για παράδειγμα, υπάρχει η περίπτωση ομολογία Α – ομολογία Β) και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα λεγόμενα του Bayes.

Παρόλα αυτά, το πρόβλημά μας μπορεί να ερμηνευθεί με την εκδοχή της στρατηγικής αύξησης της πιθανότητας επιτυχίας (στη συγκεκριμένη περίπτωση η **ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ** του κρατούμενου) ως εξής:

Υπάρχει ένας προθάλαμος που καλείται **ΠΡΟΘΑΛΑΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ** έξω από τις φυλακές όπου υπάρχουν τρεις κουρτίνες K_1, K_2 και K_3, από τις οποίες μια κουρτίνα κρύβει πίσω της ένα πορτραίτο που γράφει ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ. Ο φυλακισμένος που μαντεύει σωστά ποια κουρτίνα κρύβει το πορτραίτο κερδίζει απευθείας την ελευθερία του και παραγράφονται όλα του τα εγκλήματα.

Έστω ότι ένας παίκτης επιλέγει τυχαία την κουρτίνα K_1. Ένας αστυνομικός, πριν ανοίξει την κουρτίνα και αποκαλυφθεί τι κρύβεται πίσω απ' αυτήν, ανοίγει μια από τις δύο άλλες κουρτίνες, έστω την K_2, αποκαλύπτοντας ότι τίποτα δεν υπάρχει πίσω απ' αυτήν. Μετά την αποκάλυψη αυτή, ο αστυνομικός προσφέρει στο φυλακισμένο τη δυνατότητα να αλλάξει την αρχική του επιλογή (επιλέγοντας αντί της K_1 την K_3).

Τί θα μπορούσαμε εμείς να συμβουλεύσουμε στο φυλακισμένο: *να παραμείνει στη αρχική του επιλογή ή να αλλάξει την τελευταία στιγμή;*

Η κοινή πεποίθηση είναι ότι στο στάδιο αυτό είτε ο φυλακισμένος παραμείνει στην αρχική του επιλογή είτε την αλλάξει η πιθανότητα να κερδίσει την ελευθερία του είναι η ίδια και ίση με 1 /2.
Εμείς θα προσπαθήσουμε με τη βοήθεια του Bayes (ασυμβίβαστα ενδεχόμενα διότι η απάντηση είναι ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ Ή ΦΥΛΑΚΙΣΗ μόνον) να υπολογίσουμε πιο προσεκτικά τις παρακάτω πιθανότητες :

(α) του ενδεχομένου να ελευθερωθεί τελικά ο φυλακισμένος αν παραμείνει στην αρχική
του επιλογή και
(β) του ενδεχομένου να ελευθερωθεί αν αλλάξει επιλογή.

Έστω A_1, A_2 και A_3 τα ενδεχόμενα το μεγάλο δώρο να βρίσκεται πίσω από την κουρτίνα K_1, K_2 και K_3 αντίστοιχα. Επίσης, έστω Β το ενδεχόμενο ο αστυνομικός να ανοίξει την κουρτίνα K_2 (αποκαλύπτοντας ότι τίποτα δεν υπάρχει πίσω απ' αυτήν). Τότε, $P(A_1 \mid B)$ και $P(A_3 \mid B)$ είναι οι πιθανότητες να ελευθερωθεί ο φυλακισμένος αν παραμείνει στην αρχική του επιλογή ή αν αλλάξει επιλογή

Σύμφωνα με τον τύπο του Bayes,

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A1)P(B|A1)}{P(A1)P(B|A1) + P(A2)P(B|A2) + P(A3)P(B|A3)}$$

$$= (1/3)(1/2) \,/\, (1/3)(1/2) + (1/3) \cdot 0 \; + (1/3) \cdot 1 = 1/3$$

και επειδή, προφανώς, $P(A_2 \mid B) = 0$,

$$P(A_3 \mid B) = 1 - P(A_1 \mid B) = \; 2/3$$

Επομένως, αν ο παίκτης ακολουθήσει τη συμβουλή ενός **προσεκτικού** μαθηματικού και αλλάξει την αρχική επιλογή του αυξάνει την πιθανότητα του να κερδίσει την ελευθερία του.

Κεφάλαιο 4

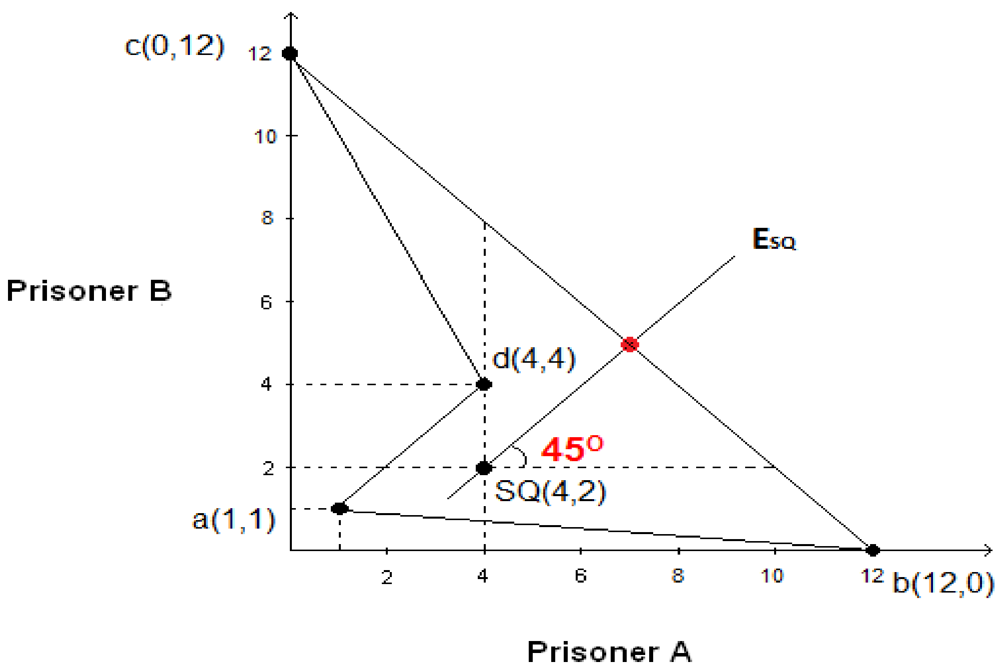
4. Ισορροπία κατά Nash στο «Δίλημμα του Φυλακισμένου» – Εφαρμογή «Διαιτησία Διοίκησης - Εργατικού Δυναμικού »

4.1 Ισορροπία κατά Nash στο «Δίλημμα του Φυλακισμένου

Δίλημμα Φυλακισμένου – Prisoners Dilemma : Πίνακας Τιμών-Ποινών

-Φυλακισμένος-	Β δεν μιλάει	Β μιλάει
Α δεν μιλάει	(1,1)	(12,0)
Α μιλάει	(0,12)	(4,4)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια λύση ισορροπίας κατά Nash με 2 τρόπους. Για να είναι λογικό και δίκαιο ένα σχήμα διαιτησίας χρησιμοποιούνται 4 αξιώματα όπως είδαμε στη θεωρία. Με δεδομένο, λοιπόν, τον παραπάνω γνωστό μας πίνακα για τα χρόνια φυλάκισης και θεωρώντας το SQ (4,2) ως ένα αποτέλεσμα που πρέπει να αποδεχτούν οι 2 φυλακισμένοι όπως προκύπτει από το ποινικό παρελθόν τους, δημιουργούμε το παρακάτω πολύπλευρο διαπραγμάτευσης



<u>Εικόνα 4.1</u> **:** Πολύπλευρο διαπραγμάτευσης

$1^η$ ΛΥΣΗ

Όπως παρατηρούμε το SQ βρίσκεται μέσα στο πολύπλευρο διαπραγμάτευσης και το σύνολο μέσα στο οποίο βρίσκεται το σημείο Nash, ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία c(0,12) και b(12,0).

Το ευθύγραμμο τμήμα c Ξ (0,12), b Ξ (12,0) έχει εξίσωση $y = -x + 12$, $0 \le x \le 12$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Nash, το σημείο που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $f \equiv (x – x_o) (y – y_o)$,

$(x_o , y_o) \equiv (4,2)$, δηλαδή $f \equiv (x – 4) (y – 2)$, βρίσκεται πάνω σε αυτή την εξίσωση.

Αντικαθιστούμε στο γινόμενο που πρέπει να μεγιστοποιηθεί το $y = -x + 12$.

Έτσι,

$(x – 4)(-x + 12 -2) = (x – 4) (-x + 10) = -x^2 + 10x +4x -40 = -x^2 + 14x -40$

Το τριώνυμο $φ(x) = -x^2 + 14x -40$ επειδή το $α = -1 <0$, γίνεται μέγιστο όταν :

$x = -β / 2α \rightarrow x = -14 / -2 \rightarrow$ **$x = 7$**

και επειδή $y = -x + 12$ είναι $y = -7 + 12 \rightarrow$ **$y = 5$**

Οπότε η βέλτιστη λύση κατά Nash είναι N(7, 5)

$2^η$ ΛΥΣΗ

Επειδή το άθροισμα των παραγόντων του γινομένου (x - 4)(y - 2) είναι σταθερό, αυτό το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν:

$x - 4 = y – 2$ δηλαδή όταν $y = x - 2$

Άρα η βέλτιστη λύση προσδιορίζεται από την τομή της ευθείας με μια πλευρά του πολυπλεύρου. Η ευθεία μας έχει εξίσωση $y = -x + 12$. Αυτή τέμνει την πλευρά –cb- στο σημείο N(x,y) το οποίο θα υπολογισθεί αλγεβρικά.

$y = -x + 12$ & $y = x – 2 \rightarrow -x + 12 = x – 2 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow$ **$x = 7$**

επομένως, ομοίως : $y = 7 – 2 \rightarrow$ **$y = 5$**

4.2 Εφαρμογή «Διαιτησία Διοίκησης - Εργατικού Δυναμικού »

Η παρακάτω εφαρμογή αποδίδεται στα ελληνικά από μετάφραση του αγγλικού πρωτοτύπου.

Η διοίκηση μίας βιομηχανίας διαπραγματεύεται μία νέα σύμβαση με το συνδικάτο που εκπροσωπεί τους εργάτες του. Το συνδικάτο έχει απαιτήσει νέα μέτρα για τα μέλη του: αύξηση ενός δολαρίου ανά ώρα σε όλους τους τομείς και αυξημένα συνταξιοδοτικά οφέλη. Με τη σειρά της, η διοίκηση απαίτησε παραχωρήσεις από το συνδικάτο. Η διοίκηση θα ήθελε να εξαλείψει το διάλειμμα για καφέ των 10:00πμ, το οποίο έχει αποδειχθεί να είναι εξαιρετικά δαπανηρό καθώς οι εργάτες επιστρέφουν αργά πίσω στη γραμμή συναρμολόγησης, και να αυτοματοποιήσει ένα σημείο ελέγχου της γραμμής παραγωγής. Το συνδικάτο αντιτίθεται και στα δύο τα αιτήματα, ειδικά στην αυτοματοποίηση η οποία θα εξαλείψει εργατικές θέσεις. Η διαμάχη δεν έχει επιλυθεί, αλλά και οι δύο πλευρές είναι πρόθυμες να δοκιμάσουν μία διαιτησία προτού καταφύγουν σε ισχυρότερα μέτρα. Εσείς έχετε προσκληθεί ως διαιτητής. Θα μπορούσατε να βρείτε μία λύση, η οποία θα ήταν δίκαιη και θα ευχαριστούσε και τις δύο πλευρές;

Σε αυτό το κεφάλαιο, ακολουθώντας τον [Allen, 1956], θα εξετάσουμε πως το σύστημα διαιτησίας του Nash θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος. Το πρώτο βήμα θα ήταν να καθίσετε κάτω με τη διοίκηση και το εργατικό δυναμικό ξεχωριστά και να καθορίστε την χρησιμότητα των διαφόρων υπό εξέταση προτάσεων:

A: Αυτοματοποίηση του σημείου ελέγχου

C: εξάλειψη του διαλείμματος για καφέ

R: αύξηση ενός δολαρίου την ώρα για τους εργάτες

P: αυξημένα συνταξιοδοτικά οφέλη

SQ: η υφιστάμενη κατάσταση

Για διευκόλυνση, μπορούμε να διαλέξουμε την κλίμακα χρησιμότητας ούτως ώστε το SQ να έχει μηδέν και για τις δύο πλευρές. Μπορούμε να υποθέσουμε πως η διοίκηση θα έχει θετική χρησιμότητα για το A και το C και αρνητική χρησιμότητα για το R και το P, ενώ οι χρησιμότητες του εργατικού δυναμικού θα έχουν τα αντίθετα πρόσημα. Μπορεί όμως να ανακαλύψουμε ότι οι προτιμήσεις δεν βρίσκονται απαραίτητα σε αντιδιαστολή, επομένως δεν θα είμαστε σε κατάσταση μηδενικού αθροίσματος. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να υπάρχουν «συναλλαγές» οι οποίες να είναι καλύτερες από την SQ και για τις δύο πλευρές. Θα θέλαμε να βρούμε μία τέτοια συναλλαγή η οποία είναι επιπλέον δίκαιη και για τις δύο πλευρές.

Πρώτα ζητάμε από τη διοίκηση να κατατάξει τις εναλλακτικές προτάσεις. Υποθέτουμε πως αξιολογούν την A και τη C το ίδιο, και θα προτιμούσαν να ενδώσουν στα συνταξιοδοτικά οφέλη παρά στην αύξηση, ούτως ώστε να έχουμε μία αριθμητική κατάταξη χρησιμότητας της μορφής A = C, SQ, P, R. Έπειτα ρωτάμε περαιτέρω προκειμένου να καθορίσουμε τη σταθμική χρησιμότητα. Αυτή η διαδικασία μπορεί να πάρει τη μορφή τυχαίων ερωτήσεων όπως στο Κεφάλαιο 9, αλλά μπορεί να υπάρχουν άλλοι πιο φυσικοί τρόποι με τους οποίους να τεθούν οι ερωτήσεις. Για παράδειγμα, μπορεί να καθορίσουμε ότι η διοίκηση θα ήταν αδιάφορη ανάμεσα στο να χορηγήσει τα συνταξιοδοτικά οφέλη και στο να δώσει μία αύξηση της τάξης των 0,67$ ανά ώρα και επίσης ότι η διοίκηση θα ήταν πρόθυμη να ανταλλάξει την πλήρη αύξηση του ενός δολαρίου και τα μισά συνταξιοδοτικά οφέλη για την εξάλειψη του διαλείμματος για καφέ. Αυτό υα έδινε τις ακόλουθες σταθμικές χρησιμότητες

R	P	SQ	A,C
-3	-2	0	4

Χρησιμότητες διοίκησης

Έπειτα κάνουμε παρόμοιες ερωτήσεις για το συνδικάτο, και ας υποθέσουμε ότι θα έχουμε

A	C	SQ	P	R
-2	-1	0	2	3

Χρησιμότητες εργατικού δυναμικού

Φυσικά οι κλίμακες είναι αυθαίρετες γραμμικές συναρτήσεις και δεν θα επηρεάσουν την περαιτέρω ανάλυση μας από τη στιγμή που το σύστημα διαιτησίας του Nash είναι αμετάβλητο κατά τις γραμμικές συναρτήσεις.

Έπειτα χρησιμοποιούμε αυτήν την πληροφορία για να αξιολογήσουμε τις χρησιμότητες της διοίκησης και των εργατών για όλες τις πιθανές «συναλλαγές». Η απλούστερη υπόθεση είναι όταν οι χρησιμότητες είναι προσθετικές, ούτως ώστε εάν οι τιμές του εργατικού δυναμικού για το P είναι 2 και για το R είναι 3, σε περίπτωση που πετύχουν τόσο το P όσο και το R θα ισχύει 2 + 3 = 5. Θα υποθέσουμε ότι αυτό είναι αληθές αν και υπάρχουν περιπτώσεις όπου οφέλη ή παραχωρήσεις δεν θα συμπεριφέρονταν με αυτόν τον τρόπο. Για παράδειγμα, πετυχαίνοντας το P θα ήταν πιο πολύτιμο (ή λιγότερο πολύτιμο) εάν το εργατικό δυναμικό πετύχει το R από το να μην το πετύχει. Αυτές οι περιπτώσεις θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν κάνοντας ξεχωριστές ερωτήσεις χρησιμότητας για συναλλαγές με σημαντικές διασυνδέσεις. Εδώ παρουσιάζονται οι χρησιμότητες των ανταλλαγών στο παράδειγμα μας:

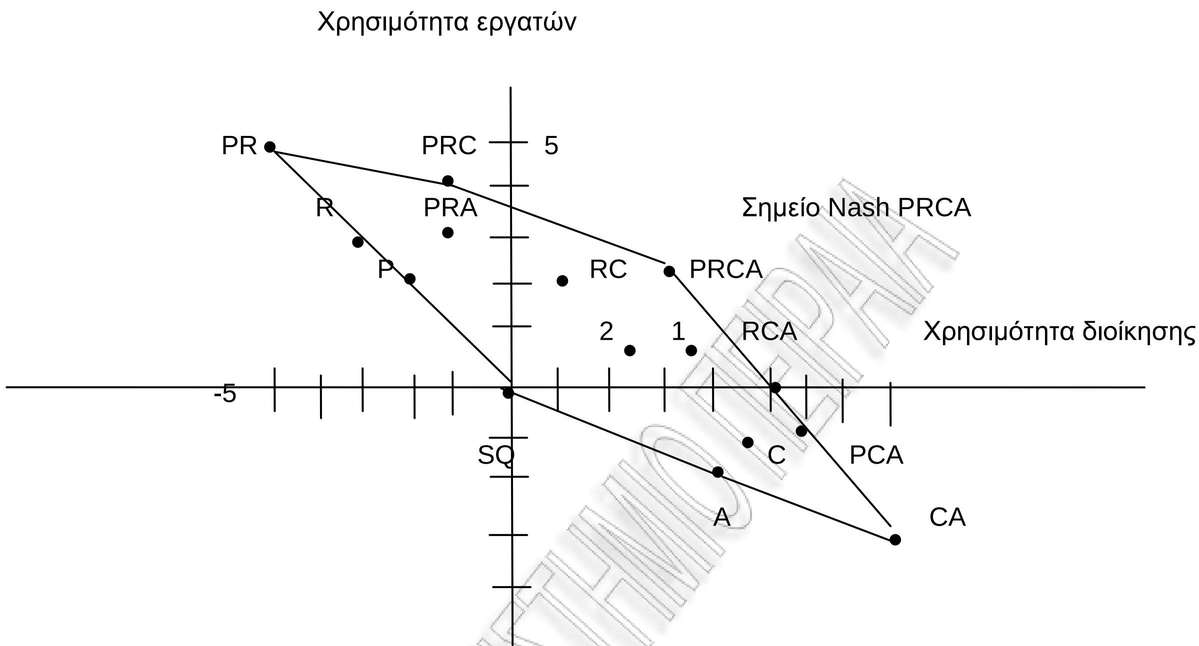
Παραχωρήσεις εργατικού δυναμικού

			Τίποτα	C	A	CA
Παραχωρήσεις Διοίκησης	Τίποτα	(0,0)	(4,-1)	(4,-2)	(8,-3)	
	P		(-2,2)	(2,1)	(2,0)	(6,-1)
	R		(-3,3)	(1,2)	(1,1)	(5,0)
	PR		(-5,5)	(-1,4)	(-1,3)	(3,2)

Σχεδιάζουμε το ανταποδοτικό πολύγωνο για αυτά τα αποτελέσματα. Έπειτα καθορίζουμε το σημείο διαιτησίας του Nash, χρησιμοποιώντας το σημείο (0,0) ως το σημείο της υφιστάμενης κατάστασης. Η λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι (3,2), σε αντιστοιχία με την ανταλλαγή PRCA όπου κάθε πλευρά παραχωρεί και τις δύο απαιτήσεις της άλλης πλευράς. Και οι δύο πλευρές είναι σε καλύτερη θέση σε σχέση με την υφιστάμενη κατάσταση και τα αξιώματα Nash δικαιολογούν το αποτέλεσμα ως δίκαιο.

Η διαδικασία φαίνεται ελκυστική, έτσι δεν είναι; Φυσικά, υπάρχουν προβλήματα με αυτήν, κάποια από τα οποία μπορεί να υπέπεσαν και στην αντίληψη σας. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι μη γραμμικότητες της χρησιμότητας μπορεί να περιπλέξει την ανάλυση. Είναι επίσης αληθινό ότι αυξάνοντας τον αριθμό των ζητημάτων μεταξύ διοίκησης και εργατών αυξάνεται η δραματικά η πολυπλοκότητα του προβλήματος, σε σημείο όπου ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής θα ήταν χρήσιμος. Θα κλείσουμε εξετάζοντας τέσσερα προβλήματα πιο ουσιαστικής φύσεως.

ΔΙΑΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΠΑΙΓΝΙΑ



<u>Εικόνα 4.2</u> **:** Πολύγωνο ανταποδοτικότητας για διαιτησία εργατικού δυναμικού – διοίκησης.

1) Τι γίνεται σε περίπτωση που το σημείο Nash είναι ένα μικτό αποτέλεσμα; Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η λύση Nash στο παράδειγμα μας ήταν στο (2,2 ½) = ¼ PRC + ¾ PRCA. Θα προτείναμε να δοθούν τα συνταξιοδοτικά οφέλη, η αύξηση και να εξαλειφθεί το διάλειμμά για καφέ, αλλά πως θα παρέχονταν τα ¾ της αυτοματοποίησης; Μία απάντηση μπορεί να είναι να χορηγηθεί η αυτοματοποίηση αλλά στο ¼ των εντοπιζόμενων εργατών να εγγυηθούν άλλες εργασίες. Κάποιες απαιτήσεις είναι διαιρετής φύσης, όπως αυξήσεις και συνταξιοδοτικά οφέλη. Άλλες μπορεί να είναι δυσκολότερο να διαιρεθούν: μισό διάλειμμα καφέ δεν θα ικανοποιούσε καμία πλευρά. Όμως, πιθανόν θα μπορούσαμε να εξαλείψουμε το διάλειμμα για καφέ και να επιμηκύνουμε το την ώρα του γεύματος. Προβλήματα αυτού του τύπου συχνά μπορούν να αντιμετωπιστούν με την εφαρμογή κάποιας διακριτικότητας.

2) Τι κάνουμε εάν υπάρχουν αποτελέσματα που είναι κατά Pareto ανώτερα από την υφιστάμενη κατάσταση; Λοιπόν θα μπορούσαμε απλώς να προτείνουμε την υφιστάμενη κατάσταση. Όμως, μία πιο δημιουργική λύση θα ήταν να διευρύνουμε τη συλλογή των υπό εξέταση προτάσεων. Όσο πιο πολλές εναλλακτικές έχουμε να εξετάσουμε, τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα να υπάρχουν αρκετές εναλλακτικές τις οποίες οι πλευρές αξιολογούν διαφορετικά προκειμένου να κανονίσουμε αμοιβαίως κερδοφόρες συναλλαγές. [Allen, 1956] προτείνει ότι το πρώτο βήμα του διαιτητή θα έπρεπε να είναι η οργάνωση συναντήσεων «καταιγισμού ιδεών» με το εργατικό δυναμικό και τη διοίκηση προκειμένου να εξαχθούν πρόσθετες προτάσεις. Η διοίκηση μπορεί να προσφέρει μία σχολική υποτροφία για τα παιδιά των εργαζομένων

(κερδίζοντας και την επισυρόμενη φορολογική απαλλαγή). Το εργατικό δυναμικό μπορεί να προσφέρει την τροποποίηση της διαδικασίας παραπόνων η οποία ενοχλεί τη διοίκηση. Αυτές οι νέες ιδέες θα έμπαιναν έπειτα στην ίδια διαδικασία με τα αρχικά ζητήματα. Η ιδέα διεύρυνσης της διαπραγμάτευσης για την αύξηση της πιθανότητας αμοιβαίως επωφελών συμφωνιών έχει υποστηριχθεί σθεναρά από πολλούς αναλυτές, για παράδειγμα από τους Fisher και Ury σε ένα εμπορικά επιτυχημένο βιβλίο σχετικά με τις τεχνικές διαπραγμάτευσης [1981].

3) Είναι η παρούσα κατάσταση το κατάλληλο σημείο αρχικής κατάστασης για τη διαδικασία Nash; Για να υποθέσουμε αυτό, πρέπει να υποθέσουμε ότι οι διαπραγματεύσεις είναι φιλικές προσπάθειες με καλή πίστη. Στην πραγματικότητα, οι διαπραγματεύσεις εργατικού δυναμικού και διοίκησης λαμβάνουν χώρα σε ατμόσφαιρα απειλών, με συζητήσεις για απεργίες και ανταπεργίες. Τέτοιες ενέργειες θα κόστιζαν και στις δύο πλευρές, αλλά μπορεί να θεωρηθούν ως προσπάθειες μεταβολής της κατάστασης αρχικής κατάστασης Nash προς όφελος της μίας πλευράς. Ένας διαιτητής μπορεί να πρέπει να εξετάσει εάν και πως θα αντιδράσει σε τέτοιες απόπειρες. Δεν θα είναι εύκολο.

