

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ & ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ**  
**ΜΠΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**“ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΠΡΟ-ΔΙΑΚΑΝΟΝΙΣΜΟΥ ΣΕ**  
**ΣΥΜΦΩΝΙΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ-**  
**ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ”**

ΤΣΟΥΡΟΥΝΑΚΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΜΠΕΝΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ(επιβλέπων καθηγητής)  
ΑΝΤΖΟΥΛΑΤΟΣ ΑΓΓΕΛΟΣ  
ΤΣΙΡΙΤΑΚΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ



ΙΟΥΛΙΟΣ 2003

## Σύνοψη

Η εργασία αυτή έγινε με σκοπό τη μέτρηση του κινδύνου προ-διακανονισμού σε συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων. Ειδικότερα υπολογίστηκε ο παράγοντας έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο, ως μέσος όρος για όλη τη διάρκεια ενός τέτοιου συμβολαίου. Η προσομοίωση των επιτοκίων έγινε με μοντέλο επιτοκίων συνεχούς χρόνου και συγκεκριμένα του Vasicek, ενώ η αποτίμηση του “swap” έγινε χρησιμοποιώντας τις τιμές των εντόκων που προκύπτουν από το υπόδειγμα του Vasicek, για συγκεκριμένες ληκτότητες, και με εκθετική παρεμβολή για τον υπολογισμό των τιμών στις υπόλοιπες ληκτότητες.

### Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Αλέξανδρο Μπένο, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Τραπεζικής & Χρηματοοικονομικής Διοικητικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη βοήθεια του στην επιλογή του θέματος, την συμβολή του στη συλλογή στοιχείων καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη διάρκεια υλοποίησης της εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα Χριστίνα Χρίστου, Επίκ. Καθηγήτρια του τμήματος Τραπεζικής & Χρηματοοικονομικής Διοικητικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς, η οποία προσέφερε ανεκτίμητη βοήθεια για την υλοποίηση της προσομοίωσης κατά Monte-Carlo. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ Νικόλαο Αλμπάνη, για την πολύτιμη βοήθεια που προσέφερε αναφορικά με την αποτίμηση της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων.

## Εισαγωγή

Η εργασία αυτή γίνεται με στόχο την μέτρηση του κινδύνου προ-διακανονισμού (pre-settlement risk) ή κινδύνου αντικατάστασης<sup>1</sup> (replacement cost risk) σε συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (interest rate swaps). Ο συγκεκριμένος κίνδυνος έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων<sup>2</sup>, όχι όμως ακαδημαϊκών ερευνών. Για αυτό και η μεθοδολογία μας θα βασιστεί σε προηγούμενες πρακτικές εργασίες τέτοιου είδους, ενώ από την πλευρά μας η προσπάθεια θα επικεντρωθεί στην μοντελοποίηση, εκτίμηση, αξιολόγηση και τελικά την μέτρηση του κινδύνου.

Η διάρθρωση αυτής της εργασίας έχει την ακόλουθη μορφή. Κατ' αρχήν γίνεται ο διαχωρισμός σε θεωρητικό και πρακτικό μέρος. Στο θεωρητικό μέρος στην πρώτη ενότητα θα δώσουμε κάποιους ορισμούς για την έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, τις συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (interest rate swaps), τον κίνδυνο αντισυμβαλλόμενου (counter party risk) και τέλος τον κίνδυνο προ-διακανονισμού (pre-settlement risk), όπως αυτά ορίζονται στην διεθνή βιβλιογραφία. Επιπλέον θα αναφέρουμε κάποιες σκέψεις σε σχέση με την αντιστάθμιση του κινδύνου αυτού και πως ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα αντιμετωπίζει πρακτικά τέτοιου είδους προβλήματα.

Στην ενότητα 2 γίνεται μία εκτενής ανάλυση κάποιων μοντέλων επιτοκίων συνεχούς χρόνου και πως μέσω αυτών μπορούμε να προσεγγίσουμε την κίνηση των επιτοκίων. Επιπλέον γίνεται περιγραφή του οικονομετρικού πλαισίου μέσα στο οποίο θα κινηθούμε για να εκτιμήσουμε τους παραμέτρους ενδιαφέροντος και οι οποίοι θα λειτουργήσουν σαν εργαλεία για τα υπόλοιπα κομμάτια της εργασίας.

Στην τρίτη ενότητα κατασκευάζουμε μία συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων, την οποία και τιμολογούμε με συγκεκριμένες διαδικασίες, προκειμένου να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο και να προβούμε στην διεξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων. Στο τελευταία ενότητα γίνεται ακριβώς αυτό,

---

<sup>1</sup> BIS: "OTC DERIVATIVES: Settlement procedures and counterparty risk management", Βασιλεία Σεπτέμβριος 1998

<sup>2</sup> Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε: David Lawrence, "Modeling derivative counter party credit risk", Workshop, 22 Ιουνίου 2000 & Evan Picoult, "Measuring Pre-Settlement Credit Risk on a Portfolio Basis", Board of Governors of the federal Reserve System, 1996

δηλαδή η μέτρηση του παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο (CEF) και η καταγραφή κάποιων συμπερασμάτων καθώς και κάποιων σκέψεων για περαιτέρω έρευνα.

Στο δεύτερο κομμάτι αυτής της εργασίας μία σειρά αποτελεσμάτων σε συνδυασμό με πίνακες και διαγράμματα δίνουν μία εικόνα για όλα τα στάδια υλοποίησης της.

## ΜΕΡΟΣ I

**ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΠΡΟ-ΔΙΑΚΑΝΟΝΙΣΜΟΥ**

Στις μέρες μας οι λειτουργίες ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος είναι πολλαπλές, με αποτέλεσμα τα προϊόντα που προσφέρονται πλέον εκ μέρους τους να είναι πάρα πολλά. Παράλληλα όμως με την εξέλιξη τους και το έντονα ανταγωνιστικό πεδίο που δραστηριοποιούνται, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα αντιμετωπίζουν πλέον και αρκετούς κινδύνους, τους οποίους πρέπει να λαβαίνουν υπ' όψιν τους και να προσπαθούν να τους αντισταθμίσουν, για την περαιτέρω εύρυθμη και ομαλή λειτουργία τους. Οι κίνδυνοι που αντιμετωπίζει μία τράπεζα στην καθημερινή της λειτουργία και πρέπει να τους αντισταθμίσει είναι: κίνδυνος επιτοκίου, κίνδυνος αγοράς, πιστωτικός κίνδυνος, κίνδυνος στοιχείων εκτός ισολογισμού (off-balance-sheet risk), τεχνολογικός και λειτουργικός κίνδυνος, συναλλαγματικός κίνδυνος, κίνδυνος επικράτειας ή κίνδυνος χώρας, κίνδυνος ρευστότητας καθώς και κάποιος άλλος<sup>3</sup>. Ένας από τους πιο σημαντικούς είναι ο πιστωτικός κίνδυνος. Ο πιστωτικός κίνδυνος προέρχεται από την αδυναμία του αντισυμβαλλομένου να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του κυρίως λόγω πτώχευσης και χρεοκοπίας. Στην εργασία αυτή επειδή θα αναφερθούμε σε συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (IRS), θα διαχωρίσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο σε : 1) κίνδυνο προ-διακανονισμού, που συνήθως είναι κίνδυνος αντικατάστασης, και 2) σε κίνδυνο διακανονισμού ή αλλιώς σε κίνδυνο κεφαλαίου. Προτού αναπτύξουμε τους δύο αυτούς όρους, ας αναφερθούμε στον κίνδυνο αντισυμβαλλομένου (counterparty risk). Αυτός ορίζεται ως η πιθανότητα πραγματοποίησης ζημιών, λόγω αθέτησης εκ μέρους του αντισυμβαλλομένου, των υποχρεώσεων του, για αυτό και είναι πιστωτικός κίνδυνος.

Σε συναλλαγές ταυτόχρονης εκτέλεσης, που περιλαμβάνουν και ανταλλαγή τίτλων, υπάρχει ο κίνδυνος ο διακανονισμός των τίτλων να μην έχει γίνει μέχρι την προβλεπόμενη ημερομηνία παράδοσης τους. Επομένως μπορεί να δημιουργηθούν ζημιές, λόγω διαφοράς στη συμφωνηθείσα τιμή και στην τρέχουσα τιμή, όταν θα

---

<sup>3</sup> Anthony Saunders, "Financial institutions management", third edition

πραγματοποιηθεί ο διακανονισμός. Αυτός ο κίνδυνος είναι γνωστός ως κίνδυνος διακανονισμού και μπορεί να είναι ταυτόχρονα και πιστωτικός κίνδυνος αλλά και κίνδυνος ρευστότητας.

Στην περίπτωση που σε ένα παράγωγο συμβόλαιο, συνήθως έξω- χρηματιστηριακό (OTC), ο ένας αντισυμβαλλόμενος κάνει διακοπή πληρωμών πριν από την λήξη του και αθετήσει τις υποχρεώσεις του, ο άλλος αντισυμβαλλόμενος θα το κλείσει και θα κοιτάξει να το αντικαταστήσει με ένα ίδιο με κάποιον τρίτο. Αυτό ενέχει τον κίνδυνο ο αρχικός αντισυμβαλλόμενος που έχει το συμβόλαιο μετά την αθέτηση του άλλου, να υποστεί μία ζημία που προέρχεται από το γεγονός ότι πιθανόν να μην μπορεί να το αντικαταστήσει ακριβώς. Αυτός ορίζεται και ως κίνδυνος προ-διακανονισμού. Βέβαια αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που το συμβόλαιο έχει θετική αγοραία αξία τη στιγμή της διακοπής των πληρωμών για τον αντισυμβαλλόμενο που δεν έκανε την παύση αυτή. Εδώ αξίζει να τονίσουμε ότι υπάρχουν δύο απόψεις όσον αφορά το παραπάνω<sup>4</sup>, με επικρατούσα αυτήν όπου ο υπαίτιος της διακοπής του συμβολαίου ακόμα και αν εκείνη τη στιγμή κερδίζει, δεν λαμβάνει τη διαφορά. Αντίθετα υπάρχουν αρκετοί που υποστηρίζουν το αντίθετο, με το επιχείρημα ότι η χρεοκοπία κάποιου μπορεί να είναι ανεξάρτητη από τον πιστωτικό κίνδυνο του εν λόγω συμβολαίου, άρα ο κάτοχος του ακόμα και αν δήλωσε αδυναμία πληρωμής πρέπει να λάβει την διαφορά. Εμείς θα υιοθετήσουμε την πρώτη άποψη και επομένως στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα θεωρούμε ότι στις περιπτώσεις που το συμβόλαιο έχει αρνητική αξία για την τράπεζα, ο κίνδυνος προ-διακανονισμού θα είναι 0. Με βάση και την παραπάνω υπόθεση θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο για την μέτρηση του κινδύνου προ-διακανονισμού:

$$\mathbf{PSE = \max[CMTM + PCE(MLIV), 0] \quad (\alpha)}$$

Όπου, PSE: pre-settlement exposure( έκθεση στον κίνδυνο προ-διακανονισμού)

