

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ  
ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ  
ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**Πέτρος Φ. Βαμβακάρης**

Διπλωματική Εργασία  
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και  
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου  
Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την  
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος  
Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς  
Νοέμβριος 2011

РАМЕТЪМО РЕПАА

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ  
ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ  
ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**Πέτρος Φ. Βαμβακάρης**

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς  
Νοέμβριος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ ..... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Κούτρας Μάρκος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Αγιακλόγλου Χρήστος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**STATISTICAL MODELS FOR THE  
MEASUREMENT OF CREDIT RISK**

By  
Peter F. Vamvakaris

MSc Dissertation  
submitted to the Department of Statistics and  
Insurance Science of the University of Piraeus in  
partial fulfilment of the requirements for the degree  
of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece  
November 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΠΑ

*« Οτιδήποτε μετράει δε σημαίνει ότι μπορεί να μετρηθεί  
και οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί δε σημαίνει ότι μετράει ».*

*Albert Einstein*

РАМЕТЪМО РЕПАА



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συντέλεσαν στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Μάρκο Κούτρα για τη γνώση και τις συμβουλές που μου προσέφερε καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Παράλληλα, η συμβολή του στην κατανόηση του υπό διαπραγμάτευση αντικειμένου και τη βελτίωση της παρουσίασης της εργασίας κρίνεται καθοριστική και ιδιαίτερα σημαντική. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Καθηγητή κ. Χρήστο Αγιακλόγλου και Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Πολίτη για τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειας μου, τους φίλους και τους συμφοιτητές μου για την ηθική συμπαράστασή τους.

РАМЕТЪМО РЕПАА

## Περίληψη

Ο πιστωτικός κίνδυνος αποτελεί το παλαιότερο είδος κινδύνου που έχουν να αντιμετωπίσουν τα πιστωτικά ιδρύματα. Τα τελευταία χρόνια και ιδιαίτερα μετά το πρώτο κανονιστικό πλαίσιο του 1988 που τέθηκε από την Επιτροπή της Βασιλείας, τα μοντέλα μέτρησης πιστωτικών κινδύνων έχουν καταστεί απαραίτητα για τη λήψη κρίσιμων αποφάσεων που αφορούν κάθε χρηματοπιστωτικό οργανισμό. Τέτοια μοντέλα χρησιμοποιούν τόσο στατιστικές τεχνικές όσο και εργαλεία της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στις τεχνικές διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου. Για το λόγο αυτό, παρουσιάζονται η δομή και οι λειτουργίες του χρηματοπιστωτικού συστήματος και αναλύεται το πλαίσιο λειτουργίας των πιστωτικών ιδρυμάτων. Επίσης, γίνεται μια ιστορική αναδρομή της μέχρι σήμερα εξέλιξης της περιοχής καθώς και των πιο βασικών στατιστικών υποδειγμάτων και μεθόδων εκτίμησης που έχουν προταθεί για την περιγραφή του πιστωτικού κινδύνου. Τέλος, γίνεται μια συνοπτική εισαγωγή στις βασικές έννοιες, ορισμούς και ιδιότητες των αλυσίδων Markov και στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος που αυτές χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξέλιξης του πιστωτικού κινδύνου καθώς και για την εκτίμηση των παραμέτρων των (πιστωτικών) πινάκων μετάβασης.

РАМЕТЪМО РЕПАА

## Abstract

Credit risk constitutes the oldest type of risk that financial institutions have to face. Over the past years and especially after the first regulatory framework of 1988 set by the Basel Committee on Banking Supervision, risk models have become necessary for critical decision making in every financial institution. These models use statistical techniques, probability theory and stochastic processes.

In the present thesis an integrated approach is presented on credit risk management techniques. For this reason the structure and the operational procedures of the financial system is outlined and the operating framework of the financial institutions is analyzed. Moreover a historical overview of the evolution of this area is provided along with the description of the most essential statistical models and estimation methods that have been suggested for the measurement of credit risk. Finally a brief introduction of basic concepts, definitions and properties of Markov chains is offered and then it is outlined how these can be used for the description of credit risk as well as for the estimation of the (credit) transition matrices.

РАМЕТЪМО РЕПАА

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα .....	xv
Κατάλογος Πινάκων .....	xvii
Κατάλογος Σχημάτων .....	xix
Κατάλογος Συντομογραφιών .....	xxi

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Το πλαίσιο λειτουργίας των πιστωτικών ιδρυμάτων

1.1 Δομή και Λειτουργίες του Χρηματοπιστωτικού Συστήματος .....	1
1.2 Πιστωτικά Ιδρύματα και Διαχείριση Κινδύνων .....	4
1.3 Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία .....	9
α. Βασιλεία I: Το Σύμφωνο του 1988 .....	11
β. Βασιλεία II: Το Νέο Σύμφωνο της Επιτροπής της Βασιλείας .....	12
1.4 Ο Πρώτος Πυλώνας της Βασιλείας II: Ελάχιστη Κεφαλαιακή Επάρκεια .....	14
α. Μέτρηση Πιστωτικού Κινδύνου .....	14
β. Μέτρηση Κινδύνου Αγοράς .....	21
γ. Μέτρηση Λειτουργικού Κινδύνου .....	22
1.5 Ο Δεύτερος και ο Τρίτος Πυλώνας της Βασιλείας II: Εποπτικές Διαδικασίες Εξέτασης Κεφαλαιακής Επάρκειας και Πειθαρχία της Αγοράς .....	24

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Πιστωτικός Κίνδυνος και Στατιστικά Μοντέλα Μέτρησης του

2.1 Εισαγωγή .....	25
2.2 Διάκριση Μοντέλων Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου .....	30
2.3 Βασικές Έννοιες των Μοντέλων Βαθμολόγησης Πιστοληπτικής Ικανότητας...	34
2.4 Περιγραφή των Κύριων Μοντέλων Βαθμολόγησης Πιστοληπτικής Ικανότητας .....	41
α. Διαχωριστική Ανάλυση .....	41
β. Λογιστική Παλινδρόμηση .....	43
γ. Δένδρα Ταξινόμησης .....	45
δ. Μέθοδος του Κοντινότερου Γείτονα .....	47

2.5	Χρήση της Ανάλυσης Επιβίωσης στη Μέτρηση του Πιστωτικού Κινδύνου .....	50
2.6	Υποδείγματα Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου Τύπου Merton .....	55

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Χρήση Πινάκων Μετάβασης σε Μοντέλα Πιστωτικής Διαβάθμισης**

3.1	Εισαγωγή .....	61
3.2	Βασικές Έννοιες και Ορισμοί Αλυσίδων Markov .....	65
3.3	Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες .....	78
	α. Έλεγχος για Συγκεκριμένες Τιμές των Πιθανοτήτων Μετάβασης .....	78
	β. Ένας Έλεγχος Στασιμότητας της Μαρκοβιανής Αλυσίδας .....	79
	γ. Ένας Έλεγχος για το αν η Στοχαστική Διαδικασία Αποτελεί μια Αλυσίδα Markov .....	80
3.4	Μέθοδοι Σημειακών Εκτιμήσεων των Πιθανοτήτων Μετάβασης .....	82
	α. Εκτίμηση με τη Μέθοδο της Κοορτής .....	83
	β. Εκτίμηση με τη Μέθοδο Ρυθμού Αποτυχίας .....	85
	γ. Μη Παραμετρική Μέθοδος Εκτίμησης .....	88
3.5	Διαδικασίες Εύρεσης Γεννήτορα Πίνακα .....	90
3.6	Διαστήματα Εμπιστοσύνης για την Πιθανότητα Χρεοκοπίας.....	96
	α. Εκτίμηση με τη Μέθοδο της Κοορτής .....	98
	β. Εκτίμηση με τη Μέθοδο Ρυθμού Αποτυχίας .....	99
	γ. Μη Παραμετρική Μέθοδος Εκτίμησης .....	100
3.7	Τεχνικές Σύγκρισης Πινάκων Πιστωτικής Διαβάθμισης .....	101
	α. Μέτρα Απόστασης Μεταξύ Δύο Πινάκων με τη Χρήση των Στοιχείων τους.....	102
	β. Μέτρα Βασισμένα στις Ιδιοτιμές του Πίνακα .....	102
	<b>Βιβλιογραφία</b> .....	105



## Κατάλογος Πινάκων

<b>1.4.1</b>	Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας της Standard & Poor's .....	15
<b>1.4.2</b>	Σταθμίσεις Κινδύνου για Κυβερνήσεις με βάση τις Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας .....	16
<b>1.4.3</b>	Σταθμίσεις Κινδύνου για Επιχειρήσεις με βάση τις Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας .....	16
<b>1.4.4</b>	Καθορισμός Παραμέτρων για τη Βασιλεία I και II .....	18
<b>2.3.1</b>	Βασικά Χαρακτηριστικά στα Μοντέλα Βαθμολόγησης Αιτήσεων .....	36
<b>2.3.2</b>	Βασικοί Χρηματοοικονομικοί Δείκτες .....	37
<b>2.3.3</b>	Παράδειγμα Σκορόχαρτου.....	39
<b>2.5.1</b>	Βασικά Χαρακτηριστικά στα Μοντέλα Βαθμολόγησης Συμπεριφοράς.....	51
<b>3.2.1</b>	Πίνακας Μετάβασης 1 έτους .....	68
<b>3.2.2</b>	Πίνακας Μετάβασης 1 έτους για τις κατηγορίες A, B και C .....	69
<b>3.2.3</b>	Πιθανότητες Πιστοληπτικής Βαθμολογίας δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας A .....	73
<b>3.4.1</b>	Ενδεικτικό Σύνολο Δεδομένων Πιστοληπτικών Διαβαθμίσεων .....	82

# РАВЕЉИЧНО ПЕРПА

## Κατάλογος Σχημάτων

1.1.1	Δομή Χρηματοπιστωτικού Συστήματος .....	2
1.2.1	Η Εξέλιξη των Χρηματοοικονομικών Προϊόντων .....	5
1.2.2	Κύριοι Τραπεζικοί Κίνδυνοι .....	6
1.3.1	Σημαντικές Παρεμβάσεις της Επιτροπής της Βασιλείας .....	10
1.3.2	Η Αρχιτεκτονική της Βασιλείας II .....	13
1.4.3	Κατανομή Ζημιών και Αξία σε Κίνδυνο Δανειακού Χαρτοφυλακίου .....	20
2.2.1	Κύριες Τεχνικές Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου .....	31
2.3.1	Κατανομή των Βαθμολογιών Πιστοληπτικής Ικανότητας των «Καλών» και «Κακών» Πιστούχων .....	39
2.4.1	Παράδειγμα Δένδρου Ταξινόμησης .....	46
2.5.1	Βαθμολογίες Αιτήσεων και Συμπεριφοράς .....	50
2.6.1	Παράσταση Υποδείγματος Τύπου Merton.....	57
3.2.1	Διάκριση Στοχαστικών Ανελιξέων .....	65
3.2.2	Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας και Πιθανότητες Μετάβασης .....	70
3.2.3	Δενδροδιάγραμμα – Πιθανές Καταστάσεις Βαθμολογίας .....	72
3.2.4	Παροδικές Συμπεριφορές και Οριακές Πιθανότητες δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας A .....	74
3.2.5	Παροδικές Συμπεριφορές και Οριακές Πιθανότητες δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας B .....	74
3.2.6	Παροδικές Συμπεριφορές και Οριακές Πιθανότητες δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας C .....	75
3.6.1	Πιθανότητες Χρεοκοπίας για τις Βαθμολογίες AAA, AA και A .....	97
3.6.2	Πιθανότητες Χρεοκοπίας για τις Βαθμολογίες BBB, BB και B .....	97
3.6.3	Πιθανότητες Χρεοκοπίας για τη Βαθμολογία CCC .....	97

# РАСЧЕТНО ТЕРА

## Κατάλογος Συντομογραφιών

<b>AMA</b>	Advanced Measurement Approach – Εξελιγμένες Προσεγγίσεις Μέτρησης
<b>BIA</b>	Basic Indicator Approach – Μέθοδος Βασικού Δείκτη
<b>BIS</b>	Bank for International Settlements – Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών
<b>BCBS</b>	Basel Committee on Banking Supervision – Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία ή Επιτροπή της Βασιλείας
<b>CAD</b>	Capital Adequacy Directive Ratio – Δείκτης Κεφαλαιακής Επάρκειας
<b>CGFS</b>	Committee on the Global Financial System – Η Επιτροπή για το Παγκόσμιο Χρηματοπιστωτικό Σύστημα
<b>CI</b>	Confidence Interval – Διάστημα Εμπιστοσύνης
<b>Cs</b>	Characteristics – Χαρακτηριστικά
<b>CPSS</b>	Committee on Payment and Settlement System – Η Επιτροπή για τα Συστήματα Πληρωμών και Διακανονισμών
<b>DD</b>	Distance to Default – Αποστάση από την Πτώχευση
<b>DPT</b>	Default Point – Σημείο Πτώχευσης
<b>EAD</b>	Exposure At Default – Έκθεση έναντι του Αντισυμβαλλομένου σε Περίπτωση Αθέτησης
<b>EDF</b>	Expected Default Frequency – Αναμενόμενη Συχνότητα Αθέτησης
<b>ΕΟΠΑ</b>	Εξωτερικοί Οργανισμοί Πιστοληπτικής Αξιολόγησης
<b>EL</b>	Expected Loss – Αναμενόμενη Ζημιά
<b>ES</b>	Expert Systems – Έμπειρα Συστήματα
<b>FSI</b>	Financial Stability Institute – Οικονομικό Ινστιτούτο Σταθερότητας
<b>GI</b>	Gross Income
<b>IFC</b>	Irving Fisher Committee – Η Επιτροπή «Irving Fisher»
<b>IRB</b>	Internal Ratings Based (Approach) – Προσέγγιση Εσωτερικών Διαβαθμίσεων
<b>IMA</b>	Internal Models Approach – Προσέγγιση Εσωτερικών Μοντέλων
<b>LGD</b>	Loss Given Default – Ποσοστιαία Ζημιά σε Περίπτωση Αθέτησης
<b>MC</b>	Markov Chain – Αλυσίδα Markov ή Μαρκοβιανή Αλυσίδα
<b>MLE</b>	Maximum Likelihood Estimation – Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας
<b>NR</b>	Not Rated – Χωρίς Βαθμολογία

<b>OPM</b>	Option Pricing Models – Μοντέλα Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης
<b>OTC</b>	Over The Counter Market – Μη οργανωμένη ή Εξωχρηματιστηριακή αγορά
<b>ΟΟΣΑ</b>	Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης
<b>PD</b>	Probability of Default – Πιθανότητα Αθέτησης Υποχρέωσης
<b>RWA</b>	Risk-Weighted Assets – Σταθμισμένο κατά τον Κίνδυνο Ενεργητικό
<b>UL</b>	Unexpected Loss – Μη Αναμενόμενη Ζημιά
<b>VaR</b>	Value at Risk – Αξία σε Κίνδυνο
<b>SMEs</b>	Small and Medium Enterprises – Μικρές και Μεσαίες Επιχειρήσεις
<b>STD</b>	Standardized Approach – Τυποποιημένη Μέθοδος
<b>S&amp;P</b>	Standard and Poor's
<b>ΤτΕ</b>	Τράπεζα της Ελλάδας
<b>UL</b>	Unexpected Loss – Μη Αναμενόμενη Ζημιά

РАМЕТЪМО РЕПАА

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Το Πλαίσιο Λειτουργίας των Πιστωτικών Ιδρυμάτων

---

### 1.1 Δομή και Λειτουργίες του Χρηματοπιστωτικού Συστήματος

« Το **χρηματοπιστωτικό σύστημα** είναι ένα σύνολο θεσμών και οικονομικών φορέων που επιτελούν ως βασική λειτουργία τη μεταφορά οικονομικών πόρων από τις πλεονασματικές οικονομικές μονάδες στις ελλειμματικές και συνίσταται στη μετατροπή χρηματικών μέσων σε δανειακό κεφάλαιο » (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)). Από τον προηγούμενο ορισμό γίνεται σαφές ότι κύριος ρόλος του χρηματοπιστωτικού συστήματος είναι η μεταφορά κεφαλαίων από τους αποταμιευτές (χρηματοδότες) στους χρηματοδοτούμενους οι οποίοι δεν διαθέτουν πλεονάζοντα κεφάλαια. Οι συναλασσόμενοι μπορεί να είναι νοικοκυριά, επιχειρήσεις, κυβερνήσεις, κάτοικοι άλλων χωρών κ.α.

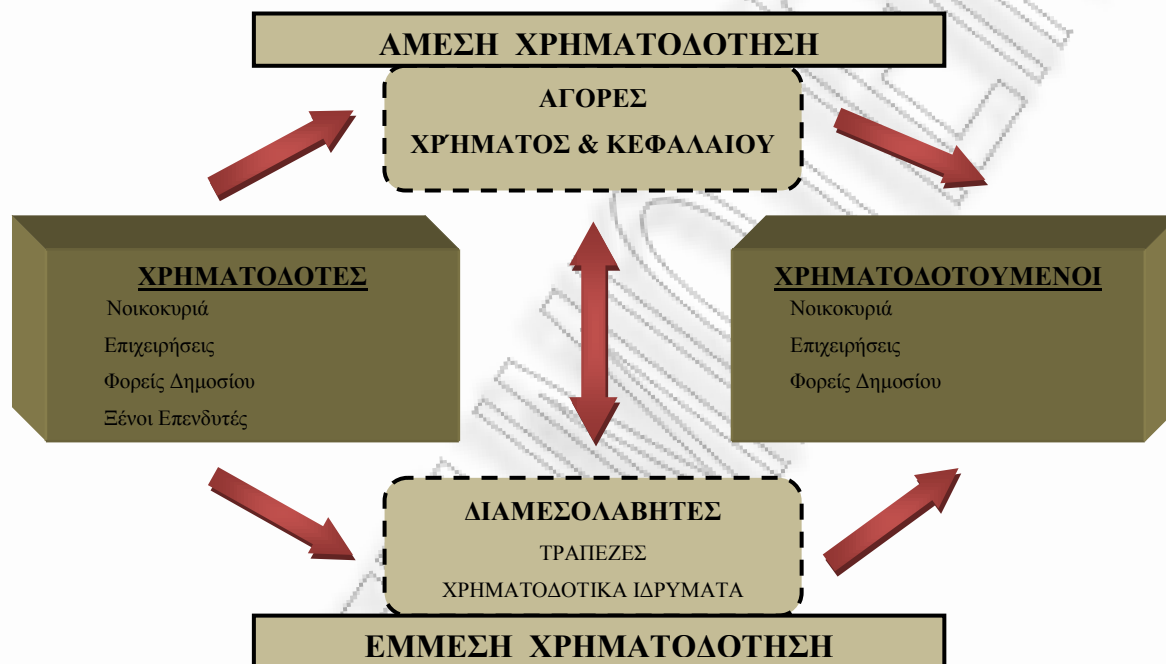
Με την παραπάνω διαδικασία θεωρείται ότι οι περιορισμένοι πόροι μιας οικονομίας κατανέμονται πιο αποτελεσματικά δίνοντας μεγαλύτερες αποδόσεις στους χρηματοδότες, εξασφαλίζοντας χαμηλότερο κόστος δανεισμού στους χρηματοδοτούμενους και τελικά προάγοντας την οικονομική ανάπτυξη. Επίσης, η διαδικασία αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω δύο καναλιών: την άμεση χρηματοδότηση και την έμμεση χρηματοδότηση (Σχήμα 1.1.1).

Με την **άμεση χρηματοδότηση** (*direct financing*) οι χρηματοδότες συναλλάσσοντας χρηματοοικονομικά προϊόντα παρέχουν κεφάλαια στους χρηματοδοτούμενους. Οι συναλλαγές αυτές πραγματοποιούνται μέσω των **χρηματοπιστωτικών αγορών** (*financial markets*). Ο όρος χρηματοπιστωτικές αγορές αναφέρεται στις αγορές όπου οι συμμετέχοντες πωλούν και αγοράζουν χρηματοπιστωτικές απαιτήσεις (*financial claims*) οικονομικών οργανισμών. Αυτές οι απαιτήσεις διαφέρουν όχι μόνον ως προς τους εκδότες τους, αλλά και ως προς τη λήξη τους, τον κίνδυνο αθέτησής τους, τη φορολογική τους μεταχείριση και τη διαπραγματευσιμότητά τους (Θωμαδάκης και Ξανθάκης (2006)). Μια διάκριση των χρηματοπιστωτικών αγορών, με βάση το χρόνο χρηματοδότησης, είναι οι **αγορές χρήματος** (*money markets*), αν πρόκειται για βραχυπρόθεσμη χρηματοδότηση (διάρκεια μικρότερη του



έτους) και οι **αγορές κεφαλαίων** (*capital markets*) αν πρόκειται για μακροχρόνια χρηματοδότηση. Ωστόσο, στην περίπτωση της άμεσης χρηματοδότησης μπορεί να εμφανιστούν προβλήματα επικοινωνίας, μη επαρκούς γνώσης των τεχνικών και των απαραίτητων πληροφοριών ενώ παράλληλα δεν υπάρχει κάποια εγγύηση για τη φερεγγυότητα των αντισυμβαλλομένων.

Σχήμα 1.1.1: Δομή Χρηματοπιστωτικού Συστήματος



Στην **έμμεση χρηματοδότηση** (*indirect financing*) μεταξύ των χρηματοδοτών και των χρηματοδοτούμενων παρεμβάλλονται οι **χρηματοπιστωτικοί διαμεσολαβητές** (*financial intermediaries*). Οι τελευταίοι έχουν κύριο ρόλο να μεταφέρουν κεφάλαια στις ελλειμματικές οικονομικές μονάδες. Ως χρηματοπιστωτικοί διαμεσολαβητές θεωρούνται οι τράπεζες (εμπορικές, επενδυτικές, αναπτυξιακές, συνεταιριστικές κ.α), οι ασφαλιστικές εταιρίες και ταμεία, ανώνυμες εταιρίες παροχής επενδυτικών υπηρεσιών (ΑΕΠΕΥ), εταιρίες επενδύσεων χαρτοφυλακίου, ανώνυμες εταιρίες διαχείρισης αμοιβαίων κεφαλαίων (Α.Ε.Δ.Α.Κ) κ.α. Οι χρηματοοικονομικοί αυτοί οργανισμοί, αν και μπορεί να διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους, έχουν ως κοινό στοιχείο την επίτευξη κέρδους μέσω της παροχής χρηματοοικονομικών υπηρεσιών. Οι χρηματοπιστωτικοί διαμεσολαβητές συμμετέχουν τόσο στις **πρωτογενείς αγορές** (*primary markets*), δηλαδή τις αγορές στις οποίες πραγματοποιούνται οι νέες εκδόσεις χρηματοοικονομικών προϊόντων, όσο και στις

**δευτερογενείς αγορές** (*secondary markets*), δηλαδή τις αγορές στις οποίες τα ήδη εκδοθέντα χρηματοοικονομικά προϊόντα μεταπωλούνται μεταξύ των αντισυμβαλλομένων. Τα προαναφερθέντα χρηματοοικονομικά προϊόντα μπορεί να είναι καταθέσεις, δάνεια, μετοχές, ομόλογα, έντοκα γραμμάτια, εγγυητικές επιστολές, συμφωνίες επαναγοράς, παράγωγα προϊόντα κ.α.

Η χρηματοπιστωτική σφαίρα λοιπόν, περιλαμβάνει πλήθος συμμετεχόντων και χρηματοοικονομικών προϊόντων ενώ οι κύριες λειτουργίες που αυτή επιτελεί θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι (Κουρέτας και Τσούμας (2010)):

1. Η μεταφορά κεφαλαίων διαχρονικά, γεωγραφικά και μεταξύ κλάδων της οικονομίας.
2. Η διευκόλυνση συναλλαγών.
3. Η συγκέντρωση αποταμιεύσεων και υποδιαίρεση συμμετοχών.
4. Η διαχείριση κινδύνων.
5. Η παραγωγή πληροφοριών.
6. Η δημιουργία καλύτερων κινήτρων.
7. Η μετάδοση της νομισματικής πολιτικής στην πραγματική οικονομία.

Οι παραπάνω λειτουργίες έχουν ως αποτέλεσμα την αποτελεσματικότερη κατανομή των οικονομικών πόρων καθώς και το συνδυασμό τους για την ανάπτυξη της οικονομικής δραστηριότητας. Επίσης, παρέχονται οι τρόποι και τα μέσα για τη διευκόλυνση των συναλλαγών. Η παραγωγή πληροφοριών αναφέρεται στις τιμές των χρηματοοικονομικών προϊόντων και οικονομικών δεικτών όπως των επιτοκίων και των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Η γνώση των πληροφοριών αυτών κρίνεται απαραίτητη για την ανάληψη δραστηριοτήτων από τις οικονομικές μονάδες. Τέλος, η σημαντικότερη ίσως λειτουργία για τους συμμετέχοντες στο χρηματοπιστωτικό σύστημα είναι η διαχείριση των κινδύνων, αφού τα αποτελέσματα πολλές φορές μπορεί να είναι καταστροφικά για το σύνολο της οικονομίας και συνίσταται στη διασπορά τους και την ανάληψή τους από αυτούς που μπορούν ή θέλουν να τους αναλάβουν. Για το λόγο αυτό, στο σύγχρονο χρηματοοικονομικό περιβάλλον η λειτουργία αυτή απολαμβάνει της προσοχής των θεσμικών και οικονομικών φορέων που δραστηριοποιούνται σε αυτό και δη των πιστωτικών ιδρυμάτων.

## 1.2 Πιστωτικά Ιδρύματα και Διαχείριση Κινδύνων

Σύμφωνα με το νόμο 3601/01.08.2007 ως **πιστωτικό ίδρυμα** ορίζεται:

α) επιχείρηση, η δραστηριότητα της οποίας συνίσταται στην αποδοχή καταθέσεων ή άλλων επιστρεπτέων κεφαλαίων από το κοινό και στη χορήγηση δανείων ή λοιπών πιστώσεων για λογαριασμό της, ή

β) ίδρυμα ηλεκτρονικού χρήματος<sup>1</sup>.

Τα πιστωτικά ιδρύματα και ως επί το πλείστον οι τράπεζες θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελούν τον «ακρογωνιαίο λίθο» του χρηματοπιστωτικού συστήματος. Από τη σύντομη περιγραφή της δομής του τελευταίου, μπορούμε να καταλάβουμε την πολυπλοκότητα και το ρόλο των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, οι παράμετροι της δομής του χρηματοπιστωτικού συστήματος φαίνεται ότι υπέστησαν σημαντικές αλλαγές οι οποίες πολλές φορές συνοδεύτηκαν με καταστροφικές ζημιές για το σύνολο της οικονομίας. Από το 1970, οι μεταβολές στη δομή του χρηματοπιστωτικού συστήματος και επομένως στη λειτουργία των πιστωτικών ιδρυμάτων ήταν ταχύτατες. Μεταξύ άλλων παρατηρήθηκαν:

- Απελευθέρωση αγορών.
- Αύξηση της ταχύτητας κυκλοφορίας των κεφαλαίων.
- Δημιουργία νέων πιο περίπλοκων χρηματοοικονομικών προϊόντων.
- Χρήση της τεχνολογίας.
- Εξελίξεις στη διαδικασία εποπτείας.
- Διεθνοποιημένη και πιο ανταγωνιστική λειτουργία των πιστωτικών ιδρυμάτων.

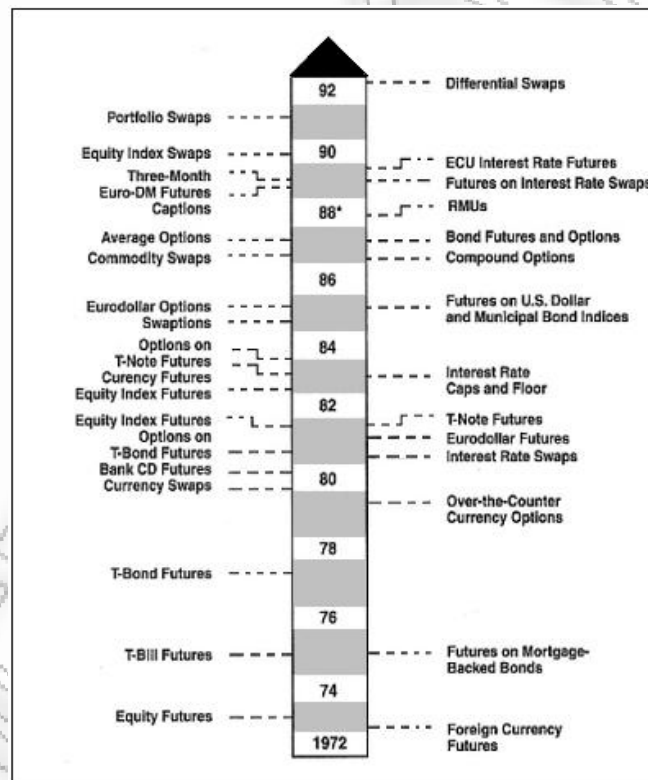
Οι αλλαγές αυτές μετέβαλαν το περιβάλλον και το ρόλο των πιστωτικών ιδρυμάτων ενώ πολλές φορές συνοδεύτηκαν από πτωχεύσεις των τελευταίων και κλυδωνισμούς σε όλο το φάσμα της οικονομικής δραστηριότητας. Η απελευθέρωση των αγορών σε συνδυασμό με την αύξηση της ταχύτητας κυκλοφορίας των κεφαλαίων έθεσαν νέα δεδομένα επηρεάζοντας το σύνολο των οικονομικών δραστηριοτήτων παγκοσμίως. Η εξέλιξη της χρηματοοικονομικής επιστήμης σε συνδυασμό με πλήθος άλλων παραγόντων, είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία νέων πιο περίπλοκων χρηματοοικονομικών προϊόντων (Σχήμα 1.2.1). Αν και η εισαγωγή των

---

<sup>1</sup> Επιχείρηση, εκτός του πιστωτικού ιδρύματος, η οποία εκδίδει μέσα πληρωμής υπό μορφή ηλεκτρονικού χρήματος (ΦΕΚ178, τ1, 1/8/2007).

νέων αυτών προϊόντων πολλές φορές έγινε στη βάση της αντιμετώπισης των κινδύνων και της προστασίας των επενδυτών και επιχειρήσεων, εν τούτοις πολλές φορές η χρήση τους έχει άμεση σχέση με κερδοσκοπική πρακτική, η οποία μεταξύ άλλων δημιούργησε περαιτέρω κινδύνους. Μάλιστα, η διαπραγματεύσή τους εκτός οργανωμένων αγορών (*over the counter* – OTC)<sup>2</sup> πολλές φορές επέτεινε την αδιαφανή και αβέβαιη διασπορά των κινδύνων. Η διεθνοποιημένη λειτουργία των πιστωτικών ιδρυμάτων συνίσταται στην ανάληψη δραστηριοτήτων από τα τελευταία σε πολλές διαφορετικές οικονομίες. Η δραστηριότητα αυτή αύξησε τον ανταγωνισμό μεταξύ των τραπεζών με αποτέλεσμα πολλές φορές την ανάληψη κινδύνων με καταστροφικές ζημιές.

Σχήμα 1.2.1: Η Εξέλιξη των Χρηματοοικονομικών Προϊόντων (1972–1992)



Πηγή: Grouhy et al (2001)

<sup>2</sup> **Οργανωμένη αγορά** είναι η αγορά χρηματοπιστωτικών μέσων, η λειτουργία της οποίας είναι συνεχής ή τακτική και διέπεται από κανόνες. Βασικός άξονας των κανόνων αυτών είναι η τυποποίηση της λειτουργίας και των διαπραγματευόμενων σ' αυτές χρηματοπιστωτικών μέσων.

Οι **μη οργανωμένες αγορές** ή **εξωχρηματιστηριακές αγορές** λειτουργούν βάσει κανόνων ή όρων οι οποίοι τίθενται από τους συμμετέχοντες συναλασσόμενους ή αντισυμβαλλόμενους. Οι κανόνες αυτοί μπορεί να καλύπτουν μόνο τις ανάγκες μιας συγκεκριμένης συναλλαγής. Το καλό τέλος της συναλλαγής εξαρτάται από τους αντισυμβαλλόμενους οι οποίοι αναλαμβάνουν και τον κίνδυνο αθέτησης (πιστωτικό κίνδυνο). Τέτοιες αγορές είναι, για παράδειγμα, οι αγορές ανταλλαγών (*swaps*) και οι αγορές προθεσμικών συναλλαγών (*forward contracts*). (Αγγελόπουλος (2010))

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι τα πιστωτικά ιδρύματα σήμερα έχουν ξεφύγει από τον παραδοσιακό τους ρόλο αν θεωρήσουμε ότι αυτός είναι απλά η μεταφορά κεφαλαίων από τους χρηματοδότες στους χρηματοδοτούμενους. Στο σύγχρονο οικονομικό περιβάλλον, η λειτουργία τους περιλαμβάνει πλήθος λειτουργιών, παραγωγής και διαχείρισης χρηματοοικονομικών προϊόντων και κινδύνων. Η «φύση» λοιπόν των τραπεζών υπέστη πολλές και σημαντικές αλλαγές. Στις μέρες μας, οι τράπεζες αποτελούν μεγάλους και περίπλοκους στη λειτουργία οργανισμούς ενώ η έννοια του κινδύνου βρίσκεται σχεδόν σε όλο το φάσμα των δραστηριοτήτων τους.

Ως **κίνδυνο** μπορούμε να ορίσουμε την (γνωστή εκ των προτέρων) πιθανότητα αρνητικού για το χρηματοδότη ενδεχομένου να υποστεί απώλεια απόδοσης ή/και κεφαλαίου. Ενώ ως **αβεβαιότητα** νοείται η κατάσταση όπου οι πιθανότητες ή/και τα παραπάνω ενδεχόμενα δεν είναι γνωστά (Κουρέτας και Τσούμας (2010)). Με άλλα λόγια, ο **χρηματοοικονομικός κίνδυνος** είναι η πιθανότητα ζημίας μιας θέσης ή μιας τοποθέτησης σε χρηματοπιστωτικά μέσα, λόγω μεταβολής των όρων της θέσης (Αγγελόπουλος (2010)). Προφανώς, ο κίνδυνος δεν είναι επιθυμητό στοιχείο. Ωστόσο, είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τις οικονομικές δραστηριότητες ενώ το κίνητρο ανάληψής του είναι η προσδοκία επίτευξης (μεγαλύτερου) κέρδους.

Όπως περιγράφηκε, τις τελευταίες δεκαετίες τα τραπεζικά ιδρύματα ανταγωνίζονταν μεταξύ τους ολοένα και περισσότερο μειώνοντας τα περιθώρια κέρδους και δανείζοντας μεγαλύτερες ποσότητες κεφαλαίων για μεγαλύτερη διάρκεια σε καταναλωτές χαμηλού «πιστωτικού προφίλ» (Jorion (2009)). Η διεύρυνση των δραστηριοτήτων των τραπεζικών ιδρυμάτων και οι μεταβολές στον τρόπο λειτουργίας τους είχε ως αποτέλεσμα την έκθεσή τους σε νέους κινδύνους και την ανάγκη μέτρησης και διαχείρισής τους. Στο Σχήμα 1.2.2 παρουσιάζονται οι κύριοι τραπεζικοί κίνδυνοι ενώ μια πρώτη γνωριμία με αυτούς δίνεται από τις παρακάτω ερμηνείες.

Σχήμα 1.2.2: Κύριοι Τραπεζικοί Κίνδυνοι



Πηγή: Bessis (2002)

**α. Ο πιστωτικός κίνδυνος (*credit risk*)** ορίζεται ως η πιθανή ή αναμενόμενη ζημία που προέρχεται από την αδυναμία των δανειζόμενων να επιστρέψουν τα κεφάλαια ή/και τους τόκους των κεφαλαίων που δανείστηκαν, δηλαδή από την αδυναμία να εκπληρώσουν τις συμβατικές τους υποχρεώσεις (Αγγελόπουλος (2010)).

**β. Ο κίνδυνος επιτοκίου (*interest rate risk*)** αναφέρεται:

i) στην πιθανότητα μείωσης της τιμής κάποιου χρηματοπιστωτικού μέσου και κατά συνέπεια και στη μείωση της καθαρής θέσης ή των ιδίων κεφαλαίων του πιστωτικού ιδρύματος και  
ii) στην πιθανότητα μείωσης του εισοδήματος του σε μια απρόβλεπτη ή μη επιθυμητή εξέλιξη των επιτοκίων (Αγγελόπουλος (2010)).

**γ. Ο κίνδυνος αγοράς (*market risk*)** σχετίζεται με τις ανεπιθύμητες μεταβολές των συναλλαγματικών ισοτιμιών, των επιτοκίων, των τιμών των μετοχών και γενικά των παραμέτρων της αγοράς.

**δ. Ο κίνδυνος ρευστότητας (*liquidity risk*)** ορίζεται ως η αναμενόμενη ζημία και συνεπώς η μείωση της καθαρής θέσης της τράπεζας, προκύπτουσα από ενδεχόμενη αδυναμία προς (Αγγελόπουλος (2010)):

- έγκαιρη και πλήρη κάλυψη τρεχουσών και μελλοντικών χρηματοοικονομικών υποχρεώσεων,
- άντληση κεφαλαίων για την κάλυψη αυξημένης ζήτησης δανείων ή επενδυτικών επικερδών τοποθετήσεων,
- διατήρηση επικερδών τοποθετήσεων ή/και επαναχρηματοδότηση τοποθετήσεων με υψηλότερο επιτόκιο,
- έγκαιρη και αποδοτική τοποθέτηση μη αναμενόμενων ή έκτακτων εισροών.

**ε. Ο λειτουργικός κίνδυνος (*operational risk*)** αναφέρεται σε πιθανές απώλειες που μπορεί να προκύψουν κυρίως λόγω:

- ανεπάρκειας των συστημάτων, των εσωτερικών ελέγχων και των ανθρώπινων σφαλμάτων,
- ενδεχόμενων δυσχερειών μεταξύ των βασικών παραγόντων της εταιρικής διοίκησης,
- κίνδυνο βλάβης ή ανεπάρκειας των συστημάτων τεχνολογίας πληροφορικής (τεχνολογικός κίνδυνος).

Επίσης, σύμφωνα με την Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία, ο λειτουργικός κίνδυνος αφορά άμεσες ή έμμεσες απώλειες ως αποτέλεσμα προβληματικών εσωτερικών διαδικασιών και συστημάτων, ανθρώπινης συμπεριφοράς, ή εξαιτίας άλλων

εξωτερικών παραγόντων (Δραγγιώτης (2001)). Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι ο λειτουργικός κίνδυνος είναι ίσως ο δυσκολότερος στη μέτρηση και επομένως και στη διαδικασία διαχείρισης του.

**στ. Ο κίνδυνος συναλλάγματος ή συναλλαγματικός κίνδυνος (*foreign exchange risk*)** προκύπτει από την αυξομείωση των συναλλαγματικών ισοτιμιών και ορίζεται ως η αναμενόμενη ζημιά και μεταβολή της καθαρής θέσης ενός πιστωτικού ιδρύματος ή ενός χαρτοφυλακίου λόγω μεταβολής της ισοτιμίας του νομίσματος στο οποίο έχει πραγματοποιηθεί μια επένδυση (θέση *long*) ή στο οποίο έχουν αντληθεί τα κεφάλαια (θέση *short*) ως προς το νόμισμα στο οποίο οι θέσεις αυτές αποτιμώνται (Αγγελόπουλος (2010)).

Αν η αναγνώριση των κινδύνων που έχουν να αντιμετωπίσουν τα πιστωτικά ιδρύματα αποτελεί ένα πρώτο βήμα, αναμφισβήτητα ένα δεύτερο είναι η ποσοτικοποίηση των επιπτώσεων και η διαδικασία διαχείρισής τους. Με τον όρο **διαχείριση κινδύνων (*risk management*)** εννοούμε τις ενέργειες και τα μέτρα που παίρνει ένα πιστωτικό ίδρυμα, ώστε οι αρνητικές επιπτώσεις που μπορεί να επέλθουν από έναν ή περισσότερους κινδύνους να ελαχιστοποιηθούν ή να μηδενιστούν (Αγγελόπουλος (2010)).

Παράλληλα με τις αλλαγές του χρηματοπιστωτικού συστήματος όπως αυτές περιγράφηκαν στην ενότητα αυτή, τα τελευταία χρόνια επιχειρείται σε παγκόσμιο επίπεδο η δημιουργία κουλτούρας διαχείρισης κινδύνων από τα πιστωτικά ιδρύματα. Η λογική αυτή ενισχύθηκε από τα κανονιστικά πλαίσια που πρότεινε η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία τα κύρια σημεία των οποίων παρατίθενται στην επόμενη ενότητα.

### 1.3 Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία

Η Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών (*Bank for International Settlements – BIS*) αποτελεί τον παλαιότερο διεθνή οικονομικό οργανισμό. Ιδρύθηκε το 1930 στο πλαίσιο του σχεδίου Young με σκοπό κυρίως να διευθετήσει τα θέματα αποζημιώσεων που είχαν επιβληθεί στη Γερμανία από τη Συνθήκη των Βερσαλλιών μετά τον Α΄ Παγκόσμιο Πόλεμο αλλά και να προωθήσει τη συνεργασία των Κεντρικών Τραπεζών (λειτουργία που παραμένει κύρια έως σήμερα).

Στα πλαίσια της Τράπεζας Διεθνών Διακανονισμών λειτουργούν κυρίως:

- Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία ή «Επιτροπή της Βασιλείας» (*Basel Committee on Banking Supervision – BCBS*),
- Η Επιτροπή για το Παγκόσμιο Χρηματοπιστωτικό Σύστημα (*Committee on the Global Financial System – CGFS*),
- Η Επιτροπή για τα Συστήματα Πληρωμών και Διακανονισμών (*Committee on Payment and Settlement System – CPSS*),
- Η Επιτροπή «Irving Fisher» (*Irving Fisher Committee – IFC*),
- Το Οικονομικό Ινστιτούτο Σταθερότητας (*Financial Stability Institute – FSI*).