4) Δεν θα ήταν φυσικό και για τις δύο πλευρές να δώσουν εσφαλμένες πληροφορίες σχετικά με τις χρησιμότητες τους, επομένως καθιστώντας ολόκληρη την ανάλυση ανώφελη; Αυτός ο περιορισμός είναι βαρυσήμαντος και θα έπρεπε να τον εξετάσουμε προσεκτικά. Εάν μία ή δύο πλευρές γνώριζαν ότι θα αποκτούσαν ένα πιο ευνοϊκό αποτέλεσμα λέγοντας ψέματα για τις χρησιμότητες τους, η διαδικασία θα ήταν πράγματι ανώφελη σε πρακτικές καταστάσεις. Όμως η κατάσταση είναι πιο λεπτή από αυτό: δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι τα ψέματα θα είναι επικερδή και εάν θα είναι ή όχι εξαρτάται από το τι πράττει η άλλη πλευρά.

Για να παρουσιάσουμε τα διακριτικά σημεία που εμπλέκονται, ας εξετάσουμε κάποια πιθανά αποτελέσματα παραποίησης των χρησιμοτήτων στο παράδειγμα μας. Ας υποθέσουμε ότι η διοίκηση εξετάζει το ενδεχόμενο να πει ψέματα για τις χρησιμότητες της. Ποιο ψέμα θα ήταν επωφελές; Μία υποσχόμενη τεχνική μπορεί να είναι να δώσει σωστή κλιμακωτή συσχέτιση για τα ζητήματα θετικής χρησιμότητας και σωστή κλιμακωτή συσχέτιση για τα ζητήματα αρνητικής χρησιμότητας, αλλά να παραποιήσει τη συσχέτιση μεταξύ των δύο απαντώντας σε ερωτήσεις συναλλαγών εσφαλμένα. Η διοίκηση αναφέρει ότι θα απαιτούσε πολλές παραχωρήσεις από την άλλη πλευρά πριν ενδώσει σε κάποιες απαιτήσεις. Αυτός ο τύπος παραποίησης είναι συχνά αυτό που έχουμε υπόψη όταν συζητάμε για πολύ σκληρές διαπραγματεύσεις. Για παράδειγμα, η διοίκηση μπορεί να διπλασιάσει όλα τα αρνητικά νούμερα και να αναφέρει εσφαλμένες αρνητικές χρησιμότητες.

R	P	SO	A,C
-6	-4	0	4

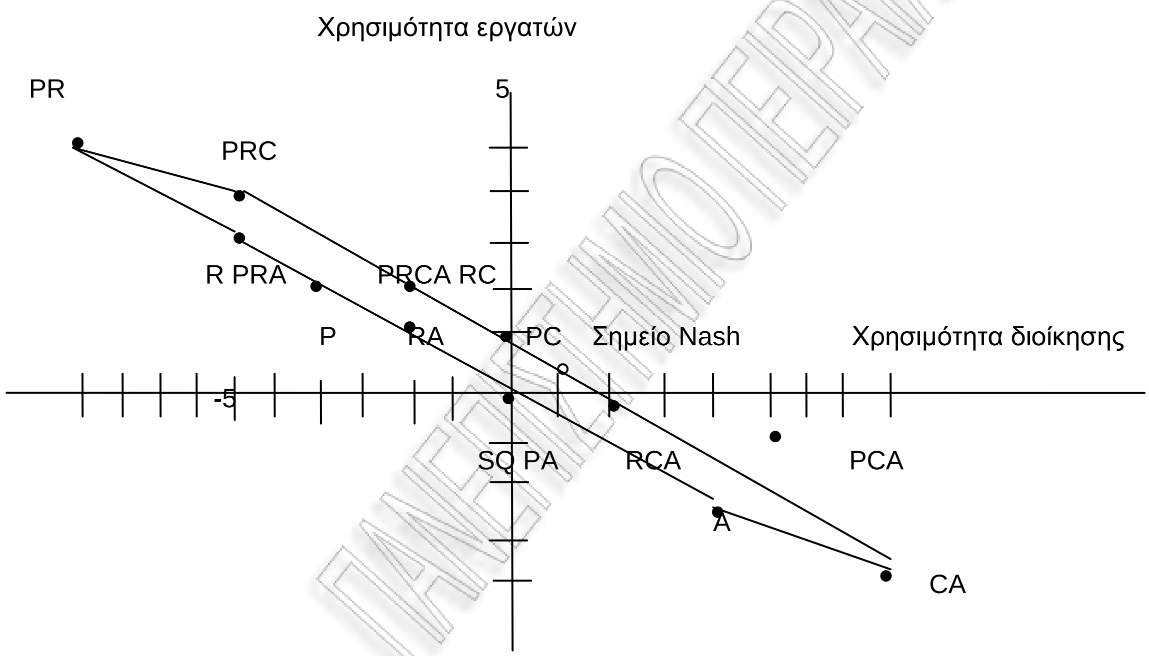
Εσφαλμένες χρησιμότητες διοίκησης

Για να εξετάσουμε τι επίδραση αυτή η παραποίηση θα είχε στο αποτέλεσμα της διαιτησίας, επαναλαμβάνουμε την ανάλυση μας με τις εσφαλμένες χρησιμότητες της διοίκησης.

Παραχωρήσεις εργατικού δυναμικού

Παραχωρήσεις Διοίκησης		Τίποτα	C	A	CA
Τίποτα		(0,0)	(4,-1)	(4,-2)	(8,-3)
P		(-4,2)	(0,1)	(0,0)	(4,-1)
R		(-6,3)	(-2,2)	(-2,1)	(2,0)
PR		(-10,5)	(-6,4)	(-6,3)	(-2,2)

ΔΙΑΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΠΑΙΓΝΙΑ



Εικόνα 4.3 : Πολύγωνο ανταποδοτικότητας όταν ψεύδεται η διοίκηση

Το πολύγωνο ανταποδοτικότητας παρουσιάζεται στην Εικόνα 3. Η αλλαγή από την Εικόνα 2 είναι ότι η παραποίηση της διοίκησης έχει μετακινήσει κάποια σημεία προς τα αριστερά, καθιστώντας την περιοχή των αμοιβαίως επωφελών συμφωνιών μικρότερη. Το νέο σημείο Nash βρίσκεται στο (1,1/2), το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Θα μπορούσε για παράδειγμα να ερμηνευτεί ως ½ PC + ½ RCA. Εάν κοιτάξουμε πίσω στις ειλικρινείς χρησιμότητες, το σημείο αυτό είναι το (3 ½ , 1/2), παρουσιαζόμενο ως σημείο #1 στην Εικόνα 2. Αυτό το σημείο δεν είναι βέλτιστο Pareto, αλλά είναι καλύτερο για τη διοίκηση από το ειλικρινές σημείο Nash (3,2). Η διοίκηση κέρδισε από το ψέμα.

Από την άλλη, το ανειλικρινές σημείο Nash (1,1/2) μπορεί να ερμηνευτεί ως ¾ Pc + ¼ C. Οι ειλικρινείς χρησιμότητες αυτής της ερμηνείας είναι (2 ½, ½), συμβολισμένες με το σημείο #2 στην Εικόνα 2. Αυτό είναι χειρότερο για τη διοίκηση από το ειλικρινές σημείο Nash. Με άλλα λόγια, τα ψέματα μπορεί να ευνοήσουν τη διοίκηση αλλά μπορεί επίσης να την βλάψουν.

Επιπλέον, μπορεί κανείς να δει ότι εάν το εργατικό δυναμικό πει ψέματα διπλασιάζοντας τις αρνητικές του χρησιμότητες, ενώ η διοίκηση λέει την αλήθεια, η προκύπτουσα λύση μπορεί να ερμηνευτεί ως το σημείο RC, το οποίο είναι το σημείο (1,2) στις ειλικρινείς χρησιμότητες. Σε αυτήν την περίπτωση, η παραποίηση του εργατικού δυναμικού δεν έχει επίδραση στην ανταπόδοση του εργατικού δυναμικού. Αν και βλάπτει τη διοίκηση και καταστρέφει τη βελτιστοποίηση Pareto. Τέλος, μπορούμε να εξετάσουμε εάν το εργατικό δυναμικό και η διοίκηση επιλέξουν να πουν ψέματα, το σύστημα διαιτησίας του Nash μπορούσε να προτείνει την ισχύουσα κατάσταση, και οι δύο πλευρές θα έχαναν την ευκαιρία να φτάσουν σε μία αμοιβαίως επωφελή συμφωνία.

Η γενική κατάσταση είναι ότι λέγοντας ψέματα η μία πλευρά επιφέρονται κατώτερα του Pareto αποτελέσματα, αλλά εάν θα ωφελήσει ή θα βλάψει τον ψεύτη αυτό είναι ένα αμφιλεγόμενο ζήτημα. Σε περίπτωση που ψεύδονται και οι δύο πλευρές, θα υποστούν ζημία γενικά και οι δύο πλευρές. Μπορεί να υπάρχει όφελος σε περίπτωση παραποίησης των χρησιμοτήτων, αλλά δεν είναι εύκολο ή σίγουρο όφελος.

Κεφάλαιο 5

5. Ανάλυση αποφάσεων με πολλούς παράγοντες

5.1 Παίγνια σε εκτεταμένη μορφή

Ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή είναι μία γραφική παράσταση (δηλαδή ένα σύνολο κόμβων και μία σειρά τόξων), η οποία έχει την δομή ενός δέντρου[1] και η οποία αντιπροσωπεύει την πιθανή ακολουθία ενεργειών και τυχαίες διαταραχές που επηρεάζουν το αποτέλεσμα ενός παιγνίου που παίζεται από ένα σύνολο παικτών.

5.1.1 Περιγραφή των κινήσεων, των πληροφοριών και της τύχης

Ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή περιγράφεται από ένα σύνολο παραγόντων, μεταξύ των οποίων ένας συγκεκριμένος παίκτης που ονομάζεται «φύση», και μία σειρά από θέσεις που περιγράφονται ως κόμβοι σε μία δομή δέντρου. Σε κάθε κόμβο ένας συγκεκριμένος παίκτης έχει το δικαίωμα να κινείται, δηλαδή, έχει να επιλέξει μία πιθανή δράση σε ένα παραδεκτό σύνολο που εκπροσωπείται από τα τόξα που προέρχονται από τον κόμβο.

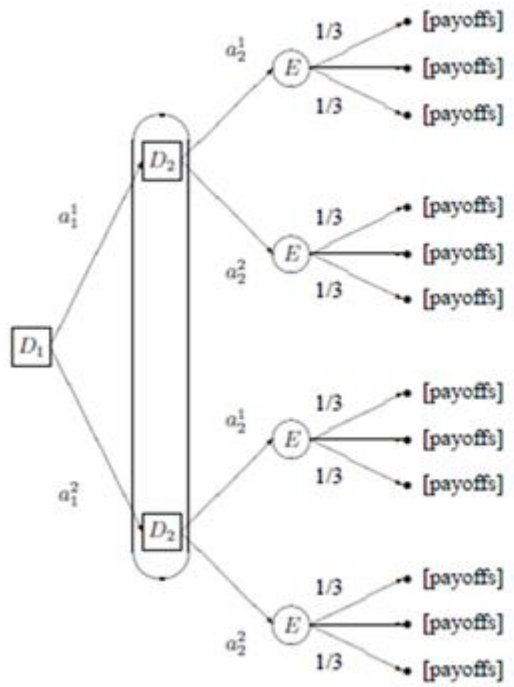
Οι πληροφορίες στη διάθεση του κάθε παίκτη στους κόμβους όπου έχει να επιλέξει μία ενέργεια περιγράφονται από τη δομή πληροφοριών του παιγνίου. Σε γενικές γραμμές ο παίκτης δεν μπορεί να γνωρίζει ακριβώς σε ποιον κόμβο της δομής του δέντρου το παίγνιο βρίσκεται επί του παρόντος. Οι πληροφορίες του έχουν την ακόλουθη μορφή:

Γνωρίζει ότι η θέση του παιγνίου επί του παρόντος είναι ένα στοιχείο σε ένα δεδομένο υποσύνολο των κόμβων. Δεν ξέρει σε ποιόν βρίσκεται συγκεκριμένα.

Όταν ο παίκτης επιλέγει μία κίνηση, αυτό αντιστοιχεί στο να επιλέξει ένα τόξο από το γράφημα που καθορίζει μία μετάβαση σε ένα νέο κόμβο, όπου ένας άλλος παίκτης πρέπει να επιλέξει την κίνησή του, κλπ. Μεταξύ των παικτών, η «φύση» παίζει τυχαία, δηλαδή οι κινήσεις της «φύσης» επιλέγονται τυχαία. Το παίγνιο έχει έναν κανόνα διακοπής που περιγράφεται από τους τερματικούς κόμβους του δέντρου. Τότε οι παίκτες παραλαμβάνουν τις ανταμοιβές τους, που ονομάζονται επίσης αποδόσεις.

Το σχήμα 5.1 δείχνει την εκτεταμένη μορφή ενός στοχαστικού παιγνίου δύο παικτών, ενός σταδίου με ταυτόχρονες κινήσεις. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι αυτό το παίγνιο έχει την δομή ταυτόχρονης κίνησης πληροφοριών. Αντιστοιχεί σε μία κατάσταση όπου ο παίκτης 2 δεν γνωρίζει ποια δράση έχει επιλεγεί από τον παίκτη 1 και το αντίστροφο. Στο σχήμα αυτό ο κόμβος που σημειώνεται D_1 αντιστοιχεί στην κίνηση του παίκτη 1, οι κόμβοι που σημειώνονται D_2 αντιστοιχούν στην κίνηση του παίκτη 2.

[1] Δέντρο είναι ένα γράφημα, όπου συνδέονται όλοι οι κόμβοι, αλλά δεν υπάρχουν κύκλοι. Σε ένα δέντρο υπάρχει ένας κόμβος χωρίς "γονείς", που ονομάζεται "ρίζα" και ένα σύνολο κόμβων, χωρίς απογόνους, που ονομάζονται "φύλλα". Υπάρχει πάντα μια μοναδική διαδρομή από τη ρίζα σε κάθε φύλλο.



Εικόνα 5.1 : Ένα παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή

Οι πληροφορίες του δεύτερου παίκτη αντιπροσωπεύονται από το οβάλ κουτί. Ως εκ τούτου ο παίκτης 2 δεν γνωρίζει ποια ήταν η δράση που επέλεξε ο παίκτης 1. Οι κόμβοι με την σήμανση Ε αντιστοιχούν σε κίνηση της «φύσης». Σε αυτή την συγκεκριμένη περίπτωση, θεωρούμε ότι τα τρία πιθανά στοιχειώδη γεγονότα είναι ισοπίθανα. Οι κόμβοι που εκπροσωπούνται από μαύρους κύκλους είναι τερματικοί κόμβοι όπου το παίγνιο σταματάει και εισπράττονται οι αποδόσεις.

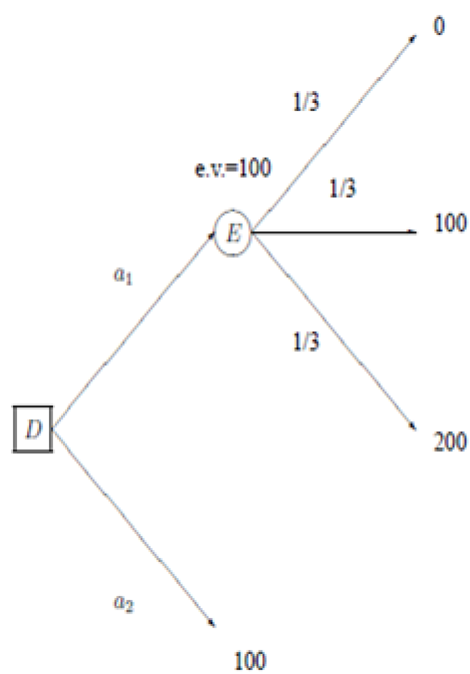
Αυτή η αναπαράσταση των παιγνίων είναι προφανώς εμπνευσμένη από τα παίγνια συναναστροφής όπως το Σκάκι, το Πόκερ, το Μπριτζ, κλπ. τα οποία μπορεί, τουλάχιστον θεωρητικά, να περιγράφονται σωστά στο παρόν πλαίσιο. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, η τυχαία κίνηση της «φύσης» είναι η αντιπροσώπευση των χαρτιών ή του ριξίματος των ζαριών που πραγματοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια του παιγνίου.

Η εκτεταμένη μορφή παρέχει πράγματι μία πολύ λεπτομερή περιγραφή του παιγνίου. Είναι παρόλα αυτά μάλλον μη πρακτική επειδή το μέγεθος του δέντρου γίνεται πολύ γρήγορα, ακόμα και για απλά παίγνια, αναμφισβήτητα τεράστιο. Μία προσπάθεια να δώσουμε μία πλήρη περιγραφή ενός περίπλοκου παιγνίου όπως το Μπριτζ, χρησιμοποιώντας την εκτεταμένη μορφή, θα οδηγούσε σε μία συνδυαστική έκρηξη. Ένα άλλο μειονέκτημα της περιγραφής της εκτεταμένης μορφής είναι ότι οι καταστάσεις (κόμβοι) και οι δράσεις (τόξα) είναι ουσιαστικά πεπερασμένες ή αριθμήσιμες. Σε πολλά μοντέλα που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε, οι δράσεις και οι καταστάσεις θα είναι συχνά συνεχείς μεταβλητές. Για αυτά τα μοντέλα, θα χρειαστούμε μία διαφορετική μέθοδο περιγραφής του προβλήματος.

Παρόλα αυτά η εκτεταμένη μορφή είναι χρήσιμη με πολλούς τρόπους. Συγκεκριμένα, παρέχει τη θεμελιώδη εικόνα της δυναμικής δομής του παιγνίου. Η σειρά της ακολουθίας των κινήσεων, η οποία τονίζεται με την εκτεταμένη μορφή, είναι παρούσα στα περισσότερα παίγνια. Η θεωρία των δυναμικών παιγνίων σχετίζεται με την αλληλουχία των δράσεων και αντιδράσεων. Εδώ, ωστόσο, διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των δυναμικών του παιγνίου. Συγκεκριμένα, οι διαφορικές εξισώσεις και/ή οι εξισώσεις διαφοράς χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό.

5.1.2 Σύγκριση τυχαίων προοπτικών

Λόγω της τυχαιότητας της «φύσης», οι παίκτες θα πρέπει να συγκρίνουν και να επιλέξουν ανάμεσα σε διαφορετικές τυχαίες προοπτικές στη λήψη των αποφάσεών τους. Η βασική δομή απόφασης περιγράφεται στο σχήμα 5.2. Εάν ο παίκτης επιλέξει τη δράση $α_1$ αντιμετωπίζει μία τυχαία προοπτική της αναμενόμενης τιμής 100. Αν επιλέξει την δράση $α_2$ αντιμετωπίζει μία σίγουρη απόδοση 100. Εάν ο παίκτης είναι ουδέτερος ρίσκου θα είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο δράσεων. Εάν είναι αντίθετος του ρίσκου θα επιλέξει την $α_2$ δράση, αν λατρεύει το ρίσκο θα επιλέξει τη δράση $α_1$. Για να αναπαραστήσουν την στάση απέναντι στο ρίσκο μίας απόφασης ο Von Neumann και ο Morgenstern εισήγαγαν την έννοια της πρωταρχικής χρησιμότητας [Von Neumann & Morgenstern 1944]. Εάν κάποιος αποδέχεται τα αξιώματα της θεωρίας χρησιμότητας τότε ένας λογικός παίκτη θα έπρεπε να πάρει τη δράση που οδηγεί προς τυχαία προοπτική με την αναμενόμενη μεγαλύτερη χρησιμότητα.



Εικόνα 5.2

Αυτό λύνει το πρόβλημα της σύγκρισης των τυχαίων προοπτικών. Ωστόσο αυτό επίσης εισάγει ένα νέο τρόπο για να παιχτεί το παίγνιο. Ένας παίκτης μπορεί να ορίσει ένα τυχαίο πείραμα προκειμένου να δημιουργήσει την απόφασή του. Από την στιγμή που χρησιμοποιεί συναρτήσεις χρησιμότητας η αρχή της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας επιτρέπει σε αυτόν να συγκρίνει επιλογές ντετερμινιστικής δράσης με τυχαίες επιλογές.

Ως τελευταία υπενθύμιση των θεμελίων της θεωρίας χρησιμότητας ας ανακαλέσουμε στη μνήμη ότι η Von Neumann - Morgenstern συνάρτηση χρησιμότητας ορίζεται μέχρι ένα συσχετισμένο μετασχηματισμό. Αυτό λέει ότι οι επιλογές του παίκτη δεν θα επηρεαστούν εάν οι χρησιμότητες τροποποιηθούν με έναν συσχετισμένο μετασχηματισμό.

5.2 Πρόσθετες έννοιες σχετικά με την πληροφόρηση

Αυτό που είναι γνωστό από τους παίκτες που αλληλεπιδρούν σε ένα παίγνιο είναι υψίστης σημασίας. Αναφερόμαστε σύντομα στις έννοιες της πλήρους και τέλειας πληροφόρησης.

5.2.1 Ολοκληρωμένη και τέλεια πληροφόρηση

Η δομή πληροφοριών ενός παιγνίου δείχνει τι είναι γνωστό από τον κάθε παίκτη κατά τη στιγμή που το παίγνιο ξεκινάει και σε κάθε μία από τις κινήσεις του.

- **Πλήρης έναντι ελλιπούς πληροφόρησης**

Ας εξετάσουμε πρώτα τις πληροφορίες που διαθέτουν οι παίκτες, όταν μπαίνουν σε ένα παίγνιο. Ένας παίκτης έχει πλήρη στοιχεία εάν ξέρει

- ποιοί είναι οι παίκτες
- το σύνολο των δράσεων διαθέσιμο σε όλους τους παίκτες
- όλα τα πιθανά αποτελέσματα σε όλους τους παίκτες.

Ένα παίγνιο με πλήρη πληροφόρηση και κοινή γνώση είναι ένα παίγνιο όπου όλοι οι παίκτες έχουν πλήρη πληροφόρηση και όλοι οι παίκτες ξέρουν ότι οι άλλοι παίκτες έχουν πλήρη πληροφόρηση.

- **Τέλεια έναντι ατελούς πληροφόρησης**

Θεωρούμε τώρα διαθέσιμες τις πληροφορίες σε έναν παίκτη όταν αποφασίζει για μία συγκεκριμένη κίνηση. Σε ένα παίγνιο που ορίζεται στην εκτεταμένη μορφή του, εάν κάθε σύνολο πληροφοριών αποτελείται από μόλις έναν κόμβο, τότε λέμε ότι οι παίκτες έχουν τέλεια πληροφόρηση. Αν αυτό δεν συμβαίνει, το παίγνιο είναι ατελούς πληροφόρησης.

Παράδειγμα 2.3.1 Ένα παίγνιο με ταυτόχρονες κινήσεις, όπως π.χ. αυτό που φαίνεται στο σχήμα 2.1, είναι ατελούς πληροφόρησης.

- **Τέλεια ανάκληση**

Αν η δομή πληροφοριών είναι τέτοια που ένας παίκτης μπορεί να θυμάται πάντα όλες τις περασμένες κινήσεις που ο ίδιος έχει επιλέξει, και τις πληροφορίες που έχει λάβει, τότε το παίγνιο είναι ένα από τα τέλειας ανάκλησης. Διαφορετικά, είναι ένα από τα ατελής ανάκλησης.

5.2.2 Δέσμευση

Η δέσμευση είναι μία δράση που αναλαμβάνεται από έναν παίκτη που είναι δεσμευτική για τον ίδιο και είναι γνωστή στους άλλους παίκτες. Αναλαμβάνοντας την δέσμευση ένας παίκτης μπορεί να πείσει τους άλλους παίκτες να αναλάβουν δράσεις οι οποίες είναι ευνοϊκές γι' αυτόν. Για να είναι αποτελεσματικές οι δεσμεύσεις πρέπει να είναι αξιόπιστες. Μία ιδιαίτερη κατηγορία των δεσμεύσεων αποτελούν οι απειλές.

5.2.3 Δεσμευτική συμφωνία

Οι δεσμευτικές συμφωνίες είναι περιορισμοί που αφορούν τις πιθανές ενέργειες που αποφασίζονται από δύο ή περισσότερους παίκτες, με μία δεσμευτική σύμβαση που αναγκάζει την εφαρμογή της συμφωνίας. Συνήθως, για να είναι δεσμευτική μία συμφωνία απαιτεί μία εξωτερική αρχή που μπορεί να παρακολουθεί την συμφωνία χωρίς κόστος και να επιβάλλει κυρώσεις στους παραβάτες τόσο σοβαρές ώστε η εξαπάτηση να αποτρέπεται.

