



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
Π.Μ.Σ. ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ LEE – CARTER ΚΑΙ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ

ΜΑΥΡΟΜΜΑΤΗ Χ. ΕΛΕΝΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κος ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΙΤΣΕΛΗΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2012



UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAMME IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

MODELING AND FORECASTING MORTALITY THE MODEL LEE – CARTER AND ITS EXTENSIONS

MAVROMMATI CH. ELENI

SUPERVISOR: Mr GEORGE PITSELIS

PIRAEUS 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΙΑ

Στους γονείς μου

Χρήστο και Μαίρη

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής της διπλωματικής μου εργασίας, τον κύριο Σπυρίδωνα Βρόντο και τον κύριο Γεώργιο Ψαρράκο. Ιδιαίτερα όμως θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας επίκουρο καθηγητή κύριο Γεώργιο Πιτσέλη για την πολύτιμη βοήθειά του και την άψογη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της. Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ψυχολογική και οικονομική στήριξή τους χωρίς την οποία θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή εξετάζεται το μοντέλο Lee – Carter το οποίο δημοσίευσαν και εφάρμοσαν στα δεδομένα των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής το 1992 οι Ronald Lee και Lawrence Carter. Το μοντέλο αυτό αποτελεί μία από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους πρόβλεψης της θνησιμότητας και χρησιμοποιείται ευρέως τόσο σε ακαδημαϊκή βιβλιογραφία όσο και σε πρακτικές εφαρμογές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι υπολογισμοί που χρειάζονται είναι σχετικά εύκολοι καθώς και στο ότι έχει εφαρμοστεί επιτυχώς σε πολλές χώρες όπως οι Η. Π. Α. και ο Καναδάς. Η εργασία αυτή αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι το θεωρητικό κομμάτι στο οποίο γίνεται η αναλυτική περιγραφή του μοντέλου Lee – Carter και αναφέρονται τα προβλήματα, οι εναλλακτικές μέθοδοι και οι προεκτάσεις του. Το δεύτερο μέρος είναι το πρακτικό κομμάτι στο οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος Lee – Carter σε δεδομένα χωρών της Νότιας, της Βόρειας και της Κεντρικής Ευρώπης και γίνονται συγκρίσεις μεταξύ τους. Οι χώρες αυτές είναι οι: Ιταλία – Γαλλία – Ισπανία, Νορβηγία – Σουηδία – Δανία και Αυστρία – Τσεχία – Ελβετία. Μετά την ολοκλήρωση των συγκρίσεων παραθέτονται κάποια συμπεράσματα που αφορούν τα αποτελέσματα των συγκρίσεων αυτών.

Abstract

This thesis examines the model Lee – Carter which was published and applied to data from United States of America in 1992 by Ronald Lee and Lawrence Carter. This model is one of the most popular methods for forecasting mortality and is used widely in both academic literature and practical applications. This is due to the fact that the model is computationally simple to apply and it has given successful results for many countries such as U.S.A. and Canada. This thesis consists of two parts. The first part is the theoretical one in which the model Lee – Carter is described analytically and some problems, alternative methods and extensions are presented. The second part is the practical one in which the method Lee – Carter is applied to data for countries of Northern, Southern and Central Europe, including some comparisons among them. These countries are Italy – France – Spain, Norway – Sweden – Denmark and Austria – Czech Republic – Switzerland. After the completion of the comparisons some concluding results concerning the results of these comparisons are presented.

Πίνακας Περιεχομένων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ LEE – CARTER.....	3
1.1 Περιγραφή του μοντέλου.....	3
1.2 Πρόβλεψη.....	8
1.3 Προβλήματα της μεθόδου.....	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LEE – CARTER.....	14
2.1 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	14
2.1.1 Μέθοδος Newton-Raphson.....	14
2.1.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με βάρη.....	15
2.1.3 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας Poisson.....	17
2.2 Προεκτάσεις του μοντέλου.....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΟΜΑΔΩΝ ΧΩΡΩΝ.....	23
3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.....	23
3.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΩΡΩΝ ΤΗΣ ΝΟΤΙΑΣ ΕΥΡΩΠΗΣ.....	24
3.2.1 Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x	25
3.2.2 Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x	26
3.2.3 Σύγκριση των εκτιμήσεων του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας.....	27
3.2.4 Σύγκριση των εκτιμήσεων του προσδόκιμου ζωής.....	29
3.2.5 Σύγκριση όλων των εκτιμήσεων για γυναίκες και άντρες.....	32
3.2.6 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής.....	38
3.2.7 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για γυναίκες και άντρες....	40
3.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΩΡΩΝ ΤΗΣ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΥΡΩΠΗΣ.....	41
3.3.1 Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x	41
3.3.2 Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x	42
3.3.3 Σύγκριση των εκτιμήσεων του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας.....	43
3.3.4 Σύγκριση των εκτιμήσεων του προσδόκιμου ζωής.....	46
3.3.5 Σύγκριση όλων των εκτιμήσεων για γυναίκες και άντρες.....	49
3.3.6 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής.....	54
3.3.7 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για γυναίκες και άντρες....	56
3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΩΡΩΝ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΥΡΩΠΗΣ.....	58
3.4.1 Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x	58
3.4.2 Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x	59
3.4.3 Σύγκριση των εκτιμήσεων του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας.....	60
3.4.4 Σύγκριση των εκτιμήσεων του προσδόκιμου ζωής.....	62
3.4.5 Σύγκριση όλων των εκτιμήσεων για γυναίκες και άντρες.....	65

3.4.6 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής.....	70
3.4.7 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για γυναίκες και άντρες....	72
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΝ	73
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	77
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	78
B1.....	78
B1.1 Ιταλία	78
B1.2 Γαλλία	85
B1.3 Ισπανία.....	92
B2.....	99
B2.1 Νορβηγία.....	99
B2.2 Σουηδία	106
B2.3 Δανία.....	113
B3.....	120
B3.1 Αυστρία.....	120
B3.2 Τσεχία	125
B3.3 Ελβετία.....	130
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	135

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για αρκετές δεκαετίες, οι αναλογιστές ασφαλειών ζωής και συνταξιοδοτικών προγραμμάτων χρησιμοποιούσαν προβαλλόμενους πίνακες θνησιμότητας. Το πρόβλημα όμως το οποίο προέκυπτε και έπρεπε να αντιμετωπιστεί ήταν η μακροβιότητα: οι άνθρωποι ζούσαν πολύ περισσότερο από αυτό που αναμενόταν σύμφωνα με τους πίνακες θνησιμότητας που χρησιμοποιούνταν τότε για τους διάφορους αναλογιστικούς υπολογισμούς. Γι' αυτό το λόγο, οι περισσότερες προβλέψεις θνησιμότητας που έγιναν κατά τη διάρκεια του δεύτερου μισού του 20^{ου} αιώνα υποτιμούσαν τη μεγαλύτερη διάρκεια ζωής. Στην πράξη, οι βελτιώσεις της θνησιμότητας, έχει παρατηρηθεί ότι υπερβαίνουν με συνέπεια τις προβαλλόμενες βελτιώσεις.

Αυτό που έλειπε ήταν μία ακριβής εκτίμηση της ταχύτητας βελτίωσης της θνησιμότητας. Πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να βρουν μία κατάλληλη καμπύλη θνησιμότητας. Οι πιο διάσημοι από αυτούς είναι οι deMoivre, Gompertz, Makeham, Sang και Weibull. Πιο πρόσφατες προσπάθειες είναι των Alho (1990, 1992), Alho και Spencer (1990), McNown και Rogers (1989, 1992), Bell και Monsell (1991) και Lee και Carter (1992).

Η πρόβλεψη της θνησιμότητας είναι μία απαραίτητη διαδικασία για τους παρόχους ισόβιων ραντών ζωής. Για αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιείται ποικιλία στατιστικών μοντέλων συμπεριλαμβανομένων βασικών μοντέλων παλινδρόμησης, σύμφωνα με τα οποία η ηλικία και ο χρόνος παρατηρούνται ως συνεχείς μεταβλητές, καθώς και πιο εξελιγμένων, ανθεκτικών, μη παραμετρικών μοντέλων.

Οι Lee και Carter (1992) δημοσίευσαν ένα λογαριθμο – διγραμμικό μοντέλο το οποίο και εφάρμοσαν στα αμερικανικά δεδομένα από το 1933 μέχρι το 1987. Το μοντέλο αυτό περιγράφει το λογάριθμο μιας χρονοσειράς ρυθμών θανάτου που αφορούν την ηλικία ως το άθροισμα τριών όρων. Ο πρώτος όρος αφορά στην ηλικία και είναι ανεξάρτητος του χρόνου, ο δεύτερος όρος είναι προϊόν μιας παραμέτρου που μεταβάλλεται με το χρόνο και αντικατοπτρίζει το γενικό επίπεδο της θνησιμότητας

και ο τρίτος όρος αφορά στην ηλικία και δείχνει πόσο γρήγορα ή αργά μεταβάλλεται η θνησιμότητα σε κάθε ηλικία όταν το γενικό επίπεδο της θνησιμότητας αλλάζει. Η εκτίμηση που προκύπτει από την χρονικά μεταβαλλόμενη παράμετρο μοντελοποιείται και προβάλλεται σαν μία στοχαστική χρονοσειρά χρησιμοποιώντας μεθόδους όπως η μέθοδος Box-Jenkins ή η μέθοδος ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average Process). Από την πρόβλεψη αυτή του γενικού επιπέδου της θνησιμότητας και κάνοντας χρήση των εκτιμώμενων παραμέτρων που εξαρτώνται από την ηλικία, προκύπτουν οι μελλοντικοί ρυθμοί θανάτου (βλ. Pitacco et al. (2009)).

Το μοντέλο αυτό λειτουργεί κάνοντας χρήση ιστορικών στοιχείων. Αυτό αποτελεί μειονέκτημα της μεθόδου, γιατί τα στοιχεία αυτά μπορεί τελικά να μην ισχύουν στο μέλλον. Συνεπώς, δεν λαμβάνονται υπόψη σημαντικές αλλαγές που επηρεάζουν τα αποτελέσματα και τελικά τα συμπεράσματα στα οποία θα οδηγηθούμε να παρεκκλίνουν από την πραγματικότητα. Παρόλα αυτά, το μοντέλο Lee-Carter είναι ένα από τα πιο δημοφιλή και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι υπολογισμοί που χρειάζονται είναι σχετικά εύκολοι και στο ότι έχει εφαρμοστεί επιτυχώς σε πολλές χώρες όπως είναι οι Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, ο Καναδάς, η Χιλή, η Ιαπωνία και το Βέλγιο. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως ότι για την Αυστραλία και το Ηνωμένο Βασίλειο τα αποτελέσματα δεν ήταν απόλυτα ικανοποιητικά (βλ. Wang (2007)).

Το μοντέλο που πρότειναν οι Lee και Carter είναι ευρέως γνωστό. Επίσης, οι προβλέψεις ρυθμών θανάτων του συγκεκριμένου μοντέλου δεν αφορούν μία συγκεκριμένη ηλικία και αυτός είναι ένας ακόμη λόγος που είναι τόσο χρήσιμο για τους αναλογιστές, οι οποίοι ενδιαφέρονται για τα ασφάλιστρα και τα αποθεματικά ισόβιων ραντών ζωής. Δεν είναι, όμως, το μοναδικό για την παρεκβολή (extrapolation) της θνησιμότητας στο μέλλον. Μερικά από αυτά τα μοντέλα είναι σχεδιασμένα να προβάλλουν συγκεκριμένους δημογραφικούς δείκτες, αναλόγως τον τύπο και τη φύση του μοντέλου. Από την άποψη αυτή, το μοντέλο των Lee και Carter προορίζεται τυπικά για μακροπρόθεσμες προβολές συσσωρευμένων (aggregate) δεικτών θνησιμότητας όπως τα προσδόκιμα ζωής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ LEE – CARTER

1.1 Περιγραφή του μοντέλου

Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά το μοντέλο των Lee και Carter (1992). Η μαθηματική έκφραση του μοντέλου ορίζεται ως εξής:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (1)$$

όπου:

x: η ηλικία

t: ο χρόνος

$m_{x,t}$: ο παρατηρούμενος κεντρικός ρυθμός θνησιμότητας στην ηλικία x και στο χρόνο t (observed central death rate at age x in year t)

a_x : η μέση θνησιμότητα σε σχέση με την ηλικία x

b_x : η απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x όταν το k_t αλλάζει

k_t : ο δείκτης που περιγράφει την αλλαγή του επιπέδου της θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου

$\varepsilon_{x,t}$: το σφάλμα στην ηλικία x και στο χρόνο t

Στο συγκεκριμένο μοντέλο η μέθοδος της απλής παλινδρόμησης δεν μπορεί να εφαρμοστεί γιατί στο δεξί μέλος της εξίσωσης (1) δεν υπάρχει παρατηρούμενη μεταβλητή. Για να βρεθεί όμως μία μοναδική λύση μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο όρος $\varepsilon_{x,t}$ έχει μέσο 0 και διασπορά σ_ε^2 και χρησιμοποιώντας τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\sum_x b_x = 1 \quad \text{και} \quad \sum_t k_t = 0.$$

Πολλές φορές στη βιβλιογραφία μπορεί να συναντήσουμε τον περιορισμό $\sum_x b_x^2 = 1$ αντί του $\sum_x b_x = 1$ (βλ. Pitacco et al. (2009)).

Η διαδικασία επίλυσης αποτελείται από δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα θα πρέπει να εκτιμηθούν οι παράμετροι a_x , b_x και k_t . Στο δεύτερο βήμα, εκτιμώνται ξανά οι τιμές της παραμέτρου k_t , εξισώνοντας το παρατηρούμενο με το εκτιμώμενο πλήθος θανάτων για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Παρακάτω παρουσιάζονται τα βήματα αναλυτικά.

Βήμα 1^ο

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{και} \quad t = t_1, t_2, \dots, t_n$$

και την εξίσωση:

$$SS = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2. \quad (2)$$

Θέλουμε να βρούμε τα \widehat{a}_x , \widehat{b}_x και \widehat{k}_t που την ελαχιστοποιούν. Για να βρούμε την εκτίμηση του a_x , παραγωγίζουμε την εξίσωση (2) ως προς a_x , την θέτουμε ίση με μηδέν και έχουμε:

$$\frac{\partial SS}{\partial a_x} = \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_{x,t} - \sum_{t=t_1}^{t_n} a_x - b_x \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_{x,t} - b_x \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = \sum_{t=t_1}^{t_n} a_x \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} a_x = \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_{x,t} \Leftrightarrow$$

$$\widehat{a}_x = \frac{1}{t_n - t_1 - 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_{x,t}.$$

Για να βρούμε τις εκτιμήσεις των b_x και k_t εφαρμόζουμε την μέθοδο Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition, SVD) στον πίνακα:

$$\ln(m_{x,t}) - a_x.$$

Η μέθοδος SVD διασπά έναν πίνακα σε γινόμενο τριών πινάκων ($Z = ULV^T$).

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τον πίνακα θανάτου M :

$$M = \begin{pmatrix} m_{x_1 t_1} & \dots & m_{x_1 t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{x_m t_1} & \dots & m_{x_m t_n} \end{pmatrix}$$

με διαστάσεις $(x_m - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$ και δημιουργούμε τον πίνακα:

$$Z = \ln M - a_x = \begin{pmatrix} \ln m_{x_1 t_1} - a_{x_1} & \dots & \ln m_{x_1 t_n} - a_{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln m_{x_m t_1} - a_{x_m} & \dots & \ln m_{x_m t_n} - a_{x_m} \end{pmatrix}$$

με διαστάσεις $(x_m - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$. Ύστερα, ορίζουμε τους τετραγωνικούς πίνακες $Z^T Z$ και ZZ^T με διαστάσεις $(t_n - t_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$ και

$(x_m - x_1 + 1) \times (x_m - x_1 + 1)$ αντίστοιχα και βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα τους. Έστω U ο πίνακας που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του ZZ^T και V του $Z^T Z$. Τότε, εφαρμόζοντας την SVD, η καλύτερη προσέγγιση για τον πίνακα Z είναι η $Z = ULV^T$, όπου L είναι ο πίνακας που περιέχει τις ιδιάζουσες τιμές του Z , και καταλήγουμε στο ότι:

$$\widehat{b}_x = U \quad \text{και} \quad \widehat{k}_t = LV^T.$$

Βήμα 2^ο

Στη συνέχεια, επειδή θέλουμε το εκτιμώμενο πλήθος θανάτων να ισούται με το παρατηρούμενο, λύνουμε την εξίσωση:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_m} N_{x,t} e^{\left(\widehat{a}_x + \widehat{b}_x \widehat{k}_t \right)}, \quad (3)$$

όπου:

$D_{x,t}$: το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων στην ηλικία x και στο χρόνο t

$N_{x,t}$: ο πληθυσμός στην ηλικία x και στο χρόνο t (η έκθεση στον κίνδυνο)

\widehat{a}_x : η εκτίμηση της παραμέτρου a_x

\widehat{b}_x : η εκτίμηση της παραμέτρου b_x

\widehat{k}_t : η δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t

ως προς \widehat{k}_t και παίρνουμε την δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t .

Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ χρήσιμη στην παρουσίαση πινάκων ζωής, ειδικά σε περιπτώσεις που, σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους, είναι γνωστοί μόνο οι συνολικοί ρυθμοί θανάτων και όχι οι ρυθμοί θανάτων που αφορούν την ηλικία.

Ένα πρόβλημα, όμως, το οποίο προκύπτει είναι ότι η παραπάνω εξίσωση είναι δυνατόν να έχει 0, 1 ή 2 λύσεις για το \widehat{k}_t , ανάλογα με τις τιμές που παίρνει το \widehat{b}_x . Όταν η λύση είναι μοναδική τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, όταν όμως υπάρχουν 0 ή 2 λύσεις τότε η προσέγγιση αυτή είναι μη συνεπής και πρακτικά καθόλου χρήσιμη. Κάτι τέτοιο, συνήθως, δεν συμβαίνει, παρά μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις και σε μεγάλες ηλικίες.

Το πρόβλημα αυτό δημιουργείται όταν οι τιμές του \widehat{b}_x έχουν διαφορετικά πρόσημα, πράγμα που είναι εύκολο να διαπιστωθεί. Αυτή η μη ομοιομορφία στα πρόσημα των τιμών του \widehat{b}_x δείχνει ότι η θνησιμότητα σε κάποιες ομάδες αυξάνεται και σε κάποιες άλλες μειώνεται. Αυτό συμβαίνει σπάνια όταν λαμβάνονται υπόψη όλες οι αιτίες θανάτου, αφού η θνησιμότητα γενικά μειώνεται σε παγκόσμια κλίμακα, με ελάχιστες εξαιρέσεις όπως η Ουγγαρία (βλ. Girosi and King (2007)). Όταν λαμβάνονται υπόψη μόνο κάποιες αιτίες θανάτου και όχι όλες, τότε η μη ομοιομορφία στα πρόσημα των τιμών του \widehat{b}_x παρατηρείται πιο συχνά και αυτό έχει ως συνέπεια η δεύτερη εκτίμηση του k_t να μη συνιστάται.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τα παραπάνω, χωρίζουμε τις τιμές του \widehat{b}_x σε δύο ομάδες, η μία ομάδα θα έχει τις θετικές τιμές του \widehat{b}_x , $\widehat{b}_x^+ = |\widehat{b}_x|$, και η άλλη τις αρνητικές, $\widehat{b}_x^- = -|\widehat{b}_x|$. Έτσι η εξίσωση (3) μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_m} N_{x,t} e^{\left(\widehat{a}_x + \widehat{b}_x^+ \widehat{k}_t\right)} + \sum_{x=x_1}^{x_m} N_{x,t} e^{\left(\widehat{a}_x + \widehat{b}_x^- \widehat{k}_t\right)}.$$

Όταν όλες οι τιμές του \widehat{b}_x έχουν το ίδιο πρόσημο, τότε το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ένα άθροισμα εκθετικών με μοναδικούς αγνώστους τα \widehat{k}_t , που είτε όλα αυξάνονται είτε όλα μειώνονται, δηλαδή είναι μία μονότονη συνάρτηση των \widehat{k}_t με εύρος $(0, +\infty)$. Έτσι εξασφαλίζεται η μοναδική λύση. Όταν τα πρόσημα των τιμών

του \widehat{b}_x είναι διαφορετικά, τότε το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ένα άθροισμα εκθετικών με μοναδικούς αγνώστους τα \widehat{k}_t που κάποια αυξάνονται και κάποια μειώνονται. Όπως είναι γνωστό μία τέτοια συνάρτηση έχει σχήμα U με το ελάχιστο σημείο της να είναι αυστηρά θετικό. Έτσι, αν το $D_{x,t}$ είναι αρκετά μεγάλο, μία γραμμή που θα βρίσκεται στο ύψος του $D_{x,t}$ θα χωρίζει την συνάρτηση σχήματος U σε δύο μέρη και συνεπώς θα υπάρχουν δύο λύσεις. Αν το $D_{x,t}$ είναι αρκετά μικρό η γραμμή θα περνάει κάτω από τη συνάρτηση σχήματος U και συνεπώς δεν θα υπάρχουν λύσεις.

Το δεύτερο βήμα μπορεί να αντικατασταθεί με δύο εναλλακτικές μεθόδους επανεκτίμησης του \widehat{k}_t . Στην πρώτη μέθοδο προτείνεται η προσαρμογή των \widehat{k}_t στα προσδόκια ζωής της παρατηρούμενης περιόδου. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τους θανάτους ή τον πληθυσμό που είναι εκτεθειμένος σε κίνδυνο και έτσι είναι πιο εύκολη η εφαρμογή της. Όμως, και εδώ μπορεί να προκύψουν αριθμητικά προβλήματα όταν τα \widehat{b}_x δεν έχουν το ίδιο πρόσημο. Στη δεύτερη μέθοδο, προτείνεται η προσαρμογή των \widehat{k}_t στην κατανομή της παρατηρούμενης ηλικίας των θανάτων.

Τέλος, κάνοντας αντικατάσταση τις εκτιμήσεις \widehat{a}_x , \widehat{b}_x και \widehat{k}_t στην εξίσωση (1) μπορούν να υπολογιστούν οι εκτιμήσεις $\widehat{m}_{x,t}$ και κατ' επέκταση οι εκτιμήσεις των προσδόκιμων ζωής \widehat{e}_0 .

1.2 Πρόβλεψη

Το επόμενο βήμα στο μοντέλο Lee – Carter είναι η πρόβλεψη της θνησιμότητας. Έχοντας εκτιμήσει τις μεταβλητές της μέσης θνησιμότητας a_x , της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα b_x και του δείκτη θνησιμότητας k_t , η μόνη μεταβλητή που πρέπει να προβλεφθεί είναι αυτή του δείκτη θνησιμότητας \widehat{k}_t . Οι Lee και Carter (1992) αφού δοκίμασαν αρκετά μοντέλα ARIMA κατέληξαν στο ότι ο τυχαίος

περίπατος με μετατόπιση (Random Walk with Drift, RWD) είναι το πιο καλό. Το μοντέλο έχει ως εξής:

$$\widehat{k}_t' = \widehat{k}_{t-1}' + \theta + \varepsilon_t, \quad (4)$$

όπου:

θ : η παράμετρος μετατόπισης (drift parameter)

ε_t : το σφάλμα στο χρόνο t .

Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου μετατόπισης θ είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{\widehat{k}_T' - \widehat{k}_1'}{T-1},$$

η οποία εξαρτάται μόνο από την πρώτη και τελευταία εκτίμηση των \widehat{k}_t' . Το σφάλμα ε_t ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο θ και διακύμανση σ^2 . Για την πρόβλεψη δύο περιόδων μπροστά, ο όρος \widehat{k}_{t-1}' αντικαθίσταται από την εξίσωση (4) μετατοπισμένη μία περίοδο πίσω, δηλαδή:

$$\widehat{k}_t' = \widehat{k}_{t-1}' + \hat{\theta} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\widehat{k}_t' = (\widehat{k}_{t-2}' + \hat{\theta} + \varepsilon_{t-1}) + \hat{\theta} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\widehat{k}_t' = \widehat{k}_{t-2}' + 2\hat{\theta} + (\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t).$$

Για την πρόβλεψη του \widehat{k}_t' στο χρόνο $T + (\Delta t)$ με δεδομένα που είναι γνωστά μέχρι την περίοδο T , χρησιμοποιείται η ίδια διαδικασία αναδρομικά για (Δt) περιόδους.

Η τελική εξίσωση είναι η εξής:

$$\widehat{k}_{T+(\Delta t)}' = \widehat{k}_T' + (\Delta t)\widehat{\theta} + \sum_{n=1}^{(\Delta t)} \varepsilon_{T+n-1} \Leftrightarrow$$

$$\widehat{k}_{T+(\Delta t)}' = \widehat{k}_T' + (\Delta t)\widehat{\theta} + \sqrt{(\Delta t)}\varepsilon_t.$$

Η δεύτερη σειρά είναι μία απλοποίηση που έγινε σύμφωνα με το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές ε_t στο συγκεκριμένο μοντέλο είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια διακύμανση.

Αγνοώντας τον όρο του σφάλματος μπορούν να επιτευχθούν σημεία πρόβλεψης των εκτιμήσεων (forecast point estimates) τα οποία ακολουθούν μία ευθεία γραμμή ως μία συνάρτηση του (Δt) με κλίση $\widehat{\theta}$:

$$\widehat{k}_{T+(\Delta t)}' = \widehat{k}_T' + (\Delta t)\widehat{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\widehat{k}_{T+(\Delta t)}' = \widehat{k}_T' + (\Delta t)\frac{\widehat{k}_T' - \widehat{k}_1'}{T-1}.$$

Με αυτό τον τρόπο η πρόβλεψη των \widehat{k}_t' είναι πολύ απλή, γίνεται παρεκβολή από μία ευθεία γραμμή με αρχή το πρώτο σημείο \widehat{k}_1' και το τελευταίο σημείο \widehat{k}_T' . Όλα τα άλλα σημεία αγνοούνται.

Ακόμα, μπορούν να υπολογιστούν και οι προβλέψεις για τα προσδόκιμα ζωής e_0 . Αυτό γίνεται με τη βοήθεια των προβλέψεων θνησιμότητας $m_{x,t}$ οι οποίες προκύπτουν από την εξίσωση (1) κάνοντας αντικατάσταση των εκτιμήσεων \widehat{a}_x και \widehat{b}_x καθώς και των προβλέψεων \widehat{k}_t' .

1.3 Προβλήματα της μεθόδου

Η μέθοδος Lee – Carter είναι ένας χρήσιμος και κατάλληλος τρόπος για παρεκβολή ιστορικών τάσεων στην κατανομή επιπέδου και ηλικίας της θνησιμότητας. Όμως, η παρεκβολή μπορεί να μην είναι πάντα μία λογική διαδικασία για να εφαρμοστεί. Γι' αυτό το λόγο θα συζητηθούν κάποια προβλήματα και περιορισμοί της μεθόδου (βλ. Lee (2000)).

1. Όταν οι Lee και Carter εφάρμοσαν το μοντέλο αυτό στον πληθυσμό των Η.Π.Α. παρατηρήθηκε ότι η αντίστοιχη θνησιμότητα δεν μειωνόταν πάντα κατά μήκος του γραφήματος του k_t . Αν γινόταν αυτό τότε η θνησιμότητα θα έφτανε σε απίστευτα υψηλά επίπεδα στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Έτσι, η συμπεριφορά της χρονοσειράς k_t κατά τη διάρκεια της παρατηρούμενης περιόδου (1900-1996) δεν αντιπροσωπεύει όλη την ιστορική πληροφορία και δεν μπορεί να αντανακλά μία θεμελιώδη ιδιότητα του τρόπου αλλαγής της θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου. Τότε γιατί να αναμένεται ο τρόπος αυτός να συνεχιστεί και στον επόμενο αιώνα; Ίσως η θεσμοθέτηση της βιοιατρικής έρευνας παρέχει κάποιο λόγο να θεωρείται ότι οι τάσεις του 20^{ου} αιώνα θα συνεχιστούν και στο μέλλον.
2. Η μέθοδος υποθέτει έναν συγκεκριμένο τρόπο αλλαγής στην κατανομή ηλικίας της θνησιμότητας, τέτοιο ώστε οι ρυθμοί μείωσης σε διαφορετικές ηλικίες (υπολογίζονται ως $b_x(dk_t/dt)$) να διατηρούν πάντα τις ίδιες αναλογίες μεταξύ τους με την πάροδο του χρόνου. Αλλά στην πράξη, η σχετική ταχύτητα μείωσης σε διαφορετικές ηλικίες μπορεί να ποικίλει. Για παράδειγμα, οι Horiuchi και Wilmoth (1995) επισημαίνουν πως στη Σουηδία οι ρυθμοί θανάτου σε μεγάλη ηλικία συνήθως μειώνονται πιο αργά από ότι στις άλλες ηλικίες, αλλά σε πρόσφατες δεκαετίες μειώνονται πιο γρήγορα. Όταν το μοντέλο Lee – Carter εφαρμόστηκε στα δεδομένα των Η.Π.Α. υπήρξε μία “καθυστέρηση” στις μειώσεις της θνησιμότητας στις ηλικίες 5 έως 50 σε σχέση με τις μεγαλύτερες και τις μικρότερες ηλικίες. Η μέθοδος δεν μπορεί να λάβει υπόψη τέτοιες μεταβολές. Είναι δυνατόν να τροποποιηθεί η μέθοδος και να συμπεριλάβει αλλαγές στην ηλικία, αλλά δεν είναι γνωστό αν αυτή η

μέθοδος, έχοντας τροποποιηθεί τόσο πολύ, θα “συμπεριφερόταν” καλά ως μέθοδος πρόβλεψης.

3. Η μέθοδος δεν περιλαμβάνει εξωτερικές πληροφορίες για μελλοντικές τάσεις. Ίσως θα ήταν καλύτερο να θεωρηθεί ότι παρέχει ένα είδος βασικής πρόβλεψης του τι θα συμβεί αν οι τάσεις του παρόντος συνεχιστούν. Τότε, αν υπήρχε ένας πειστικός λόγος οι μακροπρόθεσμες μελλοντικές τάσεις να αναμένονται πιο γρήγορα ή πιο αργά από ότι στο παρελθόν, η βασική πρόβλεψη θα μπορούσε να τροποποιηθεί κατάλληλα. Τέτοιοι λόγοι όμως, είναι σπάνιοι.
4. Η μέθοδος ενσωματώνει πολύ εύκολα αβεβαιότητα στην πρόβλεψη του μοντέλου προερχόμενη από αβεβαιότητα στην πρόβλεψη του k_t , του δείκτη θνησιμότητας. Είναι επίσης δυνατό να ενσωματώσει, χωρίς μεγάλη δυσκολία, αβεβαιότητα για την εκτιμώμενη τάση στη θνησιμότητα, προερχόμενη από τον αβέβαιο συντελεστή μετατόπισης στην εφαρμογή των Lee και Carter (1992). Όμως, αβεβαιότητα προερχόμενη από λάθη στην εκτίμηση των μεταβλητών b_x είναι αρκετά δύσκολο να εκτιμηθεί και να ενσωματωθεί, όπως είναι και η αβεβαιότητα προερχόμενη από λάθη κατά την εφαρμογή του βασικού μοντέλου στον πραγματικό πίνακα ρυθμών θανάτου που αφορούν την ηλικία με την πάροδο του χρόνου. Άλλα λάθη προέρχονται από την παραβίαση της υπόθεσης ότι τα λάθη εφαρμογής είναι ασυσχέτιστα κατά μήκος της ηλικίας.
5. Επειδή τα διαστήματα πιθανοτήτων δεν αντανakλούν αβεβαιότητα για το αν η προδιαγραφή του μοντέλου είναι σωστή, ούτε αβεβαιότητα για το αν το μέλλον θα είναι σαν το παρελθόν, κάποιοι πιστεύουν ότι είναι πολύ στενά και ότι υποτιμάται η αβεβαιότητα για τα μελλοντικά επίπεδα του προσδόκιμου ζωής. Ενώ κάποιοι περιμένουν σημαντικές ανακαλύψεις στην ιατρική τεχνολογία οι οποίες θα επιταχύνουν τη μείωση της θνησιμότητας, άλλοι περιμένουν ασθένειες που είναι ανθεκτικές στα φάρμακα να πολλαπλασιαστούν και να προκαλέσουν καθυστέρηση της μείωσης.

6. Μη πιθανές διαφορές των φύλων: Στην εφαρμογή σε δεδομένα του Καναδά, η διαφορετικότητα του φύλου στην προβλεπόμενη θνησιμότητα αναπτύχθηκε με μη πιθανό τρόπο, είτε τα φύλα είχαν προβλεφθεί ανεξάρτητα είτε με ταυτόσημες k_f χρονοσειρές. Πιθανώς, αυτό αντανάκλασε αποκλίνουσες τάσεις στα ιστορικά δεδομένα. Οι περισσότεροι αναλυτές περιμένουν οι διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα να μην είναι τόσο μεγάλες στις Η.Π.Α. και στον Καναδά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LEE – CARTER

2.1 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

2.1.1 Μέθοδος Newton-Raphson

Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού των \widehat{a}_x , \widehat{b}_x και \widehat{k}_t είναι η μέθοδος Newton-Raphson. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων a_x , b_x και k_t υπολογίζονται αναδρομικά, χρησιμοποιώντας έναν Newton-Raphson αλγόριθμο αντί για τη μέθοδο SVD (βλ. Pitacco et al. (2009)).

Πιο συγκεκριμένα, παίρνουμε τις μερικές παραγώγους της εξίσωσης (2) ως προς a_x , b_x και k_t , τις εξισώνουμε με το μηδέν και προκύπτει το εξής σύστημα

$$\begin{cases} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) = 0, & x = x_1, x_2, \dots, x_m \\ \sum_{x=x_1}^{x_m} b_x (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) = 0, & t = t_1, t_2, \dots, t_n \\ \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) = 0, & x = x_1, x_2, \dots, x_m. \end{cases}$$

Κάθε μία από αυτές τις εξισώσεις είναι της μορφής $f(\xi) = 0$, όπου το ξ είναι μία από τις παραμέτρους a_x , b_x και k_t . Ξεκινώντας από μία αρχική τιμή, έστω $\xi^{(0)}$, φτάνουμε στην τελική τιμή, έστω $\xi^{(k+1)}$, μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - \frac{f(\xi^{(k)})}{f'(\xi^{(k)})}.$$

Κάθε φορά που μία από τις παραμέτρους a_x , b_x και k_t αλλάζει τιμή, οι ήδη αναθεωρημένες τιμές των άλλων δύο παραμέτρων χρησιμοποιούνται στους αναδρομικούς τύπους. Οι τύποι αυτοί είναι οι εξής:

$$\hat{a}_x^{(k+1)} = \hat{a}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln m_{x,t} - \hat{a}_x^{(k)} - \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})}{t_n - t_1 - 1}$$

$$\hat{k}_t^{(k+1)} = \hat{k}_t^{(k)} + \frac{\sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{b}_x^{(k)} (\ln m_{x,t} - \hat{a}_x^{(k+1)} - \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})}{\sum_{x=x_1}^{x_m} (\hat{b}_x^{(k)})^2}$$

$$\hat{b}_x^{(k+1)} = \hat{b}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{k}_t^{(k+1)} (\ln m_{x,t} - \hat{a}_x^{(k+1)} - \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k+1)})}{\sum_{t=t_1}^{t_n} (\hat{k}_t^{(k+1)})^2}.$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε πως οι παραπάνω εκτιμήσεις δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέσαμε στην περιγραφή του μοντέλου. Για το λόγο αυτό, αντικαθιστούμε το \hat{a}_x με το $\hat{a}_x + \hat{b}_x \bar{k}$, το \hat{k}_t με το $(\hat{k}_t - \bar{k}) \hat{b}_\bullet$ και το \hat{b}_x με το $\frac{\hat{b}_x}{\hat{b}_\bullet}$, όπου \bar{k} είναι ο μέσος όρος των \hat{k}_t και \hat{b}_\bullet είναι το άθροισμα των \hat{b}_x .

2.1.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με βάρη

Ο Wilmoth (1993) πρότεινε δύο εναλλακτικές μεθόδους για την εκτίμηση των παραμέτρων των a_x , b_x και k_t . Αυτό που έκανε τον Wilmoth να μελετήσει περισσότερο το μοντέλο των Lee και Carter είναι η διαφορά μεταξύ του εκτιμώμενου και του παρατηρούμενου πλήθους θανάτων. Προσπαθώντας να βρει την αιτία γι' αυτό, είδε ότι το πρόβλημα ήταν πως τα k_t εκτιμώνται ελαχιστοποιώντας το τετράγωνο του σφάλματος του λογαρίθμου της θνησιμότητας και όχι την ίδια τη θνησιμότητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ομάδες ηλικιών με μικρό πλήθος θανάτων να

έχουν το ίδιο βάρος με ομάδες ηλικιών με μεγάλο πλήθος θανάτων, παρόλο που η συνεισφορά τους στο συνολικό πλήθος θανάτων είναι πολύ μικρή. Έτσι, κατέληξε στη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων με βάρη. Θέλοντας, λοιπόν, το εκτιμώμενο και το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων να είναι σχετικά κοντά, ο Wilmoth χρησιμοποίησε ως βάρη το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων. Η εξίσωση η οποία περιγράφει τη μέθοδο αυτή είναι η:

$$SS = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} d_{x,t} (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2, \quad (5)$$

όπου $d_{x,t}$ είναι το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων ατόμων ηλικίας x στο χρόνο t .

Τα b_x και k_t πληρούν τους περιορισμούς του βασικού μοντέλου των Lee και Carter.

Σύμφωνα με την εξίσωση (5) δίνεται μεγαλύτερο βάρος στις ομάδες με μεγάλο πλήθος θανάτων και έτσι οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από την επίλυσή της εφαρμόζουν καλύτερα στο συνολικό πλήθος θανάτων.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι δεν παρουσιάζει πρόβλημα στην περίπτωση που το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων είναι μηδέν, αφού το βάρος μηδενίζεται, πράγμα που συμβαίνει είτε όταν αναλύονται δεδομένα που αφορούν την αιτία είτε όταν εξετάζονται μικρές χώρες. Δυστυχώς όμως, η διαδικασία αυτή δεν είναι στατιστικά σωστή και η μεροληψία που προκαλείται από τις εκτιμήσεις μπορεί να υπερτερεί του πλεονεκτήματος αυτού. Συγκεκριμένα, ο Wilmoth ερμηνεύει την εξίσωση (5) σαν την λογαριθμική πιθανοφάνεια ενός μοντέλου με κανονικές, ετεροσκεδαστικές διαταραχές (disturbances) και διασπορά ανάλογη του λόγου $\frac{1}{d_{x,t}}$.

Ο ισχυρισμός αυτός είναι λανθασμένος, επειδή η διασπορά των διαταραχών αυτών δεν μπορεί να είναι αντιστρόφως ανάλογη του παρατηρούμενου πλήθους θανάτων. Μία έγκυρη πιθανοφάνεια με βάρη θα πρέπει να χρησιμοποιεί εξωγενή βάρη, αλλά το πλήθος των θανάτων είναι μία τυχαία μεταβλητή. Έτσι, οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από αυτό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχουν καμία γνωστή στατιστική ιδιότητα και έχουν μεγάλη μεροληψία.