Οι παραπάνω οργανισμοί ασχολούνται με μια σειρά θεμάτων του χρηματοπιστωτικού συστήματος, όπως η παρακολούθηση και αξιολόγηση των χρηματοπιστωτικών αγορών, η προώθηση εποπτικών κανόνων και πρακτικών σε παγκόσμιο επίπεδο, η ενίσχυση της υποδομής των αγορών χρήματος προωθώντας αποτελεσματικά συστήματα πληρωμών και διακανονισμών κ.α.

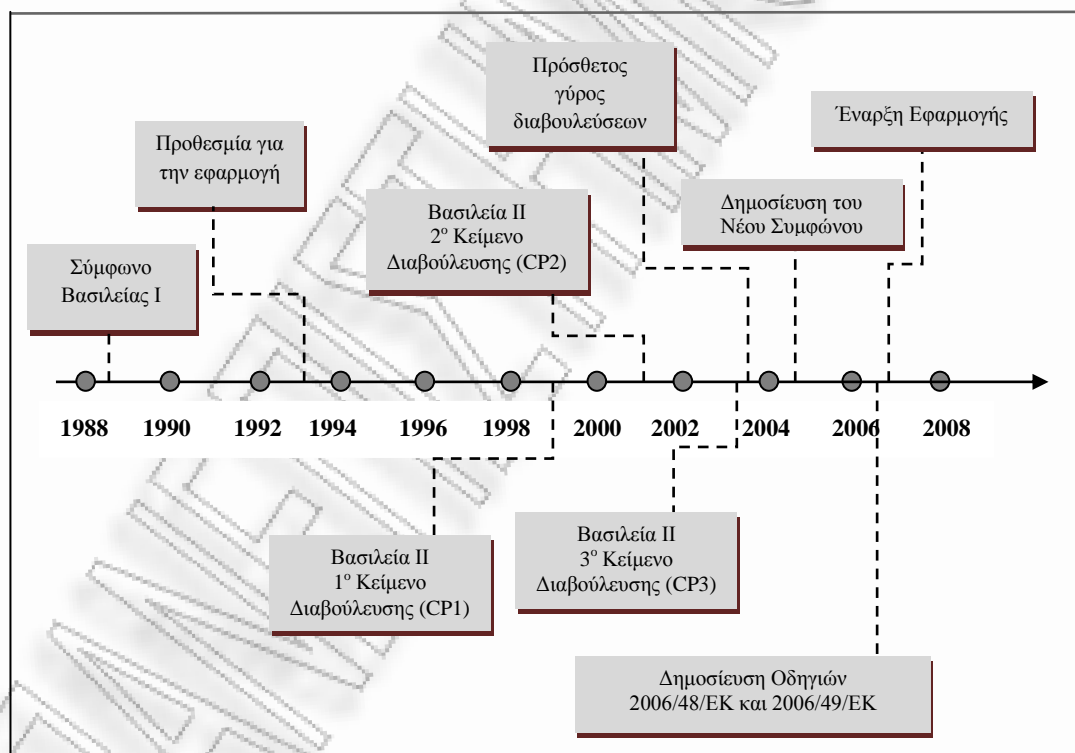
Η Επιτροπή της Βασιλείας συστάθηκε το 1974 από τους διοικητές των κεντρικών τραπεζών των κρατών-μελών της «Ομάδας των 10» (*Group of ten – «G10»*). Είχε προηγηθεί η κατάργηση του διεθνούς νομισματικού συστήματος σταθερών συναλλαγματικών ισοτιμιών του Bretton Woods την οποία ακολούθησαν έντονες διακυμάνσεις στις συναλλαγματικές ισοτιμίες και τα επιτόκια προκαλώντας μια γενικότερη αστάθεια στο χρηματοπιστωτικό σύστημα. Αποκορύφωμα της κατάστασης αυτής ήταν – μεταξύ άλλων – η κατάρρευση της γερμανικής τράπεζας Bankhaus ID Herstatt. Προέκυψε έτσι μεγαλύτερη ανάγκη για περαιτέρω εποπτεία του χρηματοπιστωτικού συστήματος μέσω της διεθνούς συνεργασίας των εποπτικών αρχών ώστε να διασφαλιστεί η σταθερότητά του.



Η Επιτροπή της Βασιλείας δεν αποτελεί διεθνή κυβερνητικό οργανισμό ή εποπτική αρχή και ως εκ τούτου τα αποτελέσματά της δεν έχουν νομική δεσμευτικότητα. Ωστόσο, τα συμπεράσματα και οι αποφάσεις της έχουν ενσωματωθεί στο νομοθετικό πλαίσιο πολλών χωρών. Συνεδριάζει τέσσερις φορές το χρόνο με την παρουσία των κεντρικών τραπεζών των κρατών-μελών<sup>3</sup> της φροντίζοντας να δίνει τις κατευθυντήριες γραμμές σε ένα ευρύ φάσμα οικονομικών θεμάτων και να προάγει τη συνεργασία των μελών της.

Τα τελευταία 20 –και πλέον– χρόνια, η Επιτροπή της Βασιλείας έχει πραγματοποιήσει μια σειρά παρεμβάσεων οι οποίες έχουν αλλάξει σημαντικά το πλαίσιο λειτουργίας και εποπτείας των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (Σχήμα 1.3.1). Το Σύμφωνο του 1988 (Βασιλεία I – *Basel I*), το Νέο Σύμφωνο (Βασιλεία II – *Basel II*), το υπό συζήτηση σύμφωνο της Βασιλείας III (*Basel III*) αλλά και τα πολυάριθμα κείμενα διαβουλεύσεων έχουν συμβάλει καθοριστικά στη μεταβολή του οικονομικού περιβάλλοντος.

Σχήμα 1.3.1: Σημαντικές Παρεμβάσεις της Επιτροπής της Βασιλείας (1988-2008)



<sup>3</sup> Τα κράτη-μέλη της Επιτροπής της Βασιλείας είναι: Αργεντινή, Αυστραλία, Βέλγιο, Βραζιλία, Καναδάς, Κίνα, Γαλλία, Γερμανία, Χονγκ Κονγκ, Ινδία, Ινδονησία, Ιταλία, Ιαπωνία, Κορέα, Λουξεμβούργο, Μεξικό, Ολλανδία, Ρωσία, Σαουδική Αραβία, Σιγκαπούρη, Νότια Αφρική, Ισπανία, Σουηδία, Ελβετία, Τουρκία, Ηνωμένο Βασίλειο, Ηνωμένες Πολιτείες.

Από τις μέχρι τώρα δράσεις της Επιτροπής της Βασιλείας θα μπορούσαμε να πούμε ότι κύριοι άξονες του έργου της είναι (Γκόρτσος (2001)):

- Η διασυνοριακή συνεργασία των τραπεζικών εποπτικών αρχών είτε με άλλες τραπεζικές αρχές είτε με αρχές που εποπτεύουν επιχειρήσεις παροχής επενδυτικών υπηρεσιών.
- Οι μέθοδοι προληπτικής εποπτείας και ελέγχου των τραπεζών.
- Οι υποχρεώσεις των τραπεζών για παροχή πληροφοριών στις εποπτικές τους αρχές και στο επενδυτικό κοινό.
- Η λογιστική απεικόνιση των τραπεζικών συναλλαγών.
- Η προληπτική εποπτεία των σύνθετων χρηματοπιστωτικών ομίλων.

Στις ενότητες που ακολουθούν, περιγράφονται τα δύο κανονιστικά πλαίσια της Επιτροπής της Βασιλείας δίνοντας μεγαλύτερη προσοχή στους τρόπους μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου που αποτελεί το κύριο αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

#### **α. Βασιλεία I: Το Σύμφωνο του 1988**

Το 1988 η Επιτροπή της Βασιλείας προχώρησε στην έκδοση του Συμφώνου της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια (*Basel Capital Accord*) καθιερώνοντας έτσι ένα παγκόσμιο πρότυπο εποπτείας των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Κύριοι στόχοι της Επιτροπής της Βασιλείας ήταν αφενός η σταθερότητα του χρηματοπιστωτικού συστήματος μέσω της ισχυροποίησης της κεφαλαιακής βάσης των πιστωτικών ιδρυμάτων, αφετέρου η διαμόρφωση ενός υγιούς ανταγωνιστικού περιβάλλοντος με την καθιέρωση κοινού εποπτικού πλαισίου για την κεφαλαιακή επάρκεια.

Κύριοι άξονες αυτού του πρώτου συμφώνου είναι η προώθηση μεθόδων υπολογισμού κεφαλαιακών απαιτήσεων έναντι της έκθεσης των πιστωτικών ιδρυμάτων στον πιστωτικό κίνδυνο καθώς και του καθορισμού των στοιχείων των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων (*regulatory capital*) με τα οποία οι τράπεζες έχουν δικαίωμα να εκπληρώνουν τις κεφαλαιακές απαιτήσεις για κάλυψη έναντι του πιστωτικού κινδύνου και των κινδύνων αγοράς (Γκόρτσος (2001)). Αρχικά λοιπόν, καθιερώθηκε ελάχιστη τιμή 8% για τον «**συντελεστή του Cooke**» (*Cooke ratio*) ή **συντελεστή φερεγγυότητας** ο οποίος ορίστηκε ως ο λόγος των ιδίων κεφαλαίων προς τα στοιχεία του ενεργητικού και τα εκτός ισολογισμού στοιχεία, σταθμισμένα σύμφωνα με τον (πιστωτικό) κίνδυνό τους.

Το αρχικό κείμενο του 1988 τροποποιήθηκε αρκετές φορές ακολουθώντας, συνήθως με καθυστέρηση, τις ραγδαίες οικονομικές εξελίξεις οι οποίες μεταφράζονταν σε κινδύνους για τα τραπεζικά ιδρύματα. Ήδη η δεκαετία του '80, χαρακτηρίστηκε από υψηλή μεταβλητότητα των επιτοκίων και των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Για το λόγο αυτό, το 1996 η Επιτροπή της Βασιλείας εισήγαγε και τον κίνδυνο αγοράς στον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων συνυπολογίζοντας και στοιχεία από το χαρτοφυλάκιο συναλλαγών (*trading book*). Ο σχετικός δείκτης μετονομάστηκε πλέον σε **δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας** (*capital adequacy directive ratio – CAD*) ενώ παρέμεινε το όριο του 8%.

Όπως αναφέραμε, το Σύμφωνο της Βασιλείας κατάφερε να εναρμονίσει για πρώτη φορά το διεθνές εποπτικό σύστημα. Ωστόσο, παρουσίαζε σημαντικές ελλείψεις και αδυναμίες οι οποίες πολλές φορές το καθιστούσαν ανεπαρκές. Η κριτική εναντίον του εστιάζονταν – μεταξύ άλλων – στην έλλειψη μιας πιο λεπτομερούς κατηγοριοποίησης του πιστωτικού κινδύνου παρόλο που αυτός αποτελούσε κεντρικό στοιχείο του συμφώνου αυτού. Επίσης, τη δεκαετία του '90 εμφανίστηκαν περιπτώσεις μεγάλων ζημιών σε τραπεζικά ιδρύματα οι οποίες δεν οφείλονταν στον πιστωτικό κίνδυνο ή στον κίνδυνο αγοράς αλλά στο πλαίσιο λειτουργίας τους. Η εισαγωγή λοιπόν του λειτουργικού κινδύνου στον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων είχε καταστεί αναγκαία. Επιπλέον, όσον αφορά τον κίνδυνο χώρας, η διάκριση αφορούσε μόνο στο κατά πόσον τα κράτη ήταν μέλη του ΟΟΣΑ<sup>4</sup> (στάθμιση 0%) ή όχι (στάθμιση 100%). Τέλος, η έλλειψη «υψηλής ευαισθησίας» ως προς τους κινδύνους έδινε τη δυνατότητα στα πιστωτικά ιδρύματα αποφυγής κεφαλαιακών απαιτήσεων (*regulatory capital arbitrage*) αφού τα τελευταία μπορούσαν να αναλάβουν περαιτέρω κινδύνους χωρίς την παράλληλη αύξηση των εποπτικών κεφαλαίων.

## **β. Βασιλεία II: Το Νέο Σύμφωνο της Βασιλείας**

Όπως αναφέραμε, με την πάροδο των χρόνων, το Σύμφωνο του 1988 δέχθηκε πολλές τροποποιήσεις και προσθήκες αφού πολλές φορές το χρηματοπιστωτικό σύστημα φαινόταν να είχε ξεπεράσει τη Βασιλεία I καθώς αυτή αγνοούσε νέους κινδύνους που είχαν εμφανιστεί και στους οποίους ήταν εκτεθειμένες οι τράπεζες. Έτσι λοιπόν, τον Ιούνιο του 1999, η Επιτροπή της Βασιλείας εξέδωσε προς σχολιασμό ένα αναθεωρημένο έγγραφο<sup>5</sup> του Συμφώνου του 1988 ανοίγοντας έτσι μια μεγάλη συζήτηση για αναθεώρηση. Ακολούθησαν

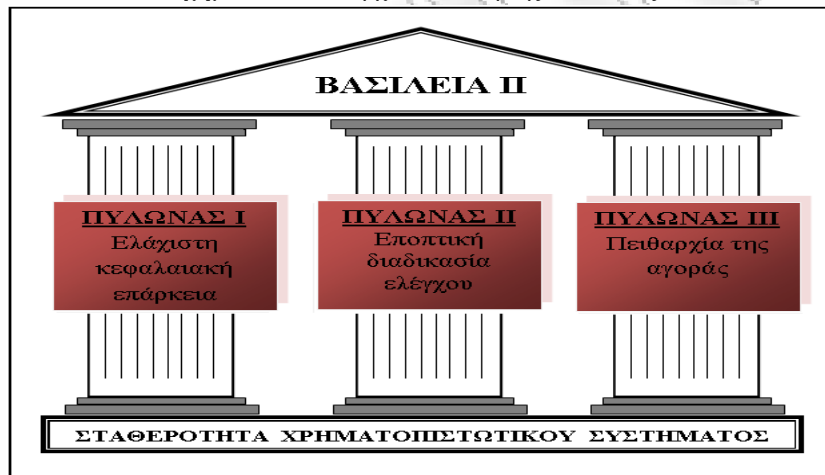
<sup>4</sup> Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης

<sup>5</sup> A New Capital Adequacy Framework

νέα έγγραφα και διαβουλεύσεις με αποτέλεσμα τον Ιούνιο του 2004 να δοθεί στη δημοσιότητα το τελικό κείμενο του νέου πλαισίου, γνωστού και ως Βασιλεία II <sup>6</sup>.

Η βασική ιδέα του νέου συμφώνου παραμένει ίδια με αυτή της Συμφωνίας του 1988. Η διασφάλιση ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων ώστε τα πιστωτικά ιδρύματα να μπορούν να ανταπεξέλθουν στην περίπτωση καταστροφικών ζημιών αποτελεί κύριο άξονα και στο σύμφωνο αυτό. Μάλιστα, γίνεται προσπάθεια ώστε ο δείκτης μέτρησης της κεφαλαιακής επάρκειας να είναι πιο ευαίσθητος στις σταθμίσεις των κινδύνων. Για το λόγο αυτό, εκτός από τον πιστωτικό κίνδυνο και τον κίνδυνο αγοράς (η συμμετοχή του οποίου είχε αρχίσει από το 1996) λαμβάνεται σοβαρά υπόψη και ο λειτουργικός κίνδυνος. Χαρακτηριστικό στοιχείο της δομής της Βασιλείας II είναι οι τρεις πυλώνες που φαίνονται στο Σχήμα 1.3.2.

Σχήμα 1.3.2: Η Αρχιτεκτονική της Βασιλείας II



<sup>6</sup> Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework

## 1.4 Ο Πρώτος Πυλώνας της Βασιλείας II: Ελάχιστη Κεφαλαιακή Επάρκεια

Ο **πρώτος πυλώνας** (*pillar 1*) της Βασιλείας II αναφέρεται στους τρόπους μέτρησης της κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων. Όπως αναφέραμε, στο σχετικό δείκτη συμμετέχει – εκτός από τον πιστωτικό κίνδυνο και τον κίνδυνο αγοράς – και ο λειτουργικός κίνδυνος, ενώ ο ορισμός των κεφαλαίων παραμένει ο ίδιος με αυτόν της Βασιλείας I. Η σχέση λοιπόν με την οποία τα πιστωτικά ιδρύματα υπολογίζουν το δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας είναι:

$$\frac{\text{Εποπτικά Ιδία Κεφάλαια}}{\text{Πιστωτικός Κίνδυνος} + \text{Κίνδυνος Αγοράς} + \text{Λειτουργικός Κίνδυνος}} \geq 8\% . \quad (1.4.1)$$

Από την παραπάνω σχέση εύλογα προκύπτει η απορία με ποιους τρόπους θα μετρώνται οι κίνδυνοι. Η Επιτροπή της Βασιλείας, θέλοντας ο δείκτης να είναι πιο ευαίσθητος στους κινδύνους, προώθησε εναλλακτικές δυνατότητες μέτρησής τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται συνοπτικά οι πλέον συνήθεις τεχνικές μέτρησης των τριών κινδύνων που εμφανίζονται στο τύπο (1.4.1).

### α. Μέτρηση Πιστωτικού Κινδύνου

Η Βασιλεία II προωθεί δύο βασικές μεθόδους εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου. Την **τυποποιημένη μέθοδο** (*standardized approach*) και την **προσέγγιση των εσωτερικών διαβαθμίσεων** (*internal ratings-based approach – IRB*) η οποία διακρίνεται περαιτέρω στη **θεμελιώδη** (*Foundation – IRB*) και στην **εξελιγμένη** (*Advanced – IRB*). Σκοπός και των δύο μεθόδων είναι η μέτρηση του **σταθμισμένου** –κατά τον πιστωτικό κίνδυνο– **ενεργητικού** (*risk-weighted assets – RWA*)<sup>7</sup>.

#### Η Τυποποιημένη Μέθοδος

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο απλή για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου, ενώ είναι υποχρεωτική η διαρκής συνεργασία των τραπεζών με τις εποπτικές αρχές. Σε σύγκριση με τη Βασιλεία I, στο νέο σύμφωνο επιχειρείται η τυποποιημένη μέθοδος να οδηγεί σε μια καλύτερη και πιο λεπτομερή κατηγοριοποίηση του πιστωτικού κινδύνου ο οποίος σχετίζεται

<sup>7</sup> **Σταθμισμένο Ενεργητικό**, καλείται το ενεργητικό που είναι σταθμισμένο ανάλογα με το δείκτη επικινδυνότητας (πιθανότητα μη αποπληρωμής) κάθε στοιχείου του ενεργητικού του πιστωτικού ιδρύματος (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009))

με τα στοιχεία του ενεργητικού των πιστωτικών ιδρυμάτων. Για το λόγο αυτό, δίνεται η δυνατότητα στα τελευταία να χρησιμοποιούν τις βαθμολογίες των Εξωτερικών Οργανισμών Πιστοληπτικής Αξιολόγησης (Ε.Ο.Π.Α) (Χαραλαμπίδης (2001)).

Οι οίκοι πιστοληπτικής αξιολόγησης (*credit rating agencies*) αποτελούν οργανισμούς οι οποίοι – μεταξύ άλλων – βαθμολογούν και αξιολογούν την πιστοληπτική ικανότητα χωρών, δημόσιων ή ιδιωτικών επιχειρήσεων, χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων κ.α καθώς επίσης και χρηματοοικονομικά προϊόντα που εκδίδονται από αυτούς (μετοχές, ομόλογα κ.α). Οι πιο γνωστοί οίκοι πιστοληπτικής αξιολόγησης είναι οι Moody's Investors Service, Standard & Poor's (S&P), Fitch IBCA και Duff and Phelps Credit Rating Co<sup>8</sup>. Στον Πίνακα 1.4.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε μια ενδεικτική κατανομή των βαθμολογιών πιστοληπτικής ικανότητας καθώς και τις αντίστοιχες ερμηνείες τους, όπως αυτές δίνονται από την S&P.

**Πίνακας 1.4.1:** Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας της Standard & Poor's

<b>AAA</b>	Extremely strong capacity to meet financial commitments. Highest Rating.
<b>AA</b>	Very strong capacity to meet financial commitments.
<b>A</b>	Strong capacity to meet financial commitments, but somewhat susceptible to adverse economic conditions and changes in circumstances.
<b>BBB</b>	Adequate capacity to meet financial commitments, but more subject to adverse economic conditions.
<b>BBB-</b>	Considered lowest investment grade by market participants.
<b>BB+</b>	Considered highest speculative grade by market participants
<b>BB</b>	Less vulnerable in the near-term but faces major ongoing uncertainties to adverse business, financial and economic conditions.
<b>B</b>	More vulnerable to adverse business, financial and economic conditions but currently has the capacity to meet financial commitments.
<b>CCC</b>	Currently vulnerable and dependent on favorable business, financial and economic conditions to meet financial commitments.
<b>CC</b>	Currently highly vulnerable.
<b>C</b>	Currently highly vulnerable obligations and other defined circumstances.
<b>D</b>	Payment default on financial commitments.

Note: Ratings from 'AA' to 'CCC' may be modified by the addition of a plus (+) or minus (-) sign to show relative standing within the major rating categories.

**Πηγή:** Ιστοσελίδα της S&P (2010)

<sup>8</sup> Σχετικά με το ρόλο των οίκων πιστοληπτικής αξιολόγησης στο χρηματοπιστωτικό σύστημα, τον τρόπο λειτουργίας τους και τη μεθοδολογία τους μπορεί κανείς να ανατρέξει στους Altman and Rijken (2004), Sy (2004), (2009).

Στη Βασιλεία I, το κριτήριο για κυβερνήσεις κρατών ήταν η διάκριση σε κράτη Ζώνης Α' (κράτη-μέλη ΟΟΣΑ) και σε κράτη Ζώνης Β' (λοιπά κράτη). Αντίθετα, με τη Βασιλεία II η στάθμιση αυτή εξαρτάται από τη βαθμολογία που έχει ο αντισυμβαλλόμενος από έναν αναγνωρισμένο οίκο αξιολόγησης (Πίνακας 1.4.2). Αντίστοιχα, η ίδια πρακτική ακολουθείται και για τις επιχειρήσεις (Πίνακας 1.4.3). Έτσι λοιπόν, σε περίπτωση αναβάθμισης (υποβάθμισης) της πιστοληπτικής βαθμολογίας μιας χώρας, μειώνεται (αυξάνεται) αντίστοιχα και ο συντελεστής στάθμισης με αποτέλεσμα οι τράπεζες να πρέπει να διακρατούν λιγότερα (περισσότερα) εποπτικά κεφάλαια. Διαφορετικές σταθμίσεις δίνονται επίσης για ανοίγματα έναντι νομικών προσώπων δημοσίου τομέα, ανοίγματα που εντάσσονται στο χαρτοφυλάκιο λιανικής τραπεζικής, ανοίγματα που εξασφαλίζονται με ακίνητη περιουσία, απαιτήσεις σε καθυστέρηση, στοιχεία του ενεργητικού που υπάγονται σε κατηγορίες υψηλού κινδύνου κ.α (ΤτΕ (2004α)).

**Πίνακας 1.4.2:** Σταθμίσεις Κινδύνου για Κυβερνήσεις με βάση τις Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας

Βαθμολογίες Κυβερνήσεων	AAA ως AA-	A+ ως A-	BBB+ ως BBB-	BB+ ως B-	κάτω από B-	χωρίς βαθμολογίες
Σταθμίσεις Κινδύνου	0%	20%	50%	100%	150%	100%

**Πίνακας 1.4.3:** Σταθμίσεις Κινδύνου για Επιχειρήσεις με βάση τις Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας

Βαθμολογίες Επιχειρήσεων	AAA ως AA-	A+ ως A-	BBB+ ως BB-	κάτω από BB-	χωρίς βαθμολογίες
Σταθμίσεις Κινδύνου	20%	50%	100%	150%	100%

Με βάση τα παραπάνω είναι σαφές πως η τυποποιημένη μέθοδος είναι πιο ευαίσθητη στον πιστωτικό κίνδυνο κατά τον υπολογισμό του δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας ενώ η διαφοροποίησή της σε σχέση με το Σύμφωνο του 1988 συνίσταται κυρίως στα εξής (Γκαργκάνας (2003)):

- Την αύξηση του αριθμού των κατηγοριών κατατάξης για τη στάθμιση των χρηματοδοτικών ανοιγμάτων.
- Το ρόλο των διαβαθμίσεων από αναγνωρισμένες εταιρείες πιστοληπτικής αξιολόγησης για την κατατάξη των δανείων και εν γένει των πιστοδοτήσεων σε συγκεκριμένη κατηγορία στάθμισης.

- Τη διερεύνηση των μέσων και τεχνικών που λειτουργούν ως αντιστάθμισμα για τη μείωση του πιστωτικού κινδύνου που αναλαμβάνουν οι τράπεζες.

### Η Προσέγγιση Εσωτερικών Διαβαθμίσεων

Η προσέγγιση αυτή, αποτελεί καινοτομία του νέου συμφώνου. Εισηγείται μια περαιτέρω διάσπαση του πιστωτικού κινδύνου στα συστατικά του προωθώντας τις έννοιες της **αναμενόμενης ζημιάς** (*expected loss* – EL) και της **μη-αναμενόμενης ζημιάς** (*unexpected loss* – UL). Ως αναμενόμενη ζημιά ορίζεται ο λόγος της αναμενόμενης ζημιάς από άνοιγμα εξαιτίας της δυνητικής αθέτησης υποχρεώσεων από μέρος ενός αντισυμβαλλομένου ή της απομείωσης της αξίας των εισπρακτέων σε περίοδο ενός (1) έτους προς το ποσό που είναι ανεξόφλητο κατά το χρόνο αθέτησης (ΤτΕ (2007α)). Οι παράμετροι για τον υπολογισμό των ανωτέρω είναι οι εξής:

- **Πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης του πιστούχου** (*probability of default* – PD), η οποία ορίζεται ως πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεων πληρωμής ενός αντισυμβαλλομένου σε περίοδο ενός έτους (ΤτΕ (2007α)).
- **Ποσοστιαία ζημιά σε περίπτωση αθέτησης** (*loss given default* – LGD), η οποία ισούται με το λόγο της ζημιάς από άνοιγμα<sup>9</sup> (*exposure*), εξαιτίας της αθέτησης υποχρεώσεων από μέρος ενός αντισυμβαλλομένου προς το ποσό που είναι ανεξόφλητο κατά το χρόνο της αθέτησης (ΤτΕ (2007α)).
- **Εκθεση έναντι του αντισυμβαλλομένου σε περίπτωση αθέτησης** (*exposure at default* – EAD), η οποία ορίζεται ως το άνοιγμα (σε απόλυτο ποσό) που είναι σε κατάσταση αθέτησης (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)).
- **Εναπομένουσα διάρκεια μέχρι τη λήξη των απαιτήσεων** (*effective maturity* – M), η ληκτότητα μια απαίτησης ή ενός ανοίγματος (ΤτΕ (2007α)).

Στην περίπτωση της θεμελιώδους προσέγγισης μόνο η πιθανότητα αθέτησης υπολογίζεται από τα ίδια τα πιστωτικά ιδρύματα. Αντίθετα, όταν τα τελευταία χρησιμοποιούν την εξελιγμένη προσέγγιση υπολογίζουν όλες τις παραπάνω παραμέτρους με τη χρήση των εσωτερικών τους υποδειγμάτων. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι η χρησιμοποίηση της προσέγγισης εσωτερικών διαβαθμίσεων απαιτεί ειδική άδεια της εποπτεύουσας αρχής εφόσον το πιστωτικό ίδρυμα πληρεί κάποιες πολύ σημαντικές

---

<sup>9</sup> **Χρηματοδοτικό Άνοιγμα** ή **Άνοιγμα**: Στοιχείο, εντός ή εκτός ισολογισμού, που δημιουργεί ή ενδέχεται να δημιουργήσει απαίτηση του πιστωτικού ιδρύματος (ΤτΕ (2007α)).



προϋποθέσεις. Στον Πίνακα 1.4.4 παρουσιάζεται ο τρόπος που υπολογίζονται οι παράμετροι του πιστωτικού κινδύνου για τη Βασιλεία I καθώς και για τις τρεις εναλλακτικές προσεγγίσεις της Βασιλείας II.

Επίσης, σύμφωνα με την Τράπεζα της Ελλάδος, για τον υπολογισμό των *PD*, *LGD* και *EAD* οι κύριες κατηγορίες στις οποίες πρέπει να ενταχθούν τα ανοίγματα των πιστωτικών ιδρυμάτων, είναι (ΤτΕ (2004β)):

- i. Απαιτήσεις από κεντρικές κυβερνήσεις και κεντρικές τράπεζες.
- ii. Απαιτήσεις από τράπεζες και ΕΠΕΥ.
- iii. Απαιτήσεις από επιχειρήσεις.
- iv. Απαιτήσεις λιανικής τραπεζικής.
- v. Απαιτήσεις από συμμετοχή σε μετοχικό κεφάλαιο (μετοχές).
- vi. Τιτλοποιημένες θέσεις.
- vii. Λοιπά στοιχεία του ενεργητικού που δεν αφορούν πιστώσεις.

**Πίνακας 1.4.4:** Καθορισμός Παραμέτρων για τη Βασιλεία I και II

		<b>PD</b>	<b>LGD</b>	<b>EAD</b>
<b>Basel I</b>		Εποπτικά καθορισμένο	Εποπτικά καθορισμένο	Εποπτικά καθορισμένο
<b>Basel II</b>	<b>Τυποποιημένη Μέθοδος</b>	Εξωτερική Αξιολόγηση	Εποπτικά καθορισμένο	Εποπτικά καθορισμένο
	<b>Θεμελιώδης Προσέγγιση Εσωτερικών Διαβαθμίσεων</b>	Εσωτερική Αξιολόγηση	Εποπτικά καθορισμένο	Εποπτικά καθορισμένο
	<b>Εξελιγμένη Προσέγγιση Εσωτερικών Διαβαθμίσεων</b>	Εσωτερική Αξιολόγηση*	Εσωτερική Αξιολόγηση	Εσωτερική Αξιολόγηση

\*Εποπτικά Καθορισμένη Συσχέτιση

Σε ένα διαρκώς μεταβαλλόμενο οικονομικό περιβάλλον, η εκτίμηση των πιο πάνω παραμέτρων αποτελεί ένα πολύ σημαντικό αλλά και δύσκολο έργο για τα πιστωτικά ιδρύματα. Προφανώς, όταν μια τράπεζα δίνει ένα δάνειο δεν περιμένει αυτό να μην αποπληρωθεί. Ωστόσο, γνωρίζει ότι ένα μέρος του δανειακού της χαρτοφυλακίου δεν θα καλυφθεί και βάσει των ιστορικών της στοιχείων είναι σε θέση να προβλέψει το μέσο επίπεδο

ζημιών από τα δάνεια που έχει χορηγήσει. Έτσι λοιπόν, υπολογίζει τις αναμενόμενες ζημιές από τη σχέση:

$$EL = PD \times LGD \times EAD \quad (1.4.2)$$

$$\text{ή} \quad EL = PD \times LGD \quad (1.4.3)$$

ως ποσοστό επί της έκθεσης σε περίπτωση αθέτησης (*EAD*).

Στην περίπτωση που οι ζημιές στο δανειακό χαρτοφυλάκιο μιας τράπεζας ξεπεράσουν την ποσότητα *EL*, η τελευταία έχει να αντιμετωπίσει μη αναμενόμενες ζημιές δηλαδή, ζημιές οι οποίες αντιστοιχούν σε ακραίες –μη κανονικές– συνθήκες. Επομένως, το πιστωτικό ίδρυμα θα πρέπει να διακρατεί εποπτικά κεφάλαια και για την περίπτωση αυτή. Για την εκτίμηση των μη αναμενόμενων ζημιών, οι Claessens and Embrecht (2002) πρότειναν το τύπο:

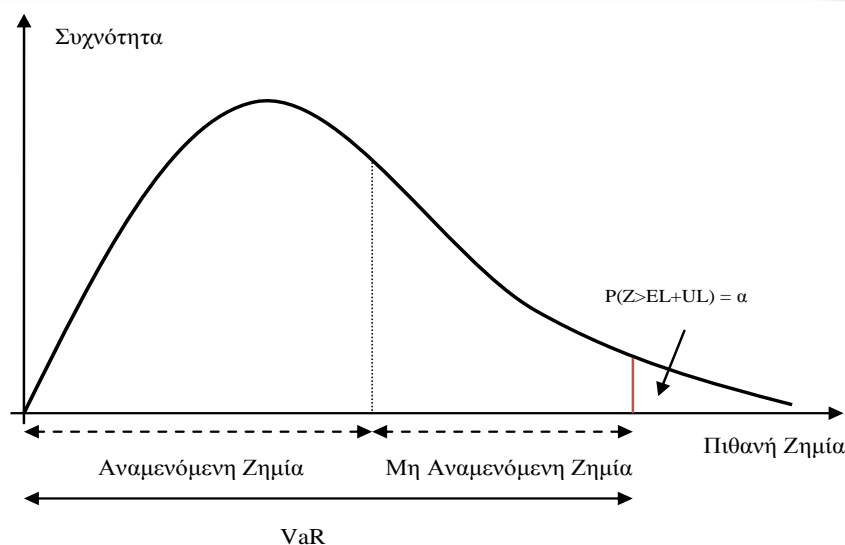
$$UL = \sqrt{EDF - EDF^2} \times EAD \times LGD \times \rho_i / \rho_{bank} \quad (1.4.4)$$

όπου *EDF* είναι η *PD*,  $\rho_i$  η συσχέτιση αθέτησης της χώρας *i* με το συνολικό τραπεζικό χαρτοφυλάκιο και  $\rho_{bank}$  η μέση μεταβιβαζόμενη συσχέτιση αθέτησης του συνολικού τραπεζικού χαρτοφυλακίου.

Το Σχήμα 1.4.3 αφορά την κατανομή των πιθανών ζημιών του δανειακού χαρτοφυλακίου μιας τράπεζας. Σύμφωνα με το γράφημα αυτό, η πιθανότητα να παρατηρηθεί αναμενόμενη ζημιά είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη πιθανότητα της μη αναμενόμενης ζημιάς. Επίσης, η περιοχή μετά το άνω  $\alpha$ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των ζημιών,  $P(Z > z) = \alpha$ , είναι η πιθανότητα η ζημιά του πιστωτικού ιδρύματος να ξεπεράσει το άθροισμα της αναμενόμενης και μη αναμενόμενης ζημιάς (εμφάνιση «εξαιρετικών ζημιών» – *exceptional losses*) και επομένως η υπόλοιπη περιοχή που αναφέρεται στην **αξία σε κίνδυνο** (*value at risk* – VaR) είναι η πιθανότητα η τράπεζα να είναι συνεπής στις υποχρεώσεις της.

Από την περιγραφή της τυποποιημένης μεθόδου καθώς και της προσέγγισης εσωτερικών διαβαθμίσεων της Βασιλείας II, παρατηρείται μια προσπάθεια πιο λεπτομερούς εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου καθώς και μια περαιτέρω ανάπτυξη κουλτούρας διαχείρισής του στα πιστωτικά ιδρύματα. Ωστόσο, δεν λείπει και η κριτική σε αυτές τις δύο μεθόδους (Mandanis and Taylor (2010)). Όσον αφορά την τυποποιημένη μέθοδο, προκύπτουν ερωτήματα σχετικά με το ρόλο και την αξιοπιστία των οίκων πιστοληπτικής αξιολόγησης όπως ο ηθικός κίνδυνος από τις δραστηριότητές τους καθώς και τα κριτήρια αναγνώρισής

Σχήμα 1.4.3: Κατανομή Ζημιών και Αξία σε Κίνδυνο Δανειακού Χαρτοφυλακίου



Πηγή: Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)

τους από τις εποπτικές αρχές. Επίσης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν έχει δοθεί ιδιαίτερη προσοχή για καλύτερη διάκριση των αντισυμβαλλομένων στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας για αυτούς. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι μικρές και μεσαίες επιχειρήσεις (*small and medium enterprises – SMEs*<sup>10</sup>) οι οποίες δεν υπόκεινται σε περαιτέρω διάκριση αφού τα ανοίγματα των τραπεζών προς αυτές σταθμίζονται με συντελεστή 100%.

Όσον αφορά την προσέγγιση εσωτερικών διαβαθμίσεων, όπως έχουμε αναφέρει κάνει μια πιο λεπτομερή διάκριση του πιστωτικού κινδύνου αφού κατηγοριοποιεί τους αντισυμβαλλόμενους με περισσότερα και πιο ποιοτικά κριτήρια. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι τράπεζες που το χρησιμοποιούν να είναι σε θέση να κάνουν μια καλύτερη εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου με αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις να χρειάζεται να διακρατούν λιγότερα εποπτικά κεφάλαια. Ωστόσο, η χρησιμοποίηση των προσεγγίσεων αυτών προϋποθέτει την ανάπτυξη πολύ εξειδικευμένων τεχνικών και επομένως και την ανάλογη γνώση, ενώ είναι απαραίτητη και η κατοχή από τα πιστωτικά ιδρύματα των απαιτούμενων βάσεων δεδομένων. Επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι προσεγγίσεις IRB δίνουν ένα

<sup>10</sup> Η Ευρωπαϊκή Ένωση θεωρεί ως SMEs τις επιχειρήσεις που απασχολούν λιγότερο από 250 εργαζομένους ενώ οι ΗΠΑ λιγότερο από 500 εργαζομένους (Mandanis and Taylor (2010)). Εναλλακτικά, η Τράπεζα της Ελλάδας ορίζει ως μικρή επιχείρηση την επιχείρηση της οποίας ο κύκλος εργασιών δεν υπερβαίνει τα €2,5 εκατομμύρια (ΤτΕ (2007β)).

πλεονέκτημα στις πολύ μεγάλες τράπεζες. Επίσης, σημαντικό ρόλο παίζουν και τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται από τις εποπτικές αρχές ώστε μία τράπεζα να μπορεί να χρησιμοποιήσει τις προσεγγίσεις αυτές. Τέλος, λόγω των διαφορετικών σταθμίσεων κινδύνου και τεχνικών που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι τράπεζες, είναι δύσκολο από τις εποπτικές αρχές να μπορούν εξετάσουν τα αποτελέσματά τους συγκριτικά.

### β. Μέτρηση Κινδύνου Αγοράς

Όπως έχουμε αναφέρει, από το 1996 η Επιτροπή της Βασιλείας συμπεριέλαβε στον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων και τον κίνδυνο αγοράς, δηλαδή τον κίνδυνο που οφείλεται σε διακυμάνσεις επιτοκίων, τιμών χρεογράφων, συναλλάγματος, εμπορευμάτων διαπραγματεύσιμων σε οργανωμένες αγορές κλπ. Στο νέο κανονιστικό πλαίσιο της Βασιλείας, η Επιτροπή προώθησε κάποιες αλλαγές ώστε οι τράπεζες να είναι σε θέση – εκτός από την **τυποποιημένη μέθοδο** (*standardized approach – STD*) – να εφαρμόσουν δικά τους **εσωτερικά υποδείγματα** (*internal models approach – IMA*).

Όσον αφορά την τυποποιημένη μέθοδο θα μπορούσαμε – απλουστευτικά – να πούμε ότι αυτή θεωρεί τον κίνδυνο αγοράς ενός πιστωτικού ιδρύματος ως το άθροισμα του επιτοκιακού κινδύνου (*interest rate risk, IR*), του κινδύνου μετοχικών τίτλων (*equity risk, ER*), του συναλλαγματικού κινδύνου (*foreign currency risk, FX*), του κινδύνου βασικών εμπορευμάτων (*commodity risk, CO*) και του κινδύνου δικαιωμάτων προαίρεσης (*option risk, OP*). Τελικά, ο γενικός τύπος υπολογισμού είναι (Jorion (2009)):

$$MRC_t^{STD} = MRC_t^{IR} + MRC_t^{EQ} + MRC_t^{FX} + MRC_t^{CO} + MRC_t^{OP}. \quad (1.4.5)$$

Όπως και στη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου, δίνεται η δυνατότητα στα πιστωτικά ιδρύματα να αναπτύξουν τα δικά τους υποδείγματα μέτρησης του κινδύνου αγοράς. Προφανώς και σε αυτή την περίπτωση τα κριτήρια χορήγησης της σχετικής άδειας από τις εποπτικές αρχές αφορούν ποιοτικά και ποσοτικά προαπαιτούμενα ενώ θα πρέπει να υποβάλλουν σε τακτά χρονικά διαστήματα τα αποτελέσματα του δοκιμαστικού εκ των υστέρων ελέγχου (*back-testing*) καθώς και τα αποτελέσματα του προγράμματος προσομοίωσης ακραίων καταστάσεων (*stress testing*). Για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών

απαιτήσεων για τον κίνδυνο αγοράς χρησιμοποιείται η έννοια της **μέγιστης αναμενόμενης δυνατικής ζημίας**<sup>11</sup> (*Value at Risk–VaR*) και ο σχετικός τύπος είναι (Jorion (2009)):

$$MRC_t^{MA} = \max \left\{ k \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_{t-1} \right\} + SRC_t \alpha \quad (1.3.6)$$

όπου  $k \geq 3$  είναι ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας και  $SRC_t$  ( $0 < SRC_t < 1$ ) ένας συμπληρωματικός συντελεστής τα οποία καθορίζονται από την εποπτική αρχή.

### γ. Μέτρηση Λειτουργικού Κινδύνου

Όπως έχουμε αναφέρει (ενότητα 1.2) ο ορισμός και κατά συνέπεια η ποσοτικοποίηση του λειτουργικού κινδύνου είναι καθόλα εύκολη. Η έννοια του εν λόγω κινδύνου, αφορά στις ενδεχόμενες ζημιές που μπορεί να προκληθούν από ανεπάρκεια ή λάθη διαδικασιών ή προσώπων, καλύπτοντας και το νομικό κίνδυνο (ΤτΕ (2007γ)). Η εισαγωγή του στο δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας αποτελεί μια σημαντική καινοτομία του κανονιστικού πλαισίου της Βασιλείας II. Για τον προσδιορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων έναντι του κινδύνου αυτού, προωθείται μια παρόμοια προσέγγιση με αυτή του πιστωτικού κινδύνου καθιερώνοντας τρεις εναλλακτικές μεθόδους υπολογισμού.