5.3 Παίζοντας παίγνια μέσω στρατηγικών

Έστω M = {1,...,m} είναι το σύνολο των παικτών. Μία καθαρή στρατηγική γ_j για τον παίκτη j είναι μία αντιστοίχηση που μετατρέπει τις πληροφορίες που διαθέτει ο παίκτης j σε έναν κόμβο απόφασης όπου κάνει μία κίνηση, στο σύνολο των παραδεκτών δράσεών του. Καλούμε διάνυσμα στρατηγικής την m-πλειάδα $\gamma = (\gamma)_{j=1,\dots,m}$. Όταν μία στρατηγική επιλεγεί από κάθε παίκτη, το διάνυσμα στρατηγικής γ καθορίζεται και το παίγνιο παίζεται σαν να ελεγχόταν από ένα αυτόματο.[2]

Ένα αποτέλεσμα (εκφρασμένο σε αναμενόμενη χρησιμότητα για κάθε παίκτη, αν το παίγνιο περιλαμβάνει κόμβους ευκαιρίας) συνδέεται με το διάνυσμα στρατηγικής γ. Δηλώνουμε με Γ_j το σύνολο των στρατηγικών για τον παίκτη j. Στη συνέχεια, το παίγνιο μπορεί να εκπροσωπείται από τις m αντιστοιχίες:

$$V_j : \Gamma_1 \times \cdots \Gamma_j \times \cdots \Gamma_m \to \mathbf{R}, \quad j \in M$$

που συνδέουν ένα μοναδικό (αναμενόμενης χρησιμότητας) αποτέλεσμα $V_j(\gamma)$ για κάθε παίκτη $j \in M$ με ένα δεδομένο διάνυσμα στρατηγικής στο $\gamma \in \Gamma_1 \times \dots \Gamma_j \times \dots \Gamma_m$. Κάποιος μπορεί να πει τότε ότι το παίγνιο ορίζεται στην κανονική του μορφή.

5.3.1 Από την εκτεταμένη μορφή στη στρατηγική ή κανονική μορφή

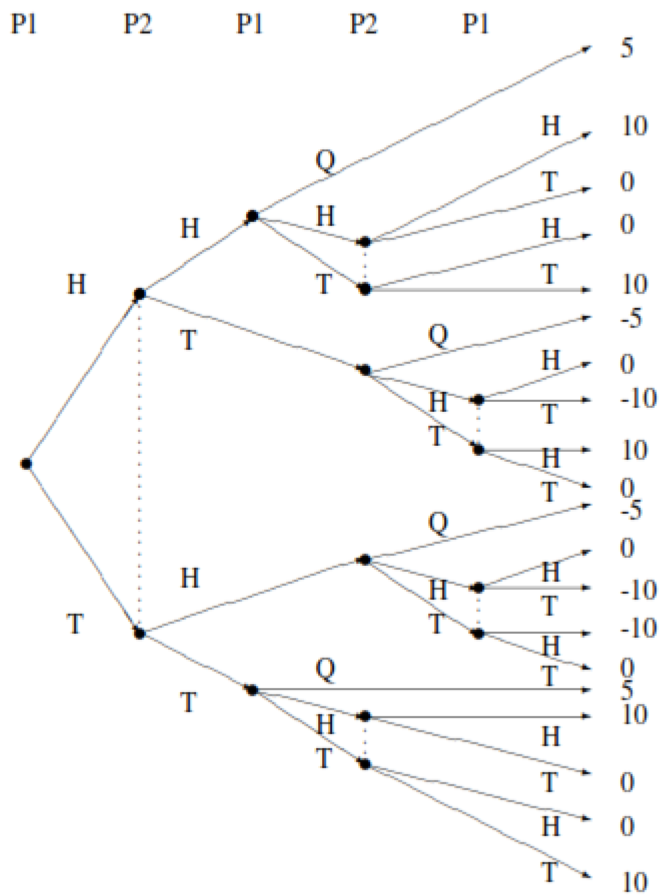
Θεωρούμε ένα απλό παίγνιο δύο παικτών, που ονομάζεται «ταιριασμένα σεντς». Οι κανόνες είναι οι εξής:

Το παίγνιο παίζεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο κάθε παίκτης επιλέγει κορώνα (H) ή γράμματα (T) χωρίς να γνωρίζει την επιλογή του άλλου παίκτη. Στη συνέχεια αποκαλύπτουν τις επιλογές τους ο ένας στον άλλο. Εάν τα νομίσματα δεν ταιριάζουν, ο παίκτης 1 κερδίζει $5 και ο πληρωτής 2 κερδίζει -$5. Εάν τα νομίσματα ταιριάζουν, ο παίκτης 2 κερδίζει $5 και ο πληρωτής 1 κερδίζει -$5. Στο δεύτερο στάδιο, ο παίκτης που έχασε στο πρώτο στάδιο έχει την επιλογή είτε να σταματήσει το παίγνιο ή να παίξει ένα ακόμα «ταιριασμένα σεντς» με τον ίδιο τύπο αποδόσεων, όπως στο πρώτο στάδιο (Q, H, T).

[2] Η ιδέα του να παίζονται παιχνίδια με τη χρήση των αυτομάτων θα συζητηθεί με περισσότερες λεπτομέρειες, όταν θα παρουσιάσει το λαϊκό θεώρημα για επαναλαμβανόμενα παιχνίδια.

- **Η εκτεταμένη μορφή δέντρου**

Αυτό το παίγνιο αναπαρίσταται στην εκτεταμένη του μορφή στο σχήμα 2.3. Οι τερματικές αποδόσεις αντιπροσωπεύουν τι κερδίζει ο παίκτης 1. Ο παίκτης 2 λαμβάνει τις αντίθετες τιμές. Έχουμε παρουσιάσει τη δομή των πληροφοριών με έναν ελαφρώς διαφορετικό τρόπο εδώ. Μία διακεκομμένη γραμμή συνδέει τους διαφορετικούς κόμβους που αποτελούν ένα σύνολο πληροφοριών για έναν παίκτη. Ο παίκτης που έχει την κίνηση αναγράφεται στο πάνω μέρος του γραφήματος.



Εικόνα 5.3 : Η εκτεταμένη μορφή του δέντρου

- **Τοποθετώντας σε λίστα όλες τις στρατηγικές**

Στον παρακάτω πίνακα 1 έχουμε εντοπίσει τις 12 διαφορετικές στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από καθένα από τους δύο παίκτες στο παίγνιο των «ταιριασμένων σεντς». Κάθε παίκτης κινείται δύο φορές. Στην πρώτη κίνηση οι παίκτες δεν έχουν καμία πληροφορία. Στη δεύτερη κίνηση γνωρίζουν ποιες επιλογές έχουν γίνει στο πρώτο στάδιο. Μπορούμε εύκολα να αναγνωρίσουμε ολόκληρο το σύνολο των πιθανών στρατηγικών.

	Strategies of Player 1			Strategies of Player 2		
	1st move	scnd move if player 2 has played		1st move move	scnd move if player 1 has played	
		H	T		H	T
1	H	Q	H	H	H	Q
2	H	Q	T	H	T	Q
3	H	H	H	H	H	H
4	H	H	T	H	T	H
5	H	T	H	H	H	T
6	H	T	T	H	T	T
7	T	H	Q	T	Q	H
8	T	T	Q	T	Q	T
9	T	H	H	T	H	H
10	T	T	H	T	H	T
11	T	H	T	T	T	H
12	T	T	T	T	T	T

Πίνακας 1

- **Πίνακας αποδόσεων**

Στον πίνακα 2 έχουμε παρουσιάσει τις αποδόσεις που λαμβάνονται από τον παίκτη 1 όταν και οι δύο παίκτες επιλέγουν μία από τις 12 πιθανές στρατηγικές.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	0	0	10	10
2	-5	-5	-5	-5	-5	-5	5	5	10	10	0	0
3	0	-10	0	-10	-10	0	5	5	0	0	10	10
4	-10	0	-10	0	-10	0	5	5	10	10	0	0
5	0	-10	0	-10	0	-10	5	5	0	0	10	10
6	0	-10	0	-10	0	-10	5	5	10	10	0	0
7	5	5	0	0	10	10	-5	-5	-5	-5	-5	-5
8	5	5	10	10	0	0	-5	-5	-5	5	5	5
9	5	5	0	0	10	10	-10	0	-10	0	-10	0
10	5	5	10	10	0	0	-10	0	-10	0	-10	0
11	5	5	0	0	10	10	0	-10	0	-10	0	-10
12	5	5	10	10	0	0	0	-10	0	-10	0	-10

Πίνακας 2

5.3.2 Μικτές στρατηγικές και στρατηγικές συμπεριφοράς

- **Ανάμιξη στρατηγικών**

Δεδομένου ότι ένας παίκτης αξιολογεί τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις VNM- συναρτήσεις χρησιμότητάς του μπορεί να οραματίζεται τη μίξη στρατηγικών, επιλέγοντας μία από αυτές τυχαία, σύμφωνα με μία κλήρωση που αυτός θα καθορίσει. Αυτό εισάγει μία συμπληρωματική κίνηση ευκαιρίας στην περιγραφή του παιγνίου.

Για παράδειγμα, εάν ο παίκτης j έχει p καθαρές στρατηγικές $γ_{jk}$, k=1,….,p μπορεί να επιλέξει την στρατηγική που θα παίξει μέσω μίας κλήρωσης που δίνει μία πιθανότητα x_{jk} στην καθαρή στρατηγική $γ_{jk}$, k=1,…,p. Τώρα οι πιθανές επιλογές δράσης του παίκτη j είναι στοιχεία του συνόλου όλων των κατανομών πιθανοτήτων:

$$\mathcal{X}_j = \{\mathbf{x}_j = (x_{jk})_{k=1,\dots,p} | x_{jk} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{p} x_{jk} = 1.$$

Σημειώνουμε ότι το σύνολο X_j είναι συμπαγές και κυρτό στο $\mathbb{R}^p$.

- **Στρατηγικές συμπεριφοράς**

Μία στρατηγική συμπεριφοράς ορίζεται ως μία χαρτογράφηση που συνδέει τις πληροφορίες που είναι στη διάθεση του παίκτη j σε έναν κόμβο απόφασης όπου κάνει μία κίνηση, με μία κατανομή πιθανοτήτων πάνω στο σύνολο ενεργειών του.

Η διαφορά μεταξύ των μικτών στρατηγικών και στρατηγικών συμπεριφοράς είναι λεπτή. Σε μία μικτή στρατηγική, ο παίκτης σκέφτεται το σύνολο των πιθανών στρατηγικών και διαλέγει μία, τυχαία, σύμφωνα με μία προσεκτικά σχεδιασμένη κλήρωση. Σε μία στρατηγική συμπεριφοράς ο παίκτης σχεδιάζει μία στρατηγική η οποία συνίσταται στη λήψη αποφάσεων σε κάθε κόμβο απόφασης, σύμφωνα με μία προσεκτικά σχεδιασμένη κλήρωση, έτσι ώστε αυτό το σχέδιο να είναι εξαρτώμενο από τις διαθέσιμες πληροφορίες στον κόμβο αυτό. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι μία στρατηγική συμπεριφοράς είναι μία στρατηγική που περιλαμβάνει την τυχαιότητα σε κάθε κόμβο απόφασης. Ένα διάσημο θεώρημα [Kuhn, 1953], που δίνεται χωρίς απόδειξη, ορίζει ότι αυτοί οι δύο τρόποι παρουσίασης της τυχαιότητας στην επιλογή των δράσεων είναι ισοδύναμοι σε μία μεγάλη κατηγορία παιγνίων.

Θεώρημα Σε ένα εκτεταμένο παίγνιο τέλειας ανάκλησης όλες οι μικτές στρατηγικές μπορούν να αναπαρίστανται ως στρατηγικές συμπεριφοράς.

Κεφάλαιο 6

6. Παίγνιο Markov με μηδενικό άθροισμα του Shapley

6.1 Δυναμική λειτουργίας και ανταμοιβών

Η έννοια του παιγνίου Markov έχει παρουσιαστεί, σε μία δομή παιγνίου μηδενικού αθροίσματος, στο [Shapley, 1953]. Η δομή αυτού του παιγνίου μπορεί επίσης να περιγραφεί σαν μία ελεγχόμενη αλυσίδα Markov με δύο ανταγωνιστικούς παράγοντες.

Ας πούμε ότι το S = {1, 2, …, n} είναι το σύνολο των πιθανών καταστάσεων μίας διακριτού χρόνου τυχαίας διαδικασίας {x(t) : t = 0, 1, … }. Ας πούμε ότι τα U_j = {1, 2, … λ_j}, j = 1, 2, είναι τα σύνολα πεπερασμένων ενεργειών δύο παικτών. Η δυναμική διαδικασίας περιγράφεται από τις πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{s,s'}(\mathbf{u}) = \mathrm{P}[x(t+1) = s' | x(t) = s,\ \mathbf{u}], \quad s, s' \in S, \quad \mathbf{u} \in U_1 \times U_2,$$

οι οποίες ικανοποιούν, για όλα τα u ∈ U_1 x U_2:

$$\begin{aligned} p_{s,s'}(\mathbf{u}) &\geq 0 \\ \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(\mathbf{u}) &= 1, \quad s \in S. \end{aligned}$$

Όσο οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από τις ενέργειες των παικτών μιλάμε για μία ελεγχόμενη αλυσίδα Markov. Μία συνάρτηση ανταμοιβής μετάβασης:

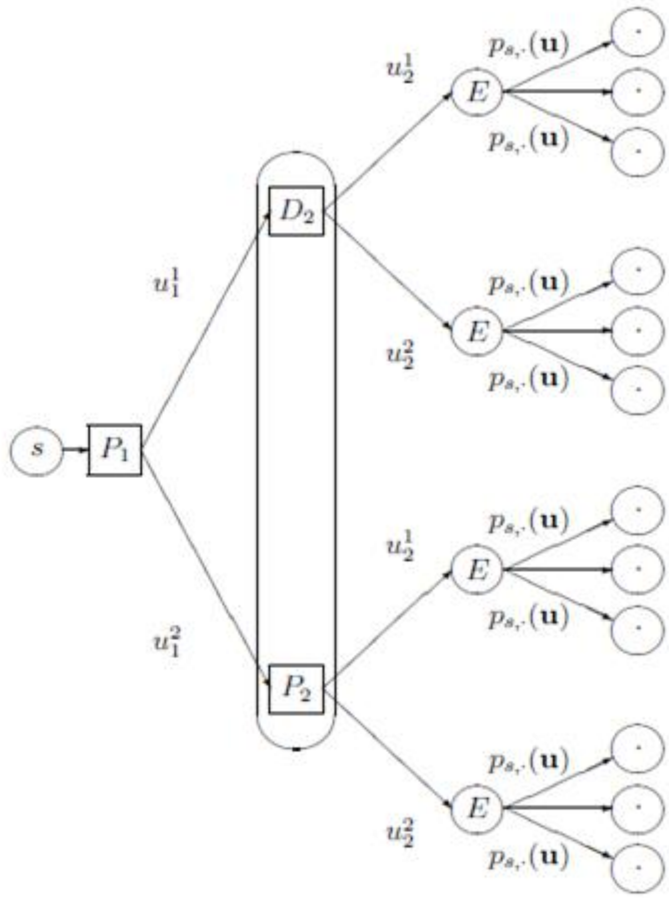
$$r(s, \mathbf{u}), \quad s \in S, \quad \mathbf{u} \in U_1 \times U_2,$$

ορίζει το κέρδος του παίκτη 1 όταν η διαδικασία είναι στην κατάσταση s και οι παίκτες αναλαμβάνουν το ζεύγος δράσης u. Η ανταμοιβή του παίκτη 2 δίνεται από το –r(s, u), αφού το παίγνιο υποτίθεται ότι είναι μηδενικού αθροίσματος.

6.2 Δομή της πληροφορίας και στρατηγικές

6.2.1 Η εκτεταμένη μορφή του παιγνίου

Το παίγνιο που ορίστηκε ανωτέρω αντιστοιχεί σε ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή με έναν άπειρο αριθμό κινήσεων. Θεωρούμε μία δομή πληροφόρησης όπου οι παίκτες επιλέγουν σειριακά και ταυτόχρονα, με τέλεια ανάκληση, τις δράσεις τους. Αυτό απεικονίζεται στην εικόνα 6.1.



<u>Εικόνα 6.1</u> : Ένα παίγνιο Markov σε εκτεταμένη μορφή

6.2.2 Στρατηγικές

Μία στρατηγική είναι μία συσκευή η οποία μετατρέπει τις πληροφορίες σε ενέργειες. Αφού οι παίκτες μπορούν να ανακαλέσουν στην μνήμη τις παλιές παρατηρήσεις, η γενική μορφή μίας στρατηγικής μπορεί να γίνει εντελώς σύνθετη.

Στρατηγικές Markov: Αυτές οι στρατηγικές ονομάζονται επίσης στρατηγικές ανάδρασης. Η υποτιθέμενη δομή πληροφόρησης επιτρέπει την χρήση των στρατηγικών που ορίζονται ως χαρτογραφήσεις:

$$\gamma_j : S \mapsto P(U_j), \quad j = 1, 2,$$

Όπου το $P(U_j)$ είναι η κατηγορία των κατανομών πιθανοτήτων πάνω στο σύνολο δράσεων U_j. Αφού οι στρατηγικές βασίζονται μόνο στις πληροφορίες που εκφράζονται από την τρέχουσα κατάσταση της διαδικασίας x, καλούνται στρατηγικές Markov.

Όταν οι δύο παίκτες έχουν επιλέξει τις αντίστοιχες στρατηγικές τους η διαδικασία καταστάσεων γίνεται μία αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης:

$$\mathrm{P}_{s,s'}^{\gamma_1,\gamma_2} = \sum_{k=1}^{\lambda_1} \sum_{\ell=1}^{\lambda_2} \mu_k^{\gamma_1(s)} \nu_\ell^{\gamma_2(s)} p_{s,s'}(u_1^k, u_2^\ell),$$

όπου έχουμε συμβολίσει $\mu_k^{\gamma_1(s)}$, k = 1, …, λ_1, και $\nu_\ell^{\gamma_2(s)}$, ℓ = 1, …, λ_2 τις κατανομές πιθανοτήτων που προκαλούνται στα U_1 και U_2 από τα $\gamma_1(s)$ και $\gamma_2(s)$ αντίστοιχα. Για να σχηματίσουμε την κανονική μορφή του παιγνίου, μένει να ορίσουμε τις αποδόσεις που συσχετίζονται με τις παραδεκτές στρατηγικές των δύο παικτών. Ας πούμε ότι το $\beta \in [0, 1)$ είναι ένας δεδομένος παράγοντας προεξόφλησης. Η απόδοση του παίκτη 1, όταν το παίγνιο ξεκινά στην κατάσταση s_0, ορίζεται ως το προεξοφλούμενο άθροισμα πάνω στον άπειρο ορίζοντα των αναμενόμενων ανταμοιβών μεταβάσεων, δηλαδή:

$$V(s_0; \gamma_1, \gamma_2) = \mathrm{E}_{\gamma_1,\gamma_2}[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{k=1}^{\lambda_1} \sum_{\ell=1}^{\lambda_2} \mu_k^{\gamma_1(x(t))} \nu_\ell^{\gamma_2(x(t))} r(x(t), u_1^k, u_2^\ell) | x(0) = s_0].$$

Η απόδοση του παίκτη 2 είναι ίση με $-V(s_0; \gamma_1, \gamma_2)$.

__Ορισμός__ Ένα ζεύγος στρατηγικών (γ_1^*, γ_2^*) είναι ένα σαγματικό σημείο εάν, για όλες τις στρατηγικές γ_1 και γ_2 των παικτών 1 και 2 αντίστοιχα, για όλα τα $s \in S$:

$$V(s; \gamma_1, \gamma_2^*) \le V(s; \gamma_1^*, \gamma_2^*) \le V(s; \gamma_1^*, \gamma_2). \qquad (6.1)$$

Ο αριθμός:

$$v^*(s) = V(s; \gamma_1^*, \gamma_2^*)$$

ονομάζεται η τιμή του παιγνίου στην κατάσταση s.

Στρατηγικές μνήμης: Αφού το παίγνιο είναι τέλειας ανάκλησης, οι πληροφορίες στις οποίες ένας παίκτης μπορεί να βασίσει την απόφασή του την περίοδο t είναι ολόκληρο το ιστορικό καταστάσεων:

$$h(t) = \{x(0), x(1), \ldots, x(t)\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν υποθέτουμε ότι οι παίκτες έχουν άμεση πρόσβαση στις δράσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν από τον αντίπαλό τους. Μπορούν μόνο να παρατηρήσουν το ιστορικό καταστάσεων. Ωστόσο, όπως στην περίπτωση των διαδικασιών απόφασης Markov ενός παίκτη, μπορεί να δειχθεί ότι η βελτιστοποίηση δεν απαιτεί περισσότερα από τη χρήση των Markov στρατηγικών.

6.3 Η διατύπωση τελεστή των Shapley – Denardo

Παρουσιάζουμε, σε αυτή την ενότητα την ισχυρή διατύπωση των τελεστών δυναμικού προγραμματισμού που έχει επίσημα εισαχθεί στο [Denardo, 1967] αλλά ήταν ήδη υπονοούμενη στην εργασία του Shapley. Η λύση των εξισώσεων δυναμικού προγραμματισμού για το στοχαστικό παίγνιο αποκτιέται ως ένα σταθερό σημείο ενός τελεστή που δρα στο χώρο των συναρτήσεων τιμών.

6.3.1 Τελεστές δυναμικού προγραμματισμού

Σε μία σημαίνουσα εργασία [Shapley, 1953] η ύπαρξη βέλτιστων σταθερών Markov στρατηγικών έχει καθιερωθεί μέσω ενός επιχειρήματος σταθερού σημείου, που συμπεριλαμβάνει έναν συμβατικό τελεστή. Δίνουμε εδώ μία σύντομη περιγραφή της μεθόδου, παίρνοντας την έμπνευσή μας από τα [Denardo, 1967] και [Filar & Vrieze, 1997]. Ας πούμε ότι το υ(·) = (V(s) : s ∈ S) είναι μία αφηρημένη συνάρτηση με πραγματικές τιμές, που ορίζεται στο S. Αφού υποθέτουμε ότι το S είναι πεπερασμένο αυτό είναι επίσης ένα διάνυσμα. Γνωρίστε, για κάθε s ∈ S τις επονομαζόμενες τοπικές συναρτήσεις ανταμοιβών:

$$h(v(\cdot), s, u_1, u_2) = r(s, , u_1, u_2) + \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(u_1, u_2)\, v(s'), \quad (u_1, u_2) \in U_1 \times U_2.$$

Ορίστε τώρα, για κάθε s ∈ S, το παίγνιο πίνακα μηδενικού αθροίσματος με καθαρές στρατηγικές U_1 και U_2 και με αποδόσεις:

$$H(v(\cdot), s) = [h(v(\cdot), s, u_1^k, u_2^\ell)]_{\substack{k = 1, \ldots, \lambda_1 \\ \ell = 1, \ldots, \lambda_2}} .$$

Συμβολίστε την τιμή καθενός από αυτά τα παίγνια με:

$$T(v(\cdot), s) := \mathrm{val}[H(v(\cdot), s)]$$

…και πείτε ότι Τ(υ(·)) = Τ(υ(·), s) : s ∈ S). Αυτό ορίζει μία χαρτογράφηση T: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Αυτή η χαρτογράφηση καλείται επίσης ο τελεστής δυναμικού προγραμματισμού του παιγνίου Markov.

6.3.2 Ύπαρξη διαδοχικών σαγματικών σημείων

<u>Λήμμα (α)</u> Εάν το A και B είναι δύο πίνακες ίδιων διαστάσεων, τότε:

$$|\mathbf{val}[A] - \mathbf{val}[B]| \leq \max_{k,\ell} |a_{k,\ell} - b_{k,\ell}|. \qquad (6.2)$$

<u>Λήμμα (β)</u> Εάν τα υ(·), γ_1 και γ_2 είναι τέτοια ώστε, για όλα τα s ∈ S:

$$\begin{aligned} v(s) \quad &\leq \quad (\textbf{resp.} \ \geq \textbf{resp.} \ =) \quad h(v(\cdot), s, \gamma_1(s), \gamma_2 s(s)) \\ &= \quad r(s, \gamma_1(s), \gamma_s(s)) + \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(\gamma_1(s), \gamma_2 s(s))\, v(s') \end{aligned} \qquad (6.3)$$

τότε

$$v(s) \leq (\textbf{resp.} \ \geq \textbf{resp.} \ =) \quad V(s; \gamma_1, \gamma_2). \qquad (6.4)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι σχετικά απλή και αποτελείται από επανάληψη της ανισότητας (6.3). Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα</u> Η χαρτογράφηση T συρρικνώνεται στον κανόνα του «μέγιστου»:

$$\|v(\cdot)\| = \max_{s \in S} |v(s)|$$

και εισάγει την συνάρτηση τιμών που παρουσιάστηκε σε προηγούμενο ορισμό ως το μοναδικό σταθερό σημείο του:

$$v^*(\cdot) = \mathbf{T}(v^*(\cdot)).$$

Επιπλέον οι βέλτιστες (σαγματικών σημείων) στρατηγικές ορίζονται ως οι μικτές στρατηγικές που αποδίδουν αυτή την τιμή, δηλαδή:

$$h(v^*(\cdot), s, \gamma_1^*(s), \gamma_2^*(s)) = \mathrm{val}[H(v^*(\cdot), s)], \quad s \in S. \qquad (6.5)$$

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύουμε την ιδιότητα της συστολής. Χρησιμοποιούμε το παραπάνω λήμμα και τις ιδιότητες των πιθανοτήτων μετάβασης για να αποδείξουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$\|\mathbf{T}(v(\cdot)) - \mathbf{T}(w(\cdot))\| \quad \leq \quad \max_{s \in S} \left\{ \max_{u_1 \in U_1;\, u_2 \in U_2} \left| r(s, u_1, u_2) + \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(u_1, u_2)\, v(s') \right. \right.$$

$$
\begin{aligned}
& -r(s,u_1,u_2) - \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(u_1,u_2)\, w(s') \Bigg| \Bigg\} \\
= \quad & \max_{s \in S;\, u_1 \in U_1;\, u_2 \in U_2} \left| \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(u_1,u_2)\, (v(s') - w(s')) \right| \\
\leq \quad & \max_{s \in S;\, u_1 \in U_1;\, u_2 \in U_2} \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(u_1,u_2)\, |v(s') - w(s')| \\
\leq \quad & \max_{s \in S;\, u_1 \in U_1;\, u_2 \in U_2} \beta \sum_{s' \in S} p_{s,s'}(u_1,u_2)\, \|v(\cdot) - w(\cdot)\| \\
= \quad & \beta \, \|v(\cdot) - w(\cdot)\| .
\end{aligned}
$$

Συνεπώς το T είναι μία συστολή, αφού $0 \leq \beta < 1$. Από το θεώρημα συστολής Banach, αυτό υπονοεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\upsilon^*(\cdot)$ στον τελεστή T.