2.1.3 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας Poisson

Η δεύτερη μέθοδος που ανέπτυξε ο Wilmoth (1993) είναι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας Poisson. Η μέθοδος αυτή αξιοποιεί καλύτερα τη διαθέσιμη πληροφορία και δεν υποθέτει πως η μεταβλητότητα των $m_{x,t}$ είναι η ίδια για οποιαδήποτε ηλικία x . Πιο αναλυτικά, υποθέτουμε πως το πλήθος θανάτων στην ηλικία x και στο χρόνο t ακολουθούν μία τυχαία μεταβολή Poisson. Για να αιτιολογήσουμε αυτήν την προσέγγιση, αποδεικνύουμε ότι η παρακάτω υπόθεση είναι συμβατή με τη μοντελοποίηση Poisson για το πλήθος θανάτων

$$\mu_{x+\xi_1, t+\xi_2} = \mu_{x,t}, \quad 0 \leq \xi_1, \xi_2 < 1,$$

όπου $\mu_{x,t}$ είναι η ένταση θνησιμότητας.

Για συγκεκριμένη ηλικία x και χρόνο t , παρατηρούμε $D_{x,t}$ θανάτους ανάμεσα σε $L_{x,t}$ άτομα, που είναι ηλικίας x την 1^η Ιανουαρίου του χρόνου t . Υποθέτουμε ότι οι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής των ατόμων αυτών είναι ανεξάρτητοι και ομοιόμορφα κατανεμημένοι. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\mu_{x,t}) = e^{(-\mu_{x,t} ETR_{x,t})} (\mu_{x,t})^{D_{x,t}},$$

όπου $ETR_{x,t}$ είναι η έκθεση στον κίνδυνο, είναι ανάλογη στην πιθανοφάνεια Poisson, δηλαδή αυτήν για την οποία υποθέσαμε ότι το πλήθος θανάτων $D_{x,t}$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο:

$$ETR_{x,t} \mu_{x,t} = ETR_{x,t} e^{(a_x + b_x k_t)},$$

όπου οι παράμετροι πληρούν τους περιορισμούς:

$$\sum_x b_x = 1 \quad \text{και} \quad \sum_t k_t = 0.$$

Έτσι, υπό την προϋπόθεση ότι χρησιμοποιείται η διαδικασία εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας, η «αληθινή» πιθανοφάνεια και η πιθανοφάνεια Poisson είναι ισοδύναμες, εφόσον ισχύουν οι παραπάνω περιορισμοί.

Οι παράμετροι a_x , b_x και k_t , σε αυτήν την περίπτωση, εκτιμούνται μεγιστοποιώντας την λογαριθμική πιθανοφάνεια που βασίζεται στην υπόθεση της κατανομής Poisson. Η εξίσωση για τη μέθοδο αυτή είναι η:

$$L(a,b,k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (D_{x,t}(a_x + b_x k_t) - ETR_{x,t} e^{(a_x + b_x k_t)}) + \text{σταθερά}.$$

Ισοδύναμα, οι παράμετροι εκτιμώνται ελαχιστοποιώντας τη σχετική απόκλιση η οποία ορίζεται ως εξής:

$$D = -2(L(a,b,k) - L_f),$$

όπου L_f είναι η λογαριθμική πιθανοφάνεια του πλήρους μοντέλου (χαρακτηρίζεται εξισώνοντας το πραγματικό με το εκτιμώμενο πλήθος θανάτων).

Εξαιτίας της παρουσίας του διγραμμικού όρου $b_x k_t$ είναι αδύνατον να εκτιμηθεί το προτεινόμενο μοντέλο με εμπορικά στατιστικά πακέτα που εφαρμόζουν παλινδρόμηση Poisson. Παρόλα αυτά είναι σχετικά εύκολο να λυθούν οι εξισώσεις πιθανοφάνειας με τη βοήθεια μιας απλής Newton-Raphson μεθόδου, η οποία εφαρμόζεται στις αναδρομικές σχέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, στη μέθοδο Newton-Raphson. Πιο συγκεκριμένα, παίρνοντας ως αρχικές τιμές τις:

$$\hat{a}_x^{(0)} = 0, \hat{b}_x^{(0)} = 1, \hat{k}_t^{(0)} = 0$$

καταλήγουμε στις τελικές μέσω των αναδρομικών σχέσεων:

$$\hat{a}_x^{(k+1)} = \hat{a}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} (D_{x,t} - ETR_{x,t} e^{(\hat{a}_x^{(k)} + \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})})}{-\sum_{t=t_1}^{t_n} ETR_{x,t} e^{(\hat{a}_x^{(k)} + \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})}}$$

$$\hat{k}_x^{(k+1)} = \hat{k}_x^{(k)} - \frac{\sum_{x=x_1}^{x_m} (D_{x,t} - ETR_{x,t} e^{(\hat{a}_x^{(k+1)} + \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})}) \hat{b}_x^{(k)}}{-\sum_{x=x_1}^{x_m} ETR_{x,t} e^{(\hat{a}_x^{(k)} + \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})} (\hat{b}_x^{(k)})^2}$$

$$\hat{b}_x^{(k+1)} = \hat{b}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} (D_{x,t} - ETR_{x,t} e^{(\hat{a}_x^{(k+1)} + \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k+1)})}) \hat{k}_t^{(k+1)}}{-\sum_{t=t_1}^{t_n} ETR_{x,t} e^{(\hat{a}_x^{(k+1)} + \hat{b}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k+1)})} (\hat{k}_t^{(k+1)})^2}.$$

Το κριτήριο που χρησιμοποιείται για να σταματήσει η διαδικασία είναι μία σχετική αύξηση στην συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας η οποία είναι μικρότερη από έναν προεπιλεγμένο, αρκετά μικρό, σταθερό αριθμό.

Οι εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων που προέρχονται από τις παραπάνω αναδρομικές εξισώσεις πρέπει να προσαρμοστούν αναλόγως για να πληρούν τους προαναφερθέντες περιορισμούς. Αναλυτικότερα, το \hat{k}_t αντικαθίσταται

από το $(\hat{k}_t - \bar{k}) \sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{b}_x$, το \hat{b}_x από το $\frac{\hat{b}_x}{\sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{b}_x}$ και το \hat{a}_x από το $\hat{a}_x + \hat{b}_x \bar{k}$.

2.2 Προεκτάσεις του μοντέλου

Υπάρχουν πολλές προεκτάσεις του βασικού μοντέλου Lee – Carter. Στις επόμενες σελίδες θα αναφερθούν και θα περιγραφούν συνοπτικά οι προεκτάσεις αυτές (βλ. Lee (2000)).

1. Διαχωρισμός κατά φύλο. Για τη συγκεκριμένη προέκταση υπάρχουν αρκετές πιθανές προσεγγίσεις. Μία από αυτές είναι οι προβλέψεις θνησιμότητας

αντρών και γυναικών να αντιμετωπιστούν ως δύο ξεχωριστές εφαρμογές της βασικής προσέγγισης. Είναι δελεαστικό όμως, να προσπαθήσουμε να επωφεληθούμε των ομοιοτήτων μεταξύ των δύο φύλων με σκοπό την μείωση των διαστάσεων του μοντέλου και τη συνοχή των δύο συνόλων προβλέψεων. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι οι ρυθμοί αντρών και γυναικών για ένα συγκεκριμένο πληθυσμό να αντιμετωπιστούν ως δύο διαφορετικά κομμάτια του ίδιου συνόλου ρυθμών που αφορούν την ηλικία, με $2N$ ομάδες ηλικιών αν ο πραγματικός αριθμός των ομάδων ηλικιών είναι N . Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να εκτιμηθεί και να προβλεφθεί μία μοναδική χρονοσειρά για το k_t το οποίο χρησιμοποιείται ως οδηγός για τη θνησιμότητα και των αντρών και των γυναικών. Οι δύο αυτές θνησιμότητες μπορούν να έχουν διαφορετικό γράφημα ηλικίας και να μειώνονται με διαφορετικό ρυθμό επειδή έχουν διαφορετικές τις μεταβλητές a_x και b_x . Περαιτέρω απλουστεύσεις μπορούν να επιτευχθούν περιορίζοντας τις μεταβλητές a_x να είναι ταυτόσημες ενώ εκτιμώνται διαφορετικές μεταβλητές b_x , ή αντίστροφα. Αυτοί οι περιορισμοί του βασικού μοντέλου θα πρέπει να δοκιμαστούν και να αξιολογηθούν προσεκτικά.

2. *Γεωγραφικός διαχωρισμός.* Ακριβώς οι ίδιες εκδοχές και επιλογές με το διαχωρισμό κατά φύλο προκύπτουν και για ένα σύνολο περιφερειακών πληθυσμών που περιλαμβάνονται σε ένα εθνικό σύνολο. Μία εφαρμογή έγινε στις δώδεκα αποικίες στον Καναδά.
3. *Διαχωρισμός κατά αιτία.* Και σε αυτή την προέκταση προκύπτουν παρόμοιες περιπτώσεις σύμφωνα με τον Wilmoth (1996), ο οποίος διεξήγαγε μία τέτοια εφαρμογή σε Ιαπωνικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, επισημαίνει ότι μία πρόβλεψη με διαχωρισμό κατά αιτία θα αποφέρει πάντα μεγαλύτερη θνησιμότητα στο μέλλον από μία συνολική πρόβλεψη, όπου ο δείκτης παρεκβολής χρησιμοποιείται όπως στην αρχική μέθοδο. Αυτό συμβαίνει γιατί η αιτία θανάτου που μειώνεται πιο αργά θα κυριαρχήσει μακροπρόθεσμα. Συχνά, μερικές αιτίες θανάτου θα έχουν αυξανόμενους ρυθμούς και θα προβλεφθούν να αυξάνονται επ' αόριστον.

4. *Χαμηλότερα όρια για τους ρυθμούς θανάτων.* Ο Wilmoth έχει επίσης προτείνει ότι θα ήταν απλό κάθε ρυθμός θανάτου που αφορά στην ηλικία να μειώνεται προς ένα χαμηλότερο όριο μεγαλύτερο του μηδενός, αφαιρώντας το όριο πριν μοντελοποιηθούν και προβλεφθούν οι ρυθμοί θανάτου και προσθέτοντάς το ξανά μετά.
5. *Εξισώνοντας τους τελευταίους ρυθμούς θανάτου.* Οι Lee και Carter (1992) αναφέρουν ότι θα ήταν πιθανό αντί να εκτιμηθούν οι μεταβλητές a_x ως ο μέσος όρος του $\ln(m_{x,t})$ να τεθούν ίσες με τους λογάριθμους των πιο πρόσφατων ρυθμών θανάτου. Αυτό διαβεβαιώνει ότι ο πρώτος χρόνος της πρόβλεψης θα ταιριάζει ομαλά και θα είναι κοντά με τους πιο πρόσφατους παρατηρούμενους ρυθμούς θανάτου. Ο Bell (1997) εφάρμοσε ποικιλία μεθόδων για την πρόβλεψη θνησιμότητας, συμπεριλαμβάνοντας και την αρχική μέθοδο Lee-Carter αλλά και την παραλλαγή όπου εξισώνονται οι τελευταίοι ρυθμοί θανάτου και συμπεραίνει ότι η τελευταία υπερτερεί όλων των άλλων μεθόδων. Ίσως αυτό να είναι πιο πιθανό να ισχύει όταν πρόκειται για μικρότερα διαστήματα (Horizons), όπως συμβαίνει στην ανάλυση του Bell (1997). Το πλεονέκτημα στην αρχική μέθοδο είναι η πιθανότητα αποφυγής ιδιαιτεροτήτων των ρυθμών θανάτου σε οποιοδήποτε έτος. Ο Lee (2000), σε αυτό το σημείο, προτείνει το μοντέλο να εφαρμοστεί με τη μέθοδο που εξισώνει τους τελευταίους ρυθμούς θανάτου, αλλά οι προβλέψεις να θεωρούν τους πιο πρόσφατους ρυθμούς θανάτου που αφορούν την ηλικία ως αρχικές τιμές. Τότε οι προβλέψεις θα δίνονται από την εξίσωση:

$$\ln(m_{x,t+s}) = \ln(m_{x,t}) - b_x(k_{t+s} - k_t).$$

Αυτό διαβεβαιώνει ότι οι βασικές μεταβλητές ταιριάζουν απόλυτα με τους παρατηρούμενους ρυθμούς θανάτου που αφορούν την ηλικία και το προσδόκιμο ζωής καθώς και ότι οι προβλέψεις των ρυθμών που αφορούν την ηλικία προκύπτουν ομαλά από αυτές τις τιμές.

6. *Λοιπές προδιαγραφές του μοντέλου.* Είναι δυνατό το μοντέλο αυτό να γίνει πιο περίπλοκο με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα συμπεριλαμβάνοντας

μεγαλύτερου βαθμού επιδράσεις. Ο Gomez de Leon (1990) δοκιμάζει άλλες δυνατές παραλλαγές χρησιμοποιώντας Νορβηγικά δεδομένα και καταλήγει στο ότι η συγκεκριμένη παραλλαγή δουλεύει καλύτερα από άλλες. Από την άλλη όμως, προσθέτοντας μεγαλύτερου βαθμού επιδράσεις και επιδράσεις που αφορούν την ομάδα θα είναι δυνατό να βελτιωθεί η εφαρμογή στο παράδειγμα. Το ερώτημα είναι αν θα πρέπει τέτοιες πρόσθετες επιδράσεις να αντιπροσωπεύουν θεμελιώδεις πτυχές της θνησιμότητας έτσι ώστε να βελτιωθούν οι προβλέψεις.

7. *Μεταβλητές τάσεις.* Ο Carter (1996) ανέπτυξε μία μέθοδο σύμφωνα με την οποία ο όρος της μετατόπισης ή της τάσης στην εξίσωση πρόβλεψης για το k_t επιτρέπεται να είναι μία τυχαία μεταβλητή. Αυτό γίνεται με τη χρήση μεθόδων state-space για μοντελοποίηση χρονοσειρών. Περιέργως, τα διαστήματα πρόβλεψης και πιθανοτήτων σε αυτήν την προσέγγιση παρέμειναν εικονικά τα ίδια.
8. *Χώρες ηγέτες.* Ο Wilmoth (1996) πρότεινε ότι οι χώρες που έχουν κατώτερο προσδόκιμο ζωής από αυτό την χώρα ηγέτη (το 1996 Ιαπωνία), μπορούν να πετύχουν πιο γρήγορα οφέλη δανειζόμενες πιο εξελιγμένη τεχνολογία ή άλλες πρακτικές σχετικές με την υγεία. Όμως, από τη στιγμή που θα φτάσουν τα ίδια επίπεδα με τη χώρα ηγέτη θα αναμένονται να προοδεύουν πιο αργά. Γι' αυτό το λόγο θα ήταν λάθος να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος παρεκβολής που θα έκανε ένα πληθυσμό να ξεπεράσει την προβαλλόμενη θνησιμότητα του πληθυσμού ηγέτη. Ο Wilmoth (1996) εφάρμοσε αυτή την προσέγγιση για προβλέψεις για την Ιαπωνία και τη Νορβηγία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΟΜΑΔΩΝ ΧΩΡΩΝ

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας θα γίνουν οι συγκρίσεις των εκτιμήσεων και των προβλέψεων για τρεις ομάδες χωρών της Ευρώπης οι οποίες γίνονται με βάση το μοντέλο Lee – Carter. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από τις χώρες Ιταλία, Γαλλία και Ισπανία (Νότια Ευρώπη), η δεύτερη από τις Νορβηγία, Σουηδία και Δανία (Βόρεια Ευρώπη) και η τρίτη από τις Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία (Κεντρική Ευρώπη).

Η πηγή των δεδομένων με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι η βάση δεδομένων “Human Mortality Database (HMD)”. Οι απαραίτητες πληροφορίες που χρειάζονται για την εφαρμογή του μοντέλου Lee – Carter είναι οι ρυθμοί θανάτου. Κάνοντας κάποια συγκεκριμένα βήματα, οι ρυθμοί θανάτου, σε συνδυασμό με την ιστοσελίδα “LCFIT: Lee Carter Online Modeling and Forecasting (LCFIT)”, εφαρμόζονται στο μοντέλο και προκύπτουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Πιο αναλυτικά, όλη η διαδικασία (βλ. Παράρτημα Α) καθώς και οι πίνακες με τα δεδομένα (βλ. Παράρτημα Β) βρίσκονται στα Παραρτήματα στο τέλος της εργασίας.

Οι ρυθμοί θανάτου και τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την πρώτη ομάδα είναι από το έτος 1908 και φτάνουν μέχρι το 2009. Οι ηλικίες ξεκινούν από το 0 και έχουν ανώτατο όριο τα 70 έτη και οι προβολές αφορούν τα έτη 2006 – 2059. Σε όλα τα γραφήματα της πρώτης σύγκρισης οι τιμές της Ιταλίας απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα, της Γαλλίας με μπλε και της Ισπανίας με ανοιχτό πράσινο. Οι συγκρίσεις μεταξύ των χωρών γίνονται μόνο στα κοινά έτη, δηλαδή από το 1908 μέχρι το 2006 και για την πρόβλεψη από το 2009 μέχρι το 2056.

Τα δεδομένα και τα αποτελέσματα της δεύτερης ομάδας είναι από το έτος 1908 μέχρι το έτος 2008. Οι ηλικίες κυμαίνονται από 0 μέχρι τα 80 έτη και οι προβλέψεις ξεκινούν από το 2008 και φτάνουν μέχρι το 2058. Οι τιμές της Νορβηγίας έχουν μπλε-γκρι χρώμα, της Σουηδίας δαμασκηνή και της Δανίας λαχανί.

Η τρίτη ομάδα έχει μικρότερο εύρος δεδομένων. Συγκεκριμένα αρχίζουν από το έτος 1950 και σταματούν το 2008. Οι ηλικίες ξεκινούν από το 0 και φτάνουν μέχρι τα 80 έτη, ενώ οι προβλέψεις αφορούν τα έτη 2008 – 2058. Τα χρώματα των τιμών της Αυστρίας, της Τσεχίας και της Ελβετίας είναι το βιολετί, το πράσινο και το ροζ αντίστοιχα.

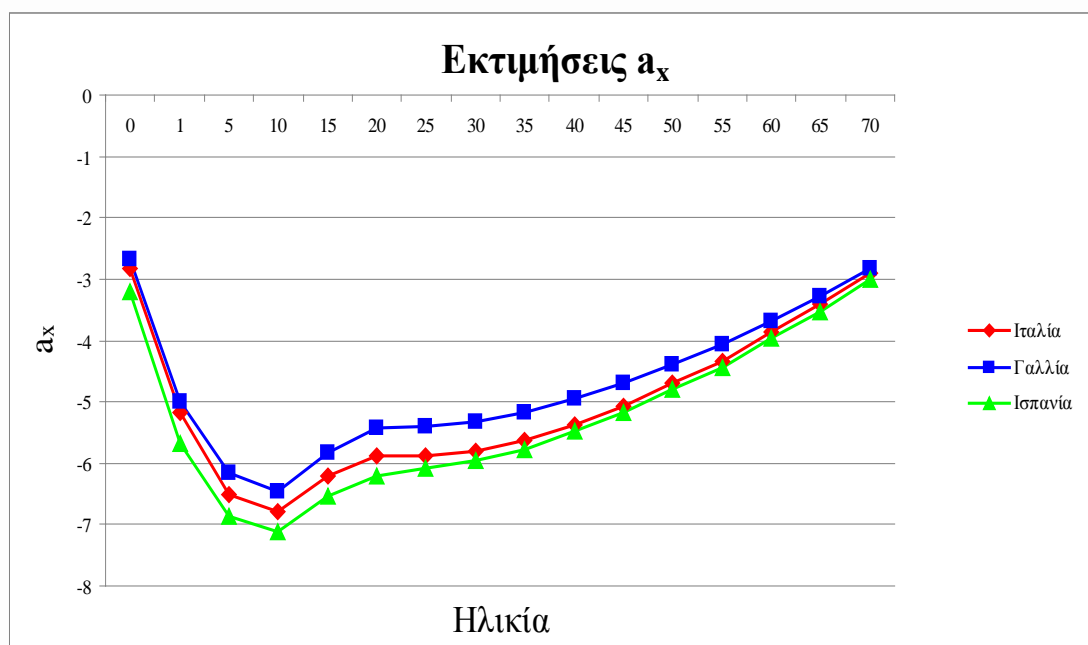
Οι συγκρίσεις έχουν γίνει για τους συνολικούς πληθυσμούς των χωρών. Παραθέτονται όμως και γραφήματα ξεχωριστά για τους άντρες και τις γυναίκες. Και οι τρεις συγκρίσεις έχουν γίνει σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

Οι εκτιμήσεις των μεταβλητών a_x , b_x , k_t και \hat{k}_t των οποίων οι τιμές παρουσιάζονται σε γραφήματα και συγκρίνονται παρακάτω είναι από τις σχέσεις (1) και (3) του μοντέλου Lee – Carter.

3.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΩΡΩΝ ΤΗΣ ΝΟΤΙΑΣ ΕΥΡΩΠΗΣ

Η πρώτη σύγκριση γίνεται στις εκτιμήσεις και στις προβλέψεις του μοντέλου Lee – Carter για τις χώρες της Ιταλίας, της Γαλλίας και της Ισπανίας (βλ. Παράρτημα Β1).

3.2.1 Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x

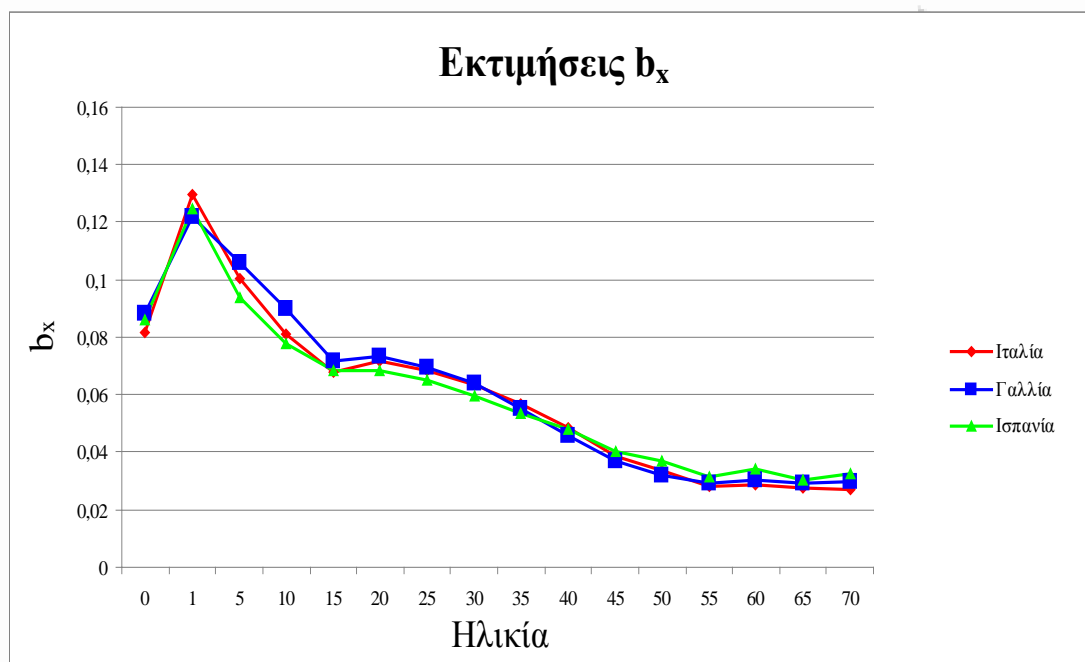


Γράφημα 3.1: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

Στο Γράφημα 3.1 παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x , για τις χώρες της Ιταλίας, της Γαλλίας και της Ισπανίας. Παρατηρούμε ότι οι τιμές των \hat{a}_x έχουν σε γενικές γραμμές την ίδια συμπεριφορά, δηλαδή είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και έχουν παρόμοια πορεία και για τις τρεις χώρες. Στις μικρές ηλικίες (0 – 10) τα \hat{a}_x μειώνονται, ενώ στις υπόλοιπες ηλικίες (10-70) αυξάνονται.

Επίσης, βλέπουμε ότι η Ισπανία έχει τις μικρότερες τιμές \hat{a}_x και η Γαλλία έχει τις μεγαλύτερες τιμές. Και για τις τρεις χώρες η ελάχιστη τιμή εντοπίζεται στην ηλικία των δέκα (10) ετών, ενώ η μέγιστη στην ηλικία των μηδέν (0) ετών για την Ιταλία και τη Γαλλία και στην ηλικία των εβδομήντα (70) ετών για την Ισπανία.

3.2.2 Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x

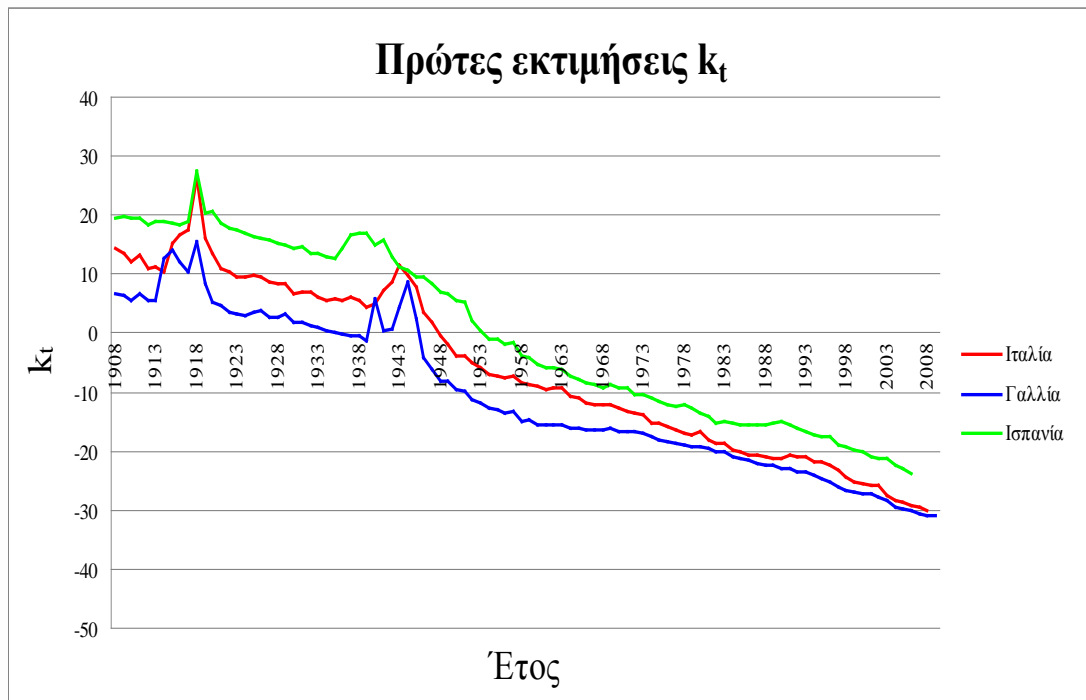


Γράφημα 3.2: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

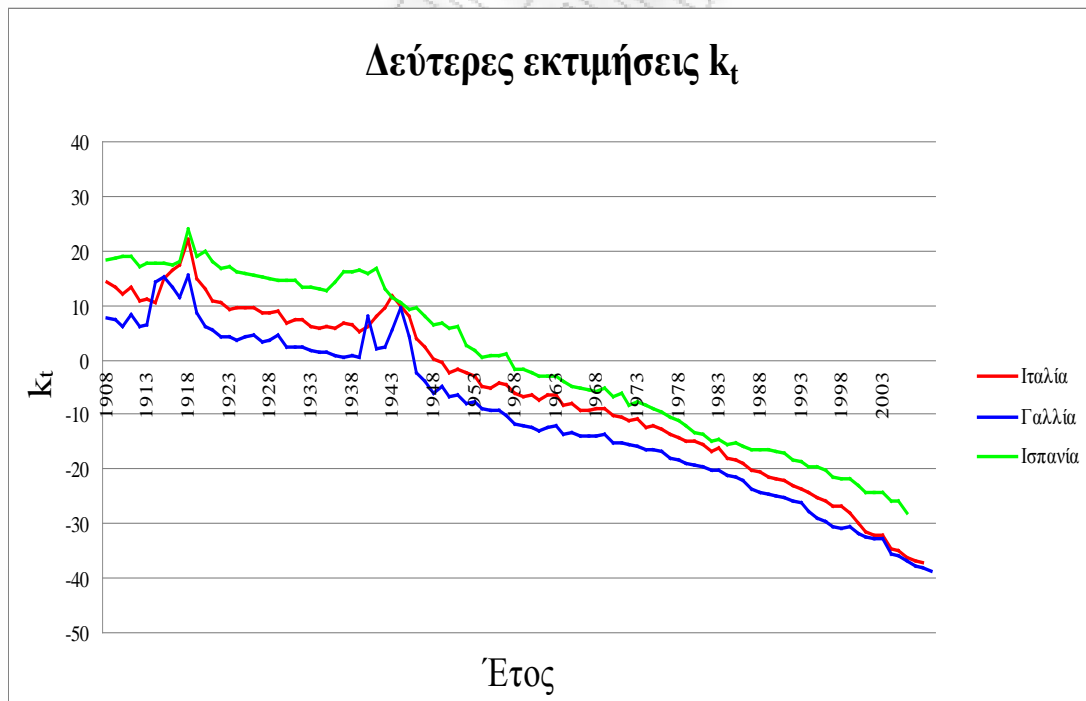
Το Γράφημα 3.2 δείχνει τις τιμές των εκτιμήσεων των αποκλίσεων από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x για τις χώρες της Ιταλίας, της Γαλλίας και της Ισπανίας. Και εδώ φαίνεται πως τα \widehat{b}_x παρουσιάζουν γενικά την ίδια συμπεριφορά, δηλαδή είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους και έχουν την ίδια κλίση και για τις τρεις χώρες. Ακόμα, βλέπουμε ότι μέχρι την ηλικία του ενός έτους ($0 - 1$) οι τιμές των \widehat{b}_x έχουν ανοδική πορεία, ενώ από εκεί και μετά ($1 - 70$) έχουν καθοδική πορεία με εξαίρεση στις ηλικίες των είκοσι (20), των εξήντα (60) και των εβδομήντα (70) ετών όπου παρατηρούνται αυξήσεις. Στις ηλικίες μηδέν (0) έως τριάντα (30) τα \widehat{b}_x έχουν μεγαλύτερες τιμές και αυτό σημαίνει ότι οι ρυθμοί θανάτου σε αυτές τις ηλικίες μεταβάλλονται πιο γρήγορα όταν αλλάζει το επίπεδο θνησιμότητας (k_t), σε σχέση με τους ρυθμούς θανάτου στις ηλικίες τριάντα (30) έως εβδομήντα (70), όπου τα \widehat{b}_x έχουν μικρότερες τιμές.

Και οι τρεις χώρες παρουσιάζουν μέγιστο στην ηλικία του ενός (1) έτους και ελάχιστο στην ηλικία των εβδομήντα (70) ετών.

3.2.3 Σύγκριση των εκτιμήσεων του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας



Γράφημα 3.3: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



Γράφημα 3.4: Σύγκριση των δεύτερων εκτιμήσεων των k_t για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

Τα Γραφήματα 3.3 και 3.4 παρουσιάζουν τις τιμές της πρώτης και της δεύτερης εκτίμησης του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας για τις χώρες της Ιταλίας, της Γαλλίας και της Ισπανίας. Όπως φαίνεται από τα γραφήματα αυτά και οι δύο εκτιμήσεις των k_t , οι οποίες είναι αρκετά κοντά η μία με την άλλη, μειώνονται σχεδόν γραμμικά και με περίπου τον ίδιο ρυθμό με εξαίρεση τις χρονικές περιόδους 1914 – 1918 και 1936 – 1944, όπου παρατηρούμε απότομες αυξήσεις τους. Γενικά, όλες οι αυξομειώσεις εντοπίζονται μέχρι το μέσο του εικοστού αιώνα. Ακόμα, οι βραχυχρόνιες διακυμάνσεις των τιμών των \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' είναι περίπου ίδιες για όλα τα παρατηρούμενα έτη (1908 – 2006) με εξαίρεση πάλι τις δύο αυτές χρονικές περιόδους. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά των εκτιμήσεων των k_t , η γραμμικότητα και η σχετική σταθερότητα στις διακυμάνσεις, διευκολύνουν πολύ στην πρόβλεψη.

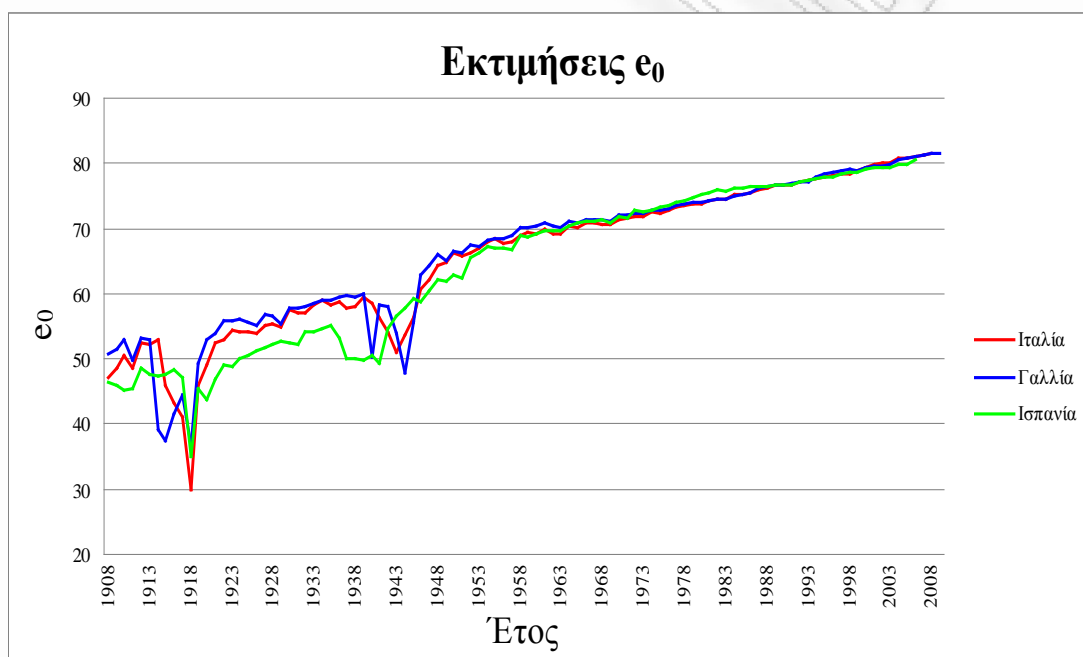
Πιο αναλυτικά, το έτος 1914 παρατηρείται μεγάλη αύξηση των εκτιμήσεων των k_t στη Γαλλία, ύψους 129,1% για την πρώτη και 129,2% για τη δεύτερη, λόγω της έναρξης του πρώτου παγκοσμίου πολέμου. Το 1915 μπαίνει και η Ιταλία στον πόλεμο και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις ακολουθούν αυξήσεις ύψους 44,5% και 44%. Τα ποσοστά αύξησης της Ιταλίας είναι πιο μικρά σε σχέση με της Γαλλίας (κατά 84,6% και 85,2%) διότι δεν είναι μία από τις πρωταγωνίστριες χώρες του πολέμου. Οι απότομες μεταβολές στις τιμές των εκτιμήσεων των k_t συνεχίζονται για τις δύο χώρες μέχρι το 1918 όπου παρατηρούνται μεγάλες αυξήσεις και στην Ισπανία, ύψους 45,5% και 32,2%. Το έτος αυτό οι εκτιμήσεις των k_t φτάνουν τη μέγιστη τιμή τους και για τις τρεις χώρες ως συνέπεια της Ισπανικής γρίπης.

Η δεύτερη περίοδος που παρουσιάζει μεγάλες αυξήσεις στις εκτιμήσεις των k_t ξεκινάει το 1936 με την Ισπανία. Το συγκεκριμένο έτος ξεκινάει εμφύλιος πόλεμος και αυτό οδηγεί σε αύξηση κατά 12,8% για την πρώτη εκτίμηση των k_t και κατά 11% για την δεύτερη. Το 1939 σταματάει ο εμφύλιος, οι τιμές των εκτιμήσεων όμως δεν μειώνονται διότι ξεκινάει ο δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος. Το 1940 παρατηρούνται αυξήσεις στις εκτιμήσεις και για τις χώρες της Ιταλίας και της Γαλλίας για τον ίδιο λόγο. Τα ποσοστά μεταβολής είναι 12% και 15,3% για την Ιταλία και -549% και 2055,1% για τη Γαλλία. Η Ισπανία η οποία δεν συμμετέχει στον

πόλεμο σταματάει τις απότομες αυξήσεις στις εκτιμήσεις των k_t και επανέρχεται σε “φυσιολογικά” επίπεδα το έτος 1942, ενώ η Ιταλία το 1944 και η Γαλλία το 1945, με το τέλος του παγκοσμίου πολέμου.

Η Ισπανία είναι η χώρα που εμφανίζει τις μεγαλύτερες τιμές \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' και η Γαλλία τις μικρότερες. Και οι τρεις χώρες εμφανίζουν ελάχιστο το έτος 2006 και μέγιστο το 1918.

3.2.4 Σύγκριση των εκτιμήσεων του προσδόκιμου ζωής



Γράφημα 3.5: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

Το Γράφημα 3.5 δείχνει τις εκτιμήσεις του προσδόκιμου ζωής για τις τρεις χώρες. Παρατηρούμε ότι οι τιμές των \widehat{e}_0 έχουν σχεδόν αντίστροφη κλίση από ότι οι τιμές των \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' . Συγκεκριμένα, η κλίση τους είναι ανοδική και ο ρυθμός αύξησής τους είναι σχετικά σταθερός με εξαίρεση και εδώ τις χρονικές περιόδους 1914 – 1918 και 1936 – 1944 όπου παρουσιάζονται απότομες μειώσεις.

Πιο αναλυτικά, το έτος 1914 εντοπίζεται η πρώτη μεγάλη μείωση στις τιμές των εκτιμήσεων των e_0 στη Γαλλία μεγέθους 26,1%. Το ίδιο συμβαίνει και στην Ιταλία το 1915 με μείωση μεγέθους 13,6%. Οι απότομες μεταβολές συνεχίζονται μέχρι το έτος 1918 όπου παρατηρείται και η πρώτη μεγάλη πτώση στις τιμές των \hat{e}_0 για την Ισπανία μεγέθους 25,5%.

Το έτος 1936 αρχίζει η δεύτερη περίοδος όπου εντοπίζονται μεγάλες μεταβολές στις τιμές των \hat{e}_0 με την Ισπανία η οποία παρουσιάζει μείωση μεγέθους 3,4%. Το 1940 ακολουθούν η Γαλλία και η Ιταλία με μειώσεις που φτάνουν το 16,2% και το 1,5% αντίστοιχα. Οι απότομες μεταβολές σταματούν για την Ισπανία το έτος 1941, για την Ιταλία το 1943, ενώ για τη Γαλλία το 1944.

Και οι τρεις χώρες εμφανίζουν ελάχιστο το έτος 1918 και μέγιστο το έτος 2006.

Στους Πίνακες 3.1, 3.2 και 3.3 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x , k_t , \hat{k}_t και e_0 για όλες τις χώρες της Νότιας Ευρώπης (βλ. Παράρτημα Β1).