Όσον αφορά την πρώτη μέθοδο, δηλαδή τη **μέθοδο βασικού δείκτη** (*basic indicator approach – BIA*), τα εποπτικά κεφάλαια υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας έναν οικονομικό δείκτη (αντιπροσωπευτικό των οικονομικών δραστηριοτήτων του πιστωτικού ιδρύματος, π.χ ένας μέσος όρος του *gross income – GI*) με ένα σταθερό συντελεστή  $\alpha$ , η τιμή του οποίου υπολογίζεται στο 15%. Έτσι λοιπόν, ο σχετικός τύπος των κεφαλαιακών απαιτήσεων είναι:

$$K_{BIA} = GI * \alpha \quad (1.3.7)$$

Η δεύτερη μέθοδος που προτείνεται είναι η **τυποποιημένη μέθοδος** (*standardized approach – STD*) η οποία εισηγείται μια περαιτέρω διάκριση του λειτουργικού κινδύνου ανάλογα με το είδος τραπεζικής δραστηριότητας (*business line*<sup>12</sup>). Στην περίπτωση αυτή, οι

<sup>11</sup> Ορίζεται ως η χειρότερη αναμενόμενη απώλεια -σε κανονικές συνθήκες αγοράς και για ένα καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης- στην τιμή (*market value*) μιας αξίας (*asset*) ή ενός χαρτοφυλακίου αξιών που μπορεί να συμβεί κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος (χρονικός ορίζοντας).

<sup>12</sup> Μια διάκριση των *business lines* είναι: *Corporate Finance, Trading and Sales, Retail Banking, Commercial Banking, Payment and Settlement, Retail Brokerage, Asset Management, Agency Services*.

κεφαλαιακές απαιτήσεις προκύπτουν αθροίζοντας τα γινόμενα του οικονομικού δείκτη με τον αντίστοιχο – για κάθε είδος δραστηριότητας – συντελεστή.

$$K_{STD} = \sum_i GI_i * b_i . \quad (1.3.8)$$

Τέλος, μια διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή των **εξελιγμένων προσεγγίσεων μέτρησης** (*advanced measurement approach – AMA*). Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο, τα πιστωτικά ιδρύματα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη την κατανομή των δραστηριοτήτων τους. Τα τελευταία πρέπει επίσης βάσει των ιστορικών στοιχείων τους και αναπτύσσοντας εσωτερικά συστήματα μέτρησης, να υπολογίζουν την πιθανότητα να συμβούν ανάλογες περιπτώσεις στο επόμενο διάστημα έτους (*probability of event*) καθώς και τη μέση απώλεια ανά περίπτωση (*loss given event*). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η χορήγηση άδειας από την εποπτική αρχή ώστε τα πιστωτικά ιδρύματα να μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη συγκεκριμένη μέθοδο απαιτεί την εκπλήρωση αυστηρών ποιοτικών και ποσοτικών κριτηρίων (ΤτΕ (2007δ)). Τέλος, σύμφωνα με το κανονιστικό πλαίσιο, υπάρχει η δυνατότητα συνδυασμού των ανωτέρω προσεγγίσεων, όπως ο συνδυασμός της εξελιγμένης προσέγγισης μέτρησης με άλλες προσεγγίσεις ή ο συνδυασμός της προσέγγισης βασικού δείκτη με τη τυποποιημένη προσέγγιση.

Παρόλο που ο πρώτος πυλώνας φαίνεται να συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον των οικονομολόγων, σύμφωνα με την επιτροπή της Βασιλείας, χωρίς τη γνώση και την παράλληλη εφαρμογή των δύο άλλων πυλώνων (*pillar II* και *pillar III*) δεν μπορεί να υπάρξει μια ολοκληρωμένη «κουλτούρα διαχείρισης κινδύνων» από τη μεριά των πιστωτικών ιδρυμάτων.

## 1.5 Ο Δεύτερος και ο Τρίτος Πυλώνας της Βασιλείας II: Εποπτικές Διαδικασίες Εξέτασης της Κεφαλαιακής Επάρκειας και Πειθαρχία της Αγοράς

Κύριος σκοπός του δεύτερου πυλώνα της Βασιλείας II είναι η εξειδικευμένη αξιολόγηση των πιστωτικών ιδρυμάτων από την εποπτική αρχή καθώς και η συνεχής συνεργασία μεταξύ τους. Κάθε τράπεζα θα πρέπει να κρίνεται με βάση το είδος και το εύρος των δραστηριοτήτων της το οποίο αντανακλά –μεταξύ άλλων– την ποιότητα κερδοφορίας και διακυβέρνησής της. Συνοψίζοντας, κύριες αρχές του πυλώνα αυτού θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι (Salta (2007)):

- Οι τράπεζες θα πρέπει να διαθέτουν κατάλληλους μηχανισμούς για την αξιολόγηση της κεφαλαιακής τους επάρκειας λαμβάνοντας υπόψη το προφίλ κινδύνου τους καθώς και στρατηγική για τη διατήρηση του απαιτούμενου επιπέδου κεφαλαίων.
- Οι εποπτικές αρχές θα πρέπει να αξιολογούν τις εκτιμήσεις των πιστωτικών ιδρυμάτων σχετικά με την κεφαλαιακή τους επάρκεια και τη στρατηγική τους και να λαμβάνουν δράσεις στην περίπτωση κατά την οποία τα σχετικά αποτελέσματα δεν τις ικανοποιούν.
- Οι εποπτικές αρχές θα πρέπει να παρεμβαίνουν προληπτικά ώστε η κεφαλαιακή επάρκεια των τραπεζών «να μην πέφτει» κάτω από το όριο του 8% και σε αντίθετη περίπτωση να αναλαμβάνει σχετικές δράσεις, ενώ παράλληλα
- έχουν τη δυνατότητα να ζητήσουν από τα πιστωτικά ιδρύματα να διατηρούν επίπεδα κεφαλαίου υψηλότερα από το ελάχιστο όριο του 8%.

Ο τελευταίος πυλώνας του κανονιστικού πλαισίου της Βασιλείας II αναφέρεται στη λεγόμενη «πειθαρχία της αγοράς» και σκοπός είναι η σταθερότητα του χρηματοπιστωτικού συστήματος μέσω της πίεσης που θεωρείται ότι μπορούν να ασκήσουν οι αγορές στα πιστωτικά ιδρύματα. Έτσι λοιπόν, οι τράπεζες υποχρεούνται να δημοσιοποιούν στοιχεία και πληροφορίες αναφορικά με το είδος των κινδύνων που αναλαμβάνουν, τον τρόπο διαχείρισης και αντιμετώπισής τους, την κεφαλαιακή επάρκεια καθώς και την ποιότητα της σύνθεσης των ιδίων κεφαλαίων τους (ΤτΕ (2007ε)).

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

---

### Πιστωτικός Κίνδυνος και Στατιστικά Μοντέλα Μέτρησης του

---

#### 2.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε αναφέρει, ο πιστωτικός κίνδυνος σχετίζεται με την αδυναμία των δανειζόμενων να εκπληρώσουν τις συμβατικές τους υποχρεώσεις. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί τον παλαιότερο τύπο κινδύνου ενώ η «εμφάνιση» του ταυτίζεται χρονικά με αυτή του πρώτου είδους δανεισμού. Οι Caouette et al. (1998) αναφέρουν ότι μια αρχική εμφάνιση του πιστωτικού κινδύνου είναι στα 1800 π.χ στην περιοχή της Αρχαίας Βαβυλωνίας. Οι Hower and Sylla (1996) αναφέρουν ότι ο Χαμουραμί, βασιλιάς της Βαβυλωνίας, είχε λάβει διάφορα μέτρα για τη ρύθμιση των πιστώσεων. Ο Lewis (1992), σημειώνει ότι σε έναν βράχο αναγράφεται η φράση: «Ο Mas-Schamach, γιος του Adadrimeni, δανείστηκε δύο αργυρούς σίκλους<sup>13</sup> από την ιέρεια του ήλιου Amat-Schamach, κόρη του Warad-Enlil. Θα πληρώσει το επιτόκιο του Θεού-Ήλιου. Κατά τη στιγμή της συγκομιδής θα αποπληρώσει το ποσό καθώς και τον αντίστοιχο τόκο» Ωστόσο, ο Sasson (1995) αναφέρει ότι υπάρχουν στοιχεία «ύπαρξης πιστωτικού κινδύνου» πριν αυτή τη χρονική περίοδο κατά τις εμπορικές σχέσεις μεταξύ Ινδών και της φυλής Melukha. Επίσης, όπως σημειώνουν οι Thomas et al. (2002) μέχρι την ελληνική και ρωμαϊκή αυτοκρατορία υπήρξε μια πρόωμη ανάπτυξη κάποιου είδους δανεισμού ενώ αιώνες αργότερα, την περίοδο του Μεσαίωνα, σημειώθηκαν πολύ αργοί ρυθμοί ανάπτυξης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εμφάνιση διαφόρων μορφών δανεισμού με ενέχυρο, στην περιοχή της Ευρώπης κατά το 1350μ.χ, οι οποίες αρχικά είχαν φιλανθρωπικό χαρακτήρα στη συνέχεια ωστόσο οι διάφορες εταιρείες αντλούσαν κέρδη από τις δραστηριότητες τους. Στη διάρκεια του 18ου αιώνα, η δυναμική εμφάνιση της μεσαιας τάξης οδήγησε στην εμφάνιση διαφόρων τραπεζών οι οποίες χρηματοδοτούσαν επιχειρήσεις και καταναλωτές. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή αφορούσε ένα μικρό ποσοστό του πληθυσμού της εποχής.

---

<sup>13</sup> Είδος νομίσματος



Οι Thomas et al. (2002) αναφέρουν ότι η εκρηκτική αύξηση της πίστωσης ξεκίνησε από τη δεκαετία του 1920 όπου οι καταναλωτές δανείζοταν χρήματα για την αγορά αυτοκινήτων. Έτσι λοιπόν, οι χρηματοοικονομικές εταιρείες της εποχής, δάνειζαν τους καταναλωτές για να καλύψουν τις ανάγκες τους με αποτέλεσμα την ανάπτυξη της τραπεζικής πίστωσης πριν το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Μετά τα μέσα του προηγούμενου αιώνα, ο δανεισμός για κατανάλωση αυξήθηκε εκ νέου με ταχύτατους ρυθμούς. Η εμφάνιση των πιστωτικών καρτών, τη δεκαετία του '60, κυρίως στις αναπτυγμένες οικονομίες, άλλαξε ριζικά –μεταξύ άλλων– τις καταναλωτικές συνήθειες των ανθρώπων, το ρόλο των πιστωτικών ιδρυμάτων αλλά και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Στο σύγχρονο χρηματοοικονομικό περιβάλλον, η πίστωση αποτελεί κεντρικό στοιχείο των οικονομικών δραστηριοτήτων. Αναφέρεται σε ατομικό επίπεδο, για κάλυψη αναγκών και απόκτηση αγαθών, σε επίπεδο επιχειρήσεων, για την ανάπτυξη τους κ.α, ενώ ολοένα περισσότερα κράτη δανείζονται. Όπως γίνεται κατανοητό, ο κίνδυνος αυτός έχει άμεση σχέση με την έννοια του δανεισμού. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι, χωρίς την πίστωση, οι συμμετέχοντες στο χρηματοπιστωτικό σύστημα δεν θα μπορούσαν να καλύψουν τις ανάγκες τους χρησιμοποιώντας μελλοντικά εισοδήματα (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)). Ο πιστωτικός κίνδυνος αυξήθηκε θεαματικά τη δεκαετία του '90 ως αποτέλεσμα των δραματικών αλλαγών σε οικονομικό, πολιτικό και τεχνολογικό επίπεδο. Ενδεικτικά θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τη διάλυση της ΕΣΣΔ, την επανένωση της Γερμανίας και την εισαγωγή όρων ελεύθερης αγοράς στη Κίνα και την Ανατολική Ευρώπη. Έτσι λοιπόν, οι «παραδοσιακοί» συμμετέχοντες στο χρηματοπιστωτικό σύστημα, δηλαδή οι διάφορες χρηματοοικονομικές εταιρείες, οι ασφαλιστικές εταιρείες, επιχειρήσεις, κυβερνήσεις και προφανώς οι τράπεζες, θα πρέπει να εκτιμούν τον πιστωτικό κίνδυνο που έχουν να αντιμετωπίσουν. Προφανώς, κάθε ένας από αυτούς χρησιμοποιεί διαφορετικές προσεγγίσεις και μεθόδους αντιμετώπισης του. Όσον αφορά τις τράπεζες, η ανάλυση του πιστωτικού κινδύνου που έχουν αναλάβει σχετίζεται με την προθυμία και τη δυνατότητα των πελατών τους να αποπληρώσουν τα δάνεια τους. Η προθυμία αφορά τον χαρακτήρα των δανειζόμενων ενώ η δυνατότητα σχετίζεται –μεταξύ άλλων– με το οικονομικό προφίλ του αντισυμβαλλομένου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση δανειοδότησης μιας επιχείρησης θα πρέπει να αναζητηθούν απαντήσεις σε ερωτήματα όπως ποιες είναι οι εκτιμήσεις του συνόλου της οικονομίας στις οποίες λειτουργεί ή του κλάδου που ανήκει ή ποια η ποιότητα των χρηματοοικονομικών δεικτών της κ.α. Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις σε τέτοιους

είδους ερωτήματα απαιτεί, σε ένα πρώτο στάδιο, τη συγκέντρωση πληροφοριών σχετικά με το προφίλ του αντισυμβαλλομένου (Caouette et al. (1998))

Τα τραπεζικά ιδρύματα λοιπόν, γνωρίζουν ότι ένα μέρος του δανειακού τους χαρτοφυλακίου δεν θα ικανοποιηθεί. Η αβεβαιότητα ωστόσο αυτή, μπορεί να «ελεγχθεί» από τη σωστή και αποτελεσματική ανάπτυξη μεθόδων και εργαλείων μέτρησης και διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου. Ειδικότερα, για την πίστωση των τραπεζικών ιδρυμάτων οι Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009) αναφέρουν ότι κύριες μορφές αβεβαιότητας, είναι:

- Η **στρατηγική αβεβαιότητα**, η οποία αναφέρεται στην άγνοια για τις πραγματικές προθέσεις και το χαρακτήρα του οφειλέτη.
- Η **περιστασιακή αβεβαιότητα**, που προέρχεται από την έλλειψη γνώσης των εξωγενών παραγόντων που αδυνατούν να ελεγχθούν από μέρους του οφειλέτη.
- Η **γνωστική αβεβαιότητα**, που προέρχεται από το λανθασμένο υπολογισμό του ύψους ή αυτής καθεαυτής της πίστωση εκατέρωθεν των μερών.

Όπως έχουμε αναφέρει από το προηγούμενο κεφάλαιο, οι εξελίξεις στο χρηματοπιστωτικό σύστημα των τελευταίων δεκαετιών, έχουν αλλάξει το ρόλο και τη λειτουργία των πιστωτικών ιδρυμάτων. Ο πιστωτικός κίνδυνος, δεν απειλεί μόνο την κερδοφορία τους ή/και την ποιότητα αυτής αλλά και την ίδια την ύπαρξη τους καθώς και την ομαλή λειτουργία ολόκληρης της οικονομίας. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ελέγχεται η ποιότητα του δανειακού χαρτοφυλακίου των τραπεζών και να λειτουργούν βάσει συγκεκριμένων κανόνων και οδηγιών, όπως της Βασιλείας II που έχουμε περιγράψει. Ο Καλφάογλου (1999) αναφέρει ότι οι συνισταμένες του πιστωτικού κινδύνου είναι:

- Ο **κίνδυνος πτώχευσης** ο οποίος αναφέρεται στην πιθανότητα πτώχευσης των πιστούχων ενός πιστωτικού ιδρύματος.
- Ο **κίνδυνος ανοίγματος** ο οποίος αναφέρεται στο συνολικό ποσό που αυτό είναι εκτεθειμένο σε πιστωτικό κίνδυνο.
- Ο **κίνδυνος ανάκτησης σε περίπτωση χρεοκοπίας** (*recovery risk*) ο οποίος αναφέρεται στο ποσοστό ικανοποίησης της τράπεζας από το συνολικό ποσό που είναι εκτεθειμένο σε κίνδυνο σε περίπτωση πτώχευσης του πιστούχου.
- Ο **κίνδυνος περιθωρίων** (*credit spread risk*) ο οποίος αναφέρεται στην πιθανότητα μείωσης της αξίας μιας πιστοδότησης ως αποτέλεσμα της αύξησης των πιστωτικών περιθωρίων και της τιμολόγησης της σε τιμές αγοράς.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι παράλληλα με την ανάπτυξη τεχνικών μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, τις τελευταίες δεκαετίες υπήρξε και μια αντίστοιχη ανάπτυξη των **τεχνικών μείωσής του**, δηλαδή τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο από το πιστωτικό ίδρυμα προκειμένου να μειωθεί ο πιστωτικός κίνδυνος που συνδέεται με ένα ή περισσότερα ανοίγματα που εξακολουθεί να διατηρεί (ΤτΕ (2007στ). Σύμφωνα με την Τράπεζα της Ελλάδος (2007στ) οι αποδεκτές τεχνικές μείωσης του πιστωτικού κινδύνου είναι<sup>14</sup>:

- **Χρηματοδοτούμενη πιστωτική προστασία**, όπου η μείωση του πιστωτικού κινδύνου ενός χρηματοδοτικού ανοίγματος απορρέει από το δικαίωμα του πιστωτικού ιδρύματος, σε περίπτωση αθέτησης υποχρέωσης του αντισυμβαλλομένου ή επέλευσης άλλων συγκεκριμένων πιστωτικών γεγονότων που έχουν σχέση με τον αντισυμβαλλόμενο, να προβεί στη ρευστοποίηση ή να επιτύχει τη μεταβίβαση ή την κατάσχεση ή την παρακράτηση περιουσιακών στοιχείων ή ποσών (εξασφαλίσεων) ή στη μείωση του ποσού του ανοίγματος ή στην αντικατάστασή του με το ποσό της διαφοράς μεταξύ του ύψους του χρηματοδοτικού ανοίγματος και του ύψους μιας υποχρέωσης του πιστωτικού ιδρύματος. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, η πιστωτική προστασία παρέχεται από:
  - τις χρηματοοικονομικές εξασφαλίσεις,
  - συμβάσεις–πλαίσια συμψηφισμού που καλύπτουν συναλλαγές επαναγοράς, δανειοδοσίας ή δανειοληψίας τίτλων ή εμπορευμάτων και/ή άλλες συναλλαγές με όρους κεφαλαιαγοράς<sup>15</sup>,
  - λοιπές μορφές χρηματοδοτούμενης πιστωτικής προστασίας.
- **Μη χρηματοδοτούμενη πιστωτική προστασία**, η μείωση του πιστωτικού κινδύνου ενός χρηματοδοτικού ανοίγματος απορρέει από τη δέσμευση που αναλαμβάνει τρίτος να καταβάλει ένα ποσό σε περίπτωση αθέτησης του πρωτοφειλέτη ή την επέλευση συγκεκριμένων πιστωτικών γεγονότων. Στην περίπτωση αυτή, η πιστωτική προστασία παρέχεται από:
  - εγγυήσεις,
  - πιστωτικά παράγωγα.

<sup>14</sup> Είναι σαφές ότι η υιοθέτηση τεχνικών μείωσης πιστωτικού κινδύνου από τα πιστωτικά ιδρύματα προϋποθέτει την εκπλήρωση συγκεκριμένων κριτηρίων που θέτει η Κεντρική Τράπεζα σύμφωνα με το πλαίσιο της Βασιλείας II.

<sup>15</sup> «**Συναλλαγή με όρους κεφαλαιαγοράς**»: Κάθε συναλλαγή που δημιουργεί άνοιγμα καλυπτόμενο από εξασφάλιση που περιλαμβάνει ρήτρα παρέχουσα στο πιστωτικό ίδρυμα το δικαίωμα να λαμβάνει περιθώριο ασφάλισης σε συχνά χρονικά διαστήματα (ΤτΕ (2007α)).

Από τα προηγούμενα, είναι σαφές ότι ο πιστωτικός κίνδυνος λαμβάνει της ιδιαίτερης προσοχής των συμμετεχόντων στο χρηματοπιστωτικό σύστημα αλλά και των κυβερνήσεων ενώ επιχειρείται μια λεπτομερής μέτρηση αλλά και μια αποτελεσματική διαχείριση του. Εξάλλου, προς την κατεύθυνση αυτή κινείται και η Επιτροπή της Βασιλείας. Στα πλαίσια των ανωτέρω στις επόμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζεται μία διάκριση και περιγραφή των (βασικών) μοντέλων μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου.

## 2.2 Διάκριση Μοντέλων Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου

Οι μέθοδοι μέτρησης και διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου έχουν αλλάξει δραματικά τα τελευταία 30 χρόνια. Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκαν –τόσο σε ακαδημαϊκό όσο και σε πρακτικό επίπεδο– πιο εξελιγμένα μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας περιλαμβάνοντας και την πιστωτική ανάλυση χαρτοφυλακίου. Επίσης, αναπτύχθηκαν νέα μοντέλα τιμολόγησης του πιστωτικού κινδύνου καθώς και μέθοδοι (καλύτερης) μέτρησης των εκτός ισολογισμού στοιχείων. Σύμφωνα με τους Altman and Saunders (1998) οι παραπάνω αλλαγές ήταν αποτέλεσμα των παρακάτω κυρίως λόγων:

- Η παγκόσμια αύξηση του αριθμού πτωχεύσεων.
- Η τάση αποδιαμεσολάβησης των –υψηλής ποιότητας και κεφαλαίων– δανειζόμενων.
- Τα ανταγωνιστικότερα περιθώρια κέρδους από τα δάνεια.
- Η φθίνουσα πορεία των πραγματικών περιουσιακών στοιχείων σε πολλές αγορές.
- Η δραματική αύξηση των εκτός ισολογισμού στοιχείων τα οποία εμπεριέχουν πιστωτικό κίνδυνο, όπως τα πιστωτικά παράγωγα.

Στο Σχήμα (2.2.1) παρουσιάζονται οι κύριες τεχνικές μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου σύμφωνα με τους Caouette et al. (1998). Οι **οικονομετρικές τεχνικές** (*econometric techniques*) αναφέρονται κυρίως σε στατιστικές μεθόδους όπως η **διαχωριστική ή διακριτική ανάλυση** (*discriminant analysis*), **πολλαπλή παλινδρόμηση** (*multiple regression*), **λογιστικό μοντέλο** (*logit model*), **το κανονικό μοντέλο πιθανότητας** (*probit model*) με σκοπό να εκτιμηθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας ως ερμηνευτικές μεταβλητές διάφορους χρηματοοικονομικούς δείκτες και γνωρίσματα των πελατών.

Μια διαφορετική προσέγγιση μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου είναι τα **νευρωνικά δίκτυα** (*neural networks*). Πρόκειται για μια υπολογιστική τεχνική βασισμένη στην τεχνητή νοημοσύνη όπου το σύστημα «μαθαίνει» αυτόματα να αντιμετωπίζει νέες περιπτώσεις δανείων και εκτίμησης κινδύνου. Σύμφωνα με τους Θωμαδάκη και Ξανθάκη (2006) τα κύρια μειονεκτήματα της προσέγγισης αυτής είναι το κόστος εφαρμογής και συντήρησής τους, η ταχύτητα εξαγωγής αποτελεσμάτων (εξαιτίας του πιθανόν μεγάλου αριθμού συσχετίσεων) αλλά και η ισχύ των αποτελεσμάτων αφού τα βήματα που χρησιμοποιούνται δεν εξηγούνται από την οικονομική θεωρία.

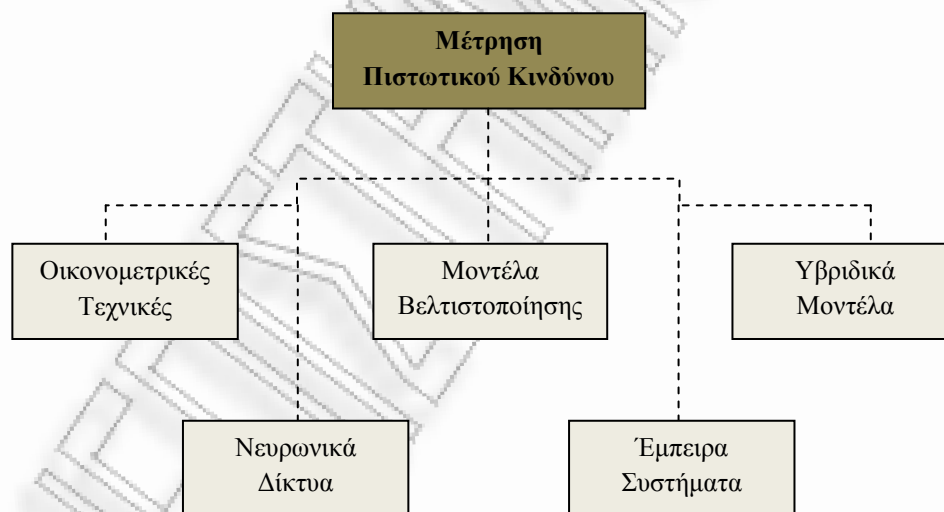
Τα **μοντέλα βελτιστοποίησης** (*optimization models*) είναι μαθηματικές προγραμματικές τεχνικές που σκοπό έχουν να ανακαλύψουν τα γνωρίσματα του πιστούχου

και του δανείου έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι λανθασμένοι δανεισμοί και να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη.

Τα **έμπειρα συστήματα** (*expert systems – ES*) διακρίνονται περαιτέρω σε έμπειρα συστήματα βασισμένα στη γνώση (*knowledge based ES*), έμπειρα συστήματα βασισμένα σε κανόνες (*rule-based ES*) και σε έμπειρα συστήματα ασαφούς λογικής (*fuzzy ES*). Τα συστήματα αυτά βασίζονται στο γνωστικό πεδίο της τεχνητής νοημοσύνης ενώ η εφαρμογή τους ξεκίνησε τη δεκαετία του 1990. Τέλος, εφαρμόζονται από τα τραπεζικά ιδρύματα σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές όπως τα νευρωνικά δίκτυα κ.α (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)).

Τα **υβριδικά μοντέλα** (*hybrid models*) συνδυάζουν, για την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου, την προσέγγιση των δομικών μοντέλων (*structural models*) που βασίζονται στο υπόδειγμα του Merton και την προσέγγιση των κλασσικών μοντέλων που βασίζονται στη στατιστική ανάλυση των χρηματοοικονομικών δεικτών (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)).

Σχήμα 2.2.1: Κύριες Τεχνικές Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου



Αξίζει να σημειώσουμε, ότι οποιαδήποτε από τις παραπάνω τεχνικές επιλέξει ένα πιστωτικό ίδρυμα θα πρέπει να τηρούνται συγκεκριμένες προϋποθέσεις ορισμένες από τις οποίες είναι (Καλφάογλου (1999)):

- Να είναι πλήρως τεκμηριωμένες από θεωρητική και πρακτική σκοπιά.
- Να επαληθεύονται τα αποτελέσματα.
- Να είναι ενσωματωμένα μέσα στο σύστημα λήψης αποφάσεων της τράπεζας.

Η πιστωτική ανάλυση των πρώτων υποδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τα πιστωτικά ιδρύματα ήταν αρκετά υποκειμενική και γίνονταν με τη χρήση διαφόρων **χαρακτηριστικών** (*characteristics – Cs*) των (υποψήφιων) δανειζόμενων. Τα 5 «Cs» είναι ο χαρακτήρας (*character*), το κεφάλαιο (*capital*), η ικανότητα (*capacity*), η εξασφάλιση/ενέχυρο (*collateral*) και οι μακροοικονομικές κυκλικές καταστάσεις (*macroeconomics cycles*). Ωστόσο, τα πιστωτικά ιδρύματα κινήθηκαν σε ποιο αντικειμενικά υποδείγματα. Έτσι λοιπόν, δημιουργήθηκαν μέθοδοι εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου τα οποία χρησιμοποιούν ως μεταβλητές λογιστικά μεγέθη. Οι πιο γνωστές τέτοιες μεθοδολογίες κατασκευής πολυμεταβλητών μοντέλων είναι το μοντέλο γραμμικής πιθανότητας (*linear probability model*), το «μοντέλο *logit*», το «μοντέλο *probit*» και το μοντέλο της διαχωριστικής ανάλυσης. Η βάση των παραπάνω υποδειγμάτων θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι το μοντέλο «*Z-score*» του Altman (1968) το οποίο χρησιμοποιεί ως ερμηνευτικές μεταβλητές το κεφάλαιο κίνησης προς το συνολικό κεφάλαιο (*working capital/total assets*), τα αδιανέμητα κέρδη προς το συνολικό κεφάλαιο (*retained earnings/total assets*), τα κέρδη προ τόκων και φόρων προς το συνολικό κεφάλαιο (*earnings before interest and taxes/total assets*), την αγοραία αξία κεφαλαίων προς τη λογιστική αξία συνολικού παθητικού (*market value equity/book value of total debt*) και τις πωλήσεις προς το συνολικό κεφάλαιο (*sales/total assets*). Το «*Zeta-Model*» αποτελεί συνέχεια του μοντέλου αυτού. Με τη χρήση της διαχωριστικής ανάλυσης, οι Altman et al. (1977) κατασκεύασαν το «*Zeta-model*», επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον τους σε μεγάλες επιχειρήσεις, ενώ από τις αρχικά 27 μεταβλητές, οι οποίες αφορούσαν δείκτες αποδοτικότητας, ρευστότητας, μόχλευσης, μεταβλητότητας κερδών και κεφαλαιοποίησης, κατέληξαν τελικά σε επτά.

Σκοπός όλων αυτών των υποδειγμάτων είναι η εύρεση μιας γραμμικής συνάρτησης που να συνδέει τη γενική φερεγγυότητα του πιστούχου και τις ερμηνευτικές μεταβλητές και τελικά να διαχωρίζει τους δανειζόμενους σε αυτούς που θα ικανοποιήσουν τις υποχρεώσεις τους και σε αυτούς που δεν θα τις ικανοποιήσουν. Ο Martin (1977), σύγκρινε το «μοντέλο *logit*» με την διαχωριστική ανάλυση για να προβλέψει τις χρεοκοπίες τραπεζών την περίοδο 1975–1976 και έλαβε παρόμοια αποτελέσματα. Επίσης, ο West (1985) χρησιμοποίησε τη λογιστική παλινδρόμηση και την ανάλυση παραγόντων (*factor analysis*) για να μελετήσει τις μεταβλητές οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν μια τράπεζα στη χρεοκοπία. Οι Lawrence et al. (1992), χρησιμοποιώντας ένα «*logit* μοντέλο» βρήκαν ότι η πιθανότητα να μην αποπληρώσει κάποιος ένα δάνειο που είχε πάρει για την αγορά τροχόσπιτου, εξηγείται σε μεγάλο βαθμό

από το ιστορικό πληρωμών του πιστούχου. Ωστόσο τα παραπάνω υποδείγματα παρουσιάζουν τρία κύρια μειονεκτήματα (Altman and Saunders (1998)). Πρώτον, βασίζονται κατά κύριο λόγο στα δεδομένα του ισολογισμού τα οποία υπολογίζονται σε διακριτό χρόνο. Δεύτερον, η γραμμική σχέση μεταξύ του δείκτη φερεγγυότητας και των ερμηνευτικών μεταβλητών αποτελεί μια «εύκολη» υπόθεση και τρίτον δημιουργούνται προβλήματα ερμηνείας και σημαντικότητας των ερμηνευτικών μεταβλητών όσον αφορά την αντίστοιχη των αποτελεσμάτων με την οικονομική θεωρία. Έτσι λοιπόν αναπτύχθηκε μια κατηγορία μοντέλων τα οποία θα μπορούσαμε να πούμε ότι βασίστηκαν στο υπόδειγμα των Black and Scholes (1973) και του Merton (1974) αξιοποιώντας τη θεωρία των μοντέλων τιμολόγησης δικαιωμάτων πραίρεσης (*option pricing models* – OPM). Σε επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου θα γίνει μια σύντομη περιγραφή των παραπάνω μοντέλων.

Μια άλλη κατηγορία υποδειγμάτων που βασίζονται σε δεδομένα των αγορών κεφαλαίων είναι τα **μοντέλα ρυθμού θνησιμότητας** (*mortality rate models*). Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούν αναλογιστικές μεθόδους για να εκτιμήσουν τις πιθανότητες χρεοκοπίας καθώς και ιστορικά δεδομένα χρεοκοπίας ομολόγων ανάλογα με την πιστοληπτική διαβάθμισή τους και τη διάρκεια μέχρι τη λήξη ενώ βασίζονται κυρίως στα υποδείγματα του Altman (1988), (1989).

Επίσης, οι Caouette et al. (1998), αναφέρονται σε μια τελευταία κατηγορία υποδειγμάτων αυτή των νευρωνικών δικτύων, η οποία είναι παρόμοια με τη μη γραμμική διακριτική ανάλυση (*non-linear discriminant analysis*). Ωστόσο σημειώνουν ότι η χρήση των νευρωνικών δικτύων δεν αλλάζει «πολύ» την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε σύγκριση με τη διακριτική ανάλυση. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι έχει αναπτυχθεί πλήθος μοντέλων για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και των προϊόντων που διαπραγματεύονται εκτός οργανωμένων χρηματιστηριακών αγορών καθώς επίσης και για τη μέτρηση και διαχείριση του στα πλαίσια της ανάλυσης χαρτοφυλακίου.

Είναι σαφές ότι κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες μοντέλων θα μπορούσε να αποτελέσει ένα αποκλειστικό αντικείμενο μελέτης. Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου επιχειρείται μια συνοπτική περιγραφή των κύριων υποδειγμάτων που κρίνεται ότι παρουσιάζουν ενδιαφέρον και διαπραγματεύονται θέματα στατιστικής αλλά και στοχαστικών διαδικασιών.



## 2.3 Βασικές Έννοιες των Μοντέλων Βαθμολόγησης Πιστοληπτικής Ικανότητας

Η μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου αποτελεί πολύ κρίσιμο θέμα για τα πιστωτικά ιδρύματα. Όπως έχουμε αναφέρει, τα τελευταία πρέπει να μπορούν να εκτιμούν τις «πιθανές» ζημιές που ενδέχεται να προκύψουν από τις δραστηριότητες τους ειδικά αν έχουν επιλέξει την προσέγγιση εσωτερικών διαβαθμίσεων. Ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα κατά τη διαδικασία αυτή, είναι ο καθορισμός **κλίμακας διαβαθμίσεων πιστωτικού κινδύνου**. Σύμφωνα με την ΤτΕ (2007α), ως **σύστημα διαβάθμισης** (*credit rating system*) νοείται το σύνολο των μεθοδολογιών, διαδικασιών, ελέγχων, συστημάτων πληροφορικής και βάσεων δεδομένων που υποστηρίζουν την αξιολόγηση του πιστωτικού κινδύνου και την ταξινόμηση των χρηματοδοτικών ανοιγμάτων σε βαθμίδες κινδύνου ή σε ομάδες με ομοειδή χαρακτηριστικά κινδύνου, καθώς και την ποσοτικοποίηση των παραμέτρων κινδύνου, ήτοι της αθέτησης υποχρέωσης και της ζημιάς για κάθε κατηγορία χρηματοδοτικού ανοίγματος. Ένα παράδειγμα βαθμίδων κινδύνου είναι οι βαθμολογίες πιστοληπτικής διαβάθμισης της Standard and Poor's όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο ενώ η διάρθρωση των συστημάτων διαβάθμισης εξαρτάται από το αν τα χρηματοδοτικά ανοίγματα αφορούν επιχειρήσεις, ιδρύματα, κεντρικές κυβερνήσεις και κεντρικής τράπεζες ή αν πρόκειται για ανοίγματα λιανικής τραπεζικής. Αξίζει να σημειώσουμε, ότι είναι αναγκαίος ο περιοδικός έλεγχος της διαδικασίας ένταξης ενός αντισυμβαλλομένου σε μια βαθμίδα αποτυχίας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την ΤτΕ (2007α) τα πιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει τουλάχιστον ετησίως:

**α.** να επικαιροποιούν την ταξινόμηση των πιστούχων και των πιστοδοτήσεων ή να επανεξετάζουν τα χαρακτηριστικά της ζημιάς και την κατάσταση από άποψη καθυστερήσεων για κάθε ομάδα με ομοειδή χαρακτηριστικά κινδύνου, ανάλογα με το σύστημα διαβάθμισης που έχουν υιοθετήσει,

**β.** να επανεξετάζουν, βάσει αντιπροσωπευτικού δείγματος, την κατάσταση των μεμονομένων ανοιγμάτων σε κάθε ομάδα κινδύνου προκειμένου να διασφαλιστεί ότι τα χρηματοδοτικά ανοίγματα εξακολουθούν να είναι ταξινομημένα στην κατάλληλη για αυτά βαθμίδα ή ομάδα.

Έτσι λοιπόν, τα πιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει, δημιουργώντας συστήματα πιστοληπτικής διαβάθμισης, να είναι σε θέση να αξιολογήσουν τη χορήγηση ή όχι ενός

δανείου σε μικρές ή μεγάλες επιχειρήσεις, σε ιδιώτες για καταναλωτικά, στεγαστικά δάνεια κ.α. Οι βασικές μέθοδοι για την κατάταξη ενός αντισυμβαλλομένου σε κάποια βαθμίδα πιστωτικού κινδύνου είναι η μέθοδος *credit scoring* και η μέθοδος *credit rating*. Η τελευταία αναφέρεται στην κατάταξη σε βαθμίδα κινδύνου κυρίως μεγάλων επιχειρήσεων. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των αντισυμβαλλομένων είναι μικρότερος, πρόκειται ωστόσο για μεγαλύτερα χρηματοδοτικά ανοίγματα. Επίσης, η μέθοδος αυτή ενσωματώνει στοιχεία και πληροφορίες τα οποία δεν μπορούν να συμπεριληφθούν σε ένα αντικειμενικό σύστημα και για το λόγο αυτό εμπεριέχει σε μεγάλο βαθμό την υποκειμενική κρίση (Αγγελόπουλος (2010)).

Όσον αφορά τη μέθοδο *credit scoring*, αυτή αναφέρεται συνήθως στη λιανική τραπεζική. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται κυρίως για χρηματοδοτικά ανοίγματα των τραπεζικών ιδρυμάτων σε πιστούχους για μικρά χρηματικά ποσά και με «παρόμοια» χαρακτηριστικά. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί αντικειμενική, αφού το αποτέλεσμα προκύπτει από τα τυποποιημένα κριτήρια και την προκύπτουσα από αυτά βαθμολόγηση χωρίς την παρέμβαση κάποιου εξειδικευμένου στελέχους (Αγγελόπουλος (2010)). Τα **μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας** (*credit scoring models*) διακρίνονται στις εξής κατηγορίες (Thomas et al.(2000)):

- **Μοντέλα βαθμολόγησης αιτήσεων** (*application scoring models*).
- **Μοντέλα βαθμολόγησης συμπεριφοράς** (*behavioral scoring models*).
- **Μοντέλα βαθμολόγησης κέρδους** (*profit scoring models*).

Όσον αφορά τα μοντέλα βαθμολόγησης αιτήσεων, τα οποία θα περιγράψουμε σε επόμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου, σκοπό έχουν να προβλέψουν αν οι υποψήφιοι πελάτες ενός πιστωτικού ιδρύματος θα εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους έναντι αυτού. Συγκεκριμένα, με τη χρήση των δεδομένων της παρελθοντικής συμπεριφοράς των πελατών ενός τραπεζικού ιδρύματος κατασκευάζονται μοντέλα που διαχωρίζουν το πληθυσμό σε «καλούς» και «κακούς». Οι πελάτες που ανήκουν σε κάθε ένα από αυτούς τους δύο υποπληθυσμούς έχουν συγκεκριμένα (κοινά) χαρακτηριστικά κατασκευάζοντας έτσι κανόνες για την κατάταξη των μελλοντικών πελατών ανάλογα με τη βαθμολογία που αυτοί συγκεντρώνουν.

Ο τρόπος κατασκευής των μοντέλων βαθμολόγησης συμπεριφοράς, είναι παρόμοιος με αυτόν της προηγούμενης κατηγορίας. Τα μοντέλα αυτά δίνουν τη δυνατότητα στα πιστωτικά ιδρύματα να αξιολογούν τη συμπεριφορά των πελατών τους οποιαδήποτε χρονική στιγμή

βασιζόμενα ωστόσο σε διαφορετικά και περισσότερα χαρακτηριστικά σε σχέση με τα μοντέλα βαθμολόγησης αιτήσεων τα οποία σχετίζονται με τη συμπεριφορά των πελατών (αποπληρωμή, καθυστέρηση οφειλής κ.α). Ένας τρόπος κατασκευής τέτοιων μοντέλων είναι με τη χρήση των αλυσίδων Markov όπου καθορίζονται οι δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένας πιστούχος καθώς και η εκτίμηση των πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων αυτών. Επίσης, ένας άλλος τρόπος ο οποίος θα περιγραφεί σε επόμενη ενότητα είναι με τη χρήση της ανάλυσης επιβίωσης.

Τέλος, τα μοντέλα βαθμολόγησης κέρδους αναφέρονται στη δημιουργία υποδειγμάτων τα οποία διαχωρίζουν το πληθυσμό σε «καλούς» και «κακούς», και τελικά την αποδοχή ή την απόρριψη μιας αίτησης δανεισμού, όχι μόνο βάσει των χαρακτηριστικών των μονάδων του αλλά συνυπολογίζοντας το κέρδος που εκτιμάται ότι θα αποφέρουν στα πιστωτικά ιδρύματα.