Τώρα δείχνουμε ότι υπάρχουν σταθερές στρατηγικές Markov γ_1^*, γ_2^*, για τις οποίες η συνθήκη σαγματικών σημείων αληθεύει:

$$V(s;\gamma_1,\gamma_2^*) \leq V(s;\gamma_1^*,\gamma_2^*) \leq V(s;\gamma_1^*,\gamma_2). \qquad (6.6)$$

Ας πούμε ότι τα $\gamma_1^*(s)$, $\gamma_2^*(s)$ είναι οι στρατηγικές σαγματικών σημείων για το τοπικό παίγνιο πίνακα με αποδόσεις:

$$h(v^*(\cdot),s,u_1,u_2)_{u_1 \in U_1, u_2 \in U_2} = H(v(\cdot),s). \qquad (6.7)$$

Θεωρείστε κάθε στρατηγική γ_2 για τον παίκτη 2. Τότε, εξ' ορισμού:

$$h(v^*(\cdot),s,\gamma_1^*(s),\gamma_2(s))_{u_1 \in U_1, u_2 \in U_2} \geq v^*(s) \quad \forall s \in S. \qquad (6.8)$$

Από το λήμμα (β) η ανισότητα (6.8) υπονοεί ότι για όλα τα $s \in S$:

$$V(s;\gamma_1^*,\gamma_2) \geq v^*(s). \qquad (6.9)$$

Παρομοίως θα επιτυγχάναμε για κάθε στρατηγική γ_1 και για όλα τα $s \in S$:

$$V(s;\gamma_1,\gamma_2^*) \leq v^*(s), \qquad (6.10)$$

και

$$V(s;\gamma_1^*,\gamma_2^*) = v^*(s), \qquad (6.11)$$

Αυτό καθιστά την ιδιότητα σαγματικών σημείων.

Στην περίπτωση ενός παίκτη (MDP ή διαδικασία απόφασης Markov) η συστολή και η μονοτονία του τελεστή δυναμικού προγραμματισμού αποδίδουν άμεσα έναν συγκλίνοντα αριθμητικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των βέλτιστων στρατηγικών [Howard, 1960]. Στην περίπτωση δύο παικτών και μηδενικού αθροίσματος, ακόμα και αν το θεώρημα ύπαρξης μπορεί επίσης να μεταφραστεί σε έναν συγκλίνοντα αλγόριθμο, κάποιες δυσκολίες δημιουργούνται (δες παράδειγμα [Filar & Tolwinski, 1991] για έναν πρόσφατα προτεινόμενο συγκλίνοντα αλγόριθμο).

Κεφάλαιο 7

7. Παίγνια Markov με μη μηδενικό άθροισμα και σειριακά παίγνια

7.1 Σειριακό παίγνιο με διακριτή κατάσταση και σύνολα δράσης

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε την πιθανή επέκταση της διατύπωσης του παιγνίου Markov του Shapley σε μη μηδενικού αθροίσματος παίγνια. Θα θεωρήσουμε δύο βήματα σε αυτές τις επεκτάσεις: (i) θα χρησιμοποιήσουμε την διατύπωση των ίδιων πεπερασμένων καταστάσεων και πεπερασμένων δράσεων όπως στον Shapley και θα εισάγουμε διαφορετικές συναρτήσεις ανταμοιβών για τους διαφορετικούς παίκτες. (ii) θα εισάγουμε ένα πιο γενικό πλαίσιο όπου η κατάσταση και οι ενέργειες μπορούν να γίνουν συνεχείς μεταβλητές.

Θεωρούμε ένα στοχαστικό παίγνιο που παίζεται με μη συνεργατικό τρόπο από παίκτες που δεν είναι σε καθαρώς ανταγωνιστική κατάσταση. Η διατύπωση του Shapley επεκτείνεται χωρίς δυσκολία σε ένα χώρο μη μηδενικού αθροίσματος.

7.1.1 Δυναμικές παιγνίων Markov

Θεωρείστε $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, το σύνολο των πιθανών καταστάσεων, $U_j(s) = \{1, 2, \ldots, \lambda_j(s)\}$, $j = 1, \ldots, m$ τα σύνολα δράσεων στην κατάσταση s των m παικτών και τις πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{s,s'}(\mathbf{u}) = \mathrm{P}[x(t+1) = s' | x(t) = s,\ \mathbf{u}], \quad s, s' \in S, \quad \mathbf{u} \in U_1(s) \times \ldots \times U_m(s).$$

Ορίστε την απόδοση μετάβασης του παίκτη j όταν η διαδικασία είναι στην κατάσταση s και οι παίκτες παίρνουν το ζεύγος δράσεων u από:

$$r_j(s, \mathbf{u}), \quad s \in S, \quad \mathbf{u} \in U_1(s) \times \ldots \times U_m(s).$$

<u>**Παρατήρηση**</u> Παρατηρείστε ότι επιτρέπουμε στα σύνολα δράσεων των διαφορετικών παικτών να εξαρτώνται από την τρέχουσα κατάσταση s του παιγνίου. Η θεωρία του Shapley παραμένει έγκυρη και σε αυτήν την περίπτωση.

7.1.2 Markov στρατηγικές

Οι στρατηγικές Markov ορίζονται όπως στην περίπτωση μηδενικού αθροίσματος. Συμβολίζουμε $\mu_k^{\gamma_j(x(t))}$ την πιθανότητα που δίνεται στην δράση u_j^k από τον παίκτη j όταν χρησιμοποιεί την στρατηγική γ_j και η τρέχουσα κατάσταση είναι x.

7.1.3 Ανάδραση ισορροπίας Nash

Ορίζουμε τις στρατηγικές Markov όπως ανωτέρω, δηλαδή ως χαρτογραφήσεις από το S στις μικτές δράσεις των παικτών. Η απόδοση του παίκτη j ορίζεται έτσι, ως:

$$V_j(s_0;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \mathrm{E}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m}[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{k=1}^{\lambda_1}\cdots\sum_{\ell=1}^{\lambda_m}\mu_k^{\gamma_1(x(t))}\cdots\mu_\ell^{\gamma_m(x(t))}r_j(x(t),u_1^k,\ldots,u_m^\ell)|x(0)=s_0].$$

Ορισμός Μία m-πλειάδα Markov στρατηγικών (γ_1*, ..., γ_m*) είναι μία ανάδραση ισορροπίας Nash_εάν για όλα τα s ∈ S:

$$V_j(s;\gamma_1^*,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_m^*) \le V_j(s;\gamma_1^*,\ldots,\gamma_j^*,\ldots,\gamma_m^*)$$

για όλες τις στρατηγικές γ_j του παίκτη j, j ∈ M. Ο αριθμός:

$$v_j^*(s) = V_j(s;\gamma_1^*,\ldots,\gamma_j^*,\ldots,\gamma_m^*)$$

θα καλείται η τιμή ισορροπίας του παιγνίου στην κατάσταση s για τον παίκτη j.

7.1.4 Διατύπωση τελεστή των Sobel – Whitt

Ο πρώτος συγγραφέας που επέκτεινε την εργασία του Shapley σε ένα μη μηδενικού αθροίσματος πλαίσιο είναι ο Sobel. Μία πιο πρόσφατη αντιμετώπιση των μη μηδενικού αθροίσματος σειριακών παιγνίων μπορεί να βρεθεί στο [Whitt, 1980]. Παρουσιάζουμε τις τόσο γνωστές τοπικές συναρτήσεις ανταμοιβών:

$$h_j(s,v_j(\cdot),\mathbf{u}) \;=\; r_j(s,\mathbf{u}) + \beta\sum_{s'\in S}p_{ss'}(\mathbf{u})v_j(s'),\quad j\in M \qquad (7.1)$$

όπου οι συναρτήσεις $u_j(\cdot) : S \mapsto \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις δοσμένων ανταμοιβών (σε αυτή την περίπτωση είναι διανύσματα της διάστασης n = χαρτί(S)) που ορίζεται για κάθε παίκτη j. Η τοπική ανταμοιβή (6.1) είναι το άθροισμα της ανταμοιβής μετάβασης για τον παίκτη j και των προεξοφλούμενων αναμενόμενων ανταμοιβών από τη νέα κατάσταση που βρέθηκε μετά την μετάβαση. Για ένα δοσμένο s και ένα δοσμένο σύνολο των συναρτήσεων ανταμοιβών $u_j(\cdot)$, $j \in M$, οι τοπικές ανταμοιβές (6.1) ορίζουν ένα παίγνιο πίνακα πάνω στα σύνολα καθαρών στρατηγικών $U_j(s)$, $j \in M$.

Τώρα ορίζουμε, για κάθε δοσμένο διάνυσμα Markov τακτικής $\gamma = \{\gamma_j\}_{j \in M}$, έναν τελεστή H_γ, που ενεργεί στον χώρο των συναρτήσεων ανταμοιβών, (δηλαδή σε διανύσματα n-διαστάσεων) και ορίζεται ως:

$$(H_\gamma \mathbf{v}(\cdot))(s) \;=\; \{\mathrm{E}_{\gamma(s)}[h_j(s, v_j(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}]\}_{j \in M}. \qquad (7.2)$$

Επίσης εισάγουμε τον τελεστή F_γ που ορίζεται ως:

$$(F_\gamma \mathbf{v}(\cdot))(s) \;=\; \{\sup_{\gamma_i} \mathrm{E}_{\gamma^{(j)}(s)}[h_j(s, v_j(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}]\}_{j \in M}, \qquad (7.3)$$

όπου $\tilde{\mathbf{u}}$ είναι το τυχαίο διάνυσμα δράσης και $\gamma^{(j)}$ είναι η τακτική Markov που έχει επιτευχθεί όταν μόνο ο παίκτης j προσαρμόζει την τακτική του, ενώ οι άλλοι παίκτες διατηρούν τις γ-τακτικές τους σταθερές. Με άλλα λόγια η εξίσωση 6.3 ορίζει την βέλτιστη απάντηση κάθε παίκτη j στις Markov στρατηγικές που επιλέχθηκαν από τους άλλους παίκτες.

7.1.5 Ύπαρξη ισορροπιών Nash

Η διατύπωση δυναμικού προγραμματισμού που παρουσιάστηκε ανωτέρω, οδηγεί στα επόμενα ισχυρά αποτελέσματα (δες [Whitt, 1980] για μία πρόσφατη απόδειξη):

<u>**Θεώρημα**</u> Θεωρείστε το σειριακό παίγνιο που ορίστηκε παραπάνω, τότε

1. Το διάνυσμα της αναμενόμενης απόδοσης που συσχετίζεται με μία σταθερή τακτική Markov δίνεται από το μοναδικό σταθερό σημείο $v_\gamma(\cdot)$ του τελεστή συστολής H_γ.
2. Ο τελεστής F_γ είναι επίσης συστολής και έτσι εισάγει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $f^\gamma(\cdot)$.
3. Η σταθερή τακτική Markov γ^* είναι μία στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$\mathbf{f}^{\gamma^*}(s) \;=\; \mathbf{v}_{\gamma^*}(s), \quad \forall s \in S. \qquad (7.4)$$

4. Υπάρχει μία ισορροπία που ορίζεται από μία σταθερή τακτική Markov.

<u>**Παρατήρηση**</u> Στην μη μηδενικού αθροίσματος περίπτωση το θεώρημα ύπαρξης δεν βασίζεται σε μία ιδιότητα συστολής του τελεστή ισορροπίας δυναμικού προγραμματισμού. Ως συνέπεια, το αποτέλεσμα

ύπαρξης δεν μεταφράζεται εύκολα σε έναν συγκλίνοντα αλγόριθμο για την αριθμητική λύση αυτών των παιγνίων.

7.2 Σειριακά παίγνια σε χώρους Borel

Η θεωρία των μη συνεργατικών παιγνίων Markov έχει επεκταθεί από πολλούς συγγραφείς στην περίπτωση όπου η κατάσταση και οι ενέργειες είναι σε συνεχή σύνολα. Αφού αντιμετωπίζουμε στοχαστικές διαδικασίες, το σύστημα της θεωρίας μέτρησης τώρα είναι ουσιώδες.

7.2.1 Περιγραφή του παιγνίου

Ένα σειριακό παίγνιο m-παικτών ορίζεται από τα ακόλουθα αντικείμενα:

$$(S, \Sigma), U_j, \Gamma_j(\cdot), r_j(\cdot, \cdot), Q(\cdot, \cdot).\beta,$$

όπου:

1 (S, Σ) είναι ένας μετρήσιμος χώρος καταστάσεων με μία μετρήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα των Σ υποσυνόλων του S.

2 Το U_j είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος των δράσεων του παίκτη j.

3 Το Γ_j είναι ένας κατώτερος μετρήσιμος χάρτης από το S στα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του U_j.

4 Το $r_j(\cdot,\cdot) : S \times U \mapsto \mathbb{R}$ είναι μία οριακή μετρήσιμη συνάρτηση ανταμοιβών μεταβάσεων για τον παίκτη j. Αυτές οι συναρτήσεις υποτίθεται ότι είναι συνεχείς στο U, για κάθε $s \in S$.

5 Το $Q(\cdot,\cdot)$ είναι μία μετρήσιμη πιθανότητα μεταβάσεων γινομένου από το S x U στο S. Υποτίθεται ότι το $Q(\cdot,\cdot)$ ικανοποιεί μερικές συνθήκες κανονικότητας που είναι πολύ τεχνικές για να αναφερθούν εδώ. [Nowak, 1999].

Μία σταθερή στρατηγική Markov για τον παίκτη j είναι ένας μετρήσιμος χάρτης $\gamma_j(\cdot)$ από το S στο σύνολο $P(U_j)$ της μέτρησης πιθανοτήτων στο U_j τέτοιος ώστε $\gamma_j(s) \in P(\Gamma_j(s))$ για κάθε $s \in S$.

7.2.2 Διατύπωση δυναμικού προγραμματισμού

Ο ορισμός των τοπικών συναρτήσεων ανταμοιβών που δόθηκε στο 6.1 στην περίπτωση ξεχωριστής κατάστασης πρέπει να προσαρμοστεί στην μορφή συνεχούς κατάστασης, γίνεται:

$$h_j(s, v_j(\cdot), \mathbf{u}) = r_j(s, \mathbf{u}) + \beta \int_S v_j(t) Q(dt|s, \mathbf{u}), \quad j \in M \tag{7.5}$$

Οι τελεστές H_γ και F_γ ορίζονται όπως ανωτέρω. Η ύπαρξη ισορροπιών είναι δύσκολο να εγκαθιδρυθεί για αυτή τη γενική κατηγορία των σειριακών παιγνίων. Στο [Whitt, 1980], η ύπαρξη των ε-ισορροπιών αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας μία προσεγγιστική θεωρία στον δυναμικό προγραμματισμό. Η ύπαρξη ισορροπιών έχει επιτευχθεί μόνο για ειδικές περιπτώσεις.

7.3 Εφαρμογή σε ένα στοχαστικό μοντέλο δυοπωλίου

7.3.1 Ένα στοχαστικό επαναλαμβανόμενο δυοπώλιο

Θεωρείστε ένα τυχαίο μοντέλο δυοπωλίου που ορίζεται από την ακόλουθη γραμμική εξίσωση απαιτήσεων:

$$x(t+1) = \alpha - \rho[u_1(t) + u_2(t)] + \varepsilon(t)$$

που προσδιορίζει την τιμή x(t+1) ενός αγαθού την περίοδο t + 1 δοσμένης της πλήρους προμήθειας $u_1(t)$ + $u_2(t)$ που αποφασίστηκε στο τέλος της περιόδου t από τους παίκτες 1 και 2. Θεωρείστε ένα μοναδιαίο κόστος παραγωγής ίσο με το γ. Οι αποδόσεις, στο τέλος της περιόδου t από τους δύο παίκτες (εταιρίες) προσδιορίζονται μετά ως:

$$\pi_j(t) = (x(t+1) - \delta)u_j(t).$$

Υποθέστε ότι οι δύο εταιρίες έχουν τον ίδιο ρυθμό προεξόφλησης β, τότε πάνω σε έναν απείρου χρόνου ορίζοντα, η απόδοση στον παίκτη j θα δίνεται από:

$$V_j = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi_j(t).$$

Αυτό το παίγνιο επαναλαμβάνεται, συνεπώς μία προφανής λύση ισορροπίας συνιστά να παιχτεί επαναλαμβανόμενα η (στατική) λύση Cournot:

$$u_j^c(t) = \frac{\alpha - \delta}{3\rho}, \quad j = 1, 2 \tag{7.6}$$

η οποία παράγει τις αποδόσεις:

$$V_j^c = \frac{(\alpha-\delta)^2}{9\rho(1-\beta)} \quad j = 1, 2. \tag{7.7}$$

Μία συμμετρική Pareto (μη κυριαρχούμενη) λύση δίνεται από τις επαναλαμβανόμενες ενέργειες:

$$u_j^P(t) = \frac{\alpha-\delta}{4\rho}, \quad j = 1, 2$$

και τις συσχετισμένες αποδόσεις:

$$V_j^P = \frac{(\alpha-\delta)}{8\rho(1-\beta)} \quad j = 1, 2.$$

Όπου δ = α – γ.

Το αποτέλεσμα Pareto κυριαρχεί στην ισορροπία Cournot αλλά δεν αναπαριστά μία ισορροπία. Η ερώτηση είναι η ακόλουθη:

Είναι πιθανόν να κατασκευάσουμε ένα ζεύγος στρατηγικών μνήμης που θα καθόριζε μία ισορροπία με ένα αποτέλεσμα που θα κυριαρχούσε στο επαναλαμβανόμενο αποτέλεσμα στρατηγικής Cournot και το οποίο θα ήταν τόσο κοντά όσο είναι πιθανό στην μη κυριαρχούμενη λύση Pareto;

7.3.2 Μία τάξη στρατηγικών πυροδότησης που βασίζεται σε μία συσκευή παρακολούθησης

Οι τυχαίες διαταράξεις που επιδρούν στον μηχανισμό τιμών δεν επιτρέπουν μία απευθείας επέκταση της προσέγγισης που περιγράφηκε σε ένα ντετερμινιστικό ευρύτερο πλαίσιο. Αφού υποτίθεται ότι οι δράσεις των παικτών δεν είναι άμεσα παρατηρούμενες, υπάρχει μία ανάγκη να συνεχίσουν σε κάποιο φιλτράρισμα της σειράς των παρατηρούμενων καταστάσεων ώστε να παρακολουθούν τις πιθανές ρήξεις της συμφωνίας.

Στο [Green & Porter, 1985] μία κυρίαρχη ισορροπία στρατηγικών μνήμης κατασκευάζεται, βασισμένη σε ένα σχήμα μνήμης ενός βήματος. Προτείνουμε παρακάτω ένα άλλο σχήμα, χρησιμοποιώντας μία μνήμη πολλών βημάτων, που παραδίδει ένα αποτέλεσμα που βρίσκεται πιο κοντά στη λύση Pareto.

Η βασική ιδέα συνιστά στο να επεκτείνουμε τον χώρο καταστάσεων εισάγοντας μία νέα μεταβλητή κατάστασης, συμβολισμένη με υ η οποία χρησιμοποιείται για να παρακολουθούμε μία συνεργατική τακτική που όλοι οι παίκτες έχουν συμφωνήσει να παίξουν και η οποία ορίζεται ως φ: υ $\mapsto$ u_j = φ(υ). Η εξίσωση καταστάσεων που διέπει την ανάπτυξη αυτής της μεταβλητής καταστάσεων σχεδιάζεται ως ακολούθως:

$$v(t+1) = \max\{-K, v(t) + x^e(t+1) - x(t+1)\}, \tag{7.8}$$

όπου x^e είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα εάν οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν την συνεργατική τακτική, δηλαδή:

$$x^e(t+1) = \alpha - 2\rho\phi(v(t)).$$

Θα έπρεπε να είναι σαφές ότι η νέα μεταβλητή κατάστασης υ παρέχει ένα συσσωρευτικό μέτρο των θετικών διαφορών μεταξύ των αναμενόμενων τιμών x^e και των συνειδητοποιημένων x(t). Η παράμετρος –K ορίζει ένα χαμηλότερο όριο για το υ. Αυτό παρουσιάζεται για να αποτρέψει την επανόρθωση των θετικών διαφορών από τις αρνητικές. Μία θετική διαφορά θα μπορούσε να ήταν μία ένδειξη παραπάνω προμήθειας, δηλαδή μία ένδειξη ότι τουλάχιστον ένας παίκτης δεν σέβεται την συμφωνία και πιθανόν προσπαθεί να εκμεταλλευτεί τον άλλον παίκτη.

Εάν αυτές οι διαφορές συσσωρευτούν πολύ γρήγορα, η απόδειξη της απάτης ανέρχεται και έτσι έπρεπε να αναμένεται κάποια αντεπίθεση. Για να μοντελοποιήσουμε την διαδικασία αντεπίθεσης εισάγουμε μία άλλη μεταβλητή κατάστασης, που συμβολίζεται y, η οποία είναι μία δυαδική μεταβλητή δηλαδή y ∈ {0, 1}. Αυτή η νέα μεταβλητή κατάστασης θα είναι ένας δείκτης της κυρίαρχης διάθεσης παιξίματος. Εάν το y = 1 τότε το παίγνιο παίζεται συνεργατικά, εάν το y = 0, τότε το παίγνιο παίζεται με έναν μη συνεργατικό τρόπο, που ερμηνεύεται ως μία ποινική ή αντίποινη διάθεση παιξίματος.

Αυτή η μεταβλητή κατάστασης θεωρείται ότι αναπτύσσεται σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση καταστάσεων:

$$y(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } y(t) = 1 \quad \text{και} \quad v(t+1) < \theta(v(t)) \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{7.9}$$

Όπου η θετικής τιμής συνάρτηση θ : υ $\mapsto$ θ(υ) είναι μία σχεδιαστική παράμετρος αυτού του σχήματος παρακολούθησης.

Σύμφωνα με αυτήν την εξίσωση καταστάσεων, η συνεργατική διάθεση παιξίματος θα διατηρείται υπό τον όρο ότι οι συσσωρευτικές θετικές διαφορές δεν αυξάνονται τόσο γρήγορα από τη μία περίοδο στην άλλη. Επίσης, αυτή η εξίσωση καταστάσεων μας λέει ότι, όταν y(t) = 0, τότε y(t΄) ≡ 0 για όλες τις περιόδους t΄ > t, δηλαδή μία ποινική διάθεση παιξίματος διαρκεί για πάντα. Στα μοντέλα που συζητούνται αργότερα θα χαλαρώσουμε αυτή την υπόθεση της ποινής που διαρκεί για πάντα.

Όταν η διάθεση παιξίματος είναι μη συνεργατική, δηλαδή όταν y = 0 και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν ως ποινή (ή αντεπίθεση) την στατική λύση Cournot για πάντα. Αυτό παράγει τις αναμενόμενες αποδόσεις $V_j^c, j = 1, 2$ που ορίστηκαν στην εξίσωση (6.7). Αφού οι δύο παίκτες είναι ταυτόσημοι δεν θα χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη j πια.

Όταν η διάθεση παιξίματος είναι συνεργατική, δηλαδή όταν y = 1 και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν μία συμφωνική τακτική που προσδιορίζει τους αντίστοιχους ελέγχους τους ως μία συνάρτηση της μεταβλητής καταστάσεων υ. Αυτή η τακτική συμφωνίας ορίζεται από την συνάρτηση φ(υ). Η αναμενόμενη απόδοση είναι τότε μία συνάρτηση W(υ) αυτής της μεταβλητής καταστάσεων υ.

Για να είναι σταθερή αυτή η συμφωνία, δηλαδή να μην παρέχει έναν πειρασμό για απάτη σε κανέναν παίκτη, κάποιος επιβάλλει αυτή να είναι μία ισορροπία. Σημειώστε ότι το παίγνιο είναι τώρα ένα σειριακό παίγνιο Markov με έναν συνεχή χώρο καταστάσεων. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού που χαρακτηρίζει μία ισορροπία δίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} W(v) &= \max_u\{[\alpha-\delta-\rho(\phi(v)+u)]u \\ &\quad +\beta \mathrm{P}[v' \geq \theta(v)]V^c \\ &\quad +\beta \mathrm{P}[v' < \theta(v)]\mathrm{E}[W(v')|v' < \theta(v)]\}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

όπου έχουμε συμβολίσει:

$$v' = \max\{-K, v + \rho(u - \phi(v)) - \varepsilon\}$$

την τυχαία τιμή της μεταβλητής καταστάσεων υ αφού η μετάβαση παρήχθη από τους ελέγχους (u, φ(υ)).