Πίνακας 3.1: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x

	Ελάχιστη τιμή \hat{a}_x	Μέγιστη τιμή \hat{a}_x	Ελάχιστη τιμή \hat{b}_x	Μέγιστη τιμή \hat{b}_x
Ιταλία	-6,78562368135	-2,821212967	0,027056187	0,129508221
Γαλλία	-6,45378409807	-2,669721074	0,029102894	0,121865465
Ισπανία	-7,12383944522	-2,993436865	0,030118535	0,124760439

Πίνακας 3.2: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των k_t, \hat{k}_t

	Ελάχιστη τιμή \hat{k}_t	Μέγιστη τιμή \hat{k}_t	Ελάχιστη τιμή \hat{k}_t'	Μέγιστη τιμή \hat{k}_t'
Ιταλία	-29,31289793	26,21220182	-36,18966534	22,03766369
Γαλλία	-30,18017356	15,57683765	-36,98519078	15,53584712
Ισπανία	-23,80465525	27,5693054	-28,07773771	23,91355056

Πίνακας 3.3: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των e_0

	Ελάχιστη τιμή \hat{e}_0	Μέγιστη τιμή \hat{e}_0
Ιταλία	29,96518761	81,14735566
Γαλλία	36,68090075	81,08134955
Ισπανία	35,06516015	80,53837152

Στους Πίνακες 3.4, 3.5 και 3.6 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες διαφορές των εκτιμήσεων των a_x, b_x, k_t, \hat{k}_t και e_0 μεταξύ των χωρών σε απόλυτες τιμές (βλ. Παράρτημα Β1).

Πίνακας 3.4: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των a_x, b_x

	Ελάχιστη διαφορά \hat{a}_x	Μέγιστη διαφορά \hat{a}_x	Ελάχιστη διαφορά \hat{b}_x	Μέγιστη διαφορά \hat{b}_x
Ιταλία- Γαλλία	0,080543148	0,475110065	0,000280654	0,00870274
Ιταλία- Ισπανία	0,08310256	0,51276331	0,000496562	0,006506705
Γαλλία- Ισπανία	0,163645706	0,781642921	0,000693859	0,01217378

Πίνακας 3.5: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των k_t, \widehat{k}_t

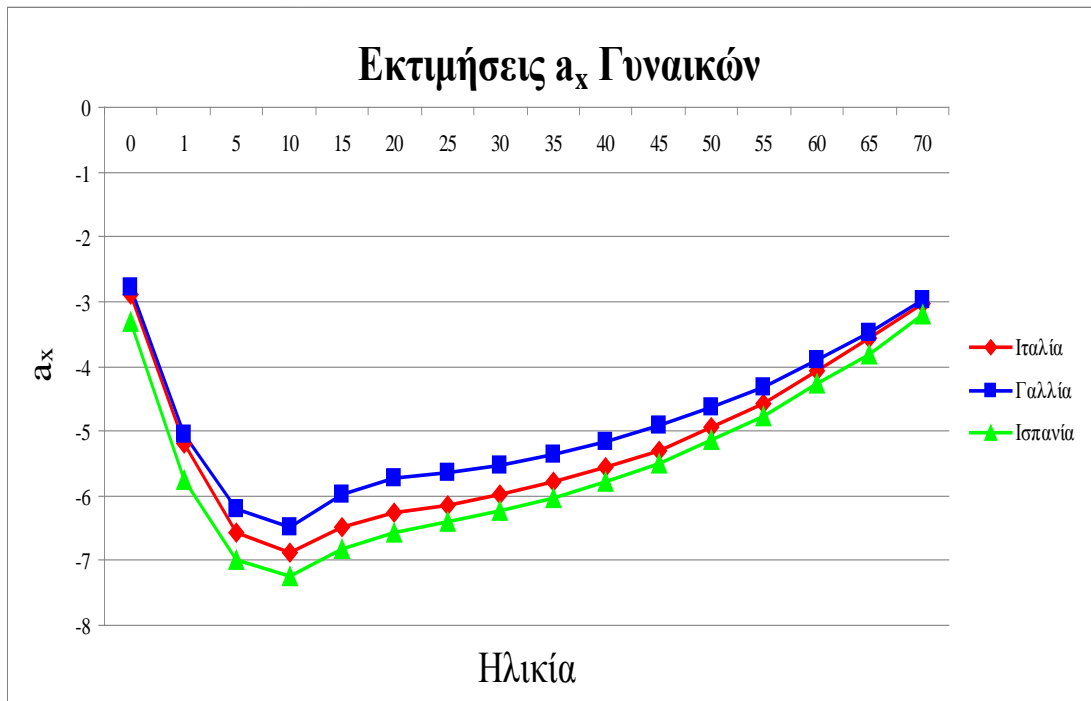
	Ελάχιστη διαφορά \widehat{k}_t	Μέγιστη διαφορά \widehat{k}_t	Ελάχιστη διαφορά \widehat{k}_t'	Μέγιστη διαφορά \widehat{k}_t'
Ιταλία- Γαλλία	0,751360855	10,63536417	0,187648947	7,30529292
Ιταλία- Ισπανία	0,32260416	12,5045904	0,338784822	11,18584167
Γαλλία- Ισπανία	1,905120993	18,29434643	0,851268517	16,08409794

Πίνακας 3.6: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των e_0

	Ελάχιστη διαφορά \widehat{e}_0	Μέγιστη διαφορά \widehat{e}_0
Ιταλία-Γαλλία	0,001910426	13,95430886
Ιταλία-Ισπανία	0,01363165	9,66467014
Γαλλία-Ισπανία	0,041418986	10,34651553

3.2.5 Σύγκριση όλων των εκτιμήσεων για γυναίκες και άντρες

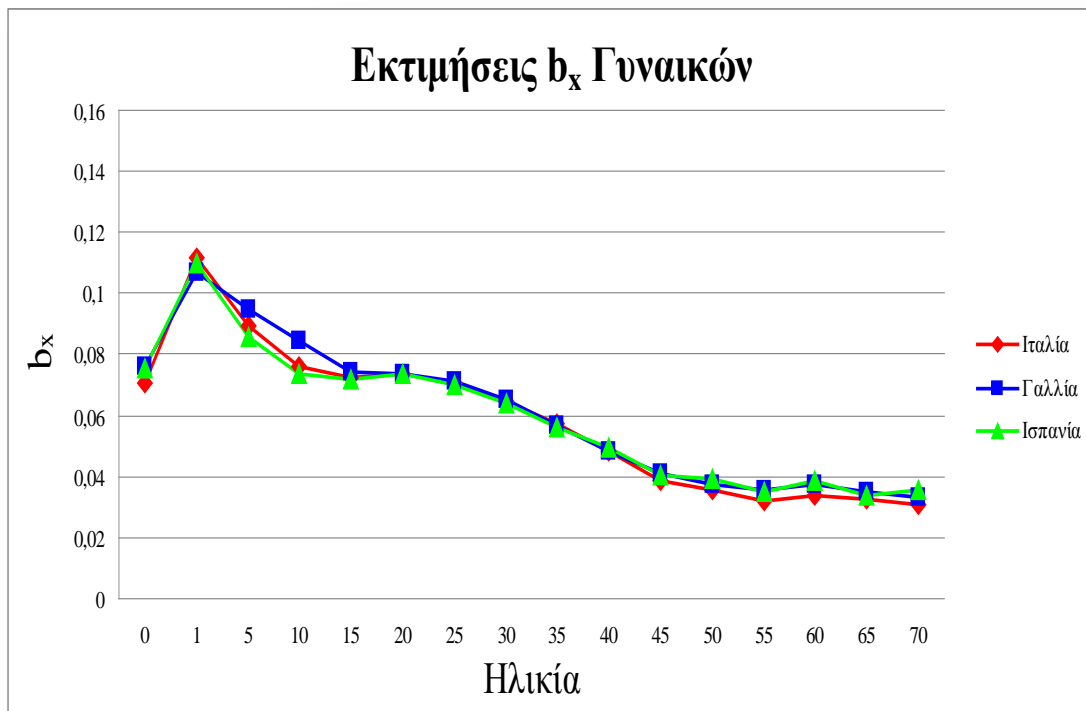
Στα Γραφήματα 3.6 μέχρι 3.15 παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμήσεων των $a_x, b_x, k_t, \widehat{k}_t$ και e_0 για τις γυναίκες και τους άντρες για όλες τις χώρες.



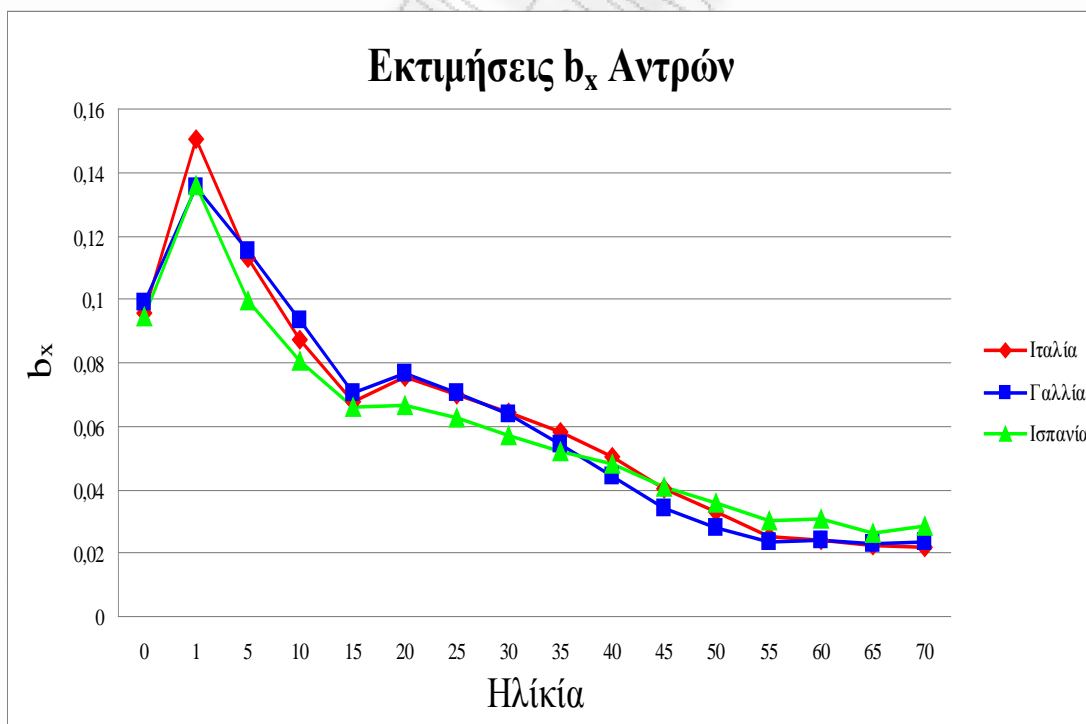
Γράφημα 3.6: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τις γυναίκες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



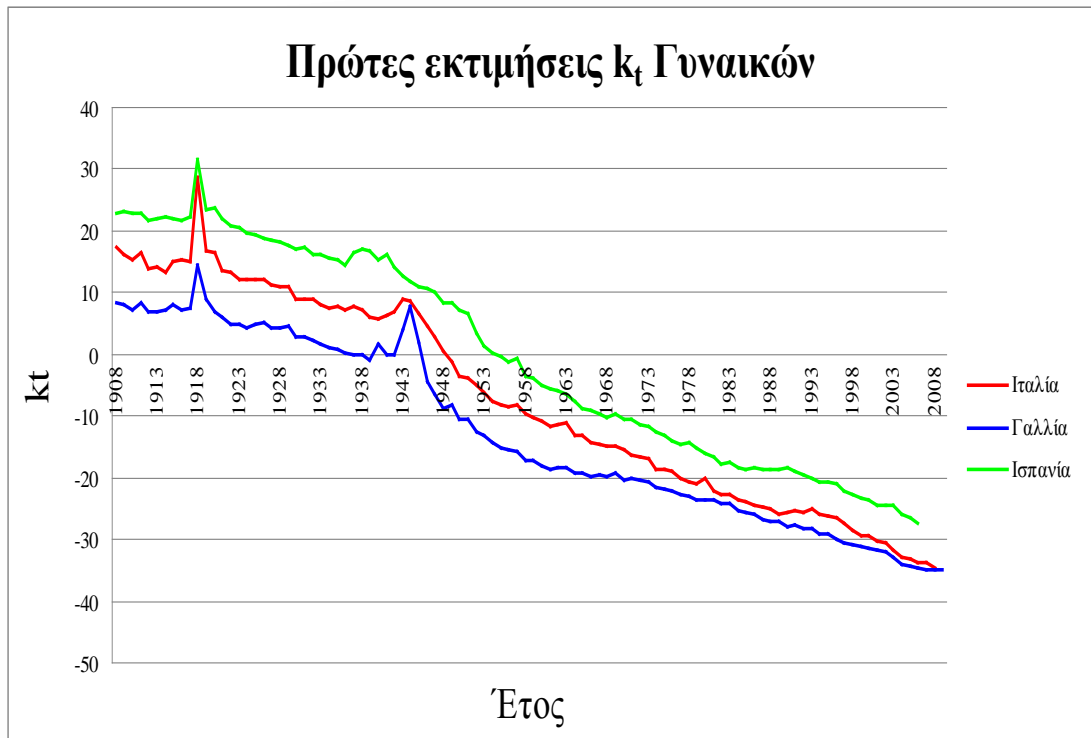
Γράφημα 3.7: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τους άντρες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



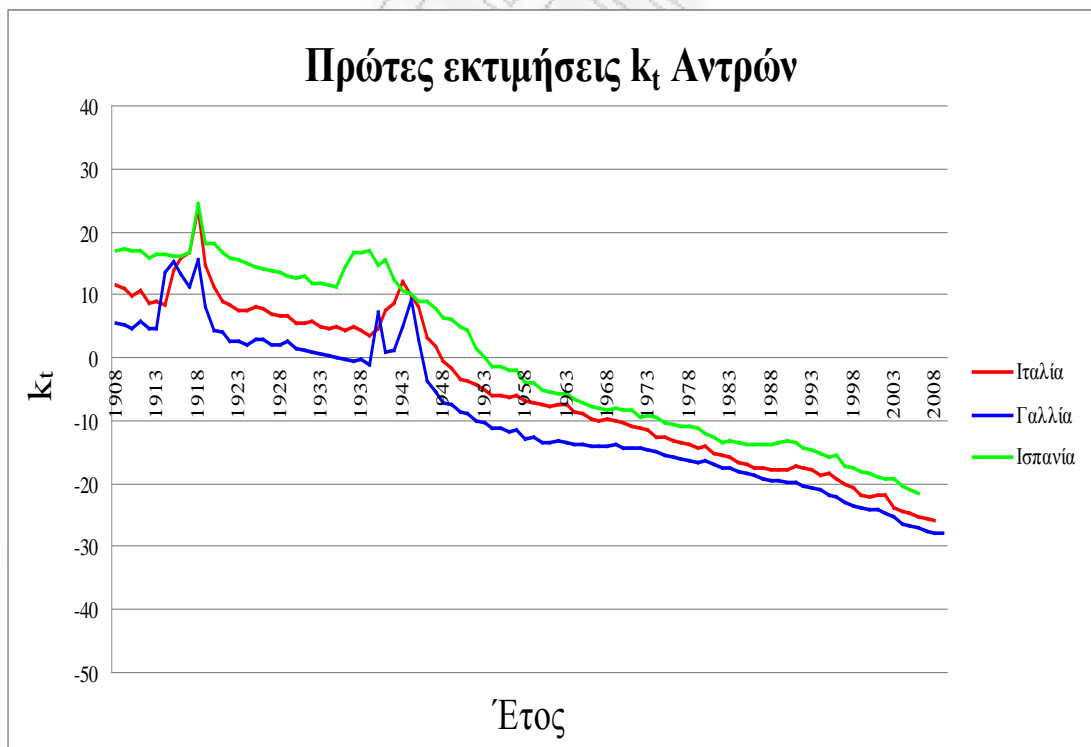
Γράφημα 3.8: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τις γυναίκες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



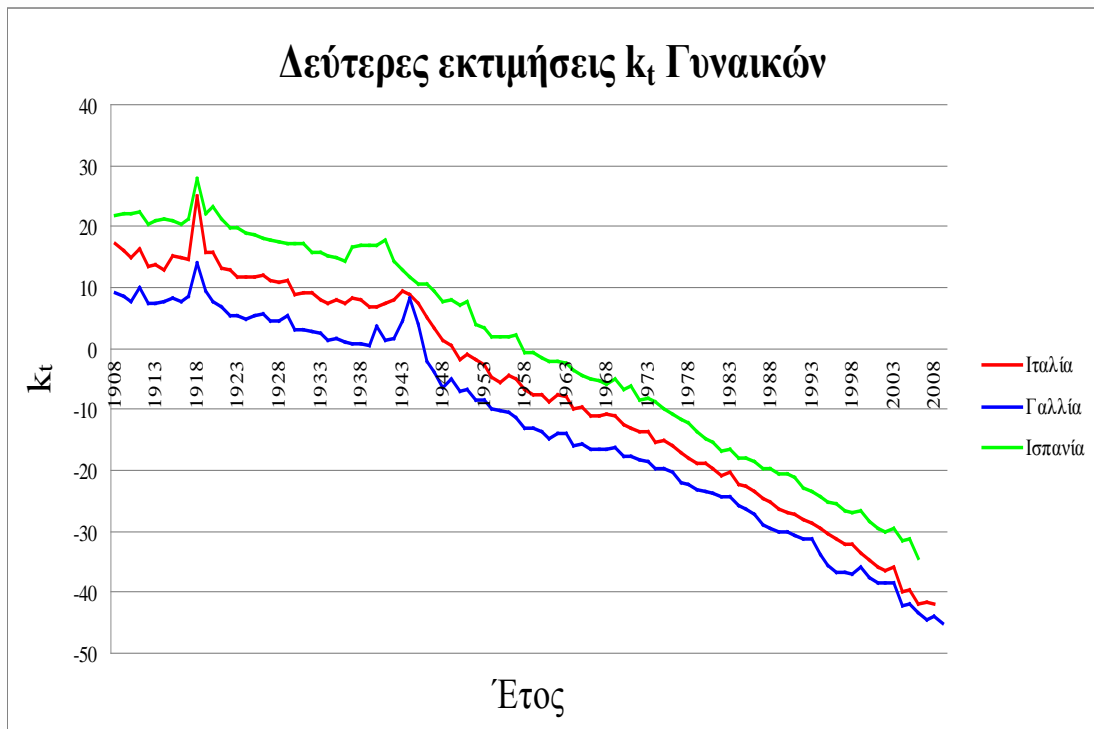
Γράφημα 3.9: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τους άντρες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



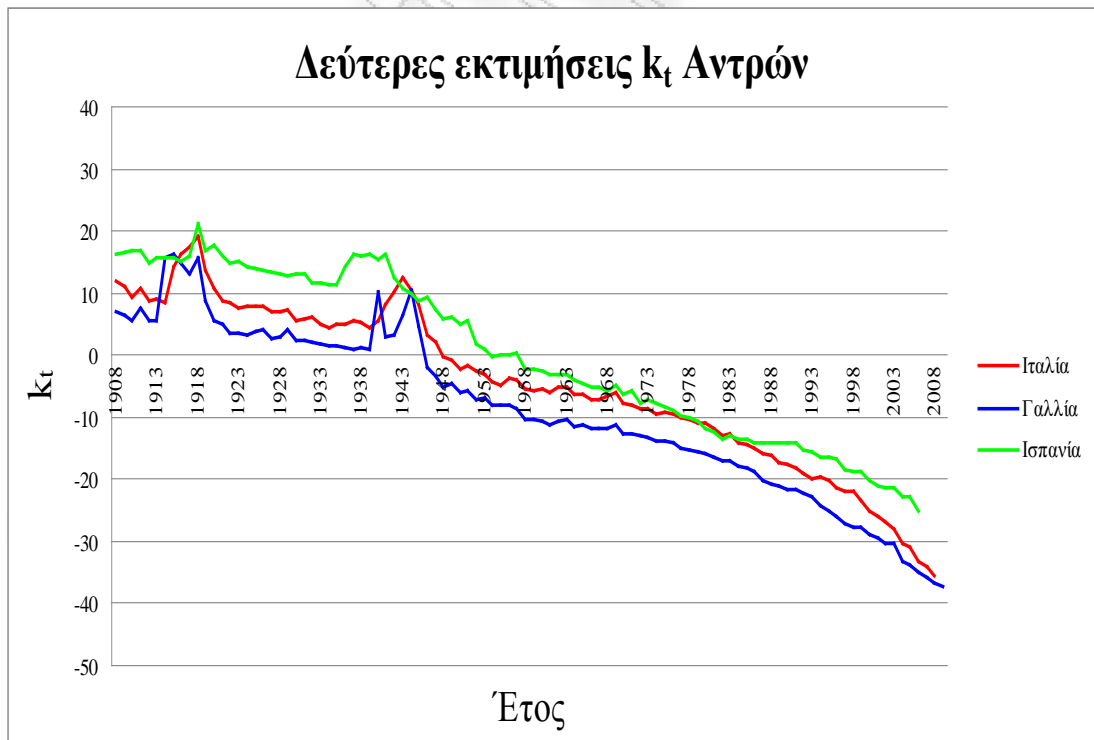
Γράφημα 3.10: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τις γυναίκες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



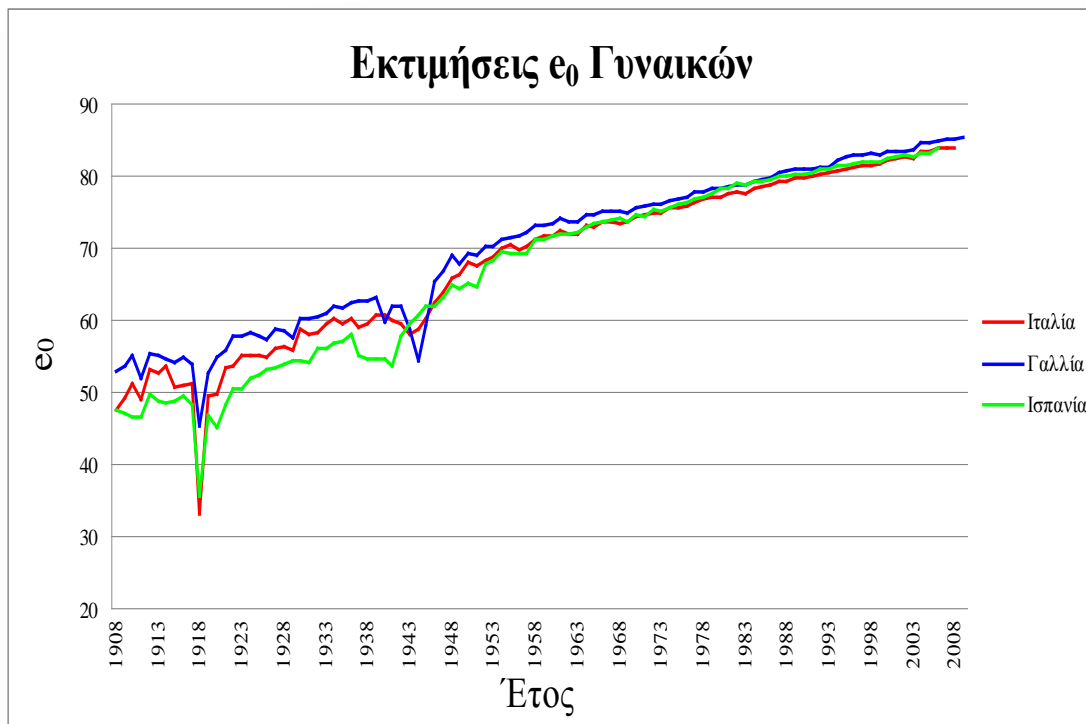
Γράφημα 3.11: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τους άντρες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



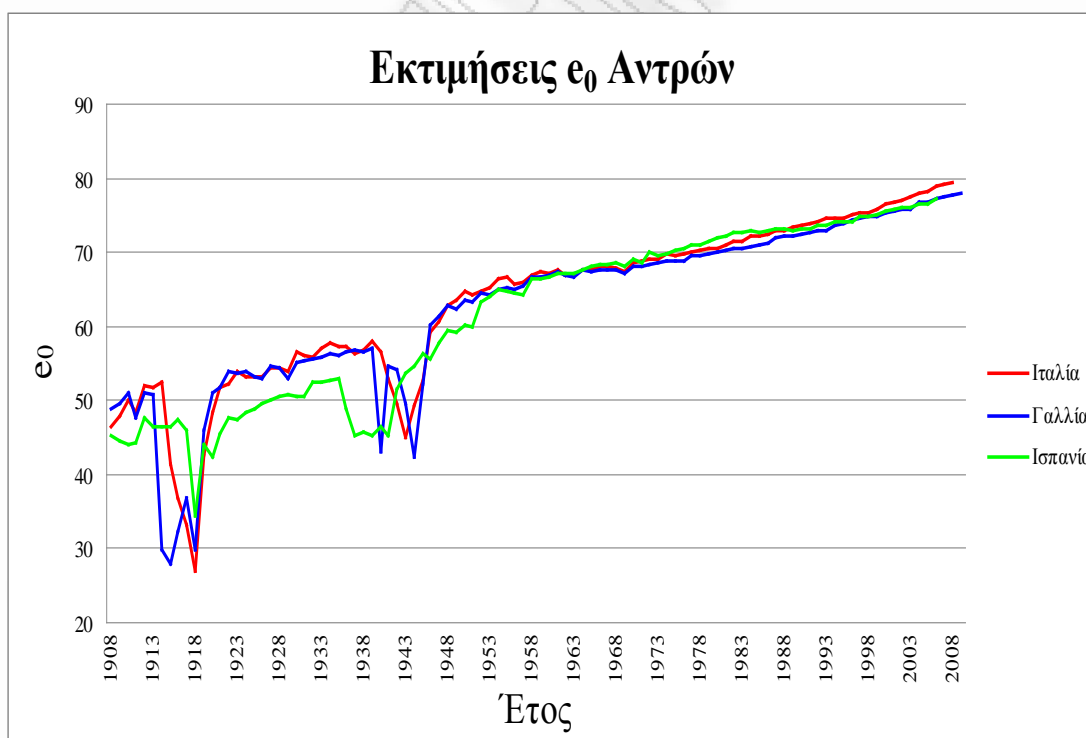
Γράφημα 3.12: Σύγκριση των δεύτερων εκτιμήσεων των k_t για τις γυναίκες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



Γράφημα 3.13: Σύγκριση των δεύτερων εκτιμήσεων των k_t για τους άντρες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

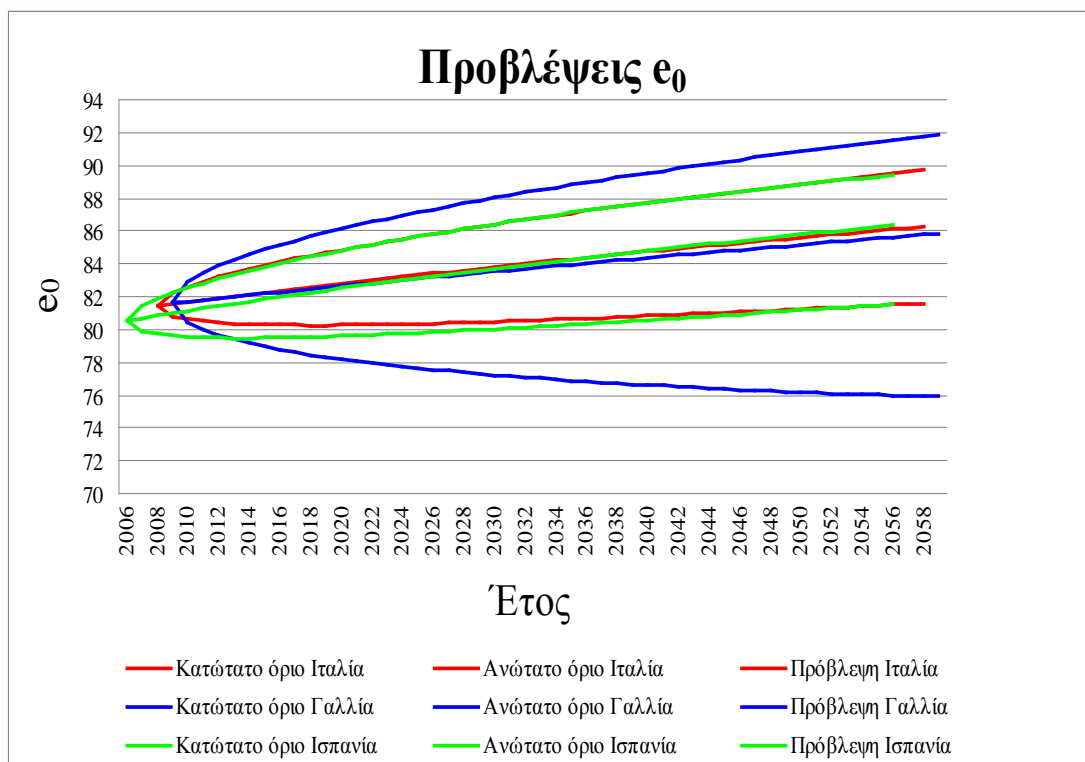


Γράφημα 3.14: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τις γυναίκες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία



Γράφημα 3.15: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τους άντρες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

3.2.6 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής



Γράφημα 3.16: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

Το Γράφημα 3.16 παρουσιάζει τις τιμές των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για τις τρεις χώρες, μαζί με τα διαστήματα εμπιστοσύνης τους. Από το γράφημα αυτό βλέπουμε ότι σε διάστημα 48 ετών (2009 – 2056) στην Ιταλία το προσδόκιμο επιβίωσης προβλέπεται από τα 81,53 χρόνια να αυξηθεί κατά 4,58 χρόνια και να φτάσει στα 86,11. Στη Γαλλία προβλέπεται να αυξηθεί κατά 4 χρόνια και από τα 81,61 χρόνια να φτάσει στα 85,61, ενώ στην Ισπανία, με αύξηση 5,33 χρόνων, προβλέπεται από τα 80,99 χρόνια να φτάσει μέχρι τα 86,32 χρόνια. Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης στο προσδόκιμο επιβίωσης εντοπίζεται στην Ισπανία με 6,58%, διότι δεν έχει μόνο τη μικρότερη τιμή e_0 στην αρχή της περιόδου, αλλά και τη μεγαλύτερη στο τέλος της. Δεύτερη έρχεται η Ιταλία με ποσοστό 5,62% και τρίτη έρχεται η Γαλλία με ποσοστό 4,9%.

Η διακύμανση στις τιμές των προβλέψεων των e_0 για την Ισπανία φτάνει το μέγιστο το έτος 2056 με τιμές που αγγίζουν τα 81,52 χρόνια ως κατώτατο όριο και τα 89,4 χρόνια ως ανώτατο όριο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το διάστημα εμπιστοσύνης να είναι αρκετά στενό αφού η διακύμανση των τιμών των e_0 φτάνει τα 3,08 χρόνια

επιπλέον ή τα 4,8 χρόνια μείον. Το ίδιο ισχύει και για την Ιταλία. Συγκεκριμένα, η διακύμανση στις τιμές των προβλέψεων των e_0 έχει μέγιστη τιμή τα 3,38 χρόνια επιπλέον, η τιμή των e_0 αγγίζει τα 89,49 χρόνια, και ελάχιστη τα 4,6 χρόνια μείον, όπου το e_0 φτάνει τα 81,51 χρόνια. Το διάστημα εμπιστοσύνης της Γαλλίας όμως, όπως φαίνεται και από το γράφημα, είναι αρκετά πιο φαρδύ. Η διακύμανση των τιμών των προβλέψεων των e_0 κυμαίνεται μεταξύ των 5,92 ετών επιπλέον και των 9,64 ετών μείον. Οι αντίστοιχες τιμές των προβλέψεων των e_0 είναι τα 91,55 και τα 75,98 έτη.

Στους Πίνακες 3.7 και 3.8 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των e_0 , του ανώτατου ορίου των e_0 και του κατώτατου ορίου των e_0 για όλες τις χώρες (βλ. Παράρτημα Β1).

Πίνακας 3.7: Μέγιστη και ελάχιστη τιμή των προβλέψεων των e_0

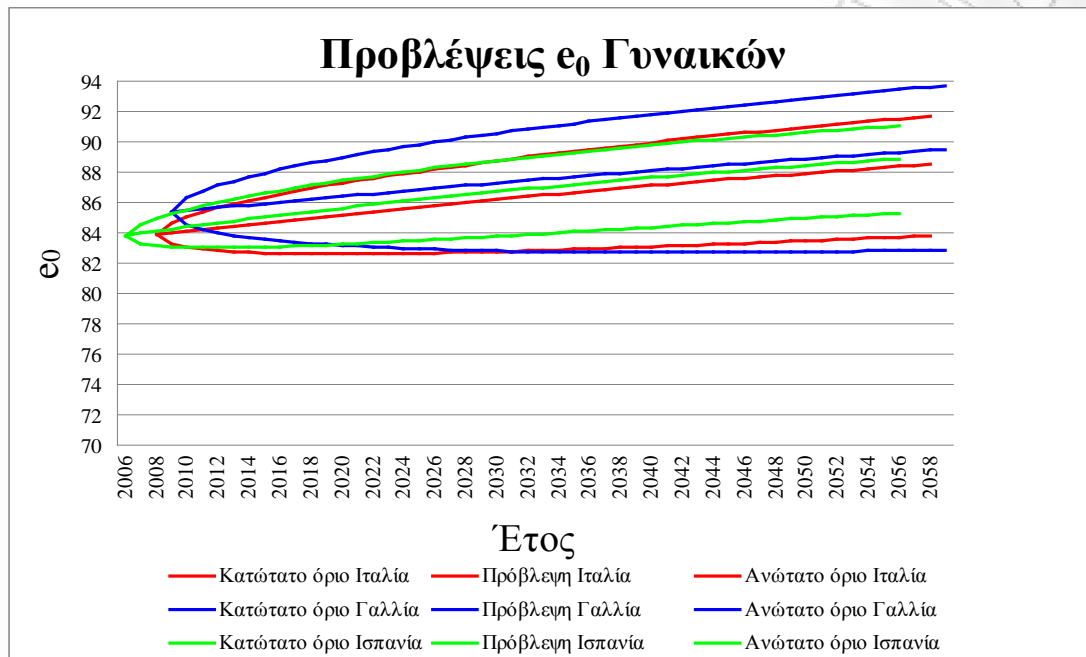
	Ελάχιστη τιμή e_0	Μέγιστη τιμή e_0
Ιταλία	81,53	86,11
Γαλλία	81,61	85,62
Ισπανία	80,99	86,32

Πίνακας 3.8: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές του ανώτατου και του κατώτατου ορίου των e_0

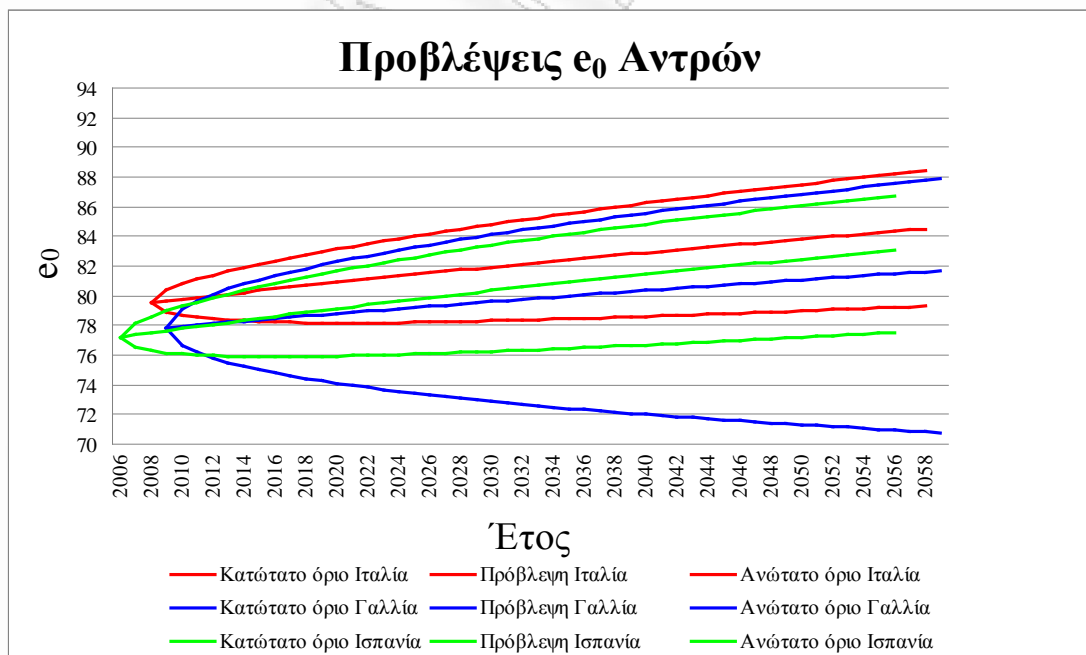
	Ελάχιστη τιμή ανώτατου ορίου των e_0	Μέγιστη τιμή ανώτατου ορίου των e_0	Ελάχιστη τιμή κατώτατου ορίου των e_0	Μέγιστη τιμή κατώτατου ορίου των e_0
Ιταλία	82,21	89,49	80,82	81,51
Γαλλία	81,61	91,55	81,61	75,98
Ισπανία	82,21	89,4	79,62	81,52

3.2.7 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για γυναίκες και άντρες

Στα Γραφήματα 3.17 και 3.18 παρουσιάζονται οι τιμές των προβλέψεων των e_0 για τις γυναίκες και τους άντρες για όλες τις χώρες.



Γράφημα 3.17: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τις γυναίκες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

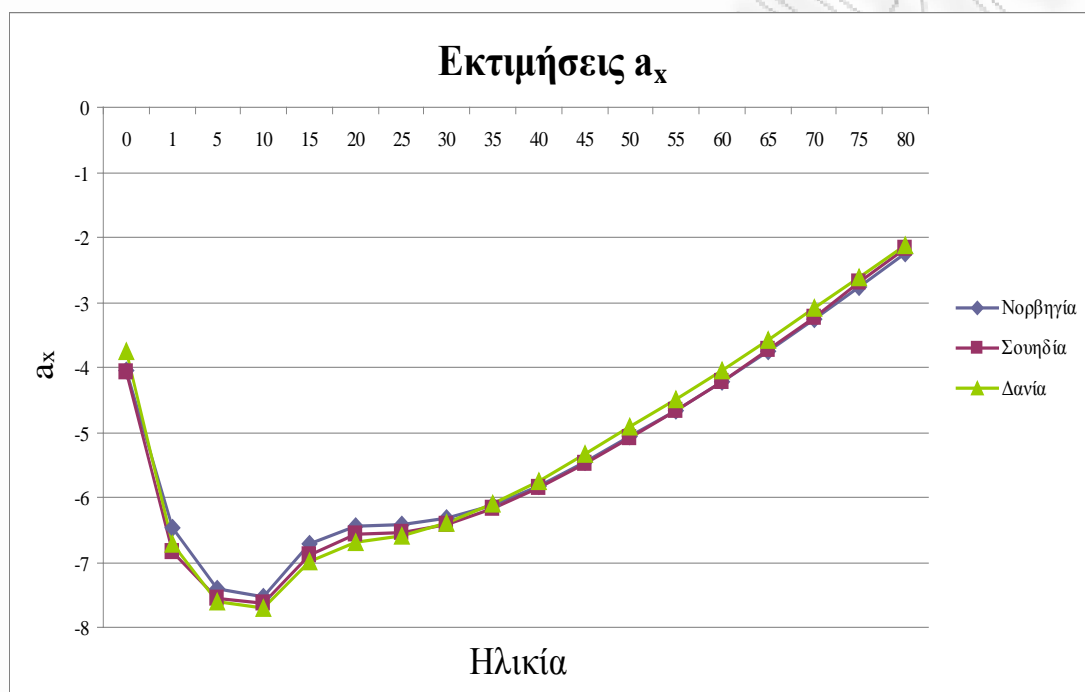


Γράφημα 3.18: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τους άντρες για τις χώρες Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία

3.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΩΡΩΝ ΤΗΣ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΥΡΩΠΗΣ

Η δεύτερη σύγκριση αφορά τις εκτιμήσεις και τις προβλέψεις του μοντέλου Lee – Carter για τις χώρες της Νορβηγίας, της Σουηδίας και της Δανίας (βλ. Παράρτημα Β2).