Όπως έχουμε αναφέρει, για τη δημιουργία ενός μοντέλου βαθμολόγησης αιτήσεων είναι απαραίτητη η γνώση κάποιων γνωρισμάτων των υποψήφιων πελατών ενός πιστωτικού ιδρύματος. Για την κατάταξη λοιπόν σε μια βαθμίδα κινδύνου τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται σχετίζονται με **ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά** καθώς και με τη γενικότερη **συναλλακτική συμπεριφορά** του πιστούχου. Η τελευταία αφορά πληροφορίες σχετικά με τη φερεγγυότητα και τη συνέπεια του αντισυμβαλλομένου. Τα κριτήρια που καλείται να εξετάσει κάθε φορά ένα πιστωτικό ίδρυμα ποικίλουν ανάλογα με το χρηματοδοτικό άνοιγμα. Στον Πίνακα 2.3.1 παρουσιάζονται κάποια κριτήρια που θα πρέπει να ικανοποιεί ο αντισυμβαλλόμενος στην περίπτωση που πρόκειται για τη χορήγηση ενός καταναλωτικού ή στεγαστικού δανείου ή πιστωτικής κάρτας.

**Πίνακας 2.3.1:** Βασικά Χαρακτηριστικά στα Μοντέλα Βαθμολόγησης Αιτήσεων

Χαρακτηριστικά	
Ταχυδρομικός Κώδικας	Άλλα εισοδήματα
Ημερομηνία Γέννησης	Μηνιαίος μισθός
Μόνιμη κατοικία	Λογαριασμός Καταθέσεων
Χρόνος παραμονής στη παρούσα κατοικία	Πιστωτική Κάρτα
Αριθμός προστατευόμενων μελών	Ύψος δανείου
Αριθμός παιδιών	Μηνιαία Έξοδα
Επάγγελμα	Περιουσιακά στοιχεία
Χρόνος εργασίας	Ηλικία Αυτοκινήτου

Στην περίπτωση χρηματοδότησης μιας επιχείρησης η άντληση πληροφοριών σχετίζεται με την οργάνωση και διοίκησή της, την αξιολόγηση του ανθρώπινου δυναμικού της το μερίδιο αγοράς που κατέχει κ.α. Επίσης, για την αξιολόγηση του πιστούχου και την ανάθεση μιας πιστοληπτικής βαθμολογίας χρησιμοποιούνται και ποσοτικά μεγέθη τα οποία – μεταξύ άλλων – αφορούν λογιστικά μεγέθη και τη χρήση χρηματοοικονομικών δεικτών κάποιοι από τους οποίους παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3.2 όπως δίνονται από τους Ζοπουνίδη και Λεμονάκη (2009).

Πίνακας 2.3.2: Βασικοί Χρηματοοικονομικοί Δείκτες

Όνομασία Δείκτη	Τύπος Υπολογισμού
Μικτού Περιθωρίου Κέρδους	$\frac{\text{Μικτά Κέρδη}}{\text{Πωλήσεις}}$
Καθαρού Περιθωρίου Κέρδους	$\frac{\text{Καθαρά Κέρδη}}{\text{Πωλήσεις}}$
Βιομηχανικής Αποδοτικότητας	$\frac{\text{Κέρδη προ Τόκων και Φόρων}}{\text{Σύνολο Ενεργητικού}}$
Χρηματοοικονομικής Αποδοτικότητας	$\frac{\text{Καθ ρ Κέρδη}}{\text{Ιδία Κεφάλαια}}$
Ταχύτητας Κυκλοφορίας Ενεργητικού	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Σύνολο Ενεργητικού}}$
Ταχύτητας Κυκλοφορίας Ιδίων Κεφαλαίων	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Ιδία Κεφάλαια}}$
Ταχύτητας Κυκλοφορίας Παγίων	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Πάγιο Ενεργητικό}}$
Ταχύτητας Κυκλοφορίας Βραχυπρόθεσμων Υποχρεώσεων	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Βραχυπρόθεσμες Υποχρεώσεις}}$
Γενικής Ρευστότητας	$\frac{\text{Κυκλοφορούν Ενεργητικό}}{\text{Βραχυπρόθεσμες Υποχρεώσεις}}$
Άμεσης Ρευστότητας	$\frac{\text{Κυκλοφορούν Ενεργητικό – Αποθέματα}}{\text{Βραχυπρόθεσμες Υποχρεώσεις}}$
Ανακύκλωσης Αποθεμάτων	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Αποθέματα}}$
Ταχύτητας Κυκλοφορίας Απαιτήσεων	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Απαιτήσεις}}$
Ταχύτητας Κυκλοφορίας Κεφαλαίου Κίνησης	$\frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Κυκλοφορούν Ενεργητικό – Βραχυπρόθεσμες Υποχρεώσεις}}$
Ικανότητας Δανεισμού	$\frac{\text{Ιδία Κεφάλαια}}{\text{Συνολικές Υποχρεώσεις}}$
Φερεγγυότητας	$\frac{\text{Συνολικές Υποχρεώσεις}}{\text{Συνολικό Ενεργητικό}}$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι πολλές φορές τα πιστωτικά ιδρύματα παίρνουν πληροφορίες για τον κάθε πιστούχο συνεργαζόμενα με τα **γραφεία πίστης** (*credit bureau or credit reference agencies*). Ο ρόλος και ο τρόπος λειτουργίας των γραφείων αυτών διαφέρουν ανάλογα με τη χώρα που εδρεύουν. Στην Ελλάδα, η Τειρεσία ΑΕ αποτελεί ένα γραφείο πίστης το οποίο συνεργάζεται με τα πιστωτικά ιδρύματα παρέχοντάς τους πληροφορίες σχετικά με το «πιστωτικό παρελθόν» ενός ιδιώτη ή μιας επιχείρησης.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι τα πιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει να ελέγχουν μια σειρά κριτηρίων για τη χορήγηση ή όχι ενός δανείου. Θα πρέπει δηλαδή να αξιολογούν την ικανότητα του αντισυμβαλλομένου να αποπληρώσει το ποσό που θέλει να δανειστεί. Συλλέγοντας λοιπόν τις απαραίτητες πληροφορίες–δεδομένα τα πιστωτικά ιδρύματα προχωρούν στην κατασκευή μοντέλων βαθμολόγησης πιστολητικής ικανότητας. Σκοπός των μοντέλων αυτών είναι ο διαχωρισμός των πιστούχων σε «καλούς» και «κακούς», δηλαδή σε αυτούς που είναι ικανοί να αποπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους και αυτούς που δεν είναι<sup>16</sup>. Με βάση τα χαρακτηριστικά των δύο ομάδων, κάθε νέος υποψήφιος δανειολήπτης κατατάσσεται σε μία από αυτές. Τα μοντέλα αυτά οδηγούν στη δημιουργία των «**σκορόχαρτων**» (*scorecards*). Για κάθε χαρακτηριστικό υπάρχει μια **βαθμολογία** (*score*) η οποία αθροίζεται για το σύνολο των κριτηρίων ενός πιστούχου. Στον Πίνακα 2.3.3 παρουσιάζεται ένα (αρκετά απλοποιημένο) τέτοιο σκορόχαρτο. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι πρόκειται για ένα άτομο ηλικίας 20 ετών που κατοικεί με τους γονείς του, ενδιαφέρεται να αγοράσει ένα μεταχειρισμένο αυτοκίνητο και έχει κάποια δικαστική απόφαση (*country court judgements – CCJs*) με μηδενική αξία τότε η βαθμολογία που συγκεντρώνει είναι 101 (=14+22+33+32).

Κρίσιμο σημείο είναι η τιμή του **σημείου αποκοπής** (*cut-off score*) δηλαδή το οριακό σημείο το οποίο διαχωρίζει τις δύο ομάδες. Βαθμολογία μεγαλύτερη του σημείου αυτού οδηγεί στο χαρακτηρισμό του αντισυμβαλλομένου ως «καλού» ενώ στην αντίθετη περίπτωση ο πιστούχος χαρακτηρίζεται ως «κακός». Ένα πιστωτικό ίδρυμα μπορεί να ακολουθεί μια αυστηρή πολιτική ως προς το σημείο αποκοπής και έτσι να μην αποδέχεται καμία αίτηση η οποία συγκεντρώνει βαθμολογία –έστω και ελάχιστα– μικρότερη αυτού. Αντίστοιχα, μπορεί να ορίσει ένα διάστημα τιμών γύρω από το σημείο αποκοπής και οι αιτήσεις με βαθμολογία στο διάστημα αυτό να εξετάζονται περαιτέρω.

<sup>16</sup> Σε ένα πρώτο στάδιο ανάλυσης του δείγματος και κατασκευής των μοντέλων είναι δυνατός ο διαχωρισμός των πιστούχων σε παραπάνω από τις δύο αυτές κατηγορίες, περιλαμβάνοντας και τις κατηγορίες «μη-καθορισμένο» ή/και «ανεπαρκή εμπειρία».

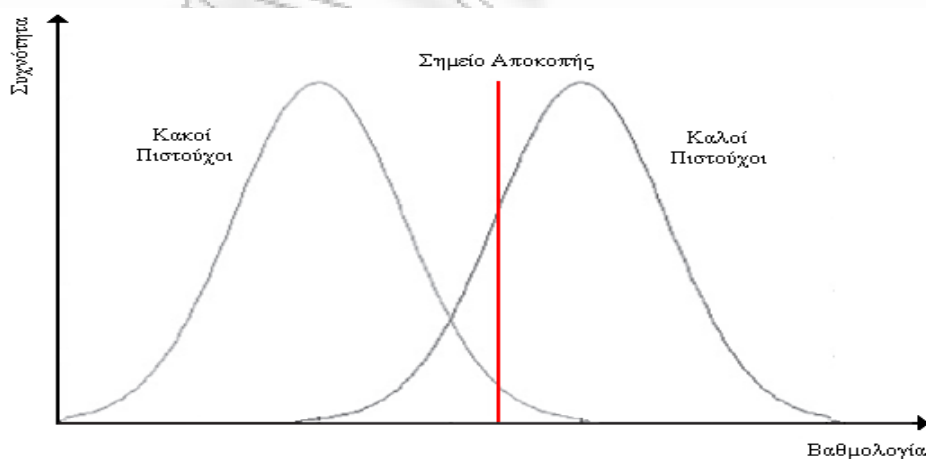
Πίνακας 2.3.3 : Παράδειγμα Σκορόχαρτου

Προφίλ Κατοικίας		Ηλικία		Σκοπός Δανείου		Αξία των CCJs	
Ιδιοκτήτης	36	18-25	22	Αγορά καινούργιου αυτοκινήτου	41	Μηδενική	32
Ενοίκιο	10	26-35	25	Αγορά μεταχειρισμένου αυτοκινήτου	33	£1-£299	17
Κατοικεί με τους γονείς του	14	36-43	34	Ανακαίνιση Οικείας	36	£300-£599	9
Άλλο	20	44-52	39	Διακοπές	19	£600-£1199	-2
Δεν απάντησε	16	53+	49	Άλλο	25	£1200+	-17

Πηγή: Thomas et al (2002)

Ωστόσο, πολλές φορές μία αίτηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως «καλή» με βάση το σημείο αποκοπής αλλά οι αρνητικές πληροφορίες από το γραφείο πίστης, π.χ προηγούμενης χρεοκοπίας του πελάτη, να οδηγήσουν τελικά στην απόρριψή της. Στο Σχήμα 2.2.1 παρουσιάζεται η κατανομή των βαθμολογιών πιστοληπτική ικανότητας των «καλών» και «κακών» πιστούχων καθώς και στο σημείο αποκοπής. Αξίζει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν πιστούχοι οι οποίοι έχουν χαρακτηριστεί ως «καλοί», ωστόσο βάσει του σημείου αποκοπής δεν πρέπει να γίνει αποδεκτή η (σχετική) αίτησή τους.

Σχήμα 2.3.1: Κατανομή των Βαθμολογιών Πιστοληπτική Ικανότητας των «Καλών» και «Κακών» Πιστούχων



Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι τα πιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει να επιλέξουν την «κατάλληλη μέθοδο» για την κατασκευή των μοντέλων βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας. Όπως αναφέραμε, τα μοντέλα αυτά σκοπό έχουν να διαχωρίσουν τον πληθυσμό και να μπορούν να κατατάξουν του υποψήφιους πελάτες μιας τράπεζας έτσι ώστε να ληφθεί η

απόφαση συνεργασίας ή όχι των δύο μερών. Είναι λογικό ότι όποια μέθοδος κατασκευής μοντέλων και αν επιλεγθεί, γίνεται η παραδοχή της διατήρησης της ίδιας συμπεριφοράς των πελατών. Έτσι λοιπόν, θεωρείται ότι τα συμπεράσματα και οι κανόνες που έχουμε εξάγει από το δείγμα μας παραμένουν τα ίδια για όλο το πληθυσμό, δηλαδή για κάθε υποψήφιο πελάτη ενός πιστωτικού ιδρύματος. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειώσουμε ότι κατά τη στατιστική ανάλυση και τη δημιουργία μοντέλων από το επιλεγμένο δείγμα μπορεί να προκύψουν «κλασσικά προβλήματα» όπως ο χειρισμός **ακραίων τιμών** (*extreme values*) και **ελλειπουσών τιμών** (*missing values*). Σε κάθε περίπτωση το δείγμα το οποίο χρησιμοποιείται θα πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, δηλαδή των πιθανών υποψήφιων πελατών μιας τράπεζας, και παράλληλα θα πρέπει να περιλαμβάνει όλες τις δυνατές κατηγορίες στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένας πιστούχος έτσι ώστε να καθοριστούν ποια χαρακτηριστικά αντιστοιχούν σε κάθε μία από αυτές (Thomas et al. (2002)).

## 2.4 Περιγραφή των Κύριων Μοντέλων Βαθμολόγησης Πιστοληπτικής Ικανότητας

Από τις δεκαετίες του 1950 και 1960, όπου και εμφανίστηκαν τα πρώτα μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας, η στατιστική αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο κατασκευής των μοντέλων αυτών. Δίνει τη δυνατότητα αξιολόγησης των εκτιμήσεων, κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης και ελέγχων υποθέσεων καθώς και ελέγχου της σημαντικότητας των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται σε ένα μοντέλο. Οι πρώτες στατιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν βασίστηκαν σχεδόν αποκλειστικά στις διαχωριστικές μεθόδους του Fisher (1936). Οι υποθέσεις που απαιτούνται για τη χρήση των μεθόδων αυτών είναι αυστηρές και αρκετά συχνά δεν ικανοποιούνται στην πράξη. Ωστόσο, προκύπτουν αρκετά σημαντικά συμπεράσματα. Τις τελευταίες δεκαετίες αναπτύχθηκαν νέες στατιστικές μέθοδοι και εργαλεία για τη δημιουργία σκορόχαρτων. Οι πιο σημαντικές εξ'αυτών, οι οποίες και θα περιγραφούν στη συνέχεια της ενότητας είναι η **διαχωριστική ανάλυση** (*discriminant analysis*), η **λογιστική παλινδρόμηση** (*logistic regression*), τα **δένδρα ταξινόμησης** (*classification trees*) και η **μέθοδος του κοντινότερου γείτονα** (*nearest neighbor*)<sup>17</sup>.

### α. Διαχωριστική Ανάλυση

Όπως έχουμε αναφέρει, σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να κατατάξουμε το δείγμα μας στις  $k$  το πλήθος ομάδες. Στην περίπτωση δημιουργίας σκορόχαρτων, θα πρέπει να κατατάξουμε τους (υποψήφιους) πελάτες, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους, σε «καλούς» και «κακούς» και τελικά να είμαστε σε θέση να αποφασίσουμε αν θα ικανοποιηθεί η αίτηση τους ή όχι. Οι Hand and Henley (1996) αναφέρουν ότι μια πρώτη προσπάθεια εφαρμογής της διαχωριστικής ανάλυσης έγινε από τον Durand (1941) ο οποίος έδειξε ότι η μέθοδος αυτή εμφανίζει αρκετά καλά αποτελέσματα. Οι Rosenberg and Gleit (1994) άσκησαν κριτική στην εφαρμογή της μεθόδου αυτής αναφέροντας και τα αποτελέσματα του Eisenbeis (1977) και (1978). Άλλες εφαρμογές της διαχωριστικής ανάλυσης έγιναν από τους Myers and Forgy (1963), Lane (1972), Apilado et al. (1974) και Moses and Liao (1987). Τέλος, θα μπορούσαμε

<sup>17</sup> Μία αναλυτική παρουσίαση και εφαρμογή των μοντέλων βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας δίνεται από την Βασιλάκη (2010).



να πούμε ότι η πλέον γνωστή εφαρμογή της μεθόδου αυτή στην κατασκευή μοντέλων βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας είναι αυτή του Altman (1968) την οποία θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Η διαχωριστική ανάλυση αποτελεί μια πολυμεταβλητή τεχνική με την οποία αναλύεται ένα σύνολο μεταβλητών με σκοπό να μεγιστοποιηθεί η διακύμανση μεταξύ των ομάδων (*between-group variance*) και να ελαχιστοποιηθεί η διακύμανση εντός των ομάδων αυτών (*within-group variance*). Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται στατιστικά κριτήρια με τα οποία εισάγονται ή εξάγονται μεταβλητές από το μοντέλο (Caouette et al. (1998)). Με απλά λόγια λοιπόν, σκοπός μας είναι να διαχωρίσουμε τους πελάτες σε δύο ομάδες έτσι ώστε τα άτομα που ανήκουν στην ίδια ομάδα να έχουν όσο το δυνατόν παρόμοια χαρακτηριστικά ενώ τα άτομα διαφορετικής ομάδας να είναι όσο το δυνατόν ανομοιογενή.

Υποθέτοντας λοιπόν ότι έχουμε  $p$  γνωρίσματα και  $n$  το πλήθος πελάτες ενός τραπεζικού ιδρύματος, το τυχαίο διάνυσμα  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  αποτελείται από  $p$  τυχαίες μεταβλητές. Επίσης, συμβολίζουμε με  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  τις τιμές που παίρνει το τυχαίο αυτό διάνυσμα. Έτσι λοιπόν, η γενική μορφή της διαχωριστικής συνάρτησης (*discriminant function*) είναι:

$$Z = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_pX_p, \quad (2.4.1)$$

όπου  $a$  ο σταθερός όρος και  $b_i, i=1,2,\dots,p$  οι συντελεστές των τυχαίων μεταβλητών.

Όπως έχουμε αναφέρει από τις πιο γνωστές εφαρμογές της διαχωριστικής ανάλυσης στα μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας είναι το «*Z-score* του Altman» το οποίο έχει τη μορφή:

$$Z = 0.012X_1 + 0.014X_2 + 0.033X_3 + 0.006X_4 + 0.999X_5 \quad (2.4.2)$$

όπου  $X_1$  το κεφάλαιο κίνησης προς το συνολικό κεφάλαιο (*working capital/total assets*),  $X_2$  τα αδιανέμητα κέρδη προς το συνολικό κεφάλαιο (*retained earnings/total assets*),  $X_3$  τα κέρδη προ τόκων και φόρων προς το συνολικό κεφάλαιο (*earnings before interest and taxes/total assets*),  $X_4$  η αγοραία αξία κεφαλαίων προς τη λογιστική αξία συνολικού παθητικού (*market value equity/book value of total debt*) και  $X_5$  οι πωλήσεις προς το συνολικό κεφάλαιο (*sales/total assets*).

Μεγαλύτερη βαθμολογία για μια επιχείρηση σημαίνει ότι έχει μικρότερη πιθανότητα πτώχευσης. Σύμφωνα λοιπόν με τον Altman (1968) μια τιμή του  $Z$  μικρότερη από 1.81 σημαίνει ότι η επιχείρηση θα πτωχεύσει ενώ τιμή του  $Z$  μεγαλύτερη από 2.99 κατατάσει την επιχείρηση ως «καλή». Επίσης, επιχειρήσεις οι οποίες έχουν βαθμολογία στο διάστημα [1.81, 2.99] ανήκουν στη «ζώνη άγνωστης κατάταξης» (*zone of ignorance or gray area*) και

θα πρέπει να διερευνηθούν περαιτέρω. Το υπόδειγμα «*Z-score*» εφαρμόζεται επίσης και στην περίπτωση ομολόγων υπολογίζοντας τις βαθμολογίες για κάθε μία κατηγορία πιστοληπτικής διαβάθμισης. Για παράδειγμα οι Caouette et al. (1998) σημειώνουν ότι η μέση βαθμολογία για κάποια ομόλογα που εξέτασαν με πιστοληπτική διαβάθμιση AAA είναι 5 ενώ για ομόλογα με πιστοληπτική διαβάθμιση B είναι 1.67.

### β. Λογιστική Παλινδρόμηση

Όπως έχουμε αναφέρει, η λογιστική παλινδρόμηση είναι μία από τις πλέον συνηθισμένες μέθοδοι μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου. Οι Hand and Henley (1996) αναφέρουν ότι ο Wiginton (1980) παρουσίασε μια πρώτη εφαρμογή της λογιστικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση της πιστοληπτικής βαθμολογίας. Οι Srinivasan and Kim (1987) σύγκριναν τη συγκεκριμένη μέθοδο με άλλες ενώ ο Leonard (1993) εφάρμοσε τη λογιστική παλινδρόμηση σε εμπορικά δάνεια καταλήγωντας σε μοντέλα με διαφορετικές μεταβλητές καθώς επίσης και σε ένα μοντέλο το οποίο περιέχει έναν τυχαίο παράγοντα για τα τραπεζικά υποκαταστήματα.

Συμβολίζοντας με  $Y_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει αν ένας πελάτης είναι καλός (ή όχι) και συνεπώς θα γίνει δεκτή η αίτηση του, έχουμε ότι

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ο πελάτης } i \text{ είναι καλός} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι η τυχαία μεταβλητή  $Y_i \sim \text{Bernoulli}(1, p_i)$  και επομένως η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τη σχέση:

$$P(Y_i = y_i) = p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i}, \quad (2.4.3)$$

όπου  $y_i = 0, 1$  για  $i=1, 2, \dots, n$  και  $p_i$  η πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή η πιθανότητα κάποιος πελάτης να χαρακτηριστεί ως «καλός».

Σκοπός μας λοιπόν είναι να εκτιμήσουμε την πιθανότητα επιτυχίας χρησιμοποιώντας ένα σύνολο ερμηνευτικών μεταβλητών. Η γενική μορφή του μοντέλου της λογιστικής παλινδρόμησης, δίνεται από τον τύπο:

$$\log\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right) = w_0 + w_1 X_{1i} + w_2 X_{2i} + \dots + w_p X_{pi} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{X}^T, \quad (2.4.4)$$

όπου  $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_p)$  το τυχαίο διάνυσμα των  $p$  τυχαίων μεταβλητών,  $\mathbf{X}^T$  ο ανάστροφος αυτού και  $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \dots, w_p)$  το διάνυσμα των συντελεστών αυτών.

Ισοδύναμα, η Σχέση (2.4.4) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\left( \frac{p_i}{1-p_i} \right) = e^{(w_0 + w_1 X_{1i} + w_2 X_{2i} + \dots + w_p X_{pi})} = e^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{X}^T}, \quad (2.4.5)$$

ή ακόμα,

$$p_i = \frac{e^{(w_0 + w_1 X_{1i} + w_2 X_{2i} + \dots + w_p X_{pi})}}{1 + e^{(w_0 + w_1 X_{1i} + w_2 X_{2i} + \dots + w_p X_{pi})}} = \frac{e^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{X}^T}}{1 + e^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{X}^T}}. \quad (2.4.6)$$

Για την εκτίμηση των συντελεστών των τυχαίων μεταβλητών,  $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \dots, w_p)$ , χρησιμοποιείται η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας ή η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Σε ένα μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης ένας αρχικός έλεγχος είναι η στατιστική σημαντικότητα του, εξετάζοντας την απόκλιση (*deviance*) του από το κορεσμένο μοντέλο<sup>18</sup>. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον έλεγχο λόγου πιθανοφανειών η στατιστική συνάρτηση που προκύπτει είναι:

$$-2 \log \frac{L(M_1)}{L(M_2)} = -2(\log L(M_1) - \log L(M_2)) \quad (2.4.7)$$

όπου  $L(M_1)$  και  $L(M_2)$  οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας του εξεταζόμενου μοντέλου και του κορεσμένου αντίστοιχα, με  $L(M_2)=1$ .

Η ποσότητα (2.4.7) ακολουθεί την κατανομή  $\chi^2$  με βαθμούς ελευθερίας:

$$df = df(M_2) - df(M_1).$$

Διαισθητικά, όσο πιο μικρή είναι η απόκλιση ενός μοντέλου, τόσο πιο κοντά είναι στο κορεσμένο μοντέλο και αυτό παρέχει ένδειξη καλής προσαρμογής (Πολίτης (2010)).

Επίσης, τις περισσότερες φορές σε ένα μοντέλο παλινδρόμησης μας ενδιαφέρει να ελεγχουμε τη στατιστική σημαντικότητα κάθε ερμηνευτικής μεταβλητής ξεχωριστά. Στην περίπτωση αυτή, ο έλεγχος που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε είναι της μορφής:

$$H_0 : w_i = 0 \quad H_1 : w_i \neq 0.$$

Για τον παραπάνω έλεγχο μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο λόγου πιθανοφανειών συγκρίνοντας το πλήρες μοντέλο με το μοντέλο στο οποίο έχει εξαιρεθεί η μεταβλητή τη στατιστική σημαντικότητα της οποία θέλουμε να εξετάσουμε. Εναλλακτικά,

<sup>18</sup> Κορεσμένο ονομάζεται ένα μοντέλο που έχει τόσες παραμέτρους όσα και δεδομένα

για ασυμπτωτικά αποτελέσματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο του Wald στον οποίο η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι:

$$z = \frac{\hat{w}}{s.e(\hat{w})}$$

όπου  $\hat{w}$  είναι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας και  $s.e(\hat{w})$  το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης.

Αντίστοιχα με τα παραπάνω, εκτιμώντας τις παραμέτρους των τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα  $100(1-\alpha)\%$  διαστήμα εμπιστοσύνης για κάθε μία από αυτές, η γενική μορφή του οποίου είναι:

$$\hat{w} \pm z_{\alpha/2} s.e(\hat{w}).$$

Με βάση τα παραπάνω, για το σύνολο των πελατών που έχουμε μπορούμε να τους κατατάξουμε σε «καλούς» και «κακούς» ανάλογα με τις εκτιμήσεις των πιθανοτήτων που προκύπτουν από το μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης.

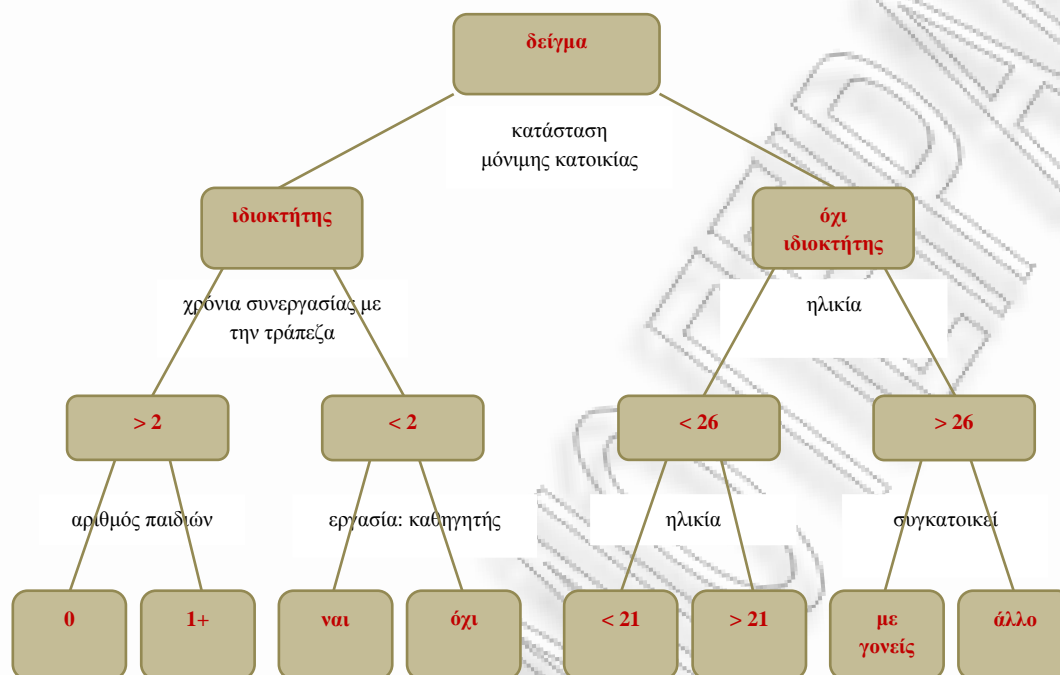
### γ. Δένδρα Ταξινόμησης

Μια διαφορετική μέθοδος για την κατηγοριοποίηση και τη διαχώριση του δείγματος των πελατών ενός τραπεζικού ιδρύματος σε ομάδες «καλών» και «κακών» πιστούχων είναι τα **δένδρα ταξινόμησης** ή **αλγόριθμοι επαναλαμβανόμενης διάσπασης** (*recursive partitioning algorithms*). Στο Σχήμα 2.4.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα (απλοποιημένο) παράδειγμα ενός δένδρου ταξινόμησης. Σκοπός της μεθόδου αυτής είναι η δημιουργία κανόνων έτσι ώστε πιστούχοι με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά να μπορούν να χαρακτηριστούν ως «καλοί» ή «κακοί». Αυτό επιτυγχάνεται «διαιρώντας» το σύνολο δεδομένων σε διαφορετικά σύνολα και προσδιορίζοντας το χαρακτηρισμό καθενός εξ' αυτών ανάλογα με το χαρακτηρισμό της πλειοψηφίας των μονάδων του δείγματος.

Σύμφωνα με τους Thomas et al. (2002) η ιδέα των δένδρων ταξινόμησης σε μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τους Makowski (1985) και Coffman (1986) οι οποίοι βασίστηκαν στα αποτελέσματα των Breiman et al. (1984). Τα τελευταία χρόνια, με την ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων, έγινε ευκολότερη η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου. Παράλληλα, αναπτύχθηκαν νέες μέθοδοι

κατηγοριοποίησης με τη χρήση λογισμικών. Τέτοια παραδείγματα είναι οι αλγόριθμοί C5 και CHAID<sup>19</sup>.

Σχήμα 2.4.1: Παράδειγμα Δένδρου Ταξινόμησης



Πηγή: Thomas et al (2002)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το Σχήμα 2.4.1, το αρχικό σύνολο δεδομένων,  $A$ , διαιρείται επαναληπτικά σε υποσύνολα με βάση κάποιο γνώρισμα-μεταβλητή. Σκοπός λοιπόν είναι οι τελικοί κόμβοι του δένδρου ταξινόμησης να κατατάσσουν τις μονάδες του δείγματος στα σύνολα των «καλών»,  $A_G$ , ή των «κακών»,  $A_B$ . Στη συνέχεια, η χρήση του δένδρου ταξινόμησης είναι «αρκετά απλή» αφού κάθε μονοπάτι αυτού οδηγεί σε συγκεκριμένο χαρακτηρισμό του πιστούχου. Είναι προφανές ότι τίθενται τρία κύρια προβλήματα κατά τη διαδικασία κατασκευής ενός δένδρου ταξινόμησης. Το πρώτο, αναφέρεται στον **κανόνα διάσπασης** (*splitting rule*) με βάση τον οποίο το σύνολο δεδομένων θα διασπάται σε υποσύνολα, δηλαδή το κριτήριο εκείνο βάσει του οποίου επιλέγεται ποιο γνώρισμα θα χρησιμοποιηθεί. Αξίζει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν διάφορα μέτρα με τα οποία μπορεί να γίνεται η διάσπαση όπως είναι το **κριτήριο Kolmogorov–Smirnov**, ο **βασικός δείκτης μη αγνότητας** (*basic impurity index*), ο **δείκτης Gini**, ο **δείκτης εντροπίας** (*entropy index*) και το **ημιάθροισμα τετραγώνων** (*half-sum of squares*).

<sup>19</sup> Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους αλγόριθμους κατηγοριοποίησης αλλά και άλλων τεχνικών εξόρυξης γνώσης από δεδομένα μπορεί κανείς να βρει στο εγχειρίδιο της Dunham M. (2004).

Σημαντικός είναι επίσης ο **κανόνας τερματισμού** (*stopping rule*) ο οποίος καθορίζει που θα σταματήσει η επαναληπτική διαδικασία ενώ αντίστοιχα με τα προηγούμενα κριτήρια μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση αυτή.

Τρίτον, ο κανόνας βάσει του οποίου οι τελικοί κόμβοι θα χαρακτηριστούν σε μία από τις δύο κατηγορίες. Ο χαρακτηρισμός αυτός μπορεί να γίνει θεωρώντας απλά ως «όριο» το χαρακτηρισμό της πλειοψηφίας των μονάδων του δείγματος. Ένα διαφορετικό κριτήριο είναι η χρήση της ποσότητας  $D/L$ , όπου  $D$  είναι το αναμενόμενο κόστος από το λανθασμένο χαρακτηρισμό ενός «κακού» τελικού κόμβου ως «καλό» και  $L$  το αναμενόμενο κόστος από το λανθασμένο χαρακτηρισμό ενός «καλού» τελικού κόμβου ως «κακό». Στην περίπτωση λοιπόν που η αναλογία «καλών» προς «κακούς» σε κάποιο κόμβο είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα  $D/L$ , το κόστος ελαχιστοποιείται αν ο κόμβος ταξινομηθεί ως «καλός».

#### **δ. Μέθοδος του Κοντινότερου Γείτονα**

Η μέθοδος του κοντινότερου γείτονα ή μέθοδος της απλής συνένωσης αποτελεί μια άλλη μη παραμετρική μέθοδο για την κατασκευή ενός μοντέλου βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας. Σύμφωνα με τους Thomas et al. (2002) η εφαρμογή της μεθόδου στα μοντέλα αυτά ξεκίνησε από τους Chatterjee and Barcun (1970) ενώ αργότερα ασχολήθηκαν –μεταξύ άλλων– οι Henley and Hand (1996) οι οποίοι βασίστηκαν στα αποτελέσματα των Fix and Hodges (1952). Αν και η συγκεκριμένη μέθοδος δεν χρησιμοποιείται ευρέως στην πράξη, παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστικά που καθιστούν την εφαρμογή της αρκετά αποτελεσματική, όπως ότι είναι «αρκετά εύκολη» η εισαγωγή και εξαγωγή μονάδων του δείγματος ώστε να ενημερώνεται η «βάση» των πελατών ενός τραπεζικού ιδρύματος. Επίσης, στη συγκεκριμένη μέθοδο δε γίνεται καμία υπόθεση για την κατανομή των δεδομένων κάτι το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις είναι αρκετά «βολικό». Επίσης, κατά την εισαγωγή μιας νέας παρατήρησης, ώστε να καταταχθεί σε μία ομάδα, απαιτούνται αρκετοί υπολογισμοί οι οποίοι ωστόσο μπορούν να πραγματοποιηθούν πολύ εύκολα με τη χρήση υπολογιστικών συστημάτων. Η κυριότερη αδυναμία της μεθόδου αυτής έγκειται στο γεγονός ότι όταν δύο ομάδες, οι οποίες είναι εμφανώς διαφορετικές, έχουν κάποιο σύνολο σημείων που τις «συνδέει», τότε ο αλγόριθμος έχει την τάση να τις συγχωνεύει (**φαινόμενο της αλυσίδας**) (Κούτρας (2008)).

Ένα πρώτο βήμα στη μέθοδο αυτή είναι ο καθορισμός των παραμέτρων που απαιτούνται δηλαδή η τιμή  $k$  (ο αριθμός των κοντινότερων γειτόνων) καθώς και το μέτρο απόστασης που θα χρησιμοποιηθεί. Όσον αφορά το τελευταίο, υπάρχουν διάφοροι τρόποι επιλογής του ενώ εξαρτάται και από τη φύση του προβλήματος (Καρλής (2005)). Αφού καθόρισουμε τις παραμέτρους αυτές, ένας υποψήφιος πελάτης μπορεί να χαρακτηριστεί ως «καλός» ή «κακός» συγκρίνοντας τον με τους  $k$  πλησιέστερους «όμοιους» πελάτες του τραπεζικού ιδρύματος. Έτσι λοιπόν, θεωρώντας τις ομάδες  $G$  και  $B$  των «καλών» και των «κακών» πελατών αντίστοιχα τότε η απόσταση τους  $d(G,B)$  ορίζεται από τον τύπο:

$$d(G,B) = \min_{i \in G, j \in B} d_{ij} \quad (2.4.8)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε τη σημαντικότητα καθορισμού του μέτρου απόστασης που θα χρησιμοποιηθεί αφού τελικά (και) αυτή καθορίζει σε ποια συστάδα θα κατατάξουμε κάποια παρατήρηση. Τέτοια μέτρα υπάρχουν πολλά στη βιβλιογραφία με γνωστότερο ίσως την **ευκλείδια απόσταση**, η οποία μεταξύ δύο παρατήρησεων  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$  και  $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp})$  δίνεται από τη σχέση:

$$d_{ij} = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sqrt{\sum_{r=1}^p (x_{ir} - x_{jr})^2} \quad (2.4.9)$$

Ένα δεύτερο –ευρέως γνωστό– μέτρο απόστασης είναι η **απόσταση του Pearson** η οποία δεν είναι τίποτα παραπάνω από την ευκλείδια απόσταση διαιρεμένη με τη διακύμανση  $s_r$  της  $r$  μεταβλητής και δίνεται από τη σχέση

$$d_{ij} = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sqrt{\sum_{r=1}^p \frac{(x_{ir} - x_{jr})^2}{s_r^2}} \quad (2.4.10)$$

όπου  $s_r = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ir} - \bar{x}_r)^2}$  και  $\bar{x}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ir}$ . Η απόσταση του Pearson έχει το πλεονέκτημα σε σχέση με την ευκλείδια ότι δεν επηρεάζεται από τις μονάδες μέτρησης της τυχαίας μεταβλητής.

Για τη μέτρηση της απόστασης και τελικά την κατατάξη μιας παρατήρησης σε μία από τις ομάδες  $G$  και  $B$  οι Henley and Hand (1996) πρότειναν το τύπο της Σχέσης (2.4.11), ο οποίος αποτελεί μία μίξη της ευκλείδιας απόστασης και της διαχωριστικής συνάρτησης του Fisher, όπου  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$  είναι το διάνυσμα διάστασης  $p$  των συντελεστών των τυχαίων μεταβλητών της Σχέσης (2.4.1),  $\mathbf{b}^T$  ο ανάστροφος αυτού και  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης  $p \times p$ ,

$$d_{ij} = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \left[ (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (I + D\mathbf{b}\mathbf{b}^T) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right]^{1/2}. \quad (2.4.11)$$

Τα αποτελέσματα των Henley and Hand (1996) έδειξαν ότι οι τιμές της ποσότητας του  $D$  κυμαίνεται στο διάστημα [1.4,1.8] ενώ η τελική τιμή του  $k$ , δηλαδή ο αριθμός των κοντινότερων γειτόνων, μπορεί να καθοριστεί επιλέγοντας διαφορετικές τιμές.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή αξίζει να σημειώσουμε ότι μετά την κατασκευή ενός σκορόχαρτου με κάποια/ες από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν θα πρέπει να ελέγξουμε τη στατιστική ισχύ των συμπερασμάτων μας. Τα πιο γνωστά μέτρα διαχωριστικής ικανότητας είναι η **απόκλιση**, η **τιμή πληροφορίας**, η **απόσταση Mahalanobis**, το **στατιστικό Kolmogorov–Smirnov**, οι **καμπύλες ROC**, ο **δείκτης Gini**, οι **καμπύλες CAP** και ο **δείκτης ακρίβειας AR**<sup>20</sup>.

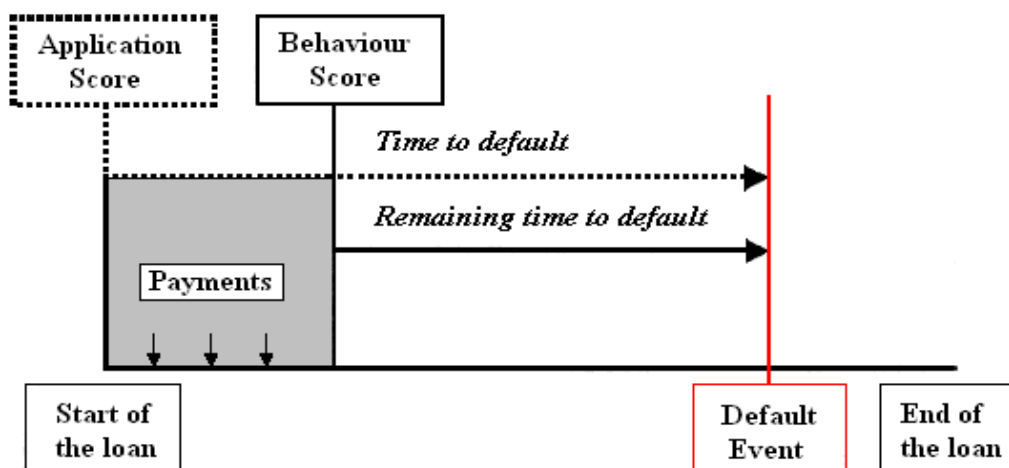
<sup>20</sup> Περισσότερες πληροφορίες για τη χρήση των μέτρων αυτών μπορεί κανείς να βρει στο εγχειρίδιο των Thomas et al. (2002).



## 2.5 Χρήση της Ανάλυσης Επιβίωσης στη Μέτρηση του Πιστωτικού Κινδύνου

Όπως έχουμε αναφέρει, εκτός από τα μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας, χρησιμοποιούνται και τα μοντέλα βαθμολόγησης συμπεριφοράς με σκοπό να παρακολουθείται η «επίδοση» και η «συμπεριφορά» του πιστούχου. Μία μέθοδος κατασκευής ενός μοντέλου βαθμολόγησης συμπεριφοράς είναι η χρήση της ανάλυσης επιβίωσης. Σκοπός της μεθόδου αυτής είναι η εκτίμηση όχι του «αν» θα πτωχεύσει ένας πιστούχος (ή αν θα τα χορηγηθεί ένα δάνειο) αλλά «πότε» θα πτωχεύσει. Στο Σχήμα 2.5.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διάκριση, με βάση το χρόνο, των μοντέλων βαθμολόγησης αιτήσεων και συμπεριφοράς.