CMTM : current mark to market(τρέχουσα αξία του συμβολαίου)

PCE: potential credit exposure(πιθανή έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο)

ή MLIV: maximum likely increase in value (μέγιστη πιθανή αύξηση της αξίας)

$$\mathbf{MLIV = P * CEF \quad (\beta)}$$

Όπου, P: principal(αρχικό υποθετικό κεφάλαιο)

CEF: credit exposure factor( παράγοντας έκθεσης στον πιστ. κίνδυνο)

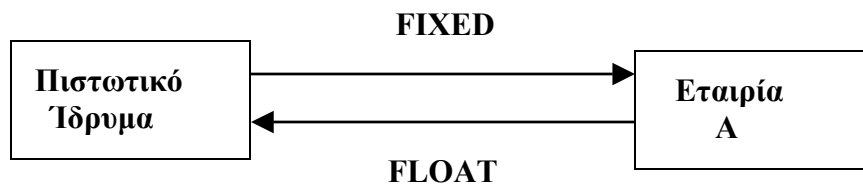
<sup>4</sup> BIS: "OTC DERIVATIVES", Σεπτέμβριος 1998, σελ.12, όπως επίσης και Abon Mozumdar, "Default risk of interest rate swaps", Μάρτιος 1999, σελ. 7

Η “μέγιστη πιθανή αύξηση της αξίας” (MLIV), ή καλύτερα ο παράγοντας έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο (CEF), είναι ουσιαστικά και το μέγεθος το οποίο θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε μέσα από αυτήν την εργασία, και συγκεκριμένα για συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (IRS).

Μιας και το αντικείμενο έρευνας θα είναι οι συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων, ας αναφέρουμε κάποια στοιχεία για αυτές. Οι συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων γενικά ανήκουν στα εξωχρηματιστηριακά (OTC: over the counter) συμβόλαια, η ανάπτυξη των οποίων τα τελευταία χρόνια είναι τρομακτική. Τέτοια προϊόντα είναι οι συμφωνίες ανταλλαγής πληρωμών (swaps), τα προθεσμιακά συμβόλαια (forwards) καθώς και κάποια δικαιώματα (options). Για παράδειγμα, το Δεκέμβριο του 2000, το συνολικό ενεργητικό των αμερικανικών τραπεζών ήταν 5 τρις\$ και των Ευρωπαϊκών πάνω από 13 τρις\$ , ενώ στην παγκόσμια αγορά παραγώγων η «υποθετική» αξία ξεπερνούσε τα 84 τρις\$. Όπως γίνεται αντιληπτό, η αύξηση των OTC προϊόντων επηρεάζει άμεσα και τις τράπεζες καθώς αυξάνει τόσο τον πιστωτικό τους κίνδυνο, όσο και την συνολική τους έκθεση σε κίνδυνο. Αυτό γιατί συνήθως οι τράπεζες είτε συμμετέχουν απευθείας σε τέτοια προϊόντα, είτε μεσολαβούν μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων επιχειρήσεων. Καταρχήν να διευκρινίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε «εξωχρηματιστηριακά συμβόλαια» (OTC). OTC είναι μία μέθοδος συναλλαγής που δεν υπάρχει ανταλλαγή μέσω μιας οργανωμένης αγοράς, αλλά οι δύο αντισυμβαλλόμενοι συναλλάσσονται απ’ ευθείας μεταξύ τηλεφώνου ή H/Y. Όσον αφορά τις συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων, είναι συμβόλαια μεταξύ δύο μερών, όπου επί ενός θεωρητικού κεφαλαίου συμφωνούν να ανταλλάξουν πληρωμές στο μέλλον, σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία και σύμφωνα με συγκεκριμένη φόρμουλα<sup>5</sup>. Λέμε θεωρητικό κεφάλαιο, γιατί το ποσό αυτό δεν πληρώνεται ούτε μεταβιβάζεται από τον ένα αντισυμβαλλόμενο στον άλλο. Αυτό το οποίο ανταλλάσσουν τα δύο μέρη είναι είτε πληρωμές επιτοκίων και μάλιστα όχι ολόκληρες αλλά η διαφορά τους. Αυτό είναι και η διαφορά με τις συμφωνίες ανταλλαγής νομισμάτων, όπου εκτός από πληρωμές ανταλλάσσονται και κεφάλαια. Στις συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων, λέμε ότι αυτός που πληρώνει σταθερό και δέχεται κυμαινόμενο επιτόκιο είναι αγοραστής του swap (ή long swap), ενώ ο αντισυμβαλλόμενος είναι πωλητής του.

---

<sup>5</sup> BIS: “A glossary of terms used in payments and settlement systems”, Ιανουάριος 2001



Συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων μεταξύ ενός ΠΙ και της εταιρίας Α, Fixed vs Float

Από την στιγμή που έχουμε υπολογίσει τον κίνδυνο προ-διακανονισμού, θεωρητικά πρέπει να τον αντισταθμίσουμε κιόλας. Είδαμε όμως ότι τέτοιου είδους παράγωγα είναι απ' ευθείας μεταξύ των δύο αντισυμβαλλομένων χωρίς να υπάρχει μία αγορά. Επομένως το κάθε συμβόλαιο είναι φτιαγμένο για τις ανάγκες των δύο μερών, με αποτέλεσμα να είναι δύσκολο να αντισταθμιστεί ο κίνδυνος με κάποιο άλλο παράγωγο προϊόν, που υπάρχει στην αγορά. Αυτό που γίνεται πρακτικά σε αυτές τις περιπτώσεις είναι ότι το ΠΙ “δημιουργεί” μία εποπτική αρχή εκκαθάρισης (clearing house), αποκλειστικά για τον αντισυμβαλλόμενο και για το παράγωγο συναλλαγής τους. Με αυτόν τον τρόπο διαχειρίζεται τον κίνδυνο σαν ένα ΣΜΕ(συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης). Επομένως μπορεί να ζητήσει κάποια αρχική καταβολή, ως εγγύηση, είτε σε μετρητά είτε σε ομόλογα του χωρίς κίνδυνο(δημοσίου). Αν, για παράδειγμα, ο κίνδυνος προ-διακανονισμού είναι  $X\%$  επί του υποθετικού κεφαλαίου, η τράπεζα που είναι αγοραστής της συμφωνίας(δέχεται κυμαινόμενο), μπορεί να ζητήσει ως «εγγύηση» το  $1/10$ , καταβλητέο με το κλείσιμο της συμφωνίας. Από εκεί και πέρα αυτός ο λογαριασμός θα διακυμαίνεται ανάλογα με την κίνηση του 6-μηνου Euribor και θα λειτουργεί όπως ακριβώς στα ΣΜΕ. Αν για παράδειγμα το Euribor αυξηθεί, ο αγοραστής του συμβολαίου κερδίζει, άρα αυξάνεται και ο κίνδυνος προ-διακανονισμού και άρα και στο λογαριασμό εγγυήσεων το ποσό μειώνεται. Θα πρέπει λοιπόν να οριστεί και κάποιο ελάχιστο όριο, κάτω από το οποίο ο αντισυμβαλλόμενος θα κληθεί να καταβάλει την επιπλέον διαφορά. Για να γίνουν όλες οι ανωτέρω κινήσεις, πρέπει το ΠΙ να εξετάσει



κάποιες παραμέτρους, όπως για παράδειγμα το ελάχιστο απαιτούμενο ποσό εγγύησης ή και τα χρονικά διαστήματα στα οποία η θέση του αντισυμβαλλόμενου θα ανάτιμολογείται. Αυτό πρέπει να γίνει, γιατί αν το ποσό που κληθεί να καταβάλει ο αντισυμβαλλόμενος είναι μεγάλο, πιθανόν να αντιμετωπίσει πρόβλημα ρευστότητας, με ορατό αποτέλεσμα την περαιτέρω αύξηση του κινδύνου προ-διακανονισμού. Ουσιαστικά αυτή την αμφίδρομη σχέση μεταξύ κινδύνου και αντιστάθμισης πρέπει να εξετάσει το ΠΙ. Όσον αφορά το ποσό της αρχικής εγγύησης καθώς και το ελάχιστο περιθώριο του λογαριασμού εγγυήσεων, μία πιθανή λύση θα είναι η αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας του αντισυμβαλλόμενου αρχικά και κατόπιν ο ορισμός τους. Όλα αυτά σε συνδυασμό με την μεταβλητότητα των επιτοκίων επάνω στα οποία έχει υπογραφεί η αρχική συμφωνία. Ενώ για τον επαναπροσδιορισμό της θέσης του λογαριασμού μία παρόμοια ανάλυση θα ήταν αρκετή, για να οριστεί.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2Α: ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Από την στιγμή που το παράγωγο προϊόν που θέλουμε να τιμολογήσουμε υποθέτουμε ότι ξεκινάει σήμερα (2/1/03) και λήγει σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον (2/1/08) θα πρέπει να κάνουμε μία πρόβλεψη για την τιμή του καθ' όλη την διάρκεια του. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο επιτοκίων συνεχούς χρόνου<sup>6</sup>, προκειμένου να έχουμε μία μελλοντική πορεία τόσο του επιτοκίου όσο και των προεξοφλημένων τιμών των ομολόγων χωρίς τοκομερίδιο.

Προκειμένου όμως να γίνουμε πιο κατανοητοί ως προς την διαδικασία την οποία θα ακολουθήσουμε ας δούμε πιο αναλυτικά κάποια από αυτά τα μοντέλα. Κατ' αρχήν θα ξεκινήσουμε λέγοντας ότι αυτά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: ισορροπίας (equilibrium models) και μη αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας (no-arbitrage models). Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο ειδών είναι ότι στα μεν μοντέλα ισορροπίας θεωρούμε ότι το

<sup>6</sup> Λεπτομέρειες για τα μοντέλα επιτοκίων συνεχούς χρόνου βλέπε: John C. Hull “Options, futures & other derivatives, Darrell Duffie “Dynamic Asset Pricing Theory” και J. Hull and A. White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities”, Review of Financial Studies, 3,4,(1990), 573-92 καθώς και D. Brigo- F. Mercurio, “Interest Rate Models, Theory and Practice”.