3.3.1 Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x



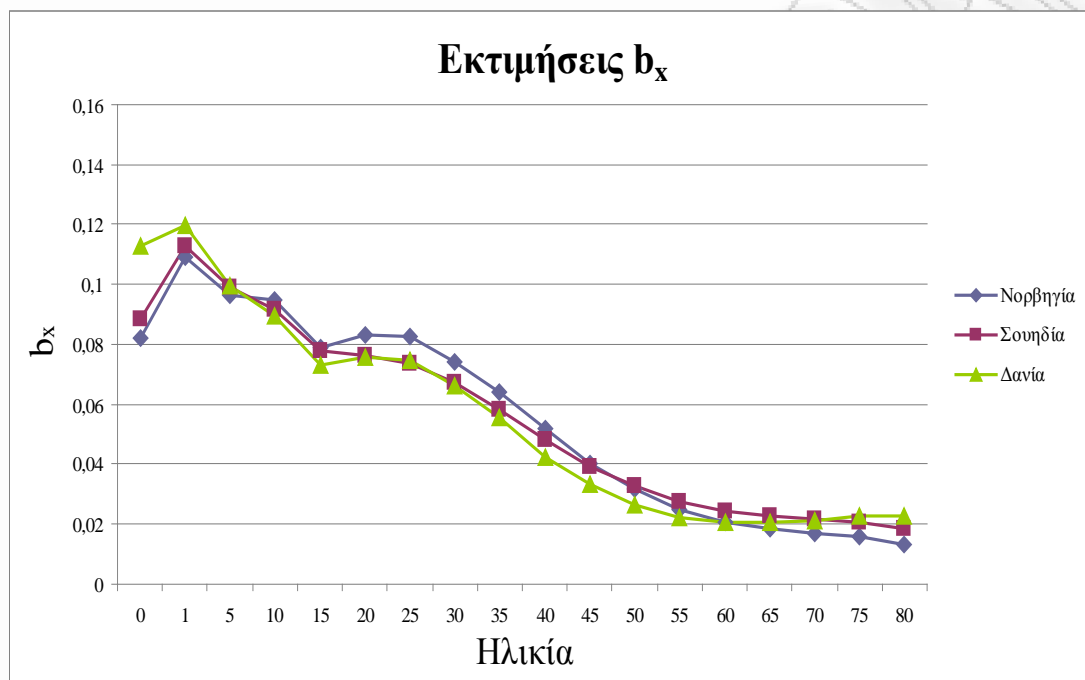
Γράφημα 3.19: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

Στο Γράφημα 3.19 παρατηρούνται οι τιμές των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x για τις χώρες της Νορβηγίας, της Σουηδίας και της Δανίας. Όπως φαίνεται από το γράφημα αυτό οι τιμές των \hat{a}_x των τριών χωρών είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Επίσης, έχουν την ίδια κλίση, δηλαδή στις ηλικίες από μηδέν (0) έως δέκα (10) ετών είναι φθίνουσα, ενώ στις υπόλοιπες, από δέκα (10) έως ογδόντα (80) ετών, είναι αύξουσα.

Ακόμα, παρατηρούμε ότι τις μεγαλύτερες τιμές των \hat{a}_x τις έχει η Δανία με εξαίρεση τις ηλικίες ενός (1) έως τριάντα (30) ετών που τις έχει η Νορβηγία. Τις μικρότερες τιμές τις έχει κατά κύριο λόγο η Σουηδία. Και για τις τρεις χώρες η ελάχιστη τιμή

εντοπίζεται στην ηλικία των δέκα (10) ετών, ενώ η μέγιστη στην ηλικία των ογδόντα (80) ετών.

3.3.2 Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x



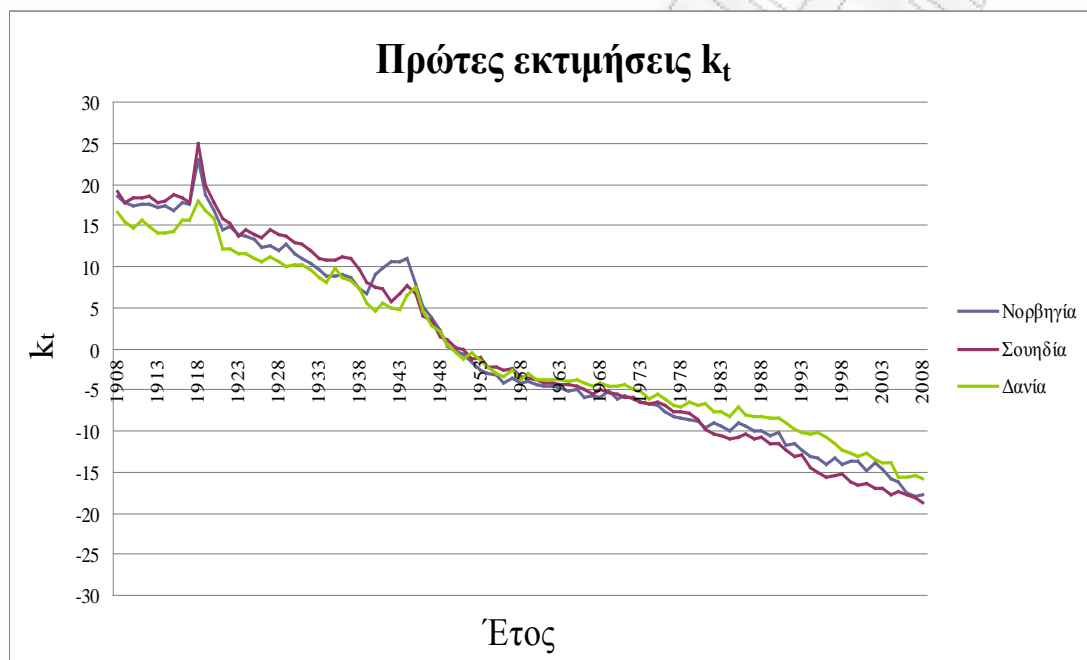
Γράφημα 3.20: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

Το Γράφημα 3.20 παρουσιάζει τις τιμές των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x για τις χώρες της Νορβηγίας, της Σουηδίας και της Δανίας. Σε αυτό το γράφημα παρατηρούμε πως οι τιμές των \widehat{b}_x για τις τρεις αυτές χώρες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Η κλίση τους είναι σε γενικές γραμμές η ίδια, από την ηλικία μηδέν (0) μέχρι την ηλικία του ενός (1) έτους οι εκτιμήσεις των b_x αυξάνονται, ενώ από εκεί και μετά μειώνονται. Εξαιρέσεις παρατηρούμε στην ηλικία των είκοσι (20) ετών για τη Νορβηγία και τη Δανία, καθώς και στις ηλικίες από εβδομήντα (70) μέχρι ογδόντα (80) ετών μόνο για τη χώρα της Δανίας, όπου τα \widehat{b}_x αυξάνονται. Στις ηλικίες μηδέν (0) έως τριάντα πέντε (35) οι τιμές των εκτιμήσεων των b_x έχουν μεγαλύτερες τιμές, συνεπώς οι ρυθμοί θανάτου σε αυτές τις ηλικίες μεταβάλλονται πιο γρήγορα όταν αλλάζει το επίπεδο θνησιμότητας (k_t), σε σχέση με

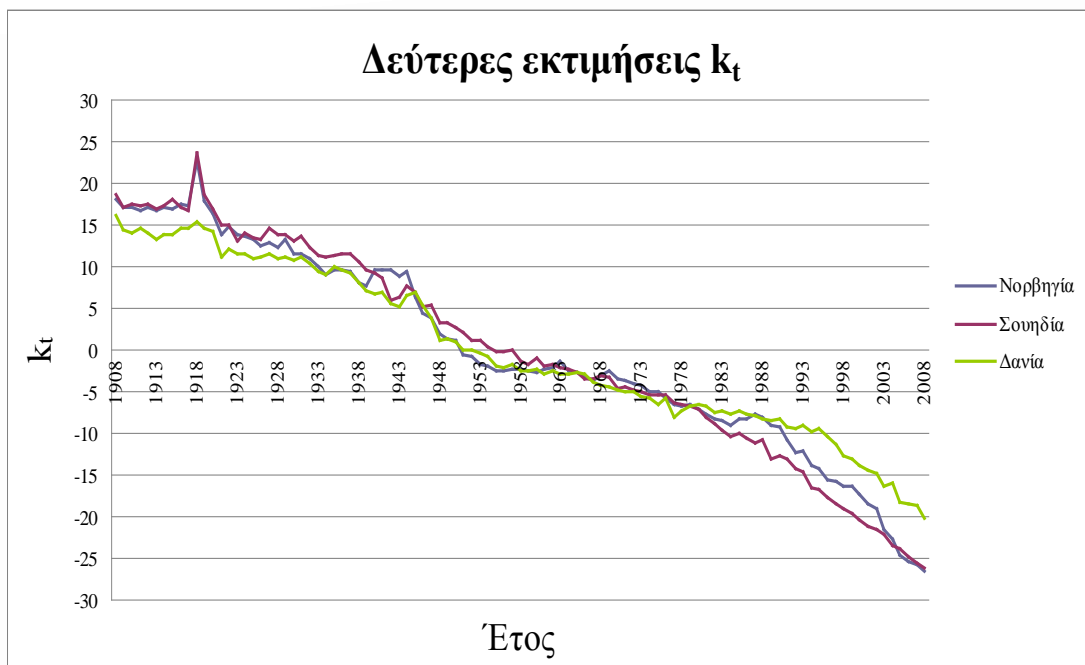
τους ρυθμούς θανάτου στις ηλικίες τριάντα πέντε (35) έως εβδομήντα (70), όπου τα \widehat{b}_x έχουν μικρότερες τιμές.

Και οι τρεις χώρες παρουσιάζουν μέγιστο στην ηλικία του ενός (1) έτους, ενώ ελάχιστο στην ηλικία των ογδόντα (80) ετών για τη Νορβηγία και τη Σουηδία και στην ηλικία των εξήντα πέντε (65) για τη Δανία.

3.3.3 Σύγκριση των εκτιμήσεων του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας



Γράφημα 3.21: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



Γράφημα 3.22: Σύγκριση των δευτέρων εκτιμήσεων των k_t για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

Τα Γραφήματα 3.21 και 3.22 δείχνουν τις τιμές της πρώτης και της δεύτερης εκτίμησης του δείκτη αλλαγής επιπέδου της θνησιμότητας για τις χώρες της Νορβηγίας, της Σουηδίας και της Δανίας. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα γραφήματα αυτά οι δύο εκτιμήσεις είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, μειώνονται σχεδόν γραμμικά και με σχετικά σταθερό ρυθμό. Εξαιρέσεις σημειώνονται τη χρονική περίοδο 1918 – 1921 και για τις τρεις χώρες καθώς και τη χρονική περίοδο 1940 – 1944 μόνο για τη Νορβηγία, όπου εντοπίζονται σημαντικές αυξήσεις. Ακόμα παρατηρούμε πως τη χρονική περίοδο 1945 – 1949 και οι δύο εκτιμήσεις μειώνονται με μεγαλύτερο ρυθμό, δηλαδή πιο γρήγορα, ιδιαίτερα για τη Νορβηγία και τη Δανία.

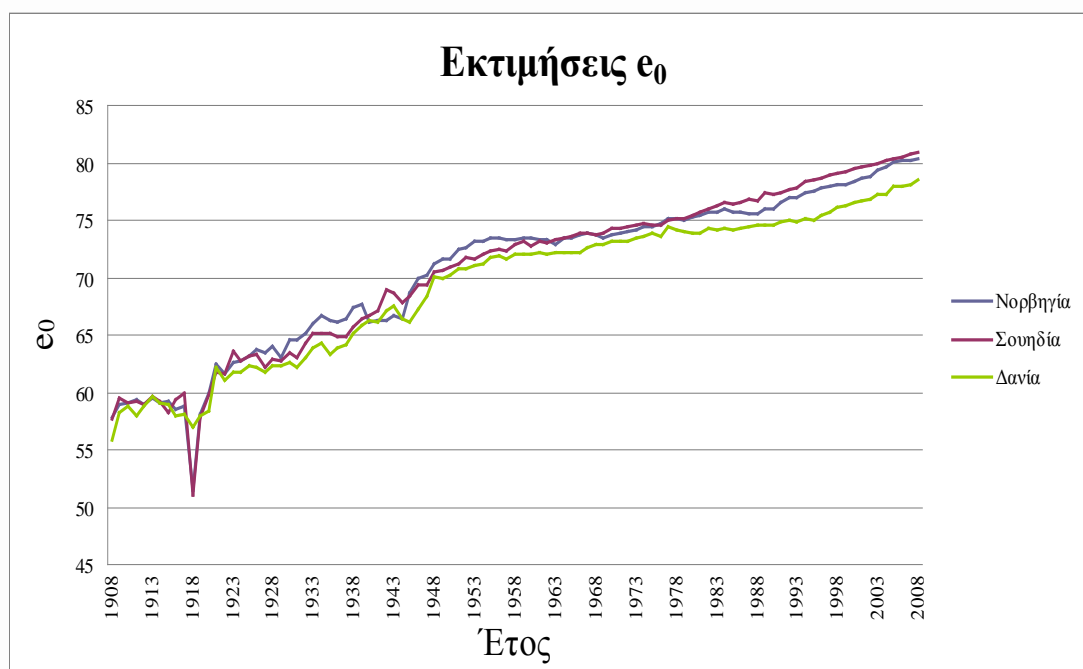
Συγκεκριμένα, το έτος 1918 η ισπανική γρίπη “χτυπάει” και τις τρεις χώρες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την απότομη αύξηση της πρώτης και δεύτερης εκτίμησης των k_t ύψους 31,58% και 32% για τη Νορβηγία, 39,78% και 40,49% για τη Σουηδία και 15,98% και 5,53% για τη Δανία. Αξίζει να σημειωθεί πως το έτος αυτό τα \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους. Τα επόμενα τρία χρόνια, δηλαδή μέχρι και το έτος 1921, η κλίση των δύο εκτιμήσεων είναι καθοδική και η συνολική πτώση τους φτάνει το 37,48% και το 38,87% για τη Νορβηγία, το 36,72% και το 36,68% για τη Σουηδία

και το 33,29% και το 27,67% για τη Δανία. Παρατηρούμε πως το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα τις μεγαλύτερες αυξήσεις τις έχει η Σουηδία και τις μεγαλύτερες μειώσεις η Νορβηγία, ενώ τις μικρότερες τις έχει η Δανία.

Το 1940 οι Γερμανοί εισβάλουν στη Νορβηγία και αυτό οδηγεί σε σημαντικές αυξήσεις των τιμών των εκτιμήσεων των k_t ύψους 34,99% για την πρώτη εκτίμηση και 25,74% για τη δεύτερη. Οι τιμές των \hat{k}_t και \hat{k}_t' παραμένουν σε σχετικά υψηλά επίπεδα μέχρι και το έτος 1944. Τη χρονική περίοδο 1945 – 1949 τα \hat{k}_t και \hat{k}_t' παρατηρούμε πως μειώνονται με μεγαλύτερο ρυθμό από ότι τις υπόλοιπες χρονιές και πιο πολύ τα \hat{k}_t . Οι συνολικές πτώσεις την περίοδο αυτή φτάνουν το 97,03%, το 84,9% και το 92,26% για την πρώτη εκτίμηση και το 79,94%, το 54,1% και το 80,3% για τη δεύτερη εκτίμηση για τη Νορβηγία, τη Σουηδία και τη Δανία αντίστοιχα. Συμπερασματικά, βλέπουμε πως οι πτώσεις των πρώτων εκτιμήσεων είναι μεγαλύτερες από των δεύτερων καθώς και ότι τις μεγαλύτερες μειώσεις τις έχει η Νορβηγία. Ακολουθεί η Δανία και τελευταία έρχεται η Σουηδία.

Το μέγιστο για την πρώτη εκτίμηση παρατηρείται το έτος 1918 και για τις τρεις χώρες, ενώ το ελάχιστο το έτος 2007 για τη Νορβηγία και το 2008 για τη Σουηδία και τη Δανία. Για τη δεύτερη εκτίμηση, το μέγιστο παρατηρείται το έτος 1918 για τη Νορβηγία και τη Σουηδία και το 1908 για τη Δανία, ενώ το ελάχιστο παρατηρείται το 2008 και για τις τρεις χώρες.

3.3.4 Σύγκριση των εκτιμήσεων του προσδόκιμου ζωής



Γράφημα 3.23: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

Το Γράφημα 3.23 παρουσιάζει τις εκτιμήσεις του προσδόκιμου ζωής για τις τρεις χώρες. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι οι τιμές των \hat{e}_0 έχουν σχεδόν αντίστροφη κλίση από ότι οι τιμές των \hat{k}_t και \hat{k}_t' . Ειδικότερα, έχουν ανοδική κλίση με σχετικά σταθερό ρυθμό αύξησης. Παρατηρούνται και εδώ εξαιρέσεις τις χρονικές περιόδους 1918-1921 και για τις τρεις χώρες και 1940-1944 μόνο για τη Νορβηγία, όπου παρουσιάζονται απότομες μειώσεις.

Συγκεκριμένα, το έτος 1918 εντοπίζεται η πρώτη σημαντική μείωση στις τιμές των εκτιμήσεων των e_0 . Στη Νορβηγία η μείωση φτάνει το 12,46%, στη Σουηδία το 14,64% και στη Δανία το 1,93%. Τα έτη 1919, 1920 και 1921 η κλίση των τιμών των \hat{e}_0 είναι ανοδική και η συνολική αύξησή τους φτάνει το 21,14% για τη Νορβηγία, το 20,9% για τη Σουηδία και το 9,24% για τη Δανία. Παρατηρούμε πως τα ποσοστά της Δανίας είναι πολύ μικρά σε σχέση με τα ποσοστά των άλλων δύο χωρών.

Το 1940 εντοπίζεται η δεύτερη μεγάλη μείωση για τη Νορβηγία, η οποία φτάνει το 2,21%. Το ποσοστό δεν φαίνεται να είναι μεγάλο, όμως θεωρείται σημαντικό σε

σχέση με τις υπόλοιπες τιμές. Τα \widehat{e}_0 παραμένουν σε σχετικά χαμηλά επίπεδα μέχρι και το έτος 1944. Τη χρονική περίοδο 1945 – 1949 οι τιμές των εκτιμήσεων των e_0 και για τις τρεις χώρες αυξάνονται με μεγαλύτερο ρυθμό από ότι τις υπόλοιπες χρονιές, με συνολικές αυξήσεις που φτάνουν το 4,39%, το 3,36% και το 5,77% για τη Νορβηγία, τη Σουηδία και τη Δανία αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως τη μεγαλύτερη αύξηση την έχει η Δανία. Ακολουθεί η Νορβηγία και μετά η Σουηδία.

Και οι τρεις χώρες παρουσιάζουν μέγιστο το έτος 2008 και ελάχιστο το έτος 1918 για τις χώρες Νορβηγία και Σουηδία και το 1908 για τη Δανία.

Στους Πίνακες 3.9, 3.10 και 3.11 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x , k_t , \widehat{k}_t και e_0 για όλες τις χώρες (βλ. Παράρτημα Β2).

Πίνακας 3.9: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x

	Ελάχιστη τιμή \widehat{a}_x	Μέγιστη τιμή \widehat{a}_x	Ελάχιστη τιμή \widehat{b}_x	Μέγιστη τιμή \widehat{b}_x
Νορβηγία	-7,5217505	-2,24793148	0,013382656	0,108964786
Σουηδία	-7,6350586	-2,17973617	0,018371979	0,112798196
Δανία	-7,70869578	-2,12520149	0,02052825	0,11997536

Πίνακας 3.10: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των k_t , \widehat{k}_t

	Ελάχιστη τιμή \widehat{k}_t	Μέγιστη τιμή \widehat{k}_t	Ελάχιστη τιμή \widehat{k}_t'	Μέγιστη τιμή \widehat{k}_t'
Νορβηγία	-17,95990462	23,06086513	-26,5646057	22,76549983
Σουηδία	-18,74867616	24,94838801	-26,079175	23,57314824
Δανία	-15,9011808	18,04877945	-20,2221327	16,08511114

Πίνακας 3.11: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των e_0

	Ελάχιστη τιμή \hat{e}_0	Μέγιστη τιμή \hat{e}_0
Νορβηγία	51,5322271	80,39470589
Σουηδία	51,10305774	80,86733198
Δανία	55,8724595	78,4723251

Στους Πίνακες 3.12, 3.13 και 3.14 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες διαφορές των εκτιμήσεων a_x , b_x , k_t , \hat{k}_t και e_0 μεταξύ των χωρών σε απόλυτες τιμές (βλ. Παράρτημα Β2).

Πίνακας 3.12: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των a_x , b_x

	Ελάχιστη διαφορά \hat{a}_x	Μέγιστη διαφορά \hat{a}_x	Ελάχιστη διαφορά \hat{b}_x	Μέγιστη διαφορά \hat{b}_x
Νορβηγία- Σουηδία	0,000514041	0,372096636	0,000883302	0,008868178
Νορβηγία- Δανία	0,016325228	0,292416856	0,000149949	0,031155381
Σουηδία- Δανία	0,004039818	0,309517675	0,000318779	0,024630494

Πίνακας 3.13: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των k_t , \hat{k}_t

	Ελάχιστη διαφορά \hat{k}_t	Μέγιστη διαφορά \hat{k}_t	Ελάχιστη διαφορά \hat{k}_t'	Μέγιστη διαφορά \hat{k}_t'
Νορβηγία- Σουηδία	0,006585214	4,867493142	0,02048291	3,976093184
Νορβηγία- Δανία	0,075129065	5,720778486	0,01197621	7,412584348
Σουηδία- Δανία	0,016928477	6,899608561	0,051958265	8,220232755

Πίνακας 3.14: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των e_0

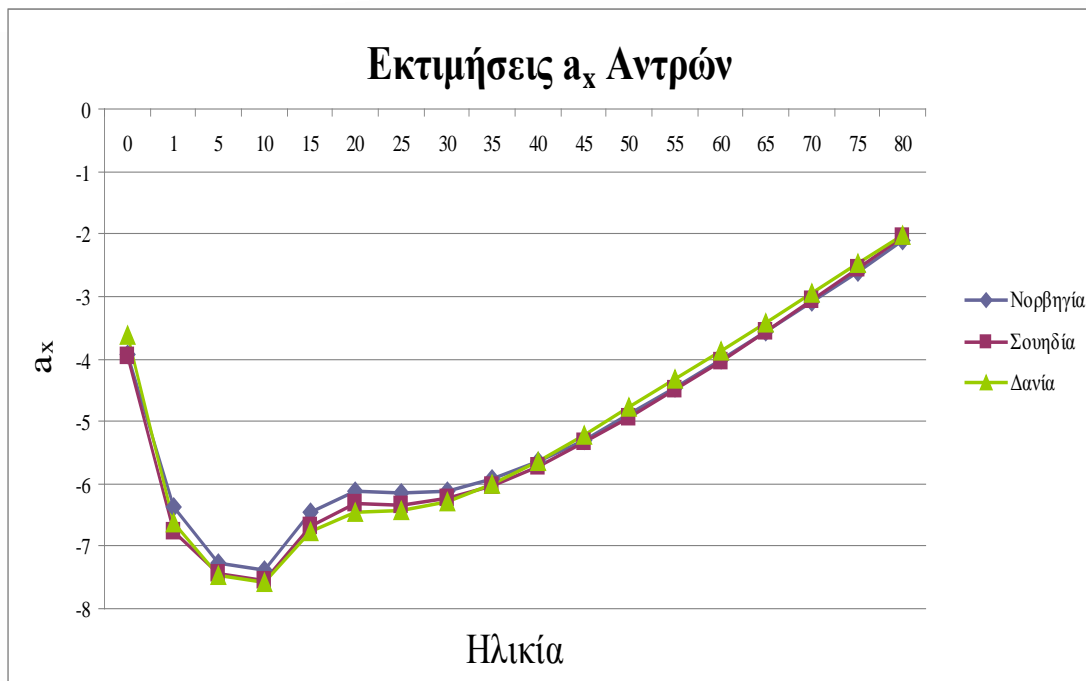
	Ελάχιστη διαφορά \widehat{e}_0	Μέγιστη διαφορά \widehat{e}_0
Νορβηγία-Σουηδία	0,003239414	2,739815151
Νορβηγία-Δανία	0,008994686	5,424115201
Σουηδία-Δανία	0,007736013	5,853284557

3.3.5 Σύγκριση όλων των εκτιμήσεων για γυναίκες και άντρες

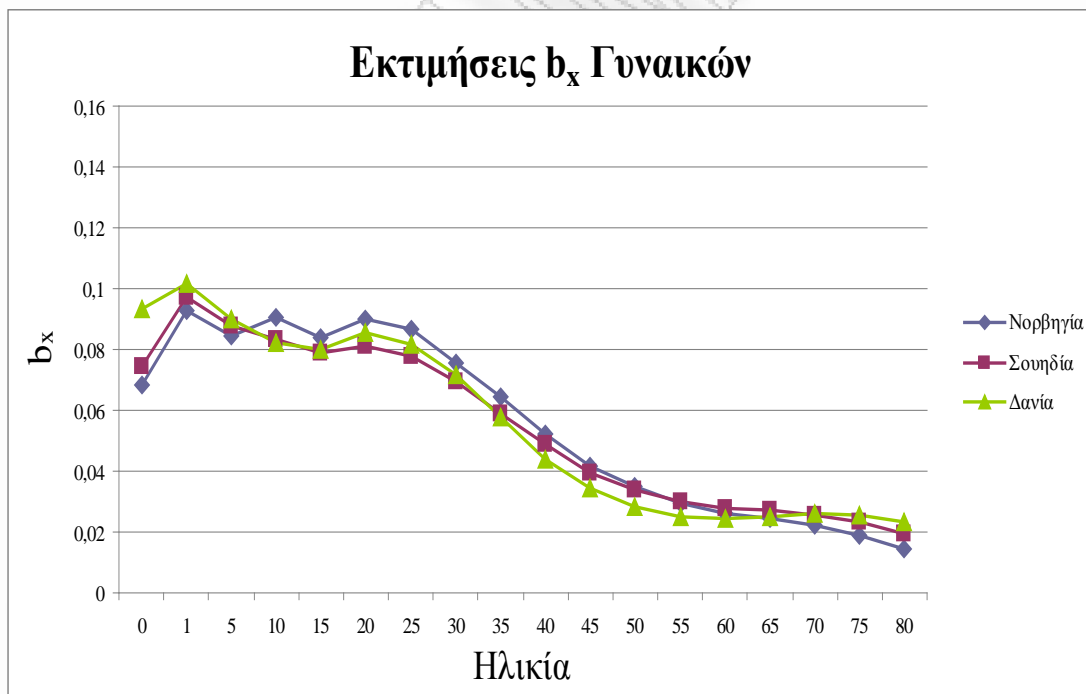
Στα Γραφήματα 3.24 μέχρι 3.33 παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x , k_t , \widehat{k}_t και e_0 για τις γυναίκες και τους άντρες για όλες τις χώρες.



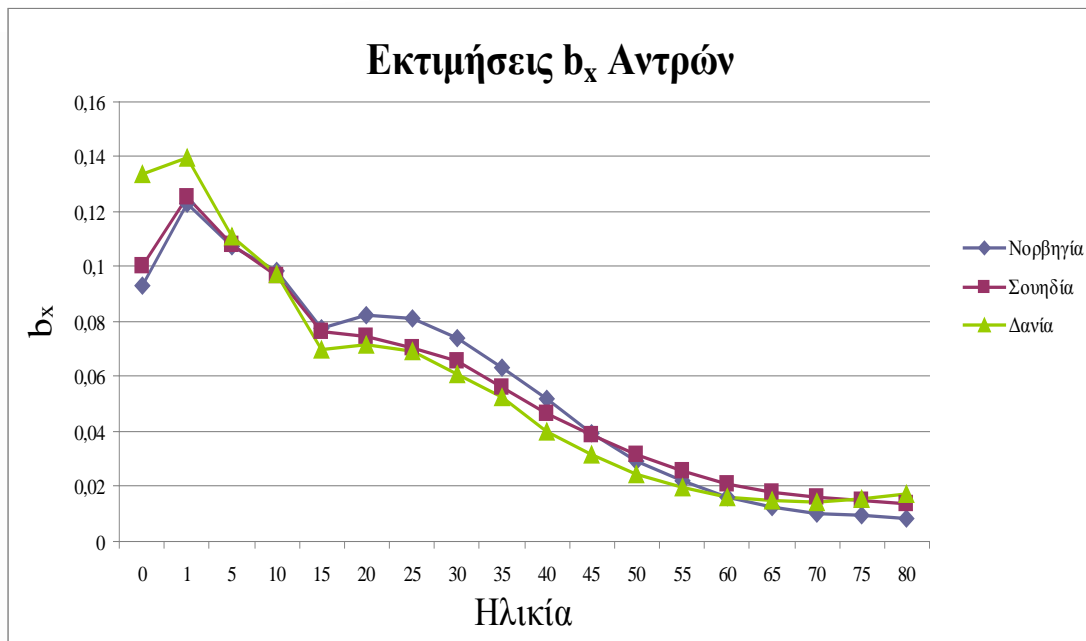
Γράφημα 3.24: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τις γυναίκες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



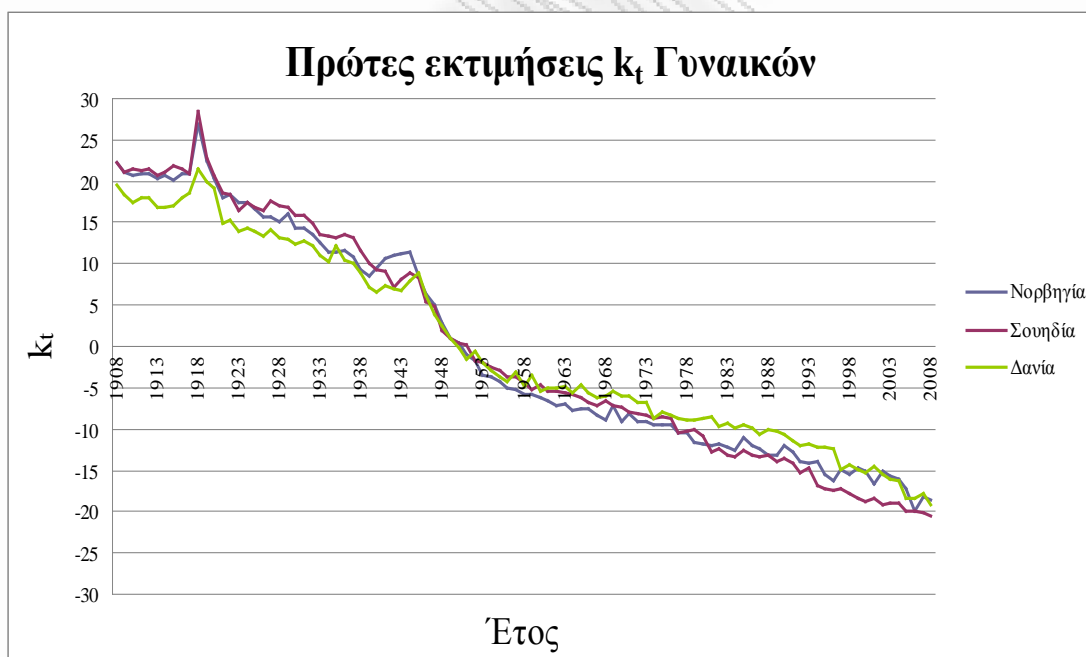
Γράφημα 3.25: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τους άντρες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



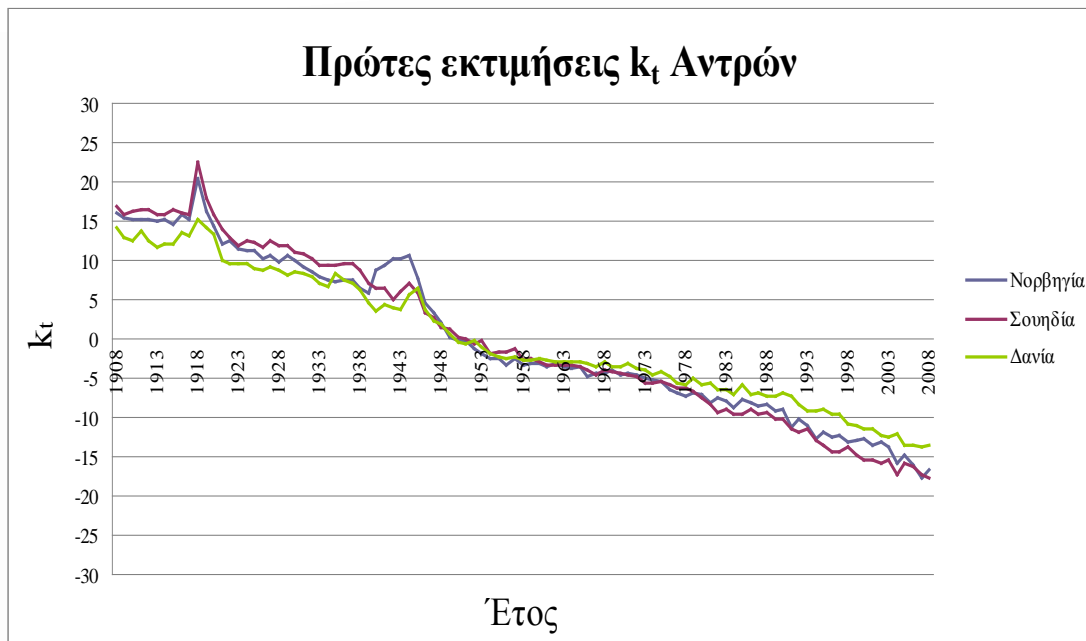
Γράφημα 3.26: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τις γυναίκες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



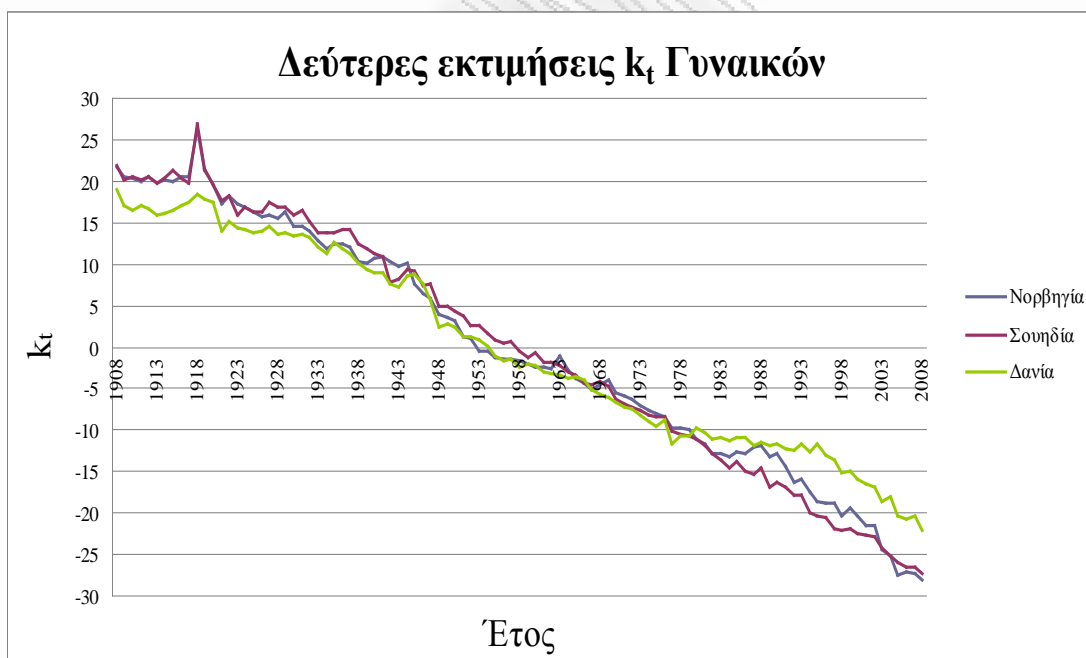
Γράφημα 3.27: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τους άντρες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



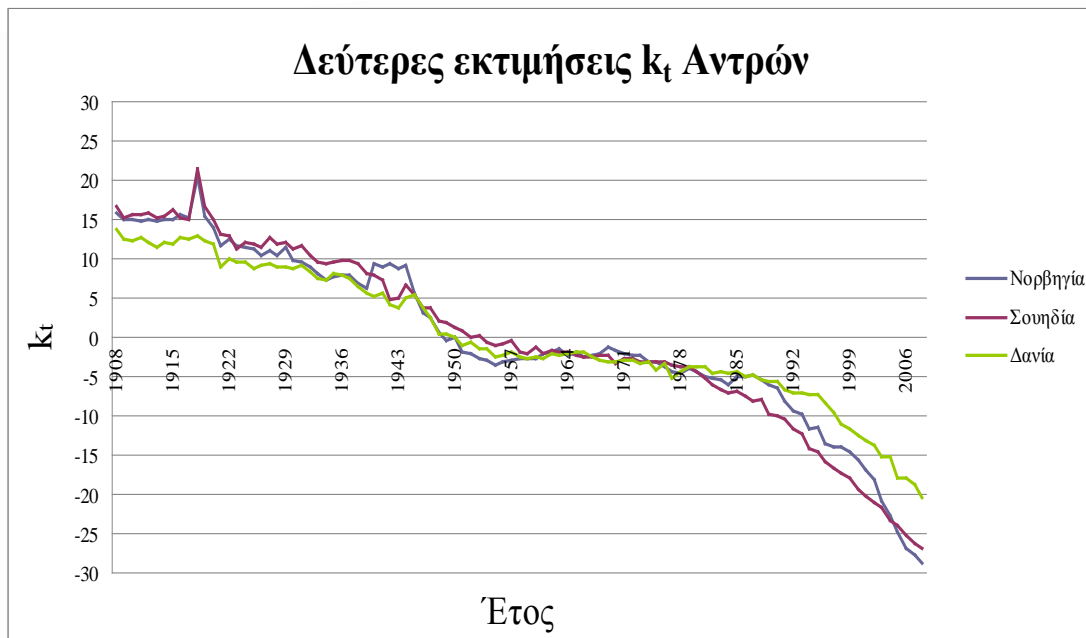
Γράφημα 3.28: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τις γυναίκες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



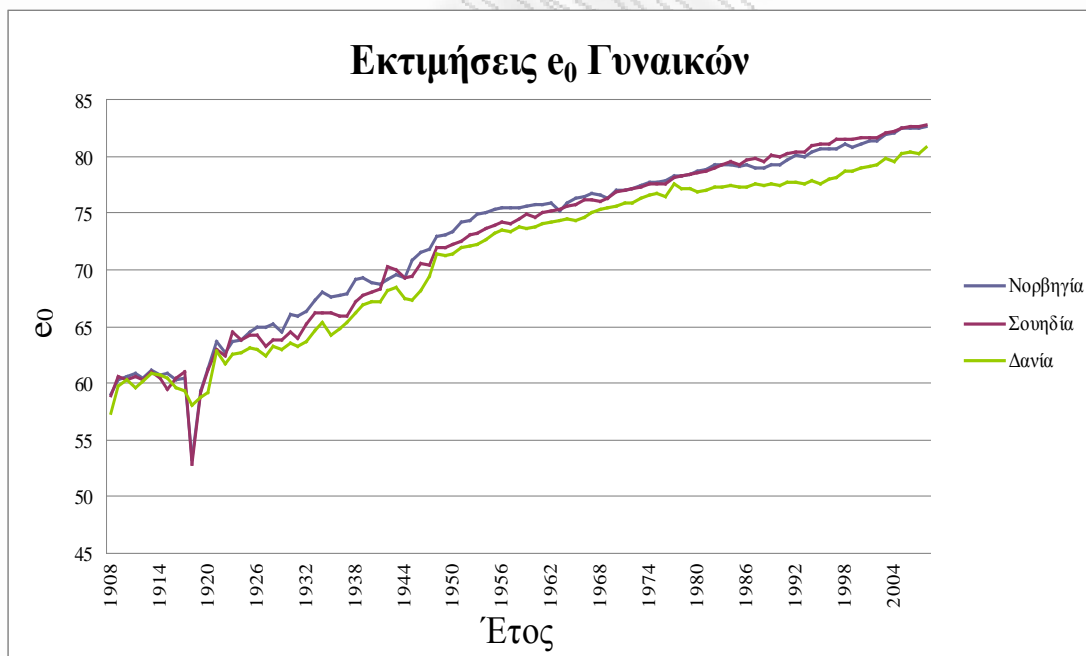
Γράφημα 3.29: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τους άντρες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