Στην εξίσωση (7.10) αναγνωρίζουμε την άμεση ανταμοιβή [α – δ – ρ(φ(υ) + u]u του παίκτη 1 όταν παίζει u ενώ ο αντίπαλος εμμένει στο φ(υ). Αυτή προστίθεται στις υπό όρους αναμενόμενες αποδόσεις μετά τη μετάβαση είτε στην ποινική διάθεση παιξίματος, που αντιστοιχεί στις τιμές y = 0 είτε στην συνεργατική διάθεση παιξίματος που αντιστοιχεί στα y = 1.

Μία λύση αυτών των DP εξισώσεων μπορεί να βρεθεί λύνοντας ένα συσχετισμένο πρόβλημα σταθερού σημείου, όπως δείχτηκε στο [Haurie & Tolwinski, 1990]. Για να συνοψίσουμε την προσέγγιση εισάγουμε τον τελεστή:

$$\begin{aligned} (T_\phi W)(v,u) &= [\alpha-\delta-\rho(u+\phi(v))]\,u + \beta(\alpha-\delta)^2\frac{F(s-\theta(v))}{9\rho(1-\beta)} \\ &\quad +\beta W(-K)[1-F(s-K)] \\ &\quad +\beta\int_{-K}^{\theta(v)} W(\tau)f(s-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{7.11}$$

όπου τα F(·) και f(·) είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αντίστοιχα της τυχαίας διατάραξης ε. Επίσης έχουμε χρησιμοποιήσει την ακόλουθη σημείωση:

$$s = v + \rho(u - \phi(v)).$$

Μία λύση ισορροπίας είναι ένα ζεύγος συναρτήσεων (ω(·), φ(·)) τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} W(v) &= \max_u T_\phi(W)(v,u) \\ W(v) &= (T_\phi W)(v,\phi(v)). \end{aligned}$$

(7.12) και (7.13)

Στο [Haurie & Tolwinski, 1990] δείχνεται πώς μία προσαρμογή του βελτιωτικού αλγόριθμου της τακτικής Howard επιτρέπει τον υπολογισμό της λύσης αυτού του είδους των προβλημάτων σταθερού σημείου. Η περίπτωση που αντιμετωπίστηκε στο [Haurie & Tolwinski, 1990] αντιστοιχεί στην χρήση μίας τετραγωνικής συνάρτησης θ(·) και ενός νόμου Γκαουσιανής κατανομής για το ε. Τα αριθμητικά πειράματα που αναφέρθηκαν στο [Haurie & Tolwinski, 1990] δείχνουν ότι κάποιος μπορεί να ορίσει, χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση, μία ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου η οποία κυριαρχεί στην επαναλαμβανόμενη λύση Cournot.

Στο [Porter, 1983], αυτό το πρόβλημα έχει μελετηθεί στην περίπτωση όπου ο (αντίστροφος) νόμος απαιτήσεων είναι αντικείμενο σε έναν πολλαπλασιαστικό θόρυβο. Τότε κάποιος αποκτά μία απόδειξη ύπαρξης για μία κυρίαρχη ισορροπία που βασίζεται σε ένα απλό σχήμα μνήμης ενός βήματος όπου η μεταβλητή υ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$v(t+1) = \frac{x^e - x(t+1)}{x(t)}.$$

Αυτή είναι η περίπτωση όπου κάποιος δεν ελέγχει την συνεργατική τακτική μέσω της χρήσης μίας συσσωρευμένης συνάρτησης διαφοράς αλλά κατά προτίμηση στην βάση επαναλαμβανόμενων πανομοιότυπων τεστ. Επίσης στην προσέγγιση του Porter η περίοδος ποινής είναι πεπερασμένη.

Στο [Haurie & Tolwinski, 1990] δείχνεται ότι η προσέγγιση θα μπορούσε να επεκταθεί σε ένα πλήρως πτερωμένο παίγνιο Markov, δηλαδή ένα σειριακό παίγνιο αντί ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Ένα απλό παίγνιο της διοίκησης αλιείας χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία για να απεικονίσει αυτόν τον τύπο της συνεργατικής ισορροπίας σειριακού παιγνίου.

7.3.3 Ερμηνεία ως συσκευή επικοινωνίας

Στην προσέγγισή μας, επεκτείνοντας την περιγραφή του χώρου καταστάσεων (δηλαδή παρουσιάζοντας τις νέες μεταβλητές υ και y), διατηρήσαμε μία διατύπωση παιγνίου Markov για ένα εκτεταμένο παίγνιο και αυτό μας έχει επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό για τον χαρακτηρισμό των ισορροπιών τέλειων υποπαιγνίων. Αυτό θυμίζει φυσικά την ιδέα της συσκευής επικοινωνίας που εξετάστηκε στο [Forges 1986] για επαναλαμβανόμενα παίγνια. Μία εύκολη επέκταση της προσέγγισης που περιγράφηκε ανωτέρω θα οδηγούσε σε τυχαίες μεταβάσεις μεταξύ των δύο διαθέσεων παιξίματος, με πιθανότητες μεταβάσεων που εξαρτώνται από την στατιστική παρακολούθησης υ. Επίσης μία ποινή τυχαίας διάρκειας είναι πιθανή σε αυτό το μοντέλο. Στην επόμενη ενότητα απεικονίζουμε αυτές τις δυνατότητες όταν προτείνουμε ένα μοντέλο διαφορικού παιγνίου με τυχαίες διαθέσεις παιξίματος.

Το σχήμα παρακολούθησης είναι μία συσκευή επικοινωνίας η οποία λαμβάνει ως είσοδο την παρατήρηση της κατάστασης του συστήματος και στέλνει ως έξοδο ένα δημόσιο σήμα το οποίο προτείνει να παίζουν σύμφωνα με δύο διαφορετικές διαθέσεις παιξίματος.

Κεφάλαιο 8

8. O Ariel Rubinstein και η διαδικασία διαπραγμάτευσης

8.1 Η λύση Rubinstein στο διαπραγματευτικό πρόβλημα

O Ariel Rubinstein προσπάθησε εκείνο που ο Nash είχε επιτήδεια αποφύγει: Να αναλύσει την διαδικασία της διαπραγμάτευσης στάδιο-προς-στάδιο, προσφορά-προς- προσφορά, απειλή-προς-απειλή. O Ariel Rubinstein 3, «έλυσε» μια δυναμική μορφή του διαπραγματευτικού παιγνίου αποδεικνύοντας ότι διαθέτει μοναδική ΥΤΙΝ (Υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία). Η απόδειξή του καταδεικνύει μία μοναδική συμφωνία (στο πλαίσιο της μοναδικής ΥΤΙΝ) που θα θέλει να προτείνει ο διαπραγματευτής ο οποίος ανοίγει τον πρώτο γύρο των διαπραγματεύσεων. Μάλιστα, η προτεινόμενη συμφωνία είναι τέτοια που η άλλη πλευρά θα την αποδειχθεί αμέσως, εφόσον η καθυστέρηση επίτευξης συμφωνίας κοστίζει στους διαπραγματευτές (όσο μικρό κι αν είναι το κόστος αυτό).

Μερικά χρόνια αργότερα, οι Binmore, Rubinstein and Wolinsky (1986) αποδεικνύουν ότι η λύση του Rubinstein είναι αναλυτικά ισοδύναμη με τη λύση του Nash. Άλλη μια φορά η ανάλυση του διαπραγματευτικού προβλήματος μας οδηγεί, μέσα από εντελώς διαφορετικά μονοπάτια, στην λύση που ο Nash δημοσίευσε το 1950. Είτε προσεγγίζουμε το πρόβλημα αξιωματικά, είτε βρίσκουμε την λύση του ως ισορροπία φόβου, είτε (όπως θα δούμε παρακάτω) επιστρατεύουμε τα εργαλεία του Σχεδίου Εκλέπτυνσης της ισορροπίας Nash, πάλι στην λύση του Nash καταλήγουμε! Είναι εντυπωσιακό, ανεξάρτητα του αν μας πείθει ή όχι η λύση αυτή.

Θα ξεκινήσω την παρουσίαση του υποδείγματος του Rubinstein επιστρέφοντας στο Παράδειγμα της Μαρίας και του Γιώργου που αναφέραμε και προηγουμένως. Η Μαρία πρέπει να προτείνει στο Γιώργο μια μοιρασιά των 100 ευρώ. Αν ο Γιώργος απορρίψει την πρότασή της, τα 100 ευρώ μειώνονται στο ασήμαντο ποσό του 1 μόλις ευρώ. Και τώρα είναι η σειρά του Γιώργου να προτείνει στη Μαρία κάποιο μερίδιο από το 1 ευρώ που απέμεινε. Αν η Μαρία απορρίψει την πρότασή του, τότε δεν παίρνει κανείς τους τίποτα. Η λογική της προς τα πίσω επαγωγής, σε συνδυασμό με ΚΓΟ (Κοινή Γνώση Ορθολογισμού) 1ης τάξης, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Μαρία θα υποβάλει στο Γιώργο μια προσφορά που δεν μπορεί εκείνος να απορρίψει (χωρίς να ζημιωθεί περισσότερο): «Θα πάρεις 1 δολάριο και θα κρατήσω τα 99!».

Ας δούμε τώρα μια συνθετότερη περίπτωση. Και πάλι η Μαρία και ο Γιώργος έχουν την ευκαιρία να μοιραστούν 100 ευρώ, με τη Μαρία να κάνει την πρώτη «κίνηση». Ο Γιώργος ή θα αποδεχθεί την πρόταση της Μαρίας ή θα αντιπροτείνει μια άλλη συμφωνία. Ωστόσο, για να γίνει πιο ρεαλιστική η πίεση του χρόνου στους διαπραγματευτές, ας υποθέσουμε ότι, αν ο Γιώργος απορρίψει την αρχική προσφορά της Μαρίας, αυτόματα τίθεται σε λειτουργία ένα χρονόμετρο, και με κάθε δευτερόλεπτο που φεύγει χωρίς να έχει επιτευχθεί συμφωνία, το ποσό των 100 ευρώ μειώνεται κατά ένα λεπτό. Δηλαδή, αν χρειαστούν M λεπτά για να φθάσουν σε συμφωνία, το ποσό των 100 ευρώ θα έχει μειωθεί σε (100-0,6M)€.

Πώς θα έπρεπε να παίξει κανείς το παίγνιο αυτό; Η Μαρία θα πρέπει τώρα να εξισορροπήσει (α) την πίεση του χρόνου να προτείνει στον Γιώργο μια συμφωνία την οποία δεν θα μπορεί εκείνος να απορρίψει, και (β) την δική της φιλοδοξία για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μερίδιο για τον εαυτό της. Υπενθυμίζω ότι σε όλα τα διαπραγματευτικά παίγνια, κάθε αποτελεσματική συμφωνία είναι εκλογικεύσιμη (επιπλέον, είναι και ισορροπία Nash). Αν, παραδείγματος χάρη, η Μαρία προβλέπει ότι ο Γιώργος θα απαιτήσει μερίδιο x του ποσού, η δική της βέλτιστη απαίτηση είναι το $1-x$ του ποσού. Παράλληλα, αν ο Γιώργος αναμένει ότι η Μαρία περιμένει από εκείνον να απαιτήσει μερίδιο x του ποσού, τότε η βέλτιστη απαίτησή του είναι όντως το μερίδιο x (μιας και προσδοκά ότι, για λόγους που έδωσε η προηγούμενη πρόταση, η Μαρία θα απαιτήσει ελάχιστο μερίδιο $1-x$ για τον εαυτό της). Αυτό μάλιστα ισχύει για κάθε μερίδιο x (όπου $0<x<1$). Προφανώς, κάθε συμφωνία x είναι εκλογικεύσιμη. Τότε, πως θα βρούμε το x στο οποίο θα καταλήξουν; Η λύτρωσή έρχεται από την λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την εξής στρατηγική του Γιώργου: «Θα αρνούμαι κάθε προσφορά της Μαρίας που μου δίνει λιγότερο από το 80%». Είναι εκλογικεύσιμη αυτή η στρατηγική; Είναι εφόσον ο Γιώργος έχει λόγο να πιστέψει πως η Μαρία πείθεται πως εκείνος δεν θα δεχθεί οτιδήποτε λιγότερο από 80%. Δεν έχει όμως τέτοιο λόγο! Ας δούμε γιατί. Έστω ότι η Μαρία προσφέρει στο Γιώργο 79,9% του ποσού ($x = 0{,}799$). Αν ο Γιώργος είναι αποφασισμένος να επιμείνει στη στρατηγική του «να ζητά πάντοτε το 80% ($x = 0{,}799$)», θα πρέπει να απορρίψει την πρόταση. Ωστόσο, η απόρριψη θα του κοστίσει, αφού η καθυστέρηση επίτευξης συμφωνίας συρρικνώνει το ποσόν. Ακόμη κι αν η ανένδοτη στρατηγική του απέδιδε καρπούς, δηλαδή ακόμη και αν η Μαρία υποχωρούσε και ανέβαζε τη προσφορά της από το 79,9% στο 80%, θα πέρναγαν έστω M λεπτά μέχρι να επιτευχθεί η τελική συμφωνία (μετά την απόρριψη από τον Γιώργο της αρχικής πρότασή της να πάρει 79,9%). Ναι μεν ο Γιώργος θα πάρει το μερίδιο που ζητούσε, αλλά τώρα θα είναι το 80% ενός μικρότερου χρηματικού ποσού.

Το πόσο μικρότερο θα είναι το ποσό αυτό εξαρτάται, φυσικά, από το M, δηλ. από το χρονικό διάστημα που απαιτείται μέχρι η Μαρία να ακούσει την απαίτηση του Γιώργου, να την επεξεργαστεί και να την αποδεχθεί. Αν το χρονικό διάστημα αυτό είναι μεγαλύτερο των $M = 12{,}5$ δευτερολέπτων, ο Γιώργος θα πάρει λιγότερα από ό,τι θα έπαιρνε αν είχε αποδεχθεί την αρχική προσφορά της Μαρίας (το 79,9%). Αν, λοιπόν, είναι κοινά γνωστό ότι μεσολαβούν πάνω από δέκα δευτερόλεπτα για να απαντήσει ο ένας διαπραγματευτής σε απαίτηση του άλλου, τότε ο Γιώργος δεν έχει κίνητρο να επιμείνει στη στρατηγική του «να ζητά πάντοτε το 80%». Έτσι, αν στη διάρκεια των διαπραγματεύσεων ο Γιώργος απειλεί να απορρίψει οποιαδήποτε προσφορά μικρότερη από το 80% του κέρδους, η Μαρία θα πρέπει να αμφιβάλει για την ειλικρίνειά του και, αν χρειάζεται περισσότερα από 10 δευτερόλεπτα για να γίνει αποδεκτή μια αντιπροσφορά, θα πρέπει να αμφιβάλει πολύ.

Βασιζόμενοι στην πιο πάνω σκέψη, και με τη βοήθεια της λογικής της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash, μπορούμε να απορρίψουμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό πιθανών διαπραγματευτικών στρατηγικών ως μη συμβατές με τις υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες Nash (ΥΤΙΝ). Το θεωρητικό επίτευγμα του Rubinstein (1982) ήταν πως απέδειξε, ως θεώρημα, ότι υπάρχει μόνο μία ΥΤΙΝ η οποία δεν προϋποθέτει τη χρησιμοποίηση αναξιόπιστων απειλών (όπως εκείνη του Γιώργου στη προηγούμενη παράγραφο). Η λαμπρότητα αυτής της σκέψης δεν υστερεί πολύ από εκείνη της λύσης του Nash στο διαπραγματευτικό πρόβλημα. Μάλιστα, όπως έδειξαν οι Binmore, Rubinstein και Wolinsky (1986), όταν ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στις προσφορές και τις απαιτήσεις των διαπραγματευτών (το M δηλαδή) τείνει στο μηδέν, η λύσεις Rubisntein και Nash αποδεικνύονται πανομοιότυπες.

8.2 Μια απόδειξη του θεωρήματος του Rubinstein

Η συγκεκριμένη διαδικασία διαπραγμάτευσης την οποία εξέτασε ο Rubinstein είναι παρόμοια με εκείνη που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο Γιώργος και η Μαρίας πρέπει να μοιραστούν ένα ποσόν, και η Μαρία είναι εκείνη που ξεκινά τη διαδικασία προτείνοντας μια συμφωνία στο Γιώργο. Ο Γιώργος ή αποδέχεται την πρόταση της Μαρίας ή την απορρίπτει. Αν την απορρίψει, τότε θα πρέπει αυτός να κάνει μια αντι-προσφορά στη Μαρία. Αν, με τη σειρά της, η Μαρία απορρίψει την πρόταση του Γιώργου, πρέπει να υποβάλει αυτή νέα προσφορά, κ.ο.κ. Κάθε φορά, όμως, που μια προσφορά απορρίπτεται, το ποσόν που θα πάρει ο κάθε παίκτης συρρικνώνεται κατά ένα ορισμένο ποσοστό, που ονομάζεται ποσοστό συρρίκνωσης της αξίας (ΠΣΑ) (discount rate).

Αναλυτικά, είναι πολύ απλό να ισχύει διαφορετικό ΠΣΑ για κάθε διαπραγματευτή, πράγμα που επιτρέπει να εισαγάγουμε διαφορές μεταξύ των διαπραγματευτών, διαφορές ισοδύναμες με τους ρυθμούς μεταβολής των συναρτήσεων ωφέλειάς τους (ή της αποστροφής για τον κίνδυνο) που εξετάσαμε πιο πάνω, στο πλαίσιο της λύσης Nash. Το θεώρημα του Rubinstein επιβεβαιώνει ότι οι ορθολογικοί διαπραγματευτές θα συμπεριφέρονται ως εξής: Ο Γιώργος θα προτείνει στην Μαρία μια συμφωνία την οποία εκείνη δεν θα θέλει να απορρίψει (η, ακριβέστερα, δεν θα θέλει να απορρίψει ανεξάρτητα από πόσο της αρέσει ή όχι η συμφωνία αυτή).

Έτσι, δεν θα υπάρξει καθυστέρηση στην επίτευξη συμφωνίας, και οι παίκτες θα μοιραστούν την «πίτα» πριν το πέρασμα του χρόνου μειώσει την αξία της. Επιπλέον, η συμφωνία που προτείνει ο Rubinstein αντανακλά:

(α) το πλεονέκτημα της πρώτης κίνησης της Μαρίας, και
(β) τη σχετική ανυπομονησία της Μαρίας να επιτευχθεί συμφωνία (δηλαδή τα σχετικά ΠΣΑ των διαπραγματευτών).

Το χαρακτηριστικό (α) σημαίνει ότι, στην περίπτωση που οι παίκτες έχουν ίδια ΠΣΑ, η Μαρία θα κρατήσει για τον εαυτό της μεγαλύτερο μερίδιο από το Γιώργο, επειδή έχει ένα πλεονέκτημα το οποίο πηγάζει από το γεγονός ότι είναι εκείνη πρώτη προτείνει τη διανομή του κέρδους (ένα πλεονέκτημα όπως αυτό του σκακιστή που παίζει με τα λευκά). Αυτό όμως το πλεονέκτημα (στο όριο) εξαφανίζεται όταν οι προσφορές εναλλάσσονται η μία την άλλη πολύ γρήγορα. Το χαρακτηριστικό (β) επαληθεύει πως η ανυπομονησία, κοστίζει, καθώς ο σχετικά ανυπόμονος διαπραγματευτής (δηλαδή ο παίκτης με το μεγαλύτερο ΠΣΑ) αμείβεται με το μικρότερο μερίδιο. Η λογική του (β) είναι πειστική: Αν ο Γιώργος επείγεται περισσότερο από τη Μαρία να επιτευχθεί συμφωνία, τότε θα πρέπει να αποτιμά ένα μικρό κέρδος τώρα (σε σύγκριση με ένα μεγαλύτερο κέρδος αργότερα) περισσότερο από ότι η Μαρία. Άρα, θα είναι περισσότερο υποχωρητικός και θα αποδεχθεί ένα μερίδιο αντίστοιχα μικρότερο εκείνης.

Ας θυμηθούμε ότι η λύση Nash τιμωρεί την αποστροφή για τον κίνδυνο. Στο βαθμό που η αποστροφή για τον κίνδυνο και η ανυπομονησία να επιτευχθεί συμφωνία είναι παρόμοιες έννοιες, η λύση του Nash και η λύση του Rubinstein είναι συγγενείς. Μάλιστα, όπως απέδειξαν αναλυτικά οι Binmore, Rubisntein και Wolinsky (1986), δεν είναι απλά συγγενείς: είναι, αναλυτικά, πανομοιότυπες. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι όταν οι διαπραγματευτές έχουν την δυνατότητα να υποβάλλουν η μία στον άλλον προσφορές και αντιπροσφορές εν ριπή οφθαλμού (ή με την ταχύτητα του φωτός), και τα ΠΣΑ τους αντανακλούν την αποστροφή για τον κίνδυνο να ναυαγήσουν οι διαπραγματεύσεις, η λύση του Rubinstein είναι ταυτόσημη με εκείνη του Nash.

Το ότι μπορεί κανείς να «επαληθεύσει» την λύση Nash δείχνοντας ότι αποτελεί την ΥΤΙΝ ενός δυναμικού διαπραγματευτικού παιγνίου, ήταν γνωστό κάμποσο καιρό προτού ο Rubinstein παρουσιάσει το σημαντικό θεώρημά του. Ας πάρουμε, παραδείγματος χάρη, ένα παίγνιο, το 8.1 που έχουμε παρακάτω. Στο παίγνιο αυτό υπάρχει μια μοναδική ΥΤΙΝ, η οποία συμπίπτει με τη λύση Nash. Ωστόσο, τέτοιες «αποδείξεις» δεν εντυπωσίαζαν στην προ-Rubinstein εποχή επειδή τα δυναμικά παίγνια στα οποία βασίζονταν στερούνταν ρεαλισμού και γενικότητας. Π.χ. το διαπραγματευτικό παίγνιο στο Πλαίσιο 8.1 περιλαμβάνει μόνο τρία στάδια. Γιατί, όμως, τρία και όχι τέσσερα; Και ποιος ορίζει τους κανόνες με τέτοιο τρόπο ώστε η Μαρία να μην μπορεί να επανέλθει μετά το τρίτο στάδιο (στο $t = 4$, λόγου χάρη) με μια νέα προσφορά ή αξίωση; Στην πραγματικότητα κανείς δεν επιβάλει στους διαπραγματευτές τον μέγιστο αριθμό προσφορών, προτάσεων και απειλών που μπορούν να χρησιμοποιήσουν.

Βέβαια, εμείς καταλαβαίνουμε γιατί είναι χρήσιμη η υπόθεση των πεπερασμένων σταδίων: χωρίς ένα ορισμένο τέλος στη διαπραγματευτική διαδικασία, η λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash δεν μπορεί να εφαρμοστεί (δεδομένου ότι απαιτείται ένα τελευταίο στάδιο στο οποίο να «ρίξει άγκυρα», προτού αρχίσει να ξεδιπλώνεται προς-τα-πίσω). Και χωρίς τη λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash προς τα πίσω, καμία ΥΤΙΝ δεν μπορεί να προκύψει.

8.3 Δυναμικό Παίγνιο Διαπραγμάτευσης Τριών Σταδίων στο οποίο η λύση Nash είναι η μοναδική ΥΤΙΝ

Έστω το εξής διαπραγματευτικό παίγνιο τριών σταδίων μεταξύ Μαρίας και Γιώργου που προσπαθούν να συμφωνήσουν για το πώς θα μοιραστούν μια «πίτα»:

$t = 1$ Η Μαρία επιλέγει τη συμφωνία y επί της ΚΑΩ τους και την προτείνει στον Γιώργο (σκεφθείτε το y σαν την πρόταση που κάνει στο Γιώργο).

$t = 2$ Ο Γιώργος (αντι-)προτείνει τη συμφωνία x στην ΚΑΩ τους και, επιπλέον, την πιθανότητα $1-\rho$ να τελειώσει το παίγνιο άδοξα. Προφανώς, αν $x = y$ και $\rho = 1$, έχει επιτευχθεί άμεση συμφωνία. Αν, όμως, $x \neq y$ και $\rho < 1$, μπορούμε να σκεφθούμε το x σαν την αντι-πρόταση του Γιώργου και το $1-$ ρ σαν την πιθανότητα σύγκρουσης με την οποία απειλεί την Μαρία για να της επιβάλει τη θέλησή του).

Μετά την επιλογή του Γιώργο στο στάδιο αυτό, αν $\rho < 1$ το παίγνιο τελειώνει (και οι παίκτες δεν κερδίζουν απολύτως τίποτα) με πιθανότητα $1-\rho$. Διαφορετικά (με πιθανότητα ρ) προχωρούν στο στάδιο

$t = 3$ Στο τελευταίο αυτό στάδιο, η Μαρία έχει το εξής δίλημμα: Είτε να αποδεχθεί την κατανομή x που πρότεινε ο Γιώργος στο $t = 2$, αποφεύγοντας τον κίνδυνο να μείνει με μηδενικό όφελος, είτε να ρισκάρει επιμένοντας στην αρχική συμφωνία που πρότεινε στο $t = 1$, την y. Στην δεύτερη περίπτωση, δύο είναι τα πιθανά αποτελέσματα: (α) με πιθανότητα ρ θα μοιραστούν την πίτα όπως εκείνη πρότεινε αρχικά (σύμφωνα με την κατανομή y), και (β) με πιθανότητα $1-\rho$ θα έχουμε πλήρες διαπραγματευτικό ναυάγιο και κανείς τους δεν θα πάρει τίποτα.