στιγμιαίο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο κινείται με κάποια διαδικασία, η οποία «προσεγγίζει» την καμπύλη αποδόσεων, στα δε μοντέλα μη αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας παρατηρούμε την καμπύλη αποδόσεων και σε συνδυασμό με την ΕΔΑΚ μοντελοποιούμε την κίνηση των επιτοκίων. Άρα στην πρώτη κατηγορία η καμπύλη αποδόσεων είναι εξωγενής παράγοντας για την ανάλυση μας, ενώ στη δεύτερη ενδογενής. Επιπλέον πρέπει να τονίσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις βρισκόμαστε σε ένα περιβάλλον χωρίς κίνδυνο.

## EQUILIBRIUM MODELS

Όσον αφορά τα μοντέλα ισορροπίας εμείς θα εργαστούμε με μοντέλα ενός παράγοντα, όπου υπάρχει η υπόθεση ότι η стоχαστική διαδικασία που ακολουθεί το  $r$ , περιέχει μόνο μία πηγή αβεβαιότητας. Συνήθως το «βραχυπρόθεσμο» επιτόκιο (instantaneous short rate) μπορεί να περιγραφεί σε ένα κόσμο χωρίς κίνδυνο από μία διαδικασία Ito της μορφής:

$$dr = m(r) dt + s(r) dz$$

Τόσο η στιγμιαία τάση  $m$  όσο και η στιγμιαία διακύμανση  $s$ , θεωρούνται συναρτήσεις του  $r$ , αλλά είναι ανεξάρτητες από το χρόνο. Τα τρία βασικά μοντέλα αυτής της κατηγορίας ακολουθούν αυτήν την υπόθεση. Ας τα δούμε όμως πιο αναλυτικά:

### A) RENDLEMAN AND BARTTER MODEL

Στο μοντέλο αυτό το επιτόκιο ακολουθεί την εξής διαδικασία:

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

όπου  $\mu$  και  $\sigma$  είναι σταθερές. Συνεπώς προκύπτει ότι το  $r$  ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown. Τα κυριότερα μειονεκτήματα αυτού του μοντέλου είναι αφενός τα επιτόκια θεωρούνται ότι συμπεριφέρονται όπως οι μετοχές και αφετέρου ότι δεν υπάρχει επιστροφή στο μέσο, κατά την κίνηση των επιτοκίων. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ένα τέτοιο μοντέλο μπορεί να δώσει τιμές για το επιτόκιο που θεωρητικά ανήκουν σε όλο το

εύρος των πραγματικών αριθμών, δηλαδή  $r \in (-\infty, +\infty)$ . Μία βασική διαφορά στην κίνηση μεταξύ επιτοκίων και μετοχών είναι αυτή ακριβώς. Τα επιτόκια φαίνεται ότι διαχρονικά συγκλίνουν σε ένα μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας. Έτσι όταν είναι υψηλά τα επιτόκια υπάρχει μία αρνητική τάση προς το σημείο «ισορροπίας» και το αντίθετο. Αυτό είναι γνωστό ως mean reversion.

## B) VASICEK MODEL

Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο που παρουσιάστηκε το 1977, το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο  $r$ , που ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck της μορφής

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma r^\beta dZ, \text{ με } \beta=0$$

με  $\kappa$ ,  $\theta$  και  $\sigma$  θετικές σταθερές, ενώ η  $Z = \{ Z(t), t \geq 0 \}$  είναι μία τυποποιημένη κίνηση Brown. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση και για κάθε  $s \leq t$ , έχουμε

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dZ(u),$$

έτσι ώστε το  $r(t)$  δεσμευμένο στο  $\mathcal{F}_s$  κατανέμεται κανονικά

$$N \sim (r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}), (\sigma^2(1 - e^{-2\kappa(t-s)})/2\kappa).$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το στιγμιαίο επιτόκιο μπορεί σε κάθε χρονική στιγμή να έχει αρνητική τιμή, με θετική πιθανότητα. Αυτό είναι και το βασικό μειονέκτημα αυτού του μοντέλου. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό του μοντέλου του Vasicek είναι και η ιδιότητα επιστροφής στο μέσο (mean reverting process), που πρακτικά σημαίνει ότι όταν το  $t$  πηγαίνει στο άπειρο, τα επιτόκια τείνουν προς ένα μακροχρόνιο επιτόκιο ισορροπίας  $\theta$  γύρω από το οποίο διακυμαίνονται όλες οι άλλες τιμές. Με άλλα λόγια αν τα επιτόκια βρεθούν σε υψηλότερα επίπεδα από τον μέσο αυτό, θα τείνουν να μειωθούν και τελικά να επιστρέψουν σε αυτόν, ενώ ισχύει και το αντίστροφο. Το  $\kappa$  είναι ο ρυθμός μεταβολής των επιτοκίων γύρω από τον μέσο. Ουσιαστικά μας δείχνει δηλαδή την ταχύτητα με την οποία τα επιτόκια θα συγκλίνουν στη «μέση τιμή».

Η πρακτική εφαρμογή του μοντέλου αυτού στην τιμολόγηση παραγώγων προϊόντων έρχεται από το γεγονός ότι από την στιγμή που θεωρούμε ότι τιμολογούμε υπό καθεστώς έλλειψης αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας, μπορούμε να εκφράσουμε τις τιμές των ομολόγων σαν προσδοκίες (expectations) της συνάρτησης της διαδικασίας που ακολουθεί

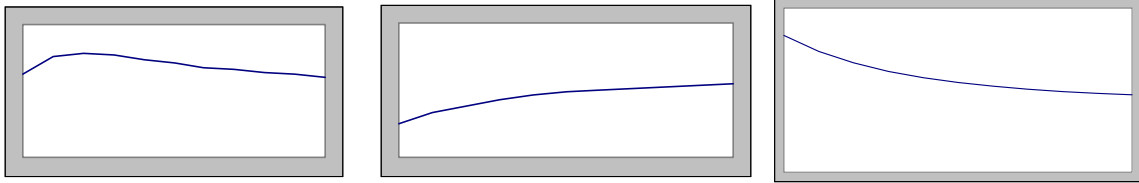
το  $r$ . Με άλλα λόγια η τιμή ενός προεξοφλημένου ομολόγου χωρίς τοκομερίδια που στο χρόνο  $T$  πληρώνει 1, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:  $P(t,T) = E_t\{e^{-\int_t^T r(s)ds}\}$ . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση ο Vasicek κατέληξε ότι η τιμή ενός προεξοφλημένου ομολόγου δίνεται από την σχέση

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}, \text{ όπου}$$

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \text{ και}$$

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T) - T + t) * (k^2\theta - \sigma^2 / 2) - \sigma^2 B(t,T)^2}{k^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4k}\right].$$

Από τον τύπο για την τιμή του ομολόγου, όπως αυτός προκύπτει μέσω του μοντέλου του Vasicek και χρησιμοποιώντας την σχέση  $R(t,T) = -\ln P(t,T) / (T-t)$  μπορούμε να προσδιορίσουμε ολόκληρη την καμπύλη αποδόσεων από την τιμή του στιγμιαίου επιτοκίου.



Σύμφωνα με το μοντέλο του Vasicek η μορφή της καμπύλης αποδόσεων μπορεί να πάρει μία από τις παραπάνω μορφές. Επομένως προκειμένου κάποιος να προσεγγίσει την καμπύλη αποδόσεων αρκεί να προσδιορίσει τις τιμές των παραμέτρων  $k$ ,  $\theta$ , και  $\sigma$  στο μοντέλο. Εδώ να τονίσουμε για ακόμη μία φορά ότι το μοντέλο του Vasicek καθώς και μια σειρά από άλλα, ανήκει στην κατηγορία των ενδογενών μοντέλων, στην οποία η καμπύλη αποδόσεων προκύπτει από τα αποτελέσματα και δεν παρατηρείται από την αγορά, εν αντιθέσει με τα εξωγενή (βλέπε: Heath- Jarrow- Morton) όπου η προσέγγιση της πορείας των επιτοκίων και των τιμών των ομολόγων γίνεται με βάση την πραγματική καμπύλη αποδόσεων. Επιπλέον χαρακτηρίζεται από ομοιογένεια των παραμέτρων ως προς το χρόνο ή με άλλα λόγια αυτές είναι εξ υποθέσεως σταθερές. Αυτό θεωρήθηκε από πολλούς μειονέκτημα των ενδογενών μοντέλων και για αυτό δημιουργήθηκε μεταγενέστερα μία άλλη κατηγορία μοντέλων, όπου παρουσιάζουν ετερογένεια των

παραμέτρων ως προς το χρόνο. Μην ξεχνάμε όμως ότι αυτού του είδους τα μοντέλα, είτε οι παράμετροι τους εξαρτώνται από το χρόνο είτε όχι, αποτελούν απλά προσεγγίσεις της καμπύλης αποδόσεων και συνεπώς και των τιμών των ομολόγων.

### Γ) COX, INGERSOLL AND ROSS MODEL

Παραλλάσσοντας λίγο την φόρμουλα που πρότεινε ο Vasicek για την κίνηση που ακολουθούν τα επιτόκια, οι Cox, Ingersoll and Ross παρουσίασαν το 1985 τη δικιά τους εκδοχή για το στιγμιαίο επιτόκιο. Σύμφωνα με αυτήν η στιγμιαία διακύμανση εμπεριέχει και την τετραγωνική ρίζα του επιτοκίου. Μέσω αυτής της αλλαγής το μοντέλο μπορεί να δώσει θετικές τιμές ή μηδέν, αποκλείοντας όμως την πιθανότητα να δώσει αρνητικές. Η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί το στιγμιαίο επιτόκιο μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη του Vasicek και είναι ως εξής:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma r^\beta dZ, \text{ με } \beta = 0.5$$

με  $\kappa, \theta, \sigma$  θετικές σταθερές και η  $Z = \{ Z(t), t \geq 0 \}$  μια τυποποιημένη κίνηση Brown. Προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η εξίσωση δεν θα δώσει αρνητικές τιμές έθεσαν την αρχική συνθήκη  $2\kappa\theta > \sigma^2$ . Και για αυτήν την στοχαστική διαδικασία ισχύουν τα ίδια όπως και προηγουμένως και μπορούμε πάλι να βρούμε τις τιμές των προεξοφλημένων ομολόγων ως εξής:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \text{ όπου}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\text{και } A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(\alpha + \gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + \alpha)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2\kappa\theta / \sigma^2}$$

ενώ έχουμε και  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$ . Και εδώ όπως και προηγουμένως η καμπύλη αποδόσεων θα έχει τις ίδιες πιθανές μορφές: ανοδική, καθοδική και ελαφρώς κυρτή.