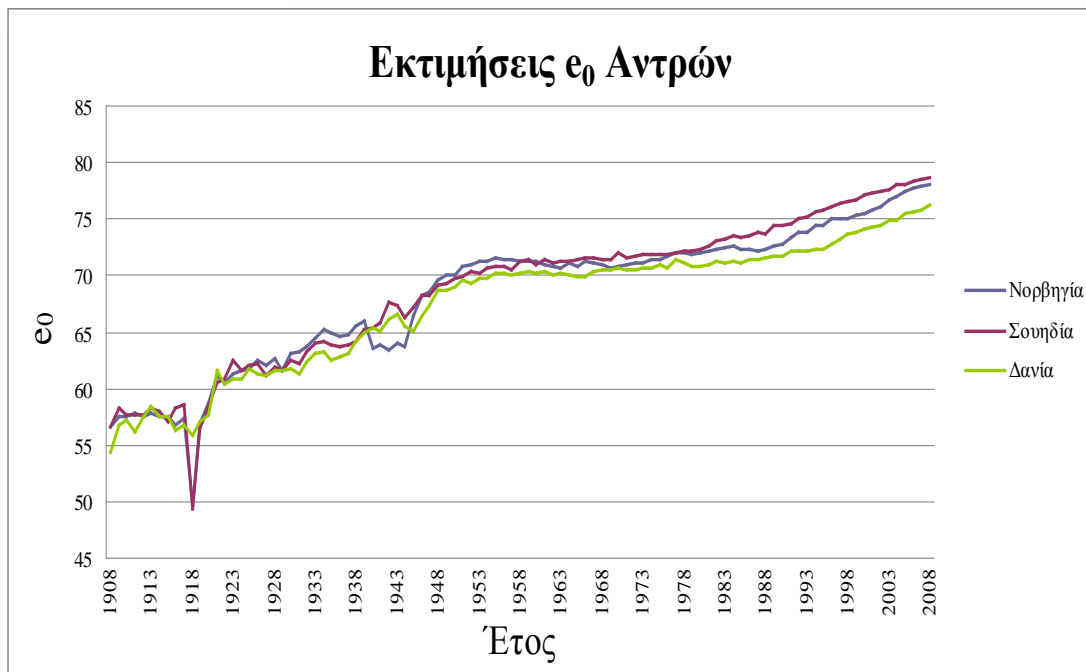
Γράφημα 3.30: Σύγκριση των δεύτερων εκτιμήσεων των k_t για τις γυναίκες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



Γράφημα 3.31: Σύγκριση των δεύτερων εκτιμήσεων των k_t για τους άντρες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

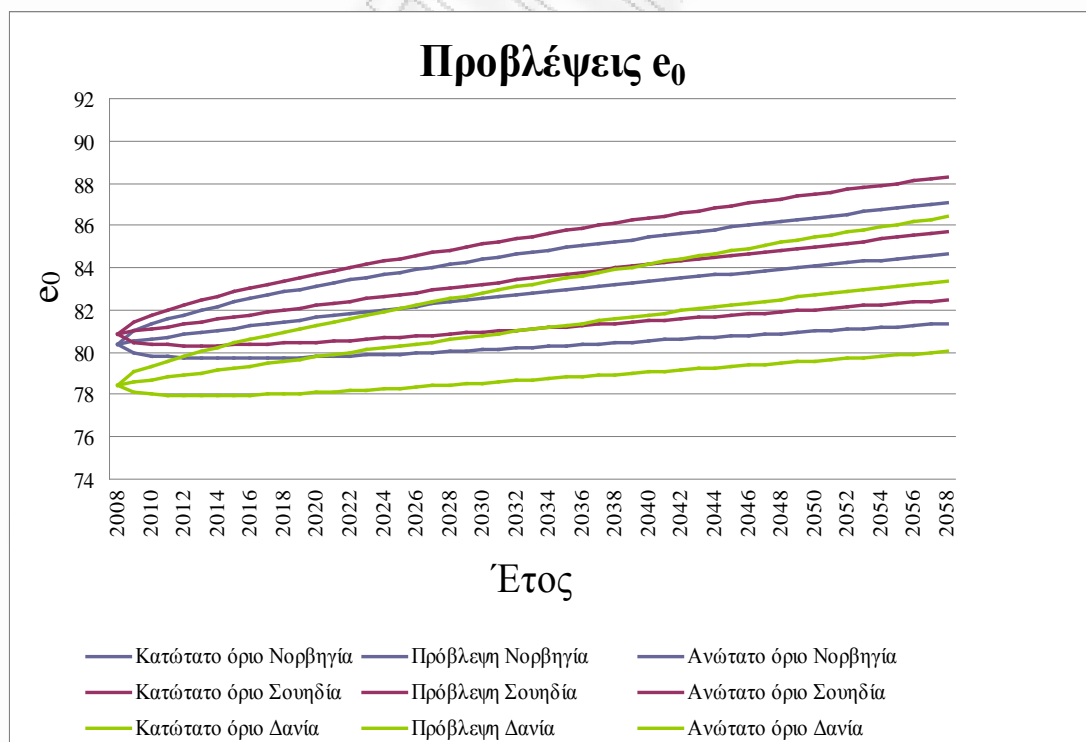


Γράφημα 3.32: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τις γυναίκες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία



Γράφημα 3.33: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τους άντρες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

3.3.6 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής



Γράφημα 3.34: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

Το Γράφημα 3.34 δείχνει τις τιμές των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για τις τρεις χώρες καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης τους. Από το γράφημα αυτό φαίνεται ότι σε διάστημα 51 ετών (2008 – 2058) στη Νορβηγία το προσδόκιμο επιβίωσης προβλέπεται από τα 80,39 χρόνια να αυξηθεί κατά 4,25 χρόνια και να φτάσει στα 84,64. Στη Σουηδία προβλέπεται να αυξηθεί κατά 4,8 χρόνια και από τα 80,87 χρόνια να φτάσει στα 85,67, ενώ στη Δανία, με αύξηση 4,93 χρόνων, προβλέπεται από τα 78,47 χρόνια να φτάσει μέχρι τα 83,4 χρόνια. Το μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης στο προσδόκιμο επιβίωσης εντοπίζεται στη Δανία με 6,28%, διότι έχει και τη μικρότερη τιμή e_0 στην αρχή της περιόδου, αλλά και τη μεγαλύτερη στο τέλος της. Ακολουθεί η Σουηδία με ποσοστό 5,94% και τελευταία έρχεται η Νορβηγία με ποσοστό 5,28%.

Η διακύμανση στις τιμές των προβλέψεων του e_0 για τη Νορβηγία φτάνει το μέγιστο το έτος 2058 με τιμές που αγγίζουν τα 81,35 χρόνια ως κατώτατο όριο και τα 87,06 χρόνια ως ανώτατο όριο. Κατ' επέκταση το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά στενό αφού η διακύμανση των τιμών του e_0 φτάνει τα 2,42 χρόνια επιπλέον ή τα 3,29 χρόνια μείον. Το ίδιο παρατηρείται και για τις άλλες δύο χώρες. Πιο αναλυτικά, για τη Σουηδία η διακύμανση στις τιμές των προβλέψεων του e_0 έχει μέγιστη τιμή τα 2,62 χρόνια επιπλέον και η τιμή του e_0 αγγίζει τα 88,31 χρόνια, ελάχιστη τα 3,22 χρόνια μείον και το e_0 φτάνει τα 82,47 χρόνια. Για τη Δανία η διακύμανση στις τιμές του e_0 φτάνει τα 3 έτη επιπλέον και τα 3,36 έτη μείον, δηλαδή οι τιμές φτάνουν τα 86,4 και τα 80,04 χρόνια αντίστοιχα.

Στους Πίνακες 3.15 και 3.16 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των e_0 , του ανώτατου ορίου των e_0 και του κατώτατου ορίου των e_0 για όλες τις χώρες (βλ. Παράρτημα Β2).

Πίνακας 3.15: Μέγιστη και ελάχιστη τιμή των προβλέψεων των e_0

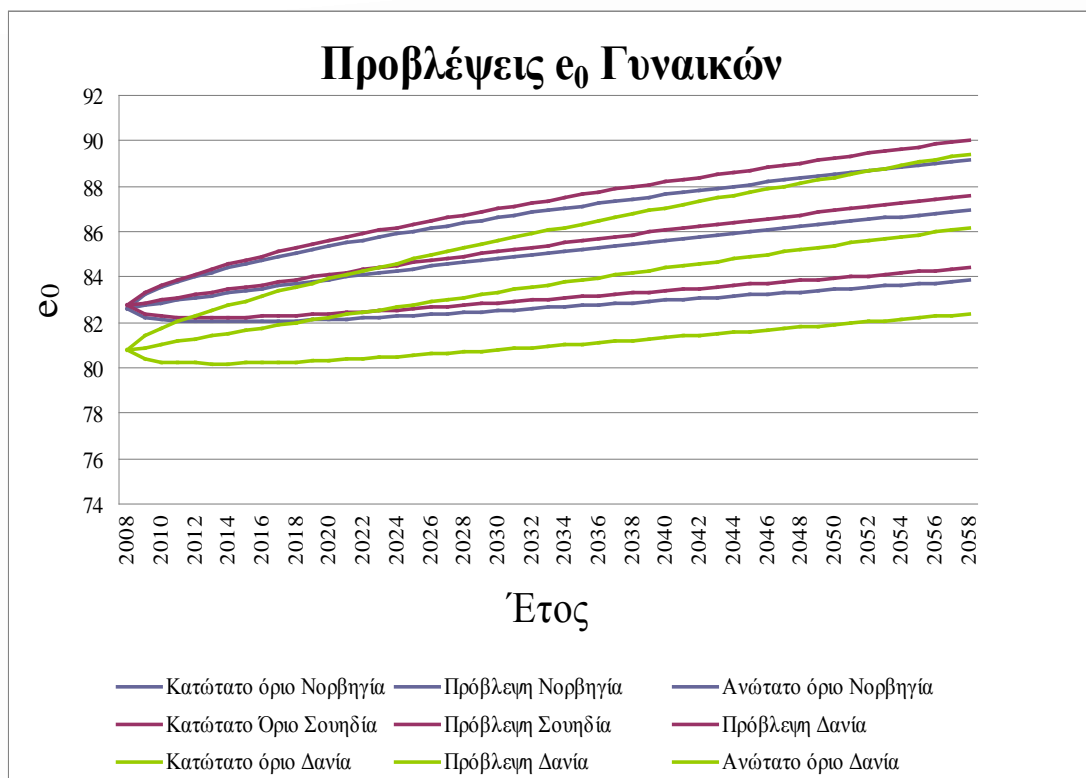
	Ελάχιστη τιμή e_0	Μέγιστη τιμή e_0
Νορβηγία	80,39470589	84,63902458
Σουηδία	80,86733198	85,66812607
Δανία	78,4723251	83,4030163

Πίνακας 3.16: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές του ανώτατου και του κατώτατου ορίου των e_0

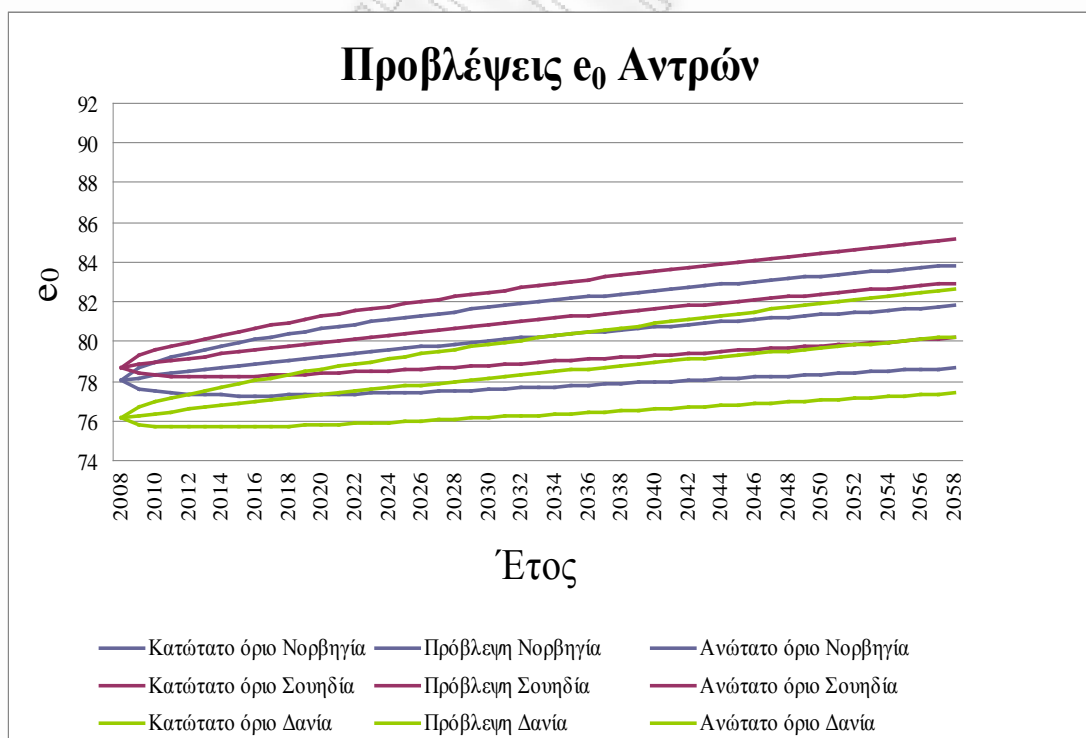
	Ελάχιστη τιμή ανώτατου ορίου του e_0	Μέγιστη τιμή ανώτατου ορίου του e_0	Ελάχιστη τιμή κατώτατου ορίου του e_0	Μέγιστη τιμή κατώτατου ορίου του e_0
Νορβηγία	80,39470589	87,05786187	80,39470589	81,3502824
Σουηδία	80,86733198	88,30710788	80,86733198	82,46804816
Δανία	78,4723251	86,4005097	78,4723251	80,0393894

3.3.7 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για γυναίκες και άντρες

Στα Γραφήματα 3.35 και 3.36 παρουσιάζονται οι τιμές των προβλέψεων των e_0 για τις γυναίκες και τους άντρες για όλες τις χώρες.



Γράφημα 3.35: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τις γυναίκες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

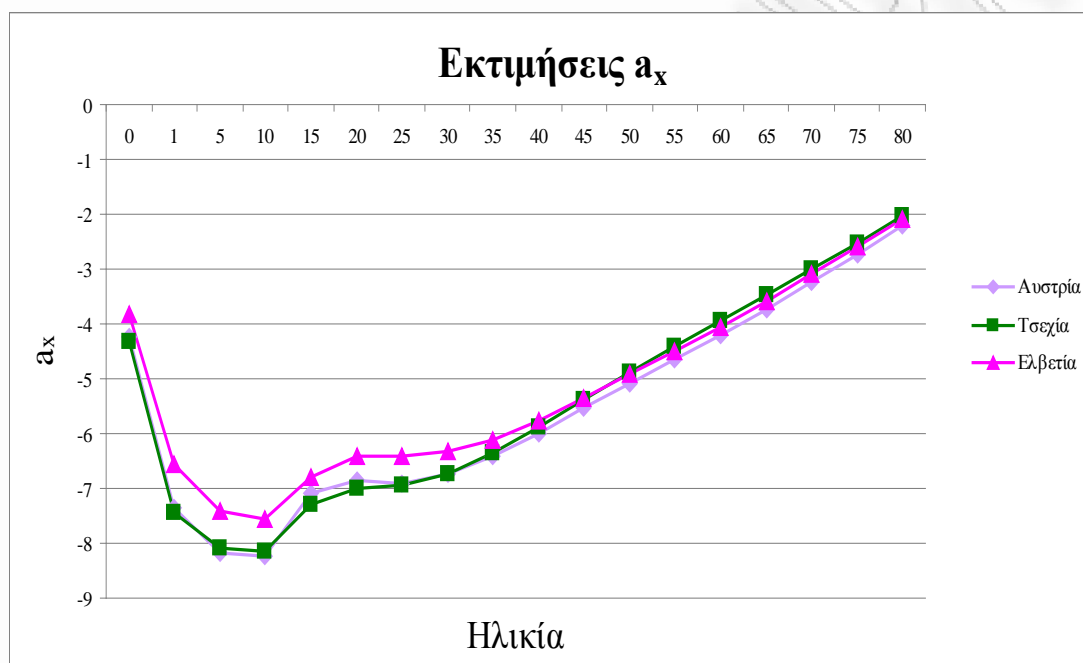


Γράφημα 3.36: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τους άντρες για τις χώρες Νορβηγία, Σουηδία και Δανία

3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΩΡΩΝ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΥΡΩΠΗΣ

Η τρίτη σύγκριση γίνεται για τα αποτελέσματα και τις προβλέψεις του μοντέλου Lee – Carter για τις χώρες της Αυστρίας, της Τσεχίας και της Ελβετίας (βλ. Παράρτημα Β3).

3.4.1 Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x



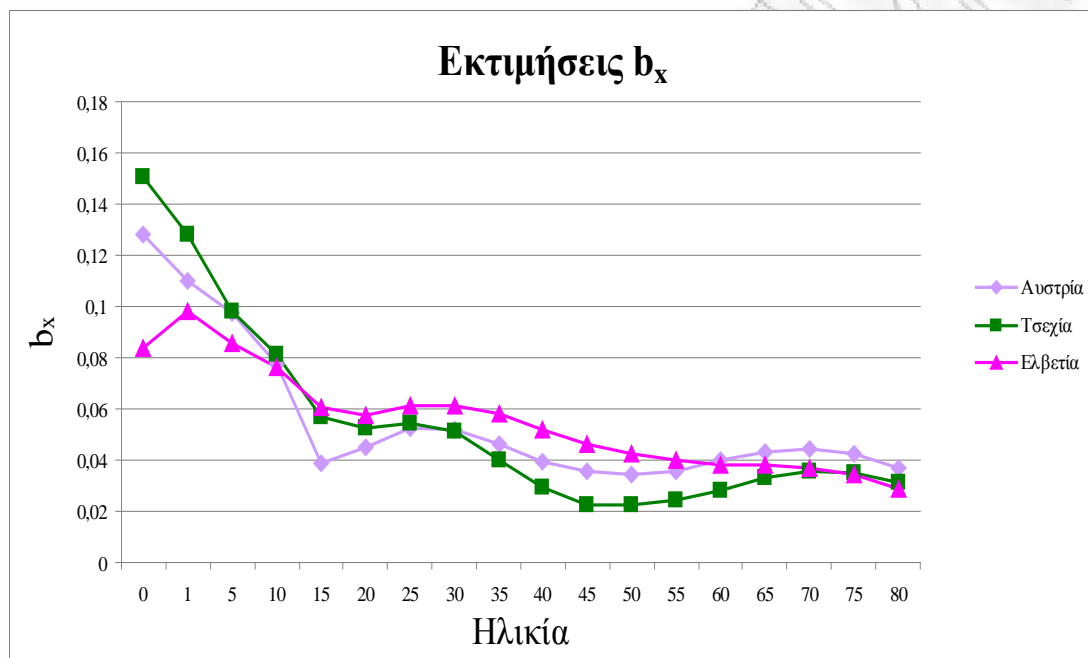
Γράφημα 3.37: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

Στο Γράφημα 3.37 απεικονίζονται οι τιμές των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία x για τις χώρες της Αυστρίας, της Τσεχίας και της Ελβετίας. Στο γράφημα αυτό παρατηρούμε πως οι τιμές των \hat{a}_x και για τις τρεις χώρες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Ειδικότερα, τα \hat{a}_x της Αυστρίας και της Τσεχίας σχεδόν ταυτίζονται σε όλες τις ηλικίες, ενώ της Ελβετίας παρουσιάζουν μικρές διαφορές στις ηλικίες μηδέν (0) έως τριάντα (30) ετών. Ακόμα, έχουν την ίδια κλίση, δηλαδή στις ηλικίες από μηδέν (0) έως δέκα (10) ετών είναι φθίνουσα, ενώ στις υπόλοιπες (10-80) είναι αύξουσα.

Επίσης, παρατηρούμε ότι τις μεγαλύτερες τιμές \hat{a}_x τις έχει η Ελβετία μέχρι και την ηλικία των σαράντα πέντε (45) ετών, ενώ από εκεί και μετά (50 – 80) τις έχει η

Τσεχία. Τις μικρότερες τιμές κατά κύριο λόγο τις έχει η Αυστρία. Και για τις τρεις χώρες η ελάχιστη τιμή εντοπίζεται στην ηλικία των δέκα (10) ετών, ενώ η μέγιστη στην ηλικία των ογδόντα (80) ετών.

3.4.2 Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x



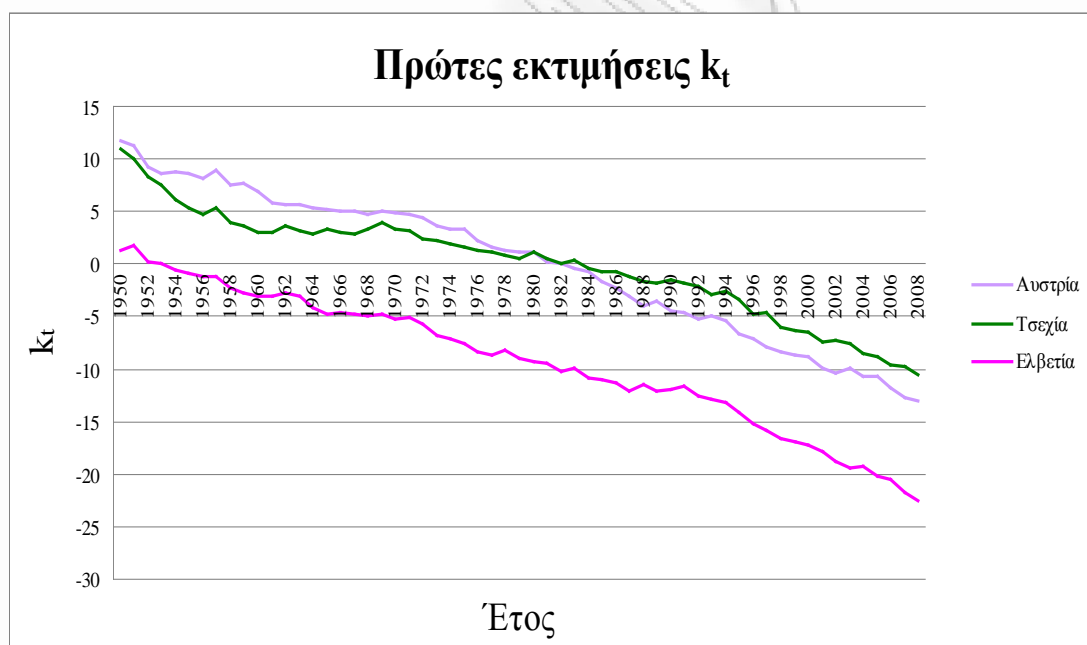
Γράφημα 3.38: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

Το Γράφημα 3.38 δείχνει τις τιμές των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x για τις χώρες της Αυστρίας, της Τσεχίας και της Ελβετίας. Σε αυτό το γράφημα βλέπουμε πως οι τιμές των \hat{b}_x για τις τρεις αυτές χώρες είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους, με την Ελβετία να έχει τις μεγαλύτερες αποκλίσεις. Η κλίση τους δεν είναι σταθερή και διαφέρει από χώρα σε χώρα. Πιο αναλυτικά, οι τιμές των εκτιμήσεων των b_x της Αυστρίας μειώνονται στα διαστήματα 0 – 15, 35 – 50 και 75 – 80 ετών, ενώ αυξάνονται στα υπόλοιπα. Οι τιμές των \hat{b}_x της Τσεχίας μειώνονται από μηδέν μέχρι σαράντα πέντε ετών (0 – 45) και από εβδομήντα πέντε μέχρι ογδόντα ετών (75 – 80), ενώ αυξάνονται στις ηλικίες από πενήντα μέχρι εβδομήντα ετών (50 – 70). Οι τιμές της Ελβετίας μειώνονται συνεχώς με εξαίρεση τις ηλικίες ενός και είκοσι πέντε ετών όπου αυξάνονται. Επίσης, παρατηρούμε πως στις

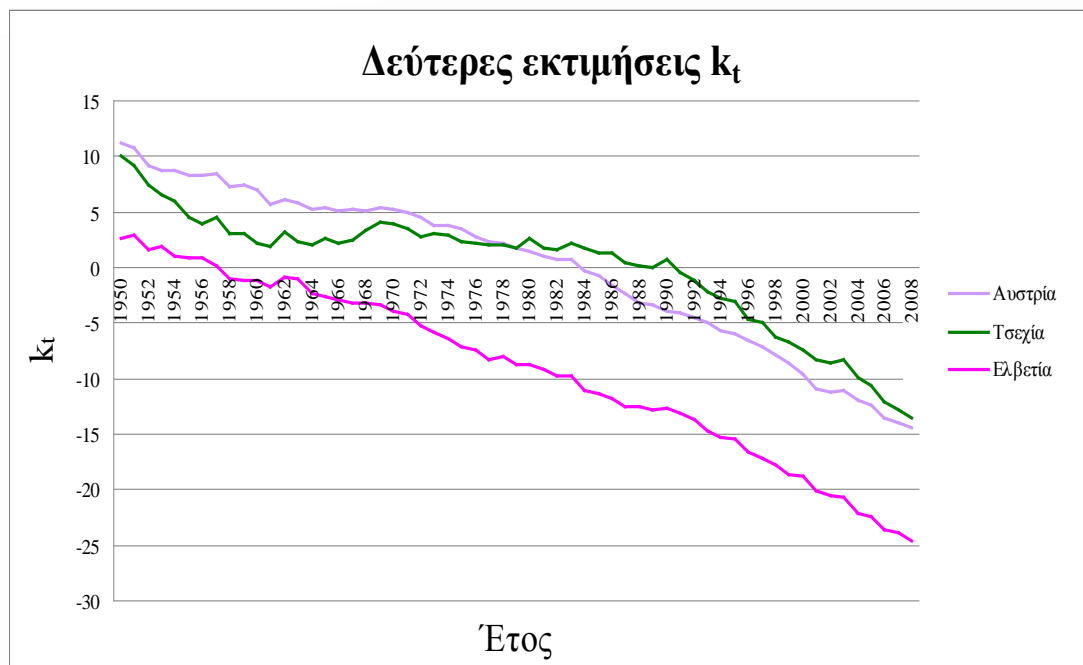
μικρές ηλικίες (0 – 30) οι τιμές των \widehat{b}_x είναι κατά κύριο λόγο μεγαλύτερες από ότι στις μεγάλες ηλικίες (35 – 80). Αυτό συνεπάγεται πως οι ρυθμοί θανάτου στις μικρές ηλικίες μεταβάλλονται πιο γρήγορα όταν αλλάζει το επίπεδο θνησιμότητας (k_t), σε σχέση με τους ρυθμούς θανάτου στις μεγάλες ηλικίες.

Η μικρότερη τιμή \widehat{b}_x για την Αυστρία εντοπίζεται στην ηλικία των πενήντα (50) ετών, για την Τσεχία στην ηλικία των σαράντα πέντε (45) ετών και για την Ελβετία στην ηλικία των ογδόντα (80) ετών, ενώ η μεγαλύτερη στην ηλικία των μηδέν (0) ετών για την Αυστρία και την Τσεχία και στην ηλικία του ενός (1) έτους για την Ελβετία.

3.4.3 Σύγκριση των εκτιμήσεων του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας



Γράφημα 3.39: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



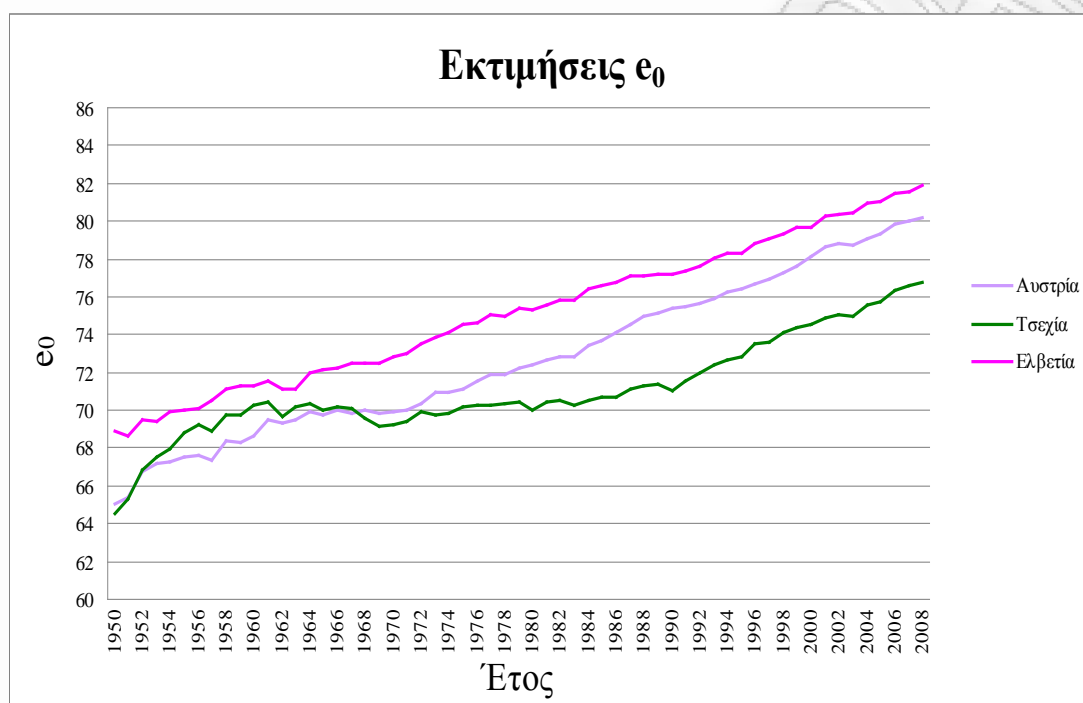
Γράφημα 3.40: Σύγκριση των δεύτερων εκτιμήσεων των k_t για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

Τα Γραφήματα 3.39 και 3.40 παρουσιάζουν τις τιμές της πρώτης και της δεύτερης εκτίμησης του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας για τις χώρες της Αυστρίας, της Τσεχίας και της Ελβετίας. Όπως φαίνεται από τα γραφήματα αυτά, οι εκτιμήσεις της Αυστρίας και της Τσεχίας είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους, της Ελβετίας όμως αποκλίνουν σημαντικά. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως για την Αυστρία και την Τσεχία οι αρνητικές τιμές ξεκινούν λίγο μετά τα μέσα της παρατηρούμενης χρονικής περιόδου (1950 – 2008), τα έτη 1983 και 1987 για την Αυστρία και τα έτη 1984 και 1991 για την Τσεχία, για την πρώτη και τη δεύτερη εκτίμηση αντίστοιχα. Οι αρνητικές τιμές για την Ελβετία όμως, ξεκινούν στην αρχή της περιόδου, το έτος 1954 για τα \hat{k}_t και το 1958 για τα \hat{k}_t' . Ακόμα, παρατηρούμε πως οι τιμές των \hat{k}_t και \hat{k}_t' μειώνονται σχεδόν γραμμικά και με σταθερό ρυθμό και για τις τρεις χώρες.

Επίσης, από τα Γραφήματα 3 και 4 βλέπουμε πως τη χρονική περίοδο 1950 – 1967 οι τιμές των δύο εκτιμήσεων των k_t για την Τσεχία μειώνονται με μεγαλύτερο ρυθμό από ότι τις επόμενες χρονιές. Οι συνολικές πτώσεις την περίοδο αυτή είναι 73,48% για την πρώτη εκτίμηση και 75,96% για τη δεύτερη εκτίμηση.

Το ελάχιστο και για τις δύο εκτιμήσεις των k_t παρατηρείται το έτος 2008 και για τις τρεις χώρες, ενώ το μέγιστο παρατηρείται το έτος 1950 για την Αυστρία και την Τσεχία και το 1951 για την Ελβετία.

3.4.4 Σύγκριση των εκτιμήσεων του προσδόκιμου ζωής



Γράφημα 3.41: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

Το Γράφημα 3.41 δείχνει τις εκτιμήσεις του προσδόκιμου ζωής για τις τρεις χώρες. Βλέπουμε ότι οι τιμές των \hat{e}_0 έχουν σχεδόν αντίστροφη κλίση από ότι οι τιμές των \hat{k}_t και \hat{k}_t' . Συγκεκριμένα, η κλίση τους είναι ανοδική και ο ρυθμός αύξησής τους είναι σταθερός. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι “πορείες” των τιμών της Αυστρίας και της Ελβετίας είναι σχεδόν παράλληλες για όλα τα παρατηρούμενα έτη, για την Τσεχία όμως, αυτό ισχύει μόνο για τα τελευταία είκοσι περίπου έτη.

Τη χρονική περίοδο 1950 – 1967 οι τιμές των εκτιμήσεων των e_0 για την Τσεχία αυξάνονται με μεγαλύτερο ρυθμό από ότι τα επόμενα έτη, με συνολικές αυξήσεις που φτάνουν το 8,65%.

Και οι τρεις χώρες εμφανίζουν μέγιστο το έτος 2008, ενώ ελάχιστο εμφανίζουν το έτος 1950 η Αυστρία και η Τσεχία και το 1951 η Ελβετία.

Στους Πίνακες 3.17 , 3.18 και 3.19 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x , k_t , \hat{k}_t και e_0 για όλες τις χώρες (βλ. Παράρτημα Β3).

Πίνακας 3.17: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x

	Ελάχιστη τιμή \hat{a}_x	Μέγιστη τιμή \hat{a}_x	Ελάχιστη τιμή \hat{b}_x	Μέγιστη τιμή \hat{b}_x
Αυστρία	-8,23432092	-2,2011009	0,03448404	0,12813468
Τσεχία	-8,15020216	-2,02389775	0,02224463	0,15040099
Ελβετία	-7,549841038	-2,102891766	0,029052331	0,098393745

Πίνακας 3.18: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των k_t , \hat{k}_t

	Ελάχιστη τιμή \hat{k}_t	Μέγιστη τιμή \hat{k}_t	Ελάχιστη τιμή \hat{k}_t'	Μέγιστη τιμή \hat{k}_t'
Αυστρία	-13,0298138	11,79173072	-14,453419	11,18048638
Τσεχία	-10,5976282	10,97243676	-13,474528	10,11823497
Ελβετία	-22,5884364	1,700863127	-24,62333176	2,927162329

Πίνακας 3.19: Μέγιστες και ελάχιστες τιμές των εκτιμήσεων των e_0

	Ελάχιστη τιμή \hat{e}_0	Μέγιστη τιμή \hat{e}_0
Αυστρία	65,0058868	80,2088566
Τσεχία	64,5103594	76,7911466
Ελβετία	68,67160437	81,85524825

Στους Πίνακες 3.20, 3.21 και 3.22 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες διαφορές των εκτιμήσεων a_x , b_x , k_t , \hat{k}_t και e_0 μεταξύ των χωρών σε απόλυτες τιμές (βλ. Παράρτημα Β3).

Πίνακας 3.20: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των a_x, b_x

	Ελάχιστη διαφορά \hat{a}_x	Μέγιστη διαφορά \hat{a}_x	Ελάχιστη διαφορά \hat{b}_x	Μέγιστη διαφορά \hat{b}_x
Νορβηγία- Σουηδία	0,01791666	0,25896092	0,00048369	0,02226631
Νορβηγία- Δανία	0,098209134	0,784582467	0,001180857	0,044614434
Σουηδία- Δανία	0,022846955	0,864693497	0,000506385	0,066880744

Πίνακας 3.21: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των k_t, \hat{k}_t

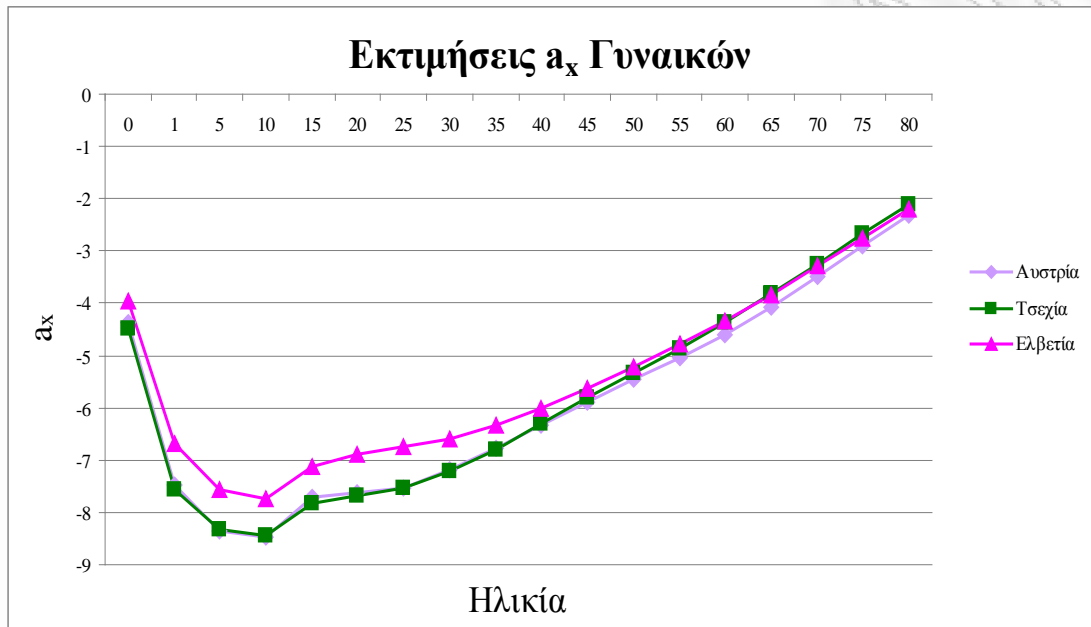
	Ελάχιστη διαφορά \hat{k}_t	Μέγιστη διαφορά \hat{k}_t	Ελάχιστη διαφορά \hat{k}_t'	Μέγιστη διαφορά \hat{k}_t'
Νορβηγία- Σουηδία	0,079526817	3,988928112	0,067491664	4,793050064
Νορβηγία- Δανία	6,945469911	10,94571958	6,797267924	10,79082782
Σουηδία- Δανία	5,975335806	11,9908082	3,144656861	13,33269482

Πίνακας 3.22: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των τιμών των εκτιμήσεων των e_0

	Ελάχιστη διαφορά \hat{e}_0	Μέγιστη διαφορά \hat{e}_0
Νορβηγία-Σουηδία	0,0188028	4,3670022
Νορβηγία-Δανία	1,557404397	3,851133997
Σουηδία-Δανία	0,84772657	6,124110249

3.4.5 Σύγκριση όλων των εκτιμήσεων για γυναίκες και άντρες

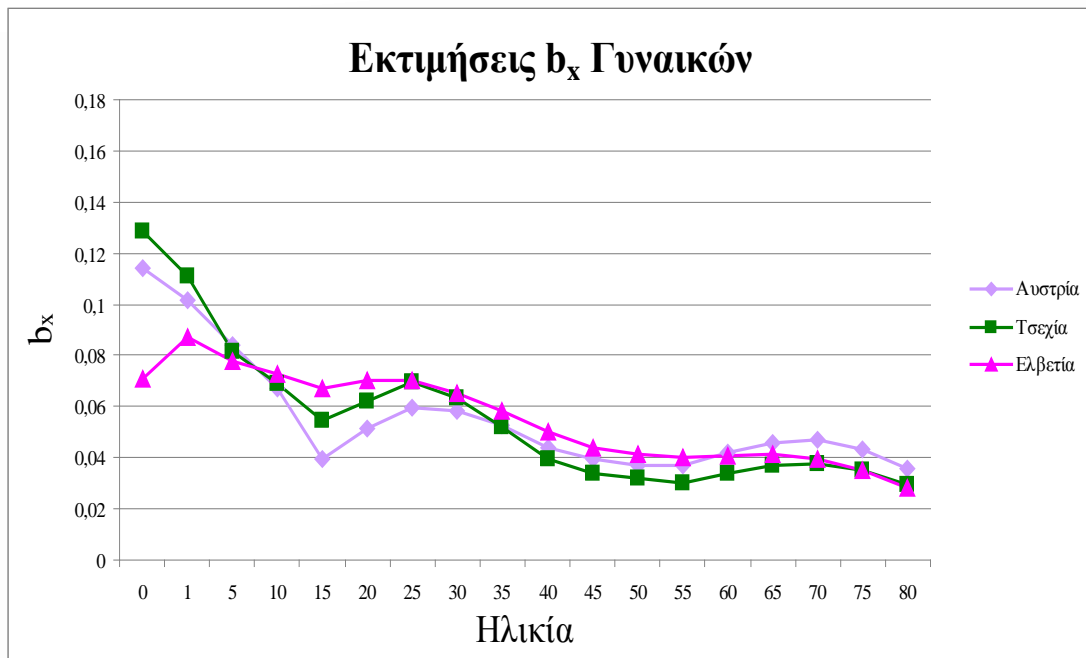
Στα Γραφήματα 3.42 μέχρι 3.51 παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμήσεων των a_x , b_x , k_t , \hat{k}_t και e_0 για τις γυναίκες και τους άντρες για όλες τις χώρες.