Σχήμα 2.5.1: Βαθμολογίες Αιτήσεων και Συμπεριφοράς



Πηγή: Stepanova and Thomas (2001)

Η **ανάλυση επιβίωσης** (*survival analysis*) ή **ανάλυση χρόνων αποτυχίας** (*analysis of failure time data*) είναι μια συλλογή στατιστικών μεθόδων ανάλυσης δεδομένων τα οποία προκύπτουν ως τιμές μιας μεταβλητής που δηλώνει το χρόνο μέχρις ότου συμβεί κάποιο ενδεχόμενο (αποτυχία). Με τον όρο **χρόνο επιβίωσης** (*survival time*) ή **χρόνο ζωής** (*lifetime*) ή **χρόνο αποτυχίας** (*failure time*) δηλώνουμε το χρόνο που μεσολαβεί από τη **στιγμή παρακολούθησης** (*follow-up*) ενός «φαινομένου» μέχρι τη στιγμή που το «φαινόμενο» αυτό θα αντιμετωπίσει το ενδεχόμενο (Αντζουλάκος (2009)). Η ανάλυση επιβίωσης χρησιμοποιείται στην κατασκευή μοντέλων βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας με

σκοπό να προβλέψει τη χρονική στιγμή της πτώχευσης αλλά και στην κατασκευή μοντέλων βαθμολόγησης συμπεριφοράς. Στην προηγούμενη ενότητα, για τα μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας που περιγράψαμε έγινε χρήση των ερμηνευτικών μεταβλητών οι οποίες είναι ικανές να περιγράψουν την πιθανότητα χρεοκοπίας του αντισυμβαλλομένου. Αντίστοιχα, στην ανάλυση επιβίωσης είναι απαραίτητες εκείνες οι μεταβλητές οι οποίες μπορούν να ερμηνεύσουν πότε ο αντισυμβαλλόμενος θα πτωχεύσει. Στον Πίνακα 2.5.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά-μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα βαθμολόγησης συμπεριφοράς σύμφωνα με τους Stepanova and Thomas (2001).

**Πίνακας 2.5.1:** Βασικά Χαρακτηριστικά στα Μοντέλα Βαθμολόγησης Συμπεριφοράς

Χαρακτηριστικά	
Ημερομηνία έναρξης τραπεζικού λογαριασμού	Χρόνος με τους παρόντες υπαλλήλους
Ημερομηνία λήξης τραπεζικού λογαριασμού	Αριθμός (προστατευόμενων) παιδιών
Ποσό δανείου	Οικογενειακή κατάσταση
Όροι δανείου	Συχνότητα πληρωμών
Σκοπός δανείου	Μόνιμη κατοικία
Δόση δανείου	Ηλικία
Ποσό αποπληρωμής	Καθαρά έσοδα
Χρόνος παραμονής στην παρούσα κατοικία	Κωδικός επαγγέλματος

Ο Narain (1992) είναι ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν την ανάλυση επιβίωσης στα μοντέλα βαθμολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας ενώ οι Banasik et al. (1999) σύγκριναν τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης μεθόδου και των σκορόχαρτων που προκύπτουν από τη χρήση της λογιστικής παλινδρόμησης. Επίσης οι Stepanova and Thomas (1999), (2001) ανέπτυξαν περαιτέρω την εφαρμογή της ανάλυσης επιβίωσης σε μοντέλα βαθμολόγησης συμπεριφοράς για την κατασκευή σκορόχαρτων (*survival analysis scorecards*).

Συμβολίζοντας με  $T$  την τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει το χρόνο ζωής του «φαινομένου», δηλαδή τη χρονική στιγμή μέχρι τη χρεοκοπία, η (αθροιστική) **συνάρτηση κατανομής** δίνεται από τον τύπο:

$$F(t) = P[T \leq t], \quad t \in R. \quad (2.5.1)$$

Παραγωγίζοντας τη Σχέση (2.5.1) λαμβάνουμε τη **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της τυχαίας μεταβλητής  $T$ , για την οποία έχουμε,

$$f(t) = F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1-S(t))}{dt} = -\frac{dS(t)}{dt} = -S'(t), \quad (2.5.2)$$

όπου  $S(t)$  ορίζουμε τη **συνάρτηση επιβίωσης** (*survival function*) της τυχαίας μεταβλητής  $T$  η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$S(t) = P[T > t] = 1 - P[T \leq t] = 1 - F(t). \quad (2.5.3)$$

Τέλος, μια άλλη ποσότητα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής  $T$  είναι η **συνάρτηση κινδύνου** (*hazard function or hazard rate*) η οποία ορίζεται από τον τύπο:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t | T \geq t]}{\Delta t}$$

και ικανοποιεί τη σχέση:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \left( = \frac{F'(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} \right). \quad (2.5.4)$$

Η συνάρτηση κινδύνου δηλώνει τη «στιγμιαία πιθανότητα χρεοκοπίας» ενός ατόμου ή μιας επιχείρησης το χρόνο  $t$  δοθέντος ότι μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  δεν είχε υπάρξει πιστωτικό γεγονός (Αντζουλάκος (2009)).

Οι Thomas et al. (2002) αναφέρουν ότι δύο είδη μοντέλων χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των ερμηνευτικών μεταβλητών με το «χρόνο επιβίωσης». Το **μοντέλο αναλογικού κινδύνου** (*proportional hazard model*) ή **μοντέλο PH** ή **μοντέλο παλινδρόμησης του Cox** (*Cox regression model*) και το **μοντέλο επιταχυνόμενων χρόνων** (*accelerated life model*).

Σύμφωνα με τον Αντζουλάκο (2009), στόχος των μοντέλων αυτών είναι:

- ο καθορισμός των **ερμηνευτικών μεταβλητών** (*explanatory variables*) ή **συμμεταβλητών** (*covariates*) που επηρεάζουν τη συνάρτηση κινδύνου,
- η εκτίμηση της συνάρτησης κινδύνου και συνεπώς η εκτίμηση της συνάρτησης επιβίωσης.

Συμβολίζοντας με  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_p)$  το διάνυσμα των ερμηνευτικών μεταβλητών και  $\mathbf{w}=(w_1, \dots, w_p)$  τα αντίστοιχα βάρη αυτών, η γενική μορφή του μοντέλου επιταχυνόμενων χρόνων είναι:

$$h(t) = e^{\mathbf{w}\mathbf{x}} h_0(e^{\mathbf{w}\mathbf{x}} t) = e^{\sum_{i=1}^p w_i x_i} h_0 \left( e^{\sum_{i=1}^p w_i x_i} t \right), \quad (2.5.5)$$

όπου  $h_0(t)$  ονομάζεται η **αναφορική συνάρτηση κινδύνου** (*baseline hazard function*).

Επίσης, η γενική μορφή του μοντέλου αναλογικού κινδύνου είναι:

$$h(t) = e^{\mathbf{w}\mathbf{x}} h_0(t) = e^{\sum_{i=1}^p w_i x_i} h_0(t). \quad (2.5.6)$$

Από τη Σχέση (2.5.6) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το διάνυσμα των ερμηνευτικών μεταβλητών είναι ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας της αναφορικής συνάρτησης κινδύνου. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι για την εκτίμηση των διαφόρων ποσοτήτων μπορεί να χρησιμοποιηθούν παραμετρικές ή μη παραμετρικές μέθοδοι (Thomas et al. (2001)).

Ο Cox (1972) επισήμανε ότι στο μοντέλο αναλογικού κινδύνου, τα βάρη  $w_i$  μπορούν να εκτιμηθούν χωρίς τη γνώση της αναφορικής συνάρτησης κινδύνου  $h_0(t)$ . Συμβολίζοντας λοιπόν με  $t_i$  τους λογοκριμένους χρόνους<sup>21</sup> τότε η δεσμευμένη πιθανότητα ο  $i$ -πελάτης να πτωχέψει στο χρόνο  $t_i$  δοθέντος του αριθμού  $R(i)$  των πελατών που έχουν «επιβιώσει» ακριβώς πριν τη χρονική στιγμή  $t_i$  δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\exp\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i\} h_0(t)}{\sum_{k \in R(i)} \exp\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_k\} h_0(t)} = \frac{\exp\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i\}}{\sum_{k \in R(i)} \exp\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_k\}}, \quad (2.5.7)$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο από τη ποσότητα  $h_0(t)$ .

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι οι Thomas et al. (2001) αναφέρουν ότι κύριο μειονέκτημα της χρήσης της ανάλυσης επιβίωσης είναι ότι απαιτείται αρκετός χρόνος (περίπου 2 έτη) για την κατασκευή μιας βαθμολογίας συμπεριφοράς και στο διάστημα αυτό μπορεί να έχουν αλλάξει τα χαρακτηριστικά των πελατών ή/και το οικονομικό περιβάλλον. Επίσης, κατά την ανάλυση δεδομένων με χρήση της ανάλυσης επιβίωσης πλήθος θεμάτων μπορούν να προκύψουν όπως οι μέθοδοι εκτίμησης των συναρτήσεων επιβίωσης, η σύγκριση διαφορετικών συναρτήσεων επιβίωσης, η λογοκρισία δεδομένων και το είδος αυτής, η στατιστική σημαντικότητα των ερμηνευτικών μεταβλητών, η τελική επιλογή του μοντέλου, η χρήση μεταβλητών που μεταβάλλονται στο χρόνο κ.α.

<sup>21</sup> Οι περιπτώσεις στις οποίες δεν έχουμε τα πλήρη δεδομένα.

Ωστόσο, οι Thomas et al. (2002) αναφέρουν ότι κύρια πλεονεκτήματα της χρήσης της ανάλυσης επιβίωσης είναι ότι

- χειρίζεται ικανοποιητικά τα λογοκριμμένα δεδομένα,
- αποτρέπει αστάθειες στα αποτελέσματα οι οποίες μπορεί να προκύψουν από τον καθορισμό μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου,
- η εκτίμηση του «πότε» θα συμβεί μια πτώχευση αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τον υπολογισμό της κερδοφορίας του αντισυμβαλλόμενου,
- οι εκτιμήσεις που προκύπτουν δίνουν μία πρόβλεψη του επιπέδου πτωχεύσεων ως συνάρτηση του χρόνου κάτι το οποίο είναι χρήσιμο για τις προβλέψεις του χρέους,
- με τη μέθοδο αυτή δίνεται η δυνατότητα να ενσωματώνονται στα συστήματα διαβάθμισης οι εκτιμήσεις των αλλαγών του οικονομικού κλίματος.

## 2.6 Υποδείγματα Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου Τύπου Merton

Τα υποδείγματα της κατηγορίας αυτής διαφέρουν σημαντικά, σε σχέση με αυτά που περιγράφηκαν στο παρόν κεφάλαιο, ως προς τη δόμη, τον τρόπο λειτουργίας αλλά και τη χρήση τους αφού αναφέρονται κυρίως σε μεγάλες επιχειρήσεις και όχι στη λιανική τραπεζική. Επίσης, τα μοντέλα αυτά βασίζονται, εκτός από τα λογιστικά στοιχεία, και σε αγοραία στοιχεία δηλαδή σε δεδομένα που προκύπτουν από την «κίνηση» των τιμών των υποκειμένων στοιχείων. Όπως έχουμε αναφέρει, στην περίπτωση εισηγμένων επιχειρήσεων τα πιστωτικά ιδρύματα ή οι οίκοι πιστοληπτικής αξιολόγησης χρησιμοποιούν μοντέλα τα οποία εκτιμούν την πιστοληπτική βαθμολογία, την πιθανότητα χρεοκοπίας ή άλλες παραμέτρους του πιστωτικού κινδύνου μέσω της χρονολογικής σειράς των τιμών των μετοχών. Σε αντίστοιχη λογική μπορεί να αξιολογηθούν και διάφορα χρηματοοικονομικά προϊόντα όπως ομόλογα δημοσίου ή μεγάλων επιχειρήσεων.

Έτσι λοιπόν, τα μοντέρνα υποδείγματα βασίζονται περισσότερο στη χρηματοοικονομική θεωρία και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες (Θωμαδάκης και Ξανθάκης (2006)). Η πρώτη βασίζεται στη **δομική προσέγγιση θεωρητικών δικαιωμάτων** (*structural approach of theoretical options*) δηλαδή στη μεθοδολογία που εισήγαγαν οι Black and Scholes (1973) και ο Merton (1974). Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται στην **προσέγγιση ανοιχτής μορφής** (*reduced form approach*) που χρησιμοποιεί **υποδείγματα βασισμένα στην ένταση** (*intensity based models*) για την εκτίμηση **δεικτών στοχαστικού κινδύνου** (*stochastic risk indices*).

Οι Crouhy et al. (2000) αναφέρουν ότι, στα τέλη του 1997, η εταιρεία Credit Suisse Financial Products (CSFP) δημοσίευσε μια νέα προσέγγιση, CreditRisk+, η οποία εστιάζει μόνο στη χρεοκοπία. Στη χρεοκοπία εστιάζει και το μοντέλο CreditPortfolio View της εταιρείας McKinsey το οποίο είναι ένα διακριτό υπόδειγμα πολλαπλών χρονικών περιόδων στο οποίο οι πιθανότητες χρεοκοπίας είναι μια συνάρτηση μακροοικονομικών μεταβλητών, όπως της ανεργίας, της ανάπτυξης μιας οικονομίας κ.α. Το CreditMetrics αποτελεί ένα άλλο μοντέλο μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου που αναπτύχθηκε από την εταιρεία JP Morgan. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1997 και βασίζεται στην ανάλυση μετάβασης της πιστοληπτικής βαθμολογίας (*credit migration analysis*). Η εταιρεία KMV, η οποία ειδικεύεται στην ανάλυση του πιστωτικού κινδύνου, έχει αναπτύξει μια μέθοδο μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου η οποία βασίζεται στις πιθανότητες χρεοκοπίας καθώς και στην

**κατανομή των ζημιών** (*loss distribution*) η οποία σχετίζεται με τον κίνδυνο χρεοκοπίας αλλά και με τον κίνδυνο μετάβασης (*migration risk*). Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην **αναμενόμενη συχνότητα αθέτησης** (*expected default frequency – EDF*) και όχι, όπως η CreditMetrics, στις ιστορικές τιμές των συχνοτήτων μετάβασης για κάθε βαθμολογία πιστοληπτικού κινδύνου. Ωστόσο, και οι δύο προσεγγίσεις στηρίζονται στο υπόδειγμα του Merton (1974) αν και βασίζονται σε διαφορετικές συνθήκες για την πραγματοποίησή τους.

Η ανάλυση των παραπάνω μοντέλων ξεφεύγει από το σκοπό της παρούσας διπλωματικής εργασίας ωστόσο κρίνεται σκόπιμο, λόγω της σημαντικότητας τους, στη συνέχεια της ενότητας να παρουσιαστεί συνοπτικά το σκεπτικό τους μέσω της περιγραφής του υποδείγματος του Merton.

Σύμφωνα λοιπόν με τους Caouette et al. (1998) το μοντέλο της εταιρείας KMV για την εκτίμηση της αναμενόμενης συχνότητας αθέτησης βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:

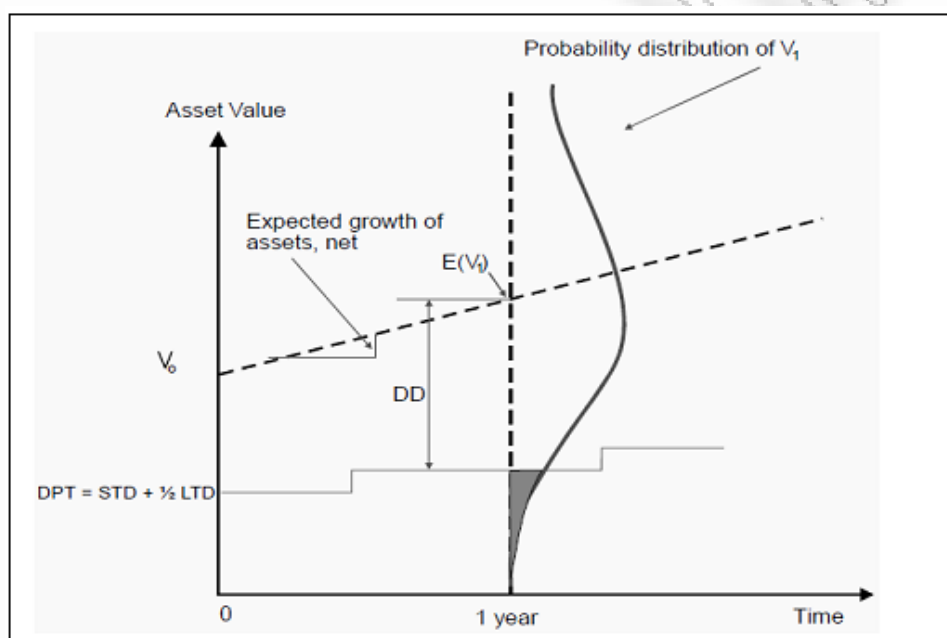
- Πρώτον, εκτιμάται η αγοραία αξία της επιχείρησης καθώς και η μεταβλητότητα (*volatility*) της επιχείρησης μέσω των τιμών της μετοχής και της μεταβλητότητας αυτών καθώς και από τη λογιστική αξία των υποχρεώσεων της (*book value of liabilities*).
- Δεύτερον, το **σημείο πτώχευσης** (*default point – DPT*) υπολογίζεται από τις υποχρεώσεις της επιχείρησης. Επίσης, καθορίζεται μια αναμενόμενη αξία της επιχείρησης βάσει της τρέχουσας αξίας της. Χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες ποσότητες καθώς και την εκτίμηση της μεταβλητότητας της επιχείρησης μπορούμε να υπολογίσουμε την **απόσταση από την πτώχευση** (*distance to default – DD*) η οποία αποτελεί ένα μέτρο απόστασης της (αναμενόμενης) αξίας της επιχείρησης από το σημείο πτώχευσης σε όρους τυπικής απόκλισης.
- Τρίτον, χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα εκτιμάται η ποσότητα EDF.

Ξεκινώντας την (συνοπτική) περιγραφή των πιο πάνω βημάτων θα πρέπει να αναλυθεί η έννοια του δικαιώματος αγοράς στην περίπτωση αυτή<sup>22</sup>. Θεωρούμε λοιπόν ότι οι μέτοχοι κατέχουν ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου (*European call option*) πάνω στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης (*assets*), με τιμή εξάσκησης (*exercise or strike price*) και χρόνο λήξης (*maturity date*) ίση με τη λογιστική αξία των υποχρεώσεων της και χρόνο ωρίμανσης αυτών αντίστοιχα. Εάν κατά τη χρονική στιγμή  $T$  αποπληρωμής των

<sup>22</sup> Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την έννοια και την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης μπορεί κανείς να βρει στο εγχειρίδιο του Hull (2009).

υποχρεώσεων της, η αξία της επιχείρησης είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία των υποχρεώσεων της (*debt face value*) τότε οι πιστωτές θα αποπληρωθούν και οι μέτοχοι θα πάρουν την εναπομένουσα αξία. Στην αντίθετη περίπτωση, η επιχείρηση θα βρεθεί σε κατάσταση αθέτησης και οι πιστωτές θα λάβουν ότι αυτή αξίζει τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Στο Σχήμα 2.6.1 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της αξίας των περιουσιακών στοιχείων μιας επιχείρησης συναρτήσει του χρόνου. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν η αξία αυτή γίνει μικρότερη από κάποιο σημείο τότε η επιχείρηση θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της.

Σχήμα 2.6.1: Παράσταση Υποδείγματος Τύπου Merton



Πηγή: Crouhy et al. (2000)

Η εταιρεία KMV λοιπόν χρησιμοποιεί τη μέθοδο τιμολόγησης ενός δικαιώματος προαίρεσης καταλήγοντας στην ποσότητα:

$$E = V_T \cdot N(d_1) - D \cdot e^{-t} \cdot N(d_2), \quad (3.6.1)$$

όπου  $E$  είναι η αγοραία αξία της καθαρής θέσης (*equity*) ή η τιμή του δικαιώματος αγοράς (*option value*),  $D$  η λογιστική αξία των υποχρεώσεων,  $V_T$  η αγοραία τιμή των περιουσιακών στοιχείων τη χρονική στιγμή  $T$ ,  $t$  ο χρονικός ορίζοντας,  $r$  το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και  $N(\bullet)$  η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής υπολογισμένη στα σημεία  $d_1$  και  $d_2$  όπου



$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{και} \quad (3.6.2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad (3.6.3)$$

όπου  $\mu$  και  $\sigma$  η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ποσοστιαίας μεταβολής των περιουσιακών στοιχείων.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για τη Σχέση (3.6.1) θα πρέπει να ικανοποιούνται αρκετές προϋποθέσεις. Η πιο σημαντική ίσως εξ' αυτών είναι ότι οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν μια Γεωμετρική Κίνηση Brown με μέση τιμή  $\mu$  και διακύμανση  $\sigma^2$ . Για παράδειγμα,

$$V_t = V_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z_t\right\}, \quad (3.6.4)$$

όπου  $Z_t \sim N(0,1)$  και επομένως η τυχαία μεταβλητή  $V_T$  ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή με αναμενόμενη τιμή τη χρονική στιγμή  $t$  ίση με  $E(V_t) = V_0 \exp\{\mu t\}$ .

Αν συμβολίσουμε με  $p_{DEF}$  την πιθανότητα χρεοκοπίας και  $V_{DEF}$  την κρίσιμη τιμή των περιουσιακών στοιχείων (δηλαδή την τιμή την οποία, αν υπερβούν οι υποχρεώσεις, θα υπάρξει χρεοκοπία) έχουμε,

$$p_{DEF} = P[V_t \leq V_{DEF}] = P\left[V_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z_t\right\} \leq V_{DEF}\right] \Rightarrow$$

$$P_{DEF} = \left[ Z_{\iota} \leq \frac{\ln\left(\frac{V_{DEF}}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] = \left[ Z_{\iota} \leq -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{DEF}}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] = N(-d_2).$$

Όπως έχουμε αναφέρει το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της απόστασης από την πτώχευση η οποία είναι ο αριθμός των τυπικών αποκλίσεων μεταξύ της αναμενόμενης αξίας των περιουσιακών στοιχείων σε ένα έτος,  $E(V_1)$ , και του σημείου πτώχευσης,  $DPT$ , το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$DPT = STD + \frac{1}{2}LTD,$$

όπου  $STD$  η βραχυχρόνιες υποχρεώσεις (*short-term debt*) και  $LTD$  η μακροχρόνιες υποχρεώσεις (*long-term debt*). Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η απόσταση από την πτώχευση συνδέεται άμεσα με τις υποχρεώσεις της επιχείρησης δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις βραχυπρόθεσμες. Για τον υπολογισμό λοιπόν της ποσότητας  $DD$  χρησιμοποιείται η επόμενη σχέση:

$$DD = \frac{E(V_1) - DPT}{\sigma_A}, \quad (3.6.5)$$

όπου  $\sigma_A$  η μεταβλητότητα των στοιχείων του ενεργητικού και ορίζεται ως η ετήσια ποσοστιαία μεταβολή της αξίας των περιουσιακών στοιχείων του ενεργητικού της επιχείρησης.

Αφού εκτιμηθεί η απόσταση από την πτώχευση το τελευταίο στάδιο είναι η ποσότητα  $DD$  να «μετατραπεί» σε «πραγματικές» πιθανότητες. Οι πιθανότητες αυτές καλούνται από την εταιρεία  $KMV$  αναμενόμενη συχνότητα αθέτησης, ενώ για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιούνται εμπειρικά δεδομένα. Στην πράξη ο υπολογισμός της  $EDF$  μπορεί να γίνει από εξειδικευμένα λογισμικά όπως το  $Credit Monitor^{TM}$  της  $Moody's$  η οποία έχει αναπτύξει επίσης μια σειρά άλλων σχετικών υπολογιστικών προγραμμάτων όπως τα  $EDFCalc^{\circledR}$  και  $CreditManager^{TM}$  (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)) ενώ η εταιρεία  $KMV$  έχει δημιουργήσει το σύστημα  $Credit Monitor$ .

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που τα δομικά υποδείγματα, τα οποία όπως έχουμε αναφέρει βασίζονται στο υπόδειγμα του Merton, εφαρμόζονται ευρέως στην πράξη παρουσιάζουν κάποια μειονεκτήματα μερικά από τα οποία είναι:

- Βασίζονται στις παραδοχές περί λογαριθμοκανονικής κατανομής των στοιχείων του ενεργητικού και περί άμεσης απαίτησης όλων των υποχρεώσεων σε μια και μόνο χρονική στιγμή (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009)).
- Η κεφαλαιακή δομή της επιχείρησης παρουσιάζεται απλουστευμένη και συχνά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα αφού δεν λαμβάνονται υπόψη συγκεκριμένες μορφές τραπεζικού δανεισμού και άλλων πιστωτικών προϊόντων (Ζοπουνίδης και Λεμονάκης (2009), Χριστοδουλάκης (2004)).
- Η ερμηνεία της μετοχής σαν ένα δικαίωμα αγοράς συνεπάγεται ότι η τιμή της είναι αύξουσα συνάρτηση της διακύμανσής της κάτι το οποίο είναι ανορθολογικό (Χριστοδουλάκης (2004)).

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Χρήση Πινάκων Μετάβασης σε Μοντέλα Πιστωτικής Διαβάθμισης

---

#### 3.1 Εισαγωγή

Οι Στοχαστικές Ανελιξίες ή Διαδικασίες βρίσκουν εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Με απλά λόγια, μπορούμε να πούμε ότι Στοχαστική Διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών οι οποίες σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο φαινόμενο καθώς και την εξέλιξη αυτού στο χώρο ή στο χρόνο. Η Χρυσ αφίνου (2008) αναφέρει ότι η εξέλιξη της **θεωρίας των στοχαστικών ανελιξιών** αναπτύχθηκε παράλληλα με τη μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων. Τέτοια παραδείγματα είναι τα διάφορα **θερμοδυναμικά μοντέλα** όπως ο θερμικός θόρυβος στα ηλεκτρικά κυκλώματα ενώ ένα παράδειγμα στον τομέα της αστροφυσικής είναι ο αριθμός των αστεριών σε συγκεκριμένο χώρο του διαστήματος. Ένα άλλο πολύ γνωστό παράδειγμα, είναι η κίνηση **Brown ή Wiener** η οποία αρχικά χρησιμοποιήθηκε το 1827 από τον Άγγλο βοτανολόγο Brown για να περιγράψει την κίνηση ενός μορίου όταν βυθιστεί μέσα σ' ένα υγρό ή αέριο. Όπως είναι φυσικό, η εφαρμογή των στοχαστικών διαδικασιών επεκτάθηκε και σε άλλα πεδία της επιστημονικής έρευνας. Τέτοια παραδείγματα είναι τα διάφορα **δημογραφικά μοντέλα**, με σκοπό να μελετηθεί η συμπεριφορά ενός πληθυσμού ως προς τις γεννήσεις, τους θανάτους κ.α, καθώς και μοντέλα στους τομείς της **βιολογίας** και της **ιατρικής** όπως αυτά που χρησιμοποιούνται στην ανάγνωση του DNA. Ένα άλλο παράδειγμα σε αυτά τα επιστημονικά πεδία είναι η εφαρμογή των Craig and Senti (2002) οι οποίοι υποθέτουν ότι μια μακροχρόνια ασθένεια μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας αλυσίδας Markov. Πιο συγκεκριμένα, τα στάδια της ασθένειας αυτής αποτελούν τις (διακριτές) καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο ασθενής και θεωρώντας τα ως μια μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να περιγραφεί η πορεία της ασθένειας μέσω των σημειακών εκτιμήσεων ή των διαστημάτων εμπιστοσύνης των πιθανοτήτων μετάβασης από ένα στάδιο σε ένα άλλο. Τέλος, η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας

δημιούργησε νέες ανάγκες για ερμηνεία ορισμένων φαινομένων. Ένα τέτοιο (αρκετά πολύπλοκο) παράδειγμα είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος παραγωγής η ποσότητα των παραγόμενων προϊόντων του οποίου εξαρτάται από τα ήδη παραχθέντα προϊόντα, τη μελλοντική ζήτηση των εμπορευμάτων, τις δαπάνες προώθησης τους κ.α. Μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των Αλυσίδων Markov είναι η περιγραφή των – «καλών» ή «κακών» – καταστάσεων ενός συστήματος επικοινωνίας με σκοπό τη σύγκριση των ασύρματων και των ενσύρματων δικτύων (Rozovskii and Yor (2000)). Στην **επιχειρησιακή έρευνα**, ως ένα στοχαστικό μοντέλο μπορούμε μεταξύ άλλων να θεωρήσουμε την ποσότητα προϊόντων που μπορούν να ζητηθούν σε μια δεδομένη χρονική περίοδο ή το χρόνο μεταξύ της παραγγελίας και της παραλαβής τους. Η **θεωρία ουρών αναμονής** είναι μία άλλη πολύ γνωστή εφαρμογή των Στοχαστικών Διαδικασιών και σκοπός της είναι να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα σχετικά με το χρόνο αναμονής, την κατανομή του χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών εξυπηρετήσεων, τους πελάτες που φθάνουν σε κάποιο συγκεκριμένο κατάστημα κ.α.

Η μορφή της εξέλιξης της οικονομικής επιστήμης τις τελευταίες δεκαετίες, αύξησε την ανάγκη εύρεσης κατάλληλων εργαλείων και τεχνικών ώστε να αντιμετωπιστούν διάφορα ζητήματα που προέκυψαν. Τα **χρηματοοικονομικά** λοιπόν αποτελούν ένα άλλο επιστημονικό πεδίο στο οποίο χρησιμοποιούνται οι στοχαστικές διαδικασίες σε ένα πλήθος εφαρμογών. Στις χρονολογικές σειρές οι οποίες βασίζονται σε τιμές μετοχών ή άλλων οικονομικών δεικτών μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συμπεριφορά αυτών μπορεί να περιγραφεί με τη χρήση ενός στοχαστικού μοντέλου. Η τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως των δικαιωμάτων προαίρεσης (*call or put options*), όπου χρησιμοποιείται το μοντέλο των Black and Scholes και η κίνηση Brown, ή των πιστωτικών παραγώγων (*credit derivatives*) και άλλων αποτελεί μία άλλη ευρέως γνωστή χρήση των στοχαστικών ανελίξεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η χρήση των στοχαστικών διαδικασιών και ειδικότερα των αλυσίδων Markov στη διαδικασία εκτίμησης, καθώς και άλλων θεμάτων που προκύπτουν, πινάκων μετάβασης της πιστοληπτικής διαβάθμισης.

Η κατασκευή ενός πίνακα μετάβασης ο οποίος αναφέρεται στην **πιστοληπτική διαβάθμιση** (*credit rating*) μιας επιχείρησης ή των πιστωτικών ιδρυμάτων ή μιας χώρας ή διαφόρων χρηματοοικονομικών προϊόντων δεν έχει ενδιαφέρον μόνο από την τεχνική-μαθηματική του πλευρά αλλά και για τις οικονομικές πληροφορίες και επιπτώσεις που έχει. Με μια πρώτη σκέψη θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι **πιστωτικοί πίνακες**

**μετάβασης** (*credit transition or migration matrices*) αντανακλούν την πιστοληπτική διαβάθμιση μιας οικονομικής μονάδας. Μας δείχνουν, τις πιθανότητες μετάβασης (*transition or migration probabilities*) από μια διαβάθμιση σε μια άλλη δηλαδή τις **πιθανότητες αναβάθμισης** (*upgrade*) ή **υποβάθμισης** (*downgrade*) της φερεγγυότητάς της. Μεταξύ των πιθανοτήτων αυτών είναι και οι πιθανότητες χρεοκοπίας της για ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα, η γνώση των οποίων είναι απαραίτητη στο πλαίσιο λειτουργίας των πιστωτικών ιδρυμάτων

Όπως έχει αναφερθεί από το πρώτο κεφάλαιο, η γνώση της πιστοληπτικής βαθμολογίας από τη μεριά των πιστωτικών ιδρυμάτων είναι απαραίτητη όσον αφορά τις σταθμίσεις των χρηματοδοτικών τους ανοιγμάτων (Πίνακες 1.4.2 και 1.4.3), ειδικά στα πλαίσια του κανονιστικού πλαισίου της Βασιλείας II, αφού εφαρμόζεται μια πιο λεπτομερής και ευαίσθητη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου.<sup>23</sup> Τα πιστωτικά ιδρύματα μπορούν να πληροφορούνται την πιστοληπτική βαθμολογία του αντισυμβαλλομένου (στη περίπτωση κυβερνήσεων ή μεγάλων επιχειρήσεων) από τους οίκους αξιολόγησης ή να αναπτύξουν τις δικές τους μεθόδους εκτίμησης. Έτσι λοιπόν αν η φερεγγυότητα μιας επιχείρησης βελτιωθεί ή χειροτερεύσει σημαντικά τότε οι οίκοι αξιολόγησης θα αυξήσουν ή θα μειώσουν την αντίστοιχη πιστοληπτική βαθμολογία. Ειδικότερα, στην περίπτωση βαθμολόγησης ομολόγων, μια αναβάθμιση ή υποβάθμιση συνοδεύεται και από μια αλλαγή στην τιμή διαπραγματεύσεώς της στις χρηματιστηριακές αγορές επηρεάζοντας έτσι άμεσα το χαρτοφυλάκιο συναλλαγών ενός πιστωτικού ιδρύματος. Στην πραγματικότητα, τις περισσότερες περιπτώσεις η υποβάθμιση ή αναβάθμιση έπεται της αλλαγής της τιμής και της φερεγγυότητας του πιστούχου. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι οι Caouette et al. (1998) εξετάζουν διαφορετικές μεθόδους μέτρησης των επιπτώσεων στην απόδοση από μια επένδυση σε ένα ομόλογο εξαιτίας μιας αλλαγής στη πιστοληπτική διαβάθμισή του. Σε κάθε περίπτωση, προκύπτει το πρόβλημα εκτίμησης της πιστοληπτικής διαβάθμισης των πιστούχων. Όπως είναι φυσικό, έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές κατασκευής πινάκων μετάβασης και εκτίμησης των πιθανοτήτων μετάβασης. Είναι γνωστό ότι ο όρος εκτίμηση στη Στατιστική εμπεριέχει πάντα ένα σφάλμα ενώ προφανώς δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος εκτίμησης. Σκοπός λοιπόν, δεν θα μπορούσε να είναι άλλος από την κατασκευή ενός πίνακα μετάβασης τα στοιχεία του

<sup>23</sup> Όπως έχουμε αναφέρει δεν λείπει και η κριτική σχετικά με τις επιπτώσεις σε οικονομικό επίπεδο του τρόπου στάθμισης των χρηματοδοτικών ανοιγμάτων. Οι Altman and Saunders (2001) και Altman et al. (2002) ασκούν κριτική στο τρόπο μέτρησης της κεφαλαιακής επάρκειας και των πιστωτικών βαθμολογιών.

οποίου θα είναι «πολύ κοντά» στα πραγματικά. Η ανάγκη αυτή γίνεται πιο επιτακτική στην περίπτωση όπου ένας πίνακας μετάβασης δεν χρησιμοποιείται μόνο για την περιγραφή της πιστωτικής κατάστασης αλλά κυρίως όταν βασιζόμαστε στις εκτιμήσεις μας για τη λήψη διαφόρων αποφάσεων, αφού αλλαγές στη φερεγγυότητα μιας οικονομικής μονάδας ή ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος αναμφισβήτητα επηρεάζουν τα πιστωτικά ιδρύματα στις τελικές τους επιλογές. Για παράδειγμα, ένα πιστωτικό ίδρυμα είναι πιθανόν να ακολουθήσει μια πολιτική διακράτησης χρηματοοικονομικών προϊόντων με βαθμολογία BB σε ποσοστό 5%.

Τις τελευταίες δύο και πλέον δεκαετίες έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα όχι μόνο το πεδίο εφαρμογής των πιστωτικών πινάκων μετάβασης αλλά και οι τρόποι εκτίμησης τους. Σχεδόν σε κάθε βιβλίο διαχείρισης πιστωτικού κινδύνου αναλύονται τα ζητήματα των πινάκων αυτών. Ενδεικτικά αναφέρονται τα συγγράμματα των Duffie and Singleton (2003), Caouette et al. (1998), Arvanitis and Gregory (2001), Thomas et al. (2002) καθώς και των Cunter and Posch (2007). Επίσης, έχουν δημοσιευθεί μια σειρά από άρθρα με αποκλειστικό αντικείμενο τους πιστωτικούς πίνακες μετάβασης. Μεταξύ αυτών, αναφέρονται των Hanson and Schuermann (2006), Schuermann T. and Jafry Y. (2003) τα οποία καλύπτουν τους διαφορετικούς τρόπους εκτίμησης των στοιχείων ενός πίνακα μετάβασης καθώς και τη δημιουργία διαστημάτων εμπιστοσύνης των πιθανοτήτων χρεοκοπίας. Επίσης, σημαντικό θεωρείται το άρθρο των Israel et al. (2001) το οποίο διαπραγματεύεται θέματα σχετικά με το γεννήτορα πίνακα ενός πίνακα μετάβασης. Επιπλέον, μια σειρά από άρθρα, όπως των Lando and Skødeberg (2002), Frydman H. and Schuermann T. (2008), ασκούν κριτική στην «εύκολη» παραδοχή ότι τα δεδομένα μας αποτελούν μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Τέλος, οι Jafry Y. and Schuermann T. (2003) ασχολούνται με τη σύγκριση διαφορετικών πινάκων μετάβασης ενώ ο Altman (1998) σύγκρινε τις μεθοδολογίες των Altman and Kao και των εταιρειών Moody's και S&P για συγκεκριμένα δεδομένα και χρονικούς ορίζοντες ερμηνεύοντας τις αιτίες των διαφορετικών αποτελεσμάτων. Στο πλαίσιο των όσων αναφέραμε, στη συνέχεια του παρόντος κεφάλαιου επιχειρείται μια λεπτομερής προσέγγιση των ανωτέρω.

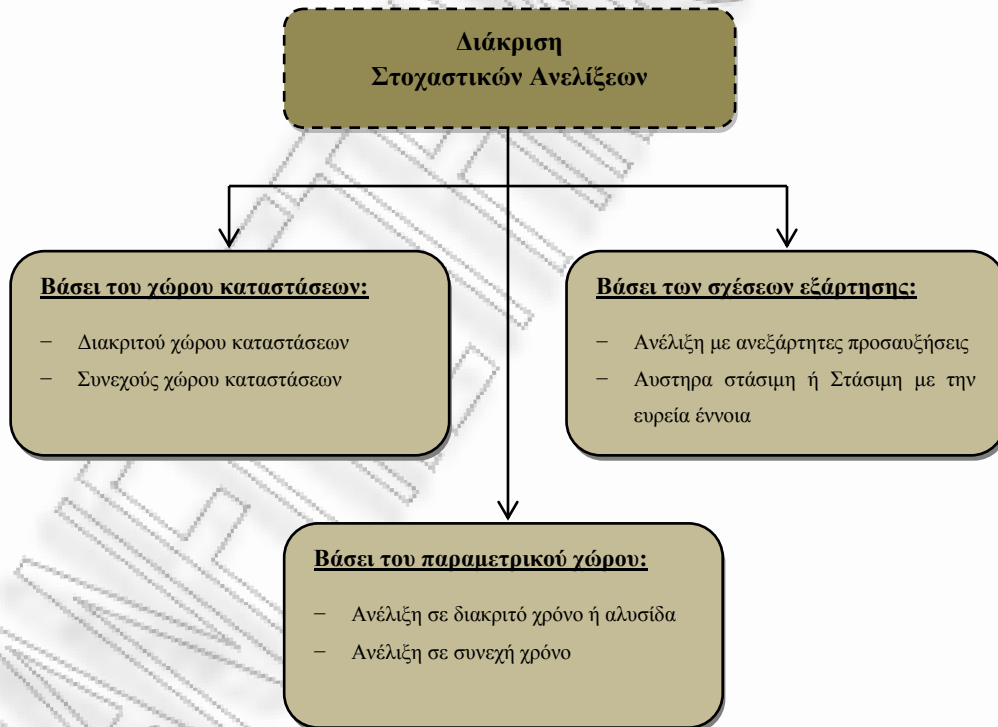
## 3.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί Αλυσίδων Markov

**Ορισμός 3.2.1.:** Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t\}_{t \in T}$ , οι οποίες ορίζονται συνήθως στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο  $\Omega$ , καλείται **στοχαστική διαδικασία ή ανέλιξη** (*stochastic process*). Δηλαδή  $\forall t \in T$ , η συνάρτηση  $X_t$  είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Το σύνολο  $T$  καλείται **παραμετρικός χώρος** (*index set*) της ανέλιξης και ο **χώρος καταστάσεων** (*state space*)  $S$  της ανέλιξης είναι το σύνολο στο οποίο παίρνουν τιμές οι τυχαίες μεταβλητές  $X_t$ .

Ανάλογα με τον παραμετρικό χώρο, το χώρο καταστάσεων και τις σχέσεις εξάρτησης οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.1 (Δάρας και Σύψας (2003)).