## NO- ARBITRAGE MODELS

Το βασικό μειονέκτημα των μοντέλων ισορροπίας είναι ότι οι παράμετροι των μοντέλων είναι σταθερές. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι αν χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο των R-B και βρούμε ότι η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι 10%, αυτό το νούμερο θα ισχύει είτε αν το παράγωγο που θέλουμε να αποτιμήσουμε είναι in-the-money είτε αν είναι out of- the-money. Αυτό το μειονέκτημα προσπάθησαν να επιλύσουν τα μοντέλα μη αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τρία από αυτά.

### A) HO AND LEE MODEL

Σύμφωνα με το μοντέλο των Ho and Lee το συνεχούς χρόνου όριο του μοντέλου είναι

$$dr = \theta(t) dt + \sigma dz$$

όπου η στιγμιαία διακύμανση, του βραχυπροθέσμου επιτοκίου,  $\sigma$  είναι σταθερή και  $\theta(t)$  είναι συνάρτηση του χρόνου, επιλεγμένη ούτως ώστε το μοντέλο να «ταιριάζει» με την καμπύλη αποδόσεων (term structure). Το  $\theta(t)$  καθορίζει την μέση κατεύθυνση προς την οποία κινείται το  $r$  στο χρόνο  $t$ . Η μεταβλητή  $\theta$  μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά ως εξής:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$$

όπου το  $F(0,t)$  είναι το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο λήξης  $t$ . Στο όριο το  $\sigma^2 t \rightarrow 0$ , άρα προσεγγιστικά  $\theta(t) \approx F_t(0,t)$ . Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι από την καμπύλη των προθεσμιακών επιτοκίων μπορούμε να προσδιορίσουμε την μέση κατεύθυνση προς την οποία κινούνται τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια σε κάθε χρονική στιγμή. Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή μέσω της καμπύλης προθεσμιακών επιτοκίων, προσδιορίζονται τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια και στα άλλα μοντέλα αυτής της οικογένειας. Το πλεονέκτημα του ανωτέρου μοντέλου είναι ότι μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί και προσομοιάζει ακριβώς την καμπύλη επιτοκίων. Αντίθετα δεν δίνει περιθώρια ελιγμών ως προς την δομή της μεταβλητικότητας, αφού όλα τα προθεσμιακά και τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια έχουν την ίδια τυπική απόκλιση. Επιπλέον δεν υποθέτει επιστροφή του επιτοκίου στο «μέσο» επίπεδο ισορροπίας. Άρα με βάση και την εξίσωση βλέπουμε ότι η μέση

κατεύθυνση προς την οποία κινούνται τα επιτόκια την επόμενη βραχυπρόθεσμη περίοδο είναι πάντα η ίδια.

## B) HULL AND WHITE MODEL

Το μοντέλο αυτό ουσιαστικά μια επέκταση του μοντέλου του Vasicek και το επιτόκιο ακολουθεί την ακόλουθη διαδικασία:

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b-r)] dt + \sigma r^{\beta}(t) dz, \text{ με } \beta=0$$

Μπορούμε όμως την παραπάνω εξίσωση να την γράψουμε και ως εξής:

$$dr = [\theta(t)-ar] dt + \sigma dz$$

όπου το μοντέλο είναι σαν μία επέκταση του Ho- Lee, που περιέχει επιστροφή του μέσου στην αναμενόμενη τιμή του με ρυθμό  $a$ . Το  $\sigma$  καθορίζει το συνολικό επίπεδο μεταβλητικότητας, ενώ η παράμετρος  $a$  καθορίζει τις σχετικές μεταβλητικότητες των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων επιτοκίων. Επιπλέον η πιθανοτική κατανομή όλων των επιτοκίων διαχρονικά είναι κανονική. Όπως και στο Ho- Lee έτσι και εδώ υπολογίζουμε αναλυτικά το  $\theta$ :

$$\theta(t) = F_t(0,t) + a F_t(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1-e^{-2at}),$$

όπου συνήθως ο όρος  $\frac{\sigma^2}{2a} (1-e^{-2at})$  είναι μικρός και δεν λαμβάνεται υπ' όψιν. Επομένως η τάση της διαδικασίας για το  $r$  στο χρόνο  $t$  είναι  $F_t(0,t) + a [F_t(0,t)-r]$  και αυτό δείχνει ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί κατά μέσο όρο την καμπύλη των προθεσμιακών επιτοκίων. Το πλεονέκτημα, σε σχέση με το μοντέλο των Ho-Lee, είναι ότι δίνει μεγαλύτερη ευελιξία, ως προς τη μεταβλητότητα των επιτοκίων, και είναι αρκετά εύκολο στην πρακτική χρησιμοποίηση του.

## Γ) HEATH- JARROW- MORTON MODEL

Το μοντέλο των HJM καθορίζει όπως και τα δύο προηγούμενα την κίνηση των προθεσμιακών επιτοκίων, όπου η κίνηση του επιτοκίου αυτού για κάθε ληκτότητα  $T$  ακολουθεί την διαδικασία:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(u, T) du + \int_0^t \sigma(u, T) dW_u, t \leq T$$

όπου  $W$  μία κίνηση Brown. Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει η ΣΔΕ

$$df(t, T) = \sigma(t, T) dW_t + \mu(t, T) dt$$

Από αυτήν την στοχαστική διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι η μοναδική πηγή αβεβαιότητας είναι η κίνηση Brown  $W_t$ , από την ιστορία της οποίας εξαρτώνται τόσο η τάση  $\mu(t, T)$  όσο και η μεταβλητότητα  $\sigma(t, T)$ , και τα επιτόκια από το χρόνο  $t$ . Άρα υπάρχει τέλεια συσχέτιση μεταξύ των προσαναυξήσεων των προθεσμιακών επιτοκίων.

Το πλεονέκτημα του μοντέλου των HJM είναι ότι δίνει πολύ καλή περιγραφή για το πώς κινούνται τα προθεσμιακά επιτόκια, αφού έχει τους λιγότερους περιορισμούς από όλα τα παραπάνω. Αντίθετα όμως το μειονέκτημα ενός τέτοιου μοντέλου είναι ότι εδώ πρέπει να υπολογίσουμε την επιφάνεια μεταβλητότητας, αφού αυτή αλλάζει σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι εκτίμηση μιας τέτοιας παραμέτρου είναι πολύ πιο δύσκολη και χρονοβόρα. Για αυτό και στην πρακτική οι τράπεζες δεν χρησιμοποιούν το μοντέλο HJM αρκετά.

Εμείς για την ανάλυση μας επιλέξαμε να εργαστούμε με το μοντέλο του Vasicek και παράλληλα προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε και το μοντέλο των Cox, Ingersoll and Ross, τονίζοντας το γεγονός ότι σε τέτοιου είδους αναλύσεις για πρακτικούς λόγους χρησιμοποιούμε την απλούστερη δυνατή εφαρμογή. Στην περίπτωση μας, που θέλουμε να μετρήσουμε τον κίνδυνο προ-διακανονισμού, το μοντέλο αυτό μας αρκεί και επομένως δεν είναι απαραίτητη η χρήση ενός πιο περίπλοκου.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2B: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε πρακτικά ένα από τα παραπάνω μοντέλα, πρέπει να προβούμε σε βαθμονόμηση (calibration) του<sup>7</sup>. Αυτό λόγω του γεγονότος ότι τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι διακριτού χρόνου, ενώ τα μοντέλα συνεχούς.

Για παράδειγμα στο μοντέλο του Vasicek,  $[dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dZ]$

<sup>7</sup> Salih N. Neftci “An introduction to the Mathematics of Financial derivatives”, second edition



και χρησιμοποιώντας το σχέδιο του Euler θα έχουμε την ακόλουθη μορφή:

$$r_t = r_{t-\Delta} + \kappa(\theta - r_{t-\Delta})\Delta + \sigma[Z_t - Z_{t-\Delta}],$$

όπου  $\Delta$  το διακριτό διάστημα. Η περαιτέρω βαθμονόμηση του μοντέλου εξαρτάται από εκεί και πέρα από την μέθοδο προσομοίωσης.

Για τους σκοπούς αυτής της έρευνας χρησιμοποιήσαμε την κάτωθι διακριτή μορφή του μοντέλου του Vasicek:

$$r_t = r_{t-1} + \kappa * \theta * \Delta t - (r_{t-1}) * \Delta t + \sigma * \varepsilon * \sqrt{\Delta t}, \quad (1)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι μία τυποποιημένη κίνηση Brown με  $\varepsilon \sim N$  και  $\Delta t = 1/255$ . Το επόμενο στάδιο ήταν να επιλέξουμε την οικονομετρική μέθοδο προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  της διακριτούς μορφής του τύπου του Vasicek, με βάση τα στοιχεία που είχαμε διαθέσιμα. Στην εργασία αυτή επιλέξαμε να κινηθούμε με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων<sup>8</sup> (least squares method), ενώ κάποιος μπορεί εναλλακτικά να χρησιμοποιήσει είτε την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood) είτε την μέθοδο αντιστοιχίας των ροπών (generalized method of moments). Στο σημείο αυτό κρίνουμε σκόπιμο να τονίσουμε για άλλη μία φορά ότι προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα την κίνηση του στιγμιαίου επιτοκίου, όπως αυτή ορίζεται από τον τύπο του Vasicek. Επομένως και η διακριτή μορφή του μοντέλου που χρησιμοποιήσαμε αλλά και η οικονομετρική προσέγγιση των παραμέτρων, εμπεριέχουν κάποιες αποκλίσεις. Το μοντέλο το οποίο επιλέξαμε είναι ένα “αυτοπαλίνδρομο” της μορφής

$$r(t+1) = C1 + C2 * (r(t) - C(1)) + U_t \quad (2)$$

είτε ένα πιο απλό της μορφής

$$r(t+1) = X1 + r(t) + U_t \quad (3)$$

όπου και στις δύο περιπτώσεις τα κατάλοιπα κατανέμονται κανονικά με μέσο

$$E(\varepsilon(t+1) / \mathbb{F}_s) = 0$$

και διακύμανση σταθερή της μορφής

$$E(\varepsilon(t+1)^2 / \mathbb{F}_s) = \sigma^2$$

Αυτό το οποίο προσπαθούμε μέσω αυτής της διαδικασίας είναι να προσεγγίσουμε τις παραμέτρους της εξίσωσης (1) μέσω των μοντέλων (2) ή (3). Από (2)=(3) προκύπτει ότι:

<sup>8</sup> J.F.J de Munnik: “The valuation of Interest Rate Derivative Securities”

$$C1 + C2 * (r(t) - C(1)) = X1 + r(t) \Rightarrow X2 = C2 \text{ και } X1 = C1(1 - C2)$$

Χάριν ευκολίας των αριθμητικών μετασχηματισμών θα χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία (2) και έχουμε τα ακόλουθα:

Από (1)  $\approx$  (2) έχουμε

$$k \approx -\ln(C2)/\Delta t$$

$$\theta \approx C1$$

$$\sigma \approx S/\sqrt{\Delta t} \text{ (I)}$$

Με αυτόν τον τρόπο επομένως έχουμε ολοκληρώσει την εκτίμηση των παραμέτρων και είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε στην προσομοίωση κατά Monte-Carlo, της πορείας των επιτοκίων. Ένα τελευταίο σημείο που αφορά την οικονομετρική προσέγγιση των παραμέτρων, είναι η απόκλιση που δίνει η ανωτέρω διαδικασία. Ενδεικτικά να τονίσουμε ότι η διακύμανση των επιτοκίων του μοντέλου, όπως προκύπτει εξ ορισμού έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma^2 = 2 * S^2 * \kappa^3 * \tau^2 * (1 - e^{-\kappa\tau})^{-2} * (1 - e^{-2\kappa\Delta t})^{-1} \text{ (II)}$$

Στα πλαίσια της εργασίας και αφού υιοθετήσαμε την προσέγγιση (I) υπολογίσαμε και το ποσοστό απόκλισης που μας έδωσε, το οποίο ήταν αρκετά μικρό.

### ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΣΑΕ (ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ & ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ)

Το πρώτο πράγμα που θα χρειαστούμε στην ενότητα αυτή είναι μία συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων (ΣΑΕ), με την οποία θα εργαστούμε. Υποθέτουμε την πιο απλή μορφή: σταθερό έναντι κυμαινόμενου επιτοκίου (fixed for float) plain vanilla 5-ετών, στο οποίο είμαστε(ως τράπεζα) αγοραστής (long swap), δηλαδή πληρώνουμε σταθερό και δεχόμαστε κυμαινόμενο επιτόκιο, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

**Γενικοί όροι**

Θεωρητικό αρχικό ποσό : 10.000.000 €  
 Ημερομηνία συναλλαγής: 26 Δεκ., 2002  
 Ημερομηνία εκκίνησης : 2 Ιαν., 2003  
 Λήξη : 2 Ιανουαρίου, 2008  
 Αξία του IRS(all-in-cost) : 3,4665%

**Αντισυμβαλλόμενος σταθερού επιτοκίου**

Σταθερό τοκομερίδιο: 3,4665%  
 Συχνότητα πληρωμών: Ετήσια  
 Μέτρηση ημερών : 30/360

**Αντισυμβαλλόμενος κυμαινόμενου επιτοκίου**

Δείκτης μέτρησης : 6-μηνο Euribor  
 Συχνότητα πληρωμών : Εξαμηνιαία  
 Μέτρηση ημερών : Πραγματικές/360  
 Συχνότ. επαναπροσδιορισμού: Εξαμηνιαία  
 Πρώτο τοκομερίδιο : 3,457%

Από την ΣΑΕ που περιγράφεται παραπάνω, αξίζει να σταθούμε σε ένα δύο σημεία. Πρώτον ότι η αξία του διαμορφώνεται από το σταθερό τοκομερίδιο όπως καθορίζεται κατά την ημερομηνία συναλλαγής και δεύτερον ότι από την ημερομηνία συναλλαγής ως και την ημερομηνία εκκίνησης μεσολαβούν 5 εργάσιμες ημέρες. Επιπλέον η ΣΑΕ έχει δημιουργηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε η αρχική του αξία (MTM) να είναι 0.

Αυτό το οποίο χρειάζεται να γίνει είναι η τιμολόγηση της ΣΑΕ, ανά τακτά χρονικά διαστήματα, ούτως ώστε να είναι εφικτό σε μεταγενέστερο στάδιο να υπολογιστεί ο παράγοντας έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο. Οι συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων μπορούν εύκολα να τιμολογηθούν εφόσον υπάρχει το κυμαινόμενο επιτόκιο (ή μία πρόβλεψη αυτού) για όλη τη διάρκεια του συμβολαίου. Και αυτό γιατί τα προϊόντα αυτού του είδους θεωρούνται ότι αποτελούνται από δύο τμήματα. Ένα ομόλογο σταθερού επιτοκίου, με ετήσιο τοκομερίδιο και διάρκεια όσο η διάρκεια του συμβολαίου και μία σειρά από γραμμάτια κυμαινόμενου επιτοκίου (Floating Rate Note's), εξάμηνης διάρκειας. Δηλαδή κάθε έξι μήνες ενεργοποιείται ένα καινούργιο γραμμάτιο με διαφορετικό τοκομερίδιο, ανάλογα με την πορεία του κυμαινόμενου επιτοκίου, εν προκειμένω του 6μηνου Euribor. Από εκεί και πέρα η τιμολόγηση της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων, γίνεται με διάφορους τρόπους. Προκειμένου να είναι εφικτή σε

διάφορες χρονικές στιγμές, χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές, όπως η γραμμική παρεμβολή, η εκθετική παρεμβολή ή ακόμα και η σταθμισμένη εκθετική παρεμβολή, των συντελεστών προεξόφλησης<sup>9</sup> (exponential interpolation of discount factors). Οι συντελεστές προεξόφλησης εξάγονται συνήθως είτε απ' ευθείας από τιμές εντόκων γραμματίων είτε έμμεσα από τιμές κανονικών ομολόγων, μέσω της διαδικασίας του bootstrapping. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, χρησιμοποιήσαμε τις τιμές των εντόκων (pure discount bonds), όπως προκύπτουν από το υπόδειγμα του Vasicek για διάφορες ληκτότητες, ενώ εφαρμόσαμε την εκθετική παρεμβολή για όσες ληκτότητες έλειπαν.

Η εκθετική παρεμβολή ανάμεσα στους συντελεστές προεξόφληση είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση προϊόντων όπως τα IRS, FRA κλπ. Αυτό το οποίο επιτυγχάνεται με την διαδικασία αυτή είναι η εύρεση του συντελεστή προεξόφλησης σε μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έστω ότι έχουμε την ακόλουθη διαδικασία συνεχούς χρόνου:

$$df_t = Z(t, df_{n-1}, df_n), t \in [t_{n-1}, t_n], \text{ "df=discount factor"}$$

με οριακές συνθήκες,

$Z(t_{n-1}, df_{n-1}, df_n) = df_{n-1}$  και  $Z(t_n, df_{n-1}, df_n) = df_n$  ονομάζεται διαδικασία παρεμβολής. Επιπλέον ορίζουμε  $df_{n-1} > df_n$  για όλα  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Η εκθετική παρεμβολή θα είναι ως εξής:

$$df_t = Z^{\text{exp}}(t, df_{n-1}, df_n) = df_{n-1}^{1-t} * df_n^t$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4: CEF (ΜΕΤΡΗΣΗ & ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ)

Η τελευταία αυτή ενότητα επικεντρώνεται στην μέτρηση του παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο (Credit Exposure Factor) και στους τρόπους μέτρησης του. Γνωρίζοντας λίγο έως πολύ το πώς κινείται η αξία ενός “swap” κατά τη διάρκεια του, αναμένουμε η μέγιστη αξία του, να επιτυγχάνεται περίπου στο ήμισυ της διάρκειας του.

<sup>9</sup> HFB, Heinz Cremers- Willi Schwarz: “Interpolation of discount factors”, May 1996.

Αυτό πραγματικά συμβαίνει όμως δεν είναι αυτό το οποίο προσπαθήσαμε να μετρήσουμε μέσα από αυτήν την έρευνα. Αυτό το οποίο ορίζουμε ως CEF δεν είναι η απόλυτη θετική τιμή, αλλά η κατά μέσο όρο και σε μεγάλο διάστημα εμπιστοσύνης θετική “περιοχή”. Ουσιαστικά δηλαδή προσπαθούμε να οριοθετήσουμε την επιφάνεια που ορίζει η καμπύλη της αγοραίας αξίας (CMTM) και του χρονικού άξονα. Επειδή όμως δεν είναι εφικτό για κάθε ένα σενάριο ξεχωριστά να γίνει μία τέτοια διαδικασία, επιλέγουμε μία πιο συντηρητική διαδικασία και συνθέτουμε κάποια σενάρια από τις τιμές όλων αυτών που είχαμε υπολογίσει. Πιο αναλυτικά δημιουργούμε για παράδειγμα ένα σενάριο, που σε κάθε χρονική στιγμή εμπεριέχει την κατά 99% μεγαλύτερη θετική τιμή και σχηματίζουμε την καμπύλη της. Ύστερα προσπαθούμε να μετρήσουμε την επιφάνεια που ορίζει αυτή η καμπύλη και ο άξονας του χρόνου καθώς και την επιφάνεια ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου που θα έχει το ίδιο εμβαδόν. Στο παραλληλόγραμμο αυτό βάση θα είναι πάλι ο άξονας του χρόνου και ουσιαστικά αυτό το οποίο αναζητάμε είναι το ύψος, που μας δίνει μία εικόνα για τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η ακόλουθη:

Προκειμένου να υπολογίσουμε την επιφάνεια που ορίζει το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε τον τύπο του Riemann<sup>10</sup>, ο οποίος μέσω των διαδοχικών ορθογώνιων παραλληλογράμμων προσεγγίζει την επιφάνεια. Πιο αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθείται είναι:

Κατ’ αρχήν έχουμε μία ντετερμινιστική διαδικασία  $f(t)$  όπου  $t \in [0, T]$ . Υποθέτουμε ότι μας ενδιαφέρει να ολοκληρώσουμε την συνάρτηση στο διάστημα  $[0, T]$  η οποία είναι η  $\int_0^T f(s) ds$  (1). Προκειμένου να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του Riemann, χωρίζουμε το διάστημα  $[0, T]$  σε  $n$  υπό-διαστήματα όπου

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

και στη συνέχεια έχουμε το προσεγγιστικό άθροισμα

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) (t_i - t_{i-1}) \quad (2)$$

δοθέντος ότι

<sup>10</sup> Salih N. Neftci “An introduction to the Mathematics of Financial derivatives”, second edition

$$\max_i |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0,$$

το ολοκλήρωμα του Riemann ορίζεται από το όριο

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) \rightarrow \int_0^T f(s) ds \quad (3)$$

ο τύπος (3) προϋποθέτει ότι προσθέτουμε τις επιφάνειες των  $n$  ορθογωνίων χρησιμοποιώντας ως βάση το  $(t_i - t_{i-1})$  και το  $f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)$  ως ύψος. Αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιούμε και εμείς προκειμένου να υπολογίσουμε τον CEF. Το σημαντικό αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι ότι εφόσον υπολογίσουμε τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο, για όλη την διάρκεια της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων (5 χρόνια) μπορούμε να βρούμε και τον ετήσιο ως ποσοστό επί του υποθετικού κεφαλαίου του “swap”. Έτσι αλλάζοντας κάθε φορά την βάση του ορθογωνίου, δηλαδή την χρονική κλίμακα, έχουμε τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο για κάθε ληκτότητα και για συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης. Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνουμε την έρευνα, αφού έχει πλέον υπολογιστεί ο παράγοντας έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο για συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων. Έτσι κάθε φορά που γίνεται μία ΣΑΕ μπορεί πολύ απλά κάποιος να συνυπολογίσει ένα ποσοστό πιθανής αύξησης της αξίας του στο χρόνο και να έχει μία καλλίτερη εικόνα του μεγέθους του κινδύνου στον οποίο είναι εκτεθειμένος από αυτό το συμβόλαιο.