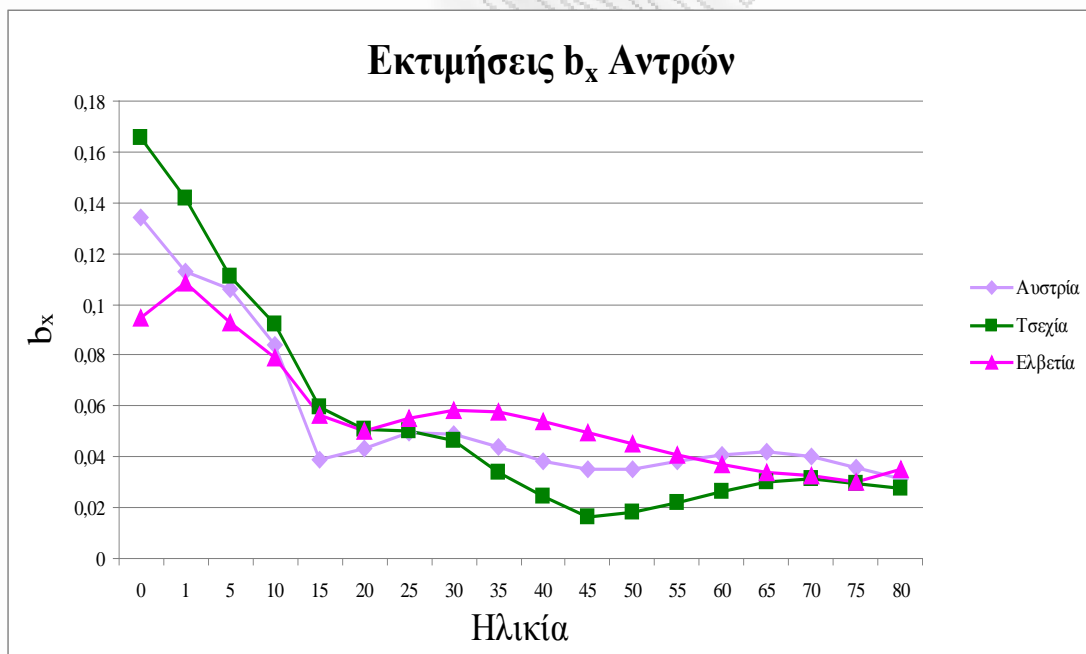
Γράφημα 3.42: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τις γυναίκες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



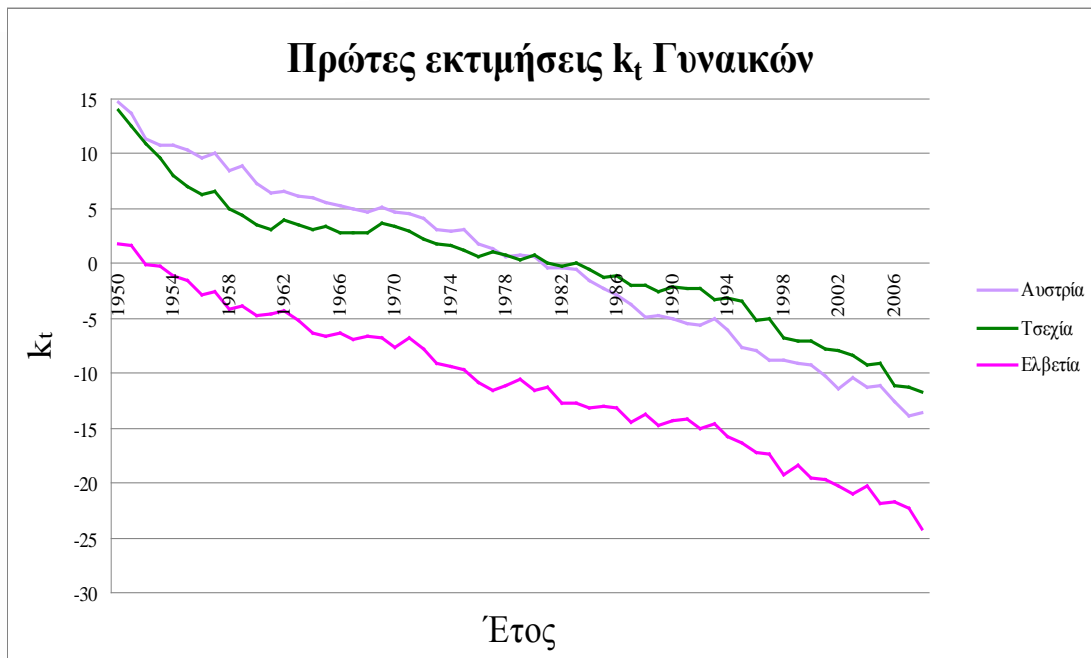
Γράφημα 3.43: Σύγκριση των εκτιμήσεων των a_x για τους άντρες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



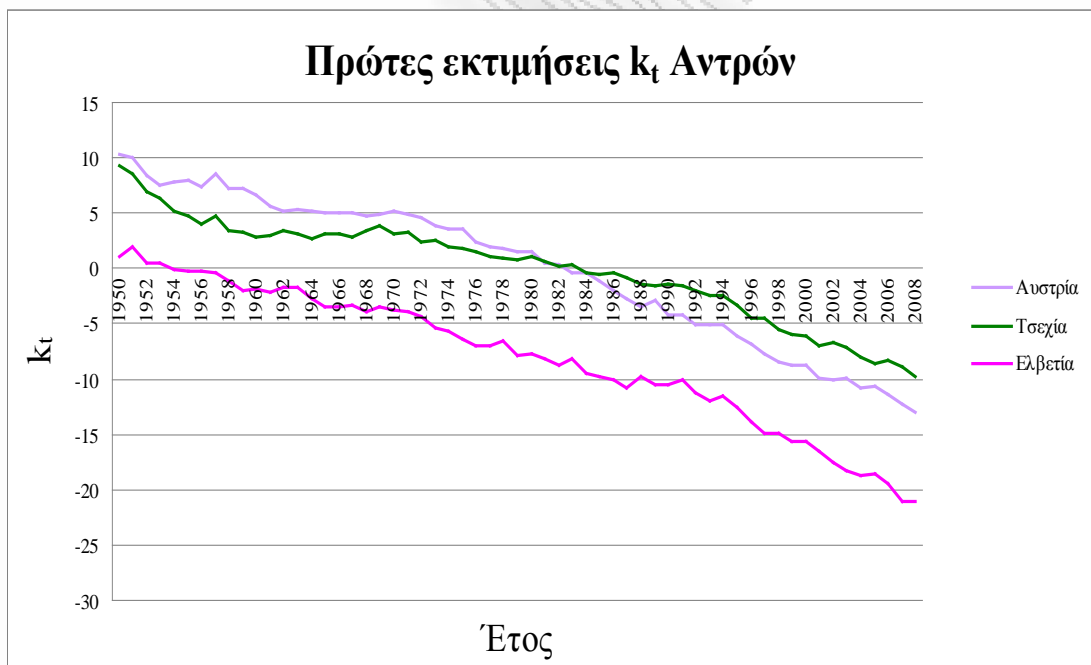
Γράφημα 3.44: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τις γυναίκες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



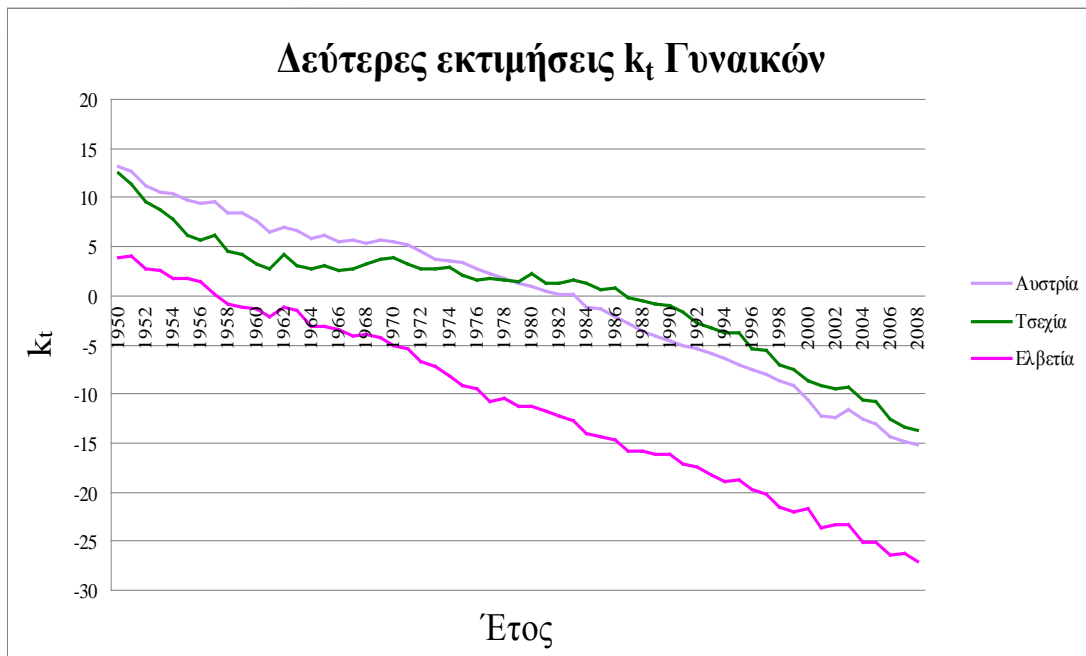
Γράφημα 3.45: Σύγκριση των εκτιμήσεων των b_x για τους άντρες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



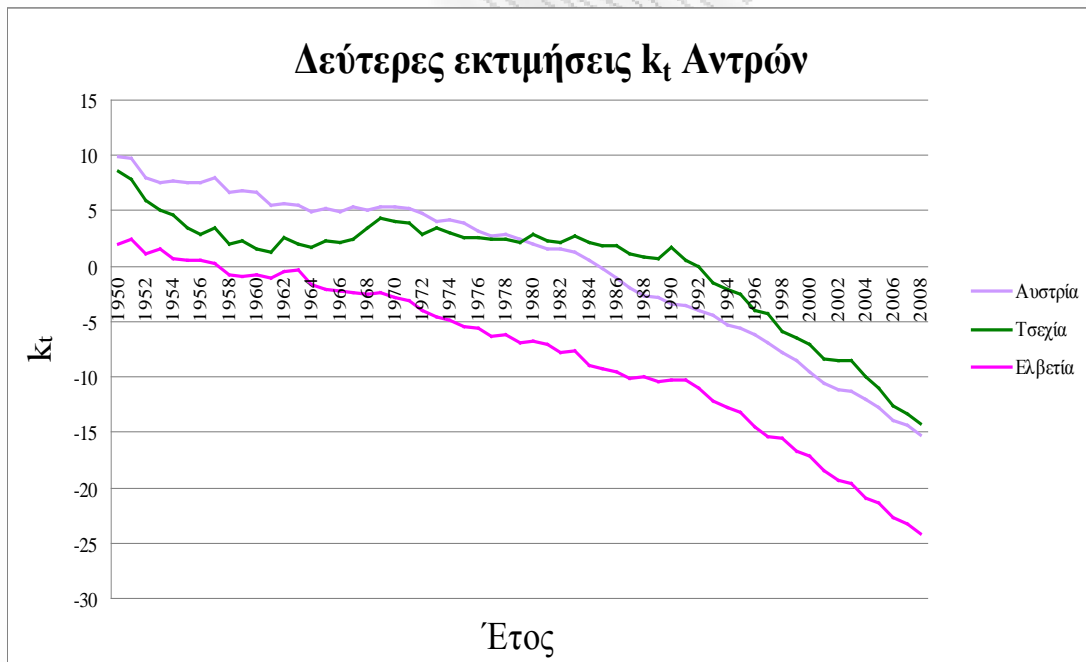
Γράφημα 3.46: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τις γυναίκες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



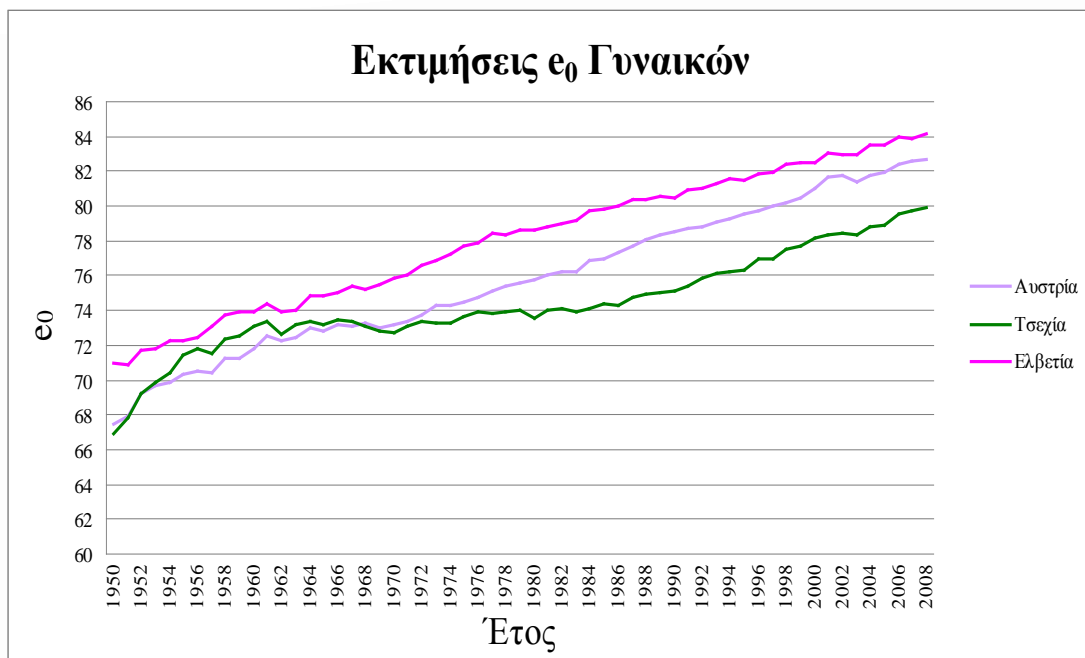
Γράφημα 3.47: Σύγκριση των πρώτων εκτιμήσεων των k_t για τους άντρες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



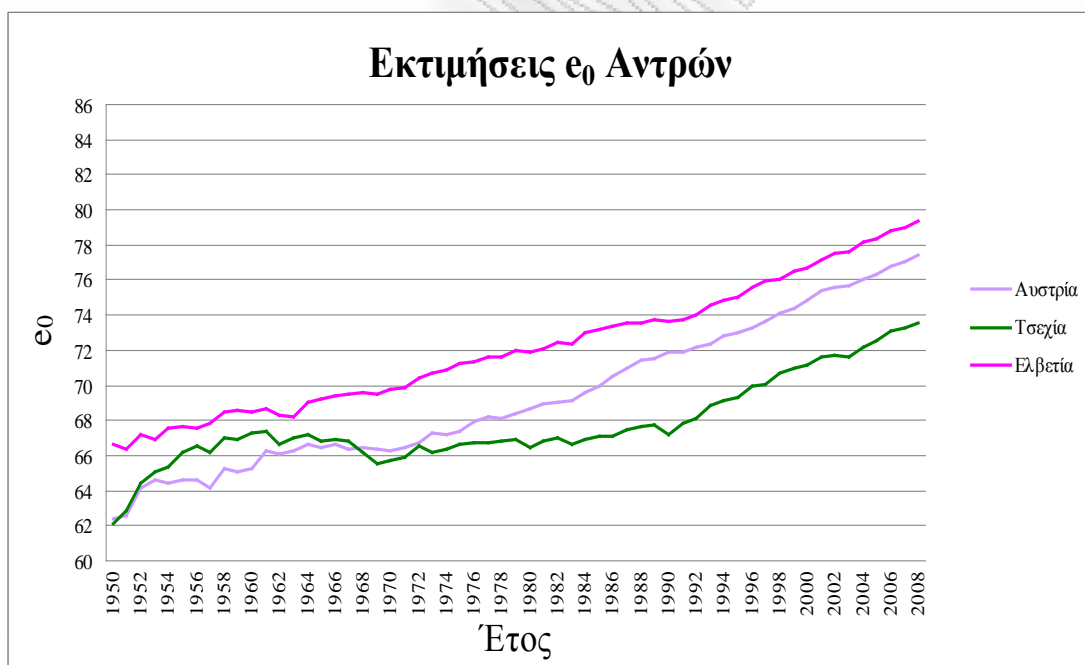
Γράφημα 3.48: Σύγκριση των δευτέρων εκτιμήσεων των k_t για τις γυναίκες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



Γράφημα 3.49: Σύγκριση των δευτέρων εκτιμήσεων των k_t για τους άντρες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

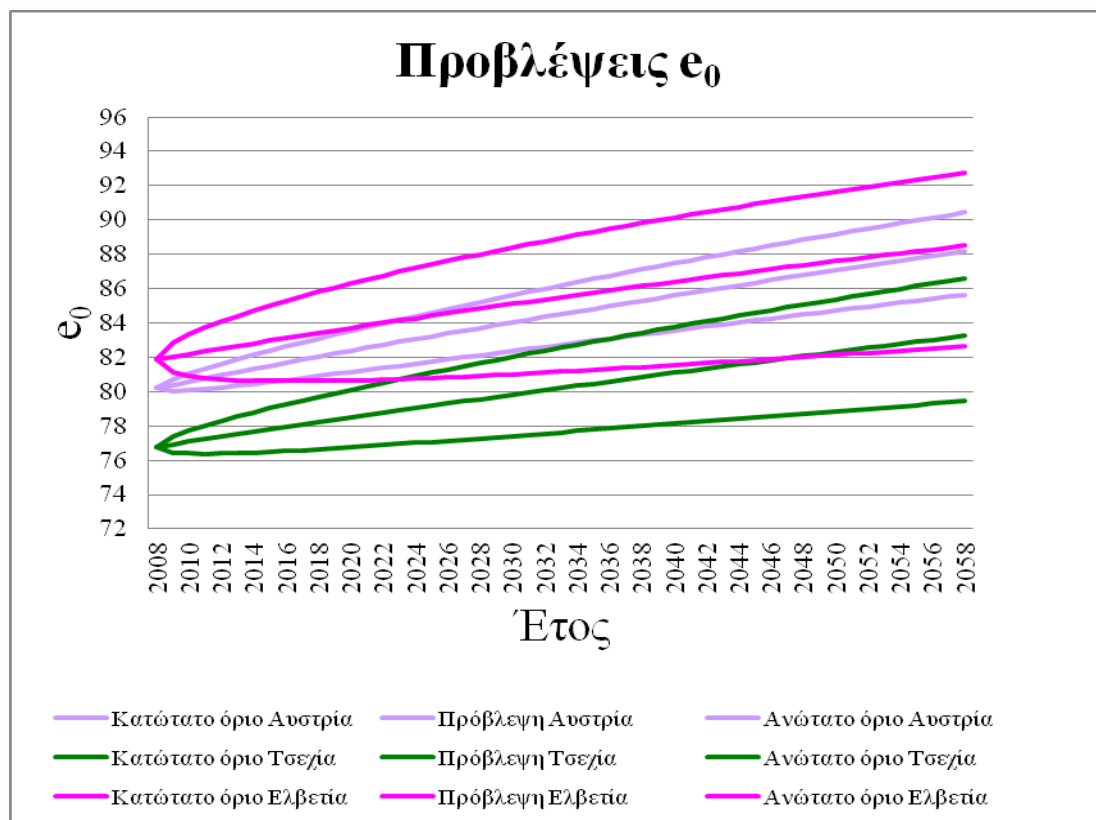


Γράφημα 3.50: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τις γυναίκες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



Γράφημα 3.51: Σύγκριση των εκτιμήσεων των e_0 για τους άντρες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

3.4.6 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής



Γράφημα 3.52: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

Το Γράφημα 3.52 δείχνει τις τιμές των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για τις 3 χώρες όπως και τα διαστήματα εμπιστοσύνης τους. Από το γράφημα αυτό φαίνεται ότι σε διάστημα 51 ετών (2008 – 2058) στην Αυστρία το προσδόκιμο επιβίωσης προβλέπεται από τα 80,21 χρόνια να αυξηθεί κατά 7,97 χρόνια και να φτάσει στα 88,18. Στην Τσεχία προβλέπεται να αυξηθεί κατά 6,46 χρόνια και από τα 76,79 χρόνια να φτάσει στα 83,25, ενώ στην Ελβετία, με αύξηση 6,65 χρόνων, προβλέπεται από τα 81,86 χρόνια να φτάσει μέχρι τα 88,51 χρόνια. Η Αυστρία είναι η χώρα με το μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης στο προσδόκιμο επιβίωσης, το οποίο είναι 9,94%. Ακολουθεί η Τσεχία με ποσοστό 8,41% και τελευταία έρχεται η Ελβετία με ποσοστό 8,12%.

Η διακύμανση στις τιμές των προβλέψεων των e_0 για την Αυστρία φτάνει το μέγιστο το έτος 2058 με τιμές που αγγίζουν τα 85,65 χρόνια ως κατώτατο όριο και τα 90,44 χρόνια ως ανώτατο όριο. Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά στενό αφού η διακύμανση των τιμών των e_0 φτάνει τα 2,26 χρόνια επιπλέον ή τα 2,53 χρόνια

μείον. Το ίδιο συμβαίνει και στις άλλες δύο χώρες. Αναλυτικότερα, για την Τσεχία η διακύμανση στις τιμές των προβλέψεων των e_0 έχει μέγιστη τιμή τα 3,35 χρόνια επιπλέον και η τιμή του e_0 αγγίζει τα 86,6 χρόνια, ελάχιστη τα 3,81 χρόνια μείον και το e_0 φτάνει τα 79,44 χρόνια. Για την Ελβετία η διακύμανση στις τιμές των e_0 φτάνει τα 4,22 έτη επιπλέον και τα 5,87 έτη μείον, δηλαδή οι τιμές φτάνουν τα 92,73 και τα 82,64 χρόνια αντίστοιχα.

Στους Πίνακες 3.23 και 3.24 παρουσιάζονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των e_0 , του ανώτατου ορίου των e_0 και του κατώτατου ορίου των e_0 για όλες τις χώρες (βλ. Παράρτημα Β3).

Πίνακας 3.23: Μέγιστη και ελάχιστη τιμή των προβλέψεων των e_0

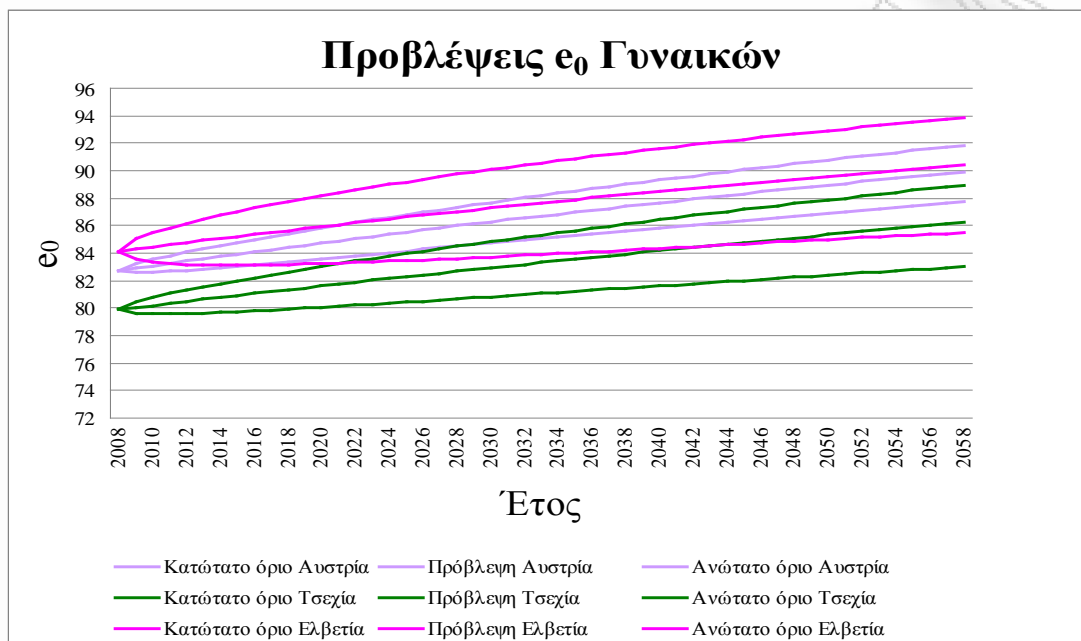
	Ελάχιστη τιμή e_0	Μέγιστη τιμή e_0
Αυστρία	80,2088566	88,1790029
Τσεχία	76,7911466	83,2516074
Ελβετία	81,85524825	88,50521609

Πίνακας 3.24: Μέγιστες και ελάχιστες διαφορές του ανώτατου και του κατώτατου ορίου των e_0

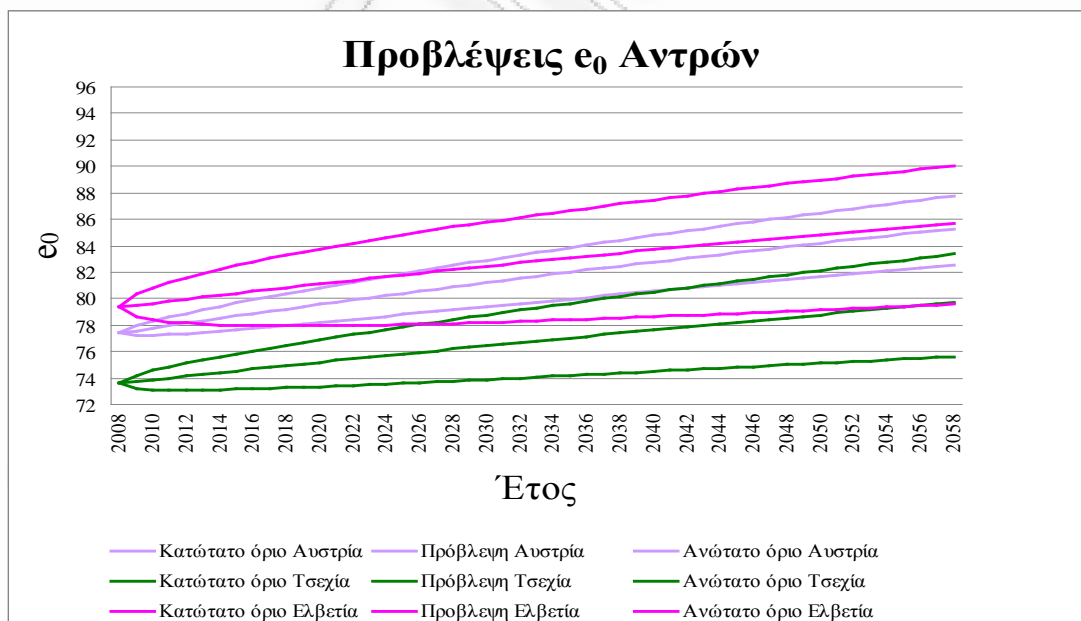
	Ελάχιστη τιμή ανώτατου ορίου του e_0	Μέγιστη τιμή ανώτατου ορίου του e_0	Ελάχιστη τιμή κατώτατου ορίου του e_0	Μέγιστη τιμή κατώτατου ορίου του e_0
Αυστρία	80,2088566	90,442332	80,0472684	85,6485474
Τσεχία	76,7911466	86,5995733	76,3866128	79,4397384
Ελβετία	81,85524825	92,72526165	80,61032416	82,63572482

3.4.7 Σύγκριση των προβλέψεων του προσδόκιμου ζωής για γυναίκες και άντρες

Στα Γραφήματα 3.53 και 3.54 παρουσιάζονται οι τιμές των προβλέψεων των e_0 για τις γυναίκες και τους άντρες για όλες τις χώρες.



Γράφημα 3.53: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τις γυναίκες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία



Γράφημα 3.54: Σύγκριση των προβλέψεων των e_0 για τους άντρες για τις χώρες Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΝ

Έχοντας ολοκληρώσει τις συγκρίσεις μεταξύ των χωρών μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια γενικά συμπεράσματα για τις εκτιμήσεις και τις προβλέψεις που προέκυψαν από το μοντέλο Lee-Carter. Σε γενικές γραμμές παρατηρούμε πως οι συμπεριφορές μεταξύ των τριών χωρών της κάθε σύγκρισης (Ιταλία – Γαλλία – Ισπανία, Νορβηγία – Σουηδία – Δανία, Αυστρία – Τσεχία – Ελβετία), αλλά και μεταξύ όλων των χωρών δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές πλην ελάχιστων εξαιρέσεων.

Ξεκινώντας από τις εκτιμήσεις της μέσης θνησιμότητας στην ηλικία x , \widehat{a}_x , βλέπουμε πως όλες οι χώρες έχουν την ίδια συμπεριφορά, μείωση των τιμών μέχρι την ηλικία των δέκα (10), όπου και εντοπίζεται η ελάχιστη τιμή, και στη συνέχεια συνεχή αύξηση. Στις εκτιμήσεις της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x , \widehat{b}_x , παρατηρούμε πως και εδώ οι συμπεριφορές των χωρών είναι παρόμοιες. Συγκεκριμένα, οι τιμές των εκτιμήσεων των b_x αυξάνονται μέχρι την ηλικία του ενός (1) έτους για όλες τις χώρες εκτός από την Αυστρία και την Τσεχία. Στη συνέχεια μειώνονται με εξαίρεση στις ηλικίες είκοσι (20) με εικοσιπέντε (25) ετών.

Εν συνεχεία, εξετάζοντας τις εκτιμήσεις του δείκτη αλλαγής επιπέδου θνησιμότητας, \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' , παρατηρούμε πως όλες οι μεγάλες μεταβολές στις τιμές γίνονται στο πρώτο μισό του εικοστού αιώνα εξαιτίας σημαντικών γεγονότων. Πιο αναλυτικά, και οι έξι χώρες των δύο πρώτων συγκρίσεων, Νότιας και Βόρειας Ευρώπης, παρουσιάζουν σημαντική αύξηση των \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' το έτος 1918 ως συνέπεια της Ισπανικής γρίπης. Κατά τη διάρκεια του πρώτου παγκοσμίου πολέμου (1914 – 1918), οι δύο εκτιμήσεις του k_t αυξάνονται ξανά για τις χώρες της Ιταλίας και της Γαλλίας. Το ίδιο συμβαίνει και κατά τη διάρκεια του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου (1939 – 1945), όμως τώρα επηρεάζονται και οι τιμές της Νορβηγίας ως αποτέλεσμα της εισβολής των Γερμανών. Η Ισπανία, η οποία δεν παίρνει μέρος στους δύο

παγκόσμιους πολέμους, εμφανίζει πάλι αξιοσημείωτη αύξηση στα \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' κατά την περίοδο του εμφυλίου πολέμου (1936 – 1939). Οι χώρες της τρίτης σύγκρισης (Αυστρία – Τσεχία – Ελβετία), οι οποίες μελετούνται το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα (1950 – 2008) δεν παρουσιάζουν σημαντικές αλλαγές στις δύο εκτιμήσεις του k_t , όμως αξίζει να σημειωθεί πως οι τιμές της Ελβετίας αποκλίνουν αρκετά από τις τιμές των άλλων δύο χωρών.

Εξετάζοντας τις εκτιμήσεις του προσδόκιμου ζωής, \widehat{e}_0 , παρατηρούμε πως συμβαίνουν τα ίδια πράγματα όπως και στα \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' αλλά αντίστροφα. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού τα \widehat{e}_0 αφορούν προσδόκιμο ζωής και τα \widehat{k}_t και \widehat{k}_t' θνησιμότητα. Αναλυτικότερα, μειώσεις στις τιμές των εκτιμήσεων του e_0 παρατηρούνται για όλες τις χώρες το έτος 1918 λόγω της Ισπανικής γρίπης. Το ίδιο συμβαίνει και κατά τη διάρκεια των δύο παγκοσμίων πολέμων (1914 – 1918, 1939 – 1945), για την Ιταλία, τη Γαλλία και τη Νορβηγία καθώς και για την Ισπανία κατά τη διάρκεια του εμφυλίου πολέμου (1936 – 1939). Οι χώρες της τρίτης σύγκρισης (1950 – 2008), Αυστρία, Τσεχία και Ελβετία δεν παρουσιάζουν σημαντικές αλλαγές στις τιμές τους.