Ο Howard (1972) επινόησε το δυναμικό αυτό παίγνιο των τριών σταδίων και απέδειξε ότι διαθέτει μια μοναδική ΥΤΙΝ: Στο στάδιο $t = 1$, η Μαρία προτείνει στον Γιώργο ως y τη λύση Nash (και ο Γιώργος θα αποδεχθεί την προσφορά αυτή στο στάδιο $t = 2$, θέτοντας $x = y$ και $\rho = 1$). Με άλλα λόγια, η Μαρία θα επιλέξει την συμφωνία y, η οποία μεγιστοποιεί το γινόμενο των συναρτήσεών τους ωφέλειας. Και ο Γιώργος θα την αποδεχθεί αμέσως.

Λογική εξήγηση: Ας σημειωθεί ότι η δομή του παιγνίου αυτού μας θυμίζει την λύση Nash ως ισορροπία φόβου. Είναι συγκροτημένο με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ότι η απόρριψη από το Γιώργο (στο $t = 2$) της προσφοράς της Μαρίας ($t = 1$) συνοδεύεται από μια αξιόπιστη απειλή διαπραγματευτικού ναυαγίου (με πιθανότητα $1-\rho$). Από τη στιγμή που ο Γιώργος ορίζει την πιθανότητα $\rho < 1$, δεν υπάρχει τρόπος να την ανακαλέσει (εξ ου και η πειστικότητα της απειλής). Σε ισορροπία (ΙΝΜΣ), στο στάδιο $t = 2$, ο Γιώργος πρέπει να κάνει μια προσφορά που θα αφήνει την Μαρία αδιάφορη μεταξύ του να την αποδεχθεί ή να προτιμήσει μια πιο ριψοκίνδυνη επιλογή. Η Μαρία το προβλέπει αυτό στο στάδιο $t = 1$, και υποβάλλει στον Γιώργο μια προσφορά που εκείνος δεν έχει κανένα κίνητρο να απορρίψει (ή δεν έχει κίνητρο να επιλέξει $\rho < 1$). Ο Howard (1972) αποδεικνύει τότε ότι η μόνη προσφορά που σέβεται αυτές τις συνθήκες ισορροπίας (δηλαδή την λογική της προς τα πίσω επαγωγής σε συνδυασμό με την ΚΓΟ) είναι η λύση Nash.

Η σημαντική συμβολή του Rubinstein (1982) ήταν η επέκταση της ιδέας του Howard (1972) σε διαπραγματευτικά παίγνια μη πεπερασμένης διάρκειας, όπου δηλαδή οι διαπραγματευτές, αν θέλουν, μπορούν να ανταλλάσουν προτάσεις και αξιώσεις για t στάδια όπου $t \to \infty$. Η μαθηματική απόδειξη του θεωρήματος Rubinstein είναι πραγματικά εξαιρετική όσο και δύσκολη αλλά υπάρχει μια εναλλακτική απόδειξη που δεν απαιτεί τίποτα πιο περίπλοκο από μαθηματικά Γυμνασίου. Το μόνο πρόβλημα με αυτή την απόδειξη είναι ότι η λογική της είναι σύνθετη και απαιτεί αρκετή υπομονή. Ας αρχίσουμε την παρουσίαση της απόδειξης με τον (επίσημο) ορισμό των ΠΣΑ (ποσοστών συρρίκνωσης της αξίας) του κάθε παίκτη καθώς και με τη διατύπωση του θεωρήματος. Ακολούθως θα παρουσιάσουμε την «απλή» απόδειξη.

<u>Ορισμός</u>: Ποσοστά Συρρίκνωσης της Αξίας (ΠΣΑ) και η σχέση τους με την αποστροφή για τον κίνδυνο

Κάθε φορά που απορρίπτεται μια προσφορά, το τελικό όφελός της, όπως το αποτιμά η ίδια η Μαρία, χάνει ένα μέρος που δίδεται από το $1-\alpha$ (όπου το α κείται μεταξύ 0 και 1). Είναι **ως εάν,** στα μάτια της, να έχει χαθεί το μέρος $1-\alpha$ της πίτας. Ομοίως, με κάθε απόρριψη πρότασης, το όφελος για τον Γιώργο (όπως το αποτιμά ο ίδιος) μειώνεται κατά $1-\beta$. Παραδείγματος χάρη, αν $\alpha=\beta=0{,}8$, τότε, κάθε φορά που απορρίπτεται μια προσφορά (είτε από τον έναν είτε από την άλλη), απομένει μόνο το 80% του εν δυνάμει οφέλους στον επόμενο γύρο των διαπραγματεύσεων. Έτσι, αν η Μαρία και ο Γιώργος καταλήξουν σε συμφωνία στο στάδιο $t=3$, το όφελος που θα μοιραστούν θα έχει συρρικνωθεί δύο φορές. Η έκταση της «συρρίκνωσής» του εξαρτάται από τα α και β. Οι παράμετροι αυτοί ($1-\alpha$ και $1-\beta$) μπορούν να οριστούν ως *ποσοστά συρρίκνωσης της αξίας* (ΠΣΑ) (discount rates) και συνδέονται με την οικονομική έννοια των *προεξοφλητικών επιτοκίων.* Πιο σημαντική είναι η νοηματική σύνδεσή τους με την *αποστροφή για τον κίνδυνο* (risk aversion) των παικτών.

Π.χ. διαπραγματευτής αποφασίζει, σε κάποιο στάδιο, αν θα αποδεχθεί την προσφορά του άλλου. Έχει την επιλογή είτε να δεχθεί το συγκεκριμένο μερίδιο της πίτας που του προτείνεται τώρα (t) ή να απορρίψει την προσφορά και να επανα-διαπραγματευθεί τη διανομή της πίτας στην επόμενη χρονική περίοδο ($t+1$). Το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης στην περίοδο $t+1$ είναι αβέβαιο, ενώ η αποδοχή της προσφοράς πίτας τώρα (t) θα του αποδώσει ένα σίγουρο όφελος (χωρίς κίνδυνο). Ο ρυθμός «συρρίκνωσης της πίτας» (που εξαρτάται από το ΠΣΑ του διαπραγματευτή μας), λόγω της απόφασής του να μην συμφωνήσει τώρα (t) στην προσφορά που του έγινε, μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους: (α) ο χρόνος είναι χρήμα (και η καθυστέρηση μέχρι τουλάχιστον την επόμενη χρονική στιγμή ($t+1$) συρρικνώνει από μόνη της την ωφέλεια του παίκτη), και (β) ο κίνδυνος να ναυαγήσουν οι διαπραγματεύσεις με πιθανότητα ρ εξ αιτίας της απόφασής του να απορρίψει την πρόταση που του έγινε στο χρόνο t, τραβώντας έτσι την διαπραγμάτευση στην επόμενη περίοδο ($t+1$), συρρικνώνει την προσδοκώμενη ωφέλειά του όπως εκείνος την αποτιμά στην περίοδο t.

Με τον έναν ή τον άλλον τρόπο, η απόρριψη μια πρότασης-συμφωνίας συρρικνώνει την προσδοκώμενη ωφέλεια των διαπραγματευτών από ένα συγκεκριμένο κομμάτι της πίτας. Για να το πω διαφορετικά, αν προτιμάς ένα συγκεκριμένο κομμάτι πίτας *τώρα* (t) δύο φορές περισσότερο από το διπλάσιο κομμάτι πίτας στην επόμενη περίοδο ($t+1$), τότε το ΠΣΑ σου ισούται με $1/2$. Ο λόγος μπορεί να είναι είτε ότι ο χρόνος κοστίζει είτε ότι φοβάσαι πως η παράταση των διαπραγματεύσεων κατά μια περίοδο μπορεί να τις οδηγήσουν σε ναυάγιο.

Τα ΠΣΑ των παικτών α και β είναι, επίσης, γνωστά ως οι χρονικές προτιμήσεις (time preferences) των διαπραγματευτών, και αναφέρονται στην συγκριτική αποτίμηση από τους διαπραγματευτές μιας μεγαλύτερης αυριανής αποζημίωσης σε σύγκριση με μια μικρότερη σημερινή. (Αυτή είναι και η σχέση των ΠΣΑ με τα λεγόμενα προεξοφλητικά επιτόκια.) Συγκρίνοντας τα ΠΣΑ των διαπραγματευτών μετρούμε τη σχετική ανυπομονησία τους να φτάσουν στην συμφωνία. Π.χ. αν $\alpha>\beta$, η Μαρία σαφώς ανυπομονεί λιγότερο να επιτύχει συμφωνία από ότι ο Γιώργος (δεδομένου ότι το όφελος της συρρικνώνεται, με κάθε προσφορά που απορρίπτεται, πιο αργά από του Γιώργου). Σε κάθε περίπτωση, όμως, είναι προφανές ότι ο λόγος α/β είναι ένα καλό μέτρο του σχετικού φόβου που αισθάνεται η Μαρία (σε σύγκριση με το σχετικό φόβο που αισθάνεται ο Γιώργος). Διότι, αν $\alpha/\beta>1$, η Μαρία χάνει λιγότερο από κάθε απόρριψη (και, άρα, από κάθε καθυστέρηση στην επίτευξη συμφωνίας) σε σύγκριση με το Γιώργο. Μπορούμε, επομένως, να αναμένουμε, εφόσον οι λοιποί παράγοντες μένουν αμετάβλητοι, ότι η «επιθετικότητα» κατά τις διαπραγματεύσεις της Μαρίας σε σχέση με εκείνη του Γιώργου θα είναι ανάλογη του κλάσματος α/β, το οποίο δεν διαφέρει αναλυτικά καθόλου από την έννοια της σχετικής αποστροφής για τον κίνδυνο στην οποία στηρίζεται η λύση Nash (1950).

Η μόνη (επουσιώδης) διαφορά είναι ότι, ενώ στον Nash τα άτομα προσδιορίζονται ως προς τις συναρτήσεις ωφέλειάς τους (και την αποστροφή κινδύνου που ορίζεται από τον ρυθμό αύξησης της ωφέλειας ως προς το κομμάτι της πίτας που παίρνει τελικά το άτομο), στην ανάλυση του Rubisnstein οι διαπραγματευτές διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς τα ΠΣΑ τους. Έτσι, όπως στον Nash η λύση του διαπραγματευτικού παιγνίου εξαρτάται από τον λόγο των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων ωφέλειας, δηλαδή της σχετικής αποστροφής για τον κίνδυνο, στον Rubinstein η λύση (όπως θα δούμε παρακάτω) στηρίζεται στον αντίστροφο λόγο των ΠΣΑ ή στον λόγο α/β.

Θεώρημα: Η λύση του Rubinstein στο διαπραγματευτικό πρόβλημα

Το διαπραγματευτικό παίγνιο: Η Μαρία και ο Γιώργος διατυπώνουν διαδοχικές προτάσεις για το πώς θα διανείμουν μεταξύ τους μια πίτα μεγέθους 1. Η Μαρία ξεκινά στο στάδιο $t = 1$ καταθέτοντας την πρότασή της. Αν ο Γιώργος την αποδεχθεί, το διαπραγματευτικό παίγνιο λήγει και η συμφωνία έχει επιτευχθεί στο πρώτο κιόλας στάδιο. Αν όμως απορρίψει την προσφορά της Μαρίας, περνάμε στο $t = 2$ όπου ο Γιώργος υποβάλλει μια δική του αντιπροσφορά. Αν η Μαρία, με τη σειρά της, αποδεχθεί την προσφορά του έχουμε συμφωνία στο δεύτερο στάδιο. Διαφορετικά, περνάμε στο στάδιο $t = 3$ όπου διατυπώνει την δική της αντι-αντιπροσφορά. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται χωρίς χρονικό περιορισμό μέχρις ότου οι δύο καταλήξουν σε συμφωνία.

Σε αυτό το υπόδειγμα διαπραγμάτευσης του Rubinstein (1982) οι διαπραγματευτές έχουν κίνητρο να επισπεύσουν την επίτευξη συμφωνίας, όχι επειδή φοβούνται ότι ξάφνου θα ναυαγήσουν οι διαπραγματεύσεις, αλλά επειδή κάθε καθυστέρηση (ή απόρριψη πρότασης) κοστίζει και στους δύο. Το κόστος αυτό ορίζεται από τα ποσοστά συρρίκνωσης της αξίας (ΠΣΑ) των δύο διαπραγματευτών, τα οποία (όπως ακριβώς και στον πιο πάνω ορισμό) δίδονται, αντίστοιχα για την Μαρία και τον Γιώργο, ως $1-\alpha$ και $1-\beta$ (όπου $0 < \alpha$, $\beta < 1$). Το θεώρημα: Στο στάδιο $t = 1$, η Μαρία θα προτείνει στο Γιώργο την ακόλουθη διανομή:

Να κρατήσει η Μαρία το μερίδιο $\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$ και ο Γιώργος το μερίδιο $\frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}$. Ο Γιώργος

αποδέχεται αμέσως την πρόταση αυτή!

Η ουσία: (α) Δεν προβλέπεται καθυστέρηση, σύγκρουση κλπ. Η συμφωνία είναι αυτόματη. (β) Όσο μικρότερο το ΠΣΑ του διαπραγματευτή, σε σχέση με τον αντίπαλο, τόσο μεγαλύτερο το μερίδιό του/ης. (γ) Προβλέπεται πως υπάρχει ένα πλεονέκτημα για αυτήν/όν που ξεκινά πρώτη/ος. (δ) Η διανομή αυτή αποτελεί την μοναδική ΥΤΙΝ του συγκεκριμένου δυναμικού διαπραγματευτικού παιγνίου.

Το μέγα ερωτηματικό για κάποιον που πρωτο-προσεγγίζει το θεώρημα του Rubinstein (1982), είναι το εξής: Δεδομένου ότι το διαπραγματευτικό παίγνιο που μελετά δεν έχει πεπερασμένο τέλος (δηλαδή, οι διαπραγματεύσεις, δυνητικά, μπορούν να συνεχίζονται για $t \to \infty$ περιόδους), πως καταφέρνει ο Rubinstein να προσδιορίσει μια ΥΤΙΝ του παιγνίου, χρησιμοποιώντας την λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash; Η τελευταία απαιτεί το παίγνιο να έχει όχι μόνο τέλος (ένα τελικό στάδιο) αλλά και οι παίκτες να τελούν υπό κοινή γνώση αυτού του σταδίου εξ αρχής!

Η απάντησή είναι λίγο απογοητευτική: με τη βοήθεια μια **κρυφής υπόθεσης**. Ενώ ο Rubinstein (1982) δέχεται ότι ο διαπραγματευτικός ορίζοντας είναι μη πεπερασμένος (δηλαδή ότι εν δυνάμει $t \to \infty$), υποθέτει (χωρίς να το δηλώνει ρητά στο δοκίμιό του) ότι θα υπάρξει ένα στάδιο, λόγου χάρη το $t = m$, στο οποίο οι πεποιθήσεις της Μαρίας και του Γιώργου (όσον αφορά το μέγιστο μερίδιο που καθένας τους προσδοκά να αποκομίσει) θα έχουν συγκλίνει απόλυτα. Επιπλέον, η κρυφή υπόθεση του Rubinstein δέχεται ότι η Μαρία και ο Γιώργος έχουν εξ αρχής κοινή γνώση (δηλαδή στην περίοδο $t = 1$) αυτού του απομακρυσμένου γύρου m.

Αυτή η κρυφή υπόθεση είναι το τέχνασμα που εξασφαλίζει στον Rubinstein τη δυνατότητα χρήσης της λογικής της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash. Η τελευταία ξεκινά από το στάδιο $t = m$, περνά κατόπιν στο στάδιο $t = m - 1$ και, τελικά, στο $t = 1$, όπου υπολογίζεται η μοναδική προσφορά ΥΤΙΝ που θα απευθύνει η Μαρία στο Γιώργο. Και επειδή είναι η μοναδική προσφορά ισορροπίας, ο Γιώργος απλώς την αποδέχεται. Η απόδειξη που ακολουθεί συνίσταται από τέσσερα βήματα:

(Α) Διατυπώνουμε την Κρυφή Υπόθεση που δίνει στην λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash το στήριγμά της.
(Β) Εξετάζουμε τις ελάχιστες προσφορές τις οποίες θα κάνουν η Μαρία και ο Γιώργος στις περιόδους $t = m, t = m - 1, t = m - 2, \ldots, t = 1$. [Αποδεικνύουμε, επίσης, ότι δεν έχουν κίνητρο να προσφέρουν λιγότερο από αυτές τις ελάχιστες προσφορές (δηλαδή, ότι οι ελάχιστες προσφορές τους είναι ίσες με τις μέγιστες προσφορές τους)].
(Γ) Έχοντας εκφράσει την μοναδική ελάχιστη (και ταυτόχρονα μέγιστη) προσφορά που θα απευθύνει στο στάδιο $t = 1$ η Μαρία στον Γιώργο ως προς το ελάχιστο μερίδιο που θα περιμένει η ίδια στην περίοδο $t = m$, θα χρησιμοποιήσουμε την Κρυφή Υπόθεση (σε συνδυασμό με την λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash) για να διατυπώσω την επόμενη υπόθεση: Την Υπόθεση των Διαχρονικά Συνεπών Προσδοκιών σύμφωνα με την οποία η Μαρία πρέπει να προτείνει μια διανομή στο στάδιο $t = 1$ ταυτόσημη με εκείνη στην οποία θα συμφωνούσαν (με πολύ μεγαλύτερο κόστος) στο στάδιο $t = m$. Αυτή η υπόθεση μου επιτρέπει να υπολογίσω επακριβώς την αρχική ($t = 1$) προσφορά της Μαρίας στο Γιώργο. Μάλιστα, από τη στιγμή που τα μερίδια και των δύο είναι τα ίδια στον χρόνο ($t = 1$) με αυτά που θα λάμβαναν στον χρόνο ($t = m$), και δεδομένου ότι οι καθυστερήσεις κοστίζουν και στους δύο, προφανώς θα συμφωνήσουν ακαριαία (στην περίοδο $t = 1$).
(Δ) Αποδεικνύω ότι η αρχική επιλογή της περιόδου m δεν έχει σημασία όσον αφορά την συμφωνία ισορροπίας ΥΤΙΝ. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι, σύμφωνα με την κρυφή υπόθεση, δεχόμαστε ότι στο αρχικό στάδιο $t = 1$ οι διαπραγματευτές έχουν κοινή γνώση του σταδίου m (όποιο και αν είναι αυτό).

Βήμα Α: Η Κρυφή Υπόθεση

Η υπόθεση αυτή αποτελείται από δύο μέρη: (α) Υπάρχει κάποιος μελλοντικός γύρος των διαπραγματεύσεων, έστω $t = m\ (> 2)$, στον οποίο οι πεποιθήσεις των διαπραγματευτών θα έχουν ευθυγραμμιστεί με συνέπεια σε κάποια διανομή $(V, 1 - V)$ μεταξύ της Μαρίας και του Γιώργου. (β) Η Μαρία και ο Γιώργος έχουν κοινή γνώση του m στο $t = 1$.

Η Κρυφή Υπόθεση είναι, φυσικά, μια εκ νέου ενσάρκωση της υπόθεσης των ευθυγραμμισμένων με συνέπεια πεποιθήσεων (ΕΣΠ), η οποία μας απασχόλησε επανειλημμένως έως τώρα. Το πιο δυσκολοχώνευτο κομμάτι της είναι, βέβαια, το μέρος (β). Το μέρος (α) απλώς εικάζει πως κάποια στιγμή στο μέλλον ($t = m$), οι προσδοκίες των διαπραγματευτών θα έχουν συγκλίνει. Δεν ξενίζει ιδιαίτερα αυτή η υπόθεση. Το μέρος (β) όμως «βγάζει μάτι»: επιμένει πως οι παίκτες τελούν υπό κοινή γνώση του $t = m$ από την αρχή της διαπραγμάτευσης.

Ο Rubinstein πρεσβεύει ότι υπάρχει μια άγνωστη μελλοντική χρονική στιγμή, η $t = m$, την οποία οι εξίσου ορθολογιστές και καλά πληροφορημένοι διαπραγματευτές γνωρίζουν από κοινού, σαν να ήταν μια απλή παράμετρος (π.χ. η τιμή του π=3,1415...) πάνω στην οποία έχουν κοινή γνώση. Έτσι, έχοντας ορίσει τεχνηέντως το κοινά γνωστό «Τέλος της Διαπραγμάτευσης», την περίοδο $t = m$, ο Rubinstein βρίσκει την ΥΤΙΝ αυτού του πεπερασμένου (πλέον) δυναμικού παιγνίου, χρησιμοποιώντας την λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash. Πρόκειται για σκανδαλώδη υπόθεση.

Βήμα Β: Υπολογίζοντας τις προσφορές των διαπραγματευτών προς τα πίσω

Σύμφωνα με την Κρυφή Υπόθεση (Βήμα Α) η Μαρία και ο Γιώργος γνωρίζουν και οι δύο στο στάδιο $t = 1$ ότι στο στάδιο $t = m$ θα διακρίνουν την ίδια λύση-συμφωνία, λόγου χάρη την διανομή $(V, 1 - V)$. Αυτό, φυσικά, δεν σημαίνει ότι στο $t = 1$ γνωρίζουν την αξία του V, του μεριδίου της Μαρίας που θα έλθει στην επιφάνεια στο $t = m$. Σημαίνει απλώς στο $t = 1$, η Μαρία και ο Γιώργος προβλέπουν πως, έως να φτάσουν στο στάδιο $t = m$, θα υπάρξει κάποιο μερίδιο της πίτας, λόγου χάρη V, το οποίο (στα μάτια τόσο του Γιώργου όσο και της Μαρίας) η Μαρία δεν θα μπορεί (ή δεν θα θέλει) να βελτιώσει (διά μέσου περαιτέρω διαπραγματεύσεων).

Για ευκολία θα ορίσω το $t = m = 3$. Ο παρακάτω πίνακας παραθέτει τα παραπάνω στην πρώτη σειρά του: στην περίοδο $t = m = 3$ προβλέπεται πως η Μαρία θα πάρει μερίδιο V και ο Γιώργος $1 - V$. Υπενθυμίζω, ξανά, ούτε εμείς (ως θεωρητικοί) ούτε οι διαπραγματευτές μας, έχουμε κάποιο τρόπο (στο στάδιο αυτό της απόδειξης του θεωρήματος) να γνωρίζουν το μερίδιο V. Απλώς έχουν κατά νου πως όταν έλθει το στάδιο $t = m = 3$ θα έχουν και οι δύο στο μυαλό τους κάποια αξία V, η οποία θα είναι μια κοινά γνωστή εκτίμηση του τελικού μεριδίου της Μαρίας. Στόχος μας τώρα είναι να υπολογίσουμε την αξία αυτή:

Γύρος	**Διαπραγματευτής που προτείνει**	**Προτεινόμενο μερίδιο για τη Μαρία**	**Προτεινόμενο μερίδιο για το Γιώργο**
$t = m = 3$	**Μαρία**	V	$1 - V$
$t = 2$	**Γιώργος**	αV	$1 - \alpha V$
$t = 1$	**Μαρία**	$1 - \beta(1 - \alpha V)$	$\beta(1 - \alpha V)$

Διάγραμμα 8.1 : Η προς τα πίσω επαγωγή των βέλτιστων προσφορών στη βάση της Κρυφής Υπόθεσης

Η Κρυφή Υπόθεση επιβάλει την ύπαρξη κοινά γνωστού μελλοντικού γύρος ($t = m$), στη διάρκεια του οποίου η Μαρία και ο Γιώργος θα πιστέψουν ότι η πίτα θα μοιραστεί σε μερίδια ($V, 1 - V$). Ο γύρος m είναι κοινά γνωστός σε όλα τα στάδια. Η λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash περιγράφεται από την κατεύθυνση των βελών. Υποθέτω ότι $t = m = 3$. Στο στάδιο $t = 3$ (αν οι διαπραγματεύσεις διαρκέσουν τόσο πολύ) η Μαρία θα πάρει μερίδιο V. Έτσι, στο $t = 2$, ο Γιώργος πρέπει να της προσφέρει αV για να αποφύγει τη σύγκρουση, κρατώντας για τον εαυτό του μερίδιο $1 - \alpha V$. Στο $t = 1$, λοιπόν, η Μαρία πρέπει να προσφέρει στο Γιώργο τουλάχιστον $\beta(1 - \alpha V)$, ώστε να αποφευχθεί μια απόρριψη, η οποία θα καθυστερούσε τη συμφωνία. Αν κάνει αυτή την προσφορά στον Γιώργο, τότε η ίδια θα κρατήσει $1 - \beta(1 - \alpha V)$.

Ας πάμε νοητικά στο στάδιο $t = 2$ όπου είναι η σειρά του Γιώργου να αντι-προτείνει στην Μαρία μια διανομή (αφού εκείνος απέρριψε την δική της πρόταση στο στάδιο $t = 1$). Τι αντι-πρόταση πρέπει να καταθέσει; Γνωρίζει (από την Κρυφή Υπόθεση, με $t = m = 3$) ότι, αν οι διαπραγματεύσεις προχωρήσουν στο $t = m = 3$, η Μαρία θα προσδοκά μερίδιο V.