## ΜΕΡΟΣ 2

### ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το πρώτο κομμάτι της εργασίας, όπως είδαμε και προηγουμένως αφορούσε την διακριτή προσέγγιση των παραμέτρων του μοντέλου του Vasicek. Όπως τονίσουμε για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους με βάση το AR μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε.

#### ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήσαμε είναι ημερήσιες τιμές για το EONIA (European O/N), όπως αυτές μας δόθηκαν από το Bloomberg και αφορούν την περίοδο από 4/1/99 ως και τις 31/12/02, δηλαδή μία περίοδο 4 χρόνων (ή 1023 ημερήσιες παρατηρήσεις). Επιπλέον χρησιμοποιήσαμε ημερήσιες τιμές και για το FDON (German O/N) για την ίδια πάλι περίοδο (4/1/99-31/12/02) καθώς και για την περίοδο (8/7/96-31/12/02), την οποία χάριν ευκολίας ονομάσαμε FDON7Y, αν και πρόκειται πρακτικά για μία περίοδο 6,5 ετών. Έτσι είχαμε στην διάθεση μας 3 διαφορετικές σειρές επιτοκίων τις οποίες και χρησιμοποιήσαμε καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας.

#### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

Η εκτίμηση, με το πρόγραμμα E-Views3, μας έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα (πίνακας 1) και χρησιμοποιώντας του μετασχηματισμούς που αναφέραμε προηγουμένως, προσεγγίσαμε τις παραμέτρους του μοντέλου του Vasicek.

Το πρώτο πράγμα που ελέγξαμε προτού προχωρήσουμε στα επόμενα στάδια ήταν ο έλεγχος για unit root, που απέρριψε την ύπαρξη της μοναδιαίας ρίζας.

Την διακύμανση την υπολογίσαμε προσεγγιστικά με τον τύπο  $\sigma^2 \approx S^2/\Delta t$  και το “downward biased” που μας δίνει αυτή η προσέγγιση κυμαίνεται από 3,18% για το EONIA ως 14.48% για το FDON7Y.

<b>VASICEK</b>	<b>EONIA-4Y</b>	<b>FDON4Y</b>	<b>FDON7Y</b>
<b>C1</b>	3.644203	3.484271	3.406948
<b>C2</b>	0.983909	0.969086	0.924032
<b>SD</b>	0.798442	0.726972	0.592512
<b><math>\Delta T = 1/255</math></b>	0.003921569	0.003921569	0.003921569
<b><math>S^2</math></b>	0.6375096274	0.5284882888	0.3510704701
<b><math>\sigma^2</math></b>	1.62564955	1.347645136	0.895229699
<b><math>\sigma</math></b>	1.275009627	1.16088119	0.946165788
<b><math>\kappa</math></b>	4.1365758	8.007489534	20.14718686
<b><math>\theta</math></b>	3.644203	3.484271	3.406948

*Πίνακας 1: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα εκτίμησης (VASICEK MODEL)*

Ειδικά όμως για το EONIA η διακύμανση που υπολογίσαμε και χρησιμοποιήσαμε, συγκρινόμενη με αυτήν που παρατηρήσαμε στην αγορά έχει διαφορά της τάξης της 1-2 μονάδες βάσης, άρα και πρακτικά είναι καλή η προσέγγιση που επιτύχαμε. Μία τελευταία διευκρίνιση όσον αφορά τα αποτελέσματα της εκτίμησης είναι ότι τα νούμερα που υπολογίσαμε για το  $\kappa$ ,  $\theta$  και  $\sigma$  είναι σε ποσοστό και σε ετήσια βάση.

## MONTE-CARLO

Το επόμενο στάδιο της εργασίας ήταν η προσομοίωση της πορείας των επιτοκίων με Monte-Carlo και η δημιουργία 5000 σεναρίων για κάθε μία από τις τρεις σειρές επιτοκίων, που είχαμε προηγουμένως εκτιμήσει. Επειδή όμως εμάς δεν μας ενδιέφερε η προσομοίωση της πορείας του Over/Night επιτοκίου, απλά για να την έχουμε, και λόγω του μεγάλου όγκου των αρχείων αλλά και του υπολογιστικού χρόνου, μέσω των τύπων που αναλύσαμε νωρίτερα υπολογίσαμε τα ακόλουθα:

- τις τιμές των προεξοφλημένων ομολόγων, όπως αυτές προκύπτουν από τον τύπο του Vasicek και για συγκεκριμένες ληκτότητες  $\{1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y\}$ . Τις τιμές αυτές τις υπολογίσαμε ανά 5 εργάσιμες μέρες, ουσιαστικά δηλαδή ανά μία εβδομάδα τις τιμές για το εξάμηνο επιτόκιο και ανά 6 μήνες, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την αποτίμηση της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων στη συνέχεια

Ενδεικτικά παραθέτουμε τους πίνακες 2&3 με κάποια αποτελέσματα καθώς και μία σειρά από διαγράμματα που θα μας δώσουν μια εικόνα της προσομοίωσης που έγινε,



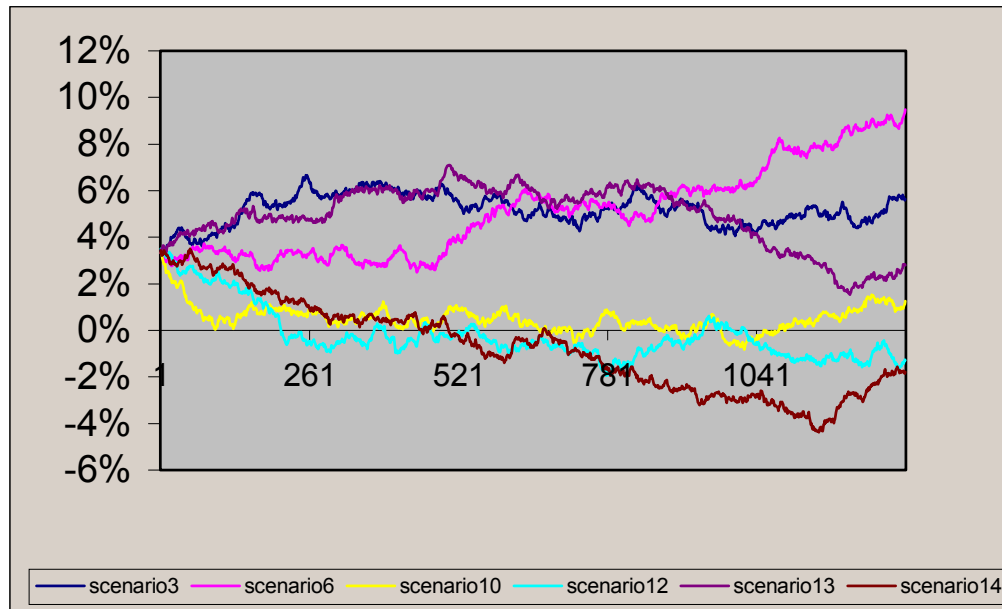
Πίνακας 2 : τιμές των εντόκων για συγκεκριμένες ληκτότητες,  
σε τοχαία σενάρια και για τοχαίες ημερομηνίες

	<b>PURE DISCOUNT BONDS</b>									
<b>MATURITIES</b>	<b>1M</b>	<b>2M</b>	<b>3M</b>	<b>6M</b>	<b>9M</b>	<b>1Y</b>	<b>2Y</b>	<b>3Y</b>	<b>4Y</b>	<b>5Y</b>
<b>scen3</b>	0.99724	0.99448	0.99173	0.98353	0.97539	0.96731	0.93572	0.90530	0.87612	0.84821
	0.99713	0.99426	0.99141	0.98288	0.97443	0.96606	0.93334	0.90192	0.87185	0.84315
	0.99693	0.99387	0.99082	0.98172	0.97271	0.96380	0.92906	0.89585	0.86419	0.83408
	0.99670	0.99342	0.99015	0.98040	0.97077	0.96124	0.92424	0.88903	0.85560	0.82394
<b>scen6</b>	0.99730	0.99461	0.99192	0.98390	0.97593	0.96803	0.93708	0.90723	0.87857	0.85112
	0.99756	0.99512	0.99268	0.98540	0.97817	0.97097	0.94266	0.91519	0.88865	0.86310
	0.99742	0.99484	0.99228	0.98460	0.97697	0.96940	0.93968	0.91094	0.88326	0.85669
	0.99770	0.99540	0.99311	0.98625	0.97941	0.97261	0.94579	0.91965	0.89431	0.86985
<b>scen10</b>	1.00042	1.00082	1.00121	1.00233	1.00334	1.00426	1.00702	1.00849	1.00883	1.00822
	1.00011	1.00022	1.00031	1.00052	1.00065	1.00068	1.00001	0.99819	0.99539	0.99179
	1.00015	1.00028	1.00041	1.00073	1.00095	1.00109	1.00080	0.99935	0.99690	0.99363
	0.99998	0.99995	0.99991	0.99973	0.99946	0.99911	0.99694	0.99369	0.98953	0.98464
<b>scen12</b>	1.00024	1.00047	1.00068	1.00127	1.00176	1.00215	1.00290	1.00242	1.00091	0.99853
	1.00048	1.00095	1.00140	1.00270	1.00390	1.00499	1.00847	1.01063	1.01163	1.01165
	1.00033	1.00064	1.00095	1.00179	1.00254	1.00319	1.00494	1.00542	1.00483	1.00332
	1.00019	1.00037	1.00054	1.00099	1.00135	1.00161	1.00183	1.00086	0.99887	0.99604
<b>scen13</b>	0.99788	0.99576	0.99364	0.98729	0.98096	0.97465	0.94968	0.92522	0.90140	0.87829
	0.99795	0.99590	0.99386	0.98773	0.98161	0.97551	0.95132	0.92757	0.90438	0.88186
	0.99777	0.99555	0.99333	0.98668	0.98006	0.97347	0.94742	0.92198	0.89728	0.87338
	0.99767	0.99535	0.99303	0.98609	0.97919	0.97232	0.94523	0.91885	0.89330	0.86864
<b>scen14</b>	0.99973	0.99944	0.99915	0.99822	0.99721	0.99612	0.99110	0.98514	0.97842	0.97111
	0.99995	0.99989	0.99982	0.99955	0.99919	0.99875	0.99623	0.99265	0.98818	0.98299
	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99968	0.99939	0.99749	0.99449	0.99058	0.98591
	1.00006	1.00012	1.00016	1.00023	1.00021	1.00011	0.99889	0.99654	0.99324	0.98916