Τέλος, μελετώντας τις προβλέψεις του προσδόκιμου ζωής e_0 βλέπουμε πως για τις συγκρινόμενες χώρες της Βόρειας και Νότιας Ευρώπης το προσδόκιμο ζωής αυξάνεται κατά τέσσερα (4) με πέντε (5) χρόνια, ενώ για τις συγκρινόμενες χώρες της Κεντρικής Ευρώπης αυξάνεται έξι (6) με οχτώ (8) χρόνια. Ακόμα, τα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι αρκετά στενά για όλες τις χώρες εκτός από της Γαλλίας που είναι αρκετά μεγαλύτερο. Πιο συγκεκριμένα, η μέγιστη τιμή του ανώτατου ορίου και η ελάχιστη τιμή του κατώτατου ορίου της Γαλλίας είναι 5,92 έτη επιπλέον και 4,6 έτη μείον αντίστοιχα, ενώ για τις υπόλοιπες χώρες οι αντίστοιχες τιμές κυμαίνονται μεταξύ των 2,26 και 4,22 ετών επιπλέον και των 2,53 και 5,87 ετών μείον.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Τα βήματα που έγιναν για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων για τις τρεις συγκρίσεις είναι τα εξής:

1. Άνοιγμα της ιστοσελίδα HMD
2. Επιλογή της χώρα που μας ενδιαφέρει
3. Επιλογή των ρυθμών θανάτου (death rates) σε διαστήματα των 5 ετών ανά έτος (επιλογή 5x1)
4. Επιλογή και αντιγραφή (copy) των δεδομένων αυτών
5. Άνοιγμα της ιστοσελίδα LCFIT
6. Επιλογή Convert HMD format to tab-delimited format
7. Επικόλληση (paste) των ρυθμών θανάτου στο άσπρο κουτί
8. Απαραίτητες ρυθμίσεις (Start Year, Notes)
9. Μετατροπή των ρυθμών θανάτου σε μορφή κατάλληλη για επεξεργασία (πάτημα του submit)
10. Επιλογή και αντιγραφή (copy) των δεδομένων αυτών
11. Επιλογή create a new single-sex LC forecast
12. Επικόλληση (paste) των τροποποιημένων ρυθμών θανάτου
13. Απαραίτητες ρυθμίσεις (Start Year, Notes, Number of stochastic runs to perform, Number of years to project forward, Gender, Age for extension, Confidence interval for projection)
14. Εξαγωγή των επιθυμητών αποτελεσμάτων (πάτημα του submit)
15. Επανάληψη των βημάτων 10-14 για όλα τα δεδομένα (female, male, combined)
16. Επανάληψη των βημάτων 1-15 για όλες τις χώρες
(1^η σύγκριση: Ιταλία, Γαλλία, Ισπανία)
(2^η σύγκριση: Νορβηγία, Σουηδία, Δανία)
(3^η σύγκριση: Αυστρία, Τσεχία, Ελβετία)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Β1

Β1.1 Ιταλία

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1908	14,2300639175	14,2269643695	47,094580017
1909	13,3761632153	13,3013056587	48,6415339833
1910	12,2290152669	12,0513707608	50,6143127361
1911	13,3392006932	13,2963107172	48,649677103
1912	10,9721477164	10,7384662589	52,5538217647
1913	11,1575896286	11,0192385356	52,1499137451
1914	10,4818015219	10,3804657629	53,0605476325
1915	15,1474915014	14,948071423	45,8350112923
1916	16,6552401945	16,3841155612	43,1718800974
1917	17,4365148396	17,4663965285	41,0144386662
1918	26,2122018205	22,0376636852	29,965187606
1919	15,9755055692	14,8554000333	45,9996635273
1920	13,4701861911	13,0732588649	49,0111383584
1921	10,9164779414	10,7416869149	52,5492212608
1922	10,4506563086	10,4953074809	52,8989970066
1923	9,49758070993	9,32377329282	54,5039310383
1924	9,56670344956	9,58284999482	54,1571088338
1925	9,76384101831	9,52369604624	54,2366946605
1926	9,6351617062	9,6964372675	54,0036242643
1927	8,66146807899	8,78806772291	55,2069739352

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1928	8,45188079755	8,68263691485	55,3431388835
1929	8,48742991886	9,08112012998	54,8247127859
1930	6,79424578794	6,85037681306	57,5998931636
1931	6,92769067221	7,31896787121	57,0416302579
1932	6,99662855265	7,35003620691	57,0041941244
1933	6,08042622352	6,26241219323	58,2818823707
1934	5,63834253834	5,71570734914	58,8986883724
1935	5,95609232908	6,28494483249	58,2561060859
1936	5,45713288603	5,92214828858	58,6677041832
1937	5,98238488637	6,78474368489	57,6769990328
1938	5,41505041248	6,38715556753	58,1388250051
1939	4,48682118876	5,27326603747	59,3859979181
1940	5,02727887491	6,07839310103	58,4913341798
1941	7,21925263911	7,8678051358	56,3717867256
1942	8,61133176629	9,61883685842	54,1085763483
1943	11,6180229882	11,8132062782	50,9759073948
1944	9,78721556561	9,88824537009	53,7424470471
1945	7,70786635223	7,91205280315	56,3169885092
1946	3,60561182281	4,05105225911	60,6792508254
1947	1,89500235797	2,49083580408	62,2239023356
1948	-0,445900208077	0,273511963927	64,2325767495
1949	-1,78277186849	-0,490161048672	64,8779224774
1950	-3,80679951754	-2,25595146241	66,2869448891
1951	-3,99261352314	-1,61696356602	65,7899810684
1952	-5,03774913763	-2,37208226207	66,3757473944
1953	-5,87612523974	-3,0336779252	66,8729989426

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1954	-6,9975782587	-4,71729805506	68,0750958438
1955	-7,31500143932	-5,1883786735	68,3960528446
1956	-7,49283076002	-4,20538493719	67,7188652379
1957	-7,19438263174	-4,53693573164	67,9504823621
1958	-8,34690321111	-6,04692507238	68,964695476
1959	-8,74455222978	-6,65398556304	69,3545457712
1960	-9,07999485235	-6,40643486247	69,1967639207
1961	-9,51894785132	-7,3642017332	69,7983319813
1962	-9,35353014516	-6,3825793732	69,1814728591
1963	-9,30886193933	-6,49758161386	69,2550477528
1964	-10,6420436773	-8,14700796089	70,2727305649
1965	-11,0258992053	-7,89557135586	70,121998363
1966	-11,9178357645	-9,11534041866	70,8391950878
1967	-12,100050093	-9,16612328096	70,8683030462
1968	-12,1314277299	-8,80799224748	70,6617697077
1969	-12,1891716737	-8,85058105671	70,6864849971
1970	-12,8322519019	-10,1905856327	71,4432615908
1971	-13,3186073372	-10,6031461998	71,6684045784
1972	-13,6054613371	-11,0928229224	71,9310447503
1973	-13,945907304	-10,9427740711	71,8510865362
1974	-15,3151318632	-12,2489044098	72,532157034
1975	-15,3798227912	-12,0627099128	72,4370912048
1976	-15,8662218952	-12,7923011904	72,8058933677
1977	-16,4162400967	-13,5348745166	73,1712938887
1978	-16,9136033254	-14,1855919516	73,4835741363
1979	-17,2856363483	-14,806794164	73,7750592476

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1980	-16,7536276808	-14,7899053593	73,7672180892
1981	-18,1465466754	-15,6224921841	74,1493085525
1982	-18,7148026919	-16,6633639451	74,6108171466
1983	-18,6837371171	-16,1544216237	74,3871796006
1984	-19,7384846674	-17,8799389894	75,1304097897
1985	-19,9823213279	-18,2348584003	75,2781702852
1986	-20,6807454355	-18,9862727682	75,5855538711
1987	-20,7405073586	-20,0883069802	76,0235435274
1988	-20,9803903431	-20,4847409293	76,1775302676
1989	-21,3350961395	-21,5024583091	76,5645970986
1990	-21,1317533099	-21,805421173	76,6776038833
1991	-20,6970215626	-21,9455021702	76,7295201366
1992	-20,9845685357	-23,0056017441	77,1157383745
1993	-21,0255578716	-23,7128672666	77,3670852239
1994	-21,7222014878	-24,4212529342	77,6139828421
1995	-21,8683424571	-25,1540795114	77,8644910726
1996	-22,4331673308	-26,0047301416	78,149271683
1997	-23,1940852019	-26,79050036	78,4068385838
1998	-24,2428406995	-26,8524672987	78,4269329684
1999	-25,1958806063	-28,1603437178	78,8438970757
2000	-25,4022090997	-29,7786189429	79,3418734784
2001	-25,7053808861	-31,429404008	79,830933366
2002	-25,8071049504	-32,1704444203	80,0446614201
2003	-27,5454584167	-32,2399965486	80,0645438419
2004	-28,3562491907	-34,7543678848	80,7639004525
2005	-28,6703890819	-34,8872607461	80,7998564644

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
2006	-29,3128979252	-36,189665336	81,1473556625
2007	-29,4234323188	-36,6738530827	81,2742281225
2008	-30,0511209888	-37,2142726245	81,4144347316

Ηλικία	\widehat{a}_x	\widehat{b}_x
0	-2,82121296706	0,0819155223387
1	-5,17245430808	0,129508221459
5	-6,50338489744	0,100243229998
10	-6,78562368135	0,0810866016808
15	-6,20986741232	0,0677574826577
20	-5,89228837218	0,0718680093118
25	-5,87813629348	0,0684196202008
30	-5,79487573431	0,0635667118408
35	-5,63096104421	0,0569011758794
40	-5,3760780444	0,0487199017395
45	-5,08451035508	0,0388751011218
50	-4,70267497089	0,0336052103598
55	-4,33590399023	0,0278982724517
60	-3,85929830559	0,0286347020653
65	-3,40386881171	0,027782404884
70	-2,91033430639	0,0270561867594

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	81,4144347316	81,4144347316	81,4144347316
2009	80,8151452528	81,5337708356	82,2123335325
2010	80,6292541002	81,6519484654	82,5954176302
2011	80,5120938351	81,7689907784	82,9083745356
2012	80,4306412778	81,8849202982	83,1842468548
2013	80,3720298009	81,9997589325	83,4359200277
2014	80,3296237484	82,1135279918	83,6700479387
2015	80,2994600634	82,2262482063	83,890611317
2016	80,2789432912	82,337939743	84,1002227606
2017	80,2662617681	82,4486222222	84,3007105727
2018	80,2600903029	82,5583147336	84,4934161044
2019	80,2594241217	82,6670358516	84,6793598326
2020	80,2634794515	82,7748036506	84,8593407979
2021	80,2716306748	82,8816357195	85,0109878446
2022	80,2833688234	82,9875491762	85,1808943487
2023	80,2982731594	83,0925606812	85,3464393524
2024	80,3159911177	83,1966864512	85,507989049
2025	80,3362237822	83,299942272	85,6658556488
2026	80,3587151303	83,4023435111	85,8203081471
2027	80,3832439154	83,5039051305	85,9715804566
2028	80,4096174323	83,604641698	86,1198776547
2029	80,4376666581	83,7045673991	86,2653808551
2030	80,4672424129	83,8036960483	86,4082510594
2031	80,4982122894	83,9020410999	86,5486322389
2032	80,5304581708	83,9996156585	86,6866538276
2033	80,563874204	84,0964324896	86,8224327595

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2034	80,5983651298	84,1925040294	86,9560751483
2035	80,6338448958	84,2878423944	87,0876776841
2036	80,670235495	84,3824593908	87,2173288033
2037	80,7074659871	84,4763665239	87,3451096765
2038	80,7454716681	84,5695750066	87,4710950463
2039	80,7841933613	84,6620957682	87,5953539445
2040	80,8235768093	84,7539394625	87,7179503072
2041	80,8635721485	84,8451164764	87,838943507
2042	80,9041334546	84,9356369369	87,9583888143
2043	80,9452183461	85,0024968601	88,0763378
2044	80,9867876375	85,0917575479	88,1928386882
2045	81,0288050353	85,1803914655	88,3079366657
2046	81,0712368691	85,2684077692	88,4216741559
2047	81,114051855	85,3558153916	88,5340910616
2048	81,1572208843	85,4426230483	88,6452249794
2049	81,2007168362	85,528839244	88,7551113929
2050	81,2445144103	85,6144722786	88,8637838436
2051	81,2885899766	85,6995302536	88,9712740858
2052	81,3329214406	85,7840210772	89,0776122245
2053	81,3774881221	85,8679524707	89,1828268408
2054	81,4222706459	85,951331973	89,2869451044
2055	81,4672508425	86,0341669469	89,3899928767
2056	81,5124116584	86,1164645833	89,4919948028
2057	81,5577370745	86,1982319068	89,5929743967
2058	81,6032120318	86,2794757801	89,6929541183

B1.2 Γαλλία

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1908	6,64259217892	7,7349802341	50,8525982424
1909	6,38173411363	7,26876670111	51,5352376486
1910	5,57865987056	6,26708461931	52,9517161137
1911	6,69274823983	8,45944354994	49,7610949099
1912	5,54190796826	6,1133413877	53,1632418513
1913	5,52115614251	6,29005610873	52,9199790799
1914	12,6496560318	14,4159389831	39,1062387711
1915	14,0126215383	15,1889443313	37,4503457095
1916	12,0298406498	13,2118205015	41,5397661596
1917	10,4373382939	11,6057520511	44,544414369
1918	15,5768376505	15,535847115	36,6809007496
1919	8,29620754846	8,75426805534	49,3058726119
1920	5,34758207733	6,26863799386	52,9495710817
1921	4,67142797457	5,62606740563	53,8236182224
1922	3,4283083387	4,12192923672	55,7700985991
1923	3,30134725322	4,13611845301	55,7523715448
1924	2,91277856495	3,77811872889	56,1960803149
1925	3,60931683461	4,32066000534	55,5207491502
1926	3,81694690279	4,61977422529	55,1410713492
1927	2,76326318263	3,28665309322	56,7933361856
1928	2,81075467333	3,55970732686	56,4631845
1929	3,34528028514	4,48860793975	55,3082176421
1930	1,76174060387	2,50296009901	57,7181097458
1931	1,69774831737	2,47702397514	57,7481478515

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1932	1,360383241	2,2149813478	58,049634809
1933	0,924766420221	1,89824887544	58,4092379303
1934	0,475174597901	1,2990221665	59,0754781957
1935	0,223911555899	1,40687144709	58,9569091777
1936	-0,269940645651	0,923167444324	59,484169083
1937	-0,467414970306	0,630915420991	59,7971620241
1938	-0,475080098317	0,861171650206	59,5509122193
1939	-1,30293484998	0,375009766327	60,0678433103
1940	5,84971246611	8,08185710653	50,3347221077
1941	0,339014768968	2,05956784312	58,2267364237
1942	0,635468667766	2,31354393883	57,9366614761
1943	4,35355004985	5,49377232479	54,0003145579
1944	8,65539705743	9,70059642325	47,7997835885
1945	2,42782586724	4,17561960107	55,7029598265
1946	-4,26939205437	-2,42329379062	62,8333494221
1947	-6,10740630636	-3,97534482724	64,2259592124
1948	-8,04237357892	-6,04319969972	65,9424813301
1949	-8,00545841179	-4,98485703994	65,0828297876
1950	-9,66542871253	-6,72803128541	66,4787373498
1951	-9,86338375993	-6,35956855966	66,1921155109
1952	-11,2396043429	-8,07067961003	67,4877828769
1953	-11,7815627828	-7,80171574309	67,2901950698
1954	-12,6628153996	-9,0127214305	68,1631912372
1955	-13,0405967863	-9,35657438853	68,4034660583
1956	-13,4798394466	-9,32910356676	68,3843901293
1957	-13,2689504285	-10,0231265172	68,8600683687

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1958	-14,8331543415	-11,8290533332	70,0396867337
1959	-14,5795101359	-11,914199869	70,0933344818
1960	-15,5366886951	-12,2289063454	70,2901475397
1961	-15,6436281747	-13,1089213532	70,8285078252
1962	-15,4370703255	-12,3134516063	70,3426299083
1963	-15,5259020913	-12,0366585153	70,1701926825
1964	-16,1118113306	-13,6743537774	71,1654217618
1965	-16,1906463881	-13,3590133096	70,9783740634
1966	-16,4565321914	-14,0876037036	71,4073692058
1967	-16,4138109092	-14,0620735455	71,392524896
1968	-16,381470046	-14,072989368	71,3988734612
1969	-16,0315396108	-13,5322613769	71,0814006833
1970	-16,7601225163	-15,161647397	72,0199405329
1971	-16,6196987109	-15,187156481	72,0342125762
1972	-16,7827602678	-15,5270998318	72,2232159499
1973	-17,0635532347	-15,8294578867	72,3894853139
1974	-17,5492319073	-16,4458827199	72,7232385806
1975	-18,0268431746	-16,520555704	72,7632024401
1976	-18,3394536175	-16,8723205164	72,9501334312
1977	-18,6371685867	-18,0442293148	73,5575802347
1978	-19,0378021703	-18,3052316243	73,6897725004
1979	-19,3138842328	-18,8768859951	73,9755184063
1980	-19,2445241888	-19,1657605111	74,1179813158
1981	-19,6453575713	-19,4809135949	74,2719575751
1982	-20,0948620721	-20,0963791133	74,5684109905
1983	-20,1225744817	-20,0978418239	74,5691089683

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1984	-20,8581198356	-21,1490363718	75,0629205078
1985	-21,2954951754	-21,54169231	75,2434910831
1986	-21,5441285655	-22,1762395706	75,531011839
1987	-22,1940277656	-23,6947107989	76,19872802
1988	-22,4173299546	-24,3018060363	76,4579649781
1989	-22,4432254367	-24,5498696018	76,5626866731
1990	-23,0052477924	-24,9844171856	76,7444901708
1991	-22,8250638034	-25,288467208	76,870475269
1992	-23,4657872501	-25,8622054132	77,1055341104
1993	-23,6394228043	-26,1019518622	77,2027435236
1994	-24,1950797512	-27,8483168807	77,8936287907
1995	-24,6952823482	-28,852174339	78,2777902019
1996	-25,3473092976	-29,6813333285	78,5883964935
1997	-25,9387283113	-30,4795499507	78,8819428808
1998	-26,5813722778	-30,7934850209	78,9959720712
1999	-26,8119785778	-30,5340836711	78,9018076604
2000	-27,085126382	-31,6821812989	79,3145641254
2001	-27,1428065462	-32,3075576923	79,5351449439
2002	-27,7776298335	-32,7943690928	79,7048534561
2003	-28,2968192716	-32,797837139	79,7060562997
2004	-29,4844955118	-35,631259343	80,6430725948
2005	-29,8479551956	-35,9319506074	80,7413780975
2006	-30,1801735566	-36,9851907807	81,081349551
2007	-30,6633171907	-37,7651447123	81,3288670323
2008	-30,8836010982	-38,0573146877	81,4206863385
2009	-30,8141036089	-38,6797902633	81,6147124709

Ηλικία	\hat{a}_x	\hat{b}_x
0	-2,66972107413	0,0880675922793
1	-4,99990761044	0,121865464508
5	-6,16024456057	0,105910305191
10	-6,45378409807	0,0897893418256
15	-5,82292297901	0,0719090341479
20	-5,41717830705	0,0734049654372
25	-5,41319565331	0,0697026121457
30	-5,33475223199	0,063847365357
35	-5,1713067095	0,0552048937554
40	-4,94394903955	0,04599162723
45	-4,68925916167	0,0369559977967
50	-4,38616154103	0,0320885399391
55	-4,07431966941	0,0291028937208
60	-3,67659472141	0,0302812290816
65	-3,28902621298	0,0294246762341
70	-2,82979115874	0,0298034929695

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2009	81,6147124709	81,6147124709	81,6147124709
2010	80,4513003659	81,711349213	82,8776437835
2011	80,0009861214	81,8073940606	83,4271351132
2012	79,6685772122	81,9028544451	83,8583778579
2013	79,3973914155	81,9977376653	84,2280531431
2014	79,1654344136	82,0920508903	84,5581542218
2015	78,9614067698	82,1858011613	84,8599794991
2016	78,7785846393	82,2789953946	85,1402518235
2017	78,6125796068	82,3716403835	85,4033586492
2018	78,460338293	82,4637428007	85,6523524319
2019	78,31963379	82,5553092004	85,8894591937
2020	78,1887821326	82,6463460206	86,1163620525
2021	78,0664728616	82,7368595855	86,3343706596
2022	77,9516621112	82,8268561072	86,5445281129
2023	77,8435021327	82,9163416879	86,7476814336
2024	77,741293129	83,0053223222	86,9445297321
2025	77,644449328	83,0938038987	87,1356581351
2026	77,5524744617	83,1817922026	87,3215623067
2027	77,4649436453	83,2692929171	87,5026665692
2028	77,3814897257	83,3563116252	87,6793375551
2029	77,3017928192	83,4428538125	87,8518946692
2030	77,2255721733	83,5289248678	88,0206182271
2031	77,1525797488	83,6145300861	88,1857558727
2032	77,0825950992	83,6996746693	88,3475276988
2033	77,015421238	83,784363729	88,5061303797
2034	76,9508812725	83,8686022874	88,6617405372

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2035	76,8888156353	83,9523952794	88,8145175089
2036	76,8290797888	84,0357475541	88,9646056432
2037	76,7715423088	84,1186638767	89,1121362156
2038	76,7160832708	84,2011489297	89,2572290422
2039	76,6625928848	84,2832073148	89,3999938438
2040	76,6109703321	84,3648435543	89,5405314097
2041	76,5611227685	84,4460620925	89,6789345933
2042	76,5129644665	84,5268672977	89,8152891699
2043	76,466416073	84,607263463	89,9496745782
2044	76,4214039632	84,6872548082	90,0821645659
2045	76,3778596782	84,7668454808	90,2128277523
2046	76,3357194301	84,846039558	90,3417281213
2047	76,2949236681	84,9248410474	90,4689254561
2048	76,2554166948	85,0032538888	90,5944757219
2049	76,2171463256	85,0812819552	90,7184314052
2050	76,180063587	85,1589290544	90,8408418162
2051	76,1441224471	85,2361989298	90,9617533568
2052	76,1092795741	85,3130952623	91,0812097617
2053	76,075494121	85,3896216708	91,1992523133
2054	76,0427275305	85,4657817139	91,3159200359
2055	76,0109433605	85,5415788907	91,4312498698
2056	75,9801071258	85,6170166424	91,5452768292
2057	75,9501861547	85,692098353	91,6580341445
2058	75,9211494589	85,7668273506	91,7695533918
2059	75,8929676155	85,8412069084	91,8798646106

B1.3 Ισπανία

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1908	19,4536076873	18,4637076692	46,4038261968
1909	19,6837824486	18,7983398569	45,8138941661
1910	19,3795563445	19,0820542405	45,3049274887
1911	19,4771643148	19,0714974618	45,3240134146
1912	18,3668819312	17,1534536255	48,612160504
1913	18,794495169	17,8193726852	47,5094028836
1914	18,9207610556	17,8646362605	47,4330033403
1915	18,6034687836	17,7931929301	47,5535057217
1916	18,3056031652	17,2795548936	48,4063372972
1917	18,9538150344	18,0798892604	47,0670961577
1918	27,5693053953	23,9135505569	35,0651601469
1919	20,3053490281	18,9777769035	45,4929500009
1920	20,5152380655	19,9024667588	43,7853298751
1921	18,7499773509	18,1734313959	46,9067378266
1922	17,898646117	16,9259904699	48,9799737254
1923	17,5645428595	16,9730014826	48,9043169556
1924	16,8290623164	16,2021890088	50,1216781094
1925	16,4086837281	15,8868050014	50,6059508766
1926	16,0803684216	15,3873282607	51,3576555886
1927	15,7349592717	15,0804796323	51,8098414525
1928	15,3376639458	14,8163153552	52,1935896283
1929	14,8753201055	14,5085020914	52,6344162299
1930	14,4466188692	14,6447918456	52,4400644825
1931	14,6686543067	14,7177269359	52,3355157938

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1932	13,4809745956	13,348368304	54,2369889947
1933	13,5022082234	13,3551299838	54,2279096925
1934	13,0636900204	12,9750411322	54,7336816598
1935	12,7590469376	12,7377443509	55,0447605305
1936	14,3869772766	14,136616687	53,1581089207
1937	16,7383954412	16,2857440031	49,9920587579
1938	16,9440940718	16,3085762155	49,9565417323
1939	16,9914115786	16,459107703	49,7213277767
1940	15,0597087634	15,9684588639	50,4813211112
1941	15,7138782886	16,7881699286	49,2007006174
1942	12,9673301994	13,040656164	54,6470337958
1943	11,2954188288	11,4744214566	56,6425612961
1944	10,5605180504	10,5518649404	57,7502638671
1945	9,60174535757	9,26715401207	59,2151167151
1946	9,4294178161	9,6739042517	58,7607819452
1947	8,51148204457	8,09215510919	60,4806182369
1948	6,9729091153	6,38621484328	62,2011128203
1949	6,77127198187	6,70171444262	61,8928640411
1950	5,64892739995	5,80702158915	62,7557363698
1951	5,18484245544	6,20015408752	62,3808553451
1952	2,05014240316	2,60747356359	65,5763485402
1953	0,420687117377	1,84315022642	66,1937818535
1954	-0,995907866393	0,449782883306	67,2688712368
1955	-1,08873816137	0,735551846937	67,0535131858
1956	-1,91820777513	0,806661463977	66,9995205394
1957	-1,63575486293	1,03041732512	66,8285643342

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1958	-3,94962329237	-1,81770530784	68,8898782711
1959	-4,10605837003	-1,67410830686	68,791644441
1960	-5,30382578516	-2,30591685369	69,2196126343
1961	-5,74307454723	-2,89556150096	69,6092968237
1962	-5,90682737734	-2,8432699462	69,5751095839
1963	-6,24903694352	-3,07026648664	69,7229991856
1964	-7,27590283336	-4,00127595707	70,3157999757
1965	-7,87814613268	-4,71216662199	70,7540561601
1966	-8,40239232223	-5,13673049069	71,010075916
1967	-8,82516293606	-5,39589252511	71,1643067661
1968	-9,27993638676	-5,86616916512	71,4402924469
1969	-8,76593085639	-5,04341958568	70,9541674149
1970	-9,41030072067	-6,73562051412	71,9377357338
1971	-9,35076424157	-6,06472831328	71,555340999
1972	-10,3344246921	-8,17228552553	72,7250932698
1973	-10,2736817602	-7,69768640823	72,4696026781
1974	-10,8683371661	-8,35442959244	72,8219739736
1975	-11,4649621894	-9,03029943856	73,1759133875
1976	-12,11507881	-9,68826793746	73,5123071314
1977	-12,3477821488	-10,6309002751	73,9807559703
1978	-12,1434782969	-10,9643626056	74,1428002784
1979	-12,7206775427	-11,9909949412	74,6301212422
1980	-13,5989560315	-13,1657466178	75,1672675318
1981	-14,1897425525	-13,6372497476	75,3769933056
1982	-15,2431127762	-14,9789369501	75,956326002
1983	-14,8298703157	-14,5316983335	75,7660138101

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1984	-15,3587503388	-15,3720635135	76,1213652624
1985	-15,4815571086	-15,3145689707	76,0973578531
1986	-15,5355846635	-15,9427531339	76,3572956166
1987	-15,6471683861	-16,3725421708	76,5321874066
1988	-15,5430701229	-16,4323730854	76,5563474821
1989	-15,2098096728	-16,5857843447	76,6180897039
1990	-15,062498688	-16,7002665117	76,6639722333
1991	-15,4783233114	-16,9276781356	76,754631727
1992	-16,0636952933	-18,2009312386	77,2506605384
1993	-16,5682078895	-18,5687374974	77,390406613
1994	-17,1145676789	-19,4357928841	77,713808082
1995	-17,4763093034	-19,691701658	77,8076785832
1996	-17,5182692059	-20,0789002191	77,9483710958
1997	-18,8803634803	-21,4621640237	78,4382603041
1998	-19,3729221853	-21,731225063	78,5313106418
1999	-19,7903228094	-21,7275147774	78,5300323325
2000	-20,1952235336	-23,1762758443	79,0191659567
2001	-21,0743311762	-24,1889922462	79,3495963004
2002	-21,1522209335	-24,4093902848	79,4203053471
2003	-21,157827726	-24,2057992668	79,3550033135
2004	-22,4087626433	-25,8433252695	79,8702512035
2005	-22,8684665925	-25,7198024137	79,8321654113
2006	-23,8046552461	-28,0777377079	80,5383715184

Ηλικία	\hat{a}_x	\hat{b}_x
0	-3,21076768147	0,0860499436582
1	-5,68521762236	0,124760438657
5	-6,87000858344	0,0937365250698
10	-7,12383944522	0,0780622959367
15	-6,53746237201	0,0683922627306
20	-6,1988212283	0,068454988907
25	-6,08455765805	0,0651188731539
30	-5,95534483818	0,0597144380631
35	-5,76740150472	0,053514726244
40	-5,48627168108	0,0482233395636
45	-5,1775040829	0,0401165534996
50	-4,79543195899	0,0367446637572
55	-4,4367062634	0,0316498164635
60	-3,95366865174	0,0342854541463
65	-3,53743217976	0,0301185353752
70	-2,99343686463	0,0326720006312

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2006	80,5383715184	80,5383715184	80,5383715184
2007	79,907390341	80,6906698051	81,4248649804
2008	79,7265860018	80,8410138954	81,8580971257
2009	79,62056121	80,9894417598	82,213523078
2010	79,5532611332	81,13599033	82,5272537407
2011	79,5106212876	81,2806955325	82,8134079911
2012	79,4853826405	81,4235923209	83,079297657
2013	79,4732080417	81,5647147066	83,3293111599
2014	79,471256827	81,7040957892	83,5663389817
2015	79,4775466636	81,8417677861	83,7924118863
2016	79,4906283226	81,9777620605	84,0090262089
2017	79,5094039113	82,1121091489	84,2173256826
2018	79,5330179793	82,2448387878	84,4182103887
2019	79,5607886388	82,3759799389	84,6124056878
2020	79,5921620468	82,5055608148	84,8005077872
2021	79,6266812227	82,6336089021	84,9830149703
2022	79,6639640298	82,7601509853	85,1603496589
2023	79,7036872229	82,8852131689	85,3328744067
2024	79,7455746327	83,0088208994	85,5009037547
2025	79,789388242	83,1309989862	85,6647131911
2026	79,8349213324	83,2517716216	85,8245460405
2027	79,8819931401	83,3711624009	85,9806188404
2028	79,9304446332	83,489194341	86,1331255953
2029	79,980135134	83,6058898989	86,2822411841
2030	80,0309395885	83,7212709892	86,428124118
2031	80,0827463366	83,8353590015	86,5709187972

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2032	80,1354552754	83,9481748166	86,7107573722
2033	80,1889763331	84,0597388224	86,8477612937
2034	80,2432281922	84,1700709295	86,9820426119
2035	80,2981372133	84,2791905861	87,1137050738
2036	80,3536365225	84,3871167923	87,2428450563
2037	80,4096652323	84,4938681135	87,3695523636
2038	80,4661677738	84,5994626947	87,4939109144
2039	80,5230933205	84,7039182725	87,615999334
2040	80,5803952893	84,8072521882	87,7358914712
2041	80,6380309056	84,9094813995	87,8536568472
2042	80,6959608239	85,0106224922	87,9693610511
2043	80,7541487948	85,1106916916	88,0830660868
2044	80,8125613709	85,209704873	88,1948306797
2045	80,8711676482	85,3076775725	88,3047105495
2046	80,9299390356	85,4046249968	88,4127586522
2047	80,9888490506	85,5005620332	88,5190253962
2048	81,0478731367	85,5955032588	88,623558836
2049	81,1069885004	85,6894629496	88,7264048466
2050	81,1661739644	85,7824550895	88,8276072797
2051	81,2254098361	85,8744933784	88,9272081054
2052	81,2846777893	85,9655912408	89,0252475403
2053	81,3439607563	86,0557618331	89,1217641638
2054	81,4032428313	86,145018052	89,2167950237
2055	81,4625091825	86,233372541	89,3103757328
2056	81,5217459715	86,3208376981	89,4025405569

B2

B2.1 Νορβηγία

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1908	18,5364982805	18,1260588361	57,8193549595
1909	17,7216053187	17,1831933409	58,9367871311
1910	17,3554589661	17,0327760953	59,1103375819
1911	17,5805657916	16,8005766031	59,375740354
1912	17,4950637093	17,1306622857	58,9975428399
1913	17,1108851199	16,7284536114	59,4575605288
1914	17,3592689071	17,0508921799	59,0895032137
1915	16,820971932	16,9040508315	59,2578445158
1916	17,8445362949	17,4860292861	58,5834705617
1917	17,5267665964	17,2427307243	58,8677385722
1918	23,0608651296	22,765499828	51,5322270987
1919	18,704339679	17,8456595192	58,1570464093
1920	16,8024760939	16,2610957796	59,9807479016
1921	14,4181672609	13,9174019312	62,4280897267
1922	14,8111303251	14,7248692214	61,6172097686
1923	13,8828855035	13,8079483822	62,5354833892
1924	13,6439989548	13,5685608987	62,768302539
1925	13,2909686528	13,1822916812	63,1380685989
1926	12,2900950607	12,5580826878	63,7204908371
1927	12,5242320931	12,833747068	63,4655570203
1928	11,8749792941	12,3077506935	63,9489201203
1929	12,7170614281	13,2644839389	63,0599935537
1930	11,6116592732	11,5828660521	64,5941884508

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1931	11,0419355174	11,5362421325	64,6348811656
1932	10,4399897935	11,0056626916	65,0912111838
1933	9,56985169729	9,98258615462	65,9370028565
1934	8,9182335967	9,06943811448	66,6555427146
1935	8,81648906405	9,55531408697	66,2773785197
1936	9,0085390394	9,65829653742	66,1960167762
1937	8,66370542217	9,44534911508	66,3637868519
1938	7,36650417629	8,12793307535	67,3622586819
1939	6,68077566952	7,70760589437	67,6670283119
1940	9,01865404757	9,69176896852	66,1694796617
1941	9,84919782167	9,58305845023	66,2555009597
1942	10,5832712332	9,61773480094	66,2281137279
1943	10,5746385783	8,93318401214	66,7599228976
1944	10,9198594629	9,37539200188	66,4185064296
1945	7,93480858231	6,35605876388	68,6042804028
1946	5,12281234629	4,33638502374	69,8917761421
1947	3,72294460729	3,80771728457	70,208054017
1948	2,14912645745	1,9430404383	71,2606968025
1949	0,235815217753	1,27483749778	71,6154857801
1950	-0,195727138717	1,2063264865	71,6512286508
1951	-0,689154131084	-0,532776989041	72,5210268032
1952	-1,62557427103	-0,742929431615	72,6214460719
1953	-2,60558549308	-1,80504413372	73,1153484065
1954	-3,04839030931	-1,90300380024	73,1596311392
1955	-3,22937108452	-2,58195144991	73,4612572422

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1956	-4,09223129818	-2,53474204016	73,4405788586
1957	-3,57893906325	-2,34616880375	73,3575460019
1958	-4,25643076038	-2,30715964214	73,3402820359
1959	-3,9893363068	-2,51110663286	73,430209889
1960	-4,35927131549	-2,60095632634	73,4695693958
1961	-4,65416873362	-2,38918063966	73,3765465633
1962	-4,57245290299	-2,18832730077	73,2875053757
1963	-4,84869133417	-1,38808762786	72,9246536049
1964	-5,16681936339	-2,52183073381	73,434915957
1965	-4,98220574402	-2,6454147623	73,4889867615
1966	-5,85827792096	-3,35284263209	73,7928766982
1967	-5,80883439197	-3,56367176887	73,8816306554
1968	-5,94249333115	-3,1619182635	73,711792159
1969	-5,19439756372	-2,4867807676	73,4195266111
1970	-6,17572038407	-3,37416520296	73,8018902173
1971	-5,75893881127	-3,67332607532	73,927470703
1972	-6,18641446267	-3,99380712086	74,0602000958
1973	-6,47450011437	-4,31050883422	74,1895706005
1974	-6,72677647871	-5,00468857291	74,4670760151
1975	-6,88047725398	-5,08331216663	74,4979938183
1976	-7,57643156525	-5,76642058681	74,7623619426
1977	-8,23980507335	-6,61493409031	75,0804730559
1978	-8,44028121539	-6,70355305113	75,1130629336
1979	-8,60187397034	-6,48809276786	75,0336214821
1980	-8,81294924731	-7,17413646985	75,2841733405
1981	-9,52118359645	-7,73089444629	75,4824841644

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1982	-9,11260503423	-8,25817561473	75,6663007356
1983	-9,33278951728	-8,5371187244	75,7620174363
1984	-10,0786830695	-8,99645904675	75,9173962086
1985	-8,95105032637	-8,26055161483	75,6671204464
1986	-9,45417860627	-8,25344960058	75,6646700525
1987	-9,93821658002	-7,78812840641	75,5026221543
1988	-10,0920535639	-8,14993911405	75,628878566
1989	-10,6298285564	-9,08105717115	75,9457142568
1990	-10,2242924808	-9,20802034348	75,9880416586
1991	-11,7648032895	-10,7747476711	76,4940267697
1992	-11,5051568027	-12,2427932785	76,9425051067
1993	-12,3359990655	-12,1907108937	76,926992108
1994	-13,1124827127	-13,922689216	77,428195577
1995	-13,3401603701	-14,3153429841	77,5377962759
1996	-14,155123937	-15,5990275697	77,8864502096
1997	-13,3930241585	-15,763010021	77,9299637209
1998	-14,0346910505	-16,3787370259	78,0913657985
1999	-13,6563792338	-16,3568899067	78,0856917274
2000	-13,6789468005	-17,3372769309	78,3366167707
2001	-14,9256068134	-18,3710158244	78,5933349538
2002	-13,9442169977	-19,0510453838	78,7580523236
2003	-14,684647487	-21,5258423504	79,3319087771
2004	-15,8613730923	-22,6577123308	79,5821002418
2005	-16,1582098813	-24,6533896574	80,0064689684
2006	-17,4923821671	-25,3907141468	80,1582422355
2007	-17,9599046158	-25,7232440357	80,2258576173

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
2008	-17,691121155	-26,5646056951	80,3947058899

Ηλικία	\widehat{a}_x	\widehat{b}_x
0	-4,04880007602	0,0819207894345
1	-6,47680213534	0,108964785788
5	-7,41157237072	0,0961810670425
10	-7,52175049727	0,0950644623964
15	-6,71079095748	0,0791860804459
20	-6,43402665765	0,0832815477356
25	-6,41792403953	0,0824036590064
30	-6,32764293281	0,0743762758126
35	-6,11670725798	0,063926501923
40	-5,82768480124	0,0520719170147
45	-5,46641881231	0,0402160793172
50	-5,07241356661	0,03155342802
55	-4,66555279909	0,0251392565948
60	-4,22210929646	0,0207481594196
65	-3,75994736141	0,0186726809548
70	-3,26619499235	0,0170396805205
75	-2,75569070467	0,0158709723669
80	-2,24793148188	0,0133826562062

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	80,3947058899	80,3947058899	80,3947058899
2009	79,9640294841	80,505727584	81,0121564662
2010	79,8450273771	80,6151865764	81,3159489458
2011	79,777956317	80,7231257041	81,5658834855
2012	79,7378082463	80,8295865112	81,7870225879
2013	79,7148094169	80,9346092858	81,9891921072
2014	79,7039059635	81,0382330961	82,1774957891
2015	79,7020728439	81,1404958259	82,3550064388
2016	79,7073253965	81,2414342085	82,523754467
2017	79,7182764645	81,3410838607	82,6851708628
2018	79,7339105038	81,4394793156	82,8403131792
2019	79,753457223	81,5366540542	82,9899919811
2020	79,7763158141	81,6326405371	83,1348466988
2021	79,8020069789	81,7274702342	83,2753936809
2022	79,830141196	81,821173655	83,4120580034
2023	79,8603969573	81,9137803768	83,5451953048
2024	79,8925053852	82,005319073	83,6751072373
2025	79,9262390746	82,0958175405	83,8020526894
2026	79,9614038193	82,1853027261	83,9262561218
2027	79,9978323557	82,2738007523	84,0479138812
2028	80,0353795524	82,3613369426	84,167199067
2029	80,0739186545	82,4479358456	84,2842653396
2030	80,1133383124	82,5336212592	84,3992499415
2031	80,1535402021	82,6184162533	84,5122761248
2032	80,194437099	82,7023431922	84,6234551223
2033	80,235951303	82,7854237567	84,7328877654

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2034	80,2780133396	82,867678965	84,8406658242
2035	80,3205608795	82,9491291931	84,946873126
2036	80,3635378328	83,029794195	85,0290802877
2037	80,4068935855	83,1096931219	85,1324218672
2038	80,4505823502	83,1888445411	85,2344064025
2039	80,4945626126	83,2672664541	85,3350940402
2040	80,5387966548	83,3449763143	85,4345405002
2041	80,5832501444	83,421991044	85,5327975151
2042	80,6278917784	83,4983270514	85,6299132133
2043	80,6726929719	83,5740002464	85,7259324556
2044	80,7176275869	83,6490260564	85,8208971312
2045	80,762671693	83,7234194414	85,9148464197
2046	80,8078033572	83,7971949087	86,0078170235
2047	80,8530024573	83,8703665272	86,0998433751
2048	80,898250517	83,9429479412	86,1909578219
2049	80,9435305587	84,0149523838	86,2811907928
2050	80,9888269715	84,0863926898	86,3705709468
2051	81,0341253945	84,1572813082	86,4591253087
2052	81,0794126103	84,2276303148	86,5468793899
2053	81,1246764506	84,2974514235	86,6338572998
2054	81,1699057099	84,366755998	86,7200818456
2055	81,2150900688	84,4355550627	86,8055746239
2056	81,260220023	84,5038593139	86,8903561041
2057	81,3052868201	84,5716791294	86,9744457053
2058	81,3502824016	84,6390245793	87,0578618653

B2.2 Σουηδία

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1908	19,0799201147	18,6608445558	57,7294657619
1909	17,8606343439	17,1144151474	59,5013386728
1910	18,3560260037	17,5417600328	59,0253163239
1911	18,3849261025	17,3998936471	59,1844721614
1912	18,4492408318	17,5820899931	58,9798647116
1913	17,6850534964	16,982232344	59,6465287127
1914	18,0164671251	17,3375569031	59,254049526
1915	18,6909813878	18,1696051273	58,3072365702
1916	18,2669271197	17,2060717912	59,4000973885
1917	17,8491199968	16,7793307823	59,8675362744
1918	24,948388011	23,5731482352	51,1030577427
1919	19,8705321712	18,5631104749	57,8455485984
1920	17,8100478342	16,8336597076	59,8085791049
1921	15,786271601	14,9275420091	61,7847356261
1922	15,1698492042	15,0474704492	61,66590088
1923	13,6360417244	13,064481191	63,5428278308
1924	14,4606567785	13,9695792988	62,708854222
1925	13,9558309677	13,5341859178	63,1145003223
1926	13,518377569	13,354232942	63,2796086793
1927	14,4694421789	14,5384867407	62,1653800663
1928	13,9496535715	13,8093310247	62,8591773965
1929	13,7853188566	13,9396930429	62,7369805426
1930	12,8748090745	13,0898185912	63,5200010177
1931	12,800793266	13,5849582584	63,0676483918
1932	12,0314719237	12,2596786116	64,2531642994

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
1933	10,8885129257	11,2740134318	65,0855139221
1934	10,7999442118	11,1347398134	65,1999018674
1935	10,7205942596	11,2906786735	65,0717739719
1936	11,1108909931	11,5362290109	64,8680154927
1937	10,8992806561	11,4863245213	64,9096258716
1938	9,68764564094	10,5408554793	65,6789990937
1939	8,11773809655	9,55015509443	66,4479558024
1940	7,47515762839	9,18242963967	66,7241005998
1941	7,365070184	8,66640161478	67,1034494661
1942	5,71577809138	5,92792217557	68,967928879
1943	6,66738751305	6,31290126022	68,7200855196
1944	7,72121588873	7,71792945648	67,7767099402
1945	6,70951163849	6,91338883299	68,3245115266
1946	3,93597988004	5,2607569609	69,387128426
1947	3,42122833852	5,35617884906	69,3279578251
1948	1,47737722089	3,3134195805	70,5403575973
1949	1,01311670306	3,17337086834	70,6194818326
1950	0,17542414465	2,60883388397	70,933524943
1951	-0,184849430038	2,10906154622	71,2051426634
1952	-1,17668037862	1,14091186742	71,7149398963
1953	-1,00788756208	1,20153975355	71,6836304294
1954	-2,26522208016	0,380095926381	72,1011048895
1955	-2,27255661619	-0,139726684453	72,3579781081
1956	-2,53877749266	-0,269015385686	72,4210140952
1957	-2,35477711983	0,0131395354172	72,2830118466
1958	-3,42422589709	-1,29197534226	72,9082127105