Σχήμα 3.2.1. : Διάκριση Στοχαστικών Ανελίξεων



Από τον Ορισμό 3.2.1 γίνεται σαφές ότι η  $X_t$  αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή για κάθε μία τιμή του  $t$  (το οποίο συνήθως αφορά χρόνο). Η μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας μπορεί να γίνει μέσω της **από κοινού συνάρτησης κατανομής** η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$



Αντίστοιχα οι **συναρτήσεις κατανομής μετάβασης** (*transition distribution functions*) ορίζονται από τη σχέση:

$$F_{t_0, t_1}(x_0, x_1) = P(X_{t_1} \leq x_1 | X_{t_0} \leq x_0).$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις κατανομής μετάβασης δεν είναι τίποτα άλλο παρά συναρτήσεις κατανομών δεσμευμένων ενδεχομένων. Ο επόμενος ορισμός είναι πολύ σημαντικός καθώς η έννοια της χρονικά ομογενούς στοχαστικής διαδικασίας (και συγκεκριμένα αλυσίδας Markov) θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου.

**Ορισμός 3.2.2.:** Μια στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t\}_{t \in T}$  καλείται **χρονικά ομογενής** (*time-homogeneous*) αν η συνάρτηση κατανομής μετάβασης εξαρτάται από τη διαφορά  $t_1 - t_0$  και όχι από τα  $t_0, t_1$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$F_{t_0, t_0+t}(x_0, x_1) = F_{0, t}(x_0, x_1), \quad t_0 \in T.$$

Οι επόμενες δύο προτάσεις θα μας βοηθήσουν στην εκτίμηση των πιθανότητων μετάβασης στη συνέχεια της ενότητας αυτής.

**Πρόταση 3.2.1.:** Σε μια αλυσίδα Markov, ισχύει:

$$P\{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=x_n\} = p_0(x_0) \cdot p(x_0, x_1) \cdot p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, x_n)$$

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in S, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Πρόταση 3.2.2.:** Για  $x_k \in S, k = n, n+1, \dots, n+m, n \geq 0, m \geq 2$  έχουμε,

$$P\{X_{n+1}=x_{n+1}, \dots, X_{n+m}=x_{n+m} | X_n=x_n\} = p(x_n, x_{n+1}) \cdot p(x_{n+1}, x_{n+2}) \dots p(x_{n+m-1}, x_{n+m}).$$

Πριν ξεκινήσουμε την ανάλυση βασικών ορισμών και εννοιών των αλυσίδων Markov ας θεωρήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 3.2.1 όπως αυτά έχουν εκτιμηθεί από τους Lando and Skødeberg (2002). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αρχικά στοιχεία τα οποία χρησιμοποίησαν οι δύο συγγραφείς, αφορούν ιστορικά δεδομένα της πιστοληπτικής διαβάθμισης 6659 επιχειρήσεων την περίοδο 1981–1997 από το σύστημα της Standard and Poor's. Εξετάζοντας λοιπόν τα δεδομένα του πίνακα σαν μια στοχαστική διαδικασία θα δοκιμάσουμε να

εκτιμήσουμε τις παράμετρούς του. Με βάση τα όσα έχουμε αναφέρει, παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι  $S=\{AAA,AA,A,BBB,BB,B,C,D\}$  ενώ ο παραμετρικός χώρος είναι  $T=\{0,1\}$ <sup>24</sup>. Η πρώτη στήλη του πίνακα, αφορά την πιστοληπτική διαβάθμιση τη χρονική στιγμή  $t=0$  ενώ η πρώτη γραμμή την πιστοληπτική διαβάθμιση τη χρονική στιγμή  $t=1$ . Επομένως, ο πίνακας περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μια πιστοληπτική βαθμολογία σε μία άλλη στο τέλος του έτους αυτού. Για παράδειγμα, η πιθανότητα τη χρονική στιγμή  $t=1$ , η πιστοληπτική διαβάθμιση να είναι A δοθέντος ότι την  $t=0$  ήταν BB είναι 0,00318. Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα αναφέρονται στις πιθανότητες η πιστοληπτική βαθμολογία να παραμείνει σταθερή. Για παράδειγμα, η πιθανότητα η βαθμολογία να παραμείνει BBB είναι 0,90603. Παρατηρούμε ότι τα περισσότερα στοιχεία της κύριας διαγωνίου έχουν αρκετά «μεγάλες» τιμές και συνεπώς θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι αντίστοιχες καταστάσεις δεν χαρακτηρίζονται από «έντονη» κινητικότητα. Το μικρότερο στοιχείο της διαγωνίου είναι αυτό που αντιστοιχεί στη κατάσταση CCC, ίσο με 0.52289, εξαιτίας των μεγάλων πιθανοτήτων μετάβασης προς τις καταστάσεις B και D. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατάσταση D η οποία αναφέρεται σε πτώχευση. Παρατηρούμε ότι για χαμηλές βαθμολογίες την χρονική στιγμή  $t=0$  η πιθανότητα πτώχευσης, δηλαδή η πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση D, τη χρονική στιγμή  $t=1$  είναι μεγαλύτερη. Επίσης, όπως είναι λογικό αν η βαθμολογία την  $t=0$  είναι D (γραμμή D), δηλαδή αν έχει πτωχεύσει, η βαθμολογία δεν μπορεί να μεταβληθεί (ο ορισμός της περίπτωσης αυτής δίνεται στη συνέχεια). Τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα σημαίνουν ότι οι αντίστοιχες καταστάσεις δεν επικοινωνούν (άμεσα). Για παράδειγμα, αν η πιστοληπτική διαβάθμιση είναι AAA τη χρονική στιγμή  $t=0$  δεν μπορεί να γίνει BB την  $t=1$ . Ωστόσο οι δύο αυτές «καταστάσεις» επικοινωνούν –έστω και με χαμηλή πιθανότητα– έμμεσα, για παράδειγμα μέσω της διαδρομής  $AAA \rightarrow BBB \rightarrow BB$ .

Για την καλύτερη κατανόηση και εποπτεία των δεδομένων ομαδοποιούμε περαιτέρω τις κατηγορίες AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D έτσι ώστε  $\mathbf{A}=\{AAA,AA,A\}$ ,  $\mathbf{B}=\{BBB,BB,B\}$ ,  $\mathbf{C}=\{CCC,D\}$ . Σημειώνεται ότι η κατηγοριοποίηση είναι αρκετά απλουστευτική τόσο από τη μεριά της φυσικής ερμηνείας των δεδομένων όσο και από τη στατιστική.

<sup>24</sup> Στο εξής οι έννοιες κατάσταση και βαθμολογία θα είναι ταυτόσημες, θα αναφέρουμε δηλαδή ότι ένας πιστούχος (επιχείρηση, ιδιώτης, χώρα) ή ένα χρηματοοικονομικό προϊόν βρίσκεται στη κατάσταση  $i$  το οποίο ισοδυναμεί με ότι η βαθμολογία του είναι  $i$ .

**Πίνακας 3.2.1.:** Πίνακας Μετάβασης 1 έτους

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.95912	0.03982	0.00096	0.00010	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
AA	0.01249	0.93689	0.04519	0.00524	0.00015	0.00004	0.00000	0.00000
A	0.00011	0.01666	0.93097	0.04906	0.00274	0.00042	0.00001	0.00003
BBB	0.00002	0.00253	0.03635	0.90603	0.03955	0.01398	0.00030	0.00125
BB	0.00000	0.00012	0.00318	0.07866	0.85980	0.05411	0.00317	0.00096
B	0.00000	0.00005	0.00495	0.00385	0.07029	0.87618	0.02941	0.01527
CCC	0.00000	0.00004	0.00091	0.02523	0.02890	0.11823	0.52289	0.30380
D	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

Πηγή: Lando and Skødeberg (2002)

Για παράδειγμα δεν θεωρείται κατάσταση πτώχευσης (αφού η κατάσταση D έχει ομαδοποιηθεί με την CCC). Επίσης, για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μετάβασης είναι απαραίτητη η γνώση των αρχικών δεδομένων<sup>25</sup>. Ωστόσο, θεωρείται ότι θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των ορισμών και των βασικών εννοιών που θα αναλυθούν στην παρούσα ενότητα. Έτσι λοιπόν, θα θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα η πιστοληπτική διαβάθμιση να παραμείνει **A** ισούται με το μέσο όρο των πιθανοτήτων μεταβάσεων μεταξύ των κατηγοριών AAA, AA και A. Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) &= \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{AAA}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{AAA}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{AAA})] + \\
 &+ \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{AA}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{AA}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{AA})] + \\
 &+ \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{A}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{A}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A})] ,
 \end{aligned}$$

ενώ για την πιθανότητα η πιστοληπτική διαβάθμιση από **A** να γίνει **B** το επόμενο έτος έχουμε,

<sup>25</sup> Συγκεκριμένα για τη πιθανότητα παραμονής στη βαθμολογία **A** της νέας κατηγοριοποίησης, έχουμε:

$$P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) = P(X_{t+1} \in \mathbf{A} | X_t \in \mathbf{A}) = P(X_{t+1} \in \mathbf{AAA} | X_t \in \mathbf{A}) + P(X_{t+1} \in \mathbf{AA} | X_t \in \mathbf{A}) + P(X_{t+1} \in \mathbf{A} | X_t \in \mathbf{A})$$

και επομένως όπως γίνεται αντιληπτό η  $P(X_t \in \mathbf{A})$  δεν μπορεί να υπολογιστεί χωρίς τη χρήση όλων των αρχικών δεδομένων. Αντίστοιχα, είναι απαραίτητη και η γνώση των πιθανοτήτων  $P(X_t \in \mathbf{B})$  και  $P(X_t \in \mathbf{C})$ .

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) &= \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{BBB}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{BBB}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{BBB})] + \\
&+ \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{BB}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{BB}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{BB})] + \\
&+ \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{B}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{B}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})].
\end{aligned}$$

Τέλος, για την πιθανότητα η πιστοληπτική διαβάθμιση από **A** να γίνει **C** το επόμενο έτος έχουμε,

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) &= \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{CCC}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{CCC}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{CCC})] + \\
&+ \frac{1}{3} [P(\mathbf{AAA} \rightarrow \mathbf{D}) + P(\mathbf{AA} \rightarrow \mathbf{D}) + P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D})].
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα προκύπτουν και οι πιθανότητες μετάβασης για όλους τους υπόλοιπους δυνατούς συνδυασμούς. Τα νέα δεδομένα παρουσιάζονται στο Πίνακα 3.2.2 οι ερμηνείες των στοιχείων του οποίου είναι αντίστοιχες με αυτές του Πίνακα 3.2.1.

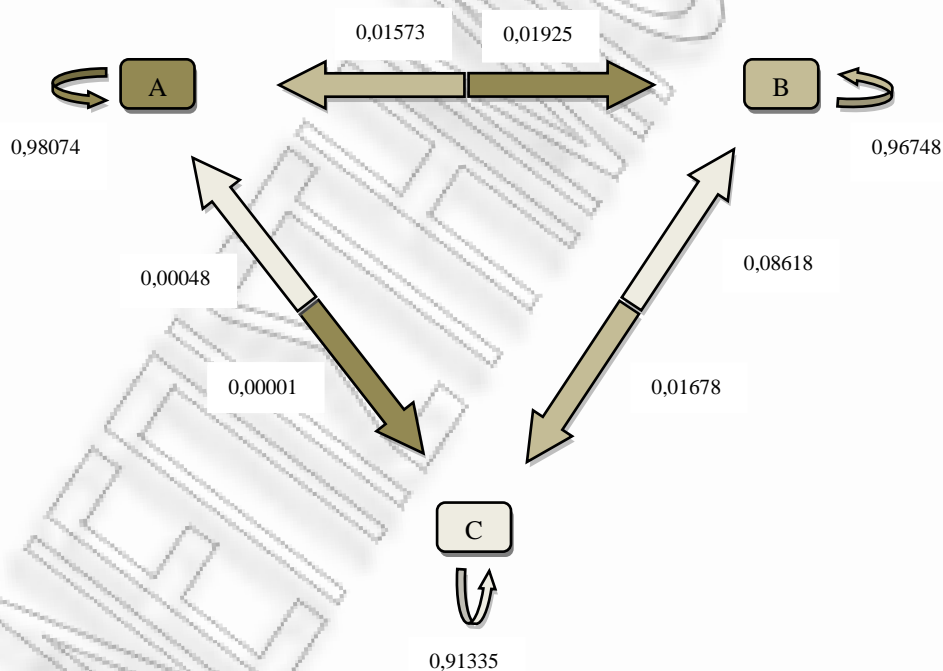
**Πίνακας 3.2.2 :** Πίνακας Μετάβασης 1 έτους για τις κατηγορίες **A**, **B** και **C**

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>A</b>	0,98074	0,01925	0,00001
<b>B</b>	0,01573	0,96748	0,01678
<b>C</b>	0,00048	0,08618	0,91335

Επίσης, στη συνέχεια της συγκεκριμένης ενότητας θεωρούμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης παραμένουν σταθερές για όλες τις μελλοντικές στιγμές (η διαδικασία καλείται ομογενής). Για παράδειγμα, συμβολίζοντας με  $p_{AB} = P(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) (= 0,01925)$  την πιθανότητα η βαθμολογία από **A** τη χρονική στιγμή  $t=0$  να γίνει **B** τη χρονική στιγμή  $t=1$ , η πιθανότητα αυτή παραμένει σταθερή και για μετάβαση μεταξύ των χρονικών σημείων  $t=1$  και  $t=2$ ,  $t=2$  και  $t=3$  κ.ο.κ. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η υπόθεση της ομογένειας είναι εξαιρετικά ισχυρή, ειδικά όταν δεν το επιτρέπει η «φύση» των δεδομένων και το φαινόμενο το οποίο θέλουμε να μοντελοποιήσουμε μέσω μιας αλυσίδας Markov. Στην περίπτωση των πιστωτικών

βαθμολογιών η υπόθεση της χρονικής ομογένειας σημαίνει –μεταξύ άλλων– ότι η πιστοληπτική βαθμολογία μιας επιχείρησης ή μιας χώρας ή ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος θα έχει την ίδια ακριβώς «συμπεριφορά» καθ' όλη τη διάρκεια των επόμενων χρονικών διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας έναν πίνακα μετάβασης ενός έτους που αφορά την πιστοληπτική βαθμολογία των επιχειρήσεων κάποιου κλάδου. Από τον πίνακα αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις μεταβάσεις για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα. Η υπόθεση λοιπόν της χρονικής ομογένειας στην περίπτωση αυτή σημαίνει ότι οικονομικές και άλλες συνθήκες παραμένουν σταθερές στη διάρκεια αυτών των χρονικών διαστημάτων. Η παραδοχή αυτή εξετάζεται σε ξεχωριστή ενότητα του παρόντος κεφαλαίου. Στο Σχήμα 3.2.2 παρουσιάζονται γραφικά όλες οι δυνατές μεταβάσεις καθώς και οι αντίστοιχες πιθανότητες του Πίνακα 3.2.2.

Σχήμα 3.2.2: Βαθμολογίες Πιστοληπτικής Ικανότητας και Πιθανότητες Μετάβασης



Όπως έχουμε αναφέρει, πολλές φορές στα οικονομικά προσπαθώντας να ερμηνεύσουμε ένα φαινόμενο μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε με τη χρήση των στοχαστικών διαδικασιών. Για την περιγραφή λοιπόν του πιο πάνω προβλήματος θεωρούμε ότι οι πιστοληπτικές βαθμολογίες μεταξύ δύο (διακριτών) χρονικών σημείων αποτελούν μια οικονομογένεια τυχαίων μεταβητών. Αποτελούν δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία και συγκεκριμένα μια αλυσίδα Markov.

**Ορισμός 3.2.3:** Μια στοχαστική ανέλιξη  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  με χώρο καταστάσεων  $S$  καλείται **αλυσίδα Markov** (*Markov Chain – MC*) εάν ικανοποιεί τη σχέση:

$$P(X_{n+1} \leq x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = P(X_{n+1} \leq x_{n+1} | X_n = x_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in S.$$

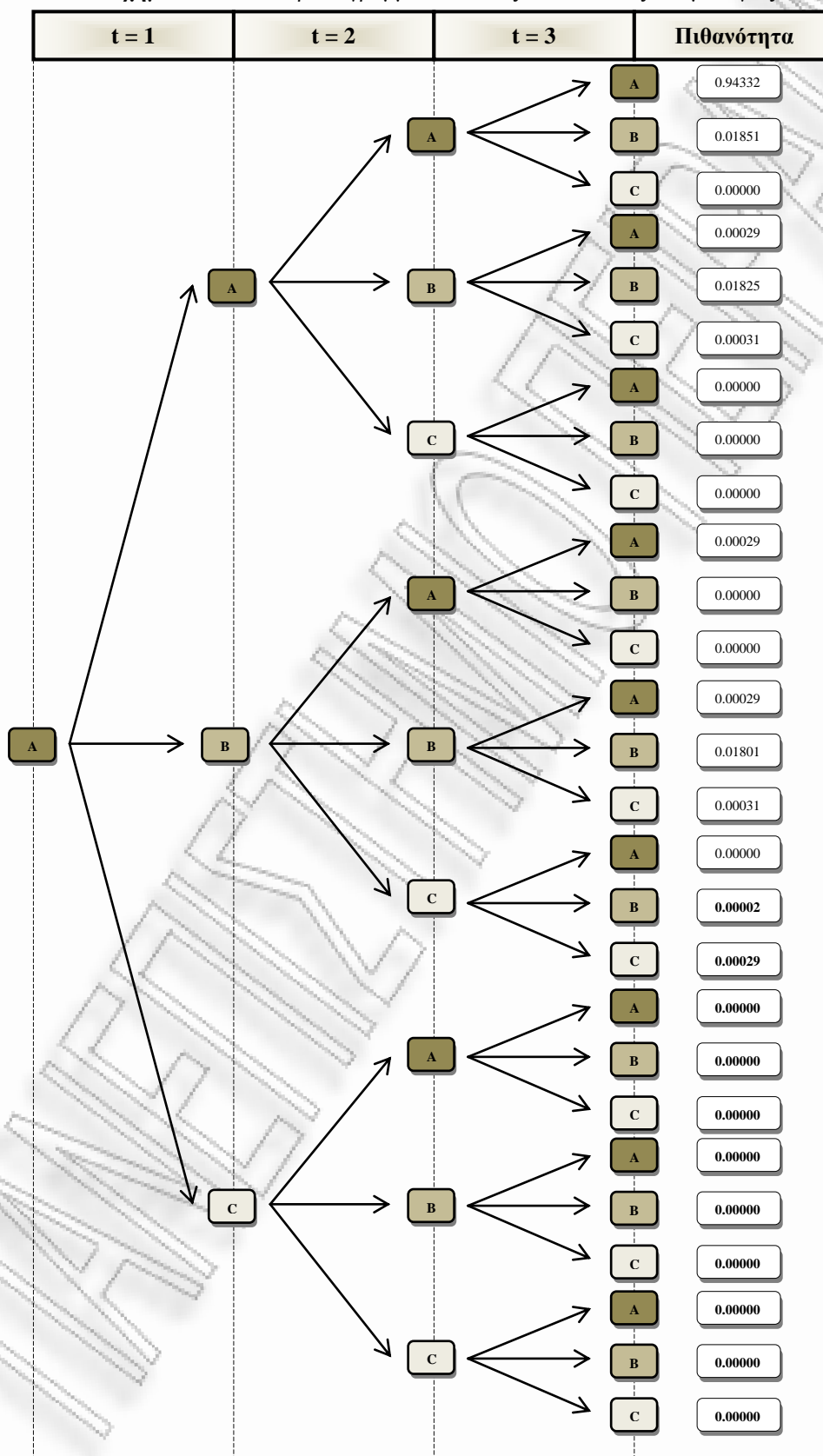
Η υπόθεση ότι τα δεδομένα των Πινάκων 3.2.1. και 3.2.2 αποτελούν μια αλυσίδα Markov σημαίνει ότι δοθείσης της παρούσας κατάστασης του φαινομένου, η κατάστασή του στο μέλλον είναι ανεξάρτητη από την κατάστασή του στο παρελθόν. Θεωρούμε λοιπόν, ότι σε ποια κατάσταση θα βρίσκεται «το σύστημα» τη χρονική στιγμή  $n$  εξαρτάται μόνο από την κατάσταση τη χρονική στιγμή  $n-1$  και όχι από τις υπόλοιπες παρελθούσες καταστάσεις (αλυσίδα Markov 1ης τάξης).

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα δεδομένα του Σχήματος 3.2.2, ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t=0$  η πιστοληπτική βαθμολογία είναι **A**. Τη χρονική στιγμή  $t=1$  η πιστοληπτική βαθμολογία μπορεί να είναι **A** ή **B** ή **C**. Κάθε χρονική στιγμή (έτος) το «σύστημα» μπορεί να βρεθεί σε μία από τις τρεις δυνατές καταστάσεις. Στο Σχήμα 3.2.3 μπορούμε να παρατηρήσουμε την πιθανή πορεία της πιστοληπτικής βαθμολογίας για 3 χρονικά διαστήματα. Όπως παρατηρούμε, για τις τρεις διαφορετικές βαθμολογίες που μπορεί να υπάρξουν κάθε χρονική στιγμή τελικά προκύπτουν 27 διαφορετικά μονοπάτια που μπορεί να πραγματοποιηθούν. Οι πιθανότητες πραγματοποίησης κάθε ενός από αυτά είναι στην τελευταία στήλη του Σχήματος και προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, για την πιθανότητα πραγματοποίησης της διαδρομής  $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C$  έχουμε,

$$\begin{aligned} P(A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C) &= P(A \rightarrow B) * P(B \rightarrow B) * P(B \rightarrow C) = \\ &= 0.01925 * 0.96748 * 0.01678 = \\ &= 0.00262. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα προκύπτουν και οι υπόλοιπες πιθανότητες. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε γίνεται υπόθεση της χρονικής ομογένειας της στοχαστικής διαδικασίας. Επίσης, για να βρούμε την πιθανότητα μετά από 3 χρονικά διαστήματα η πιστοληπτική βαθμολογία να είναι και πάλι **A**, δεν έχουμε παρά να αθροίσουμε τις πιθανότητες των κλάδων που οδηγούν στη βαθμολογία **A**. Στην περίπτωση μας η τιμή της πιθανότητας αυτής είναι πολύ κοντά στην 0.9442. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι τιμές των πιθανοτήτων να είμαστε σε μια

Σχήμα 3.2.3. : Δενδροδιάγραμμα – Πιθανές Καταστάσεις Βαθμολογίας



συγκεκριμένη βαθμολογία μετά από κάποια χρονικά διαστήματα. Ενδεικτικά παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2.3 οι πιθανότητες η πιστοληπτική βαθμολογία να είναι **A** ή **B** ή **C** στο τέλος του πρώτου διαστήματος ( $t=1$ ), του δεύτερου διαστήματος ( $t=2$ ), του τρίτου διαστήματος ( $t=3$ ) κ.ο.κ. δοθέντος ότι ξεκινήσαμε ( $t=0$ ) από την κατάσταση **A**. Το τελευταίο αποτελεί και την **αρχική κατανομή ή αρχική συνθήκη** της αλυσίδας. Είναι λογικό, ότι η αρχική κατανομή της αλυσίδας επηρεάζει τις πιθανότητες η βαθμολογία να ακολουθήσει κάποιο συγκεκριμένο μονοπάτι, όπως αυτά φαίνονται στο Σχήμα 3.2.3. Με άλλα λόγια, η αρχική κατανομή επηρεάζει την **παροδική συμπεριφορά** του συστήματος. Ωστόσο, όπως φαίνεται από τα Σχήματα 3.2.4, 3.2.5 και 3.2.6, οι πιθανότητες των βαθμολογιών τείνουν σε μια σταθερή ή οριακή τιμή, με διαφορετικό όμως ρυθμό. Επομένως, αν και η παροδική συμπεριφορά εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, οι οριακές πιθανότητες των καταστάσεων είναι ανεξάρτητες από τις αρχικές συνθήκες (Δάρας και Σύψας (2003)). Ένα τέτοιο σύστημα καλείται **εργοδικό**.

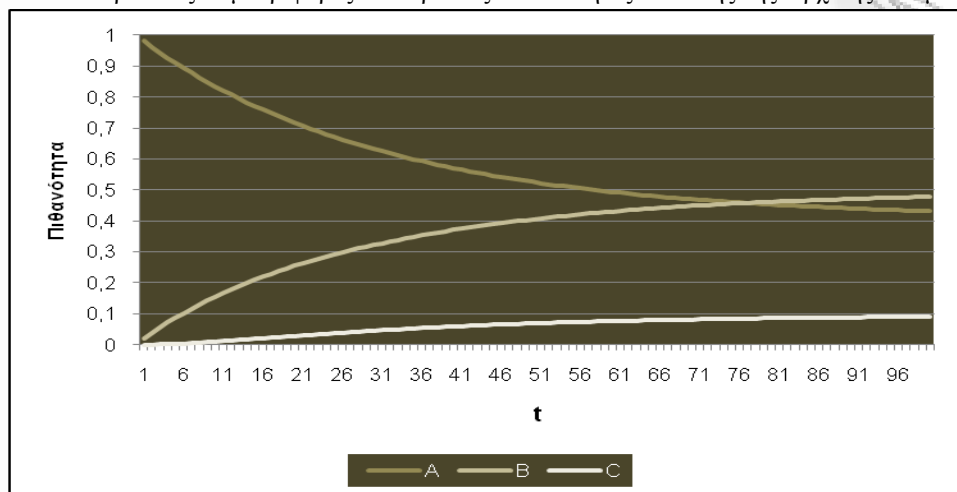
**Πίνακας 3.2.3:** Πιθανότητες Πιστοληπτικής Βαθμολογίας δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας A

Πιθανότητα Βαθμολογίας			
	Βαθμολογία A	Βαθμολογία B	Βαθμολογία C
<b>t = 1</b>	0.98074	0.01925	0.00001
<b>t = 2</b>	0.96215	0.03750	0.00034
<b>t = 3</b>	0.94421	0.05483	0.00095
<b>t = 4</b>	0.92689	0.07131	0.00179
<b>t = 5</b>	0.91016	0.08698	0.00284
<b>t = 6</b>	0.89400	0.10192	0.00407
<b>t = 7</b>	0.87838	0.11617	0.00543
<b>t = 8</b>	0.86330	0.12977	0.00692
<b>t = 9</b>	0.84871	0.14276	0.00851
<b>t = 10</b>	0.83462	0.15519	0.01017

Στα επόμενα Σχήματα μπορούμε να παρατηρήσουμε τα όσα αναφέραμε σχετικά με την παροδική συμπεριφορά και τις οριακές πιθανότητες. Το Σχήμα 3.2.4 αναφέρεται στην περίπτωση που η αρχική βαθμολογία είναι **A**. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να παραμείνουμε στην κατάσταση αυτή συνεχώς μειώνεται σε αντίθεση με τις πιθανότητες μετάβασης είτε προς τη βαθμολογία **B** είτε προς τη βαθμολογία **C**.

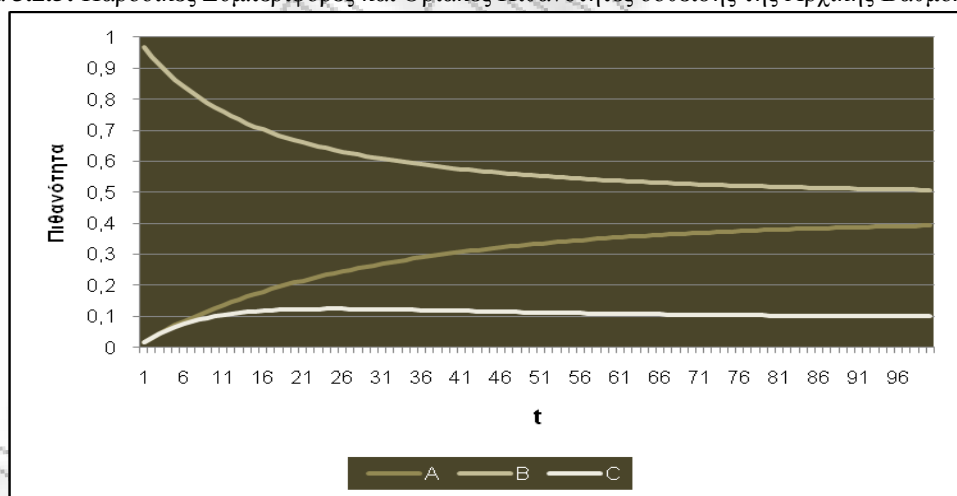


**Σχήμα 3.2.4:** Παροδικές Συμπεριφορές και Οριακές Πιθανότητες δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας A



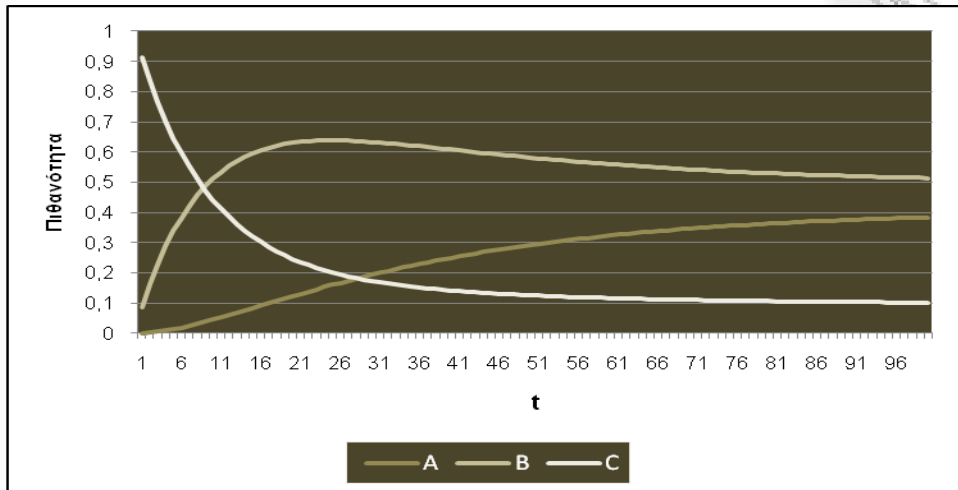
Το Σχήμα 3.2.5 αναφέρεται στην περίπτωση που η αρχική βαθμολογία είναι **B**. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να παραμείνουμε στην κατάσταση αυτή συνεχώς μειώνεται ενώ οι πιθανότητες μετάβασης είτε προς τη βαθμολογία **A** είτε προς τη βαθμολογία **C** αυξάνονται.

**Σχήμα 3.2.5:** Παροδικές Συμπεριφορές και Οριακές Πιθανότητες δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας B



Το Σχήμα 3.2.6 αναφέρεται στην περίπτωση που η αρχική βαθμολογία είναι **C**. Η πιθανότητα να παραμείνουμε στην ίδια κατάσταση συνεχώς μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των χρονικών περιόδων σε αντίθεση με τις πιθανότητες μετάβασης προς τις βαθμολογίες **A** και **B**.

Σχήμα 3.2.6: Παροδικές Συμπεριφορές και Οριακές Πιθανότητες δοθείσης της Αρχικής Βαθμολογίας C



Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα κοινά σημεία των παραπάνω Σχημάτων. Αξίζει να σχολιάσουμε ότι οι πιθανότητες η βαθμολογία να παραμείνει στην αρχική της τιμή (ανεξάρτητα ποια είναι αυτή) μειώνεται και στις τρεις περιπτώσεις. Ωστόσο ο ρυθμός μείωσης δεν είναι ίδιος για τις διαφορετικές αρχικές καταστάσεις εξαιτίας των διαφορετικών πιθανοτήτων παραμονής στην ίδια βαθμολογία. Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην περίπτωση όπου η αρχική βαθμολογία είναι A ο ρυθμός αυτός είναι πιο αργός σε σχέση με τις δύο άλλες περιπτώσεις αφού η πιθανότητα παραμονής στη βαθμολογία αυτή είναι η μεγαλύτερη και ίση με 0,98074. Τελικά όμως είναι εμφανές ότι ανεξάρτητα με την αρχική κατανομή, η στοχαστική διαδικασία τείνει σε συγκεκριμένες τιμές πιθανοτήτων.

Περιγράφοντας τα δεδομένα του Πίνακα 3.2.1 αναφέραμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου δύο καταστάσεις μπορεί να μην επικοινωνούν άμεσα ή έμμεσα. Ένας πιο αυστηρός ορισμός της περίπτωσης αυτής είναι ο παρακάτω.

**Ορισμός 3.2.4:** Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{X_t\}_{t \in T}$  με χώρο καταστάσεων  $S$ . Μια κατάσταση  $j \in \Omega$  καλείται **προσιτή** (συμβολίζουμε με  $i \rightarrow j$ ) από την κατάσταση  $i \in S$ , αν  $p_{ij}(t) > 0$  για κάποιο  $t \geq 0$ . Αν και η  $j$  κάνει προσιτή την  $i$  (συμβολίζουμε με  $j \rightarrow i$ ), τότε οι καταστάσεις  $i, j$  επικοινωνούν (συμβολίζουμε με  $i \leftrightarrow j$ ).

Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια κατάσταση μπορεί να μην κάνει προσιτές τις υπόλοιπες καταστάσεις ενός συστήματος. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 3.2.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι είναι δυνατές μεταβάσεις στην κατάσταση D από τις A, BBB, BB, B,

CCC. Ωστόσο, αν το σύστημα εισέλθει στην κατάσταση D δεν μπορεί να φύγει από αυτό. Μια τέτοια κατάσταση καλείται **απορροφητική** (*absorbing*). Στην περίπτωση απορροφητικών καταστάσεων ισχύει πάντα ότι  $p(i,i)=1$  ή ισοδύναμα  $p(i,j)=0$ ,  $\forall i,j, i \neq j$ .

Οι πιθανότητες μετάβασης του Σχήματος 3.2.2 μπορούν να παρασταθούν μέσω του ακόλουθου πίνακα μετάβασης ενός έτους,  $P$ , ο οποίος περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης ενός έτους από τη μια κατάσταση στην άλλη.

$$P = \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98074 & 0.01925 & 0.00001 \\ 0.01573 & 0.96748 & 0.01678 \\ 0.00048 & 0.08618 & 0.91335 \end{bmatrix}$$

Γενικότερα, θεωρώντας ως χώρο καταστάσεων το σύνολο  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  ο πίνακας

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots & \dots & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

καλείται **πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης**. Τα στοιχεία του πίνακα έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ο πίνακας  $P = (p_{ij})$  του οποίου τα στοιχεία έχουν τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **στοχαστικός** ενώ θα πρέπει να είναι πάντα τετραγωνικός<sup>26</sup>.

Στην περίπτωση όπου θέλουμε να πληροφορηθούμε σχετικά με την πιθανότητα μετάβασης από μια κατάσταση σε μία άλλη μετά από δύο χρόνια και υποθέτοντας χρονική ομογένεια

<sup>26</sup> Ένας πίνακας καλείται τετραγωνικός (square matrix) όταν το πλήθος των γραμμών ισούται με το πλήθος των στηλών του.

της αλυσίδας δεν έχουμε παρά να πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα  $P$  με τον εαυτό του. Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned}
 P^{(2)} = P * P &= \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\ P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\ P_{CA} & P_{CB} & P_{CC} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\ P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\ P_{CA} & P_{CB} & P_{CC} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.98074 & 0.01925 & 0.00001 \\ 0.01573 & 0.96748 & 0.01678 \\ 0.00048 & 0.08618 & 0.91335 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.98074 & 0.01925 & 0.00001 \\ 0.01573 & 0.96748 & 0.01678 \\ 0.00048 & 0.08618 & 0.91335 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.96215 & 0.03750 & 0.00034 \\ 0.03065 & 0.93776 & 0.03156 \\ 0.00226 & 0.16209 & 0.83565 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Υποθέτοντας λοιπόν χρονική ομογένεια, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεγαλύτερου χρονικού ορίζοντα. Για παράδειγμα, βάσει των παραπάνω υπολογισμών η πιθανότητα η πιστοληπτική διαβάθμιση στο τέλος της 2ης περιόδου να είναι **B** δοθέντος ότι ξεκίνησε από τη βαθμολογία **C** είναι ίση με 0,16209.

### 3.3 Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Όπως έχουμε αναφέρει, πολλές φορές μια αλυσίδα Markov είναι κατάλληλη να περιγράψει ένα φαινόμενο το οποίο θέλουμε να μελετήσουμε. Επίσης, στις περισσότερες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να πραγματοποιήσουμε κάποιους συγκεκριμένους στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων. Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας,  $\chi^2$  ελέγχους καθώς και κάποια ασυμπτωτικά αποτελέσματα, μπορούμε να ελέγξουμε αν η στοχαστική διαδικασία αποτελεί μια αλυσίδα Markov, αν είναι στάσιμη και αν τα στοιχεία ενός πίνακα  $P$  είναι στατιστικά ίσα με τα στοιχεία ενός πίνακα  $P^*$  με συγκεκριμένες τιμές.

#### α. Έλεγχος για Συγκεκριμένες Τιμές των Πιθανοτήτων Μετάβασης

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν οι πιθανότητες μετάβασης,  $p_{ij}$ , μιας συγκεκριμένης γραμμής  $i$  ενός πίνακα  $P$  σαν αυτό που έχουμε περιγράψει είναι ίσες με μια συγκεκριμένη  $p_{ij}^*$ , για όλες τις καταστάσεις στο χώρο καταστάσεων  $S$ ,  $j \in S$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα των Anderson and Goodman (1957) το οποίο είναι:

$$\sum_{j \in S} \frac{n_i (\hat{p}_{ij} - p_{ij}^*)^2}{p_{ij}^*}. \quad (3.3.1)$$

Η παραπάνω ποσότητα ακολουθεί ασυμπτωτικά τη  $\chi^2$  κατανομή με  $K-1$  βαθμούς ελευθερίας. Έτσι λοιπόν, πραγματοποιώντας τον έλεγχο υπόθεσης

$$H_0: p_{ij} = p_{ij}^* \quad H_1: p_{ij} \neq p_{ij}^* \quad (3.3.2)$$

δεν μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση, σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , αν η ποσότητα της Σχέσης 3.3.1 είναι μεγαλύτερη από  $\chi_{K-1; \alpha}^2$ .

Αντίστοιχα, αν ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν κάθε μία πιθανότητα μετάβασης,  $p_{ij}$ , του πίνακα  $P$  είναι ίση με μια συγκεκριμένη  $p_{ij}^*$ , για όλες τις καταστάσεις στο χώρο καταστάσεων  $S$ ,  $i \in S$  και  $j \in S$ , και υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές  $n_i (\hat{p}_{ij} - p_{ij}^*)^2$  για διαφορετικά  $i$  είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητες μπορούμε να θεωρήσουμε την ποσότητα:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \frac{n_i (\hat{p}_{ij} - p_{ij}^*)^2}{p_{ij}^*} \quad (3.3.3)$$

η οποία ακολουθεί ασυμπτωτικά τη  $\chi^2$  κατανομή με  $K(K-1)$  βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση, σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , αν η ποσότητα της Σχέσης 3.3.3 είναι μεγαλύτερη από  $\chi_{K(K-1); \alpha}^2$ .

### β. Ένας Έλεγχος Στασιμότητας της Μαρκοβιανής Αλυσίδας

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν η αλυσίδα Markov είναι στάσιμη. Με άλλα λόγια θέλουμε να ελέγξουμε αν οι γραμμές πινάκων μετάβασης διαφορετικών χρονικών περιόδων είναι – στατιστικά – ίσες. Έτσι λοιπόν, για μια δεδομένη κατάσταση  $i$ , ενδιαφερόμαστε για τον έλεγχο υπόθεσης:

$$H_0: p_{ij,t} = p_{ij} \quad H_1: p_{ij,t} \neq p_{ij}, \quad (3.3.4)$$

δηλαδή ότι η  $i$ -γραμμή του  $t$ -περιόδων πίνακα μετάβασης,  $\hat{p}_{ij,t}$ ,  $j=1,2,\dots,K$  είναι ίδια για όλες τις περιόδους  $t = 0,1,\dots,T$ . Οι Anderson and Goodman (1957) πρότειναν για τον έλεγχο αυτό τη στατιστική συνάρτηση:

$$\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j \in S} \frac{n_{i,t} (\hat{p}_{ij,t} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}}. \quad (3.3.5)$$

Υπό τη μηδενική υπόθεση, η παραπάνω ποσότητα ακολουθεί τη  $\chi^2$  κατανομή με  $(K-1)(T-1)$  βαθμούς ελευθερίας. Έτσι λοιπόν, δεν μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση, σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , αν η ποσότητα της Σχέσης (3.3.5) είναι μεγαλύτερη από  $\chi_{(T-1)(K-1); \alpha}^2$ .

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν όλος ο πίνακας μετάβασης  $P$  είναι χρονικά ανεξάρτητος θα πρέπει και πάλι να πραγματοποιήσουμε τον Έλεγχο Υπόθεσης (3.3.4) για όλα τα  $i, j=1,2,\dots,K$ ,  $t=0,1,\dots,T-1$ . Υποθέτοντας λοιπόν ότι οι πιθανότητες  $p_{ij,t}, p_{ij}$ , για διαφορετικές τιμές του  $i$ , είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η αντίστοιχη στατιστική συνάρτηση είναι:

$$\sum_{i \in S} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j \in S} \frac{n_{i,t} (\hat{p}_{ij,t} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} \quad (3.3.6)$$

και ακολουθεί τη  $\chi^2$  κατανομή με  $K(K-1)(T-1)$  βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, δεν μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή δεν μπορούμε να αποδεχθούμε ότι

οι πίνακες μετάβασης είναι χρονικά ανεξάρτητοι σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , αν η ποσότητα της Σχέσης (3.3.6) είναι μεγαλύτερη από  $\chi^2_{K(K-1)(T-1); \alpha}$ .

Εναλλακτικά, όσον αφορά τον Έλεγχο (3.3.4) για τον έλεγχο της χρονικής ομοιογένειας της  $i$ -γραμμής ενός πίνακα μετάβασης, μπορούμε να θεωρήσουμε την ποσότητα

$$L_i = -2 \log \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{j=1}^m \left( \frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}_{ij,t}} \right)^{n_{ij,t}} \quad (3.3.7)$$

η οποία ακολουθεί τη  $\chi^2$  κατανομή με  $(K-1)(T-1)$  βαθμούς ελευθερίας.