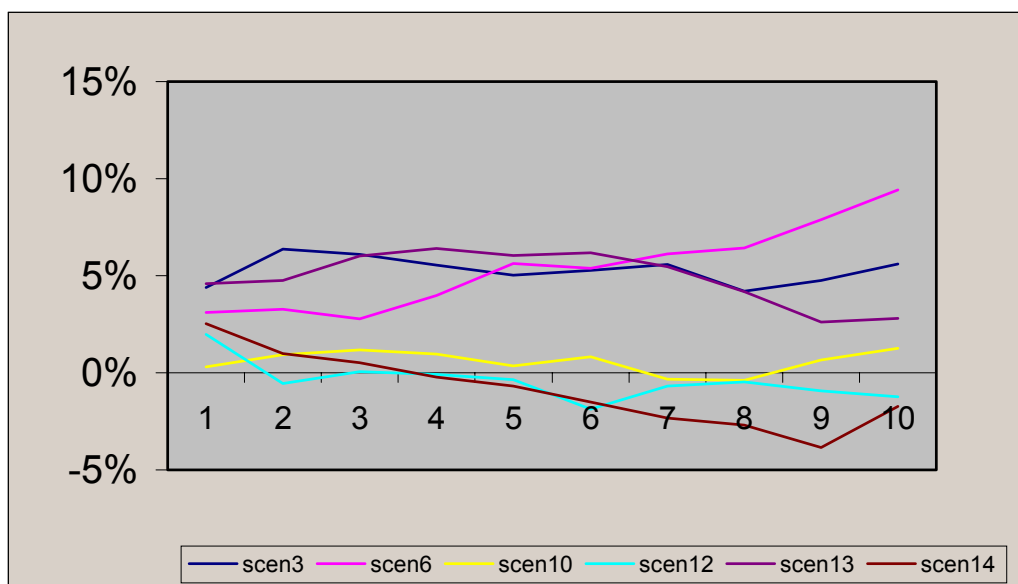
	<b>6M Euribor</b>					
<b>time</b>	<b>scen3</b>	<b>scen6</b>	<b>scen10</b>	<b>scen12</b>	<b>scen13</b>	<b>scen14</b>
<b>6M</b>	4.38325	3.10707	0.29981	1.98295	4.58592	2.54065
<b>12M</b>	6.36259	3.28243	0.93951	-0.53805	4.75493	0.97854
<b>18M</b>	6.10588	2.77495	1.18756	0.06022	6.02568	0.53159
<b>24M</b>	5.53897	3.97015	0.96290	-0.08817	6.39616	-0.21870
<b>30M</b>	5.04068	5.64055	0.35360	-0.36979	6.05692	-0.68264
<b>36M</b>	5.27151	5.37177	0.81605	-1.85743	6.18370	-1.51785
<b>42M</b>	5.56557	6.12349	-0.31675	-0.69686	5.47596	-2.32382
<b>48M</b>	4.21027	6.41528	-0.39626	-0.47213	4.16936	-2.69127
<b>54M</b>	4.76271	7.88302	0.64963	-0.93665	2.60424	-3.85937
<b>60M</b>	5.61357	9.41854	1.27622	-1.23056	2.80055	-1.72952

*Πίνακας 3: 6μηνο Euribor ανά 6μήνες και για τυχαία σενάρια*

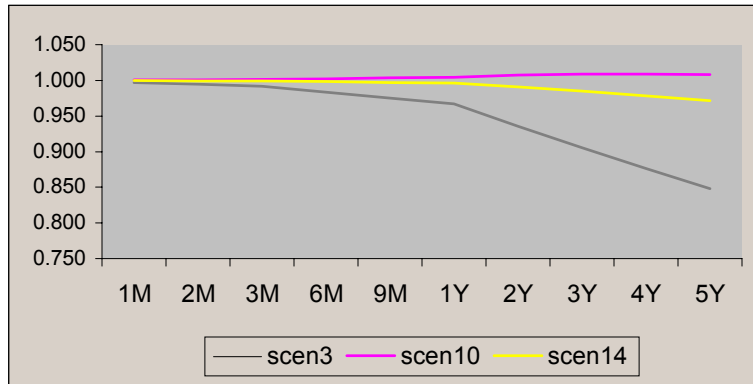
Οι παραπάνω πίνακες έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε τα αποτελέσματα από τα ίδια σενάρια κάθε φορά. Έτσι παρατηρούμε ότι τα σενάρια 10,12 και 14 μας δίνουν αρνητικές τιμές για το 6μηνο Euribor και αντίστοιχα μας δίνουν τιμές ομολόγων μεγαλύτερες της μονάδας. Αυτά τα σενάρια στη συνέχεια της έρευνας, προκειμένου να κάνουμε την τιμολόγηση της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων θα τα απορρίψουμε και θα χρησιμοποιήσουμε μόνο όσα έχουν θετική τιμή για όλη τη διάρκεια των 5 ετών. Αυτό θα γίνει αντίστοιχα και για τις άλλες δύο σειρές επιτοκίων, το FDON4Y και το FDON7Y. Στα διαγράμματα που ακολουθούν απεικονίζεται διαγραμματικά η πορεία του EON για τα ίδια σενάρια και για 5 χρόνια καθώς και η καμπύλη του 6μηνου Euribor όπως προκύπτει από τον τύπο του Vasicek. Στο τελευταίο διάγραμμα φαίνεται η καμπύλη που σχηματίζουν τα ομόλογα όλων των χρονικών περιόδων και για τα ίδια πάλι σενάρια.



Διάγραμμα 1: Προσομοίωση του EON, από 2/1/03 και για 5 χρόνια σε ημερήσια βάση



Διάγραμμα 2: Προσομοίωση δημηνο Euribor, ανά 6μήνες



Διάγραμμα 3: Τιμές προεξοφλημένων ομολόγων

Αφού παρουσιάσαμε τους πίνακες και τα διαγράμματα, προκειμένου να δώσουμε μία εικόνα των αποτελεσμάτων όπως προέκυψαν από το Monte-Carlo, κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε και κάποια άλλα στοιχεία που αφορούν την προσομοίωση των επιτοκίων. Κατ' αρχήν στο MC ως αρχική τιμή του επιτοκίου θέσαμε το 3.44% και για τις τρεις σειρές επιτοκίων, που είναι η τιμή που πήραμε από το Bloomberg για τις 31/12/02. Επιπλέον η προσομοίωση έγινε όπως προείπαμε για 5000 σενάρια για κάθε μία σειρά και μας έδωσε τον ακόλουθο αριθμό απόλυτα θετικών αποτελεσμάτων:

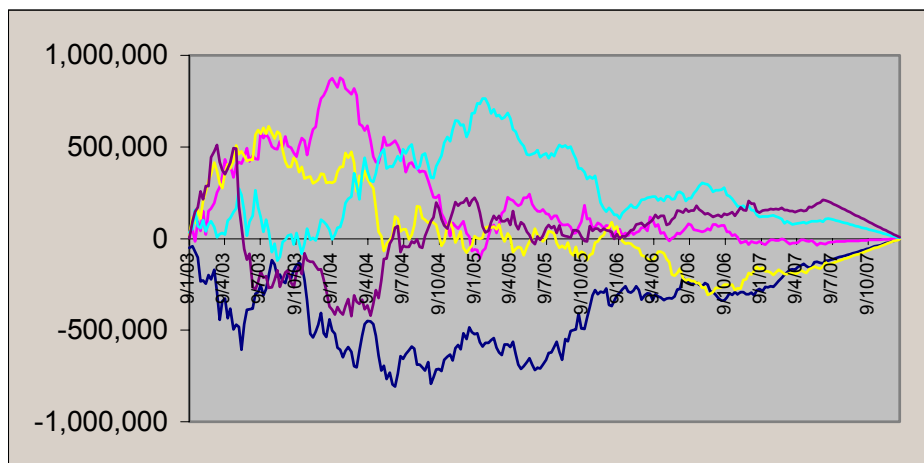
EON	FD4Y	FD7Y
4049	4328	4849

Βλέποντας αυτά τα αποτελέσματα και ανατρέχοντας στα αποτελέσματα που μας έδωσε η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου του Vasicek, μπορούμε να πούμε ότι η μεγάλη διαφορά στον αριθμό των αποτελεσμάτων οφείλεται κατά κύριο λόγο στο κ, την ταχύτητα επιστροφής των επιτοκίων στο μέσο. Όπως θυμόμαστε από προηγουμένως το κ ήταν στην περίπτωση του EON 4.14%, 8.01% για το FDON4Y και 20.15% για το FDON7Y. Αυτό σημαίνει ότι στην τρίτη σειρά η ταχύτητα με την οποία τα επιτόκια επιστρέφουν είναι πολύ μεγαλύτερη, με αποτέλεσμα η προσομοίωση να μας δίνει πιο μικρές μεταβολές των επιτοκίων, επομένως πιο μικρές πιθανότητες για πραγματοποίηση αρνητικών επιτοκίων. Ένα επιπλέον στοιχείο που συντείνει στην εικόνα αυτή των

αποτελεσμάτων, είναι και η μεταβλητότητα των επιτοκίων, η οποία μειώνεται από 1.275% για το EON σε 1.16% και 0.95% αντίστοιχα για τις άλλες δύο σειρές.

## ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ “INTEREST RATE SWAP”

Έχοντας ολοκληρώσει την προσομοίωση των επιτοκίων και έχοντας τα στοιχεία που αναφέραμε παραπάνω, το επόμενο στάδιο ήταν η τιμολόγηση της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων. Δημιουργήσαμε τρεις διαφορετικές, για τα τρία διαφορετικά επιτόκια που προσομοιώσαμε και προβήκαμε στην αποτίμηση. Αυτό το οποίο κάναμε ήταν να υπολογίζουμε την αγοραία αξία του “swap” ανά μία εβδομάδα και για κάθε σενάριο που είχαμε στη διάθεση μας. Στο σημείο αυτό επαναλαμβάνουμε ότι η αποτίμηση έγινε με εκθετική παρεμβολή μεταξύ των συντελεστών προεξόφλησης, δηλαδή των τιμών των προεξοφλημένων ομολόγων. Στο διάγραμμα που ακολουθεί δίνουμε μία εικόνα του πως διαμορφώνεται η αξία του συμβολαίου για διάφορα σενάρια, όλα όμως με βάση τη ΣΑΕ, που έγινε με τα αποτελέσματα του EON. Όμοια είναι και η εικόνα για τις άλλες δύο συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων.