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1959	-3,65319008922	-1,76057430011	73,1247716525
1960	-3,74965377689	-1,04663039371	72,7931980155
1961	-4,16701201238	-1,95004126473	73,2111938653
1962	-4,21147550806	-1,6748961932	73,0854775624
1963	-4,33324394843	-2,04937611196	73,2562461523
1964	-4,39099382496	-2,40178105897	73,4146656284
1965	-4,54429305466	-2,76710956387	73,5766127513
1966	-5,02281927039	-3,38291330684	73,8444846285
1967	-5,57554274314	-3,45422275953	73,8750989555
1968	-4,92633315437	-3,06860743348	73,7085527454
1969	-5,3666945629	-3,34152205645	73,8266766041
1970	-5,45496050412	-4,60418393916	74,3576404004
1971	-5,8701386877	-4,3530668598	74,2540233948
1972	-5,94666044754	-4,71687228596	74,4038281251
1973	-6,56074854126	-5,09500203872	74,5574306744
1974	-6,7333616928	-5,3284744673	74,6512242908
1975	-6,44455849407	-5,31406240897	74,645457334
1976	-6,92897396102	-5,29948427274	74,639620877
1977	-7,75825175588	-6,36611348244	75,0597230348
1978	-7,72367128063	-6,57736775779	75,1408727545
1979	-7,81897155646	-6,67518532651	75,1782465887
1980	-8,68647217072	-7,19461938003	75,3746153413
1981	-9,87099884453	-7,99340629056	75,6699179604
1982	-10,365462257	-8,89699651849	75,9946714656
1983	-10,5015133887	-9,57766948631	76,2331186719
1984	-10,9322194846	-10,3724373305	76,5051398718

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1985	-10,7195682234	-9,97579121592	76,3702231513
1986	-10,4752316527	-10,6553873736	76,6003824154
1987	-10,9137103057	-11,2360719979	76,7933022411
1988	-10,7507459639	-10,8399125657	76,6620537163
1989	-11,5166145694	-13,0571503552	77,3773671849
1990	-11,4635758695	-12,73179879	77,2752489491
1991	-12,2908257083	-13,1173978039	77,3961747892
1992	-13,0973670983	-14,2444028801	77,7422867309
1993	-12,8434139878	-14,5276134545	77,8276105728
1994	-14,3850239105	-16,443392076	78,3885134853
1995	-15,0558710847	-16,8057063135	78,4915679886
1996	-15,5393003237	-17,6469006103	78,7273531843
1997	-15,4579030192	-18,4988336815	78,9613926797
1998	-15,3318259306	-19,1132856304	79,1273561737
1999	-16,140503148	-19,5198235318	79,2359034508
2000	-16,6016331644	-20,3325959239	79,4500186262
2001	-16,4097351637	-21,1209255387	79,6541451681
2002	-17,072616277	-21,504800551	79,7523265742
2003	-16,9028645848	-22,2030678821	79,9289460622
2004	-17,7316024826	-23,5014050306	80,2510220587
2005	-17,3881027898	-23,9208098812	80,3533051163
2006	-17,7713406966	-24,7615868552	80,555943103
2007	-18,2373915671	-25,4818252469	80,7270655828
2008	-18,7486761591	-26,0791749986	80,8673319786

Ηλικία	\widehat{a}_x	\widehat{b}_x
0	-4,06590089466	0,0884456758411
1	-6,84889877122	0,112798196376
5	-7,55303347352	0,0989202626301
10	-7,63505860044	0,0914898469167
15	-6,87817622493	0,0776888248337
20	-6,56918877778	0,076397718167
25	-6,53300329822	0,0735354806308
30	-6,40839255793	0,067505185131
35	-6,17684287305	0,0580376836129
40	-5,86370925326	0,0483538255662
45	-5,48695985592	0,0393327777189
50	-5,08325870737	0,0326392201224
55	-4,66606684009	0,0275275950091
60	-4,21390291994	0,024245516205
65	-3,73097682748	0,0225504751927
70	-3,22416055329	0,0216424585208
75	-2,69770194821	0,0205172783811
80	-2,17973617237	0,0183719791442

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	80,8673319786	80,8673319786	80,8673319786
2009	80,4881048297	80,9858674043	81,4616551918
2010	80,3966559064	81,1031212682	81,7664344735
2011	80,3526406906	81,2191264881	82,0219131165
2012	80,3330436408	81,3339149727	82,2511540967
2013	80,3288998693	81,4475176522	82,4631672116
2014	80,335589016	81,5599645077	82,6626157935
2015	80,3503546088	81,6712846003	82,8522975522
2016	80,371394138	81,7815060987	83,0340546179
2017	80,3974519043	81,8906563062	83,2091807831
2018	80,4276116232	81,998761688	83,3786289737
2019	80,4611805674	82,105847896	83,5431271753
2020	80,497620189	82,2119397944	83,7032478746
2021	80,5366473868	82,3170614834	83,8594519852
2022	80,5776270055	82,4212363235	84,0121178815
2023	80,6204168765	82,5244869578	84,1615612959
2024	80,664779064	82,6268353345	84,3080493775
2025	80,7105129703	82,7283027284	84,4518108853
2026	80,7574478225	82,8289097619	84,5930437467
2027	80,8054370006	82,9286764253	84,7319207725
2028	80,8543536815	83,0276220966	84,8460214886
2029	80,9040874437	83,1257655606	84,9807452165
2030	80,9545415854	83,2231250274	85,1135216928
2031	81,0056309792	83,3197181506	85,2444587417
2032	81,057280339	83,4155620446	85,3736535693
2033	81,109422804	83,5106733015	85,5011942115

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2034	81,1619987738	83,6050680076	85,627160731
2035	81,21495494	83,6987617596	85,7516262146
2036	81,2682434767	83,7917696795	85,8746576121
2037	81,3218213577	83,8841064299	85,996316445
2038	81,3756497784	83,9757862284	86,1166594114
2039	81,4296936623	84,0668228616	86,2357389038
2040	81,4839212376	84,157229699	86,3536034557
2041	81,5383036731	84,2470197058	86,4702981289
2042	81,5928147615	84,3362054557	86,5858648509
2043	81,6474306454	84,4247991438	86,7003427101
2044	81,7021295765	84,512812598	86,8137682155
2045	81,7568917058	84,6002572907	86,9261755257
2046	81,8116988978	84,6871443504	87,0375966521
2047	81,8665345674	84,7734845723	87,1480616397
2048	81,9213835341	84,8367077293	87,2575987285
2049	81,976231894	84,9220604972	87,3662344976
2050	82,0310669045	85,0068977513	87,4739939952
2051	82,0858768816	85,091229043	87,5809008554
2052	82,1406511081	85,1750636399	87,6869774039
2053	82,1953797511	85,258410535	87,7922447535
2054	82,2500537873	85,341278455	87,896722891
2055	82,3046649359	85,4236758691	88,0004307563
2056	82,3592055984	85,505610997	88,1033863145
2057	82,413668803	85,5870918169	88,2056066216
2058	82,4680481551	85,6681260728	88,3071078849

B2.3 Δαβία

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1908	16,6480616949	16,0851111429	55,8724594665
1909	15,4085777233	14,4293637066	58,2407379648
1910	14,6808761545	14,0453093496	58,7496799535
1911	15,6007143946	14,6855618387	57,8932053709
1912	14,9442938136	14,0079041962	58,798495533
1913	14,0241409796	13,3477762096	59,638792709
1914	14,1722428736	13,7757869827	59,0984978658
1915	14,2810619399	13,8423115387	59,013028513
1916	15,6065961696	14,6245189687	57,9766046774
1917	15,5626008896	14,5490661058	58,0791751913
1918	18,0487794459	15,3529154766	56,9563423028
1919	16,7272783132	14,6483811437	57,9440478193
1920	15,859242081	14,3084836691	58,4024615597
1921	12,0404372413	11,1044805637	62,2211850301
1922	12,0492749466	12,1858769958	61,0260453601
1923	11,4570449063	11,5652680355	61,7226405919
1924	11,6211697506	11,5125982671	61,7804149396
1925	11,0647759332	10,941974572	62,3933519782
1926	10,6308966244	11,190068144	62,1297515928
1927	11,2471565688	11,5605773848	61,7277942162
1928	10,5713632173	10,9585442765	62,3758829082
1929	10,0492240829	11,0708762624	62,2569411276
1930	10,1316678961	10,7345104537	62,6104472493
1931	10,1136195917	11,0754926806	62,2520338818
1932	9,6749432784	10,3685593218	62,986673887

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1933	8,64922605446	9,48313400868	63,8591633847
1934	8,11909528468	9,03298368535	64,2842690401
1935	9,8789623745	10,0115955373	63,3445269497
1936	8,64795377318	9,52976121648	63,8144657575
1937	8,21571638589	9,1441881688	64,1800544219
1938	7,29137511083	8,02935668669	65,1880257082
1939	5,47993942475	7,19976156	65,8930360737
1940	4,64769386402	6,71282957186	66,290240572
1941	5,47809654985	6,93680633582	66,1090154842
1942	4,94197841415	5,57589570183	67,1730085981
1943	4,85386009201	5,13668498315	67,4982215802
1944	6,49965884297	6,47988013332	66,4761053702
1945	7,47131040932	6,86143056794	66,1702825421
1946	4,6144672237	5,44216448805	67,2729299103
1947	2,78961923179	3,79574107474	68,4408626448
1948	2,01059607736	1,23424169168	70,0548874415
1949	0,577912470596	1,35176435969	69,9856485167
1950	-0,47811875304	1,02608536474	70,176474856
1951	-1,19358522718	-0,0697925998558	70,795366783
1952	-0,49341863766	0,0937362828174	70,7052068026
1953	-1,49462595856	-0,440318967519	70,9969254455
1954	-2,32007797068	-0,779843687913	71,1783796488
1955	-3,02330995582	-1,83021384623	71,7210810845
1956	-3,39031856091	-2,06567183461	71,8390459833
1957	-2,71774377738	-1,69948978968	71,6550200572
1958	-3,74913057677	-2,40876484021	72,0086287333

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1959	-3,07325076773	-2,42351281837	72,0158580105
1960	-3,73272529868	-2,37105821527	71,9901230116
1961	-3,74938375187	-2,85731541619	72,226329994
1962	-3,78062043701	-2,5528153923	72,079030717
1963	-3,83786124442	-2,81648099443	72,2066950452
1964	-4,012108528	-2,88808872374	72,2411031381
1965	-3,72100400218	-2,66373525286	72,1329243314
1966	-4,09865568307	-2,82833833691	72,2124003129
1967	-4,63745911865	-3,7984799533	72,6690833312
1968	-4,16550431074	-4,23376982968	72,8686102934
1969	-4,46763505844	-4,42753909618	72,9558538961
1970	-4,61346893251	-4,77532561334	73,1106650043
1971	-4,35600787705	-4,93153285422	73,1794697927
1972	-4,94188003829	-4,93505942138	73,1810180109
1973	-5,16922059103	-5,53061116033	73,4392944778
1974	-6,18358705787	-5,79148677771	73,5504880476
1975	-5,60676998861	-6,54664941229	73,8660013315
1976	-6,19002671198	-5,73801352543	73,5277901705
1977	-6,90982804254	-8,06901382233	74,4753582133
1978	-7,04399985168	-7,22457647786	74,1415798111
1979	-6,53623762966	-6,78678540374	73,9644223587
1980	-6,98383349503	-6,50754716355	73,8498896456
1981	-6,78033416908	-6,73557021357	73,9435067252
1982	-7,68824132475	-7,52604283232	74,2619129705
1983	-7,57542594405	-7,27685102271	74,1625412603
1984	-8,17592687491	-7,71074987823	74,334990057

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1985	-7,1695391187	-7,34796586252	74,1909927229
1986	-8,14415817459	-7,73662103003	74,3451867893
1987	-8,21738009916	-7,97201447895	74,4375305216
1988	-8,30875165413	-8,24521559879	74,5437426816
1989	-8,53184624918	-8,44367658807	74,620262545
1990	-8,46854996063	-8,31258925101	74,569779064
1991	-8,93285889911	-9,20093591737	74,9074952236
1992	-9,76460507885	-9,47398236101	75,0092856233
1993	-10,1158726448	-9,12753633485	74,8799747472
1994	-10,386762735	-9,7335475645	75,1052092632
1995	-10,2747826082	-9,36038578413	74,9670487638
1996	-10,6997232452	-10,4200731489	75,3551052771
1997	-11,6404225533	-11,3440967328	75,6831775816
1998	-12,2403403172	-12,718263159	76,1549740258
1999	-12,6680826577	-13,015719293	76,2547512529
2000	-13,126840491	-13,8695093455	76,5368279078
2001	-12,6767711385	-14,3906225272	76,7059974627
2002	-13,5859136793	-14,7860904472	76,8329382556
2003	-13,9660156255	-16,3445625092	77,3220573393
2004	-13,8820172863	-15,9777884754	77,2083832882
2005	-15,6228038322	-18,3153269393	77,9173714766
2006	-15,6562767094	-18,5515420703	77,9871734276
2007	-15,5106803658	-18,7179077015	78,0361482993
2008	-15,9011808234	-20,222132683	78,4723251284

Ηλικία	\widehat{a}_x	\widehat{b}_x
0	-3,75638321713	0,11307617031
1	-6,71079587303	0,11997536295
5	-7,60035587396	0,0998066458405
10	-7,70869578439	0,0897039233198
15	-6,97705127756	0,0733606291769
20	-6,68989667318	0,0756738953762
25	-6,60277456563	0,0745169382457
30	-6,40435274247	0,0659920627445
35	-6,1003820316	0,0557888857303
40	-5,74641427781	0,0423256153319
45	-5,33935953431	0,033155754563
50	-4,91660270116	0,026270016392
55	-4,48921844452	0,0224731165046
60	-4,03795386742	0,0205982059418
65	-3,57429237295	0,0205282497148
70	-3,09157031153	0,021323683613
75	-2,60554752068	0,0226065849206
80	-2,12520148661	0,0228242593248

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	78,4723251284	78,4723251284	78,4723251284
2009	78,1049384225	78,5873227943	79,0528335531
2010	78,016430607	78,7013355031	79,3531172498
2011	77,9737119455	78,8143923323	79,6063054012
2012	77,9545229071	78,9265214053	79,834695276
2013	77,9502118699	79,0377499211	80,0469746015
2014	77,9563286939	79,1481041835	80,2476280646
2015	77,9702233104	79,2576096293	80,4218956535
2016	77,9901657483	79,3662908559	80,6065959776
2017	78,014952767	79,4741716477	80,7853468066
2018	78,043707673	79,5812750019	80,9590542854
2019	78,0757685953	79,6876231537	81,1284083624
2020	78,1106216434	79,7932376005	81,2939497289
2021	78,1478586823	79,8981391251	81,4561121224
2022	78,1871494645	80,002347819	81,6152502615
2023	78,2282225624	80,1058831044	81,7716589733
2024	78,2708519193	80,2087637552	81,9255866946
2025	78,3148471185	80,2934483183	82,0772452525
2026	78,3600461825	80,3951656048	82,2268171101
2027	78,4063101416	80,4962815109	82,37446084
2028	78,4535188667	80,5968124062	82,5203153316
2029	78,5015678231	80,6967741095	82,6645030739
2030	78,5503655088	80,7961819071	82,8071327537
2031	78,5998314065	80,8950505692	82,9483013356
2032	78,6498943308	80,9933943671	83,0880957475
2033	78,7004910791	81,0912270889	83,2265942597

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2034	78,7515653217	81,1885620551	83,363867623
2035	78,8030666807	81,2854121339	83,4999800175
2036	78,8549499597	81,3817897553	83,6349898488
2037	78,9071744957	81,4777069257	83,7689504206
2038	78,9597036095	81,5731752413	83,9019105083
2039	79,0125041379	81,6682059013	84,033914849
2040	79,0655460319	81,7628097207	84,165004565
2041	79,1188020117	81,8569971426	84,2952175292
2042	79,172247267	81,9507782504	84,4245886844
2043	79,2258591973	82,0441627791	84,5531503222
2044	79,2796171848	82,1371601268	84,6809323271
2045	79,3335023954	82,2297793651	84,8079623938
2046	79,3874976037	82,3220292502	84,9342662177
2047	79,4415870386	82,4139182323	85,0598676654
2048	79,4957562464	82,5054544662	85,1847889268
2049	79,5499919692	82,5966458201	85,3090506504
2050	79,6042820371	82,6874998853	85,4326720658
2051	79,6586152712	82,7780239848	85,5556710937
2052	79,7129813968	82,8682251821	85,6780644446
2053	79,7673709664	82,9581102893	85,7998677091
2054	79,8217752889	83,0476858753	85,9210954395
2055	79,8761863675	83,1369582736	86,0417612239
2056	79,9305968416	83,2259335897	86,161877754
2057	79,9849999362	83,3146177086	86,281456887
2058	80,0393894146	83,4030163016	86,4005097026

B3**B3.1 Αυστρία**

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1950	11,79173072	11,18048638	65,0058868
1951	11,20326269	10,81717895	65,352097
1952	9,247515433	9,239746595	66,7736521
1953	8,581874463	8,722140817	67,21409
1954	8,828227028	8,669968415	67,2577599
1955	8,659462623	8,313716376	67,5527509
1956	8,139856004	8,231829803	67,6197794
1957	8,955622745	8,503279845	67,3964752
1958	7,547362193	7,31998244	68,3474286
1959	7,691377938	7,385417485	68,2963223
1960	6,829130818	6,946316934	68,63612
1961	5,854208016	5,743492814	69,5314252
1962	5,635036909	6,055809824	69,3039393
1963	5,597956812	5,844858491	69,4579514
1964	5,381246287	5,181662829	69,9325827
1965	5,136161926	5,436845965	69,7516364
1966	5,035846044	5,054781491	70,0217896
1967	4,980816267	5,28766559	69,8576685
1968	4,723124601	5,078884573	70,0048819
1969	5,002139661	5,354286715	69,8104043
1970	4,926832046	5,256325212	69,8798542
1971	4,709369835	5,016236529	70,0487906
1972	4,416640955	4,542768047	70,3767758
1973	3,59598961	3,734952202	70,9213129
1974	3,390376518	3,745363263	70,9144108
1975	3,293087163	3,484642017	71,0863787
1976	2,154015161	2,786711686	71,5379782

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1977	1,677894518	2,291540374	71,8510147
1978	1,361572853	2,183810739	71,9183426
1979	1,216629657	1,711741438	72,2102114
1980	1,150571533	1,416763956	72,3900478
1981	0,145293139	0,966755487	72,6607789
1982	0,10812016	0,730443565	72,8012489
1983	-0,40115091	0,685518008	72,8278245
1984	-0,7337232	-0,32000528	73,4122573
1985	-1,58733661	-0,76418412	73,6643817
1986	-2,28359222	-1,57940682	74,1181303
1987	-3,05252929	-2,35676789	74,5406142
1988	-3,92817748	-3,13208588	74,9527517
1989	-3,55281563	-3,41847422	75,103749
1990	-4,44419307	-3,99965408	75,4046449
1991	-4,61773422	-4,15009831	75,4817935
1992	-5,1996039	-4,55125049	75,6860628
1993	-4,93778923	-5,01620729	75,9202671
1994	-5,39674189	-5,67679663	76,248488
1995	-6,6043575	-6,03629445	76,424963
1996	-7,05633913	-6,54151003	76,6705142
1997	-7,90958411	-7,16007566	76,967395
1998	-8,40691629	-7,87011354	77,3033003
1999	-8,7360165	-8,53314965	77,6124842
2000	-8,80674025	-9,63017663	78,115061
2001	-9,88865457	-10,8800464	78,6748869
2002	-10,4529595	-11,2340577	78,8311157
2003	-9,98313118	-11,0109863	78,7327888
2004	-10,7467015	-11,8703547	79,1094419
2005	-10,7262114	-12,3333202	79,3100031
2006	-11,7845188	-13,5226881	79,8182016

Έτος	\widehat{k}_t	\widehat{k}_t'	\widehat{e}_0
2007	-12,7010201	-13,985645	80,0132578
2008	-13,0298138	-14,453419	80,2088566

Ηλικία	\widehat{a}_x	\widehat{b}_x
0	-4,22991491	0,12813468
1	-7,35303651	0,11008415
5	-8,16780586	0,09756545
10	-8,23432092	0,07745762
15	-7,09254987	0,03879868
20	-6,86461409	0,0452008
25	-6,91515033	0,0522636
30	-6,74203474	0,05192833
35	-6,4079363	0,04650844
40	-5,98904697	0,03953564
45	-5,53119741	0,0355551
50	-5,0794587	0,03448404
55	-4,64279773	0,03582615
60	-4,19705928	0,03986925
65	-3,73687958	0,04333539
70	-3,24808977	0,04445071
75	-2,73309653	0,04221382
80	-2,2011009	0,03678816

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	80,2088566	80,2088566	80,2088566
2009	80,0472684	80,398084	80,7434613
2010	80,0879747	80,585718	81,0726815
2011	80,1606898	80,7717998	81,3668762
2012	80,2492757	80,9563682	81,6422529
2013	80,3475037	81,1394601	81,9051054
2014	80,4521961	81,3211104	82,1586732
2015	80,561478	81,501352	82,4048893
2016	80,6741382	81,6802163	82,6450194
2017	80,789344	81,8577327	82,8799481
2018	80,9064963	82,0339293	83,0893485
2019	81,025149	82,2088325	83,3158157
2020	81,1449607	82,3824676	83,5386098
2021	81,2656643	82,5548581	83,758039
2022	81,3870474	82,7260266	83,9743548
2023	81,5089381	82,8959943	84,1877656
2024	81,631196	83,0437767	84,3984468
2025	81,7537048	83,2115147	84,6065474
2026	81,8763676	83,3781118	84,8121958
2027	81,9991028	83,5435852	85,0155031
2028	82,1218413	83,707951	85,2165666
2029	82,2445242	83,8712248	85,4154719
2030	82,367101	84,033421	85,6122949
2031	82,4895283	84,1945534	85,8071032
2032	82,6117685	84,3546352	85,9999575
2033	82,733789	84,5136788	86,1909123
2034	82,8555616	84,671696	86,3800171
2035	82,9770613	84,8286981	86,5673167
2036	83,0772838	84,9846958	86,7528521
2037	83,1982565	85,1396992	86,9366607

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2038	83,3189004	85,293718	87,1187771
2039	83,4392006	85,4467614	87,2992329
2040	83,5591442	85,5988382	87,4780575
2041	83,6787197	85,7499568	87,6552782
2042	83,7979167	85,9001253	87,8309204
2043	83,9167262	86,0493512	88,0050079
2044	84,0351403	86,197642	88,1775627
2045	84,1531517	86,3450045	88,3486059
2046	84,2707542	86,4914457	88,518157
2047	84,387942	86,6369719	88,6862347
2048	84,5047103	86,7815893	88,8528564
2049	84,6210546	86,925304	89,0180389
2050	84,7369709	87,0681217	89,1817982
2051	84,8524557	87,2100479	89,3441493
2052	84,9675059	87,3510881	89,5051068
2053	85,0821188	87,4912475	89,6646847
2054	85,1962919	87,630531	89,8228963
2055	85,3100231	87,7689436	89,9797546
2056	85,4233105	87,9064901	90,135272
2057	85,5361524	88,043175	90,2894605
2058	85,6485474	88,1790029	90,442332

B3.2 Τσεχία

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1950	10,97243676	10,11823497	64,5103594
1951	9,968880997	9,224156631	65,3332942
1952	8,279438374	7,402230392	66,8386961
1953	7,456094017	6,51401982	67,5009136
1954	6,155276535	5,905704054	67,9309379
1955	5,418490626	4,563788834	68,8200394
1956	4,762499052	3,9457517	69,2044122
1957	5,365468911	4,487858642	68,8680592
1958	3,950810179	3,051435435	69,7359495
1959	3,702449826	3,051791861	69,7357431
1960	2,998188208	2,15326687	70,2432523
1961	3,009609328	1,861601794	70,4027572
1962	3,638860071	3,181059499	69,6606115
1963	3,224324656	2,30553563	70,1589927
1964	2,797040331	2,013917469	70,3197655
1965	3,267310727	2,561238888	70,0159272
1966	3,03956203	2,20881312	70,2125948
1967	2,91035216	2,43214093	70,088406
1968	3,304243777	3,293573908	69,5947622
1969	3,878286986	4,062622809	69,1328409
1970	3,311142708	3,933335014	69,2119864
1971	3,189497867	3,545680279	69,4456469
1972	2,351994556	2,701132055	69,9368052
1973	2,284514245	3,04586953	69,739172
1974	1,885596534	2,943852701	69,7980565
1975	1,61277959	2,302774279	70,1605269
1976	1,294017875	2,115428839	70,2640842
1977	1,136117789	2,069075292	70,2895473
1978	0,907904823	1,978229441	70,3392703

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{e}_0
1979	0,58506581	1,779233102	70,4473627
1980	1,065379108	2,594274673	69,9972975
1981	0,474972781	1,801361661	70,4353981
1982	0,028593343	1,656300726	70,5135817
1983	0,288796974	2,173259991	70,232228
1984	-0,46400205	1,685368075	70,4979621
1985	-0,73282858	1,264110786	70,722084
1986	-0,65883253	1,331699128	70,6864453
1987	-1,27106503	0,488558561	71,1226919
1988	-1,60150972	0,152041396	71,2919793
1989	-1,88204029	0,036961296	71,3492728
1990	-1,57820992	0,65564658	71,0376427
1991	-1,78757683	-0,44440006	71,5862855
1992	-2,07405262	-1,18436259	71,9403718
1993	-2,85122415	-2,24041355	72,4275563
1994	-2,66959002	-2,81251294	72,6834403
1995	-3,30136895	-3,09178886	72,8064569
1996	-4,69909308	-4,66204616	73,4771389
1997	-4,59872956	-4,88462073	73,5695525
1998	-5,97581178	-6,27449344	74,1335233
1999	-6,27629092	-6,76810888	74,3288114
2000	-6,56299646	-7,39120052	74,5719256
2001	-7,43492458	-8,25893077	74,9046297
2002	-7,22441358	-8,55665269	75,0173114
2003	-7,6372302	-8,36368959	74,9443614
2004	-8,47684187	-9,92192247	75,5252579
2005	-8,82747225	-10,5727375	75,7627166
2006	-9,54649386	-12,1599181	76,3306159
2007	-9,78577055	-12,7865167	76,5517952
2008	-10,5976282	-13,474528	76,7911466

Ηλικία	\widehat{a}_x	\widehat{b}_x
0	-4,32054756	0,15040099
1	-7,43314754	0,12836582
5	-8,07463671	0,09804914
10	-8,15020216	0,08151292
15	-7,30069566	0,05677318
20	-6,99555895	0,05219772
25	-6,94994766	0,05460109
30	-6,72411808	0,05101195
35	-6,3537451	0,0398669
40	-5,88065448	0,02923626
45	-5,38281814	0,02224463
50	-4,88469766	0,02263477
55	-4,41004226	0,02411989
60	-3,9400301	0,02822975
65	-3,47791866	0,03314331
70	-3,00383976	0,03562387
75	-2,51732089	0,0347576
80	-2,02389775	0,03155682
85	-1,56180155	0,02567339

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	76,7911466	76,7911466	76,7911466
2009	76,4566658	76,9387859	77,408842
2010	76,3993475	77,0852751	77,7475562
2011	76,3866128	77,2306581	78,0399242
2012	76,3964223	77,3749763	78,3080374
2013	76,4202609	77,5182689	78,5604589
2014	76,4537761	77,6605727	78,8015852
2015	76,4943937	77,8019224	79,0340313
2016	76,5404452	77,9423507	79,2595035
2017	76,5907789	78,0818885	79,479188
2018	76,6445625	78,2205647	79,6939491
2019	76,7011728	78,3584068	79,9044395
2020	76,7601303	78,4954403	80,1111661
2021	76,8210577	78,6316895	80,3145315
2022	76,8836523	78,7671772	80,5150143
2023	76,947668	78,9019247	80,7125892
2024	77,0129016	79,0359523	80,9076201
2025	77,0791837	79,1692787	81,1002946
2026	77,146372	79,3019219	81,2907724
2027	77,2143452	79,4338986	81,4791903
2028	77,2829998	79,5652243	81,6656663
2029	77,3522468	79,6959139	81,8503031
2030	77,4220088	79,8259812	82,0331903
2031	77,4922187	79,9554391	82,214407
2032	77,5628177	80,0843	82,3940224
2033	77,6337542	80,212575	82,5720984
2034	77,7049827	80,3402751	82,7486897
2035	77,7764629	80,4675601	82,9238453
2036	77,8481592	80,5941475	83,097609
2037	77,9200397	80,7201884	83,2700202

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2038	77,992076	80,845691	83,4411144
2039	78,0642428	80,9706632	83,6109236
2040	78,1365172	81,095112	83,7794769
2041	78,2088789	81,2190443	83,9468005
2042	78,2813095	81,3424663	84,1129184
2043	78,3537922	81,4653839	84,2551617
2044	78,4263122	81,5878026	84,4190432
2045	78,4988559	81,7097276	84,5817822
2046	78,5714109	81,8311636	84,7433954
2047	78,6439661	81,9521151	84,9038983
2048	78,7165113	82,0725861	85,0633052
2049	78,7890374	82,1925807	85,2216291
2050	78,8615359	82,3121024	85,3788822
2051	78,9339993	82,4311545	85,535076
2052	79,0064204	82,5497402	85,6902208
2053	79,0787929	82,6678623	85,8443266
2054	79,1511109	82,7855236	85,9974025
2055	79,2233692	82,9027265	86,1494573
2056	79,2955628	83,0194734	86,300499
2057	79,3676873	83,1357663	86,4505352
2058	79,4397384	83,2516074	86,5995733

B3.3 Ελβετία

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{k}_t'
1950	10,37671878	10,31093069	68,8570208
1951	10,82814404	10,56900187	68,6716044
1952	9,449786937	9,404782778	69,4986531
1953	9,414458308	9,546717639	69,3992248
1954	8,698396387	8,799972118	69,9183442
1955	8,551675279	8,694182985	69,991102
1956	8,227264143	8,605221643	70,0521388
1957	8,136075079	7,95890306	70,4916119
1958	7,055362683	7,002732661	71,1294453
1959	6,648584627	6,758249182	71,2902653
1960	6,439381655	6,796696923	71,2650342
1961	6,248089078	6,322753798	71,5745237
1962	6,723389455	7,018490261	71,1190489
1963	6,47566504	7,005309283	71,1277455
1964	5,364085918	5,715621074	71,9662199
1965	4,833593441	5,503085808	72,102107
1966	4,977743449	5,27805503	72,245302
1967	4,775852856	4,932407722	72,4639063
1968	4,659025427	4,926925572	72,4673605
1969	4,718148298	4,890223707	72,4904755
1970	4,176737079	4,328043479	72,8423171
1971	4,338837965	4,068407866	73,003426
1972	3,586219185	3,201880331	73,5349977
1973	2,591095794	2,706579141	73,8347307
1974	2,262697448	2,192686891	74,1426614
1975	1,606173217	1,542444154	74,5279685
1976	0,916840965	1,31690786	74,66051
1977	0,598492481	0,593224878	75,0829543
1978	0,979292542	0,738347611	74,9988857

Έτος	\hat{k}_t	\hat{k}_t'	\hat{k}_t'
1979	0,092576666	0,123206993	75,3537131
1980	-0,20107838	0,191482731	75,3145251
1981	-0,37446783	-0,17807083	75,5260639
1982	-1,23017197	-0,70996785	75,8280943
1983	-0,77830487	-0,73731857	75,8435483
1984	-1,83375586	-1,82670768	76,4531373
1985	-1,9144854	-2,06948529	76,5874358
1986	-2,37179377	-2,36619994	76,7508194
1987	-3,22817861	-2,96297854	77,076965
1988	-2,57434118	-2,93650372	77,0625653
1989	-3,38257186	-3,24649276	77,2307714
1990	-3,14505193	-3,11910435	77,1617529
1991	-2,89488335	-3,46641821	77,3495833
1992	-3,92513975	-3,95827885	77,61375
1993	-4,1169386	-4,78768622	78,0544249
1994	-4,52936196	-5,1831967	78,2624915
1995	-5,42258017	-5,33963366	78,3444244
1996	-6,30811883	-6,26696261	78,8259328
1997	-6,81751809	-6,74832437	79,073254
1998	-7,55616414	-7,21869652	79,3129965
1999	-7,7687277	-7,87548078	79,6448189
2000	-8,1691229	-7,9716808	79,6931374
2001	-8,61368365	-9,05493654	80,2322913
2002	-9,46058568	-9,37884679	80,3917664
2003	-10,1107818	-9,43284571	80,4182753
2004	-9,94160237	-10,5510156	80,9623028
2005	-10,7406767	-10,7530501	81,0596113
2006	-11,0959348	-11,6881679	81,5061207
2007	-12,1996281	-11,8657458	81,5901963
2008	-13,044754	-12,4287288	81,8552483

Ηλικία	\hat{a}_x	\hat{b}_x
0	-4,58521539	0,09939901
1	-7,46291645	0,10793739
5	-8,17819556	0,09787148
10	-8,26144411	0,07330534
15	-7,36042683	0,04137089
20	-6,96780986	0,0355989
25	-7,00806857	0,03574875
30	-6,90895097	0,03952371
35	-6,65511544	0,0424453
40	-6,24824459	0,04427411
45	-5,78370089	0,04530936
50	-5,31004792	0,0466283
55	-4,84213067	0,0466757
60	-4,38258137	0,04821583
65	-3,90392338	0,05045365
70	-3,41450156	0,05103935
75	-2,89229004	0,05017555
80	-2,35186619	0,04402739

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2008	81,8552483	81,8552483	81,8552483
2009	81,6717078	82,0374329	82,3984355
2010	81,6987985	82,2184382	82,7285608
2011	81,7593263	82,3982749	83,0228395
2012	81,836549	82,5769536	83,2980345
2013	81,9240129	82,7544846	83,5606193
2014	82,0184266	82,9308775	83,7920121
2015	82,1178468	83,106142	84,0381633
2016	82,2210165	83,2802871	84,2782542
2017	82,3270695	83,4533217	84,5131688
2018	82,4353801	83,6252542	84,7435495
2019	82,5454805	83,7741859	84,9698804
2020	82,6570109	83,944078	85,1925372
2021	82,769688	84,112895	85,4118184
2022	82,8832848	84,2806441	85,6279658
2023	82,9976161	84,4473327	85,8411789
2024	83,1125294	84,6129676	86,0516243
2025	83,2278971	84,7775557	86,2594433
2026	83,3436117	84,9411035	86,4647568
2027	83,4595816	85,1036175	86,6676692
2028	83,5757284	85,2651038	86,8682718
2029	83,6699937	85,4255685	87,0666449
2030	83,7863932	85,5850175	87,2628595
2031	83,9027933	85,7434565	87,4569791
2032	84,0191489	85,9008912	87,6490606
2033	84,1354201	86,057327	87,8391555
2034	84,2515716	86,2127693	88,0273104
2035	84,3675722	86,3672234	88,2135679
2036	84,4833939	86,5206944	88,3979671
2037	84,5990117	86,6731873	88,580544

Έτος (προβολής)	Κατώτατο όριο e_0	e_0	Ανώτατο όριο e_0
2038	84,7144032	86,824707	88,7613318
2039	84,8295482	86,9752585	88,9403615
2040	84,9444287	87,1248466	89,1176618
2041	85,0590282	87,2734758	89,2932597
2042	85,1733318	87,4211509	89,4671806
2043	85,287326	87,5678764	89,6394484
2044	85,4009988	87,7136568	89,8100855
2045	85,5143389	87,8584966	89,9791134
2046	85,6273362	88,0024002	90,1465525
2047	85,7399815	88,1453719	90,312422
2048	85,8522664	88,287416	90,4767407
2049	85,9641832	88,4285369	90,6395263
2050	86,0757249	88,5687386	90,8007958
2051	86,1868849	88,7080255	90,9605657
2052	86,2976576	88,8464017	91,118852
2053	86,4080373	88,9838713	91,2756699
2054	86,5180194	89,1204384	91,4310344
2055	86,6275991	89,2561072	91,58496
2056	86,7367724	89,3908817	91,7374606
2057	86,8455356	89,5247659	91,8885501
2058	86,9538851	89,657764	92,0382417

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Alho, J. M. (1990). *Stochastic Methods in Population Forecasting*, International Journal of Forecasting, 6, p. 521-530.
2. Alho, J. M. (1992). *Estimating the Strength of Expert Judgment: the Case of U.S. Mortality Forecasts*, International Journal of Forecasting, 11, p. 157-167.
3. Alho, J. M. and Spencer, B. D. (1990). *Error Models for Official Mortality Forecasts*, Journal of the American Statistical Association, 85, p. 609-616.
4. Bell, W. R. and Monsell, B. C. (1991). *Using Principal Components in Time Series Modelling and Forecasting of Age-Specific Mortality Rates*, Proceedings of the American Statistical Association, Social Statistics Section, p. 154-159.
5. Bell, W. R. (1997). *Comparing and Assessing Time Series Methods for Forecasting Age Specific Demographic Rates*, Journal of Official Statistics, 13, p. 279-303.
6. Carter, L. (1996). *Forecasting U.S. Mortality: A Comparison of Box-Jenkins ARIMA and Structural Time Series Models*, The Sociological Quarterly 37, 1, p. 127-144.
7. Girosi, F. and King, G. (2007). *Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method*, Paper. (15/4/2011 available at <http://gking.harvard.edu/files/lc.pdf>)
8. Gomez de Leon, J. (1990). *Empirical DEA Models to Fit and Project Time Series of Age-Specific Mortality Rates*, unpublished manuscript, Central Bureau of Statistics, Norway.

9. Haberman, S. and Russolillo, M. (2005). *Lee Carter Mortality Forecasting: Application to the Italian Population*, Paper. (15/4/2011 available at http://www.cass.city.ac.uk/data/assets/pdf_file/0005/37157/167ARP.pdf)
10. Horiuchi, S. and Wilmoth, J. (1995). *The Aging of Mortality Decline*, presented at the annual meeting of the Population Association of America, San Francisco, April 6-8.
11. Human Mortality Database (www.mortality.org available at 15/4/2011).
12. LCFIT: Lee Carter Online Modeling and Forecasting (<http://simsoc.demog.berkeley.edu/> available at 15/4/2011).
13. Lee, R. (2000). *The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications*, North American Actuarial Journal, 4, No. 1, p. 80-93.
14. Lee, R. and Carter, L. (1992). *Modeling and Forecasting U.S. Mortality*, Journal of the American Statistical Association, 87, No. 419, p. 659-671.
15. Lee, R. and Carter, L. (1992). *Modeling and Forecasting U.S. Sex Differentials in Mortality*, International Journal of Forecasting, 8, p. 393-411.
16. McNown, R. and Rogers, A. (1989). *Forecasting Mortality: A Parameterized Time Series Approach*, Demography, 26, No. 4, p. 645-660.
17. McNown, R. and Rogers, A. (1992). *Forecasting Cause-Specific Mortality Using Time Series Methods*, International Journal of Forecasting, 8, p. 413-432.
18. Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. and Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, Oxford University Press Inc., NewYork.

19. Wang, Z. J. (2007). *Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee Carter Model*, Paper, Stockholm University, Stockholm, Sweden. (15/4/2011 available at <http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/repl/report.pdf>)
20. Wilmoth, J. (1993). *Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change*, Technical report Department of Demography, University of California, Berkeley. (15/4/2011 available at <http://www.demog.berkeley.edu/~jrw/Papers/LCtech.pdf>)
21. Wilmoth, J. (1996). *Mortality Projections for Japan: A Comparison of Four Methods*, in *Health and Mortality among Elderly Populations*, eds. Graziella Caselli and Alan Lopez, New York: Oxford University Press, p. 266-287.