Έτσι, ο Γιώργος γνωρίζει ότι αν της προσφέρει, στο $t = 2$, μερίδιο αV της πίτας, εκείνη δεν θα έχει λόγο να απορρίψει την πρότασή του. Ο λόγος, φυσικά, είναι ότι η Μαρία αποτιμά στο στάδιο $t = 2$ την προοπτική να λάβει μερίδιο V στο στάδιο $t = 3$ ακριβώς όσο αποτιμά την αξία του μεριδίου αV στο στάδιο $t = 2$. (Θυμήσου πως, εξ ορισμού, 1 μονάδα ωφέλειας στο επόμενο στάδιο έχει για την Μαρία την ίδια αξία με $\alpha\,(< 1)$ μονάδες ωφέλειας στο παρόν στάδιο, η κάθε απόρριψη-καθυστέρηση της «κοστίζει» ποσοστό $1 - \alpha$ του τελικού της μεριδίου). Με άλλα λόγια, η Μαρία οφείλει (εξ ορισμού) να είναι αδιάφορη μεταξύ αV στο στάδιο $t = 2$ και V στο στάδιο $t = 3$. Κάθε προσφορά του Γιώργου (προς τη Μαρία) στο στάδιο $t = 2$ κάτω από αV θα προκαλέσει την απόρριψη.

Να λοιπόν που υπολογίσαμε την ελάχιστη προσφορά που πρέπει να κάνει ο Γιώργος στη Μαρία στο στάδιο $t = 2$ αν θέλει να αποφύγει την απόρριψη της προσφοράς του από τη Μαρία: Είναι η προσφορά του μεριδίου αV. Το ερώτημα τώρα τίθεται: Θέλει ο Γιώργος να αποτρέψει μια απόρριψη στο στάδιο $t = 2$; Η απάντηση είναι καταφατική. Ας δούμε γιατί: Αν προσφέρει στη Μαρία μερίδιο μικρότερο από αV, η Μαρία θα απορρίψει την πρότασή του και η διαπραγμάτευση θα συνεχιστεί μέχρι το στάδιο $t = 3$, όπου η Μαρία θα πάρει μερίδιο V και ο Γιώργος $1 - V$. Ο Γιώργος το γνωρίζει αυτό στο στάδιο $t = 2$. Γνωρίζει, λοιπόν, ότι αν προσφέρει στη Μαρία λιγότερο από αV, το περισσότερο που μπορεί να πάρει στο στάδιο $t = 3$ είναι $1 - V$. Τι αξίζει για τον Γιώργο η προοπτική να λάβει μερίδιο $1 - V$ στο επόμενο στάδιο ($t = 3$) τώρα (στο στάδιο $t = 2$); Η απάντηση είναι: αξίζει όσο ένα μερίδιο $\beta(1 - V)$ τώρα (δηλαδή, στο στάδιο $t = 2$).

Με λίγα λόγια, ο Γιώργος έχει μια ξεκάθαρη επιλογή στο στάδιο $t = 2$: (α) Να προσφέρει στη Μαρία αV αμέσως (δηλαδή στο $t = 2$), προσφορά που γνωρίζει ότι η Μαρία δεν έχει λόγο να απορρίψει, και η οποία θα του αφήσει, στο στάδιο $t = 2$, μερίδιο $1 - \alpha V$ της πίτας. Ή, (β) να της προσφέρει τώρα λιγότερο από αV, κάτι που θα οδηγήσει στη απόρριψη της προσφοράς τους, και την επέκταση των διαπραγματεύσεων στο στάδιο $t = 3$. Σε αυτή την δεύτερη περίπτωση, ο Γιώργος θα λάβει μερίδιο $(1 - V)$ με καθυστέρηση μιας περιόδου (στην περίοδο $t = 3$), μια προοπτική που, στα μάτια του Γιώργου, στην περίοδο $t = 2$ έχει αξία ίση με $\beta(1 - V)$. Συνοπτικά, στην περίοδο $t = 2$ είτε της προσφέρει μερίδιο αV και εκείνος λαμβάνει ωφέλεια ίση με $1 - \alpha V$ είτε της προσφέρει λιγότερο από αV προσδοκώντας στην περίοδο $t = 3$ μερίδιο του οποίου η τωρινή αξία ισούται με $\beta(1 - V)$. Το δίλημμα λύθηκε. Ο Γιώργος θα επιλέξει να προκαλέσει διαφωνία στην περίοδο $t = 2$ (προσφέροντας στην Μαρία μερίδιο μικρότερο του αV) αν και μόνο εάν $\beta(1 - V) > 1 - \alpha V$. Παρατήρησε πως αυτή η ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει ποτέ (καθώς όλες αυτές οι παράμετροι *(α, β και V)* κείνται μεταξύ 0 και 1). Άρα, στο στάδιο $t = 2$, ο Γιώργος θα προσφέρει στην Μαρία μερίδιο αV το οποίο εκείνη (όπως είδαμε παραπάνω) δεν έχει λόγο να μην αποδεχθεί. Το συμπέρασμα αυτό καταγράφεται στη δεύτερη σειρά του Διαγράμματος 8.1.

Ας πάμε τώρα στην αρχή των διαπραγματεύσεων $t = 1$, όπου η Μαρία υποβάλει την πρώτη προσφορά. Η Μαρία γνωρίζει (βλ. πιο πάνω) ότι αν η προσφορά της απορριφθεί, η διαπραγμάτευση θα προχωρήσει στο $t = 2$, οπότε θα της προσφερθεί από το Γιώργο μερίδιο αV μια προσφορά την οποία θα αποδεχθεί. Επιπλέον, γνωρίζει ότι ο Γιώργος μπορεί να προσδοκά, στο επόμενο στάδιο ($t = 2$), το σίγουρο μερίδιο $1 - \alpha V$. Ποια αξία δίνει ο Γιώργος τώρα (στο αρχικό στάδιο $t = 1$) στην προοπτική να λάβει στο επόμενο στάδιο ($t = 2$) μερίδιο ίσο με $1 - \alpha V$. Η απλή απάντηση είναι: $\beta(1 - \alpha V)$. Επομένως, γνωρίζουμε (και μαζί με εμάς γνωρίζει και η Μαρία) ότι αν προσφερθεί στο Γιώργο μερίδιο $\beta(1 - \alpha V)$ στο $t = 1$, θα το αποδεχθεί (μιας και δεν έχει λόγο να το απορρίψει). Κάθε προσφορά μικρότερη από το μερίδιο αυτό θα προκαλέσει διαφωνία και την κατάθεση αντιπροσφοράς από την πλευρά του Γιώργου στο στάδιο $t = 2$. Το ερώτημα, λοιπόν, που λογικά ανακύπτει είναι: Θέλει η Μαρία να επιτύχει συμφωνία με το Γιώργο στο στάδιο t=1;

Και πάλι μπορεί να αποδειχθεί εύκολα πως η απάντηση είναι καταφατική: Αν η Μαρία προσφέρει στο Γιώργο μερίδιο μικρότερο από $\beta(1 - \alpha V)$, ο Γιώργος θα απορρίψει την προσφορά της και θα επιστρέψει στο τραπέζι των διαπραγματεύσεων προσφέροντας στη Μαρία μερίδιο αV, μια προσφορά την οποία, όπως έχουμε ήδη αποδείξει, θα αποδεχθεί η Μαρία στο στάδιο $t = 2$. Το ζήτημα, επομένως, είναι αν η Μαρία προτιμά $1 - \beta(1 - \alpha V)$ αμέσως (δηλαδή στο $t = 1$) ή την προοπτική του μεριδίου αVστο επόμενο στάδιο ($t = 2$). Σημείωσε ότι στο στάδιο $t = 1$ η αξία για την Μαρία της προοπτικής μεριδίου αV στο επόμενο στάδιο είναι ίση με την αξία ενός μεριδίου $a^2 V$ τώρα (στο στάδιο $t = 1$). Άρα, θα προσφέρει στον Γιώργο μερίδιο $\beta(1 - \alpha V)$ αμέσως (ωθώντας τον στην άμεση συμφωνία) εφόσον (στο $t = 1$) ισχύει η ανισότητα $1 - \beta(1 - \alpha V) > a^2 V$. Όμως, αυτή η ανισότητα αυτή ισχύει πάντοτε! Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο στάδιο $t = 1$ η Μαρία θα προτιμά πάντοτε να προσφέρει στο Γιώργο το μερίδιο $\beta(1 - \alpha V)$ που εκείνος δεν έχει κανένα κίνητρο να απορρίψει. Καταλήξαμε έτσι στο απλό συμπέρασμα ότι στην αρχή των διαπραγματεύσεων, στο στάδιο $t = 1$, η Μαρία θα προτείνει στο Γιώργο τη διανομή $[1 - \beta(1 - \alpha V), \beta(1 - \alpha V)]$. Και ότι ο Γιώργος θα την αποδεχθεί!

Βήμα Γ: Διαχρονικά συνεπείς προσδοκίες

Πριν προχωρήσουμε, ας φανταστούμε μια οποιαδήποτε περίπτωση σύγκρουσης μεταξύ δύο προσώπων, επιχειρήσεων, χωρών, κ.λπ. Αν γνώριζαν από την αρχή ποια θα ήταν η έκβαση του μεταξύ τους «πολέμου», δεν θα ήταν τότε λογικό να συμφωνήσουν από την αρχή σε μια ρύθμιση ανάλογη με την τελική έκβαση, αποφεύγοντας έτσι τη δαπανηρή σύγκρουση; Πρόκειται για αυτό που στα Προλεγόμενα ονόμασα το Παράδοξο των Ορθολογικών Συγκρούσεων. Στην περίπτωσή μας, αυτό θα σήμαινε ότι η Μαρία θα έλεγε στο Γιώργο: «Γνωρίζουμε και οι δύο (θυμήσου την Κρυφή Υπόθεση) ότι, αν περιμένουμε μέχρι $t = m = 3$, θα πάρω μερίδιο V της πίτας. Γιατί, λοιπόν, να περιμένουμε μέχρι τότε; Γιατί να μην συμφωνήσεις, λοιπόν, να πάρω από τώρα το μερίδιο V και, με τον τρόπο αυτό, να μην χαθεί κανένα μέρος της πίτας (μέσα από την καθυστέρηση της επίτευξης συμφωνίας) για κανέναν από τους διό μας;».

Ο Rubinstein υποθέτει ότι ο Γιώργος, εφόσον είναι εργαλειακά ορθολογιστής, δεν έχει λόγο να διαφωνήσει' πρόκειται για την υπόθεση των διαχρονικά συνεπών προσδοκιών (intertemporally consistent beliefs). Το μόνο πρόβλημα είναι ότι οι διαπραγματευτές δεν γνωρίζουν το μερίδιο V. Ωστόσο, μπορούν να το υπολογίσουν ως εξής στην βάση της αμέσως προηγούμενης ανάλυσης: Παραπάνω (Βήμα Β) συμπεράναμε πως η Μαρία θα προτείνει στον Γιώργο να κρατήσει εκείνη μερίδιο ίσο με $1 - \beta(1 - \alpha V)$, και εκείνος να κρατήσει το υπόλοιπο μερίδιο $\beta(1 - \alpha V)$. Τα μερίδια αυτά υπολογίστηκαν βάσει μιας απλής υπόθεσης: ότι αν οι διαπραγματεύσεις «τραβούσαν» (με κόστος και για

τους δύο) έως στο στάδιο $t = 3$, τότε η Μαρία θα έπαιρνε μερίδιο V και ο Γιώργος $1 - V$. Αφού η Μαρία βλέπει ότι στο στάδιο $t = 3$ θα αναγκαστεί να αφήσει στον Γιώργο μερίδιο $1 - V$, και δεδομένου ότι στο στάδιο $t = 1$ η ιδανική της προσφορά στον Γιώργο ισούται με μερίδιο $\beta(1 - \alpha V)$, γιατί δεν του προσφέρει τώρα αυτό που θα του προσέφερε στο στάδιο $t = 3$, αποφεύγοντας έτσι το κόστος της καθυστέρησης; Με άλλα λόγια, η υπόθεση των διαχρονικά συνεπών προσδοκιών συνιστά στην Μαρία να θέσει $1 - \beta(1 - \alpha V) = V$.

Λύνοντας την απλή αυτή εξίσωση ως προς V, βρίσκουμε $V = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$ και $1 - V = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}$.

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος του Rubinstein , σύμφωνα με το οποίο η Μαρία και ο Γιώργος θα καταλήξουν σε άμεση συμφωνία στο γύρο $t = 1$ (επιβεβαιώνοντας το Παράδοξο των Ορθολογικών Συγκρούσεων).

Βήμα Δ: Το m δεν έχει καμία σημασία

Η παραπάνω απόδειξη στηρίζεται στην υπόθεση ότι $m = 3$, δηλαδή ότι είναι γνωστό και στη Μαρία και στο Γιώργο (στο πρώτο στάδιο, $t = 1$), ότι οι προσδοκίες τους θα έχουν ευθυγραμμιστεί με συνέπεια μέσα σε τρεις το πολύ γύρους. Μένει να αποδείξουμε πως η υπόθεση αυτή έγινε μόνο για λόγους ευκολίας, αφού η απόδειξη του θεωρήματος του Rubinstein ισχύει για κάθε πεπερασμένη τιμή του m. Ας εξετάσουμε την περίπτωση $m = 5$ για να διαπιστώσουμε πως δεν αλλάζει τίποτα. Το Διάγραμμα 8.1 αντικαθίσταται τώρα από το Διάγραμμα 8.2, με την προσθήκη δύο ακόμη σειρών, και την λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash να αρχίζει από το στάδιο $t = m = 5$. Κατά τα άλλα, οι τρεις πρώτες σειρές του Διαγράμματος 8.2 είναι ίδιες με εκείνες του Διαγράμματος 8.1.

Γύρος	**Διαπραγματευτής που προτείνει**	**Προτεινόμενο μερίδιο για τη Μαρία**	**Προτεινόμενο μερίδιο για το Γιώργο**
$t = m = 5$	**Μαρία**	V	$1 - V$
$t = 4$	**Γιώργος**	αV	$1 - \alpha V$
$t = 3$	**Μαρία**	$1 - \beta(1 - \alpha V)$	$\beta(1 - \alpha V)$
$t = 2$	**Γιώργος**	$\alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]$	$1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]$
$t = 1$	**Μαρία**	$1 - \beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]\}$	$\beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]\}$

Διάγραμμα 8.2 : Η περίπτωση του m=5

Αρχίζουμε από το τελευταίο στάδιο ($t = 5$), όπου η Μαρία παίρνει μερίδιο V. Κατόπιν κινούμαστε στο στάδιο $t = 4$, όπου ο Γιώργος προσφέρει στη Μαρία αV και κρατά για τον εαυτό του $1 - \alpha V$. Ακολούθως προχωρούμε στο στάδιο $t = 3$, όπου η Μαρία προσφέρει στο Γιώργο $\beta(1 - \alpha V)$, διεκδικώντας για τον εαυτό της $1 - \beta(1 - \alpha V)$, Αμέσως μετά ερχόμαστε στο στάδιο $t = 2$, όπου ο Γιώργος προσφέρει στη Μαρία $\alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]$ για να την πείσει να συμφωνήσει, διεκδικώντας για τον εαυτό του $1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]$ και, τέλος, φθάνουμε στο στάδιο $t = 1$, όπου η Μαρία προσφέρει στο Γιώργο $\beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]\}$, αξιώνοντας για τον εαυτό της $1 - \beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]\}$. Θέτοντας $V = 1 - \beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]\}$ και λύνοντας ως προς V έχουμε την ίδια λύση όπως αυτή του Διαγράμματος 8.1: $V = [(1 - \beta)/(1 - \alpha\beta)]$

Εφαρμόζοντας τη λογική των διαχρονικά συνεπών προτιμήσεων (όπως κάναμε στο προηγούμενο στάδιο της απόδειξης), η Μαρία υποτίθεται ότι προβάλλει την αξίωση, στο στάδιο $t = 1$, να πάρει το μερίδιο της πίτας που προσδοκά ότι θα έπαιρνε στο τελευταίο στάδιο ($t = m = 5$). Με άλλα λόγια, $V = 1 - \beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha V)]\}$. Λύνοντας ως προς V βρίσκουμε τη βέλτιστη αρχική αξίωση της Μαρίας του $\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$. Πρόκειται για την ίδια ακριβώς προσφορά που είχαμε όταν $m = 3$. Γενικότερα, για κάθε τιμή του m, το Βήμα Δ δίνει την ακόλουθη εξίσωση:

$$V = 1 - \beta\{1 - \alpha[1 - \beta(1 - \alpha(1 - \beta(1 - \ldots\alpha V))\ldots)]\}$$

Λύοντας ως προς V παίρνουμε, όπως πριν, $V = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$ ανεξάρτητα από πόσο πολλά πρόσθετα «στάδια» υποδηλώνουν οι κουκίδες (...). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι, εφόσον ισχύει η Κρυφή Υπόθεση, η πραγματική τιμή του m δεν έχει καμία σημασία για τη λύση του θεωρήματος του Rubinstein.

Ανακεφαλαιώνοντας, το θεώρημα Rubinstein που μόλις αποδείξαμε δείχνει ότι, στο πλαίσιο των θεμελιωδών του υποθέσεων, υπάρχει μόνο μία ορθολογική διαπραγματευτική στρατηγική. Άρα, η άμεση συμφωνία είναι αναπόφευκτη. Από παιγνιοθεωρητικής σκοπιάς, είναι σαν να λέμε πως το σύνολο των αξιόπιστων, ορθολογικών, διαπραγματευτικών στρατηγικών αποτελείται από… μια μόνο στρατηγική: την μοναδική υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία Nash (ΥΤΙΝ) του δυναμικού διαπραγματευτικού αυτού παιγνίου.

Φυσικά, το συμπέρασμα αυτό είναι τόσο πειστικό όσο και οι υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται, π.χ. η Κρυφή Υπόθεση ή η Υπόθεση των Διαχρονικά Συνεπών Προτιμήσεων ή η χρήση της λογικής της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash.

8.4 Αντιρρήσεις στον Rubinstein

Το μόνο που χρειάζεται να πούμε είναι ένα σχόλιο για τον καινοτόμο τρόπο με τον οποίο ο Rubinstein χρησιμοποιεί τις ΕΣΠ για να λύσει το δυναμικό διαπραγματευτικό παίγνιο με τρόπο που, ουσιαστικά, επαληθεύει την λύση Nash. Αυτή η καινοτόμα μεταμφίεση των ΕΣΠ παίρνει την μορφή τριών έντονα αμφισβητήσιμων υποθέσεων:

(α) Κρυφή Υπόθεση: Μια ακόμα εφαρμογή της υπόθεσης των ευθυγραμμισμένων με συνέπεια πεποιθήσεων ΕΣΠ (ή των κοινών αρχικών κατανομών) σύμφωνα με την οποία και οι δύο οι παίκτες γνωρίζουν ότι, σε μια κοινά γνωστή χρονική στιγμή m, θα καταλήξουν σε συμφωνία για V και $1 - V$ αντίστοιχα.
(β) Την Υπόθεση των Διαχρονικά Συνεπών Προσδοκιών, που τους καθιστά ικανούς αλλά και πρόθυμους (α) να εκμαιεύσουν μέσω της λογικής της προς- τα-πίσω επαγωγής κατά Nash τα μερίδια που πρέπει να αποδεχθούν εξ αρχής, (β) να αποδεχθούν ότι τα μερίδια αυτά δεν θα είναι διαφορετικά από εκείνα στα οποία θα συμφωνούσαν μετά από m γύρους (επίπονων) διαπραγματεύσεων (V και $1 - V$ αντίστοιχα), (γ) να συμφωνήσουν ότι είναι καλύτερα και για τους δύο να αποδεχθούν αυτά τα μερίδια αμέσως ($t = 1$), αποφεύγοντας έτσι το κόστος της καθυστέρησης-σύγκρουσης.
(γ) Την υπόθεση ότι τα ΠΣΑ των διαπραγματευτών παραμένουν σταθερά διαχρονικά.

Με την Κρυφή Υπόθεση περί ευθυγραμμισμένων με συνέπεια πεποιθήσεων, όσον αφορά το μελλοντικό στάδιο (m) όπου οι διαπραγματευτές μας θα διαμορφώσουν συνεπείς προσδοκίες για την μεταξύ τους συμφωνία (δηλαδή, για τη διανομή V και $1 - V$), ο Rubinstein εισήγαγε, πονηρά, ένα «τελικό» στάδιο στο διαπραγματευτικό παίγνιο (στάδιο m), το οποίο δίνει στην λογική της προς τα πίσω επαγωγής κατά Nash το στήριγμα που χρειάζεται σε μια μελλοντική χρονική στιγμή προτού αρχίσει να ξεδιπλώνεται προς τα πίσω (από $t = m$ σε $t = m - 1$, σε $t = m - 2$, ... σε $t = 1$) (βλ. Διαγράμματα 8.1 & 8.2)

Η συγκεκριμένη «καινοτομία», λίγο διαφορετικά διατυπωμένη, είναι ότι ο Rubinstein χρησιμοποιεί την πιο ακραία μορφή ΕΣΠ για να επιβάλει ένα πεπερασμένο «τέλος» ($t = m$) σε ένα δυναμικό παίγνιο το οποίο πολύ-διαφημίστηκε ως μη πεπερασμένο (όσον αφορά τον αριθμό των σταδίων που μπορεί να χρειαστεί η διαπραγμάτευση). Σύγκρινε την «καινοτομία» αυτή με την παρουσίαση της ΥΤΙΝ στην είχαμε υποθέσει ένα εξωτερικά καθορισμένο τέλος του παιγνίου οπότε και συνδυάσαμε την ΚΓΟ με την λογική της προς τα πίσω επαγωγής για να προκύψει η λογική της προς τα πίσω επαγωγή κατά Nash και η επακόλουθη ΥΤΙΝ.

Ο Rubinstein, αντίθετα, μας επιφυλάσσει διπλή δόση ΕΣΠ: Πρώτον, χρησιμοποιεί τις ΕΣΠ για να υποθέσει πως, αν και η διαπραγματευτική διαδικασία μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον, είναι ουσιαστικά πεπερασμένη! Το μικρό αυτό θαύμα επιτυγχάνεται υποθέτοντας ότι υπάρχουν ευθυγραμμισμένες με συνέπεια πεποιθήσεις (ΕΣΠ) όσον αφορά το μελλοντικό στάδιο m στο οποίο οι προσδοκίες των παικτών θα συγκλίνουν και άρα θα επέλθει συμφωνία. Δεύτερον, με «δεδομένο» στο στάδιο m, θέτει σε λειτουργία την λογική της προς τα πίσω επαγωγή κατά Nash με τον παραδοσιακό, άκρως προβληματικό, τρόπο) και με μοναδικό στόχο να μην αφήσει τις πεποιθήσεις να περιπλανώνται πέρα από την τροχιά κάποιας ισορροπίας τύπου Nash (ΥΤΙΝ, πιο συγκεκριμένα). Με όλα αυτά τα αξιώματα ως βάση, αποδεικνύει έξοχα πως υπάρχει μόνο μια ΥΤΙΝ, πως η συμφωνία θα είναι ακαριαία, και πως ο Nash (1950) (που, δεν πρέπει να ξεχνάμε, ήταν ο πρώτος διδάξας όσον αφορά το αξίωμα των ΕΣΠ) είχε βρει την σωστή λύση.

Ας έλθουμε τώρα στις δύο άλλες υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται η λύση Rubinstein [(β) και (γ), πιο πάνω]. Μοιάζουν να είναι απλές συνθήκες λογικής συνέπειας, και, συνεπώς, ευλογοφανείς. Δεν είναι όμως έτσι. Αν ενδιαφερόμαστε πραγματικά να κατανοήσουμε την διαπραγματευτική διαδικασία, αξίζει να σταθούμε στην έννοια των (β) και (γ). Τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά όσο τα παρουσιάζει ο Rubinstein, τουλάχιστον στην πράξη. Όποιος έχει εμπλακεί σε έντονες διαπραγματεύσεις (ακόμα και ενδοοικογενειακές) γνωρίζει από πρώτο χέρι ότι συχνά αποκτούν μια δική τους δυναμική, η οποία αλληλεπιδρά με την ψυχολογία μας. Η πορεία των διαπραγματεύσεων συχνά αλλάζει τις αρχικές προθέσεις μας. Οι υποθέσεις (β) και (γ) αγνοούν την πιθανότητα οι παίκτες να αποδίδουν φθίνουσα σημασία στις υλικές (δηλ. χρηματικές) αποδόσεις καθώς η διαπραγμάτευση προχωρεί (ιδίως όταν οι αντίπαλοι αποδεικνύονται περισσότερο δύστροποι από ό,τι αναμενόταν) και, αντίθετα, να δίνουν όλο και μεγαλύτερη έμφαση στην επιθυμία να τους διδάξουν τον αντίπαλο ένα «μάθημα» (σε ακραίες περιπτώσεις, να τους «τσακίσουν»). Αγνοεί ακόμα την πιθανότητα οι παίκτες να μπλοφάρουν, αποκλίνοντας συνειδητά από της συμπεριφορά ισορροπίας.