Αντίστοιχα, για την περίπτωση που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν όλος ο πίνακας μετάβασης  $P$  είναι χρονικά ανεξάρτητος μπορούμε να θεωρήσουμε την ποσότητα  $\sum_{i \in S} L_i$ , η

οποία ακολουθεί τη  $\chi^2$  κατανομή με  $K(K-1)(T-1)$  βαθμούς ελευθερίας και να ελέγξουμε την απόδοχή ή μη της μηδενικής υπόθεσης στο επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  που θα επιλέξουμε.

#### γ. Ένας Έλεγχος για το αν η Στοχαστική Διαδικασία Αποτελεί μια Αλυσίδα Markov

Στην περίπτωση που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε δεδομένα όπως αυτά που έχουμε περιγράψει στην ενότητα αυτή, αναμφίβολα ένα από τα πρώτα πράγματα που επιθυμούμε να ελέγξουμε είναι αν η στοχαστική διαδικασία αποτελεί μια αλυσίδα Markov. Αν και θα μπορούσαμε να πούμε ότι στην αρθρογραφία που εξετάστηκε για την συγγραφή του κεφαλαίου αυτού δεν ελέγχεται η παραπάνω υπόθεση, οι Thomas et al. (2002) χρησιμοποιούν ένα έλεγχο  $\chi^2$  αντίστοιχο με αυτούς που περιγράψαμε στις προηγούμενες ενότητες. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι τα δεδομένα μας αφορούν την πιστοληπτική βαθμολογία κάποιων πιστούχων. Συμβολίζοντας με  $n_{i,t}$  τον αριθμό των φορών που ένας πιστούχος ήταν στην κατάσταση  $i$  το χρόνο  $t$ ,  $n_{i,j,t}$  τον αριθμό των φορών που ένας πιστούχος ήταν στην κατάσταση  $i$  το χρόνο  $t$  και μεταπήδησε στην κατάσταση  $j$  το χρόνο  $t+1$  και  $n_{ijk,t}$  τον αριθμό των φορών που ένας πιστούχος ήταν στην κατάσταση  $i$  το χρόνο  $t$  μεταπήδησε στην κατάσταση  $j$  το χρόνο  $t+1$  και από αυτή στην κατάσταση  $k$  το χρόνο  $t+2$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα η πιστοληπτική βαθμολογία του πιστούχου να ακολουθήσει τη διαδρομή  $i \rightarrow j \rightarrow k$  τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές  $t, t+1, t+2$  από την επόμενη σχέση

$$\hat{p}_{ijk} = \frac{\sum_{t=0}^{T-2} n_{ijk,t}}{\sum_{t=0}^{T-2} n_{ij,t}}. \quad (3.3.8)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση  $j$  στην κατάσταση  $k$  από τη σχέση:

$$\hat{p}_{jk} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} n_{jk,t}}{\sum_{t=0}^{T-1} n_{j,t}}. \quad (3.3.9)$$

Θέλουμε λοιπόν να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο υποθέσεων

$$H_0: p_{1jk} = p_{2jk} = \dots = p_{mjk} \quad (3.3.10)$$

$H_1$ : τουλάχιστον μία από τις πιθανότητες δεν είναι ίση με τις υπόλοιπες.

Αν η στατιστική συνάρτηση

$$\chi_j^2 = \sum_{i \in S} \sum_{k \in S} \frac{n_{ij}^* (\hat{p}_{ijk} - \hat{p}_{jk})^2}{\hat{p}_{jk}} \quad (3.3.11)$$

όπου  $n_{ij}^* = \sum_{t=1}^{T-1} n_{ij,t}$ , είναι μεγαλύτερη από  $\chi_{(K-1)^2; \alpha}^2$  δεν μπορούμε να αποδεχθούμε τη

μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , δηλαδή δεν μπορούμε να αποδεχθούμε τον ισχυρισμό ότι η στοχαστική διαδικασία έχει τη μαρκοβιανή ιδιότητα.

Τέλος, αν ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε τη μαρκοβιανή ιδιότητα σε όλες τις καταστάσεις του πίνακα μετάβασης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση:

$$\chi^2 = \sum_{j \in S} \chi_j^2 = \sum_{i,j,k} \frac{n_{ij}^* (\hat{p}_{ijk} - \hat{p}_{jk})^2}{\hat{p}_{jk}} \quad (3.3.12)$$

και να συγκρίνουμε την τιμή της με την τιμή  $\chi_{K(K-1)^2; \alpha}^2$ .



### 3.4 Μέθοδοι Σημειακών Εκτιμήσεων των Πιθανοτήτων Μετάβασης

Στις προηγούμενες ενότητες περιγράψαμε έναν πίνακα μετάβασης των πιστωτικών βαθμολογιών τις οποίες θεωρούμε σαν μια αλυσίδα Markov. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τρεις βασικές μεθόδους εκτίμησης των πιθανοτήτων μετάβασης. Όπως είναι φυσικό οι εκτιμήσεις αυτές προϋποθέτουν τη γνώση συγκεκριμένων δεδομένων. Στον Πίνακα 3.4.2 παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό τέτοιο σύνολο δεδομένων. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τον πίνακα αυτό, η πρώτη στήλη αναφέρεται σε έναν κωδικό αναγνώρισης του πιστούχου, η δεύτερη στην ημερομηνία που συνέβει μια αλλαγή της πιστοληπτικής διαβάθμισής του, η τρίτη στην πιστοληπτική του βαθμολογία και η τέταρτη σε μία κωδικοποίηση αυτής.

**Πίνακας 3.4.1:** Ενδεικτικό Σύνολο Δεδομένων Πιστοληπτικών Διαβαθμίσεων

id	Date	Rating Symbol	Rating Number
1	30-May-00	CCC+	7
1	31-Dec-00	B-	6
2	21-May-03	B	6
3	30-Dec-99	BB-	5
3	30-Oct-00	B+	6
3	30-Dec-01	BB	5
4	30-Dec-01	BB-	5
4	30-May-02	B-	6
5	24-May-00	AA-	2
5	30-May-01	A+	3
5	30-Oct-01	AA-	2
6	30-Dec-99	BBB+	4
6	30-Dec-01	BBB	4
7	30-Dec-02	BBB	4
7	23-Jun-03	BB+	5
7	30-Dec-03	B+	6
7	21-May-04	BB-	5
8	30-Dec-02	A-	3
9	21-May-00	AA	2
9	30-Dec-00	NR	0
10	30-Dec-04	BB	5
11	30-Dec-99	B	6
...	...	...	...
4001	30-Aug-00	A-	3

Löffler and Posch (2007)

Επίσης, από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει ένας πιστούχος ( $id=9$ ) ο οποίος ανήκει στην κατηγορία «χωρίς βαθμολογία» (*not rated*-NR). Όπως είναι λογικό, σε ένα τέτοιο σύνολο δεδομένων θα υπάρχουν περιπτώσεις μετάβασης στην κατηγορία NR. Για παράδειγμα, στην περίπτωση βαθμολογίας ενός πιστούχου αυτό μπορεί να συμβεί επειδή υπήρξε λήξη του χρέους ενώ στην περίπτωση πιστοληπτικής βαθμολογίας επιχειρήσεων λόγω συγχωνεύσεων. Στις περιπτώσεις αυτές αναφερόμαστε σε λογοκριμμένα δεδομένα (*censored data*) και ένας συνήθης και εύκολος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού είναι να κατανέμουμε αναλογικά το ποσοστό των NR σε όλες τις καταστάσεις.

#### α. Εκτίμηση με τη Μέθοδο της Κοορτής

Στην περίπτωση της **μεθόδου της κοορτής** (*cohort or frequentist approach*) τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης εκτιμώνται από τις εμπειρικές συχνότητες μεταβάσεων. Έτσι λοιπόν, αν θεωρήσουμε ως  $N_{i,t}$  τον αριθμό των πιστούχων που βρίσκονται στην κατηγορία  $i$  στην αρχή της περιόδου  $t$  και ως  $N_{ij,t}$  τον αριθμό από τους προηγούμενους πιστούχους που στο τέλος της περιόδου  $t$  έχουν βαθμολογία  $j$ , τότε η πιθανότητα κάποιος που είναι στην  $i$  κατηγορία να πάει στην  $j$  στη χρονική περίοδο  $t$  δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{p}_{ij,t} = \frac{N_{ij,t}}{N_{i,t}}. \quad (3.4.1)$$

Στις περιπτώσεις που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δεδομένα από διάφορες περιόδους δεν έχουμε παρά να θεωρήσουμε τον αριθμό πιστούχων σε μια κοορτή ως σταθμίσεις. Θέλοντας να υπολογίσουμε την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$  εντός μιας χρονικής περιόδου (οποιαδήποτε και αν είναι αυτή,  $t=1,2,\dots$ ) δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε έναν σταθμισμένο μέσο όρο των πιθανοτήτων της Σχέσης (3.4.1). Έτσι λοιπόν έχουμε,

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_t N_{i,t} \hat{p}_{ij,t}}{\sum_t N_{i,t}}. \quad (3.4.2)$$

Από τις Σχέσεις (3.4.1) και (3.4.2) προκύπτει ότι η παραπάνω πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί από το λόγο  $N_{ij}$  των πιστούχων που στην αρχή μιας περιόδου είχαν βαθμολογία

$i$  και στο τέλος της ίδιας περιόδου είχαν βαθμολογία  $j$ , προς τον αριθμό  $N_i$  των πιστούχων που στην αρχή της περιόδου είχαν βαθμολογία  $i$ , δηλαδή

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\sum_t N_{i,t} \left( \frac{N_{ij,t}}{N_{i,t}} \right)}{\sum_t N_{i,t}} = \frac{\sum_t N_{ij,t}}{\sum_t N_{i,t}} = \frac{N_{ij}}{N_i}. \quad (3.4.3)$$

Είναι φανερό ότι χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση για τον υπολογισμό της πιθανότητας μετάβασης από μια κατάσταση  $i$  σε μια κατάσταση  $j$  κάνουμε την υπόθεση της (χρονικής) ομογένειας. Με απλά λόγια, θεωρούμε ότι η πιθανότητα η βαθμολογία ενός πιστούχου από  $i$  να γίνει  $j$  είναι ανεξάρτητη από τη χρονική περίοδο στην οποία αναφερόμαστε δηλαδή,

$$\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ij,1} = \hat{P}_{ij,2} = \dots = \hat{P}_{ij,T}. \quad (3.4.4)$$

Όπως έχουμε αναφέρει, οι σημειακές εκτιμήσεις των πιθανοτήτων μετάβασης που τελικά θα προκύψουν αποτελούν στοιχεία του πίνακα μετάβασης μιας περιόδου  $P$ , έχουμε δηλαδή,  $P = (p_{ij})$ . Παράλληλα, υπάρχουν περιπτώσεις που μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες μετάβασης όχι εντός μιας περιόδου αλλά περισσότερων. Υποθέτωντας ότι οι μεταβάσεις είναι ανεξάρτητες στη διάρκεια του χρόνου ο πίνακας μετάβασης  $T$  περιόδων,  $P_T$  προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον αρχικό πίνακα  $P$ ,  $T$ -φορές με τον εαυτό του δηλαδή,

$$P_T = P^T = \underbrace{P P \dots P}_{T \text{ φορές}} \quad (3.4.5)$$

Στις περιπτώσεις που δεν γίνεται υπόθεση της χρονικής ομογένειας, οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης εντός της περιόδου  $k$  δίνονται από τη σχέση:

$$\hat{P}_{ij,t+k} = \frac{N_{ij,t+k}}{N_{i,t}} \quad (3.4.6)$$

όπου  $N_{ij,t+k}$  ο αριθμός των πιστούχων που τη χρονική στιγμή  $t$  έχει βαθμολογία  $i$  και τη χρονική στιγμή  $t+k$  έχει βαθμολογία  $j$  και  $N_{i,t}$  ο αριθμός των πιστούχων με βαθμολογία  $i$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μετάβασης ενός πιστούχου από την κατηγορία  $i$  στην κατηγορία  $j$  εντός 3 χρονικών περιόδων, έχουμε:

$$\hat{P}_{ij,t+3} = \frac{N_{ij,t+3}}{N_{i,t}}.$$

Προφανώς, αν ισχύει η χρονική ομογένεια τότε ο πίνακας μετάβασης τριών χρονικών περιόδων, τα στοιχεία του οποίου εκτιμώνται από την παραπάνω σχέση, θα πρέπει να είναι ίσος ή «πολύ κοντά» στο πίνακα  $P_3 = P^3 = PPP$ .

Ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου της κοορτής είναι ότι δεν λαμβάνονται υπόψη οι μεταβάσεις εντός μιας χρονικής περιόδου αλλά μόνο ο αρχικός και ο τελικός αριθμός των πιστούχων σε κάθε κατηγορία (Hanson and Schuermann (2005)). Για παράδειγμα, αν η πιστοληπτική βαθμολογία μιας επιχείρησης είναι AA στην αρχή μιας περιόδου, BBB στη μέση της περιόδου αυτής και BB στο τέλος της, η συγκεκριμένη μέθοδος δεν θα λάβει υπόψη τις μεταβάσεις AA→BBB και BBB→BB αλλά θα θεωρήσει ότι στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο υπήρξε μόνο η μετάβαση AA→BB.

Ένα δεύτερο μειονέκτημα που θα μπορούσαμε να αναφέρουμε είναι ότι πολλά από τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης  $P$  μπορεί να είναι μηδέν (Lando and Skødeberg (2002)). Συγκεκριμένα, εκτιμώντας τις πιθανότητες μετάβασης κάποιες από αυτές μπορεί να είναι μηδέν αφού υπάρχει περίπτωση η βαθμολογία κανενός από τους πιστούχους του δείγματος μας να μην μεταβλήθηκε από  $i$  σε  $j$ . Μπορεί επομένως με τη μέθοδο αυτή να υποεκτιμήσουμε την πιθανότητα  $\hat{p}_{ij}$ . Το πρόβλημα αυτό φαίνεται να οδηγεί σε «κακιές» εκτιμήσεις αν συνυπάρξει με αυτό που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έστω λοιπόν, ότι η βαθμολογία μια επιχείρησης στην αρχή της περιόδου είναι A και η πιστοληπτική βαθμολογία κατά την ίδια περίοδο ακολούθησε το μονοπάτι A→BB→D, όπου υπενθυμίζεται ότι D είναι η απορροφητική κατάσταση της χρεοκοπίας. Η χρεοκοπία λοιπόν, αναφέρεται στην αρχική κατάσταση A και όχι στην BB. Στις περιπτώσεις που πραγματοποιούνται παρόμοια μονοπάτια με ενδιάμεση κατάσταση την BB και παράλληλα δεν υπάρχει «απευθείας» χρεοκοπία ξεκινώντας από την βαθμολογία BB στο δείγμα μας, η τελική εκτίμηση της πιθανότητας  $\hat{p}_{BB,D}$  είναι μηδέν ενώ υπερεκτιμάται η πιθανότητα  $\hat{p}_{A,D}$ .

### β. Εκτίμηση με τη Μέθοδο Ρυθμού Αποτυχίας

Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο, έτσι και στη **μέθοδο ρυθμού αποτυχίας** (*hazard rate or duration approach*) θεωρούμε ότι πρόκειται για μια αλυσίδα Markov  $K$ -καταστάσεων και σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τον πίνακα μετάβασης  $P$  για ένα συγκεκριμένο

χρονικό ορίζοντα εκτιμώντας τα  $(i, j)$  στοιχεία του, δηλαδή τις πιθανότητες  $\hat{p}_{ij}$ . Η κύρια παραδοχή της μεθόδου αυτής είναι ότι πρόκειται για μια χρονικά ομογενή αλυσίδα Markov διακριτού χώρου καταστάσεων και επομένως έχει την ιδιότητα ότι η διάρκεια παραμονής σε μια κατάσταση ακολουθεί μια εκθετική κατανομή (Frydman and Schuermann (2008)).

Αρχικά, θα πρέπει να εκτιμήσουμε τα στοιχεία του **γεννήτορα πίνακα** (*generator matrix*)  $A$  οποίος μας δίνει μια γενική περιγραφή της συμπεριφοράς των μεταβάσεων (Löffler and Posch (2007)). Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του πίνακα  $A$  για το χρονικό διάστημα  $[t_0, t]$  δίνονται από τη σχέση:

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}}{\int_{t_0}^t Y_i(s) ds}, \quad i \neq j \quad (3.4.7)$$

όπου  $N_{ij}$  είναι ο αριθμός των πιστούχων με βαθμολογία  $i$  στην αρχή της περιόδου  $[t_0, t]$  και βαθμολογία  $j$  στο τέλος της ίδιας περιόδου,  $Y_i(s)$  ο αριθμός των πιστούχων με βαθμολογία  $i$

τη χρονική στιγμή  $s$ . Συνεπώς το ολοκλήρωμα  $\int_{t_0}^t Y_i(s) ds$  μας δίνει τον αριθμό των πιστούχων οι οποίοι παρέμειναν στην κατάσταση  $i$  το χρονικό διάστημα  $[t_0, t]$ .

Τα στοιχεία της διαγωνίου δίνονται από την σχέση

$$\lambda_{ii} = -\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}. \quad (3.4.8)$$

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι ο γεννήτορας πίνακας  $A$  είναι διάστασης  $K \times K$ , με μη αρνητικά στοιχεία εκτός διαγωνίου και άθροισμα γραμμών ίσο με μηδέν και τέτοιος ώστε  $\exp(A) = P$ . Γενικότερα, ο πίνακας μετάβασης  $P$  για χρονικό ορίζοντα  $T$  περιόδων δίνεται από τη σχέση

$$P(T) = \exp(TA) = I + TA + \frac{(TA)^2}{2!} + \frac{(TA)^3}{3!} + \dots = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{T^{\kappa} A^{\kappa}}{\kappa!} \quad (3.4.9)$$

όπου  $I$  είναι μοναδιαίος πίνακα διάστασης  $K \times K$ ,  $T$  ο αριθμός των χρονικών περιόδων που έχουν περάσει από την αρχική κατάσταση,  $\kappa$  ο αριθμός των παρατηρήσεων και  $A$  ο παρακάτω πίνακας με στοιχεία  $\lambda_{ij}$ ,  $\forall i, j$ , όπως αυτά έχουν οριστεί.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1,K-1} & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2,K-1} & \lambda_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \lambda_{K-1,3} & \cdots & \lambda_{K-1,K-1} & \lambda_{K-1,K} \\ \lambda_{K,1} & \lambda_{K,2} & \lambda_{K,3} & \cdots & \lambda_{K,K-1} & \lambda_{K,K} \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

όπου  $\lambda_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ , ή ισοδύναμα από τις Σχέσεις (3.4.7) και (3.4.8)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \lambda_{1j} & \frac{N_{12}}{\int_{t_0}^t Y_1(s) ds} & \frac{N_{13}}{\int_{t_0}^t Y_1(s) ds} & \cdots & \frac{N_{1,K-1}}{\int_{t_0}^t Y_1(s) ds} & \frac{N_{1K}}{\int_{t_0}^t Y_1(s) ds} \\ \frac{N_{21}}{\int_{t_0}^t Y_2(s) ds} & -\sum_{j \neq 2} \lambda_{2j} & \frac{N_{23}}{\int_{t_0}^t Y_2(s) ds} & \cdots & \frac{N_{2,K-1}}{\int_{t_0}^t Y_2(s) ds} & \frac{N_{2K}}{\int_{t_0}^t Y_2(s) ds} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{N_{K-1,1}}{\int_{t_0}^t Y_{K-1}(s) ds} & \frac{N_{K-1,2}}{\int_{t_0}^t Y_{K-1}(s) ds} & \frac{N_{K-1,3}}{\int_{t_0}^t Y_{K-1}(s) ds} & \cdots & -\sum_{j \neq K-1} \lambda_{K-1j} & \frac{N_{K-1,K}}{\int_{t_0}^t Y_{K-1}(s) ds} \\ \frac{N_{K1}}{\int_{t_0}^t Y_K(s) ds} & \frac{N_{K2}}{\int_{t_0}^t Y_K(s) ds} & \frac{N_{K3}}{\int_{t_0}^t Y_K(s) ds} & \cdots & \frac{N_{KK-1}}{\int_{t_0}^t Y_K(s) ds} & -\sum_{j \neq K} \lambda_{K,j} \end{pmatrix} \quad (3.4.11)$$

Από τη Σχέση (3.4.9) γίνεται σαφές ότι οι πιθανότητες μετάβασης για κάθε χρονικό ορίζοντα είναι μια συνάρτηση του γεννήτορα πίνακα. Επομένως, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης  $P$  με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (*maximum likelihood estimation* – MLE) εκτιμώντας με την ίδια μέθοδο τα αντίστοιχα στοιχεία του γεννήτορα πίνακα και, αφού λάβουμε υπόψη και τον χρονικό ορίζοντα, εφαρμόζοντας την εκθετική συνάρτηση στις εκτιμήσεις αυτές (Lando and Skødeberg (2002)). Με βάση τα παραπάνω για τον πίνακα μετάβασης μιας χρονικής περιόδου έχουμε  $P(2A) = \exp(2A)$ , τον αντίστοιχο πίνακα τριών χρονικών περιόδων  $P(3A) = \exp(3A)$  κ.ο.κ.

Από την περιγραφή της μεθόδου αυτής μπορούμε να παρατηρήσουμε την ομοιότητα της με τη μέθοδο της κοορτής (Löffler and Posch (2007)). Συγκεκριμένα και στις δύο

μεθόδους διαιρούμε τον αριθμό των μεταβάσεων με μια ποσότητα που μετρά τον αριθμό των πιστούχων που είναι σε κίνδυνο μετάβασης. Ωστόσο, με την πρώτη μέθοδο μετράμε τον αριθμό των πιστούχων σε διακριτές χρονικές στιγμές σε αντίθεση με τη μέθοδο ρυθμού αποτυχίας όπου η μέτρηση γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή.

### γ. Μη Παραμετρική Μέθοδος Εκτίμησης

Από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μέθοδος ρυθμού αποτυχίας χρησιμοποιεί πιο αποτελεσματικά τα δεδομένα αφού λαμβάνει υπόψη όλες τις μεταβάσεις μέσα σε ένα χρονικό διάστημα. Ωστόσο, και οι δύο αυτές μέθοδοι υποθέτουν χρονική ομογένεια (*time homogeneous case*) της αλυσίδας Markov. Παράλληλα, «εύκολη» παραδοχή αποτελεί ότι η πιστοληπτική διαβάθμιση είναι μια αλυσίδα Markov 1ης τάξης (Schuermann and Jafry (2008)) αφού όπως αναφέραμε για μια χρονική περίοδο  $\Delta t$ , ο πίνακας μετάβασης  $k$  περιόδων,  $P_{k,\Delta t}$ , μπορεί να υπολογιστεί εύκολα υψώνοντας στην  $k$  δύναμη το πίνακα μετάβασης  $P_{\Delta t}$ . Για παράδειγμα, ο πίνακας μετάβασης ενός έτους μπορεί να υπολογιστεί από τον αντίστοιχο πίνακα τετραμήνου αφού υψωθεί στην 4η δύναμη. Επιπρόσθετα, δε λαμβάνεται υπόψη η – πιθανή – απουσία μαρκοβιανής συμπεριφοράς λόγω της τάσης των πιστοληπτικών βαθμολογιών, της ευαισθησίας στον οικονομικό κύκλο και άλλα (Altman (1998), Schuermann and Jafry (2008), Lando and Skødeberg (2002)).

Συμβολίζοντας με  $P(s,t)$  τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της πιστοληπτικής ικανότητας επιχειρήσεων το χρονικό διάστημα  $[s,t]$ , το στοιχείο στη θέση  $(i,j)$  του πίνακα αυτού αναφέρεται στην πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση  $i$  τη χρονική στιγμή  $s$  στην κατάσταση  $j$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Διαμερίζοντας το χρονικό διάστημα  $[s,t]$  σε  $m$  χρονικά διαστήματα  $T_i$  και συμβολίζοντας με  $P(T_i)$  τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης, ο μη παραμετρικός εκτιμητής (non parametric estimator) Aalen–Johansen ορίζεται από τη σχέση:

$$\hat{P}(s,t) = \prod_{i=1}^m (P(T_i)) = \prod_{i=1}^m (I + \Delta \hat{A}(T_i)), \quad (3.4.12)$$

όπου,

$$\Delta\hat{A}(T_i) = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta N_{1\bullet}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{1,2}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \frac{\Delta N_{1,3}(T_i)}{Y_1(T_i)} & \dots & \frac{\Delta N_{1,p}(T_i)}{Y_1(T_i)} \\ \frac{\Delta N_{2,1}(T_i)}{Y_2(T_i)} & -\frac{\Delta N_{2\bullet}(T_i)}{Y_2(T_i)} & \frac{\Delta N_{2,3}(T_i)}{Y_2(T_i)} & \dots & \frac{\Delta N_{2,p}(T_i)}{Y_2(T_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta N_{p-1,1}(T_i)}{Y_{p-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{p-1,2}(T_i)}{Y_{p-1}(T_i)} & \dots & -\frac{\Delta N_{p-1\bullet}(T_i)}{Y_{p-1}(T_i)} & \frac{\Delta N_{p-1,p}(T_i)}{Y_{p-1}(T_i)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

Το στοιχείο  $\Delta N_{k,j}(T_i)$  του Πίνακα (3.4.13) δηλώνει τον αριθμό των παρατηρούμενων μεταβάσεων από την κατάσταση  $k$  στην κατάσταση  $j$  το χρόνο  $T_i$ , τα στοιχεία  $\Delta N_{k\bullet}(T_i)$  δηλώνουν τον αριθμό των μεταβάσεων από την κατάσταση  $k$  το χρόνο  $T_i$  και  $Y_k(T_i)$  είναι ο αριθμός των επιχειρήσεων που βρίσκεται στην κατάσταση  $k$  ακριβώς πριν το χρόνο  $T_i$ . Επομένως το στοιχείο της κύριας διαγωνίου της γραμμής  $k$  δηλώνει το ποσοστό των επιχειρήσεων οι οποίες μεταπήδησαν από την κατάσταση  $k$  προς τις υπόλοιπες  $p-1$  καταστάσεις. Επίσης, τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής είναι μηδέν αφού όπως έχουμε αναφέρει η χρεοκοπία είναι κατάσταση απορρόφησης ενώ τελικά το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα  $I + \Delta\hat{A}(T_i)$  ισούται με τη μονάδα. Όπως γίνεται αντιληπτό η κύρια διαφορά της μεθόδου αυτής σε σχέση με τη μέθοδο της κοορτής είναι η διαμέριση του χρονικού διαστήματος  $[s,t]$  ώστε να μην υπάρχει χρονική ομογένεια.



### 3.5 Διαδικασίες Εύρεσης Γεννήτορα Πίνακα

Από την προηγούμενη ενότητα στην περίπτωση της συνεχούς και χρονικά ομογενούς αλυσίδας Markov διακριτών σταδίων η εκτίμηση του πίνακα μετάβασης προκύπτει από τη χρήση ενός γεννήτορα πίνακα. Με απλά λόγια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι με τη χρήση του γεννήτορα πίνακα επιτυγχάνουμε να μετατρέψουμε την αλυσίδα Markov από διακριτού χρόνου σε συνεχή. Βρίσκοντας λοιπόν ένα γεννήτορα πίνακα  $A$ , δηλαδή έναν πίνακα ο οποίος έχει άθροισμα γραμμών ίσο με το μηδέν και μη αρνητικά στοιχεία εκτός διαγωνίου τέτοια ώστε  $\exp(A) = P$ , είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον πίνακα μετάβασης  $P(T) = \exp(TA)$  για κάθε χρονική στιγμή,  $T \geq 0$ . Ωστόσο, κατά τη διαδικασία εύρεσης ενός γεννήτορα πίνακα μπορεί να προκύψουν πολλά προβλήματα. Οι Israel et al. (2001) ασχολήθηκαν διεξοδικά με τα προβλήματα αυτά και κατέληξαν σε σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα ενός γεννήτορα πίνακα στα οποία στηρίζεται η παρακάτω ανάλυση.

Έχοντας έναν (τετραγωνικό) πίνακα μετάβασης  $P$  μιας χρονικά ομογενούς αλυσίδας Markov, με όλα τα στοιχεία του μη αρνητικά και άθροισμα γραμμών ίσο με τη μονάδα, σκοπός είναι να εκτιμήσουμε ένα γεννήτορα πίνακα  $A$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η Σχέση (3.4.9). Επίσης, συμβολίζομαι με  $W$  τη μέγιστη τιμή των τετραγώνων των μέτρων των ιδιοτιμών<sup>27</sup> από τις οποίες έχουμε αφαιρέσει τη μονάδα, δηλαδή

$$W = \max\{(a-1)^2 + b^2, a+bi \text{ μία ιδιοτιμή του } P, a, b \in \mathbf{R}\}.$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί, παρέχει έναν απλό τρόπο για τη δημιουργία ενός γεννήτορα πίνακα, ενώ αποτελεί ικανή –αλλά όχι αναγκαία– συνθήκη για να υπάρχει κάποιος αποδεκτός εκτιμητής ακόμα και αν ο πίνακας μετάβασης  $\tilde{A}$  του Θεωρήματος δεν είναι αποδεκτός.

**Θεώρημα 3.5.1:** Συμβολίζοντας με  $P$  έναν  $K \times K$  πίνακα μετάβασης και υποθέτοντας ότι  $W < 1$ , η σειρά

$$\tilde{A} = (P - I) - \frac{(P - I)^2}{2} + \frac{(P - I)^3}{3} - \frac{(P - I)^4}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P - I)^k}{k} (-1)^{k-1} \quad (3.5.1)$$

<sup>27</sup> Έστω  $A$  ένας τετραγωνικός πίνακα διάστασης  $K \times K$ . Ένας (γενικά μιγαδικός) αριθμός  $x$  καλείται ιδιοτιμή του  $A$  αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα  $e \in C^K$  τέτοιο ώστε  $Ae = xe$ . Το διάνυσμα  $e$  καλείται ιδιοδιάνυσμα του  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $x$ .

συγκλίνει. Ο πίνακας  $\tilde{A}$  είναι διάστασης  $K \times K$  με άθροισμα γραμμών ίσο με το μηδέν και τέτοιος ώστε ο πίνακας  $P$  να ισούται ακριβώς με  $\exp(\tilde{A})$ .

Στη πράξη, αν η Σειρά (3.5.1) δεν συγκλίνει ή συγκλίνει σε έναν μη αποδεκτό γεννήτορα πίνακα δεν αποκλείει την ύπαρξη ενός γεννήτορα πίνακα για τον  $P$ . Επομένως, δεν είναι τόσο σημαντικό να εξετάζουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη  $W < 1$ , αφού αν η Σειρά (3.5.1) συγκλίνει απόλυτα ο πίνακας  $\tilde{A}$  έχει άθροισμα γραμμών ίσο με το μηδέν και  $\exp(\tilde{A}) = P$ . Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί η σύγκλιση της σειράς επιτυγχάνεται αν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ικανοποιούν κάποια συνθήκη.

**Θεώρημα 3.5.2:** Η συνθήκη  $W < 1$  και επομένως η σύγκλιση της Σειράς (3.5.1) επιτυγχάνεται αν τα διαγώνια στοιχεία  $p_{ii}$  του πίνακα μετάβασης  $P$  είναι όλα μεγαλύτερα από 0.5 ( $p_{ii} > 0.5$ , για όλα τα  $i$ ).

Ισοδύναμα με το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να πούμε ότι αρκεί ο πίνακας μετάβασης  $P$  να είναι **αυστηρά διαγώνια υπερτερών** (*strictly diagonally dominant*), δηλαδή  $|p_{ii}| > \sum_{i \neq j} |p_{ij}|$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, K$ . Υπό αυτή την υπόθεση κάθε πίνακας μετάβασης έχει το πολύ έναν γεννήτορα πίνακα και επομένως εάν υπάρχει ένας γεννήτορας πίνακας τότε είναι και μοναδικός. Επίσης, είναι δυνατόν η σειρά να συγκλίνει (και επομένως  $W < 1$ ) ακόμα κι αν κάποια από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι μικρότερα από 0.5.

Ωστόσο, από τον τρόπο κατασκευής που περιγράψαμε στην ενότητα αυτή, δεν εξασφαλίζεται ότι ο πίνακας  $\tilde{A}$  του Θεωρήματος (3.5.1) έχει μη αρνητικά εκτός διαγωνίου στοιχεία και επομένως οι αντίστοιχες τιμές του πίνακα μετάβασης που προκύπτουν από τη σχέση  $P(T) = \exp(T\tilde{A})$ ,  $T \geq 0$  θα είναι πολύ μικρές. Ένας απλός τρόπος για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό, είναι να αντικαταστήσουμε τα αρνητικά στοιχεία με το μηδέν και να αλλάξουμε αντίστοιχα τις τιμές των στοιχείων της διαγωνίου ώστε να εξακολουθήσει να ισχύει η συνθήκη του μηδενικού αθροίσματος των στοιχείων κάθε γραμμής. Στην περίπτωση λοιπόν που κάποια από τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του γεννήτορα πίνακα  $\tilde{A}$  είναι αρνητικά μπορούμε να θεωρήσουμε τον πίνακα  $A$  με στοιχεία:

$$\lambda_{ij} = \max\{\tilde{\lambda}_{ij}, 0\}, i \neq j \quad \text{και} \quad \lambda_{ii} = \tilde{\lambda}_{ii} + \sum_{i \neq j} \min\{-\tilde{\lambda}_{ij}, 0\}, \quad (3.5.2)$$

για τον οποίο συνεχίζει να ισχύει ότι  $P = \exp(A)$ .

Μία διαφορετική μέθοδος για το μετασχηματισμό των στοιχείων του  $\tilde{A}$ , στην περίπτωση όπου υπάρχουν αρνητικά εκτός διαγωνίου στοιχεία, προκύπτει θεωρώντας τις παρακάτω ποσότητες:

$$G_i = |\tilde{\lambda}_{ii}| + \sum_{i \neq j} \max\{\tilde{\lambda}_{ij}, 0\} \quad B_i = \sum_{i \neq j} \max\{-\tilde{\lambda}_{ij}, 0\}.$$

Έτσι λοιπόν, όπως παρατηρούμε από τη Σχέση (3.5.3) τα στοιχεία του πίνακα  $\tilde{A}$  θα είναι μηδέν αν  $\tilde{\lambda}_{ij} < 0, i \neq j$ , μειωμένα κατά μία – ίση για κάθε γραμμή – ποσότητα  $\frac{B_i |\tilde{\lambda}_{ij}|}{G_i}$  αν  $G_i > 0$ , ενώ θα παραμένουν ίδια αν  $G_i = 0$ . Δηλαδή,

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \text{ και } \tilde{\lambda}_{ij} < 0 \\ \tilde{\lambda}_{ij} - \frac{B_i |\tilde{\lambda}_{ij}|}{G_i} & , \quad \text{αν } G_i > 0 \\ \tilde{\lambda}_{ij} & , \quad \text{αν } G_i = 0 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Γενικά, είναι πιθανό να μην υπάρχει ένας μοναδικός γεννήτορας πίνακας για κάποιο πίνακα μετάβασης  $P$  ενώ σύμφωνα με το επόμενο Θεώρημα σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ((α), (β) και (γ)) μπορεί να μην υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος πίνακας  $P$ .

**Θεώρημα 3.5.3:** Έστω  $P$  ένας πίνακας μετάβασης. Δεν υπάρχει γεννήτορας πίνακας για τον  $P$  αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

α.  $\det(P) \leq 0$ ,

β.  $\det(P) > \prod_i p_{ii}$ ,

γ. υπάρχουν καταστάσεις  $i$  και  $j$  τέτοιες ώστε η  $j$  να είναι προσιτή από την  $i$  αλλά  $p_{ij} = 0$

Όπως έχουμε αναφέρει, στην περίπτωση που ένας πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης αφορά την πιστοληπτική διαβάθμιση, η διαδικασία Markov είναι διακριτού χώρου καταστάσεων,  $S = \{AAA, AA, \dots, B, CCC, D\}$ . Επίσης, σε έναν πίνακα μετάβασης  $P$  επειδή για μικρές τιμές των  $i$  και  $j$  έχουμε καλύτερη πιστωτική διαβάθμιση, ένας πίνακας μετάβασης

πιστωτικών βαθμολογιών θα πρέπει να ικανοποιεί μία από τις συνθήκες του επόμενου λήμματος.

**Λήμμα 3.5.1:** Έστω  $A$  ένας αποδεκτός γεννήτορας πίνακας για τον  $P$ . Τότε οι δύο επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες

α.  $\sum_{j \geq k} p_{ij}$  είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση του  $i$  για κάθε  $k$

β.  $\sum_{j \geq k} \lambda_{ij} \geq \sum_{j \geq k} \lambda_{i+1,j}$ ,  $\forall i, k$ ,  $k \neq i+1$ .

Για παράδειγμα, στον Πίνακα 3.2.1, για  $k=BBB$  και  $i=BB$  μπορούμε να παρατήρησουμε ότι

$$\sum_{j \geq BBB} p_{BBj} = 0.99670 \text{ ενώ για } i=B \text{ έχουμε } \sum_{j \geq BBB} p_{Bj} = 0.99500 \text{ και επομένως παραβιάζεται η}$$

συνθήκη (α) του παραπάνω λήμματος. Επίσης, στον ίδιο πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι παραβιάζεται και η συνθήκη (γ) του Θεωρήματος (3.5.3) αφού για παράδειγμα  $p_{AAA,A} > 0$  και  $p_{A,BB} > 0$  ενώ  $p_{AAA,BB} = 0$ . Στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να αναζητηθεί η ύπαρξη προσεγγιστικών γεννητόρων πινάκων.

Σύμφωνα με την Πρόταση (3.5.1) ακόμα κι αν ο πίνακας  $\tilde{A}$  του Θεωρήματος (3.5.1) έχει αρνητικά εκτός διαγωνίου στοιχεία δεν αποκλείεται η ύπαρξη ενός αποδεκτού γεννήτορα πίνακα για τον  $P$ . Από την άλλη μεριά σύμφωνα με την επόμενη Πρόταση (3.5.2) ακόμα κι αν έχει βρεθεί ένας αποδεκτός γεννήτορας πίνακας δε σημαίνει ότι είναι μοναδικός.

**Πρόταση 3.5.1:** Έστω ένας στοχαστικός πίνακας  $P$  και ένας πίνακας  $A_1$  τα στοιχεία του οποίου είναι πραγματικοί αριθμοί. Ακόμα και αν ο  $A_1$  έχει άθροισμα γραμμών ίσο με το μηδέν και κάποια εκτός διαγωνίου στοιχεία αρνητικά και ικανοποιεί τη σχέση  $P = \exp(A_1)$  δεν αποκλείεται η ύπαρξη ενός αποδεκτού γεννήτορα πίνακα  $A_2$  για τον πίνακα  $P$ . Το προηγούμενο μπορεί να πραγματοποιηθεί ακόμα κι αν ο  $A_1$  είναι ίσος με το πίνακα  $\tilde{A}$  που προκύπτει από τη Σειρά (3.5.1).

**Πρόταση 3.5.2:** Υπάρχουν πίνακες μετάβασης  $P$  οι οποίοι έχουν παραπάνω από έναν αποδεκτό γεννήτορα πίνακα.

Από την Πρόταση (3.5.2) προκύπτει άμεσα το ερώτημα ποιος από τους γεννήτορες πίνακες είναι ο καλύτερος. Έχοντας υπόψη ότι τις περισσότερες φορές οι πιθανότητες μετάβασης από μια κατάσταση σε μίαν άλλη απομακρυσμένη είναι πολύ μικρή, οι Israel et al. (2001) πρότειναν την επιλογή του πίνακα με τη μικρότερη τιμή της ποσότητας:

$$J = \sum_{i,j} |j-i| |\lambda_{ij}|, \quad (3.5.4)$$

το οποίο εξασφαλίζει την ελαχιστοποίηση των πιθανοτήτων μεταβάσης μεταξύ απομακρυσμένων καταστάσεων σε μικρό χρονικό διάστημα.

Παρόλες τις δυσκολίες που προκύπτουν από την Πρόταση (3.5.2), εξαιτίας των θεμάτων σύγκρισης των γεννητόρων πινάκων, στηριζόμενοι στα ακόλουθα θεωρήματα μπορούμε πολλές φορές να αποδείξουμε τη μοναδικότητα ενός γεννήτορα πίνακα για τον  $P$ .

**Θεώρημα 3.5.4:** Έστω  $P$  ένας πίνακας μετάβασης

α. Αν  $\det(P) > 1/2$ , τότε ο πίνακας  $P$  έχει το πολύ ένα γεννήτορα πίνακα.

β. Αν  $\det(P) > 1/2$  και  $\|P - I\| < 1/2$  (για οποιαδήποτε νόρμα), τότε ο μόνος πιθανός γεννήτορας πίνακας είναι ο  $\log(P)$ .

γ. Αν ο πίνακας μετάβασης  $P$  έχει διαφορετικές ιδιοτιμές και  $\det(P) > e^{-\pi}$ , τότε ο μόνος πιθανός γεννήτορας πίνακας είναι ο  $\log(P)$ .

**Θεώρημα 3.5.5:** Έστω  $P$  ένας πίνακας μετάβασης ο οποίος έχει πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές.

α. Αν όλες οι ιδιοτιμές του  $P$  είναι θετικές, τότε ο  $\log(P)$  είναι ο μόνος πίνακας  $A$  με πραγματικές τιμές τέτοιος ώστε να ισχύει  $P = \exp(A)$ .

β. Αν ο πίνακας  $P$  έχει κάποιες αρνητικές τιμές, τότε δεν υπάρχει πίνακας  $A$  με πραγματικές τιμές τέτοιος ώστε να ισχύει  $P = \exp(A)$ .

Τα Θεωρήματα (3.5.4) και (3.5.5) οδηγούν σε σημαντικά συμπεράσματα για την ύπαρξη ή/και τη μοναδικότητα ενός γεννήτορα πίνακα έχοντας ως κριτήρια την ορίζουσα και τις ιδιοτιμές του πίνακα μετάβασης  $P$ . Επίσης από τα δύο αυτά θεωρήματα οδηγούμαστε στο Πρόσχημα (3.5.1).