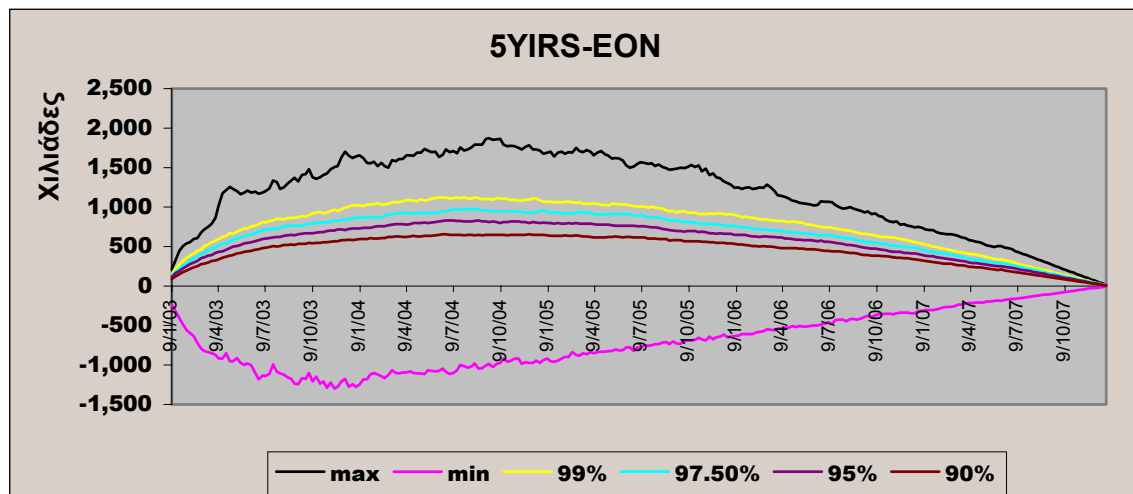


*Διάγραμμα 4: Αποτίμηση συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων, σε εβδομαδιαία βάση και για τυχαία σενάρια*

Όπως παρατηρούμε και από το διάγραμμα η ΣΑΕ μπορεί να έχει πολλές διακυμάνσεις καθ' όλη τη διάρκεια της, ανάλογα με την κίνηση που ακολουθούν τα επιτόκια και συγκεκριμένα το δμηνο Euribor, που εμείς χρησιμοποιούμε. Έτσι βλέπουμε σενάρια που είναι μόνο θετικά ή μόνο αρνητικά για τον έναν αντισυμβαλλόμενο και κάποια άλλα που εμφανίζουν μικτή πορεία. Επειδή θέλαμε να μετρήσουμε τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο ως ένα μέσο όρο και όχι σαν ένα απόλυτο αριθμό, έπρεπε να τον υπολογίσουμε για κάθε ένα ξεχωριστό σενάριο και επομένως στο τέλος να έχουμε για το EON, 4049 παράγοντες έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο. Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν έχει ιδιαίτερη αξία, εφαρμόσαμε μία πιο συντηρητική διαδικασία την οποία και εξηγήσαμε νωρίτερα.

## CEF: ΜΕΤΡΗΣΗ & ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το τελευταίο κομμάτι υπολογισμών ήταν ο παράγοντας έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο (CEF). Στο επόμενο διάγραμμα δείχνουμε τα σενάρια που έχουμε “δημιουργήσει” και την πιθανή πορεία που θα είχε η ΣΑΕ, εφόσον κάποιο από αυτά πραγματοποιείτο.



Διάγραμμα 5: IRS “δημιουργία” σεναρίων και μέτρηση του CEF ως επιφάνεια

Όπως παρατηρούμε το σενάριο που περιέχει την απόλυτα θετική για εμάς τιμή είναι αρκετά υψηλότερο από το αντίστοιχο που έχει δημιουργηθεί με την κατά 99%

ανώτερη τιμή, κάθε εβδομάδα που αποτιμάται. Προκειμένου να μετρήσουμε τον CEF υπολογίσαμε με τον τύπο του Riemann και τα αποτελέσματα που πήραμε ήταν τα ακόλουθα:

<b>eon</b>	<b>CEF(99%)</b>	<b>CEF(97.5%)</b>	<b>CEF(95%)</b>	<b>CEF(90%)</b>
cef5y	19.9036%	17.1589%	14.7133%	11.8469%
cef1y	3.9807%	3.4318%	2.9427%	2.3694%
<b>fd4y</b>				
cef5y	16.4441%	14.1249%	12.0305%	9.6119%
cef1y	3.2888%	2.8250%	2.4061%	1.9224%
<b>fd7y</b>				
cef5y	10.0844%	8.5993%	7.2412%	5.6944%
cef1y	2.0169%	1.7199%	1.4482%	1.1389%

*Πίνακας 4: Παράγοντας έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο, για διάφορα διαστήματα εμπιστοσύνης, για όλη τη διάρκεια αλλά και σε ετήσια βάση*

Με τον πίνακα4 που παραθέτουμε παραπάνω ολοκληρώνουμε ουσιαστικά την έρευνα για την μέτρηση του κινδύνου προ-διακανονισμού. Έχοντας τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο για οποιαδήποτε ληκτότητα, είμαστε πλέον σε θέση να μετρήσουμε κάθε φορά τον κίνδυνο, προσθέτοντας απλά στην αγοραία αξία τον CEF ως ποσοστό της υποθετικής αξίας. Μάλιστα τον παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο τον υπολογίσαμε για διαφορετικά διαστήματα εμπιστοσύνης, ώστε να έχουμε μία καλλίτερη εικόνα.

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Όπως ήδη ειπώθηκε η ιδέα για την μέτρηση του PSR μας δόθηκε από την έρευνα που είχε πραγματοποιηθεί παλαιότερα. Παρ' όλο ότι η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό του κινδύνου στηρίχθηκε εν πολλοίς στην προηγούμενη αυτή έρευνα και ο τρόπος μέτρησης του παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο έγινε με τον ίδιο τρόπο, η έρευνα μας διαφοροποιείται στην βάση της. Για να είμαστε πιο αναλυτικοί, σύμφωνα με την προηγούμενη εργασία, το επιτόκιο κινούνταν από ένα αρχικό σημείο και κατά μεγάλο διάστημα εμπιστοσύνης(97.7%) και με βάση τον τύπο  $\pm 2SD$ , δηλαδή η κίνηση του στο χρόνο εξαρτάται μόνο από τη διακύμανση του. Το αρχικό σημείο ήταν ένα επιτόκιο όπως παρατηρούνταν από την αγορά, ενώ το SD ήταν και αυτό διαθέσιμο.

Εμείς από την πλευρά μας προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε την κίνηση του επιτοκίου μέσω ενός μοντέλου συνεχούς χρόνου και στη συνέχεια αναπαράγαμε την πορεία του για τα επόμενα 5 χρόνια, ενώ ταυτόχρονα υπολογίσαμε και τις τιμές των εντόκων όπως προκύπτουν από το μοντέλο του Vasicek. Με δεδομένα τις σειρές των επιτοκίων για το EON και το FDON, όπως τα βρήκαμε από την αγορά, προσεγγίσαμε τους παράγοντες του μοντέλου και κατόπιν προβήκαμε στην προσομοίωση του. Τα αποτελέσματα που μας έδωσε τόσο η εκτίμηση των παραμέτρων, όσο και η προσομοίωση κατά Monte-Carlo, ήταν πολύ ικανοποιητικά, σε σχέση με τα πραγματικά δεδομένα που παρατηρήσαμε στην αγορά. Στη συνέχεια η αποτίμηση της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων, έγινε με τρόπο ώστε να ανταποκρίνεται στις διαδικασίες που ακολουθούνται από τα περισσότερα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και συνεπώς να έχουμε μία όσο το δυνατόν καλύτερη εικόνα. Από εκεί και έπειτα ο τρόπος υπολογισμού του παράγοντα έκθεσης στον πιστωτικό κίνδυνο έγινε με τον υπολογισμό της επιφάνειας του παραλληλογράμμου, που έχει το ίδιο εμβαδόν με την επιφάνεια που οριοθετεί το ολοκλήρωμα που ορίζει η καμπύλη της αγοραίας αξίας της ΣΑΕ και του χρόνου.

Από τη στιγμή που μπορεί κάποιος να διαφοροποιήσει την βάση της διαδικασίας αλλάζοντας τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει την πορεία των επιτοκίων, είναι δυνατό



και εφικτό η έρευνα πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο να συνεχιστεί. Κάτι τέτοιο προσπαθήσαμε να εφαρμόσουμε και εμείς, προσπαθώντας να προσεγγίσουμε το μοντέλο των Cox, Ingersoll and Ross, που μας δίνει μια διαφορετική προσέγγιση για την κίνηση του στιγμιαίου επιτοκίου και δεν επιτρέπει την εμφάνιση αρνητικών τιμών. Αυτό όμως δεν ήταν εφικτό, καθώς με τα εργαλεία που είχαμε στη διάθεση μας δεν ήταν δυνατό να προσεγγίσουμε οικονομετρικά τις παραμέτρους του μοντέλου. Για αυτό και κρίνουμε σκόπιμο να μην παρουσιάσουμε την δουλειά η οποία έγινε επάνω στο συγκεκριμένο μοντέλο.

## Βιβλιογραφία

- Anderson N., Breedon F., Deacon M., Derry A., Murphy G.: “Estimating and Interpreting the Yield Curve”, Wiley
- Bank for International Settlements: “Settlement procedures and counter party risk management”, Βασιλεία, Σεπτέμβριος 1998
- Bank for International Settlements: “A glossary of terms used in payments and settlement systems”, Ιανουάριος 2001
- D. Brigo- F. Mercurio, “Interest Rate Models, Theory and Practice”
- HFB, Heinz Cremers- Willi Schwarz: “Interpolation of discount factors”, May 1996
- Duffie Darrell : “Dynamic asset pricing theory”
- Grabbe J.Orlin : “International financial markets”, third edition
- Hull John C.: “Options, futures & other derivatives”, fourth edition
- Hull John C. and A.White: “Pricing interest rate derivative securities”, Review of financial studies,3,4 (1990), 573-92
- Lawrence David: “Modeling derivative counter party credit risk”, Workshop, 22 Ιουνίου 2000
- J.F.J de Munnik: “The valuation of Interest Rate Derivative Securities”
- Evan Picoult, “Measuring Pre-Settlement Credit Risk on a Portfolio Basis”, Board of Governors of the federal Reserve System,1996
- Neftci Salih N.: “An introduction to the mathematics of financial derivatives”, second edition
- Saunders Anthony: “Financial institutions management”, third edition
- Vasicek, O. (1977): “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, Journal of Financial Economics 5, 177-188