Η ψυχολογική αλληλεπίδραση αποκλείεται, πράγματι, από τον Rubinstein και την Θεωρία Παιγνίων γενικότερα. Είναι κατανοητό ότι οι Nash και Rubinstein θέλησαν να λύσουν το διαπραγματευτικό πρόβλημα στη απλούστερη του μορφή, απαλλαγμένο από ψυχολογικές διαστάσεις τέτοιου είδους. Για αυτό, υποθέσεις όπως η (γ) παραπάνω δεν επιδέχονται ιδιαίτερης κριτικής (αν και στην πράξη μπορεί κάλλιστα τα ΠΣΑ των παικτών να αλλάζουν από στάδιο σε στάδιο). Το φως της κριτικής πέφτει λοιπόν έντονο στις υποθέσεις (α) και (β).

Με την υπόθεση (α) δεν θα ασχοληθούμε άλλο. Αρκεί να την «ξεσκεπάσει» κανείς, να πάψει να είναι Κρυφή Υπόθεση για να δει ο αναγνώστης ότι λογικά είναι. παρατραβηγμένη. Θα στραφούμε λοιπόν στην υπόθεση (β) με ένα παράδειγμα που αναδεικνύει το μέγα πρόβλημα που δημιουργεί στην ανάλυση διαπραγματευτικής συμπεριφοράς. Συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στο τι θα συμβεί αν ορθολογιστής διαπραγματευτής αποφασίσει να αποκλίνει από την διαπραγματευτική συμπεριφορά ισορροπίας ΥΤΙΝ την οποία προκρίνει ο Rubinstein. Έτσι ώστε να εστιάσουμε αποκλειστικά στα λογικά προβλήματα που προκύπτουν από την υπόθεση (β), θα αποδεχτούμε για τώρα τις υποθέσεις (α) και (γ).

Έστω ότι $V = 0{,}6$. Βέλτιστη στρατηγική του Γιώργου (σύμφωνα με τη θεωρία του Rubinstein) είναι να αποδεχθεί το 40% της πίτας που θα του προτείνει η Μαρία στο πρώτο στάδιο. Τι θα συμβεί όμως αν ο Γιώργος απορρίψει την προσφορά της Μαρίας απαιτώντας, λόγου χάρη, 60% στο γύρο $t = 2$; Για να έχει νόημα αυτή η διαπραγματευτική στρατηγική θα πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες: (α) πρέπει να υπάρχει μερίδιο W ($> 0{,}4$) της πίτας το οποίο, στο στάδιο $t = 2$, να αξίζει για το Γιώργο περισσότερο από το 40% της πίτας στο στάδιο $t = 1$. Και (β) ο Γιώργος πρέπει να έχει ένα ισχυρό επιχείρημα να πιστεύει ότι είναι δυνατόν να αποσπάσει τουλάχιστον W στο $t = 2$, αν απορρίψει την προσφορά V στο στάδιο $t = 1$ και αντιπροτείνει στη Μαρία να κρατήσει αυτός το 60%.

Η συνθήκη (α) είναι εύκολο να ικανοποιηθεί, υπό τον όρο ότι το ΠΣΑ του Γιώργου δεν είναι πολύ υψηλό. Η συνθήκη (β), όμως, είναι πολύ πιο περίπλοκη. Συγκεκριμένα, προϋποθέτει ότι η απροσδόκητη απόρριψη από το Γιώργο της προσφοράς της είναι, ως εμπειρία, αρκετή για να προκαλέσει στη Μαρία την «αναστάτωση» εκείνη (ίσως τον πανικό) που θα την ωθήσει σε υποχωρήσεις που δεν προβλέπονται από το υπόδειγμα Rubinstein. Η εξέλιξη αυτή θυμίζει την τακτική υποχώρηση ενός στρατού που, αίφνης, και παρά την ανωτερότητά του, αντιλαμβάνεται ότι ο εχθρός είναι αποφασισμένος να πεθάνει παρά να υποχωρήσει (όπως υπαγορεύει ο ορθολογισμός). Αν η απόρριψη από το Γιώργο της προσφοράς $1 - V$ στο στάδιο $t = 1$ μπορεί να εμπνεύσει αυτό το είδος φόβου στη Μαρία, και την οδηγήσει σε ανάλογη υποχώρηση, τότε δεν είναι καθόλου παράλογο ο Γιώργος να αποκλίνει από την πορεία ισορροπίας της ΥΤΙΝ του Rubinstein.

Ξεκινήσαμε την προ-προηγούμενη παράγραφο με την υπόθεση ότι οι διαπραγματευτές τελούν υπό κοινή γνώση του $V = 0{,}6$. Προχώρησα στο επιχείρημα πως ο Γιώργος δύναται ορθολογικά να απορρίψει την προσφορά $1 - V = 0{,}4$ που συνάδει με αυτή την κοινή γνώση. Ουσιαστικά, εισήγαγα την έννοια της μπλόφας. Από καθαρά τεχνικής πλευράς, το επιχείρημα αυτό εγείρει αντιρρήσεις στην υπόθεση (β) παραπάνω (στην Υπόθεση των Διαδοχικά Συνεπών Προσδοκιών). Με το να αποκλίνει από την πορεία της ισορροπίας ΥΤΙΝ, ο Γιώργος «σπρώχνει» το παίγνιο σε μια πορεία συμπεριφοράς για την οποία η ΥΤΙΝ δεν έχει τι να πει. Γιατί είναι αναγκαστικά ανορθολογική αυτή στρατηγική του Γιώργου; Αν τον βοηθήσει να πείσει την Μαρία να του δώσει αρκετά περισσότερο μερίδιο από το 0,4 που του εξασφαλίζει η ΥΤΙΝ, η αποκλίνουσα της ΥΤΙΝ στρατηγική είναι απόλυτα λογική. Το γεγονός ότι δεν μπορεί κανείς να του εγγυηθεί πως η στρατηγική αυτή θα πετύχει τον στόχο της, δεν σημαίνει ότι πρέπει να αποκλειστεί.

Δεν χρειάζεται να προσθέσω περισσότερα. Το μόνο επί πλέον σχόλιο είναι πως η Υπόθεση των Διαδοχικά Συνεπών Προσδοκιών, όπως μόλις φάνηκε, μας επιστρέφει στην κριτική που υπέστη η ΥΤΙΝ. Και πως η κριτική αυτή, απαντήθηκε με τα «τρέμουλα» του Selten. Έτσι κι εδώ η κριτική στον Rubinstein απαντάται και πάλι με επιχειρήματα που επιστρατεύουν τα ίδια «τρέμουλα».

8.5 Η υπεράσπιση της λύσης Rubinstein βάσει των «τρέμουλων»

Η παραπάνω κριτική στον Rubinstein προκαλεί την υπεράσπισή του στη βάση των «τρέμουλων». Έστω πως τα ΠΣΑ των διαπραγματευτών μας δίδονται ως $\alpha = \beta = 1/2$. Το υπόδειγμα Rubinstein προβλέπει, σε αυτή την περίπτωση, ότι η Μαρία θα απαιτήσει $V = 2/3$ της πίτας και ο Γιώργος θα αποδεχθεί αμέσως την απαίτησή της, κρατώντας για τον εαυτό του το υπόλοιπο ένα τρίτο. Ας εξετάσουμε προσεκτικά την «ανατρεπτική» στρατηγική του Γιώργου να απορρίψει τη συμβουλή του Rubinstein και, αντί αυτής, να επιχειρηματολογήσει ως εξής;

> Σκέφτομαι να απορρίψω το 1/3 της πίτας, και να επιμένω ανυποχώρητα στην ισότιμη (50-50) διανομή της πίτας. Κάποια στιγμή η Μαρία θα καταλάβει ότι δεν είμαι διατεθειμένος να δεχθώ λιγότερο από το 50% της πίτας και θα αναθεωρήσει την τιμή του 1-V από 1/3 σε 1/2 αφού αυτή είναι η βέλτιστη απάντηση της στο μήνυμα που της στέλνω.

Σύμφωνα με την ΥΤΙΝ του παιγνίου, το πιο πάνω είναι ευσεβής πόθος. Ο λόγος είναι ότι η θεωρία αποκλίσεων από την ΥΤΙΝ, η οποία υπο-στηρίζει την ΥΤΙΝ, υποθέτει πως κάθε απόκλιση από την ΥΤΙΝ (δηλαδή από τη στρατηγική Rubinstein) πρέπει να οφείλεται σε μικρά σφάλματα ή «τρέμουλα». Αν είναι έτσι, και μάλιστα τα «τρέμουλα» είναι στατιστικά ασυσχέτιστα μεταξύ τους, τότε αποτελεί κοινή γνώση ότι καμία απόκλιση δεν μπορεί να είναι προϊόν λογικής σκέψης' και όταν παρατηρούνται τέτοιες αποκλίσεις, αυτές αποδίδονται σε «κάποιον απροσδιόριστο ψυχολογικό μηχανισμό» (Selten, 1975,).

Στην παρούσα περίπτωση, η ουσία είναι πως τα «τρέμουλα» εισαγάγουν την ιδέα πως δεν υπάρχει απρόβλεπτη διαπραγματευτική κίνηση, αφού κάθε κίνηση έχει *κάποια* πιθανότητα να επιλεγεί εσφαλμένα από έναν διαπραγματευτή. Αυτό σημαίνει πως όταν ο Γιώργος απορρίπτει την προσφορά της Μαρίας, που του δίνει το $1/3$ της πίτας, η Μαρία μπορεί να θεωρεί την απόρριψη αυτή ως απροσδόκητη, αλλά όχι ανεξήγητη. «Ο ανταγωνιστής μου», σκέπτεται η Μαρία, «πρέπει να έχει διαπράξει ένα από αυτά τα σφάλματα. Θα το αγνοήσω, λοιπόν, επειδή η πιθανότητα σφάλματος είναι πολύ μικρή και δεν συσχετίζεται μεταξύ των σταδίων της διαδικασίας. Την επόμενη φορά θα δεχθεί το $1/3$ αν και μιας μικρότερης πίτας».

Υπό αυτές τις συνθήκες, ο Γιώργος δεν θα διανοηθεί να απορρίψει το *1/3* της πίτας που του προσφέρει ο Rubinstein (1982) ο οποίος, έτσι, επικαλείται την ισορροπία Nash τρεμάμενου χεριού (ΙΝΤΧ) του Selten (1975) για να υπερασπιστεί την λύση του διαπραγματευτικού προβλήματος την οποία έκτισε πάνω στην συγκεκριμένη ΥΤΙΝ. Ως άσκηση (ίσως ως επανάληψη της έννοιας των ΙΝΤΧ) αξίζει να δούμε την σχέση ΙΝΤΧ με ΥΤΙΝ αυτή τη φορά στο διαπραγματευτικό παίγνιο του Rubinstein. Η πλήρης υπεράσπιση της λύσης Rubinstein βάσει της ΙΝΤΧ έχει ως εξής: Έστω ότι ($0 < x < 1$) είναι το μερίδιο της πίτας το οποίο παίρνει η Μαρία. Ας δούμε το πιο κάτω ζεύγος στρατηγικών:

Στρατηγική της Μαρίας: Στις περιόδους 1, 3, 5, ..., απαιτεί μερίδιο x. Στις περιόδους 2, 4, 6, ..., αποδέχεται την πρόταση του Γιώργου μόνον εάν αυτή δεν είναι μικρότερη από x.

Στρατηγική του Γιώργου: Στις περιόδους 1, 3, 5, ..., αποδέχεται κάθε αξίωση της Μαρίας εάν αυτή δεν είναι μεγαλύτερη από x. Στις περιόδους 2, 4, 6, ..., προτείνει στη Μαρία να πάρει x.

Οι στρατηγικές αυτές είναι σε ισορροπία Nash (ανεξάρτητα από την τιμή του x), καθώς η μια είναι βέλτιστη απάντηση στην άλλη. Υπόβαθρό τους είναι η απειλή ότι κάθε απαίτηση της Μαρίας να πάρει περισσότερο από x θα απορριφθεί, και ότι κάθε προσπάθεια του Γιώργου να μειώσει το μερίδιο της Μαρίας κάτω από x, επίσης, θα απορριφθεί. Το ερώτημα είναι: Είναι αξιόπιστες οι απειλές αυτές;

Ο Rubinstein υπερασπίστηκε τη λύση του βάσει της ΙΝΤΧ δείχνοντας ότι μόνο το μερίδιο $x = V = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$ συνάδει με μια αξιόπιστη απειλή. Για να κατανοηθεί καλύτερα το σημείο αυτό, ας υποθέσουμε ότι έχει πράγματι υιοθετηθεί το ζεύγος των πιο πάνω στρατηγικών, αλλά ότι κάποιο «σφάλμα» στο γύρο $t = 1$ οδηγεί την Μαρία να απαιτήσει, χωρίς να το θέλει) μερίδιο $x + \varepsilon$ (όπου ε είναι κάποιος πολύ μικρός θετικός αριθμός, το «τρέμουλο») αντί του x. Αν το ζεύγος των ανωτέρω στρατηγικών είναι σε ΙΝΤΧ, αυτό σημαίνει ότι μπορούν να αντέξουν μικρά «τρέμουλα» (δηλαδή, μικρές τιμές του ε), οπότε ο Γιώργος θα μείνει αμετακίνητος στη θέση του, και δεν θα υποχωρήσει στην απαίτηση της Μαρίας να πάρει $x + \varepsilon$. Αν, όμως, οι στρατηγικές δεν είναι σε ΙΝΤΧ, τότε θα καταρρεύσουν (και θα εγκαταλειφθούν από τους διαπραγματευτές) αμέσως μόλις εμφανιστεί η πιθανότητα σφαλμάτων (δηλ. $\varepsilon > 0$). Ο Rubinstein υποστηρίζει ότι μια «καλή» διαπραγματευτική λύση πρέπει να είναι ισορροπία Nash τρεμάμενου χεριού (ΙΝΤΧ) και αποδεικνύει ότι η λύση του είναι η μόνη που πράγματι αποτελεί ΙΝΤΧ!

Ας δούμε την απόδειξη: Μετά την απαίτηση της Μαρίας να πάρει $x + \varepsilon$ (όταν αυτή είχε πρόθεση να ζητήσει μόνο x), ο Γιώργος μπορεί να απορρίψει την απαίτησή της, ελπίζοντας ότι στο επόμενο στάδιο θα αποδεχθεί την απαίτηση της Μαρίας που θα είναι ακριβώς x. Πράγματι, ο Γιώργος έχει βάσιμους λόγους να αναμένει αυτή την αναθεώρηση της στάσης της Μαρίας, μιας και η τωρινή απαίτησή της για μερίδιο $x + \varepsilon$ είναι αποτέλεσμα παροδικού «τρέμουλου» ή σφάλματος το οποίο θα επαναληφθεί στο επόμενο στάδιο με απειροελάχιστη πιθανότητα (θυμήσου πως τα «τρέμουλα» είναι στατιστικά ασυσχέτιστα από ένα στάδιο στο άλλο). Άρα, στο επόμενο στάδιο η Μαρία θα απαιτήσει x και όχι $x + \varepsilon$.

Όμως, δεν πρέπει να ξεχνάμε πως η καθυστέρηση επίτευξης συμφωνίας κοστίζει και, συνεπώς, η αποτίμηση του μεριδίου $(1 - x)$ από τον Γιώργο στο στάδιο $t = 2$ είναι μικρότερη από εκείνη του μεριδίου $(1 - x - \varepsilon)$ στο στάδιο $t = 1$. Για την ακρίβεια, $(1 - x - \varepsilon) > (1 - x)$. Έτσι, αν το «τρέμουλο» ε είναι αρκετά μικρό, η καλύτερη απάντηση του Γιώργου είναι να αποδεχθεί την ελαφρά φουσκωμένη αξίωση της Μαρίας στο στάδιο $t = 1$. Η στρατηγική, επομένως, του Γιώργου να απειλήσει τη Μαρία ότι θα είναι κατηγορηματικά αντίθετος με κάθε απαίτησή της να πάρει μερίδιο της πίτας μεγαλύτερο από x δεν είναι αξιόπιστη. Το ζεύγος των πιο πάνω στρατηγικών, επομένως, δεν αποτελεί ΙΝΤΧ. Η υπεράσπιση του Rubinstein ολοκληρώνεται με την απόδειξη ότι το μόνο ζεύγος στρατηγικών που είναι σε ισορροπία τρεμάμενου χεριού είναι εκείνο που υποδεικνύει η διαπραγματευτική λύση του, δηλαδή, $x = V = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$.

Το ότι αυτές οι αποδείξεις είναι αισθητικά όμορφες και λογικά άρτιες δεν το αμφισβητεί κανείς. Αυτό που συστηματικά αμφισβητούμε είναι πως θεμελιώνουν την άποψη ότι οι ορθολογιστές πρέπει αναγκαστικά να σκέφτονται έτσι. Ναι, είναι αλήθεια πως η λύση Rubinstein στο διαπραγματευτικό πρόβλημα είναι εσωτερικά συνεπής. Η λέξη-κλειδί εδώ είναι το «εσωτερικά». Η συνέπεια της λογικής του Rubinstein εξαρτάται πλήρως από την υπόθεση πως η εκτός ισορροπίας (ΥΤΙΝ) συμπεριφορά οφείλεται σε τυχαία, στατιστικά «ασυσχέτιστα» τρέμουλα. Πρόκειται για μια υπόθεση που αν την κάνουμε θα καταλήξουμε, θέλοντας και μη, στην αγκαλιά του Rubinstein. Όμως, και εδώ έγκειται η αντίρρησή τόσο στον Rubinstein όσο και στον πρώτο διδάξαντα, στον Nash: πρόκειται για μια υπόθεση που σε καμία περίπτωση δεν μας την συνιστά ο ορθολογισμός. Δεν την απορρίπτει αλλά και δεν τη επιβάλλει.

Πιο συγκεκριμένα, σε περίπτωση απόκλισης του Γιώργου από την ΥΤΙΝ (π.χ., η απόρριψη από το Γιώργο, στο στάδιο $t = 1$, της απαίτησης της Μαρίας να πάρει μερίδιο V από την πίτα) ο ορθολογισμός δεν μας λέει γιατί σώνει και καλά είναι υποχρεωτικό ότι η Μαρία θα εκλάβει την συμπεριφορά του Γιώργου ως «σφάλμα» το οποίο μάλιστα δεν προϊδεάζει για αντίστοιχα παρόμοια «σφάλματα» σε μελλοντικά στάδια της διαπραγμάτευσης. Φυσικά, η Μαρία μπορεί κάλλιστα να αγνοήσει (όπως υποθέτει ο Rubinstein) την άρνηση του Γιώργου να δεχθεί το μερίδιο $1 - V$, στο στάδιο $t = 1$, να μην αναγνωρίσει σε αυτήν κάποιο σημάδι που σηματοδοτεί μελλοντική σκλήρυνση της διαπραγματευτικής του θέσης. Αυτό όμως δεν αρκεί στον Rubinstein! Χρειάζεται κάτι παραπάνω: Να συμφωνήσουμε μαζί του πως η Μαρία πάντα θα αγνοεί τέτοιες αρνήσεις και πως θα τις ερμηνεύει συστηματικά ως ασυσχέτιστα «τρέμουλα». Με αυτό είναι δύσκολο να συμφωνήσουμε για έναν απλούστατο λόγο: Μια τέτοια παραδοχή (από την πλευρά τόσο της Μαρίας όσο και την δική μας) για να είναι συστηματική πρέπει να υπαγορεύεται από κάποια αρχή του ορθολογισμού (όπως το $10 + 8 = 18$ υπαγορεύεται συστηματικά από τις αρχές της αριθμητικής). Τέτοια αρχή στην περίπτωση των ανατρεπτικών διαπραγματευτικών συμπεριφορών δεν υφίσταται!

Πράγματι, δεν είναι καθόλου ενάντια στον ορθολογισμό η εξής προοπτική: Η Μαρία παρατηρεί την απόρριψη από το Γιώργο της προσφοράς του $1 - V$ στο στάδιο $t = 1$ και την ερμηνεύει σαν μια ένδειξη «υποδειγματικής» απόκλισης από την ΥΤΙΝ του Rubinstein με την οποία ο Γιώργος «κάτι θέλει να της σηματοδοτήσει». Σε αυτή την περίπτωση, η Μαρία ορθολογικότατα θα επιλέξει να παραχωρήσει μεγαλύτερο μερίδιο στο Γιώργο από το $1 - V$ που προβλέπει ο Rubinstein. Και αν ο Γιώργος έχει προβλέψει κάτι τέτοιο, θα έχει ορθολογικότατα απορρίψει το μερίδιο $1 - V$ στο στάδιο $t = 1$. Συμπερασματικά, μια λύση ΥΤΙΝ (όπως αυτή του Rubinstein) μπορεί να ισχύει ή να μην ισχύει ... ορθολογικά. Το αν θα ισχύει ή όχι είναι ένα ζήτημα που λύνεται στην πράξη και δεν αποτελεί ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί αναλυτικά με την αυταρχική επιβολή του ενός ή του άλλου «σεναρίου» (δηλαδή, της ισορροπίας ΙΝΤΧ-ΥΤΙΝ από την μια ή του ανατρεπτικού σκεπτικού του Γιώργου από την άλλη).

Βλέπουμε ότι, αναγκαστικά, η συζήτηση επιστρέφει στο γνωστό θέμα των ΕΣΠ (και των ασυσχέτιστων τυχαίων «τρέμουλων») και της προβληματικής τους σχέσης με τον εργαλειακό ορθολογισμό ο οποίος, τελικά, δεν μπορεί να τις στηρίξει. Η ουσία είναι απλή: Για να αποφύγουμε την Απροσδιοριστία και να «λύσουμε» το διαπραγματευτικό πρόβλημα, πρέπει να προβούμε σε ηρωικές υποθέσεις (ή αξιώματα) που, όσο και να το θέλουμε, δεν υποστηρίζονται από τον εργαλειακό ορθολογισμό. Το έντιμο συμπέρασμα είναι πως το διαπραγματευτικό πρόβλημα δεν λύθηκε. Απλώς καταγράψαμε (και αυτό δεν είναι λίγο) τι θα έπρεπε να μας εξασφαλίζει ο ορθολογισμός για να υπάρχει λύση. Βέβαια, για να παραδεχθούν οι θεωρητικοί των παιγνίων κάτι τέτοιο, την στιγμή που το πλατύ κοινό έχει πιστέψει πως έχουν βρει την «λύση», χρειάζεται περισσότερος ηρωισμός από εκείνον που απαιτεί η υποστήριξη των αξιωμάτων τους (π.χ. των ΕΣΠ)!

Βιβλιογραφικές αναφορές

- **[1]** Εισαγωγή στις Πιθανότητες – Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος 1, Μάρκου Β. Κούτρα Καθηγητή Πανεπιστημίου Πειραιώς, Αθήνα 2005 (Β' Έκδοση)

- **[2]** Εισαγωγή στις Πιθανότητες – Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος 2, Μάρκου Β. Κούτρα Καθηγητή Πανεπιστημίου Πειραιώς, Αθήνα 2005 (Β' Έκδοση)

- **[3]** Μαθηματικά Αποφάσεων - Ε.Χ. Φούντας & Α.Γ. Βλάχος, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς 2007

- **[4]** Ασκήσεις Μαθηματικού Προγραμματισμού & Θεωρία Παιγνίων 1 - Ε.Χ. Φούντας & Α.Γ. Βλάχος, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς 2007

- **[5]** Πτυχιακή Εργασία «Εγωιστική Δρομολόγηση και το Κόστος Αναρχίας – Selfish Routing and The Price of Anarchy» - Κοσμίδης Παναγιώτης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς 2010

- Nash J. F., «The Bargaining Problem», *Econometrica,* v. 28 1950.

- Nash J. F., «Noncooperative Games», Annals of Mathematics, v.54,1951.

- Von Neunann J., Morgenstern O., «Theory of Games and Economic Behavior», Princeton : Princeton University Press, 1944.

- Kalai E., Smorodinsky M., «Other Solutions to Nash's Bargaining Problem», *Econometrica, v. 43, 1975.* Βαρουφάκης Γ., Θεωρία Παιγνίων, ''

- Kalai E., «Proportional Solutions to Bargaining Situations : Inter – personal Utility Comparisons», *Econometrica, v. 45, 1997.*

- Rubimstein A., Safra Z., Thomson W., «On the Interpretation of the Nash Bargaining Solution and its Extension to Non – Expected Utility Preferences», *Econometrica, v.60 ,1992.*

- Border K., Segal U., «Preferences over Solutions to the Bargaining Problem», *Econometrica*, v.65,1997.

- Chun Y., Thomson W., «Monotonicity Properties of Bargaining Solutions When Applied To Economics», Mathematical Social Sciences, v.15 1988.

- Chun Y., Thomson W., «Bargaining With Uncertain Disagreement Points», *Econometrica*, v.58,1990.

- Chun Y., Thomson W., «Bargaining Problems With Claims», Social Sciences, v.24 1992.

- Βαρουφάκης Γ., Θεωρία Παιγνίων, «*Η θεωρία που φιλοδοξεί να ενοποιήσει τις κοινωνικές επιστήμες*», εκ.Gutenberg Αθήνα,2007.

- Κοτταρίδη Κ., Σιουρούνης Γ., «Θεωρία Παιγνίων, αφιέρωμα στον John Nash» εκ. Ευρασία, Αθήνα 2002.