**Πόρισμα 3.5.1:** Έστω  $P$  ένας πίνακας μετάβασης τέτοιος ώστε να ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις επόμενες συνθήκες:

- i.  $\det(P) > 1/2$  και  $\|P - I\| < 1/2$ , ή
- ii. ο πίνακας μετάβασης  $P$  έχει διαφορετικές ιδιοτιμές και  $\det(P) > e^{-\pi}$ , ή
- iii. ο πίνακας μετάβασης  $P$  έχει διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές.

Αν η Σειρά (3.4.1) συγκλίνει σε έναν πίνακα  $\tilde{L}$  ο οποίος έχει αρνητικά εκτός διαγωνίου στοιχεία, τότε δεν υπάρχει ένας αποδεκτός γεννήτορας πίνακας για τον  $P$ .

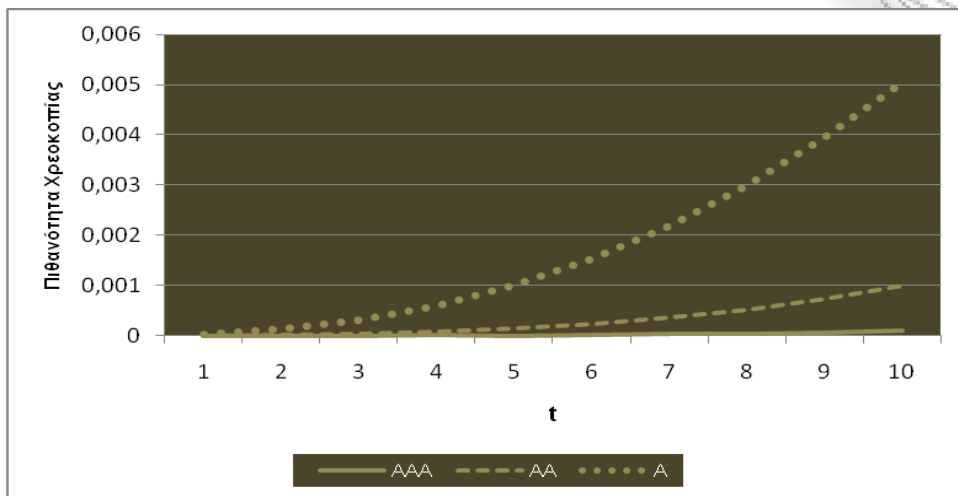
### 3.6 Διαστήματα Εμπιστοσύνης για την Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Όπως έχουμε αναφέρει οι πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης χαρακτηρίζουν την παρελθοντική συμπεριφορά των πιστούχων στους οποίους αναφέρονται, προσφέροντας σημαντικές πληροφορίες στα πιστωτικά ιδρύματα και γενικότερα στους συμμετέχοντες στο χρηματοπιστωτικό σύστημα. Αναμφίβολα, το μεγαλύτερο ενδιαφέρον εστιάζεται στην τελευταία στήλη ενός πίνακα μετάβασης αφού αυτή αναφέρεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας του πιστούχου στο τέλος της χρονικής περιόδου που μας ενδιαφέρει και δοθείσης της βαθμολογίας του στην αρχή της περιόδου αυτής. Κρίνεται λοιπόν ενδιαφέρουσα η κατασκευή, βάσει των πιστοληπτικών βαθμολογιών, διαστημάτων εμπιστοσύνης για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Όπως έχουμε αναφέρει, οι πληροφορίες που προκύπτουν από τις σημειακές εκτιμήσεις και τα διαστήματα εμπιστοσύνης των πιθανοτήτων χρεοκοπίας είναι ιδιαίτερα κρίσιμες και σημαντικές αφού δεν αφορούν μόνο τις εποπτικές αρχές αλλά και τα πιστωτικά ιδρύματα. Τα τελευταία χρησιμοποιούν τις πληροφορίες αυτές για την τιμολόγηση διαφόρων χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως των ομολόγων, των δανείων και των πιστωτικών παραγώγων. Ωστόσο, η χρεοκοπία αποτελεί ένα «σπάνιο γεγονός», ειδικά για χρηματοοικονομικά προϊόντα ή πιστούχους υψηλής πιστοληπτικής βαθμολογίας, και για το λόγο αυτό θα πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί στις εκτιμήσεις που προκύπτουν (Hanson and Schuermann (2006)). Επίσης, είναι προφανές ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας δεν παραμένουν σταθερές στη διάρκεια του χρόνου αφού επηρεάζονται άμεσα από πλήθος παραγόντων όπως ο οικονομικός κύκλος της επιχείρησης, η οικονομική κατάσταση της χώρας που αυτές δραστηριοποιούνται κ.α.

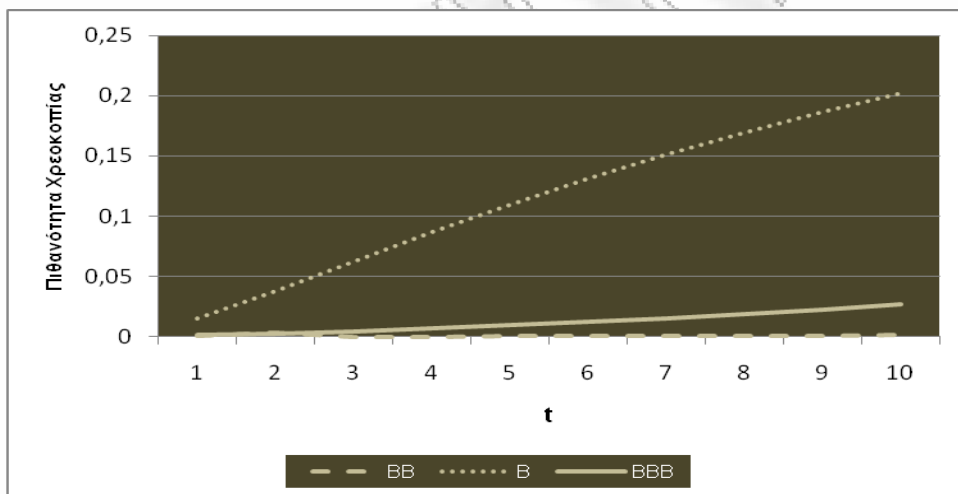
Στα γραφήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι μεταβολές της πιθανότητας χρεοκοπίας στη διάρκεια 10 χρόνων για κάθε μία από τις βαθμολογίες του Πίνακα 3.2.1. Το Σχήμα 3.6.1 αφορά τις βαθμολογίες AAA, AA και A. Είναι λογικό ότι για καλύτερες βαθμολογίες αναμένουμε οι αντίστοιχες πιθανότητες χρεοκοπίας να είναι και (διαχρονικά) μικρότερες. Ωστόσο, το τελευταίο δεν φαίνεται να ισχύει στο Σχήμα 3.6.2 το οποίο αφορά τις βαθμολογίες BBB, BB και B. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε οι πιθανότητες χρεοκοπίας για τη βαθμολογία BBB είναι μεγαλύτερη – σε κάθε χρονική περίοδο – από την αντίστοιχη πιθανότητα της βαθμολογίας BB, αφού από τα (αρχικά) δεδομένα του Πίνακα 3.2.1 είναι φανερό ότι ισχύει:

$$p_{BBBD} = P(BBB \rightarrow D) = 0.00125 > p_{BBD} = P(BB \rightarrow D) = 0.00096$$

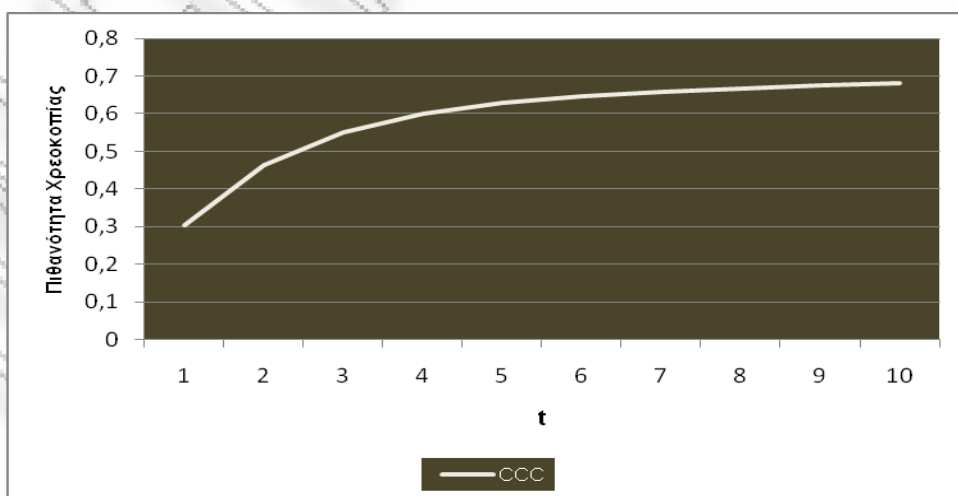
**Σχήμα 3.6.1:** Πιθανότητες Χρεοκοπίας για τις Βαθμολογίες AAA, AA και A



**Σχήμα 3.6.2:** Πιθανότητες Χρεοκοπίας για τις Βαθμολογίες BBB, BB και B



**Σχήμα 3.6.3:** Πιθανότητες Χρεοκοπίας για τη Βαθμολογία CCC





Διαστήματα εμπιστοσύνης (*confidence intervals* – CI) για τις πιθανότητες χρεοκοπίας μπορούμε να κατασκευάσουμε με διάφορους τρόπους, ανάλογα με ποια μέθοδο έχουμε χρησιμοποιήσει για τις σημειακές εκτιμήσεις. Στη γενική περίπτωση, συμβολίζοντας με  $PD_R$  την πιθανότητα χρεοκοπίας σε χρονικό διάστημα ενός έτους για μια επιχείρηση με βαθμολογία  $R$  στην αρχή του έτους αυτού, βασιζόμενοι στην εκτίμηση  $\hat{PD}_R$  είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης της μορφής:

$$P_r[PD_R^{low} < PD_R < PD_R^{up}] = 1 - \alpha \quad (3.6.1)$$

Σημειώνεται ότι στις περιπτώσεις υψηλής πιστωτικής βαθμολογίας το κάτω όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης μπορεί να είναι μηδέν, εξαιτίας των χαμηλών τιμών των σημειακών εκτιμήσεων, και επομένως το διάστημα αυτό να μην είναι συμμετρικό.

#### α. Κατασκευή Διαστήματος Εμπιστοσύνης στην Περίπτωση της Μεθόδου Κοορτής

Στην περίπτωση της μεθόδου της κοορτής μπορούμε απλά να θεωρήσουμε τη χρεοκοπία για κάθε μία βαθμολογία ως ένα διωνυμικό πείραμα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο αριθμός των επιχειρήσεων στην αρχή του έτους,  $X_R$ , ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $\hat{PD}_R$ , δηλαδή την πιθανότητα να πτωχεύσει, και  $N_R$  τον αριθμό επαναλήψεων του πειράματος καθώς και ότι οι πτωχεύσεις στη διάρκεια του χρόνου και μεταξύ διαφορετικών επιχειρήσεων είναι ανεξάρτητα γεγονότα. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή  $X_R$  παίρνει την τιμή 0 αν η επιχείρηση που βρίσκεται στην κατάσταση  $R$  δεν πτωχεύσει εντός του έτους και την τιμή 1 διαφορετικά. Επομένως, για την κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των Clopper–Pearson. Στην περίπτωση αυτή τα άκρα του διαστήματος εμπιστοσύνης ίσων ουρών,  $PD_R^{low}$  και  $PD_R^{up}$ , προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\sum_{k=N_{R,D}}^{N_R} \binom{N_R}{k} PD^k (1 - PD)^{N_R - k} = \alpha / 2 \quad (3.6.2)$$

$$\sum_{k=0}^{N_{R,D}} \binom{N_R}{k} PD^k (1 - PD)^{N_R - k} = \alpha / 2$$

Προφανώς αν  $N_R=0$  τότε  $PD_R^{low}=0$ . Με άλλα λόγια,  $PD_R^{low}$  είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας τέτοια ώστε η πιθανότητα να παρατηρηθούν  $N_{R,D}$  ή περισσότερες χρεοκοπίες είναι  $\alpha/2$ .

### β. Κατασκευή Ασυμπτωτικών Διαστημάτων Εμπιστοσύνης στην Περίπτωση της Μεθόδου Κοορτής

Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο, στην περίπτωση ασυμπτωτικού διαστήματος εμπιστοσύνης υποθέτουμε ότι ο αριθμός των επιχειρήσεων στην αρχή του έτους,  $X_R$ , ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $\hat{PD}_R$ . Επίσης, από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\sqrt{N_R}(\bar{X}_R - PD_R) \xrightarrow{d} N(0, PD_R(1 - PD_R)), \forall PD_R \in (0,1)$$

και επομένως το ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει  $CI_W$  είναι:

$$CI_W = \hat{PD}_R \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{PD}_R(1 - \hat{PD}_R)}{N_R}}$$

δηλαδή,

$$\left[ \hat{PD}_R - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{PD}_R(1 - \hat{PD}_R)}{N_R}}, \hat{PD}_R + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{PD}_R(1 - \hat{PD}_R)}{N_R}} \right] \quad (3.6.3)$$

όπου  $N_R$  είναι ο συνολικός αριθμός των επιχειρήσεων οι οποίες στην αρχή του έτους είχαν βαθμολογία  $R$ .

Μια διαφορετική μέθοδος για την περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος  $N_R$  είναι το πολύ 40, είναι αυτή των Agresti and Coul (1998). Στη συγκεκριμένη προσέγγιση προτείνεται μια εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας ενός ενδεχομένου (στη περίπτωση μας η πιθανότητα χρεοκοπίας) βάσει μίας διόρθωσης στις παραμέτρους της Διωνυμικής Κατανομής, δηλαδή του αριθμού των επιχειρήσεων που μεταπηδούν από την κατάσταση  $R$  στην κατάσταση  $D$  εντός του χρονικού διαστήματος καθώς και του αριθμού των επιχειρήσεων με βαθμολογία  $R$  στην αρχή του χρονικού αυτού διαστήματος, έτσι ώστε:

$$\hat{PD}_R^* = \frac{N_{R,D}}{N_R^*} \quad \text{όπου} \quad N_{R,D}^* = N_{R,D} + z_{\alpha/2}^2 / 2 \quad \text{και} \quad N_R^* = N_R + z_{\alpha/2}^2 \quad (3.6.4)$$

Το ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης που προκύπτει στην περίπτωση αυτή είναι της μορφής

$$CI_W = \hat{PD}_R^* \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{PD}_R^*(1-\hat{PD}_R^*)}{N_R^*}},$$

δηλαδή,

$$\left[ \hat{PD}_R^* - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{PD}_R^*(1-\hat{PD}_R^*)}{N_R^*}}, \hat{PD}_R^* + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{PD}_R^*(1-\hat{PD}_R^*)}{N_R^*}} \right]. \quad (3.6.5)$$

### γ. Κατασκευή Διαστήματος Εμπιστοσύνης στην Περίπτωση της Μεθόδου Ρυθμού Αποτυχίας

Στην περίπτωση της μεθόδου ρυθμού αποτυχίας δεν είναι ξεκάθαρο πως μπορούμε να κατασκευάσουμε διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα της χρεοκοπίας. Μεταξύ άλλων οι Hanson and Schuermann (2006) προτείνουν τη χρήση της μεθόδου *bootstrap*. Χρησιμοποιώντας απλή τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση στα δεδομένα των πιστοληπτικών βαθμολογιών, δημιουργούμε  $B$  δείγματα μεγέθους  $N_t$  και υπολογίζουμε τις εκτιμήσεις των πινάκων μετάβασης  $\{P_t^j\}_{j=1}^B$  και στη συνέχεια εστιάζουμε στην τελευταία στήλη των πινάκων αυτών  $\{PD_t^j\}_{j=1}^B$  καθώς και στα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων αυτών. Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης δεν κάνει κάποια υποθέση σχετικά με την κατανομή των δεδομένων. Ωστόσο, υποθέτει ότι τα δεδομένα είναι ασυσχέτιστα ή ανεξάρτητα στη διάρκεια του χρόνου. Η υποθέση αυτή φαίνεται να αντιμετωπίζει λιγότερα προβλήματα στις περιπτώσεις όπου οι παραγόμενοι πίνακες μετάβασης είναι μικρού χρονικού ορίζοντα (π.χ 1 έτους). Τελικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα βήματα κατασκευής διαστήματος εμπιστοσύνης με τη μέθοδο *bootstrap* για την περίπτωση της μεθόδου ρυθμού αποτυχίας, είναι:

1. Επιλέγουμε απλή τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση.
2. Υπολογίζουμε τα στοιχεία του γεννήτορα πίνακα  $A$  και στη συνέχεια τον πίνακα μετάβασης  $P$  για το δείγμα από το βήμα 1.
3. Επαναλαμβάνουμε  $B$ -φορές τα βήματα 1 και 2.
4. Καθορίζουμε τις τελικές τιμές των πιθανοτήτων μετάβασης.

### 3.7 Τεχνικές Σύγκρισης Πινάκων Πιστωτικής Διαβάθμισης

Συχνά, ενδιαφερόμαστε να συγκρίνουμε δύο πίνακες μετάβασης πιστωτικής διαβάθμισης ώστε να βρούμε τη διαφορά τους στην περίπτωση που τους έχουμε εκτιμήσει με διαφορετικές μεθόδους ή για διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Για παράδειγμα, μπορεί να ενδιαφερόμαστε σχετικά με το πώς έχει μεταβληθεί η «κατανομή» των πιστωτικών βαθμολογιών σε δύο διαφορετικές δεκαετίες. Σκοπός μας λοιπόν είναι να βρούμε ένα μέτρο σύγκρισης  $M(P)$  το οποίο στις περιπτώσεις πινάκων μετάβασης αναφέρεται και ως «*mobility index*».

Συμβολίζοντας με  $\mathbf{x}(k)$  το διάνυσμα γραμμή  $K$ -στοιχείων της πιστοληπτικής βαθμολογίας μιας επιχείρησης ή ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος τη χρονική στιγμή  $t=k$  για το αντίστοιχο διάνυσμα τη χρονική στιγμή  $t=k+1$  έχουμε  $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{x}(k)P$ , όπου  $P$  ο πίνακας μετάβασης ενός έτους. Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος καθώς και κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης ισούται με τη μονάδα, έχουμε δηλαδή,  $\sum_{i=1}^K x_i=1$  και  $\sum_{j=1}^K x_{ij}=1$  για κάθε  $i=1,2,\dots,K$ . Γενικότερα, υποθέτοντας ότι ο πίνακας μετάβασης  $P$  είναι χρονικά ομογενής, μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα  $\mathbf{x}(t)$  για οποιαδήποτε μελλοντική χρονική στιγμή  $t$  χρησιμοποιώντας το αρχικό διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x}(0)$ . Έτσι λοιπόν έχουμε,

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0)P, \mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(1)P^2, \dots, \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(0)P^k$$

Όπως γνωρίζουμε, αν  $(\lambda_1, s_1), \dots, (\lambda_K, s_K)$  είναι τα ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων του συμμετρικού πίνακα  $P$ , τότε ο τελευταίος μπορεί να αναλυθεί ως

$$P = \lambda_1 s_1 s_1' + \dots + \lambda_K s_K s_K' = S\Lambda S^{-1} \quad (3.7.1)$$

όπου  $\Lambda$  ο διαγώνιος πίνακας ο οποίος περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα  $P$  και  $S$  οι αντίστοιχες ιδιοτιμές.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $P$  για το διάνυσμα  $\mathbf{x}(t)$  για τη χρονική στιγμή  $k$  έχουμε,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(0) S \Lambda^k S^{-1} \quad (3.7.2)$$

**α. Μέτρα Απόστασης Μεταξύ Δύο Πινάκων με τη Χρήση των Στοιχείων τους**

Θέλοντας να συγκρίνουμε δύο πίνακες μετάβασης  $P_A$  και  $P_B$  ίδιας διαστάσης  $K \times K$ , μπορούμε να θεωρήσουμε τα μέτρα απόστασης των Σχέσεων (3.7.2) και (3.7.3) τα οποία χρησιμοποιούν τα στοιχεία των πινάκων (*cell-by-cell distance metrics*). Το πρώτο εξ' αυτών υπολογίζει τη μέση απόλυτη διαφορά ενώ το δεύτερο την Ευκλείδεια απόσταση, δηλαδή τη ρίζα της μέσης τετραγωνικής διαφοράς μεταξύ των αντίστοιχων στοιχείων των δύο πινάκων.

$$\Delta M_{L_1}(P_A, P_B) = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |P_{A,ij} - P_{B,ij}|}{K^2}, \quad (3.7.3)$$

$$\Delta M_{L_2}(P_A, P_B) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (P_{A,ij} - P_{B,ij})^2}}{K^2}. \quad (3.7.4)$$

Παρόλο που τα δύο παραπάνω μέτρα χρησιμοποιούνται ευρέως, έχουν το μειονέκτημα ότι απλά δείχνουν τη σύγκριση μεταξύ δύο πινάκων χωρίς να δίνουν ένα αντικειμενικό και εύληπτο αποτέλεσμα σχετικά με το αν η απόσταση των πινάκων αυτών είναι «μεγάλη» ή «μικρή».

**β. Μέτρα Βασισμένα στις Ιδιοτιμές του Πίνακα**

Εκτός από τις προηγούμενες τεχνικές για τη σύγκριση πινάκων μπορεί να χρησιμοποιηθούν και άλλες οι οποίες βασίζονται στις ιδιοτιμές των πινάκων αυτών. Οι Schuermann and Jafry (2003) συνοψίζουν τα αποτελέσματα των Geweke, Marshall and Zarkin (1986). Έτσι λοιπόν, οι τελευταίοι χρησιμοποιούν μέτρα βασισμένα στις ιδιοτιμές του πίνακα  $P$ , τα οποία είναι:

$$M_1(P) = \frac{1}{K-1} (K - \text{tr}(P)), \quad (3.7.5)$$

$$M_2(P) = 1 - |\det(P)|, \quad (3.7.6)$$

$$M_3(P) = \frac{1}{K-1} \left( K - \sum_{i=1}^K |\lambda_i(P)| \right), \quad (3.7.7)$$

$$M_4(P) = 1 - |\lambda_2(P)|, \quad (3.7.8)$$

όπου  $\text{tr}(P)$  και  $\det(P)$  είναι το ίχνος και η ορίζουσα του πίνακα  $P$  αντίστοιχα, και  $\lambda_i$  η  $i$ -ιδιοτιμή του πίνακα  $P$  και  $\lambda_2$  η μεγαλύτερη εξ' αυτών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην

περίπτωση που οι ιδιοτιμές του πίνακα  $P$  είναι πραγματικές και μη αρνητικές οι Σχέσεις

$$(3.7.5) \text{ και } (3.7.7) \text{ είναι ισοδύναμες αφού ισχύει } \det(P) = \prod_{i=1}^K \lambda_i \text{ και } \operatorname{tr}(P) = \sum_{i=1}^K \lambda_i = \operatorname{tr}(\Lambda).$$

Τέλος, οι Arvanitis et al. (1999) για να ελέγξουν την ομοιότητα μεταξύ δύο πινάκων χρησιμοποιούν την πληροφορία που δίνουν τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζοντας την ποσότητα της παρακάτω σχέσης

$$\Delta M(P_A, P_B) = \frac{\|P_A P_B - P_B P_A\|}{\|P_A\| \cdot \|P_B\|}. \quad (3.7.9)$$

Οι Schuermann and Jafry (2003) αναφέρουν ότι η ποσότητα της Σχέσης (3.7.9) παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 2. Αν και το συγκεκριμένο μέτρο δεν ορίζεται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων συνδέεται με αυτά ως εξής: αν  $\Delta M(P_A, P_B) = 0$  οι δύο πίνακες  $P_A$  και  $P_B$  έχουν ακριβώς τα ίδια ιδιοδιανύσματα ενώ η ποσότητα αυτή αυξάνει όσο διαφορετικά είναι τα ιδιοδιανύσματα αυτά. Οι Arvanitis, Gregory and Laurent (1999) λοιπόν, αναφέρουν ότι μια τιμή της παραπάνω ποσότητας κοντά στο 0.8, για πίνακες μετάβασης ενός έτους, σημαίνει ότι οι δύο εξεταζόμενοι πίνακες είναι «όμοιοι».

# РАСЧЕТНО ТЕРА

# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

- Αγγελόπουλος Χ. Π. (2010), *Τράπεζες και Χρηματοπιστωτικό Σύστημα*, Γ' Ανανεωμένη Έκδοση, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- Αντζουλάκος Δ. (2009), *Ανάλυση Επιβίωσης (Survival Analysis)*, Β' έκδοση, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις του ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Βασιλάκη Μ. (2010), *Στατιστικά Μοντέλα Βαθμολόγησης Πιστοληπτικής Ικανότητας*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Γκαργκάνας Χ. Ν. (2003), *Ομιλία του Διοικητή της Τράπεζας της Ελλάδας κ. Νικόλαου Χ. Γκαργκάνα στο Propeller Club*.
- Γκόρτσος Β. Χ. (2001), *Συνολική Θεώρηση του Ισχύοντος Πλαισίου Εποπτείας της Κεφαλαιακής Επάρκειας και η Επερχόμενη Αναθεώρηση του*, Δελτίο Ένωσης Ελληνικών Τραπεζών Β'–Γ' τρίμηνο 2001.
- Δάρας Ι. Τ. και Σύψας Θ. Π. (2003), *Στοχαστικές Ανελίζεις: Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ζήτη.
- Δραγγιώτη Α. (2001), *Οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Έναντι του Λειτουργικού Κινδύνου Σύμφωνα με το Νέο Πλαίσιο της Επιτροπής της Βασιλείας*, Δελτίο Ένωσης Ελληνικών Τραπεζών Β'–Γ' τρίμηνο 2001.
- Dunham M. (2004), *Data Mining, Εισαγωγικά και Προηγμένα Θέματα Εξόρυξης Γνώσης από Δεδομένα*, επιμέλεια ελλ. έκδοσης Βερύκιος Β. και Θεοδωρίδης Ι, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
- Ζοπουνίδης Κ. και Λεμονάκης Χ. (2009), *Διαχείριση Πιστωτικού Κινδύνου*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- Θωμαδάκης Β. Σ. και Ξανθάκης Δ. Μ. (2006), *Αγορές Χρήματος & Κεφαλαίου*, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- Καλφάογλου Φ. (1999), *Υποδείγματα Μέτρησης Πιστωτικού Κινδύνου*, Δελτίο Ένωσης Ελληνικών Τραπεζών Α' τρίμηνο 1999.



- Καρλής Δ. (2005), *Πολυμεταβλητή Στατιστική Ανάλυση*, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- Κουρέτας Γ. και Τσούμας Χ. (2010), *Αγορές Χρήματος και Αξιογράφων Σταθερού Εισοδήματος*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις του ΠΜΣ στην «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου», Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Κούτρας Μ. (2008), *Εφαρμοσμένη Πολυμεταβλητή Ανάλυση: Ανάλυση κατά Συστάδες*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις του ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Πάσχας Ι. (2001), *Ο Ρόλος των Εποπτικών Αρχών και η Αναγκαιότητα Λειτουργίας Επαρκών Συστημάτων Εσωτερικού Ελέγχου*, Δελτίο Ένωσης Ελληνικών Τραπεζών Β'–Γ' τρίμηνο 2001.
- Πολίτης Κ. (2010), *Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις του ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Τράπεζα της Ελλάδας (2004α), *Εγγραφο Διαβούλευσης Ι: Τυποποιημένη Μέθοδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος*.
- Τράπεζα της Ελλάδας (2004β), *Εγγραφο Διαβούλευσης ΙΙ: Μέθοδος των Εσωτερικών Διαβαθμίσεων*, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος.
- Τράπεζα της Ελλάδας (2007α), *Υπολογισμός Κεφαλαιακών Απαιτήσεων έναντι του Πιστωτικού Κινδύνου Σύμφωνα με την Προσέγγιση Εσωτερικών Διαβαθμίσεων*, Πράξη Διοικητή (Αρ. 2589/20.8.2007).
- Τράπεζα της Ελλάδας (2007β), *Υπολογισμός Κεφαλαιακών Απαιτήσεων των Πιστωτικών Ιδρυμάτων για τον Κίνδυνο Αγοράς*, Πράξη Διοικητή (Αρ. 2591/20.8.2007).
- Τράπεζα της Ελλάδας (2007γ), *Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις των Πιστωτικών Ιδρυμάτων για τον Λειτουργικό Κίνδυνο*, Πράξη Διοικητή (Αρ. 2590/20.8.2007).
- Τράπεζα της Ελλάδας (2007δ), *Καθορισμός των Κριτηρίων που Πρέπει να Διέπουν τη Διαδικασία Αξιολόγησης Επάρκειας Εσωτερικού Κεφαλαίου (ΔΑΕΕΚ) των Πιστωτικών Ιδρυμάτων και της Διαδικασίας Εποπτικής Αξιολόγησης (ΔΕΑ) από την Τράπεζα της Ελλάδας*, Πράξη Διοικητή (Αρ. 2595/20.8.2007).
- Τράπεζα της Ελλάδας (2007ε), *Δημοσιοποίηση από τα Πιστωτικά Ιδρύματα Εποπτικής Φύσεως Πληροφοριών Σχετικά με την Κεφαλαιακή Επάρκεια, τους Κινδύνους που Αναλαμβάνουν καθώς και τη Διαχείρισή τους*, Πράξη Διοικητή (Αρ. 2592/20.8.2007).

Τράπεζα της Ελλάδας (2007στ), *Υπολογισμός Κεφαλαιακών Απαιτήσεων έναντι του Πιστωτικού Κινδύνου σύμφωνα με την Τυποποιημένη Προσέγγιση*, Πράξη Διοικητή (Αρ. 2588/20.8.2007).

Χαραλαμπίδης Π. Μ. (2001), *Η Νέα Συνθήκη της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια: Οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Έναντι του Πιστωτικού Κινδύνου και οι Τεχνικές Μείωσης του – Τυποποιημένη Προσέγγιση*, Δελτίο Ένωσης Ελληνικών Τραπεζών Β'–Γ' τρίμηνο 2001.

Χριστοδουλάκης Γ. (2004), *Υποδείγματα Πιστωτικού Κινδύνου Τύπου Merton (1974) και η Προβλεπτική τους Ικανότητα ως Συστήματα Έγκαιρης Προειδοποίησης*, Δελτίο Ένωσης Ελληνικών Τραπεζών Γ' τρίμηνο 2004.

Χρυσαφίνου Ο. (2008), *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίζεις*, Εκδόσεις Σοφία.

## Ξενόγλωσση

Agresti A. and Coull B.A. (1998), *Approximate is Better Than “Exact” for Interval Estimation of Binomial Proportions*, *The American Statistician*, **52**, 119–126.

Altman E. I. (1968), *Financial Ratios Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy*, *Journal of Finance*, 589–609.

Altman E. I., Haldeman R. and Narayanan P. (1977), *Zeta Analysis: A New Model to Identify Bankruptcy Risk of Corporations*, *Journal of Banking & Finance*, 29–54.

Altman E. I. (1988), *Default Risk, Mortality Rates and the Performance of Corporate Bonds*, Research Foundation, Institute of Chartered Financial Analysis, Charlottesville, VA.

Altman E. I. (1989), *Measuring Corporate Bonds Mortality and Performance*, *Journal of Finance*, 909–922.

Altman E. I. (1998), *The Importance and Subtlety of Credit Rating Migration*, *Journal of Banking & Finance*, **22**, 1231–1247.

Altman E. I. and Saunders A. (1998), *Credit Risk Measurement: Developments over the Last 20 years*, *Journal of Banking & Finance*, **21**, 1721–1742.

Altman E. I. and Saunders A. (2001), *An Analysis and Critique of the BIS Proposal on Capital Adequacy and Ratings*, *Journal of Banking & Finance*, **25**, 25–46.

- Altman E. I., Bharath S. T. and Saunders A. (2002), *Credit Ratings and the BIS Capital Adequacy Reform Agenda*, Journal of Banking & Finance, **26**, 909–921.
- Altman E. I. and Rijken H. A. (2004), *How Rating Agencies Achieve Rating Stability*, Journal of Banking & Finance, **28**, 2679–2714.
- Anderson T. W and Goodman A. L. (1957), *Statistical Inference about Markov Chains*, The Annals of Mathematical Statistics, **28**, 89–110.
- Apilado V. P., Warner D. C. and Dauten J. J. (1974), *Evaluative Techniques in Consumer Finance*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 275–283.
- Arvanitis A., Gregory J. and Laurent J.P. (1999), *Building Models for Credit Spreads*, Journal of Derivatives, 27–43.
- Arvanitis A. and Gregory J. (2001), *Credit: The Complete Guide to Pricing, Hedging and Risk Management*, Risk Books.
- Banasik J., Crook N. J. and Thomas C. L. (1999), *Not If But When Borrowers Default*, Journal of Operational Research Society, **50**, 1185–1190.
- Basel Committee on Banking Supervision (2001), *The New Basel Capital Accord: An Explanatory Note*, Bank for International Settlements.
- Bessis J. (2002), *Risk Management in banking, 2th edition*, John Wiley and Sons, Ltd.
- Black F. and Scholes M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 637–659.
- Bliss R. (2002), *Comments on “Credit Ratings and the BIS Capital Adequacy Reform Agenda”*, Journal of Banking & Finance, **26**, 923–928.
- Brieman L., Friedman J., Olshen R. and Stone C. (1984), *Classification and Regression Trees*, Wadsworth, Belmont, CA.
- Brown L. D., Cai T. and Dasgupta A. (2001), *Interval Estimation for a Binomial Proportion*, Statistical Science, **16**, 101–133.
- Caouette B. J., Altman E. I. and Narayanan (1998), *Managing Credit Risk: The Next Great Financial Challenge*, John Wiley & Sons, Inc.

- Chatterjee S. and Barcun S. (1970), *A Nonparametric Approach to Credit Screening*, Journal of the American Statistical Association, **65**, 150–154.
- Christensen J., Hansen E. and Lando D. (2004), *Confidence Sets for Continuous–Time Rating Transition Probabilities*, Journal of Banking & Finance, **28**, 2575–2602.
- Claessens S. and Embrechts G. (2002), *Basel II, Sovereign Ratings and Transfer Risk External versus Internal Ratings*, Bank for International Settlements – Basel Committee on Banking Supervision.
- Coffman J. (1986), *The Proper Role of Tree Analysis in Forecasting the Risk Behavior of Borrowers*, MDS Reports, Management Decision Systems, Atlanta, GA, 3, 4, 7, 9.
- Cox D. R. (1972), *Regression Models and Life–Tables (with discussion)*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, **74**, 187–220.
- Geweke J., Marshall C. R. and Zarkin A. G., (1986), *Mobility Indices in Continuous Time Markov Chains*, Econometrica, **54(6)**, 1407–1423.
- Craig A. B., Sendi P. P. (2002), *Estimation of the Transition Matrix of a Discrete-Time Markov chain*, Health Economics, **11**, 33–42.
- Duffie D. and Singleton J. K. (2003), *Credit Risk: Pricing, Measurement and Management*, Princeton University Press.
- Eisenbeis R. A. (1977), *Pitfalls in the Application of Discriminant Analysis in Business, Finance and Economics*, Journal of Finance, **32**, 875–900.
- Eisenbeis R. A. (1978), *Problems in Applying Discriminant Analysis in Credit Scoring Models*, Journal of Banking & Finance, **2**, 205–219.
- Fisher R. A. (1936), *The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems*, Annals of Eugenics, **7**, 179–188.
- Fix E. and Hodges J. (1952), *Discriminatory Analysis, Nonparametric Discrimination, Consistency Properties*, Report 4, Project 21-49-004, School of Aviation Medicine, Randolph Field, TX.
- Frydman H. and Schuermann T. (2008), *Credit Rating Dynamics and Markov Mixture Models*, Journal of Banking & Finance, **32**, 1062–1075.

- Fuertes A., Kalotychou E. (2007), *On Sovereign Credit Migration: A Study of Alternative Estimators and Rating Dynamics*, *Computational Statistics & Data Analysis*, **57**, 3448–3469.
- Crouhy M., Galai D. and Mark R. (2000), *A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models*, *Journal of Banking & Finance*, **24**, 59–117.
- Grouhy M., Mark R., Galai D. (2001), *Risk Management*, McGraw–Hill Companies, Inc.
- Hand J. D. and Henley E. W. (1996), *Statistical Classification Methods in Consumer Credit Scoring: A Review*, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, Vol. 160, No. 3, 523–541.
- Hanson S. and Schuermann T. (2006), *Confidence Intervals for Probabilities of Default*, *Journal of Banking & Finance*, **30**, 2281–2301.
- Henley E. and Hand J. (1996), *A k-Nearest-Neighbor Classifier for Assessing Consumer Credit Risk*, *Statistician*, **45**, 77–95.
- Homer S. and Sylla R. (1996), *A History of Interest Rates*, 3d edition New Brunswick, N.J: Rutgers University Press.
- Hull C. J. (2009), *Options, Futures and Other Derivatives*, 7th edition, Pearson Education International.
- Jorion P. (2009), *Financial Risk Management Handbook*, 5th Edition, John Wiley and Sons, Inc.
- Jafry Y. and Schuermann T. (2003), *Metrics for Comparing Credit Migration Matrices*, Wharton Financial Institutions Center Working Paper #03–09.
- Jarrow A. R., Lando D. and Turnbull M. S. (1997), *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*, *The Review of Financial Studies*, **10**, 481–523.
- Israel B. R., Rosenthal S. J., and Wei Z. J. (2001), *Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Risk*, *Mathematical Finance*, **11**, No. 2, 245–265.
- Kiefer M. N. and Larson E. C. (2007), *A Simulation Estimator for Testing the Time Homogeneity of Credit Rating Transitions*, *Journal of Empirical Finance*, **14**, 818–835.

- Lando D. and Skødeberg M. T. (2002), *Analyzing Rating Transitions and Rating Drift with Continuous Observations*, Journal of Banking & Finance, **26**, 423–444.
- Lane S. (1972), *Submarginal Credit Risk Classification*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **7**, 1379–1385.
- Leonard K. J. (1993), *Empirical Bayes Analysis of the Commercial Loan Evaluation Process*, Statistics and Probability Letters, **18**, 289–296.
- Lewis E.M. (1992), *An Introduction to Credit Scoring*, Athena Press, San Rafael, CA.
- Löffler C. and Posch N. P. (2007), *Credit: Risk Modeling Using Excel and VBA*, John Wiley and Sons.
- Makowski (1985), *Credit Scoring Branches Out*, Credit World, **75**, 30–37.
- Martin D. (1977), *Early Warnings of Bank Failure: A Logit Regression Approach*, Journal of Banking & Finance, 249–276.
- Merton R. (1974), *On the Pricing of Corporate Debt*, Journal of Finance, 449–470.
- Moses D. and Liao S. S. (1987), *On Developing Models for Failure Prediction*, Journal of Commercial Bank Lending, **69**, 27–38.
- Myers J. H. and Forgy E. W. (1963), *The Development of Numerical Credit Evaluation Systems*, Journal of the American Statistical Association, **58**, 799–806.
- Narain B. (1992), *Survival Analysis and the Credit Granting Decision*, in Credit Scoring and Credit Control, Thomas C. L., Crook N. J. and Edelman B. D., eds, Oxford University Press, Oxford, 109–122.
- Rosenberg E. and Gleit A. (1994), *Quantitative Methods in Credit Management: A Survey*, Operations Research, **42**, 589–613.
- Rozovskii B. and Yor M. (2000), *Applications of Mathematics: Stochastic Modelling and Applied Probability*, Springer.
- Salta F. (2007), *Value at Risk and Bank Capital Management*, Elsevier.
- Sasson J.M. (1995), *Civilizations of the Ancient Near East*, New York: Charles Scribner's Sons.

- Schooner H. M. and Taylor M. W. (2010), *Global Bank Regulation, Principles and Policies* .
- Schuermann T. and Jafry Y. (2003), *Measurement and Estimation of Credit Migration Matrices*, Wharton Financial Institutions Center Working Paper #03–09.
- Srinivasan V. and Kim Y. H. (1987), *Credit Granting: A Comparative Analysis of Classification Procedures*, *Journal of Finance*, **42**, 665–683.
- Stepanova M. and Thomas C. L. (1999), *Survival Analysis Methods for Personal Loan Data*, in *Proceedings of Credit Scoring and Credit Control VI*, Credit Research Centre, University of Edinburgh.
- Stepanova M. and Thomas C. L. (2001), *PHBA Scores: Proportional Hazards Analysis Behavioural Scores*, *Journal of Operational Research Society*, **52**, 1007–1016.
- Sy N.R.A. (2004), *Rating the Rating Agencies: Anticipating Currency Crises or Debt Crises?*, *Journal of Banking & Finance*, **28**, 2845–2867.
- Sy N.R.A. (2009), *The Systemic Regulation of Credit Rating Agencies and Rated Markets*, International Monetary Fund.
- Thomas C. L. (2000), *A Survey of Credit and Behavioural Scoring: Forecasting Financial Risk of Lending to Consumers*, *International Journal of Forecasting*, **16**, 149–172.
- Thomas C. L., Ho J. and Scherer W. T. (2001), *Time Will Tell: Behavioural Scoring and the Dynamics of Consumer Credit Assessment*, *IMA Journal of Management Mathematics*, **12**, 89–103.
- Thomas C. L., Edelman B. D and Crook N. J. (2002), *Credit Scoring and its Applications*, SIAM.
- Weißbach R. and Dette H. (2007), *Kolmogorov–Smirnov-Type Testing For the Partial Homogeneity of Markov Processes–With Application to Credit Risk*, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **23**, 223–234.
- West R. C. (1985), *A Factor–Analytic Approach to Bank Condition*, *Journal of Banking & Finance*, 253–266.
- Wiginton J. C. (1980), *A Note on the Comparison of Logit and Discriminant Models of Consumer Credit Behaviour*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **15**, 757–770.